



HAL
open science

Modélisation et simulation physique d'objets volumiques déformables complexes

Stéphane Jimenez

► **To cite this version:**

Stéphane Jimenez. Modélisation et simulation physique d'objets volumiques déformables complexes. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble, 1993. Français. NNT : . tel-01197170

HAL Id: tel-01197170

<https://hal.science/tel-01197170>

Submitted on 11 Sep 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée par

Stéphane JIMENEZ

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble

(arrêté ministériel du 23 novembre 1988)

spécialité informatique

MODÉLISATION ET SIMULATION PHYSIQUE D'OBJETS VOLUMIQUES DÉFORMABLES COMPLEXES

Thèse soutenue le 23 novembre 1993 devant la commission d'examen

Président	Philippe JORRAND
Rapporteurs	Claude PUECH Gérard HÉGRON
Examineurs	Annie LUCIANI Jean FRANÇON

à Mireille et Manu,
sans qui, à tout point de vue, je n'en serai pas là

et à Domi,
qui a su me soutenir (et me supporter !) dans les moments les plus difficiles

Mots clefs : Synthèse d'images - Animation par ordinateur - Modélisation et simulation physique - Physique algorithmique - Corps déformables quelconques - Prototypage numérique.

Résumé : Le véritable enjeu de l'informatique graphique ne se situe plus vraiment au niveau des images photoréalistes : il concerne la synthèse du mouvement. Parmi les différentes approches envisagées pour cet objectif, la représentation des objets dans leurs caractéristiques physiques s'est révélée la plus pertinente.

Dans une première partie, je présente une analyse de l'ensemble des travaux réalisés en **animation par modèle physique**. Ce compte rendu est organisé selon une classification distinguant les modèles d'objets rigides et déformables à travers les thèmes suivants : représentation de la matière, interactions entre objets, et contrôle de l'effet désiré. Cette étude montre que les méthodes existantes, héritières directes des outils d'ingénierie, ne traitent chacune que d'un aspect particulier du problème ; et je défends, en introduction de la deuxième partie, l'intérêt d'une représentation modulaire conduisant à un modèle simple, ouvert et aisément manipulable, et au-delà, à ce que l'on peut appeler aujourd'hui une **physique algorithmique**.

Les résultats présentés par la suite ont été obtenus dans le cadre de ma contribution à un programme de recherche centré sur la réalisation d'un outil informatique pour la création artistique, visuelle et musicale. On trouve au coeur de cet outil le modéleur-simulateur *CORDIS-ANIMA*, qui se caractérise par des choix de modélisation (représentation à base de points matériels), et par des programmes de simulation formés de réseaux de processus en communication synchrone. C'est sur la base de ce formalisme général que je propose un modèle pour les objets déformables non homogènes, de forme quelconque et à comportement fortement non-linéaire. L'étude des interactions de surface, puis des comportements complexes de la matière, a permis d'élaborer de nouveaux composants et d'enrichir le modèle de base. Dans un dernier chapitre, l'exposé des méthodes et des concepts développés pour générer et contrôler le mouvement est l'occasion de présenter un grand nombre d'expérimentations réalisées à partir de ces modèles.

Abstract : What is truly a stake in Computer Graphics is no more really the synthesis of photorealistic images but rather the synthesis of motion. Among the various approaches envisaged for this goal, the representation of objects in terms of their physical characteristics has appeared to be the most relevant.

In the first section, I present an analysis of the various works carried out in the field of **animation by physical modeling**. This account distinguish models of rigid and deformable objects for each of the following themes : the representation of matter, the interactions between objects, and the control of the desired effect. This study clearly points out that the existing methods, that were directly inherited from engineering tools, each deal with a particular aspect of the problem ; in the introduction of the second section I show the importance of a modular representation leading to a simple, open and easily handled model, and further, to what could be termed today **computational physics**.

The results presented subsequently were achieved in the framework of my contribution to a research program based on the elaboration of a computer tool for visual and musical artistic creation. The heart of this system is the *CORDIS-ANIMA* modeler-simulator characterized by a certain number of modeling choice (leading to a representation based on material points) and by simulation programs composed of networks of synchronous communicating processes. With this general formalism as a basis, I have proposed a model for deformable, non-homogeneous objects of any shapes with highly non-linear behavior. The study of the surface interactions first, and of the complex behaviors of matter next, enabled the elaboration of new components and the enrichment of the initial model. In the last chapter, I present the methods and concepts developed for the motion generation and control, along with a large number of experiments carried out from these models.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

I LA SYNTHÈSE D'IMAGE : DU PIXEL À L'ANIMATION

I.1 Les débuts : création d'images statiques.....	3
I.1.1 Pixels et 2D	3
I.1.2 Le 3D	3
I.2 Animation.....	5
I.2.1 Introduction	5
I.2.2 Les modèles descriptifs.....	6
I.2.3 Les modèles générateurs.....	9
I.3 Conclusion.....	10

II LE MODÈLE PHYSIQUE : MATIÈRE ET MATÉRIAUX

II.1 Introduction	12
II.2 Modèles de solides parfaitement rigides	14
II.2.1 Équations du mouvement.....	14
II.2.2 Solides rigides articulés.....	16
II.3 Modèles de solides déformables	18
II.3.1 Modèles basés sur la mécanique des milieux continus.....	19
II.3.2 Vers des modèles simplifiés	26
II.4 Modèles d'objets déformables quelconques.....	31
II.4.1 Modèles à constantes localisées.....	31
II.4.2 Mises en oeuvre des modèles discrets	33

III LE MODÈLE PHYSIQUE : INTERACTION ENTRE OBJETS

III.1 Introduction	39
---------------------------------	-----------

III.2 Interactions entre solides parfaitement rigides	40
III.2.1 Détection, analyse, et catégorisation des situations de contact.....	40
III.2.2 Analyse dynamique des collisions : la théorie des impulsions.....	40
III.2.3 Contacts prolongés et frottement : méthodes d'optimisation.....	42
III.3 Interactions entre corps déformables.....	45
III.3.1 Modèles continus	46
III.3.2 Modèles discrets	49

IV LE MODÈLE PHYSIQUE : CONTRÔLE DU MOUVEMENT

IV.1 Introduction	52
IV.2 Retour à la description du mouvement	54
IV.2.1 Dynamique inverse et notion de contraintes	54
IV.2.3 Positions clefs et méthodes d'optimisation	57
IV.2.4 Vers un pré-calcul du contrôle.....	59
IV.2.5 Simulation et Contrôle : des outils efficaces pour la construction de modèle	61
IV.3 Approche robotique : contrôle moteur, planification et représentation des connaissances.....	61
IV.3.1 Programmes moteur et lois de commande	61
IV.3.2 Hiérarchisation du contrôle et représentation de connaissance	62
IV.3.3 Modèles 'tout physique' : généricité des solutions.....	64

V CONCLUSION.....	67
--------------------------	-----------

DEUXIÈME PARTIE

O INTRODUCTION.....	71
----------------------------	-----------

I CORDIS-ANIMA MODELEUR - SIMULATEUR D'OBJETS PHYSIQUES

I.1 Introduction	79
-------------------------------	-----------

I.2 Formalisme général pour la représentation des objets physiques.....	80
I.2.1 Points de communication ‘M’ et ‘L’	80
I.2.2 Généricité et expérimentabilité des modèles.....	82
I.2.3 Les modules fonctionnels	84
I.3 Les algorithmes de simulation	87
I.3.1 Introduction	87
I.3.2 La matière linéaire	88
I.3.3 La Liaison conditionnelle.....	93
I.3.4 Conclusion.....	95
I.4 Ouverture du système.....	96
I.4.1 Liaisons conditionnelles généralisées et macro-modules	96
I.4.2 Modules ad hoc et modules ‘extra-physiques’	97

II INTRODUCTION DES COMPORTEMENTS NON-LINÉAIRES :

APPROCHE FORMELLE

II.1 Introduction	99
II.2 Non-linéarités usuelles	101
II.3 Caractéristiques multi-linéaires.....	103
II.4 Modules à mémoire	104
II.5 Automate de commutation.....	106
II.6 Vers une catégorisation des modèles	108

III COMPORTEMENTS DE MULTITUDE : BILLES ET AGGLOMÉRATS

III.1 Les lois d’interaction	110
III.1.1 Collisions et propriété d’exclusion spatiale.....	110
III.1.2 Forces de cohésion.....	113
III.2 Un modèle pour les objets malléables.....	115
III.2.1 Intégration large : l’agglomérat	115
III.2.2 Proposition pour la construction d’objets malléables	117
III.2.3 Aspect visuel : la notion de contour	121

IV INTERACTION DE SURFACE POUR LES SOLIDES DÉFORMABLES

IV.1 Introduction	125
IV.2 Modèle général pour les interactions de surface.....	126
IV.2.1 Le frottement de glissement solide/solide	126
IV.2.2 Forces normales et forces tangentes	128
IV.3 De la loi expérimentale au modèle algorithmique.....	130
IV.3.1 Modèle de coulomb : le frottement solide-solide	130
IV.3.2 Formulation dynamique et module d'interaction de surface	131
IV.4 Conclusion.....	135

V LES LOIS DE COMPORTEMENT COMPLEXE DE LA MATIÈRE

V.1 Introduction	138
V.2 Modèles rhéologiques de base	140
V.2.1 Comportements élastiques et comportements visqueux	140
V.2.2 Comportements plastiques.....	141
V.2.3 Modèle algorithmique des comportements élasto-plastiques.....	144
V.3 Modèles de comportement complexe.....	147
V.3.1 Introduction.....	147
V.3.2 Modèle de Maxwell et 'burger material'	148
V.3.3 Modèle de Bingham : élasto-visco-plasticité.....	153
V.4 Conclusion.....	155

VI GÉNÉRATION ET CONTRÔLE DU MOUVEMENT

VI.1 Introduction	158
VI.2 Le contrôle gestuel rétroactif.....	159
VI.2.1 Introduction.....	159
VI.2.2 Le clavier rétroactif modulaire.....	161
VI.2.3 Manipulation d'objets volumiques déformables.....	163
VI.3 Structures de contrôle	169
VI.3.1 Introduction.....	169
VI.3.2 Mécanismes.....	169
VI.3.3 Modèles d'actionneur et loi de commande	171
VI.3.4 Contrôle par l'environnement	181

VII CONCLUSION	189
ANNEXE A : LA MÉCANIQUE 'LAGRANGIENNE'	191
ANNEXE B : SIMULATIONS D'OBJETS PLASTIQUES.....	203
BIBLIOGRAPHIE.....	215

AVANT PROPOS

L'état actuel des concepts et des techniques liés à l'informatique graphique permet la représentation réaliste (du point de vue de la forme et de l'apparence visuelle des objets) de scènes tridimensionnelles. Et, bien qu'il soit encore nécessaire aujourd'hui d'augmenter les possibilités de la machine à cet égard, essentiellement au niveau des performances et aussi, certainement, de la variété des scènes et des objets représentables, l'enjeu se situe à un degré supérieur.

L'étape suivante, qui constitue cet enjeu, concerne la possibilité de passer de la représentation de ces instantanés à celle du mouvement. C'est cet objectif que l'on désigne généralement sous le terme d'animation par ordinateur, en référence aux techniques cinématographiques permettant de donner l'illusion du mouvement à partir d'une suite d'images.

L'ordinateur a très tôt été utilisé comme un outil performant d'écriture du mouvement, en exploitant le savoir-faire acquis en synthèse d'images statiques, et en reprenant à son compte les techniques traditionnelles de l'animation. Cependant, les capacités intrinsèques de l'outil informatique laissaient espérer beaucoup mieux, et l'on s'est rapidement intéressé à la réalisation de systèmes permettant la génération 'automatique' du mouvement.

Cet objectif passe par l'intégration, au sein des représentations internes à la machine, de propriétés autres que celles concernant la forme ou l'apparence visuelle des objets. Parmi les différentes possibilités envisagées, la représentation des objets selon leurs caractéristiques physiques est aujourd'hui reconnue dans la communauté scientifique comme l'approche la plus pertinente. Depuis une dizaine d'année, la synthèse du mouvement par modèle physique connaît un essor considérable, et les résultats acquis dans ce domaine n'ont fait que renforcer l'intérêt de la communauté scientifique à cet égard.

La première partie de ce document présente un état de l'art sur l'animation par modèle physique. Ce compte rendu n'est bien sûr pas exhaustif du point de vue des travaux réalisés (ce serait une tâche impossible et peut-être inutile), mais il tente de l'être en ce qui concerne les différentes approches adoptées, ainsi que les représentations et la nature des mises en oeuvre algorithmiques qui s'y rapportent. Ainsi je n'ai pas essayé de faire un exposé systématique des détails techniques (équations précises, algorithmes spécifiques, structures de donnée, langages, etc...) pour chacun des travaux présentés¹, mais plutôt de situer ceux-ci en fonction d'une classification que je propose à cette occasion.

¹ bien que cela soit malgré tout le cas pour certains d'entre eux

Je présente, en guise d'introduction, une description succincte des modèles de formes et de déformations géométriques, ainsi que des méthodes de description du mouvement basées sur les techniques de l'animation traditionnelle. Le reste de cet état de l'art est organisé en fonction de la classification proposée pour les travaux en animation par modèle physique. Il ressort clairement, lorsque l'on parcourt la littérature sur le sujet, que très peu de travaux abordent la question de l'animation par modèle physique de manière générale. Ainsi, la plupart du temps, les méthodes et techniques proposées s'intéressent à un aspect particulier du problème : modélisation des objets, c'est-à-dire de la matière et du matériau, prise en compte des interactions entre objets, et modèles de contrôle du mouvement, de l'effet désiré. Un chapitre est dédié à chacun de ces aspects, et on retrouvera les travaux les plus généraux dans plusieurs d'entre eux. Au sein de chaque chapitre, j'ai organisé le compte rendu en fonction de la nature des représentations choisies pour l'objet physique. Dans certains cas ce choix est explicite, mais il est fait la plupart du temps à travers un modèle physique de base : *solides parfaitement rigides*, *solides déformables* (mécaniques des milieux continus), et représentations basées sur l'*assemblage de composants mécaniques élémentaires*.

La deuxième partie de ce document est consacrée à la présentation des résultats théoriques et expérimentaux obtenus durant mon travail de thèse. Ce dernier se situe dans le cadre d'un programme de recherche mené conjointement par le LIFIA¹ et l'ACROE², et centré sur la définition, la conception et la réalisation d'un outil informatique pour la création artistique, visuelle et musicale. La nature même des objectifs scientifiques que recouvre ce projet place le travail de recherche à la frontière entre plusieurs disciplines telles que l'informatique, la physique, ou l'automatique ... Ce type de réalisation ne peut être le fait d'un homme seul, mais impose l'existence d'une équipe dans laquelle chacun, amenant ses compétences particulières, contribue par ses échanges avec les autres à l'avancée globale. Alors, je tiens tout d'abord à exprimer le plaisir que j'ai eu à travailler de cette manière, ainsi que ma reconnaissance aux personnes qui formaient cette équipe lors de mon arrivée et qui m'ont permis d'acquérir la (relative) maturité que j'ai aujourd'hui sur le sujet. Il s'agit de Claude CADOZ, d'Annie LUCIANI et de Jean-loup FLORENS, co-fondateurs de l'équipe, ainsi que d'Olivier RAOULT et de Pirouz DJOHARIAN. Il est clair que, de par ce mode de fonctionnement, j'ai moi-même du mal à faire la part entre les idées qui sont absolument miennes, et celles que je partage avec l'un ou l'autre ; je ne m'essaye d'ailleurs pas à cet exercice. Ce document n'est pas une déclaration de propriété sur tel concept ou tel résultat, il vise à faire un exposé clair et correct des travaux de recherche auxquels j'ai directement participé.

La recherche menée à l'ACROE depuis quinze ans a conduit à la définition de principes fondamentaux pour la représentation des systèmes dynamiques au sein de l'ordinateur, et à un certain nombre de choix pour la réalisation d'un modéleur-simulateur d'objets physiques à la fois

¹ Laboratoire d'Informatique Fondamentale et d'Intelligence Artificielle

² Association pour la Création et la Recherche sur les Outils d'Expression

visibles, audibles et manipulables : le système Cordis-Anima. Ce dernier, qui a donné lieu à plusieurs mises en oeuvre successives, est basé sur un langage de représentation des objets physiques par assemblage d'un réseau de composants mécaniques élémentaires. Un programme de simulation est alors obtenu en associant au réseau ainsi construit une collection de processus en communication synchrone. Ces choix visent à assurer une modularité totale, au niveau des modèles aussi bien qu'au niveau algorithmique.

L'ensemble du travail que j'ai réalisé dans le cadre de ma thèse concerne le développement de classes de modèle de type Cordis-Anima, et a abouti à un système permettant la simulation physique d'une large variété d'objets volumiques déformables, solides et fluides.

L'introduction de cette deuxième partie du mémoire consiste en une réflexion générale sur le choix d'une représentation des objets physiques, et sur son implication quant aux caractéristiques d'un système informatique pour la modélisation et la simulation.

Je présente, dans le reste du document, les modèles d'objets volumiques élastiquement et plastiquement déformables, non homogènes et non isotropes, que j'ai proposé. Ces objets sont construits, de manière progressive, par agglomération d'une multitude de composants élémentaires en interaction, et par centrage des morceaux de matière ainsi obtenus autour d'un noyau destiné à structurer le mouvement. L'étude des phénomènes d'interaction de surface et des lois de comportements complexes de la matière a permis d'élaborer des composants mécaniques particuliers qui viennent enrichir ce modèle de base. Dans le dernier chapitre de ce document, l'exposé des méthodes et des concepts développés pour générer et contrôler le mouvement d'objets divers dans plusieurs situations types me donne l'occasion de présenter un grand nombre d'expérimentations réalisées à partir de ces modèles.

La présentation de ces travaux est organisée de telle manière que l'on y retrouve l'ensemble des aspects dégagés lors de la classification de la première partie : modèle de matière et de matériaux, interactions entre objets, et génération et contrôle du mouvement. Ceci permettra éventuellement au lecteur d'établir une comparaison point à point entre les modèles développés dans le cadre du système Cordis-Anima et les travaux que j'analyse dans l'état de l'art.

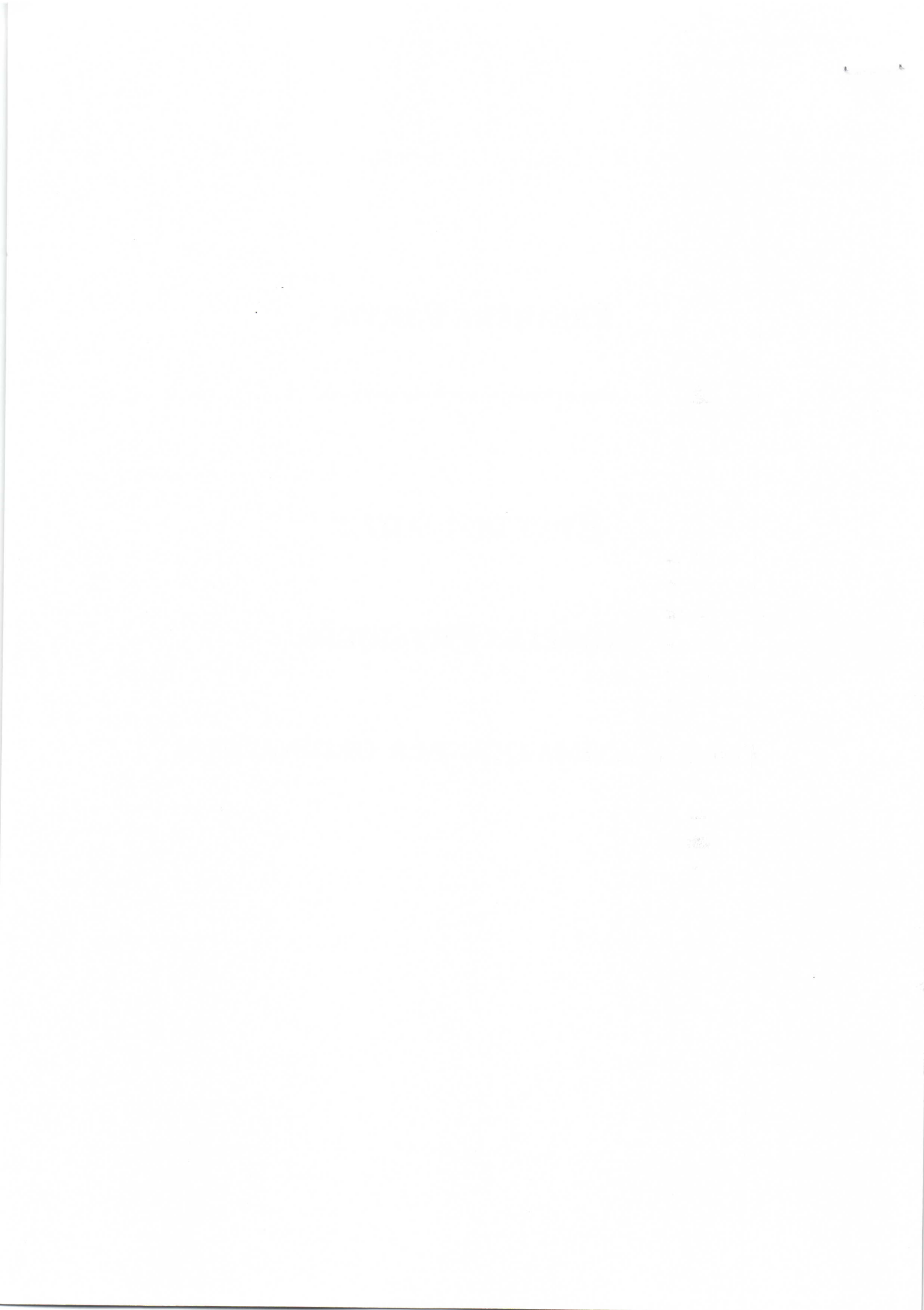
Les travaux rapportés dans ce document ont été soutenus financièrement par le Ministère de la Culture et de la Francophonie, Direction de la musique et de la Danse (convention ACROE / Ministère de la Culture - responsable Claude Cadoz), par le Centre National des Études Spatiales, (projet VAP - contrat CNES / LIFIA, responsables Christian Laugier et Annie Luciani, dans le cadre du groupement de recherche RISP - Robotique d'Intervention sur Sites Planétaires, responsable George Giral), et enfin, par la région Rhône-Alpes (contrat passé dans le cadre du projet SHARP, responsable Christian Laugier).

PREMIÈRE PARTIE

ÉTAT DE L'ART :

MODÈLES PHYSIQUES

POUR L'ANIMATION PAR ORDINATEUR



I. LA SYNTHÈSE D'IMAGE :

DU PIXEL À L'ANIMATION

I.1 Les débuts : création d'images statiques

I.1.1 Pixels et 2D

L'intérêt et les préoccupations des informaticiens vis à vis des représentations graphiques et de l'image en général ont pour ainsi dire toujours existé. Alors même que les ordinateurs ne possédaient comme organe de sortie que des machines à écrire, on les a utilisés pour créer des images en disposant différents caractères sur une page blanche, selon la technique du grisé. Cette étape anecdotique s'est bien sûr très rapidement éteinte avec l'utilisation d'écrans cathodiques comme organes de sortie principal. Mais l'idée consistant à créer des images à l'aide de l'ordinateur n'a fait que grandir, au fur et à mesure que les progrès technologiques ont augmenté les possibilités de la machine à cet égard.

Dans un premier temps cependant la création d'images numériques s'est limitée à une manipulation au niveau du pixel. Un éventuel utilisateur se retrouvait donc dans la situation d'un dessinateur forcé de travailler au niveau du grain de son papier. Très rapidement on a conçu puis optimisé un ensemble d'algorithmes de base dédiés à la création et à la manipulation de représentations visuelles. Parallèlement au développement de ces algorithmes de base, la structure interne des machines a évolué en fonction de l'importance qu'ont pris les fonctions graphiques. Des parties entières de la machine, organisées autour de 'processeurs graphiques', sont alors dédiées à la prise en charge de ces fonctions. Incidemment, le dessin sur ordinateur devient une réalité.

I.1.2 Le 3D

Une deuxième étape importante est celle du passage aux objets et aux scènes tridimensionnels. Le problème qui se pose alors est celui de la représentation de ces objets (image d'un objet matériel ou représentation purement abstraite) que l'on veut visualiser, mais aussi décrire, c'est à dire

construire et modifier. Il a fallu pour ce faire élaborer de nouvelles représentations, de nouveaux modèles adaptés à la description et à la manipulation des caractéristiques spatiales de ces objets.

Des modèles mathématiques, plus précisément logico-géométriques, fortement inspirés des techniques du dessin industriel et élaborés dans le cadre de système CAO-FAO vont alors s'adresser aux objets dit manufacturés, les plus répandus sont les modèles CSG (Constructive Solid Geometry) et BR (Boundary Representation). Le premier permet la construction des objets à partir d'une base de formes géométriques élémentaires et d'un ensemble d'opérations sur ces formes, tandis que le second relève du même principe mais représente les objets par leurs éléments de contour : faces, arêtes et sommets. Dans les deux cas, l'objet est représenté par les opérations nécessaires à sa construction, à partir d'un ensemble de primitives géométriques, ce qui correspond tout à fait aux objectifs de la CAO.

Par la suite, d'autres chercheurs se sont posés le problème de la représentation des objets ne pouvant s'obtenir par l'assemblage d'un nombre fini de primitives géométriques élémentaires. Ils seront dit 'de forme libre' et seront représentés par un ensemble d'approximations polynomiales de leur contour. Le problème essentiel devient ici celui de la manipulation (description/modification) de ces représentations. Des méthodes générales ont alors été développées, qui permettent une manipulation plus au moins globale de la forme. Le contour de l'objet est formé de morceaux (angl. patch) de surfaces construits par interpolation polynomiale et dont la forme se maîtrise à travers la manipulation d'un nombre réduit de paramètres et de points de contrôle: carreaux de Coons, de Bézier, B-Splines et β -Splines. Ces représentations sont dites paramétriques car elles consistent à décrire le contour de l'objet sous forme de fonctions scalaires paramétriques. Étant donnés deux paramètres $u \in [u_{\min}, u_{\max}]$ et $v \in [v_{\min}, v_{\max}]$, et trois fonctions paramétriques f , g et h , le contour représenté est formé de tous les points de coordonnées $[x=f(u,v), y=g(u,v), z=h(u,v)]$. Parallèlement, certains chercheurs se sont intéressés à un autre type de représentation visant à décrire la portion d'espace occupée par l'objet, plutôt que la construction du contour lui-même. Ces représentations, qui sont dites implicites (ou algébriques), correspondent à la donnée d'une fonction numérique f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} , la surface étant constituée de l'ensemble des points de l'espace vérifiant $f(x,y,z)=0$ (isosurface du champ scalaire définit par f) [Bli82, Han88]. L'objet final est alors obtenu en combinant, par des sommes pondérées par exemple, l'ensemble des surfaces implicites élémentaires [War89, Roc89]. L'intérêt de cette représentation est qu'elle fournit directement une fonction 'dedans/dehors' pour l'objet, ce qui ouvre la voie, d'après certains auteurs, à un important gain en complexité tout au long de la chaîne de l'informatique graphique.

Cependant, quelque soit la nature de la représentation choisie pour l'objet, la description de formes complexes devient immédiatement fastidieuse, voire impossible, en manipulant directement la représentation de base. Un nouveau concept est alors introduit ici, celui de la 'déformation de haut niveau'. La solution envisagée consiste à interposer, entre la représentation géométrique et l'utilisateur, des outils de manipulation locale et globale. Il s'agit par exemple de définir des transformations géométriques diverses dont le but est de proposer des opérations intuitives

(compression, étirement, flambage, torsion etc...), et donc de manipulation plus aisée pour l'utilisateur *lambda* [Bar84]. D'autres auteurs ont proposé de plonger l'objet à déformer dans une 'grille de déformation' qui est manipulée par des points de contrôle (comme l'étaient les surfaces polynomiales) et se comporte un peu comme un bloc de gelée [SP86]. Les techniques de définition et de manipulation de la forme d'un objet, qu'il soit représenté de manière paramétrique ou implicite, donnent lieu encore aujourd'hui à des recherches soutenues [FB88, Coq90, BW90, Gas90, BB91, SP91].

L'apparition du 3D correspond à une seconde évolution de la synthèse d'images par ordinateur. Elle va provoquer le développement de tout un ensemble de techniques et d'algorithmes regroupés autour du thème de la visualisation et du 'rendu' de l'image (angl. rendering). Au delà de la nécessité de coder, puis de traiter les informations relatives à la forme des objets, la visualisation proprement dite pose une nouvelle catégorie de problèmes : déterminer quels sont, dans une scène 3D, les objets ou parties d'objets visibles à partir d'un point de vue donné, et également déterminer quel va être leur aspect visuel. Les algorithmes de calcul des faces cachées, les modèles de texturage permettant de représenter l'aspect lisse ou granuleux d'une surface, et surtout ce que l'on peut appeler les modèles de comportement à la lumière - propriétés de réflexion, de diffraction, de diffusion des objets et projection des ombres portées - vont dès lors, et jusqu'à aujourd'hui, susciter de nombreux travaux.

Enfin, certaines méthodes ont été spécifiquement développées pour la représentation de formes naturelles complexes, impossibles à obtenir avec les outils précédents. Elles sont basées sur des modèles mathématiques, ou logico-mathématiques, tels que les fractales ou la morphogenèse et traitent souvent le problème depuis la construction de l'objet jusqu'à sa visualisation, sans passer par une manipulation de la forme proprement dite. Elles ont permis la génération de superbes images représentant des paysages, mers et montagnes, des plantes et des minéraux ou des objets plus inconsistants tels que des nuages, de la fumée ou du feu [Man84, Mil86, Opp86, Reff88, ST89].

I.2 Animation

I.2.1 Introduction

Nous avons rapidement évoqué les représentations et les techniques de base de la synthèse d'image statique et de l'infographie interactive. Elles permettent, par l'emploi de modèles et de techniques pour la description de la forme, ainsi que d'algorithmes de rendu, de produire des images statiques réalistes par la forme et l'apparence visuelle des objets qu'elles présentent. L'ordinateur devient un outil sophistiqué de création graphique et commence à donner le jour à de

véritables *oeuvres infographiques*. La nature des modèles et des techniques de l'informatique graphique évoqués jusqu'ici sont à la base des systèmes et procédés qui vont être développés pour créer l'image en mouvement, pour faire naître, au delà de l'infographie, l'animation par ordinateur. Le problème immédiat est de savoir comment créer des séquences d'images en mouvement à partir de cet ensemble d'images fixes.

Le principe fondamental permettant une représentation dynamique du mouvement à partir d'images statiques est connu depuis les expériences de Joseph Plateau sur la persistance rétinienne avec l'invention du Phénakistiscope en 1842 et l'ensemble des réalisations qui suivirent (Praxinoscope 1877, Chronophotographie 1882 et enfin, Cinématographe 1895). Il suffit de présenter à l'oeil, à de très brefs intervalles, une série d'images représentant les états successifs d'un objet (forme et position) afin que le spectateur ait l'illusion d'un mouvement continu. Définie en ces termes, une séquence d'images en mouvement s'obtient naturellement, à partir des représentations construites à l'aide des outils infographiques que nous venons d'évoquer, par de simples transformations géométriques. Les translations, rotations, et homothéties vont réaliser des changements de points de vue et des modifications de la position, de l'orientation, voire de la taille des objets, tandis que les outils de déformation de haut niveau complètent l'arsenal des transformations permettant de manipuler l'image de base. Il reste alors à soumettre les images obtenues à un dispositif d'affichage capable de les présenter à la fréquence voulue (lorsque c'est possible), ou bien de les fixer sur la bande magnétique d'une vidéocassette par une prise de vue en image par image.

Le principe est simple, sa mise en oeuvre l'est moins : la série de dessin produite doit, pour donner l'illusion d'un objet en mouvement lorsqu'elle est présentée à l'oeil à une fréquence minimum de 25 Hz, posséder une certaine cohérence spatio-temporelle. On le comprend immédiatement, le problème réside dans cette fraction de seconde qui sépare la présentation de deux dessins successifs, fraction de temps infime se situant à la limite de notre perception des choses (et pour cause !).

Jusqu'à des développements récents, la plupart des efforts visant à impliquer la technologie informatique dans la production d'images en mouvement (ou peut être l'inverse!) viennent en prolongation des techniques de la synthèse d'images statiques. La création d'images animées découle exclusivement de la mise en succession d'images fixes selon les procédés classiques de l'animation cinématographique que nous survolons dans le paragraphe suivant, les techniques plus récentes d'effet vidéo ont également inspiré plusieurs systèmes informatiques [MB80, Par80].

I.2.2 Les modèles descriptifs

La première démarche des informaticiens va essentiellement consister à adapter les techniques et les méthodes de travail développées par les gens du cinéma d'animation. Ces techniques peuvent

se partager en deux grandes catégories [Luc81-85] : animation par manipulation et animation par composition. Avec la première, le mouvement final est obtenu à partir de prises de vue directes, ou en image par image, d'un objet matériel (tridimensionnels articulés et modelable, ou plan comme dans la technique du papier découpé) que l'animateur doit savoir manipuler afin d'enchaîner les attitudes en fonction du résultat escompté. L'animation par composition est constituée du dessin animé et de ses variantes, le travail consiste en la réalisation de dessins fixes représentant les états (positions et formes) successifs de l'objet qui sont ensuite filmés image par image. Enfin certaines techniques se situent à la frontière de ces catégories, comme celle de l'écran d'épingles d'Alexandre Alexeïef et Claire Parker. Le dispositif utilisé est formé d'un cadre transpercé d'épingles coulissantes et permet de créer une image (qui est ici en relief) formée par les ombres obtenues en 'modelant' le tapis d'épingle, puis en l'éclairant d'une lumière plus ou moins rasante. Dans un premier temps c'est à la technique du dessin animé que l'informatique, qui permet déjà de produire des images fixes, va tout naturellement s'intéresser. Et le propos est alors, sinon de remplacer l'animateur tout au moins de le seconder efficacement par l'automatisation de certaines opérations.

Les premiers systèmes d'animation (bi-dimensionnelle) par ordinateur développés dans cet esprit [BW71-76] sont basés sur la technique traditionnelle des 'dessins clefs'. Ce terme correspond à une méthode de travail dans laquelle l'animateur fournit une première série de dessins 'clefs' ou 'extrêmes', beaucoup moins nombreux et plus espacés dans le temps que ceux de la séquence finale, qui représentent les caractéristiques les plus expressives du mouvement cherché. Ces dessins sont accompagnés d'un certain nombre de commentaires écrits ou graphiques destinés à permettre à une équipe de dessinateurs, les intervallistes, de produire les séquences intermédiaires. La plupart des systèmes d'animation par ordinateur proposent encore aujourd'hui une organisation semblable du travail tout en tentant de se passer des intervallistes sans alourdir la tâche de l'animateur principal [MTT85]. Le problème de la génération des séquences d'images (qui sont aujourd'hui le plus souvent tridimensionnelles) est résolu par l'application de diverses techniques d'interpolation (linéaires, polynomiales...) opérant sur l'ensemble des transformations géométriques appliquées à l'objet (translations, rotations, homothétie, ..., techniques de 'métamorphose'). Le but est alors d'assister la production des séquences difficiles à réaliser par une manipulation directe du modèle géométrique de l'objet (ce qui était encore possible en 2D). La contrepartie est certainement de réduire le niveau d'intervention de l'animateur. On conçoit combien cette démarche est réductrice pour l'animation, dans la mesure où l'intervalliste réalise un véritable travail d'interprétation des dessins et des schémas fournis, puis de création des séquences d'images intermédiaires, ce qui ne peut se ramener de manière simple à la manipulation d'opérateurs géométriques et d'interpolateurs spatio-temporels. Certains chercheurs se sont alors inquiétés du manque d'expressivité et de naturel des séquences d'animation ainsi produites, et ont tenté de réintroduire un meilleur contrôle des processus d'interpolation, visant à compenser les manquements de ces techniques [KB84, SB85, Sho85]. Des systèmes complets pour l'animation par ordinateur reprenant une organisation du travail basée sur l'animation par composition (dessins

animés sur 'cello' principalement), ont été réalisés à partir d'une analyse détaillée du savoir-faire des professionnels de l'animation (anticipation, exagération, timing... [Eng82]) [Las87, Lit91]. La démarche, qui s'adresse essentiellement à l'industrie du dessin animé, est souvent motivée par l'unique objectif d'une réduction des coûts de production.

Une autre manière de procéder pour réaliser une animation par composition, est d'effectuer une analyse décomposant l'*objet-en-mouvement* en une forme de référence accompagnée d'évolutions de tout ou partie de la forme de base. Le pendant informatique de cette démarche est ce que l'on peut appeler les grammaires de mouvement. Le mouvement d'un objet se décrit ici par un ensemble de paramètres dont l'évolution est représentée par des fonctions temporelles indépendantes (fonction de position, de taille, ...). Dès 1977, Francis Martinez avait préfiguré ce que sont aujourd'hui les grammaires de mouvements par l'introduction de fonctions d'évolution dans le système SAFRAN [Mar77]. L'O.S.U. (Ohio State University) a exploité le même principe en le spécialisant sur la base d'une observation du travail de l'animateur [Sch84]. Alors que chez Martinez, les "fonctions d'évolution" sont quelconques et arbitraires (définies mathématiquement ou saisies interactivement, à l'aide d'une souris par exemple), ici une analyse préalable est réalisée afin de choisir la nature des évolutions en fonction de l'expressivité voulue pour le résultat final. Et, puisque l'animateur acquiert sa connaissance du mouvement dynamique par l'observation de phénomènes naturels (provoqués et observés à répétition), les fonctions d'évolution vont retranscrire des mouvements naturels, soit mesurés (mouvement d'un corps humain...), soit calculés selon les lois de la mécanique Newtonienne dans le cas de mouvements simples (chute, oscillation...). Enfin, les fonctions d'évolution seront assorties de coefficients d'exagération permettant d'en augmenter l'expressivité.

Certains travaux récents tendent à combiner les techniques d'interpolations et l'idée de fonctions d'évolution. L'interpolation se fait non pas directement sur la représentation géométrique de l'objet, de points à points, mais sur l'objet composé : forme de base plus opérateur de transformation géométrique (de type FFD par exemple). La maîtrise du mouvement final est alors renforcée par un contrôle interactif [CJ91], ou par la possibilité de découper l'objet en sous parties qui sont animées séparément [BD92].

Encore aujourd'hui la plupart des 'films de synthèse' sont réalisés à partir des techniques citées ici. Bien sûr les performances des machines ont grandi et les 'outils' informatiques ont évolués, des techniques de représentation de la forme et de déformation globale jusqu'à celles du calcul des comportements à la lumière (ou rendu réaliste). Mais la plupart des techniques permettant la génération des séquences d'image restent basées sur une analyse purement descriptive du mouvement. L'animateur décrit la forme nominale de l'objet, puis doit en décrire le mouvement, soit en utilisant diverses techniques plus ou moins globales - dessins clefs ou grammaire de mouvement - soit en choisissant un mouvement préexistant dans une librairie. Ces méthodes relèvent d'un processus d'analyse/synthèse du mouvement réalisé.

L'étape suivante, naturelle dans un contexte informatique, vise à fournir les moyens non pas de décrire ce mouvement, mais de créer un processus capable de le générer.

I.2.3 Les modèles générateurs

Les modèles descriptifs consistent, du point de vue de la modélisation, à approcher un objet par une représentation visuelle associée à un contrôleur de mouvement externe à l'objet.

Une autre démarche qui relève de la notion d'autonomie, familière en robotique, s'inspire des techniques de programmation de l'intelligence artificielle : langage orienté objet et principe d'héritage. Le propos est de modéliser des objets dotés d'un comportement intrinsèque, c'est-à-dire d'intégrer au sein du modèle la capacité de s'adapter à des événements extérieurs, tout en adoptant un comportement de base. L'objet, que l'on dénomme souvent ici *acteur* ou *automate*, se présente alors comme un système capable de communiquer avec l'extérieur (l'environnement et ses congénères), c'est-à-dire capable d'y puiser des informations, et d'y réagir. Cette approche, qui dans un premier temps place l'animateur dans le rôle d'un créateur de 'mondes synthétiques' qu'il n'a plus ensuite qu'à regarder évoluer, a été appliquée pour la première fois à l'animation par Reynolds avec le système ASAS [Rey82]. Le système proposé s'articule autour de la notion d'acteur. Un acteur est un objet possédant un état, et doté d'un comportement intrinsèque décrit par l'utilisateur sous forme procédurale (en LISP). Les acteurs sont capables de communiquer entre eux par l'intermédiaire de messages, tandis qu'une procédure principale, le script, gère la caméra, le point de vue et l'action globale du groupe d'acteurs en leur donnant certains ordres du type disparaître, repars à zéro, etc... Dans la suite de ce travail, l'auteur va s'attacher à enrichir le comportement intrinsèque de ses acteurs, afin de construire des scènes constituées d'objets ayant des caractères propres et soumis à des règles d'interaction mutuelle [Rey87]. Les acteurs ont alors des caractères plus marqués comme par exemple la caractéristique *objet qui vole*, se référant à l'énoncé de règles spécifiant l'action de voler. Les règles permettant de calculer les trajectoires de la multitude, comme par exemple des processus d'évitement d'obstacles fixes dans la scène ou de regroupement des individus, sont fixées de manière plus globale. Ce travail a été utilisé pour définir des règles de comportement pour une multitude d'objets identiques et a permis la réalisation de scènes montrant un grand nombre d'objets en mouvements coordonnés. Cette approche qui est parfois appelée 'Animation programmée' ([Zel85]) est exploitée en collaboration avec des techniques descriptives dans les systèmes MIRA et MIRANIM [MTT85].

Les 'Particle Systems' de Reeves [Ree83] entrent également dans cette catégorie. Ils s'adressent à l'animation de scènes constituées d'objets pratiquement sans cohésion, à la limite de la matérialité : nuage, gaz, fluides, flammes. Reeves modélise ces phénomènes par un ensemble d'éléments particuliers sans interaction entre eux ni avec leur environnement. Les particules sont qualifiées par des paramètres tels que couleur, position, date de naissance et durée de vie. Les règles définissant les trajectoires pour l'ensemble du groupe sont fixées selon le phénomène à reproduire (explosion, fumée, feu ...) [ST II]. Cette technique a par la suite été étendue, notamment en associant des propriétés physiques aux éléments particuliers (inertie, puis forces d'attraction et de

répulsion), pour produire des animations convaincantes de vagues et d'écume [FR86, Pea86], de fluides [YUM86], de chutes d'eau, d'explosion, et de plusieurs autres effets particuliers [Sim90]. Cependant ces réalisations apparaissent surtout comme des évaluations spectaculaires des langages orientés objets ou des machines massivement parallèles, et n'amènent pas de solutions générales au problème de la définition de déplacements et de déformations complexes.

Enfin, il faut citer une dernière approche de la génération automatique (ou programmée) du mouvement, qui d'ailleurs préfigure une tendance importante de l'animation par ordinateur. Les techniques que nous venons d'évoquer ont permis la génération de mouvements relativement complexes mais essentiellement pour des objets simples, même si ceux-ci peuvent être présent en très grand nombre. La génération et le contrôle (coordination) du mouvement pour des structures articulées (pantins ou marionnettes) ne sont cependant pas résolus. Ces questions, qui sont abordées la plupart du temps dans le cadre de la synthèse de mouvements humains [BOK80, Zel82] ou animaux [GM85], ont fait l'objet d'études spécifiques qui ont débouché sur l'élaboration de modèles mathématiques. Ces modèles, dits 'cinématiques', sont spécifiquement dédiés au calcul des mouvements d'une structure articulée, en fonction de la nature des articulations qui relient ses différents segments. Préalablement développés pour la robotique des manipulateurs et des robots à pattes, ces représentations 'cinématique' des systèmes articulés et les calculs de 'cinématique inverse' associés (calcul du mouvement de chacun des segments d'une structure à partir du mouvement de ses seules extrémités), utilisés en collaboration avec des stratégies complexes de contrôle (sur lesquelles nous reviendrons plus loin), ont permis la génération de séquences de mouvements complexes pour des objets articulés de forme animale ou humanoïde.

I.3 Conclusion

Nous l'avons rapidement dit, les objets tridimensionnels sont définis au sein de la machine informatique sous la forme de représentations paramétrées ou implicites. Dans tous les cas, le jeu de paramètres des opérateurs géométriques servant à contrôler la position et la forme de l'objet représenté peut être très important et délicat à manipuler.

Le problème de l'animation se pose alors ainsi : il faut disposer de processus de manipulation globale de ces paramètres capables d'assurer la cohérence spatio-temporelle du mouvement obtenu ainsi qu'une certaine adéquation entre ce mouvement et le scénario prévu par l'opérateur.

Après la faillite des diverses techniques d'interpolation face au premier aspect, un grand nombre de chercheurs se sont orientés vers l'intégration de caractéristiques physiques au sein des modèles. L'idée de base est la même que celle introduite par les chercheurs de l'O.S.U. [Sch84], et par d'autres à la même époque [Jah84, LC84] : pour produire des algorithmes qui soient capables de

générer des mouvements aussi souples et cohérents que ceux que réalise l'animateur, il faut intégrer la connaissance que ce dernier possède sur son environnement, sur le monde matériel. Or il existe depuis longtemps des modèles mathématiques correspondant à cette connaissance, ce sont ceux de la physique analytique et de la mécanique. Ces modèles ont tous un point commun, ils sont construits sur une analyse des causes physiques du mouvement. Dans le cadre des applications informatiques, les modèles élaborés sur ce principe sont aujourd'hui regroupés sous le terme '**Modèles Physiques**'.

Les mises en oeuvres algorithmiques des modèles physiques vont être utilisées pour gérer le jeu des paramètres contrôlant les représentations géométriques, et par là même vont dépendre de ces représentations.

D'autre part, la mécanique classique ne propose que des modèles partiels correspondant à une catégorisation des objets selon la nature des matériaux qui les composent et même parfois selon la situation dans laquelle on veut les représenter.

Enfin, les mathématiques pour la physique et la mécanique ont développé plusieurs représentations aboutissant à différents modèles de calcul en fonction des problèmes étudiés. Le choix des outils numériques va lui aussi spécialiser les mises en oeuvre informatiques. L'ensemble de ces modèles partage malgré tout un objectif commun, celui d'aboutir à des processus capables de générer des mouvements réalistes, dans le sens de la cohérence dynamique entre la forme, la matière et la nature des interactions entre objets. Les chapitres suivants (II, III, et IV) s'intéressent aux méthodes de modélisation et de simulation physique pour l'animation par ordinateur.

II. LE MODÈLE PHYSIQUE :

MATIÈRE ET MATÉRIAUX

II.1 Introduction

Les modèles de simulation construits à partir des équations mathématiques pour la physique sont aujourd'hui largement utilisés pour la production d'images en mouvement par ordinateur. Le développement de l'ensemble de ces modèles, rassemblés sous le terme générique de "modèles physiques", a été essentiellement motivé par la volonté de produire automatiquement des séquences de mouvements réalistes. Il faut cependant faire une distinction entre ce qui est désormais connu sous le nom de "modèles physiques discrets", et ce que nous appellerons ici par opposition "modèles physiques continus". On trouve en effet sous ces deux termes deux approches différentes, aussi bien en ce qui concerne la modélisation mathématique que les mises en oeuvre algorithmiques.

Le principe général de la génération de mouvements par simulation d'objets physiques est basé sur un calcul à temps discret. Il s'agit de calculer à chaque instant $t+\Delta t$ la nouvelle position et la nouvelle orientation dans l'espace, ainsi que les vitesses correspondantes, de l'objet qui est représenté ici comme un système physique. Une méthode générale basée sur ce principe peut se formuler comme suit :

Soit un objet Ω , dont on connaît les caractéristiques physiques : masse, répartition d'inertie, comportement du matériau ..., et un état initial (à partir duquel démarre le mouvement) formé de l'ensemble des paramètres (x_1, x_2, \dots, x_n) donnant la position de Ω et des vitesses $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$ correspondantes.

- 1 • Calculer à partir de l'état de l'objet Ω les forces dites *internes*, qui dépendent de la nature du matériau dont il est fait.
- 2 • Calculer, à partir de l'état de l'objet à l'instant t , les forces dites *externes* qui lui sont appliquées par son environnement. On distingue souvent les actions (forces

- et moments) à distance, comme les forces dues au champ gravitationnel, et les actions de contact, qui interviennent dans les interactions avec d'autres objets.
- 3 • Calculer, à partir de l'état de l'objet à l'instant t , les forces correspondant aux interventions de l'opérateur et destinées à *contrôler* le déroulement du mouvement. Elles peuvent être de plusieurs natures : actions directes (forces et moments donnés), exercées à travers un mécanisme (contrôle moteur) ou sollicitées par l'expression d'un résultat visé (et calculées par des algorithmes dédiés, basés sur la *dynamique inverse* ou sur des méthodes d'optimisation).
 - 4 • Calculer, à partir de l'ensemble des forces obtenues et de l'état de l'objet à l'instant t , son *état courant*, c'est-à-dire à l'instant $t + \Delta t$. Incrémenter la variable temps ($t = t + \Delta t$).
 - 5 • Enfin, puisqu'il s'agit de réaliser une séquence d'animation, mémoriser les positions obtenues, ou calculer l'aspect visuel de la scène (parties cachées, texturage, éclairage, ...) afin de produire l'image résultante et de l'afficher.

Nous ne nous préoccupons que très peu dans ce chapitre, et dans tout ce document, de cette dernière étape. Les étapes (• 1 •), (• 2 •) et (• 3 •) correspondent aux principales préoccupations des chercheurs qui s'intéressent à l'animation et à la simulation par modèle physique, et font l'objet de la plupart des efforts de recherche. C'est à travers les trois thèmes correspondant, *modélisation du comportement du matériaux, gestion des interactions entre objets* et *contrôle du mouvement et de l'effet désiré*, que nous allons survoler une partie significative des travaux existant. L'étape (• 4 •), si elle est évidemment fondamentale, ne relève pas réellement de la modélisation, mais plutôt de techniques de calcul numérique puisqu'elle est contenue, à une intégration près, dans l'écriture de la loi fondamentale de la mécanique : $\Sigma \text{Forces_extérieures} = \text{Masse} * \text{Accélération}$. Cependant, cette relation apparaît sous différentes formes selon la méthode adoptée pour exprimer les équations du mouvement ; sa mise en oeuvre dépend implicitement de la nature de la représentation choisie pour l'objet et va fortement influencer l'ensemble du processus de calcul.

Nous ne discuterons pas dans ce document des choix des diverses applications présentées en ce qui concerne l'implantation informatique proprement dite (structure de données, nature des interfaces, choix de langage etc...). Nous nous intéressons plus ici aux différents aspects de la modélisation, de la représentation des systèmes dynamiques jusqu'aux algorithmes qui doivent permettre de les simuler.

II.2 Modèles de solides parfaitement rigides

II.2.1 Équations du mouvement

Les premières applications réalisant le calcul du mouvement pour l'animation par ordinateur à l'aide des lois de la mécanique se sont intéressées aux modèles dit de solides rigides. Ces modèles mathématiques proposent d'approcher le comportement dynamique d'un corps solide rigide (éventuellement de plusieurs corps articulés entre eux) par un objet conservant une forme parfaitement identique quelles que soient les forces qui lui sont appliquées. Le corps, dit alors parfaitement rigide, est donc supposé présenter une résistance infinie à la déformation. Ce type de représentation fait abstraction du comportement du matériau. L'état dynamique d'un tel objet est entièrement caractérisé par la position et la vitesse de son centre de gravité ainsi que par l'orientation et la vitesse angulaire du corps. Le comportement dynamique des objets représentés se limite donc à des déplacements, translations et rotations. D'une manière générale, les équations du mouvement relient ces déplacements aux forces extérieures (F_{ext}) appliquées à l'objet. Les équations du mouvement, dites 'Newtonienne', sont basées sur la notion de force et découlent directement des trois lois fondamentales de la mécanique. Les équations reliant l'état dynamique d'un système (position, vitesse et accélération) aux actions qui lui sont appliquées sont souvent introduites sous une autre forme dite 'Lagrangienne'. Les équations 'Lagrangiennes' du mouvement sont assez fréquemment utilisées en animation par ordinateur, et je pense qu'il est pertinent de chercher à comprendre le développement qui permet de les construire à partir des notions de travail et d'énergie. C'est ce que devrait permettre l'annexe A, en explicitant ce que représentent les modèles mécaniques construits sur la notion d'énergie et selon le principe des travaux virtuels, plutôt que sur la notion de force et sur les théorèmes généraux. Nous présentons ci-dessous l'aspect général des équations du mouvement selon les deux approches.

A. Équations 'Newtonienne'

Pour le calcul des mouvements de translation, seul le centre de gravité G du solide est à considérer :

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d}{dt}(\vec{P}_G) = M \cdot \vec{\Gamma}_G$$

ou, Γ_G est l'accélération du centre de gravité.
 V_G est la vitesse du centre de gravité.
 M est la masse totale du corps, supposée constante au cours du temps.
 $P_G = M \cdot V_G$ est la quantité de mouvement du centre de gravité.

Les mouvements de rotation sont caractérisés par l'équation suivante (analogue à la précédente) :

$$\Sigma \vec{N} = \frac{d(\vec{I} \cdot \vec{\omega})}{dt}$$

ou, $\Sigma \vec{N}$ est la somme des moments des forces extérieures ($\vec{N} = \vec{r} \wedge \vec{F}_{\text{ext}}$)

\vec{I} est le tenseur d'inertie du corps (caractérisé par une matrice symétrique)

$\vec{\omega}$ est la vitesse angulaire du corps définie par rapport à un repère fixe d'origine O (la vitesse correspondante d'un point M quelconque du corps est : $\vec{\omega} \wedge \vec{OM}$)

Lorsque les mouvements de rotation sont calculés par rapport à un repère fixe dans l'espace, le moment d'inertie du solide n'est pas constant et l'équation ci-dessus est lourde à manipuler. Ceci n'est plus vrai dès lors que l'on choisit un repère lié au solide. Ainsi, en pratique, on écrira le mouvement d'un solide rigide comme la somme d'un mouvement linéaire, celui d'un point lié au solide (on choisit généralement le centre de gravité), et d'un mouvement de rotation autour de ce point. Lorsqu'elle est écrite dans un repère lié au solide, l'équation caractérisant les mouvements de rotation devient :

$$\Sigma \vec{N} = \vec{I} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \wedge (\vec{I} \cdot \vec{\omega})$$

Si l'on choisit ce que l'on appelle les axes principaux d'inertie comme axes du repère (ce qui revient à diagonaliser la matrice I ; cette opération devient immédiate lorsque le corps possède des symétries), les équations du mouvements de rotation prennent une forme simplifiée et sont alors appelées 'équations d'Euler' [LL69] (les quantités I_x , I_y et I_z sont les moments principaux d'inertie) :

$$I_x \cdot \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \cdot \omega_z \cdot \omega_y = N_x$$

$$I_y \cdot \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z) \cdot \omega_x \cdot \omega_z = N_y$$

$$I_z \cdot \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x) \cdot \omega_y \cdot \omega_x = N_z$$

Le système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre ainsi obtenu peut être résolu (la plupart du temps de manière approchée), soit directement par des méthodes d'approximation numérique du type Runge-Kutta ou Adams-Moulton [Gea71], soit par des méthodes de résolution de systèmes linéaires (directes comme la méthode 'LU', ou itératives comme la méthode Gauss-Seidel). Dans ce dernier cas, les dérivées temporelles sont approchées au préalable par des méthodes de différences finies (approximation du type $df(t)/dt \cong [f(t + \Delta t) - f(t)]/\Delta t$, ou Δt est le pas de temps de la boucle de calcul) [LT87].

B. Équations 'Lagrangienne'

Les équations obtenues à partir de l'expression du travail et de l'énergie d'un système dynamique prennent la même forme générale dans le cas d'un corps rigide et d'un corps déformable.

Pour un corps ayant n degrés de liberté, elles s'écrivent [LL69] :

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad \forall i=1 \dots n \quad \text{où } L = E_c - \Omega$$

Les q_1, q_2, \dots, q_n sont les coordonnées généralisées du corps (exprimées dans un système de coordonnées quelconque, et non pas forcément dans un repère cartésien), les dérivées correspondantes $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ sont les vitesses généralisées ; E_c est l'énergie cinétique et Ω est l'énergie potentielle associée aux forces intérieures et extérieures au système. Ces équations sont souvent augmentées d'un terme de dissipation: $-\partial \mathcal{D} / \partial \dot{q}^i$ ($\mathcal{D}(q, \dot{q})$ est appelée fonction de dissipation).

Certains chercheurs mettent en oeuvre les équations 'Lagrangienne', pour le calcul du mouvement des solides rigides, à partir du Principe des Travaux Virtuels (P.T.V.) [DBD88, IC87]¹. Notamment, un système complet pour l'animation de scènes tridimensionnelles a été développé à l'I.N.R.I.A. [Arn88, DAH89, Dum90, ADH91] à partir de formulations basées sur le P.T.V. et sur les méthodes de résolution par multiplicateurs de Lagrange (voir le § suivant et l'annexe A). Ce système exploite de plus les outils du calcul symbolique, qui permettent de traiter de manière exacte certaines opérations mathématiques (dérivation, simplification d'équation). Le calcul symbolique sert ici à simplifier les expressions mathématiques (utile notamment pour le calcul des dérivées partielles dans le cas des équations Lagrangienne), ce qui permet de limiter les risques de divergences dus aux problèmes de discrétisation temporelle ou de représentation numérique, lesquels peuvent devenir critiques lorsque la précision des calculs est cruciale pour l'application visée. Cependant ces simplifications ne permettent jamais d'arriver à des expressions explicites, et les méthodes citées ci-dessus (intégrateur, ou différences finies et résolution linéaire) restent nécessaires. Le travail présenté dans [Dum90] s'intéresse en outre aux objets déformables, bien que dans ce cas, Dumond propose à la fois un modèle continu basé sur le P.T.V. et sur une discrétisation par éléments finis, et un modèle basé sur des composants discrets (masses ponctuelles, micro-ressorts et micro-amortisseurs, cette approche est décrite en détail au § II.4).

II.2.2 Solides rigides articulés

A. Notion de chaînes articulées

A ces équations du mouvement d'un solide parfaitement rigide, dont le propos est donc de calculer à partir des forces extérieures (supposées connues) et de l'état dynamique du corps, sa position dans l'espace ainsi que sa position angulaire, vient se rajouter la notion de liaison. Une liaison correspond à une limitation des mouvements entre deux corps qui, de six degrés de liberté (trois

¹ Le travail présenté dans [DBD88] concerne un simulateur de conduite dans lequel le véhicule est représenté par un solide rigide articulé.

en translation et trois en rotation), passe à trois dans le cas d'une rotule parfaite par exemple. Ces liaisons peuvent être holonomes (indépendantes des vitesses) ou non holonomes, et parfaites (c'est-à-dire ne produisant aucun travail) ou non parfaites (dissipatives ou non), ou enfin limitées en amplitude (avec butée). Ces catégories de liaisons idéales sont induites par la nature des équations associées, les liaisons purement holonomes et parfaites n'existent pas dans la réalité. Dans les cas les plus simples (liaisons holonomes et parfaites), il est possible d'opérer une réduction du paramétrage du système, c'est-à-dire de faire disparaître dans les équations les degrés de liberté qui sont contraints par les liaisons ; dans les autres cas les liaisons doivent être décrites explicitement dans le système d'équation, soit par une relation établie entre les paramètres du système décrivant le respect de la liaison, soit par le calcul de la force (ou du travail) représentant la liaison.

De nombreux travaux ont proposé une mise en oeuvre informatique de la mécanique des solides rigides articulés. Certains reprennent le modèle mathématique dans la forme très générale présentée ci-dessus (équations du mouvement d'un solide parfaitement rigide, puis définition de liaisons quelconques, comme dans [WB85]), alors que d'autres se sont intéressés, dans le but d'optimiser les traitements numériques (calculs matriciels et résolution des équations différentielles), à des modèles plus restrictifs. Les limitations portent généralement sur la nature des liaisons (nombre de degré de liberté et type de liaisons), et sur la nature des structures simulables (boucles ouvertes ou fermées). Le but principal de ces approches est de permettre l'utilisation d'algorithmes de résolution offrant une plus grande efficacité calculatoire. Ces algorithmes, que nous n'exposerons pas ici (on trouvera des exposés sur ce sujet dans [GV89, Ver90]), ont été antérieurement développés dans le cadre de la robotique des manipulateurs ; ils sont basés sur une représentation des chaînes cinématiques sous forme d'arbre (une racine et des liens fils) et sur la notion d'espace des configurations admissibles. Les travaux de recherche en robotique ont produit de nombreux algorithmes *logico-cinématiques* basés sur ces représentations, en introduisant notamment des notations adaptées à la structure particulière des systèmes étudiés. La prise en compte des caractéristiques dynamiques des systèmes (masse et moment d'inertie) constitue une suite logique à ces travaux. Les algorithmes les plus efficaces consistent en une résolution récursive sur les maillons de la chaîne articulée [Fea83, AG85].

Les travaux, plus récents, de Schröder et Zeltzer [SZ90] reprennent la méthode de résolution récursive et la question intéressante, en amont du modèle mis en oeuvre, d'une notation spatiale des mouvements de l'objet, qui ont été précédemment introduites par Featherstone [Fea83]. En effet la plupart du temps les mouvements 'linéaires' (de translation), et les mouvements de rotation sont dissociés, et ceci pour une bonne raison : les premiers sont paramétrés dans \mathbb{R}^3 , les seconds dans \mathcal{Y}^3 (la sphère unité). L'identité entre une position de départ et celle obtenue par rotation d'un angle $2*\pi$ constitue la difficulté de travailler avec un paramétrage unifié dans le cadre d'un calcul réalisé à temps discret. Schröder et Zeltzer exploitent un système de coordonnées spatiales, et une algèbre spatiale, qui permettent de travailler directement dans $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{Y}^3$. L'approche choisie par ces auteurs permet de traiter le mouvement en résolvant une équation différentielle unique, et de mêler

les algorithmes récursifs issus de la robotique aux approches de type 'dynamique inverse' comme celle développée par Barzel et Barr ou Isaac et Cohen [BB88, IC87] (voir le § suivant). Le tout conduit à une plus grande souplesse d'utilisation et à une plus grande rapidité de calcul des mouvements.

B. Dynamique inverse : méthode de pénalités et méthode de contrainte

Il existe une deuxième approche permettant de prendre en compte les entraves aux mouvements relatifs des corps qui sont créés par des liaisons quelconques. Elle consiste à calculer directement, à partir d'une caractérisation logico-géométrique des liaisons, les termes de forces ou d'énergie (selon la formulation choisie) qui en résultent. Ainsi, une rotule par exemple, peut se caractériser par une relation du type : *les positions de ces deux points doivent rester égales au cours du temps...* On parle pour ce type d'approche de *méthode par contrainte* et d'un problème de *dynamique inversée*, par opposition au problème dynamique classique (trouver la position et la vitesse résultant de cette force), puisqu'il s'agit de trouver la force qui produira une position et une vitesse données.

Barzel et Barr ont introduit, dans le cadre d'une formulation basée sur la notion de force, ce qu'ils appellent 'des contraintes dynamiques' [BB88]. Une expression faisant intervenir une mesure de la déviation par rapport à la contrainte, ainsi que les forces et couples extérieurs (hors contrainte) appliqués au corps, permet le calcul d'une force de contrainte destinées à satisfaire 'au mieux', et 'au plus vite' (c'est-à-dire ni exactement, ni instantanément) la contrainte spécifiée par l'utilisateur. Dans le cadre des formulations basées sur la notion d'énergie et construite à partir du P.T.V., des approches similaires peuvent être développées [IC87, Arn88, Dum90]. Dans le cas de liaisons simples (parfaites, indépendantes et holonomes) le problème est immédiatement résolu en paramétrant le système de manière à n'écrire les équations du mouvement que pour les degrés de liberté non contraints (notion de paramétrage minimum [Bam81]). Pour des liaisons plus complexes, il faut recourir à une résolution par multiplicateurs de Lagrange, ou à des méthodes de pénalité. Ces deux manières de formuler le problème sont décrites à l'annexe A. Dans tous les cas (formulation force ou énergie), ces méthodes sont souvent considérées comme des outils de contrôle du mouvement, et nous les re-visiterons dans le chapitre consacré à cette question (voir le § IV.2.1).

II.3 Modèles de solides déformables

Paradoxalement, alors que la majorité des objets qui nous entourent ne correspond pas à l'hypothèse de résistance infinie à la déformation, les modèles mathématiques s'adressant aux objets déformables (solides ou fluides) sont restreints, aussi bien au niveau de la variété des comportements représentables, qu'au niveau opératoire (mais finalement, les propriétés que les

ingénieurs recherchent pour un pont, par exemple, ne sont pas celles d'une boule de pâte à modeler ou d'un château de sable).

S'il n'existe pas de modèles s'intéressant de manière globale aux caractéristiques des matières déformables, beaucoup permettent en revanche d'en étudier des propriétés particulières. Ce qui ne rend pas immédiatement service à l'animation par ordinateur.

La mécanique des milieux continus propose des modèles de matériaux visco-élastiques uniformément déformables. Ces modèles "d'élasticité tridimensionnelle" consistent en une formulation mathématique générale, indépendante du matériau considéré (solide, liquide, gaz), exprimant les relations existant à l'équilibre entre les 'déformations' (variations de volume et de surface) et les forces 'appliquées' (ou contraintes) de volume et de surface, qui comme leur nom l'indiquent représente l'action de l'environnement sur le corps étudiés. Le Principe des Travaux virtuels (voir l'annexe A) permet de passer des équations d'équilibre de l'élasticité tridimensionnelle à un système d'équations aux dérivées partielles fortement non-linéaires définies sur un ouvert de \mathbb{R}^3 (le domaine de \mathbb{R}^3 occupé par le morceau de matière déformable). Ces trois équations sont associées à des conditions aux limites, c'est à dire à des équations différentielles supplémentaires définies sur le bord de l'ouvert en question [Cia85, Tal90]. Enfin, ce double système d'équation doit être complété par des lois dites de comportement qui caractérisent (macroscopiquement) la nature du matériau en précisant la fonction mathématique qui relie les contraintes aux déformations. Ces lois sont généralement élaborées expérimentalement, au cas par cas, et permettent de caractériser les matériaux les plus répandus dans les situations où ils sont le plus utilisés (typiquement, un bloc de béton soumis à des contraintes axiales, ou le caoutchouc d'un pneu de voiture sous des contraintes radiales).

II.3.1 Modèles basés sur la mécanique des milieux continus

Il existe peu de mise en oeuvre, pour l'animation par ordinateur, du modèle de l'élasticité tridimensionnelle tel qu'il est présenté dans les ouvrages d'analyse numérique. Les travaux de Terzopoulos, Platt, Barr et Fleischer [TPBF87, TF88] sont représentatifs des possibilités qu'offre cette démarche, ainsi que des problèmes qu'elle pose au niveau de la lourdeur des calculs à mettre en oeuvre, malgré la faible variété des objets représentables.

Le modèle mathématique initial exploite un paramétrage continu de la matière ; la première opération va donc consister à discrétiser le domaine (le morceau de matière) étudié afin de résoudre numériquement le problème du mouvement. Le modèle développé par Terzopoulos met en oeuvre d'une part un maillage géométrique de la forme de l'objet, qui peut être obtenu par simple subdivision des axes de coordonnées (différences finies spatiales) ou par triangulation du domaine (méthodes de résolution par éléments finis : approximation interne d'un domaine par une famille suffisamment régulière de n -simplexes [Zie79]), et d'autre part des matrices de paramètres permettant de contrôler les caractéristiques du matériau en chaque point du maillage. Les équations

initiales sont celles d'un matériau hyperélastique (matériau élastique pour lequel la force de réponse aux déformations dérive d'un potentiel [Cia85]). Nous allons voir comment le modèle mathématique de départ doit tout d'abord être fortement simplifié (notamment par linéarisation), puis finalement modifié afin de pouvoir traiter une plus grande variété de matériaux et de mieux en contrôler les caractéristiques tout en aboutissant à des systèmes d'équations 'raisonnables'.

A. Mise en oeuvre de l'élasticité tridimensionnelle

La caractérisation de la forme des objets, laquelle est décrite sous forme paramétrique, est obtenue dans [TPBF87] à partir des outils de la géométrie différentielle (tenseur métrique et tenseur de courbure).

Soit a , le jeu de coordonnées paramétriques d'un point matériel dans le corps considéré (courbe : $a = (a_1)$, surfaces: $a = (a_1, a_2)$, etc...). Les coordonnées euclidiennes de ce même point à un instant 't' sont données par la fonction vectorielle : $r(a, t) = [r_1(a, t), r_2(a, t), r_3(a, t)]$.

La forme et la déformation d'un corps Ω sont caractérisées par le tenseur métrique G associé aux déformations d'un domaine volumique, accompagné du tenseur de courbure B dans le cas d'une surface. Au point ij du maillage d'une surface par exemple, ceux-ci s'écrivent :

$$G_{ij}(r(a)) = (\partial r / \partial a_i) * (\partial r / \partial a_j)$$

$$B_{ij}(r(a)) = n * (\partial^2 r / \partial a_i \partial a_j) \quad \text{où } n \text{ est la normale unitaire à la surface}$$

Le corps Ω (qui est donc ici une surface considérée dans l'espace 3D) est caractérisé par la forme de référence : G_{ij}^0, B_{ij}^0 (matrices carrées d'ordre 2). L'énergie potentielle de déformation, ou densité d'énergie, est calculée comme une 'distance' entre la forme de référence ($G^0(r)$) et la forme courante ($G(r, t)$) par la formule suivante:

$$\mathcal{E}(r) = \int_{\Omega} \|G(r) - G^0(r)\|_{\alpha}^2 + \|B(r) - B^0(r)\|_{\beta}^2 da_1 da_2$$

où $\| \cdot \|_{\alpha}$ et $\| \cdot \|_{\beta}$ sont des normes pondérées associées chacune à une matrice de paramètre qui permet de définir les caractéristiques du matériau :

$\| \cdot \|_{\alpha}$ est associée à la matrice N : η_{ij} résistance à l'élongation le long de a_i .

$\eta_{12} = \eta_{21}$ résistance au cisaillement.

$\| \cdot \|_{\beta}$ est associée à la matrice E : ε_{ii} résistance en courbure sur a_i .

$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$ résistance en torsion.

En pratique, c'est une formule simplifiée de cette énergie élastique qui sera utilisée. Elle correspond à l'adoption d'hypothèses simplificatrices sur la nature du matériau : réponse élastique linéaire, matière homogène et isotrope [Cia85].

Dans le cas d'un matériau isotrope répondant à la loi de Hooke (réponse élastique linéaire), la formule utilisée pour \mathcal{E} devient :

$$\mathcal{E}(r) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \left(\sum_i (G_{ii} - G_{ii}^0) \right)^2 + \mu \cdot \sum_{i,j} (G_{ij} - G_{ij}^0)^2 \right] da_1 da_2$$

Enfin l'expression de $\partial \mathcal{E} / \partial r$ doit être approchée, en utilisant les formules du calcul variationnel.

Le mouvement d'un corps Ω , de paramétrage $r(a,t)$, est régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \cdot \frac{\partial r}{\partial t} \right) + z \cdot \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{E}(r)}{\partial r} = F(r,t) \quad (i)$$

(Inertie + viscosité du milieu ambiant + force de déformation issue d'un potentiel = forces extérieures)

Cette équation, pour être résolue numériquement, doit d'abord être discrétisée spatialement (par différences finies ou en appliquant la méthode des éléments finis [Zie79]). C'est à dire qu'elle doit être approchée par un système d'équations discrètes écrites en chacun des noeuds du maillage de l'objet.

En pratique, ceci est obtenu par l'application d'un schéma de discrétisation de type différence finie (approximation du premier ordre) qui donne pour des dérivés partielles du premier et du second ordre par exemple les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx}(x_0, y_0) &= \frac{U(x_0+h_x, y_0) - U(x_0-h_x, y_0)}{2 \cdot h_x} + O(h_x^2) \\ \frac{d^2U}{dx^2}(x_0, y_0) &= \frac{U(x_0+h_x, y_0) + U(x_0-h_x, y_0) - 2 \cdot U(x_0, y_0)}{h_x^2} + O(h_x^2) \quad \text{etc...} \end{aligned}$$

Ce qui donne un système (écrit ici sous forme matricielle) d'équations différentielles ordinaires du second ordre de la taille du maillage :

$$M \partial^2 \underline{r} / \partial t^2 + C \partial \underline{r} / \partial t + K(\underline{r}) \cdot \underline{r} = \underline{F}$$

où M (masses) et C (coefficients de frottement) sont des matrices carrés d'ordre MN (dans le cas d'un maillage de l'objet de taille MN)

$K(\underline{r}) \cdot \underline{r}$ est l'expression discrète de $\partial \mathcal{E} / \partial r$ ($K(\underline{r})$ matrice d'ordre MN).

\underline{r} et \underline{F} sont des multi-vecteurs.

L'ensemble des opérations réalisées dans le but d'obtenir un système d'équation plus simple à manipuler, mais surtout à résoudre, correspond à la linéarisation (autour de la position d'équilibre) du problème initial [Cia85]. Les équations du mouvement ainsi obtenues ne sont utilisables rigoureusement que sous l'hypothèse de petits déplacements (en anglais : small strain assumption).

Ce système est ensuite discrétisé temporellement, c'est-à-dire échantillonné en utilisant les approximations que nous avons déjà rencontrées de la vitesse et de l'accélération (différences finies du premier ou du deuxième ordre) :

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{r_{t+\Delta t} - r_{t-\Delta t}}{2\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{r_{t+\Delta t} - 2 \cdot r_t + r_{t-\Delta t}}{\Delta t^2}$$

Ce qui permet d'obtenir le système final suivant, qui sera traité par des méthodes classiques de résolution de système linéaire telles que Gauss-Seidel ou Choleski [LT87] :

$$A_t \cdot r_{t+\Delta t} = G_t$$

La matrice A_t (d'ordre MN) est constante si le matériau est homogène (c'est-à-dire si les α_{ij} et les β_{ij} sont indépendants de r) et pourra donc être inversée une fois pour toutes. Quoiqu'il en soit, la complexité du modèle mathématique de l'élasticité tridimensionnelle est telle qu'il est impossible en pratique de décrire puis de simuler des objets qui ne seraient ni homogènes ni isotropes. D'autre part, la méthode ne permet pas de simuler des objets 'assez' rigides.

B. Prise en compte de comportements inélastiques

B.1 Un modèle hybride

Dans la suite de leurs travaux, Terzopoulos et Fleischer [TF88] vont reprendre l'expression introduite par Terzopoulos et Witkin dans [TW88] pour les équations du mouvement (qui est très différente de celle de nous avons décrit ci-dessus). Le but est essentiellement de réduire la complexité globale du modèle, tout en permettant la simulation d'objets plus rigides et présentant des comportements inélastiques (visco-élasticité fluide, plasticité et fractures). Dans cette nouvelle formulation, les mouvements dus à la dynamique du solide et ceux dus à la déformation du corps sont dissociés.

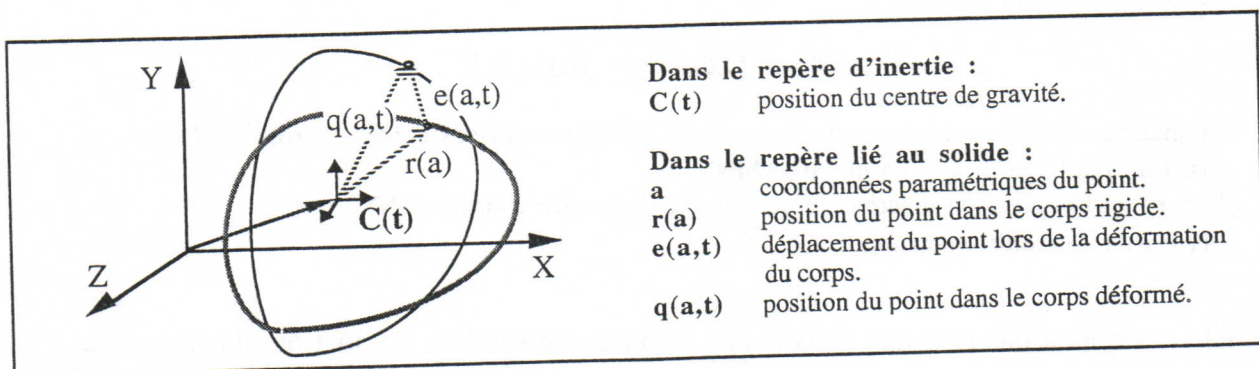


Figure 1 : composant de référence et composant de déformation [TF88]

En définitive l'objet déformable est obtenu à partir de deux représentations superposées (figure 1) : un composant de référence $r(a)$, et un composant de déformation $e(a,t)$.

La position $q(a,t)$ (exprimée dans le repère lié au corps et centré sur son centre d'inertie) du point de coordonnées paramétrique a , à l'instant t , s'écrit :

$$q(a,t) = r(a) + e(a,t)$$

De plus on a la relation : $\dot{X}(t) = \dot{C}(t) + \dot{\theta}(t) \wedge q(a,t) + \dot{e}(a,t)$

où, $X(t)$ est la position dans le repère d'inertie (fixe dans l'espace) de ce même point
 $C(t)$ et $q(t)$ sont la position et l'orientation du repère lié au centre d'inertie du solide.

Les mouvements du composant de référence sont calculés en utilisant les équations de la mécanique des solides rigides (voir le § précédent), tandis que l'enveloppe déformable, globalement immobile par rapport au premier, est animée en caractérisant les déformations à l'aide d'une formule *linéaire* pour le calcul de l'énergie élastique [TW88]. Cette nouvelle expression de l'énergie élastique \mathcal{E} , qui s'éloigne considérablement du modèle initial (et de la réalité physique des comportements simulés ?), est calculée à partir de combinaisons linéaires des dérivées partielles du composant de déformation :

$$\mathcal{E}(e) = \int_{\Omega} E(a, e, e_a, e_{aa} \dots) da$$

où E est une application linéaire (somme pondérée), et les e_a, e_{aa}, \dots sont les dérivées partielles successives (en pratique jusqu'à l'ordre 2) de $e(a,t)$ par rapport au coordonnées paramétriques $a = (a_1, a_2, a_3)$.

Les forces sont décomposées en trois parties :

$$\begin{aligned} F_e(a,t) &= \sum F(a,t) && \text{terme de déformation} \\ F_{rot}(t) &= \int_{\Omega} q(a,t) \wedge F(a,t) da && \text{terme de rotation} \\ F_v(t) &= \int_{\Omega} F(a,t) da && \text{terme de translation} \end{aligned}$$

Le terme de rotation s'applique au composant rigide, tandis que celui de translation s'applique au centre de gravité C du corps, dont la position est recalculée à chaque instant selon l'expression :

$$C(t) = \int_{\Omega} \mu(a) * X(a,t) da$$

La résolution numérique est beaucoup moins lourde qu'avec la formulation initiale (notamment grâce à la nouvelle expression utilisée pour l'énergie de déformation), elle invoque:

- une discrétisation par différences finies selon les noeuds du maillage géométrique, qui fournit un gros système d'équations différentielles ordinaires du second ordre.
- une approximation des dérivées temporelles, qui permet d'obtenir un système d'équations linéaires.
- la résolution du système linéaire obtenu.

Diverses méthodes de résolution de système linéaire permettent alors de calculer l'état du système à chaque pas de temps : Choleski, Gradient conjugué, SOR (successive over relaxation), ADI (alternating direction implicit) [GW84] ...

Enfin, les auteurs s'appuient sur les éléments rhéologiques de base [Bam81] pour classer les différents comportements du matériau : ressort, amortisseur (angl. dashpot), patin... , modèle de Maxwell, modèle de Voigt. D'une manière générale les déformations inélastiques sont calculées par des processus dédiés de modulation des paramètres (fractures) et de mise à jour de la forme de base (mémoire des déformations, plasticité ...)

Fractures

Une limite de rupture est prédéfinie à partir de la mesure de la déformation, ou de la force, pour chaque noeud du maillage. La rupture est obtenue en mettant à zéro les paramètres de raideur lorsque les déformations, ou la force, ont excédé le seuil spécifié. En pratique, les auteurs utilisent des fonctions stochastiques pour contrôler la limite de rupture, de manière à augmenter le réalisme.

Comportement de fluide visco-élastique

La déformation $e(a,t)$ à l'instant 't' est calculée à partir des équations générales ci-dessus (qui correspondent à un ressort tridimensionnel produisant une réponse élastique linéaire, tandis que la forme de référence $r(a,t)$ est mise à jour par la relation suivante, qui correspond au comportement de l'amortisseur ($z(a)$ est la constante de viscosité définie au point a) :

$$\frac{\partial r}{\partial t}(a,t) = \frac{1}{z(a)} \cdot e(a,t)$$

Ainsi, à chaque pas de simulation une partie de la déformation est transmise à la forme de base, ceci dans le but de modéliser la 'mémoire' du matériau (déformations irréversibles, écrouissage...) en entretenant une histoire des déformations. Pour obtenir des comportements visco-élastiques plus complexes les auteurs proposent d'introduire des non-linéarités dans l'expression précédente.

Comportement élasto-plastique

Dans ce cas toute la déformation est transmise au composant de référence ($r(a,t) = q(a,t)$), aussitôt que la force appliquée dépasse le seuil de plasticité spécifié. D'autre part le processus modifie localement les paramètres d'élasticité et de viscosité du modèle en fonction des déformations subies, afin de simuler un phénomène d'écrouissage (qui devrait d'ailleurs plutôt donner lieu à une augmentation du seuil de plasticité).

Ces auteurs finissent donc par construire un modèle hybride, en superposant un modèle de matière déformable à un noyau parfaitement rigide, afin d'élargir les catégories représentables à des objets plus rigides puis à des comportements inélastiques. Ceci les conduit à s'éloigner petit à petit du modèle mathématique de départ et de la référence physique des phénomènes simulés. Mais dans tous les cas la mise en oeuvre informatique, qui se base sur un modèle mathématique complexe et donc invoque des outils d'analyse et de résolution sophistiqués et lourds à manipuler, aboutit à des traitements très coûteux en temps d'exécution et en capacité de mémoire des machines, et ceci malgré les importantes approximations, effectuées sur le système d'équation pour le rendre

calculable. D'autre part la structure du modèle final rend peu aisée, et en tout cas peu intuitive, la manipulation directe de propriétés spécifiques de déformation, telles que le taux et la nature de la compressibilité, l'érouissage et les seuils de rupture. La définition de morceau de matière non homogène, ou ayant une réponse élastique non isotropes, semble également hors de portée.

B.2 Méthode basée sur la notion de contrainte

Enfin, nous devons souligner le travail de Platt et Barr dans [PB88]. Ces auteurs reprennent la formulation des équations du mouvement introduite dans [TPBF87], mais proposent une méthode particulière pour la prise en compte des propriétés du matériau (incompressibilité, plasticité...). La démarche est la même que celle qui avait déjà été adoptée pour les objets rigides dans [BB88] (cf § II.2.2). Le propos est de formuler les propriétés du matériau directement sous forme de relation entre les paramètres (x_i) du modèle. La relation obtenue se présente sous la forme d'une 'équation de contrainte' du type $g(q) = 0$. Les équations du mouvement sont alors intégrées à un problème d'optimisation sous contrainte :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } f(x) \\ & \text{sous la contrainte } g(x) = 0 \end{aligned}$$

Les auteurs affirment que le problème du mouvement peut être formulé comme ci-dessus en considérant qu'un objet déformable minimise à tout instant son énergie potentielle de déformation (ce qui suppose implicitement que l'on ne s'intéresse qu'aux matériaux hyperélastiques). Le problème peut alors être résolu dans le cas qui nous intéresse par une méthode adéquate de calcul sous contrainte. Les auteurs utilisent la méthode du 'Lagrangien augmenté' (extension de la méthode des multiplicateurs de Lagrange) qui permet de calculer la solution du problème initial à partir des équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} - c \cdot g \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \\ \dot{\lambda} &= g(x) \end{aligned}$$

où, λ est une inconnue supplémentaire (le multiplicateur de Lagrange), et 'c' est un coefficient multiplicatif (terme de pénalité). Le terme de droite de cette équation est égal à la dérivée de l'énergie du système : $\dot{x}_i = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}$.

Platt et Barr présentent les équations de contrainte correspondant à des matériaux incompressibles et à des matériaux modelables (comportement plastique). Ils précisent que la méthode permet de combiner plusieurs contraintes simultanées, et donc de représenter des matériaux plastiques et incompressibles par exemple.

II.3.2 Vers des modèles simplifiés ...

Les constatations que nous venons de faire sur les coûts exorbitants, en calcul et en capacité de mémoire, impliqués par la mise en oeuvre des modèles physiques d'objets déformables, constituent la motivation de certains travaux. Ces derniers visent à réduire la complexité en intervenant sur deux aspects des modèles, d'une part sur la représentation géométrique de la forme de base de l'objet et sur les opérateurs de déformation permettant de la manipuler, et d'autre part, sur la dimension de l'espace d'état (nombre de degré de liberté de déformation) de l'objet. Ce dernier point consiste donc à réduire la variété des déformations possibles. Nous allons nous intéresser plus particulièrement à deux méthodes conçues pour ces objectifs. Elles exploitent toutes deux les outils de déformation géométrique que nous avons évoqué précédemment (déformations globales et FFD [Bar84, SP86]), mais procèdent de manière différente pour réduire la complexité du modèle dynamique associé. Ces travaux s'éloignent encore plus des modèles de la mécanique des milieux continus et font porter les approximations non plus seulement sur la mise en oeuvre numérique, mais également sur la représentation mathématique des objets à simuler.

A. Dynamique modale

La première de ces approches est originale par la méthode de simulation physique qu'elle exploite, mais elle est également restrictive dans les catégories de système dynamique qu'elle permet de traiter. Il s'agit des travaux de Pentland & al. [PW89, Pen90a, FP92], qui propose de réaliser la simulation d'objets volumiques déformables en exploitant une technique développée pour l'étude des mouvements vibratoires et habituellement utilisée dans le domaine de la synthèse sonore : l'analyse et la synthèse modale.

Le but premier de Pentland est de réduire de manière drastique la complexité calculatoire des 'algorithmes' de calcul du comportement dynamique, de détection et d'analyse des interactions et de calcul des forces de contrôle de l'effet désiré (problème de dynamique inverse). Les chiffres avancés par Pentland dans [Pen90a], qui correspondent à la simulation d'un "monde" contenant mille objets décrits chacun par un maillage comprenant mille points et en interactions par groupe de dix, sont effectivement effarant comparés à la puissance actuelle (aussi bien qu'à moyen terme) des machines. La solution proposée vise alors, au prix éventuel d'une moindre exactitude des mouvements simulés, à garantir une complexité linéaire en nombre d'objet ($O(n)$) pour les algorithmes mis en oeuvre par la simulation.

Cet objectif particulièrement ambitieux (dans la mesure où il s'agit, comme nous venons de le voir, de représenter des phénomènes fortement non-linéaires) est atteignable selon les auteurs grâce à la synthèse modale. L'analyse et la synthèse modale conduisent effectivement à des algorithmes de calcul particulièrement efficaces, mais ne sont utilisables que sous des hypothèses assez contraignantes. Cette technique est opérante à partir d'un système d'équations linéaires du

type de celui auquel aboutissent Terzopoulos et al. après les différentes opérations de linéarisation que nous avons décrites précédemment, c'est à dire un système de la forme :

$$M \cdot \partial^2 u / \partial t^2 + Z \cdot \partial u / \partial t + K \cdot u = F.$$

Le principe consiste à diagonaliser simultanément les trois matrices de ce système : M (matrice de masse), Z (matrice de viscosité) et K (matrice d'élasticité) en résolvant le problème de la recherche des valeurs et des vecteurs propres de ces matrices. Ces vecteurs forment la base de 'l'espace modal', et permettent de calculer les matrices servant à passer de l'espace euclidien (celui des mouvements) à l'espace modal, et inversement. Cette opération n'est évidemment pas toujours réalisable, et Pentland se place dans une des conditions suffisantes (matrice de viscosité proportionnelle [Djo90-92], ou *Raleigh damping matrix* [Pen90a]), qui s'exprime par la dépendance linéaire des matrices M, K, et Z : $Z = \alpha.M + \beta.K$ (α et β sont des constantes réelles). Sous cette condition, on montre qu'il existe une matrice de passage P telle que les matrices $(P^T M P)$, $(P^T Z P)$ et $(P^T K P)$ soient diagonales.

Cette hypothèse restreint bien évidemment la variété des comportements simulables avec cette méthode. Le système résultant est formé d'équations différentielles du second ordre *indépendantes entre elles* (équations du type : $m_i \ddot{u}_i + z_i \dot{u}_i + k_i u_i = f_i$), chacune correspondant à un "mode" de vibration de la structure étudiée.

Cette méthode permet également de calculer les 'déformés' de la structure. Ces déformés sont en réalité les différentes configurations que peut prendre la structure en fonction du mode excité, les déformations complètes sont alors obtenues en combinant linéairement ces déformés selon la manière dont les différents modes sont excités (figure 2).

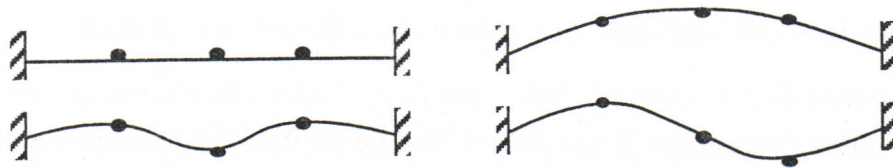


Figure 2 : déformés d'une structure linéique à trois modes.

La simulation modale autorise notamment un allégement des calculs en tronquant les modes les plus élevés, qui correspondent aux mouvements de faible amplitude et à haute fréquence et qui ont peu d'influence sur le comportement visible. L'intérêt est alors d'éviter le calcul des déformations correspondant à ces modes, et de pouvoir augmenter le pas d'échantillonnage sans provoquer des problèmes de divergence ou de continuité du mouvement perçu (*aliasing temporel* [PW89]), puisque les modes calculés, de plus basse fréquence, supporteront un échantillonnage temporel plus large.

La démarche adoptée par Pentland conduit à ne simuler que peu de modes, mais également à utiliser les mêmes déformés (c'est à dire le résultat du calcul d'un unique modèle modal) pour animer plusieurs objets appartenant à une même catégorie de formes. Le 'placage' de ces déformés

sur la représentation graphique de l'objet à animer est alors obtenu par l'intermédiaire d'opérateurs de déformation globale du type de ceux introduits dans [Bar84]. A chaque déformé est associée une fonction polynomiale qui permettra de construire l'opérateur de déformation. Pour ce faire, les modes sont classés de manière à déterminer le degré du polynôme qui leur sera associé (l'auteur précise que l'on peut établir une relation entre ce classement et la valeur propre de chaque mode, sans l'explicitier) : mode d'ordre zéro (correspondant au mode nul, généralement ignoré en synthèse modale) pour les déplacements, mode d'ordre un pour les déformations à profil linéaire, mode d'ordre deux pour les déformations à profil quadratique, etc...

Le modèle géométrique utilisé pour décrire la forme de base des objets est formé de fonctions implicites (isosurfaces), ce qui permet, si l'on se restreint à la combinaison de certaines primitives simples (sphères, superquadriques), de leur associer une fonction du type 'dedans/dehors'. Ces fonctions permettent de déterminer rapidement la distance entre deux objets, ou l'appartenance d'un point à un objet ($(x,y) \in \text{domaine} \Leftrightarrow g(x,y) \leq \text{iso_valeur}$). Lorsque l'on se restreint à l'utilisation de sphères comme primitives de base, cette distance correspond à la distance euclidienne ; la complexité globale de l'algorithme de détection des collisions reste alors linéaire en fonction du nombre d'objets de la scène. Ce qui correspond à l'objectif que s'était fixé les auteurs de ces travaux.

L'approche développée par Pentland et al. revient finalement à utiliser un modèle dynamique simple comme contrôleur de déformation géométrique globale. Il s'agit d'animer un objet composé d'une part d'un modèle géométrique représentant la forme de base (éventuellement sophistiquée), et d'autre part, d'opérateurs de déformation globale associés aux équations du mouvement d'un système dynamique simple (6DDL pour le mouvement rigide + quelques DDL de déformation).

B. Le modèle physique en tant que contrôleur de déformation globale

Witkin et Welch adoptent dans des travaux récents une démarche similaire à celle que nous venons de présenter, sans utiliser cependant la dynamique modale [WW90]. La troncature des modes élevés et l'utilisation d'opérateurs de déformation reviennent finalement à réduire le nombre de degrés de liberté de déformation du corps étudié. Witkin et Welch proposent donc de déterminer explicitement le nombre et la nature des degrés de liberté de déformation d'un objet, en lui associant au préalable un opérateur de déformation globale. Le modèle géométrique d'un objet est alors composé d'une forme de base (par exemple une surface paramétrée) à laquelle est attaché un repère, et d'un opérateur de déformation. Les mouvements sont entièrement contrôlés par les paramètres du déplacement du repère lié à l'objet (translation et rotation) et par les paramètres de déformation. A chaque 'déplacement' de ces paramètres correspond un déplacement des points du système paramétré. Les auteurs écrivent alors directement les équations Lagrangienne du mouvement dans cet espace paramétrique, le vecteur des paramètres jouant le rôle des coordonnées généralisées du système. Des opérations de produit matriciel permettent de passer des coordonnées (x,y,z) d'un point X dans la configuration 'déformée' aux coordonnées paramétriques (u,v,w) de

ce même point, noté P, dans la configuration 'non déformée', et d'exprimer notamment l'énergie cinétique du système en fonction des coordonnées et vitesses généralisées ainsi définies. Les forces s'opposant aux déformations vont également s'écrire en fonction du vecteur des coordonnées généralisées.

Afin de réduire encore la complexité du modèle, les auteurs génèrent toutes leurs déformations globales à partir d'opérateurs linéaires grâce à une astuce de paramétrage. Toute transformation 'polynomiale' peut par exemple s'écrire sous la forme : $X(t) = R(t) \cdot Z(P)$, où $R(t)$ est une application linéaire de \mathbb{R}^{10} dans \mathbb{R}^3 , mais où $Z(P)$ est constante par rapport au temps et est une fonction non-linéaire des coordonnées 'non déformées' :

$$Z(u,v,w) = [1, u, v, w, uv, uw, vw, u^2, v^2, w^2]$$

Les formules de dérivation s'écrivent alors :

$$\dot{X}_i(t) = \sum_j \dot{R}_{ij}(t) \cdot (Z(P))_j \quad \text{pour la vitesse}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum \dot{R}_{ij} \dot{R}_{ik} M_{jk} \quad \text{pour l'énergie cinétique}$$

où M_{jk} est la matrice de masse (constante symétrique) ; pour un corps Ω : $M_{ij} = \sum_{P \in \Omega} (m \cdot Z(P)_i \cdot Z(P)_j)$.

Le fait d'écrire les opérateurs de déformation sous la forme $R \cdot Z$, où Z est constante et R linéaire, permet d'aboutir à des expressions particulièrement simples pour les équations du mouvement.

L'énergie potentielle de déformation peut être incorporée au terme de force généralisée Q ; le Lagrangien du système est alors égal à l'énergie cinétique, et les équations du mouvement s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q} + Q = 0$$

où Q est la force généralisée et E_c l'énergie cinétique du système. Les coordonnées généralisées du système sont $q = R_{rs}$ (ligne r , colonne s de la matrice R), et donc :

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{R}_{rs}} = \dot{R}_{rk} M_{ks}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{R}_{rs}} \right) = \ddot{R}_{rk} M_{ks} \quad \text{et} \quad \frac{\partial E_c}{\partial q} = \frac{\partial E_c}{\partial R_{rs}} = 0$$

Ce qui donne le système d'équations matricielles $\ddot{R}_{ij} = Q_{ik} W_{kj}$, où W_{kj} est la matrice inverse de M_{ij} , et peut donc être calculée une fois pour toutes.

Enfin, la matrice Q_{rs} des forces généralisées, due aux forces f exprimées dans l'espace 'non déformé' (gravité par exemple), s'écrit :

$$Q_{rs} = \sum_i \left(f_i \cdot \frac{\partial X_i}{\partial R_{rs}} \right) = f_r \cdot Z_s$$

Les forces potentielles de résistance à la déformation sont calculées directement à partir de la matrice R_{ij} .

Les calculs mis en jeu sont particulièrement simplifiés lorsque l'on se restreint à ce que Witkin appelle un 'corps déformable affine', et qui correspond au paramétrage suivant pour les déformations :

$$Z(u,v,w) = [u,v,w,1]$$

et

$$R = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & t_1 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & t_2 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & t_3 \end{pmatrix}$$

où la matrice $(m)_{ij}$ est une matrice de transformation linéaire et (t_1, t_2, t_3) est un vecteur de translation.

Cette restriction permet notamment un calcul simple des forces correspondant aux propriétés globales de l'objet, comme la conservation du volume lors des déformations. Enfin les auteurs montrent que cette méthode d'animation d'objets déformables est compatible avec les techniques de contrôle du mouvement par contraintes, développées notamment par Witkin et al. dans [WGW90]. La restriction à des contraintes s'exprimant linéairement en fonction d'un ou de plusieurs points du système permet, en exploitant le modèle de 'corps déformable affine', d'aboutir à un système d'équations particulièrement simple.

Le même type de démarche est repris par Metaxas et Terzopoulos dans [MT92]. Les auteurs s'attachent à hybrider les méthodes de déformations globales, avec la technique basée sur une représentation nodale (maillages obtenus par différences finis ou par éléments finis, comme dans [TF88]), qui permettent de gérer les déformations locales. Pour chaque noeud de la représentation paramétrique du corps, on peut écrire:

$$X(t) = C(t) + R(t)[s(t) + d(t)]$$

où,

- $X(t)$ est la position du noeud par rapport à un repère fixe.
- $C(t)$ est la position du centre de gravité du corps (mouvement rigide).
- $R(t)$ est une matrice de rotation (mouvement rigide).
- $s(t) = T(a_i; b_i)$, les a_i étant les coordonnées paramétriques du noeud dans la forme de base et T un opérateur de déformations globales, dépendant des paramètres b_i .
- $d(t) = S.q_d$, S étant une matrice associée à la représentation paramétrique et q le vecteur de paramètre donnant les déplacements de chaque noeud (déformations locales).

Le vecteur des coordonnées généralisées s'écrit alors : $q = (C(t), \theta(t), [a_i; b_i](t), q_d(t))$, où les $\theta(t)$ sont les coordonnées angulaires (composantes de $R(t)$). Le système d'équations global décrivant le mouvement est de la forme :

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = f$$

Les auteurs s'imposent de plus la restriction $D = \alpha.M + \beta.K$ (matrice de viscosité proportionnelle, ou Raleigh damping matrix), ce qui leur permet de diagonaliser les matrices du système qui sera

donc résolu très rapidement. Le contrôle du mouvement est réalisé à travers l'élaboration d'équations de contraintes similaires à celles utilisées dans [BB88], dans le sens où elles impliquent le calcul d'une force dépendant linéairement de la déviation à la contrainte et ne conduisant pas à un respect exact de cette dernière ; les équations de contraintes sont directement intégrées au système final.

Comme dans les approches précédentes, de Pentland et Witkin, le point critique est celui des possibilités du système à produire les mouvements pertinents pour une application donnée. La question sous-jacente est celle du choix du nombre et de la nature des degrés de liberté de déformation qu'il faut conférer aux différents objets. Aucun de ces auteurs ne précise comment opérer ces choix. D'autre part ces approches consistent à travailler dans deux espaces différents : un espace euclidien, dans lequel la forme de base est définie, et un espace des mouvements, qui est isomorphe mais non identique au premier. Ceci implique notamment que la détection des interactions et le traitement dynamique associé ne peuvent se faire dans le même espace, et que chaque traitement d'interaction impliquera des calculs matriciels d'autant plus lourds que le modèle dynamique est riche (matrice de passage). Ce type de méthode semble notamment interdire la représentation d'interactions de surface complexes entre les objets (comme le frottement solide par exemple).

II.4 Modèles d'objets déformables quelconques

II.4.1 Modèles à constantes localisées

Il apparaît clairement que l'approche que nous venons d'illustrer, qui relève d'une représentation de la matière dans son aspect continu, au travers de modèles mathématiques complexes invoquant des outils d'analyse sophistiqués (de géométrie et d'analyse différentielle entre autre), ne permet d'aborder de manière efficace qu'une petite catégorie des corps déformables. Ce type de représentation n'est effectivement plus adéquat dès lors que l'on s'intéresse à la notion même d'objet, à travers des thèmes tels que la nature des interactions de surface, les propriétés de cohésion (ruptures et collages), les phénomènes de fluage, de propagation, de fissuration, de cisaillement...

Ces phénomènes sont généralement traités de manière spécifique par la physique à l'aide de représentations adaptées. Les modèles correspondant, qui sont dits *discrets* ou encore à *constantes localisées*, représentent les systèmes sous forme d'un ensemble de composants élémentaires (tels que des masses ponctuelles ou des barres rigides) et s'intéressent particulièrement aux interactions mécaniques entre chaque composants. Ce type de représentation est particulièrement utilisé dans le

cadre de l'étude de la dynamique des particules en général, autour de thèmes tels que les chocs et les collisions, les phénomènes de gravitation et les interactions microscopiques [AF79]. L'étude de structures telles que les ponts, dans leurs propriétés vibratoires et de propagation ou dans les phénomènes de fissuration et d'érouissage (diminution de la plasticité et augmentation de la fragilité d'un matériau à la suite de déformations successives), se fait également à partir d'une modélisation invoquant des composants mécaniques élémentaires interconnectés entre eux [Bam81]. Enfin de nombreuses études de biomécanique sont basées sur des modèles mécaniques discrets [KS86].

La simulation d'objets physiques à partir des modèles structurels discrets, avec lesquels la complexité se retrouve plus dans l'agencement de la structure que dans les calculs associés à chacun des composants élémentaires, conduit à des mises en oeuvre algorithmiques radicalement différentes de celles que nous avons vu au paragraphe précédent.

Ainsi, dans une approche utilisant les modèles discrets, le problème d'une représentation géométrique de la forme de l'objet ne se pose pas explicitement. Il ne s'agit pas ici de superposer un modèle de mécanique analytique à un modèle géométrique préexistant, mais plutôt de construire la forme à partir d'une interprétation de la structure et du comportement du système dynamique simulé.

Le comportement de tous systèmes dynamiques peut être approché par celui d'un ensemble de *points matériels* en interaction. Le point matériel est une abstraction qui consiste à considérer qu'une certaine quantité de matière, caractérisée uniquement par sa masse, est localisée en un point de l'espace, sans considération sur le volume qu'elle occupe. Un point matériel peut être vu par conséquent comme une entité physique idéalisée possédant trois degrés de liberté en translation ; son état dynamique est entièrement caractérisé par la donnée de sa position $[x, y, z]$ et de sa vitesse $[\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$.

Un système dynamique Ω composé de n points matériels en interaction (S_1, S_2, \dots, S_n) présentera $3 \cdot n$ degrés de liberté et son état dynamique est constitué des n 6-uplets suivant (où $[x_i, y_i, z_i]$ est la position dans l'espace du point S_i et $[\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i]$ sa vitesse) :

$$[x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i]_{i=1 \dots n}$$

Les mouvements d'un tel système sont caractérisés par les n équations du mouvement de chacun des points (figure 3), ce qui représente un système d'équations différentielles d'ordre deux qui peut être résolu par les méthodes que nous avons déjà citées (résolution directe du système différentiel, ou approximation des dérivées temporelles par différences finies, puis résolution du système linéaire obtenu). Dans le cas de points matériels, ces équations présentent une forme similaire, qu'elles soient développées à partir de la loi fondamentale de la mécanique ($\sum \vec{F} = M \cdot \vec{\Gamma}$), ou à partir des formulations énergétiques (par le Principe de Moindre Action ou le P.T.V., voir annexe A).

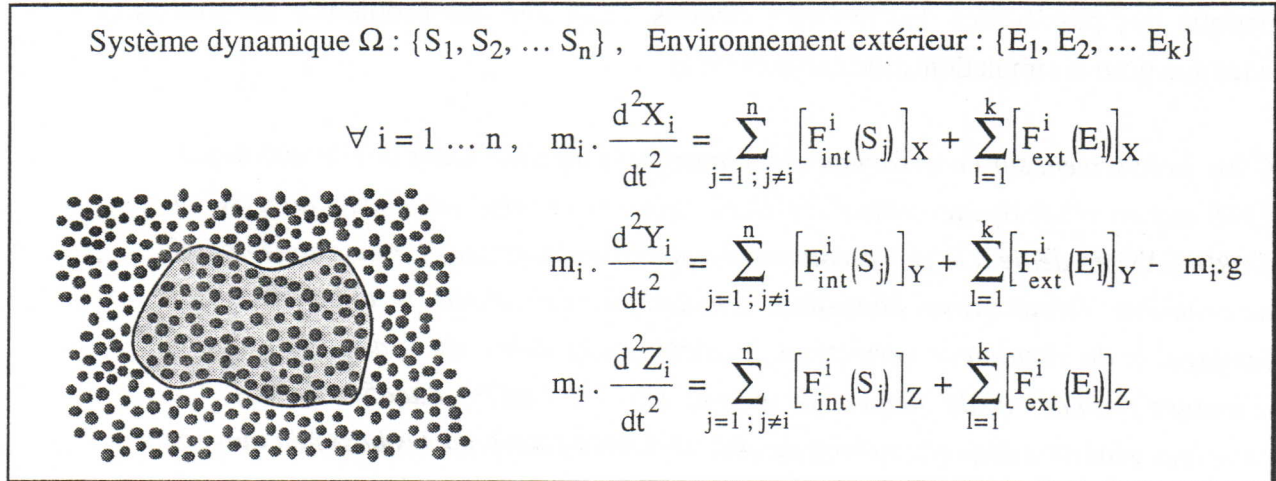


Figure 3 : système de points matériels

Les actions mécaniques intervenant sur un système de n points matériels en interaction (S_1, S_2, \dots, S_n), de masse respective (m_1, m_2, \dots, m_n), peuvent être classées ici aussi en actions d'inertie ($[m_i \cdot \Gamma_i]_{i=1 \dots n}$), en actions internes (F_{int} , représentant les interactions entre les S_j), et en actions externes (F_{ext} , généralement partagées en action à distance, comme la gravité, et en action de contact, comme les interactions entre les S_i et les particules E_l extérieures au système considéré). Mais toutes les actions internes et externes sont ici des forces (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de moment). De plus il n'y a pas de différence de principe entre forces internes et externes, toutes sont des forces ponctuelles calculées entre deux points comme une fonction de l'état dynamique de ces points (figure 3). En définitive, les approches basées sur une représentation discrète des systèmes dynamiques correspondent au choix de primitives physiques simples et intuitives tout en reportant la complexité de la représentation sur la structure donnée au système, c'est à dire au niveau des interactions intervenant entre les différents sous-groupes de points matériels.

II.4.2 Mises en oeuvre des modèles discrets

Les modèles discrets consistent donc à représenter l'objet (le système dynamique) sous la forme d'un réseau : les points matériels constituent les noeuds, tandis qu'une connexion entre deux noeuds représente une interaction entre les points correspondant. Ce type de structure est particulièrement familier en informatique, où il est exploité dans beaucoup de domaines. Le principe de modularité qui y est attaché, et qui permet de représenter les systèmes sous forme d'un ensemble de modules élémentaires communicants, adresse naturellement la question du parallélisme et d'une implantation multiprocesseurs. Ces considérations sur les propriétés fondamentales des modèles discrets ont bien sûr retenu l'attention de plusieurs chercheurs, et récemment certains ont tenté de montrer comment les exploiter en simulation et en animation par

ordinateur [HP88, HB90]. Cependant, peu de gens se sont consacrés à une exploration systématique des possibilités des modèles discrets, ainsi que des problèmes théoriques et techniques que pose la simulation structurelle discrète.

C'est précisément sur ce terrain que se sont engagés les chercheurs de l'ACROE depuis 1978 autour d'un thème central : l'élaboration et la mise en oeuvre du système CORDIS-ANIMA dédié à la représentation d'objets physiques sous forme d'assemblage de primitives élémentaires. Le système complet, formé du modèleur implémentant le langage, et du simulateur permettant le calcul des modèles, est dédié à la création d'images animées et de séquences sonores [Flo78, Cad79, Luc85, CLF90]. Les principes généraux dégagés au long de cette recherche, ainsi que les bases du langage de modélisation et de sa mise en oeuvre algorithmique, font l'objet du premier chapitre de la deuxième partie de ce document. Les chapitres suivants présentent les plus récents développements du système réalisés dans le cadre de la thèse qui est rapportée ici. Nous ne présenterons pas plus avant les travaux de l'ACROE dans cet "état de l'art" et renvoyons donc à la deuxième partie le lecteur désireux d'établir la comparaison, sur un point précis, entre les modèles élaborés dans le cadre du formalisme CORDIS-ANIMA, et les travaux réalisés par ailleurs¹. Cette lecture en parallèle doit pouvoir se faire sans difficulté dans la mesure où les deux exposés présentent sensiblement la même organisation : modèles de matières et de matériaux, études des interactions entre objets, et enfin génération et contrôle du mouvement.

Nous présentons dans ce paragraphe quelques-unes des mises en oeuvre les plus remarquables des modèles discrets ; elles correspondent pour la plupart à une application spécifiques mais démontrent clairement que, tout au moins pour les cas étudiés et dans la mesure des objectifs visés, les modèles discrets offrent des solutions plus souples et plus efficaces que celles envisageables à partir des modèles issus de la mécanique des milieux continus.

On peut distinguer, en observant les différents travaux réalisés sur ce sujet, deux types de mise en oeuvre des modèles à base de masses ponctuelles : les modèles de maillage, parfois appelé 'connected particle systems', qui s'adressent à des objets structurés, et les modèles particuliers, qui s'adressent généralement aux fluides et sont souvent présentés comme une extension des 'particle systems' de Reeves [Ree83, Sim90]. Cependant, il n'existe que très peu d'exploitations de ces modèles pour l'animation par ordinateur, et elles sont généralement motivées par l'impossibilité de traiter le phénomène ou l'application spécifique visée à l'aide des modèles continus.

¹ D'autre part, l'introduction de cette deuxième partie est consacrée à une réflexion générale sur l'intérêt et la nécessité, face aux développements de techniques et d'applications spécifiques pour l'animation par modèle physique, de travailler à l'élaboration d'un véritable langage de modélisation basé sur l'assemblage de primitives élémentaires ; le concept sous-jacent est celui d'une 'physique algorithmique'.

Les modèles de maillage correspondent à une approche plus modulaire, tout en conduisant à des représentations identiques à celles obtenues à partir des modèles continus (après linéarisation du système d'équation initial par discrétisation spatiale). Ils offrent un contrôle plus direct des paramètres du modèle, ce qui autorise un accès à la représentation de matériaux non homogènes et non isotropes. Enfin, comme nous le verrons au chapitre suivant, les modèles discrets permettent d'aborder la question des interactions entre objets de manière plus générale (c'est-à-dire pour une plus grande variété d'objets).

Nous avons évoqué les méthodes d'approximation spatiale d'un domaine par différence finie ou par éléments finis, qui sont utilisées pour transformer un système d'équations aux dérivées partielles en un simple système différentiel du second ordre. On peut voir ce type d'approximation comme un découpage du domaine étudié en volumes infinitésimaux. L'idée est alors ici de démarrer par la modélisation de ce petit morceau de volume à partir de masses ponctuelles, de micro-ressorts (avec longueur au repos L_0 : $F = k.(D - L_0)$, où D est l'élongation du ressort et k sa constante de raideur) et de micro-amortisseurs (si l'on vise un système dissipatif : $F = z.D$, où z est la constante de viscosité), puis d'assembler entre elles ces structures élémentaires (généralement hexaédriques), selon un maillage régulier, en mettant en commun les masses occupant les extrémités des arêtes adjacentes (figure 4). Dumond [Dum90] présente ce type de modèle comme une alternative aux formulations basées sur la méthode des éléments finis, qui s'avèrent très limitées dans le contexte de l'animation par ordinateur, ne serait-ce qu'à cause du coût de calcul qu'elles impliquent. Dumond parle d'un coût en n^3 pour un maillage par éléments finis, contre un coût en $\lambda.n$, λ fixé, pour un maillage réalisé à partir de composants discrets ! (ces coûts correspondent au choix d'une formulation à base de force et à une mise en oeuvre numérique, par opposition à une solution exploitant des outils de calcul symbolique et une formulation à base d'énergie, cf §II.2.1).

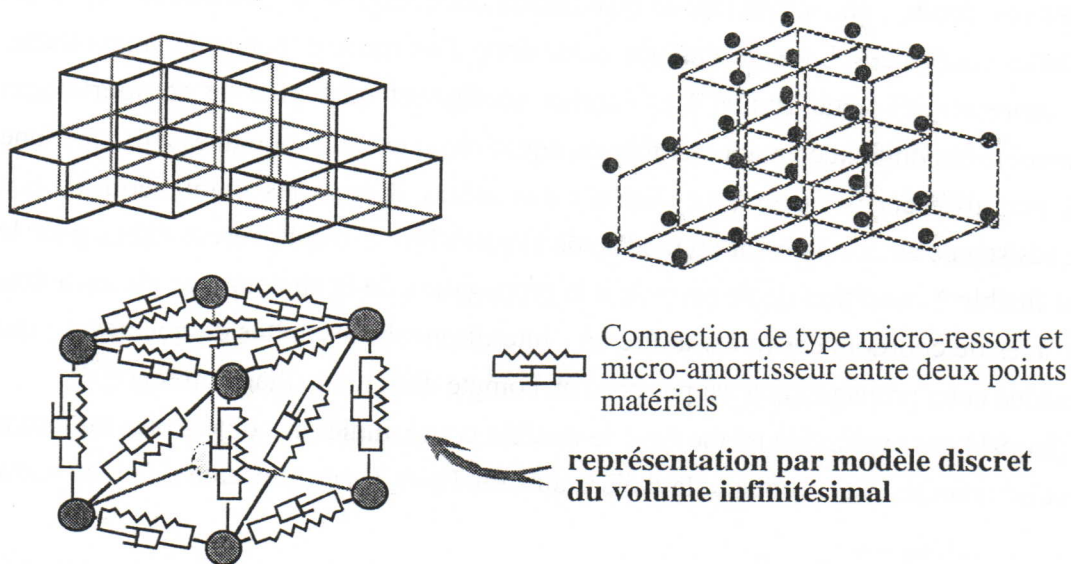


Figure 4 : maillages construits à partir de composants discrets

Un exemple représentatif de cette démarche est donné par Terzopoulos, Platt et Fleicher dans [TPF89]. Le but de ce travail est de simuler le comportement de matériaux élastiques fusibles, de l'état solide jusqu'à l'état liquide (le phénomène inverse n'est pas envisagé). L'état liquide est bien sûr impossible à représenter avec des approches par modèle continu, et c'est pourquoi les auteurs vont s'intéresser à une modélisation à partir de points matériels. Les équations initiales gouvernant le comportement visco-élastique sont exactement les mêmes que pour le modèle continu utilisé dans [TPBF87] (voir paragraphe II.3.1, partie A), tandis que la propagation de l'énergie calorifique (transferts de chaleur) est gouvernée par des conditions écrites à la surface de l'objet (conditions aux limites), et par une équation caractérisant la propagation de la température :

$$\frac{\partial (\mu\sigma\theta)}{\partial t}(u,t) - \nabla(C\nabla\theta(u,t)) = q(u,t)$$

où, $u=(u_1, u_2, u_3)$ sont les coordonnées paramétriques du noeud considéré,

$\mu(u)$ est la densité de masse et σ la chaleur spécifique (caractéristique du matériau),

$\theta(u,t)$ est la température au point u et à l'instant t ,

C est la matrice de conductivité thermique et ∇ est l'opérateur gradient : $[\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, \frac{\partial}{\partial u_3}]$,

$q(u,t)$ est le taux de variation (accumulation ou perte) de chaleur par unité de volume.

Chaque masse ponctuelle de la représentation discrète possède une température en plus de sa masse, tandis que les arêtes des composantes hexaédriques sont affectées d'une conductance, en plus des paramètres de visco-élasticité, afin de définir les conditions de propagation de la chaleur. La raideur d'une arête dépend linéairement de la chaleur des masses adjacentes et devient nulle au delà d'un seuil, afin de représenter le caractère fusible du matériau. Les paramètres d'élasticité, de viscosité et de conductance calorifique sont déduits des équations continues, ce qui correspond exactement à une approximation par différences finies dans les petites déformations. Lorsque la raideur des ressorts associés aux arêtes devient nulle, c'est-à-dire lorsque les arêtes correspondantes ont 'fondu', une interaction de type liaison intermoléculaire¹ est calculée entre les masses ponctuelles concernées. La représentation passe donc d'un modèle 'connecté' à un modèle 'particulaire' représentant l'état fluide. Les auteurs soulignent que, pour le comportement élastique, ce modèle conduit exactement aux mêmes équations que celles obtenues à partir d'une discrétisation par différences finies (les raideurs des arêtes diagonales étant déduites des paramètres de résistance au cisaillement du modèle de [TPBF87]) ; le résultat est le même pour le comportement fusible à condition de ne permettre la propagation de la chaleur que sur les arêtes parallèles aux axes de coordonnées (c'est-à-dire en l'interdisant sur les arêtes diagonales, ce qui est logique puisque cette propagation n'est pas prise en compte dans un maillage orthogonal). Norton et al. [Nor91] ont exploité le même type de modèle pour simuler des objets plus ou moins déformables et pouvant se briser (comme la théière du film *Topsy Turvy*, présenté au vidéo show

¹ Construite par exemple à partir du modèle de Lennard-Jones [AF79], qui définit des zones d'attraction et de répulsion entre les masses, voir le chapitre III de la deuxième partie de ce document pour une autre mise en oeuvre de ce modèle. ..

du SIGGRAPH'89). Les objets sont composés d'un assemblage d'éléments hexaédriques de forme variées (c'est-à-dire dont les arêtes ne sont pas forcément toutes de même longueur comme c'est le cas pour des maillages orthogonaux) portant une masse ponctuelle à chaque sommet, et dont les arêtes sont occupées par des liens visco-élastiques (micro-ressorts et micro-amortisseurs) ; ces derniers sont associés à un seuil de rupture (i.e. dès que D dépasse un certain seuil, k est mis à zéro, ou si l'on préfère, le ressort disparaît).

Les modèles discrets connectés constituent également une solution efficace lorsque l'animation visée nécessite un contrôle complexe sur le mouvement. Ainsi, Miller dans [Mil88] modélise un serpent à partir de l'assemblage d'éléments hexaédriques : il se donne ainsi les moyens, d'une part, de modéliser de manière simple l'effet des écailles formant la peau d'un vrai serpent, en appliquant une force d'interaction de frottement de sol unilatérale, et d'autre part d'obtenir des mouvements de progression très réalistes en réalisant une modulation des paramètres d'élasticité des micro-ressorts. Enfin, Velho et Gomez utilisent le même type de modèle dans [VG91] pour générer, à partir d'une surface définie par une fonction implicite, un modèle physique d'objet déformable. La fonction implicite est utilisée pour générer les forces permettant de 'mouler' le maillage masse-ressort-frottement initial sur la surface. Il s'agit donc plus ici d'une méthode permettant de construire automatiquement des modèles d'objets physiques, à partir de descriptions géométriques de leurs formes. Par la suite, le modèle est éventuellement affiné, afin d'obtenir un objet spécifique, en modifiant les paramètres d'inertie et de visco-élasticité du maillage (qui ne sont pas forcément les mêmes que ceux utilisés pour le moulage).

Les modèles discrets ont par ailleurs été utilisés pour la modélisation de surfaces déformables. Wejchert et Haumann décrivent dans [WH91] un modèle permettant de représenter des feuilles mortes volant au vent. Les feuilles sont représentées par des surfaces élastiques sous forme d'un ensemble de masses ponctuelles assemblées entre elles par des micro-ressorts et des micro-amortisseurs. Les mouvements de ces feuilles sont obtenus par des forces calculées à partir de champs de vitesse représentant un vent tourbillonnant. Le même type de représentation est utilisé par House, Breen et Getto dans [HBG92] pour simuler des tissus en interactions avec des obstacles solides. La représentation sous forme d'un maillage de masse ponctuelle leur permet d'intégrer au modèle, de manière simple et directe, les données expérimentales sur la résistance à l'étirement, au pliage ou à la torsion de tissus manufacturés.

Ainsi, l'ensemble de ces travaux sont basés sur l'utilisation de primitives relativement simples, et aboutissent cependant à des animations riches et complexes - la plupart du temps hors de portée avec les modèles continus - par des expérimentations successives conduisant à un réglage fin des paramètres du modèle.

Il est intéressant de remarquer que les maillages obtenus à partir de masses ponctuelles ont souvent permis, par leur souplesse de mise en oeuvre, d'élargir le champ d'utilisation de la simulation dynamique. Ainsi Chadwick, Haumann et Parent dans [CHP89] utilisent un maillage discret pour restituer des effets de déformation et d'inertie dans des séquences d'animation créées au préalable avec des modèles géométriques et cinématiques. Les modèles utilisés pour l'animation de caractères

sont basés sur une représentation structurée en couche plus amplement décrite dans [CP88]. Ceci permet, à partir d'un mouvement spécifié sur une chaîne cinématique (calcul des positions dans l'espace des configurations) représentant le squelette du personnage, de gérer les déformations à plusieurs niveaux et en plusieurs passes. Dans un premier temps, les diverses positions du squelette sont utilisées pour créer des déformations 'musculaires' à partir d'une grille FFD (Free Form Deformation [SP86]). Enfin, dans une deuxième passe de calcul, on va restituer l'élasticité des chairs en exagérant les effets, comme cela est pratiqué en animation traditionnelle. Pour cela, certains points du maillage FFD, dits 'non dynamiques' vont servir à générer le mouvement d'un maillage de masses ponctuelles, isomorphe au maillage FFD. En retour, les mouvements des masses ponctuelles vont servir à modifier les points de contrôle utilisés pour générer les déformations géométriques à travers le maillage FFD.

Pour finir, il faut citer l'approche particulière de M.P. Gascuel dans [Gas90, GVP91], qui fait cohabiter, au sein d'un même modèle, un noyau parfaitement rigide et une enveloppe déformable. Cette 'peau' visco-élastique est formée d'un ensemble de masses ponctuelles reliées au noyau par des ressorts et des amortisseurs unidimensionnels. Le mouvement libre (sans interaction) se calcule par les équations du mouvement des rigides solides articulés. Cette approche permet surtout de traiter de manière élégante la question des interactions entre solides rigides articulés (qui sont donc ici déformables en superficie) ; nous y reviendrons dans le chapitre suivant.

III. LE MODÈLE PHYSIQUE :

INTERACTIONS ENTRE OBJETS

III.1 Introduction

Les différents modèles que nous avons présentés dans le chapitre précédent, qu'ils soient basés sur une représentation continue ou discrète de la matière, et qu'ils s'intéressent aux objets rigides ou déformables, ne posent pas explicitement le problème des interactions entre ces objets. Or, cet aspect est bien sûr fondamental pour la synthèse de mouvements réalistes. L'objet du présent chapitre est de décrire les méthodes utilisées en complément pour prendre en compte les aspects géométrique et dynamique des contacts entre objets.

Puisque les modèles continus exploitent une représentation géométrique de base pour l'objet, ils vont nécessiter une phase de détection et de caractérisation de la géométrie des contacts afin de permettre le calcul des grandeurs dynamiques (accélération, vitesse, quantité de mouvement, force ou moment) destinées à être incorporées aux équations du mouvement. Les premiers travaux se consacrent essentiellement au problème de l'interpénétration des corps, pour lequel il est souvent nécessaire de distinguer les contacts instantanés (comme lors des chocs) et les situations d'équilibre (comme dans les empilements). Par la suite, certains chercheurs se sont intéressés à la question des frottements de surfaces, qui jouent un rôle important dans le comportement des objets.

Pour les modèles à base de masses ponctuelles (particulièrement dans le cadre de ce que nous avons appelé les modèles particuliers), le problème des interactions entre objets se pose différemment. Il n'y a pas de différence de principe, dans ce cas, entre la représentation du comportement du matériau constitutif, lequel est caractérisé par les lois d'interaction interne, et la représentation des chocs et des contacts prolongés entre objets. Cependant, les forces d'interactions entre deux objets distincts, forcément dues aux interactions entre masses ponctuelles, doivent être calculées selon des lois représentant le caractère non-linéaire et discontinu des situations de contact, par opposition aux forces linéaires et continues issues des micro-ressorts et des micro-amortisseurs utilisées pour le calcul des forces internes à un objet.

III.2 Interactions entre solides parfaitement rigides

III.2.1 Détection, analyse, et catégorisation des situations de contact

Le traitement des interactions entre rigides solides nécessite en premier lieu une détection géométrique des interpénétrations. Ce problème s'est posé depuis que les modèles géométriques d'objets manufacturés existent et a très tôt donné lieu au développement de nombreux algorithmes de détection [Mar72, Boy79]. Certains chercheurs se sont par la suite appliqués à créer des méthodes plus particulièrement adaptées à l'animation [Hah88, HBZ90, BV91, LiC92]. Ces algorithmes de détection sont censés fournir pour chaque couple de solides en interactions une normale à la surface de contact, qui permet de définir une direction de réaction au choc. Cette normale ne peut être calculée dans toutes les configurations (contacts sommets/sommets par exemple) ; elle est alors fixée arbitrairement ou selon des stratégies de 'choix'.

On trouve dans la littérature deux types de méthode pour traiter les chocs entre objets parfaitement rigides : les méthodes dites 'analytiques', qui se fixent pour but d'analyser les situations de contact afin de calculer des comportements dynamiques *corrects*, c'est-à-dire cohérents avec l'hypothèse de rigidité parfaite des corps, et des méthodes dites de 'pénalités' (angl.: penalty methods). Les modèles d'interaction entre rigides parfaitement solides distinguent systématiquement les situations de contacts 'instantanés' (c'est-à-dire les impacts, qui correspondent à des collisions à grande vitesse) et les contacts prolongés (c'est-à-dire durables et qui correspondent à des situations d'équilibre).

La plupart des travaux existant traitent les chocs instantanés par des méthodes analytiques, et les contacts prolongés par des méthodes de pénalité. Ces dernières, que nous présenterons plus en détail dans le cas des corps déformables, invoquent simplement un calcul de force effectué à partir de la configuration géométrique du contact, et d'une mesure de l'interpénétration. Les méthodes de pénalités sont parfois interprétées comme l'introduction temporaire d'éléments mécaniques entre les objets en contact (typiquement des micro-ressorts). Elles donnent lieu au calcul de forces destinées à s'opposer aux pénétrations, et fournissent des solutions approchées qui correspondent à de légères interpénétrations des corps.

III.2.2 Analyse dynamique des collisions : la théorie des impulsions

Il s'agit de l'analyse des impacts entre solides rigides connue sous le nom de 'théorie des impulsions' et développée en 1905 par Routh ; on la retrouve dans grand nombre des exposés modernes de mécanique. La plupart des méthodes de simulation physique développées pour l'animation sont également basées sur la théorie des impulsions [Hah88, MW88, Bar89, Ver90].

Elles visent à calculer directement les vitesses (linéaires et angulaires) résultantes pour chacun des corps à partir de l'impulsion correspondant au choc. L'impulsion \vec{P} subie par un objet est une grandeur égale à la variation de sa quantité de mouvement lors du choc ($\vec{P} = m \cdot \Delta \vec{V}$). Le problème s'exprime alors sous la forme d'un système linéaire de quinze équations pour quinze inconnues (l'impulsion P associée au choc, et les vitesses linéaires et angulaires de chacun des corps après le choc).

Ces équations sont obtenues en écrivant :

- les lois de conservation des moments linéaires et angulaires durant le choc, ce qui fournit 12 équations (les ' indiquent les quantités après le choc) :

$$\vec{P}_1 = m_1 \cdot (\vec{v}_1' - \vec{v}_1) = -\vec{P}_2 = m_2 \cdot (\vec{v}_2' - \vec{v}_2)$$

et

$$J_i \cdot (\vec{\omega}_i' - \vec{\omega}_i) = \vec{R}_i \wedge \vec{P}_i \quad i = 1, 2$$

- une relation liant les vitesses avant et après le choc, qui caractérise le taux d'énergie dissipée. Cette relation fait intervenir un coefficient de restitution ϵ qui peut varier de 0 à 1 ; il faut noter que, dès que $\epsilon < 1$, la représentation est en contradiction avec l'hypothèse de rigidité parfaite, puisque cette dissipation d'énergie est généralement due aux déformations des corps.
- et enfin, deux dernières équations qui caractérisent les frottements de surface et correspondent à une interprétation de la loi de Coulomb. On distingue alors les contacts sans glissement, c'est-à-dire pour lesquels la vitesse tangente est nulle, et les contacts avec glissement, pour lesquels la composante tangente de l'impulsion doit vérifier la relation de Coulomb : $P_{tg} \leq \mu \cdot N$ (où N est la réaction normale à la surface).

Les modèles de simulation proposés par Hahn [Hah88] et Moore et Wilhelms [MW88] exploitent cette formulation du problème pour gérer le choc d'un couple de corps solides en contact en un point unique. Anne Verroust [Ver90] traite également les collisions par le calcul d'impulsions, mais son modèle se restreint au cas de l'impact entre une chaîne rigide articulée et un plan fixe. Cette méthode pose un problème remarquable : le choc ne peut être traité que si la pénétration entre les corps à l'instant du calcul (lequel est réalisé avec un pas de temps fixe) est suffisamment faible. Cette difficulté est systématiquement contournée par une technique de pas de temps adaptatif, c'est-à-dire que l'on va approcher l'instant où le choc est traitable, par un algorithme de dichotomie par exemple, en effectuant des retours en arrière dans le temps (un exemple de procédure élaborée sur cette technique, souvent appelée 'backtraking', est décrit dans [Dum90]). Cette technique devient très délicate dans le cas de chocs entre plusieurs corps, et implique bien sûr une complexité variable.

Les contacts prolongés sont traités chez Hahn par une suite de chocs calculés à chaque pas de temps (ce qui est coûteux car les objets en contact ne se trouvent quasiment jamais en équilibre) et chez Moore et Wilhelms par une méthode de pénalité (souvent vue comme l'introduction

temporaire d'un ressort, cette méthode conduit au calcul d'une force élastique proportionnelle à l'interpénétration des corps). Ces derniers prennent également en compte les contacts multiponctuels par une série de chocs monoponctuels successifs. Dans le modèle d'Anne Verroust [Ver90], les contacts prolongés sont traités par le calcul de forces s'opposant à l'interpénétration des corps, grâce à une méthode alliant un calcul de forces de pénalités (comme dans [MW88]) et une méthode de projection (calcul d'une composante s'opposant aux forces extérieures qui tendent à provoquer la pénétration). Baraf va, pour sa part, tenter de développer une méthode analytique visant au calcul de forces 'dynamiquement correctes', et conduisant à la résolution d'un système complexe d'inéquations. Nous examinons son approche dans le paragraphe suivant.

III.2.3 Contacts prolongés et frottement : méthodes d'optimisation

Baraf a proposé ces dernières années une méthode analytique basée sur une approche du type dynamique inverse (calcul des forces permettant d'aboutir à un état donné du système). Il utilise cette méthode pour traiter les cas des chocs instantanés et des contacts prolongés sans frottement, pour des objets rigides polyédriques [Bar89], puis pour des objets rigides de forme libre au contour défini par des fonctions implicites [Bar90]. Par la suite, l'auteur a modifié certains aspects de la méthode afin de pouvoir prendre en compte des frottements de surface [Bar91].

La démarche générale, qui se situe dans la ligne des travaux de Barzel et Barr [BB88], consiste à exprimer le comportement dynamique correct de l'objet par des relations sur les vitesses et sur les impulsions, dans le cas des chocs, ou sur les forces de contact, dans le cas des contacts prolongés. L'intérêt de ce travail, outre le fait de proposer une méthode analytique pour traiter le cas des contacts prolongés, est de permettre le calcul des interactions multiponctuelles en caractérisant chaque région de contact par un ensemble fini de points.

On fait ici aussi une distinction entre les contacts instantanés et les contacts durables par un test sur les vitesses relatives des points de contact :

- si ($v > 0$) alors les corps sont en train de se séparer : on ne calcule pas de force.
- si ($v = 0$) alors les corps sont en équilibre : on applique un calcul de force de contact.
- si ($v < 0$) alors les corps sont en collision : on applique un calcul d'impulsion.

La méthode prend pour hypothèse qu'un corps en contact prolongé ne subit pas de chocs, l'algorithme de recherche des forces de contact n'est donc appliqué qu'après que les collisions aient été résolues. Le propos est de trouver les forces de contact qui vérifient un certain nombre de conditions garantissant la cohérence dynamique.

Ces conditions sont les suivantes :

- 1- Les forces de contact doivent empêcher l'interpénétration.
- 2- Elles peuvent être répulsives mais non attractives.

- 3- Elles n'interviennent qu'aux points où il y a réellement contact : si deux corps sont sur le point de séparer (notion délicate en temps discret !) en un point donné, les forces doivent y être nulles.
- 4- Elles sont continues par rapport au temps (par opposition au cas des chocs traités avec des impulsions qui correspondent à des forces passant instantanément de zéro à l'infini).

Baraf construit alors une formulation matricielle des conditions -1- et -2- : X_i est la distance entre les points des deux corps où le contact indice i a lieu, \ddot{X}_i est l'accélération relative, et $\vec{f} = f \cdot \vec{n}$, (où \vec{n} est la normale à la surface de contact) est la force de réaction entre les corps,

$$\text{soit } \ddot{X} = (\ddot{X}_1, \ddot{X}_2, \dots), \ddot{X} \text{ dépend linéairement de } \vec{f} : \ddot{X} = A \cdot \vec{f} - \vec{b}$$

$$\text{la condition 1 s'écrit } \ddot{X}(\vec{f}) \geq 0 \Leftrightarrow A \cdot \vec{f} \geq \vec{b}$$

$$\text{la condition 2 s'écrit } \vec{f} \geq \vec{0}$$

La condition -3- dit que pour chaque contact i , soit ($\ddot{X}_i > 0$ et $f_i = 0$), soit ($\ddot{X}_i = 0$ et $f_i \geq 0$). Ceci peut s'exprimer sous la forme $\sum_{\forall i} f_i \cdot \ddot{X}_i = 0$. Cette expression est malheureusement quadratique en f_i puisque $\ddot{X} = A \cdot f - b$. Pour pouvoir utiliser des algorithmes de résolution de complexité polynomiale, Baraf formule alors le problème comme suit :

$$\text{trouver } f \text{ telle que } \begin{matrix} A \cdot \vec{f} \geq \vec{b} \\ \vec{f} \geq 0 \end{matrix}$$

$$\text{et minimisant } \sum_{\forall i} \vec{f}_i$$

La recherche des forces de contact revient donc à résoudre un problème d'optimisation sous contrainte du type : trouver x satisfaisant $M \cdot x \geq c$, et qui minimise la fonction $z(x)$ linéaire en x . Ceci est un exemple des problèmes qui peuvent être traités par la technique de programmation linéaire [Lue73].

Pour les collisions, le problème général se formule de la manière suivante (les $-$ et les $+$ indiquent les grandeurs avant et après le chocs, les indices i correspondent aux points définissant la région de contact) :

Dans le cas multiponctuel, l'élasticité du choc est exprimée par : $\forall i, V_i^+ \geq -\epsilon_i V_i^-$, et les impulsions s'écrivent : $\vec{j}_i = j_i \cdot \vec{n}$ (où \vec{n} est la normale à la surface de contact).

Baraf rajoute ensuite une relation visant à empêcher le calcul d'impulsions qui propulseraient les objets au-delà de ce qui est nécessaire pour prévenir les interpénétrations.

Alors, V_i^+ étant une fonction linéaire de J , le problème peut s'exprimer sous forme matricielle :

$$\text{trouver } J = (J_1, J_2, \dots) \text{ tel que } \begin{matrix} AJ \geq -V^+ \\ J \geq 0 \end{matrix} \quad \text{où } V^+ = (\epsilon_1 V_1^-, \epsilon_2 V_2^-, \dots)$$

$$\text{et minimisant } \sum J_i$$

Il s'agit, ici encore, d'un problème qui peut être résolu par des techniques de programmation linéaire. D'autre part, l'auteur précise que cette formulation du problème permet d'introduire des contraintes géométriques sur les corps (pour les solides articulés par exemple), comme celles développées par Barzel et Barr dans [BB88]. Cette méthode est utilisée à nouveau dans [Bar90] pour traiter les interactions entre objets rigides possédant des surfaces courbes définies par fonctions implicites. Cette nouvelle situation nécessite simplement de ré-exprimer les grandeurs X_i , \dot{X}_i , et \ddot{X}_i .

Par la suite, Baraf s'intéresse au problème du frottement de surface [Bar91]. Le modèle physique de référence est le 'modèle de Coulomb' [AF79], qui distingue deux cas dans les situations de contact : les contacts dynamiques, où les corps glissent l'un sur l'autre, et pour lesquels des forces tangentes s'opposent au mouvement relatif, et les contacts statiques, où les corps sont maintenus immobiles l'un par rapport à l'autre. Pour la plupart des matériaux réels, les expressions permettant de calculer ces forces sont différentes selon que les corps sont en situation de contact statique ou dynamique.

Ainsi, dans le cas des contacts dynamiques, les forces de contact vont s'écrire : $\vec{f} = f \cdot \vec{n} + \mu \cdot f \cdot \vec{t}$ (où f est le module de la force s'opposant à la pénétration et \vec{n} la normale à la surface de contact, \vec{t} est dans le plan de cette surface et μ est le coefficient de frottement dynamique qui permet de calculer la force de frottement $\mu \cdot f$). Cette composante tangentielle des forces d'interaction va faire surgir des situations intraitables par la méthode précédente dans le cas des contacts dynamiques. L'auteur les classe en situations 'inconsistantes' (pour lesquelles il n'existe pas de solution au problème tel qu'il est posé ci-dessus, c'est-à-dire pas d'ensemble de forces vérifiant les contraintes) et en situations 'indéterminées' (pour lesquelles il existe plusieurs ensembles de forces solutions, qui conduisent à différents comportements dynamiques). L'auteur interprète cette absence de solution unique au problème comme une conséquence de l'hypothèse de rigidité parfaite. Il n'existe pas en effet de corps parfaitement rigides dans la nature, et tout contact s'accompagne d'une déformation, même si elle est infinitésimale pour les corps très rigides.

Le problème va alors être contourné en proposant un modèle qui, à l'intérieur d'une boucle de calcul, gère une pseudo déformation des corps qui est traitée par des ressorts fictifs (ou, ce qui revient au même, en utilisant une méthode de pénalité). Seul l'effet de ces ressorts - c'est-à-dire la force produite - est explicitement représenté dans l'algorithme. Cet état intermédiaire dans lequel les corps se déforment (ou s'interpénètrent, selon l'interprétation) permet de sortir des situations intraitables et de calculer l'état du système au pas de temps suivant. Le résultat final présente à chaque pas de temps des solides parfaitement rigides et ne s'interpénétrant pas. L'auteur précise que l'algorithme de calcul des forces de contact choisit arbitrairement ces forces, et donc le comportement des corps. Il est clair que le modèle physique résultant est ici implicitement déterminé par la méthode de résolution choisie.

La stratégie finale adoptée va consister à calculer des impulsions chaque fois que cela sera satisfaisant, et à ne chercher des forces de contact que dans le cas contraire. Les critères définissant la validité d'un ensemble d'impulsions sont les suivants : au moins un des points de

contact dynamique doit passer en état de contact statique (c'est-à-dire avec une vitesse tangentielle proche de zéro) et aucun des contacts ne doit se rompre. L'auteur ne précise pas comment il calcule effectivement les impulsions satisfaisant à ces critères.

Le cas des frottements statiques est encore plus complexe : la formulation du problème d'optimisation sous contrainte à partir du modèle de Coulomb aboutit à un système impossible à résoudre avec les méthodes de programmation linéaire ou quadratique utilisées jusque là. Ceci est particulièrement dû au problème des transitions entre les contacts dynamique et statique. Baraf va alors utiliser deux méthodes fournissant chacune des solutions différentes et très approximatives. La première consiste tout simplement à ne calculer que des forces de contact dynamique ($\vec{f}_{\text{frottement}} = \mu \cdot f \cdot \vec{t}$, comme ci-dessus), en faisant varier continûment le coefficient μ de zéro, lorsque la vitesse est nulle, à la valeur utilisée pour les contacts statiques, lorsque la vitesse atteint un seuil prédéterminé (ce qui revient à appliquer un frottement dépendant de la vitesse). La seconde méthode formule les contraintes caractérisant le frottement statique (selon le modèle de Coulomb), indépendamment sur chacune des coordonnées de la force plutôt que sur son module, ce qui correspond à une grossière approximation linéaire (du type $x+y$ pour $\sqrt{x^2 + y^2}$). Le problème est alors résolu par une méthode itérative, mais ne fournit pas toujours de solution. Ce travail approfondi visait à développer un modèle d'interaction cohérent avec la représentation de base (rigidité parfaite) choisie pour les objets, ou si l'on veut l'exprimer comme le fait l'auteur, à calculer des forces de contact 'dynamiquement correctes'. L'ensemble des résultats obtenus pousse alors à conclure que l'approximation des systèmes dynamiques par des solides parfaitement rigides est incompatible avec la définition d'un modèle général pour les corps en interactions.

III.3 Interactions entre corps déformables

Si les différentes méthodes analytiques utilisées pour le calcul des interactions ont permis la production de séquences d'animation d'objets rigides tout à fait satisfaisantes, elles sont généralement complètement impuissantes à traiter le cas des interactions entre objets déformables. En réalité, il n'existe pas de théorie mathématique générale pour la physique des situations de choc ou de contact prolongé entre deux objets déformables. La théorie de l'élasticité tridimensionnelle [Cia85] a pour but de calculer de l'état d'équilibre d'un corps déformable sous l'effet de contraintes surfaciques données, et ce dans le cas de petites déformations, mais ne convient pas au traitement des collisions. En définitive, tenter de traiter les chocs à partir des représentations de la mécanique des milieux continus (typiquement, des équations reliant les contraintes de surface aux déformations d'un domaine continu approché par une famille d'éléments finis) nécessiterait l'écriture d'un unique système d'équations pour l'ensemble des objets présents. La lourdeur et la

complexité de calcul qu'implique une telle solution suffit à la rendre non envisageable. La plupart des approches développées consistent alors à calculer, selon diverses méthodes, les forces 'nodales' (c'est-à-dire associées aux noeuds du maillage par éléments finis) dues aux contacts, qui sont ensuite ré-injectées dans le système d'équations associé à l'objet. Il faut noter ici que les techniques basées sur le calcul explicite de ces forces sont utilisables à la fois pour les modèles continus et pour les modèles basés sur des maillages obtenus par assemblage d'éléments discrets. On parle dans les deux cas de forces 'nodales', c'est-à-dire indicées par le numéro du noeud ou de la masse ponctuelle auxquels elles s'appliquent.

III.3.1 Modèles continus

A. Méthodes de 'pénalités'

La méthode générale, proposée par Moore et Wilhelms dans [MW88] pour traiter les interactions entre objets déformables, consiste tout d'abord à détecter et à analyser l'interpénétration à partir de la configuration géométrique des objets, dont la surface est censée être triangulée. Cette triangulation peut être directement déduite dans le cas d'objets maillés (à partir d'éléments finis ou de différences finies) ou constitués d'un assemblage régulier de masses ponctuelles (modèles 'connectés'). Un algorithme de calcul d'interaction entre la trajectoire d'un point (qui forme une arête et fournit la direction de la force cherchée), et une surface triangulaire, peut alors être appliqué. On peut noter ici que Pentland [Pen90a] contourne la lourdeur des méthodes de détection basées sur des maillages en exploitant des représentations par surfaces implicites, comme les superquadriques par exemple. Ces dernières permettent d'associer à l'objet une fonction dedans/dehors qui fournit directement une mesure de la profondeur de pénétration d'un point. En discrétisant la surface de chaque objet, le calcul des interpénétrations est alors d'une complexité $\mathcal{O}(n)$, pour un calcul sur n points (contre $\mathcal{O}(n^2)$ pour une application brute de la méthode précédente). Les auteurs de [Pen90a] ne précisent cependant pas comment cette mesure de pénétration (qui n'est que rarement similaire à une distance euclidienne) peut être utilisée pour calculer les forces de réaction aux collisions.

Une fois que l'on a détecté et caractérisé les pénétrations, il reste à calculer les forces qui vont s'y opposer, et à générer les déformations locales dues aux contacts entre objets. Les forces 'de pénalités', que Moore et Wilhelms proposent de calculer en fonction de la profondeur d'interpénétration, peuvent s'interpréter comme l'introduction temporaire d'un micro-ressort entre les surfaces en contact. Le résultat obtenu peut, selon les cas, présenter des interpénétrations résiduelles, à moins d'utiliser des techniques de pas de temps adaptatifs comme avec les objets rigides. Les auteurs ne discutent cependant pas de ce point.

La méthode utilisée par Terzopoulos et al. dans [TPBF87], pour gérer les interactions entre un objet déformable et un obstacle rigide, est également basée sur le calcul de forces pénalisant les

pénétrations, mais est développée dans le contexte d'une formulation énergétique. Les auteurs proposent d'associer un champs potentiel aux corps rigides (qui sont des sphères ou des cylindres) afin que les objets déformables n'y pénètrent pas. Les interpénétrations et les forces potentielles qui en résultent sont calculées au niveau de chaque noeud du maillage. Cette méthode ne semble pas extensible au cas de deux objets déformables.

B. Calcul de force de contrainte

Platt et Barr ont proposé, dans [PB88] une méthode de calcul sous contrainte qui permet de régler le cas des intersections entre un corps déformable et un objet polygonal rigide. Le principe consiste à calculer une force représentant la contrainte de non pénétration entre les deux objets. Cette force est calculée pour une part en fonction de la résultante des forces extérieures appliquées à l'objet déformable, et pour une autre part en fonction de la profondeur d'interpénétration. Le calcul de ce que les auteurs appellent des 'contraintes de réaction' consiste à annuler les forces allant à l'encontre de la contrainte, et ensuite à appliquer une force supplémentaire pour lutter contre les violations effectives de la contrainte (il s'agit donc de la combinaison d'une méthode de projection et d'une méthode de pénalité).

Plus récemment Baraf et Witkin ont proposé dans [BW92] d'aller plus loin, en adaptant la méthode analytique proposée par Baraf dans [Bar89-90] au modèle simplifié d'objet déformable développé par Witkin dans [WW90]. Le modèle développé par Baraf pour les contacts entre objets rigides est basé sur une caractérisation des surfaces de contact par un nombre fini de points ; ceci va entraîner des restrictions sur la géométrie des contacts traitables. Ainsi les contacts entre objets présentant des arêtes non polygonales, que ce soit dans la configuration de base (contact entre un plan et un cylindre) ou dans l'espace déformé (dans le cas d'objet présentant des déformations à profil polynomial), ne pourront être traités qu'en triangulant les surfaces, ce qui va nettement augmenter la complexité globale (figure 1).

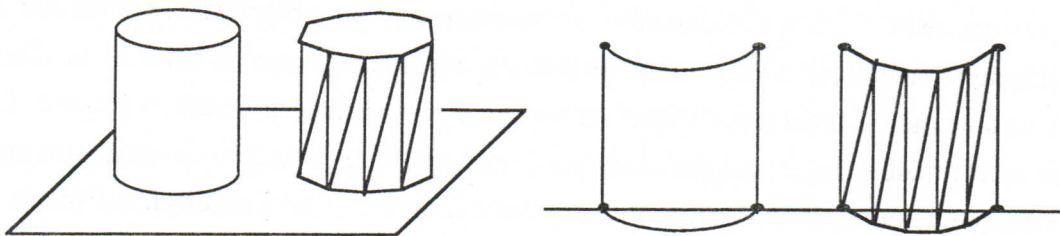


Figure 1 : Exemples de configuration géométrique nécessitant une triangulation [BW92].

Les collisions sont traitées par le calcul d'une impulsion visant à supprimer l'interpénétration (en déformant les objets) et à rendre les vitesses relatives nulles aux points de contacts ; les objets se trouvent alors en situation de contact prolongé. Les auteurs indiquent comment calculer cette impulsion dans le cas du contact avec un obstacle fixe et parfaitement rigide en affirmant qu'il est immédiat de passer au cas de deux objets déformables. Ils ne précisent pas cependant comment ils

règlent le cas de deux objets de densité ou de rigidité différentes. Les contacts prolongés (qui sont supposés sans frottement) sont traités en appliquant la méthode basée sur la définition de contrainte introduite dans [Bar89] ; cela est possible puisque le modèle développé par Witkin permet l'utilisation de techniques de contrôle du mouvement par contraintes (voir le §II.3.2).

La détection des interactions est tout d'abord effectuée dans l'espace déformé. Il est ensuite nécessaire de calculer les coordonnées paramétriques (u,v,w) des points de contact dans la configuration de base, ce qui implique l'inversion de la fonction $D(t)$ pour chaque objet :

pour un point de contact de position $X(x,y,z)$ dans l'espace déformé, les coordonnées paramétriques (u,v,w) de ce point dans la configuration de base se calculent à l'instant t selon l'expression :

$$[u,v,w] = D^{-1}(x,y,z)$$

où, pour un corps à déformation 'affine' : $D(u,v,w) = R(t) \cdot [u,v,w,1]$ et $R(t)$ est une matrice 3×4 ,

pour un corps à déformation 'quadratique' : $D(u,v,w) = R(t) \cdot [u^2, v^2, w^2, u,v,w, uv, uw, vw, 1]$,

et $R(t)$ est une matrice 3×10 .

Ce calcul, qui est assez simple dans le cas affine, devient très coûteux dès qu'il s'agit d'un opérateur polynomial du second ordre, d'autant plus que les surfaces doivent être triangulées et que le nombre de point de contact à traiter peut donc être très important selon la forme de l'objet.

C. Méthodes ad hoc

Nous avons insisté, en introduction de ce chapitre, sur le fait que la théorie de l'élasticité mise en oeuvre à travers des approximations par éléments finis ne convenait pas au traitement des collisions. Cependant, il existe, parmi l'ensemble des contacts possibles entre deux objets, des situations qui ont été abordées par ce type de méthode. C'est le cas par exemple pour une situation de contact permanent entre une balle élastiquement déformable et une main, comme celle qui est traitée par les auteurs de [GMT89]. Les équations du mouvement sont obtenues en appliquant le principe des travaux virtuels (P.T.V.), mais surtout en considérant que la balle et la main constituent un seul et même objet pour lequel on va écrire un système d'équation unique. Le mouvement du squelette de la main, qui est décrit par l'utilisateur, va permettre de définir un état initial et un ensemble de contrainte à partir desquels l'état d'équilibre de l'objet global [main + balle] est calculé. Ces auteurs n'ont donc abordé le problème de l'interaction que dans le cadre de cette situation particulière : il faudrait adapter le modèle (notamment les approximations par éléments finis) pour traiter un autre cas similaire, ou même pour simuler un contact temporaire entre la balle et la main.

Il apparaît que si les modèles continus permettent l'accès direct à une représentation des caractéristiques dynamiques de certaines classes d'objets, ils ne sont pas adaptés à la prise en compte des interactions entre objets, et à plus forte raison des interactions complexes mettant en

jeu des objets déformables et exprimant des phénomènes subtils relatifs aux états de surface (frottement sec par exemple).

III.3.2 Modèles discrets

Nous avons tenu à distinguer, dans la présentation des modèles d'objets à base de composants discrets, les modèles exploitant des maillages réguliers et les modèles particuliers ; cette distinction prend tout son sens lorsque l'on s'intéresse à la question des interactions. Les modèles de maillage, qui correspondent en définitive à des mises en oeuvre simplifiées des techniques de maillage spatial (par différence finies ou par éléments finis) d'un domaine \mathbb{R}^3 , permettent de réutiliser les techniques développées pour les modèles continus. La question doit être abordée différemment dans le cas des modèles particuliers. La plupart des travaux dont nous parlons ici ont déjà été présentés, en dehors de l'aspect interaction entre objets, au paragraphe II.4.

A. Modèles 'connectés' : calcul de vitesses et de forces 'nodales'

Les travaux utilisant des points matériels pour construire des maillages réguliers de formes géométriques données abordent la question des interactions comme dans le cas des modèles continus : détection des interpénétrations (par un algorithme parcourant les faces, les arêtes et les sommets définis par les éléments hexaédriques), analyse des configurations (afin de calculer une direction pour chaque force de répulsion), puis calcul des forces de réaction entre les objets par des méthodes de pénalités ou de contrainte (voir les travaux réalisés dans le cadre des modèles continus, § précédent).

Norton et al. traitent le problème de manière sensiblement différente dans le cadre de leur modèle d'objets fracturables [Nor91]. En fait il ne considèrent que les interactions entre les noeuds du maillage (c'est-à-dire les masses ponctuelles) en leur associant des rayons de non pénétrabilité. La détection ne porte alors que sur la proximité entre noeuds ; lorsque deux noeuds sont assez proches, c'est à dire lorsque la distance qui les sépare est plus petite que la somme de leur rayons, une force de répulsion élastique est calculée (cette méthode, comme c'est le cas pour les forces de pénalité, est souvent interprétée comme l'introduction d'un ressort de longueur égale à la somme des rayons associés aux masses ponctuelles). Ce choix permet d'aboutir à un traitement des interactions beaucoup plus efficace, mais pose des problèmes lorsque le maillage (c'est-à-dire la taille relative des éléments hexaédriques) est trop large ou irrégulier ; dans certains cas, une masse ponctuelle peut pénétrer une arête ou une face trop loin des extrémités et ne pas être détectée. Un tel modèle doit être correctement 'réglé' au cas par cas, afin d'éviter les interpénétrations entre objets (les auteurs précisent par exemple comment ils ont dû rajouter un 'collier' à la théière afin que le couvercle n'interpénètre pas).

Il existe un certain nombre d'autres travaux sur ce sujet, mais la plupart concerne des applications spécifiques et ne traitent que les interactions avec des obstacles rigides. C'est le cas par exemple de House, Breen et Getto dans [HBG92] qui gèrent les interactions entre une pièce de tissu (déformable élastique) et les éléments du décor (rigides fixes) ; la solution qu'il proposent consiste en deux passes. La première passe est destinée au calcul des grands déplacements, et ne tient pas compte des forces internes au tissu (résistance à l'étirement, à la torsion,...). Les interactions entre chaque masse ponctuelle et le décor sont alors détectées en exploitant un algorithme de type lancer de rayon et un pas de temps adaptatif, puis les vitesses des masses en collisions sont approximativement corrigées afin qu'elles se trouvent toutes à l'extérieur de l'obstacle à la fin du processus. La deuxième passe va tenir compte des contraintes internes au tissu (exprimées sous forme de fonction d'énergie) et de la non pénétration dans l'obstacle en appliquant des méthodes d'optimisation (variante de la méthode du gradient) pour minimiser globalement l'énergie des masses ponctuelles.

Miller va également utiliser une méthode initialement introduite pour des modèles continus, pour traiter les interactions entre ses serpents et le décor dans lequel ils évoluent [Mil88]. Les forces d'interaction au sol sont partagées en deux groupes: réaction normale du sol et forces (tangentes) de frottement. La réaction normale n'est en réalité pas traitée par des forces, mais par un calcul d'impulsion qui permet de corriger les vitesses comme cela était fait pour les solides rigides. Les forces de frottement représentent ici un modèle de l'interaction entre le sol et les écailles du serpent ; elles sont calculées en fonction de la direction des vitesses tangentes par rapport à l'orientation du corps. C'est ce calcul de frottement directionnel qui, combiné à un contrôle des mouvements, permet aux serpents de Miller de progresser de manière très naturelle. Ce travail illustre le fait que la démarche sous tendue par les modèles discrets permet un contrôle direct et simple, mais très efficace, des caractéristiques du modèle.

Enfin, nous avons déjà cité l'approche particulière introduite par M.P. Gascuel dans [Gas90, GVP91], dans laquelle elle construit une peau élastiquement déformable, formée de masses ponctuelles, autour d'un solide rigide articulé. Ce travail reprend l'idée intéressante d'une modélisation basée sur plusieurs niveaux géométriques et mécaniques imbriqués (comme cela avait été proposé dans [LC86] et [CHP88]), et abouti à des solutions élégantes pour gérer les collisions entre objets de rigidités différentes, et contrôler les modes de propagation des déformations. Des micro-ressorts et des micro-amortisseurs unidimensionnels, disposés en étoile sur des axes fixes par rapport au noyau rigide (qui représentent les axes principaux de déformation), relient les masses de la peau au noyau. Ces masses et ces ressorts axiaux vont jouer en quelque sorte le rôle de détecteurs, puis de 'pare-chocs' visco-élastiques pour le calcul des collisions. Les positions des masses sont ensuite utilisées comme point de contrôle d'une Spline pour le calcul de l'aspect visuel. Vue de l'extérieur, la peau ressemble à un maillage de la surface de l'objet. La détection des interactions va se faire entre chaque masse et chaque facette de ce maillage. De nouvelles positions pour les masses concernées par les pénétrations sont alors calculées par une interpolation barycentrique utilisant les raideurs des ressorts attachés à chaque masse, afin de prendre en compte

le cas d'objets de rigidités différentes. Ces nouvelles positions vont ensuite permettre le calcul des forces à transmettre au noyau rigide auquel elles sont attachées. Elles vont également servir à calculer les positions ultérieures des masses de la peau, qui ne sont pas obtenues par simulation, mais à partir d'une expression explicite donnant la solution de l'équation du mouvement d'un oscillateur amorti. L'équation d'un oscillateur de paramètres k et z , et de longueur au repos x_0 , avec à l'extrémité une masse de valeur m , s'écrit : $m.\ddot{x} + z.\dot{x} + k.(x - x_0) = 0$. Cette équation admet pour solution $x(t) = x_0 + A.e^{-\gamma t}.\sin(\omega t + \alpha)$, où A et α sont des constantes déterminées par les conditions initiales, $\gamma = \frac{z}{2m}$ et $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2}$ (voir par exemple [AF79] pour plus de détail).

Ce modèle permet de gérer directement la manière dont les déformations vont se propager : localité et amortissement de la déformation (en choisissant les masses voisines concernées ainsi qu'un coefficient de restitution), déformation à surface et volume constant (par des règles de répartition des déformations sur les masses voisines), et comportements mixtes (par combinaison linéaire des règles de répartition). Il faut noter cependant que les masses formant la peau n'interagissent entre elles que selon des relations logiques. Ce choix permet une importante économie dans les calculs puisque les masses de la peau ne sont pas effectivement simulées, mais il pose la question de savoir s'il est possible de décrire en termes logiques un comportement dynamique cohérent.

B. Loin des maillages, les modèles 'particulaires'.

Si les techniques utilisées pour les modèles continus peuvent s'appliquer dans le cas d'un modèle de maillage discret, tout en offrant des mises en oeuvre simplifiées, elles n'ont plus aucun sens dans le cas des modèles particuliers. En réalité c'est la notion même d'objet qui doit être remise en cause, et la question devient : parmi l'ensemble de points matériels qui représente le système dynamique étudié, qu'est-ce qui fait qu'une partie de ces points peut être identifiée comme un objet ?

Le problème des interactions entre objets n'existe plus en tant que tel dans ce cas, puisque le modèle réside quasiment tout entier dans la définition des interactions entre points matériels. C'est la nature de ces interactions qui va définir la cohésion, les fractures, l'élasticité, la viscosité, la plasticité, ... du système dynamique tout entier. La notion d'objet (pour la visualisation par exemple) doit alors être reconstruite à partir d'une interprétation des mouvements simulés.

C'est dans le travail de Terzopoulos sur les matériaux fusibles [TPF89] que l'on trouve une des rares utilisations de ce type de modèle. Alors que les auteurs exploitent des techniques basées sur les 'contraintes de réaction' de Platt et Barr [PB88] pour gérer les interactions entre le morceau de matière fusible (dans les états solide et liquide) et un récipient rigide et fixe, les collisions et les contacts entre les particules du fluide ne semblent pas être modélisés. En réalité, ils sont implicitement définis par l'interaction de type liaison intermoléculaire qui introduit à la fois un comportement attractif (qui représente les propriétés de cohésion et la nature du matériau) et des propriétés de non pénétration (qui représentent la nature des contacts entre points matériels).

IV. LE MODÈLE PHYSIQUE :

CONTRÔLE DU MOUVEMENT

IV.1 Introduction

Malgré le peu d'uniformité et de généralité offert par les diverses applications des modèles physiques à la synthèse du mouvement par ordinateur, les résultats obtenus en terme de production automatique des mouvements suffisent à soulever un enthousiasme certain dans la communauté scientifique. Cependant, du point de vue de l'animation proprement dite, les modèles physiques restent un outil, certes très intéressant, mais finalement peu utilisable. En effet, si du point de vue de l'informaticien la mise en oeuvre des modèles de la physique mathématique sont une solution à la production du mouvement, les utiliser efficacement pour réaliser un produit audiovisuel semble requérir à la fois les compétences d'un informaticien, d'un mathématicien et d'un physicien. Nous sommes bien loin de l'animateur!

La question de la représentation des objets eux-mêmes, dans leurs caractéristiques physiques, pose bien-sûr des problèmes, mais on peut envisager aujourd'hui d'intégrer les outils de base existants au sein d'un système permettant alors la création de scènes d'une assez grande variété. En d'autres termes, on est capable de proposer, par exemple sous forme de bibliothèque de modèles, des objets rigides ou déformables interagissant entre eux et avec leur environnement de manière convaincante, ... mais également, et c'est ce qui nous préoccupe ici, de manière passive. C'est-à-dire que ces objets vont tomber sous l'effet de la gravité, rebondir les uns contre les autres, se déformer ou éventuellement se briser (ce qui est déjà plus rare...), bref l'ensemble de la scène va aller d'un état initial jusqu'à un état d'équilibre. Or la première volonté de l'animateur, une fois qu'il a créé un objet, est d'être capable d'en contrôler les mouvements de telle sorte que le résultat exprime autre chose que *'cet objet est une balle en caoutchouc'* ou *'l'objet tombe et la gravité est de 0,6 g'*... La seule manière de réaliser ceci à partir des modèles que nous avons évoqué jusqu'ici, est de fournir l'ensemble des forces à appliquer à l'objet pour produire le mouvement visé, ce qui bien évidemment ne constitue pas une solution satisfaisante. Il est absolument nécessaire de donner les moyens à un éventuel opérateur d'intervenir dans la simulation d'une manière plus naturelle ; c'est l'ensemble des méthodes et techniques permettant cette intervention que l'on désigne ici sous le terme de contrôle.

Les problèmes de contrôle, de commande, ou encore d'asservissement et de régulation des systèmes ont existé bien avant la simulation par modèle physique, et même bien avant l'ordinateur (bien que ce dernier ait remplacé les systèmes analogiques dans pratiquement tous les systèmes d'asservissement modernes). Il existe aujourd'hui des méthodes et des outils mathématiques efficaces pour aborder ces problèmes dans le cas des systèmes linéaires ou non-linéaires, avec ou sans notion d'optimalité (le domaine scientifique et technique correspondant peut de définir au travers des thèmes traités dans [Zou78, PBGM74, GDP88-90, Sév89]).

Une solution classique au problème de l'asservissement d'un système du second ordre (typiquement un système dont l'entrée $x(t)$ et la sortie $\phi(t)$ vérifient une équation du type $\alpha \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \gamma x(t) = \phi(t)$), et la plus utilisée pour le contrôle des effecteurs en robotique par exemple, consiste à construire un régulateur P.I.D. (pour Proportionnel-Intégral-Dérivé). On désigne par là un système de régulation qui se caractérise par l'expression : $k_1 \cdot \varepsilon(t) + k_2 \cdot \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} + k_3 \cdot \int \varepsilon(t) dt$, où les k_i sont les gains et $\varepsilon(t)$ la fonction d'erreur (qui exprime la déviation entre la position ou la vitesse courante par exemple, et la consigne spécifiée au système). Au delà de cette approche directe du problème, il existe des outils mathématiques sophistiqués visant à déterminer les solutions du problème général suivant : soit un système régi par une équation différentielle du type $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, où $x(t)$ est le vecteur d'état du système et $u(t)$ est le vecteur de commande (pour un système du second ordre, x s'écrit généralement comme le multi-vecteur [position, vitesse]), trouver une solution $u(t)$ (la plupart du temps vérifiant une condition du type $\|u\| < C^{te}$), telle que $x(0) = x_0$ et $x(T) = x_1$, où x_0 et x_1 sont deux vecteurs donnés. La solution est dite optimale si elle minimise une fonctionnelle intégrale du type : $\int_T^0 g(x, u) dt$. Cette notion d'optimalité peut se définir sur des critères d'énergie, de distance parcourue, de temps etc..., le problème peut également être formulé de manière à tenir compte de certaines contraintes définies sur le système que l'on veut contrôler (c'est à dire restreignant l'espace de variation de l'état $x(t)$ du système).

Enfin, certaines techniques, généralement dérivées de celles que nous venons de citer, ont été développées pour résoudre des problèmes particuliers dans des contextes précis, c'est le cas par exemple des techniques du type dynamique inverse dans le cadre de la robotique des manipulateurs.

A leur tour, les chercheurs s'intéressant à la synthèse du mouvement, et donc au contrôle du mouvement produit, vont exploiter et adapter l'ensemble de ces outils. A un autre niveau, certains se sont posé le problème de l'organisation et de la coordination des mouvements pour le contrôle de structures composées complexes.

Nous présentons l'ensemble de ces approches dans les paragraphes suivants.

IV.2 Retour à la description du mouvement

Les modèles que nous avons appelés descriptifs (cf. § I.2.2) sont basés sur la spécification du mouvement par l'opérateur ; la question du contrôle réside essentiellement dans ce cas dans l'élaboration d'interpolateurs spécifiques et dans l'exploitation des techniques interactives modernes [MTT91], afin d'alléger le travail de description. Très tôt des approches basées sur une décomposition de l'objet en sous parties, comme par exemple en un squelette et une peau [BW76], associées aux techniques traditionnelle des dessins clefs, ont permis une description efficace du mouvement.

Paradoxalement, les techniques développées par la suite, qui visent à une automatisation du processus de création du mouvement et relèvent de ce que nous avons appelé les modèles générateurs (le modèle physique en est le plus récent exemple), correspondent de ce point de vue à un retour en arrière. Certains chercheurs ont alors voulu réintroduire des modes de contrôle descriptifs au sein de la simulation par modèle physique (comme la spécification de positions à atteindre, ou de trajectoires associées à un timing), allant jusqu'à ramener le modèle physique au rôle secondaire (par rapport à sa vocation initiale) d'un interpolateur entre positions clef, c'est-à-dire d'un outil de lissage du mouvement.

Le problème général est formulé comme suit : comment trouver les forces à appliquer au système dynamique simulé pour qu'il exprime un mouvement partiellement spécifié par l'opérateur ? Nous allons voir que les solutions proposées s'adressent presque toutes à des solides rigides articulés.

IV.2.1 Dynamique inverse et notion de contraintes

Nous avons déjà cité les travaux dont nous allons parler dans ce paragraphe ; en effet cette approche pour le contrôle du mouvement est également utilisée pour la définition de liaison au sein d'un ensemble de solides rigides et permet donc de définir des modèles de solides rigides articulés (voir le § II.2.2).

Si l'on appelle calcul dynamique le problème consistant à trouver l'accélération résultant d'un ensemble de forces appliquées au système simulé, le problème inverse (trouver les forces qui vont produire une accélération donnée) peut s'appeler calcul dynamique inverse. La dynamique inverse a été initialement développée pour la commande des bras articulés de robot et correspond à la même démarche que le calcul cinématique inverse.

Cette approche est mise en oeuvre par Isaacs et Cohen [IC87] dans le cadre d'un système de simulation d'objets rigides articulés exploitant une formulation à base d'énergie et le Principe des Travaux Virtuels. Le système d'équations, exprimé en coordonnées généralisées et décrivant le mouvement de chaque degré de liberté (DDL), peut sous certaines approximations prendre la forme d'un système linéaire.

Pour un corps à n DDL on a :

$$A \cdot [\ddot{q}] = [b]$$

où A est une matrice $n \times n$, $[\ddot{q}]$ le n -vecteur des accélérations et $[b]$ celui des forces généralisées.

Le calcul du mouvement résultant d'un jeu de force donnée nécessite l'inversion de la matrice A :

$$[\ddot{q}] = A^{-1} \cdot [b]$$

Cette formulation permet d'obtenir les accélérations d'un certain nombre de DDL ($n-p$ par exemple) tandis que l'on a spécifié les accélérations sur les (p) DDL restant ; pour $n=4$ et $p=2$, on a par exemple :

$$[\ddot{q}] = [\ddot{q}_1, X, \ddot{q}_3, X,] \text{ et } [b] = [X, b_2, X, b_4,]$$

Le calcul des (p) accélérations inconnues se fait en passant du système initial de n équations pour $n-p$ inconnues à un système de ($n-p$) équations. Le mouvement obtenu respecte alors les contraintes cinématiques données sur les (p) DDL pour lesquels on a forcé l'accélération, tandis que les autres DDL se comportent selon les caractéristiques du système dynamique (tout en réagissant bien sûr aux accélérations spécifiées). Le calcul dynamique inverse permet alors de calculer en retour les forces qui auraient pu produire ces accélérations. Les auteurs soulignent que le calcul dynamique inverse peut aider à construire ce qu'ils appellent des 'fonctions de comportement' ; ces fonctions calculent une force ou une accélération à partir de contraintes cinématiques spécifiées par l'utilisateur ou construites en fonction d'informations sur l'état du système et sur son environnement. Cette méthode comporte de sévères limitations et la plus importante me semble être le cas où le mouvement cherché nécessite de contraindre tous les DDL, ou en tout cas une grande partie d'entre eux, auquel cas la simulation n'a plus lieu d'être et le mouvement résultant est tout simplement celui spécifié par l'utilisateur.

Dans le cadre de leurs travaux sur les solides parfaitement rigides [BB88] et sur les corps déformables [PB88], Barzel, Platt et Barr ont développé une approche permettant de calculer directement des forces à partir de contraintes géométriques et cinématiques. Il s'agit donc, là aussi, d'une solution au problème de la dynamique inverse. La méthode proposée est surtout utilisée pour calculer les forces de liaisons dans les structures articulées et les forces de non pénétration entre objets en général, mais elle permet également le suivi de trajectoires spécifiées par l'opérateur.

Dans le cas des solides rigides, Barzel et Barr introduisent ce qu'ils appellent des 'contraintes dynamiques', qui consistent en fait à calculer une force qui dépend d'un vecteur distance, ou déviation, entre la position courante du système à contrôler et une position respectant la contrainte. Ce vecteur distance peut se calculer entre deux points, entre un point et un plan (c'est-à-dire sa projection orthogonale sur ce plan), et par extension entre un point et n'importe quelle surface. Il est alors possible de définir des contraintes du type *point sur point-fixe*, *point sur point-mobile* (ce

qui permet d'attacher deux solides entre eux), *point sur chemin* (ce qui permet de spécifier des trajectoires temporelles), *point sur plan*, *contrainte d'orientation*, etc... Les auteurs construisent alors une 'équation de contrainte' qui s'écrit¹ :

$$\ddot{D}(t) + \frac{2}{\gamma} \cdot \dot{D}(t) + \frac{1}{\gamma^2} \cdot D(t) = 0 \quad (1)$$

La solution de cette équation est $D(t) = D_0 e^{-t/\tau}$. La distance $D(t)$ est calculée de manière à ce que $\ddot{D}(t)$ dépende linéairement de l'accélération du corps soumis à la contrainte, et donc des forces et des moments (naturels et dus au contrôle) qui lui sont appliqués. Ceci permet, en substituant dans l'équation du mouvement les termes de force et de moment par l'expression équivalente en $\ddot{D}(t)$, de calculer la valeur de la force à appliquer au système afin de satisfaire l'équation (1). Intuitivement, on peut voir cette approche comme l'introduction d'un ressort de caractéristique exponentielle entre le corps et la position (d'une manière plus générale, l'état) vérifiant la contrainte, tout en veillant à contrer l'effet des forces empêchant le respect de la contrainte.

Pour les corps déformables, la mise en oeuvre de la même démarche est notablement plus simple dans la mesure où l'on ne considère que des forces nodales (et pas de moments). Il s'agit dans ce cas d'éliminer explicitement les composantes de force indésirables (méthode de projection - dans le cas d'une contrainte de non pénétration dans un plan par exemple il s'agit des composantes normales au plan et dirigées vers l'intérieur), et de placer effectivement un ressort-frottement (méthode de pénalité), qui sera ici aussi choisi à amortissement critique, entre le noeud considéré et la position (constante ou fonction du temps dans le cas d'un suivi de trajectoire) à atteindre.

La notion de contrainte est très générale et peut s'appliquer à de nombreuses approches. La méthode utilisée par Arnaldi, Dumont et Hegron dans [ADH91] pour traiter le problème du contrôle (ici encore appliqué au cas des solides rigides) peut être interprétée comme la définition de contrainte dans l'espace d'état du système. Les équations de contrainte sont écrites en fonction d'une mesure de la déviation entre l'état courant et l'état à atteindre. Le système des équations du mouvement étant obtenu en appliquant le Principe des Travaux Virtuel, les équations de contrainte sont introduites, comme les équations de liaisons entre objets, à l'aide des multiplicateurs de Lagrange ou par une méthode de pénalité (voir l'annexe A).

Le travail de Witkin et Kass, qui fait l'objet du paragraphe suivant, peut également être interprété comme la définition de contrainte dans l'espace-temps (c'est-à-dire spécifiant un état donné à un instant donné) pour le système à contrôler.

¹Il faut noter que cette équation est celle d'un système du second ordre dont les paramètres $k = \frac{m}{\gamma^2}$ et $z = \frac{2m}{\gamma}$ vérifient $Z = \sqrt{km}$, ce qui est une condition suffisante pour que la solution soit une exponentielle. z s'appelle dans ce cas l'*amortissement critique* [GDP90].

IV.2.3 Positions clefs et méthodes d'optimisation

Certains auteurs ont poussé très loin la volonté de réintroduire une méthode de travail de type 'dessins clefs' dans le cadre des systèmes de synthèse de mouvements par modèle physique. L'idée est alors de permettre à l'utilisateur de spécifier des positions clefs de début et de fin pour une portion de mouvement donnée, mais également de définir des critères selon lesquels ce mouvement doit s'exécuter. C'est l'objectif des travaux de Brotman et Netravali [BN88] et de Witkin et Kass [WK88] qui s'intéressent à la génération et au contrôle du mouvement pour des objets rigides articulés. Il s'agit dans les deux cas de résoudre un problème avec conditions aux limites (conditions initiale et finale qui sont données par les positions clefs) en utilisant les méthodes mathématiques dédiées à la résolution des problèmes de commande optimale [PBG74].

Dans le travail de Brotman et Netravali l'état courant d'un solide rigide quelconque est exprimé sous la forme d'un vecteur :

$$S(t) = [r(t), \theta(t), \dot{r}(t), \ddot{\theta}(t)]$$

Les équations Newtonienne du mouvement (qui font intervenir la résultante des forces et celle des moments, cf. §II.2.1) peuvent alors s'écrire sous forme matricielle:

$$\dot{S}(t) = A.S(t) + B.u(t) \quad (i)$$

où $u(t)$ est le vecteur de contrôle, et $B.u(t) = [0, 0, \frac{1}{m} \cdot F, I^{-1} \cdot M]$ (m est la masse, I est le moment d'inertie, F et M sont les résultantes des forces et moments).

La série d'états clef spécifiée par l'utilisateur : $S(t_i) = S_i$, $i \in [0, N]$ peut s'exprimer, en choisissant de manière adéquate les matrices M_i et les vecteurs Y_i , sous la forme d'un jeu d'équation matricielle :

$$\forall i \in [0, N] \quad Y_i = M_i.S_i \quad (ii)$$

Aux deux équations (i) et (ii) se rajoute un critère J à minimiser qui s'exprime sous la forme d'une intégrale:

$$J = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[(S^T(t).Q.S(t)) + (u^T(t).R.u(t)) \right]$$

Le problème, qui est résolu indépendamment sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, se formule alors sous la forme suivante : étant donné l'équation différentielle (i) et l'équation de contrainte (ii), trouver une fonction de contrôle $u(t)$ telle que J soit minimum.

De par la construction du vecteur d'état $S(t) = [r(t), \theta(t), \dot{r}(t), \ddot{\theta}(t)]$, le mouvement obtenu est continu (c'est-à-dire que les positions et les vitesses correspondant à ce mouvement sont continues), mais la fonction de contrôle trouvée est fortement discontinue. Pour remédier à ce problème, et renforcer la "souplesse" du mouvement, les auteurs reformulent le problème en incorporant le vecteur de commande dans le vecteur d'état : $\underline{S}(t) = [S(t), u(t)]$.

La formulation mathématique du problème développé par Witkin et Kass est la même que celle que Witkin utilisera par la suite dans [WGW90], puis dans [BW92]. Baraf se ramène également à ce même type de formulation pour traiter les interactions entre rigides solides dans [Bar89] ; nous avons déjà cité, en présentant ses travaux, les techniques de résolution par programmation linéaire et quadratique qui y sont rattachées (voir § III.2.3.). Un problème classique d'optimisation sous contrainte, soluble par programmation quadratique, s'écrit : trouver le vecteur X , tel que $M.X=0$ et minimisant $R(X)$ (où R est une fonction quadratique).

Witkin part des équations Lagrangienne du mouvement (en coordonnées généralisées) qu'il discrétise par rapport au temps. Les dérivées sont approchées par différences finies (c'est-à-dire que les vitesses s'écrivent : $v(t) = [x(t) - x(t-\Delta t)]/\Delta t$), et le système complet des équations du mouvement est écrit sous forme discrète. De plus, l'objet rigide articulé auquel on veut appliquer un contrôle (qui est ici la lampe Luxo de Pixar-Film) est pourvu de 'muscles' modélisés par des ressorts réglables, c'est-à-dire dont les paramètres sont libres d'évoluer dans le temps et fournissent donc les degrés de liberté nécessaires pour résoudre le problème d'optimisation. Enfin, le problème est résolu en une passe sur l'ensemble de la séquence d'animation, contrairement à l'approche précédente qui réalise une optimisation par morceau.

L'équation matricielle $M.X=0$ est obtenue en écrivant les équations du mouvement à tous les instants, c'est-à-dire à $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$, pour une séquence se déroulant sur l'intervalle de temps $[t_0, t_n]$, et en y adjoignant les équations de contraintes correspondant aux spécifications sur le mouvement. La forme quadratique à minimiser s'écrit :

$$R = \int_{t_0}^{t_n} |f(t)|^2 dt, \text{ et sous forme discrète : } R = \sum_{i=0}^{i=n} f_i^2$$

où $f(t)$ correspond à la résultante des forces produites par les 'muscles' de la structure.

Le problème est alors résolu par une variante des techniques d'optimisation par programmation quadratique construite à partir de la méthode de Newton-Raphson (méthodes des sécantes).

Enfin il faut noter que cette même approche, baptisée 'contraintes espace-temps' (angl. spacetime constraints), pour laquelle les lois physiques du mouvement sont traitées comme des contraintes quelconques, est récemment reprise par Cohen dans [Coh92]. Ce dernier propose de plus un mode interactif pour la spécification des critères à minimiser et des états clefs afin de mieux guider le mouvement obtenu. La séquence à animer est découpée en une série de sous-séquences, les fenêtres 'espace-temps', qui se recouvrent légèrement afin d'assurer la continuité du mouvement. L'ensemble de ces choix a pour objectif de permettre à l'opérateur de 'guider' le processus

d'optimisation. Les coordonnées correspondant aux différents DDL sont interpolées à l'aide de B-Splines, afin d'obtenir des expressions exactes pour les dérivées, plutôt que des approximations par différences finies. Enfin, une solution est prévue pour régler le problème des minima locaux, qui est inhérent aux techniques d'optimisation ; elle est basée sur la méthode appelée 'recuit simulé' (angl. simulated annealing), laquelle consiste à perturber légèrement le système lorsque celui-ci est bloqué dans un minimum local (comme si on le 'secouait'), puis à reprendre le processus d'optimisation.

Ce travail vise donc à créer des interpolateurs du second ordre, que l'on pourrait appeler 'interpolateurs physiques', qui soient plus performant que ceux utilisés jusqu'à présent dans les systèmes à base de dessins clefs. Cohen précise d'ailleurs que le modèle physique n'est qu'un des moyens possibles pour définir des contraintes sur le mouvement.

IV.2.4 Vers un pré-calcul du contrôle...

Van de Panne, Fiume et Vranesis proposent dans [PFV90] une méthode permettant de calculer ce qu'ils appellent des 'contrôleurs d'espace d'état' qui sont censé fournir, pour un large domaine d'état de départ, un ensemble de couples produisant un chemin optimal vers un état objectif (un contrôleur est construit pour un objectif O donné). Ces auteurs cherchent donc à résoudre un problème avec condition finale (par opposition à des problèmes avec conditions aux limites). Un contrôleur contient en quelque sorte toutes les solutions au problème du contrôle optimal pour un objectif donné exprimé sous forme d'un vecteur d'état du système ; il pourra donc être réutilisé dans toutes les situations similaires à celle pour laquelle il a été construit, ce qui devient intéressant dans le cas de mouvements répétitifs mais non identiques (comme la marche par exemple, voir [PFV92] ou le § IV.3.3).

Une sous partie de l'espace d'état, contenant l'état objectif O et suffisamment grande pour contenir l'ensemble des états de départ possibles, est discrétisée afin de construire une table dont la dimension sera égale à celle de l'espace d'état du système à contrôler. Cette table, qui constitue le contrôleur, contient à l'entrée correspondant à un état S le jeu de couple (un sur chacun des degrés de liberté pris en compte par le contrôleur) produisant la meilleure trajectoire (dans l'espace d'état) de S à O. Le critère d'optimisation est défini par une fonction à minimiser (F_{opt}) qui porte sur le temps et sur l'intensité des couples nécessaires pour parcourir la trajectoire de S à O, notée T_{SO} :

$$F_{opt}(T_{SO}) = t_{SO} + \int_0^{t_{SO}} K.C(t) dt$$

où t_{SO} est le temps nécessaire pour aller de S à O, K est un vecteur de constantes défini par l'utilisateur, et C(t) la résultante des couples à appliquer.

Le processus de contrôle consiste alors à aller lire dans la table le jeu de couples contenu à l'entrée correspondant à l'état courant du système. La discrétisation utilisée dans [PFV90] est uniforme,

une table correspondant à une région discrétisée en 10 pas, selon chaque dimension de l'espace d'état d'un système à n DDL, possède donc 10^{2*n} entrées (position et vitesse pour chaque DDL). Les jeux de couples à appliquer à chaque pas de temps seront finalement obtenus par interpolations linéaires sur les valeurs contenues dans la table.

Les contrôleurs sont construits durant une phase de prétraitement (angl. preprocessing), en utilisant une technique appelée programmation dynamique et développée dans le cadre de la commande optimale. Celle-ci consiste à construire la table de proche en proche en partant de l'état objectif O pour remonter jusqu'à chaque état de départ S . Le calcul pour une entrée S de la table consiste à trouver le jeu de couples qui fournira une trajectoire T_{SO} dans l'espace d'état de telle manière que $F_{opt}(T_{SO})$ soit minimisée. Ceci est réalisé dans [PFV90] en 'essayant' tout un ensemble de solution qui est obtenu, ici encore, en discrétisant de manière uniforme l'espace des couples applicables à l'objet (dont la dimension est égale au nombre de DDL, mais qui est borné). Pour chaque jeu de couples, la trajectoire correspondante dans l'espace d'état est calculée (en simulant le mouvement) jusqu'à atteindre un état I pour lequel la valeur de $F_{opt}(T_{IO})$ peut être obtenue par interpolation. Pour cela il suffit en fait que cet état intermédiaire I se trouve sur l'axe formé par deux entrées A et B de la table, pour lesquelles le calcul a déjà été réalisé ; la valeur de $F_{opt}(T_{IO})$ est alors obtenue par interpolation linéaire entre $F_{opt}(T_{AO})$ et $F_{opt}(T_{BO})$. Enfin la valeur de F_{opt} sur l'ensemble du chemin qui va de S à I , puis de I à O , est égale à $F_{opt}(T_{SO}) = F_{opt}(T_{SI}) + F_{opt}(T_{IO})$ (la figure 1 illustre ce calcul dans le cas d'une table bidimensionnelle).

L'auteur précise qu'il est difficile de choisir le meilleur parcours pour remplir la table, et que, bien sûr, plusieurs itérations sont nécessaires, puisqu'il est possible que le problème ne soit complètement résolu pour aucune des zones rencontrées. A chaque itération, les valeurs F_{opt} du critère d'optimisation baissent, et le critère d'arrêt peut porter soit sur le maximum de ces baisses soit sur un nombre fixe d'itérations.

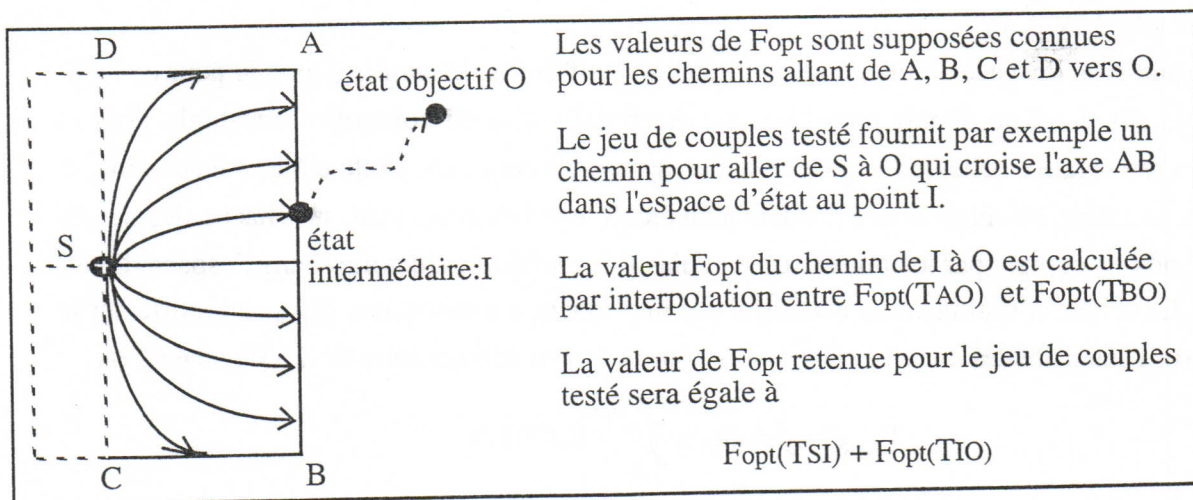


Figure 1 : calcul des entrées du contrôleur d'espace d'état [PFV90]

Il est clair que, quel que soit l'algorithme choisi pour construire ces contrôleurs, le calcul résultant est extrêmement coûteux. Une telle méthode ne se justifie donc que dans des cas très particuliers,

où les mouvements à contrôler sont répétitifs et portent sur peu de degrés de liberté, comme c'est le cas dans [PFV92] (voir le § IV.3.3).

IV.2.5 Simulation et Contrôle : des outils efficaces pour la construction de modèle

La plupart des techniques de génération et de contrôle que nous venons de présenter ont été utilisées dans le but de créer, non plus des séquences d'animation, mais des modèles d'objets.

Certaines approches visent à élaborer des modèles de solides rigides articulés en assemblant par simulation les sous parties composant l'objet. Dans ce cas il est possible de se contenter d'un modèle purement cinématique (c'est-à-dire de ne pas prendre en compte les forces et les accélérations), ou de n'utiliser le modèle physique que comme une analogie [BMB86, WFB87, PZB90]. Le contrôle de l'assemblage final est assuré par la définition de contraintes géométriques entre les différentes sous-parties.

Les modèles physiques d'objets déformables ont également inspiré des méthodes comparables à du modelage, ou à de la sculpture, pour la création d'objets de 'forme libre' [TF88, Pen90b, WGW90]. Ce modelage peut être réalisé soit par la définition de contraintes géométrique, représentant la plupart du temps un outil pour mouler, creuser, extruder, tirer ... , soit par le contrôle du mouvement d'un outil effectivement modélisé et mis en interaction avec l'objet.

Enfin des modèles physiques de particule ont été utilisés pour générer des surfaces de forme libre dans [ST91]. Sleziski et Tonnesen développent dans ce travail un modèle à base de points matériels 'orientés', qui se présentent en réalité comme des disques indéformables, dont on calcule les mouvements de translation et de rotation (6 DDL). Cette approche permet de générer de manière très efficace des surfaces qui seraient difficiles à obtenir par des opérations purement géométriques.

IV.3 Approche robotique : contrôle moteur, planification et représentation des connaissances

IV.3.1 Programmes moteur et lois de commande

Les méthodes que nous avons parcouru dans le paragraphe précédent visaient à calculer directement l'ensemble des forces et des couples à appliquer sur tous les degrés de liberté d'un

système ; l'objectif recherché s'exprime alors, soit sous forme d'un état donné à atteindre (positions et vitesses), soit comme une trajectoire qu'il faut parcourir en respectant un timing ($X = f(t)$).

Il est possible d'aborder différemment la modélisation des systèmes actifs en réalisant des modèles plus proches de la réalité, c'est-à-dire intégrant une représentation explicite d'effecteurs éventuellement accompagnés de capteurs et pour lesquels il faudra élaborer des lois de commande. Cette démarche consiste également à se tourner vers la modélisation de robots et peut conduire, dès lors qu'on se pose le problème du contrôle, à utiliser les méthodes de la programmation robotique. L'ensemble des techniques utilisées dans les travaux précédents (régulateurs P.I.D., dynamique inverse, calcul sous contrainte, contrôle optimal et programmation dynamique) ne sont pas incompatibles avec cette approche. Elles vont servir ici au contrôle local des effecteurs, tandis que des moyens supplémentaires doivent être mis en oeuvre pour déterminer et coordonner le mouvement d'ensemble ; les applications classiques concernent la simulation de marcheurs à deux, quatre, six jambes, ... ou plus.

IV.3.2 Hiérarchisation du contrôle et représentation de connaissance

L'idée consistant à exploiter, dans le cadre des systèmes de simulation du mouvement, les techniques de contrôle développées par la robotique a existé bien avant l'apparition du modèle physique. Dès le début des années 80, Badler, O'Rourke et Kaufman [BOK80], puis Zeltzer [Zel82-85], ont souligné l'intérêt que représentent, pour le contrôle des mouvements complexes, des notions telles que le guidage des mouvements par l'objectif (angl. goal-directed motion), la hiérarchisation du contrôle associé au développement de programmes moteur locaux, la planification, et l'intégration de connaissances a priori sur la tâche à exécuter. Zeltzer décrit dans [Zel82] les bases d'un système complet pour le contrôle d'une chaîne cinématique représentant un squelette humain et destinée à reproduire des mouvements de marche humaine. Le principe général de cette approche, qui est repris de manière fidèle par la plupart des travaux qui vont suivre, est basé sur la modélisation d'effecteurs locaux et sur la construction d'un automate d'état fini permettant de coordonner le mouvement, qui généralement est décomposé en plusieurs phases. Cet automate, qui est élaboré à partir de l'analyse de mesures précises sur la cinématique de la marche humaine, représente une classe de mouvements ; il est censé assurer un contrôle coordonné des effecteurs locaux.

L'approche de Zeltzer, comme c'est le cas pour la plupart des travaux visant à reproduire les mouvements (principalement de marche) d'êtres vivants, exploitent donc une chaîne cinématique et un calcul de cinématique inverse. Cependant, la nécessité d'intégrer des contraintes dynamiques dans le processus de planification est soulignée par une grande partie des travaux récents en planification de mouvements robotiques [BLL89, Shi91] ; sans qu'il s'agisse à proprement parler de modélisation physique. Nous allons voir que les modèles conçus dans l'objectif audacieux qui

consiste à reproduire les mouvements humains (ou animaux), n'intègrent que timidement le modèle physique.

Girard et Maciejewski exploitent, dans [GM85], un modèle physique très simple en collaboration avec un modèle cinématique pour simuler la marche d'un personnage possédant plusieurs jambes (quatre ou quatorze, puis deux dans [Gir86]). Le modèle physique utilisé est en réalité constitué d'un corps possédant trois degrés de liberté (de translations verticale et horizontale, et de rotation dans le plan du sol) représentant le tronc du personnage ; les forces qui lui sont appliquées sont la gravité et un ensemble de forces déduites du mouvement des jambes. Ce modèle est destiné à augmenter le réalisme du mouvement produit, notamment en restituant des mouvements de balancement du corps qui apparaissent couplés au déplacement de ses jambes. Les mouvements de la chaîne cinématique sont générés en exploitant une méthode de planification élaborée dans le cadre de la recherche sur la commande des robots à pattes, ainsi qu'un calcul de cinématique inverse. La planification est réalisée en tenant compte de contraintes dynamiques, dans la mesure où la trajectoire des maillons de chaque jambe est calculée selon une stratégie visant à optimiser l'énergie dépensée durant le déplacement. Le même type d'approche est utilisé dans [RG91] par Rijkema et Girard pour animer une main humanoïde. Ce travail s'inspire très fortement des travaux réalisés en robotique pour planifier et contrôler la saisie (angl. *grasping*), mais le modèle utilisé ne comprend pas la dynamique des contacts entre la main et l'objet (bien que les interactions soient détectées), et ne permet donc pas la simulation de saisies effectives. Il s'agit plutôt de calculer le positionnement de la main en fonction de l'objet à saisir (angl. *preshaping*) afin d'offrir à l'utilisateur un contrôle au 'niveau tâche'. Le mouvement final est obtenu par un calcul de cinématique inverse, tandis que les trajectoires des extrémités de la chaîne cinématique représentant la main sont calculées par un processus de planification. Ce dernier exploite, en plus des spécifications de la chaîne cinématique, une bibliothèque de postures et de formes d'objets ; les trajectoires finales sont calculées en fonction de contraintes dynamiques (concernant principalement l'énergie consommée) définies à partir de données sur la main humaine.

Le travail de Lee, Wei, Zhao et Badler dans [Lee90], exploite pleinement la notion de planification avec contraintes dynamiques, pour contrôler, au 'niveau tâche', une chaîne cinématique de forme humanoïde (tronc et bras), dans une activité de levage d'objets pesants (angl. *lifting task*).

La structure de contrôle est organisée selon trois niveaux :

- un niveau stratégique, qui évalue les conditions courantes en fonction de la tâche à réaliser et de paramètres tels que le niveau de confort ou l'effort perçu,
- un niveau de planification des mouvements qui propose une trajectoire pour l'effecteur terminal visant à soulager les articulations les plus sollicitées (c'est-à-dire celles dont l'effort perçu est le plus proche du maximum autorisé), par exemple en ramenant le bras près du corps lors du levage d'un objet lourd,

- enfin un niveau de calcul du mouvement de l'effecteur final. Ce calcul est réalisé en reformulant les équations de la dynamique afin d'écrire une équation de contrainte. Cette formulation a été initialement introduite en programmation robotique pour la planification de trajectoires à temps optimal.

Bruderlin et Calvert font un pas supplémentaire vers l'utilisation du modèle physique pour la simulation des mouvements d'êtres vivants avec leur modèle de marcheur décrit dans [BC89]. Les auteurs se situent eux-mêmes dans l'approche introduite par Zeltzer pour ce qui est du contrôle. Une connaissance à priori sur le mouvement de marche humaine est intégrée dans le processus de contrôle sous la forme d'un cycle de locomotion exploité par le haut niveau d'une structure de contrôle hiérarchisée ; le séquençage du mouvement est assuré par un automate d'état fini. L'opérateur peut spécifier le mouvement par des paramètres tels que la vitesse de progression, la longueur des enjambées ou la fréquence du pas, et une trentaine d'attributs supplémentaires (écartement des jambes, amplitude de balancement des hanches, ...) servant à définir les sous objectifs des processus de contrôle de bas niveau. Le modèle physique utilisé consiste en deux modèles très simples qui ne sont pas couplés. Le premier est un bi-pendule (le point fixe est sur la hanche) et représente la jambe qui balance durant une enjambée ; le deuxième est un bi-pendule inversé (le point fixe est au sol) dont un des segments est muni d'un piston télescopique (ressort de longueur réglable) et représente la jambe d'appui. Ces deux modèles permettent de calculer les trajectoires d'un squelette, qui sera finalement 'habillé' par une chaîne cinématique. La dynamique des 'jambes' physiques est calculée en utilisant les équations de Lagrange. Les forces exercées sur la jambe d'appui sont calculées par une méthode d'optimisation, tandis que le mouvement de la jambe qui balance est formé de deux phases, invoquant respectivement un calcul de forces de contrainte et un mouvement libre (balancement du pendule à force nulle).

IV.3.3 Modèles 'tout physique' : généralité des solutions

Il n'existe donc que très peu de travaux exploitant la simulation dynamique et le contrôle moteur, bien que l'ensemble de la communauté reconnaisse la modélisation physique comme indispensable à la production de mouvements convaincants, et ce peut être plus particulièrement lorsqu'il s'agit du comportement d'êtres vivants.

Lorsque c'est cependant le cas, les solutions au problème du contrôle se présentent le plus souvent comme l'association d'un système de commande avec retour d'état (feedback control), pour le contrôle des effecteurs locaux (figure 2), et d'un système de plus haut niveau (basé sur la représentation de connaissance) pour la coordination du mouvement global.

Les travaux s'intéressant à la simulation physique de systèmes actifs portent principalement sur la marche. On peut distinguer les études qui s'intéressent à des mouvements avec équilibre statique (marche-lente ou grand nombre de pattes), et ceux qui traitent des équilibres dynamiques (marche

rapide, course, sauts). Les corps dont on veut contrôler les mouvements sont toujours représentés sous forme de solides rigides articulés, tandis que les interactions avec le sol sont modélisées à partir de ressorts et d'amortisseurs.

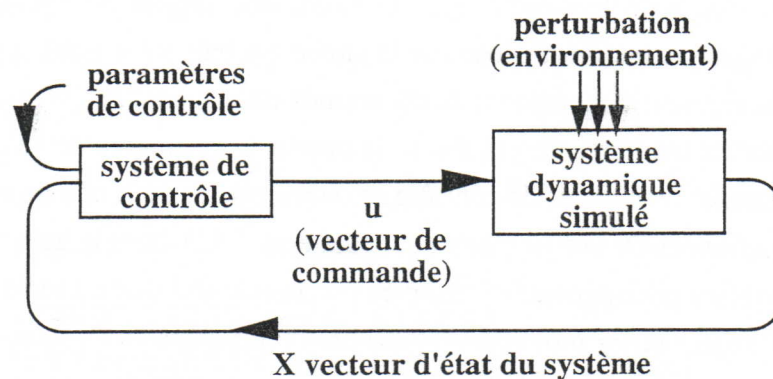


Figure 2 : système de contrôle local avec retour d'état

Mc Kenna, Pieper et Zeltzer [KPZ90, KZ90] ont simulé la marche d'un personnage à six jambes (un cafard!) à partir d'un modèle 3D de solide rigide articulé, à partir de la méthode de Featherstone [Fea83]. Les positions et les vitesses sont obtenues en intégrant numériquement les accélérations calculées par une méthode de type Runge-Kunta, et en utilisant un pas de temps adaptatif (retour arrière et subdivision du pas de temps lorsque l'erreur sur l'intégration est trop forte). La structure de contrôle utilisée ici est directement inspirée de l'ensemble des travaux antérieurs de Zeltzer sur la hiérarchisation du contrôle des structures articulées (cf. § précédent). Les moteurs locaux sont formés de ressorts exponentiels (correspondant à une fonction du type $F(x) = \alpha \cdot (e^{\beta|x-l|} - 1)$) à paramètres réglables (angl. tuned spring), qui permettent un contrôle en position par l'intermédiaire du paramètre l . Chaque position d'équilibre est assurée par un couple de moteurs locaux, qui représentent les groupes de muscles antagonistes ; les mouvements entre position courante et position visée sont réalisés en suivant des trajectoires obtenues par interpolation linéaire. Ces programmes moteurs sont de deux types : pour chaque patte on trouve un couple de moteurs d'appui (stance) servant à supporter le poids du corps, et un autre de balancement (swing) pour le déplacement.

Enfin, le mouvement d'ensemble est obtenu en créant une onde allant des pattes avant vers les pattes arrières, caractéristique de la démarche de certains insectes. Cette onde est générée par un jeu d'oscillateurs (un générateur de sinusoïde associé à chaque patte) couplés entre eux, qui jouent le rôle de métronomes et déclenchent le pas. Ce mouvement cyclique est perturbé par un ensemble de réflexes déclenchés par la détection de l'extension maximum sur une articulation ou d'une charge excessive sur une patte. Ce travail, qui est l'aboutissement d'une longue recherche sur le problème du contrôle en simulation, est un excellent exemple de la généricité des solutions obtenues avec le modèle physique. Cet unique modèle, après calibrage des paramètres sur un terrain plat, a permis à ses auteurs de simuler une grande variété de démarches sur plusieurs types de terrain.

M. Van de Panne, E. Fiume et Z.G. Vranesic [PFV92] ont développé un modèle dynamique simplifié, pour la simulation et le contrôle d'un marcheur bipède en évolution sur des terrains variés. Le modèle de base est planaire et ne comporte que peu de degrés de liberté (trois par jambe et deux par bras). Le mouvement de marche est, ici aussi, décomposé en cycles, et calculé indépendamment pour chaque jambe (on suppose que la jambe qui balance n'influence pas du tout le mouvement global) ; la figure tridimensionnelle est animée en plaquant le mouvement calculé pour la structure plane sur les membres de gauche et de droite. L'originalité de ce travail réside dans l'utilisation de différentes techniques de contrôle selon les parties de la chaîne articulée. Des régulateurs de type Proportionnel-Dérivé (il s'agit de régulateurs P.I.D. dont le gain de l'intégrale est nul, cf. § IV.1) sont utilisés pour générer les couples assurant la stabilité du torse (appliqués à la hanche de la jambe d'appui) et les mouvements des bras (appliqués aux épaules, les coudes étant libres). La trajectoire de la jambe qui balance (swing-leg) est obtenue par une technique de planification géométrique ; la combinaison d'un calcul de dynamique inverse et d'un régulateur Proportionnel-Dérivé permet d'obtenir les couples correspondants. Enfin, l'articulation du genou de la jambe d'appui, qui selon les auteurs est la partie la plus importante pour le mouvement global, est contrôlée par la méthode de programmation dynamique introduite par Van de Panne dans [PFV90] (cf. § IV.2.4.). L'ensemble de la simulation est réalisé avec un pas de temps de 0,001 seconde (fréquence de calcul de 1000Hz). Il faut noter que malgré le fait que l'animation soit réalisée à partir d'un modèle dynamique (mis à part les parties de planification géométrique), les démarches obtenues font plus penser à un robot qu'à un être vivant humanoïde. Ceci est peut-être dû au fait que l'ensemble de la marche se fait avec un pied à plat sur le sol, puisque les muscles de la cheville ne sont pas modélisés pour la jambe d'appui (articulation libre).

Un autre travail remarquable sur le contrôle du mouvement, dans le cadre de l'animation par modèle physique, a été réalisé à partir des résultats d'un programme de recherche sur la commande de robot mobile [Rai 89]. M. Raibert, et J.K. Hodgins ont exploité dans [RH91] les résultats obtenus sur la commande de robots 'sauteurs', c'est-à-dire en équilibre dynamique, pour contrôler le mouvement de solides rigides articulés assez simples. Les modèles développés représentent des figures à une, deux ou quatre jambes, télescopiques ou articulées ; les lois de commande utilisées ont été élaborées et calibrées sur des réalisations matérielles de robot. Le calcul, qui met en oeuvre les équations du mouvement des solides rigides et un intégrateur numérique, est réalisé avec un pas de temps de 0,0004 seconde (fréquence de calcul de 2500Hz). Les corps sont contrôlés en position et en vitesse à partir de modèles d'effecteurs couplés à des régulateurs de type Proportionnel-Dérivé. L'ensemble du mouvement, qui est ici aussi considéré comme cyclique, est coordonné par un automate d'état fini. Les démarches simulées sont toutes formées d'une suite de sauts. Le mouvement balistique qui en résulte est essentiellement contrôlé à partir de la position de l'impact, ainsi que de l'intensité et de la direction de l'impulsion. Ce travail a permis de produire des séquences d'animation particulièrement convaincantes.

V. CONCLUSION

Une constatation immédiate que l'on peut faire à l'issu de cet exposé sur les techniques d'animation par modèle physique est celle de la qualité croissante des résultats obtenus dans ce domaine, même s'il reste aujourd'hui encore de nombreux problèmes ouverts.

Cependant, il existe de nombreuses et très différentes approches, chacune ciblée sur un problème spécifique vis-à-vis duquel elle représente une avancée au niveau des coûts de calculs ou de la nature des objets représentables, de la facilité de spécification du modèle, ou de l'automatisation dans la génération du mouvement. Aussi l'un des objectifs importants dans le cadre de l'animation par modèle physique est certainement de concevoir des approches homogènes, permettant de développer des systèmes complets tout en abordant de manière cohérente l'ensemble des aspects du problème.

D'autre part, alors qu'à l'origine les techniques d'animation par ordinateur exploitaient des méthodes purement descriptives, qui laissaient aux utilisateurs éventuels (au prix d'un travail fastidieux) un contrôle total des mouvements produits, et donc une responsabilité absolue dans le résultat final, chaque avancée vers une assistance plus grande de la part de la machine (c'est-à-dire vers la production automatique) semble entraîner un recul du point de vue de la maîtrise du résultat final, et donc certainement de l'expressivité des séquences d'animation produites.

Dans les approches 'tout physique', l'opérateur humain voit sa possibilité d'intervention limitée au niveau du contrôle des paramètres d'un système dynamique, et le résultat final dépend presque plus de sa connaissance de la physique des matériaux et des systèmes dynamiques en général, que de son imagination et de son savoir-faire d'animateur. Les méthodes visant à restituer des modes de contrôle descriptifs du mouvement, par l'intermédiaire d'interpolateurs de plus en plus sophistiqués, ne constituent pas une solution générale. L'utilisateur de ce type de technique, qui ne s'applique de manière efficace que dans des cas très particuliers, se voit restituer un contrôle de type 'positions clefs', mais se retrouve confrontés aux inconvénients inhérents aux méthodes d'interpolation : celles-ci ne permettent de produire que la classe particulière de mouvements correspondant à l'interpolateur utilisé.

Ainsi une question primordiale, qui semble devoir rester attachée à l'élaboration des systèmes pour l'animation par ordinateur, est de savoir si l'objectif est de réaliser un outil de production automatique, permettant la mise en image de scènes préalablement spécifiées (c'est-à-dire de passer directement du scénario au film), ou s'il s'agit plutôt de concevoir un outil moderne (c'est-à-dire nouveau) pour la création d'images animées. Le propos n'est pas ici de faire un choix à priori sur l'un ou l'autre de ces objectifs, mais plutôt de constater qu'ils existent tous les deux et

ne procèdent ni de la même démarche, ni certainement des mêmes outils, bien qu'il aient en commun le même support technologique.

Dans le premier cas, apparenté à la technologie de l'image, les systèmes se situent dans la ligne des grandes classes d'applications informatiques et robotiques telles que la CFAO et les systèmes 'autonomes' ou 'intelligents'. Cette approche conduit naturellement à la réalisation de stations de travail offrant les fonctions de véritables systèmes d'Animation Assistée par Ordinateur (A2O ?), qui satisferont à des critères tels que les coûts et les temps de production.

Dans le second cas, le propos doit être de permettre la création de séquences d'animation à partir de l'expérimentation d'un matériau virtuel, créé à l'aide de l'ordinateur. Dans ce contexte, l'automatisation n'est plus de mise, il s'agit au contraire de concevoir un système avec lequel on arrive au résultat final de manière progressive, par composition et par modification successives de 'brouillons' de mouvement. Il me semble que la machine informatique, comme support de représentation totale, peut être l'instrument d'un nouveau mode d'expression.

DEUXIÈME PARTIE

MODÉLISATION ET SIMULATION PHYSIQUES

D'OBJETS VOLUMIQUES DÉFORMABLES

0. INTRODUCTION

Choix de représentation

C'est un fait acquis au sein de la communauté scientifique qui s'intéresse à l'animation par ordinateur, et plus généralement à la simulation de notre environnement naturel) : le 'modèle physique' est un outil essentiel pour la reproduction du mouvement.

Ce que l'on désigne communément par 'modèle physique' est bien plus restrictif que ce que le terme laisse entendre : il s'agit d'exploiter les lois de la mécanique classique¹ (par opposition à la mécanique quantique ou relativiste, et à quantité d'autres disciplines de la physique qui s'intéressent à des aspects particuliers de la nature), afin de prédire les déplacements et les déformations des objets en fonction de leurs caractéristiques propres et de la situation dans laquelle ils se trouvent par rapport à leur environnement matériel.

Mais cet énoncé est encore trop vague, car la mécanique ne propose pas, et ne proposera sans doute jamais, de représentation totale qui permettrait d'écrire un algorithme implémentant une fonction du type : $[mouvement, déformation] = f(caractéristiques_objet, environnement)$.

Il faut par conséquent choisir (ou élaborer) une représentation partielle des objets dont on veut simuler le mouvement. De ce choix initial vont évidemment découler les caractéristiques essentielles de la réalisation, telles que le type des objets représentables et la proximité entre les prévisions réalisées et les comportements réels, et d'un autre point de vue, la nature de l'implémentation informatique. Mais aussi, et c'est ce qui me semble le plus important, notamment dans le cadre de l'animation par ordinateur, ce choix de représentation va sous-tendre l'activité de modélisation. Je désigne par ce terme la manière dont un utilisateur du système va pouvoir réaliser une simulation donnée, à partir de la connaissance, ou tout simplement de l'idée, qu'il a sur les caractéristiques intrinsèques de l'objet ou encore sur les mouvements que celui-ci doit exécuter dans certaines situations.

Les physiciens ont développé, bien avant l'apparition de l'ordinateur et a fortiori de la synthèse d'image, plusieurs représentations partielles correspondant à diverses hypothèses simplificatrices

¹ Certains travaux s'intéressent également aux lois de la thermodynamique, de la mécanique des fluides, ou encore de l'aérodynamique, qui permettent de représenter des comportements de matériaux fusibles [TPF89], et des mouvements dus au déplacement d'un flux, comme pour un objet flottant au vent [KM90], ou pour la surface d'une masse d'eau [WH91].

sur la nature des objets matériels ; elles sont destinées à résoudre de manière efficace les problèmes concrets qui se sont posés, et dépendent donc de la nature de ces derniers.

La plus ancienne de ces représentations est celle qui consiste à ne considérer que des points matériels, en interactions selon des lois particulières et soumis à des forces extérieures (comme la gravité). La représentation des systèmes dynamiques sous forme d'un ensemble de points matériels a rendu bien des services, mais s'est vite avérée très lourde pour traiter les situations complexes (invoquant un grand nombre de points en interaction de manière complexe), à une époque où la machine informatique n'étant même pas imaginable, les équations correspondantes devaient être manipulées à la main.

En rajoutant une hypothèse supplémentaire, qui dit que les points d'un même objet restent quoi qu'il arrive à une distance constante les uns des autres (ce qui restreint donc considérablement la variété des objets dont les comportements sont 'approchables'), il a été possible de formuler des expressions mathématiques plus compactes et plus aisées à manipuler. Les équations du mouvement d'un solide rigide, puis de plusieurs solides articulés entre eux, qui en résultent ont été largement adoptées et sont utilisées pour la résolution de nombreux problèmes concrets. Elles expriment directement, selon l'hypothèse de rigidité parfaite, l'effet des forces appliquées à chaque point du système sur le mouvement de l'ensemble (en calculant les résultantes et les moments de ces forces, qui provoquent respectivement des translations et des rotations du corps rigide).

Enfin, beaucoup plus récemment, l'avènement de théories et d'outils d'analyse mathématique fins et complexes a permis d'envisager la représentation d'un morceau de matière sous son aspect continu (comme le fait la théorie de l'élasticité en mécanique des milieux continus), en faisant porter les approximations non plus sur l'objet lui-même et sur sa structure, mais sur l'espace qu'il occupe, et ce avec une précision mathématique mesurable (c'est le propos des approximations par éléments finis). Il ne s'agit cependant pas encore, loin s'en faut, de la représentation idéale, même du point de vue de la mécanique analytique : d'abord parce qu'elle n'est pas adaptée à toutes les situations, ni à tous les problèmes, et qu'en réalité elle ne convient que pour les cas correspondant à l'hypothèse de petits déplacements, et ensuite parce que la complexité mathématique des problèmes formulés à partir de la théorie de l'élasticité est telle qu'il est aujourd'hui encore hors de question d'en trouver systématiquement une solution explicitement calculable ; mais surtout, parce qu'il nous est impossible de connaître les objets matériels qui nous entourent avec une telle précision mathématique. Il est en effet impossible de réaliser, dans une expérience sur un échantillon quelconque, des efforts surfaciques ou volumiques de manière aussi précise qu'ils sont formulés dans la théorie¹, et donc d'établir les relations nécessaires entre le tenseur des contraintes et celui des déformations, qui sont caractéristiques du matériau. En pratique, seul le principe de St Venant

¹ On se rend vite à cette évidence lorsque l'on s'intéresse aux essais types (solides / fluides, élasticité / viscosité / plasticité) réalisés en physique des matériaux, et aux lois de comportement des matériaux déformables (lois rhéologiques) qu'ils permettent d'établir (voir par exemple [Bam81]).

[Ger73]¹, et d'autres simplifications du même ordre, permettent d'exploiter la théorie de l'élasticité pour résoudre des problèmes concrets.

Tous les travaux existants en animation par ordinateur se basent sur l'une de ces représentations.

Vers une physique algorithmique

La théorie de l'élasticité tridimensionnelle, et les techniques de résolution basées sur la méthode des éléments finis, n'ont pratiquement pas été utilisées sous leur forme générale. Les mises en oeuvre existantes sont généralement très simplifiées (discrétisation spatiale par différences finies plutôt que par éléments finis², modèles de corps homogènes et isotropes présentant une réponse élastique linéaire), et ne permettent de simuler qu'une faible variété d'objets et de situations. Dans tous les cas, la théorie de l'élasticité tridimensionnelle conduit à des traitements de type 'preprocessing' et à des calculs de simulation très lourds. C'est pourquoi, bien que ces méthodes soient indispensables en ingénierie, où elles permettent la conception et l'étude de structures telles que la carrosserie d'une voiture, le fuselage d'un avion ou la coque d'un bateau, elles sont peu adaptées à l'animation par ordinateur.

Ces constatations ont conduit certains chercheurs à adopter, pour la simulation d'objets déformables, des démarches analogues à celle qui sous-tend les modèles de solides parfaitement rigides, ces derniers étant par ailleurs très largement utilisés. Le propos général consiste à adopter une représentation très simplifiée des objets que l'on veut simuler, en réduisant le nombre de degrés de liberté (DDL). Un objet est alors représenté comme un corps possédant les 6 DDL du comportement parfaitement rigide, plus quelques DDL de déformation qui sont choisis indépendamment de la forme géométrique de base³. Ces représentations rendent un service immédiat, et non négligeable, dans la mesure où elles permettent de générer à partir d'algorithmes très efficaces des mouvements rigides et des déformations dont les évolutions sont régies par des équations différentielles du second ordre. Cependant, ce type de modèle pose plusieurs problèmes fondamentaux. En définitive, ces représentations tronquent une partie du comportement de l'objet selon une catégorisation arbitraire (que signifie la notion de DDL pour un corps déformable ?), tout en lui conservant une apparence très générale. D'autre part, elles ne permettent tout simplement pas de simuler des situations mettant en jeu les comportements non représentés (c'est-à-dire, par exemple, une configuration impliquant une déformation, alors que le modèle utilisé est celui d'un corps parfaitement rigide). En pratique ce problème peut parfois être contourné en

¹ Ce principe formule l'hypothèse selon laquelle, si deux distributions de force, agissant sur une même partie Σ_0 de la surface d'un corps, sont telles qu'elles forment des torseurs d'effort égaux (c'est-à-dire qu'elles produisent une puissance équivalente, ou si l'on préfère qu'elles correspondent à des résultantes et à des moments égaux), alors dans toute région du corps *suffisamment* éloignée de Σ_0 , les champs de contraintes et de déplacements correspondants sont *pratiquement* les mêmes.

² Ces mises en oeuvre conduisent souvent à une représentation équivalente à celle que l'on peut obtenir à partir de points matériels en interaction selon une grille parallèle aux axes de coordonnées (voir par exemple [TPF89]).

³ Je fais allusion ici à des travaux tels que [PW89, WW90, ou MT92]. Avec le modèle proposé dans [WW90] par exemple, les corps peuvent se déformer à travers une transformation linéaire (ce qui donne 12 DDL en tout : 3 pour la translation et 9 pour l'application linéaire, qui prend en compte les rotations et les déformations), une transformation quadratique, ou d'un ordre supérieure.

augmentant la représentation de base par des co-traitements dédiés à la prise en compte de ces configurations¹. Une deuxième limitation, inhérente à ces représentations, est que celles-ci décorrèlent la forme et le mouvement, en plaquant des déformations 'simples' sur un objet, indépendamment de sa forme (il n'y a rien de 'naturel' dans un objet de la forme d'une étoile, par exemple, se déformant selon un profil quadratique). La seule manière alors de conserver une cohérence dynamique est de ré-introduire une relation entre la forme et les déformations, au niveau de la complexité et des profils de celles-ci ; il est nécessaire de rajouter une information à la représentation de base : cette information manquante relève d'une analyse, difficile, de la relation forme / mouvement. A ma connaissance, aucun des travaux exploitant ce type de modèle ne propose de méthode permettant de choisir des profils de déformation pour un objet de forme donnée.

Enfin, il reste à notre disposition les représentations à base de points matériels, qui conduisent d'une manière générale à ce que l'on appelle les modèles à constantes localisées ; ces derniers relèvent de la construction de systèmes complexes par l'assemblage d'éléments mécaniques simples, dont les comportements individuels peuvent être plus aisément caractérisés et compris. Il est remarquable de voir que ces représentations qui étaient peu exploitables lorsque, privé de calculateur numérique, l'on devait faire les calculs 'à la main', s'avèrent particulièrement adaptées à une implémentation informatique. Elles relèvent en effet de structures modulaires qui conduisent à des réseaux de processus numériques simples intercommunicants particulièrement adéquats à des mises en oeuvre parallèles et à un calcul multi-processeurs.

D'autre part, on ne peut éviter de remarquer que tous les travaux visant la simulation de corps déformables ayant des comportements impossibles à représenter avec les démarches précédentes, exploitent avec succès ce type de modèle. Celui-ci permet en effet la représentation d'objets non homogènes, non isotropes, aux comportements inélastiques diverses (du solide déformable au fluide, avec plasticité et écrouissage, fracture et recollage), dans des situations invoquant des interactions complexes entre objets. Mais ces mises en oeuvre sont peu nombreuses, et toujours réalisées dans le cadre d'une application spécifique. En définitive, cette approche semble conduire moins immédiatement que celles que nous avons présenté précédemment à des réalisations concrètes, et ceci pour une raison bien précise.

Faire le choix des modèles de points matériels revient à abandonner l'approche macroscopique autorisée par les modèles analytiques des solides rigides et des milieux continus ; il faut alors construire les objets en espérant garder une maîtrise sur leur comportement global, lequel émerge à la fois de la structure de la construction finale, des propriétés de chacun des points, et de la nature de chacune des lois d'interaction. Finalement, tout comme c'était le cas avec l'élasticité tridimensionnelle (bien que pour d'autres raisons), nous ne disposons pas de la connaissance permettant de construire un modèle donné.

¹ Les travaux de [Bar91] sur le frottement sec pour des solides rigides sont une illustration de cette démarche.

Cependant, la situation est dans ce cas différente : ces modèles sont simples et ouverts (rien à voir avec l'obscurité complexité mathématique des précédents), ils sont aisément manipulables (intrinsèquement modulaires) et peuvent nous permettre d'élaborer cette connaissance, ne serait-ce qu'en appliquant une stratégie brute du type 'trials and errors'. Pour ce faire, il faut réunir deux conditions particulières.

La première relève d'une mise en oeuvre permettant d'élaborer par étapes, par touches successives, la structure exprimant le comportement cherché. Cela impose d'imaginer les modalités d'une activité de modélisation qui permette de re-constituer les objets un à un, à partir des atomes d'un matériau simulé, et d'en tirer une connaissance nouvelle s'exprimant selon les termes de la représentation. Rassurons-nous immédiatement, il ne s'agit pas d'atomes à proprement parler, mais de 'macro-atomes' que nous pouvons situer en définitive à n'importe quelle échelle (dans l'étude d'un système planétaire, un unique point matériel peut représenter une planète de manière satisfaisante), et nous en savons déjà un bout sur la manière d'obtenir certains objets (les physiciens ont depuis longtemps l'habitude de représenter les systèmes dynamiques de cette façon) ; le propos est donc de compléter et d'affiner ce que nous savons déjà, en réalisant ce que l'on appelle aujourd'hui un 'prototypage numérique'. L'important ici est de se donner les moyens de cette modélisation structurelle, à travers ce que l'on peut maintenant appeler un langage, et d'arriver à une véritable *physique algorithmique*.

Le deuxième point concerne la précision des simulations, c'est-à-dire leur capacité à produire des mouvements se rapprochant le plus possible de la réalité. D'abord, il est clair que, pour peu que l'on s'en donne les moyens en terme de complexité du modèle (le nombre de composants mécaniques en jeu) et de puissance de calcul (pour simuler l'ensemble de ces composants avec un pas de temps aussi petit que nécessaire), il est possible d'arriver à une précision donnée avec les modèles à constantes localisées¹. La question est alors la suivante : comment allons nous définir et mesurer la distance entre les résultats de la simulation et les phénomènes réels correspondants ?

C'est l'ensemble des considérations attachées à cette question que je désigne ici sous le terme de proximité entre le représentant - le simulacre physique créé au sein de la machine numérique -, et le représenté - l'objet ou la situation naturelle de référence -.

Proximité représentant / représenté

Il est commode et légitime de définir cette notion de proximité à travers les moyens mis en oeuvre pour évaluer le résultat d'une construction particulière, en termes de caractéristiques du système dynamique correspondant ou tout simplement des mouvements produits. C'est ainsi que l'homme procède depuis toujours : nous considérons que deux choses sont identiques, dès lors qu'on ne peut percevoir de différences entre elles.

¹ Le problème sous-jacent ici est celui de la nécessaire optimisation des représentations : quel est le nombre minimal de composants, l'échantillonnage temporel le plus large, et également la quantification numérique la moins fine (nombre de bits utilisés pour représenter les grandeurs numériques) permettant d'arriver à une précision donnée.

Je n'ai nullement la prétention ici de mener une discussion approfondie sur ce sujet, qui constitue en soi un vaste domaine d'étude. Je voudrais cependant, à partir de constatations simples, distinguer deux modes d'évaluation opposés qui correspondent à deux applications différentes de la simulation des systèmes dynamiques.

Le critère de validité d'un modèle peut reposer entièrement sur la perception naturelle. Dans ce cas la proximité entre le simulacre et la situation cherchée repose uniquement sur la manière dont un opérateur humain va percevoir les phénomènes sensibles produits par le calcul numérique. La simulation physique permet de produire les phénomènes sensibles et perceptibles par l'homme au travers des canaux de perception visuel, auditif, et *haptique* (ce qui signifie tactilo-kinesthésique, dans ce cas particulier la communication est à double sens : la manipulation consiste à la fois à percevoir et à agir)¹. C'est alors l'opérateur humain qui dira si la reproduction est suffisamment proche de la situation naturelle pour convaincre, c'est-à-dire si elle exprime correctement ce qu'il voulait faire ressentir. Par conséquent ce n'est pas forcément la réalité physique du modèle (sa correspondance avec un objet réel) qui est ici importante, mais sa capacité à produire l'information nécessaire pour faire ressentir à l'observateur la situation d'une manière précise². Les phénomènes liés à la perception, en jeu dans ce processus, sont aujourd'hui particulièrement méconnus³, et il semble essentiel pour ce type d'objectif de proposer des modèles constructibles, facilement modifiables, et autorisant une grande souplesse dans l'évaluation perceptive. Les applications correspondantes sont l'animation par ordinateur bien sûr, mais également toutes celles se plaçant dans le cadre de la communication Homme/Machine.

Les scientifiques, et particulièrement ceux qui s'intéressent à la physique expérimentale, ont depuis toujours cherché à compenser les limitations et la faillibilité de la perception humaine. Ils ont pour ce faire établi des protocoles d'observation, et surtout développé des appareils de mesure livrant une information parfaitement objective des phénomènes expérimentés (bien que, au bout de la chaîne, ce soit les sens humains qui interviennent). Cette information quantitative établie par la mesure fournit un moyen de calibrer précisément le simulacre physique, à travers les méthodes d'identification. Il est alors envisageable d'élaborer des modèles permettant la simulation de phénomènes physiques réels, dans l'objectif d'applications scientifiques. Le propos n'est pas ici de remplacer les théories de la mécanique analytique et les méthodes numériques associées, mais de réaliser un travail complémentaire visant à permettre l'utilisation de la simulation physique dans des situations nouvelles. L'exploitation des modèles à constantes localisées, qui sont particulièrement orientés vers la représentation des interactions et permettent des modifications rapides, autorise l'utilisation de la simulation physique pour prédire les phénomènes surgissant dans des situa-

¹ Il est également envisageable de s'adresser aux canaux de perception de la chaleur, de l'odorat et du goût, en intégrant dans le modèle des caractéristiques thermodynamiques et chimiques, et en imaginant qu'il soit possible de produire les phénomènes sensibles correspondant.

² Le savoir-faire d'un animateur traditionnel relève justement de la capacité à produire cette information, et ce même à partir de personnage fait de matériaux inertes comme des bouts de ficelle et des morceaux de carton.

³ Ils relèvent d'illusions perceptives, de la catégorisation des perceptions (les systèmes sensoriels humains offrent une résolution finie et notre cerveau traite l'information reçue de manière très particulière), et d'un ensemble d'autres facteurs étudiés notamment en psychologie expérimentale.

tions mal connues et difficilement expérimentables. La simulation permet, par exemple, d'évaluer les capacités motrices d'un robot mobile en progression sur des terrains difficiles et impossibles à reproduire, comme ceux rencontrés dans le cadre d'exploration planétaire ; ceci n'est pas réalisable par des méthodes d'expérimentation classiques. L'analyse des phénomènes particuliers en jeu dans les comportements de multitude, notamment l'étude des relations existant entre les propriétés individuelles de chaque grain et le comportement d'un matériau granulaire, difficile à mener en grandeur nature, est une autre illustration des applications scientifiques de ce type de modèle. L'application correspondante est donc celle d'un système pour la réalisation de bancs d'expérimentation physique simulés. Cela constitue bien sûr un objectif à long terme, étant donné l'énorme travail de prototypage numérique qui doit être mené avant de disposer d'une bibliothèque de modèles et donc d'un système opératoire.

Dans la deuxième partie de ce document

Le premier chapitre de cette deuxième partie présente les caractéristiques fondamentales du langage de représentation d'objets physiques CORDIS-ANIMA développé depuis une quinzaine d'années à de l'ACROE, et des principes qui président à sa mise en oeuvre algorithmique. Ce langage est basé sur une représentation des objets à partir de deux types de composants mécaniques discrets. À chacun de ces composants, qui représentent des points matériels et des éléments d'interaction entre ces points, est associé un module ; un système mécanique se décrit alors en connectant entre eux des modules de types opposés. Il s'agit donc d'une mise en oeuvre particulière des modèles à constantes localisées. Le choix fondamental guidant la réalisation du système de simulation consiste à faire correspondre à chaque module (matériel et d'interaction) une expression explicite permettant de calculer les variables de sortie en fonction des variables d'entrée ; un programme de simulation se présente comme une collection de processus en communication synchrone. Ces choix visent à garantir une modularité totale aussi bien au niveau des modèles qu'au niveau algorithmique.

L'ensemble du travail réalisé pendant ma thèse se situe dans le cadre du modéleur-simulateur CORDIS-ANIMA. L'objectif était le développement de classes de modèles permettant la représentation d'une large variété d'objets volumiques déformables, ce qui impliquait notamment la prise en compte de phénomènes non-linéaires divers. Le chapitre II présente une réflexion générale sur les comportements non-linéaires des systèmes dynamiques et sur leur représentation algorithmique à partir de fonctions explicites et d'automates d'état finis. Il est également l'occasion d'amorcer une étude sur l'optimisation des représentations.

Dans le troisième chapitre, je propose un modèle de matériau déformable à comportement élastoplastique, obtenu à partir d'une multitude de composants élémentaires en interaction ; l'ensemble se présente comme un *agglomérat*. Ce matériau homogène est à la base d'un modèle d'objets volumiques déformables non homogènes et non isotropes. Ces objets sont construits de manière progressive en rajoutant, couche par couche, la matière enrobant un *noyau* central. Cette proposition pour la construction de modèles induit un principe général d'économie dans la représentation.

Ces modèles d'objets, formés en définitive d'une multitude de points matériels, posent le problème fondamental de la reconstruction du contour. L'analyse de cette question a permis l'élaboration d'un modèle d'interaction de surface de type frottement sec (force de frottement indépendante de la vitesse relative), présenté au chapitre IV. Ce modèle de frottement de surface repose sur un automate d'état fini régissant les commutations entre plusieurs caractéristiques de force associées à des régimes d'interaction différents. Le principe général permet de représenter d'autres types d'interactions que le frottement sec, comme celles existant entre des ski fartés et une surface enneigée, mais également d'exploiter des caractéristiques variées obtenues à partir de mesures expérimentales.

Un des rôles importants du *noyau*, dans les modèles d'*agglomérat*, outre celui de permettre une optimisation conséquente des modèles, est d'organiser et de structurer globalement les mouvements de la multitude de points matériels. D'autre part, l'obtention de comportements globaux précis (lesquels, en définitive, émergent de l'ensemble des comportements individuels), est délicate avec ce genre de modèle. Je propose, dans le chapitre V, d'exploiter directement les lois de comportement de la matière (modèles rhéologiques), afin d'élaborer, à partir d'un nombre réduit de composants, des modèles de matériaux élasto-plastiques par exemple. La méthode proposée est générale et permet d'obtenir les algorithmes correspondant à n'importe quelle combinaison des modèles rhéologiques de base. Les composants mécaniques obtenus permettent de construire des *noyaux* aux comportements riches et renforcent le principe d'économie introduit précédemment.

Le sixième et dernier chapitre de ce document a une double fonction. Il traite des approches et des concepts que nous avons exploités pour générer et contrôler les mouvements des objets physiques simulés et est l'occasion d'exposer les nombreuses expérimentations que nous avons réalisées avec le système.

Les techniques de base utilisées sont la manipulation rétroactive en temps réel des objets simulés (qui est possible avec le système CORDIS-ANIMA par l'intermédiaire d'interfaces gestuelles spécialement développées par l'équipe), et la modélisation d'effecteurs et de systèmes de commande par régulation. Ces techniques, ainsi que les concepts et les modèles que nous avons développés autour de la notion de structure de contrôle, ont été mis en oeuvre dans le cadre de la simulation d'une grande variété d'objets et de situations qui sont présentés tout au long de ce sixième chapitre.

I. CORDIS-ANIMA :

MODELEUR - SIMULATEUR D'OBJETS PHYSIQUES

I.1 Introduction

Les chercheurs fondateurs de l'ACROE (Association pour la Création et la Recherche sur les Outils d'Expressions), puis de l'équipe Informatique Graphique et Musicale au sein du LIFIA, travaillent depuis une quinzaine d'années sur la conception et la réalisation d'un outil informatique pour la création musicale et la création d'images animées. L'ensemble de ces recherches s'est organisé autour de mises en oeuvre et d'expérimentations successives du système CORDIS-ANIMA dédié à la modélisation et à la simulation numérique en temps réel d'objets physiques audibles, visibles et manipulables [Flo78, Cad79, LC84-86, Luc85, Raz86, FLC86, CLF81-90].

La fonction du système CORDIS-ANIMA, qui est au centre de l'outil de création, est de permettre l'élaboration d'un simulacre numérique de certains des objets du monde qui nous entoure. On s'intéresse ici, d'une manière générale, à l'ensemble des objets capables de mouvements (vibrations sonores ou déplacements et déformations) sous l'effet des actions gestuelles d'un opérateur humain. CORDIS est plus particulièrement dédié aux objets sonores, tandis qu'ANIMA s'adresse à la représentation des objets mobiles et déformables. Le simulacre est constitué d'un calculateur numérique programmé de manière adéquate et capable de communiquer avec l'opérateur humain à travers un ensemble de transducteurs répartis selon trois canaux sensoriels : le canal acoustique, le canal visuel et le canal gestuel. Les deux premiers remplissent les fonctions auxquelles ils sont traditionnellement dédiés dans les applications informatiques 'multimédia' ; le canal gestuel sera par contre considéré dans ses deux directions : de l'opérateur vers le simulacre (pour la prise en compte des actions gestuelles), et en retour, du simulacre vers l'opérateur (pour la restitution des perceptions tactiles et kinesthésiques). Bien que nous n'approfondirons pas ce sujet, signalons que des interfaces particulières permettant le retour d'effort, auxquelles nous ferons référence sous le nom de 'transducteurs gestuels', doivent être spécialement développées pour ce propos.

L'objectif global est donc celui d'une simulation *totale*, ne visant pas simplement la synthèse des phénomènes acoustiques ou visuels produits par l'objet, mais la synthèse de l'objet lui-même, dans l'intégralité de son comportement vis-à-vis de la relation sensori-motrice qui s'établit lors de la manipulation réelle d'objets naturels. On parlera, pour décrire cette relation, de situation instrumentale naturelle ou simulée selon qu'il s'agit de la référence ou du simulacre (figure 1). Les raisons fondamentales de cet objectif sont liées au propos de l'utilisation de l'outil informatique pour la création artistique, nous ne les discuterons pas ici et renvoyons le lecteur intéressé à des communications antérieures sur ce propos [CF78, Luc 81]. Par contre, de là découlent les principes adoptés dans la conception du formalisme de représentation, les algorithmes numériques associés à ce formalisme, et le système informatique qui permet de les mettre en oeuvre.

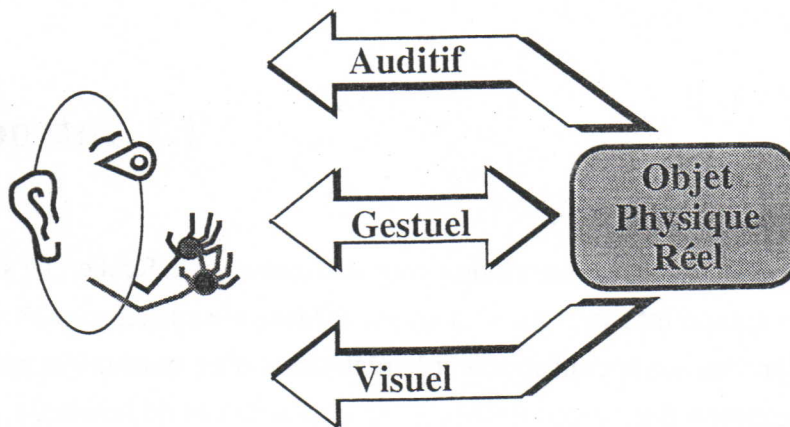


Figure 1 : Situation instrumentale

Ce chapitre est consacré à la présentation du formalisme CORDIS-ANIMA pour la représentation des objets physiques, des algorithmes qui lui sont associés, et de l'articulation permettant de passer des modèles à la simulation.

I.2 Formalisme général pour la représentation des objets physiques

I.2.1 Points de communication 'M' et 'L'

L'objectif d'une situation instrumentale virtuelle impose de s'intéresser à la modélisation et à la simulation d'objets physiques. Cette simulation va s'effectuer à partir d'un processus de calcul numérique qui devra être capable, à travers des dispositifs appropriés, de produire et de

consommer des phénomènes sensibles afin de rendre le simulacre accessible à certaines de nos perceptions et sensible à nos actions.

La technologie actuellement envisageable pour ces dispositifs, que nous avons appelé des transducteurs, et qui vont être dédiés à un canal sensoriel particulier, implique une réduction fondamentale dans le passage de la situation naturelle à la situation simulée. Ces dispositifs, formés de capteurs, de convertisseurs numériques/analogiques et d'effecteurs, vont être capables de consommer et de produire des signaux de dimension finie et en nombre fini (on pourrait dire limité). Ainsi la communication entre un agent humain et le simulacre numérique est intrinsèquement discrète et de dimension finie ; notamment, au niveau du canal gestuel, les champs de force et de déplacement entre nos organes de manipulation et l'objet seront réduits à des forces et à des déplacements ponctuels ou multiponctuels.

Cette constatation sur la réduction de fait introduite par l'usage des transducteurs conduit au choix d'une représentation des interactions physiques entre objets sous forme d'une communication mécanique ponctuelle. D'autre part, la séparation entre capteurs et effecteurs va faire que cette communication sera orientée : tout contact bilatéral devra être établi à travers une paire d'entrée et de sortie complémentaires et indissociables. Une conséquence immédiate de ceci est d'abord la séparation des variables duales intensive et extensive, Force et Position (ou Vitesse), puis leur affectation respective à l'un et à l'autre des éléments de cette paire.

Nous nous trouvons donc en présence de deux types de paires d'entrée/sortie que nous appellerons points de communication. Les points de communication prenant la variable intensive en entrée et la variable extensive en sortie seront notés 'M', ceux pour lesquels c'est l'inverse seront notés 'L' (figure 2).

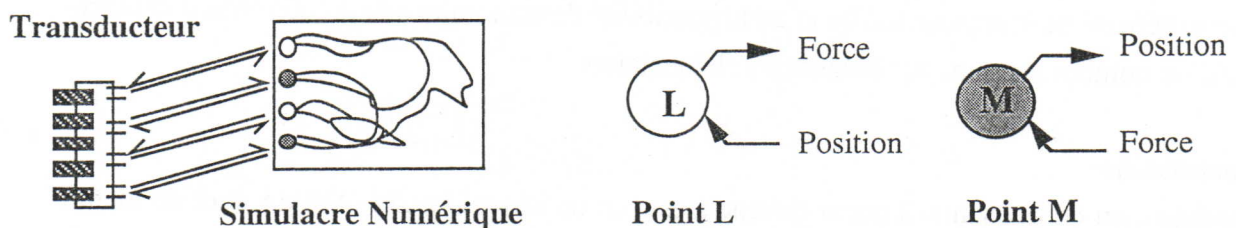


Figure 2 : Communications ponctuelles et orientées - Points 'M' et 'L'

Les canaux acoustiques et visuels sont physiques, mais non mécaniques, et ils ne sont pas intrinsèquement bidirectionnels. Ces canaux peuvent se ramener à une sortie de l'objet vers l'oeil ou l'oreille de l'agent humain. Cependant afin de conserver la vision bilatérale de la communication entre le simulacre numérique et l'opérateur, les canaux visuels et auditifs seront décrits en terme de points 'M' ou 'L' dégénérés, c'est-à-dire sans retour.

Ainsi tout simulacre numérique construit dans le cadre du formalisme CORDIS-ANIMA se présente comme une collection de points de type 'M' ou de type 'L' (figure 3).

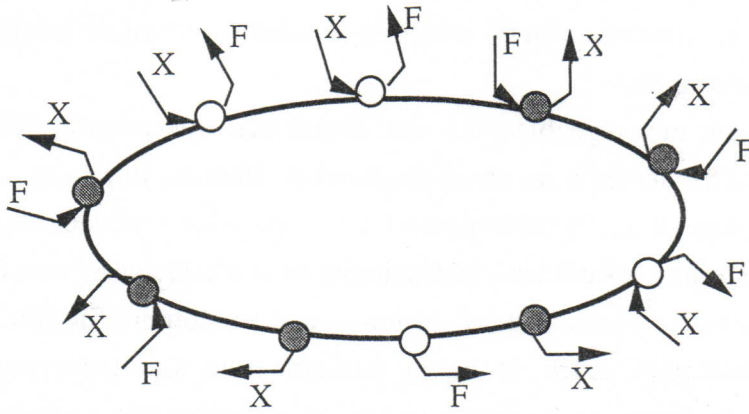


Figure 3 : Forme Générale d'un simulacre CORDIS-ANIMA (format communicationnel)

I.2.2 Généricité et expérimentabilité des modèles

Les choix fondamentaux attachés au formalisme CORDIS-ANIMA sont ceux de la modularité des modèles et de l'expérimentabilité de chacun des modules.

Modularité

Tout objet CORDIS-ANIMA est constitué d'un certain nombre de sous objets agencés selon une certaine structure. Les propriétés de l'objet global sont alors complètement déterminées par les propriétés intrinsèques de chacun de ses composants, ainsi que par la structure et la nature des communications mécaniques établies entre ces ceux-ci. Cette modularité est la garantie d'une certaine généricité de la représentation et de la possibilité de construire une grande variété d'objets à partir d'un nombre restreint de composants élémentaires.

Expérimentabilité

Les modules, ou composants, à partir desquels est fait un objet CORDIS-ANIMA sont de même nature que l'objet constitué. Chacun de ces modules doit pouvoir, comme l'objet lui-même, être mis en relation sensori-motrice avec un éventuel opérateur. Tous les éléments auxquels l'utilisateur a affaire avec CORDIS-ANIMA ont une réalité mécanique expérimentable, et la première connaissance que celui-ci en a, mis à part toutes représentations formelles, est perceptuelle.

De l'ensemble des choix et des principes que nous venons d'énoncer, on peut déduire de manière immédiate les règles d'assemblage ainsi que la nature des modules élémentaires, c'est-à-dire des atomes du système de représentation.

La connexion, réalisable uniquement entre deux points de communication de type complémentaire 'M' et 'L', va se faire naturellement en utilisant la sortie de l'un comme entrée de l'autre et réciproquement. D'autre part, nous avons associé une des deux variables duales à chaque ligne de

communication, les règles de construction des objets vont se déduire de la cohérence physique que cela recouvre. Ainsi plusieurs point 'L' peuvent être connectés à un même point 'M'. La force en entrée du point 'M' sera dans ce cas la résultante des forces de sortie de chacun des points 'L' qui lui sont connectés, tandis que la position en sortie du point 'M' sera distribuée sur les entrées de chacun des points 'L'. On ne peut pas connecter plusieurs points 'M' à un même point 'L' (figure 4).

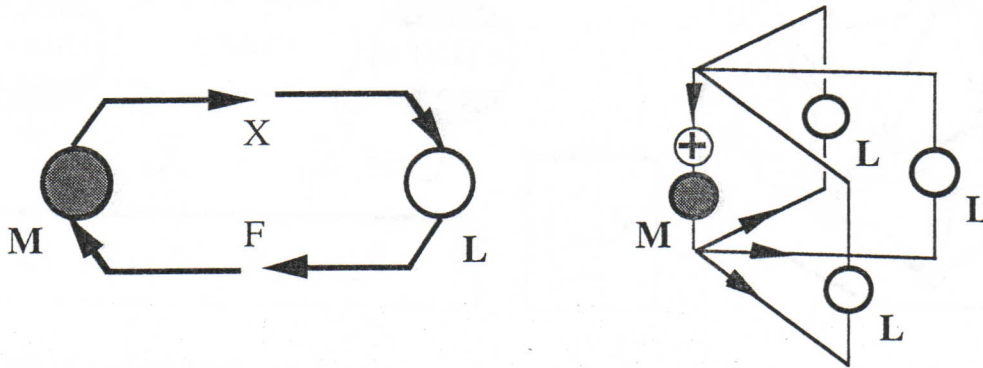


Figure 4 : Règles de connexion des points de communication

Enfin, ce principe de décomposition structurelle doit forcément atteindre une limite, celle des plus petits objets représentables, des atomes du système. Le plus petit objet envisageable jusqu'à présent serait constitué d'un seul point de communication. Cependant, un système constitué uniquement d'atomes 'M' et 'L' ne permettrait pas, compte tenu des règles de connexion, de représenter une grande variété d'objet, et en fait les seules structures réalisables seraient dans ce cas des étoiles.

Il va donc falloir construire des atomes plus complexes en assemblant les points de communications. Une rapide investigation permet d'établir que les atomes les plus simples aboutissant à un système générique sont les deux suivants (voir figure 5) :

◇ l'atome <MAT> constitué d'un point de communication de type 'M'. Il sera associé à un algorithme qui calcule en sortie une position X au cours du temps, à partir de la résultante des forces F appliquées en entrée par l'environnement. Il représente donc une localisation ponctuelle dans l'espace. Cet atome est l'élément minimal de matière, nous l'appellerons '*point matériel*'.

◇ l'atome <LIA> constitué de deux points de type 'L' soudés entre eux. Il permet de connecter deux points matériels, et sera associé à un algorithme qui calcule deux forces en sortie à partir de ce qu'il connaît des deux points connectés : leurs positions et leurs vitesses (ou déplacements ∂X). Cet atome représente une liaison mécanique entre deux points matériels, nous l'appellerons '*élément de liaison*'. La cohérence physique globale nous dicte dès maintenant le respect de la loi fondamentale en mécanique de l'action et de la réaction. Ainsi devons nous garantir que les forces calculées par les éléments de liaison seront égales en module et de sens opposés.

Tout simulacre construit à l'aide du formalisme CORDIS-ANIMA sera donc formé d'un ensemble d'éléments de liaison et de points matériels interconnectés. Nous adopterons souvent une représentation sous forme d'un réseau, dont les noeuds sont occupés par les points matériels et dont les arcs représentent les éléments de liaison (figure 5).

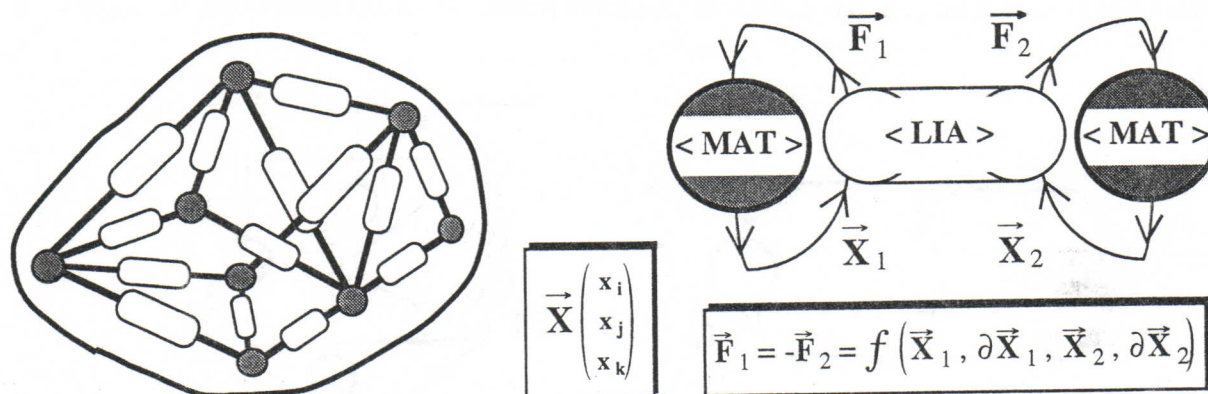


Figure 5 : Réseau de composants discrets interconnectés : points matériels et éléments de liaison

L'ensemble de ces réflexions porte à choisir une représentation des systèmes physique adaptée à la simulation numérique modulaire d'objets déformables, et conduit à élaborer ce que l'on peut appeler aujourd'hui une physique algorithmique [LJC91].

On remarquera à l'issue de cet exposé que c'est en poussant à l'extrême la contrainte sur la 'ponctualisation' des communications, laquelle est inhérente au support technologique, que l'on est amené à remonter jusqu'à la physique de Newton en optant pour la dynamique des systèmes de particules. Dans ce système de représentation, la matière comme le temps sont discrétisés et localisés en des points. Il nous faudra jouer avec les pas de discrétisation spatiale et temporelle, afin de laisser nos sens croire au continu face à cette représentation discrète.

I.2.3 Les modules fonctionnels

Le paragraphe précédent était consacré à la définition et aux règles d'assemblage des 'modules physiques' au sein du formalisme CORDIS-ANIMA. Cependant, cette logique de représentation ne peut être poussée jusqu'au bout si l'on ne dispose pas d'une puissance de calcul infinie. Le système va donc articuler deux niveaux de cohérence disjoints, en établissant un dualisme entre module physique et module fonctionnel.

Les modules fonctionnels ne répondent plus forcément à une référence physique immédiate et ne manipulent plus uniquement les variables duales Force et Position. Leur rôle est de permettre certains raccourcis dans la représentation des systèmes physiques, et d'étendre ainsi les capacités de simulation. Le système CORDIS-ANIMA distingue dans sa version achevée actuelle [CLF90]

deux types de modules fonctionnels : les modules de variation dynamique et les modules de point de vue relatif.

A. Modules de Contrôle Dynamique

Les propriétés d'un simulacre CORDIS-ANIMA découlent essentiellement de deux niveaux de représentation. L'un est celui du modèle physique associé à chaque module élémentaire et procède d'expressions mathématiques et algorithmiques qui sont déterminées quantitativement par un ensemble de paramètres. Le second niveau est celui de la structure de l'objet global, c'est-à-dire de la carte des connexions établies entre les différents modules qui le compose. On peut donc définir deux types de variation dynamique du modèle, celles-ci relèvent respectivement de modifications paramétriques et de modifications structurelles.

Ces modifications dynamiques, c'est-à-dire ayant lieu au cours de la simulation, ne sont bien sûr pas spontanées. En fait, soit elles résultent d'une évolution interne de l'objet global, soit elles sont décidées et provoquées par l'opérateur. Nous ne disposons jusqu'à présent, pour communiquer de l'information, que des points de communication et des variables duales qui y circulent, et bien que l'information dont il s'agit ici ne soit pas forcément de type physique, c'est sous la forme des variables Force et Position qu'elle sera transmise. Les modules assurant le contrôle des variations dynamiques, structurelles ou paramétriques, doivent donc présenter des points de communication de type 'M' ou 'L' afin d'être connectables à l'élément susceptible d'engendrer des modifications (sous partie de l'objet global ou utilisateur).

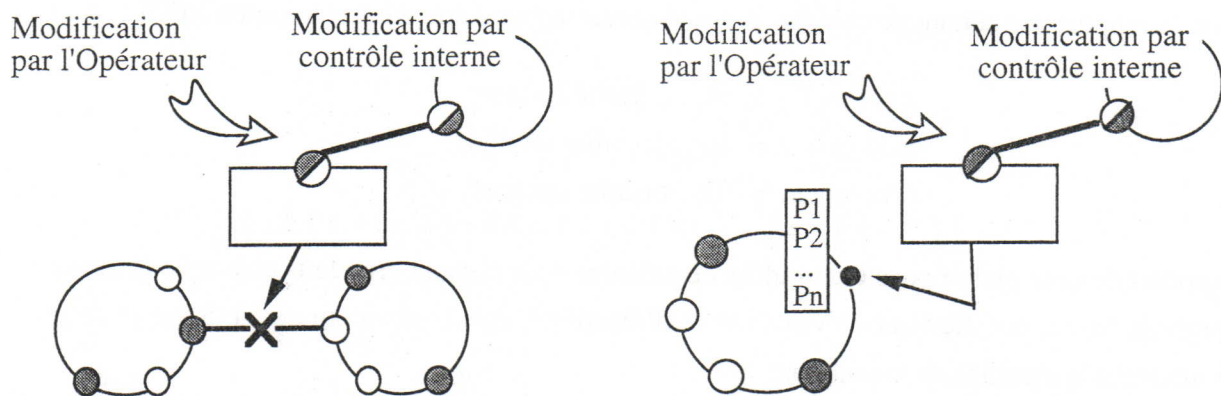


Figure 6 : Module de Contrôle Structurel et Module de Contrôle Paramétrique
(modification par l'opérateur ou par évolution interne)

En revanche le type des sorties des modules de contrôle structurel et paramétrique ne peut être physique. Dans le premier cas il s'agit d'établir ou de rompre une connexion entre deux points de communication : l'information produite doit donc être de type logique. Les sorties d'un module de contrôle structurel seront de type booléen (figure 6). Dans le second cas, il s'agit de modifier les paramètres de l'algorithme associé à un module physique. Les sorties des modules de contrôle

paramétrique seront donc de même format que le ou les paramètres dont elles spécifient la variation (entier ou réel, signé ou non), et seront directement connectées aux registres de paramètres d'un module physique (figure 6).

Enfin il faut préciser ici que la variation structurelle dynamique ne peut être utilisée sans précautions ; les modules que nous décrivons ici ont pour seul objet de permettre une telle modification, en superposant un système logique au système physique initial, mais sans en assurer la cohérence dynamique. Notamment, une modification intempestive des paramètres d'un module, tout comme l'établissement ou la suppression d'une connexion, peuvent avoir pour conséquence un apport ou une suppression instantanée d'énergie.

B. Modules de Point de Vue Relatif

L'objet global CORDIS-ANIMA se présente à son environnement, c'est-à-dire aux autres objets et à l'opérateur via les transducteurs, sous forme d'un certain nombre de points de communication qui véhiculent des représentations numériques des grandeurs physiques Force et Position. Les modules de changement de point de vue relatif vont servir à modifier quantitativement l'aspect sous lequel se présente un objet donné, en s'interposant entre deux points de communication.

L'utilisation la plus immédiate d'un tel mécanisme est d'établir une correspondance entre les unités interne des variables et un système standard de référence (le système MKS par exemple). Ainsi, par exemple, il faut pouvoir faire correspondre à chaque valeur ' ϕ ' en unité interne de la variable Force, une valeur ' f ' en newton. De même, à chaque valeur ' ξ ' en unité interne de la position, doit correspondre une valeur ' x ' en mètre. On peut ainsi préciser, pour chacune des unités internes, le rapport permettant de calculer la grandeur correspondante dans le système MKS :

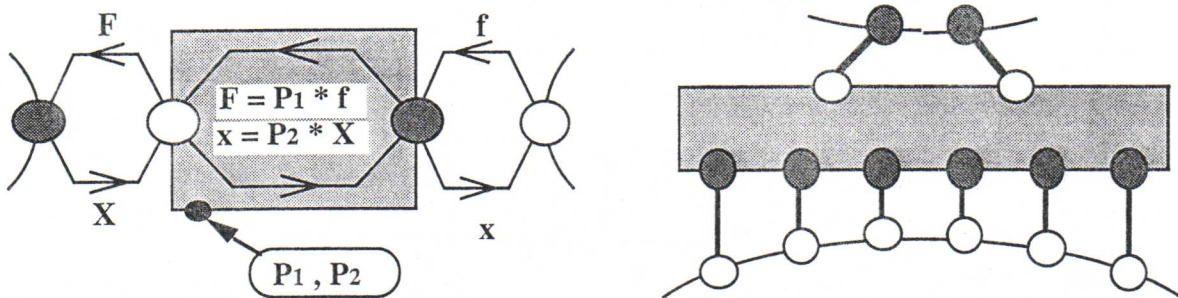
$$\begin{aligned} x \text{ (mètre)} &= R_x \cdot \xi \text{ (unité interne)} \\ m \text{ (kg)} &= R_m \cdot \mu \text{ (unité interne)} \\ t \text{ (seconde)} &= T_e \cdot \tau \text{ (unité interne)} \end{aligned}$$

Ces rapports de conversion permettent alors de calculer pour chaque grandeur physique (vitesse, accélération, force, coefficients de viscosité et d'élasticité, etc..), sa valeur réelle à partir de la valeur interne à la machine de simulation.

Ce même principe de changement d'échelle peut s'appliquer en interne, entre deux objets simulés, et permettre de faire en sorte qu'ils se voient selon des tailles relatives différentes. Comme nous l'avons signalé, le module de point de vue relatif va s'intercaler entre deux points de communication 'M' et 'L' connectés, et présente donc lui-même un point 'M' et un point 'L' (figure 7).

Un cas plus complexe que le changement d'échelle est celui du changement de repère pour les coordonnées spatiales, comme le passage d'un repère fixe à un repère mobile, ou d'un repère cartésien à un repère en coordonnées polaires.

Enfin il peut être très utile de distribuer les influences d'un petit nombre de points 'M' ou 'L' d'un premier objet, sur un grand nombre de points 'L' ou 'M' d'un second objet ou d'un groupe d'objets (figure 7).



Dans ce cas général, la simple multiplication par un facteur d'échelle du module élémentaire fait alors place à des traitements plus complexes (comme des interpolateurs barycentriques par exemple).

I.3 Les algorithmes de simulation

I.3.1 Introduction

Le paragraphe précédent décrivait la forme générale du langage de représentation d'objets physiques déformables qu'est CORDIS-ANIMA. Nous allons nous intéresser maintenant au contenu algorithmique des modules physiques et à la réalité des systèmes dynamiques que l'on veut représenter, en associant à chaque module un objet physique réel de référence.

Notre support de représentation, la machine numérique, va imposer ici encore ses contraintes. Au sein de ce support, toute l'information et toutes les opérations sur cette information sont décrites en terme d'un nombre fini de bits. Notamment, on va travailler avec des représentations numériques donnant l'apparence du continu, mais intrinsèquement discrète (comme tout codage flottant) : cela représente un niveau supplémentaire de discrétisation après celui inhérent à la représentation ponctuelle de la matière.

Enfin, il y a un troisième niveau de discrétisation complètement lié, comme les deux précédents, à l'utilisation de la machine numérique : toute opération numérique s'effectue en un laps de temps fini et non nul. Les conséquences immédiates sont, d'une part, que tout signal produit ou consommé par la machine se présentera comme une suite de valeurs numériques (un signal échantillonné) ; d'autre part, entre les échantillons d'entrée et les échantillons récupérés en sortie

du calcul effectué par la machine va s'écouler un laps de temps non nul : les signaux échantillonnés en entrée et en sortie sont forcément décalés dans le temps. Cette question fondamentale a été largement approfondie, dans le cadre de l'étude de la commande automatique par ordinateur numérique et du traitement du signal en général [Sév89]. L'ensemble des notions qui y sont rattachées doivent être adaptées au problème de la synthèse du mouvement par modèle physique.

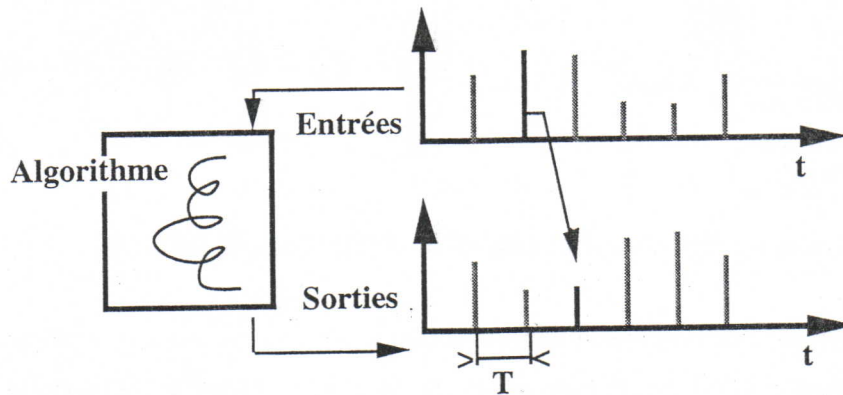


Figure 8 : T-Simulation, entrées / sorties synchrones et décalées dans le temps de T.

La machine CORDIS-ANIMA est définie selon un schéma temporel unique pour les entrées et les sorties ; on appelle alors *T-Simulation* [CLF90, CLFR91] une situation dans laquelle un algorithme de simulation (figure 8) :

- ◇ traite en entrée des signaux échantillonnés aux conditions de Shannon à la période T constante,
- ◇ produit en sortie des signaux échantillonnés selon les mêmes conditions,
- ◇ établit entre les signaux d'entrée et ceux de sortie la relation suivante : les instants d'entrée et de sortie sont synchrones et il s'écoule un laps de temps d'une période T entre les entrées et les sorties qui en résultent.

T est donc à la fois la période d'échantillonnage des signaux d'entrée et des signaux de sortie, et la période de simulation. De même, $F = 1/T$ est appelée fréquence d'échantillonnage ou fréquence de simulation selon que l'on parle des signaux d'entrée et de sortie, ou de la boucle de calcul de la simulation.

I.3.2 La matière linéaire

A. Masses, ressorts, amortisseurs

La mécanique classique caractérise l'état d'un système composé d'un nombre fini de points matériels par l'ensemble des positions et des vitesses de ces points. Le point matériel, ou masse

ponctuelle, apparaît comme un système dynamique élémentaire, dont l'équation fondamentale de la mécanique ($F=m*\Gamma=m*\frac{d^2X}{dt^2}$) permet de relier les variables d'état (position et vitesse exprimées dans l'espace euclidien) aux forces qui lui sont appliquées. Cette équation conduit donc à considérer le point matériel comme un dipôle force / position, qui est parfaitement calculable lorsque l'on considère la force comme variable d'entrée et la position comme variable de sortie (figure 9).

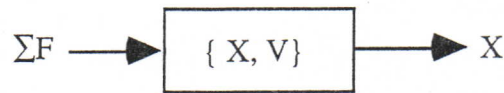


Figure 9 : Le point matériel : dipôle Force / Position

Le choix qui a été fait dans le cadre du système de simulation CORDIS-ANIMA est donc de ramener toute la matière inerte au niveau des points matériels, tandis que les éléments de liaisons régissent exclusivement les interactions entre points, et représentent donc des liaisons mécaniques idéalisés (sans masse ni inertie). Les trois éléments de base de représentation de la matière dans CORDIS-ANIMA sont donc le point matériel et les deux liaisons mécaniques linéaires élémentaires : le ressort et l'amortisseur. Ces liaisons correspondent respectivement au calcul d'une force élastique ($F = -k.\Delta X$) et d'une force visqueuse ($F = -z.\Delta V$).

Ces trois éléments, que l'on ramènera souvent à deux en considérant une liaison mécanique élasto-visqueuse intégrant un ressort et un amortisseur ($F = -k.\Delta X - z.\Delta V$), constituent le substrat matériel de CORDIS-ANIMA.

B. Expressions numériques

Nous devons maintenant, après avoir associé un objet physique de référence à chaque module, élaborer l'algorithme permettant d'en calculer le comportement dynamique. Ce calcul doit se faire indépendamment pour chaque module, et uniquement à partir des variables d'état et des variables en entrée. Ceci implique, en particulier pour la masse ponctuelle, de donner une expression numérique explicite des équations caractéristiques de l'élément mécanique de référence. Nous allons pour cela appliquer un schéma de discrétisation temporelle permettant une approximation numérique des opérateurs de dérivation.

Le schéma utilisé ici est l'un des plus simples qui soient envisageables. Il est souvent appelé schéma d'Euler et consiste à approcher la variation d'une fonction par les premiers termes de sa série de Taylor.

Soit une fonction Y continue et dérivable et T_e la période d'échantillonnage (constante).

On pose $Y_n = Y(n \cdot T_e)$, $Y'_n = \frac{dY}{dt}(n \cdot T_e)$, et $Y''_n = \frac{d^2Y}{dt^2}(n \cdot T_e)$.

Le développement en série de Taylor à l'ordre deux s'écrit :

$$\text{schéma descendant} \quad Y_{n-1} = Y_n - T_e * Y'_n + T_e \cdot O(T_e)$$

$$\text{schéma ascendant} \quad Y_{n+1} = Y_n + \text{Te} * Y'_n + \text{Te} \cdot \mathcal{O}(\text{Te})$$

et à l'ordre trois :

$$\text{schéma descendant} \quad Y_{n-1} = Y_n - \text{Te} * Y'_n + \frac{\text{Te}^2}{2} * Y''_n - \text{Te}^2 \cdot \mathcal{O}(\text{Te})$$

$$\text{schéma ascendant} \quad Y_{n+1} = Y_n + \text{Te} * Y'_n + \frac{\text{Te}^2}{2} * Y''_n + \text{Te}^2 \cdot \mathcal{O}(\text{Te})$$

Ces expressions nous permettent d'écrire :

$$Y'_n = (Y_n - Y_{n-1}) / \text{Te} + \mathcal{O}(\text{Te})$$

$$Y''_n = (Y_{n+1} - 2 * Y_n + Y_{n-1}) / \text{Te}^2 + \mathcal{O}(\text{Te})$$

Selon ce schéma, l'équation fondamentale de la mécanique ($F = m * \Gamma = m * \frac{d^2 X}{dt^2}$) est approchée par

l'expression discrète suivante :

$$\vec{F}_n = \frac{m}{\text{Te}^2} * (\vec{X}_{n+1} - 2 * \vec{X}_n + \vec{X}_{n-1})$$

$$\text{ce qui se réécrit} \quad \vec{X}_{n+1} = 2 * \vec{X}_n - \vec{X}_{n-1} + \frac{\text{Te}^2}{m} * \vec{F}_n$$

Nous disposons ainsi d'une expression *récurrente* donnant les positions au pas n+1 en fonction des positions et forces au pas n, et des positions retardées (au pas n-1).

L'expression caractéristique d'un ressort fournit une force proportionnelle à l'élongation ($F = -k \cdot \Delta X$), tandis que celle d'un amortisseur visqueux fournit une force proportionnelle à la vitesse relative des deux extrémités ($F = -z \cdot \Delta V$).

Si l'on note $D = \|\vec{X}_1 - \vec{X}_2\|$ la distance entre les deux points aux extrémités et D^{retard} la valeur de D au pas précédent, $\vec{u} = \frac{1}{D} \cdot (\vec{X}_1 - \vec{X}_2)$ le vecteur unitaire du bipoint et L_0 la longueur au repos du ressort, l'expression numérique associée au ressort s'écrit : $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = -k \cdot (D - L_0) * \vec{u}$, et celle de l'amortisseur : $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = -z / \text{Te} \cdot (D - D^{\text{retard}}) * \vec{u}$.

L'expression utilisée ci-dessus pour calculer la vitesse relative axiale appelle quelques précisions. On a dans tous les cas $(\vec{X}_1 - \vec{X}_2) \cdot \vec{u} = D$ (le point représente un produit scalaire), et il sera donc possible d'utiliser indifféremment l'expression située à droite du signe égal ou celle située à gauche.

Pour la vitesse relative, c'est moins évident. Alors que dans le domaine continu on a bien $(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \vec{u} = \frac{dD}{dt}$, le schéma de discrétisation temporelle utilisé (Euler) a pour effet de transformer cette égalité en :

$$\frac{1}{\text{Te}} \cdot \left(\vec{X}_1 - \vec{X}_1^{\text{retard}} - \left(\vec{X}_2 - \vec{X}_2^{\text{retard}} \right) \right) \cdot \vec{u} = \frac{1}{\text{Te}} \cdot (D - D^{\text{retard}})$$

Or cette expression est fautive dès qu'il y a rotation du bipoint durant l'intervalle de temps discret T_e (c'est-à-dire dès que \vec{u} n'est pas constant par rapport au temps). Pour une rotation d'un angle θ on a :

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \vec{u} = \frac{1}{T_e} \cdot \left(\vec{X}_1 - \vec{X}_1^{\text{retard}} - (\vec{X}_2 - \vec{X}_2^{\text{retard}}) \right) \cdot \vec{u} = \frac{1}{T_e} \cdot (D - \cos(\theta) * D^{\text{retard}})$$

L'expression ci-dessus fournit donc une valeur parfaitement fautive (indépendamment du problème de l'approximation des dérivées scalaires par le schéma d'Euler) pour la vitesse axiale dès que $\theta \neq 0$ (avec notamment une vitesse axiale non nulle lorsque $D = D^{\text{retard}}$!). Nous utiliserons donc l'expression $D - D^{\text{retard}}$ pour la vitesse axiale, malgré le fait qu'elle implique le calcul d'une deuxième racine carrée.

Avant de clore ce paragraphe sur les mises en oeuvre algorithmiques, il faut s'arrêter un instant sur un point important concernant ce que nous appellerons les *paramètres physiques* et les *paramètres algorithmiques*. Ces deux termes se rattachent aux deux espaces de paramètre que nous aurons à manipuler en permanence. Ils se déduisent simplement l'un de l'autre, et correspondent respectivement au point de vue du modèle et à celui de la simulation. Les paramètres physiques : m (la masse), k (paramètre de raideur), z (paramètres de viscosité) etc ..., doivent être considérés en référence à l'objet matériel que l'on veut modéliser. Les paramètres des expressions algorithmiques associées à chaque module physique ne leur sont pas systématiquement égaux ; on parlera pour ces derniers de paramètres algorithmiques.

D'une manière générale les paramètres z de viscosité, c'est-à-dire intervenant dans le calcul d'une force, comme un coefficient multiplicateur d'une vitesse, se verront correspondre des paramètres 'Z' de viscosité algorithmique tels que :

$$Z = \frac{z}{T_e}$$

Les paramètres 'k' de raideur, c'est-à-dire intervenant dans le calcul d'une force comme un coefficient multiplicateur d'une distance euclidienne, seront strictement égaux aux paramètres 'K' de raideur algorithmique :

$$K = k$$

Aux paramètres physiques 'm', représentant la masse des points matériels, vont correspondre des paramètres 'M' de masse algorithmique tels que :

$$M = \frac{m}{(T_e)^2}$$

Ce dernier point nous impose d'appliquer la correction suivante au paramètre algorithmique 'G' correspondant à l'accélération de la pesanteur 'g' de l'espace physique de référence : $G = g * T_e^2$.

Les deux familles de paramètres ne sont donc identiques que dans le cas où $T_e = 1$, ce qui en pratique n'arrive jamais. Nous prendrons comme convention dans l'ensemble de ce document que

les formules discrètes (correspondant aux algorithmes de calculs des divers modules physiques) sont exprimées à l'aide des paramètres algorithmiques.

C. Processus de simulation

Le choix de CORDIS-ANIMA est celui d'une isomorphie totale entre l'espace des modèles, dans lequel on manipule les modules <MAT> et <LIA> afin d'assembler des objets complexes, et l'espace de la simulation.

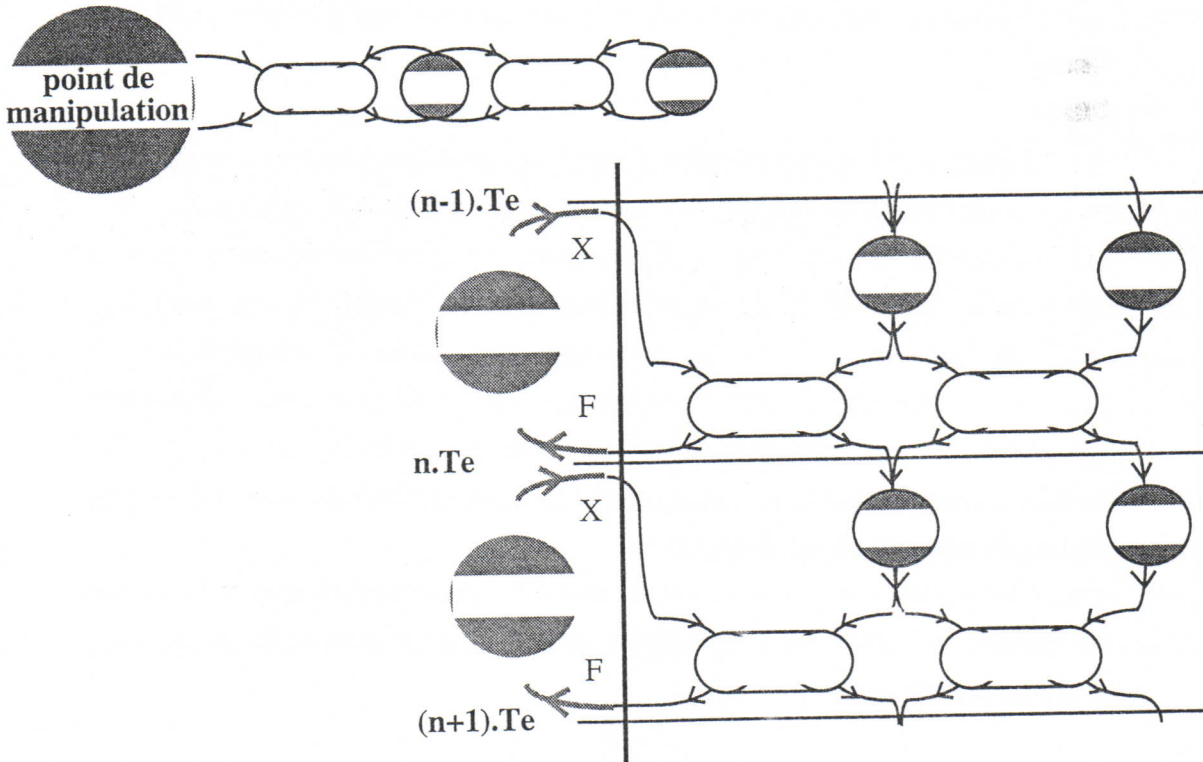


Figure 10 : CORDIS-ANIMA, réseau de processus et entrées/sorties synchrones

A chaque module <MAT> va correspondre un processus numérique calculant une position dans l'espace euclidien tridimensionnel, selon l'expression algorithmique exprimée ci-dessus. A chaque module <LIA> va correspondre un processus calculant deux forces visqueuses (amortisseur) ou élastiques (ressort), égales et opposées, en fonction des deux positions qu'il reçoit en entrée. Le format communicationnel et les règles de connexion des processus sont rigoureusement les mêmes que ceux des modules auxquels ils correspondent. Le programme de simulation complet se présente comme un ensemble de processus interconnectés, qui communiquent de manière synchrone et s'exécutent en parallèle et de manière cyclique. La figure 10 donne une représentation sur deux cycles du réseau de processus associé à un réseau de modules formé de deux éléments matériels et de deux éléments de liaison ; le système mécanique ainsi obtenu est manipulé par un opérateur à travers un point de communication avec l'extérieur. Ce point de communication est ici

de type 'M', c'est-à-dire qu'il consomme une force en entrée et produit une position en sortie, et peut donc être connecté à un élément de liaison ; cette situation correspond à l'utilisation d'un transducteur gestuel muni de capteurs de position et de moteurs commandés en force (la situation symétrique met en oeuvre des capteurs de force et des moteurs commandés en position).

Les modules de base, élément matériel, module ressort et module frottement, constituent un substrat matériel purement linéaire, et en tant que tel ne permettent pas de représenter les comportements discontinus qui apparaissent simplement dans les situations de chocs par exemple. Cela signifie que les seuls objets représentables jusqu'ici sont des blocs monolithiques de matière purement linéaire et, bien que les mécanismes de modification dynamique que nous avons présentés dans un précédent paragraphe représentent un moyen d'introduire un certain type de non-linéarité, il reste nécessaire de définir une notion supplémentaire permettant de représenter directement ce type de comportement. Le formalisme CORDIS-ANIMA s'est enrichi à cette fin de la notion de Liaison Conditionnelle.

I.3.3 La Liaison conditionnelle

La liaison conditionnelle est une liaison ressort-frottement intégrée dont l'état peut changer dynamiquement en fonction de conditions sur ses variables d'entrées. Un état de la liaison est caractérisé par la valeur du vecteur des paramètres. La première version de CORDIS [CLF84-90] définit la Liaison Conditionnelle comme un module ressort-frottement (unidimensionnel) effectuant ses calculs selon la formule de base :

$$F = [- K(D - L_0) - Z(V_1 - V_2)]$$

où, $D = X_1 - X_2$ (valeur algébrique) est la distance entre les deux extrémités,
 X_1, X_2, V_1, V_2 , sont les positions et les vitesses aux extrémités,
 K et Z sont les constantes de raideur et de frottement.
 L_0 est un paramètre supplémentaire : la longueur au repos du ressort, elle est également susceptible d'être modifiée dynamiquement.

L'élongation L du ressort est égale à l'expression : $L = D - L_0$, et si l'on note $\Delta V = V_1 - V_2$, la vitesse relative des extrémités, la formule algorithmique associée au module de liaison conditionnelle s'écrit :

$$F_1 = - K.L - Z.\Delta V$$

Les variables en entrée sont donc : $X_1, X_2, D, \Delta V, L$ (positions, distance, vitesse relative et élongation).

Les paramètres de la Liaison sont : K , Z , L_0 (constantes de raideur et de frottement et longueur au repos du ressort).

Le mécanisme de modification des paramètres est le suivant :

1) État de la liaison

La liaison est à chaque instant n caractérisée par un "état" repéré par un indice. Lorsque la liaison se trouve dans un état donné, un jeu de conditions relatives aux variables d'entrée permet de déclencher le changement d'état.

2) Conditions de changement d'état

Elles s'expriment de la façon générale suivante :

argument de condition , *argument de variable* [, *constante*]

Les conditions types sont applicables à toutes les variables, elles sont les suivantes :

AUG	:	la variable augmente,
DIM	:	" diminue,
CHS	:	" change de signe,
SUP, <i>constante</i>	:	" est supérieure à <i>constante</i> ,
INF, <i>constante</i>	:	" est inférieure à <i>constante</i> .

A ces conditions s'ajoute une 'condition extérieure' : CDX, qui permet de commander le changement d'état par l'opérateur, ou par une autre partie de l'objet.

Le principe du changement d'état peut se décrire de la manière suivante :

Dans état indice d'état :

si, condition , passer dans l'état indice d'état,

si, condition , passer dans l'état indice d'état, etc. ...

Dans le principe, la liste des conditions n'est pas limitée. Plusieurs conditions différentes peuvent faire passer dans un même état. Plusieurs conditions peuvent être vérifiées qui ne conduisent pas au même état ; dans ce cas, c'est la dernière rencontrée qui l'emporte. Enfin si aucune condition n'est vérifiée, il n'y a pas de changement d'état.

3) Dispositions (prises) au changement d'état :

Certaines dispositions sont prises au moment même du changement d'état :

$L_0=D$: Le paramètre L_0 prend la valeur de D au moment du changement d'état,

CHK, p : Le paramètre p est pris comme nouvelle valeur pour la raideur du ressort,

CHZ, p : Le paramètre p est pris comme nouvelle valeur pour la constante de frottement.

D'autres consistent à forcer une valeur tant que l'on est dans un état donné :

LN : La variable L est forcée à '0' tant que l'on reste dans cet état

VN : La variable V est forcée à '0' tant que l'on reste dans cet état

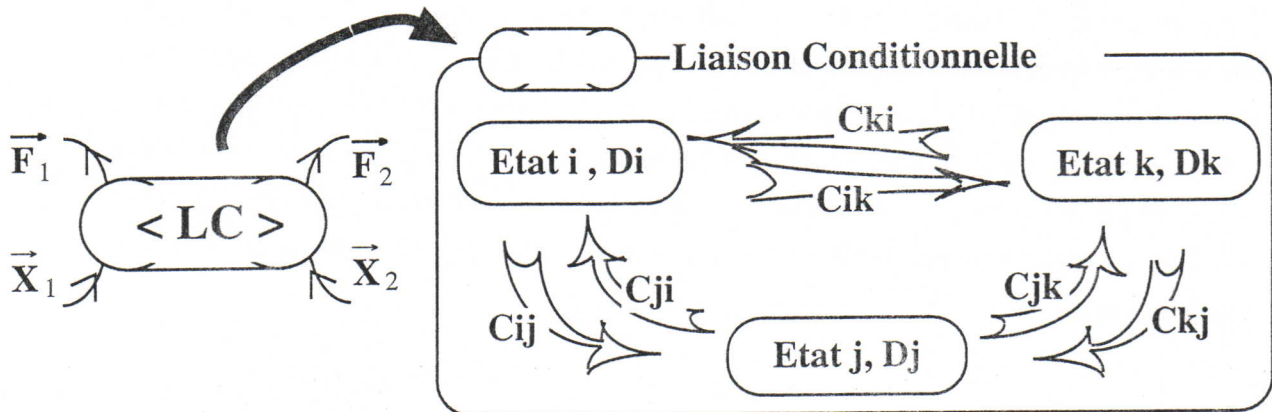


Figure 11 : Automate d'état fini de la liaison conditionnelle.

L'ensemble de ce dispositif, qui consiste donc à superposer un système de transition, du type automate d'état fini, au substrat matériel défini jusqu'à présent, peut se résumer par le schéma de la figure 11 (D_i représente les dispositions prises à l'arrivée dans l'état i , C_{ij} représente la condition de transition de l'état i vers l'état j).

I.3.4 Conclusion

L'ensemble des trois éléments que nous venons de voir (élément matériel, liaison ressort-frottement intégrée et liaison conditionnelle) constitue la base des premières versions de CORDIS-ANIMA telles qu'elles ont été implantées et expérimentées.

Pour être complet cependant, il faut rajouter à cette base quelques éléments définis pour des raisons pratiques et correspondant à des modules dégénérés du point de vue communicationnel. Il s'agit par exemple du module *SOL*, homogène à point matériel et dont la fonction est de générer une position constante au cours du temps. Ce module permet de représenter de manière économique un objet de masse infiniment grande. Sur le même principe, on trouve les modules *VISC* et *GRAV*, qui représente la viscosité et la gravité ambiante et sont systématiquement connectés à chaque masse ponctuelle d'un modèle.

D'autre part il est très intéressant, pour économiser le travail de description des modèles mais également pour optimiser les implantations algorithmiques, de développer des modules dits intégrés, décrivant des objets composés de plusieurs modules élémentaires et structurés selon une topologie particulière. L'intégration de module introduit la notion de macro-opérations

d'assemblage permettant d'obtenir une structure complexe en une unique opération globale. On trouve dans les premières versions de CORDIS-ANIMA l'oscillateur élémentaire (qui est constitué d'une masse ponctuelle reliée à un module SOL par une liaison ressort-frottement intégrée), la ligne (n masses ponctuelles interconnectées en chapelet), et la surface ($n*m$ masses ponctuelles interconnectées selon un maillage régulier de dimension deux).

Enfin pour conclure il faut souligner que le formalisme que nous avons présenté dans ce chapitre ne vise pas à définir un contexte figé pour la construction des modèles. Il doit au contraire servir à inspirer l'état d'esprit sous-tendant la modélisation. Ainsi, CORDIS-ANIMA ne doit pas être vu comme un système final ou fini ; il ne s'agit pas d'atteindre une quelconque complétude. Il s'agit au contraire d'un ensemble de germes destinés à se développer. En la matière toutes les directions d'évolution sont envisageables, nous en présentons quelques unes très générales dans le dernier paragraphe de ce chapitre.

I.4 Ouverture du système

C'est sur la base du formalisme que nous venons de décrire que s'est effectué le travail de recherche rapporté dans ce document. Ce travail s'est réalisé à travers l'étude théorique de plusieurs modèles particuliers et également à travers plusieurs réalisations concrètes ; mais son objectif global, ramené à CORDIS-ANIMA, a été celui de l'exploration des voies d'extension. Cette capacité du système à évoluer est inscrite dans son principe même, sans quoi il ne suffirait pas de le développer, il faudrait le faire muter ; c'est pourquoi les pistes de cette évolution peuvent se déduire aisément du formalisme de base. Parmi celles-ci, certaines directions privilégiées peuvent être dégagées [CLF90].

I.4.1 Liaisons conditionnelles généralisées et macro-modules

Dans la version initiale de la liaison conditionnelle que nous avons présenté ci-dessus, l'algorithme associé au module est figé : il représente une liaison mécanique visco-élastique et les états de la liaison sont caractérisés par la valeur du vecteur de paramètre de l'algorithme (K, Z, L_0). Ce mécanisme permet la représentation directe d'une grande variété de comportements. Cependant, la complexité induite par l'extension quantitative des simulations, notamment dans le cas de systèmes de points fortement interconnectés pour lesquels le nombre de liaisons augmente de manière quadratique en fonction du nombre de points, conduit à pousser plus loin le principe d'économie dans la représentation.

Pour certaines situations les raccourcis pertinents dans la représentation ne peuvent se faire à partir de l'unique algorithme de la liaison visco-élastique tel que nous l'avons décrit. La possibilité de définir des algorithmes optimaux par rapport à une situation spécifique, exploitant par exemple un calcul de proximité simplifié se passant de racines carrées, est une condition nécessaire à l'optimisation des modèles. De même, le principe de la Liaison Conditionnelle peut s'étendre en associant à chaque état de la liaison non plus seulement un vecteur de paramètre correspondant à un algorithme unique, mais un algorithme spécifique.

Les algorithmes produits dans cet esprit doivent être conformes à la notion d'élément de Liaison telle qu'elle est définie dans le cadre du formalisme CORDIS-ANIMA. Ils doivent prendre pour référence un objet physique réel, et respecter le format communicationnel que nous avons décrit dans ce chapitre. L'expression de calcul générale associée à un élément de liaison mécanique peut s'écrire $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = f(\vec{X}_1, \vec{X}_1^{\text{retard}}, \vec{X}_2, \vec{X}_2^{\text{retard}}) * \vec{u}$, où f représente n'importe quelle fonction vectorielle à valeur dans \mathbb{R} . Cette expression respecte le principe mécanique de l'action et de la réaction et exprime l'isotropie des interactions (invariance par rotation de l'espace) ; elle calcule des forces axiales (la direction de l'axe étant donnée par le vecteur unitaire \vec{u} , tandis que la fonction f calcule le module et le sens de la force sur cet axe).

Le principe de l'intégration de plusieurs modules élémentaires en un macro-module unique, dont nous avons déjà parlé, est complémentaire et conduit également à d'importantes optimisations algorithmiques. L'intégration 'large' consiste à rassembler dans un même module un grand nombre d'éléments matériels en interaction mutuelle selon une topologie donnée et par des modules Liaison spécifiques. On pourra alors chercher au sein du module intégré à optimiser les algorithmes des liaisons internes, tandis que l'objet ainsi créé n'est en interaction avec l'extérieur qu'à travers un nombre réduit de points de communication.

I.4.2 Modules ad hoc et modules 'extra-physiques'

Les modules ad hoc poussent plus loin la démarche d'ouverture du système en autorisant la définition de n'importe quel algorithme de calcul des interactions. Ceci peut notamment conduire à s'éloigner des notions de points matériels et d'éléments de liaison, et plus généralement d'une certaine conformité avec la mécanique classique. Les restrictions imposées dans le développement de ces modules sont les suivantes : leur fonction globale doit rester mécanique, ils doivent correspondre à un modèle physique et se présenter à leur environnement selon des points de communication de type 'M' et 'L'.

On pourrait trouver de nombreux exemples de ce qu'autorise ce type d'ouverture ; citons simplement la possibilité de définir des liaisons mécaniques avec variables d'état, qui autorisent la représentation directe de certains comportements macroscopiques du matériau tel que l'écroutissage, l'hystérésis ou le frottement solide [Bam81]. On peut également s'intéresser à

représenter directement, de manière purement fonctionnelle et abstraite, une partie de la structure d'un mécanisme. Des modèles particulièrement efficaces de frottement d'archet colophané ou d'interaction plectre / corde ont été développés sur ce principe ; ils sont décrits avec d'autres réalisations basées sur les modules ad hoc dans [Flo90].

Enfin, la démarche poussée à l'extrême conduit à se donner la possibilité d'intégrer, au sein du système de représentation d'objets physiques, des modèles qui ne le sont pas et que nous appellerons, de manière informative, les modules 'extra-physiques'. On s'autorise alors à abandonner toute la cohérence énergétique propre aux systèmes dynamiques tout en conservant le format communicationnel des modules CORDIS-ANIMA, qui est une condition nécessaire à l'intégration au sein du système des modules orthodoxes. Cette démarche d'ouverture absolue n'est bien sûr pas une incitation à abandonner le modèle physique là où ce n'est pas nécessaire, mais plutôt à ne pas s'interdire, lorsque la nécessité s'en fait sentir, l'utilisation de modèles générateurs répondant à d'autres principes que ceux de la mécanique, sans en préciser par avance la nature.

II. INTRODUCTION DES COMPORTEMENTS

NON LINÉAIRES : APPROCHE FORMELLE

II.1 Introduction

Le propos de ce chapitre introductif est de poser correctement le problème de la définition de modules d'interaction non-linéaire dans le cadre du formalisme CORDIS-ANIMA, et plus spécifiquement dans le cadre d'ANIMA qui est destiné, comme nous l'avons déjà précisé, à la représentation des objets physiques volumiques déformables.

On peut souligner rapidement ici le fait que les modèles physiques pour la création musicale développés avec CORDIS s'intéressent à des systèmes mécaniques unidimensionnels. Les composants mécaniques utilisés ne sont pas localisés dans l'espace naturel des mouvements (l'espace euclidien tridimensionnel) ; il n'y a pas de correspondance immédiate entre la topologie d'interconnexion des composants d'un modèle, et la géométrie de l'objet modélisé.

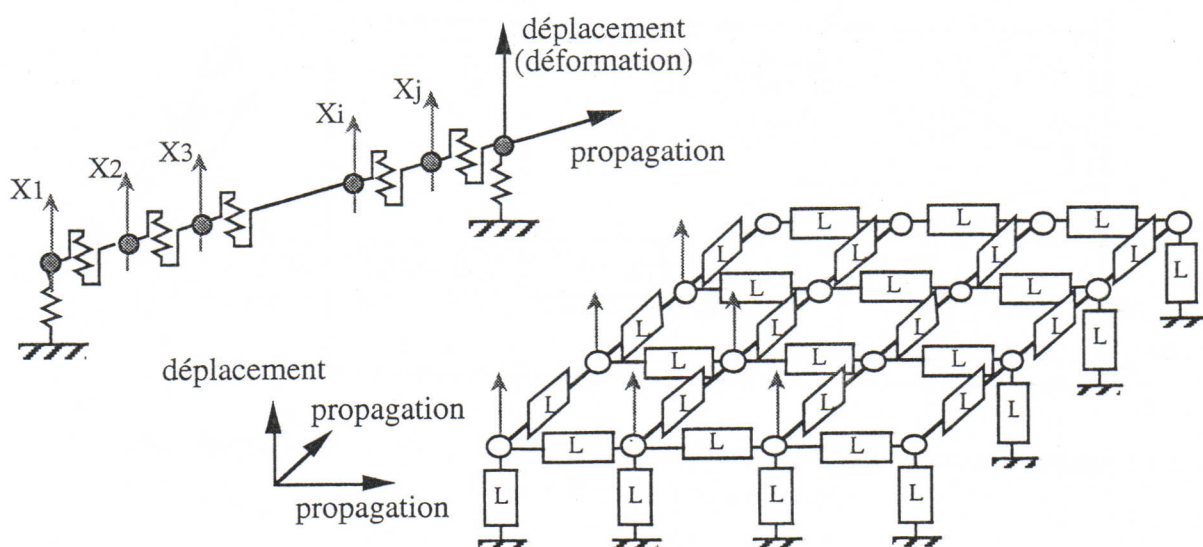


Figure 1 : Modèles CORDIS - ligne et surface vibrante

Ainsi, dans le cas d'une corde réelle par exemple, alors qu'il faudrait tenir compte d'au moins trois degrés de déformation (longitudinale, transversale et en rotation), le modèle théorique pris comme référence est celui d'une structure linéique, la 'ligne vibrante', qui possède un seul degré de déformation et une direction de propagation. La ligne vibrante CORDIS est composée de points matériels possédant une direction unique de déplacement, indépendante à priori de la direction de propagation [CLF81] (par convention, les axes de déplacement sont représentés perpendiculairement à la direction de propagation, voir la figure 1). Il n'est possible de simuler une corde réelle avec de tels modèles que sous l'hypothèse que ses trois degrés de déformation sont indépendants ; une approche globale de la corde peut alors être obtenue par juxtaposition de trois 'lignes vibrantes' couplées mécaniquement en un certain nombre de leurs points. Il en va de même pour la représentation des surfaces et des volumes avec CORDIS : ils seront respectivement organisés selon des réseaux à deux ou trois degrés d'interconnexion ($= \frac{1}{2} * \text{nombre de masses voisines connectées}$ dans le cas d'un maillage carré, l'interprétation est plus délicate pour des maillages plus sophistiqués), mais ne se déformeront que selon une seule dimension (figure 1).

En résumé, on peut paraphraser [CLF81] : 'CORDIS fait le choix de s'affranchir de la complexité inhérente à la spatialité effective des structures étudiées'.

Cette restriction, qui n'aurait aucun sens dans le cas des modèles physiques d'objets mobiles et déformables développés au sein de ANIMA¹, a pour conséquence une importante réduction de la complexité numérique aussi bien qu'algorithmique. Les algorithmes associés aux modules de liaison CORDIS se ramènent tous, en effet, au calcul d'expressions scalaires arithmétiques ou booléennes (ce dernier cas correspondant aux Liaisons Conditionnelles), puisque les variables et les paramètres sont des réels, ou des entiers, signés ou non. Une forme générale pour les expressions associées au calcul des forces d'interaction est : $F_1 = -F_2 = f(\Delta x, \Delta x^{\text{retard}})$, où f est une fonction de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et $\Delta x, \Delta x^{\text{retard}}$ sont des mesures algébriques.

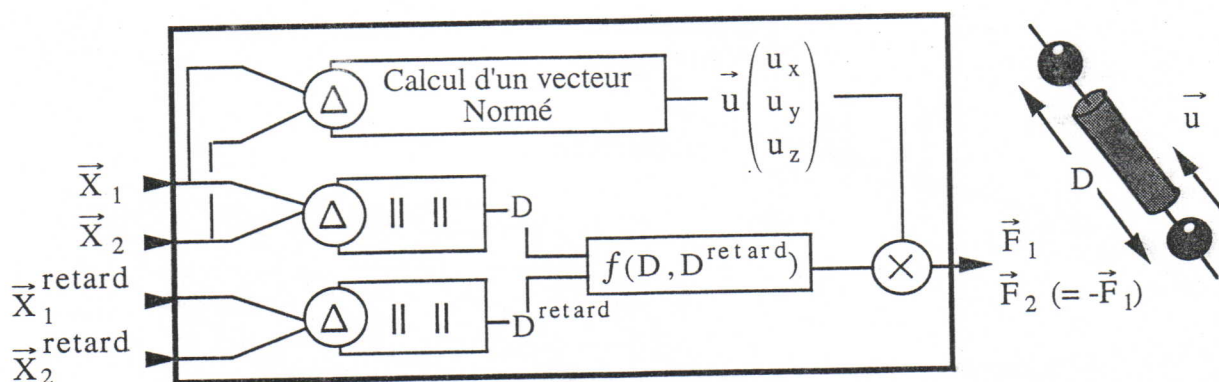


Figure 2 : Module liaison ANIMA : calcul d'un vecteur normé, de deux normes euclidiennes et d'une fonction f , de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

¹ ce qui n'empêche pas, au contraire, le couplage mécanique des deux univers.

Ceci n'est évidemment plus vrai avec ANIMA, puisque le calcul de l'algorithme associé à un module de liaison met en jeu une grandeur vectorielle : la direction du bipoint concerné. Un module classique ANIMA de liaison mécanique calcule deux forces égales et opposées, tridimensionnelles et isotropes (figure 2).

Les variables intermédiaires d'un tel module sont le vecteur unitaire \vec{u} et les valeurs réelles positives D et D^{retard} . Les considérations à venir sur la linéarité du module ne concerneront que la fonction scalaire f , le calcul d'un vecteur axial normé n'étant évidemment pas une opération linéaire.

II.2 Non-linéarités usuelles

La connaissance que l'on a des systèmes dynamiques réels est nécessairement expérimentale, elle se présente sous forme de relations entre la sollicitation exercée sur le système et le comportement obtenu en retour, qui sont obtenues par des essais successifs. D'une manière générale le système sera donc vu comme un dipôle (une 'boîte noire') dont on sait déterminer la sortie 'S' (c'est-à-dire le comportement) à partir de l'entrée 'E' (la sollicitation).

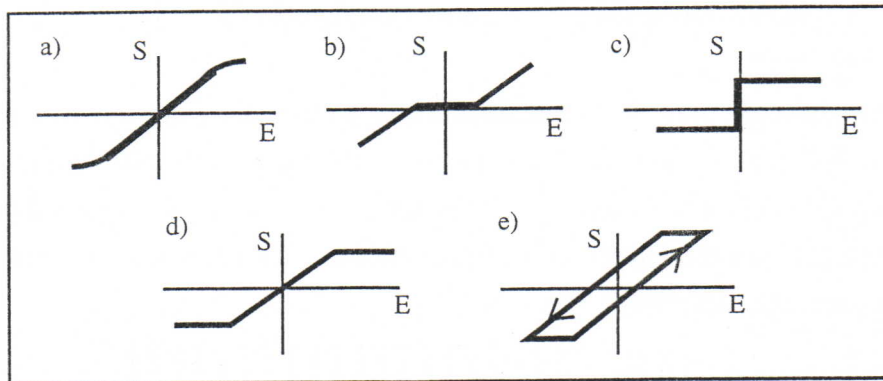


Figure 3 : les classes de non-linéarités usuellement considérées.

Les modèles dynamiques purement linéaires (correspondant à une caractéristique du type $S = K.E$) sont des représentations idéalisées. Notamment, les caractéristiques $S = f(E)$ mesurées sur des systèmes réels ne sont jamais parfaitement rectilignes, mais présentent des *Courbures* (figure 3.a). D'autre part, tout système physique présente un seuil de sensibilité, ou *Zone morte* (figure 3.b), et un seuil de *Saturation* (figure 3.d). Certains phénomènes (comme les collisions ou les fractures) se représentent par des caractéristiques du type *tout-ou-rien*, ou *plus-ou-moins* (figure 3.c). Enfin, on rencontre également, parmi les grandes classes de comportements, des phénomènes dit héréditaires à type d'hystérésis, c'est-à-dire qui dépendent de toute l'histoire des déformations. Les matériaux concernés se caractérisent par une relation $S = f(E)$ qui n'est pas définie une fois pour toutes, mais au contraire évolue au fur et à mesure qu'ils subissent des déformations. Ce type

de comportement se schématise par une relation non-univoque entre l'entrée et la sortie (c'est-à-dire par une caractéristique avec boucles, figure 3.e).

On remarquera que les caractéristiques b) et d) sont composées de segments de droite, elles sont dites multi-linéaires. La caractéristique c) du plus-ou-moins qui présente des pentes infinies est représentable à l'aide de la fonction $\text{sign}()$ (où $\text{sign}(E) = 1$ si $E \geq 0$, et 0 sinon). Les caractéristiques courbes, du type a), peuvent être approchées par des fonctions multi-linéaires ; celles présentant des boucles, rencontrées lors de la présence d'hystérésis, ne sont pas représentables par des fonctions mathématiques explicites.

Ces cinq caractéristiques fondamentales sont des schématisations commodes et opératoires. Leur composition permet de représenter à peu près toutes les non-linéarités rencontrées dans les comportements des systèmes dynamiques (figure 4).

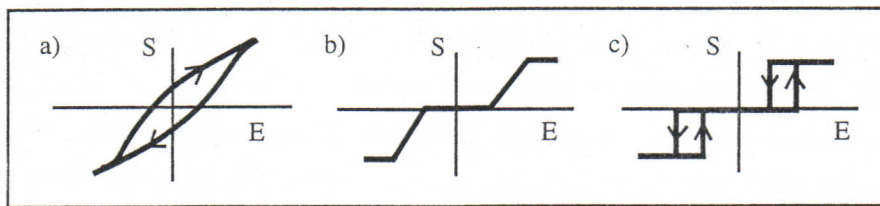


Figure 4: a) Courbure et Hystérésis, b) Zone Morte et Saturation, c) Plus-ou-moins avec zone morte et hystérésis

Notre propos général, dans le cadre de la modélisation pour la simulation dynamique, est de ramener ces modèles de loi de comportement à une forme explicite (calculable) du type $S = f(E)$, afin de leur faire correspondre un traitement algorithmique. Ceci n'est pas toujours directement réalisable ; à cet égard, les caractéristiques $S = f(E)$ peuvent être classées d'une manière générale selon les deux critères suivants [GDP88] :

- Continues / discontinues (pour S ou $\frac{dS}{dE}$).

Les Courbures sont généralement continues pour $S(E)$ et pour $\frac{dS}{dE}$. Les discontinuités de $S(E)$ peuvent poser certains problèmes d'approximation par des fonctions linéaires par morceaux (problème de pente ∞ pour le tout-ou-rien par exemple à cause de la fonction sign). Les caractéristiques multi-linéaires sont continues pour $S(E)$ et discontinues pour $\frac{dS}{dE}$ aux points où se raccordent les segments de droite. Les caractéristiques courbes présentant des discontinuités de $\frac{dS}{dE}$ peuvent être correctement approchées par des caractéristiques multi-linéaires.

- Caractéristiques univoques / présence d'hystérésis.

Lorsqu'il y a hystérésis, la relation entre l'entrée et la sortie n'est plus représentable sous la forme d'une fonction explicite (du type $y=f(x)$ qui définit une caractéristique univoque), mais par une fonction implicite (du type $f(x,y)=0$ qui permet de définir une courbe avec boucle), car il n'y a pas unicité de $S(E)$ pour E donnée. Cette relation dépend de l'histoire du matériau. Les

caractéristiques présentant une hystérésis ne peuvent donc être représentées uniquement par des fonctions multi-linéaires ; elles nécessitent l'utilisation d'une mémoire (de l'état courant) et peuvent impliquer un algorithme mettant en oeuvre un mécanisme plus sophistiqué, comme la commutation entre plusieurs caractéristiques par exemple.

II.3 Caractéristiques multi-linéaires

Comme nous l'avons souligné, une grande partie des caractéristiques non-linéaires fondamentales sont des fonctions linéaires par morceaux, ou peuvent être correctement approchées par de telles fonctions (figure 5).

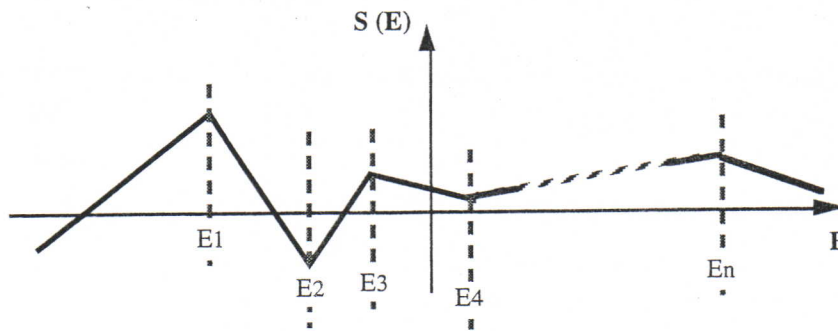


Figure 5 : Fonction multi-linéaire à n+1 morceaux.

D'un point de vue algorithmique, il existe deux façons de représenter ces fonctions :

- 1 • Par un algorithme exploitant des tests explicites sur la variable d'entrée, et permettant de traiter de manière exacte les cas avec des pentes infinies.

Si la fonction f donnant la sortie S en fonction de l'entrée E s'écrit :

$$f(E) = a_i * E + b_i \text{ pour } E \in]E_i ; E_{i+1}] \text{ (avec } E_0 = -\infty \text{ et } E_{n+1} = +\infty),$$

l'algorithme de calcul de f est le suivant ($a[]$ et $b[]$ sont les tableaux des coefficients a_i et b_i , et $E[]$ le tableau des seuils E_i) :

```

Début
  i=0
  Tant-que ( (i < n) && (E > E[i+1]) );
  i=i+1;
  Fin-tant-que
  S = a[i]*E + b[i];
Fin
    
```

- 2 • Par une formule de calcul directe faisant intervenir l'opérateur 'valeur absolue'.

Toute fonction linéaire par morceau continue (sans pente infinie) peut se calculer de manière exacte par une expression du type :

$$f(E) = a_0 * E + \sum_{i=1}^n a_i * |E - E_i| + K$$

Si on note p_k la pente de la courbe sur l'intervalle $[E_k ; E_{k+1}]$ (avec $E_0 = -\infty$ et $E_{n+1} = +\infty$), on a :

$$p_0 = a_0 - \sum_{i=1}^n a_i, \quad p_k = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{i=k+1}^n a_i, \quad p_n = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i$$

On remarquera que dans le cas particulier où $p_0 = p_n$, $a_0 = 0$ et $f(E) = \sum_{i=1}^n a_i * |E_i - E| + K$.

Inversement, les a_i se calculent à partir des valeurs des différentes pentes p_i par la formule :

$$a_i = \frac{p_i - p_{i-1}}{2} \quad \forall i = 1 \dots n \quad \text{et} \quad a_0 = p_0 + \sum_{i=1}^n a_i$$

D'autre part la constante K se calcule à partir de n'importe quel couple de valeur $\{E, f(E)\}$, par exemple $K = f(0) - \sum_{i=1}^n a_i * |E_i|$.

Cette deuxième solution ne permet pas de représenter de manière exacte les caractéristiques avec pente infinie.

II.4 Modules à mémoire

La mécanique classique caractérise l'état d'un système dynamique par l'ensemble des positions et des vitesses des points inertes (possédant une inertie) qui le composent. Aussi, bien que le choix ait été fait, dans le cadre du formalisme CORDIS-ANIMA, de définir un composant qui soit le support explicite des interactions, celui-ci en toute rigueur ne doit posséder aucune variable d'état. Les modules de base sont alors le module Masse de vecteur d'état $[X, V]$ (ou $[X, X^{\text{retard}}]$ en représentation d'état discrète) et le module liaison ('sans mémoire') qui contient une fonction explicite permettant de calculer une force d'interaction F à partir de X et V . Cependant, comme nous l'avons déjà signalé, il est un certain nombre de phénomènes (dont l'hystérésis et l'écrouissage) que la physique caractérise macroscopiquement par des relations non-univoques (c'est-à-dire par une caractéristique comprenant des cycles).

Il faut noter ici que la présence de cycles indique que le système a de la mémoire mais ne le caractérise pas complètement. Les phénomènes héréditaires impliquent en effet l'existence de constantes de temps, lesquelles n'apparaissent pas sur la courbe caractéristique.

Une définition générale de ces systèmes est associée à la représentation par fonctions d'évolution et variables d'état [GC90]. Dans le cadre de la représentation d'état discrète, les systèmes correspondant à ce type de phénomène comportent deux parties distinctes (figure 6).

La première partie (à laquelle correspond ce que nous avons appelé la liaison sans mémoire) concerne la transmission directe du système et est caractérisée par une fonction explicite du type $S = f(E, I)$. La seconde partie correspond à la mémoire et comprend une fonction explicite, équivalente à celle de la transmission directe, qui permet de calculer le vecteur d'état interne 'I', et un intégrateur auquel il faudra nécessairement associer une constante de temps.

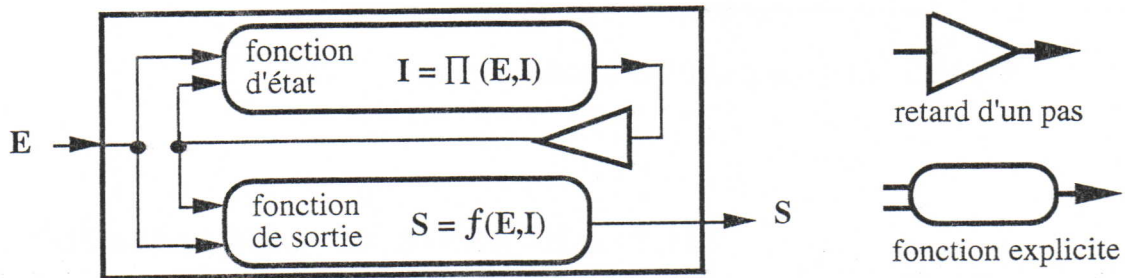


Figure 6 : Représentation d'état discrète : fonction de sortie et fonction d'état.

L'introduction d'un vecteur d'état 'I' permet donc de représenter directement (et de manière plus économique) certains phénomènes macroscopiques qui résultent d'arrangements microscopiques de la matière complexes et lourds à représenter. On peut d'ailleurs voir les expressions classiques du comportement élasto-visqueux comme le résultat d'une approximation du même ordre puisque ces lois ($F = -k \cdot \Delta X$ et $F = -z \cdot \Delta V$) sont une caractérisation au niveau macroscopique de phénomènes résultant d'une infinité d'interactions intermoléculaires [KS86]. Cet accès direct à des comportements complexes va permettre de maîtriser de manière explicite les propriétés globales d'un morceau de matière, telles que l'incompressibilité ou les différences de comportement à la compression et à la traction par exemple. D'autre part, les modules de liaison avec mémoire donneront également accès à une représentation fonctionnelle abstraite de dispositifs mécaniques structurellement complexes.

Nous pouvons d'ores et déjà distinguer, à partir de ce mécanisme général, différents types de mémoire en considérant la dimension et la nature de l'espace d'état, qui dépend du type et du nombre des variables d'état. Le cas le plus simple est celui où le vecteur d'état est de type booléen ; l'espace d'état correspondant est alors fini et se réduit à 2^n états pour un vecteur de dimension n . Dans le cas de variables continues, l'espace d'état sera infini et aura pour dimension celle du vecteur d'état.

Ainsi, le module Masse, pour lequel les vecteurs d'état interne 'I' et de sortie 'S' sont identiques et égaux au multi-vecteur $[X, X^{\text{retard}}]$, présente un espace d'état infini et de dimension 6 dans le cas tridimensionnel (figure 7).

Notons qu'il sera à chaque fois nécessaire, lors de la conception d'un module de liaison avec mémoire, de se préoccuper de la dimension de l'espace d'état qui lui est (implicitement) associé.

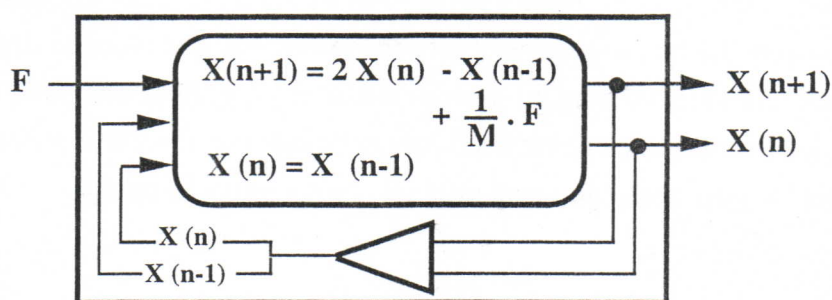


Figure 7 : représentation d'état discrète du Module Masse

II.5 Automate de commutation

Les modules de liaison, avec ou sans mémoire, que nous avons introduits jusqu'ici permettent de représenter tous les types de non-linéarité rencontrés dans l'étude des systèmes dynamiques. Cependant, selon la complexité du phénomène que l'on veut modéliser, l'élaboration des fonctions f (fonction de sortie) et Π (fonction d'état) peut s'avérer lourde et délicate. Il est alors utile de pouvoir scinder le module global en plusieurs sous modules entre lesquels on réalisera une commutation dans les conditions adéquates. Un exemple typique de ceci est l'interaction de frottement solide (ou frottement sec) que la physique caractérise par le modèle de Coulomb. Ce modèle correspond à deux forces d'interaction différentes selon que la vitesse relative des objets est nulle ou non aux points de contact [AF79].

Nous introduisons donc ici les notions de *régime de liaison* et de *commutation* entre différents régimes, qui vont permettre de définir des macro-modules correspondant à l'esprit de la liaison Conditionnelle Généralisée (voir Chap. I, § 3.3).

Ce que nous appellerons 'un régime' correspond, du point de vue algorithmique, aux modules de liaison (avec ou sans mémoire) tels que nous les avons introduit jusqu'ici. Un régime se présente donc comme un dipôle entrée/sortie, et sera complètement déterminé dans le cas général par les deux fonctions f et Π , c'est-à-dire par la donnée des algorithmes permettant le calcul du vecteur de sortie 'S' et le calcul du vecteur d'état interne 'I' (voir figure 6).

Le mécanisme de commutation doit se présenter comme un aiguilleur ; son rôle est d'activer un régime particulier en fonction de conditions sur les entrées du macro-module. Il est évident que le nombre de régimes que le mécanisme de commutation est susceptible d'activer doit être réduit. Une interaction donnée entre deux points matériels ne peut invoquer un grand nombre de situations, que celles-ci soient caractérisées géométriquement (par des conditions sur les positions) ou cinématiquement (par des conditions sur les vitesses). Ce que nous pouvons maintenant appeler un module de commutation (qui correspond par sa fonction à l'association d'un module de contrôle structurel et d'un module de contrôle paramétrique, voir Chap. I), va donc être un dipôle

dont l'entrée E est la même que celle d'un régime de liaison. Le module de commutation pourra également comporter une mémoire discrète (portant sur l'indice du régime actif) ou continue (portant sur une variable d'entrée ou sur une variable intermédiaire).

La sortie du module de commutation va dépendre des régimes dont il contrôle l'activation. Dans le cas le plus simple, où les régimes correspondent à des liaisons sans mémoire, elle se réduit à une valeur discrète ' r ', l'indice du régime à activer. La figure 8 représente un exemple simple de macro-module réalisant la commutation entre deux caractéristiques non-linéaires. Il est formé d'un module de commutation sans mémoire, entièrement déterminé par la donnée d'une fonction conditionnelle \mathcal{R} telle que $r = \mathcal{R}(E)$, et de deux régimes de liaison correspondant à deux fonctions multi-linéaires f_1 et f_2 .

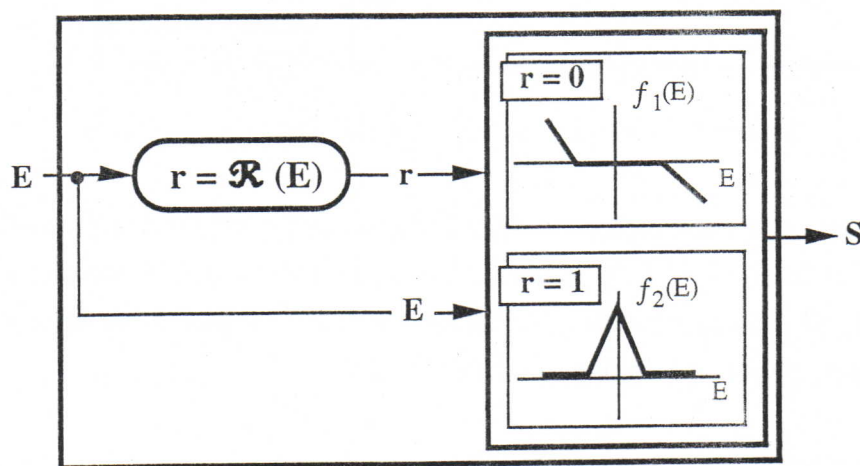


Figure 8 : commutation entre deux caractéristiques non-linéaires.

En combinant les deux types de modules dont nous venons de parler, liaison avec mémoire et automate de commutation, nous trouvons naturellement 4 catégories selon que l'automate, ou les régimes à commuter comporte ou non une mémoire.

Lorsque la commutation porte sur des régimes de liaison avec mémoire, le module de commutation, même s'il se présente comme un système à transmission directe (sans mémoire), doit pouvoir initialiser le vecteur d'état interne du régime qu'il va activer. De plus, dans certains cas, même lorsque le régime à activer est sans mémoire, il peut être nécessaire d'activer celui-ci avec des valeurs particulières de ses paramètres (lorsqu'il s'agit, par exemple, d'établir une liaison ressort avec une longueur au repos dépendant de la situation). Dans ces cas là, le vecteur de sortie du module comprend l'indice ' r ' du régime à activer, qui est calculé selon une fonction conditionnelle \mathcal{R} , et un vecteur d'initialisation de même format que le vecteur d'état du régime à activer, qui est obtenu à partir d'une expression arithmétique Φ .

La figure 9 représente un macro-module dans le cas le plus général. Il est formé d'un module de commutation avec mémoire (de vecteur d'état interne I) et de plusieurs régimes de liaison avec mémoire.

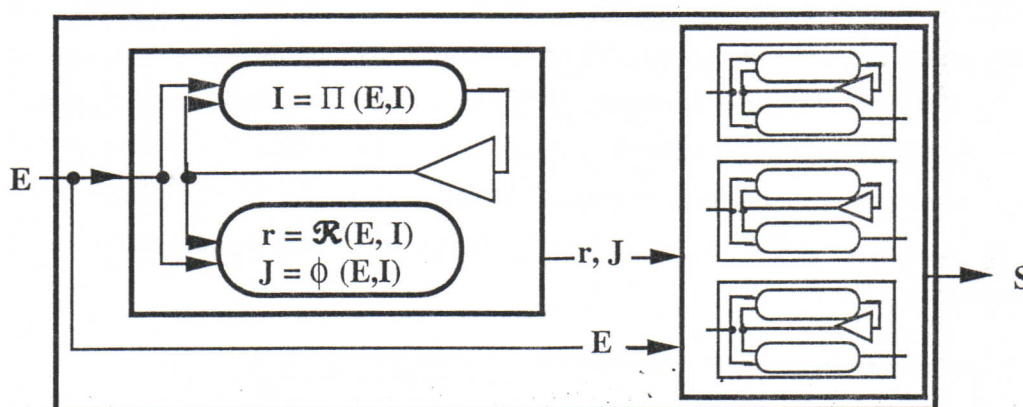


Figure 9 : Mécanisme de commutation de régime dans le cas général.

Le module de commutation est complètement déterminé par sa fonction d'état Π (arithmétique et/ou conditionnelle), telle que $I = \Pi(E, I)$, et par sa fonction de sortie qui se décompose en une relation conditionnelle \mathcal{R} calculant l'indice du régime à activer : $r = \mathcal{R}(E, I)$, et en une fonction arithmétique Φ calculant le vecteur d'initialisation $J = \Phi(E, I)$.

II.6 Vers une catégorisation des modèles

Nous avons introduit implicitement dans ce chapitre une hiérarchie dans la complexité des algorithmes de calcul des forces d'interaction associables à un module de liaison mécanique. La liste des algorithmes possibles va des cas les plus simples, qui mettent en oeuvre une fonction linéaire ou multi-linéaire des entrées du module liaison, aux cas les plus complexes, qui font intervenir des mécanismes de commutation entre algorithmes quelconques exploitant des mémoires internes en plus des entrées du module.

La première remarque que l'on peut faire ici est que bien entendu nous nous ouvrons un espace d'objets représentables beaucoup plus large que celui qu'offre le substrat de base de CORDIS-ANIMA ; mais nous introduisons également des redondances, dont un exemple évident est celle qui existe entre une caractéristique multi-linéaire et la commutation entre plusieurs caractéristiques linéaires. En conséquence, il va être important de savoir faire un choix, dans le cadre de l'élaboration des modules de liaison, entre les différentes possibilités de représentation au niveau algorithmique d'un même modèle de comportement. Ce choix doit être guidé entre autre par des considérations sur la complexité des calculs résultants.

D'autre part, le comportement global d'un modèle d'objet physique ANIMA va dépendre à la fois :

◇ du réseau de composants dont il est fait, c'est-à-dire du nombre de points matériels et des paramètres de masse qui leur sont attribués, ainsi que de la structure donnée à l'ensemble par les éléments de liaison (la topologie d'interconnexion)

◇ de la nature des liaisons mécaniques mises en jeu, qui déterminent à la fois les caractéristiques spatiales, c'est-à-dire l'ensemble des positions d'équilibre du système, et le comportement de la matière dont est fait l'objet, c'est-à-dire la manière dont il va se déformer sous l'action des forces extérieures.

Il semble raisonnable de penser que les niveaux de complexité inhérents à chacun de ces deux aspects d'un modèle d'objet seront inversement proportionnels. On peut établir une catégorisation et une hiérarchisation des modèles selon ces deux aspects. A une extrémité on trouve les objets formés d'un (très) grand nombre de points matériels fortement interconnectés par des éléments de liaison associés à des lois d'interaction 'simples'. A l'opposé se situent les objets composés de relativement peu de points matériels interconnectés de façon à approcher des caractéristiques spatiales données, et par des éléments de liaison associés à des algorithmes d'interaction complexes visant à restituer un comportement fonctionnel particulier (figure 10).

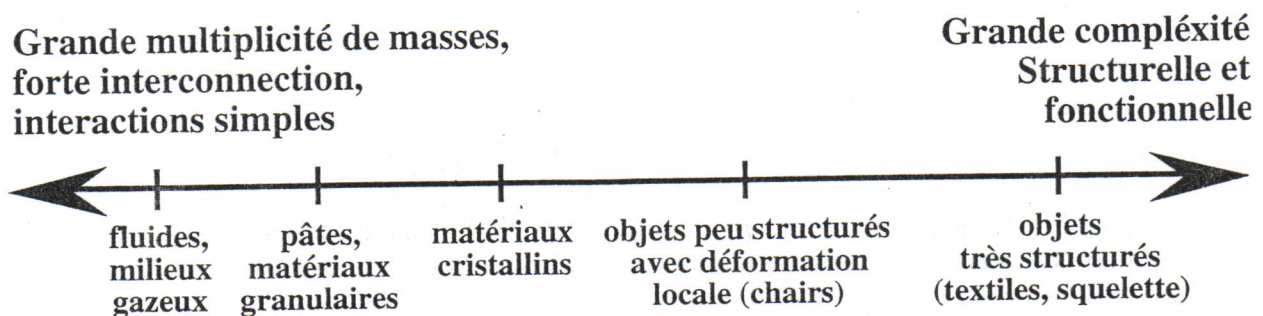


Figure 10 : une catégorisation des modèles d'objet.

On peut parler dans le premier cas de modélisation au niveau 'atomique', pour laquelle le comportement de l'objet global émerge à partir de celui de chacun des éléments de la multitude. Le chapitre III est consacré aux modèles que nous avons développés dans cette catégorie.

Pour le second cas, celui de la modélisation fonctionnelle, il s'agira de développer des algorithmes d'interaction complexes, caractérisant au niveau macroscopique le comportement d'un morceau de matière, ou représentant à un niveau fonctionnel et abstrait la structure d'un mécanisme. Nous avons développé plusieurs modèles d'interactions complexes correspondant à une caractérisation macroscopique du phénomène recherché. Ces modèles sont présentés aux chapitres IV, V et VI.

III. COMPORTEMENTS DE MULTITUDE :

BILLES ET AGGLOMÉRATS

III.1 Les lois d'interaction

III.1.1 Collisions et propriété d'exclusion spatiale

Le point matériel, atome constitutif des modèles d'objets physiques CORDIS-ANIMA, est la représentation idéalisée d'un composant mécanique inerte (possédant une inertie). De tels points ne possèdent effectivement pas de dimension spatiale, c'est-à-dire qu'ils sont sans volume, ou si l'on préfère, qu'ils occupent chacun une portion d'espace de volume nul et donc repérée uniquement par trois coordonnées euclidiennes.

Une conséquence immédiate est que l'on ne pourra leur attacher individuellement ni moment d'inertie, ni mouvement de rotation, ces caractéristiques n'apparaissant que pour des structures obtenues par l'assemblage d'un ensemble de points matériels à travers les modules de liaison. Cette opération d'assemblage confère à l'objet des propriétés topologiques (celles du réseau) et des propriétés géométriques (celles des différentes positions au repos possibles pour l'objet). Dans le cas le plus simple, celui où les liaisons sont associées à des lois d'interaction continues et linéaires, le modèle obtenu est celui d'un bloc monolithique dont les propriétés géométriques et topologiques sont invariantes.

C'est le mécanisme de la Liaison Conditionnelle qui permet, au sein de CORDIS-ANIMA, de construire des objets présentant des variations de structure, c'est-à-dire dont les propriétés topologiques et géométriques vont évoluer en fonction de l'état dynamique du système. La prise en compte de ce type de loi d'interaction 'non permanente' est notamment indispensable pour représenter certains comportements comme les collisions, les fractures et les collages entre deux objets individués.

Enfin, dans les cas extrêmes, tels que les comportements de multitude que l'on trouve chez les matériaux granulaires ou pulvérulents et chez les gaz ou les fluides, toutes les interactions définies entre les composants de l'objet doivent être 'non permanentes'. Placer deux points

matériels en interaction consiste alors à leur associer une zone d'interaction définie autour de leur position effective, c'est-à-dire une portion de l'espace sur laquelle ils pourront étendre leur influence.

Il s'agit donc ici d'élargir la notion de point matériel afin d'arriver à une entité composée d'un noyau central où se concentre toute la matière inerte, et qui exerce son action sur un volume non nul de l'espace.

Ce 'volume d'interaction' va s'obtenir d'une manière générale par une loi d'interaction définie entre deux points matériels de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} \text{si la distance entre les points } P_1 \text{ et } P_2 \text{ est } > S \text{ alors} & F_{\text{interact}} = 0 \\ \text{sinon} & F_{\text{interact}} = f(\Delta P, \Delta V) \end{array}$$

Toute liaison mécanique vérifiant ce type de loi est directement représentable par les Liaisons Conditionnelles de CORDIS-ANIMA. Cependant, dans bien des cas, il suffit de définir une fonction multi-linéaire calculant des valeurs qui respectent la loi en question. Le cas le plus simple est celui de l'interaction de collision élémentaire entre deux points matériels (figure 1). Ce modèle de collision peut s'interpréter comme l'introduction d'un ressort entre les deux points matériels reliés par le module liaison, lorsque ceux-ci sont suffisamment proches. Sur le même principe on pourra définir un module calculant une force d'interaction plus sophistiquée, correspondant par exemple à l'approximation multi-linéaire d'une fonction de butée exponentielle (du type $f(D) = K \cdot (e^{(D-S)} - 1)$).

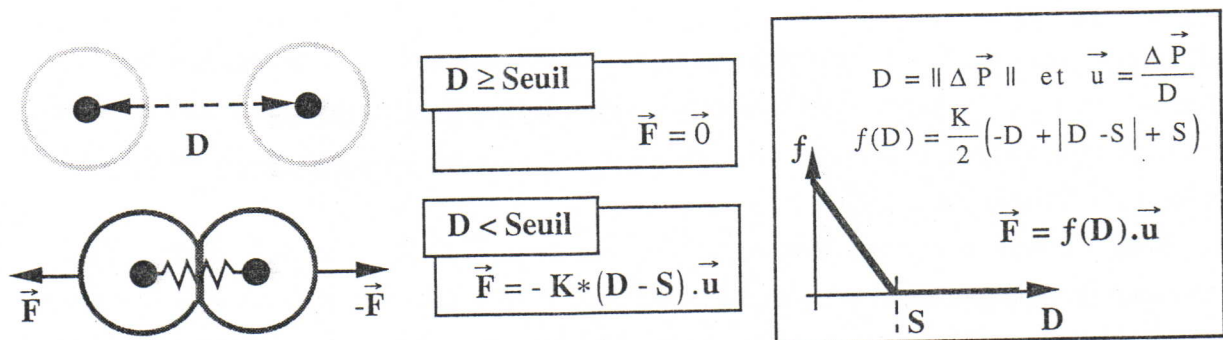


Figure 1 : Interaction élémentaire de collision

Incidentement, deux points matériels en interaction selon ce type de loi vont présenter une propriété fondamentale de la matière, celle de l'exclusion mutuelle. C'est-à-dire qu'ils ne pourront en aucun cas se trouver au même point de l'espace en un même instant sans subir une force de répulsion mutuelle très élevée, qui aura pour effet de les éloigner rapidement l'un de l'autre. Un amas constitué de points ayant cette propriété va donc se présenter comme un objet volumique.

La loi d'interaction élémentaire de collision représentée ci-dessus permet donc d'associer une zone de 'non entrance' aux points matériels, et de leur donner les propriétés de 'billes' élastiques. De la même manière nous pouvons définir une loi symétrique associant une zone de 'non sortance' à un point matériel et lui donnant donc les propriétés d'un contenant sphérique, que nous appellerons par opposition une 'bulle' (figure 2).

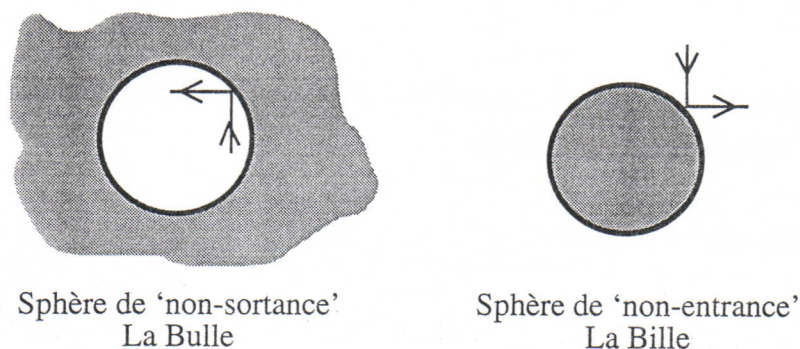


Figure 2 : Bulle & Bille

Enfin, on remarquera que ces lois d'interaction ne permettent de calculer que des forces non dissipatives (correspondant à des expressions du type $F = -K \cdot \Delta P$) et il peut être nécessaire de leur associer une composante d'amortissement. Ceci se fait habituellement dans CORDIS-ANIMA en plaçant en parallèle un module de liaison visqueuse. Cependant nous avons implicitement introduit un rayon caractérisant la sphère, de 'non entrance' ou de 'non sortance', qui correspond à la zone de l'espace où s'étend la liaison mécanique¹. Le module de liaison calculant une force dissipative doit pouvoir restreindre son action à cette même zone, et donc tenir compte de ce rayon.

Il s'agit typiquement d'un comportement de type tout-ou-rien, avec cela de particulier qu'il porte dans ce cas sur une variable différente de celle utilisée pour le calcul de la force : la distance D pour la zone d'interaction, et la vitesse axiale discrète $D - D^{\text{retard}}$ (schéma d'Euler) pour la force de dissipation.

Comme nous l'avons fait remarquer dans le paragraphe II.2, l'expression exacte d'une caractéristique de type tout-ou-rien nécessite l'emploi de la fonction $\text{sign}()$ ($\text{sign}(x) = 1$ si $x > 0$ et 0 si $x \leq 0$). Dans le cas d'une 'bille' (sphère de 'non entrance') par exemple, si S est le seuil au delà duquel la force d'interaction devient nulle, l'expression utilisée pour le calcul de la force de dissipation s'écrit :

$$\vec{F} = -Z * \text{sign}(D - S) * (D - D^{\text{retard}}) * \vec{u}$$

¹ Si deux points matériels sont en interaction selon une loi de type collision, caractérisée par un seuil S , leurs rayons respectifs vérifient $R_1 + R_2 = S$. Ces rayons sont complètement déterminés à partir de trois points en interaction mutuelle selon une même loi, et dans ce cas $R_1 = R_2 = R_3 = \frac{S}{2}$.

III.1.2 Forces de cohésion

Les lois d'interaction de type collision permettent donc de conférer à nos particules élémentaires des propriétés de non pénétration mutuelle. Cependant, un amas constitué de particules en interaction selon ce type de loi occuperait certes un certain volume d'espace, mais pourrait être éparpillé sans aucun effort. Il est nécessaire afin d'éviter cela et de donner à notre amas une cohésion, propriété d'un objet individué, d'élaborer un autre type de loi d'interaction qui ne produise plus uniquement des forces répulsives.

Ce type de force se trouve dans la nature au niveau le plus élémentaire, il correspond par exemple à l'énergie potentielle d'interaction entre deux atomes d'une molécule. Cette interaction intramoléculaire produit une force de répulsion à courte distance qui assure que la molécule ne s'effondre pas sur elle-même, et une force d'attraction à longue distance qui assure que ses atomes ne se dispersent pas.

Nous allons nous inspirer d'un modèle d'énergie potentielle intermoléculaire proposé par la physique générale [AF79] pour élaborer la loi d'interaction cherchée (figure 3).

Selon ce modèle, dit de Lennard-Jones, l'énergie potentielle d'interaction entre deux molécules de gaz peut se calculer approximativement par l'expression :

$$E_p(r) = -E_{p,0} \left[2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} \right] \quad \text{où } r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

et r_0 caractérise la position à l'équilibre.

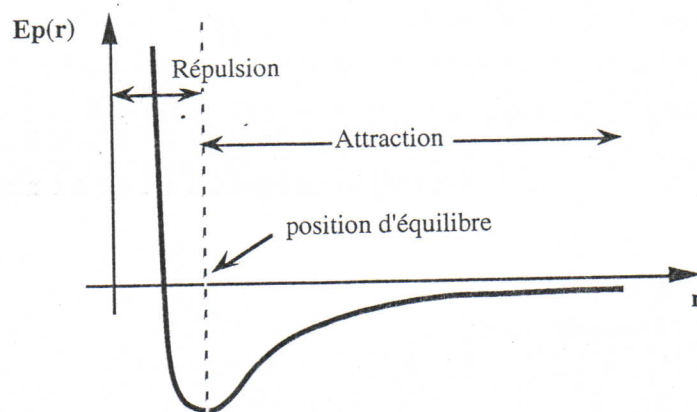


Figure 3 : Potentiel intermoléculaire de Lennard-Jones

Cette expression permet de définir une famille de potentiel de répulsion à courte distance et d'attraction à longue distance : $V_n(r) = -E_0 \left[2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^n - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2n} \right]$.

La force issue d'un potentiel $V_n(r)$ se calcule par l'expression classique :

$$\vec{F} = -\text{grad } V_n(r) = \left(\frac{\partial V_n(r)}{\partial x}, \frac{\partial V_n(r)}{\partial y}, \frac{\partial V_n(r)}{\partial z} \right)$$

c'est-à-dire : $\vec{F} = E_0 * \frac{2n}{r_0} * \left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^{2n+1} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n+1} \right) \cdot \vec{u}$ où $\vec{u} = \frac{1}{r} \cdot (x, y, z)$

Cette formule nous permet donc de définir une famille de caractéristiques f_n (figure 4) donnant la norme d'une force d'interaction isotrope entre deux points matériels ; cette dernière ne dépend que de la distance qui les sépare et est caractérisée par un seuil r_0 représentant la distance à l'équilibre.

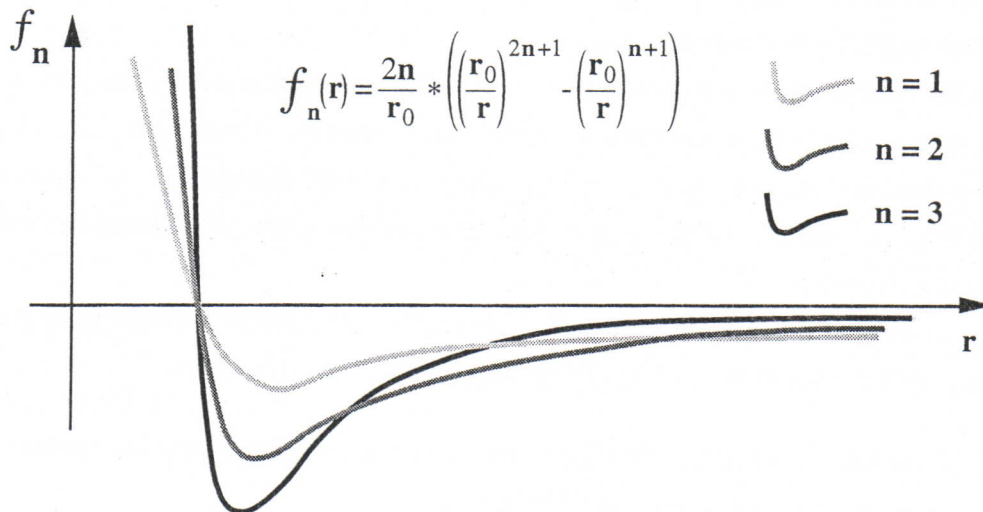


Figure 4 : famille de caractéristique f_n .

Enfin nous en arrivons à la construction d'un module d'interaction CORDIS-ANIMA prenant pour référence le modèle de liaison intermoléculaire de Lennard-Jones. Il exploite une approximation multi-linéaire des caractéristiques représentées sur la figure 4. L'expérience a montré qu'il n'était pas nécessaire en général de construire des approximations fines de ces caractéristiques. Ainsi nous avons utilisé en pratique des fonctions multi-linéaires à trois ou quatre morceaux (figure 5).

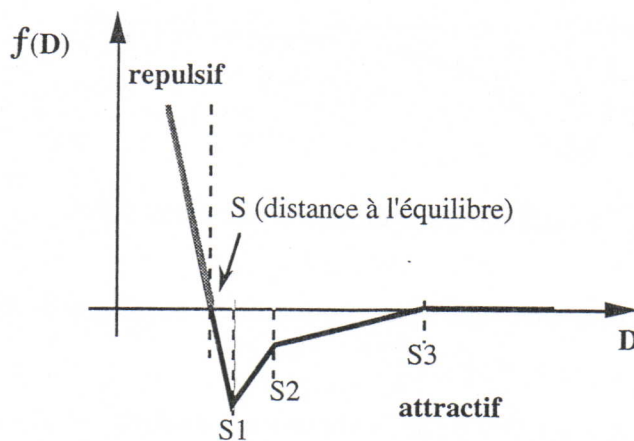


Figure 5 : fonction d'interaction attractive/réulsive

La forme générale de l'expression de calcul d'une telle fonction est la suivante (cf. paragraphe II.3) :

$$f(D) = a_0 \cdot D + K + a_1 \cdot |D - S_1| + a_2 \cdot |D - S_2| + a_3 \cdot |D - S_3|$$

Nous avons pris ici $S = r_0$ et $D = r$ pour revenir aux notations introduites jusqu'à présent. On remarquera que S n'apparaît pas dans l'expression de calcul de f , puisque pour la caractéristique de la figure 5, la distance à l'équilibre ne correspond pas à un changement de pente ; cependant la constante K est telle que $f(S) = 0$, c'est-à-dire que dans les configurations correspondant à des états d'équilibre, deux particules sont séparées par une distance $D = S$.

III.2 Un modèle pour les objets malléables

III.2.1 Intégration large : l'agglomérat

L'aspect le plus remarquable des modèles que nous proposons est le fait qu'il consistent finalement à introduire en lieu et place du point matériel CORDIS-ANIMA, une entité composée : 'la bille'. L'élément minimal de matière y devient davantage qu'une masse ponctuelle destinée à être couplée nominativement à une de ses congénères par une liaison visco-élastique. Ce nouvel atome se définit par son appartenance à un ensemble de points en interaction, et ses propriétés dépendent à la fois de ses paramètres de points matériels, et de la nature du module d'interaction mutuelle associé au groupe (que nous appellerons 'agglomérat'). Cette entité composée peut notamment être rattachée à des caractéristiques spatiales (comme le rayon d'une sphère de non pénétration), bien que celles-ci ne se manifestent que lorsqu'il y a interaction avec un autre point matériel appartenant à l'agglomérat.

Un agglomérat de taille n correspond à un ensemble de n points matériels dont chacun est en interaction avec les $n-1$ restant, ce qui représente $n(n-1)/2$ modules d'interaction. Il est clair qu'il serait très fastidieux de décrire explicitement les modules et les connexions nécessaires pour représenter ces interactions : nous avons donc là un cas où la nécessité de définir un module intégré se fait sentir.

Un tel module 'agglomérat' doit permettre de connecter les n points matériels $p_1 \dots p_n$ selon un graphe complet (figure 6). Il présente donc n points de communication de type 'L' (entrée position \vec{X} et sortie force \vec{F}), et calcule n forces selon une loi d'interaction unique caractérisée par une expression du type $\|\vec{F}\| = f(D)$.

La force \vec{F}_i qui correspond au point p_i est égale à la résultante des forces d'interaction entre p_i et les $n-1$ autres points p_j ($j=1..n$ et $j \neq i$) :

si l'on note $D_{ij} = \|\vec{P}_i - \vec{P}_j\|$, et $\vec{u}_{ij} = \frac{1}{D_{ij}}(\vec{P}_i - \vec{P}_j)$ on a :
$$\vec{F}_i = \sum_{k=1}^{i-1} f(D_{ik}) \cdot \vec{u}_{ik} + \sum_{k=i+1}^n f(D_{ik}) \cdot \vec{u}_{ik}$$

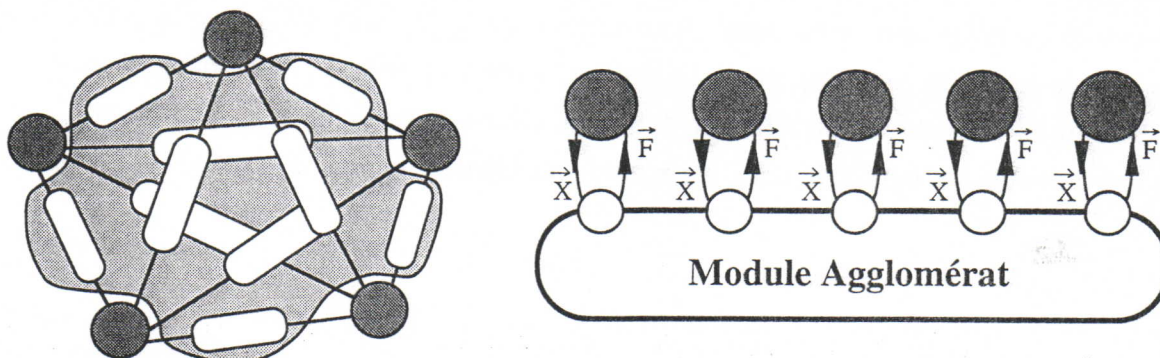


Figure 6 : le Module Agglomérat

L'agglomérat est un modèle de composition/décomposition structurelle de la matière. Un morceau de matière se présentera comme un ensemble de billes, et quel que soit la nature de la loi d'interaction mutuelle qui le caractérise (de la simple non pénétrabilité à la cohésion intermoléculaire), la forme obtenue correspondra à un état stable du groupe.

L'agglomérat est une 'forme dynamique'

La nature de la fonction d'interaction mutuelle, ainsi que le nombre de billes et les paramètres de masse qui leurs sont attribués, définissent les variétés de forme de l'agglomérat. Cependant, la structure interne de celui-ci (c'est-à-dire la position de chacune des billes dans une forme obtenue à un instant particulier) est variable et dépend des conditions initiales données au système dynamique. Contrairement à ce qui se passait avec les précédentes version de CORDIS-ANIMA, avec lesquelles un objet s'obtient en connectant explicitement et un à un ses éléments constitutifs, ici la structure interne de l'agglomérat est une configuration particulière, non déterminée explicitement lors de la construction du modèle.

Dès ce niveau élémentaire, la forme de l'objet est donc le résultat d'un processus dynamique. Le mode de pensée qui sous-tend le travail de modélisation est alors une pensée du mouvement et des processus temporels. La forme ne préexiste pas, mais s'obtient ; les états d'équilibre qui lui correspondent sont des points singuliers d'un processus générateur. Une caractéristique de ces points singuliers est leur degré de stabilité (c'est-à-dire la profondeur du puits de potentiel auquel ils correspondent).

Ainsi, c'est intrinsèquement qu'un agglomérat obtenu à partir d'une simple interaction de non pénétration pourra présenter des empilements et des effondrements, qui sont des comportements caractéristiques des matériaux granulaires et pulvérulents comme les sables et les poudres.

De même un agglomérat obtenu à partir d'un module de cohésion intermoléculaire possède une mémoire des déformations qui lui sont imposées, et donc un comportement de plasticité par fluage. Un tel objet pourra se briser et se recoller sans rajout d'information supplémentaire.

L'agglomérat constitue un modèle de base pour la représentation des matériaux pâteux et des fluides en général.

III.2.2 Proposition pour la construction d'objets malléables

Un agglomérat permet la représentation d'un morceau de matière élémentaire et homogène. De la même manière des objets plus complexes non homogènes, ou une scène entière formée de plusieurs objets, vont se présenter comme un ensemble d'agglomérats en interaction. La structure générale d'un modèle est de la forme :

agglomérat	::=	[(1 bille, N billes), 1 loi d'interaction]
objet	::=	[(1 agglomérat, N agglomérats), P lois d'interaction]
scène	::=	[(1 objet, N objets), Q lois d'interaction]

Nous devons, afin de permettre une description efficace de ces structures, définir un module de 'liaison intergroupe' réalisant les interactions entre deux agglomérats. Un tel module placé entre deux agglomérats Ω_1 et Ω_2 composés respectivement de n et m masses correspond à une liaison mécanique répartie sur les $n*m$ couples du produit cartésien et calcule les $n*m$ forces correspondantes selon une loi d'interaction unique caractérisée par une expression du type $\|\vec{F}\| = f(D)$ (figure 7.a et 7.b).

La force \vec{F}_i^1 , qui correspond au $i^{\text{ème}}$ point p_i^1 de Ω_1 , est égale à la résultante des m forces d'interaction entre p_i^1 et les m points p_j^2 ($j=1..m$) de Ω_2 , et inversement pour la force \vec{F}_j^2 correspondant au $j^{\text{ème}}$ point p_j^2 de Ω_2 (qui est donc la résultante de n forces) :

Si on note pour chaque couples de points $(P_i^1, P_j^2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$: $D_{ij} = \|\vec{P}_i^1 - \vec{P}_j^2\|$ et $\vec{u}_{ij} = \frac{1}{D_{ij}} (\vec{P}_i^1 - \vec{P}_j^2)$ on a :

$$\forall i = 1..n \quad \vec{F}_i^1 = \sum_{j=1}^m f(D_{ij}) \cdot \vec{u}_{ij} \quad \text{et} \quad \forall j = 1..m \quad \vec{F}_j^2 = - \sum_{i=1}^n f(D_{ij}) \cdot \vec{u}_{ij}$$

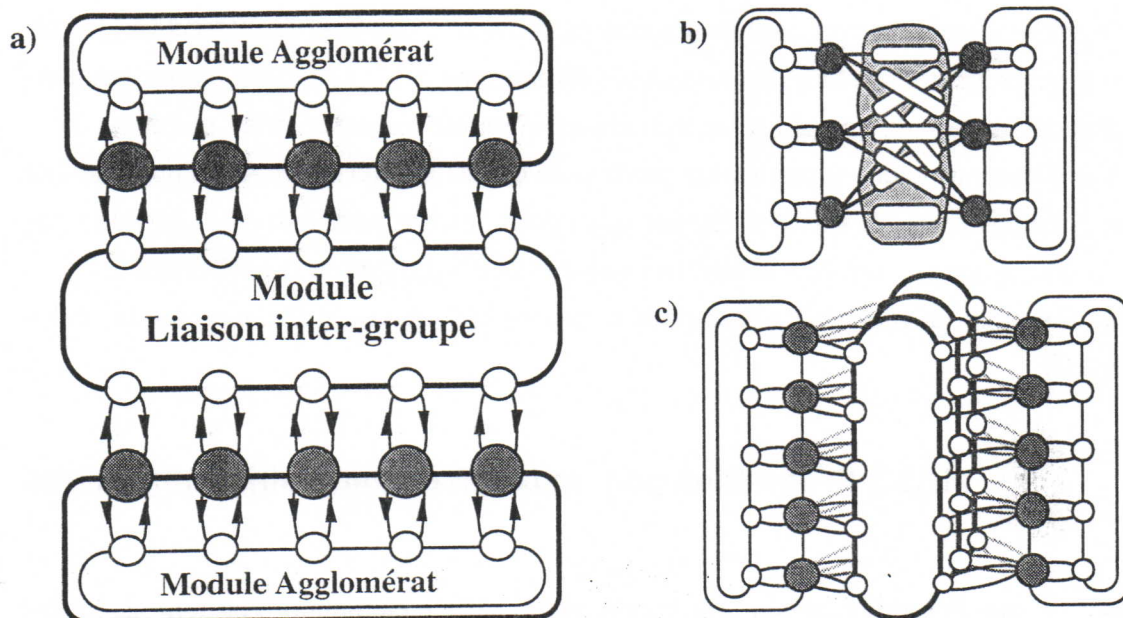


Figure 7 : a) le module de liaison intergroupe, b) les $N \cdot M$ liaisons mécaniques correspondantes, c) mise en parallèle de plusieurs modules de liaison intergroupe.

Plusieurs de ces modules de 'liaison intergroupe', correspondant chacun à une loi d'interaction différente, pourront aisément se placer en parallèle comme c'était le cas avec les liaisons simples, les forces résultantes étant alors sommées à l'entrée de chacune des billes des deux agglomérats (figure 7.c).

Un objet complexe sera obtenu à partir d'un certain nombre de modèle de matière homogène élémentaire ; autrement dit, il sera construit par des opérations de 'billage' successives. Une approche brutale consiste donc à analyser l'objet que l'on veut représenter en ces termes, en choisissant un niveau de discrétisation spatiale, à réaliser le 'billage' de chacune des parties, puis enfin à les assembler entre elles.

Cependant, la complexité inhérente aux modules de liaison permettant les assemblages est de l'ordre de n^2 , ou n est le nombre de composants élémentaires ($n(n-1)/2$ pour un agglomérat et $n \cdot m$ pour les interactions entre agglomérats). Il est alors clair que cette manière de procéder serait extrêmement lourde, aussi bien au niveau de la conception du modèle lui-même qu'au niveau des calculs nécessaires pour en effectuer la simulation. Nous devons donc imaginer des principes d'économie dans la représentation des objets. La structure suivante semble être un guide opératoire pour la modélisation des objets malléables par 'billage' ; elle relève d'une catégorisation des différentes parties de l'objet selon le rôle qu'elles jouent dans son comportement global et dans les interactions avec ses congénères.

D'une manière générale, les objets solides, c'est-à-dire qui ne sont pas déformables en profondeur et pour lesquels on peut identifier une certaine structure, peuvent se décomposer en 3 catégories de couches relatives (non nécessairement toutes présentes) (figure 8) :

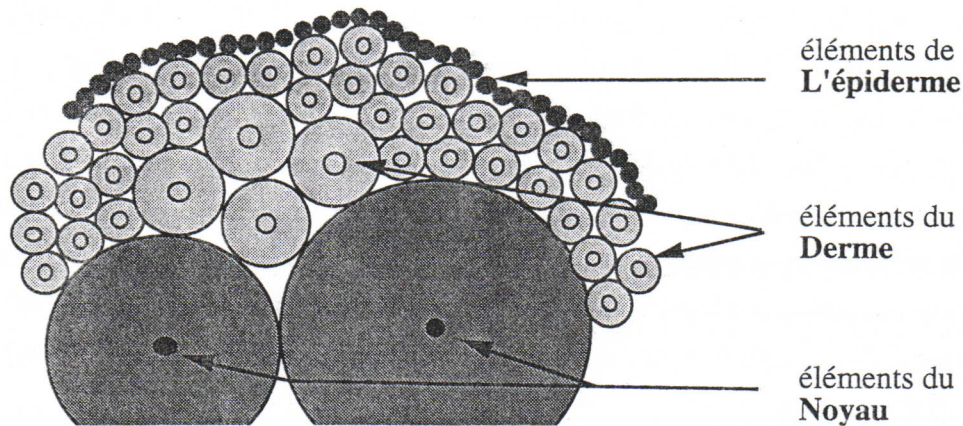


Figure 8 : Une structure pour la représentation des objets malléables

◇ une couche profonde ou "noyau", qui représente une fonction de centrage autour de laquelle l'objet s'organise. Le noyau est plutôt indéformable, ou très peu déformable, et préfigure les caractéristiques spatiales de l'objet. Le noyau le plus simple que l'on peut imaginer, et qui correspond à un objet de forme sphérique, se réduit à une seule bille : masse ponctuelle unique associée à un grand rayon de non pénétration, et peut être considéré comme étant complètement indéformable. Un noyau peut également être composé de plusieurs billes, il aura alors une forme donnée (autre que sphérique) et présentera une certaine déformabilité. Un tel noyau préfigurera la forme et le comportement de l'objet global.

◇ une couche intermédiaire, le "derme", qui portera les qualités de déformabilité les plus importantes. Son épaisseur est assez directement dépendante de la profondeur et de la nature de la déformation. Le derme est un agglomérat cohésif 'collé' sur le noyau, il caractérise la matière dont est fait l'objet. Dans le cas d'objets complexes non homogènes, le derme pourra se présenter comme l'assemblage de plusieurs agglomérats associés à des lois d'interaction différentes.

◇ enfin, l'objet peut présenter à sa superficie un épiderme, une "peau", qui aura le rôle d'une membrane servant à renforcer la cohésion du ou des agglomérats qui forment le derme en exerçant une certaine tension superficielle.

Des mises en oeuvre de modèles d'objets composés d'un noyau, contenant une ou plusieurs masses, et d'un derme aux propriétés élastiques ou plastiques, selon la nature de la fonction d'interaction, sont décrites à l'annexe B. Des chronogrammes illustrent les expérimentations

réalisées à partir de ces modèles. Ces expérimentations ont clairement permis de démontrer à la fois la simplicité, et l'efficacité de ces modèles.

Une économie sur le nombre d'éléments de liaison.

Cette représentation en couche permet, entre autre, de structurer les interactions internes à l'objet et les interactions entre objets, et d'en diminuer ainsi le nombre de manière significative. Il est clair par exemple que le derme et le noyau ne seront jamais en interaction dans ce type de modèle. D'autre part, lorsqu'un objet possède un épiderme, c'est cette couche superficielle qui assume l'ensemble des interactions avec l'extérieur. Le cas extrême est celui de la représentation d'objets capables de fractures et pouvant se scinder en fragments allant jusqu'au noyau. Dans ce cas limite, qui correspond aux matériaux fluides, granulaires ou pâteux, pour lesquels on ne peut pas réellement parler de structure, tous les composants seront concernées par les interactions internes et avec l'environnement.

Une économie sur le nombre de points matériels.

Un autre intérêt majeur de cette structuration est de réduire le nombre de composants élémentaires nécessaires pour modéliser un objet donné. En fait, plus les déformations que peut présenter l'objet sont locales à sa surface (moins elles sont 'profondes'), moins il faudra de masse ponctuelles pour le représenter. Le cas limite est celui d'un objet quasi rigide (la notion de rigidité étant ramenée à l'intensité de la force de non pénétration), dont le modèle pourra se ramener au nombre minimum de billes nécessaire pour approcher sa forme avec le degré de précision voulue. Dans ce cas, la modélisation de l'objet peut se ramener au 'billage' d'une forme géométrique.

Il faut souligner, à propos des opérations de 'billage' en elles mêmes, que certains chercheurs se sont intéressés à des algorithmes de décomposition précise des objets volumiques en primitives géométrique simples, telles que des sphères de différents rayons [OB79, Moh81]. Le propos de ces travaux était d'obtenir une description des volumes qui soit adéquate à un affichage graphique efficace ou à l'analyse de scènes 3-D. Les opérations de 'billage' ne sont pas sans rapport avec ces travaux, mais dans notre cas, la notion de proximité entre un objet de référence et sa représentation ne peut se ramener à des critères géométriques. Cependant, les agglomérats sont, dans leur principe même, autant des modèles d'objets que des modèles pour construire les objets. Entre autre, ils permettent de développer des méthodes de génération procédant par modelage d'un agglomérat, lorsqu'il n'existe pas de description initiale, ou par moulages successifs sur une surface non pénétrable générée à partir d'une description géométrique, comme par exemple le relevé paramétrique d'un profil de terrain ($z=f[x,y]$). Cette méthode de

moulage¹ (décrite dans [Mou91] et [JLL91a-b, JLL92]) a été utilisée pour construire les modèles de terrain mis en oeuvre dans les expérimentations décrites au chapitre VI (§ VI.3). Nous reviendrons également dans ce chapitre sur le modelage par l'opérateur d'objets formés d'agglomérats.

III.2.3 Aspect visuel : la notion de contour

A. Introduction

La définition du "contour", qui est une notion assez complexe, riche et multiforme, ne peut se ramener dans notre approche aux méthodes géométriques courantes en synthèse d'images, qui relèvent des BR (Boundary Representation) telles que facettages et surfaces paramétriques.

Dans le cas d'objets présentant de fréquentes ou profondes modifications de structure, que permet ce type de modélisation, la génération du contour exige de réviser au préalable cette notion.

Le contour est ce qui réalise l'unité de l'objet dans sa relation avec l'extérieur, ce qui distingue implicitement un intérieur, « l'objet », d'un extérieur, « l'environnement », c'est-à-dire ce qui caractérise comme forme individuée. Il est une "membrane" ou simplement un "seuil" de matérialité, parfois fort partielle comme dans la flamme de la bougie, qui supporte les interactions avec l'extérieurs ou en tous cas en est le lieu. Ces interactions sont de natures diverses, et c'est parfois davantage la cohérence entre certaines d'entre elles qui permet de décréter l'existence d'un contour. Sommairement, c'est par le contour que simultanément l'objet se voit, se manipule et interagit avec ses congénères.

B. Peau matérielle

Dans le cas où le modèle de l'objet inclut un épiderme, c'est sans aucun doute cet épiderme qui est porteur de la forme extérieure. Notre problème est alors résolu : le contour visible de l'objet et le lieu de ses interactions avec l'extérieur se situent au niveau de l'ensemble des points qui constituent l'épiderme. La figure 9 représente un exemple simple de modèle d'épiderme.

Cette *peau matérielle* est constituée de masses ponctuelles, structurées en ligne dans le cas bidimensionnel, ou selon le maillage d'une surface dans le cas tridimensionnel, et interconnectées par des liaisons visco-élastiques. Elle joue un rôle de cohésion pour l'objet en exerçant une tension superficielle comme le ferait une membrane élastique. Par sa fonction même, cet épiderme délimite l'objet de son environnement, il en est le contour .

¹ House et Breen parlent d'une méthode similaire dans [HB90] qu'ils appellent 'injection molding'. Il s'agit, dans leur cas de mouler un objet en injectant des particules élémentaires dans un contenant indéformable obtenu par une modélisation de type CSG (Constructive Solid Geometry).

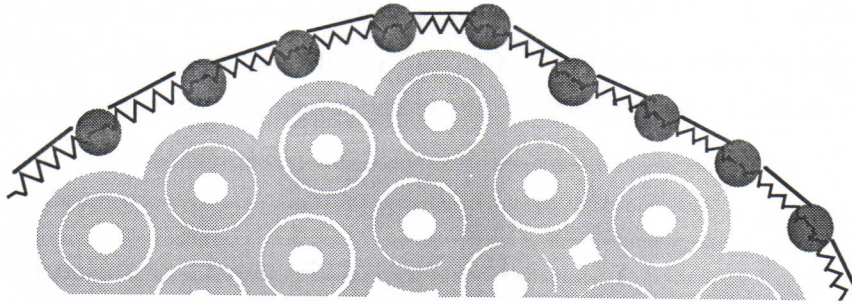


Figure 9 : La ‘peau matérielle’ : un support du contour.

Il existe des objets qui ont une cohésion interne plus faible et où le modèle ne peut pas comprendre une couche “épiderme” telle que nous l’avons décrite ci-dessus. Il en va ainsi par exemple d’un fluide plus ou moins visqueux (tel qu’une goutte d’huile ou de mercure), ou de matériaux susceptibles de se rompre et de se recoller (tels que les pâtes à modeler). Le contour ne peut plus alors être supporté par une peau matérielle possédant une grande permanence de structure.

C. Frontière d’interaction

Nous l’avons déjà fait remarquer, le contour peut également se définir, et c’est en fait une définition plus générale que la précédente, comme une singularité de la fonction d’interaction entre l’objet et son environnement (figure 10). Cette caractérisation du contour n’est pas sans analogie avec les méthodes géométriques consistant à décrire les surfaces par fonctions implicites, et notamment avec les ‘Blobby models’ introduit par Blinn [Bli82]. Mais encore une fois, nous ne pouvons nous satisfaire ici d’une définition purement géométrique du contour ; au contraire nous devons tenir compte des caractéristiques dynamiques de l’objet que l’on veut visualiser. En résumé, il ne nous semble pas pertinent de traiter l’image dynamique sous son aspect le plus circonstanciel, c’est-à-dire comme une suite d’images statiques.

Ainsi, pour un objet tel que nous venons de le décrire, il est immédiat de définir une loi d’interaction globale comme la somme des lois d’interaction avec l’environnement pour chaque élément constituant l’agglomérat qui le représente, pour un corps Ω :

$$f_{\text{glob}} = \sum f_{p_i \leftrightarrow \text{env}} \quad \forall P_i \in \Omega.$$

Le contour peut alors être détecté à partir d’une singularité de la fonction d’interaction globale comme un passage par zéro ou une discontinuité (figure 10).

Nous avons exploité ce principe pour visualiser des séquences montrant les mouvements d’agglomérats bidimensionnels. Dans ce cas la visualisation peut se réaliser de manière immédiate en traçant une fonction du type $z = F_{\text{glob}}(x,y)$ et en exploitant des plans de clipping en z pour n’en conserver que la partie pertinente.

Dans le cas général, la détection de cette frontière d'interaction peut se faire par des techniques de balayage systématique de l'espace d'évolution de l'objet (ray-tracing par exemple, il existe aujourd'hui de nombreux travaux sur le rendu d'objets volumiques décrits par surface implicite), ou par des balayages adaptatifs du type suivi de courbe. Mais le coût de ce genre d'opération n'est pas acceptable si l'on vise une visualisation en temps réel et devant donc se dérouler au minimum à 25 Hz.

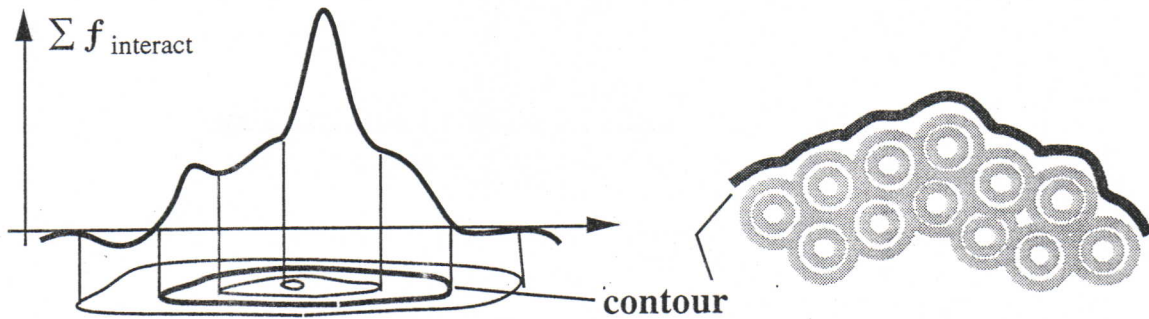


Figure 10 : Le contour, frontière d'interaction.

Nous avons porté notre attention sur une technique utilisable ici encore dans le cas bidimensionnel (objets plans) et que l'on pourrait appeler 'balayage dynamique'. Cette technique n'a que très peu expérimentée, mais nous la présentons brièvement ici car la démarche sous-jacente mérite d'être citée (ce travail a été reporté dans [Jim89] et [LJR91]). Le propos de générer le contour visible en utilisant un modèle physique. La méthode imaginée consiste à faire courir sur la surface de l'objet une ou plusieurs masses ponctuelles possédant une vitesse initiale et soumises à une force issue d'un potentiel calculé de manière analogue à F_{glob} (figure 10). Ce sont les trajectoires de ces particules superficielles qui permettent alors de reconstruire le contour de l'objet.

Pour conclure, il faut reconnaître que les méthodes que nous venons de décrire n'ont quasiment pas été mises en oeuvre dans le cadre des simulations, et que c'est l'équivalent d'une représentation filaire qui est utilisée en pratique. Cependant, les idées que nous avons présentées ici s'accordent avec la volonté de développer des méthodes suffisamment rapides pour permettre, dans le cadre d'un outil pour la synthèse de mouvement, une visualisation 'en ligne' des scènes calculées.

Quelle que soit l'application visée, simulation scientifique ou animation réaliste, il faut en effet pouvoir visualiser les mouvements obtenus (c'est-à-dire faire une 'projection' à un minimum de 25Hz) avant de finaliser la séquence d'image par un rendu photoréaliste complet par exemple. Dans le cadre d'un système permettant la simulation d'objets simultanément audibles, visibles et manipulables, ce qui est l'objectif ultime de la recherche à laquelle contribuent les travaux rapportés dans ce document, la présentation des images doit de plus se faire dans le temps même

de la simulation (et de manière synchrone). Il est clair que cette visualisation, dont le but doit être la lecture correcte des mouvements plutôt qu'une représentation crédible des objets, ne relève pas des mêmes approches que les méthodes de rendu réaliste. Le propos est certainement ici de chercher la représentation minimale portant l'information nécessaire pour reconstruire l'*objet-en-mouvement*. Un nuage de point ou un ensemble de traits peuvent dans certains cas satisfaire à cette définition.

IV. INTERACTION DE SURFACE

POUR LES SOLIDES DÉFORMABLES

IV.1 Introduction

Nous avons proposé dans le chapitre précédent un modèle permettant la représentation d'objets volumiques déformables à partir d'ensembles de masses ponctuelles en interaction. Lorsque plusieurs de ces masses sont en interaction mutuelle selon une loi de type butée - nous les appelons alors des 'billes' - elles présentent une propriété fondamentale de la matière : l'exclusion spatiale. Un ensemble de billes - un agglomérat - possède alors un volume d'occupation spatiale. Enfin, la définition d'une interaction de cohésion entre ces particules élémentaires donne naissance à une forme individualisée, qui se présente comme un morceau de matière déformable.

Il est alors naturel de vouloir retrouver, dans cette représentation, les caractéristiques apparentes habituelles des objets matériels. A un instant donné, un tel objet se présente à son environnement par l'intermédiaire de sa surface, frontière entre un intérieur (la portion de l'espace occupé par la matière) et un extérieur. Nous avons déjà considéré cette question du point de vue de l'aspect visuel des objets à la fin du chapitre précédent.

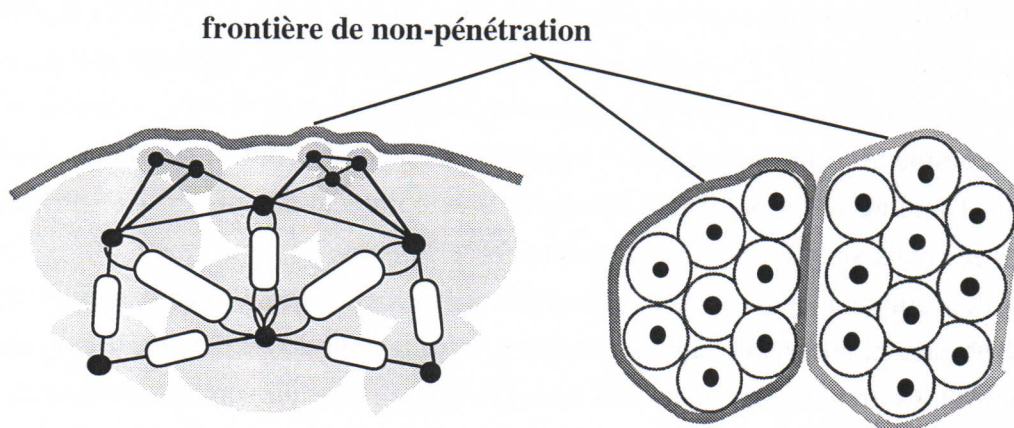


Figure 1 : définir les surfaces comme des frontières de non pénétration

Les modèles d'agglomérat ne contiennent donc pas d'information explicite sur les surfaces. Ces dernières doivent donc être reconstruites à partir de l'état dynamique courant de chacune des masses ponctuelles qui composent le modèle et de la nature des lois d'interaction qui leur sont associées. Ainsi, la surface de nos objets se présente dans le cas général comme une frontière de non pénétration (figure 1).

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode permettant de représenter les forces d'interaction en jeu lorsque deux objets sont en contact. Nous ne nous intéressons plus ici, comme c'était le cas en fin du chapitre précédent, à l'aspect visuel des objets formés à partir d'agglomérats, mais à la physique des phénomènes en jeu dans les contacts entre objets.

L'approche développée peut être vue comme l'association d'un *modèle de matière*, qui représente les propriétés de l'objet physique 'intérieur' (masse, répartition d'inertie, déformabilité, cohésion, ...), et d'un modèle d'interaction, qui représente la structure microscopique des surfaces. Ce dernier doit à la fois gérer la non pénétration et permettre le calcul des forces de surface pour chacun des objets en interaction.

IV.2 Modèle général pour les interactions de surface

IV.2.1 Le frottement de glissement solide/solide

A chaque fois que les surfaces de deux corps solides sont en contact, on observe une résistance qui s'oppose à leurs mouvements relatifs, c'est-à-dire aux glissements d'un corps sur l'autre. La situation la plus caractéristique de ce phénomène est celle d'un livre posé sur une table. Si l'on pousse le livre le long de la table pendant un instant, en lui communiquant donc une certaine vitesse, dès qu'on le lâche il ralenti puis s'arrête. Symétriquement, si l'on penche la table en la soulevant par l'un de ses bords, le livre ne commence à glisser que lorsqu'une certaine inclinaison est atteinte. Dans le premier cas, il y a perte de quantité de mouvement ($P = m.V$) ; dans le second, tout se passe comme si le livre était fixé à la table par une colle dont la résistance limitée se caractérise par l'inclinaison à partir de laquelle le livre commence à glisser. Les phénomènes observés dans ces deux situations montrent qu'une force s'oppose au mouvement ; cette force est appelée force de frottement et est due aux interactions entre les surfaces des deux solides. Jusqu'à la fin du XX^{ème} siècle, les physiciens expliquaient le frottement de surface par l'hypothèse de rugosité [Bam81]. Cette dernière dit que les forces de frottement, qui sont proportionnelles à la réaction normale des surfaces et indépendantes de l'aire de contact, sont dues à l'enchevêtrement des aspérités microscopiques des surfaces en contact. De nos jours, c'est la théorie de l'adhésion (appelée cohésion, lorsque les matériaux des corps en contact sont identiques), dans laquelle on

prend en compte les interactions au niveau atomique, qui est considérée comme l'explication correcte des frottements de surface.

Mais pour des raisons pratiques évidentes, quelle que soit la réalité physique du phénomène (imbrication des rugosités ou interactions entre atomes), celui-ci sera caractérisé au niveau macroscopique (par une loi de comportement globale) pour la résolution concrète des problèmes de mécanique. Il est en effet impossible de tenir compte, pour le calcul, de toutes les interactions moléculaires individuelles ; elles sont donc déterminées (expérimentalement) de façon collective et représentées approximativement par une loi globale. Le frottement sec, tout comme le frottement visqueux dont une approximation courante est $f = -z.V$, est une notion statistique [AF79].

Il est donc impossible d'envisager une modélisation des interactions de surface en représentant directement, par des masses ponctuelles, les particules de la matière. Cependant, pour une simulation dynamique, le fait de caractériser le phénomène globalement par une loi expérimentale n'est pas suffisant. Nous devons également modéliser la situation au niveau structural ; concrètement, nous devons trouver un moyen permettant de localiser spatialement l'interaction de frottement sec au niveau de la surface des objets et de caractériser les déplacements relatifs dans les zones de contacts. A chaque lieu de contact entre deux objets, nous devons disposer d'éléments permettant de 'matérialiser' la surface implicitement définie par les modèles d'agglomérat.

Une solution envisageable consisterait à réaliser une approximation polyédrique de cette surface et de relier analytiquement ce maillage aux composants dynamiques du modèle, comme cela est fréquemment fait pour la détection et le calcul des interactions en modélisation physique pour la synthèse d'image (voir la première partie de ce document). Nous disposerions alors de l'ensemble des sommets des polyèdres obtenus pour calculer les déplacements relatifs au niveau des zones de contact, et le modèle serait d'autant plus exact que l'approximation serait précise.

Cependant, il est clair qu'une telle solution, qui reviendrait à re-construire en permanence une représentation géométrique de la forme des objets, serait très coûteuse et totalement inadaptée aux modèles d'agglomérat. Nous nous donc sommes tournés vers une méthode qui relève d'une discrétisation adaptative des surfaces en contact. La solution que nous avons choisie consiste à ne produire les points permettant de matérialiser les surfaces que lorsque ceux-ci sont nécessaires. Ainsi, nous allons placer un point 'virtuel' temporaire sur chaque zone de contact entre deux objets (figure 2).

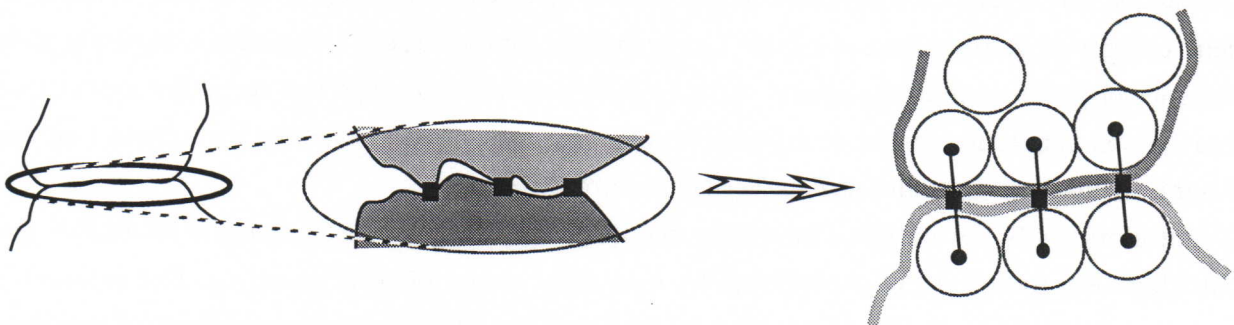


figure 2 : Génération d'un point virtuel à l'emplacement des zones de contact

C'est le module destiné au calcul des interactions de surfaces qui générera ce point en fonction des positions relatives des éléments qu'il met en interaction, et ce, uniquement lorsque cela sera nécessaire.

La position du point virtuel attaché à une masse ponctuelle donnée dépend de la position de cette masse, du 'rayon' de non pénétration qui lui est associé, et de l'écrasement de la zone de non pénétration. Comme l'illustre la figure 3, nous avons uniquement besoin de définir la position du point virtuel relativement à la masse à laquelle il est lié.

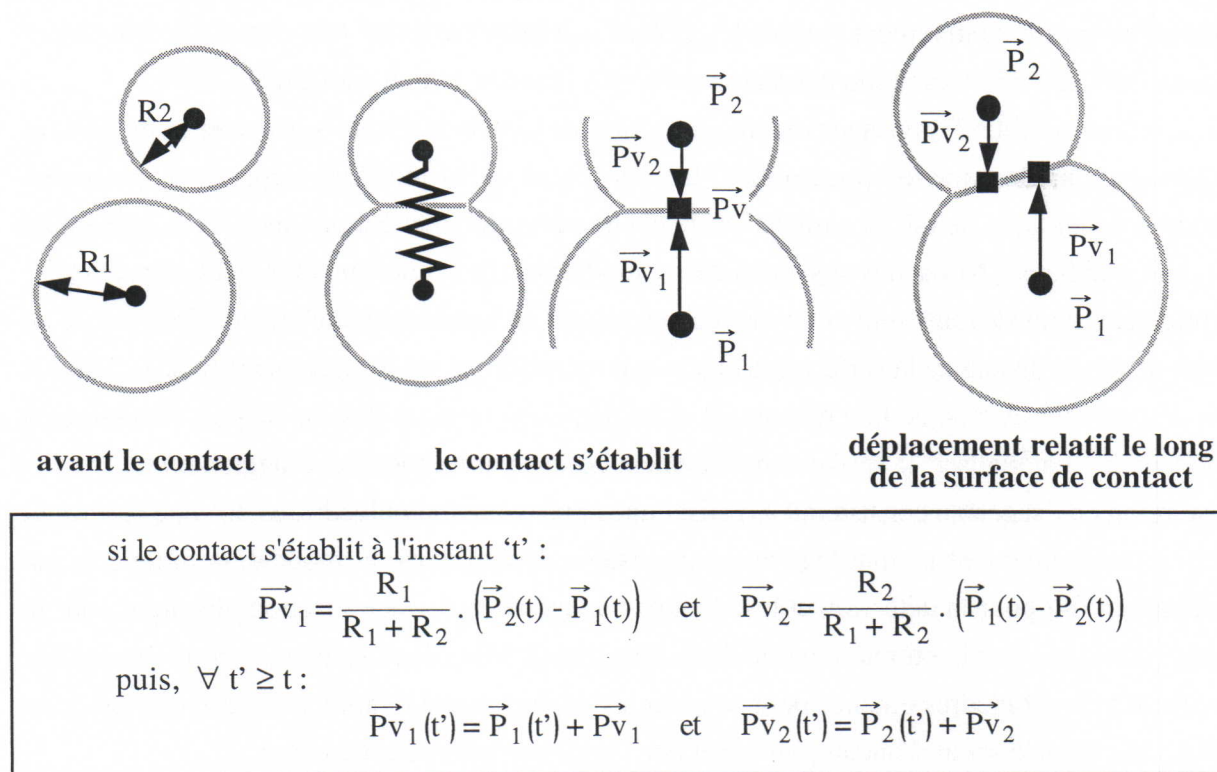


Figure 3 : Introduction d'un point virtuel

IV.2.2 Forces normales et forces tangentes

Quelle que soit la référence physique choisie pour le modèle d'interaction entre objets, on retrouve deux catégories de forces mises en jeu. Les premières sont les forces s'opposant à la pénétration entre les objets et sont normales aux surfaces dans la zone de contact. Les secondes sont ce que nous avons appelé les forces de frottement, elles s'opposent au glissement des objets l'un sur l'autre et sont donc tangentes aux surfaces dans la zone de contact.

Il faut alors souligner ici que l'ensemble des modèles d'interaction (y compris les butées qui calculent les forces de non pénétration) que nous avons décrits jusqu'ici, fait intervenir uniquement des forces axiales entre deux points matériels, lesquelles correspondent à la première catégorie (figure 4).

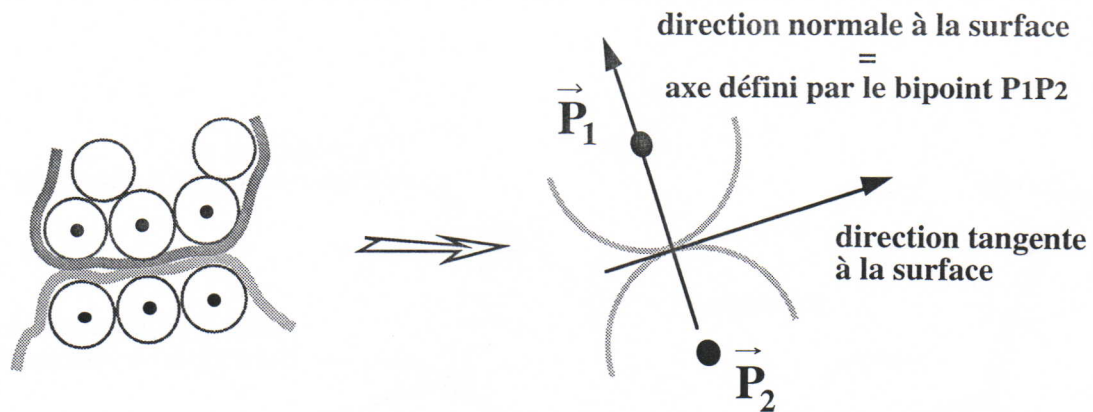


figure 4 : un couple de points définit la direction normale aux surfaces dans la zone de contact

En tout état de cause, les forces axiales sont les seules existant entre deux points matériels, et toute tentative visant à représenter des interactions donnant lieu au calcul de forces dans une autre direction est en contradiction avec les lois de la dynamique des particules.

Le calcul des forces de frottement de surface, qui s'applique dans la direction tangente, pose donc un problème dans le cadre des modèles à base de masse ponctuelle. Cependant, il faut bien réaliser que la notion de surface telle que nous l'avons définie, de même que le principe de discrétisation adaptative utilisant les points virtuels, n'ont pas de sens dans le cas d'un objet réduit à une seule masse (même si celle-ci est associée à un volume de non pénétration). Aussi, nous allons nous placer sous l'hypothèse que les objets auxquels nous avons affaire dans le cadre de ce modèle de frottement de surface sont des objets composés présentant les propriétés de formes individuées (c'est-à-dire ayant une certaine cohésion). Contrairement à une masse ponctuelle, qui ne possède que trois degrés de liberté (de translation), ces derniers peuvent notamment présenter un mouvement de rotation et se voir appliquer des moments (nous n'employons ces termes que par analogie : ils ne sont clairement définis que dans le cas des solides parfaitement rigides).

Le dernier point restant à préciser concerne l'écart entre la position spatiale où nous localisons les interactions de surface (la zone de contact sur la frontière de non pénétration), et la position du point d'application des forces résultantes (la masse ponctuelle autour de laquelle est défini le volume de non pénétration). Cet écart, entre la localisation spatiale du contact et la position du point d'application de la force, va entraîner une erreur sur les moments résultant des interactions de surface (figure 5).

Ce problème est inhérent au modèle d'objet lui-même. Par définition, il ne peut y avoir de contact réel entre deux points matériels, puisque ceux-ci ne sont associés à aucun volume ; symétriquement, on ne peut donc disposer d'un point d'application pour les forces tangentes à l'emplacement précis du contact (au niveau numérique la probabilité de voir deux masses de position égale est quasiment nulle). On peut cependant imaginer une méthode, analytique ou numérique, pour corriger l'erreur introduite sur le moment communiqué à l'objet. Mais la

difficulté réside alors dans le calcul du moment, qui n'est défini que pour une forme donnée de l'objet.

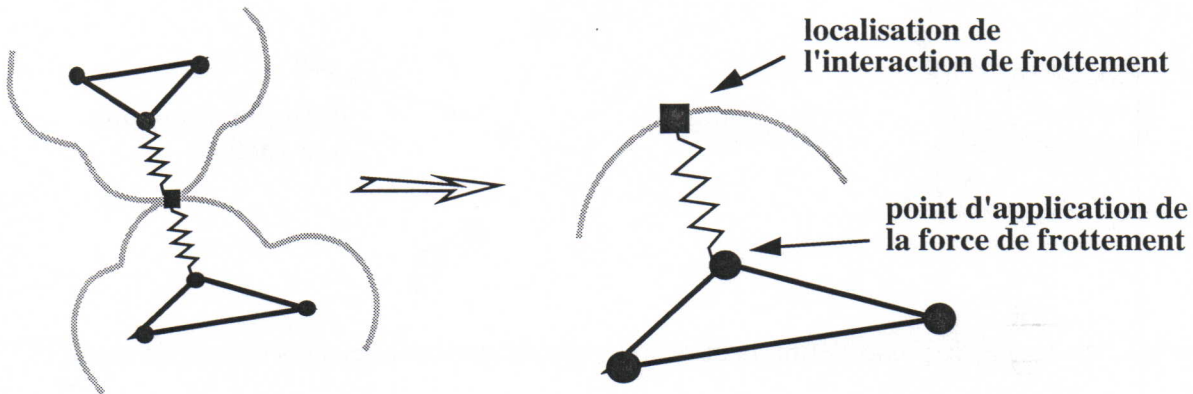


figure 5 : écart entre la zone de contact et le point d'application de la force

Nous avons appliqué ce modèle sans correction dans nos expérimentations, en considérant cette erreur comme étant relative au niveau de discrétisation choisi pour les objets. Mais il faut noter que la plupart du temps la mesure de l'écart entre le point de contact et celui d'application des forces est très faible par rapport aux dimensions de l'objet lui-même, l'erreur sur le moment global est donc négligeable.

IV.3 De la loi expérimentale au modèle algorithmique

IV.3.1 Modèle de coulomb : le frottement solide-solide

La loi de frottement solide la plus fréquemment utilisée en mécanique, et également en modélisation physique pour l'animation par ordinateur, est connue sous le nom de modèle de coulomb. Cette loi est directement construite à partir d'une expérience similaire à celle du livre et de la table que nous décrivions en tête de ce chapitre. Elle distingue donc deux situations :

- 1 - Contact Statique : les corps sont immobiles l'un par rapport à l'autre. La force minimum pour mettre les corps en mouvement est proportionnelle à la force normale N maintenant les corps l'un contre l'autre :

$$F_{frot} = \mu \cdot N \quad (i)$$

Il faut noter que le mouvement n'existant pas encore, la direction de F_{frot} n'est pas déterminée.

- 2 - Contact Cinétique : les corps glissent l'un sur l'autre. La force minimum pour maintenir un mouvement uniforme (à vitesse constante) est proportionnelle à la force normale N maintenant les corps l'un contre l'autre :

$$\vec{F}_{frot} = -(\mu \cdot N) * \frac{\vec{V}_{tg}}{\|\vec{V}_{tg}\|} \quad (ii)$$

F_{frot} s'oppose au mouvement de glissement et a donc une direction inverse de la vitesse tangente V_{tg} , mais est indépendante de la valeur de cette vitesse, ce qui caractérise le modèle de Coulomb.

Ce modèle très simple ne suffit pas pour rendre certains phénomènes subtils, comme le frottement exercé par des skis fartés sur la neige ou par un archet colophané sur une corde de violon (nous présenterons en conclusion de ce chapitre le modèle particulier utilisé dans [Flo90] pour la simulation de frottement d'archet colophané). Une première approximation consiste alors à distinguer un coefficient de frottement statique : μ_s , et un coefficient de frottement cinétique : μ_c [Bam81]. Pour la plupart des matériaux expérimentés, on trouve $\mu_c < \mu_s$.

La figure 6 donne le profil des caractéristiques contrainte/glissement obtenues dans l'étude du comportement d'une roue sur un sol. .

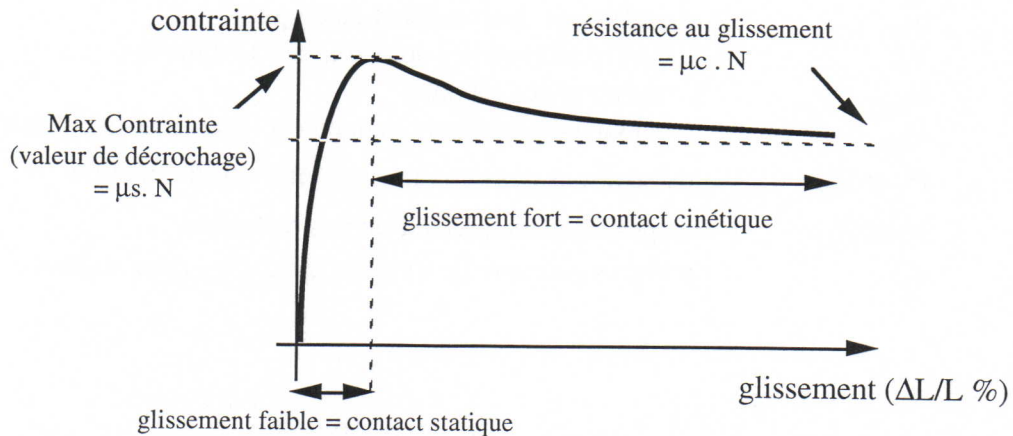


Figure 6 : Loi expérimentale de type frottement sec

IV.3.2 Formulation dynamique et module d'interaction de surface

Nous devons maintenant élaborer une formulation dynamique du modèle de Coulomb en nous intéressant notamment aux transitions entre les deux situations de contact qu'il distingue. Comme nous allons le voir, dans le cadre du formalisme CORDIS-ANIMA un modèle de ce type va prendre la forme d'une liaison conditionnelle généralisée mettant en oeuvre un automate de commutation avec mémoire entre deux régimes de liaison sans mémoire (voir le § II.5, chapitre II). Ces deux modules, que nous appellerons module d'accrochage, pour le contact statique, et module de

glissement, pour le contact cinétique, vont être respectivement chargés du calcul d'une force normale assurant la non-interpénétration des corps, et d'une force tangente s'opposant au déplacement relatif. La force (F_{np}) de non pénétration entre les corps sera calculée selon un modèle de butée, élastique linéaire ou plus sophistiquée, tels que ceux que nous avons introduits au chapitre III.

Nous allons détailler dans les deux paragraphes suivants les modèles associés aux frottements de surfaces dans le cas des contacts cinétiques et dans celui des contacts statiques ; enfin, au paragraphe C, nous réaliserons l'assemblage final du module d'interaction en définissant les conditions de commutation entre les différents régimes de liaison.

A. Le modèle de glissement

Le module de glissement ne pose pas de réel problème de modélisation. Il va simplement correspondre au calcul de la force de frottement cinétique du modèle de Coulomb (équation (ii) du § IV.3.1).

Si l'on note :

F_{np} ,	la force de non pénétration issue de la butée
μ_c ,	le coefficient de frottement cinétique
\vec{V}_r ,	la vitesse relative des deux masses ponctuelles
\vec{V}_{ax} ,	la vitesse relative axiale
\vec{V}_{tg} ,	la vitesse de glissement, tangente à la surface de contact
P_1 et P_2 ,	les positions des deux masses mises en interaction
P_1^- et P_2^- ,	les positions retardées d'un pas de temps
\vec{u} ,	le vecteur unitaire de l'axe formé par les deux masses

$$\vec{u} = \frac{(\vec{P}_1 - \vec{P}_2)}{\|\vec{P}_1 - \vec{P}_2\|} \quad \text{et} \quad \vec{V}_r = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) - (\vec{P}_1^- - \vec{P}_2^-)$$

$$\vec{V}_{tg} = \vec{V}_r - \vec{V}_{ax} = \vec{V}_r - (\vec{V}_r \cdot \vec{u})\vec{u} \quad \text{ou,} \quad \vec{V}_{tg} = \vec{u} \wedge (\vec{V}_r \wedge \vec{u})$$

$$\text{et enfin,} \quad \vec{F}_{gliss} = -\mu_c F_{np} \cdot \frac{\vec{V}_{tg}}{\|\vec{V}_{tg}\|}$$

On remarquera que la composante tangente de la vitesse peut être calculée de deux manières différentes à partir de la vitesse relative des deux corps et du vecteur axial \vec{u} : comme la différence entre la vitesse et sa composante axiale, ou directement à partir d'un calcul de produit vectoriel. C'est la première expression que nous utiliserons puisqu'elle est nettement moins coûteuse.

B. Le modèle d'accrochage

Le module d'accrochage doit satisfaire la loi de Coulomb : tant que les forces visant à créer un mouvement de glissement (c'est-à-dire les composantes de force qui sont tangentes aux surfaces en contact) sont inférieures à $\mu_s \cdot F_{np}$, les corps ne glissent pas l'un sur l'autre.

Cette caractérisation du phénomène est donc basée sur un critère géométrique : les positions relatives des surfaces en contact doivent rester constantes. Ce type de critère est parfaitement exploitable dans le cadre d'une recherche des positions d'équilibre d'un système, mais ne peut s'intégrer directement dans un modèle de simulation dynamique. Les travaux réalisés par Baraf dans [Bar91], qui visaient à prendre en compte, par des méthodes analytiques, le frottement sec entre solides rigides, sont une illustration de la difficulté à mêler les deux approches (voir le § III.2.3. de la première partie de ce document).

Nous allons par conséquent développer un modèle tel que les surfaces soient effectivement accrochées l'une à l'autre, sans pour autant être immobiles. Le 'liant' le plus simple que nous avons à notre disposition est un module visco-élastique, dont nous allons fixer les extrémités aux points virtuels respectivement attachés aux deux éléments de surfaces en contact (figure 7).

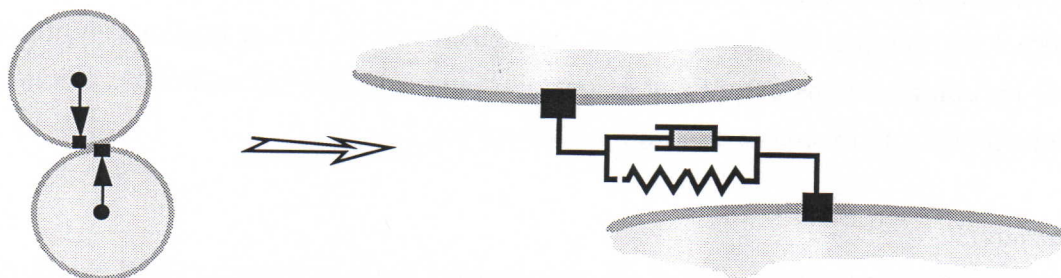


Figure 7 : le module d'accrochage

On note :

V_{tg} ,	la vitesse de glissement, tangente à la surface de contact
u ,	le vecteur unitaire de l'axe formé par les deux masses
P_{v1} et P_{v2} ,	les vecteurs 'distance' entre les points virtuels et les masses auxquelles ils sont associés (voir la figure 3)
k et z ,	les constantes de raideur et de viscosité associées au composant visco-élastique

Nous définissons le vecteur 'distance d'accrochage' comme étant la composante tangente à la surface de contact de la distance réelle entre les deux points virtuels (puisque la force d'accrochage doit être tangente aux surfaces) :

$$\Delta \vec{Pv} = (\vec{Pv}_1 - \vec{Pv}_2) \quad \text{et} \quad \vec{D}_{acc} = (\Delta \vec{Pv} \cdot \vec{u}) \vec{u} = \vec{u} \wedge (\Delta \vec{Pv} \wedge \vec{u})$$

Comme dans le cas de la vitesse, il y a deux expressions possibles pour calculer la composante tangente du vecteur distance, et nous utiliserons la première.

L'expression utilisée pour le calcul de la force d'accrochage est la suivante :

$$\vec{F}_{acc} = -K \cdot \vec{D}_{acc} - Z \cdot \vec{V}_{tg}$$

Les paramètres K et Z associés au modules d'accrochage sont caractéristiques des *déformations microscopiques* intervenant sur les surfaces des objets en contact. Ils doivent être du même ordre de grandeur que ceux choisis pour le module de non pénétration ; l'ensemble de ces paramètres est caractéristique du matériau dont les objets sont formés en surface.

C. Module d'interaction pour les collisions et les contacts prolongés

Le module final doit également permettre de gérer les collisions ; il va donc comporter un troisième état, en plus des deux dont nous avons déjà parlé.

Cet état supplémentaire correspond tout simplement au cas où les objets ne sont pas en contact au niveau des deux masses ponctuelles considérées. Si le seuil de la butée associée aux éléments de surfaces est $S = R_1 + R_2$ (R_1, R_2 étant les rayons respectifs et P_1, P_2 les positions respectives de ces deux éléments), la situation où les corps sont 'libres' et les forces de contact nulles à cet endroit de leur surface est entièrement caractérisée par la relation : $D \geq S$, où $D = \|\vec{P}_1 - \vec{P}_2\|$ (voir la figure 1 du chapitre III). Nous devons maintenant préciser selon quelles conditions vont se réaliser les commutations entre l'état de contact statique (corps 'accrochés') et l'état de contact cinétique (corps en glissement, nous dirons 'décrochés').

'Décrochage'

La condition de 'décrochage', c'est-à-dire de transition de l'état accroché vers l'état de glissement relatif est donnée par la loi de Coulomb (relation (i) du §IV.3.1) :

$$F_{acc} \geq \mu_s \cdot F_{np}$$

où μ_s est le coefficient de frottement statique.

Lorsque cette relation est vérifiée, le module visco-élastique que nous avons utilisé pour réaliser l'accrochage doit disparaître, et la force de frottement entre les deux corps doit être calculée selon l'expression que nous avons donné pour F_{gliss} .

'Raccrochage'

La condition de 'raccrochage' porte sur les vitesses relatives des surfaces en contact. D'après le modèle de frottement sec que nous prenons comme référence (et qui ne parle pas explicitement de transitions dans le sens glissement -> accrochage), la vitesse doit être nulle pour que les corps repassent dans un état de contact statique. En pratique nous utiliserons un seuil de vitesse V_s , qui va influencer sur le comportement dynamique, et est donc un des paramètres du modèle algorithmique. La condition de transition entre l'état de glissement et l'état accroché s'écrit alors :

$$V_{tg} \leq V_s$$

L'arrivée de l'automate dans l'état accroché doit s'accompagner d'une mise à jour des points virtuels associés à chacun des deux éléments de surface mis en interaction à travers le module. Les nouvelles positions de ces points sont calculées selon le principe décrit à la figure 3.

Nous pouvons maintenant donner une représentation complète du module d'interaction de surface prenant en compte les collisions et les contacts prolongés avec frottement sec, sous la forme d'un schéma représentant les commutations entre les divers modules (figure 9).

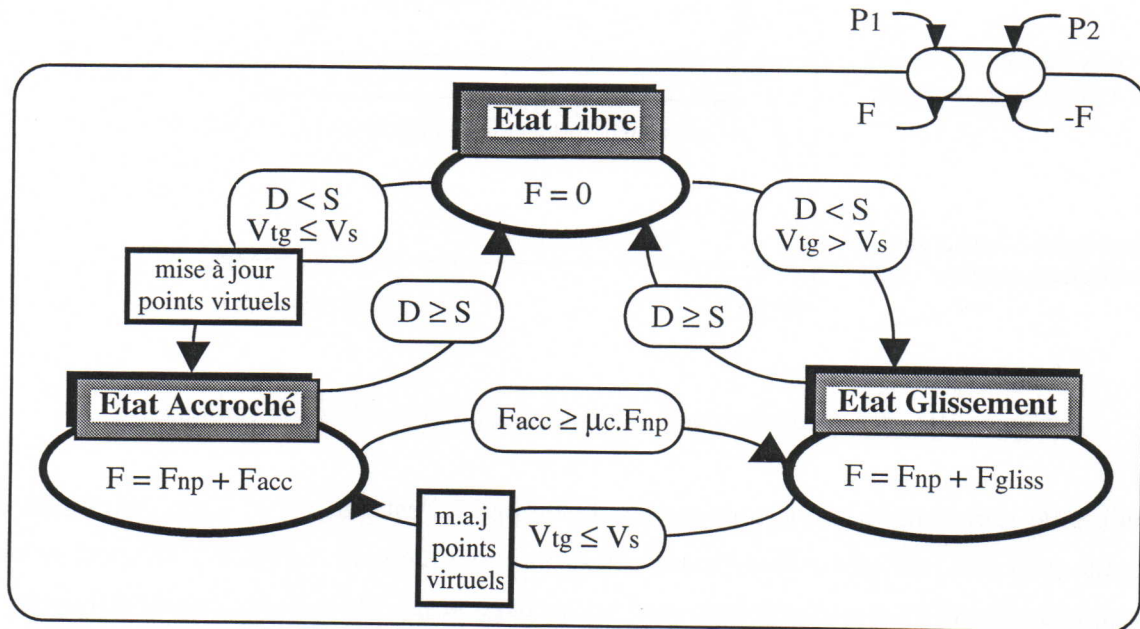


Figure 9 : automate d'état fini représentant le module d'interaction de surface

Le module final se présente donc comme un automate de commutation avec mémoire entre deux régimes de liaison sans mémoire, tel que nous l'avons décrit au paragraphe II.5 du chapitre II. Le vecteur d'état interne 'I' de l'automate de commutation est formé de l'indice du régime actif (puisque les conditions de commutation en dépendent). La fonction Π est formée de l'ensemble des conditions de commutation que nous avons décrites et la fonction conditionnelle \mathcal{R} est telle que $\mathcal{R}(E, I) = I$. L'automate élabore de plus, dans le cas d'une transition vers l'état 'accroché', un vecteur d'initialisation 'J' formé des positions des points virtuels relativement à la masse à laquelle ils sont attachés : $J = (Pv1, Pv2)$. La fonction Φ correspond au calcul décrit à la figure 3.

IV.4 Conclusion

Il est possible de tracer la caractéristique contrainte / glissement (qui dans notre cas se présente comme une courbe force / distance) correspondant au modèle de décrochage que nous venons de

développer (figure 10)¹ ; elle se présente comme une approximation linéaire par morceaux de la caractéristique représentée à la figure 6. Cette courbe est entièrement déterminée par les coefficients μ_s et μ_c , qui caractérisent les surfaces en contact, et par le paramètre K du module d'accrochage, qui donne l'allure de la courbe dans les contacts statiques (la dynamique du raccrochage, qui n'est donc pas représentée sur cette courbe, dépend du seuil de vitesse V_s).

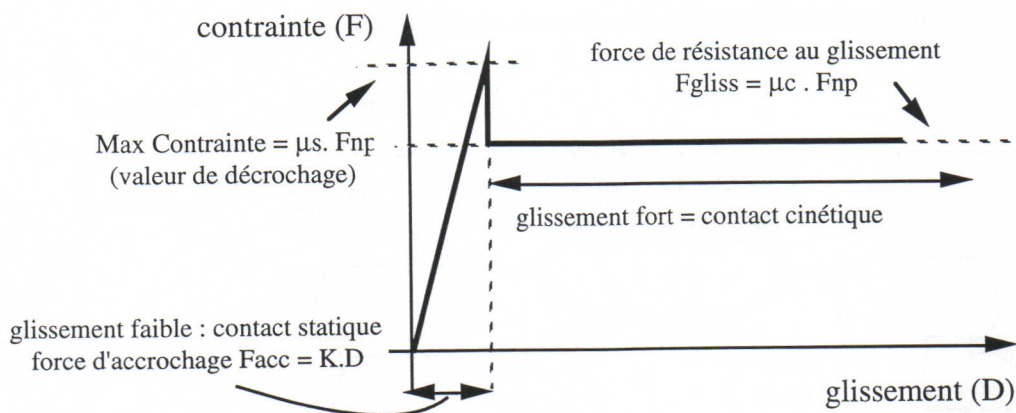


Figure 10 : caractéristique force / déplacement du modèle algorithmique

Le principe de représentation que nous avons développé ici est général et l'approximation du phénomène peut être corrigée en fonction de mesures expérimentales concrètes. On peut penser par exemple à choisir d'autres modèles pour l'accrochage afin d'obtenir une courbe continue au passage entre les contacts statiques et les contacts cinétiques. Il peut également être intéressant d'utiliser pour le glissement un modèle de viscosité non-linéaire (représenté par une caractéristique multi-linéaire) pour tenir compte du fait que, même dans le cas du frottement solide/solide, F_{gliss} redevient proportionnelle à V_{tg} pour les grandes vitesses.

Le formalisme que nous avons défini pour représenter les interactions de surfaces entre objets volumiques déformables (introduction d'un point virtuel et élaboration d'un automate de commutation entre un état libre, un état d'accrochage et un état de glissement) est général. Il permet de traiter une large variété des phénomènes d'interaction entre solides.

Nous avons déjà mentionné le modèle d'interaction développé pour la simulation de corde frottée par J.L. Florens [Flo90] (développé dans le cadre de Cordis, ce modèle - unidimensionnel - est dédié à la simulation de l'interaction entre un archet et une ligne vibrante, voir l'introduction du chapitre II). Ce modèle se définit à partir de la commutation entre un module d'adhérence², activé

¹ Cette courbe ne représente pas les cycles d'hystérésis qui interviennent lorsqu'il y a raccrochage.

² Ce module d'adhérence assure une parfaite continuité dans la transition adhérence \rightarrow glissement ; ce point est particulièrement important pour la simulation de corde frottée dans la mesure où la nature des transitoires conditionne fortement les sons produits. Le principe est de réaliser l'accrochage à l'aide d'un module basé sur un modèle de visco-élasticité fluide (ou modèle de Maxwell, voir le § V.3.2), dont les paramètres varient en fonction de conditions sur la vitesse de glissement et sur la force d'accrochage.

aux très basses vitesses, et un module de viscosité non-linéaire caractérisant le comportement de la colophane (dont est enduit l'archet). L'expression non-linéaire utilisée relie la force tangente au glissement (F_g), à la vitesse de glissement (V_g) et à la force de pression de l'archet (F_p). Le comportement de skis fartés sur la neige est caractérisé par le même type d'expression (figure 10).

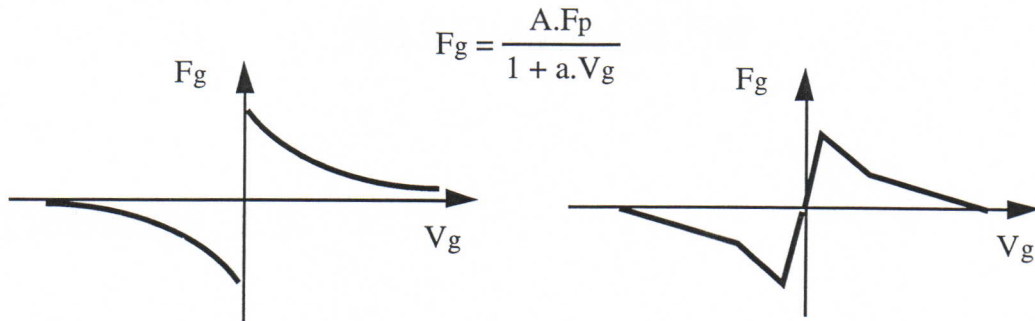


Figure 10 : Expression caractéristique du comportement d'un archet colophané ou de skis fartés, courbe continue et approximation multi-linéaire.

Notre formalisme pour la représentation des interactions de surface avec frottement sec peut donc être directement exploité pour traiter ce type d'interaction ; il suffit pour cela de réécrire les expressions permettant le calcul des forces de frottement. Ce que nous avons appelé le module de glissement correspond dans ce cas au calcul d'une force $F_{g\text{gliss}}$, selon l'expression de la figure 10. Le module d'accrochage peut soit rester identique, dans le cas où l'on décide de négliger la continuité dans les transitions entre l'état accroché et l'état de glissement relatif (ce qui peut être une approximation suffisante selon l'objectif visé), soit être remplacé par le modèle d'adhérence présenté dans [Flo90].

V. LES LOIS DE COMPORTEMENT COMPLEXE

DE LA MATIÈRE

V.1 Introduction

Notre expérience quotidienne du monde matériel montre de manière évidente le rôle déterminant des matériaux constitutifs dans les comportements d'un corps physique quel qu'il soit. Une tige en bois ne réagit pas comme une tige en métal, une boule de pâte à modeler se comporte de manière radicalement différente d'une balle de golf, et l'huile ne coule pas comme l'eau.

Cette influence du matériau sur le comportement du corps apparaît également (et heureusement!) dans l'énoncé du problème mathématique du mouvement. Que celui-ci soit écrit à partir de la notion de force ou de celle de puissance virtuelle, dès lors que l'on s'intéresse à d'autres mouvements que ceux dits 'rigidifiants' (c'est-à-dire sans déformation), il est nécessaire d'exprimer les forces internes aux corps fonctions des déformations effectives. Ces relations, qui doivent être particularisées pour chaque matériau constitutif sont fournies par ce que l'on appelle les lois de comportement du matériau (voir par exemple l'un des ouvrages [Ger73, Bam81, Tal90]).

La connaissance que l'on possède sur la microstructure de la matière (par exemple sur la structure cristalline d'un solide et sur les forces d'interaction existant à l'échelle atomique) permet de comprendre le comportement macroscopique de certains matériaux et d'avoir une bonne idée des ordres de grandeur des coefficients caractéristiques. Cependant cette information est souvent insuffisante pour obtenir de manière précise les valeurs de ces coefficients pour un matériau donné. Inversement une connaissance exacte de la loi de comportement permet de déduire des informations supplémentaires sur les microstructures. Ainsi en pratique les lois de comportement sont déterminées de manière expérimentale.

Bien qu'il n'existe pas de discontinuité réelle entre les matériaux solides et les matériaux fluides (et l'on verra d'ailleurs un modèle s'adressant à des matériaux ayant des comportements intermédiaires), on les distingue souvent car les grandes caractéristiques de leurs comportements sont clairement différentes. Cette distinction se retrouve également au niveau des essais mécaniques, dans la mesure où ils sont conçus selon la nature de la loi de comportement que l'on cherche à déterminer.

Un essai type se caractérise par :

- le mode de sollicitation : traction, compression (éventuellement bi- ou triaxiale), flexion, torsion...
- la manière dont les efforts appliqués au matériau sont contrôlés (en force ou en déformation), ainsi que la manière (progressive ou instantanée) dont ils varient au cours du temps.
- les grandeurs mesurées : déformation en un ou plusieurs points, et suivant un ou plusieurs axes.

Un autre aspect important d'un essai est l'homogénéité de l'échantillon expérimentés, aussi bien que des contraintes appliquées. Cette qualité d'homogénéité d'un essai s'obtient en choisissant un échantillon de taille suffisante, et en n'observant que la zone la plus éloignée du lieu de l'application des contraintes (figure 1). En réalité c'est la condition requise pour pouvoir interpréter correctement les mesures effectuées au cours de l'essai.

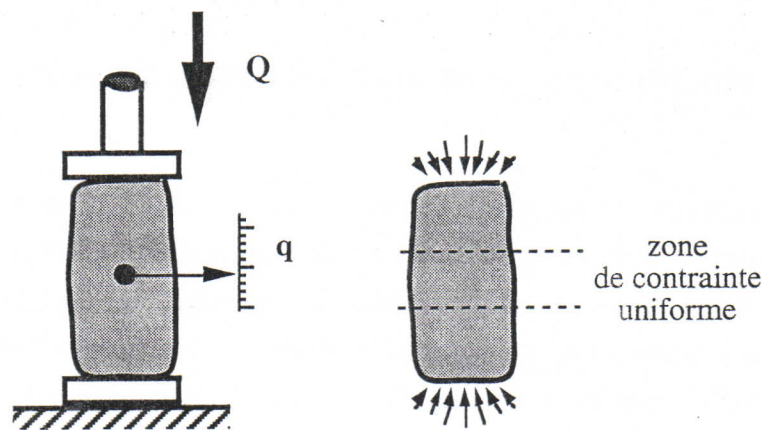


Figure 1 : essai en compression uniaxiale sur un échantillon de matériau solide

On s'aperçoit donc, et c'était prévisible, que les essais expérimentaux ne portent chacun que sur un aspect précis du comportement, et que l'information qui en est retirée est essentiellement unidimensionnelle : les déformations sont mesurées en un nombre fini de points et suivant un nombre fini de directions, et ceci dans une zone de contrainte uniforme ($=F \cdot dS$) ; il ne s'agit donc pas de mesures de déformation volumique qui seraient obtenues à partir de contraintes réellement surfaciques. Ainsi dans un essai de compression, on va obtenir une relation entre la déformation axiale moyenne à mi-hauteur et une force F (colinéaire à l'axe) appliquée par la presse.

Les aspects principaux du comportement d'un fluide sont la compressibilité et la viscosité. Des essais spécifiques aux fluides vont donc être mis en place afin par exemple de mesurer une variation du volume global sous l'application d'une pression uniforme. La viscosité n'intervient que lorsqu'il y a mouvement ; on va donc mesurer la force nécessaire pour mettre en mouvement deux plaques s'appuyant l'une sur l'autre par l'intermédiaire d'une couche de fluide.

Que ce soit dans le cas d'un solide ou d'un fluide, les essais font intervenir les notions de déformation généralisée (q), et de contrainte (ou effort) généralisée (Q). La loi de comportement obtenue a alors la forme $Q = f(q)$, et est parfois complétée par des relations du type $Q = f(t)$ à

$q = q_0$ (constant), ou inversement $q = f(t)$ à $Q = Q_0$. Les lois de comportement auxquelles nous allons nous intéresser dans ce chapitre ont été élaborées à partir d'essais à un paramètre, qui permettent donc d'élaborer des modèles dit de 'solicitation à un paramètre' [Bam81].

V.2 Modèles rhéologiques de base

Les études rhéologiques distinguent généralement trois familles de modèles de comportement simple : les modèles de comportement *élastique*, les modèles de comportement *visqueux*, et les modèles de comportement *plastique*. Ces trois éléments basiques permettent d'approcher de manière satisfaisante, directement ou par composition, le comportement de l'ensemble des matériaux connus (c'est-à-dire expérimentés).

V.2.1 Comportements élastiques et comportements visqueux

Les comportements élastiques correspondent aux cas où, dans un essai, la courbe effort/déformation est la même à la charge (c'est-à-dire lors de l'application de la contrainte) et à la décharge (lors de la relaxation) ; il y a donc absence d'hystérésis. D'un point de vue mathématique, cela signifie tout simplement que $Q = f(q)$ est bijective : il n'y a aucune déperdition d'énergie dans une déformation purement élastique. Ce type de comportement ne s'observe pour des matériaux réels que dans un domaine de charge borné : $Q_e^- \leq Q \leq Q_e^+$.

En pratique, c'est le modèle d'élasticité linéaire, c'est-à-dire vérifiant $q = k.Q$ (loi de Hooke), qui est le plus souvent utilisé (pour sa simplicité) ; il est généralement symbolisé par un ressort (figure 2).

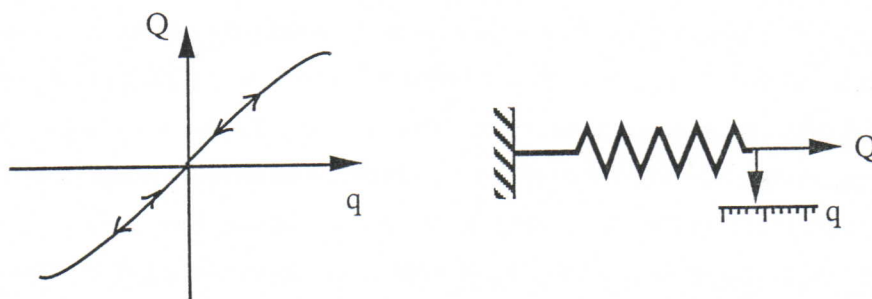


Figure 2 : Modèle rhéologique de l'élasticité, le ressort

Les modèles de comportement visqueux font intervenir le temps, ce qui n'était pas le cas dans le modèle précédent. Dans un comportement purement visqueux, il existe une relation bijective entre l'effort Q et la vitesse de déformation \dot{q} . Comme dans le cas de l'élasticité, cette relation peut être de plus linéaire ; on parle alors de viscosité linéaire (ou newtonienne) et on introduit une constante

de viscosité z : $Q = z \cdot \dot{q}$. Ces comportements ne sont pas élastiques (au sens que nous avons introduit ci-dessus), ils occasionnent une dissipation d'énergie ; on dit qu'il y a irréversibilité. Le modèle rhéologique représentant le comportement de viscosité linéaire est l'amortisseur à huile ou 'dashpot' (figure 3).

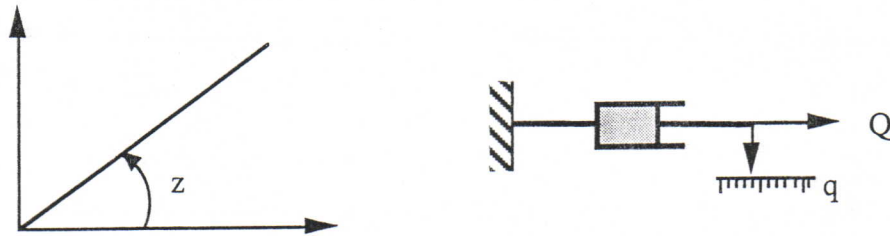


Figure 3 : Modèle rhéologique de la viscosité, l'amortisseur

Les relations $Q = k \cdot q$ et $Q = z \cdot \dot{q}$, caractéristiques de l'élasticité et de la viscosité linéaire, nous sont déjà familières. Elles sont en effet directement utilisées pour les algorithmes associés aux modules de liaison visco-élastique CORDIS-ANIMA (l'effort généralisé correspondant à la norme de la force, $Q = f(D) = \|\vec{F}\|$, tandis que la déformation généralisée correspond à l'écart entre la distance et la longueur au repos du ressort (notée L_0 ou S), $q = (D - S)$ et $\dot{q} = (D - D^{\text{retard}}) / T_e$, si l'on exprime la vitesse selon le schéma d'Euler). Nous avons également exploité des liaisons présentant une zone d'élasticité linéaire dans le cadre des billes et des agglomérats.

V.2.2 Comportements plastiques

A. Le phénomène d'hystérésis

Pour la plupart des matériaux solides le domaine de 'réversibilité' est limité. C'est-à-dire que dès que la contrainte dépasse une certaine valeur Q_e , appelée limite d'élasticité ou seuil de plasticité (dépassement du point A sur la caractéristique de la figure 4), les courbes de charge (chemin OB, figure 4) et de décharge (chemin BB', figure 4) ne sont plus les mêmes ; la caractéristique $Q=f(q)$ présente une hystérésis, ce qui signifie que cette transformation n'est plus réversible, le comportement est 'inélastique'. La plupart du temps, il reste après la décharge une déformation q_p dite 'permanente' ou 'plastique'. Par la suite, tant que l'on effectue des cycles de charge/décharge en restant en deçà d'un nouveau seuil de contrainte Q_m , le comportement est à nouveau élastique : le point représentatif reste sur le chemin BB' (figure 4). Cette modification du 'seuil de plasticité' s'appelle 'l'écrouissage'. Si l'on augmente encore la charge, on parvient alors au 'seuil de rupture' du matériau, c'est-à-dire que l'échantillon testé se brise en morceaux (la figure 4 montre également l'apparence des courbes expérimentales réelles : elles présentent des boucles plus ou moins importantes).

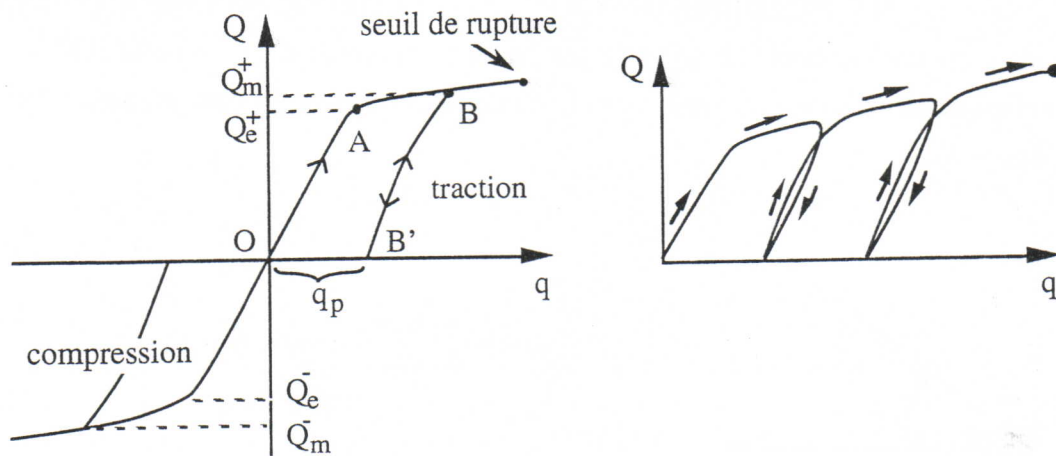


Figure 4 : modèle de comportement plastique

La courbe de la figure 4 donne une représentation de ce comportement sous la forme d'une fonctionnelle $Q = f(q)$, avec la convention implicite que les contraintes positives ($Q \geq 0$) correspondent aux essais de traction, et que les déformations positives ($q \geq 0$) sont des allongements, et réciproquement.

Les caractéristiques avec hystérésis et écouissage vérifient généralement les propriétés suivantes :

- les courbes de charge/décharge partielle (en deçà du seuil de plasticité, chemins OA et BB' sur la figure 4) sont généralement considérées comme parallèles entre elles et à la courbe initiale : la raideur élastique n'est pas modifiée.
- l'écrouissage ne modifie pas le seuil de rupture, il agrandit le domaine élastique, ou si l'on préfère, il diminue la possibilité de déformation plastique avant rupture (la ductilité).

B. Plasticité parfaite

Le modèle rhéologique le plus simple pour caractériser les comportements plastiques est le patin, c'est-à-dire un solide pesant frottant sur son support. Tant que la contrainte est inférieure au seuil de glissement le solide reste immobile et le déplacement q est nul. Lorsque la contrainte devient supérieure à ce seuil la déformation est totale. L'analogie avec un solide pesant est basée sur un modèle simple de type Coulomb pour lequel les coefficients de frottement statique et dynamique sont égaux et tels que : $\mu_c \cdot m \cdot g = \mu_s \cdot m \cdot g = Q_e$, où m est la masse du solide et g l'accélération de la pesanteur (voir le § IV.3.1).

Ce modèle rhéologique de base est dit 'rigide plastique parfait', car les déformations élastiques sont négligées par rapport aux déformations plastiques, et l'écrouissage est supposé nul, c'est-à-dire que le seuil de plasticité est constant quelque soit l'histoire des déformations (figure 5).

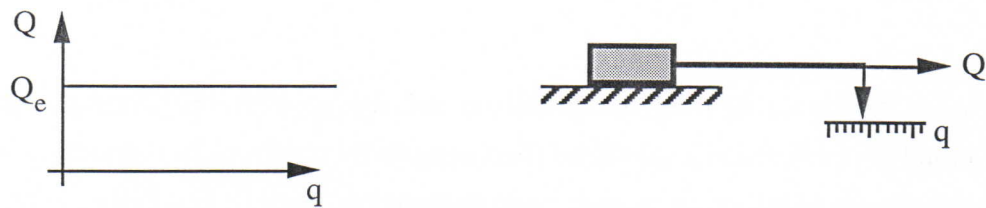


Figure 5 : Modèle de plasticité parfaite

Ce modèle très simple n'est évidemment pas destiné à représenter tel quel le comportement d'un matériau réel. Il s'agit plutôt d'une composante de comportement qui va servir à l'élaboration d'un modèle complet, par composition de modèles élémentaires.

C. écouissage et élasto-plasticité

En plaçant le modèle ci-dessus en série avec un ressort linéaire, on obtient un modèle dit rigide-plastique avec écouissage (figure 6).

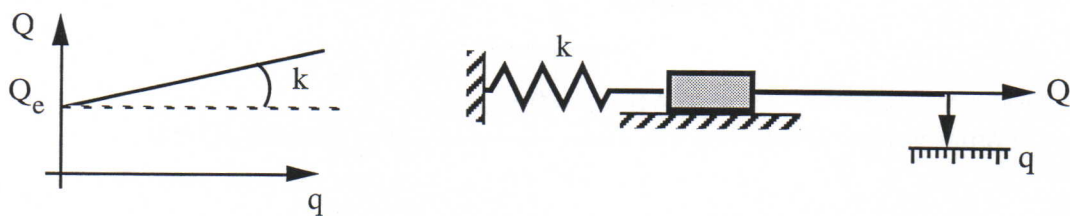


Figure 6 : modèle rigide-plastique avec écouissage

Enfin, pour tenir compte des déformations élastiques, il faut placer un ressort linéaire entre le patin et la contrainte Q dans les deux modèles précédents ; on obtient alors les modèles de comportement élasto-plastique parfait et élasto-plastique avec écouissage (figure 7.a et 7.b).

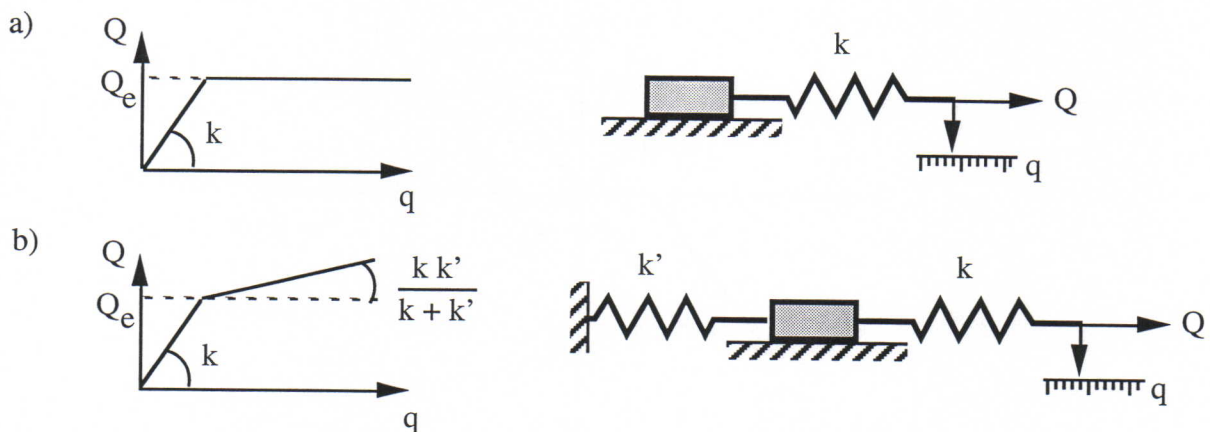


Figure 7 : modèles élasto-plastique parfait et élasto-plastique avec écouissage

V.2.3 Modèle algorithmique des comportements élasto-plastiques

De même que nous disposons de modules de liaison mécanique, correspondant chacun à un algorithme qui prend pour référence les modèles rhéologiques du ressort et de l'amortisseur, nous allons dans ce paragraphe élaborer un module correspondant au 'patin'. En réalité, nous allons dans ce cas écrire directement l'algorithme correspondant à la composition en série d'un patin et de deux ressorts, et qui fournit un modèle de solide élasto-plastique avec écrouissage (figure 7.b).

La première étape consiste à préciser clairement les conventions de représentation en ce qui concerne le signe de la contrainte et celui de la déformation. La figure 8 illustre les conventions que nous avons choisi, et dont il faudra tenir compte dans l'élaboration de l'expression finale pour le calcul du sens de la force d'interaction. C'est-à-dire que pour un module de liaison mettant en interaction deux points matériels P_1 et P_2 , il faudra choisir si pour un vecteur axial unitaire \vec{u} fixé on a $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = f(q) \cdot \vec{u}$ ou $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = -f(q) \cdot \vec{u}$ (voir les chapitres précédents).

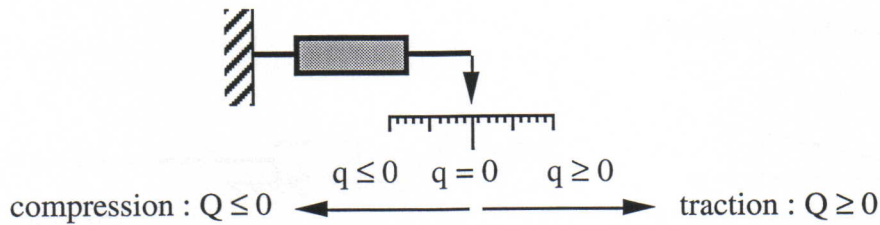


Figure 8 : convention sur les signes de la contrainte et de la déformation

Ces conventions nous permettent de tracer la caractéristique $Q = f(q)$ suivante (figure 9), qui représente un comportement élasto-plastique avec écrouissage.

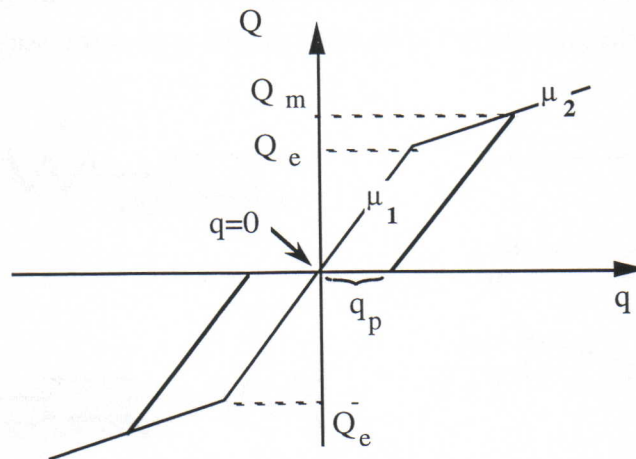


Figure 9 : caractéristique de l'élasto-plasticité avec écrouissage

Si l'on note μ_1 et μ_2 les pentes successives de cette courbe, tandis que k' est la raideur du ressort responsable de l'écroutissement et k la raideur du ressort responsable de l'élasticité (figure 7), nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\mu_1 &= k \\ \mu_2 &= \frac{k \cdot k'}{k+k'}\end{aligned}$$

Cette caractéristique est complètement déterminée pour une valeur donnée de q . Il existe alors les relations suivantes entre q , Q_e , Q_m et q_p (nous avons choisi ici $q \geq 0$, mais des relations identiques existent pour les valeurs Q_e^- , Q_m^- qui correspondent au cas $q \leq 0$) :

$$\begin{aligned}Q_m &= Q_e + \left(q - \frac{Q_e}{\mu_1}\right) * \mu_2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1} * Q_e + \mu_2 * q \\ q_p &= q - \frac{Q_e}{\mu_1}\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant écrire l'algorithme calculant une contrainte Q en fonction d'une déformation q , selon le modèle rhéologique de l'élasto-plasticité avec écroutissage.

$$\begin{aligned}\text{si } \left(q > \frac{Q_e}{\mu_1}\right) \\ & Q = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1} * Q_e + \mu_2 * q ; \\ & Q_e = Q ; \\ & q_p = q - \frac{Q_e}{\mu_1} ; \\ \text{sinon} \\ \text{si } \left(q < \frac{Q_e^-}{\mu_1}\right) \\ & Q = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1} * Q_e^- + \mu_2 * q ; \\ & Q_e^- = Q ; \\ & q_p = q - \frac{Q_e^-}{\mu_1} ; \\ \text{sinon} \\ & Q = \mu_1 * q ;\end{aligned}$$

On notera que l'expression de calcul de la contrainte Q comprend une partie égale à Q_e , et une deuxième partie correspondant à la situation où le patin glisse, égale à la contrainte due aux deux ressorts composés en série (si l'on considère que $q = \frac{Q_e}{\mu_1} + q'$, on a $Q = Q_e + \frac{k \cdot k'}{k+k'} \cdot q'$).

Cet algorithme peut être directement utilisé pour élaborer un module de liaison mécanique à comportement plastique. Nous allons reprendre les notations utilisées jusqu'à présent pour les algorithmes CORDIS-ANIMA, c'est-à-dire que nous allons faire correspondre l'effort généralisé à la norme de la force d'interaction axiale : $Q = f = \|\vec{F}\|$, tandis que la déformation généralisée correspondra à l'écart entre la distance et la longueur au repos du ressort : $q = D - L_0$. La vitesse de déformation s'écrira $\dot{q} = (D - D^{\text{retard}}) / T_e$, si l'on exprime la vitesse selon le schéma d'Euler. La déformation permanente q_p servira à mettre à jour la longueur au repos du module de la manière suivante : $S = S + q_p$.

Les paramètres physiques de ce module sont :

k	la raideur d'élasticité
k'	la raideur d'écroutissage
Q_e	la valeur initiale du seuil de plasticité en traction
Q_e^-	la valeur initiale du seuil de plasticité en compression
S	la longueur au repos initiale du module liaison

Les paramètres algorithmiques de ce module seront : $A = k - \frac{k.k'}{k+k'}$ $B = \frac{k.k'}{k+k'}$ et $C = k$.

L'algorithme fait intervenir trois mémoires : les deux seuils de plasticité, qui vont évoluer sous l'effet de l'écroutissage, et la longueur au repos qui sera le témoin des déformations plastiques.

Les variables mémorisées sont le seuil représentant la longueur au repos S , et les deux seuils supplémentaires correspondant aux limites de plasticité positive et négative : $S_1 = \frac{Q_e}{k}$ et $S_2 = \frac{Q_e^-}{k}$.

Considérons un tel module placé entre deux points p_1 et p_2 , qui prend donc en entrée la position de chacun d'eux et élabore deux forces d'interaction égales et opposées ; l'algorithme de calcul auquel il est associé est le suivant :

$$\vec{\Delta P} = \vec{P}_1 - \vec{P}_2, \quad D = \|\vec{\Delta P}\|, \quad \vec{u} = \frac{1}{D} * \vec{\Delta P}, \quad q = (D - S)$$

si ($q > S_1$)

$$f = A * S_1 + B * q ;$$

$$S_1 = \frac{f}{C} ;$$

$$S = D - S_1 ;$$

sinon

si ($q < S_2$)

$$f = A * S_2 + B * q ;$$

$$S_2 = \frac{f}{C} ;$$

$$S = D - S_2 ;$$

sinon $f = C * q ;$

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = f \cdot \vec{u} ;$$

Enfin si l'on s'intéresse à la rupture du matériau dans le cadre de ce module, il faut définir un seuil supplémentaire : le seuil de rupture.

Si l'on note S_3 , la variable correspondant à ce seuil, l'algorithme doit démarrer par un test et une action du type :

```

si (  $q \geq S_3$  )
     $f = 0$  ;
     $S_3 = 0$  ;
sinon
...
    
```

Le module d'élasto-plasticité avec écrouissage est donc un module à mémoire (cf. § II.4, chapitre II). Son vecteur d'état interne est (S, S_1, S_2, S_3) dans le cas où l'on s'intéresse aux fractures, et (S, S_1, S_2) sinon.

V.3 Modèles de comportement complexe

V.3.1 Introduction

Comme nous l'avons déjà précisé, la composition des modèles rhéologiques de base, le ressort, l'amortisseur à huile et le patin, permet de représenter la plupart des comportements connus de la matière. La composition de ces modèles peut se faire selon deux opérations : la mise en parallèle (qui correspond simplement à la sommation des sorties de chaque élément : $f(E) = f_1(E) + f_2(E)$) et la mise en série (figure 10).

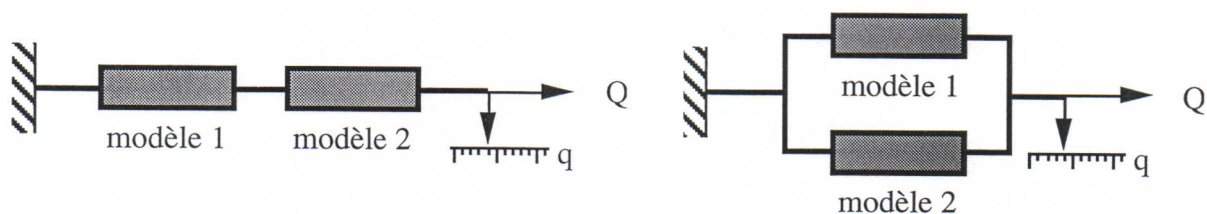


Figure 10 : composition en série et en parallèle

Les études rhéologiques distinguent, parmi les modèles de sollicitation à un paramètre, certains modèles composés qui sont les plus utilisés et permettent de couvrir une large variété des comportements de la matière. Il s'agit du modèle de *Kelvin-Voigt* et du modèle de *Maxwell*, qui représentent respectivement les solides visco-élastiques et les fluides visco-élastiques, et sont tous deux des cas particuliers du modèle du 'burger material', et enfin du modèle de *Bingham* qui représente les solides élasto-visco-plastiques.

La composition en parallèle ne pose aucune espèce de problème, dans la mesure où le formalisme CORDIS-ANIMA prévoit ce type d'opération : il suffira, pour composer selon ce mode deux modèles rhéologiques, de placer en parallèle les deux modules de liaison mécanique qui en sont issus. La force résultante sera alors la somme des forces obtenues à partir de chacun des modules. Ainsi le modèle de *Kelvin-Voigt* qui résulte de la mise en parallèle d'un ressort et d'un amortisseur correspond à un des modules de base du système CORDIS-ANIMA. Par contre, la composition en série (qui consiste à placer bout à bout les deux éléments, sans passer par un composant inerte, ce qui n'est pas possible avec le formalisme CORDIS-ANIMA), nécessite une analyse du module résultant et relève de l'élaboration d'un algorithme ad hoc. Nous allons dans ce chapitre développer les algorithmes de simulation dynamique permettant le calcul des forces d'interaction pour les modèles obtenus par composition en série, et montrer ainsi comment il est possible, à partir de n'importe quel modèle rhéologique de sollicitation à un paramètre, d'élaborer un module de liaison CORDIS-ANIMA.

V.3.2 Modèle de Maxwell et 'burger material'

A. De la loi de comportement à l'algorithme de simulation dynamique : le modèle de Maxwell

La composition en série d'un ressort et d'un frein permet d'obtenir un modèle de visco-élasticité pour les fluides, dit modèle de *Maxwell* (figure 11).

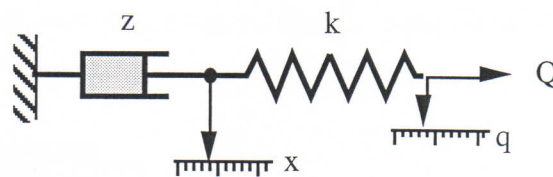


Figure 11 : modèle de Maxwell

Si l'on désigne par 'x', comme sur la figure 11, le déplacement de l'extrémité de l'amortisseur, l'équation caractéristique de son mouvement s'écrit :

$$Q = z.\dot{x} \implies \dot{x} = \frac{Q}{z} \quad (i)$$

L'équation caractéristique du ressort s'écrit :

$$Q = k.(q-x) \implies \dot{q} - \dot{x} = \frac{\dot{Q}}{k} \quad (ii)$$

d'où, en remplaçant \dot{x} dans l'équation (ii) par l'expression obtenue avec l'équation (i) on a :

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{k} + \frac{Q}{z} \quad (iii)$$

L'équation (iii) ci-dessus est donc l'équation différentielle caractéristique du comportement du modèle de Maxwell. Sa solution continue par rapport au temps s'obtient par intégration, elle s'écrit [Bam81] :

$$Q(t) = k \cdot q(t) - \frac{k^2}{z} \cdot \int_{-\infty}^t q(u) \cdot e^{-k \cdot (t-u)/z} du$$

On pourrait décider d'exploiter cette expression telle qu'elle est écrite ci-dessus. Il faudrait alors l'intégrer directement dans l'équation différentielle décrivant le mouvement qui relie les forces intrinsèques au corps considéré (inertie, dissipation et déformation), aux forces extérieures qui lui sont appliquées. Une solution (en pratique une solution approchée) de l'équation globale obtenue, qui est du type : $\mu \cdot \partial^2 q / \partial t^2 - \eta \cdot \partial q / \partial t + Q(t) = F_{\text{ext}}$, où $Q(t)$ correspond donc aux forces dues à la déformation interne du corps, fournit une expression de q en fonction du temps. Cette approche correspond au choix initial d'une représentation continue de la matière, pour ensuite la discrétiser selon les coordonnées d'espace ; elle impose entre autre d'écrire un système unique pour tous les objets physiques que l'on voudra faire coexister, et donc interagir, au sein d'un même espace. Ceci est par trop contradictoire avec la volonté d'obtenir des modèles constructibles et intrinsèquement expérimentables. Nous allons donc choisir une autre méthode ; elle correspond à une discrétisation temporelle au niveau de chaque composant élémentaire, c'est-à-dire en amont de l'assemblage. Cette méthode est générale et a permis comme nous le verrons dans les paragraphes suivants d'élaborer un module d'interaction CORDIS-ANIMA pour tous les modèles de comportement rencontrés.

Dans un premier temps, nous avons besoin de définir un équivalent, pour une fonction échantillonnée (peut être faut-il dire *signal* dans ce contexte), des opérations d'intégration et de dérivation définies dans le continu.

Nous ne considérons que des signaux 'causaux', c'est-à-dire des fonctions temporelles S telles que $S(t)=0 \forall t < 0$. Nous entendons par fonction échantillonnée la suite de valeur obtenue en ne prélevant l'information portée par le signal qu'à des instants particuliers.

Si nous considérons que l'échantillonnage est réalisé à une période constante T_e (à laquelle, pour ce qui nous concerne, nous associerons une fréquence de simulation $F_e=1/T_e$), la fonction échantillonnée $\{S\}$, obtenue à partir d'une fonction temporelle $S(t)$, est définie par :

$$\{S\} : n \mapsto \begin{cases} S(n \cdot T_e) & \forall n \in \mathbb{N} \\ 0 & \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

L'échantillonnage d'un signal causal fournit donc une fonction définie sur \mathbb{Z} et nulle sur $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; nous appellerons ce type de fonction des suites causales.

L'opérateur retard, noté T^{-1} , est défini sur les suites (c'est-à-dire sur l'ensemble des fonctions définies sur \mathbb{Z}) de la manière suivante :

$$(T^{-1} \cdot \{S\}) : n \mapsto \{S\}(n-1)$$

Par extension, on notera T^{-2} , T^{-3} ..., les 'opérateurs retard' de deux, trois échantillons, etc ..., et par convention $T^0 = \underline{1}$ (application identité).

Les équivalents pour un signal échantillonné des opérateurs de dérivation et d'intégration vont se définir à partir de l'opérateur retard, et vont dépendre du schéma de discrétisation temporelle choisi (approximation des dérivés par différence finies) :

Dans notre cas le schéma choisi est celui d'Euler, pour lequel on a :

$$S'(t) = \frac{S(t) - S(t-h)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

L'opérateur de dérivation, que nous noterons $()'$, s'écrit en négligeant le terme $\mathcal{O}(Te)$:

$$()'' = \frac{1}{Te} \cdot (1 - T^{-1}),$$

ou le point '.' désigne le produit d'une suite par une constante réelle : $(\lambda \cdot \{S\}) : n \mapsto \lambda \cdot \{S\}(n)$.

Ce qui nous donne :
$$\{S\}'(n) = \frac{\{S\}(n) - \{S\}(n-1)}{Te} = \frac{S(n \cdot Te) - S((n-1) \cdot Te)}{Te}$$

L'opérateur d'intégration, que nous noterons \int , s'écrit : $\int = Te \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} T^{-i}$

ce qui nous donne :
$$\int \{S\}(n) = Te \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} \{S\}(n-i) = Te \cdot \sum_{i=0}^n \{S\}(i) = Te \cdot \sum_{i=0}^n S(i \cdot Te)$$

On remarquera que $\int \circ ()' = ()' \circ \int = \underline{1}$ (le signe \circ représente la composition des opérateurs). D'autre part, \int et $()'$ tels que nous les avons définis, sont deux opérateurs linéaires, c'est-à-dire qu'ils vérifient la propriété suivante :

$$\forall \text{ suite } S_1, S_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R},$$

$$\text{op}[\lambda \cdot S_1 + \mu \cdot S_2] = \lambda \cdot \text{op}[S_1] + \mu \cdot \text{op}[S_2]$$

Enfin, en pratique on notera souvent pour une fonction temporelle continu S :

$$\{S\}(n) = S_n, \{S\}'(n) = \frac{1}{Te} \cdot (S_n - S_{n-1}) \text{ et } \int \{S\}(n) = Te \cdot \sum_{i=0}^n S_i$$

Nous pouvons maintenant revenir à l'équation (iii) : $\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{k} + \frac{Q}{z}$,

son expression discrète est :
$$\frac{1}{Te} \cdot (1 - T^{-1}) \{q\} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{Te} \cdot (1 - T^{-1}) \cdot \{Q\} + \frac{1}{z} \cdot \{Q\}$$

ce qui se réécrit de manière immédiate sous la forme :

$$\{Q\} = \frac{k \cdot z}{k \cdot Te + z} \cdot (1 - T^{-1}) \{q\} + \frac{z}{k \cdot Te + z} \cdot T^{-1} \cdot \{Q\}$$

En reprenant les notations dont nous avons maintenant l'habitude :

$$\vec{\Delta P} = \vec{P}_1 - \vec{P}_2, D = \|\vec{\Delta P}\|, \vec{u} = \frac{1}{D} \cdot \vec{\Delta P}, q = (D - S), \text{ et enfin } Q = f = \|\vec{F}\|$$

cette expression devient :
$$f = A \cdot (D - D^{\text{retard}}) + B \cdot f^{\text{retard}}$$

où les paramètres algorithmiques A et B sont tels que : $A = \frac{k \cdot z}{k \cdot T e + z}$, et $B = \frac{z}{k \cdot T e + z}$, et les deux forces égales et opposées produites par un module élaboré selon ce modèle sont :

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = f \cdot \vec{u}$$

La présence du terme f^{retard} dans l'expression permettant le calcul de f implique l'utilisation d'une mémoire. Comme la présence d'une intégrale dans l'expression de la solution continue de l'équation (iii), cette mémoire indique que la valeur de la fonction d'interaction f , à un instant donné, dépend de toute l'histoire des déformations. Le module élaboré à partir de ce modèle de comportements, c'est-à-dire implémentant l'algorithme que nous venons de construire, sera un module à mémoire, tel que nous l'avons défini au § II.4 du chapitre II ; son vecteur d'état interne est formé de la valeur réelle f .

B. 'Burger material'

Le modèle de Maxwell se présente en réalité comme un cas particulier du modèle rhéologique du 'burger material' qui représente tout une catégorie de matériaux. Ce dernier correspond à la mise en parallèle d'un ressort linéaire et du module résultant d'une composition en série d'un modèle de Maxwell et d'un modèle de Kelvin-Voigt (figure 12).

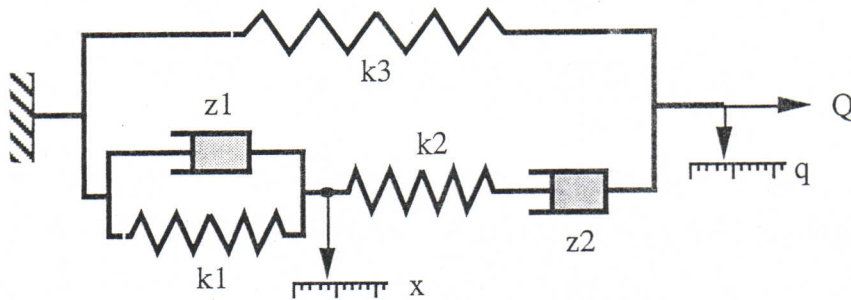


Figure 12 : modèle rhéologique représentant les 'burger materials'.

Cherchons à établir la relation $Q = f(q)$ correspondant à ce modèle.

Si l'on désigne par x , comme sur la figure 12, le mouvement de l'extrémité de la partie correspondant au modèle de Kelvin-Voigt, son équation caractéristique s'écrit :

$$k_1 \cdot x + z_1 \cdot \dot{x} = Q \quad (i)$$

et l'équation caractéristique de la partie correspondant au modèle de Maxwell s'écrit :

$$(q - x) = \frac{\dot{Q}}{k_2} + \frac{Q}{z_2} \quad (ii)$$

Notre modèle composé est caractérisé par le système formé des équations différentielles (i) + (ii). Comme nous l'avons fait ci-dessus pour le modèle de Maxwell, nous allons en donner une expression discrète.

(i) s'écrit :

$$k_1 \cdot \{x\} + \frac{z_1}{T_e} \cdot (1-T^{-1}) \cdot \{x\} = \{Q\}$$

ce qui donne¹ :

$$\{x\} = \left[k_1 + \frac{z_1}{T_e} (1-T^{-1}) \right]^{-1} \cdot \{Q\}$$

pour (ii) on a :

$$\frac{1}{T_e} \cdot (1-T^{-1}) \cdot \{q - x\} = \frac{(1-T^{-1})}{T_e \cdot k_2} \cdot \{Q\} + \frac{1}{z_2} \cdot \{Q\}$$

En remplaçant dans (ii) l'expression obtenue pour x par (i), on obtient :

$$\frac{1}{T_e} \cdot (1-T^{-1}) \cdot \{q\} = \left[k_1 + \frac{z_1}{T_e} (1-T^{-1}) \right]^{-1} \cdot \frac{1}{T_e} \cdot (1-T^{-1}) \cdot \{Q\} + \frac{1}{T_e \cdot k_2} \cdot (1-T^{-1}) \cdot \{Q\} + \frac{1}{z_2} \cdot \{Q\}$$

Enfin, en appliquant l'opérateur $\left[k_1 + \frac{z_1}{T_e} (1-T^{-1}) \right]$ à cette équation, et en réduisant tous les termes au même dénominateur on arrive à :

$$\begin{aligned} \{Q\} &= \frac{T_e \cdot k_2 \cdot z_2 \cdot (T_e \cdot k_1 + z_1)}{T_e \cdot k_2 \cdot z_2 + (T_e \cdot k_1 + z_1) \cdot (T_e \cdot k_2 + z_2)} \cdot \frac{(1-T^{-1})}{T_e} \cdot \{q\} \\ &+ \frac{-T_e \cdot k_2 \cdot z_1 \cdot z_2}{T_e \cdot k_2 \cdot z_2 + (T_e \cdot k_1 + z_1) \cdot (T_e \cdot k_2 + z_2)} \cdot T^{-1} \cdot \frac{(1-T^{-1})}{T_e} \cdot \{q\} \\ &+ \frac{T_e \cdot k_2 \cdot (z_2 + z_1) + z_2 \cdot (T_e \cdot k_1 + 2 \cdot z_1)}{T_e \cdot k_2 \cdot z_2 + (T_e \cdot k_1 + z_1) \cdot (T_e \cdot k_2 + z_2)} \cdot T^{-1} \cdot \{Q\} \\ &+ \frac{z_1 \cdot z_2}{T_e \cdot k_2 \cdot z_2 + (T_e \cdot k_1 + z_1) \cdot (T_e \cdot k_2 + z_2)} \cdot T^{-2} \cdot \{Q\} \end{aligned}$$

Pour obtenir la relation caractéristique complète du modèle rhéologique du 'burger material', il faut rajouter à l'expression ci-dessus le terme $(k_3 \cdot q)$, qui correspond à l'action du ressort placé en parallèle.

Nous pouvons alors écrire l'expression algorithmique correspondant à un module de liaison mécanique prenant ce modèle comme référence :

$$f = A \cdot (D-S) + B \cdot (D - D^{\text{retard}}) + C \cdot (D - D^{\text{retard}})^{\text{retard}} + D \cdot f^{\text{retard}} + E \cdot (f^{\text{retard}})^{\text{retard}}$$

¹ La notation $[\]^{-1}$ désigne ici l'inverse ; cette écriture suppose donc que l'opérateur écrit entre crochets $[\]$ est inversible. Cet opérateur et tous ceux que l'on rencontrera par la suite sont des polynômes de l'opérateur retard T^{-1} , et sont donc linéaires. Les noyaux des opérateurs de ce type peuvent se calculer à partir des pôles du polynôme caractéristique ; ce noyau est formé des suites géométriques de raison $\frac{1}{k}$ (vérifiant $S_i = \frac{1}{k} * S_{i-1} \forall i \in \mathbb{Z}$) pour les opérateurs du type $(k - T^{-1})$, et de combinaisons de ces suites pour les polynômes de degré supérieur. Il est trivial de démontrer que la seule suite causale (c.a.d. telle que $S(n) = 0 \forall n < 0$, nous ne nous intéressons qu'à ces dernières) qui appartient à ces noyaux est la suite nulle ; ces opérateurs (linéaires) sont donc inversibles lorsqu'ils sont restreints aux suites causales.

ou les paramètres algorithmiques A, B, C, D et E s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 A &= k_3 \\
 B &= \frac{k_2 \cdot z_2 \cdot (Te \cdot k_1 + z_1)}{Te \cdot k_2 \cdot z_2 + (Te \cdot k_1 + z_1) \cdot (Te \cdot k_2 + z_2)} \\
 C &= \frac{-k_2 \cdot z_1 \cdot z_2}{Te \cdot k_2 \cdot z_2 + (Te \cdot k_1 + z_1) \cdot (Te \cdot k_2 + z_2)} \\
 D &= \frac{Te \cdot k_2 \cdot (z_2 + z_1) + z_2 \cdot (Te \cdot k_1 + 2 \cdot z_1)}{Te \cdot k_2 \cdot z_2 + (Te \cdot k_1 + z_1) \cdot (Te \cdot k_2 + z_2)} \\
 E &= \frac{z_1 \cdot z_2}{Te \cdot k_2 \cdot z_2 + (Te \cdot k_1 + z_1) \cdot (Te \cdot k_2 + z_2)}
 \end{aligned}$$

Le module correspondant au modèle du 'burger material' comporterait donc trois mémoires (cf. § II.4 du chapitre II) : une pour la valeur retardée de la vitesse axiale V_{ax} , une pour la valeur retardée de la fonction d'interaction f , et une pour la même valeur deux pas en arrière ; le vecteur d'état interne s'écrirait donc (V_{ax}, f, f^{-1}) . Ce module n'a pas été utilisé en pratique, mais le développement ci-dessus montre comment la démarche adoptée permet d'élaborer un module de liaison (c'est à dire un algorithme basé sur un calcul explicite) à partir de n'importe quel assemblage série ou parallèle des modèles rhéologiques de sollicitation à un paramètre.

V.3.3 Modèle de Bingham : élasto-visco-plasticité

Le dernier modèle rhéologique de comportement complexe dont nous allons parler ici est le modèle de Bingham [Bam81]. Il correspond à un modèle de matière pâteuse, c'est-à-dire qu'il se comporte comme un solide élastique lorsque le patin ne glisse pas, et comme un fluide visqueux lorsqu'il glisse (figure 13). Ce modèle se présente donc comme un solide sous des contraintes faibles, et comme un fluide sous des contraintes fortes ; il s'adresse à des matériaux intermédiaires entre ces deux extrêmes.

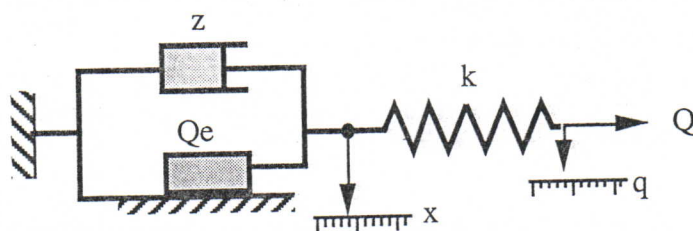


Figure 13 : Modèle de Bingham

Le mouvement du ressort est caractérisé par l'équation : $Q = k \cdot (q - x)$ (i)

Pour donner les équations caractéristiques de la partie formée du patin et de l'amortisseur, il faut distinguer trois cas comme nous l'avons fait au paragraphe IV.2.3 :

$$\begin{array}{lll} \text{Si} & (k \cdot q > Q_e) & Q = Q_e + z \cdot \dot{x} \\ \text{Si} & (Q_e^- \leq k \cdot q \leq Q_e) & x = 0 \text{ (il n'y a pas de déformation)} \\ \text{Si} & (k \cdot q < Q_e^-) & Q = Q_e^- + z \cdot \dot{x} \end{array}$$

Nous avons donc de même trois cas et trois équations pour caractériser le mouvement du modèle de Bingham :

$$\begin{array}{lll} \text{cas 1 :} & \text{Si} & (k \cdot q > Q_e) & \frac{\dot{Q}}{k} + \frac{Q - Q_e}{z} = \dot{q} \\ \text{cas 2 :} & \text{Si} & (Q_e^- \leq k \cdot q \leq Q_e) & Q = k \cdot q \\ \text{cas 3 :} & \text{Si} & (k \cdot q < Q_e^-) & \frac{\dot{Q}}{k} + \frac{Q - Q_e^-}{z} = \dot{q} \end{array}$$

Ce qui nous donne les équations suivantes pour les cas 1 et 3 :

$$\begin{array}{ll} \text{cas 1 :} & \{Q\} = \frac{k \cdot z}{k \cdot T_e + z} \cdot (1 - T^{-1}) \{q\} + \frac{z}{k \cdot T_e + z} \cdot T^{-1} \cdot \{Q\} + \frac{k \cdot T_e}{k \cdot T_e + z} \cdot Q_e \\ \text{cas 3 :} & \{Q\} = \frac{k \cdot z}{k \cdot T_e + z} \cdot (1 - T^{-1}) \{q\} + \frac{z}{k \cdot T_e + z} \cdot T^{-1} \cdot \{Q\} + \frac{k \cdot T_e}{k \cdot T_e + z} \cdot Q_e^- \end{array}$$

et pour le cas 2 nous avons simplement : $\{Q\} = k \cdot \{q\}$

d'autre part l'équation (i) nous dit que la déformation permanente q_p est :

$$q_p = x = q - \frac{Q}{k}$$

Nous pouvons maintenant écrire l'algorithme de simulation associé à un module CORDIS-ANIMA prenant le modèle de Bingham comme référence. Il nécessite deux mémoires : une pour la valeur retardée de la fonction d'interaction f et une pour la longueur au repos (S) du composant. Le vecteur d'état interne de ce module à mémoire (cf § II.4 du chapitre II) est (f, S) .

Les paramètres algorithmiques sont les suivants :

$$S1 = \frac{Q_e}{k}, S2 = \frac{Q_e^-}{k}, A = \frac{z}{k \cdot T_e + z}, B = \frac{k \cdot z}{k \cdot T_e + z}, C1 = \frac{k \cdot T_e}{k \cdot T_e + z} Q_e \text{ et } C2 = \frac{k \cdot T_e}{k \cdot T_e + z} Q_e^-$$

Les variables d'entrée sont $P1$ et $P2$, les positions des deux masses ponctuelles reliées par le module ; les variables intermédiaires sont : $\vec{\Delta P} = \vec{P}_1 - \vec{P}_2$, $D = \|\vec{\Delta P}\|$, $\vec{u} = \frac{1}{D} * \vec{\Delta P}$, $q = (D - S)$.

L'algorithme est le suivant :

$$\begin{aligned}
 & \text{si } (q > S_1) \\
 & \quad f = A * f^{\text{retard}} + B * (D - D^{\text{retard}}) + C1 ; \\
 & \quad S = D - \frac{f}{k} ; \\
 & \text{sinon} \\
 & \quad \text{si } (q < S_2) \\
 & \quad \quad f = A * f^{\text{retard}} + B * (D - D^{\text{retard}}) + C2 ; \\
 & \quad \quad S = D - \frac{f}{k} ; \\
 & \text{sinon} \quad f = k * q ; \\
 & \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = f \cdot \vec{u} ;
 \end{aligned}$$

On remarquera que si $z = 0$, on retombe sur le cas de l'élasto-plasticité sans écoulement (cf. § V.2.2 et V.2.3), et que si $Q_e = \bar{Q}_e = 0$, on retombe sur le modèle de Maxwell (cf. § V.3.2).

V.4 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre comment il était possible, à partir d'une loi de comportement expérimentale associée à un matériau donné, d'élaborer un modèle algorithmique pour la simulation dynamique. La méthode proposée a permis de construire des modules CORDIS-ANIMA 'ad hoc' pour les modèles de Maxwell et de Bingham classiques en rhéologie, qui représentent des comportements d'élasto-viscosité fluide et d'élasto-plasticité. Les modules élaborés sont conformes au format communicationnel des modules définis par le formalisme, et peuvent être utilisés dans n'importe quel réseau CORDIS-ANIMA.

Il reste cependant à préciser la manière selon laquelle un modèle peut s'organiser autour de ces modules de comportements complexes. Nous avons déjà souligné, à la fin de l'exposé sur les interactions non-linéaires (Chap. II), que nous aboutissions avec le développement de ce type de module à une certaine redondance des modèles. Un exemple remarquable de ceci est fourni par le cas des matériaux plastiques. Si l'on ne dispose pas d'objectif plus précis que la modélisation d'un morceau de matière possédant une mémoire des déformations, il existe deux manières de réaliser le modèle. La première consiste à construire un agglomérat à partir de modules de non-pénétration et de modules de cohésion (cf. Chap. III), choisies de telle manière que le comportement émergent de la multitude soit un comportement plastique par 'fluage'. La seconde possibilité est de réaliser une structure à partir d'un nombre restreint de masses ponctuelles connectées par les modules plastiques que nous avons élaborés dans ce chapitre. Cependant, si l'on prend la peine de réaliser les deux modèles, il devient évident qu'il ne couvrent pas la même classe de comportements et sont en réalité complémentaires.

On distingue en effet des origines microscopiques différentes pour les déformations permanentes selon la catégorie de matériau à laquelle on a affaire. Dans le cas des solides pâteux, ou des sols par exemple, la plasticité est due aux roulements et aux glissements des grains les uns sur les autres, alors que dans le cas de solides cristallins (typiquement les métaux) les déformations permanentes proviennent du glissement des plans atomiques et de la propagation des dislocations le long de la structure cristalline. Le propos n'est pas ici de démontrer a posteriori que nous avons développé un modèle de plasticité pour les solides pâteux et un autre pour les solides cristallins, mais il est clair qu'en fonction du phénomène que l'on cherche à représenter, l'un ou l'autre des modèles sera plus adéquat.

D'autre part, les modules de plasticité offrent la possibilité, non négligeable, d'un contrôle au niveau macroscopique des déformations produites, à travers les paramètres de seuil de plasticité et d'écroutissage, ou tout simplement par une répartition adéquate de modules plastiques et de modules élastiques (c'est-à-dire sans déformation permanente) (figure 14).

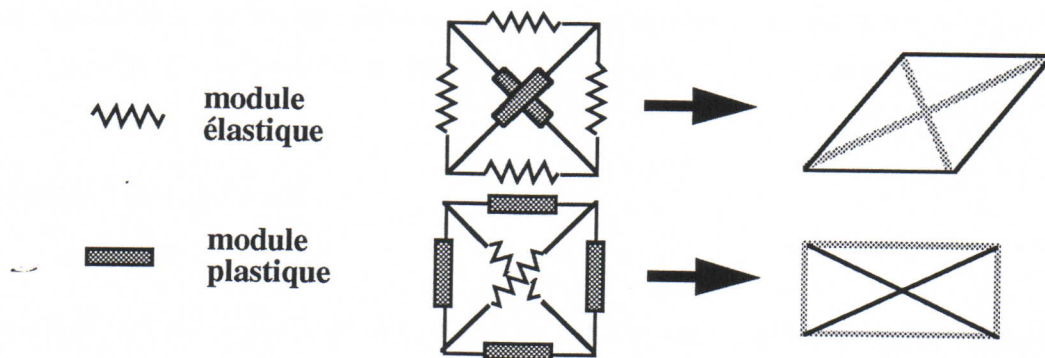


Figure 14 : Contrôle des déformations par la répartition des modules plastiques et élastiques

Inversement, le contrôle du taux de compressibilité d'un morceau de matière est peu aisé avec les modules plastiques, puisqu'ils permettent de contrôler au niveau local les déformations axiales ce qui ne donne pas accès à une maîtrise directe du volume de l'objet. Il est par contre aisé de contrôler le volume global occupé par un agglomérat en affectant une zone d'occupation spatiale à chacune des billes qui le composent. Des modèles exploitant de manière complémentaire les deux types de plasticité dont nous disposons vont permettre l'accès à l'ensemble de ces propriétés (figure 15).

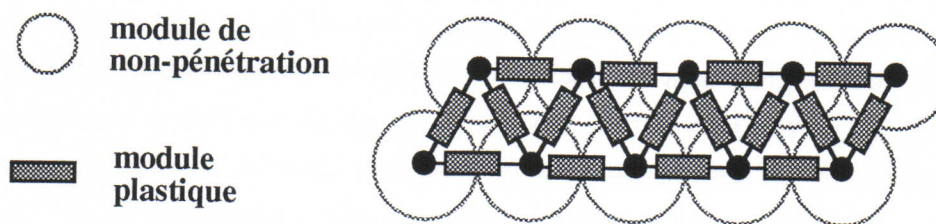


Figure 15 : un barreau plastique incompressible

Ce type de modèle correspond particulièrement à ce que nous avons appelé le 'noyau' dans le paragraphe III.2.2. Il va permettre la construction d'objets solides déformables, à partir d'une couche d'agglomérats cohésifs assumant les déformations locales et s'organisant de manière uniforme autour d'un noyau, qui possède lui des propriétés de déformation macroscopiques finement contrôlées. Ce noyau permet alors de structurer globalement les propriétés de déformation de l'objet, tandis que les agglomérats du 'derme' assument les déformations locales. Nous présentons à l'annexe B un certain nombre de chronogrammes illustrant les possibilités de l'ensemble de ces modèles.

VI. GÉNÉRATION ET CONTRÔLE

DU MOUVEMENT

VI.1 Introduction

Il est impossible d'aborder la question de l'animation par modèle physique sans parler à la fois de la génération du mouvement et du contrôle de l'effet produit. En réalité, dès lors que l'on choisit le modèle physique comme générateur du mouvement, ces deux aspects - génération et contrôle - sont indissociables et il est souvent impossible de distinguer au sein d'un modèle ce qui relève de l'un ou de l'autre.

Nous décrivons dans ce chapitre l'ensemble des solutions que nous avons exploitées, dans le cadre du système CORDIS-ANIMA, pour générer et/ou contrôler les mouvements des objets présents dans une scène. Chaque technique de contrôle sera concrètement illustrée par la description des expérimentations réalisées. Nous allons ainsi en profiter pour parcourir la mise en oeuvre de l'ensemble des modèles d'objet présentés dans ce document.

Comme nous l'avons clairement dit au début du chapitre I, le langage, puis sa mise en oeuvre algorithmique, qui sont attachés au système CORDIS-ANIMA, ont été élaborés dans le but d'une 'simulation totale'. Le propos est de produire des simulacres numériques non seulement visibles et audibles, mais également expérimentables par notre sens tactilo-kinesthésique (ou haptique), ou plus simplement manipulables au sens physique du terme. Le premier paragraphe décrit rapidement le dernier prototype d'interface à retour d'effort de l'ACROE ainsi que plusieurs expérimentations de manipulation.

La manipulation de simulacres physiques à travers des interfaces rétroactives réintroduit, dans le cadre de l'animation par ordinateur, la finesse de contrôle gestuel que nous possédons dans la situation naturelle. Cependant, quelle que soit l'efficacité de cette communication gestuelle, la nécessité de simplifier le contrôle par l'utilisation d'outils et d'instruments demeure, comme c'est le cas dans la situation naturelle. Ici par contre, l'outil, le mécanisme, ..., la machine, ou tout au moins leurs équivalents fonctionnels, ne sont pas disponibles et doivent être modélisés comme l'ont été les objets que l'on veut animer. Le deuxième paragraphe de ce chapitre présente quelques

principes à partir desquels nous avons réalisé nos modèles de structures de contrôle. L'ensemble de ces travaux est illustré par de nombreuses expérimentations.

VI.2 Le contrôle gestuel rétroactif

VI.2.1 Introduction

En 1978, les chercheurs de l'ACROE ont introduit (comme certains autres à la même époque, ou plus récemment [Atk77, Bro90, Min90, Iwa90]) le principe de la "rétroaction gestuelle" dans la communication homme/machine, avec la réalisation d'un premier dispositif expérimental [CF78, Flo78]. L'option qui a été prise est celle des systèmes à vis à vis (l'opérateur dispose d'une série d'interfaces qu'il peut à loisir saisir ou relâcher), par opposition à des systèmes à immersion (tels que les exo-squelettes, ou les Head-Mounted Displays pour le graphique). Le type particulier d'interface qui a été développé permet, en produisant une force de rétroaction mécanique au niveau même de l'organe de manipulation, une synthèse du "toucher" et du comportement mécanique des instruments, simultanée et cohérente avec celle du son ou de l'image. A ce principe a été attaché le concept de *Transducteur Gestuel Rétroactif* (T.G.R.).

Le transducteur gestuel est le dispositif qui établit la relation entre l'espace des phénomènes gestuels et celui des phénomènes numériques internes à l'ordinateur ; il a une fonction toute particulière à jouer :

- Il doit capter sans réduction les informations caractéristiques du geste.
- Il doit opposer à l'instrumentiste une résistance mécanique dépendant de la nature du système dynamique simulé. Cette troisième fonction, fondamentale pour la finesse du contrôle, est ce que nous appelons ici la rétroaction.

Ainsi, un dispositif permettant une manipulation avec retour d'effort doit comporter des organes moteurs, qui jouent alors le rôle des "émetteurs" du phénomène physique responsable de la perception *tactilo-kinesthésique*.

Il est évident que de tels moteurs doivent avoir des performances particulières. Ils doivent "répondre" très vite et avec précision (dans certains cas, la bande passante des phénomènes mécaniques en cause dans le geste peut aller jusqu'à 700 ou 800 Hz), avoir une puissance importante (jusqu'à plusieurs dizaines de KgF en impulsion pour simuler des obstacles rigides), et de plus, se présenter sous un encombrement très réduit. D'autre part, il n'est pas possible aujourd'hui de concevoir un transducteur gestuel ayant la généralité offerte par un écran de visualisation pour le canal visuel, ou une enceinte acoustique pour le canal auditif.

L'ACROE s'est consacrée depuis une quinzaine d'année à la conception et à la réalisation de divers prototypes expérimentaux afin de déterminer quels types de dispositifs permet de garantir une certaine variété dans le geste de manipulation [CLF81-84].

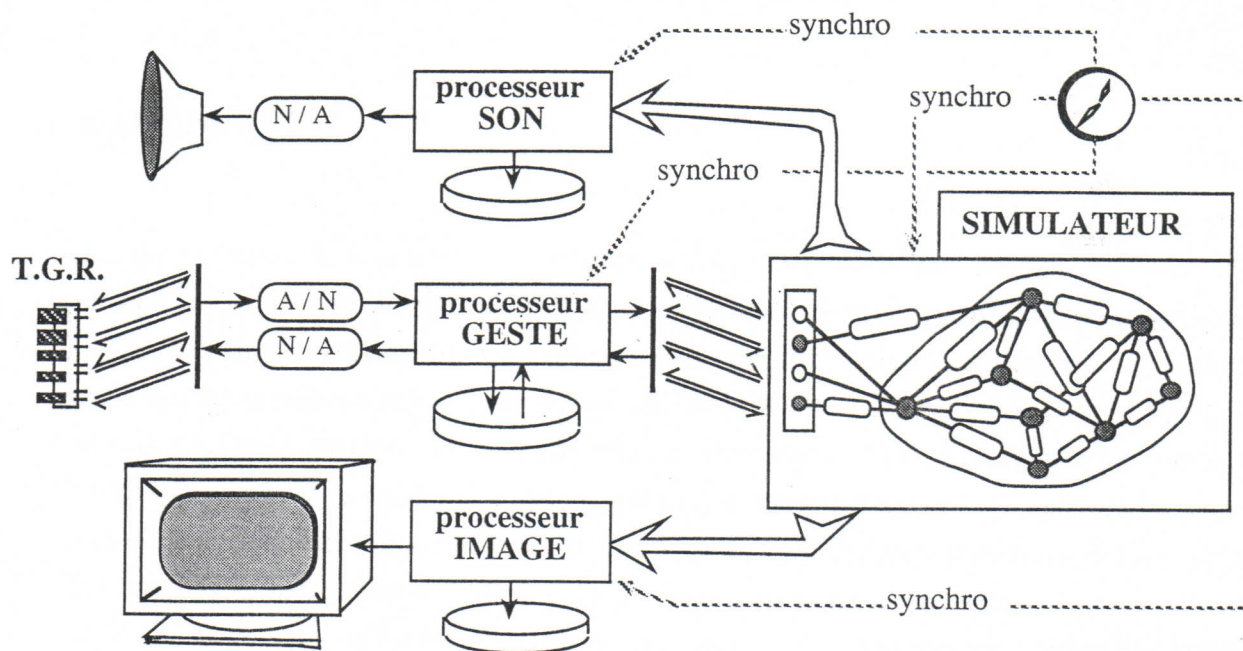


Figure 1 : schéma général du simulateur d'objets physiques visibles, audibles et manipulables
CORDIS-ANIMA

Quel que soit le dispositif gestuel utilisé, le système complet est composé des organes suivants (figure 1) :

- un calculateur principal : le simulateur (faisant éventuellement intervenir plusieurs machines), qui est responsable du calcul du réseau de processus CORDIS-ANIMA représentant l'objet physique simulé.
- un 'frontal gestuel', qui comprend le T.G.R., les convertisseurs analogique / numérique et numérique / analogique, et un processeur dédié à la gestion des entrées et sorties.
- et enfin, un écran de visualisation et une sortie acoustique (comprenant un convertisseur numérique/analogique et une (des) enceinte(s) acoustique(s)), chacun associé à un processeur dédié aux sorties.

L'ensemble de ces organes doit être synchronisé par une horloge commune.

VI.2.2 Le clavier rétroactif modulaire

Le *clavier rétroactif modulaire (CRM)* est le dernier prototype de transducteur gestuel conçu et construit par les chercheurs de l'ACROE [Lis89, CLiF90]. Il fait l'objet d'un brevet international concernant son principe de modularité ainsi que la technologie du moteur spécialement mis au point pour l'obtention de ses performances. Le *CRM* est le prototype d'un dispositif général dont la conception est l'aboutissement de douze années d'étude sur la *relation instrumentale*, dans le cadre de la simulation en temps réel et de la création musicale et d'images animées à l'aide de l'ordinateur. La principale particularité de cet organe de contrôle gestuel rétroactif, outre la compacité et les performances de ses moteurs, est sa modularité : sa morphologie mécanique est modifiable et facilement reconfigurable pour diverses applications.

Le dispositif complet est composé d'un certain nombre de 'tranches' capteur-moteur (seize dans le prototype actuel, mais ce nombre n'est pas limité dans le principe), dont l'encombrement spatial est extrêmement réduit (13.75 mm d'épaisseur), et d'un 'habillage' qui confère à l'ensemble une morphologie particulière. Ainsi la modularité réside dans le choix du nombre de 'tranches' utilisées, c'est-à-dire du nombre de degrés de liberté, et dans le choix de la morphologie.

L'habillage de base consiste en un alignement de seize bras fournissant donc seize DDL indépendants (à déplacement vertical). Pour l'habillage de type piano, différents plateaux correspondant aux touches noires et blanches sont montés sur ces bras ; la hauteur au repos de chaque touche est déterminée par programmation. De manière similaire, en fixant un simple stick à la place d'un plateau de touche, on obtient un 'joy-stick' 1 DDL (figure 2).

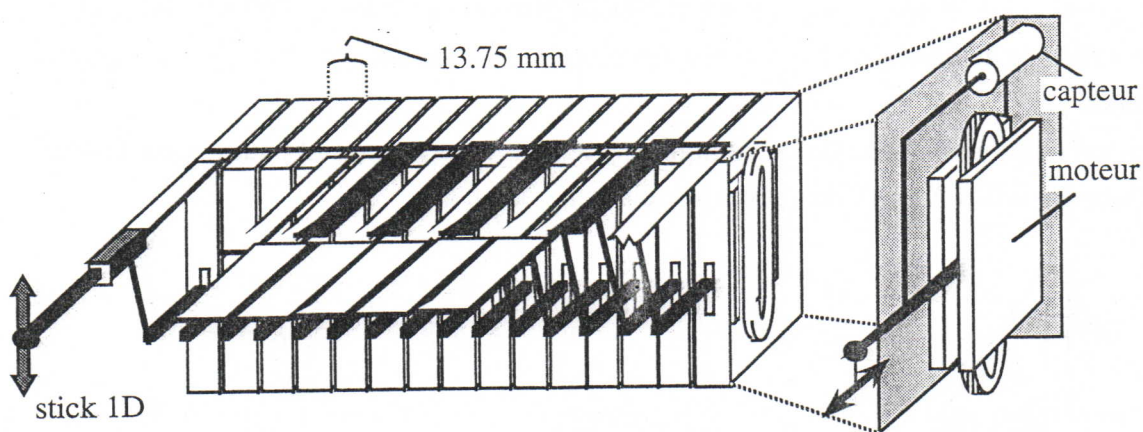


Figure 2 : tranche capteur/moteur - bloc de 16 DDL et habillage standard (piano ou stick 1D)

Un autre habillage particulièrement utile, en particulier pour l'image, consiste à combiner plusieurs DDL, afin de passer de n points de manipulation 1D à un point de manipulation nD . Cet habillage existe actuellement dans le cas $n = 2$. En connectant un bras de transmission à deux modules, il est

possible de combiner les deux DDL correspondants et d'obtenir ainsi un 'joy-stick 2D' dans le plan vertical. L'utilisation d'un module capteur-moteur supplémentaire permet éventuellement de disposer de 3 DDL, tandis qu'un deuxième 'joy-stick 2D' permet d'obtenir un outil similaire à une pince et permettant la saisie (figure 3).

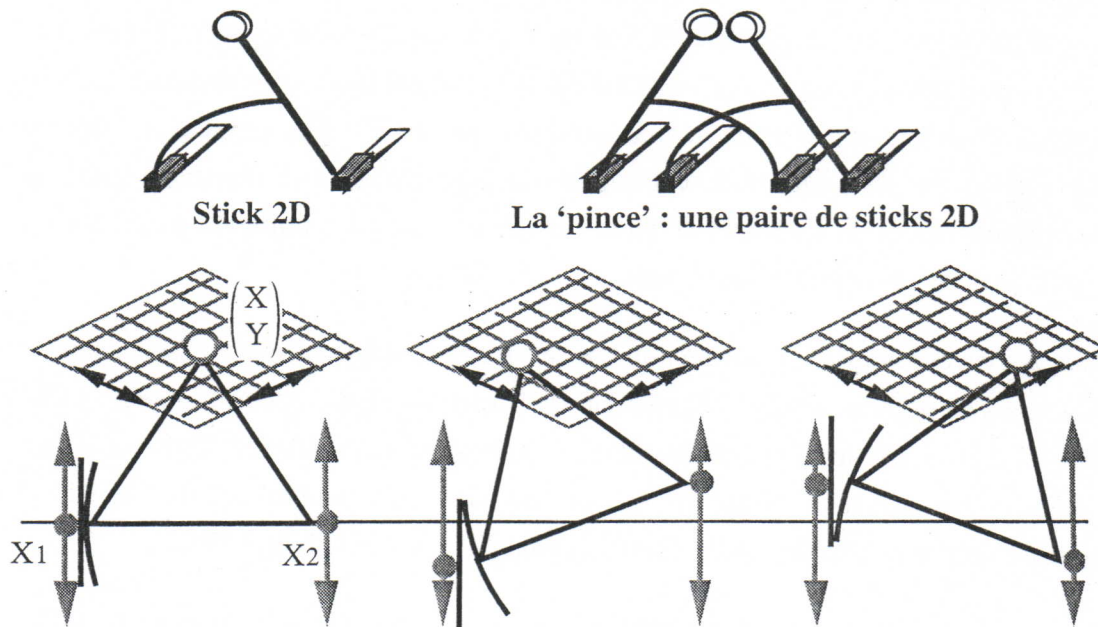
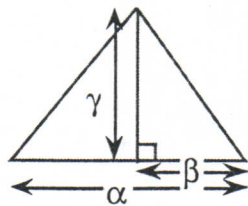


Figure 3 : L'habillage 'stick 2D'

Dans le cas du stick 2D, il va être nécessaire de calculer la position (X, Y) du point de manipulation (le sommet du triangle sur la figure 3) en fonction des deux positions effectivement captées ($X_1 \in [-X_{\max}, X_{\max}]$ et $X_2 \in [-X_{\max}, X_{\max}]$). Ce calcul détermine la manière dont les deux DDL, indépendants dans le dispositif de base, sont alors corrélés ; il dépend des dimensions du bras de transmission utilisé.

Si l'on choisit d'exprimer la position du point manipulé dans un repère ayant pour origine le point obtenu lorsque $X_1 = 0$ et $X_2 = 0$, on obtient les relations suivantes :



$$X = -\beta \cdot \cos\left(\frac{X_2 - X_1}{\alpha}\right) - \gamma \cdot \sin\left(\frac{X_2 - X_1}{\alpha}\right) + \beta$$

$$Y = \gamma \cdot \cos\left(\frac{X_2 - X_1}{\alpha}\right) - \beta \cdot \sin\left(\frac{X_2 - X_1}{\alpha}\right) - \gamma + X_2$$

où α , β , et γ caractérisent les dimensions du triangle formé par les extrémités des deux bras 1. DDL utilisés, et par le point de manipulation (figure 3).

Une expression linéaire très simple peut être obtenue par une approximation du type $\cos(\theta) = 1$ et $\sin(\theta) = \theta$:

$$X = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot (X_1 - X_2) \quad \text{et} \quad Y = \frac{\beta}{\alpha} \cdot (X_1 - X_2) + X_2$$

Cette approximation fournit des résultats corrects pour les dimensions effectives du dispositif : le triangle est équilatéral ($\beta = \frac{\alpha}{2}$, $\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \alpha$ et $\alpha = 13.75$ cm) et l'ambitus d'un bras 1 DDL est de 30 mm (c'est-à-dire $X_{\max} = 15$ mm).

Les forces F_1 et F_2 à correspondant à chaque bras 1 DDL sont calculées en appliquant la transposée de la transformation linéaire initiale, à la force 2D (F_x, F_y) fournie par la simulation¹ :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

Le dispositif 'stick 2D' est donc composé de deux modules capteur-moteur 1 DDL du clavier rétroactif modulaire, du bras de transmission qui y est connecté, et du programme ('handler') assurant le traitement des positions en entrée et des forces en sortie selon les deux transformations linéaires définies ci-dessus. Il permet de disposer d'un point de manipulation se présentant au sein de la simulation comme un point de communication de type 'M' (voir Chap. I, figure 10).

VI.2.3 Manipulation d'objets volumiques déformables

L'utilisation d'un 'stick 2D' ou d'une 'pince' dans le cadre de la simulation de scènes comprenant des objets volumiques déformables permet, après une phase de familiarisation avec les propriétés dynamiques de l'objet simulé, de produire une grande variété de mouvements riches et finement contrôlés. Nous présentons ci-dessous un certain nombre de situations type, mettant en oeuvre le contrôle gestuel de simulacres physiques calculés en temps réel (ces expérimentations sont également décrites dans [LJF89, LJR91, LJC91]).

A. Stick 2D : manipulation par percussion

A.1. Le solide élémentaire

L'objet représenté ici est le solide minimum (c'est-à-dire le premier objet volumique à 6 DDL) constructible avec un modèle basé sur la physique du point. Il est constitué de ce que l'on peut

¹ Les transformations 'allée' et 'retour' doivent assurer la conservation de l'énergie mécanique, c'est-à-dire que le travail ($W = \text{produit scalaire } \langle F, \partial X \rangle$) développé par une force (F_1, F_2) durant un déplacement $(\partial X_1, \partial X_2)$, doit être égal à celui développé par une force (F_x, F_y) durant le déplacement $(\partial X, \partial Y)$ correspondant ; on démontre aisément que si $(X, Y) = A \cdot (X_1, X_2)$ et $(F_1, F_2) = B \cdot (F_x, F_y)$, alors la conservation de l'énergie mécanique implique $B = A^t$.

appeler une 'base' matérielle : quatre masses ponctuelles connectées selon la topologie d'un tétraèdre (trois masses en triangle dans le cas bidimensionnel).

La manipulation est réalisée à l'aide d'un stick 2D (éventuellement associé à un module capteur moteur supplémentaire pour la troisième dimension) en interaction de collision (butée visco-élastique) avec le tétraèdre. On peut alors, selon la nature de la loi d'interaction entre le point de manipulation (que nous appellerons 'point TGR') et l'objet, produire deux situations opposées (figure 4):

- Percussion d'un objet 6 DDL : le tétraèdre est enfermé dans une enceinte dont les parois sont obtenues à partir de six billes de très grande taille fixées très loin du centre de la scène. L'objet, qui ne peut donc sortir de l'espace libre qui lui est attribué, est manipulé par un point TGR auquel est associée une interaction de type 'bille' (décrite au chapitre III).
- Le hochet : ici la loi d'interaction définie entre le point TGR et les composants du tétraèdre est de type 'bulle' (voir chapitre III), le tétraèdre se situe à l'intérieur de la sphère creuse ainsi associée au TGR. La structure générale et le comportement dynamique de l'ensemble font penser à un hochet.

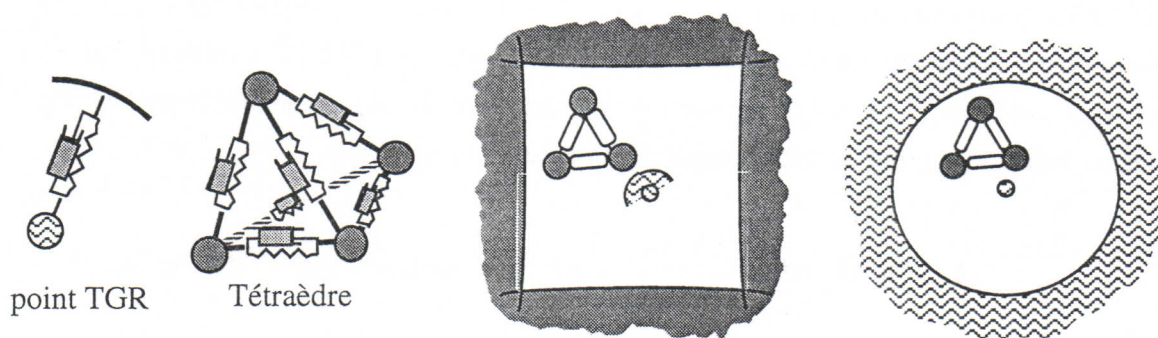


Figure 4 : Stick 2D et tétraèdre : interaction de type 'bulle' ou 'bille'

Ces simulations sont réalisées à une fréquence de 500 Hz (pas de simulation de 0,002 seconde), ce qui permet de définir des butées visco-élastiques rigides restituant des chocs secs.

A.2. Agglomérats : objets élastiques, milieux plastiques et milieux fluides

Un agglomérat (voir chapitre III) composé d'une cinquantaine de masses dans le cas d'une scène bidimensionnelle par exemple, se présente réellement comme un morceau de matière ou comme un milieu.

Si l'on choisit de définir un agglomérat peu cohésif (c'est-à-dire avec une constante de raideur très faible pour la partie attractive de la force interne), on obtient un milieu quasi fluide, qu'il faut placer dans un récipient si l'on ne veut pas qu'il se répande. Si, au contraire, on choisit une raideur d'attraction forte (égale à la force de répulsion par exemple), on obtient un morceau de matière qui présente une mémoire des déformations, c'est-à-dire ayant un comportement plastique (figure 5).

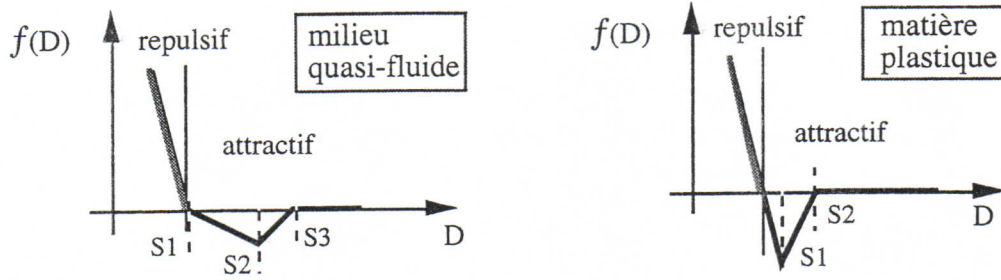


Figure 5 : différents types d'interaction pour l'agglomérat

Dans le premier cas, en brassant à l'aide du stick 2D le milieu obtenu, qui est donc placé dans un contenant (dont les parois sont construites comme pour l'enceinte précédente), on obtient immédiatement des vaguelettes caractéristiques d'un milieu fluide. Si l'on diminue encore la cohésion, les mêmes mouvements soulèvent des 'nuages' de particules comme cela serait le cas avec une matière pulvérulente. Le contrôle rétroactif permet ici de s'adapter immédiatement aux propriétés du milieu dans lequel on 'plonge le doigt'.

Dans le second cas, le matériau plastique va aisément se 'modeler' par pressions successives. Les variétés de forme qu'il peut présenter dépendent directement des agencements possibles de l'ensemble des masses ponctuelles qui le composent. Si l'on presse plus fortement (il faut noter que c'est le fait de disposer d'un contrôle gestuel rétroactif qui permet ce type de distinction) le stick 2D sur le morceau de matière, ce dernier se laisse transpercer de part en part. Ces simulations sont réalisées à une fréquence de 300 Hz.

B. La pince : saisies et lâchés

L'utilisation simultanée de deux stick 2D, qui constituent ce que nous avons appelé la pince, autorise des saisies et des lâchés sur les objets simulés. Cet outil de manipulation permet de réaliser des séquences de mouvements particulièrement complexes ; nous l'avons notamment mis en oeuvre dans deux situations type: saisie, puis insertion ou lancer d'objets, et modelage d'un morceau de matière plastique.

La manipulation rétroactive permet un contrôle particulièrement fin sur les objets simulés. Il devient possible, par exemple, de réaliser par tâtonnement l'insertion d'un barreau élastiquement déformable dans un logement plus petit que lui. La manipulation d'une balle élastique, ici obtenue à partir d'un objet structuré [noyau, derme] (voir chapitre III), devient très rapidement un jeu prenant. La balle peut être saisie et écrasée, mais également lancée vers d'autres objets (comme dans un jeu de quille), ou vers un filet destiné à la recevoir (figure 6).

Si l'objet manipulé à l'aide de la pince possède un comportement plastique, il va garder la trace des déformations qui lui sont appliquées. Il est alors possible de le tordre en le saisissant et en pressant une extrémité sur une paroi non pénétrable, ou de le briser en deux par étranglement.

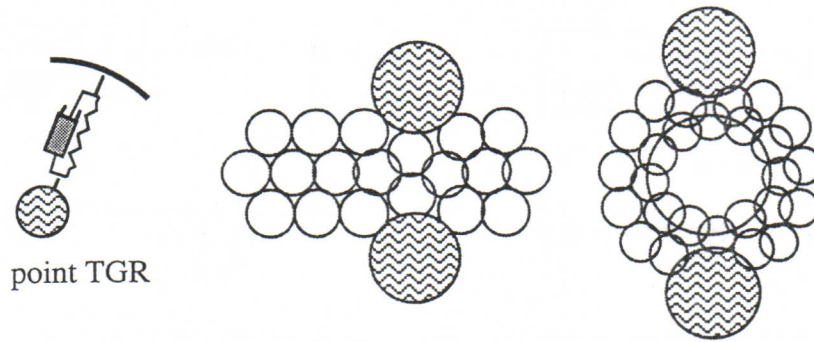


Figure 6 : saisie d'un barreau ou d'une balle élastique

Ces simulations sont réalisées à des fréquences de 300 à 500 Hz, selon la rigidité voulue pour l'objet à saisir.

C. Photographies

Ce paragraphe présente des photographies d'écran réalisées dans le temps de la simulation. Elles montrent deux objets formés d'agglomérats, l'un pâteux et l'autre à la consistance plus fluide. Ces objets sont manipulés par l'opérateur via le TGR muni de l'habillage 'stick2D'. Le cercle blanc sur les photographies représente le point de manipulation (au centre du cercle) et la zone de non pénétration qui lui est associée (l'intérieur du cercle).

VI.3 Structures de contrôle

VI.3.1 Introduction

Le contrôle signifie par essence que l'information communiquée à l'objet est moins importante que celle qu'il produit en retour ; en réalité, le modèle physique (comme tous les modèles générateurs) est en soi une solution à ce problème, puisqu'il suffit de fournir les actions s'exerçant sur une partie de l'objet simulé pour que celui-ci se mette tout entier en mouvement. Ainsi, dans les exemples présentés dans le paragraphe précédent, la manipulation de l'objet se fait à travers seulement deux ou quatre degrés de liberté, et le mouvement obtenu est d'une dimension bien supérieure.

Cependant, le nombre de degrés de liberté d'une scène, ou simplement d'un objet, croît très vite. Aussi, si l'on vise un contrôle coordonné de l'ensemble, il est impensable d'utiliser autant de processus indépendants. Il va donc falloir réduire le nombre d'éléments à contrôler, tout en assurant une certaine structure au mouvement. C'est-à-dire que, de même que nous donnons un modèle des objets physiques d'une scène, nous devons décrire la structure mécanique de leur système de contrôle. L'idée d'intégrer dans le modèle physique de la scène une structure de contrôle, en tant qu'outil s'interposant entre les dispositifs de contrôle gestuel et l'objet lui-même, s'est rapidement imposée dans le cadre du système Anima [Luc85, LC86].

Le système de contrôle peut se distinguer parfaitement de l'objet lui-même, il a alors le statut d'un instrument, comme les structures à fil du marionnettiste, qui lui permettent de manipuler simultanément plusieurs membres de son personnage. Mais l'objet peut également porter en lui-même, de par sa constitution, la structuration de ses mouvements (c'est typiquement le rôle d'un squelette, ou de manière plus générale d'une armature). C'est le cas par exemple d'un bras articulé, qu'il suffit de manipuler par le segment placé à l'extrémité pour mouvoir chacun de ses composants selon la classe de mouvements imposée par les articulations. On peut également imaginer, pour donner un exemple se rapportant directement aux modèles que nous avons développé, un objet composé d'un derme assumant les déformations superficielles et d'un noyau articulé structurant les mouvements globaux.

VI.3.2 Mécanismes

La réduction du nombre de degrés de liberté d'un système, qui est directement liée à la notion de liaison en mécanique des solides rigides, est un premier pas vers la structuration des mouvements. Dans le cadre de modèles basés sur la description de chaînes cinématiques (comme les modèles de solides rigides articulés), les liaisons sont décrites par des relations logiques (égalités ou inégalités

de variables géométriques ou cinématiques) entre les éléments constituant les objets (voir le chapitre II, en première partie de ce document, et l'Annexe A). Par contre, les modèles Cordis-Anima étant élaborés à partir de la physique des systèmes de points, les propriétés fonctionnelles d'un objet se présentent comme le résultat de l'agencement des masses ponctuelles et des éléments de liaison qui le composent, et dépendent de la nature des lois d'interaction définies par ces derniers.

Ainsi la description des structures articulées n'est pas immédiate, mais relève d'une activité de construction du modèle. Cependant, à condition d'adopter l'état d'esprit sous-tendu par ce type de représentation, on parvient très rapidement à construire une grande variété de structures (figure 7).

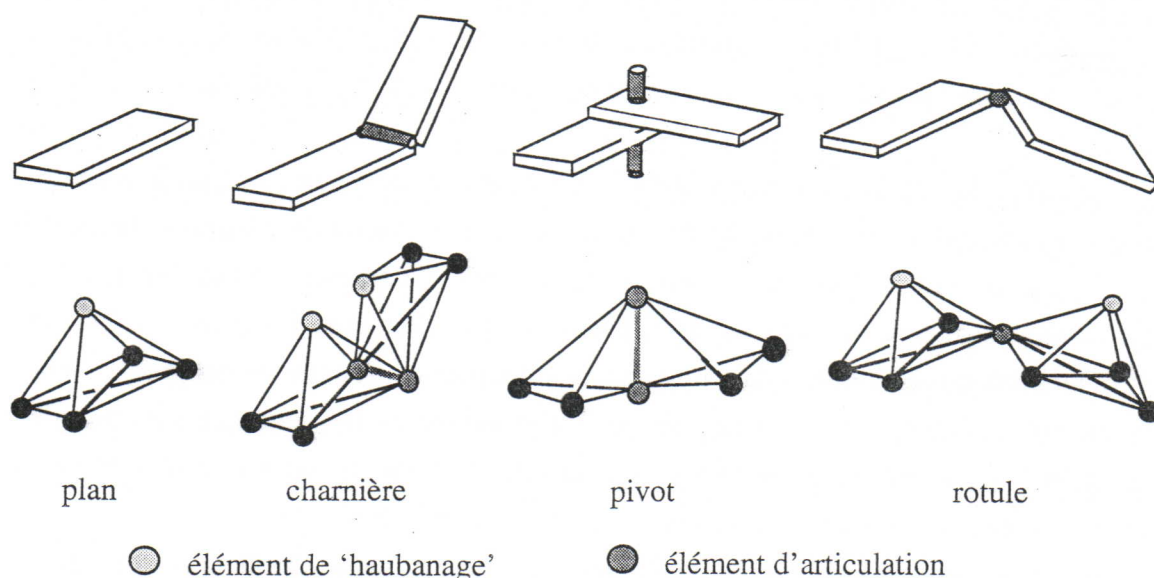


Figure 7 : Quelques exemples de structures articulées

On peut notamment citer deux idées importantes pour la construction de mécanismes à partir de systèmes de points. La première se ramène à la notion d'haubannage ('ensemble de câbles tenseurs'). Il est en effet souvent beaucoup plus efficace, sinon nécessaire, d'introduire des éléments supplémentaires, excentrés et destinés à rigidifier la structure (comme pour le plan de la figure 7). La seconde idée, tout à fait complémentaire, est celle de l'économie de représentation ; elle part d'un principe clair : les modèles les plus simples sont les plus efficaces. Ainsi, il est souvent nécessaire de se concentrer sur la fonction mécanique que l'on veut représenter, plutôt que sur une forme géométrique préconçue, laquelle n'est généralement pas nécessaire mais imposée par l'usage (à moins que les deux plans aient un rôle fonctionnel explicite, un pivot peut se représenter, comme sur la figure 7, par deux tétraèdres ayant deux masses en commun).

VI.3.3 Modèles d'actionneur et loi de commande

A. Générateur de force et asservissement

Il est naturel, en poursuivant dans la voie d'une simplification du contrôle, de munir nos mécanismes, jusqu'à présent passifs, de générateurs de mouvements. La représentation de moteurs ou d'effecteurs dans le cadre d'une modélisation physique est en réalité assez immédiate et autorise des raccourcis très efficaces : rajouter une force dans le système des équations du mouvement ne pose a priori aucun problème de principe.

Une solution immédiate et fréquemment employée (voir la première partie de ce document, Chap. IV) consiste à utiliser un 'ressort réglable' (angl. tuned spring). Il s'agit d'un micro-ressort, qui génère donc une force axiale dépendant de la distance entre ses deux extrémités D , de sa longueur au repos L et de sa constante raideur K : $F = K.(D - L_0)$; il permet de créer un mouvement rectiligne et est contrôlé en position par une loi de commande du type $L_0 = f(t)$. Il est possible d'augmenter les performances de ce modèle d'actionneur simple en lui associant l'équation caractéristique d'un régulateur de type Proportionnel-Intégral-Dérivé (P.I.D.) [GDP90] :

$$F = K_1 \cdot \varepsilon(t) + K_2 \cdot \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} + K_3 \cdot \int \varepsilon(t) dt \quad \text{où } \varepsilon = (D - L_0)$$

Enfin, on peut imaginer d'exploiter les techniques de la commande optimale, utilisées en automatique, pour asservir ce ressort, tout en optimisant le mouvement obtenu sous certains aspects tels que le temps ou l'énergie nécessaire.

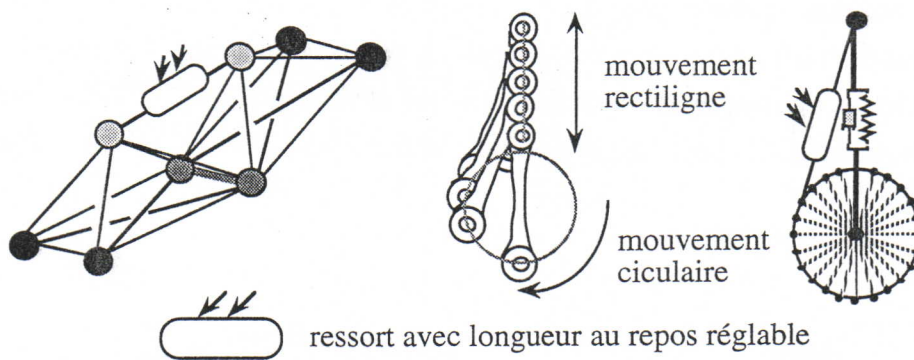


Figure 8 : Utilisation du 'ressort réglable' - articulation et système type bielle/manivelle

Ce modèle, souvent appelé muscle de manière un peu abusive, peut être utilisé pour actionner une articulation, ou un système du type bielle/manivelle formé d'un axe et d'une roue et qui permet donc de transformer le mouvement rectiligne en un mouvement circulaire (figure 8).

B. Simulation de véhicules en progression sur des terrains variés

Nous avons mis en oeuvre de simples générateurs de force, du type du ressort réglable, pour générer et contrôler le mouvement de différents véhicules en progression sur des terrains variés. Ces véhicules (plans ou tridimensionnels) sont articulés et munis de structures de divers degrés de complexité. La plupart des résultats de ces expérimentations, qui ont été réalisées dans le cadre de la participation à une étude de systèmes de locomotion pour des véhicules autonomes d'exploration planétaire (projet VAP, comité scientifique RISP-CNES), ont été rapportés dans plusieurs communications (en animation par ordinateur [JLR91, JL93], et en robotique [JLL92-93, LJL93]) ; nous les décrivons rapidement ici.

Les premières expérimentations mettent en jeu des véhicules de structure simple (véhicule plan composé de deux segments articulés selon un pivot et muni de roues ponctuelles). Les simulations correspondantes ont été réalisées à une fréquence de 300 Hz. Le mouvement de ces véhicules est obtenu par un générateur de force jouant le rôle d'un treuil. Les sols sont formés d'agglomérats plus ou moins cohésifs obtenus par 'billage' (voir le chapitre III, § III.2.2) et présentent des profils variés. L'un des véhicules est muni d'une chenille formée d'un chapelet de masses connectées par des modules visco-élastiques quasi rigides (forte raideur des ressorts) ; ce chapelet de masses ponctuelles est tendu autour de la structure articulée (figure 9). Lorsque le véhicule est treuillé, la chenille est mise en mouvement par les interactions avec les éléments du sol qui provoquent un effet de crémaillère. La figure 10 représente la séquence de positions obtenue par la simulation de cette scène. Dans une autre simulation, le même véhicule a été motorisé en appliquant directement les forces nécessaires pour mettre la chenille en mouvement. Ces forces sont calculées selon un régulateur P.I.D. commandé en vitesse. C'est cette version du chenillard qui a été utilisé pour produire le chronogramme 1. Le sol y est formé d'un plan rigide, obtenu par une bille de très grande taille, sur lequel est déposé un agglomérat cohésif représentant un monticule de terre meuble. Les masses de la chenille sont toutes en interaction selon un frottement sec avec le sol et le monticule. On peut voir comment le monticule se déforme et s'écrase sous le passage du véhicule.

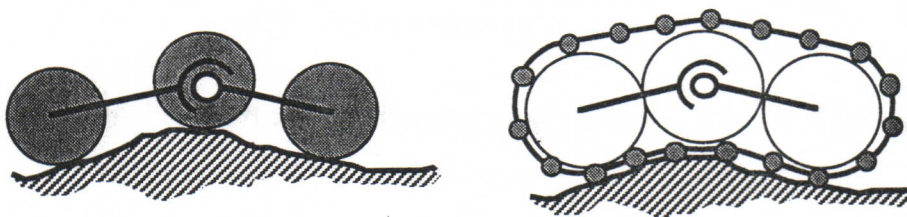


Figure 9 : véhicule plan articulé, simple et avec chenille.

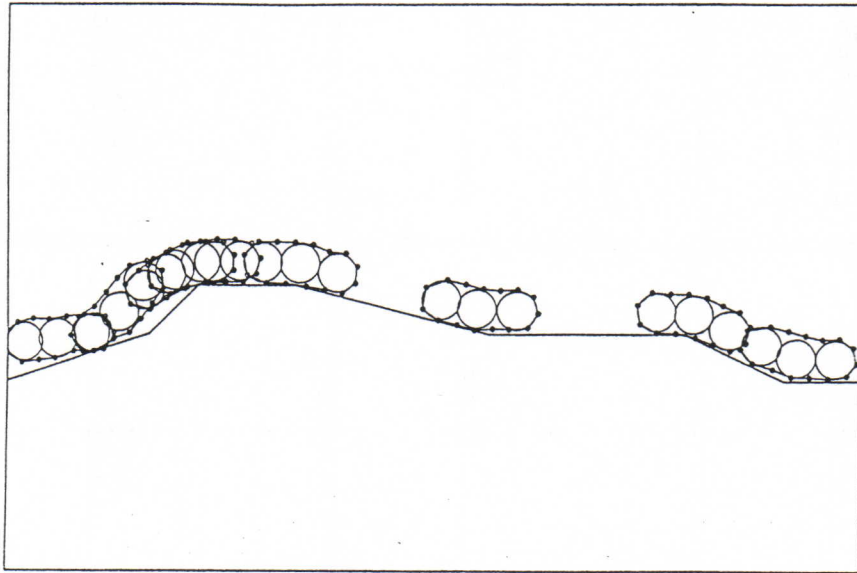
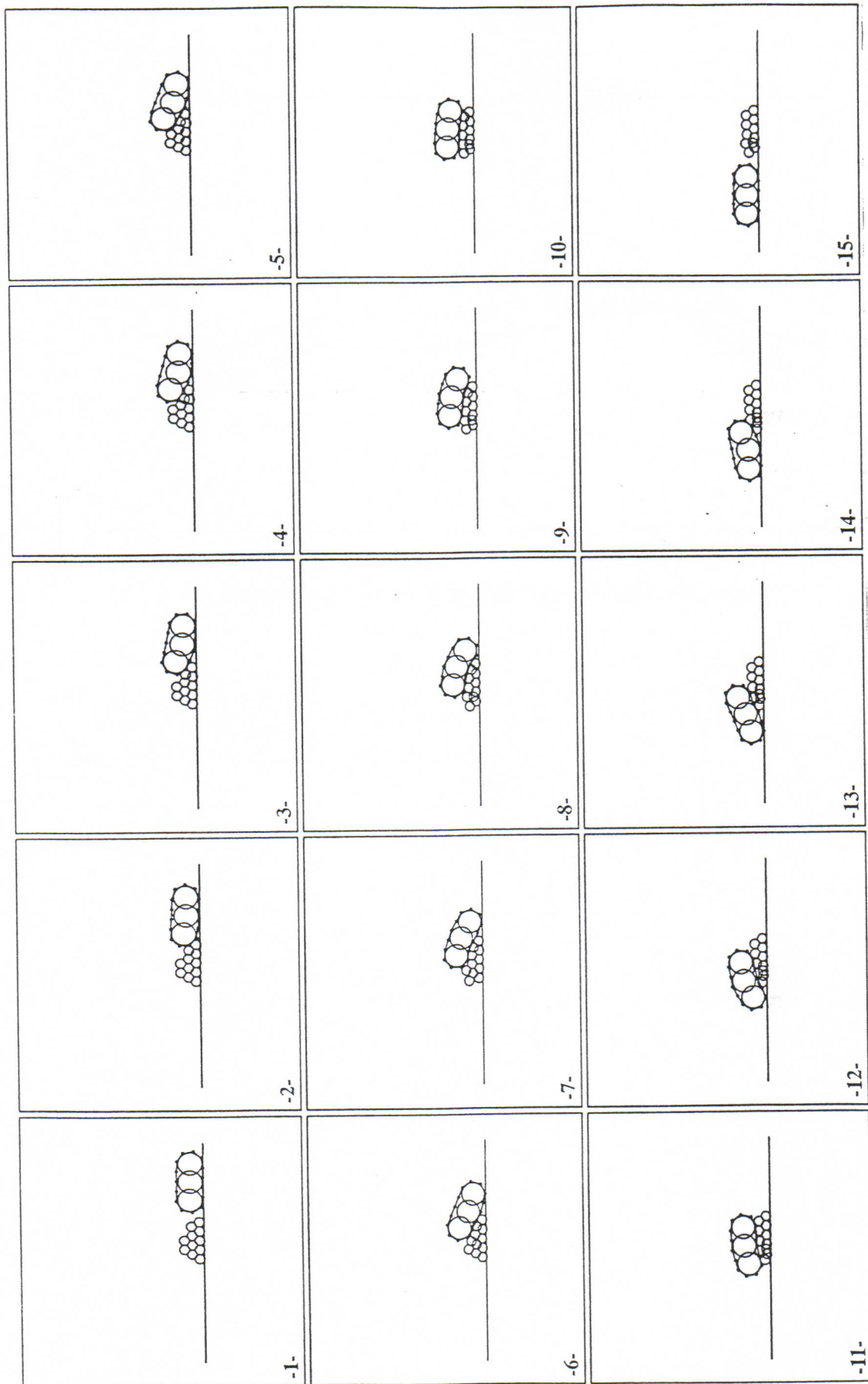


Figure 10 : Véhicule chenillé tracté sur un terrain rigide.



Chronogramme 1 : Véhicule chenillé franchissant un monticule meuble.

Nous avons développé pour les véhicules suivants un modèle de roue multiponctuelle qui permet, tout comme la chenille du modèle précédent, d'obtenir des véhicules 'automobiles' et non plus tractés. Le fait de disposer de roues multiponctuelles permet une part d'appliquer un couple moteur, et d'autre part de définir une interaction de surface (comme celle développée au chapitre IV) entre les points des roues et les composants du sol. Les sols sont ici des terrains rigides ou déformables, et parsemés de 'blocs rocheux' mobiles ; comme dans le cas précédent, l'ensemble est obtenu par billage. L'interaction de type frottement sec qui est utilisée permet non seulement de produire pour les roues un mouvement de roulement sans glissement dans les situations normales, mais également de restituer les comportements d'un véhicule réel dans des situations extrêmes (dérapages et adhérences).

Les roues bidimensionnelles sont obtenues simplement en disposant un chapelet de masses autour d'une masse centrale faisant office de moyeu, à laquelle elles sont reliées par des 'rayons' visco-élastiques quasi rigides. Les modèles de roue 3D (de forme classique ou conique) et de train de roue (un essieu et deux roues) sont obtenus en assemblant de manière adéquate plusieurs exemplaires du disque que forme la version 2D (figure 11).

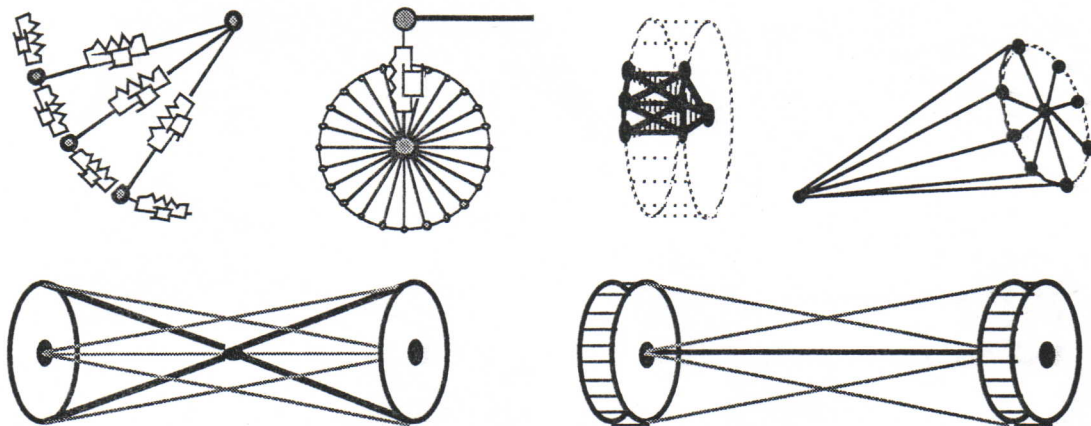


Figure 11 : modèle de roues et d'essieux 2D et 3D

Le couple moteur est généré directement (c'est-à-dire en faisant l'économie d'un système bielle/manivelle) par un module, qui doit être connecté à deux masses de la roue diamétralement opposées (figure 12).

Ce générateur de couple est associé à un régulateur de type P.I.D ; il est commandé soit par une vitesse angulaire (θ , vitesse de rotation de la roue), soit par une vitesse linéaire (V , vitesse du centre de roue). Dans le cas tridimensionnel, les régulateurs associés à chaque roue d'un même essieu sont couplés de manière à respecter la consigne de vitesse, tout en assurant que les deux roues, ou les deux centres de roue, se déplacent de manière uniforme (figure 12). Enfin, les véhicules complets sont obtenus en montant le train de roue choisi sur une structure articulée formant le châssis (figure 13).

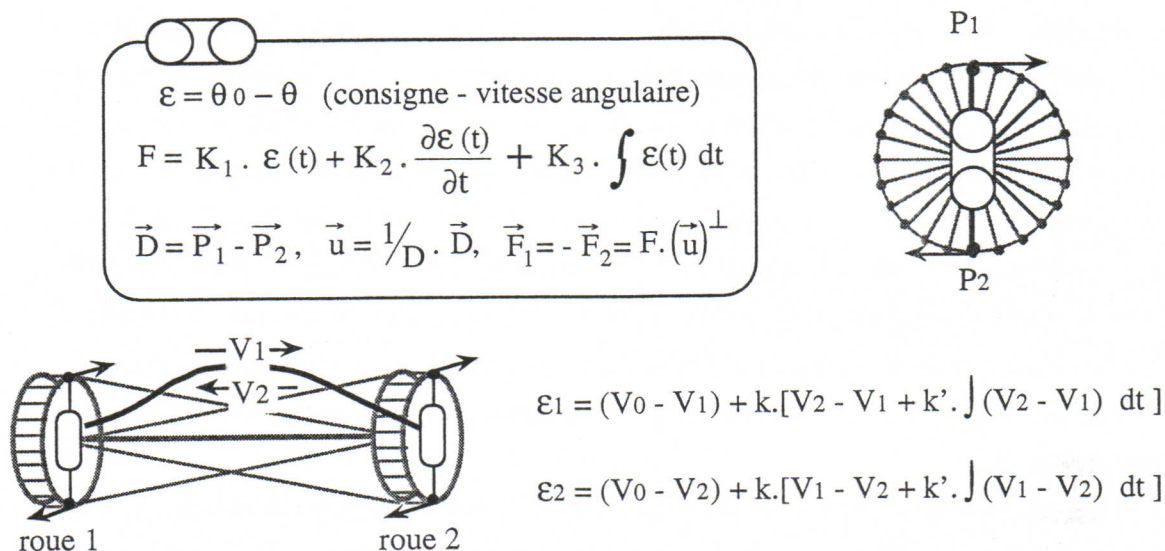


Figure 12 : générateur de couple et régulateurs P.I.D. 2D et 3D.

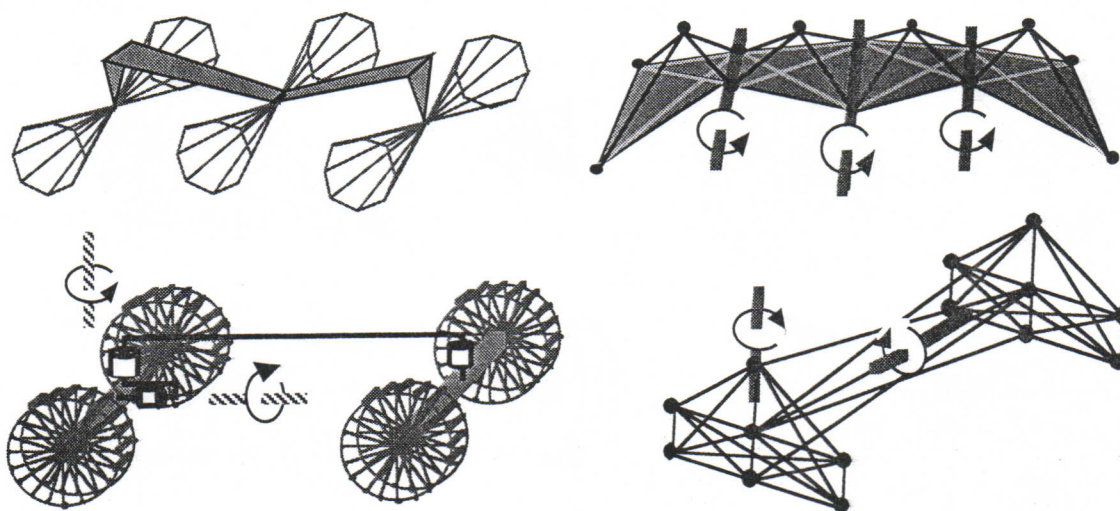


Figure 13 : modèles de châssis articulés pour les véhicules 3D.

Pour tous ces véhicules, un module d'interaction de frottement sec (voir le chapitre IV) est placé entre chaque masse des roues et chaque masse périphérique des agglomérats dont sont formés les terrains. Lorsqu'ils sont présents dans la scène, les blocs rocheux parsemant le terrain sont également en interaction avec celui-ci à travers un module de frottement sec (ayant éventuellement des paramètres différents du précédent). A défaut de lois de commande plus sophistiquées, nous avons la plupart du temps utilisé des consignes constantes, ou éventuellement des séquences temporelles simples. Dans ce dernier cas, $\theta(t)$ est calculé comme une fonction multi-linéaire (voir le chapitre II) de la variable temps : $\theta(t) = a_i * t + \sum_{i=1}^n a_i * |t - t_i| + Cste.$

C. Chronogrammes et photographies

Ce paragraphe présente les chronogrammes et les photographies réalisées à partir des simulations se scènes montrant les véhicules que nous venons de décrire dans différentes situations. Ces simulations ont été réalisées à une fréquence de 1000 Hz, nécessaire pour obtenir des structures très rigides pour les châssis et les obstacles mobiles, une adhérence suffisante au sol, et une grande stabilité des systèmes de régulation P.I.D.

La figure 14 montre plusieurs positions successives obtenue lors du franchissement d'une marche fixe quasi rigide par un véhicule plan. La marche est 'billée' (cf chapitre III) et le sol est formé d'un sphère de très grande taille. Un module d'interaction de frottement sec est placé entre chaque masse des roues et chaque éléments du terrain. Le véhicule est commandé en vitesse avec une consigne très faible afin de permettre ce franchissement à la limite du possible (il s'agit bien sûr d'un cas d'école dont le but est de définir les conditions minimales de franchissement, qui impliquent d'ailleurs des propriétés d'adhérence très élevées pour le sol). Le chronogramme 2 montre ce même véhicule franchissant cette fois des obstacles mobiles.

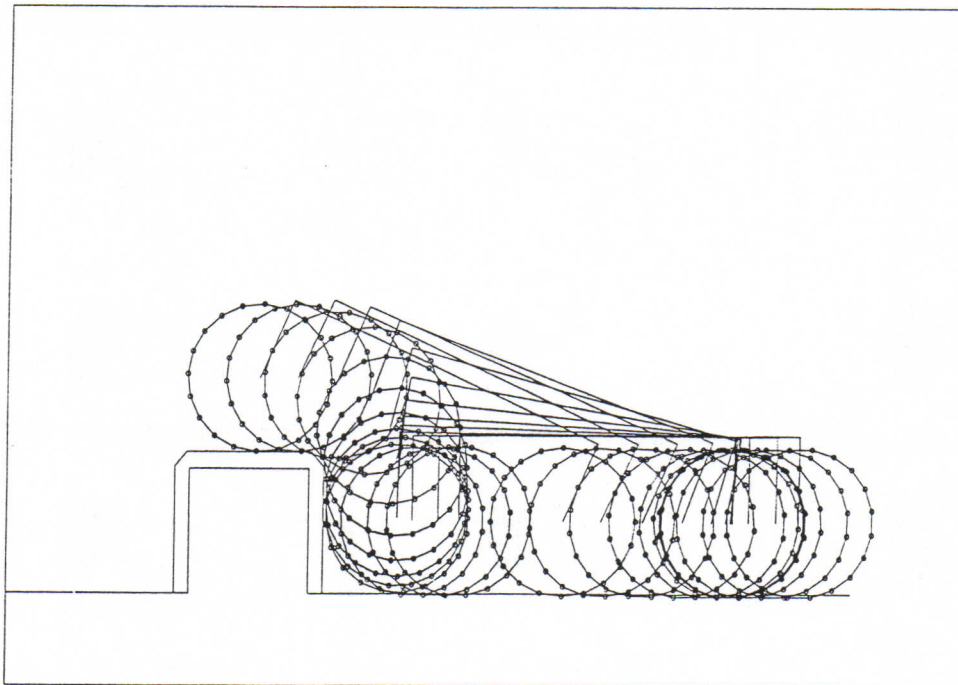


Figure 14 : Franchissement d'une marche rigide fixe par un véhicule à roue.



Chronogramme 2 : Franchissement d'obstacles rigides mobiles par un véhicule à roue.

D. Conclusion

En définitive on s'aperçoit rapidement qu'avec cette approche, mis à part ce qui relève du choix de la technique d'asservissement, le problème du contrôle est entièrement contenu dans la question de la commande, c'est-à-dire dans l'élaboration des consignes à donner au système asservi (les fonctions $L_0 = f(t)$ et $\theta = f(t)$, dans les cas simples que nous avons présentés ci-dessus). Il y a globalement deux manières d'envisager une solution à ce problème : le pilotage par un opérateur humain ou l'élaboration de lois de commande.

La notion de pilotage implique des interfaces s'adressant à ce que l'on appelle aujourd'hui le sens haptique (tactilo-kinesthésique), et ne peut s'envisager que dans le cadre d'une simulation physique. En ce qui nous concerne, c'est la manipulation rétroactive et en temps réel, par l'intermédiaire des TGR, qui est en mise en jeu. Le travail de mise en oeuvre réside alors dans l'élaboration du processus réalisant la transformation ("anamorphose") nécessaire pour passer des gestes effectivement réalisés aux actions résultantes sur la structure à contrôler, et symétriquement, pour passer des réactions que cette dernière y oppose, aux perceptions que l'opérateur a en retour. Certains systèmes de contrôle réel, tels que la direction d'une voiture, le système de pilotage d'un avion ou même d'une grue de chantier, illustrent parfaitement ce propos. Cette question, que nous ne faisons qu'effleurer ici, constitue en soi un sujet de recherche.

La seconde approche relève de la notion d'autonomie très attachée aujourd'hui aux recherches en robotique ; les travaux les plus aboutis sur ce sujet, dans le cadre de l'animation par ordinateur, s'inspirent fortement des résultats de ces recherches. Clairement, si l'on se réfère à la situation où l'objet est directement piloté par un opérateur, il va falloir ici remplacer la capacité de ce dernier à adapter son contrôle, pour un objectif donné, aux conditions définies par l'environnement. Il s'agit là d'un problème compliqué, dont la première difficulté est certainement d'être mal posé : en quoi réside cette capacité à s'adapter à une infinité de situations ? Il semble inimaginable aujourd'hui de trouver une solution générale au problème de l'autonomie. Cependant, plusieurs chercheurs ont obtenu des résultats spécifiques intéressants, aussi bien sur des systèmes réels qu'en simulation (certains de ces travaux sont présentés dans la première partie de ce document au chapitre IV, § IV.3.3). Nous présentons dans le paragraphe suivant l'approche que nous avons développée dans le cadre du système CORDIS-ANIMA.

VI.3.4 Contrôle par l'environnement

A. Introduction

Nous nous sommes intéressés, dans le cadre de l'utilisation de la simulation par modèle physique pour la génération et le contrôle des mouvements de robots mobiles autonomes, aux notions de stratégies de progression et d'objectif à atteindre. La situation prise comme référence est celle d'un

robot mobile évoluant dans un environnement hostile, c'est-à-dire comportant des zones dangereuses, à éviter, et devant atteindre un objectif prédéterminé. L'idée principale de notre approche consiste à élaborer un modèle physique décrivant non seulement le véhicule et son environnement, mais aussi une structure de contrôle développée à partir des informations sur cet environnement, sur la stratégie de progression et sur l'objectif à atteindre. Le but visé est que l'interaction entre la structure de contrôle et le véhicule ait pour résultat des mouvements similaires à ceux que l'on obtiendrait avec pilote humain capable, par ses comportements réflexes et sa capacité à prendre des décisions, de s'adapter à la fois aux caractéristiques du véhicule et à celles de l'environnement dans lequel il se trouve (figure 13).

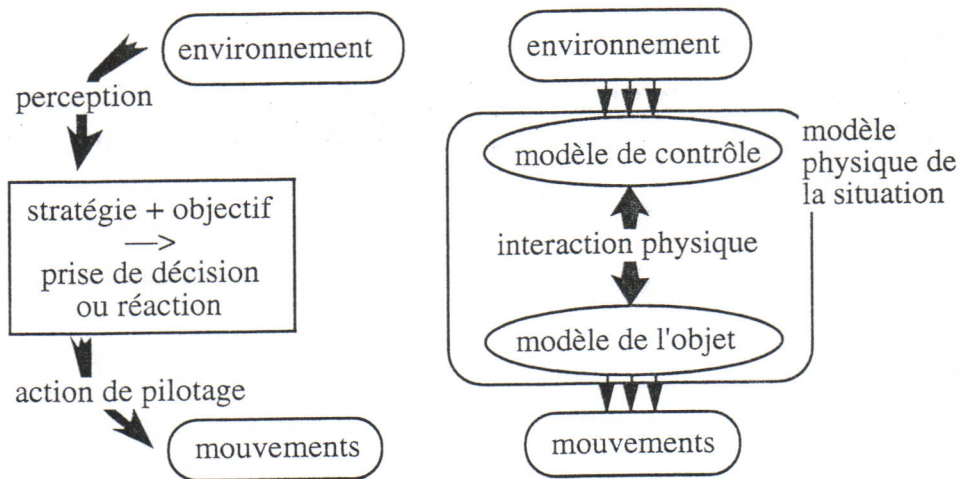


Figure 12 : Un modèle physique pour les données stratégiques et tactiques ?

Nous nous sommes attachés essentiellement à deux aspects de la situation. Le premier correspond à la notion d'objectif, c'est-à-dire à la prise en compte d'une intention globale qui motive le mouvement : une position spatiale à atteindre. Le second aspect est celui de la sécurité : l'objectif doit être atteint tout en maintenant le véhicule dans les zones réputées sans danger ; elle est liée au processus d'évitement d'obstacle. Nous avons développé deux concepts permettant de faire le lien entre ces notions abstraites et leur représentation sous forme d'un objet matériel interagissant avec le véhicule. Ces deux concepts, ainsi que les modèles physiques qu'ils permettent de développer, font l'objet du paragraphe suivant.

B. Obstacles Généralisés et Cibles Physiques

B.1 Transformer l'obstacle en guide du mouvement

Si l'on définit un obstacle comme un objet matériel impénétrable, c'est-à-dire définissant une zone de l'espace qu'il faut à tout prix éviter (si l'on ne veut pas subir les dommages causés par une collision!), on peut distinguer dans l'analyse d'un environnement deux catégories d'obstacles :

- les obstacles évitables - et en fait à éviter - avec lesquels on décide qu'il ne doit pas y avoir de contact ; ils impliquent la mise en oeuvre d'une stratégie d'évitement,
- Les obstacles non évitables, c'est-à-dire ceux avec lesquels on ne peut éviter d'être au moins temporairement en contact (à moins de voler!) ; ils vont en réalité servir d'appuis au mouvement. Le sol, qui est clairement un objet matériel impénétrable, en est un exemple remarquable. Au lieu de déclencher un processus d'évitement vis-à-vis de ce dernier, nous devons apprendre à l'utiliser pour nous déplacer. Paradoxalement, ce type d'obstacle est absent dans les représentations utilisées pour la planification et le contrôle en robotique.

L'approche que nous avons développé consiste à unifier ces deux catégories d'obstacles à travers le modèle physique que nous voulons en donner. La notion d'*obstacle généralisé* vise à faire de tout obstacle un support, ou un guide, pour les mouvements. Nous allons donc transformer le problème de l'évitement d'obstacles, qui est classique en robotique où il est traité par la géométrie algorithmique, en un problème de guidage par l'obstacle. Ce dernier, plus abordable dans le cadre d'une modélisation physique, permet en outre de se trouver face à un unique problème générique, celui de produire le mouvement en exploitant les interactions entre deux objets physiques : le véhicule et les *obstacles généralisés*.

On peut éclairer cette approche en considérant un moment la manière avec laquelle l'homme gère le problème de l'évitement d'obstacle. Ceci peut se faire à travers la métaphore suivante du phénomène d'anticipation : tout se passe comme si nos centres de traitement du danger nous faisaient voir les obstacles 'dangereux' plus gros qu'ils ne sont réellement. Ils apparaissent enveloppés d'une zone de sécurité construite à partir de l'expérience de collisions effectives (un enfant qui s'est cogné la tête un certain nombre de fois sur un coin de table finit par contourner celui-ci avec une grande marge de sécurité). Nous remplaçons, par apprentissage, le contour visible des objets par une enveloppe virtuelle caractérisant la distance de sécurité à maintenir.

En modélisant effectivement cette enveloppe virtuelle, nous pouvons donner une représentation matérielle des réflexes d'anticipation. Nous allons donc remplacer chaque obstacle à éviter par un objet virtuel utilisable comme 'anticipateur' de collision (il doit même rendre cette dernière impossible), et comme guide pour les mouvements. La distance entre le contour de cet obstacle virtuel et celui de l'obstacle réel va dépendre de l'étroitesse et de la difficulté des passages, et de critères pour l'exécution des mouvements, tels que les marges de sécurité et l'optimisation du parcours (choix du chemin le plus court, par exemple).

Enfin, définir un obstacle généralisé ne consiste pas simplement à entourer l'objet d'une boîte englobante, ou à lui appliquer un grossissement homothétique. Il s'agit d'un modèle d'objet physique doté d'une inertie, et dont le comportement dynamique est calculé. Il est en interaction avec le véhicule et pourra se déplacer et se déformer sous l'action de celui-ci (en fonction par exemple de la vitesse à laquelle il arrive), et s'adapter ainsi à la situation.

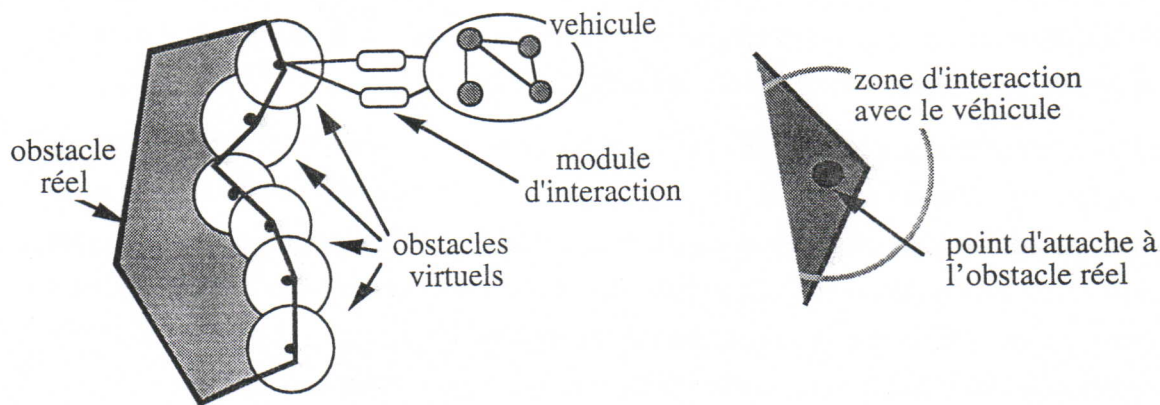


Figure 13 : obstacle généralisé

Ce même principe permet de traiter le cas d'une trajectoire complète, lorsque cette dernière est spécifiée sous la forme d'un canal ou d'un chemin polygonal. Dans les deux cas, l'information sur la trajectoire pourra être utilisée pour générer le modèle d'une enveloppe virtuelle formée d'obstacles généralisés. Cette enveloppe de la trajectoire, qui est alors traitée comme un objet physique, permet d'imposer des suivis plus ou moins étroits (figure 14).

B.2 Prise en compte d'une stratégie de progression

La notion de cible est habituellement utilisée en robotique pour traduire les objectifs et les stratégies d'action liées à une tâche. Les cibles sont généralement produites à l'issue d'une analyse logico-géométrique de la tâche, vis-à-vis de l'environnement ; elles décrivent, par exemple, des séquences de sous buts, qui correspondent aux différentes étapes selon lesquelles on a découpé la tâche, et des consignes d'ordre stratégique et tactique telles que '*il faut reculer pour pouvoir passer*'. Cette planification de la tâche et ces choix stratégiques sont les manifestations d'un comportement intelligent et ne peuvent être engendrées par un modèle physique.

Nous allons donc supposer que cette information sur l'organisation de la tâche et sur la stratégie à appliquer existe, et chercher à l'introduire au sein de la simulation physique en en donnant une représentation matérielle. Il va donc s'agir d'un modèle physique formé d'éléments matériels et de modules d'interaction avec le véhicule, et conçu de telle manière que son action ait pour résultat le respect des objectifs fournis par la phase de planification. Ce modèle, que nous appellerons simplement '*cible physique*', matérialise les consignes stratégiques. Les '*cibles physiques*' sont destinées à traduire des séquences temporelles de consignes, correspondant par exemple à la description de manoeuvres.

Le modèle élémentaire invoque un point de type 'M' (produisant une position en sortie en fonction d'une force en entrée, voir le chapitre I), et des modules d'interaction visco-élastique servant à connecter celui-ci aux composants du modèle du véhicule. La structure formée de ces composants élémentaires va permettre de définir des objectifs spatiaux simples pour le véhicule. En plaçant une

cible physique en un point prédéterminé, nous pouvons forcer le véhicule à rejoindre l'emplacement correspondant avec une vitesse et une précision dépendant des paramètres de l'interaction avec la cible. Les actions de plusieurs cibles placées dans une même scène peuvent aisément être 'composées' par un mécanisme du type automate d'état fini, en tenant compte à la fois d'un séquençage temporel prédéfini et de l'état dynamique du véhicule.

Les cibles physiques, utilisées en combinaison avec un canal de trajectoire virtuel formé d'obstacles généralisés, permet d'obtenir une trajectoire 'physiquement' praticable et sans collision entre la position initiale du véhicule et l'objectif spatial à atteindre ; cette trajectoire, étant générée par simulation du système physique [véhicule + environnement + structure de contrôle], tient compte des propriétés dynamiques de la scène.

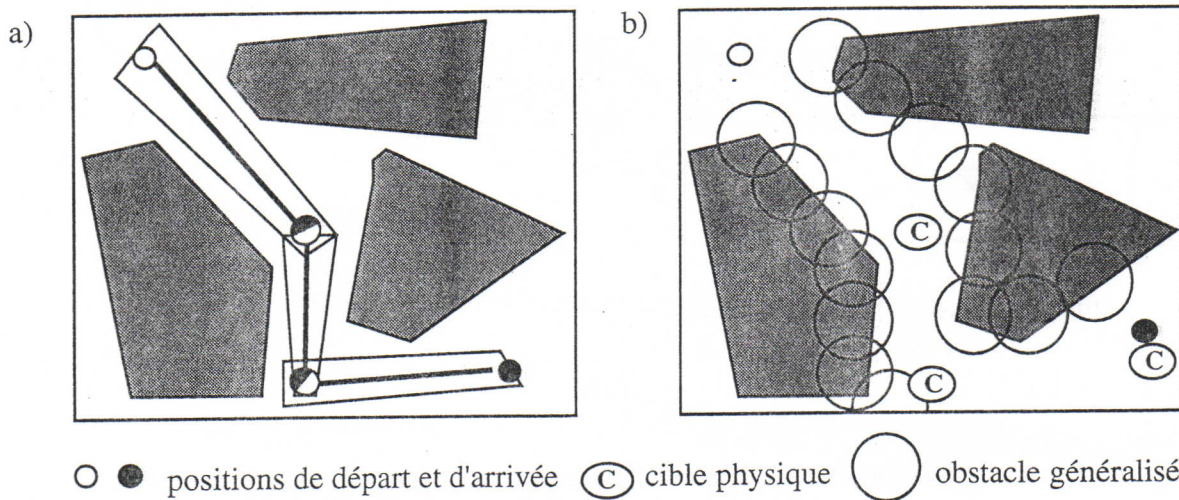


Figure 14 : a) plan d'action pour le parcours de la trajectoire; b) matérialisation de ce plan sous forme d'une combinaison de cibles physiques et d'obstacles généralisés.

Dans la mesure où elles sont représentées comme des objets physiques, nos cibles ont la capacité de se mouvoir au même titre que le véhicule. Ainsi, elles peuvent être utilisées pour guider directement le véhicule lors de manoeuvres, ou encore pour évaluer les effets de modifications locales de la stratégie de progression, en cours de simulation.

Pour certaines situations particulièrement délicates, où un contrôle extrêmement fin devient nécessaire, il sera particulièrement efficace de manipuler directement la ou les cibles en utilisant un transducteur gestuel rétroactif (une simple souris, ou même une 'spaceball', ne permettrait pas d'exploiter la richesse de l'information fournie par la simulation physique).

C. Génération et contrôle du mouvement pour un engin plan quasi rigide articulé

Nous avons exploité les modèles définis à partir des notions d'obstacle généralisé et de cible physique pour générer et contrôler les mouvements d'une structure 'vermiforme' dans des passages particulièrement exigus ; les diverses expérimentations correspondant à cette situation

ont été rapportées dans plusieurs communications (en animation par ordinateur [JLR91], et en robotique [JLL91a-b, LJL93]).

L'engin que nous avons modélisé est plan. Il se présente sous la forme d'une structure articulée formée de cinq segments quasi rigides. Le nombre de degrés de liberté de cette structure (mis à part les légères déformations de chaque segment) est de 7 : 2 DDL en translation, 1 DDL en rotation (le mouvement se réalise dans le plan XY), et 4 DDL dus aux articulations entre les segments (figure 15 et 16). Il est déjà impensable de maîtriser les mouvements d'un tel engin en contrôlant séparément chacun de ses degrés de liberté.

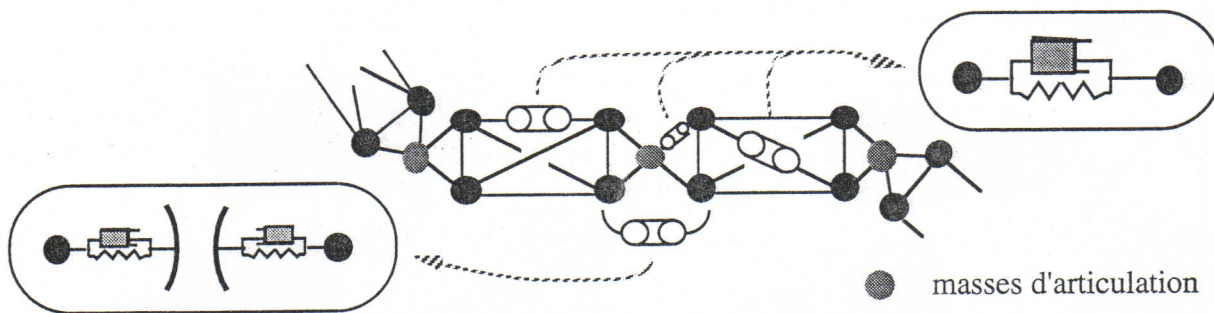


Figure 15 : Modèle de la structure plane articulée (cinq segments)

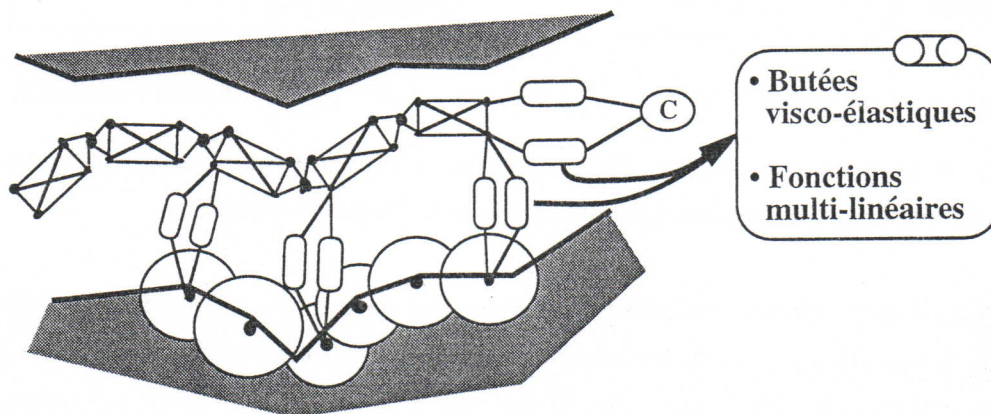


Figure 16 : interactions entre le véhicule articulé et la structure de contrôle
(cibles physiques et obstacles généralisés)

L'espace d'évolution de notre engin est fortement encombré d'obstacle avec lesquels il ne doit pas entrer en collision ; ces obstacles forment un couloir étroit et tortueux au travers duquel le véhicule doit se faufiler. Nous avons construit, à partir de plusieurs versions de cet environnement, les structures de contrôle correspondantes en appliquant les concepts introduits au paragraphe précédent. Le couloir rocheux est ainsi entièrement remplacé, pour toutes les interactions avec le véhicule, par une enveloppe virtuelle interdisant toute collision. Enfin, le mouvement de l'engin 'vermiforme' est obtenu par l'intermédiaire de cibles physiques agissant comme des treuils (figure

VII. CONCLUSION

Le système Cordis-Anima constitue à la fois un formalisme général pour la représentation modulaire d'objets physiques, et les principes pour la simulation en temps réel de ces objets. Il est le cadre formel dans lequel l'ensemble des modèles et des expérimentations présentés dans cette deuxième partie ont été développés.

Ces modèles couvrent une très large variété de structures d'objet et de phénomènes physiques, qui, on s'en aperçoit à la lecture de l'état de l'art présenté dans la première partie de ce document, sont très peu représentés dans les travaux existants et jamais dans une approche unifiée.

J'ai proposé, à travers les notions de *billes* et d'*agglomérat*, des modèles de matériaux élastiquement déformables et plastiquement déformables (par fluage), non homogènes et non isotropes et capables de fractures et de recollage. Ces modèles d'objets volumiques déformables sont associés à un principe d'économie dans la représentation des objets structurés.

Un modèle permettant le calcul des interactions de surface entre objets déformables quelconques selon le principe du frottement solide a également été proposé. Le mécanisme à partir duquel il est conçu autorise l'extension immédiate à d'autres catégories d'interactions complexes, telle que celle existant entre des skis fartés et un sol enneigé par exemple.

Des modèles de comportement complexe de la matière, tels que l'élasto-visco-plasticité ('matériau de Bingham), la visco-élasticité fluide (matériau de Maxwell), ou un exemple de composé élasto-visqueux complexes (matériau 'burger') ont été développés à partir des études rhéologiques existantes, et ont permis de représenter des objets structurés présentant des propriétés globales particulières telles que l'incompressibilité et l'écrasement.

Enfin, des solutions aux problèmes de la représentation de structures quasi rigides articulées et de la génération et du contrôle du mouvement ont été élaborées, à la fois dans le cadre de la simulation temps réel et de la manipulation gestuelle retroactive et dans celui du contrôle moteur. L'ensemble de ces modèles a permis la simulation de scènes complexes et variées faisant cohabiter différents types d'objets, comme par exemple des véhicules articulés en progression sur des sols déformables.

Ce travail est en soit une illustration de la richesse des concepts attachés au modéleur-simulateur Cordis-Anima. Je pense avoir concrètement montré que le choix d'une représentation structurelle discrète, basée sur l'assemblage de primitives physiques élémentaires, conduit à des solutions pertinentes pour l'ensemble des problèmes que pose aujourd'hui l'Animation par modèle physique.

D'autre part, les résultats théoriques et expérimentaux obtenus dans le cadre de ce travail de thèse ont constitué un terrain fertile pour le développement de nombreux sujets d'études tels que la

représentation et la simulation de matériaux granulaires (comme les sables), l'exécution simulée de robots mobiles en évolution sur des terrains naturels et la planification des mouvements de ces engins, ainsi que d'autres qui restent à formaliser ...

ANNEXE A :

LA MÉCANIQUE 'LAGRANGIENNE'

A. Introduction

Les principes fondamentaux de la dynamique, bien qu'ils soient valables pour tous les corps, peuvent se formuler de différentes façons. Selon la nature des hypothèses que l'on fait sur les systèmes étudiés (rigides, déformables, linéaires ou non, dissipatifs ou conservatifs, etc...), et selon ce que l'on cherche à déterminer parmi les grandeurs décrivant l'état du système (positions et vitesses ou forces et contraintes en jeu dans une configuration précise et à un instant donné, ou encore état d'équilibre du système à partir d'un jeu de conditions initiales), il va être plus intéressant d'exploiter l'une ou l'autre de ces formulations. Nous voulons tenter d'illustrer ici ce que représentent les formulations qui sont basées sur les 'grandeurs énergétiques' associées au système étudié (l'énergie cinétique, l'énergie mécanique, c'est-à-dire le travail, et l'énergie potentielle), et qui relèvent d'une schématisation des efforts, à partir de la notion de puissance (ou de travail), par opposition à celle de champ de force (laquelle est une généralisation de la notion de force ponctuelle) [Ger73]. On parle la plupart du temps, pour un problème formulé en ces termes, d'équation Lagrangienne du mouvement (du mathématicien Louis de Lagrange 1736-1813). Lagrange a contribué au développement de formulations mathématiques permettant la schématisation et la résolution efficace d'une vaste catégorie de problèmes extrêmement lourds et difficiles à aborder avec une formulation à base de forces et de points matériels, à une époque où le calculateur numérique n'était même pas imaginable.

B. Formulations à partir de la notion de force

Nous introduisons brièvement, en guise de préambule, les formulations obtenues à partir de la notion de force. Toutes ces formulations dérivent des trois lois fondamentales de la mécanique introduite par Newton au XVII^{ème} siècle.

- Conservation de la quantité de mouvement, ou loi d'inertie (il s'agit là d'une version moderne, la loi de Newton ne parlant que de vitesse constante pour une particule libre) :

pour un système isolé,
$$\vec{P} = m \cdot \vec{V} = \text{constante}$$

où \vec{V} est la vitesse du centre d'inertie du système, et m sa masse totale.

- Notion de force (il s'agit plus d'une définition que d'une loi) :
$$\vec{F} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial (m \cdot \vec{V})}{\partial t}$$

si de plus on suppose $m(t) = \text{constante}$,
$$\vec{F} = m \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = m \cdot \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2}$$

où \vec{X} est la position du centre d'inertie du système.

- Loi de l'action et de la réaction:

Quand deux particules sont en interaction, la force qui s'exerce sur l'une est égale et opposée à la force qui s'exerce sur l'autre :

$$\vec{F}_{P_1 \rightarrow P_2} = -\vec{F}_{P_2 \rightarrow P_1}$$

Nous avons écrit ci-dessus une expression générale des lois de la mécanique telles qu'elles ont été élaborées par Newton dans le cadre de l'étude des systèmes de particules (ou points matériels). L'expression des équations gouvernant le mouvement qui en découlent va être différente selon que l'on s'intéresse à des systèmes de particules, ou à des domaines continus.

L'expression de la deuxième loi, pour une particule évoluant dans un espace euclidien tridimensionnel et dont la position est repérée par le vecteur \vec{M} , donne le classique système de trois équations :

$$\sum F_x = m \cdot \frac{\partial^2 M_x}{\partial t^2}, \quad \sum F_y = m \cdot \frac{\partial^2 M_y}{\partial t^2}, \quad \sum F_z = m \cdot \frac{\partial^2 M_z}{\partial t^2}$$

où $\sum \vec{F}$ est la résultante des forces appliquées à la particule, et m est sa masse.

Dans le cas d'un domaine continu, on trouve les théorèmes généraux (théorèmes des résultantes et des moments dynamiques), dont une formulation générale est :

$$\int_{\Sigma} \vec{F}_e dV = \int_{\Sigma} \vec{\Gamma} dm \quad \text{et} \quad \int_{\Sigma} \vec{OM} \wedge \vec{F}_e dV = \int_{\Sigma} \vec{OM} \wedge \vec{\Gamma} dm$$

où dV est une mesure du volume, dm une mesure de la masse volumique, F_e est la résultante des actions (forces et moments) extérieures appliquées au système Σ , et Γ est le champ d'accélération du système.

Ces expressions résultent de l'introduction d'un repère lié au corps étudié, d'une matrice de passage dans un repère fixe (euclidien), et de champs de vecteurs pour les vitesses et les accélérations [Ger73]. Le terme de droite de la première équation est appelé résultante du *torseur*

distributeur des accélérations (ou *torseur dynamique*), noté $(\rho \cdot \vec{\Gamma})$. On définit de manière similaire un *torseur cinétique* noté $(\rho \cdot \vec{V})$.

Dans le cadre de l'étude des corps ne possédant que trois degrés de liberté en translation (mouvement linéaire) et trois en rotation (mouvement angulaire), comme c'est le cas pour les systèmes de solides parfaitement rigides, ces expressions peuvent se simplifier sous la forme :

$$\text{(Forces)} \quad \sum \vec{F}_e = M \cdot \vec{\Gamma}_G \quad \text{et} \quad \text{(Moments)} \quad \sum \vec{N} = I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

où ω est la vitesse angulaire et I le moment d'inertie du solide ; Γ_G est l'accélération de son centre d'inertie.

C. Formulations Énergétiques [Bam81]

C.1 Présentation générale

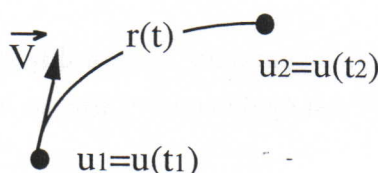
A l'opposé des formulations précédentes, qui aboutissent à des équations du mouvement reliant les variables duales, force et position (ou moment et position angulaire), se trouvent des formulations mettant en jeu les grandeurs énergétiques.

Les méthodes 'énergétiques' sont basées sur une schématisation des efforts différente de la notion de force. Le principe de cette approche est très intuitif, contrairement à ce que pourrait faire penser la lourdeur des outils mathématiques mis en jeu. Il s'agit en fait de déterminer les champs d'action (de force et de moment) à partir des énergies mises en jeu lors du mouvement des corps. Cette démarche correspond à une attitude naturelle pour l'homme : on soupèse l'objet dont on veut connaître le poids, on presse le ballon dont on cherche la pression et on appuie sur la courroie pour en connaître la tension. C'est l'idée contenue dans l'approche aboutissant à l'écriture du Principe des Travaux Virtuels (P.T.V.) qui introduit les notions de mouvement virtuel et de travail virtuel.

Lorsque l'on s'intéresse aux mouvements macroscopiques, on néglige la plupart du temps les énergies calorifiques ou électromagnétiques pour ne s'intéresser qu'aux énergies mécaniques.

On va donc s'attacher à l'écriture d'équations permettant d'exprimer l'énergie mécanique (le travail) mise en jeu par une force donnée, au cours d'un déplacement donné, en fonction de la vitesse du corps et des actions (forces et moment) qui lui sont appliquées :

- Dans le cas d'une particule (3 degrés de liberté) soumise à une force (ponctuelle) F , l'énergie mécanique mise en jeu lors d'un déplacement du point u_1 au point u_2 , avec la vitesse v et pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ s'écrit :



$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{V} dt = \int_{u_1}^{u_2} \vec{F} dr$$

• Dans le cas d'un corps continu Σ , on postule qu'il existe un champ de vecteurs Φ (appelé champ d'action), et une mesure μ sur Σ , tels que:

$$W_{\Phi} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} \overrightarrow{\Phi}(t) \cdot \overrightarrow{V}(t) d\mu = \int_{u_1}^{u_2} du \int_{\Sigma} \overrightarrow{\Phi}(t) \cdot \overrightarrow{V}(t) d\mu$$

Classiquement, on distingue pour un système Σ :

- les actions d'Inertie qui sont liées à l'énergie cinétique, et le travail associé W_j . Le champ des actions d'inertie est par définition $-\rho \cdot \Gamma$ (densité de masse * accélération).
- les actions Externes qui sont liées aux échanges d'énergie avec l'extérieur, et le travail associé W_e .
- les actions Internes qui sont liées aux énergies mises en jeu dans les déformations, et le travail associé W_i (l'opposé de W_i est W_{def} que l'on appelle le travail de déformation).

Un *déplacement virtuel* associe une trajectoire (i.e. un arc de courbe) potentielle à chacune des particules du système Σ . Le déplacement virtuel de la particule π est:

$$M : u \mapsto M_{\pi}(u)$$

On définit également le taux de déplacement (la vitesse) associé:

$$\overrightarrow{\delta M} = \left. \frac{dM}{du} \right|_{u=0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \overrightarrow{M(0)M(u)}$$

Ce déplacement virtuel permet de calculer le *travail virtuel* associé au champ d'action Φ dans le déplacement $M(t)$, et le taux de travail associé (défini comme ci-dessus) :

$$W_{\Phi} = \int_{u_1}^{u_2} du \int_{\Sigma} \overrightarrow{\Phi}(M,t) \cdot \frac{dM}{du}(u) d\mu \quad \text{et} \quad \delta W_{\Phi} = \int_{\Sigma} \overrightarrow{\Phi}(M,t) \cdot \overrightarrow{\delta M} d\mu$$

δW_{Φ} correspond à la 'puissance' de Φ dans le déplacement virtuel δM .

Le P.T.V. permet alors d'écrire les équations du mouvement sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \forall \text{ déplacement virtuel } \delta q, \text{ on a} & \quad \delta W = 0 \\ \text{c'est-à-dire} & \quad \delta W_e + \delta W_j + \delta W_i = 0, \end{aligned}$$

Note:

- Il est démontré que le P.T.V. est équivalent aux théorèmes généraux, c'est-à-dire que pour un système donné vérifiant les théorèmes généraux, le P.T.V est également vérifié, et inversement [Bam81].

- L'application du P.T.V. dans le mouvement réel (qui est ici un mouvement virtuel particulier) permet de ré-exprimer le principe de la conservation de l'énergie :

Le P.T.V. dans le mouvement réel s'écrit : $dW_j + dW_i + dW_e = 0$

$$\text{D'autre part,} \quad dW_j = - \int_{\Sigma} \vec{\Gamma}(P) \cdot d\vec{P} \, dm = - \int_{\Sigma} \vec{\Gamma}(P) \cdot \vec{V}(P) \, dm \, dt = - dE_{\text{ciné}}$$

$$\text{et} \quad dW_i = - dW_{\text{def}} \text{ (par définition),}$$

$$\text{d'où,} \quad dE_{\text{ciné}} + dW_{\text{def}} = dW_e$$

ce qui se lit : *l'énergie apportée par l'extérieur (travail des actions extérieures) est égale à la somme de la variation de l'énergie cinétique et de l'énergie de déformation*, et traduit le bilan énergétique du système Σ .

- Dans le cas d'une particule, le P.T.V. conduit à la même expression pour les équations du mouvement que les théorèmes généraux. En effet, les actions de déformations n'existent pas et les actions extérieures se réduisent aux forces extérieures (il n'y a pas de moments puisque l'on ne considère que trois DDL) :

$$E_{\text{ciné}} = \frac{1}{2} m \cdot V^2, \text{ donc } dE_{\text{ciné}} = m \cdot V \cdot \Gamma \, dt, \text{ et d'autre part } dW_e = (\sum F) \cdot V \, dt$$

$$\text{d'où, } \sum F = m \cdot \Gamma$$

Le P.T.V. tel que nous l'avons formulé s'applique à tout système dynamique, qu'il soit composé de solides rigides ou déformables. Dans le cas des solides déformables, il est nécessaire, pour mettre le système dynamique étudié en équation (c'est-à-dire pour donner une expression des différents travaux virtuels permettant de résoudre le système), de faire intervenir les notions de déformation (en introduisant le 'tenseur des déformations' qui permet d'exprimer des déplacements virtuels ne respectant pas l'indéformabilité) et de contrainte (en introduisant le 'tenseur de contrainte', qui correspond aux actions de déformation et permet, avec le tenseur des déformations, d'exprimer le travail de déformation : $W_{\text{def}} = -W_i$), et enfin la notion de force de surface (afin d'exprimer le travail des actions extérieures de contact). Les actions extérieures à distance (gravité, etc ...) et les actions d'inertie ($-\rho \cdot \vec{\Gamma}$) restent les mêmes que dans le cas des solides rigides. L'expression du travail des actions d'inertie doit en revanche tenir compte du fait que la masse volumique (c'est-à-dire la répartition de masse) n'est plus indépendante du temps. Le système d'équation auquel on aboutit dans le cas déformable se décompose en équations principales et en équations sur le bord (c'est-à-dire de surface), également appelées conditions aux limites. Nous ne détaillerons pas ici les formes que peut prendre ce système, mais précisons simplement qu'elles dépendent fortement de la nature de l'objet étudié, c'est à dire du matériau dont il est fait. Nous ne parlerons pas non plus des outils et méthodes nécessaires pour la mise en

équation et pour la résolution. Les lecteurs intéressés peuvent se reporter aux ouvrages de Ciarlet [Cia85], de Le Tallec [Tal90] et au tome II de l'ouvrage de Bamberger [Bam81] pour un exposé du modèle mathématique de l'élasticité tridimensionnelle (qui permet d'exprimer les relations nécessaires entre l'énergie de déformation et les forces extérieures), et à [Zie79] pour une présentation de la technique de discrétisation par éléments finis et des méthodes de résolution numérique associées (formulation variationnelle, schéma d'intégration numérique et assemblage des matrices élémentaires).

En pratique ce type de formulation est très peu employé, et toujours sous une forme très simplifiée, dans le cadre de l'animation par ordinateur. On ne trouve que les modèles des matériaux les plus simples (visco-élasticité uniforme et isotrope), tandis que le système d'équation est plus volontiers discrétisé à l'aide d'un schéma de différences finies spatiales qu'en appliquant complètement la méthode des éléments finis (voir [TPBF87]).

C.2 Le cas des solides rigides articulés

Un solide 'parfaitement rigide' est un système Σ de particules pour lequel on suppose que la distance entre deux particules π et π' de Σ reste constante quelque soient les forces qui lui sont appliquées (les mouvements correspondants sont dits 'rigidifiants'). Les relations générales que nous avons vu ci-dessus peuvent être notablement simplifiées lorsque l'on adopte cette hypothèse. Quelques définitions permettent de saisir rapidement comment l'approximation des systèmes dynamiques par des systèmes indéformables permet de simplifier le problème du mouvement [Bam81].

Paramétrage

Paramétrer un système de solides consiste à associer à toutes positions du système une famille q de nombres réels appelés 'Paramètres' ou 'Coordonnées Généralisées'. A deux positions différentes doivent correspondre deux familles distinctes.

L'étude du paramétrage permet de prendre en compte les entraves aux mouvements relatifs des solides dues à leurs contacts, appelés ici liaisons. Les liaisons s'expriment comme des relations entre les paramètres du système, qui permettent par la suite de réduire le paramétrage. Pour un système de solides à n degrés de liberté, paramétré par (q_1, q_2, \dots, q_n) et astreint à p ($p < n$) liaisons indépendantes entre elles, les n paramètres q_i peuvent être exprimés à l'aide de $n-p$ nouveaux paramètres q_j . Ainsi, dans le cas du bi-pendule représenté sur la figure A.1 par exemple, on pourra passer du paramétrage (X_1, X_2, Y_1, Y_2) , à (θ_1, θ_2) .

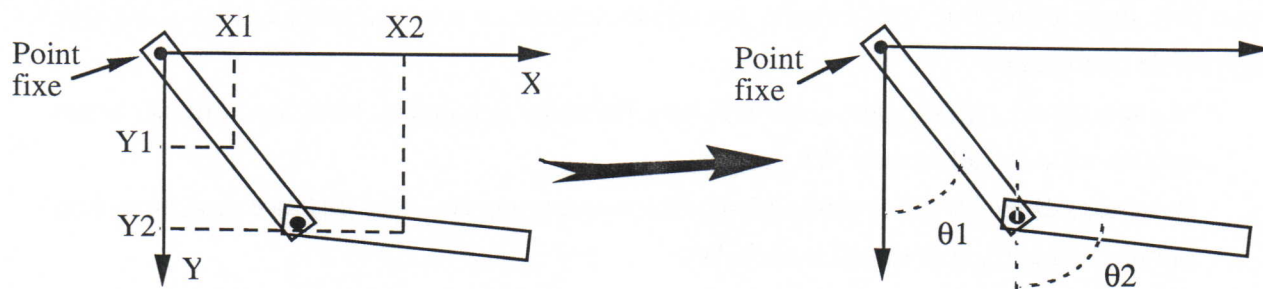


Figure A.1 : réduction du paramétrage

On définit alors les notions d'espace de configuration et de paramétrages maximum et minimum :

Espace de configuration

Soit SO^3 le groupe des déplacements dans l'espace (translation + rotation) muni d'une structure d'espace vectoriel (et de variété différentiable) de dimension 6. Une position de référence q_0 d'un solide Σ étant choisie, l'ensemble des positions de Σ est en bijection avec le groupe des déplacements (à chaque position q de Σ correspond le déplacement nécessaire pour aller de q_0 à q). L'espace de configuration \mathfrak{E}_6 d'un solide est l'ensemble des positions que peut prendre le solide. Un paramétrage est un atlas de l'espace de configuration (c'est à dire une application de $\mathfrak{E}_6 \rightarrow \mathbb{R}^6$). La sous variété de \mathbb{R}^6 définie par le paramétrage est appelé espace des paramètres.

L'espace de configuration d'un système de k solides rigides astreint à p ($< 6.k$) liaisons indépendantes et holonomes (liaisons ne faisant pas intervenir les vitesses, mais uniquement des conditions géométriques de contact) est une sous variété de $\{\mathfrak{E}_6\}^k$ de dimension $r = 6.k - p$ (r est le nombre de degré de liberté du système), et notée $\{\mathfrak{E}_r\}$.

Paramétrage maximum et minimum

Pour un système de k solides (soumis à un nombre quelconque de liaisons), un paramétrage maximum, ou primitif, est un atlas $\{\mathfrak{E}_6\}^k$.

Pour un système de k solides soumis à p liaisons indépendantes entre elles, un paramétrage minimum, ou strict, est un atlas l'espace des configurations, c'est à dire de $\{\mathfrak{E}_r\}$, où $r = 6k - p$.

Soit Σ un système de solides rigides à n degrés de liberté associé au paramétrage $(q_i)_{i=1..n}$, on a :

$$\vec{\delta M} = \frac{d\vec{M}}{dq^i} \cdot \delta q^i \quad \text{et} \quad \delta W = \left(\int_{\Sigma} \vec{\Phi} \cdot \frac{d\vec{M}}{dq^i} d\mu \right) \cdot \delta q^i = r^i \cdot \delta q^i$$

où r^i est appelé 'action généralisée' du champ d'action Φ .

D'autre part, dans le cas d'un solide rigide, les actions internes n'intervenant pas, il est alors plus intéressant de distinguer:

- les actions de *Liaison* qui sont liées aux énergies échangées lors des contacts entre solides, et le travail associé W_l .
- les actions *Données* qui correspondent généralement aux actions à distance (e.g. attraction gravitationnelle), et le travail associé W_d .

Enfin pour un solide rigide associé au paramétrage $(q_i)_{i=1..n}$, le P.T.V. s'écrit:

$$\begin{aligned} \delta W_l + \delta W_j + \delta W_d &= 0 \\ \Rightarrow \forall \delta q, \quad (L_i + J_i + Q_i) \cdot \delta q^i &= 0, \end{aligned}$$

ce qui donne le système de n équations: $L_i + J_i + Q_i = 0 \quad \forall i=1..n.$

où les L_i sont appelées *actions de Liaison*, et correspondent à n inconnues, tandis que les J_i sont les *actions d'inertie* et les Q_i les *actions données*.

La mise en équation d'un système composé de k solides parfaitement rigides, associés au paramétrage (q_1, q_2, \dots, q_n) et dont les mouvement relatifs sont tels que ces paramètres sont astreints à respecter (p) *liaisons holonomes* (indépendantes des vitesses : $f_h(q,t)=0$), et (p') *liaisons non holonomes* (ou *cinématiques*, c'est à dire dépendantes des vitesses : $g_l(q,dq/dt,t)=0$), doit permettre de déterminer les valeurs $q^i(t)$ de chacun des paramètres en fonction du temps. Pour résoudre le problème du mouvement, il faut expliciter chacune des grandeurs présentes dans le système d'équations obtenu à l'aide du P.T.V. :

- Les actions données (c'est-à-dire connues) sont définies par les n actions généralisées Q_i :

$$Q_i = Q_i[q(t), \dot{q}(t), t]$$

- Les actions d'inertie $J_i = J_i[q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), t]$ sont calculées à partir de l'énergie cinétique en appliquant les formules de Lagrange:

$$J_i = - \frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial E_c}{\partial q^i}$$

- L'existence de liaisons entre les solides introduit n actions de liaison qui sont des inconnues supplémentaires : les $L_i(t)$.

Les équations du mouvement sont donc : $-\frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial E_c}{\partial q^i} + L_i + Q_i = 0 \quad \forall i=1..n$

Note: Principe de Moindre Action (ou de Hamilton)

Il faut noter que dans le cas d'un système dit 'conservatif', c'est à dire ne présentant que des liaisons holonomes et dont les actions intérieures et extérieures dérivent d'un potentiel, les équations du mouvement que nous venons d'écrire se ramènent à :

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad \forall i=1 \dots n \quad \text{où } L = E_c - \Omega$$

Ces équations, plus connues sous le nom d'équations de Lagrange (L est appelé le Lagrangien du système), sont celles permettant de résoudre le problème de stationnarité de l'intégrale de L qui correspond à l'application du principe de moindre action. Selon ce principe, tout système mécanique est entièrement caractérisé par une fonction du type :

$$L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$$

et se déplace entre deux instants t_1 et t_2 (déplacements supposés petits) de telle façon que la valeur de l'intégrale :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

soit minimum. Les équations de Lagrange sont les équations différentielles dont la solution L fournit la valeur minimum pour cette intégrale [LL69].

C'est sous cette forme (éventuellement augmentée d'un terme de dissipation $-\partial \mathcal{D} / \partial \dot{q}^i$) qu'on les retrouve le plus souvent en simulation pour l'animation, et notamment dans le cas des objets déformables (voir [TPBF87]).

Le P.T.V. permet donc d'aboutir au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial E_c}{\partial q^i} + L_i + Q_i &= 0 \quad \forall i=1 \dots n \\ f_h(q, t) &= 0 \\ gl(q, dq/dt, t) &= 0 \end{aligned}$$

Les inconnues à déterminer sont les q_i et les L_i , ces dernières étant introduite par la présence des liaisons entre solides, ce qui fait $2n$ inconnues, pour $n+p+p'$ équations.

Liaisons parfaites, indépendantes et holonomes

Le problème du mouvement, tel qu'il est formulé ici, n'est donc en général pas entièrement déterminé, c'est à dire qu'il est nécessaire d'introduire des relations supplémentaires qui correspondent à une schématisation physique du comportement des liaisons (liaisons élastiques, avec frottement visqueux ou frottement sec). Cependant, si l'on décide de schématiser les contacts entre solides par des liaisons parfaites et indépendantes entre elles, le mouvement peut être directement calculé à partir du système d'équations ci-dessus. Une liaison parfaite est une liaison pour laquelle le travail est nul dans les déplacements 'licites', c'est-à-dire ceux qui respectent la liaison. L'unique travail produit par une liaison parfaite est donc celui correspondant à l'action nécessaire au respect de la liaison (notée L) ; la vitesse correspondante est nulle puisqu'il n'y a pas de déplacement (par définition les seuls mouvements possibles sont ceux autorisés par la liaison). On a donc $W_l = L \cdot V = 0$.

Lorsque l'on s'intéresse à un système de k solides soumis uniquement à p liaisons holonomes, parfaites et indépendantes, on pourra de plus réduire le paramétrage initial q à un paramétrage strict q' . Une fois que l'on s'est muni d'un tel paramétrage, tous les déplacements, et donc tous les déplacements virtuels, sont licites et l'on peut alors écrire :

$$\forall \partial q' \quad \partial W_1 = 0$$

Et le P.T.V. devient :

$$\begin{aligned} \forall \partial q' \quad \partial W_j + \partial W_d &= 0 \\ \Rightarrow \forall \partial q' \quad (Q'_i + J'_i) \cdot \partial q'_i &= 0 \end{aligned}$$

d'où l'on obtient les $r = 6k - p$ équations suivantes pour r inconnues :

$$Q'_i + J'_i = 0$$

Dans ce cas particulier, les actions généralisées de liaison n'interviennent donc pas dans les équations du mouvement.

Liaisons parfaites, indépendantes et non holonomes

Dans le cas d'un système soumis à des liaisons non holonomes (mais toujours parfaites et indépendantes), il n'existe pas de paramétrage strict. Il est alors nécessaire d'introduire des relations permettant d'exprimer les actions généralisées de liaison, c'est-à-dire d'exprimer les L_i que l'on ne peut éliminer du système d'équation. Nous présentons ici deux méthodes permettant d'obtenir ces expressions : la méthode des 'multiplicateurs de Lagrange' et une méthode de pénalité.

Soit un système Σ de k solides rigides soumis à p liaisons holonomes et p' liaisons non-holonomes, et paramétré par (q_1, q_2, \dots, q_n) .

Les liaisons holonomes correspondent aux p relations : $f_h(q,t)=0$.

Les liaisons non holonomes correspondent aux p' relations $g_l(q,\dot{q},t)$, que l'on réécrit :

$$g_{li}(q,\dot{q},t) = a_{li}(q,t) \cdot \dot{q}_i + b_l(q,t)$$

Voici les expressions obtenues pour les L_i avec la méthode dite des 'multiplicateurs de Lagrange' [Bam81], qui ne cherche de solution que parmi les déplacements relatifs des corps se faisant sur les degrés de liberté non contraints par les liaisons (caractère licite des déplacements) :

$$L_i = \lambda^h \cdot \frac{\partial f^h}{\partial q^i} + \mu^l \cdot a_{li}$$

où les λ^h et les μ^l sont $p+p'$ inconnues supplémentaires, les multiplicateurs de Lagrange, cette méthode amène à résoudre le système suivant :

$$\begin{array}{l}
 n \text{ équations dites de 'Lagrange'} \\
 p + p' \text{ équations de liaison}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 -\frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial E_c}{\partial q^i} + \lambda^h \cdot \frac{\partial f^h}{\partial q^i} + \mu^l \cdot a_{li} + Q_i = 0 \quad \forall i=1..n \\
 f_h(q,t)=0 \\
 a_{li}(q,t) \cdot \dot{q}_i + b_l(q,t)
 \end{array} \right.$$

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle débouche donc sur la résolution d'un système de $n+p+p'$ équations pour $n+p+p'$ inconnues alors que l'on ne s'intéresse finalement qu'aux n paramètres caractérisant la position du système. Ceci est d'autant plus pénalisant que le nombre d'équations supplémentaires dépend directement des liaisons définies dans le système.

Il existe d'autres méthodes qui vont permettre d'éviter cette multiplication des équations en construisant un système d'équations dont les solutions seront relativement proches de celles obtenues par la méthode des multiplicateurs. Ces méthodes sont dites de 'pénalité' (en angl. *penalty methods*), et consistent à exprimer les actions généralisées de liaison à l'aide de termes de pénalisation : les liaisons seront d'autant moins respectées que le terme de pénalisation sera faible. On peut faire une analogie entre la représentation implicitement induite par ces méthodes et une représentation des liaisons sous forme de micro-ressorts et de micro-amortisseurs.

Les méthodes dites de pénalisation fournissent les expressions suivantes pour le calcul des actions généralisées de liaisons :

$$L_i = \alpha \cdot \frac{\partial f^h}{\partial q^i} \cdot f^h + \alpha \cdot a_{li} \cdot g_l$$

où α est le nombre de pénalisation dont la valeur est choisie à l'avance.

Ce qui conduit à résoudre le système de n équations suivant:

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial E_c}{\partial q^i} + \alpha \cdot \frac{\partial f^h}{\partial q^i} \cdot f^h + \alpha \cdot a_{li} \cdot g_l + Q_i = 0 \quad \forall i=1..n$$

Enfin, rappelons que dans les deux cas, résolution par multiplicateurs ou avec des termes de pénalisation, les liaisons sont supposées parfaites. C'est-à-dire que les formulations utilisées prennent pour hypothèse que le travail des liaisons est nul. Si l'on veut alors représenter des liaisons élastiques ou dissipatives (frottements sec ou visqueux), les actions correspondantes devront être intégrées aux actions données et donc être calculées explicitement (micro-ressorts et micro-amortisseurs). Ceci est également vrai pour les chocs, qui doivent être traités dans cette approche sous forme de liaisons particulières introduites lors des contacts entre les corps.

Au stade où nous sommes parvenus, les solutions du système d'équation final peuvent être obtenues directement par les méthodes classiques de résolution des systèmes différentiels du

premier ordre (comme Runge-Kutta ou Adams-moulton, appelée aussi 'intégrateur'), en notant $q' = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ q \end{bmatrix}$ [Gea71].

On peut également réduire le système à un ensemble d'équations linéaires par une approximation des dérivées temporelles utilisant les différences finies (c'est-à-dire $dq/dt|_{t+\Delta t} = (q[t+\Delta t] - q[t]) / \Delta t$) [LT87], puis lui appliquer les méthodes de résolution linéaire (directes comme la décomposition 'LU' ou celle de Gauss, ou itératives comme les méthodes de relaxation ou de descente, Gauss-Seidel, gradient descendant, etc...). Le système linéaire obtenu pourra également être traité par des méthodes plus générales comme Newton-Raphson (appelée aussi méthode des sécantes et élaborée pour la résolution de problème du type $f(x)=0$), utilisée par exemple dans [Arn88] et [Dum90].

Il faut noter que toutes les techniques de résolution des systèmes différentiels introduisent implicitement une approximation des dérivations et qu'elles fournissent des solutions approchées et une mesure de l'écart avec les solutions vraies. Cela permet de gérer la précision requise dans la résolution sachant, bien sûr, qu'une solution plus précise implique des calculs plus longs.

Pour ce qui est des systèmes linéaires (obtenus donc en approchant les dérivées par différences finies), les méthodes directes permettent d'aboutir à des solutions exactes (lorsqu'elles existent) en un nombre fini d'opérations arithmétiques, mais sont souvent lourdes à mettre en oeuvre et entraînent des calculs coûteux. Leur défaut essentiel semble être une grande sensibilité vis à vis des représentations numériques (codage flottant), et elles sont donc peu utilisables avec l'ordinateur. Pour leur part, les méthodes itératives consistent par définition à générer une suite de termes convergeant vers la solution du système. Une mesure de la distance à la solution cherchée fournit alors un test d'arrêt des itérations. Elles permettent, selon la nature du problème à résoudre (c'est-à-dire des propriétés de la matrice du système d'équation), d'atteindre des solutions acceptables de manière beaucoup plus efficace que les méthodes directes. Elles sont en pratique intéressantes pour la mise en oeuvre d'une grande majorité des modèles mathématiques pour la physique, du moins lorsque la précision n'est pas le principal objectif [Mar80], et sont fréquemment utilisées en animation par ordinateur.

ANNEXE B :

MODÈLES D'OBJETS PLASTIQUES

Cette annexe présente les chronogrammes correspondant à la simulation de scènes planes¹ faisant intervenir quatre objets différents (deux objets obtenus à partir d'un maillage régulier : un cube et une barre, et deux objets composés d'agglomérats). Ces exemples sont destinés à illustrer les possibilités offertes par les modèles de comportement complexe de la matière décrits au chapitre V de la deuxième partie de ce document.

A. Les modèles

Chronogrammes 1 et 2 :

Ces deux scènes contiennent chacune un objet cubique plan (c'est-à-dire un carré !) formé d'un maillage régulier de masses ponctuelles ; les mouvements de l'objet sont limités par deux murs verticaux et par un sol, qui sont des surfaces quasi planes et quasi rigides². Le carré est en interaction avec le sol selon le modèle de frottement sec que nous avons décrit au chapitre IV. Le contour du carré est tracé en reliant entre elles les masses placées sur le pourtour, les positions des masses intérieures sont repérées par des points.

Le premier chronogramme présente une version compressible de cet objet (maillage uniquement formé de modules élasto-plastiques avec écrouissage, et présentant donc une déformation permanente), et le deuxième une version incompressible (c'est-à-dire présentant des déformations à volume constant, ou plutôt à surface constante puisqu'il s'agit d'un objet plan, ce qui est obtenu en rajoutant une interaction de non pénétration visco-élastique, qui confère la propriété d'exclusion

¹ Des simulations 2D sont suffisantes pour évaluer les possibilités d'un modèle et permettent un plus grand nombre d'expérimentations dans la mesure où elles impliquent une complexité réduite. L'équivalent, en 3D, d'un modèle bi-dimensionnel faisant intervenir n^2 composants de masse, en nécessite en général de l'ordre de n^3 (sans compter le nombre de liaisons correspondantes, qui double à peu près pour un maillage régulier et croît en (n^2) , où n est le nombre de composants de masse, pour un agglomérat).

² Le sol et les murs sont représentés par des modèles de type 'bille' (masse ponctuelle associée à une zone de non-pénétration visco-élastique, cf. le chapitre III de la deuxième partie). Les masses ponctuelles sont déclarées 'fixe' (c'est-à-dire de position constante) et placées à une grande distance du centre de la scène (sur l'axe OZ pour le sol, et sur l'axe OX pour les murs). Les surfaces obtenues sont donc légèrement courbe.

spatiale aux masses du modèle précédent). Dans les deux cas on se borne ici à laisser tomber le carré sur le sol.

Chronogrammes 3, 4 et 5 :

Dans ces trois scènes le carré repose sur le sol. Afin d'illustrer le comportements en déformation de cet objet, on laisse choir sur ce dernier une boule (qui est simplement représenté par un modèle de type 'bille') sous l'effet de la gravité. Un module d'interaction de surface de type frottement sec est placé entre chaque masse du carré et le sol, et de même avec la boule. Le chronogramme 3 présente la version compressible du modèle et le 4 la version incompressible. Le chronogramme 5 présente le même carré avec cette fois-ci des déformations à 'surface constante' (à périmètre constant en 2D), qui est obtenu en plaçant des modules élastiques (sans déformation permanente) entre les masses de la périphérie.

Mise à part les propriétés particulières de chacun des objets, ces trois scènes sont rigoureusement identiques (les conditions extérieures, de même que les positions et vitesses initiales sont les mêmes) ; les chronogrammes correspondant donnent une idée de la variété des comportements atteignables par ce type de modélisation.

Chronogrammes 6 et 7 :

La scène représentée dans le sixième et dans le septième chronogramme contient les mêmes murs et le même sol que les quatre scènes précédentes. On a de plus rajouté ici un obstacle fixe (modèle de type 'bille') sur lequel on laisse tomber une barre obtenue par un maillage comportant beaucoup moins de masses que celui du carré précédent. La barre porte uniquement des masses sur son pourtour, le contour est tracé en les reliant entre elles.

La barre du chronogramme 6 est un objet plastique compressible, tandis que celle du chronogramme 7 est incompressible (déformation à volume - surface en 2D - constant). On peut observer clairement ici aussi la différence entre les mouvements et les déformations obtenues.

Remarque :

Les différentes variétés de déformation plastique exprimés par les objets des scènes précédentes résultent d'une répartition judicieuse, dans la structure de l'objet, de modules autorisant une déformation permanente (modules élasto-plastiques), et d'autres l'interdisant (module visco-élastiques de type ressort ou butée). Des comportements intermédiaires peuvent également être obtenus en modulant les paramètres physiques des modèles, comme par exemple en utilisant des modules plastiques avec des seuils de plasticité et des pentes d'écrouissage de valeurs différentes en compression et en traction. La variété des comportements qu'il est possible d'obtenir dépend à la fois de la structure donnée à l'objet et de ses paramètres physiques.

Chronogramme 8 :

Dans les exemples précédents, les comportements plastiques étaient obtenus directement à partir d'un module simulant l'hystérésis en calculant un algorithme ad hoc (cf chapitre V de la deuxième partie). Il s'agit donc d'une orientation fonctionnelle de la modélisation qui permet de contrôler finement les phénomènes de déformation et d'érouissage. Comme nous l'avons déjà dit, ce type de déformation correspond à des matériaux cristallins (comme les métaux - le carré présente notamment des glissements de plan entier, qui sont caractéristiques de ce type de matériaux).

Ici la plasticité de l'objet est obtenue en définissant un morceau de matière, un agglomérat, pour lequel on a défini des propriétés de milieu (exclusion spatiale, fluage, cohésion relativement faible) à partir d'une fonction d'interaction mutuelle. Cet agglomérat est 'attaché' à un noyau parfaitement élastique (une zone d'attraction avec le 'derme' est définie autour du noyau). Les deux masses du noyau ne sont pas représentées sur le chronogramme, les masses du derme sont représentées par un cercle de la taille de la zone de non pénétration élastique qui leur est affectée.

Les déformations permanentes sont ici à surface constante (volume constant en 3D), puisque les composants du derme sont tous associés à un volume de non pénétration. Il est difficile de contrôler finement des propriétés de déformation particulières pour ce type de modèle, qui s'adresse plutôt à la représentation de matériaux présentant une faible permanence structurelle tels que les fluides ou les pâtes. Le comportement global de l'objet émerge de la multitude des comportements individuels des composants élémentaires.

Chronogramme 9 :

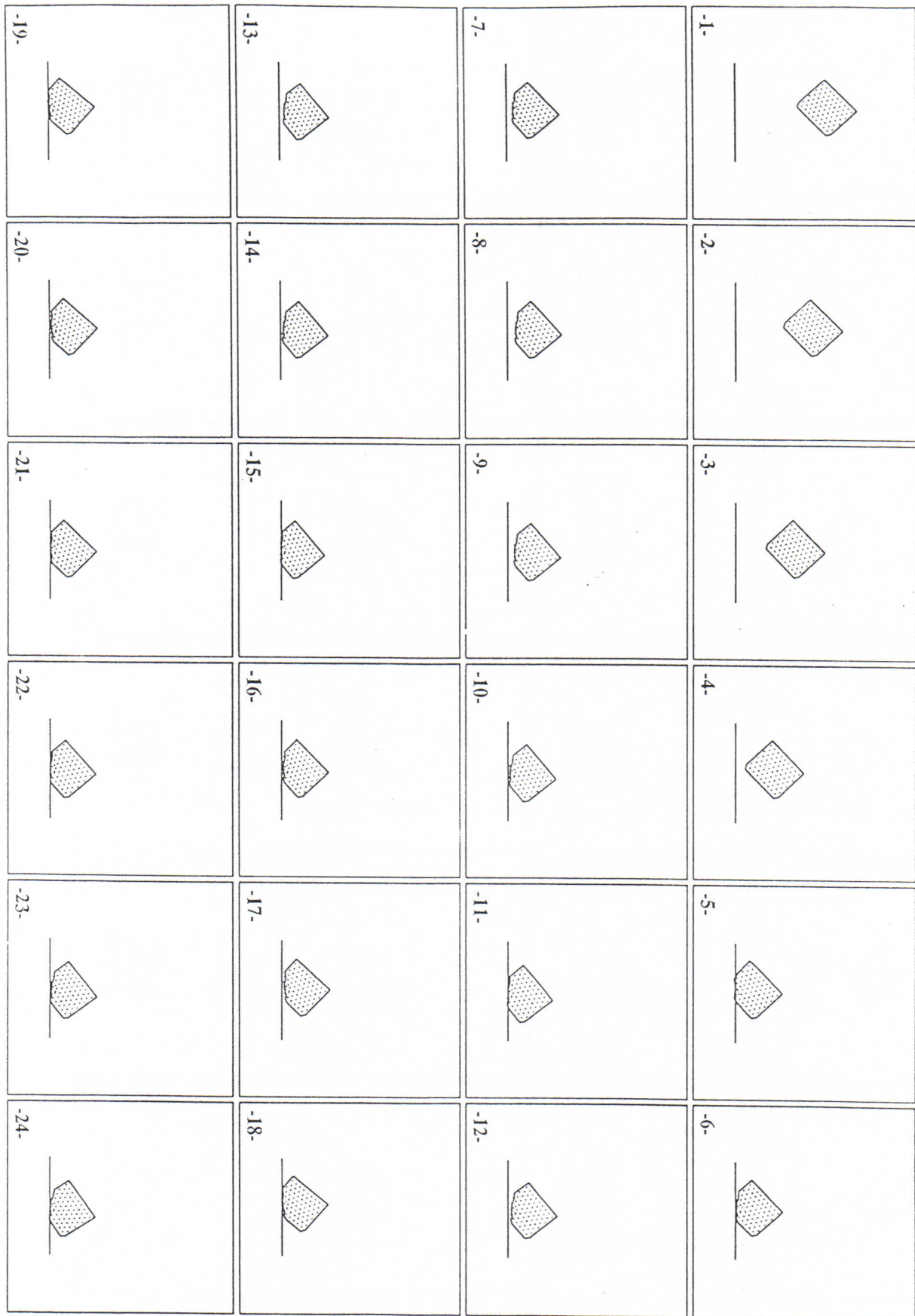
L'objet représenté ici possède une structure duale de la précédente : noyau plastique (comparable aux objets structurés des exemples 1 à 4) et derme élastique. Le noyau est composé de trois masses reliées entre elles par des modules de liaison élasto-plastiques avec érouissage, le derme est un agglomérat élastiquement lié au noyau et possédant une forte cohésion. Seule la position d'une des masses du noyau est repérée par une croix, ce qui permet de suivre les rotations de l'objet ; les masses du derme sont représentées par un cercle de la taille de la zone de non pénétration élastique qui leur est affectée.

Ce type de modèle permet un meilleur contrôle des propriétés globales de déformation à partir du noyau (déformations à surface ou volume constant, et propriétés de fracture : nombres de morceaux séparables, et sous quelle contrainte extérieure). L'objet modélisé ici présente également des propriétés de déformation locale non permanente, qui dépendent des paramètres associés au morceau de matière élastique (le 'derme') dont il est enrobé. Un tel objet possède, grâce au derme, une zone d'occupation spatiale, et pourra donc être mis en interaction avec n'importe quel autre élément dans la scène, contrairement aux structures telles que le cube ou la barre des précédents exemples (pour lesquels il n'y a pas de 'matière' entre deux masses du maillage).

Note :

Les simulations des scènes présentant les objets formés de maillage sont calculées avec une fréquence de 600 Hz, tandis que les agglomérats sont calculés à 300 Hz. Le choix d'une fréquence plus élevée pour les modèles de maillage est dû au fait que, ces modèles ne comportant aucun éléments pour assumer les déformations locales (tels que le derme des objets des scènes 5 et 6), j'ai voulu obtenir des collisions plus rigides.

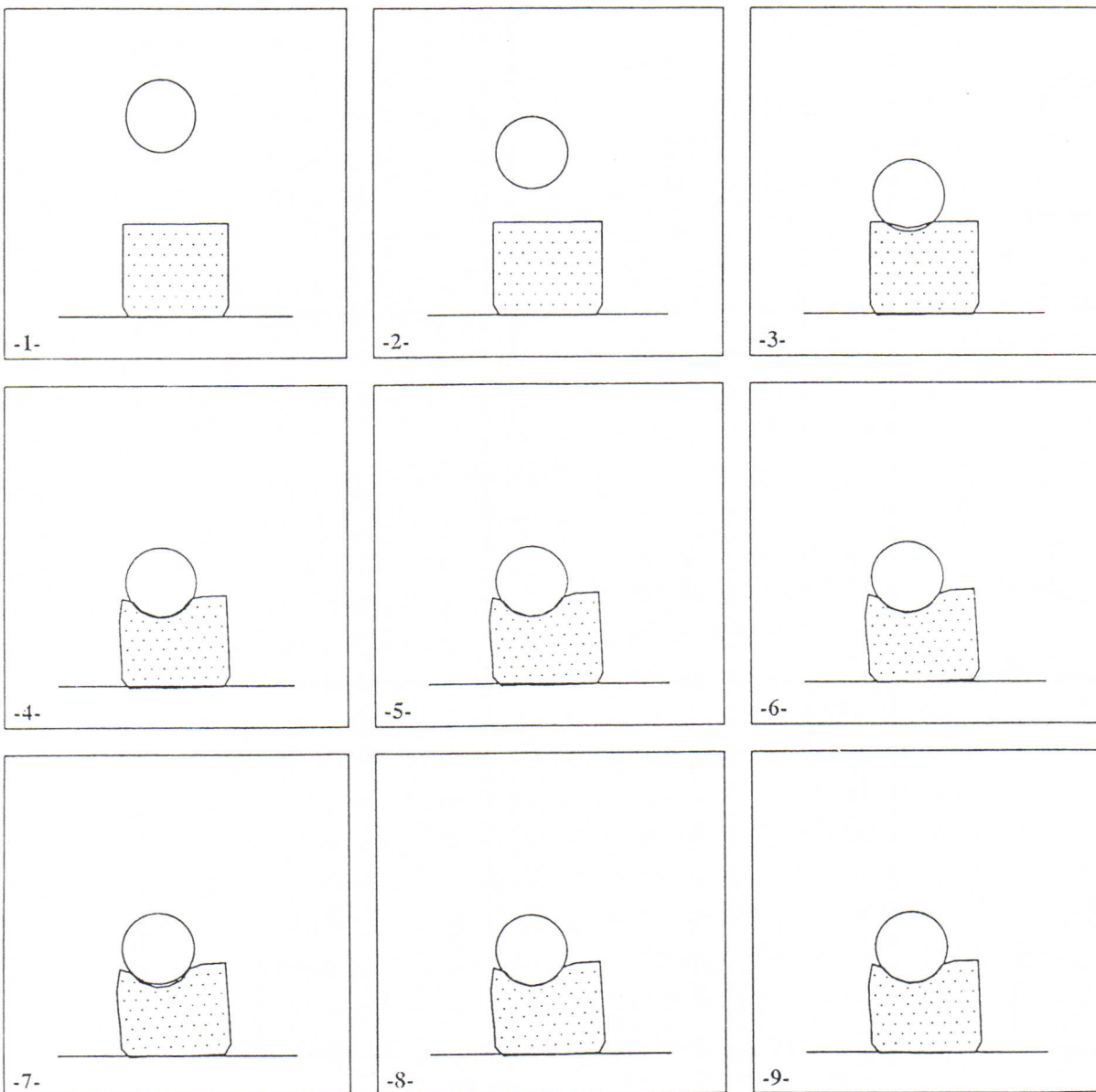
B. Chronogrammes



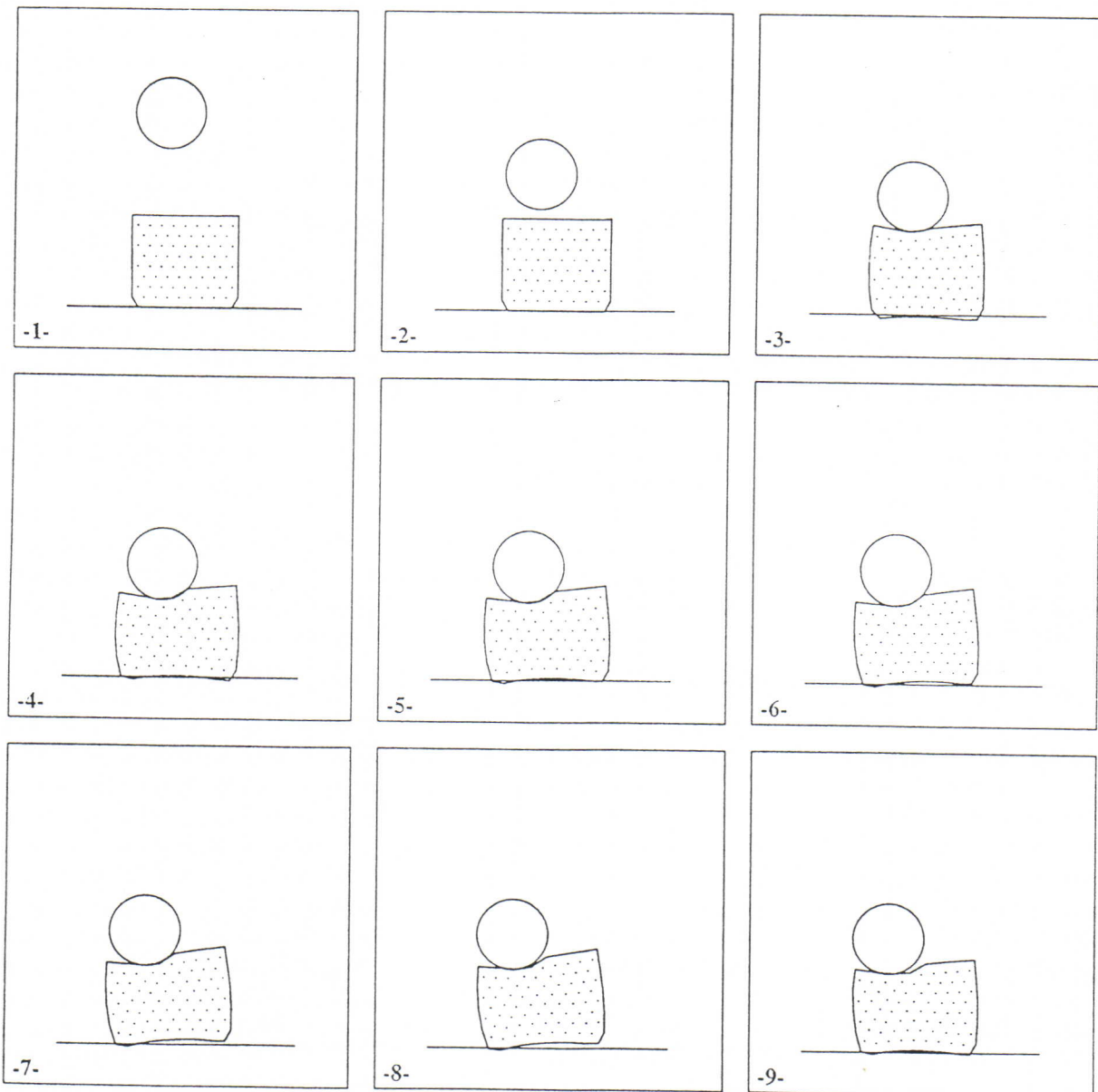
Chronogramme 1 : Carré plastique totalement compressible.



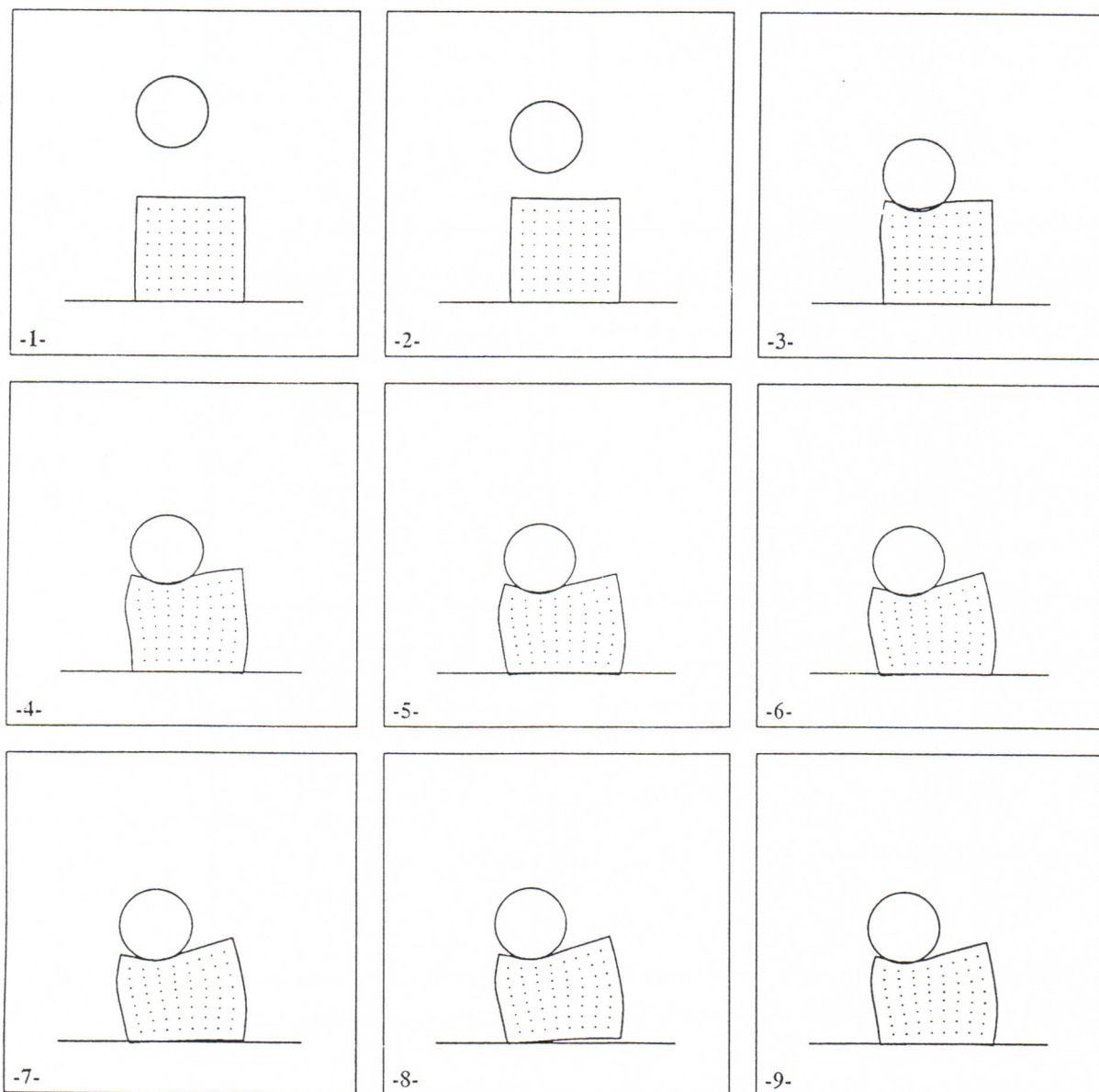
Chronogramme 2 : Carré plastique avec déformation à volume constant (surface en 2D).



Chronogramme 3 : Carré plastique totalement compressible.



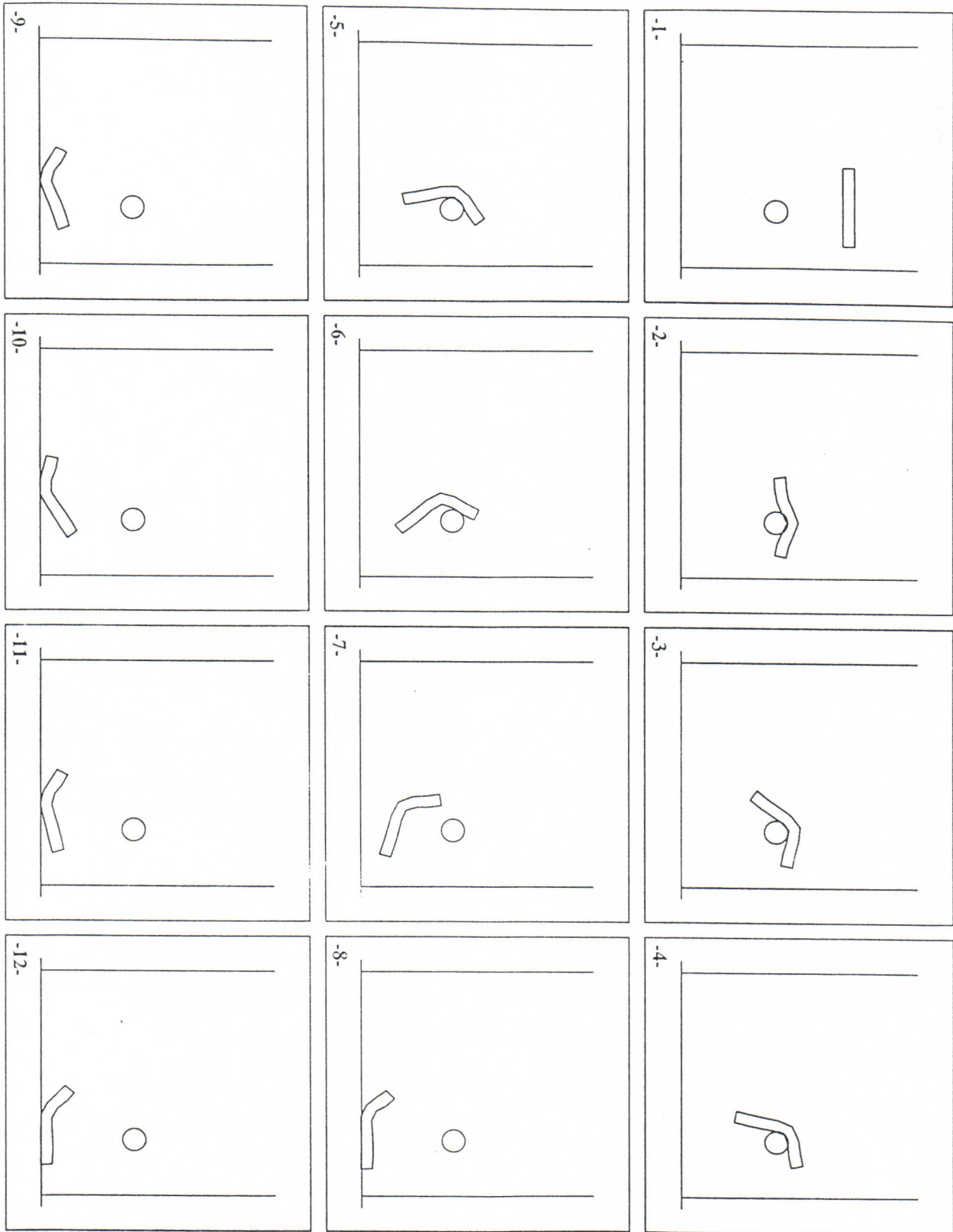
Chronogramme 4 : Carré plastique avec déformation à volume constant (surface en 2D).



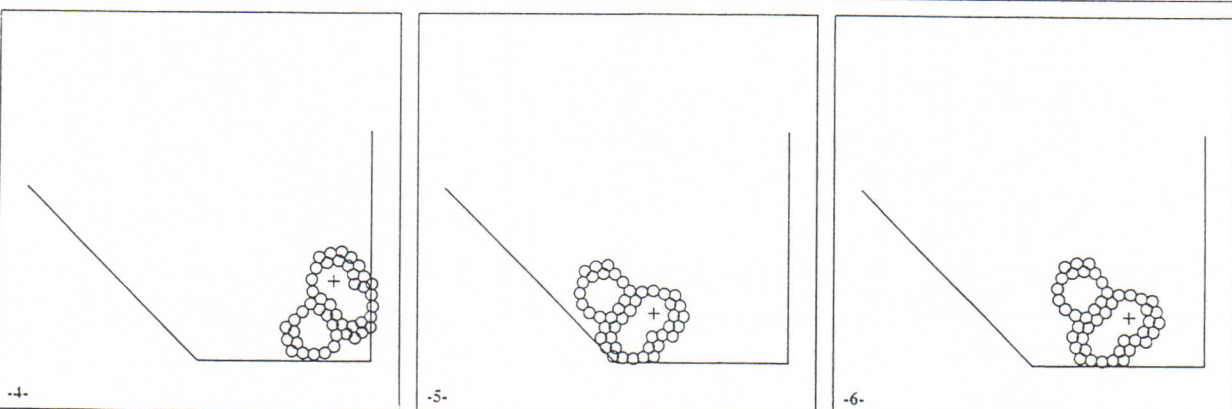
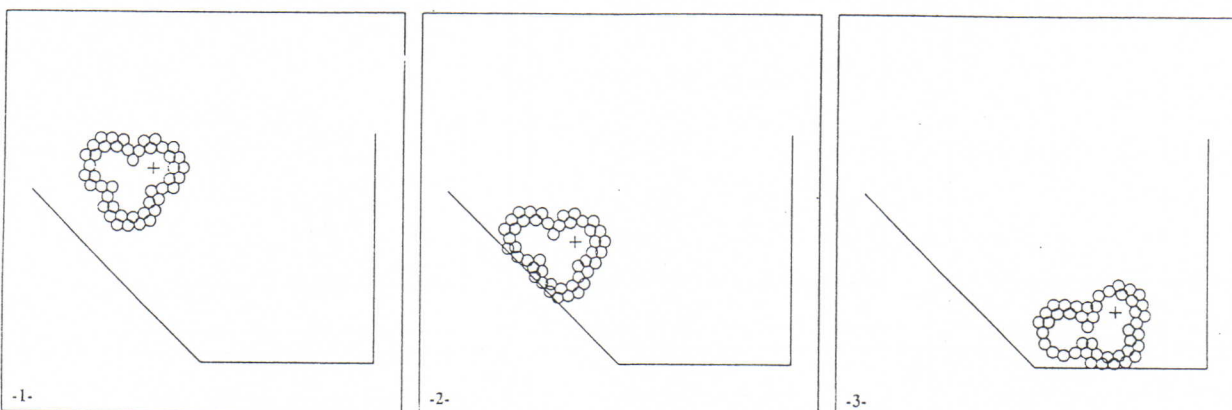
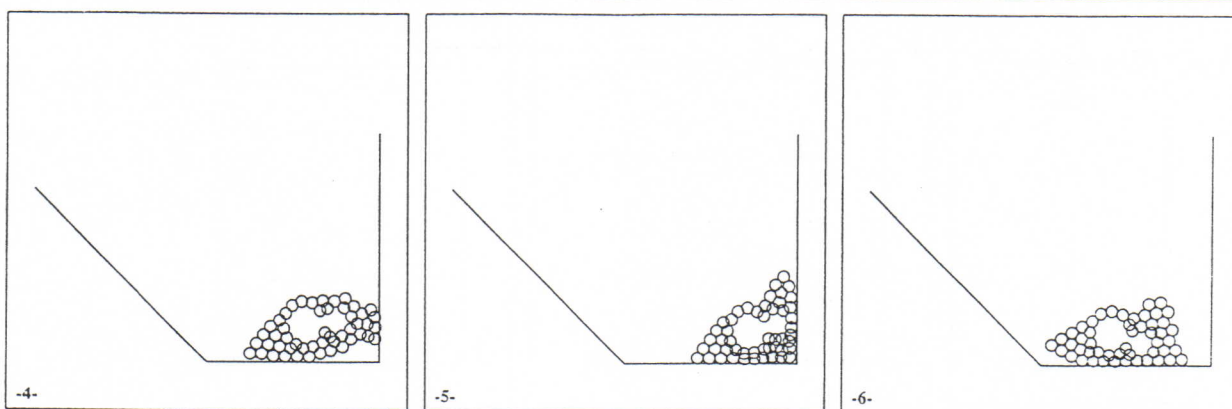
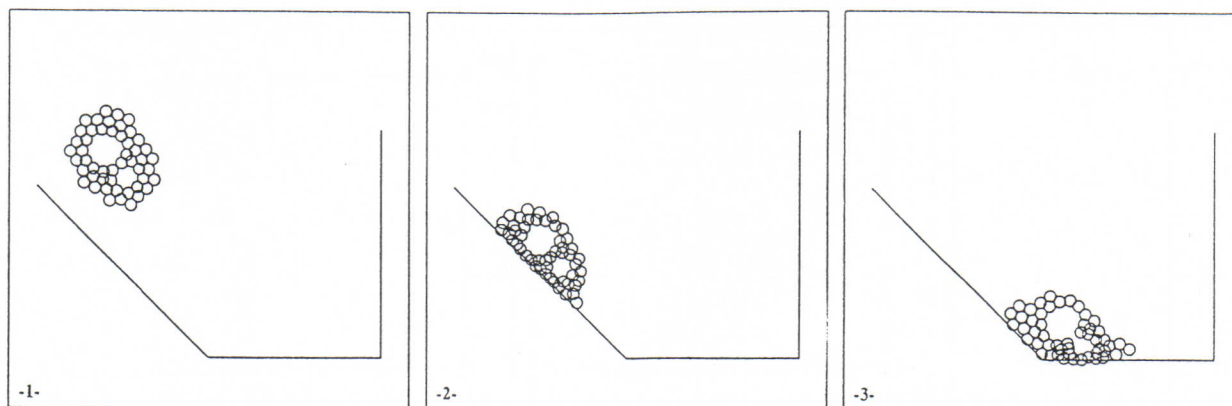
Chronogramme 5 : Carré plastique avec déformation à surface constante (périmètre en 2D).



Chronogramme 6 : Barre plastique, déformation avec compression.



Chronogramme 7 : Barre plastique incompressible.



Chronogramme 8 et 9 : • Objet composé, noyau élastique, derme plastique
 • Objet composé, noyau plastique, derme élastique

Bibliographie:

Animation Traditionnelle

- [Eng82] R.ENGLER - "les ateliers de cinéma d'animation : film et video" - Eds Pierre-Marcel Faure 1982-1983.

Modèles de forme et modèles de mouvement - Animation assistée par ordinateur

- [Bar84] A.H.BARR - "Global and local deformation of solid primitives" - *Computer Graphics*, 18 (3) july 84, pp.21-31 (SIGGRAPH'84 proceedings).
- [BB91] P.BORREL and D.BECHMANN - "Deformation Of N-Dimensionnal Objects" - *Int. Jour. of Computational Geometry and Applications*, pp. 427-453 Vol.1 Nb. 4, 1991.
- [BD92] D.BECHMANN and N.DUBREUIL - "Animation through Space and Time based on a Space Deformation Model" - Proceedings of EuroGraphics'92 Workshop on Animation and Simulation, Cambridge, England, 5-6 Sept. 1992.
- [Bli82] J.F.BLINN - "A Generalization of Algebraic Surface Drawing" - *ACM Transactions on Graphics* - vol.1 no.4 pp.260-266 (1982).
- [BMB86] N.I.BADLER, K.H.MANOOCHEHRI, AND D.BARAF - "Multi-dimensional Input Techniques and Articulated figure positioning by Multiple Constraints" - in Proceedings of 1986 *WorkShop on Interactive 3D Graphics, 1986* (Chapel hill, NC, October 23-24, 1986), ACM, N.Y. 1987, pp.151-169.
- [BOK80] N.BADLER, J.O'ROURKE, and B.KAUFMAN - "Special Problems in Human Movement Simulation" - *Computer Graphics*, 14 (3) july 80, pp.189-197 (SIGGRAPH'80 proceedings).
- [Boy79] J.W.BOYSE - "Interference Detection Among Solids and Surfaces" - *Communication of the ACM*, pp.3-9 Vol.22 No.1, Jan. 1979.
- [BW71] N.BURTNYK and M.WEIN - "Computer Generated Key-Frame Animation" - *Communication of the ACM*, pp.564-569 Vol.19 No.10, Oct. 1976.
- [BW76] N.BURTNYK and M.WEIN - "Interactive Skeleton Techniques for Enhancing Motion Dynamics in Key-Frame Animation" - *Journal of the SMPTE* Vol.80, pp149-153, March 1971.
- [BW90] J.BLOOMENTAL and B.WYVILL - "Interactive Techniques for Implicit modeling" - *Computer Graphics*, 24 (2) Marsh 90, pp.109-116 (Special issue on 1990 Symposium on Interactive 3D Graphics).
- [Coq90] S.COQUILLARD - "Extended Free Form Deformation: A Sculpturing tool for 3D geometric modeling" - *Computer Graphics*, 24 (4) august 90, pp.187-196 (SIGGRAPH'90 proceedings).
- [CJ91] S.COQUILLARD and P.JANCENE - "Animated Free Form Deformation: An Interactive Animation Technique" - *Computer Graphics*, 25 (4) july 91, pp.23-26 (SIGGRAPH'91 proceedings).
- [FB88] D.R.FORSEY and R.H.BARTELS - "Hierarchical B-Spline Refinement" - *Computer Graphics*, 22 (4) august 88, pp.205-212 (SIGGRAPH'88 proceedings).
- [FR86] A.FOURNIER and W.REEVES - "A Simple Model of Ocean Waves" - *Computer Graphics*, 20 (2) august 86, pp.75-84 (SIGGRAPH'86 proceedings).

- [Gir86] M.GIRARD - "Interactive Design of 3D Computer-Animated Legged Animal Motion" - In *Proceedings of 1986 WorkShop on Interactive 3D Graphics*, (Chapel hill, NC, October 23-24, 1986), ACM, N.Y. 1987, pp.131-150.
- [GM85] M.GIRARD and A.A.MACIEJEWSKI - "Computational Modeling for the Computer Animation of Legged Figures" - *Computer Graphics*, 19 (3) july 85, pp.263-270 (SIGGRAPH'85 proceedings).
- [Han88] A.J.HANSON - "Hyperquadrics: Smoothly Deformable Shapes with Convex Polyhedral Bounds" - *Computer Vision, graphics and Image Processing* no.44, P.191-210 (1988).
- [HBZ90] B.VH.HERZEN, A.H.BARR, AND H.R.ZATZ - "Geometric Collisions for Time-Dependent Parametric surfaces" - *Computer Graphics*, 24 (4) august 90, pp.39-48 (SIGGRAPH'90 proceedings).
- [KB84] D.KOCKANEK and R.BARTELS - "Interpolating Splines with Local Tension, Continuity and Bias Control" - *Computer Graphics*, 18 (3) july 84, pp.33-41 (SIGGRAPH'84 proceedings).
- [Las87] J.LASSETER - "Principle of Traditional Animation Applied to 3D Computer Animation" - *Computer Graphics*, 21 (4) july 87, pp.35-44 (SIGGRAPH'87 proceedings).
- [LiC92] M.C.LIN and J.F.CANNY - "Efficient Collision Detection for Animation" - in *EuroGraphics'92 Workshop on Animation and Simulation*, Cambridge, England, 5-6 Sept. 1992.
- [Lit91] P.C.LITWINOWICZ - "Inkwell: A 2^{1/2}D Animation System" - *Computer Graphics*, 25 (4) july 91, pp.113-121 (SIGGRAPH'91 proceedings).
- [Man84] B.MANDELBROT - "Les Fractales : Objets Mathématiques, Modèles Physiques et Créations Artistiques" - in *1er Colloque Image (CESTA)*, Biarritz, France - 1984.
- [Mar72] KIYOSHI MARUYAMA - "A Procedure to Determine Intersection Between Polyhedral Objects" - *Int. Jour. of Computer and information science*, pp.255-266, 1 (3), 1972.
- [Mar77] F.MARTINEZ - "Etude des problèmes de conception et de réalisation d'animation: le système SAFRAN" - Thèse de doctorat 3^{ème} cycle, INP-Grenoble, 1977.
- [MB80] N.MAX and J.BULDON "Optical printing in Computer Animation" - *Computer Graphics*, 14 (3) july 80, pp.171-177 (SIGGRAPH'80 proceedings).
- [Mil86] G.S.P.MILLER - "The Definition and Rendering of Terrain Maps" - *Computer Graphics*, 20 (2) august 86, pp.39-48 (SIGGRAPH'86 proceedings).
- [Moh81] R.MOHR - "Euclidian Spherical Representation of a 3-D Object" - *Proceedings of The CMMCS'81 Conference*, Waterloo, June 1981.
- [MTT85] N.MAGNENAT-THALMANN and D.THALMANN - *Computer Animation - Theory and practice*, Springer-Verlag Tokyo 1985.
- [MTT91] N.MAGNENAT THALMANN and D.THALMANN - "3-D Devices and Virtual Reality in Human Animation" - *Proceedings of EuroGraphics'91 Workshop on Animation and Simulation* pp.169-181 - Vienna, Austria, 1-2 sept. 1991.
- [OB79] J.O'ROURKE and N.BADLER - "Decomposition of Three -Dimensional Objects into Spheres" - *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol PAMI, no.3, July 1979.
- [Opp86] P.E.OPPENHEIMER - "Real Time Design and Animation of Fractals Plants and Trees" - *Computer Graphics*, 20 (2) august 86, pp.55-64 (SIGGRAPH'86 proceedings).

- [Par80] F.I.PARKE - "Adaptation of Scan and Slit-Scan Techniques to Computer Animation" - *Computer Graphics*, 14 (3) July 80, pp.178-181 (SIGGRAPH'80 proceedings).
- [Pea86] D.R.PEACHEY - "Modeling Waves and Surf" - *Computer Graphics*, 20 (2) August 86, pp.65-74 (SIGGRAPH'86 proceedings).
- [PZB90] C.B.PHILLIPS, J.ZHAO, AND N.I.BADLER - "Interactive Real-time Articulated Figures Manipulation Using Multiple Kinematic Constraints" - *Computer Graphics*, 24 (2) March 90, pp.245-250 (Special issue on 1990 Symposium on Interactive 3D Graphics).
- [Ree83] W.T.REEVES - "Particle systems - A technique for modelling a class of fuzzy objects" - *Computer Graphics*, 17 (3) July 83, pp.359-376 (SIGGRAPH'83 proceedings).
- [Reff88] P.REFFYE and al. - "Plant Models Faithful to Botanical Structure and Development" - *Computer Graphics*, 22 (4) August 88, pp.151-158 (SIGGRAPH'88 proceedings).
- [Rey82] C.W.REYNOLDS - "Computer Animation with Scripts and Actors" - *Computer Graphics*, 16 (3) July 82, pp.229-296 (SIGGRAPH'82 proceedings).
- [Rey87] C.W.REYNOLDS - "Flocks, Herds and Schools: A distributed behavioral model" - *Computer Graphics*, 21 (4) July 87, pp.25-34 (SIGGRAPH'87 proceedings).
- [RG91] H.RIJKEMA and M.GIRARD - "Computer Animation of Knowledge-Based Human Grasping" - *Computer Graphics*, 25 (4) July 91, pp.31-40 (SIGGRAPH'91 proceedings).
- [Roc89] A.P.ROCKWOOD - "The Displacement Method for Implicit Blending Surfaces in Solid Models" - *ACM Transactions on Graphics*, vol.8 no.4, pp.279-297 (1989).
- [Sho85] K.SHOEMAKE - "Animating Rotation with Quaternion Curves" - *Computer Graphics*, 19 (3) July 85, pp.245-254 (SIGGRAPH'85 proceedings).
- [Sim90] K.SIMS - "Particle Animation and Rendering Using Data Parallel Computation" - *Computer Graphics*, 24 (4) August 90, pp.405-413 (SIGGRAPH'90 proceedings).
- [SB85] S.N.STEKETEE and N.I.BADLER - "Parametric Keyframe interpolation incorporating kinetic adjustment and phrasing control" - *Computer Graphics*, 19 (3) July 85, pp.255-262 (SIGGRAPH'85 proceedings).
- [SP86] T.W.SEDERBERG and S.R.PARRY - "Free-Form Deformation of solid geometric model" - *Computer Graphics*, 20 (2) August 86, pp.151-160 (SIGGRAPH'86 proceedings).
- [SP91] S.SCARLOFF and A.PENTLAND - "Generalized Implicit Functions for Computer Graphics" - *Computer Graphics*, 25 (4) July 91, pp.247-250 (SIGGRAPH'91 proceedings).
- [ST89] R.SZELISKI and D.TERZOPOULOS - "From Splines to Fractals" - *Computer Graphics*, 23 (3) July 89, pp.51-60 (SIGGRAPH'89 proceedings).
- [ST II] GENESIS DEMO (Paramount, *Star Trek II*) - SIGGRAPH'82 Video Review.
- [War89] J.WARREN - "Blending Algebraic Surfaces" - *ACM Transactions on Graphics*, vol.8 no.4, pp.263-278 (1989).
- [WFB87] A.WITKIN, K.FLEISCHER, and A.BARR - "Energy Constraints On Parameterized Models" - *Computer Graphics*, 21 (4) July 87, pp.225-232 (SIGGRAPH'87 proceedings).
- [YUM86] L.YAEGER, C.UPSON, and R.MYERS - "Combining Physical and Visual Simulation - Creation of the Planet Jupiter for the Film 2010" - *Computer Graphics*, 20 (2) August 86, pp.85-93 (SIGGRAPH'86 proceedings).

- [Zel82] D.ZELTZER - "Motor Control Techniques for Figure Animation" - *IEEE Computer Graphics & Application*, 2 (9), pp.53-59, 1982.
- [Zel85] D.ZELTZER - "Towards an Unified View of 3-D Computer Animation" - *The Visual Computer*, vol.1 pp.249-259 (1985).

Modèles physiques appliqués à l'animation

- [AD92] B.ARNALDI and G.DUMONT - "Vehicle simulation versus vehicle animation" - Proceedings of EuroGraphics'92 Workshop on Animation and Simulation, Cambridge, England, 5-6 Sept. 1992.
- [ADH91] B.ARNALDI, G.DUMONT, and G.HEGRON - "Animation of Physical Systems from Geometric, Kinematic and Dynamic Models" - in *Modeling in Computer Graphics (IFIP séries on Computer Graphics)*, pp.37-53 - IFIP 1991 (Springer Verlag Ed.)
- [AG85] W.ARMSTRONG and M.GREEN - "The Dynamics of Articulated Rigid Bodies for purpose of animation" - in Proceedings of GRAPHICS' INTERFACE 1985, pp. 407-415.
- [Arn88] B.ARNALDI - "Conception d'un noyau d'un système d'animation tridimensionnelles intégrant les lois de la mécanique" - PhD Thesis - Université de Rennes I - Juillet 1988.
- [Bar89] D.BARAFF - "Analytical methods for Dynamic Simulation of Non-Penetrating Objects" - *Computer Graphics*, 23 (3) July 89, pp.223-232 (SIGGRAPH'89 proceedings).
- [Bar90] D.BARAFF - "Curved surfaces and Coherence for Non-penetrating rigid body simulation" - *Computer Graphics*, 24 (4) August 90, pp.19-28 (SIGGRAPH'90 proceedings).
- [Bar91] D.BARAFF - "Coping With Friction for Non-penetrating Rigid Body Simulation" - *Computer Graphics*, 25 (4) July 91, pp.31-40 (SIGGRAPH'91 proceedings).
- [BB88] R.BARZEL and A.H.BARR - "A modeling system based on dynamics constraints" - *Computer Graphics*, 22 (4) August 88, pp.179-188 (SIGGRAPH'88 proceedings).
- [BC89] A.BRUDERLIN and T.W.CALVERT - "Goal-Directed, Dynamic Animation of Human Walking" - *Computer Graphics*, 23 (3) July 89, pp.233-242 (SIGGRAPH'89 proceedings).
- [BN88] L.S.BROTMAN and A.N.NETRAVALI - "Motion Interpolation by Optimal Control" - *Computer Graphics*, 22 (4) August 88, pp.309-315 (SIGGRAPH'88 proceedings).
- [BV91] W.J.BOUMA and G.VANECEK Jr. - "Collision Detection and Analysis in Physically Based Animation" - second EuroGraphics Workshop on Animation and Simulation pp.191-203 - Vienna, Austria, 1-2 sept. 1991.
- [BW92] D.BARAF and A.WITKIN - "Dynamic simulation of non-penetrating flexible bodies" - *Computer Graphics*, 26 (2) July 92, pp.303-308 (SIGGRAPH'92 proceedings).
- [CHP89] J.E.CHADWICK, D.R.HAUMANN, and E.PARENT - "Layered construction for deformable animated character" - *Computer Graphics*, 23 (3) July 89, pp.243-252 (SIGGRAPH'89 proceedings).
- [CLFR91] C.CADOZ A.LUCIANI, J.L.FLORENS, and O.RAOULT - "Physique discrète, discrétisation du temps et de la matière" - in 1er Colloque 'Géométrie Discrète en Imagerie : Fondement et Applications', Strasbourg, 26-27 Sept.1991.
- [CP88] J.E.CHADWICK and E.PARENT - "Criticter construction: Developing characters for computer animation" - in PIXIM 88, pp.2983-305, Paris, France, October 1988.

- [Coh92] M.F.COHEN - "Interactive Spacetime Control for Animation" - *Computer Graphics*, 26 (2) july 92, pp.293-302 (SIGGRAPH'92 proceedings).
- [DAH89] G.DUMONT, B.ARNALDI, and G.HEGRON - "Mechanics of solids for computer animation" - in PIXIM 89, pp.293-308, Paris, France, October 1989.
- [DBD88] R.DEYO, J.A.BRIGGS, and P.DOENGENES - "Getting Graphics in Gear: Graphics, and Dynamics in Driving Simulation" - *Computer Graphics*, 22 (4) august 88, pp.317-326 (SIGGRAPH'88 proceedings).
- [Dum90] G.DUMONT - "Animation de scènes tri-dimensionnelles : la mécanique des solides comme modèle de synthèse du mouvement" - PhD thesis, Univ. Rennes I, mai 1990.
- [FP92] M.FRIEDMANN and A.PENTLAND - "Distributed Physical Simulation" - in Third EuroGraphics Workshop on Animation and Simulation, Cambridge, England 5-6 Sept 1992.
- [GV89] M.P.GASCUEL and A.VERROUST - "Animation à l'aide de la dynamique : état de l'art" - Rapport LIENS - ENS Paris - Mai 89.
- [Gas90] M.P.GASCUEL - "Déformations de surfaces complexes: Techniques de haut niveau pour la modélisation et l'animation" - PhD Thesis, Paris-Orsay, octobre 90.
- [GMT89] J.P.GOURRET, N.MAGNENAT-THALMAN, and D.THALMAN - "Simulation of Object, and Human Skin Deformations in a Grasping Task" - *Computer Graphics*, 23 (3) july 89, pp.21-30 (SIGGRAPH'89 proceedings).
- [GVP91] M.P.GASCUEL, A.VERROUST, and C.PUECH - "A modeling system for complex deformable bodies suited to animation and collisions processing" - in *The Journal of Visualisation and Computer Animation*, 2(3), August 91.
- [Hah88] J. K.HAHN - "Realistic animation of rigid body" - *Computer Graphics*, 22 (4) august 88, pp.299-308 (SIGGRAPH'88 proceedings).
- [HB90] D.H.HOUSE and D.E.BREEN - "Particles : A Naturally Parallel Approach to Modeling" - Proceedings of 3rd Symposium on the frontier of massively parallel computation, pp.150-153, 1990.
- [HBG92] D.H.HOUSE, D.E.BREEN, and P.H.GETTO - "On the Dynamic Simulation of Physically-Based Particle-System Models" - Proceedings of EuroGraphics'92 Workshop on Animation and Simulation, Cambridge England 5-6 Sept 1992.
- [HP88] D.R.HAUMANN and E.PARENT - "The Behaviorial Testbed : Obtaining Complex Behavior from Simple Rules" - *The Visual Computer, (Special Issue on Mechanics, Control and Animation)*, Vol.4, No.6, Dec. 88.
- [IC87] P.M.ISAAC, M.F.COHEN - "Controlling dynamic simulation with kinematic constraints, behavior functions and inverse dynamics" - *Computer Graphics*, 21 (4) july 87, pp.215-224 (SIGGRAPH'87 proceedings).
- [Jah84] K.JAHIDI - "Application de la Mécanique à l'Animation Interactive" - in 1er Colloque Image (CESTA), Biarritz, France - 1984.
- [Jim89] S.JIMENEZ - "Modelisation et simulation physique d'objets volumiques déformables complexes" - DEA Informatique - INP-Grenoble, 1989.
- [JLR93] S.JIMENEZ, A.LUCIANI, and O.RAOULT - "Physical simulation of land vehicles with obstacle avoidance and various terrain interactions." - in *The Journal of Visualisation and Computer Animation*, 4, (2), pp.79-94, (J.Wiley & sons 1993).

- [JL93] S.JIMENEZ and A.LUCIANI - "Animation of interacting objects with collisions and prolonged contacts" - in *Modeling in Computer Graphics (IFIP series on Computer Graphics)*, pp.129-141 - Springer Verlag 1993.
- [KM90] M.KASS and G.MILLER- "Rapid, Stable Fluid Dynamics for Computer Graphics" - *Computer Graphics*, 24 (4) august 90, pp.49-55 (SIGGRAPH'90 proceedings).
- [KPZ90] M.MCKENNA, S.PIEPER, and D.ZELTZER- "Control of a Virtual Actor : The Roach" - *Computer Graphics*, 24 (2) Marsh 90, pp.165-174 (Special issue on 1990 Symposium on Interactive 3D Graphics).
- [KPZ90] M.MCKENNA and D.ZELTZER- "Dynamic Simulation of Autonomous Legged Locomotion" - *Computer Graphics*, 24 (4) august 90, pp.29-38 (SIGGRAPH'90 proceedings).
- [Lee90] P.L.LEE, S.JIANMIN, J.ZHAO, AND N.I.BADLER - "Strenght Guided Motion" - *Computer Graphics*, 24 (4) august 90, pp.253-262 (SIGGRAPH'90 proceedings).
- [LC84] A.LUCIANI and C.CADOZ - "Modélisation et animation gestuelle d'objets : le système Anima" - in 1^{er} Colloque Image (CESTA), Biarritz, France - 1984.
- [LC86] A.LUCIANI and C.CADOZ - "Utilisation de modèles mécaniques et géométriques pour la synthèse et le contrôle d'images animées" - in 2^{ème} Colloque Image (CESTA), Nice, France - 1986.
- [LJC91] A.LUCIANI, S.JIMENEZ, C.CADOZ, JL.FLORENS, and O.RAOULT - "Computational Physics: A Modeler-Simulator for Animated Physical Objects." - in proceedings of EuroGraphics'91 conference (Vienna, Austria, 2-6 Sept. 1991), Elsevier Science Ed.
- [LJF89] A.LUCIANI, S.JIMENEZ, JL.FLORENS, O.RAOULT, and C.CADOZ - "Modèles comportementaux : vers une approche instrumentale de la synthèse d'image" - in *revue Bigre-Globule*, n° 67, Janvier 1990, (actes des journées AFCET-GROPLAN 1989).
- [LJR91] A.LUCIANI, S.JIMENEZ, O.RAOULT, C.CADOZ, and JL.FLORENS - "An unified view of multitude behaviour, flexibility, plasticity and fractures: balls, bubbles and agglomerates" - in *Modeling in Computer Graphics (IFIP séries on Computer Graphics)*, pp.54-74 - IFIP 1991 (Springer Verlag Ed.)
- [Luc81] A.LUCIANI - "L'Animation et ses Techniques du Point de Vue de l'Informatique" - revue INA, n°.16, pp.20-24, mars 1981.
- [Luc85] A.LUCIANI - " Un outil informatique d'images animées - modèle d'objets, langage, contrôle gestuel en temps réel" - Thèse Doctorat Electronique - INP_Grenoble - 1985.
- [Mil88] G.MILLER - "The motion dynamics of snakes and worms" - *Computer Graphics*, 22 (4) august 88, pp.169-178 (SIGGRAPH'88 proceedings).
- [MT92] D.METAXAS and D.TERZOPOULOS - "Dynamic Deformation of Solid Primitives with Constraints" - *Computer Graphics*, 26 (2) july 92, pp.309-312 (SIGGRAPH'92 proceedings).
- [MW88] M.MOORE and J.WILHELMS - "Collision detection and response for computer animation" - *Computer Graphics*, 22 (4) august 88, pp.289-298 (SIGGRAPH'88 proceedings).
- [Nor91] A.NORTON, G.TURK, B.BACON, J.GERTH, AND P.SWEENEY - "Animation of fracture by physical modeling" - *The Visual Computer*, vol.7 pp.210-219 (1991).
- [PB88] J.C.PLATT and A.H.BARR - "Constraint methods for flexible models" - *Computer Graphics*, 22 (4) august 88, pp.279-288 (SIGGRAPH'88 proceedings).

- [PFV92] M.VDPANNE, E.FIUME, and Z.G.VRANESIC - "Control Techniques for Physically-Based Animation" - in fourth EuroGraphics Workshop on Animation and Simulation, Cambridge, England, 5-6 Sept. 1992.
- [PW89] A.PENTLAND and J.WILLIAMS - "Good Vibration: Modal Dynamics for Graphics and Animation" - *Computer Graphics*, 23 (3) July 89, pp.215-222 (SIGGRAPH'89 proceedings).
- [Pen90a] A.PENTLAND - "Computational Complexity Versus Simulated Environments" - *Computer Graphics*, 24 (2) March 90, pp.185-192 (Special issue on 1990 Symposium on Interactive 3D Graphics).
- [Pen90b] A.PENTLAND and al. - "The Thingworld Modeling System: Virtual Sculpting by Modal Forces" - *Computer Graphics*, 24 (2) March 90, pp.143-144 (Special issue on 1990 Symposium on Interactive 3D Graphics).
- [RH91] M.RAIBERT and J.K.HODGINS - "Animation of Dynamic legged Locomotion" - *Computer Graphics*, 25 (4) July 91, pp.349-358 (SIGGRAPH'91 proceedings).
- [Rao90] O.RAOULT - "Etude Numérique des systèmes dynamiques du premier et du second ordre" - Rapport de Recherche (ACROE 90-10).
- [Raz86] A.RAZAFINDRAKOTO - "Langage d'objets pour l'animation, implantation temps réel - Thèse d'Université - INP-Grenoble - 1986.
- [Sch84] M.K.SCHWEPPE - "Motion in computer Graphics" - in 1^{er} Colloque Image (CESTA), Biarritz, France - 1984.
- [SZ90] P.SCHRÖDER and D.ZELTZER - "The Virtual Erector Set: Dynamic Simulation with Linear Recursive Constraint Propagation" - *Computer Graphics*, 24 (2) March 90, pp.23-31 (Special issue on 1990 Symposium on Interactive 3D Graphics).
- [ST91] R.SZELISKI and D.TONNESEN - "Surface Modeling with Oriented Particle System" - CRL 91-14, D.E.C. Cambridge Research Lab, Dec. 1991.
- [TF88] D.TERZOPOULOS and K.FLEISCHER - "Modeling Inelastic Deformation: Viscoelasticity, Plasticity, Fracture" - *Computer Graphics*, 22 (4) August 88, pp.269-278 (SIGGRAPH'88 proceedings).
- [TPBF87] D.TERZOPOULOS, J.PLATT, A. BARR, and K.FLEISCHER - "Elastically Deformable Models" - *Computer Graphics*, 21 (4) July 87, pp.204-214 (SIGGRAPH'87 proceedings).
- [TPF89] D.TERZOPOULOS, J.PLATT, and K.FLEISCHER - "Heating and melting deformable models (from goop to glop)" - in Proceedings of GRAPHICS' INTERFACE 1989, pp. 219-226.
- [TW88] D.TERZOPOULOS and A.WITKIN - "Physically based model with rigid and deformable components" - *IEEE Computer Graphics and Applications*, pp.41-51, December 1988.
- [PFV90] M.VD.PANNE, E.FIUME, AND Z.VRANESIC - "Reusable Motion Synthesis Using State-Space Controllers" - *Computer Graphics*, 24 (4) August 90, pp.225-234 (SIGGRAPH'90 proceedings).
- [Ver90] A.VERROUST - "Etude de problèmes liés à la définition, la visualisation et l'animation d'objets complexes en informatique graphique" - PhD Thesis - Orsay 1990.
- [VG91] L.VELHO and J.M.GOMES - "A Dynamics Simulation Environment for Implicit Objects using Discrete Models" - in second EuroGraphics Workshop on Animation and Simulation pp.183-190 - Vienna, Austria, 1, 2 sept. 1991.

- [WH91] J.WEJCHERT and D.HAUMANN - "Animation Aerodynamics" - *Computer Graphics*, 25 (4) July 91, pp.19-22 (SIGGRAPH'91 proceedings).
- [WB85] J.WILHELMS and B.BARSKY - "Using dynamic analysis to animate articulated bodies as humans and robots" - in Proceedings of GRAPHICS' INTERFACE 1985, pp. 97-104.
- [WK88] A.WITKIN and M.KASS - "Spacetime Constraints" - *Computer Graphics*, 22 (4) August 88, pp.159-168 (SIGGRAPH'88 proceedings).
- [WGW90] A.WITKIN, M.GLEICHER, and W.WELCH - "Interactive Dynamics" - *Computer Graphics*, 24 (2) March 90, pp.11-21 (Special issue on 1990 Symposium on Interactive 3D Graphics).
- [WW90] A.WITKIN and W.WELCH - "Fast Animation Control of Nonrigid Structure" - *Computer Graphics*, 24 (4) August 90, pp.243-252 (SIGGRAPH'90 proceedings).

Modèles physiques appliqués à la synthèse du son

- [Cad79] C.CADOZ - "Synthèse sonore par simulation de mécanismes physiques vibratoires" - Thèse Doctorat Electronique - INP-Grenoble - 1979.
- [CF78] C.CADOZ and JL.FLORENS - "Fondement d'une démarche de recherche Informatique / Musique" - *Revue d'Acoustique*, n° 45, pp. 86-101, Paris 1978.
- [CLF90] C.CADOZ, A.LUCIANI, and JL.FLORENS - "CORDIS-ANIMA : a modeling and simulation system for sound and image synthesis" - in *Computer Music Journal*, 17(1), pp.19-29, spring 1993.
- [Djo90] P.DJOHARIAN - "Generating models for modal synthesis" - in *Computer Music Journal*, 17(1), pp.57-65, spring 1993.
- [Djo92] P.DJOHARIAN - "Assemblage et Décomposition des Réseaux Linéaires" - supplément au *Journal de Physique III* (Colloque C1), Volume 2, Avril 1992, actes du 2^{ème} Congrès Français d'Acoustique - Arcachon.
- [FC91] JL.FLORENS and C.CADOZ - "The physical model, Modeling and simulating the instrumental universe", in *Representation of Musical Signals*, Edited by G. De Poli and A.Piciali, C.Roads eds, MIT Press, 1991, pp.227-268.
- [FLC86] JL.FLORENS, A.LUCIANI, and C.CADOZ - "Optimized real Time Simulation of Objects for Musical Synthesis and Animated Image Synthesis" - Proceedings of International Computer Music Conference, LaHaye, 1986.
- [Flo90] JL.FLORENS and C.CADOZ - "Modèles et Simulation en Temps Réel de Corde Frottée" - supplément au *Journal de Physique II* (Colloque C2), Tome 51, Février 1990, actes du 1^{er} Congrès Français d'Acoustique - Lyon.

Contrôle Gestuel Retroactif - Synthèse des perceptions tactilo-Kinesthésiques (*haptiques*)

- [Atk77] W.D.ATKINSON, K.E.BOND, G.L.TRIBBLE, and K.R.WILSON - "Computing with feeling" - *Computer and Graphics*, Vol 2 pp.97-103 - Pergamon Press, 1977.
- [Bro90] F.P.BROOKS and al. - "Project GROPE - Haptic Displays for scientific Visualisation" - *Computer Graphics*, 24 (4) August 90, pp.177-185 (SIGGRAPH'90 proceedings).
- [CLF81] C.CADOZ, A.LUCIANI, and JL.FLORENS - "Synthèse Musicale par Simulation des mécanismes instrumentaux : Transducteurs Gestuels Rétroactifs pour l'Etude du Jeu Instrumental" - *Revue d'Acoustique* n° 59 - 1981.

- [CLF84] C.CADOZ, A.LUCIANI, and JL.FLORENS - "Responsive input devices and sound synthesis by simulation of instrumental mechanisms: the Cordis system" - *Computer Music Journal* - N°3 - 1984 ; reprint in *Music Machine* - MIT Press.
- [CLiF90] C.CADOZ, L.LISOWSKI, and JL.FLORENS - "A modular feedback keyboard design", *Computer Music Journal*, Vol.14, No.2, MIT Press, 1990, pp.47-51.
- [Flo78] JL.FLORENS - "Coupleur gestuel interactif pour la commande et le contrôle de sons synthétisés en temps réel" - Thèse Doctorat Electronique - INP-Grenoble - 1978.
- [Iwa90] H.IWATA - "Artificial reality with force feedback : Development of Desktop Virtual Space with Compact Master Manipulator" - *Computer Graphics*, 24 (4) august 90, pp.165-170 (SIGGRAPH'90 proceedings).
- [Lis89] L.LISOWSKI and C.CADOZ - "Conception, optimization and realisation of extra flat DC linear motors" - in 4th IEEE Int. Conf. on Electrical Machines and Drives, Sept 1989.
- [Min90] M.MINSKY and al. - "Feeling and seeing: issues in force display" - *Computer Graphics*, 24 (2) Marsh 90, pp.235-270 (Special issue on 1990 Symposium on Interactive 3D Graphics).

Robotique - Planification et contrôle du mouvement

- [BL89] J.BARRAQUANT and J.C.LATOMBE - "On non holonomic mobile robots and optimal maneuvering" - *Revue d'intelligence artificielle* Vol 3 n°2, pp.77-103, 1989.
- [BLL89] J.BARRAQUANT, B.LANGLOIS, and J.C.LATOMBE - "Robot Motion Planning With Many Degrees of Freedom and Dynamic Constraints." - in Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.74-83 - 1989.
- [Fea83] R.FEATHERSTONE - "The Calculation of Robot Dynamics Using Articulated-Body Inertias" - *Robotics Research*, 2(1) - pp.13-29, 1983.
- [FL91] T.FRAICHARD and Ch.LAUGIER - "On-line reactive planning for a non-holonomic mobile in a dynamic world" - in IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.432-437, Sacramento, CA (USA), April 1991.
- [FLL90] T.FRAICHARD, Ch.LAUGIER, and G.LIEVIN - "Robot Motion Planning: the case of non-holonomic mobiles in a dynamic world" - in IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems , IROS'90, Tsuchiura, july 90.
- [Frai92] T.FRAICHARD - "Planification de Mouvements pour Mobile Non-Holonome en Espace de Travail Dynamique" - Thèse Doctorat Informatique - INP_Grenoble - 1992.
- [JLL91a] S.JIMENEZ, A.LUCIANI, and Ch.LAUGIER - "Physical modeling as an help for planning the motions of a land vehicle" - in IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems, Osaka, Japan, November 1991.
- [JLL91b] S.JIMENEZ, A.LUCIANI, and Ch.LAUGIER - "Simulating physical interactions between an articulated mobile vehicle and a terrain" - in *Robotics and Autonus System*, 11 , pp.97-107, (Elsevier 1993).
- [JLL92] S.JIMENEZ, A.LUCIANI, and Ch.LAUGIER - "Teleprogramming the motions of a planetary robot using physical models and dynamic simulation tools" - in IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Raleigh, NC, july 1992.
- [JLL93] S.JIMENEZ, A.LUCIANI, and Ch.LAUGIER - "Predicting the dynamic Behaviour of a Planetary Vehicle Using Physical Modeling" - in IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Yokohama, Japan, july 1993.

- [LJL93] A.LUCIANI, S.JIMENEZ, and Ch.LAUGIER - "Physical modeling and Dynamic simulator of planet vehicles, Application to motion planning" - in *Missions, Technologies and Design of Planetary Mobile Vehicle* (CNES) - CÉPADUES-EDITIONS, janvier 93.
- [LTJ90] J.P.LAUMOND, M.TAIX, and P.JACOB - "A motion Planner for car like robots based on a mixed global/local approach." - in *IEEE/RSJ International Workshop of Intelligent Robots and Systems*, IROS'90, Tsuchiura, July 90.
- [Mou91] J.MOUTARD - "Planification et contrôle d'exécution simulé d'un véhicule autonome planétaire", DEA Technical Report, INP-Grenoble, June 1991 (in French).
- [Rai89] M.RAIBERT and al. - "Dynamically Stable Legged Locomotion" - MIT Technical report n° AI-TR 1179, September 89.
- [Shi91] Z.SHILLER - "Dynamic Motion Planning of Autonomous Vehicles" - *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol.7, No.2, April 1991.

Sciences de l'ingénieur - Physique - Mécanique

- [AF79] M.ALONSO and E.J.FINN - *Fundamental University Physics* - Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1979 - version française, Interéditions, Paris 1979.
- [Bam81] Y.BAMBERGER - *Mécaniques de l'ingénieur*, T1 (Systèmes de corps rigides) and T2 (milieux déformables) - Ed. Hermann 1981.
- [Cia85] P.G.CIARLET - *Elasticité Tridimensionnelle* - Ed. Masson 1985.
- [Fey79] R.P.FEYNMAN, R.B.LEIGHTON, AND M.SANDS - *The Feynman lectures on physics* - Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1963 (v.f. Interéditions, Paris 1979).
- [GC90] J.C.GILLES and M.CLIQUE - *Systèmes linéaires, équations d'état* - Ed. Eyrolles, 1990.
- [GDP88] J.C.GILLES, P.DECAULNE, and M.PÉLEGRIN - *Systèmes asservis non linéaires* - Ed. Bordas, Paris 1988.
- [GDP90] J.C.GILLES, P.DECAULNE, and M.PÉLEGRIN - *Théorie et calcul des asservissements linéaires* - Ed. Bordas, Paris 1990.
- [Gea71] G.W.GEAR - *Numerical initial value problems in ordinary differential equations* - Prentice-Hall Inc. 1971.
- [Ger73] P.GERMAIN - *Cours de mécanique des milieux continus* - T. 1, Ed. Masson 1973.
- [GW84] C.F.GERALD and P.O.WHEATHLEY - *Applied Numerical Analysis* - third edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. - 1984.
- [KS86] J.KANE and M.STERNHEIM - *Physique* - InterEdition, Paris 1986.
- [LL69] L.LANDAU and E.LIFCHITZ - *Mécanique* - ed. Mir, Moscou, 1969.
- [Lue73] D.G.LUENBERGER - *Introduction to Linear and Non-Linear Programming* - Ed. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. - 1973.
- [LT87] P.LASCAUX and R.THEODOR - *Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l'Art de l'Ingénieur* - T. 1 and 2, Ed. Masson 1987.
- [Mar80] G.MARCHOUX - *Méthodes de calcul numérique* - ed. Mir, Moscou, 1980.
- [PBG74] L.PONTRIAGUINE, V.BOLTIANSKI, R.GAMKRÉLIDZÉ AND E.MICHTCHENKO - *Théorie mathématique des processus optimaux* - ed. Mir, Moscou, 1974.

- [Sév89] Y.SÉVELY - *Systèmes et asservissements linéaires échantillonnés* - Collection Dunod Université, Bordas, Paris 1989.
- [Tal90] P.LETALLEC - *Numerical Analysis of Viscoelastic Problems* - Springer Verlag Eds, 1990.
- [Zie79] O.C.ZIENKIEWICZ - *La Méthode des Eléments Finis* - troisième édition, Mc Graw-Hill Eds, Paris, 1979.
- [Zou78] V.ZOUBOV - *Théorie de la commande* - ed. Mir, Moscou, 1978.



CERTIFICAT DE SOUTENANCE

d'une THÈSE DE DOCTORAT
(Diplôme national institué par l'arrêté ministériel du 30 mars 1992)

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Grenoble certifie que

Monsieur JIMENEZ Stéphane Carlos

né(e) le **7 septembre 1965 à Paris XIème**

inscrit(e) à l'Institut National Polytechnique de Grenoble sous le numéro **DED8800288**

a soutenu le **23 novembre 1993 à Grenoble (ISERE)**

conformément aux règlements, devant un jury de l'Institut National Polytechnique de Grenoble,
une thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTEUR de L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

spécialité : Informatique

Après délibération, le jury décerne ce diplôme à

Monsieur JIMENEZ Stéphane Carlos

avec la mention **Très honorable avec félicitations**

Le présent diplôme est délivré à l'intéressé(e) pour lui permettre de jouir de son grade avec les droits et prérogatives qui y sont attachés par les lois, décrets et règlements.

Fait à Grenoble, le **15 décembre 1993**

Maurice RENAUD
Président
de l'Institut National Polytechnique
de Grenoble

AVIS IMPORTANT — L'intéressé(e) ne devra, en aucun cas, se dessaisir du présent certificat destiné à être restitué lors de la délivrance du diplôme définitif.
Des copies certifiées conformes à l'original par le Maire ou le Commissaire de police pourront être établies.