



**HAL**  
open science

# HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

## Graphes et jeux combinatoires

Eric Duchene

► **To cite this version:**

Eric Duchene. HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES Graphes et jeux combinatoires. Combinatoire [math.CO]. Université Claude Bernard Lyon 1, 2015. tel-01196652

**HAL Id: tel-01196652**

**<https://hal.science/tel-01196652>**

Submitted on 10 Sep 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ LYON 1  
École doctorale InfoMaths (ED 512)

# HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Présentée par  
**Éric DUCHÊNE**

préparée au laboratoire LIRIS, soutenue le 4 septembre 2015.

Graphes et jeux combinatoires

Composition du jury :

<i>Rapporteurs :</i>	Jean-Paul DELAHAYE	Professeur émérite, Université Lille 1, CRISAL
	Myriam PREISSMANN	DR CNRS, G-SCOP, Grenoble
	Eric SOPENA	Professeur, Université de Bordeaux, LaBRI
<i>Examineurs :</i>	Sylvain GRAVIER	DR CNRS, Institut Fourier, Grenoble
	Hamamache KHEDDOUCI	Professeur, Université Lyon 1, LIRIS



# Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement tous les membres de mon jury d'habilitation. Jean-Paul, j'ai eu la chance de vous rencontrer à cette occasion, et vous m'avez fait l'honneur de rapporter sur mon manuscrit. J'espère avoir d'autres occasions de vous rencontrer à l'avenir, tant il est agréable d'échanger avec quelqu'un d'une telle richesse scientifique. Myriam, merci beaucoup pour ta relecture attentive de mon écrit. C'est toujours très plaisant de retrouver au fil de sa carrière les enseignants qui nous ont donné goût au domaine de recherche dans lequel on évolue. Eric, merci encore une fois pour ton rapport et la relecture très précise que tu as su faire en si peu de temps. Je suis très heureux que tu aies accepté de faire partie de ce jury, et encore plus de pouvoir collaborer avec toi dans les années qui viennent. Sylvain, merci d'avoir présidé ce jury et d'avoir continué à suivre mon évolution depuis ma soutenance de thèse. C'est chouette de pouvoir continuer à travailler ensemble autour de projets communs, même si la période des dix ans va bientôt s'achever...ou alors peut-être se prolonge-t-elle après l'HDR ? :-)

Hamamache, merci d'avoir été le garant de mon habilitation, et surtout de m'avoir régulièrement soutenu depuis l'obtention de mon poste en 2008. Je suis très heureux de faire partie de l'équipe que tu as construite et qui grandit d'année en année.

Je remercie également toutes les personnes, qui, de près ou de loin, m'ont encouragé dans le passage de mon habilitation : collègues du LIRIS, du département informatique de l'IUT Bourg-en-Bresse, étudiants... Un merci tout particulier à Aline, qui a consacré plusieurs de ses soirées de printemps à relire mon manuscrit, pour en extraire remarques et propositions souvent (voire tout le temps) judicieuses.

Merci enfin à mes parents, à Françoise et à Noélie pour leur soutien sans faille lors du jour J, mais aussi et surtout pendant les quelques années qui l'ont précédé...



# MON CV EN UNE PAGE

## Enseignement

**Maître de conférences à l'IUT Lyon 1**

Département informatique  
Site de Bourg en Bresse



### RESPONSABILITES



### COURS ENSEIGNES

- Java
- C / C++- Bases de données
- Recherche opérationnelle
- Théorie des langages
- Modélisation mathématique
  
- Langage C (L1)
- Codes correcteurs (L3)
- Théorie des jeux (M2)



ADMISSIONS  
DUT 1A

RESPONSABLE  
PEDAGOGIQUE  
DUT 1A

### DIFFUSION SCIENTIFIQUE

Membre de Maths à Modeler depuis 2003.

Création de



en 2012.



# MON CV EN UNE PAGE

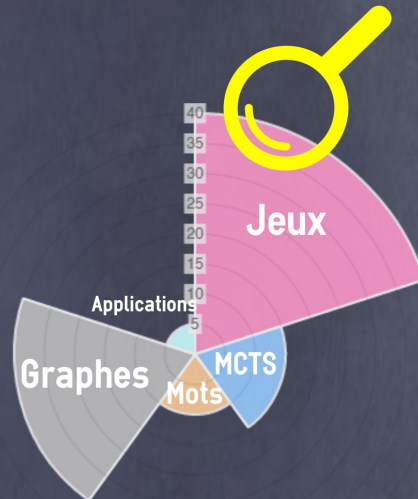
## Recherche

Membre du laboratoire LIRIS depuis 2012.

### Publications

Journaux internationaux	17
Conférences inter.	4
Conférences inter. sur résumé	13
Séminaires invités	7

### Thèmes de recherche



### Encadrements



### Projets

- ➔ ANR GAG (porteur), 2015-2018
- ➔ ANR AOC (membre)
- ➔ PEPS Misère (membre)
- ➔ Inter-ambassades FR-Canada (porteur)

### Collaborations







# Introduction

Parmi les thèmes de recherche que j'affectionne, les jeux combinatoires occupent la place la plus importante. Ils furent déjà au cœur de mon travail de thèse, et je n'ai pas pu les quitter aussi facilement après l'obtention de mon doctorat. Alors, bien sûr, si je devais chercher, je pourrais trouver plein de raisons à cet attachement.

1. Le sujet est original, voire sexy. Certes, je n'en suis pas au point de comparer un jeu à une jolie fille. Mais j'irai plus facilement aborder une dame de cœur qu'une homographie dans  $\mathbb{C}$ .
2. J'aime beaucoup jouer. Et faire de la recherche sur les jeux est un alibi idéal pour prétendre qu'une partie de Hex à 16h un mardi est un travail d'une intensité inouïe.
3. J'ai entamé plusieurs collaborations internationales. On n'abandonne pas des partenaires en pleine partie.
4. Je pense que je pourrais encore en trouver quelques autres, mais certainement encore plus éloignées de ma motivation première.

En réalité, je ne vois qu'une seule vraie raison qui fait que je continue à m'investir dans ce domaine : l'immensité de tout ce qu'il y reste à faire. Je ne m'imagine pas une seconde m'ennuyer en poursuivant mes recherches sur les jeux, du moins dans les années à venir. On y trouve des challenges à chaque coin de rue. Actuellement, le défi le plus excitant est la construction d'une théorie générale qui fusionnerait les jeux en convention normale avec les jeux misère et les jeux à score. La communauté fait aussi ponctuellement émerger de nouveaux jeux qui stimulent une grande partie de ses membres. Parmi les derniers best sellers : Clobber, NoGo, Clobineering... Un autre aspect de la richesse de ce domaine, c'est qu'il déteste l'autarcie. Il s'est presque toujours nourri des connaissances de ses voisins. L'exemple le plus frappant est l'usage des nombres surréels pour la théorie générale de résolution des jeux partisans. Merci Conway. Selon vos goûts et vos compétences, prenez le bon jeu et partez explorer l'informatique théorique, la théorie des nombres, la théorie des graphes, la combinatoire des mots, les probabilités ou encore l'intelligence artificielle. Dernier argument : les jeux abstraits ont toujours intéressé l'homme. Cela devrait garantir une source de problèmes intaris-

sable.

Mais alors, pourquoi les jeux combinatoires s'avèrent-ils plus confidentiels que d'autres domaines ? Trois raisons peuvent être avancées :

- **Les jeux, c'est difficile.** En effet. C'est même souvent PSPACE-difficile. C'est peu agréable pour un chercheur de se contenter de maigres résultats, et même parfois de moins. Mais dans ces cas-là, on trouve toujours des variantes pour s'arranger.
- **Les jeux, c'est pas sérieux.** C'est vrai que ça en jette plus de dire qu'on bosse sur la cohomologie quantique ou l'hypothèse de Riemann. Essayez de lire *On number and games* de Conway, on en reparle après.
- **Les jeux, ça sert à rien.** Objection. C'est d'ailleurs bien plus utile qu'une preuve de l'hypothèse de Riemann. Les jeux, je peux en parler facilement avec ma petite cousine de 8 ans. Je peux aussi même prouver des théorèmes avec elle. #mathsamodeler.

Au final, je crois que j'aime bien cette confidentialité. Ça donne un peu l'impression d'avoir trouvé un trésor caché. Ces dernières années, j'ai examiné une partie infime de ce trésor, dont voici les pièces essentielles :

- **Les règles du jeu.** Dans la littérature, c'est souvent la stratégie gagnante qui importe. Il est temps désormais de faire front et de s'interroger sur la nature des règles et leur complexité.
- **Jeux et mots.** Les deux se marient bien. Ce n'était pas une évidence pour moi avant mon postdoc.
- **Jeux et graphes.** Là, pour le coup, ce n'est pas une nouveauté. On sait depuis longtemps qu'un graphe est un bon outil pour modéliser un jeu. Ici, je m'attarderai plus sur deux autres aspects : le graphe comme support de jeu (c'est vrai à la fin, pourquoi toujours jouer sur une grille rectangulaire ?), et les problèmes de graphes dans leur version ludique (jouer en coloriant, jouer en dominant...).

Les graphes, parlons-en. Ce sont eux qui m'ont conduit là où j'en suis. Je ne les ai rencontrés que sur le tard (école d'ingé), mais ils m'ont immédiatement convaincu de les suivre. Si je les ai parfois un peu mis de côté durant ma thèse, ils n'ont jamais été très loin. Dans mon équipe lyonnaise, ils les manipulent sous toutes leurs formes. Ils les colorient de plein de façons différentes, en extraient des structures particulières, leur appliquent des algorithmes, et regardent aussi à quoi ils peuvent servir dans la "vraie vie". Depuis que je les ai rejoints en 2008, on peut dire que je m'y suis mis officiellement. Plus particulièrement, il y a deux types de problèmes sur lesquels je me suis penché :

- **Le placement de graphes.** Ou comment combiner plusieurs graphes donnés dans un graphe cible, sans que leurs arêtes ne se chevauchent. Si la motivation initiale pour ce problème était appliquée, c'est sous

un angle théorique que je l'ai abordé.

- **Les colorations distinguantes.** Ou comment identifier de manière unique certains éléments d'un graphe (sommets, arêtes), à partir d'un étiquetage d'autres éléments. On peut envisager plein d'applications à ces problèmes, notamment pour la détection de pannes dans les réseaux. Bon, entre nous, il vaut quand même mieux éviter de s'emballer à ce sujet.

Voilà. Des graphes et des jeux. Vous aurez compris ce dont parlera ce manuscrit. Mais je ne suis pas Jules César et ce n'est pas un programme populiste. Je vais m'atteler à vous convaincre du bien fondé de ces recherches.

## Organisation du document

En début de chaque chapitre, un court dialogue imaginaire résume plusieurs informations sur le thème concerné. Rendons toutefois à Jules ce qui lui appartient : le droit d'auteur de ces auto-interviews appartient à mon directeur de thèse, Sylvain Gravier. Sylvain, tu constateras que j'ai essayé d'en proposer une version plus moderne que celle de ton époque.

Sur le contenu, ce manuscrit intègre plusieurs états de l'art de domaines bien ciblés, ponctués de plusieurs problèmes ouverts. Précisons que tous les problèmes ouverts mentionnés dans les encadrés sont selon moi accessibles. Autrement dit, ce sont des pistes de recherche que l'on peut suggérer à des étudiants. Par ailleurs, j'ai choisi de ne pas inclure les preuves in extenso des résultats me concernant. Celles-ci sont disponibles dans les articles de recherche correspondants, et accessibles depuis ma page Web.

Vous trouverez ci-dessous le plan de ce document. J'espère que grâce à lui, vous saurez ne pas vous perdre durant la lecture. Les points d'arrêt correspondent aux objets ou sujets d'étude rencontrés. Les numéros de pages sont indiqués entre parenthèses.

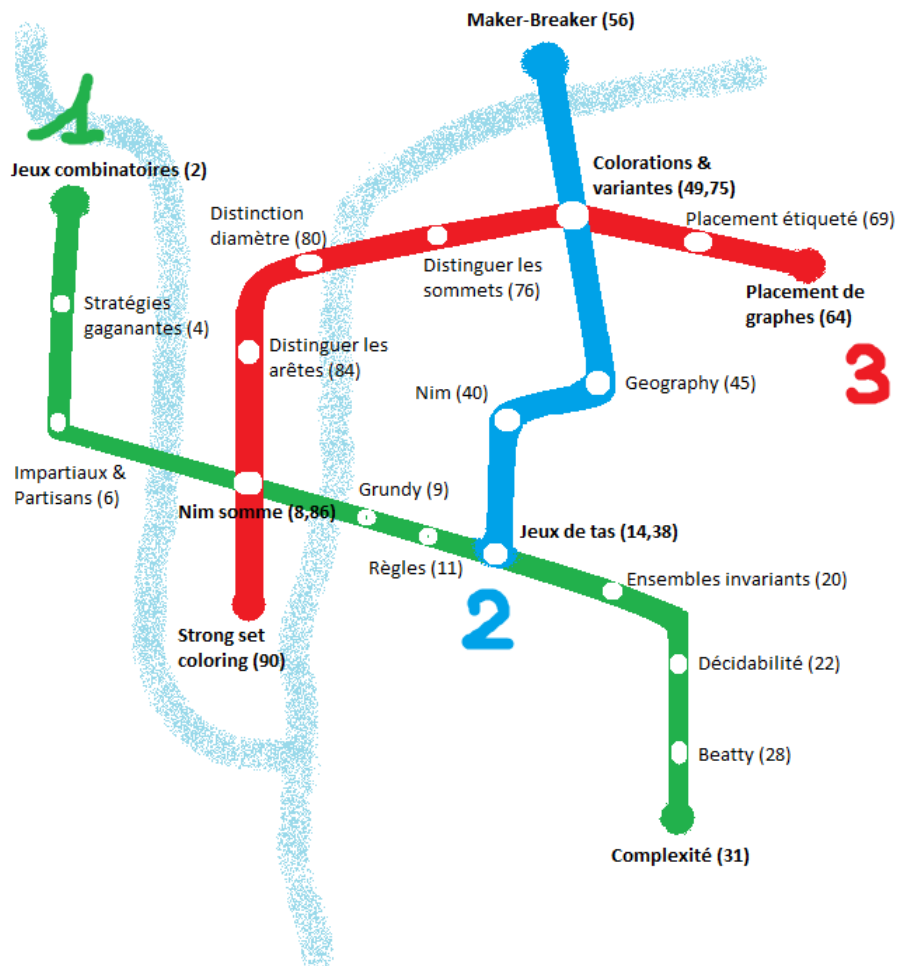
Vous constatez sur ce plan que le rapport est organisé autour de trois grands axes : dans le premier chapitre, j'aborderai les jeux combinatoires à suppression de tas (type NIM ou WYTHOFF). Si ces jeux sont fortement étudiés dans la littérature, nous verrons que certains auteurs optent parfois pour des variantes aux règles saugrenues. Dans l'objectif de proposer une définition formelle d'une "bonne" règle de jeu, un premier pas a été l'introduction du concept d'invariance.

Dans le deuxième chapitre, j'explorerai le lien entre graphes et jeux combinatoires sous les deux angles évoqués plus haut. Dans un premier temps,

j'évoquerai les jeux combinatoires qui peuvent se jouer sur un graphe, et développerai le cas du jeu de NIM. Ensuite seront considérés les paramètres d'optimisation de graphes dans leur version ludique. Le cas du jeu de coloration sommet sera le fil conducteur de ce volet.

Le dernier chapitre sera dédié à deux récents problèmes de théorie des graphes : le plongement étiqueté et les colorations distinguantes. Je n'en dis pas plus. Surprise à partir de la page 70.

Pour conclure, je tiens à rassurer le lecteur : la suite du manuscrit proposera une rédaction beaucoup plus conventionnelle que cette introduction. Je crains de n'avoir pas suffisamment d'audace pour rédiger l'intégralité de mon manuscrit sous cette forme. Bonne lecture.



# Chapitre 1

## De la structure des règles d'un jeu combinatoire



**Eric**  
Si on parlait des jeux combinatoires...  
Comment Like 24 hours ago via Mobile

17 people like this

**Jury** Pourquoi avoir choisi ce domaine ?  
23 hours ago · Like

**Eric** Il s'agit de mon sujet de thèse, idéal pour un premier chapitre. La poursuite de certaines collaborations était alors naturelle. Aussi, le fait que la thématique soit stimulante et originale justifie l'intérêt que je lui porte depuis 2003. Enfin, je suis très sensible à la diffusion scientifique des mathématiques, et les jeux combinatoires constituent l'un des objets d'étude les plus adaptés pour les jeunes et le grand public.  
13 hours ago · Like

**Jury** Quelles sont les différences avec tes travaux de doctorat ?  
12 hours ago · Like

**Eric** Depuis ma soutenance en 2006, j'ai choisi d'étoffer la question des règles de jeu, assez peu considérée dans la littérature. L'introduction de la notion de règles invariantes a donné suite à plusieurs papiers. Une seconde différence est l'étude du lien entre les jeux et la combinatoire des mots, initiée pendant mon postdoc, et toujours d'actualité.  
11 hours ago · Like

**Jury** Des collaborations avec d'autres chercheurs ?  
10 hours ago · Like

**Eric** Oui, avec Michel Rigo (ULg, Belgique), qui fut mon promoteur de postdoc, et que je visite chaque année. J'ai également des travaux soumis avec J. Cassaigne (IML, Marseille), M. Dufour (UQAM, Canada), A. Fraenkel (Weizmann, Israël), S. Heubach (Univ. Los Angeles), U. Larsson (Université Dalhousie, Canada), R. Nowakowski (Dalhousie, Canada) et A. Parreau (ULg/LIRIS).  
9 hours ago · Like

**Jury** Des étudiants ont-ils été formés ?  
8 hours ago · Like

**Eric** Sur ce thème précis des jeux combinatoires et de leurs règles, j'ai principalement collaboré avec des chercheurs permanents.  
7 hours ago · Like

**Jury** Des publications ?  
6 hours ago · Like

**Eric** 4 articles journaux sont parus et 2 ont été soumis, sur les jeux de suppression de tas et leurs règles.  
5 hours ago · Like

**Jury** Des projets sur ce domaine ?  
4 hours ago · Like

**Eric** Le projet ANR GAG sur les jeux et les graphes vient de débiter en janvier 2015. Il s'agit d'un projet JCJC que je porte. L'un des volets traite de cette problématique des règles de jeu. Un autre projet (PEPS CNRS) sur les jeux combinatoires a été mené en 2012-2013 (porté par P. Dorbec), ainsi qu'un projet inter-ambassades France-Canada (avec R. Nowakowski). J'ai aussi répondu à d'autres AAP (PICS, projet Franco-américain, PHC France-Belgique...), sans succès jusque là.  
3 hours ago · Like

**Jury** Quelles sont tes perspectives sur ce sujet ?  
2 hours ago · Like

**Eric** La question des règles de jeu est actuellement considérée par d'autres membres de la communauté, ce qui justifie la motivation de poursuivre les travaux initiés. Mes collaborations extérieures vont se poursuivre, favorisées, j'espère, par l'obtention de projets internationaux.  
2 hours ago · Like

Like 0

Generated at FakeConvos.com

## 1.1 Notions élémentaires de la théorie des jeux combinatoires

Ce chapitre et le suivant traiteront de problèmes issus de la théorie des jeux combinatoires (TJC). Nous rappellerons au fur et à mesure de la lecture les définitions nécessaires à la bonne compréhension de ce manuscrit.



### A lire

Pour accéder à un état de l'art plus complet, les trois livres suivants remportent les suffrages de la communauté : *Winning Ways* [3], *Lessons in Play* [2] et *Combinatorial Game Theory* [41]. Le premier cité est l'œuvre pionnière qui fait suite aux travaux de Conway au milieu des années 70. Constitué de quatre volumes, il contient un vaste panel de jeux avec résolution à l'appui. Le deuxième est un ouvrage très clair et pédagogique, utile notamment pour faire découvrir la TJC aux étudiants. Le dernier livre, plus récent et plus formel, couvre avec un spectre très large les grands résultats du domaine. Je le vois comme un complément indispensable des précédents.

### 1.1.1 Définition d'un jeu

Les jeux combinatoires ont la spécificité d'impliquer exactement deux joueurs, disons Léon et Renée, qui jouent alternativement sans passer leur tour. Dans l'expression des règles du jeu, l'information doit être totale, c.-à-d. qu'il n'y a ni hasard, ni information cachée, ni choix simultané. Le nombre de positions de jeu doit être fini, et on ne doit pas rencontrer une position déjà vue. En ce qui concerne la fin de partie, on distingue dans la littérature deux façons de désigner le vainqueur :

- *la convention normale* : le premier joueur qui ne peut plus jouer a perdu,
- et *la convention misère* : le premier joueur qui ne peut plus jouer a gagné.

*A priori*, on peut supposer que le choix de convention influence peu l'analyse théorique qui est faite d'un jeu. Il se trouve pourtant que les jeux en convention misère s'appréhendent moins aisément. Cela s'explique en partie par l'absence de fonction globale pour traiter de la somme de jeux (notion que nous aborderons assez tôt).

**Exemple**

Les jeux de type Nim sont certainement les plus représentatifs de la TJC. Par exemple, la course à vingt, où deux joueurs retirent à tour de rôle de une à trois pierres d'un tas initial de vingt, est un bon exemple pour apprivoiser le concept de stratégie gagnante. Notons au passage que les jeux abstraits les plus célèbres (comme Othello, les échecs ou le Go) ne répondent pas à toutes les contraintes de la définition, notamment à cause de la condition de victoire ou de positions pouvant être visitées plusieurs fois. Il en va de même pour les jeux à score, comme le *Dots and boxes*. Cependant, certains auteurs ont su employer avec succès certains rouages de la TJC dans la résolution de plusieurs de ces jeux.

Afin d'illustrer au mieux les différentes notions rencontrées au cours de ce chapitre, nous nous appuyons sur un jeu combinatoire “fil rouge” nommé PARTISAN ENDNIM [1].

**PARTISAN ENDNIM**

Ce jeu est défini par la donnée d'une rangée de  $n$  piles de boîtes. Chaque pile contient un nombre quelconque de boîtes. On codera un tel jeu par un  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$ , où les  $x_i$  correspondent au nombre de boîtes dans chaque pile. A son tour, Léon retire autant de boîtes qu'il veut de la pile la plus à gauche (il diminue ainsi la valeur de  $x_1$ ), et Renée fait la même chose dans la pile la plus à droite (diminuant ainsi la valeur de  $x_n$ ). Une pile réduite à zéro disparaît du jeu. Le gagnant est le joueur qui retire la dernière boîte.

Dans la mesure où la donnée d'un jeu est nécessairement couplée à une position de départ, on assimilera volontairement les termes “jeu” et “position de jeu” dans la suite de ce manuscrit. Étant donné un jeu, on appelle *options* l'union des jeux accessibles en un seul coup par l'un ou l'autre des deux joueurs. Par exemple, pour le jeu PARTISAN ENDNIM, les options de  $(1, 2, 2)$  sont  $(1, 2, 1)$ ,  $(1, 2)$  et  $(2, 2)$ .

Formellement, un jeu  $G$  sera défini récursivement par la donnée de ses options. Plus précisément, on notera  $G = \{\mathcal{G}^L \mid \mathcal{G}^R\}$ , où  $\mathcal{G}^L$  (resp.  $\mathcal{G}^R$ ) correspond aux options de Léon (resp. Renée). Cette définition peut se traduire par la construction d'un arbre orienté ordonné (dit *arbre de jeu*), qui, à partir de  $G$ , énumère l'ensemble de ses options, ainsi que toutes les options qui en découlent jusqu'à la fin de la partie. Cet arbre est ordonné dans la mesure



où pour chaque nœud position, on fera la distinction entre ses fils gauches (options de Léon), et ses fils droits (options de Renée). La figure 1.1 illustre un tel arbre pour le jeu  $(1, 2, 2)$  de PARTISAN ENDNIM. Notons que cette correspondance entre un jeu et son arbre permet de considérer deux jeux comme identiques si leurs arbres respectifs sont les mêmes.

### 1.1.2 Les issues

Quels sont les cas de figure possibles lorsque l'on recherche le gagnant d'un jeu ? On se placera ici dans le contexte des jeux en convention normale, mais les arguments restent similaires en convention misère. Les nœuds de l'arbre qui n'ont aucun fils correspondent au jeu  $\{|\}$ . Ce jeu est favorable au second joueur, dans la mesure où le premier joueur est bloqué. On appellera ce type de position favorable au second joueur une  $\mathcal{P}$ -position. Un autre exemple de  $\mathcal{P}$ -position est le jeu  $(n, n)$ , où le second joueur peut toujours imiter le coup du premier joueur et ainsi prendre la dernière boîte. *A contrario*, tous les jeux favorables à celui qui commence sont appelés des  $\mathcal{N}$ -positions. C'est le cas par exemple des jeux PARTISAN ENDNIM avec une seule pile : le premier joueur gagne en prenant toutes les boîtes de la pile. On rencontre également des jeux qui sont tout le temps favorables à Léon (resp. Renée), indépendamment de qui commence. On notera ce type de jeu  $\mathcal{L}$  (resp.  $\mathcal{R}$ ). Par exemple, le jeu  $(2, 1)$  est  $\mathcal{L}$  puisque Léon en commençant peut donner la position  $(1, 1)$  qui sera défavorable à Renée. Et si Renée débute, elle donnera une pile de deux boîtes à Léon qui gagnera.

Il est relativement élémentaire [2] de constater que la représentation arborescente décrite plus haut permet de conclure que tout jeu est nécessairement de l'une des quatre formes suivantes :  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{L}$  ou  $\mathcal{R}$ . Dans la littérature, on appelle cette valeur l'*issue* d'un jeu  $G$ , qu'on notera  $o(G)$ . Nous garderons ce terme dans notre manuscrit, dans la mesure où ses traductions possibles nous semblent peu pertinentes. L'existence de seulement quatre issues possibles se justifie par la propriété ci-dessous.

**Proposition 1.** *Un nœud d'un arbre de jeu sera étiqueté :*

- $\mathcal{P}$  si ses fils gauches sont tous  $\mathcal{N}$  ou  $\mathcal{R}$  et ses fils droits sont tous  $\mathcal{N}$  ou  $\mathcal{L}$ .
- $\mathcal{N}$  si au moins un fils gauche est  $\mathcal{L}$  ou  $\mathcal{P}$  et au moins un fils droit est  $\mathcal{R}$  ou  $\mathcal{P}$ .
- $\mathcal{L}$  si au moins un fils gauche est  $\mathcal{L}$  ou  $\mathcal{P}$  et ses fils droits sont tous  $\mathcal{N}$  ou  $\mathcal{L}$ .
- $\mathcal{R}$  si ses fils gauches sont tous  $\mathcal{R}$  ou  $\mathcal{N}$  et au moins un fils droit est  $\mathcal{R}$  ou  $\mathcal{P}$ .

Cette propriété engendre ainsi une procédure récursive qui permet d'éti-



queter tous les nœuds d'un arbre de jeu, en partant des feuilles. Sur l'exemple de la figure 1.1, on montre ainsi que la position de départ  $(1, 2, 2)$  est une  $\mathcal{N}$ -position. Notons que dans cet arbre, les positions vides ont été omises pour ne pas alourdir le schéma. Les feuilles sont ici les positions à un seul tas, qui sont de type  $\mathcal{N}$ .

### Remarque

Il n'y a donc jamais de partie de nulle dans un jeu combinatoire ! Ce type d'issue peut apparaître dès lors qu'on s'autorise à rencontrer plusieurs fois une même position de jeu : il s'agit des jeux *loopy*, qui ne font pas à proprement parler partie des jeux combinatoires.

Étant donné un jeu  $G$ , la détermination de son issue est l'objet d'étude privilégié par le chercheur. C'est souvent un prérequis nécessaire au calcul d'une stratégie gagnante, qui elle consiste à exhiber à chaque tour de jeu un coup conduisant à l'issue prévue. Si l'algorithme décrit ci-dessus calcule bien l'issue d'un jeu quelconque, on ne peut toutefois pas se satisfaire de sa complexité. En effet, l'arbre de jeu ne faisant pas partie de l'instance, sa taille est bien souvent une fonction exponentielle de l'entrée. Par exemple pour PARTISAN ENDNIM, une instance  $(x_1, \dots, x_n)$  a pour taille  $\sum_{i=1}^n \log x_i$ , alors que la taille de l'arbre de jeu peut elle être doublement exponentielle. Plus généralement, il s'avère que pour un grand nombre de jeux, le calcul de l'issue est un problème *PSPACE* ou *EXPTIME*-complet [35]. Dans certains cas, si l'issue est décidable en temps polynomial (parfois même en temps constant comme pour CHOMP ou HEX), la recherche d'une stratégie gagnante polynomiale reste un problème ouvert.

### 1.1.3 Impartiaux et partisans

En fonction des règles, l'univers des jeux combinatoires se partage en deux grande familles : les jeux *impartiaux* et les jeux *partisans*. Les premiers sont les jeux pour lesquels les options  $\mathcal{G}^L$  et  $\mathcal{G}^R$  sont identiques, et ceci à n'importe quel moment de la partie. Tous les autres jeux sont dits partisans. Dans la littérature, les jeux impartiaux ont été les premiers à être abordés dans le cadre d'une résolution mathématique. Le premier à avoir été complètement résolu est le jeu de NIM [4] en 1905. On peut le voir comme une variante de PARTISAN ENDNIM où les deux joueurs peuvent retirer des boîtes dans n'importe quel tas.

 NIM

Ce jeu est défini par la donnée de  $n$  tas de jetons. Chaque tas contient un nombre quelconque de jetons. À tour de rôle, les deux joueurs retirent autant de jetons qu'ils veulent, dans un seul tas. Celui qui prend le dernier jeton gagne la partie.

Comme les options sont les mêmes pour les deux joueurs, l'arbre d'un jeu impartial est complètement symétrique. Par conséquent, les issues  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$  n'apparaissent jamais (cf. Proposition 1) et seules les issues  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{N}$  existent. Bien souvent, on choisira plutôt de représenter un jeu impartial par une version de l'arbre de jeu privé de ses doublons, sans faire de distinction entre les coups de Léon et Renée. On l'appellera *graphe de jeu*. Les nœuds de ce graphe sont ceux de l'arbre de jeu où les doublons ont été retirés, et on mettra un arc entre deux nœuds s'il existe un coup possible entre les deux positions correspondantes. Un exemple est fourni par la figure 1.2 pour le jeu de NIM (1, 2, 2). La Proposition 1 se simplifie alors et on a la caractérisation suivante des  $\mathcal{P}$ - et  $\mathcal{N}$ -positions d'un jeu impartial :

- Un jeu est  $\mathcal{P}$  si toutes ses options sont  $\mathcal{N}$ .
- Un jeu est  $\mathcal{N}$  s'il admet une option  $\mathcal{P}$ .

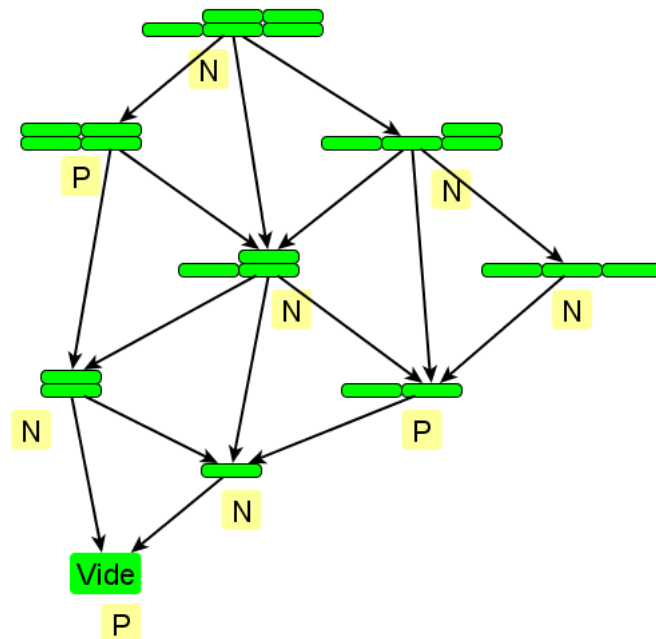


FIGURE 1.2 – Graphe de jeu pour la position (1, 2, 2) de NIM

En d'autres termes, cela signifie que l'ensemble des positions  $\mathcal{P}$  d'un jeu

impartial forme un *noyau* du graphe, c.-à-d. un ensemble stable et absorbant : deux sommets  $\mathcal{P}$  ne sont jamais voisins, et depuis tout sommet non  $\mathcal{P}$ , il existe un arc vers un sommet  $\mathcal{P}$ . Puisque le graphe d'un jeu combinatoire est sans circuit, cet ensemble est unique et son calcul peut se faire en temps polynomial par rapport à la taille du graphe. Cependant, la simplification apportée par cette modélisation des jeux impartiaux reste insuffisante dans de nombreux cas. En effet, la taille des graphes de jeux reste souvent une fonction exponentielle de la taille des instances.

### 1.1.4 Somme de jeux

Certains jeux possèdent une propriété remarquable, à savoir qu'ils sont décomposables en plusieurs sous-jeux indépendants. Dans le cas des jeux en convention normale, la résolution de chacun de ces sous-jeux peut conduire à la résolution du jeu global. Par exemple, prenons une position  $G = (2, 2, 6, 6)$  du jeu de NIM. On peut voir ce jeu comme la composition des positions  $G_1 = (2, 2)$  et  $G_2 = (6, 6)$ . Jouer au jeu  $G$  revient à choisir de jouer soit sur  $G_1$ , soit sur  $G_2$  à chaque tour. On parlera alors de *somme de jeux*, et on notera  $G = G_1 + G_2$ . Plus formellement, on peut définir la somme de deux jeux  $G$  et  $H$  par :

$$G + H = \{G^{\mathcal{L}} + H, G + H^{\mathcal{L}} \mid G + H^{\mathcal{R}}, G^{\mathcal{R}} + H\}$$

En convention normale, ce type de décomposition en somme est pertinent dans le cas où les issues des sous-jeux sont connues. Par exemple, la somme de deux jeux  $\mathcal{P}$  est elle-même  $\mathcal{P}$ . En effet, quelle que soit la composante choisie par le premier joueur à chaque tour de jeu, le second joueur pourra toujours appliquer sa stratégie gagnante sur cette composante ; il jouera ainsi le dernier coup de la partie. Sur l'exemple précédent, les jeux  $G_1$  et  $G_2$  sont clairement  $\mathcal{P}$  (le second joueur pouvant à chaque tour imiter le coup du premier joueur sur l'autre tas). Par conséquent, le jeu  $G$  est lui-même  $\mathcal{P}$ .

Avec le même type d'argument, on montre que la somme d'un jeu  $G$  avec un jeu  $\mathcal{P}$  possède un issue identique à celui de  $G$ . On peut même aller plus loin pour obtenir la table suivante :

+	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$
$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$
$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	?	$\mathcal{N}$ ou $\mathcal{L}$	$\mathcal{N}$ ou $\mathcal{R}$
$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$ ou $\mathcal{N}$	$\mathcal{L}$	?
$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$ ou $\mathcal{N}$	?	$\mathcal{R}$

TABLE 1.1 – Issues des sommes de jeux

On remarque dans cette table que les cas problématiques sont ceux correspondant aux sommes  $\mathcal{L} + \mathcal{R}$ , ainsi que  $\mathcal{N} + \mathcal{N}$ . Dans de telles situations,

la simple connaissance des issues des termes n'est pas suffisante pour déduire l'issue de la somme. Les cas  $\mathcal{N} + \mathcal{L}$  et  $\mathcal{N} + \mathcal{R}$  ont également plusieurs issues possibles. Dans les années 1970, les travaux de Conway [10] ont donné naissance à une théorie mathématique qui permet d'appréhender ces cas ouverts. L'idée principale est d'affiner la caractérisation avec les issues en attribuant à tout jeu une valeur prise dans un ensemble étendu des nombres surréels. Moralement, cette valeur correspond au nombre de coups d'avance que possède Léon sur Renée. Les jeux  $\mathcal{L}$  auront des valeurs strictement positives, alors que les jeux  $\mathcal{R}$  seront strictement négatifs. Plus formellement, une structure de groupe abélien a été donnée à l'ensemble des jeux. Au vu de la table ci-dessus, on imagine aisément que l'élément neutre est  $\mathcal{P}$ . Il prendra la valeur 0. En plus de la somme, la notion d'opposé d'un jeu ( $-G$ ), d'égalité entre jeux, ainsi qu'une relation d'ordre partiel ont été définies dans ce cadre. Les livres mentionnés en début de chapitre, en particulier [2, 41], permettent de bien comprendre la construction de cette théorie.

Bien que l'algèbre ainsi définie constitue un outil puissant, notamment pour résoudre la somme de jeux, la détermination de la valeur d'un jeu dans un temps raisonnable reste un challenge dans de nombreux cas.

#### Remarque

Dans le cas des jeux en convention misère, il n'existe actuellement pas de théorie équivalente, dans la mesure où il n'y a pas d'élément neutre naturel pour la somme de jeux. Cependant, les récents travaux de Plambeck et Siegel (repris dans [41]) sur les quotients misère constituent une vraie avancée dans la compréhension de ces jeux. Par ailleurs, on notera qu'il existe dans la littérature d'autres sommes de jeux [10] (on peut jouer dans toutes les composantes en même temps par exemple), mais celles-ci ont été très peu considérées dans la littérature. Récemment, Guignard et Sopena les ont remises au goût du jour [40].

### 1.1.5 Nimbers et fonction de Grundy

Dans le cas des jeux impartiaux, la Table 1.1 permet de constater que la somme de deux jeux  $\mathcal{N}$  est indéterminée, autrement dit il peut s'agir d'un jeu  $\mathcal{P}$  comme d'un jeu  $\mathcal{N}$ . Par exemple, le jeu de NIM à un tas non vide est clairement  $\mathcal{N}$ . Et la somme de deux tas de NIM  $(a, b)$  est  $\mathcal{P}$  si  $a = b$ , et  $\mathcal{N}$  sinon. Si on sait déjà que tous les jeux  $\mathcal{P}$  ont une valeur 0, quelles valeurs peuvent prendre les jeux  $\mathcal{N}$  ?

Dans l'algèbre de Conway, deux jeux  $G$  et  $H$  qui ont la même valeur (on dira  $G = H$ ) satisfont la propriété  $o(G + H) = \mathcal{P}$ . On entend cette propriété en cela qu'à chaque tour, le second joueur a toujours un coup équivalent à celui du premier joueur sur l'autre composante, ou alors il peut jouer sur la même composante et le ramener dans un état similaire. Selon cette règle, le simple exemple du jeu de NIM montre que tous les jeux à un tas ont des valeurs différentes. Il a alors été choisi de donner la valeur  $*i$  au tas de taille  $i$ . Ces valeurs sont appelées *nimbers* dans la littérature. Dans la théorie de Conway, les nimbers ne sont pas des nombres réels mais plutôt des ordinaux. Leur définition formelle est la suivante : le nimber  $*0$  est confondu avec  $0$ , et :

$$*(n + 1) = \{0, *1, \dots, *n \mid 0, *1, \dots, *n\}$$

L'un des résultats fondateurs de la théorie des jeux impartiaux est le théorème de Sprague-Grundy [42], qui affirme que tout jeu impartial dont les options sont des nimbers est lui-même un nimber. De plus, la valeur de ce nimber est complètement déterminée :

**Théorème 2** (Sprague et Grundy [42]). *Soit  $G$  un jeu impartial tel que*

$$G = \{a, b, c \dots \mid a, b, c \dots\},$$

*où  $a, b, c \dots$  sont tous des nimbers. Alors  $G$  est le nimber  $\text{Mex}\{a, b, c \dots\}$ , c.-à-d. le plus petit nimber qui n'est pas dans l'ensemble  $\{a, b, c \dots\}$ .*

D'après la définition récursive d'un jeu, ce théorème assure donc que tous les jeux impartiaux ont une valeur qui est un nimber. Par conséquent, il s'avère que le jeu de NIM est un jeu de référence pour les impartiaux, puisque tout jeu impartial est égal à un tas de Nim. La fonction qui associe à un jeu impartial son nimber est appelée *fonction de Grundy*, on la notera  $\mathcal{G}$ . On considère souvent que la connaissance de cette fonction (via une formule, ou du moins un algorithme polynomial) pour toutes les positions d'un jeu impartial est l'objectif le plus ambitieux dans la résolution de ce jeu.

Dans le cas du jeu de NIM, l'expression de la fonction de Grundy est très élégante, comme l'illustre cet ancien résultat [12] :

**Théorème 3** (Bouton [12]). *Étant donnée une position  $(x_1, \dots, x_\ell)$  du jeu de NIM, on a*

$$\mathcal{G}(x_1, \dots, x_\ell) = x_1 \oplus \dots \oplus x_\ell$$

*où  $\oplus$  correspond à l'addition binaire sans retenue.*

Dans la littérature, on appelle plus communément  $\oplus$  l'opérateur de *Nim-somme*.

## 1.2 Qu'est-ce qu'une "bonne" règle de jeu ?

La plupart des travaux dans le domaine des jeux combinatoires portent sur la complexité algorithmique de calcul de la valeur d'un jeu. Dans les cas complexes, les chercheurs se concentrent sur des positions de jeu particulières (fins de partie de Go par exemple), le simple calcul de l'issue, ou alors sur certaines propriétés structurelles (comme par exemple une éventuelle périodicité de la fonction de Grundy). Dans tous les cas, ces recherches portent sur la résolution du jeu à proprement parler.

Ce choix est tout à fait naturel et compréhensible. Toutefois, on peut se demander dans quelle mesure l'étude de tel ou tel jeu mérite d'être menée. Dans la littérature de la TJC, un grand nombre de jeux n'a pas ou peu d'intérêt ludique. En effet, la convention de fin de partie empêche souvent d'avoir un sentiment de contrôle, si ce n'est avant les tout derniers coups. Fort heureusement, leur résolution fait intervenir des outils mathématiques souvent remarquables et parfois inattendus. Certains jeux sont aussi là pour illustrer des valeurs rares (jeux *all-small* par exemple, cf. [3]), faisant ainsi progresser la connaissance de la théorie générale. Dans [27], Fraenkel qualifie de tels jeux de *MathGames*. Ces jeux perdent leur intérêt dès lors que la résolution est avérée. C'est par exemple le cas du jeu de NIM, bien que son aspect ludique ne soit pas nul dans les premières parties. Au contraire, il existe des jeux pour lesquels c'est le plaisir de jouer qui prime. Ce sont des jeux aux règles simples, pour lesquels une résolution totale n'est pas envisageable, mais où les joueurs ont le sentiment de pouvoir détecter si une position donnée leur est favorable ou non. On les appelle *PlayGames*. Notons que les aspects *MathGame* et *PlayGame* ne sont pas nécessairement contradictoires. Certains jeux partisans semblent réunir les deux aspects, dans la mesure où le mathématicien sait donner la valeur de certaines positions, sans pour autant être capable de résoudre le jeu dans son intégralité. Le joueur peut alors chercher à décomposer un jeu en somme de sous-jeux qu'il sait lui être favorables, dans l'optique d'accumuler des coups d'avance sur son adversaire. On peut citer par exemple NOGO, SNORT, FOX AND GESE...

De leur côté, les jeux impartiaux font toujours partie des *MathGames*, dans la mesure où, par définition, les joueurs ne peuvent jamais avoir le sentiment d'avoir des coups d'avance sur l'adversaire. Par conséquent, c'est leur résolution mathématique qui est le moteur de l'étude de ces jeux. Dans certains cas, les chercheurs ont donc abandonné l'idée de proposer des règles élégantes, puisque l'intérêt n'est clairement pas d'y jouer. On peut alors trouver dans la littérature des jeux comme ceux-ci :



 RAT [30]

Étant donnés trois tas de jetons de tailles  $x$ ,  $y$ , et  $z$  (qu'on réordonnera à chaque tour de sorte que  $x \leq y \leq z$ ), chaque joueur retire  $k$ ,  $l$  et  $m$  jetons des trois tas à condition que l'une des contraintes suivantes soit respectée :

- au moins l'une des trois valeurs  $k$ ,  $l$  ou  $m$  est nulle (mais pas les trois simultanément),
- les trois valeurs sont non nulles et  $|k - l| < a$ , où

$$a = \begin{cases} 1 & \text{si } y - x \not\equiv 0 \pmod{7} \\ 2 & \text{sinon,} \end{cases}$$

- les trois valeurs sont non nulles et  $|k - m| < b$ , où  $b = 3$  si  $u = w$  et sinon :

$$b = \begin{cases} 5 & \text{si } w - u \not\equiv 4 \pmod{7} \\ 6 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $u = \min\{x - k, y - l, z - m\}$  et  $w = \max\{x - k, y - l, z - m\}$ .

 EROSION [2]

Une position est un couple  $(l, r)$  d'entiers positifs. À son tour, Léon joue vers  $(l - r, r)$  si  $l > r$ . Renée joue vers  $(l, r - l)$  si  $r > l$ . On joue en convention normale.

La lecture des papiers associés à ces jeux [2, 30] montre que la détermination de leurs issues est une recherche digne d'intérêt (l'objectif n'est pas de donner la solution de ces jeux ici). Par ailleurs, les règles énoncées en font clairement des *MathGames*, mais pour des raisons différentes : les règles du jeu RAT ne le rendent pas jouable car trop compliquées, alors que celles d'EROSION sont élégantes, mais ne proposent qu'une seule option à chaque joueur !

En suivant ces exemples, on pourrait alors chercher à résoudre n'importe quel jeu, tant que la stratégie de résolution est belle. On sent bien les limites d'une telle affirmation, d'autant plus qu'à la lecture de certains articles, on s'aperçoit même que les règles du jeu ont été confectionnées en amont, dans le but de correspondre à une fonction de Grundy prédéterminée. Ce fut le cas notamment de certains de mes travaux [16, 17], où l'utilisation de la combinatoire des mots dans le calcul des zéros de la fonction de Grundy représente une contribution supérieure à la résolution du jeu lui-même. Les jeux de RAT [30], RALEIGH [26], le FLORA GAME [25] sont d'autres illustrations de cette démarche "inversée", où une caractérisation polynomiale des issues passe par des outils sophistiqués comme le développement de réels en

fraction continue.

En poussant plus loin le raisonnement, on s'aperçoit qu'il est possible de définir des jeux avec des règles différentes, mais ayant les mêmes issues ou la même fonction de Grundy. Prenons par exemple le jeu de WYTHOFF [43] décrit ci-dessous. Il s'agit d'une variante du jeu de NIM sur deux tas, et personne ne contredira la simplicité de ses règles. Les  $\mathcal{P}$ -positions de ce jeu sont par ailleurs remarquables [24, 43].



### WYTHOFF [43]

On dispose de deux tas de jetons. Chaque tas contient un nombre quelconque de jetons. À tour de rôle, les deux joueurs retirent autant de jetons qu'ils veulent dans un seul tas, ou bien le même nombre de jetons dans les deux tas. Celui qui prend le dernier jeton gagne la partie.

Considérons maintenant le jeu WYTMOCH défini ainsi :



### WYTMOCH

On dispose de deux tas de jetons. Chaque tas contient un nombre quelconque de jetons, disons  $a$  et  $b$  avec  $a \leq b$ . Le jeu est impartial et les coups autorisés sont les suivants :

- Si  $(a, b)$  est de la forme  $(\lfloor \frac{n(1+\sqrt{5})}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n(3+\sqrt{5})}{2} \rfloor)$  pour un certain entier  $n$ , alors le joueur enlève un jeton dans le tas de son choix.
- Sinon, le joueur retire tous les jetons des deux tas.

Celui qui prend le dernier jeton gagne la partie.

On ne peut pas dire que les règles de ce jeu soient très excitantes : une seule option à chaque tour, et une condition peu agréable à tester. Pourtant, toutes les positions de WYTHOFF et WYTMOCH ont exactement les mêmes issues. Même s'il nous semble naturel de dire que les règles du premier sont "meilleures" que celles du second, comment pourrait-on formaliser cette affirmation ? De même, pour le jeu RAT, aurait-on pu trouver des règles plus abordables qui produiraient la même séquence d'issues ? On peut avancer un argument supplémentaire en remarquant la propriété suivante :

**Proposition 4** (D. et Rigo [15]). *Pour tous ensembles disjoints  $P, N, L, R$  de positions, on peut toujours trouver un jeu dont les ensembles d'issues  $\mathcal{P}, \mathcal{N}, \mathcal{L}, \mathcal{R}$  correspondent respectivement à  $P, N, L, R$ .*

*Preuve.* Il suffit de choisir pour ce jeu les règles suivantes :

- Les positions de  $P$  sont finales.

- Depuis une position de  $N$ , les deux joueurs peuvent jouer vers une position de  $P$ .
- Depuis une position de  $L$ , Léon peut jouer vers une position de  $P$  et Renée n'a aucune option.
- Depuis une position de  $R$ , Léon est bloqué et Renée peut jouer vers une position de  $P$ .

□

Bien entendu, les règles de ce jeu générique découlent directement de la Proposition 1. Le jeu WYTHMOCH a également été construit de cette façon. À l'évidence, ce type de jeu qui intègre directement les issues dans la définition de ses règles ne peut pas être satisfaisant. Cela renforce le fait que de telles règles ne peuvent pas être mises sur le même plan que d'autres, plus simples, comme celles de WYTHOFF ou EROSION. Dans ce cas, comment définir une échelle de qualité des règles d'un jeu ?

Il faut savoir qu'actuellement, il n'existe aucune étude qui traite de la nature et de la complexité des règles d'un jeu. Notre objectif ici est de faire un premier pas dans cette direction. Nous choisirons comme premier objet d'étude les jeux de suppression sur tas (type NIM, WYTHOFF...), car ils représentent une grande famille des jeux combinatoires, et encore plus conséquente parmi les impartiaux. De plus, la simplicité du codage des positions pour ces jeux, c.-à-d. un  $n$ -uplet d'entiers, facilite l'expression des règles.

### 1.3 Vers une formalisation des règles de jeu : l'exemple des jeux de suppression sur tas

La littérature sur les jeux de suppression sur tas est très riche. Dans cette section, nous allons voir quels genres de règles ont été proposées par les chercheurs pour définir ce type de jeu, tout en proposant une première classification. Nous nous limiterons au cas des jeux impartiaux. Toutefois, les caractéristiques mentionnées plus loin s'étendent naturellement aux jeux partisans, en considérant qu'il existe deux types de coup : ceux de Léon et ceux de Renée. Dans la suite, une position d'un jeu de suppression sur tas sera notée  $(x_1, \dots, x_n)$ , où  $n$  est le nombre de tas, et pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $x_i \geq 0$  est le nombre de jetons dans le tas numéro  $i$ . Une option d'un tel jeu sera elle-même un  $m$ -uplet  $(y_1, \dots, y_m)$  satisfaisant  $\sum_{i=1}^m y_i < \sum_{i=1}^n x_i$ . La position  $(0, \dots, 0)$  est une position finale (ce n'est pas nécessairement la seule).

#### 1.3.1 Les jeux à nombre de tas constant

C'est le terme que j'ai retenu pour décrire les jeux satisfaisant  $n = m$ , autrement dit le nombre de tas reste inchangé jusqu'à la fin de la partie

(quitte à ce que certains tas soient vides). Formellement, ces jeux peuvent être définis à partir de la donnée d'une fonction booléenne  $f$  :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \rightarrow \{\text{VRAI}, \text{FAUX}\} \\ (G, H) &\mapsto f(G, H) \end{aligned}$$

$G$  et  $H$  correspondent ici à deux positions de jeu, et  $f(G, H)$  sera évalué à VRAI si et seulement si  $H$  est une option de  $G$ . Ainsi, la simple donnée d'une telle fonction suffit pour définir les règles de ces jeux. Elle répond à la question suivante : étant donnée une position de départ  $G$ , et une position d'arrivée  $H$ , a-t-on le droit de jouer de  $G$  vers  $H$ ? Certains jeux susmentionnés font clairement partie de cette famille. Par exemple, pour WYTHOFF, on a :

$$f_{\text{WYTHOFF}}(G, H) = \text{VRAI} \Leftrightarrow G - H \in \{(0, k), (k, 0), (k, k) : k > 0\},$$

où  $G - H$  est la différence membre à membre des  $n$ -uplets  $G$  et  $H$ .

Pour le jeu de NIM, cette fonction est la suivante :

$$f_{\text{NIM}}(G, H) = \text{VRAI} \Leftrightarrow G - H \in \{ke_i : k > 0, 1 \leq i \leq n\}$$

où  $e_i$  est le  $i^{\text{eme}}$  vecteur unitaire de longueur  $n$ .

D'ailleurs, ces deux jeux ont une généralisation naturelle qui consiste à soustraire à un  $n$ -uplet un autre  $n$ -uplet faisant partie d'une liste autorisée. Cette généralisation a été proposée par Golomb [33], sous le nom de VECTOR SUBTRACTION GAME :



#### VECTOR SUBTRACTION GAME [33]

Une position est un  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  d'entiers positifs ou nuls. Soit  $C$  un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{N}^n \setminus 0$ . Chaque joueur à tour de rôle soustrait un  $n$ -uplet de  $C$  à la position courante, de sorte que le résultat reste une position de jeu. On joue en convention normale.

Par conséquent, on en déduit directement la fonction qui régit les règles de ce jeu :

$$f_{\text{VECTOR SUBTRACTION GAME}}(G, H) = \text{VRAI} \Leftrightarrow G - H \in C$$

**Remarque**

Dans la littérature, plusieurs papiers ont considéré des instances particulières de ce jeu, en choisissant des ensembles  $C$  bien précis. C'est le cas de nombreuses variantes de WYTHOFF, comme WYTHOFF GÉNÉRALISÉ [24], WYTHOFF sur plusieurs tas [12], MAHARADJA NIM [38], WYT(A,B) [34], ou encore GENERALIZED DIAGONAL WYTHOFF NIM [36].

Récemment, Fraenkel a défini le jeu MARK [28] qui se joue sur un seul tas (une position de jeu sera décrite par un entier), et dont les règles sont données par :

$$f_{\text{MARK}}(G, H) = \text{VRAI} \Leftrightarrow H = G - 1 \text{ ou } H = \lfloor \frac{G}{2} \rfloor$$

On remarque que dans cet exemple, la seule connaissance de la différence  $G - H$  ne suffit pas à décider si le coup est autorisé ou non. Dans la même lignée, le jeu RAT vérifie la même propriété, tout comme GREEDY NIM [2], qui est une variante de NIM où les joueurs ne peuvent retirer des jetons que dans le tas le plus rempli.

Malgré ses règles décevantes, le jeu WYTMOCH fait également partie de cette famille. Dans son cas, le calcul de la fonction  $f$  n'est pas donné par une formule succincte mais il reste polynomial, puisque décider si un couple  $(x_1, x_2)$  est de la forme  $(\lfloor \frac{k(1+\sqrt{5})}{2} \rfloor, \lfloor \frac{k(3+\sqrt{5})}{2} \rfloor)$  peut se faire en temps polynomial [24]. De plus, la Proposition 4 reste vraie pour les jeux impartiaux de suppression sur tas : étant donnée une séquence  $P$  de  $n$ -uplets de  $\mathbb{N}^n$  incluant 0, on peut toujours trouver un jeu de suppression (à nombre de tas constant) dont l'ensemble des  $\mathcal{P}$ -positions correspond exactement à  $P$ . De plus, si  $P$  est caractérisable en temps polynomial, il en va de même pour le calcul de la fonction  $f$  associée à ce jeu. Par conséquent, afin de différencier les jeux de cette famille selon leurs règles, la complexité de calcul de  $f$  ne pouvait être le critère retenu. Une grille de lecture qui nous a semblé intéressante est de distinguer les jeux pour lesquels la donnée de  $G - H$  est suffisante pour décider si un coup est autorisé ou non. En d'autres termes, on va s'intéresser aux jeux pour lesquels il existe une fonction  $f' : \mathbb{N}^n \rightarrow \{\text{VRAI}, \text{FAUX}\}$  telle que :

$$f(G, H) = \text{VRAI} \Leftrightarrow f'(G - H) = \text{VRAI}$$

Selon cette définition, on peut considérer la fonction  $f'$  comme une fonction de "coup" : étant donné un  $n$ -uplet  $c$ , quelle que soit la position de départ  $G$ , soustraire  $c$  à  $G$  est-il autorisé ou non ? Dans [15], nous avons qualifié d'*invariantes* les règles de tels jeux, dans le sens où les coups autorisés ne dépendent ni de la position de départ, ni de la position d'arrivée (on gardera

cependant la contrainte que ces positions doivent rester légales, c.-à-d. des  $n$ -uplets d'entiers positifs).

L'introduction des règles invariantes permet de répondre à plusieurs problèmes mentionnés précédemment. Tout d'abord, elle permet de différencier des jeux tels que WYTHOFF et WYTMOCH (qui, pour rappel, ont des issues identiques) : le premier a des règles invariantes, de part l'existence de la fonction  $f'$  décrite plus haut. Les règles du second ne le sont pas. En effet, soustraire  $(0, 1)$  est autorisé depuis la position  $(3, 5)$ , alors que c'est un coup interdit depuis  $(8, 8)$ . Ensuite, la Proposition 4 appliquée aux jeux impartiaux de suppression sur tas à nombre de tas constant n'est plus vraie si l'on impose que les règles du jeu soient invariantes. Afin d'illustrer ce propos, prenons pour  $P$  un ensemble de couples incluant  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(4, 6)$ . Il n'existe aucun jeu de suppression sur tas aux règles invariantes ayant  $P$  comme ensemble de  $\mathcal{P}$ -positions, puisque depuis la position  $(1, 1)$ , on doit pouvoir jouer vers  $(0, 0)$ , alors que depuis  $(4, 6)$ , on ne peut pas soustraire  $(1, 1)$  (sous-peine de violer la contrainte de stabilité des  $\mathcal{P}$ -positions).

En fonction de cette notion d'invariance, nous avons pu proposer une première classification des règles des jeux impartiaux de suppression à nombre de tas constant. En particulier, plusieurs jeux de la littérature trouvent place dans cette définition, comme l'illustre la Table 1.2 (qui n'est sans doute pas exhaustive, mais qui couvre un large ensemble de travaux, notamment sur les dernières années).

Il est clair que la notion d'invariance n'est qu'un premier pas dans la direction souhaitée. Si la plupart des jeux aux règles invariantes du tableau ci-dessus ont une fonction  $f'$  qui s'exprime facilement, notre définition ne tient pas compte de la complexité algorithmique de celle-ci. D'ailleurs, le jeu WYT(F) [31] illustre ce propos en introduisant une variante très générique de WYTHOFF, où un coup est autorisé s'il est borné par une fonction de lui-même.

Règles invariantes		
Jeu	Auteurs	Nombre de tas
NIM	Bouton, 1905 [12]	illimité
WYTHOFF	Wythoff, 1907 [43]	2
VEC. SUB. GAME	Golomb, 1966 [33, 12]	illimité
WYTHOFF GÉNÉRALISÉ	Fraenkel, 1982 [24]	2
EUCLID	Fraenkel, 2005 [23]	2
WYT(A,B)	Gurvich, 2012 [34]	2
WYT(F)	Fraenkel et Tanny, 2013 [31]	2
MAHARADJA NIM	Larsson et Wästlund [38]	2

Règles non invariantes		
Jeu	Auteurs	Nombre de tas
PRIM AND DIM	Berlekamp et al., 1981 [3]	1
ENDNIM	Albert et Nowakowski, 2001 [1]	illimité
GREEDY NIM	Albert et al., 2007 [2]	illimité
RALEIGH	Fraenkel, 2007 [26]	3
FIBONACCI GAME	Duchêne et Rigo, 2008 [16]	3
ENDWYTHOFF	Fraenkel et Reisner, 2009 [30]	illimité
FLORA	Fraenkel, 2010 [25]	4
MARK	Fraenkel, 2011 [28]	1
RAT	Fraenkel [30]	3
$\beta$ -NIM, $\beta$ -WYNIM	Fraenkel et Larsson [29]	2
WYTMOCH	Duchêne	2

TABLE 1.2 – Jeux connus à suppression sur tas, invariants et non-invariants

**Remarque**

Le lecteur pourra remarquer que dans le cas précis des jeux impartiaux à nombre de tas constant, un jeu à règles invariantes est une instance particulière du VECTOR SUBTRACTION GAME. Gardons à l'esprit que cette notion d'invariance se veut plus générique. D'une part, elle s'étend naturellement aux jeux "proches", comme les jeux de suppression sur tas dans leur version partisane. C'est aussi le cas pour les jeux où l'on s'autorise à augmenter le nombre de jetons dans les tas, tout en s'assurant que le jeu ait une fin. Le jeu LIM [19] en est un exemple. D'autre part, notre objectif est d'étendre une telle définition à d'autres types de jeu. En 2014, Faridi, Huntemann et Nowakowski [18] ont étendu cette notion aux jeux de placement [5], qui correspondent aux jeux où l'on place des jetons sur un graphe sans les enlever ou les déplacer par la suite. La notion d'invariance (appelée *universalité* dans [18]) signifie ici que la façon de placer un jeton sur le graphe est indépendante du sommet choisi. Les jeux COL et SNORT sont en ce sens invariants.

### 1.3.2 Les jeux à nombre de tas variables

Il existe dans la littérature des jeux de suppression où le nombre de tas peut augmenter au cours de la partie (en supposant toujours que les tas vides restent comptabilisés). Cela se produit lorsque les règles autorisent à séparer un tas en plusieurs tas de jetons. Prenons par exemple le jeu de KAYLES, où les deux joueurs retirent alternativement 1 ou 2 jetons d'un seul tas, en les prenant soit sur les extrémités, soit au milieu (ce qui entraîne la création de deux sous-tas). Les options de jeu d'un tas unique de taille 4 sont alors  $\{(3), (2), (1, 2), (2, 1), (1, 1)\}$ .

Une généralisation bien connue du jeu de KAYLES est la famille des jeux octaux. Un jeu octal est défini par la donnée d'un  $k$ -uplet d'entiers  $(\mathbf{d}_1 \cdots \mathbf{d}_k)$  avec  $\mathbf{d}_i \in \{0, \dots, 7\}$  pour tout  $i = 1 \dots k$ . Pour un  $i$  fixé, si  $\mathbf{d}_i$  vaut 0, alors il est interdit de retirer  $i$  jetons simultanément. Par défaut, on considère  $\mathbf{d}_i = 0$  pour tout  $i > k$ . Si  $\mathbf{d}_i$  est non nul, alors il est possible d'enlever  $i$  jetons d'un seul tas, et la valeur de  $\mathbf{d}_i$  indique la façon de les retirer : en prenant tout le tas, en prenant sur les extrémités, ou en coupant le tas en deux sous-tas (cf. [3] pour les détails précis du codage octal). Selon cette définition, KAYLES correspond au jeu octal (77).

#### Remarque

Depuis leur introduction, les jeux octaux ont suscité l'intérêt de la communauté. La conjecture de Guy [3] prétend que tous les jeux octaux ont leur fonction de Grundy ultimement périodique. Aujourd'hui, cette conjecture remarquable n'a toujours été ni prouvée ni infirmée. Les puissances de calcul des machines actuelles ont toutefois pu la valider pour certaines instances du problème.

Pour ce type de jeu, la fonction de coups définie dans le cadre des jeux à nombre de tas constant prend toujours du sens. Il suffit de la définir sur un ensemble plus vaste, comme l'ensemble des uplets d'entiers. On peut noter que dans le cas des jeux octaux, où l'on ne peut pas diviser un tas en plus de deux sous-tas, la valeur de  $f((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_m))$  sera toujours fausse si  $m \neq n, n + 1$ . En revanche, la notion d'invariance telle que définie dans la section précédente ne s'adapte plus lorsque le nombre de tas varie, puisque  $(x_1, \dots, x_n) - (y_1, \dots, y_m)$  n'a pas de sens pour  $n \neq m$ . De plus, une telle définition nécessiterait de l'information supplémentaire afin de savoir quels tas sont concernés par le retrait et/ou la transformation en sous-tas. Par exemple, un coup  $(3, 5) \rightarrow (1, 1, 2)$  peut correspondre à l'union des coups  $(3) \rightarrow (1, 1)$  et  $(5) \rightarrow (2)$ , ou alors des coups  $(3) \rightarrow (1)$  et  $(5) \rightarrow (1, 2)$ .



Par conséquent, on ne s'intéressera par la suite qu'à la notion d'invariance pour les jeux de suppression à nombre de tas constant. Pour les autres, dans notre objectif de produire une définition de la complexité des règles d'un jeu, on préférera s'orienter sur l'étude de la complexité de la fonction de coup, comme il le sera évoqué dans la conclusion de ce chapitre.

## 1.4 Les ensembles invariants

La Proposition 4 a soulevé une question intéressante à propos des jeux impartiaux de suppression sur tas : étant donné un ensemble  $X$  de  $n$ -uplets d'entiers, existe-t-il un jeu impartial de suppression sur tas et aux règles invariantes dont l'ensemble  $X$  correspond exactement aux  $\mathcal{P}$ -positions ? Parmi les ensembles  $X$  qu'il serait intéressant de tester, il y a notamment ceux qui correspondent aux  $\mathcal{P}$ -positions de jeux aux règles non-invariantes (cf. Table 1.2). On peut en effet se demander s'il aurait été possible de proposer des règles invariantes à de tels jeux. Nous avons alors étendu la notion d'invariance aux sous-ensembles de  $\mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ .

**Définition 5** (D. et Rigo [15]). *Un sous-ensemble  $X$  de  $\mathbb{N}^n$  est dit invariant s'il existe un jeu de suppression à nombre de tas constant et aux règles invariantes dont  $X$  soit l'ensemble des  $\mathcal{P}$ -positions.*

Dans une étude qui a fait suite à nos travaux [29], Fraenkel et Larsson ont défini ce qu'était un jeu aux règles  $t$ -invariantes.

**Définition 6** (Fraenkel et Larsson [29]). *Étant donné un entier  $t > 1$ , un jeu de suppression impartial à nombre de tas constant est  $t$ -invariant s'il n'est pas  $(t - 1)$ -invariant et si l'ensemble des positions de jeu peut être partitionné en  $t$  sous-ensembles  $X_1, \dots, X_t$  tels que pour tout  $i \in \{1, \dots, t\}$ , le jeu réduit à  $X_i$  ait des règles invariantes. Par ailleurs, un jeu invariant sera considéré comme 1-invariant.*

À travers cette notion, l'objectif des auteurs était d'induire un ordre (voire une estimation de complexité) sur les règles d'un jeu de suppression sur tas, en fonction de la valeur de  $t$ . Dans [29], les jeux  $\beta$ -Nim,  $\beta$ -Wytnim et  $\beta^t$ -Wytnim sont des exemples de jeux 2-invariants aux  $\mathcal{P}$ -positions identiques à celles du jeu invariant WYTHOFF GÉNÉRALISÉ [24].

Par similarité avec la Définition 5, on peut alors étendre la notion de  $t$ -invariance aux sous-ensembles de  $\mathbb{N}^n$ . Si cette notion peut sembler attrayante afin de construire une hiérarchie dans les règles de jeu, nous avons récemment montré avec Parreau et Rigo que son intérêt n'était finalement que très restreint (du moins selon la définition actuelle de [29]) :

**Proposition 7** (D., Parreau et Rigo [14], Théorème 10). *Tout sous-ensemble  $X$  de  $\mathbb{N}^n$  qui contient 0 est  $t$ -invariant avec  $t \in \{1, 2\}$ .*

La section précédente nous a montré que les ensembles invariants constituaient un sous-ensemble strict non-vide de  $\mathbb{N}^n$ . Par conséquent, en collaboration avec Cassaigne, Parreau et Rigo [9, 15, 14], nous nous sommes intéressés au problème de décision associé.



#### ENSEMBLE INVARIANT

**Entrée :** Un sous-ensemble  $P$  de  $\mathbb{N}^n$  contenant 0.

**Sortie :**  $P$  est-il invariant ?

Par définition, décider si un sous-ensemble  $P$  est invariant revient à décider de l'existence d'un jeu aux règles invariantes. En fait, nous avons montré que considérer le jeu de soustraction maximal suffit :

**Lemme 8** (D., Parreau et Rigo [14], Lemme 21). *Soit  $P$  un sous-ensemble de  $\mathbb{N}^n$  contenant 0.  $P$  est invariant si et seulement si le VECTOR SUBTRACTION GAME ayant  $C$  comme ensemble de coups admet  $P$  comme ensemble de  $\mathcal{P}$ -positions, où  $C$  est défini par :*

$$C = \mathbb{N}^n \setminus (P - P)$$

Ici,  $P - P$  décrit l'ensemble des différences entre tous les paires de  $n$ -uplets de  $\mathbb{N}^n$ . Ce résultat s'explique assez facilement, dans la mesure où il est clair que s'il existe un jeu invariant, il ne peut autoriser aucun coup entre deux  $\mathcal{P}$ -positions. Donc ce jeu a nécessairement un ensemble de coups inclus dans  $C$ . Le fait de lui rajouter des coups qui ne sont pas dans  $(P - P)$  ne modifie pas les issues du jeu.

D'après ce lemme et la Proposition 1, décider si un ensemble  $P$  est invariant revient alors à décider si pour toute position de  $\mathbb{N}^n \setminus P$ , il existe un coup de  $C$  qui permette de jouer vers un  $n$ -uplet de  $P$ . Dans ce qui suit, nous allons traiter de la décidabilité de ce problème pour une grande famille d'ensembles. Nous verrons ensuite que pour certains sous-ensembles particuliers de  $\mathbb{N}^2$ , le problème peut se résoudre en temps polynomial.

#### 1.4.1 Décidabilité du problème ENSEMBLE INVARIANT

Parmi les sous-ensembles de  $\mathbb{N}^n$ , nous avons choisi de considérer la famille des sous-ensembles  $U$ -définissables, où  $U$  est une numération de Pisot. Nous donnons ici les quelques définitions nécessaires à la bonne compréhension de nos résultats.

**Définition 9.** *Un nombre réel  $\alpha > 1$  est dit de Pisot s'il est la racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers dont tous les conjugués ont un module inférieur à 1.*

**Définition 10** (Bruyère et Hansel, [6]). Une numération de Pisot est une suite croissante d'entiers  $(U_i)_{i \geq 0}$  telle que  $U_0 = 1$  et  $(U_i)$  satisfait une relation linéaire récurrente dont le polynôme caractéristique est le polynôme minimal d'un nombre de Pisot.

Étant donnée une numération de Pisot  $U = (U_i)$ , tout nombre entier positif  $n$  a une écriture unique  $rep_U(n) = c_\ell \cdots c_0$ , avec  $c_\ell > 0$ ,  $n = \sum_{i=0}^\ell c_i U_i$  et  $\sum_{i=0}^r c_i U_i < U_{r+1}$  pour tout  $r \leq \ell$ . Par exemple, les numérations habituelles en base  $k$  sont des numérations de Pisot (en prenant  $(U_i) = (k^i)$ ).



**Exemple**

Prenons la numération de Fibonacci, définie à partir de la suite  $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ ,  $U_0 = 1$ , et  $U_1 = 2$ . Il s'agit d'une numération de Pisot de polynôme caractéristique  $X^2 - X - 1$ . Dans ce système, tout entier peut s'écrire comme une combinaison  $\sum_{i=0}^r c_i U_i$  avec les  $c_i$  dans  $\{0, 1\}$  (cf. Table 1.3). En rajoutant la contrainte que deux  $c_i$  consécutifs ne peuvent être égaux à 1, l'unicité de la représentation est garantie.

$n \backslash U_i$	8	5	3	2	1
1					1
2				1	0
3			1	0	0
4			1	0	1
5		1	0	0	0
6		1	0	0	1
7		1	0	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	0	1
10	1	0	0	1	0
11	1	0	1	0	0
12	1	0	1	0	1

TABLE 1.3 – Les premiers entiers dans la numération de Fibonacci

À partir d'une numération de Pisot  $U$ , on va définir une logique du premier ordre étendue, dite *logique de Presburger*, de la façon suivante. L'alphabet, noté  $A_U$ , contient autant de variables  $x, y, z, \dots$  que nécessaire, ainsi que les symboles  $+, =, \vee_U, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \exists, \forall$  et les parenthèses. Les variables ont des valeurs prises dans  $\mathbb{N}$ . Les *termes* et les *formules* sont des mots définis récursivement sur  $A_U^*$  :

- Une variable est un terme.

- Si  $t$  est un terme, alors  $V_U(t)$  est également un terme.
- Si  $t_1$  et  $t_2$  sont deux termes, alors  $(t_1 + t_2)$  est un terme.
- Si  $t_1$  et  $t_2$  sont deux termes, alors  $t_1 = t_2$  est une formule.
- Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux formules, alors  $\varphi \vee \psi$ ,  $\varphi \wedge \psi$ ,  $\varphi \rightarrow \psi$ ,  $\varphi \leftrightarrow \psi$ ,  $\neg\varphi$  sont des formules.
- Si  $\varphi$  est une formule et  $x$  est une variable, alors  $\forall x\varphi$  et  $\exists x\varphi$  sont des formules.

La fonction  $V_U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  associe à un entier  $m$  le plus petit  $U_i$  qui apparaît avec un coefficient non nul dans la décomposition de  $m$  dans la numération de Pisot  $U$ . On fixe par ailleurs  $V_U(0) = 1$ . Par exemple, si  $U$  est la numération en base  $k$  et  $t$  un entier quelconque, alors  $V_U(t)$  est la plus grande puissance de  $k$  qui divise  $t$ .

Avec ces définitions, on définit ainsi le langage des formules sur  $A_U$  que l'on notera  $\mathfrak{n}_U = \langle \mathbb{N}, +, V_U \rangle$ . On dira qu'une formule  $\varphi$  est une *proposition* si toutes ses variables sont liées à des quantificateurs, et on écrira  $\mathfrak{n}_U \models \varphi$  si cette proposition est vraie. *A contrario*, une formule qui contiendra des variables  $x_1, \dots, x_n$  dites *libres* (c.-à-d. liées à aucun quantificateur) sera notée  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ . Étant donnée une telle formule, on peut alors s'interroger sur l'ensemble des  $n$ -uplets de valeurs  $(d_1, \dots, d_n)$  qui satisfont  $\varphi(d_1, \dots, d_n)$ . Pour un tel  $n$ -uplet, on notera alors  $\mathfrak{n}_U \models \varphi(d_1, \dots, d_n)$ . Ceci nous conduit à l'introduction de la notion d'ensemble  $U$ -définissable :

**Définition 11.** Soit  $n \geq 1$  et  $U$  une numération de Pisot. Un ensemble  $X \subseteq \mathbb{N}^n$  est dit  $U$ -définissable s'il existe une formule  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  dans  $\mathfrak{n}_U$  tel que

$$X = \{(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n \mid \mathfrak{n}_U \models \varphi(d_1, \dots, d_n)\}.$$

Dans le cas où la numération de Pisot est la numération en base  $k$ , on dira qu'un tel ensemble est  $k$ -définissable.



### Exemple

L'ensemble des nombres pairs est définissable dans n'importe quelle numération de Pisot. Il suffit de considérer la formule

$$\varphi(x) \equiv (\exists y)(x = y + y).$$

Étant donné un entier  $k \geq 2$ , l'ensemble des puissances de  $k$  est  $k$ -définissable par la donnée de la formule

$$\varphi(x) \equiv V_k(x) = x$$

Un résultat fondamental de la logique de Presburger, bien connu sous le nom de théorème de Büchi [7, 8], affirme que pour toute proposition de  $\langle \mathbb{N}, +, V_U \rangle$ , il existe un algorithme qui permette de vérifier sa véracité :

**Théorème 12** (Büchi [8]). *Toute proposition de la logique de Presburger  $\langle \mathbb{N}, +, V_U \rangle$  est décidable.*

### Remarque

La preuve de ce résultat étant constructive (à base d'automates finis), il a récemment fait l'objet d'implémentations, en particulier dans le cas des numérations de Fibonacci et Tribonacci [11, 39]. Cela a notamment fourni des preuves d'existence de propriétés sur les mots associés à ces numérations. Il en va de même pour les numérations en base  $k$  [32].

La combinaison du Théorème 12 avec le Lemme 8 nous permet de conclure quant à la décidabilité du problème ENSEMBLE INVARIANT, dans la mesure où l'ensemble  $P$  est  $U$ -définissable :

**Théorème 13** (D., Parreau et Rigo [14], Théorème 22). *Soit  $n \geq 1$  et  $U$  une numération de Pisot. Soit  $P$  un sous-ensemble  $U$ -définissable de  $\mathbb{N}^n$  contenant 0. On peut alors décider si  $P$  est invariant.*

La preuve de ce résultat est construite en exprimant le Lemme 8 à l'aide d'une proposition dans  $\langle \mathbb{N}, +, V_U \rangle$ . Celle-ci utilise le fait que  $P$  et  $P - P$  peuvent être décrits par une formule dans cette logique. Par ailleurs, la complexité algorithmique de la procédure de décision (basée sur la construction d'automates finis) n'est souvent pas satisfaisante, car elle croît exponentiellement selon le nombre de quantificateurs de la formule qui exprime la définissabilité de  $P$ .

Nous allons désormais illustrer l'intérêt du Théorème 13 à l'aide d'exemples concrets. Nous choisissons tout d'abord de considérer les sous-ensembles  $P$  de  $\mathbb{N}^n$  que l'on peut représenter par un mot infini  $w$  sur l'alphabet  $\mathcal{A} = \{1, \dots, n\}$ , où chaque symbole apparaît infiniment souvent. Plus précisément, les  $n$ -uplets de  $P$  sont ordonnés et le  $m^{\text{ième}}$   $n$ -uplet sera noté  $(i_{m,1}, \dots, i_{m,n})$ , où  $i_{m,j}$  correspond à l'indice du  $m^{\text{ième}}$  symbole  $j$  dans  $w$ . Notons que les indices commencent à 1.

**Définition 14.** *Étant donné un mot infini  $w$  sur l'alphabet  $\{1, \dots, n\}$ , on notera  $P_w$  l'ensemble des  $n$ -uplets définis comme ci-dessus, avec toutes leurs permutations possibles, et auquel on adjoint  $(0, \dots, 0)$ .*

S'intéresser aux ensembles de  $n$ -uplets de  $\mathbb{N}^n$  définis par un mot présente un double intérêt. D'une part, les valeurs contenues dans les  $n$ -uplets non permutés forment une partition de l'ensemble des entiers naturels. Cela signifie que dans le cadre des jeux invariants, les coups de type WYTHOFF

(c.-à-d. on peut retirer ce que l'on veut sur au plus  $(n - 1)$  tas), sont autorisés. La plupart des jeux présents dans la littérature vérifient également cela. On notera que l'ajout des  $n$ -uplets permutés permet de définir des règles symétriques. D'autre part, c'est une façon condensée de représenter l'ensemble des  $\mathcal{P}$ -positions d'un jeu, dans la mesure où le mot infini peut être construit en itérant un morphisme défini sur l'alphabet  $\{1, \dots, n\}$ . L'exemple du jeu de WYTHOFF est une jolie illustration de cette propriété :



### Exemple

On considère le mot de Fibonacci  $w_F$  défini comme étant l'unique point fixe du morphisme  $\Phi : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1$ . Concrètement, on a

$$w_F = \Phi^\omega(1) = 1211212112112112112112 \dots$$

L'ensemble  $P_{w_F}$  engendré par ce mot a pour premiers éléments

$$(0, 0), (1, 2), (2, 1), (3, 5), (5, 3), (4, 7), (7, 4), (6, 10), (10, 6), (8, 13), \dots$$

Il a été prouvé [16] que  $P_{w_F}$  correspond aux  $\mathcal{P}$ -positions du jeu de WYTHOFF. Par conséquent, l'ensemble  $P_{w_F}$  est invariant. Par ailleurs, notons que l'ensemble  $P_{w_F}$  est  $U$ -définissable lorsque  $U$  désigne la numération de Fibonacci (qui est une numération de Pisot).

Dans [14], nous nous sommes intéressés aux ensembles  $P$  qui répondent favorablement aux conditions du Théorème 13. À l'instar de l'exemple qui précède, certains ensembles dérivés de mots infinis sont  $U$ -définissables. C'est le cas des ensembles dérivés des mots périodiques. On s'aperçoit assez facilement que ces mots sont  $U$ -définissables quelle que soit la numération de Pisot. Par conséquent, on peut toujours décider de leur invariance. Si la complexité de la procédure de décision issue du Théorème 13 reste élevée, nous avons toutefois réussi à l'améliorer dans le cas des mots périodiques définis sur un alphabet de taille 2 :

**Théorème 15** (D., Parreau et Rigo [14], Corollaire 38). *Étant donné un mot périodique  $w$  sur l'alphabet  $\{1, 2\}$ , de période  $p$ , on peut décider de l'invariance de l'ensemble  $P_w$  en temps  $O(|p|)$ .*

La preuve de ce résultat utilise le Lemme 8. On démontre notamment qu'il suffit de considérer les positions de l'ensemble fini  $\llbracket 0, 2p \rrbracket^2 \setminus P_w$ , où pour chacune, on vérifie qu'il existe un coup légal vers  $P_w$ . Notons que ce résultat semble rester valable pour des tailles d'alphabet plus grandes, même si nous ne l'avons pas démontré formellement.

En plus des mots périodiques, nous avons montré que le Théorème 13

s'applique également aux mots morphiques dits *Parikh-constants*. Un morphisme  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$  est *Parikh-constant* si, pour tout triplet  $(a, b, c) \in \mathcal{A}^3$ ,  $|f(a)|_c = |f(b)|_c$ . Autrement dit, il y a autant de symboles de chaque sorte dans chaque image de  $f$ . Les mots périodiques sont donc par définition Parikh-constants, puisque l'image de chacune des lettres est identique.



### Exemple

Le morphisme  $f : 1 \mapsto 112, 2 \mapsto 121$  est Parikh-constant. Le mot infini  $w$  point fixe de  $f$  a pour préfixe

$$112112121112112121112121112 \dots,$$

et la séquence  $P_w$  qui en découle admet pour premiers éléments  $(0, 0), (1, 3), (2, 6), (4, 8), (5, 12), (7, 15), (9, 17), \dots$

Dans ce contexte, le résultat suivant a été démontré :

**Proposition 16** (D., Parreau et Rigo [14], Proposition 42). *Soit  $w$  le point fixe d'un morphisme Parikh-constant. Le problème ENSEMBLE INVARIANT est décidable pour l'ensemble  $P_w$ .*

La preuve de cette proposition consiste à montrer que l'ensemble  $P_w$  est  $\ell$ -définissable, où  $\ell$  est la longueur de chaque image par  $f$  (cette longueur étant unique à cause de la propriété Parikh-constant). S'il est connu que pour de tels morphismes, l'ensemble  $\{i > 0 \mid w_i = a\}$  est  $\ell$ -définissable pour tout  $a \in \mathcal{A}$  [7], il a fallu montrer que le couplage  $(m, i)$  l'était également, où  $i$  est l'indice dans  $w$  du  $m^{\text{ième}}$   $a$ . Cela est rendu possible par le fait que pour tout symbole  $a \in \mathcal{A}$ , les images  $f(a)$  ont le même nombre de symboles de chaque sorte. Par conséquent, on contrôle bien la position de chaque  $m^{\text{ième}}$  symbole apparaissant dans le mot.



### Problème ouvert

Qu'en est-il pour les morphismes  $\ell$ -uniformes, qui constituent l'extension naturelle des Parikh-constants? Il s'agit de morphismes où  $|f(a)| = \ell$  pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , avec  $\ell$  constante. La décidabilité est-elle préservée?

On trouve dans la littérature certains jeux non-invariants dont l'ensemble  $P$  des positions perdantes se caractérise par un mot morphique non Parikh-constant. C'est le cas par exemple du jeu de TRIBONACCI [16], des CUBIC PISOT UNIT GAMES [17], ou du jeu de RALEIGH [26]. Il est alors pertinent de se demander si des règles invariantes auraient pu être formulées

pour ces mêmes jeux. Si leur caractérisation morphique ne nous permet pas d'appliquer les résultats sus-mentionnés, ces jeux possèdent tous une deuxième caractérisation de leurs  $\mathcal{P}$ -positions. Celle-ci repose sur l'existence d'un système de numération de Pisot. Par exemple, pour le jeu de Tribonacci à trois tas, il a été montré que si l'on considère la numération de Pisot  $U$  dont le polynôme caractéristique est  $X^3 - X^2 - X - 1$ , alors les  $\mathcal{P}$ -positions vérifient le théorème suivant :

**Théorème 17** (D. et Rigo [16], Théorème 5.2). *Un triplet  $(a, b, c)$  avec  $a < b < c$  est une  $\mathcal{P}$ -position du jeu de TRIBONACCI si et seulement si  $\text{rep}_U(a - 1) = u0$ ,  $\text{rep}_U(b - 1) = u01$  and  $\text{rep}_U(c - 1) = u011$ ,  $u$  étant un mot autorisé dans le système  $U$ .*

Par une nouvelle utilisation du Théorème 13, nous avons alors montré [14] que cette caractérisation permet de décider si l'ensemble des  $\mathcal{P}$ -positions (noté  $\{(A_n, B_n, C_n) | n \geq 0, A_n \leq B_n \leq C_n\}$ ) du jeu de TRIBONACCI est invariant. En effet, la  $U$ -définissabilité des ensembles  $\{A_n | n \geq 0\}$ ,  $\{B_n | n \geq 0\}$ , et  $\{C_n | n \geq 0\}$  pris indépendamment est garantie par la simple considération des trois derniers symboles de leur représentation dans la numération Pisot  $U$ . Quant à la  $U$ -définissabilité de l'ensemble des triplets  $\{(A_n, B_n, C_n) | n \geq 0\}$ , c'est l'opération de "left switch" (c.-à-d. le fait que ce soit le même  $u$  qui soit utilisé pour un triplet donné) qui la rend possible. Sur le même principe, nous avons ensuite démontré la décidabilité du problème ENSEMBLE INVARIANT pour les ensembles suivants.

**Théorème 18** (D., Parreau et Rigo [14]). *Le problème ENSEMBLE INVARIANT est décidable pour les ensembles de  $\mathcal{P}$ -positions des CUBIC PISOT UNIT GAMES, du jeu de RALEIGH, et du jeu de tas défini dans [22].*

Bien entendu, l'étape suivante de ce travail est d'obtenir la réponse du problème de décision sur certaines instances connues, comme celles du Théorème 18, ou celles figurant dans le tableau 1.2. Cela nécessite une implémentation de l'algorithme sous-jacent au Théorème de Büchi pour ces numérations peu communes. Comme mentionné dans la remarque 1.4.1, ceci pourrait faire l'objet d'une application intéressante des implémentations décrites dans [11, 39].

### Problème ouvert

Les  $\mathcal{P}$ -positions des jeux de TRIBONACCI et RALEIGH sont-elles invariantes ?



### 1.4.2 Invariance des séquences de Beatty complémentaires

Nous avons précédemment étudié le problème de décision ENSEMBLE INVARIANT à travers des séquences de  $n$ -uplets décrites sous forme de mots ou de systèmes de numération. Or nous ne pouvons pas faire abstraction des caractérisations algébriques qui existent, en particulier pour les séquences de couples. D'ailleurs, les premiers jeux de tas considérés dans la littérature ont été résolus en temps polynomial grâce à d'élégantes formules pour leurs  $\mathcal{P}$ -positions. Prenons le jeu de WYTHOFF, pour lequel on aura compris que ses  $\mathcal{P}$ -positions admettent de nombreuses caractérisations. La plus célèbre est celle obtenue par Wythoff lui-même :

**Théorème 19** (Wythoff [43]). *L'ensemble  $P = \{(A_n, B_n) | n \geq 0\}$  des  $\mathcal{P}$ -positions du jeu de WYTHOFF peut s'écrire sous la forme*

$$P = \{(\lfloor n\tau \rfloor, \lfloor n\tau^2 \rfloor) | n \geq 0\} \cup \{(\lfloor n\tau^2 \rfloor, \lfloor n\tau \rfloor) | n \geq 0\},$$

où  $\tau$  est le nombre d'or.

De telles séquences qui partitionnent l'ensemble des entiers naturels s'appellent des séquences de Beatty complémentaires. En voici une définition plus formelle :

**Définition 20.** *Une séquence de Beatty est une suite d'entiers naturels qui peut s'écrire sous la forme  $\{\lfloor n\alpha + \gamma \rfloor | n \geq 0\}$ , où  $\alpha$  est un irrationnel positif et  $\gamma$  un réel quelconque. Dans le cas où  $\gamma$  est nul, la suite est dite homogène.*

Le théorème de Beatty à leur sujet est alors assez remarquable :

**Théorème 21** (Beatty, 1926). *Étant donné deux irrationnels positifs  $\alpha$  et  $\beta$ , les deux suites de Beatty homogènes  $\{\lfloor n\alpha \rfloor | n \geq 1\}$  et  $\{\lfloor n\beta \rfloor | n \geq 1\}$  partitionnent l'ensemble  $\mathbb{N}_{\geq 1}$  si et seulement si  $1/\alpha + 1/\beta = 1$ . De telles suites sont dites complémentaires.*

#### Remarque

Il a été prouvé par Uspensky que le théorème de Beatty ne peut pas s'étendre à plus de deux séquences.

Dans la littérature, on trouve plusieurs autres jeux de suppression sur tas résolus en utilisant des séquences de Beatty complémentaires [12, 15, 24]. Assez naturellement, nous nous sommes alors demandés ce qu'il advient du problème ENSEMBLE INVARIANT pour de telles séquences. Plus précisément, nous sommes allés plus loin que la simple question de la décidabilité du problème, et avons étudié la possibilité d'une caractérisation complète des séquences de Beatty complémentaires invariantes. Dans [15], nous avons alors suggéré avec Rigo la conjecture suivante :

**Conjecture 22** (D. et Rigo [15]). *Tout couple de suites de Beatty homogènes complémentaires forme un ensemble invariant.*

Cette conjecture a par la suite été démontrée par Larsson, Hegarty et Fraenkel en 2011 [37]. Elle a même été étendue aux suites dites  $B_1$ -SAC, définies comme suit :

**Définition 23.** *Étant donné un entier  $t \geq 0$ , une suite d'entiers naturels  $(X_n)_{n \geq 0}$  est dite  $t$ -superadditive si, pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$ ,*

$$X_m + X_n \leq X_{m+n} < X_m + X_n + t.$$

**Définition 24.** *Deux suites d'entiers naturels  $(A_n)$  et  $(B_n)$  avec  $A_0 = B_0 = 0$  sont dites  $t$ -SAC si :*

- $A_1 = 1$ ,
- $(A_n)_{n > 0}$  et  $(B_n)_{n > 0}$  partitionnent  $\mathbb{N}$ ,
- $(A_n)$  est croissante,
- $(B_n)$  est  $t$ -superadditive.

Le théorème principal est alors le suivant :

**Théorème 25** (Larsson, Hegarty et Fraenkel [37]). *Tout couple de suites  $(A_n)$  et  $(B_n)$   $B_1$ -SAC forme un ensemble invariant.*

La Conjecture 22 devient alors un corollaire immédiat de ce résultat, puisqu'il a été démontré que tout couple de séquences de Beatty homogènes est  $B_1$ -SAC. Larsson *et al.* ont alors pensé que cette propriété  $B_1$ -SAC pouvait être une condition nécessaire et suffisante pour qu'un couple de suites soit invariant. Nous avons trouvé plusieurs contre-exemples à cette conjecture ([9], Lemme 6) parmi les séquences de Beatty non homogènes. D'ailleurs, la situation pour ces suites est plus complexe que dans le cas homogène, puisque certains couples de suites sont invariants, alors que d'autres non. Avec Cassaigne et Rigo, nous avons construit un algorithme efficace qui permet de décider si un couple donné  $(A_n, B_n)$  de suites de Beatty complémentaires non homogènes est invariant ou non dans le cas où  $B_1 \geq 3$ . On notera tout d'abord qu'un préambule à cet examen est l'existence d'un équivalent du théorème de Beatty pour les suites non homogènes. C'est Fraenkel [28] qui a trouvé le premier une telle caractérisation :

**Théorème 26** (Fraenkel [28]). *Soient deux nombres irrationnels positifs  $\alpha < \beta$  qui vérifient  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ . Les suites  $(\lfloor n\alpha + \gamma \rfloor)_{n > 0}$  et  $(\lfloor n\beta + \delta \rfloor)_{n > 0}$  partitionnent  $\mathbb{N}_{>0}$  si et seulement si*

$$\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\delta}{\beta} = 0 \text{ et,}$$

*pour tout  $n \geq 1$ ,  $n\beta + \delta \notin \mathbb{Z}$ .*

Nous avons alors montré [9] que l'on peut caractériser tous les couples  $(A_n = \lfloor n\alpha + \gamma \rfloor, B_n = \lfloor n\beta + \delta \rfloor)$  invariants, et qui satisfont les conditions du Théorème 26, avec comme conditions supplémentaires  $A_0 = B_0 = 0$  (c.-à-d.  $(0, 0)$  est une position finale),  $A_0 = 1$  et  $B_1 \geq 3$ . Cette caractérisation utilise dans un premier temps des éléments de combinatoire des mots. Plus précisément, on considère les suites  $(A_n)$  et  $(B_n)$  par leurs écarts  $(A_n - A_{n-1})$  et  $(B_n - B_{n-1})$ . Ces écarts ne pouvant prendre qu'un nombre fini de valeurs, ces suites peuvent ainsi être vues comme des mots infinis sur un alphabet fini. Il a été montré que ces mots sont *sturmiens*, et par conséquent binaires, équilibrés et aperiodiques. Un ensemble de tests sur des préfixes de ces mots ont ensuite été définis (notion d'*invariance-good*, Définition 12 [9]), permettant de décider si un couple donné est invariant ou non. Ces tests ont ensuite été traduits par des conditions algébriques sur  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  ([9], Section 4). J'ai choisi délibérément de ne pas donner plus de détails sur ce résultat, dans la mesure où la définition d'*invariance-good* est très technique et ne constituerait pas un apport significatif à la compréhension de ce mémoire. Bien entendu, tous les résultats sont accessibles dans [9].

#### Remarque

On notera que la condition  $B_1 \geq 3$  est la seule limitation de notre caractérisation. Toutefois, cette contrainte n'est pas aussi forte qu'il n'y paraît, puisqu'elle n'est utilisée qu'à un seul moment de la preuve. Nous pensons qu'il est possible de s'en affranchir; toutefois nous n'avons actuellement pas trouvé de façon élégante de le faire.

Par conséquent, le problème général reste ouvert :

#### 🔍 Problème ouvert

Caractériser tous les couples de suites de Beatty complémentaires non homogènes qui sont invariants.

## 1.5 Conclusion : vers une définition plus générale de la complexité des règles d'un jeu

Comme nous avons souhaité l'illustrer dans ce chapitre, la définition de l'invariance de règles constitue un premier pas dans l'objectif global d'obtenir une définition formelle des règles d'un jeu. Par extension, l'introduction du problème de décision ENSEMBLE INVARIANT a constitué une suite logique à cette définition, dans la mesure où de nombreux travaux proposent

une sorte de “reverse engineering”, en construisant des règles à partir de  $\mathcal{P}$ -positions élégantes. Il était alors naturel de s’interroger sur la nature des règles proposées dans de tels jeux, et par conséquent sur la possibilité de proposer d’autres règles.

Ce besoin d’obtenir des règles satisfaisantes devient important pour la communauté. Si nous avons considéré le cas des jeux à suppression sur tas, les très récents travaux de Faridi et al. [18] montrent qu’on peut considérer la notion d’invariance dans le cas des jeux de placement. S’il n’existe actuellement pas de définition formelle de l’invariance pour ces jeux (il s’agit actuellement d’une définition peu précise), la recherche d’une fonction booléenne  $f'$  similaire à la notre, où  $G$  et  $H$  seraient des graphes étiquetés me semble une piste à explorer.

Comme souligné lors de la définition de l’invariance, un second objet d’étude est la fonction de coups  $f$ , qui pourrait être la clé dans l’obtention d’une définition satisfaisante de la complexité des règles d’un jeu de tas. De plus, elle présente l’intérêt de pouvoir être définie pour des familles de jeux combinatoires plus générales. Dans cet objectif, les outils de logique introduits dans [14] constituent une première piste à explorer. En effet, on peut chercher à considérer la fonction  $f$  comme une formule logique. Prenons l’exemple du jeu de WYTHOFF :

$$\begin{aligned} f_{\text{WYTHOFF}}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\equiv (\exists k)(x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 + k) \\ &\vee (\exists k)(x_1 = x_2 + k \wedge y_1 = y_2) \\ &\vee (\exists k)(x_1 = x_2 + k \wedge y_1 = y_2 + k) \end{aligned}$$

En ce qui concerne le jeu WYTMOCH, la formule obtenue pour  $f$  est la suivante :

$$\begin{aligned} f_{\text{WYTMOCH}}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\equiv (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 + 1 \wedge \Phi(x_1, y_1)) \\ &\vee (x_1 = x_2 + 1 \wedge y_1 = y_2 + k \wedge \Phi(x_1, y_1)) \\ &\vee (x_2 = 0 \wedge y_2 = 0 \wedge \neg \Phi(x_1, y_1)), \end{aligned}$$

où  $\Phi(x_1, y_1)$  est vraie si et seulement si  $(x_1, y_1)$  peut s’écrire sous la forme  $(\lfloor \frac{n(1+\sqrt{5})}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n(3+\sqrt{5})}{2} \rfloor)$  pour un certain  $n$ .

Avec les connaissances que nous avons sur les  $\mathcal{P}$ -positions du jeu de WYTHOFF, on sait que la formule  $\Phi$  peut s’exprimer dans le système de numération de Fibonacci. Toutefois, on s’aperçoit qu’en terme de complexité, la formule proposée ci-dessus pour  $f_{\text{WYTHOFF}}$  est bien plus satisfaisante que celle de  $f_{\text{WYTMOCH}}$ , qui nécessite un test non-élémentaire dans une numération particulière. Par conséquent, la piste que nous envisageons pour la suite de

ce travail est une étude de la complexité des formules logiques qui décrivent les règles d'un jeu. Nous avons toutefois conscience qu'il s'agit d'une étude ambitieuse et sans doute très difficile, dans la mesure où la valeur de la complexité logique peut parfois aller à l'encontre de la complexité naturelle que l'on pourrait souhaiter pour certaines règles. Il en va d'ailleurs de même pour la complexité de Turing, comme l'illustrent les règles de WYTMOCH.

# Bibliographie

- [1] M. Albert and R.J. Nowakowski, The Game of End-Nim, *The Electronic Journal of Combinatorics* 8 :2 (2001), Article R1, 12pp. 44.
- [2] M. Albert, R. J. Nowakowski and D. Wolfe, *Lessons in Play : An Introduction to Combinatorial Game Theory*, A.K. Peters, 2007.
- [3] E. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy, *Winning ways for your mathematical plays*, Vol. 1, Second edition. A K Peters, Ltd., Natick, MA, (2001).
- [4] C. L. Bouton, Nim, a game with a complete mathematical theory, *Annals of Math.* **3** (1905), 35–39.
- [5] J. I. Brown, D. Cox, A. Hoefel, N. McKay, R. Milley, R. J. Nowakowski et A. A. Siegel, Polynomial Profiles of Placement Games (2013), Preprint.
- [6] V. Bruyère, G. Hansel, Bertrand numeration systems and recognizability, *Theoret. Comput. Sci.* **181** (1997), no. 1, 17—43.
- [7] V. Bruyère, G. Hansel, C. Michaux, R. Villemaire, Logic and  $p$ -recognizable sets of integers, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **1** (1994), no. 2, 191–238.
- [8] J. R. Büchi, Weak second-order arithmetic and finite automata, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* **6** (1960), 66–92.
- [9] J. Cassaigne, E. Duchêne et M. Rigo, Invariant games and non-homogeneous Beatty sequences, *arXiv :1312.2233v1*.
- [10] J. H. Conway, *On number and games*, Academic Press Inc. (1976).
- [11] C. F. Du, H. Mousavi, L. Schaeffer, J. Shallit, Decision Algorithms for Fibonacci-Automatic Words, with Applications to Pattern Avoidance , *arXiv:1406.0670*
- [12] E. Duchêne et S. Gravier, Geometrical extensions of Wythoff’s game, *Discrete Mathematics* **309** (209), 3595–3608.
- [13] E. Duchêne, A. S. Fraenkel , R. J. Nowakowski , M. Rigo, Extensions and restrictions of Wythoff’s game preserving its  $P$  positions, *J. Comb. Theory Ser. A* **117** (2010), 545–567.

- [14] E. Duchêne, A. Parreau et M. Rigo, Deciding game invariance, *arXiv :1408.5274v1*.
- [15] E. Duchêne, M. Rigo, Invariant games, *Theoret. Comput. Sci.* **411** (2010), 3169–3180.
- [16] E. Duchêne, M. Rigo, A morphic approach to combinatorial games : The Tribonacci case, *Theor. Inform. Appl.* **42** (2008), 375–393.
- [17] E. Duchêne, M. Rigo, Cubic Pisot Unit Combinatorial Games, *Monat. fur Math.* **155** (2008), 217 – 249.
- [18] S. Faridi, S. Huntemann et R. J. Nowakowski, Games and Complexes I : Transformation via Ideals, *arXiv:1310.1281*.
- [19] A. Fink, A.S. Fraenkel et C. Santos, Lim Is not Slim, *Internat. J. Game Theory* **43** (2014), 269–281.
- [20] A. S. Fraenkel, The bracket function and complementary sets of integers, *Canad. J. Math.* **21** (1969), 6–27.
- [21] A. S. Fraenkel, The Rat and the Mouse game, to appear in *Games of No Chance 4*.
- [22] A.S. Fraenkel, Heap games, numeration systems and sequences, *Ann. Comb.* **2** (1998), no. 3, 197–210.
- [23] A. S. Fraenkel, Euclid and Wythoff games, *Discrete Math.* **304** (2005), 65–68.
- [24] A. S. Fraenkel, How to beat your Wythoff games’ opponent on three fronts, *Amer. Math. Monthly* **89** (1982), 353–361.
- [25] A.S. Fraenkel, Complementary Iterated Floor Words and the Flora Game, *SIAM J. on Discrete Math* **24** (2010), 570–588.
- [26] A.S. Fraenkel, The Raleigh game, *Integers, Electr. J. Combinat. Number Theory* **7(2)** (2007), 11pp.
- [27] A.S. Fraenkel, Why are games exciting and stimulating?, *Math Horizons February* (2007), 5–7.
- [28] A.S. Fraenkel, Aperiodic subtraction games, *Electronic J. Combinatorics* **18 (2)** (2011) 19–30.
- [29] A.S. Fraenkel et U. Larsson, Take-Away Games on Beatty’s Theorem and the Notion of Invariance, Preprint.
- [30] A.S. Fraenkel et E. Reisner, The game of End-Wythoff, *Games of No Chance 3*, MSRI Publ. **56** Cambridge University Press (2009), 329–347.
- [31] A.S. Fraenkel et Y. Tanny, A Class of Wythoff-Like Games, *Integers, Electr. J. Combinat. Number Theory* **12(B)** (2013), 18pp.
- [32] D. Goč, N. Rampersad, M. Rigo, P. Salimov, On the Number of Abelian Bordered Words (with an example of automatic theorem-proving), to appear in *Internat. J. Found. Comput. Sci.*

- [33] S.W. Golomb, A Mathematical Investigation of Games of “Take-Away”, *J. Combinatorial Theory* **1** (1966), 443–458.
- [34] V. Gurvich, Further generalizations of the Wythoff game and the minimum excludant, *Discrete Applied Mathematics* **160** (2012), 941–947.
- [35] R. A. Hearn and E. D. Demaine, *Games, Puzzles, and Computation*, A K Peters, July 2009.
- [36] U. Larsson, A generalized diagonal Wythoff Nim, *Integers* **12** (2012), G2, 1–24.
- [37] U. Larsson, P. Hegarty, A. S. Fraenkel, Invariant and dual subtraction games resolving the Duchêne–Rigo conjecture, *Theoret. Comput. Sci.* **412** (2011), 729–735.
- [38] U. Larsson et J. Wästlund, Maharaja Nim : Wythoff’s Queen meets the Knight, preprint.
- [39] H. Mousavi, J. Shallit, Mechanical Proofs of Properties of the Tribonacci Word, [arXiv:1407.5841](https://arxiv.org/abs/1407.5841)
- [40] Nhan Bao Ho, Two variants of Wythoff’s game preserving its P-positions, *J. Comb. Theory Ser. A* **119** (2012), 1302–1314.
- [41] Aaron N. Siegel, *Combinatorial Game Theory*, San Francisco, CA.
- [42] R.P. Sprague, Über mathematische Kampfspiele, *Tohoku Math.* **41** (1936), 438–444.
- [43] W. A. Wythoff, A modification of the game of Nim, *Nieuw Arch. Wisk.* **7** (1907), 199–202.



## Chapitre 2

# Des jeux et des graphes



Eric

Toujours des jeux...mais les graphes entrent en piste

Comment Like 24 hours ago via Blackberry

15 people like this

**Jury** De quoi parle ce chapitre ?  
23 hours ago · Like

Eric On sait depuis longtemps que pour certains jeux, les stratégies gagnantes sont liées à certaines structures d'un graphe (le noyau en particulier). J'aborde ici d'autres interactions qui existent entre les jeux et les graphes. Dans un premier temps, les graphes seront considérés comme un support de jeu à part entière (on joue sur un graphe). Dans la seconde partie, on verra que depuis quelques années, certains problèmes classiques de théorie des graphes (coloration, domination) peuvent être adaptés dans une version ludique.  
22 hours ago · Like

**Jury** Depuis combien de temps ce travail dure-t-il ?  
21 hours ago · Like

Eric Pour le premier volet, j'ai commencé à aborder les jeux sur les graphes pendant mon doctorat, à travers le jeu du Clobber résolu sur les arbres ou encore les hypercubes. J'ai ensuite poursuivi ce type d'étude pour d'autres jeux, comme Nim. Il est facile d'adapter des jeux initialement prévus pour des grilles rectangulaires sur des graphes plus généraux. Pour le second volet, j'ai encadré un étudiant de master sur les jeux de coloration en 2009. Depuis l'obtention de l'ANR GAG en 2015, je m'intéresse encore plus à ces aspects: indice chromatique ludique ou jeu de domination sont actuellement en cours d'étude.  
20 hours ago · Like

**Jury** Des collaborations avec d'autres chercheurs ?  
19 hours ago · Like

Eric Oui, avec plusieurs membres de l'ANR GAG, bien entendu. J'ai également collaboré avec K. Burke (Wittenberg University, USA) pour des questions de complexité théorique des jeux de colorations.  
18 hours ago · Like

**Jury** Des étudiants ont-ils été formés ?  
17 hours ago · Like

Eric J'ai collaboré avec un étudiant de M2 (G. Beaulieu) sur les jeux de colorations (1 publication), et avec le doctorant d'E. Sopena et P. Dorbec (G. Renault) sur le jeu de Nim sur les graphes (1 publication). Actuellement, je travaille avec des doctorants et des étudiants M2 au sein de l'ANR GAG.  
16 hours ago · Like

**Jury** Des publications ?  
15 hours ago · Like

Eric Depuis ma soutenance de thèse, 3 papiers journaux ont été publiés sur le sujet.  
14 hours ago · Like

**Jury** Des projets sur ce domaine ?  
13 hours ago · Like

Eric Le projet ANR GAG porte en majeure partie sur les thématiques de ce chapitre. Le cœur de mes recherches durant les quatre prochaines années sera celui-ci. Plusieurs encadrements de thèse sur ce sujet sont prévus, dont au moins un à la rentrée prochaine.  
12 hours ago · Like

**Jury** Quelles sont les perspectives sur ce sujet ?  
11 hours ago · Like

Eric Elles sont nombreuses, en particulier autour des paramètres ludiques de graphe. Il s'agit d'un domaine d'étude très prisé par la communauté depuis quelques années. Les papiers commencent à se multiplier. De nombreux paramètres de graphes peuvent être transformés en version ludique. Pour chacun d'entre eux, on peut de plus envisager plusieurs jeux différents: version jeu combinatoire (la condition de victoire dépend du premier joueur bloqué), en partisan ou en impartial, et version maker/breaker (Alice cherche à satisfaire une condition et Bob veut l'en empêcher).  
10 hours ago · Like

Like 0

Generated at FakeConvos.com

Dans le chapitre précédent, nous avons évoqué le lien étroit qui existe entre la TJC et la théorie des graphes. Rappelons en effet que tout jeu combinatoire peut se modéliser comme un jeu de déplacement dans un graphe. Selon la façon dont on le représente, il peut s'agir d'un arbre orienté ordonné (cf. Figure 1.1) ou d'un graphe orienté acyclique (cf. Figure 1.2). Dans les deux cas, il existe un algorithme qui permet d'étiqueter chaque sommet du graphe avec l'issue de la position de jeu correspondante. Malheureusement, la taille du graphe est souvent un facteur limitant dans la quête d'algorithmes polynomiaux. La structure de graphe reste tout de même un élément important dans l'étude d'un jeu, puisque certaines règles de réécriture (options dominées et réversibles [3]) ont permis de définir des jeux canoniques via les graphes qui les représentent. Actuellement, de nombreux travaux utilisent la représentation arborescente d'un jeu pour produire des résultats généraux significatifs sur les jeux misère [18, 43].

Si la théorie des graphes s'avère être un outil de modélisation pertinent pour la résolution de jeux combinatoires, c'est également un support naturel pour décrire les règles d'un grand nombre de jeux. Il est en effet fréquent que les jeux rencontrés dans la littérature scientifique (les *MathGames*) ou dans le commerce (les *PlayGames*), se jouent sur un plateau rectangulaire ou une carte. En théorie des graphes, on parlera plutôt de grille ou de graphe planaire. Pour beaucoup d'entre eux, les règles s'adaptent assez naturellement pour y être joué sur un graphe quelconque. Dans le premier volet de ce chapitre, nous ferons un survol des jeux qui ont ainsi été étendus aux graphes. Nous nous arrêterons en particulier sur le cas du jeu de NIM, dont les variantes sur les graphes ont fait l'objet de plusieurs études.

Depuis une vingtaine d'années, la théorie des graphes constitue également une vraie fabrique à nouveaux jeux. À partir de problèmes "standard" de théorie des graphes (p. ex. coloration, domination, Hamiltonicité...), il est en effet facile de construire des règles de jeu. Par exemple, dans le cas du jeu de coloration, les joueurs colorient proprement les sommets/arêtes à tour de rôle ; le premier joueur qui ne peut plus colorier a perdu. Nous ferons un état de l'art des jeux ainsi considérés par la communauté, en particulier pour ceux dérivés du problème de coloration de graphe. Par ailleurs, ces mêmes problèmes font aussi l'objet de jeux "non combinatoires", de type *maker-breaker*. Il s'agit de jeux où les deux joueurs ont des objectifs contraires : le premier cherche à satisfaire une propriété (p. ex. colorier/dominer tout le graphe), alors que le second cherche à l'en empêcher. Là encore, nous présenterons les récents travaux pour ce domaine de recherche.

## 2.1 Des jeux sur les graphes

De nombreux jeux combinatoires utilisent comme support certaines familles de graphes. Bien entendu, le terme de *graphe* est rarement mentionné dans les règles car les supports sont souvent des structures très familières : des lignes, des grilles, des cartes. Cependant, cette représentation du support de jeu par un graphe permet bien souvent d'étendre les règles pour des graphes quelconques, ou du moins, des graphes plus généraux que ceux sur lesquels elles ont été définies initialement.

Prenons par exemple les jeux KAYLES et DAWSON'S CHESS [8, 24, 42], qui correspondent respectivement aux jeux octaux (77) et (137). On peut aussi les définir comme suit :

### KAYLES [8]

On considère une ligne de quilles. À tour de rôle, les deux joueurs renversent une ou deux quilles adjacentes (une quille tombée entre deux quilles debout brisant l'adjacence de ces dernières). Celui qui renverse la dernière quille gagne la partie.



FIGURE 2.1 – Jeu de Kayles, illustré par Dudeney en 1878

### DAWSON'S CHESS [8]

On considère un tas de jetons. À tour de rôle, les deux joueurs retirent :

- soit trois jetons d'un même tas, quitte à couper le tas en deux sous-tas,
- soit deux jetons d'un même tas, sans diviser le tas,
- soit un jeton, s'il est seul dans le tas.

Ces deux jeux possèdent une généralisation bien connue sur les graphes, appelée NODE-KAYLES.

**NODE-KAYLES [24, 42]**

On joue sur un graphe  $G$ . Un coup consiste à détruire un sommet, ainsi que tous ceux qui sont dans son voisinage. En convention normale, celui qui détruit le dernier sommet a gagné.

Autrement dit, NODE-KAYLES joué sur une chaîne correspond exactement au jeu DAWSON'S CHESS. Si ce dernier a sa fonction de Grundy intégralement déterminée [8] (elle est ultimement périodique, vérifiant ainsi la conjecture de Guy), le jeu NODE-KAYLES est quant à lui non résolu sur un graphe quelconque. Pire encore, il a été prouvé comme étant PSPACE-complet de calculer l'issue de ce jeu en général [46]. Sur certaines familles de graphes comme les graphes d'intervalles ou les cographes, NODE-KAYLES est toutefois résolu [10]. Des variantes sur les chaînes ont également été étudiées [40]. La complexité du jeu sur les arbres reste toujours un problème ouvert.

L'exemple ci-dessus est une illustration du fait que les jeux de suppression sur tas s'étendent relativement bien aux graphes. Bien souvent, on peut représenter la ligne de jetons par une chaîne. Lorsque l'on adapte les règles à un graphe quelconque, les tas peuvent être décrits par des sommets ou des arêtes pondérés. À chaque tour, la structure du graphe impose une contrainte sur les tas "jouables" (contrainte additionnelle par rapport au jeu initial). Dans ce contexte, le jeu de NIM a fait l'objet de nombreuses variantes sur les graphes. Avec Renault, nous les avons recensées dans [21], et avons obtenu de nouveaux résultats sur une des variantes de ce jeu. Nous détaillons les grandes lignes de ce travail dans la section qui suit.

**NIM sur les graphes**

La première généralisation du jeu de NIM sur les graphes a été proposée en 2003 par Fukuyama [36, 37]. Les valeurs des tas de NIM sont portées par les arêtes du graphe. Pour le confort de la lecture, nous appellerons cette variante EDGE NIMG.

**EDGE NIMG [36]**

Soit  $G(V, E)$  un graphe non-orienté et  $w : E \rightarrow \mathbb{N}$  une fonction de poids. En début de partie, un jeton est placé sur l'un des sommets. A chaque tour, un joueur déplace le jeton le long d'une arête de poids strictement positif, et diminue (au sens strict) le poids de cette arête. On joue en convention normale.

**Remarque**

Contrairement au jeu de NIM, le jeu ne s'arrête pas nécessairement lorsque tous les poids sont nuls : il suffit que le jeton soit incident à des arêtes de poids nul pour que la partie se termine. Par ailleurs, on peut noter que ce jeu est équivalent à NIM à  $k$  tas en prenant pour  $G$  un graphe à deux sommets ayant  $k$  multi-arêtes entre ces deux sommets, pondérées par les tailles des tas.

Dans [37], Fukuyama calcule la fonction de Grundy du jeu pour les graphes ayant un couplage maximum sans cycle alterné. Ce résultat induit le corollaire suivant :

**Corollaire 27** (Fukuyama [37]). *La fonction de Grundy du jeu EDGE NIMG est entièrement déterminée pour les arbres et les cycles impairs.*

Par ailleurs, le cas des chaînes, des cycles pairs et des graphes bipartis a également été résolu dans [36]. Cependant, dans le cas des arbres et des cycles, la connaissance de la fonction de Grundy ne permet pas de déduire la stratégie gagnante. Récemment, Erikson a exhibé une stratégie gagnante s'exécutant en temps polynomial pour les cycles pairs [26]. Elle utilise notamment le fait que sur ces graphes, la fonction de Grundy est invariante par soustraction d'une même constante aux poids des arêtes. Elle propose également un résultat intéressant pour les graphes avec jumeaux (c.-à-d. des paires de sommets adjacents ayant le même voisinage) :

**Théorème 28** (Erikson [26]). *Soit  $(G, w)$  une instance de EDGE NIMG avec  $w(e) = 1$  pour toute arête  $e$ . S'il existe deux sommets jumeaux  $u$  et  $v$  dans  $G$  tels que le jeton est placé sur  $u$  ou  $v$ , alors il s'agit d'une  $\mathcal{N}$ -position.*

Un corollaire direct de ce théorème est la résolution du jeu sur les graphes complets avec fonction de poids égale à 1. Plus précisément, le jeu EDGE NIMG où la fonction de poids vaut 1 correspond exactement au jeu EDGE GEOGRAPHY que nous découvrirons dans la suite du chapitre. Si le cas des graphes bipartis est résolu en temps polynomial pour ce jeu, sa complexité générale est PSPACE-complète [32].

En ce qui concerne les versions de NIMG où les tailles des tas sont des informations portées par les sommets, on peut définir deux variantes, qu'on appellera VERTEX NIMG MR et VERTEX NIMG RM. Celles-ci dépendent de l'ordre dans lequel on déplace le jeton (M pour "move") et on retire du poids (R pour "remove").

 VERTEX NIMG MR [14]

Soit  $G(V, E)$  un graphe non-orienté et  $w : V \rightarrow \mathbb{N}$  une fonction de poids. En début de partie, un jeton est placé sur l'un des sommets. À chaque tour, un joueur déplace le jeton le long d'une arête, et diminue le poids du sommet sur lequel se trouve le jeton d'une valeur strictement positive. On joue en convention normale.

 VERTEX NIMG RM [48]

Soit  $G(V, E)$  un graphe non-orienté et  $w : V \rightarrow \mathbb{N}$  une fonction de poids. En début de partie, un jeton est placé sur l'un des sommets. À chaque tour, un joueur diminue le poids du sommet sur lequel se trouve le jeton d'une valeur strictement positive, puis déplace le jeton le long d'une arête. On joue en convention normale.

Pour VERTEX NIMG MR, seuls des résultats de PSPACE-difficulté (en particulier lorsque le graphe possède des boucles) ont été obtenus [14]. Dans le cas VERTEX NIMG RM, Stockman a construit un algorithme polynomial pour décider de l'issue lorsque  $w$  est une fonction bornée par une constante.

Dans ces deux variantes de VERTEX NIMG, on remarque que le jeu s'arrête dès lors que le jeton se trouve sur un sommet de poids nul, et que le joueur doit en diminuer le poids. Afin d'être plus proche de la version classique de NIM, qui se termine lorsque tous les poids sont nuls, nous avons défini avec Renault [21] une troisième variante, que nous appellerons dans ce manuscrit VERTEX NIMG RM2. Dans cette version, les sommets de poids nuls sont supprimés du graphe. Pour garantir la connexité du graphe malgré ces suppressions, on va construire des cliques entre les sommets du voisinage de chaque sommet retiré.

 VERTEX NIMG RM2 [21]

Soit  $G(V, E)$  un graphe non-orienté et  $w : V \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$  une fonction de poids. En début de partie, un jeton est placé sur l'un des sommets. À chaque tour, un joueur diminue le poids du sommet sur lequel se trouve le jeton d'une valeur strictement positive, puis déplace le jeton le long d'une arête. Si le poids d'un sommet  $v$  est réduite à zéro pendant la partie, ce sommet est retiré du graphe, le sous-graphe induit par son voisinage  $N(v)$  devient une clique et une boucle est ajoutée sur chaque sommet de  $N(v)$ . On joue en convention normale.

Dans cette version de VERTEX NIMG, les conditions supplémentaires

introduites font que le jeu se termine lorsque le graphe est vide (les boucles permettent en effet de continuer à jouer sur un seul sommet, tant que son poids est non nul). La Figure 2.2 montre un exemple de déroulement d'une partie.

### Remarque

L'ajout d'arêtes formant une clique est assez naturel dans la définition de VERTEX NIMG RM2. En effet, si on laissait les sommets de poids nul plutôt que de les supprimer, cela reviendrait à dire qu'on peut déplacer le jeton en suivant un chemin dont les sommets internes sont de poids nul.

Dans [21], nous avons caractérisé les  $\mathcal{P}$  et les  $\mathcal{N}$ -positions du jeu VERTEX NIMG RM2 en temps polynomial :

**Théorème 29** (D. et Renault [21], Théorème 10). *Soit  $(G, w, u)$  une instance de VERTEX NIMG RM2, où  $G(V, E)$  est le graphe du jeu,  $w$  la fonction de poids, et  $u \in V$  la position initiale du jeton. On peut alors décider en temps  $O(|V||E|)$  si  $(G, w, u)$  est  $\mathcal{P}$  ou  $\mathcal{N}$ .*

La preuve de ce théorème est constructive, autrement dit, une stratégie gagnante est produite. De nombreux cas sont assez simples à déterminer (p. ex. s'il existe un sommet  $v$  de  $N[u]$  avec  $w(v) = 1$ , ou alors s'il y a une boucle sur  $u$ ). Dans les autres cas, on construit un étiquetage des sommets récursivement, où les minima locaux selon  $w$  seront  $\mathcal{P}$  et leur voisins seront  $\mathcal{N}$ .

La preuve du Théorème 29 a également permis de résoudre le jeu VERTEX NIMG RM en temps polynomial dans le cas général, là où Stockman ne proposait qu'un algorithme exponentiel.

**Corollaire 30** (D. et Renault [21], Corollaire 12). *Soit  $(G, w, u)$  une instance de VERTEX NIMG RM, où  $G(V, E)$  est le graphe du jeu,  $w$  la fonction de poids, et  $u \in V$  la position initiale du jeton. On peut alors décider en temps  $O(|V||E|)$  si  $(G, w, u)$  est  $\mathcal{P}$  ou  $\mathcal{N}$ .*

Par ailleurs, notons que nous avons également amélioré la complexité de résolution de VERTEX NIMG RM2 (en temps  $O(|V|)$ ) lorsque tous les sommets du graphe ont une boucle.

Nous avons également considéré le jeu VERTEX NIMG RM2 lorsque le graphe est orienté. Cette version sera nommée par la suite DIRECTED VERTEX NIMG RM2. Il s'avère que la résolution de ce jeu paraît plus complexe que dans le cas non-orienté.

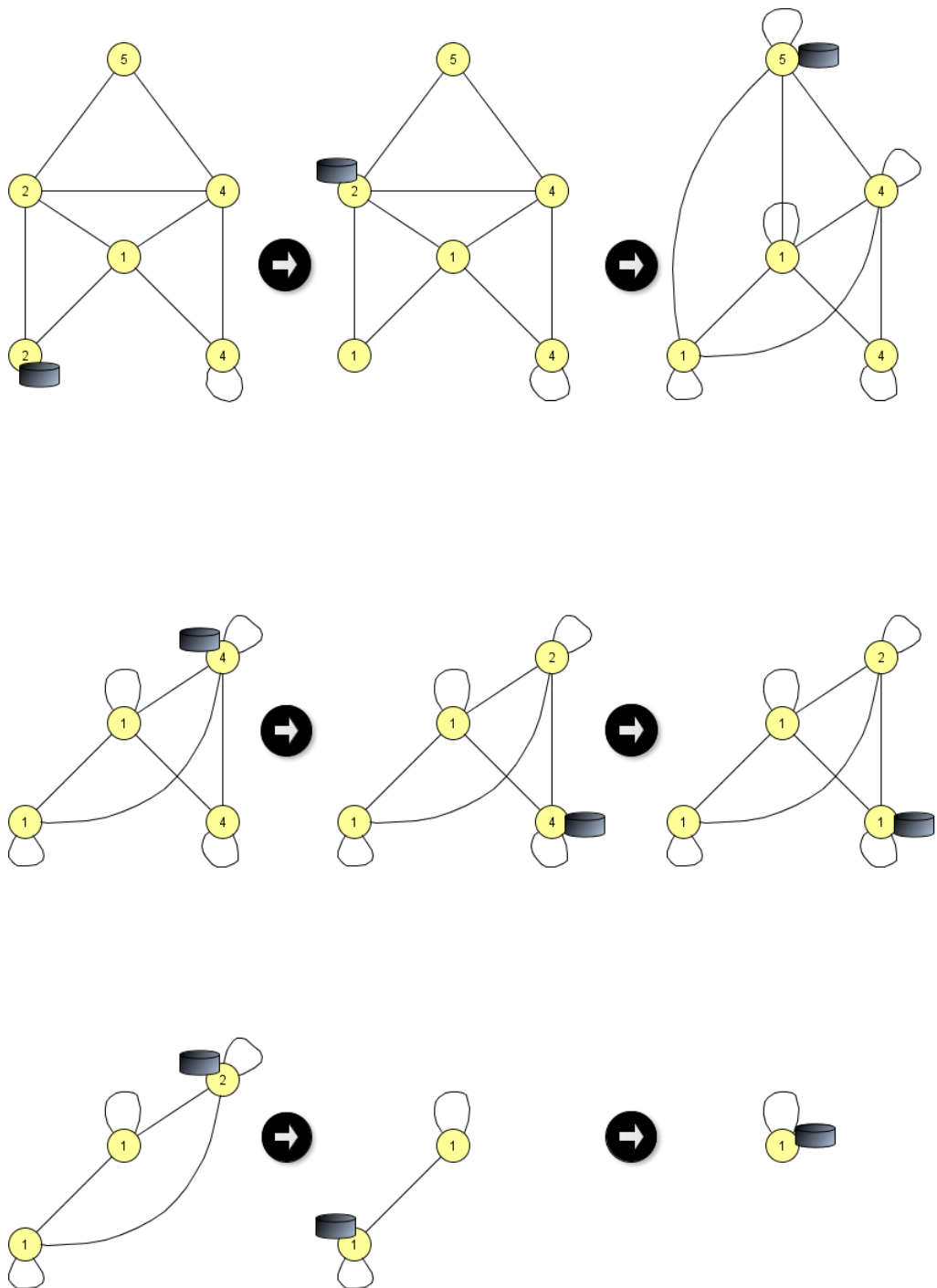


FIGURE 2.2 – Exemple de partie de VERTEX NIMG RM2.



**DIRECTED VERTEX NIMG RM2 [21]**

Soit  $G(V, E)$  un graphe orienté fortement connexe et  $w : V \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$  une fonction de poids. En début de partie, un jeton est placé sur l'un des sommets. À chaque tour, un joueur diminue le poids du sommet  $v$  sur lequel se trouve le jeton d'une valeur strictement positive, puis déplace le jeton le long d'un arc sortant de  $v$ . Si le poids d'un sommet  $v$  est réduit à zéro pendant la partie, ce sommet est retiré du graphe, et toutes les paires d'arcs  $(p, v)$  et  $(v, s)$  sont remplacées par des arcs  $(p, s)$  (avec  $p$  et  $s$  pas nécessairement distincts). On joue en convention normale.

**Remarque**

La contrainte de forte connexité (c.-à-d. il existe un chemin entre toute paire de sommets) est essentielle pour que le jeu se poursuive tant qu'il reste du poids sur le graphe. Notons qu'elle est préservée lorsqu'un sommet est retiré du graphe.

Le calcul de l'issue d'une instance de DIRECTED VERTEX NIMG RM2 peut se faire en temps polynomial dans quelques cas particuliers :

- Lorsque  $G$  a une boucle sur chaque sommet ([21], Théorème 6).
- Lorsque  $G$  est un circuit et que  $w(v) > 1$  pour tout  $v \in V(G)$  ([21], Théorème 3).

On notera que le second résultat mentionné ci-dessus peut-être considéré comme un jeu de NIM à  $V(G)$  tas, où l'on joue successivement sur les tas dans un ordre cyclique (autrement dit, le joueur n'a pas la possibilité de choisir le tas sur lequel il va jouer). On constate aussi que de nombreux problèmes restent ouverts pour DIRECTED VERTEX NIMG RM2. Un premier pas serait le suivant :

**Problème ouvert**

Résoudre DIRECTED VERTEX NIMG RM2 sur les chemins et les circuits.

Du point de vue de la complexité algorithmique, on peut noter que pour la plupart de ces jeux, déterminer leur issue est un problème PSPACE-difficile. En effet, de nombreuses réductions peuvent être réalisées depuis des variantes du jeu GEOGRAPHY (en version sommet ou arc) :

**VERTEX/EDGE GEOGRAPHY [33]**

Soit un graphe orienté  $G$ . À tour de rôle, chaque joueur choisit un nouveau sommet (resp. un nouvel arc) qui est un successeur du sommet (resp. de l'arc) précédemment choisi. Le premier joueur à ne plus pouvoir choisir de nouveau sommet (resp. arc) perd la partie.

Si la PSPACE-complétude de ce jeu (dans ses versions sommet et arc) a été démontrée dans [33], la variante du jeu EDGE GEOGRAPHY sur les graphes non-orientés a également été prouvée comme étant un problème PSPACE-complet [32]. D'ailleurs, c'est à partir de cette variante qu'on montre également que le jeu EDGE NIMG est PSPACE-difficile, puisqu'ils sont équivalents lorsque la fonction de poids est égale à 1. Pour VERTEX NIMG MR, une réduction a été obtenue à partir de VERTEX GEOGRAPHY pour les graphes avec boucles [14], et qui reste valable sans boucle d'ailleurs [45]. Cependant, l'appartenance à PSPACE pour ces problèmes reste ouverte :

**Problème ouvert**

Les problèmes EDGE NIMG et VERTEX NIMG MR sont-ils PSPACE-complets ?

Afin d'y voir plus clair, la figure 2.3 recense les principaux résultats de complexité sur ces jeux, dans leur version non-orientée.

EDGE NIMG	VERTEX NIMG MR	VERTEX NIMG RM	VERTEX NIMG RM2
PSPACE-difficile	PSPACE-difficile	Polynomial	Polynomial

FIGURE 2.3 – Complexité des variantes de NIM sur les graphes non-orientés

En ce qui concerne les variantes orientées, on sait que DIRECTED VERTEX NIMG RM et DIRECTED VERTEX NIMG MR sont PSPACE-difficiles par réduction à VERTEX GEOGRAPHY.

**Problème ouvert**

Qu'en est-il de la complexité de DIRECTED VERTEX NIMG RM2 ? Comme ce dernier est polynômial pour les graphes à boucles, la PSPACE-difficulté nous semble plus hasardeuse à établir.

L'étude de la complexité de ces jeux dans leur version misère a été réalisée récemment par Renault et Schmidt [45]. Plus précisément, ils ont démontré

les résultats suivants :

**Théorème 31** (Renault et Schmidt [45]). *Décider de l'issue des jeux VERTEX NIMG RM et VERTEX NIMG MR en version misère est un problème PSPACE-difficile. Les jeux EDGE GEOGRAPHY et VERTEX GEOGRAPHY sont quant à eux NP-complets en version misère, à la fois orientée et non-orientée.*

Afin d'être le plus exhaustif possible, on peut enfin citer une dernière variante du jeu de NIM sur les graphes, GRAPHICAL NIM, qui a été récemment proposée par Albert. À chaque tour de jeu, elle consiste à choisir un sommet  $v$  d'un graphe, et à supprimer  $k$  arêtes incidentes à  $v$  (avec  $1 \leq k \leq \deg(v)$ ). Dans le cas où le graphe est une chaîne, le jeu est clairement équivalent à KAYLES. Des premiers résultats sur la distribution de la fonction de Grundy de ce jeu ont été dévoilés dans [16], pour les chenilles notamment. Le cas des graphes *spider* est en cours d'étude par les mêmes auteurs.

## D'autres types de jeux sur les graphes

Bien entendu, les jeux de tas ne sont pas les seuls à pouvoir être déclinés dans une version "graphe". Les jeux définis sur une grille rectangulaire peuvent souvent être généralisés sur un graphe, pourvu que les règles n'utilisent pas de propriétés d'orientation (p. ex. des coups "horizontaux" ou "verticaux", comme c'est le cas dans KONANE, DOMINEERING ou AMAZONS). Par exemple, CLOBBER est un jeu qui prend du sens sur un graphe. Par défaut, ce jeu se joue sur une grille remplie de pierres noires ou blanches. À son tour, Léon choisit une pierre noire et l'utilise pour détruire une pierre blanche adjacente. Renée fait de même avec les pierres blanches. On joue en convention normale. La Figure 2.4 est un exemple d'exécution des premiers coups d'une partie, où les pierres sont initialement disposées en damier.

Si ce jeu s'adapte bien sur les graphes (puisque la notion d'adjacence y garde du sens), il y reste toutefois très difficile, même sur les chaînes où il est conjecturé que les issues sont  $\mathcal{N}$  si et seulement si la longueur est différente de 6 (avec les pierres noires et blanches disposées en damier au départ) [1]. En revanche, la version solitaire du jeu a été fortement étudiée. En jouant seul, l'objectif est de laisser le moins de pierres possibles sur le graphe. Avec Beaudou et Gravier [6], nous avons récemment publié un survey recensant les principaux résultats sur le sujet. Parmi les faits les plus marquants, on peut citer la résolution complète de SOLITAIRE CLOBBER sur les grilles, les hypercubes, ou encore les arbres.

Passons maintenant à une autre famille de jeux sur les graphes. Il existe une façon générique de représenter certains jeux de suppression, que nous appellerons SUBGRAPH REMOVAL GAMES :

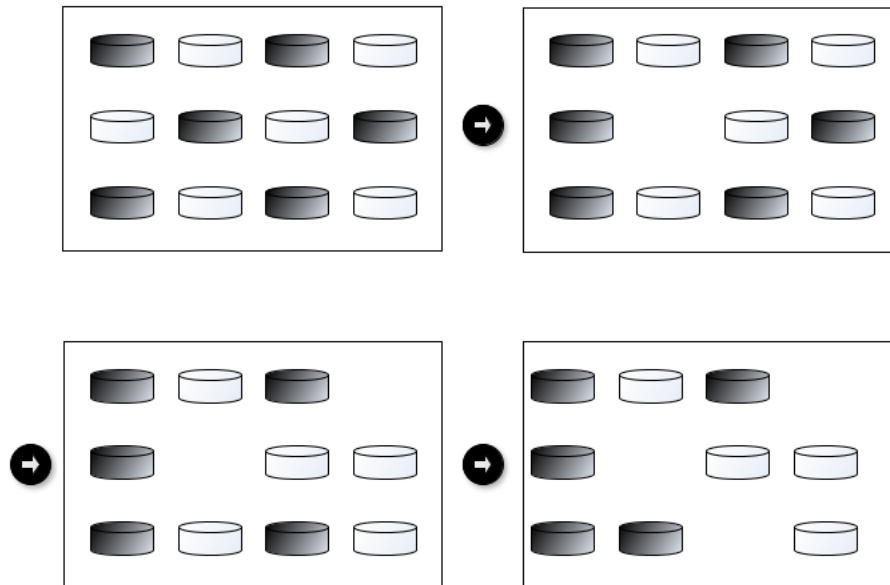


FIGURE 2.4 – Exemple de partie de CLOBBER.



**SUBGRAPH REMOVAL GAME**

Soit  $\mathcal{S}$  un ensemble de graphes, et  $G$  un graphe quelconque. À tour de rôle, chaque joueur choisit un élément  $H$  de  $\mathcal{S}$  et retire de  $G$  un sous-graphe isomorphe à  $H$ . On joue en convention normale.

Dans le cas où  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des étoiles maximales, alors le jeu SUBGRAPH REMOVAL GAME est équivalent à NODE KAYLES. Hormis cette instance bien connue, le SUBGRAPH REMOVAL GAME semble très peu étudié dans la littérature. Parmi les moult possibilités pour l'ensemble  $\mathcal{S}$ , les ensembles suivants ont attiré notre attention comme objets d'étude potentiels :

### 🔍 Problème ouvert

Étudier le GRAPH REMOVAL GAME où

- $\mathcal{S}$  est l'ensemble des arbres (en cours d'étude avec Gravier et Mhalla).
- $\mathcal{S} = \{K_2\}$ . Ce jeu peut être considéré comme une variante de CRAM sur les graphes : un coup consiste à retirer deux sommets adjacents du graphe. On le retrouve aussi sous le nom de ARC-KAYLES dans la littérature [46]. Le calcul de sa complexité fait partie des problèmes ouverts récemment examinés au workshop CGTC en 2015.
- $\mathcal{S}$  est l'ensemble des chemins (éventuellement induits).

Par ailleurs, il nous semble possible d'adapter les règles des jeux octaux pour le GRAPH REMOVAL GAME. En effet, lorsqu'on retire un graphe  $H$  de  $G$ , on peut rajouter la contrainte que  $G \setminus H$  possède un nombre de composantes connexes imposé. Par exemple, le GRAPH REMOVAL GAME où l'on retire un ou deux sommets qui ne déconnectent pas le graphe, est équivalent sur la chaîne au jeu octal (33). À ma connaissance, cette famille de jeux n'a jamais été considérée. Un sous-groupe du consortium ANR GAG est actuellement en cours d'étude du (33) sur les arbres.

Enfin, il existe des variantes partisans du GRAPH REMOVAL GAME. Ainsi, dans le jeu CUTTHROAT [2], les sommets du graphe sont bicoloriés, et chaque joueur retire un sommet de sa couleur ainsi que toutes les composantes connexes monochromatiques.

Pour conclure cette liste non-exhaustive de jeux sur les graphes, on peut citer HACKENBUSH [8] (un jeu de suppression d'arêtes), ou encore SPROUTS [2] (un jeu de connexion de sommets). N'oublions également pas les célèbres SNORT et COL, qui seront présentés dans la section suivante en tant que versions ludiques du problème de coloration de graphes.

## 2.2 Des problèmes de graphes en version ludique

### 2.2.1 Jeux “purement” combinatoires

Convertir une problématique de théorie des graphes en jeu combinatoire n'est pas un exercice aussi difficile qu'on peut l'imaginer. Prenons pour commencer la coloration de graphes. On peut aisément la transformer en jeu combinatoire en demandant à deux joueurs de colorier à tour de rôle proprement les sommets d'un graphe, jusqu'à ce que l'un d'entre eux soit bloqué. Ce sont Harary et Tuza [41], et indépendamment Bodlaender [9], qui, les premiers, ont eu l'idée de formaliser cette question sous la forme d'un jeu impartial. Ce jeu porte le nom de ACHIEVEMENT pour Harary et Tuza, et de COLORING GAME pour Bodlaender. Pour éviter tout risque de confusion

avec les jeux qui suivront, on optera pour le terme PROPER COLORING GAME dans la suite du manuscrit.

### Le jeu de coloration propre



#### PROPER COLORING GAME [9, 41]

Soit un graphe  $G$  et un entier  $k \geq 1$ . À tour de rôle, deux joueurs choisissent et colorient un sommet de  $G$  non encore colorié, avec l'une des  $k$  couleurs disponibles. À chaque tour, la coloration partielle de  $G$  doit rester propre (c.-à-d. deux sommets voisins et coloriés doivent avoir des couleurs différentes). On joue en convention normale.

Pour un nombre de couleurs égal à 1 ou 2, le jeu PROPER COLORING GAME possède des résultats connus :

- Pour  $k = 1$ , le PROPER COLORING GAME est équivalent à NODE-KAYLES, dont la PSPACE-complétude a été démontrée [46].
- Pour  $k = 2$ , Bodlaender [9] a démontré que le problème est également PSPACE-complet, en le réduisant à NODE-KAYLES.

En collaboration avec Beaulieu et Burke, nous avons étendu ce résultat de complexité à un  $k$  quelconque :

**Théorème 32** (Beaulieu, Burke et D. [7]). *Étant donné  $k \geq 1$  fixé, décider si une instance du PROPER COLORING GAME avec  $k$  couleurs est  $\mathcal{N}$  est un problème PSPACE-complet.*

La réduction s'effectue une nouvelle fois à partir de NODE-KAYLES. Si le problème est donc difficile sur un graphe quelconque, certaines issues ont pu être calculées en temps polynomial sur certaines familles de graphes.

### Le jeu de coloration propre pour $k = 1$

Dans le cas où  $k = 1$  (c.-à-d. NODE-KAYLES), il a été démontré que l'issue du PROPER COLORING GAME peut se calculer en temps polynomial dans les cas suivants :

- Si  $G$  est une chaîne, alors le jeu est équivalent à DAWSON'S CHESS et la fonction de Grundy est entièrement déterminée [8]. En particulier, le jeu est une  $\mathcal{P}$ -position sur  $P_n$  si et seulement si  $n \equiv 4, 8, 20, 24, 28 \pmod{3}$  ou  $n = 14$  ou  $n = 34$ .
- Si  $G$  est un cycle de taille au moins 3, alors le jeu est une  $\mathcal{P}$ -position [41].
- Si  $G$  est un cograph, alors il existe un algorithme s'exécutant en temps  $O(n^{1+\frac{1}{\log 3}})$  qui calcule l'issue [10].
- Si  $G$  est un graphe arc-circulaire ou un graphe de cocomparabilité, alors l'issue peut se calculer en temps  $O(n^3)$  [10]. Ce résultat inclut par conséquent les graphes d'intervalles et les graphes de permutation.

– Si  $G$  est le graphe de Petersen, alors il s’agit d’une  $\mathcal{N}$ -position [41].

Plus récemment, des résultats algorithmiques ont été obtenus dans le cas général [11], améliorant la meilleure complexité exponentielle connue. Au sujet de ce problème, le cas des arbres est certainement celui qui retient le plus d’attention, car il a été longuement étudié sans succès :

### 🔍 Problème ouvert

Quelle est la complexité de NODE-KAYLES sur les arbres ?

### Le jeu de coloration propre pour $k = 2$

Pour le jeu de coloration impartial à deux couleurs, voici les résultats connus :

**Théorème 33** (Harary et Tuza [41]). *Une instance du PROPER COLORING GAME avec deux couleurs sur la chaîne  $P_n$  ( $n \geq 3$ ) est  $\mathcal{P}$  si et seulement si  $n$  est pair.*

Par ailleurs, nous avons montré que dans le cas où  $n$  est impair, la fonction de Grundy est constante :

**Théorème 34** (Beaulieu, Burke et D. [7], Proposition 6). *Soit  $G$  une position du PROPER COLORING GAME à deux couleurs sur une chaîne de longueur impaire. Alors on a  $\mathcal{G}(G) = 1$ .*

Dans [41], le cas des cycles et du graphe de Petersen a également été résolu. Par ailleurs, si le graphe possède certaines propriétés de symétrie, on a pu montrer que les instances correspondantes du jeu à 2 couleurs étaient favorables au second joueur.

**Proposition 35.** *[Beaulieu, Burke et D. [7], Proposition 3] Soit  $G$  une instance du PROPER COLORING GAME avec 2 couleurs. S’il existe un automorphisme de  $G$  où tous les cycles sont de taille 2, alors la position de jeu est  $\mathcal{P}$ .*

Le corollaire suivant en découle :

**Corollaire 36.** *Le PROPER COLORING GAME avec 2 couleurs est  $\mathcal{P}$  sur les grilles de taille paire et les hypercubes.*

Au final, relativement peu de familles de graphes sont résolues pour le jeu à 2 couleurs, si ce n’est lorsque des stratégies de symétrie sont possibles. Si les arbres restent un cas particulièrement difficile à résoudre, il serait intéressant d’examiner des familles de graphes plus abordables :

### 🔍 Problème ouvert

Résoudre le PROPER COLORING GAME à 2 couleurs sur les cographes et les graphes d'intervalles.

### Le jeu de coloration propre pour $k \geq 3$

Dans le cas où le nombre de couleurs vaut au moins 3, il existe très peu de résultats dans la littérature. Cela dit, à l'instar de la Proposition 35, si le graphe possède un certain automorphisme, on peut montrer que le premier joueur possède une stratégie gagnante en jouant un premier coup qui le ramène dans une position symétrique. Ceci est valable quel que soit le nombre de couleurs autorisé.

**Proposition 37.** *[Beaulieu, Burke et D. [7], Proposition 2] Soit  $G$  une instance du PROPER COLORING GAME avec  $k$  couleurs,  $k \geq 1$ . S'il existe un automorphisme  $\sigma$  de  $G$  où tous les cycles sont de taille 2 sauf un de taille 1, et si pour tout  $v \in V(G)$ , on a  $(v, \sigma(v)) \notin E(G)$ , alors la position de jeu est  $\mathcal{N}$ .*

Cela nous a permis de conclure quant au statut  $\mathcal{N}$  des grilles impaires et des arbres binaires complets. Par ailleurs, comme mentionné dans [41], certaines valeurs extrémales pour  $k$  semblent pertinentes à considérer :

- On sait que si  $k = \Delta(G) + 1$ , alors le jeu se résume à une question de parité de  $|V(G)|$ . Qu'en est-il des cas où  $k = \Delta(G)$ ? Pour quels graphes le jeu ne se résume-t-il pas à une question de parité?
- Le cas où  $k = \chi(G)$  est intéressant. Le cas des chaînes, du graphe de Petersen et des cycles pairs a déjà été résolu dans ce cadre [41].

### Version misère du jeu de coloration propre

Dans la littérature, le jeu AVOIDANCE défini dans [41] correspond à la version misère du PROPER COLORING GAME. Dans cet article, les issues sont déterminées pour  $k = 2$  sur les chaînes et les cycles, et pour  $k$  quelconque sur le graphe de Petersen. L'absence d'outil pour traiter la somme de jeux est un vrai obstacle à une résolution plus complète. Contrairement à la version normale, l'issue du jeu NODE-KAYLES en misère sur les chaînes reste inconnue à ce jour. Récemment, Guignard et Sopena [40] ont toutefois résolu d'autres variantes misère de ce jeu (en somme conjonctive ou fin de partie courte).



### Version partisane du jeu de coloration propre

Le PROPER COLORING GAME possède une version partisane bien connue dans la littérature depuis les travaux de Conway [10], qui porte le nom de COL. Plus précisément, ce jeu peut être considéré comme une instance particulière du PROPER COLORING GAME, où  $G$  est un graphe planaire et  $k = 2$ . À ma connaissance, il n'a pas été considéré sur d'autres familles de graphes.

On constate donc que les jeux combinatoires issus de la coloration propre des sommets d'un graphe ont été relativement bien considérés dans la littérature, même si, au final, de nombreux problèmes restent ouverts. En suivant cette idée, nous avons décidé avec Beaulieu et Burke de considérer d'autres variantes de la coloration de graphes dans une version TJC. Plus précisément, nous avons abordé les problèmes suivants sur les chaînes et les cycles : coloration orientée, coloration faible, coloration à distance 2, et coloration séquentielle.

### Le jeu de coloration orientée

La coloration orientée des sommets d'un digraphe reprend les contraintes de la coloration propre, et impose en plus que pour tout arc  $(u, v)$ , il n'existe aucun arc  $(v', u')$  tel que  $u$  et  $u'$  d'une part, et  $v$  et  $v'$  d'autre part, aient la même couleur. Le jeu combinatoire associé à ce problème est difficile à appréhender, notamment parce que l'orientation des couleurs apparaît en cours de partie. Nous avons alors étudié la variante du jeu avec deux couleurs, disons 1 et 2, et une orientation imposée, c.-à-d. que tous les arcs seront orientés  $1 \rightarrow 2$ .



#### ORIENTED 2-COLORING GAME [7]

Soit un graphe orienté  $G$ . À tour de rôle, deux joueurs choisissent et colorent un sommet de  $G$  non encore colorié, avec l'une des 2 couleurs (1 ou 2) disponibles. À chaque tour, la coloration partielle de  $G$  doit rester propre et orientée dans le sens  $1 \rightarrow 2$ . On joue en convention normale.

Par conséquent, dès lors qu'un joueur colorie un sommet avec la couleur 1, on sait que tous ses prédécesseurs ne sont plus jouables.

Sur un graphe quelconque, le jeu ORIENTED 2-COLORING GAME a été prouvé comme difficile :

**Proposition 38** (Beaulieu, Burke et D. [7], Proposition 13). *Sur un graphe  $G$  orienté quelconque, décider de l'issue de ORIENTED 2-COLORING GAME est PSPACE-complet.*

Nous avons toutefois réussi à résoudre le problème sur les circuits :

**Proposition 39** (Beaulieu, Burke et D. [7], Corollaire 11). *Une position de l'ORIENTED 2-COLORING GAME sur un circuit de longueur au moins 4 est une  $\mathcal{P}$ -position.*

Ce résultat a été prouvé en remarquant qu'après le premier coup joué, on se ramène à un chemin avec une extrémité coloriée. Nous avons prouvé que de telles instances sont  $\mathcal{N}$ .

Le cas des chemins a été examiné dans notre papier. Puisque ce jeu se divise rapidement en somme de sous-jeux (plus précisément en sous-chemins avec extrémités coloriées ou non), nous avons cherché à calculer la fonction de Grundy. Avec l'obtention d'une caractérisation récursive de cette fonction ([7], Prop. 9) et l'utilisation des techniques d'accélération décrites dans [8] (c.-à-d. nimbers rares et fréquents), nous avons pu calculer les valeurs des nimbers pour tous les chemins de longueur inférieure à  $10^7$ . Si nous n'avons détecté aucune périodicité, des résultats intéressants sont toutefois ressortis :

- On connaît 26  $\mathcal{P}$ -positions, la dernière connue étant pour le chemin de longueur 8084.
- Le nimber le plus élevé est 1401, obtenu pour le chemin de longueur 3099736.
- Il existe des chemins impairs qui sont des  $\mathcal{P}$ -positions.

Bien entendu, plusieurs questions restent toujours en suspens à propos de ce jeu : périodicité éventuelle de la fonction de Grundy, qu'en est-il sur d'autres familles de graphes, avec plus de deux couleurs, ou si l'orientation n'est pas imposée au départ ?

### Le jeu de coloration faible

La coloration faible des sommets d'un graphe est une variante de la coloration propre où deux sommets adjacents peuvent avoir la même couleur, à condition que chacun d'entre eux voit au moins un sommet d'une couleur différente. En théorie des graphes, il est connu que tout graphe est 2-faiblement coloriable. Le jeu combinatoire qui en découle est le suivant :



#### WEAK 2-COLORING GAME [7]

Soit un graphe  $G$ . À tour de rôle, deux joueurs choisissent et colorent un sommet de  $G$  non encore colorié, avec l'une des 2 couleurs disponibles. À chaque tour, la coloration partielle de  $G$  doit rester faible. On joue en convention normale.

Nous avons résolu ce jeu sur les chaînes et les cycles, avec les résultats suivants :

**Théorème 40** (Beaulieu, Burke, et D. [7], Théorème 14). *Les positions du WEAK 2-COLORING GAME sur les chaînes et les cycles de longueur  $n$  sont  $\mathcal{P}$  si et seulement si  $n$  est pair.*

Le seul cas qui est vraiment intéressant dans le résultat précédent est celui des cycles impairs (tous les autres utilisent les mêmes arguments que ceux des propositions 35 et 37). Pour les cycles impairs, nous avons démontré que tous les sommets sont coloriés à la fin de la partie.

Pour ce jeu, la résolution du cas général peut sembler abordable du fait de la 2-faible colorabilité de tout graphe.

### Problème ouvert

Calculer la complexité algorithmique du WEAK 2-COLORING GAME sur un graphe quelconque.

### Le jeu de coloration à distance 2

La coloration à distance 2 des sommets d'un graphe impose que deux sommets à distance 1 ou 2 portent des couleurs différentes. Le jeu associé est alors équivalent au PROPER COLORING GAME sur le carré du graphe. Il a été démontré PSPACE-complet en général [7]. Par ailleurs, si la résolution des chaînes et des cycles pairs est triviale, nous n'avons pas obtenu de résultat significatif lorsqu'ils sont impairs. Il s'agit pour nous de la variante la plus complexe à appréhender, en partie parce qu'il est difficile de calculer les premiers nimbers (complexité très élevée).

### Le jeu de coloration en ligne

La coloration en ligne d'un graphe demande de colorier les sommets selon un ordre imposé. Le jeu de coloration en ligne a été introduit par Bodlaender [9] :



#### SEQUENTIAL COLORING GAME [9]

Soient un graphe  $G$ , un entier  $k \geq 2$ , et une fonction d'ordre  $f : \{1, \dots, |V|\} \mapsto V$ . Au  $i^{\text{eme}}$  tour, le joueur courant doit colorier le sommet  $f(i)$ , avec l'une des  $k$  couleurs disponibles. À chaque tour, la coloration de  $G$  doit rester propre. On joue en convention normale.

Il a été démontré que la complexité de ce jeu dépendait de  $k$  [9] :

- Pour  $k \geq 3$ , le jeu a été prouvé comme étant PSPACE-complet.

- Pour  $k = 2$ , le calcul de l'issue peut se faire en temps  $O(n + e\alpha(e, n))$ , où  $\alpha$  est l'inverse de la fonction d'Ackermann, et  $n$  l'ordre du graphe.

Nous avons amélioré ce résultat sur les chaînes et les cycles :

**Théorème 41** (Beaulieu, Burke et D. [7], Théorème 22). *Décider de l'issue d'une instance du SEQUENTIAL COLORING GAME avec 2 couleurs sur une chaîne ou un cycle de longueur  $n$  peut se faire en temps  $O(n)$ .*

L'algorithme qui correspond à ce résultat utilise une classification des sommets en trois catégories : les minima locaux de  $f$  (c.-à-d. ceux qu'on joue avant leurs voisins), les maxima locaux de  $f$  (ceux qu'on joue après leurs voisins, ils sont donc totalement contraints), et les autres (ceux où une seule option de jeu existe).

Dans le cas où  $k \geq 3$ , il n'existe, à ma connaissance, aucune complexité polynomiale sur certaines familles de graphes.

### Autres jeux

Comme nous venons de le constater, la coloration de graphes et ses variantes s'adaptent très bien aux jeux combinatoires. Mais d'autres problématiques de théorie des graphes semblent aussi avoir du sens dans une version TJC. À titre d'ouverture, on pourrait notamment explorer les jeux suivants, qui n'ont encore jamais été étudiés après examen de la littérature :

#### Problème ouvert

Étudier le jeu combinatoire de domination : deux joueurs choisissent à tour de rôle un sommet d'un graphe, pourvu que celui-ci domine au moins un nouveau sommet. Le premier joueur qui ne peut plus dominer de nouveau sommet perd la partie. Si le cas des chaînes peut s'apparenter à une instance particulière des jeux octaux, le problème est entièrement ouvert sur les autres familles de graphes.

### Problème ouvert

Le jeu du chemin : étant donné deux ensembles de sommets  $D$  et  $A$  d'un graphe  $G$ , deux joueurs choisissent à tour de rôle un nouveau sommet de  $G \setminus (D \cup A)$ . Le premier qui relie un sommet de  $D$  à un sommet de  $A$  avec les sommets choisis gagne la partie. Ce jeu est une généralisation de IMPARTIAL GENERALIZED HEX [46] (dont la complexité est au moins supérieure à celle de NODE-KAYLES sur les graphes bipartis, qui est elle-même inconnue).

Enfin, l'étude de tous les jeux de cette section en version misère reste un terrain complètement vierge, mis à part les quelques résultats connus pour le PROPER COLORING GAME sur les chaînes, cycles et le graphe de Petersen.

### 2.2.2 Jeux maker/breaker

Si la transformation de problèmes de théorie des graphes en jeux “purement” combinatoires (c.-à-d. avec convention normale ou misère) reste relativement peu répandue dans la littérature, c'est moins le cas des transformations vers les jeux dits *maker/breaker*. Pour ces jeux, si les règles restent les mêmes, ce sont les conditions de victoire qui changent. Les deux joueurs y ont des objectifs contraires. En effet, Léon doit souvent remplir un objectif positif (colorier tout le graphe, dominer tout le graphe...), alors que Renée cherche à l'en empêcher.

C'est Brams[38] qui le premier introduisit ce type de jeu, repris ensuite par Bodlaender [9] :



#### COLORING CONSTRUCTION GAME, BODLAENDER [9, 38]

Étant donné un graphe  $G$  et un entier positif  $k$ , Léon et Renée colorient alternativement et proprement les sommets de  $G$  avec l'une des  $k$  couleurs disponibles. C'est Léon qui commence. Léon gagne si et seulement si  $G$  est intégralement colorié à la fin. Renée gagne si Léon ne gagne pas.

Ce type de jeu induit naturellement un problème d'optimisation, à savoir minimiser la valeur de  $k$  pour que Léon gagne à coup sûr.

**Définition 42.** *Le nombre chromatique ludique d'un graphe  $G$  est le plus petit entier  $k$  tel que Léon a une stratégie gagnante. On le note  $\chi_\ell(G)$ .*

Je ne vais pas recenser ici l'ensemble des résultats ayant trait au nombre chromatique ludique, dans la mesure où ce paramètre n'a pas fait l'objet

d'une étude particulière de ma part. Il s'agit plutôt d'un centre d'intérêt pour les années à venir, dans le cadre du projet GAG. Notons qu'il existe une page Wiki recensant de nombreux résultats et références sur le sujet<sup>1</sup>, et qui montre que le paramètre est fortement considéré par la communauté. Parmi les résultats les plus marquants, on peut citer la détermination d'une borne précise pour les forêts ( $\chi_\ell(G) \leq 4$  [27]), et plus ouverte pour les graphes planaires ( $7 \leq \chi_\ell(G) \leq 17$  [5]). Parmi les nombreux problèmes ouverts au sujet du nombre chromatique ludique, trois attirent tout particulièrement notre attention. Le premier concerne l'hérédité de la stratégie gagnante pour Léon quand le nombre de couleurs augmente :

### 🔍 Problème ouvert

Si Léon a une stratégie gagnante avec  $k$  couleurs, est-ce toujours vrai avec  $(k + 1)$  couleurs ?

Actuellement, aucun contre-exemple n'a infirmé cette conjecture. Le second sujet d'étude est l'étude du paramètre lorsque Renée commence.

### 🔍 Problème ouvert

Il existe des graphes pour lesquels l'écart entre le nombre chromatique ludique lorsque Léon commence et Renée commence est arbitrairement grand. En revanche, sur les arbres, il est borné par 1. Étudier les cas extrémaux ainsi que la valeur du paramètre lorsque Renée commence pour des familles particulières de graphes.

Enfin, la complexité théorique de calcul du nombre chromatique ludique est ouverte :

### 🔍 Problème ouvert

Le calcul du nombre chromatique ludique d'un graphe est-il PSPACE-complet ?

De même que pour les problèmes de coloration dans leur version combinatoire, plusieurs variantes maker/breaker ont été définies : coloration arête (Cai et Zhu [15]), coloration d'incidences (Andres [4]), coloration orientée (Nešetřil et Sopena [44]), coloration distinguante (Gravier et al. [39]), jeu

1. cf. Wiki de Clément Charpentier : [https://en.wikipedia.org/wiki/Graph\\_coloring\\_game](https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_coloring_game)

de marquage (Zhu [50])...<sup>2</sup>. Pour chacune de ces variantes, un paramètre ludique de graphe est ainsi défini. Actuellement, un sous-groupe du projet ANR GAG travaille sur l'indice chromatique ludique.

En ce qui concerne les autres problématiques de théorie des graphes, le DOMINATION GAME a été introduit dans [13], avec les mêmes contraintes que dans la version jeu combinatoire, mais où l'objectif de Léon est d'obtenir un dominant le plus petit possible à la fin du jeu (alors que Renée va chercher à le maximiser). Depuis 2010, il s'agit d'un thème de recherche assez stimulant, avec de nombreuses publications annuelles. En 2002, Alon *et al.* [3] avaient déjà proposé une version ludique de la domination sur un graphe orienté, où les joueurs orientent les arcs de sorte à maximiser/minimiser la valeur du nombre de domination orienté. D'autres jeux d'orientation d'arcs ont également été proposés dans la littérature, avec des objectifs différents. Au sein du projet GAG, nous travaillons actuellement sur une nouvelle variante maker/breaker du DOMINATION GAME.

## 2.3 Conclusion

Nous avons cherché dans ce chapitre à analyser la relation entre graphes et TJC. Si les rapports entre noyaux de graphes et  $\mathcal{P}$ -positions sont connus depuis plusieurs décennies, l'utilisation de graphes comme support de jeux, quoique naturelle, n'est pas si fréquente dans la littérature. Hormis les jeux GEOGRAPHY et NODE-KAYLES qui ont été relativement bien étudiés, il est rare de lire des travaux étoffés sur le sujet. La forte complexité de nombreux jeux sur leur support initial (bien souvent des grilles) en est une explication raisonnable. La situation semble pourtant évoluer depuis les années 2000 avec les variantes de NIM sur les graphes, SNORT, ou encore ARC-KAYLES. Une bonne connaissance des techniques et raisonnements de théorie des graphes devient alors importante pour aborder ces jeux.

Par ailleurs, depuis le début des années 1990, certains problèmes standards de théorie des graphes ont suscité un vrai intérêt dans leur version ludique. Actuellement, on trouve dans la littérature de nombreux articles sur ces sujets, et la thématique est en plein essor, avec des résultats de plus en plus précis (nombre chromatique ludique notamment). Un grand nombre de nouveaux problèmes ou variantes sont également introduits. Certes, les versions maker/breaker sont les plus présentes dans la littérature. Sans doute est-ce parce que leurs règles semblent plus naturelles, ou qu'elles peuvent aussi plus facilement modéliser certaines problématiques appliquées. Les versions ludiques en convention normale ou misère sont plus rares car souvent

---

2. voir <http://www.fernuni-hagen.de/mathematik/DMO/graphcolor.html>

plus complexes, mais nous avons vu que le nombre de travaux à leur égard est grandissant.

Dans tous les cas, le lien entre TJC et théorie des graphes semble de plus en plus affirmé. Des techniques utilisées dans les jeux combinatoires peuvent être mises au service de ces problèmes d'optimisation ludique, comme l'ont récemment montré Dorbec *et al.* [17] avec la somme de jeux pour le DOMINATION GAME. Notre objectif dans les prochaines années est d'insister sur ce lien, en explorant notamment certains des problèmes ouverts mentionnés précédemment.



# Bibliographie

- [1] M. H. Albert, J. P. Grossman, R. J. Nowakowski, et D. Wolfe *An introduction to Clobber*. Integers, Journal of Combinatorial Number Theory 5 (2005).
- [2] M. Albert, R. J. Nowakowski and D. Wolfe, *Lessons in Play : An Introduction to Combinatorial Game Theory*, A.K. Peters, 2007.
- [3] N. Alon, J. Balogh, B. Bollobás, T. Szabó, Game domination number, *Discrete Math.* **256** (2002), 23–33.
- [4] S. D. Andres, The incidence game chromatic number, *Discrete Applied Mathematics* **157** (9) (2009), 1980–1987.
- [5] T. Bartnicki, J. Grytczuk, H. A. Kierstead, et Xuding, The Map-Coloring Game, *American Mathematical Monthly* **114** (9) (2007), 793–803.
- [6] L. Beaudou, E. Duchêne et S. Gravier, A Survey about Solitaire Clobber, à paraître dans *Games of no chance 4*.
- [7] G. Beaulieu, K. Burke et E. Duchêne, Impartial Coloring games, *Theoretical Computer Science* **485** (2013), 49–60.
- [8] E. Berlekamp, J. H. Conway et R. K. Guy, *Winning Ways for your Mathematical Plays*, Vol. 1, Second edition. A K Peters, Ltd., Natick, MA, (2001).
- [9] H. L. Bodlaender, On the complexity of some coloring games, *Lecture Notes in Computer Science* **484** (1991), 30–40.
- [10] H. L. Bodlaender et D. Kratsch, Kayles and nimbers, *J. Algorithms* **43** (2002), 106–119.
- [11] H. L. Bodlaender et D. Kratsch, Exact Algorithms for Kayles, *Lecture Notes in Computer Science* **6986** (2011), 59–70.
- [12] C. L. Bouton, Nim, a game with a complete mathematical theory, *Annals of Mathematics* **3** (1905), 35–39.
- [13] B. Brešar, S. Klavžar et D. F. Rall, Domination game and an imagination strategy, *SIAM J. Discrete Math.* **24** (2010), 979–991.
- [14] K. Burke and O. George, A PSPACE-complete Graph Nim, to appear in *Games of No Chance 5*, arXiv :1101.1507v2 [cs.GT].

- [15] L. Cai, X. Zhu, Game chromatic index of  $k$ -degenerate graphs, *J. Graph Theory* **36** (2001), 144–155.
- [16] N. J. Calkin, K. James, J. E. Janoski, S. Leggett, B. Richards, N. Sitarman et S. M. Thomas, Computing strategies for graphical Nim, *Proceedings of the Forty-First Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing* **202** (2010), 171–185.
- [17] P. Dorbec, G. Košmrlj et G. Renault, The domination game played on unions of graphs, *Discrete Math.* **338** (2015), 71–79.
- [18] P. Dorbec, G. Renault, A. Siegel et E. Sopena, Dicots, and a taxonomic ranking for misère games, *Journal of Combinatorial Theory Series A* **130** (2015), 42–63.
- [19] E. Duchêne, A. S. Fraenkel, R. Nowakowski and M. Rigo, Extensions and restrictions of Wythoff’s game preserving Wythoff’s sequence as set of P positions, *Journal of Combinatorial Theory series A.* **117** (2010), 545–567.
- [20] E. Duchêne and S. Gravier, Geometrical extensions of Wythoff’s game, *Discrete Mathematics* **309** (2009), 3595–3608.
- [21] E. Duchêne et G. Renault, Vertex Nim played on graphs, *Theoretical Computer Science* **516**(2014), 20–27.
- [22] E. Duchêne and M. Rigo, A morphic approach to combinatorial games : the Tribonacci case, *Theoretical Information and Applications* **42** (2008), 375–393.
- [23] E. Duchêne and M. Rigo, Cubic Pisot Unit Combinatorial Games, *Monatshefte für Mathematik* **155** (2008), 217–249.
- [24] H. E. Dudeney. Canterbury Puzzles, pages 89, 174. London, 1910.
- [25] M. Dufour and S. Heubach, Circular Nim Games, *Electronic Journal of Combinatorics* **20(2)** (2013).
- [26] L. Erickson, Nim on the complete graph, arXiv :1010.1455v1 [math.CO] (2010).
- [27] U. Faigle, W. Kern, H. A. Kierstead et W. Trotter, On the Game Chromatic Number of some Classes of Graphs, *Ars Combinatoria* **35 (17)** (1993), 143–150.
- [28] A. S. Fraenkel, How to beat your Wythoff games’ opponent on three fronts, *American Mathematical Monthly* **89** (1982), 353–361.
- [29] A. S. Fraenkel, The Raleigh game, *Combinatorial number theory*, de Gruyter, Berlin (2007), 199–208.
- [30] A. S. Fraenkel, The Rat and the Mouse game, preprint.
- [31] A. S. Fraenkel et I. Borosh, A generalization of Wythoff’s game, *Journal of Combinatorial Theory series A.* **15** (1973), 175–191.

- [32] A. S. Fraenkel, E. R. Scheinerman, et D. Ullman, Undirected Edge Geography, *Theor. Comput. Sci.* **112(2)** (1993), 371–381.
- [33] A.S. Fraenkel et S. Simonson, Geography, *Theoretical Computer Science* **110** (1993), 197–214.
- [34] A. S. Fraenkel et D. Zusman, A new heap game, *Theoretical Computer Science* **252** (2001), 5–12.
- [35] A.S. Fraenkel, Complexity, Appeal and Challenges of combinatorial games, *Theoretical Computer Science* **313** (2004), 393–415.
- [36] M. Fukuyama, A Nim game played on graphs, *Theoretical Computer Science* **304** (2003), 387–399.
- [37] M. Fukuyama, A Nim game played on graphs II, *Theoretical Computer Science* **304** (2003), 401–419.
- [38] M. Gardner, Mathematical Games, *Scientific American* **244 (4)** (1981).
- [39] S. Gravier, K. Meslem, S. Schmidt et S. Slimani, A New Game Invariant of Graphs : the Game Distinguishing Number, BGW 2014.
- [40] A. Guignard et E. Sopena, Compound Node-Kayles on Paths, *Theoretical Computer Science* **410** (2009), 2033–2044.
- [41] F. Harary et Z. Tuza, Two graph-colouring games, *Bulletin of the Australian Mathematical Society* **48** (1993), 141–149.
- [42] S. Loyd. *Cyclopedia of 5000 Puzzles tricks and Conundrums*, page 232. New York, 1914.
- [43] R. Milley et G. Renault, Dead ends in misère play : the misère monoid of canonical numbers, *Discrete Math.* **313** (2013), 2223–2231.
- [44] J. Nesetril et E. Sopena, On the oriented chromatic number, *Electron. J. Combin.* **8 (2)** (2001), #14.
- [45] G. Renault et S. Schmidt, On the complexity of the misère version of three games played on graphs, soumis.
- [46] T. J. Schaeffer, On the complexity of some two-person perfect-information games, *J. Comput. System Sci.*, **16** (1978), 185–225.
- [47] E. Sidorowicz, Marking Games, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **24** (2006), 211–214.
- [48] G. Stockman. Presentation : The game of nim on graphs : NimG (2004). Available at [http://www.aladdin.cs.cmu.edu/reu/mini\\_probes/papers/final\\_stockman.ppt](http://www.aladdin.cs.cmu.edu/reu/mini_probes/papers/final_stockman.ppt).
- [49] W. A. Wythoff, A modification of the game of Nim, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **7** (1907), 199–202.
- [50] X. Zhu, The game coloring number of planar graphs, *Journal of Combinatorial Theory Series B* **75 (2)** (1999), 245–258.



# Chapitre 3

## Paramètres de graphes



**Eric**  
Laissons un peu les jeux de coté pour finir...  
Comment Like 24 hours ago via Mobile

13 people like this

**Jury** De quoi parle ce chapitre ?  
23 hours ago · Like

**Eric** Il traite de deux problématiques de théorie des graphes: les placements et les colorations distinguantes. J'y aborde de nouvelles variantes de ces problèmes.  
22 hours ago · Like

**Jury** Quand ces travaux ont-ils commencé ?  
21 hours ago · Like

**Eric** J'ai commencé à regarder des problèmes de "pure" théorie des graphes depuis ma prise de position à Lyon. C'était une façon de bien s'intégrer dans ma nouvelle équipe. Les questions de placement de graphe sont apparues dans le cadre du projet ANR AOC, qui traite de l'appariement de documents structurés (XML, RDF...). Pour les colorations distinguantes, ce choix fut naturel car c'est un domaine en plein essor depuis les années 2000.  
20 hours ago · Like

**Jury** Des collaborations avec d'autres chercheurs ?  
19 hours ago · Like

**Eric** Sur ces sujets, j'ai collaboré avec R. Nowakowski (Dalhousie University, Canada) et M. Wozniak (Université de Cracovie, Pologne), ainsi que des membres de mon équipe lyonnaise.  
18 hours ago · Like

**Jury** Des étudiants ont-ils été formés ?  
17 hours ago · Like

**Eric** M. A. Tahraoui, mon doctorant (2009-2012), a effectué sa thèse sur ces thèmes précis.  
16 hours ago · Like

**Jury** Des publications ?  
15 hours ago · Like

**Eric** Oui, 4 papiers journaux ont été publiés sur le sujet, et un autre a été récemment soumis.  
14 hours ago · Like

**Jury** Des projets académiques ?  
13 hours ago · Like

**Eric** Les travaux sur le placement de graphes ont été menés dans le cadre du projet ANR AOC (porté localement par H. Kheddouci).  
12 hours ago · Like

**Jury** Quelles sont tes perspectives sur ce sujet ?  
10 hours ago · Like

**Eric** Je souhaite poursuivre les études menées récemment sur les paramètres de coloration distinguantes. Certaines pistes sont proposées dans le manuscrit. Le cas des colorations identifiantes m'intéresse tout particulièrement.  
9 hours ago · Like

Like 0

Generated at FakeConvos.com

Ce dernier chapitre porte sur l'étude de plusieurs paramètres de graphes nouvellement introduits. En l'occurrence, il s'agit de variantes de problèmes de placement et d'identification dans les graphes. Plusieurs de ces recherches ont été effectuées en collaboration avec mon étudiant en thèse, M.A. Tahraoui.

Dans la suite de ce manuscrit, pour un graphe  $G$  donné, on dira que c'est un  $(n, m)$ -graphe si  $|V(G)| = n$  et  $|E(G)| = m$ .

### 3.1 Placement de graphes

La notion de placement de graphes date des années 1970. En langage simple, le problème consiste à placer  $k$  graphes d'ordre  $n$  donnés, arête-disjoints, dans le graphe complet  $K_n$ . Nous allons dans un premier temps faire un tour d'horizon des résultats et conjectures du domaine. Par la suite, nous allons nous intéresser à une variante du problème que nous appellerons placement étiqueté de graphe. Dans celle-ci, les graphes donnés seront sommet-étiquetés, et le placement standard défini ci-dessus sera contraint par le fait que les étiquettes doivent être préservées. Cette définition induit un paramètre d'optimisation que nous considérerons sur certaines familles de graphes.

#### A lire

Il existe dans la littérature deux surveys relativement bien fournis à propos du placement de graphes. Le premier est celui de Yap [54], qui contient tous les travaux importants qui ont eu lieu jusqu'à la fin des années 1980 (période très faste en termes de résultats et grandes conjectures). Le second est celui de Woźniak [52], qui reprend certains des grands résultats d'existence, et se concentre un peu plus sur la structure des placements obtenus.

#### 3.1.1 Placement de graphes non étiquetés


La notion de placement de graphe (en anglais, "graph packing") a été définie à la fin des années 1970, indépendamment par Bollobás et Eldridge d'une part [5], et Sauer et Spencer d'autre part [42]. En voici la définition formelle :

**Définition 43.** Soient  $G_1, \dots, G_k$   $k$  graphes d'ordre  $n$ . On dit qu'il existe un placement de  $G_1, \dots, G_k$  (dans le graphe complet  $K_n$ ) si l'on peut trouver

$k$  permutations  $\sigma_i : V(G_i) \rightarrow V(K_n)$ , avec  $1 \leq i \leq k$  telles que

$$(u, v) \in E(G_i) \Rightarrow (\sigma_j(u), \sigma_j(v)) \notin E(G_j) \quad \forall j \neq i$$

Dans ce contexte, il est fréquent d'étudier des placements où les  $k$  graphes sont isomorphes. Un placement de  $k$  copies d'un même graphe  $G$  sera alors appelé un  $k$ -placement de  $G$ .

 **Exemple**

La Figure 3.1.1 montre l'exemple d'un 2-placement d'un petit arbre. Plus précisément, on a pour  $\sigma_1$  l'identité (chose que l'on pourra toujours admettre dans la suite de ce manuscrit), et la permutation  $\sigma_2$  vérifie :

$$\sigma_2(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = (v_2, v_3, v_5, v_1, v_4).$$

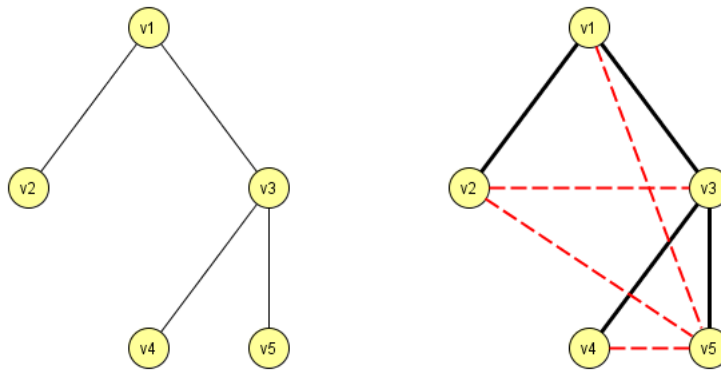


FIGURE 3.1 – Exemple d'un graphe avec son 2-placement (à droite)

Les questions naturelles qui découlent d'une telle définition sont celles liées à l'existence d'un placement d'un ensemble de graphes donné. Bien entendu, si la somme des tailles des graphes (j'entends par taille le nombre d'arêtes) est trop grande par rapport à la taille du graphe  $K_n$ , alors aucun placement ne sera possible. En d'autres termes, une condition nécessaire pour qu'un  $k$ -placement d'un graphe  $G$  existe est

$$k|E(G)| \leq \binom{|V(G)|}{2}.$$

L'une des conjectures les plus connues à propos de l'existence d'un placement de  $k$  graphes donnés est due à Bollobás et Eldridge :

**Conjecture 44** (Bollobás et Eldridge [5]). *Soient  $G_1, \dots, G_k$   $k$  graphes d'ordre  $n$ . Si  $|E(G_i)| \leq n - k$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ , alors il existe un placement de  $G_1, \dots, G_k$  dans  $K_n$ .*

Cette conjecture a été démontrée dans les cas  $k = 2$  [42] et  $k = 3$  [38], et reste complètement ouverte pour  $k > 3$ . Certains des résultats ont été obtenus en considérant le placement d'arbres d'ordres  $2, \dots, n$  [54].

### $k$ -placement de graphes

Étant donné la difficulté du problème, certaines recherches se sont concentrées sur le  $k$ -placement de graphe, afin d'obtenir une caractérisation la plus précise possible des graphes qui en admettent un. Pour un  $k$  quelconque, il n'y a à ma connaissance qu'un seul résultat qui propose une avancée dans cette direction :

**Théorème 45** (Zàk [55]). *Soit  $k$  un entier positif et  $G$  un graphe d'ordre  $n \geq 2(k-1)^3$ . Si  $|E(G)| \leq n - 2(k-1)^3$ , alors il existe un  $k$ -placement de  $G$ .*

En revanche, pour des valeurs de  $k$  petites, on a des caractérisations plus précises des graphes admettant un  $k$ -placement. Pour  $k = 2$ , on a par exemple une caractérisation parfaite de tous les  $(n, m)$ -graphes  $k$ -plaçables avec  $m \leq n$ . En particulier, pour  $m \leq n - 2$ , la Conjecture 44 prouvée lorsque  $k = 2$  implique le résultat suivant :

**Théorème 46** (Sauer et Spencer [42]). *Tout  $(n, n-2)$ -graphe admet un 2-placement dans  $K_n$ .*

Pour  $m = n - 1$ , il existe plusieurs graphes qui n'admettent pas de 2-placement. Parmi les arbres, seules les étoiles n'en admettent pas.

**Théorème 47** (Burns et Schuster [9]). *Soit  $G$  un  $(n, n-1)$ -graphe. Il existe un 2-placement de  $G$  si et seulement si  $G$  n'est pas isomorphe à l'un des graphes suivants :  $K_{1, n-1}$ ,  $K_{1, n-4} \cup K_3$  avec  $n \geq 8$ ,  $K_1 \cup K_3$ ,  $K_2 \cup K_3$ ,  $K_1 \cup 2K_3$ ,  $K_1 \cup C_4$ .*

Enfin, Faudree et al. [22] ont obtenu une caractérisation complète du même genre pour les  $(n, n)$ -graphes.

Si le lien entre la taille et l'ordre du graphe semble un aspect important à prendre en compte pour décider de l'existence d'un placement, certains paramètres structurels du graphe peuvent aussi entrer en jeu. C'est le cas par exemple de la maille. À ce sujet, la conjecture qui suit tient en haleine la communauté depuis plus d'une trentaine d'années :

**Conjecture 48** (Faudree et al. [22]). *Si  $G$  n'est pas une étoile et est de maille au moins 5, alors  $G$  admet un 2-placement.*

Notons que les auteurs de cette dernière conjecture l'ont démontrée lorsque  $|E(G)| \leq \frac{6|V(G)|}{5} - 2$ . Depuis, cette conjecture a été démontrée pour



des graphes de maille de plus en plus petite. Plus précisément, ce sont successivement Woźniak [49] (graphes de maille au moins 8), Brandt [8] (maille au moins 7), et enfin Görlich et Žak [27] (maille au moins 6) qui l'ont prouvée. Le cas des graphes de maille au moins 5 reste toutefois encore non résolu.

Lorsque  $k = 3$ , il existe assez peu de résultats dans la littérature. L'une des raisons qui l'expliquent est sans doute la relative lourdeur des caractérisations, qui peut impliquer une liste de graphes exclus assez grande. Pour les  $(n, n - 2)$ -graphes, la caractérisation reste élégante, et il existe un équivalent du Théorème 46 :

**Théorème 49** (Woźniak et Wojda [53]). *Tout  $(n, n - 2)$ -graphe qui n'est ni un  $K_3 \cup 2K_1$  ou un  $K_4 \cup 4K_1$  admet un 3-placement dans  $K_n$ .*

### Placement de deux graphes

Une autre façon d'appréhender la difficulté du problème de placement est de considérer le placement de deux graphes uniquement. Lorsque leur taille n'est pas trop grande, on peut alors conclure à l'existence du placement :

**Théorème 50** (Sauer et Spencer[42]). *Soit  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes d'ordre  $n$ . Si  $|E(G_1)||E(G_2)| < \binom{n}{2}$ , alors on peut placer  $G_1$  et  $G_2$  dans  $K_n$ .*

On notera que la borne est atteinte lorsque  $G_1$  est une étoile à  $2m - 1$  branches, et  $G_2$  est l'union de  $m$   $K_2$ . Par ailleurs, Teo et Yap ont étendu le Théorème 47 pour deux graphes quelconques. Autrement dit, on sait exactement quelles sont toutes les paires de  $(n, n - 1)$ -graphes qui admettent un placement dans  $K_n$  (le nombre d'exceptions qui ne sont pas des étoiles sont au nombre de 13). Ce résultat a même été étendu aux graphes vérifiant  $|E(G_1)| + |E(G_2)| \leq 2n - 2$  [47].

Dans la littérature, on trouve aussi d'autres résultats qui dépendent du degré maximum du graphe :

**Théorème 51** (Catlin [12]). *Soit  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes d'ordre  $n$ . Si  $2|\Delta(G_1)||\Delta(G_2)| < n$ , alors on peut placer  $G_1$  et  $G_2$  dans  $K_n$ .*

À partir de ce résultat, Bollobás et Eldridge[5] ont construit des graphes  $G_1$  et  $G_2$  d'ordre aussi grand que souhaité, non plaçables, et tels que  $n \leq (\Delta(G_1) + 1)(\Delta(G_2) + 1)$ . Cela les a conduit à énoncer la conjecture suivante :

**Conjecture 52** (Bollobás et Eldridge [5], Catlin [12]). *Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes d'ordre  $n$ , de degrés maximum respectifs  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ . Si  $(\Delta_1 + 1)(\Delta_2 + 1) \leq n + 1$ , alors on peut placer  $G_1$  et  $G_2$  dans  $K_n$ .*

**Remarque**

On notera que cette conjecture est vraie pour  $\Delta_1 = 1$ , via le Théorème 51.

**Structure du placement**

Plus récemment, certains travaux se sont intéressés à la structure des permutations sous-jacentes à un  $k$ -placement d'un graphe  $G$  donné. On peut par exemple se demander si l'on peut se passer de point fixe, si la permutation est cyclique...

**Remarque**

À ce sujet, le cas des graphes auto-complémentaires est pertinent puisqu'ils sont 2-plaçables. Dans [52], on trouve un état de l'art précis sur la nature des permutations pour ces graphes, en termes de taille des cycles.

**Définition 53.** *Un 2-placement de graphe est dit cyclique si la permutation  $\sigma_2$  est cyclique.*

Par exemple, le placement de la figure 3.1.1 est cyclique. Plusieurs résultats ont été obtenus pour les *2-placements cycliques* de graphes. Woźniak a notamment montré que pour tout  $(n, n - 2)$ -graphe  $G$ , on peut toujours trouver une permutation cyclique qui engendre un 2-placement de  $G$  :

**Théorème 54** (Woźniak[48]). *Tout  $(n, n - 2)$ -graphe admet un 2-placement cyclique.*

En ce qui concerne les  $(n, n - 1)$ -graphes, il n'y a pas de résultat équivalent car il existe certains  $(n, n - 1)$ -graphes 2-plaçables qui n'admettent pas de 2-placement cyclique. C'est le cas par exemple du graphe  $K_{1,2} \cup K_3$ . Cependant, ces exceptions ne concernent que certains graphes non-connexes :

**Théorème 55** (Woźniak [50]). *Tout arbre d'ordre  $n$  qui n'est pas une étoile admet un 2-placement cyclique.*

Le nombre d'exceptions reste toutefois assez faible, comme le prouve le résultat suivant qui caractérise tous les  $(n, n - 1)$ -graphes 2-plaçables cycliquement.

**Théorème 56** (Woźniak [51]). *Soit  $G$  un  $(n, n - 1)$ -graphe.  $G$  admet un 2-placement cyclique si et seulement si :*

- il admet un 2-placement,
- ce n'est ni un  $K_{1,2} \cup K_3$ , ni un  $K_{1,3} \cup K_3$ ,
- ce n'est pas un  $K_1 \cup C_5$ .

Le cas des  $(n, n)$ -graphes a également été complètement résolu dans [26].

En ce qui concerne les 2-placements de graphes sans point fixe, ils ont été considérés pour la première fois par Schuster [41], mais restent très confidentiels dans la littérature. On remarquera que tout 2-placement cyclique est sans point fixe. Pour les  $(n, n - 1)$ -graphes, il a été prouvé (via [41, 51]) que le seul graphe 2-plaçable sans point fixe non cyclique est  $K_1 \cup C_5$ .

### 🔍 Problème ouvert

Caractériser tous les  $(n, n)$ -graphes plaçables sans point fixe.

### 3.1.2 Placement de graphes étiquetés

Lors de ces dernières années, je me suis intéressé au problème de placement de graphes, en accordant une attention toute particulière à la structure des permutations. Malgré la (relative) ancienneté du problème, il me paraissait en effet étonnant de trouver peu de travaux sur le sujet dans la littérature. Par opposition au placement cyclique, la question du nombre de cycles est apparue. Un paramètre d'optimisation a alors naturellement émergé : étant donné un graphe  $G$  2-plaçable, quel est le nombre maximum de cycles que l'on peut avoir dans la permutation  $\sigma_2$  ?

À vrai dire, nous avons plutôt considéré ce problème avec un autre regard, celui du *placement étiqueté*. Nous verrons bientôt que les deux problématiques sont équivalentes. Pour des raisons de commodité d'écriture, nous choisissons de définir les termes dans ce second contexte.

En termes simples, un  $k$ -placement d'un graphe sommet-étiqueté  $G$  est un  $k$ -placement de  $G$  tel que l'image des étiquettes est préservée pour chaque permutation du placement. Plus formellement :

**Définition 57.** Soit un graphe  $G$ , un entier positif  $p$ , et une fonction surjective  $f : V(G) \rightarrow \{1, \dots, p\}$  d'étiquetage des sommets de  $G$ . On dit que  $(G, f)$  admet un  $k$ -placement  $p$ -étiqueté si :

- $G$  admet un  $k$ -placement (avec des permutations qu'on notera  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ ),  
et
- $\forall v \in V(G) \forall i \in \{1, \dots, p\} f(\sigma_i(v)) = f(v)$ .

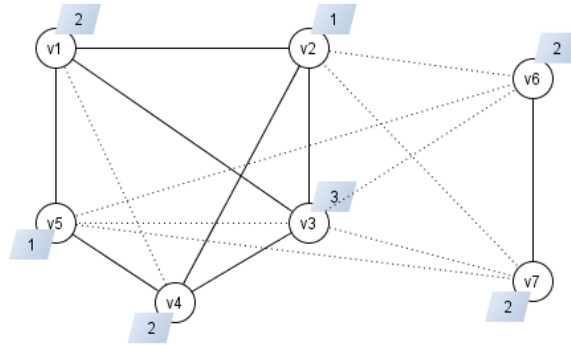



FIGURE 3.2 – Exemple d’un 2-placement 3-étiqueté

 **Exemple**

Un exemple de 2-placement 3-étiqueté est donné en Figure 3.2. La permutation  $\sigma_2$  y est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_2(v_1, v_7, v_4, v_6) &= (v_7, v_4, v_6, v_1) \\ \sigma_2(v_2, v_5) &= (v_5, v_2) \\ \sigma_2(v_3) &= v_3 \end{aligned}$$

Sur cet exemple, les images des arêtes du graphe par la permutation  $\sigma_2$  sont en pointillés. On s’aperçoit que les valeurs des étiquettes sont bien conservées (par exemple l’arête  $(v_6, v_7)$  a pour image  $(v_1, v_4)$ , et elles ont toutes deux leurs extrémités étiquetées 2).

De la notion de  $k$ -placement  $p$ -étiqueté de graphe, on s’est alors intéressé à la recherche du plus grand  $p$  possible :

**Définition 58.** *Le nombre de  $k$ -placement étiqueté d’un graphe  $k$ -plaçable  $G$  est le plus grand entier  $p$  tel que  $G$  admette un  $k$ -placement  $p$ -étiqueté. On le notera  $\lambda_k(G)$ .*

On remarquera que ce nombre existe toujours puisque la fonction qui attribue l’étiquette 1 à tous les sommets de  $G$  définit un  $k$ -placement étiqueté.

Dans la suite de ce manuscrit, un  $k$ -placement  $p$ -étiqueté d’un graphe  $G$  sera défini via la donnée des permutations  $\sigma_2, \dots, \sigma_k$ . On dira qu’une étiquette  $i \in \{1, \dots, p\}$  est *unique* s’il existe un unique sommet  $v$  tel que  $f(v) = i$ . Par exemple, l’étiquette 3 est unique pour le placement de la Figure 3.2.

**Remarque**

Étant donné un 2-placement  $p$ -étiqueté d'un graphe  $G$  via une permutation  $\sigma_2$ , tous les sommets d'un cycle de  $\sigma_2$  ont forcément la même étiquette. Par conséquent, le nombre de 2-placement étiqueté correspond exactement au plus grand nombre de cycles dans un 2-placement de  $G$ . La seule donnée de  $\sigma_2$  suffit alors à définir le 2-placement étiqueté.

**2-placement étiqueté de graphes**

La section précédente nous a montré que nous avons une bonne connaissance des graphes 2-plaçables, et en particulier lorsque  $|E(G)| \leq |V(G)|$ . Par conséquent, nous avons dans un premier temps choisi de considérer le 2-placement étiqueté de graphes.

Notre premier résultat donne une borne supérieure pour  $\lambda_2(G)$ , en fonction du nombre de stabilité du graphe. On rappelle que le nombre de stabilité d'un graphe  $G$ , noté  $\alpha(G)$ , est la taille d'un stable maximum de  $G$ .

**Théorème 59** (D., Kheddouci, Nowakowski et Tahraoui [18]). *Soit  $G$  un graphe 2-plaçable. Alors son nombre de 2-placement étiqueté vérifie :*

$$\lambda_2(G) \leq \alpha(G) + \lfloor \frac{|V(G)| - \alpha(G)}{2} \rfloor$$

On comprend que cette borne ne peut pas être franchie parce que dans un 2-placement d'un graphe, deux sommets voisins ne peuvent pas avoir des étiquettes uniques. Au mieux, l'ensemble des étiquettes uniques forme un stable maximum du graphe, et on attribue une étiquette par paire de sommets restants.

**Remarque**

On notera que la borne du Théorème 59 est atteinte pour plusieurs familles de graphes. Nous allons voir que c'est notamment le cas pour les chaînes et les cycles.

Pour les cycles et les chaînes, le Théorème 59 nous permet effectivement de conclure rapidement quant à l'optimalité d'une solution où un sommet sur deux est un point fixe, et où les autres sommets (à distance 4) sont appariés dans des cycles de taille 2 de la permutation.

**Proposition 60** (D., Kheddouci, Nowakowski et Tahraoui [18]). *Soit  $C_n$  un cycle avec  $n \geq 5$ . Alors on a*

$$\lambda_2(C_n) = \begin{cases} \lfloor \frac{3n}{4} \rfloor & \text{si } n > 5, \\ 2 & \text{si } n = 5. \end{cases}$$

**Proposition 61** (D., Kheddouci, et Tahraoui [45]). *Soit  $P_n$  une chaîne avec  $n \geq 4$ . Alors on a*

$$\lambda_2(P_n) = \begin{cases} \lfloor \frac{3n}{4} \rfloor & \text{si } n \equiv 0, 2, 3 \pmod{4} \text{ et } n > 4, \\ \lfloor \frac{3n}{4} \rfloor + 1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \text{ et } n > 5, \\ 3 & \text{si } n = 5, \\ 1 & \text{si } n = 4. \end{cases}$$

Bien entendu, la borne supérieure du Théorème 59 n'est pas atteinte dans de nombreux cas. Considérons tout d'abord le cas des  $(n, n-2)$ -graphes. On sait d'après le Théorème 46 qu'ils admettent tous un 2-placement. Dans [48], Woźniak s'est penché sur la structure des cycles dans les 3-placements de graphe. En termes de nombre de placement étiqueté, l'un de ses résultats induit le corollaire suivant :

**Corollaire 62** (Woźniak [48]). *Soit  $G$  un  $(n, n-2)$ -graphe différent de  $K_3 \cup 2K_1$  et  $K_4 \cup 4K_1$ . Alors il vérifie*

$$\lambda_2(G) \geq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + n \pmod{3}.$$

Avec Kheddouci, Tahraoui et Woźniak, nous avons démontré que l'on pouvait garantir une meilleure borne inférieure pour le nombre de 2-placement étiqueté :

**Théorème 63** (D., Kheddouci, Tahraoui et Woźniak [19]). *Pour tout  $(n, n-2)$ -graphe  $G$ , on a :*

$$\lambda_2(G) \geq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor.$$

Ce résultat a été démontré par induction sur la taille du graphe. Par ailleurs, nous avons démontré qu'il restait vrai lorsque l'on impose que tous les cycles des permutations qui maximisent  $\lambda_2$  soient de taille au plus 2. On notera qu'un  $(n, n-2)$ -graphe possède au moins deux composantes connexes qui sont des arbres.

L'addition des Théorème 59 et 63 nous permet de conclure à un encadrement du nombre de 2-placement étiqueté. Nous avons par ailleurs remarqué qu'il existe des familles de  $(n, n-2)$ -graphes pour lesquelles chacune de ces bornes est atteinte :

- Les cycles  $C_n$  privés de deux arêtes ont un nombre de 2-placement étiqueté identique à celui de  $C_n$ , soit  $\lfloor 3n/4 \rfloor = \alpha(C_n) + \lfloor \frac{n-\alpha(C_n)}{2} \rfloor$ .
- Pour un entier  $k$  fixé, les graphes  $kK_3 \cup K_2 \cup K_1$  vérifient  $\lambda_2(G) = 2n/3$ . Il serait toutefois intéressant de trouver des  $(n, n-2)$ -graphes pour lesquels cette borne est atteinte et la borne supérieure ne l'est pas.

En ce qui concerne le 2-placement étiqueté des  $(n, n-1)$ -graphes, nous n'avons étudié que le cas connexe, autrement dit les arbres. Une borne inférieure honorable a été obtenue :

**Théorème 64** (Tahraoui, D. et Kheddouci [45], Théorème 18). *Soit  $T$  un arbre d'ordre  $n$  qui n'est pas une étoile. On a alors*

$$\lambda_2(T) \geq \lfloor \frac{3n}{4} \rfloor - 2.$$

Ce résultat a été démontré par induction sur le diamètre de l'arbre. Plus précisément, nous avons inclus dans l'hypothèse d'induction que la permutation  $\sigma_2$  n'échange jamais deux feuilles de l'arbre.

### Problème ouvert

L'étude des cas extrémaux reste ouverte pour les arbres. En existe-t-il qui vérifient  $\lambda_2(T) = \lfloor \frac{3n}{4} \rfloor - 2$ , et pour lesquels la borne du Théorème 59 est de la forme  $n - \epsilon$  (où  $\epsilon$  est une constante) ?

En revanche, pour les chenilles, nous avons obtenu un résultat exact qui affirme que toutes les chenilles "suffisamment grandes" ont un nombre de 2-placement étiqueté égal à la borne du Théorème 59 :

**Théorème 65** (Tahraoui, D. et Kheddouci [45], Théorème 16). *Soit une chenille  $C$  d'ordre au moins 4 telle que  $|V(C)| - \alpha(C) \geq 5$ . On a alors*

$$\lambda_2(C) = \alpha(C) + \lfloor \frac{n - \alpha(C)}{2} \rfloor.$$

La stratégie sur les chenilles est assez naturelle : comme l'ensemble des "pattes" forme un stable, les feuilles correspondant aux pattes sont des points fixes dans la permutation, et on cherche à maximiser le nombre de cycles de taille au moins 2 sur la chaîne principale. La Figure 3.3 illustre une telle construction. Cela nous a conduit à définir un second paramètre de placement, qui interdit les points fixes dans les permutations.

**Définition 66.** *Le nombre de  $k$ -placement étiqueté sans point fixe d'un graphe  $k$ -plaçable  $G$  est le plus grand entier  $p$  tel que  $G$  admette un  $k$ -placement  $p$ -étiqueté où tous les cycles des permutations  $\sigma_2, \dots, \sigma_k$  sont de taille au moins 2. On le notera  $\lambda'_k(G)$ .*

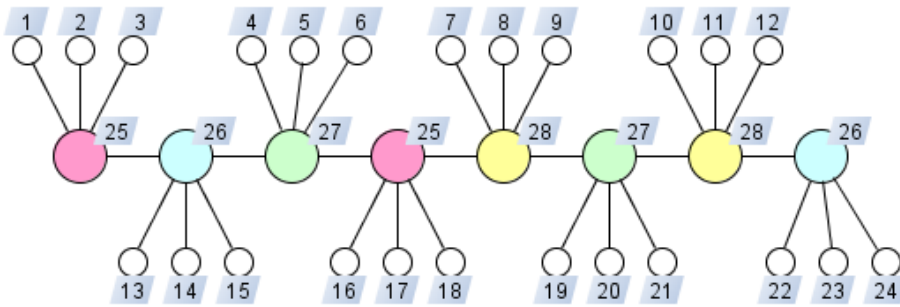


FIGURE 3.3 – Exemple d’un 2-placement étiqueté optimum d’une chenille

On notera que dans le cas des chaînes, la valeur de  $\lambda'_2(P_n)$  est connue, et égale à la borne supérieure naturelle de  $\lfloor n/2 \rfloor$ .

**Remarque**

Le cas des chenilles satisfaisant  $|V(C)| - \alpha(C) < 5$  a également été traité. Il s’agit de chenilles dont la chaîne principale n’a pas plus de 7 sommets. Nous avons démontré que dans le pire des cas, on perdait deux cycles par rapport à la borne du Théorème 65.

Hormis le cas des chaînes, nous n’avons pas mené d’étude plus approfondie du paramètre  $\lambda'$ . De certains travaux passés [4], on peut en déduire des premiers résultats sur  $\lambda'_2(G)$  lorsque  $G$  est un  $(n, n - 1)$ -graphe :

**Théorème 67.** *Soit  $G$  un  $(n, n - 1)$ -graphe avec  $n \equiv 0 \pmod{4}$ . Si  $G$  admet un 2-placement sans point fixe, alors  $\lambda'_2(G) \geq \frac{n}{4}$ .*

**Problème ouvert**

Étudier le paramètre  $\lambda'_2$ . Tout reste actuellement à explorer (étude extrémale, arbres...).

**$k$ -placement étiqueté de graphes**

En ce qui concerne le  $k$ -placement étiqueté, la borne du Théorème 59 reste bien entendu valable, mais il serait intéressant de l’améliorer. En effet, dans un  $k$ -placement étiqueté, toute étiquette voisine d’un sommet avec une étiquette unique doit apparaître au moins sur  $k$  sommets distincts. Cette



remarque ne s'avère toutefois pas suffisante pour conclure dans le cas général à une borne supérieure plus basse. C'est en revanche le cas pour les cycles :

**Proposition 68** (D., Kheddouci, Nowakowski et Tahraoui [18]). *Pour tout cycle  $C_n$  avec  $n \geq 2k + 1$ , on a :*

$$\lambda_k(C_n) \leq \alpha(C_n) + \lfloor \frac{n - \alpha(C_n)}{k} \rfloor.$$

Nous avons ensuite montré que cette borne est atteinte pour presque tous les cycles suffisamment grands (par rapport à  $k$ ) :

**Théorème 69** (D., Kheddouci, Nowakowski et Tahraoui [18], Théorème 8). *Étant donné un entier  $k \geq 2$ , on considère un cycle  $C_n$  avec  $n = 2km + x$ , où  $x < 2k$ . On a alors :*

$$\lambda_k(C_n) = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 & \text{si } (x \bmod 4, m) = (2, 2) \text{ et } k > 2, \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m + 1 & \text{si } x = 2k - 1, \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans les cas où  $n$  est relativement petit par rapport à  $k$ , nous avons obtenu des valeurs exactes dans quelques cas en utilisant une couverture en circuits Hamiltoniens du graphe. Cependant, certains cas restent ouverts :

#### Problème ouvert

Calculer la valeur exacte de  $\lambda_k(C_n)$  lorsque  $2k + 1 \leq n \leq 4k - 4$ .

Il serait également pertinent de réfléchir à une adaptation des résultats obtenus pour le 2-placement étiqueté :

#### Problème ouvert

Peut-on obtenir un encadrement "fin" de  $\lambda_k(G)$  lorsque  $G$  est un  $(n, m)$ -graphe avec  $m \leq n - 1$ ? On peut également espérer résoudre le cas des chaînes à partir des résultats sur les cycles.

## 3.2 Colorations distinguantes

Les premières colorations distinguantes sont nées dans les années 1970, suite aux travaux de Golomb [25] et Rosa [40] à propos des *étiquetages gracieux*. Depuis, les nombreuses variations possibles de ce problème en ont fait un objet d'étude récurrent dans la littérature. On doit toutefois reconnaître un intérêt grandissant de la communauté sur ce sujet depuis une dizaine

d'années. Le diagramme de la Figure 3.4 l'illustre, en indiquant le nombre annuel de citations d'un des papiers référence du domaine depuis sa parution en 1992.

#### Irregular assignments and vertex-distinguishing edge-colorings of graphs

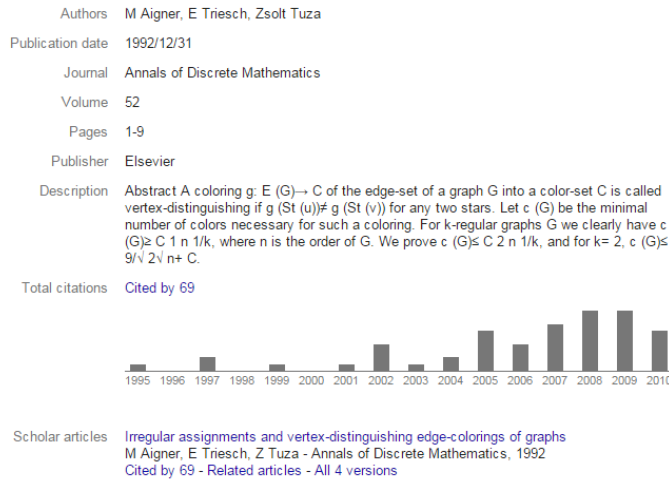


FIGURE 3.4 – Nombre annuel de citations du papier [2] (source : Google scholar)

En termes simples, l'objectif est de colorier les arêtes et/ou sommets d'un graphe de telle sorte que cette coloration induise un codage des arêtes et/ou sommets de ce même graphe, où les codes sont distincts. À partir d'une définition aussi générique, on s'aperçoit que de nombreux paramètres peuvent entrer en jeu dans la spécification d'un problème précis de coloration distinguante : choix des objets à colorier, choix des objets à distinguer, fonction de codage, propriété ou non de la coloration...

Dans ce chapitre, nous ne prétendons pas faire un état de l'art exhaustif sur l'ensemble des travaux ayant trait aux colorations distinguantes. Il s'agirait toutefois d'un effort très utile à mener dans le futur. Tout d'abord parce que la richesse du domaine le justifie. Ensuite parce qu'il n'existe pas de tel travail de survey connu dans la littérature. On peut toutefois citer le chapitre 13 du livre [15] qui effectue un premier état des lieux du domaine jusqu'en 2008. Par ailleurs, il est souvent difficile de s'y retrouver tant les divers noms utilisés dans la littérature sont parfois peu cohérents. Des termes différents peuvent en effet définir un même problème. On a aussi constaté qu'un même terme peut désigner deux problématiques différentes. Dans ce manuscrit, nous allons nous arrêter sur deux problématiques précises : les colorations arête qui distinguent les sommets, et les colorations sommet qui

distinguent les arêtes.

### 3.2.1 Colorations arête sommet-distinguantes

Nous nous intéressons ici aux colorations arête qui distinguent les sommets du graphe. Plusieurs variantes de ce problème ont été identifiées dans la littérature, selon les paramètres suivants :

- la propriété de la coloration des arêtes
- la fonction de codage
- la distinction, qui doit être valable pour toute paire de sommets, ou alors pour les paires de sommets adjacents uniquement.

Pour distinguer les colorations propres et impropres, on parlera dans ce manuscrit d'*étiquetage* lorsque la coloration est impropre. Pour la distinction, si elle ne touche que les sommets adjacents, on dira que la coloration (ou l'étiquetage) est *sommet-voisinage-distinguante*. En général, le terme anglophone équivalent est *AVD* (pour *adjacent vertex distinguishing*).

En ce qui concerne la fonction de codage des sommets, on choisit la plupart du temps une fonction entière  $c : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ . Parmi les fonctions les plus exploitées dans la littérature, on trouve, pour un sommet  $v$  :

- $c(v)$  est l'ensemble des couleurs des arêtes incidentes à  $v$ .
- $c(v)$  est le multi-ensemble des couleurs des arêtes incidentes à  $v$ . Autrement dit, le nombre de fois où une même couleur apparaît dans le voisinage de  $v$  importe.
- $c(v)$  est la somme des couleurs des arêtes incidentes à  $v$ .

Il est temps de donner quelques exemples de telles colorations. L'un des problèmes les plus connus est le *strong edge coloring*, introduit par Burris et Schelp [11]. Dans notre vocabulaire, il correspond à la coloration arête sommet-distinguante, où le code d'un sommet est l'ensemble des couleurs qui lui sont incidentes.

On peut associer un paramètre d'optimisation à chacune des problématiques de coloration distinguante. La plupart du temps, l'objectif est de minimiser le nombre de couleurs nécessaires pour colorier le graphe. Dans l'exemple ci-dessus du strong edge coloring, ce paramètre s'appelle l'*indice chromatique fort*, noté  $\chi'_s(G)$ . Trivialement, cet indice vérifie

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \chi'_s(G)$$

Pour le graphe de la Figure 3.5, on a  $\chi'_s(G) = 5$ , puisqu'il existe deux sommets de degré  $\Delta(G) = 4$ , et qu'une coloration avec 4 couleurs ne leur permettrait pas d'avoir des codes différents.

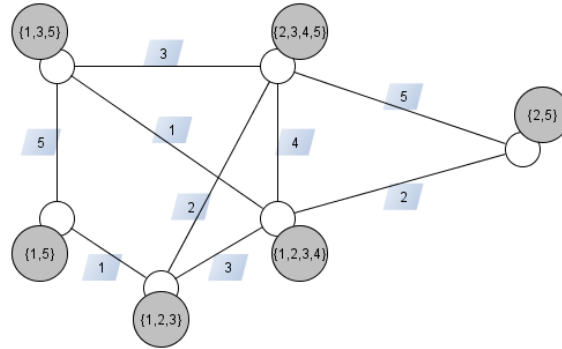


FIGURE 3.5 – Exemple d’une coloration arête sommet-distinguante par les ensembles

Si  $\chi'_s(G)$  admet un minorant naturel  $\chi'(G)$  qui peut être atteint (dans le cas où  $\chi'(G)$  n’est pas fixé), des bornes supérieures précises ne sont pas encore connues. Burris et Schelp ont toutefois démontré le résultat suivant :

**Théorème 70** (Burris et Schelp[11]). *Pour un graphe connexe  $G$  d’ordre au moins 3, on a*

$$\chi'_s(G) \leq n + \Delta(G) - 1$$

La preuve de ce résultat part d’une  $(\Delta + 1)$  coloration arête (via le théorème de Vizing), où les couleurs de  $(n - 2)$  arêtes (choisies selon un ordre particulier) sont remplacées par de nouvelles couleurs. On ne sait actuellement pas si cette borne est serrée. D’ailleurs, Burris et Schelp ont conjecturé qu’il en existait une plus précise :

**Conjecture 71** (Burris et Schelp[11]). *Pour un graphe  $G$  dont toutes les composantes connexes sont d’ordre au moins 3, on a*

$$\chi'_s(G) \leq n + 1$$

Hormis cette étude extrême, certaines familles de graphes comme les graphes complets, les chaînes, les cycles ou encore les bipartis complets ont déjà été étudiés dans la littérature.

**Remarque**

Certains auteurs ont qualifié le paramètre  $\chi'_s(G)$  d’*observabilité* du graphe [13]. Par ailleurs, la variante où la coloration est impropre a été introduite par Harary et Plantholt [30], sous le nom de *point-distinguishing edge chromatic index*, qu’on notera  $\chi'_{si}(G)$ .

Un autre exemple est la coloration dite *irrégulière*, introduite pour la première fois par Aigner et al. [2]. Celle-ci correspond à un étiquetage arête-sommet-distinguivant par les multi-ensembles. La Figure 3.6 donne un exemple d'un tel étiquetage.

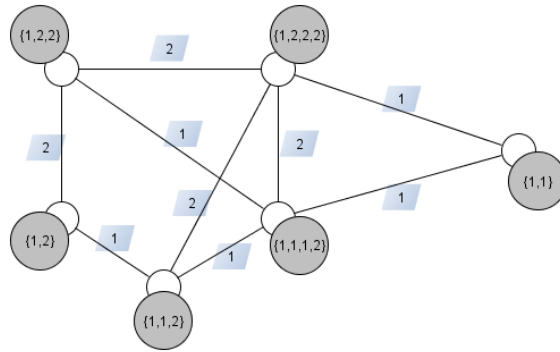


FIGURE 3.6 – Exemple d'un étiquetage arête-sommet-distinguivant par les multi-ensembles

Le paramètre d'optimisation associé est noté  $\chi'_{mi}(G)$ , et correspond au plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admette une coloration irrégulière avec les couleurs  $\{1, \dots, k\}$ . Dans [2, 10], des bornes supérieures sont obtenues pour les graphes  $k$ -réguliers. La valeur de  $\chi'_{mi}(G)$  est d'ailleurs grande pour les graphes  $k$ -réguliers où  $k$  est petit vis à vis de  $|V(G)|$ . En revanche, pour des graphes comme les graphes complets, il a été démontré [2] que  $\chi'_{mi}(K_n) = 3$  pour tout  $n \geq 3$ .

Les tableaux suivants récapitulent les colorations arête-sommet-distinguantes existantes dans la littérature pour les fonctions de codage suivantes : ensemble, multi-ensemble, somme, multiplication.

Distinction par les ensembles		
	Type de coloration	
Distinction	Propre	Impropre
Totale	Burris et Schelp, 1997 [11]	Harary et Plantholt, 1985 [30]
Voisinage	Zhang et al., 2002 [56]	Gyori et al., 2008 [29]

TABLE 3.1 – Colorations arête-sommet-distinguantes par les ensembles

Distinction par les multi-ensembles		
	Type de coloration	
Distinction	Propre	Impropre
Totale	Burris et Schelp, 1997 [11]	Aigner et al., 1992 [2]
Voisinage	Zhang et al., 2002 [56]	Addario-Berry et al., 2005 [1]

TABLE 3.2 – Colorations arête sommet-distinguantes par les multi-ensembles

Dans le cas de la somme et de la multiplication, on précise que l'on cherche encore à optimiser la valeur du plus petit  $k$  tel que la coloration soit dans  $\{1, \dots, k\}$ . Certains auteurs ont toutefois cherché à minimiser la taille de l'image de  $f$ , où  $f$  est la fonction de coloration arête.

Distinction par la somme		
	Type de coloration	
Distinction	Propre	Impropre
Totale	Lo, 1985 [39]	Chartrand et al. 1985 [14]
Voisinage	Flandrin et al., 2013 [23]	Karonski et al., 2004 [34]

TABLE 3.3 – Colorations arête sommet-distinguantes par la somme

Distinction par la multiplication		
	Type de coloration	
Distinction	Propre	Impropre
Totale	ouvert	ouvert
Voisinage	Li et al., 2015 [37]	Kaziow, 2008 [44]

TABLE 3.4 – Colorations arête sommet-distinguantes par la multiplication

En 2012 [46], nous nous sommes intéressés au problème d'étiquetage arête sommet-distinguante via une nouvelle fonction de codage. Cette fonction a été choisie de sorte à obtenir un majorant sur les valeurs des paramètres  $\chi'_{mi}$  et  $\chi'_{si}$  d'un graphe. Nous sommes partis de la remarque suivante :

*Deux ensembles (ou multi-ensembles) sont distincts si leurs diamètres sont différents*

On rappelle que le diamètre d'un ensemble d'entiers est la différence entre le plus grand et le plus petit élément de cet ensemble. Par conséquent, la fonction de codage élue va correspondre au diamètre des ensembles de

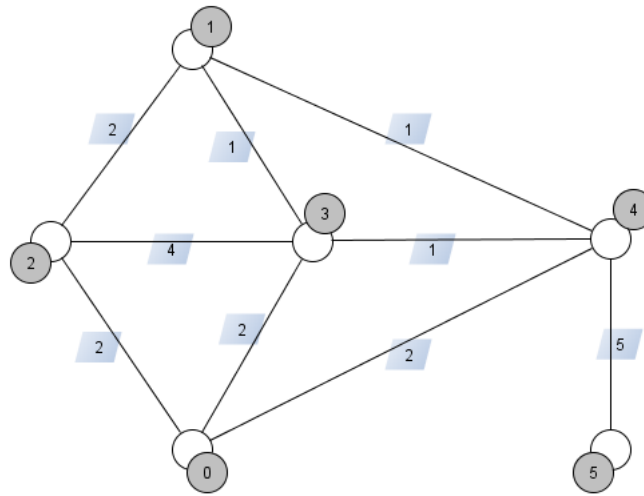


FIGURE 3.7 – Exemple d’un étiquetage 5-diamètre distinguant

couleurs incidentes à un sommet donné. La définition formelle du nouvel étiquetage distinguant est le suivant :

**Définition 72.** Soit un graphe  $G$ , un entier positif  $k$  et un étiquetage  $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  des arêtes de  $G$ . Pour tout sommet  $v$  de  $G$ , le code de  $v$  est défini comme suit :

$$l(v) = \begin{cases} f(e) & \text{si } d(v) = 1 \text{ et } v \in e \\ \max_{e \ni v} \{f(e)\} - \min_{e \ni v} \{f(e)\} & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $d(v)$  est le degré du sommet  $v$ .

Selon cette définition, un étiquetage  $f$  sera dit  $k$ -diamètre distinguant si deux sommets distincts ont des codes différents. Enfin, le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  possède un étiquetage  $k$ -diamètre distinguant sera noté  $\chi'_{di}(G)$ . La Figure 3.7 illustre un étiquetage 5-diamètre distinguant.

### Remarque

On remarquera que pour les sommets de degré 1, on a choisi de ne pas considérer le diamètre de l’ensemble, car tous les graphes ayant au moins deux sommets pendants n’admettraient pas de tel étiquetage. À la place, nous avons retenu comme code la valeur de la couleur incidente à ces sommets.

Par conséquent, les seuls graphes qui n’admettent pas d’étiquetage diamètre distinguant sont  $K_1$  et  $K_2$ . Pour tout autre graphe, on peut toujours

construire un étiquetage diamètre distinguant avec  $2^{|E(G)|} - 1$  couleurs, en attribuant la couleur  $2^{i-1}$  à chaque arête  $e_i$  (avec  $1 \leq i \leq |E(G)|$ ).

Par ailleurs, on peut remarquer que pour un étiquetage  $k$ -diamètre distinguant d'un graphe d'ordre  $n$ , un des sommets aura un code au moins égal à  $(n - 1)$ . Un tel code ne peut être obtenu qu'avec une arête incidente de couleur  $(n - 1)$  (si c'est un sommet pendant), ou alors avec une arête incidente de couleur  $n$  (si son degré est d'au moins 2). En d'autres termes :

**Proposition 73** (Tahraoui, D. et Kheddouci [46], Lemme 2). *Un graphe  $G$  d'ordre  $n$  sans composante connexe isomorphe à  $K_1$  ou  $K_2$  vérifie  $\chi'_{di}(G) \geq n - 1$ . De plus, si  $\delta(G) > 1$ , alors  $\chi'_{di}(G) \geq n$ .*

Sur l'exemple de la Figure 3.7, la Proposition 73 implique que l'étiquetage est optimum, et donc  $\chi'_{di}(G) = 5$ .

L'étude de nombreux cas nous a laissé penser que la valeur de  $\chi'_{di}$  est bornée par  $n + C$ , où  $C$  est une constante (relativement faible). Dans l'article [46], nous avons conjecturé le résultat suivant :

**Conjecture 74.** *Tout graphe  $G$  d'ordre  $n$  sans sommet ni arête isolée vérifie*

$$n - 1 \leq \chi'_{di}(G) \leq n + 1$$

Dans [46], nous avons prouvé cette conjecture pour les graphes connexes sans isthme. Le théorème suivant fournit même une caractérisation complète des graphes pour lesquels  $\chi'_{di}$  vaut  $n$  ou  $n + 1$ .

**Théorème 75** (Tahraoui, D. et Kheddouci). *Pour tout graphe connexe  $G$  sans isthme, on a*

$$\chi'_{di}(G) = \begin{cases} n & \text{si } G \text{ n'est pas un cycle avec } n \equiv 2, 3 \pmod{4}, \\ n + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'idée principale de la preuve repose sur la recherche d'un étiquetage dit *équilibré*, c.-à-d. où il existe une couleur  $c$  qu'on pourrait rajouter à l'ensemble des couleurs incidentes à chaque sommet sans en changer le diamètre. On va alors chercher un étiquetage équilibré d'un graphe couvrant de  $G$ , via une couverture par des cycles et des chaînes.

Dans le cas où  $G$  est connexe (mais éventuellement avec isthme), alors Scheidweiler et Triesch [43] ont démontré que la Conjecture 74 était valide.

**Théorème 76** (Scheidweiler et Triesch [43], Théorème 5). *Pour tout graphe  $G$  connexe d'ordre  $n$  sans sommet ni arête isolée, on a*

$$\chi'_{di}(G) \leq n + 1$$



De plus, si  $G$  admet au moins un sommet de degré 1, alors

$$\chi'_{di}(G) \leq n$$

Sachant que le cas des arbres a été résolu dans un premier temps, la preuve du Théorème 76 utilise un argument proche du nôtre, en considérant cette fois-ci un arbre couvrant du graphe. Dans le cas des graphes connexes, il reste encore quelques perspectives intéressantes afin d'obtenir une caractérisation parfaite du paramètre :

#### 🔍 Problème ouvert

Quels sont les graphes connexes pour lesquels on a  $\chi'_{di}(G) = n + 1$ ? Dans [46], nous avons démontré que les seuls graphes connexes sans isthme vérifiant cette propriété sont les cycles  $C_n$  avec  $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$ . Les résultats de Scheidweiler et Triesch prouvent que s'il en existe d'autres, ils possèdent au moins un isthme et vérifient  $\delta(G) \geq 2$ .

#### 🔍 Problème ouvert

Même question pour  $\chi'_{di}(G) = n - 1$ . Par définition, cela impose que  $G$  possède un sommet pendant. Dans [46], nous avons montré que les chaînes  $P_n$  avec  $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$  vérifient  $\chi'(P_n) = n - 1$ . C'est également le cas des arbres binaires complets de hauteur au moins 2 [46]. Quels sont les autres graphes candidats? Dans un premier temps, la question peut ne porter que sur les arbres.

En ce qui concerne les graphes non connexes, nous avons démontré le résultat suivant :

**Théorème 77** (Tahraoui, D. et Kheddouci [46], Théorème 15). *Pour tout graphe  $G$  d'ordre  $n$  dont chaque composante connexe est sans isthme et différente de  $C_k$  avec  $k \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}$ , alors*

$$\chi'_{di}(G) = n$$

La preuve de ce résultat utilise le fait que pour ces composantes, à partir d'un étiquetage diamètre distinguant, on peut le "translater" d'une constante  $c$ , c.-à-d. que les valeurs des codes et des arêtes sont augmentées de  $c$ .

Afin de s'affranchir du cas particulier des cycles dans le Théorème 77, Scheidweiler et Triesch ont démontré que l'union de cycles peut se ramener à

l'étude de suites de Skolem. Ce résultat combiné à notre algorithme conduit ainsi à une borne supérieure de  $n + 7$  pour  $\chi'_{di}(G)$  lorsque  $G$  est 2-connexe. Peut-on réduire ce majorant ? En tout cas, la Conjecture 74 s'avère fautive pour les graphes non-connexes [43], puisque certaines unions de  $C_3$  vérifient  $\chi'_{di}(G) = n + 2$ . Pour un graphe  $G$  quelconque, la meilleure borne supérieure connue est la suivante :

**Théorème 78** (Scheidweiler et Triesch [43], Théorème 6). *Pour tout graphe  $G$  d'ordre  $n$  sans sommet ni arête isolée, on a*

$$\chi'_{di}(G) \leq n + 9$$

#### Problème ouvert

Existe-t-il des graphes pour lesquels on a  $\chi'_{di}(G) > n + 2$  ? Résoudre exactement le cas des unions de cycles semble être une première piste.

Au niveau du lien entre les divers paramètres de graphe, on a la propriété suivante (pour un graphe  $G$  vérifiant  $\delta(G) \geq 2$ ) :

$$\chi'_{mi}(G) \leq \chi'_{si}(G) \leq \chi'_{di}(G)$$

Malgré la motivation évoquée plus tôt, c'est sans surprise que les résultats obtenus pour  $\chi'_{di}(G)$  donnent des majorants peu pertinents pour les deux autres paramètres. En effet, la contrainte d'avoir des diamètres différents est vraiment trop forte pour espérer avoir des graphes vérifiant  $\chi'_{si}(G) = \chi'_{di}(G)$ .

#### Problème ouvert

Il serait intéressant d'examiner la variante diamètre-distinguante où la coloration est propre. Il est possible que l'écart entre la valeur du paramètre correspondant et  $\chi'_s(G)$  ne soit pas aussi grand que dans le cas impropre. Cela pourrait alors être une façon de se rapprocher de la conjecture de Burris et Schelp (Conjecture 71).

En terme de complexité algorithmique de calcul du paramètre, comme pour la plupart des problèmes de colorations distinguantes, celle-ci est ouverte. Si nous pensons qu'elle est NP-complète, nous ne voyons pas d'indice qui laisse penser que cette difficulté serait plus facile à démontrer que pour d'autres paramètres.

### 3.2.2 Coloration sommet arête distinguantes

Un second type de coloration distinguante est celui où les sommets du graphe sont coloriés, et où ce sont les arêtes qui portent un code (bien souvent fonction des couleurs des extrémités). Pour une arête  $(u, v)$  du graphe, il existe dans la littérature trois fonctions de codage particulièrement étudiées :

- la fonction ensemble  $c(u, v) = \{u, v\}$ ,
- le diamètre  $c(u, v) = |u - v|$ ,
- la somme  $c(u, v) = (u + v) \bmod |E|$ .

Dans ces trois cas, la coloration choisie est souvent propre, voire plus (nous le verrons plus tard). Le cas de la fonction *ensemble* est en quelque sorte l'équivalent du strong edge coloring : on cherche à distinguer toutes les arêtes avec des ensembles de taille 2. Ce type de coloration est dite *harmonieuse*, et a été introduit par Hopcroft et Krishnamoorthy [33] en 1983. Le paramètre de graphe associé est appelé *nombre chromatique harmonieux* et correspond au plus petit entier  $k$  tel qu'une coloration des sommets dans  $\{1, \dots, k\}$  soit harmonieuse. Pour être cohérent avec nos notations précédentes, on notera ce paramètre  $\chi_s(G)$ . S'il est clair que tout graphe  $G$  d'ordre  $n$  admet une coloration harmonieuse (en donnant aux sommets les couleurs de 1 à  $n$ ), en comptant le nombre d'ensembles de taille 2 parmi  $k$  (pour un  $k$  fixé), on obtient l'encadrement suivant pour  $\chi_s(G)$  :

**Théorème 79.** *Pour un graphe  $G$  d'ordre  $n$  et de taille  $m$ , on a :*

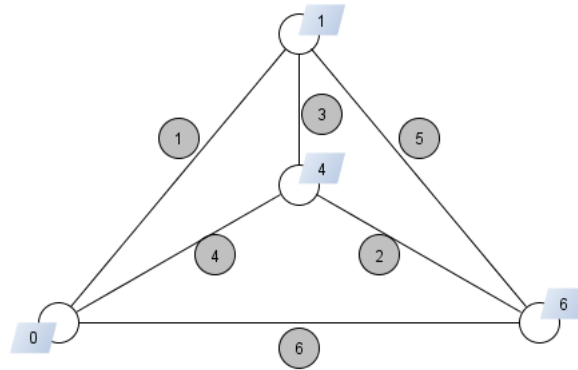
$$\lceil \frac{1 + \sqrt{8m + 1}}{2} \rceil \leq \chi_s(G) \leq n.$$

Un premier survey sur le nombre chromatique harmonieux a été proposé dans [20]. Un nouveau majorant, fonction du degré maximum du graphe, y est mentionné. Par ailleurs, on trouve dans la littérature une valeur exacte du paramètre pour certaines familles de graphes comme les chaînes, les cycles, l'union de cliques, les grilles, les arbres binaires complets ou encore les arbres  $k$ -aires complets à trois niveaux. On trouve également une preuve de NP-complétude du problème.

#### Remarque

Il existe une version impropre du nombre chromatique harmonieux, qu'on trouve dans la littérature sous le nom de *line distinguishing number*. Cette variante a été introduite par Frank, Harary et Plantholt [24]. Sa complexité algorithmique est inchangée par rapport à la précédente.

L'équivalent des distinctions diamètre et somme de la section précédente apparaissent aussi dans les colorations sommet. Pour les problèmes les plus

FIGURE 3.8 – Le  $K_4$  est un graphe gracieux

étudiés, on demande plus qu'une coloration propre : on souhaite que la fonction de coloration soit injective sur  $\{0, \dots, |E|\}$ . Par conséquent, une distinction diamètre ou somme associée impose que les codes des couleurs des arêtes soient dans  $\{1, \dots, |E|\}$ . Dès lors, il n'y a plus de paramètre d'optimisation qui entre en jeu, mais seulement un problème d'existence. Ainsi, un graphe sera dit *gracieux* s'il admet une coloration injective des sommets sur  $\{0, \dots, |E|\}$  qui distingue les arêtes par le diamètre. Cette notion date de 1967 et a été introduite par Rosa [40]. La Figure 3.8 donne un exemple de graphe gracieux.

La problématique principale devient alors de caractériser les graphes qui sont gracieux. Par exemple, les graphes  $C_5$  et  $K_5$  ne sont pas gracieux. Au final, le problème s'avère assez ardu et peu de résultats sont établis. La plus célèbre conjecture concerne les arbres :

**Conjecture 80.** *Tout arbre est gracieux.*

Aldred et McKay [3] ont démontré que cette conjecture est vraie pour les arbres d'ordre au plus 27 (il existe aussi une preuve informatique à 35). Certaines familles d'arbres ont également été résolues, comme les chenilles, ou certains homards. Par ailleurs, les hypercubes et les grilles sont connus pour être gracieux.

**Remarque**

Pour les graphes qui ne sont pas gracieux, on peut toutefois estimer leur degré de proximité à la propriété gracieuse. Pour cela, on définit un paramètre d'optimisation associé  $\chi_g(G)$ , qui consiste à trouver le plus petit  $k$  tel qu'une coloration injective dans  $\{0, \dots, k\}$  induise des codes distincts. Bien entendu, les graphes gracieux vérifient  $\chi_g(G) = |E(G)|$ . Il s'agit là d'un champ de recherche peu exploré à ma connaissance.

En ce qui concerne la distinction par la somme modulo  $|E|$ , Graham et Sloane [28] ont introduit une notion similaire à la précédente. Un graphe sera dit *harmonieux* s'il existe une injection de  $V$  dans  $\{0, \dots, |E| - 1\}$  tel que les codes des arêtes  $(u, v)$ , égaux à  $(u+v) \bmod |E|$ , soient tous distincts. On notera que le terme *harmonieux* n'est pas propice à une clarté absolue au vu des précédents termes employés. Cette définition interdit aux arbres d'être harmonieux car il n'existe aucune fonction injective dans l'ensemble souhaité. Dans ce cas particulier, la définition a été étendue pour autoriser la présence d'un doublon sur les sommets. On trouvera les quelques résultats connus sur le sujet dans le chapitre 13 de [15].

En collaboration avec d'autres membres de mon équipe, nous avons exploré une nouvelle fonction de codage pour ce type de coloration. Parmi les fonctions  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , la culture TJC ne pouvait nous conduire nulle part ailleurs qu'à la Nim-somme. C'est aussi une façon, peut-être un peu superficielle, je le reconnais, de boucler la boucle de ce mémoire. Étant données une arête  $(u, v)$  du graphe et une coloration  $f$  des sommets, le code  $c(u, v)$  vaudra donc  $f(u) \oplus f(v)$ .

**Remarque**

En fait, l'idée de la Nim-somme n'est qu'une écriture différente de la variante de Hegde [32] appelée *set coloring*. Dans cette variante, on colorie les sommets avec des ensembles d'entiers, et le code d'une arête est la différence symétrique entre les ensembles situés aux extrémités de cette arête. Il y a équivalence entre les deux versions puisqu'un sous-ensemble de  $\{1, \dots, n\}$  peut être codé par un entier en binaire avec le  $k^{\text{eme}}$  digit égal à 1 si l'entier  $k$  est dans le sous-ensemble. Le XOR (Nim-somme) entre deux entiers en binaire correspond alors exactement à la différence symétrique.

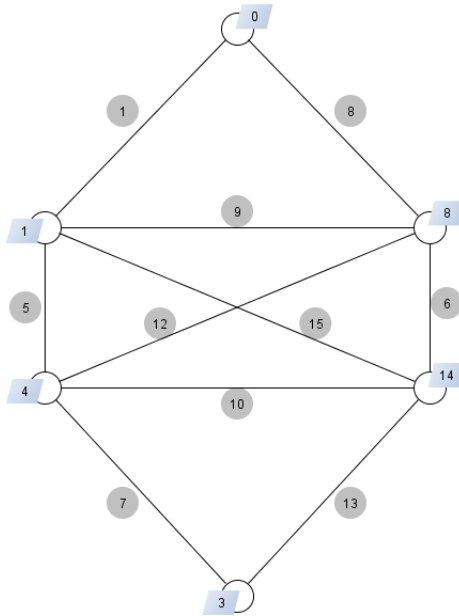


FIGURE 3.9 – Exemple d’un graphe satisfaisant  $\chi_{\oplus}(G) = 4$

À l’instar du paramètre  $\chi_g$  défini précédemment, le *set coloring number* d’un graphe  $G$ , noté  $\chi_{\oplus}(G)$  est le plus petit entier  $k$  tel qu’il existe une coloration injective dans  $\mathbb{Z}_k = \{0, \dots, 2^k - 1\}$  qui distingue toutes les arêtes deux à deux avec la Nim-somme. La Figure 3.9 montre un graphe dont le set coloring number vaut 4. Clairement il n’est pas possible de réaliser une coloration distinguante avec 3 couleurs, car le nombre d’arêtes ne le permet pas (il faut au moins  $10 \geq 2^3$  codes différents pour les arêtes, donc une couleur égale à au moins  $2^3$  est nécessaire sur les sommets).

Avec le même argument, on peut donc en déduire une première borne inférieure sur  $\chi_{\oplus}(G)$ , qui dépend de  $|E|$ . Pour une borne supérieure triviale, on peut choisir de colorier le sommet  $v_i$  avec la couleur  $2^{i-1}$ . On obtient alors le résultat ci-dessous.

**Proposition 81** (Hegde [32], Théorème 1). *Pour tout graphe  $G$ , on a*

$$\lceil \log_2(|E(G)| + 1) \rceil \leq \chi_{\oplus}(G) \leq |V(G)| - 1$$

Dans [7], nous nous sommes intéressés au calcul de la valeur exacte de  $\chi_{\oplus}(G)$  pour certaines familles de graphes, à commencer par les chaînes. Une question naturelle qui se pose est la suivante : pour un  $n$  fixé, quelle est la plus grande chaîne  $P_k$  qui vérifie  $\chi_{\oplus}(P_k) = n$  ? D’après la Proposition 81, le premier candidat est  $k = 2^n$ . Nous avons cependant démontré (Proposition 7) que ce candidat n’était pas l’élu car  $\chi_{\oplus}(P_{2^n}) = n + 1$ . Le candidat suivant est alors la chaîne de taille  $k = 2^n - 1$ . Dans ce cas, nous avons alors démontré

que l'existence d'une coloration distinguante satisfaisant  $\chi_{\oplus}(P_k) = n$  est équivalent à la recherche d'un transversal circulaire dans un carré latin.

Expliquons les termes :

- Tout d'abord, rappelons qu'un *carré latin* sur un alphabet  $\alpha_p$  de taille  $p > 0$  est un tableau  $p \times p$  rempli avec des valeurs de  $\alpha_p$ , de telle sorte que chaque lettre de l'alphabet apparaisse une seule fois dans chaque ligne et dans chaque colonne. Étant donné un entier  $k$ , la table de la Nim-somme, pour  $\alpha_p = \{0, \dots, 2^k - 1\}$ , est un carré latin. On la notera  $A_k$  par la suite.
- Un *transversal* dans un carré latin  $L$  sur  $\alpha_p = \{0, \dots, p - 1\}$  est un ensemble de  $p$  cellules  $\{L(i_1, j_1), \dots, L(i_p, j_p)\}$  avec  $i_k, j_k \in \{0, \dots, p - 1\}$  pour  $k = 1 \dots p$ , tel que

$$\{i_1, \dots, i_p\} = \{j_1, \dots, j_p\} = \{L(i_1, j_1), \dots, L(i_p, j_p)\} = \{0, \dots, p - 1\}$$

En d'autres termes, il y a exactement une cellule du transversal par ligne, une par colonne, et l'ensemble des valeurs des cellules est égal à  $\alpha_p$ . Étant donné un transversal, on définit par ailleurs la permutation  $\Gamma$  qui associe à chaque indice de ligne  $i$  le numéro de colonne  $\Gamma(i)$  tel que  $L(i, \Gamma(i))$  soit l'unique cellule du transversal sur la  $i^{eme}$  ligne. Nous avons prouvé ([7], Proposition 3) que la table  $A_k$  admet toujours un transversal.

- Un transversal est dit *circulaire* si la permutation  $\Gamma$  associée est l'union d'une permutation circulaire et d'un point fixe. La Figure 3.10 montre un transversal circulaire sur le carré latin  $A_4$ .

Sur l'exemple ci-dessus, en suivant l'ordre de la permutation circulaire, on s'aperçoit alors qu'on obtient un set coloring de la chaîne  $P_{15}$ , comme illustré sur la Figure 3.11.

Par conséquent, les deux conjectures suivantes sont équivalentes :

**Conjecture 82** (Boutin, D., Effantin, Kheddouci et Seba [7]). *Pour tout  $n \geq 2$ , le carré latin  $A_n$  admet un transversal circulaire.*

**Conjecture 83** (Boutin, D., Effantin, Kheddouci et Seba [7]). *Pour tout  $n \geq 2$ , on a  $\chi_{\oplus}(P_{2^n - 1}) = n$ .*

Ces conjectures ont été démontrées jusqu'à  $n = 5$ , en modifiant l'algorithme que nous avons créé pour obtenir un transversal "simple". On note également que la résolution de la Conjecture 82 permettrait de résoudre complètement le cas des chaînes, par monotonie de  $\chi_{\oplus}$ .

Un second exemple de famille de graphes qui atteint la borne inférieure de la Proposition 81 est l'ensemble des arbres binaires complets. On remarque qu'un arbre binaire complet de hauteur  $n$  possède  $2^n - 1$  sommets.

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
11	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
12	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
14	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
15	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

FIGURE 3.10 – Un transversal circulaire pour le carré latin  $A_4$ .

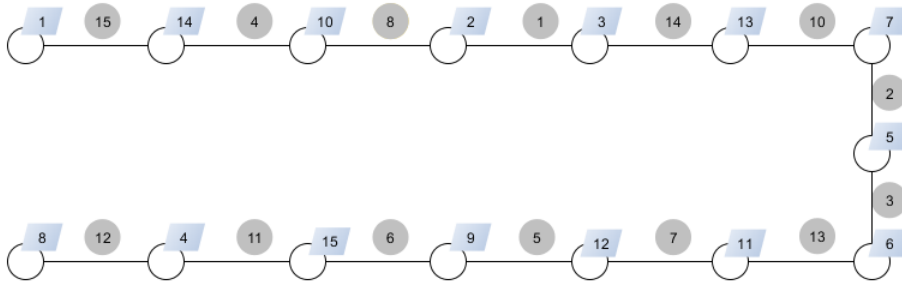


FIGURE 3.11 – Set coloring optimal de la chaîne  $P_{15}$

**Théorème 84** (Boutin, D., Effantin, Kheddouci et Lagraa [7]). *Pour un arbre binaire  $BT_n$  de hauteur  $n$ , on a  $\chi_{\oplus}(BT_n) = n$ .*

La preuve de ce résultat utilise notre algorithme récursif de construction d'un transversal "simple" dans  $A_n$ . Bien qu'assez élégante, nous ne la détaillerons pas dans ce manuscrit.



**Problème ouvert**

À ma connaissance, les résultats évoqués ci-dessus sont les seuls existant sur  $\chi_{\oplus}$  dans la littérature. D'autres familles de graphes restent à explorer (grilles, hypercubes...). Une étude des graphes extrémaux vis à vis de la Proposition 81 semble également pertinente.

Dans [32], une variante de ce problème, le *strong set coloring*, est également étudiée. Un graphe est dit *fortement set coloriable* si l'on peut trouver un set coloring tel que l'union des couleurs des sommets et des codes des arêtes forme une partition de  $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\} = \{1, \dots, 2^n - 1\}$ , pour un certain  $n$ . Plus précisément, les seuls graphes éligibles sont ceux pour lesquels  $|V| + |E| = 2^n - 1$ . Le graphe de la Figure 3.12 illustre cette définition.

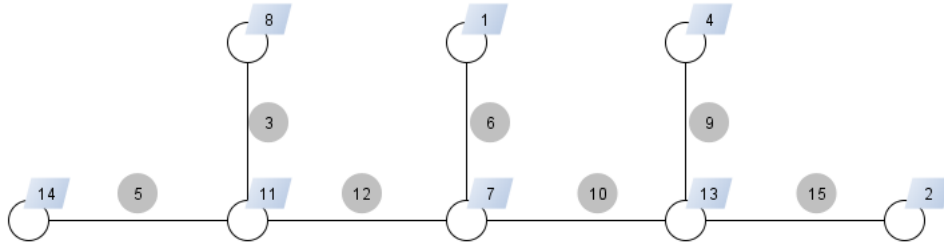


FIGURE 3.12 – Exemple de graphe fortement set coloriable avec  $n = 4$

Suite à cette définition, on s'intéresse alors à la recherche d'une caractérisation des graphes fortement set coloriables. Hegde a proposé un ensemble de conditions nécessaires pour qu'un graphe le soit :

**Proposition 85** (Hegde [32]). *Si un graphe  $G$  d'ordre au moins 3 vérifie l'une de ces trois conditions :*

- exactement un ou deux sommets sont de degré pair,
- exactement trois sommets sont de degré pair, dont deux sont adjacents,
- exactement quatre sommets sont de degré pair, disons  $v_1, v_2, v_3, v_4$ , et  $v_1, v_2$  d'une part, et  $v_3, v_4$  d'autre part, sont adjacents,

alors  $G$  n'est pas fortement set coloriable.

Ce résultat a permis à Hegde de résoudre le problème sur certaines familles de graphes : les graphes complets, les arbres  $k$ -aires complets, et les graphes bipartis complets. Les cas des chaînes reste toutefois ouvert :

**Conjecture 86** (Hegde [32]). *La chaîne  $P_n$  n'est pas fortement set coloriable pour tout  $n > 2$ .*

Cette conjecture a toutefois été démontrée pour  $n = 4, 8, 16$ .

Dans [7], nous avons étoffé la Proposition 85 de nouvelles conditions nécessaires, en particulier pour les graphes de petite taille. En voici l'une d'entre elles :

**Lemme 87** (Boutin, D., Effantin, Kheddouci et Lagraa [7]). *Étant donné un graphe  $G$ , si  $G$  admet un ensemble dominant  $D$  qui soit une clique de taille 3 et tel que  $G \setminus D$  soit stable, alors  $G$  n'est pas fortement set coloriable.*

Les autres conditions sont similaires, et basées sur la présence de dominants de faible taille. L'ensemble de ces résultats nous a permis d'obtenir une caractérisation intégrale de tous les graphes fortement set coloriables pour  $n = 4$ , soit  $|V| + |E| = 15$ . Ils sont recensés sur la Figure 3.13.

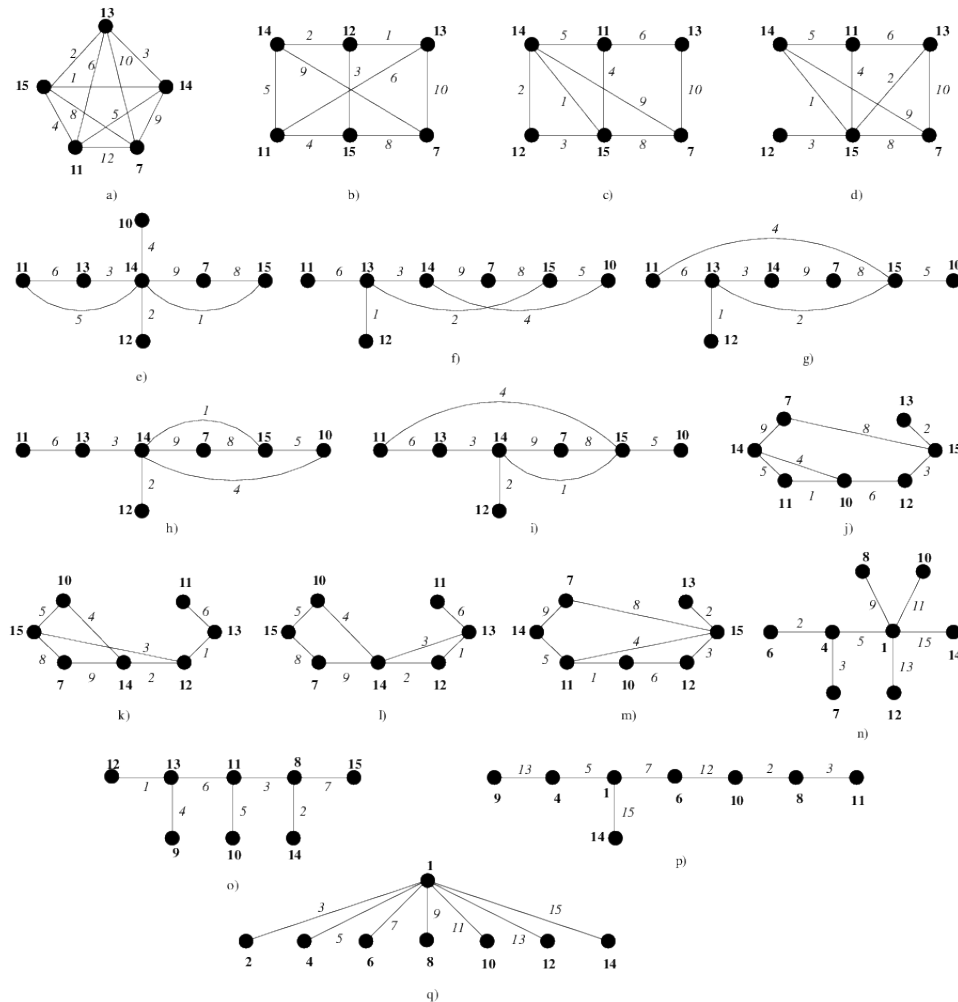


FIGURE 3.13 – Caractérisation de tous les graphes fortement set coloriables pour  $n = 4$

On notera que pour  $n = 2$  et  $n = 3$ , il n'existe qu'un seul graphe fortement set coloriable, respectivement  $K_2$  et  $K_{1,4}$ .

### Problème ouvert

Que se passe-t-il si l'on n'impose pas l'injectivité pour la fonction de coloration? Ce type de coloration distinguante n'a encore jamais été étudié.

À travers cette section, j'ai essayé de proposer un petit tour d'horizon des principales colorations distinguantes de la littérature, en se limitant au critère de la distinction totale, et lorsque la coloration/étiquetage porte sur les objets complémentaires de ceux qui portent le code. Si l'on souhaitait être totalement exhaustif sur le sujet, il conviendrait de s'intéresser également aux colorations voisinage-distinguantes. Celles-ci connaissent un vrai intérêt depuis une quinzaine d'années, et ont été examinées selon diverses fonctions de codage. En ce qui concerne les objets coloriés/distingués, on peut mentionner les variantes suivantes :

- coloration totale, c.-à-d. on colorie à la fois les sommets et les arêtes. Le codage (arête ou sommet) est fonction des couleurs des sommets et des arêtes voisins.
- codage total, c.-à-d. on veut distinguer à la fois les sommets et les arêtes.
- colorations sommet-sommet-distinguantes : dans ce cas, le code d'un sommet dépend des couleurs des voisins de ce sommet. Dans le cas où la fonction de codage est la fonction ensemble, on parle de *coloration identifiante* [21]. Pour la fonction somme, il s'agit du *lucky labeling* [17].

### 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé deux problématiques assez vastes de la théorie des graphes : le placement et les colorations/étiquetages distinguants. Pour chacun d'entre eux, j'ai travaillé sur des variantes de problèmes standards introduits personnellement, ou alors étendu des résultats récents.

Dans le cas du placement étiqueté, la motivation première était d'ordre applicatif. En effet, au sein du projet ANR AOC, l'objectif premier était d'appréhender l'appariement d'objets représentés par des graphes. Bien souvent, ces graphes portent une information sur leurs nœuds. L'appariement applicatif est souvent abordé via des algorithmes approximatifs, vu la fréquente double différence - structurelle et sémantique - entre les graphes à appairer. Une vision plus théorique de cette problématique nous a alors conduit à définir la notion de placement étiqueté, ainsi que son paramètre d'optimi-

sation associé. Si l'on s'est alors petit à petit détourné du volet applicatif, c'est parce que le paramètre théorique s'est avéré un objet d'étude pertinent. On a alors constaté que, sous une autre forme, il avait été une première fois considéré dans la littérature, de façon assez confidentielle (nombre de cycles d'un placement de graphes). À travers la thèse de M.A. Tahraoui et en collaboration avec deux chercheurs extérieurs, notre étude entièrement dédiée à ce problème a alors permis d'améliorer certains premiers résultats et de résoudre le problème sur certaines familles de graphes. La voie ouverte laisse alors de nombreuses perspectives de recherche pour un domaine qui avait été un peu mis de côté ces dernières années.

En ce qui concerne les colorations distinguantes, c'est à l'inverse un domaine d'étude très prisé par la communauté depuis une quinzaine d'années. Nous nous sommes placés sur deux variantes très spécifiques - l'une est inventée, l'autre très récente :

- La coloration diamètre distinguante est un nouveau paramètre que nous avons introduit en 2012. Il est plaisant de constater que depuis sa publication, notre travail a été considéré et approfondi par d'autres chercheurs (en l'occurrence Scheidweiler et Triesch).
- Notre étude du set coloring a étendu les premiers résultats de Hegde, en proposant de nouveaux résultats et une approche un peu différente qui met à profit nos connaissances en TJC.

L'une des motivations premières de ces études était l'amélioration des résultats connus sur des paramètres de colorations distinguantes plus célèbres (ceux ayant une fonction de codage ensembliste, notamment). Il faut reconnaître que les résultats obtenus actuellement ne répondent pas à ces espoirs. Il n'en demeure pas moins que ces objets d'étude méritent d'être considérés en tant que tels.

# Bibliographie

- [1] L. Addario-Berry, R.E.L. Aldred, K. Dalal, et B. Reed, Vertex Colouring Edge Partitions, *J. of Combinatorial Theory B* **94 (2)** (2005), 237–244.
- [2] M. Aigner, E. Triesch et Z. Tuza, Irregular assignments and vertex-distinguishing edge-colorings of graphs, *Combinatorics* **90**, Elsevier Science Pub, New York (1992), 1–9.
- [3] R. E. L. Aldred et B. D. McKay, Graceful and harmonious labellings of small trees, *ICA Bulletin* **23** (1998), 69–72.
- [4] A. Benhocine et A.P. Wojda, On self-complementation, *J. Graph Theory* **8** (1985), 335–341.
- [5] B. Bollobás et S.E. Eldridge, Packing of graphs and applications to computational complexity, *J. Comb. Theory Ser. B* **25** (1978), 105–124.
- [6] J. A. Bondy et U. S. R. Murty, Graph Theory with Applications, McMillan, London, Elsevier, New York (1976).
- [7] J.P. Boutin, E. Duchêne, B. Effantin, H. Kheddouci, et H. Seba, New results about set colorings of graphs, *Electronic Journal of Combinatorics* **17(1)** (2010).
- [8] S. Brandt, Embedding graphs without short cycles in their complements, Y. Alavi, A. Schwenk (Eds.), *Graph Theory, Combinatorics, and Application of Graphs* **1** (1995), 115–121.
- [9] D. Burns et S. Schuster, Embedding  $(n, n - 1)$  graphs in their complements, *Israel J. Math.* **30** (1978), 313–320.
- [10] A. C. Burriss, On graphs with irregular coloring number 2, *Congr. Numer.* **100** (1994), 129–140.
- [11] A. C. Burriss et R. H. Schelp, Vertex-distinguishing proper edge colorings, *J. Graph Theory* **26** (1997), 73–82.
- [12] P. A. Catlin, Embedding subgraphs and coloring graphs under extremal degree conditions, Ph.D. Thesis, Ohio State Univ., Columbus, (1976).
- [13] J. Cerny, M. Hornak, et R. Sotak, Observability of a graph, *Math. Slovaca* **46** (1996), 21–31.

- [14] G. Chartrand, M. Jacobson, J. Lehel, O. Oellermann, S. Ruitz et F. Saba, Irregular networks, *Congressus Numerantium* **64** (1988), 187–192.
- [15] G. Chartrand et P. Zhang, Chromatic Graph Theory (Chapman and Hall/CRC. Press, Boca Raton) (2008).
- [16] C.R.J. Clapham, Graphs self-complementary in  $K_n - e$ , *Discrete Math.* **81** (1990) 229–235.
- [17] S. Czerwinski, J. Grytczuk, Z. Wiktor, Lucky labelings of graphs, *Inf. Process. Lett.* **109** (18) (2009), 1078–1081.
- [18] E. Duchêne, H. Kheddouci, R.J. Nowakowski et M.A. Tahraoui, Labeled packing of graphs, *Australasian Journal of Combinatorics* **57** (2013), 109–126.
- [19] E. Duchêne, H. Kheddouci, M. A. Tahraoui et M. Woźniak, Labeled embedding of  $(n, n - 2)$ -graphs in their complements, soumis.
- [20] K.J. Edwards, The harmonious chromatic number and the achromatic number, *Surveys in Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge (1997), 13–47.
- [21] L. Esperet, S. Gravier, M. Montassier, Pascal Ochem et A. Parreau, Locally identifying coloring of graphs, *Electronic Journal of Combinatorics* **19**(2) (2012).
- [22] R. J. Faudree, C. C. Rousseau, R. H. Schelp, et S. Schuster, Embedding graphs in their complements, *Czechoslovak Math. J.* **31** (106) (1981), 53–62.
- [23] E. Flandrin, A. Marczyk, J. Przybylo, J.F. Saclé et M. Woźniak, Neighbor Sum Distinguishing Index, *Graphs and Combinatorics* **29**(5) (2013), 1329–1336.
- [24] O. Frank, F. Harary et M. Plantholt, The line-distinguishing chromatic number of a graph, *Ars Combin.* **14** (1982), 241–252.
- [25] S.W. Golomb, How to Number a Graph, *Graph Theory and Computing* (Ed. R. C. Read), New York : Academic Press (1972), 23–37.
- [26] A. Görlich, M. Pilsniak, M. Woźniak, On cyclically embeddable  $(n, n)$ -graphs, *Discuss. Math. Graph Theory* **23** (2003), 85–104.
- [27] A. Görlich, A. Zak, A Note on Packing Graphs Without Cycles of Length up to Five, *Electr. J. Comb.* **16**(1), 2009.
- [28] R.L. Graham et N. Sloane, On Additive Bases and Harmonious Graphs, *SIAM J. Algebraic Discrete Math.* **1** (1980), 382–404.
- [29] E. Gyori, M. Hornak, C. Palmer et Mariusz Woźniak, General neighbour-distinguishing index of a graph, *Discrete Mathematics* **308** (5-6) (2008), 827–831.

- [30] F. Harary et M. Plantholt, The point-distinguishing chromatic index, *Graphs and Applications*, Wiley, New York (1985), 147–162.
- [31] S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi et P.J. Slater, A note on packing two trees into  $K_n$ , *Ars Combin.* **11** (1981) 149–153.
- [32] S.M. Hegde, Set colorings of graphs, *European Journal of Combinatorics* **30**(4) (2009), 986–995.
- [33] J. Hopcroft et M.S. Krishnamoorthy, On the harmonious colorings of graphs, *SIAM J. Discrete Math.* **4** (1983), 306–311.
- [34] M. Karonski, T. Luczak et A. Thomason, *Edge weights and vertex colours*, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **91** (2004), 151–157.
- [35] H. Kaul, A. Kostochka, Extremal graphs for a graph packing theorem of Sauer and Spencer, *Combin. Probab. Comput.* **16** (3) (2007), 409–416.
- [36] H. Kaul, A. Kostochka, et G. Yu, On a graph packing conjecture by Bollobás, Eldridge and Catlin, *Combinatorica* **28** (2008), 469–485.
- [37] T. Li, C. Qu, G. Wang et X. Yu, Neighbor product distinguishing total colorings, preprint.
- [38] H. Kheddouci, J. F. Saclé et M. Woźniak, Packing two copies of a tree into its fourth power, *Discrete Math.* **213** (1-3) (2000), 169–178.
- [39] S-P. Lo, On edge-graceful labelings of graphs, *Congressus Numerantium* **50** (1985), 231–241.
- [40] A. Rosa, On certain valuations of the vertices of a graph, *Theory of Graphs*, New York, Gordon and Breach (1967), 349–355.
- [41] S. Schuster, Fixed-point-free embeddings of graphs in their complements, *Internat. J. Math. Math. Sci.* **1** (1978), 335–338.
- [42] N. Sauer et J. Spencer, Edge disjoint placement of graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **25** (1978), 295–302.
- [43] R. Scheidweiler et E. Triesch, New estimates for the gap chromatic number, *Discrete Math.* **328** (2014), 42–53.
- [44] J. Skowronek-Kaziów, 1 – 2 conjecture, the multiplicative version, *Information Processing Letters* **107** (3-4) (2008), 93–95.
- [45] M.A. Tahraoui, E. Duchêne et H. Kheddouci, Labeled 2-packings of trees, *Discrete Math.* **338** (5-6) (2015), 816–824.
- [46] M.A. Tahraoui, E. Duchêne et H. Kheddouci, Gap vertex distinguishing edge colorings of graphs, *Discrete Math.* **312** (20) (2012), 3011–3025.
- [47] S.K. Teo et H.P. Yap, Packing two graphs of order  $n$  having total size at most  $(2n - 2)$ , *Graphs and Combinatorics* **6** (2), 1990, 197–205.
- [48] M. Woźniak, Embedding graphs of small size, *Discrete Appl. Math.* **51** (1994), 233–241.

- [49] M. Woźniak, A note on embedding graphs without short cycles, *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai* **60** (1991), 727–732.
- [50] M. Woźniak, Packing three trees, *Discrete Math.* **150** (1996), 393–402.
- [51] M. Woźniak, On cyclically embeddable  $(n, n-1)$  graphs, *Discrete Math.* **251** (2002), 173–179.
- [52] M. Woźniak, Packing of graphs and permutations—a survey, *Discrete Math.* **276** (1-3) (2004), 379–391.
- [53] M. Woźniak et A.P. Wojda, Triple placement of graphs, *Graphs Combin.* **9** (1993), 85–91.
- [54] H. P. Yap, Packing of graphs—a survey, *Discrete Mathematics* **72** (1988) 395–404.
- [55] A. Žak, A note on  $k$ -placeable graphs, *Discrete Math.* **311** (22) (2011), 2634–2636.
- [56] Z. Zhang, L. Liu, et J. Wang, Adjacent strong edge coloring of graphs, *Appl. Math. Lett.* **15**(5) (2002), 623–626.



# Conclusion

Le contenu de ce mémoire représente un pourcentage très élevé des travaux que j'ai pu mener depuis l'obtention de ma thèse. Certains résultats n'y ont pas été mentionnés, car ils représentent à mes yeux des îlots un peu plus isolés de mon activité. Je me dois toutefois de mentionner les travaux que j'ai pu mener en collaboration avec mon doctorant, A. Fabbri, et ses co-encadrants de thèse. Nous avons considéré les jeux combinatoires sous un angle beaucoup plus algorithmique. Plus précisément, nous avons cherché à produire de nouvelles approches pour améliorer l'algorithme existant de Monte Carlo Tree Search. Celles-ci ont pu être appliquées au jeu de Go et au jeu du Solitaire Clobber.

En ce qui concerne ma recherche future, une part belle sera consacrée aux thèmes développés dans ce rapport, ainsi qu'à certains des problèmes ouverts mentionnés. Pour être concret, plusieurs problèmes sont actuellement en cours d'étude, avec plusieurs membres de l'ANR GAG :

- Les jeux octaux sur les graphes.
- Les jeux de coloration maker/breaker.
- De nouveaux jeux de suppression sur les tas.
- Un survey sur le jeu de WYTHOFF et ses variantes.



# Index

- étiquetage diamètre distinguant, 82
- Amazons, 46
- arbre de jeu, 3
- Arc-Kayles, 48
- Beatty, séquence de, 28
- Clobber, 46
- Col, 48
- coloration
  - harmonieuse, 86
  - irrégulière, 80
- coloration distinguante, 76
- Cutthroat, 48
- Dawson's chess, 38
- Domineering, 46
- Edge NimG, 39
- ensemble
  - définissable, 23
- Erosion, 12
- fonction de coup, 16, 31
- fonction de Grundy, 10
- Geography, 45
- Hackenbush, 48
- invariance
  - ensemble, 20
  - règles, 16
- issue, 4
- jeu combinatoire, 2
  - impartial, 6
  - misere, 2
  - octal, 19
  - partisan, 6
  - suppression de tas, 14
- jeu de coloration
  - à distance 2, 54
  - en ligne, 54
  - faible, 53
  - orientée, 52
  - propre, 49
- jeu de Nim, 7, 39
- Kayles, 38
- Konane, 46
- Mark, 16
- mot
  - de Fibonacci, 25
  - morphique, 26
  - sturmien, 30
- nimber, 10
- Node-Kayles, 39, 49
- nombre chromatique ludique, 56
- noyau de graphe, 8
- numération de Fibonacci, 22
- options de jeu, 3
- Partisan EndNim, 3
- Pisot
  - nombre, 21
  - numération, 22
- placement de graphe, 65
  - étiqueté, 70
  - cyclique, 69
- Presburger, logique de, 22
- Rat, 12

- set coloring, 88
- Snort, 48
- somme de jeux, 8
- Sprouts, 48
- strong edge coloring, 78
- strong set coloring, 92
- Subgraph removal game, 47
  
- Vector Subtraction Game, 15
- Vertex NimG
  - MR, 41
  - RM, 41
  - RM2, 41
  
- Wythoff, 13, 28
- Wytmoich, 13



# Résumé

On considère généralement que la théorie des graphes est née au XVIII<sup>e</sup> siècle, et qu'elle connaît un essor significatif depuis les années 1960. L'avènement de la théorie des jeux combinatoires est quant à lui plus récent (fin des années 1970). Ce domaine reste alors moins exploré dans la littérature, et de nombreuses études sur des techniques générales de résolution sont toujours actuellement en cours de construction. Dans ce mémoire, je propose plusieurs tours d'horizons à propos de problématiques bien ciblées de ces deux domaines. Dans un premier temps, je m'interroge sur la complexité des règles de jeux de suppression de tas. Il s'avère que dans la littérature, la complexité d'un jeu est souvent définie comme la complexité algorithmique d'une stratégie gagnante. Cependant, il peut aussi avoir du sens de s'interroger sur la nature des règles de jeu. Un premier pas dans cette direction a été fait avec l'introduction du concept de jeu dit *invariant*. On notera au passage que certains résultats obtenus ont mis en exergue des liens entre combinatoire des mots et stratégie gagnante d'un jeu. Dans un deuxième chapitre, j'aborde les jeux sous l'angle des graphes. Deux aspects sont considérés :

- Un graphe peut être vu comme un support de jeu. Le cas du jeu de NIM et ses variantes sur les graphes y est examiné.
- Certaines problématiques standard de théorie des graphes peuvent être transformées dans une version ludique. C'est d'ailleurs un objet d'étude de plus en plus prisé par la communauté. Nous détaillerons le cas des jeux de coloration sommet.

Enfin, le dernier chapitre se concentre sur deux nouvelles variantes de problématiques issues de la théorie des graphes : le placement de graphes et les colorations distinguantes. J'en profite pour faire un état de l'art des principaux résultats sur ces deux domaines.

Pour chacun des thèmes mentionnés précédemment, ce mémoire est ponctué de pistes de recherche et problèmes ouverts que je considère comme "abordables". Par ailleurs, les preuves des résultats ne sont pas proposées in extenso, mais sont accessibles dans les articles de recherche mentionnés.