



**HAL**  
open science

# Contribution à l'étude macroscopique des nilvariétés et des géométries de Hilbert

Constantin Vernicos

► **To cite this version:**

Constantin Vernicos. Contribution à l'étude macroscopique des nilvariétés et des géométries de Hilbert. Géométrie métrique [math.MG]. Université Montpellier 2, 2007. tel-01160512

**HAL Id: tel-01160512**

**<https://hal.science/tel-01160512v1>**

Submitted on 5 Jun 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

# Mémoire d'habilitation

---

## Contribution à l'étude macroscopique des nilvariétés et des géométries de Hilbert

---

Constantin VERNICOS

Soutenue à Montpellier le 19 Décembre 2007 devant le jury :

Juan-Carlos ALVAREZ-PAIVA (Université de Lille 1),

Ivan BABENKO (Université de Montpellier 2),

Yves BENOIST (École Normale Supérieure, Paris),

Gérard BESSON (CNRS, Université Grenoble 1),

Gilles CARRON (Université de Nantes),

Bruno COLBOIS (Université de Neuchâtel, Suisse),

Gilles COURTOIS (CNRS, École Polytechnique),

Au vu des rapports de Juan-Carlos ALVAREZ-PAIVA, Yves BENOIST et Gilles CARRON.



# Table des matières

---

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>I Sur les géométries de Hilbert</b>	<b>7</b>
1 Introduction aux géométries de Hilbert.....	7
2 Volume des simplexes idéaux.....	15
3 Le bas du spectre .....	21
4 Entropie volumique.....	29
Bibliographie.....	36
<b>II Sur le spectre macroscopique</b>	<b>41</b>
1 Introduction .....	41
2 Le cas des nilvariétés .....	45
3 Longueurs des formes harmoniques.....	53
Bibliographie.....	57



# Introduction

---

Nos recherches ont essentiellement porté sur deux domaines sensiblement différents, mais elles sont toutes dominées par la volonté de caractériser certaines géométries à l'aide d'invariants tels que le spectre du laplacien ou l'entropie volumique. Nous envisageons notre travail comme une étude *macroscopique* : il ne s'agit pas d'étudier des comportements locaux, mais des comportements globaux.

Le cadre le plus général aurait consisté à étudier une famille d'espaces métriques mesurés, complets et non compacts dans le but d'isoler certains d'entre eux par l'intermédiaire des invariants susmentionnés. Cependant pour que cet exercice ait un sens il faudrait un lien entre la métrique et la mesure, ne serait-ce, par exemple, que pour pouvoir mesurer les boules métrique et définir l'entropie. Ce lien nécessiterait d'être encore plus fort si l'on s'intéressait au spectre ou d'un autre point de vue à l'inégalité de Poincaré. Pour avoir cette dernière d'ailleurs, il semble désormais acquis qu'une hypothèse de doublement de la mesure soit nécessaire.

C'est pourquoi nos travaux ont consisté à étudier ce genre de questions dans le cadre de deux familles précises, d'une part, les géométries de Hilbert, d'autre par les revêtements universels de nilvariétés.

Ainsi, nous avons regroupé dans le premier chapitre de ce mémoire, la présentation de nos recherches concernant les géométries de Hilbert, autrement dit les articles [Ver1] à [Ver5], [prep2], [prep3] et dans un second chapitre nos travaux effectués en prolongation de notre thèse relatifs aux nilvariétés, soit les articles [Ver6] à [Ver8]. Une introduction détaillée à ces géométries n'étant pas l'objet de ce mémoire, nous renvoyons le lecteur aux articles d'exposition [Ver10] et [Ben] et à notre thèse [Ver9].

Les deux domaines étudiés étant, comme nous l'avons dit relativement différents, on trouvera à la fin de chaque chapitre la bibliographie y attenante. La bibliographie de l'auteur est placée à la fin du texte.



# I Sur les géométries de Hilbert

---

Ce chapitre est consacré à nos travaux sur l'aire des simplexes, le bas du spectre et l'entropie volumique des géométries de Hilbert.

---

## 1 Introduction aux géométries de Hilbert

Afin de situer dans le temps les géométries objet de notre étude, un bref rappel historique s'impose.

**1.a** — L'axiome d'Euclide sur les parallèles n'a pas été remis en cause avant le début du XIXe siècle. On s'efforçait au contraire jusque là de montrer qu'il découlait des autres axiomes et définitions de base, lesquels paraissaient plus intuitifs. Ce n'est que vers 1820 que trois mathématiciens se sont aperçus, indépendamment l'un de l'autre, qu'une géométrie consistante, constituée de droites, plans et angles pouvait vérifier les premiers axiomes, sans satisfaire à celui des parallèles. Il s'agissait de János Bolyai en Hongrie, Carl Friedrich Gauss en Allemagne et Nikolai Ivanovich Lobachevskii en Russie. En fait, Gauss a été le premier, mais il choisit de ne pas publier ses conclusions, quant à Bolyai, son travail ne fut reconnu que bien après sa mort ; c'est ainsi que cette géométrie non euclidienne vint à être connue sous le nom de *géométrie de Lobachevskii*. Au tournant du vingtième siècle Félix Klein introduisit le terme de *géométrie hyperbolique*, terme le plus couramment utilisé de nos jours. La contribution fondamentale suivante sera celle de Bernhard Riemann. Dans un discours prononcé le 27 septembre 1894 à Vienne, F. Klein parle de l'apport de Riemann en ces termes :

« Les recherches de Gauss, Lobatscheffsky et Bolyai (pour citer seulement les noms les plus célèbres) ont, comme on sait, démontré que l'axiome des parallèles n'est nullement une conséquence des axiomes restants et que, si l'on fait abstraction de cet axiome, on peut construire une Géométrie générale parfaitement logique qui renferme la Géométrie habituelle comme cas particulier.

Riemann a donné à ces importantes recherches une tournure nouvelle et spécifique, par son exposition des principes de la géométrie



*analytique.*

L'espace se présente alors à lui comme un cas particulier d'une variété triplement étendue où le carré de l'élément d'arc est exprimé par une forme quadratique des différentielles des coordonnées. [...] »

C'est ce point de vue que l'on appelle *géométrie riemannienne*. En réalité B. Riemann considère des éléments d'arc plus vastes mais il préfère se restreindre au cas quadratique [Rie68],

« L'étude de cette classe plus générale n'exigerait pas des principes essentiellement différents, mais elle prendrait un temps assez considérable, et ne contribuerait pas beaucoup, relativement, à éclaircir la théorie de l'espace, d'autant plus que les résultats ne pourraient s'exprimer géométriquement. Je me bornerai donc aux variétés dans lesquelles l'élément linéaire est exprimé par la racine carrée d'une expression différentielle du second degré. »

Paul Finsler donnera son nom à cette « classe plus générale » qui consiste à mesurer les longueurs d'arc à l'aide d'une norme quelconque. C'est dans ce cadre que notre travail va se situer, et plus particulièrement dans une famille de géométrie finslerienne que l'on nomme géométrie de Hilbert.

**1.b** — Plus précisément, soit  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_e)$  l'espace euclidien usuel. Nous noterons  $pq = \|p - q\|_e$  la distance euclidienne entre deux points  $p$  et  $q$  et quand nécessaire  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne.

Soit  $B$  le disque unité et soit  $p$  et  $q$  deux points de son intérieur. La droite passant par  $p$  et  $q$  coupe le convexe en deux points  $a$  et  $b$  tels qu'en parcourant la droite on rencontre dans l'ordre  $a, p, q$  et  $b$ .

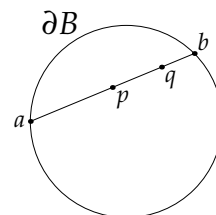
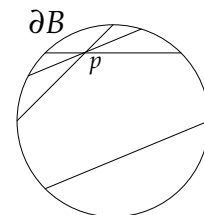
**Définition I.1.**

Le *birapport*, noté  $[a, p, q, b]$  vaut

$$[a, p, q, b] = \frac{qa}{pa} \times \frac{pb}{qb}$$

à l'aide duquel on définit la distance  $d_D$

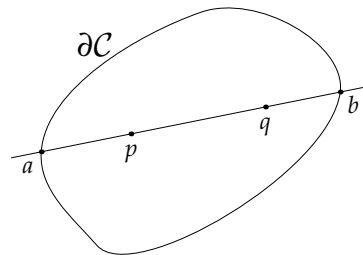
$$d_D(p, q) = \frac{1}{2} \ln[a, p, q, b]$$



On obtient de la sorte le modèle de Klein (également appelé modèle de Beltrami ou modèle projectif) de la géométrie Hyperbolique.

D. Hilbert dans un courrier adressé à F. Klein [Hil71] remarque que cette construction peut se faire en partant d'un convexe quelconque de  $\mathbb{R}^n$  et

qu'il serait intéressant d'étudier les géométries que l'on obtiendrait ainsi :



Nous allons donc suivre le conseil d'Hilbert; en son honneur on a nommé *géométrie de Hilbert* un espace métrique  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  construit dans un ouvert convexe borné  $\mathcal{C}$  en définissant une distance  $d_{\mathcal{C}}$ , que nous appellerons *distance de Hilbert* du convexe, à l'aide du birapport en imitant la construction du modèle de Klein de la géométrie Hyperbolique. Il est alors naturel de se demander quels points communs et quelles différences ces géométries peuvent avoir.

Précisons que dans ce mémoire une structure finslerienne sur une variété différentiable  $M^n$  consiste en la donnée d'une application  $F: TM \rightarrow \mathbb{R}^+$  sur l'espace tangent vérifiant les propriétés suivantes :

- Pour tout  $x \in M$ ,  $F(x, \cdot)$  est une norme sur l'espace vectoriel  $T_x M$ ;
- $F$  est continue par rapport à  $x \in M$ .

### Proposition I.2.

Toute géométrie de Hilbert hérite d'une structure de variété finslerienne dont la régularité est la même que celle du bord du convexe et dont la distance de longueur associée coïncide avec la distance de Hilbert. De plus, munis de leur distance de Hilbert, les ouverts convexes sont des espaces métriques complets.

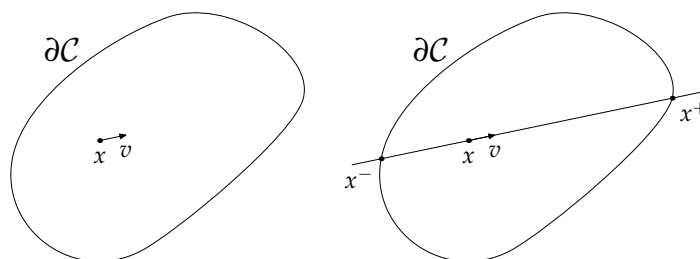


FIG. I.1 – La métrique de Finsler d'une géométrie de Hilbert.

Une des premières caractéristiques importante de la géométrie hyperbolique, obtenue par notre procédé appliqué à n'importe quel ellipsoïde (les ellipsoïdes sont projectivement équivalents), consiste dans le fait qu'il s'agit de la seules géométrie de Hilbert qui est riemannienne.

Ayant mentionné le fait que les géométries de Hilbert étaient des espaces de longueur, il est raisonnable d'étudier leurs géodésiques. Il s'avère alors que les segments de droite y sont toujours des chemins minimisants. Cependant il peut y avoir une infinité de chemins minimisants entre deux points, à condition

que dans le bord du convexe on puisse trouver deux segments co-planaires (voir proposition 2 dans [dlH93]). Il suffit donc que le bord ait au plus un segment pour que la géodésique entre deux points soit unique ; en particulier lorsqu'il est strictement convexe on aura unicité.

**1.c** — Le birapport étant un invariant projectif il n'est pas étonnant que le bon espace pour étudier les géométries de Hilbert soit l'espace projectif  $\mathbb{P}^n$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Pour rester dans le même cadre il faut alors se restreindre aux parties *proprement convexes*  $C$  de  $\mathbb{P}^n$ . Ce sont les parties convexes dont l'adhérence est incluse dans le complémentaire d'un hyperplan projectif. Ainsi on peut leur associer un convexe borné de  $\mathbb{R}^n$  et, inversement, à un convexe borné de  $\mathbb{R}^n$  on peut associer une partie proprement convexe de  $\mathbb{P}^n$ . Dans la suite, on désignera par  $X_n$  l'ensemble des ouverts proprement convexes.

Nous munissons  $X_n$  de la distance de Hausdorff entre les ensembles, comme définie dans [Ben03b], p. 2., et faisons agir l'ensemble  $G_n = PGL(n, \mathbb{R})$  des applications projectives sur  $X_n$ . L'idée importante est que les éléments d'une même orbite donnent naissance à des géométries isométriques. Il est donc logique de se pencher non pas sur un ouvert proprement convexe avec sa géométrie de Hilbert, mais sur son orbite, c'est-à-dire sur l'ensemble de ses réalisations à transformation projective près.

En outre, on ne peut parler d'action de groupe sur les géométries de Hilbert sans parler d'action co-compacte. On dira ainsi d'un convexe qu'il est *divisible*, s'il admet un sous-groupe discret et co-compact d'isométries. L'étude approfondie de ces convexes est le sujet de la série d'articles « Convexes divisibles » dus à Y. Benoist. Il faut également mentionner le travail pionnier de Benzécri [Ben60] : on y trouve par exemple cette caractérisation de la géométrie hyperbolique.

**Proposition I.3** ([Ben60]).

*Un convexe divisible qui admet un ellipsoïde osculateur est un ellipsoïde*

On a constaté que, pour la géométrie de Hilbert induite, la stricte convexité d'un convexe garantissait l'unicité de la géodésique entre deux points. Remarquons qu'elle garanti également la régularité du convexe dual d'un convexe donné, puisque pour un convexe être  $C^1$  est équivalent au fait que le convexe dual soit strictement convexe. J.P. Benzécri est le premier à s'être penché sur l'adhérence de l'orbite d'un convexe n'étant pas strictement convexe ou  $C^1$ .

**Proposition I.4** (Benzécri, [Ben60]).

*Soit  $C$  un ouvert proprement convexe de  $\mathbb{P}^n$ . Si son bord n'est pas  $C^1$  ou bien s'il n'est pas strictement convexe, alors dans l'adhérence de  $G_n C$  il existe un convexe dont une des sections planaires est un triangle.*

On voit donc apparaître le rôle particulier joué par la géométrie du triangle, remarquons au passage que P. de La harpe a démontré dans [dlH93] qu'un triangle muni de sa métrique de Hilbert était isométrique au plan muni d'une norme dont la boule unité est un hexagone (un résultat de Foerthsh-Karlssohn)

[FK05] précise que c'est la seule géométrie de Hilbert plane qui soit isométrique à un plan vectoriel normé). On peut donc en déduire que le triangle est divisible. On remarquera, d'ailleurs, que les applications projectives y agissent de manière transitive, comme dans l'espace hyperbolique. Cela nous donne une géométrie de Hilbert très différente de l'espace hyperbolique ; il s'agit d'une géométrie bien plus proche du plan euclidien – donc d'un espace plat – que d'un espace courbé négativement.

**1.d** — Revenons sur le concept de courbure : c'est l'objet riemannien par excellence. Néanmoins, ces dernières années de nombreuses tentatives de définition de notion de courbure pour les espaces métriques sont apparues. Commençons par les plus anciennes, notamment les notions de courbure liées aux triangles de comparaison, plus précisément les espaces  $CAT(k)$  : soit  $(M, d)$  un espace métrique de longueur, et  $abc$  un triangle géodésique dans  $M$ .

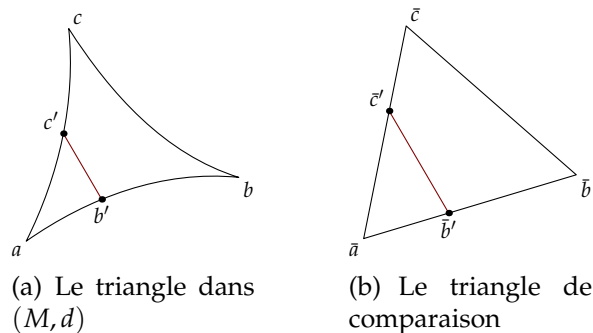


FIG. I.2 –

- On appelle triangle de comparaison  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$  dans  $\mathbb{R}^2$  le triangle tel que les distances entre les sommets correspondent aux distances entre les sommets de  $abc$  ;
- Lorsqu'on prend deux points  $b'$  et  $c'$  sur les cotés liant respectivement  $a$  à  $b$  et  $a$  à  $c$ , on prend également les points  $\bar{b}'$  sur  $[\bar{a}\bar{b}]$  et  $\bar{c}'$  sur  $[\bar{a}\bar{c}]$  tels que  $d(a, b') = \bar{a}\bar{b}'$  et  $d(a, c') = \bar{a}\bar{c}'$  (voir figure I.2).

Si pour toute configuration de ce type on obtient l'inégalité

$$d(b', c') \leq \bar{b}'\bar{c}'$$

on dit que  $(M, d)$  est  $CAT(0)$ . De la même manière on parlera d'espace  $CAT(k)$  en prenant les triangles de comparaison (lorsque cela est possible) dans la variété riemannienne simplement connexe de courbure constante égale à  $k$ .

On note que si un espace normé de dimension finie est dans l'une des ces catégories, il vérifie nécessairement l'égalité du parallélogramme : il est donc euclidien. On en déduit que parmi les espaces finisliens seuls les espaces riemanniens entrent dans l'une de ces catégories. On ne pourra donc pas appliquer ces notions en géométrie de Hilbert.

Une autre notion doit principalement son apparition aux groupes fondamentaux de variétés compactes de courbure strictement négative il s'agit de

l'hyperbolicité au sens de Gromov. Rappelons la définition associée aux espaces métriques de longueurs. Dans ce cadre un espace est dit  $\delta$ -hyperbolique si tous les triangles géodésiques sont « fins », ce qui revient à dire que pour tout triangle géodésique, l'ensemble des points à distance au plus  $\delta$  de deux cotés, contient le troisième. L'espace hyperbolique en est un exemple. Mais ce n'est pas le seul puisque par exemple Karlson et Noskov [KN02], puis Colbois et Verovic [CV04] ont montré que si le bord est une hypersurface dont la courbure de Gauss est partout non nulle, alors la géométrie de Hilbert induite est  $\delta$ -hyperbolique.

Il était alors légitime de rechercher les propriétés communes aux géométries de Hilbert hyperboliques au sens de Gromov. La propriété qui suit met en évidence le lien avec la régularité du bord.

**Propriété I.5.**

*Tout ouvert proprement convexe et Gromov hyperbolique de  $\mathbb{P}^2$  est strictement convexe*

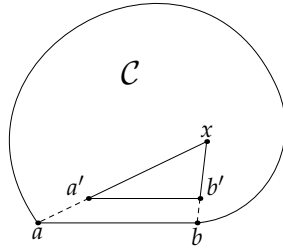


FIG. I.3 – Illustration de la contraposée de la propriété I.5.

Utilisant cette propriété pour étudier l'orbite d'une telle géométrie Y. Benoist est arrivé à la proposition suivante, où l'on note  $X_n^\delta$  l'ensemble des convexes dont la géométrie de Hilbert est  $\delta$ -hyperbolique pour un  $\delta$  fixé.

**Proposition I.6** ([Ben03b] proposition 2.11). 1. *Pour tout réel  $\delta > 0$ , l'ensemble  $X_n^\delta$  est un sous ensemble fermé,  $G_n$ -invariant de  $X_n$  dont tous les éléments sont strictement convexes.*

2. *Soit  $F$  un sous ensemble fermé de  $X_n$ ,  $G_n$ -invariant, dont tous les éléments sont strictement convexes (c'est-à-dire que l'intérieur du segment reliant deux points du bord de  $C$  est dans  $C$ ). Alors il existe un nombre réel  $\delta > 0$  tel que  $F \subset X_n^\delta$ .*

Cette proposition de Y. Benoist implique immédiatement la caractérisation suivante de la  $\delta$ -hyperbolicité

**Théorème I.7** ([Ben03b]).

*Soit  $(C, d_C)$  une géométrie de Hilbert. Alors  $C$  est hyperbolique au sens de Gromov si et seulement si l'une des conditions suivantes est vraie*

1. *Pour tout  $\Omega \in \overline{G_n C}$ ,  $\Omega$  est strictement convexe,*
2. *Pour tout  $\Omega \in \overline{G_n C}$ ,  $\partial\Omega$  est  $C^1$ .*

Terminons ce paragraphe par le principe fonctionnel suivant, largement utilisé par Y. Benoist [Ben03b], Colbois-Vernicos [Ver3], et Colbois-Vernicos-Verovic [Ver4] lequel est une paraphrase de la proposition I.6.

**Proposition I.8 (Principe fonctionnel).**

Soit  $F$  une fonctionnelle de l'ensemble des convexes dans  $\mathbb{R}$  telle que

1.  $F$  est invariante par l'action de  $G_n$ , i.e., pour tout  $g \in G_n$  et  $\mathcal{C} \in X_n$ , on a  $F(\mathcal{C}) = F(g\mathcal{C})$ ,
2.  $F$  s'annule sur l'ensemble des convexes non strictement convexe,
3.  $F$  est semi-continue supérieurement.

alors pour tout  $M > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que

$$F(\mathcal{C}) \geq M \Rightarrow (\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}}) \text{ est } \delta\text{-hyperbolique}$$

**1.e** — Après avoir dégagé les différentes conditions nécessaires, quant à la régularité du bord, pour qu'une géométrie de Hilbert soit hyperbolique au sens de Gromov, et avoir constaté qu'une forte régularité du bord pouvait être suffisante, il restait à trouver une condition nécessaire et suffisante. C'est à Y. Benoist [Ben03b] (voir également [Ben06b]) que l'on doit celle-ci. Il s'agit de la *quasi convexité symétrique*, dont voici une définition :

Soit  $\mathcal{C}$  un domaine proprement ouvert de  $\mathbb{P}^n$ . Soient  $\xi$  et  $\eta$  deux points distincts du bord  $\partial\mathcal{C}$ . Notons  $D_{\xi}(\eta)$  la distance de  $\eta$  à l'hyperplan d'appuis de  $\partial\mathcal{C}$  en  $\xi$ .

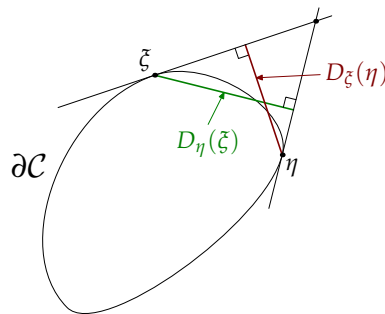


FIG. I.4 – Quasi convexité symétrique

**Définition I.9.**

Si  $D_{\xi}(\eta)/D_{\eta}(\xi)$  est majoré indépendamment du couple  $(\xi, \eta)$  on dit que  $\partial\mathcal{C}$  est *quasi-symétriquement convexe*.

Dans l'article [Ben03b] de Y. Benoist on trouvera non seulement une étude approfondie des fonctions quasi-symétriquement convexe, mais également une démonstration du théorème fondamental suivant, qui peut être vu comme une caractérisation extrinsèque de l'hyperbolicité au sens de Gromov

**Théorème I.10 (Y. Benoist [Ben03b]).**

La géométrie de Hilbert d'un convexe proprement ouvert de  $\mathbb{P}^n$  est hyperbolique au sens de Gromov si et seulement si son bord est quasi-symétriquement convexe.

Parmi les propriétés mises en évidence par Y. Benoist (voir également [Ben04]) citons

**Propriété I.11.**

*Si la géométrie de Hilbert du convexe  $\mathcal{C}$  est  $\delta$ -hyperbolique, alors il existe  $1 < \alpha \leq 2$  et  $2 \leq \beta$  tels que le bord  $\partial\mathcal{C}$  soit  $\alpha$ -Hölder et  $\beta$ -convexe.*

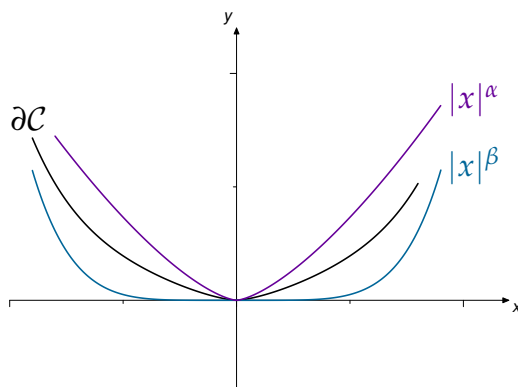


FIG. I.5 – Une courbe  $\beta$ -convexe et  $\alpha$ -Hölder en 0.

Y. Benoist a étudié, dans le cas divisible, les propriétés dynamiques du flot géodésiques des géométries  $\delta$ -hyperbolique (voir [Ben04]). Il y montre notamment que le flot est Anosov, une propriété partagée par le flot d'une variété riemannienne compacte de courbure négative ([KH96]). Il s'agit du premier résultat montrant que les géométries de Hilbert hyperboliques au sens de Gromov ont un comportement similaire à l'espace hyperbolique. Y. Benoist a également démontré que dans le cas plan ces géométries étaient toujours quasi-isométriques au plan hyperbolique, mais qu'en dimension supérieure ce n'était plus le cas. On s'aperçoit que l'on a entre les mains une famille relativement riche de géométries de courbure « négative ».

Dans nos travaux, nous nous sommes aussi intéressé à d'autres propriétés de l'espace hyperbolique pensant a priori que celles qui étaient dues à la négativité de sa courbure devaient être communes à toutes les géométries de Hilbert hyperboliques au sens de Gromov. En fait, nous dirions que les géométries de Hilbert hyperboliques au sens de Gromov jouent le même rôle dans l'ensemble des géométries finsleriennes que la géométrie hyperbolique parmi les géométries riemanniennes. Une fois de plus à une « unicité » riemannienne, correspond une « multiplicité » finslerienne.

## 2 Volume des simplexes idéaux

Nous présenterons ici nos travaux reliant l'hyperbolicité au sens de Gromov et le volume des simplexes idéaux.

Rappelons que les triangles idéaux du plan hyperbolique, sont des limites de triangles géodésiques lorsque les sommets tendent vers l'infini. Dans le modèle de Klein avec lequel nous travaillons ce sont exactement les triangles dont les sommets sont sur le bord. Selon un résultat classique de géométrie hyperbolique plane, l'aire d'un triangle est égale à  $\pi$  moins la somme des angles aux sommets. On en déduit que l'aire de tout triangle idéal est  $\pi$ .

**2.a** — On peut donc se demander si ce phénomène se prolonge à toutes les géométries de Hilbert. Mais pour que cette question ait un sens il faut pouvoir mesurer les aires dans ce cadre. Or, contrairement à la géométrie riemannienne qui induit naturellement une mesure, dans le cas finslérien, on n'a pas de choix unique — voir une discussion à ce sujet dans [BBI01]. Cependant deux mesures sont plus utilisées que d'autres. La première consiste à voir les espaces de Finsler comme des espaces métriques et à leur associer leur mesure de Hausdorff. La seconde consiste à utiliser la structure symplectique canonique de l'espace cotangent, celle-ci induit naturellement une mesure sur le cotangent  $\mu^*$  (nommons-la mesure de Liouville comme il est d'usage). On en déduit la *mesure de Holmes Thompson* sur la variété  $M^n$  comme suit : pour tout sous ensemble  $U \subset M^n$  sa mesure de Holmes-Thompson  $\mu_{HT}(U)$  est

$$\mu_{HT}(U) = \mu^*(S^*U) / \omega_n \tag{I-1}$$

où  $\omega_n$  est le volume euclidien de la boule unité euclidienne et en notant  $F_M$  la structure Finsler et  $F_M^*$  la norme duale induite sur les formes

$$S^*U = \{(m, p) \in T^*M \mid |m \in U \text{ et } F_M^*(m, p) \leq 1\}$$

Dans le cadre des géométries de Hilbert, il se trouve que ces deux mesures sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue et admettent une expression relativement simple : on choisit donc une mesure de Lebesgue  $\lambda$  sur  $\mathbb{R}^n$  contenant notre ouvert convexe  $\mathcal{C}$ . Puis en chaque point  $p \in \mathcal{C}$  on introduit la boule unité sur le tangent  $B_p(1) = \{v \mid F_{\mathcal{C}}(p, v) \leq 1\}$  et sur le co-tangent  $B_p^*(1) = \{\alpha \mid F_{\mathcal{C}}^*(p, \alpha) \leq 1\}$ , qui sont tous les deux identifiés à  $\mathbb{R}^n$ . La mesure de Hausdorff de  $U \subset \mathcal{C}$  notée  $\mu_{\mathcal{C}}(U)$  s'obtient par la formule

$$\mu_{\mathcal{C}}(U) = \int_U \frac{\omega_n}{\lambda(B_p(1))} d\lambda(p) \tag{I-2}$$

alors que la mesure de Holmes-Thompson vaut

$$\mu_{HT}(U) = \int_U \frac{\lambda(B_p^*(1))}{\omega_n} d\lambda(p). \tag{I-3}$$



Un détour par la géométrie convexe s'impose ici, notamment sur deux inégalités (voir par exemple le chapitre 7 du livre de G. Pisier [Pis89]); la première est due à Blaschke et Santaló

**Proposition I.12.**

Pour toute norme on a

$$\lambda(B_p^*(1)) \cdot \lambda(B_p(1)) \leq \omega_n^2$$

de plus l'égalité caractérise les normes euclidiennes.

Celle-ci implique  $\mu_{HT} \leq \mu_C$  l'égalité n'ayant lieu que si la géométrie de Hilbert est riemannienne, c'est-à-dire uniquement dans le cas de la géométrie Hyperbolique. La seconde inégalité est due à Bourgain et Milman

**Proposition I.13.**

Il existe une constante  $c(n)$  telle que pour toute norme

$$\lambda(B_p^*(1)) \cdot \lambda(B_p(1)) \geq c(n).$$

Dans les problèmes qui nous intéresseront, on verra que grâce à ces deux inégalités, quelle que soit celle des deux mesures qui est utilisée dans les énoncés, les résultats restent valables. Il faut cependant faire attention car pour d'autres problèmes ces deux mesures peuvent avoir des comportements très différents. On pense notamment au problème de la recherche de surfaces minimales (voir les articles de G. Berck [Ber04] et J.C. Alvarez- G. Berck [APB06]).

Nous voilà donc muni de deux mesures, qui nous permettent de continuer notre étude de l'aire des triangles idéaux.

**2.b** — Le second problème auquel nous sommes confrontés, consiste dans le fait que, dans les géométries de Hilbert, il n'y a généralement pas unicité de la géodésique entre deux points. Cependant quelle que soit la géométrie de Hilbert, les « vrais » triangles restent des triangles géodésiques. Nous décidons arbitrairement de nous restreindre aux triangles idéaux qui sont des triangles affins dont les sommets sont sur le bord.

La géométrie de Hilbert d'un triangle met en évidence un autre phénomène. Considérons un triangle idéal dégénéré au sens où deux de ses sommets sont sur le même côté du triangle, le troisième sur un des deux autres côtés (voir Fig. I.6). On se convaincra sans peine que ce triangle a une aire infinie. Excluons donc également ces triangles (même si en réalité ce n'est pas absolument nécessaire, mais cela simplifie nettement les énoncés).

En résumé, nous posons comme définition qu'un *simplexe idéal* d'une géométrie de Hilbert est un simplexe de  $\mathbb{R}^n$  dont les sommets (i.e. ses faces de dimension 0) et seulement les sommets, sont sur le bord.

Nous allons à présent nous servir de l'ellipsoïde de John  $\mathcal{E}_C$ , i.e., l'ellipsoïde de volume maximal inclus dans notre convexe  $\mathcal{C}$ . Outre son unicité, une de ses propriétés est qu'il touche le bord en au moins  $n + 1$  points si  $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^n$ .

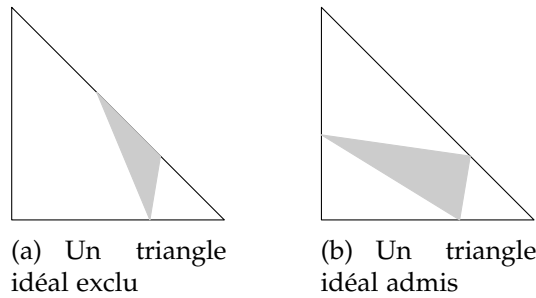


FIG. I.6 –

En particulier en dimension 2, il touche le convexe  $\mathcal{C}$  en trois points, nécessairement non alignés. Ceux-ci déterminent donc un triangle idéal particulier de  $\mathcal{C}$ . Notons qu'on peut le voir comme un triangle idéal commun aux géométries de Hilbert de  $\mathcal{C}$  et de  $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ . Or dans cette dernière il est d'aire  $\pi$ . On remarque alors la propriété suivante [Ver5]

**Lemme I.14 (Lemme de comparaison).**

*Soient  $A \subset B$  deux convexes de  $\mathbb{R}^n$  et  $D \subset A$  un domaine compact de  $A$ . Alors en notant  $\mu_A$  et  $\mu_B$  les mesures de Hausdorff associées aux géométries de Hilbert de  $A$  et  $B$  on a*

$$\mu_B(D) \leq \mu_A(D).$$

*L'inégalité étant stricte dès lors que  $A \neq B$ . La comparaison reste valable avec les mesures de Holmes-Thompson.*

On en déduit, toujours dans [Ver5], la caractérisation suivante du plan hyperbolique parmi les géométries de Hilbert planes

**Théorème I.15.**

*Parmi les géométries de Hilbert planes, seul le plan Hyperbolique a ses triangles idéaux d'aire constante. Toute autre géométrie de Hilbert admet un triangle idéal d'aire strictement plus grande que  $\pi$  et un triangle idéal d'aire strictement plus petite que  $\pi$ .*

Insistons sur le fait que cette caractérisation ne dépend pas de la mesure choisie dès lors que celle-ci coïncide avec la mesure riemannienne classique dans le plan hyperbolique et vérifie le lemme de comparaison I.14.

En utilisant une fois de plus ce lemme de comparaison, on peut comparer l'aire de tout triangle idéal à l'aire d'un triangle idéal de la géométrie de Hilbert du triangle. En effet, en regardant  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{P}^n$ , un triangle idéal est donné par trois points du bord. Trois droites projectives tangentes en ces trois points à  $\mathcal{C}$  déterminent un triangle qui contient  $\mathcal{C}$ . Un long calcul nous permet alors d'obtenir le résultat suivant pour la mesure de Hausdorff (voir les calculs détaillés dans [Ver5])

**Théorème I.16.**

Soit  $\mathcal{C}$  une géométrie de Hilbert plane et  $T$  un triangle idéal de  $\mathcal{C}$ . Alors

$$\mu_{\mathcal{C}}(T) \geq \frac{\pi^3}{24}.$$

De plus l'égalité implique que  $\mathcal{C}$  est un triangle et que  $T$  est isométrique au triangle s'appuyant sur les milieux des cotés de  $\mathcal{C}$ .

Autrement dit sur l'ensemble des géométries de Hilbert planes, l'aire des triangles idéaux est uniformément minorée.

**Exercice I.17.**

En imitant la démonstration du théorème ci-dessus, calculer le minimum de l'aire d'un triangle idéal pour la mesure de Holmes-Thompson. Le minimum est-il atteint par la même famille de triangles idéaux ?

**2.c** — Ayant étudié le minimum pour l'aire des triangles idéaux il était logique que nous nous intéressions au maximum. Comme nous l'avons déjà remarqué ci-dessus, la présence d'un segment sur le bord va impliquer l'existence d'une suite de triangles dont l'aire tend vers l'infini. Étant donné la dualité qui existe entre segment et absence de régularité  $C^1$  en un point, entre un convexe et son convexe dual, il n'est pas étonnant que le même phénomène se produise lorsque notre convexe plan n'est pas dérivable en un point de son bord. En fait une étude précise (faite dans [Ver5]) implique l'existence de triangles idéaux d'aire infini dès lors que le convexe n'est pas  $C^1$  en un point, et s'il est  $C^1$  mais contient un segment, alors on a une suite de triangles idéaux dont l'aire tend vers l'infini. On remarque ensuite que si le bord est de régularité  $C^2$ , alors tous les triangles sont d'aire finie.

Dans un premier temps dans [Ver5] on n'obtient une borne uniforme que lorsque le bord du convexe est  $C^2$  avec une courbure strictement positive en tout point (voir théorème 4 dans [Ver5]). En outre la borne n'est valable que pour un convexe donné.

On remarque alors, d'une part qu'il semble qu'en voulant majorer l'aire des triangles idéaux on tombe sur les mêmes problèmes de régularité du bord que dans les problèmes d'hyperbolicité au sens de Gromov, d'autre part que l'on peut démontrer que le plan hyperbolique est hyperbolique au sens de Gromov en procédant par l'absurde. On en déduit une famille de triangles dont l'aire explose. Cependant en géométrie hyperbolique plane, tous les triangles ont une aire inférieure à  $\pi$ , qui est l'aire d'un triangle idéal. Nous avons donc une contradiction. C'est en voulant préciser ce lien que nous avons abouti au théorème suivant dans [Ver4]

**Théorème I.18.**

*Soit  $(C, d_C)$  une géométrie de Hilbert. L'aire des triangles idéaux est majorée si et seulement si  $C$  est hyperbolique au sens de Gromov. Plus précisément*

1. *Pour tout  $M > 0$ , il existe  $\delta$  tels que si l'aire de tout triangle idéal de  $C$  est inférieure à  $M$  alors,  $C$  est  $\delta$ -hyperbolique ;*
2. *Pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $M > 0$  tels que si  $C$  est  $\delta$ -hyperbolique, alors l'aire de tout triangle idéal de  $C$  est inférieure à  $M$ .*

En combinant la première partie de ce théorème au théorème 4 de [Ver5] on en déduit une nouvelle démonstration du fait que les convexes dont le bord est  $C^2$  avec une courbure de Gauss strictement positive en tout point déterminent des géométries de Hilbert hyperboliques au sens de Gromov (ce résultat avait déjà été démontré de manière relativement élémentaire par A. Karlsson et G.A. Noskov [KN02] d'une part, et B. Colbois et P. Verovic [CV04] d'autre part. Il découle également de la caractérisation de Y. Benoist [Ben03b]).

Avant de clore ce paragraphe notons que la seconde partie de ce théorème s'appuie fortement sur la convexité quasi-symétrique du bord des géométries de Hilbert hyperboliques au sens de Gromov, démontrée par Y. Benoist dans [Ben03b]. Celle-ci, associée à nos résultats dans [Ver5] permet alors de démontrer le résultat de compacité suivant, où

$$T_n^\delta = \{(\omega, \Delta) \mid \omega \text{ est } \delta\text{-hyperbolique et } \Delta \text{ triangle idéal de } \omega\}$$

**Théorème I.19 (théorème 8 de [Ver4]).**

*Le groupe des transformations projectives  $PGL(n, \mathbb{R})$  agit de manière co-compacte sur l'ensemble  $T_n^\delta$  des convexes triangles-pointé, i.e., pour toute suite  $(C_k, \Delta_k)$  de  $T_n^\delta$  il existe une suite  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset PGL(n, \mathbb{R})$  et  $(\omega, \Delta) \in T_n^\delta$  telle que*

$$g_k C_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \omega \text{ et } g_k \Delta_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \Delta.$$

**2.d** — À la fin de l'étude des triangles idéaux, on pourrait se demander pourquoi s'intéresser aux volumes des simplexes idéaux des géométries hyperboliques. La raison principale en est le calcul du volume simpliciale des variétés compactes hyperboliques. Notre propos n'étant pas de refaire la théorie complète, énonçons simplement le théorème classique suivant :

**Théorème I.20.**

*Soit  $M$  une variété orientable compacte hyperbolique de dimension  $n$ , en notant  $\|M\|$  son volume simplicial on a*

$$\|M\| = \frac{\text{Vol } M}{v_n}$$

où  $v_n$  est l'aire du plus grand simplexe idéal régulier de  $\mathbb{H}^n$ .

Autrement dit, le volume simplicial est lié à l'aire des simplexes idéaux. Dans notre cadre la question est donc de déterminer les convexes divisibles admettant un volume simplicial non nul.

Ceci nous conforte dans l'idée de déterminer les convexes dont l'aire des simplexes est uniformément majorée. C'est l'objet d'un travail en cours [prep3]. Nous avons en particulier été naturellement amené à introduire la notion de géométrie  $k$ -simplexe  $\delta$ -hyperbolique, comme étant celles dont tous les  $k$ -simplexes sont  $\delta$ -fin, au sens où toute  $k - 1$  face est dans le  $\delta$ -voisinage de l'union des  $k$  autres faces. Lorsque  $k = 2$  on retrouve la notion usuelle de  $\delta$  hyperbolicité. En travaillant sur les propriétés de ces géométries dans le cadre des géométries de Hilbert, nous obtenons notamment le théorème suivant :

### **Théorème I.21.**

*Soit  $(C, d_C)$  une géométrie de Hilbert dans  $\mathbb{P}^n$ . Si l'aire des  $n$ -simplexes idéaux est majorée alors  $C$  est  $n$ -simplexe hyperbolique. Plus précisément, pour tout  $M > 0$ , il existe  $\delta$  tel que si le volume de tout  $n$ -simplexe idéal de  $C$  est inférieur à  $M$  alors,  $C$  est  $n$ -simplexe  $\delta$ -hyperbolique.*

Bien que n'ayant pas encore démontré la réciproque à cet énoncé, nous sommes tout de même en mesure de proposer le résultat (partiel ?) suivant :

### **Théorème I.22.**

*Soit  $(C, d_C)$  une géométrie de Hilbert. Si  $C$  est hyperbolique au sens de Gromov alors il existe une borne uniforme sur le volume des simplexes idéaux, plus précisément, pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $M > 0$  tel que si  $C$  est  $\delta$ -hyperbolique, alors le volume de tout  $k$ -simplexe idéal de  $C$  est inférieur à  $M$ , pour  $2 \leq k \leq n$ .*

## **Conclusion et perspectives**

L'étude du volume des simplexes idéaux peut paraître triviale, néanmoins elle met en évidence que les convexes divisibles hyperboliques au sens de Gromov ont un volume simplicial non nul. Si ce phénomène se prolonge en dimension supérieure, et si comme nous le pensons, les convexes simplexe-hyperboliques ont l'aire de leur simplexes idéaux majorée, on obtient alors de nouveaux exemples d'espace topologique dont le volume simplicial est non nul.

La question de déterminer les propriétés des simplexes dont le volume est maximal pourrait alors être intéressante. Cependant si l'on voulait précisément obtenir le volume simplicial en fonction du volume des simplexes idéaux – par exemple en se demandant si une formule comme celle du théorème I.20 existe pour les géométries de Hilbert – il resterait à savoir si celle-ci est valable pour toute mesure raisonnable associée à la structure de Finsler.

### 3 Le bas du spectre

Notre étude du bas du spectre des géométries de Hilbert est détaillé dans cette partie. Nous présenterons en particulier une caractérisation de sa nullité et ses liens avec l'hyperbolicité au sens de Gromov.

En géométrie riemannienne, les liens entre la géométrie et le bas du spectre du laplacien agissant sur les fonctions ne sont plus à démontrer. On trouvera en partie une justification de plus à cette affirmation dans le second chapitre du présent mémoire. La remarque principale qui nous a guidé lors de notre étude est le fait que le bas du spectre d'une variété de Cartan-Hadamard à courbure sectionnelle majorée par une constante strictement négative est strictement positif. C'est par exemple le cas pour l'espace hyperbolique, dont on peut même calculer explicitement la valeur.

Si l'on continue à croire, comme le présent auteur, que les géométries de Hilbert hyperboliques au sens de Gromov sont l'archétype de la géométrie Finsler de « courbure négative », on aimerait cependant justifier encore une fois cette affirmation. On peut espérer ainsi avoir un résultat reliant l'hyperbolicité au bas du spectre.

Un problème majeur se présente alors : qu'est-ce qu'un laplacien pour une géométrie de Hilbert, ou plus généralement pour une géométrie de Finsler ? Il n'y a pas de réponse unique à cette question. Tout dépend de la propriété du laplacien riemannien que l'on désire conserver.

En revanche, il est relativement aisé de définir un nombre correspondant au bas du spectre. Ceci nécessite malgré tout un choix, celui d'une mesure (voir problème du volume des simplexes). Cependant les mesures auxquelles on pense, i.e., la mesure de Hausdorff associée à la distance, ou bien la mesure de Holmes-Thompson, se trouvent être équivalentes, au sens où dans notre cadre, elles sont toutes les deux absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue dans le convexe et leur densité sont de rapport majoré et minoré.

Plus précisément, soit  $\mathcal{C}$  un ouvert proprement convexe de  $\mathbb{P}^n$ . Si  $\Omega$  est un domaine avec  $\bar{\Omega} \subset \mathcal{C}$ , l'intégrale sur  $\Omega$  par rapport à  $\mu_{\mathcal{C}}$  d'une fonction  $f$  définie sur  $\Omega$  sera notée  $\int_{\Omega} f d\mu_{\mathcal{C}}$ . Pour définir le bas du spectre de  $\mathcal{C}$ , que l'on note  $\lambda_1(\mathcal{C})$ , par analogie avec ce qui se fait dans le cas des variétés riemanniennes de volume infini, on a besoin de définir ce qu'est la norme du gradient d'une fonction, sachant que dans notre cadre le gradient n'existe généralement pas. Pour cela on remarque que dans le cadre riemannien, la norme du gradient est exactement la norme de la différentielle de la fonction au même point. Il s'agit donc de définir la norme d'une forme linéaire en un point. Ceci se fait à l'aide de la norme duale  $F_{\mathcal{C}}^*$  à la norme Finsler  $F_{\mathcal{C}}$ , pour une 1-forme  $\alpha$  on note

$$F_{\mathcal{C}}^*(p, \alpha_p) = \sup_{v, F_{\mathcal{C}}(p, v) \leq 1} \alpha_p(v)$$

la définition du bas du spectre  $\lambda_1(\mathcal{C})$  est alors simplement

$$\lambda_1(\mathcal{C}) = \inf \frac{\int_{\mathcal{C}} F_{\mathcal{C}}^*(p, df_p)^2 d\mu_{\mathcal{C}}(p)}{\int_{\mathcal{C}} f^2(p) d\mu_{\mathcal{C}}(p)} \quad (\text{I-4})$$

où l'infimum est pris sur toutes les fonctions lipschitziennes, non nulles, à support compact dans  $\mathcal{C}$  et où  $\mu_{\mathcal{C}}$  est la mesure de Hilbert associée à  $\mathcal{C}$ . L'expression ci-dessus est appelée le quotient de Rayleigh de  $f$ .

Par définition le bas du spectre  $\lambda_1(\mathcal{C})$  est un nombre réel positif ou nul et l'on sait que lorsque  $\mathcal{C}$  est une ellipse, c'est-à-dire que l'on se trouve dans le modèle hyperbolique, il vaut  $1/4$ . On sait également que la géométrie du triangle est isométrique au plan muni d'une norme dont la boule unité est hexagonale. En prenant les bonnes fonctions associées aux boules de grand rayon (comme dans le cas euclidien), le fait que le volume de celles-ci est à croissance polynomiale implique que le bas du spectre du triangle est 0. Une fois de plus, ces deux géométries sont mises en opposition.

Le premier résultat important obtenu dans [Ver3] est le suivant, et concerne la manière dont le bas du spectre évolue lorsque les géométries de Hilbert changent :

**Proposition I.23.**

*Le bas du spectre est, respectivement à la distance de Hausdorff, une fonction semi-continue supérieurement, i.e., pour toute suite  $(\mathcal{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers un convexe  $\mathcal{C}$  on a*

$$\limsup \lambda_1(\mathcal{C}_n) \leq \lambda_1(\mathcal{C}) \quad (\text{I-5})$$

On en déduit donc que toute géométrie admettant dans l'adhérence de son orbite, par l'action de  $PGL(n, \mathbb{R})$  sur l'ensemble des ouverts proprement convexes, une géométrie de Hilbert dont le  $\lambda_1$  est nul, a également son bas du spectre égal à zéro. En dimension deux on obtient même un résultat plus fort, car on sait que tout convexe qui n'est pas strictement convexe admet un triangle dans son adhérence (par la proposition I.4 due à Benzecri). Ceci nous permet d'obtenir la première conséquence suivante :

**Corollaire I.23.a**

*Soit  $\mathcal{C}$  un ouvert proprement convexe de  $\mathbb{P}^2$ . Si  $\mathcal{C}$  n'est pas strictement convexe, son bas du spectre est nul. A contrario, si le bas du spectre est non nul, alors  $\mathcal{C}$  est strictement convexe.*

En appliquant le principe fonctionnel I.8 on en déduit que si le bas du spectre est non nul, alors la géométrie est nécessairement  $\delta$ -hyperbolique. Plus précisément :

**Corollaire I.23.b**

Soit  $M \geq 0$ , alors il existe  $\delta(M) > 0$  tel que toute géométrie de Hilbert plane dont le bas du spectre est minoré par  $M$  est  $\delta$  hyperbolique.

Ce corollaire correspond à la réciproque du résultat escompté. Pour obtenir ce dernier nous avons d'abord remarqué que les espaces de longueur hyperbolique au sens de Gromov satisfont une inégalité isopérimétrique linéaire (voir Chapitre III.H section 2, définition 2.1 et proposition 2.7 de [BH99]). L'association inégalité isopérimétrique et bas du spectre nous a naturellement mené vers l'inégalité de Cheeger.

Cette analogie soulève trois questions. *Primo*, il faut définir ce que l'on entend par constante de Cheeger. *Secondo*, il faut se souvenir que l'inégalité est obtenue en identifiant deux objets a priori distincts, la constante de Cheeger et une constante de Sobolev par l'intermédiaire d'une formule de co-aire; grâce à cette identification, on parvient ensuite, par une inégalité de Cauchy-Schwartz à minorer le bas du spectre en fonction du carré de la constante de Cheeger. *Tertio*, pour obtenir notre résultat il faudrait arriver à montrer que la constante de Cheeger est strictement positive.

Commençons par définir un analogue de la constante de Cheeger et par expliquer comment on obtient sa stricte positivité. Pour un ouvert proprement convexe  $\mathcal{C} \in \mathbb{P}^n$  on a besoin de la mesure de Hausdorff  $n - 1$ -dimensionnelle, que l'on notera  $\nu_{\mathcal{C}}$ , et ensuite on dénotera par  $I_{\infty}(\mathcal{C})$  la constante de Cheeger de  $\mathcal{C}$ , définie par

$$I_{\infty}(\mathcal{C}) = \inf_{\Omega \subset \mathcal{C}} \frac{\nu_{\mathcal{C}}(\partial\Omega)}{\mu_{\mathcal{C}}(\Omega)}$$

où  $\Omega$  est un domaine dont l'adhérence (prise dans  $\mathbb{R}^2$ ) vérifie  $\overline{\Omega} \subset \mathcal{C}$  et dont le bord  $\partial\Omega$  est rectifiable de mesure  $\nu_{\mathcal{C}}(\partial\Omega)$ .

Il s'agit à présent de montrer que cette constante est non nulle. Dans l'article [Ver3] nous avons d'abord traité le cas planaire en utilisant l'inégalité isopérimétrique linéaire satisfaite par les espaces métriques de longueur  $\delta$ -hyperbolique, alors que dans l'article [Ver2] nous avons travaillé en utilisant un résultat dû à J. Cao. Avant de l'énoncer rappelons que dans un espace métrique  $X$  on peut définir une relation d'équivalence entre les rayons géodésiques en mettant dans la même classe deux rayons dont la distance à l'infini reste bornée. On note  $X(\infty)$  l'ensemble des classes d'équivalence. Si  $X$  est  $\delta$ -hyperbolique on introduit les fonctions suivantes sur  $X(\infty)$  : pour deux rayons géodésiques  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  partant du même point  $x_0$  et  $\varepsilon > 0$  on pose

$$d_{x_0, \varepsilon}(\sigma_1(\infty), \sigma_2(\infty)) = \liminf_{t \rightarrow +\infty} e^{-\varepsilon \left[ t - \frac{1}{2}d(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \right]}.$$

On sait que pour  $\varepsilon$  suffisamment petit  $d_{x_0, \varepsilon}$  est une distance sur  $X(\infty)$  (voir [BH99]), auquel cas on dira que  $d_{x_0, \varepsilon}$  est une *métrique de Gromov* sur  $X(\infty)$ . Une variété  $X$  possède un *quasi-pôle*, si elle contient un sous ensemble compact  $\Omega$  et s'il existe une constante  $c > 0$  tels que tout point de  $X$  est dans le  $c$ -voisinage d'un rayon géodésique dont l'origine se trouve dans  $\Omega$ .



**Théorème I.24** (theorem 3.1 dans [Cao00]).

*Soit  $X$  une variété non compacte à géométrie locale bornée et admettant un quasi pôle. Si  $X$  est hyperbolique au sens de Gromov et les composantes connexes de  $X(\infty)$  admettent un minorant de leur diamètre (pour une métrique de Gromov fixée), alors  $X$  est quasi-isométrique à un graphe  $\Gamma$  dont la constante de Cheeger est strictement positive.*

Avant d'aller plus loin, remarquons que dans son article, J. Cao utilise à tort dans son cadre général un théorème de M. Kanai [Kan85] pour en déduire que la constante de Cheeger de  $X$  est alors strictement positive. En effet le résultat de M. Kanai n'est démontré que dans le cas où la variété est riemannienne à courbure de Ricci minorée et rayon d'injectivité minoré (par une constante non nulle bien sûr). Cette hypothèse implique que la géométrie est localement bornée suivant la définition ci-dessous :

**Définition I.25.**

Soit  $(X, d)$  un espace métrique, nous dirons qu'il est à géométrie locale bornée si et seulement s'il existe deux constantes  $a$  et  $C$  et un entier  $n$  tels qu'en tout point  $x$  de  $X$  on puisse trouver une fonction  $f_x: B_d(x, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n, euc)$ ,  $C$ -bilipschitz, où  $B_d(x, a)$  est la boule métrique centrée en  $x$  de rayon  $a$ .

Le fait que la géométrie locale soit bornée est un élément essentiel lorsque l'on veut montrer que la non nullité de la constante de Cheeger du graphe implique celle de la variété. Dans l'article [Ver2] c'est donc avec succès que nous avons démontré que c'était le cas pour les géométries de Hilbert, et ceci de manière uniforme même, au sens suivant :

**Théorème I.26.**

*Les géométries de Hilbert sont à géométrie locale bornée, plus précisément soit  $n \geq 2$  un entier, il existe deux constantes  $C_1(n)$  et  $C_2(n)$  telles que pour toute géométrie de Hilbert  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  de  $\mathbb{P}^n$  et tout point  $x \in \mathcal{C}$ , il existe une application  $f_x$  de  $B_{d_{\mathcal{C}}}(x, 1)$  dans  $\mathbb{R}^n$  telle que*

$$\forall y, z \in B_{d_{\mathcal{C}}}(x, 1), C_1(n) \cdot d_{\mathcal{C}}(y, z) \leq \|f_x(y) - f_x(z)\|_e \leq C_2(n) \cdot d_{\mathcal{C}}(y, z)$$

L'application  $f_x$  de ce théorème peut être prise pour l'identité quitte à prendre pour norme euclidienne la norme dont la boule unité est l'ellipsoïde de John de la boule  $B_{d_{\mathcal{C}}}(x, 1)$ , ou inversement c'est l'application affine qui envoie l'ellipsoïde de John sur la boule unité de l'espace euclidien.

Ainsi ce résultat précise le contrôle du volume des boules que nous avons obtenu dans [Ver3]

**Proposition I.27.**

Soit  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  une géométrie de Hilbert de  $\mathbb{P}^n$ . Il existe deux fonctions  $C_1(n, R)$  et  $C_2(n, R)$  telles que pour tout point  $x$  de  $\mathcal{C}$  on ait

$$C_1(n, R) \leq \mu_{\mathcal{C}}(B_{d_{\mathcal{C}}}(x, R)) \leq C_2(n, R).$$

Cette dernière proposition alliée à l'inégalité isopérimétrique linéaire suffit à démontrer que la constante de Cheeger est strictement positive pour une géométrie de Hilbert plane hyperbolique au sens de Gromov. En dimension supérieure, le contrôle local nous permet d'appliquer le résultat de J. Cao. Admettons un instant qu'en effet cela implique bien la non nullité de la constante de Cheeger de notre géométrie de Hilbert. Il nous faut encore arriver à la non nullité du bas du spectre.

Pour ceci on introduit la constante de Sobolev

$$S_{\infty}(\mathcal{C}) = \inf_f \frac{\int_{\mathcal{C}} F^*(p, df_p) d\mu_{\mathcal{C}}}{\int_{\mathcal{C}} |f| d\mu_{\mathcal{C}}}$$

où l'infimum est également pris pour toutes les fonctions lipschitziennes à support compact dans  $\mathcal{C}$  et pour laquelle on a l'inégalité

$$\frac{1}{4} S_{\infty}(\mathcal{C})^2 \leq \lambda_1(\mathcal{C}).$$

Dans le cadre riemannien, on utilise alors une formule de co-aire pour démontrer l'égalité entre  $S_{\infty}$  et  $I_{\infty}$ , malheureusement, celle-ci n'a pas lieu dans notre cadre, en raison du fait que la mesure  $n - 1$ -dimensionnelle intervenant dans la formule de la co-aire n'est pas la mesure de Hausdorff  $n - 1$  dimensionnelle. Cependant, en utilisant cette mesure  $\bar{\nu}$  au lieu et place de la mesure de Hausdorff des bords dans la définition de la constante de Cheeger, on obtient une seconde constante de Cheeger  $I_{\infty}^{\nu}$  pour laquelle on a les propriétés suivantes (voir [Ver3] et [Ver2])

**Proposition I.28.**

Soit  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  une géométrie de Hilbert de  $\mathbb{P}(n)$ , il existe deux constantes  $c_1(n)$  et  $c_2(n)$  telles que

$$c_1(n) I_{\infty}^{\nu}(\mathcal{C}) \leq I_{\infty}(\mathcal{C}) \leq c_2(n) I_{\infty}^{\nu}(\mathcal{C})$$

et  $I_{\infty}^{\nu}(\mathcal{C}) = S_{\infty}(\mathcal{C})$ . En particulier, on a

$$\lambda_1(\mathcal{C}) \geq \frac{1}{(2c_2(n))^2} I_{\infty}(\mathcal{C})^2.$$

En associant ceci aux résultats précédents on en déduit dans [Ver3] le théorème suivant

**Théorème I.29.**

*Soit  $(C, d_C)$  une géométrie de Hilbert plane. Le fait que la géométrie soit hyperbolique au sens de Gromov est équivalent à la non nullité du bas du spectre qui est équivalente à la non nullité de la constante de Cheeger.*

pour la dimension supérieure on obtient seulement dans [Ver2]

**Théorème I.30.**

*Soit  $(C, d_C)$  une géométrie de Hilbert. Si la géométrie est hyperbolique au sens de Gromov, alors sa constante de Cheeger et son bas du spectre sont non nuls.*

On présente également un contre exemple en dimension trois de la réciproque. Il nous reste à présent à justifier que le résultat de J. Cao s'applique bien, i.e., que l'on peut remonter d'un graphe à la géométrie de Hilbert elle-même. Cela va de pair avec la recherche de propriétés nécessaires pour que le bas du spectre ne soit pas nul.

**Définition I.31.**

Un sous ensemble  $\mathcal{G}$  d'un espace métrique est dit  $\varepsilon$  séparé pour  $\varepsilon > 0$ , si la distance entre deux éléments de  $\mathcal{G}$  est au moins  $\varepsilon$ .

Dans un espace métrique on note  $B(\xi, \rho)$  la boule métrique centrée en  $\xi$  et de rayon  $\rho$ .

**Définition I.32.**

Une discrétisation d'un espace métrique  $(M, d)$  est un graphe  $\mathbf{G}$  pour lequel on peut trouver deux constantes  $\varepsilon, \rho > 0$  telles que l'ensemble des sommets  $\mathcal{G}$  soit un sous ensemble  $\varepsilon$  séparé de  $(M, d)$  et

$$M = \bigcup_{\xi \in \mathcal{G}} B(\xi, \rho),$$

la structure de graphe étant définie par les voisinages des sommets

$$N(\xi) = \{\mathcal{G} \cap B(\xi, 3\rho)\} \setminus \{\xi\}.$$

Comme on l'a dit supra, le résultat de J. Cao s'appuie sur un théorème de M. Kanai, relatif aux variétés de courbure de Ricci et rayon d'injectivité minorés. C'est un analogue de celui-ci que nous avons réussi à démontrer dans [Ver1] :

**Théorème I.33.**

*Soit  $(C, d_C)$  une géométrie de Hilbert. Elle est quasi-isométrique à ses discrétisations, et donc deux discrétisations quelconques sont quasi-isométriques. De plus la constante de Cheeger d'une discrétisation est nulle si et seulement si la constante de Cheeger  $I_\infty(C)$  est nulle.*

Si l'on se rappelle que P. Buser [Bus82] montre que sous les mêmes hypothèses de courbure et de rayon d'injectivité que celle de M. Kanai, la constante de Cheeger et le bas du spectre sont équivalents, on ne sera pas surpris du fait que nous démontrons également ce résultat dans [Ver1]. Mais avant de d'annoncer ce dernier, rappelons que le rayon spectral  $\rho$  est associé à la marche aléatoire simple sur la discrétisation comme suit : notons  $p^{(n)}(x, y)$  la probabilité qu'en partant de  $x$  on arrive en  $y$  en  $n$  étapes alors

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p^{(n)}(x, y)}.$$

Notons également que  $1 - \rho$  est l'analogie du bas du spectre pour la discrétisation.

### **Théorème I.34.**

*Soit  $(C, d_C)$  une géométrie de Hilbert. Son bas du spectre est nul si et seulement si sa constante de Cheeger est nulle. De plus le rayon spectral de ses discrétisations est égal à 1 si et seulement si son bas du spectre est nul.*

Il n'est peut-être pas inutile de comparer ce résultat avec les travaux de R. Brooks [Bro81], dans lesquels il est démontré que le bas du spectre du revêtement universel d'une variété compacte est nul si et seulement si le groupe fondamental de celle-ci est moyennable. Il est clair que ce même résultat s'applique dans notre cadre, dès lors que le convexe est divisible.

Cette comparaison faite, on peut se demander si la nullité du bas du spectre ne serait pas liée à une notion de moyennabilité. Tout porte à croire que l'existence de suites de Følner est équivalente à la nullité du bas du spectre et c'est effectivement un résultat que nous avons obtenu dans [Ver1], en précisant la notion de moyennabilité mise en jeu ici.

Considérons  $(C, d_C)$  une géométrie de Hilbert. Soit  $G$  une discrétisation de  $C$ . Une perturbation bornée de l'identité sur  $G$  est une application  $\gamma$  telle qu'il existe une constante  $C$  vérifiant pour tout  $g \in G$  que  $d_C(\gamma(g), g) \leq C$ . L'ensemble de ces perturbations forme un *pseudo-groupe*. Si celui-ci est moyennable, on dira que notre géométrie de Hilbert est moyennable. Au vu des résultats obtenus précédemment, et des résultats classiques sur les espaces métriques discrets (voir par exemple [dlHGCS99]) le résultat suivant est alors logique :

### **Théorème I.35.**

*Soit  $(C, d_C)$  une géométrie de Hilbert. Son bas du spectre est nul si et seulement si elle est moyennable.*

## Conclusion et perspectives

Il ressort nettement de notre étude que le comportement des géométries de Hilbert du point de vue spectral est comparable à celui des variétés riemanniennes à géométrie dite bornée. Ceci conforte notre point de vue selon lequel une bonne notion de courbure pour les espaces métriques généralisant ce qui se passe dans le cadre riemannien (on pense par exemple à la notion de Ricci minorée) devrait nous permettre de prouver que les géométries de Hilbert sont de courbure négatives lorsqu'elles sont hyperboliques au sens de Gromov et de courbure minorée dans le cadre général.

En ce qui concerne le spectre et la constante de Cheeger, on peut encore se demander s'il est vrai que le spectre d'un convexe et de son dual sont égaux ? Si l'on déforme le bord d'un convexe plan par le flot de courbure à la Gage et Hamilton [GH86] (resp. en dimension supérieure, par le flot de courbure moyenne à la G. Huisken [Hui84]), on sait alors que le convexe va tendre vers un disque (resp. une boule). Que se passe-t-il pour le spectre le long de cette déformation ? Dans le même ordre d'idée on peut étudier le spectre de la boule unité de la norme  $l^p$  dans  $\mathbb{R}^n$ , est-il vrai que pour  $1 \leq p \leq 2$  le spectre en fonction de  $p$  est croissant ? Est-il vrai que le maximum du spectre pour les géométries de Hilbert d'une dimension donnée n'est atteint que par la géométrie hyperbolique, et que les seules géométries de Hilbert dont le bas du spectre est nul, sont celles dont l'adhérence de l'orbite sous l'action de  $PGL(n, \mathbb{R})$  contient un polyèdre ?

## 4 Entropie volumique

Dans cette section nous présenterons les méthodes que nous avons employées pour étudier l'entropie volumique des géométries de Hilbert. Ce travail est actuellement en cours de finition.

Il s'agit ici d'étudier la croissance du volume des boules dans une géométrie de Hilbert donnée. Un invariant classique pour une variété riemannienne compacte est de regarder sur son revêtement universel l'entropie volumique, i.e., étant donné un point  $x$  et une boule de rayon  $R$  si l'on note  $V(x, R)$  son volume, alors l'entropie volumique est définie par

$$\text{Ent}(M) = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln V(x, R)}{R}$$

Un résultat de A. Manning [Man79] assure qu'en réalité ce nombre est une limite et qu'il est fini. Que peut-on en dire en géométrie de Hilbert ?

Notons que pour la suite nous considérons comme notion de volume soit la mesure de Hausdorff, soit la mesure de Holmes-Thompson associée à une géométrie de Hilbert.

**4.a** — Résumons ce que l'on sait des géométries connues. Dans la géométrie du triangle qui est isométrique au plan muni d'une norme hexagonale, la croissance des boules est polynomiale et donc l'entropie est nulle. On a démontré dans [Ver1] que la croissance du volume des boules d'une géométrie de Hilbert associée à un polygône est toujours polynomiale, quelle que soit la dimension, donc son entropie est également nulle.

En ce qui concerne les géométries de Hilbert dont le bord est  $C^2$  à courbure strictement positive, B. Colbois et P. Verovic [CV04] ont démontré que ces géométries étaient bi-lipschitz à la géométrie hyperbolique classique et donc avaient toute une entropie volumique égale à  $n - 1$ .

Dans le cas des convexes divisibles, la méthode de A. Manning s'applique et donc l'entropie est une limite. Par contre, pour une géométrie de Hilbert quelconque, on ignore si l'entropie est une limite, car si pour un rayon donné  $R$  on fait le rapport entre le plus grand volume d'une boule de rayon  $R$  et le plus petit, ce rapport peut tendre vers l'infini (considérer l'exemple de la géométrie d'une demi-boule). En revanche, le contrôle uniforme, en fonction de la dimension obtenue dans [Ver3] implique que pour toute géométrie de Hilbert

$$\text{Ent}(M) \leq 4n.$$

De même un argument classique (voir [Cha93] page 271), montre que si la constante de Cheeger est non nulle, alors l'entropie est non nulle. Ainsi une conséquence de [Ver1] est que toute géométrie de Hilbert non moyennable a une entropie non nulle. C'est en particulier le cas si la géométrie est hyperbolique au sens de Gromov [Ver2]. La réciproque n'est bien sûr pas vraie, la géométrie

peut être moyennable et avoir une entropie non nulle (encore l'exemple de la demi-boule).

**4.b** — L'idée principale qui nous a permis d'avancer est un résultat d'Alexandroff [Ale39] concernant les hypersurfaces convexes de  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème I.36.**

*Soit  $C$  une hypersurface convexe de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , alors elle admet presque partout une courbure, autrement dit une fonction convexe sur  $\mathbb{R}^n$  est presque partout 2 fois dérivable.*

Cela implique en particulier qu'en presque tout point le convexe admet un ellipsoïde tangent, localement à l'intérieur du convexe.

On se concentre ensuite sur les boules centrées en un point fixé  $x$ . L'utilisation de la formule de la co-aire [Ver3] permet de se ramener à l'aire des sphères, en remarquant que le logarithme de l'aire des sphères divisé par le rayon des sphères est asymptotiquement équivalent à l'entropie volumique des boules.

Cependant dans notre cadre, les sphères ne sont pas l'objet idéal, c'est pourquoi nous préférons travailler avec les *sphères asymptotiques*. Par définition, la sphère asymptotique centrée en  $x$  de rayon  $R$  est l'image du bord  $\partial C$  par l'homothétie de rapport  $\tanh R$  centrée en  $x$ . Un résultat de B. Colbois et P. Verovic [CV04] nous garantit l'existence d'une constante  $C$  telle que toute sphère métrique de rayon  $R$  est incluse dans une sphère asymptotique de rayon  $R + C$  et réciproquement.

Soit deux hypersurfaces convexes délimitant des domaines convexes donnés, imbriqués l'un dans l'autre, peut-on comparer leurs surfaces respectives ? L'étude du cas euclidien laisse entrevoir la difficulté de cette question qui semble pourtant « évidente ». Dans le plan euclidien on arrive à se restreindre au cas des polygones et, en utilisant l'inégalité triangulaire et un bon algorithme, on montre que le convexe extérieur est plus long que le convexe intérieur. La complication induite par une généralisation de cette méthode en dimension supérieure est déjà apparente. La théorie de la mesure va nous venir une première fois en aide.

**4.c** — Une méthode plus générale pour répondre à la question précédente est l'utilisation d'une *formule de Crofton*. C'est une formule qui relie la mesure d'une hypersurface au nombre de droites qui la coupent. Ainsi en dimension 2 en « comptant » le nombre de droites qui coupent un morceau de courbe rectifiable on en déduit sa longueur. Bien sûr toute la difficulté réside dans la manière de compter, autrement dit de mesurer les droites. Énonçons la formule de Crofton pour une géométrie de Hilbert régulière (voir une discussion sur la formule de Crofton dans [ÁPF04], une démonstration dans [ÁP05] et dans le cadre des géométries de Hilbert polyédrale le travail de [Sch06a])

**Théorème I.37.**

*Soit  $(C, F_C)$  un ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^n$  dont le bord est une sous variété  $C^2$  à courbure strictement positive, muni de sa métrique de Hilbert et de sa mesure de Holmes-*

Thompson  $\mu_{HT}$ . Alors il existe une mesure  $\mathcal{C}^2$  et **positive**  $\Phi_1$  sur la variété  $H_{n,1}$  des lignes droites, telle que pour toute hypersurface immergée  $N \subset \mathcal{C}$  on ait

$$v_{HT}(N) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\lambda \in H_{n,1}} \#(N \cap \lambda) \Phi_1,$$

où  $\omega_{n-1}$  est le volume de la boule unité euclidienne de dimension  $n - 1$  et  $v_{HT}$  est la mesure de Holmes-Thompson de dimension  $n - 1$  induite sur  $N$  par la structure de finsler de  $\mathcal{C}$ .

De cette formule de Crofton on déduit le corollaire suivant valable pour toute géométrie de Hilbert.

**Proposition I.38.**

Soit  $(\mathcal{C}, F_{\mathcal{C}})$  un ouvert borné convexe de  $\mathbb{R}^n$  muni de sa métrique de Hilbert. Soient  $A \subset B \subset \mathcal{C}$  deux domaines convexes de  $\mathbb{R}^n$  tels que les bords de  $A$  et  $B$  soient des sous variétés de dimension  $n - 1$  par morceaux de  $\mathcal{C}$ , alors

$$v_{HT}(\partial A) \leq v_{HT}(\partial B).$$

En résumé, par l'intermédiaire d'une formule de co-aire on réduit le problème à celui de la mesure des sphères et à l'aide de la formule de Crofton et sa conséquence ci-dessus on parvient à transformer le problème de l'entropie volumique à celui de l'entropie volumique des sphères asymptotiques.

**4.d** — L'étude des sphères asymptotiques nous a conduit à introduire une fonctionnelle sur les convexes. Nous allons la présenter dans ce paragraphe.

**Définition I.39.**

Une  $k$ -densité sur un espace vectoriel  $V^n$ ,  $n \geq k \geq 1$  est une fonction continue définie sur le cône des  $k$ -vecteurs simples de  $V$

$$\phi: \Lambda_s^k \rightarrow \mathbb{R}$$

et positivement homogène :

$$\phi(\lambda \cdot \mathbf{a}) = \lambda \cdot \phi(\mathbf{a}) \text{ si } \lambda \geq 0.$$

Ainsi une  $k$ -forme linéaire induit une  $k$ -densité en restriction au cône simple. Une norme sur  $V$  est également un exemple de 1-densité, comme la restriction de toute norme sur les  $k$ -vecteurs. On généralise cette définition aux variétés, en considérant des fonctions continues sur le fibré en cônes simples  $\Lambda_s^k TM$ , positivement homogène sur chaque fibre. On peut intégrer une  $k$ -densité sur une sous-variété compacte orientée de dimension  $k$  exactement comme une  $k$ -forme : Soit  $\varphi: U^k \rightarrow M^k$  une paramétrisation locale

$$\int_{im\varphi} \phi = \int_{U^k} \phi(d_1\varphi \wedge \dots \wedge d_k\varphi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$



C'est la condition d'homogénéité qui garantit l'invariance par changement de paramétrisation.

À un convexe d'un espace vectoriel de dimension fini contenant l'origine, on va à présent associer son *cycle conormal*. Pour ceci rappelons qu'un hyperplan d'appui au bord  $\mathcal{C}$  d'un convexe est un hyperplan tangent. Quand on veut préciser le point de contact  $x$  on parle d'hyperplan d'appuis en  $x$ . On notera  $V^*$  le dual de  $V$  et  $\mathcal{C}^*$  le convexe dual de  $\mathcal{C}$  (ou polaire).

**Définition I.40.**

Le cycle conormal d'un corps convexe  $\mathcal{C} \subset V$  est l'ensemble

$$cn\mathcal{C} := \{(x, \xi) \in V \times V^* \mid \xi \text{ est un hyperplan d'appuis en } x \in \partial\mathcal{C}\}$$

Par définition il est clair que pour les deux projections canoniques  $\pi_V$  et  $\pi_{V^*}$  on obtient

$$\pi_V(cn\mathcal{C}) = \partial\mathcal{C} \text{ et } \pi_{V^*}(cn\mathcal{C}) = \partial\mathcal{C}^*$$

Du théorème d'Alexandroff (par exemple) on déduit qu'il s'agit une sous-variété lipschitz de dimension  $n - 1$ , qui admet donc un espace tangent en presque tout point. On remarquera en particulier que le cycle conormal d'un convexe lisse (au moins  $C^2$ ) est lisse, même si le bord du convexe possède de nombreux « plats » et qu'en conséquence son dual admet de nombreuses singularités.

Enfin, introduisons la  $n - 1$ -densité canonique sur  $V \times V^*$  :

**Définition I.41.**

La  $(n - 1)$ -densité canonique  $\phi_c$  sur  $V \times V^*$  est définie par :

$$\phi_c(u_1 \wedge \dots \wedge u_{n-1}) = \sqrt{|\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_{n-1}(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1})|}$$

où  $v_i = d\pi_V(u_i)$  et  $\xi_j = d\pi_{V^*}(u_j)$ .

Cette densité s'annule dès que le sous-espace engendré par  $u_1 \wedge \dots \wedge u_{n-1}$  intersecte non transversalement les directions verticale et horizontale. C'est-à-dire aux plats et singularités de  $\partial\mathcal{C}$  ou  $\partial\mathcal{C}^*$ .

**Définition I.42.**

L'aire centro-affine  $\mathcal{F}$  sur les corps convexes contenant l'origine est définie par :

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \int_{cn\mathcal{C}} \phi_c$$

Par définition on a trivialement  $\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \mathcal{F}(\mathcal{C}^*)$ .

Remarquons que cette fonctionnelle est nulle sur l'ensemble des polytopes, qui est dense dans l'ensemble des convexes pour la topologie de Hausdorff. En revanche elle n'est pas nulle sur une sphère, par exemple. Donc elle n'est pas continue pour la topologie de Hausdorff !

Ainsi pour un ouvert convexe quelconque, en choisissant un point  $x \in \mathcal{C}$ , en le prenant pour origine on définit une aire centro-affine dépendant de  $x$ ,  $\mathcal{F}_x$  comme ci-dessus.

**4.e** — Considérons le cas particulier d'un convexe  $\mathcal{C}$  contenant l'origine dont le bord est  $C^2$  à courbure strictement positive partout (on parlera de convexe *Minkowski*. Autrement dit, le bord est la ligne de niveau associée à la valeur 1 d'une fonction  $F: V \rightarrow \mathbb{R}$  positive, convexe et positivement homogène et  $C^2$  sur  $V \setminus \{0\}$ . La condition sur la courbure consiste à dire que le hessien de  $L = \frac{1}{2}F^2$  est défini positif sur tout le bord. Ainsi la restriction de ce hessien à chaque tangent  $\partial\mathcal{C}$  définit une métrique riemannienne que nous qualifierons d'*intrinsèque*.

### Proposition I.43.

*L'aire centro-affine donne le volume riemannien intrinsèque du bord des convexes Minkowski.*

Cela dépend, bien entendu, du choix du point  $x \in \mathcal{C}$  que l'on a pris pour origine. On peut envisager aussi la métrique riemannienne intrinsèque comme la restriction au tangent en  $y \in \partial\mathcal{C}$  de la métrique euclidienne déterminée par l'unique ellipsoïde osculateur à  $\partial\mathcal{C}$  en  $y$  centré en  $x$ .

**4.f** — Nous sommes à présent en mesure d'énoncer notre résultat principal :

### Théorème I.44.

*Soit  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  une géométrie de Hilbert et  $x \in \mathcal{C}$ . On notera  $S(x, R)$  le volume des sphères asymptotiques de rayon  $R$  centrées en  $x$ . Si  $\mathcal{F}_x(\mathcal{C}) > 0$ , alors  $\text{Ent}(\mathcal{C}) \geq n - 1$ . Si de plus la dimension est deux ou le bord est au moins  $C^2$ , ou si le cycle conormal est lisse alors on a égalité et même plus précisément*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{S(x, R)}{\sinh^{n-1} R} = \mathcal{F}_x(\mathcal{C})$$

*le volume pouvant être pris à l'aide de Holmes-Thompson ou Hausdorff.*

Nous pensons qu'en réalité il y a toujours égalité dans la limite ci-dessus. Ceci impliquerait en particulier que l'entropie des convexes est uniformément majorée par  $n - 1$  en toute dimension. Cependant ce théorème provient d'une convergence presque partout d'une suite de fonctions, à laquelle nous n'avons pas encore réussi à appliquer le théorème de convergence dominé de Lebesgue ! (Il nous reste à montrer que l'analogue de la fonction qui domine en dimension 2 est intégrable en dimension plus grande)

Remarquons qu'une conséquence du théorème 1.3 de Y. Benoist dans [Ben04] en ce qui concerne les convexes divisible est la suivante

**Proposition I.45.**

Soit  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  un convexe divisible et  $x \in \mathcal{C}$ . Alors  $\mathcal{F}_x(\mathcal{C}) > 0$  si et seulement si  $\mathcal{C}$  est un ellipsoïde.

**4.g** — L'aire centro-affine tout comme les sphères asymptotiques sont des objets affines. Étant donné la nature projective des géométries de Hilbert un invariant projectif serait préférable dans la description du comportement asymptotique du volume des sphères.

Les méthodes précédentes appliqués directement aux sphères métriques font effectivement apparaître une seconde fonctionnelle  $\mathcal{FP}$ , que nous avons baptisée par analogie *aire centro-projective*, qui est invariante sous l'action du groupe des transformations projectives. Les résultats obtenus supra se transposent en remplaçant les sphères asymptotiques par les sphères métriques et l'aire centro-affine par l'aire centro-projective.

## Perspectives

Il reste encore beaucoup de travail pour comprendre l'entropie des géométries de Hilbert. Si effectivement, comme nous l'espérons, les fonctionnelles  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{FP}$  permettent d'identifier les espaces dont l'entropie est maximale, on peut se demander s'il existe une autre fonctionnelle donnant un équivalent précis lorsque l'entropie n'est pas maximale. Serait-ce la mesure de hausdorff  $\text{Ent}(\mathcal{C})$ -dimensionnelle de l'ensemble limite dans le cas d'un convexe divisible ?

On ne peut s'empêcher de faire le rapprochement avec la fonction de Margulis, notée ici  $a$ , sur le recouvrement universel d'une variété compacte  $M$  de courbure négative, donnant l'asymptotique du volume des boules, i.e.

$$\text{Vol}_g(B(x, r)) \sim a(x)e^{\text{Ent}MR}.$$

Plus précisément, est-il vrai que  $\mathcal{FP}_x(\mathcal{C})$  est indépendante de  $x$  et non nulle si et seulement si  $\mathcal{C}$  est un ellipsoïde ? Rappelons que pour la constante de Margulis une question encore ouverte en dimension  $n \geq 3$  est de savoir si elle est constante si et seulement si l'espace est localement symétrique.

Du point de vue de la théorie géométrique de la mesure, les propriétés de la fonctionnelle  $\mathcal{FP}$  ne sont pas encore très claires. Concernant les valuations semi-continues supérieurement pour la distance de Hausdorff, invariantes par le groupe  $SL(n)$  et contenant l'origine, un résultat de M. Ludwig affirme qu'à une constante multiplicative près, il n'en existe qu'une s'annulant sur les polygônes et c'est l'aire centro-affine. Existe-t-il un résultat similaire concernant l'aire centro-projective ? Lorsque le convexe est symétrique par rapport à l'origine, l'aire centro-affine et l'aire centro-projective coïncident. Dans un convexe donné, existe-t-il toujours un point où ces deux fonctionnelles coïncident ? Dans l'affirmative, ce point est-il connu ? On peut par exemple se demander s'il coïn-

cide avec le point de Santalo. Dans la négative, peut-on caractériser les convexes où un tel point existe ?

## Bibliographie

- [Ale39] **A. D. Alexandroff** – « Almost everywhere existence of the second differential of a convex function and some properties of convex surfaces connected with it », *Leningrad State Univ. Annals [Uchenye Zapiski] Math. Ser.* **6** (1939), p. 3–35.
- [ÁP05] **J. C. Álvarez Paiva** – « Symplectic geometry and Hilbert’s fourth problem », *J. Differential Geom.* **69** (2005), no. 2, p. 353–378.
- [APB06] **J. C. Álvarez Paiva** et **G. Berck** – « What is wrong with the Hausdorff measure in Finsler spaces », *Adv. Math.* **204** (2006), no. 2, p. 647–663.
- [ÁPD98] **J. C. Álvarez Paiva** et **C. E. Durán** – « An introduction to finsler geometry », lectures at Escuela Venezolana de Matemáticas, summer 1998.
- [ÁPF04] **J. C. Álvarez Paiva** et **E. Fernandes** – « What is a Crofton formula ? », *Math. Notae* **42** (2003/04), p. 95–108.
- [BBI01] **D. Burago**, **Y. Burago** et **S. Ivanov** – *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [Ben] **Y. Benoist** – « A survey on divisible convex sets », Written for the Morningside center conference in Beijing 2006.
- [Ben60] **J.-P. Benzécri** – « Sur les variétés localement affines et localement projectives », *Bull. Soc. Math. France* **88** (1960), p. 229–332.
- [Ben00] **Y. Benoist** – « Automorphismes des cônes convexes », *Invent. Math.* **141** (2000), no. 1, p. 149–193.
- [Ben01] ———, « Convexes divisibles », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **332** (2001), no. 5, p. 387–390.
- [Ben03a] ———, « Convexes divisibles. II », *Duke Math. J.* **120** (2003), no. 1, p. 97–120.
- [Ben03b] ———, « Convexes hyperboliques et fonctions quasisymétriques », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2003), no. 97, p. 181–237.
- [Ben04] ———, « Convexes divisibles. I », in *Algebraic groups and arithmetic*, Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2004, p. 339–374.
- [Ben05] ———, « Convexes divisibles. III », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **38** (2005), no. 5, p. 793–832.
- [Ben06a] ———, « Convexes divisibles. IV. Structure du bord en dimension 3 », *Invent. Math.* **164** (2006), no. 2, p. 249–278.
- [Ben06b] ———, « Convexes hyperpoliques et quasiisométries », *Geometriae Dedicata* (2006).
- [Ber04] **G. Berck** – « Minimalité des sous-variétés totalement géodésiques en géométrie finslerienne », arXiv :math/0409320v1, 2004.

- [BH99] **M. R. Bridson** et **A. Haefliger** – *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 319, Springer, 1999, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics.
- [BK53] **H. Busemann** et **P. J. Kelly** – *Projective geometry and projective metrics*, Academic Press Inc., New York, N. Y., 1953.
- [Bro81] **R. Brooks** – « The fundamental group and the spectrum of the Laplacian », *Comment. Math. Helv.* **56** (1981), no. 4, p. 581–598.
- [BS00] **M. Bonk** et **O. Schramm** – « Embeddings of Gromov hyperbolic spaces », *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), no. 2, p. 266–306.
- [Bus55] **H. Busemann** – *The geometry of geodesics*, Academic Press Inc., New York, N. Y., 1955.
- [Bus82] **P. Buser** – « A note on the isoperimetric constant », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **15** (1982), no. 2, p. 213–230.
- [Cao00] **J. Cao** – « Cheeger isoperimetric constants of Gromov-hyperbolic spaces with quasi-poles », *Commun. Contemp. Math.* **2** (2000), no. 4, p. 511–533.
- [Cha93] **I. Chavel** – *Riemannian geometry : a modern introduction*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 108, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [CV04] **B. Colbois** et **P. Verovic** – « Hilbert geometry for strictly convex domains », *Geom. Dedicata* **105** (2004), p. 29–42.
- [dIH93] **P. de la Harpe** – « On Hilbert’s metric for simplices », in *Geometric group theory, Vol. 1 (Sussex, 1991)*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, p. 97–119.
- [dIHGCS99] **P. de la Harpe**, **R. I. Grigorchuk** et **T. Chekerini-Sil’berstaĭn** – « Amenability and paradoxical decompositions for pseudogroups and discrete metric spaces », *Tr. Mat. Inst. Steklova* **224** (1999), no. Algebra. Topol. Differ. Uravn. i ikh Prilozh., p. 68–111.
- [FK05] **T. Foertsch** et **A. Karlsson** – « Hilbert metrics and Minkowski norms », *J. Geom.* **83** (2005), no. 1-2, p. 22–31.
- [GH86] **M. Gage** et **R. S. Hamilton** – « The heat equation shrinking convex plane curves », *J. Differential Geom.* **23** (1986), no. 1, p. 69–96.
- [Gro93] **M. Gromov** – « Asymptotic invariants of infinite groups », in *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, p. 1–295.
- [Hil71] **D. Hilbert** – *Les fondements de la géométrie, édition critique préparé par P. Rossier*, Dunod, 1971, (voir Appendice I).
- [HM81] **U. Haagerup** et **H. Munkholm** – « Simplices of maximal volume in hyperbolic  $n$ -space », *Acta Math.* **147** (1981), no. 1-2, p. 1–11.
- [Hör94] **L. Hörmander** – *Notions of convexity*, Progress in Mathematics, vol. 127, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.

- [Hui84] **G. Huisken** – « Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres », *J. Differential Geom.* **20** (1984), no. 1, p. 237–266.
- [Kan85] **M. Kanai** – « Rough isometries, and combinatorial approximations of geometries of noncompact Riemannian manifolds », *J. Math. Soc. Japan* **37** (1985), no. 3, p. 391–413.
- [Kan86] ———, « Analytic inequalities, and rough isometries between noncompact Riemannian manifolds », in *Curvature and topology of Riemannian manifolds (Katata, 1985)*, Lecture Notes in Math., vol. 1201, Springer, Berlin, 1986, p. 122–137.
- [Kap] **M. Kapovich** – « Convex projective Gromov-Thurston examples », ArXiv :math.DG/0604231.
- [KH96] **A. Katok** et **B. Hasselblat** – *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1996.
- [KN02] **A. Karlsson** et **G. A. Noskov** – « The Hilbert metric and Gromov hyperbolicity », *Enseign. Math. (2)* **48** (2002), no. 1-2, p. 73–89.
- [KS58] **P. Kelly** et **E. G. Straus** – « Curvature in Hilbert geometries », *Pacific J. Math.* **8** (1958), p. 119–125.
- [KS68] ———, « Curvature in Hilbert geometries. II », *Pacific J. Math.* **25** (1968), p. 549–552.
- [LP01] **U. Lang** et **C. Plaut** – « Bilipschitz embeddings of metric spaces into space forms », *Geom. Dedicata* **87** (2001), no. 1-3, p. 285–307.
- [Man79] **A. Manning** – « Topological entropy for geodesic flows », *Ann. of Math. (2)* **110** (1979), no. 3, p. 567–573.
- [Pis89] **G. Pisier** – *The volume of convex bodies and Banach space geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 94, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [Rie68] **B. Riemann** – « Oeuvres mathématiques de RIEMANN », ch. Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie, Albert Blanchard, 1968, Avec préface de M. HERMITE et un Discours de M. Félix KLEIN.
- [Sam88] **P. Samuel** – *Projective geometry*, Undergraduate texts in Mathematics, Springer, 1988, also available in french.
- [Sch06a] **R. Schneider** – « Crofton measures in polytopal Hilbert geometries », *Beiträge Algebra Geom.* **47** (2006), p. 479 – 488.
- [Sch06b] **R. Schneider** – « Crofton measures in projective Finsler spaces », in *Integral geometry and convexity*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006, p. 67–98.
- [She01] **Z. Shen** – *Lectures on Finsler Geometry*, World Scientific, 2001.
- [SM00] **É. Socié-Méthou** – « Comportement asymptotiques et rigidités en géométries de Hilbert », Thèse de doctorat, Université de Strasbourg, 2000, <http://www-irma.u-strasbg.fr/irma/publications/2000/00044.ps.gz>.

- [SM02] ———, « Caractérisation des ellipsoïdes par leurs groupes d'automorphismes », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **35** (2002), no. 4, p. 537–548.
- [SM04] ———, « Behaviour of distance functions in Hilbert-Finsler geometry », *Differential Geom. Appl.* **20** (2004), no. 1, p. 1–10.
- [Tho96] **A. Thompson** – *Minkowski geometry*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, vol. 63, Cambridge University Press, 1996.
- [Thu97] **W. P. Thurston** – *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, Princeton Mathematical Series, vol. 35, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997, Edited by Silvio Levy.





# II Sur le spectre macroscopique

---

Dans ce chapitre nous présenterons nos travaux relatifs à l'étude du comportement du spectre du laplacien des boules du revêtement universel d'une variété riemannienne lorsque le rayon des boules tend vers l'infini.

---

## 1 Introduction

Quelle est la meilleure métrique que l'on puisse mettre sur une variété donnée ? C'est ainsi que l'on pourrait résumer la motivation première de ce qui va suivre. Néanmoins il faut préciser la question, notamment ce que l'on entend par « meilleure », autrement dit quelle propriété de la métrique on cherche à *optimiser*.

Considérons par exemple les tores riemanniens. Burago et Ivanov [BI94] ont montré, en résolvant une conjecture attribuée à Hopf, que seuls certains d'entre eux, les tores plats, étaient sans points conjugués. On est donc en présence d'un problème sans unicité de solution, il n'existe pas « une » meilleure métrique mais plusieurs.

On peut aussi chercher à optimiser le spectre du laplacien. Notamment à maximiser sa première valeur propre non nulle (notée  $\lambda_1$ ) à volume fixé. Il n'est pas difficile de voir que parmi les tores plats, c'est le tore équilatéral qui est « le » meilleur. En réponse à une conjecture de M. Berger, N. Nadirashvili dans [Nad96] démontre en dimension 2 que ce même tore maximise le  $\lambda_1$  parmi *l'ensemble* des métriques à volume fixé.

Toutes ces optimisations ne sont pas toujours possible. Par exemple si l'on essaye d'optimiser la seconde valeur propre du laplacien sur une sphère, il semble qu'on ne puisse pas trouver de métrique optimale [Nad02]. On rencontre les mêmes problèmes avec certaines inégalités isosystoliques [Sab04].

Un autre point de vue est associé aux variétés riemanniennes compactes  $(X, g)$  admettant un revêtement universel non compact. L'exemple type étant

les surfaces de genre supérieure à 1. Il s'agit alors de relever la métrique sur le revêtement universel et de chercher à y optimiser des invariants associés aux boules de grand rayon. Le plus « simple » d'entre eux est le volume, auquel est associé *l'entropie volumique*, qui consiste à regarder la limite du logarithme du volume d'une boule divisé par son rayon, quand ce dernier tend vers l'infini et que l'on note  $\text{Ent}(X, g)$ . Un résultat de G. Besson, G. Courtois et S. Gallot, désormais célèbre, affirme que

**Théorème II.1** ([BCG95]).

*Soit  $X$  une variété compacte admettant une métrique  $g_0$  localement symétrique de courbure strictement négative, alors pour tout autre métrique  $g$  :*

$$\text{Ent}(X, g)^n \text{Vol}(X, g) \geq \text{Ent}(X, g_0)^n \text{Vol}(X, g_0)$$

*en cas d'égalité  $g$  est homothétique à  $g_0$ .*

Les tores ne faisant pas partie de cette catégorie, et ayant toujours une entropie volumique nulle, c'est un autre invariant lié au volume des boules que l'on y étudie plus volontier, *le volume asymptotique* que nous notons  $\text{Volas}$ . Dans ce cadre un résultat de rigidité semblable au précédent est dû à D. Burago et S. Ivanov

**Théorème II.2** ([BI95]).

*Soient  $(\mathbb{T}^n, g)$  un tore riemannien,  $\text{Vol}_g(B_g(\rho))$  le volume des boules géodésiques  $B_g(\rho)$  de rayon  $\rho$ , centrées en un point fixe, sur le revêtement universel pour la métrique relevée, alors*

- $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\text{Vol}_g(B_g(\rho))}{\rho^n} = \text{Volas}(g) \geq \omega_n$ ,
- *en cas d'égalité le tore est plat.*

Où  $\omega_n$  est le volume euclidien de la boule euclidienne unitaire.

Ces deux résultats se ressemblent : une inégalité avec rigidité dans le cas d'égalité. On peut se demander si d'autres variétés que celles impliquées dans les deux théorèmes cités n'admettraient pas des propriétés liées au volume des grandes boules similaires. On note une différence entre les deux théorèmes concernant la vitesse de croissance du volume des boules. Dans le premier cas, le volume croît exponentiellement vite en fonction du rayon, et dans le second cas la croissance est sous-exponentielle (polynômiale même). En réalité ce sont des propriétés des groupes fondamentaux des variétés impliquées qui sont mises en jeu ici. De notre point de vue, ces deux théorèmes se situent aux antipodes l'un de l'autre en fonctions du critère de croissance des boules. Entre les deux on croiserait d'abord l'ensemble des variétés dont le groupe fondamental est à croissance polynomiale et qui correspondent à des variétés qui, à un recouvrement fini près, sont à  $\pi_1$  nilpotents (voir ci-dessous). On continuera avec celles dont le  $\pi_1$  est résoluble puis moyennable. Enfin on terminera par les variétés dont le  $\pi_1$  n'est pas moyennable. Notre travail se situe dans le cadre des variétés dont le  $\pi_1$  est nilpotent.

Une propriété des tores est donc que, sur leur revêtement universel, la croissance du volume des boules en fonctions de leur rayon est polynomiale. C'est un résultat désormais classique de M. Gromov [Gro81] que les variétés partageant la même propriété sont celles dont le groupe fondamental admet un sous groupe nilpotent d'indice fini. Autrement dit, à un revêtement fini près, leur groupe fondamental est nilpotent. Il est donc naturel d'étudier le cas des variétés nilpotentes, c'est-à-dire celles dont le revêtement universel peut être vu comme un groupe de lie unipotent, et le groupe fondamental un sous-groupe de celui-ci, et de se demander si elles partagent des propriétés communes avec les tores, notamment en termes de volume asymptotique. Une partie de la réponse dans le cadre nilpotent est due à P. Pansu [Pan83] avec une généralisation récente à l'ensemble des groupes à croissance polynomiale due à E. Breuillard [Bre]. Celle-ci consiste à dire qu'en divisant par une puissance ad-hoc du rayon (la dimension homogène pour les nilvariétés) le volume d'une boule, il existe une limite de ce rapport quand le rayon tend vers l'infini.

La méthode de D. Burago et S. Ivanov ne pouvant se généraliser telle quelle, notamment parce que le volume asymptotique n'est plus uniformément minoré par une constante non nulle dans le cadre des nilvariétés (il faut ajouter une contrainte sur la longueur de la fibre quand on pense aux nilvariétés comme à des fibrés en cercle, sinon on peut faire tendre le volume asymptotique vers 0) et parce qu'elle s'appuie sur une convergence forte des distances périodiques sur  $\mathbb{R}^n$  [Bur92] (par ailleurs E. Breuillard montre dans [Bre], par un contre exemple, que ce phénomène est bien particulier au cas abélien), nous avons trouvé plus opportun durant notre thèse de nous focaliser sur le spectre du laplacien sur les boules de grand rayon, qui par l'intermédiaire de la formule asymptotique de Weyl redonne le volume. C'est ainsi que nous avons obtenu le résultat suivant concernant les tores (voir [Ver9] et [Ver8])

### **Théorème II.3.**

*Soient  $(\mathbb{T}^n, g)$  un tore de dimension  $n$ ,  $B_g(\rho)$  la boule géodésique de rayon  $\rho$  pour la métrique relevée sur son revêtement universel, centrée en un point fixé, et  $\lambda_1(B_g(\rho))$  la première valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet sur  $B_g(\rho)$  alors*

1.  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^2 \lambda_1(B_g(\rho)) = \lambda_\infty \leq \lambda_{e,n}$

2. *En cas d'égalité la métrique  $g$  est plate.*

*où  $\lambda_\infty$  est la première valeur propre d'un opérateur elliptique sur la boule unité de la norme stable et  $\lambda_{e,n}$  la première valeur propre du laplacien euclidien, sur la boule euclidienne.*

Notons qu'en réalité on obtient une convergence de tout le spectre re-normalisé comme ci-dessus vers celui d'un opérateur limite. C'est la raison pour laquelle nous appelons *spectre macroscopique* l'ensemble des limites. Par l'intermédiaire de l'inégalité de Faber-Krahn ce résultat redonne une inégalité avec

rigidité à la Burago-Ivanov,

#### **Théorème II.4.**

Soit  $(\mathbb{T}^n, g)$  un tore de dimension  $n$ ,  $B_g(\rho)$  les boules géodésiques de rayon  $\rho$  centrées en un point fixe, sur son revêtement universel muni de la métrique relevée et  $\text{Vol}_g(B_g(\rho))$  leur volume riemannien. alors,

- $\text{Vol}_g(g) \geq \frac{\text{Vol}_g(\mathbb{T}^n)}{\text{Vol}_{\text{Al}}(\mathbb{T}^n)} \omega_n$
  - en cas d'égalité le tore est plat.
- où  $\omega_n$  est le volume euclidien de la boule euclidienne unitaire.

Comme on peut le voir cette dernière inégalité diffère de celle de Burago et Ivanov. Dans [Ver9] nous avons même montré que pour une famille de métriques conformes aux métrique plates, elle est moins bonne, au sens où

$$J(g) = \frac{\text{Vol}_g(\mathbb{T}^n)}{\text{Vol}_{\text{Al}}(\mathbb{T}^n)} < 1.$$

L'étude de ce coefficient « parasite » nous a conduit vers les inégalités isosystoliques. En effet  $J(g)$  était au centre d'une tentative naturelle de transposer les démonstrations d'inégalité isosystolique de dimension 2 aux dimensions supérieures (voir la note de J. Lafontaine [Laf74]), qui s'appuient sur le fait que  $J(g) \geq 1$  en dimension 2. Plus précisément  $J(g)$  vaut 1 en dimension 2 et grâce à II.4 on obtient le résultat de Burago et Ivanov dans ce cadre, de manière *indépendante*. En dimension 2 ce même résultat avait déjà été démontré par I. Babenko [Bab90].

Quant aux nilvariétés, pendant notre thèse nous n'avons réussi qu'à traiter le cas des nilvariétés graduées munies d'une métrique sous-riemannienne pour lesquelles nous obtenions des résultats similaires, en terme de convergence, mais pas de rigidité. Dans la suite de ce texte nous allons présenter les résultats liés à cette problématique que nous avons obtenus depuis.

## 2 Le cas des nilvariétés

Après avoir rappelé ce que sont les nilvariétés, nous présenterons les résultats concernant le spectre macroscopique que nous y avons obtenus. Nous verrons en particulier qu'une famille particulière de métriques fait son apparition dans les cas d'égalité.

L'objet d'étude de cette section sera une variété riemannienne compacte  $(M^n, g)$  dont le revêtement universel est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe  $G$ . On suppose également que le groupe fondamentale est sans torsion.

2.α — Les résultats sont inspirés de la théorie de l'homogénéisation. Son cadre le plus général étant la  $\Gamma$ -convergence (voir [Mas93] pour un exposé de celle-ci). Le cadre le plus classique en est bien sûr  $\mathbb{R}^n$  muni d'un opérateur elliptique périodique, invariant par une action de  $\mathbb{Z}^n$  par translation. Plus précisément, soit

$$L = -\frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

est un opérateur différentiel uniformément elliptique sur  $\mathbb{R}^n$  dont on suppose que les coefficients  $a_{ij}$  sont  $C^\infty$  et périodique, c'est-à-dire que  $a_{ij}(x+k) = a_{ij}(x)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}^n$ . Après un changement d'échelle on obtient une famille d'opérateurs

$$0 < \epsilon \leq 1, \quad L_\epsilon = -\frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

À cette famille on peut associer un opérateur *homogénéisé* de la forme suivante

$$L_0 = -q_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

où les coefficients  $q_{ij}$  sont constants. À présent sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ , on peut considérer le problème de Dirichlet pour cette famille d'opérateurs, pour laquelle les valeurs propres et les fonctions propres sont notées :

$$\lambda_0^\epsilon \leq \lambda_1^\epsilon \leq \lambda_2^\epsilon \leq \dots \quad \text{et} \quad \phi_0^\epsilon, \phi_1^\epsilon, \phi_2^\epsilon, \dots$$

Nous avons alors le problème suivant :

**Problème.** Étudier la convergence de  $\lambda_i^\epsilon$  et  $\phi_i^\epsilon$  vers, respectivement,  $\lambda_i^0$  et  $\phi_i^0$ , quand  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Dans le cas de  $\mathbb{R}^n$ , ceci est le sujet du Chapitre III de [OSY92], du Chapitre 11 de [JKO94], et de [CD99].

L'opérateur  $L_\epsilon$  définit une distance riemannienne  $d_\epsilon$ . En conséquence on peut également étudier les relations entre  $d_\epsilon$  et  $d_0$ . Les articles [Dav93], [Nor94] et [Nor97] sont liés à ce problème en conjonction avec l'existence d'une borne sur le noyau de la chaleur (voir aussi [KS00] pour une approche probabiliste).

L'ouvrage de référence sur l'homogénéisation périodique est certainement le livre de A. Bensoussan, J.-L. Lions et G. Papanicolaou [BLP78] (les

premiers chapitres suffisent). On consultera également le livre de V.V. Jikov, S.M. Kozlov et O.A. Oleïnik [JKO94] pour une vision complémentaire et plus récente (voir également l'article de synthèse de V.V. Zhikov, S.M. Kozlov, O.A. Oleïnik et Kha T'en Ngoan [ZKON79])

2.β — Le présent travail est lié au problème sus-cité lorsque l'on remplace  $\mathbb{R}^n$  par un groupe de Lie nilpotent  $N$  et  $\mathbb{Z}^n$  par un réseau uniforme  $\Gamma$  de  $N$ . L'homogénéisation dans le cas où  $N$  est gradué a été étudiée dans [BBJR95]. Dans le cadre du groupe de Heisenberg, une adaptation des théorèmes de [BLP78] a été faite par M. Biroli, U. Mosco et N. A. Tchou dans [BMT96] et [BMT97]. Cependant dans leur travail ces auteurs se restreignent à des sous-laplaciens, pour lesquels les résultats de convergences posent un peu moins de problèmes. Enfin dans le cadre des groupes à croissance polynomiale il faut certainement mentionner le mémoire de G. Alexopoulos [Ale02], qui semble être ignoré par les précédents auteurs (certainement du fait que les auteurs viennent de « communautés » différentes) et que nous n'avons découvert que tardivement — après la rédaction de notre thèse. Dans son mémoire, G. Alexopoulos, étudie des estimés des noyaux de la chaleur associés à des sous-laplaciens en adaptant des méthodes d'homogénéisation.

Cependant notre travail est différent de ceux mentionnés ci-dessus pour deux raisons principales. La première est que contrairement aux précédents auteurs notre domaine d'étude varie en même temps que le paramètre (i.e. l'échelle d'observation si l'on veut). Ce qui nous oblige, d'un certain point de vue, à homogénéiser également l'espace sur lequel on travaille. La seconde est que nous étudions un opérateur elliptique, nommément le laplacien, dont la définition n'est pas aussi clairement liée à la structure algébrique que les sous-laplaciens, et dont l'opérateur homogénéisé est un sous-laplacien.

Enfin notre apport le plus important est certainement le lien qui est fait entre les aspects analytiques et géométriques du problème.

Continuons par un rappel sur les algèbres de Lie nilpotentes, qui nous sera utile pour énoncer nos résultats.

## 2.a Algèbres de Lie nilpotentes

Soit  $\mathfrak{u}$  une algèbre de Lie. On dit qu'elle est *nilpotente* lorsque la suite déterminée par

$$u^1 = \mathfrak{u}, \quad u^{i+1} = [u^i, \mathfrak{u}]$$

stationne en  $\{0\}$  à partir d'un certain rang, ce qui revient à dire qu'il existe un entier  $k$  tel que  $u^{k+1} = \{0\}$ . Si l'on note  $r$  le plus petit de ces entiers  $k$ , on dit que  $\mathfrak{u}$  est une algèbre nilpotente d'ordre ou de profondeur  $r$ .

Une famille d'algèbres nilpotentes se distingue des autres, les *algèbres graduées*, c'est-à-dire celles qui admettent une décomposition en somme directe

d'espaces vectoriels  $V_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , de la forme suivante :

$$\mathfrak{u} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r, \quad (\text{II-1})$$

vérifiant de plus

1.  $V_i$  est un supplémentaire de  $\mathfrak{u}^{i+1}$  dans  $\mathfrak{u}^i$  ;
2.  $[V_i, V_j] \subset V_{i+j}$ .

Une propriété que nous utilisons abondamment est qu'à une graduation on peut associer un groupe à un paramètre d'automorphismes  $(\tau_\rho)_{\rho \in \mathbb{R}^+}$  appelés *dilatations*, définies par

$$\tau_\rho(v) = \rho^i v \text{ si } v \in V_i.$$

En fait leur existence est équivalente à l'existence d'une graduation. Ces dilatations jouent le même rôle que les dilatations des espaces vectoriels réels usuels (qui sont bien sûr des algèbres de Lie nilpotentes graduées, d'ordre 1). On remarquera que les algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 sont toutes graduées. Il existe des algèbres de Lie nilpotentes non graduées dès la dimension 6. Cependant bien que toute algèbre de Lie nilpotente ne soit pas graduée on peut lui associer une algèbre de Lie nilpotente qui l'est de la façon suivante :

$$\mathfrak{u}_\infty = \sum_{i=1}^r \mathfrak{u}^i / \mathfrak{u}^{i+1} \quad (\text{II-2})$$

avec le crochet induit. On notera  $\tilde{\pi}: \mathfrak{u} \rightarrow \mathfrak{u}_\infty$  la projection induite et par  $\tilde{\tau}_\rho$  les dilatations sur  $\mathfrak{u}_\infty$ .

La *dimension homogène* de  $\mathfrak{u}$  est le nombre défini par

$$d_h = \sum_{i=1}^r i \dim(\mathfrak{u}^i / \mathfrak{u}^{i+1}). \quad (\text{II-3})$$

On comprend aisément qu'à un groupe de Lie nilpotent simplement connexe  $G$ , on associe de cette manière le groupe de Lie nilpotent simplement connexe gradué  $G_\infty$ , par la bijection qui existe entre algèbres de Lie et groupes de Lie simplement connexes.

## 2.b Les normes stable et d'Albanese

En résumé nous avons une variété  $(M^n, g)$  dont le revêtement universel est un groupe de Lie nilpotent  $G$ , muni de la métrique relevée notée  $\tilde{g}$ . Sur le groupe de Lie nilpotent  $G_\infty$  associé à  $G$  on obtient naturellement une distribution de sous-espaces tangents par transport par multiplication à gauche de  $V_1 = \mathfrak{u}^1 / \mathfrak{u}^2 \subset \mathfrak{u}_\infty$ , où l'on a bien sûr identifié l'espace tangent en l'identité avec l'algèbre de Lie. C'est cette distribution que nous nommerons *horizontale* et que nous noterons  $\mathcal{H}$ .

Remarquons que puisque l'algèbre de Lie  $\mathfrak{u}_\infty$  est engendrée par  $V_1$  et ses crochets, une base de  $V_1$  satisfait sur le groupe de Lie aux conditions dites de Chow ou Hörmander. Rappelons alors ce qu'est la *norme stable* :



**Définition II.5.**

Considérons la norme supérieure sur les 1-formes, induite par la métrique  $g$ . En passant au quotient elle détermine une norme  $\|\cdot\|_\infty^*$  sur la cohomologie  $H^1(M^n, \mathbb{R})$ . La norme que l'on obtient par dualité sur l'homologie  $H_1(M^n, \mathbb{R})$  est appelée la norme stable et on la notera  $\|\cdot\|_\infty$ .

Un théorème de K. Nomizu [Nom54] affirme que  $H_1(M^n, \mathbb{R}) \equiv V_1$ . On peut donc y transporter la norme stable et par multiplication à gauche sur la distribution horizontale  $\mathcal{H}$ . À présent le théorème de Rashevsky-Chow (voir théorème 2.4 page 15 de [BR96]) assure que l'on peut joindre deux points quelconques de  $G_\infty$  par une courbe tangente à la distribution horizontale, communément appelée courbe *admissible*. À une courbe admissible on peut donc associer sa longueur stable et pour deux points  $x$  et  $y$  quelconques leur distance stable,  $d_\infty(x, y)$ , en passant à l'infimum des longueurs des chemins admissibles les reliant.

Une telle distance est dite de type *Carnot-Carathéodory*. On remarquera que c'est une distance que l'on pourrait également nommer « sous-finslerienne ». La boule unité centrée en l'identité pour cette distance sera dite la boule stable et nous la noterons  $B_\infty(1)$ .

**Définition II.6.**

Considérons la norme  $L^2$  sur les 1-formes induite par la métrique  $g$ , normalisée par le volume de  $M$ . En la restreignant aux 1-formes harmoniques elle y détermine un produit scalaire, donc par le théorème de décomposition de Hodge sur la cohomologie  $H^1(M^n, \mathbb{R})$ , dont la norme sera notée  $\|\cdot\|_2^*$ . Par dualité elle donne également naissance à un produit scalaire sur l'homologie  $H_1(M^n, \mathbb{R})$ , dont nous notons la norme associée  $\|\cdot\|_2$ , et l'appelons norme d'Albanese.

Il ne nous reste plus qu'à associer à la norme d'Albanese une distance que nous noterons  $d_{al}$  par l'intermédiaire des chemins admissibles pour la distribution  $\mathcal{H}$  comme nous l'avons fait pour la norme stable. Nous noterons  $B_{al}(1)$  sa boule unité centrée en l'identité et l'appellerons boule stable. Le résultat suivant donné dans [Ver6] est alors immédiat

**Proposition II.7.**

*La boule d'Albanese est incluse dans la boule stable, i.e.,*

$$B_{al}(1) \subset B_\infty(1)$$

**2.c Le spectre macroscopique**

Comme nous venons de la voir, la norme d'Albanese est construite à l'aide d'un produit scalaire sur les 1-formes, qui provient de la métrique d'Al-

banese (remarquons qu'on ne lui a pas donné ce nom au hasard, en effet c'est la métrique que l'on met sur le tore d'Albanese  $H(M^n, \mathbb{R})/H(M^n, \mathbb{Z})$  associé à notre variété). À cette métrique sous-riemannienne on peut donc associer un sous-laplacien  $\Delta_\infty$  sur  $G_\infty$  (appelé laplacien de Kohn dans ce cadre).

Le fait que  $V_1$  et ses crochets engendrent l'algèbre de Lie implique que notre opérateur  $\Delta_\infty$  est *hypoelliptique* (voir l'article de J.M. Bony [Bon69] pour les détails).

### Définition II.8.

On appelle spectre macroscopique de  $(M^n, g)$  le spectre de  $\Delta_\infty$  agissant sur les fonctions définies sur la boule stable  $B_\infty(1)$ .

Nous ne précisons pas les conditions aux bords dans cet énoncé, quelles qu'elles soient, nous nommerons spectre macroscopique le spectre de  $\Delta_\infty$ .

Les résultats suivant s'appuient sur une adaptation de la méthode des fonctions oscillantes de Tartar (voir chapitre 8 de [CD99] pour la théorie classique) couplée à une convergence à la Mosco (voir [Mos94] pour la méthode dans  $\mathbb{R}^n$  et également [CD99]) elle même adaptée à notre cadre — pour un cadre encore plus général on se reportera aux travaux de [KS].

Pour l'analyste on doit mettre en avant que  $\Delta_\infty$  est bien sûr l'homogénéiser du laplacien dans notre cadre. Pour le déterminer on doit passer par des fonctions correctrices dites de première espèce,  $\chi_i$ . D'un point de vue géométrique elles sont là pour corriger le manque d'harmonicité du système de coordonnées choisi sur un domaine fondamental, i.e. si  $x_i$  est une coordonnée alors  $\Delta(x_i - \chi_i) = 0$  sur un domaine fondamental. En différenciant les coordonnées corrigées, i.e.  $\eta_i = x_i - \chi_i$ , on obtient alors un système de formes linéaires harmoniques. Les coefficients de  $\Delta_\infty$  sont les normes  $L^2$  de ces formes (pour les détails techniques voir notre article [Ver6]).

Le théorème qui justifie notre dénomination est le suivant (théorème 4 dans [Ver6])

### Théorème II.9.

*Soit  $(M^n, g)$  une nilvariété dont le recouvrement universel est  $\tilde{M}$  et  $x \in \tilde{M}$ . Notons  $B_g(x, \rho)$  la boule centrée en  $x$  de rayon  $\rho$  sur  $\tilde{M}$  et  $\lambda_i(\rho)$  la  $i^{\text{me}}$  valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet sur  $B_g(x, \rho)$ . Notons  $\lambda_i^\infty$  la  $i^{\text{me}}$  valeur propre du spectre macroscopique de  $(M^n, g)$  pour le problème de Dirichlet. On a les convergences suivantes,*

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^2 \lambda_i(\rho) = \lambda_i^\infty.$$

De l'inclusion II.7 de la boule stable dans la boule d'Albanese et du principe du maximum existant pour les opérateur hypoelliptique [Bon69], on

déduit du théorème précédent le résultat de rigidité suivant (theorem 2 dans [Ver6]).

### **Théorème II.10.**

Soit  $(M^n, g)$  une nilvariété dont le recouvrement universel est  $\tilde{M}$  et  $x \in \tilde{M}$ . Notons  $B_g(x, \rho)$  la boule centrée en  $x$  de rayon  $\rho$  sur  $\tilde{M}$  et  $\lambda_1(\rho)$  la 1<sup>ère</sup> valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet sur  $B_g(x, \rho)$ . Notons  $\lambda_1^\infty$  la 1<sup>ère</sup> valeur propre du spectre macroscopique de  $(M^n, g)$  pour le problème de Dirichlet.

On a

1.  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^2 \lambda_1(\rho) = \lambda_1^\infty \leq \lambda_1^{al}$  ;
2. En cas d'égalité la norme stable et la norme d'Albanese coïncident, en particulier toutes les 1-formes harmoniques sont de longueurs constantes.

où  $\lambda_1^{al}$  est la première valeur propre de  $\Delta_\infty$  sur la boule d'Albanese.

On peut légitimement se demander ce que l'on gagne en introduisant  $\lambda_1^{al}$ , outre la rigidité bien sûr. Le fait est, que dans le cas des tores  $\lambda_1^{al}$  est la première valeur propre du laplacien euclidien sur la boule euclidienne et ne dépend donc que de la dimension. De même pour le groupe de Heisenberg de dimension trois,  $\lambda_1^{al}$  ne dépend pas de la métrique initiale. Enfin pour les groupes de Heisenberg de dimension supérieure,  $\lambda_1^{al}$  est d'un certain point de vue une fonction définie sur une famille compacte de métriques, on peut donc s'attendre à ce qu'elle soit majorée uniformément sur celle-ci.

## **2.d Quid est du volume asymptotique ?**

En application de l'inclusion II.7 et du résultat de rigidité précédent on a également l'énoncé suivant (théorème 1 dans [Ver6]).

### **Théorème II.11.**

Soit  $(M^n, g)$  une nilvariété et  $G_\infty$  le groupe limite à l'infini associé au revêtement universel de  $M^n$ . Le volume asymptotique de  $M^n$  vérifie

1.  $\text{Volas}(g) \geq \text{Vol}_g(M^n) \frac{\mu(B_{al}(1))}{\mu(D_M)}$  ;

2. en cas d'égalité les normes stable et d'Albanese coïncident.

où,  $\mu$  est une mesure de Haar sur  $G_\infty$  et  $D_M$  la projection canonique d'un domaine fondamental du recouvrement universel de  $M^n$ , sur  $G_\infty$ .

Étant donné que cette inégalité n'est déjà pas optimale pour les tores, nous pensons qu'il en est de même dans ce cadre. Comme nous l'avons déjà mentionné, le volume asymptotique pouvant converger vers 0 lorsque l'on fait

varier la métrique, une bonne inégalité devrait faire intervenir une normalisation supplémentaire.

Cependant, elle a pour mérite de mettre en évidence les métriques riemanniennes sur lesquelles la norme stable et la métrique d'Albanese sont égales et donc pour lesquelles toutes les 1-formes harmoniques sont de longueur constante. Nous allons y revenir plus largement dans la section suivante.

## Conclusion et perspectives

Nous avons donc obtenu un résultat de rigidité du spectre macroscopique des nilvariétés. En particulier, nous avons mis en valeur le rôle important joué par les métriques dont toutes les 1-formes harmoniques sont de longueur constante. Ce fût une surprise pour l'auteur qui pensait que le spectre caractériserait les métriques invariantes à gauche. En fait, on obtient (voir section suivante) une famille plus large. Cependant l'inégalité sur le volume asymptotique n'étant pas toujours optimale on peut se demander s'il existe une inégalité avec une normalisation faisant intervenir la taille des fibres, lorsque l'on regarde la nilvariété comme fibré au dessus d'un tore (celui correspondant à  $V_1$ ). Il est alors possible qu'une telle inégalité caractérise les métriques invariantes. C'est une piste de recherche sur laquelle nous travaillons.

En ce qui concerne le spectre macroscopique il reste également du travail à faire. Comme nous l'avons remarqué pour les groupes de Heisenberg la fonction  $\lambda_1^{al}$  est une fonctionnelle définie sur une famille compacte de métrique. Si elle était continue on en déduirait tout de suite qu'elle est uniformément majorée. À ce jour nous ne savons pas répondre à la question, nous croyons cependant que pour un groupe de Lie donné  $\lambda_1^{al}$  est majoré uniformément. Quelles sont alors les caractéristiques supplémentaires des métriques atteignant ce maximum ? Il ne faut pas s'attendre à ce que celui-ci soit atteint uniquement par les métriques invariantes, car ce n'est déjà pas le cas pour le groupe de Heisenberg de dimension 3.

Remarquons que ce qui permet l'utilisation de la théorie de l'homogénéisation est d'une part, le fait que les groupes étudiés sont moyennables, et d'autre part, que dans notre cadre les boules géodésiques forment une suite de Følner. Sur ce dernier fait ajoutons que même si pour les groupes moyennables généraux les boules ne forment pas une suite de Følner, elles n'en sont pas si loin ; les travaux de R. Tessera [Tes06] renforcent notre conviction que nos résultats de convergence devraient sans doute être vrais pour des variétés dont le groupe fondamental est moyennable. Un résultat d'homogénéisation dans les groupes de Lie moyennables serait un pas en avant vers la vérification de cette affirmation. Quoi qu'il en soit, il nous semble qu'un premier pas pour justifier nos dires serait une généralisation au cas des variétés dont le groupe fondamental est nilpotent, en commençant par les variétés dont le revêtement universel est un groupe de Lie à croissance polynomiale.

Enfin, nous pensons que le comportement du spectre du laplacien sur les boules géodésiques en fonction du rayon est beaucoup plus général. Nous pensons en effet que quelle que soit la variété celui-ci décroît à une vitesse proportionnelle au carré du rayon vers le bas du spectre du revêtement universel. Par exemple, en associant des travaux de Cheng [Che75] et Savo-Guerini [GS04] on observe que c'est le cas sur le revêtement d'une variété hyperbolique. Il n'est cependant pas clair que dans ce cadre plus général on ait un développement limité comme celui que nous avons obtenu pour les nilvariétés, en fait nous avons même tendance à penser le contraire : nous pensons que le terme suivant peut admettre plusieurs valeurs d'adhérence.

### 3 Longueurs des formes harmoniques

Cette section concerne les variétés admettant une métrique pour laquelle toutes les 1-formes harmoniques sont de longueur constante. Dans un premier temps nous verrons qu'elles n'apparaissent pas uniquement dans le cadre du spectre macroscopique pour ensuite décrire ce que nous en avons appris.

Lors de l'étude du spectre macroscopique nous avons vu que la longueur des formes harmoniques avait son importance. Ces dernières années ces mêmes longueurs semblent avoir joué un rôle particulier dans différents problèmes géométriques. Ainsi en dimension 4, des travaux récents de Lebrun [Leb02] montrent une forte interaction entre la longueur des 2-formes harmoniques « auto-duales » d'une variété et la non-nullité des invariants de Seiberg-Witten, en particulier l'existence de structures symplectiques.

**3.a** — Nous avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre les liens encore mal définis entre les inégalités impliquées dans le problème du spectre macroscopique et les *Inégalités isosystoliques*. Notamment les démonstrations existantes en dimension 2 d'inégalité optimale, telles que celle de Loewner pour le tore, P.M. Pu [Pu52] pour le plan projectif ou C. Bavard [Bav86] pour la bouteille de Klein s'appuient indirectement sur le fait que la constante que nous avons qualifiée de « parasite » dans notre théorème II.4 est égale à 1 en dimension 2, et nous avons mentionné que J. Lafontaine [Laf74] avait enlevé tout espoir de « copier » la preuve en dimension 2 pour obtenir une inégalité sur les tores de dimension supérieure, par exemple — il démontre que cette fonction n'atteint pas un maximum en 1 lorsque les métriques varient.

Un autre lien provient des inégalités isosystoliques *stables* étudiées entre autres par V. Bangert et M. Katz [BK03] (voir aussi les références de cet article). Rappelons que ces inégalités donnent des bornes inférieures du volume des variétés compactes orientables en fonction de certaines longueurs associées aux « petites » géodésiques fermées (systoles). Plus précisément dans [BK03] il est démontré que pour toute variété compacte orientable  $(X^{n+1}, g)$  dont le premier nombre de betti  $b_1(X)$  est non nul, en notant  $\text{stsys}_1(g)$  la 1-systole stable de la métrique  $g$ ,  $\text{sys}_n(g)$  l'infimum du  $n$ -volume sur l'ensemble des hypersurfaces non séparantes dans  $X^{n+1}$  et  $\gamma'_{b_1(X)}$  la constante de Bergé-Martinet, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\text{stsys}_1(g)\text{sys}_n(g) \leq \gamma'_{b_1(X)} \text{vol}_g(X) \quad (\text{II-4})$$

La similitude dont nous parlions provient du fait que le cas d'égalité est atteint par des variétés dont toutes les 1-formes harmoniques sont de longueur constante.

**3.b** — Un autre cadre dans lequel la longueur des formes harmoniques apparaît naturellement est celui des *variétés géométriquement formelles*. Celles-ci sont des variétés riemanniennes fermées admettant une métrique pour laquelle

l'espace des formes harmoniques est une sous-algèbre de l'algèbre des formes différentielles, i.e., le produit extérieur de deux formes harmoniques est encore harmonique. Si la variété est orientable, on en déduit aisément que dans ce cas toutes les formes harmoniques sont de norme constante (voir [Kot01]). En particulier si le premier nombre de Betti est égal à la dimension (qui est en fait un majorant de celui-ci) la variété est un tore plat — Cela est également vrai si un autre nombre de Betti est maximal, à condition que la dimension soit un nombre premier (par exemple). D. Kotschik dans [Kot01] a également remarqué qu'une variété orientable géométriquement formelle ne pouvait avoir son premier nombre de Betti égal à  $n - 1$  si sa dimension est  $n$ . En effet, en faisant le produit de ces  $n - 1$  formes on obtiendrait une  $n - 1$ -forme harmonique dont l'image par l'opérateur  $*$  de Hodge serait une  $n$ -ème 1-forme différente des autres.

Cependant des variétés riemanniennes de dimension  $n$  ayant toutes leurs 1-formes de longueur constante et premier nombre de Betti égal à  $n - 1$  existent ; le groupe de Heisenberg muni d'une métrique invariante à gauche en est un exemple. Le résultat principal de [Ver7] en est justement une sorte de réciproque

### **Théorème II.12.**

*Les variétés riemanniennes orientées  $(M^{n+1}, g)$  dont le premier nombre de betti vaut  $b_1(M) = n$  et dont toutes les 1-formes harmoniques sont de longueur constante sont en bijection avec les triplets  $(h, \omega, c)$  où*

1.  *$h$  est une métrique plate sur un tore  $\mathbb{T}^n$  de dimension  $n$  ;*
2.  *$c$  est une constante strictement positive ;*
3.  *$\omega$  est une 2-forme représentant une classe entière non nulle dans le groupe de cohomologie de de Rham  $H_{DR}^2(\mathbb{T})$ .*

Les métriques que l'on obtient de la sorte ont une description géométrique simple : étant donné un triplet  $(h, \omega, c)$  du théorème II.12 on utilise la théorie de Chern-Weil pour obtenir un fibré principal en cercle

$$\mathbb{S}^1 \hookrightarrow N^{n+1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}$$

muni d'une forme de connection principale  $\theta$  et dont la 2-forme de courbure est  $\Omega = 2\pi\omega$ . Le théorème II.12 dit alors que  $(M, g)$  est isométrique à une variété  $(N, g_\theta)$ , où la métrique de type-fibré  $g_\theta$  est donnée par

$$g_\theta = \pi^*h + c^2\theta \otimes \theta.$$

Nous nommerons ces métriques *pseudo-invariantes*.

Remarquons que la variété  $N$  est en fait une nilvariété de rang 2, dont le centre est de dimension 1. De plus, lorsque la variété  $M$  est fixée, l'espace des métriques vérifiant les hypothèses du théorème II.12 est de dimension infinie.

En appliquant le théorème II.12 à l'inégalité isosystolique stable (II-4) on obtient le corollaire suivant

**Corollaire II.12.a**

Soit  $(X^n, g)$  une variété riemannienne compacte, orientée de dimension  $n$  dont le premier nombre de Betti vaut  $b_1 = n - 1$ . Alors il existe une constante  $c(n)$  telle que

$$\text{stsys}_1(g)\text{sys}_{n-1}(g) \leq c(n)\text{vol}_g(X).$$

Le cas d'égalité est atteint si et seulement si  $X$  est une nilvariété de rang 2 et il existe un réseau critique dual  $L$  dans  $\mathbb{R}^{n-1}$  et une submersion riemannienne de  $X$  dans  $\mathbb{R}^{n-1}/L$  à fibres minimales.

Par exemple en dimension 3, le cas d'égalité n'est atteint que par le groupe de Heisenberg admettant une submersion riemannienne sur le tore équilatéral.

**3.c** — L'application qui nous intéresse le plus est celle qui concerne le spectre macroscopique. On a vu qu'il vérifiait une inégalité (voir théorème II.10) dont le cas d'égalité est atteint par les métriques dont toutes les 1-formes harmoniques sont de longueur constante, ainsi le théorème II.12 induit le corollaire suivant dans ce cadre :

**Corollaire II.12.b**

Soit  $(M^n, g)$  une nilvariété riemannienne dont le premier nombre de Betti vaut  $b_1 = n - 1$ . Rappelons que l'on a l'inégalité suivante pour la première valeur propre du spectre macroscopique

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^2 \lambda_1(B_g(\rho)) = \lambda_1^\infty(g) \leq \lambda_1^{al}(g).$$

L'égalité ayant lieu si et seulement si  $M^n$  est une nilvariété de rang 2 dont le centre est de dimension 1 et  $g$  est pseudo-invariante.

Ceci implique en particulier que sur les groupes de Heisenberg il existe des métriques non invariantes à gauche pour lesquels l'égalité est atteinte !

**3.d** — Dans l'article [Ver7], nous étudions également sous quelles hypothèses supplémentaires, en termes de produit de formes harmoniques — inspiré par le cadre des variétés géométriquement formelles — on peut caractériser les métriques invariantes à gauche parmi les métriques pseudo-invariantes lorsque  $b_1 = n - 1$  et la dimension est  $n$ . On obtient par exemple le théorème suivant,

**Théorème II.13.**

Soit  $(N^3, g)$  une variété connexe compacte orientable telle que toute 1-forme harmonique est de longueur constante,  $b_1(N^3) = 2$  et telle que le produit extérieur de deux 1-formes harmoniques est une forme propre du laplacien. Alors  $(N^3, g)$  est un quotient compact du groupe de Heisenberg de dimension 3 et  $g$  est une métrique invariante à gauche.



## Conclusion et perspectives

Nos résultats sont aussi à comparer à ceux de E. Aubry, B. Colbois, P. Ghanaat et E.A. Ruh [ACGR], où il est montré qu'une variété  $M$  orientée de dimension  $n$  ayant  $n - 1$  petites (en comparaison avec le diamètre) valeurs propres (pour le laplacien agissant sur les 1-formes) est difféomorphe à une nil-variété ayant une métrique presque invariante à gauche. Cependant dans leur article les auteurs utilisent de fortes hypothèses sur la courbure. Dans notre travail, au lieu de contrôler la courbure, nous contrôlons la longueur des formes harmoniques. Nous aimerions insister sur le fait que ceci semble être une hypothèse de courbure masquée.

En utilisant nos méthodes, la rigidité obtenue dans le cas où le nombre de betti est maximal, ou 1 de moins que la dimension ne s'étend pas aux nombres de betti plus petit, comme nous l'avons montré dans [Ver7]. Cependant, une meilleure compréhension des cas d'égalités de nos résultat sur le spectre macroscopique, et des inégalités isosystoliques passe par une classification des variétés dont toutes les 1-formes harmoniques sont de longueur constante. Remarquons que les inégalités isosystoliques sont plus rigides que le spectre macroscopique, puisqu'elles précisent la structure du tore d'Albanese (le réseau est critique!).

L'hypothèse de formalité géométrique, que nous n'avons finalement pas abordée, rigidifie quant à elle l'ensemble des formes harmoniques. On peut se demander si cela n'implique pas l'existence d'une structure algébrique, telle une structure de groupe de Lie, comme dans le cadre présent. On pourrait également tenter de relâcher les hypothèses en demandant que le produit de deux formes harmoniques soit une forme propre de laplacien, une sorte de *formalité spectrale* en somme. La question serait alors de déterminer ces variétés.

## Bibliographie

- [ACGR] **E. Aubry, B. Colbois, P. Ghanaat et E. Ruh** – « Curvature, Harnack's Inequality, and a Spectral Characterization of Nilmanifolds », to appear in *Ann. of Global Analysis and Geometry*.
- [Ale02] **G. K. Alexopoulos** – *Sub-laplacians with drift on lie groups of polynomial volume growth*, vol. 155, *Memoirs of the AMS*, no. 739, AMS, January 2002.
- [Bab90] **I. K. Babenko** – « Volume rigidity of two-dimensional manifolds », *Mat. Zametki* **48** (1990), no. 1, p. 10–14, 158.
- [Bav86] **C. Bavard** – « Inégalité isosystolique pour la bouteille de Klein », *Math. Ann.* **274** (1986), no. 3, p. 439–441.
- [BBJR95] **C. J. K. Batty, O. Bratteli, P. E. T. Jorgensen et D. W. Robinson** – « Asymptotics of periodic subelliptic operators », *J. Geom. Anal.* **5** (1995), no. 4, p. 427–443.
- [BCG95] **G. Besson, G. Courtois et S. Gallot** – « Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative », *Geom. Funct. Anal.* **5** (1995), no. 5, p. 731–799.
- [BI94] **D. Burago et S. Ivanov** – « Riemannian tori without conjugate points are flat », *Geom. Funct. Anal.* **4** (1994), no. 3, p. 259–269.
- [BI95] ———, « On asymptotic volume of tori », *Geom. Funct. Anal.* **5** (1995), no. 5, p. 800–808.
- [BK03] **V. Bangert et M. Katz** – « Riemannian Manifolds with Harmonic one-forms of constant norm », available at <http://www.math.biu.ac.il/~katzmik/publications.html>, preprint 2003.
- [BLP78] **A. Bensoussan, J.-L. Lions et G. Papanicolaou** – *Asymptotic analysis for periodic structures*, *Studies in mathematics and its applications*, North Holland, 1978.
- [BMT96] **M. Biroli, U. Mosco et N. A. Tchou** – « Homogenization for degenerate operators with periodical coefficients with respect to the heisenberg group », *C. R. Acad. Sci. Paris t. 322, Série I* (1996), p. 439–444.
- [BMT97] ———, « Homogenization by the heisenberg group », *Advances in Mathematics* **7** (1997), p. 809–837.
- [Bon69] **J.-M. Bony** – « Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **19** (1969), no. fasc. 1, p. 277–304 xii.
- [BR96] **A. Bellaïche et J.-J. Risler** (éds.) – *Sub-riemannian geometry*, *Progress in Mathematics*, vol. 144, Birkhäuser, 1996.
- [Bre] **E. Breuillard** – « Geometry of locally compact groups of polynomial growth and shape of large balls », arXiv :0704.0095v1.

- [Bur92] **D. Y. Burago** – « Periodic metrics », in *Representation theory and dynamical systems*, Adv. Soviet Math., vol. 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, p. 205–210.
- [CD99] **D. Cioranescu** et **P. Donato** – *An introduction to homogenization*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, no. 17, Oxford University Press, 1999.
- [Che75] **S. Y. Cheng** – « Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications », *Math. Z.* **143** (1975), no. 3, p. 289–297.
- [Dav93] **E. Davies** – « Heat kernels in one dimension », *Quart. J. Math. Ser. (2)* **44** (1993), no. 175, p. 283–299.
- [Gro81] **M. Gromov** – « Groups of polynomial growth and expanding maps », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1981), no. 53, p. 53–73.
- [GS04] **P. Guerini** et **A. Savo** – « Eigenvalue and gap estimates for the Laplacian acting on  $p$ -forms », *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2004), no. 1, p. 319–344 (electronic).
- [JKO94] **V. Jikov**, **S. Kozlov** et **O. Oleïnik** – *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [Kot01] **D. Kotschick** – « On products of harmonic forms », *Duke Math. J.* **107** (2001), no. 3, p. 521–531.
- [KS] **K. Kuwae** et **T. Shioya** – « Variational convergence over metric spaces », arXiv :math.DG/0505430.
- [KS00] **M. Kotani** et **T. Sunada** – « Albanese maps and off diagonal long time asymptotics for the heat kernel », *Commun. Math. Phys.* **209** (2000), p. 633–670.
- [Laf74] **J. Lafontaine** – « Sur le volume de la variété de Jacobi d’une variété riemannienne », *C. R. Acad. Sc. Paris* **278** (1974), p. 1519–1522.
- [Leb02] **C. Lebrun** – « Hyperbolic Manifolds, Harmonic Forms, and Seiberg-Witten Invariants », *Geometriae Dedicata* **91** (2002), p. 137–154.
- [Mas93] **D. Maso** – *An introduction to  $\Gamma$ -convergence.*, Birkhäuser, 1993.
- [Mos94] **U. Mosco** – « Composite media and asymptotic dirichlet forms », *J. Funct. Anal.* **123** (1994), no. 2, p. 368–421.
- [Nad96] **N. Nadirashvili** – « Berger’s isoperimetric problem and minimal immersions of surfaces », *Geom. Funct. Anal.* **6** (1996), no. 5, p. 877–897.
- [Nad02] ———, « Isoperimetric inequality for the second eigenvalue of a sphere », *J. Differential Geom.* **61** (2002), no. 2, p. 335–340.
- [Nom54] **K. Nomizu** – « On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent lie groups », *Annals of Math.* **59** (1954), no. 3, p. 531–538.
- [Nor94] **J. Norris** – « Heat kernel bounds and homogenization of elliptic operators », *Bull. London Math. Soc* **26** (1994), no. 1, p. 75–87.
- [Nor97] ———, « Long-time behaviour of heat flow : global estimates and exact asymptotics », *Arch. Rational Mech. Anal.* **140** (1997), no. 2, p. 161–195.

- [OSY92] **O. Oleřnik, A. Shamaev et G. Yosifian** – *Mathematical problems in elasticity and homogenization*, Studies in Mathematics and its Application, no. 26, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1992.
- [Pan83] **P. Pansu** – « Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétés », *Ergod. Th & Dynam. Sys.* **3** (1983), p. 415–445.
- [Pu52] **P. M. Pu** – « Some inequalities in certain nonorientable Riemannian manifolds », *Pacific J. Math.* **2** (1952), p. 55–71.
- [Sab04] **S. Sabourau** – « Systoles des surfaces plates singulières de genre deux », *Math. Z.* **247** (2004), no. 4, p. 693–709.
- [Tes06] **R. Tessera** – « Asymptotic isoperimetry on groups and uniform embeddings into banach spaces », arXiv :math/0603138v3, 2006.
- [ZKON79] **V. Zhikov, S. Kozlov, O. Oleřnik et K. T. Ngoan** – « Averaging and g-convergence of differential operators », *Russian Math. Surveys* **34** (1979), no. 5, p. 69–147.

## Publications

---

- [Ver1] **C. Vernicos.** « Spectral radius and amenability in Hilbert Geometries ». prépublication, 2007.
- [Ver2] B. Colbois et **C. Vernicos.** « Les géométries de Hilbert sont à géométrie locale bornée ». *Annales de l'Institut Fourier*, 57(4) :1359–1375, 2007.
- [Ver3] B. Colbois et **C. Vernicos.** « Bas du spectre et delta-hyperbolicité en géométrie de Hilbert ». *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 134(3) :357–381, 2006.
- [Ver4] B. Colbois, **C. Vernicos**, et P. Verovic. « Area of Ideal Triangles and Gromov Hyperbolicity in Hilbert Geometries ». *Illinois Journal of Mathematics*, à paraître.
- [Ver5] B. Colbois, **C. Vernicos**, et P. Verovic. « L'aire des triangles idéaux en géométrie de Hilbert ». *Enseign. Math. (2)*, 50(3-4) :203–237, 2004.
- [Ver6] **C. Vernicos.** « The macroscopic spectrum of nilmanifolds with an emphasis on the heisenberg groups ». *Commentarii Mathematici Helvetici*, 80(2) :293–315, 2005.
- [Ver7] P-A. Nagy et **C. Vernicos.** « The length of harmonic forms on a compact Riemannian manifold ». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(6) :2501–2513 (electronic), 2004.
- [Ver8] **C. Vernicos.** « The macroscopic sound of tori ». *Pacific J. Math.*, 213(1) :121–156, 2004
- [Ver9] **C. Vernicos.** « Spectres asymptotiques des nilvariétés graduées ». *Thèse de Doctorat*, Université de Grenoble, 2001.

## Articles d'exposition

---

- [Ver10] **C. Vernicos.** Introduction aux géométries de Hilbert. Dans *Actes de Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Vol. 23. Année 2004–2005*, volume 23 de *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, pages 145–168. Univ. Grenoble I, 2005.
- [Ver11] **C. Vernicos.** Formes harmoniques de longueur constante sur les variétés. Dans *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Vol. 21. Année 2002–2003*, volume 21 de *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, pages 117–124. Univ. Grenoble I, 2003.
- [Ver12] **C. Vernicos.** Spectre asymptotique du revêtement universel des tores. Dans *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, Vol. 19, Année 2000–2001*, volume 19 de *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, pages 67–75. Univ. Grenoble I, 2001.

- [Ver13] **C. Vernicos**. Volume et profil isopérimétrique asymptotiques des tores. Dans *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, Vol. 18, Année 1999–2000*, volume 18 de *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, pages 43–47. Univ. Grenoble I, 2000.
- [Ver14] **C. Vernicos**. Inégalité isopérimétrique en dimension 3 d’après B. Kleiner. Dans *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, Vol. 18, Année 1999–2000*, volume 18 de *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, pages 59–64. Univ. Grenoble I, 2000.

## Travaux en cours

---

- [prep1] **C. Vernicos**. «Optimal transport in Finsler spaces». En préparation 2007.
- [prep2] G. Berck A. Bernig et **C. Vernicos** . «Volume Entropy of Hilbert Geometries». En préparation 2007.
- [prep3] **C. Vernicos** . «Volume of simplicies, simplicial volume and hyperbolicity in Hilbert geometries». En préparation 2007.
- [prep4] B. Colbois , **C. Vernicos** et P. Verovic . «Hilbert Geometry for Convex Polygonal Domains». En préparation.