HAL open science

Modèles stochastiques pour l'aide au pilotage des chaines logistiques: l'impact de la décentralisation

Ziad Jemai

To cite this version:

Ziad Jemai. Modèles stochastiques pour l'aide au pilotage des chaines logistiques: l'impact de la décentralisation. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole Centrale Paris, 2003. Français. NNT : . tel-01177449

HAL Id: tel-01177449

https://hal.science/tel-01177449v1

Submitted on 17 Jul 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Open licence - etalab

ÉCOLE CENTRALE
PARIS

THESE DE DOCTORAT
Spécialité Génie Industriel

Présenté par

Zied JEMAI

SUJET

MODELES STOCHASTIQUES POUR L'AIDE AU PILOTAGE DES CHAINES LOGISTIQUES : L'IMPACT DE LA DECENTRALISATION

Soutenue le 19/12/2003 à l'Ecole Centrale Paris

devant le jury composé de :

Président : Yannick FREIN – Professeur, ENSGI-INPG, Grenoble

Examinateur : Daniel LLERENA – Maître de conférences, Université Pierre Mendès France, Grenoble

Rapporteurs : Jean Claude HENNET – Directeur de recherche, LAAS- CNRS, Toulouse

Saif BENJAAFAR – Professeur, l'Université de Minnesota, Minneapolis

Directeurs de thèse : Yves DALLERY – Professeur, Ecole Centrale Paris

Fikri KARAESMEN – Maître de conférences, Koc University, Istanbul

2003-42

Laboratoire Génie Industriel
Ecole Centrale Paris
Grande Voie des Vignes
92295 Châtenay Malabry Cedex

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude à Fikri KARAESMEN dont les conseils précieux m'ont guidé, et ma vive reconnaissance à Yves DALLERY qui a veillé au bon déroulement de ce travail.

Qu'il me soit permis de remercier également Saif BENJAAFAR et Jean-Claude HENNET qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'évaluer ce travail, ainsi que les membres du jury Yannick FREIN et Daniel LLERENA.

L'occasion m'est offerte de remercier aussi mes compagnons de bureau Khaled HADJ-YOUSSEF, Salah AGUIR et Zied BABAI pour leur amitié et pour l'intérêt des discussions que nous avons eues.

Je tiens à remercier toutes les personnes du Laboratoire Génie Industriel, toujours disponibles à m'aider, en particulier Bill, Anne et Sylvie.

Enfin, je rends hommage à ceux sans lesquels ce travail n'aurait pas pu être fait : à mes parents pour leurs sacrifices, à Rim pour tout l'amour qu'elle m'éprouve et à mes amis pour leur soutien et leur présence. Ce travail leur est dédié.

Table des matières

Table des matières **5**
Table des figures **11**
Introduction générale **15**
Chapitre 1 ..... **21**
Pilotage des flux dans la chaîne logistique **21**
1 Introduction **21**
2 Notion de chaîne logistique **22**
3 Différents niveaux de décision dans la chaîne logistique **23**
4 Le pilotage de flux **25**
4.1 Différents flux de la chaîne logistique 25
4.2 Pilotage des flux de la chaîne logistique 27
4.2.1 Définition et généralités 27
4.2.2 Contraintes du pilotage des flux 28
4.2.3 Objectif du pilotage des flux 28
4.2.4 Informations nécessaires au pilotage des flux 29
4.3 Différentes approches de pilotage de flux 30
4.4 Méthodes de pilotage des flux 31
4.4.1 La méthode MRP(Material Requirements Planning) 33
4.4.2 Les méthodes de renouvellement de consommation 34
4.5 Les méthodes à flux tiré dans la chaîne logistique 36
4.5.1 Politique de stock nominal (Base Stock) 36
4.5.1.1 Description 36
4.5.1.2 Cadre d'application 37
4.5.1.3 Objectif client 37
4.5.1.4 Différents coûts intervenant dans l'optimisation 38

4.5.1.5 Fonction objectif 38
4.5.1.6 Extensions 39
4.5.2 La politique Kanban 40
5 Conclusion 41
Chapitre 2 43
Modèles stochastiques Théorie des files d'attentes 43
1 Introduction 43
2 Généralités 44
2.1 Modélisation 44
2.2 Evaluation et analyse des performances 45
3 Modélisation par les files d'attente 47
3.1 Caractérisation des files d'attente 47
3.1.1 Processus d'arrivée 47
3.1.2 Le temps de service 48
3.1.3 Discipline de service 48
3.1.4 Capacité du système 48
3.1.5 Nombre de serveurs 48
3.1.6 Nombre d'étages de service 49
3.2 Notation et représentation d'une file d'attente 49
3.2.1 Notation 49
3.2.2 Représentation d'une file d'attente 50
3.2.3 Station de synchronisation 50
3.3 Modélisation des systèmes de production 51
3.3.1 Analogie systèmes de production-files d'attente 51
3.3.2 Modélisation de la politique de stock nominal 51
3.4 Evaluation de performances 53
3.4.1 Notations 53
3.4.2 Paramètres de performance 54
3.4.3 Stabilité 55
3.4.4 Ergodicité 55
3.4.5 Loi de Little 55
3.4.6 Application à la politique de stock nominal 56
4 Les files d'attentes simples 56
4.1 La file *M/M/1* 57
4.2 La file *M/G/1* 57
4.3 La file *G/M/1* 58
4.4 La file *G/G/1* 59
5 Conclusion 60

Chapitre 3 ..... **61**
Théorie des jeux et chaîne logistique **61**
1 Introduction **61**
2 Concepts de base de la théorie des jeux **62**
2.1 Un peu d'histoire 62
2.2 Les constituants d'un jeu 63
2.2.1 Les acteurs 63
2.2.2 Les stratégies 63
2.2.3 La fonction d'utilité 64
2.2.4 La forme du jeu 65
3 La théorie des jeux et la chaîne logistique **65**
3.1 Différents modèles de la théorie des jeux 65
3.2 Différents travaux effectués 65
3.2.1 Jeux statiques non coopératifs 66
3.2.2 Jeux dynamiques 67
3.2.3 Jeux coopératifs 70
3.2.4 Jeux avec information asymétrique 71
4 Equilibre de Nash **72**
4.1 Introduction 72
4.2 Courbes de réaction 73
4.3 Existence 74
4.4 Unicité 75
5 Equilibre de Stackelberg **77**
6 Conclusion **78**
Chapitre 4 ..... **81**
L'influence de la variabilité sur les performances d'un étage de production par anticipation **81**
1 Introduction **81**
2 Etat de l'art **82**
3 Préliminaires **83**
3.1 Modèle et notations 83
3.2 Définitions et propriétés des comparaisons stochastiques 85
4 L'influence de la variabilité de la demande sur le niveau de stock nominal et sur le coût associé **86**
4.1 Le niveau optimal du stock nominal 86
4.2 Le coût optimal 88
4.3 Comparaisons des processus d'arrivées usuels 90
4.3.1 Les distributions Gamma/Weibull 91

4.3.2 Distributions d'Erlang avec nombre d'étages identiques 92
4.3.3 Distribution Hyper-Exponentielle à deux étages 93
4.3.4 Modélisation des arrivées groupées : la distribution Générale-Exponentielle 94
5 Exemples numériques 95
6 Extensions à d'autres types de variabilité 98
6.1 La variabilité du temps de service: une extension aux files *M/G/1* 98
6.2 Systèmes de production par anticipation de type *G/G/1* 100
7 Conclusion 101
Chapitre 5 103
L'influence de la décentralisation sur les performances d'une chaîne logistique à deux étages 103
1 Introduction 103
2 Etat de l'art 105
3 Modèle et notations 106
4 Résultats obtenus 107
4.1 La solution centralisée : 107
4.2 La solution décentralisée : 108
4.2.1 Equilibre de Nash : 113
4.2.2 Comparaison des solutions 119
4.2.3 Equilibre de Stackelberg : 122
4.2.4 Comparaison des solutions 122
4.2.5 La coordination : 125
4.2.6 Participation du fournisseur au coût de stockage du détaillant : le contrat α_S 127
4.2.7 Participation du détaillant au coût de stockage du fournisseur : le contrat α_R 130
4.2.8 Partage du coût de stockage total : le contrat δ 132
4.2.9 Le contrat α généralisé 133
5 Cas de la file *G/M/1* : 135
5.1.1 Equilibre de Nash : 137
5.1.2 Comparaison des solutions 138
5.1.3 Equilibre de Stackelberg 140
5.1.4 Comparaison des solutions 140
5.1.5 La Coordination 141
6 Conclusion 143
Chapitre 6 145
Influence de la décentralisation sur les performances d'une chaîne logistique à deux étages de production/stockage, cas de plusieurs détaillants 145
1 Introduction 145
2 Etat de l'art 146

3 Modèle et notations **147**
4 Cas de deux étages de production **149**
4.1 La solution centralisée 149
4.2 La solution décentralisée 150
4.2.1 Equilibre de Nash : 150
4.2.2 Comparaison des solutions 151
4.2.3 Equilibre de Stackelberg : 152
4.2.4 La coordination : 154
5 Cas de plusieurs détaillants **155**
5.1 Méthode utilisée 156
5.2 Cas de trois détaillants identiques 157
5.3 Cas de deux détaillants différents 159
5.3.1 L'impact du taux d'utilisation 159
5.3.2 L'impact du taux de la demande 161
5.4 Cas de deux détaillants différents avec priorité 163
6 Conclusion **164**
Chapitre 7 ..... **169**
Etude de l'information avancée avec fenêtre de temps **169**
1 Introduction **169**
2 Etat de l'art **170**
3 Modèle du Buzacott et Shanthikumar **173**
3.1 Modèle et notations 173
3.2 Optimisation 173
4 Modèle de Karaesmen, Liberopoulos et Dallery **175**
4.1 Description du modèle 175
4.2 Optimisation 176
5 Modèle avec fenêtre de temps **178**
5.1 Description du modèle 178
5.2 Optimisation 179
5.3 Propriétés 181
5.4 Influence de la variabilité sur les performances du modèle avec fenêtre de temps 184
6 Applications numériques **188**
7 Conclusion **191**
Chapitre 8 ..... **193**
Etude de la décentralisation avec information avancée **193**
1 Introduction **193**
2 Etat de l'art **194**

3 Modèle étudié **195**
4 Résultats obtenus **197**
4.1 Solution centralisée 197
4.2 Système décentralisé 198
4.2.1 Optimisation : 198
4.2.2 Equilibre de Nash 201
4.2.3 Etude du contrat α_S 208
4.2.4 La coordination avec les fenêtres de temps : le contrat τ 211
5 Conclusion **216**
Conclusions et perspectives **219**
Annexes A : **225**
Rappels mathématiques **225**
1 Quelques définitions **225**
2 Variables aléatoires **226**
2.1 Généralités 226
2.2 Exemples de lois de probabilité 228
3 Processus stochastiques **229**
3.1 Généralités 229
3.2 Processus de Poisson 231
4 Transformé de Laplace **231**
Annexes B : **233**
Lois étudiées et **233**
exemple de calcul de r_0 ..... **233**
1 Lois étudiées **233**
2 Calcul de r_0 pour une distribution d'Erlang à deux étages: **234**
Bibliographie **237**

Table des figures

Fig. 1.1 : Exemple de chaîne logistique **23**
Fig. 1.2 : Différents niveaux de décision dans la chaîne logistique **24**
Fig. 1.3 : représentation du flux physique d'une chaîne logistique **26**
Fig. 1.4 : Exemples de décisions en pilotage des flux **27**
Fig. 1.5 : Production par anticipation / Production à la commande **31**
Fig. 1.6 : les différentes méthodes de pilotage des flux **32**
Fig. 1.7: Champ d'action des différentes méthodes de pilotage de flux **33**
Fig. 1.8 : Politique de stock nominal **36**
Fig. 1.9 : Comportement du stock dans une politique de stock nominal **39**
Fig. 1.10 : La politique Kanban **40**
Fig. 2.1 : Optimisation des systèmes de production **45**
Fig. 2.2 : Représentation d'un système de file d'attente simple **50**
Fig. 2.3 : Station de synchronisation **50**
Fig. 2.4 : Comportement du stock dans une politique de stock nominal **51**
Fig. 2.5 : Comportement du nombre de client dans un système de file d'attente **52**
Fig. 2.6 : Modélisation de la politique de stock nominal par les files d'attente **52**
Fig. 2.7 :Système de file d'attente **53**
Fig. 2.8 : Politique de stock nominal mono-étage **56**
Fig. 3.1 : forme normale d'un jeu à deux joueurs **66**
Fig. 3.2 : forme extensive d'un jeu **68**
Fig. 3.3 : passage de la forme normale à la forme coalitionnelle d'un jeu **70**
Fig. 3.4 : jeu statique avec information asymétrique **71**
Fig.3.5 : courbes de réaction **73**
Fig. 3.6 : Dilemme du prisonnier **75**
Fig. 3.7 : bataille des sexes **76**
Fig. 3.8 : forme stratégique d'un jeu de Stackelberg **77**

Fig. 4.1 : S* et C(S*) en fonction de CV pour ρ=0.9, b=10 96
Fig. 4.2 : S* et C(S*) en fonction de CV pour ρ=0.9, h=1, b=10 96
Fig. 4.3 : Comparaison des niveaux de stock optimaux dans des systèmes de production par anticipation de type GE/M/1 et H_2/M/1 (ρ=0.9, h=1, b=10).....97
Fig. 4.4 : Comparaison du paramètre r_0 de deux files d'attente de type GE/M/1 et H_2/M/1 (ρ=0.9, h=1, b=10) 98
Fig. 5.1 : Modélisation d'un problème de production par anticipation à deux agents avec une stratégie de stock nominal.....106
Fig. 5.2 : L'efficacité de l'équilibre de Nash en fonction de br. 121
Fig. 5.3 : Perte relative en fonction de b_r (h_s=1 ; h_r=1,1).....121
Fig. 5.4 : l'équilibre « le fournisseur est le meneur Stackelberg » 123
Fig. 5.5 : l'équilibre « le détaillant est le meneur Stackelberg » 123
Fig. 5.6 : comparaison des différents équilibres étudiés.....124
Fig. 5.7 : les courbes de gain du contrat α_S par rapport à l'équilibre de Nash 130
Fig. 5.8 : les courbes de gain du contrat α_R par rapport à l'équilibre de Nash.....131
Fig. 5.9 : L'efficacité de l'équilibre de Nash en fonction de b_r.....139
Fig. 5.10 : comparaison des équilibres étudiés pour des r_0 différents.....141
Fig. 6.1 : Modèle général.....148
Fig. 6.2 : Perte relative à l'équilibre de Nash 151
Fig. 6.3 : Comportement de PR en fonction du taux de service de l'étage 2 152
Fig. 6.4 : Comparaison entre les différents équilibre d'un système décentralisé 153
Fig. 6.5 : les courbes de gain du contrat α_S par rapport à l'équilibre de Nash 155
Fig. 6.6 : modèle de simulation sur ARENA 157
Fig. 6.7 : Pénalité de décentralisation pour 3 détaillants identiques.....158
Fig. 6.8 : contraintes de participation.....159
Fig. 6.9 : coûts des différents acteurs en fonction de br 160
Fig. 6.10 : Contraintes de participation.....161
Fig. 6.11: coûts des différents acteurs en fonction de br 161
Fig. 6.12 : Pénalité de décentralisation 162
Fig. 6.13a : Pénalité de décentralisation pour $b_{r1} = b_{r2}$ 163
Fig. 6.13b : Pénalité de décentralisation pour $b_{r1} = 1/3 * b_{r2}$.....163
Fig. 6.14 : Coûts des différents acteurs dans le cas avec priorité.....164
Fig. 7.1 : Modèle de Buzacott et Shanthikumar 173
Fig. 7.2 : effet de la variabilité sur le coût optimal.....185
Fig. 7.3 : évolution de $S_j^* = f(\tau_2)$ en fonction de la variabilité pour différents τ.....188
Fig. 7.4: S_b^* et $C_b(S_b^*)$en fonction de τ_2 189
Fig. 7.5: S_k* et $C_k(S_k$*)en fonction de τ_2.....189
Fig. 7.6: Comparaison des deux modèles.....189

Fig. 7.7: S_j^* et $C_j(S_j^*)$en fonction de τ_2 pour différentes valeurs de τ 190
Fig.7.8: Evolution des performances du système en fonction des paramètres de l'information avancée 190
Fig.7.9 : différents modèles étudiés.....191
Fig. 8.1 : Modèle de production par anticipation avec fenêtres de temps dans une politique de stock nominal 196
Fig. 8.2 : Relations entre les équilibres de Nash sans et avec information avancée 204
Fig. 8.3 : l'efficacité de l'équilibre de Nash en fonction de b_r pour différentes valeurs de τ_2 206
Fig. 8.4 : L'évolution du coût total en fonction de τ_2.....208
Fig. 8.5 : les courbes de gain du contrat α_S par rapport à l'équilibre de Nash 209
Fig. 8.6 : évolution de la validité des contraintes de participation en fonction de τ_2.....210
Fig. 8.7 : les courbes de gain du contrat τ par rapport à l'équilibre de Nash 216

Introduction générale

Dans l'organisation classique des systèmes de production, le produit passe par de phases distinctes pilotées généralement par des acteurs différents : production, assemblage, transport, stockage… Chaque acteur anticipe les besoins en aval en construisant des stocks, ce qui rend les différentes phases indépendantes les une des autres. De ce fait, chaque acteur arrive à gérer son activité sans se soucier des aléas qui peuvent survenir des activités en amont.

Si cette stratégie a prouvé son efficacité pendant des décennies, la saturation des marchés, la concurrence, la diversification des produits et la diminution de leur cycle de vie ont poussé les différents acteurs à tenir compte des exigences du client en donnant plus d'importance au service tout en gardant des prix compétitifs. Une telle situation ne tolère pas une immobilisation importante en stocks et les entreprises ont dû abandonner cette stratégie pour d'autres techniques (zéro stock, différenciation retardée…). Or, le recours à ces techniques rend le lien entre les différentes phases très étroit, et les acteurs se trouvent dans l'obligation de tenir compte des paramètres des phases en amont et en aval lors du processus de décision. Cette notion de phases s'est transformée, au fil du temps, en maillons d'une chaîne appelée chaîne logistique, une vision globale qui s'étend du premier fournisseur jusqu'au client final, voire même le recyclage. La chaîne logistique couvre un champ d'activités très large incluant l'approvisionnement, la production et la distribution.

L'apport du concept de chaîne logistique est considérable et chaque acteur se retrouve, grâce à cette vision globale, avec une connaissance plus fine des différents flux et

besoins du système et donc plus réactif aux aléas des autres maillons en amont et en aval.

Cependant, l'existence de plusieurs acteurs, ne faisant généralement pas partie de la même entreprise, donne aux décisions opérationnelles un caractère propre lié aux critères locaux. Dans le contexte de la chaîne logistique, ceci se traduit par une optimisation individuelle souvent effectuée d'une façon concurrentielle. On parle alors de décentralisation des décisions conduisant à une perte d'efficacité pour l'ensemble de la chaîne.

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux politiques de pilotage à flux tirés, en particulier la politique de stock nominal *« Base Stock »*. Nous considérons des modèles à deux étages avec capacité finie de production.

L'évaluation des performances des systèmes étudiés passe nécessairement par une phase de modélisation. Nous avons opté pour la modélisation par le formalisme des files d'attente afin de bénéficier des outils mathématiques puissants qui lui sont associés et qui nous ont permis d'aboutir aux résultats analytiques escomptés.

La détermination des paramètres de contrôle du système décentralisé passe par l'étude de l'interaction entre les différents acteurs de la chaîne logistique. Cette étude est faite à l'aide d'outils de la théorie des jeux ayant prouvé leur efficacité dans ce genre de situations. Nous recourons en particulier à l'équilibre de Nash, qui suppose un rapport de force équilibré entre les différents acteurs, ainsi qu'à l'équilibre de Stackelberg qui suppose un rapport de force non équilibré.

L'objectif de ce travail est de mesurer analytiquement, sur des modèles simplifiés de chaînes logistiques à deux étages, la dégradation des performances liée à cette décentralisation, ainsi que l'effet de la variabilité des paramètres du système sur cette dégradation. Nous utilisons également la notion de « coordination », qui consiste à élaborer des contrats entre les différents acteurs, afin de ramener le système à ses performances optimales.

Afin de valider les résultats obtenus sur des modèles plus complexes, nous avons recours aux études numériques et à la simulation.

Par ailleurs, la vision globale offerte par le concept de la chaîne logistique fait que les différents acteurs disposent de plus en plus d'information avancée sur la demande

(ordres à l'avance, prévisions, information partagée, engagements…). Différentes études ont montré que l'utilisation correcte de cette information aboutit à l'amélioration des performances de la chaîne logistique. Cependant, toutes les études faites dans ce sens, sur des systèmes de production/stockage, concernent les modèles centralisés. Nous étudions l'influence de l'information avancée sur les performances du modèle décentralisé et nous proposons des contrats adaptés afin de maximiser l'apport de cette information.

Trois parties sont à distinguer dans ce rapport :

Dans la première partie, nous présentons le cadre dans lequel nous évoluons ainsi que les outils qui nous ont servi pour aboutir aux différents résultats. Ainsi, dans le premier chapitre, nous introduisons la notion de pilotage de flux dans la chaîne logistique et nous développons la politique de stock nominal. Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation par le formalisme des files d'attente et à l'introduction des différents paramètres de contrôle que nous utiliserons dans l'évaluation des performances des modèles étudiés. Les concepts de la théorie des jeux et les différents équilibres utilisés sont développés dans le chapitre 3.

La deuxième partie de ce travail sera dédiée à notre apport dans l'étude de la dégradation des performances dans une gestion décentralisée pour un modèle à deux étages. Ainsi, nous consacrons le chapitre 4 à l'étude de l'effet de la variabilité sur les performances du modèle centralisé. Dans le chapitre 5, nous étudions analytiquement un modèle décentralisé à deux acteurs, un fournisseur et un détaillant, et nous déterminons l'effet de la décentralisation sur les performances du modèle, l'influence de la variabilité sur son comportement et différents contrats de coordination afin de ramener ces performances à celles de la solution centralisée. Dans le chapitre 6, nous validons ces résultats numériquement et par simulation sur des modèles plus complexes à deux étages de production avec un fournisseur et plusieurs détaillants.

Dans la troisième partie, nous consacrons le chapitre 7 à notre contribution dans la généralisation des politiques proposées par Buzacott et Shanthikumar [16] et par Karaesmen et al. [63] pour le pilotage des flux en présence de l'information avancée sur la demande, à savoir la politique de stock nominal avec fenêtres de temps. Dans le chapitre 8, nous étudions la dégradation des performances du modèle décentralisé à deux étages avec information avancée et nous proposons différents contrats de coordination afin d'améliorer ces performances, en particulier la coordination par les fenêtres de temps.

Dans la conclusion, nous résumons notre contribution dans la compréhension et l'analyse des différents modèles étudiés et nous présentons quelques perspectives de recherche.

PREMIERE PARTIE

Chapitre 1

Pilotage des flux dans la chaîne logistique

1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre le cadre général des travaux effectués dans cette thèse, en l'occurrence le pilotage des flux dans la chaîne logistique. Nous commençons par introduire la notion de chaîne logistique. Ensuite, nous exposons les différents niveaux de décision de la chaîne logistique. Nous approfondissons par la suite le niveau des décisions opérationnelles qui s'intéresse principalement au pilotage des flux. Dans ce cadre, nous nous focalisons sur la gestion de stock dont nous exposons les différentes politiques.

Ce chapitre est l'occasion de bien définir des notions que nous allons utiliser par la suite tels que la politique du stock nominal, la modélisation de la satisfaction du client et l'information avancée. Néanmoins, nous ne nous étendons pas sur tous les aspects de la chaîne logistiques qui ont fait l'objet de nombreux ouvrages.

Le contenu de ce chapitre est inspiré d'ouvrages et d'articles de plusieurs auteurs, en particulier Dallery et Gershwin [32], Dallery [31], Vallin [99], Baglin et al [4], Holler [57] et Giard [44].

2 Notion de chaîne logistique

Le produit a été longtemps le centre d'intérêt des entreprises industrielles. En exploitant les progrès techniques et économiques de la seconde partie du 20ème siècle qui ont crée une économie de l'offre, il a réussi à trouver naturellement ses débouchés. Les entreprises se sont donc souvent structurées à partir des activités liées au processus de production (assemblage, fabrication). Mais la saturation des marchés et la concurrence résultant notamment de la mondialisation ont fait émerger d'autres notions :

- ✓ Davantage de services et de qualité pour le client,
- ✓ Une gamme de produits plus complexes au cycle de vie accéléré,
- ✓ Des périmètres d'activité plus concentrés en nature et plus étendus en géographie,
- ✓ Des exigences plus fortes en matière de sécurité et d'environnement.

Afin de survivre, les entreprises se trouvaient dans l'obligation de changer leur mode de fonctionnement en accentuant la notion de service (livraisons plus rapides, quantités plus fragmentées, suivi informatique des flux, réduction des délais commande-livraison, réapprovisionnement automatique, gestion de stock pour le client, personnalisation des conditions d'emballage et de transport, service après vente…) tout en maintenant des prix compétitifs. Afin de s'adapter à ce mode de fonctionnement, les différents décideurs ont trouvé nécessaire d'inclure dans leur organisation en plus de la production, d'autres éléments tels que l'approvisionnement et la distribution ou en d'autres termes, de disposer d'une structure globale, éventuellement multi-entreprises multi-acteurs dont l'objectif est la satisfaction du client final au moindre coût. La notion de chaîne logistique est née.

On définit la chaîne logistique comme étant la chaîne de flux et de services permettant à une filière d'activité économique de satisfaire les besoins en approvisionnement d'un client final. Tout au long de cette chaîne, participe un ensemble d'acteurs (clients et fournisseurs les uns des autres) qui mettent en œuvre des ressources et gèrent différents flux (flux physiques, flux d'information..).

Les notions de fournisseur et de client final dépendent de l'étendue du champ de l'analyse que l'on mène. Dans une étude globale, il peut s'agir du fournisseur extérieur de matière première et du client final chargé du recyclage du produit fini. Dans une étude plus restreinte, le fournisseur peut être un service intermédiaire amont chargé d'une phase de la production et le client final un agent ou prestataire à qui est confiée la

distribution. Nous désignons par fournisseurs, les acteurs situés en début de la chaîne étudiée et par clients ceux situés en fin de la chaîne (fig.1.1).

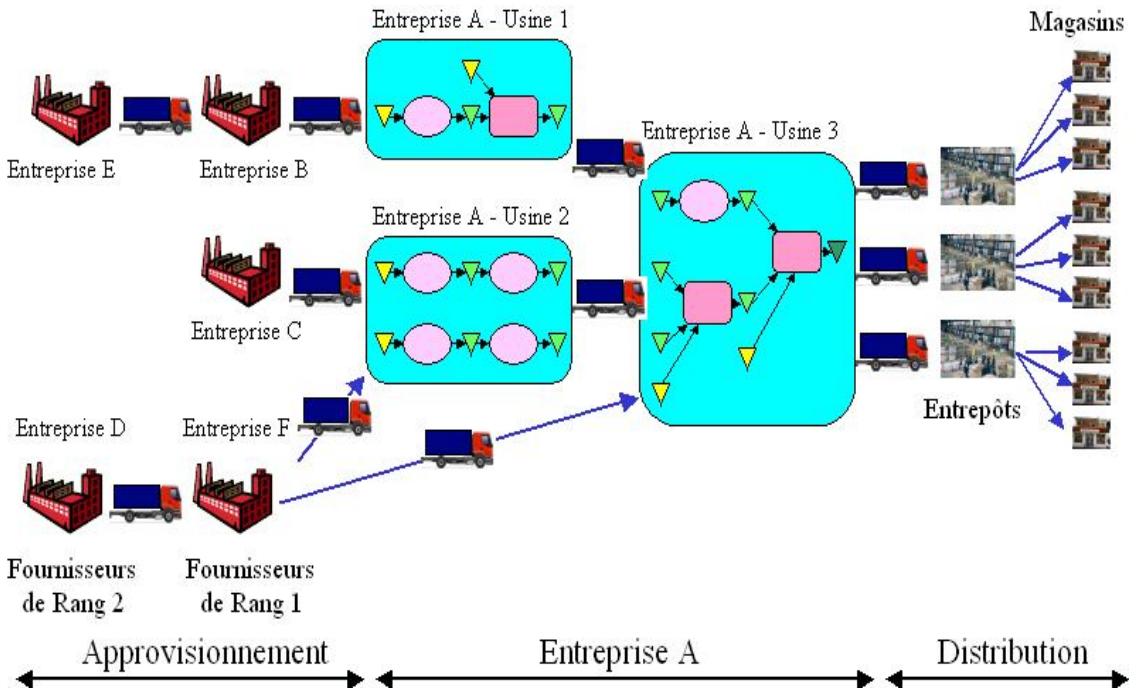


Fig. 1.1 : *Exemple de chaîne logistique*

Le grand intérêt de ce concept est de faire prendre conscience à chaque entité qu'elle s'inscrit dans un flux plus global : l'environnement de chaque entité est constitué de trois pôles : ses clients, les conditions de ses opérations internes et ses fournisseurs. On parle alors de l'entreprise étendue ; une notion qui ne se contente pas du seul périmètre de l'entreprise mais qui prend également en compte les clients et les fournisseurs pour trouver des solutions plus optimales pour l'ensemble de la chaîne logistique : meilleurs coûts, flexibilité, délais, qualité de service. Cette responsabilisation des différents maillons de la chaîne entraîne inévitablement des économies qui se répercutent sur les différents acteurs. Le processus est toutefois freiné par la méfiance de tous les acteurs et leurs intérêts parfois conflictuels comme nous l'évoquerons dans les chapitres suivants.

3 Différents niveaux de décision dans la chaîne logistique

Si la notion de chaîne logistique a réussi à réunir des domaines jusque-là sans liaison apparente, les questions posées en logistique, ne relèvent pas du même niveau de décision. Par exemple, redéfinir un réseau de distribution en choisissant le nombre et

l'emplacement des entrepôts relèvent d'un choix stratégique, mettre en place un système de prévision de la demande rentre dans un cadre tactique alors que la gestion des stocks peut être considérée comme un choix opérationnel.

La question qu'on peut se poser est la raison d'une telle classification. Des éléments de réponses à cette question consistent en les différences des champs d'application et des rythmes de réalisation concernant la méthodologie, les informations à recueillir, les équipes à mettre en oeuvre, les systèmes d'information à mettre en place…

Il est évident que la frontière entre les différents niveaux de décision n'est pas nette et dépend entre autres de la portée de la décision dans le temps et de la longueur de la chaîne logistique mise en jeu. Cependant, les différents auteurs s'accordent sur trois niveaux de décision : stratégique, tactique et opérationnelle (Vallin [99]) qui sont étroitement liés à l'horizon d'application et à la nature des décisions. D'autres auteurs (Dallery [31]) proposent une classification plus fine en quatre niveaux que nous allons adopter (fig. 1.2).

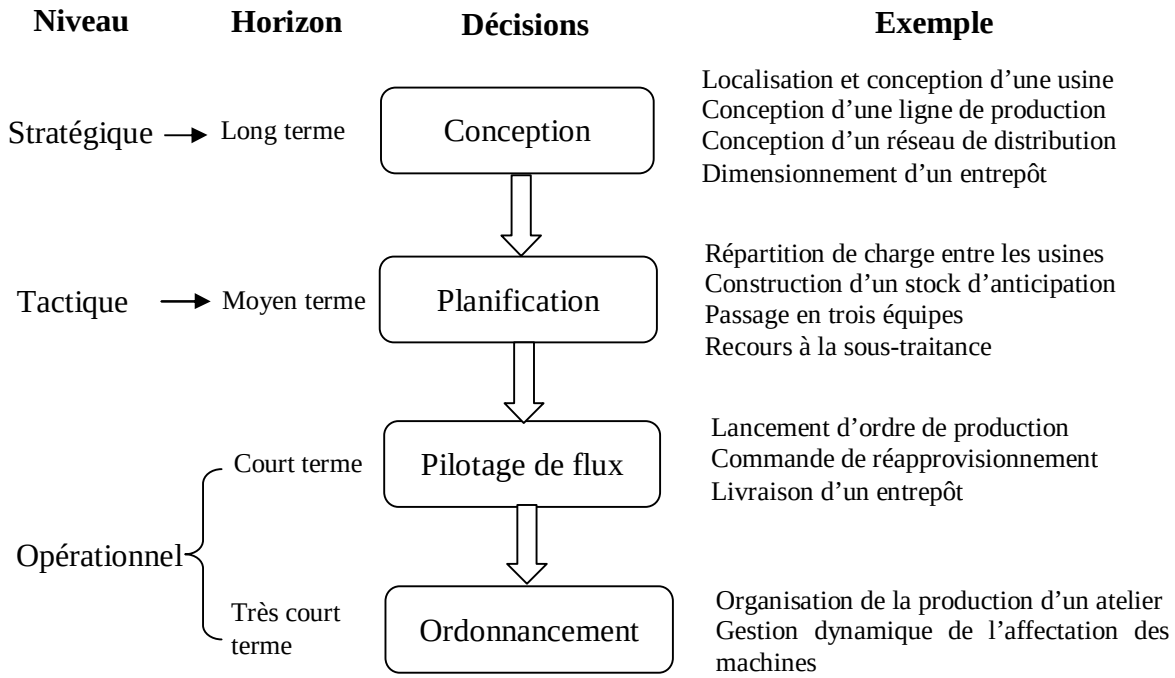


Fig. 1.2 : *Différents niveaux de décision dans la chaîne logistique*

La durée exacte des horizons définis ci-dessus reste vague et dépend de l'étendue de la chaîne logistique et des politiques de ses acteurs. Néanmoins, nous pouvons donner un ordre de grandeur de plus de trois ans pour les choix stratégiques, de 6 à 36 mois pour

les choix tactiques et de 1 jours à 6 mois pour les choix opérationnels voir même des durées de l'ordre de l'heure pour le très court terme.

Une telle approche de la notion de chaîne logistique nécessite une cohérence des modèles utilisés dans les différents niveaux. En particulier, un modèle de niveau inférieur doit intégrer les contraintes résultantes des décisions prises au niveau supérieur.

Dans le paragraphe ci-dessous nous développons plus en détail les décisions opérationnelles à court terme.

4 Le pilotage de flux

Le pilotage de flux constitue le niveau opérationnel à court terme des niveaux de décision de la chaîne logistique. Cela suppose que, afin d'améliorer les performances de la chaîne logistique, les modèles étudiés ne doivent pas remettre en cause les décisions prises aux niveaux stratégiques et tactiques tels que la structure de la chaîne logistique, les capacités des ressources… mais de considérer ces décisions comme contraintes à utiliser.

Dans ce qui suit, nous allons définir ce que nous entendons par flux dans la chaîne logistique. Nous exposons ensuite les différentes approches de pilotage de flux tels que les méthodes de renouvellement de la consommation et les méthodes MRP. Nous développons enfin le pilotage à flux tirés.

4.1 Différents flux de la chaîne logistique

Les différents flux qui traversent la chaîne logistique peuvent être répartis selon trois types :

- *Les flux physiques:* concernent toutes les entités physiques qui traversent la chaîne logistique, en particulier les flux de matières premières, de produits en-cours et de produits finis. Ces flux traversent la chaîne logistique d'amont en aval.

- *Les flux d'information* : il s'agit des échanges d'information entre les acteurs de la chaîne. L'information peut concerner l'état du système (ex. : pannes), le niveau des

stocks et des en-cours, ou la demande (ex: Commandes fermes, prévisions). Ce flux peut s'effectuer dans les deux sens.

- *Les flux financiers:* ils sont la contrepartie des flux physiques et traversent donc la chaîne d'aval en amont.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons principalement aux flux physiques. Nous traitons les flux informationnels à travers les échanges de données entre les différents acteurs, les données sur les commandes… sans se soucier des moyens mis en œuvre pour acquérir ces informations. Concernant les flux financiers, l'évaluation des politiques de contrôle des flux se fait par le calcul de leur coût, mais nous n'aborderons pas l'étude des transferts financiers entre les différents acteurs.

Ainsi, nous représentons la chaîne logistique à partir d'activités que nous appelons étages traversés par des flux physiques. Chaque étage est constitué d'un groupe d'activités (production, transport …), d'un stock de produits en entrée et d'un stock de produits en sortie (fig. 1.3).

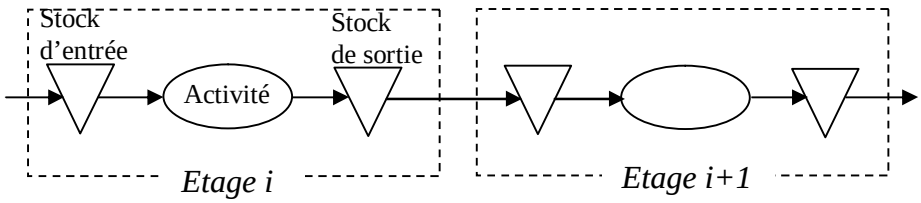


Fig. 1.3 : *représentation du flux physique d'une chaîne logistique*

Notons que le stock de sortie d'un étage *i* et le stock d'entrée d'un étage *i+1* peuvent être confondus s'il n'y a pas de transfert physique entre les deux stocks. Ainsi, nous nous contentons de la représentation d'un seul stock intermédiaire entre les étages sauf dans le cas d'une opération de transport ou d'une passation de pouvoir de gestion d'un acteur à un autre.

Par ailleurs, la représentation des flux d'information sera traitée dans le chapitre suivant à travers les stations de synchronisation dans les files d'attentes.

4.2 Pilotage des flux de la chaîne logistique

4.2.1 Définition et généralités

Le pilotage des flux est l'ensemble des règles de gestion des flux physiques de la chaîne logistique. Ainsi, piloter les flux consiste à prendre des décisions, à chaque étape de la chaîne et pour chaque entité, afin de déterminer quand et en quelle quantité lancer une activité.

A partir de cette définition, la représentation adoptée dans le paragraphe ci-dessus consiste en effet à des nœuds de prise de décision indépendamment de la nature de l'opération à effectuer. Ainsi, une activité de la chaîne logistique peut être une succession d'activités élémentaires de production, de transport… tant que ces activités se succèdent sans la nécessité d'une décision (fig. 1.4).

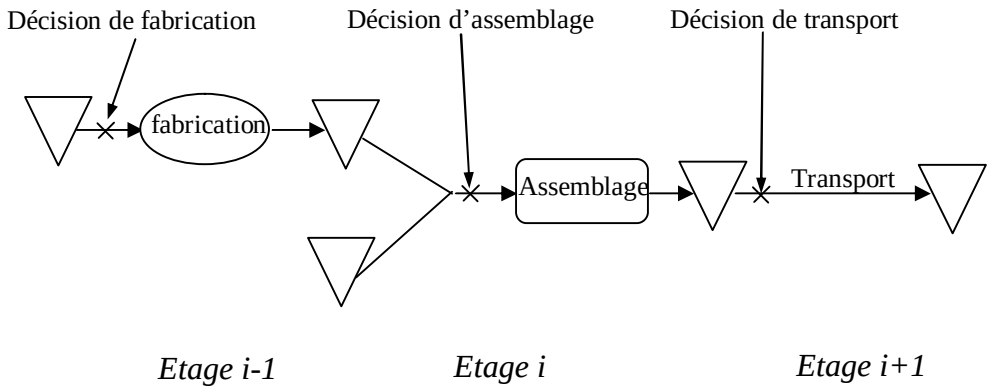


Fig. 1.4 : *Exemples de décisions en pilotage des flux*

Généralement, le nombre de points de décision augmente la complexité du pilotage mais aussi la qualité du contrôle. Il est donc primordial de distinguer les points de la chaîne où le contrôle des flux est le plus important notamment en terme d'impact sur le coût du système (activité à forte valeur ajoutée) ou en terme de contraintes techniques (activité de forte différenciation, espace de stockage limité).

La mise en place d'un système de pilotage des flux consiste donc à, d'une part, déterminer la localisation des points de contrôle du flux et, d'autre part, choisir les règles de pilotage, c'est à dire les conditions de passage de l'entité à l'étape suivante.

4.2.2 Contraintes du pilotage des flux

La coordination des flux des entités le long de la chaîne logistique est soumises à divers contraintes qui sont généralement issues des niveaux de décision supérieurs (décisions stratégiques et tactiques). Nous distinguons deux types de contraintes :

-*les contraintes de ressources :* capacité des machines, des moyens de transport.
-*les contraintes de process:* taille des lots, temps opératoires.

4.2.3 Objectif du pilotage des flux

Le pilotage des flux consiste à prendre des décisions, en fonction de l'information disponible afin de satisfaire le client final tout en minimisant les coûts.

Les coûts qui entrent en jeu dans l'optimisation du pilotage de la chaîne logistique sont divers. Nous citons à titre d'exemple les coûts de fabrication, les coûts de transport, les coûts de stockage, les coûts administratifs. Cependant, les coûts considérés dans l'optimisation varient en nombre et en forme selon la problématique traitée. Dans ce travail, nous considérons les coûts de stockage et les coûts de rupture dans l'optimisation des performances des chaînes logistiques.

La satisfaction du client, est une notion qui exprime l'adéquation du système de gestion à la satisfaction de la demande exprimée par le client. Cette adéquation peut s'exprimer en termes qualitatifs (état des produits livrés) et quantitatifs (volume de la demande non satisfaite, retard de livraison).

Nous analysons l'aspect quantitatif et nous distinguons deux formulations du taux de service dans l'optimisation du pilotage des flux de la chaîne logistique.

-*le niveau de service en tant que contrainte :* Sous cette formulation, le fournisseur optimise ses coûts en respectant la contrainte du niveau de service. Plusieurs indicateurs de performance sont employés pour mesurer le niveau de service dans ce cas. Parmi ces indicateurs, nous citons :

- ✓ Le retard moyen : correspond à la moyenne des retards des demandes (en durée). La contrainte correspondante est alors :

$$\text{Retard moyen} < \text{valeur fixée}$$

✓ La proportion des demandes satisfaites *(Fill Rate)*: c'est le rapport entre le nombre de demandes satisfaites dans les délais sur le nombre total de commandes. Dans la pratique les industriels préfèrent le rapport en nombre d'articles. La contrainte issue de cet indicateur s'écrit comme suit :

Proportion de demandes satisfaites > valeur fixée

- *le niveau de service en tant que pénalité :* cette formulation considère un coût de pénalité subit par le fournisseur dans le cas où il n'arrive pas à satisfaire la demande du client dans le délai fixé. Idem que dans le cas précédent, le coût de rupture peut être calculé de maintes façons. Nous citons à titre d'exemple la pénalité proportionnelle au nombre de commandes non satisfaite et la pénalité proportionnelle au retard moyen par unité de produit.

4.2.4 Informations nécessaires au pilotage des flux

Comme tout problème d'optimisation, trouver le contrôle optimal pour le pilotage des flux nécessite certaines informations. On distingue plusieurs types :

- Les informations sur la situation générale du système tels que les machines en panne
- Les informations sur les niveaux de stock
- Les informations sur la demande.

Si les deux premiers types sont internes au système et peuvent être obtenus de diverses façons, l'information de la demande est un facteur délicat à cerner et de grande influence sur le mode de pilotage des chaînes logistiques. Ceci est dû à plusieurs raisons :

- L'information sur la demande peut être considérée comme facteur externe indépendant de l'état du système. D'ailleurs c'est cette hypothèse qui simplifie énormément les calculs.
- Il existe différents niveaux de fiabilité de l'information sur la demande : l'information certaine (les commandes fermes), l'information incertaine (commandes prévisionnelles) et l'information statistique (prévisions de la demande, estimations statistiques…).
- L'information sur la demande est construite à partir de plusieurs composantes. On distingue en particulier, les demandes unitaires ou groupées et les délais client. Cette dernière notion, qu'on désigne généralement sous le terme « information avancée » peut avoir plusieurs aspects (délai fixe, délai variable en fonction du produit ou de la

classe du client … (pour plus de détails, voir Vallin [99])) et influe considérablement le pilotage de flux.

4.3 Différentes approches de pilotage de flux

Il semble assez naturel que le pilotage des flux se fasse dans l'objectif de répondre au besoin du client. Cependant, la réalité est plus complexe du fait que les besoins clients ne sont pas toujours connus à l'avance ou possèdent un horizon de visibilité limité. En fonction de ces paramètres, deux approches s'imposent :

Production à la commande (make-to-order) : le fabricant attend la réception des commandes des clients pour lancer la production voir même l'approvisionnement. Ce mode de gestion est typique des entreprises qui réalisent des produits spécifiques, souvent complexes. En production à la commande, le fabriquant ne subit pas des coûts de stockage et ne prend aucun risque d'avoir des produits invendus. Néanmoins, l'inconvénient majeur de ce mode est d'avoir un délai de livraison assez long.

Production par anticipation (make-to-stock) : le fabricant produit avant d'avoir reçu la commande du client et constitue ainsi un stock à partir duquel les clients vont se servir. Ce mode est répandu chez les fabricants des produits de grande distribution. L'avantage d'une telle approche est que, si le produit fini est disponible en stock, les délais de livraison sont très réduits voir même nuls. Néanmoins, la production par anticipation est coûteuse en stock avec tous les problèmes qui y sont rattachés.

Il est souvent intéressant de combiner les deux modes de pilotage (pilotage mixte) afin de mieux optimiser les flux. La chaîne logistique se trouve alors partagée en deux parties séparées par un point de basculement : une partie en amont pilotée par anticipation et une partie en avale pilotée à la commande. Ce qui permet un compromis entre la réactivité à la demande et les coûts de stockage.

Le choix du point de basculement dépend de plusieurs paramètres tels que la diversité des produits, la valeur ajoutée à chaque étage, la nature de la demande et permet d'aboutir à plusieurs configurations de gestion tels que l'assemblage à la commande. Toutefois, les différentes méthodes de pilotage de flux ont fait que ce point soit intimement lié à la nature de la demande comme le montre la figure 1.5.

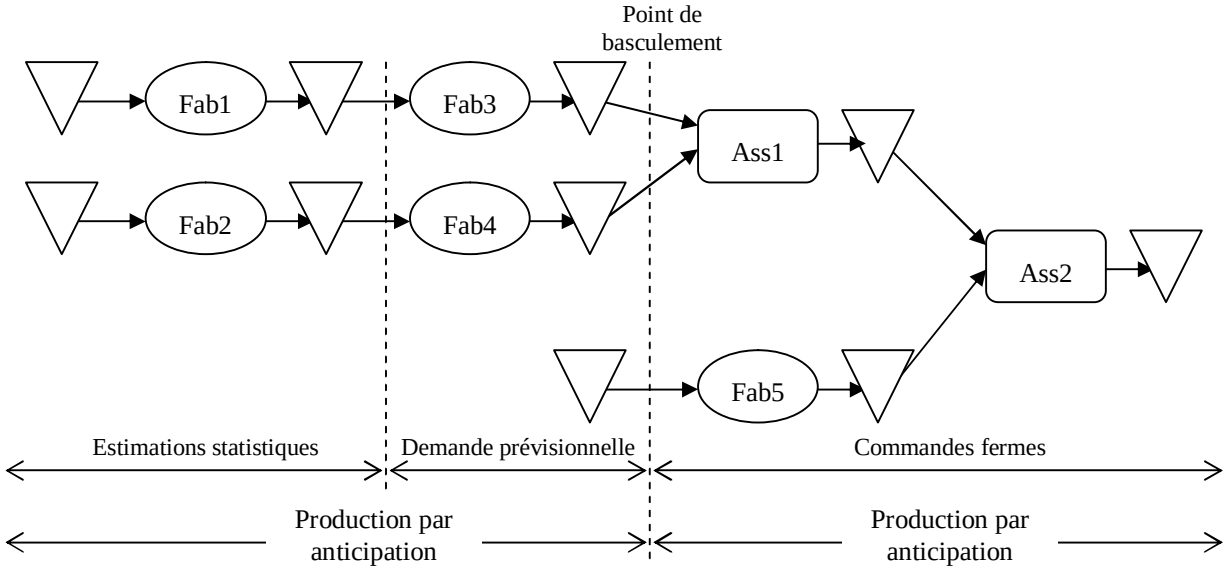


Fig. 1.5 : *Production par anticipation / Production à la commande*

4.4 Méthodes de pilotage des flux

Dans le paragraphe précédent, nous avons présenté les deux modes de contrôle des flux existant : production à la commande et production par anticipation. A chacune de ces modes correspondent plusieurs méthodes de pilotages tels que la gestion des stocks et la méthode MRP (fig. 1.6). Ces méthodes se déclinent en politiques qui précisent les paramètres de contrôle de chaque méthode. Un paramètre de contrôle est une grandeur que le pilotage peut modifier afin d'agir sur les performances de la chaîne.

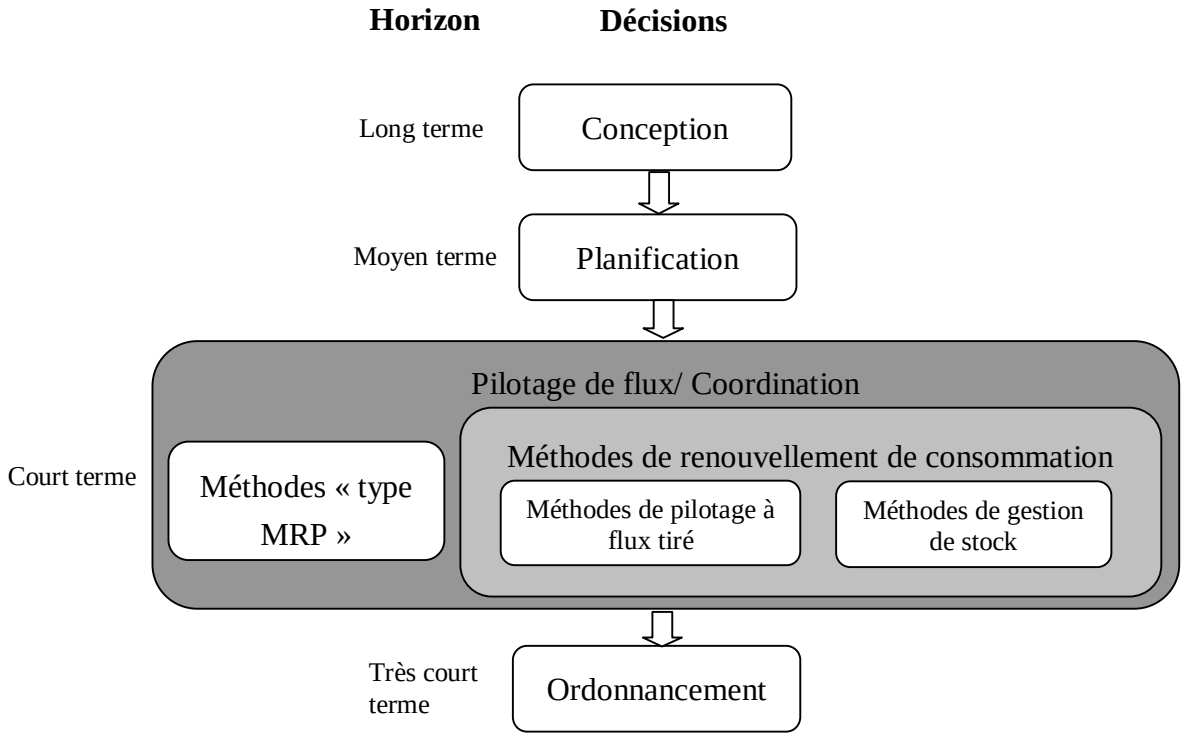


Fig. 1.6 : *les différentes méthodes de pilotage des flux*

Ces méthodes diffèrent par la fiabilité de l'information sur la demande associée aux différents délais des étages de la chaîne logistique. Ainsi, des méthodes tels que MRP nécessitent une information fiable (généralement des commandes fermes) et deviennent difficilement exploitables avec des estimations statistiques. A partir de ces constats, nous pouvons définir le champ d'action des différentes méthodes comme le montre la figure 1.7.

Dans ce qui suit, nous présentons brièvement ces méthodes et nous nous tardons sur la gestion du stock, en particulier la politique de stock nominal *(Base Stock)* que nous utilisons le long de cette thèse.

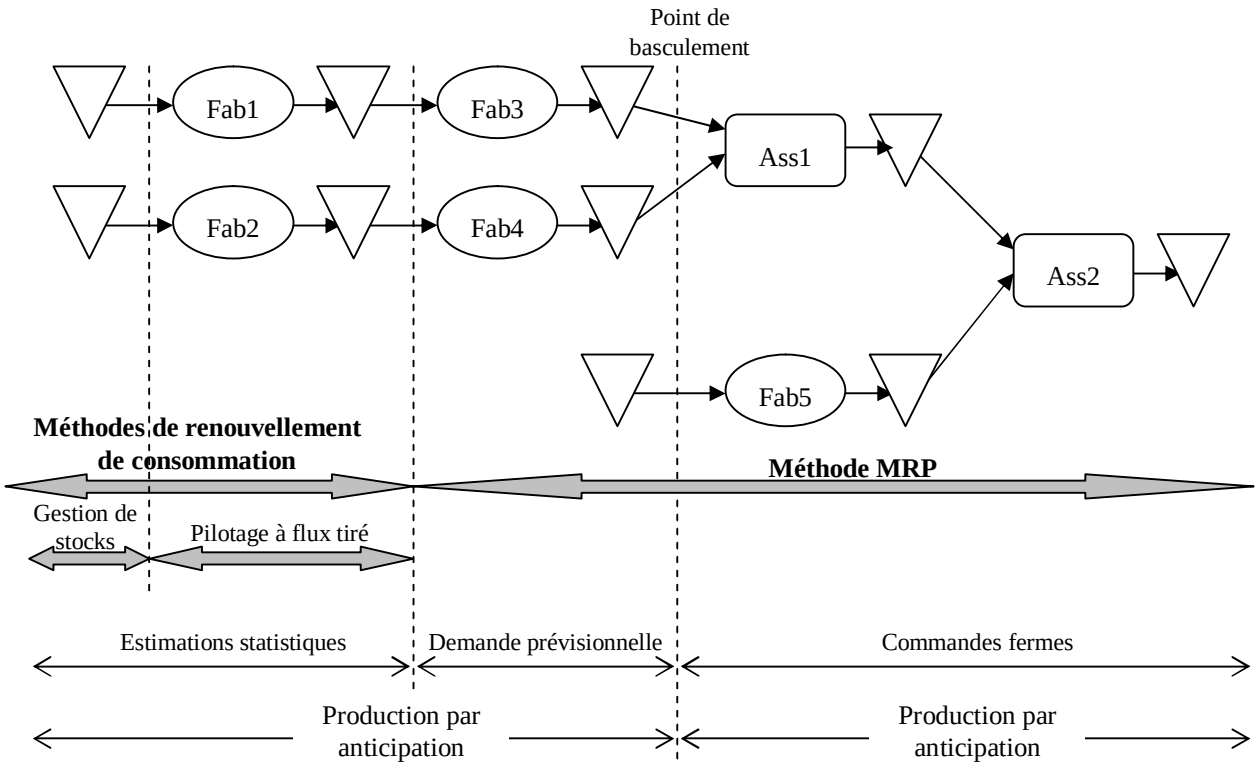


Fig. 1.7: *Champ d'action des différentes méthodes de pilotage de flux*

4.4.1 La méthode MRP(Material Requirements Planning)

Tous les ouvrages généraux traitant de logistique ou de gestion des flux comportent une description plus ou moins détaillée des principes MRP (voir entre autres Baglin et al. [4], Eymery [38] et Vollmann et al. [101].

MRP est considérée parmi les méthodes basées sur un planning qu'on désigne par Plan Directeur de Production ou PDP et qui est défini sur un intervalle de temps *(horizon)*. Le PDP indique les quantités à produire, par période et par produit, sur l'horizon donné. Cet horizon dépend essentiellement de la fiabilité de l'information sur la demande et couvre généralement les commandes fermes mais, selon les contraintes du marché (délai client court fixé par la concurrence), peut s'étendre aux commandes prévisionnelles.

A partir du PDP, la méthode MRP détermine pour tous les composants et sur l'horizon fixé, les dates et les quantités à lancer aux différents étages de la chaîne logistique.

Les délais d'attente constituent les paramètres de contrôle de la politique MRP. I1s peuvent être fixés indépendamment pour chaque étage en fonction des temps d'écoulement moyens. En fonction des aléas qui peuvent influer l'écoulement des flux, un stock de sécurité est défini pour chaque étage comme un second paramètre de contrôle. Les liens entre les délais et le stock de sécurité ont fait l'objet de maintes articles (voir Buzacott et Shanthikumar [14]).

4.4.2 Les méthodes de renouvellement de consommation

Quand l'information sur la demande n'est pas connue à l'avance ou plus généralement n'est pas assez précise pour contribuer au PDP, le mode de pilotage doit réagir à la demande au fur et à mesure qu'elle se produit. C'est le pilotage par renouvellement de consommation pour lequel on lance les ordres futurs de production ou d'approvisionnement en fonction de l'historique de la demande.

Deux types de méthodes se distinguent : les méthodes de pilotage à flux tiré et les méthodes de gestion de stock. Les différentes politiques des méthodes de renouvellement de consommation s'appliquent bien à la gestion du stock qu'au pilotage à flux tiré et la distinction n'est que technique. En effet, on parle de pilotage à flux tiré quand le renouvellement du stock se fait à partir de la production alors que les méthodes de gestion de stock s'intéressent à l'alimentation du stock par approvisionnement. Si dans le premier cas, l'alimentation du stock se fait généralement pièce par pièce sinon par des petits lots avec des délais de service généralement aléatoire, dans le deuxième cas l'approvisionnement se fait généralement par grandes quantités (contraintes de coûts) avec des délais moins variables.

Dans ce qui suit, nous présentons brièvement la gestion des stocks et nous détaillons les méthodes à flux tiré dans la section suivante.

La gestion de stock est un ensemble de règles permettant de décider quand et en quelle quantité commander chaque produit, pour faire face à la demande, dans l’objectif de satisfaire le client au moindre coût.

Pour décider quand et combien commander, il est nécessaire de connaître l'état du stock. Pour cela, deux types de gestion existent :
- *Le suivi continu* : le suivi de l’état se fait de manière continue et la décision de réapprovisionnement peut intervenir à tout instant.

- *Le suivi périodique* : le suivi de l'état n'est fait que de manière périodique et la décision de réapprovisionnement ne peut intervenir qu'à ces instants. Ce type de gestion est plus simple à mettre en oeuvre que le premier, mais il est moins réactif à l'évolution des stocks.

Les politiques de gestion de stock s'inspirent des réponses possibles aux deux questions fondamentales : *Quand commander ?* Et *Combien commander ?*

Deux familles de réponses existent pour la première question :
- *Gestion périodique (T) :* L'approvisionnement est déclenché à intervalle régulier *T*.
- *Point de commande (r) :* L'approvisionnement est déclenché lorsque le niveau de stock descend au-dessous d'un niveau *r* appelé point de commande. Si le suivi est continu alors la commande est déclenchée au moment ou le stock est égal à *r*. Sinon on parle de gestion calendaire conditionnelle *(T,r)* où la commande n'intervient qu'à intervalle régulier *T* à condition que le stock est en dessous du point de commande *r*.

La réponse à la question « Combien commander ? » dépend de la réponse à la question précédente. En effet, passer des commandes à date fixe pour une quantité fixe ne permet pas de s'adapter aux variations de la demande, donc il faut que le facteur temps et/ou quantité soient variables pour absorber les fluctuations. On déduit les deux systèmes les plus fréquemment utilisés :

- *La quantité fixe de commande (Q) :* A chaque réapprovisionnement, on commande la même quantité *Q*.
- *Le niveau de recomplètement (S) :* La quantité commandée est égale à la différence entre le stock observé et un niveau de stock *S* que l'on appelle niveau de recomplètement ou stock nominal.

La combinaison d'une réponse à chacune des deux questions *« Quand ? »* et *« Combien ? »* permet d'obtenir une politique de gestion de stock. Parmi ces politiques, nous citons deux politiques de base *(T,S)* et *(r,Q)*. D'autres politiques dites mixtes, existent (voir par exemple Giard [44], Baglin et al. [4] et Eymery [38]).

Les politiques de gestion de stock dans la chaîne logistique se basent sur ces modèles en tenant compte de divers paramètres tels que le nombre des produits, la variabilité des délais de livraison et de la demande, les politiques de prix (voir Giard [44] et Baglin et al. [4]).

4.5 Les méthodes à flux tiré dans la chaîne logistique

Rappelons que les méthodes de pilotage à flux tiré sont des méthodes de renouvellement de la consommation à partir d'un processus de production. Le pilotage des flux consiste alors à déterminer quand et en quelle quantité lancer la fabrication du produit pour faire face à la demande. Nous allons décrire deux politiques de pilotage à flux tiré, à savoir la politique de stock nominal *(Base Stock)* et la politique Kanban.

4.5.1 Politique de stock nominal (Base Stock)

La politique de stock nominal, bien développée par Buzacott et Shanthikumar [16] a fait l'objet de plusieurs articles du fait qu'elle constitue une politique optimale pour des conditions particulières de production et de demande (voir Gravish et Graves [46] et Sobel [92]) et donne des solutions de très bonne qualité pour des modèles plus générales (voir Karaesmen et Dallery [61]).

4.5.1.1 Description

On suppose, comme en gestion de stock, qu'on n'a pas d'information avancée sur la demande. Ainsi, à l'état initial chaque stock contient une quantité S_i de produit. Au fil du temps, quand une demande arrive, elle est immédiatement satisfaite si le produit fini est disponible dans le stock; sinon, elle est mise en attente ou perdue. Simultanément, un ordre de fabrication est lancé dans tous les étages concernés par cette politique (fig. 1.8).

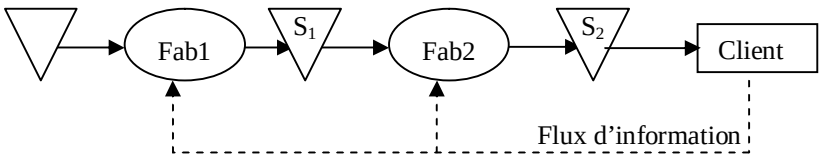


Fig. 1.8 : *Politique de stock nominal*

Note : la présentation ci-dessus de la politique de stock nominal sera abandonnée lors du chapitre suivant au dépend d'une présentation plus appropriée à partir des files d'attente.

La politique du stock nominal tel qu'elle a été décrite ci-dessus est une politique à un paramètre de contrôle par étage qui est le niveau de stock nominal S_i.

Avantages : la politique de stock nominal permet de réagir rapidement à la demande.

Inconvénients : le lancement immédiat à tous les étages à l'arrivée d'une commande n'assure pas une bonne coordination entre les différents étages et peut pénaliser le système. Si par exemple, la fabrication à un étage *i* est perturbé par un problème quelconque alors les encours de l'étage *i-1* vont augmenter inutilement provocant un coût de stock supplémentaire facile à éviter.

4.5.1.2 Cadre d'application

La politique de stock nominal a un cadre d'application particulier du fait de l'approvisionnement unitaire des produits. Cette notion d'unité n'est pas limitatrice puisqu'elle elle peut prendre diverses formes (pièce, lot, unité de masse…) dépendant principalement de la nature du produit et du type du client.

La politique de stock nominal prend un sens à partir du moment où l'économie d'échelle devient négligeable devant d'autres facteurs tels que dans le cadre des produits de valeurs ou quand les coûts de stockage et de rupture dominent le coût de réapprovisionnement. Par ailleurs, cette politique convient efficacement pour des produits à faible taux de demande ce qui justifiera dans ce travail la modélisation de la demande par un processus de Poisson convenant à ce type de demandes.

4.5.1.3 Objectif client

En cas de rupture de stock, le client peut se comporter de deux manières différentes :

- *Quitter le système,* on parle alors de vente perdue très commune dans le contexte de la distribution (Pour plus de détails, voir Cachon [21] qui s'est intéressé à un modèle similaire à celui que nous étudions dans la thèse avec des ventes perdues).
- *Attendre sa* commande (action désignée généralement par Backorder dans le sens où la commande est en quelque sorte renouvelée). Ce comportement est répandu dans un contexte de production. Plusieurs variantes peuvent être distinguées suivant que le client accepte ou non des livraisons partielles.

Dans les deux cas présentés ci-dessus, la chaîne logistique peut tenir compte de l'objectif client de deux façons comme nous l'avons exposé auparavant :

- *Sous forme de niveau de service :* dans ce cas, l'optimisation doit tenir compte d'une contrainte supplémentaire qui fixe un délai moyen maximal ou une proportion de commande non satisfaite tolérée (voir Hadj Youssef [52]).

- *Sous forme de pénalité* où l'optimisation doit tenir compte d'un coût supplémentaire qui dépend de la quantité et/ou de l'attente moyenne.

4.5.1.4 Différents coûts intervenant dans l'optimisation

On distingue :

- Le coût de production contenant généralement une partie fixe (allocation des ressources…) et/ou une partie variable (matière première…). Cependant, lors de cette thèse nous traitons le cas mono-produit avec attente du client en cas de rupture et dans ce cadre, le coût de production n'intervient pas lors de l'optimisation.
- *Le coût de stock* qu'on désignera par *h* est la somme de différents coûts qui interviennent lors de l'opération de stockage tels que le coût financier (valeur des produits en stock) et les coûts de manutention, d'assurance, de risque de détérioration… *h* est alors exprimé en (€/pièce/unité de temps)
- *Les coûts de rupture* du fait de la considération de l'objectif client sous forme de pénalité. Nous considérons le cas d'un coût proportionnel au délai de satisfaction de chaque demande mise en attente et on le désignera par *b* (€/pièce/unité de temps).

Généralement, la détermination d'un coût de rupture est une opération fastidieuse du fait que ce coût représente en quelque sorte l'insatisfaction du client, notion très subjective. De ce fait, les entreprises préfèrent tenir compte de ce facteur à partir de contraintes de service comme celles que nous avons évoquées précédemment. Cependant, dans les entreprises industrielles, la notion de coût de rupture est très présente dans les contrats élaborés entre le client et le fournisseur. Par ailleurs, nous avons opté dans le cadre de cette thèse à des coûts linéaires du fait de la possibilité de passer de la formulation avec coûts de rupture à une formulation avec des contraintes de service (voir Karaesmen et Dallery [61] et Zipkin [106]).

4.5.1.5 Fonction objectif

La fonction objectif fait intervenir des quantités moyennes du nombre de pièces en stock et du nombre de commandes en attente. Nous adoptons les notations suivantes :

-*stock disponible* : nombre de produits dans le stock à t : $X(t)$
-*demandes en attente* : nombre de demandes non satisfaites mises en attente a t : $Y(t)$.
-*stock net:* niveau du stock réel à t : $I(t) = X(t) - Y(t)$. Notons que $X(t)$ et $Y(t)$ ne peuvent pas être positifs au même instant et de ce fait $I(t)$ peut être positive ou négative.

Ces définitions sont illustrées dans la figure 1.9 ci-dessous.

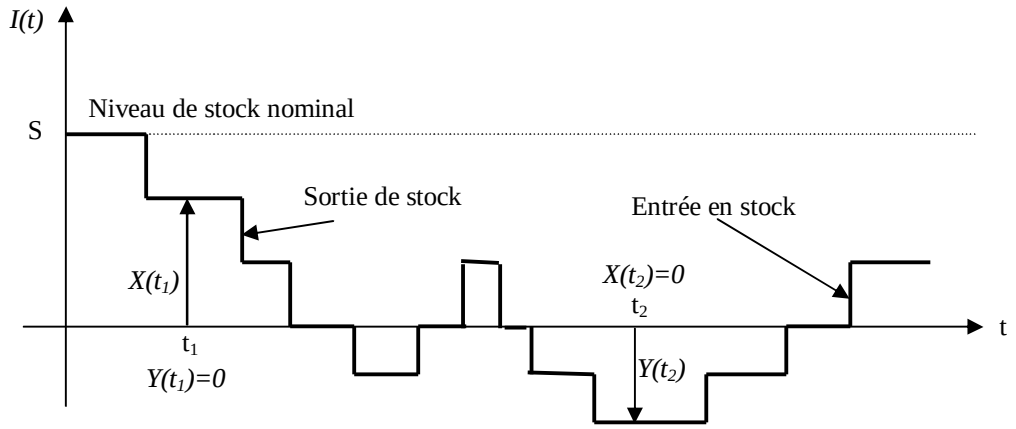


Fig. 1.9 : *Comportement du stock dans une politique de stock nominal*

Notons par $E[X]$ et $E[Y]$ les quantités moyennes de $X(t)$ et $Y(t)$, alors le coût moyen total du système est :

$$C = h.E[X] + b.E[Y]$$

Les différents termes de cette équation dépendent du niveau de stock nominal et leurs expressions exactes sont fonction des paramètres de la demande et de la fabrication. La fonction objectif s'écrit alors:

$$\underset{S}{Min}\ C(S) = h.E[X(S)] + b.E[Y(S)]$$

4.5.1.6 Extensions

La politique de stock nominal a été étendue sur d'autres modèles. Nous citons à titre d'exemple le cas multi-produit (voir Hadj Youssef [53]), le cas avec plusieurs classes de clients et la notion de « Hedging Point » (voir De Vericourt [34]). Dans la plupart de ces cas, une nouvelle notion intervient, à savoir la règle de gestion. Nous distinguons principalement la règle FIFO (premier arrivée premier servi) et la règle de priorité (donnée à un produit ou à une classe de clients). Nous aurons recours au cas multi-clients dans le chapitre 6 de cette thèse.

La politique de stock nominal a été testée dans le cadre de l'information avancée (voir Karaesmen et al. [60] et Buzacott et Shanthikumar [16]). Nous étudierons des modèles similaires lors des chapitres 7 et 8.

4.5.2 La politique Kanban

La politique Kanban associe à chaque ordre de fabrication une autorisation de production appelée Kanban, traduction japonaise du mot étiquette. Ainsi, à l'état initial, le stock de l'étage i contient K_i pièces attachées à K_i kanbans. A l'arrivée d'une demande, si une pièce de produit fini est disponible alors elle est satisfaite immédiatement et la pièce en question libère son kanban qui, transmis à l'étage en amont, lance un ordre de fabrication et la pièce usinée garde ce kanban et libère le kanban initial qui lui est associé et ceci d'étage en étage jusqu'au début de la chaîne logistique (fig. 1.10).

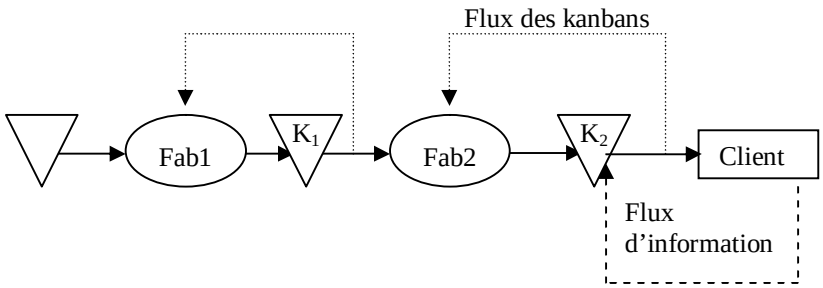


Fig. 1.10 : *La politique Kanban*

Comme la politique de stock nominal, la politique kanban est piloté par un seul paramètre par étage qui est le nombre de kanbans K_i.

Avantages : La politique kanban permet une coordination meilleure entre les différents étages puisque les ordres de fabrication sont contrôlés par les kanbans de l'étage en aval.

Inconvénients : Toutefois, cette politique est moins réactive à la demande vu les lancements séquentiels de la production dans les différents étages.

D'autres politiques de pilotage de flux ont été proposées dans la littérature. En particulier, Liberopoulos et Dallery [33,75] ont proposé des politiques à deux

paramètres de contrôle combinant le stock nominal et le Kanban tels que la politique du Kanban généralisé et du Kanban étendu.

5 Conclusion

Après avoir distingué les différents niveaux de décision dans la chaîne logistique, nous avons présenté le cadre général de la thèse, à savoir le niveau opérationnel à court terme qui consiste au pilotage de flux au sein de la chaîne logistique. Nous avons ensuite énuméré les méthodes de pilotage à flux tirés et nous avons enfin introduit la politique de stock nominal que nous allons utiliser dans notre travail.

Par ailleurs, nous avons introduit différentes notions qui vont nous servir par la suite tels que l'information avancée sur la demande.

Chapitre 2

Modèles stochastiques
Théorie des files d'attentes

1 Introduction

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, nous nous intéressons aux méthodes de pilotage à flux tiré se rapportant à la politique de stock nominal. En fait, nous nous proposons de déterminer, pour une politique donnée, les paramètres de contrôle optimaux.

Or, la détermination de ces paramètres nécessite une évaluation des performances du système, action qui passe nécessairement par une phase de modélisation.

Dans ce chapitre, nous consacrons la première section à l'explication des différentes étapes nécessaires à l'optimisation des chaînes logistiques. Nous décrivons ensuite la modélisation par le formalisme des files d'attente et nous finissons le chapitre par l'étude de quelques exemples de files d'attente que nous avons utilisés lors de cette thèse.

Le contenu de ce chapitre a été collecté à partir d'une synthèse d'ouvrages de plusieurs auteurs, en particulier Baynat [6], Tijms [97], Kleinrock [66,67], Gross et Harris [47], Buzacott et Shanthikumar [16] et Dallery et Gershwin [32].

2 Généralités

2.1 Modélisation

L'amélioration des performances des systèmes de production ou plus largement des chaînes logistiques passe par la modélisation. L'intérêt d'un tel passage est que, dans l'impossibilité d'effectuer des mesures directes sur le système lui-même (système en cours de conception ou en exploitation mais tout changement en vue de test s'avère coûteux voir même irréalisable), le modèle constitue une abstraction du système. En outre, la modélisation constitue un compromis entre l'adéquation du modèle et du système et la facilité d'analyse ce qui permet d'ajuster le niveau d'abstraction en fonction des objectifs fixés.

Deux grandes classes de modèles se distinguent : les modèles déterministes et les modèles stochastiques.

Dans le cadre des systèmes de production, la modélisation stochastique s'impose pour plusieurs raisons :

- Phénomènes de nature aléatoire : tels que les aléas de fonctionnement, les pannes de machines, les défauts sur les pièces.
- Information inconnue : nécessite une représentation probabiliste tels que les demandes sur les produits.
- Réduction de la complexité du modèle par agrégation du comportement détaillé.

La majorité des systèmes de production peuvent être considérés comme des systèmes à événements discrets, c'est à dire, qu'ils peuvent être décrits par des variables d'état discrètes et les changements d'état se produisent sous occurrence d'un ensemble d'événements. Comme exemples de variables d'états fréquemment rencontrées dans les systèmes de production le nombre de pièces en attente dans les différents stocks ou en traitement sur les différents machines, l'état de différentes ressources (libre ou occupée), l'état des machines (en fonctionnement ou en panne). Les événements seront alors le début ou la fin de traitement d'une pièce sur une machine, la demande ou la libération d'une ressource, le début d'une panne ou la fin de réparation d'une machine. Afin de modéliser cette classe de systèmes, plusieurs modèles existent, nous citons à titre d'exemple les files d'attente, les réseaux de Petri et le langage Arena.

Dans le cadre de cette thèse, nous utilisons principalement les files d'attente car elles nous permettent, par la suite, une évaluation analytique du système. Nous avons eu

recours aux calculs numériques et au langage Arena pour modéliser des systèmes plus complexes dans le chapitre 6.

2.2 Evaluation et analyse des performances

Une fois construit, le modèle permet l'évaluation des performances du système afin de pouvoir analyser ces performances dans le but d'apporter des améliorations voir même d'optimiser (fig. 2.1).

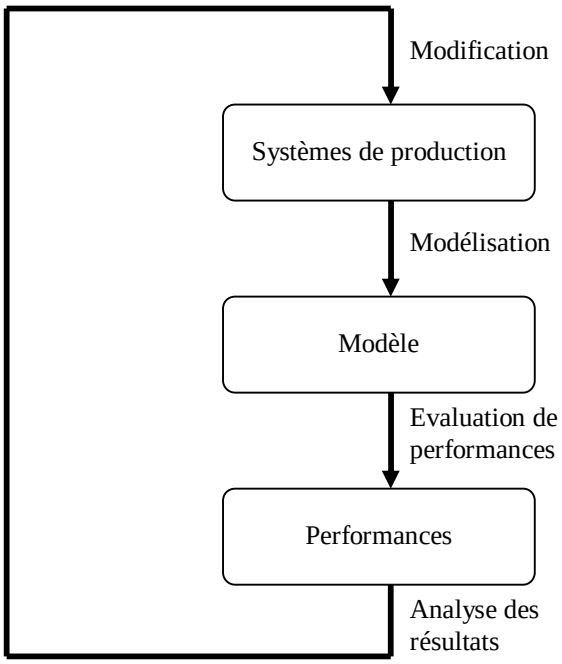


Fig. 2.1 : *Optimisation des systèmes de production*

L'évaluation de performances s'intéresse ainsi au calcul des paramètres de performance du modèle. Différents types de paramètres existent. Les plus couramment utilisés sont le débit en produits finis (nombre de produits fabriqués par unité de temps), le taux d'utilisation des ressources (la proportion de temps pendant laquelle la ressource est occupée), les temps d'attente des clients ou des pièces en stock et le nombre moyen en attente. Ces paramètres sont généralement liés. Ces paramètres permettent de remonter vers les indicateurs de performance globaux tels le coût (par exemple le coût de stockage ou le coût de rupture) et la qualité (par exemple la satisfaction client).

Notons que les performances issues de la phase d'évaluation sont celles du modèle et non celles du système d'où l'importance de l'étape de modélisation.

On distingue deux grands types d'évaluation des performances :

- *L'évaluation qualitative :* consiste à définir les propriétés structurelles et comportementales du système. Les réseaux de Petri constituent l'un des formalismes les plus utilisés dans de type d'évaluation.
- *L'évaluation quantitative :* permet de calculer les paramètres de performance. Il existe deux grands types de méthodes quantitatives d'évaluation des performances : la simulation et les méthodes analytiques. La simulation consiste à reproduire l'évolution du modèle pas à pas (voir Banks et Carson [5] et Law et Kelton [70]). Elle offre une approche générale permettant d'étudier des modèles complexes. Cependant, elle est très coûteuse en temps de calcul et la phase d'analyse des résultats est généralement délicate. Les méthodes analytiques qui proposent de calculer les paramètres de performance de façon mathématique en résolvant les équations sous-jacentes. L'intérêt des méthodes analytiques réside dans leur résolution peu coûteuse en temps de calcul. Ils permettent, en outre, une bonne compréhension du modèle du fait de la facilité d'analyse des fonctions, en général. Néanmoins, les modèles qu'on peut résoudre d'une façon analytique sont beaucoup trop restrictives pour pouvoir prendre en compte la complexité des systèmes réels malgré la possibilité d'utiliser des techniques analytiques approximatives (voir Match [80] pour plus de détails).

Une fois les performances calculées, une phase d'analyse est nécessaire pour le choix des meilleures performances, voir des performances optimales.

Dans le cadre de cette thèse, nous considérons le coût global de la politique de pilotage comme paramètre de performance. Ce coût inclut le coût de stockage et le coût de rupture. La détermination de ce paramètre est faite généralement à partir du formalisme mathématique associé au modèle des files d'attente, ce qui permet d'obtenir des résultats analytiques exacts ou à défaut moyennant des approximations bien justifiées. Cependant, pour des modèles plus complexes (chapitre 6) nous avons eu recours aux calculs numériques et à la simulation.

3 Modélisation par les files d'attente

Un système de file d'attente peut être décrit de la manière suivante : un client arrivant pour un service se place dans la file à attendre son tour. Une fois la ressource est libérée, il entre en service et occupe la ressource pendant tout le temps de service. A la fin du service, il quitte le système et libère la ressource.

La définition d'un tel système nécessite la caractérisation des différents éléments qui entrent en jeu. Nous consacrons le paragraphe suivant à cette caractérisation. Nous étudions ensuite l'analogie entre les files d'attente et les systèmes de production, en particulier avec la politique de stock nominal. Nous finirons la section par les différentes notations et quelques propriétés des files d'attente.

3.1 Caractérisation des files d'attente

Nous distinguons six caractéristiques des systèmes de files d'attente :

3.1.1 Processus d'arrivée

Le processus d'arrivée peut être caractérisé par le taux d'arrivée (nombre d'arrivées par unité de temps) ou par le temps d'inter-arrivées (temps entre deux arrivées successives). Cependant le processus d'arrivée n'est pas entièrement déterminé par des valeurs moyennes de ces paramètres et nécessite généralement l'expression de la loi de probabilité du processus d'arrivée.

Soit A_n la variable aléatoire mesurant l'instant d'arrivée du $n^{ième}$ client dans le système et T_n la variable aléatoire mesurant le temps d'inter-arrivées entre le client $n-1$ et le client n ($T_n=A_n-A_{n-1}$). Si les variables aléatoires $\{T_n\}_{n=1,2,\ldots}$ sont indépendantes et identiquement distribuées *(i.i.d.)* alors T suffit à caractériser le processus de renouvellement (pour plus de détails, voir Annexes A). De ce fait, les processus les plus utilisés pour modéliser les arrivées sont des processus de renouvellement et plus particulièrement le processus de Poisson dont le concept mathématique a été exposé aux annexes A.

D'autres éléments sont à prendre en considération dans le processus d'arrivée tels que les arrivées groupées qui nécessitent la détermination de la loi caractérisant la taille des lots d'arrivées « *batch size* » (voir Gross et Harris [47]) et les différentes configurations d'abandon des clients (voir Aguir [1]).

3.1.2 Le temps de service

La caractérisation du temps de service est similaire à celle des arrivées. Néanmoins, une différence importante existe : le système peut être vide et donc la ressource est libre. Ainsi, les différentes lois caractérisant le temps de service sont des probabilités conditionnelles et se basent sur un système non vide.

Nous considérons généralement des temps de service décrits par des variables aléatoires *i.i.d.* La distribution la plus utilisée est la distribution exponentielle. Néanmoins, la propriété sans mémoire de cette loi limite son champ d'application et on est parfois obligé à utiliser d'autres distributions tels que la loi Hyper-exponentielle, la loi d'Erlang ou la loi de Cox (voir Kleinrock [66]).

Par ailleurs, Le taux de service peut dépendre de la longueur de la file d'attente *« State-Dependent service »*(voir Kleinrock [67]).

3.1.3 Discipline de service

La discipline de service détermine l'ordre dans lequel les clients sont sélectionnés pour le service. Les disciplines les plus utilisées sont : FCFS (premier arrivé premier servi), LCFS (dernier arrivé premier servi), RSS (sélection aléatoire du client à servir), PR (avec priorité, on distingue différents règles de priorité tels que la priorité préemptive ou non préemptive… (voir Hadj Youssef et al. [54])).

Dans le cas de plusieurs files d'attentes, d'autres disciplines peuvent être appliquées tel que la discipline de la file la plus longue LS (voir Gross et Harris [47]).

3.1.4 Capacité du système

Dans certains systèmes de files d'attente, des contraintes physiques ou organisationnelles peuvent exister et limitent la longueur maximale de la file. Comme exemple de contraintes, nous pouvons citer les limites de l'espace de stockage, les contraintes sur l'attente maximale dans la file comme dans les centres d'appel (Aguir [1]).

3.1.5 Nombre de serveurs

C'est le nombre de stations de service en parallèle. Une file multi-serveurs est caractérisée par les lois du temps de service dans chaque serveur supposées généralement identiques et indépendantes les unes des autres.

Une station particulière désignée IS (nombre de serveurs infini) est très utilisée dans les systèmes de stockage pour modéliser un retard pur, le temps passé dans la station étant indépendant du nombre de clients et se réduit au temps de service (voir Zipkin [106]).

Les serveurs peuvent être alimentés à partir de files d'attente multiples. On distingue plusieurs cas tels que les serveurs dédiés, et les serveurs partagés (voir Gurumurthi et Benjaafar [51]).

3.1.6 Nombre d'étages de service

C'est le nombre de serveurs en série. Cette situation est très fréquente dans les systèmes de production où le produit passe successivement sur différentes machines. Une description détaillée de ces modèles à été donnée par Liberopoulos et Dallery [75].

Dans les systèmes multi-étages, des boucles peuvent exister pour modéliser des contrôles de qualité, par exemple.

3.2 Notation et représentation d'une file d'attente

3.2.1 Notation

La notation des files d'attente est normalisée par Kendall (1953). Elle consiste en une série de symboles qui tiennent compte des caractéristiques citées dans les paragraphes précédents. Les files d'attente sont notées de la manière suivante $A/B/C/K/Z$ avec :

- A : la distribution des temps d'inter-arrivées,
- B : la distribution du temps de service,
- C : le nombre de serveurs,
- K : la capacité du système,
- Z : la discipline de service.

Différents symboles standards existent pour ces caractéristiques (voir Gross et Harris [47]). La file $M/D/2/\infty/FCFS$ indique, par exemple, une file d'attente avec des temps d'inter-arrivées exponentiels, un temps de service déterministe, deux serveurs, une file d'attente sans restriction pour le nombre maximal de clients en attente et une discipline FCFS (premier arrivé premier servi).

Lorsque les deux derniers éléments de la notation de Kendall sont omis, on sous-entend $K=+\infty$ et $Z=FCFS$.

Cette notation ne tient pas compte du nombre d'étages qui sont généralement représentés par des files différentes interconnectées entre elles (voir Baynat [6]).

3.2.2 Représentation d'une file d'attente

Schématiquement, les files d'attente sont représentées généralement de la manière suivante (fig. 2.2) :

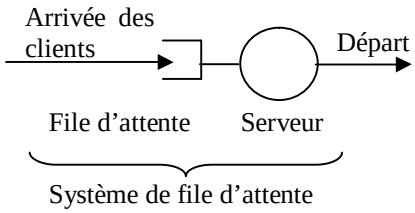


Fig. 2.2 : *Représentation d'un système de file d'attente simple*

3.2.3 Station de synchronisation

Les systèmes de files d'attente que nous avons présentés ci-dessus consistent généralement à la notion de partage d'une ressource commune sous forme de serveur. Les réseaux de files d'attente permettent de représenter d'autres configurations plus générales de type *« Fork/Join systems»*. Nous décrivons par exemple la station de synchronisation qui consiste en plusieurs files d'attente en parallèle qui ne quittent le système qu'en présence d'une entité dans chaque file (voir Liberopoulos et Dallery [75]). Les stations de synchronisation peuvent être représentées de la façon suivante (fig. 2.3) :

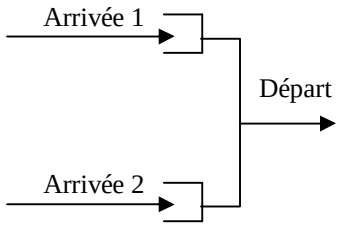


Fig. 2.3 : *Station de synchronisation*

3.3 Modélisation des systèmes de production

3.3.1 Analogie systèmes de production-files d'attente

Les différentes activités d'un système de production peuvent être modélisées par des files d'attente. Ainsi, une ligne de production peut être considérée comme une série de systèmes de files d'attentes où les machines constituent les serveurs et les files d'attente les stocks intermédiaires. Les opérations de transport peuvent être modélisées par des stations IS (à nombre de serveurs infinis). Par ailleurs, les opérations d'assemblage ou de désassemblage peuvent être considérées comme des stations de synchronisation ou des modèles de type *« Fork/Join »*.

3.3.2 Modélisation de la politique de stock nominal

Dans le cadre de cette thèse, nous utilisons le formalisme files d'attente pour modéliser la politique de stock nominal mono et multi-étages. Rappelons le comportement du stock avec une politique de stock nominal de niveau optimal *S* (fig. 2.4).

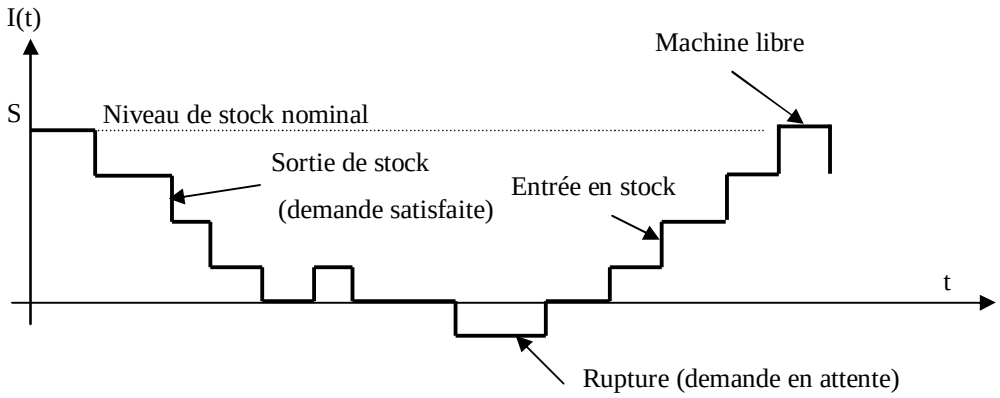


Fig. 2.4 : *Comportement du stock dans une politique de stock nominal*

Soit le système de file d'attente présentée ci-dessous avec *N(t)* le nombre dans le système (fig. 2.5).

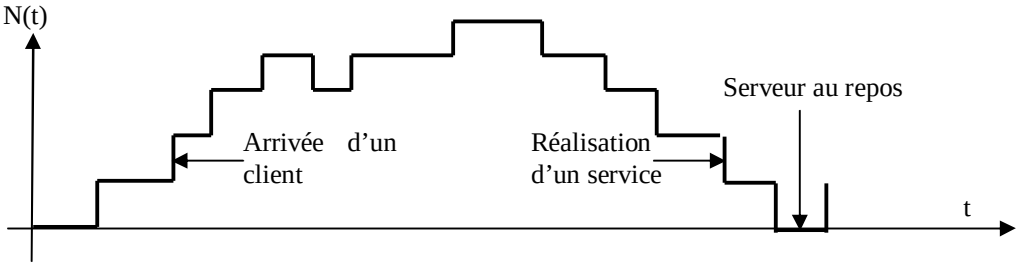


Fig. 2.5 : *Comportement du nombre de client dans un système de file d'attente*

En posant *N(t)=S-I(t)*, nous remarquons que le comportement du stock dans la politique de stock nominal peut être déduit du nombre dans la file correspondante. Ainsi, le stock net *I(t)* peut être modélisé par un système de file d'attente où l'entrée en stock d'une pièce correspond à l'arrivée d'un client et la sortie de stock à une réalisation de service. Par ailleurs, le serveur est considéré libre quand la machine est au repos.

Le formalisme des files d'attente permet, en outre, de représenter les flux d'information, ainsi, pour la politique du stock nominal par exemple, le flux d'information et le flux physique peuvent être reliés par l'intermédiaire de stations de synchronisation comme le montre la figure 2.6. Ainsi, l'arrivée d'un client déclenche un ordre de fabrication dans les différents étages (files Y_0 et Y_1), ces ordres seront exécutés sur les machines M_1 et M_2 si les stocks correspondants ne sont pas vides (X_0 supposé toujours non vide et X_1). Si le stock X_2 est non vide alors le client est satisfait immédiatement sinon il attend dans la file Y_2 qu'une pièce sera disponible en X_2.

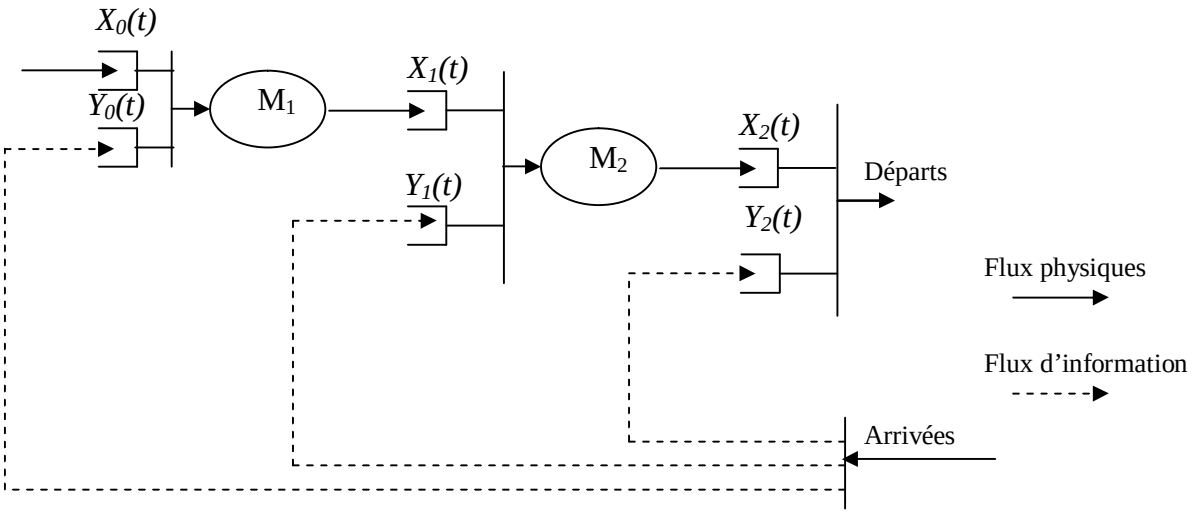


Fig. 2.6 : *Modélisation de la politique de stock nominal par les files d'attente*

La modélisation de la politique de stock nominal par les stations de synchronisation a été décrite dans plusieurs articles (voir Liberopoulos et Dallery [75] dans le cas multi-étages et Karaesmen et al. [64] dans le cas de l'existence de l'information avancée sur la demande). Dans la suite de la thèse, nous adoptons cette représentation pour la modélisation de la politique du stock nominal et nous détaillons dans les prochains chapitres les différentes extensions que nous avons étudiées.

3.4 Evaluation de performances

Dans cette section, nous présentons quelques notions générales d'évaluation de performances des systèmes de type files d'attente. Ces notions ont été détaillé dans plusieurs ouvrages (voir Gross et Harris [47], et Baynat [6]). Nous introduisons par ailleurs les différentes notations que nous utilisons dans les chapitres suivants.

3.4.1 Notations

Soit le système de files d'attente représenté ci-dessous (fig. 2.7).

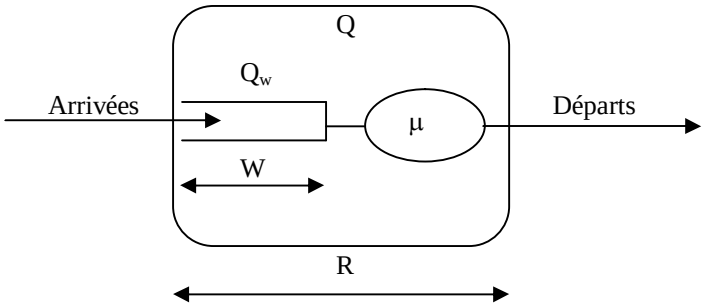


Fig. 2.7 :*Système de file d'attente*

Nous adoptons les notations suivantes :

- A_n : instant d'arrivée du n^{ième} client dans le système,
- D_n : instant de départ du n^{ième} client du système,
- R_n : temps de séjour du n^{ième} client dans le système,
- T : temps total d'observation (On suppose que $N(0)=N(T)=0$ où $N(t)$ est le nombre dans le système à l'instant t),
- $P(n,T)$: proportion de temps pendant lequel le système contient n clients,
- $A(T)$: nombre de clients arrivant dans le système pendant la période $[0,T]$,
- $D(T)$: nombre de clients quittant le système pendant la période $[0,T]$.

3.4.2 Paramètres de performance

A partir de ces définitions, on introduit les paramètres de performance en régime permanent suivants :

- *Débit moyen d'entrée :* c'est le nombre moyen de clients arrivés dans le système par unité de temps :

$$X_e = \lim_{T \to \infty} \frac{A(T)}{T}$$

- *Débit moyen de sortie :* c'est le nombre moyen de clients ayant quitté le système par unité de temps :

$$X_s = \lim_{T \to \infty} \frac{D(T)}{T}$$

- *Nombre moyen de clients :* c'est le nombre moyen de clients présents dans le système :

$$Q = \lim_{T \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} n.P(n,T)$$

On définit Q_w comme étant le nombre moyen de clients dans la file d'attente,

- *Temps moyen de séjour :* c'est le temps moyen de séjour d'un client dans le système :

$$R = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{A(T)} \sum_{n=1}^{A(T)} R_n$$

On définit W comme étant le temps moyen de séjour d'un client dans la file d'attente ($W=R-1/\mu$ où μ est le taux moyen de service),

- *Taux d'utilisation :* c'est la proportion de temps pendant laquelle le serveur est occupé :

$$U = \lim_{T \to \infty} (1 - P(0,T))$$

Les paramètres de performance du régime transitoire sont détaillés dans Baynat [6] et sortent du cadre de notre thèse.

On définit aussi les probabilités suivantes :

- $p_a(n)$: la probabilité qu'un client qui arrive dans le système trouve n clients.
- $p_d(n)$: la probabilité qu'un client qui quitte le système laisse derrière lui n clients.

- *p(n)* : la probabilité qu'il y ait *n* clients dans le système.

3.4.3 Stabilité

Un système est dit stable si et seulement si le débit moyen de sortie des clients est égal à celui d'entrée dans le système :

$$X_s = X_e$$

Soit un système de files d'attente avec un temps moyen d'inter-arrivées $t_a=1/\lambda$ (λ est le taux moyen d'arrivée) et un temps moyen de service $t_s=1/\mu$ alors la condition de stabilité est :

$$\lambda<\mu$$

L'égalité n'est permise que dans les cas des files *D/D/1* (lois d'arrivées et de départs déterministes).

3.4.4 Ergodicité

Lors de la définition des paramètres de performance du système, nous avons considéré une évolution particulière du système. L'ergodicité se propose de répondre à la question suivante : Est-ce que toutes les évolutions possibles du système nous ramènent aux mêmes performances ? Cette notion a été développé par plusieurs auteurs (voir par exemple Baynat [6]).

3.4.5 Loi de Little

La loi de Litte (1961) est définie comme suit : le nombre moyen de clients *Q*, le temps moyen de séjour *R* et le débit moyen X $(X_e=X_s=X)$ d'un système stable en régime permanent se relient de la façon suivante :

$$Q=RX$$

Cette loi est très utile dans l'évaluation de performances des files d'attente puisque, sans hypothèses sur le système (à part la stabilité et le régime permanent) elle permet de relier les paramètres de performances entre eux.

3.4.6 Application à la politique de stock nominal

Nous considérons le coût global de la politique de pilotage comme paramètre de performance. Ce coût inclut le coût de stockage et le coût de rupture. Dans le cas de la politique de stock nominal, modélisée par une station de synchronisation comme le montre la figure 2.8 ci-dessous, ce coût dépend des paramètres de performance de cette station. Dans le cadre de cette thèse, nous considérons le processus d'arrivée et le temps de service comme des données du système. Par ailleurs, nous supposons que les files d'attentes sont à capacité infinie et les clients non satisfaits sont mis en attente. A partir de ces données, le coût moyen de stockage est déterminé à partir du nombre moyen dans la file X_1 et le coût de rupture à partir du nombre moyen dans la file Y_1. Ainsi, le coût moyen du système pour un niveau de stock nominal S est :

$$C(S) = hE[X_1] + bE[Y_1]$$

avec h le coût de stockage par produit par unité de temps et b le coût de rupture par commande par unité de temps.

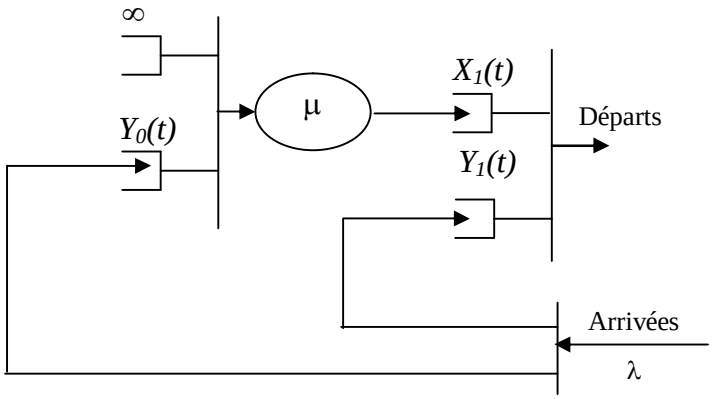


Fig. 2.8 : *Politique de stock nominal mono-étage*

4 Les files d'attentes simples

Dans cette section, nous présentons les paramètres de performances des files que nous avons étudié le long de la thèse *(M/M/1, G/M/1, M/G/1* et *G/G/1)*. Cependant les détails des calculs sortent du cadre de ce travail et ne seront pas exposés (voir Gross et Harris [47] et Kleinrock [66]).

4.1 La file *M/M/1*

On considère un système formé d'une file de capacité infinie et d'un seul serveur. La discipline de service est FIFO (équivalente à FCFS dans ce cas). Le processus d'arrivée des clients est un processus de Poisson de taux λ (voir Annexes A) et le temps de service suit une distribution exponentielle de paramètre μ. Ce système est connu sous le nom de la file *M/M/1*.

La démarche classique d'obtenir les paramètres de performance du système en régime stationnaire est de déterminer une description d'état du système qui engendre un processus sans mémoire (voir Annexes A).

Dans le cas de la file *M/M/1*, la description d'état est le nombre de clients $\{N(t)\}_{t\geq 0}$. Les probabilités stationnaires pour que la file contienne n clients sont alors :

$$p_0 = 1-\rho \text{ et } p_n = (1-\rho)\rho^n \text{ avec } \rho = \lambda/\mu.$$

Les paramètres de performance de la file *M/M/1* sont :

- $X = \lambda$
- $U = \rho$
- $Q = \rho/(1-\rho)$
- $R = 1/\mu.(1-\rho)$

4.2 La file *M/G/1*

Dans la file *M/G/1*, les clients arrivent suivant un processus de Poisson de taux λ et le temps de service suit une distribution générale de taux μ caractérisée par sa densité de probabilité $f_S(t)$. On suppose implicitement que les services successifs sont indépendants les uns des autres et sont distribués selon la même loi. On parle alors de la file *M/GI/1*.

Soit $Y(t)$ le temps écoulé depuis le début de service du client servi, alors la description d'état $\{N(t), Y(t)\}_{t\geq 0}$ de la file *M/G/1* engendre un processus sans mémoire (voir Kleinrock [66]). Le problème qui se pose est que ce processus est à espace d'état mixte donc difficile à étudier. La méthode la plus simple de mener cette étude est de considérer le système aux instants de début ou de fin de service (cette méthode permet d'éliminer $Y(t)$) et le processus $\{N(t_k)\}_{k\geq 1}$ représentant le nombre de clients juste après le départ du $k^{ième}$ client est un processus à temps discret et sans mémoire. Cependant, ce

développement ne permet pas d'obtenir la formulation analytique du régime stationnaire et les seules mesures de performances que nous sommes capables d'obtenir sont des moyennes.

Dans la pratique, on ne connaît de la distribution de service que la moyenne *m* et la variance cv^2. La détermination des performances de la file passent alors par l'approximation de la loi générale par des lois *PH* plus faciles à manipuler (voir Le Bihan [71]). Ce qui donne les valeurs moyennes des indicateurs de performance ci–dessous :

- $X = \lambda$
- $U = \rho$
- $Q = \rho + \dfrac{\rho^2(1+cv^2)}{2(1-\rho)}$ (à partir de la formule de Pollaczeck-Kinchin)
- $R = \dfrac{1}{\mu} + \dfrac{\lambda(1+cv^2)}{2\mu^2(1-\rho)}$ (à partir de la formule de Little)

Cependant, dans le cadre de cette thèse, nous ne pouvons pas nous contenter de ces valeurs moyennes et nous aurons besoin des expressions des lois stationnaires. Pour cela, nous utiliserons une approximation asymptotique proposée par Tijms [97] qui conduit à la forme suivante de la loi stationnaire du nombre dans la file :

$$p_j \approx \sigma \times \tau^{-j} \qquad \text{pour } j \text{ grand}$$

4.3 La file *G/M/1*

Dans la file *G/M/1*, les temps d'inter-arrivées suivent une loi générale de taux λ caractérisée par sa densité de probabilité $f_D(t)$ et le temps de service est exponentiel de taux μ. Comme dans la file *M/G/1*, on parle implicitement de la file *GI/M/1*.

Comme dans la file *M/G/1*, des méthodes de détermination des paramètres de performance de la file *G/M/1* existent (voir Baynat [6]). A partir de ces méthodes, Tijms [97] calcule les probabilités stationnaires aux instants d'arrivées $p_a(n)$ et prouve qu'elles possèdent une distribution géométrique :

$$p_a(n) = (1-r_0).(r_0)^n \text{ , } n>0$$

r_0 est l'unique solution comprise entre 0 et 1 de l'équation :

$$r_0 = F^*((1-\mu).r_0)$$

où F^* est la transformé de Laplace de la loi d'inter-arrivées (voir *Annexes A*).

Ainsi, nous pouvons déterminer les valeurs moyennes des paramètres de performance :

- $X = \lambda$
- $U = \rho$
- $Q = \rho + \dfrac{\lambda r_0}{\mu(1-r_0)}$
- $R = \dfrac{1}{\mu} + \dfrac{r_0}{\mu(1-r_0)}$

4.4 La file *G/G/1*

Dans la file *G/G/1*, les temps d'inter-arrivées (respectivement les temps de service) suivent une loi générale de taux λ (respectivement de taux μ) caractérisée par sa densité de probabilité $f_D(t)$ (respectivement $f_S(t)$). On parle implicitement de la file *GI/GI/1*.

Pour prédire l'évolution du système, on a besoin de connaître, en plus du nombre de clients $N(t)$ dans le système, le temps déjà passé dans le serveur par le client en service $Y(t)$ et le temps déjà écoulé depuis l'arrivée du dernier client $Z(t)$. Le processus $\{N(t), Y(t), Z(t)\}_{t\geq 0}$ est un processus sans mémoire mais dont l'espace d'état est mixte donc très complexe à analyser. Contrairement aux files précédentes, on n'est pas capable d'extraire un processus markovien (sans mémoire) simple en examinant le système à des instants choisis. Ainsi, pour la file *G/G/1*, il n'existe pas de résultats analytiques exactes des paramètres de performance mais des approximations qui consistent à borner le temps moyen de séjour dans la file (voir Kleinrock [67] et Gross et Harris [47]). Sous des hypothèses de trafic intense *« Heavy Traffic »*, Marshall [79] propose une approximation de ce temps en fonction des écarts-type des distributions de demande et de service :

$$W_q = \frac{1}{2}\frac{\sigma_D{}^2 + \sigma_S{}^2}{(1/\lambda) - (1/\mu)}$$

Cette approximation sera utilisée dans le chapitre 4.

5 Conclusion

La détermination des paramètres de contrôle optimaux des politiques de pilotage de flux passe par diverses étapes : la modélisation, l'évaluation et l'analyse des performances.

Dans ce chapitre, nous avons évoqué ces différentes étapes. Nous avons en outre développé la modélisation et l'évaluation des performances par le formalisme des files d'attente que nous utiliserons par la suite.

Nous avons également introduit les différentes notations utilisées dans la suite du rapport ainsi que les résultats trouvés sur les files d'attente simples.

Chapitre 3

Théorie des jeux et chaîne logistique

1 Introduction

La théorie des jeux s'intéresse à toute situation où des agents rationnels interagissent, en particulier lorsqu'ils ont des intérêts conflictuels. Depuis la fondation des concepts de cette théorie par Von Neumann et Morgenstern dans leur livre intitulé « *The Theory of Games and Economic Behavior* » publié en 1944, les différents outils proposés par la théorie des jeux ne cessent de prouver leur efficacité à traiter les situations où les décisions des acteurs influencent le gain de chacun d'eux.

Or les intérêts des différents acteurs de la chaîne logistique sont généralement conflictuels ce qui conduit à une perte d'efficacité pour l'ensemble de la chaîne.

Dans ce travail, nous utilisons des outils de la théorie des jeux pour mesurer la dégradation des performances des systèmes décentralisés et évaluer les différents contrats de coordination de ces systèmes.

Dans ce chapitre, nous ne nous intéressons pas aux fondements de cette théorie, mais nous nous concentrons sur l'interaction entre la théorie des jeux et la chaîne logistique.

Après un bref historique sur la théorie des jeux, nous définissons les concepts de base de cette théorie. Nous passons ensuite en revue les différentes classes de jeux et les différents travaux qui s'y sont intéressés dans le cadre de la chaîne logistique. Dans le quatrième paragraphe, nous définissons l'équilibre de Nash, son existence ainsi que son unicité. Nous étudions, enfin, l'équilibre de Stackelberg.

Le contenu de ce chapitre a été collecté à partir d'une synthèse d'ouvrages et d'articles de plusieurs auteurs, en particulier Cachon et Netessine [19], Fudenberg et Tirole [42], Binmore [11] et Schmidt [90].

2 Concepts de base de la théorie des jeux

2.1 Un peu d'histoire

La théorie des jeux se propose de découvrir comment des agents rationnels devraient interagir lorsqu'ils ont des intérêts conflictuels. Son champ d'application est extrêmement vaste : la micro-économie, les sciences politiques…

A partir de cette définition, une condition semble nécessaire pour obtenir des résultats fiables, c'est la rationalité des joueurs. Le mot rationnel est défini de différentes manières qui convergent toutes vers ce qui est fondu sur la raison et sur la logique. Ainsi, un joueur rationnel, s'il participe à un jeu, c'est dans le but de maximiser sa satisfaction. Néanmoins, cette condition n'est pas limitative du fait que rares sont les cas ou des joueurs n'agissent pas rationnellement, en particulier dans le cadre de la chaîne logistique où les acteurs représentent généralement des entreprises avec des enjeux très importants.

Les origines de la théorie des jeux se confondent avec les fondements du calcul probabiliste au cours du 17ème siècle avec des noms comme Cardano, Pascal, Fermat et Hyghens. Du 18ème au début du 20ème siècle, la théorie des jeux a connu plusieurs apports que ce soit dans les variétés des jeux proposés ou encore dans les propositions de résolution. Parmi les apports les plus importants, nous citons Cournot, Bertrand et Stackelberg.

Néanmoins, la naissance de la théorie des jeux moderne a vu le jour avec le théorème de Zermelo (1912) qui a permis de mettre en évidence une représentation matricielle des stratégies des jeux à deux joueurs et le théorème du minimax de Von Neumann (1928)

avant que Von Neumann et Morgenstern ne posent les concepts et les formulations mathématiques de cette théorie dans leur livre intitulé *« The Theory of Games and Economic Behavior »* publié en 1944.

Après la véritable naissance de la théorie des jeux en 1944, d'autres auteurs ont apporté leurs contributions. Nous citons en particulier Nash (1950) avec son concept d'équilibre appelé équilibre de Nash, l'introduction de la notion d'information imparfaite par Kuhn (1953) et le concept de jeux coopératifs par Aumann (1959).

2.2 Les constituants d'un jeu

Pour qu'un jeu soit entièrement déterminé, il faut que ses concepts identifient *qui* (des acteurs) peut faire *quoi* (des stratégies) et *quand* (une forme) et indiquent également *la somme* (une fonction d'utilité) que chaque acteur gagnera lorsque le jeu est terminé. Ces quatre éléments représentent ce que nous avons appelé les constituants d'un jeu.

2.2.1 Les acteurs

Les acteurs présentent les joueurs qui participent au jeu et forment un ensemble $I= \{1, 2, .. , N\}$. Les interactions entre les différents joueurs sont très variées et s'étendent de la compétition pure à la coopération, voir la coalition.

2.2.2 Les stratégies

Chaque acteur participant à un jeu possède un ensemble d'actions possibles $Si=\{s_1, s_2,... , s_M\}$. Cet ensemble peut être déterminé dès le début du jeu comme il peut dépendre des stratégies adoptées par les autres joueurs au cours du jeu. Le choix d'un acteur peut aussi consister à une combinaison aléatoire de l'ensemble de ses stratégies. On parle dans ce cas de stratégie mixte par opposition à la stratégie pure où, pour chaque étape du jeu, le joueur ne peut sélectionner qu'une stratégie de l'ensemble *Si*.

Dans ce travail, nous ne traitons que les jeux à stratégies pures où les ensembles des stratégies sont définis dès le début du jeu. Nous notons par *S* l'espace des stratégies du jeu.

$$S = \prod_{i=1}^{N} S_i$$

Les stratégies utilisées dans le cadre de la chaîne logistique sont très variées et dépendent du modèle étudié. Pour les modèles de type vendeur de journaux, le

fournisseur détermine le prix de vente alors que le détaillant choisit la quantité à commander (voir par exemple Rudi et Pyke [88]). Bernstein et Federgruen [9] étudient un modèle multi-périodes de compétition entre plusieurs détaillants d'un même fournisseur qui décident des différents prix. Pour un modèle similaire avec capacité de production, Benjaafar et al. [7] considèrent le niveau de service comme étant la stratégie des différents acteurs. Andersson et Marklund [2] traitent le cas d'un fournisseur et plusieurs détaillants opérant suivant une politique *(R,Q)* et décident des quantités de réapprovisionnement Q_i. Pour des modèles similaires à ceux que nous allons étudier dans cette thèse, Caldentey et Wein [25] s'intéressent à un modèle de production/stockage à un étage où le fournisseur fixe la capacité de production et le détaillant son niveau de stock nominal alors que pour un modèle à un étage de production et un étage de stockage (Cachon [21]), les deux acteurs choisissent leurs niveaux de stock nominal. Cachon et Zipkin [20] considèrent les mêmes stratégies pour un modèle à deux étages de stockage avec revue périodique.

2.2.3 La fonction d'utilité

La fonction d'utilité de chaque acteur est son gain à la fin du jeu qui est fonction des stratégies qu'il a adoptées dans les différentes étapes du jeu ainsi que des stratégies choisies par les autres joueurs. Plusieurs grandeurs peuvent être présentés par la fonction d'utilité tels que les profits (Rudi et Pyke [88] et Bernstein et Federgruen [9]) et les coûts dans un contexte de minimisation (Caldentey et Wein [25] et Cachon [21]).

Nous séparons les jeux à somme nulle des jeux à somme non nulle. Dans la première catégorie, le profit global des acteurs est constant (considéré comme nul par normalisation), ainsi, un gain de l'un des acteurs se traduit par une perte pour un ou plusieurs autres acteurs. Dans les jeux à somme non nulle, les choix stratégiques des joueurs agit sur le gain global du jeu.

Nous distinguons, en outre, les jeux à information complète où tous les joueurs connaissent parfaitement les ensembles de stratégies des autres joueurs ainsi que leurs fonctions d'utilité. Si cette hypothèse paraît forte, les développements actuels des systèmes d'information ainsi que l'analyse d'historique des interactions entre les différents acteurs fournit une partie importante de cette information. D'autres variantes par rapport à l'information existent, en particulier les jeux à information incomplète par opposition aux jeux à information complète et les jeux à information asymétrique dans lesquels les connaissances des différents acteurs sont différentes. Ceci peut être dû à des systèmes d'information plus ou moins développés.

2.2.4 La forme du jeu

La forme d'un jeu indique les règles fixées par les joueurs en terme de succession d'étapes du jeu. Nous distinguons en particulier :

La forme normale ou jeu statique qui se déroule en une étape dans laquelle les joueurs choisissent leurs stratégies simultanément ou à défaut, en supposant qu'au moment du choix, chaque joueur ignore le choix des autres joueurs. La majorité des travaux qui ont traité l'interaction entre la théorie des jeux et la chaîne logistique ont considéré cette forme (voir par exemple Cachon [21] et Cachon et Zipkin [20]).

La forme extensive ou jeu dynamique constituée de deux ou plusieurs étapes dans lesquels les joueurs choisissent leurs stratégies simultanément ou successivement dans un ordre bien déterminé. Parmi les auteurs qui ont traité la forme extensive, nous citons Caldentey et Wein [25].

3 La théorie des jeux et la chaîne logistique

3.1 Différents modèles de la théorie des jeux

Dans le paragraphe précédent, nous avons décrit les différents constituants d'un jeu et nous avons distingué pour chaque constituants plusieurs classes qui différent par leurs propriétés. Les différentes combinaisons qui découlent de ces classes forment les modèles de la théorie des jeux. Nous parlons ainsi des jeux statiques ou dynamiques, à somme nulle ou non-nulle, coopératif ou non coopératif, à information complète ou incomplète…

3.2 Différents travaux effectués

Si les modèles de la théorie des jeux sont très nombreux, seul quelques modèles ont été étudié dans le but d'améliorer les performances de la chaîne logistique, en particulier les modèles en stratégies pures avec information complète et à somme non nulle. Parmi ces modèles, les jeux statiques ont fait l'objet de nombreux articles sur l'étude des performances de la chaîne logistique. Avec un intérêt moindre, viennent les jeux dynamiques. Cependant, de plus en plus d'articles s'intéressent au cas de l'information asymétrique et à la forme coalitionnelle d'un jeu.

Dans les modèles présentés ci-dessous et sauf indication contraire, nous supposons que les jeux sont en stratégies pures, à information complète et à somme non nulle.

3.2.1 Jeux statiques non coopératifs

Dans un jeu statique non coopératif, les joueurs choisissent simultanément leurs stratégies. Au moment du choix, chaque joueur est supposé sans aucune connaissance des stratégies adoptées par les autres joueurs.

Le terme non coopératif précise le fait que les joueurs ne puissent pas tester leurs stratégies avant de les appliquer. Une alternative possible dans les jeux coopératifs où les joueurs peuvent aller jusqu'à la création de coalitions.

Les jeux statiques à deux joueurs admettent une présentation matricielle qui fournit les profits respectifs des deux joueurs en fonction du couple de stratégies choisi comme le montre la figure 3.1.

		Joueur 2		
		Sr_1	Sr_2	Sr_3
Joueur 1	Ss_1	4 ; 3	5 ; 1	6 ; 2
	Ss_2	2 ; 1	8 ; 4	3 ; 6
	Ss_3	3 ; 0	9 ; 6	2 ; 8

Fig. 3.1 : *forme normale d'un jeu à deux joueurs*

Dans le tableau ci-dessus les Ss_i et les Sr_i représentent les stratégies des deux acteurs. Ainsi, si le joueur 1 (respectivement, le joueur 2) choisit la stratégie Ss_2 (respectivement Sr_3) alors son profit est égal à 3 (respectivement 6).

Les fondements de résolution de cette classe de jeux a été introduite par Nash en 1950, avec la notion de l'équilibre de Nash qui détermine le N_uplet des stratégies choisies par chaque joueur tels que aucun joueur ne souhaiterait modifier unilatéralement sa stratégie. Nous développons dans la section suivante cet équilibre ainsi que ces conditions d'existence et d'unicité.

Hormis quelques travaux qui montrent l'optimalité de l'équilibre de Nash tels Mahajan et Van Ryzin [78] et Netessine et Zhang [83], la majorité des auteurs s'intéressent au fait qu'un équilibre de Nash ne maximise pas le gain total de la chaîne logistique : c'est la dégradation des performances.

Cette dégradation de performance a été prouvée sur différents modèles de la chaîne logistique. Parmi les modèles à deux acteurs sur des niveaux différents de la chaîne logistique, Caldentey et Wein [25] ont étudié l'équilibre de Nash sur un étage de production/stockage avec un fournisseur qui décide de la capacité de production et un détaillant qui détermine le niveau de stock nominal. Cachon [21] s'est intéressé à un modèle à deux étages dont un étage de production/stockage géré par un fournisseur qui décide du stock nominal et un étage de stockage géré par le détaillant qui détermine le niveau de stock nominal. Cachon et Zipkin [20] traitent un modèle à deux étages de stockage où les acteurs décident des niveaux de stock nominaux. Cachon [22] a étendue cette étude sur un modèle à plusieurs détaillants avec une politique *(r,Q)* où les variables de décision des deux acteurs sont les niveaux de recomplètement Q_s et Q_r. Celikbas et al. [26] ont étudié la compétition entre deux services de la même entreprise, le service commercial qui détermine la prévision de la demande de la période suivante et la production qui définit la quantité à produire.

D'autres articles ont traité la compétition dans le même niveau de la chaîne logistique. En particulier Bernstein et Federgruen [9] ont traité un modèle de stockage à revue périodique avec un fournisseur et plusieurs détaillants qui décident la quantité à commander et du prix d'achat. Benjaafar et al. [7] étudient un modèle de production/stockage avec plusieurs fournisseurs qui déterminent leurs niveaux de stock nominal et un fabriquant qui choisit un niveau de service.

3.2.2 Jeux dynamiques

Dans les jeux statiques que nous avons examinés dans le paragraphe ci-dessus, les acteurs choisissent leurs actions simultanément ce qui ne permet pas de représenter des modèles évoluant au cours du temps avec différents choix pour chaque joueur. Les jeux dynamiques nommés encore forme extensive d'un jeu, tiennent compte de l'ordre dans lequel les acteurs choisissent leurs stratégies. Ainsi, sous sa forme extensive, un jeu est représenté comme un arbre de décisions dans lequel le nœud initial identifie le premier coup à jouer, les nœuds terminaux présentent les résultats possibles du jeu, les nœuds intermédiaires sont les coups possibles et les branches s'éloignant d'un nœud, les actions utilisables à ce coup (fig.3.2).

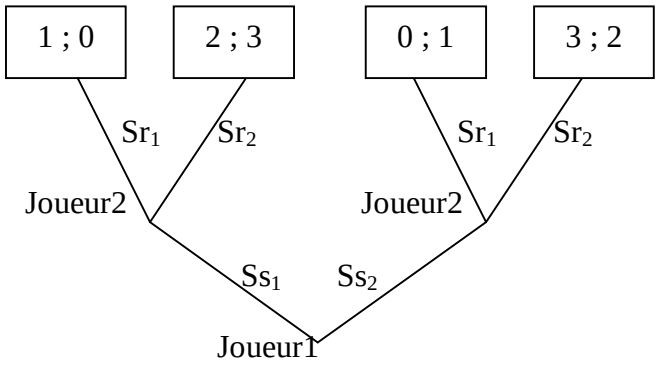


Fig. 3.2 : *forme extensive d'un jeu*

L'arbre ci-dessus représente un jeu dynamique à deux joueurs. Le premier joueur commence à jouer en choisissant une de ses deux stratégies Ss_1 ou Ss_2. Ensuite le joueur 2 choisit une stratégie parmi Sr_1 et Sr_2. A la suite de ces deux choix successifs, on détermine le gain de chaque joueur. Par exemple le choix de (Ss_1, Sr_2) permet au joueur 1 de gagner 2 et au joueur 2 de gagner 3.

Si les jeux sous leur forme extensive semblent avoir plusieurs applications dans le domaine de la chaîne logistique, à l'exception des jeux à deux étapes que nous étendons à la fin de ce paragraphe, les travaux traitant l'interaction entre la chaîne logistique et les jeux dynamiques est beaucoup moins importante que celle sur les jeux statiques.

Nous citons, en particulier, les jeux qui s'intéressent aux réapprovisionnements multi-périodes. Dans ce type de jeux qu'on retrouve dans la littérature sous la désignation « jeux multi-périodes dépendant du temps », la fonction d'utilité de chaque période dépend des actions prises au cours de la période précédente. Une propriété qu'on retrouve dans les chaînes logistiques avec les cumuls des stocks et des ruptures d'une période à l'autre.

Ce type de jeu comprend deux grandes classes : les jeux déterministes et les jeux stochastiques. Si la première classe n'a guère intéressé la chaîne logistique, plusieurs travaux ont traité des jeux de la seconde classe comme Sobel [93] et Kirman et Sobel [65].

Si les travaux qui s'intéressent à ce type de jeux ne sont pas nombreux, c'est en particulier à cause de la difficulté de leur résolution. En effet, un jeu stochastique est une combinaison entre un jeu statique et un processus markovien : à chaque période, en plus des stratégies et des fonctions d'utilité classiques, s'ajoute un mécanisme de transition $p\{s'/s,x\}$, la probabilité de passer de l'état *s* à l'état *s'* en appliquant l'action

x. La détermination de ces probabilités de transition passe généralement par le processus de la demande moyennant des hypothèses tels que des demandes indépendantes et identiquement distribuées. Sous de tels hypothèses, on aboutit à une unique solution stationnaire tels qu'une politique de stockage de type *(S,s)*. Néanmoins, la difficulté de résolution de ces systèmes provient du fait que des équilibres non-stationnaires peuvent exister et on est obligé de supposer encore que la solution finale interdit de tels équilibres et donc passer à un système équivalent d'un jeu statique avec une séquence d'équilibres de Nash.

Néanmoins, le jeu en deux étapes successives a fait l'objet de nombreux articles s'intéressant à la chaîne logistique. L'intérêt que porte ce jeu pour la chaîne logistique est la notion d'un rapport de force non équitable entre les joueurs qui ramène le système vers un équilibre appelé équilibre de Stackelberg du nom de l'économiste allemand qui a introduit cette notion en 1934.

Dans un jeu de Stackelberg, le premier joueur appelé aussi le meneur Stackelberg, choisit son action parmi l'ensemble de ses stratégies. Le second joueur, le suiveur Stackelberg, répond à ce choix en adoptant une stratégie de l'ensemble de ses stratégies et le jeu est ainsi entièrement défini.

Nous nous intéressons par la suite au lien qui peut exister entre ce jeu et la chaîne logistique et nous développerons le formalisme mathématique de ce jeu dans la dernière section de ce chapitre. La notion de dominance dans la chaîne logistique est très fréquente. Nous citons comme exemples le cas d'un grand distributeur face à ces fournisseurs ou celui d'un fabriquant de voitures devant ces concessionnaires ou ces fournisseurs.

Parmi les travaux qui ont utilisé l'équilibre de Stackelberg, Lariviere et Porteus [69] se sont intéressé à un modèle mono-période de vendeur de journaux à deux acteurs : un fournisseur (le meneur Stackelberg) qui fixe le prix de vente et un détaillant qui détermine la quantité à commander. Dong et Rudi [37] ont traité un modèle similaire avec plusieurs détaillants et ils ont revu les deux équilibres de Stackelberg (le fournisseur est le meneur ou le détaillant est le meneur). Li [73] a étudié deux étages de stockage avec un fournisseur et plusieurs détaillant avec une politique à revue périodique. Caldentey et Wein [25] ont étudié l'équilibre de Stackelberg sur un étage de production/stockage avec un fournisseur qui décide de la capacité de production et un détaillant qui détermine le niveau de stock nominal et Weerawat [103] s'est intéressé à

un modèle à deux étages de production où les deux acteurs choisissent leurs niveaux de stock nominal.

3.2.3 Jeux coopératifs

Si l'apport de la coopération sur les performances de la chaîne logistique ne laisse aucun doute, la littérature combinant les jeux coopératifs et la SCM sont très rares. Ceci est due principalement au développement mathématique de ce type de jeu encore limité. En effet, les concepts mathématiques des jeux coopératifs ne permettent que de calculer la valeur de la coopération sans préciser les actions qu'il faut entreprendre.

Un jeu coopératif consiste en un ensemble de joueurs $N=\{1,2,..,n\}$ et un sous-ensemble de coalitions $S=\{S_1,S_2,..,S_m\}$ avec $S_i \subset N$. La fonction caractéristique $v(S)$ spécifie la valeur maximale que les membres de la coalition peuvent créer et donc partager dans le pire scénario.

A titre d'exemple nous étudions les coalitions possibles de la forme normale du jeu de la figure 3.3.

J_1 \ J_2	Sr_1	Sr_2
Ss_1	2 ; 2	4 ; 1
Ss_2	1 ; 4	3 ; 3

$S_1=\{J_1\}$ → $v(S_1) = 2$
$S_2=\{J_2\}$ → $v(S_2) = 2$
$S_3=\{J_1+J_2\}$ → $v(S_3) = 6$

Fig. 3.3 : *passage de la forme normale à la forme coalitionnelle d'un jeu*

Le jeu de la figure ci-dessus présente deux joueurs J_1 et J_2 de stratégies respectives (Ss_1, Ss_2) et (Sr_1, Sr_2). Dans la version coopérative de ce jeu, trois coalitions sont possibles $\{J_1\}$, $\{J_2\}$ et $\{J_1+J_2\}$. Lors de la coalition S_1, le joueur J_1 peut choisir la stratégie Ss_1 et garantir ainsi un gain minimum de $v(S_1) = 2$ alors que pour coalition S_3, les deux joueurs optent pour le couple de stratégies (Ss_2,Sr_2) et assurent un gain de $v(S_3) = 6$.

Parmi les rares travaux qui se sont intéressés aux jeux coopératifs dans la chaîne logistique, nous pouvons citer Wang et Parlar [102] qui ont étudié un modèle de vendeur de journaux à trois joueurs et Hartman et al. [56] qui ont exploité un modèle similaire qui calcule l'apport de la centralisation des stocks des différents détaillants.

3.2.4 Jeux avec information asymétrique

Lors des exemples précédents, nous avons supposé que les stratégies des différents acteurs ainsi que leurs fonctions d'utilité sont connues de tous les joueurs. Or, même si l'essor des systèmes d'information permet de telles hypothèses, les différents acteurs de la chaîne logistiques présentent des systèmes d'information plus ou moins développés en fonction des besoins de l'entreprise et de ses ressources. De ce fait, il est fréquent de trouver dans la chaîne logistique des entreprises bénéficiant d'une meilleure prévision que d'autres ou une connaissance plus fine des structures des coûts. Néanmoins, ce genre d'information est généralement connu de tous les acteurs et ceux qui manquent d'information peuvent en tenir compte dans leurs choix d'action dans le cadre de l'interaction avec les autres acteurs.

De plus en plus de travaux traitent des jeux à information asymétrique qui se répartissent en trois catégories :

Les jeux dynamiques à deux étapes ou le premier acteur manque d'information. Dans cette catégorie, Cachon et Lariviere [18] traitent le cas d'un fournisseur qui décide de la capacité de production et qui supporte les coûts de cette capacité et d'un détaillant possédant une meilleure information sur la demande et qui préfère de ce fait donner une prévision plus forte au fournisseur en espérant que le fournisseur construit plus de capacité ce qui lui permet d'avoir plus de réactivité vis à vis de ses clients.

Les jeux dynamiques à deux étapes où le deuxième acteur manque d'information tel le cas présenté par Porteus et Whang [85].

Les jeux statiques où chaque acteur a une meilleure connaissance de sa fonction d'utilité que de celles des autres acteurs. La figure 3.4 illustre un exemple à deux joueurs qui fait partie de cette catégorie.

Jeu vu par le joueur J_1

J_1 \ J_2	Sr_1	Sr_2
Ss_1	$2 ; 2 \pm \alpha$	$4 ; 1 \pm \alpha$
Ss_2	$1 ; 4 \pm \alpha$	$3 ; 3 \pm \alpha$

Jeu vu par le joueur J_2

J_1 \ J_2	Sr_1	Sr_2
Ss_1	$2 \pm \beta ; 2$	$4 \pm \beta ; 1$
Ss_2	$1 \pm \beta ; 4$	$3 \pm \beta ; 3$

Fig. 3.4 : *jeu statique avec information asymétrique*

Dans l'exemple ci-dessus, l'incertitude sur les gains des différents acteurs peut rendre difficile la détermination des courbes de réaction nécessaires pour aboutir aux différents équilibres.

4 Equilibre de Nash

4.1 Introduction

L'équilibre de Nash est l'aboutissement rationnel d'un jeu statique non coopératif où les joueurs choisissent simultanément leurs stratégies sans aucune connaissance des choix des autres joueurs.

Ainsi, dans le cas de deux joueurs, par exemple, le couples de stratégies *(Ss*, Sr*)* est un équilibre de Nash si et seulement si *Ss** est une réponse optimale à *Sr** et *Sr** est simultanément une réponse optimale à *Ss**. Ainsi, si le joueur J_1 prédit que le joueur J_2 utilisera la stratégie *Sr** et J_2 que J_1 utilisera la stratégie *Ss**, aucun d'entre eux n'aura raison de se comporter différemment de ce que son adversaire a prédit. Dans ce sens leurs prédictions sont en équilibre et aucun joueur n'aura intérêt à bouger unilatéralement de l'équilibre choisi.

Nous pouvons ainsi définir l'équilibre de Nash dans le cas de deux joueurs de la manière suivante :

Définition 3.1 :
Soit *Ss* et *Sr* l'ensemble des stratégies des joueurs J_1 et J_2 et $\Pi_S(Ss_i,Sr_i)$, $\Pi_R(Ss_i,Sr_i)$ leurs fonctions d'utilité. *(Ss*, Sr*)* est un équilibre de Nash si et seulement si :

$$\Pi_S(Ss^*, Sr^*) \geq \Pi_S(Ss_i, Sr^*) \quad \forall Ss_i \in Ss$$
$$\Pi_R(Ss^*, Sr^*) \geq \Pi_R(Ss^*, Sr_i) \quad \forall Sr_i \in Sr$$

ou encore :

$$Sr^*(Ss) = \arg\max(x, \Pi r(Ss, x))$$
$$Ss^*(Sr) = \arg\max(x, \Pi s(x, Sr)).$$

Afin d'aboutir à cet équilibre, Nash à introduit la notion de courbe de réaction qu'on va définir dans le paragraphe suivant.

4.2 Courbes de réaction

Le mot réaction est utilisé dans ce contexte comme synonyme de la notion de meilleure réponse ou réponse optimale. Ainsi, chaque acteur possède une courbe de réaction en fonction des choix stratégiques des autres acteurs. Considérons le cas des deux joueurs de la figure 3.5 ci-dessous.

J_1 \ J_2	Sr_1	Sr_2	Sr_3
Ss_1	0 ; **6**	1 ; 3	**7** ; 0
Ss_2	4 ; 2	**2** ; **3**	3 ; 2
Ss_3	**9** ; 3	1 ; **4**	0 ; **4**

Fig.3.5 : *courbes de réaction*

Soit $S : Sr \rightarrow Ss$ la correspondance de meilleure réponse de J_1 et $R : Ss \rightarrow Sr$ celle de J_2, alors S et R sont définies par :

$$S(Sr_1)=\{Ss_3\} \qquad R(Ss_1)=\{Sr_1\}$$
$$S(Sr_2)=\{Ss_2\} \qquad R(Ss_2)=\{Sr_2\}$$
$$S(Sr_3)=\{Ss_1\} \qquad R(Ss_3)=\{sr_2, Sr_3\}$$

Ceci signifie par exemple que $S(Sr_1)=\{Ss_3\}$ est l'ensemble des meilleures réponses du joueur J_1 au choix de la stratégie Sr_1 par J_2. La figure 3.5 montre la courbe de réaction de J_1 indiquée par des cercles et celle de J_2 par des carrés. Remarquons que S et R sont des correspondances et non pas des fonctions.

A partir de la notion de courbes de réaction, une deuxième définition de l'équilibre de Nash peut être citée.

Définition 3.2:
Un couple de stratégies (Ss^*, Sr^*) est un équilibre de Nash si seulement si :

$$Ss^* \in S(Sr^*) \text{ et } Sr^* \in R(Ss^*)$$

de sorte que *Ss** et *Sr** soient des meilleures réponses l'une à l'autre.

Les équilibres de Nash se produisent par conséquent à l'endroit où les courbes de réaction se croisent. Ainsi, dans le jeu de la figure 3.5 le seul équilibre de Nash est (Ss_2,Sr_2).

A partir de cette définition, deux problèmes peuvent se poser : le premier concerne ce qu'il faudrait faire lorsque les deux courbes se croisent plus d'une fois. Chaque point de croisement correspond à un équilibre de Nash, lequel de ces équilibres de Nash devrait être sélectionné ? La seconde difficulté surgit lorsque les courbes ne se croisent pas. Que doit-on faire dans un jeu qui ne possède pas d'équilibre de Nash ? Ces deux points seront développés dans les paragraphes ci-dessous.

Notons que, si Πs (respectivement Πr) est quasi-concave en Ss (respectivement en Sr) alors les courbes de réaction S et R sont définies uniquement par les conditions du premier ordre :

$$\frac{d\Pi_S}{dSs} = 0 \text{ et } \frac{d\Pi_R}{dSr} = 0 .$$

4.3 Existence

A partir de la définition 3.2, l'équilibre de Nash est l'intersection entre les courbes de réaction des différents acteurs, ce qui correspond à la notion du point fixe. Ainsi, son existence découle des théorèmes du point fixe. Les trois théorèmes majeurs qui traitent cette notion sont ceux de Brouwer, Kakutani et Tarski. Néanmoins, ces théorèmes sont difficiles à appliquer dans le cadre de l'équilibre de Nash et d'autres méthodes alternatives ont été développées.

Nash (1950) montre que tout jeu fini (ensemble des stratégies) a un équilibre de Nash en stratégie mixte (Dans un jeu ou les stratégies mixtes sont autorisées, chaque acteur peut choisir une ou plusieurs de ses stratégies possibles en affectant à chacune un probabilité non nulle tel que la somme des probabilités affectées est égal à un).

Debreu, Glicksberg et Fan (1952) montrent qu'une stratégie pure existe si les ensembles des stratégies sont compactes et convexes et que la fonction d'utilité *Πs(Ss,Sr)* (respectivement *Πr(Ss,Sr)*) est quasi-concave en *Ss* (respectivement en *Sr*).

L'importance de la condition quasi-concave pour l'existence de l'équilibre est illustrée par des exemples proposés par Netessine et Shumsky [82].

Topkis (1979) se base sur le théorème de Tarski pour montrer l'existence d'au moins un équilibre de Nash en stratégies pures dans le cas d'un jeu super-modulaire avec comme condition nécessaire la non décroissance des fonctions de réaction. Nous allons développée cette notion dans le chapitre 5 et nous utiliserons ce critère pour prouver l'existence de l'équilibre de Nash dans notre modèle.

Notons que Cachon et Haker [17] ont discuté les cas où l'équilibre de Nash n'existe pas.

4.4 Unicité

La résolution la plus simple d'un jeu statique non coopératif est d'avoir un équilibre de Nash unique qui permettra aux différents acteurs un choix fixe et facile à déterminer. L'existence d'équilibres multiples (sauf pour certains cas) peut être problématique du fait que les différents acteurs peuvent opter pour des équilibres différents et nous aboutissons en fin de compte à une solution qui n'est pas un équilibre de Nash. Dans ce qui suit, nous donnons différents exemples d'équilibres multiples. A la fin de la section, nous survolons les différentes méthodes utilisées pour démonter l'unicité de l'équilibre de Nash.

L'exemple de la figure 3.6 est connu dans la théorie des jeux sous le nom du dilemme du prisonnier. Chaque joueur possède deux stratégies (avouer ou ne pas avouer) et l'utilité de chaque joueur en fonction des choix stratégiques effectués est l'opposé du nombre d'années de prisons à purger.

J_1 \ J_2	Avouer	Ne pas avouer
Avouer	-5 ; -5	-1 ; -10
Ne pas avouer	-10 ; -1	-2 ; -2

Fig. 3.6 : *Dilemme du prisonnier*

Si chaque joueur classe les différentes situations possibles alors les deux acteurs vont finir par opter pour la stratégie « avouer » qui est une stratégie strictement dominante[1] ce qui ne ramènent à l'équilibre de Nash (Avouer, Avouer). Néanmoins, il est clair que la meilleure solution du jeu est le deuxième équilibre de Nash (« Ne pas avouer », « Ne pas avouer »). Ainsi, l'existence d'une stratégie dominante ou strictement dominante dans un jeu n'implique pas nécessairement un équilibre de Nash optimal.

Dans le jeu de la figure 3.7 connu sous le nom de la bataille des sexes, un garçon (J_1) et une fille (J_2) désirent sortir ensemble, néanmoins, le garçon préfère aller à un combat de boxe alors que la fille souhaite aller danser.

J_1 \ J_2	Boxe	Danse
Boxe	3 ; 2	1 ; 1
Danse	1 ; 1	2 ; 3

Fig. 3.7 : *bataille des sexes*

Comme le dilemme du prisonnier, ce jeu présente deux équilibres de Nash (Boxe, Boxe) et (Danse, Danse). Néanmoins, ces équilibres diffèrent de ceux du premier jeu par le fait que chaque équilibre favorise l'un des joueurs par rapport à l'autre et un désaccord entre les deux peut ramener le système à un point de non équilibre moins bien pour les deux acteurs. Un jeu similaire nommé « jeu de la poule mouillée » présente un point de non équilibre acceptable des deux acteurs ce qui rend le désaccord moins pénalisent pour les deux joueurs.

L'existence d'équilibres multiples peut se présenter sous différentes formes comme le montre les deux jeux décrit précédemment. Nous nous contentons de ces cas et nous nous intéressons par la suite à l'unicité de l'équilibre de Nash.

Démontrer cette unicité est généralement plus difficile que celle de l'existence. Nous présentons quelques méthodes utilisées dans cet objectif :

La méthode algébrique consiste à analyser les courbes de réaction et les fonctions d'utilité pour déterminer des propriétés dans le jeu tels que des stratégies dominantes qui permettent d'éliminer des équilibres jusqu'à aboutir à un équilibre unique.

[1] Une stratégie *Ss** de *Ss* est dite dominante si et seulement si :
$\Pi_s(Ss^*, Sr_i) \geq \Pi_s(Ss_i, Sr_i) \quad \forall Ss_i \in Ss \ \forall \mathrm{Sr_i} \in \mathrm{Sr}$

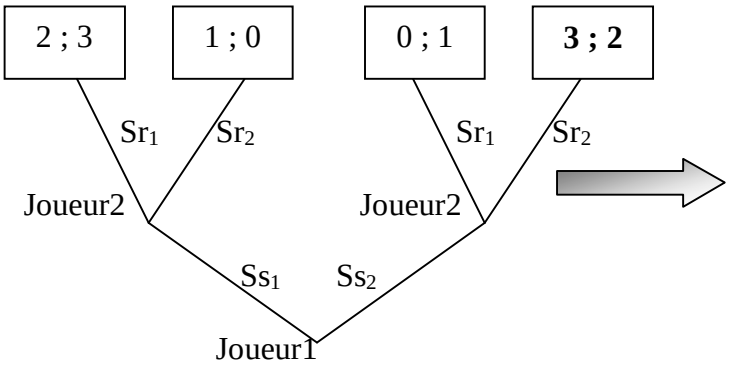
Une deuxième méthode plus rigoureuse se base sur l'étude de la fonction $f : R^n \rightarrow R^n$ (R^n est l'espace des stratégies de l'ensemble des acteurs)[2], et montre que si f est une contraction alors l'équilibre de Nash est unique (pour plus de détails, voir Cachon et Netessine [19]).

D'autres méthodes utilisent la notion de bijection de l'une des fonctions de réaction et montrent l'unicité du point d'intersection en vérifiant l'évolution de la distance entre les deux courbes.

5 Equilibre de Stackelberg

Rappelons que l'équilibre de Stackelberg est l'aboutissement rationnel d'un jeu dynamique s'effectuant en deux temps : Un acteur agit en premier et l'autre acteur peut alors observer le choix du premier et choisir sa stratégie. Cette démarche de jeu nous conduit à un rapport de force inéquitable en faveur du premier acteur considéré comme meneur, le deuxième est alors suiveur.

Dans la gestion de la chaîne logistique, le fait qu'il y ait un meneur peut être expliqué de différentes manières tels qu'une meilleure qualité d'information pour ce dernier. Dans le cas de deux joueurs et du moment ou les différents acteurs savent quel acteur est le meneur, le jeu de Stackelberg peut être considéré comme un jeu statique dans lequel les deux joueurs choisissent leurs stratégies simultanément afin d'aboutir à l'équilibre de Stackelberg. Prenons par exemple le jeu de la figure 3.8, le joueur 1 sait que s'il opte pour la stratégie Ss_1 alors il gagnera 2 du fait que J_2 choisira Sr_1 alors que s'il prend Ss_2, son gain s'élève à 3 (J_2 choisira Sr_2) alors il optera nécessairement pour Ss_2 et l'équilibre de Stackelberg correspondant est (Ss_2,Sr_2).



J_1 \ J_2	Sr_1	Sr_2
Ss_1	**2** ; 3	1 ; 0
Ss_2	0 ; 1	**3** ; 2

Fig. 3.8 : *forme stratégique d'un jeu de Stackelberg*

[2] $f_i(x_1,..,x_n) = \partial\Pi_i / \partial x_i + x_i$ avec Π_i la fonction d'utilité du joueur *i*.

Nous montrons qu'à partir de la forme stratégique ci-dessus et sous condition que les deux joueurs sachent que J_1 est le meneur, nous aboutissons à l'équilibre de Stackelberg. En effet, J_1 connaît la courbe de réaction de J_2 (les gains encadrés) et choisit ainsi la stratégie qui maximise le gain correspondant à cette courbe (les valeurs en gras) et puisque le suiveur sait bien que J_1 est le meneur et donc qu'il va effectuer ce raisonnement, il adoptera la stratégie attendue par le meneur.

A partir de cette réflexion, l'équilibre de Stackelberg, avec J_1 comme meneur, s'écrit de la manière suivante :

$$Ss^* = \arg\max(\Pi_s(Ss_i, Sr^*(Ss_i))) \text{ et } Sr^* = R(Ss^*)$$

Notons que, pour le meneur l'équilibre de Stackelberg est meilleur que l'équilibre de Nash (au pire des cas, le meneur peut opter pour l'équilibre de Nash). D'ailleurs, l'exemple de la figure 3.8 admet deux équilibres de Nash (Ss_1, Sr_1) et (Ss_2, Sr_2) favorisant chacun un des deux acteurs et sous l'équilibre de Stackelberg, le meneur a imposé l'équilibre qui lui convient.

L'existence de l'équilibre de Stackelberg est facile à prouver et se base principalement sur la continuité des fonctions d'utilité. Néanmoins, l'unicité est beaucoup plus dure à montrer.

6 Conclusion

Différents modèles étudiés dans la littérature de la théorie des jeux ont apporté des éléments de réponse aux diverses interrogations posées par les logisticiens. Le long de ce chapitre, nous avons introduit quelques concepts de cette théorie et nous avons expliqué l'interaction entre cette approche et la chaîne logistique.

Cette théorie va nous permettre d'étudier plusieurs modèles de production/stockage à deux étages gérés d'une façon décentralisée par deux acteurs : un fournisseur et un détaillant. Nous déterminerons les performances des chaînes logistiques étudiées à l'aide des outils de la théorie des jeux introduits dans ce chapitre. Nous nous intéresserons, en particulier, à des jeux statiques non coopératifs à travers l'équilibre de Nash et à des jeux dynamiques à deux étapes avec l'équilibre de Stackelberg. Nous traiterons à l'aide de la simulation le cas particulier de plusieurs détaillants dans le chapitre 6 dans le cadre des deux équilibres cités ci-dessus.

DEUXIEME PARTIE

Chapitre 4

L'influence de la variabilité sur les performances d'un étage de production par anticipation

1 Introduction

Le rôle de la variabilité dans la dégradation de performance des chaînes logistiques a fait l'objet de plusieurs travaux. En particulier, certains auteurs ont montré que la variabilité de la demande augmente les coûts de stockage des systèmes de production sans contraintes de capacité.

Afin d'étudier l'effet de la variabilité sur les performances des systèmes de production avec capacité, nous nous intéressons à un étage de production par anticipation, mono-produit, managé par une politique de stock nominal qui consiste à compléter le niveau de stock à une valeur optimale appelée niveau de stock nominal. Ainsi, l'optimisation, qui consiste à minimiser les coûts de stockage et de rupture, revient à l'optimisation du niveau de stock nominal.

En fonction de la complexité des hypothèses de la modélisation, cette optimisation est déterminée analytiquement, numériquement ou à partir des résultats de la simulation. Si le recours aux résultats numériques et à la simulation permet de comparer cas par cas les performances des différents systèmes, il s'avère impossible de généraliser ces résultats et d'en tirer les propriétés qui en découlent. Dans ce travail, nous menons une approche analytique et nous montrons que pour un ordre stochastique donné de la distribution de la demande, une variabilité croissante conduit à une augmentation du niveau de stock

nominal et des coûts qui lui sont associés. Nous validons ces effets sur des exemples numériques.

Ce chapitre est organisé comme suit: après un bref état de l'art sur ce qui a été fait en variabilité de la demande, nous introduisons le modèle étudié, les notations et les définitions utilisées ultérieurement. La quatrième section est consacrée à notre apport sur l'effet de la variabilité de la demande sur le niveau de stock nominal et sur les coûts associés. Nous présentons ensuite les exemples numériques étudiés. Dans la dernière section, nous étendons ces résultats au cas de la variabilité du temps de service.

2 Etat de l'art

Si les effets néfastes de la variabilité sur les performances des systèmes de stockage stochastiques sont bien connus, il y a relativement peu de travaux qui ont investi ce constat de point de vue analytique. Ces recherches se sont intéressées principalement aux systèmes sans contraintes de capacité. Pour des systèmes de stockage mono-étage à suivi continu, Song [94],[95] montre que l'augmentation de la variabilité des délais de la demande augmente le niveau du stock nominal et le coût optimal associé. Ridder et al. [86] présentent des résultats similaires pour un modèle mono-période de vendeur de journaux et mettent l'accent sur l'influence de la définition de la variabilité sur ces résultats en fournissant des contre-exemples. Il est important de souligner que ces résultats sont obtenus sous une définition précise de la variabilité et qu'une simple mesure de cette variabilité telles que le coefficient de variation du délai de la demande ne suffit pas à ordonner le niveau de stock nominal et le coût optimal associé.

La variabilité des temps d'inter-arrivées dégrade également les performances des modèles de files d'attente comme le montrent Buzacott et Shanthikumar [16] analytiquement à partir de certaines approximations et Karaesmen et Gupta [62] à partir de développements numériques.

D'autres travaux ont abouti à des résultats numériques sur l'effet de la variabilité sur les systèmes de stockage avec contraintes de capacité nommés aussi systèmes de production/stockage (Karaesmen et al. [64]). D'autre part, rares sont les travaux qui ont étudié les effets de la variabilité sur les systèmes de production/stockage d'un point de vue analytique. En particulier Güllü [49] a traité un problème de production/stockage mono-produit à suivi périodique avec une politique de stock nominal et a exploré les conditions sur la distribution de la demande sous lesquelles les performances optimales mesurées peuvent être ordonnées.

Dans ce chapitre, nous étudions un modèle mono-produit de production par anticipation à un étage de production à suivi continu. Le temps d'inter-arrivées de la demande est aléatoire. La capacité de la production est explicitement modélisée par un serveur exponentiel d'une file d'attente (une étude détaillée de ce modèle a été faite par Buzacott et Shanthikumar [16]). Contrairement à Güllü [49], nous nous intéressons à un modèle de production/stockage à suivi continu. Afin d'étudier les effets de la variabilité sur les performances du système, à savoir le niveau de stock nominal et les coûts qui rentrent en jeu, nous considérons un processus d'arrivées indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi générale. Le modèle résultant est une file d'attente de production par anticipation de type *GI/M/1*.

Notre contribution peut être résumée comme suit : nous comparons le niveau de stock nominal et le coût optimal de deux files de production par anticipation *GI/M/1* avec des taux d'arrivées et de services identiques. Nous montrons que, si les temps d'inter-arrivées de la demande sont ordonnés suivant un ordre stochastique bien spécifique (l'ordre convexe), alors le niveau de stock nominal et le coût optimal moyen sont ordonnés de la même façon. D'autre part, nous montrons que l'ordre convexe est essentiel à l'obtention de tels résultats et qu'une comparaison moins stricte de la variabilité telle que le coefficient de variation ne suffit pas en général. Nous complétons ces résultats théoriques par quelques exemples numériques et nous finirons par étudier, par analogie, les effets de la variabilité sur le temps de service.

3 Préliminaires

3.1 Modèle et notations

Nous considérons un système de production/stockage mono-étage avec une demande unitaire (nous discutons un cas particulier d'arrivées groupées à la fin du chapitre). Les temps d'inter arrivés sont indépendants et identiquement distribués. Notons par T le temps d'inter-arrivées, $\lambda=1/E[T]$ le taux de la demande, μ le taux de service supposé exponentiel et $\rho = \lambda/\mu$ le taux d'utilisation.

Le système de production est géré par une politique de stock nominal de niveau S (voir Buzacott et al. [15] pour une description détaillée de cette politique pour les systèmes de production/stockage). Le serveur produit quand le niveau de stock est inférieur au niveau de stock nominal S. Nous supposons que la demande non satisfaite est mise en attente. Nous considérons les coûts suivants : h est le coût de stockage par pièce par

unité de temps et *b* le coût de rupture par demande en attente par unité de temps. Soit *X*(*t*) le niveau de stock à l'instant *t*, *X* étant la variable aléatoire stationnaire associée au niveau du stock et soit p_x=*Probabilité{X=x}*. A partir de cette structure de coûts, le problème d'optimisation revient à sélectionner le niveau de stock nominal *S* qui minimise le coût moyen :

$$\min_S \left\{ C(S) = \sum_{x=0}^{S} h.x.p_x + \sum_{x=-\infty}^{0} -b.x.p_x \right\} \tag{4.1}$$

Soit *N(t)=S-X(t)*, le nombre de pièces manquantes par rapport au niveau de stock nominal *S* à l'instant *t*. *N(t)* est le processus de file d'attente relié à l'étage de production. En particulier, pour des temps d'inter-arrivées distribués suivant une loi générale et pour un temps de service exponentiel, le processus *N(t)* est équivalent au nombre de clients dans une file *GI/M/1* à l'instant *t*. L'analyse du système de production/stockage peut ainsi être mené à partir du système de file d'attente qui lui est relié. Nous définissons p_n=*Probabilité{N=n}*, la probabilité stationnaire d'avoir *n* clients dans la file. La fonction objectif (4.1) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\min_S \left\{ C(S) = \sum_{n=0}^{S} h(S-n)p_n + \sum_{n=S+1}^{\infty} b(n-S)p_n \right\} \tag{4.2}$$

La minimisation de l'expression ci-dessus en fonction de *S* nous ramène à la version discrète de la formule de la fraction critique « critical-fractile formula » pour le niveau optimal du stock nominal. En particulier, soit F_N la fonction de répartition de *N*, alors le niveau optimal du stock nominal *S** est donné par (voir Veatch et Wein [100] par exemple):

$$F_N(\tilde{S}^* - 1) = \frac{b}{h+b} \text{ et } S^* = \lfloor \tilde{S}^* \rfloor \tag{4.3}$$

où $\lfloor y \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à y (un nombre réel).

Notons que $\tilde{S}^*$ est généralement non entier mais permet d'obtenir le niveau de stock nominal à partir de la seconde équation de (4.3). $\tilde{S}^*$ joue un rôle important dans la caractérisation qualitative du système et nous nous référerons fréquemment le long du chapitre à cette valeur comme étant l'approximation continue du niveau optimal du stock nominal.

3.2 Définitions et propriétés des comparaisons stochastiques

L'outil principal de l'analyse effectuée dans ce travail consiste dans les comparaisons stochastiques des variables aléatoires. Nous définissons ci-dessous les différents ordres stochastiques que nous utilisons et nous évoquons leurs principales propriétés. Ces définitions ainsi que des détails supplémentaires sur les ordres stochastiques peuvent être trouvés dans Stoyan [96] et Shaked et Shanthikumar [91].

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires, F_1 et F_2 leurs fonctions de répartition, f_1 et f_2 leurs densités de probabilité, et L_1, L_2 leurs transformées de Laplace.

Définition 4.1 (Ordre stochastique):
La variable aléatoire X_1 est plus grande que la variable X_2 en ordre stochastique, et on note $X_1 \geq_{st} X_2$, si $1-F_1(x) \geq 1-F_2(x) \quad \forall x$.

Définition 4.2 (Ordre convexe):
Pour deux variables aléatoires X_1 et X_2, $X_1 \geq_c X_2$ ($X_1 \geq_{ic} X_2$) si est seulement si $E[f(x_1)] \geq E[f(x_2)] \quad \forall f$ convexe (convexe et non décroissante).

Définition 4.3 (Ordre selon la transformée de Laplace):
Pour deux variables aléatoires X_1 et X_2, $X_1 \geq_L X_2$ si $E[e^{-sX_1}] \leq E[e^{-sX_2}]$.

Dans ce qui suit, nous résumons quelques propriétés des comparaisons définies ci-dessus :

$$X_1 \geq_{st} X_2 \Rightarrow X_1 \geq_{ic} X_2 \Rightarrow X_1 \geq_L X_2 .$$

Note: Dans l'application de l'ordre convexe croissant sur deux variables aléatoires non négatives ayant une moyenne identique, la condition « non décroissante » n'est pas nécessaire.

En plus des comparaisons présentées ci-dessus, nous nous référons fréquemment à une simple mesure de la variabilité : le coefficient de variation (*CV*) défini comme étant le quotient de l'écart-type par la moyenne de la variable aléatoire.

4 L'influence de la variabilité de la demande sur le niveau de stock nominal et sur le coût associé

4.1 Le niveau optimal du stock nominal

Notre objectif dans cette section est d'analyser les effets de la variabilité des temps d'inter-arrivées sur le niveau de stock nominal. Cette analyse est similaire à celle faite par Song [94] sur la variabilité des délais de la demande pour des systèmes sans contraintes de capacité. Song montre que sous un ordre particulier des délais de demande désigné par ordre en variabilité, les niveaux de stock nominal sont ordonnés.

Nous comparons deux systèmes de production par anticipation modélisés par des files d'attente *GI/M/1* identiques à l'exception des processus d'arrivées associés à des variables aléatoires A_1 et A_2. Afin d'isoler les effets de la variabilité de ceux du taux d'utilisation, nous traitons le cas de moyennes identiques $E[A_1] = E[A_2]$ (les systèmes comparés ont le même taux d'utilisation). Pour un modèle différent qui inclut la capacité de production et à suivi périodique, Güllü [49] présente des comparaisons sous l'ordre stochastique (*définition 1*). Cependant, cet ordre est fort et ne permet pas de comparer des distributions de temps d'inter arrivées ayant la même moyenne.

Rappelons que le niveau optimal du stock nominal est obtenu à partir de la fonction de répartition du nombre de pièces dans la file à partir de l'équation

$$F_N(\tilde{S}^* - 1) = b/(h+b)\,,\ S^* = \lfloor \tilde{S}^* \rfloor .$$

Notons que pour une file *GI/M/1*, la fonction de répartition dépend du paramètre *r*, la racine de l'équation caractéristique : $r = L_A((1-r)\mu)$, avec L_A la transformée de Laplace de la distribution F_A des temps d'inter-arrivées (voir Gross et Harris [47]). Ce qui nous ramène à l'expression suivante de la fonction de répartition de *N*, le nombre de clients dans la file :

$$F_N(x) = P[N \le x] = (1-\rho) + \rho(1-r^x) = 1 - \rho\, r^x \quad x = 0,1,2... \qquad (4.4)$$

Lemme 4.1:

Considérons deux files d'attente *GI/M/1* avec des taux d'arrivées et de service identiques de paramètres respectifs r_1 et r_2 tels que $r_1 \ge r_2$, alors $N_1 \ge_{st} N_2$ avec N_1 et N_2 sont respectivement le nombre de clients dans la file 1 et 2.

Démonstration :

Soit la fonction :

$$G_x(r) = F(x) = (1 - \rho.r^x),$$

le paramètre r étant défini dans l'intervalle [0,1]. $G_x(r)$ est décroissante et concave. Ainsi, pour tout x :

$$r_1 \geq r_2 \Rightarrow G_x(r_1) \leq G_x(r_2).$$

Ce qui implique :

$$F_1(x) \leq F_2(x) \Leftrightarrow N_1 \geq_{st} N_2.$$

Par conséquent,

$$r_1 \geq r_2 \Rightarrow N_1 \geq_{st} N_2 \ \blacklozenge$$

Lemme 4.2:

Considérons deux systèmes de production par anticipation modélisés par des files d'attente *GI/M/1* tels que $N_1 \geq_{st} N_2$, alors $S_1^* \geq S_2^*$ avec S_1^* (respectivement S_2^*) est le niveau optimal du stock nominal de la file 1 (respectivement file 2).

Démonstration :

La condition d'optimalité est :

$$F_1(\tilde{S}_1^* - 1) = F_2(\tilde{S}_2^* - 1) = b/(h+b).$$

A partir de la définition de l'ordre stochastique,

$N_1 \geq_{st} N_2$ implique que $F_1(n) \leq F_2(n)$, pour tout n,

ce qui donne $\tilde{S}_1^* \geq \tilde{S}_2^*$ et par conséquent $S_1^* \geq S_2^*$

Le lemme suivant est tiré de Wolff [105] ◆

Lemme 4.3:

Considérons deux files *GI/M/1* avec des taux de service identiques et des temps d'inter arrivées stochastiques A_1 et A_2 tels que $E[A_1] = E[A_2]$ et $A_1 \leq_c A_2$. Alors $A_1 \geq_L A_2$ et par conséquent $r_1 \leq r_2$.

En combinant les trois lemmes précédents, nous établissons la propriété suivante pour deux files d'attente *GI/M/1* avec les temps d'inter-arrivées respectifs A_1 et A_2 tels que $E[A_1] = E[A_2]$.

Proposition 4.1:

Considérons deux systèmes de production par anticipation modélisés par des files d'attente *GI/M/1* avec des paramètres de coûts ainsi que des temps de service identiques. Les temps d'inter-arrivées sont respectivement A_1 et A_2 tels que $E[A_1] = E[A_2]$ et $A_1 \leq_c A_2$. Alors $S_1^* \leq S_2^*$ avec S_1^* (respectivement S_2^*) le niveau optimal du stock nominal du système 1 (respectivement système 2).

Démonstration:

Soient r_1 et r_2 les paramètres respectifs des systèmes 1 et 2. A partir du lemme 4.3, nous avons :

$$A_1 \leq_{ic} A_2 \Rightarrow r_1 \leq r_2 .$$

Le lemme 4.1 montre que :

$$r_1 \leq r_2 \Rightarrow N_1 \leq_{st} N_2 ,$$

et l'utilisation du lemme 4.2 nous fournit le résultat souhaité ◆

Ce résultat précise l'effet de la distribution de la demande sur le niveau de stock nominal S^* à partir du paramètre *r*. Le niveau optimal du stock nominal augmente en relation avec l'ordre convexe de la distribution des temps d'inter-arrivées quand tous les autres paramètres sont maintenus constants.

Remarque : Notons que, la détermination directe du niveau de stock nominal est possible à partir des équations (4.3) et (4.4) :

$$S^* = \left\lfloor \frac{\log\left[\frac{r}{\rho}\frac{h}{h+b}\right]}{\log r} \right\rfloor \qquad (4.5)$$

4.2 Le coût optimal

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes intéressés à la relation entre le stock nominal et la variabilité de la demande. Dans ce qui suit, nous nous intéressons à l'influence de cette variabilité sur le coût optimal. Nous commençons par rappeler l'expression du coût et des résultats obtenus auparavant.

Notons que, dans les systèmes sans contraintes de capacité, plusieurs résultats de comparaison ont été exprimés en fonction de la distribution de la demande (pour des modèles mono-période) et en fonction de la distribution des délais de la demande (pour

des modèles à horizon infini). Song [94] montre que, pour un modèle sans contraintes de capacité à suivi continu et sur un horizon infini, la comparaison des délais de la demande permet la comparaison des coûts correspondants :

$$D_1 \geq_{ic} D_2 \Rightarrow C_1(S_1^*) \geq C_2(S_2^*).$$

Ridder et al. [86] utilisent une condition moins forte désignée par *"2_variabilité"* (voir [86]), et montrent, que dans un modèle mono-période :

$$D_1 \geq_2 D_2 \Rightarrow C_1(S_1^*) \leq C_2(S_2^*) \text{ (avec } D \text{ la variable aléatoire de la demande).}$$

Comme dans le modèle correspondant sans contraintes de capacité (Song [94]), la comparaison de la fonction du coût optimal est plus difficile que la comparaison des niveaux de stock nominal. En particulier, notre résultat principal nécessite la relaxation continue du niveau de stock nominal. Cette hypothèse est fréquemment utilisé dans la littérature (voir Song [94], [95]). Rappelons à partir du paragraphe 2.1, que la fonction du coût optimal est donnée par l'équation (4.2) alors que le niveau de stock nominal est donné par l'équation (4.3). Nous nous intéressons pour l'instant à la variable $\tilde{S}^*$. A partir de la proposition 1, nous obtenons le lemme ci-dessous :

Lemme 4.4:
Soit $\tilde{S}^*$ l'approximation continue du niveau du stock nominal (voir la remarque qui suit l'équation (4.3)), alors le coût optimal correspondant (défini à partir de l'équation (4.2)) est :

$$C(\tilde{S}^*) = h\left(\tilde{S}^* - \left((\rho - r)/(1-r)\right)\right).$$

Démonstration:
En utilisant la forme explicite de la distribution de la loi stationnaire de la longueur de la file d'attente, nous pouvons exprimer le coût correspondant en fonction du niveau de stock nominal :

$$C(S) = h\left(S - \rho - \rho \quad r \quad \frac{1-r^{S-2}}{1-r} - \rho \quad r^{S-1}\right) + b\left(\rho \quad \frac{r^S}{1-r}\right) \qquad (4.6)$$

La démonstration est effectuée en remplaçant $\tilde{S}^*$ par sa valeur dans la fonction de coût ci-dessus ◆

A partir de la proposition 4.1 et du lemme 4.4 , nous aboutissons au résultat suivant : pour les systèmes de production par anticipation modélisés par des files d'attente de type *GI/M/1*, le paramètre *r* permet la comparaison des coûts optimaux.

Proposition 4.2:

Considérons deux systèmes de production par anticipation modélisés par des files *GI/M/1* avec des taux de service et des paramètres de coût identiques. Soient A_1 et A_2 les temps d'inter-arrivées tels que :

$$\mathrm{E}[A_1]=\mathrm{E}[A_2] \text{ et } A_1 \leq_c A_2 .$$

Alors

$$C_1(\tilde{S}_1^*) \leq C_2(\tilde{S}_2^*) ,$$

avec $C_1(\tilde{S}_1^*)$ (respectivement $C_2(\tilde{S}_2^*)$) le coût optimal du système 1 (respectivement système 2) sous une politique de stock nominal.

Démonstration:

A partir des lemmes 4.3, 4.2 et 4.1, nous obtenons:

$$A_1 \leq_c A_2 \Rightarrow r_1 \leq r_2 \text{ (lemme 4.3),}$$

ainsi :

$$r_1 \leq r_2 \Rightarrow N_1 \leq_{st} N_2 \text{ (lemme 4.1)}$$

et par conséquent,

$$N_1 \leq_{st} N_2 \Rightarrow \tilde{S}^*{}_1 \leq \tilde{S}^*{}_2 \text{ (lemme 4.2).}$$

Finalement, à partir du lemme 4.4,

$$\tilde{S}_1^* \leq \tilde{S}_2^* \Rightarrow C_1(\tilde{S}_1^*) \leq C_2(\tilde{S}_2^*) \ \blacklozenge$$

4.3 Comparaisons des processus d'arrivées usuels

Dans ce qui suit, nous présentons quelques lois de probabilité utilisées fréquemment dans la modélisation des processus de files d'attente. Pour certaines de ces lois, une comparaison selon l'ordre stochastique convexe est possible. Dans ce cas, la comparaison du niveau de stock nominal ainsi que le coût optimal associé se fait directement à partir des propositions 4.1 et 4.2. Des définitions détaillées des

distributions utilisées et de leurs paramètres sont présentées à la fin du chapitre (*Annexes B*).

4.3.1 Les distributions Gamma/Weibull

Pour certaines distributions de probabilité, l'ordre stochastique convexe est établi à partir des paramètres de la distribution. La loi Gamma très utilisée dans les applications de la théorie des files d'attente fait partie de cette catégorie. Les résultats suivants sont pris de Stoyan [96].

Considérons deux distributions gamma $G_1(\lambda,\alpha,x)$ et $G_2(\mu,\beta,x)$ avec des densités respectives $g_1(x)$ et $g_2(x)$ (voir Annexes B).

Si $\alpha > \beta$ et $\alpha / \lambda \leq \beta / \mu$, alors $G_1 \leq_{ic} G_2$.

Les propositions 4.1 et 4.2 impliquent ce qui suit :

Soient deux systèmes de production par anticipation modélisés par des files *GI/M/1* avec des taux de service et des paramètres de coûts identiques. Soit les temps d'inter-arrivées A_1 (de distribution $G_1(\lambda,\alpha,x)$) et A_2 (de distribution $G_2(\mu,\beta,x)$) tels que :

$$E[A_1]=E[A_2].$$

Si $\alpha > \beta$ et $\alpha / \lambda \leq \beta / \mu$, nous obtenons l'ordre suivant du niveau de stock nominal et du coût optimal associé :

$$S_1^* \leq S_2^* \text{ et } C_1(\tilde{S}_1^*) \leq C_2(\tilde{S}_2^*).$$

A partir des résultats obtenus ci-dessus, un cas particulier important peut être traité : si nous considérons deux variables aléatoires suivant des lois d'Erlang, A_1 et A_2 de moyennes identiques et respectivement avec k_1 (k_2) étages tels que $k_1 > k_2$, alors $A_1 \leq_c A_2$.

A partir des propositions 4.1 et 4.2, nous obtenons le résultat suivant :

Soient deux systèmes de production par anticipation modélisés par des files *GI/M/1* avec des moyennes et des paramètres de coût identiques. Soient les temps d'inter-arrivées A_1 (une distribution d'Erlang à k_1 étages) et A_2 (une distribution d'Erlang à k_2 étages) tels que :

$$E[A_1]=E[A_2].$$

Si $k_1 > k_2$ alors la comparaison des niveaux de stock nominal et des coûts associés est possible et nous obtenons le résultat suivant :

$$S_1^* \leq S_2^* \text{ et } C_1(\tilde{S}_1^*) \leq C_2(\tilde{S}_2^*).$$

Les distributions de Weibul sont fréquemment utilisées dans les applications de sûreté de fonctionnement et de maintenance et sont pertinentes dans la gestion de stock des pièces de rechange.

La comparaison des lois de Weibul est possible (Stoyan [96]). En effet, pour deux distributions de Weibul $W_1(\lambda,\alpha,x)$ et $W_2(\mu,\beta,x)$ avec les fonctions de densité de probabilité respectives $f_1(x)$ et $f_2(x)$ (voir annexes B) et les moyennes respectives m_{f1} et m_{f2} :

$$\text{Si } \alpha > \beta \text{ et } m_{f_1} \leq m_{f_2} \text{ , alors } W_1 \leq_{ic} W_2 .$$

En utilisant les propositions 4.1 et 4.2, nous obtenons le résultat suivant :

Soient deux systèmes de production par anticipation modélisés par des files *GI/M/1* avec des taux de service et des paramètres de coût identiques. Leurs temps respectifs d'inter-arrivées A_1 (de distribution $W_1(\lambda,\alpha,x)$) et A_2 (de distribution $W_2(\mu,\beta,x)$) sont tels que $E[A_1]=E[A_2]$.

$$\text{Si } \alpha > \beta \text{, alors } S_1^* \leq S_2^* \text{ et } C_1(\tilde{S}_1^*) \leq C_2(\tilde{S}_2^*).$$

4.3.2 Distributions d'Erlang avec nombre d'étages identiques

Dans cette section, nous considérons des distributions d'Erlang avec k étages de moyennes différentes. Cette classe de distributions peut couvrir des coefficients de variation allant de $1/\sqrt{k}$ à 1.

Du fait de la forme rationnelle de la transformée de Laplace :

$$L_A(S) = \prod_{i=1}^{k} \left(\lambda_i / (\lambda_i + S)\right) \text{ (λ_i le taux de l'étage i),}$$

le calcul de r pour les distributions d'Erlang avec k étages revient à la résolution d'une équation de $(k+1)$ degrés.

Même si l'analyse numérique est relativement simple, il ne semble pas exister de résultats explicites de comparaisons stochastiques pour cette classe de distributions. Ainsi, nous nous intéressons aux distributions d'Erlang généralisées à deux étages qui nous permettent de couvrir un domaine de coefficient de variation s'étendant entre $1/\sqrt{2}$ et 1. Dans ce cas, le calcul de r nécessite la résolution d'une équation de troisième degré (voir *annexes B*).

Nous pouvons vérifier que pour deux distributions d'Erlang de moyenne identique et avec des coefficients de variation différents tels que $CV_1 \geq CV_2$, nous avons $r_1 \geq r_2$.

En utilisant les propositions 4.1 et 4.2 combinées aux lemmes 4.1 et 4.2, nous pouvons comparer les niveaux de stock nominal et le coût optimal associé des files d'attente *GI/M/1* correspondantes. En plus, dans le cas où nous comparons une variable aléatoire d'Erlang A_1 à une variable exponentielle A_2 de moyenne identique, nous obtenons :

$r_1 \leq r_2$ (du fait que $r_2 = \rho$, voir Wolff [105]).

A partir des propositions 4.1 et 4.2, on voit immédiatement qu'un temps d'inter-arrivées distribué selon une loi d'Erlang induit un niveau de stock nominal et un coût optimal plus bas que ceux d'un temps d'inter-arrivées distribué suivant une loi exponentielle de même moyenne (dans un contexte de systèmes de production par anticipation modélisés par des files d'attentes de type *GI/M/1*).

4.3.3 Distribution Hyper-Exponentielle à deux étages

Les lois hyper-exponentielles couvrent le domaine $CV \geq 1$ et sont fréquemment utilisées afin de modéliser des processus d'arrivées de variabilité élevée. Pour cette classe de distributions, le paramètre r peut être calculé explicitement.

La transformée de Laplace d'une variable aléatoire suivant une distribution H_2 de paramètre q et de taux λ_1 et λ_2 (voir *annexes B*) est :

$$L_A(s) = \frac{q\lambda_1}{\lambda_1 + s} + \frac{(1-q)\lambda_2}{\lambda_2 + s}$$

Donc :

$$r = \frac{q\lambda_1}{\lambda_1 + \mu(1-r)} + \frac{(1-q)\lambda_2}{\lambda_2 + \mu(1-r)}$$

ce qui nous donne :

$$r = 0.5 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\mu} - \sqrt{0.25 + \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\mu}\right)^2 + (q - 0.5)\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\mu}\right)}$$

avec $q/\rho_1 + (1-q)/\rho_2 > 1$ comme condition de stabilité.

Nous vérifions facilement que le coefficient r_1 d'une file d'attente *H_2/M/1* est toujours supérieur à r_2 (=ρ) d'une file *M/M/1*. En utilisant les propositions 4.1 et 4.2, nous pouvons établir que le niveau de stock nominal et le coût optimal associé sont plus importants dans un système de production par anticipation modélisé par une file d'attente de type *H_2/M/1* que celui modélisé par une file *M/M/1* de temps d'inter-arrivées de moyenne identique.

4.3.4 Modélisation des arrivées groupées : la distribution Générale-Exponentielle

Pour des processus d'arrivées de variabilité élevée ($CV \geq 1$), la loi Générale-Exponentielle (voir *Annexes B* pour une définition précise) constitue un bon outil de modélisation. Une caractéristique très utile de cette distribution est qu'elle est équivalente à un processus d'arrivées groupées suivant une distribution de Poisson de taux λ où la taille des lots est une variable aléatoire géométrique X de paramètre q.

La transformée de Laplace d'une distribution *GE* de paramètre q et de taux λ est :

$$L_A(s) = 1 - q + q\lambda/(\lambda + s),$$

donc :

$$r = 1 - q + \frac{q\lambda}{\lambda + \mu(1-r)}$$

ou encore :

$$r = \frac{\lambda}{\mu} + 1 - q$$

avec la condition de stabilité $q > \lambda/\mu$.

La comparaison des files d'attente *M/M/1* et *GE/M/1* de même moyenne montre que r_1 (de la file *GE/M/1*) est toujours supérieur à r_2 (=ρ) de la file d'attente *M/M/1*. Ainsi, à partir des propositions 4.1 et 4.2, un processus de demande avec des arrivées groupées nécessite un niveau de stock nominal et un coût optimal plus important qu'un processus de demande avec des arrivées unitaires de taux d'arrivée identique.

De la même façon, la comparaison de deux files d'attente *GE/M/1* de moyennes identiques $q_1 / \lambda_1 = q_2 / \lambda_2$ et de coefficients de variation différents ($CV_1 \geq CV_2$) implique que $r_1 \geq r_2$, ce qui nous permet d'ordonner les niveaux de stock nominal et les coûts optimaux associés.

5 Exemples numériques

Dans cette section, nous illustrons les effets de la variabilité à partir de quelques exemples numériques. Les résultats théoriques obtenus dans la section précédente sont basés sur une définition précise de la variabilité qui est l'ordre stochastique convexe. Vu la difficulté de quantifier un tel ordre, les résultats numériques que nous présentons seront basés sur une mesure simple de la variabilité : le coefficient de variation (*CV*). Il est important de noter que l'ordre basé sur le coefficient de variation est moins fort que l'ordre convexe (de ce fait, il est impliqué par l'ordre convexe pour des moyennes identiques). Ceci nous permettra de vérifier numériquement quand la condition de l'ordre convexe peut être relaxée.

Ainsi, notre investigation consiste à étudier S^* et $C(S^*)$ en fonction du coefficient de variation pour des distributions données. Pour ceci, pour une valeur fixe de ρ, nous calculons les paramètres des différentes distributions des temps d'inter-arrivées afin d'avoir la même moyenne d'arrivées. Nous calculons ensuite le paramètre *r*, le niveau de stock nominal S^* et le coût optimal associé $C(S^*)$ à partir des formules (4.5) et (4.6). Nous traçons enfin ces valeurs en fonction du coefficient de variation de la distribution des temps d'inter-arrivées. Dans les annexes B, nous avons détaillé la procédure utilisée pour modifier le coefficient de variation des différentes distributions des temps d'inter-arrivées.

La première série de résultats est basée sur des distributions d'Erlang généralisée à deux étages. La figure 4.1 trace la variation du niveau de stock nominal et du coût optimal associé en fonction du coefficient de variation dans un système de production par anticipation de type $Er(\lambda_1,\lambda_2)/M/1$ avec $\rho=0.9$, $b=10$.

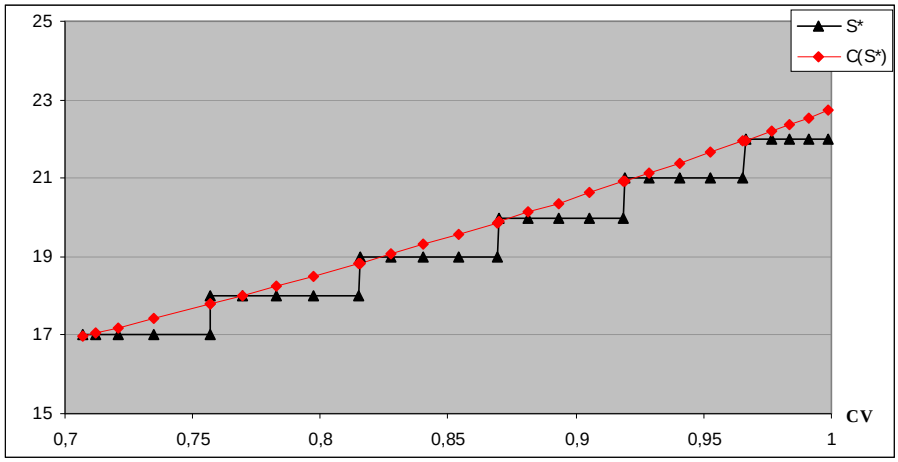


Fig. 4.1 : *S* et C(S*) en fonction de CV pour ρ=0.9, b=10*

À partir de la figure 1, nous constatons que le niveau de stock optimal et le coût optimal associé augmentent en fonction du coefficient de variation *CV* de la distribution de la demande malgré les discontinuités introduites par la nature discrète de *S**. Cette discontinuité est plus importante quand *b* augmente. D'un autre côté, les résultats analytiques obtenus dans la section précédente nécessitent un ordre stochastique convexe qui est plus contraignant que l'ordre du coefficient de variation. La question qui se pose est : est-ce qu'il y a des situations où l'ordre en *CV* peut être mis à défaut ? Cette question va être développée dans la partie suivante.

Pour notre deuxième exemple, nous nous intéressons à des files d'attente de type *GE/M/1* et $H_2/M/1$ (les deux distributions des temps d'inter-arrivées ont des *CV* supérieurs à 1). Il est évident que le niveau de stock optimal et le coût associé augmentent en fonction du coefficient de variation comme le montre la figure 4.2 pour ρ=0.9, *h=1* et *b=10.*

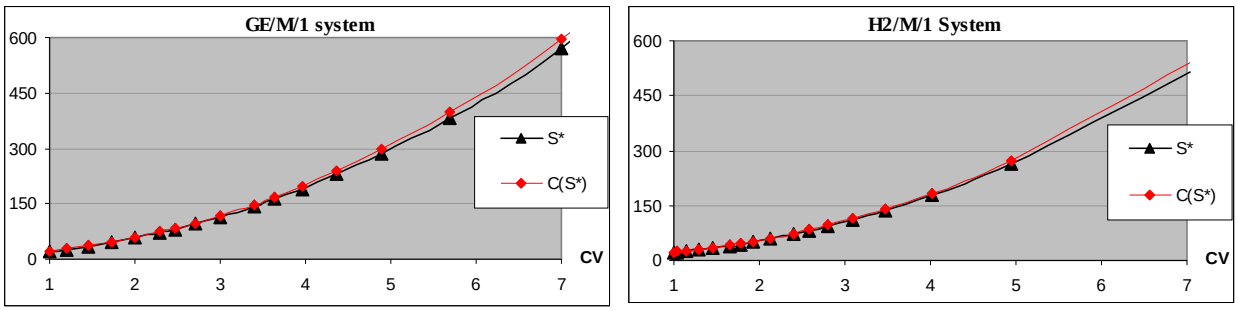


Fig. 4.2 : *S* et C(S*) en fonction de CV pour ρ=0.9, h=1, b=10*

Si on compare attentivement les deux systèmes étudiés, on se rend compte que le niveau de stock optimal ainsi que le coût optimal qui lui est associé augmentent plus rapidement dans les systèmes de production par anticipation de type *GE/M/1* que dans ceux du type $H_2/M/1$ comme le montre la figure 4.3.

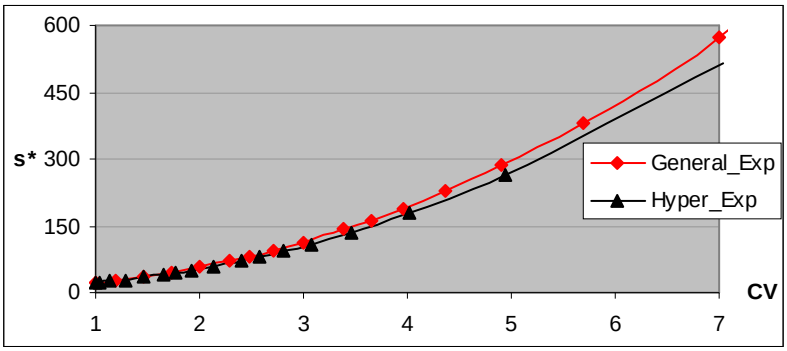


Fig. 4.3 : *Comparaison des niveaux de stock optimaux dans des systèmes de production par anticipation de type GE/M/1 et $H_2/M/1$ (ρ=0.9, h=1, b=10)*

La figure 4.3 souligne les limitations d'une comparaison qui se base sur le coefficient de variation. Pour des valeurs identiques de *CV*, un niveau de stock optimal plus important est nécessaire pour les systèmes *GE/M/1*. Cette différence devient plus importante quand le coefficient de variation augmente. En particulier, un système $H_2/M/1$ de *CV* égal à 4 a un niveau de stock optimal moins important qu'un système *GE/M/1* avec un *CV* de 3.9. Manifestement, l'augmentation du seul paramètre *CV* ne garantit pas l'augmentation du niveau de stock nominal. De plus, les mêmes arguments sont applicables au coût optimal: un système $H_2/M/1$ avec un plus grand coefficient de variation peut avoir des coûts optimaux moins importants qu'un système *GE/M/1* de coefficient de variation moindre (en terme de *CV*). En d'autres termes, comme Ridder et al. [86], l'augmentation de la variabilité de la demande (en terme de coefficient de variation) peut réduire les niveaux de stock et les coûts optimaux associés.

Ces résultats proviennent du fait que le paramètre r_0 ne varie pas de la même manière dans les deux systèmes $H_2/M/1$ et *GE/M/1*, même si l'augmentation du coefficient de variation induit l'augmentation de r_0 dans les deux cas. Comme le montre la figure 4.4, il est tout à fait possible, en changeant de modèle, de diminuer le paramètre r_0 tout en augmentant le coefficient de variation *CV*.

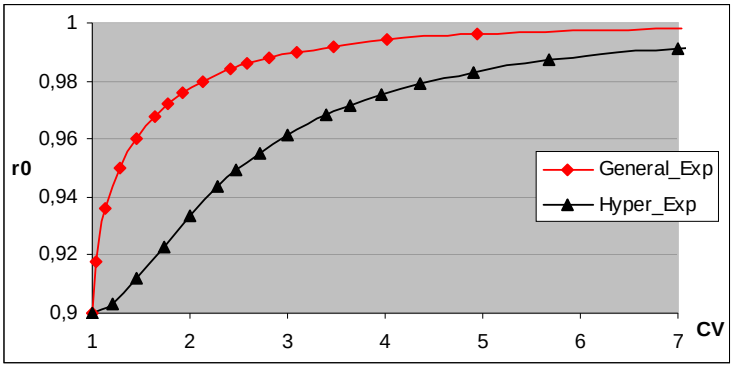


Fig. 4.4 : *Comparaison du paramètre r_0 de deux files d'attente de type GE/M/1 et H_2/M/1 (ρ=0.9, h=1, b=10)*

6 Extensions à d'autres types de variabilité

6.1 La variabilité du temps de service: une extension aux files *M/G/1*

Dans cette section, nous mentionnons quelques résultats similaires pour un système de production par anticipation de type *M/G/1* où les demandes arrivent suivant un processus de Poisson et les temps de service sont indépendants et identiquement distribués suivant une loi générale de taux μ. L'influence de la variabilité est étudiée au niveau du temps de service. Inopportunément, dans ce cas, la loi stationnaire de la longueur de la file d'attente ne peut pas être exprimée en fonction d'un seul paramètre comme dans le cas des files *GI/M/1*, et par conséquent, peu de comparaisons stochastiques existent pour le processus du nombre *N* dans la file. D'autre part, si nous nous intéressons à un régime particulier dans lequel *b/h* est grand, nous pouvons utiliser une approximation asymptotique afin d'obtenir des résultats analytiques approchés.

En particulier, Tijms [97] propose l'approximation suivante qui est empiriquement très adéquate. Soient *f(x)* la densité de probabilité du temps de service, *F(x)* la distribution de probabilité et *L(s)* la transformée de Laplace. Sous l'hypothèse :

$$\int_0^\infty e^{sx}\left(1-F(x)\right)dx < \infty \quad \text{pour tout } s>0,$$

l'approximation asymptotique nous conduit à la forme suivante de la loi stationnaire du nombre dans la file *M/G/1*:

$$p_j \approx \sigma \times \tau^{-j} \qquad \text{pour } j \text{ grand}$$

avec τ l'unique solution dans l'intervalle *[1,1+B/λ]* de l'équation :

$$\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda(1-\tau)x}\left(1-F(x)\right)dx = 1;$$

avec

$$B = \sup\left[s \left| \int_0^\infty e^{sx}\left(1-F(x)\right)dx < \infty \right.\right].$$

En outre, σ peut être approximée par: $\rho\times(1-\eta)/\eta$ avec $\eta=1/\tau$.

En utilisant le fait que $F(\infty)=1$, la distribution stationnaire de la file *M/G/1* est approximée par :

$$p_0 = 1-\rho; \quad p_j = \rho(1-\eta)\eta^{j-1}.$$

Notons que sous cette approximation, l'état stationnaire de la file *M/G/1* paramétrée par η est similaire à la file *G/M/1* paramétrée par r_0 pour des taux d'utilisation identiques. En plus, τ est obtenu avec un calcul similaire à celui de r_0, c'est-à-dire, τ est l'unique solution dans l'intervalle *[1, 1+B/λ]* de l'équation :

$$L\left(\lambda(1-\tau)\right) = \tau .$$

Le niveau optimal du stock nominal S^* et le coût associé $C(S^*)$ peuvent être exprimés en fonction de η. Rappelons que :

$$F_N(\tilde{S}^* - 1) = b/(h+b) \text{ et } S^* = \left\lfloor \tilde{S}^* \right\rfloor,$$

alors pour un niveau S du stock nominal:

$$S^* = \left\lfloor \frac{\log\left[\frac{\eta}{\rho}\frac{h}{h+b}\right]}{\log\eta} \right\rfloor$$

$$\text{et } C(S) = h\left[S - \rho - \rho.\eta\frac{1-\eta^{S-2}}{1-\eta} - \rho.\eta^{S-1}\right] + b\left[\rho\frac{\eta^S}{1-\eta}\right].$$

Afin de justifier l'utilisation d'une telle approximation, notons que pour $b>>h$, S^* est grand. Ceci implique que la détermination du niveau de stock optimal se fait à partir d'un calcul dans un régime où l'approximation asymptotique est adéquate. D'autre part, cette approximation donne des résultats satisfaisants à partir d'un nombre dans la file assez petit (Buzacott et al. [15]), propriété assez convenable pour les systèmes de

production que nous étudions puisque dans la pratique les longueurs des files d'attente de tels systèmes restent assez restreintes. Les lemmes 4.1, 4.2 et 4.3 et les propositions 4.1 et 4.2 sont alors applicables pour des systèmes de production par anticipation modélisés par une file d'attente de type *M/G/1*. L'augmentation de la variabilité du temps de service dégrade les performances du système de production/stockage de la même manière que l'augmentation de la variabilité des temps d'inter-arrivées.

6.2 Systèmes de production par anticipation de type *G/G/1*

Dans ce qui suit, nous essayons de généraliser les résultats obtenus dans les paragraphes précédents en traitant le cas d'une variabilité simultanée pour le temps d'inter-arrivées et le temps de service. Pour cela, nous considérons un système de production par anticipation modélisé par une file d'attente de type *G/G/1* où les temps le temps d'inter-arrivées de la demande et les temps de service sont distribués suivant un processus général.

Les résultats obtenus pour ce type de file ne donnent pas d'une façon explicite, la distribution de la loi stationnaire du nombre dans la file, et par la suite du niveau de stock nominal du système de production sous-jacent. D'autre part, il n'y a pas de résultats généraux de comparaisons stochastiques traitant des paramètres en relation avec le moment d'ordre 2 des variables aléatoires sous-jacentes. Cependant, à partir de l'approximation du Trafic Intense « *Heavy Traffic* » qui s'intéresse à la modélisation à partir de files d'attentes similaires, et pour des régimes étroits (ρ proche de 1), Wein [104] exprime explicitement les paramètres du nombre dans la file à partir des coefficients de variation des temps d'inter-arrivées et des temps de service. Notons par cv_a et cv_s les coefficients de variation des distributions du temps d'arrivées et du temps de service. Pour un taux d'utilisation « *traffic load* », ρ, proche de 1, la distribution de la longueur de la file d'attente de type *G/G/1* converge rapidement vers un mouvement brownien « *Reflected Brownian Motion* » de moyenne $\alpha=(\lambda-\mu)$ et de variance $\sigma=\lambda cv_a^2+\mu cv_s^2$. La distribution stationnaire de ce processus est exponentielle avec un paramètre $2\alpha/\sigma^2$. En appliquant ces résultats à notre système de production par anticipation, nous pouvons exprimer le niveau de stock optimal et le coût associé en fonction des paramètres α et σ de la manière suivante (voir Wein [104] pour une description plus détaillée):

$$S^* = \frac{\log\left(\frac{h}{h+b}\right)}{2\alpha/\sigma^2} \text{ et } C(S^*) = h\frac{\log\left(\frac{h}{h+b}\right)}{2\alpha/\sigma^2}$$

Les effets de la variabilité sont immédiatement visibles à partir des formules ci-dessus. S^* et $C(S^*)$ sont croissantes linéairement en fonction de la variance de la demande et de la variance du temps de service pour des valeurs fixes de λ et de μ ce qui rejoint les résultats obtenus auparavant pour les systèmes de production par anticipation de type *GI/M/1* et *M/G/1*.

7 Conclusion

On connaît l'effet de la variabilité sur la dégradation des performances des systèmes de production. Nous avons essayé de fournir une description générale et précise de ce constat sur les systèmes de production par anticipation. Notre investigation était limitée en premier temps aux systèmes de type *GI/M/1*. Nous avons, par la suite, étendu nos résultats à des systèmes de type *M/G/1* et *G/G/1*. Cependant, l'analyse de ces cas particuliers montre la difficulté d'obtenir des conditions générales pour des systèmes plus complexes.

Afin de pouvoir comparer les niveaux de stock nominal et les coûts associés, nous avons eu recours à un ordre stochastique pour ordonner les distributions des temps d'inter arrivées, un ordre fort pas toujours valide dans des conditions générales.

A partir de cette étude, nous tirons deux conclusions : d'une part, le recours au seul coefficient de variation ne constitue pas en général une mesure de la variabilité qui permet d'ordonner les niveaux de stock nominal et les coûts optimaux qui lui sont associés. Dans certains cas, augmenter le coefficient de variation peut aboutir à la diminution du niveau de stock et des coûts correspondants. D'autre part, l'ordre convexe est une condition valable qui garantit l'ordre des niveaux de stock nominal et des coûts associés.

Les résultats analytiques et numériques obtenus indiquent que les systèmes de production/ stockage avec un même taux de charge peuvent se comporter différemment en fonction des caractéristiques de second ordre du processus sous-jacent. Ceci implique qu'une modélisation prudente de la demande et du processus de production est critique afin de capturer les propriétés fines de tels systèmes.

Ce chapitre est limité à l'analyse d'une file de production par anticipation mono classe. L'analyse de systèmes multi-classes pose des difficultés additionnelles telles que l'ordonnancement de la production et l'allocation du stock (voir de Véricourt et al.

[35],[36]) et sort du cadre de cette thèse. Un papier récent de Benjaafar et Kim [8] généralise quelques résultats existant dans ce chapitre pour des systèmes de production par anticipation de type *GI/M/1* dans le cas multi-classes (sous un ordonnancement de type FIFO). Il est intéressant d'étendre une telle étude à des problèmes multi-classes avec des cas plus complexes de politiques d'ordonnancement/allocation comme dans de Véricourt et al. [35] ou [36].

Chapitre 5

L'influence de la décentralisation sur les performances d'une chaîne logistique à deux étages

1 Introduction

Les chaînes logistiques sont souvent composées de plusieurs acteurs qui ne font pas partie de la même entreprise. Les décisions opérationnelles sont prises au niveau individuel par rapport aux critères locaux. En ce qui concerne l'optimisation de la chaîne, elle implique l'optimisation individuelle souvent d'une façon concurrentielle. Naturellement la décentralisation des décisions conduit à une perte d'efficacité pour l'ensemble de la chaîne.

Notre but dans ce chapitre est d'étudier d'une façon analytique le fonctionnement décentralisé d'un modèle simplifié d'une chaîne logistique afin de mieux comprendre les effets de la décentralisation et son impact sur les performances de la chaîne logistique.

Nous modélisons un système mono produit de production/stockage à deux étages gérés par deux agents différents : un fournisseur et un détaillant. Une particularité de notre approche est la modélisation explicite de la capacité de fabrication par une file d'attente dont le serveur représente la ressource de fabrication (Buzacott et Shanthikumar [16]). Le premier étage de production /stockage est géré par le fournisseur et modélisé par un serveur avec un temps de fabrication exponentiel. Le deuxième étage est un étage de stockage géré par le détaillant et modélisé par un stock afin de répondre à une demande

aléatoire unitaire. Les temps d'inter-arrivées suivent dans un premier temps une loi exponentielle et seront généralisés par la suite. Les deux systèmes sont contrôlés par une politique de stock nominal. Les ventes non satisfaites seront mises en attente.

Afin d'aboutir à des résultats analytiques, nous supposons que le temps de transport entre les deux étages est nul. Cette hypothèse nécessaire à la résolution analytique de notre problématique n'est pas limitative puisqu'elle donne des résultats pertinents pour des systèmes ou le temps de fabrication est beaucoup plus important que le temps de transport. Cachon [21] a eu recours à la même supposition pour résoudre un problème similaire au notre avec des ventes perdues.

Dans la version centralisée de notre problématique, le système est géré par un seul agent qui optimisera globalement la chaîne logistique. Dans le cas d'une demande qui suit un processus de Poisson, la politique de stock nominal est optimale pour le système centralisé.

Dans le système décentralisé, chaque agent essayera d'optimiser sa fonction objectif en fonction des paramètres de son étage tout en sachant que l'autre agent a le même objectif. Nous supposons que tous les paramètres sont connus par les deux agents.

Nous étudions ce modèle en se basant sur la théorie des jeux, nous traitons en particulier l'équilibre de Nash et l'équilibre de Stackelberg avec ses deux variantes : le fournisseur est le meneur Stackelberg ou le détaillant est le meneur Stackelberg.

Par la suite, nous étendons cette étude sur des lois d'arrivées générales. Les résultats obtenus dans le chapitre précédent nous permettent de considérer la politique du stock nominal comme étant une bonne solution du système centralisé et qui peut être considérée comme un point de référence pour la solution décentralisée. Cette étude nous permettra de montrer l'influence de la variabilité de la demande sur la dégradation des performances de la chaîne logistique.

Afin d'améliorer les performances de la chaîne logistique, nous aurons recours à la coordination qui consiste à élaborer des contrats entre le fournisseur et le détaillant afin de ramener la solution décentralisée à la solution centralisée. Nous discutons aussi de la flexibilité des contrats sous forme de contraintes de participation qui garantissent aux différents agents un gain apporté par la coordination par rapport à l'équilibre choisi sans coordination. L'étude de la coordination pour des lois d'arrivées générales va nous permettre d'estimer l'influence de la variabilité sur les différents contrats étudiés.

Ce travail est organisé comme suit. Dans le second paragraphe, nous passons en revue les différents travaux de recherche qui se sont intéressés à des modèles similaires au notre et nous discutons l'apport de notre étude par rapport à ces travaux. Nous décrivons ensuite le modèle étudié ainsi que les différentes notations employées. Au cours de la quatrième partie, nous présentons la solution centralisée de notre problématique. Nous nous intéressons ensuite à notre contribution dans la détermination des différents équilibres sélectionnés pour la solution décentralisée. Nous comparons ensuite les deux solutions obtenues, et nous étudions différents contrats qui nous permettront de ramener la solution décentralisée à la solution centralisée et nous discutons les limites de ces contrats pour la coordination. Lors de la dernière partie, nous reprenons les points précédents pour des lois d'arrivées générales et nous discutons l'influence de la variabilité sur les différentes grandeurs mesurées.

2 Etat de l'art

Il est connu que le système décentralisé est moins performant que le système centralisé. En particulier, pour un modèle similaire au notre avec des ventes perdues, Cachon [21] montre qu'un équilibre de Nash existe et peut être multiple et qu'il est moins efficace que la solution centralisée. Celikbas et al. [26] présentent des résultats similaires pour un système décentralisé (marketing et production) mono-période et étudient les possibilités de coordination. Caldentey et Wein [25] aboutissent à des résultats similaires pour un système à deux agents où le fournisseur contrôle le taux de production et le détaillant le niveau de stock.

Contrairement à Cachon [21], nous développons dans ce travail des résultats analytiques et nous étendons notre étude à d'autres équilibres que celui de Nash. Le recours à un modèle avec coût de rupture nous permettra d'autre part de vérifier le comportement asymptotique des performances de notre système pour des taux d'utilisation élevés, ce que le modèle avec des ventes perdues ne le permet pas. Cachon et Zipkin [20] se sont intéressé à un système à deux étages géré par une politique de stock nominal avec coût de rupture, mais ils n'ont pas traité le problème de capacité de production dont nous avons prouvé l'influence non négligeable sur les performances du système.

Afin d'améliorer les performances de la chaîne logistique, nous aurons recours à la coordination. L'apport de la coordination sur les performances de la chaîne logistique a été bien démontré dans la littérature. Plusieurs contrats ont été étudiés, généralement avec l'attention de réduire les coûts et de coordonner le système. Parmi les auteurs qui se sont intéressé à la coordination, nous citons Corbett et DeCroix [30], Cachon [21] et

Caldentey et Wein [25]. Leurs travaux ainsi que d'autres seront commentés par la suite dans la section traitant la coordination.

3 Modèle et notations

On considère un système de production composé d'une seule ressource (par exemple machine ou cellule) modélisée par une file d'attente à un seul serveur et de deux stocks de produits finis. Les temps d'inter-arrivées sont indépendants et identiquement distribués et le temps de service (fabrication) est exponentiel. Soit T_n le temps entre les arrivées n et $n+1$, $\lambda=1/E[T_n]$ le taux d'arrivée, μ le taux de service et $\rho=\lambda/\mu$ le taux d'utilisation. Les deux stocks sont gérés par une politique de stock nominal (voir Buzacott et Shanthikumar [16]). On part d'un état initial comportant Ss^* pièces dans le stock $Xs(t)$ et Sr^* pièces dans le stock $Xr(t)$. En arrivant dans le système, le client génère simultanément un ordre de fabrication dans la file d'attente du serveur $Y_0(t)$ et une entité dans la file $Ys(t)$ et $Yr(t)$. Cette dernière ne quittera le système que si le stock $Xr(t)$ est non vide et engendre la diminution d'une entité du stock qui sera instantanément remplacée par une unité de stock de Xs si ce dernier est non vide. Chaque entité de Xs (respectivement Xr) génère un coût de stockage h_s (respectivement h_r) par unité de temps alors que le client engendre un coût de rupture b par unité de temps passé dans la file Y. (fig. 5.1)

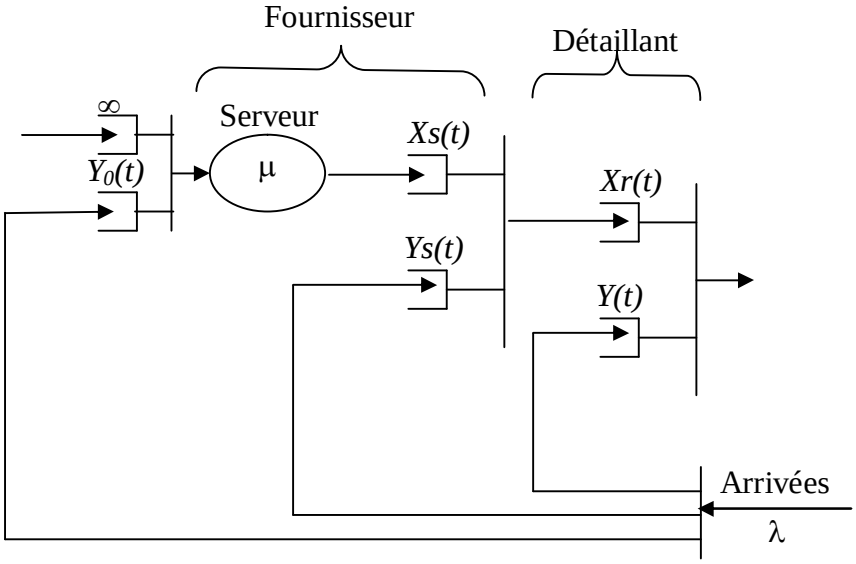


Fig. 5.1 : *Modélisation d'un problème de production par anticipation à deux agents avec une stratégie de stock nominal*

4 Résultats obtenus

4.1 La solution centralisée :

Afin d'évaluer les performances du modèle étudié, nous avons besoin d'un point de référence auquel nous comparons la solution trouvée. Dans la version centralisée de notre modèle, la chaîne logistique est gérée par un seul agent qui détermine pour la politique choisie les niveaux de stock nominaux qui minimisent le coût total (coût de stock + coût de rupture).

Du fait de l'instantanéité de l'opération de transport entre les deux stocks *Xs* et *Xr*, ces derniers jouent le même rôle dans le modèle centralisé et se comportent comme un stock global $X=Xs+Xr$. Ainsi, lors de l'optimisation, il est évident que le gérant de la chaîne logistique ne considèrera que le stock dont le coût de stockage est le moins cher. Nous supposerons que $h_r \geq h_s$, une hypothèse bien justifiée puisque l'opération de transport apporte une valeur ajoutée au produit lors du passage du stock *Xs* au stock *Xr*.

La fusion des deux stocks *Xs* et *Xr* en un stock *X* rend inutile l'existence de la file des demandes en attente *Ys* qui servait jusque là au lancement des commandes entre les deux étages de la chaîne. Ainsi l'étude du système centralisé revient à l'étude d'un système de production par anticipation de type *M/M/1* qui a fait l'objet de plusieurs études (Buzacott et Shanthikumar [16] et Kleinrock [66]) et qui a été décrit dans le chapitre précédent.

Soit *N(t)* le nombre d'ordres de fabrication dans la file à l'instant *t*, alors $N(t) = S - X(t)$.

Les valeurs moyennes de *X(t)* et de *Y(t)* dépendent du niveau de stock nominal *S*. Soit $E[X(S)]$ le niveau de stock moyen et $E[Y(S)]$ le niveau moyen des demandes en attente alors la fonction coût moyen s'écrit :

$$C(S) = h_s E[X(S)] + bE[Y(S)]$$

avec

$$E[X(S)] = S - \frac{\rho(1-\rho^S)}{1-\rho}$$

et

$$E[Y(S)] = \frac{\rho^{S+1}}{1-\rho}.$$

Soit F_N la loi cumulative de $N(t)$ alors l'optimisation de la fonction $C(S)$ donne le niveau de stock nominal S^* qui se calcule à partir de la formule de la fraction critique :

$$F_N(\tilde{S}^* - 1) = \frac{b}{h_s + b} \text{ et } S^* = \lfloor \tilde{S}^* \rfloor$$ [3]

Dans un système de production/stockage avec des temps d'inter-arrivées et des temps de service exponentiels, la politique de stock nominal est optimale (voir Gravish et Graves, [46] et Sobel [92]). Le niveau de stock optimal s'écrit :

$$S^* = \left\lfloor \frac{Log \frac{h_s}{h_s + b}}{Log\, \rho} \right\rfloor$$

Ainsi, la solution centralisée peut être considérée comme un bon point de référence pour le système décentralisé qu'on étudiera dans le paragraphe suivant.

4.2 La solution décentralisée :

Dans cette section, nous supposons que le fournisseur et le détaillant choisissent séparément leurs niveaux de stocks afin d'optimiser chacun de son coté leurs coûts. Nous comparons la solution décentralisée à la solution centralisée pour plusieurs types d'équilibres.

Nous traitons le cas d'un service exponentiel de taux μ et d'une demande qui suit une loi de Poisson de moyenne λ. $\rho = \lambda/\mu$ est le taux d'utilisation.

Soient $E[Xs]$ le niveau moyen de stockage du fournisseur et $E[Xr]$ le niveau moyen de stockage du détaillant.

Lemme 5.1 :

$E[Xs]$ et $E[Xr]$ sont des fonctions de Ss et de Sr, les niveaux de stock du fournisseur et du détaillant, et s'écrivent de la manière suivante :

[3] Nous désignons par $\lfloor x \rfloor$ la valeur entière de x.

$$E[Xs(Ss,Sr)] = Ss - \frac{\rho(1-\rho^{Ss})}{1-\rho}$$

$$E[Xr(Ss,Sr)] = Sr - \frac{\rho^{Ss+1}(1-\rho^{Sr})}{1-\rho}$$

Démonstration :

Une demande qui arrive dans le système est transmise immédiatement au fournisseur. Donc, l'étage du fournisseur se comporte comme un système de production par anticipation avec des demandes qui suivent un processus de Poisson géré par une politique de stock nominal. Ce système est équivalent au modèle centralisé qui se modélise par une file *M/M/1*, donc, le stock moyen pour un niveau de stock nominal *Ss* est :

$$E[Xs(Ss,Sr)] = Ss - \frac{\rho(1-\rho^{Ss})}{1-\rho}.$$

Par ailleurs, vu de l'extérieur, un modèle décentralisé de niveaux de stock nominaux *Ss* et *Sr* se comporte comme un système centralisé de stock nominal *S=Ss+Sr*. Donc les deux systèmes sont reliés par la formule suivante :

$$E[Xs(Ss,Sr)] + E[Xr(Ss,Sr)] = E[X(Ss+Sr)]$$

Ainsi,

$$E[Xr(Ss,Sr)] = Sr - \frac{\rho^{Ss+1}(1-\rho^{Sr})}{1-\rho} \quad \blacklozenge$$

Notons que *E*[*Xs(Ss, Sr)*] et *E*[*Xr(Ss, Sr)*] sont des fonctions convexes respectivement en *Ss* et en *Sr*.

Dans le modèle que nous avons proposé, le coût de rupture total est partagé entre le fournisseur et le détaillant par les coefficients b_s et b_r qui sont supposés connus par les deux agents et fixés d'avance.

Lemme 5.2 :

Soit *Bs* et *Br* les coûts moyens de rupture subits par le fournisseur et du détaillant, alors on a:

$$Bs = b_s \times E[Y(Ss,Sr)] = b_s \frac{\rho^{Ss+Sr+1}}{1-\rho}$$

$$Br = b_r \times E[Y(Ss, Sr)] = b_r \frac{\rho^{Ss+Sr+1}}{1-\rho}$$

Démonstration :

Du fait du partage du coût de rupture entre les deux acteurs, le fournisseur n'est pas pénalisé en cas de rupture de stock (attente dans le file *Ys*) tant que le détaillant répond à la demande. Cependant le système est pénalisé en cas de demande en attente dans la file *Y*. Ainsi, l'attente moyenne du système décentralisé $E[Y(Ss, Sr)]$ est liée à l'attente moyenne du système centralisé comme suit :

$$E[Y(Ss, Sr)] = E[Y(Ss + Sr)],$$

donc, les coûts moyens d'attente du système décentralisé s'obtiennent en multipliant $E[Y(Ss+Sr)]$ par les coûts unitaires subits par chaque acteur b_s et b_r ◆

Notons que $E[Y(Ss, Sr)]$ est une fonction convexe en *Ss* et en *Sr*.

Les coûts respectifs du fournisseur et du distributeur s'écrivent de la manière suivante :

$$Cs(Ss, Sr) = h_s E[Xs(Ss, Sr)] + b_s E[Y(Ss + Sr)]$$

$$Cr(Ss, Sr) = h_r E[Xr(Ss, Sr)] + b_r E[Y(Ss + Sr)]$$

ce qui donne :

$$Cs = h_s \left(Ss - \frac{\rho - \rho^{Ss+1}}{1-\rho} \right) + b_s \frac{\rho^{Ss+Sr+1}}{1-\rho} \qquad (5.1)$$

et

$$Cr = h_r \left(Sr - \frac{\rho^{Ss+1}(1-\rho^{Sr})}{1-\rho} \right) + b_r \frac{\rho^{Ss+Sr+1}}{1-\rho} \qquad (5.2)$$

ou h_s (respectivement h_r) est le coût de stock par unité de produit par unité de temps du fournisseur (respectivement du détaillant) et b_s (respectivement b_r) le coût de rupture par commande non satisfaite par unité de temps du fournisseur (respectivement du détaillant) tels que $b_r + b_s = b$ le coût de rupture du système centralisé.

La résolution du problème décentralisé de notre modèle relève de la théorie des jeux qui se propose d'étudier toute situation dans laquelle des agents rationnels interagissent.

Trois éléments sont nécessaires pour la définition d'un jeu :

- Les acteurs : le fournisseur *S* et le détaillant *R*.
- Les stratégies : pour chaque acteur, c'est l'ensemble des choix stratégiques possibles afin de pouvoir participer au jeu. Notons par *SS* l'ensemble des stratégies possibles du fournisseur {*Ss*}et *SR* celui du détaillant {*Sr*}.
- Les fonctions d'utilité de chaque acteur *Us(Ss,Sr)=-Cs(Ss,Sr)* et *Ur(Ss,Sr)=-Cr(Ss,Sr)*.

Proposition 5.1 :

La fonction de réaction du fournisseur qui représente sa meilleure réponse au choix stratégique *Sr* du détaillant s'écrit de la manière suivante :

$$Ss^*(Sr) = \left\lfloor \frac{Log \dfrac{h_s}{h_s + b_s.\rho^{Sr}}}{Log\,\rho} \right\rfloor \qquad (5.3).$$

Démonstration :

$$Cs(Ss,Sr) = h_s\left(Ss - \frac{\rho - \rho^{Ss+1}}{1-\rho}\right) + b_s\frac{\rho^{Ss+Sr+1}}{1-\rho}$$

donc

$$Cs(Ss,Sr) - Cs(Ss-1,Sr) = h_s\left(1-\rho^{Ss}\right) - b_s\rho^{Ss+Sr}$$

par suite

$$Cs(\tilde{S}s^*,Sr) - Cs(\tilde{S}s^*-1,Sr) = 0 \;\Rightarrow\; h_s = \left(h_s + b_s\rho^{Sr}\right)\rho^{\tilde{S}s*}$$

ou encore

$$Ss^*(Sr) = \lfloor \tilde{S}s^* \rfloor = \left\lfloor \frac{Log \dfrac{h_s}{h_s + b_s.\rho^{Sr}}}{Log\,\rho} \right\rfloor \;\blacklozenge$$

Notons que la fonction de coût (5.1) du fournisseur est similaire à celle du modèle centralisé avec un coût de rupture *b'* tels que :

$$b' = b_s\rho^{Sr}.$$

Proposition 5.2 :

La fonction de réaction du détaillant en fonction de la stratégie *Ss* du fournisseur s'écrit comme suit :

$$Sr^*(Ss) = \left\lfloor \frac{Log \dfrac{h_r}{h_r + b_r}}{Log\,\rho} - Ss \right\rfloor^+ \qquad (5.4).$$

Démonstration :

$$Cr(Ss, Sr) = h_r \left(Sr - \frac{\rho^{Ss+1}(1-\rho^{Sr})}{1-\rho} \right) + b_r \frac{\rho^{Ss+Sr+1}}{1-\rho}$$

donc

$$Cr(Ss, Sr) - Cr(Ss, Sr-1) = h_r \left(1 - \rho^{Ss+Sr}\right) - b_r \rho^{Ss+Sr}$$

par suite

$$Cr(Ss, Sr) - Cs(Ss, Sr-1) = 0 \Rightarrow h_r = \left(h_r + b_r\right) \rho^{Ss+Sr}$$

d'où

$$Sr^* + Ss = \left\lfloor \frac{Log \dfrac{h_r}{h_r + b_r}}{Log\,\rho} \right\rfloor$$

ou encore

$$Sr^*(Ss) = \left\lfloor \frac{Log \dfrac{h_r}{h_r + b_r}}{Log\,\rho} - Ss \right\rfloor^+ .$$

Notons que la fonction de coût (5.2) du détaillant est similaire à celle du modèle centralisé avec un niveau de stock nominal $S=Ss+Sr$, alors :

$$S^* = \left\lfloor \frac{Log \dfrac{h_r}{h_r + b_r}}{Log\,\rho} \right\rfloor^+$$

Ainsi, pour un niveau de stock Ss donné Sr^* s'écrit comme dans la proposition 5.2 ◆

On remarque bien que $Sr^*(Sr)$ et $Ss^*(Ss)$ sont inférieures à S^* le niveau de stock optimal de la solution centralisée. Par la suite, nous considérons que les ensembles des stratégies $SS=\{0,..,S^*\}$ et $SR=\{0,..,S^*\}$, un choix qui n'a aucune influence sur la résolution de notre problématique mais nécessaire pour certaines démonstrations que nous élaborons.

Si les fonctions de réactions des acteurs ne dépendent que des paramètres du problème, la stratégie élaborée par les deux acteurs dans le problème décentralisé dépend du type de l'équilibre choisi. Dans ce qui suit, nous étudions deux types d'équilibres : l'équilibre de Nash et l'équilibre de Stackelberg avec les deux variantes : le fournisseur est le meneur Stackelberg et le distributeur est le meneur Stackelberg.

4.2.1 Equilibre de Nash :

Rappelons que sous un équilibre de Nash, le fournisseur choisit Ss^* qui minimise son coût *Cs(Ss, Sr)* en supposant que le détaillant choisit Sr^* afin de minimiser *Cr(Ss, Sr)* ; de même, le détaillant choisit Sr^* pour minimiser *Cr(Ss, Sr)* en supposant que le fournisseur choisit Ss^* pour minimiser *Cs(Ss, Sr)*. Bref, la stratégie de chaque agent est la meilleure réponse à la stratégie de l'autre et les deux agents n'ont pas intérêt à s'éloigner de l'équilibre de Nash.

En d'autres termes :

$$Sr^*(Ss) = \arg\min(x, Cr(Ss, x))$$
$$\text{et } Ss^*(Sr) = \arg\min(x, Cs(x, Sr)).$$

La recherche de l'équilibre de Nash revient à la recherche de l'intersection des deux fonctions de réaction $Ss^*(Sr)$ et $Sr^*(Ss)$. A partir de cette définition de l'équilibre de Nash, deux problèmes se posent : le premier concerne ce qu'il faudrait faire lorsque les deux courbes se croisent plus d'une fois. Chaque point de croisement correspond à un équilibre de Nash. Lequel de ces équilibres de Nash devrait être sélectionné ? La seconde difficulté surgit lorsque les courbes ne se croisent pas. Que doit-on faire dans un jeu qui ne possède pas d'équilibre de Nash ?

Plusieurs auteurs ont étudié l'existence de l'équilibre de Nash. Nash (1950) montre que tout jeu fini (ensemble des stratégies) a un équilibre de Nash en stratégie mixte (Dans un jeu ou les stratégies mixtes sont autorisées, chaque acteur peut choisir une ou plusieurs de ses stratégies possibles en affectant à chacune un probabilité non nulle tel que la somme des probabilités affectées est égal à un). Or, dans notre jeu, nous nous intéressons à des équilibres à stratégies pures (chaque acteur ne peut choisir qu'une seule stratégie de l'ensemble de ses stratégies).

Debreu, Glicksberg et Fan (1952) montrent qu'une stratégie pure existe si les ensembles des stratégies sont compactes et convexes et que la fonction d'utilité *Us(Ss,Sr)* (respectivement *Ur(Ss,Sr)*) est quasi-concave en *Ss* (respectivement en *Sr*). Si la relaxation continue de notre problématique nous permet de prouver à partir de ce

théorème l'existence de l'équilibre de Nash et même l'unicité en ajoutant la convexité des fonctions de réaction $Ss^*(Sr)$ et $Sr^*(Ss)$ (voir Binmore [11]), le passage entre le modèle continue et le modèle discret s'avère non évident.

Topkis (1979) montre l'existence d'au moins un équilibre de Nash en stratégies pures dans le cas d'un jeu supermodulaire. Ce résultat a été utilisé pour des jeux similaires au notre sur des modèles de stockage (voir Milgrom et Roberts [81] et Cachon [21]).

Dans ce qui suit, nous prouvons d'abord que notre jeu est classé dans les jeux supermodulaires et nous nous servons ensuite du théorème de Topkis (1979) pour prouver l'existence de l'équilibre de Nash. Cette démarche nécessite l'introduction de quelques outils mathématiques.

Définition 5.1 :
L'ensemble S est un treillis de ∇^m si pour tout $s(x_1,..,x_m) \in S$ et $s'(x'_1,..,x'_m) \in S$,

$$s \wedge s' \in S \text{ et } s \vee s' \in S.$$

Avec $s \wedge s' \equiv (min(x_1,x'_1),\ldots,(min(x_m,x'_m))$
et $s \vee s' \equiv (max(x_1,x'_1),\ldots,(max(x_m,x'_m))$.

Définition 5.2 :
La fonction $Ui(Ss, Sr)$ est une différence croissante de (Ss,Sr) si, pour tout $(Ss,Ss') \in SS^2$ et $(Sr,Sr') \in SR^2$ tels que $Ss \geq Ss'$ et $Sr \geq Sr'$,

$$Ui(Ss,Sr)-Ui(Ss',Sr) \geq Ui(Ss,Sr')-Ui(Ss',Sr').$$

Définition 5.3 :
La fonction $Ui(Ss, Sr)$ est supermodulaire en Ss si, pour Sr :

$$Ui(Ss,Sr)+Ui(Ss',Sr) \leq Ui(Ss \wedge Ss',Sr)+Ui(Ss \vee Ss',Sr) \text{ pour tout } (Ss,Ss') \in SS^2.$$

Notons que la super-modularité est automatiquement satisfaite si SS est de dimension 1.

Définition 5.4 :
Un jeu est définit comme supermodulaire si pour tout acteur i,

- S_i est un treillis de ∇^m,
- U_i est une différence croissante en (S_i, S_{-i}),

- U_i est super modulaire en S_i.

Nous désignons par S_{-i} les stratégies adoptées par tous les acteurs autres que i.

A partir de cette définition, nous allons montrer que notre problème décentralisé est un jeu supermodulaire. Pour cela, nous commençons par introduire une notion d'ordre dans les ensembles des stratégies du fournisseur et du détaillant. Si les deux ensembles sont ordonnés naturellement, et si cet ordre nous permet avec quelques modifications d'aboutir au résultat (voir Bulow et al. [13]), nous avons préféré opter pour un autre ordre utilisé par Milgrom et Roberts [81] et Cachon[21].

Soit $(Ss,Ss') \in SS^2$ deux stratégies du fournisseur. On dit que Ss est supérieure en ordre à Ss' et on note $Ss \underset{o}{\geq} Ss'$ si $Ss \geq Ss'$ (ordre naturel respecté).

Soit $(Sr,Sr') \in SR^2$ deux stratégies du détaillant. On dit que Sr est supérieure en ordre à Sr' et on note $Sr \underset{o}{\geq} Sr'$ si $Sr \leq Sr'$, (ordre naturel inverse).

Lemme 5.3 :

Le jeu entre le fournisseur S et le détaillant R définit par les ensembles de stratégies SS et SR et par les fonctions d'utilité $Us(Ss,Sr)=-Cs(Ss,Sr)$ et $Ur(Ss,Sr)=-Cr(Ss,Sr)$ définies dans les équations 5.1 et 5.2 est un jeu supermodulaire.

Démonstration :

A partir de la définition 5.4, trois conditions sont nécessaires pour qu'un jeu soit supermodulaire :

i- SS et *SR* sont des treillis de ∇ car, ils sont unidimensionnels.

ii- Us et *Ur* sont des différences croissantes en *(Ss, Sr)* car pour tout $(Ss,Ss') \in SS^2$ et $(Sr,Sr') \in SR^2$ tels que $Ss \underset{o}{\geq} Ss'$ et $Sr \underset{o}{\geq} Sr'$ on a :

$$Us(Ss,Sr)-Us(Ss',Sr) \geq Us(Ss,Sr')-Us(Ss',Sr') \text{ car } Sr \leq Sr',$$

et

$$Ur(Ss,Sr)-Ur(Ss,Sr') \geq Ur(Ss',Sr)-Ur(Ss',Sr')$$

car Ss ≥ Ss' et $\rho^{Sr'} - \rho^{Sr} \leq 0$.

iii- Us(Ss, Sr) (respectivement *Ur(Ss, Sr)*) est supermodulaire en *Ss* (respectivement en *Sr*) car $Ss \wedge Ss' = min(Ss,Sr)$ *et* $Ss \vee Ss' = max(Ss,Sr)$ (respectivement $Ss \wedge Ss' = min(Ss,Sr)$ *et* $Ss \vee Ss' = max(Ss,Sr)$)

donc

$$Ui(Ss,Sr)+Ui(Ss',Sr) = Ui(Ss \wedge Ss',Sr)+Ui(Ss \vee Ss',Sr),\ i=\{S,R\} \ \blacklozenge$$

Par la suite, nous allons démontrer l'existence d'un équilibre de Nash pour le jeu que nous venons de décrire. Pour cela, nous introduisons quelques définitions qui vont nous servir pour la démonstration de la proposition 5.3 qui va suivre.

Définition 5.5 :

Un ensemble X de ∇ est compact s'il satisfait les deux conditions ci-dessous :

i- Il existe deux éléments x_1 et x_2 de ∇ tels que pour tout $x \in X$, $x_1 \leq x \leq x_2$.

ii- Pour toute suite x_n d'éléments de X convergente, $x_0 \equiv \lim_{n\to\infty} x_n$ appartient à X.

Définition 5.6 :

Une fonction *Ui* définie sur un ensemble X est semi-continue supérieurement en x si, pour toute suite x_n qui converge vers x :

$$\limsup_{n\to\infty} U_i(x_n) \leq U_i(x)$$

Proposition 5.3 :

Soit un système à deux agents S et R dont les fonctions de coût sont présentées par les équations (5.1) et (5.2), alors le problème décentralisé admet un équilibre de Nash.

Démonstration :

D'après le théorème de Topkis (1979), si pour tout acteur i,

i- L'ensemble des stratégies S_i est compact

ii- *Ui* est semi-continue supérieurement en S_i pour tout S_{-i}.

iii- Le jeu est supermodulaire

Alors, l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures est non vide.

i- A partir de la définition 5.5, pour que les ensembles de stratégies soient compacts, il suffit qu'ils soient bornés. Or, nous avons montré auparavant que $SS=\{0,..,S^*\}$ et $SR=\{0,..,S^*\}$ où S^* la borne supérieure est le niveau

optimal du stock nominal de la solution centralisée. Par ailleurs, *SS* et *SR* sont des ensembles finis et donc la limite de toute suite convergente d'éléments de *SS* (respectivement de *SR*) appartient à *SS* respectivement à *SR*).

ii- *SS* et *SR* sont des ensembles finis, donc pour toute suite x_n qui converge vers x de *SS* (respectivement de *SR*) :

$$\limsup_{n\to\infty} U_i(x_n) = U_i(x),\ i=s \text{ (respectivement } r)$$

Ainsi, à partir de la définition 5.6, les fonctions d'utilité *Us* et *Ur* sont semi-continus supérieurement.

iii- A partir du lemme 5.3, le jeu défini ci-dessus est supermodulaire.

Par la suite, les conditions de Topkis sont réunies et l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures est non vide ◆

Si, cette étude ne montre que l'existence de l'équilibre de Nash, les différentes simulations numériques que nous avons réalisées prouvent que, dans la majorité des cas étudiés, cet équilibre est unique (93%). L'existence d'équilibres multiples est due au niveau discret des stocks nominaux puisque dans la relaxation continue, on montre aisément l'unicité de l'équilibre de Nash à partir de la convexité des fonctions de réaction $Ss^*(Sr)$ et $Sr^*(Ss)$ (voir Binmore [11]).

Dans le cas d'équilibres multiples, nous sommes généralement dans une configuration à deux équilibres de Nash adjacents dont les coûts sont égaux (cas $hs = hr$) et très proches l'un de l'autre (cas $hs \neq hr$). Ceci est dû au fait que la courbe de réaction du détaillant $Sr^*(Ss)$ est linéaire décroissante avec la propriété $Sr^*(Ss)+Ss= cte$. Ainsi, les différents équilibres de Nash admettent le même niveau de stock nominal total ($Ss+Sr$).

A partir de ces constatations, nous nous contentons du premier équilibre de Nash trouvé sans nous préoccuper des performances de l'équilibre si plusieurs équilibres existent. Il est vrai que l'équivalence des coûts totaux dans le cas d'équilibres de Nash multiples n'implique pas forcément que les deux acteurs sont indifférents au choix de l'équilibre. En effet, pour chacun des acteurs, ses propres coûts sont différents d'un équilibre à l'autre. Néanmoins, quelque soit l'équilibre choisi, la performance globale du système reste inchangée.

A l'équilibre de Nash les expressions des niveaux du stock optimal Ss^* et Sr^* dépendent des fractions b_r et b_s du coût de rupture ainsi que des coûts de stockage h_s et h_r:

Si $\frac{b_r}{h_r} \leq \frac{b_s}{h_s}$ alors

$$Sr^* = 0, \quad Ss^* = \left\lfloor \frac{Log\left(\frac{h_s}{h_s + b_s}\right)}{Log\,\rho} \right\rfloor,$$

Si $\frac{b_r}{h_r} > \frac{b_s}{h_s}$ alors Ss^* et Sr^* sont liés par la relation :

$$Sr^* + Ss^* = \left\lfloor \frac{Log\left(\frac{h_r}{h_r + b_r}\right)}{Log\,\rho} \right\rfloor,$$

ce qui donne dans la relaxation continue pour $h_s = h_r = h$:

$$\tilde{S}r^* = \frac{Log\left(\frac{h(h+b)}{(h+b_r)^2}\right)}{Log\,\rho} \text{ et } \tilde{S}s^* = \frac{Log\left(\frac{h+b_r}{h+b}\right)}{Log\,\rho}$$

Proposition 5.4 :

Soit un système à deux agents S et R dont les fonctions de coût sont présentées par les équations (5.1) et (5.2) tels que $h_r > h_s$, alors un équilibre de Nash (Ss^*, Sr^*) tels que $Ss^* + Sr^* = S^*$ n'existe que dans le cas extrême $b_r = 0$ sinon $Ss^* + Sr^* < S^*$

Démonstration :

A partir des équations (5.3) et (5.4) :

$$Sr^* + Ss^* = \max\left(\left\lfloor \frac{Log\left(\frac{h_r}{h_r + b_r}\right)}{Log\,\rho} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{Log\left(\frac{h_s}{h_s + b_s}\right)}{Log\,\rho} \right\rfloor \right)$$

or $h_r > h_s$ donc $Ss^* + Sr^* \leq S^*$ et on n'a l'égalité que pour $b_r = 0$ ◆

Note : pour $h_r = h_s$, un deuxième cas d'égalité entre le système centralisé et le système décentralisé apparaît pour $b_s = 0$.

4.2.2 Comparaison des solutions

Nous considérons dans la suite de ce chapitre l'hypothèse $h_s=h_r=h$. Cette hypothèse n'est pas nécessaire à l'aboutissement des calculs que nous allons effectuer et ne sert qu'à les simplifier afin de rendre les résultats obtenus plus clairs à analyser. Cette hypothèse était adoptée par ceux qui ont étudié des modèles similaires. En particulier, Cachon [21] pense que l'utilisation de coûts de stockage différents n'a un intérêt que pour des modèles avec des temps de réapprovisionnement non nuls. Nous pensons que la mise en pratique de ce modèle simplifié de la chaîne logistique est possible dans des situations où le temps de transport entre les deux étages est négligeable par rapport au temps de service du fournisseur. Néanmoins, l'opération de transport dans ce cas apporte une valeur ajoutée au produit que nous devons considérer par le fait d'avoir un coût de stockage $h_r>h_s$.

Dans ce qui suit, nous nous basons sur les calculs effectués afin de comparer le coût de l'équilibre de Nash par rapport à la solution centralisée.

Corollaire 5.1 :

Soit un système à deux agents *S* et *R* dont les fonctions de coût sont présentées par les équations (5.1) et (5.2). Soit *C(S)* la fonction coût du système centralisé. Alors,

$$Cs(Ss^*, Sr^*) + Cr(Ss^*, Sr^*) \geq C(S^*)$$

et on n'a l'égalité que pour $b_s = 0$ ou $b_r = 0$.

Démonstration :

A partir du lien entre le système centralisé et le système décentralisé :

$$Cs(Ss, Sr) + Cr(Ss, Sr) = C(Ss + Sr)$$

en particulier pour $Ss=Ss^*$ et $Sr=Sr^*$ on a :

$$Cs(Ss^*, Sr^*) + Cr(Ss^*, Sr^*) = C(Ss^* + Sr^*)$$

or d'après la proposition 5.4 :

$$Ss^* + Sr^* \leq S^*,$$

donc

$$Cs(Ss^*, Sr^*) + Cr(Ss^*, Sr^*) \geq C(S^*)$$

et l'égalité n'est atteinte que pour $b_r = 0$ ou $b_s = 0$ (car $h_s=h_r$) ◆

Ainsi à partir de ce corollaire, l'équilibre de Nash s'avère moins efficace que la solution centralisée et nous n'obtenons l'équivalence des deux systèmes que dans des cas extrêmes de b_r et b_s qui ne sont pas intéressantes parce qu'elles fixent le stock de l'un des deux agents à 0 donc ils nous ramènent à un système centralisé.

Note : pour $h_s<h_r$ ce corollaire est valable et l'égalité entre les deux systèmes n'est atteinte que pour $b_r=0$.
Dans ce qui suit, nous allons étudier la perte relative *PR* de l'équilibre de Nash par rapport à la solution centralisée en fonction de b_r.

Proposition 5.5 :
a/ $PR(b_r)$ est symétrique par rapport à $b_r=b_s$.
b/ $PR(b_r)$ est croissante sur $[0,b/2]$.

Démonstration :
PR est définie comme suit :

$$PR(b_r) = \frac{C(Ss^* + Sr^*)}{C(S^*)} - 1$$

Or

$$Sr^* + Ss^* = \max\left(\left\lfloor \frac{Log\left(\frac{h}{h+b_r}\right)}{Log\,\rho} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{Log\left(\frac{h}{h+b_s}\right)}{Log\,\rho} \right\rfloor \right)$$

Donc $PR(b_r)$ est symétrique par rapport à $b_r=b_s=b/2$.

Sur $[0,b/2]$, Ss^*+Sr^* est décroissante en b_r. Or $Ss^*+Sr^* \leq S^*$ et la fonction coût du système centralisé $C(S)$ est convexe en S et atteint sont minimum pour $S=S^*$. Donc $C(Ss^*+Sr^*)$ augmente en fonction de b_r. Par suite $PR(b_r)$ est croissante ◆

Nous illustrons ce résultat sur un exemple (figure 5.2) et nous remarquons que les courbes de la perte relative entre la solution centralisée et l'équilibre de Nash ont la même allure avec un maximum en $br=bs$ qui ne dépasse pas en général 10%. Notons aussi que la perte est décroissante en fonction de b et ne varie presque pas en fonction de ρ.

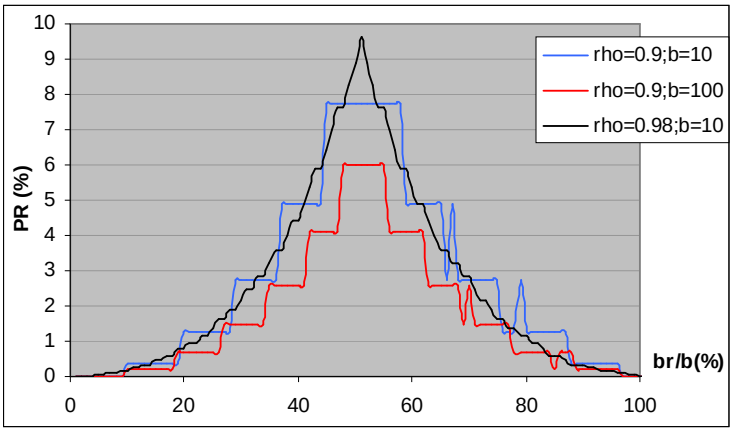


***Fig. 5.2** : L'efficacité de l'équilibre de Nash en fonction de br.*

L'efficacité de l'équilibre de Nash par rapport à la solution centralisée dans le cas de $h_r > h_s$ présente quelques différences. En effet, la courbe perd sa symétrie globale pour une symétrie locale autour du point :

$$b_r = \frac{h_r}{h_s} b_s$$

pour lequel la pénalité est maximale. La première partie de la courbe est similaire au figure 5.2 avec une pénalité nulle pour $b_r=0$ croissante jusqu'au point :

$$b_r = \frac{h_r}{h_s} b_s$$

puis décroissante sur la deuxième partie de la courbe pour atteindre la valeur $PR(b_r = b)$ comme le montre la figure 5.3 ci-dessous.

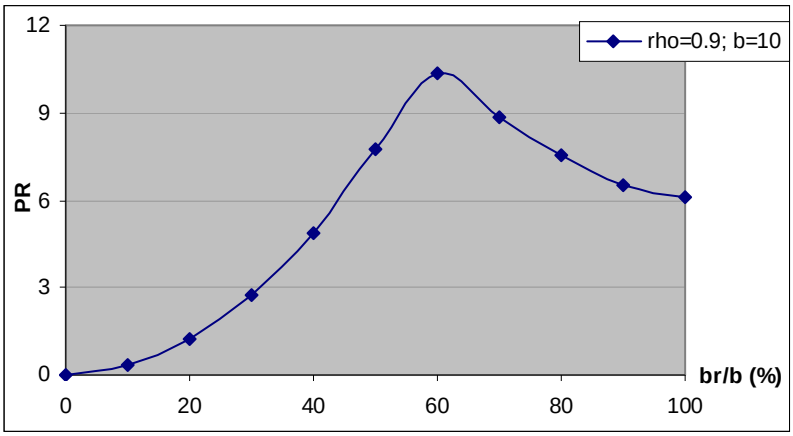


***Fig. 5.3 :** Perte relative en fonction de b_r (h_s=1 ; h_r=1,1)*

Remarque : De part et d'autre du point de pénalité maximale, la courbe de réaction n'est plus symétrique. Ceci est dû au fait que quand b_r augmente c'est le détaillant qui est obligé de garder du stock. Or puisque $h_r > h_s$ cette situation est moins performante que le cas symétrique dans lequel le détaillant garde plus de stock.

4.2.3 Equilibre de Stackelberg :

Dans un équilibre de Stackelberg, un des deux agents va jouer le rôle du meneur Stackelberg, c'est à dire, c'est lui qui a le pouvoir de décision. On distingue deux cas :

i- Le fournisseur est le meneur Stackelberg : dans ce cas, le fournisseur va choisir Ss^* qui minimise *Cs(Ss, Sr)* tout en sachant que le détaillant va choisir Sr^* qui minimise *Cr(Ss, Sr)*.
Analytiquement, ceci peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Ss^* = \arg\min(Cs(Ss, Sr^*(Ss))) \text{ et } Sr^* = Sr^*(Ss^*).$$

ii- Le détaillant est le meneur Stackelberg et choisira Sr^* qui minimise *Cr(Ss, Sr)* tout en sachant que le fournisseur va choisir Ss^* qui minimise $Cs(Ss, Sr^*)$ ce qui donne :

$$Sr^* = \arg\min(Cr(Ss^*(Sr), Sr))$$
$$\text{et } Ss^* = Ss^*(Sr^*).$$

A partir de cette définition, l'équilibre de Stackelberg peut être vu comme étant une situation dans laquelle le meneur fixe ses conditions et le suiveur a le choix d'accepter ou de décliner l'offre du meneur. Si cette situation est très répandue dans la chaîne logistique, la majeure partie des travaux se rapportant aux modèles de stockage et de production/stockage qui ont fait appel à la théorie des jeux se sont intéressé à l'équilibre de Nash. Parmi les rares travaux qui se sont intéressés à l'équilibre de Stackelberg, Lariviere [68] a étudié un modèle de vendeur de journaux où le fournisseur est le meneur Stackelberg, Caldentey et Wein [25] ont déterminé les deux équilibres de Stackelberg pour un modèle de production/stockage à un étage.

Les expressions analytiques des niveaux de stock dans un équilibre de Stackelberg ne sont pas faciles à obtenir surtout dans le cas discret, nous nous contentons donc des résultats numériques.

4.2.4 Comparaison des solutions

L'analyse des courbes d'efficacité de l'équilibre de Nash par rapport à la solution centralisée montre plusieurs ressemblances avec les courbes d'efficacité de l'équilibre de Stackelberg : la pénalité ne varie presque pas en fonction de ρ et diminue en fonction de b. L'équilibre « le fournisseur est le meneur Stackelberg » est moins efficace que l'équilibre « le détaillant est le meneur Stackelberg » pour $b_r<b_s$ puis devient meilleur

sur le reste du domaine. Notons que les deux équilibres présentent des comportements symétriques par rapport à $b_r=b_s$ (voir fig. 5.4 et fig. 5.5).

Considérons le cas de l'équilibre « le fournisseur est le meneur Stackelberg » (fig. 5.4). Nous distinguons trois parties : pour les faibles valeurs de b_r, le détaillant n'est pas concerné par les coûts de rupture. Il n'est donc concerné que par les coûts de stockage et par conséquent il ne produit qu'à la commande quelque soit le choix du fournisseur. Le fournisseur, quant à lui, subit la totalité des coûts de rupture et se trouve contraint d'optimiser le système centralisé, ce qui revient à choisir les performances optimales.

Quand b_r augmente tout en restant inférieur à b_s, le fournisseur, moins concerné par le coût de rupture et profitant de sa position de meneur, baisse considérablement ses stocks (jusqu'à $Ss^*=0$). Or, comme les valeurs de b_r sont encore relativement faibles, le détaillant n'a aucune raison d'augmenter sensiblement son niveau de stock nominal. Le système est donc fortement pénalisé ce qui explique le pic de la courbe de perte relative.

Pour les valeurs importantes de b_r, le détaillant est beaucoup plus concerné par les coûts de rupture. Il augmente donc son stock diminuant ainsi la perte relative du système.

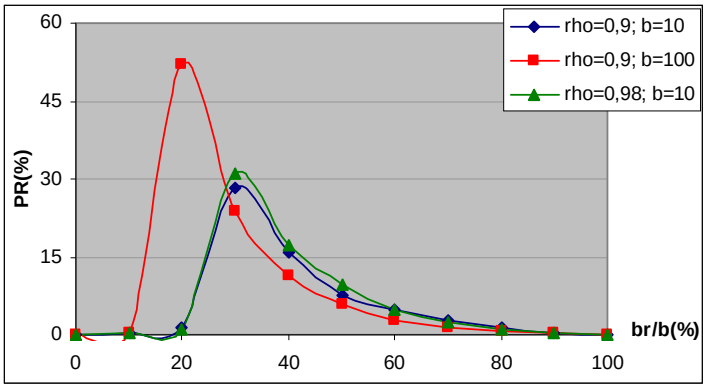


***Fig. 5.4** : l'équilibre « le fournisseur est le meneur Stackelberg »*

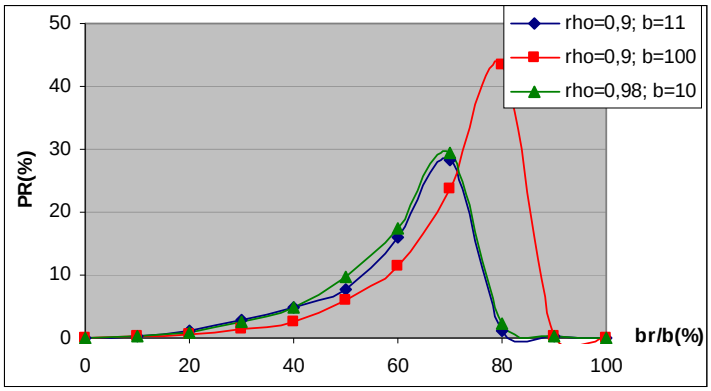


***Fig. 5.5** : l'équilibre « le détaillant est le meneur Stackelberg »*

La comparaison des équilibres de Stackelberg et de l'équilibre de Nash montre que ce dernier est toujours plus efficace. Néanmoins, la figure 5.6 indique que l'équilibre de Nash prend toujours l'équilibre de Stackelberg le plus efficace. Ceci peut s'expliquer comme suit : si le fournisseur est le meneur et si ses paramètres dominent le système il maximise son gain au dépend du détaillant et le gain total se dégrade . Dans l'autre cas (les paramètres du détaillant dominent) le fournisseur choisit l'équilibre de Nash pour minimiser ses pertes.

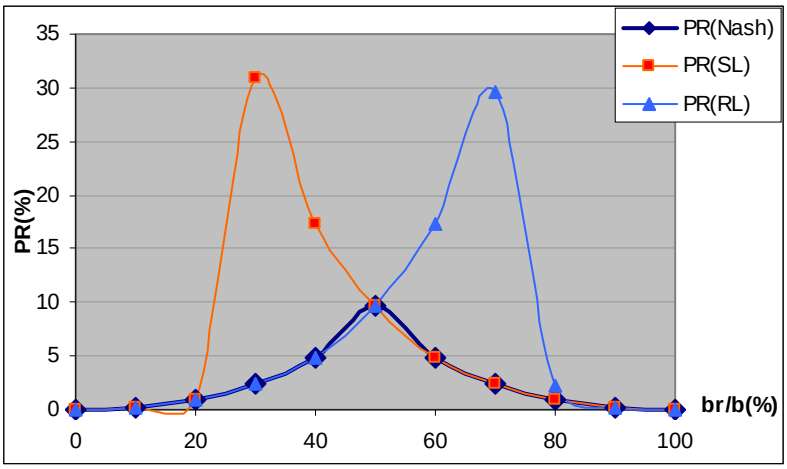


***Fig. 5.6** : comparaison des différents équilibres étudiés.*

Nous allons essayer de vérifier ce résultat analytiquement. Pour cela nous prenons la relaxation continue dans l'équilibre « le détaillant est le meneur Stackelberg ». Dans ce cas :

$$Sr^* = \arg\min(Cr(Ss^*(Sr), Sr))$$

or :

$$Ss^* = \frac{Log\left(\frac{h}{h + b_s \rho^{Sr}}\right)}{Log\,\rho}$$

donc,

$$Cr(Ss^*(Sr), Sr) = h(Sr - \rho \frac{1-\rho^{Sr}}{1-\rho} \frac{h}{h + b_s \rho^{Sr}}) + b_r \frac{\rho^{Sr+1}}{1-\rho} \frac{h}{h + b_s \rho^{Sr}} .$$

L'étude de cette fonction montre qu'elle est croissante sous la condition :

$$4b_s(1-\rho) > (h+b)\rho \times Log(\rho) \ .$$

Donc pour $b_r < b_s$ cette condition est vérifiée si $h < b$.

Par suite, $Sr^{*}=0$ et

$$Ss^{*}= \frac{Log\left(\frac{h}{h+b_s}\right)}{Log\,\rho}.$$

Ce qui correspond bien à l'équilibre de Nash pour $b_r<b_s$.

4.2.5 La coordination :

Dans la première partie de ce travail, nous avons étudié le système décentralisé avec différents types d'équilibres. Nous avons conclu que l'équilibre de Nash est le plus efficace parmi les équilibres étudiés pour gérer ce système. Cependant, cet équilibre reste moins performant que la solution centralisée optimale.

Il est évident que la meilleure solution pour notre problématique dans sa version décentralisée est un équilibre du ressort de la théorie des jeux en fonction des données du système et des rapports de force entre les deux acteurs. Dans ce qui suit, nous nous intéressons à l'équilibre de Nash en particulier, qui est meilleur pour notre modèle que les équilibres de Stackelberg.

Ainsi, l'objectif de cette section est d'améliorer les performances de la chaîne logistique en agissant sur des paramètres internes du système, existants ou à créer afin de déplacer l'équilibre de Nash vers la solution centralisée. Nous allons essayer, donc, d'établir des contrats entre les différents agents de notre chaîne logistique afin de ramener l'équilibre de Nash à la solution centralisée. Nous parlons, alors, de coordination. Cependant, cette coordination est d'autant plus efficace que le contrat permet un partage arbitraire des gains entre les différents acteurs. Nous parlons, ainsi, de flexibilité du contrat et nous la mesurons à partir de la validité des contraintes de participation. Les contraintes de participation sont définies de telle façon que les acteurs de notre chaîne logistique se voient meilleurs avec le contrat que sans. Par ailleurs, les contrats proposés doivent être faciles à instaurer, ne nécessitant pas des aménagements coûteux, précis afin de s'assurer de la bonne application du contrat. D'autre part, ils doivent être exprimés explicitement en fonction des paramètres du système pour éviter de modifier le contrat chaque fois que les paramètres changent. Nous parlons alors de contrats simples. Ces trois notions, à savoir, coordination, flexibilité et simplicité ont été développé plus en détail par Cachon [21].

Plusieurs types de contrats ont fait l'objet de publications ses dernières années et ont traité un ou plusieurs des notions décrites ci-dessus. Ces contrats diffèrent selon le

modèle étudié et la fonction d'utilité de chaque acteur (maximisation du profit ou minimisation des coûts).

Les travaux qui se sont intéressés au modèle de vendeur de journaux ont étudié différents contrats tel que les contrats par le prix (le détaillant paye au fournisseur un prix par unité de produit achetée), le retour des quantités non vendues (le fournisseur accepte de racheter les produits restant en stock du détaillant moyennant un prix), le partage de revenue (le fournisseur partage le gain du détaillant) (voir Cachon [21] pour plus de détails). Les modèles de stockage et de production/stockage multi-périodes étudiés se sont intéressés à la minimisation des coûts et les contrats proposés consistent à des transferts linéaires d'argent basés sur des mesures de performances faciles à vérifier comme le niveau de stock moyen et les coûts de rupture (Cachon [21] et Caldentey et Wein [25]). D'autres auteurs ont opté pour des transferts non linéaires (Lee et Whang [72])[4]. Si ces contrats sont similaires à ceux proposés pour le modèle de vendeur de journaux comme le constate Cachon [23], leur efficacité diffère selon le modèle étudié. En particulier Cachon [23] montre que la participation du fournisseur au coût de stockage du détaillant très efficace dans le modèle du vendeur de journaux ne coordonne pas un modèle à deux étages à revue continue que sous certaines conditions.

Par rapport aux trois critères d'efficacité des contrats, mis à part la simplicité des contrats proposés, ces différents travaux se sont intéressés principalement à la coordination et rares sont ceux qui ont traité la flexibilité. En particulier, pour un modèle à deux étages similaire au notre avec des ventes perdues, Cachon [21] se contente d'évoquer le degré de flexibilité des contrats qu'il a proposé et pour un modèle à un étage de production/stockage, Caldentey et Wein [25] citent les contraintes de participation.

A partir de la proposition 5.4, il est clair que pour qu'un contrat puisse coordonner notre système, il faut qu'il permette d'augmenter les niveaux des stocks optimaux du fournisseur et du détaillant afin d'avoir $Ss^*+Sr^*=S^*$. Ainsi, dans les différents contrats que nous élaborons dans ce paragraphe, nous créons des transferts d'argent entre les différents agents afin de pouvoir modifier les paramètres du système et pouvoir ainsi varier les niveaux des stocks optimaux. Nous considérons que le partage du coût de rupture comme un contrat initial et nous proposons des contrats supplémentaires avec des transferts linéaires d'argent en fonction des niveaux moyens de stock.

[4] Cachon [23] propose un recueil des différents travaux réalisés pour la coordination.

4.2.6 Participation du fournisseur au coût de stockage du détaillant : le contrat α_S

Dans ce contrat, le fournisseur propose de payer une quantité $\alpha_S h$ par unité de temps pour chaque élément de stock du détaillant afin de l'inciter à garder plus de stock. Les différents coûts dans le système s'écrivent de la façon suivante :

$$Cs(Ss,Sr) = hE[Xs(Ss,Sr)] + \alpha_S hE[Xr(Ss,Sr)] + b_s E[Y(Ss+Sr)] \quad (5.5)$$

$$Cr(Ss,Sr) = h(1-\alpha_S)E[Xr(Ss,Sr)] + b_r E[Y(Ss+Sr)] \quad (5.6)$$

Les niveaux moyens de stock et de rupture ne dépendent pas du contrat instauré donc :

$$E[Xs(Ss,Sr)] = Ss - \frac{\rho\left(1-\rho^{Ss}\right)}{1-\rho},$$

$$E[Xr(Ss,Sr)] = Sr - \frac{\rho^{Ss+1}\left(1-\rho^{Srs}\right)}{1-\rho},$$

$$\text{et } E[Y(Ss+Sr)] = \frac{\rho^{Ss+Sr+1}}{1-\rho}.$$

Les fonctions de réaction du fournisseur et du détaillant sont déterminées à partir de l'optimisation des fonctions de coût (5.5) et (5.6) comme dans les propositions 5.1 et 5.2 :

$$Ss^*(Sr) = \left\lfloor \frac{Log\dfrac{h}{(1-\alpha_S)h + (bs+\alpha_S \times h)\times \rho^{Sr}}}{Log\,\rho} \right\rfloor$$

et

$$Sr^*(Ss) = \left\lfloor \frac{Log\dfrac{(1-\alpha_S)h}{(1-\alpha_S)h+br}}{Log\,\rho} - Ss \right\rfloor^+.$$

Une méthode similaire à celle utilisée dans le paragraphe précédent montre qu'un équilibre de Nash existe, peut être multiple et que dans ce cas les différents équilibres sont adjacents et possèdent des performances très proches.

L'équilibre de Nash s'écrit dans notre cas de la façon suivante :

Si $b_r < (1-\alpha_S)b_s$ alors $Sr^* = 0$ et

$$Ss^* = \left\lfloor \frac{Log \dfrac{h}{h+b_s}}{Log\,\rho} \right\rfloor,$$

Si $b_r \geq (1-\alpha_S)b_s$ alors Ss^* et Sr^* sont liés par la relation suivante :

$$Sr^* + Ss^* = \left\lfloor \frac{Log\left(\dfrac{(1-\alpha_S)h}{(1-\alpha_S)h+b_r}\right)}{Log\,\rho} \right\rfloor.$$

Proposition 5.6 :

Soit un système à deux agents S et R dont les fonctions de coût sont présentées par les équations (5.5) et (5.6), alors il existe toujours

$$\alpha_S = 1 - \frac{br}{b}$$

pour lequel le problème décentralisé admet un équilibre de Nash (Ss^*, Sr^*) tel que $Ss^*+Sr^*=S^*$.

Démonstration :

On distingue deux cas :

i- Si $b_r < (1-\alpha_S)b_s$ alors la solution décentralisée est $(Ss^*, 0)$. Donc, l'équivalence entre système centralisé et système décentralisée n'est obtenue que pour $Ss^*=S^*$ ou encore pour $b_s=b$.

ii- Si $b_r \geq (1-\alpha_S)b_s$ alors $Ss^*+Sr^*=S^*$ pour :

$$\alpha_S = 1 - \frac{b_r}{b}$$

or pour un b_r et un b_s donnés, il existe toujours $\alpha_S = 1 - \dfrac{b_r}{b}$ tels que $b_r \geq (1-\alpha_S)b_s$ ◆

Le contrat α_S proposé dans ce travail est différent du contrat α proposé par Cachon [21] du fait que nous varions en même temps les paramètres α_S et br et donc notre contrat est plus proche de la combinaison des contrats α et β proposée dans [21]. D'ailleurs, notre équilibre de Nash peut être considéré comme un contrat β du fait de la considération de br comme variable et dans ce cas ce type de contrat ne coordonne pas notre système sauf pour $b_r=0$ ou $b_r=b$ (proposition 5.4).

L'équilibre de Nash obtenu lors de la coordination α_S dans les exemples numériques est $(0,S^*)$. Nous pouvons montrer à partir des fonctions de réaction des deux acteurs l'existence de cet équilibre mais nous ne garantissons pas son unicité.

Ainsi, le contrat α_S permet dans tous les cas de coordonner la chaîne logistique étudiée, c'est à dire, de ramener la solution décentralisée vers la solution centralisée. Par la suite, nous allons étudier la flexibilité de ce contrat. Pour ceci, nous allons définir les contraintes de participation (Cachon [21]) qui s'écrivent de la façon suivante :

$$Cs^N(Ss^{*N}, Sr^{*N}) - Cs^C(Ss^{*C}, Sr^{*C}) \geq 0$$

et

$$Cr^N(Ss^{*N}, Sr^{*N}) - Cr^C(Ss^{*C}, Sr^{*C}) \geq 0$$

ou Cs^N et Cr^N sont les coûts respectifs du fournisseur et du détaillant sous l'équilibre de Nash, Cs^C et Cr^C leurs coûts avec la coordination, Ss^{*N} et Sr^{*N} les niveaux de stocks optimaux à l'équilibre de Nash et Ss^{*C} et Sr^{*C} les niveaux de stocks optimaux avec la coordination.

L'étude analytique de ce contrat en tenant compte de ces contraintes n'est pas aisée. En partant du principe de l'existence d'un contrat initial qui fixe le partage des coûts de rupture entre les deux acteurs, les applications numériques montrent que le contrat α_S n'est pas très flexible, c'est à dire que, dans la majorité des cas, seul un des deux agents pourra accepter de participer au contrat. Dans la figure 5.7, nous avons pris pour chaque br le gain de chaque agent avec un contrat α_S par rapport à l'équilibre de Nash et nous remarquons que l'intervalle de br pour lequel les contraintes de participation sont valides est étroit (5% de l'intervalle de b_r global). Ainsi, afin de tenir compte des contraintes de participation, il faut choisir simultanément la proportion α_S et les taux de participation au coût de rupture b_s et b_r. Dans le cas ou ces paramètres sont fixés d'avance comme le modèle que nous avons présenté dans ce travail et pour rendre ce type de contrat valable, nous pouvons envisager des transferts d'argent qui partagent le profit de la partie gagnante. Cependant, nous pensons que ce type de contrat sera difficile à gérer.

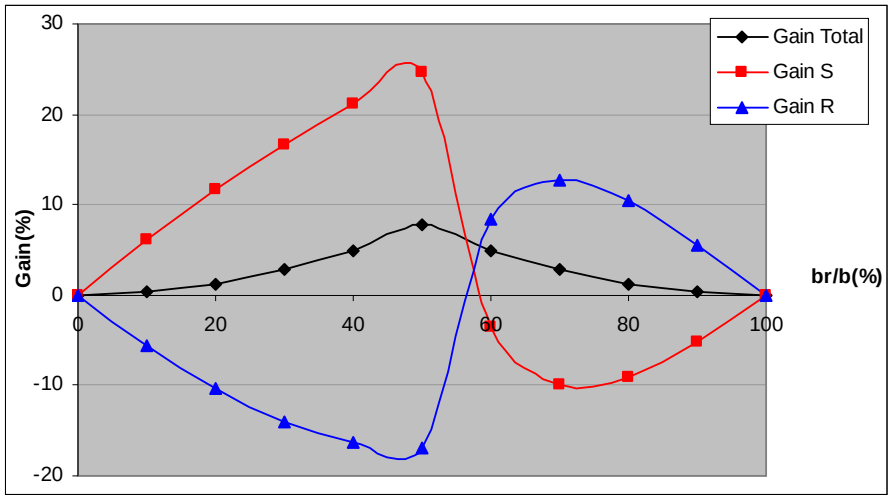


***Fig. 5.7** : les courbes de gain du contrat α_S par rapport à l'équilibre de Nash*

L'étude du contrat α_S pour des coûts de stockage différents entre les deux étages se fait de la même manière et les niveaux de stock optimaux s'écrivent de la façon suivante :

$$Ss^* = \left\lfloor \frac{Log \dfrac{h_s}{(1-\alpha_S)h_s + (b_s + \alpha_S \times h_r) \times \rho^{Sr}}}{Log\,\rho} \right\rfloor$$

$$Sr^* = \left\lfloor \frac{Log \dfrac{(1-\alpha_S)h_r}{(1-\alpha_S)h_r + b_r}}{Log\,\rho} - Ss \right\rfloor^+$$

A partir de ces équations, nous arrivons à calculer le paramètre :

$$\alpha_S = 1 - \frac{h_s}{h_r}\frac{b_r}{b}$$

qui coordonne la chaîne logistique. Néanmoins, cette condition n'est pas garante de la performance de l'équilibre de Nash obtenu puisqu'en dehors du point $b_s=b$, les coûts de la solution retenue sont toujours supérieurs à ceux de la solution centralisée du fait que $Sr^* > 0$ et que $h_r>h_s$.

4.2.7 Participation du détaillant au coût de stockage du fournisseur : le contrat α_R

Les résultats obtenus dans le paragraphe précédent, nous amènent à penser qu'un contrat identique qui propose un transfert inverse d'argent permet peut être de couvrir un domaine complémentaire par rapport aux contraintes de participation. Nous définissons ainsi le contrat α_R dans lequel le détaillant propose de payer une quantité

$\alpha_R h$ par unité de temps pour chaque élément de stock du fournisseur afin de l'inciter à garder plus de stock. Les différents coûts dans le système s'écrivent de la façon suivante :

$$Cs(Ss,Sr) = h(1-\alpha_R)E[Xs(Ss,Sr)] + b_s E[Y(Ss+Sr)] \quad (5.7)$$

$$Cr(Ss,Sr) = hE[Xr(Ss,Sr)] + \alpha_R hE[Xs(Ss,Sr)] + b_r E[Y(Ss+Sr)] \quad (5.8)$$

Le calcul des niveaux de stock optimaux pour le contrat α_R s'obtient à partir des calculs précédents puisque pour le fournisseur l'optimisation de (5.7) revient à l'optimisation de (5.1) avec un coût de stockage unitaire $h_s^{'} = h_s(1-\alpha_R)$. D'autre part, le coût supplémentaire $\alpha_R h_s Xs$ subit par le détaillant ne dépend pas de Sr donc Sr^* reste inchangé par rapport à l'équilibre de Nash.

Le contrat proposé permet de coordonner la chaîne logistique pour $\alpha_R = b_r/b$. Nous remarquons que pour ce cas le détaillant ne garde pas de stock et nous montrons que l'équilibre $(S^*,0)$ est un équilibre de Nash.

L'étude détaillée des coûts individuels subits par le fournisseur et le détaillant avec les contrats α_S et α_R montre que pour $\alpha_S = b_s/b$ et $\alpha_R = b_r/b$:

$$Cs_{\alpha S}(Ss,Sr) = Cs_{\alpha R}(Sr,Ss)$$

$$\text{et } Cr_{\alpha S}(Ss,Sr) = Cr_{\alpha R}(Sr,Ss).$$

Or, comme nous l'avons montré ci-dessus, $Ss^*=0$ pour la coordination α_S et $Sr^*=0$ pour la coordination α_R, donc les deux contrats sont équivalents de point de vue apport pour chaque acteur et de ce fait elles ont le même domaine de validité des contraintes de participation comme le montre la figure 5.8.

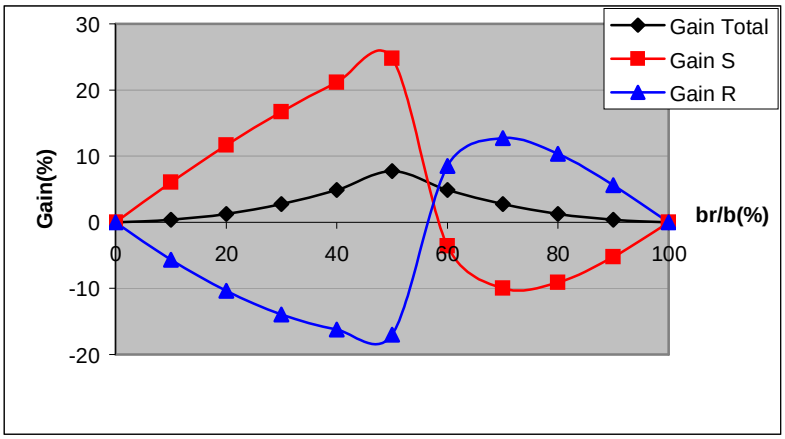


***Fig. 5.8** : les courbes de gain du contrat α_R par rapport à l'équilibre de Nash*

Notons que pour des coûts de stockage différents $h_s<h_r$, le contrat α_R est meilleur que le contrat α_S puisqu'il nous ramène exactement à la solution centralisée du fait que la totalité du stock sera gardée chez le fournisseur.

4.2.8 Partage du coût de stockage total : le contrat δ

Les deux contrats étudiés auparavant proposent des transferts d'argent unilatéraux entre les deux acteurs de la chaîne logistique. Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à des transferts dans les deux sens. Nous commençons par un contrat étudié par Cachon [21] que nous appelons le contrat δ et qui consiste à ce que les deux agents payent un coût de stockage en fonction du stock total de la chaîne logistique.

Les différents coûts dans le système s'écrivent de la façon suivante :

$$Cs(Ss,Sr) = h\delta(E[Xr(Ss,Sr)] + E[Xs(Ss,Sr)]) + b_s E[Y(Ss+Sr)] \qquad (5.9)$$

$$Cr(Ss,Sr) = h(1-\delta)(E[Xr(Ss,Sr)] + E[Xs(Ss,Sr)]) + b_s E[Y(Ss+Sr)] \qquad (5.10)$$

A partir des ces coûts, nous déterminons les fonctions de réaction de chaque acteur en fonction de la stratégie de l'autre :

$$Ss^*(Sr) = \left\lfloor \frac{Log\dfrac{\delta.h}{\delta.h+b_s}}{Log\,\rho} - Sr \right\rfloor$$

et

$$Sr^*(Ss) = \left\lfloor \frac{Log\dfrac{(1-\delta).h}{(1-\delta).h+b_r}}{Log\,\rho} - Ss \right\rfloor.$$

Ainsi, le contrat δ permet pour $\delta=1-b_r/b$ de proposer un équilibre de Nash (Ss^*,Sr^*) pour la solution décentralisée tels que $Ss^*+Sr^*=S^*$ (voir proposition 4 de Caldentey et Wein [24]).

Lemme 5.4 :

Les contrats α_S et δ présentent les mêmes contraintes de participation.

Démonstration : Dans un contrat α_S les coûts du fournisseur et du détaillant s'écrivent comme suit :

$$Cs(Ss^*, Sr^*) = hE[Xs(Ss^*, Sr^*)] + \alpha_S \times h \times E[Xr(Ss^*, Sr^*)] + b_s E[Y(Ss^* + Sr^*)]$$

et

$$Cr(Ss^*, Sr^*) = (1-\alpha_S)E[Xr(Ss^*, Sr^*)] + b_r E[Y(Ss^* + Sr^*)]$$

Or

$$\alpha_S = 1 - b_r/b \text{ et } E[Xs(Ss^*, Sr^*)] + E[Xr(Ss^*, Sr^*)] = E[X(Ss^* + Sr^*)]$$

donc

$$Cs(Ss^*, Sr^*) = \alpha_S \times h \times E[X(Ss^* + Sr^*)] + \alpha_S \times bE[Y(Ss^* + Sr^*)]$$

et

$$Cr(Ss^*, Sr^*) = (1-\alpha_S)h \times E[X(Ss^* + Sr^*)] + (1-\alpha_S)bE[Y(Ss^* + Sr^*)]$$

Donc, pour $\delta = 1 - b_r/b$, les deux contrats présentent les mêmes fonctions de coût et par la suite les mêmes contraintes de participation ◆

Ainsi, le contrat α_S est un cas particulier du contrat δ avec $Ss^* = 0$. Néanmoins, le contrat δ présente l'avantage de permettre aux deux agents de choisir arbitrairement leurs niveaux de stock tout en maintenant la coordination.

4.2.9 Le contrat α généralisé

Il est évident que le contrat δ permet par construction de coordonner la chaîne logistique. Cependant, cette propriété ne lui permet pas d'être plus flexible que les contrats α_S et α_R. Les différents contrats proposés sont des contrats à un paramètre. De ce fait, une question se pose : Un contrat à deux paramètres est-il plus flexible que ces contrats ? Cachon [21] montre que un transfert d'argent du fournisseur au détaillant à partir d'un contrat à un paramètre flexible pour un modèle de vendeur de journaux à une variable de décision ne l'est pas pour un modèle à deux variables de décision (les niveaux de stock des deux étages). Cependant, parmi les contrats à deux paramètres qu'il a étudié un seul a permis plus de flexibilité. Pour étendre cette réflexion, nous allons étudier, par la suite, un contrat combinant les deux contrats α_S et α_R afin de créer des transferts d'argent bilatéraux dépendant de deux paramètres.

Les différents coûts dans le système s'écrivent de la façon suivante :

$$Cs(Ss, Sr) = h(1-\alpha_R)E[Xs(Ss, Sr)] + \alpha_S hE[Xr(Ss, Sr)] + b_s E[Y(Ss + Sr)]$$
$$Cr(Ss, Sr) = h(1-\alpha_S)E[Xr(Ss, Sr)] + \alpha_R h_s E[Xs(Ss, Sr)] + b_r E[Y(Ss + Sr)]$$

A partir de cette structure de coûts, nous constatons que le contrat δ est un cas particulier du contrat α généralisé avec les paramètres $\alpha_S = (1 - \alpha_R)$.

L'optimisation du contrat α généralisé (α_G) s'effectue à partir des résultats obtenus précédemment. En effet, le fournisseur se trouve dans le même cas que celui du contrat α_S avec un coût de stockage $h_s^{'} = (1-\alpha_R)h_s$. De même, le détaillant optimise de la même manière que dans le contrat α_R avec un coût de stockage unitaire $h_r^{'} = (1-\alpha_S)h_r$, ce qui donne à l'optimum les équations suivantes :

$$Ss^* = \left\lfloor \frac{Log \dfrac{(1-\alpha_R)h_s}{(1-\alpha_R)h_s - \alpha_S h_r + (b_s + \alpha_S \times h_r) \times \rho^{Sr}}}{Log\,\rho} \right\rfloor$$

$$Sr^* = \left\lfloor \frac{Log \dfrac{(1-\alpha_S)h_r}{(1-\alpha_S)h_r + b_r}}{Log\,\rho} - Ss \right\rfloor^+$$

Le contrat α_G permet un choix plus large des paramètres du système afin coordonner la chaîne logistique. Ainsi, le système peut avoir un équilibre de Nash $(Ss^*, S^*\text{-}Ss^*)$ soit pour $\alpha_S=b_s/b$ et $\alpha_R \leq b_r/b$ soit pour $\alpha_R=b_r/b$ et $\alpha_S \leq b_s/b$. Ces deux systèmes d'équation présentent des comportements symétriques, pour cela nous détaillons un seul cas :

Le choix de $\alpha_S=b_s/b$ permet aux acteurs un large domaine de sélection pour $\alpha_R \leq b_r/b$. Rappelons que dans le cas ou $\alpha_R=0$, on se retrouve dans le cas de la coordination α_S alors que dans le cas $\alpha_R=b_r/b$ c'est la coordination δ. L'analyse de la variation de α_R montre deux résultats intéressants :

- En augmentant α_R le nombre d'équilibres de Nash augmente jusqu'à atteindre le cas de la coordination δ ou tous les équilibres $(Ss^*, S^*\text{-}Ss^*)$ sont des équilibres de Nash.
- En augmentant α_R les performances des équilibres de Nash deviennent de plus en plus homogènes, c'est à dire que les coûts des différents acteurs deviennent invariables.

Si cet élargissement de choix ne permet pas d'étendre le domaine de validité des contraintes de participation, le contrat α_G, par un choix judicieux de ses paramètres α_S et α_R, permet de répartir arbitrairement les coûts des différents acteurs et par la suite, il permet de partager l'apport du contrat entre les deux acteurs ce que les autres contrats ne le permettent pas.

5 Cas de la file *G/M/1* :

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons montré que la gestion décentralisée d'une chaîne logistique à deux étages est moins efficace qu'une politique centralisée qui optimise globalement les paramètres de la chaîne. Ensuite, nous avons quantifié cette perte de performance et nous avons proposé différents contrats dans l'objectif de coordonner la chaîne logistique.

D'autre part, lors du chapitre précédent, nous avons obtenu plusieurs résultats concernant l'effet de la variabilité de la demande sur le niveau de stock et le coût associé dans une politique de stock nominal dans un modèle à un étage de production/stockage. Or le modèle traité n'est autre que la version centralisée de l'étude que nous avons menée, ce qui nous a incité à étendre cette étude dans le cas modèle décentralisé afin de répondre à des questions telles que : est-ce que la pénalité de décentralisation augmente avec la variabilité ? Est-ce que la variabilité influe sur les contraintes de participation des contrats étudiés?

Dans ce paragraphe, nous allons développer la solution décentralisée d'un modèle à deux étages similaire à celui du début du chapitre dans le cas d'un service exponentiel de taux μ et d'une demande qui suit une loi Générale G de moyenne λ. Soit $\rho = \lambda/\mu$ le taux d'utilisation. La politique retenue est celle du stock nominal.

L'étude des files *G/M/1* montre que le calcul des probabilités à l'état stationnaire à tout instant est possible et que $p_0 = 1-\rho;\ p_i = (1-r)\rho r^{i-1}$ avec p_i la probabilité d'avoir i clients dans la file, r la solution de l'équation :

$$r = \int_0^\infty e^{-(1-r)\mu.t} f_G(t)dt$$

($f_G(t)$ la densité de probabilité de la loi d'arrivée) ou encore $r = L_A((1-r).\mu)$ où L_A est la transformée de Laplace de la loi d'arrivée (voir Gross et Harris [47]).

Les quantités moyennes qui rentrent en jeu sont :

$$E[X(S)] = S - \frac{\rho(1-r^S)}{1-r} \text{ et } E[Y(S)] = \frac{\rho.r^S}{1-r}.$$

Ce qui donne à l'optimum la valeur suivante de S^* :

$$S^* = \left\lfloor \frac{Log\frac{r}{\rho}\frac{h}{h+b}}{Log(r)} \right\rfloor$$

La politique du stock nominal n'est pas optimale dans le cas de la file *G/M/1*, mais nous pensons qu'elle est de bonne qualité et qu'elle peut être considérée comme un bon point de référence pour le système décentralisé (voir Jemai et Karaesmen [58]).

Soient $E[Xs]$ le stock moyen du fournisseur, $E[Xr]$ le stock moyen du détaillant et $E[Y]$ la demande moyenne en attente dans le système décentralisé.

$$E[Xs(Ss,Sr)] = Ss - \frac{\rho(1-r^{Ss})}{1-r}$$

$$E[Xr(Ss,Sr)] = Sr - \frac{\rho \times r^{Ss}(1-r^{Sr})}{1-r}$$

$$E[Y(Ss,Sr)] = \frac{\rho.r^{Ss+Sr}}{1-r}$$

Notons que $E[Xs(Ss, Sr)]$ et $E[Xr(Ss, Sr)]$ sont des fonctions convexes respectivement en *Ss* et en *Sr* et que les coûts de stock du système centralisé sont liés au coût de stock du système centralisé par la formule suivante :

$$E[Xs(Ss,Sr)] + E[Xr(Ss,Sr)] = E[X(Ss+Sr)]$$

Le coût de rupture total est partagé entre le fournisseur et le détaillant par les coefficients b_s et b_r qui sont supposés connus par les deux agents et fixés d'avance.

Soit $E[Y(Ss, Sr)]$ le nombre moyen des demandes en attente. $E[Y(Ss, Sr)]$ est une fonction convexe en *Ss* et en *Sr* et elle est liée à celui du système centralisé :

$$E[Y(Ss,Sr)] = E[Y(Ss+Sr)].$$

Nous prenons le cas ou les coûts de stockage sont identiques pour les deux étages. Nous pensons qu'à partir de l'étude précédente, ce paramètre n'influera pas la réponse aux questions que nous nous sommes posées pour cette partie.

Les coûts respectifs du fournisseur et du distributeur s'écrivent de la manière suivante :

$$Cs(Ss,Sr) = h_s E[Xs(Ss,Sr)] + b_s E[Y(Ss+Sr)] \quad (5.11)$$

$$Cr(Ss,Sr) = h_r E[Xr(Ss,Sr)] + b_r E[Y(Ss+Sr)] \quad (5.12)$$

Avec h est le coût de stock par unité de produit par unité de temps et b_s *(*respectivement b_r*)* le coût de rupture par commande non satisfaite par unité de temps du fournisseur (respectivement du détaillant) tels que $b_s + b_r = b$ le coût de rupture du système centralisé.

A partir des fonctions de coût *Cs(Ss, Sr)* et *Cr(Ss,Sr)*, nous déterminons les fonctions de réaction du fournisseur et du détaillant qui s'écrivent de la manière suivante :

$$Ss^*(Sr) = \left\lfloor \frac{Log\frac{r}{\rho}\frac{h}{h+b_s.r^{Sr}}}{Log(r)} \right\rfloor \text{ et } Sr^* = \left\lfloor \frac{Log\frac{r}{\rho}\frac{h}{h+b_r}}{Log(r)} - Ss \right\rfloor^+ .$$

On note bien que Sr^* et Ss^* sont inférieurs à S^* le niveau de stock optimal dans la solution centralisée.

La stratégie élaborée par les deux acteurs dans le problème décentralisé dépend du type de l'équilibre choisi. Comme pour le modèle précédent, nous étudions deux types d'équilibres : l'équilibre de Nash et l'équilibre de Stackelberg avec les deux variantes : le fournisseur est le meneur Stackelberg et le distributeur est le meneur Stackelberg.

5.1.1 Equilibre de Nash :

L'existence de l'équilibre de Nash pour le modèle décentralisé dans le cas d'une demande qui suit une loi générale se démontre de la même manière que celle dans le modèle avec des arrivées suivant une loi de Poisson et les simulations numériques indiquent que, du fait de la discontinuité des stratégies des deux acteurs, des équilibres multiples existent.

A partir des fonctions de réaction du fournisseur et du détaillant, nous obtenons les niveau du stock optimal Ss^* et Sr^* qui dépendent des fractions b_r et b_s de coût de rupture :

Si $br < bs$ alors $Sr^* = 0$ et

$$Ss^* = \left\lfloor \frac{Log\left(\frac{r}{\rho}\frac{h}{h+b_s}\right)}{Log(r)} \right\rfloor.$$

Si $br \geq bs$ alors Ss^* et Sr^* sont liés par la relation :

$$Sr^* + Ss^* = \left\lfloor \frac{Log\left(\frac{r}{\rho}\frac{h}{h+b_r}\right)}{Log(r)} \right\rfloor.$$

Les relations trouvées montrent bien que la proposition 5.4 est valable pour le cas d'une demande suivant une loi générale et que l'équilibre de Nash et la solution centralisée ne sont équivalents que pour les valeurs extrêmes de b_r et b_s.

5.1.2 Comparaison des solutions

Dans ce paragraphe, nous comparons la solution centralisée à l'équilibre de Nash par rapport au coût total du système.

Corollaire 5.2

Soit un système à deux agents *S* et *R* dont les fonctions de coût sont présentées par les équations (5.11) et (5.12). Soit *C(S)* la fonction coût du système centralisé. Alors,

$$Cs(Ss^*, Sr^*) + Cr(Ss^*, Sr^*) \geq C(S^*)$$

et on n'a l'égalité que pour $b_s = 0$ ou $b_r = 0$.

Démonstration :

Idem que pour le corollaire 5.3 ◆

Ainsi à partir de ce corollaire, comme dans le cas des files *M/M/1* l'équilibre de Nash s'avère moins efficace que la solution centralisée et on n'obtient l'égalité dans les deux systèmes que dans des cas extrêmes de b_r et b_s.

L'étude de la perte relative *PR* de l'équilibre de Nash par rapport à la solution centralisée en fonction de b_r donne des résultats similaires au cas de la file *M/M/1*, ainsi $Pr(b_r)$ est symétrique par rapport à $b_r=b_s$ et croissante sur *[0,b/2]*.

Notons aussi que la perte est décroissante en fonction de b et ne varie presque pas en fonction de ρ.

Dans ce qui suit, nous allons étudier l'influence de la variabilité de la demande sur la dégradation de la solution de Nash par rapport au système centralisé. L'étude de cette influence pour le cas discret s'avère difficile, c'est pourquoi, nous nous contentons de la relaxation continue. Nous définissons la perte relative comme étant :

$$Crel(r) = \frac{C(Ss^* + Sr^*) - C(S^*)}{C(S^*)}.$$

Or

$$C(S^*) = hS^* + h\frac{r-\rho}{1-r},$$

Donc

$$Cr(r) = \frac{(1-r)Log\dfrac{h+b}{h+b_s} + r\dfrac{b_r}{h+b_s}Log(r)}{(1-r)Log\dfrac{h}{h+b} + (r-\rho)Log(r)}.$$

Cr(r) est définie et croissante pour $S^* \geq 1$ et pour $Ss^*+Sr^*<S^*-1$ mais son coefficient de variation est faible et donc la variabilité de la demande n'a pas une grande influence sur la qualité de l'équilibre de Nash comme le montre la figure 5.9 et les écarts prononcés que montre la courbe $r=0.84$ est dû principalement aux effets des valeurs discrètes des stratégies *Ss* et *Sr*.

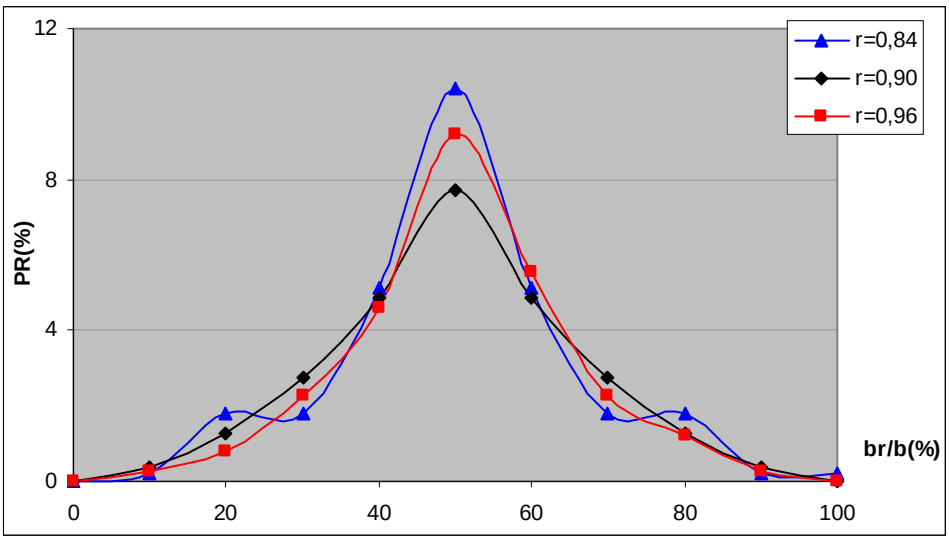


***Fig. 5.9** : L'efficacité de l'équilibre de Nash en fonction de b_r.*

La deuxième condition $Ss^*+Sr^*<S^*-1$ utilisée pour la comparaison des deux solutions vient du fait que la solution discontinue du problème n'est pas optimale dans le cas continue. Donc, pour une partie de S entre $[S^*-1, S^*]$ le coût de la solution décentralisée est inférieur à celui de la solution centralisée et donne ainsi des résultats non réalistes. Ainsi, l'utilisation de cette condition n'affectera en aucun cas la qualité de l'analyse faite puisque elle se traduit dans le cas discret par $Ss^*+Sr^*\leq S^*$ ce qui est démontrable comme dans la proposition 5.4.

5.1.3 Equilibre de Stackelberg

Comme nous l'avons fait dans le cas de la file *M/M/1*, dans l'équilibre de Stackelberg, nous allons étudier les deux équilibres : le fournisseur est le meneur Stackelberg qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Ss^* = \arg\min(Cs(Ss, Sr^*(Ss)))$$
$$\text{et } Sr^* = Sr^*(Ss^*)$$

et le détaillant est le meneur Stackelberg qui donne :

$$Sr^* = \arg\min(Cr(Ss^*(Sr), Sr))$$
$$\text{et } Ss^* = Ss^*(Sr^*).$$

Les expressions analytiques des niveaux de stock dans un équilibre de Stackelberg ne sont pas faciles à obtenir surtout dans le cas discret, nous nous contentons donc aux résultats numériques.

5.1.4 Comparaison des solutions

L'analyse des courbes d'efficacité de l'équilibre de Nash par rapport à la solution centralisée montre plusieurs ressemblances avec les courbes d'efficacité de l'équilibre de Stackelberg : la pénalité ne varie presque pas en fonction de ρ et diminue en fonction de b. L'équilibre « le fournisseur est le meneur Stackelberg » est moins efficace que l'équilibre « le détaillant est le meneur Stackelberg » pour $b_r<b_s$ puis devient meilleur sur le reste du domaine et les deux équilibres présentent des comportements symétriques par rapport à $b_r=b_s$.

La comparaison entre les équilibres de Stackelberg et celui de Nash montre des résultats similaires au cas du système avec des demandes suivant une loi de Poisson comme le montre la figure 5.10.

L'étude de l'équilibre de Stackelberg en fonction de la variabilité montre que l'efficacité de cet équilibre par rapport à la solution centralisée ne varie presque pas en fonction de *r*.

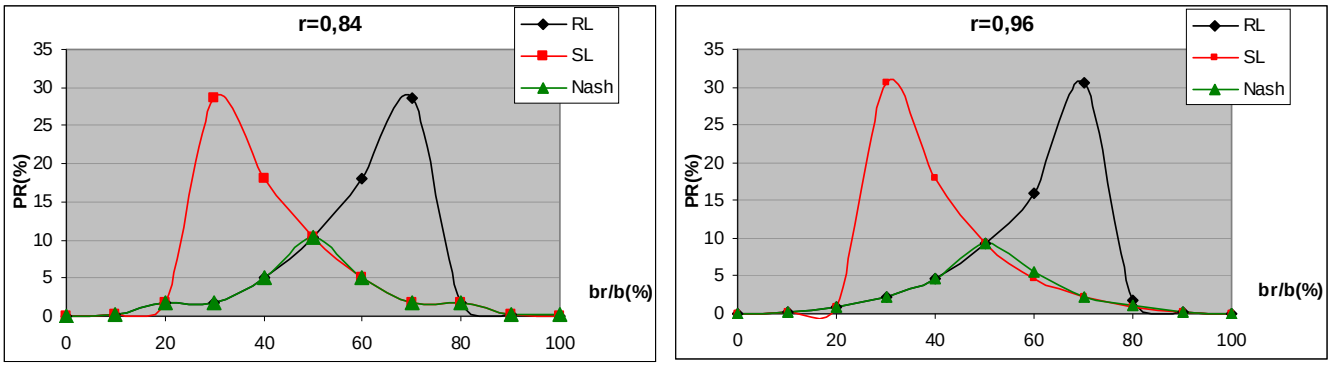


***Fig. 5.10** : comparaison des équilibres étudiés pour des r_0 différents*

En conclusion, nous montrons que la variabilité n'influe pas sur la pénalité de décentralisation dans le cas d'une chaîne logistique à deux étages pour une politique de stock nominal.

5.1.5 La Coordination

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux possibilités de coordination de notre modèle avec des arrivées qui suivent des lois générales. Vu les points communs que nous avons tirés des différents contrats étudiés dans la section précédente, nous nous contentons de l'étude du contrat α_S dans lequel le fournisseur se propose de payer une quantité $\alpha_S h$ par unité de temps pour chaque élément de stock du détaillant afin de l'inciter à garder plus de stock. Les différents coûts dans le système s'écrivent de la façon suivante :

$$Cs(Ss,Sr) = hE[Xs(Ss,Sr)] + \alpha_S hE[Xr(Ss,Sr)] + b_s E[Y(Ss+Sr)] \qquad (5.13)$$

$$Cr(Ss,Sr) = h(1-\alpha_S)E[Xr(Ss,Sr)] + b_r E[Y(Ss+Sr)] \qquad (5.14)$$

avec

$$E[Xs(Ss,Sr)] = Ss - \frac{\rho(1-r^{Ss})}{1-r}, \quad E[Xr(Ss,Sr)] = Sr - \frac{\rho.r^{Ss}(1-r^{Sr})}{1-r}$$

et

$$E[Y(Ss,Sr)] = \frac{\rho.r^{Ss+Sr}}{1-r}.$$

Les fonctions de réaction des deux acteurs s'écrivent comme suit :

$$Ss^*(Sr) = \left\lfloor \frac{Log\,\frac{r}{\rho}\,\frac{h}{(1-\alpha_S)h+(b_s+\alpha_S.h).r^{Sr}}}{Log(r)} \right\rfloor$$

et

$$Sr^*(Ss) = \left\lfloor \frac{Log\,\frac{r}{\rho}\,\frac{(1-\alpha_S)h}{(1-\alpha_S)h+b_r}}{Log(r)} - Ss \right\rfloor^+ .$$

A partir de la proposition 5.4, il est clair que pour qu'un contrat puisse coordonner notre système, il faut qu'il permette d'augmenter les niveaux des stocks optimaux du fournisseur et du détaillant afin d'avoir $Ss^*+Sr^*=S^*$. Nous nous intéressons dans ce type de coordination à l'équilibre de Nash qui s'écrit dans notre cas de la façon suivante :

Si $b_r < (1-\alpha_S)b_s$ alors $Sr^* = 0$ et

$$Ss^* = \left\lfloor \frac{Log\,\frac{r}{\rho}\,\frac{h}{h+b_s}}{Log(r)} \right\rfloor ,$$

Si $b_r \geq (1-\alpha_S)b_s$ alors Ss^* et Sr^* sont liés par la relation :

$$Sr^* + Ss^* = \left\lfloor \frac{Log\left(\frac{r}{\rho}\,\frac{(1-\alpha_S)h}{(1-\alpha_S)h+b_r}\right)}{Log(r)} \right\rfloor .$$

Proposition 5.7 :

Soit un système à deux agents *S* et *R* dont les fonctions de coût sont présentées par les équations (5.13) et (5.14), alors il existe toujours

$$\alpha_S = 1 - \frac{b_r}{b}$$

qui coordonne le système décentralisé.

Démonstration :

Idem que pour la proposition 5.6 ◆

L'étude des exemples numériques effectués sur la coordination α_S montre qu'il y a une légère différence entre la coordination des files *M/M/1* et des files *G/M/1*. Dans ce dernier cas le niveau de stock optimal Ss^* est généralement nul mais quelques exceptions apparaissent et sont dues à la possibilité d'équilibres multiples de Nash puisqu'on montre bien que l'équilibre $(0,S^*)$ est un équilibre de Nash. On dénombre même, que dans quelques cas la coordination n'est pas parfaite et il y a une légère différence entre le coût du système centralisé et le coût de la coordination.

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser aux contraintes de participation des deux agents que nous pouvons écrire de la façon suivante :

$$Cs^N(Ss^{*N}, Sr^{*N}) - Cs^C(Ss^{*C}, Sr^{*C}) \geq 0$$
$$\text{et } Cr^N(Ss^{*N}, Sr^{*N}) - Cr^C(Ss^{*C}, Sr^{*C}) \geq 0$$

avec Cs^N et Cr^N sont les coûts respectifs du fournisseur et du détaillant sous l'équilibre de Nash, Cs^C et Cr^C leurs coûts avec la coordination, Ss^{*N} et Sr^{*N} les niveaux de stocks optimaux à l'équilibre de Nash et Ss^{*C} et Sr^{*C} les niveaux de stocks optimaux avec la coordination.

L'étude numérique de ce contrat montre l'intervalle de b_r pour lequel les contraintes de participation sont valides est étroit et ne dépend pas de la variabilité. Ainsi, comme pour les files *M/M/1*, le contrat α_S manque de flexibilité et nécessite le choix simultané de α_S et des taux de participation au coût de backlog b_s et b_r pour pouvoir répartir arbitrairement les gains sur les deux acteurs.

6 Conclusion

La dégradation des performances des chaînes logistiques dans des systèmes décentralisés a été étudiée par plusieurs auteurs. Dans ce chapitre, nous avons étudié un système de production/stockage à deux étages avec une limitation de capacité au premier étage.

Cette étude nous a menés à des résultats intéressants : nous avons montré que la dégradation des performances du système dans un équilibre de Nash par rapport au système centralisé est due à la diminution des niveaux de stocks du système et que cette diminution est plus significative quand les deux acteurs partagent équitablement les coûts de rupture.

En outre, nous avons montré que la coordination d'un tel système est possible et nous avons proposé différents contrats de coordination.

Nous avons ensuite généralisé ces résultats à d'autres types d'équilibre (les équilibres de Stackelberg). A partir de travaux antérieurs sur la file *GI/M/1* (Jemai et Karaesmen [58]), nous avons étudié le cas d'une demande qui suit une loi générale et nous avons montré que la variabilité n'influe ni la pénalité de décentralisation ni le domaine de validité des contraintes de participation.

Dans le chapitre suivant, nous allons étendre cette étude à un système à deux étages de production/stockage et nous traiterons le cas de plusieurs détaillants.

Chapitre 6

Influence de la décentralisation sur les performances d'une chaîne logistique à deux étages de production/stockage, cas de plusieurs détaillants

1 Introduction

L'étude réalisée dans le chapitre précédent nous a conduit à des résultats analytiques intéressants concernant la dégradation de performances dans la gestion décentralisée d'une chaîne logistiques à deux étages et nous a permis de tester plusieurs contrats dans l'objectif de coordonner le système.

Cependant, le modèle étudié est un modèle simplifié qui ne reprend qu'en partie la complexité réelle des chaînes logistiques, et bien que les résultats obtenus nous permettent de mieux comprendre le comportement des chaînes logistiques, le passage à des modèles plus complexes rendra nos résultats plus pertinents.

A cette fin, nous nous intéressons dans ce qui suit à un modèle à deux étages de production/stockage gérés par un fournisseur et un détaillant. Le recours à un deuxième étage de production/stockage permet d'introduire une capacité supplémentaire dans la chaîne logistique et donc un temps de service qui peut être considéré comme un temps de transport non nul. Cette transformation supplémentaire favorise la notion de valeur ajoutée au produit et donc la validité de coûts de stockage différents entre les deux étages contestée pour le modèle précédent.

En pratique, rares sont les chaînes logistiques linéaires formées par un fournisseur et un détaillant. Pour cela, dans la seconde partie de ce chapitre, nous allons généraliser cette étude à plusieurs détaillants. Nous distinguerons les similitudes entre les deux modèles ainsi que les particularités d'une telle chaîne logistique.

Vu la complexité des modèles traités, nous nous contentons d'une étude numérique appuyée par des simulations. Nous nous intéressons à la théorie des jeux et nous traitons en particulier l'équilibre de Nash et l'équilibre de Stackelberg avec ses deux variantes : le fournisseur est le meneur Stackelberg et le détaillant est le meneur Stackelberg.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans le second paragraphe, nous passons en revue les différents travaux qui se sont intéressés aux modèles multi-étages. Nous décrivons ensuite le modèle étudié ainsi que les différentes notations employées. Au cours de la troisième partie, nous présentons la solution centralisée de notre problématique, notre contribution dans la détermination de la solution décentralisée et les possibilités de coordination du modèle à deux étages de production. Nous traitons ensuite le cas de plusieurs détaillants à partir de simulations numériques effectuées sous le logiciel Arena.

2 Etat de l'art

Les travaux traitant les chaînes logistiques multi-étages sont très nombreux. Parmi ces travaux, nous distinguons ceux qui s'intéressent à des étages de stockage et ceux qui ont introduit des contraintes de capacité (étages de production/stockage). Dans la première catégorie, l'un des premiers travaux a été présenté par Clark et Scarf [29] dans l'objectif de proposer une politique optimale minimisant les coûts de stockage et de rupture d'un modèle multi-étages à revue périodique. Par la suite, différentes politiques ont été proposées pour des modèles à revue périodique (Federgruen [39]) ou à revue continue (Axsäter [3]). Par ailleurs, Roundy [87] traite le cas de plusieurs détaillants avec des délais d'expédition constants entre les différents étages et avec des ventes perdues. Federgruen et Zipkin [40] traitent un modèle similaire avec une demande aléatoire, un contrôle périodique et avec des coûts de rupture.

Les auteurs qui ont étudié des modèles de production stockage Veatch et Wein [100] se sont intéressés à la comparaison des politiques stock nominal et kanban pour un système multi-étages avec des coûts de stockage et de rupture. Dallery et Liberopoulos [33,75] ont décrit la modélisation de ce système par l'approche files d'attente ainsi que différentes politiques de contrôle et ont proposé une nouvelle politique (le Kanban

étendu). Par la suite, Karaesmen et Dallery [61] ont étudié les performances de ces différentes politiques dans le cas d'un modèle à deux étages et ils ont distingué les politiques à un ou à plusieurs points de contrôle. Ils ont ensuite traité le cas de la satisfaction du client en tant que contrainte de service.

Les différents travaux examinés ci-dessus s'intéressent à une gestion centralisée de la chaîne logistique. Parmi ceux qui ont traité des modèles décentralisés, semblables au nôtre, Cachon et Zipkin [20] ont traité le cas de deux étages de stockage avec revue périodique et des coûts de rupture partagés entre les deux acteurs. Les délais d'expédition pour les différents étages sont constants. Gupta et Weerawat [50] ont étudié le cas de deux étages de production/stockage avec une stratégie de fabrication à la commande dans le deuxième étage et ont étudié les possibilités de coordination de ce modèle.

Chen et al. [27] se sont intéressés à un système de gestion de stock à deux étages géré par un fournisseur et N détaillants différents.

Un modèle similaire à deux étage de stockage avec une politique (R,Q) a été traité par Cachon [22] afin de répondre à une demande qui suit un processus de Poisson. Les détaillants sont identiques et le temps de transport entre les deux étages est constant. Pour une structure de coûts similaire à la nôtre, Cachon montre que l'équilibre de Nash est moins efficace que la solution centralisée et que cette dégradation de performance est due à un écart des niveaux des stocks entre les deux modèles. Cachon constate que dans certains cas le niveau de stock de la solution décentralisée peut être plus important que celui de la solution centralisée, un comportement qui diffère du modèle à un seul détaillant.

Anderson et Marklund [2] ont étudié un modèle similaire avec des demandes groupées en introduisant un temps de transport constant. Chaque acteur supporte un coût de stockage alors que les coûts de rupture sont à la charge des détaillants. Pour une politique (R,Q), Anderson et Marklund [2] proposent une méthode de décomposition du problème principal en $N+1$ sous-problèmes identiques et montrent que leur méthode donne des résultats proches de la solution optimale.

3 Modèle et notations

On considère deux étages de production constitués de $N+1$ machines : une machine au premier étage et N machines réparties sur N niveaux dans le deuxième étage. Les deux

étages sont reliés par un stock intermédiaire. Un stock de matière première est toujours disponible en amont de la première machine. Quand un produit est fabriqué sur cette machine, il est placé dans le stock intermédiaire. Un produit fabriqué sur l'une des machines du second étage est placé dans le stock de produits finis du niveau correspondant. Cette chaîne logistique est gérée par *N+1* acteurs. Un fournisseur qui gère le premier étage de production/stockage et *N* détaillants gérant chacun un niveau de production/stockage du second étage. Afin de répondre à une demande aléatoire indépendante et identiquement distribuée modélisée par un processus de Poisson de taux λ_{Ri} , chaque détaillant adopte une politique de stock nominal. Le fournisseur répond à la demande des détaillants en appliquant la même politique (fig. 6.1)

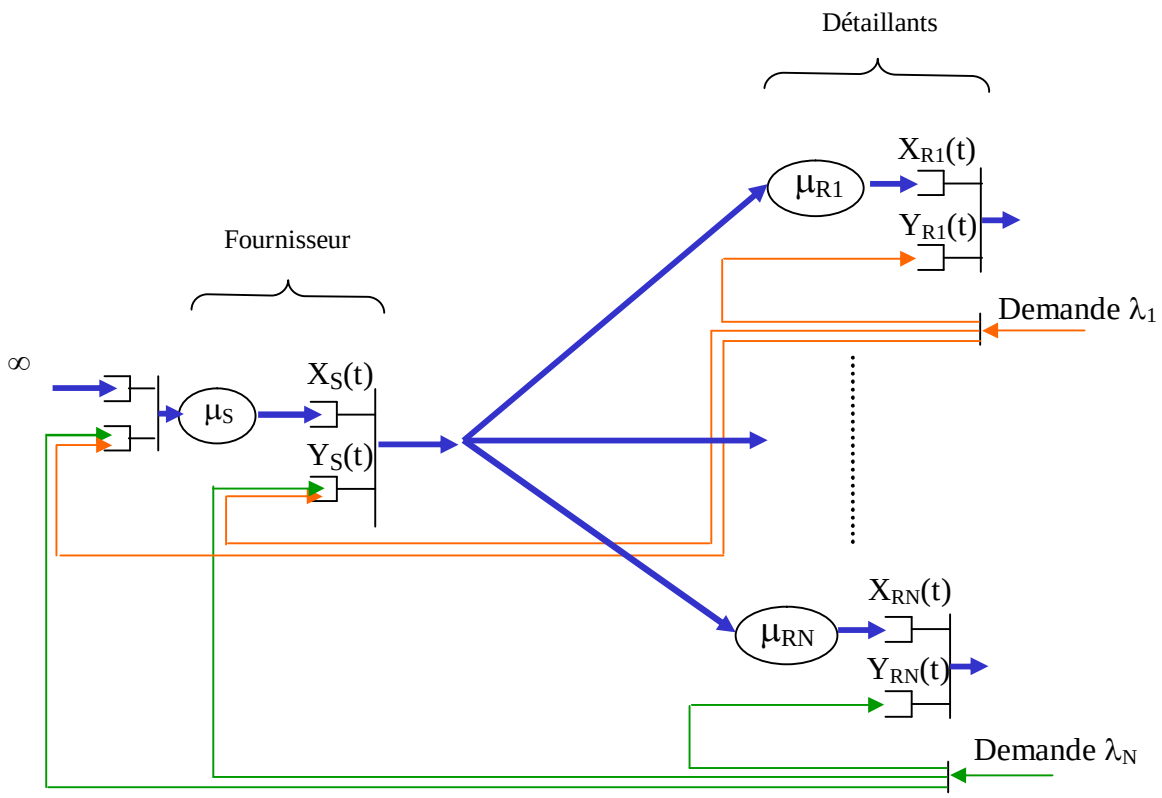


Fig. 6.1 : *Modèle général*

Les étages de production sont modélisés par des serveurs exponentiels de taux μ_S pour le fournisseur et μ_{Ri} pour le détaillant *i*.

Soit $X_i(t)$ le niveau de stock de l'agent *i* à l'instant *t*, $Y_i(t)$: le niveau de la demande en attente de l'agent *i* à l'instant *t*, *Ss* et Sr_i les niveaux de stock nominaux choisis par les différents acteurs du système.

Le fournisseur subit un coût de stockage h_s par unité de produit par unité de temps. On suppose que tous les détaillants supportent le même coût de stockage $h_r \geq h_s$ et le même coût de rupture b par demande en attente par unité de temps.

Comme dans le chapitre précédent, le coût de rupture est partagé entre le fournisseur et le détaillant concerné avec les proportions b_{si} et b_{ri} tels que $b_{si}+b_{ri}=b$.

4 Cas de deux étages de production

Dans ce paragraphe, nous traitons le cas particulier d'une chaîne logistique à deux acteurs : un fournisseur et un détaillant.

4.1 La solution centralisée

Karaesmen et Dallery [61] ont étudié numériquement le modèle centralisé de ce système. Ils ont déterminé la solution optimale du système et ils ont montré que pour deux étages de production identiques, la politique de stock nominal est une bonne approximation de la solution optimale (l'écart relatif ne dépasse pas 2,47% dans les applications numériques qu'ils ont réalisées). Nous retenons cette solution comme un point de référence pour l'étude du modèle décentralisé.

Le calcul des niveaux des stocks nominaux dans la version centralisée s'effectuera numériquement sur Visual C++ à partir des niveaux moyens des stocks et d'attente pour tout couple de stocks nominaux *(Ss,Sr)*.

$$C(Ss,Sr) = h_s E[Xs(Ss,Sr)] + h_r E[Xr(Ss,Sr)] + bE[Y(Ss,Sr)]$$

A partir de la matrice des coûts, la stratégie optimale de la solution centralisée correspondra au coût minimal. Le recours à cette méthode est possible du fait que nous traiterons des modèles avec des taux d'utilisation pas très proches de 1 ($\rho \leq 0.95$) et des rapports de coûts unitaires pas trop importants ($b/h \leq 20$) ce qui nous ramène à des solutions optimales avec des niveaux de stock inférieures à 50 donc un temps de calcul acceptable.
Cependant, il est possible de traiter des modèles plus chargés en approximant la longueur de la file correspondant au deuxième étage par une loi géométrique (voir Weerawat [103]). Nous pouvons même remonter à partir de cette approximation à la solution optimale en recalculant le coût total des différents couples de *(Ss, Sr)* au

voisinage de la solution fournie par l'approximation. Néanmoins, nous pensons que l'augmentation de ρ et de *b/h* n'influera pas les résultats obtenus dans ce travail.

4.2 La solution décentralisée

Dans cette partie, nous essayerons de déterminer les performances du système décentralisé pour les trois types d'équilibres étudiés auparavant à partir de résultats numériques obtenus sur Visual C++, Mathematica et un recueil des résultats sur le tableur Excel.

A partir des différents paramètres μ_1, μ_2,λ, h_1, h_2 et b Karaesmen et Dallery [61] déterminent le coût total du système pour chaque couple de niveau de stock *(Ss, Sr)*.

Or

$$C(Ss,Sr) = h_s E[Xs(Ss,Sr)] + h_r E[Xr(Ss,Sr)] + bE[Y(Ss,Sr)].$$

Donc la détermination des coûts moyens se fait de la manière suivante :

$$E[Xs(Ss,Sr)] = C(Ss,Sr) \text{ pour } h_s=1,\ h_r=0,\ b=0,$$
$$E[Xr(Ss,Sr)] = C(Ss,Sr) \text{ pour } h_s=0,\ h_r=1,\ b=0,$$
$$E[Y(Ss,Sr)] = C(Ss,Sr) \text{ pour } h_s=0,\ h_r=0,\ b=1.$$

Les trois matrices obtenues permettent de calculer les deux matrices de coût du fournisseur et du détaillant *Cs(Ss,Sr)* et *Cr(Ss,Sr)* à partir des formules suivantes :

$$Cs(Ss,Sr) = h_s E[Xs(Ss,Sr)] + b_s E[Y(Ss,Sr)]$$
$$Cr(Ss,Sr) = h_r E[Xr(Ss,Sr)] + b_r E[Y(Ss,Sr)]$$

4.2.1 Equilibre de Nash :

Rappelons que dans un équilibre de Nash le choix des stratégies des deux agents est déterminé à partir des équations :

$$Sr^*(Ss) = \arg\min(x, Cr(Ss,x))$$
$$\text{et } Ss^*(Sr) = \arg\min(x, Cs(x,Sr)).$$

Les simulations numériques faites sur des systèmes de production à deux étages montrent que *Cs(Ss, Sr)* est strictement convexe en *Ss* et *Cr(Ss, Sr)* est strictement

convexe en *Sr* donc $Sr^*(Ss)$ et $Ss^*(Sr)$ sont des fonctions et chaque agent a une seule bonne réponse au choix de l'autre agent. Néanmoins, l'étude du cas discret peut révéler, du fait de la discontinuité, des équilibres de Nash multiples.

4.2.2 Comparaison des solutions

Comme le montre la figure 6.2, la perte relative du système décentralisé dans un équilibre de Nash est une fonction décroissante de b_r et n'est égale à 0 que pour $b_r=b$, c'est-à-dire quand le détaillant prend en charge tout le coût de rupture. Ce résultat diffère de celui obtenu lors du chapitre précédent qui suggère une perte relative croissante avec b_r/b jusqu'à atteindre un maximum déterminé à partir des paramètres du système puis décroissante sur le reste de l'intervalle.

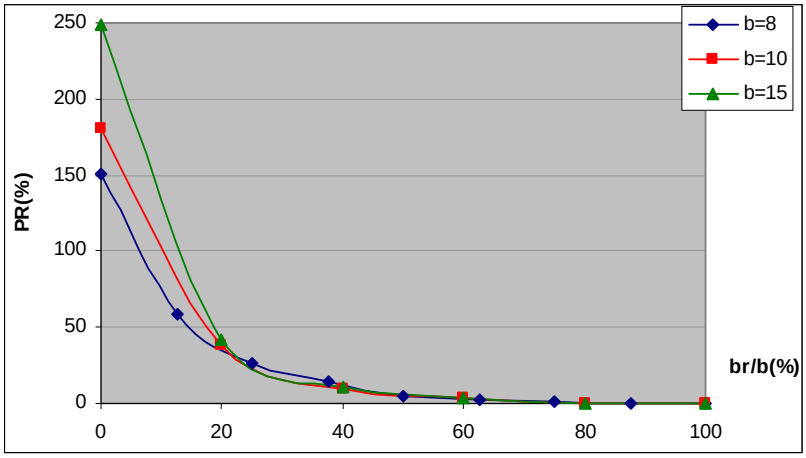


Fig. 6.2 : *Perte relative à l'équilibre de Nash*

Cette différence par rapport aux résultats précédents s'explique par l'existence d'un temps de service non nul entre les deux stocks qui fait que le fournisseur ne contrôle plus le coût de rupture même s'il en paye une grande partie puisque ce coût est directement relié au niveau de stock du détaillant. Donc, pour b_r faible, le détaillant n'est pas concerné par le coût de rupture et diminue ainsi ses stocks pour optimiser sa chaîne logistique travaillant presque à la production par commande. Ainsi, le client, en grande proportion insatisfait, engendre des coûts de rupture qui seront subits par le fournisseur et l'augmentation de son niveau de stock ne changera rien à la situation.

Cependant, nous pouvons aisément vérifier que le modèle étudié lors du chapitre précédent est une limite du modèle à deux étages de production avec un taux de service du deuxième étage qui tend vers l'infini comme le montre la figure ci-dessous pour les paramètres suivants ($\lambda=1$; $\mu_1=1,2$; $h_s=h_r=1$ et $b=8$).

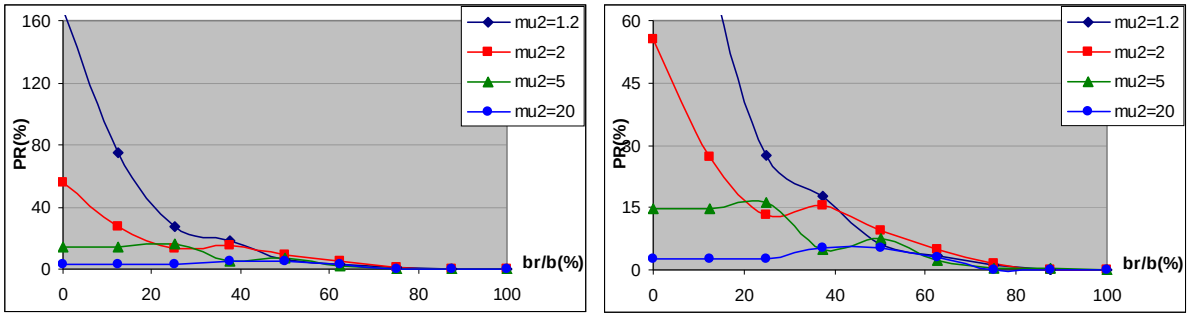


Fig. 6.3 : *Comportement de PR en fonction du taux de service de l'étage 2*

En effet, nous remarquons que la pénalité de décentralisation perd sa monotonie quand μ_2 augmente. Ainsi, pour $\mu_2=20$ le comportement de *PR* est très proche de celui du modèle du chapitre 5 avec une pénalité maximale pour $b_r \cong b_s$. Par ailleurs, nous distinguons quelques irrégularités sur les courbes de *PR* pour μ_2 pas trop important. Celles-ci sont dues au temps de passage non nul entre les deux étages qui peut conduire à une baisse des performances de la chaîne même si le stock global augmente.

4.2.3 Equilibre de Stackelberg :

Dans un équilibre « le fournisseur est le meneur Stackelberg », l'étude de notre système revient à la résolution des équations :

$$Ss^* = \arg\min(Cs(Ss, Sr^*(Ss))) \text{ et } Sr^* = Sr^*(Ss^*),$$

alors que dans un équilibre « le détaillant est le meneur Stackelberg» les équations deviennent :

$$Sr^* = \arg\min(Cr(Ss^*(Sr), Sr)) \text{ et } Ss^* = Ss^*(Sr^*).$$

Dans un système à deux étages de production, comme pour l'équilibre de Nash, les pertes relatives des deux équilibres de Stackelberg sont décroissantes en fonction du paramètre b_r. On a même une très forte similitude entre les trois équilibres comme le montre la figure 6.4 :

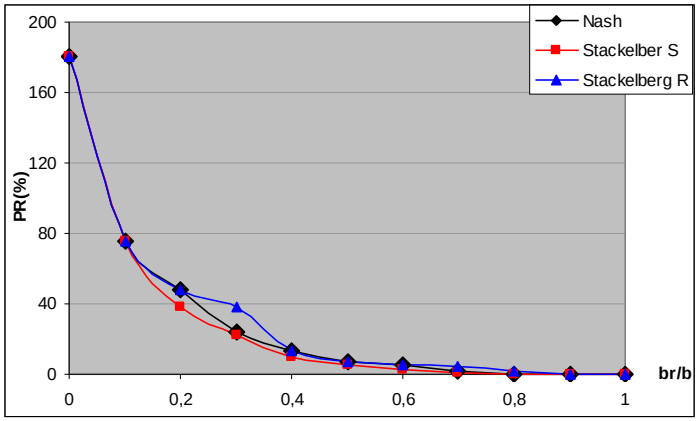


Fig. 6.4 : *Comparaison entre les différents équilibre d'un système décentralisé*

Cette similitude ne veut pas dire que les trois équilibres sont équivalents, d'ailleurs on vérifie bien, dans les applications numériques que nous avons réalisées, que les coûts subits par chaque agent diffèrent d'un équilibre à l'autre (tab.6.1).

	Equilibre de Nash				**Le fournisseur est le meneur Stackelberg**				**Le détaillant est le meneur Stackelberg**			
b_r	***Ss****	***Sr****	***Cs****	***Cr****	***Ss****	***Sr****	***Cs****	***Cr****	***Ss****	***Sr****	***Cs****	***Cr****
0	11	0	66,4073	0	11	0	66,4073	0	11	0	66,4073	0
1	10	4	37,3565	4,2805	5	5	36,761	4,92096	10	4	37,3565	4,2805
2	9	6	28,0495	7,0169	3	9	24,4635	8,30664	9	6	28,0495	7,01698
3	7	9	19,9023	9,3958	3	11	18,4298	10,458	8	7	23,4828	9,27994
4	6	11	15,6709	11,214	0	16	13,2749	12,6508	6	11	15,6709	11,2144
5	5	13	12,4965	12,834	0	17	11,0525	13,9862	5	13	12,4965	12,8346
6	4	14	10,6275	14,293	0	18	9,26039	15,1414	4	14	10,6275	14,2932
7	2	17	8,16836	15,889	0	19	7,82514	16,1599	3	15	8,9684	15,6801
8	1	19	6,77367	16,992	0	20	6,68083	17,0737	2	17	7,23907	16,8191
9	1	19	5,9616	17,804	0	20	5,86984	17,8847	1	19	5,9616	17,8044
10	0	21	5,06018	18,632	0	21	5,06018	18,6321	0	21	5,06018	18,6321

Tab. 6.1 : *Les niveaux de stock optimal et les coûts associés du fournisseur et du détaillant dans les trois équilibres étudiés.*

Nous remarquons que dans un équilibre « le fournisseur est le meneur Stackelberg », les coûts de ce dernier sont meilleurs que dans l'équilibre de Nash, alors que dans l'équilibre « le détaillant est le meneur Stackelberg », ce dernier adopte la même solution que Nash. Ceci peut s'expliquer comme suit : quand le fournisseur domine, il se permet de réduire ses stocks même s'il est concerné par les coûts de rupture car il

n'est pas en contact direct avec le client. Alors que dans le cas contraire, le détaillant ne peut pas obliger le fournisseur de faire plus de stock et adopte l'équilibre de Nash.

D'autre part, la similitude entre les trois équilibres n'est pas parfaite et on remarque que l'équilibre « le fournisseur est le meneur Stackelberg » est légèrement plus performant que les deux autres équilibres, ce qui n'était pas le cas pour le modèle étudié lors du chapitre précédent. Cette différence peut s'expliquer par le fait que dans cet équilibre, le fournisseur, plus fort, impose au détaillant de garder plus de stock, ce qui est bénéfique pour la chaîne logistique.

4.2.4 La coordination :

Dans la première partie de cette section, nous avons étudié les trois équilibres du système décentralisé et nous avons conclu qu'elles sont presque équivalentes et que, dans les trois cas, la perte relative est décroissante en fonction de b_r. Dans ce qui suit, nous allons essayer d'étudier l'influence d'un contrat α_S sur les performances du système.

Rappelons que dans un contrat α_S, le fournisseur propose de payer une quantité $\alpha_S h$ par unité de temps pour chaque élément de stock du détaillant afin de l'inciter à garder plus de stock. Dans le cas de coûts de stockage identiques, les différents coûts dans le système s'écrivent de la façon suivante :

$$Cs(Ss,Sr) = hE[Xs(Ss,Sr)] + \alpha_S hE[Xr(Ss,Sr)] + b_s E[Y(Ss,Sr)]$$
$$Cr(Ss,Sr) = h(1-\alpha_S)E[Xr(Ss,Sr)] + b_r E[Y(Ss,Sr)]$$

Nous vérifions bien que la proposition 5.5 du chapitre précédent est valable pour notre système et qu'il existe toujours

$$\alpha_S = 1 - \frac{b_r}{b}$$

qui coordonne le système décentralisé.

Nous allons par la suite s'intéresser à la flexibilité du contrat α_S c'est-à-dire la possibilité d'un partage arbitraire des gains de la chaîne logistique entre les deux acteurs. Les contraintes de participation s'écrivent comme suit :

$$Cs^N(Ss^{*N}, Sr^{*N}) - Cs^C(Ss^{*C}, Sr^{*C}) \geq 0$$
$$\text{et } Cr^N(Ss^{*N}, Sr^{*N}) - Cr^C(Ss^{*C}, Sr^{*C}) \geq 0$$

avec Cs^N et Cr^N sont les coûts respectifs du fournisseur et du détaillant sous l'équilibre de Nash, Cs^C et Cr^C leurs coûts avec la coordination, Ss^{*N} et Sr^{*N} les niveaux de stocks optimaux à l'équilibre de Nash et Ss^{*C} et Sr^{*C} les niveaux de stocks optimaux avec la coordination.

Les résultats numériques montrent que, contrairement au modèle étudié dans le chapitre précédent, les contraintes de participation sont vérifiées sur une proportion importante de l'intervalle b_r (fig. 6.5), et donc le contrat α_S est beaucoup plus flexible dans le cas de deux étages de production que dans le cas d'un étage de production et un étage de stockage.

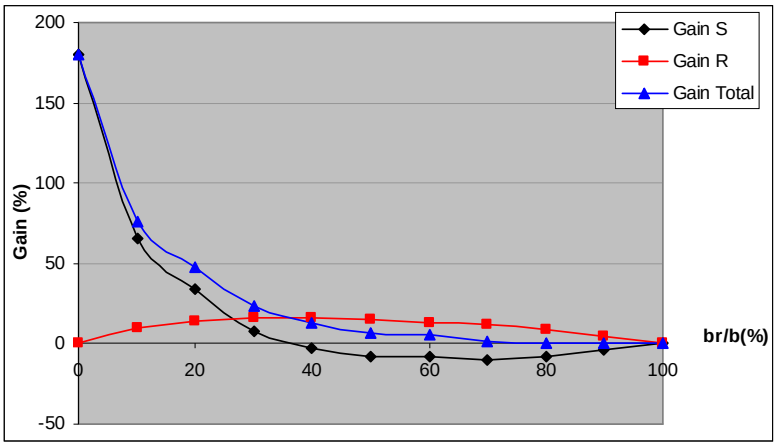


***Fig. 6.5** : les courbes de gain du contrat α_S par rapport à l'équilibre de Nash*

Le comportement des profits des différents acteurs sont très intuitifs. Le détaillant est toujours partant pour la participation au contrat puisque la participation du fournisseur à ses coûts de stockage ne peut lui être que bénéfique et lui permet d'augmenter ses niveaux de stock afin de diminuer le nombre moyen des demandes en attente. Quant au fournisseur, il est intéressé par le contrat quand il est bien impliqué dans les coûts de rupture, mais cet intérêt disparaît quand le détaillant commence à bien subir ces coûts et donc garder plus de stocks. Par la suite, les gains espérés du fournisseur en coût de rupture sont moins importants que la participation au coût de stockage.

5 Cas de plusieurs détaillants

Les résultats obtenus dans le paragraphe précédent et leurs similitudes avec le modèle simplifié du chapitre précédent nous ont incités à nous approcher davantage du monde réel et nous intéresser à des modèles de chaînes logistiques à plusieurs détaillants. Dans

ce qui suit, nous allons étudier deux modèles de chaîne logistique avec plusieurs détaillants. Dans le premier modèle, nous traitons le cas de trois détaillants identiques. Dans le deuxième modèle, nous considérons le cas de deux détaillants différents, nous distinguons deux politiques différentes du fournisseur vis à vis du traitement des demandes des détaillants : la politique FIFO (premier arrivé premier servi) et la politique avec priorité. La majeur partie de cette étude a été faite par B. Biette [10] dans le cadre de son projet de DEA que j'ai encadré.

5.1 Méthode utilisée

Comme le montre l'étude précédente, la résolution analytique de notre problématique s'avère difficile. Nous nous contentons des résultats numériques obtenus à partir de la simulation.

Les coûts des différents acteurs sont :

$$Cs(Ss,Sr) = hE[Xs(Ss,Sr)] + b_s E[Y(Ss,Sr)]$$
$$Cr_i(Ss,Sr) = hE[Xr_i(Ss,Sr)] + b_r E[Y_i(Ss,Sr)]$$

Ainsi, la détermination de l'équilibre de Nash nécessite le calcul des niveaux moyens des stocks $E[Xs]$ et $E[Xr_i]$, et des demandes en attente $E[Y]$ et $E[Y_i]$[5] pour tous les couples *(Ss, Sr)*, ce qui se traduit par un nombre très important de simulations.

Afin de remédier à ce problème, nous traitons des chaînes logistiques avec des taux d'utilisation inférieurs à 0.85, ce qui nous ramène à des niveaux de stock optimaux inférieurs à 15. Ainsi, nous déduisons les paramètres à partir des relations qui existent entre les différentes simulations (voir Biette [10]).

Nous aboutissons ensuite au modèle de simulation ci-dessous (fig. 6.6)

[5] Notons que l'attente du fournisseur est définit comme étant la somme des attentes de tous les détaillants : $\sum_i E[Y_i] = E[Y]$

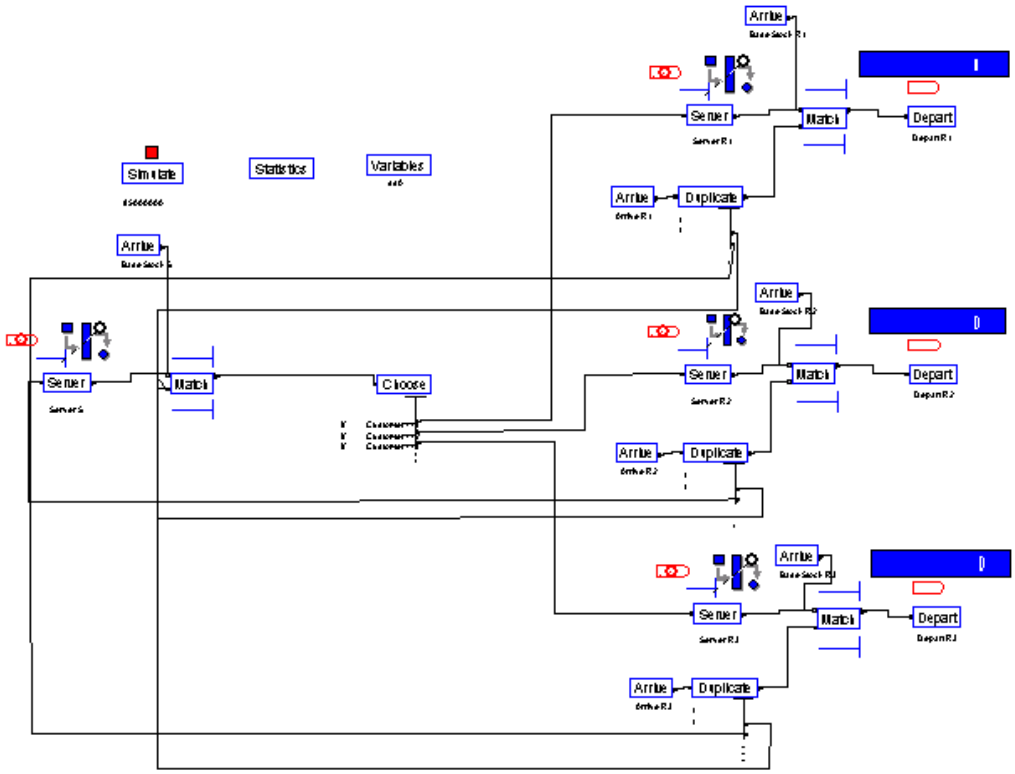


Fig. 6.6 : *modèle de simulation sur ARENA*

Les résultats obtenus à partir de la simulation sont par la suite traités dans Excel afin de déterminer pour l'équilibre de Nash et les équilibres de Stackelberg le niveau de stock nominal et les coûts associés de chaque acteur du système.

5.2 Cas de trois détaillants identiques

Dans un modèle à trois détaillants identiques, il est clair qu'à l'optimum, les détaillants optent pour la même stratégie. Ainsi, les variables de décision se résument aux niveaux de stock nominal *Ss* choisi par le fournisseur et *Sr* choisi par chaque détaillant.

L'étude du comportement du système pour les trois types d'équilibres mentionnés auparavant permet de vérifier la dégradation des performances de la chaîne logistique dans une gestion décentralisée par rapport à une gestion centralisée et que cette dégradation est due à la diminution du niveau de stock global de la chaîne.

Comme dans le cas du modèle avec un détaillant, les résultats obtenus montrent que le choix de l'équilibre n'influe pas significativement la pénalité de compétition malgré un léger avantage pour l'équilibre « le fournisseur est le meneur Stackelberg », et que cette

perte est importante quand le fournisseur supporte tous les coûts de rupture et décroît en fonction de b_r/b jusqu'à atteindre les performances du système centralisé pour $b_r/b=1$. (fig. 6.7).

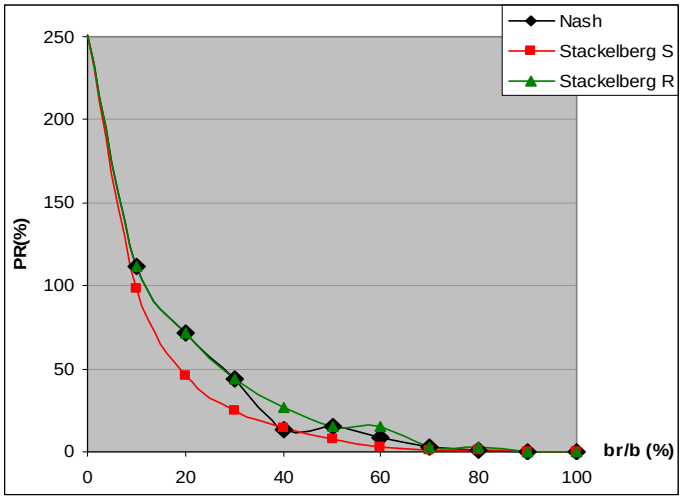


Fig. 6.7 : *Pénalité de décentralisation pour 3 détaillants identiques*

Nous avons, ensuite, fait varier la valeur de ρ et montré que la pénalité augmente avec le taux d'utilisation du système.

Nous achevons l'étude du modèle à trois détaillants identiques par l'étude du contrat α_S et nous concluons que, comme dans l'étude précédente, ce contrat coordonne la chaîne logistique pour

$$\alpha_S = 1 - \frac{b_r}{b}.$$

Néanmoins, le comportement des gains relatifs des différents agents diffère du cas du modèle à un détaillant même si, pour les deux modèles, les contraintes de participation sont satisfaites sur des intervalles très semblables comme le montre la figure 6.8.

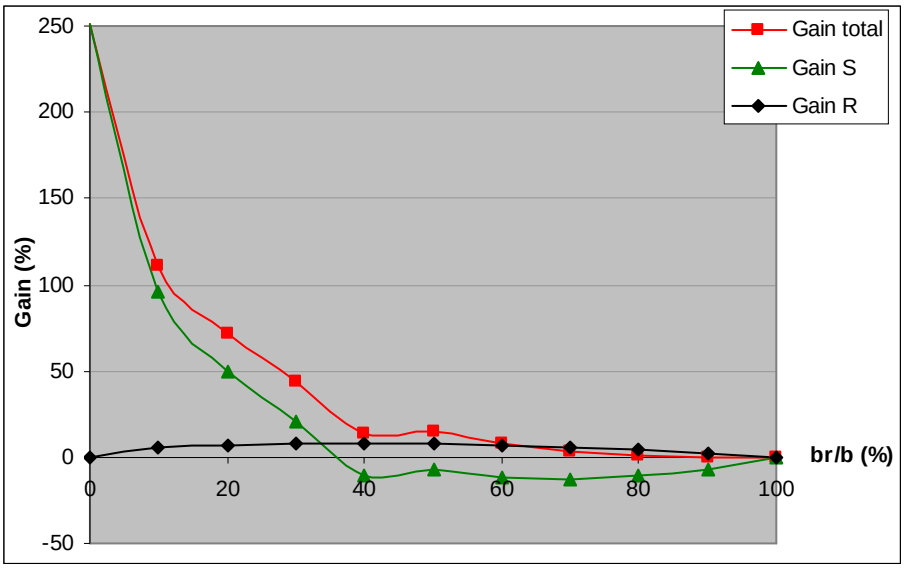


Fig. 6.8 : *contraintes de participation*

Nous avons testé, enfin, le comportement du domaine de validité des contraintes de participation et nous avons conclu que sa largeur est décroissante en fonction de b et en fonction de ρ.

5.3 Cas de deux détaillants différents

Dans ce qui suit, nous nous intéressons au modèle avec des détaillants différents. Comme la complexité du problème augmente considérablement avec le nombre de variables de décision, nous optons pour le cas de deux détaillants et nous nous contentons de l'équilibre de Nash.

Nous différencions les deux détaillants à travers deux voies différentes : nous varions dans un premier lieu le taux d'utilisation pour des demandes de moyennes identiques, ce qui se traduit par un détaillant avec une capacité de production plus importante donc plus de réactivité par rapport à la demande. Dans la deuxième variante, nous considérons un taux de demande différent pour des taux d'utilisation identiques, donc même si les détaillants sont identiques entre eux, ils sont différents vis à vis du fournisseur. Nous supposons que les détaillants subissent des coûts de stockage et des coûts de rupture identiques.

5.3.1 L'impact du taux d'utilisation

Cette étude montre que la différence des taux d'utilisation agit sur les coûts des détaillants comme le montre la figure 6.9 où les coûts sont doublés pour le détaillant 2

avec $\rho_{R2} = 0.85$ ($\rho_{R1} = 0.75$). Néanmoins, la pénalité de décentralisation est identique aux modèles précédents et décroît en fonction de b_r jusqu'à s'annuler pour $b_r=b$.

Afin de coordonner le modèle, nous optons pour le contrat α_S qui permet de ramener la solution décentralisée à la solution centralisée pour

$$\alpha_S = 1 - \frac{b_r}{b}.$$

L'étude des contraintes de participation montre que le domaine de validité de ces derniers est identique au modèle précédent. Cependant, une légère différence réside dans le fait que la coordination profite au deuxième détaillant plus qu'au premier. Rappelons que, puisque $\rho_{R1} < \rho_{R2}$, le deuxième détaillant est moins réactif vis à vis de la demande et donc garde plus de stock que le premier, ce qui explique son intérêt pour la coordination (fig. 6.10).

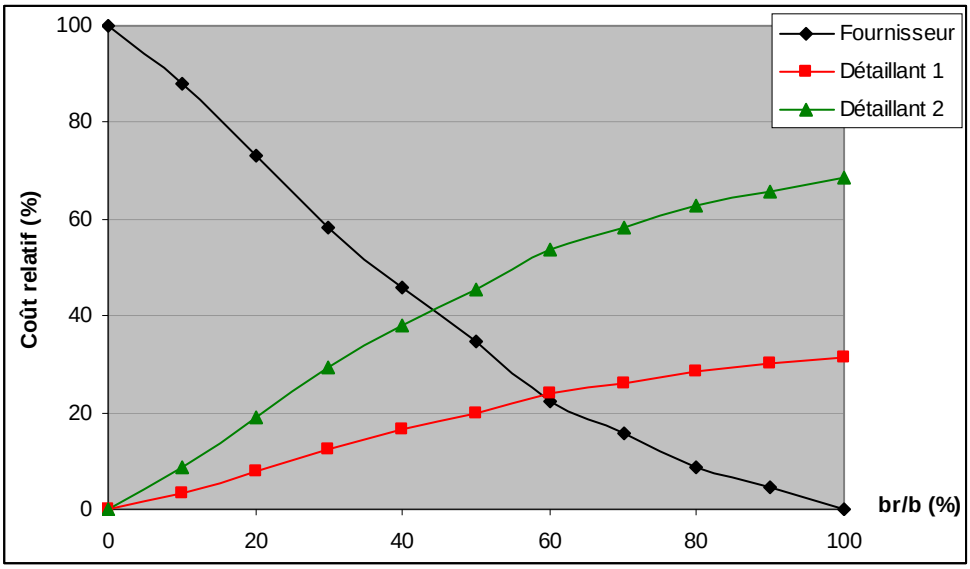


Fig. 6.9 : *coûts des différents acteurs en fonction de br*

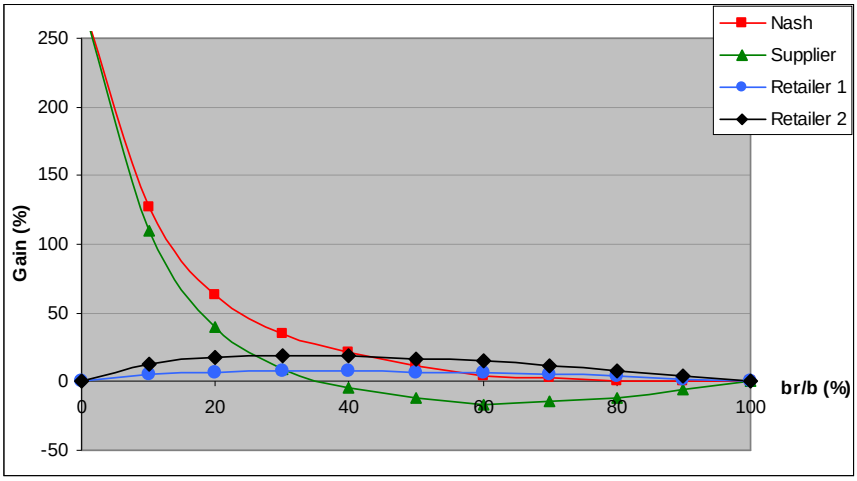


Fig. 6.10 : *Contraintes de participation*

5.3.2 L'impact du taux de la demande

Dans ce paragraphe, nous étudions un modèle à deux détaillants ayant le même taux d'utilisation et des taux de demandes différents. Le premier détaillant fait face à une demande plus importante. Nous montrons que les coûts supportés par R_1 sont moins importants que les coûts supportés par R_2. En particulier pour $\lambda_{R1} = 2\lambda_{R2}$ donc $\mu_{R1} = 2\mu_{R2}$, cette baisse de coûts atteint 45% (fig. 6.11).

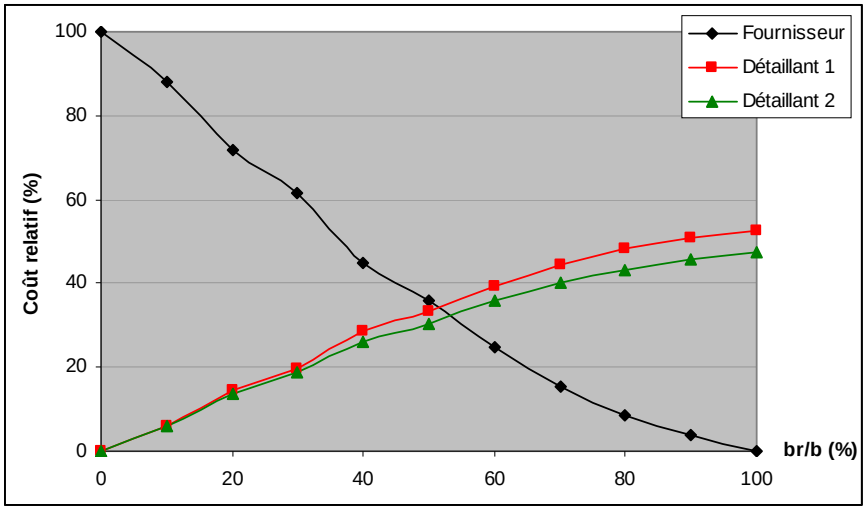


Fig. 6.11: *coûts des différents acteurs en fonction de br*

Comme nous l'avons évoqué auparavant, même si les deux détaillants ont le même taux d'utilisation, ils n'ont pas le même poids vis à vis du fournisseur. De ce fait, le détaillant dominant peut négocier des contrats de partage du coût de rupture plus avantageux. Nous pouvons donc envisager des coûts de rupture qui dépendent de la force du détaillant. Dans la suite, nous traitons plusieurs cas avec $b_{r1}=b_{r2}$ et $b_{r1}<b_{r2}$.

A partir des résultats obtenus (fig. 6.12), nous constatons que la pénalité de décentralisation augmente quand b_{r1} diminue. Cette augmentation s'explique par le fait que R_1, payant de moins en moins de coût de rupture, est insoucieux des performances de la chaîne logistique et diminue considérablement son niveau de stock. A l'extrême, le fournisseur prend tout le coût de rupture de R_1 et ce dernier fabrique à la commande d'où la pénalité plafonnée à plus de 300%.

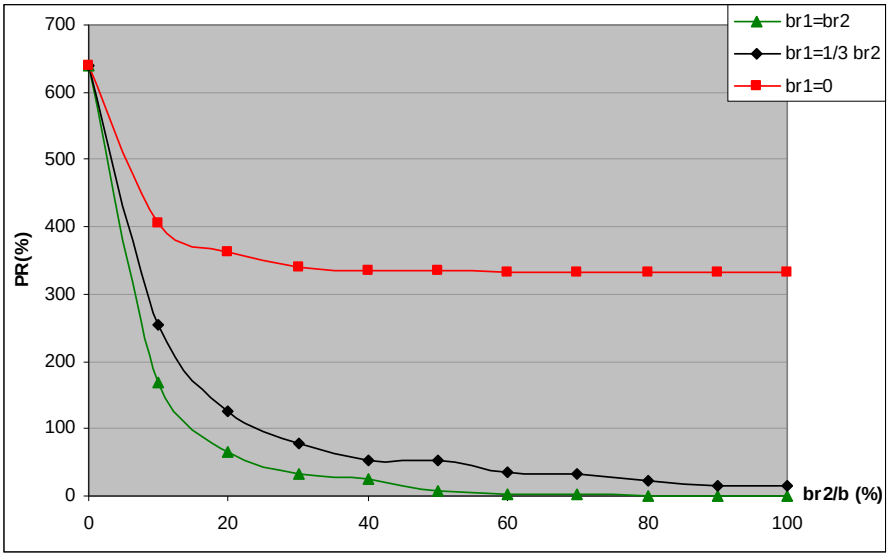


Fig. 6.12 : *Pénalité de décentralisation*

L'étude du contrat α_S, pour ce modèle, montre que nous pouvons coordonner la chaîne logistique étudiée pour

$$\alpha_{Si} = 1 - \frac{b_{ri}}{b}.$$

La particularité d'un tel contrat est que le taux de participation du fournisseur aux coûts de stockage diffère d'un détaillant à l'autre, chose tout à fait logique puisque les coûts de rupture sont partagés différemment.

L'étude des contraintes de participation montre que leur domaine de validité varie en fonction de b_{r1} et peut couvrir tout le domaine pour les petites valeurs de b_{r1} comme le montre les figures 6.13a et 6.13b.

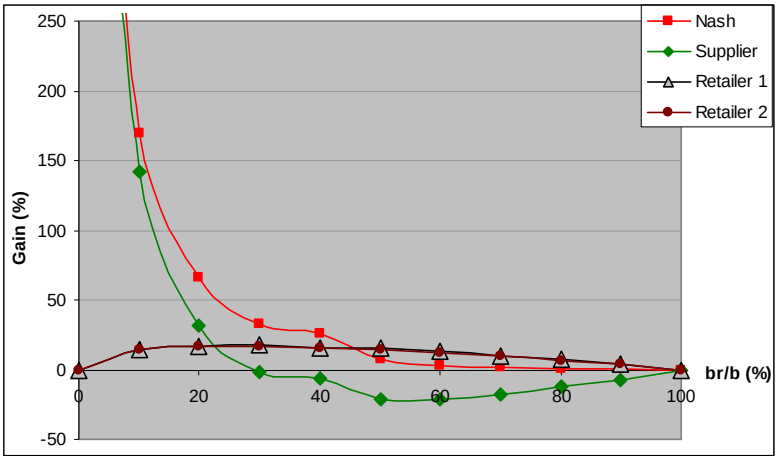


Fig. 6.13a : *Pénalité de décentralisation pour* $b_{r1} = b_{r2}$

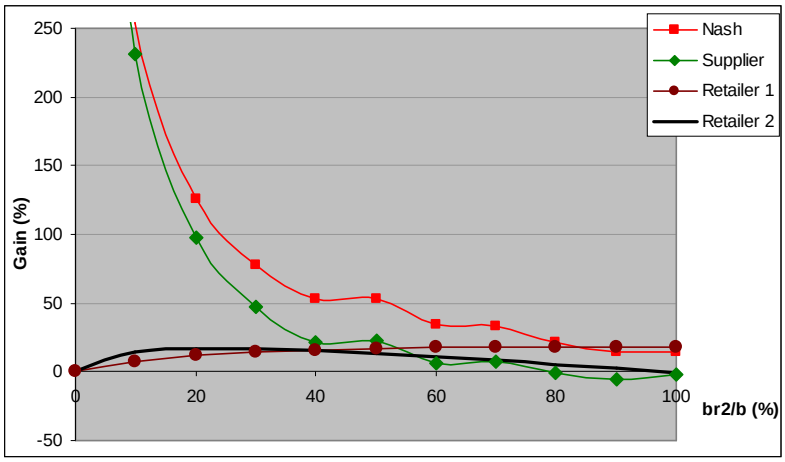


Fig. 6.13b : *Pénalité de décentralisation pour* $b_{r1} = 1/3 * b_{r2}$

Ce résultat s'explique à partir de la figure 6.12 qui montre que la pénalité de décentralisation augmente avec la diminution de b_{r1} et donc les différents acteurs deviennent plus aptes à accepter la coordination.

5.4 Cas de deux détaillants différents avec priorité

En adoptant une stratégie *FCFS*, le fournisseur ne pénalise pas le détaillant le moins influant dans une chaîne logistique à deux étages avec deux détaillants différents. Cette position n'est pas très réaliste dans la situation où le détaillant le plus fort utilise généralement cet avantage pour influer la stratégie de distribution du fournisseur. Dans ce qui suit, nous testons cette idée dans un contexte où le premier détaillant est prioritaire par rapport au deuxième. Comme nous pouvons le deviner, le détaillant R_1 est

avantagé par cette priorité et paye 55% de moins que R_2 contre les 45% de différence pour la politique FCFS (Fig. 6.14)

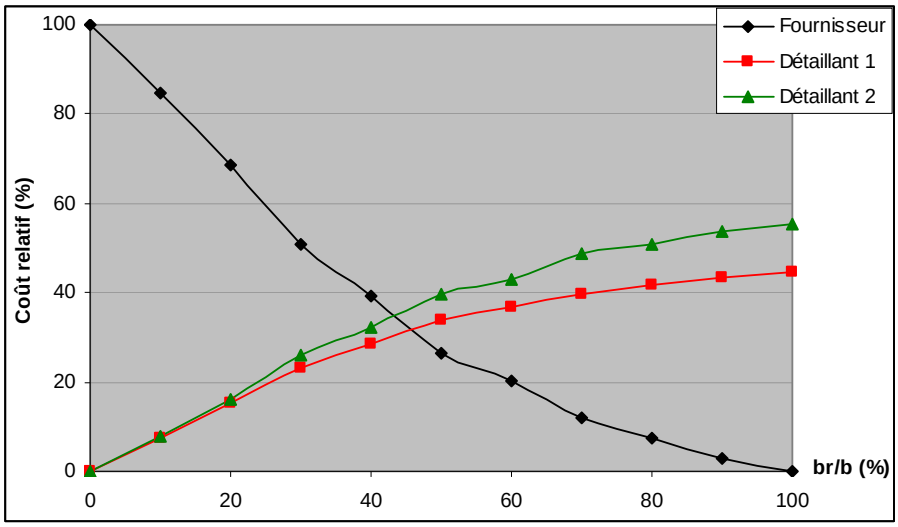


Fig. 6.14 : *Coûts des différents acteurs dans le cas avec priorité*

La pénalité de décentralisation de ce modèle est moins importante que celle d'une politique *FCFS* mais le comportement de *PR* en fonction des différents paramètres reste inchangé. La solution décentralisée peut être amenée à la solution centralisée par un contrat α_S de paramètres $\alpha_1 = b_{S1}/b$ et $\alpha_2 = b_{S2}/b$. Ce contrat diffère du cas avec une politique *FCFS* du fait que R_1 voit ses gains augmenter sous un contrat α_S avec la priorité qui lui est accordée puisque ses stocks sont plus importants avec cette politique.

6 Conclusion

Lors de ce chapitre, nous avons étendu l'étude faite dans le chapitre précédent au cas de deux étages de production/stockage avec un ou plusieurs détaillants. Nous avons testé différents modèles numériquement et à partir de la simulation.

Les différents modèles étudiés montrent que la décentralisation dégrade les performances de la chaîne logistique et que cette pénalité de décentralisation peut atteindre des valeurs importantes quand le fournisseur supporte la majorité des coûts de rupture.

Cette pénalité dépend principalement de la structure de coût de la chaîne logistique. Néanmoins, d'autres paramètres tels que les différences entre détaillants et la politique de distribution du fournisseur peuvent l'influencer.

Par la suite, nous avons vérifié que le contrat α_S permet de coordonner la chaîne logistique étudiée et que le domaine de validité des contraintes de participation est beaucoup plus large que le modèle du chapitre précédent. En plus, ce domaine peut varier en fonction des paramètres du système.

TROISIEME PARTIE

Chapitre 7

Etude de l'information avancée avec fenêtre de temps

1 Introduction

Les différentes études menées sur le pilotage des chaînes logistiques distinguent deux approches différentes : le pilotage à flux tiré qui répond à la demande en temps réel et le pilotage à flux poussé qui planifie la production en se basant sur les prévisions de la demande.

D'autre part, l'incertitude sur la demande pousse les entreprises à posséder des systèmes de production flexibles et l'essor des systèmes d'information permet à ces entreprises de travailler sur des horizons courts de planification. Dans un tel environnement, la distinction entre flux poussé et flux tiré devient de plus en plus difficile de plus que les prévisions comportent de plus en plus d'informations sur les commandes actuelles. De ce fait, l'information avancée s'avère disponible sous différentes formes : ordres à l'avance, prévisions, information partagée, engagements…

L'utilisation correcte de cette information avancée aboutit à l'amélioration de performance de la chaîne logistique. Intuitivement, une meilleure information sur la demande future conduit à une baisse des niveaux de stock pour un même taux de service. D'autre part la nature de l'interaction information/stock est généralement

difficile à cerner., en particulier dans les systèmes de production car la capacité de production influence cette interaction.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au rôle de l'information avancée dans l'amélioration des performances des systèmes de production par anticipation, mono-étage, modélisés par des files d'attente de type *M/M/1*. Nous entendons par information avancée des commandes fermes ni modifiables ni annulables arrivant avec un délai de livraison constant τ. Pour cette définition de l'information avancée plusieurs modèles mono-étage de production par anticipation qui diffèrent par leur structure de coût ont été étudiés dans la littérature. Dans ce chapitre, nous examinons deux modèles : le modèle de Buzacott et Shanthikumar [16] qui exige une livraison ponctuelle du produit τ unités de temps après la passation de la commande et le modèle de Karaesmen et al. [63] qui autorise une livraison prématurée. Nous montrons ensuite que ces modèles sont deux variantes d'un modèle plus général d'information avancée avec fenêtre de temps que nous étudions. Dans la dernière partie, nous allons présenter quelques exemples numériques.

2 Etat de l'art

Les nouvelles exigences de la chaîne logistique ont fait que les différents acteurs sont convaincus de plus en plus de l'importance de l'information avancée dans l'évaluation des performances de la chaîne comme le montre la multiplication des commentaires des responsables logistiques des grandes entreprises. Dick Hunter le directeur de la chaîne logistique la plus développée au monde (Dell Computer) affirme que l'information avancée joue le rôle du stock. Cette nouvelle tendance a incité les chercheurs à s'intéresser au sujet et à essayer d'étudier, sous un angle d'un pilotage à flux tiré, comment on peut intégrer l'information avancée afin d'améliorer les performances de la chaîne logistique. Ceci a conduit à un enrichissement considérable de la littérature se rapportant à l'information avancée.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons en particulier à ceux qui ont opté pour la politique de stock nominal comme choix de pilotage à flux tiré (nous mentionnons brièvement d'autres politiques). Nous considérons l'information avancée comme étant une commande ferme dont le délai de livraison est connu avec certitude et ne peut pas être modifié. Si la réalité est plus complexe avec tout ce qu'elle peut présenter de variantes tels que la modification des commandes et leur annulation, cette vision n'est pas si loin de la réalité où on voit de plus en plus de contrats pénalisant ce genre de comportement.

Parmi ces travaux, nous distinguons deux grandes classes : ceux qui se sont intéressé aux systèmes de stockage et ceux qui ont introduit la notion de capacité en considérant des systèmes de production/stockage. Parmi les travaux qui se sont intéressé à l'apport de l'information avancée pour un système de stockage, Hariharan et Zipkin [55] traitent un système mono-étage à temps continu avec des délais de livraison constants et une demande aléatoire suivant un processus de Poisson, ils montrent que l'information avancée réduit considérablement les niveaux de stock optimal et les coûts associés (coûts de stockage + coût de rupture). Gallego et Özer [43] trouvent une politique optimale sur un horizon fini pour un système de stockage à temps discret et revue périodique avec une information avancée sous forme de commande ferme τ_n unités de temps à l'avance (τ_n dépend du client) et aboutissent à des réductions de coût considérables. Chen [28] étudie des systèmes similaires avec une segmentation du marché où chaque classe de clients bénéficie de réduction de prix en fonction de l'information avancée qu'elle offre. D'autres modèles plus complexes tels que le modèle à deux étages étudié par Bourland et al. [12] et le modèle avec plusieurs détaillants de Güllü [48] ont confirmé l'apport de l'information avancée pour la réduction des coûts de la chaîne logistique.

Dans un contexte de production, Milgrom et Roberts [81] étudient un système de production par anticipation mono-période et montrent l'équivalence entre stock et information. Özer et Wei [84] proposent une politique optimale pour un système périodique. Buzacott et Shanthikumar [16] ont présenté une analyse détaillée d'un système mono-étage de production/stockage modélisé par une file d'attente de production par anticipation avec une information avancée sous forme de commandes fermes placées τ unités de temps à l'avance. Dans une politique MRP, ils étudient la variation du stock de sécurité en fonction d'un paramètre de délai qui détermine la quantité d'information avancée nécessaire. Güllü [48], Toktay et Wein [98] ont étudié un étage de production/stockage à temps discret en introduisant la notion de prévision de la demande. Ils montrent que cette information permet de réduire le stock de sécurité et les coûts associés.

Karaesmen et al. [63,64] se sont intéressés à un système de production par anticipation mono-étage où chaque commande est caractérisée par un délai de livraison δ_n et une quantité q_n. Ils introduisent la notion de coût de l'information avancée et déterminent la quantité optimale d'information pour des fonctions de coût particulières. Karaesmen et al. [59,60] proposent par la suite pour un modèle similaire à temps discret et avec des demandes unitaires une politique à deux paramètres *(S,L)* désignée par BSADI ou *S* et le

niveau de stock nominal et L un paramètre de délai. Ils montrent que cette politique est très proche de la politique optimale.

Benjaafar et Kim [8] s'intéressent à l'information avancée dans un contexte de variabilité alors que Liberopoulos et al. [74] étudient l'impact de la variabilité sur les performances de la chaîne logistique et traitent le cas de plusieurs classes de clients avec la possibilité d'annulation des commandes. Liberopoulos et Tsikis [77] décrivent d'autres politiques de gestion de stock avec information avancée basées sur les politiques à point de commande et la politique Kanban. Liberopoulos et Koukoumialos [76] développent numériquement des modèles similaires avec une politique de Kanban généralisée.

A partir de ces travaux sur les modèles à capacité finie, nous distinguons deux approches :
- Le client n'accepte pas les livraisons antérieures à la date d'échéance.
- Le client accepte les livraisons antérieures à la date d'échéance.

Dans la première approche, nous retrouvons les travaux de Buzacott et Shanthikumar [14,16] qui ont étudié la variation du niveau de stock nominal en fonction de l'échéance de la demande. Karaesmen et al. [64] ont exploité cette étude et ont proposé la politique BSADI proche de la politique optimale pour des modèles de production par anticipation à temps discret.

Karaesmen et al. [63] ont développé le deuxième cas et ont calculé analytiquement les différents coûts qui rentrent en jeu et ont montré que ce cas est plus avantageux que le premier.

Si ces deux approches ont bien montré l'apport de l'information avancée dans l'amélioration de performance des chaînes logistiques, elles sont restrictives et nous pensons que la généralisation de ces approches est possible dans le cadre de l'information avancée avec fenêtre de temps.

3 Modèle du Buzacott et Shanthikumar

3.1 Modèle et notations

Nous considérons un système de production par anticipation modélisé par une file d'attente. Les arrivées sont indépendantes et identiquement distribuées et le temps d'inter-arrivées suit une loi exponentielle. Soit T_N le temps entre l'arrivée N et $N+1$, $\lambda = 1/E[T_N]$ le taux d'arrivée, μ le taux de service et $\rho = \lambda/\mu$ le taux d'utilisation.

Le stock est géré par une politique de stock nominal (voir Buzacott et Shanthikumar [16]). Cette politique peut être décrite par un système de files d'attentes. Dans la figure 1, les stocks P_0 et P_1 présentent respectivement le stock de matière première et le stock de produits finis. À l'état initial Ss^* éléments sont présents dans le stock $Xs(t)$. Lorsqu'une demande arrive dans le système, elle génère un ordre de fabrication dans la file d'attente du serveur. Le client génère une entité dans la file $Y(t)$ après τ_2 (délai de la demande) unités de temps. Si le stock X est non vide, le client quitte le système et génère une réduction de une unité du niveau de stock. Chaque entité de X génère un coût de stockage h_s par unité de temps alors que le client génère un coût de rupture b par unité de temps passée dans Y (fig. 7.1)

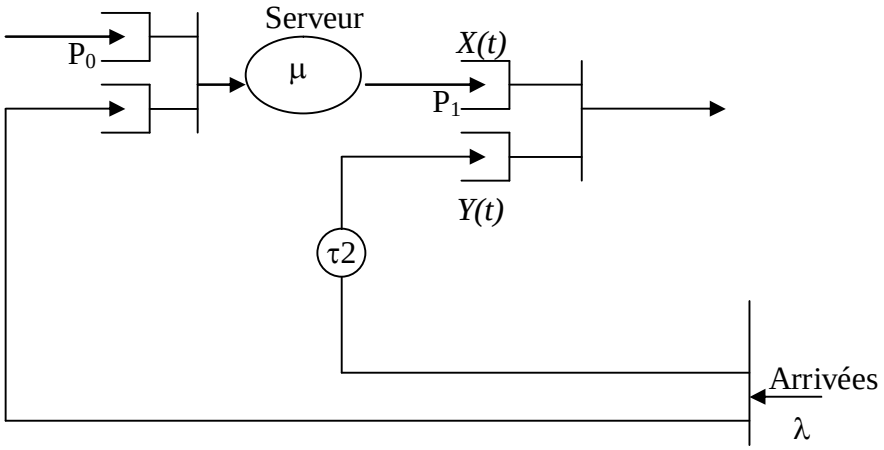


Fig. 7.1 : *Modèle de Buzacott et Shanthikumar*

3.2 Optimisation

Pour le modèle décrit dans le paragraphe précédent, Buzacott et Shanthikumar déterminent le stock moyen $E[X]$ et le niveau moyen de rupture $E[Y]$:

$$E[X] = S + \lambda\tau_2 - \frac{\rho(1-\rho^S e^{-\mu\tau_2(1-\rho)})}{1-\rho}$$

$$E[Y] = \frac{\rho^{S+1}}{1-\rho} e^{-\mu\tau_2(1-\rho)}.$$

Le coût du système est :

$$C_b(S,\tau_2) = h_s E[X(S,\tau_2)] + bE[Y(S,\tau_2)]$$

Pour un τ_2 fixe, l'optimisation d'un tel système donne un stock nominal :

$$S_b^* = \left\lfloor \frac{Log\frac{h_s}{h_s+b}}{Log\,\rho} + \frac{\mu\tau_2(1-\rho)}{Log\,\rho} \right\rfloor \qquad (7.1)$$

Nous remarquons que $\tilde{S}_b^*$ la relaxation continue de S_b^* est une fonction affine de τ_2 et que pour $\tau_2=0$, nous sommes bien dans le cas du stock nominal classique.

Soit $\tilde{S}_b^*$ la relaxation continue de S_b^* alors, le coût optimal qui lui est associé est :

$$C_b(\tilde{S}_b^*,\tau_2) = h_s(\tilde{S}_b^* + \lambda\tau_2)$$

L'optimisation par rapport à τ_2 donne :

$$\tau_2^* = -\frac{Log\frac{h_s}{h_s+b}}{\mu(1-\rho)} + \frac{S.Log\,\rho}{\mu(1-\rho)}.$$

Comme Buzacott le conclut, plus on a de l'information avancée plus on diminue le stock optimal et on gagne du même coup sur le coût jusqu'à $\tau_2=\tau_{2C}$ et $S_b^*=0$ ou le coût est optimal.

$$\tau_{2C} = -\frac{Log\frac{h_s}{h_s+b}}{\mu(1-\rho)}$$

Si le système s'avère solvable, l'information avancée n'est pas toujours disponible. Karaesmen et al [63] ont étudié des cas plus réalistes en affectant un coût à l'information avancée et ils ont développé des solutions pour des coûts linéaires et des coûts exponentiels. Néanmoins, il reste toujours très difficile de quantifier la valeur de l'information.

Karaesmen et al. [64] montrent que pour une information avancée $\tau_2 \leq \tau_{2C}$ la politique BSADI est très proche de la politique optimale. Durant ce qui suit, nous nous plaçons dans le cas $\tau_2 \leq \tau_{2C}$. Cette restriction ne limite pas le champ d'application de notre étude, en effet, nous pouvons se ramener toujours à ce cas de figure si nous avons un excès d'information avancée en ne considérant que la valeur souhaitée de cette information.

L'étude du paramètre τ_{2C} montre qu'il est croissant en fonction de ρ. D'autre part, l'augmentation du taux d'utilisation augment le gain en coût :

$$C_0 - C \xrightarrow[\rho \to 1]{} \frac{h_s}{2\ln((h_s + b)/h_s)}$$

Néanmoins, le gain relatif en coût ne suit pas cette évolution et tend même vers 0 pour les grandes valeurs de ρ.

4 Modèle de Karaesmen, Liberopoulos et Dallery

4.1 Description du modèle

Karaesmen et al. [63] s'intéressent à un modèle similaire à celui de Buzacott et Shanthikumar avec une structure de coûts différente qui autorise au fournisseur des livraisons antérieures à la date d'échéance fixée par le client. L'étude de ce modèle montre que, par rapport aux quantités moyennes en stock et en attente, il est équivalent au modèle standard de production par anticipation de type *M/M/1* décrit dans le chapitre 5. Ainsi, la politique adoptée pour gérer ce modèle est une politique de stock nominal ou chaque commande qui arrive est satisfaite immédiatement si le stock de produits finis est non vide et lance immédiatement un ordre de fabrication dans la file d'attente du serveur.

Ce modèle est très bénéfique au fournisseur du fait qu'il lui permet un gain considérable en coûts de stock, néanmoins, cette politique doit être justifiée par rapport au client, c'est à dire que ce dernier doit être meilleur en acceptant des livraisons à l'avance, cas prépondérant en particulier si le client est le consommateur final.

4.2 Optimisation

Pour le modèle décrit dans le paragraphe précédent, Karaesmen et al. [63] déterminent le stock moyen $E[X]$ identique à celui d'un modèle de stock nominal sans information avancée :

$$E[X] = S - \frac{\rho(1-\rho^S)}{1-\rho}.$$

Le niveau moyen de rupture pénalisé par des coûts de rupture $E[B]$ est calculée à partir du modèle du Buzacott et shanthikumar :

$$E[B] = \frac{\rho^{S+1}}{1-\rho} e^{-\mu\tau_2(1-\rho)}.$$

Notons que dans l'expression du coût, nous ne nous intéressons plus à l'attente moyenne $E[Y]$ dans la file Y mais plutôt à l'attente moyenne au-delà d'un délai τ_2 puisque la chaîne logistique n'est pas pénalisée pour les attentes inférieures à τ_2. Le coût du système s'écrit alors :

$$C_K(S,\tau_2) = h_s E[X(S,\tau_2)] + bE[B(S,\tau_2)].$$

Ainsi, l'optimisation de cette équation pour τ_2 fixe donne :

$$S_k^* = \left\lfloor \frac{Log \dfrac{h_s}{h_s + b \times e^{-\mu\tau_2(1-\rho)}}}{Log\,\rho} \right\rfloor \qquad (7.2)$$

L'expression de S_k^* nous rappelle celle du modèle classique avec un coût de rupture :

$$b' = b.e^{-\mu\tau_2(1-\rho)}$$

d'où le coût du système à l'optimum dans le cas de la relaxation continue est :

$$C_k(\tilde{S}_k^{\ *}, \tau_2) = h_s \hat{S}_k^{\ *}.$$

Notons que, quelques différences sont discernables par rapport au modèle de Buzacott et Shanthikumar : l'augmentation de la quantité de l'information avancée diminue le niveau de stock optimal et ceci sans limitation τ_{2C} comme a été le cas dans le modèle précédent. D'ailleurs, théoriquement on ne passe à un système de production à la commande que quand τ_2 tend vers l'infini. En pratique, et vu le critère discret du niveau de stock, il existe une quantité d'information avancée τ_{2K} à partir de laquelle plus d'information avancée n'apporte rien au système comme le suggère le lemme ci-dessous :

Lemme 7.1 :
Le modèle de Karaesmen et al. est optimal pour $S_k^{\ *}=0$ et $\tau 2 > \tau_{2K}$.

$$\tau_{2K} = \frac{e^{\frac{b.\rho}{h_s(1-\rho)}}}{\mu(1-\rho)}.$$

Démonstration : le fonction du niveau de stock nominal (7.2) est une fonction en escalier décroissante en fonction de τ_2. Ainsi, pour trouver la valeur de τ_2 pour lequel le système fonctionne à la commande ($S_k^{\ *}=0$) il suffit de déterminer la valeur τ_2 (τ_{2K}) qui permet d'avoir $\tilde{S}_k^{\ *} = 1$. $\tilde{S}_k^{\ *}$ est la relaxation continue de $S_k^{\ *}$ dans l'équation (7.2) ◆

Remarque : Notons que τ_{2K} est largement supérieure à τ_{2C} de Buzacott et Shanthikumar.

Ainsi, pour une quantité suffisante d'information avancée, on est dans un système de production à la commande avec des temps moyens de rupture négligeables, donc un coût global nul. Le gain absolu en terme de coût est alors :

$$\Delta C = h_s \frac{\log \frac{h_s}{h_s + b}}{\log \rho}.$$

5 Modèle avec fenêtre de temps

5.1 Description du modèle

Les deux cas présentés ci-dessus s'appliquent dans des contextes différents. Le modèle sans livraisons antérieures à la date d'échéance est utilisé surtout dans un contexte industriel dans lequel le client impose au fournisseur des temps de livraison précis afin d'alimenter sa chaîne de production ou de montage à des instants précis et éviter de garder du stock. Le deuxième cas est généralement celui d'un client final qui accepte volontiers la réception de sa commande avant les délais fixés.

A partir de cette analyse, nous constatons que le champ d'application de ces modèles est restreint. Imposer un instant précis au fournisseur pour livrer le produit dans le modèle de Buzacott et Shanthikumar est une contrainte très restrictive difficile à accepter par le fournisseur. De même, permettre la possibilité de livraisons très à l'avance par rapport au délai client comme propose Karaesmen et al. ne fait pas, dans la majorité des cas, l'affaire du client même s'il est un client final de la chaîne logistique. A partir de cette réflexion, et en s'inspirant de cas réels tels que les problèmes de transport, nous pensons qu'un modèle avec fenêtre de temps est plus général et admet un champ d'application plus large. De plus, nous vérifions que les deux modèles étudiés auparavant sont des cas extrêmes du modèle avec fenêtre de temps.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à un système de production/stockage avec fenêtre de temps $[\tau_1, \tau_2]$ dans lequel chaque client arrive avec une commande ferme pour un délai de demande τ_2. Cette demande génère un ordre de fabrication dans la file d'attente du serveur une demande qui arrive dans le système, génère un ordre de fabrication. Si à partir de τ_1 un produit fini est disponible dans le stock $X(t)$, la commande est satisfaite, sinon le client est mis en attente dans la file $Y(t)$ et le fournisseur n'est pénalisé que si la durée de cette attente dépasse $\tau = \tau_2 - \tau_1$ la largeur de la fenêtre de temps. Chaque entité de X génère un coût de stockage h par unité de temps alors que le client génère un coût de rupture b par unité de temps passée dans Y à partir de $t = \tau$.

Le modèle proposé ci-dessus est une généralisation des deux modèles précédents. En effet, pour $\tau = 0$ le fenêtre de temps est de largeur nul et donc le fournisseur subit les coûts de rupture dès que le délai client est atteint ce qui correspond bien au modèle de Buzacott et Shanthikumar alors que pour $\tau = \tau_2$ le client peut être livré à partir du moment où il a passé sa commande ce qui coïncide avec le modèle de Karaesmen et al.

De même, le modèle de production par anticipation classique sans information avancée est un cas particulier du modèle avec fenêtre de temps avec $\tau = \tau_2 = 0$.

5.2 Optimisation

L'optimisation du modèle décrit ci-dessus peut se faire à partir d'analogies le reliant aux modèles précédents comme le montre les résultats ci-dessous.

Lemme 7.2 :
Pour un niveau de stock nominal S fixé, le niveau moyen de rupture pénalisé par un coût de rupture dans le modèle avec fenêtre de temps s'écrit comme suit :

$$E[B] = \frac{\rho^{S+1}}{1-\rho} e^{-\mu\tau_2(1-\rho)}$$

Démonstration : Considérons les deux modèles (de Buzacott et Shanthikumar et avec fenêtre de temps) avec les mêmes paramètres (λ, μ, h et b). Dans les deux modèles chaque entité génère un coût de rupture après un délai τ_2 passé dans le système. Ceci correspond au nombre moyen $E[Y]$ dans la file Y pour le premier modèle (car l'entité n'est placée dans cette file qu'après un délai τ_2) et au niveau moyen de rupture pénalisé $E[B]$ dans le deuxième modèle parce que le temps passé entre τ_1 et τ_2 dans Y n'est pas pénalisé. Donc, pour le même niveau S donné dans les deux modèles on a $E[Y]=E[B]$, d'où l'expression de $E[B]$ dans le lemme ◆

Lemme 7.3 :
Pour un niveau de stock nominal S fixé, le niveau moyen de stock du modèle avec fenêtre de temps est égal à :

$$E[X] = S + \lambda(\tau_2 - \tau) - \frac{\rho(1-\rho^S e^{-\mu(\tau_2-\tau)(1-\rho)})}{1-\rho}$$

Démonstration : Considérons les deux modèles (de Buzacott et Shanthikumar et avec fenêtre de temps) avec les mêmes paramètres (λ, μ, h et b) . Dans les deux modèles chaque demande qui arrive lance immédiatement un ordre de fabrication qui, après le temps de service, est stocké dans la file X. Pour le premier modèle une demande n'est satisfaite (diminution d'une entité dans le stock X) qu'à partir d'un délai τ_2 passé dans le

système alors que pour le deuxième modèle, elle peut être satisfaite à partir d'un délai τ_1. Donc le niveau $E[X]$ dans le modèle avec fenêtre de temps est équivalent à celui du modèle de Buzacott et Shanthikumar pour un délai $\tau_2=\tau_1$ d'où l'expression de $E[X]$ dans le lemme (nous avons remplacé τ_1 par τ_2-τ) ◆

Proposition 7.1 :

Le coût moyen du système s'écrit de la façon suivante :

$$C_j(S,\tau,\tau_2) = h_s\left(S+\lambda(\tau_2-\tau)-\frac{\rho(1-\rho^S e^{-\mu(\tau_2-\tau)(1-\rho)})}{1-\rho}\right)+b\left(\frac{\rho^{S+1}}{1-\rho}e^{-\mu\tau_2(1-\rho)}\right) \quad (7.3)$$

Démonstration : Puisque $E[B]$ est le nombre moyen des attentes pénalisées par le coût de rupture, le coût total est :

$$C_j(S,\tau,\tau_2) = h_s.E[X]+b.E[B] \quad ◆$$

Proposition 7.2 :

Pour τ et τ_2 fixes, le niveau de stock nominal S_j^* s'écrit comme suit :

$$S_j^* = \left\lfloor \frac{Log\dfrac{h_s}{h_s\, e^{\mu\tau(1-\rho)}+b}}{Log\,\rho}+\frac{\mu\tau_2(1-\rho)}{Log\,\rho}\right\rfloor \quad (7.4)$$

Démonstration : Le calcul s'effectue de la même façon que celui de la proposition 5.1. Nous calculons $\tilde{S}_j^*$ qui satisfait l'équation :

$$C_j(S,\tau,\tau_2)-C_j(S-1,\tau,\tau_2)=0$$

Par suite, $S_j^* = \lfloor \tilde{S}_j^* \rfloor$ ◆

Pour la relaxation continue, le coût optimal s'écrit comme suit :

$$C_j(\tilde{S}_j^*,\tau,\tau_2) = h_s(\tilde{S}_j^*+\lambda(\tau_2-\tau)).$$

5.3 Propriétés

La comparaison des différents modèles étudiés montre quelques propriétés sur les niveaux de stock et les coûts qui lui sont associés.

Corollaire 7.1 :
Le niveau de stock optimal du modèle avec fenêtre de temps est compris entre les niveaux de stock nominaux des deux autres modèles dans l'ordre suivant :

$$S_b^* \leq S_j^* \leq S_k^*.$$

Démonstration : Considérons les trois modèles décrits ci-dessus avec les mêmes paramètres (λ, μ, h, b et τ_2). L'inégalité du corollaire s'obtient en comparant les niveaux de stock optimaux dans chaque modèle à partir des expressions (7.1), (7.2) et (7.4) ◆

Ce résultat s'explique par le fait que le coût moyen de stockage est ordonné dans le sens inverse des niveaux de stock optimaux et donc en passant du modèle de Buzacott et Shanthikumar à celui de Karaesmen et al. on peut se permettre de garder plus de stock.

Corollaire 7.2 :
Les coûts associés aux niveaux des stocks nominaux sont ordonnés comme suit :

$$C_k(S_k^*) \leq C_j(S_j^*) \leq C_b(S_b^*)$$

Démonstration : Rappelons que les expressions des coûts des différents modèles s'écrivent comme suit :

$$C_b(S) = h_s\left(S + \lambda\tau_2 - \frac{\rho(1-\rho^S e^{-\mu\tau_2(1-\rho)})}{1-\rho}\right) + b\left(\frac{\rho^{S+1}}{1-\rho}e^{-\mu\tau_2(1-\rho)}\right) \tag{7.5}$$

$$C_k(S) = h_s\left(S - \frac{\rho(1-\rho^S)}{1-\rho}\right) + b\left(\frac{\rho^{S+1}}{1-\rho}e^{-\mu\tau_2(1-\rho)}\right) \tag{7.6}$$

$$C_j(S,\tau,\tau_2) = h_s\left(S + \lambda(\tau_2-\tau) - \frac{\rho(1-\rho^S e^{-\mu(\tau_2-\tau)(1-\rho)})}{1-\rho}\right) + b\left(\frac{\rho^{S+1}}{1-\rho}e^{-\mu\tau_2(1-\rho)}\right) \tag{7.7}$$

Pour des paramètres identiques (λ, μ, h_s, b et τ_2), nous montrons que pour un niveau de stock S donné et pour tout τ :

$$C_k(S) \le C_j(S) \le C_b(S)$$

Nous nous contentons de la démonstration de la première inégalité, la deuxième se fait de la même façon.

Pour des paramètres identiques et pour un niveau S donné, les coûts de rupture dans (7.5), (7.6) et (7.7) sont identiques, donc il suffit de comparer les coûts de stockage :

$$C_j(S) - C_k(S) = h_s\left(\lambda(\tau_2 - \tau) - \frac{\rho^{S+1}(e^{-\mu(\tau_2-\tau)(1-\rho)} - 1)}{1-\rho}\right)$$

Soit $F(\tau_2)=C_j(S)-C_k(S)$, alors $F'(0)=0$ (car $\tau \le \tau_2$ donc $\tau=0$) et

$$F'(\tau_2) = h_s\left(\lambda - \mu\rho^{S+1}e^{-\mu(\tau_2-\tau)(1-\rho)}\right)$$

$F'(\tau_2) \ge 0$ car $1 \ge \rho^S e^{-\mu(\tau_2-\tau)(1-\rho)}$,

par suite $F(\tau_2)$ est positive pour tout τ et τ_2,

d'où $C_j(S) \ge C_k(S)$.

D'autre part, $C_k(S)$ est décroissante sur $[0, S_k^*]$ donc

$$C_k(S_j^*) \ge C_k(S_k^*) \text{ car } S_j^* \le S_k^*$$

Or $C_j(S) \ge C_k(S)$ en particulier pour $S=S_j^*$, donc

$$C_j(S_j^*) \ge C_k(S_k^*)$$

D'où la première inégalité du corollaire (la deuxième se démontre de la même façon) ◆

Nous constatons par ailleurs que la relaxation continue $\tilde{S}_j^*$ du niveau de stock nominal S_j^* et le coût qui lui est associé $C_j(\tilde{S}_j^*)$ sont linéaires et décroissantes en fonction de τ_2 et admettent comme pentes respectives :

$$\mu(1-\rho)/Log\rho \quad \text{et} \quad h_s\mu(1-\rho+Log\rho)/Log\rho$$

Notons que ces pentes sont les mêmes que celles du modèle de Buzacott et Shanthikumar, ainsi, le modèle avec fenêtre de temps est similaire à celui de Buzacott

et Shanthikumar du fait que plus d'information avancée est bénéfique pour le système jusqu'à une certaine limite τ_{2C} à partir de laquelle le système atteint son optimum global et fonctionne à la commande.

Corollaire 7.3 :
Pour un τ donné, Le modèle avec fenêtre de temps est optimal pour $S_j^*=0$ et $\tau_2 > \tau_{2C}^*$.

$$\tau_{2C}^* = \frac{Log\,\rho - Log\,\dfrac{h_s}{h_s\,e^{\mu\tau(1-\rho)} + b}}{\mu(1-\rho)}$$

Démonstration :

$$C_j(\tilde{S}_j^*, \tau, \tau_2) = h_s(\tilde{S}_j^* + \lambda(\tau_2 - \tau))$$

Or, pour τ donné, S_j^* est linéaire est décroissante en fonction de τ_2, donc $C_j(\tilde{S}_j^*, \tau, \tau_2)$ est linéaire et décroissante en fonction de τ_2 jusqu'à $S_j^*=0$.

D'autre part, $S_j^*=0$ quand $\tilde{S}_j^*$, la relaxation continue de S_j^* dans l'équation (7.4), est inférieure à 1. τ_{2C}^* est la valeur de τ_2 qui permet d'avoir $\tilde{S}_j^* = 1$, d'où le corollaire 7.3 ci-dessus ◆

Cependant dans le reste de la thèse, nous considérons comme limite de l'information avancée la valeur de τ_{2C} ci-dessous.

$$\tau_{2C} = -\frac{Log\,\dfrac{h_s}{h_s\,e^{\mu\tau(1-\rho)} + b}}{\mu(1-\rho)}$$

Nous avons déterminé la valeur de τ_{2C} en prenant l'approximation continue $\tilde{S}_j^*$ du stock nominal $S_j^* = \lfloor \tilde{S}_j^* \rfloor$ comme étant égale à 0. Si nous avons opté pour cette valeur de τ_{2C}, c'est parce que les différents travaux s'intéressant à ce paramètre ont fait pareil (en particulier Buzacott et Shanthikumar [16]), ce qui nous permettra de pouvoir comparer nos résultats avec ceux des autres travaux. En plus, pour les mêmes données, la différence entre les deux valeurs de τ_{2C} ne varie pas en fonction du modèle étudié, ce qui préserve la pertinence des résultats obtenus.

Parmi ces résultats, nous constatons que τ_{2C} est supérieure à celle du modèle de Buzacott et Shanthikumar, donc, le modèle avec fenêtre de temps permet d'exploiter davantage d'information avancée.

Par ailleurs, pour un niveau de stock nominal donné, l'influence de la largeur de la fenêtre de temps τ ou de la quantité d'information avancée τ_2 sur les coûts du système est prévisible. En effet, pour S et τ_2 fixes, le coût global du système diminue en fonction de τ puisque les coûts de stocks diminuent jusqu'à $\tau = \tau_{max} = \tau_2$ (modèle de Karaesmen et al.). De même, pour S et τ_1 fixes, l'augmentation de τ_2 diminue le coût global du système jusqu'à τ_{2C}.

Néanmoins, même si le coût diminue en augmentant l'un ou l'autre des paramètres étudiés, il ne se comporte pas de la même manière vis à vis de τ_1 et de τ_2 et la diminution est plus sensible en fonction de τ_1 (donc de τ) que de τ_2, critère encore renforcé par le fait que τ_2 ne peut pas varier indéfiniment puisqu'elle est limitée par τ_{2C}. Ainsi, un fournisseur ayant le choix de négocier entre l'élargissement de la fenêtre de temps τ et l'acquisition de plus d'information avancée τ_2 sera meilleurs en optant pour la première option.

Ces propriétés seront illustrées dans la section 6 de ce chapitre à travers des exemples numériques.

5.4 Influence de la variabilité sur les performances du modèle avec fenêtre de temps

Si la littérature sur l'information avancée est très abondante, rares sont les travaux qui se sont attardé sur la question de l'influence de la variabilité sur les performances des chaînes logistiques avec information avancée. Parmi ces travaux nous pouvons citer Karaesmen et al. [63] qui ont traité l'influence de la variabilité du temps de service sur les variables de décision du modèle de Buzacott et Shanthikumar et ont montré qu'elle dégrade les performances du système. En particulier la variabilité du temps de service augmente le niveau de stock nominal et le coût optimal associé. D'autre part, elle augmente l'horizon de planification (τ_{2C}). Néanmoins, la variabilité d'influe pas le comportement des fonctions stock nominal et coût optimal qui gardent leurs décroissance linéaire en fonction de l'information avancée τ_2 (fig. 7.2).

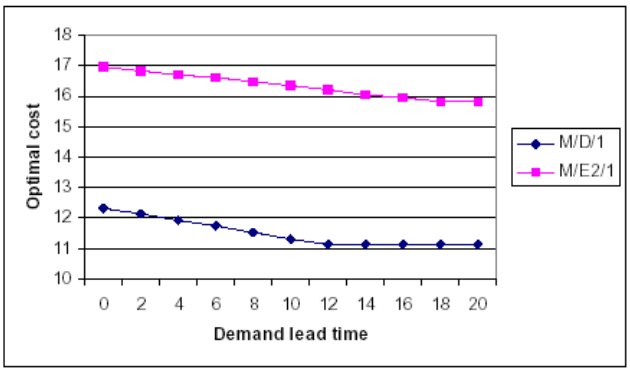


Fig. 7.2 : *effet de la variabilité sur le coût optimal*

Dans ce qui suit, nous allons utiliser les résultats obtenus lors du chapitre 4 pour montrer que l'influence de la variabilité de la demande sur le modèle avec fenêtre de temps est similaire à celle obtenue par Karaesmen et al. sur le modèle de Buzacott et Shanthikumar.

Rappelons que l'étude de la variabilité de la demande sur les performances du système passe par une modélisation du système de production par une file de type *GI/M/1* dont la loi stationnaire de probabilité $f_N(n)$ dépend du paramètre r, la racine de l'équation caractéristique :

$$r = L_A((1-r)\mu)\,,$$

avec L_A le transformé de Laplace de la distribution F_A des temps d'inter-arrivées (voir Gross et Harris [47]) et s'écrit de la manière suivante :

$$f_N(0) = P[N=0] = (1-\rho)$$
$$f_N(n) = (1-r)\rho r^{n-1} \quad n > 0$$

Soit $F_w(t)$ la probabilité pour que le temps de satisfaction d'une commande soit inférieur à t, alors :

$F_w(t) = 1 - e^{-\mu(\tau_1+t)(1-r)} r^S$ (voir Hadj Youssef et al. [53] dans le cas d'une file *M/M/1*).

A partir de $F_w(t)$, nous déterminons l'attente moyenne dans la file Y :

$$E[D] = \int_0^\infty t.dF_w(t)$$

Par la suite, le nombre moyen en attente est :

$$E[Y] = \lambda E[D] = \frac{\rho r^S}{1-r} e^{-\mu\tau_1(1-r)} .$$

Proposition 7.3 :

Le stock moyen $E[X]$ dans le cas d'une demande suivant une loi générale est :

$$E[X] = S + \lambda(\tau_2 - \tau) - \frac{\rho(1 - r^S e^{-\mu(\tau_2-\tau)(1-r)})}{1-r}$$

Démonstration : Soit $E[N]$ la moyenne de f_N la loi stationnaire de probabilité du nombre dans le système alors $E[X]$ est déterminé à partir de l'expression suivante :

$E[X] = S + \lambda\tau_1 + E[Y] - E[N]$ (voir Buzacott et Shanthikumar [16])

Or

$$E[Y] = \lambda E[D] = \frac{\rho r^S}{1-r} e^{-\mu\tau_1(1-r)}$$

d'où l'expression de $E[X]$ dans la proposition ◆

Par ailleurs, vu que les attentes dans la file Y ne sont pénalisées qu'à partir de $t=\tau_2-\tau_1$, le coût moyen du système dépend de $E[B]$, le nombre moyen des attentes pénalisées :

$E[B] = \frac{\rho r^S}{1-r} e^{-\mu\tau_2(1-r)}$ (voir le calcul effectué dans le cas de la file *M/M/1* au début de cette section).

Par suite, le coût moyen est :

$$C_j = h_s E[X] + bE[B] .$$

Proposition 7.4 :

Le niveau de stock nominal pour τ et τ_2 fixes s'écrit comme suit :

$$S_j^* = \left\lfloor \frac{Log\left(\frac{r}{\rho}\frac{h_s}{h_s e^{\mu\tau(1-r)} + b}\right)}{Log(r)} + \frac{\mu\tau_2(1-r)}{Log(r)} \right\rfloor \qquad (7.8)$$

Démonstration : Pour τ et τ_2 données, le coût en fonction de S_j s'écrit :

$$C_j(S_j) = h_s\left(S_j + \lambda(\tau_2 - \tau) - \frac{\rho(1 - r^{S_j} e^{-\mu(\tau_2-\tau)(1-r)})}{1-r}\right) + b\left(\frac{\rho r^{S_j}}{1-r} e^{-\mu\tau_2(1-r)}\right),$$

donc $\tilde{S}_j^{\,*}$ est la solution de l'équation ci-dessous :

$$C_j(\tilde{S}_j) - C_j(\tilde{S}_j - 1) = 0.$$

Par suite, $S_j^{\,*} = \left\lfloor \tilde{S}_j^{\,*} \right\rfloor$ d'où l'expression de S_j^* dans (7.8) ◆

Dans la relaxation continue de S_j^*, le coût optimal est :

$$C_j(\tilde{S}_j^{\,*}, \tau, \tau_2) = h\left(\tilde{S}_j^{\,*} + \lambda(\tau_2 - \tau) - \left(\rho - r\right)/\left(1 - r\right)\right).$$

A partir de ces résultats, nous constatons que $\tilde{S}_j^{\,*}$ et $C_j(\tilde{S}_j^{\,*})$ sont linéaires et décroissantes en fonction de τ_2 pour τ fixe. Par ailleurs, S_j^* est croissant en fonction de r, donc, comme nous l'avons montré pour le modèle sans information avancée, la variabilité augmente le niveau de stock nominal.

D'autre part, l'horizon d'information avancée exploitable est :

$$\tau_2^{\,c} = -\frac{Log\left(\frac{r}{\rho}\frac{h_s}{h_s e^{\mu\tau(1-r)} + b}\right)}{\mu(1-r)}$$

τ_{2C} est la valeur de τ_2 qui annule S_j^* dans l'équation (7.8). τ_{2C} augmente en fonction de r, ainsi, la variabilité augmente la quantité d'information avancée exploitable. Ces résultats sont illustrés dans la figure 7.3 où nous traçons pour différentes valeurs de r la variation de S_j^* en fonction de τ_2 pour une fenêtre de temps τ donnée.

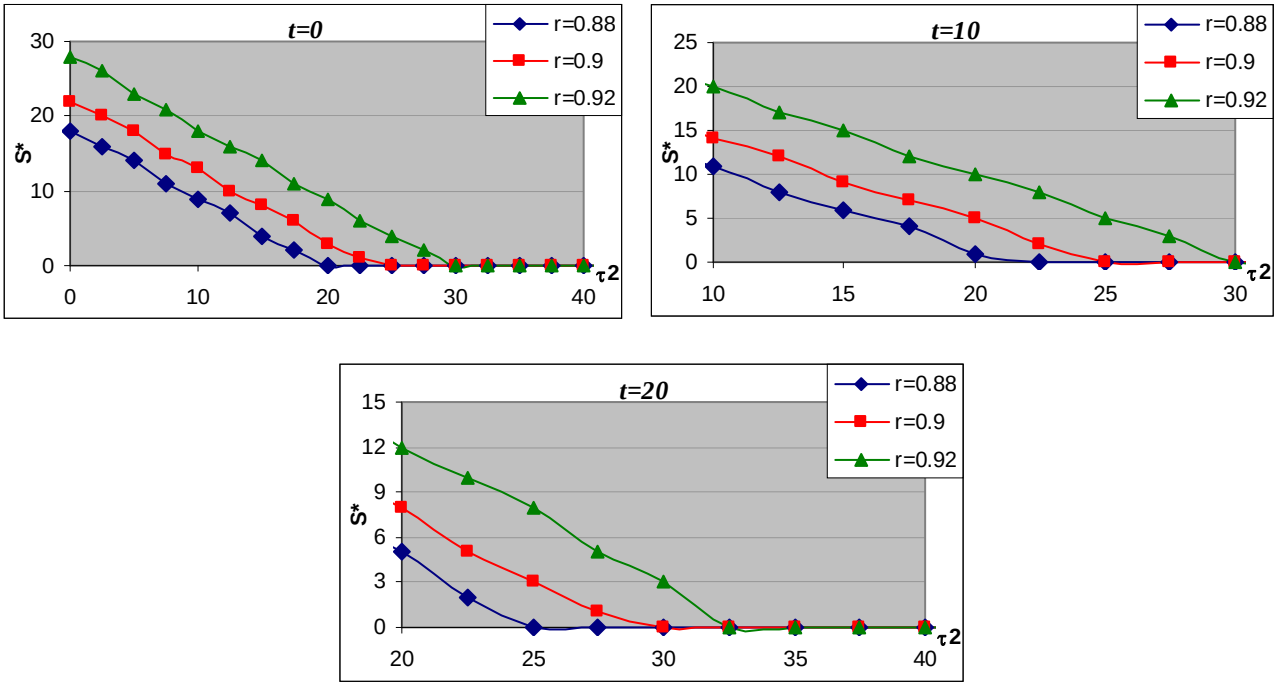


Fig. 7.3 : *évolution de S_j^* =f(τ_2) en fonction de la variabilité pour différents τ*

Benjaafar et Kim [8] ont étudié le modèle de Buzacott et Shanthikumar dans le cas multi-produit en tenant compte de la variabilité de la demande. Ils se sont intéressés à l'optimum global du système piloté par le niveau de stock nominal S_i et la quantité d'information avancée disponible l_i. Ils ont montré qu'il est possible d'ordonner les l_i^* et les coûts optimaux à partir de l'ordre convexe des lois d'arrivées.

6 Applications numériques

Dans le paragraphe suivant, nous appuyons l'étude théorique faite sur le modèle avec fenêtre de temps par des résultats numériques. Vu le comportement similaire du modèle étudié par rapport aux paramètres du système, et que notre objectif n'est pas de tester l'influence de ces paramètres sur le comportement du système, nous nous contentons d'un exemple précis avec les paramètres suivants : $h_s=1$, $b=10$, $\lambda=0.9$ et $\mu=1$ et nous faisons varier les paramètres de décision S, τ et τ_2. Pour ces valeurs, $S^*=22$ (modèle sans information avancée) et $\tau_{2C}=23.98$ (modèle de Buzacott et Shanthikumar).

Les figures 7.4 et 7.5 montrent l'évolution du niveau de stock nominal et du coût associé en fonction de la quantité d'information avancée disponible pour le modèle de Buzacott et Shanthikumar (fig.7.4) et le modèle de Karaesmen et al. (fig. 7.5) alors que

la figure 7.6 permet de comparer les deux modèles. Dans la figure 7.5, les courbes de S_k^* et $C_k(S_k^*)$ sont confondues du fait de la valeur de h_s ($h_s=1$).

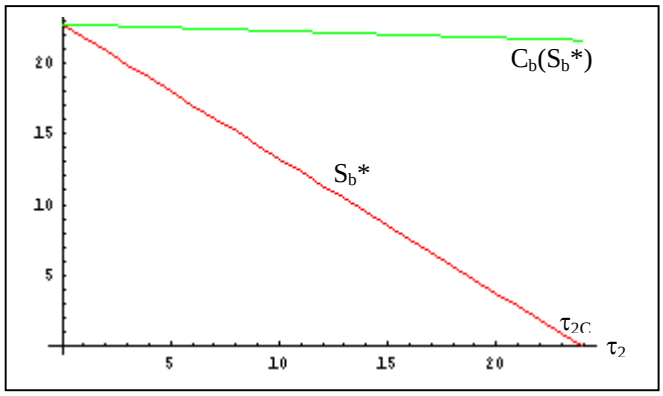


Fig. 7.4: *S_b^* et $C_b(S_b^*)$en fonction de τ_2*

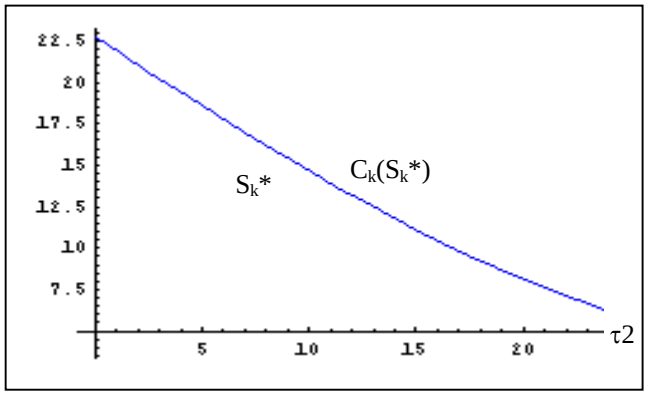


Fig. 7.5: *S_k^* et $C_k(S_k^*)$en fonction de τ_2*

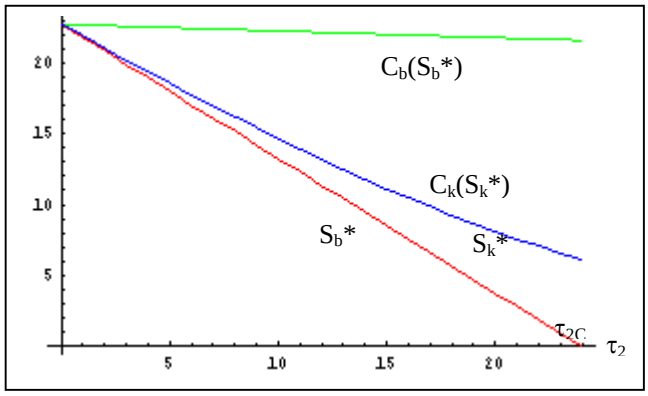


Fig. 7.6: *Comparaison des deux modèles*

La comparaison des deux modèles montre bien que le niveau du stock nominal dans le modèle de Buzacott et Shanthikumar est toujours inférieur à celui de Karaesmen et al. et que les coûts à l'optimum sont ordonnés dans le sens inverse.

Dans la figure 7.7, nous traitons le modèle avec fenêtre de temps pour différentes valeurs de τ.

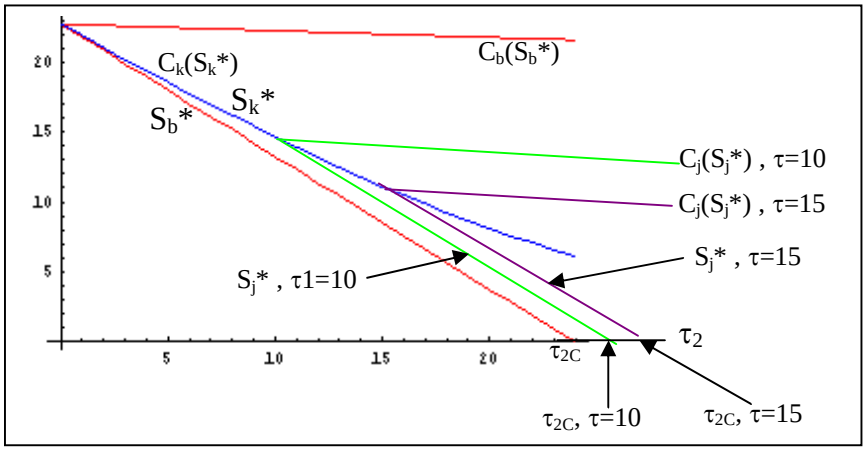


Fig. 7.7: *S_j^* et $C_j(S_j^*)$en fonction de τ_2 pour différentes valeurs de τ*

Une analyse minutieuse de ce graphe nous conduit aux différentes propriétés dégagées lors de l'étude analytique. En effet, supposons qu'un fournisseur, fonctionnant avec une stratégie de livraison avec une fenêtre de temps [8,18] (point F de la figure 7.8), négocie la possibilité de modifier ses paramètres de livraison. Dans quel sens est-il préférable d'élargir sa fenêtre de temps : [8,19] ou [7,18] ? Comme le montre la figure 7.8, garder un τ_2 constant, donc opter pour le choix [7,18], est plus bénéfique pour la chaîne logistique.

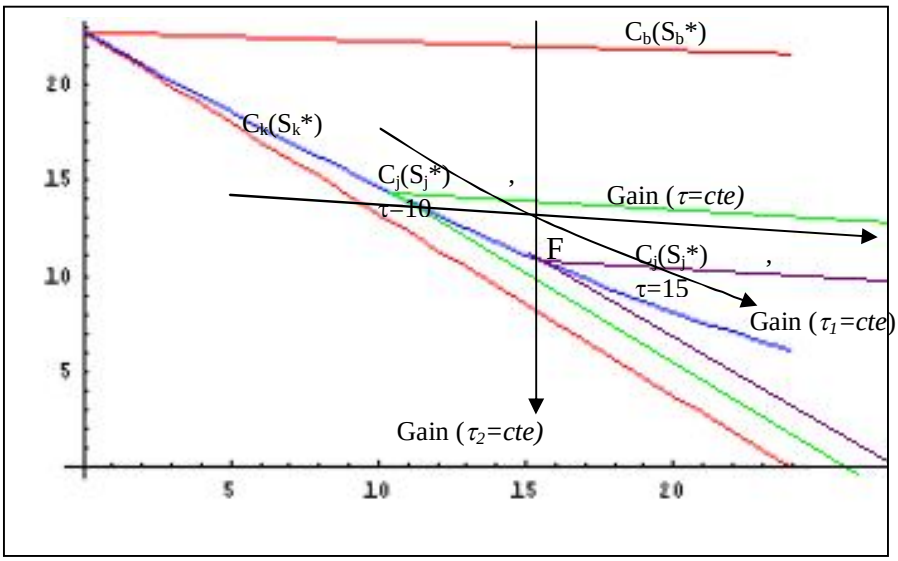


Fig.7.8: *Evolution des performances du système en fonction des paramètres de l'information avancée*

7 Conclusion

Plusieurs études ont montré l'apport de l'information avancée dans l'amélioration des performances des chaînes logistiques. Parmi ces études, nous avons distingué deux approches différentes : le modèle de Buzacott et Shanthikumar [16] qui ne tolère pas des livraisons à l'avance et le modèle de Karaesmen et al. [63] qui permet les livraisons à l'avance. Après avoir examiné ces deux modèles, nous avons proposé dans ce chapitre un modèle d'information avancée avec fenêtre de temps qui généralise ces deux approches (fig.7.9). Nous avons calculé analytiquement les différents paramètres qui entrent en jeu, ce qui nous a permis de déterminer les performances du modèle et de le comparer aux deux modèles précédents.

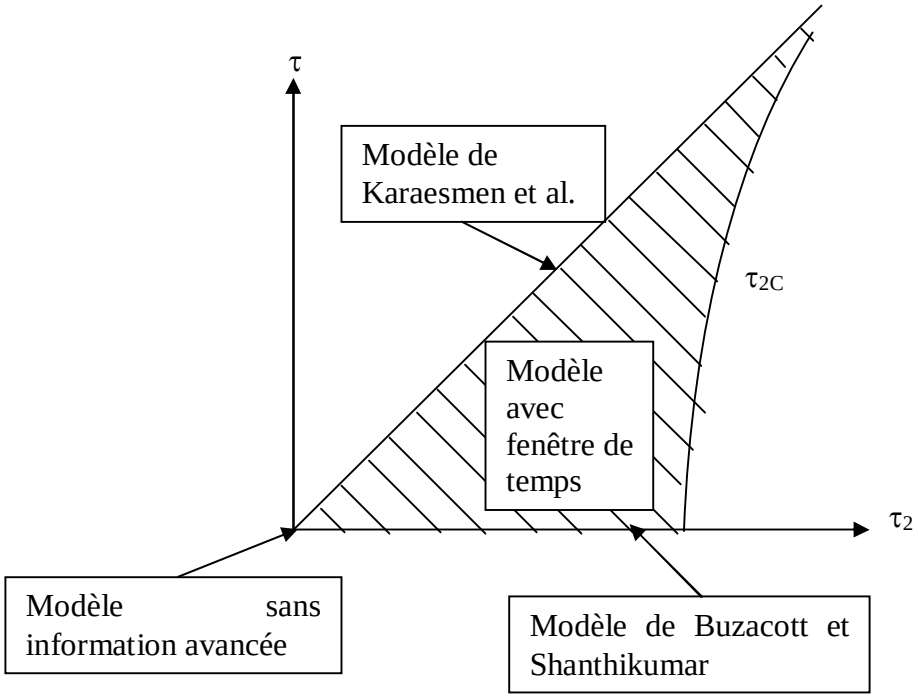


Fig.7.9 : *différents modèles étudiés*

Cette étude nous a permis de nous familiariser avec la notion d'information avancée dans la chaîne logistique, un concept que nous allons explorer dans le chapitre suivant afin d'étudier l'interaction entre information avancée et décentralisation. Le modèle avec fenêtre de temps va nous offrir par la suite une idée de coordination entre les différents acteurs de la chaîne logistique.

Chapitre 8

Etude de la décentralisation avec information avancée

1 Introduction

L'étude des performances des systèmes de production a longtemps distingué les politiques à flux tiré et les politiques à flux poussé. Si la première politique utilise l'information réelle sur la demande afin de piloter le système de production, la deuxième se base sur la demande future sous forme de prévisions et de commandes fermes pour diriger la production.

Or, le lien très étroit entre les deux systèmes dans la réalité rend de telles études incomplètes et nous avons examiné, au cours du chapitre précédent, plusieurs travaux qui ont essayé de combiner les deux mécanismes par le biais de l'information avancée et qui ont abouti à des résultats intéressants sur l'apport de l'information avancée sur les performances des chaînes logistiques.

D'autre part, les nouvelles orientations de la chaîne logistique tiennent compte du caractère multi-acteurs de la chaîne et insistent sur le partage et la collaboration entre les différents partenaires comme nous l'avons évoqué au chapitre 5. Plusieurs systèmes ont été instauré comme le GPA (Gestion Partagée des Approvisionnements ou partage de

l'information sur les stocks) ou en cours de réalisation tels que le CPFR (Collaborative Forecasting Planning and Replenishment ou partage de l'information sur les prévisions).

Néanmoins, si la réévaluation des performances, en tenant compte de ces nouvelles contraintes, a fait l'objet de plusieurs études de pilotage à flux tiré, rares sont les travaux qui traitent de l'interaction entre l'information avancée et la gestion décentralisée au sein de la chaîne logistique.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier, sous un angle d'un pilotage à flux tiré, comment on peut intégrer l'information avancée afin d'améliorer les performances de la chaîne logistique en tenant compte de la décentralisation.

Comme dans le chapitre précédent, le choix du pilotage à flux tiré se base sur la politique de stock nominal et l'information avancée consiste en un délai client fixe sur des commandes fermes non modifiables ni annulables.

Nous considérons le modèle centralisé de Buzacott et Shanthikumar [16] dans lequel le client commande τ_2 unités de temps à l'avance et n'accepte pas de livraisons antérieures à la date de besoin. Le modèle décentralisé étudié consiste en deux étages similaires à ceux du chapitre 5. Un fournisseur qui gère un étage de production/stockage avec une politique de stock nominal et un détaillant qui gère un étage de stockage avec la même politique et qui fait face à une demande unitaire à l'avance avec un délai de livraison τ_2 fixe. Le détaillant transmet l'information sur les commandes immédiatement mais n'accepte pas les livraisons à l'avance. Le transport entre les deux étages est supposé instantané et les paramètres du système sont connus des deux acteurs.

Notre objectif dans ce travail est de vérifier l'influence de la décentralisation sur l'amélioration des performances apportée par l'information avancée et par suite proposer des contrats qui permettent de coordonner le système.

2 Etat de l'art

Les études qui se sont intéressés à l'apport de l'information avancée sur les performances de la chaîne logistique sont très nombreuses. Ces études ont abouti à des résultats très intéressants dans le traitement de la chaîne logistique. Cependant, à notre connaissance, très peu de travaux se sont intéressés à la combinaison de l'information avancée avec les notions multi-étages/multi-acteurs de la chaîne logistique.

Parmi ces travaux, Karaesmen et al. [59,60] se sont intéressés à un modèle centralisé de production/stockage multi-étages et ont proposé une politique de pilotage de la chaîne logistique à deux paramètres *(S, L)* ou *S* est le stock nominal et *L* un paramètre de délai. Karaesmen et al. [63] ont fourni une description détaillée de cette politique et ont étudié l'évolution des stocks nominaux en fonction de l'information avancée. Par ailleurs, Liberopoulos et Tsikis [77] ont étudié d'autres politiques issues de la méthode Kanban.

D'autres auteurs ont introduit la notion multi-acteurs. En particulier, Gilbert et Ballou [45] étudient un modèle de production à la commande avec un fournisseur offrant des réductions de prix en fonction de l'information avancée proposée par le client et montrent que cette coordination permet de baisser les coûts de la chaîne logistique. Pour un modèle similaire, Chen [28] étudie le cas d'un fournisseur avec des stratégies de prix spécifiques à chaque classe de clients qui diffèrent par le délai de livraison. Bourland et al. [12] étudient un système à deux étages où les deux acteurs utilisent une politique de stock nominal à revue périodique et montrent l'apport de l'information avancée (sous forme de rapidité du transfert vers l'aval de la chaîne logistique) sur les performances du système. Ferguson [41] traite un système de stockage à deux étages avec différents rapports de force entre les acteurs et montre l'apport de l'information avancée sur les performances du système.

Les différents travaux cités ci-dessus ne s'intéressent pas à l'interaction entre les différents acteurs en vue d'un équilibre dépendant des rapports de force. Or dans la réalité, cette interaction entre des acteurs rationnels où chacun essaye de maximiser son propre profit en fonction des paramètres locaux influe considérablement les performances de la chaîne logistique comme nous l'avons montré dans le chapitre 5 sur des modèles de production/stockage sans information avancée.

Dans ce chapitre, nous utilisons la théorie des jeux afin d'étudier un modèle décentralisé à deux étages avec information avancée et nous mesurons la dégradation de ses performances par rapport au modèle centralisé. Dans le paragraphe suivant, nous décrivons le modèle étudié, ensuite, nous rappelons la solution centralisée et dans la dernière partie de ce chapitre, nous présentons nos travaux concernant la solution décentralisée ainsi que les possibilités de coordination.

3 Modèle étudié

Le modèle étudié dans ce chapitre est la généralisation du modèle du chapitre 5 avec l'introduction de la notion d'information avancée sur la demande.

Nous modélisons un système mono-produit de production/stockage à deux étages avec information avancée sur la demande gérés par deux agents différents : un fournisseur et un détaillant. Nous considérons l'information avancée comme étant une commande ferme dont le délai de livraison est connu avec certitude et ne peut pas être modifié.

Le premier étage géré par le fournisseur est un étage de production /stockage modélisé par un serveur avec un temps de fabrication exponentiel. Le système est contrôlé par une politique de stock nominal.

Un étage de stockage géré par le détaillant et modélisé par un stock contrôlé par une politique de stock nominal. La demande est aléatoire et unitaire connue τ_2 unités de temps à l'avance et ne peut être ni modifiée ni annulée. Les temps d'inter-arrivées suivent une loi exponentielle. Les demandes non satisfaites seront mises en attente.

Afin d'aboutir à des résultats analytiques, nous adoptons les mêmes hypothèses que le chapitre 5 : le transport entre les deux étages se fait instantanément et les différents paramètres du système sont connus des deux agents. L'information avancée acquise par le détaillant est immédiatement transmise au fournisseur.

Le fournisseur (respectivement le détaillant) subit un coût de stockage h_s (respectivement $h_r \geq h_s$) par unité de stock gardé dans le stock Xs (respectivement Xr) par unité de temps alors que les demandes mises en attente dans la file Y génèrent un coût de rupture b par client par unité de temps qui sera partagé entre les deux agents avec les proportions b_s et b_r (fig. 8.1).

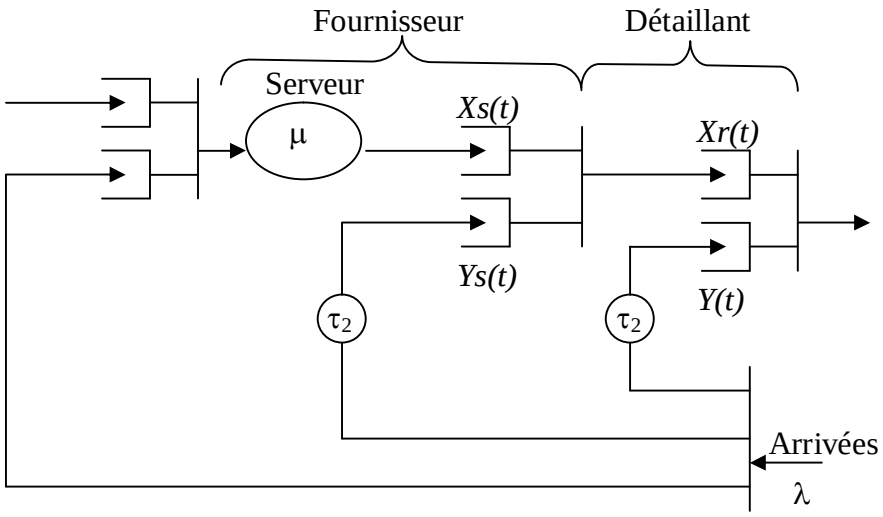


Fig. 8.1 : *Modèle de production par anticipation avec fenêtres de temps dans une politique de stock nominal*

4 Résultats obtenus

4.1 Solution centralisée

Dans la version centralisée de notre problématique, le système est géré par un seul agent qui optimisera globalement la chaîne logistique. Le transport entre les deux étages est instantané, donc le stock ne sera gardé que dans le premier étage ($h_s \leq h_r$). D'autre part, les demandes qui entrent dans le système sont immédiatement transmis au premier étage et se transforment en ordre de fabrication dans la file du serveur. A partir de ces constatations, le modèle exposé ci-dessus est équivalent au modèle de Buzacott et Shanthikumar [16] à un étage, étudié dans le chapitre précédent.

Dans ce qui suit, nous allons rappeler les différents résultats obtenus pour ce modèle dans le cadre d'une politique de stock nominal.

Buzacott et Shanthikumar ont montré que pour une quantité d'information avancée τ_2 fixe, le stock nominal est :

$$S_b^* = \left\lfloor \frac{Log \frac{h_s}{h_s + b}}{Log\,\rho} + \frac{\mu\tau_2(1-\rho)}{Log\,\rho} \right\rfloor$$

A partir de cette expression, plus d'information avancée permet de diminuer le stock optimal ainsi que les coûts qui lui sont associés. Néanmoins, l'apport de l'information avancée est limité et le système atteint son optimum global pour :

$$\tau_2 = \tau_{2C} = \left\lfloor -\frac{Log \frac{h_s}{h_s + b}}{\mu(1-\rho)} \right\rfloor \text{ et } S_b^* = 0.$$

Karaesmen et al. [60] montrent que la politique BSADI équivalente à la politique de stock nominal dans notre modèle est très proche de la solution optimale ce qui nous permettra de la considérer comme un bon point de référence pour pouvoir juger la qualité de la solution décentralisée.

4.2 Système décentralisé

4.2.1 Optimisation :

Dans le système décentralisé, chaque agent essayera de déterminer son niveau de stock nominal afin de minimiser les coûts de son étage tout en sachant que l'autre agent a le même objectif.

Comme, nous l'avons fait dans le chapitre 5, nous utilisons la théorie des jeux pour déterminer les stratégies optimales adoptées par les différents acteurs. Nous avons montré pour le modèle sans information avancée que l'équilibre de Nash est le plus efficace que l'équilibre de Stackelberg. Nous nous contentons alors de l'équilibre de Nash car nous pensons que le comportement du modèle étudié sera proche de celui sans information avancée.

Afin d'améliorer les performances de la chaîne logistique, nous aurons recours à la coordination qui consiste à élaborer des contrats entre le fournisseur et le détaillant afin de ramener la solution décentralisée à la solution centralisée.

Soient $E[Xs]$ le niveau moyen de stockage du fournisseur et $E[Xr]$ le niveau moyen de stockage du détaillant.

Lemme 8.1 : $E[Xs]$ et $E[Xr]$ sont des fonctions de Ss et de Sr les niveaux de stock du fournisseur et du détaillant et s'écrivent de la manière suivante :

$$E[Xs(Ss,Sr)] = Ss + \lambda\tau_2 - \frac{\rho(1-\rho^{Ss}e^{-\mu\tau_2(1-\rho)})}{1-\rho}$$

et

$$E[Xr(Ss,Sr)] = Sr - \frac{\rho^{Ss+1}e^{-\mu\tau_2(1-\rho)}(1-\rho^{Sr})}{1-\rho}$$

Démonstration : Une demande qui arrive dans le système est transmise immédiatement au fournisseur. En outre, la demande n'est transmise à la file Ys qu'après un délai τ_2. Donc, l'étage du fournisseur se comporte comme un système de production par anticipation avec information avancée, géré par une politique de stock nominal, où les demandes arrivent suivant un processus de Poisson. C'est le modèle centralisé de

Buzacott et Shanthikumar étudié lors du chapitre précédent, donc, le stock moyen pour un niveau de stock nominal *Ss* est :

$$E[Xs(Ss,Sr)] = Ss + \lambda\tau_2 - \frac{\rho(1-\rho^{Ss}e^{-\mu\tau_2(1-\rho)})}{1-\rho}$$

Par ailleurs, vu de l'extérieur, un modèle décentralisé de niveaux de stock nominaux *Ss* et *Sr* se comporte comme un système centralisé de stock nominal *S*=*Ss*+*Sr*. Donc les deux systèmes sont reliés par la formule suivante :

$$E[Xs(Ss,Sr)] + E[Xr(Ss,Sr)] = E[X(Ss+Sr)]$$

Ainsi, $E[Xr(Ss,Sr)] = Sr - \dfrac{\rho^{Ss+1}e^{-\mu\tau_2(1-\rho)}(1-\rho^{Sr})}{1-\rho}$ ◆

Notons que *E*[*Xs(Ss, Sr)*] et *E*[*Xr(Ss, Sr)*] sont des fonctions convexes respectivement en *Ss* et en *Sr*.

Dans le modèle que nous avons proposé, le coût de rupture total est partagé entre le fournisseur et le détaillant par les coefficients b_s et b_r qui sont supposés connus par les deux agents et fixés d'avance, d'où le lemme 8.2 ci-dessous :

Lemme 8.2 : Soit *Bs* et *Br* les coûts moyens de rupture subits par le fournisseur et du détaillant, alors on a:

$$Bs = b_s \times E[Y(Ss,Sr)]$$
$$Br = b_r \times E[Y(Ss,Sr)]$$

où

$$E[Y(Ss,Sr)] = \frac{\rho^{Ss+Sr+1}}{1-\rho}e^{-\mu\tau_2(1-\rho)}$$

le nombre moyen des demandes en attente.

Démonstration : Du fait du partage du coût de rupture entre les deux acteurs, le fournisseur n'est pas pénalisé en cas de rupture de stock (attente dans le file *Ys*) tant que le détaillant répond à la demande. Cependant le système est pénalisé en cas de demande

en attente dans la file *Y*. Ainsi, l'attente moyenne du système décentralisé *E*[*Y(Ss, Sr)*] est liée à l'attente moyenne du système centralisé comme suit :

$$E[Y(Ss,Sr)] = E[Y(Ss+Sr)],$$

donc, les coûts moyens d'attente du système décentralisé s'obtiennent en multipliant *E*[*Y(Ss+Sr)*] par les coûts unitaires subits par chaque acteur b_s et b_r ◆

Notons que *E*[*Y(Ss, Sr)*]est une fonction convexe en *Ss* et en *Sr*.

Les coûts respectifs du fournisseur et du distributeur sont :

$$Cs(Ss,Sr) = h_s E[Xs(Ss,Sr)] + b_s E[Y(Ss+Sr)] \tag{8.1}$$

$$Cr(Ss,Sr) = h_r E[Xr(Ss,Sr)] + b_r E[Y(Ss+Sr)] \tag{8.2}$$

Proposition 8.1 : La fonction de réaction du fournisseur en fonction du choix stratégique *Sr* du détaillant s'écrit de la manière suivante :

$$Ss^*(Sr) = \left\lfloor \frac{Log\dfrac{h_s}{h_s + b_s\rho^{Sr}}}{Log\,\rho} + \frac{\mu\tau_2(1-\rho)}{Log\,\rho} \right\rfloor^+ \tag{8.3}$$

Démonstration : $Cs(Ss,Sr) = h_s\left(Ss + \lambda\tau_2 - \dfrac{\rho(1-\rho^{Ss}e^{-\mu\tau_2(1-\rho)})}{1-\rho}\right) + b_s\dfrac{\rho^{Ss+Sr+1}}{1-\rho}e^{-\mu\tau_2(1-\rho)}$

donc

$$Cs(Ss,Sr) - Cs(Ss-1,Sr) = h_s - (h_s + b_s\rho^{Sr})\rho^{Ss}e^{-\mu\tau_2(1-\rho)}$$

par suite

$$Cs(\tilde{S}s^*,Sr) - Cs(\tilde{S}s^*-1,Sr) = 0 \;\Rightarrow\; h_s = \left(h_s + b_s\rho^{Sr}\right)\rho^{\tilde{S}s^*}e^{-\mu\tau_2(1-\rho)}$$

ou encore

$$Ss^*(Sr) = \lfloor \tilde{S}s^* \rfloor = \left\lfloor \frac{Log \dfrac{h_s}{h_s + b_s \rho^{Sr}}}{Log\,\rho} + \frac{\mu\tau_2(1-\rho)}{Log\,\rho} \right\rfloor$$

Or *Ss* ne peut pas être inférieur à 0 d'où l'expression de $Ss^*(Sr)$ dans la proposition 8.1 ci-dessus ◆

Proposition 8.2 : La fonction de réaction du détaillant en fonction de la stratégie *Ss* du fournisseur s'écrit comme suit :

$$Sr^*(Ss) = \left\lfloor \frac{Log \dfrac{h_r}{h_r + b_r}}{Log\,\rho} + \frac{\mu\tau_2(1-\rho)}{Log\,\rho} - Ss \right\rfloor^+ \qquad (8.4).$$

Démonstration : idem que la proposition 5.2 ◆

Nous constatons que $Ss^*(Sr)$ et $Sr^*(Ss)$ sont inférieurs au niveau du stock nominal de la solution centralisée S^*. Ainsi, S^* sera considéré comme une borne supérieure des stratégies Ss^* et Sr^*, condition nécessaire pour prouver par la suite l'existence de l'équilibre de Nash.

4.2.2 Equilibre de Nash

Rappelons que le choix Ss^* du fournisseur (respectivement Sr^* du détaillant) dépend du type de l'équilibre choisi, en l'occurrence, l'équilibre de Nash. Dans ce cas le couple de stratégies (Ss^*, Sr^*) n'est autre que l'intersection des deux courbes de réaction calculées ci-dessus. L'équilibre de Nash peut être multiple du fait de la discontinuité des stratégies. Néanmoins, vu les performances très proches des équilibres de Nash constatés lors du chapitre 5, nous nous contentons de l'un des équilibres trouvés et non nécessairement du meilleur.

Notations :

A partir des courbes de réaction (8.3) et (8.4), nous constatons que la stratégie de chaque acteur est décroissante en fonction de la stratégie de l'autre acteur. Nous notons ainsi les deux stratégies Ss_{max}^* et Sr_{max}^* tels que :

$$Ss_{\max}{}^{*} = Ss^{*}(0) = \left\lfloor \frac{Log\dfrac{h_s}{h_s + b_s}}{Log\,\rho} + \frac{\mu\tau_2(1-\rho)}{Log\,\rho} \right\rfloor^{+}$$

$$Sr_{\max}{}^{*} = Sr^{*}(0) = \left\lfloor \frac{Log\dfrac{h_r}{h_r + b_r}}{Log\,\rho} + \frac{\mu\tau_2(1-\rho)}{Log\,\rho} \right\rfloor^{+}$$

Par ailleurs, le terme

$$-\frac{\mu\tau_2(1-\rho)}{Log\,\rho}$$

est présent dans la majorité des équations utilisées comme étant la quantité de réduction du stock nominal avec l'apport de l'information avancée. Nous la désignons par *T*.

Les expressions des stratégies optimales des deux acteurs ressemblent à celles trouvées lors du chapitre 5. Nous examinerons dans la proposition ci-dessous le lien entre les deux modèles sans et avec information avancée. Ceci va nous permettre, d'une part, d'obtenir des résultats analytiques qui vont nous servir dans la suite du travail et, d'autre part, de fournir une manière intéressante de généralisation des résultats obtenus pour le modèle sans information avancée.

Proposition 8.3 :

Soient (Ss_0^*, Sr_0^*) l'équilibre de Nash calculé à partir du modèle sans information avancée et (Ss^*, Sr^*) l'équilibre de Nash correspondant[6] pour le modèle avec information avancée.

i : Si $Ss_{max}^* \geq Sr_{max}^*$ alors :

i_a : Si $Ss_{max}^* > 0$ alors $Sr^* = Sr_0^* = 0$ et $Ss^* = Ss_0^* - T$.

i_b : Si $Ss_{max}^* = 0$ alors $Sr^* = Sr_0^* = 0$ et $Ss^* = 0$.

ii : Si $Ss_{max}^* < Sr_{max}^*$ alors :

ii_a : Si $Sr_{max}^* \geq Sr_0^*$ alors $Sr^* = Sr_0^*$ et $Ss^* = Ss_0^* - T$.

ii_b : Si $Sr_{max}^* < Sr_0^*$ alors $Sr^* = Sr_{max}^*$ et $Ss^* = 0$.

[6] Nous considérons les équilibres de Nash recherchés par un même algorithme pour les deux problèmes.

Démonstration :

Soit $Ss_0^*(Sr_0)$ et $Sr_0^*(Ss_0)$ les courbes de réaction des deux acteurs dans le modèle sans information avancée. Pour

$$Ss^*(Sr) > 0,\ Sr \in [0, Sr_0^*],$$

les courbes de réaction des deux modèles sont reliées comme suit :

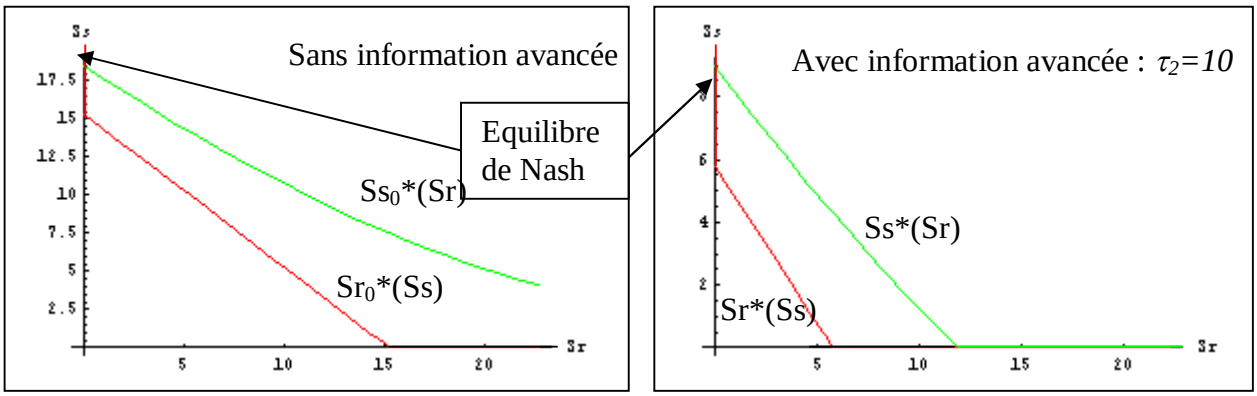
$$Ss^*(Sr) = Ss_0^*(Sr) - T \text{ et } Sr^*(Ss) = Sr_0^*(Ss),$$

donc l'intersection entre les deux courbes du système avec information avancée subit une translation parallèle à Ss d'une valeur T d'où les points i_a et ii_a de la proposition.

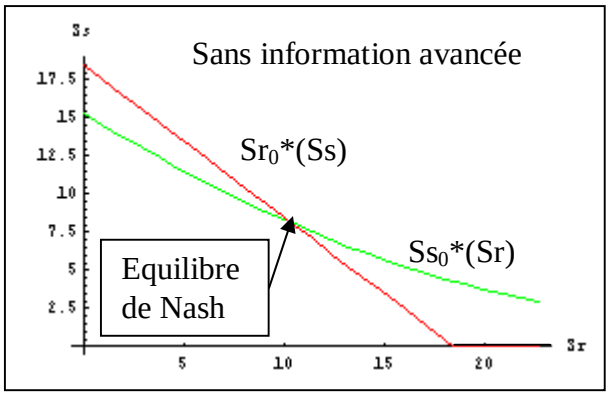
Si $Ss_{0max}^* < T$ alors $Ss_{max}^* = 0$ et la stratégie du fournisseur est une production à la commande et puisque $Sr_{max}^* \leq Ss_{max}^*$ alors le détaillant adopte la même stratégie et nous avons $Sr=0$ et $Ss^* = 0$. (i_b).

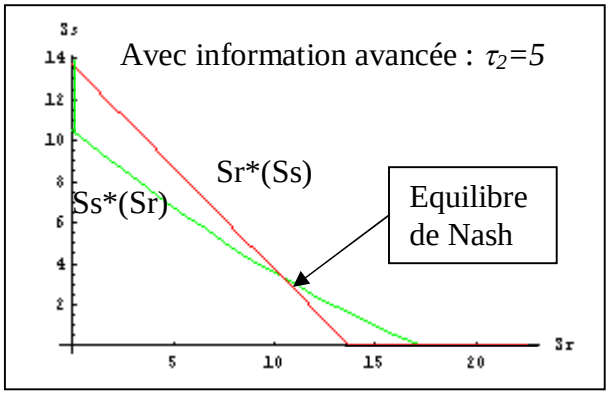
Pour $Sr_{max}^* < Sr_0^*$, $Ss^*(Sr) = 0$ *pour* $Sr<Sr_0^*$, donc, en augmentant d'avantage Sr le fournisseur opte toujours pour un stock nul. Le détaillant est obligé ainsi à choisir $Sr^*(0)=Sr_{max}^*$ (ii_b) ◆

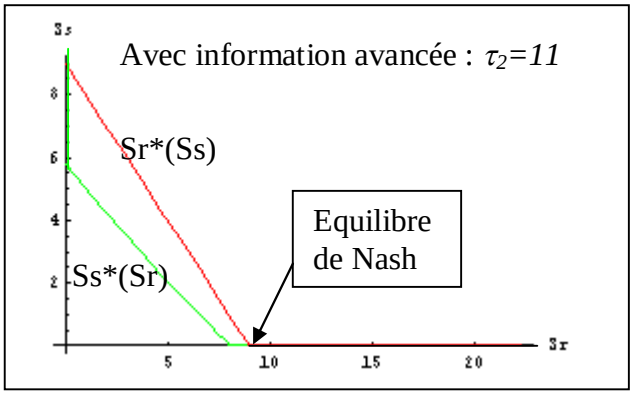
Pour les paramètres $\rho=0.9$, $\mu=1$, $h=1$ et $b=10$, les figures ci-dessous (fig. 8.2) illustrent cette proposition.



Cas $Ss_{max}^* \geq Sr_{max}^*$ $(br=4)$: $Sr^* = Sr_0^* = 0$ et $Ss^* = Ss_0^* - T$







Cas $Ss_{max}^{*} < Sr_{max}^{*}$ *et* $Sr_{max}^{*} \geq Sr_{0}^{*}$ *(br=6)*

Cas $Ss_{max}^{*} < Sr_{max}^{*}$ *et* $Sr_{max}^{*} < Sr_{0}^{*}$ *(br=6)*

Fig. 8.2 : *Relations entre les équilibres de Nash sans et avec information avancée*

A partir de la proposition ci-dessus, les niveaux de stock nominal de l'équilibre de Nash dépendent de l'ordre de Ss_{max}^{*} et Sr_{max}^{*} qui est déterminé à partir des paramètres du système. En effet, pour des coûts de stockage identiques ($h_s=h_r$) et si Ss_{max}^{*} et Sr_{max}^{*} sont strictement positifs alors $Ss_{max}^{*} \geq Sr_{max}^{*}$ pour $b_s \geq b_r$.

Ce lien entre l'équilibre de Nash du modèle sans information avancée et celui du modèle avec information avancée nous permet de prévoir la dégradation des performances du système décentralisé par rapport au système centralisé. En effet, le stock global de la chaîne logistique à l'équilibre de Nash peut être déterminé à partir des courbes de réaction des deux acteurs :

$$Ss^{*} + Sr^{*} = \max\left[\left\lfloor \frac{Log\dfrac{h_s}{h_s+b_s}}{Log\,\rho} + \frac{\mu\tau_2(1-\rho)}{Log\,\rho} \right\rfloor^{+}, \left\lfloor \frac{Log\dfrac{h_r}{h_r+b_r}}{Log\,\rho} + \frac{\mu\tau_2(1-\rho)}{Log\,\rho} \right\rfloor^{+}\right] \qquad (8.5)$$

A partir de cette équation, nous constatons que le niveau de stock global du système décentralisé est toujours inférieur à celui du système centralisé sauf dans les cas extrêmes de b_r ou de b_s pour lesquels nous avons l'équivalence entre les deux systèmes. Ce constat rejoint la proposition 5.4 du chapitre 5. En conséquence, les coûts du système décentralisé sont plus importants que les coûts du système centralisé comme le suggère le corollaire 5.1.

S'il est évident de prouver la dégradation des performances du système décentralisé par rapport au système centralisé, est-ce que nous pouvons prévoir l'amplitude de cette dégradation ? Et est-ce que l'information avancée influe ou non sur cette baisse de performance ? Afin de répondre à ces questions, nous allons étudier la perte relative *PR* en fonction des paramètres du système.

Rappelons que *PR* est définie comme suit :

$$PR(b_r) = \frac{C(Ss^* + Sr^*) - C(S^*)}{C(S^*)}$$

Proposition 8.4 :
a/ $PR(b_r)$ est symétrique par rapport à $b_r = b_s$.
b/ $PR(b_r)$ est croissante sur $[0,b/2]$.

Démonstration :
Idem que la proposition 5.5 ◆

Ainsi, l'information avancée n'influe pas le comportement de *PR*. Peut-on confirmer cette constatation par rapport à l'amplitude de la perte de performance ? Dans la figure 8.3, nous avons tracé $PR(b_r)$ pour différentes valeurs de τ_2 et pour deux valeurs de ρ.

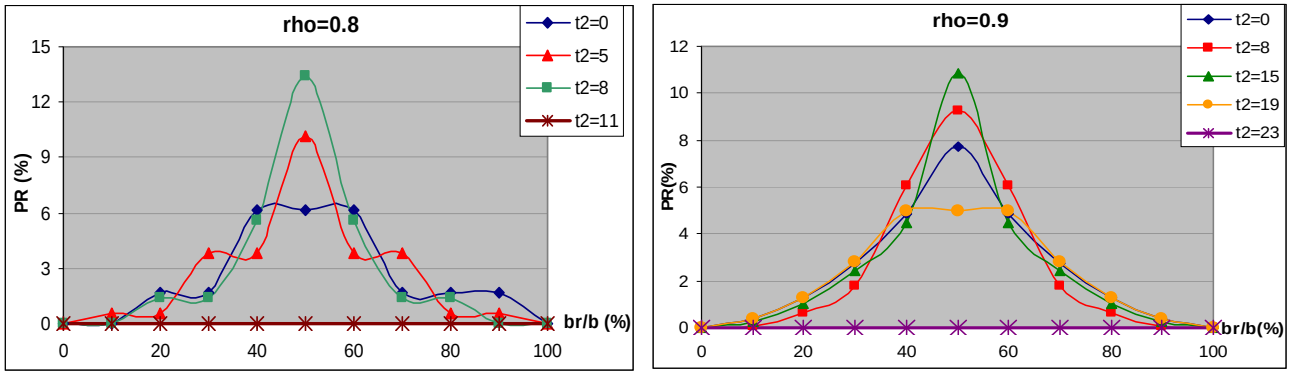


Fig. 8.3 : *l'efficacité de l'équilibre de Nash en fonction de b_r pour différentes valeurs de τ_2*

A partir de ces courbes, nous observons deux comportements intéressants à analyser :

- L'information avancée n'affecte pas d'une manière significative la pénalité de décentralisation (à l'exception de $\tau_2=\tau_{2C}$, $\tau_{2C}=11$ pour $\rho=0.8$ et $\tau_{2C}=23$ pour $\rho=0.9$) sur la majeur partie de l'intervalle b_r sauf pour b_r proche de b_s.
- Cette variation est plus importante pour les faibles valeurs de ρ.

Si les variations constatées dans le modèle sans information avancée ont pu être expliqués par l'effet de la discontinuité, cet argument ne semble pas valable dans notre cas car ces effets devraient diminuer quand la pénalité augmente ($b_r=b_s$) et n'expliquent pas une perte relative nulle pour $\tau_2=\tau_{2C}$. Pour éclaircir ces points, nous allons examiner de prêt le comportement du coût total du modèle décentralisé en fonction de τ_2.

Proposition 8.5 :

Si

$$(Ss_{max}^* \geq Sr_{max}^* \text{ et } Ss_{max}^* > 0)$$
$$\text{ou } (Ss_{max}^* < Sr_{max}^* \text{ et } Sr_{max}^* \geq Sr_0^*)$$

alors $PR(b_r)$ augmente en fonction de τ_2 et cette augmentation est plus importante quand ρ diminue.

Démonstration :

Soit $C_0(S_0)$ le coût total du système centralisé sans information avancée pour un S_0 donné et $C(S)$ celui du système centralisé avec information avancée pour un S donné.

Rappelons que :

$$C_0(S_0) = h_s\left(S_0 - \frac{\rho(1-\rho^{S_0})}{1-\rho}\right) + b\left(\frac{\rho^{S_0+1}}{1-\rho}\right) \tag{8.6}$$

$$C(S) = h_s\left(S + \lambda\tau_2 - \frac{\rho(1-\rho^{S}e^{-\mu\tau_2(1-\rho)})}{1-\rho}\right) + b\left(\frac{\rho^{S+1}}{1-\rho}e^{-\mu\tau_2(1-\rho)}\right) \tag{8.7}$$

A partir de la proposition 8.3 et pour les hypothèses de cette proposition

$$S^*=S_0^*-T \text{ et } Ss^*+Sr^*=Ss_0^*+Sr_0^*-T.$$

Or, d'après les expressions (8.6) et (8.7), pour tout S_0, on a :

$$C_0(S_0) - C(S_0 - T) = h_s\lambda\tau_2(-\frac{1-\rho}{\rho Log\rho} - 1).$$

Soit

$$\varepsilon = h_s\lambda\tau_2(-\frac{1-\rho}{\rho Log\rho} - 1)$$

alors ε tend vers 0 quand ρ tend vers 1.

Donc, pour $S_0=S_0^*$ et pour $S_0'=Ss_0^*+Sr_0^*$:

$$PR(b_r) = \frac{C(Ss^* + Sr^*) - C(S^*)}{C(S^*)}$$

$$PR(b_r) = \frac{C(S_0'-T) - C(S_0 - T)}{C(S_0 - T)}$$

$$PR(b_r) = \frac{C_0(S_0') - C_0(S_0)}{C_0(S_0) - \varepsilon}$$

$$PR(b_r) = \frac{C_0(Ss_0^* + Sr_0^*) - C_0(S_0^*)}{C_0(S_0^*) - \varepsilon}$$

Or puisque ε augmente avec τ_2 pour ρ fixe et tend vers 0 quand ρ augmente, nous expliquons aisément l'augmentation de la pénalité de décentralisation en fonction de τ_2 pour les premières valeurs de τ_2 et l'importance de l'amplitude de cette augmentation pour $\rho=0.8$ par rapport à celle pour $\rho=0.9$ dans la figure 8.3 ◆

Si la proposition ci-dessus nous a permet d'expliquer une bonne partie de l'évolution de *PR* en fonction des paramètres de notre modèle, il nous reste une deuxième partie où pour des valeurs importantes de τ_2 la pénalité diminue jusqu'à s'annuler pour $\tau_2=\tau_{2C}$. Si

une démonstration mathématique s'avère compliquée à mener, une analyse fine de l'évolution du coût total du modèle décentralisé en fonction de τ_2 représenté dans la figure 8.4 ($\rho=0,9$; $h=1$; $b=10$) explique bien le comportement de *PR*. En effet, tant que le niveau de stock nominal du modèle centralisé est supérieur à T l'écart entre les niveaux des stocks des deux modèles est constant et puisque ce niveau diminue en fonction de τ_2 alors en valeurs relatives, les performances du système décentralisé se dégradent en fonction de τ_2. Pour les grandes valeurs de τ_2, nous nous plaçons dans les cas *i-b* et *ii-b* de la proposition 8.3, où l'écart entre les stocks du système avec information avancée et ceux du système sans information avancée n'est plus de T mais diminue en fonction de τ_2 jusqu'à s'annuler pour $\tau_2=\tau_{2C}$ $(S^*=Ss^*=Sr^*=0)$. En conséquence la perte relative diminue en fonction de τ_2 jusqu'à s'annuler pour $\tau_2=\tau_{2C}$ d'où la chute du coût pour les grandes valeurs de τ_2 dans la figure ci-dessous.

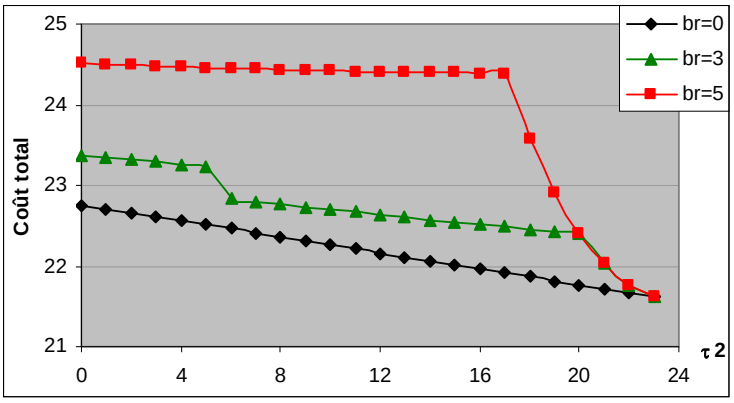


Fig. 8.4 : *L'évolution du coût total en fonction de* τ_2

4.2.3 Etude du contrat α_S

Vu les propriétés similaires des différents types de contrats que nous avons instaurés, nous nous contentons dans ce paragraphe du contrat α_S pour essayer de vérifier l'apport de l'information avancée sur les performances du système décentralisé et nous testons un nouveau contrat dans le paragraphe suivant.

Rappelons que, dans le contrat α_S, le fournisseur propose de payer une quantité $\alpha_S h_r$ par unité de temps pour chaque élément de stock du détaillant afin de l'inciter à garder plus de stock.

Il est clair qu'à partir des relations qui existent entre les niveaux de stock du système sans information avancée et celui avec information avancée (point i_a et ii_a de la proposition 8.3), le contrat α_S permet coordonner la chaîne logistique étudiée pour $\alpha_S=1-b_r/b$ et que l'information avancée n'influe pas sur le domaine de validité des

contraintes de participation comme le montre la figure 8.5 pour les paramètres suivants ($\rho=0.9$, $h=1$, $b=10$, $\mu=1$ et $\tau_2=8$). Rappelons que pour ces paramètres $S_0^*=22$ et $\tau_{2C}=23,98$.

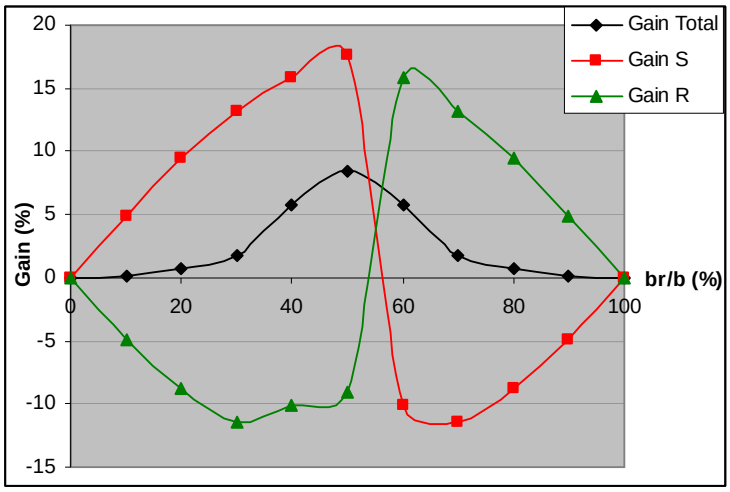


Fig. 8.5 : *les courbes de gain du contrat α_S par rapport à l'équilibre de Nash*

Nous prouvons par le biais de la proposition 8.6 que cette valeur de α_S permet de coordonner le système pour tous les cas de situation de la proposition 8.3.

Proposition 8.6 :

Soit un système à deux agents S et R dont les fonctions de coût sont présentées par les équations (8.1) et (8.2), alors il existe toujours

$$\alpha_S = 1 - \frac{b_r}{b}$$

pour lequel le problème décentralisé admet un équilibre de Nash (Ss^*, Sr^*) tel que :

$$Ss^* + Sr^* = S^*.$$

Démonstration :

Si $b_r \geq (1-\alpha_S)b_s$ alors Ss^* et Sr^* sont liés par la relation suivante :

$$Sr^* + Ss^* = \left\lfloor \frac{Log\left(\frac{(1-\alpha_S)h}{(1-\alpha_S)h + b_r}\right)}{Log\,\rho} + \frac{\mu\tau_2(1-\rho)}{Log\,\rho} \right\rfloor^+$$

Or le niveau de stock nominal du système centralisé est :

$$S^* = \left\lfloor \frac{Log\left(\frac{h}{h+b}\right)}{Log\,\rho} + \frac{\mu\tau_2(1-\rho)}{Log\,\rho} \right\rfloor^+$$

Donc pour $\alpha_S = 1 - \frac{b_r}{b}$ nous avons bien $Ss^* + Sr^* = S^*$ et la contrainte $b_r \geq (1-\alpha_S)b_s$ est toujours vérifiée ◆

Si la différence constatée entre le modèle sans information avancée et le modèle avec information avancée pour les grandes valeurs de τ_{2C} n'a pas influencé la valeur de α_S, il est clair que cette différence joue un rôle dans le domaine de définition des contraintes de participation, en particulier, pour $\tau_2 = \tau_{2C}$, le contrat α_S n'est pas nécessaire puisque le système est coordonné.

Afin de mettre en évidence cette influence, nous nous contentons des résultats numériques obtenus qui prouvent que l'augmentation de τ_2 élargie le domaine de définition des contraintes de participation jusqu'à couvrir tout l'intervalle de b_r (fig. 8.6).

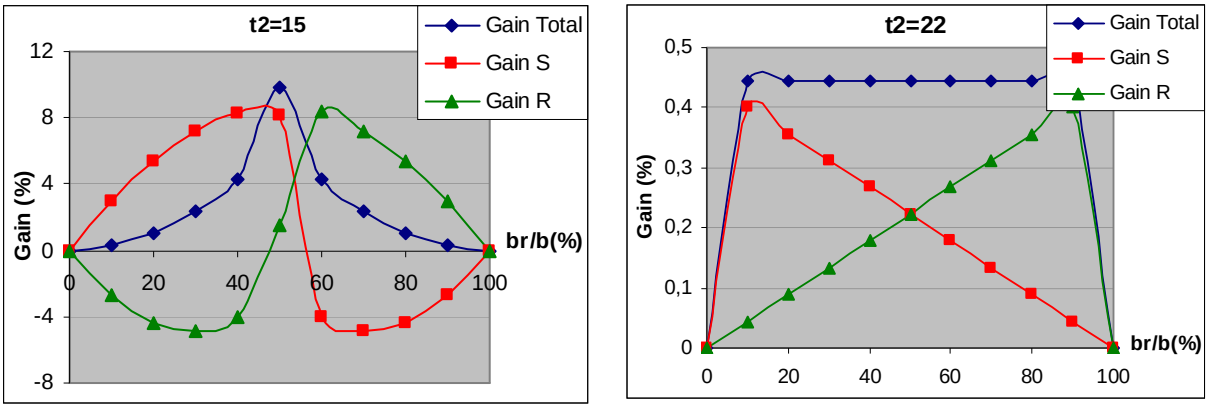


Fig. 8.6 : *évolution de la validité des contraintes de participation en fonction de* τ_2

Notons que dans le cas où nous disposons de suffisamment d'information avancée ($\tau_2 = \tau_{2C}$), le système fonctionne à la commande et il est coordonné sans qu'on est obligé de passer par des contrats.

4.2.4 La coordination avec les fenêtres de temps : le contrat τ

Lors du chapitre 5, nous avons étudié plusieurs types de contrats entre les différents acteurs. Ces contrats consistent à des transferts d'argent basés sur les valeurs moyennes des variables du problème tels que le stock et l'attente. La détermination des paramètres optimaux de ces contrats pour coordonner le modèle étudié dans ce chapitre ainsi que les limites de cette coordination est possible comme nous l'avons montré dans le cas particulier du contrat α_S. Néanmoins, nous sommes convaincus que les relations fortes qui existent entre les variables de décision des modèles avec et sans information avancée nous conduiront aux mêmes résultats obtenus lors du chapitre 5 soit par rapport à l'efficacité des contrats dans la coordination du modèle soit pour les domaines de validité des contraintes de participation.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à un contrat de type nouveau non applicable au modèle sans information avancée qui est la coordination avec fenêtre de temps. Dans ce contrat, le fournisseur propose au détaillant une livraison à l'avance dans les limites d'une fenêtre de temps de bornes τ_1 et τ_2 ce qui relaxe la contrainte de livraison instantanée à τ_2. nous définissons $\tau = \tau_2 - \tau_1$ la largeur de la fenêtre de temps comme étant la variable de coordination et nous désignons le contrat correspondant par le terme « contrat τ ».

Sous un contrat τ, le fournisseur reçoit des commandes unitaires fermes τ_2 unités de temps à l'avance. Le temps d'inter-arrivées est exponentiel de taux λ. Chaque commande génère un ordre de fabrication dans la file du serveur exponentiel de taux μ du fournisseur et peut être satisfaite depuis le stock de produits finis à partir de τ_1 unités de temps d'attente. Le fournisseur subit des coûts de stockage ainsi que des coûts de rupture pour les attentes dépassant τ_2 unités de temps. Cette description de l'étage du fournisseur est similaire au modèle étudié lors du chapitre précédent. Ainsi, le stock moyen et le nombre moyen en attente s'écrivent de la manière suivante :

$$E[Xs(Ss,Sr)] = Ss + \lambda(\tau_2 - \tau) - \frac{\rho(1-\rho^{Ss}e^{-\mu(\tau_2-\tau)(1-\rho)})}{1-\rho}$$

$$\text{et } E[Y(Ss,Sr)] = \frac{\rho^{Ss+Sr+1}}{1-\rho} e^{-\mu\tau_2(1-\rho)} .$$

Donc, le coût moyen du fournisseur est :

$$Cs(Ss,Sr) = h_s E[Xs(Ss,Sr)] + b_s E[Y(Ss,Sr)] \qquad (8.8)$$

L'analyse de l'étage de stockage du détaillant peut être faite à partir des résultats obtenus au début de ce chapitre. En effet, le paramètre de coordination τ n'influe pas le comportement global du système vis à vis du client final. Ainsi, le stock moyen du détaillant est la différence entre le stock moyen du modèle centralisé et celui du fournisseur. D'autre part, le nombre moyen en attente est le même que celui du fournisseur :

$$E[Xr(Ss,Sr)] = Sr + \lambda\tau + \frac{\rho^{Ss+1} e^{-\mu\tau_2(1-\rho)} (\rho^{Sr} - e^{-\mu\tau(1-\rho)})}{1-\rho}$$

$$E[Y(Ss,Sr)] = \frac{\rho^{Ss+Sr+1}}{1-\rho} e^{-\mu\tau_2(1-\rho)}$$

Donc, le coût moyen du détaillant est :

$$Cr(Ss,Sr) = h_r E[Xs(Ss,Sr)] + b_r E[Y(Ss,Sr)] \qquad (8.9)$$

Dans le système décentralisé, chaque acteur est amené à optimiser sa fonction objectif pour minimiser ses coûts. L'équilibre obtenu dépend des rapports de force des deux agents (nous nous intéressons dans cette analyse à l'équilibre de Nash). Ainsi, le rôle de la coordination est de déplacer cet équilibre vers la solution centralisée déterminée auparavant pour optimiser les performances de la chaîne logistique globale.

Pour cela, nous avons besoin des fonctions de réaction des deux acteurs présentées ci-dessous pour τ et τ_2 donnés :

$$Ss^*(Sr) = \left\lfloor \frac{Log \dfrac{h_s}{h_s.e^{\mu\tau(1-\rho)} + b_s \rho^{Sr}}}{Log\,\rho} + \frac{\mu\tau_2(1-\rho)}{Log\,\rho} \right\rfloor^+$$

$$Sr^*(Ss) = \left\lfloor \frac{Log \dfrac{h_r}{h_r + b_r}}{Log\,\rho} + \frac{\mu\tau_2(1-\rho)}{Log\,\rho} - Ss \right\rfloor^+$$

Si dans les différents travaux réalisés lors de cette thèse, nous identifions la dégradation des performances du système décentralisée par la baisse du niveau de stock global par rapport au système centralisé, nous remarquons que pour les fonctions de réaction ci-dessus, le stock global du système décentralisé peut dépasser celui du système centralisé car la stratégie du fournisseur est croissante en fonction de τ et celle du détaillant ne dépend pas de ce paramètre. Néanmoins, ce comportement n'influe ni la démarche que nous avons adopté pour prouver l'existence de l'équilibre de Nash, ni la quantification de la pénalité de décentralisation. En effet, la stratégie du fournisseur demeure toujours bornée car $\tau<\tau_2$ et Ss^* ne peut en aucun cas dépasser le niveau de stock nominal calculé par Karaesmen et al. [Karaesmen, 2003 #74]. Ainsi, une démarche analogue à celle du chapitre 5 nous permet de prouver que le jeu décrit ci-dessus est un jeu super-modulaire et donc un équilibre de Nash existe d'après le théorème de Topkis (1979).

Nous examinons, par la suite, les possibilités de coordination du contrat τ. A partir des fonctions de réaction des deux acteurs, nous distinguons deux cas possibles :

Si $Sr^*>0$, alors le niveau de stock global de la chaîne logistique est égal à :

$$\frac{Log\dfrac{h_r}{h_r+b_r}}{Log\,\rho}+\frac{\mu\tau_2(1-\rho)}{Log\,\rho}$$

et ne dépend pas de τ. Dans ce cas la coordination n'est possible que pour $b_r=b$, une solution pas intéressante du fait que le système décentralisé est optimal pour ce cas de figure.

Si $Sr^* = 0$ alors le détaillant adopte une stratégie d'approvisionnement à la commande. Notons que une telle politique n'implique pas nécessairement un stock nul du détaillant du fait de la possibilité des livraisons à l'avance pratiquées par le fournisseur.

Le stock nominal global de la chaîne logistique est :

$$Ss^*+Sr^*=Ss^*=\left\lfloor\frac{Log\dfrac{h_s}{h_s.e^{\mu\tau(1-\rho)}+b_s\rho^{Sr}}}{Log\,\rho}+\frac{\mu\tau_2(1-\rho)}{Log\,\rho}\right\rfloor \qquad (8.10)$$

L'étude de l'équation ci-dessus montre que le niveau de stock global de la chaîne logistique augmente en fonction de τ. Existe-t-il une valeur de τ qui nous ramène à la solution centralisée ?

Lemme 8.3 :
Soit un système à deux agents *S* et *R* dont les fonctions de coût sont présentées par les équations (8.8) et (8.9). Si les conditions i et ii sont satisfaites :

i- $h_r + b_r \leq h_s e^{\mu\tau(1-\rho)} + b_s$

ii- $\tau^c = \dfrac{Log\dfrac{h_s + b_r}{h_s}}{\mu(1-\rho)}$ existe

alors pour $\tau = \tau^c$, le problème décentralisé admet un équilibre de Nash (Ss^*, Sr^*) tels que $Ss^* + Sr^* = S^*$, S^* est le stock nominal du modèle centralisé présenté au paragraphe 4.1.

Démonstration :
Si la condition *i* du lemme est vérifiée, alors le système décentralisé admet un équilibre de Nash (Ss^*, Sr^*) tels que $Sr^* = 0$. dans ce cas, le stock global du modèle décentralisé est calculé à partir de l'équation (8.10). La valeur de τ^c de la condition *ii* permet de satisfaire l'égalité de stock entre le système centralisé et le système décentralisé $Ss^* + Sr^* = S^*$ ◆

A partir de ce lemme, le choix de $\tau = \tau^c$ permet de ramener la solution décentralisée à la solution centralisée. Néanmoins, les conditions imposées par le lemme 1 limitent la validité de ce résultat. Dans les paragraphes qui suivent, nous allons examiner de près ces conditions.

Comme nous l'avons vu dans la démonstration ci-dessus, la contrainte *i* impose au système un équilibre de Nash de la forme $(Ss^*, 0)$, condition nécessaire pour que le paramètre τ puisse influencer les performances de la solution décentralisée. Cette contrainte dépend des paramètres du système et elle est vérifiée dans la majeure partie des simulations ($b_r \leq b_s$ ou $b_r > b_s$ et τ grande).

La deuxième condition du lemme 8.3 est plus contraignante puisque τ ne peut pas être supérieure à τ_2. De ce fait, l'existence de τ^c dépend de la validité de l'inégalité $\tau^c \leq \tau_2$ qui dépend des paramètres du modèle (condition vérifiée dans 25% des simulations réalisées).

Pour ne pas se limiter à cette condition, et puisque l'augmentation de τ permet d'accroître le niveau de stock nominal du fournisseur, nous avons toléré la possibilité d'une coordination partielle dans le cas ou $\tau^c > \tau_2$ en prenant $\tau^c = \tau_2$. Même si ce choix ne permet pas de ramener les performances du système décentralisé au système centralisé, il permet un gain non négligeable par rapport à la solution de compétition.

Nous définissons alors le paramètre optimal τ^* de la coordination avec fenêtre de temps comme suit :

- $\tau^* = \tau^C$ si $\tau^c \leq \tau_2$
- $\tau^* = \tau_2$ si $\tau^c > \tau_2$

Notons que dans le cas où les acteurs disposent de suffisamment d'information avancée ($\tau_2 = \tau_{2C}$), τ^* est toujours égale à τ^C du fait que $\tau^C \leq \tau_{2C}$ et on n'a l'égalité que pour $b_r = b$. Cependant, dans ce cas, la coordination n'est pas nécessaire puisque les performances du système sont optimales.

Le contrat proposé coordonne le système étudié et permet, de ce fait, d'améliorer les performances de la chaîne logistique. Nous nous intéressons par la suite à la flexibilité de ce contrat en essayant de répondre à la question suivante : est-ce que ce contrat permet d'améliorer les performances individuelles des deux acteurs ?

Intuitivement, la réponse à cette question est affirmative. En effet, l'utilisation d'une fenêtre de temps permet au fournisseur de diminuer à la fois ses coûts de stockage (possibilité de livraison à l'avance) et de rupture (augmentation du niveau de stock nominal). D'autre part, le détaillant bénéficie de la baisse des coûts de rupture malgré l'augmentation de ses coûts de stockage. Néanmoins, les simulations numériques ne suivent pas ces intuitions et prouvent que le domaine de définition des contraintes de participation reste très étroit (4% du domaine de b_r) comme le montre la figure 8.7 ci-dessous pour $\rho = 0.9$, $b = 10$ et $\tau_2 = 8$.

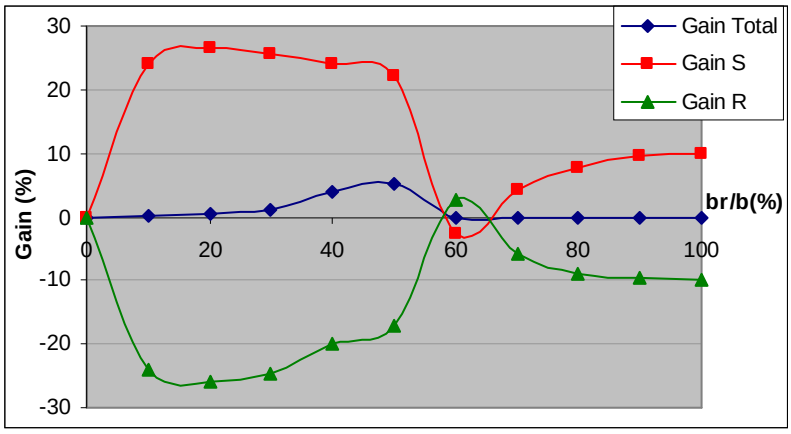


***Fig. 8.7** : les courbes de gain du contrat τ par rapport à l'équilibre de Nash*

Cet écart entre l'intuition et les simulations numériques s'explique par le fait que, avec le contrat τ plusieurs couples *(Ss,Sr)* permettent l'amélioration des performances de la chaîne logistique tout en faisant bénéficier les deux acteurs. Néanmoins, ces couples ne présentent pas des équilibres de Nash et l'esprit de compétition oblige les deux joueurs à choisir une solution toujours bénéfique pour la chaîne logistique mais qui ne satisfait pas généralement le détaillant.

A partir des ces résultats, le contrat τ permet de coordonner dans la majorité des cas la chaîne logistique. Cependant, ce contrat n'est pas très flexible et le détaillant peut ne pas être intéressé par ce type de coordination. Néanmoins, il est possible de rendre cet équilibre bénéfique pour les deux agents en considérant d'autres paramètres du système, en particulier le paramètre b_r. Un transfert d'argent entre les acteurs après le choix de l'équilibre peut être considéré comme une solution pour les contraintes de participation, mais ce choix n'est pas facile à installer.

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons généralisé l'étude effectuée lors du chapitre 5 sur la dégradation des performances des chaînes logistiques dans un système de production/stockage à deux étages avec une limitation de capacité au premier étage en introduisant la notion d'information avancée.

A notre connaissance, cette étude n'a pas été menée auparavant sous un angle de compétition/coopération entre les acteurs à l'aide de la théorie des jeux et les différents travaux qui ont traité des problématiques similaires se sont uniquement intéressés à l'interaction entre information avancée et réduction des prix.

A l'issue de cette étude, nous avons d'abord confirmé les résultats obtenus pour le système sans information avancée. Nous avons ensuite distingué les particularités de l'information avancée et son influence sur les différents résultats.

Concernant le premier point, nous avons montré que la dégradation des performances de l'équilibre de Nash par rapport au système centralisé est due à la diminution des niveaux de stocks du système et que cette diminution est plus significative quand les deux acteurs partagent équitablement les coûts de rupture. Ensuite, nous avons instauré différents contrats permettant de ramener la solution décentralisée à la solution centralisée.

Par ailleurs, nous avons prouvé que l'information avancée influe sur l'amplitude de cette dégradation et peut même disparaître (cas $\tau_2 = \tau_{2C}$) et que dans le cadre de la coordination, l'information avancée permet d'élargir le domaine de validité des contraintes de participation.

Conclusions et perspectives

Le travail réalisé lors de cette thèse rentre dans le cadre de pilotage de flux au sein de la chaîne logistique. Il s'intéresse principalement aux méthodes de pilotage à flux tiré, plus particulièrement à la politique de stock nominal, dans l'objectif de déterminer les paramètres de contrôle optimaux de cette politique.

On sait que la variabilité de la demande dégrade les performances des systèmes de production. Nous avons essayé de fournir une description générale et précise de ce constat sur les systèmes de production par anticipation. Notre investigation s'est limitée en premier temps aux systèmes de type *GI/M/1*. Nous avons, par la suite, étendu nos résultats à des systèmes de type *M/G/1* et *G/G/1*. A partir de cette étude, nous avons montré qu'en général, le recours au seul coefficient de variation ne constitue pas une mesure de la variabilité permettant d'ordonner les niveaux de stock nominal et les coûts qui lui sont associés. En revanche, nous avons prouvé que l'ordre convexe est une condition valable qui garantit l'ordre des niveaux de stock nominal et des coûts associés.

Nous avons étudié par la suite une chaîne logistique mono-produit à deux étages avec capacité finie de production que nous avons modélisée par le formalisme des files d'attente. Nous avons d'abord montré que la gestion décentralisée dégrade les

performances de la chaîne logistique (coût de stockage + coût de rupture) et nous avons calculé analytiquement cette dégradation à l'aide des outils de la théorie des jeux tels que l'équilibre de Nash et l'équilibre de Stackelberg. Nous avons abouti à des résultats intéressants sur le comportement de la pénalité de décentralisation en fonction des paramètres du système et notamment en fonction du partage du coût de rupture entre les deux acteurs. Nous avons ensuite montré, à partir des résultats obtenus antérieurement, que la variabilité de la demande n'affecte pas cette dégradation de performance.

Afin d'améliorer les performances du système décentralisé, nous avons proposé des contrats de coordination qui consistent en des transferts d'argent entre les différents acteurs en fonction des paramètres du système.

Par la suite, nous avons validé ces résultats, numériquement et par simulation, sur des modèles à deux étages de production plus complexes et sur des modèles avec un fournisseur et plusieurs détaillants.

L'apport de l'information avancée dans l'amélioration des performances des chaînes logistiques a été prouvé par différents auteurs. Deux approches différentes existent : le modèle de Buzacott et Shanthikumar [16] qui ne tolère pas les livraisons à l'avance et le modèle de Karaesmen et al. [63] qui permet les livraisons à l'avance. Après avoir examiné ces deux modèles, nous avons proposé un modèle d'information avancée avec fenêtres de temps qui généralise ces deux approches et nous avons comparé les performances de ce modèle par rapport aux deux modèles existants.

Dans la dernière partie de ce travail, nous avons généralisé les résultats obtenus pour les modèles à deux étages dans le cadre de l'information avancée sur la demande, problématique qui n'a pas été étudiée auparavant sous un angle de compétition-coopération entre les différents acteurs. Nous avons confirmé, dans un premier temps, les résultats obtenus pour le modèle précédent (sans information avancée), en particulier l'évolution du niveau de stock nominal et le coût global de la chaîne logistique en fonction des différents paramètres. Nous avons ensuite distingué les particularités dans le comportement de ce modèle du fait de la présence de l'information avancée.

Enfin, nous avons proposé deux types de solutions de coordination : des transferts d'argent entre les différents acteurs similaires au modèle précédent et des contrats se basant sur le modèle avec fenêtre de temps développé auparavant.

Les extensions possibles de nos travaux sont nombreuses. En effet, dans l'objectif d'obtenir des résultats analytiques sans avoir recours à des hypothèses très limitatives, nous avons étudié des modèles simples de chaînes logistiques. Cette étude nous a servi pour comprendre le comportement du système en fonction des différents paramètres qui entrent en jeu. Les modèles plus complexes étudiés lors du chapitre 6 ont confirmé en quelque sorte la robustesse des résultats obtenus. Ainsi, il est intéressant d'étendre cette étude à des modèles plus complexes et variés. Nous proposons ci-dessous quelques idées :

- Modélisation des chaînes logistiques multi-produits : intuitivement, la diminution du niveau de stock dû à la décentralisation peut contraindre les différents acteurs à adopter une stratégie de production à la commande. Ceci causera une dégradation importante des performances et offrira, du coup, de grandes possibilités de coordination. Cette étude peut être reliée aux travaux de Hadj Youssef [52] par le biais d'autres disciplines de service telles que la priorité. Par ailleurs, les résultats analytiques intéressants obtenus par Benjaafar et Kim [8] sur l'influence de la variabilité dans le cas multi-produits peuvent enrichir cette étude.

- Etude de modèles avec plusieurs fournisseurs et plusieurs détaillants : dans la réalité, l'organisation linéaire de la chaîne logistique n'est pas linéaire mais a une structure en réseau. Dans le chapitre 6, nous avons testé l'effet de la décentralisation sur un modèle à un fournisseur et plusieurs détaillants. Les résultats obtenus sont proches de ceux obtenus pour le modèle linéaire. Ceci nous incite à étendre cette étude au cas de plusieurs fournisseurs et plusieurs détaillants et à tester différents contrats de coordination tels que l'apport de la flexibilité (Benjaafar et al. [7]) et la possibilité d'expéditions transversales *« transshipment »* (voir Dong et Rudi [37] pour des modèles mono-période).

- Etude d'autres politiques de pilotage : Karaesmen et Dallery [61] ont étudié plusieurs politiques de pilotage de flux dans un modèle à deux étages et ont montré que des politiques tels que le Kanban généralisé donnent des performances très proches de la politique optimale. Il serait intéressant d'étudier l'influence de la décentralisation sur les performances de ces politiques dans le cas de multi-étages.

ANNEXES

Annexes A :

Rappels mathématiques

Ces annexes présentent un rappel mathématiques des notions de probabilité utilisées lors de cette thèse. Nous commençons par définir les notions élémentaires de probabilité. Après, nous expliquons la notion de variables aléatoire ainsi que les principaux lois que nous avons utiliser. Nous introduisons, par la suite les processus stochastiques et nous finirons par exposer le transformé de Laplace. Les différentes notions exposées dans ces annexes sont retirées de Baynat [6] et Saporta [89].

1 Quelques définitions

Définition A.1 :

Une mesure de probabilité P ou plus simplement une probabilité est une application qui associe à chaque élément de Ω (l'espace de toutes les réalisations possibles d'une expérience aléatoire) un réel compris entre 0 et 1 ($P:\Omega \rightarrow [0,1]$) et qui vérifie les propriétés suivantes :

- Pour tout événement A, $0 \leq P[A] \leq 1$, avec A un sous-ensemble de Ω appelé événement.
- $P[\varnothing] = 0$ et $P[\Omega] = 1$.
- Pour tout événement A et B tels que $A \cap B = \varnothing$, $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$.

Définition A.2 :
Deux évènements *A* et *B* sont indépendants ssi : $P[A \cap B] = P[A].P[B]$.

Définition A.3:
Si $P[B] > 0$, la probabilité conditionnelle que *A* se produise sachant *B* est donnée par :

$$P[A \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

Définition A.4:
Une famille $\{A_i\}_{i \in E}$ d'évènements forme une partition de Ω ssi :
- $\bigcup_{i \in E} A_i = \Omega$
- $A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$

Propriété A.1 (Formule des probabilités totales) :
Soit $\{A_i\}_{i \in E}$ une partition de Ω, la probabilité d'un événement quelconque B peut se décomposer de la façon suivante :

$$P[B] = \sum_{i \in E} P[B \mid A_i].P[A_i]$$

Propriété A.2 (Formule de Bayes) :
Soit $\{A_i\}_{i \in E}$ une partition de Ω, la probabilité d'un des évènements A_j conditionnée par un événement *B* peut s'écrire :

$$P[A_j \mid B] = \frac{P[B \mid A_j].P[A_j]}{\sum_{i \in E} P[B \mid A_i].P[A_i]}$$

2 Variables aléatoires

2.1 Généralités

Une variable aléatoire *X* est une variable qui prend les valeurs des évènements élémentaires ω de Ω (*X(ω)*). La probabilité pour que *X* soit égale à *x* est alors :

$$P[X = x] = P[\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) = x\}]$$

on distingue deux grands types de variables aléatoires : les variables aléatoires discrètes et les variables aléatoires continues.

- Variables aléatoires discrètes : Une variable aléatoire discrète prend ces valeurs dans $\wedge$ et elle est définie par ses probabilités d'état : $p(n) = P[X = n]$ tel que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(n) = 1$.

p(n) se note aussi p_n.

p(n) est dite à valeurs positives si p(n)=0 pour n = -∞,…,-1.

- Variables aléatoires continues : Une variable aléatoire continue prend ces valeurs dans ∇ et elle est définie par fonction de densité de probabilité : $f_X(x)$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$.

$f_X(x)$ est dite à valeurs positives si $f_X(x) = 0$ pour $x \in [-\infty, 0[$.

Définition A.5 (Fonction de répartition) :
On appelle fonction de répartition F_X, la fonction définie par :

$$F_X(x) = P[X \leq x]$$

Définition A.6 (Moment d'ordre k) :
On appelle moment d'ordre k, noté $E[X^k]$, d'une variable aléatoire X :

$$E[X^k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^k p(n) \text{ dans le cas discret,}$$

$$E[X^k] = \int_{x=-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)dx \text{ dans le cas continu.}$$

Le moment d'ordre 1, *E[X]* est appelé moyenne.

Définition A.7 (Variance et écart type) :
On appelle variance d'une variable aléatoire X :

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

l'écart type de X est : $\sigma[X] = \sqrt{V[X]}$

Définition A.8 (Coefficient de variation) :
Le coefficient de variation de X est :

$$CV[X] = \frac{\sigma[X]}{E[X]}.$$

On s'intéresse souvent au carré du coefficient de variation noté *CV²*. *CV* ou *CV²* mesurent la dispersion relative de la variable X par rapport à sa moyenne.

Propriété A.3 :
Une variable aléatoire est parfaitement caractérisée par sa fonction de répartition ou par la donnée de tous ses moments.

Définition A.9 (Variables indépendantes) :
Deux variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes ssi :

$$P[X = n, Y = m] = P[X = n].P[Y = m] \text{ dans le cas discret,}$$
$$f_{XY}(x, y) = f_X(x).f_Y(y) \text{ dans le cas continu.}$$

Avec $f_{XY}(x, y)$ la fonction densité de probabilité jointe (pour plus de détails, voir Saporta [89]).

Définition A.10 :
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors Z=X+Y est définie par le produit de convolution des probabilités d'état (respectivement des fonctions densités de probabilité) de X et de Y dans le cas discret (respectivement dans le cas continu).

2.2 Exemples de lois de probabilité

Définition A.11 (propriété « sans mémoire ») :
Une variable aléatoire X possède la propriété sans mémoire ssi :

$$P[X \leq n + n_0 \mid X \geq n_0] = P[X \leq n]$$

La loi géométrique : La loi géométrique de paramètre *a* définie sur une variable discrète X à valeurs positives est définie par :

$$P[X = n] = (1-a)a^n$$

Pour une loi géométrique, $E[X] = \frac{a}{1-a}$ et $V[X] = \frac{a}{(1-a)^2}$.

La loi géométrique est la seule loi discrète qui possède la propriété « sans mémoire ».

La loi de Poisson : La loi de Poisson de paramètre λ définie sur une variable discrète *X* à valeurs positives est définie par :

$$P[X = n] = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Pour une loi de Poisson, $E[X] = V[X] = \lambda$.

La loi exponentielle : La loi exponentielle de paramètre μ définie sur une variable continue T à valeurs positives est définie par :

$$f_T(t) = \mu.e^{-\mu.t}$$

Pour une loi exponentielle, $E[T] = \frac{1}{\mu}$ et $CV[T] = 1$.

La loi exponentielle est la seule loi continue qui possède la propriété « sans mémoire ». Elle est très utilisée dans la théorie des files d'attente et permet généralement de modéliser des temps de service dont la valeur n'est pas constante.

3 Processus stochastiques

3.1 Généralités

Un processus stochastique $\{X(t)\}_{t \in T}$ est une fonction du temps dont la valeur à chaque instant est une variable aléatoire. Un processus stochastique peut donc être considéré comme une famille de variables aléatoires. L'ensemble des temps T peut être discret ou continu. X(t) définit l'état du processus à un instant donné t et l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre définissent l'espace d'état *E* qui peut être discret ou continu ce qui nous ramène à quatre types de processus. Nous ne considérons que les processus à

espace d'état discret (appelés aussi chaînes) qui permettent la modélisation des systèmes de production à événements discrets.

Définition A.12 (Processus de comptage) :
X est un processus de comptage ssi :
- $x_0=0$ et $x_{n-1} \leq x_n$ pour tout $n \in \wedge$ (cas des processus à temps discret),

- $x(0)=0$ et $x(t) \leq x(s)$ pour tout $t<s$ (cas des processus à temps continu).

Remarque : La valeur du processus à un instant donné dépend en général de toutes les valeurs prise précédemment par le processus. Afin de simplifier cette caractérisation, on se limite donc à des processus possédant certaines propriétés d'uniformité.

Définition A.13 (Processus à incréments indépendants) :
Un processus stochastique X est dit à incrément indépendants ssi :

- Les variables aléatoires $X_{n+1}-X_n$, X_n-X_{n-1} ,..., X_1-X_0 sont indépendantes (cas des processus à temps discret),

- Les variables aléatoires $X(t_n)- X(t_{n-1})$, $X(t_{n-1})- X(t_{n-2})$,..., $X(t_1)- X(t_0)$ sont indépendantes pour tout $n \in \wedge$ et $t_n>t_{n-1}>\ldots>t_1>t_0$ (cas des processus à temps continu).

Définition A.14 (Processus stationnaire) :
Un processus stochastique X est dit stationnaire ssi :

- Les variables aléatoires $X_{n+1}-X_n$ et X_1-X_0 sont distribuées selon la même loi pour tout n (cas des processus à temps discret),

- Les variables aléatoires $X(s+t)-X(s)$ et $X(t)-X(0)$ sont distribuées selon la même loi pour tout s (cas des processus à temps continu).

Définition A.15 (Processus de renouvellement) :
Un processus stochastique X à temps continu est dit de renouvellement ssi :

- X est un processus de comptage
- X est un processus à incrément indépendant
- X est un processus stationnaire

3.2 Processus de Poisson

Le processus de Poisson est le processus stochastique le plus utilisé dans la théorie des files d'attente pour la modélisation du processus d'arrivée des clients dans un système.

Définition A.16 :
Une chaîne N à temps continu est un processus de Poisson de paramètre λ ssi :

- N est un processus de renouvellement
- $P[N(s+t)-N(s)=k]=\frac{(\lambda.t)^k}{k!}e^{-\lambda.t}$ pour $k=0,1,2,\ldots$

Propriété A.4 :
Soit A_n la variable aléatoire mesurant l'instant d'arrivée du n^{ième} client dans le système et $T_n=A_n-A_{n-1}$, alors, les variables aléatoires $\{T_n\}_{n=1,2,..}$ suivent des lois exponentielles indépendantes et identiquement distribuées de paramètre λ.

Pour plus de détails voir Baynat [6].

4 Transformé de Laplace

Définition A.17 :
Si X est une variable aléatoire continu à valeurs positives, la transformée de Laplace de X est :

$$F^*(s)=\int_0^{+\infty} e^{-s.t} f_X(t)dt\,.$$

Pour plus de détails voir Baynat [6].

Annexes B :

Lois étudiées et exemple de calcul de *r*

1 Lois étudiées

Dans ces annexes, nous résumons les paramètres des distributions de probabilité utilisés dans les applications numériques présentées dans le chapitre 4 ainsi que l'approche adoptée pour faire varier le coefficient de variation en fonction de ces paramètres dans les applications numériques effectuées. La deuxième partie des annexes sera consacré au calcul de *r*, le paramètre de variabilité, dans le cas d'une distribution d'Erlang. Le calcul de *r* pour les autres distributions se fait de la même manière.

Distribution	***Densité de probabilité***	***CV***
Gamma G(λ,α)	$f(x) = \dfrac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$	
Weibull W(λ,α)	$f(x) = \lambda \alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^{\alpha}}$	
Erlang Er(λ_1,λ_2,…λ_n)	$f(x) = \dfrac{\left(\sum_i \lambda_i\right)^n x^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\sum_i \lambda_i x)$	Afin de varier le coefficient de variation tout en gardant la même moyenne des distributions Er(λ_1,λ_2), nous varions λ_1 et nous calculons le λ_2 correspondant.

HE(q_i,λ_i)	$f(x)=\sum_i q_i\lambda_i e^{-\lambda_i x}$	Pour les distributions HE(q_1,q_2,λ_1,λ_2), nous varions q_1 et calculons les autres paramètres de la distribution.
GE(q,λ)	$f(0)=1-q;\ \ f(x)=q\lambda e^{-\lambda x}, x>0$	Pour les distribution GE(q,λ), nous varions q et calculons le λ correspondant.

2 Calcul de *r* pour une distribution d'Erlang à deux étages:

La transformation de Laplace d'une distribution d'Erlang avec *K* étages différents de taux λ_i est :

$$L_A(S)=\prod_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{\lambda_i+S}.$$

Rappelant que :

$$r=L_A((1-r)\times\mu),$$

alors pour les deux étages d'Erlang nous avons:

$$r=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu(1-r)}\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu(1-r)}$$

et finalement :

$$r=\frac{1}{2}+\frac{\rho_1+\rho_2}{2}-\sqrt{\left(\frac{1+\rho_1+\rho_2}{2}\right)^2-\rho_1\rho_2},$$

avec $\rho_1\rho_2/(\rho_1+\rho_2)<1$ la condition de stabilité.

Considérons deux distributions d'Erlang avec la même moyenne :

$$(\lambda_1+\lambda_2)/\lambda_1\lambda_2=(\lambda_1'+\lambda_2')/\lambda_1'\lambda_2'$$

et des coefficients de variation différents :

$$cv_1\geq cv_2\ \ (\lambda_1\lambda_2\leq\lambda_1'\lambda_2'\ \text{ et }\ \lambda_1+\lambda_2\leq\lambda_1'+\lambda_2'),$$

alors $r_1 \geq r_2$.

Le calcul nous amène à l'étude de la fonction *f* :

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{x_1 - y_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+y_1}{2}\right)^2 - y_2} - \sqrt{\left(\frac{1+x_1}{2}\right)^2 - x_2}$$

sur le domaine défini par les contraintes :

$$x_1 / x_2 = y_1 / y_2 < 1;\ x_1 > y_1 \text{ et } x_2 > y_2 .$$

Nous vérifions numériquement que *f* est toujours positive sur son domaine de définition et par conséquent $r_1 \geq r_2$.

Bibliographie

[1] Aguir, S.; Modèles stochastiques pour l'amélioration des performances des centres d'appel; Laboratoire Génie Industriel; Ecole Centrale Paris; 2003.

[2] Andersson, J. and Marklund, J. ; *"Decentralized Inventory Control in a Two-Level Distribution System"*; European Journal of Operational Research; vol. 127; pp.483-506; 2000.

[3] Axsäter, S.; Continuous Review Policies for Multi-Level Inventory Systems with Stochastic Demand; in *Handbooks in OR & MS*; North Holland; Amesterdam; 1993.

[4] Baglin, G., Bruel, O., Garreau, A., Greif, M. and Delft, C. V.; Management logistique et industriel; Economica; Paris; 2001.

[5] Banks, J. and Carson, S.; Discrete Event-System Simulation; Printice Hall; New Jersey; 1984.

[6] Baynat, B.; Théorie des files d'attente; Hermes Science; Paris; 2000.

[7] Benjaafar, S., ElHafsi, M. and de-Véricourt, F. ; *"Demand Allocation in Multiple-Facility Make-to-Stock Systems"*; Working Paper, University of Minnesota, University of California and Duke University; 2002.

[8] Benjaafar, S. and Kim, J. S. ; *"When Does Higher Demand Variability Lead to Lower Safety Stocks?"*; Management Science, in review; 2001.

[9] Bernstein, F. and Federgruen, A. ; *"Coordination Mechanisms for Supply Chains under Price and Service Competition"*; Working Paper, Duke University; 2002.

[10] Biette, B. ; *"Influence of decentralized inventory management on two-echelon supply-chain performance- Case with multiple retailers"*; Raport de DEA; Ecole Centrale Paris; 2003.

[11] Binmore, K.; Jeux et théorie des jeux; De Boeck & Larcier s.a.; Bruxelles; 1999.

[12] Bourland, K. E., Powell, S. G. and Pyke, D. F. ; *"Exploiting Timely Demand Information to Reduce Inventories"*; European Journal of Operational Research; vol. 92; pp.239-253; 1996.

[13] Bulow, J. I., Geanakoplos, J. D. and Klemperer, P. D. ; *"Multimarket Oligopoly: Strategic Substitutes and Complements"*; Journal of Political Economy; vol. 93(3); pp.488-511; 1985.

[14] Buzacott, J. and Shanthikumar, J. G. ; *"Safety Stock versus safety Time in MRP Controlled Production Systems"*; Management Science; vol. 40(12); pp.1678-1689; 1994.

[15] Buzacott, J. A., Price, S. M. and Shanthikumar, J. G.; Service Levels in Multi-Stage MRP and Base Stock Control Systems; Springer; New York; 1993.

[16] Buzacott, J. A. and Shanthikumar, J. G.; Stochastic Models of Manufacturing Systems; Printice Hall; New Jersey; 1993.

[17] Cachon, G. and Haker, P. T. ; *"Competition and Outsourcing with Scale Economies"*; Management Science; vol. 48; pp.1314-1333; 2002.

[18] Cachon, G. and Lariviere, M. ; *"Contracting to Assure Supply: How to Share Demand Forecasts in a Supply Chain"*; Management Science; vol. 47; pp.936-953; 2001.

[19] Cachon, G. and Netessine, S.; Game Theory in Supply Chain analysis; in *Supply Chain Analysis in the eBusiness Era*; Kluwer; 2003.

[20] Cachon, G. and Zipkin, P. H. ; *"Competitive and Cooperative Inventory Policies in a Two-Stage Supply Chain"*; Management Science; vol. 45(7); pp.936-953; 1999.

[21] Cachon, G. P. ; *"Competitive and Cooperative Inventory Management in a two-Echelon Supply Chain with Lost Sales"*; Working Paper, University of Pennsylvania; 1999.

[22] Cachon, G. P. ; *"Stock Wars: Inventory Competition in a Two-Echelon Supply Chain with Multiple Retailers"*; Operations Research; vol. 49(5); pp.658-674; 2001.

[23] Cachon, G. P.; Supply Chain Coordination with Contracts; in *Handbooks in Operations Research and Management Science: Supply Chain Management*; North Holland; 2002.

[24] Caldentey, R. and Wein, L. M. ; *"Analysis of a Decentralized Production-Inventory System"*; Working paper; Sloan School of Management; MIT; Cambridge; 2000.

[25] Caldentey, R. and Wein, L. M. ; *"Analysis of a Decentralized Production-Inventory System"*; Manufacturing & Service Operations Management; vol. 5(1); pp.1-17; 2003.

[26] Celikbas, M., Shanthikumar, J. G. and Swaminathan, J. M. ; *"Coordinating Production Quantities and Demand Forecasts through Penalty Schemes"*; IIE Transactions; vol. 31; pp.851-864; 1999.

[27] Chen, Federgruen and Zheng. ; *"Coordination Mechanisms for a Distribution System with one Supplier and Multiple Retailers"*; Management Science; vol. 47(5); pp.693-708; 2001.

[28] Chen, F. ; *"Market Segmentation, Advanced Demand Information, and Supply Chain Performance"*; Manufacturing & Service Operations Management; vol. 3(1); pp.53-67; 2001.

[29] Clark, A. J. and Scarf, H. ; *"Optimal Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem"*; Management Science; vol. 6(4); pp.474-490; 1960.

[30] Corbett, C. J. and DeCroix, G. A. ; *"Shared-Savings Contracts for Indirect Materials in Supply Chains: Channel Profits and Environmental Impacts"*; Management Science; vol. 47(7); pp.881-893; 2001.

[31] Dallery, Y. ; *"Notes de cours de logistique industrielle"*; Ecole Centrale Paris; 2000.

[32] Dallery, Y. and Gershwin, S. B. ; *"Manufacturing Flow Line Systems: A review of Models and Analytical Results"*; Queueing Systems Theory and Applications; vol. 12; pp.3-94; 1992.

[33] Dallery, Y. and Liberopoulos, G. ; *"Extended Kanban Control System: Combining Kanban and Base Stock"*; IIE Transactions; vol. 32; pp.369-386; 2000.

[34] de-Véricourt, F.; Modèles stochastiques de décision pour le pilotage des systèmes de production multi-produit; Université de Paris VI; Paris; 2000.

[35] de-Véricourt, F., Karaesmen, F. and Dallery, Y. ; *"Dynamic Scheduling in a Make-to-Stock System: a Partial Characterization of Optimal Policies"*; Operations Research; vol. 48(5); pp.811-819; 2000.

[36] de-Véricourt, F., Karaesmen, F. and Dallery, Y. ; *"Optimal Stock Allocation for a Capacitated Supply System"*; Management Science; vol. 48; pp.1486-1501; 2002.

[37] Dong, L. and Rudi, N. ; *"Supply Chain Interaction under Transshipments"*; Working Paper, Washington University; 2001.

[38] Eymery, P.; La logistique de l'entreprise; Hermes; Paris; 1997.

[39] Federgruen, A.; Centralized Planning Models for Multi-Echelon Inventory Systems under Uncertainty; in *Handbooks in OR & MS; vol 4; Logistics of Production and Inventory*; North Holland; Amesterdam; 1993.

[40] Federgruen, A. and Zipkin, P. ; *"Approximations of Dynamic, Multilocation Production and Inventory Problems"*; Management Science; vol. 30(1); pp.69-84; 1984.

[41] Ferguson, M. E. ; *"Supply Contracts in a Serial Supply Chain: The Trade-off Between Price and Commitment Time"*; Working Paper, Duke University; 2000.

[42] Fudenberg, D. and Tirole, J.; Game Theory; The MIT Press; USA; 2002.

[43] Gallego, G. and Özer, O. ; *"Integrating Replenishment Decisions with Advance Demand Information"*; Management Science; vol. 47(10); pp.1344-1360; 2001.

[44] Giard, V.; Gestion de la production et des flux; Economica; 2003.

[45] Gilbert, S. M. and Ballou, R. H. ; *"Supply Chain Benefits from Advanced Customer Commitments"*; Journal of Operations Management; vol. 18; pp.61-73; 1999.

[46] Gravish, B. and Graves, S. ; *"A one Product Production/Inventory Problem under Continuous Review Policy"*; Operations Research; vol. 28; pp.1228-1236; 1980.

[47] Gross, D. and Harris, C. M.; Fundamentals of Queueing Theory; John Wiley & Sons; USA; 1985.

[48] Güllü, R. ; *"On the Value of Information in Dynamic Production/Inventory Problems under Forecast Evolution"*; Naval Research Logistics; vol. 43; pp.289-303; 1996.

[49] Güllü, R. ; *"Base Stock Policies for Production/Inventory Problems with Uncertain Capacity Levels"*; European Journal of Operational Research; vol. 105; pp.43-51; 1998.

[50] Gupta, D. and Weerawat, W. ; *"Supplier-Manufacturer Coordination in Capacitated Two-Stage Supply Chains"*; Technical Reports, University of Minnesota and Mahidol University; 2003.

[51] Gurumurthi, S. and Benjaafar, S. ; *"Modeling and Analysis of Flexible Queueing Systems"*; Working Paper, University of Minnesota; 2001.

[52] Hadj-Youssef, K.; Pilotage des systèmes de production à flux mixtes: production à la commande-production par anticipation; Laboratoire Génie Industriel; Ecole Centrale Paris; Paris; 2003.

[53] Hadj-Youssef, K., Dallery, Y. and Delft, C. V. ; *"Combining Make-to-Stock and Make-to-Order in a Multi-Product Manufacturing System"*; Working Paper, Ecole Centrale Paris; 2002.

[54] Hadj-Youssef, K., Delft, C. V. and Dallery, Y. ; *"Analyse des règles de priorités dans un système de pilotage mixte - production à la commande-production par anticipation"*; Journal Européen des Systèmes Automatisés- MOSIM'01; vol. 36; pp.79-96; 2001.

[55] Hariharan, R. and Zipkin, P. ; *"Customer-Order Information, Leadtimes, and Inventories"*; Management Science; vol. 41(10); pp.1599-1607; 1995.

[56] Hartman, B. C., Dror, M. and Shaked, M. ; *"Cores of Inventory Centralization Games"*; Games and Economic Behavior; vol. 31; pp.26-49; 2000.

[57] Holler, S.; Pilotage et optimisation des flux d'approvisionnement d'un atelier de montage automobile; Laboratoire Génie Industriel; Ecole Centrale Paris; 2002.

[58] Jemai, Z. and Karaesmen, F. ; *"The Influence of Demand Variability on the Performance of a Make-to-Stock Queue"*; European Journal of Operational Research, to appear

[59] Karaesmen, F., Buzacott, J. and Dallery, Y. ; *"Pull Type Control Mechanisms and Advanced Information on Customer Orders"*; 1999.

[60] Karaesmen, F., Buzacott, J. and Dallery, Y. ; *"Integrating Advance Order Information in Make-to-Stock Production Systems"*; IIE Transactions; vol. 34(8); pp.649-662; 2002.

[61] Karaesmen, F. and Dallery, Y. ; *"A Performance Comparaison of Pull Type Control Mechanisms for Multi-Stage Manufacturing"*; International Journal of Production Economics; vol. 68; pp.59-71; 2000.

[62] Karaesmen, F. and Gupta, S. M. ; *"The Finite Capacity GI/M/1 Queue with Server Vacations"*; Journal of the Operational Research Society; vol. 47; pp.817-828; 1996.

[63] Karaesmen, F., Liberopoulos, G. and Dallery, Y. ; *"The Value of Advance Demand Information in Production/Inventory Systems"*; to appear in Annals of Operations Research; ; ; 2002.

[64] Karaesmen, F., Liberopoulos, G. and Dallery, Y.; Production/Inventoru Control with Advance Demand Information; in *Stochastic Modelling and Optimization of Manufacturing Systems and Supply Chains*; Kluwer Academic Publishers; Boston; 2003.

[65] Kirman, A. P. and Sobel, M. J. ; *"Dynamic Oligopoly with Inventories"*; Econometrica; vol. 42; pp.279-287; 1974.

[66] Kleinrock, L.; Queueing Systems - Volume 1: Theory; John Wiley & Sons; USA; 1975.

[67] Kleinrock, L.; Queueing Theory - Volume 2: Computer Applications; John Wiley & Sons; USA; 1976.

[68] Lariviere, M. A.; Supply Chain Contracting and Coordination with Stochastic Demand; in *Quantitative Models for Supply Chain Management*; Kluwer; USA; 1998.

[69] Lariviere, M. A. and Porteus, E. L. ; *"Selling to the Newsvendor: An Analysis of Price-Only Contracts"*; Journal of Manufacturing and Service Operations Management; vol. 3; pp.293-305; 2001.

[70] Law, A. M. and Kelton, W. D.; Simulation Modeling and Analysis; McGraw Hill; New York; 1982.

[71] Le-Bihan, H.; De nouvelles méthodes analytiques pour l'évaluation des performances des lignes de production; Université Pierre et Marie Curie; Paris; 1998.

[72] Lee, H. and Whang, S. ; *"Decentralized Multi-Echelon Supply Chains: Incentives and Information"*; Management Science; vol. 45(5); pp.633-640; 1999.

[73] Li, L. ; *"Information Sharing in a Supply Chain with Horizontal Competition"*; Management Science; vol. 48(9); pp.1196-1212; 2002.

[74] Liberopoulos, G., Chronis, A. and Koukoumialos, S. ; *"Base Stock Policies with Some Unreliable Advance Demand Information"*; Working Paper, DMIE, University of Thessaly (Greece); 2003.

[75] Liberopoulos, G. and Dallery, Y. ; *"A Unified Framework for Pull Contol Mechanisms in Multi-Stage Manufacturing Systems"*; Annals of Operations Research; vol. 93(1); pp.325-355; 2000.

[76] Liberopoulos, G. and Koukoumialos, S. ; *"Numerical Investigation of Tradeoffs Between Base Stock Levels, Numbers of Kanbans and Production Lead Times in Production-Inventory Supply Chains with Advance Demand Information"*; Working Paper; University of Thessaly (Greece); 2002.

[77] Liberopoulos, G. and Tsikis, I.; Unified Modeling Framework of Multi-Stage Production-Inventory Control Policies with Lot Sizing and Advance Demand Information; in *Stochastic Modelling and Optimization of Manufacturing Systems and Supply Chains*; Kluwer Academic; Boston; 2003.

[78] Mahajan, S. and Ryzin, G. v. ; *"Supply Chain Coordination under Horizontal Competition"*; Submitted to Management Science; 2000.

[79] Marshall, K. ; *"Some Relationships between the Distributions of Waiting Time, Idle Time and Interoutput Time in the GI/G/1 queue"*; SIAM J. Appl. Math.; vol. 16; pp.324-327; 1968.

[80] Match; Performance Models for Discrete Event Systems with Synchronizations: Formalisms and Analysis Techniques; Balbo G. & Silva M. Eds; 2000.

[81] Milgrom, P. and Roberts, J. ; *"Communication and Inventory as Substitutes in Organizing Production"*; Scand. J. of Economics; vol. 90(3); pp.154-179; 1988.

[82] Netessine, S. and Shumsky, R. ; *"Revenue Management Games"*; Working Paper; University ofPennsylvania; ; 2001.

[83] Netessine, S. and Zhang, F. ; *"Externalities through Stocking Decisions and Supply Chain Efficiency"*; Working Paper, University of Pennsylvania; ; ; 2003.

[84] Özer, Ö. and Wei, W. ; *"Inventory Control with Limited Capacity and Advance Demand Information"*; Working Paper; Stanford University; 2001.

[85] Porteus, E. and Whang, S. ; *"Supply Chain Contracting: Non-Recurring Engineering Charge, Minimum Order Quantity and Boilerplate Contracts"*; Working Paper, Stanford University; 1999.

[86] Ridder, A., Laan, E. V. D. and Salomon, M. ; *"How Larger Demand Variability May Lead to Lower Costs in the Newsvendor Problem"*; Operations Research; vol. 46(6); pp.934-936; 1998.

[87] Roundy, R. ; *"98%- Effective Integer-Ratio Lot-Sizing for One-Warehouse Multi-Retailer Systems"*; Management Science; vol. 31(11); pp.1416-1430; 1985.

[88] Rudi, N. and Pyke, D. F.; Teaching Supply Chain Concepts with the Newsboy Model; in *Supply Chain Management: Innovations for Education*; 2000.

[89] Saporta, G.; Probabilités, analyse des données et statistique; Editions Technip; Paris; 1990.

[90] Schmidt, C.; La théorie des jeux Essai d'interprétation; Presses Universitaires de France; Paris; 2001.

[91] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G.; Stochastic Orders and Their Applications; Academic Press; London; 1994.

[92] Sobel, M. ; *"The Optimality of Full Service Policies"*; Operations Research; vol. 30; pp.636-649; 1982.

[93] Sobel, M. J. ; *"Noncooperative Stochastic Games"*; Annals of Mathematical Statistics; vol. 42; pp.1930-1935; 1971.

[94] Song, J. S. ; *"The effect of Leadtime Uncertainty in a Simple Stochstic Inventory Model"*; Management Science; vol. 40(5); pp.603-613; 1994.

[95] Song, J. S. ; *"Understanding the Lead-Time in Stochastic Inventory Systems with Discounted Costs"*; Operations Research Letters; vol. 15; pp.85-93; 1994.

[96] Stoyan, D. and Daley, D. J.; Comparaison Methods for Queues and Other Stochastic Models; John Wiley & Sons; Berlin; 1983.

[97] Tijms, H. J.; Stochastic Models: An Algorithmic Approach; John Wiley & Sons; England; 1995.

[98] Toktay, L. B. and Wein, M. ; *"Analysis of a Forecasting-Production-Inventory System with Stationary Demand"*; Management Science; vol. 47; pp.1268-1281; 2001.

[99] Vallin, P.; La logistique : modèles et méthodes de pilotage des flux; Economica; Paris; 1999.

[100] Veatch, M. and Wein, L. M. ; *"Scheduling a Make-to-Stock Queue: Index Policies and Hedging Points"*; Operations Research; vol. 44; pp.634-647; 1996.

[101] Vollmann, T., Berry, W. and Whybark, D.; Manufacturing Planning and Control Systems; Irwin; USA; 1992.

[102] Wang, Q. and Parlar, M. ; *"A Three-Person Game Theory Model Arising in Stochastic Inventory Control Theory"*; European Journal of Operational Research; vol. 76; pp.83-97; 1994.

[103] Weerawat, W.; Coordination of Inventory Decisions in Two-Stage Capacitated Supply Chains With Lead-Time Sensitive Revenues; University of Minnesota; USA; 2002.

[104] Wein, L. M. ; *"Dynamic Scheduling of a Multiclass Make-to-Stock Queue"*; Operations Research; vol. 40; pp.724-735; 1992.

[105] Wolff, R. W.; Stochastic Modeling and The Theory of Queues; Printice Hall; New Jersey; 1989.

[106] Zipkin, P. H.; Foundations of Inventory Management; McGraw-Hill; USA; 2000.

Abstract : Supply chains are often composed of several partners who are not from the same company. The operational decisions are usually made individually by these partners taking into account only local criteria. As a result, local optimization takes place usually in a competitive way, which leads to a loss of efficiency for the whole supply chain.

In this work, we are interested in developing and analyzing supply chain flow control policies. We study, from an analytical point of view, the deteriorating effect of the decentralization on the performance of a two-stage stochastic model, with production capacity, controlled by a Base Stock policy. We determine the control parameters of the studied policy using tools from game theory (Nash or Stackelberg Equilibria) and we propose coordinating contracts that enable enhancements in system performance toward that of the centralized model.

We also generalize the basic two-stage model to investigate models incorporating advance demand information and evaluate the influence of demand variability on the system performance.

Finally, we validate the analytical results obtained numerically and by simulation, on more complex models.

Key Words : Queueing Systems, Base Stock policy, Demand Variability, Game Theory, Coordination, Advance Demand Information.

Résumé : Les chaînes logistiques sont souvent composées de plusieurs acteurs qui ne font pas partie de la même entreprise. Les décisions opérationnelles sont prises au niveau individuel par rapport aux critères locaux et l'optimisation est réalisée, de ce fait, d'une façon concurrentielle, ce qui conduit à une perte d'efficacité pour l'ensemble de la chaîne.

Dans ce travail, nous nous intéressons au pilotage de flux dans la chaîne logistique. Nous étudions analytiquement la dégradation des performances, due à la décentralisation, d'un modèle stochastique à deux étages, avec capacité de production, piloté par une politique de stock nominal. Nous déterminons les paramètres de contrôle de la politique étudiée à l'aide des outils de la théorie des jeux (équilibres de Nash et de Stackelberg) et nous proposons des contrats de coordination qui permettent de ramener les performances du système vers celles du modèle centralisé.

Nous généralisons cette étude aux modèles avec information avancée sur la demande et nous étudions l'influence de la variabilité de la demande sur les performances du système.

Par ailleurs, nous validons les résultats analytiques obtenus numériquement et par simulation, sur des modèles plus complexes.

Mots clés : Files d'attente, Stock nominal, Variabilité de la demande, Théorie des jeux, Coordination, Information avancée.