



Exposants de Lyapunov et potentiel aléatoire

Thi Thu Hien Le

► To cite this version:

Thi Thu Hien Le. Exposants de Lyapunov et potentiel aléatoire. Probabilités [math.PR]. Université de Bretagne occidentale - Brest, 2015. Français. NNT : 2015BRES0025 . tel-01184344v2

HAL Id: tel-01184344

<https://hal.science/tel-01184344v2>

Submitted on 30 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



université de bretagne
occidentale



THÈSE/ UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

sous le sceau de l'Université européenne de Bretagne

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

Mention : Mathématiques
École Doctorale SICMA

présentée par

LE Thi Thu Hien

Préparée au Laboratoire de

Mathématiques de Bretagne Occidentale
(LMBA/ UMR 6205)

Exposants de Lyapunov et potentiel aléatoire

Thèse soutenue le 2 Juin 2015

devant le jury composé de:

Daniel Boivin

Professeur, Université de Bretagne Occidentale /
directeur de thèse

Yves Derriennic

Professeur émérite, Université de Bretagne
Occidentale / examinateur

Nathanaël Enriquez

Professeur, Université de Paris-Ouest / rapporteur

Olivier Garet

Professeur, Université de Lorraine / examinateur

Yueyun Hu

Professeur, Université Paris 13 / examinateur

Régine Marchand

MCF HDR, Université de Lorraine / rapporteur

Résumé

Exposants de Lyapunov et potentiel aléatoire

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons à "l'exposant de Lyapunov" pour deux modèles en milieu aléatoire : la marche aléatoire en potentiel aléatoire, le mouvement brownien en potentiel poissonnien.

Dans la première partie de la thèse (chapitre II), on étudie une marche aléatoire dans un potentiel aléatoire donné par une famille de variables aléatoires i.i.d. non-négatives. La continuité des exposants de Lyapunov par rapport à la loi du potentiel est démontrée dans le cas transient, c'est-à-dire en dimension $d \geq 3$ ou en dimension 2 pour un potentiel borné inférieurement. On poursuit avec l'étude des exposants critiques : l'exposant de volume ξ et l'exposant de fluctuation χ . On obtient l'une des inégalités suggérée par la conjecture de KPZ sous une condition de courbure de la forme asymptotique. Les exposants de Lyapunov jouent un rôle important dans cette étude.

La deuxième partie de la thèse (chapitre III) est surtout consacrée à l'étude du brownien dans un potentiel aléatoire de longue portée. On débute cependant par un potentiel classique à portée finie. Sznitman (1987-1998) a étudié plusieurs aspects de ce modèle. Un premier résultat de cette partie est la continuité des exposants de Lyapunov par rapport au paramètre du processus de Poisson. On étudie ensuite le modèle proposé par Lacoïn (2012) qui est un modèle avec un potentiel à longue portée. Il a obtenu des estimations des exposants critiques sensiblement différentes de celles de Wüthrich (1998) pour le modèle de Sznitman. Dans cette thèse, on poursuit l'étude du modèle de Lacoïn. On montre l'existence des exposants de Lyapunov, le théorème de la forme limite et une estimation de grandes déviations.

Mots-clés : marche aléatoire ; mouvement brownien ; potentiel aléatoire ; processus de Poisson ; potentiel à longue portée ; exposant de Lyapunov ; exposants critiques ; continuité ; relation de KPZ.

Abstract

Lyapunov exponents and random potential

In this thesis, we are interested in Lyapunov exponent for two models in random media : random walk in random potential, Brownian motion in Poisson potential.

In the first part (chapter II), we study a random walk in a random potential given by a family of i.i.d random non-negative variables. The continuity of Lyapunov exponents with respect to the law of potential is shown in the case transient, that is, in the dimension $d \geq 3$ or in the dimension $d = 2$ for a lower bounded potential. Next, we consider the critical exponents : the exponent of volume ξ and the exponent of fluctuation χ . We give an inequality suggested by the KPZ conjecture under a condition of asymptotic form. Lyapunov exponents play an important role in this work.

The second part (chapter III) is mainly devoted to the study Brownian motion in a long-range random potential. However, we begin with a classical finite-range potential. Sznitman (1987-1998) investigated several aspects of this model. The first result of this part is the continuity of the Lyapunov exponents with respect to the parameter of the Poisson process. Then, we study the model proposed by Lacoïn (2012) which is a long-range potential model. He obtained some estimations of critical exponents that are significantly different from those of Wüthrich (1998) for the model of Sznitman. In this thesis, we pursue the study of Lacoïn model. We show the existence of Lyapunov exponents, the shape limit theorem and an estimation of large deviations.

Keywords : random walk ; Brownian motion ; random potential ; Poisson process ; long-range potential ; Lyapunov exponent ; critical exponents ; continuous ; KPZ relation.

Remerciements

Mes remerciements s'adressent en premier lieu à Daniel Boivin, mon maître de stage de Master 2 à Marseille qui est devenu par la suite mon directeur de thèse. J'ai eu la chance de faire mes premiers pas dans la recherche sous sa direction et je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude pour sa gentillesse, sa patience, sa confiance et tous ses précieux conseils qui ont grandement contribué à l'accomplissement de ma thèse. A ses côtés, j'ai appris les mathématiques ainsi que le français et surtout il a su me guider dans la vie de chercheuse.

J'aimerais très vivement remercier les rapporteurs, Régine Marchand et Nathanaël Enriquez, pour le temps qu'ils ont consacré à lire et à corriger mon travail. J'exprime toute ma reconnaissance pour leurs remarques et leurs commentaires qui ont nettement amélioré la qualité de mon manuscrit. Merci également à Yves Derriennic, Olivier Garet et Yueyun Hu de me faire l'honneur de participer à mon jury.

Cette thèse n'aurait pas été réalisable sans le programme du Master de Mathématiques France-Vietnam qui m'a donné la possibilité d'étudier en France. Je remercie tout particulièrement Duc Thai Do, le responsable de ce programme au Vietnam ainsi que Fabienne Castel et Pierre Mathieu pour, d'une part, leur cours de probabilités très intéressant au Vietnam et, d'autre part, pour m'avoir accueilli à Marseille pour mon Master 2 en 2010-2011.

Je suis vraiment contente d'avoir vécu tous ces merveilleux moments au laboratoire de Mathématiques de Bretagne Occidentale (LMBA). Voici venu le temps de dire un grand MERCI à tous mes collègues extraordinaires que j'aime tant ! Merci Brice Franke, Yves Coudène, Jean-Philippe Nicolas, Renaud Leplaideur, Catherine Rainer, Rainer Buckdahn, Gerd Dethloff pour m'avoir aidé dans ma tâche d'enseignante. Merci Annick Nicole, Marie-Pierre Cabon, Sabine Chanthara pour m'avoir accompagné dans mes tâches administratives. Merci aux membres de l'équipe de probabilités et systèmes dynamiques, notamment Jean-Marc Derrien, Françoise

Pène... pour m'avoir donné des conseils très utiles. Merci ma chère Sandrine pour m'avoir soutenu durant toute cette dernière année assez dure. J'ai toujours éprouvé un grand plaisir à écouter tes histoires sur ta famille et sur l'amour d'une mère. Merci aussi pour tes conseils très pédagogiques, je n'oublierai jamais la fable « la cigale et la fourmi ».

J'apprécie du fond du coeur l'amitié que nous avons construite entre les doctorants du laboratoire. Je pense notamment à Hien Tro, Nathalie, Xuan, Kamel, Elsa, Lara et Inas. Je vous souhaite beaucoup de réussite pour votre thèse, plein de succès et un immense bonheur dans la vie. Je remercie les anciens doctorants Cuong, Ha, Giang, Grèce et en particulier ma chère Marion. Merci à toi, mon amie proche et ma professeur de français particulière. Tu m'as tout de suite fait part des difficultés qu'un étranger peut rencontrer lorsqu'il habite en France. Merci aussi pour m'avoir partagé ton point de vue sur les inégalités homme-femme ainsi que sur la culture et la politique française.

Étudier à l'étranger n'est pas toujours chose aisée. Heureusement, j'ai toujours pu compter sur mon groupe d'amis Vietnamiens de Brest. Nous avons passé presque tous les week-ends ensemble, ils sont comme ma deuxième famille. Tout d'abord, un grand merci à c.Huong qui m'a beaucoup encouragé et m'a donné des conseils utiles dans la vie. Après, je voudrais exprimer mes remerciements sincères à a.Hai, c.Hieu, a.Thang Mit, a.Thang Rau, a.Trung, a.Do, a.Vu, a.Nam, a.Kinh, a.Tuan Anh, a.Tho, a.Khanh, Quang, e.Kien, e.Tan, e.Van, e.Phuong, e.Huy, e.Trinh, e.Minh, e.Quan, e.Duy, e.Duc, e.Nam-Dung.. pour m'avoir aidé tout au long de mes 4 ans à Brest. Ensuite je voudrais remercier mes amis a.Dan, a.Vi, Pham Tuan, Mai, Quoc Tuan, Kien pour m'avoir partagé leur passion de maths.

Mes prochains remerciements vont à ma famille, surtout mes parents, mes beaux-parents, mon grand frère, ma belle-soeur et ma petite nièce Xun pour leur amour inconditionnel et leur foi en moi.

Enfin, je voudrais dire à Nhan qui a toujours été présent et a toujours su trouver le moyen de me remonter le moral quand j'en avais besoin : « Merci mon cher mari pour tout ce que tu as fait pour moi ».

Table des matières

I	Introduction	1
1	Présentation des modèles	2
1.1	Percolation de premier passage	2
1.2	Marche aléatoire en potentiel aléatoire	3
1.2.1	Modèle	3
1.2.2	Exposants de Lyapunov	5
1.2.3	Exposants critiques	6
1.3	Mouvement brownien en potentiel poissonnien	7
1.3.1	Processus de Poisson	7
1.3.2	Théorème de Campbell	9
1.3.3	Mouvement brownien en potentiel poissonnien à portée finie . .	10
1.3.4	Mouvement brownien en potentiel poissonnien à longue portée .	11
2	Quelques outils	12
2.1	Théorèmes ergodiques	12
2.1.1	Système dynamique	12
2.1.2	Un théorème sous-additif ergodique	13
2.1.3	Un théorème de la forme limite	13
2.2	Théorie du potentiel	15
2.2.1	Valeur propre principale de Dirichlet	15
2.2.2	Fonction de Green et inégalités de Harnack	16
3	Les résultats de la thèse	18
3.1	Marche aléatoire en potentiel aléatoire	18

3.1.1	Continuité des exposants de Lyapunov	18
3.1.2	Relation entre des exposants critiques	19
3.2	Mouvement brownien en potentiel poissonnien	21
3.2.1	Continuité des exposants de Lyapunov en potentiel à portée finie	21
3.2.2	Exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à longue portée	21
II	Marche aléatoire simple en potentiel aléatoire	23
1	Continuité des exposants de Lyapunov	23
1.1	Lois conditionnelles des trajectoires et un théorème abstrait de [Cox80]	23
1.2	Continuité des exposants de Lyapunov quenched α	27
1.2.1	$\limsup \alpha_{F_n}(x) \leq \alpha_F(x)$	27
1.2.2	$\liminf \alpha_{F_n}(x) \geq \alpha_F(x)$	29
1.2.3	La démonstration du théorème 3.1 du chapitre I	34
1.3	Continuité des exposants de Lyapunov annealed β	36
1.3.1	Le cas où le potentiel est de moyenne finie	38
1.3.2	La démonstration du théorème 3.2 du chapitre I	42
2	Relation entre les exposants critiques	44
2.1	Exposants critiques. Bornes élémentaires	44
2.2	Inégalité de concentration : démonstration de la proposition 2.6	47
2.3	Démonstration de la proposition 2.5	51
2.4	Fluctuations des exposants de Lyapunov	55
2.5	$\chi_a \geq 2\xi_b - 1$	63
III	Mouvement brownien en potentiel poissonnien	71
1	Continuité des exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à portée finie . .	71
1.1	Propriété de monotonie	72
1.2	Propriété de continuité : la démonstration du théorème 3.6 du chapitre I	73
2	Exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à longue portée	77
2.1	Modèle	78
2.2	Un système ergodique sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	81
2.3	Asymptotiques de Wiener	83
2.4	Existence des exposants de Lyapunov quenched	90
2.5	Théorème de la forme limite	96
2.6	Existence des exposants de Lyapunov annealed	98
2.7	Estimation des grandes déviations	104

Annexe	107
1 Démonstration du théorème abstrait 1.2 du chapitre II	107
Bibliographie	111

Chapitre I

Introduction

Le modèle de Feynman et Kac permet d'interpréter les solutions de l'équation de Schrödinger en termes probabilistes. Elles sont en effet données par une intégrale le long des trajectoires d'un brownien dans un potentiel. Dans cette thèse, nous nous limiterons au cas où le potentiel est non-négatif et aléatoire. En physique statistique, nous pourrions interpréter ces solutions comme des trajectoires dans un milieu absorbant qu'on peut aussi décrire comme constitué de trappes. Comme l'ont remarqué Del Moral et Miclo [[DMM99](#)], nous pouvons aussi en donner une interprétation en termes de modèle de survie d'une population. Ici, nous nous intéresserons en particulier à la probabilité de survie jusqu'au temps d'atteinte d'un endroit donné. Les exposants de Lyapunov donnent une description macroscopique du comportement asymptotique de ces probabilités. Nous en donnerons une application à l'analyse d'événements rares. Le concept "d'exposant de Lyapunov" est connu en physique et en mathématiques. Dans l'analyse d'un système dynamique, l'exposant de Lyapunov permet de quantifier la stabilité ou l'instabilité de ses trajectoires.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons à "l'exposant de Lyapunov" pour trois modèles en milieu aléatoire : la marche aléatoire en potentiel aléatoire (MAPA), le mouvement brownien en potentiel poissonnien à portée finie (MBPPPF) et le mouvement brownien en potentiel poissonnien à longue portée (MBPPLP).

Il est naturel de se demander si les exposants de Lyapunov peuvent être calculés explicitement quand la loi du potentiel est spécifiée. Malheureusement, pour nos trois modèles, nous sommes très loin d'en être capable pour des lois non triviales, non constantes. Dans cette thèse, nous avons obtenu la continuité des exposants de Lyapunov par rapport à la loi du potentiel pour la MAPA (section 1 du chapitre II), et pour le MBPPPF (section 1 du chapitre III). Ces résultats de continuité sont des résultats de robustesse et justifient des simulations par troncature. Nous avons aussi donné des relations entre les exposants critiques pour le modèle MAPA comme une application des exposants de Lyapunov (section 2 du chapitre II). Nous

avons montré l'existence des exposants de Lyapunov et un théorème de la forme limite pour le modèle MBPPLP et nous les utilisons dans une estimation de grandes déviations (section 2 du chapitre III).

Nous commençons par une introduction qui rassemble les pré-requis nécessaires pour donner les preuves de ces résultats.

1 Présentation des modèles

Nous considérons l'espace $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{L})$ où $d \geq 1$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{L}$ sont la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, respectivement. Notons $|\cdot|$ la norme euclidienne, $|\cdot|_\infty$ la norme sup, ℓ_1 la norme dans ℓ_1 et $(e_1, e_2, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

1.1 Percolation de premier passage

La percolation de premier passage (PPP) a été introduite en 1965 par Hammersley et Welsh [HW65] pour modéliser la propagation d'un fluide à travers un matériau poreux. Le matériau est modélisé par un graphe dont les arêtes nécessitent plus ou moins de temps pour être traversées par le fluide. Les premières connaissances de PPP peuvent être trouvées chez Kesten [Kes86]. Jusqu'à maintenant, la PPP est l'objet de très nombreux articles. La PPP partage plusieurs analogies avec nos trois modèles et nous allons utiliser, transformer et adapter ses techniques dans notre travail.

On considère le graphe $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{L}^d)$ dont les sommets sont les points de $\mathbb{Z}^d$ et dont l'ensemble des arêtes est :

$$\mathbb{L}^d := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : |x - y|_1 = 1\}$$

À chaque arête $e \in \mathbb{L}^d$, nous associons un temps aléatoire positif $t(e)$, appelé temps de passage de l'arête, qui représente le temps mis par le fluide pour la traverser. Pour $x, y \in \mathbb{Z}^d$, nous définissons le temps de passage de x à y :

$$T(x, y) := \inf \left\{ \sum_{e \in \pi} t(e), \pi \text{ est un chemin de } x \text{ à } y \right\} \quad (1.1)$$

Le résultat classique suivant, basé sur le théorème ergodique sous-additif, donne l'existence d'une constante de temps,

Théorème 1.1 ([HW65], [CD81a]). *Supposons que $t(e), e \in \mathbb{L}^d$ sont des variable non-négatives indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), avec une fonction de répartition F . Alors, il*

existe une constante finie μ_F telle que $\frac{T(0, ne_1)}{n}$ converge en probabilité vers $\mu(F)$ et

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{T(0, ne_1)}{n} = \mu_F \quad \text{presque sûrement.}$$

De plus, si F a une moyenne finie,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(0, ne_1)}{n} = \mu_F \quad \text{presque sûrement et dans } L^1.$$

Il a été conjecturé très tôt que la constante de temps se comporte de façon continue par rapport à la loi des temps de passage. Quand on considère une suite de lois bornées stochastiquement par une loi commune d'espérance finie, cela a été montré par Cox et Kesten [CK81] en dimension 2 et généralisé à une dimension quelconque par Kesten [Kes86].

Une autre aspect d'intérêt en PPP ainsi que pour de nombreux autres modèles aléatoires (surtout en physique statistique), sont les *exposants critiques* et leurs relations. Récemment, Chatterjee [Cha13] et Auffinger et Damron [AD14] ont montré une relation universelle pour ces exposants en PPP.

Ce sont deux des questions auxquelles on va s'intéresser dans la suite pour des modèles en milieu aléatoire.

1.2 Marche aléatoire en potentiel aléatoire

1.2.1 Modèle

L'étude des marches aléatoires en potentiel aléatoire a son origine en physique statistique. Dans le livre de Del Moral [DM04] par exemple, nous trouverons de nombreuses interprétations de ce modèle. Parmi ces modèles, nous nous intéressons à celui introduit par Zerner [Zer98] où le potentiel est non-négatif et i.i.d. Il a obtenu entre autres un résultat de grandes déviations. C'est un modèle de milieu aléatoire qui partage plusieurs propriétés avec le modèle de percolation de premier passage, les polymères aléatoires en milieu aléatoire, etc.

Définition 1.2. Une marche aléatoire simple $S_n, n \geq 1$ sur $\mathbb{Z}^d$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}^d$ dont la matrice de transition est donnée par

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & \text{si } |x - y| = 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Soit $S_n, n \in \mathbb{N}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$. Notons P_x et E_x la loi de la marche

Chapitre I. Introduction

et l'espérance, respectivement, de la marche aléatoire simple partant de x . Indépendamment de la marche aléatoire, nous nous donnons une famille de variables aléatoires non négatives $V(x, \omega)$, $x \in \mathbb{Z}^d$ que nous appelons les potentiels. Nous supposons que les potentiels sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d) définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Notons $\mathbb{E}$ l'espérance par rapport à $\mathbb{P}$. Pour $y \in \mathbb{Z}^d$, écrivons $H(y)$ pour le temps d'atteinte de y par la marche,

$$H(y) := \inf\{n \geq 0 : S_n = y\}, \quad (1.2)$$

avec la convention que $\inf \emptyset = +\infty$. Pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $\omega \in \Omega$, nous définissons :

$$e(x, y, \omega) := E_x\left(\exp\left(-\sum_{m=0}^{H(y)-1} V(S_m, \omega)\right), H(y) < \infty\right) \quad (e(x, y, \omega) = 1 \text{ si } x = y) \quad (1.3)$$

La quantité $e(x, y, F, \omega)$ peut s'interpréter comme la probabilité que la marche aléatoire partant de x atteigne y avant d'être tuée (voir la section 1.1 du chapitre II). Par la propriété de Markov forte de la marche simple sur $\mathbb{Z}^d$, nous avons, pour tout $x, y, z \in \mathbb{Z}^d$, $\omega \in \Omega$:

$$e(x, y, \omega) \geq e(x, z, \omega) \cdot e(z, y, \omega) \quad (1.4)$$

La démonstration de (1.4) est donnée en détails dans la propriété 1.1 du chapitre 2. Puisque $e(x, y, \omega)$ décroît à une vitesse exponentielle lorsque $|x - y|$ tend vers infini. Il est naturel d'étudier,

$$a(x, y, \omega) := -\ln e(x, y, \omega) \quad (1.5)$$

$$b(x, y) := -\ln \mathbb{E}e(x, y). \quad (1.6)$$

De (1.4), nous avons des inégalités de triangle de a et b :

$$a(x, y, \omega) \leq a(x, z, \omega) + a(z, y, \omega), \quad \text{pour tout } x, y, z \in \mathbb{Z}^d, \omega \in \Omega \quad (1.7)$$

$$b(x, y) \leq b(x, z) + b(z, y), \quad \text{pour tout } x, y, z \in \mathbb{Z}^d, \quad (1.8)$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbb{P}(V(0) < \infty) < 1$, nous avons que pour tous les $x, y \in \mathbb{Z}^d$ $a(x, y, \omega) \in [0, \infty[$ p.s et $b(x, y) \in [0, \infty[$.

1.2.2 Exposants de Lyapunov

Nous dénotons par F la fonction de répartition du potentiel V .

En utilisant le théorème sous-additif ergodique de Kingman [Kin68] (voir aussi le théorème 2.8 dans la section 2.1.2) pour la suite des variables aléatoires $a(nx, mx, \omega)$, $0 \leq n \leq m$, $x \in \mathbb{Z}^d$, Zerner [Zer98] a montré l'existence des exposants de Lyapunov quenched $\alpha(x)$.

Théorème 1.3. [Zer98] *Soit V un potentiel tel que $\mathbb{E}V(0) < \infty$. Soit F sa fonction de répartition. Alors, il existe une norme non aléatoire sur $\mathbb{R}^d$ qui ne dépend que de la loi du potentiel et de la dimension d et qui est notée $\alpha_F(\cdot)$ telle que $\mathbb{P}$ -p.s et dans $L^1(\mathbb{P})$, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} a(0, nx, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[a(0, nx)] = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \mathbb{E}[a(0, nx)] = \alpha_F(x). \quad (1.9)$$

La norme α est appelée l'exposant de Lyapunov quenched. De plus, α est monotone par rapport à la loi du potentiel au sens où si $F_1 \geq F_2$ (c'est à dire $F_1(t) \geq F_2(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$), alors $\alpha_{F_1}(x) \leq \alpha_{F_2}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$. De plus, la norme $\alpha_F(\cdot)$ satisfait, pour tout $x \neq 0$:

$$-\ln \int e^{-t} dF(t) \leq \frac{\alpha_F(x)}{|x|_1} \leq \ln(2d) + \int t dF(t) \quad (1.10)$$

Remarque 1.4. $\alpha_F(\cdot)$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$ qui est construite comme suivante :

Si $x \in \mathbb{Z}^d$, $\alpha_F(x)$ est définie par (1.9).

Si $x \in \mathbb{Q}^d$, $\alpha_F(x) := \frac{1}{N} \alpha_F(\tilde{x})$ où $\tilde{x} \in \mathbb{Z}^d$, $N \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{1}{N} \tilde{x}$.

Si $x \in \mathbb{R}^d$, $\alpha_F(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_F(x_k)$ où $(x_k)_{k \geq 0} \in \mathbb{Q}^d$ tels que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$.

En utilisant l'inégalité de triangle des réels $b(\cdot, \cdot)$, Flury [Flu07] a montré l'existence des exposants de Lyapunov annealed. Dans ce cas là, on n'a pas besoin de la condition de moyenne finie du potentiel.

Théorème 1.5. [Flu07] *Soit V un potentiel tel que $\mathbb{P}(V = \infty) < 1$. Soit F sa fonction de répartition. Alors, il existe une norme non aléatoire sur $\mathbb{R}^d$ qui ne dépend que de la loi du potentiel et de la dimension d et qui est notée $\beta_F(\cdot)$, telle que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} b(0, nx) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} b(0, nx) = \beta_F(x). \quad (1.11)$$

La norme β_F est appelée l'exposant de Lyapunov annealed. β_F est monotone par rapport à la loi du potentiel : si $F_1 \geq F_2$, alors $\beta_{F_1}(x) \leq \beta_{F_2}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$. La norme β_F hérite de

$b(0, x)$ des bornes supérieure et inférieure suivantes, pour tout $x \neq 0$:

$$-\ln \int e^{-t} dF(t) \leq \frac{b(0, x)}{|x|_1} \leq (\ln 2d - \ln \int e^{-t} dF(t)). \quad (1.12)$$

Par l'inégalité de Jensen, $\beta_F \leq \alpha_F$. De plus, il a été montré par Zygouras [Zyg09] que pour $d \geq 3$, pour tout $\lambda > 0$ il existe $\gamma^*(\lambda) > 0$ tel que pour tout $\gamma \in]0, \gamma^*(\lambda)[$: $\alpha_F(\cdot) \equiv \beta_F(\cdot)$ (où F est la fonction de répartition du potentiel $\lambda + \gamma V$). Les théorèmes 1.3 et 1.5 sont analogues à l'existence de la constante de temps de percolation de premier passage. L'analogie entre la percolation de premier passage et la marche aléatoire en potentiel aléatoire a été décrite par Zerner [Zer98]. En outre, il a également prouvé un analogue du théorème de la forme limite de Cox et Durrett [CD81a]. Récemment, Sodin [Sod14] a prouvé deux théorèmes sur les inégalités de concentration pour la marche aléatoire en potentiel aléatoire en utilisant une méthode de Talagrand [Tal95] et de Benjamini, Kalai, et Schramm [BKS03]. Bien que la percolation de premier passage et la marche aléatoire en potentiel aléatoire présentent de nombreuses similarités, les techniques utilisées dans les preuves sont souvent très différentes. En particulier, l'utilisation des géodésiques est spécifique à la percolation de premier passage.

1.2.3 Exposants critiques

Les exposants critiques sont des concepts connus en physiques. Ils ont été étudiés en mathématiques dans de nombreux modèles en milieu aléatoire, e.g, dans la percolation de premier passage (voir [Cha13] de Chatterjee), dans le mouvement brownien en potentiel poissonnien (voir [Wüt98a] de Wüthrich, et [Lac12a] de Lacoïn), dans les polymères dirigés (voir [AD13] de Auffinger et Damron)... Leurs définitions sont toujours analogues mais avec des adaptations aux particularités du modèle considéré. Parmi ceux-ci, pour la MAPA, nous choisissons de travailler avec les définitions de [Cha13] avec quelques modifications nécessaires. Il s'agit des exposants de fluctuations χ et de volume ξ . Pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, le nombre $|x|^\xi$ représente l'ordre de grandeur de la distance moyenne entre les trajectoires de 0 à x de la particule et le segment de droite euclidienne reliant 0 à x alors que $|x|^\chi$ est l'ordre de grandeur de la fluctuation de $a(0, x, \omega)$ par rapport à sa moyenne.

Pour les modèles où le comportement asymptotique est gaussien, χ vaut 1/2. Ici cependant il est conjecturé que $\chi = 2\xi - 1$. On s'attend même à trouver les valeurs $\chi = 1/3$ et $\xi = 2/3$ comme en PPP et comme beaucoup de modèles KPZ. À cause de difficultés techniques, on définit très souvent deux exposants inférieurs et supérieurs pour chacune de ces deux quantités pour la MAPA, notés ξ_a , ξ_b , χ_a , χ_b . Les définitions précises de ces exposants critiques seront

présentées dans la section 2 du chapitre II où nous montrerons la relation $\chi_a \geq 2\xi_b - 1$ pour la MAPA.

1.3 Mouvement brownien en potentiel poissonnien

De nombreuses propriétés du modèle mouvement brownien en potentiel poissonnien (MBPP) ont été obtenues par Sznitman dont plusieurs sont exposées dans son livre de Sznitman [Szn96]. Lacoïn dans [Lac12a] et [Lac12b] ont introduit un modèle du mouvement brownien en potentiel à *longue portée*. Nous nous intéresserons ici à la continuité des exposants de Lyapunov par rapport à l'intensité du processus de Poisson. Pour le modèle présenté par Lacoïn, nous montrerons l'existence des exposants de Lyapunov et on en donnera une application à l'estimation d'événements rares.

1.3.1 Processus de Poisson

Comme l'a remarqué Kingman [Kin93], les processus de Poisson sont des modèles probabilistes pour des phénomènes comme par exemple, clients arrivant devant des guichets de la poste (pour la dimension 1), la position des arbres dans une zone de forêt (pour la dimension 2), les étoiles semblent être réparties sur la surface d'une sphère (pour la dimension 3)...

Soit S sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ et Q une loi de Radon positive à support dans S .

Définition 1.6. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Un processus de Poisson Π de mesure d'intensité Q sur S est une application de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans l'ensemble de tous les sous-ensembles dénombrables de S qu'on notera S^∞ telle que :

- (i) Pour $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ disjoints, les variables aléatoires $N(A_1), N(A_2), \dots, N(A_n)$ sont indépendantes et
- (ii) Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $N(A)$ suit une loi de Poisson de paramètre $Q(A)$,
où $N(A) = \#\{\Pi \cap A\}$.

Notons $\mathbb{E}$ l'espérance respectivement à $\mathbb{P}$. En particulier, nous nous intéressons dans le chapitre III de cette thèse au processus de Poisson de la mesure d'intensité Q donnée par

$$Q(A) = \nu \mathcal{L}(A) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

où $\nu > 0$ est une constante, $\mathcal{L}$ est la mesure Lebesgue de $\mathbb{R}^d$. Dans ce cas, $\nu > 0$ est appelée intensité du processus de Poisson Π .

Chapitre I. Introduction

Remarque 1.7. Ici nous avons suivi le point de vue de Kingman [Kin93], mais il est souvent utile d'identifier $\Pi(\omega)$ à la mesure ponctuelle $\sum_i \delta_{\omega_i}$ où δ_x est une masse de Dirac comme dans Neuveu [Nev77]. Alors, nous appelons aussi Π un processus ponctuel de Poisson et $\Pi(\omega)$ un nuage de Poisson.

Remarque 1.8. Puisque nous voudrions montrer la continuité de l'exposant de Lyapunov par rapport à l'intensité de la loi du potentiel, nous travaillerons ici et dans le chapitre 3 avec la définition 1.6 pour que tous les processus de Poisson soient définis dans un même espace de probabilité.

Remarque 1.9. Si nous identifions $\Pi(\omega)$ avec ω et Ω avec S^∞ , nous pouvons considérer un processus de Poisson de mesure d'intensité Q dans S comme un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que :

$$\Omega = \{\omega := (\omega_i)_{i \geq 0}, \omega_i \in S\},$$

la tribu $\mathcal{F}$ est engendrée par les ensembles de la forme :

$$C_{B,k} = \{\omega \in \Omega : \text{card}(\omega \cap B) = k\}$$

où $B \in \mathcal{B}(S)$ et $k \geq 0$ est un entier. La probabilité $\mathbb{P}$ est donnée par :

$$\mathbb{P}(C_{B,k}) = \frac{Q(B)^k}{k!} \exp(-Q(B))$$

et pour $B_1, B_2, \dots, B_s \in \mathcal{B}(S)$ disjoints :

$$\mathbb{P}(C_{B_1,k_1} \cap \dots \cap C_{B_s,k_s}) = \prod_{i=1}^s \mathbb{P}(C_{B_i,k_i})$$

Le théorème de superposition des processus ponctuels de Poisson indépendants ci-dessous a un rôle important dans notre démonstration de la continuité de l'exposant de Lyapunov :

Théorème 1.10. Soit $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ une collection dénombrable de processus ponctuels de Poisson indépendants sur $\mathbb{R}^d$ et supposons que Π_n est d'intensité $\nu_n > 0$. Alors, leur superposition

$$\Pi = \cup_{n=1}^{\infty} \Pi_n$$

est un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n$.

1.3.2 Théorème de Campbell

Supposons que f est une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. Notons V une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donné par une somme de la forme :

$$V(\omega) := \sum_{x \in \Pi(\omega)} f(x) \quad (1.13)$$

Le théorème de Campbell énoncé ci-dessous dans [Kin93] de Kingman nous donne une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de cette somme et l'expression de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire V .

Théorème 1.11 (Théorème de Campbell). *Soit Π un processus ponctuel de Poisson de la mesure ponctuelle Q de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans $\mathbb{R}^d$. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors, la somme dans (1.13) est absolument convergente avec probabilité 1 si et seulement si :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \min(|f(x)|, 1) dQ(x) < \infty. \quad (1.14)$$

Si cette condition est vérifiée, alors :

$$\mathbb{E}(\exp(\theta V)) = \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d} (\exp(\theta f(x)) - 1) dQ(x) \right) \quad (1.15)$$

pour tous les nombres complexes θ pour lesquels l'intégrale de droite converge. De plus :

$$\mathbb{E}(V) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dQ(x) \quad (1.16)$$

au sens où l'espérance existe si et seulement si l'intégrale converge, et alors elles sont égales. Si (1.16) converge, alors :

$$\text{Var}(V) = \int_{\mathbb{R}^d} f^2(x) dQ(x) \quad (1.17)$$

est finie ou infinie.

Corollaire 1.12. *Si $f_1, f_2, \dots, f_n$ sont des fonctions mesurables de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant (1.14), alors :*

$$V_j(\omega) := \sum_{x \in \Pi(\omega)} f_j(x) \quad (1.18)$$

converge avec probabilité 1, et pour tous les réels $t_1, \dots, t_n$,

$$\mathbb{E}(\exp(it_1 V_1 + \dots + it_n V_n)) = \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d} (e^{it_1 f_1(x) + \dots + it_n f_n(x)} - 1) dQ(x) \right) \quad (1.19)$$

Si de plus les fonctions f_j satisfont :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_j^2(x) dQ(x) < \infty \quad (1.20)$$

Alors,

$$\text{Cov}(V_j, V_k) = \int_{\mathbb{R}^d} f_j(x) f_k(x) dQ(x) \quad (1.21)$$

1.3.3 Mouvement brownien en potentiel poissonnien à portée finie

Nous noterons $Z = (Z_s)_{s \geq 0}$ un mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}^d, d \geq 2$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, nous notons P_x la mesure de Wiener partant de x et E_x l'espérance respectivement à P_x . Nous considérons dans cette section un modèle où Z se déplace dans un environnement aléatoire qui est construit par des obstacles centrés à des points d'un processus de Poisson Π d'intensité $\nu > 0$. Les obstacles sont formés par une fonction bornée, non négative, mesurable à support compact $W : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$. Notons r_0 le rayon de la plus petite boule contenant ce support,

$$r_0 := \inf\{t > 0 : W = 0 \text{ dans } \bar{B}(0, t)^c\} \quad (1.22)$$

Le potentiel $V : \mathbb{R}^d \times \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ est donné par :

$$V(x, \omega) := V(x) := \sum_{x_i \in \Pi(\omega)} W(x - x_i) = \int_{\mathbb{R}^d} W(x - x') \Pi(\omega)(dx') \quad (1.23)$$

Nous parlerons alors de mouvement brownien en potentiel poissonnien à portée finie. Nous remarquons que si $|x - y|$ est suffisamment grand, $V(x)$ et $V(y)$ sont indépendants. Pour $y \in \mathbb{R}^d$, nous définissons :

$$H(y) := \inf\{s \geq 0 : Z_s \in \bar{B}(y, 1)\} \quad (1.24)$$

où $B(y, 1)$ est la boule ouverte de rayon 1 centrée en y et $\bar{B}(y, 1)$ est son adhérence.

$$e(x, y, \omega) := E_x \left(\exp \left(- \int_0^{H(y)} V(Z_s, \omega) ds \right), H(y) < \infty \right) \quad (1.25)$$

$$a(x, y, \omega) := - \ln e(x, y, \omega) \quad (1.26)$$

Quand on veut mettre l'accent sur l'intensité de processus poissonnien, on écrit $a(x, y, \omega, \nu)$ au lieu de $a(x, y, \omega)$.

[Szn98] a montré l'existence des exposants de Lyapunov pour ce modèle :

Théorème 1.13. *Il existe une norme non aléatoire qui ne dépend que de la fonction W , de l'intensité $\nu > 0$ du processus de Poisson, de la dimension d , $\alpha : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} a(0, kx, \omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \mathbb{E}[a(0, kx)] = \inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k} \mathbb{E}[a(0, kx)] = \alpha(x). \quad (1.27)$$

α est appelé l'exposant de Lyapunov. De plus, pour $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\alpha(x) \leq \sqrt{2(1 + \lambda_d + |W|_\infty \nu \mathcal{L}(\bar{B}(0, r_0 + 2)))} |x| \quad (1.28)$$

où λ_d est valeur propre principale de Dirichlet de $-\frac{1}{2}\Delta$ dans $B(0, 1)$.

Des propriétés de l'exposant de Lyapunov comme le théorème de la forme limite et des estimations de grandes déviations peuvent être trouvées dans le chapitre 5 de [Szn96] de Sznitman. Nous avons aussi des applications des exposants de Lyapunov présentées par Wuthrich dans [Wüt98c], [Wüt98a], [Wüt98b] et par Rueß dans [Rue12]...MBPP partage également un grand nombre de propriétés et techniques avec les modèles PPP, MAPP et polymère dirigé où les références sont très riches.

1.3.4 Mouvement brownien en potentiel poissonnien à longue portée

Ce modèle du mouvement brownien dans un potentiel poissonnien à longue portée (MBP-PLP) a été introduit par Lacoïn dans [Lac12a] et [Lac12b]. Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, nous étudions les trajectoires d'un mouvement brownien $Z = (Z_s)_{s \geq 0}$ dans $\mathbb{R}^d$ jusqu'au temps d'atteinte de la boule unité centrée en y . Le potentiel poissonnien V que nous considérons est construit à partir d'obstacles dont les centres et les rayons sont donnés par un processus de Poisson. Contrairement au cas à portée finie de la section précédente, les rayons ne sont pas identiques mais suivent une loi à queue lourde. En conséquent, le potentiel ainsi construit est fortement corrélé et les estimations des exposants critiques obtenues par Lacoïn sont sensiblement différentes du modèle à potentiel à portée finie. La définition précise du potentiel V ainsi que ses propriétés seront données dans la section 2 du chapitre III où les résultats obtenus pour ce modèle de la thèse seront démontrés en détails.

Dès que le potentiel sera déterminé, nous pouvons définir de même manière que (1.25) et (1.26) les quantités $e(x, y, \omega)$ et $a(x, y, \omega)$.

2 Quelques outils

Notre étude nécessite de connaître quelques outils utiles pour nos trois modèles que nous présentons dans cette section.

2.1 Théorèmes ergodiques

Nous débutons par des concepts de base de théorie ergodique. Pour plus de détails, nous pourrions se référer aux livres [KSF82] de Kornfel'd, Sinai et Fomin ou [KB85] de Krengel et Brunel. Supposons que $(\Omega, \mathcal{F}, \rho)$ est un espace mesuré.

2.1.1 Système dynamique

Définition 2.1. On dit qu'une application $T : (\Omega, \mathcal{F}, \rho) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F}, \rho)$ préserve la mesure ρ si T est mesurable et pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\rho(A) = \rho(T^{-1}(A))$ où $T^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : T(\omega) \in A\}$.

Pour $n > 1$, notons $T^n(\omega) := T(T^{n-1}(\omega))$ et $T^1(\omega) := T(\omega)$.

Définition 2.2. Supposons que $\{T^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est une famille d'applications de Ω dans Ω telle que T^0 soit l'identité et $T^{t+s} = T^t \circ T^s$ pour tous les $t, s \in \mathbb{R}$. On dit que $\{T^t\}$ est un flot si l'application T^t préserve la mesure ρ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et si l'application $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \Omega$ donnée par $\varphi(\omega, t) = T^t(\omega)$ est mesurable.

Définition 2.3. Un système dynamique discret est un quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \rho, T)$ où T préserve la mesure ρ .

Un système dynamique continu est un quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \rho, \{T^t\}_{t \in \mathbb{R}})$ où $\{T^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est un flot.

Définition 2.4. Un système discret $(\Omega, \mathcal{F}, \rho, T)$ est ergodique si pour tout $A \in \mathcal{F}$ tel que $T^{-1}(A) = A$ ρ -presque sûrement, nous avons $\rho(A) = 0$ ou $\rho(A^c) = 0$.

Un système continu $(\Omega, \mathcal{F}, \rho, \{T^t\}_{t \in \mathbb{R}})$ est ergodique si pour tout $A \in \mathcal{F}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $T^t(A) = A$ ρ -presque sûrement, nous avons $\rho(A) = 0$ ou $\rho(A^c) = 0$.

Proposition 2.5. Un système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \rho, T)$ est ergodique si et seulement si pour tout $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \rho)$, telle que $f \circ T = f$, ρ -presque sûrement, nous avons que f est une constante, ρ -presque sûrement.

Définition 2.6. Un système dynamique est mélangeant si pour toutes $f, g \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \rho)$, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(T^n(\omega))g(\omega)d\rho = \int_{\Omega} f(\omega)d\rho \int_{\Omega} g(\omega)d\rho$$

dans le cas discret où T préserve la mesure ;

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_{\Omega} f(T^t(\omega))g(\omega)d\rho = \int_{\Omega} f(\omega)d\rho \int_{\Omega} g(\omega)d\rho$$

dans le cas continu où T est un flot.

Proposition 2.7. *Si un système dynamique discret ou continu est mélangeant, alors il est ergodique.*

2.1.2 Un théorème sous-additif ergodique

En 1968, une importante nouvelle impulsion a été donnée à l'étude des théorèmes ergodiques préservant la mesure des transformations par la preuve de Kingman [Kin68] du théorème ergodique sous-additif, qui a ouvert un nombre impressionnant de nouvelles applications. L'existence des exposants de Lyapunov dans nos trois modèles et de la constante de temps de percolation, etc, sont des corollaires de ce théorème.

Théorème 2.8. [Kingman68] *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \rho, T)$ un système dynamique mesuré où ρ est une mesure finie. Soit $(X_{m,n}, 0 \leq m \leq n)$ une famille de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \rho)$ satisfaisant :*

- (i) $X_{m,n} \circ T = X_{m+1,n+1}$
- (ii) $X_{m,n} \leq X_{m,k} + X_{k,n}$ pour tout $0 \leq m < k < n$
- (iii) $\inf_{n \geq 0} \frac{1}{n} \int_{\Omega} X_{0,n} d\rho > -\infty$
- (iv) $\int_{\Omega} X_{0,1}^+ d\rho < \infty$

Alors, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{0,n}}{n}$ converge presque sûrement et dans $L^1(\Omega, \rho)$ vers une variable aléatoire X qui satisfait $X \circ T = X$, ρ presque partout. De plus, si le système $(\Omega, \mathcal{F}, \rho, T)$ est ergodique, X est une constante.

2.1.3 Un théorème de la forme limite

L'étude de la forme limite dans de nombreux modèles en milieu aléatoire est riche. Pour la constante de temps, Cox et Durrett [CD81b] a donné les conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir un théorème de la forme limite dans le modèle percolation indépendant en dimension $d = 2$ puis Kesten [Kes86] en dimension $d \geq 2$. Boivin [Boi90] a généralisé ce résultat en percolation stationnaire. Pour les exposants de Lyapunov, Sznitman [Szn94] en a aussi prouvé une version dans le cas du mouvement brownien en potentiel poissonnien ; Zerner [Zer98] l'a établi pour la marche aléatoire en potentiel aléatoire pour un potentiel indépendant de moment d'ordre d fini et Mourrat [Mou12] en a donné plusieurs versions sous diverses conditions

Chapitre I. Introduction

d'intégrabilité. Garet et Marchand [GM04] ont donné une condition d'intégrabilité suffisante pour obtenir un théorème de la forme limite pour des temps de passage stationnaire restreint à un amas de percolation sur-critique. Björklund [Bjö10] a généralisé le travail de Boivin [Boi90] dans un contexte très général.

Tout d'abord, nous avons besoin d'un espace de Lorentz. Si f est une fonction à valeurs réelles, mesurable sur un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, la norme Lorentz de f est définie par $\|f\|_{d,1} = \int_0^1 f^*(s) s^{(1/d)-1} ds$ où $f^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$, est la fonction décroissante continue à droite qui a la même loi que $|f|$. $\|f\|_{d,1}$ est bien une norme. Notons,

$$L^{d,1} = \{f : \|f\|_{d,1} < \infty\}$$

l'espace de Lorentz. Nous avons que $L^{d,1}$ est un espace Banach et il y a des constantes positives c et c' telles que :

$$c'\|f\|_{d+\epsilon} \geq \|f\|_{d,1} \geq c\|f\|_d \quad \text{où } \|f\|_p^p = \int_{\Omega} |f|^p d\mathbb{P}$$

Définition 2.9. Une $\mathbb{Z}^d$ -action sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille $\{T_z\}_{z \in \mathbb{Z}^d}$ d'applications de Ω à Ω indexée par $\mathbb{Z}^d$ telle que pour tout $z \in \mathbb{Z}^d$, T_z préserve la probabilité $\mathbb{P}$ et pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^d$, $T_{z_1} \circ T_{z_2} = T_{z_1+z_2}$.

De plus, si pour tout $z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, le système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T_z)$ est ergodique, la famille $\{T_z\}_{z \in \mathbb{Z}^d}$ est appelée une $\mathbb{Z}^d$ -action ergodique sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 2.10. Une semi-métrique aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec une $\mathbb{Z}^d$ -action $\{T_z\}_{z \in \mathbb{Z}^d}$ est une application $\eta : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\eta(\cdot, \cdot, \omega)$ est une semi-métrique $\mathbb{P}$ -presque sûrement et pour tout $x, y, z \in \mathbb{Z}^d, \omega \in \Omega$

$$\eta(x, y, T_z \omega) = \eta(z + x, z + y, \omega) \tag{2.1}$$

et pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^d$, l'application $\omega \mapsto \eta(x, y, \omega)$ est mesurable.

Théorème 2.11. Supposons que η est une semi-métrique aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec une $\mathbb{Z}^d$ -action ergodique $\{T_z\}_{z \in \mathbb{Z}^d}$. Supposons que $\eta(0, x)$ est dans $L^{d,1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$. Alors, il existe une semi-norme L sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\mathbb{P}$ -presque sûrement :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\eta(0, x, \omega) - L(x)}{|x|} = 0 \tag{2.2}$$

2.2 Théorie du potentiel

Nous présentons ici quelques notions de théorie du potentiel essentielles pour étudier des asymptotiques de Wiener (section 2.3 du chapitre 3) et des propriétés de la fonction de Green $g_\lambda(x, y)$ (voir 2.9 pour sa définition) du mouvement brownien en potentiel poissonnien. Pour plus de détails, nous pourrions nous référer au livre [Szn98] de Sznitman.

Rappelons que $Z = (Z_s)_{s \geq 0}$ est un mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ avec la mesure de Wiener P_x partant de x et E_x est l'espérance par rapport à P_x . Si U est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$

$$T_U := \inf\{t \geq 0, Z_t \notin U\} \quad (2.3)$$

2.2.1 Valeur propre principale de Dirichlet

On dit qu'une fonction g mesurable sur $\mathbb{R}^d$ est dans K_d^{loc} si

$$\forall N \geq 1, \lim_{r \downarrow 0} \sup_{|x| \leq N} E_x \left(\int_0^{T_r} |g|(Z_s) ds \right) = 0 \quad (2.4)$$

où $T_r := \inf\{s \geq 0, |Z_s - Z_0| \geq r\}$.

Pour f mesurable sur $\mathbb{R}^d$, $U \neq \emptyset$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$, $V \geq 0$ dans K_d^{loc} , nous définissons,

$$R_t^{U,V} f(x) = E_x[f(Z_t) \exp(-\int_0^t V(Z_s) ds), T_U > t] \quad (2.5)$$

Quand $U = \mathbb{R}^d$, nous écrivons $R_t^V f(x)$ au lieu de $R_t^{\mathbb{R}^d, V} f(x)$. Sznitman [Szn98] a montré que,

Proposition 2.12. *Si $f \in L^p(U)$, $1 \leq p \leq \infty$, si $V \geq 0$, $V \in K_d^{loc}$ nous avons,*

- (i) $R_t^{U,V} |f|(x) < \infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$.
- (ii) pour tout $t > 0$, $\|R_t^{U,V} f\|_p \leq A_p \exp(B_p t) \|f\|_p$ où A_p, B_p sont deux constantes positives qui ne dépendent que de p .

Définition 2.13. Soient $U \neq \emptyset$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $V \geq 0$ dans K_d^{loc} . La valeur propre principale de Dirichlet $\lambda_V(U)$ est définie par

$$\lambda_V(U) := \inf \left\{ \int_U \frac{1}{2} |\nabla f|^2 + V f^2 dx, f \in C_c^\infty(U), \int f^2 dx = 1 \right\} \quad (2.6)$$

Théorème 2.14. Si $U \neq \emptyset$ est un sous-ensemble ouvert et connexe de $\mathbb{R}^d$ et $V \geq 0$ est dans K_d^{loc} , nous avons, pour tout $x \in U$,

$$\lambda_V(U) = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln R_t^{U,V} 1(x) \quad (2.7)$$

Remarque 2.15. Si $U = \mathbb{R}^d$, $V \geq 0$, $V \in K_d^{loc}$, nous avons,

$$\lambda_V(\mathbb{R}^d) = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln E_x[\exp(- \int_0^t V(Z_s) ds)] \quad (2.8)$$

2.2.2 Fonction de Green et inégalités de Harnack

Supposons que $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction non négative. Pour $\lambda \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, on introduit maintenant la fonction de Green par rapport à la fonction $\lambda + V$:

$$g_\lambda(x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} r(s, x, y) ds \quad (2.9)$$

où $t > 0$, $r(t, x, y)$ est donné par :

$$p(t, x, y) = (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) \quad (2.10)$$

$$r(t, x, y) = p(t, x, y) E_{x,y}^t \left[\exp(- \int_0^t V(Z_s) ds) \right] \quad (2.11)$$

Ici $P_{x,y}^t$, $E_{x,y}^t$ est la loi et l'espérance du pont Brownien au temps t . Nous remarquons que pour $d \geq 2$, pour tout $\lambda \geq 0$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$g_\lambda(x, y) \leq g_0(x, y) < \begin{cases} C_1(d) |x-y|^{2-d} & \text{si } d \geq 3 \\ C_2(d) \ln |x-y| & \text{si } d = 2. \end{cases} \quad \mathbb{P} - \text{p.s.} \quad (2.12)$$

où $C_1(d), C_2(d)$ sont deux constantes qui ne dépendent que de d .

Proposition 2.16. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, $V \geq 0$, $V \in K_d^{loc}$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$, $\lambda \geq 0$

$$\begin{aligned} R_t^{\lambda+V} f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\lambda t) r(t, x, y) f(y) dy \\ \int_0^t R_t^{\lambda+V} f(x) dt &= \int_{\mathbb{R}^d} g_\lambda(x, y) f(y) dy \end{aligned} \quad (2.13)$$

Pour la loi de sortie de la sphère par un mouvement brownien, nous avons la formule de Poisson ci-dessous

Proposition 2.17. [Formule de Poisson] Pour $x \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$, notons $T := T_{B(x,R)}$ le temps de sortie de la boule $B(x, R)$. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Nous avons

pour $d \geq 2$, pour tout $x' \in B(x, R)$

$$E_{x'}(f(Z_T)) = \int_{\partial B(x, R)} v_x(x', y) f(y) d\pi(y) \quad (2.14)$$

où $v_x(x', y) = R^{d-2} \frac{R^2 - |x' - x|^2}{|x' - y|^d}$ et π est l'élément d'aire normalisé de la sphère $\partial B(x, R)$. Si $d = 1$, nous avons,

$$v_x(x', x+R) := P_{x'}(Z_T = x+R) = \frac{1}{2R}(x' - x + R) \text{ et } v_x(x', x-R) := P_{x'}(Z_T = x-R) = \frac{1}{2R}(x - x' + R)$$

La densité $v_x(x', y)$ est appelée noyau de Poisson d'une boule de rayon R .

Nous présentons maintenant un lemme qui est montré par Sznitman [Szn98] (voir le lemme 2.3 du chapitre 1) et qui est utile dans la démonstration des inégalités de Harnack.

Lemme 2.18. *Pour tout $x' \in B(x, 2)$, nous avons, $P_{x'}$ -presque sûrement,*

$$E_{x'}[T_{B(x, 2)} \mid Z_{T_{B(x, 2)}}] = h_x(x', Z_{T_{B(x, 2)}}) \quad (2.15)$$

où pour tout $y \in \partial B(x, 2)$,

$$h_x(x', y) = \frac{1}{v_x(x', y)} \int_{B(x, 2)} \int_0^\infty p(s, x', z) P_{x', z}^s(T_{B(x, 2)} > s) v_x(z, y) ds dz \quad (2.16)$$

Pour $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \geq 0$, $V : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction non négative, comme dans (2.16), nous définissons,

$$e_\lambda(x, y) := E_x[\exp(-\int_0^{H(y)} (\lambda + V(Z_s)) ds), H(y) < \infty] \quad (2.17)$$

Théorème 2.19 (Inégalités de Harnack). *Soit $x, y \in \mathbb{R}^d$, $|x - y| > 4$, $\lambda \geq 0$. Si $V \geq 0$, $V \in K_d^{loc}$, alors pour tout $x_1, x_2 \in B(x, 1)$ et $y_1, y_2 \in B(y, 1)$*

$$\frac{1}{A} \leq g_\lambda(x_1, y_1) g_\lambda(x_2, y_2) \leq A; \quad \frac{1}{\tilde{A}} \leq e_\lambda(x_1, y_1) / e_\lambda(x_2, y_2) \leq \tilde{A}$$

où $A = (\frac{\sup v_0}{\inf v_0})^2 \exp[\sup(h_0)(2\lambda + \sup_{\bar{B}(x, 2)} V(\cdot) + \sup_{\bar{B}(y, 2)} V(\cdot))] ; \tilde{A} = \frac{\sup v_0}{\inf v_0} \exp[\sup(h_0)(\lambda + \sup_{\bar{B}(x, 2)} V(\cdot))]$ et $\sup$ et $\inf$ sont pris sur $\bar{B}(0, 1) \times \partial B(0, 2)$.

3 Les résultats de la thèse

3.1 Marche aléatoire en potentiel aléatoire

3.1.1 Continuité des exposants de Lyapunov

De nombreux aspects des exposants de Lyapunov de marches aléatoires et du mouvement brownien dans un potentiel aléatoire ont déjà été considérés. Les premiers résultats sont exposés dans le livre de Sznitman [Szn98]. Kosygina-Mountford-Zerner [KMZ11] se sont intéressés au comportement des exposants de Lyapunov quenched et annealed quand le potentiel tend vers zéro. Ils ont montré que les deux exposants se comportent asymptotiquement de la même façon. Mourrat [Mou12] a donné des conditions optimales pour l'existence des exposants de Lyapunov quenched, et pour des versions appropriées du théorème de la forme limite. Les exposants de Lyapunov nous permettent d'obtenir quelques propriétés de grandes déviations comme l'a observé Sznitman [Szn94].

Nous voulons étudier la continuité des exposants de Lyapunov pour la marche aléatoire par rapport à la loi de potentiel dans le cas de potentiels indépendants. La propriété de continuité des exposants de Lyapunov pour un mouvement brownien en potentiel stationnaire a été considérée par Rueß [Rue12]. Il a donné également un contre-exemple où l'exposant quenched n'est pas continu par rapport à la loi du potentiel. En percolation de premier passage, Cox [Cox80] a montré la continuité de la constante de temps par rapport à la loi de temps de passage. Scholler [Sch14] a aussi étudié cette question pour un modèle de coloration aléatoire qui est un modèle de la percolation de premier passage avec dépendance. La marche aléatoire en potentiel aléatoire partage également de nombreuses similarités avec les polymères en milieu aléatoire bien que dans ce modèle, la moyenne est prise sur des trajectoires de même longueur. Pour les polymères aléatoires, quand le potentiel est donné par un environnement ergodique et par la grandeur des sauts de la marche, Rassoul-Agha et Seppäläinen [[RAS13], le lemme 3.1] a montré la continuité dans L^p ($p > d$) de l'énergie quenched d'un point à l'autre par rapport à la loi du potentiel.

Nous notons $\mathcal{D}$, l'ensemble des fonctions de répartition F qui attribuent la probabilité 1 à l'intervalle $[0, +\infty[$ et telles que $F(0) < 1$. Et $\mathcal{D}_1$ dénote le sous-ensemble de $\mathcal{D}$ qui contient les fonctions de répartition de moyennes finies.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $\xi(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$ une famille de variables aléatoires i.i.d de la loi uniforme sur $(0, 1)$. Soit $V(x) := F^{-1}(\xi(x))$, alors $V(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$ est une famille de variables aléatoires i.i.d de fonction de répartition F . Donc pour une fonction de répartition F , nous pouvons construire un potentiel V qui suit la loi de F . Nous énonçons maintenant nos

résultats principaux.

Théorème 3.1. *Soit $d \geq 3$. Supposons que (F_n) est une suite de fonctions de répartition dans $\mathcal{D}_1$ et qu'il existe une fonction de répartition $G \in \mathcal{D}_1$ telle que $G \leq F_n$ pour tout n . Alors si $F_n \xrightarrow{w} F$, nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{F_n}(x) = \alpha_F(x)$ et la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}^d$.*

Théorème 3.2. *Soit $d \geq 3$. Supposons que (F_n) est une suite de fonctions de répartition dans $\mathcal{D}$ telle que $F_n \xrightarrow{w} F$ où $F \in \mathcal{D}$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{F_n}(x) = \beta_F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}^d$.*

Remarque 3.3. *La condition en terme de G dans le théorème 3.1 assure que les fonctions de répartition ont des moyennes uniformément bornées. Mais l'exposant Lyapunov annealed existe même si $\int tdF(t) = +\infty$. C'est la raison pour laquelle nous n'avons pas besoin de moyennes finies dans Théorème 3.2.*

Remarque 3.4. *La marche aléatoire simple est transiente sur $\mathbb{Z}^d$ si $d \geq 3$. Il s'agit d'une propriété importante dans notre travail. Quand $d = 1$ ou $d = 2$ et le potentiel est borné inférieurement, nous avons aussi la continuité des exposants de Lyapunov (voir la proposition 1.10 du chapitre II). Quand $d = 2$ et $\inf V = 0$, la marche simple est récurrente, nous ne pouvons pas alors appliquer nos arguments (c'est aussi un problème rencontré par Zerner [Zer98] (le commentaire suivant le théorème 11)). Mais la propriété de continuité par rapport à la loi du potentiel des exposants de Lyapunov est probablement vraie.*

3.1.2 Relation entre des exposants critiques

Les définitions précises des exposants $\xi_a, \xi_b, \chi_a, \chi_b$ seront données dans la section 2 du chapitre II.

D'après Kardar, Parisi et Zhang dans [KPZ86], Krug et Spohn dans [KS91], on s'attend à ce que pour plusieurs modèles de physique statistique l'égalité $\chi = 2\xi - 1$ soit vérifiée avec une définition appropriée des exposants critiques χ et ξ . Il y a de nombreux articles mathématiques qui s'intéressent aux propriétés des exposants critiques. Parmi ceux-ci, Wüthrich [Wüt98b], Chatterjee [Cha13], Auffinger et Damron [AD13] ont réussi à montrer cette relation entre χ et ξ sous certaines conditions pour un *mouvement brownien en potentiel poissonnien*, en *percolation de premier passage* et pour les *polymères dirigés en environnement aléatoire*, respectivement. Dans ce chapitre, sous quelques conditions, nous donnons une démonstration de $\chi \geq 2\xi - 1$ pour la MAPA. Nous commençons par formuler deux hypothèses dont nous avons besoin dans notre travail.

Chapitre I. Introduction

Hypothèse (1). $V(x, \omega), x \in \mathbb{Z}^d$ sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d), non constants, non négatifs et bornés supérieurement par $M > 0$:

$$0 \leq V(x, \omega) \leq M \quad (3.1)$$

pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ et pour tout $\omega \in \Omega$. De plus, pour $d = 2$, nous supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $V(x, \omega) \geq \epsilon > 0$ $\mathbb{P}$ ps.

Hypothèse (2).

$$\alpha(e_1 + z) \geq \sqrt{1 + |z|^2} \alpha(e_1) \quad (3.2)$$

pour tout $z \in H_0$, où H_0 est un hyperplan qui passe par l'origine et est perpendiculaire à e_1 .

Cette condition implique que la direction e_1 est une direction de courbure de la sphère unité de α . Nous remarquons que la condition (3.2) est équivalente à :

$$\alpha(e_1) = \min_{x \in \mathbb{R}^d, |x|=1} \alpha(x) \quad (3.3)$$

[Zer98] a donné une expression explicite de $\alpha(x)$ dans le cas d'un potentiel constant. Cette expression permet de vérifier l'hypothèse (2). Au vu du résultat de continuité uniformément en x de α par rapport à la loi du potentiel de Le [Le13], nous pouvons nous attendre à ce qu'elle soit vérifiée pour plusieurs potentiels. De plus, d'après le résultat de Kosygina, Mountford et Zerner dans [KMZ11], toutes les directions seraient des directions de courbure quand le potentiel tend vers 0. Récemment, en PPP, les simulations de Deijfen et Erick Alm [DA14] nous permettent de croire que e_1 est une direction de courbure de la sphère unité de la constante de temps. D'autre part, nous pouvons exprimer cette condition en terme d'un exposant de courbure $\kappa > 0$ comme dans [AD13] de Auffinger et Damron où ils montrent que $\chi = \kappa\xi - (\kappa - 1)$ pour le modèle polymère dirigé en milieu aléatoire.

De plus, $\alpha(x)$ est invariante par permutation des coordonnées : $\alpha(e_1) = \alpha(e_2) = \dots = \alpha(e_d)$, alors si une coordonnée de $\mathbb{Z}^d$ est une direction courbure, c'est vrai aussi pour les autres.

Théorème 3.5. Soit $d \geq 1$. Sous les hypothèses (1) et (2), nous avons :

$$\chi_a \geq 2\xi_b - 1 \quad (3.4)$$

3.2 Mouvement brownien en potentiel poissonnien

3.2.1 Continuité des exposants de Lyapunov en potentiel à portée finie

Pour le modèle du mouvement brownien en potentiel poissonnien à **portée finie**, nous obtenons aussi un résultat de continuité de l'exposant de Lyapunov par rapport à l'intensité du processus poissonnien. Fixons $W : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction bornée, non négative, mesurable avec support compact. Nous avons,

Théorème 3.6 (Propriété de continuité). *Soit $d \geq 3$. Si $(\nu_n)_{n \geq 0}$ est une suite de réels positifs telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \nu > 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{\nu_n}(x) = \alpha_\nu(x)$$

où α_ν est l'exposant de Lyapunov correspondant au processus poissonnien d'intensité ν .

La continuité des exposants de Lyapunov est aussi étudiée dans le cas d'un potentiel stationnaire [Rue14] où il a donné un contre exemple à la continuité par rapport à la loi du potentiel.

3.2.2 Exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à longue portée

Le modèle MBPP à longue portée sera présenté en détails dans la section 2 du chapitre III.

Pour un potentiel poissonnien à longue portée, [Lac12a] et [Lac12b] de Lacoin ont montré la relation entre les exposants critiques. Ici, nous nous intéressons à la validité d'une estimation des grandes déviations. L'existence des exposants de Lyapunov et les théorèmes de la forme limite sont utilisés dans nos arguments. La fonction de corrélation du potentiel V est à décroissance polynomiale.

Théorème 3.7. *[Existence des exposants de Lyapunov quenched] Sous la condition $\gamma + \delta - d > 0$, il existe une norme non-aléatoire $\alpha_\lambda = \alpha_\lambda(\delta, \gamma, d) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} a_\lambda(0, kx, \omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \mathbb{E}[a_\lambda(0, kx)] = \inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k} \mathbb{E}[a_\lambda(0, kx)] = \alpha_\lambda(x). \quad (3.5)$$

α_λ est appelée *exposant de Lyapunov quenched*. Nous pouvons remplacer $a(0, x, \omega)$ par $d(0, x, \omega)$ dans (3.5). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\alpha_\lambda(x) \leq \sqrt{2(\lambda_d + \lambda + 2^d \frac{\mathcal{L}_d \delta}{\delta + \gamma - d})|x|} \quad (3.6)$$

Chapitre I. Introduction

où λ_d représente la valeur propre de Dirichlet principale de $-\frac{1}{2}\Delta$ de $B(0,1)$, $\mathcal{L}_d$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\alpha_{(\cdot)}(x) : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue, concave et croissante en λ .

Théorème 3.8. [Théorème de la forme limite] Sous la condition $\delta + \gamma - d > 0$, pour tout $\lambda \geq 0$, $\mathbb{P}$ presque sûrement :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} |d_\lambda(0, x, \omega) - \alpha_\lambda(x)| = 0. \quad (3.7)$$

Dans (3.7), nous pouvons remplacer $d(0, x, \omega)$ par $a(0, x, \omega)$.

La définition de $b_\lambda(\cdot)$ est donnée dans la section *l'existence de l'exposant de Lyapunov annealed* du chapitre III. Il s'agit une analogue annealed de quantités a .

Théorème 3.9 (Existence des exposants de Lyapunov annealed et théorème de la forme limite). Soit $\gamma + \delta - d > 0$. Il existe une norme $\beta_\lambda = \beta_\lambda(\delta, \gamma, d) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $M > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \frac{1}{|x|} |b_\lambda(x) - \beta_\lambda(x)| = 0 \quad (3.8)$$

De plus, il existe une constante $c_2 > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $c_2|x| \leq \beta_\lambda(x) \leq \alpha_\lambda(x)$

Les définitions de $Q_{t,\omega}$, Q_t , I , J sont données dans la section *estimation des grandes déviations* du chapitre III. Il s'agit de la loi conditionnée par la survie jusqu'au temps t , de son analogue annealed et des fonctions de taux correspondantes.

Théorème 3.10. (i) Si $\delta > \frac{4d}{3}$, il existe un ensemble de $\mathbb{P}$ - mesure pleine telle que pour tout ω dans cet ensemble, pour tout sous-ensemble fermé A de $\mathbb{R}^d$, nous avons

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln Q_{t,\omega}(Z_t \in tA) \leq - \inf_{x \in A} I(x) \quad (3.9)$$

(ii) Si $\delta > d$, pour tout sous-ensemble fermé A de $\mathbb{R}^d$,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln Q_t(Z_t \in tA) \leq - \inf_{x \in A} J(x) \quad (3.10)$$

Chapitre II

Marche aléatoire simple en potentiel aléatoire

Le but de ce chapitre est de donner les démonstrations des résultats qui ont été énoncés dans la section 3.1 du chapitre I.

1 Continuité des exposants de Lyapunov

Nous étudions une marche aléatoire simple en potentiel non-négatif, indépendant et identiquement distribué dans le réseau $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$ qui est présentée à la section 1.2 du chapitre I. Nous prouvons les théorèmes 3.1 et 3.2 du chapitre I de la continuité des exposants de Lyapunov par rapport à la loi du potentiel. Dans le cas quenched, nous supposons que les potentiels sont intégrables alors qu'il n'y a pas de conditions supplémentaires dans le cas annealed.

Le présent chapitre dont un intitulé plus explicite serait *sur la continuité des exposants de Lyapunov de la marche aléatoire en potentiel aléatoire*, reprend le travail de l'article [Le13], qui a été accepté pour la publication pour *Bernoulli Journal*.

1.1 Lois conditionnelles des trajectoires et un théorème abstrait de [Cox80]

Rappelons que S_n , $n \in \mathbb{N}$ est une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ dont la loi et l'espérance partant de x sont notées P_x et E_x , respectivement. $H(y)$, $y \in \mathbb{Z}^d$ est le temps d'atteinte de y pour la première fois par la marche. Les potentiels $V(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$ sont non-négatifs, i.i.d définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et l'espérance est notée $\mathbb{E}$. Notons F la fonction de répartition de V .

D'abord, nous allons présenter les lois conditionnelles quenched et annealed des trajectoires qui jouent un rôle important dans nos arguments.

Pour $\omega \in \Omega$, considérons un processus de Markov avec un état absorbant sur l'espace des

Chapitre II. Marche aléatoire simple en potentiel aléatoire

états $\mathbb{Z}^d \cup \{\Delta\}$ où Δ est un état absorbant dont la matrice de transition est donnée par,

$$p(x, y, \omega) = \begin{cases} \frac{1}{2d} \exp(-V(x, \omega)) & \text{si } |x - y| = 1 \\ 1 - \exp(-V(x, \omega)) & \text{si } x \neq \Delta = y \\ 1 & \text{si } x = y = \Delta \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.1)$$

La loi des trajectoires de cette marche partant de x est notée par $\check{P}_{x,\omega}$. Alors, nous pouvons interpréter $e(x, y, F, \omega)$ comme la probabilité que la marche aléatoire partant de x atteigne y avant d'être tuée :

$$\begin{aligned} e(x, y, F, \omega) &:= E_x \left(\exp \left(- \sum_{m=0}^{H(y)-1} V(S_m, \omega) \right), H(y) < \infty \right) \\ &:= \check{P}_{x,\omega}(H(y) < \infty) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Proposition 1.1 (la sur-multiplicativité de e). *Pour tout $x, y, z \in \mathbb{Z}^d$, $\omega \in \Omega$, nous avons :*

$$e(x, y, \omega) \geq e(x, z, \omega) \cdot e(z, y, \omega) \quad (1.3)$$

Démonstration. D'après la définition de $e(\cdot, \cdot, \omega)$ et la propriété de Markov forte, nous avons pour tout $x, y, z \in \mathbb{Z}^d$, $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} e(x, y, \omega) &= \check{P}_{x,\omega}(H(y) < \infty) \\ &= \check{P}_{x,\omega}(H(z) < H(y) < \infty) + \check{P}_{x,\omega}(H(y) < H(z)) \\ &= \check{P}_{x,\omega}(H(z) < H(y)) \check{P}_{z,\omega}(H(y) < \infty) + \check{P}_{x,\omega}(H(y) < H(z)) \\ &\geq \check{P}_{z,\omega}(H(y) < \infty) [\check{P}_{x,\omega}(H(z) < H(y)) + \check{P}_{x,\omega}(H(y) < H(z))] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Par la définition de la marche tuée (voir (1.1)), on a :

$$1 = \check{P}_{x,\omega}(H(z) < H(y)) + \check{P}_{x,\omega}(H(y) < H(z)) + \check{P}_{x,\omega}(H(y) = H(z) = \infty) \quad (1.5)$$

De (1.4) et (1.5) :

$$\begin{aligned} e(x, y, \omega) &\geq e(z, y, \omega) (1 - \check{P}_{x,\omega}(H(y) = H(z) = \infty)) \\ &\geq e(z, y, \omega) (1 - \check{P}_{x,\omega}(H(z) = \infty)) = e(z, y, \omega) \check{P}_{x,\omega}(H(z) < \infty) = e(z, y, \omega) e(x, z, \omega) \end{aligned}$$

□

Rappelons nous aussi les quantités importantes $a(x, y, \omega) := \ln e(x, y, \omega)$ et $b(x, y, \omega) := \ln \mathbb{E}e(x, y, \omega)$ dans notre modèle. Introduisons maintenant pour $\omega \in \Omega$ et $x, y \in \mathbb{Z}^d$ la loi *quenched* des trajectoires conditionnée à atteindre y :

$$\hat{P}_{x,\omega}^y(\cdot) := \check{P}_{x,\omega}(\cdot \mid H(y) < \infty), \quad (1.6)$$

et la loi *annealed* des trajectoires conditionnée à atteindre y :

$$\hat{\mathbb{P}}_x^y(\cdot) := \check{P}_x(\cdot \mid H(y) < \infty) \text{ où } \check{P}_x(\cdot) = \mathbb{E}\check{P}_{x,\omega}(\cdot). \quad (1.7)$$

Les espérances par rapport à $\hat{P}_{x,\omega}^y$ et à $\hat{\mathbb{P}}_x^y$ sont dénotées par $\hat{E}_{x,\omega}^y$ et $\hat{\mathbb{E}}_x^y$, respectivement. De façon équivalente, pour toute variable aléatoire X nous avons,

$$\hat{E}_{x,\omega}^y(X) = \frac{E_x[X \exp(-\sum_{m=0}^{H(y)-1} V(S_m, \omega)), H(y) < \infty]}{e(x, y, \omega)} \quad (1.8)$$

$$\hat{\mathbb{E}}_x^y(X) = \frac{\mathbb{E}E_x[X \exp(-\sum_{m=0}^{H(y)-1} V(S_m, \omega)), H(y) < \infty]}{\mathbb{E}e(x, y, \omega)} \quad (1.9)$$

Et nous allons écrire $e(x, y, F, \omega)$, $a(x, y, F, \omega)$, $b(x, y, \omega, F)$, $\hat{P}_{x,\omega}^{y,F}$, $\hat{\mathbb{P}}_x^{y,F}$ quand nous voulons insister sur la loi du potentiel.

À partir du travail de Cox [Cox80], nous donnons un ensemble de conditions suffisantes pour formuler son théorème dans un contexte très général. Sa démonstration ne nécessite que des modifications mineures (voir l'annexe 1). Ce théorème est énoncé dans le théorème 1.2 ci-dessous. Il combine les résultats de la Proposition 4.4, le lemme 4.7 et la preuve du théorème 14 de Cox [Cox80]. Nous rappelons que $\mathcal{D}$ est l'ensemble des fonctions de répartition F qui attribuent la probabilité 1 à l'intervalle $[0, +\infty[$ et telles que $F(0) < 1$. Et $\mathcal{D}_1$ dénote le sous-ensemble de $\mathcal{D}$ qui contient toutes les fonctions de répartition de moyenne finie.

Dans l'application qu'on fera du théorème abstrait aux exposants de Lyapunov, on prendra toujours $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1$ et la constante c de la condition (iii) pourra prendre une valeur arbitraire dans l'intervalle $]0, 1]$. La condition (iv) sera donc trivialement vérifiée puisque $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1$. Mais cette formulation générale permet son utilisation en PPP. $F * G$ dénote la convolution de F et G .

Théorème 1.2 (Un théorème abstrait). *Soit $\mu : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathbb{R}^+, F \mapsto \mu(F)$ une application satisfait,*

- (i) $\mu(F) \leq \mu(G)$ pour toutes $F, G \in \mathcal{D}_1$ telles que $F \geq G$,
- et trois conditions suivantes pour quelques sous-ensembles $\mathcal{D}_2$ de $\mathcal{D}_1$,
- (ii) Pour tout $F \in \mathcal{D}_2$, il existe $c_1(F) > 0$ et $f_1(F) > 0$ telles que :
- (1) $\mu(F * G) \leq \mu(F) + c_1(F)f_1(F) \int tdG(t)$ pour toute $G \in \mathcal{D}_1$,
 - (2) $c_1(F) \leq c_1(G)$ pour toutes $F, G \in \mathcal{D}_2$ telles que $F \geq G$,
 - (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(F_n) = f_1(F)$ pour toutes $F_n \in \mathcal{D}_2$ telles que $F_n \xrightarrow{w} F$.
- (iii) Il existe une constante c positive, telle que pour tout $F \in \mathcal{D}_2$ et pour tout $t_0 > 0$ satisfaisant $F(t_0) < c$, il existe deux constantes $c_2(F)$ et $f_2(t_0, F)$ telles que :
- (1) $|\mu(F^{t_0}) - \mu(F)| \leq c_2(F)f_2(t_0, F)$
 - (2) $c_2(F) \leq c_2(G)$ pour toutes $F, G \in \mathcal{D}_2$ telles que $F \geq G$,
 - (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_2(t_0, F_n) = 0$ pour toutes $F_n \in \mathcal{D}_2$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t_0-) = 0$.
- (iv) Si $F \in \mathcal{D}_2$, alors F^{t_0} , $\hat{F}_{t_0}^\xi$ et F_ξ sont dans $\mathcal{D}_2$ pour tout $t_0 > 0$ et $\xi > 0$ suffisamment petit.

Alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) \geq \mu(F)$ si $F \in \mathcal{D}_2$, $F_n \in \mathcal{D}_2$ et $F_n \xrightarrow{w} F$.

Définition 1.3. Pour $F \in \mathcal{D}$, pour $\xi > 0, t_0 > 0$, définissons,

$$F_\xi(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ F(\xi) & \text{si } 0 \leq t < \xi \\ F(t) & \text{si } \xi \leq t, \end{cases} \quad F^{t_0}(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 \\ F(t) & \text{si } t \geq t_0 \end{cases}$$

$$\text{Et avec } 0 < \xi < t_0, \quad \hat{F}_{t_0}^\xi(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 - \xi \\ F(t_0 + \xi) & \text{si } t_0 - \xi \leq t < t_0 + \xi \\ F(t) & \text{si } t_0 + \xi \leq t, \end{cases}$$

Nous expliquons maintenant en quelques mots l'application de ce théorème en percolation de premier passage. Supposons que $F_n \xrightarrow{w} F, F_n, F \in \mathcal{D}_1$. Le résultat de Cox [Cox80] est la continuité de la constante de temps μ en percolation de premier passage par rapport la loi du temps de passage sur $\mathbb{Z}^2$. Si $F(0) \geq p_c$ où p_c est la *probabilité critique* de percolation, nous avons que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_{F_n} \geq 0 = \mu_F$. Posons $\mathcal{D}_2 = \{F \in \mathcal{D}_1, F(0) < p_c\}$. Alors la constante de temps de percolation sur $\mathbb{Z}^2$ vérifie les conditions du théorème 1.2. En effet, d'après la proposition 4.4, nous avons, pour toutes $F, U \in \mathcal{D}_2, F \leq U, G \in \mathcal{D}_1$,

$$\mu_{F*G} \leq \mu_F + \mu_F \frac{1}{a(U)} \int tdG(t).$$

D'après le lemme 4.7 de [Cox80], pour $F \in \mathcal{D}_2$, $t_0 > 0$ tel que $p := F(t_0) < \frac{1}{r}$, on a

$$|\mu_{F^{t_0}} - \mu_F| \leq \mu_F \frac{\gamma_p^{-1}(1/r)}{1 - \gamma_p^{-1}(1/r)}$$

où r est la *constante de connectivité* sur $\mathbb{Z}^2$ de percolation ($2.6385 < r < 2.6405$ voir [Gri10] de Grimmett) et $\gamma_p(x) = (\frac{p}{x})^x (\frac{1-p}{1-x})^{1-x}$. Remarquons que $\lim_{p \rightarrow 0} \gamma_p^{-1}(x) = 0$ pour $0 < x < 1$. Si $F \in \mathcal{D}_2$ et $F_n \xrightarrow{w} F$, alors $F_n \in \mathcal{D}_2$ pour n suffisamment grand. On en déduit que (ii) et (iii) du théorème 1.2 sont vraies avec $c_1(F) = c_2(F) = \mu(F)$, $f_1(F) = \frac{1}{a(U)}$ où $U \in \mathcal{D}_2$ est choisie telle que $F \leq U$ et $F_n \leq U$ pour n suffisamment grand ; $c = \frac{1}{r}$, $f_2(F) = \frac{\gamma_p^{-1}(1/r)}{1 - \gamma_p^{-1}(1/r)}$. Et la condition (iv) est trivialement vérifiée par suite de la continuité à droite de fonction de répartition. Donc si $F(0) < p_c$, nous avons aussi $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_{F_n} \geq \mu_F$.

Nous allons montrer les théorèmes 3.1 et 3.2 du chapitre I de la continuité des exposants de Lyapunov par rapport à la loi du potentiel dans les sections 1.2 et 1.3, respectivement. Nos arguments se basent sur le théorème 1.2 en utilisant des propriétés des lois conditionnelles des trajectoires.

1.2 Continuité des exposants de Lyapunov quenched α

D'après le théorème 1.3 du chapitre I, quand $\mathbb{E}(V(0)) < \infty$, l'exposant de Lyapunov quenched $\alpha_F(x)$ existe. Il est la limite presque sûre et dans $L^1(\mathbb{P})$ de la suite $\frac{1}{n}a(0, nx, F, \omega)$. Nous montrons ici le théorème 3.1 sur la continuité des exposants de Lyapunov quenched par rapport à la loi du potentiel, i.e, si $F_n, F \in \mathcal{D}_1$, $F_n \xrightarrow{w} F$ et il existe $G \in \mathcal{D}_1$ telle que $F_n \geq G$ pour tout n , alors $\alpha_{F_n} \rightarrow \alpha_F$. Cette démonstration se divise en deux parties. Dans la première étape, on prouve que $\limsup \alpha_{F_n}(x) \leq \alpha_F(x)$ et dans la deuxième étape, on montre que . Cette dernière est la plus difficile.

1.2.1 $\limsup \alpha_{F_n}(x) \leq \alpha_F(x)$

L'inverse d'une fonction de répartition G est défini de la manière habituelle, $G^{-1}(t) = \inf\{u \in \mathbb{R} : G(u) > t\}$, $t \in \mathbb{R}$. Nous aurons besoin du lemme 2.1 suivant de Cox [Cox80].

Lemme 1.4. *Si $(F_n) \in \mathcal{D}$ tels que $F_n \leq F$ et $F_n \xrightarrow{w} F$, alors $F_n^{-1}(t) \rightarrow F^{-1}(t) \forall t \in [0, 1[$.*

La preuve du théorème suivant est analogue à la démonstration du théorème 1.13 de Cox [Cox80].

Proposition 1.5. *Soit $d \geq 1$. Soient $(F_n) \in \mathcal{D}$ telles que $F_n \geq G$ pour tout n et pour une fonction $G \in \mathcal{D}_1$. Si $F_n \xrightarrow{w} F$, alors $\limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_{F_n}(x) \leq \alpha_F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$.*

Chapitre II. Marche aléatoire simple en potentiel aléatoire

Démonstration. Grâce à la propriété de monotonie des exposants de Lyapunov, lorsqu'il s'agit de $F_n \xrightarrow{w} F$, il suffit de considérer deux cas : $F_n \leq F$ pour tout n et $F_n \geq F$ pour tout n . Pour le voir, définissons $\underline{F}_n(t) = \min\{F_n(t), F(t)\}$ et $\overline{F}_n(t) = \max\{F_n(t), F(t)\}$, alors $\underline{F}_n(t) \leq F_n(t) \leq \overline{F}_n(t)$. Donc $\alpha_{\overline{F}_n} \leq \alpha_{F_n} \leq \alpha_{\underline{F}_n}$, $\alpha_{\overline{F}_n} \leq \alpha_F \leq \alpha_{\underline{F}_n}$ et $\underline{F}_n, \overline{F}_n \xrightarrow{w} F$ quand $F_n \xrightarrow{w} F$. Si $F_n \geq F$, $\alpha_{F_n}(x) \leq \alpha_F(x)$ pour tout n , donc $\limsup \alpha_{F_n}(x) \leq \alpha_F(x)$. Pour le reste de la preuve, nous supposons que $F_n \leq F$. Soit $\xi(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$ une famille de variables aléatoires i.i.d de loi uniforme sur $]0, 1[$. Soit $V(x) := F^{-1}(\xi(x))$, $V_n(x) := F_n^{-1}(\xi(x))$ et $W(x) = G^{-1}(\xi(x))$. Alors $V(x), V_n(x)$ et $W(x)$ sont des familles de variables aléatoires i.i.d de fonction de répartition F, F_n, G , respectivement. En outre, par la domination stochastique uniforme de F_n : $F_n \geq G$ pour tout n , $G \in \mathcal{D}_1$, nous avons, pour chaque $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$V(x) \leq V_n(x) \leq W(x) \quad \text{p.s.}$$

et $W(x) \in L^1(\Omega)$ et par le lemme 1.4 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(x) = V(x) \quad \text{p.s.}$$

Pour $x \in \mathbb{Z}^d$ et $k \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$a(0, kx, F, \omega) = -\ln E_0(\exp(-\sum_{m=0}^{H(kx)-1} V(S_m)), H(kx) < \infty).$$

Pour une trajectoire fixée de la marche aléatoire simple, nous avons :

$$\exp(-\sum_{m=0}^{H(kx)-1} V_n(S_m)) \mathbf{1}_{\{H(kx) < \infty\}} \rightarrow \exp(-\sum_{m=0}^{H(kx)-1} V(S_m)) \mathbf{1}_{\{H(kx) < \infty\}},$$

quand $n \rightarrow \infty$. De plus,

$$\exp(-\sum_{m=0}^{H(kx)-1} V_n(S_m)) \mathbf{1}_{\{H(kx) < \infty\}} \leq 1,$$

pour tout n . Par le théorème de convergence dominée : $a(0, kx, F_n, \omega) \rightarrow a(0, kx, F, \omega)$ quand $n \rightarrow \infty$. Avec k et x fixés, on a :

$$a(0, kx, F_n, \omega) \leq a(0, kx, G, \omega),$$

pour tout n puisque $V_n(z) \leq W(z)$ pour tout n et pour tout $z \in \mathbb{Z}^d$. En outre :

$$\mathbb{E}(a(0, kx, G)) < k|x|_1(\ln 2d + \int tdG(t)) < \infty.$$

et encore par le théorème de convergence dominée :

$$\mathbb{E}a(0, kx, F_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}a(0, kx, F) \quad (1.10)$$

Fixons $\epsilon > 0$. Par (1.9), on peut choisir K_ϵ suffisamment grand pour que :

$$0 \leq \frac{\mathbb{E}a(0, K_\epsilon x, F)}{K_\epsilon} - \alpha_F(x) < \epsilon.$$

De (1.10), choisissons N_ϵ tel que pour tout $n \geq N_\epsilon$:

$$0 \leq \frac{\mathbb{E}a(0, K_\epsilon x, F_n)}{K_\epsilon} - \frac{\mathbb{E}a(0, K_\epsilon x, F)}{K_\epsilon} < \epsilon.$$

Nous avons donc pour tout $n \geq N_\epsilon$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha_{F_n}(x) - \alpha_F(x) \text{ (puisque } F_n \leq F) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}a(0, K_\epsilon x, F_n)}{K_\epsilon} - \alpha_F(x) \text{ (puisque } \alpha_{F_n}(x) = \inf_{k \geq 1} \frac{\mathbb{E}a(0, kx, F_n)}{k}) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}a(0, K_\epsilon x, F_n)}{K_\epsilon} - \frac{\mathbb{E}a(0, K_\epsilon x, F)}{K_\epsilon} + \frac{\mathbb{E}a(0, K_\epsilon x, F)}{K_\epsilon} - \alpha_F(x) \\ &\leq \epsilon + \epsilon. \end{aligned}$$

Prenons $\epsilon \rightarrow 0$, nous avons le résultat. □

1.2.2 $\liminf \alpha_{F_n}(x) \geq \alpha_F(x)$

Pour $\liminf \alpha_{F_n}(x) \geq \alpha_F(x)$, nous allons montrer que dans notre modèle, la marche aléatoire en potentiel aléatoire, les trois conditions du théorème 1.2 sont vérifiées avec $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1$ et la constante de (iii) $c = 1$. Cela est fait successivement dans la proposition 1.7 et le corollaire 1.9. La propriété de Markov forte de la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ et les lois conditionnelles des trajectoires sont des outils importants dans nos arguments. Nous allons aussi utiliser la transience de la marche simple symétrique sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$. Tout d'abord, on vérifie la condition (ii) du théorème 1.2 par la proposition ci-dessous dont la démonstration est basée sur l'estimation du facteur $\mathbb{E}\hat{E}_{0,\omega}^{nx,F}(H(nx))$ (voir (1.13) et (1.8)). Pour le faire, nous attachons à chaque trajectoire

Chapitre II. Marche aléatoire simple en potentiel aléatoire

$(S_m)_{m \geq 0}$ partant de 0 un *animal*

$$\mathcal{A}(0, y) = \mathcal{A}(0, y, (S_m)_{m \geq 0}) := \{z \in \mathbb{Z}^d : H(z) < H(y)\}, \quad (1.11)$$

En utilisant la propriété de Markov forte et la transience de la marche simple sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$, nous pouvons borner $\hat{E}_{0,\omega}^{nx,F}(H(nx))$ par $D\hat{E}_{0,\omega}^{nx,F}|\mathcal{A}(0, nx)|$ (voir (1.17)), où D est une constante qui ne dépend que de la dimension d :

$$D(d) := \sum_{k=0}^{+\infty} E_{z'}(\mathbf{1}_{\{S_k=z'\}}) < \infty \quad (1.12)$$

Dans le modèle continu d'un mouvement brownien en potentiel poissonnien, une question similaire est également considérée par [Szn95]. À la fin, pour borner le facteur $\mathbb{E}\hat{E}_{0,\omega}^{nx,F}(\mathcal{A}(nx))$, nous appliquons le lemme 3 de [Zer98] qu'on rappelle ici pour faciliter de suivre :

Lemme 1.6 ([Zer98]). *Supposons que F est de moyenne finie, alors pour tout $y \in \mathbb{Z}^d$:*

$$-\ln\left(\int e^{-t}dF(t)\right)|y|_1 \leq -\ln\left(\int e^{-t}dF(t)\right) \cdot \mathbb{E}\hat{E}_{0,\omega}^{y,F}\mathcal{A}(0, y) \leq \mathbb{E}a(0, y, F) \leq (\ln 2d + \int tdF(t))|y|_1$$

Proposition 1.7. *Soit $d \geq 3$. Pour toute fonction de répartition $F \in \mathcal{D}_1$, il existe $c_1(F) > 0$ et $f_1(F) > 0$ telles que :*

- (1) $\alpha_{F*G}(x) \leq \alpha_F(x) + c_1(F)f_1(F) \int tdG(t)|x|_1$ pour toutes $F, G \in \mathcal{D}_1$ et $x \in \mathbb{Z}^d$,
- (2) $c_1(F) \leq c_1(G)$ pour toutes $F, G \in \mathcal{D}_1$ telles que $F \geq G$,
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(F_n) = f_1(F)$ pour toutes $F_n \in \mathcal{D}_1$, $F_n \xrightarrow{w} F$.

Démonstration. Soient $V(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, des potentiels aléatoires i.i.d dont la fonction de répartition est F ; $W(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, des potentiels aléatoires i.i.d dont la fonction de répartition est G et telles que les deux suites sont indépendantes les unes des autres. Alors, $(V + W)(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$ sont variables aléatoires i.i.d dont la fonction de répartition est $F * G$. Par l'inégalité de Jensen, pour $y \in \mathbb{Z}^d$, $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} a(0, y, F * G, \omega) &= -\ln E_0\left(\exp\left(-\sum_{m=0}^{H(y)-1} V(S_m) - \sum_{m=0}^{H(y)-1} W(S_m)\right), H(y) < \infty\right) \\ &= -\ln \hat{E}_{0,\omega}^{y,F}\left(\exp\left(-\sum_{m=0}^{H(y)-1} W(S_m)\right)\right) + a(0, y, F, \omega) \\ &\leq \hat{E}_{0,\omega}^{y,F}\left(\sum_{m=0}^{H(y)-1} W(S_m)\right) + a(0, y, F, \omega). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Notons que : $\hat{E}_{x,\omega}^{y,F}(X) = \frac{E_x(X \exp(-\sum_{m=0}^{H(y)-1} V(S_m)), H(y) < \infty)}{e(x,y,F,\omega)}$ est définie dans (1.8). Nous utilisons maintenant le théorème de Fubini et l'indépendance de W et V :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \hat{E}_{0,\omega}^{y,F} \left(\sum_{m=0}^{H(y)-1} W(S_m) \right) &= \mathbb{E} \left(E_0 \left(\frac{\sum_{m=0}^{H(y)-1} W(S_m) \exp(-\sum_{m=0}^{H(y)-1} V(S_m)), H(y) < \infty}{e(0,y,F,\omega)} \right) \right) \\ &= E_0 \left(H(y) \mathbb{E}(W(0)) \mathbb{E} \left(\frac{\exp(-\sum_{m=0}^{H(y)-1} V(S_m)), H(y) < \infty}{e(0,y,F,\omega)} \right) \right) \\ &= \int tdG(t) \cdot \mathbb{E} \hat{E}_{0,\omega}^{y,F}(H(y)). \end{aligned} \quad (1.14)$$

En utilisant la propriété Markov forte :

$$\begin{aligned} \hat{E}_{0,\omega}^{y,F}(H(y)) &= \sum_{z' \in \mathbb{Z}^d} \hat{E}_{0,\omega}^{y,F} \left(\sum_{m=0}^{H(y)-1} \mathbf{1}_{\{S_m=z'\}} \right) \\ &= \sum_{z' \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{e(0,y,F,\omega)} E_0 \left(\sum_{m=0}^{H(y)-1} \mathbf{1}_{\{S_m=z'\}} \exp(-\sum_{m=0}^{H(y)-1} V(S_m)), H(y) < \infty \right) \\ &= \sum_{z' \in \mathbb{Z}^d} \left[\frac{1}{e(0,y,F,\omega)} E_0 \left(H(z') < H(y), \exp(-\sum_{m=0}^{H(y)-1} V(S_m)) \right) e(z',y,F,\omega) \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1}{e(z',y,F,\omega)} E_{z'} \left(\sum_{m=0}^{H(y)-1} \mathbf{1}_{\{S_m=z'\}} \exp(-\sum_{m=0}^{H(y)-1} V(S_m)), H(y) < \infty \right) \right] \\ &= \sum_{z' \in \mathbb{Z}^d} \left[\frac{1}{e(0,y,F,\omega)} E_0 \left(H(z') < H(y), \exp(-\sum_{m=0}^{H(y)-1} V(S_m)), H(y) < \infty \right) \right. \\ &\quad \times \left. \hat{E}_{z',\omega}^{y,F} \left(\sum_{m=0}^{H(y)-1} \mathbf{1}_{\{S_m=z'\}} \right) \right] = \sum_{z' \in \mathbb{Z}^d} \hat{P}_{0,\omega}^{y,F}(H(z') < H(y)) \hat{E}_{z',\omega}^{y,F} \left(\sum_{m=0}^{H(y)-1} \mathbf{1}_{\{S_m=z'\}} \right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

En appliquant la propriété de Markov :

$$\begin{aligned} \hat{E}_{z',\omega}^{y,F} \left(\sum_{m=0}^{H(y)-1} \mathbf{1}_{\{S_m=z'\}} \right) &= \frac{1}{e(z',y,F,\omega)} \sum_{k=0}^{+\infty} E_{z'} \left(\mathbf{1}_{\{S_k=z'\}} \exp \left(-\sum_{m=0}^{H(y)-1} V(S_m) \right), k < H(y) < \infty \right) \\ &= \frac{1}{e(z',y,F,\omega)} \sum_{k=0}^{+\infty} E_{z'} \left(\mathbf{1}_{\{S_k=z'\}} \exp \left(-\sum_{m=0}^{k-1} V(S_m) \right), k < H(y) \right) \check{P}_{z',\omega}^F(H(y) < \infty) \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} E_{z'}(\mathbf{1}_{\{S_k=z'\}}) := D(d) < \infty. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Chapitre II. Marche aléatoire simple en potentiel aléatoire

puisque la marche aléatoire simple est transitive sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$. De (1.11), (1.15) et (1.16) :

$$\hat{E}_{0,\omega}^{y,F}(H(y)) \leq D \hat{E}_{0,\omega}^{y,F}(|\mathcal{A}(0,y)|). \quad (1.17)$$

Le lemme 1.6 nous donne :

$$\mathbb{E} \hat{E}_{0,\omega}^{y,F}(|\mathcal{A}(0,y)|) \leq \frac{(\ln 2d + \int t dF(t))}{-\ln \left(\int e^{-t} dF(t) \right)} |y|_1. \quad (1.18)$$

Substituons (1.14) dans (1.13) en remplaçant $y = nx$, $n \geq 1$ et prenons l'espérance :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}(a(0, nx, F * G))}{n} &\leq \frac{\mathbb{E}(a(0, nx, F))}{n} + \int t dG(t) \cdot \frac{\mathbb{E} \hat{E}_{0,\omega}^{nx,F}(H(nx))}{n} \\ &\leq \frac{\mathbb{E}(a(0, nx, F))}{n} + \int t dG(t) \cdot D \frac{(\ln 2d + \int t dF(t))}{-\ln \left(\int e^{-t} dF(t) \right)} |x|_1. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Notons que la dernière inégalité de (1.19) est obtenue en combinant (1.17) et (1.18). Donc, la proposition 1.7 est vraie avec $c_1(F) = D(\ln 2d + \int t dF(t))$; $f_1(F) = \left(-\ln \left(\int e^{-t} dF(t) \right) \right)^{-1}$. $\square$

La proposition ci-dessous nous permettra de vérifier la condition (iii) du théorème 1.2.

Proposition 1.8. *Soit $d \geq 3$. Soit $V(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$ des potentiels aléatoires i.i.d dont la fonction de répartition F est dans $\mathcal{D}_1$. Pour $t_0 > 0$ tels que $p := F(t_0^-) = \mathbb{P}(V(0) < t_0) < 1$, pour tout $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, pour $D(d)$ est donnée par (1.12), nous avons :*

$$\mathbb{E} \hat{E}_{0,\omega}^{y,F} \left(\sum_{m=0}^{H(y)-1} \mathbf{1}_{\{V(S_m) < t_0\}} \right) \leq D(d) \left(\ln 2d + \int t dF(t) \right) \cdot \frac{1}{\ln \frac{1-(1-p)e^{-t_0}}{p}} \cdot |y|_1 \quad (1.20)$$

Démonstration. Nous avons, comme dans (1.15) :

$$\begin{aligned} \hat{E}_{0,\omega}^{y,F} \left(\sum_{m=0}^{H(y)-1} \mathbf{1}_{\{V(S_m) < t_0\}} \right) &= \sum_{z': V(z', \omega) < t_0} \hat{P}_{0,\omega}^{y,F}(H(z') < H(y)) \hat{E}_{z', \omega}^{y,F} \left(\sum_{m=0}^{H(y)-1} \mathbf{1}_{\{S_m = z'\}} \right) \\ &\leq D \hat{E}_{0,\omega}^{y,F} \left(\sum_{z \in \mathcal{A}(0,y)} \mathbf{1}_{\{V(z) < t_0\}} \right). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Posons $c = c(t_0, F) := \ln \frac{1-(1-p)e^{-t_0}}{p}$. Notons que $c > 0$. Nous utilisons l'inégalité de Jensen et

l'indépendance comme suit :

$$\begin{aligned}
 c\mathbb{E}\hat{E}_{0,\omega}^{y,F}\left(\sum_{z\in\mathcal{A}(0,y)}\mathbf{1}_{\{V(z)<t_0\}}\right) &\leq \mathbb{E}\left(\ln \hat{E}_{0,\omega}^{y,F}\left(\exp\left(c\sum_{z\in\mathcal{A}(0,y)}\mathbf{1}_{\{V(z)<t_0\}}\right)\right)\right) \\
 &\leq \mathbb{E}\left(a(0,y,F)\right. \\
 &\quad \left.+\ln E_0\left(\exp\left(c\sum_{z\in\mathcal{A}(0,y)}\mathbf{1}_{\{V(z)<t_0\}}-\sum_{z\in\mathcal{A}(0,y)}V(z)\right), H(y)<\infty\right)\right) \\
 &\leq \mathbb{E}\left(a(0,y,F)\right)+\ln E_0\left(\prod_{z\in\mathcal{A}(0,y)}\mathbb{E}\left(\exp\left(c\mathbf{1}_{\{V(z)<t_0\}}-V(z)\right)\right)\right).
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Notons que dans la deuxième inégalité de (1.22), nous avons utilisé le fait que P_0 p.s, $\sum_{z\in\mathcal{A}(0,y)}V(z)\leq\sum_{m=0}^{H(y)-1}V(S_m)$ pour tout $y\in\mathbb{Z}^d, y\neq 0$. Nous remarquons que pour $z\in\mathbb{Z}^d$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left(\exp\left(c\mathbf{1}_{\{V(z)<t_0\}}-V(z)\right)\right) &\leq \mathbb{E}\left(\exp\left(c\mathbf{1}_{\{V(z)<t_0\}}-t_0\mathbf{1}_{\{V(z)\geq t_0\}}\right)\right) \\
 &= \exp(-t_0)\mathbb{E}\left(\exp\left((c+t_0)\mathbf{1}_{\{V(z)<t_0\}}\right)\right)=1
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

De (1.22) et (1.23) : $c\mathbb{E}\hat{E}_{0,\omega}^{y,F}\left(\sum_{z\in\mathcal{A}(0,y)}\mathbf{1}_{\{V(z)<t_0\}}\right)\leq\mathbb{E}\left(a(0,y,F)\right)$. En le combinant avec (1.21) et le fait que $\mathbb{E}\left(a(0,y,F)\right)\leq\left(\ln 2d+\int_0^{+\infty}tdF(t)\right)|y|_1$ (donné par le lemme 1.6), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\hat{E}_{0,\omega}^{y,F}\left(\sum_{m=0}^{H(y)-1}\mathbf{1}_{\{V(S_m)<t_0\}}\right) &\leq D\mathbb{E}\hat{E}_{0,\omega}^{y,F}\left(\sum_{z\in\mathcal{A}(0,y)}\mathbf{1}_{\{V(z)<t_0\}}\right) \\
 &\leq \frac{D}{c}\mathbb{E}\left(a(0,y,F)\right)\leq \frac{D}{c}\left(\ln 2d+\int_0^{+\infty}tdF(t)\right)|y|_1.
 \end{aligned}$$

□

La condition (iii) du théorème 1.2 est vérifiée par le corollaire de la proposition 1.8 suivant.

Corollaire 1.9. *Soit $d\geq 3$. Pour tout $F\in\mathcal{D}_1$, $x\in\mathbb{Z}^d$, $t_0>0$, il existe $c_2(F)>0$ et $f_2(t_0,F)>0$ tels que :*

- (1) $|\alpha_{F^{t_0}}(x)-\alpha_F(x)|\leq c_2(F)f_2(t_0,F)|x|_1$, où F^{t_0} est donnée par la définition 1.3,
- (2) $c_2(F)\leq c_2(G)$ pour toutes fonctions de répartition $F,G\in\mathcal{D}_1$ telles que $F\geq G$,
- (3) $\lim_{n\rightarrow\infty}f_2(t_0,F_n)=0$ pour $F_n\in\mathcal{D}_1$ telles que $\lim_{n\rightarrow\infty}F_n(t_0^-)=0$.

Démonstration. Soient $\{V(x)\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ des variables aléatoires i.i.d dont la fonction de répartition

Chapitre II. Marche aléatoire simple en potentiel aléatoire

est F . Définissons :

$$W(x) = V(x)\mathbf{1}_{\{V(x) \geq t_0\}} + t_0\mathbf{1}_{\{V(x) < t_0\}}.$$

Alors $\{W(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ sont des variables aléatoires i.i.d dont la fonction de répartition est F^{t_0} . Pour $x \in \mathbb{Z}^d$ et $\omega \in \Omega$, nous avons :

$$\begin{aligned} a(0, nx, F^{t_0}, \omega) &= -\ln \left[\frac{E_0 \left(\exp \left(- \left(\sum_{m=0}^{H(nx)-1} V(S_m) \mathbf{1}_{\{V(S_m) \geq t_0\}} + t_0 \mathbf{1}_{\{V(S_m) < t_0\}} \right) \right), H(nx) < \infty \right)}{e(0, nx, F, \omega)} \right] \\ &\quad + a(0, nx, F, \omega) \\ &\leq -\ln \hat{E}_{0, \omega}^{nx, F} \left(\exp \left(- \sum_{m=0}^{H(nx)-1} t_0 \mathbf{1}_{\{V(S_m) < t_0\}} \right) \right) + a(0, nx, F, \omega) \\ &\leq t_0 \hat{E}_{0, \omega}^{nx, F} \left(\sum_{m=0}^{H(nx)-1} \mathbf{1}_{\{V(S_m) < t_0\}} \right) + a(0, nx, F, \omega). \end{aligned}$$

Prenons l'espérance, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}a(0, nx, F^{t_0}, \omega)}{n} &\leq t_0 \frac{\mathbb{E} \hat{E}_{0, \omega}^{nx, F} \left(\sum_{m=0}^{H(nx)-1} \mathbf{1}_{\{V(S_m) < t_0\}} \right)}{n} + \frac{\mathbb{E}a(0, nx, F)}{n} \\ \alpha_{F^{t_0}}(x) &\leq t_0 |x|_1 D \left(\ln 2d + \int t dF(t) \right) \frac{1}{\ln \frac{1-(1-p)e^{-t_0}}{p}} + \alpha_F(x). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Pour la dernière inégalité ci-dessus, nous avons appliqué la proposition 1.8. Rappelons que $p = F(t_0-)$. Puisque $F^{t_0} \leq F$, par la monotonie de l'exposant de Lyapunov, on a : $\alpha_{F^{t_0}} \geq \alpha_F$. En combinant ceci avec (1.24), nous obtenons que le corollaire 1.9 est vrai avec $c_2(F) = D \left(\ln 2d + \int t dF(t) \right)$ et $f_2(t_0, F) = \frac{t_0}{\ln \frac{1-(1-p)e^{-t_0}}{p}}$. C'est évident que les constantes $c_2(\cdot)$ et $f_2(t_0, \cdot)$ satisfont les conditions 2 et 3 du corollaire 1.9. $\square$

1.2.3 La démonstration du théorème 3.1 du chapitre I

Par la propriété de monotonie des exposants de Lyapunov, la proposition 1.7 et le corollaire 1.9, nous voyons que toutes les conditions du théorème abstrait 1.2 sont satisfaites, nous avons alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_{F_n}(x) \geq \alpha_F(x)$. En la combinant avec $\limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_{F_n}(x) \leq \alpha_F(x)$ donné par la proposition 1.5 nous obtenons que le théorème 3.1 du chapitre 1 est vrai pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$.

Nous allons montrer que la convergence est aussi vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Puisque α est une norme dans $\mathbb{R}^d$, il est évident que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{F_n}(x) = \alpha_F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}^d$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ quelconque, il existe une suite $(x_k)_{k \geq 0}$ telle que $x_k \rightarrow x$ et $\alpha_F(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_F(x_k)$

II.1 Continuité des exposants de Lyapunov

pour tout $F \in \mathcal{D}_1$. Fixons $\epsilon > 0$. Choisissons un k suffisamment grand tel que $|x - x_k|_1 \leq \min\{\frac{\epsilon}{3} \cdot \frac{1}{\ln 2d + \int_0^\infty tdG(t)}, \frac{\epsilon}{3} \cdot \frac{1}{\ln 2d + \int_0^\infty tdF(t)}\}$ où nous rappelons que $G \in \mathcal{D}_1$ et $F_n \geq G$ pour tout n . Choisissons $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $|\alpha_{F_n}(x_k) - \alpha_F(x_k)| \leq \frac{\epsilon}{3}$. Alors, pour tout $n \geq N$, en utilisant la propriété (1.10) du chapitre I de α , nous avons,

$$\begin{aligned} |\alpha_{F_n}(x) - \alpha_F(x)| &\leq |\alpha_{F_n}(x) - \alpha_{F_n}(x_k)| + |\alpha_{F_n}(x_k) - \alpha_F(x_k)| + |\alpha_F(x_k) - \alpha_F(x)| \\ &\leq |x - x_k|_1 (\ln 2d + \int_0^\infty tdF_n(t)) + |\alpha_{F_n}(x_k) - \alpha_F(x_k)| \\ &\quad + |x - x_k|_1 (\ln 2d + \int_0^\infty tdF(t)) \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned} \quad (1.25)$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{F_n}(x) = \alpha_F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Nous allons montrer maintenant que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{F_n}(x) = \alpha_F(x)$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$. Par contradiction, supposons qu'il existe $R > 0$ tel que α_{F_n} ne converge pas uniformément vers α_F sur la boule $B(0, R)$. Alors il existe un $\epsilon > 0$, un $y \in B(0, R)$ et une sous-suite $x_{n_k} \rightarrow y$ tels que pour tout $k > 0$, $|\alpha_{n_k}(x_{n_k}) - \alpha(x_{n_k})| > \epsilon$. De même que (1.25), en utilisant la propriété (1.10) du chapitre I de α , on peut choisir k_i suffisamment grand tel que

$$\begin{aligned} \epsilon &< |\alpha_{F_{n_{k_i}}}(x_{n_{k_i}}) - \alpha_F(x_{n_{k_i}})| < |\alpha_{F_{n_{k_i}}}(x_{n_{k_i}}) - \alpha_{F_{n_{k_i}}}(y)| + |\alpha_{F_{n_{k_i}}}(y) - \alpha_F(y)| + |\alpha_F(y) - \alpha_F(x_{n_{k_i}})| \\ &\leq |x_{n_{k_i}} - y| (\ln 2d + \int_0^\infty tdG(t)) + |\alpha_{F_{n_{k_i}}}(y) - \alpha_F(y)| + |x_{n_{k_i}} - y| (\ln 2d + \int_0^\infty tdF(t)) \\ &\leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \end{aligned} \quad (1.26)$$

une contradiction. $\square$

Dans le cas où la dimension $d = 1$ et $d = 2$, nous avons la continuité des exposants de Lyapunov quenched comme dans la proposition 1.10 au dessous.

Proposition 1.10. (i) *Le théorème 3.1 est aussi vrai quand $d = 1$.*

(ii) *Soit $d = 2$. Soit $\lambda > 0$, $\mathcal{D}_\lambda = \{F \in \mathcal{D}_1, F(\lambda) = 0\}$. Alors, le théorème 3.1 est vrai si nous remplaçons $\mathcal{D}_1$ par $\mathcal{D}_\lambda$.*

Démonstration. (i) La continuité des exposants de Lyapunov d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ en potentiel aléatoire se déduit facilement du travail de Zerner [Zer98]. En effet, d'après la proposition 10 de [Zer98] et la démonstration du théorème 1.5, on a pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_F(m) = \mathbb{E}(a(0, m, F, \omega)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(a(0, m, F_n, \omega)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{F_n}(m).$$

(ii) Dans ce cas là, nous avons $V_n(x), V(x) \geq \lambda$ pour tout $n > 0$, $x \in \mathbb{Z}^d$ où V_n, V sont les

potentiels avec les fonctions de répartition F_n et F , respectivement. Comme (1.16),

$$\begin{aligned} \hat{E}_{z,\omega}^{y,F} \left(\sum_{m=0}^{H(y)-1} \mathbf{1}_{\{S_m=z\}} \right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} E_z \left(\mathbf{1}_{\{S_k=z'\}} \exp \left(- \sum_{m=0}^{k-1} V(S_m) \right), k < H(nx) \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \exp(-k\lambda) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} := D(\lambda) < \infty \end{aligned}$$

Alors, nous pouvons suivre le même argument que dans le cas $d \geq 3$ pour obtenir la continuité des exposants de Lyapunov quenched. □

1.3 Continuité des exposants de Lyapunov annealed β

D'après le théorème 1.5 du chapitre I, quand $\mathbb{P}(V(0) = \infty) < 1$, l'exposant de Lyapunov annealed $\beta_F(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$ existe. Il est la limite de la suite des réels non-négatifs $\frac{1}{n}b(0, nx)$. Nous allons maintenant montrer le théorème 3.2 du chapitre I sur la continuité des exposants de Lyapunov annealed par rapport de la loi du potentiel, i.e, si $F_n, F \in \mathcal{D}$, $F_n \xrightarrow{w} F$, alors $\beta_{F_n} \rightarrow \beta_F$. Nous n'avons pas besoin de condition de moment pour le cas annealed. Comme dans [CK81], la démonstration de théorème 3.2 du chapitre 1 se fait en deux étapes. Tout d'abord, dans la proposition 1.15, nous montrons la continuité de β_F sous les hypothèses du théorème 3.1 et sa preuve est similaire au cas quenched. Après, pour éliminer la condition de moyenne finie, avec $t_0 > 0$ quelconque, dans le théorème 1.16, nous prouvons que $\beta_{F_{t_0}} \rightarrow \beta_F$ quand $t_0 \rightarrow \infty$, où F_{t_0} est la fonction de répartition obtenue en tronquant au-dessous t_0 (voir (1.41) pour la définition de F_{t_0}). La démonstration du théorème 1.16 se résume à une question de la ballisticité de la marche aléatoire sous la mesure annealed des trajectoires. C'est le but de la proposition suivante.

Proposition 1.11. *Soit $d \geq 3$ et F une fonction de répartition dont le potentiel satisfait $\mathbb{P}(V < \infty) > 0$. Alors, il existe une constante $D(d)$ telle que pour tout $y \in \mathbb{Z}^d, y \neq 0$:*

$$\frac{\hat{\mathbb{E}}_0^{y,F}(H(y))}{|y|_1} \leq D(d) \frac{1}{-\ln \int \exp(-t) dF(t)} \left(\ln 2d - \ln \int \exp(-t) dF(t) \right). \quad (1.27)$$

Deux différentes preuves que $\limsup_{|y| \rightarrow \infty} \frac{\hat{\mathbb{E}}_0^{y,F}(H(y))}{|y|_1}$ est finie se trouvent dans [KM12] de Kosygina et Mountford (voir le théorème 1) et [IV12] de Ioffe et Velenik (voir le théorème C). Ici quand $d \geq 3$, nous donnons un argument simple qui fournit une expression explicite de la limite supérieure et qui sera nécessaire à la démonstration du théorème 3.2. Comme dans le

cas quenched, la propriété de Markov forte et le transience de la marche sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$ nous permettent d'obtenir (1.27).

Démonstration. Comme dans (1.15), où D est donnée par (1.16) nous avons :

$$\begin{aligned}
 E_0 \left(H(y) \exp \left(- \sum_{m=0}^{H(y)-1} V(S_m) \right), H(y) < \infty \right) \\
 &= \sum_{z' \in \mathbb{Z}^d} E_0 \left(\sum_{m=0}^{H(y)-1} \mathbf{1}_{\{S_m=z'\}} \exp \left(- \sum_{m=0}^{H(y)-1} V(S_m) \right), H(y) < \infty \right) \\
 &= \sum_{z' \in \mathbb{Z}^d} E_0 \left(H(z') < H(y), \exp \left(- \sum_{m=0}^{H(y)-1} V(S_m) \right), H(y) < \infty \right) \\
 &\quad \times \hat{E}_{z', \omega}^{y, F} \left(\sum_{m=0}^{H(y)-1} \mathbf{1}_{\{S_m=z'\}} \right) \\
 &\leq D \cdot E_0 \left(|\mathcal{A}(0, y)| \exp \left(- \sum_{m=0}^{H(y)-1} V(S_m) \right), H(y) < \infty \right), \tag{1.28}
 \end{aligned}$$

Alors,

$$\hat{\mathbb{E}}_0^{y, F}(H(y)) = \frac{\mathbb{E} E_0 \left(H(y) \exp \left(- \sum_{m=0}^{H(y)-1} V(S_m) \right), H(y) < \infty \right)}{\mathbb{E} e(0, y, F, \omega)} \leq D \hat{\mathbb{E}}_0^{y, F}(|\mathcal{A}(0, y)|). \tag{1.29}$$

Prenons $d_1 := -\ln \int e^{-t} dF(t) = -\ln \mathbb{E}(e^{-V(0)})$. Par l'inégalité de Jensen et l'indépendance des $V(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$\begin{aligned}
 d_1 \hat{\mathbb{E}}_0^{y, F}(|\mathcal{A}(0, y)|) &\leq \ln \hat{\mathbb{E}}_0^{y, F}(\exp(d_1 |\mathcal{A}(0, y)|)) \\
 &\leq b(0, y, F) + \ln \mathbb{E} E_0 \left(\exp \left(d_1 |\mathcal{A}(0, y)| - \sum_{s \in \mathcal{A}(0, y)} V(s) \right), H(y) < \infty \right) \\
 &\leq b(0, y, F) + \ln E_0 \left(\prod_{s \in \mathcal{A}(0, y)} \mathbb{E} \left(\exp(d_1 - V(s)) \right) \right) = b(0, y, F) \tag{1.30}
 \end{aligned}$$

De (1.29), (1.30) et (1.12), pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $y \neq 0$:

$$\frac{\hat{\mathbb{E}}_0^{y, F}(H(y))}{|y|_1} \leq \frac{D b(0, y, F)}{d_1 |y|_1} \leq \frac{D}{-\ln \int \exp(-t) dF(t)} \left(\ln 2d - \ln \int \exp(-t) dF(t) \right) \tag{1.31}$$

□

1.3.1 Le cas où le potentiel est de moyenne finie

Comme dans le cas quenched, pour montrer que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_{F_n} \geq \beta_F$, nous allons appliquer le théorème 1.2. La proposition 1.12 et le corollaire 1.14 permettent de vérifier les conditions (ii) et (iii) du théorème, respectivement.

Proposition 1.12. *Soit $d \geq 3$. Pour tout $F \in \mathcal{D}_1$, il existe $c_1(F) > 0$ et $f_1(F) > 0$ telles que :*

- (1) $\beta_{F*G}(x) \leq \beta_F(x) + c_1(F)f_1(F) \int t dG(t)|x|_1$ pour toutes $F, G \in \mathcal{D}_1$ et $x \in \mathbb{Z}^d$,
- (2) $c_1(F) \leq c_1(G)$ pour toutes $F, G \in \mathcal{D}_1$ telles que $F \geq G$,
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(F_n) = f_1(F)$ pour toutes $F_n \in \mathcal{D}_1$, $F_n \xrightarrow{w} F$.

La démonstration de cette proposition est similaire à celle de la proposition 1.7.

Démonstration. Soient $V(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$ des potentiels aléatoires i.i.d de fonction de répartition F ; $W(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$ des potentiels aléatoires i.i.d de fonction de répartition G telles que les deux suites sont indépendantes. Alors, $(V + W)(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$ sont des variables aléatoires i.i.d de fonction de répartition $F * G$. Nous avons pour $x \in \mathbb{Z}^d$, $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 & b(0, nx, F * G) \\
 &= -\ln \mathbb{E} E_0 \left[\exp \left(- \sum_{m=0}^{H(nx)-1} V(S_m) - \sum_{m=0}^{H(nx)-1} W(S_m) \right), H(nx) < \infty \right] \\
 &= -\ln \hat{\mathbb{E}}_0^{nx} \left(\exp \left(- \sum_{m=0}^{H(nx)-1} W(S_m) \right) \right) + b(0, nx, F) \\
 &\leq \hat{\mathbb{E}}_0^{nx, F} \left(\sum_{m=0}^{H(nx)-1} W(S_m) \right) + b(0, nx, F).
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

Avec la définition de la mesure annealed des trajectoires,

$$\hat{\mathbb{E}}_0^{y, F}(X) = \frac{\mathbb{E} E_0(X \exp(-\sum_{m=0}^{H(y)-1} V(S_m)), H(y) < \infty)}{\mathbb{E}(e(0, y, F, \omega))}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbb{E}}_0^{nx,F} \left(\sum_{m=0}^{H(nx)-1} W(S_m) \right) &= E_0 \left(\mathbb{E} \left(\frac{\sum_{m=0}^{H(nx)-1} W(S_m) \exp(-\sum_{m=0}^{H(nx)-1} V(S_m))}{\mathbb{E} e(x,y,\omega)}, H(nx) < \infty \right) \right) \\
 &= E_0 \left(\mathbb{E} \left(\sum_{m=0}^{H(nx)-1} W(S_m) \right) \mathbb{E} \left(\frac{\exp(-\sum_{m=0}^{H(nx)-1} V(S_m))}{\mathbb{E} e(x,y,\omega)}, H(nx) < \infty \right) \right) \\
 &= E_0 \left(H(nx) \mathbb{E}(W(0)) \mathbb{E} \left(\frac{\exp(-\sum_{m=0}^{H(nx)-1} V(S_m))}{\mathbb{E} e(x,y,\omega)}, H(nx) < \infty \right) \right) \\
 &= \int tdG(t) \cdot \hat{\mathbb{E}}_0^{nx,F}(H(nx)). \tag{1.33}
 \end{aligned}$$

De (1.32), (1.33) :

$$\frac{b(0, nx, F * G)}{n} \leq \frac{b(0, nx, F)}{n} + \frac{\hat{\mathbb{E}}_0^{nx}(H(nx))}{n} \int tdG(t)$$

Prenons $n \rightarrow \infty$ et utilisons la proposition 1.11, nous obtenons :

$$\beta_{F*G}(x) \leq \beta_F(x) + \frac{D|x|_1 \int tdG(t) (\ln 2d - \ln \int \exp(-t) dF(t))}{-\ln \int \exp(-t) dF(t)}$$

Donc, la proposition 1.12 est vraie pour $c_1(F) = D(\ln 2d - \ln \int e^{-t} dF(t))$ et $f_1(F) = \frac{1}{-\ln \left(\int e^{-t} dF(t) \right)}$.

Il est évident que les constantes $c_1(\cdot)$, $f_1(\cdot)$ sont satisfaites les conditions (2) et (3) de la proposition 1.12. $\square$

La proposition suivante a le rôle de la proposition 1.8 du cas quenched. Et la démonstration est similaire.

Proposition 1.13. *Soit $d \geq 3$. Soient $V(x), x \in \mathbb{Z}^d$ des variables aléatoires i.i.d de fonction de répartition $F \in \mathcal{D}_1$. Pour $t_0 > 0$ tel que $p := \mathbb{P}(V(0) < t_0) < 1$, nous avons :*

$$\hat{\mathbb{E}}_0^{y,F} \left(\sum_{m=0}^{H(y)-1} \mathbf{1}_{\{V(S_m) < t_0\}} \right) \leq D(d) \left(\ln 2d - \ln \int_0^{+\infty} e^{-t} dF(t) \right) \cdot \frac{1}{\ln \frac{1-(1-p)e^{-t_0}}{p}} |y|_1 \tag{1.34}$$

où $D(d)$ est une constante qui ne dépend que de d et qui est donnée par (1.12).

Démonstration. En suivant le même argument que dans (1.17) et dans (1.29), nous obtenons,

$$\hat{\mathbb{E}}_0^{y,F} \left(\sum_{m=0}^{H(y)-1} \mathbf{1}_{\{V(S_m) < t_0\}} \right) \leq D \hat{\mathbb{E}}_0^{y,F} \left(\sum_{z \in A_2(0,y)} \mathbf{1}_{\{V(z) < t_0\}} \right) \tag{1.35}$$

Prenons $c = c(t_0, F) := \ln \frac{1-(1-p)e^{-t_0}}{p}$. Notons que $c > 0$. Nous utilisons l'inégalité de Jensen et

l'indépendance :

$$\begin{aligned}
 c\hat{\mathbb{E}}_0^{y,F} \left[\sum_{z \in \mathcal{A}_2(0,y)} \mathbf{1}_{\{V(z) < t_0\}} \right] &\leq \ln \hat{\mathbb{E}}_0^{y,F} \left[\exp \left(c \sum_{z \in \mathcal{A}_2(0,y)} \mathbf{1}_{\{V(z) < t_0\}} \right) \right] \\
 &\leq b(0, y) + \ln \mathbb{E} E_0 \left[\exp \left(c \sum_{z \in \mathcal{A}_2(0,y)} \mathbf{1}_{\{V(z) < t_0\}} - \sum_{z \in \mathcal{A}_2(0,y)} V(z) \right), H(y) < \infty \right] \\
 &= b(0, y) + \ln E_0 \left[\prod_{z \in \mathcal{A}_2(0,y)} \mathbb{E} [\exp(c\mathbf{1}_{\{V(z) < t_0\}} - V(z))] \right]. \tag{1.36}
 \end{aligned}$$

Nous remarquons que :

$$\begin{aligned}
 0 < \mathbb{E} [\exp(c\mathbf{1}_{\{V(z) < t_0\}} - V(z))] &\leq \mathbb{E} [\exp(c\mathbf{1}_{\{V(z) < t_0\}} - t_0\mathbf{1}_{\{V(z) \geq t_0\}})] \\
 &= \exp(-t_0) \mathbb{E} \left[\exp \left((c + t_0)\mathbf{1}_{\{V(z) < t_0\}} \right) \right] = 1. \tag{1.37}
 \end{aligned}$$

De (1.35), (1.36) et (1.37) :

$$\hat{\mathbb{E}}_0^{y,F} \left(\sum_{m=0}^{H(y)-1} \mathbf{1}_{\{V(S_m) < t_0\}} \right) \leq \frac{D}{c} b(0, y) \leq \frac{D}{c} \left(\ln 2d - \ln \int_0^{+\infty} e^{-t} dF(t) \right) |y|_1. \tag{1.38}$$

□

Corollaire 1.14. *Soit $d \geq 3$. Pour tout $F \in \mathcal{D}_1$, $x \in \mathbb{Z}^d$, $t_0 > 0$, il existe $c_2(F) > 0$ et $f_2(t_0, F) > 0$ telles que :*

- (1) $|\beta_{F^{t_0}}(x) - \beta_F(x)| \leq c_2(F) f_2(t_0, F) |x|_1$, où F^{t_0} est donnée par la définition 1.3,
- (2) $c_2(F) \leq c_2(G)$ pour toutes fonctions de répartition $F, G \in \mathcal{D}_1$ telles que $F \geq G$,
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_2(t_0, F_n) = 0$ pour $F_n \in \mathcal{D}_1$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t_0^-) = 0$.

Démonstration. Soient $\{V(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ une famille de variables aléatoires i.i.d de la fonction de répartition F . Définissons :

$$W(x) = V(x) \mathbf{1}_{\{V(x) \geq t_0\}} + t_0 \mathbf{1}_{\{V(x) < t_0\}}.$$

Alors $\{W(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ sont variables aléatoires i.i.d de la fonction de répartition F^{t_0} . Pour $x \in \mathbb{Z}^d$

et $\omega \in \Omega$, nous avons :

$$\begin{aligned}
 b(0, nx, F^{t_0}) &= -\ln \left[\frac{\mathbb{E}E_0[\exp(-(\sum_{m=0}^{H(nx)-1} V(S_m) \mathbf{1}_{\{V(S_m) \geq t_0\}} + t_0 \mathbf{1}_{\{V(S_m) < t_0\}})), H(nx) < \infty)]}{\mathbb{E}E_0[\exp(-\sum_{m=0}^{H(nx)-1} V(S_m)), H(nx) < \infty)]} \right] \\
 &\quad + b(0, nx, F) \\
 &\leq -\ln \hat{\mathbb{E}}_0^{nx, F} \left[\exp\left(-\sum_{m=0}^{H(nx)-1} t_0 \mathbf{1}_{\{V(S_m) < t_0\}}\right) \right] + b(0, nx, F) \\
 &\leq t_0 \hat{\mathbb{E}}_0^{nx, F} \left[\sum_{m=0}^{H(nx)-1} \mathbf{1}_{\{V(S_m) < t_0\}} \right] + b(0, nx, F).
 \end{aligned}$$

En combinant avec la proposition 1.13 :

$$\begin{aligned}
 \frac{b(0, nx, F^{t_0})}{n} &\leq \frac{t_0 \hat{\mathbb{E}}_0^{nx, F} [\sum_{m=0}^{H(nx)-1} \mathbf{1}_{\{V(S_m) < t_0\}}]}{n} + \frac{b(0, nx, F)}{n} \\
 \beta_{F^{t_0}}(x) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{t_0 \hat{\mathbb{E}}_0^{nx, F} \left(\sum_{m=0}^{H(nx)-1} \mathbf{1}_{\{V(S_m) < t_0\}} \right)}{n} + \beta_F(x) \\
 \beta_{F^{t_0}}(x) &\leq t_0 D(d) |x|_1 \left(\ln 2d - \ln \int_0^{+\infty} e^{-t} dF(t) \right) \cdot \frac{1}{\ln \frac{1-(1-p)e^{-t_0}}{p}} + \beta_F(x) \quad (1.39)
 \end{aligned}$$

Nous rappelons que $p = F(t_0-)$. Puisque $F^{t_0} \leq F$, par la monotonie de l'exposant de Lyapunov, nous avons : $\beta_{F^{t_0}} \geq \beta_F$. Alors :

$$|\beta_{F^{t_0}}(x) - \beta_F(x)| \leq c_2(F) f_2(t_0, F) |x|_1,$$

où $c_2(F) = D\left(\ln 2d - \int_0^{+\infty} e^{-t} dF(t)\right)$ et $f_2(t_0, F) = \frac{t_0}{\ln \frac{1-(1-p)e^{-t_0}}{p}}$. Évidemment, $c_2(\cdot)$ et $f_2(t_0, \cdot)$ satisfont les conditions (1) et (2) de ce Corollaire. $\square$

Proposition 1.15. *Soit $d \geq 3$. Supposons que (F_n) est une suite de fonctions de répartition telles que $F_n \in \mathcal{D}_1$, $F_n \xrightarrow{w} F$, $F \in \mathcal{D}_1$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{F_n}(x) = \beta_F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$.*

Démonstration. Avec les mêmes arguments que dans la proposition 1.5, nous pouvons obtenir que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$\text{Si } (F_n) \in \mathcal{D} \text{ et } F_n \xrightarrow{w} F, \text{ alors } \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_{F_n}(x) \leq \beta_F(x) \quad (1.40)$$

Notons que dans ce cas, **les conditions de moyenne finie et de domination stochastique uniforme ne sont pas requises** parce que par la définition $e(x, y, \omega) \leq 1$ $\mathbb{P}$ p.s pour tout

$x, y \in \mathbb{Z}$, alors les réels $b(0, kx, F_n) = -\ln \mathbb{E}(e(0, kx, F_n))$ convergent toujours vers $b(0, kx, F) = -\ln \mathbb{E}(e(0, kx, F))$ pour tout k et x fixés quand $n \rightarrow \infty$.

Pour montrer que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_{F_n}(x) \geq \beta_F(x)$, nous vérifions les trois conditions du théorème 1.2. La condition (i) est la propriété de monotonie de l'exposant de Lyapunov annealed vue au théorème 1.5 du chapitre I. La condition (ii) et la condition (iii) sont vérifiées par la proposition 1.12 et le corollaire 1.14, respectivement. $\square$

1.3.2 La démonstration du théorème 3.2 du chapitre I

Nous éliminons maintenant la condition de moyenne finie dans le cas annealed par le théorème 1.16 au dessous qui s'inspire de l'idée de Smythe et Wierman dans [SW78]. La proposition 1.11 est utile dans la démonstration de ce théorème.

Théorème 1.16. *Soient $d \geq 3$, $F \in \mathcal{D}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$: $\lim_{t_0 \rightarrow \infty} \beta_{t_0 F}(x) = \beta_F(x)$, où ${}^{t_0}F$ est définie par :*

$${}^{t_0}F(t) := \begin{cases} F(t) & \text{si } t < t_0 \\ 1 & \text{si } t \geq t_0, \end{cases} \quad (1.41)$$

Démonstration. Soient $V_1(x)$ et $V_2(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$ deux familles de variables aléatoires i.i.d de fonction de répartition F , indépendantes l'une de l'autre. Alors, $W_{t_0}(x) := \min\{V_1(x); t_0\}$, $x \in \mathbb{Z}^d$ sont variables aléatoires i.i.d de fonction de répartition ${}^{t_0}F$. Pour $t_0 > 0$, $F \in \mathcal{D}$, nous rappelons la définition de la fonction de répartition F_{t_0} (voir aussi la définition 1.3) :

$$F_{t_0}(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ F(t_0) & \text{si } 0 \leq t \leq t_0 \\ F(t) & \text{si } t > t_0 \end{cases} \quad (1.42)$$

Prenons $U_{t_0}(x) = V_2(x)\mathbf{1}_{\{V_2(x) > t_0\}}$. Alors $U_{t_0}(x), x \in \mathbb{Z}^d$ est une famille de variables aléatoires i.i.d de fonction de répartition $F_{t_0}(t)$. $(W_{t_0} + U_{t_0})(x), x \in \mathbb{Z}^d$ sont des variables aléatoires de fonction de répartition ${}^{t_0}F * F_{t_0}$. D'abord, nous avons ${}^{t_0}F \geq F \geq {}^{t_0}F * F_{t_0}$. En effet, ${}^{t_0}F * F_{t_0}(t) = \int_0^t {}^{t_0}F(t-y) dF_{t_0}(y)$. Si $t \leq t_0$, ${}^{t_0}F * F_{t_0}(t) = \int_0^t F(t-y) dF_{t_0}(y) \leq F(t)$. Si $t \geq t_0$, ${}^{t_0}F * F_{t_0}(t) \leq \int_0^t d{}^{t_0}\hat{F}(y) = F(t)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$\beta_{t_0 F}(x) \leq \beta_F(x) \leq \beta_{t_0 F * F_{t_0}}(x). \quad (1.43)$$

Ensuite,

$$b(0, nx, {}^{t_0}F * F_{t_0}) = -\ln \frac{\mathbb{E}E_0\left(\exp(-\sum_{m=0}^{H(nx)-1} W_{t_0}(S_m)) - \sum_{m=0}^{H(nx)-1} U_{t_0}(S_m)), H(nx) < \infty\right)}{\mathbb{E}e(0, nx, \omega, {}^{t_0}F)} + b(0, nx, {}^{t_0}F). \quad (1.44)$$

Comme Flury dans [Flu07], nous définissons pour $z \in \mathbb{Z}^d, n \in \mathbb{N}$ le nombre de visites du sommet z par la marche aléatoire jusqu'au temps n :

$$\ell_z(n) := |\{m \in \mathbb{N}_0 : m < n, S_m = z\}|.$$

Puisque les deux suites $(W_{t_0}(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ et $(U_{t_0}(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ sont indépendantes l'une de l'autre, le premier terme du côté droit de (1.44) vaut :

$$\begin{aligned} & -\ln \frac{E_0\left(\mathbb{E}\left(\exp(-\sum_{m=0}^{H(nx)-1} U_{t_0}(S_m))\right)\mathbb{E}\left(\exp(-\sum_{m=0}^{H(nx)-1} W_{t_0}(S_m))\right), H(nx) < \infty\right)}{\mathbb{E}e(0, nx, \omega, {}^{t_0}F)} \\ &= -\ln \frac{E_0\left(\prod_{z \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}\left(\exp(-\ell_z(H(nx))U_{t_0}(z))\right)\mathbb{E}\left(\exp(-\sum_{m=0}^{H(nx)-1} W_{t_0}(S_m))\right), H(nx) < \infty\right)}{\mathbb{E}e(0, nx, \omega, {}^{t_0}F)} \\ &\leq -\ln \frac{E_0\left(\prod_{z \in \mathbb{Z}^d} \left(\mathbb{E}\exp(-U_{t_0}(z))\right)^{\ell_z(H(nx))} \mathbb{E}\left(\exp(-\sum_{m=0}^{H(nx)-1} W_{t_0}(S_m))\right), H(nx) < \infty\right)}{\mathbb{E}e(0, nx, \omega, {}^{t_0}F)} \\ &= -\ln \hat{\mathbb{E}}_0^{nx, {}^{t_0}F}(\mathbb{E}\exp(-U_{t_0}(0))^{H(nx)}) \leq -\ln \mathbb{E}\exp(-U_{t_0}(0)) \hat{\mathbb{E}}_0^{nx, {}^{t_0}F} H(nx). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Nous remarquons que l'inégalité de Jensen a été utilisée deux fois pour (1.45). De (1.31) :

$$\hat{\mathbb{E}}_0^{nx, {}^{t_0}F}(H(nx)) \leq \frac{D}{-\ln \mathbb{E}\exp(-W_{t_0}(0))} b(0, nx, {}^{t_0}F). \quad (1.46)$$

De (1.44), (1.45) et (1.46), pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$\begin{aligned} \frac{b(0, nx, {}^{t_0}F * F_{t_0})}{n} &\leq -\ln \mathbb{E}\exp(-U_{t_0}(0)) \cdot \frac{D}{-\ln \mathbb{E}\exp(-W_{t_0}(0))} \frac{b(0, nx, {}^{t_0}F)}{n} \\ &\quad + \frac{b(0, nx, {}^{t_0}F)}{n} \\ \beta_{t_0 F * F_{t_0}}(x) &\leq -\ln \mathbb{E}\exp(-U_{t_0}(0)) \cdot \frac{D}{-\ln \mathbb{E}\exp(-W_{t_0}(0))} \beta_{t_0 F}(x) + \beta_{t_0 F}(x) \end{aligned} \quad (1.47)$$

Notons que $\lim_{t_0 \rightarrow \infty} -\ln \mathbb{E}\exp(-U_{t_0}(0)) = 0$ et $\lim_{t_0 \rightarrow \infty} -\ln \mathbb{E}\exp(-W_{t_0}(0)) = -\ln \mathbb{E}\exp(-V_1(0))$

= *const.* De (1.43) et (1.47) :

$$\begin{aligned} \limsup_{t_0 \rightarrow \infty} \beta_{t_0 F}(x) &\leq \beta_F(x) \leq \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \left(-\ln \mathbb{E} \exp(-U_{t_0}(0)) \cdot \frac{D}{-\ln \mathbb{E} \exp(-W_{t_0}(0))} \right) \beta_F(x) + \liminf_{t_0 \rightarrow \infty} \beta_{t_0 F}(x) \\ &\leq \liminf_{t_0 \rightarrow \infty} \beta_{t_0 F}(x). \end{aligned} \quad (1.48)$$

□

La démonstration du théorème 3.2 du chapitre 1.

Fixons $t_0 > 0$ qui est un point de continuité de la fonction de répartition F . Alors, la proposition 1.15 nous donne $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{t_0 F_n} = \beta_{t_0 F}$. De plus $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_{F_n} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_{t_0 F_n} = \beta_{t_0 F}$ puisque $t_0 F_n \geq F_n$ pour tout n . Soit $t_0 \rightarrow \infty$ le long des points de continuité de F , et appliquons le théorème 1.16, $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_{F_n} \geq \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \beta_{t_0 F} = \beta_F$. En la combinant avec $\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_{F_n} \leq \beta_F$ donnée par (1.40) dans la proposition 1.15, nous obtenons que le théorème 3.2 est vrai pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$. Pour le reste, nous suivons le même argument que dans (1.25) et (1.26) □

2 Relation entre les exposants critiques

Nous étudions dans cette section une marche aléatoire simple en potentiel non-négatif, indépendant et identiquement distribué dans le réseau $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$. Nous supposons de plus ici que le potentiel est bornée supérieurement. Nous nous intéressons à la relation entre les exposants critiques de fluctuations χ et les exposants de volume ξ . La littérature physique nous dit qu'ils devraient satisfaire l'égalité $\chi = 2\xi - 1$ dans de nombreux modèles. Dans ce chapitre, nous montrons une version de l'inégalité $\chi \geq 2\xi - 1$ de cette conjecture pour la marche aléatoire en potentiel aléatoire.

2.1 Exposants critiques. Bornes élémentaires

Comme dans de nombreux modèles en environnement aléatoire, nous pouvons définir pour la MAPA des exposants critiques : les exposants critiques de fluctuations χ et les exposants de volume ξ . Rappelons que S_n , $n \in \mathbb{N}$ est une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ dont la loi et l'espérance partant de x sont notées P_x et E_x , respectivement. $H(y)$, $y \in \mathbb{Z}^d$ est le temps d'atteinte de y pour la première fois par la marche. Les potentiels $V(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$ sont non-négatifs, i.i.d définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et l'espérance est notée $\mathbb{E}$. Pour $x, y \in \mathbb{Z}^d$, Notons $L(x, y)$ le segment de droite entre x et y . Pour chaque trajectoire $(S_m)_{m \geq 0}$

partant de x , nous définissons :

$$D(x, y) := D(x, y, (S_m)_{m \geq 0}) := \sup_{0 \leq m \leq H(y)} \inf_{w \in L(x, y)} |S_m - w| \quad (2.1)$$

Comme dans 1.1, nous considérons une chaîne de Markov sur l'espace des états $\mathbb{Z}^d \cup \{\Delta\}$ où Δ est un état absorbant. À chaque étape, la marche saute de x à Δ avec probabilité $1 - e^{-V(x)}$. Sinon, elle se comporte comme une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}^d$. La loi des trajectoires de cette marche partant de x est désignée par $\check{P}_{x, \omega}$. Avec cette notation, nous rappelons que $e(x, y, \omega) = \check{P}_{x, \omega}(H(y) < \infty)$ et $a(x, y, \omega) = -\ln e(x, y, \omega)$ (voir aussi (1.2)). Introduisons maintenant pour $\omega \in \Omega$ et $x, y \in \mathbb{Z}^d$ la loi *quenched* des trajectoires :

$$\hat{P}_{x, \omega}^y(\cdot) := \check{P}_{x, \omega}(\cdot \mid H(y) < \infty), \quad (2.2)$$

Nous écrivons $\hat{E}_{x, \omega}^y$ pour l'espérance par rapport à $\hat{P}_{x, \omega}^y$. L'exposant de volume est le nombre que quantifie l'ampleur de $\hat{E}_{x, \omega}^y(D(x, y))$. Grosso modo, pour $x, y \in \mathbb{Z}^d$, la valeur typique de $\hat{E}(D(x, y))$ est de l'ordre $|x - y|^\xi$. L'exposant de fluctuation χ quantifie l'ordre de fluctuation de $a(x, y, \omega)$. Autrement dit, pour $x, y \in \mathbb{Z}^d$, la valeur typique de $a(x, y, \omega) - \mathbb{E}a(x, y, \omega)$ est de l'ordre $|x - y|^\chi$. Maintenant, nous donnons des définitions précisées des exposants critiques de fluctuations et des exposants de volume analogues à celles récemment proposées par Chatterjee [Cha13].

Définition 2.1. *L'exposant de volume ξ_a est le plus petit réel tel que pour tout $\xi > \xi_a$, il existe $\gamma > 0$ tel que :*

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{\gamma \hat{E}_{0, \omega}^x D(0, x)}{|x|^\xi} \right) \right) < \infty \quad (2.3)$$

Définition 2.2. *L'exposant de volume ξ_b est le plus grand réel tel que pour tout $\xi < \xi_b$:*

$$\inf_{x \in \mathbb{Z}^d, |x| > 2} \mathbb{E} \frac{\hat{E}_{0, \omega}^x D(0, x)}{|x|^\xi} > 0 \quad (2.4)$$

Définition 2.3. *L'exposant critique de fluctuations χ_a est le plus petit réel tel que pour tout $\chi > \chi_a$, il existe $\gamma > 0$ tel que :*

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{\gamma |a(0, x, \omega) - \mathbb{E}a(0, x, \omega)|}{|x|^\chi} \right) \right) < \infty \quad (2.5)$$

Définition 2.4. *L'exposant critique de fluctuations χ_b est le plus grand réel tel que pour tout*

Chapitre II. Marche aléatoire simple en potentiel aléatoire

$\chi < \chi_b$,

$$\inf_{x \in \mathbb{Z}^d, |x| > 2} \frac{\text{Var}(a(0, x, \omega))}{|x|^{2\chi}} > 0 \quad (2.6)$$

Nous rappelons dans ce chapitre que les potentiels vérifient toujours les deux conditions suivantes :

Hypothèse (1). $V(x, \omega), x \in \mathbb{Z}^d$ sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d), non constants, non négatifs et bornés supérieurement par une constante $M > 0$:

$$0 \leq V(x, \omega) \leq M \quad (2.7)$$

pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ et pour tout $\omega \in \Omega$. De plus, pour $d = 2$, nous supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $V(x, \omega) \geq \epsilon > 0$.

Hypothèse (2).

$$\alpha(e_1 + z) \geq \sqrt{1 + |z|^2} \alpha(e_1) \quad (2.8)$$

pour tout $z \in H_0$, où H_0 est un hyperplan qui passe par l'origine et est perpendiculaire à e_1

L'exposant de Lyapunov quenched est utile dans l'étude des exposants critiques. Nous rappelons ici sa définition (voir théorème 1.3 du chapitre I) : puisque V est intégrable,

$$\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} a(0, nx, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(nx) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} h(nx) \text{ p.s et dans } L^1$$

où $h(x) := \mathbb{E}a(0, x, \omega)$. Les définitions des exposants $\xi_a, \xi_b, \chi_a, \chi_b$ sont données par (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), respectivement. Nous avons,

Proposition 2.5. *Sous l'hypothèse (1), $0 \leq \chi_b \leq \chi_a \leq \frac{1}{2}$ et $0 \leq \xi_b \leq \xi_a \leq 1$.*

Comme dans les travaux de Newman et Piza [NP95] et Chatterjee [Cha13], nos études de la relation entre ces exposants critiques se basent naturellement sur l'hypothèse (2) de direction de courbure, sur la validité d'une inégalité de concentration et sur la vitesse de convergence des exposants de Lyapunov pour la MAPA. Les résultats que nous obtenons ci-dessous seront utiles dans la démonstration de l'inégalité $\chi_a \geq 2\xi_b - 1$.

Nous commençons par compléter l'estimation de la variance du lemme 11 de Zerner [Zer98] par une inégalité de concentration. Dans le cas d'un potentiel borné, on retrouve bien une estimation de la variance de l'inégalité de concentration.

Proposition 2.6. *Sous l'hypothèse (1), il existe des constantes positives C_1, C_2, C_3 telles que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d, |x| > C_3$, et pour tout $t > 0$:*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{a(0, x, \omega) - \mathbb{E}a(0, x, \omega)}{\sqrt{|x|}}\right| \geq t\right) \leq C_1 \exp(-C_2 t) \quad (2.9)$$

Proposition 2.7. *Sous l'hypothèse (1), pour tous les $n \geq 2, \chi' > \chi_a, 1 \leq i \leq d$, nous avons :*

$$\alpha(ne_i) \leq \mathbb{E}a(0, ne_i, \omega) \leq n\alpha(e_i) + Cn^{\chi'} \ln |n| \quad (2.10)$$

La vitesse de convergence dans le théorème sous additif est importante et elle a été étudiée dans nombreux articles mathématiques. Pour PPP, Kesten [Kes93], Talagrand [Tal95] donnent des inégalités de concentration. Ensuite, Alexander dans [Ale93] et [Ale97] ont amélioré le résultat de [Kes93] pour obtenir une vitesse de convergence. Cette question est également traitée par Sznitman [Szn96] dans le modèle MBPP et par Lacoïn [Lac12b] dans le modèle longue portée. Pour notre modèle, MAPA, Sodin [Sod14] a aussi montré une inégalité de concentration. Son résultat obtenu est plus fort que la proposition 2.6 mais il fait une hypothèse sur les potentiels plus forte que la nôtre. Plus précisément, [Sod14] a exigé que $V(x)$ soit borné inférieurement par $\epsilon > 0$ et borné supérieurement par $M : \epsilon \leq V(x, \omega) \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d, \omega \in \Omega$ tandis que nous ne demandons qu'une borne supérieure pour V .

Nous supposons que le potentiel est borné supérieurement dans les propositions 2.6 et 2.7 que nous utilisons pour la démonstration de l'inégalité $\chi_a \geq 2\xi_b - 1$ du théorème 3.5 du chapitre I. C'est la raison pour laquelle cette hypothèse apparait dans l'énoncé du théorème 3.5. C'est une condition forte qui permet d'appliquer une inégalité de Harnack comme on l'a fait à la proposition 2.7. Elle a aussi été trouvée dans les travaux de Sznitman [Szn96] et de Wüthrich [Wüt98a], [Wüt98b] pour le modèle MBPP.

2.2 Inégalité de concentration : démonstration de la proposition 2.6

Pour la suite, la proposition 2.6 est utile dans notre démonstration de la propriété $\chi_a \leq \frac{1}{2}$ de la proposition 2.5. Nous commençons par énumérer des propriétés simples de notre modèle de marches aléatoires en potentiel aléatoire. Remarquons que dans le lemme 2.8 ci-dessous, (1) est vraie pour tout V tel que $\mathbb{P}(V < \infty) > 0$ alors que (2) et (3) sont vraies quand $\mathbb{E}(V) < \infty$.

Chapitre II. Marche aléatoire simple en potentiel aléatoire

Lemme 2.8. (1) Pour tous les $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $\omega \in \Omega$, nous avons :

$$a(x, y, \omega) \leq |x - y|_1 \ln 2d + \sum_{i=0}^{|x-y|_1-1} V(x_i, \omega) \quad (2.11)$$

où $[x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y]$, est un chemin de longueur $n = |x - y|_1$ de x à y .

(2) Si le potentiel V a une moyenne finie, il existe deux constantes positives $c_1 = -\ln \mathbb{E}e^{-V(0)}$, $c_2 = \ln 2d + \mathbb{E}V(0)$ telles que $c_1|x - y| \leq \mathbb{E}a(x, y, \omega) \leq c_2|x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^d$.

(3) Pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$|x|_\infty \alpha(e_1) \leq \mathbb{E}a(0, x, \omega) \leq |x|_1 \alpha(e_1) \quad (2.12)$$

Démonstration. (1) Nous pouvons déduire (2.11) de l'inégalité de triangle de $a(\cdot, \cdot, \omega)$ (voir (1.7) du chapitre I) :

$$a(0, x, \omega) \leq a(0, x_1, \omega) + a(x_1, x_2, \omega) + \dots + a(x_{n-1}, y, \omega)$$

et pour tout x_i , $1 \leq n = |x - y|_1$:

$$a(x_{i-1}, x_i, \omega) = -\ln e(x_{i-1}, x_i, \omega) \leq \ln 2d + V(x_{i-1})$$

(2) (2.12) en découle du lemme 1.6 du chapitre II. De plus, $\mathbb{E}a(x, y, \omega) \leq c_2|x - y|$ est une corollaire de la partie (1).

(3) Pour $x = (x_1, \dots, x_d)$, $\alpha(x) = \alpha(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_d e_d) \leq |x_1| \alpha(e_1) + \dots + |x_d| \alpha(e_d) = |x|_1 \alpha(e_1)$. Prenons $x' = (-x_1, x_2, \dots, x_d)$. Pour tout $n \geq 1$, par l'inégalité de triangle, $\mathbb{E}a(0, 2nx_1 e_1, \omega) \leq \mathbb{E}a(0, nx, \omega) + \mathbb{E}a(0, nx', \omega) = 2\mathbb{E}a(0, nx, \omega)$. Alors, $|x_1| \alpha(e_1) \leq \alpha(x)$. De même pour $x_2, \dots, x_d$, nous obtenons $|x|_\infty \alpha(e_1) \leq \alpha(x)$.

□

La démonstration de la proposition 2.6 est basée sur la méthode de martingale comme dans [Kes93], [Szn96] et [Zer98]. Nous allons vérifier les conditions du théorème 3 de [Kes93]. Nous utilisons une propriété importante du lemme 12 de [Zer98] des MAPA.

Lemme 2.9. Supposons que les potentiels satisfont l'hypothèse (1). Soit $z \in \mathbb{Z}^d$ et $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ tels que $V(x, \omega_1) = V(x, \omega_2)$ pour tout $x \neq z$ et $V(z, \omega_1) \leq V(z, \omega_2)$. Alors, il existe une constante $D > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$0 \leq a(0, x, \omega_2) - a(0, x, \omega_1) \leq \min\{-\ln \hat{P}_{0, \omega_1}^x(H(x) \leq H(z)), V(z, \omega_2) + D\} \quad (2.13)$$

La démonstration de la proposition 2.6

Nous reprenons les notations de [Zer98] et ses arguments avec les adaptations nécessaires pour obtenir une inégalité de concentration dans le cas d'un potentiel borné. Soient $z_k, k \geq 1$ une énumération de $\mathbb{Z}^d$ et $\mathcal{F}_k$ la tribu engendrée par $V(z_1), \dots, V(z_k)$. Notons $\mathcal{F}_0$ la tribu triviale. Pour $x \in \mathbb{Z}^d$ fixé, pour $k \geq 0$, nous définissons :

$$M_k = \mathbb{E}(a(0, x, \omega) \mid \mathcal{F}_k)$$

Remarquons que $M_k, k \geq 0$ est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k, k \geq 0$ qui converge $\mathbb{P}$ presque sûrement, dans $L^1(\mathbb{P})$, et $L^2(\mathbb{P})$ vers $M_\infty = a(0, x, \omega)$. Pour $\omega, \sigma \in \Omega$ et $k \geq 0$, soit $[\omega, \sigma]_k \in \Omega$ la configuration telle que $V(z_i, [\omega, \sigma]_k) = V(z_i, \omega)$ pour tout $1 \leq i \leq k$ et $V(z_i, [\omega, \sigma]_k) = V(z_i, \sigma)$ pour tout $k < i$. Notons $\mathbb{E}_\omega$ l'espérance par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$ sur les variables ω . Nous posons, pour $k \geq 1$:

$$\Delta_k := M_k - M_{k-1}$$

Alors, utilisons le lemme 2.9 :

$$\begin{aligned} |\Delta_k| &= |\mathbb{E}_\sigma a(0, x, [\omega, \sigma]_k) - \mathbb{E}_\sigma a(0, x, [\omega, \sigma]_{k-1})| \\ &= \mathbb{E}_\sigma \left((a(0, x, [\omega, \sigma]_k) - a(0, x, [\omega, \sigma]_{k-1})) \mathbf{1}_{\{V(z_k, \omega) \geq V(z_k, \sigma)\}} \right) \\ &\quad + \mathbb{E}_\sigma \left((a(0, x, [\omega, \sigma]_{k-1}) - a(0, x, [\omega, \sigma]_k)) \mathbf{1}_{\{V(z_k, \omega) < V(z_k, \sigma)\}} \right) \\ &\leq \mathbb{E}_\sigma (V(z_k, [\omega, \sigma]_k) + D) + \mathbb{E}_\sigma (V(z_k, [\omega, \sigma]_{k-1}) + D) \\ &\leq 2(M + D) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Nous avons aussi que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) &= \mathbb{E} \left(\mathbb{E}_\sigma \left((a(0, x, [\omega, \sigma]_k) - a(0, x, [\omega, \sigma]_{k-1}))^2 \mathbf{1}_{\{V(z_k, \omega) < V(z_k, \sigma)\}} \right) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right) \\ &\quad + \mathbb{E} \left(\mathbb{E}_\sigma \left((a(0, x, [\omega, \sigma]_k) - a(0, x, [\omega, \sigma]_{k-1}))^2 \mathbf{1}_{\{V(z_k, \omega) \geq V(z_k, \sigma)\}} \right) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Appliquons le lemme 2.9, le premier terme du membre droit de (2.15) (on notera ce terme (I)) est plus petit que :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left(\mathbb{E}_\sigma \left((V(z_k, [\omega, \sigma]_{k-1}) + D)^2; \hat{P}_{0, [\omega, \sigma]_k}^x (H(x) > H(z_k)) \geq \frac{1}{2} \right) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right) \\ &\quad + \mathbb{E} \left(\mathbb{E}_\sigma \left((\ln \hat{P}_{0, [\omega, \sigma]_k}^x (H(x) \leq H(z_k)))^2; \hat{P}_{0, [\omega, \sigma]_k}^x (H(x) \leq H(z_k)) \geq \frac{1}{2} \right) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right) \end{aligned}$$

Chapitre II. Marche aléatoire simple en potentiel aléatoire

Utilisons $(\ln t)^2 \leq 1 - t$ quand $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ et l'inégalité de Jensen, nous avons :

$$\begin{aligned} (I) &\leq 2(M + D)^2 \mathbb{E} \left(\mathbb{E}_\sigma \left(\hat{P}_{0, [\omega, \sigma]_k}^x (H(x) > H(z_k)) \right) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right) \\ &\quad + \mathbb{E} \left(\mathbb{E}_\sigma \left(\hat{P}_{0, [\omega, \sigma]_k}^x (H(x) > H(z_k)) \right) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Notons que :

$$\mathbb{E}_\sigma \left(\hat{P}_{0, [\omega, \sigma]_k}^x (H(x) > H(z_k)) \right) = \mathbb{E} \left(\hat{P}_{0, \omega}^x (H(x) > H(z_k)) \mid \mathcal{F}_k \right)$$

Donc,

$$(I) \leq (2(M + D)^2 + 1) \mathbb{E} \left(\hat{P}_{0, \omega}^x (H(x) > H(z_k)) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right) \quad (2.17)$$

De même, nous avons aussi le deuxième terme du membre de (2.15) (on notera ce terme (II)) est plus petit que :

$$(II) \leq (2(M + D)^2 + 1) \mathbb{E} \left(\hat{P}_{0, \omega}^x (H(x) > H(z_k)) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right) \quad (2.18)$$

Nous posons :

$$U_k(\omega) := D_1 \hat{P}_{0, \omega}^x (H(x) > H(z_k)), \quad \text{où } D_1 = 2(2(M + D)^2 + 1)$$

Donc, de (2.15), (2.17) et (2.18), nous avons, pour tout $k \geq 1$:

$$\mathbb{E}(\Delta_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) \leq \mathbb{E}(U_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) \quad (2.19)$$

Posons $c_1 = -\ln \mathbb{E} \exp(-V(0))$, pour tout $t > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sum_{k=1}^{\infty} U_k \geq t \right) &= \mathbb{P} \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1 \hat{P}_{0, \omega}^x (H(x) > H(z_k)) \geq t \right) \\ &= \mathbb{P} \left(D_1 \hat{E}_{0, \omega}^x (|\mathcal{A}(0, x, \omega)|) \geq t \right) \\ &\leq \exp \left(\frac{-c_1}{D_1} t \right) \mathbb{E} \left(\exp(\hat{E}_{0, \omega}^x (c_1 |\mathcal{A}(0, x, \omega)|)) \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

où

$$\mathcal{A}(0, x) := \mathcal{A}(0, x, (S_m)_{m \geq 0}) := \{z \in \mathbb{Z}^d : H(z) < H(x)\} \quad (2.21)$$

Puisque :

$$\hat{E}_{0, \omega}^x (c_1 |\mathcal{A}(0, x)|) \leq \ln \hat{E}_{0, \omega}^x [\exp(c_1 |\mathcal{A}(0, x)|)] \leq a(0, x, \omega) + \ln E_0 \left(\exp \left(- \sum_{u \in \mathcal{A}(0, x)} (V(u) - c_1) \right) \right)$$

Utilisons la partie (i) du lemme 2.8 et puisque $V \leq M$, il existe une constante positive D_2 telle que :

$$a(0, x, \omega) \leq D_2|x|$$

Nous obtenons alors pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} U_k \geq t\right) &\leq \exp\left(\frac{-c_1}{D_1}t + D_2|x|\right) E_0\left([\mathbb{E}(\exp(c_1 - V(0)))]^{|\mathcal{A}(0,x)|}\right) \\ &= \exp\left(\frac{-c_1}{D_1}t + D_2|x|\right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Par conséquence, nous avons :

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=0}^{\infty} U_k \geq t\right) \leq \exp(-\bar{C}_2 t) \quad (2.23)$$

pour tout $t \geq t_0 := \max\{\frac{2D_1D_2}{c_1}|x|, 4(D+M)^2e^2|x|\}$, où $\bar{C}_2 = \frac{c_1}{2D_1}$.

Par (2.14), (2.19) et (2.23), toutes les conditions du théorème 3 de [Kes93] sont satisfaites. Alors, il existe trois constantes positives C_1, C_2, D_3 telles que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, pour tout $t \leq D_3|x|$:

$$\mathbb{P}\left(\frac{a(0, x, \omega) - \mathbb{E}a(0, x, \omega)}{\sqrt{x}} \geq t\right) \leq C_1 \exp(-C_2 t)$$

Les mêmes arguments peuvent s'appliquer pour $-a(0, x, \omega)$. Et puisque V est borné supérieurement, (2.9) est vraie pour tout $t > 0$ quand $|x|$ est suffisamment grand.

2.3 Démonstration de la proposition 2.5

Avant d'aller plus en détails, nous voudrions présenter les idées de la démonstration en quelques mots. Les inégalités $\chi_b \leq \chi_a$ et $\xi_b \leq \xi_a$ découlent facilement de leur définition. Pour $\xi_b \geq 0$, nous allons utiliser le fait que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, pour tout $i, 1 \leq i \leq d$, $\mathbb{E}\hat{P}(H(e_i) < H(x))$ est bornée inférieurement par une constante positive qui ne dépend pas de x , où $e_i, 1 \leq i \leq d$ sont les coordonnées de $\mathbb{Z}^d$. La propriété $\chi_b \geq 0$ se déduit de l'utilisation de l'inégalité FKG. Remarquons que d'après ces arguments appliqués à la MAPP, dans les définitions de ξ_b et χ_b , nous ne demandons pas l'existence d'un paramètre C comme dans celles de Chatterjee (voir les inégalités (A_3) et (A_4) de [Cha13]). La propriété $\chi_a \leq \frac{1}{2}$ est un corollaire de l'inégalité de concentration de la proposition 2.6. Puisque $|D(0, x)| \leq |\mathcal{A}(0, x)|$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, en utilisant des arguments comme dans la partie sur la continuité des exposants de Lyapunov pour estimer $\mathbb{E}\hat{E}(\mathcal{A}(0, x))$, nous pouvons obtenir $\xi_a \leq 1$.

Chapitre II. Marche aléatoire simple en potentiel aléatoire

D'abord, nous pouvons déduire facilement des définitions que $\chi_b \leq \chi_a$ et $\xi_b \leq \xi_a$. En effet, si $\xi_b > \xi_a$, il existe ξ_1, ξ_2 tels que $\xi_a < \xi_1 < \xi_2 < \xi_b$. De (2.3), pour $x \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$:

$$\mathbb{E} \frac{\hat{E}_{0,\omega}^x D(0, x)}{|x|^{\xi_1}} \leq \frac{1}{\gamma} \sup_{\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{\gamma \hat{E}_{0,\omega}^x D(0, x)}{|x|^{\xi_1}} \right) \right) < \infty$$

Alors, pour toute suite (x_n) telle que $x_n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \frac{\hat{E}_{0,\omega}^x D(0, x_n)}{|x_n|^{\xi_2}} = 0$$

Par la définition de ξ_b , on a alors $\xi_2 > \xi_b$, c'est absurde. Nous utilisons un argument similaire pour montrer que $\chi_b \leq \chi_a$ en remarquant que

$$E \exp(\gamma |X|) \geq \frac{\gamma^2}{2} E |X|^2.$$

Pour $\xi_b \geq 0$, par sa définition, il suffit montrer que

$$\inf_{x \in \mathbb{Z}^d, |x| > 2} \mathbb{E} \hat{E}_{0,\omega}^x D(0, x) > 0.$$

En effet, pour $x \in \mathbb{Z}^d$, $r > 0$, nous définissons un cylindre $C(x, r)$ de rayon r entre 0 et x :

$$C(x, r) = \{z \in \mathbb{R}^d : \inf_{w \in L(0, x)} |z - w| < r\} \quad (2.24)$$

Nous observons qu'il existe une constante $r_0 > 0$ suffisamment petite telle que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $|x| \geq 2$, il y a au moins i , $1 \leq i \leq d$ tel que $e_i \notin C(x, r_0)$ ou $-e_i \notin C(x, r_0)$. Et on notera ce point x' . Alors, pour $x \in \mathbb{Z}^d$, $|x| \geq 2$, $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \hat{E}_{0,\omega}^x D(0, x) &\geq r_0 \hat{P}_{0,\omega}^x (D(0, x) \geq r_0) \\ &\geq r_0 \hat{P}_{0,\omega}^x (H(x') < H(x)) \\ &= r_0 \frac{E_0 \left(\exp(-\sum_{m=0}^{H(x)-1} V(S_m)), H(x') < H(x) < \infty \right)}{e(0, x, \omega)} \\ &= r_0 \frac{e(0, x', \omega) \cdot e(x', x, \omega)}{e(0, x, \omega)} \\ &\geq r_0 e(0, x', \omega) e(x', 0, \omega) \geq r_0 \left(\frac{1}{2d} \right)^2 \exp(-V(0) - V(x')) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d, |x| \geq 2$:

$$\mathbb{E} \hat{E}_{0,\omega}^x D(0, x) \geq r_0 \left(\frac{1}{2d}\right)^2 \mathbb{E} \exp(-V(0) - V(x')) = r_0 \left(\frac{1}{2d}\right)^2 (\mathbb{E} \exp(-V(0)))^2 > 0.$$

Pour obtenir $\chi_b \geq 0$, on va montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d, |x| > 2$:

$$\mathbb{V}ar(a(0, x, \omega)) > 0.$$

En effet, fixons $x \in \mathbb{Z}^d, |x| > 2$, pour $N > 0$, nous posons :

$$a_N(0, x, \omega) := -\ln E_0 \left(\exp \left(- \sum_{m=0}^{H(x)-1} V(S_m) \right), |S_m| \leq N, \text{ pour tout } m < H(x) \right)$$

a_N est une fonction non négative, croissante en $V(z)$, $z \in \mathbb{Z}^d, |z| \leq N$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} a_N(0, x, \omega) = a(0, x, \omega)$ dans $L^2(\mathbb{P})$. Alors :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{V}ar(a_N(0, x, \omega)) = \mathbb{V}ar(a(0, x, \omega)) \quad (2.26)$$

En outre, nous avons :

$$\begin{aligned} a_N(0, x, \omega) &= -\ln \left(\exp(-V(0)) E_0 \left(\exp \left(- \sum_{m=1}^{H(x)-1} V(S_m) \right), |S_m| \leq N, \text{ pour tout } m < H(y) \right) \right) \\ &= V(0) - \ln E_0 \left(\exp \left(- \sum_{m=1}^{H(x)-1} V(S_m) \right), |S_m| \leq N, \text{ pour tout } m < H(y) \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Nous posons :

$$g_N(\omega) := g_N(V(z, \omega), |z| < N) := -\ln E_0 \left(\exp \left(- \sum_{m=1}^{H(x)-1} V(S_m) \right), |S_m| \leq N, \text{ pour tout } m < H(y) \right).$$

De (2.27), nous avons :

$$\mathbb{V}ar(a_N(0, x, \omega)) = \mathbb{V}ar(V(0)) + \mathbb{V}ar(g_N) + 2Cov(V(0), g_N) \quad (2.28)$$

Notons que pour ω fixé, g_N est une fonction croissante en $V(z)$ pour tout $|z| < N$. Appliquons l'inégalité FKG de Mörters et Peres dans [MP10] : $Cov(V(0), g_N(\omega)) \geq 0$. En le combinant avec (2.26) et (2.28), nous obtenons pour tout $x \in \mathbb{Z}^d, |x| > 2$, $\mathbb{V}ar(a(0, x, \omega)) \geq \mathbb{V}ar(V(0)) = \text{constante} > 0$.

Chapitre II. Marche aléatoire simple en potentiel aléatoire

Pour obtenir $\chi_a \leq \frac{1}{2}$, on va montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que :

$$\sup_{\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{\gamma |a(0, x, \omega) - \mathbb{E}a(0, x, \omega)|}{|x|^{\frac{1}{2}}} \right) \right) < \infty \quad (2.29)$$

En effet, nous posons pour $|x| > C_3$:

$$X := \frac{|a(0, x, \omega) - \mathbb{E}a(0, x, \omega)|}{|x|^{\frac{1}{2}}}$$

Alors, d'après l'inégalité de concentration (2.9), il existe deux constantes positives C_1, C_2 telles que

$$\mathbb{E}(\exp(\gamma X)) = 1 + \gamma \int_0^\infty e^{\gamma t} \mathbb{P}(X \geq t) dt \leq 1 + \gamma \int_0^\infty C_1 e^{(\gamma - C_2)t} dt < \infty \quad (2.30)$$

pour $\gamma < C_2$.

Pour obtenir $\xi_a \leq 1$, nous allons montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que :

$$\sup_{\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{\gamma \hat{E}_{0,\omega}^x D(0, x)}{|x|} \right) \right) < \infty \quad (2.31)$$

Par les définitions de $D(0, x)$ et $\mathcal{A}(0, x)$ (voir (2.21)), nous avons $D(0, x) \leq |\mathcal{A}(0, x)|$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$. Alors, pour $c_1 = -\ln \mathbb{E}(\exp(V(0)))$, utilisons l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned} \frac{c_1 \hat{E}_{0,\omega}^x D(0, x)}{|x|} &\leq \frac{1}{|x|} \ln \hat{E}_{0,\omega}^x \exp(c_1 |\mathcal{A}(0, x)|) \\ &\leq \frac{1}{|x|} a(0, x, \omega) + \frac{1}{|x|} \ln E_0(\exp(c_1 |\mathcal{A}(0, x)|) - \sum_{u \in \mathcal{A}(0, x)} V(u)), H(x) < \infty \end{aligned} \quad (2.32)$$

Utilisons (i) du lemme (2.8) en notant que $0 \leq V \leq M$, on a :

$$a(0, x, \omega) \leq |x|_1 \ln 2d + M|x|_1$$

Donc,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{c_1 \hat{E}_{0,\omega}^x D(0, x)}{|x|} \right) \right) \\ &\leq \exp(\sqrt{d}(\ln 2d + M)) \mathbb{E} \left([E_0(\exp(c_1 |\mathcal{A}(0, x)|) - \sum_{u \in \mathcal{A}(0, x)} V(u)), H(x) < \infty]^{\frac{1}{|x|}} \right) \end{aligned}$$

Puisque $x \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, $0 < \frac{1}{|x|} \leq 1$, utilisons l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left([E_0(\exp(c_1 \mathcal{A}(0, x) - \sum_{u \in \mathcal{A}(0, x)} V(u)), H(x) < \infty)]^{\frac{1}{|x|}} \right) \\
& \leq \left(\mathbb{E} E_0(\exp(c_1 \mathcal{A}(0, x) - \sum_{u \in \mathcal{A}(0, x)} V(u)), H(x) < \infty) \right)^{\frac{1}{|x|}} \\
& = \left(E_0 \left[\left(\mathbb{E} \exp(c_1 - V(0)) \right)^{\mathcal{A}(0, x)}, H(x) < \infty \right] \right)^{\frac{1}{|x|}} \leq 1
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Alors, on en déduit (2.31).

2.4 Fluctuations des exposants de Lyapunov

Maintenant, nous allons montrer l'inégalité (2.10) de fluctuations des exposants de Lyapunov pour la MAPA que sera utilisée dans la démonstration de $\chi_a \geq 2\xi_b - 1$, notre résultat principal. Comme dans plusieurs références citées à la fin de la section *bornes élémentaires*, nous savons que ce problème était bien connu en PPP et pour le MBPP. Pour la PPP, Kesten [Kes93] a prouvé qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $x \neq 0$,

$$\mathbb{E}T(0, x) - \mu(x) \leq C|x|^{1 - \frac{1}{2d+4}} (\ln |x|)^{1/d+2}$$

Ce résultat a été amélioré par Alexander [Ale93] par une méthode qui est basée sur la construction d'une famille de fonctions génératrices $g_n(\beta)$ sur-additives ou sous-additives où $\beta > 0$ par rapport au temps de passage pour obtenir

$$\mathbb{E}T(0, x) - \mu(x) \leq C|x|^{1/2} \ln |x| \tag{2.34}$$

si $x \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ est sur un des axes. Notons que cet argument utilise la symétrie de $\mathbb{Z}^d$ par rapport à l'hyperplan perpendiculaire à un axe et alors il ne fonctionne pas pour les autres directions.

Avec la même idée, Sznitman a aussi montré une inégalité analogue à (2.34) pour l'exposant de Lyapunov au MBPP mais un peu *plus forte* (voir théorème 3.1 dans [Szn96]). Nous disons que c'est plus fort puisque, d'après la condition [Szn96, (3.3)], nous pouvons remplacer $|x|^{1/2}$ de (2.34) par $|x|^{\chi_a}$ si χ_a est l'exposant critique de fluctuation défini de même façon que le nôtre et qui vérifie donc $\chi_a \leq \frac{1}{2}$. De plus, grâce à l'invariance par rotation du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$, Sznitman n'a démontré son théorème que pour la direction e_1 mais il peut en conclure qu'il est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Chapitre II. Marche aléatoire simple en potentiel aléatoire

En PPP, Alexander a ensuite réussi à démontrer (2.34) pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ par une autre méthode (voir théorème 1.8 de [Ale97]). Récemment, Chatterjee dans [Cha13] pour la percolation et Auffering et Damron dans [AD13] pour le polymère ont utilisé cette méthode pour avoir des inégalités de fluctuations dans le but d'obtenir la relation entre les exposants critiques. Malheureusement, nous n'arrivons pas encore à adapter la méthode d'Alexander à notre modèle à cause du manque d'indépendance du potentiel si la marche revisite un point plusieurs fois avant d'atteindre son but.

Nous allons alors prouver la proposition 2.7 en suivant les arguments de [Ale93] et [Szn96]). Ce résultat n'est vrai que pour les directions coordonnées. C'est la raison pour laquelle nous avons posé l'hypothèse 2 pour avoir $\chi_a \geq 2\xi_b - 1$. Mais cette hypothèse semble raisonnable (voir les explications à la page 21 du chapitre I). Tout d'abord, nous définissons, pour $n \geq 1$, l'hyperplan $\mathcal{H}_n$:

$$\mathcal{H}_n = \{z \in \mathbb{Z}^d : z \cdot e_1 = n\} \quad (2.35)$$

Pour $0 < \beta < 1$, $n \geq 1$, nous posons :

$$g_\beta(n) = \sum_{z \in \mathcal{H}_n} \mathbb{E}(e(0, z, \omega)^\beta) \quad (2.36)$$

Nous écrirons $\mathbf{n} := (n, 0, \dots, 0)$. Nous allons d'abord montrer que $g_\beta(n)$ peut être borné par la somme des point pas trop loin $\mathbf{n}$ dans le lemme 2.10 et que $g_\beta(n)$ est approximativement sous-multiplicative dans le lemme 2.11. Les énoncés et leur démonstration s'inspirent de [[Szn96], lemme 3.2 et 3.3] respectivement. Dès que nous avons ces deux lemmes, nous pouvons suivre le même argument que [Szn96] (pages 1527-1529) pour montrer que la proposition 2.7 est vraie pour e_1 .

Nous énonçons d'abord ces deux lemmes dont nous déduisons ensuite la proposition 2.7. Et nous terminons par la démonstration des deux lemmes.

Lemme 2.10. *Pour $0 < \beta < 1$, $n > 1$, il existe deux constantes positives γ_1, γ_5 qui ne dépendent que de d et de la loi du potentiel V telles que :*

$$\begin{aligned} g_\beta(n) &\leq \frac{\gamma_1}{\beta^d} \sum_{|z|_\infty \leq \gamma_1 n, z \in \mathcal{H}_n} \mathbb{E}((e(0, z, \omega)^\beta)) \\ &\leq \frac{\gamma_5}{\beta^d} n^{d-1} \sum_{|z|_\infty \leq \gamma_1 n, z \in \mathcal{H}_n} \mathbb{E}(\tilde{e}(0, z, \omega)^\beta) \end{aligned} \quad (2.37)$$

où :

$$\tilde{e}(0, z, \omega) = E_0\left(\exp\left(-\sum_{m=0}^{H(z)-1} V(S_m)\right), H(z) < T_{B(\gamma_1 n)}\right) \quad (2.38)$$

et $T_{B(\gamma_1 n)}$ est le temps de sortie de l'ensemble $B(\gamma_1 n) = \{y \in \mathbb{Z}^d; |y|_\infty \leq \gamma_1 n\}$.

Lemme 2.11. Pour $0 < \beta < 1$, $m \geq 1$ et n suffisamment grand, nous avons :

$$g_\beta(n+m) \leq \frac{\gamma_6}{\beta^d} (n+m)^{3d-2} g_\beta(n) g_\beta(m) \quad (2.39)$$

Démonstration de la proposition 2.7

Pour $\beta \in]0, 1[$, et $m > 2$, nous posons

$$F_\beta(m) = \ln g_\beta(m) \quad (2.40)$$

Alors, d'après le lemme 2.11, pour tout $m, n \geq 2$,

$$F_\beta(m+n) \leq F_\beta(m) + F_\beta(n) + G_\beta(m+n)$$

où $G_\beta(k) = \ln(\frac{\gamma_0}{\beta^d}) + (3d-2) \ln k$. Puisque $G_\beta(\cdot)$ est non-décroissante et pour tout $k \geq 1$:

$$4 \sum_{m \geq 2k} \frac{G_\beta(m)}{m(m+1)} \leq \frac{\gamma_6}{k} (1 - \ln \beta + \ln k)$$

Alors, d'après le théorème 2 de Hammersley [Ham62], il existe une limite $f(\beta)$ de $\frac{F_\beta(n)}{n}$ quand n tend vers ∞ et

$$f(\beta) \leq \frac{F_\beta(m)}{m} + \frac{\gamma_6}{m} (1 - \ln \beta + \ln m) \quad \text{pour tout } m > 1 \quad (2.41)$$

D'autre part, par la définition, nous avons $g_\beta(m) \geq \mathbb{E}(e(0, \mathbf{m}, \omega)^\beta)$. Alors,

$$f(\beta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F_\beta(m)}{m} \geq -\beta \alpha(e_1) \quad (2.42)$$

De (2.41) et (2.42),

$$-\beta \alpha(e_1) \leq \frac{\ln g_\beta(m)}{m} + \frac{\gamma_6}{m} (1 - \ln \beta + \ln m) \quad (2.43)$$

Soit $\chi' > \chi_a$. Soit γ donné par la définition de χ_a et γ_1 donné par le lemme 2.10. On pose

Chapitre II. Marche aléatoire simple en potentiel aléatoire

$\beta = \beta_m = \gamma(\sqrt{d}\gamma_1 m)^{-\chi'}$. Alors, $\beta < 1$ pour m suffisamment grand. Posons :

$$B := \sup_{\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \mathbb{E} \exp\left(\frac{\gamma |\mathbb{E}a(0, z, \omega) - a(0, z, \omega)|}{|z|^{\chi'}}\right) < \infty$$

Alors, pour tout $z \in \mathcal{H}_m$, $|z|_\infty < \gamma_1 m$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e(0, z, \omega)^\beta) &= \exp(-\beta \mathbb{E}a(0, z, \omega)) \mathbb{E}[\exp(\beta(\mathbb{E}a(0, z, \omega) - a(0, z, \omega)))] \\ &\leq B \exp(-\beta \mathbb{E}a(0, z, \omega)) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Si $\bar{z}$ est une réflexion de z par l'axe $0e_1$, nous avons

$$\mathbb{E}a(0, z, \omega) = \mathbb{E}a(0, \bar{z}, \omega) \quad (2.45)$$

Alors, par l'inégalité du triangle et l'invariance par la réflexion par rapport aux axes de $\mathbb{E}a(0, x, \omega)$, on a $2\mathbb{E}a(0, z, \omega) = \mathbb{E}a(0, z, \omega) + \mathbb{E}a(0, \bar{z}, \omega) \geq \mathbb{E}a(0, 2me_1, \omega)$ pour tout $z \in \mathcal{H}_m$. Utilisons maintenant le lemme 2.10,

$$g_\beta(m) \leq \frac{\gamma_1}{\beta^d} \sum_{|z|_\infty \leq \gamma_1 m, z \in \mathcal{H}_m} \mathbb{E}\left((e(0, z, \omega)^\beta)\right) \leq \frac{B\gamma_2}{\beta^d} m^{d-1} \exp\left(-\frac{\beta}{2} \mathbb{E}a(0, 2m, \omega)\right)$$

En le combinant avec (2.43), nous allons obtenir (2.10) pour e_1 . Puisque $\alpha(e_i) = \alpha(e_1)$ et $\mathbb{E}a(0, ne_i, \omega) = \mathbb{E}a(0, ne_1, \omega)$ pour tout $i = 2, 3, \dots, d$, nous obtenons alors la proposition 2.7. $\square$

Maintenant, nous allons montrer les deux lemmes 2.10 et 2.11.

Démonstration du lemme 2.10

D'après le lemme 2.8 :

$$g_\beta(n) \geq \mathbb{E}\left(e(0, \mathbf{n}, \omega)^\beta\right) \geq \exp(-n\beta(\ln 2d + M)) := \exp(-\gamma_2 \beta n) \quad (2.46)$$

en posant $\gamma_2 = (\ln 2d + M)$. Pour $z \in \mathbb{Z}^d$, $c_1 = -\ln \mathbb{E}(\exp(-V(0)))$, utilisons le même argument que dans (2.33) en notant que $|\mathcal{A}(0, z, \omega)| \geq |z|_\infty$:

$$\begin{aligned} 1 &\geq \mathbb{E}E_0\left(\exp(c_1|\mathcal{A}(0, z)| - \sum_{m=0}^{H(z)-1} V(S_m)), H(z) < \infty\right) \\ &\geq \exp(c_1|z|_\infty) \mathbb{E}e(0, z, \omega) \end{aligned} \quad (2.47)$$

II.2 Relation entre les exposants critiques

Alors, quand $0 < \beta < 1$, l'inégalité de Jensen nous donne :

$$\mathbb{E}(e(0, z, \omega)^\beta) \leq (\mathbb{E}e(0, z, \omega))^\beta \leq \exp(-c_1\beta|z|_\infty)$$

Alors, pour tout $A > n + 1$, il existe des constantes positives γ_3, γ_4 telles que :

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathcal{H}_n; |z|_\infty > A} \mathbb{E}(e(0, z, \omega)^\beta) &\leq \sum_{z \in \mathcal{H}_n; |z|_\infty > A} \exp(-c_1\beta|z|_\infty) \\ &\leq \sum_{z \in \mathcal{H}_0; |z|_\infty > A-n} \exp(-c_1\beta|z|_\infty) \\ &\leq \gamma_3 \int_{A-n}^{\infty} r^{d-1} \exp(-c_1\beta r) dr \\ &\leq \frac{\gamma_4}{\beta^d} \exp(-c_1\beta(A-n)) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Pour $\gamma_1 > \max\{\frac{\gamma_2}{c_1} + 1; 1 + \gamma_4; 2\}$. On déduit de (2.46) et (2.48) :

$$\begin{aligned} g_\beta(n) &= \sum_{z \in \mathcal{H}_n; |z|_\infty \leq \gamma_1 n} \mathbb{E}(e(0, z, \omega)^\beta) + \sum_{z \in \mathcal{H}_n; |z|_\infty > \gamma_1 n} \mathbb{E}(e(0, z, \omega)^\beta) \\ &\leq \sum_{z \in \mathcal{H}_n; |z|_\infty \leq \gamma_1 n} \mathbb{E}(e(0, z, \omega)^\beta) + \frac{\gamma_4}{\beta^d} \mathbb{E}(e(0, \mathbf{n}, \omega)^\beta) \\ &\leq \frac{\gamma_1}{\beta^d} \sum_{z \in \mathcal{H}_n; |z|_\infty \leq \gamma_1 n} \mathbb{E}(e(0, z, \omega)^\beta) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Comme dans (2.46), pour $z \in \mathbb{Z}^d$:

$$\sum_{|z|_\infty \leq \gamma_1 n, z \in \mathcal{H}_n} \mathbb{E}(\tilde{e}(0, z, \omega)^\beta) \geq \mathbb{E}(\tilde{e}(0, \mathbf{n}, \omega)^\beta) \geq \exp(-\gamma_2\beta n) \quad (2.50)$$

Si $T_{B(\gamma_1 n)} \leq H(z)$, $z \in \mathbb{Z}^d$, alors $|\mathcal{A}(0, z)| \geq \gamma_1 n$. Donc, nous suivons l'argument comme dans (2.47) pour obtenir :

$$\mathbb{E}E_0\left(\exp\left(-\sum_{m=0}^{H(z)-1} V(S_m)\right), T_{B(\gamma_1 n)} \leq H(z)\right) \leq \exp(-c_1\gamma_1 n) \quad (2.51)$$

et alors,

$$\mathbb{E}\left(E_0\left(\exp\left(-\sum_{m=0}^{H(z)-1} V(S_m)\right), T_{B(\gamma_1 n)} \leq H(z)\right)^\beta\right) \leq \exp(-\beta c_1 \gamma_1 n)$$

Chapitre II. Marche aléatoire simple en potentiel aléatoire

Grâce aux définitions de $e(0, z, \omega)$ et $\tilde{e}(0, z, \omega)$, nous déduisons :

$$\mathbb{E}\left(e(0, z, \omega)^\beta\right) \leq \exp(-c_1\beta\gamma_1 n) + \mathbb{E}\left(\tilde{e}(0, z, \omega)^\beta\right) \quad (2.52)$$

D'après (2.50) et (2.52), il existe une constante γ_5 telle que :

$$\begin{aligned} \sum_{|z|_\infty \leq \gamma_1 n, z \in \mathcal{H}_n} \mathbb{E}\left(e(0, z, \omega)^\beta\right) &\leq \sum_{|z|_\infty \leq \gamma_1 n, z \in \mathcal{H}_n} \mathbb{E}\left(\tilde{e}(0, z, \omega)^\beta\right) + (2\gamma_1 n + 1)^{d-1} \exp(-c_1\beta\gamma_1 n) \\ &\leq \gamma_5 n^{d-1} \sum_{|z|_\infty \leq \gamma_1 n, z \in \mathcal{H}_n} \mathbb{E}\left(\tilde{e}(0, z, \omega)^\beta\right) \end{aligned} \quad (2.53)$$

De (2.49) et (2.53), nous obtenons alors le lemme 2.10. $\square$

Démonstration du lemme 2.11

Nous reprenons "la technique du fractionnement" de [Szn96] pour bénéficier de la propriété de l'indépendance du potentiel (voir (2.56) et (2.57)) dans la démonstration du lemme 2.11. À cause de la nature discrète de notre modèle, quelques arguments sont différents. Fixons

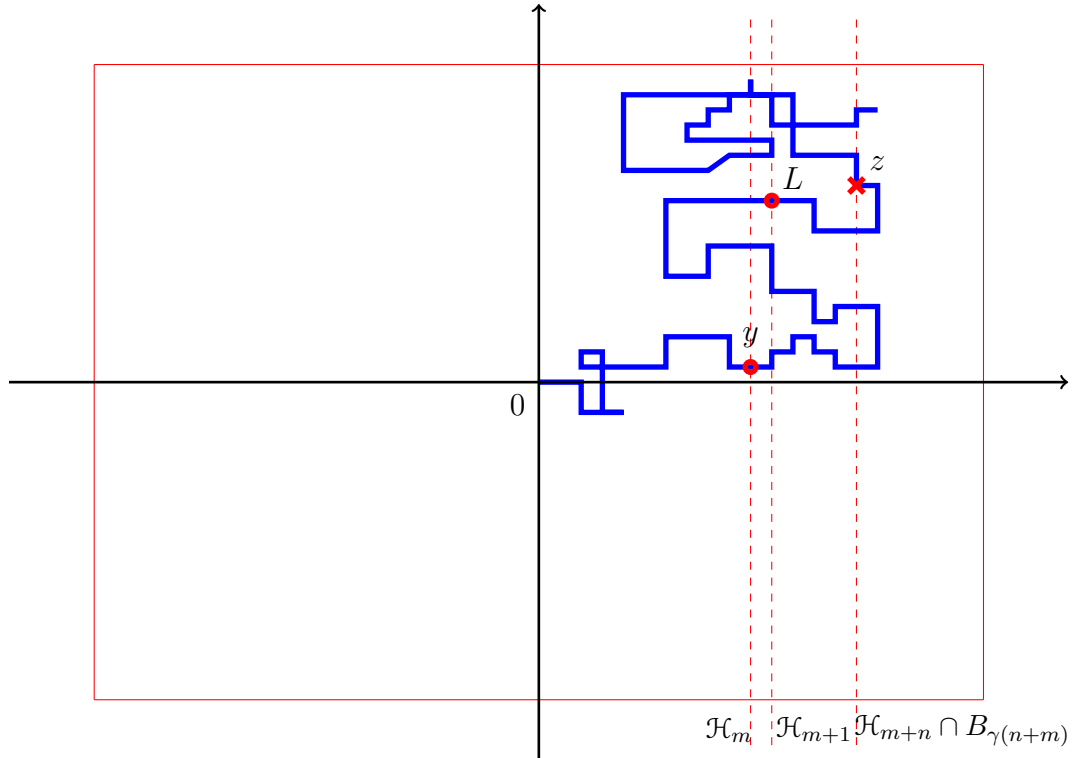


Figure II.1 – Illustration.

$n \geq 2, m \geq 1$. Prenons $z \in \mathcal{H}(n+m) \cap B(\gamma_1(n+m))$. Notons $T := T_{B(\gamma_1(n+m))}$, $H := H(\mathcal{H}_m)$ où γ_1 est la constante obtenue dans le lemme 2.10. Nous présentons L le premier temps où la

II.2 Relation entre les exposants critiques

marche entre $\mathcal{H}_{m+1}$ après le dernier temps de visite de la marche en $\mathcal{H}_m$ avant d'arriver à z ,

$$L := \sup\{0 < k < H(z), S_{k-1} \in \mathcal{H}_m, S_k \in \mathcal{H}_{m+1}\}$$

avec la convention que $\sup \emptyset = 0$. Nous remarquons que L n'est pas un temps d'arrêt. Pour $y \in B(\gamma_1(m+n)) \cap \mathcal{H}_m$, observons que quand $S_0 = y$, $\{H(z) < T\}$ est un sous événement de $\{L < H(z)\}$, P_y p.s. Alors, pour $y \in B(\gamma_1(m+n)) \cap \mathcal{H}_m$, nous avons :

$$\begin{aligned} & E_y \left(\exp \left(- \sum_{k=0}^{H(z)-1} V(S_k) \right), H(z) < T \right) \\ & \leq E_y \left(\exp \left(- \sum_{k=L}^{H(z)-1} V(S_k) \right), H(z) < T \right) \\ & \leq \sum_{l=1}^{\infty} E_y \left(\exp \left(- \sum_{k=l}^{H(z)-1} V(S_k) \right), l < H(z) < T, S_{l-1} \in \mathcal{H}_m, S_l \in \mathcal{H}_{m+1}, S_j \notin \mathcal{H}_m, \forall l < j < H(z) \right) \\ & = \sum_{l=1}^{\infty} E_y \left(S_{l-1} \in \mathcal{H}_m, S_l \in \mathcal{H}_{m+1}, l < H(z), l < T, E_{S_l} \left(\exp \left(- \sum_{k=0}^{H(z)-1} V(S_k) \right), H(z) < T, H(z) < H \right) \right) \\ & \leq A(m, n) \sup_{y_1 \in B(\gamma_1(m+n)) \cap \mathcal{H}_{m+1}} E_{y_1} \left(\exp \left(- \sum_{k=0}^{H(z)-1} V(S_k) \right), H(z) < H \right) \end{aligned} \quad (2.54)$$

où

$$\begin{aligned} A(m, n) &= \sup_{y \in B(\gamma_1(m+n)) \cap \mathcal{H}_m} \sum_{l=1}^{\infty} E_y \left(S_l \in \mathcal{H}_{m+1}, l < T \right) \\ &= \sup_{y \in B(\gamma_1(m+n)) \cap \mathcal{H}_m} \sum_{y_1 \in \mathcal{H}_{m+1}} G_{B(\gamma_1(m+n))}(y, y_1) \leq C(m+n)^d \end{aligned} \quad (2.55)$$

Ici, $G_B(x, y)$ est la fonction de Green de la marche qui exprime le nombre moyen de visites en y partant de x avant de sortir de B (voir les sections 1.5 et 1.6 de [Law91] pour sa définition et ses propriétés) et C est une constante. Alors, pour $z \in B(\gamma_1(n+m)) \cap \mathcal{H}(n+m)$,

$$\begin{aligned} & \tilde{e}(0, z, \omega) \\ &= E_0 \left(\exp \left(- \sum_{k=0}^{H-1} V(S_k) \right), H < T, E_{S_H} \left(\exp \left(- \sum_{k=0}^{H(z)-1} V(S_k) \right), H(z) < T \right) \right) \\ & \leq C(m+n)^d \sup_{y \in B(\gamma_1(m+n)) \cap \mathcal{H}_{m+1}} E_y \left(\exp \left(- \sum_{k=0}^{H(z)-1} V(S_k) \right), H(z) < H \right) E_0 \left(\exp \left(- \sum_{k=0}^{H-1} V(S_k) \right), H < T \right) \end{aligned}$$

Sur l'événement $\{H < T\}$, H coïncide avec $H(y')$ pour un sommet $y' \in B(\gamma_1(m+n)) \cap \mathcal{H}_m$.

Alors,

$$\begin{aligned} \tilde{e}(0, z, \omega)^\beta &\leq C(m+n)^d \sup_{y \in B(\gamma_1(m+n)) \cap \mathcal{H}_{m+1}} \left[E_y \left(\exp \left(- \sum_{k=0}^{H(z)-1} V(S_k) \right), H(z) < H \right) \right]^\beta \\ &\quad \left[\sum_{y' \in B(\gamma_1(m+n)) \cap \mathcal{H}_m} E_0 \left(\exp \left(- \sum_{k=0}^{H(y')-1} V(S_k) \right), H(y') = H < T \right) \right]^\beta \end{aligned} \quad (2.56)$$

Nous prenons l'espérance des deux côtés de (2.56) en notant que les deux termes du membre droit sont indépendants pour obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \tilde{e}(0, z, \omega)^\beta &\leq C(m+n)^d \mathbb{E} \left(\sup_{y \in B(\gamma_1(m+n)) \cap \mathcal{H}_{m+1}} \left[E_y \left(\exp \left(- \sum_{k=0}^{H(z)-1} V(S_k) \right), H(z) < H \right) \right]^\beta \right) \\ &\quad \times \mathbb{E} \left(\left[\sum_{y' \in B(\gamma_1(m+n)) \cap \mathcal{H}_m} E_0 \left(\exp \left(- \sum_{k=0}^{H(y')-1} V(S_k) \right), H(y') = H < T \right) \right]^\beta \right) \\ &\leq C(m+n)^d \sum_{y \in B(\gamma_1(m+n)) \cap \mathcal{H}_{m+1}} \mathbb{E} \left(e(y, z, \omega)^\beta \right) \sum_{y' \in B(\gamma_1(m+n)) \cap \mathcal{H}_m} \mathbb{E} \left(e(0, y', \omega)^\beta \right) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Pour tout $y \in \mathcal{H}_{m+1}$, il existe $y'' \in \mathcal{H}_m$ tel que $|y'' - y| = 1$. Puisque le potentiel est borné supérieurement par M , nous avons $e(y'', y, \omega) \geq \frac{e^{-M}}{2d}$. Alors, en utilisant (1.4) du chapitre I de la sur-multiplicative de $e(\cdot, \cdot)$, nous avons :

$$e(y, z, \omega) \leq 2de^M e(y'', z, \omega)$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathcal{H}_{m+n}, |z|_\infty \leq \gamma_1(m+n)} \mathbb{E} \tilde{e}(0, z, \omega)^\beta &\leq C(m+n)^d (2de^M)^\beta \sum_{y' \in \mathcal{H}_m \cap B(\gamma_1(m+n))} \mathbb{E} \left(e(0, y', \omega)^\beta \right) \\ &\quad \times \sum_{z \in \mathcal{H}_{m+n}, |z|_\infty \leq \gamma_1(m+n)} \left(\sum_{y'' \in \mathcal{H}_m \cap B(\gamma_1(m+n))} \mathbb{E} \left(e(y'', z, \omega)^\beta \right) \right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

D'après le lemme 2.10, il existe une constante $\gamma_6 > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} g_\beta(m+n) &\leq \frac{\gamma_6}{\beta^d} (m+n)^d (m+n)^{d-1} g_\beta(m) (m+n)^{d-1} \sum_{u \in \mathcal{H}_n} \mathbb{E} \left(e(0, u, \omega)^\beta \right) \\ &\leq \frac{\gamma_6}{\beta^d} (m+n)^{3d-2} g_\beta(m) g_\beta(n) \end{aligned} \quad (2.59)$$

□

2.5 $\chi_a \geq 2\xi_b - 1$

Nous allons montrer le théorème 3.5 du chapitre I, $\chi_a \geq 2\xi_b - 1$ sous les hypothèses 1 et 2, en nous inspirant de Newman et Piza [NP95], de Wüthrich [Wüt98a] et de Chatterjee [Cha13]. Nous définissons :

$$C(k, n) = \{v \in \mathbb{Z}^d, \inf_{u \in L(0, \mathbf{n})} |v - u| < k\}$$

Rappelons ici que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $L(x, y)$ est le segment de droite entre x et y .

$$\partial C(k, n) = \{v \in \mathbb{Z}^d \setminus C(k, n), \text{ il existe } u \in C(k, n) \text{ tel que } |v - u|_1 = 1\}$$

On suppose par l'absurde que $\chi_a < 2\xi_b - 1$. Soit alors $\xi' \in]\frac{\chi_a + 1}{2}, \xi_b[$, et montrons que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \hat{E}_{0, \omega}^{\mathbf{n}}(D(0, \mathbf{n}))}{n^{\xi'}} = 0.$$

L'idée principale est d'écrire,

$$\mathbb{E} \hat{E}_{0, \omega}^{\mathbf{n}} D(0, \mathbf{n}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(\hat{P}_{0, \omega}^{\mathbf{n}}(D(0, \mathbf{n}) > k) \right)$$

Remarquons que

$$\hat{P}_{0, \omega}^{\mathbf{n}}(D(0, \mathbf{n}) > k) = \hat{P}_{0, \omega}^{\mathbf{n}} \left(H(\partial C(k, n)) < H(\mathbf{n}) \right) \leq \sum_{z \in \partial C(k, n)} \hat{P}_{0, \omega}^{\mathbf{n}}(H(z) < H(\mathbf{n}))$$

où $H(\partial C(k, n))$ est le premier temps que la marche atteint $\partial C(k, n)$. Cette égalité nous conduit à considérer l'événement que la marche quitte le cylindre $C(k, n)$ au point $z \in \partial C(k, n)$. Nous écrivons $\hat{P}_{0, \omega}^{\mathbf{n}}(H(z) < H(\mathbf{n})) = \frac{e(0, z, \omega) e(z, \mathbf{n}, \omega)}{e(0, \mathbf{n}, \omega)}$ et utilisons le lemme 2.12 ci-dessous pour estimer ce terme. En s'inspirant de [Cha13], nous obtiendrons alors que pour tout $\xi'' < \xi_b$ et pour tout $\chi_2 \in]\chi_a, 2\xi'' - 1[$, la probabilité de quitter $C(k, n)$ en $z \in \partial C(k, n)$ n'est pas supérieure à $C_1 \exp(C_2 n^{\chi_2} - C_3 n^{2\xi'' - 1})$ quand $n^{\xi''} < k \leq 3n$, à $C_4 k^{d-1} \exp(C_5(k + n))$ quand $k > 3n$. Ce sont les clés de notre preuve.

L'inégalité de fluctuations dans la proposition 2.7 est utilisée dans notre démonstration du lemme 2.12 au dessous.

Lemme 2.12. *Pour $k \geq 1, n \geq 1, v \in \partial C(k, n)$:*

(1) Nous avons

$$\alpha(v) + \alpha(\mathbf{n} - v) \geq n\sqrt{1 + \frac{k^2}{2n^2}}\alpha(e_1) \quad (2.60)$$

(2) On en déduit que, pour tout $\chi' > \chi_a$, il existe deux constantes positives C et C_{11} telles que :

$$h(\mathbf{n}) - h(v) - h(\mathbf{n} - v) \leq Cn^{\chi'} \ln n - C_{11}n(\sqrt{1 + \frac{k^2}{2n^2}} - 1) \quad (2.61)$$

Nous rappelons que $h(x) = \mathbb{E}a(0, x, \omega)$

Démonstration. (1) Fixons $v \in \partial C(k, n)$. Soit w la projection perpendiculaire de v sur la droite qui contient le point 0 et dans la direction e_1 . Nous rappelons que H_0 est l'hyperplan qui passe par l'origine et est perpendiculaire à e_1 . Soient $v' := v/|w|$ et $z = v' - e_1$. Notons que $z \in H_0$. Il n'y a que les trois cas suivants :

i) $w \in L(\mathbf{n}, \mathbf{n} + ke_1)$. Par théorème de Pythagore :

$$k^2 \leq |v - \mathbf{n}|^2 = (|w| - n)^2 + |v - w|^2 = (|w| - n)^2 + |w|^2|z|^2$$

Alors, soit $|w| \geq \frac{k}{\sqrt{2}} + n$ ou soit $|w|^2|z|^2 \geq \frac{k^2}{2}$. Utilisons l'hypothèse (2), nous obtenons dans les deux cas :

$$\begin{aligned} \alpha(v) &= |w|\alpha(v') = |w|\alpha(e_1 + z) \\ &\geq |w|\sqrt{1 + |z|^2}\alpha(e_1) \\ &\geq n\sqrt{1 + \frac{k^2}{2n^2}}\alpha(e_1). \end{aligned} \quad (2.62)$$

ii) $w \in L(-ke_1, 0)$. Utilisons le même argument que dans le cas précédent, nous obtenons : $\alpha(ne_1 - v) \geq n\sqrt{1 + \frac{k^2}{2n^2}}\alpha(e_1)$.

iii) $w \in L(0, \mathbf{n})$. Soient $w' = \mathbf{n} - w$, $v'' = (\mathbf{n} - v)/|w'|$, $z' := v'' - e_1 = (w - v)/|w'|$. Alors, $z' \in H_0$. D'après l'hypothèse (2) :

$$\alpha(\mathbf{n} - v) = |w'|\alpha(v'') = |w'|\alpha(z' + e_1) \geq |w'|\sqrt{1 + |z'|^2}\alpha(e_1) \quad (2.63)$$

De même, puisque $v = w + |w|z$

$$\alpha(v) \geq |w|\sqrt{1 + |z|^2}\alpha(e_1) \quad (2.64)$$

II.2 Relation entre les exposants critiques

Utilisons (2.63) et (2.64) en notant que $|z| > \frac{k}{n}$ et $|z'| > \frac{k}{n}$:

$$\alpha(v) + \alpha(\mathbf{n} - v) \geq n\sqrt{1 + \frac{k^2}{n^2}}\alpha(e_1) > n\sqrt{1 + \frac{k^2}{2n^2}}\alpha(e_1)$$

(2) D'après (2.60), nous avons :

$$\alpha(\mathbf{n}) - \alpha(v) - \alpha(\mathbf{n} - v) \leq -n(\sqrt{1 + \frac{k^2}{2n^2}} - 1)\alpha(e_1)$$

En appliquant la proposition 2.7, il existe une constante $C > 0$ et $C_{11} > 0$ telles que :

$$\begin{aligned} h(\mathbf{n}) - h(v) - h(\mathbf{n} - v) &\leq n\alpha(e_1) + C|n|^{\chi'} \ln n - \alpha(v) - \alpha(\mathbf{n} - v) \\ &\leq Cn^{\chi'} \ln n - C_{11}n(\sqrt{1 + \frac{k^2}{2n^2}} - 1) \end{aligned}$$

□

La démonstration du théorème 3.5 du chapitre 1.

Nous supposons que $\chi_a < 2\xi_b - 1$. Alors il existe des réels $\chi_1 < \chi_2$ et $\xi'' < \xi'$ tels que :

$$0 \leq \chi_a < \chi_1 < \chi_2 < 2\xi'' - 1 < 2\xi' - 1 < 2\xi_b - 1 < 2\xi_a - 1 \leq 1 \quad (2.65)$$

Nous allons montrer que, en contradiction avec $\xi' < \xi_b$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}\hat{E}_{0,\omega}^{\mathbf{n}}(D(0, \mathbf{n}))}{n^{\xi'}} = 0 \quad (2.66)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^+$, nous posons :

$$N_n = \{\omega \in \Omega, a(0, \mathbf{n}, \omega) < h(\mathbf{n}) + n^{\chi_2}\} = \{\omega \in \Omega, e(0, \mathbf{n}, \omega) > \exp(-h(\mathbf{n}) - n^{\chi_2})\} \quad (2.67)$$

Alors, puisque $\chi_a < \chi_1 < \chi_2$, il existe une constante positive $\gamma > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_n^c) &= \mathbb{P}(a(0, \mathbf{n}) \geq h(\mathbf{n}) + n^{\chi_2}) \\ &= \mathbb{P}\left(\exp\left(\gamma \frac{a(0, \mathbf{n}) - h(\mathbf{n})}{n^{\chi_1}}\right) \geq \exp\left(\frac{\gamma n^{\chi_2}}{n^{\chi_1}}\right)\right) \\ &\leq \exp(-\gamma n^{\chi_2 - \chi_1}) \mathbb{E}\left(\exp\left(\gamma \frac{|a(0, \mathbf{n}) - h(\mathbf{n})|}{n^{\chi_1}}\right)\right) \\ &\leq C_1 \exp(-\gamma n^{\chi_2 - \chi_1}) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Chapitre II. Marche aléatoire simple en potentiel aléatoire

Nous écrivons :

$$\mathbb{E}\hat{E}_{0,\omega}^{\mathbf{n}}(D(0, \mathbf{n})) = \mathbb{E}\hat{E}_{0,\omega}^{\mathbf{n}}(D(0, \mathbf{n})\mathbf{1}_{N_n}) + \mathbb{E}\hat{E}_{0,\omega}^{\mathbf{n}}(D(0, \mathbf{n})\mathbf{1}_{N_n^c}) \quad (2.69)$$

i) Pour estimer $\mathbb{E}\hat{E}_{0,\omega}^{\mathbf{n}}(D(0, \mathbf{n})\mathbf{1}_{N_n^c})$, appliquons le théorème de Cauchy- Schwarz :

$$\mathbb{E}\hat{E}_{0,\omega}^{\mathbf{n}}(D(0, \mathbf{n})\mathbf{1}_{N_n^c}) \leq \sqrt{\mathbb{E}\left(\left(\hat{E}_{0,\omega}^{\mathbf{n}}(D(0, \mathbf{n}))\right)^2\right)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{N_n^c})} \quad (2.70)$$

Prenons un réel $C_3 > \xi_a$, alors il existe deux constantes positives γ', C'_4 telles que :

$$\sup_{v \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \mathbb{E}\left(\exp\left(\gamma \frac{\hat{E}_{0,\omega}^{\mathbf{n}} D(0, v)}{|v|^{C_3}}\right)\right) < C'_4$$

Puisque $\frac{\mathbb{E}\left(\gamma^2 (\hat{E}_{0,\omega}^{\mathbf{n}} D(0, \mathbf{n}))^2\right)}{n^{2C_3}} \leq 2\mathbb{E}\left(\exp\left(\gamma \frac{\hat{E}_{0,\omega}^{\mathbf{n}} D(0, \mathbf{n})}{n^{C_3}}\right)\right) < 2C'_4$, alors :

$$\mathbb{E}\left((\hat{E}_{0,\omega}^{\mathbf{n}} D(0, \mathbf{n}))^2\right) \leq C_4 n^{2C_3} \quad (2.71)$$

De (2.68), (2.70) et (2.71) :

$$\mathbb{E}\hat{E}_{0,\omega}^{\mathbf{n}}(D(0, \mathbf{n})\mathbf{1}_{N_n^c}) \leq C_5 n^{C_3} \exp\left(-\frac{\gamma}{2} n^{\chi_2 - \chi_1}\right) \quad (2.72)$$

ii) Pour estimer $\mathbb{E}\hat{E}_{0,\omega}^{\mathbf{n}}(D(0, \mathbf{n})\mathbf{1}_{N_n})$, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\hat{E}_{0,\omega}^{\mathbf{n}}(D(0, \mathbf{n})\mathbf{1}_{N_n}) &= \mathbb{E}[\hat{E}_{0,\omega}^{\mathbf{n}}(D(0, \mathbf{n}))\mathbf{1}_{N_n}] \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(\hat{P}_{0,\omega}^{\mathbf{n}}(D(0, \mathbf{n}) > k)\mathbf{1}_{N_n}) \\ &\leq n^{\xi''} + \sum_{k=[n^{\xi''}]+1}^{3n} \mathbb{E}(\hat{P}_{0,\omega}^{\mathbf{n}}(D(0, \mathbf{n}) > k)\mathbf{1}_{N_n}) \\ &\quad + \sum_{k=3n+1}^{\infty} \mathbb{E}(\hat{P}_{0,\omega}^{\mathbf{n}}(D(0, \mathbf{n}) > k)\mathbf{1}_{N_n}) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Pour $n > 1, k > 1$, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_{0,\omega}^{\mathbf{n}}(D(0, \mathbf{n}) > k) &= \hat{P}_{0,\omega}^{\mathbf{n}}(H(\partial C(k, n)) < H(\mathbf{n})) \\
 &\leq \sum_{z \in \partial C(k, n)} \hat{P}_{0,\omega}^{\mathbf{n}}(H(z) < H(\mathbf{n})) \\
 &\leq \sum_{z \in \partial C(k, n)} \frac{e(0, z, \omega)e(z, \mathbf{n}, \omega)}{e(0, \mathbf{n}, \omega)}
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

Alors, le deuxième terme du membre droit de (2.73) (qu'on notera (II)) est borné supérieurement par :

$$\sum_{k=[n^{\xi''}]+1}^{3n} \sum_{z \in \partial C(k, n)} \mathbb{E}\left(\frac{1}{e(0, \mathbf{n}, \omega)} e(0, z, \omega) e(z, \mathbf{n}, \omega) \mathbf{1}_{N_n}\right) \tag{2.75}$$

Pour $[n^{\xi''}] + 1 \leq k \leq 3n$, $z \in \partial C(k, n)$, nous posons :

$$N_{k,z}^1 = \{\omega : a(0, z, \omega) > h(z) - n^{\chi_2}\} = \{\omega : e(0, z, \omega) < \exp(-h(z) + n^{\chi_2})\}$$

Quand $k < 3n$, nous avons $|z| < C_6 n$ pour $z \in \partial C(k, n)$. Alors, puisque $\chi_1 > \chi_a$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}((N_{k,z}^1)^c) &= \mathbb{P}\left(\exp\left(\gamma \frac{h(z) - a(0, z, \omega)}{|z|^{\chi_1}}\right) \geq \exp\left(\gamma \frac{n^{\chi_2}}{|z|^{\chi_1}}\right)\right) \\
 &\leq C_7 \exp(-C_8 n^{\chi_2 - \chi_1})
 \end{aligned}$$

Par conséquence :

$$\mathbb{P}(N_{k,z}^1) \geq 1 - C_7 \exp(-C_8 n^{\chi_2 - \chi_1}) \tag{2.76}$$

Nous posons aussi :

$$N_{k,z}^2 = \{\omega : a(z, \mathbf{n}, \omega) > h(\mathbf{n} - z) - n^{\chi_2}\} = \{\omega : e(z, \mathbf{n}, \omega) < \exp(-h(\mathbf{n} - z) + n^{\chi_2})\}$$

De même, pour $[n^{\xi''}] + 1 \leq k \leq 3n$, $z \in \partial C(k, n)$:

$$\mathbb{P}(N_{k,z}^2) \geq 1 - C_7 \exp(-C_8 n^{\chi_2 - \chi_1}) \tag{2.77}$$

Nous posons maintenant, pour $[n^{\xi''}] + 1 \leq k \leq 3n$, $z \in \partial C(k, n)$:

$$N_{k,z} = N_{k,z}^1 \cap N_{k,z}^2$$

De (2.76) et (2.77) :

$$\mathbb{P}(N_{k,z}^c) \leq C_9 \exp(-C_8 n^{\chi_2 - \chi_1}) \quad (2.78)$$

Alors, pour $[n^{\xi''}] + 1 \leq k \leq 3n$, $z \in \partial C(k, n)$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\frac{1}{e(0, \mathbf{n}, \omega)} e(0, z, \omega) e(z, \mathbf{n}, \omega) \mathbf{1}_{N_n}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{e(0, \mathbf{n}, \omega)} e(0, z, \omega) e(z, \mathbf{n}, \omega) \mathbf{1}_{N_n} \mathbf{1}_{N_{k,z}}\right) + \mathbb{E}\left(\frac{1}{e(0, \mathbf{n}, \omega)} e(0, z, \omega) e(z, \mathbf{n}, \omega) \mathbf{1}_{N_n} \mathbf{1}_{N_{k,z}^c}\right) \\ &\leq \exp(3n^{\chi_2}) \exp(h(\mathbf{n}) - h(z) - h(\mathbf{n} - z)) + \mathbb{P}(N_{k,z}^c) \\ &\leq \exp(3n^{\chi_2}) \exp(h(\mathbf{n}) - h(z) - h(\mathbf{n} - z)) + C_9 \exp(-C_8 n^{\chi_2 - \chi_1}) \end{aligned} \quad (2.79)$$

Utilisons le lemme 2.12, (II) est borné supérieurement par :

$$\begin{aligned} & C_{10} n^d \exp(-C_8 n^{\chi_2 - \chi_1}) + \sum_{k=[n^{\xi''}] + 1}^{3n} C_{10} n^{d-1} \exp(3n^{\chi_2}) \sup_{z \in \partial C(k, n)} \exp(h(\mathbf{n}) - h(z) - h(\mathbf{n} - z)) \\ &\leq C_{10} n^d \exp(-C_8 n^{\chi_2 - \chi_1}) + \sum_{k=[n^{\xi''}] + 1}^{3n} C_{10} n^{d-1} \exp(3n^{\chi_2}) \exp\left(Cn^{\chi_1} \ln n - C_{11} n \left(\sqrt{1 + \frac{k^2}{2n^2}} - 1\right)\right) \\ &\leq C_{10} n^d \exp(-C_8 n^{\chi_2 - \chi_1}) + \sum_{k=[n^{\xi''}] + 1}^{3n} C_{10} n^{d-1} \exp(3n^{\chi_2}) \exp\left(Cn^{\chi_1} \ln n - C_{12} \frac{k^2}{n}\right) \\ &\leq C_{10} n^d \exp(-C_8 n^{\chi_2 - \chi_1}) + \sum_{k=[n^{\xi''}] + 1}^{3n} C_{10} n^{d-1} \exp(3n^{\chi_2}) \exp\left(Cn^{\chi_1} \ln n - C_{12} n^{2\xi'' - 1}\right) \end{aligned}$$

Puisque $0 \leq \chi_a < \chi_1 < \chi_2 < 2\xi'' - 1 < 2\xi' - 1 < 2\xi_b - 1$, nous avons :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (II) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} [C_{10} n^d \exp(-C_8 n^{\chi_2 - \chi_1}) + C_{10} n^d \exp(C_{13} n^{\chi_2} - C_{12} n^{2\xi'' - 1})] = 0 \quad (2.80)$$

Utilisons (2.74), le troisième terme du membre droit de (2.73) (qu'on notera (III)) est borné supérieurement par :

$$(III) \leq \sum_{k=3n+1}^{\infty} \sum_{z \in \partial C(k, n)} \mathbb{E}\left(\frac{1}{e(0, \mathbf{n}, \omega)} e(0, z, \omega) e(z, \mathbf{n}, \omega) \mathbf{1}_{N_n}\right) \quad (2.81)$$

Comme dans les estimations de (II), nous définissons, pour $k \geq (3n + 1)$, $z \in \partial C(k, n)$,

$$\tilde{N}_{k,z}^1 = \{\omega : a(0, z, \omega) > h(z) - k^{\chi_2}\}$$

$$\tilde{N}_{k,z}^2 = \{\omega : a(z, \mathbf{n}, \omega) > h(\mathbf{n} - z) - k^{\chi_2}\}$$

Comme aux équations (2.76) et (2.77), nous avons :

$$\mathbb{P}(\tilde{N}_{k,z}^1) \geq 1 - C_{14} \exp(-C_{15} k^{\chi_2 - \chi_1})$$

$$\mathbb{P}(\tilde{N}_{k,z}^2) \geq 1 - C_{14} \exp(-C_{15} k^{\chi_2 - \chi_1})$$

Pour $k > 3n$, $z \in \partial C(k, n)$, nous posons $\tilde{N}_{k,z} = \tilde{N}_{k,z}^1 \cap \tilde{N}_{k,z}^2$. Alors,

$$\mathbb{P}(\tilde{N}_{k,z}^c) \leq 2C_{14} \exp(-C_{15} k^{\chi_2 - \chi_1}).$$

Pour $k \geq (3n + 1)$, $z \in \partial C(k, n)$, utilisons cette inégalité et le même argument que dans (2.79),

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\frac{1}{e(0, \mathbf{n}, \omega)} e(0, z, \omega) e(z, \mathbf{n}, \omega) \mathbf{1}_{N_n}\right) \\ & \leq \exp(n^{\chi_2} + 2k^{\chi_2}) \exp(h(\mathbf{n}) - h(z) - h(\mathbf{n} - z)) + 2C_{14} \exp(-C_{15} k^{\chi_2 - \chi_1}) \end{aligned}$$

Donc, pour n suffisamment grand, utilisons le lemme 2.12 en notant que $\chi_1 < \chi_2 < 1$:

$$\begin{aligned} (III) & \leq \sum_{k=3n+1}^{\infty} C_{16} k^{d-1} \exp(-C_{15} k^{\chi_2 - \chi_1}) \\ & \quad + \sum_{k=3n+1}^{\infty} C_{17} k^{d-1} \exp\left(2k^{\chi_2} + C_{18} n^{\chi_2} - C_{11} n \left(\sqrt{1 + \frac{k^2}{2n^2}} - 1\right)\right) \\ & \leq C_{19} + \sum_{k=3n+1}^{\infty} C_{17} k^{d-1} \exp\left(2k^{\chi_2} + C_{18} n^{\chi_2} - C_{20}(k + n)\right) \\ & \leq C_{19} + \sum_{k=3n+1}^{\infty} C_{17} k^{d-1} \exp\left(-C_{21}(k + n)\right) \end{aligned}$$

Donc,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (III) \leq C_{19} \tag{2.82}$$

En liant (2.69), (2.72), (2.73), (2.80) et (2.82), nous obtenons (2.66). Une contradiction. Donc $\chi_a \geq 2\xi_b - 1$.

Chapitre III

Mouvement brownien en potentiel poissonnien

Le modèle du mouvement brownien en potentiel poissonnien (MBPP) est étudié dans ce chapitre. Il est constitué de deux sections. Dans la première, nous allons montrer le théorème 3.6 du chapitre 1 sur la continuité des exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à portée finie. Dans la deuxième, les théorèmes 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 du chapitre I des exposants de Lyapunov en MBPP à longue portée sont démontrés en détail.

1 Continuité des exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à portée finie

Le modèle MBPP à portée finie est étudié dans de nombreux articles de Sznitman [Szn94], [Szn95], [Szn96], [Szn98]; de Wüthrich [Wüt98a], [Wüt98c], [Wüt98b], de Rüess [Rue12]... Ce modèle est aussi présenté en détail dans la section 1.3.3 du chapitre I. Mais pour plus facilement suivre la lecture, nous rappelons ici quelques notations importantes. Notons $Z = (Z_s)_{s \geq 0}$ un mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$ dont la mesure et l'espérance de Wiener partant de x sont P_x et E_x , respectivement. Π est un processus de Poisson d'intensité $\nu > 0$ sur $\mathbb{R}^d$ qui est défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et l'espérance est notée $\mathbb{E}$ (voir la définition 1.6). Fixons $W : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction bornée, non négative, mesurable à support compact. Notons r_0 , le rayon de la plus petite boule contenant ce support,

$$r_0 := \inf\{t > 0 : W = 0 \text{ dans } \bar{B}(0, t)^c\} \quad (1.1)$$

Nous supposons de plus que $r_0 > 0$. Comme dans (1.23), pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $\omega \in \Omega$, le potentiel $V(x, \omega)$ est défini comme

$$V(x, \omega) := V(x) := \sum_{x_i \in \Pi(\omega)} W(x - x_i) \quad (1.2)$$

De même que le cas discret, voir les équations (1.24), (1.25), (1.26) du chapitre I, $H(y)$, $y \in \mathbb{R}^d$ dénote le premier temps que le mouvement brownien Z_s entre la boule unité fermée $\bar{B}(y, 1)$ centrée y alors que les quantités basiques sont $e(x, y, \omega) := E_x\left(\exp(-\int_0^{H(y)} V(Z_s, \omega) ds)\right)$, $H(y) < \infty$ et $a(x, y, \omega) := -\ln e(x, y, \omega)$. L'existence des exposants de Lyapunov $\alpha_\nu(x)$ (le théorème 1.13 du chapitre I) est prouvé par [Szn98], c'est la limite presque sûrement et dans $L^1(\mathbb{P})$ de la suite des variables aléatoires $\frac{1}{n}a(0, nx, \omega)$. Nous avons que α est une norme sur $\mathbb{R}^d$ qui ne dépend que de la dimension d et d'intensité ν du processus de Poisson. Notons $(\Pi_n)_{n>0}$ une suite de processus poissonnien d'intensité $\nu_n > 0$ qui sont définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nous allons montrer dans cette section le théorème 3.6 du chapitre I de la continuité de ces exposants de Lyapunov rapport à l'intensité, i.e, $\alpha_{\nu_n} \rightarrow \alpha_\nu$ si $\nu_n, \nu > 0$ et $\nu_n \rightarrow \nu$.

1.1 Propriété de monotonie

Proposition 1.1. *Si $0 < \nu_1 < \nu_2$, on a $\alpha_{\nu_1}(x) \leq \alpha_{\nu_2}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Soient Π_1 et Π_2 deux processus poissonniens d'intensité ν_1 et $\nu_2 - \nu_1$ respectivement tels que Π_1 et Π_2 sont définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. De plus, nous supposons qu'ils sont indépendants. D'après le théorème de superposition 1.10, $\Pi := \Pi_1 \cup \Pi_2$ est un processus poissonnien d'intensité $\nu_2 = \nu_1 + (\nu_2 - \nu_1)$. Comme dans l'équation (1.23) du chapitre 1, nous définissons $V_{\nu_1}(x, \omega) = \sum_{x' \in [\Pi_1(\omega)]} W(x - x')$ et $V_{\nu_2}(x, \omega) = \sum_{x' \in [\Pi(\omega)]} W(x - x')$. Puisque pour $\omega \in \Omega$, $\Pi_1(\omega) \subset \Pi(\omega)$ et W est une fonction non-négative, alors pour tout $\omega \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}^d$, nous avons que $V_{\nu_1}(x, \omega) \leq V_{\nu_2}(x, \omega)$. Par la définition de $a(x, y, \omega)$:

$$\begin{aligned} a(x, y, \omega, \nu_1) &= -\ln E_0\left[\exp\left(-\int_0^{H(kx)} V_{\nu_1}(Z_s, \omega) ds\right), H(y) < \infty\right] \\ &\leq -\ln E_0\left[\exp\left(-\int_0^{H(kx)} V_{\nu_2}(Z_s, \omega) ds\right), H(y) < \infty\right] = a(x, y, \omega, \nu_2) \end{aligned}$$

D'après le théorème 1.13, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\alpha_{\nu_1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}a(0, nx, \omega, \nu_1)}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}a(0, nx, \omega, \nu_2)}{n} = \alpha_{\nu_2}(x).$$

□

1.2 Propriété de continuité : la démonstration du théorème 3.6 du chapitre I

La continuité des exposants de Lyapunov du mouvement brownien en *potentiel aléatoire* a été considérée par Rueß dans [Rue13] et [Rue14]. Dans ces articles, les potentiels sont définis comme des fonctions non-négatives sur un système ergodique quelconque mais ils doivent satisfaire des conditions de régularité (au moins borné) (voir [Rue13]). Ici, Rueß a appliqué sa formule variationnelle pour étudier les questions de la continuité de ces exposants par rapport à la loi du potentiel ou la loi sous-jacente. Il a obtenu que les exposants de Lyapunov sont semi-continus supérieurement mais pas toujours inférieurement. Il a aussi donné des exemples où les exposants de Lyapunov ne sont pas continus.

Mais ces résultats de Rueß n'impliquent pas les nôtres puisque le potentiel présenté dans notre modèle n'est ni régulier, ni même borné. L'argument qu'on utilise pour montrer la continuité des exposants de Lyapunov par rapport à l'intensité du mouvement brownien est similaire à celui de la marche aléatoire en potentiel aléatoire. Mais à cause de la nature du MBPP (par exemple, $V(x)$ et $V(y)$ ne sont pas indépendants si $|x - y| < 2r_0$ et la loi du potentiel n'est pas déterminée par ses exposants de Lyapunov), on n'utilisera donc pas le théorème abstrait 1.2. Mais d'après le théorème de Campbell (le théorème 1.11 du chapitre I), nous avons une relation linéaire entre l'espérance annealed de l'intégrale du potentiel le long des trajectoires du mouvement brownien jusqu'au temps d'atteinte de son but et l'intensité du processus de Poisson (le lemme 1.2). Nous reprenons aussi des propriétés des lois conditionnelles des trajectoires comme dans la proposition 1.7 du chapitre I, avec l'aide du lemme 1.3 ci-dessous qui précise la borne supérieure de la forme $\hat{E}_{0,y}^{\omega,\nu}(H(y))$ du travail de [Szn95]. Par conséquent, nous obtenons une borne supérieure directement de la différence $|\alpha_{\nu_1} - \alpha_{\nu_2}|$ (voir (1.13) et (1.18)).

Lemme 1.2. *Soit Π un processus poissonnien d'intensité ν . Pour P_0 presque toutes les trajectoires d'un mouvement brownien $(Z_s)_{s \geq 0}$, nous avons :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{H(kx)} V(Z_s, \omega) ds\right] = \nu H(kx) \int_{\mathbb{R}^d} W(y) dy \quad (1.3)$$

où $V(x, \omega) = \sum_{x' \in \Pi(\omega)} W(x - x')$.

Démonstration. Ce lemme est un corollaire du théorème de Fubini et du théorème de Campbell (voir le théorème 1.11 du chapitre I). $\square$

Soit Π un processus poissonnien d'intensité ν . Nous donnons maintenant la définition de la

mesure "quenched" qui est utile pour étudier la "continuité",

$$d\hat{P}_{x,y}^{\omega,\nu} = \frac{\mathbf{1}_{\{H(y) < \infty\}}}{e(x,y,\omega)} \exp\left\{-\int_0^{H(y)} V_\nu(Z_s, \omega) ds\right\} dP_x \quad (1.4)$$

En remarquant que ν est l'intensité correspondant au processus poissonnien. Nous notons $\hat{E}_{x,y}^{\omega,\nu}$ l'espérance relativement à $\hat{P}_{x,y}^{\omega,\nu}$.

Lemme 1.3. *Soit $d \geq 3$. Soit Π un processus poissonnien d'intensité $\nu > 0$. Pour tout $l > 8a$ satisfaisant*

$$\sum_{m=1}^{\infty} 9^{dm} p_m(l, \nu) < \infty \quad (1.5)$$

où $p_m(l, \nu) = P(X < \frac{m}{2})$ et X est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres m et $p = 1 - \exp(-\nu(\frac{l}{4})^d)$, il existe alors des réels $c_1(d, W, l), c_2(d, W, l)$ qui ne dépendent que de d, W, l tels que pour tout $y \in \mathbb{Z}^d$, $|y|$ suffisamment grand,

$$\hat{E}_{0,y}^{\omega,\nu}(H(y)) < c_1(d, W, l) + c_2(d, W, l) \cdot a(0, y, \omega, \nu) \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement} \quad (1.6)$$

Démonstration. Ce lemme est montré par [Szn95] mais il ne l'a pas énoncé clairement. Pour en faciliter la vérification, nous reprenons des points importants de [Szn95]. Nous écrivons :

$$H(y) = H_1(y) + H_2(y) + H_3(y)$$

où les définitions des temps d'arrêts H_1, H_2, H_3 sont données par l'équation (1.8) de [Szn95]. Tout d'abord, [Szn95] a montré quand $\nu > 0$ fixé, pour tout l suffisamment grand, l'équation (1.5) est toujours vérifiée (voir la page 1009 de [Szn95]). Et puis pour tout l satisfaisant (1.5), par les théorèmes 1.1 et 1.2 de [Szn95], il existe deux constantes $\gamma_1(d, W, l), \gamma_2(d, W, l)$ telles que $\mathbb{P}$ presque sûrement $\hat{E}_{0,y}^{\omega,\nu}(H_1(y)) \leq \frac{1}{\gamma_1} a(0, y, \omega, \nu)$ et $\hat{E}_{0,y}^{\omega,\nu}(H_3(y)) \leq \frac{1}{\gamma_2} (\ln 2 + a(0, y, \omega, \nu))$. Nous avons aussi une estimation similaire pour $\hat{E}_{0,y}^{\omega,\nu}(H_2(y))$ obtenue de l'équation (2.12) et l'équation suivante (1.30) de [Szn95]. $\square$

Démonstration du théorème 3.6 du chapitre I

Nous écrivons $(\nu_n)_{n \geq 0} = ({}^1\nu_n)_{n \geq 0} \cup ({}^2\nu_n)_{n \geq 0}$ où $({}^1\nu_n)_{n \geq 0}$ et $({}^2\nu_n)_{n \geq 0}$ sont deux sous-suites de $(\nu_n)_{n \geq 0}$ telles que pour tout n , ${}^1\nu_n \geq \nu$ et ${}^2\nu_n < \nu$ et qu'on supposera de longueur infinie. Pour obtenir le théorème 3.6, il nous suffit de montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{{}^1\nu_n} = \alpha_\nu$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{{}^2\nu_n} = \alpha_\nu$.

Tout d'abord, nous montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{{}^1\nu_n} = \alpha_\nu$. Prenons ${}^1\mu_n = {}^1\nu_n - \nu \geq 0$. Soit Π un processus poissonnien d'intensité $\nu > 0$. Pour chaque n , soit ${}^1\Pi_n$ un processus poissonnien d'intensité ${}^1\mu_n$ tel que ${}^1\Pi_n$ et Π sont définis sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et sont indépendants.

III.1 Continuité des exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à portée finie

Nous définissons $\Pi_n := {}^1\Pi_n \cup \Pi$. Par le théorème de superposition 1.10, Π_n est un processus poissonnien d'intensité ${}^1\nu_n = {}^1\mu_n + \nu$ où $\lim_{n \rightarrow \infty} {}^1\mu_n = 0$. Par (1.23) du chapitre 1, les potentiels sont définis, respectivement, par

$$\begin{aligned} V_\nu(x, \omega) &= \sum_{x' \in [\Pi(\omega)]} W(x - x'), \quad ; V_{1\mu_n}(x, \omega) = \sum_{x' \in [{}^1\Pi_n(\omega)]} W(x - x'), \\ V_{1\nu_n}(x, \omega) &= \sum_{x' \in [\Pi_n(\omega)]} W(x - x') = V_\nu(x, \omega) + V_{1\mu_n}(x, \omega) \end{aligned}$$

Par la définition (1.26) du chapitre I, nous avons pour tout $n \geq 1$, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} a(0, kx, \omega, {}^1\nu_n) &= -\ln E_0[\exp(-\int_0^{H(kx)} V_{1\nu_n}(Z_s, \omega) ds), H(kx) < \infty] \\ &= -\ln E_0[\exp(-\int_0^{H(kx)} (V_\nu(Z_s, \omega) + V_{1\mu_n}(Z_s, \omega)) ds), H(kx) < \infty] \\ &= -\ln \hat{E}_{0,\omega}^{kx,\nu}[\exp(-\int_0^{H(kx)} V_{1\mu_n}(Z_s, \omega) ds)] + a(0, kx, \omega, \nu) \\ &\leq \hat{E}_{0,\omega}^{kx,\nu} \int_0^{H(kx)} V_{1\mu_n}(Z_s, \omega) ds + a(0, kx, \omega, \nu). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Prenons l'espérance des deux côtés de (1.7) en faisant $k \rightarrow \infty$:

$$\alpha_{1\nu_n}(x) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \hat{E}_{0,\omega}^{kx,\nu} \int_0^{H(kx)} V_{1\mu_n}(Z_s, \omega) ds}{k} + \alpha_\nu(x) \quad (1.8)$$

D'après le théorème de Fubini et l'indépendance de V_ν et $V_{1\mu_n}$, nous avons aussi que :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \hat{E}_{0,\omega}^{kx,\nu} \int_0^{H(kx)} V_{1\mu_n}(Z_s, \omega) ds \\ &= \mathbb{E} E_0 \left(\frac{\int_0^{H(kx)} V_{1\mu_n}(Z_s, \omega) ds \exp(-\int_0^{H(kx)} V_\nu(Z_s, \omega) ds), H(kx) < \infty}{e(0, kx, \omega, \nu)} \right) \\ &= E_0 \left[\mathbb{E} \left(\int_0^{H(kx)} V_{1\mu_n}(Z_s, \omega) ds \right) \mathbb{E} \left(\frac{\exp(-\int_0^{H(kx)} V_\nu(Z_s, \omega) ds), H(kx) < \infty}{e(0, kx, \omega, \nu)} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.9)$$

D'après le lemme 1.2, nous avons :

$$\mathbb{E} \hat{E}_{0,\omega}^{kx,\nu} \int_0^{H(kx)} V_{1\mu_n}(Z_s, \omega) ds = {}^1\mu_n \int_{\mathbb{R}^d} W(y) dy \cdot \mathbb{E} \hat{E}_{0,\omega}^{kx,\nu}(H(kx)) \quad (1.10)$$

Chapitre III. Mouvement brownien en potentiel poissonnien

En combinant (1.10) et (1.8),

$$\alpha_{1\nu_n}(x) \leq \alpha_\nu(x) + {}^1\mu_n \int_{\mathbb{R}^d} W(y)dy \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}\hat{E}_{0,\omega}^{kx,\nu}(H(kx))}{k} \quad (1.11)$$

Appliquons le lemme 1.3, il existe deux constantes $c_1(d, W, \nu)$ et $c_2(d, W, \nu)$ telles que :

$$\hat{E}_{0,\omega}^{kx,\nu}(H(kx)) \leq c_1(d, W, \nu) + c_2(d, W, \nu)a(0, kx, \omega) \quad (1.12)$$

En combinant (1.11), (1.12) et la propriété de monotonie de α (la proposition 1.1),

$$\begin{aligned} \alpha_\nu(x) &\leq \alpha_{1\nu_n}(x) \leq \alpha_\nu(x) + {}^1\mu_n \int_{\mathbb{R}^d} W(y)dy \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left(c_1(d, W, \nu) + c_2(d, W, \nu) \cdot \mathbb{E}(a(0, kx, \omega, \nu)) \right) \\ &\leq \alpha_\nu(x) + {}^1\mu_n \int_{\mathbb{R}^d} W(y)dy \cdot c_2(d, W, \nu) \cdot \alpha_\nu(x) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Prenons maintenant $n \rightarrow \infty$ en remarquant que $\lim_{n \rightarrow \infty} {}^1\mu_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{1\nu_n} = \alpha_\nu$.

Nous montrons ensuite que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{2\nu_n} = \alpha_\nu$. Prenons ${}^2\mu_n = \nu - {}^2\nu_n \geq 0$. Pour chaque n , soient Π_n^* et ${}^2\Pi_n$ deux processus poissonniens d'intensité ${}^2\nu_n$, et ${}^2\mu_n$, respectivement. De plus, nous pouvons supposer que Π_n^* et ${}^2\Pi_n$ sont indépendants. Posons $\Pi_n := \Pi_n^* \cup {}^2\Pi_n$. Alors, pour tout n , Π_n est un processus poissonnien d'intensité $\nu = {}^2\mu_n + {}^2\nu_n$ où $\lim_{n \rightarrow \infty} {}^2\mu_n = 0$. En utilisant les mêmes arguments que ci-dessus, nous avons comme au (1.11), pour tout $n \geq 1$,

$$\alpha_{2\nu_n}(x) \leq \alpha_\nu(x) \leq \alpha_{2\nu_n}(x) + {}^2\mu_n \int_{\mathbb{R}^d} W(y)dy \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \frac{\hat{E}_{0,\omega}^{kx, {}^2\nu_n}(H(kx))}{k} \quad (1.14)$$

Le lemme 1.3 donne une borne supérieure de $\hat{E}_{0,\omega}^{kx, {}^2\nu_n}(H(kx))$ dont les constantes dépendent d'un paramètre l qui satisfait (1.5). Pour ${}^2\nu_n \rightarrow \nu$, nous allons montrer qu'il existe une valeur de l pour laquelle

$$\sum_{m=1}^{\infty} 9^{dm} p_m^n(l, {}^2\nu_n) < \infty \quad (1.15)$$

pour tout n suffisamment grand, où $p_m^n(l, {}^2\nu_n) := P(X_n < \frac{m}{2})$, X_n est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres m et $p_n = 1 - \exp(-{}^2\nu_n(\frac{l}{4})^d)$. En effet, puisque ${}^2\nu_n \rightarrow \nu > 0$, il existe deux constantes $M_1, M_2 > 0$ qui ne dépendent pas de n et qui satisfont $\nu_n < M_1$ et $\frac{1}{({}^2\nu_n)^{1/d}} < M_2$ pour tout n . Nous posons

$$l = 4M_2[\ln(\frac{1}{1 - c_1(d)})]^{1/d} \quad (1.16)$$

III.2 Exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à longue portée

où $c_1(d) = \frac{1+\sqrt{1-9^{-4d}}}{2}$. Notons que l ne dépend pas de n . Nous expliquons maintenant que la constante l donnée par (1.16) satisfait (1.15). Puisque $p_n = 1 - \exp(-2\nu_n(\frac{l}{4})^d)$, alors $1 > p_n > c_1(d) > \frac{1}{2}$ pour tout n . D'après une estimation pour la loi binomiale de Arratia et Gordon [AG89], nous avons, pour tout n et pour tout m , $p_m^n(l, 2\nu_n) = P(X_n < \frac{m}{2}) \leq \exp(-m(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2p_n} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2(1-p_n)})) < 9^{-2dm}$. Donc, (1.15) est satisfaite avec l donné par (1.16). D'après le lemme 1.3, il existe deux constantes $c_1(d, W, l), c_2(d, W, l)$ telles que pour tout n suffisamment grand,

$$\hat{E}_{0,\omega}^{kx, 2\nu_n}(H(kx)) \leq c_1(d, W, l) + c_2(d, W, l) \cdot a(0, kx, \omega, 2\nu_n)(x) \quad (1.17)$$

De (1.14) et (1.17), nous avons,

$$\begin{aligned} \alpha_{2\nu_n}(x) &\leq \alpha_\nu(x) \leq \alpha_{2\nu_n}(x) + 2\mu_n \int_{\mathbb{R}^d} W(y)dy \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} [c_1(d, W, l) + c_2(d, W, l) \mathbb{E}(a(0, kx, \omega, 2\nu_n))] \\ &\leq \alpha_{2\nu_n}(x) + 2\mu_n \int_{\mathbb{R}^d} W(y)dy \cdot [c_2(d, W, l) \alpha_{2\nu_n}(x)] \\ &\leq \alpha_{2\nu_n}(x) + 2\mu_n \int_{\mathbb{R}^d} W(y)dy \cdot [c_2(d, W, l) \sqrt{2(1 + \lambda_d + 2\nu_n |W|_\infty^2 \mathcal{L}(\bar{B}(0, r_0 + 2)) |x|}] \\ &\leq \alpha_{2\nu_n}(x) + 2\mu_n \int_{\mathbb{R}^d} W(y)dy \cdot [c_2(d, W, l) \sqrt{2(1 + \lambda_d + M_1 |W|_\infty \mathcal{L}(\bar{B}(0, r_0 + 2)) |x|}] \end{aligned} \quad (1.18)$$

Remarquons que nous avons utilisé (1.28) du chapitre I pour la troisième inégalité de (1.18). Prenons $n \rightarrow \infty$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{2\nu_n} = \alpha_\nu$.

2 Exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à longue portée

Nous étudions ici un modèle introduit par Lacoïn dans [Lac12a] et [Lac12b] où des corrélations entre les potentiels sont présentes. La principale différence avec le cas à portée finie est que les potentiels $V(x)$ et $V(y)$ ne sont pas indépendants même si x et y sont très éloignés. Des techniques familières utilisant l'indépendance ne peuvent pas être appliquées. À l'aide de techniques de théorie potentiel et de théorie ergodique, nous allons montrer dans cette section l'existence des exposants de Lyapunov, un théorème de forme limite et nous les utiliserons pour obtenir une estimation des grandes déviations.

2.1 Modèle

Soit Π un processus de Poisson de mesure d'intensité $Q := \rho = \mathcal{L} \times \varsigma$ sur $S = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$, où $\mathcal{L}$ est la mesure Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $\varsigma = \varsigma_\delta$ est la mesure probabilité sur $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall r \geq 1, \varsigma([r, \infty[) = r^{-\delta} \quad (2.1)$$

pour $\delta > 0$ (δ est un paramètre du modèle). Comme dans la remarque 1.9, nous identifions $\Pi(\omega)$ avec $\omega = (\omega_i, r_i), \omega_i \in \mathbb{R}^d, r_i > 0$ et nous écrivons :

$$\Omega = \{\omega := \{(\omega_i, r_i) : i \in \mathbb{N}^+, \omega_i \in \mathbb{R}^d, r_i \in \mathbb{R}^+\}\}$$

Nous indexons les points du nuage de Poisson dans Ω telle que $|\omega_i|$ soit une suite croissante. On définit de même la tribu $\mathcal{F}$ et la probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Nous notons $\mathbb{E}$ l'espérance par rapport à la loi $\mathbb{P}$ du processus de Poisson. Pour $\gamma > 0$, soit $V : \mathbb{R}^d \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tel que :

$$V(x, \omega) := \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|x - \omega_i| < r_i\}} \quad (2.2)$$

Notons $\mathcal{L}_d$ le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^d$.

Proposition 2.1. *$V(x, \omega) < \infty$, pour presque toutes réalisations de ω et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si :*

$$\delta + \gamma - d > 0 \quad (2.3)$$

De plus, si (2.3) est vérifiée,

$$\mathbb{E}[V(x, \cdot)] = \frac{\mathcal{L}_d \delta}{\gamma + \delta - d} \quad (2.4)$$

$$\mathbb{V}ar[V(x, \cdot)] = \frac{\mathcal{L}_d \delta}{2\gamma + \delta - d} \quad (2.5)$$

et pour tout $s > 0, a \in \mathbb{C}$,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(a \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|\omega_i| \leq r_i + s\}}\right)\right] = \exp\left(\int_1^{\infty} \delta \mathcal{L}_d(r + s)^d r^{-\delta-1} (e^{ar^{-\gamma}} - 1) dr\right) \quad (2.6)$$

Démonstration. Fixons $x \in \mathbb{R}^d$. Prenons $f : \mathbb{R}^d \times [1, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(u, r) = r^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|x - u| \leq r\}}$ avec $u \in \mathbb{R}^d$ et $r \geq 1$. Appliquons le théorème de Campbell, le potentiel $V(x, \omega) < \infty$ si et

III.2 Exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à longue portée

seulement si (1.14) est satisfaite, c'est-à-dire :

$$\int \int_{\mathbb{R}^d \times [1, \infty]} f(u, r) d(\mathcal{L} \times \varsigma)(u, r) < \infty \quad (2.7)$$

Puisque $|f(u, r)| \leq 1$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ et $r \geq 1$. Nous avons

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathbb{R}^d \times [1, \infty]} f(u, r) d(\mathcal{L} \times \nu)(u, r) &= \int_1^\infty r^{-\gamma} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{|x-u| \leq r\}} du d\varsigma(r) \\ &= \int_1^\infty r^{-\gamma} \mathcal{L}_d r^d d\varsigma(r) \\ &= \int_1^\infty \mathcal{L}_d r^{d-\gamma} \delta r^{-\delta-1} dr \\ &= \mathcal{L}_d \delta \int_1^\infty r^{d-\gamma-\delta-1} dr < \infty \end{aligned} \quad (2.8)$$

si et seulement si $\gamma + \delta - d > 0$. De plus, appliquons aussi le théorème de Campbell,

$$\mathbb{E}(V(x, \cdot)) = \int \int_{\mathbb{R}^d \times [1, \infty]} f(u, r) d(\mathcal{L} \times \varsigma)(u, r) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \gamma + \delta - d < 0 \\ \frac{\mathcal{L}_d \delta}{\gamma + \delta - d} & \text{si } \gamma + \delta - d > 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Nous rappelons que $\mathcal{L}_d$ est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^d$. De même pour (2.5) et (2.6). $\square$

Proposition 2.2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe deux constantes positives $C_1(d, \delta, \gamma)$, $C_2(d, \delta, \gamma)$ telles que :*

$$C_1 |x|^{d-\delta-2\gamma} \leq \text{Cov}(V(0, \cdot), V(x, \cdot)) \leq C_2 |x|^{d-\delta-2\gamma} \quad (2.10)$$

Démonstration. Prenons f_1, f_2 deux applications de l'espace $\mathbb{R}^d \times [1, \infty]$ à $\mathbb{R}$ telle que $f_1(u, r) = r^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|u| \leq r\}}$ et $f_2(u, r) = r^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|x-u| \leq r\}}$ avec $u \in \mathbb{R}^d$ et $r \geq 1$. Évidemment $|f_1(u, r)| < 1$ et $|f_2(u, r)| < 1$. Alors, sous la condition $\delta + \gamma - d > 0$:

$$\int \int_{\mathbb{R}^d \times [1, \infty]} f_i^2(u, r) d(\mathcal{L} \times \varsigma)(u, r) < \int \int_{\mathbb{R}^d \times [1, \infty]} f_i(u, r) d(\mathcal{L} \times \varsigma)(u, r) < \infty \quad (2.11)$$

pour $i = 1, 2$. Appliquons maintenant le corollaire 1.12 du chapitre I en notant que $\mathbb{E}[V(x, \omega)] = \frac{\mathcal{L}_d \delta}{\delta + \gamma - d}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $|x|$ assez grand :

$$\begin{aligned} &\text{Cov}(V(0, \omega), V(x, \omega)) \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^d \times [1, \infty]} f_1(u, r) f_2(u, r) d(\mathcal{L} \times \nu)(u, r) = \int_1^\infty r^{-2\gamma} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{|u| < r\}} \mathbf{1}_{\{|x-u| < r\}} du d\nu(r) \\ &= \int_1^\infty \delta r^{-2\gamma-\delta-1} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{|u| < r\}} \mathbf{1}_{\{|x-u| < r\}} du dr \end{aligned} \quad (2.12)$$

On donne une borne supérieure du membre de droite de (2.12)

$$\begin{aligned}
& \int_1^\infty \delta r^{-2\gamma-\delta-1} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{|u|<r\}} \mathbf{1}_{\{|x-u|<r\}} dudr \\
&= \int_1^{\frac{|x|}{2}} \delta r^{-2\gamma-\delta-1} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{|u|<r\}} \mathbf{1}_{\{|x-u|<r\}} dudr + \int_{\frac{|x|}{2}}^\infty \delta r^{-2\gamma-\delta-1} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{|u|<r\}} \mathbf{1}_{\{|x-u|<r\}} dudr \\
&= \int_{\frac{|x|}{2}}^\infty \delta r^{-2\gamma-\delta-1} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{|u|<r\}} \mathbf{1}_{\{|x-u|<r\}} dudr \leq \int_{\frac{|x|}{2}}^\infty \delta r^{-2\gamma-\delta-1} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{|u|<r\}} dudr \\
&\leq \frac{\mathcal{L}_d \delta}{2^d(\delta + 2\gamma - d)} |x|^{d-\delta-2\gamma}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Pour une borne inférieure :

$$\begin{aligned}
& \int_1^\infty \delta r^{-2\gamma-\delta-1} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{|u|<r\}} \mathbf{1}_{\{|x-u|<r\}} dudr \\
&\geq \int_{4|x|}^\infty \delta r^{-2\gamma-\delta-1} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{|u|<r\}} \mathbf{1}_{\{|x-u|<r\}} dudr \geq \int_{4|x|}^\infty \delta r^{-2\gamma-\delta-1} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{|u|<\frac{r}{2}\}} dudr \\
&= \frac{\mathcal{L}_d \delta}{2^d 4^{\delta+2\gamma-d}(\delta + 2\gamma - d)} |x|^{d-\delta-2\gamma}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

De (2.12), (2.13) et (2.14), on obtient (2.10). $\square$

D'après la proposition (2.2), notre construction est une manière naturelle d'obtenir un potentiel avec une corrélation qui décroît comme une puissance de la distance et qui est construit à partir d'un processus de Poisson.

Soit $Z = (Z_s)_{s \geq 0}$ un mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Nous notons P_x la mesure de Wiener partant de x , $x \in \mathbb{R}^d$ et E_x l'espérance par rapport à P_x . Pour $y \in \mathbb{R}^d$, on définit :

$$H(y) = \inf\{s \geq 0 : Z_s \in \bar{B}(y, 1)\} \tag{2.15}$$

où $B(y, 1)$ est la boule ouverte de rayon 1 centrée en y et $\bar{B}(y, 1)$ est sa fermeture. Maintenant on est prêt à donner les définitions des quantités importantes du modèle avec lesquelles nous allons travailler. Pour $\lambda \geq 0$, on définit,

$$e_\lambda(x, y, \omega) = E_x[\exp(-\int_0^{H(y)} (\lambda + V(Z_s, \omega)) ds), H(y) < \infty] \tag{2.16}$$

De même que (1.2) dans le chapitre II, $e(x, y, \omega)$ s'interprète comme la probabilité que le mouvement brownien partant de x atteigne $\bar{B}(y, 1)$ avant d'être tué. Puisque $e(x, y, \omega)$ décroît

III.2 Exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à longue portée

à une vitesse exponentielle lorsque $|x - y|$ tend vers l'infinie. On définit,

$$a_\lambda(x, y, \omega) = -\ln e_\lambda(x, y, \omega) \quad (2.17)$$

Il y a un peu différence avec le cas discret de la MAPA, $a(x, y, \omega)$ ne vérifie pas la propriété sous-additive. Donc, nous nous intéressons à $\bar{a}(x, y, \omega)$, une approximation de a ,

$$\bar{a}_\lambda(x, y, \omega) = -\inf_{B(x,1)} \ln e_\lambda(\cdot, y, \omega) \quad (2.18)$$

La quantité $d_\lambda(x, y, \omega)$ définie ci-dessous est une distance sur $\mathbb{R}^d$ (voir le lemme 2.9). Nous allons l'utiliser au lieu de $a(x, y, \omega)$ dans notre démonstration de l'existence de l'exposant de Lyapunov quenched.

$$d_\lambda(x, y, \omega) = \max(\bar{a}_\lambda(x, y, \omega), \bar{a}_\lambda(y, x, \omega)) \quad (2.19)$$

Si $\delta + \gamma - d > 0$, nous avons que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $s > 0$

$$\sup_{B(x,s)} V(\cdot, \omega) \text{ est fini } \mathbb{P}\text{-p.s} \quad (2.20)$$

(voir l'argument dans (2.83) et (2.84) de cette section). Alors, pour tout $N > 0$, $\mathbb{P}$ presque sûrement, $V(\cdot, \omega)$ est borné dans $B(0, N + 1)$. Alors par la définition (2.4) de l'espace K_d^{loc} , $V(x, \omega) \in K_d^{loc}$ $\mathbb{P}$ -presque sûrement.

Nous supposons toujours dans cette section que $\delta + \gamma - d > 0$.

2.2 Un système ergodique sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Quelques connaissances de théorie ergodique sont nécessaires pour notre démonstration de l'existence des exposants de Lyapunov. Pour $z \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$, nous définissons : $\tau_z^t : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}, (x, r) \mapsto (x + tz, r)$ et

$$T_z^t : \Omega \rightarrow \Omega, (\omega) = \{(\omega_i, r_i), i \geq 0\} \mapsto \{\tau_z^t(\omega_i, r_i), i \geq 0\}. \quad (2.21)$$

Nous écrivons $T_z := T_z^1$. Pour f mesurable sur $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+), \rho)$, par changement de variable, nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_1^\infty f(T_z^t(x, r)) dx d\zeta(r) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_1^\infty f(x, r) dx d\zeta(r).$$

Chapitre III. Mouvement brownien en potentiel poissonnien

Alors, pour tout $z \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$, τ_z^t préserve la mesure ρ . Donc pour $z \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$, T_z^t préserve la mesure $\mathbb{P}$.

Remarque 2.3. Par définition du potentiel $V(x, \omega) := \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|x-\omega_i| < r_i\}}$, nous avons que pour tout $x, z \in \mathbb{R}^d$, $V(x, T_{-z}\omega) = V(x+z, \omega)$. Et alors, pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} e_\lambda(x, y, T_{-z}\omega) &:= E_x \left(\exp \left[- \int_0^{H(y)} (\lambda + V(Z_s, T_{-z}\omega)) ds \right], H(y) < \infty \right) \\ &= E_x \left(\exp \left[- \int_0^{H(y)} (\lambda + V(z + Z_s, \omega)) ds \right], H(y) < \infty \right) \\ &= e_\lambda(x+z, y+z, \omega) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Lemme 2.4. Pour tout $z \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T_z)$ est un système dynamique ergodique.

Démonstration. Si $z = (z_1, z_2, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, il existe $i \geq 1$ tel que $z_i \neq 0$. Posons :

$$A_0 = \{x \in \mathbb{R}^d : |x_i| \leq \min(1, |z_i|)\} \times \mathbb{R}$$

Alors,

(i) $\cup_{t_1 \leq t \leq t_2} \tau_z^t A_0$ est mesurable pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) $\cup_{-\infty < t < \infty} \tau_z^t A_0 = \mathbb{R}^{d+1}$

(iii) $A_0 \cap \tau_z^t A_0 = \emptyset$ pour tout $|t| > 2$

Grâce au théorème 1 et à la définition 2 de Kornfel'd, Sinai et Fomin dans [KSF82] (page 197), pour $z \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, le système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T_z^t, t \in \mathbb{R})$ est un système mélangeant. Alors, pour $f, g \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $z \in \mathbb{R}^d$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(\omega) g(T_z^t \omega) d\mathbb{P} = \int_{\Omega} f d\mathbb{P} \int_{\Omega} g d\mathbb{P}$$

En particulier, pour $f, g \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, pour $z \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(\omega) g(T_z^n \omega) d\mathbb{P} = \int_{\Omega} f d\mathbb{P} \int_{\Omega} g d\mathbb{P} \quad (2.23)$$

Supposons maintenant que f est une fonction de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle qu'il existe $z \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ pour lequel $f(\omega) = f(T_z(\omega))$ $\mathbb{P}$ -presque sûrement. Alors $f(T_z^n \omega) = f(\omega)$ $\mathbb{P}$ -presque sûrement pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, $\int_{\Omega} f^2(\omega) d\mathbb{P} = (\int_{\Omega} f d\mathbb{P})^2$ par (2.23). Donc, f est une constante $\mathbb{P}$ -presque sûrement. Donc le système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T_z, z \in \mathbb{R}^d)$ est ergodique. $\square$

2.3 Asymptotiques de Wiener

Nous étudions dans cette section des propriétés des asymptotiques de Wiener qui sont utiles pour montrer l'existence des exposants de Lyapunov et pour établir une estimation des grandes déviations. Tout d'abord, nous définissons :

la probabilité de survie quenched jusqu'au temps t du mouvement brownien en potentiel V :

$$S_{t,\omega} = E_0 \left[\exp \left(- \int_0^t V(Z_s, \omega) ds \right) \right], \quad t \geq 0, \omega \in \Omega \quad (2.24)$$

et la probabilité de survie annealed jusqu'au temps t du mouvement brownien en potentiel V

$$S_t = \mathbb{E}[S_{t,\omega}] = \mathbb{E} E_0 \left[\exp \left(- \int_0^t V(Z_s, \omega) \right) \right], \quad t \geq 0 \quad (2.25)$$

Pour $l > 0$, notons :

$$(-l, l)^d = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, -l < x_i < l, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq d\}.$$

Le lemme 2.5 ci dessous joue le rôle du lemme 5.2 de [Szn98] dont la démonstration est basée sur le lemme de Borel-Cantelli. Mais cette méthode qui utilise la propriété d'indépendance ne fonctionne pas pour notre modèle. Nous la remplaçons alors par l'estimation (2.26) avec l'aide du théorème de Campbell qui donne la formule explicite de l'espérance du potentiel. Ce qu'on obtient dans le lemme 2.5 est moins fort que [Szn98] et alors nous n'avons pas la vitesse de convergence de la probabilité de survie $S(t, \omega)$ quand $t \rightarrow \infty$ pour notre modèle comme le théorème 4.5.1 de [Szn98]. Mais avec ce lemme, nous aurons $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\ln S_{t,\omega}}{t} = 0$, $\mathbb{P}$ -presque sûrement, (le lemme 2.6) qui est une partie importante dans la démonstration de la proposition 3.10 de grandes déviations.

Lemme 2.5. *Supposons $\delta > \frac{4d}{3}$. Il existe deux constantes $c_1 > 0, \epsilon > 0$ telles que pour tout l suffisamment grand, il existe un ensemble $A^{(l)} \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A^{(l)}) > \epsilon$, pour tout $\omega \in A^{(l)}$, $(-l, l)^d$ contient une boule de rayon $R := R_l$ où $R_l > c_1 (\ln l)^{\frac{1}{d}}$ et sur laquelle $V(\cdot, \omega) = 0$.*

Démonstration. Nous découpons $(-l, l)^d$ en cubes de taille $2R$. Les centres de ces cubes sont numérotés $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$, $n = (\frac{l}{R})^d$ respectivement. Notons $B(x^{(k)}, R)$ la boule de centre $x^{(k)}$ et de rayon R . Nous définissons, pour $1 \leq k \leq n$:

$$A_k = \{V(z, \cdot) = 0, \forall z \in B(x^{(k)}, R)\}$$

Chapitre III. Mouvement brownien en potentiel poissonnien

Posons $A^{(l)} = \cup_{k=1}^n A_k$. Nous utilisons pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^n A_k) \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1 \leq k < j \leq n} \mathbb{P}(A_k \cap A_j) \quad (2.26)$$

Nous avons pour $1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_k) &= \mathbb{P}(\omega : B(\omega_i, r_i) \cap B(x^{(k)}, R) = \emptyset, \text{ pour tout } i \geq 1) \\ &= \mathbb{P}\left(\omega : \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{|u-x^{(k)}| \leq r+R\}}(\omega_i, r_i) = 0\right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Notons $\mathcal{L}_d := \mathcal{L}(B(0,1))$ la mesure Lebesgue de la boule unité de $\mathbb{R}^d$. Donc pour $r > 0$ $\mathcal{L}(B(0,r)) = \mathcal{L}_d r^d$. D'après le théorème de Campbell, $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{|u-x^{(k)}| < r+R\}}(\omega_i, r_i)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\rho_R = \int_1^{\infty} \mathcal{L}_d(r+R)^d d\zeta(r)$. Puisque

$$\int \mathcal{L}_d(r+R)^d d\zeta(r) = \int \mathcal{L}_d \delta(r+R)^d r^{-\delta-1} dr = \delta \mathcal{L}_d \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} R^{d-k} \int r^{k-\delta-1} dr \quad (2.28)$$

Alors,

$$\mathcal{L}_d(R+1)^d \leq \rho_R \leq \frac{\delta}{\delta-d} \mathcal{L}_d(R+1)^d \quad (2.29)$$

Puisque,

$$\begin{aligned} A_k \cap A_j &= \{V(z, \cdot) = 0, \forall z \in B(x^{(k)}, R) \cup B(x^{(j)}, R)\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mathbf{1}_{\{|\omega_i - x^{(k)}| \leq r_i + R\}} + \mathbf{1}_{\{|\omega_i - x^{(j)}| \leq r_i + R\}} \right) = 0 \right\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Alors,

$$\mathbb{P}(A_k \cap A_j) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{|u-x^{(k)}| \leq r+R\}} \Delta \mathbf{1}_{\{|u-x^{(j)}| \leq r+R\}}(\omega_i, r_i) = 0\right) \quad (2.31)$$

où $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Remarquons que $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{|u-x^{(k)}| \leq r+R\}} \Delta \mathbf{1}_{\{|u-x^{(j)}| \leq r+R\}}$ suit une loi de Poisson de paramètre :

$$\bar{\rho}_R = \int_1^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{|u-x^{(k)}| \leq r+R\}} \Delta \mathbf{1}_{\{|u-x^{(j)}| \leq r+R\}} du \right) \delta r^{-\delta-1} dr \quad (2.32)$$

Donc,

$$\mathbb{P}(A_k \cap A_j) \leq \exp(-\bar{\rho}_R) \quad (2.33)$$

(i) Si $|x^{(k)} - x^{(j)}| = 2R$, nous pouvons choisir un réel $R_0 = cR$ ($0 < c < 1$ est une

III.2 Exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à longue portée

constante) tel que pour tout $1 \leq r \leq R_0$, $L_{r+R}^{k,j} := \mathcal{L}(B(x^{(k)}, r+R) \cap B(x^{(j)}, r+R)) < \frac{1}{8} \mathcal{L}(B(0, r+R))$. Alors, utilisons (2.28)

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}_R &= \int_1^\infty (2\mathcal{L}_d(r+R)^d - 2L_{r+R}^{k,i}) \delta r^{-\delta-1} dr \\
&\geq \int_1^{R_0} (2\mathcal{L}_d(r+R)^d - \frac{1}{4}\mathcal{L}_d(r+R)^d) \delta r^{-\delta-1} dr + \int_{R_0}^\infty (2\mathcal{L}_d(r+R)^d - 2L_{r+R}^{k,i}) \delta r^{-\delta-1} dr \\
&\geq 2 \int_1^\infty \mathcal{L}_d(r+R)^d \delta r^{-\delta-1} dr - \frac{1}{4} \int_1^{R_0} \mathcal{L}_d(r+R)^d \delta r^{-\delta-1} dr - 2 \int_{R_0}^\infty \mathcal{L}_d(r+R)^d \delta r^{-\delta-1} dr \\
&\geq 2\rho_R - \frac{1}{4} \frac{\delta}{\delta-d} \mathcal{L}_d(R+1)^d + \frac{1}{4} \mathcal{L}_d(R+R_0)^d R_0^{-\delta} - 2 \frac{\delta}{\delta-d} \mathcal{L}_d(R+R_0)^d R_0^{-\delta} \quad (2.34)
\end{aligned}$$

(ii) si $|x^{(k)} - x^{(j)}| > 2R$, alors $R_{k,j} := \frac{|x^{(k)} - x^{(j)}| - 2R}{2} > 1$. De même qu'à (2.34),

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}_R &= \int_1^\infty (2\mathcal{L}_d(r+R)^d - 2L_{r+R}^{k,i}) \delta r^{-\delta-1} dr \\
&= 2\rho_R - 2 \int_{R_{k,j}}^\infty L_{r+R}^{k,i} \delta r^{-\delta-1} dr \geq 2\rho_R - 2 \int_{R_{k,j}}^\infty \mathcal{L}_d(r+R)^d \delta r^{-\delta-1} dr \\
&\geq 2\rho_R - c_1(d) \frac{2^\delta}{\delta-d} R^{d-\delta} \quad (2.35)
\end{aligned}$$

De (2.26), (2.33), (2.34) et (2.35), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\cup_{k=1}^n A_k) &\geq n \exp(-\rho_R) - dn \left[\exp \left(-2\rho_R + \frac{1}{4} \frac{\delta}{\delta-d} \mathcal{L}_d(R+1)^d + \frac{7\delta+d}{4(\delta-d)} \mathcal{L}_d(R+R_0)^d R_0^{-\delta} \right) \right] \\
&\quad - n^2 \exp(-2\rho_R + c_1 \frac{2^\delta}{\delta-d} R^{d-\delta}) \quad (2.36)
\end{aligned}$$

En remarquant que $R_0 = cR$, où c est une constante qui ne dépend que d , et $\delta > d$, nous avons :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{7\delta+d}{4(\delta-d)} \mathcal{L}_d(R+R_0)^d R_0^{-\delta} = 0 \quad (2.37)$$

Par (2.29) en notant que $n = (\frac{l}{R})^d$, nous pouvons trouver deux constantes positives c_1, c_2 telles que avec $c_1(\ln l)^{\frac{1}{d}} < R < c_2(\ln l)^{\frac{1}{d}}$, on a :

$$\frac{1}{16} < n \exp(-\rho_R) < \frac{3}{16}$$

Alors, utilisons (2.37), (2.29) en notant que $\delta > \frac{4d}{3}$ nous obtenons de (2.36), pour l suffisamment

Chapitre III. Mouvement brownien en potentiel poissonnien

grand, pour $c_1(\ln l)^{\frac{1}{d}} < R < c_2(\ln l)^{\frac{1}{d}}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\cup_{k=1}^n A_k) &\geq n \exp(-\rho_R) - c_2 n \exp(-\rho_R - \mathcal{L}_d(R+1)^d) + \frac{1}{4} \frac{\delta}{\delta - d} \mathcal{L}_d(R+1)^d - 2n^2 \exp(-2\rho_R) \\ &\geq \frac{n}{2} \exp(-\rho_R) - 2n^2 \exp(-2\rho_R) > \frac{3}{128} \end{aligned} \quad (2.38)$$

□

Comme un corollaire du lemme 2.5 et du théorème 2.14 du chapitre I de la valeur propre principale de Dirichlet, nous obtenons le lemme 2.6 suivant qui sert à la démonstration d'une estimation de grande déviation du théorème 3.10 du chapitre I.

Lemme 2.6. *Supposons $\delta > \frac{4d}{3}$. Alors,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\ln S_{t,\omega}}{t} = 0 \quad \mathbb{P} \text{ presque sûrement} \quad (2.39)$$

Démonstration. Prenons l suffisamment grand tel que le lemme 2.5 est vrai. Nous posons $A := \limsup_{l \rightarrow \infty} A^{(l)}$ où $A^{(l)}$ est l'ensemble de l'énoncé du lemme 2.5. D'après le lemme 2.5, il existe une constante $\epsilon > 0$ telle que $\mathbb{P}(A^{(l)}) > \epsilon$ pour tout l suffisamment grand. Alors $\mathbb{P}(A) > 0$. Par conséquence, pour tout $\omega \in A$, il existe une suite $\{l_k\} \rightarrow \infty$ et une suite de boule $\{B(u_k, R_k)\}_{k>0}$ de $\mathbb{R}^d$, où $R_k > c_1(\ln l_k)^{\frac{1}{d}}$ et $V(\cdot, \omega) = 0$ sur $B(u_k, R_k)$. Alors, pour tout $\omega \in A$, il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\lambda_{V(\omega)}(\mathbb{R}^d) \leq \lambda_{V(\omega)}(B(u_k, R_k)) = \lambda_{V \equiv 0}(B(u_k, R_k)) \leq \frac{c}{R_k^2}$$

Nous rappelons que pour un ensemble ouvert U de $\mathbb{R}^d$, $0 \leq V \in K_d^{loc}$, $\lambda_V(U)$ est la valeur propre principale Dirichlet de $-\frac{1}{2}\Delta + V$ dans U (voir la définition (2.13) du chapitre 1). Prenons $l_k \rightarrow \infty$, nous obtenons, pour tout $\omega \in A$,

$$\lambda_{V(\omega)}(\mathbb{R}^d) = 0 \quad (2.40)$$

Nous avons que pour tout $z \in \mathbb{R}^d$, $V(x, T_{-z}\omega) = V(x+z, \omega)$ pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ où $T_z := T_z^1$ est la translation donnée par (2.21) (la remarque 2.3). Alors, par la définition de $\lambda_V(U)$, nous pouvons voir facilement que :

$$\lambda_{T_z V(\omega)}(\mathbb{R}^d) = \lambda_{V(\omega)}(\mathbb{R}^d)$$

Puisque $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T_z)$ est un système ergodique (voir le lemme 2.4), on en déduit que $\lambda_{V(\omega)}(\mathbb{R}^d)$ est une constante. En le combinant avec (2.40), $\lambda_{V(\omega)}(\mathbb{R}^d) = 0$ $\mathbb{P}$ -presque sûrement. Puisque

III.2 Exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à longue portée

$V(\cdot, \omega) \in K_d^{loc}$ $\mathbb{P}$ -presque sûrement, appliquons le théorème 2.14 du chapitre I, nous avons que, $\mathbb{P}$ presque sûrement,

$$0 = \lambda_{V(\omega)}(\mathbb{R}^d) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\ln S_{t,\omega}}{t}$$

□

Un analogue à (2.39) est vrai aussi pour le cas annealed,

Lemme 2.7. *Supposons $\delta > d$. Alors,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\ln S_t}{t} = 0 \quad (2.41)$$

Ce lemme dont la démonstration est plus facile que dans le cas quenched et est basée principalement sur le théorème de Campbell. Ce résultat va servir à la démonstration d'une estimation de grandes déviations du théorème 3.10 du chapitre I.

Démonstration. Pour tout $R > 0$ et $t \geq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} S_t &= \mathbb{E} E_0 \left[\exp \left(- \int_0^t V(Z_s, \omega) \right) \right] \\ &\geq \mathbb{E} \left[E_0 \left[\exp \left(- \int_0^t V(Z_s, \omega) \right), T_{B(0,R)} > t \right], V^\omega(x) = 0 \text{ pour tout } x \in B(0, R) \right] \\ &= \mathbb{P}[V(x, \omega) = 0 \text{ pour tout } x \in B(0, R)] \cdot P_0[T_{B(0,R)} > t] \\ &= \mathbb{P}[\omega = (\omega_i, r_i) : |\omega_i| > R + r_i, \forall i] \cdot P_0[T_{B(0,R)} > t] \\ &= \mathbb{P}[\omega : \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{|\omega_i| < R+r_i\}} = 0] \cdot P_0[T_{B(0,R)} > t] \end{aligned} \quad (2.42)$$

D'après le théorème de Campbell, la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{|\omega_i| < R+r_i\}}$ suit une loi Poisson de paramètre :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \int_1^\infty \mathbf{1}_{\{|u| < r+R\}} du d\zeta(r) &= \int_1^\infty \mathcal{L}_d \delta(r+R)^d r^{-\delta-1} dr \\ &= \mathcal{L}_d \delta \sum_{k=0}^d R^{d-k} \int_1^\infty C_d^k r^{k-\delta-1} dr \\ &= \mathcal{L}_d \delta \sum_{k=0}^d \frac{1}{\delta-k} C_d^k R^{d-k} \\ &\leq \mathcal{L}_d \frac{\delta}{\delta-d} (R+1)^d. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Chapitre III. Mouvement brownien en potentiel poissonnien

D'après [Szn98] (voir l'égalité 3.1.53), nous avons la propriété suivante pour le mouvement brownien :

$$P_0[T_{B(0,R)} > t] \geq c_1(d) \exp\left(\frac{-\lambda_d}{R^2}t\right) \quad (2.44)$$

où λ_d est principale valeur propre de Dirichlet de $-\frac{1}{2}\Delta$ dans $B(0,1)$. De (2.42), (2.43), (2.44), pour tout $R > 0$ et $t \geq 0$:

$$S_t \geq c_1(d) \exp\left(-\sigma_d \frac{\delta}{\delta - d}(R+1)^d - \frac{\lambda_d}{R^2}t\right) \quad (2.45)$$

Si nous prenons $R = t^{1/2d}$, nous obtenons alors (2.41). $\square$

Une autre propriété de S_t est donné par le lemme ci dessous,

Lemme 2.8. *Si $\delta + \gamma - d > 0$, alors :*

$$\int_0^\infty S_t dt < \infty \quad (2.46)$$

La preuve de ce lemme se base principalement sur l'inégalité (2.47) dont la démonstration est analogue à la proposition 5.2.8 de [Szn98] mais avec quelques modifications adaptées pour notre modèle. L'inégalité (2.47) sera aussi utilisée pour montrer que l'exposant de Lyapunov quenched $\alpha(x) > 0$ si $x \neq 0$ (voir (2.87)).

Démonstration. Tout d'abord, nous allons montrer qu'il existe des constantes $c_1(d, \delta, \gamma), c_2(d, \delta, \gamma)$ telles que pour tout $R > 0$:

$$\mathbb{E}E_0\left[\exp\left(-\int_0^{T_{B(0,R)}} V(Z_s, \omega) ds\right)\right] \leq c_1 \exp(-c_2 R) \quad (2.47)$$

En effet, appliquons le théorème de Campbell :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}E_0\left[\exp\left(-\int_0^{T_{B(0,R)}} V(Z_s, \omega) ds\right)\right] &= \\ &= E_0\left[\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} \int_1^\infty \left(1 - \exp\left(-\int_0^{T_{B(0,R)}} r^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|Z_s - u| \leq r\}} ds\right)\right) du d\zeta(r)\right)\right] \\ &= E_0\left[\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - \int_1^\infty \delta r^{-\delta-1} \exp\left(-\int_0^{T_{B(0,R)}} r^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|Z_s - u| \leq r\}} ds\right) dr\right) du\right)\right] \end{aligned} \quad (2.48)$$

III.2 Exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à longue portée

Pour tout $r \geq 1$, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, $r^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|u| \leq r\}} \geq 2^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|u| \leq 1\}} \mathbf{1}_{\{1 \leq r \leq 2\}}$. Donc,

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty \delta r^{-\delta-1} \exp\left(-\int_0^{T_{B(0,R)}} r^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|Z_s-u| \leq r\}} ds\right) dr \\ & \leq \int_1^\infty \delta r^{-\delta-1} \exp\left(-2^{-\gamma} \int_0^{T_{B(0,R)}} \mathbf{1}_{\{|Z_s-u| \leq 1\}} \mathbf{1}_{\{1 \leq r \leq 2\}} ds\right) dr \\ & = 2^{-\delta} + (1 - 2^{-\delta}) \exp\left(-2^{-\gamma} \int_0^{T_{B(0,R)}} \mathbf{1}_{\{|Z_s-u| \leq 1\}} ds\right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

De (2.48) et (2.49), on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} E_0 \left[\exp \left(- \int_0^{T_{B(0,R)}} V(Z_s, \omega) ds \right) \right] \\ & \leq E_0 \left[\exp \left(- (1 - 2^{-\delta}) \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - \exp(-2^{-\gamma} \int_0^{T_{B(0,R)}} \mathbf{1}_{\{|Z_s-u| \leq 1\}}) du \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

L'expression du membre droit de (2.50) dépend d'une fonction $W(x) = 2^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}$ dans la notation de [Szn98] qui est à support borné. D'après l'argument de la proposition 5.2.8 de [Szn98] avec $\nu = 1 - 2^{-\gamma} > 0$, il existe deux constantes positives c_1, c_2 telles que :

$$E_0 \left[\exp \left(- (1 - 2^{-\delta}) \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - \exp(-2^{-\gamma} \int_0^{T_{B(0,R)}} \mathbf{1}_{\{|Z_s-u| \leq 1\}}) du \right) \right) \right] \leq c_1 \exp(-c_2 R) \quad (2.51)$$

Nous obtenons alors (2.47) de (2.50) et (2.51). Donc, pour tout $R > 0, t > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} c_1 \exp(-c_2 R) & \geq \mathbb{E} E_0 \left[\exp \left(- \int_0^{T_{B(0,R)}} V(Z_s, \omega) ds \right) \right] \\ & \geq \mathbb{E} E_0 \left[\exp \left(- \int_0^t V(Z_s, \omega) ds \right), T_{B(0,R)} \leq t \right] \\ & = \mathbb{E} E_0 \left[\exp \left(- \int_0^t V(Z_s, \omega) ds \right) \right] - \mathbb{E} E_0 \left[\exp \left(- \int_0^t V(Z_s, \omega) ds \right), T_{B(0,R)} \geq t \right] \\ & \geq \mathbb{E} E_0 \left[\exp \left(- \int_0^t V(Z_s, \omega) ds \right) \right] - P_0(T_{B(0,R)} > t) \end{aligned} \quad (2.52)$$

On écrit $Z_s = (Z_s^1, Z_s^2, \dots, Z_s^d)$. Nous définissons en dimension 1,

$$\sigma_R = \inf\{t > 0 : Z_s^1 \in \{R, -R\}\} \quad (2.53)$$

le premier temps où l'on atteint R ou $-R$.

Chapitre III. Mouvement brownien en potentiel poissonnien

L'inégalité de Markov nous donne :

$$\begin{aligned} P_0(T_{B(0,R)} > t) &= P(\max_{s \leq t} |Z_s| < R) \leq P_0(\max_{s \leq t} |Z_s^1| < R) \\ &= P_0(\sigma_R > t) \leq \frac{E_0[\sigma_R^2]}{t^2} \end{aligned} \quad (2.54)$$

En dimension 1, appliquons la propriété de martingale du mouvement brownien, nous avons :

$$\{(Z_s^1)^4 - 6s(Z_s^1)^2 + 3(Z_s^1)^2 : s \geq 0\} \quad (2.55)$$

est une martingale. Alors, le théorème d'arrêt optimal nous permet de calculer :

$$E_0[\sigma_R^2] = \frac{5}{3}R^4 \quad (2.56)$$

En combinant avec (2.52) et (2.54), pour tout $R > 0, t > 0$:

$$S_t = \mathbb{E}E_0\left[\exp\left(-\int_0^t V(Z_s, \omega)ds\right)\right] \leq c_1 \exp(-c_2 R) + \frac{5}{3} \frac{R^4}{t^2} \quad (2.57)$$

Nous choisissons $R = t^{\frac{1}{10}}$,

$$\int_0^\infty S_t dt \leq \int_0^1 S_t dt + \int_1^\infty S_t dt < 1 + \int_1^\infty \left(c_1 \exp(-c_2 t^{1/10}) + t^{\frac{-16}{10}}\right) dt < \infty$$

□

2.4 Existence des exposants de Lyapunov quenched

Dans cette section, nous allons montrer le théorème 3.7 du chapitre I sur l'existence des exposants de Lyapunov quenched α . Il est la limite presque sûre et dans $L^1(\mathbb{P})$ de la suite $\frac{a_\lambda(0, nx, \omega)}{n}$. Pour la démonstration, nous suivrons une méthode classique utilisant le théorème sous-additif de Kingman comme dans [Kes86], [Szn98], [Zer98]. Toutefois, pour $x, y \in \mathbb{R}^d$, $a(x, y, \omega)$ n'est pas sous-additif, pour l'application du théorème de Kingman, nous allons le remplacer par $d(x, y, \omega)$ qui est une distance sur $\mathbb{R}^d$ (le lemme 2.9) et que la différence entre eux n'est pas trop grande (les lemmes 2.10 et 2.11).

Tout d'abord, nous remarquons que notre potentiel V construit au (2.2) appartient toujours à l'espace K_d^{loc} (voir l'argument après l'équation (2.20)), alors la théorie du potentiel est nécessaire et utile dans notre travail.

La propriété de Markov forte du mouvement brownien est la clé pour montrer que $\bar{a}_\lambda$ est

III.2 Exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à longue portée

sous-additif et que d_λ est une distance ((ii) et (iii) du lemme 2.9). La démonstration du lemme 2.10 est beaucoup plus compliquée. On doit utiliser des connaissances sur la mesure d'équilibre ainsi que la formule de Poisson (le théorème 2.17 du chapitre I) et l'inégalité de Harnack (le théorème 2.19 du chapitre I). Les démonstration en détails de ces lemmes se trouvent dans le livre [Szn98] (page 221-225) (bien que le potentiel V y soit défini de manière différente, mais il appartient toujours à l'espace K_d^{loc} et alors la preuve reste inchangée parce que nous utilisons seulement des notions générales de la théorie du potentiel). Alors pour éviter la redondance, nous ne les présentons pas ici.

Lemme 2.9. *Soit $\delta + \gamma - d > 0$. Nous avons,*

- (i) $e_\lambda(x, y, \omega), a_\lambda(x, y, \omega), \bar{a}_\lambda(x, y, \omega)$ sont mesurables en $\omega \in \Omega$, et pour tout $\omega \in \Omega$ fixé, sont conjointement continus en $(\lambda, x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.
- (ii) Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega$, $\bar{a}_\lambda(x, y, \omega) \leq \bar{a}_\lambda(x, z, \omega) + \bar{a}_\lambda(z, y, \omega)$ et

$$d_\lambda(x, y, \omega) \leq d_\lambda(x, z, \omega) + d_\lambda(z, y, \omega) \quad (2.58)$$

- (iii) Pour $\mathbb{P}$ p.s, pour $\lambda \geq 0$, $d_\lambda(\cdot, \cdot, \omega)$ est une distance sur $\mathbb{R}^d$, qui induit la topologie usuelle.

Rappelons de (2.9) de la section 2.2.2 du chapitre I que $g(x, y, \omega)$ est la fonction de Green en potentiel $V(\omega)$. Pour comparer les différentes quantités entre $a(x, y, \omega)$, $\bar{a}_\lambda(x, y, \omega)$, $d_\lambda(x, y, \omega)$, nous définissons :

$$F_\lambda(z, \omega) = \lambda + \ln^+ \left(\int_{B(z,1) \times B(z,1)} g_\lambda(x_1, x_2, \omega) dx_1 dx_2 \right) + \sup_{\bar{B}(z,1)} V(\cdot, \omega) \quad (2.59)$$

Lemme 2.10. *Il existe une constante positive $C(d)$ telle que pour $\omega \in \Omega, \lambda > 0, x, y \in \mathbb{R}^d : |x - y| > 4$, nous avons :*

$$\begin{aligned} \max(|d_\lambda(x, y, \omega) - a_\lambda(x, y, \omega)|, |d_\lambda(x, y, \omega) - \bar{a}_\lambda(x, y, \omega)|) \\ \leq C(1 + F_\lambda(x, \omega) + F_\lambda(y, \omega)) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Le lemme suivant a le rôle du lemme 2.4 de [Szn98]. Sa démonstration se fait avec quelques modifications.

Lemme 2.11. *Soit $\delta + \gamma - d > 0$. Pour $1 \leq q < \infty, R > 0$, on a :*

$$\mathbb{E} \left(\left(\int_{B(0,R) \times B(0,R)} g_0(z, z', \omega) dz dz' \right)^q \right) < \infty \quad (2.61)$$

Chapitre III. Mouvement brownien en potentiel poissonnien

et pour $M > 0$:

$$\overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln |z|} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} F_\lambda(z, \omega) < \infty \quad \mathbb{P} \text{ p.s.} \quad (2.62)$$

Démonstration. Pour $d \geq 3$, d'après l'inégalité (2.12) du chapitre I, c'est évident que (2.61) est vérifiée. Pour $d = 2$, en reprenant l'estimation (5.2.28) de [Szn98], nous avons, pour tout $R > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left(\int_{B(0,R) \times B(0,R)} g_0(z, z', \omega) dz dz' \right)^q \right) \\ \leq \mathcal{L}(B(0, R)) \left(\int_0^\infty ds \mathbb{E} E_0 \left(\exp \left(- \int_0^s q V(Z_u, \omega) du \right) \right) \right)^q \\ = \mathcal{L}(B(0, R)) \left(\int_0^\infty S_s ds \right)^q \end{aligned} \quad (2.63)$$

Alors, l'équation (2.61) se déduit du lemme 2.8.

Par la définition (2.59) de $F_\lambda(z, \omega)$, nous avons :

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} F_\lambda(z, \omega) \leq M + \ln^+ \left(\int_{B(z,1) \times B(z,1)} g_0(x_1, x_2, \omega) dx_1 dx_2 \right) + \sup_{z+[-1,1]^d} V(\cdot, \omega) \quad (2.64)$$

Pour $z \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega$, nous posons :

$$f(z, \omega) = \int_{B(z,1) \times B(z,1)} g_0(x_1, x_2, \omega) dx_1 dx_2 \quad (2.65)$$

De (2.61), nous avons

$$\begin{aligned} \infty > \mathbb{E}[f(0, \omega)^2] &= 2 \int_0^\infty t \mathbb{P}(f(0, \omega) \geq t) dt \\ &\geq 2 \sum_{k=1}^\infty k \mathbb{P}(f(0, \omega) \geq k) \geq C_1 \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{P}(f(z, \omega) > |z|_1) \end{aligned} \quad (2.66)$$

où C_1 est une constante. En appliquant le lemme de Borel-Cantelli, nous obtenons :

$$\overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\ln f(z, \omega)}{\ln |z|} < \infty \text{ p.s.} \quad (2.67)$$

L'inégalité (A.2) de [Lac12a] dit que pour tout L suffisamment grand,

$$\mathbb{P} \left(\sup_{[-1,1]^d} V(\cdot, \omega) \geq \ln L \right) \leq \frac{1}{L^{2d+1}} \quad (2.68)$$

III.2 Exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à longue portée

Utilisons l'invariance par translation, on a :

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \mathbb{P} \left(\sup_{z+[-1,1]^d} V(\cdot, \omega) \geq \ln |z| \right) \leq \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \frac{1}{|z|^{2d+1}} < \infty \quad (2.69)$$

Le lemme de Borel-Cantelli nous donne :

$$\overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\sup_{z+[-1,1]^d} V(\cdot, \omega)}{\ln |z|} < \infty \text{ p.s.} \quad (2.70)$$

De (2.64), (2.67) et (2.70), on enfin déduit (2.62). $\square$

Nous sommes maintenant prêts à montrer notre théorème principal 3.7 de cette section, i.e, l'existence de l'exposant de Lyapunov quenched $\alpha(x)$ comme la limite presque sûrement et dans $L^1(\mathbb{P})$ de la suite $\frac{1}{n}a_\lambda(0, nx, \omega)$. Pour ce faire, nous allons adapter l'argument de la proposition 1.2 de [Szn94] où le théorème sous-additif de Kingman est appliqué à la suite de variables aléatoires $\frac{1}{n}d_\lambda(0, nx, \omega)$. Les lemmes 2.10 et 2.11 seront utilisés pour estimer la différence entre $a_\lambda(0, x, \omega)$ et $d_\lambda(0, x, \omega)$.

La démonstration du théorème 3.7 du chapitre I.

Démonstration. Nous appliquons ici le théorème 2.8 de Kingman (chapitre 1). Rappelons que pour $x \in \mathbb{R}^d$, $T_x := T_x^1$ est donné par (2.21). Fixons $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Nous définissons, pour $0 \leq m \leq n$, pour $\omega \in \Omega$, $X_{m,n}(\omega) := d_\lambda(mx, nx, \omega)$. Nous avons :

- (i) $X_{m,n} \circ T_{-x} = X_{m+1,n+1}$;
- (ii) $X_{m,n} \leq X_{m,k} + X_{k,n}$ pour tout $0 \leq m \leq k \leq n$;
- (iii) $\mathbb{E}X_{m,n} \geq 0$ pour tout $0 \leq m \leq n$;
- (iv) $\mathbb{E}[X_{0,1}] < \infty$.

En fait, (i) découle de $V(z, T_{-x}\omega) = V(z+x, \omega)$ pour tout $x, z \in \mathbb{R}^d$ et la définition de $X_{m,n}$, (ii) découle du lemme 2.9, (iii) découle de la propriété non négative du potentiel V . Nous montrons maintenant (iv). Pour $x \in \mathbb{R}^d, z \in B(0), \lambda \geq 0, t > 0, \omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} e(z, x, \omega) &= E_z[\exp(-\int_0^{H(x)} (\lambda + V(Z_s, \omega)) ds), H(x) < \infty] \\ &\geq E_z[\exp(-\int_0^t (\lambda + V(Z_s, \omega)) ds), \sup_{0 \leq s \leq t} |Z_s - (z + \frac{s}{t}(x-z))| < 1] \\ &\geq P_z\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |Z_s - (z + \frac{s}{t}(x-z))| < 1\right) \exp\left(-\int_0^t \left(\lambda + \sup_{y \in B(z + \frac{s}{t}(x-z), 1)} V(y, \omega)\right) ds\right) \end{aligned}$$

Chapitre III. Mouvement brownien en potentiel poissonnien

Alors,

$$\ln e(z, x, \omega) \geq \ln P_z \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |Z_s - (z + \frac{s}{t}(x - z))| < 1 \right) - \lambda t - \int_0^t \sup_{y \in B(z + \frac{s}{t}(x - z), 1)} V(y, \omega) ds \quad (2.71)$$

La propriété du mouvement brownien (voir (4.5.20) de [Szn98]) nous donne l'existence des constantes positives c, λ_d :

$$P_z \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |Z_s - (z + \frac{s}{t}(x - z))| < 1 \right) \geq c \exp(-\lambda_d t - \frac{1}{2} \frac{|x - z|^2}{t}) \quad (2.72)$$

De plus, nous avons :

$$\sup_{y \in B(z + \frac{s}{t}(x - z), 1)} V(y, \omega) = \sup_{y \in B(z + \frac{s}{t}(x - z), 1)} \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|\omega_i - y| < r_i\}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|\omega_i - (z + \frac{s}{t}(x - z))| < r_i + 1\}} \quad (2.73)$$

De (2.71), (2.72), (2.73) :

$$\bar{a}_\lambda(0, x, \omega) = - \inf_{z \in B(0)} \ln e_\lambda(z, x, \omega) \leq - \ln c + (\lambda_d + \lambda)t + \frac{1}{2} \frac{|x|^2}{t} + \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|\omega_i - (z + \frac{s}{t}(x - z))| < r_i + 1\}} \quad (2.74)$$

Donc,

$$\mathbb{E}[\bar{a}_\lambda(0, x, \omega)] \leq - \ln c + (\lambda_d + \lambda)t + \frac{1}{2} \frac{|x|^2}{t} + \int_0^t \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{\infty} r_i^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|\omega_i - (z + \frac{s}{t}(x - z))| < r_i + 1\}}] \quad (2.75)$$

En appliquant le théorème de Campbell :

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{\infty} r_i^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|\omega_i - (z + \frac{s}{t}(x - z))| < r_i + 1\}}] &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_1^\infty r^\gamma \mathbf{1}_{\{|u - (z + \frac{s}{t}(x - z))| < r + 1\}} du d\nu(r) \\ &= \int_0^t \int_1^\infty \delta r^{-\delta-1-\gamma} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{|u - (z + \frac{s}{t}(x - z))| < r + 1\}} du dr \\ &\leq t 2^d \mathcal{L}_d \frac{\delta}{\delta + \gamma - d} \end{aligned} \quad (2.76)$$

De (2.75) et (2.76) en inter-changeant le rôle de 0 and x , nous avons que la condition (iii) est vraie :

$$\mathbb{E}[d_\lambda(0, x, \omega)] \leq - \ln c + (\lambda_d + \lambda)t + \frac{1}{2} \frac{|x|^2}{t} + t 2^d \mathcal{L}_d \frac{\delta}{\delta + \gamma - d} \quad (2.77)$$

L'inégalité (2.77) entraîne que (iii) est vraie. Puisque les conditions dans (i), (ii), (iii), (iv) sont satisfaites et puisque pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, le système $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T_x)$ est ergodique (voir le lemme

III.2 Exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à longue portée

2.4), d'après le théorème de Kingman, il existe une constante $\alpha_\lambda(x)$ telle que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} d_\lambda(0, kx, \omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \mathbb{E}[d_\lambda(0, kx, \omega)] = \inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k} \mathbb{E}[d_\lambda(0, kx, \omega)] = \alpha_\lambda(x) \quad (2.78)$$

Il est facile de vérifier que $\alpha_\lambda(\cdot)$ est une semi-norme dans $\mathbb{R}^d$. Si nous choisissons $t = \frac{k|x|}{\sqrt{2(\lambda_d + \lambda + 2^d \frac{\mathcal{L}_d \delta}{\delta + \gamma - d})}}$, nous obtenons de (2.77) :

$$\alpha_\lambda(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \mathbb{E}[d_\lambda(0, kx, \omega)] \leq \sqrt{2(\lambda_d + \lambda + 2^d \frac{\mathcal{L}_d \delta}{\delta + \gamma - d})} |x| \quad (2.79)$$

Grâce aux lemmes 2.10 et 2.11 :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a(0, kx, \omega)}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(0, kx, \omega)}{k} = \alpha(x) \quad (2.80)$$

Maintenant, on va montrer que la suite $\frac{d(0, nx, \omega)}{n}$ est uniformément intégrable. Pour $p > 0$, une suite $|X_k|^p$ est uniformément intégrable si pour quelques $\epsilon > 0$:

$$\sup_k \mathbb{E}[|X_k|^{p+\epsilon}] < \infty \quad (2.81)$$

Comme pour (2.74), pour tout $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, il existe une constante $K(d) > 0$ telle que :

$$d(nx, (n+1)x) \leq K(d) + \lambda + |x|^2 + \sup_{B(nx, |x|+2)} V(\cdot, \omega) := X(nx) \quad (2.82)$$

Pour $s > 0$:

$$\sup_{B(0,s)} V(\cdot, \omega) \leq \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|\omega_i| \leq r_i+s\}} \quad (2.83)$$

Le théorème de Campbell nous donne :

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(a \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|\omega_i| \leq r_i+s\}} \right) \right] = \exp \left(\int_1^{\infty} \delta \mathcal{L}_d(r+s)^d r^{-\delta-1} (e^{ar^{-\gamma}} - 1) dr \right) < \infty \quad (2.84)$$

si $a > 0$ et si $\delta + \gamma - d > 0$. Alors $\sup_{B(0,s)} V(\cdot, \omega)$ a tous les moments finis. Utilisons l'invariance par translation, la suite $X(kx), k \geq 0$ a la même loi avec tous les moments finis. Puisque $d(\cdot, \cdot, \omega)$

est une distance, pour $k > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\frac{d(0, kx, \omega)}{k}\right)^2\right] &\leq \frac{1}{k^2} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{n=0}^{k-1} X(nx)\right)^2\right] \\ &\leq \frac{1}{k^2} (k \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{k-1} X(nx)^2\right]) = \mathbb{E}[X(0)^2] < \infty \end{aligned} \quad (2.85)$$

La condition (2.81) est maintenant vérifiée, la suite $\{\frac{d(0, kx, \omega)}{k}, k \geq 0\}$ est uniformément intégrable. Puisque $0 \leq a(0, kx, \omega) \leq d(0, kx, \omega)$, la suite $\{\frac{a(0, kx, \omega)}{k}, k \geq 0\}$ est aussi uniformément intégrable. En le combinant avec (2.80), nous obtenons la convergence dans $L^1(\mathbb{P})$ de $\frac{a(0, kx, \omega)}{k}$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\frac{a(0, kx, \omega)}{k}\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a(0, kx, \omega)}{k}\right] = \alpha(x) \quad (2.86)$$

Nous montrons maintenant que $\alpha(x)$ est une norme. Pour $k \geq 1, x \in \mathbb{Z}^d$ tel que $k|x| > 1$, par l'inégalité de Jensen et (2.47) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\ln e_\lambda(0, kx, \omega)] &\leq \ln \mathbb{E}[e_\lambda(0, kx, \omega)] \\ &\leq \ln \mathbb{E} E_0\left[\exp\left(-\int_0^{T_{B(0, |kx|-1)}} V(Z_s, \omega) ds\right)\right] \leq \ln c_1 - c_2(k|x| - 1) \end{aligned} \quad (2.87)$$

Alors pour $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\alpha_\lambda(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \mathbb{E}[a(0, kx, \omega)] \geq c_2|x| > 0$. Il en déduit que $\alpha_\lambda(\cdot)$ est une norme. Pour la continuité de α en λ , nous pouvons utiliser le même argument dans le théorème 2.5 de [Szn98]. $\square$

2.5 Théorème de la forme limite

Le théorème de la forme limite est une propriété importante qu'on a réussi à montrer pour plusieurs modèles. Si on travaille sur des modèles indépendants, il y a une version de [Kes86] pour la percolation de premier passage, une version de [Szn98] pour le mouvement brownien dans un potentiel poissonnien, une version de [Zer98] pour la marche aléatoire dans un potentiel aléatoire, etc. Même si on est dans la situation de stationnaire, avec une condition un peu plus forte, Boivin [Boi90] nous donne une version pour la percolation de premier passage. En 2010, Björklund [Bjö10] a prolongé le résultat de [Boi90] pour un contexte plus général (c'est le théorème 2.11 du chapitre I). Maintenant nous l'utilisons pour montrer notre théorème 3.8 du chapitre I, i.e, sous la condition $\delta + \gamma - d > 0$, pour tout $\lambda \geq 0$ la convergence de la suite des variables aléatoires $\frac{a_\lambda(0, x, \omega)}{|x|}$ ainsi que $\frac{d_\lambda(0, x, \omega)}{|x|}$, est uniforme en toutes les directions quand

$|x| \rightarrow \infty$ vers l'exposant de Lyapunov quenched $\alpha_\lambda(x)$:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} |a_\lambda(0, x, \omega) - \alpha_\lambda(x)| = 0.$$

La démonstration du théorème 3.8 du chapitre I

Démonstration. D'après la partie (iii) du lemme 2.9, nous avons que $d_\lambda(\cdot, \cdot, \omega)$ est une métrique aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$. Par la remarque 2.3, $d_\lambda(x, y, T_{-z}\omega) = d_\lambda(x + z, y + z, \omega)$. Donc, $d_\lambda(x, y, \omega)$ est une semi-métrique aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$, modélisée sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec une $\mathbb{Z}^d$ -action ergodique $\{T_z\}_{z \in \mathbb{Z}^d}$ (voir les définitions 2.9 et 2.10 du chapitre I). Comme dans (2.82) et (2.84), nous avons que

$$d_\lambda(0, x, \omega) \leq K(d) + \lambda + |x|^2 + \sup_{B(0, |x|+2)} V(\cdot, \omega) \quad (2.88)$$

a tous les moments finis. Par conséquence, toutes les conditions du théorème 2.11 du chapitre 1 sont satisfaites. Il existe donc une semi-norme sur $\mathbb{R}^d$ telle que :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty, x \in \mathbb{Z}^d} \frac{d_\lambda(0, x, \omega) - L(x)}{|x|} = 0 \quad (2.89)$$

Pour x fixé dans $\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, nous prenons $x_k = kx$, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = \infty$ et :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_\lambda(0, kx, \omega)}{k} = L(x) \quad (2.90)$$

Théorème 3.7 nous donne, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$\alpha_\lambda(x) = L(x) \quad (2.91)$$

Pour $x \in \mathbb{R}^d$, notons $\hat{x}$ le point de $\mathbb{Z}^d$ le plus proche x . Alors, $|x - \hat{x}| < \sqrt{d}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \frac{|d_\lambda(0, x, \omega) - \alpha_\lambda(x)|}{|x|} &\leq \frac{|d_\lambda(0, x, \omega) - d_\lambda(0, \hat{x}, \omega)|}{|x|} + \frac{|d_\lambda(0, \hat{x}, \omega) - \alpha_\lambda(\hat{x})|}{|x|} + \frac{|\alpha_\lambda(\hat{x}) - \alpha_\lambda(x)|}{|x|} \\ &\leq \frac{|d(\hat{x}, x, \omega)|}{|\hat{x}|} \cdot \frac{|\hat{x}|}{|x|} + \frac{|d_\lambda(0, \hat{x}, \omega) - \alpha_\lambda(\hat{x})|}{|\hat{x}|} \cdot \frac{|\hat{x}|}{|x|} + \frac{\alpha_\lambda(x - \hat{x})}{|x|} \end{aligned} \quad (2.92)$$

Par (2.88) :

$$d_\lambda(\hat{x}, x, \omega) \leq \tilde{K}(d) + \lambda + \sup_{B(\hat{x}, \sqrt{d}+2)} V(\cdot, \omega) := Y(\hat{x}, \omega) \quad (2.93)$$

Chapitre III. Mouvement brownien en potentiel poissonnien

Puisque $Y(\hat{x}), \hat{x} \in \mathbb{Z}^d$ sont de même loi et tous leurs moments sont finis :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|d(\hat{x}, x, \omega)|}{|\hat{x}|} \cdot \frac{|\hat{x}|}{|x|} < \lim_{\hat{x} \rightarrow \infty} \frac{Y(\hat{x}, \omega)}{|\hat{x}|} = 0, \quad \mathbb{P} \text{ presque sûrement.} \quad (2.94)$$

De (2.89) et (2.91), nous avons que $\mathbb{P}$ presque sûrement,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|d_\lambda(0, \hat{x}, \omega) - \alpha_\lambda(\hat{x})|}{|\hat{x}|} \cdot \frac{|\hat{x}|}{|x|} = 0 \quad (2.95)$$

De (3.6) :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\alpha_\lambda(x - \hat{x})}{|x|} \leq \frac{\sqrt{2(\lambda_d + \lambda + 2^d \frac{\mathcal{L}_d^\delta}{\delta + \gamma - d})} |x - \hat{x}|}{|x|} = 0 \quad (2.96)$$

De (2.92), (2.94), (2.95) et (2.96),

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|d_\lambda(0, x, \omega) - \alpha_\lambda(x)|}{|x|} = 0 \quad (2.97)$$

En la combinant avec les lemmes 2.10 et 2.11, nous obtenons,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|a_\lambda(0, x, \omega) - \alpha_\lambda(x)|}{|x|} \leq \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|a_\lambda(0, x, \omega) - d_\lambda(0, x, \omega)|}{|x|} + \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|d_\lambda(0, x, \omega) - \alpha_\lambda(x)|}{|x|} = 0$$

□

2.6 Existence des exposants de Lyapunov annealed

Comme dans le cas à portée finie [Szn98] et pour le modèle marches aléatoires en potentiel aléatoire Flury [Flu07], nous définissons pour $\lambda \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}^d$ les quantités basiques :

$$\hat{e}_\lambda(y) := \mathbb{E}[e_\lambda(0, y, \omega)] \quad (2.98)$$

$$b_\lambda(y) := -\ln \hat{e}_\lambda(y) \quad (2.99)$$

$$\bar{b}_\lambda(y) = -\inf_{z \in B(0)} \ln \hat{e}_\lambda(y - z) \quad (2.100)$$

Dans cette section, nous allons montrer le théorème 3.9 du chapitre I sur l'existence et ainsi qu'une forme limite pour des exposants de Lyapunov annealed, i.e, sous la condition $\gamma + \delta - d > 0$,

III.2 Exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à longue portée

il existe une norme $\beta_\lambda = \beta_\lambda(\delta, \gamma, d) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $M > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \frac{1}{|x|} |b_\lambda(x) - \beta_\lambda(x)| = 0 \quad (2.101)$$

La démonstration de ce théorème est analogue à celles des théorèmes 3.7 et 3.8 du cas quenched. De plus, puisque $\frac{1}{|x|} b_\lambda(x)$ est une suite des réels (pas des variables aléatoires), le cas annealed est certainement plus facile que le cas quenched. Pour l'existence de $\beta(x)$, nous allons montrer que $\bar{b}_\lambda(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ est sous-additif (voir le lemme 2.13 ci-dessous) alors que la différence entre les quantités $\bar{b}_\lambda$ et b_λ est donnée dans la proposition 2.16 dont la démonstration a besoin d'une inégalité de Harnack (2.107) pour $\hat{e}_\lambda$ (voir le lemme 2.15). Tout d'abord, nous commençons par une remarque suivante,

Remarque 2.12. Pour tout $\lambda > 0, y \in \mathbb{R}^d$, on a $\hat{e}_\lambda(y) = \mathbb{E}[e_\lambda(-y, 0, \omega)]$

D'après le théorème de Campbell et l'invariance par translation du mouvement brownien,

$$\begin{aligned} \hat{e}_\lambda(y) &= E_0 \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^{H(y)} (\lambda + V(Z_s)) ds \right), H(y) < \infty \right] \\ &= E_0 \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}^d} \left[1 - \int_1^\infty \delta r^{-\delta-1} \exp \left(- \int_0^{H(y)} r^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|Z_s-u|<r\}} ds \right) dr du \right] - \lambda H(y) \right), H(y) < \infty \right] \\ &= E_{-y} \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - \int_1^\infty \delta r^{-\delta-1} \exp \left(- \int_0^{H(0)} r^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|Z_s-u|<r\}} ds \right) dr du \right) - \lambda H(0) \right), H(0) < \infty \right] \\ &= \mathbb{E}(e_\lambda(-y, 0, \omega)) \end{aligned} \quad (2.102)$$

Le lemme suivant est analogue au lemme 3.1 du chapitre 5 de [Szn98]

Lemme 2.13. (i) Pour $\lambda \geq 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$, nous avons :

$$\bar{b}_\lambda(x+y) \leq \bar{b}_\lambda(x) + \bar{b}_\lambda(y) \quad (2.103)$$

(ii) $b_\lambda(y)$ et $\bar{b}_\lambda(y)$ sont conjointement continus en (λ, y) sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$

Démonstration. (i) Nous reprenons les arguments de [Szn98]. Pour tout $a, b > 0$:

$$1 + \exp(-a-b) - \exp(-a) - \exp(-b) = (1 - \exp(-a))(1 - \exp(-b)) \geq 0 \quad (2.104)$$

Alors, pour $\delta > 0$ et $u(r), v(r) > 0$ où $u(r), v(r)$ sont des fonctions de la variable r :

$$\int_1^\infty \delta r^{-\delta-1} (-\exp(-u(r) - v(r)) + \exp(-u(r)) + \exp(-v(r))) dr \leq \int_1^\infty \delta r^{-\delta-1} = 1 \quad (2.105)$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} & 1 - \int_1^\infty \delta r^{-\delta-1} \exp(-u(r) - v(r)) dr \\ & \leq (1 - \int_1^\infty \delta r^{-\delta-1} \exp(-u(r)) dr) + (1 - \int_1^\infty \delta r^{-\delta-1} \exp(-v(r)) dr) \end{aligned} \quad (2.106)$$

Donc, pour $x, y \in \mathbb{R}^d, z \in B(0), \lambda \geq 0$, en utilisant l'égalité (2.48) et la propriété de Markov forte :

$$\begin{aligned} & \hat{e}_\lambda(x + y - z) \\ &= \mathbb{E} E_z \left[\exp \left(- \int_0^{H(x+y)} \lambda + V(Z_s, \omega) ds \right), H(x+y) < \infty \right] \\ &= E_z \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - \int_1^\infty \delta r^{-\delta-1} \exp \left(- \int_0^{H(x+y)} r^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|Z_s-u| \leq r\}} ds \right) dr \right) du - \lambda H(x+y) \right), \right. \\ & \quad \left. H(x+y) < \infty \right] \\ &\geq E_z \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - \int_1^\infty \delta r^{-\delta-1} \exp \left(- \int_0^{H(x+y)} r^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|Z_s-u| \leq r\}} ds \right) dr \right) du - \lambda H(x+y) \right), \right. \\ & \quad \left. H(x) < H(x+y) < \infty \right] \\ &\stackrel{(2.106)}{\geq} E_z \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - \int_1^\infty \delta r^{-\delta-1} \exp \left(- \int_0^{H(x)} r^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|Z_s-u| \leq r\}} ds \right) dr \right) du - \lambda H(x) \right), \right. \\ & \quad \left. H(x) < \infty \right] \\ &\cdot \inf_{z' \in B(x)} E_{z'} \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - \int_1^\infty \delta r^{-\delta-1} \exp \left(- \int_0^{H(x+y)} r^{-\gamma} \mathbf{1}_{\{|Z_s-u| \leq r\}} ds \right) dr \right) du - \lambda H(x+y) \right), \right. \\ & \quad \left. H(x+y) < \infty \right] \\ &= \hat{e}_\lambda(x - z) \exp(-\bar{b}_\lambda(y)) \text{ (l'invariance par translation du mouvement brownien)} \end{aligned}$$

Nous obtenons alors $\bar{b}_\lambda(x + y) \leq \bar{b}_\lambda(x) + \bar{b}_\lambda(y)$.

(ii) est complètement analogue au cas quenched.

□

Nous présentons ici une inégalité FKG de Janson [Jan84] pour les processus de Poisson. Elle est utile pour montrer l'existence des exposants de Lyapunov annealed. Une fonction à

III.2 Exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à longue portée

valeurs réelles d'un processus de Poisson $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite croissante (ou décroissante) si $f(\omega) \leq f(\omega')$ ($f(\omega) \geq f(\omega')$) pour tous les $\omega, \omega' \in \Omega$, $\omega \subset \omega'$.

Lemme 2.14. *Soient f et g deux fonctions mesurables et croissantes (ou décroissantes) d'un processus de Poisson sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors :*

$$\mathbb{E}[f(\omega)g(\omega)] \geq \mathbb{E}f(\omega)\mathbb{E}g(\omega)$$

En s'inspirant de la méthode présentée par [[Szn94], (1.41)] pour montrer des inégalités de Harnack, et en combinant quelques propriétés de théorie du potentiel et les estimations (2.109) et (2.111) spécifiques à notre modèle, nous obtenons,

Lemme 2.15. *[Inégalité de Harnack dans le cas annealed] Soit $\gamma + \delta - d > 0$. Pour tout $M > 0$, $\exists B < \infty$, $\forall \lambda \in [0, M]$, pour tout $z, z' \in B(0)$ et $y \in \mathbb{R}^d$, $|y| > 3$, nous avons :*

$$\frac{\hat{e}_\lambda(y - z)}{\hat{e}_\lambda(y - z')} < B \quad (2.107)$$

Démonstration. Pour tout $z \in B(0)$, $y \in \mathbb{R}^d$, $|y| > 3$, d'après la propriété de Markov forte,

$$\begin{aligned} \hat{e}_\lambda(y - z) &= \mathbb{E}E_z \left[\exp \left(- \int_0^{H(y)} (\lambda + V(Z_s)) ds \right), H(y) < \infty \right] \\ &= \mathbb{E}E_z \left[\exp \left(- \int_0^{T_{B(0,2)}} (\lambda + V(Z_s)) ds \right) \exp \left(- \int_{T_{B(0,2)}}^{H(y)} (\lambda + V(Z_s)) ds \right), H(y) < \infty \right] \\ &= \mathbb{E}E_z \left[\exp \left(- \int_0^{T_{B(0,2)}} (\lambda + V(Z_s)) ds \right) E_{Z_{T_{B(0,2)}}} \left[\exp \left(- \int_0^{H(y)} (\lambda + V(Z_s)) ds \right), H(y) < \infty \right] \right] \\ &= E_z \left[\exp(-\lambda T_{B(0,2)}) \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^{T_{B(0,2)}} (V(Z_s)) ds \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. E_{Z_{T_{B(0,2)}}} \left[\exp \left(- \int_0^{H(y)} (\lambda + V(Z_s)) ds \right), H(y) < \infty \right] \right] \right] \\ &\geq E_z \left[\exp(-\lambda T_{B(0,2)}) \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^{T_{B(0,2)}} (V(Z_s)) ds \right) \right] \right. \\ &\quad \left. \mathbb{E}E_{Z_{T_{B(0,2)}}} \left[\exp \left(- \int_0^{H(y)} (\lambda + V(Z_s)) ds \right), H(y) < \infty \right] \right] \quad (2.108) \end{aligned}$$

On a utilisé le lemme 2.14 pour la dernière inégalité de (2.108). De plus, pour tout $z \in B(0)$,

Chapitre III. Mouvement brownien en potentiel poissonnien

P_z presque sûrement, d'après le théorème de Campbell, comme dans (2.48), nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^{T_{B(0,2)}}(V(Z_s))ds\right)\right] &= \exp\left[\int_1^\infty \delta r^{-\delta-1} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\exp\left(-\int_0^{T_{B(0,2)}} r^{-\gamma} \mathbf{1}_{|u-Z_s|<r} ds\right) - 1\right) dudr\right] \\ &= \exp\left[\int_1^\infty \delta r^{-\delta-1} \int_{B(z,r+2)} \left(\exp\left(-\int_0^{T_{B(0,2)}} r^{-\gamma} \mathbf{1}_{|u-Z_s|<r} ds\right) - 1\right) dudr\right] \\ &\geq \exp\left[\int_1^\infty \left(\exp(-T_{B(0,2)} r^{-\gamma}) - 1\right) \mathcal{L}_d \delta (r+2)^d r^{-\delta-1} dr\right]\end{aligned}\tag{2.109}$$

Utilisons l'inégalité $e^{-x} - 1 \geq -x$ pour tout $x \geq 0$ et la condition $\gamma + \delta - d > 0$, nous avons alors de (2.109), pour tout $z \in B(0)$, P_z presque sûrement,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^{T_{B(0,2)}}(V(Z_s))ds\right)\right] &\geq \exp\left[-3^d \delta \mathcal{L}_d T_{B(0,2)} \int_1^\infty r^{-\gamma-\delta-d-1} dr\right] \\ &= \exp\left(-\frac{3^d \delta \mathcal{L}_d}{\gamma + \delta - d} \cdot T_{B(0,2)}\right)\end{aligned}\tag{2.110}$$

De (2.108) et (2.110) :

$$\hat{e}_\lambda(y - z) \geq E_z\left[\exp\left(-\left(\lambda + \frac{3^d \delta \mathcal{L}_d}{\gamma + \delta - d}\right) T_{B(0,2)}\right) \hat{e}_\lambda(y - Z_{T_{B(0,2)}})\right]\tag{2.111}$$

Maintenant, nous allons continuer en reprenant argument de [Szn94]. Posons $\kappa := \kappa(\lambda, \gamma, \delta, d) := (\lambda + \frac{3^d \delta \mathcal{L}_d}{\gamma + \delta - d})0, \kappa \in]0, \infty[$. En utilisons l'inégalité de Jensen et le lemme 2.18 du chapitre 1, nous avons :

$$E_z\left[\exp(-\kappa T_{B(0,2)}) \hat{e}_\lambda(y - Z_{T_{B(0,2)}})\right] \geq E_z\left[\exp(-\kappa h_0(z, Z_{T_{B(0,2)}})) \hat{e}_\lambda(y - Z_{T_{B(0,2)}})\right]\tag{2.112}$$

où $h_0(\cdot, \cdot)$ est donné par (2.16) du chapitre 1. D'autre part, d'après (2.108),

$$\hat{e}_\lambda(y - z) \leq E_z(\hat{e}_\lambda(y - Z_{T_{B(0,2)}}))\tag{2.113}$$

D'après la formule de Poisson (la proposition 2.17 du chapitre 1), nous avons, pour tout $z, z' \in B(0)$,

$$\frac{E_z(\hat{e}_\lambda(y - Z_{T_{B(0,2)}}))}{E_{z'}(\hat{e}_\lambda(y - Z_{T_{B(0,2)}}))} \leq \frac{\sup_{B(0) \times \partial B(0,2)} v_0(\cdot, \cdot)}{\inf_{B(0) \times \partial B(0,2)} v_0(\cdot, \cdot)}\tag{2.114}$$

où $v_0(\cdot, \cdot)$ est le noyau de Poisson pour un mouvement brownien (voir la proposition 2.17 du

III.2 Exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à longue portée

chapitre 1). En utilisant (2.111), (2.112), (2.113), (2.114), pour tout $z, z' \in B(0)$ et pour $|y| > 3$,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{e}_\lambda(y-z)}{\hat{e}_\kappa(y-z')} &\leq \exp(\kappa \sup h_0(\cdot, \cdot)) \frac{E_z(\hat{e}_\lambda(y - Z_{T_{B(0,2)}}))}{E_{z'}(\hat{e}_\lambda(y - Z_{T_{B(0,2)}}))} \\ &\leq \exp(\kappa \sup_{B(0) \times \partial B(0,2)} h_0(\cdot, \cdot)) \frac{\sup_{B(0) \times \partial B(0,2)} v_0(\cdot, \cdot)}{\inf_{B(0) \times \partial B(0,2)} v_0(\cdot, \cdot)} < \infty \end{aligned} \quad (2.115)$$

□

La proposition ci-dessous nous permet de comparer la différence entre $b_\lambda(y)$ et $\bar{b}_\lambda(y)$.

Proposition 2.16. *Soit $\delta > d$. Pour tout $M > 0$, nous avons, pour tout $M > 0$:*

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \frac{1}{|y|} |b_\lambda(y) - \bar{b}_\lambda(y)| = 0 \quad (2.116)$$

Démonstration. La démonstration découle de l'inégalité Harnack pour $\hat{e}$ (le lemme 2.15) et les définitions de b_λ et $\bar{b}_\lambda$. □

La démonstration du théorème 3.9 du chapitre I

Démonstration. Puisque $\bar{b}_\lambda(\cdot)$ est continu sur $\mathbb{R}^d$ (voir (ii) du lemme 2.13), elle est bornée uniformément sur les sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^d$. Alors d'après sa propriété sous-additive (voir (iii) du lemme 2.13), pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe un réel non négatif $\beta_\lambda(x)$ tel que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \bar{b}_\lambda(kx) = \inf_{k \geq 0} \frac{1}{k} \bar{b}_\lambda(kx) = \beta_\lambda(x) \quad (2.117)$$

Il est facile de vérifier que $\beta_\lambda(\cdot)$ est une semi-norme dans $\mathbb{R}^d$. De plus, il existe une constante $c_2 > 0$ comme dans (2.87) telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, nous avons $c_2|x| \leq \beta_\lambda(x)$. Donc, $\beta_\lambda(\cdot)$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$. Utilisant l'inégalité de Jensen et l'inégalité (2.77) avec $t = \frac{k|x|}{\sqrt{2(\lambda_d + \lambda + \frac{\omega_d \delta}{\delta + \gamma - d})}}$, nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\bar{b}_\lambda(x) \leq \mathbb{E}(\bar{a}_\lambda(0, x, \omega)) \leq \sqrt{2(\lambda_d + \lambda + 2d \frac{\mathcal{L}_d \delta}{\delta + \gamma - d})} |x| := C_\lambda |x| \quad (2.118)$$

et $\beta_\lambda(x) \leq \alpha_\lambda(x)$. Pour la forme limite (3.8), il suffit de montrer que si $x_k \rightarrow \infty$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{|x_k|} = e \in S^{d-1}$, nous avons :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \frac{1}{|x_k|} |\bar{b}_\lambda(x_k) - \beta_\lambda(x_k)| = 0 \quad (2.119)$$

Un argument classique sera maintenant utilisé. Prenons $\epsilon \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$ et $v \in \mathbb{Q}^d$ et $M \in \mathbb{N}$ tel que $Mv \in \mathbb{Z}^d$ et $|v - e| < \epsilon$. Nous posons $x'_k := \lfloor \frac{|x_k|}{M} \rfloor Mv \in \mathbb{Z}^d$ où pour $t \in \mathbb{R}$, $\lfloor t \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à t . Alors, pour k suffisamment grand, $|x_k - x'_k| < \epsilon|x_k|$ et en utilisant (2.118), (2.117), et $|v - e| \leq \epsilon$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x_k|} |\bar{b}_\lambda(x_k) - \beta_\lambda(x_k)| &\leq \frac{\bar{b}_\lambda(x_k - x'_k)}{|x_k|} + \left| \frac{\bar{b}_\lambda(x'_k)}{|x_k|} - \frac{\bar{b}_\lambda(x'_k)}{|x'_k|} \right| + \left| \frac{\bar{b}_\lambda(x'_k)}{|x'_k|} - \beta_\lambda(v) \right| + \left| \beta_\lambda(v) - \beta_\lambda\left(\frac{x_k}{|x_k|}\right) \right| \\ &\leq 2\epsilon C_\lambda + (\epsilon + \epsilon) \sup_{|y| \leq 1} \beta_\lambda(y) \leq 4\epsilon C_\lambda \end{aligned} \quad (2.120)$$

Nous obtenons alors (3.8). Grâce à la proposition 2.16, nous pouvons remplacer $\bar{b}_\lambda(x)$ par $b_\lambda(x)$ dans l'équation (3.8). $\square$

2.7 Estimation des grandes déviations

Tout d'abord, nous définissons,

la loi quenched des trajectoires jusqu'au temps t du mouvement brownien en potentiel V

$$dQ_{t,\omega} = \frac{1}{S_{t,\omega}} \exp\left(-\int_0^t V(Z_s, \omega) ds\right) dP_0, \quad t \geq 0, \omega \in \Omega \quad (2.121)$$

et la loi annealed des trajectoires jusqu'au temps t du mouvement brownien en potentiel V

$$dQ_t = \frac{1}{S_t} \exp\left(-\int_0^t V(Z_s, \omega) ds\right) d(P_0 \otimes \mathbb{P}), \quad t \geq 0 \quad (2.122)$$

où $S_{t,\omega}$ et S_t sont les constantes de normalisation données par (2.24) et (2.25) du chapitre 3 respectivement.

La fonction de taux par rapport à $Q_{t,\omega}$ de l'estimation des grandes déviations sera donnée par,

$$I(x) := \sup_{\lambda \geq 0} (\alpha_\lambda(x) - \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (2.123)$$

La fonction de taux par rapport à Q_t de l'estimation des grandes déviations sera donnée par,

$$J(x) := \sup_{\lambda \geq 0} (\beta_\lambda(x) - \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (2.124)$$

Remarque 2.17. D'après les théorèmes 3.7 et 3.9, nous avons que $I(x)$ et $J(x)$ sont des fonctions non négatives, convexes, continues sur $\mathbb{R}^d$ et $c_2|x| \leq J(x) \leq I(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Une méthode proposée par [Szn98] pour étudier quelques estimations de grandes déviations

III.2 Exposants de Lyapunov en potentiel poissonnien à longue portée

pour le mouvement brownien en potentiel poissonnien est d'utiliser l'application des exposants de Lyapunov. Cette idée est aussi utile pour la marche aléatoire en potentiel aléatoire (voir [Zer98] et [Mou12]). Dans notre modèle, le potentiel V est défini par d'une manière différente (longue portée) de celui de [Szn98] (portée infinie) mais il appartient également à l'espace K_d^{loc} . Nous avons aussi montré l'existence des exposants de Lyapunov et les théorèmes de la forme limite dans les sections précédentes. Alors, nous pouvons suivre le même argument que [Szn98] (la page 249). Pour tout $t > 0$, ensemble borné A de $\mathbb{R}^d$, il existe $n_t > 0$ et $x_1, x_2, \dots, x_{n_t}$ appartenant à A tels que n_t croît au plus polynomialement en t et

$$tA \subset B_t := \cup_{k=1}^{n_t} B(x_k, 1)$$

Alors, par les définitions de $S_{t,\omega}$ et $Q_{t,\omega}$, nous avons, $\mathbb{P}$ -presque sûrement, pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\begin{aligned} \exp(-\lambda t) S_{t,\omega} Q_{t,\omega}(Z_t \in tA) &= \exp(-\lambda t) E_0[Z_t \in tA, \exp(-\int_0^t V(Z_s, \omega) ds)] \\ &\leq E_0[\exp(-\int_0^{H(B_t)} (\lambda + V)(Z_s, \omega) dt), H(tA) < \infty] \\ &\leq \sum_{k=1}^{n_t} e_\lambda(0, x_k, \omega) \leq n_t \max_{1 \leq k \leq n_t} e_\lambda(0, x_k, \omega) \end{aligned}$$

Donc, pour tout $t > 0$, ensemble borné A de $\mathbb{R}^d$,

$$-\lambda + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln S_{t,\omega}}{t} + \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln Q_{t,\omega}(Z_t \in tA) \leq -\inf_A \alpha_\lambda(x), \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement} \quad (2.125)$$

De même pour le cas annealed, nous avons aussi,

$$-\lambda + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln S_t}{t} + \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln Q_t(Z_t \in tA) \leq -\inf_A \beta_\lambda(x). \quad (2.126)$$

En conséquence, nous obtenons dans le théorème 3.10 du chapitre I une borne supérieure d'une estimation de grandes déviations.

La démonstration du théorème 3.10 du chapitre I

Démonstration. i) Si $\delta > \frac{4d}{3}$, d'après le lemme 2.6,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\ln S_{t,\omega}}{t} = 0 \quad \mathbb{P} \text{ presque sûrement.}$$

En la combinant avec (2.125), il découle que (3.9) est vraie pour tout ensemble borné de $\mathbb{R}^d$. Si A est un fermé quelconque de $\mathbb{R}^d$, l'argument est suivi exactement comme à la page 250 de

[Szn98].

ii) Si $\delta > d$, d'après le lemme 2.7,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\ln S_t}{t} = 0.$$

Alors, de même qu'au cas quenched, nous pouvons suivre le même argument que dans le théorème 4.5 du chapitre 5 de [Szn98] pour obtenir (3.10). $\square$

Annexe

1 Démonstration du théorème abstrait 1.2 du chapitre II

L'objectif de cette section est de prouver le théorème abstrait 1.2. Nous allons utiliser l'argument basé sur la preuve du théorème 1.14 [Cox80]. Nous supposons toujours que les hypothèses du théorème abstrait sont satisfaites. Nous rappelons que $\mathcal{D}$ est l'ensemble des fonctions de répartition F qui attribuent la probabilité 1 à l'intervalle $[0, +\infty[$ et telles que $F(0) < 1$. Et $\mathcal{D}_1$ dénote le sous-ensemble de $\mathcal{D}$ qui contient les fonctions de répartition de moyenne finie. $\mathcal{D}_2$ est un sous-ensemble quelconque de $\mathcal{D}_1$.

Lemme 1.1. *Soit $G_n \in \mathcal{D}_1$, $F_n, F \in \mathcal{D}_2$ telles que $F \leq F_n$ et $F_n \xrightarrow{w} F$. Si $F_n * G_n \leq F$ pour tout n suffisamment grand, alors :*

$$|\mu(F) - \mu(F_n)| \leq c_1(F) f_1(F_n) \int tdG_n(t) \quad (1.1)$$

En particulier, si $\int tdG_n(t) \rightarrow 0$, alors $\mu(F_n) \rightarrow \mu(F)$.

Démonstration. En utilisant la propriété de monotonie de μ (la condition (i) du théorème 1.2), nous avons $\mu(F_n) \leq \mu(F) \leq \mu(F_n * G_n)$. Alors $|\mu(F_n) - \mu(F)| \leq \mu(F_n * G_n) - \mu(F_n)$. D'après (ii) :

$$\mu(F_n * G_n) \leq \mu(F_n) + c_1(F_n) f_1(F_n) \int tdG_n(t) \leq \mu(F_n) + c_1(F) f_1(F_n) \int tdG_n(t).$$

Notons que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(F_n) = f_1(F)$ si $F_n \xrightarrow{w} F$. Nous obtenons $\mu(F_n) \rightarrow \mu(F)$ si $\int tdG_n(t) \rightarrow 0$. □

Lemme 1.2. Soit $F \in \mathcal{D}_2$. Supposons que $t_0 = \sup\{t : F(t) = 0\} > 0$. Alors $|\mu(F) - \mu(\hat{F}_{t_0}^\xi)| \leq 2\xi c_1(F) f_1(\hat{F}_{t_0}^\xi)$ pour $0 < \xi < t_0$, où $\hat{F}_{t_0}^\xi$ est donnée par la définition 1.3 du chapitre II.

Démonstration. Soit G_ξ la fonction de répartition concentrée en 2ξ . Donc $\hat{F}_{t_0}^\xi * G_\xi \leq F \leq \hat{F}_{t_0}^\xi$ et alors $\mu(\hat{F}_{t_0}^\xi) \leq \mu(F) \leq \mu(\hat{F}_{t_0}^\xi * G_\xi)$. D'après la propriété (ii),

$$|\mu(F) - \mu(\hat{F}_{t_0}^\xi)| \leq \mu(\hat{F}_{t_0}^\xi * G_\xi) - \mu(\hat{F}_{t_0}^\xi) \leq 2\xi c_1(\hat{F}_{t_0}^\xi) f_1(\hat{F}_{t_0}^\xi) \leq 2\xi c_1(F) f_1(\hat{F}_{t_0}^\xi)$$

□

Remarque 1.3. Pour tout $t_0 > 0$, nous avons $\lim_{\xi \rightarrow 0} \hat{F}_{t_0}^\xi \stackrel{w}{=} F^{t_0}$.

Démonstration du théorème 1.2 du chapitre II

Par la propriété de monotonie de μ , nous pouvons supposer que $F_n \geq F$ pour tout n .

L'idée principale est de construire une suite de fonctions de répartition satisfaisant $\int t dG_n(t) \rightarrow 0$ quand n tend vers ∞ et $F_n * G_n \leq F$ pour tout n . D'abord, nous introduisons la métrique de Lévy $\rho : \rho(M, N) = \inf\{\epsilon > 0 \text{ tel que } M(t - \epsilon) - \epsilon \leq N(t) \leq M(t + \epsilon) + \epsilon, -\infty < t < +\infty\}$. La convergence pour la métrique ρ est équivalente à la convergence faible. Puisque $F_n \xrightarrow{w} F$, $\epsilon_n := 2\rho(F_n, F) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

1er cas : $F(0) > 0$. Pour $\epsilon > 0$ fixé, l'application $t \mapsto \frac{F(t)}{F(t)+\epsilon}$ est non décroissante en t . Soit $b = \inf\{t : F(t) = 1\}$. Si $b = +\infty$, prenons une suite t_n telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ et $F(t_n) \leq \frac{F(0)}{F(0)+\epsilon_n}$. Définissons une suite de fonctions de répartition G_n par,

$$G_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t < \epsilon_n \\ F(t_n) & \text{si } \epsilon_n \leq t < t_n \\ F(t) & \text{si } t_n \leq t, \end{cases} \quad (1.2)$$

Puisque F a la moyenne finie, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int t dG_n(t) = 0$. Nous expliquons que pour tout t , $F_n * G_n(t) \leq F(t)$. Nous avons $F_n * G_n(t) \leq G_n(t) \leq F(t)$ si $t < \epsilon_n$ ou $t \geq t_n$. Si $\epsilon_n \leq t < t_n$,

$$\begin{aligned} F_n * G_n(t) &= F_n(t - \epsilon_n) G_n(\epsilon_n) \\ &\leq [F(t) + \epsilon_n] F(t_n) \\ &\leq \frac{F(t) + \epsilon_n}{F(t)} \cdot \frac{F(0)}{F(0) + \epsilon_n} \cdot F(t) \\ &\leq F(t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Notons que la première inégalité de (1.3) découle de $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$; la deuxième découle du

choix de t_n ; la dernière découle de la propriété de monotonie en t de la fonction $\frac{F(t)}{F(t)+\epsilon}$. Maintenant toutes les conditions du lemme 1.1 sont vérifiées, nous obtenons $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = \mu(F)$.

Si $b < \infty$, posons $q_n = \frac{F(0)}{F(0)+\epsilon_n}$ et définissons :

$$G_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t < \epsilon_n \\ q_n & \text{si } \epsilon_n \leq t < b \\ F(t) & \text{si } b \leq t, \end{cases} \quad (1.4)$$

Comme dans le cas $b = \infty$, nous avons $\lim_{n \rightarrow \infty} \int t dG_n(t) = 0$ et $F_n * G_n(t) \leq F(t)$. Nous appliquons le lemme 1.1 pour obtenir $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = \mu(F)$.

2ème cas : $F(0) = 0$ et $t_0 = \sup\{t : F(t) = 0\} = 0$. En utilisant l'argument du lemme 1.2, nous avons pour tout $\xi > 0$

$$|\mu(F_\xi) - \mu(F)| \leq \xi c_1(F) f_1(F_\xi) \quad (1.5)$$

où F_ξ est donné par la définition 1.3 du chapitre II. Notons que $F_\xi(0) = F(\xi) > 0$ et $F_\xi > F$ pour tout $\xi > 0$. Suivons l'argument du 1er cas, remplaçons F par F_ξ , choisissons G_n par rapport à F_ξ telles que $F_n * G_n \leq F_\xi$ pour tout n et utilisons la condition (ii) du théorème 1.2 pour obtenir,

$$\mu(F_\xi) \leq \mu(F_n * G_n) \leq \mu(F_n) + c_1(F_n) f_1(F_n) \int t dG_n(t) \leq \mu(F_n) + c_1(F) f_1(F_n) \int t dG_n(t) \quad (1.6)$$

Il en découle

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) \geq \mu(F_\xi) \geq \mu(F) - \xi c_1(F) f_1(F_\xi)$$

Prenons $\xi \rightarrow 0$. Puisqu'une fonction de répartition est partout continue à droite, $\lim_{\xi \rightarrow 0} F_\xi \stackrel{w}{=} F$. D'après la condition (ii), nous avons que $\lim_{\xi \rightarrow 0} f_1(F_\xi) = f_1(F) < \infty$, et alors $\xi c_1(F) f_1(F_\xi) \rightarrow 0$. Donc, $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) \geq \mu(F)$.

3ème cas : $t_0 = \sup\{t : F(t) = 0\} > 0$. Prenons $\xi > 0$ tel que $t'_0 := t_0 - \xi > 0$. Par le lemme 1.2 :

$$|\mu(F) - \mu(\hat{F}_{t'_0}^\xi)| \leq 2\xi c_1(F) f_1(\hat{F}_{t'_0}^\xi) \quad (1.7)$$

Puisque $0 = F(t'_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t'_0)$, donc, pour n suffisamment grand, $F_n(t'_0) < c$ ($c > 0$ est la

Annexe

constante de la condition (iii) du théorème 1.2). La condition (iii) du théorème 1.2 nous donne,

$$|\mu(F_n^{t'_0}) - \mu(F_n)| \leq c_2(F_n)f_2(t'_0, F_n) \leq c_2(F)f_2(t'_0, F_n)$$

Puisque $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t'_0)$, il en découle par la condition (iii) que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_2(t'_0, F_n) = 0$. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n^{t'_0}) \quad (1.8)$$

Notons que $\hat{F}_{t_0}^\xi(t'_0) > 0$ et $\hat{F}_{t_0}^\xi(t) = F_n^{t'_0}(t) = 0$ pour $t < t'_0$. La technique du 1er cas peut être utilisée pour construire une suite de fonctions de répartition telles que $\int t dG_n(t) \rightarrow 0$ and $F_n^{t'_0} * G_n \leq \hat{F}_{t_0}^\xi$. De la condition (ii) du théorème 1.2,

$$\begin{aligned} \mu(\hat{F}_{t_0}^\xi) &\leq \mu(F_n^{t'_0} * G_n) \leq \mu(F_n^{t'_0}) + c_1(F_n^{t'_0})f_1(F_n^{t'_0}) \int t dG_n(t) \\ &\leq \mu(F_n^{t'_0}) + c_1(F^{t'_0})f_1(F_n^{t'_0}) \int t dG_n(t) \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{t'_0} \xrightarrow{w} F^{t'_0}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(F_n^{t'_0}) = f_1(F^{t'_0}) < \infty$. Il en découle que,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n^{t'_0}) \geq \mu(\hat{F}_{t_0}^\xi).$$

En la combinant avec (1.7) et (1.8) :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n^{t'_0}) \geq \mu(\hat{F}_{t_0}^\xi) \geq \mu(F) - 2\xi c_1(F)f_1(\hat{F}_{t_0}^\xi)$$

Prenons $\xi \rightarrow 0$ en remarquant que $\lim_{\xi \rightarrow 0} f_1(\hat{F}_{t_0}^\xi) = f_1(F^{t_0})$, on a $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) \geq \mu(F)$.

Bibliographie

- [AD13] Antonio Auffinger and Michael Damron, *The scaling relation $\chi = 2\xi - 1$ for directed polymers in a random environment*, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. **10** (2013), no. 2, 857–880. MR 3141825 [6](#), [19](#), [20](#), [56](#)
- [AD14] ———, *A simplified proof of the relation between scaling exponents in first-passage percolation*, The Annals of Probability **42** (2014), no. 3, 1197–1211. [3](#)
- [AG89] R Arratia and L Gordon, *Tutorial on large deviations for the binomial distribution*, Bulletin of mathematical biology **51** (1989), no. 1, 125–131. [77](#)
- [Ale93] Kenneth S Alexander, *A note on some rates of convergence in first-passage percolation*, The Annals of Applied Probability (1993), 81–90. [47](#), [55](#), [56](#)
- [Ale97] ———, *Approximation of subadditive functions and convergence rates in limiting-shape results*, The Annals of Probability **25** (1997), no. 1, 30–55. [47](#), [56](#)
- [Bjö10] Michael Björklund, *The asymptotic shape theorem for generalized first passage percolation*, Ann. Probab. **38** (2010), no. 2, 632–660. MR 2642888 (2011h :60199) [14](#), [96](#)
- [BKS03] Itai Benjamini, Gil Kalai, and Oded Schramm, *First passage percolation has sub-linear distance variance*, Ann. Probab. **31** (2003), no. 4, 1970–1978. MR 2016607 (2005b :60251) [6](#)
- [Boi90] Daniel Boivin, *First passage percolation : the stationary case*, Probab. Theory Related Fields **86** (1990), no. 4, 491–499. MR 1074741 (92f :60177) [13](#), [14](#), [96](#)

Bibliographie

- [CD81a] J. Theodore Cox and Richard Durrett, *Some limit theorems for percolation processes with necessary and sufficient conditions*, Ann. Probab. **9** (1981), no. 4, 583–603. MR 624685 (82k :60208) [2](#), [6](#)
- [CD81b] J Theodore Cox and Richard Durrett, *Some limit theorems for percolation processes with necessary and sufficient conditions*, The Annals of Probability (1981), 583–603. [13](#)
- [Cha13] Sourav Chatterjee, *The universal relation between scaling exponents in first-passage percolation*, Ann. of Math. (2) **177** (2013), no. 2, 663–697. MR 3010809 [3](#), [6](#), [19](#), [45](#), [46](#), [51](#), [56](#), [63](#)
- [CK81] J. Theodore Cox and Harry Kesten, *On the continuity of the time constant of first-passage percolation*, J. Appl. Probab. **18** (1981), no. 4, 809–819. MR 633228 (83a :60171) [3](#), [36](#)
- [Cox80] J. Theodore Cox, *The time constant of first-passage percolation on the square lattice*, Adv. in Appl. Probab. **12** (1980), no. 4, 864–879. MR 588407 (82i :60179) [viii](#), [18](#), [23](#), [25](#), [26](#), [27](#), [107](#)
- [DA14] Maria Deijfen and Sven Erick Alm, *First passage percolation on $\mathbb{Z}^2$ - a simulation study*, arXiv :1412.5924 (2014). [20](#)
- [DM04] Pierre Del Moral, *Feynman-Kac formulae. Genealogical and interacting particle approximations*, 2004. [3](#)
- [DMM99] Pierre Del Moral and Laurent Miclo, *Asymptotic stability of non linear semigroup of feynman-kac type*, Université de Toulouse. Laboratoire de Statistique et Probabilités [LSP], 1999. [1](#)
- [Flu07] Markus Flury, *Large deviations and phase transition for random walks in random nonnegative potentials*, Stochastic Process. Appl. **117** (2007), no. 5, 596–612. MR 2320951 (2008k :60061) [5](#), [43](#), [98](#)
- [GM04] Olivier Garet and Régine Marchand, *Asymptotic shape for the chemical distance and first-passage percolation on the infinite bernoulli cluster*, ESAIM : Probability and Statistics **8** (2004), 169–199. [14](#)
- [Gri10] Geoffrey R Grimmett, *Percolation (grundlehren der mathematischen wissenschaften)*, 2010. [27](#)

- [Ham62] JM Hammersley, *Generalization of the fundamental theorem on subadditive functions*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **58** (1962), no. 02, 235–238. [57](#)
- [HW65] John M Hammersley and DJA Welsh, *First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory*, Bernoulli 1713, Bayes 1763, Laplace 1813, Springer, 1965, pp. 61–110. [2](#)
- [IV12] Dmitry Ioffe and Yvan Velenik, *Self-attractive random walks : the case of critical drifts*, Comm. Math. Phys. **313** (2012), no. 1, 209–235. MR 2928223 [36](#)
- [Jan84] Svante Janson, *Bounds on the distributions of extremal values of a scanning process*, Stochastic processes and their applications **18** (1984), no. 2, 313–328. [100](#)
- [KB85] Ulrich Krengel and Antoine Brunel, *Ergodic theorems*, vol. 59, Cambridge Univ Press, 1985. [12](#)
- [Kes86] Harry Kesten, *Aspects of first passage percolation*, Lecture Notes in Math., vol. 1180, Springer, Berlin, 1986. MR 876084 (88h :60201) [2](#), [3](#), [13](#), [90](#), [96](#)
- [Kes93] ———, *On the speed of convergence in first-passage percolation*, The Annals of Applied Probability (1993), 296–338. [47](#), [48](#), [51](#), [55](#)
- [Kin68] John FC Kingman, *The ergodic theory of subadditive stochastic processes*, Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological) (1968), 499–510. [5](#), [13](#)
- [Kin93] J. F. C. Kingman, *Poisson processes*, Oxford Studies in Probability, vol. 3, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993, Oxford Science Publications. MR 1207584 (94a :60052) [7](#), [8](#), [9](#)
- [KM12] Elena Kosygina and Thomas Mountford, *Crossing velocities for an annealed random walk in a random potential*, Stochastic Process. Appl. **122** (2012), no. 1, 277–304. MR 2860450 [36](#)
- [KMZ11] Elena Kosygina, Thomas S. Mountford, and Martin P. W. Zerner, *Lyapunov exponents of Green’s functions for random potentials tending to zero*, Probab. Theory Related Fields **150** (2011), no. 1-2, 43–59. MR 2800903 [18](#), [20](#)
- [KPZ86] Mehran Kardar, Giorgio Parisi, and Yi-Cheng Zhang, *Dynamic scaling of growing interfaces*, Physical Review Letters **56** (1986), no. 9, 889. [19](#)

Bibliographie

- [KS91] Joachim Krug and Herbert Spohn, *Kinetic roughening of growing surfaces*, C. Godreche, Cambridge University Press, Cambridge **1** (1991), no. 99, 1. [19](#)
- [KSF82] I. P. Kornfel'd, Ya. G. Sinai, and S. V. Fomin, *Ergodic theory*, Springer-Verlag, 1982. MR 610981 (83a :28017) [12](#), [82](#)
- [Lac12a] Hubert Lacoin, *Superdiffusivity for Brownian motion in a Poissonian potential with long range correlation : I : Lower bound on the volume exponent*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **48** (2012), no. 4, 1010–1028. MR 3052458 [6](#), [7](#), [11](#), [21](#), [77](#), [92](#)
- [Lac12b] ———, *Superdiffusivity for Brownian motion in a Poissonian potential with long range correlation II : Upper bound on the volume exponent*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **48** (2012), no. 4, 1029–1048. MR 3052457 [7](#), [11](#), [21](#), [47](#), [77](#)
- [Law91] Gregory F Lawler, *Intersections of random walks*, Birkhauser, 1991. [61](#)
- [Le13] Thi Thu Hien Le, *On the continuity of Lyapunov exponents of random walks in random potentials*, arXiv :1306.5152 (2013). [20](#), [23](#)
- [Mou12] Jean-Christophe Mourrat, *Lyapunov exponents, shape theorems and large deviations for the random walk in random potential*, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. **9** (2012), 165–209. MR 2923190 [13](#), [18](#), [105](#)
- [MP10] Peter Mörters and Yuval Peres, *Brownian motion*, vol. 30, Cambridge University Press, 2010. [53](#)
- [Nev77] Jacques Neveu, *Processus ponctuels*, L'école d'été de Saint Flour 1977, Springer, 1977, pp. 249–445. [8](#)
- [NP95] Charles M Newman and Marcelo ST Piza, *Divergence of shape fluctuations in two dimensions*, The Annals of Probability (1995), 977–1005. [46](#), [63](#)
- [RASY13] Firas Rassoul-Agha, Timo Seppäläinen, and Atilla Yilmaz, *Quenched free energy and large deviations for random walks in random potentials*, Comm. Pure Appl. Math. **66** (2013), no. 2, 202–244. MR 2999296 [18](#)
- [Rue12] J. Rueß, *Lyapunov exponents of Brownian motion : decay rates for scaled Poissonian potentials and bounds*, Markov Process. Related Fields **18** (2012), no. 4, 595–612. MR 3051654 [11](#), [18](#), [71](#)

-
- [Rue13] Johannes Rueß, *A variational formula for the Lyapunov exponent of Brownian motion in stationary ergodic potential*, arXiv preprint arXiv :1308.4351 (2013). [73](#)
- [Rue14] ———, *Continuity results and estimates for the lyapunov exponent of brownian motion in random potential*, arXiv preprint arXiv :1404.1273 (2014). [21](#), [73](#)
- [Sch14] Julie Scholler, *On the time constant in a dependent first passage percolation model*, ESAIM : Probability and Statistics (2014). [18](#)
- [Sod14] Sasha Sodin, *Positive temperature versions of two theorems on first-passage percolation*, Geometric Aspects of Functional Analysis (2014). [6](#), [47](#)
- [SW78] R. T. Smythe and John C. Wierman, *First-passage percolation on the square lattice*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 671, Springer, Berlin, 1978. MR 513421 (80a :60135) [42](#)
- [Szn94] Alain-Sol Sznitman, *Shape theorem, Lyapounov exponents, and large deviations for Brownian motion in a Poissonian potential*, Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994), no. 12, 1655–1688. MR 1303223 (96b :60217) [13](#), [18](#), [71](#), [93](#), [101](#), [102](#)
- [Szn95] ———, *Crossing velocities and random lattice animals*, Ann. Probab. **23** (1995), no. 3, 1006–1023. MR 1349160 (96j :60066) [30](#), [71](#), [73](#), [74](#)
- [Szn96] ———, *Distance fluctuations and Lyapounov exponents*, Ann. Probab. **24** (1996), no. 3, 1507–1530. MR 1411504 (98b :60175) [7](#), [11](#), [47](#), [48](#), [55](#), [56](#), [60](#), [71](#)
- [Szn98] ———, *Brownian motion, obstacles and random media*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998. MR 1717054 (2001h :60147) [11](#), [15](#), [17](#), [18](#), [71](#), [72](#), [83](#), [88](#), [89](#), [90](#), [91](#), [92](#), [94](#), [96](#), [98](#), [99](#), [104](#), [105](#), [106](#)
- [Tal95] Michel Talagrand, *Concentration of measure and isoperimetric inequalities in product spaces*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1995), no. 81, 73–205. MR 1361756 (97h :60016) [6](#), [47](#)
- [Wüt98a] Mario V Wüthrich, *Fluctuation results for brownian motion in a poissonian potential*, Annales de l’Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics, vol. 34, Elsevier, 1998, pp. 279–308. [6](#), [11](#), [47](#), [63](#), [71](#)
- [Wüt98b] Mario V. Wüthrich, *Scaling identity for crossing Brownian motion in a Poissonian potential*, Probab. Theory Related Fields **112** (1998), no. 3, 299–319. MR 1660910 (99k :60209) [11](#), [19](#), [47](#), [71](#)

Bibliographie

- [Wüt98c] Mario V Wüthrich, *Superdiffusive behavior of two-dimensional brownian motion in a poissonian potential*, Annals of probability (1998), 1000–1015. [11](#), [71](#)
- [Zer98] Martin P. W. Zerner, *Directional decay of the Green's function for a random non-negative potential on $\mathbf{Z}^d$* , Ann. Appl. Probab. **8** (1998), no. 1, 246–280. MR 1620370 (99f :60172) [3](#), [5](#), [6](#), [13](#), [19](#), [20](#), [30](#), [35](#), [46](#), [48](#), [49](#), [90](#), [96](#), [105](#)
- [Zyg09] N. Zygouras, *Lyapounov norms for random walks in low disorder and dimension greater than three*, Probab. Theory Related Fields **143** (2009), no. 3-4, 615–642. MR 2475675 (2010d :60113) [6](#)