



**HAL**  
open science

# Modèles biomécaniques pour la simulation interactive de l'accouchement

Mathieu Bailet

► **To cite this version:**

Mathieu Bailet. Modèles biomécaniques pour la simulation interactive de l'accouchement. Informatique [cs]. Université Joseph Fourier, 2014. Français. NNT: . tel-01158380v1

**HAL Id: tel-01158380**

**<https://hal.science/tel-01158380v1>**

Submitted on 1 Jun 2015 (v1), last revised 26 Jun 2017 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques et Informatique**

Arrêté ministériel : du 7 août 2006

Présentée par

**Mathieu BAILET**

Thèse dirigée par **Emmanuel PROMAYON**  
et codirigée par **Florence ZARA**

préparée au sein du **laboratoire Techniques de l'Ingénierie Médicale et de la Complexité - Informatique, Mathématiques et Applications de Grenoble (TIMC-IMAG)** et du **Laboratoire d'Informatique en Image et Systèmes d'information (LIRIS)**  
et de l'école doctorale **Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique (MSTII)**

## Modèles biomécaniques pour la simulation interactive de l'accouchement

Thèse soutenue publiquement le **15 décembre 2014**,  
devant le jury composé de :

**M. Mathias Brieu**

PR, Université de Lille-CNRS, LML, Lille, Président

**M. François Faure**

PR, Université Joseph Fourier, INRIA LJK-CNRS, Grenoble, Examineur

**M. Hervé Delingette**

DR, INRIA, Nice, Rapporteur

**M. Loïc Barthe**

MCF, Université Paul Sabatier-CNRS, IRIT, Toulouse, Rapporteur

**M. Emmanuel PROMAYON**

MCF, Université Joseph Fourier, TIMC-IMAG-CNRS, Grenoble, Directeur de thèse

**Mme. Florence ZARA**

MCF, Université Lyon 1, LIRIS-CNRS, Lyon, Co-Directeur de thèse





---

## REMERCIEMENTS

Un travail de thèse tel que celui-ci est une aventure personnelle mais qui ne peut se concrétiser sans l'ensemble des personnes qui m'ont soutenu, aidé et encadré. C'est pourquoi je débute ce manuscrit en remerciant l'ensemble de ces personnes qui m'ont apporté leur expertise, leurs conseils ou tout simplement leur soutien et leur amitié.

Je commencerais bien évidemment par remercier très chaleureusement mes directeurs de thèse Emmanuel Promayon et Florence Zara pour avoir acceptés de m'encadrer et pour leur soutien sans faille tout au long de ces trois années de travail et de découverte. Emmanuel, je te fais part de mon immense gratitude pour ta disponibilité et tes conseils toujours avisés qui m'ont permis d'avancer à la fois sur le plan scientifique, organisationnel et humain. Je me souviendrais en particulier des brainstorming dans ton bureau durant lesquels nous avons exploré de nombreuses pistes ensemble. Mais tu m'as aussi appris à me recentrer quand mon esprit avait tendance à trop vagabonder, une idée en amenant une autre et ainsi de suite, comme autant de chemins que l'on doit parfois avoir la sagesse ne pas emprunter immédiatement pour ne pas risquer de se perdre. Cette sagesse, c'est toi qui me l'as apprise (ou tenté de me l'apprendre) et je t'en remercie même si j'ai encore parfois du mal à dompter cet envie presque irrésistible d'exploration. Florence, un grand merci pour ton aide, ton enthousiasme et tes remarques qui ont toujours été très pertinentes sur mon travail.

Je tiens également à remercier Hervé Delingette et Loïc Barthe pour m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de ma thèse. Leur lecture minutieuse et leurs remarques pertinentes sur ma thèse malgré le peu de temps dont ils disposaient m'ont permis de mettre en perspective mon travail et de me préparer au mieux pour ma soutenance. Je remercie Mathias Brieu pour avoir présidé mon jury et pour la rigueur de ses questions concernant notamment la nécessité de modèles

précis pour la simulation médicale. Enfin, je remercie François Faure pour avoir accepté le rôle d'examineur lors de ma soutenance.

Je remercie les professeurs Philippe Tracqui et Jacques Ohayon de l'équipe DyCTIM pour avoir eu la gentillesse et la patience de m'introduire à la modélisation du vivant au début de ma thèse et avoir répondu à mes questions concernant la biomécanique tout au long de ma thèse. Enfin, un remerciement très spécial à Marek Bucki, mon maître de stage lors de mon stage de fin d'étude de l'ENSIMAG. C'est un véritable passeur de connaissances qui a le don de rendre le concept physique le plus abstrait intelligible en quelques phrases et c'est en grande partie grâce à lui si je me suis tourné vers la biomécanique pour ma thèse.

Pendant ma thèse, j'ai eu également la chance de faire du monitorat. Ce fut l'occasion de m'évader de mon sujet de thèse quelques heures par semaine et de me frotter à l'une des plus gratifiante activité humaine qui soit : l'enseignement.

Enfin, une thèse n'est pas seulement une aventure scientifique, c'est aussi une aventure humaine où les personnes qui vous entourent jouent un rôle majeur dans votre envie de venir travailler tous les jours. Et j'ai eu l'immense chance de faire ma thèse dans l'équipe GMCAO du laboratoire TIMC où règne une bonne humeur et un dynamisme éminemment appréciable dans les bons jours comme dans les moins bons. Je tiens à remercier Olivier Pédano et Nouredine Laieb de l'équipe système qui m'ont apporté bien plus qu'un soutien informatique. Arnold Fertin qui m'a fait découvrir l'*underground* grenoblois et une passion naissante pour la production de musique électronique. Comment pourrais-je oublier aussi les repas au RU de la Chantourne qui étaient l'occasion d'improbables débats philosophiques et historiques avec Olivier, Arnold et Eric Franchon. Je tiens aussi à remercier les permanents de l'équipe : Céline Fouard, Matthieu Chabanas, Yohan Payan et Jocelyne Troccaz. Un grand merci aussi à mon co-bureau Vincent Luboz pour ses conseils lors de ma rédaction et pour avoir organisé les randonnées, les sorties de ski nocturnes et autres activités qui ont participé à souder l'équipe. Enfin, je voudrais remercier tous mes amis doctorants, post-doctorants, ingénieurs et maître de conférences : Sonia, Nassos, Pierre-Loup, Benjamin, Alvin, Nicolas, Vincent, Bérangère, Prasad, Ahmad, Paul, Gabriel, Arnaud pour les soirées, le sport et les discussions indispensables autour de la machine à café, avec une mention particulière pour Anthony et Johan avec qui nous avons partagé nos états d'âmes sur la thèse et des nuits au laboratoire à l'approche des *dead lines*. Merci aussi à Elsa, avec qui j'ai commencé ma thèse, partagé mes doutes, qui m'a remonté le moral quand il le fallait, et qui surtout a fait le déplacement de Paris tout spécialement pour venir à ma soutenance de thèse.

Enfin, je remercie mes lecteurs, passés et futurs...

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 <b>Problématique</b>	1
1.2 <b>Contexte général</b>	2
1.2.1 Gestes Médico-Chirurgicaux Assistés par Ordinateur	2
1.2.2 Accouchements	2
1.2.3 Simulateurs d'apprentissage médicaux	3
1.2.4 Simulation numérique interactive de l'accouchement	4
1.3 <b>Objectifs et contributions</b>	5
1.3.1 Organisation du manuscrit	5
1.3.2 Contributions	6
Bibliographie	7
<b>I Etat de l'art de la simulation en obstétrique et gynécologie</b>	<b>9</b>
<b>2 Anatomie et Mécanique Obstétricales</b>	<b>11</b>
2.1 <b>Anatomie obstétricale</b>	12
2.1.1 Petit bassin	12
2.1.2 Foetus	17
2.1.3 Utérus gravide	19
2.2 <b>Physiologie de l'accouchement</b>	20
2.2.1 Déroulement de l'accouchement	20
2.2.2 Les différentes formes d'accouchement	22

2.2.3	Comportement de la tête fœtale durant l'accouchement . . .	23
2.2.4	Accouchements instrumentés . . . . .	24
<b>2.3</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>27</b>
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>28</b>
<b>3</b>	<b>Théories et techniques de modélisation des tissus mous</b>	<b>29</b>
<b>3.1</b>	<b>Mécanique des milieux continus</b> . . . . .	<b>31</b>
3.1.1	Cinématique . . . . .	31
3.1.2	Tenseur des déformations . . . . .	33
3.1.3	Tenseur des contraintes . . . . .	35
3.1.4	Lois de comportement pour les matériaux élastiques linéaires	36
3.1.5	Relation fondamentale de la dynamique . . . . .	38
<b>3.2</b>	<b>Méthodes de résolutions des équations de la MMC</b> . . . . .	<b>38</b>
3.2.1	Méthode des différences finis . . . . .	39
3.2.2	Méthode des éléments finis (MEF) . . . . .	39
3.2.3	Méthode des éléments finis de frontières . . . . .	44
3.2.4	Méthode des masses-tenseurs . . . . .	44
<b>3.3</b>	<b>Méthodes discrètes de modélisation des tissus</b> . . . . .	<b>45</b>
3.3.1	Masses-ressorts . . . . .	46
3.3.2	Mémoire de forme . . . . .	47
3.3.3	Shape matching . . . . .	48
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>48</b>
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>50</b>
<b>4</b>	<b>Modélisation des organes pelvien et simulation de l'accouchement</b>	<b>53</b>
<b>4.1</b>	<b>Modèles biomécaniques des organes pelviens</b> . . . . .	<b>54</b>
4.1.1	Plancher pelvien . . . . .	54
4.1.2	Fœtus . . . . .	55
<b>4.2</b>	<b>Modélisation de la dynamique pelvienne</b> . . . . .	<b>56</b>
<b>4.3</b>	<b>Modèles biomécaniques pour la simulation de l'accouchement</b> . .	<b>59</b>
<b>4.4</b>	<b>Simulateurs d'accouchements</b> . . . . .	<b>63</b>
4.4.1	Simulateurs anatomiques . . . . .	63
4.4.2	Simulateurs motorisés/haptiques . . . . .	64
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>67</b>
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>68</b>
<b>II</b>	<b>Modélisation et simulation de la tête fœtale et implémentation GPU</b>	<b>71</b>
<b>5</b>	<b>Modélisation de la tête fœtale</b>	<b>73</b>
<b>5.1</b>	<b>Modélisation des structures fines</b> . . . . .	<b>74</b>
5.1.1	Modélisation physique des plaques minces . . . . .	77

---

5.1.2	Géométrie des coques minces . . . . .	80
5.1.3	L'élément de membrane : Constant Strain Triangle (CST) . . . . .	80
5.1.4	L'élément de flexion : Discrete Kirchhoff Triangle (DKT) . . . . .	82
5.1.5	L'élément de coque CST-DKT . . . . .	86
<b>5.2</b>	<b>Formulation co-rotationnelle . . . . .</b>	<b>86</b>
<b>5.3</b>	<b>Contrainte de volume . . . . .</b>	<b>88</b>
5.3.1	Fonction de volume . . . . .	89
5.3.2	Projection du gradient . . . . .	90
<b>5.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>93</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>95</b>
<b>6</b>	<b>Simulation dynamique et implémentation GPU . . . . .</b>	<b>97</b>
<b>6.1</b>	<b>Système dynamique . . . . .</b>	<b>98</b>
6.1.1	Intégration temporelle . . . . .	99
6.1.2	Résolution . . . . .	100
<b>6.2</b>	<b>Implémentation sur GPU . . . . .</b>	<b>101</b>
6.2.1	Architecture GPU NVIDIA . . . . .	101
6.2.2	Approche séquentielle sur CPU . . . . .	102
6.2.3	Approche parallèle sur GPU . . . . .	104
6.2.4	Gestion de la mémoire . . . . .	106
<b>6.3</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>111</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>112</b>
<b>7</b>	<b>Simulations et Validation . . . . .</b>	<b>113</b>
<b>7.1</b>	<b>Simulations sur GPU . . . . .</b>	<b>114</b>
7.1.1	Simulation en compression . . . . .	115
7.1.2	Simulation avec gravité . . . . .	117
7.1.3	Simulation avec application d'une force ponctuelle . . . . .	118
7.1.4	Simulation de collision avec un objet rigide . . . . .	119
<b>7.2</b>	<b>Étude préliminaire de la descente fœtale . . . . .</b>	<b>122</b>
<b>7.3</b>	<b>Simulation de la pression intra-utérine sur la tête fœtale. . . . .</b>	<b>124</b>
<b>7.4</b>	<b>Intégration dans la plateforme CamiTK . . . . .</b>	<b>127</b>
<b>7.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>128</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>130</b>
<b>8</b>	<b>Conclusion et Perspectives . . . . .</b>	<b>131</b>
<b>8.1</b>	<b>Conclusion générale . . . . .</b>	<b>131</b>
<b>8.2</b>	<b>Perspectives . . . . .</b>	<b>133</b>
8.2.1	Modèles et Simulations . . . . .	133
8.2.2	Couplage avec le dispositif haptique BirthSim . . . . .	133
<b>8.3</b>	<b>Publications . . . . .</b>	<b>135</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>137</b>





## TABLE DES FIGURES

1.1	Nombre et types de complications parmi les accouchements instrumentés recensés dans l'enquête du réseau AURORE de 2003 [Dupuis et al., 2003].	3
2.1	Bassin osseux constitué des os iliaques, du sacrum et du coccyx.	13
2.2	Plans des détroits et de l'excavation pelvienne du petit bassin en coupe sagittale.	14
2.3	Valeurs moyennes des diamètres du bassin d'après Schaal [2007].	15
2.4	Variations du bassin (Caldwell and Moloy [1938]).	16
2.5	Muscles du plancher pelvien Kamina [2009].	16
2.6	Fœtus en flexion.	17
2.7	Dimensions principales de la tête fœtale [Sorbe and Dahlgren, 1983]	18
2.8	Voûte crânienne du fœtus.	18
2.9	Utérus gravide [Kamina, 2009].	19
2.10	Dilatation du col de l'utérus (Wikipedia).	21
2.11	Variétés de présentations de la tête fœtale (OI : Occipito-Iliaque) [Schaal, 2007].	24
2.12	Forceps : instrument et utilisation.	26
2.13	Ventouse obstétricale : instrument et utilisation.	27
3.1	Configuration initiale (non déformée) et courante (déformée) d'un solide.	32
3.2	Composantes du tenseur des contraintes $\sigma$ en 3 dimension.	35
3.3	Exemple de courbe contrainte-déformation.	37
3.4	Simulation de déformations élastiques avec la méthode des différences finies [Terzopoulos et al., 1987].	39
3.5	Maillage triangulaire d'un domaine circulaire.	40
3.6	Fonctions d'interpolations de Lagrange pour différents éléments.	42

3.7	Fonction de base du maillage triangulaire formé d'éléments finis triangulaires à 3 nœuds. . . . .	43
3.8	Exemple de simulation de découpage sur un foie [Delingette et al., 1999].	46
3.9	Principe du modèle élastique à mémoire de forme : au repos, l'attracteur $P^*$ est défini tel que $P^* = P^0$ . Si par exemple la particule s'est déplacée de $P^0$ à $P$ , une force de rappel $F^*$ apparaît pour la ramener vers la position de l'attracteur. . . . .	48
3.10	Principe du modèle élastique <u>shape matching</u> . . . . .	48
4.1	Maillage et rapports d'étirements du plancher pelvien [Parente et al., 2008].	56
4.2	Modélisation de la tête fœtale proposée par Lapeer and Prager [2001]. . .	57
4.3	Procédures de simulation de la dynamique pelvien de Khelifi et al. [2013]. . .	58
4.4	Modèle pelvien proposé par Rubod et al. [2013]. . . . .	59
4.5	Rotation interne de la tête fœtale lors de la confrontation avec le bassin [Boissonnat and Geiger, 1993]. . . . .	60
4.6	Forces de poussées appliquées au fœtus : contractions utérines ( $F_1$ ) et poussées abdominales ( $F_2$ ) [Kheddar et al., 2004] . . . . .	61
4.7	Schéma du modèle biomécanique utilisé dans Buttin et al. [2013]. CU : contractions utérines, ABD : poussées abdominales. . . . .	62
4.8	Machine de Coudray (1778) . . . . .	63
4.9	Mannequin de la société Simulaid . . . . .	64
4.10	GeburtenSimulator . . . . .	65
4.11	Simulateur Noelle de la société Gaumard Scientific . . . . .	65
4.12	Simulateur pour la pose de forceps [Lapeer et al., 2004]. . . . .	66
4.13	Simulateur BirthSim. . . . .	66
5.1	Simulations du modèle de coque discret de Grinspun et al. [2003]. . . . .	75
5.2	Modélisations et comportements des structures fines. . . . .	76
5.3	Déplacement de la surface moyenne (en rouge) d'après les hypothèses de la théorie de Kirchhoff-Love . . . . .	77
5.4	Coupe selon les plans $(x, z)$ et $(y, z)$ . . . . .	78
5.5	Géométrie d'un élément plaque triangulaire. $G$ est le barycentre de l'élément.	81
5.6	L'élément CST dans sa configuration de référence (gauche) et matérielle (droite) avec les degrés de libertés associés. . . . .	82
5.7	L'élément DKT exprimé dans sa configuration de référence (gauche) et matérielle (droite). . . . .	83
5.8	Arêtes d'un élément en coordonnée curviligne. . . . .	84
5.9	Cinématique d'un élément co-rotationnel. $T_0$ (respectivement $T_R$ ) est la repère local de l'élément dans sa configuration initiale (respectivement déformée) . . . . .	88
5.10	Présentation des différentes quantités nécessaires pour calculer la contribution d'un point $x_i$ au volume total de l'objet. $A_j$ est le vecteur d'aire de la face $j$ et $N_i$ la somme des contributions de chacun des $A_j$ . . . . .	90

5.11	Projection sur la contrainte de volume. $\phi(\mathbf{X}^t)$ est l'état après les déformations mécaniques. . . . .	91
5.12	Différents types de contrôle local de la contrainte de volume. . . . .	93
6.1	Boucle de simulation sur CPU. . . . .	101
6.2	Architecture en grille/bloc/thread. . . . .	102
6.3	Calcul de la contribution au produit $KX$ d'un élément. . . . .	103
6.4	Écritures concurrentes lors de l'exécution en parallèle sur des éléments partageant des nœuds. . . . .	105
6.5	Partitionnement de l'ensemble des éléments par coloriage de graphe. . . . .	106
6.6	Exécutions parallèles sur le groupe $\mathcal{E}_i$ dont les éléments ne partageant aucun nœuds. . . . .	107
6.7	Accès mémoire <i>coalesced</i> . . . . .	108
6.8	Stockage des coordonnées sous la forme <i>array of structures</i> et <i>structure of arrays</i> . . . . .	108
6.9	Accès mémoire non <i>coalesced</i> quand la parallélisation est effectuée sur les éléments. Les accès aux données des nœuds sont désordonnés. . . . .	109
6.10	Accès mémoire <i>coalesced</i> quand la parallélisation est effectuée sur les éléments avec une renumérotation des nœuds et une structure en <i>SoA</i> . Chaque accès aux données d'un nœud est réalisé de manière contiguë dans la mémoire du GPU. . . . .	109
6.11	Exécutions parallèles sur le groupe $\mathcal{E}_i$ avec réorganisation des tableaux des données nodales pour avoir des transactions mémoire groupées. . . . .	110
6.12	Boucle de simulation sur GPU. . . . .	111
7.1	Déformation d'une balle incompressible subissant une pression périodique aux pôles. . . . .	115
7.2	Déformation d'un champignon sous l'effet de la gravité. . . . .	117
7.3	Déformation d'un lapin sous la gravité et par application d'une force ponctuelle. . . . .	118
7.4	Déformation d'une balle par collision avec un objet rigide. . . . .	119
7.5	Modèle de l'unité utéro-fœtale. . . . .	122
7.6	Configuration simplifiée de la descente fœtale. . . . .	123
7.7	Maillage de la tête fœtale/ . . . . .	124
7.8	Pressions intra-utérines et du col de l'utérus. . . . .	125
7.9	Diamètres mesurés au cours de la simulation. . . . .	126
7.10	Déformations de la tête fœtale subissant la pression intra-utérine et le contact avec le col de l'utérus. . . . .	127
7.11	Interface graphique de CamiTK. On peut voir ici la configuration pour la simulation de la pression intra-utérine sur la tête fœtale. . . . .	128
8.1	Couplage de la simulation d'accouchement avec le dispositif haptique Birth-Sim. . . . .	134



## LISTE DES TABLEAUX

2.1	Caractéristiques des contractions utérines au cours de l'accouchement normal [Schaal, 2007]. . . . .	21
2.2	Diamètres initiaux et leurs variations moyennes [Sorbe and Dahlgren, 1983]. . . . .	25
3.1	Comparaison des différents modèles. . . . .	49
4.1	Paramètres géométriques et matériels des modèles d'organes utilisés dans Buttin et al. [2013]. . . . .	62
7.1	Résultats des simulations sur CPU et GPU, avec ou sans contrainte de volume.	121
7.2	Diamètres de la tête fœtale ( $\emptyset$ ) et ses variations (var.). . . . .	126



# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

Le commencement de toutes les sciences,  
c'est l'étonnement de ce que les choses  
sont ce qu'elles sont.

---

Métaphysique, Aristote

### 1.1 Problématique

Les formations des obstétriciens et des sages-femmes, comme celles de la plupart des formations médicales, contiennent à la fois des enseignements théoriques et pratiques. Les supports d'enseignement classiques tels que les mannequins et les vidéos ne permettent pas de couvrir tous les gestes, ni d'appréhender les mécanismes physiques sous-jacents. Dès lors, la partie pratique de l'enseignement se fait *in situ*, sous la supervision d'experts afin de développer la dextérité manuelle et les capacités de prise de décisions qui sont des compétences indispensables aux praticiens. Toutefois, cette mise en pratique comporte des risques pour la parturiente et le fœtus, et ne permet pas une pratique exhaustive de tous les cas. En effet, le praticien novice sera moins invité à pratiquer des accouchements instrumentés ou des accouchements eutociques à risque.

Les inconvénients de ce type d'apprentissage se retrouvent aussi dans d'autres spécialités comme la chirurgie ou l'anesthésie. Dans ce contexte, la recherche de nouvelles techniques de formations sans risques pour le patient et permettant de garantir un degré de compétence élevé, transférable en situation réelles devient pertinente. L'entraînement par simulation apparaît comme une alternative ou un



complément aux techniques d'apprentissage classiques à même de répondre aux problèmes de celles-ci [Gardner, 2007, Gardner and Raemer, 2008].

## 1.2 Contexte général

### 1.2.1 Gestes Médico-Chirurgicaux Assistés par Ordinateur

La médecine est une pratique en constante évolution qui adapte ses méthodes et outils en fonctions des avancées technologiques dans le but d'améliorer le traitement et le confort du patient. Ainsi le développement de l'imagerie médicale ou de la chirurgie non-invasive par exemple, ont amené de réels progrès et révolutionné la pratique de la médecine. À l'ère des NTIC (Nouvelles Technologies de l'Information et de la Communication), l'utilisation de l'outil informatique au sens large par le corps médical constitue la prochaine évolution ainsi qu'un vaste et fécond domaine de recherche : les Gestes Médico-Chirurgicaux Assistés par Ordinateur (GMCAO). L'objectif de cette discipline est d'assister le médecin et le chirurgien dans la réalisation de gestes diagnostiques ou thérapeutiques les plus précis et les moins invasifs possibles grâce à l'utilisation et aux développements de nouvelles technologies. Les domaines applicatifs sont entre autres :

- la perception augmentée,
- la décision augmentée,
- l'action augmentée,
- l'apprentissage,
- la démonstration médicale du service rendu.

Dans ce vaste domaine d'étude, mes travaux se situent ainsi dans le cadre de l'apprentissage assisté par ordinateur destiné aux obstétriciens et aux sages-femmes.

### 1.2.2 Accouchements

En 2003, Dupuis et al. [2003] ont réalisé au sein du réseau AURORE (Association des Utilisateurs du Réseau Obstétrico-pédiatrique REgional) de la région Rhône-Alpes, qui comprend 37 maternités et 156 obstétriciens, une étude de l'incidence et des complications néo-natales graves qui peuvent survenir lors d'accouchements instrumentés (*c-à-d* utilisation des forceps et ventouses). Celle-ci portait sur 4589 accouchements et a permis de mettre en évidence un nombre non-négligeable de complications (voir Fig. 1.1) dans 3,2% des cas étudiés. Ces complications sont des lésions plus ou moins sérieuses au niveau de la tête foetale (lésions cutanées, hématomes, paralysies faciales, ...). Cette enquête révèle également l'intérêt des médecins pour les simulateurs d'apprentissage puisque près de 90% d'entre eux approuvent leur utilisation en complément de la formation classique.

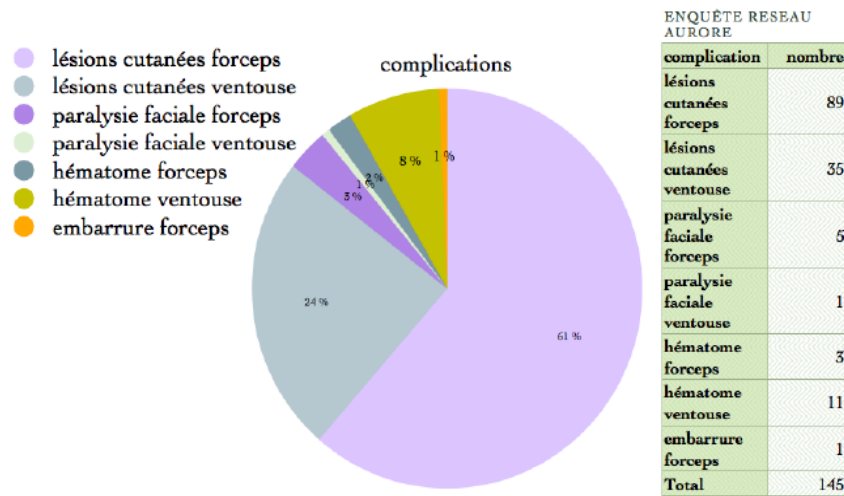


FIGURE 1.1. – Nombre et types de complications parmi les accouchements instrumentés recensés dans l'enquête du réseau AURORE de 2003 [Dupuis et al., 2003].

L'utilisation d'un simulateur, en permettant d'étudier une plus grande variété de cas, et notamment les accouchements instrumentés, permettrait au praticien une meilleure prise de décision face à un cas difficile. Il serait ainsi possible d'éviter, quand cela est possible, le recours à la césarienne. En effet, en France cette pratique a doublé en 30 ans (entre 1981 et 2010) atteignant aujourd'hui 20% des accouchements alors qu'elle reste une pratique risquée et coûteuse [Liu et al., 2007, Hansen et al., 2008].

### 1.2.3 Simulateurs d'apprentissage médicaux

La pratique et la recherche sur des simulateurs d'entraînement existent déjà dans de nombreuses spécialités médicales. Le terme générique de simulateur recouvre ici de nombreux dispositifs techniques et modalités d'utilisation dont le but est de reproduire de façon virtuelle une situation réelle. Cela va des dispositifs les plus simples tels que les mannequins nécessitant ou non une supervision par un expert, aux plus complexes faisant appel aux interfaces haptiques et/ou à la réalité virtuelle s'appuyant sur des simulations numériques. Dans ce contexte, on peut citer le simulateur de biopsie de prostate de Selmi et al. [2014] comprenant un modèle biomécanique permettant de simuler la déformation de la prostate due à la pression de la sonde échographique manipulée au travers d'une interface haptique. Dequidt et al. [2013], Coca et al. [2013] proposent des simulations interactives pour des opérations de chirurgies de la cataracte couplant une interface haptique et un modèle élément finis de l'œil permettant des opérations de découpes. Sans être exhaustif,

on peut aussi mentionner parmi les simulateurs s'appuyant sur des simulations numériques de modèles biomécaniques des organes, le simulateur de chirurgie du foie de [Delingette and Ayache \[2005\]](#) ou celui de sutures de [Berkley et al. \[2004\]](#). On peut noter que les exemples cités précédemment concernent uniquement les simulateurs d'apprentissage qui nécessitent un degré d'interactivité fort avec l'utilisateur et dont le but est d'enrichir l'expérience de l'utilisateur afin de reproduire au mieux l'expérience de la situation médicale réelle.

Au niveau obstétrique, il existe actuellement de nombreux simulateurs d'accouchement : qu'ils soient de simples simulateurs anatomiques [[Graves and Savannah, 1951](#), [Lounsbury, 1992](#)] ou des simulateurs motorisés avec interfaces haptiques [[Riener and Burgkart, 2003](#), [Eggert et al., 2006](#), [Silveira et al., 2004](#)]. Ces simulateurs, notamment les plus récents, permettent une appréciation qualitative du geste du praticien mais ne fournissent pas d'informations quantitatives notamment sur les efforts subis par les organes du fœtus ou de la parturiente. Or ces informations quantitatives fournies par des simulations numériques à partir de modèles biomécaniques pourraient enrichir significativement le processus d'apprentissage.

### 1.2.4 Simulation numérique interactive de l'accouchement

Il existe de nombreux modèles biomécaniques des organes pelviens. Toutefois ces modèles ont majoritairement pour but d'étudier une pathologie ou un traumatisme particulier (qu'il soit ou non lié à l'accouchement). De ce fait, ils visent la précision, l'interactivité n'étant pas une donnée pertinente pour ce type d'applications. Parmi ces travaux, on peut citer ceux de [Lapeer and Prager \[2001\]](#) pour la tête fœtale, ceux de [Aulignac et al. \[2005\]](#) pour le plancher pelvien ou encore ceux de [Miftahof and Nam \[2011\]](#) concernant la modélisation de l'utérus. D'un autre côté, les systèmes de visualisation accompagnant les simulateurs d'accouchement les plus récents comme celui de [Riener and Burgkart \[2003\]](#) sont très simples et consistent le plus souvent en des modèles rigides de la tête et du bassin. Leur but est donc purement la recherche d'une assistance visuelle pour l'opérateur et ils ne donnent pas d'informations quantitatives supplémentaires. Le modèle de [Buttin et al. \[2013\]](#) est le modèle éléments finis complet de l'unité utéro-fœtale le plus abouti à ce jour permettant de simuler l'accouchement. Toutefois ce modèle n'a pas la capacité d'être utilisé en temps interactif. De manière générale, contrairement aux exemples de simulateurs d'apprentissage faisant appel à la simulation numérique de la section précédente, il n'existe pas à l'heure actuelle de modèle biomécanique interactif de l'accouchement.

## 1.3 Objectifs et contributions

L'objectif du travail présenté dans ce manuscrit s'inscrit dans le cadre plus général de l'ANR SAGA (Simulation de l'Apprentissage de Gestes de l'Accouchement) qui vise à développer un simulateur d'accouchement couplant une composante haptique avec le simulateur *BirthSim* développé au laboratoire Ampère de Lyon [Silveira et al., 2004], et une composante logicielle. Cette composante logicielle consiste en une simulation numérique des organes pelviens en interaction avec le fœtus et les instruments. Pour pouvoir être utilisée en conjonction avec la partie haptique du simulateur, cette simulation devra pouvoir être exécutée en temps interactif. Elle devra aussi être assez précise pour pouvoir fournir des informations exploitables par l'utilisateur. En général, ces deux contraintes sont difficilement conciliables car les modèles donnant des informations précises sur l'état des tissus nécessitent une puissance de calcul plus importante.

- Dans ce contexte, nous allons effectuer un travail préliminaire consistant à :
- identifier les organes à modéliser en se basant sur une étude anatomique et physiologique de l'accouchement.
  - Hiérarchiser l'importance de ceux-ci lors de la descente fœtale pour déterminer ceux pouvant subir des dommages importants ou qui sont pertinents du point de vue de l'apprentissage.
  - Développer des modèles biomécaniques adéquates pour chacun d'eux en tenant compte de la hiérarchie établie précédemment.
  - Optimiser les calculs numériques notamment en utilisant le calcul sur GPU (*Graphics Processing Unit*) pour garantir une exécution en temps interactif.
  - Donner des pistes pour une simulation interactive complète de l'accouchement.

### 1.3.1 Organisation du manuscrit

La première partie de ce manuscrit présente un état de l'art divisé en trois chapitres. Le premier chapitre consiste en une description anatomique de l'unité utéro-fœtale et une description physiologique de l'accouchement. Le second chapitre expose un état de l'art des techniques de modélisation des tissus mous qui nous permettra de nous positionner quant aux choix des approches à adopter pour modéliser les organes pelviens. Les études de ces deux chapitres nous permettront ultérieurement de proposer des modèles pertinents par rapport au degré d'implication de chaque organe et l'importance d'information précise sur ceux-ci dans le cadre de l'apprentissage. Le troisième chapitre présente les différents modèles d'organes pelviens ainsi que les différents simulateurs d'accouchement existants.

La seconde partie présente notre travail et est divisée elle aussi en trois cha-

pitres. Le premier chapitre est consacré à la tête fœtale, identifiée comme la structure subissant potentiellement le plus de dommages lors de l'accouchement. Nous proposerons une modélisation éléments finis avec des éléments de coques couplée à une approche originale et rapide pour modéliser l'intérieur du crâne. Le second chapitre de cette partie proposera une implémentation sur GPU de ce modèle. Enfin, le dernier chapitre de cette partie exposera les résultats obtenus avec ce modèle et des pistes pour modéliser les autres structures considérés comme pertinentes, et leurs interactions lors de la descente fœtale.

### 1.3.2 Contributions

Les contributions de nos travaux sont :

- Le développement d'un modèle original de la tête fœtale basé sur des éléments finis de coques et qui permet de prendre en compte la matière intracrânienne sans la modéliser explicitement avec des éléments solides. Nous verrons aussi que ce modèle a une application en informatique graphique pour simuler des objets volumiques incompressibles en utilisant uniquement un modèle surfacique.
- Une implémentation parallèle de notre modèle avec une gestion efficace de la mémoire disponible sur la carte graphique.
- L'identification des principaux organes pelviens à prendre en compte dans des simulations interactives de la descente du fœtus au cours de l'accouchement destinées à terme à être couplées à l'interface haptique BirthSim.

## Bibliographie

- D. Aulignac, J.A.C. Martins, E.B. Pires, T. Mascarenhas, and R.M. Natal Jorge. A shell finite element model of the pelvic floor muscles. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 8(5) :339–347, 2005. doi : 10.1080/10255840500405378. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10255840500405378>. PMID : 16298856. 4
- J. Berkley, G. Turkiyyah, D. Berg, M. Ganter, and S. Weghorst. Real-time finite element modeling for surgery simulation : an application to virtual suturing. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 10(3) :314–325, May 2004. ISSN 1077-2626. doi : 10.1109/TVCG.2004.1272730. 4
- Romain Buttin, Florence Zara, Behzad Shariat, Tanneguy Redarce, and Gilles Grangé. Biomechanical simulation of the fetal descent without imposed theoretical trajectory. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 111(2) :389 – 401, 2013. ISSN 0169-2607. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.cmpb.2013.04.005>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169260713001132>. 4
- Antonio Coca, Helia Estévez, Camino Fernández, and Gonzalo Esteban. Building 3d models for reconstructing a virtual cataract surgery haptic simulation. In *Proceedings of the First International Conference on Technological Ecosystem for Enhancing Multiculturality*, pages 43–48. ACM, 2013. 3
- Herve Delingette and Nicholas Ayache. Hepatic surgery simulation. *Commun. ACM*, 48(2) :31–36, February 2005. ISSN 0001-0782. doi : 10.1145/1042091.1042116. URL <http://doi.acm.org/10.1145/1042091.1042116>. 4
- Jérémie Dequidt, Hadrien Courtecuisse, Olivier Comas, Jérémie Allard, Christian Duriez, Stéphane Cotin, Elodie Dumortier, Olivier Wavreille, and Jean-François Rouland. Computer-based training system for cataract surgery. *Simulation*, 89(12) :1421–1435, 2013. 3
- O Dupuis, R Silveira, T Redarce, A Dittmar, and R.-C Rudigoz. Extraction instrumentale en 2002 au sein du réseau aurore : incidence et complications néo-natales graves. *Gynécologie Obstétrique & Fertilité*, 31(11) :920 – 926, 2003. ISSN 1297-9589. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.gyobfe.2003.09.007>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1297958903002807>. v, 2, 3
- J.S. Eggert, M.S. Eggert, and P. Vallejo. Interaction education system for teaching patient care, October 3 2006. US Patent 7,114,954. 4
- Roxane Gardner. Simulation and simulator technology in obstetrics : past, present and future. *Expert Review of Obstetrics & Gynecology*, 2(6) :775–790, 2007. doi : 10.1586/17474108.2.6.775. URL <http://dx.doi.org/10.1586/17474108.2.6.775>. 2
- Roxane Gardner and Daniel B. Raemer. Simulation in obstetrics and gynecology. *Obstetrics and Gynecology Clinics of North America*, 35(1) :97 – 127, 2008. ISSN 0889-8545. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ogc.2007.12.008>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0889854507001258>. Patient Safety in Obstetrics and Gynecology : Improving Outcomes, Reducing Risks. 2
- J. Graves and G. Savannah. Educational apparatus for teaching obstetrics and midwifery, May 1 1951. US Patent 2,551,433. 4
- Anne Kirkeby Hansen, Kirsten Wisborg, Niels Ulbjerg, and Tine Brink Henriksen. Risk of respiratory morbidity in term infants delivered by elective caesarean section : cohort study. *Bmj*, 336(7635) :85–87, 2008. 3
- R.J. Lapeer and R.W. Prager. Fetal head moulding : finite element analysis of a fetal skull subjected to uterine pressures during the first stage of labour. *Journal of Biomechanics*, 34(9) :1125 – 1133, 2001. ISSN 0021-9290. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9290\(01\)00070-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9290(01)00070-7). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021929001000707>. 4
- Shiliang Liu, Robert M Liston, KS Joseph, Maureen Heaman, Reg Sauve, Michael S Kramer, et al. Maternal mortality and severe morbidity associated with low-risk planned cesarean delivery versus planned vaginal delivery at term. *Canadian medical association journal*, 176(4) :455–460, 2007. 3
- K.L. Lounsbury. Anatomical model, April 14 1992. US Patent 5,104,328. 4
- R.N. Miftahof and H.G. Nam. *Biomechanics of the Gravid Human Uterus*. SpringerLink : Bücher. Springer, 2011. ISBN 9783642214738. 4
- R. Riener and R. Burgkart. Aktiver geburtensimulator mit starrem antrieb, July 31 2003. DE Patent App. DE2,002,102,504. 4
- S.-Y Selmi, E. Promayon, J. Sarrazin, and J. Troccaz. 3D interactive ultrasound image deformation for realistic prostate biopsy simulation. In *6th International Symposium on Biomedical Simulation, ISBMS*

- 2014, Lecture Notes in Computer Science. Springer Verlag, 2014. 3
- R. Silveira, Minh Tu Pham, T. Redarce, M. Betemps, and O. Dupuis. A new mechanical birth simulator : Birthsim. In Intelligent Robots and Systems, 2004. (IROS 2004). Proceedings. 2004 IEEE/RSJ International Conference on, volume 4, pages 3948–353. vol.4, Sept 2004. doi : 10.1109/IROS.2004.1390031. 4, 5

**Première partie**

**Etat de l'art de la simulation en  
obstétrique et gynécologie**





## CHAPITRE 2

# ANATOMIE ET MÉCANIQUE OBSTÉTRICALES

L'homme animé par l'esprit scientifique  
désire sans doute savoir, mais c'est  
aussitôt pour mieux interroger.

---

La formation de l'esprit scientifique,  
Gaston Bachelard

### Sommaire

---

<b>2.1 Anatomie obstétricale</b> . . . . .	<b>12</b>
2.1.1 Petit bassin . . . . .	12
2.1.2 Foetus . . . . .	17
2.1.3 Utérus gravide . . . . .	19
<b>2.2 Physiologie de l'accouchement</b> . . . . .	<b>20</b>
2.2.1 Déroulement de l'accouchement . . . . .	20
2.2.2 Les différentes formes d'accouchement . . . . .	22
2.2.3 Comportement de la tête fœtale durant l'accouchement . . . . .	23
2.2.4 Accouchements instrumentés . . . . .	24
<b>2.3 Conclusion</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>28</b>

---

Dans ce chapitre nous aborderons le contexte médical de notre travail. L'obstétrique est une discipline médicale concernant à la fois la santé de la femme enceinte et celle du fœtus tout au long de la grossesse et jusqu'à l'accouchement. L'ensemble du corps de la parturiente ayant un effet plus ou moins direct sur la descente fœtale, nous nous attacherons à décrire seulement la structure des organes ayant le plus grand impact sur celle-ci ainsi que leurs rôles et interactions pendant l'accouchement en s'appuyant sur l'ouvrage de référence de [Schaal \[2007\]](#). Ces organes sont tous situés dans la cavité pelvienne. Dans un premier temps, nous proposerons une présentation anatomique des principaux organes sollicités lors d'un accouchement. Nous présenterons ensuite une description physiologique de la descente fœtale où nous expliciterons notamment le rôle et le comportement de chacun des organes décrits dans la première partie. Dans cette seconde partie nous détaillerons aussi les différentes phases et les différents scénarios d'accouchement.

## 2.1 Anatomie obstétricale

Les structures anatomiques que nous nous attacherons à décrire sont situées dans la cavité pelvienne ou petit bassin. Cette cavité désigne en anatomie la région du corps située entre la cavité abdominale en haut, le périnée en bas et les deux hanches sur les côtés. Chez la femme enceinte, celle-ci contient :

- une partie de l'appareil digestif,
- l'appareil urinaire,
- l'appareil reproducteur (vagin, utérus, trompes utérines et ovaires),
- le fœtus.

D'un point de vue obstétrique, nous nous intéresserons principalement au petit bassin en lui même, à l'utérus gravide et au fœtus.

### 2.1.1 Petit bassin

Lors d'un accouchement par voies naturelles (aussi appelé accouchement eutocique ou par voie basse normal), la descente du fœtus s'effectue de long de la filière pelvienne aussi appelée canal pelvi-génital. Celui-ci est délimité par un cadre osseux rigide recouvert par des parties molles guidant la progression du fœtus le long d'un trajet précis. Cet ensemble appelé petit bassin (ou bassin obstétrical) est un organe capital intervenant lors de la phase de travail de l'accouchement.

#### i) Le bassin osseux

Le squelette du bassin est composé de 4 os principaux (figure 2.1) :

- le sacrum, os médian situé à la partie inférieure de la colonne vertébrale, qui forme la partie postérieure du bassin.
- Le coccyx, correspondant au prolongement par le bas du sacrum.
- Les 2 os iliaques formant les parties latérales et antérieures du bassin où s'insèrent les muscles fessiers. Chaque os est formé de 3 parties : l'ilion en haut, l'ischion en bas et en arrière, le pubis en avant.

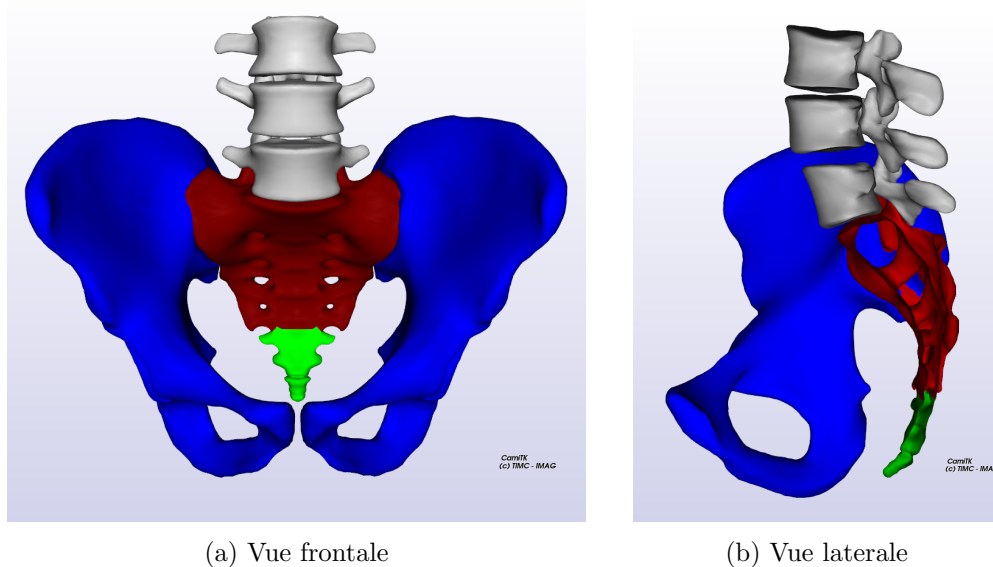


FIGURE 2.1. – Bassin osseux constitué des os iliaques, du sacrum et du coccyx.

La zone délimitée latéralement par les fosses iliaques et en arrière par les ailes du sacrum ainsi que les muscles dont elle est matelassée s'appelle le grand bassin. Elle fait partie de la cavité abdominale et n'a que peu d'intérêt dans le cadre obstétrique. Le petit bassin quant à lui est délimité en trois zones comme illustré sur la figure 2.2 :

- Le détroit supérieur qui correspond à la partie haute du petit bassin. Il est délimité en arrière par le promontoire, latéralement par les lignes innominées (éminence présente sur la face interne de l'os iliaque) et en avant le bord supérieur de la symphyse pubienne.
- Le détroit inférieur qui correspond à la zone à partir de laquelle la phase terminale de sortie du fœtus commence. Elle est délimitée sur la partie avant par le bord inférieur de la symphyse pubienne et sur l'arrière par le sommet du coccyx. Latéralement, elle passe par les branches ischio-pubiennes.
- L'excavation pelvienne qui est située entre les deux précédentes régions, comprise dans le sens supéro-antérieur par le fond du cotyle (trou du bassin dans lequel vient se loger la tête du fémur pour former la hanche) de l'axe coxale et par l'épine ischiatique. Dans la partie inférieure, l'excavation pel-

vienne va de la face interne de l'ischion à l'échancrure ischiatique en passant par le foramen bouché par les muscles pelviens.

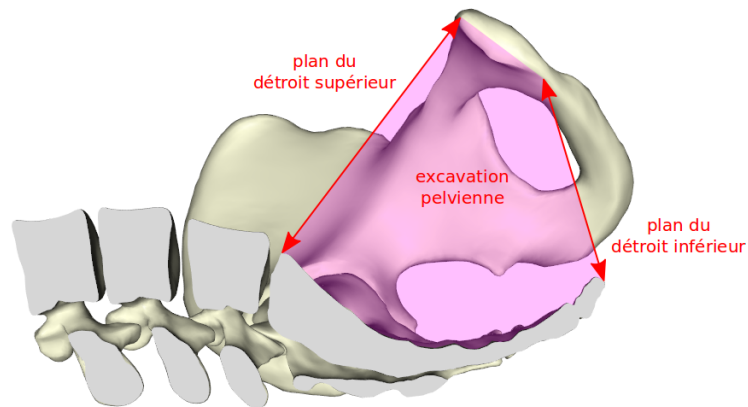


FIGURE 2.2. – Plans des détroits et de l'excavation pelvienne du petit bassin en coupe sagittale.

Les détroits décrits précédemment définissent la zone de frottement lors de la progression du fœtus dans la filière pelvienne. Les dimensions de cette zone sont mesurées avec différents diamètres dont les valeurs moyennes sont représentées sur la figure 2.3. L'accouchement par voie basse étant conditionné par la forme et les dimensions du bassin, ces diamètres devront avoir une distance minimale pour permettre un accouchement par voie basse normal. Les diamètres les plus importants pour permettre le passage du fœtus sont :

- le diamètre transversal médian avec au minimum 12 cm,
- les deux diamètres obliques médian avec au minimum 12 cm,
- le diamètre transversal bi-ischiatique du détroit moyen avec au minimum 10.8 cm,
- le diamètre transversal bi-ischiatique du détroit inférieur avec au minimum 12.5 cm.

Les dimensions présentées dans la figure 2.3 sont des moyennes dont il existe des variations anatomiques non pathologiques dépendantes de la taille et du morphotype. *Caldwell and Moloy [1938]* ont défini quatre types « extrêmes » de bassin illustrés par la figure 2.4 :

- type gynécoïde (50 % des cas) : typologie très féminine de taille moyenne,
- type androïde (23 % des cas) : grandes femmes sportives d'allure masculine,
- type anthropoïde (25 % des cas) : grandes femmes minces aux hanches étroites,
- type platypelloïde (2 %) : pas de morphotype précis.

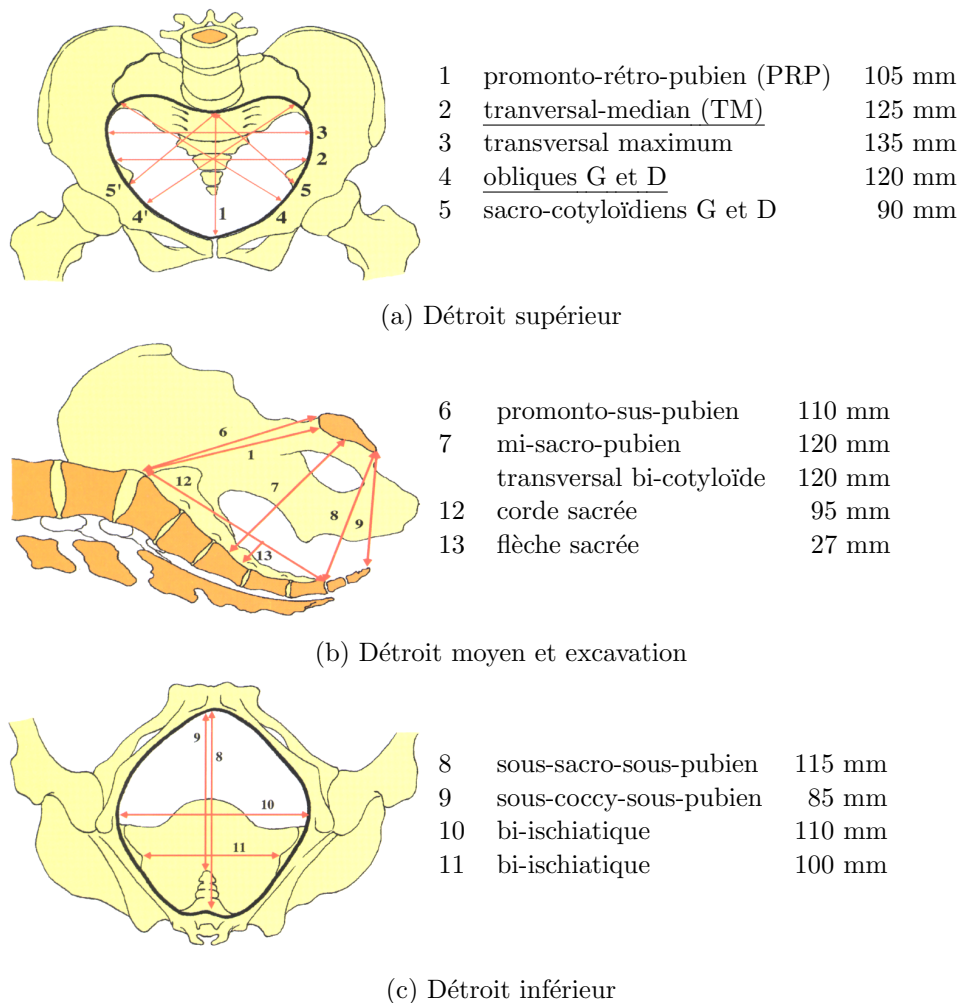


FIGURE 2.3. – Valeurs moyennes des diamètres du bassin d’après [Schaal \[2007\]](#).

La majorité des bassins sont en pratique une combinaison de ces quatre types de bassin.

## ii) Le plancher pelvien

Les parties molles du bassin forment un revêtement du bassin osseux constitué de muscles et d’aponévroses (membrane fibreuse enveloppant un muscle ou un groupe de muscles et constituant une séparation entre eux) fermant caudalement le petit bassin au niveau du déroit inférieur. Ce plancher pelvien constitue la partie la plus profonde du périnée formant un réseau musculaire dense constitué de plusieurs faisceaux dont les fibres ne sont pas toutes orientées dans le même sens [[Yiou et al., 2009](#)]. Il est principalement constitué de deux muscles : le muscle releveur de l’anus

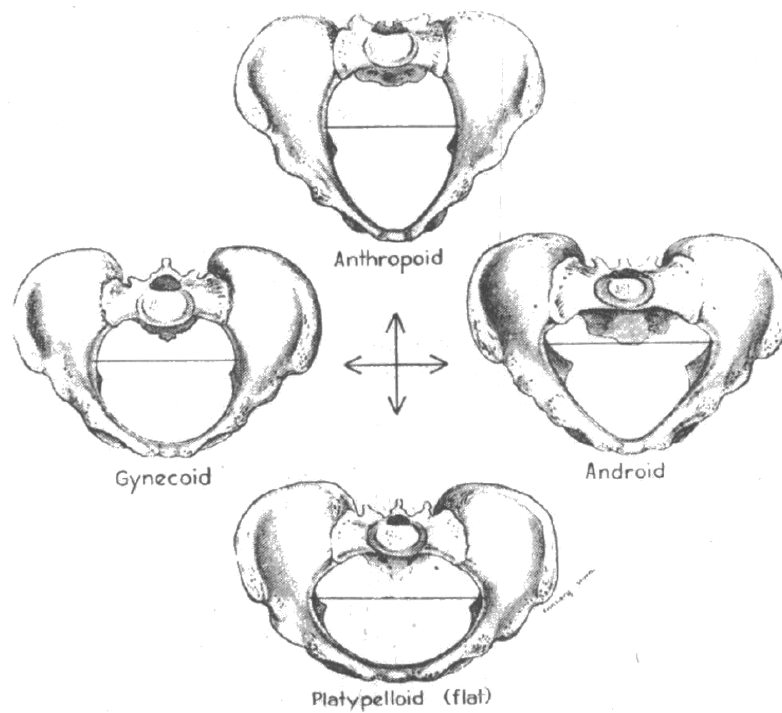


FIGURE 2.4. – Variations du bassin (Caldwell and Moloy [1938]).

et le muscle coccygien qui s'insèrent dans les parois latérales du bassin (voir figure 2.5). Ils forment un diaphragme musculaire sur lequel reposent les organes pelviens et permettent notamment d'empêcher la descente du fœtus au cours de la grossesse.

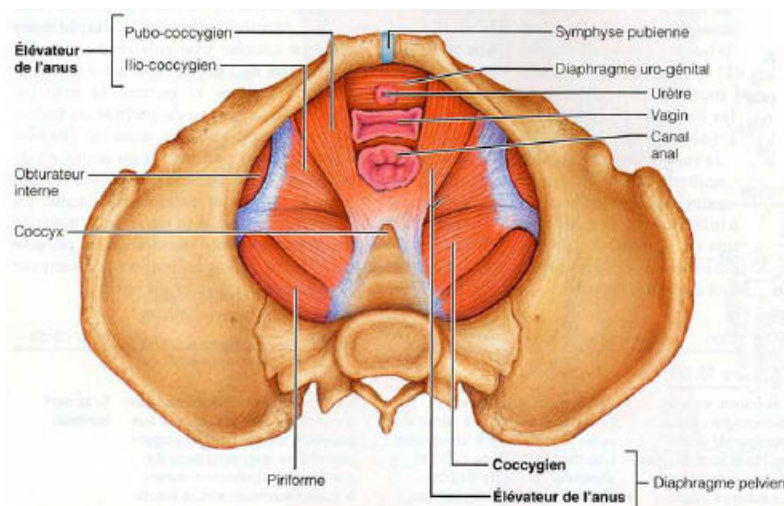


FIGURE 2.5. – Muscles du plancher pelvien Kamina [2009].

### 2.1.2 Foetus

Le foetus est le stade d'évolution prénatal succédant à l'embryon et qui se termine par l'accouchement. Il est mobile dans l'utérus de la parturiente et est relié au placenta par un cordon vasculaire long et souple (voir figure 2.9). Cette mobilité lui permet de parcourir la filière pelvienne sous l'action des contractions utérines.

#### i) Description générale

Lorsque le foetus arrive à terme, il pèse environ 3,5 kg. Sa longueur des pieds jusqu'au haut du crâne est d'environ 50 cm [Schaal, 2007]. La proportion de ses organes n'est pas tout à fait la même que celle d'un enfant et à fortiori que celle d'un adulte. En particulier, la taille de son crâne est disproportionnée par rapport au reste du corps. Le cartilage n'étant pas totalement formé chez le foetus, ses articulations sont beaucoup plus souples et permettent à ses membres ainsi que sa tête d'être extrêmement mobiles par rapport au tronc. Cette souplesse lui permet de se mettre en position de flexion dite foetale. Dans cette position, la tête est fléchie sur l'abdomen, les jambes sont fléchies sur les cuisses et les bras repliés sur le thorax. Le foetus a ainsi une forme globale d'ovoïde de 30 cm de long (voir figure 2.6) où le crâne correspond à la zone la plus large qui doit parcourir la filière pelvienne.

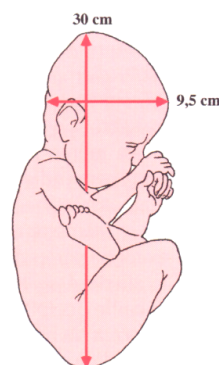


FIGURE 2.6. – Foetus en flexion.

#### ii) La tête foetale

La tête foetale est la partie la plus importante du point de vue obstétrical car c'est elle qui posera le plus de difficultés au passage du foetus dans la filière pelvienne. Ses dimensions sont représentées dans la figure 2.7. L'articulation de la nuque est également essentielle car c'est elle qui aura le plus d'impact sur la descente foetale. Elle permet des rotations de grandes amplitudes suivant les trois axes.



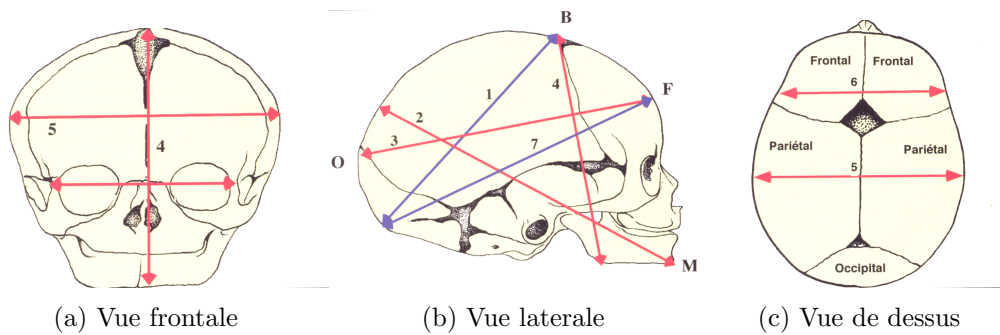


FIGURE 2.7. – Dimensions de la tête fœtale [Sorbe and Dahlgren, 1983] : 1 - sous-occipito-bregmatique (95 mm), 2 - sincipito-mentonnier (135 mm), 3 - occipito-frontal (128 mm), 4 - sous-mento-bregmatique (95 mm), 5 - bipariétal (95 mm), 6 - bitemporal (80 mm), 7 - sous-occipito-frontal (110 mm).

Le crâne fœtal peut être décomposé en deux parties : la base et la voûte. La base est un ensemble ostéo-cartilagineux très solide et dépourvu de malléabilité. La voûte est formée de la profondeur vers la surface de trois plans :

- la dure-mère, solide et résistante,
- la plan osseux, fragile et à l'ossification incomplète,
- le plan résistant du cuir chevelu très vascularisé.

La voûte crânienne est composée par les os pairs frontaux en avant, pariétaux au milieu, les deux écailles temporales latéralement et l'écaille occipitale en arrière. Ces différents os sont reliés par des bandes membraneuses appelées sutures. Aux points de jonction de celles-ci, on trouve des zones appelées fontanelles, où la dure-mère n'est pas recouverte d'os membraneux (voir figure 2.8)

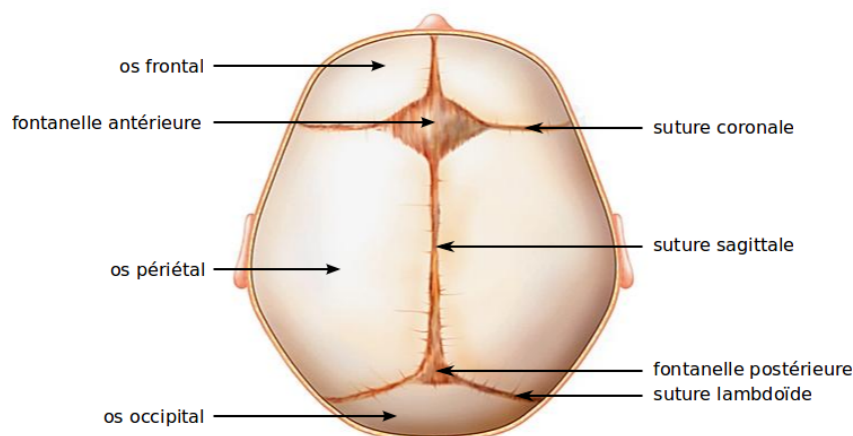


FIGURE 2.8. – Voûte crânienne du fœtus.

Cet agencement de la voûte crânienne permet aux os d'être mobiles les uns par rapport aux autres. Cette mobilité accompagnée de la flexibilité des os autorisent la tête fœtale à s'adapter considérablement au canal pelvien. Ce phénomène est connu sous le nom de modelage de la tête fœtale. Ces déformations concernent principalement l'os occipital et les os frontaux qui s'infléchissent sous les os pariétaux ainsi qu'un chevauchement d'un os pariétal sur l'autre. Elles permettent de réduire la disproportion de la tête en maintenant un volume intracrânien quasi-constant par déplacement du liquide cérébro-spinal dans le canal vertébral. Ainsi le cerveau n'est pas endommagé pendant le processus de l'accouchement.

### 2.1.3 Utérus gravide

L'utérus est l'organe de gestation de la femme. C'est une poche musculaire très vascularisée, située dans la cavité pelvienne. Il ouvre vers le col utérin prolongé par le vagin à l'extérieur et vers l'abdomen du côté postérieur. Lors de la grossesse, il sera ramené vers l'avant de l'abdomen (voir figure 2.9). Le col utérin est séparé du corps utérin par un étranglement à la base de l'utérus appelé l'isthme.

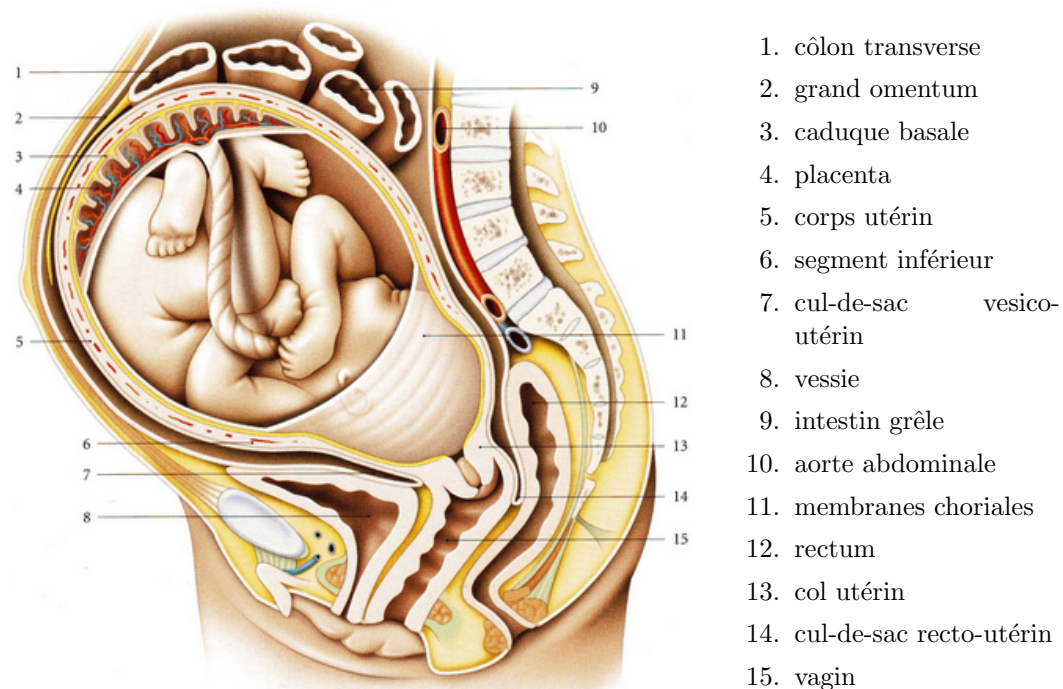


FIGURE 2.9. – Utérus gravide [Kamina, 2009].

Dans un premier temps, l'utérus va être le réceptacle des œufs fécondés où l'embryon se développera tout au long de la grossesse. Durant celle-ci, la croissance

de l'embryon entraîne la distension de l'utérus. Sa taille va ainsi passer d'environ 8 cm de long à 35 cm en moyenne.

## 2.2 Physiologie de l'accouchement

### 2.2.1 Déroulement de l'accouchement

L'accouchement se déroule en trois phases qui sont la dilatation, l'expulsion et la délivrance. Il nécessite le franchissement par le fœtus de trois « obstacles » :

- le col, qui est fermé pendant la grossesse et qui se dilate au cours du travail,
- le bassin, dont la traversée nécessite une adaptation du fœtus pour en épouser les contours,
- le périnée, dont le franchissement constitue l'expulsion.

Pendant la phase d'accouchement, l'utérus aura la tâche d'expulser le fœtus grâce à des contractions intenses et périodiques signalant le début du travail. Ces contractions involontaires appelées contractions utérines ont pour effet de rétracter les parois utérines faisant ainsi diminuer le volume de l'utérus et générant une force de poussée permettant le franchissement du canal pelvi-génital. Le col et le bassin sont franchis grâce aux contractions utérines tandis que la phase d'expulsion nécessite en plus des efforts d'expulsion maternels. Les contractions utérines vont aussi permettre les mouvements de rotation du fœtus lors de la confrontation avec le bassin. Ces contractions utérines qui surviennent lors du travail sont :

- involontaires,
- intermittentes et régulières avec une fréquence moyenne de 4 contractions toute les 10 minutes,
- de durée stable d'environ 80 secondes, entrecoupées de périodes de repos,
- progressives dans leur durée et leur intensité, variant de 35 mmHg en début de travail à 49 mmHg en fin de travail (voir table 2.1),
- douloureuses.

Lors d'une contraction, le col utérin se durcit, son grand axe se redresse et se rapproche de la paroi antérieure.

#### i) La dilatation du col utérin

La dilatation est la première phase de l'accouchement qui démarre avec l'apparition des premières contractions utérines régulières (plus de deux contractions par 10 minutes). La fréquence et l'intensité de ces contractions augmentent (voir table 2.1) et permettent à la fois l'effacement et la dilatation du col de l'utérus (voir figure 2.10).

Dilatation (cm)	3-4	4-6	6-8	8-10	Expulsion
Tonus de base (mmHg)	$5 \pm 3$	$6 \pm 4$	$8 \pm 5$	$8 \pm 5$	$9 \pm 4$
Limites sup. (mmHg)	11	14	18	17	—
Intensité totale des contractions utérines (mmHg)	<b><math>35 \pm 12</math></b>	$42 \pm 14$	$47 \pm 16$	$48 \pm 16$	<b><math>49 \pm 16</math></b>
Fréquence des contractions utérines (par 10 min.)	$3.8 \pm 1.7$	$3.8 \pm 1.5$	$4 \pm 1.6$	$4.1 \pm 1.4$	$4.4 \pm 1.6$
Durée de la contraction utérine (sec.)	$82 \pm 31$	$86 \pm 24$	$86 \pm 19$	$83 \pm 19$	$74 \pm 16$

Tab. 2.1. – Caractéristiques des contractions utérines au cours de l'accouchement normal [Schaal, 2007].

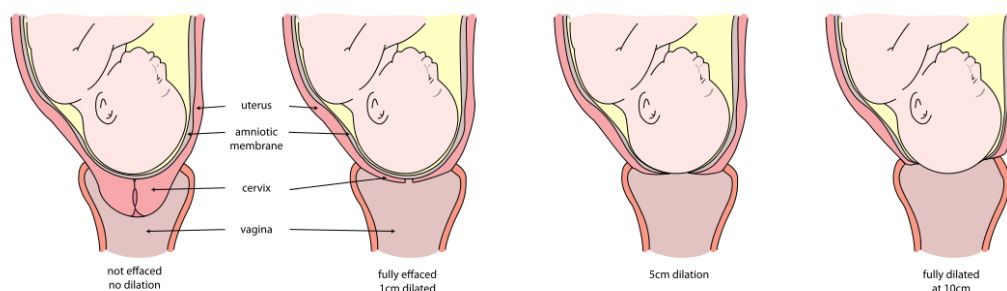


FIGURE 2.10. – Dilatation du col de l'utérus (Wikipedia).

Tout au long de la grossesse, le col utérin reste fermé et a une longueur de 30 à 40 mm. À la fin de la grossesse, le col se ramollit, se raccourcit pour atteindre environ 13 mm, se dilate et passe d'une position postérieure à une position antérieure. À environ 10 cm, le col est assez ouvert pour permettre le passage de la tête fœtale.

Cette première étape de travail est elle même décomposée en deux parties.

- La phase de latence débute après l'effacement complet du col (mais les deux phénomènes peuvent être concomitants chez la femme multipare, c'est à dire qui a déjà accouché). Cette phase lente correspond au début du travail avec deux contractions par dix minutes. Variant de huit à six heures chez le primipare à six à trois heures chez la multipare, elle constitue la phase la plus longue. À la fin de cette phase, le col a une ouverture d'environ 2-3 cm.
- La phase active se caractérise par une dilatation rapide du col se situant aux alentours de 3 cm par heure. Vient ensuite une phase de décélération

au delà d'une dilatation de 8 cm qui marque la deuxième phase du travail.

## ii) L'expulsion

L'expulsion constitue la seconde phase du travail qui débute au moment où le fœtus s'engage dans la filière pelvienne en traversant le détroit supérieur. Lors de cette première étape appelée l'engagement, le mouvement du fœtus résulte de la force transmise par les contractions utérines. Celles-ci ont une fréquence plus élevées (une toutes les 2 minutes) et une durée plus longue que lors de la première phase du travail. La force appliquée par ces contractions vont pousser le fœtus contre la symphyse pubienne car l'axe orthogonal au plan du détroit supérieur et celui résultant des contractions ne concordent pas. Cette discordance va nécessiter de la part du fœtus des mouvements compliqués notamment au niveau de la tête que nous détaillerons dans la section 2.2.3. La phase d'expulsion se termine lorsque le fœtus aura été expulsé de l'abdomen maternel.

## iii) La délivrance

La délivrance est la dernière étape du processus d'accouchement où le placenta est expulsé. Celle-ci débute dès la sortie du fœtus et se termine lors du détachement de la paroi interne utérine du placenta. Cette phase ne dure que quelques minutes et ne nécessite généralement qu'une seule contraction.

### 2.2.2 Les différentes formes d'accouchement

Lorsque l'accouchement se déroule sans que la trajectoire du fœtus ne soit perturbée par l'intervention du médecin, celui-ci est dit eutocique. Les différents accouchements eutociques diffèrent par la variabilité de présentation du fœtus dans le canal pelvi-génital. On distingue trois catégories de présentations :

- La présentation du sommet, la plus fréquente, concerne 95 % des cas. Le fœtus arrive la tête la première par le sommet en flexion totale par rapport à la colonne vertébrale. Il existe trois variations de cette présentation : la présentation de face où la tête fœtale est en extension et les présentations de front et de bregma qui correspondent aux positions intermédiaires des deux premières.
- La présentation podalique ou position de siège lorsque la partie basse comprenant les fesses et les jambes se présente en premier. Ce type de présentation représente 2,5 % des cas.
- La présentation transverse où le fœtus se présente de biais avec les épaules en premier. Ce dernier cas ne représente que 0,5 % des accouchements.

### 2.2.3 Comportement de la tête fœtale durant l'accouchement

Le tête fœtale est la structure qui va guider la descente fœtale et celle qui va subir les mouvements et les déformations les plus complexes lors de la seconde phase du travail. La tête fœtale doit en effet s'adapter aux dimensions et à la forme du détroit supérieur. Les dimensions du détroit supérieur les plus favorables sont les obliques et celles de la tête fœtale sont le sous-occipito-bregmatique et le bipariétal. Le sommet de la tête fœtale doit donc s'orienter en oblique et se fléchir pour franchir le détroit supérieur. L'adaptation de la tête fœtale à celui-ci comprend quatre mouvements :

- la flexion céphalique,
- l'orientation en oblique,
- l'inclinaison latérale (ou asynclitisme),
- les déformations plastiques du crâne.

#### i) Variétés de présentation

La tête fœtale peut se présenter de plusieurs façons appelées variétés et correspondant à la position de la tête dans le plan coronal (voir figure 2.11). Il y a une prédominance des variétés de position impliquant l'oblique gauche du à l'asymétrie de l'utérus et à une dimension supérieure de quelques millimètres de l'oblique gauche par rapport au droit. Le praticien peut déterminer le type de variété en pratiquant un toucher vaginal pour localiser les fontanelles antérieures et postérieures ou en réalisant une échographie [Riethmuller et al., 2004].

#### ii) Rotation intrapelvienne

La rotation de la tête fœtale survient dans le deuxième temps de la phase d'expulsion, juste après l'engagement et en préparation du dégagement. Cette rotation est une nécessité anatomique car le grand diamètre de la tête fœtale (*c-à-d* le SOB ou Sous-Occipito-Bregmatique) est engagé dans un axe oblique alors que le diamètre de dégagement est imposé par la forme de la fente périnéo-vulvaire dont le grand axe est antéro-postérieur. Cette configuration oblige la tête à tourner dans l'excavation du bassin pour faire coïncider le SOB avec le diamètre pubo-coccygien.

#### iii) Déformation plastique

Les déformations plastiques dépendent de la malléabilité des os, de la variété de présentation et de la forme générale du bassin. La forme de la tête passe d'une forme quasiment circulaire à une forme plus elliptique durant le travail. Ces déformations ont lieu dès la première phase du travail quand le crâne est soumis aux pressions

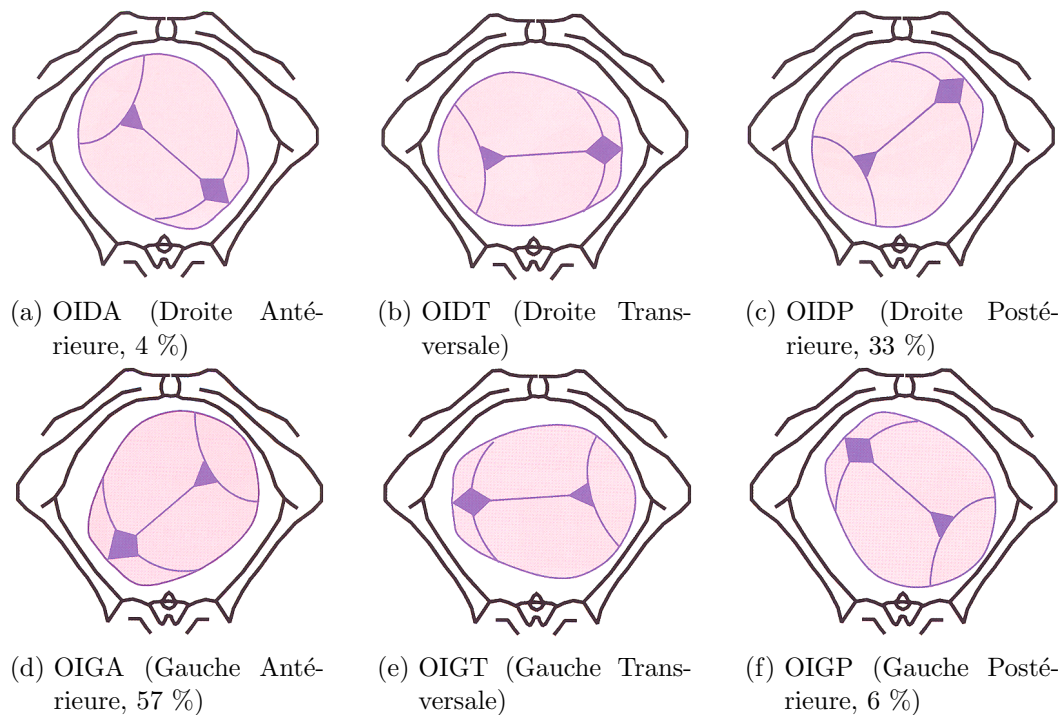


FIGURE 2.11. – Variétés de présentations de la tête fœtale (OI : Occipito-Iliaque) [Schaal, 2007].

externes exercées par le col utérin [Sorbe and Dahlgren, 1983]. Des déformations excessives peuvent survenir lorsque le travail est long, les contractions trop fortes ou lors de l'utilisation d'instruments d'extractions tels que les forceps ou les ventouses. Celles-ci peuvent alors causer des lésions osseuses, de la dure-mère, des vaisseaux sanguins, voire des hémorragies intracrâniennes [Govaert et al., 1992, Avrahami et al., 1993, Govaert, 1993].

Sorbe and Dahlgren [1983] proposent une étude photographique des déformations de la tête fœtale sur 319 accouchements par voie basse. Des photos ont été prises immédiatement après l'accouchement puis trois jours après. Six différents diamètres ont été mesurés par une méthode photographique à ces deux moments. Ceux dont la variation de longueur sont significatives sont reportés dans le tableau 2.2.

#### 2.2.4 Accouchements instrumentés

On entend par accouchements instrumentés des accouchements où l'extraction du fœtus par les voies naturelles s'effectue au moyen d'un instrument adapté [Schaal, 2007]. On parle aussi d'extractions instrumentés. En pratique, les deux

Diamètre (cm)	Longueur initiale (mm)	Variation (mm)
sous-occipito-bregmatique (SOB)	117.1	-1.70
maxillo-vertical (MV)	140.5	+1.90
orbito-vertical (OV)	126.9	+2.20

Tab. 2.2. – Diamètres initiaux et leurs variations moyennes [Sorbe and Dahlgren, 1983].

types d'instruments les plus utilisés à l'heure actuelle sont les forceps et les ventouses.

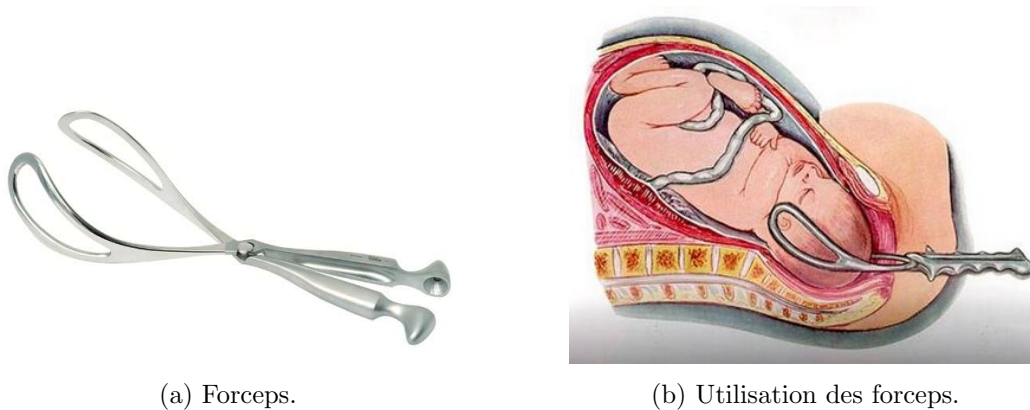
### i) Forceps

**Principes** Les forceps sont des instruments d'extraction du fœtus hors des voies génitales lors d'un accouchement. Le nouveau né est saisi à l'intérieur des voies génitales à l'aide d'une pince à branches démontables appelées cuillères (voir figure 2.12a). La manipulation de cette pince doit accompagner l'extraction du nouveau né de telle sorte que tous les mouvements que celui-ci devrait effectuer physiologiquement au cours d'un accouchement eutocique du seul fait des contraction utérines soient possibles.

Le forceps est un instrument de préhension dont le point maximum de force se situe au bec des cuillères. L'opérateur glisse les cuillères l'une après l'autre à l'intérieur du vagin d'abord, puis le long du crâne fœtal à l'intérieur de l'utérus, selon une disposition précise qui évite les lésions de la tête et de la face de l'enfant (voir figure 2.12b). On réalise ensuite des tractions régulières, modérées et correctement orientées sur l'instrument, de manière à aider l'enfant dans sa descente et son expulsion des voies génitales. Lors d'une application symétrique, ces dernières appuient sur les malaires du fœtus qui sont soutenues par les os à la base du crâne. Cette force d'écrasement devient dangereuse au delà d'une traction de 30 kg [Lowe, 1987]. La préhension qui doit être parfaitement symétrique nécessite la connaissance parfaite par le praticien de la présentation, sa variété et son orientation.

**Complications** Les complications maternelles de l'utilisation des forceps sont essentiellement des dégâts des voies génitales. Une étude de Claris et al. [1990] effectuée parmi 427 accouchements réalisés avec forceps recensent 4 % de plaies vaginales et 3 % de déchirures complètes du périnée. Toutefois cette même étude ainsi que celle de Meyer et al. [2000] concluent que l'utilisation de forceps ne provoque pas de complications maternelles majeures comparée à un accouchement par voies basses normal.





(a) Forceps.

(b) Utilisation des forceps.

FIGURE 2.12. – Forceps : instrument et utilisation.

Les complications fœtales par contre peuvent être très graves car elles portent sur le pôle encéphalique de l'enfant [Schaal \[2007\]](#). Parmi ces complications, les principales sont

- des échy-moses et abrasions cutanées qui surviennent une fois sur deux,
- des lésions du crâne avec des hématomes limités par les sutures qui régressent en quelques semaines et concernent environ 5 % des cas,
- des fractures du crâne,
- des hémorragies intra-craniennes,
- des lésions oculaires,
- des paralysies faciales.

## ii) Ventouse obstétricale

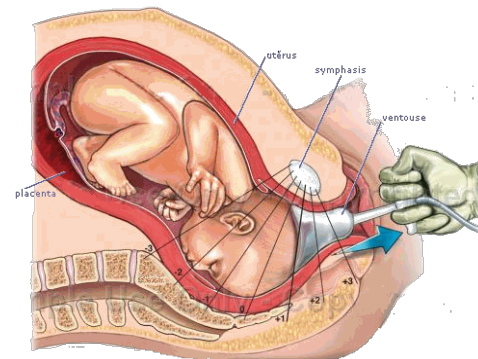
**Principe** La ventouse est une simple cupule métallique ou siliconée placée sur la voûte crânienne de l'enfant après l'avoir introduit dans le vagin maternel (voir figure 2.13a). Son principe est d'adhérer à la présentation fœtale sous l'effet de la pression atmosphérique s'appliquant sur l'extérieur de la cupule à l'intérieur de laquelle une dépression a été créée par une pompe à vide.

L'opérateur agit sur cet instrument par l'intermédiaire d'un fil de traction solidaire de la cupule (voir figure 2.13b). Contrairement aux forceps, cet instrument ne permet pas d'exercer une traction sur l'enfant pour le tirer hors des voies génitales féminines. Il sert essentiellement à fléchir la tête de l'enfant, réduisant alors les dimensions du pôle céphalique fœtal, pour permettre une progression plus facile. La ventouse est donc un instrument de flexion et de rotation et non de traction.

**Complications** Les complications concernent surtout le fœtus et la plupart sont bénignes. La plus fréquente est une bosse séro-sanguine qui disparaît habituellement



(a) Ventouse obstétricale.



(b) Utilisation d'une ventouse obstétricale.

FIGURE 2.13. – Ventouse obstétricale : instrument et utilisation.

au bout de 24 à 48 heures. Les autres complications plus graves sont :

- les excoriations (écorchures) cutanées favorisées par une application prolongée de la ventouse,
- les hémorragies intra-cérébrales plus fréquentes chez les prématurés,
- les hématomes diffus du cuir chevelu qui sont les plus graves et peuvent entraîner la mort mais qui restent toutefois exceptionnelles.

## 2.3 Conclusion

Les organes intervenants lors de l'accouchement sont de natures différentes (muscles, os, membranes fibreuses, ...). De plus ils n'ont pas la même importance au sein d'une modélisation visant à développer un simulateur d'apprentissage du geste médical de l'accouchement. Nous pouvons dire que les deux structures les plus importantes sont la tête fœtale et le bassin. En effet, la tête fœtale constitue la partie la plus large qui doit passer dans la cavité pelvienne et qui sert de guide au reste du fœtus à travers celle-ci. La tête fœtale subit de grandes déformations notamment par son contact avec le bassin pouvant donner lieu à des lésions.

Ces considérations de natures et d'importances des organes pelviens vont nous guider tout au long de notre choix de modèles biomécaniques adaptés pour chaque organe en tenant compte de la contrainte d'interactivité nécessaire dans un simulateur d'apprentissage. Dans cette optique, nous allons présenter dans le chapitre suivant un état de l'art de la modélisation des objets déformables et plus particulièrement des tissus mous dans un contexte biomédical.

## Bibliographie

- E. Avrahami, E. Frishman, and M. Minz. Ct demonstration of intracranial haemorrhage in term newborn following vacuum extractor delivery. *Neuroradiology*, 35(2) :107–108, 1993. ISSN 0028-3940. doi : 10.1007/BF00593964. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF00593964>. 24
- WE Caldwell and HC Moley. Anatomical variations in the female pelvis : Their classification and obstetrical significance :(section of obstetrics and gynæcology). *Proceedings of the Royal Society of Medicine*, 32 (1) :1, 1938. v, 14, 16
- O Claris, P Audra, G Mellier, G Putet, and B Salle. Les risques du forceps : le point de vue du pédiatre et de l'obstétricien. *Revue française de gynécologie et d'obstétrique*, 85(10) :549–551, 1990. 25
- P. Govaert, P. Vanhaesebrouck, C. Praeter, K. Moens, and J. Leroy. Vacuum extraction, bone injury and neonatal subgaleal bleeding. *European Journal of Pediatrics*, 151(7) :532–535, 1992. ISSN 0340-6199. doi : 10.1007/BF01957762. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01957762>. 24
- Paul Govaert. *Cranial haemorrhage in the term newborn infant*, volume 129. Cambridge University Press, 1993. 24
- Pierre Kamina. *Anatomie clinique : Tome 1, Anatomie générale, membres*. Anatomie clinique. Maloine, 4e édition edition, 2009. v, 16, 19
- Barry Lowe. Fear of failure : a place for the trial of instrumental delivery. *BJOG : An International Journal of Obstetrics & Gynaecology*, 94(1) :60–66, 1987. 25
- S Meyer, P Hohlfeld, C Achtari, A Russolo, and P de Grandi. Birth trauma : short and long term effects of forceps delivery compared with spontaneous delivery on various pelvic floor parameters. *BJOG : An International Journal of Obstetrics & Gynaecology*, 107(11) :1360–1365, 2000. 25
- D Riethmuller, P Roth, A Martin, R Maillet, and JP Schaal. Benefits of ultrasonography in the delivery room. *Gynecol Obstet Fertil*, 32(5) :427–432–, May 2004. URL <http://europepmc.org/abstract/MED/15177215>. 23
- J.P. Schaal. *Mécanique et Techniques Obstétricales*. Sauramps Médical, 2007. ISBN 9782840234715. v, ix, 12, 15, 17, 21, 24, 26
- B. Sorbe and S. Dahlgren. Some important factors in the molding of the fetal head during vaginal delivery - a photographic study. *International Journal of Gynecology & Obstetrics*, 21(3) :205 – 212, 1983. ISSN 0020-7292. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7292\(83\)90081-4](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7292(83)90081-4). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020729283900814>. v, ix, 18, 24, 25
- R Yiou, P Costa, F Haab, and V Delmas. Functional anatomy of the pelvic floor]. *Progrès en urologie : journal de l'Association française d'urologie et de la Société française d'urologie*, 19(13) :916, 2009. 15

# CHAPITRE 3

## THÉORIES ET TECHNIQUES DE MODÉLISATION DES TISSUS MOUS

All models are wrong, but some are  
useful.

George E. P. Box

### Sommaire

<b>3.1 Mécanique des milieux continus</b> . . . . .	<b>31</b>
3.1.1 Cinématique . . . . .	31
3.1.2 Tenseur des déformations . . . . .	33
3.1.3 Tenseur des contraintes . . . . .	35
3.1.4 Lois de comportement pour les matériaux élastiques linéaires	36
3.1.5 Relation fondamentale de la dynamique . . . . .	38
<b>3.2 Méthodes de résolutions des équations de la MMC</b> . . . . .	<b>38</b>
3.2.1 Méthode des différences finis . . . . .	39
3.2.2 Méthode des éléments finis (MEF) . . . . .	39
3.2.3 Méthode des éléments finis de frontières . . . . .	44
3.2.4 Méthode des masses-tenseurs . . . . .	44
<b>3.3 Méthodes discrètes de modélisation des tissus</b> . . . . .	<b>45</b>
3.3.1 Masses-ressorts . . . . .	46
3.3.2 Mémoire de forme . . . . .	47
3.3.3 Shape matching . . . . .	48
<b>3.4 Conclusion</b> . . . . .	<b>48</b>
<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>50</b>

Le modélisation des tissus biologiques est une problématique interdisciplinaire mettant en œuvre des notions de mécanique, d'informatique, de mathématiques et de sciences du vivant. Elle fait partie plus généralement de la modélisation des solides déformables à laquelle s'ajoute les propriétés spécifiques des tissus biologiques. Il existe une grande variété de modèles [Nealen et al., 2006] dont le choix dépend essentiellement de l'utilisation et de la finalité de la modélisation. Parmi celles-ci on peut citer l'animation physique pour les jeux vidéos ou les jeux sérieux, la caractérisation des tissus en mécanique, le traitement d'image, la simulation interactive à des fins médicales. Dans cette dernière catégorie qui nous intéresse plus particulièrement, on peut citer la modélisation biomécanique pour l'aide au geste en per-opératoire [Payan, 2012, Delingette, 1998, Delingette and Ayache, 2004, Meier et al., 2005], pour le diagnostic ou destinée aux simulateurs médicaux d'apprentissage [Gardner and Raemer, 2008, Berkley et al., 2004]. Ces différentes applications n'ont pas les mêmes objectifs, ni les mêmes contraintes. Pour une caractérisation de tissus, le modèle doit être très précis alors que le temps de calcul et l'affichage sont des critères secondaires. À l'inverse, pour un jeu vidéo, l'animation doit être en temps réel et c'est le réalisme physique qui constitue un critère secondaire. De manière générale, il y a toujours un compromis à faire entre la précision du modèle et le temps de calcul.

Dans cette partie nous allons présenter les différents modèles physiques et méthodes de simulation existants en se focalisant sur leurs applications dans le domaine médical. Nous nous intéresserons uniquement aux modèles physiques, dont la caractéristique commune est qu'ils utilisent tous le principe fondamental de la dynamique. Les modèles présentés peuvent être classés en deux catégories : les modèles continus et les modèles discrets. Les modèles continus s'appuient sur les lois physiques de la mécanique des milieux continus (MMC) présentées plus en détail dans la section 3.1. Ils offrent une grande précision mais sont en général gourmands en temps de calcul. Dans ces modèles, la matière est considérée comme continue (*c-à-d* ses propriétés varient progressivement, sans à-coups). Ils se présentent sous la forme d'Équations aux Dérivées Partielles (EDP) qui nécessitent d'être discrétisées pour être résolues numériquement suivant différentes méthodes dont la plus connue est la Méthode des Éléments Finis (MEF). Il est important de noter que ces méthodes ne sont pas spécifiquement dédiées aux équations issues de la mécanique des milieux continus. Les modèles discrets utilisent également des concepts physiques comme la raideur, la viscosité ou la conservation de la quantité de mouvement mais ils ne représentent pas la matière de manière continue et sont intrinsèquement liés à la discrétisation du solide (*c-à-d* que celle-ci influe directement sur le comportement du solide). En général, ces modèles raisonnent directement sur des points ayant une masse, appelées particules, interagissant entre elles plutôt que sur des volumes de matière. Ces points pris comme un ensemble représentent le solide considéré.

## 3.1 Mécanique des milieux continus

Dans cette partie nous présenterons les principales notions de mécanique des milieux continus qui constituera le cadre théorique indispensable à la compréhension de la suite de ce manuscrit.

La mécanique des milieux continus est le domaine de la mécanique qui traite de la déformation des solides mais aussi de l'écoulement des fluides. Nous nous intéresserons ici uniquement à la déformation des solides élastiques qui sont les plus utilisés pour modéliser les tissus mous. Cette théorie permet de formaliser les notions de déformations, de contraintes et les relations entre la déformation du solide et la contrainte qu'il subit. La nature de cette relation, appelée loi de comportement, dépend du matériau : matériaux élastiques linéaires, matériaux hyperélastiques, matériaux viscoélastiques , . . . .

L'hypothèse centrale de la mécanique des milieux continus est celle de la continuité des propriétés caractéristiques d'un milieu (densité, élasticité, . . .). Ce postulat repose sur la constatation que même si lorsqu'on regarde la matière à très petite échelle (nanoscopique) celle-ci est composée de molécules, à l'œil nu elle semble être continue. Il en est donc de même pour ses propriétés qui varient progressivement et sans changements brutaux. Cette hypothèse permet d'utiliser les outils mathématiques décrivant des fonctions continues et dérivables.

Dans cette partie, nous présenterons la théorie de l'élasticité linéaire sur laquelle nous nous appuyerons pour la suite de ce manuscrit.

### 3.1.1 Cinématique

#### i) Configuration

Dans la représentation lagrangienne, on appelle configuration d'un solide un ensemble de points matériel du solide à un temps donné. Mathématiquement, c'est un homéomorphisme d'un solide dans une région de l'espace Euclidien tridimensionnel. Deux configurations sont particulièrement importantes :

- la configuration initiale (ou non-déformée)  $\Omega_0$  qui correspond à l'état du solide considéré au temps  $t_0$ ,
- la configuration courante  $\Omega$  correspondant au temps  $t$ .

#### ii) Déformation

Une déformation est une relation, réversible dans le cas de l'élasticité, entre deux configurations que l'on notera  $\varphi$ . Celle-ci inclut le mouvement rigide du solide

### 32 Chapitre 3. Théories et techniques de modélisation des tissus mous

ainsi que les changements de forme et de volume. On a donc :

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  est la position courante au temps  $t$  et  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$  la position initiale au temps  $t_0$ . Dans le cas 3D ( $d = 3$ ) on a  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  et  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ . La figure 3.1 illustre l'effet de l'application du champ de déformation  $\varphi$  sur un solide en deux dimensions.

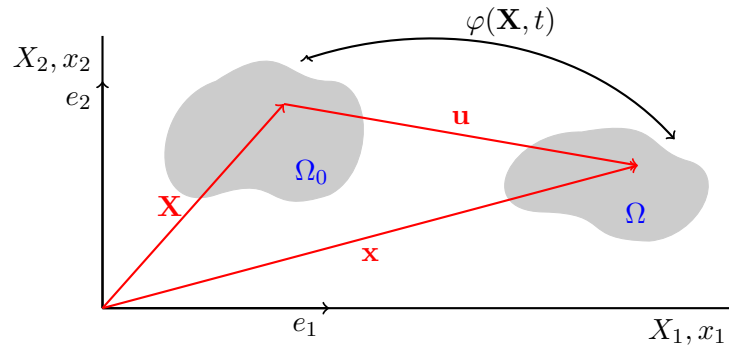


FIGURE 3.1. – Configuration initiale (non déformée) et courante (déformée) d'un solide.

Une variable importante dans la caractérisation de la déformation d'un solide est le gradient de déformation défini par :

$$\mathbf{F} = \nabla\varphi = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}} \quad , \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (3.2)$$

Le gradient de déformation  $\mathbf{F}$  est la jacobienne du mouvement défini par  $\varphi$ . Son déterminant est noté  $J = \det \mathbf{F}$ .

L'application  $\varphi(\mathbf{X}, t)$  doit satisfaire les conditions suivantes :

- $\varphi(\mathbf{X}, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,
- $\varphi(\mathbf{X}, t)$  est bijective,
- $J > 0$ .

#### iii) Déplacement

Le déplacement d'un point matériel est un vecteur noté  $\mathbf{u}$  défini comme la différence entre la position initiale du point considéré et sa position courante. On a donc :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad , \quad u_i = x_i - X_i \quad (3.3)$$

On définit également le gradient du déplacement :

$$\nabla \mathbf{u} = \nabla(\mathbf{x} - \mathbf{X}) = \nabla(\varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{X}) = \mathbf{F} - \mathbf{Id} \quad , \quad \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = F_{ij} - \delta_{ij} \quad (3.4)$$

### 3.1.2 Tenseur des déformations

Le tenseur des déformations sert à décrire l'état de déformation local en considérant la variation de longueur d'un segment après une déformation subie par le solide. L'état de déformation d'un solide est donc représenté par un champ tensoriel appelé champ de déformation. Si on définit deux points matériels  $\mathbf{X}_A$  et  $\mathbf{X}_B$  d'un solide dans sa configuration initiale  $\Omega_0$ , on a, suivant l'équation 3.1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_A &= \varphi(\mathbf{X}_A) \\ \mathbf{x}_B &= \varphi(\mathbf{X}_B) \end{aligned}$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= \mathbf{x}_A + \mathbf{F} \cdot \mathbf{X}_{AB} + o(\|\mathbf{X}_{AB}\|) \\ \mathbf{x}_{AB} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{X}_{AB} + o(\|\mathbf{X}_{AB}\|) \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{X}_{AB} = \mathbf{X}_B - \mathbf{X}_A$ , et on obtient au premier ordre :

$$\|\mathbf{x}_{AB}\|^2 - \|\mathbf{X}_{AB}\|^2 = \mathbf{X}_{AB}^\top (\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} - \mathbf{Id}) \mathbf{X}_{AB}$$

On définit ainsi le tenseur de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  comme :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} - \mathbf{Id}) \quad (3.5)$$

Il s'agit d'un tenseur symétrique réel d'ordre 2, donc diagonalisable dans une base orthonormée dont les vecteurs propres sont appelées directions principales de déformation.

En utilisant la relation 3.4, on a

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^\top \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top) \quad , \quad E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (3.6)$$

On peut noter dans la relation précédente que le tenseur  $E$  contient une partie non-linéaire qui peut être négligée lorsqu'on travaille en petites déformations. On définit le tenseur des déformations linéarisé  $\varepsilon$  comme :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top) \quad , \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right). \quad (3.7)$$

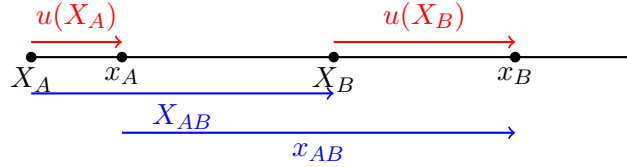


### 34 Chapitre 3. Théories et techniques de modélisation des tissus mous

Comme ce tenseur est symétrique, nous utiliserons la notation de Voigt qui permet de représenter un tenseur symétrique d'ordre 2 sous forme de vecteur dans un espace vectoriel à 6 dimensions :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Si on prend comme exemple la déformation d'un segment en dimension 1, le tenseur des déformations linéarisé  $\varepsilon$  est un scalaire qui représente l'allongement relatif du segment dans la direction de l'axe des abscisses.



L'allongement relatif vaut :

$$\frac{d_a(x_A, x_B) - d_a(X_A, X_B)}{d_a(X_A, X_B)}$$

où  $d_a(.,.)$  désigne la distance algébrique. En utilisant le déplacement, cet allongement peut être formulé par :

$$\begin{aligned} \frac{d_a(x_A, x_B) - d_a(X_A, X_B)}{d_a(X_A, X_B)} &= \frac{d_a(x_A, X_A) + d_a(X_A, X_B) + d_a(X_B, x_B)}{d_a(X_A, X_B)} - 1 \\ &= \frac{u(X_B) - u(X_A) + d_a(X_A, X_B)}{d_a(X_A, X_B)} - 1 \\ &= \frac{u(X_B) - u(X_A)}{d_a(X_A, X_B)} \end{aligned}$$

On reconnaît un taux d'accroissement qui peut être approché au premier ordre par la dérivée :

$$\frac{d_a(x_A, x_B) - d_a(X_A, X_B)}{d_a(X_A, X_B)} \simeq \frac{du}{dX}$$

Ceci est cohérent avec l'équation 3.7 en dimension 1. De manière plus générale, en dimension supérieure, les termes diagonaux  $\varepsilon_{ii}$  du tenseur des déformations linéarisé représentent l'allongement relatif dans la direction  $e_i$  et on a :

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_i} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial X_i}$$

### 3.1.3 Tenseur des contraintes

Les déformations d'un solide sont le résultat des forces extérieures exercés sur celui-ci comme la gravité (force volumique) ou des forces de pressions (forces surfaciques) qui créeront en retour des forces internes à l'objet. La notion de contrainte (ou d'effort) permet de rendre compte de l'action de telles forces sur un solide continu.

Pour traduire les efforts internes en un point  $M$  d'un solide, on utilise un vecteur des contraintes  $\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{n})$  qui dépend de la position  $\mathbf{X}$  du point considéré et de la normale  $\mathbf{n}$  de la frontière du milieu. Celui-ci représente la force exercée sur un élément d'aire  $dS$  autour du point  $M$ . Il s'agit d'une force par unité de surface, homogène à une pression dont l'unité est le Pascal (Pa).

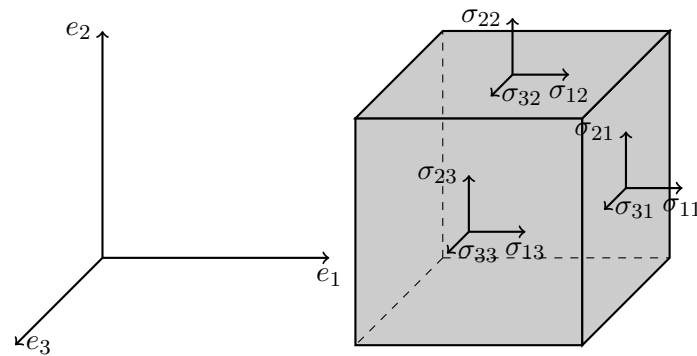


FIGURE 3.2. – Composantes du tenseur des contraintes  $\sigma$  en 3 dimension.

Considérons un cube de matière du solide dont les arêtes de longueur  $l$  sont parallèles au repère  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  comme illustré à la figure 3.2. On note  $\mathbf{F}_j$  le vecteur force qui agit sur la face normale à  $e_j$ . On a donc :

$$\mathbf{F}_j = \begin{pmatrix} F_{1j} \\ F_{2j} \\ F_{3j} \end{pmatrix}$$

avec  $F_{ij}$  la composante selon  $e_i$  du vecteur force agissant sur la face normale à  $e_j$ .

On a :

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{e}_j) = \frac{\mathbf{F}_j}{l^2} \quad (3.9)$$

Comme les termes de surface doivent s'équilibrer, on a :

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{n}) = \sum_{j=1}^3 n_j \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{e}_j) \quad (3.10)$$

### 36 Chapitre 3. Théories et techniques de modélisation des tissus mous

ou les  $n_j$  sont les composantes de  $\mathbf{n}$ . Le vecteur des contraintes dépend linéairement de  $\mathbf{n}$  : il s'agit donc d'une application linéaire à laquelle on va pouvoir associer un tenseur.

On peut définir les neuf composantes de ce tenseur  $\sigma$  d'ordre 2 appelé tenseur de Cauchy tel que  $\sigma(\mathbf{X})e_i = \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{e}_i)$  :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Ce tenseur permet de décrire l'état de contrainte ou des efforts intérieurs en tout point du solide et dans toutes les directions. L'état de contrainte d'un solide est donc représenté par un champ tensoriel appelé champ de contraintes. Les termes diagonaux correspondent à des tractions et les termes non diagonaux à du cisaillement.

À l'équilibre, les lois de conservation de la quantité de mouvement et du moment angulaire permettent de démontrer que le tenseur  $\sigma$  est symétrique et donc  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Comme pour le tenseur des déformations, grâce à cette symétrie on peut utiliser la notation de Voigt :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

L'espace des contraintes devient ainsi un espace vectoriel à 6 dimensions.

#### 3.1.4 Lois de comportement pour les matériaux élastiques linéaires

Les lois de comportement permettent de caractériser un matériau par sa relation entre les contraintes et les déformations. Nous traiterons ici du comportement élastique d'un solide. Une déformation élastique est une déformation réversible : le milieu retourne à son état d'origine quand on supprime toute sollicitation externe. Les lois de comportement élastiques vont nous permettre de lier l'état de contrainte d'un solide modélisé par le tenseur des contraintes à son état de déformation modélisé par le tenseur des déformations. On distingue deux grandes catégories de comportement élastiques : l'élasticité linéaire qui concernent des petites déformations proportionnelles à la sollicitation et l'élasticité non-linéaire ou hyper-élasticité dans le cas de grandes déformations. Quand les déformations deviennent trop importantes, la limite élastique du solide est atteinte et celui-ci entre dans une phase de plasticité et ne revient pas à son état d'origine quand on cesse de le

solliciter. Si on continue de le solliciter, on atteint la limite de rupture. La courbe contrainte-déformation (figure 3.3) permet de visualiser la réponse d'un matériau aux sollicitations.

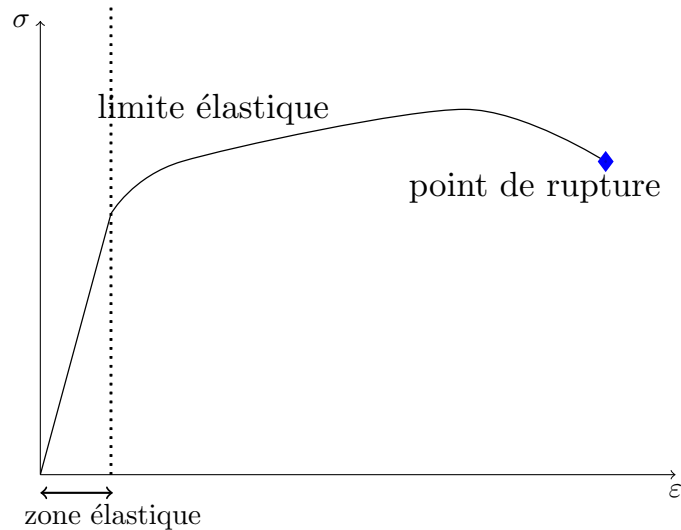


FIGURE 3.3. – Exemple de courbe contrainte-déformation.

Le comportement linéaire d'un solide a été formalisé par Robert Hooke en 1678 par la loi qui porte son nom. Elle a été énoncée par la phrase en latin : *ut tensio sic vis* qui signifie que l'allongement est proportionnel à la force. Cette loi permet d'évaluer le comportement des solides soumis à des déformations de faible amplitude. Elle s'exprime de la manière suivante :

$$\sigma = \mathbf{C} : \varepsilon \quad , \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.13)$$

où  $\mathbf{C}$  est un tenseur d'ordre 4 appelé tenseur d'élasticité avec 81 coefficients élastiques. Toutefois la symétrie des tenseurs de contrainte et de déformation permet de montrer que le tenseur d'élasticité est décrit par 21 nombres. Dans le cas où tous ces coefficients sont non nuls, le matériau est totalement anisotrope, c'est à dire qu'il réagit différemment selon la direction dans laquelle il est sollicité. Nous nous limiterons ici au cas isotrope dans lequel la matière répond de manière identique aux sollicitations dans toutes les directions, cas le plus utilisé en pratique. Dans ce cas, on a alors :

$$\sigma = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr}(\varepsilon) \mathbf{Id} \right) \quad , \quad \sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (3.14)$$

où  $E$  est le module d'Young (ou module d'élasticité), exprimé en unité de pression, caractéristique du matériau qui relie la contrainte à la traction.  $\nu$  est le coefficient de Poisson, un nombre sans unité permettant de caractériser la contraction de la matière perpendiculairement à la direction de l'effort appliqué.

Il est important de noter qu'un comportement linéaire doit être entendu comme une approximation linéaire issue d'un développement limité au premier ordre. En réalité, la loi de comportement n'a aucune raison d'être linéaire, mais par contre, chaque élément infinitésimal de matière se déforme lui de manière linéaire. C'est pour cette raison que la loi de Hooke n'est valable que dans le cas de petites déformations.

### 3.1.5 Relation fondamentale de la dynamique

Maintenant que nous avons défini la notion de déformations, de contraintes et leur relation par les lois de comportements, nous allons utiliser la relation fondamentale de la dynamique afin de pouvoir exprimer l'accélération d'un point à partir des contraintes.

Le bilan de la quantité de mouvement pour un volume  $V$  prend la forme :

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho \mathbf{v} - \mathbf{f}) = \int_V (\rho \mathbf{a} - \mathbf{f}) = \int_{dV} \sigma \mathbf{n} \quad (3.15)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $\mathbf{v}$  la vitesse,  $\mathbf{a}$  l'accélération,  $\mathbf{n}$  est la normale extérieur du volume considéré et  $dV$  sa frontière.

En utilisant le théorème de flux-divergence, cette dernière relation devient :

$$\int_V (\rho \mathbf{a} - \mathbf{f}) = \int_V \operatorname{div} \sigma \quad (3.16)$$

Comme cette relation est vraie pour n'importe quel volume  $V$ , on a finalement :

$$\rho \mathbf{a} = \operatorname{div} \sigma + \mathbf{f} \quad (3.17)$$

## 3.2 Méthodes de résolutions des équations de la MMC

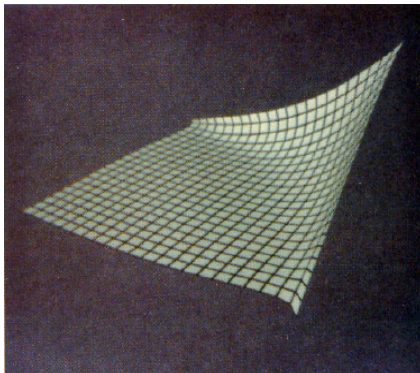
Comme nous l'avons vu, un problème en MMC se formalise sous forme d'Equations aux Dérivées Partielles (EDP) représentant le comportement analytique du problème physique. Comme on ne peut pas, hormis dans des cas très simples, résoudre ces EDP analytiquement, on va utiliser des méthodes permettant de les résoudre numériquement. Ces méthodes présentées ci-après permettent de résoudre

de manière discrète une EDP dont on cherche une solution approchée « suffisamment » fiable. Mathématiquement, on va passer d'une EDP à un système d'équations algébriques. Cette discrétisation repose sur un maillage du domaine dont les points sont appelés des nœuds.

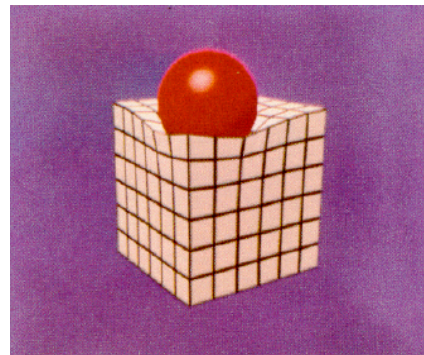
### 3.2.1 Méthode des différences finis

Le méthode des différences finies est la méthode la plus simple à mettre en œuvre lorsqu'on cherche une solution approchée à une EDP. Elle consiste à approcher les opérateurs de dérivation spatial d'un nœud en fonction des valeurs des nœuds adjacents sur maillage régulier. La relation qui relie un nœud à ses voisins est appelée un schéma numérique. L'application de celui-ci en chaque nœud du maillage résulte en un système d'équations algébriques.

Terzopoulos et al. [1987] présente des énergies de déformations pour les courbes, les surfaces et les solides en s'appuyant sur la théorie de l'élasticité. Il propose ensuite de discrétiser les EDP résultantes en utilisant la méthode des différences finies (figure 3.4). Cependant cette solution est limitée par la nécessité d'avoir une grille régulière.



(a) Surface élastique



(b) Balle sur un solide déformable

FIGURE 3.4. – Simulation de déformations élastiques avec la méthode des différences finies [Terzopoulos et al., 1987].

### 3.2.2 Méthode des éléments finis (MEF)

La méthode des éléments finis est la méthode de résolution discrète des EDP la plus répandue notamment pour les problèmes de mécanique. Elle repose sur deux concepts essentiels que sont la formulation variationnelle du problème et le maillage du domaine. La formulation variationnelle permet d'affaiblir les conditions d'existence (notamment de dérivabilité) de la solution par rapport au problème

initial. L'espace d'approximation correspond au maillage du domaine compact avec des polyèdres convexes (triangles, quadrangles, tétraèdres, hexaèdres, ...) appelés éléments finis. En plus de sa géométrie, un élément fini dispose d'un espace de fonctions sur son domaine et d'un ensemble de formes linéaires définies à chacun de ses nœuds permettant d'interpoler la solution. Les équations issues de la formulation variationnelle sont calculées sur un élément de référence et transposées à ceux du maillage en utilisant la jacobienne de la transformation. Nous allons détailler plus en profondeur cette méthode car les modèles utilisés dans ce travail se baseront sur celle-ci.

### i) Principe général de la MEF

**Discrétisation du domaine** La méthode des éléments finis requiert un découpage du domaine considéré selon un maillage conforme mais pas nécessairement structuré ou régulier (voir figure 3.5). Ce type de maillage permet à la différence des éléments finis de raffiner le maillage aux endroits d'intérêt et ainsi d'obtenir une solution qui se rapprochera d'autant plus de la « vraie » solution de l'équation aux dérivées partielles que les éléments seront de petites tailles. En 2 dimensions, la plupart du temps, ce maillage est constitué d'éléments triangulaires ou quadrangulaires appelés éléments finis.

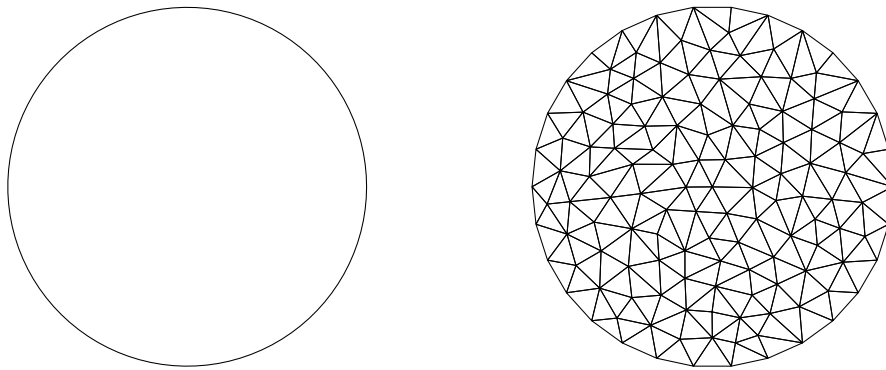


FIGURE 3.5. – Maillage triangulaire d'un domaine circulaire.

Un élément fini est défini comme un triplet  $(K, P_K, \Sigma_K)$  où

- $K$  est un domaine géométrique,
- $P_K$  est un espace de fonctions sur  $K$  formant l'espace des fonctions de base (ou fonctions de forme ou fonctions d'interpolation),
- $\Sigma_K$  est un ensemble de formes linéaires sur  $P_K$  formant les degrés de liberté.

En pratique, un élément fini devra aussi vérifier les conditions suivantes :

- le domaine géométrique  $K$  est non-dégénéré,
- l'espace des fonctions de formes est de dimension fini,
- l'élément est unisolvant (*c-à-d* qu'en spécifiant les valeurs de chaque degré de liberté, on obtient une unique fonction de l'espace des fonctions de forme  $P_k$ .)

Les fonctions de forme sont en général interpolantes où les valeurs aux nœuds sont les inconnues. Les plus utilisés sont les polynômes de Lagrange où les fonctions de formes valent 1 à un nœud et 0 aux autres. La fonction de base  $H_i$  vaudra alors 1 au nœud  $i$  et 0 aux autres (voir figure 3.6).

Une fois le maillage  $T$  construit et muni de sa base  $v = (v_1, \dots, v_n)$  (voir figure 3.7), on peut chercher la solution approchée de l'EDP.

**Problème sous forme matricielle** Les équations de MMC sont posées sur chaque élément  $e$  et pour chacun d'eux, on arrive au système suivant :

$$K_e U_e = F_e \quad (3.18)$$

où  $K_e$  est la matrice de raideur de l'élément  $e$ ,  $U_e$  et  $F_e$  sont respectivement les déplacements et forces externes aux nœuds de l'élément.

Ces différents systèmes sont assemblés pour donner le système global :

$$KU = F \quad (3.19)$$

où  $K$  est la matrice de raideur de l'objet,  $U$  et  $F$  sont respectivement les déplacements et forces externes aux nœuds. Cette matrice de raideur est symétrique définie positive. Chaque nœud reçoit la contribution des éléments adjacents. De ce fait, la matrice  $K$  est creuse.

**Résolution dans le cas statique** Dans le cas statique, le système prend la forme générale :

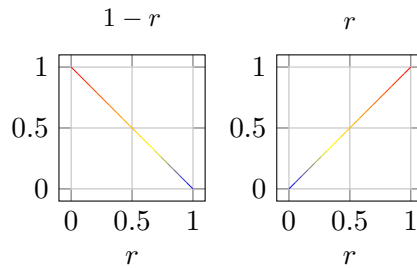
$$K(U)U = F \quad (3.20)$$

La matrice de raideur dépend de  $U$  lorsque l'EDP contient des non-linéarités qui peuvent venir du tenseur des déformations Green-Lagrange quand il n'est pas utilisé sous sa forme linéarisée ou de la loi de comportement pour les matériaux hyperélastiques par exemple. Lorsque c'est le cas, des algorithmes de descente de gradient comme celui de Newton-Raphson sont utilisés pour résoudre le système.

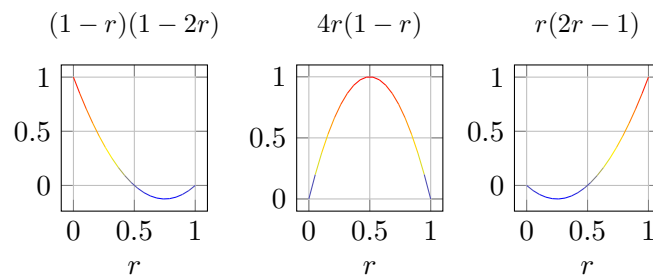
Dans le cas linéaire, le système peut être résolu par deux types de méthodes :

- les méthodes directes qui consistent à inverser la matrice  $K$ . Parmi ces méthodes, on peut citer les décompositions (LU, QR) ou la factorisation de Cholesky.

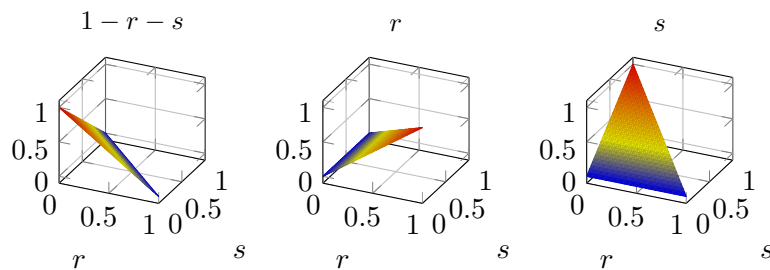




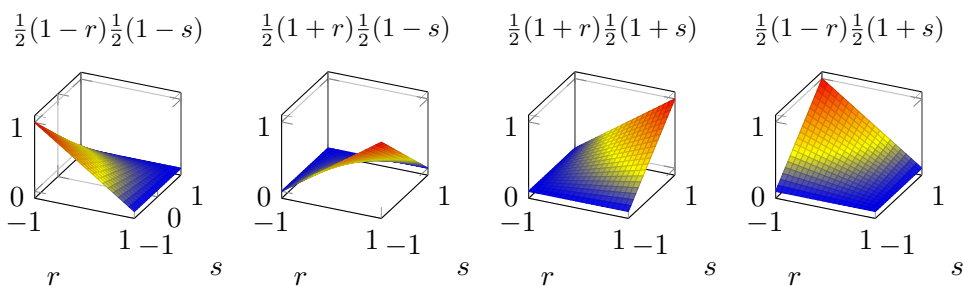
(a) Fonctions d'interpolations  $H_1, H_2$  de l'élément de Lagrange 1D linéaire à 2 nœuds.



(b) Fonctions d'interpolations  $H_1, H_2, H_3$  de l'élément de Lagrange 1D quadratique à 3 nœuds.



(c) Fonctions d'interpolations  $H_1, H_2, H_3$  de l'élément de Lagrange triangulaire linéaire à 3 nœuds.



(d) Fonctions d'interpolations  $H_1, H_2, H_3, H_4$  de l'élément de Lagrange quadrangulaire à 4 nœuds.

FIGURE 3.6. – Fonctions d'interpolations de Lagrange pour différents éléments.

— Les méthodes itératives qui procèdent par itération successives en se rap-

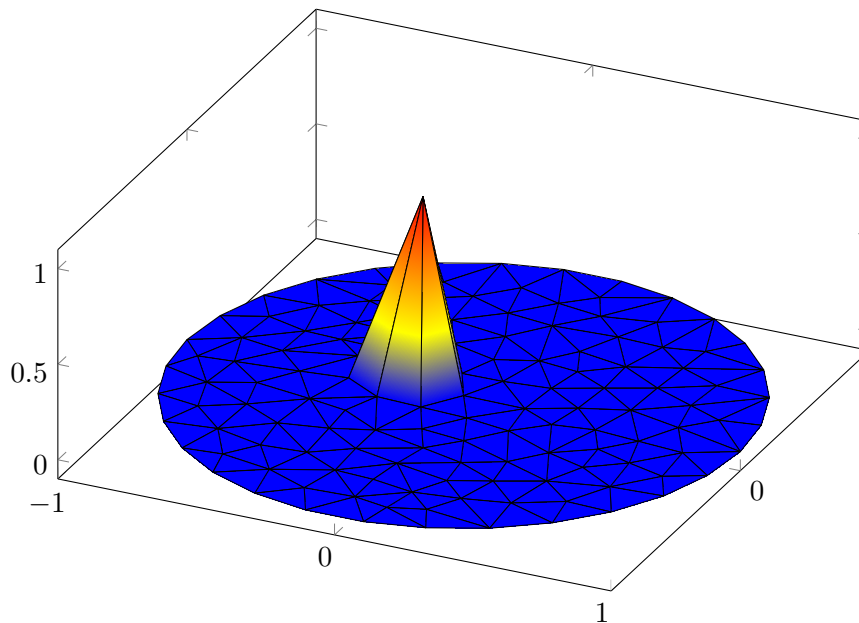


FIGURE 3.7. – Fonction de base du maillage triangulaire formé d'éléments finis triangulaires à 3 nœuds.

prochant de la solution recherchée. Parmi ces méthodes, on les techniques de relaxation de Jacobi ou Gauss-Seidel ou celles de projections comme le Gradient Conjugué (CG).

## ii) Méthodes basées de la MEF

Un des principaux avantages de la MEF par rapport aux différences finies est qu'elle utilise un maillage non structuré et permet le raffinement local. Ainsi, si plus de précision est nécessaire à certains endroits du domaine, il suffit de raffiner le maillage à cet endroit. C'est une méthode qui permet une grande précision mais qui est très consommatrice en temps de calcul. Toutefois, de nombreux auteurs ont proposé des solutions pour accélérer la méthode avec ou sans perte de précision. Ainsi, [Cotin et al. \[1999\]](#) se placent dans le cadre de l'élasticité linéaire et proposent de pré-calculer la matrice de raideur. [Bro-Nielsen and Cotin \[1996\]](#) proposent de condenser cette dernière sur les nœuds de surface pour économiser le temps de calcul de la solution aux nœuds intérieurs. Les approches multi-résolutions se sont aussi révélées très fructueuses en particulier pour les simulations interactives. Ces méthodes sont basées sur une hiérarchie de maillages plus ou moins fin. [Debunne et al. \[2001\]](#) proposent ainsi de raffiner ou de grossir le modèle géométrique au voisinage d'un nœud en fonction d'un critère en utilisant une hiérarchie de maillages construite à partir d'un diagramme de Voronoï. Dans le même esprit, on peut citer

## 44 Chapitre 3. Théories et techniques de modélisation des tissus mous

---

les méthodes d'*embedding* qui consistent à utiliser la MEF sur un modèle grossier et de topologie simple dans lequel on va incorporer un maillage plus complexe et détaillé [Nesme et al., 2009]. Les déplacements des nœuds de ce dernier sont déduits du maillage éléments finis en utilisant les fonctions d'interpolation des éléments.

Le problème du temps de calcul est encore plus grand quand on se place dans l'hypothèse des grandes rotations qui nécessite l'utilisation du tenseur de Green-Lagrange, invariant par rotations. Cependant, celui-ci induit des non-linéarités et donc une matrice de raideur non constante. Pour palier à ce problème, Müller et al. [2002] ont introduit la notion de *stiffness warping* permettant de décomposer le déplacement d'un élément en une rotation rigide et une déformation pure. La matrice de raideur correspondant à la déformation pure reste constante et la rotation de l'élément est estimée à chaque pas. Cependant la décomposition n'est pas unique, Müller and Gross [2004] proposent une approche basée sur une décomposition polaire tandis que Irving et al. [2004] utilisent une décomposition en valeurs singulières (SVD). Choi and Ko [2005] utilise aussi le *modal warping* mais le problème est formulé dans l'espace des fréquences (modal) plutôt que dans l'espace original.

### 3.2.3 Méthode des éléments finis de frontières

Le méthode des éléments finis de frontières fonctionne sur le même principe que la MEF mais permet de s'abstraire du volume de l'objet tout en gardant le comportement d'un solide [James and Pai, 1999]. L'idée de cette méthode est d'utiliser les conditions aux bords pour qu'elles s'accordent aux valeurs aux bords de l'EDP dans sa forme intégrale. Cette méthode est très intéressante quand il n'est pas nécessaire de connaître le déplacement de la matière interne et que l'on s'intéresse uniquement au déplacement de la surface comme en informatique graphique.

### 3.2.4 Méthode des masses-tenseurs

Nous avons vu précédemment que la méthode des éléments finis permet une bonne précision physique et que des méthodes existent pour palier le problème de temps de calcul via par exemple le précalcul de la matrice de raideur dans le cas linéaire. Toutefois, les simulateurs médicaux et spécialement les simulateurs chirurgicaux nécessitent une modification de la topologie du maillage qui oblige à recalculer la matrice de raideur. Pour palier à ce problème, Delingette et al. [1999] ont proposé une formulation permettant de résoudre localement et manière itérative le système d'équations provenant de la MEF.

Sur un maillage tétraédrique, le principe de cette méthode est de calculer les matrices de raideur pour chaque sommet d'un même tétraèdre. À partir de la discrét-

tisation du champ des déplacements sur un élément fini, on peut exprimer l'énergie de déformation de l'élément en fonction des déplacements de ses nœuds, puis dériver cette expression pour obtenir la force élastique exercée sur chacun des sommets. On somme alors toutes les forces qui agissent sur le sommet pour obtenir la résultante en ce point qui sera ensuite intégrée pour obtenir le déplacement du nœud considéré. Pour un nœud  $i$  du maillage, on a :

$$f_i = K_{ii}u_i + \sum_{j \in \mathcal{V}_i} K_{ij}u_j \quad (3.21)$$

où  $K_{ii}u_i$  est la contribution du nœud  $i$  avec  $K_{ii}$  sa matrice de raideur et  $K_{ij}u_j$  est la contribution du nœud  $j$  appartenant au voisinage du nœud  $i$ ,  $\mathcal{V}_i$ , avec  $K_{ij}$  sa matrice de raideur. On peut noter que les matrices de raideur peuvent être précalculées.

Avec cette méthode, on raisonne donc principalement sur les nœuds et non sur les éléments. Ceci permet de gérer les changements de topologie aisément car il suffit de mettre à jour les adjacences entre les éléments ainsi que les tenseurs correspondants.

L'application proposée par [Delingette et al. \[1999\]](#) est un simulateur chirurgical dédié à la chirurgie du foie (voir figure 3.8). D'autres travaux ont permis d'étendre cette méthode au modèle de Saint-Venant [[Picinbono et al., 2000](#)] qui permet de prendre en compte les non-linéarités géométriques, et aux matériaux anisotropes [[Picinbono et al., 2003](#)].

### 3.3 Méthodes discrètes de modélisation des tissus

Nous présentons dans cette partie des modèles dit discrets par opposition aux modèles dit continus basés sur la MMC exposés dans la précédente partie. Le terme discret utilisé pour qualifier ces modèles provient du fait que la matière n'est pas considérée comme un continuum mais plutôt comme un ensemble de particules en interaction. Il ne faut pas confondre ce qualificatif avec la discrétisation spatiale des équations de la MMC nécessaire pour une résolution numérique. Ces modèles sont en général très populaires pour les applications temps-réel car ils nécessitent nettement moins de temps de calcul que les modèles continus. En contre-partie, ils sont moins précis, difficilement paramétrables et dépendent de la topologie du maillage utilisé quand il y en a un.

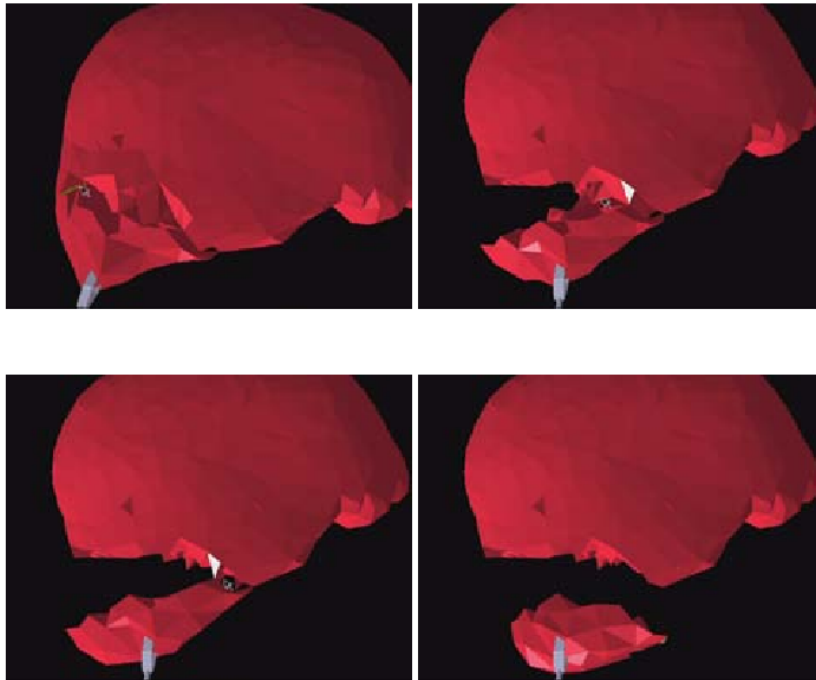


FIGURE 3.8. – Exemple de simulation de découpage sur un foie [Delingette et al., 1999].

### 3.3.1 Masses-ressorts

Le système masses-ressorts est un modèle discret très populaire en informatique graphique et pour la modélisation interactive d'organes grâce à sa simplicité de mise en œuvre et sa rapidité. Son principe est de discrétiser l'objet en un nuage de points reliés entre eux par des segments appelés ressorts ayant des propriétés mécaniques tels que la raideur. Ce ressort peut se voir comme un élément fini en une dimension plongé dans un espace en trois dimensions. Ce modèle est généralement utilisé en simulation avec une intégration temporelle explicite garantissant une très grande vitesse d'exécution mais aussi une faible stabilité peu favorable à une utilisation interactive avec une interface haptique par exemple. Bien que n'importe quelle loi de comportement puisse être utilisée, un ressort n'a d'effet que dans une direction et en pratique il est très difficile de les paramétrer pour avoir un bon comportement global du solide correspondant à un module de Young spécifique par exemple.

Dans un modèle masses-ressorts, les nœuds représentent des masses considérées comme ponctuelles reliées par des segments, les ressorts, modélisant un lien élastique entre deux masses. Dans le cas le plus simple, l'élasticité du lien est linéaire mais il existe des modèles plus élaborés suivant le comportement voulu. Un ressort induit des forces de même intensité mais de sens opposés qui s'exercent sur les deux nœuds

à ses extrémités. Ces forces dépendent de la variation de longueur du ressort et de son coefficient de raideur  $k_s$ . Par exemple, pour le type de ressort le plus simple dont la force varie proportionnellement avec la variation de sa longueur, la force exercé sur un nœud  $i$  par le ressort relié au nœud  $j$  est donné par :

$$f_{ij} = k_s (\|x_j - x_i\| - l_{ij}) \frac{x_j - x_i}{\|x_j - x_i\|} \quad (3.22)$$

où  $l_{ij}$  est la longueur du ressort au repos et  $k_s$  sa raideur. La force exercée sur le nœud  $j$  est  $f_{ji} = -f_{ij}$ . Ce ressort est le plus basique mais il en existe de plus évolués. Pour avoir un comportement visco-élastique par exemple, on peut rajouter un terme d'amortissement dont la force est :

$$f_{ij} = k_d \frac{(\|v_j - v_i\|)^T (\|x_j - x_i\|)}{(x_j - x_i)^T (x_j - x_i)} (x_j - x_i) \quad (3.23)$$

Malgré les limitations de ce type de modèle au niveau de la précision, certains auteurs ont proposé d'améliorer la méthode de base pour avoir un meilleur comportement. Moyennant l'ajout de ressorts angulaires, [Delingette \[2008\]](#) ont ainsi établi une connexion formelle entre les ressorts et les MMC en reproduisant le comportement d'un matériau hyper-élastique de type Saint-Venant-Kirchhoff. Dans le domaine médical, [Zerbato et al. \[2007\]](#) ont proposé une méthode pour déterminer les coefficients de raideur et de viscosité d'un modèle masses-ressorts à partir d'informations de tomographie assistée par ordinateur dans le but de modéliser un foie. [Baudet et al. \[2009\]](#) ont développé une méthode de calcul des coefficients de raideur des ressorts à partir du module de Young et du coefficient de Poisson correspondant à un matériau isotrope linéaire pour un maillage constitué d'hexaèdres dont les arêtes, les diagonales des faces et les diagonales internes sont les ressorts. Pour réaliser cela, les auteurs ont établi une relation formelle entre les raideurs des différents ressorts d'un hexaèdre et les valeurs de cisaillement et d'élongation pour un hexaèdre qui elles-mêmes s'expriment en fonction du module de Young et du coefficient de Poisson.

### 3.3.2 Mémoire de forme

[Promayon et al. \[1996\]](#) proposent de rendre compte du comportement élastique d'une surface avec une méthode appelée mémoire de forme qui sera étendue au solide en trois dimension par [Marchal et al. \[2006\]](#). Dans ce modèle, chaque particule a un attracteur défini par une fonction de forme sur les particules adjacentes de tel sorte qu'au repos, la position de la particule considérée et celle de son attracteur sont identiques. Quand la configuration d'une particule par rapport à ses voisines change, l'attracteur et sa particule ne sont plus à la même position et une force de

rappel est générée pour ramener cette dernière vers l'attracteur (figure 3.9). Cette force de rappel est modélisée comme un ressort avec un constante de raideur. Ce modèle peut s'utiliser pour de grands déplacements car l'attracteur est défini en fonction des particules adjacentes et donc si celles-ci se déplacent, l'attracteur fait de même.

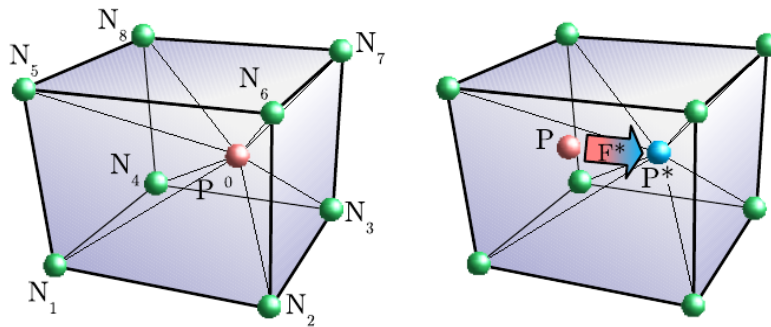


FIGURE 3.9. – Principe du modèle élastique à mémoire de forme : au repos, l'attracteur  $P^*$  est défini tel que  $P^* = P^0$ . Si par exemple la particule s'est déplacée de  $P^0$  à  $P$ , une force de rappel  $F^*$  apparaît pour la ramener vers la position de l'attracteur.

### 3.3.3 Shape matching

Le *shape matching* est un modèle introduit par Müller et al. [2005] qui a la spécificité de représenter un objet déformable par un ensemble de particules sans maillage. Le but de cette méthode est de trouver la meilleure transformation pour décrire le changement de position des particules de leurs positions d'origines à celles obtenues après déformation. Chacune d'elles est ensuite ramenée vers la position créée par cette transformation pour enfin revenir à leur position initiale (figure 3.10).



FIGURE 3.10. – Principe du modèle élastique shape matching.

## 3.4 Conclusion

Dans cette partie nous avons exposé différentes méthodes pour traiter numériquement les problèmes de biomécanique en général. Nous avons vu que le choix

Modèle	Précision	Temps de Calcul	Souplesse de mise en œuvre
MDF	+++	+	+
MEF	+++		
Masses-Ressorts		+++	++
Shape Matching	+	++	+
Mémoire de forme	+	++	++

Tab. 3.1. – Comparaison des différents modèles selon trois caractéristiques : la précision, le temps de calcul et la souplesse de mise en œuvre. Ce dernier point comprend notamment la facilité de générer un maillage adapté et de déterminer les paramètres mécaniques en fonction du comportement souhaité et du maillage.

d'un modèle dépend beaucoup du critère que nous souhaitons optimiser : précision ou temps de calcul (voir table 3.1). Dans le cas d'un simulateur biomédical, les deux paramètres sont importants et nous allons donc tirer parti des observations anatomiques et physiologiques du second chapitre pour le choix où le développement d'un nouveau modèle pour chaque organe. En effet, les organes de moindres importances dans l'accouchement pourront être modélisés avec des modèles discrets tandis que les organes sensibles tels que la tête fœtale nécessiteront des modèles s'appuyant sur la MMC. Dans le chapitre suivant, nous allons présenter un état de l'art de la modélisation des organes pelviens et de la simulation en obstétrique.



## Bibliographie

- Vincent Baudet, Michaël Beuve, Fabrice Jaillet, Behzad Shariat, and Florence Zara. Integrating tensile parameters in hexahedral mass-spring system for simulation. 2009. 47
- J. Berkley, G. Turkiyyah, D. Berg, M. Ganter, and S. Weghorst. Real-time finite element modeling for surgery simulation : an application to virtual suturing. Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on, 10(3) :314–325, May 2004. ISSN 1077-2626. doi : 10.1109/TVCG.2004.1272730. 30
- Morten Bro-Nielsen and Stephane Cotin. Real-time volumetric deformable models for surgery simulation using finite elements and condensation. Computer Graphics Forum, 15(3) :57–66, 1996. ISSN 1467-8659. doi : 10.1111/1467-8659.1530057. URL <http://dx.doi.org/10.1111/1467-8659.1530057>. 43
- Min Gyu Choi and Hyeong-Seok Ko. Modal warping : real-time simulation of large rotational deformation and manipulation. Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on, 11(1) :91–101, 2005. ISSN 1077-2626. doi : 10.1109/TVCG.2005.13. 44
- Stéphane Cotin, H. Delingette, and N. Ayache. Real-time elastic deformations of soft tissues for surgery simulation. Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on, 5(1) :62–73, 1999. ISSN 1077-2626. doi : 10.1109/2945.764872. 43
- Gilles Debunne, Mathieu Desbrun, Marie-Paule Cani, and Alan H. Barr. Dynamic real-time deformations using space & time adaptive sampling. In Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, SIGGRAPH '01, pages 31–36, New York, NY, USA, 2001. ACM. ISBN 1-58113-374-X. doi : 10.1145/383259.383262. URL <http://doi.acm.org/10.1145/383259.383262>. 43
- H. Delingette. Toward realistic soft-tissue modeling in medical simulation. Proceedings of the IEEE, 86(3) :512–523, March 1998. ISSN 0018-9219. doi : 10.1109/5.662876. 30
- Hervé Delingette, Stéphane Cotin, and Nicholas Ayache. A hybrid elastic model allowing real-time cutting, deformations and force-feedback for surgery training and simulation. In Computer animation, 1999. Proceedings, pages 70–81. IEEE, 1999. vi, 44, 45, 46
- Hervé Delingette. Biquadratic and quadratic springs for modeling st venant kirchhoff materials. In Fernando Bello and P.J.Eddie Edwards, editors, Biomedical Simulation, volume 5104 of Lecture Notes in Computer Science, pages 40–48. Springer Berlin Heidelberg, 2008. ISBN 978-3-540-70520-8. doi : 10.1007/978-3-540-70521-5\_5. URL [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-70521-5\\_5](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-70521-5_5). 47
- Hervé Delingette and Nicholas Ayache. Soft tissue modeling for surgery simulation. In N. Ayache, editor, Computational Models for the Human Body, volume 12 of Handbook of Numerical Analysis, pages 453–550. Elsevier, 2004. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1570865903120054>. 30
- Roxane Gardner and Daniel B. Raemer. Simulation in obstetrics and gynecology. Obstetrics and Gynecology Clinics of North America, 35(1) :97–127, 2008. ISSN 0889-8545. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ogc.2007.12.008>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0889854507001258>. Patient Safety in Obstetrics and Gynecology : Improving Outcomes, Reducing Risks. 30
- G. Irving, J. Teran, and R. Fedkiw. Invertible finite elements for robust simulation of large deformation. In Proceedings of the 2004 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation, SCA '04, pages 131–140, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2004. Eurographics Association. ISBN 3-905673-14-2. doi : 10.1145/1028523.1028541. URL <http://dx.doi.org/10.1145/1028523.1028541>. 44
- Doug L. James and Dinesh K. Pai. Artdefo : accurate real time deformable objects. In Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, SIGGRAPH '99, pages 65–72, New York, NY, USA, 1999. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co. ISBN 0-201-48560-5. doi : 10.1145/311535.311542. URL <http://dx.doi.org/10.1145/311535.311542>. 44
- Maud Marchal, Emmanuel Promayon, Jocelyne Troccaz, et al. Simulating prostate surgical procedures with a discrete soft tissue model. In Proceedings of 3rd Workshop in Virtual Reality Interactions and Physical Simulation, 2006. 47
- U. Meier, O. López, C. Monserrat, M.C. Juan, and M. Alcañiz. Real-time deformable models for surgery simulation : a survey. Computer Methods and Programs in Biomedicine, 77(3) :183–197, 2005. ISSN 0169-2607. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.cmpb.2004.11.002>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169260704002093>. 30
- Matthias Müller and Markus Gross. Interactive virtual materials. In Proceedings of Graphics Interface 2004, GI '04, pages 239–246, School of Computer Science, University of Waterloo, Waterloo, Ontario,

- Canada, 2004. Canadian Human-Computer Communications Society. ISBN 1-56881-227-2. URL <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1006058.1006087>. 44
- Matthias Müller, Julie Dorsey, Leonard McMillan, Robert Jagnow, and Barbara Cutler. Stable real-time deformations. In *Proceedings of the 2002 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, SCA '02, pages 49–54, New York, NY, USA, 2002. ACM. ISBN 1-58113-573-4. doi : 10.1145/545261.545269. URL <http://doi.acm.org/10.1145/545261.545269>. 44
- Matthias Müller, Bruno Heidelberger, Matthias Teschner, and Markus Gross. Meshless deformations based on shape matching. *ACM Trans. Graph.*, 24(3) :471–478, July 2005. ISSN 0730-0301. doi : 10.1145/1073204.1073216. URL <http://doi.acm.org/10.1145/1073204.1073216>. 48
- Andrew Nealen, Matthias Müller, Richard Keiser, Eddy Boxerman, and Mark Carlson. Physically based deformable models in computer graphics. *Computer Graphics Forum*, 25(4) :809–836, 2006. ISSN 1467-8659. doi : 10.1111/j.1467-8659.2006.01000.x. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-8659.2006.01000.x>. 30
- Matthieu Nesme, Paul G. Kry, Lenka Jeřábková, and François Faure. Preserving topology and elasticity for embedded deformable models. *ACM Trans. Graph.*, 28(3) :52 :1–52 :9, July 2009. ISSN 0730-0301. doi : 10.1145/1531326.1531358. URL <http://doi.acm.org/10.1145/1531326.1531358>. 44
- Y. Payan. *Soft Tissue Biomechanical Modeling for Computer Assisted Surgery*. Studies in Mechanobiology, Tissue Engineering and Biomaterials. Springer, 2012. ISBN 9783642290145. 30
- Guillaume Picinbono, Herve Delingette, and Nicholas Ayache. Real-time large displacement elasticity for surgery simulation : Non-linear tensor-mass model. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention—MICCAI 2000*, pages 643–652. Springer, 2000. 45
- Guillaume Picinbono, Hervé Delingette, and Nicholas Ayache. Non-linear anisotropic elasticity for real-time surgery simulation. *Graphical models*, 65(5) :305–321, 2003. 45
- E. Promayon, P. Bacconnier, and C. Puech. Physically-based deformations constrained in displacements and volume. *Computer Graphics Forum*, 15(3) :155–164, 1996. ISSN 1467-8659. doi : 10.1111/1467-8659.1530155. URL <http://dx.doi.org/10.1111/1467-8659.1530155>. 47
- Demetri Terzopoulos, John Platt, Alan Barr, and Kurt Fleischer. Elastically deformable models. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 21(4) :205–214, August 1987. ISSN 0097-8930. doi : 10.1145/37402.37427. URL <http://doi.acm.org/10.1145/37402.37427>. v, 39
- D. Zerbato, S. Galvan, and P. Fiorini. Calibration of mass spring models for organ simulations. In *Intelligent Robots and Systems, 2007. IROS 2007. IEEE/RSJ International Conference on*, pages 370–375, 2007. doi : 10.1109/IROS.2007.4399289. 47



## CHAPITRE 4

# MODÉLISATION DES ORGANES PELVIEN ET SIMULATION DE L'ACCOUCHEMENT

Dans la nature, tout a toujours une raison. Si tu comprends cette raison, tu n'as plus besoin de l'expérience.

Léonard De Vinci

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Modèles biomécaniques des organes pelviens</b>	<b>54</b>
4.1.1	Plancher pelvien	54
4.1.2	Fœtus	55
<b>4.2</b>	<b>Modélisation de la dynamique pelvienne</b>	<b>56</b>
<b>4.3</b>	<b>Modèles biomécaniques pour la simulation de l'accouchement</b>	<b>59</b>
<b>4.4</b>	<b>Simulateurs d'accouchements</b>	<b>63</b>
4.4.1	Simulateurs anatomiques	63
4.4.2	Simulateurs motorisés/haptiques	64
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>67</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>68</b>

---

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté l'accouchement ainsi que les principaux organes concernés d'un point de vue anatomique et fonctionnel. Nous avons ensuite exposé les différentes méthodes de modélisation et de simulation utilisées en biomécanique. Dans ce chapitre, nous allons dans un premier temps présenter les différents simulateurs existants pour l'accouchement. Le terme simulateur est à prendre ici au sens large, c'est à dire un dispositif technique permettant de reproduire une situation réelle de façon virtuelle (l'accouchement dans le cas qui nous intéresse). Elle peut aller du simple mannequin inanimé au programme informatique exécutant une simulation numérique. Ensuite nous parlerons des différents modèles biomécaniques des organes pelviens et simulations numériques d'accouchement proposés dans la littérature.

## 4.1 Modèles biomécaniques des organes pelviens

Les modèles biomécaniques sont très utilisés en obstétrique car il est difficile de faire des mesures in-vivo sur les organes concernés et plus encore chez la femme enceinte pour des raisons à la fois éthiques et techniques.

### 4.1.1 Plancher pelvien

Le plancher pelvien étant une structure fine, la majorité des travaux récents utilisent des éléments finis de coques [Aulignac et al., 2005, Martins et al., 2007, Cosson et al., 2013].

Aulignac et al. [2005] propose une modélisation biomécanique des muscles du plancher pelvien basée sur les données de Janda et al. [2003] dans le but d'aider à la prédiction des dommages qui peuvent survenir durant l'accouchement. Le muscle releveur de l'anus est reconstruit en utilisant des surfaces NURBS (surfaces paramétrées constituant une généralisation des B-Splines). Le maillage est ensuite triangulé et utilisé pour une analyse éléments finis avec des éléments coques. L'anisotropie des fibres musculaires est prise en compte ainsi que leur incompressibilité. L'énergie de déformation passive est adaptée du modèle de Humphrey utilisé habituellement pour modéliser les muscles cardiaques et une énergie de déformation active est ajoutée au modèle. Deux simulations sont proposées : une passive où le plancher pelvien subit une pression et une en contraction. Il est mis en évidence que les régions où les contraintes sont les plus importantes sont les zones d'attachements avec le bassin.

Parente et al. [2008] utilise un modèle éléments finis pour évaluer les dommages que peut induire le passage du fœtus sur les muscles du plancher pelvien et qui peut conduire à des incontinences urinaires ou un prolapsus génital. Le plancher pelvien est modélisé avec des hexaèdres à huit nœuds (volumétrique) comme illustré sur

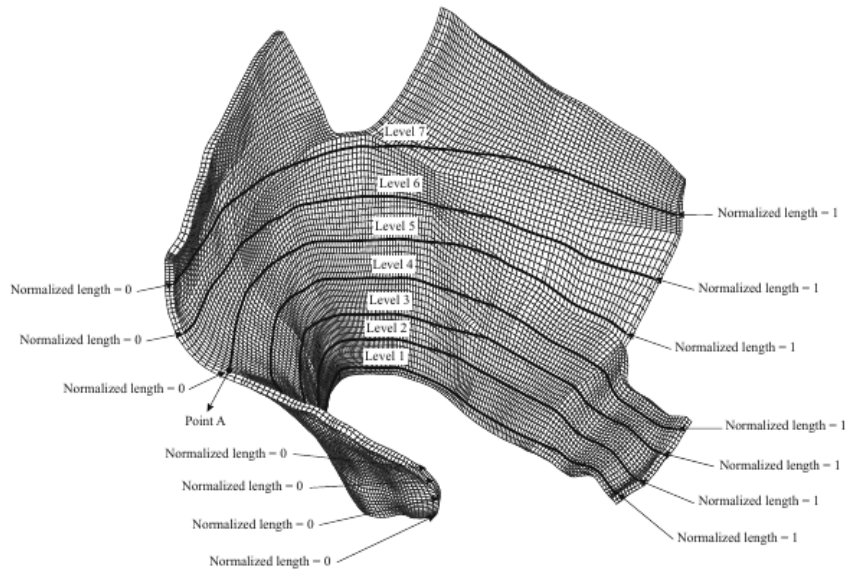
la figure 4.1a. La loi de comportement est basée sur un modèle incompressible, hyperélastique et isotropique transverse emprunté à [Martins et al. \[1998\]](#) où elle fut initialement développée pour modéliser les muscles squelettiques. Les nœuds connectés au bassin, ligaments et coccyx sont fixés. Le fœtus est également modélisé à l'aide d'éléments tétraédriques comme un modèle déformable avec un module de Young élevé. Pendant la simulation, le déplacement du fœtus est imposé et les rapports d'étirements sont mesurés à différents niveaux sur le plancher pelvien (figure 4.1b). Les rapports d'étirements sont les plus grands dans tous les niveaux à environ 60 mm de déplacement du fœtus et les plus grandes valeurs de déformation correspondent aux points d'attache avec le bassin.

[Li et al. \[2010\]](#) proposent aussi une étude numérique pour évaluer les dommages que peut induire le passage du fœtus sur les muscles du plancher pelvien et plus particulièrement le muscle releveur de l'anus qui subit de grandes déformations lors de la phase d'expulsion. Dans ce travail, le plancher pelvien est reconstruit à partir d'images IRM et la voûte crânienne du fœtus est reconstruite à partir du scanner d'un mannequin. Le plancher pelvien est maillé avec des éléments finis hexaédriques tri-cubique afin de bien épouser les formes du plancher pelvien. La voûte crânienne du fœtus est maillé avec des éléments finis hexaédriques bi-cubique. Le modèle utilisé est un modèle hyper-élastique isotropique couplé à un modèle de contact, et deux lois de comportement sont testées : une loi de Neo-Hooke et une loi exponentielle fortement non-linéaire, paramétrées d'après la littérature.

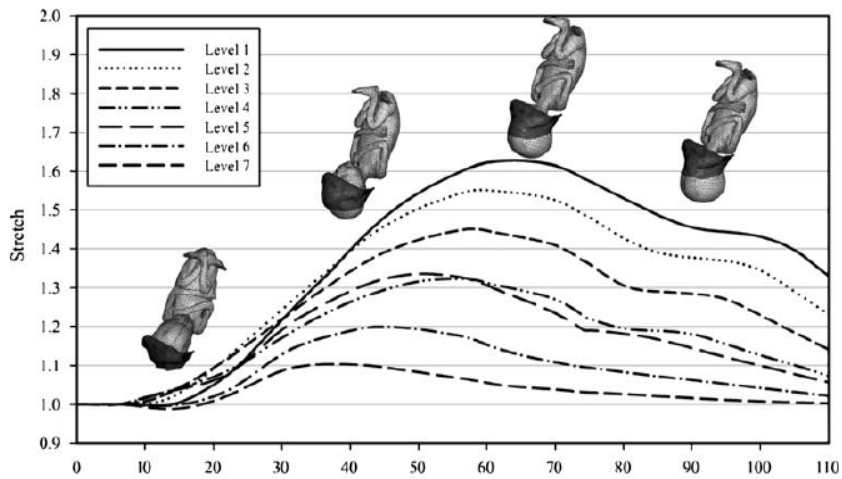
#### 4.1.2 Fœtus

Les modèles biomécaniques du fœtus concernent pour la plupart uniquement la tête fœtale. En effet, comme nous l'avons vu précédemment, c'est cette structure qui subit les efforts les plus importants et qui est de ce fait plus exposée aux lésions. [Lapeer and Prager \[1999\]](#) proposent d'étudier la déformation de la tête fœtale pendant le travail avec un modèle éléments finis de coque. La forme du crâne est reconstruite à partir d'un scanner laser en utilisant une méthode de recalage par splines. Une triangulation est ensuite appliquée pour générer le maillage éléments finis. Des forces de pression sont appliquées autour des os pariétaux pour simuler la pression du col utérin. Le modèle utilisé est linéaire élastique et la simulation est statique. Ce modèle est amélioré dans [Lapeer and Prager \[2001\]](#) avec un modèle hyperélastique. Les résultats de ce travail sont présentés sur la figure 4.2.

Ces travaux se rapprochent de notre problématique mais les simulations sont statiques et contiennent trop d'éléments pour pouvoir être utilisées pour une simulation temps réel. De plus, la matière intra-crânienne n'est pas prise en compte. Toutefois, ils constituent une bonne base de comparaison pour nos propres simulations.



(a) Maillage du plancher pelvien avec les différents niveaux pour évaluer le rapport d'étirement.

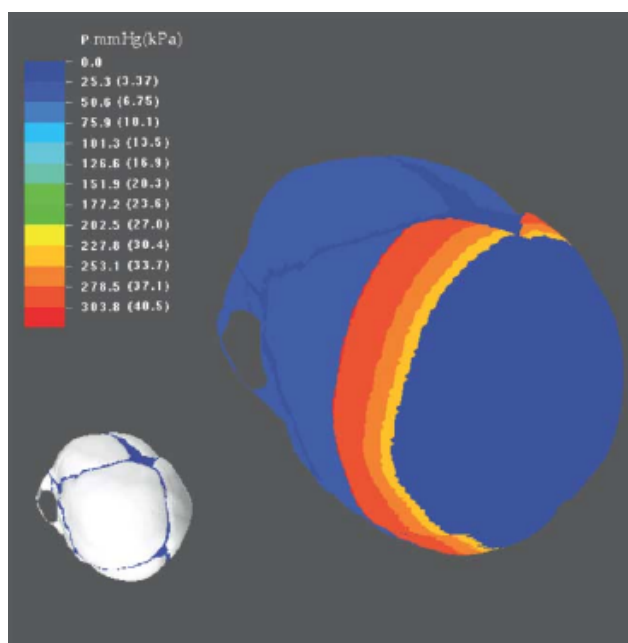


(b) Rapport d'étirement des différents niveaux en fonction du déplacement vertical du fœtus.

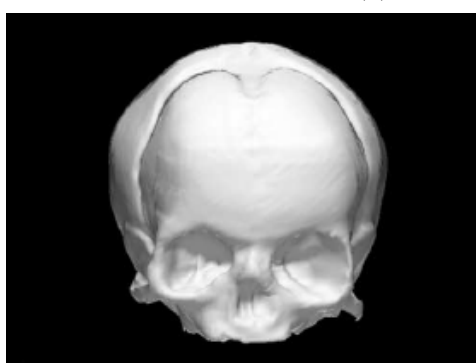
FIGURE 4.1. – Maillage et rapports d'étirements du plancher pelvien [Parente et al., 2008].

## 4.2 Modélisation de la dynamique pelvienne

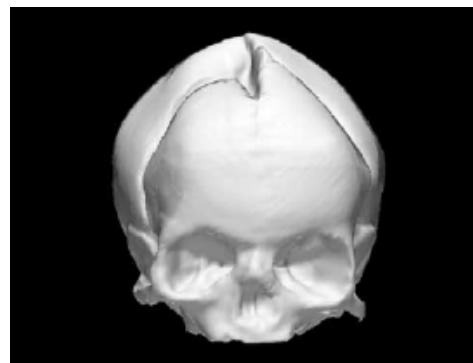
La modélisation de la dynamique pelvienne est l'étude du comportement dynamique des organes situés dans la cavité pelvienne en prenant en compte leurs interactions.



(a) Distribution des pressions.



(b) Tête fœtale non déformée.



(c) Tête fœtale déformée.

FIGURE 4.2. – Modélisation de la tête fœtale proposée par [Lapeer and Prager \[2001\]](#).

[Bellemare et al. \[2007\]](#) proposent une modélisation des organes pelviens féminins dans le but de créer un simulateur pelvien destiné aux opérations chirurgicales. Le modèle géométrique est créé à partir d'images IRM segmentées de manière semi-automatique en utilisant une méthode basée sur les contours actifs. Les surfaces des organes ainsi obtenues sont ensuite maillées intérieurement avec des tétraèdres. Le modèle physique utilisé est un modèle masses-ressorts de Voigt dont les masses sont les nœuds du maillage et les ressorts les arêtes. Les collisions quant à elles sont gérées par la méthode des pénalités. Les limites de ce modèle sont d'une part la difficulté de paramétrisation du modèle masses-ressorts (*c-à-d* les paramètres de raideur et de viscosité) ainsi que la non conservation du volume des organes. Tou-



tefois, la méthode a été améliorée en utilisant la méthode des éléments finis [Khelfi et al., 2013]. Les deux méthodes sont comparées en utilisant des coupes d'images IRM acquises en mode dynamique. Les différentes procédures de cette méthode sont illustrées par la figure 4.3

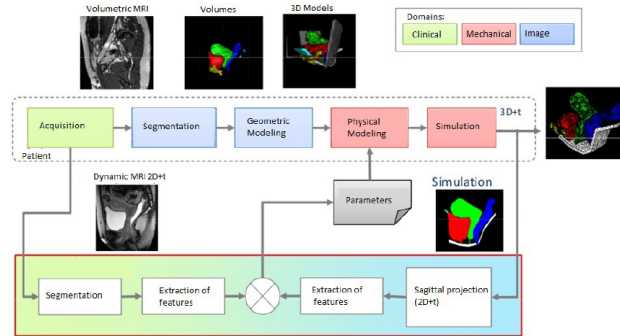


FIGURE 4.3. – Procédures de simulation de la dynamique pelvien de Khelfi et al. [2013].

Rubod et al. [2013] proposent une simulation 3D du système pelvien afin de mieux comprendre le rôle des ligaments utérins dans le phénomène de prolapsus génital (ou descente d'organe). Le prolapsus génital est un déplacement anormal d'un ou plusieurs organes du pelvis féminin vers le bas. Dans ce modèle, les organes pris en compte sont l'utérus, la vessie, le vagin et le rectum. Les ligaments pris en compte sont :

- le ligament rond qui part de l'angle du corps utérin sur le côté, passe par le canal inguinal et va jusqu'à la grande lèvre,
- le ligament ombilical,
- le ligament utéro-sacré qui relie le col de l'utérus au sacrum,
- et le ligament large qui unit le côté du corps utérin au côté du petit bassin.

Ce modèle est montré sur la figure 4.4. Les auteurs ont développé un modèle éléments finis avec le logiciel ABAQUS. Le comportement choisi est un comportement élastique linéaire avec prise en compte des grands déplacements. Des simulations de la mobilité pelvienne ont été effectuées dans différentes situations (debout, allongé, avec des éléments du modèle coupés) et les résultats ont ensuite été comparés avec des images IRM de deux patientes. Les résultats des simulations effectuées par les auteurs sont cohérents avec les données cliniques et la littérature. Cette approche par simulation a permis de mettre en évidence le rôle des ligaments dans la dynamique pelvienne et spécialement du ligament utéro-sacré dans la position debout.

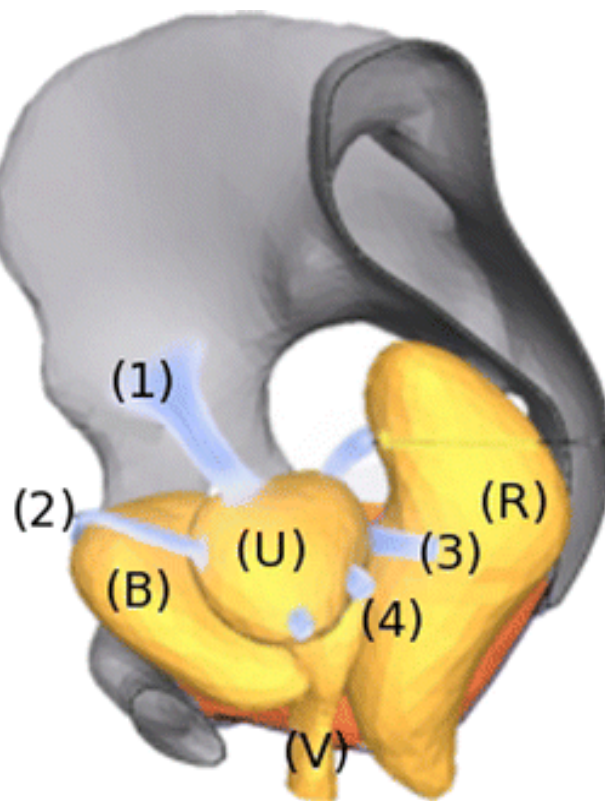


FIGURE 4.4. – Modèle pelvien proposé par Rubod et al. [2013]. U : utérus, B : vessie, V : vagin, R : rectum, 1 : ligament rond, 2 : ligament ombilical, 3 : ligament utéro-sacré, 4 : ligament large.

### 4.3 Modèles biomécaniques pour la simulation de l'accouchement

La littérature compte peu de travaux portant sur la modélisation de la dynamique pelvienne de la femme enceinte lors l'accouchement (ou d'une des phases de l'accouchement).

Boissonnat and Geiger [1993] proposent une approche simplifiée avec une modélisation se limitant à la tête fœtale et au bassin osseux (voir figure 4.5). Cette modélisation a pour but de prédire la réussite d'un accouchement. Cinq facteurs principaux sont identifiés par les auteurs :

1. la taille et la forme du bassin osseux,
2. la taille de la tête fœtale,
3. la force des contractions utérines,
4. la malléabilité de la tête fœtale,

5. la présentation et la position du fœtus.

Les paramètres 1, 2 et 5 sont mesurables avant l'accouchement par pelvimétrie (scanner TDM ou IRM) et ultrasons pour estimer la diamètre de la tête fœtale. Les auteurs font l'hypothèse que pour une bonne prédiction, les effets de la confrontation de la tête fœtale avec le bassin doivent être connus et pour cela proposent une modélisation de ce phénomène. Le modèle géométrique est composé de triangles pour la surface et de tétraèdres pour l'intérieur du bassin et de la tête fœtale. La trajectoire de la tête est imposée à partir d'un modèle statistique et les collisions entre la tête et le bassin génèrent des forces correctrices à cette trajectoire théorique. Les contractions utérines et poussées maternelles sont simulées par une force résultante appliquée au centre de gravité de la tête fœtale. Ce modèle présente l'avantage d'être simple et de se focaliser sur les structures essentielles lors de la phase d'expulsion de l'accouchement. Les limitations majeures de ce modèle sont dues en premier lieu à l'absence de prise en compte des tissus mous contribuant à la dynamique de la descente fœtale et du corps du fœtus qui peut modifier la trajectoire de descente du fait de son inertie.

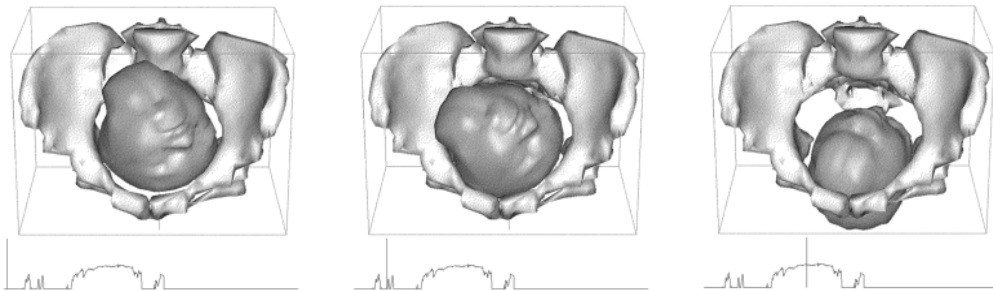


FIGURE 4.5. – Rotation interne de la tête fœtale lors de la confrontation avec le bassin [Boissonnat and Geiger, 1993].

Kheddar et al. [2004] proposent une modélisation plus complète, comprenant le bassin osseux, les muscles pelviens et le fœtus, destinée à être utilisée dans un simulateur d'apprentissage avec retour haptique. Les muscles pelviens sont des muscles squelettiques striés modélisés par un matériau élastique linéaire de module d'Young égal à  $7.10^5$  Pa et un coefficient de Poisson égal à 0.4, ces valeurs étant tirées de Fung [1993]. La méthode de résolution utilisée est celle des éléments finis. Chaque muscle est constitué de 54 éléments. Le fœtus est un modèle rigide articulé à 19 degrés de liberté. Les contractions utérines et les poussées abdominales sont modélisées sous formes de forces uniaxiales de valeurs respectivement 5.5 Kg et 22 Kg, appliquées à la partie postérieure du fœtus de façon périodique (voir figure 4.6). Cette application des forces de poussées directement sur le fœtus permet d'éviter d'avoir à gérer les collisions entre celui-ci et l'utérus. Le fœtus suit une trajectoire théorique représentée à l'aide de la courbe de Bézier cubique suivante :

$$P(\lambda) = (1 - \lambda)^3 P_0 + 3\lambda(1 - \lambda)^2 P_1 + 3\lambda^2(1 - \lambda) P_2 + \lambda^3 P_3$$

où les  $P_i$  sont les points de contrôle de la courbe obtenus à partir de données statistiques. Dans ce modèle, l'utérus n'a aucun rôle moteur et a uniquement un intérêt visuel.

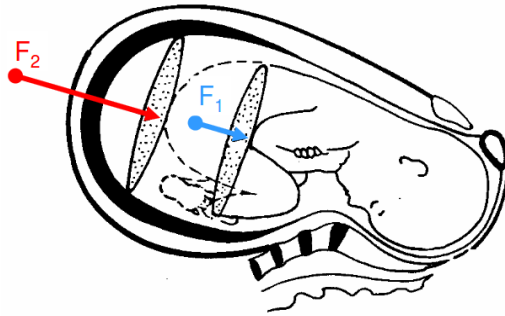


FIGURE 4.6. – Forces de poussées appliquées au fœtus : contractions utérines ( $F_1$ ) et poussées abdominales ( $F_2$ ) [Kheddar et al., 2004]

Les principales limitations de ce modèle sont l'imposition d'une trajectoire et l'absence d'interactions entre le fœtus et les organes pelviens qui limite le nombre de cas pris en compte par la simulation à un seul. De plus le modèle fœtal est rigide spécialement au niveau de la tête qui peut subir des déformations importantes pendant l'accouchement.

Plus récemment, Buttin [2010] (et Buttin et al. [2013]) a proposé un modèle réaliste pour la simulation de la descente fœtale au cours de l'accouchement basé sur la méthode des éléments finis. Les organes pris en compte sont l'utérus, le bassin, le fœtus et l'abdomen considéré comme un organe unique comprenant les autres organes non modélisés spécifiquement comme la vessie, le rectum et le plancher pelvien. Deux lois de comportement sont utilisées : la loi de Hooke (élasticité linéaire) pour le bassin osseux car celui-ci subit de faible déformation et la loi Neo-Hooke (non-linéaire géométrique et matériel) pour les autres organes. La table 4.1 présente les paramètres retenus pour les modèles de chaque organes.

Les contractions utérines et les poussées abdominales sont modélisées par deux champs de forces de pression périodiques uniformes. Il y a 12 périodes de fréquence 3 par dix minutes et d'une durée de 90 secondes. Le champ de force des contraction utérines s'applique sur tous l'utérus et celui des poussées abdominales sur sa partie haute.

Contrairement aux modèles précédents, celui-ci utilise les contractions de l'utérus comme force motrice de la descente fœtale par contact avec le fœtus et n'a pas de trajectoire théorique imposée. La configuration globale du modèle est présentée sur

Modèle	Loi de comportement	Elément	Nb nœuds
Bassin	Hooke — $E = 23$ MPa — $\nu = 0.3$ — $\rho = 1000$ kg/m <sup>3</sup>	Tétraèdre	1750
	Neo-Hooke — Tissu : $C10 = 130$ kPa, $\rho = 1000$ kg/m <sup>3</sup> — Crâne : $C10 = 75$ kPa, $\rho = 950$ kg/m <sup>3</sup> — Corps : $C10 = 70$ kPa, $\rho = 950$ kg/m <sup>3</sup>		
Fœtus (3 parties)		Tétraèdre	2800
Utérus	Neo-Hooke — $C10 = 30$ kPa — $\rho = 950$ kg/m <sup>3</sup>	Tétraèdre	42811
Abdomen	Neo-Hooke — $C10 = 5$ kPa — $\rho = 2500$ kg/m <sup>3</sup>	Tétraèdre	3268

Tab. 4.1. – Paramètres géométriques et matériels des modèles d'organes utilisés dans [Buttin et al. \[2013\]](#).

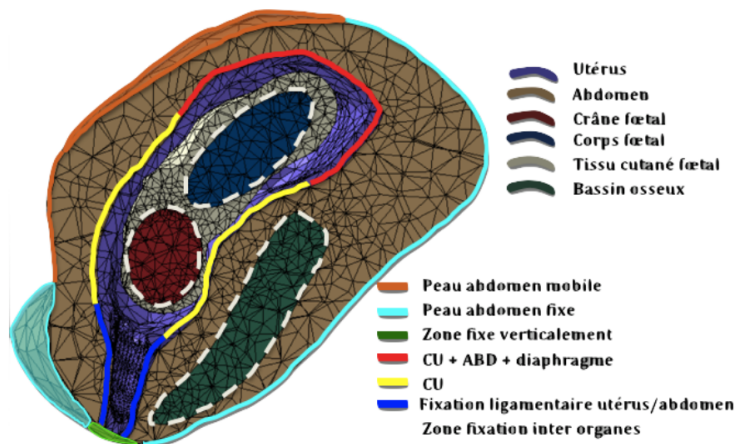


FIGURE 4.7. – Schéma du modèle biomécanique utilisé dans [Buttin et al. \[2013\]](#).  
CU : contractions utérines, ABD : poussées abdominales.

la figure 4.7. Toutefois, le fait d'utiliser des éléments finis volumiques pour tous les organes sans distinction de leur degré d'importance et sans faire de raffinement local aux endroits les plus sensibles constituent un handicap pour la vitesse d'exécution de la simulation.

## 4.4 Simulateurs d'accouchements

### 4.4.1 Simulateurs anatomiques

Les simulateurs anatomiques servent à présenter l'anatomie obstétriques dans un but d'apprentissage. Historiquement, ce sont les premiers à être apparus et ce sont aussi les plus rudimentaires. Le premier d'entre-eux documenté dans la littérature est la Machine de Coudray (voir figure 4.8) datant de 1778. Il est l'œuvre d'Angélique Marguerite du Coudray, première professeur de la discipline des sage-femmes. Il est constitué d'une poupée en toile et en peau, de couleur rose, rembourrée de coton représentant en grandeur réelle la partie inférieure du corps d'une femme, d'un vrai bassin osseux et d'une poupée de la taille d'un nouveau-né. Malgré sa simplicité apparente, il possède un réalisme important permettant à la fois de montrer la dynamique de l'accouchement et un bon apprentissage grâce à la possibilité d'expulser la poupée représentant le fœtus.



FIGURE 4.8. – Machine de Coudray (1778)

Beaucoup d'autres simulateurs de ce type ont vu le jour [Graves and Savannah, 1951, Lounsbury, 1992] apportant des améliorations au niveau de la précision de l'anatomie avec l'ajout d'organes tels que le placenta, la vessie, le cordon ombilical, . . . permettant d'améliorer le réalisme. Le mannequin de Lounsbury permettait aussi de simuler une césarienne grâce à des fermetures éclairées placées sur le ventre. Le mannequin obstétrique de la société Simulaid Corporation dont les organes sont en latex est visible sur la figure 4.9.

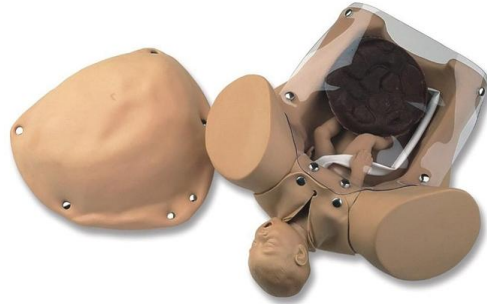


FIGURE 4.9. – Mannequin de la société Simulaid

Ces mannequins sont les plus répandus dans le domaine de l'éducation du fait de leur coût peu élevé. Cependant, n'étant pas motorisés, ils n'ont pas pour but de simuler un accouchement mais plutôt de présenter l'anatomie de la femme enceinte et former aux gestes de base de l'obstétrique.

#### 4.4.2 Simulateurs motorisés/haptiques

En plus de représenter tout ou une partie de l'anatomie d'une femme enceinte, ces simulateurs ont des parties motorisées permettant un certain degré d'interactivité facilitant l'apprentissage du geste.

Le GeburtenSimulator de [Riener and Burgkart \[2003\]](#) est un simulateur constitué d'un bassin rigide et d'une tête fœtale mise en mouvement à travers le bassin par un robot six axes permettant une grande liberté de déplacement (voir figure 4.10). Il est également munit de capteurs permettant de mesurer les efforts et les positions du fœtus et du bassin, ainsi que d'un retour visuel en 3D. Il permet à l'utilisateur d'expérimenter différents scénarios dont les accouchements instrumentés aux forceps ou à la ventouse. Il est toutefois dépourvu de modèle biomécanique modélisant les déformations des tissus.

Le simulateur Noelle (voir figure 4.11) proposé par [Eggert et al. \[2006\]](#) commercialisé par la société Gaumard Scientific est constitué d'un mannequin complet de la femme enceinte et du fœtus permettant à l'utilisateur de s'exercer sur une large variété de pratiques réalisées autour de l'accouchement comme la pose de cathéter dans le bras de la parturiente, le toucher vaginal ou les techniques de réanimation cardio-pulmonaire du nourrisson. Le fœtus est expulsé à l'aide d'un système pneumatique dépourvu de réglages d'efforts limitant l'interactivité avec l'utilisateur.

Les deux simulateurs précédents sont des simulateurs d'accouchement « généraux ». Il existe aussi des simulateurs spécialisés sur un type de geste. Le simulateur de [Lapeer et al. \[2004\]](#) par exemple couple un système haptique avec un système

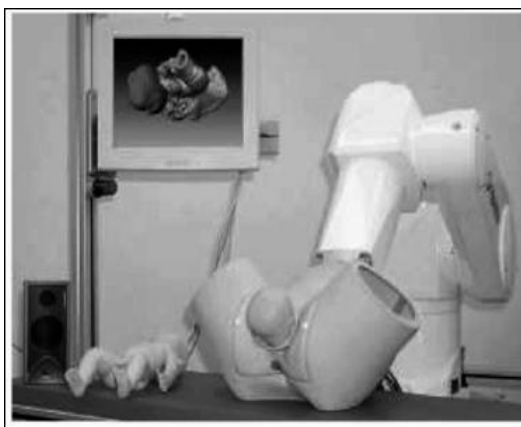


FIGURE 4.10. – GeburtenSimulator



FIGURE 4.11. – Simulateur Noelle de la société Gaumard Scientific

de visualisation en réalité augmentée destiné à l'apprentissage du placement des forceps. La tête est guidée par des forces calculées en amont et par les forceps. Le système de visualisation est purement informatique mais son intégration en réalité augmentée accentue le réalisme car l'utilisateur regarde directement son action au lieu d'un écran déporté. Ce simulateur en action est montré sur la figure 4.12.

Le simulateur BirthSim [Silveira et al., 2004, Moreau, 2007] permet de simuler différents types d'accouchements (accouchements eutociques et instrumentés). L'actionneur pneumatique est couplé avec des commandes en effort, en position, en effort/position, en effort/vitesse et en position avec un gain variable selon les procédures souhaitées par le médecin instructeur. L'instrumentation des forceps permet de faire l'analyse des gestes effectués à l'aide de méthodes originales (étude de la courbure des positions et des quaternions) afin d'obtenir une évaluation de ceux-ci. Ce simulateur est composé de trois parties (voir figure 4.13) :

- une partie mécanique pour reproduire l'anthropomorphisme du bassin ma-



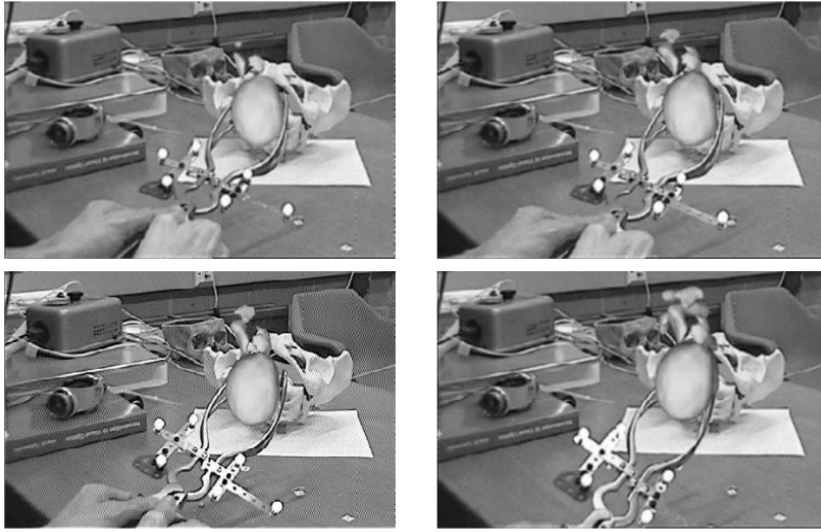


FIGURE 4.12. – Simulateur pour la pose de forceps [Lapeer et al., 2004].

ternel et du fœtus,

- une partie électro-pneumatique pour reproduire les efforts mis en jeu pendant un accouchement (poussées maternelles, contractions utérines et résistance des muscles pelviens),
- une partie visualisation pour observer les éléments mobiles en temps réel à l'intérieur du bassin maternel

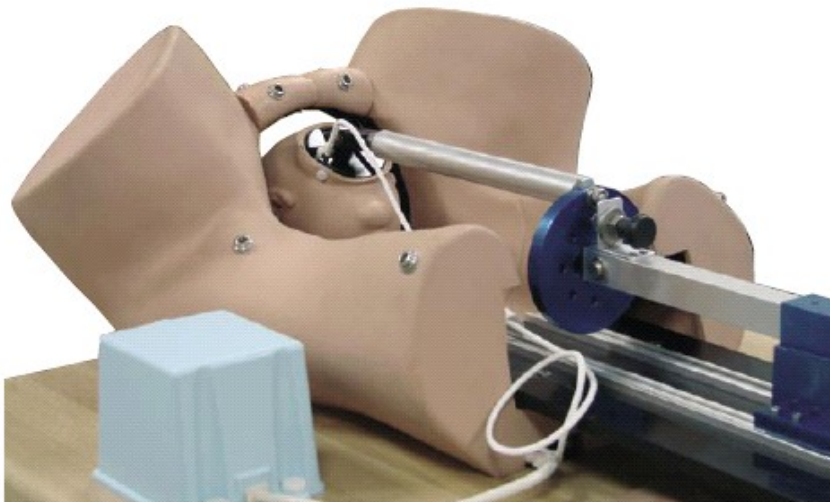


FIGURE 4.13. – Simulateur BirthSim.

## 4.5 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre des modèles biomécanique des organes pelviens ainsi que différents types de simulateurs physiques permettant des simulations numériques de l'accouchement. Les simulateurs physiques sont les plus répandus et permettent une évaluation quantitative du geste obstétrique. Les simulations numériques quant à elles correspondent à une approche quantitative si les modèles utilisent des méthodes précises permettant de quantifier les efforts subis par les structures et les tissus impliqués dans l'accouchement. Unifiées, ses deux approches permettraient d'améliorer l'expérience d'apprentissage mais pour l'instant les simulations numériques ne sont pas destinées à être couplées avec des simulateurs haptiques. La plupart des simulations numériques que nous avons vu dans ce chapitre servent à comprendre ou analyser un phénomène biomécanique particulier et pas à être utilisées en interaction avec un utilisateur. Les simulateurs physiques sont naturellement temps-réel alors que nous avons vu au chapitre précédent que pour les simulations numériques il y a généralement une relation inverse entre l'interactivité et la précision.

Nous proposerons donc dans la suite de ce manuscrit d'élaborer des modèles biomécaniques des principaux organes participant à l'accouchement combinant au mieux précision et efficacité en terme de temps de calcul entrouvrant la possibilité d'un couplage haptique/modèle biomécanique. Pour adresser l'aspect précision, nous allons nous tourner vers des modèles éléments finis. Pour nous rapprocher le plus possible d'une simulation interactive, nous allons travailler sur plusieurs fronts.

- Le ciblage des zones susceptibles de subir le plus de dommages lors de l'accouchement afin de concentrer l'effort de calcul sur ces zones avec des modèles précis. En particulier, nous nous concentrerons sur la tête fœtale qui est l'objet du prochain chapitre.
- Mettre en place des modèles EF adaptés et efficaces pour ces zones avec notamment un modèle de coque pour la tête fœtale.
- Proposer une implémentation parallèle des ces modèles sur GPU.

## Bibliographie

- D. Aulignac, J.A.C. Martins, E.B. Pires, T. Mascarenhas, and R.M. Natal Jorge. A shell finite element model of the pelvic floor muscles. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 8 (5) :339–347, 2005. doi : 10.1080/10255840500405378. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10255840500405378>. PMID : 16298856. 54
- M.-E. Bellemare, N. Pirro, L. Marsac, and O. Durieux. Toward the simulation of the strain of female pelvic organs. In *Engineering in Medicine and Biology Society, 2007. EMBS 2007. 29th Annual International Conference of the IEEE*, pages 2752–2755, Aug 2007. doi : 10.1109/IEMBS.2007.4352898. 56
- J. D. Boissonnat and B. Geiger. 3d simulation of delivery. In *Visualization, 1993. Visualization '93, Proceedings.*, IEEE Conference on, pages 416–419, Oct 1993. doi : 10.1109/VISUAL.1993.398903. vi, 59, 60
- Romain Buttin. *Modélisation biomécanique du système reproductif féminin et du fœtus humain pour la réalisation d'un simulateur virtuel*. Thèse de doctorat en informatique, Université Claude Bernard Lyon 1, October 2010. 61
- Romain Buttin, Florence Zara, Behzad Shariat, Tanneguy Redarce, and Gilles Grangé. Biomechanical simulation of the fetal descent without imposed theoretical trajectory. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 111(2) :389 – 401, 2013. ISSN 0169-2607. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.cmpb.2013.04.005>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169260713001132>. vi, ix, 61, 62
- Michel Cosson, C. Rubod, A. Vallet, J.F. Witz, P. Dubois, and M. Brieu. Simulation of normal pelvic mobilities in building an mri-validated biomechanical model. *International Urogynecology Journal*, 24 (1) :105–112, 2013. ISSN 0937-3462. doi : 10.1007/s00192-012-1842-8. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00192-012-1842-8>. 54
- J.S. Eggert, M.S. Eggert, and P. Vallejo. Interaction education system for teaching patient care, October 3 2006. US Patent 7,114,954. 64
- Y.C. Fung. *Biomechanics : Mechanical Properties of Living Tissues*. Biomechanics. Springer, 1993. ISBN 9780387979472. URL <http://books.google.fr/books?id=4HaMStTGOHwC>. 60
- J. Graves and G. Savannah. Educational apparatus for teaching obstetrics and midwifery, May 1 1951. US Patent 2,551,433. 63
- Štěpán Janda, Frans CT van der Helm, and Sjoerd B de Blok. Measuring morphological parameters of the pelvic floor for finite element modelling purposes. *Journal of Biomechanics*, 36(6) :749 – 757, 2003. ISSN 0021-9290. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9290\(03\)00008-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9290(03)00008-3). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021929003000083>. 54
- A. Kheddar, C. Devine, M. Brunel, C. Duriez, and O. Sibony. Preliminary design of a childbirth simulator haptic feedback. In *Intelligent Robots and Systems, 2004. (IROS 2004). Proceedings. 2004 IEEE/RSJ International Conference on*, volume 4, pages 3270–3275 vol.4, Sept 2004. doi : 10.1109/IROS.2004.1389921. vi, 60, 61
- R. Khelifi, M. Rahim, B. Ratni, A. Rabahi, and M.-E. Bellemare. Simulation and evaluation of the strain of female pelvic organs with mass-spring and finite-elements models. In *IX International Seminar on Medical Information Processing and Analysis*, volume 8922, pages 892212–892212–8. International Society for Optics and Photonics, 2013. doi : 10.1117/12.2035522. URL <http://dx.doi.org/10.1117/12.2035522>. vi, 58
- R. Lapeer, M.S. Chen, and J. Villagrana. An augmented reality based simulation of obstetric forceps delivery. In *Mixed and Augmented Reality, 2004. ISMAR 2004. Third IEEE and ACM International Symposium on*, pages 274–275, Nov 2004. doi : 10.1109/ISMAR.2004.13. vi, 64, 66
- R.J. Lapeer and R.W. Prager. Finite element model of a fetal skull subjected to labour forces. In Chris Taylor and Alain Colchester, editors, *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention MICCAI 1999*, volume 1679 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1143–1155. Springer Berlin Heidelberg, 1999. ISBN 978-3-540-66503-8. doi : 10.1007/10704282\_124. URL [http://dx.doi.org/10.1007/10704282\\_124](http://dx.doi.org/10.1007/10704282_124). 55
- R.J. Lapeer and R.W. Prager. Fetal head moulding : finite element analysis of a fetal skull subjected to uterine pressures during the first stage of labour. *Journal of Biomechanics*, 34(9) :1125 – 1133, 2001. ISSN 0021-9290. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9290\(01\)00070-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9290(01)00070-7). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021929001000707>. vi, 55, 57
- Xinshan Li, Jennifer A Kruger, Martyn P Nash, and Poul MF Nielsen. Effects of nonlinear muscle elasticity

- on pelvic floor mechanics during vaginal childbirth. Journal of biomechanical engineering, 132(11) : 111010, 2010. 55
- K.L. Lounsbury. Anatomical model, April 14 1992. US Patent 5,104,328. 63
- J. A. C. Martins, M. P. M. Pato, E. B. Pires, R. M. Natal Jorge, M. Parente, and T. Mascarenhas. Finite element studies of the deformation of the pelvic floor. Annals of the New York Academy of Sciences, 1101(1) :316–334, 2007. ISSN 1749-6632. doi : 10.1196/annals.1389.019. URL <http://dx.doi.org/10.1196/annals.1389.019>. 54
- J.A.C. Martins, E.B. Pires, R. Salvado, and P.B. Dinis. A numerical model of passive and active behavior of skeletal muscles. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 151(3) : 419 – 433, 1998. ISSN 0045-7825. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00162-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00162-X). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578259700162X>. Containing papers presented at the Symposium on Advances in Computational Mechanics. 55
- Richard Moreau. Le simulateur d'accouchement BirthSIM : un outil complet pour la formation sans risque en obstétrique. These, INSA de Lyon, December 2007. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00267771>. 65
- M.P.L. Parente, R.M.Natal Jorge, T. Mascarenhas, A.A. Fernandes, and J.A.C. Martins. Deformation of the pelvic floor muscles during a vaginal delivery. International Urogynecology Journal, 19(1) : 65–71, 2008. ISSN 0937-3462. doi : 10.1007/s00192-007-0388-7. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00192-007-0388-7>. vi, 54, 56
- R. Riener and R. Burgkart. Aktiver geburtensimulator mit starrem antrieb, July 31 2003. DE Patent App. DE2,002,102,504. 64
- C Rubod, P Lecomte-Grosbras, M Brieu, G Giraudet, N Betrouni, and M Cosson. 3d simulation of pelvic system numerical simulation for a better understanding of the contribution of the uterine ligaments. International urogynecology journal, 24(12) :2093–2098, 2013. vi, 58, 59
- R. Silveira, Minh Tu Pham, T. Redarce, M. Betemps, and O. Dupuis. A new mechanical birth simulator : Birthsim. In Intelligent Robots and Systems, 2004. (IROS 2004). Proceedings. 2004 IEEE/RSJ International Conference on, volume 4, pages 3948–353. vol.4, Sept 2004. doi : 10.1109/IROS.2004.1390031. 65



**Deuxième partie**

**Modélisation et simulation de la  
tête fœtale et implémentation  
GPU**



## CHAPITRE 5

# MODÉLISATION DE LA TÊTE FŒTALE

The most exciting phrase to hear in science, the one that heralds new discoveries, is not 'Eureka!' but 'That's funny...'

Isaac Asimov

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Modélisation des structures fines</b>	<b>74</b>
5.1.1	Modélisation physique des plaques minces	77
5.1.2	Géométrie des coques minces	80
5.1.3	L'élément de membrane : Constant Strain Triangle (CST)	80
5.1.4	L'élément de flexion : Discrete Kirchhoff Triangle (DKT)	82
5.1.5	L'élément de coque CST-DKT	86
<b>5.2</b>	<b>Formulation co-rotationnelle</b>	<b>86</b>
<b>5.3</b>	<b>Contrainte de volume</b>	<b>88</b>
5.3.1	Fonction de volume	89
5.3.2	Projection du gradient	90
<b>5.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>93</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>95</b>

---



Dans le chapitre précédent, nous avons identifié la tête fœtale comme l'organe subissant potentiellement le plus de dommages lors de l'accouchement. Dans ce chapitre, nous allons proposer un modèle de la tête fœtale répondant à la double contrainte exposer précédemment de la précision (et notamment la possibilité de quantifier avec des critères physiques) et du temps de calcul. Dans cette optique, nous allons proposer un modèle éléments finis de la tête fœtale. Le crâne est modélisé par un modèle éléments finis de coque triangulaire. Les éléments sont une combinaison de l'élément CST (Constant Strain Triangle) pour le comportement de membrane et du DKT (Discrete Kirchhoff Triangle) pour le comportement de flexion. Une formulation co-rotationnelle est utilisé pour prendre en compte les non-linéarités géométriques permettant ainsi de grands déplacement de la structure. La préservation du volume de la boîte crânienne est assurée par l'utilisation d'une méthode de projection de gradient du volume.

Dans la première partie de ce chapitre, nous allons dans un premier temps décrire les différentes techniques de modélisation des structures fines existantes en informatique graphique et en biomécanique.

## 5.1 Modélisation des structures fines

Le développement de modèles précis et efficace en temps de calcul pour les structures fines à fait l'objet de beaucoup d'attention en informatique graphique et spécialement dans le domaine de la modélisation des vêtements. Dans le domaine médical, ces modèles sont utilisés pour modéliser les organes fins comme les vaisseaux sanguins, l'utérus, ou les os du crâne.

Les structures fines sont généralement représentées par des modèles topologiques en deux dimensions plongés dans une géométrie en trois dimensions, autrement dit des surfaces. Lorsque ces surface sont planes, on parle de plaque, si elle sont incurvées, de coque. Celles-ci présentent deux types de comportements : un comportement membranaire correspondant aux efforts de traction et un comportement de flexion lorsque les charges appliquées sont perpendiculaires à la structure. Selon les applications, un seul ou ses deux comportements seront effectivement pris en compte par le modèle. Les applications dont l'objectif est la modélisation de vêtements par exemple négligent généralement l'aspect de flexion car il est considéré comme négligeable. Naturellement, pour modéliser ces deux types de comportements nous retrouvons les deux grands types des méthodes évoquées au chapitre 3 à savoir les méthodes discrètes et les méthodes continues.

En ce qui concerne les méthodes discrètes, surtout utilisées en informatique graphique pour la modélisations des vêtements [Baraff and Witkin, 1998], les premières approches utilisent les modèles masses-ressorts que nous avons déjà évoqués

au chapitre 3. [Delingette \[2008\]](#) établie une connection formelle entre les ressorts et la mécanique des milieux continus en élasticité bi-dimensionnelle grâce à l'utilisation de ressorts bi-quadratiques. Cette modélisation permet de paramétriser le modèle par un coefficient de Poisson et un module de Young. En ce qui concerne la modélisation de la flexion, [Grinspun et al. \[2003\]](#) propose un modèle discret simple en se basant sur des énergies de flexion calculées en utilisant les angles diédraux d'un maillage triangulaire. Cette énergie est donnée par la formule :

$$W_b = \sum_e (\theta_e - \bar{\theta}_e)^2 \|\bar{e}\| / \bar{h}_e$$

où  $\bar{\theta}_e^2$  et  $\theta_e$  sont les angles diédraux de l'arête  $e$  respectivement dans la configuration initiale et déformée et  $\bar{h}_e$  un facteur de normalisation dépendant du triangle concerné. Cette formulation est invariante par rotation et donc utilisable pour modéliser de grands déplacements. Cependant c'est une méthode discrète dont le comportement, comme la méthode des masses ressorts dépend de la discrétisation et donc du maillage utilisé. De plus, le comportement dépend du facteur de normalisation qui ne peut être relié à des paramètres physiques que empiriquement. Des simulations réalisées avec ce modèle sont visibles sur la figure 5.1.

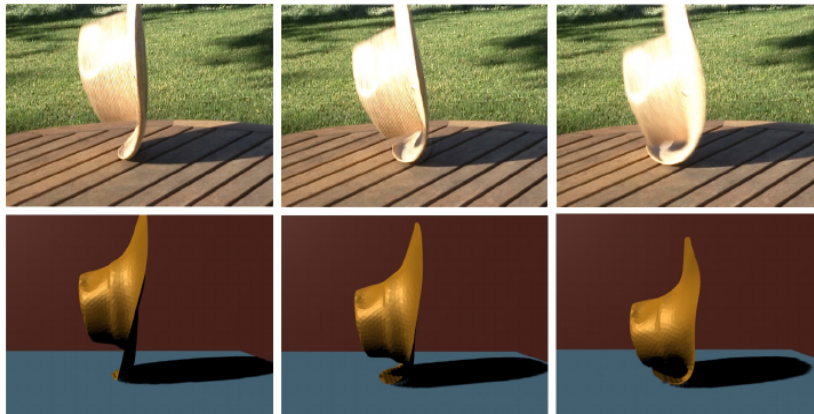
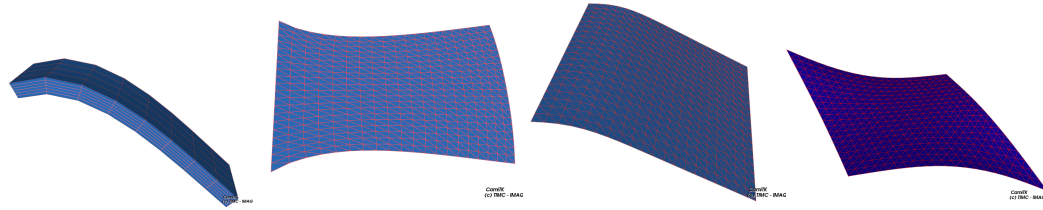


FIGURE 5.1. – Simulations du modèle de coque discret de [Grinspun et al. \[2003\]](#).

[Choi et al. \[2007\]](#) utilise la même fonction d'énergie mais introduit une technique d'analyse modale appelée *modal warping* pour l'intégration temporelle en temps réel qui permet des simulations plus rapides.

Au niveau de la MMC, les coques minces peuvent être modélisées dans le cadre de l'élasticité 3D décrite au chapitre précédent. En effet, même si dans une coque une des dimensions est très faible par rapport aux deux autres, l'objet lui-même reste tridimensionnel. Toutefois, dans le cadre d'une discrétisation en éléments finis, il faudra beaucoup d'éléments pour avoir un bon comportement de flexion et ceux-ci seront plus sujets aux instabilités numériques provoquées par des éléments

dégénérés (voir figure 5.2a). La théorie permettant de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges est la théorie de Kirchhoff-Love [Reddy, 2006]. Celle-ci permet de calculer les efforts de membranes (voir figure 5.2b) et de flexion (voir figure 5.2c) d'une plaque. La figure 5.2d présente une plaque subissant à la fois des déformations de membrane et de flexion.



(a) Structure fine modélisée avec des éléments finis 3D. (b) Comportement de membrane d'une plaque. (c) Comportement de flexion d'une plaque. (d) Comportement de membrane et de flexion d'une plaque.

FIGURE 5.2. – Modélisations et comportements des structures fines.

Nous présentons dans cette partie le modèle de coque triangulaire qui sera utilisé pour modéliser la tête fœtale. Une coque désigne une structure dont l'épaisseur est faible par rapport aux autres dimensions et qui s'étend de part et d'autre d'une surface moyenne non plane. Une coque de forme arbitraire sera approchée par un assemblage de plaques (*c-à-d* de facettes planes). Ces plaques vont subir deux types d'efforts : des efforts de membrane et des efforts de flexion.

Les efforts de membranes sont caractérisés par des contraintes planes. Dans ce cas, les efforts perpendiculaires sont nuls.

Pour modéliser les efforts de flexion d'une plaque, on se place ici dans la théorie de plaque mince, ou théorie de Kirchhoff-Love. Dans cette théorie, on suppose que la surface moyenne peut être utilisée pour représenter une plaque tridimensionnelle d'épaisseur constante. Dans le cadre de cette théorie, on suppose que :

1. les normales à la surface moyenne restent normales après déformation (*c-à-d* on néglige le cisaillement),
2. l'épaisseur de la plaque est faible et constante et donc les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles,
3. on est en petites déformations.

L'élément de coque utilisé pour la modélisation de la tête fœtale est une combinaison d'un élément de membrane et d'un élément de flexion pour modéliser les deux efforts correspondants.

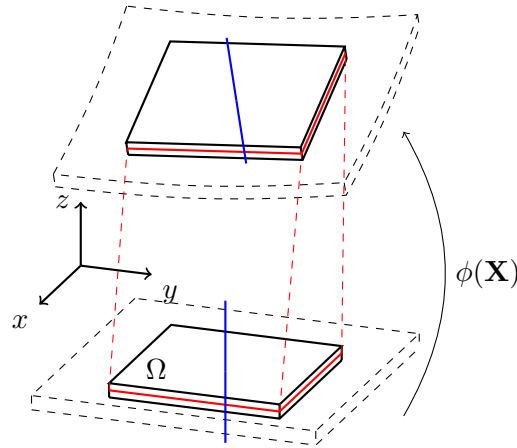


FIGURE 5.3. – Déplacement de la surface moyenne (en rouge) d'après les hypothèses de la théorie de Kirchhoff-Love

### 5.1.1 Modélisation physique des plaques minces

#### i) Cinématique

On note  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  un point matériel de la plaque dans un repère cartésien ayant son origine sur la surface moyenne de la plaque.  $x, y$  sont les coordonnées de la surface moyenne de la plaque non déformée, et  $z$  la coordonnée dans la direction de l'épaisseur. La configuration courante de la plaque est décrite par :

$$\phi = I + \mathbf{u} \quad : \quad \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (5.1)$$

avec,  $\Omega$  le domaine,  $I$  l'application identité et  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$  le champ de déplacement d'un point matériel de la plaque (voir Fig. 5.3).

Le déplacement d'un point est décomposé en un déplacement dans le plan de la surface moyenne notée  $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)$  et un déplacement normal à la surface moyenne noté  $w_0$  (voir Fig. 5.4). D'après la première hypothèse de Kirchhoff, les déflexions verticales sont les mêmes pour tous les points d'une même normale, donc on a :

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (5.2)$$

Une normale effectue une rotation d'angle  $\theta_x$  autour de l'axe  $x$  et d'angle  $\theta_y$  autour de l'axe  $y$ . D'après la troisième hypothèse de Kirchhoff, comme nous sommes en petites déformations, un arc de cercle décrit par un point lors de la rotation de cette normale est assimilable à une droite et on a :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \theta_y(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \theta_x(x, y) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Cette même hypothèse nous permet de déduire que  $\theta_x$  et  $\theta_y$  représente la pente de la surface moyenne et donc :

$$\begin{aligned}\theta_x &= \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \theta_y &= -\frac{\partial w_0}{\partial x}\end{aligned}\tag{5.4}$$

En résumé, le champ de déplacement d'un point de la plaque est :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z \theta_y(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \theta_x(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases}\tag{5.5}$$

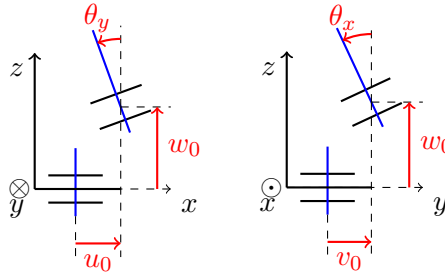


FIGURE 5.4. – Coupe selon les plans  $(x, z)$  et  $(y, z)$ .

## ii) Tenseur des déformations

En utilisant (5.5), les composantes du tenseur des déformations linéarisé  $\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$  utilisé dans le cadre de l'élasticité linéaire sont définis par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} & , & \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} & , & \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} - \theta_x \right) \\ \varepsilon_{zz} &= 0 & , & \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_y \right)\end{aligned}\tag{5.6}$$

Rappelons que ce tenseur est symétrique et donc  $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$ ,  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$  et  $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$ .

Ces composantes peuvent être groupées selon leur effets. Ainsi, on définit le tenseur des déformations de membrane  $\varepsilon_m$ , le tenseur de flexion  $\varepsilon_b$  et celui de

cisaillement  $\varepsilon_c$  :

$$\varepsilon_m = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_b = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_c = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} - \theta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_y \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

D'après la seconde hypothèse de Kirchhoff, on peut négliger le cisaillement et donc :

$$\varepsilon_c = 0 \quad (5.8)$$

D'après la troisième hypothèse de Kirchhoff et l'équation 5.4 :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}(\theta_y - \theta_y) = 0 \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}(-\theta_x + \theta_x) = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

### iii) Tenseur des contraintes

Comme nous nous plaçons dans le cadre de contraintes planes, les contraintes normales à la surface moyenne sont nulles et donc  $\sigma_{zz} = 0$ . En considérant un matériau isotropique linéaire, le tenseur des contraintes est lié au tenseur des déformations par la loi de Hooke :

$$\sigma(\mathbf{u}) = D : \varepsilon(\mathbf{u}) \quad (5.10)$$

où  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  et  $D$  sont respectivement le tenseur des contraintes, celui des déformations et le tenseur matériel. On définit leur équivalent  $\{\sigma\}$ ,  $\{\varepsilon\}$  et  $\{D\}$  en notation de Voigt on a :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}}_{\{\sigma\}} = \frac{E}{1-\nu^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}}_{\{D\}} \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix}}_{\{\varepsilon\}} \quad (5.11)$$

où  $E, \nu$  sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau.

#### iv) Energie de déformation

En utilisant les équations (5.6), (5.7) et (5.10), l'énergie de déformation  $W_s$  est définie par :

$$\begin{aligned} W_s &= \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}) : \sigma(\mathbf{u}) \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \{\varepsilon_m(\mathbf{u})\}^T \{D\} \{\varepsilon_m(\mathbf{u})\} \, d\Omega + z^2 \int_{\Omega} \{\varepsilon_b(\mathbf{u})\}^T \{D\} \{\varepsilon_b(\mathbf{u})\} \, d\Omega. \end{aligned}$$

### 5.1.2 Géométrie des coques minces

Contrairement aux plaques, les coques sont utilisées pour modéliser des surfaces de formes arbitraires et évoluent donc naturellement dans un espace à trois dimensions. Une façon de les modéliser est de les considérer comme un assemblage de plaques minces. Comme les plaques sont définies en deux dimensions, un repère local est défini pour chaque plaque, positionné à son barycentre (voir Fig. 5.5). Si on considère des éléments triangulaires pour représenter les plaques, ce repère  $(e_1, e_2, e_3)$  est défini de tel sorte que  $e_1$  et  $e_2$  soit dans le plan du triangle avec  $e_1$  parallèle à l'arête 1 – 2 et  $e_3$  perpendiculaire au triangle. On a donc :

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\mathbf{x}_2^G - \mathbf{x}_1^G}{\|\mathbf{x}_2^G - \mathbf{x}_1^G\|} \\ e'_2 &= \mathbf{x}_3^G - \mathbf{x}_2^G \\ e_3 &= \frac{e_1 \times e'_2}{\|e_1 \times e'_2\|} \\ e_2 &= e_3 \times e_1 \end{aligned} \tag{5.12}$$

avec  $\mathbf{x}_i^G = (x_i^G, y_i^G, z_i^G)$  la positions du nœud  $i$  de l'élément triangulaire dans le repère global  $(e_1^G, e_2^G, e_3^G)$ . Dans ce qui suit, les formulations seront faites par rapport au repère local d'un élément : on notera  $\mathbf{x} = (x, y)$  seront les coordonnées matérielles et  $\mathbf{r} = (r, s)$  celles de l'élément de référence. On notera  $\mathbf{x}(\mathbf{r})$  la transformation entre l'élément de référence et l'élément matériel.

### 5.1.3 L'élément de membrane : Constant Strain Triangle (CST)

L'élément CST est un élément triangulaire permettant de modéliser les membranes où les contraintes s'exercent dans le plan de l'élément (see Fig. 5.6). Il est défini par 3 nœuds  $(x_i, y_i)$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  avec deux degrés de libertés  $(u_i, v_i)$  par nœuds correspondant aux déplacements plans. Le champs de déplacement  $(u_0, v_0)$

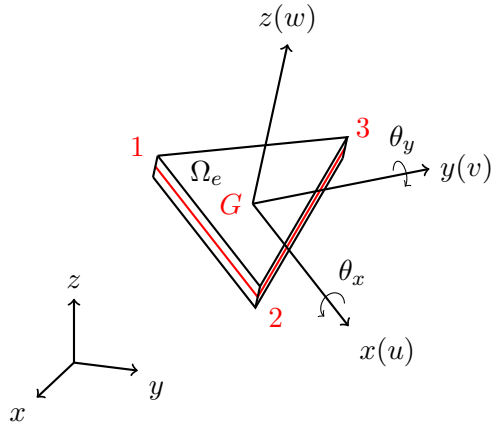


FIGURE 5.5. – Géométrie d'un élément plaque triangulaire.  $G$  est le barycentre de l'élément.

de la surface moyenne est interpolé de manière linéaire avec :

$$u_0(r, s) = \sum_{i=1}^3 N_i(r, s) u_i \quad (5.13)$$

$$v_0(r, s) = \sum_{i=1}^3 N_i(r, s) v_i$$

avec  $N_i(r, s)$  les fonctions de formes linéaires :

$$\begin{aligned} N_1(r, s) &= 1 - r - s \\ N_2(r, s) &= r \\ N_3(r, s) &= s \end{aligned} \quad (5.14)$$

En utilisant la règle de dérivation en chaîne, on a ;

$$\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{r}} J^{-1}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{r}} J^{-1}, \quad (5.15)$$

avec  $J = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{r}$  la matrice jacobienne de la transformation entre l'élément de référence et l'élément matériel.

En utilisant les équations (5.7) et (5.15) :

$$\{\varepsilon_m\} = B_m U_m \quad (5.16)$$

avec  $U_m = (u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3)^T$  et  $B_m$  la matrice  $3 \times 6$  reliant les déformations au déplacements, calculée à partir de l'équation 5.11.



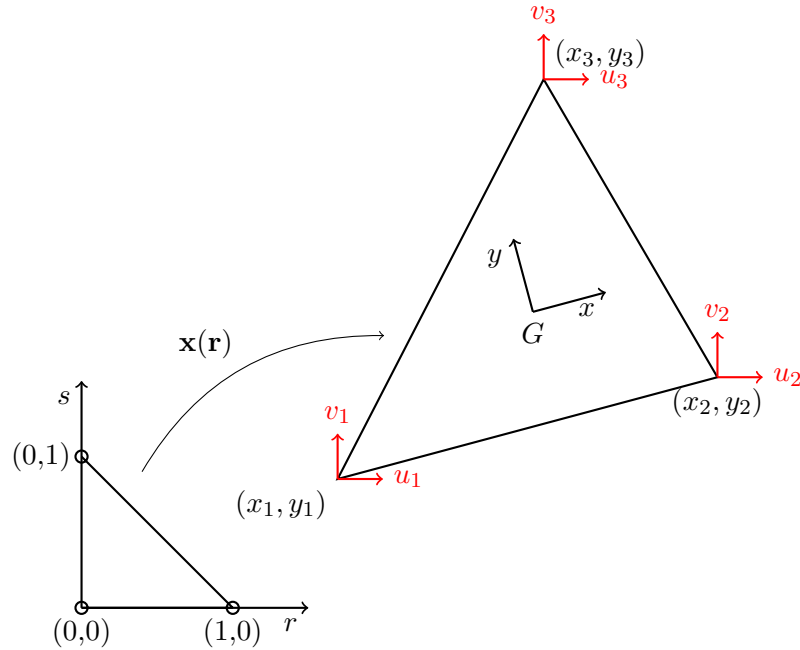


FIGURE 5.6. – L'élément CST dans sa configuration de référence (gauche) et matérielle (droite) avec les degrés de libertés associés.

Finalement, la matrice de raideur de l'élément CST est définie par :

$$\begin{aligned} K_m &= \int_{V_e} B_m^T \{D\} B_m \, d\mathbf{x} \\ &= h \int_{A_e} B_m^T \{D\} B_m \det(J) \, d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (5.17)$$

avec  $V_e$  le volume de l'élément,  $A_e$  son aire et  $h$  son épaisseur. Comme les déplacements sont interpolés de manière linéaire, les déformations sont constantes sur l'élément et donc l'intégrale ci-dessus est calculée directement.

#### 5.1.4 L'élément de flexion : Discrete Kirchhoff Triangle (DKT)

L'élément DKT est un élément plaque triangulaire de flexion introduit par [Batoz et al. \[1980\]](#). Nous avons choisi cet élément pour modéliser la flexion car il offre un bon rapport précision / nombre de degré de liberté [[Gärdsback and Tibert, 2007](#)].

Cet élément (illustré par la figure 5.7) est défini par 6 nœuds  $(x_i, y_i)$  : trois nœuds aux sommets du triangle pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  et trois nœuds aux milieux des arêtes pour  $i \in \{4, 5, 6\}$ . Cet élément a ainsi neuf degrés de libertés correspondants

aux trois déplacements perpendiculaires au plan du triangle  $w_i$  et aux six rotations  $\theta_{xi}, \theta_{yi}$  exprimés aux sommets du triangle.

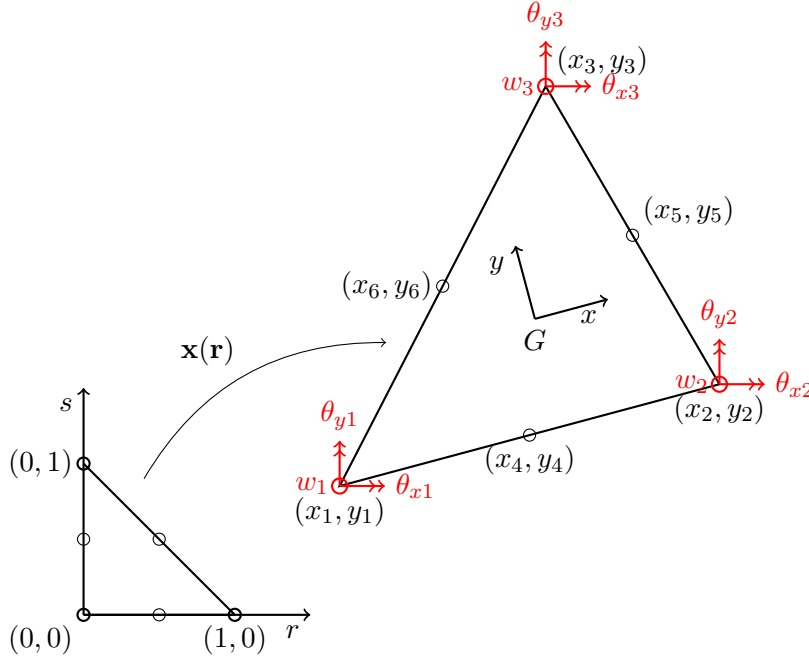


FIGURE 5.7. – L'élément DKT exprimé dans sa configuration de référence (gauche) et matérielle (droite).

L'élément DKT est construit en établissant plusieurs hypothèses.

**i) Les rotations  $\theta_x, \theta_y$  varient de manière quadratique sur l'élément.**

Ainsi, les termes de rotation sont interpolés de la manière suivantes :

$$\theta_x(r, s) = \sum_{i=1}^6 H_i(r, s)\theta_{xi}, \quad \theta_y(r, s) = \sum_{i=1}^6 H_i(r, s)\theta_{yi} \quad (5.18)$$

où  $H_i(r, s)$  sont les fonctions d'interpolations quadratiques aux nœuds  $i$  définies en fonctions des coordonnées de l'élément de référence  $\mathbf{r} = (r, s)$ .

Pour les autres hypothèses, nous aurons besoin d'exprimer des relations aux nœuds milieux en fonction de la coordonnée curviligne sur une arête (voir figure 5.8). On défini donc :

- $m \in 3, 4, 5$  le numéro du nœud milieu de l'arête considérée,
- $s$  l'abscisse curviligne autour de l'arête considérée,
- $n$  le vecteur du plan de l'élément et normal à l'arête considérée,

- $\theta_{sm}$  la rotation de la normale à la surface moyenne autour de l'axe de l'abscisse curviligne  $s$  au nœud  $m$ ,
- $\theta_{nm}$  la rotation de la normale à la surface moyenne autour de  $n$  au nœud  $m$ ,
- $l_{ij}$  la longueur de l'arête  $i - j$ .

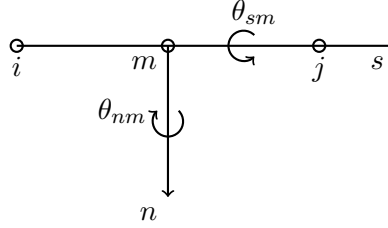


FIGURE 5.8. – Arêtes d'un élément en coordonnée curviligne.

Les degrés de libertés correspondants aux rotations sont liés à ceux correspondant aux déplacements à l'aide des hypothèses suivantes :

**ii) Les hypothèses de Kirchhoff sont introduites aux nœuds de l'élément.**

Aux nœuds correspondants aux sommets ( $i \in 1, 2, 3$ ), on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i}{\partial y} - \theta_{xi} &= 0 \\ \frac{\partial w_i}{\partial x} - \theta_{yi} &= 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Aux nœuds correspondants aux milieux des arêtes ( $m \in 4, 5, 6$ ), on a :

$$-\frac{dw_m}{ds} + \theta_{nm} = 0 \quad (5.20)$$

**iii) Les variations des déplacements  $w$  le long des arêtes sont cubiques**

On a donc :

$$w(s) = a + bs + cs^2 + ds^3 \quad (5.21)$$

et on en déduit :

$$\frac{dw_m}{ds} = \frac{3}{2l_{ij}}(w_i - w_j) - \frac{1}{4} \left( \frac{dw_i}{ds} + \frac{dw_j}{ds} \right) \quad (5.22)$$

**iv) On impose une variation linéaire de  $\theta_s$  long des arêtes.**

On a ainsi :

$$\theta_{sm} = \frac{1}{2} (\theta_{si} + \theta_{sj}) \quad (5.23)$$

Les hypothèses i)-iv) vont permettre d'exprimer les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  en fonctions des variables nodales  $w_i$ ,  $\theta_{xi}$  et  $\theta_{yi}$  de l'élément DKT.

Pour cela, nous avons besoin des relations liant les variables exprimés en fonction des abscisses curvilignes des arêtes à celles exprimés dans le repère de l'élément. Ces relations sont des rotations puisque  $(s, n)$  forme un repère orthogonal. En particulier, on a :

$$\begin{pmatrix} \theta_n \\ \theta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{ij} & \sin \alpha_{ij} \\ -\sin \alpha_{ij} & \cos \alpha_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dw}{dn} \\ \frac{dw}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{ij} & \sin \alpha_{ij} \\ -\sin \alpha_{ij} & \cos \alpha_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dw}{dy} \\ \frac{dw}{dx} \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

avec  $\alpha_{ij}$  l'angle entre l'axe des abscisses du repère de l'élément et la normale  $n$  de l'arête  $i - j$ .

Grâce à ces hypothèses, on peut exprimer les rotations au nœuds milieux  $\theta_{xm}$  et  $\theta_{ym}$ . Deux fonctions de formes à 9 composantes  $H_x(r, s)$  et  $H_y(r, s)$  sont alors définies :

$$\theta_x(r, s) = H_x^T U_b, \quad \theta_y(r, s) = H_y^T U_b \quad (5.26)$$

avec  $U_b = (w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3})^T$ .

En utilisant la règle de dérivation en chaîne, on obtient :

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \theta_x}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \theta_x}{\partial \mathbf{r}} J^{-1}, \quad \frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{r}} J^{-1}. \quad (5.27)$$

avec  $J = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{r}$  la matrice jacobienne de la transformation entre l'élément de référence et l'élément matériel.

En utilisant les équation (5.7), (5.26) et (5.27), la matrice  $B_b$  reliant les déformation aux déplacements (de taille  $3 \times 9$ ) est définie par :

$$\{\varepsilon_b\} = B_b U_b. \quad (5.28)$$

avec

$$B_b(r, s) = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} y_{31} \frac{\partial H_x}{\partial r} T + y_{12} \frac{\partial H_x}{\partial s} T \\ -x_{31} \frac{\partial H_y}{\partial r} T - x_{12} \frac{\partial H_y}{\partial s} T \\ -x_{31} \frac{\partial H_x}{\partial r} T - x_{12} \frac{\partial H_x}{\partial s} T + y_{31} \frac{\partial H_y}{\partial r} T + y_{12} \frac{\partial H_y}{\partial s} T \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

avec  $\alpha_{ij} = \alpha_j - \alpha_i$  ( $\alpha = x, y$ ) et  $A$  l'aire de l'élément déformé.

Enfin, la matrice de raideur due aux effets de flexion est :

$$\begin{aligned} K_f &= \frac{h^3}{12} \int_{AE} B_b^T \{D\} B_b \, d\mathbf{x} \\ K_f &= \frac{h^3}{12} \int_{AE} B_b^T \{D\} B_b \det(J) \, dr \end{aligned} \quad (5.30)$$

Comme les rotations sont interpolées avec des fonctions quadratiques, l'équation précédente est intégrée en utilisant une quadrature de Gauss à 3 points.

### 5.1.5 L'élément de coque CST-DKT

En combinant les deux éléments décrits précédemment, on construit un élément de coque dont les effets de membranes et de flexion sont indépendants. Cet élément à 6 degrés de liberté à chaque nœuds :  $\mathbf{u}_i = (u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi})^T$ . La matrice de rigidité nodale  $K_{ij}$  (de taille  $6 \times 6$ ) correspondant aux variables nodales des nœuds  $i$  et  $j$  combine les deux matrices de rigidités nodales : la matrice de raideur nodale de l'élément CST  $K_{ijm}$  (de taille  $2 \times 2$ ) et la matrice de raideur nodale de l'élément DKT  $K_{ijb}$  (de taille  $3 \times 3$ ). Pour que la matrice ne soit pas singulière, on rajoute un terme rigidité fictif correspond à la rotation autour de l'axe perpendiculaire à l'élément  $\theta_z$  qu'on nomme  $d$ . Cette matrice s'exprime donc sous la forme :

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} K_{ijm} & 0 & 0 \\ 0 & K_{ijb} & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

La matrice de rigidité  $\bar{K}_e$  de l'élément formée par les matrices  $K_{ij}$  avec  $i, j \in 1, \dots, 3$  est exprimé dans le repère locale de l'élément. Dans la suite nous allons l'exprimer dans le repère globale en en proposant une formulation co-rotationnelle.

## 5.2 Formulation co-rotationnelle

Le modèle de coque décrit précédemment est un modèle linéaire :

- au niveau matériel du à l'utilisation de la loi de Hooke qui n'est valide que dans le cadre de petites déformations,
- au niveau géométrique du à l'utilisation du tenseur des déformations linéarisé qui n'est valide que dans le cas de petits déplacements.

Si la première contrainte est acceptable dans le cadre de la tête fœtale, le fait de ne pas pouvoir modéliser de grands déplacements (et notamment de grandes rotations) est problématique étant donné les mouvements de la tête lors de la descente fœtale.

Pour conserver une formulation linéaire, alors que le tenseur de déformations linéarisé n'est pas invariant par rotation, la rotation rigide doit être extraite avant le calcul des déformations. Pour ce faire, une formulation co-rotationnelle sur les éléments peut être utilisée pour exprimer les déformations dans un repère local à chaque élément comme l'a proposé Müller et al. [2002] pour les éléments 3D. Toutefois, il faudra ici prendre en compte les degrés de libertés correspondants aux rotations qui ne se manipulent pas comme ceux des déplacements. Pour la formulation co-rotationnelle de l'élément CST-DKT, nous nous basons sur l'approche proposée par Felippa and Haugen [2005].

Tout d'abord, pour les deux configurations déformée et initiale, on calcule un repère local en utilisant les arêtes de l'élément comme présenté sur la figure 5.9. Notons  $\tilde{e}_0$  (respectivement  $\bar{e}_0$ ) le vecteur colinéaire à l'arête définie par les nœuds 1 – 2 et  $\tilde{e}_2$  (respectivement  $\bar{e}_2$ ) le produit vectoriel de  $\tilde{e}_0$  (respectivement  $\bar{e}_0$ ) et du vecteur engendré par l'arête 1 – 3 de l'élément. Enfin,  $\tilde{e}_1$  (respectivement  $\bar{e}_1$ ) est défini par le produit vectoriel de  $\tilde{e}_0$  et  $\tilde{e}_2$  (respectivement  $\bar{e}_0$  et  $\bar{e}_2$ ). Les vecteurs  $\tilde{e}_i$  (respectivement  $\bar{e}_i$ ) définissent les vecteurs colonnes des matrices de rotations  $T_0$  (respectivement  $T_R$ ) de l'élément dans sa configuration initiale (respectivement déformée). Les vecteurs exprimés dans le repère global seront sous la forme  $\mathbf{x}$ , ceux dans le repère initial sous la forme  $\tilde{\mathbf{x}}$  et ceux dans le repère courant sous la forme  $\bar{\mathbf{x}}$ . On posera aussi  $\mathbf{u} = (\mathbf{v}, \theta)$  ou  $\mathbf{v}$  contient les 3 degrés de libertés de déplacements et  $\theta$  les trois degrés de libertés de rotations.

Pour chaque élément, la procédure pour extraire les déformations pures est la suivante :

- On calcule la barycentre de l'élément dans sa configuration initiale  $\mathbf{G}^0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{x}_i^0$ . On calcule ensuite le repère local de l'élément  $T_0$  toujours dans la configuration initiale. On peut maintenant calculer les coordonnées des nœuds dans ce repère :  $\tilde{\mathbf{x}}_i^0 = T_0(\mathbf{x}_i^0 - \mathbf{G}^0)$ .
- On calcule la barycentre de l'élément dans sa configuration déformée  $\mathbf{G}^C = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{x}_i$ . On calcule ensuite le repère local de l'élément  $T_R$  toujours dans la configuration déformée. On peut maintenant calculer les coordonnées des nœuds dans ce repère :  $\bar{\mathbf{x}}_i = T_R(\mathbf{x}_i - \mathbf{G}^0)$ .
- On extrait les déformations pures des degrés de libertés correspondants

aux déplacements :  $\bar{\mathbf{v}}_i^d = \bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{x}}_i^0$ . On transforme les degrés de libertés de rotations  $\theta_i$  en matrice de rotation  $R_i$  et on calcule leurs déformations avec  $R_i^d = T_R R T_0^T$ .

Une fois ces étapes accomplies, on a le vecteur  $\mathbf{u}_i^d = (\mathbf{v}_i^d, \theta_i^d)$  correspondant aux déformations au nœud  $i$  de l'élément et le vecteur  $U_i^d = (\mathbf{u}_1^d, \mathbf{u}_2^d, \mathbf{u}_3^d)$  correspondant aux déformations pour tous les nœuds de l'élément. La matrice de rigidité pour l'élément devient :

$$K_e = T_{Re}^T \bar{K}_e T_{Re} \quad (5.32)$$

où  $\bar{K}_e$  est la matrice de rigidité dans le repère courant de l'élément calculer précédemment et  $T_{Re}$  la matrice  $18 \times 18$  constituée de 6 matrice  $T_R$  sur la diagonale. Les forces et moments de l'élément s'expriment :

$$F_e = T_{Re}^T \bar{K}_e U_i^d \quad (5.33)$$

On peut noter qu'il y a plusieurs manière d'estimer la matrice  $T_R$ . On peut cité par la décomposition QR ou polaire [Nesme et al., 2005]. Toutefois ces méthodes impliquent l'utilisation d'un algorithme de minimisation qui ralentit la simulation.

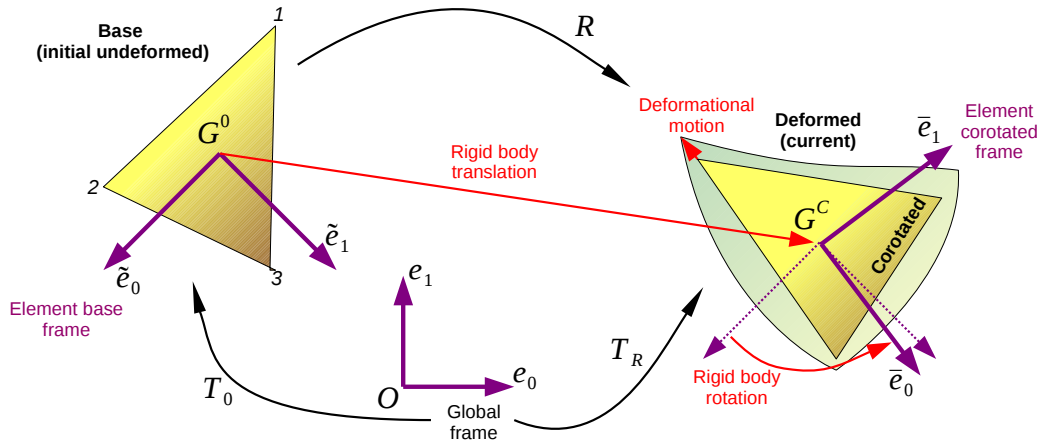


FIGURE 5.9. – Cinématique d'un élément co-rotationnel.  $T_0$  (respectivement  $T_R$ ) est la repère local de l'élément dans sa configuration initiale (respectivement déformée)

### 5.3 Contrainte de volume

Des modèles surfaciques sont parfois utilisés couplés à des méthodes de contrôle de volume pour simuler des objets pleins. Promayon et al. [1996] et [Chang et al., 2013] utilisent le théorème de flux-divergence pour calculer et maintenir un volume constant par une méthode de projection de gradient. C'est de cette méthode dont

nous allons nous inspirer dans le cas qui nous concerne. [Hong et al. \[2006\]](#) et [Hong et al. \[2005\]](#) proposent un modèle masse-ressort avec préservation de volume en utilisant des contraintes implicites sous forme de lagrangiens. Toutefois, l'utilisation de lagrangiens nécessite une passe de résolution des contraintes qui augmente significativement le temps de calcul. Dans [Diziol et al. \[2011\]](#), les auteurs présentent un modèle surfacique "meshless" basé sur le *shape matching* de [Müller et al. \[2005\]](#) et associé à une version simplifiée et parallélisée de la projection de gradient pour contrôler le volume de l'objet.

Comme nous l'avons vu précédemment, le modèle de coque DKT-CST va permettre de modéliser le crâne de la tête fœtale. Afin de prendre en compte la matière intra-crânienne de la tête fœtale, nous allons présenter dans cette section une méthode destinée à conserver le volume intra-crânien constant grâce à l'introduction d'une contrainte de volume dans le système. Cette méthode s'appuie sur la projection directe du gradient de volume entre chaque pas de simulation et ne nécessite pas d'algorithme d'optimisation coûteux en temps de calcul. En effet, dans les travaux précédents pour modéliser la tête fœtale présentés dans le chapitre 4, soit la matière intra-crânienne est représentée par des éléments finis plein ce qui est coûteux en temps de calcul ou n'est pas modélisée du tout.

### 5.3.1 Fonction de volume

Le théorème de flux-divergence (ou théorème de Green-Ostrogradski) permet de transformer l'intégrale sur un volume d'un champ vectoriel  $f(\mathbf{x})$  en une intégrale de surface :

$$\int_V \nabla \cdot f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial V} f(\mathbf{x})^T \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (5.34)$$

où  $\partial V$  est le bord du volume  $V$ , et  $\mathbf{n}$  la normale extérieure. Pour  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ , on a :

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{x} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \mathbf{x}^T \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 3V. \quad (5.35)$$

Pour un maillage triangulaire comportant  $m$  triangles  $T_j$  du maillage, la fonction précédente est discrétisée en une somme définie par :

$$V = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^m \mathbf{G}_j \cdot A_j \quad (5.36)$$

où  $\mathbf{G}_j$  est l'iso-barycentre et  $A_j$  le vecteur d'aire du triangle  $T_j$  définie par :



$$A_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \mathbf{x}_k^j \times \mathbf{x}_{k \oplus 1}^j \quad (5.37)$$

avec  $x_k^j$  le  $k^{\text{ième}}$  sommet du  $j^{\text{ième}}$  triangle. Définissons maintenant  $s_i$  la liste des triangles adjacents au sommet  $i$ . Nous pouvons alors proposer une expression de la fonction de volume discrète basée directement sur les vertex du maillage avec :

$$V = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{nb} \mathbf{x}_i \cdot \left( \sum_{f_j \in s_i} \frac{1}{3} A_j \right) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{nb} \mathbf{x}_i \cdot N_i = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{nb} V_i \quad (5.38)$$

avec  $nb$  le nombre de sommets. La figure 5.10 représente les différentes quantités nécessaires au calcul de la contribution d'un point au volume total de l'objet.

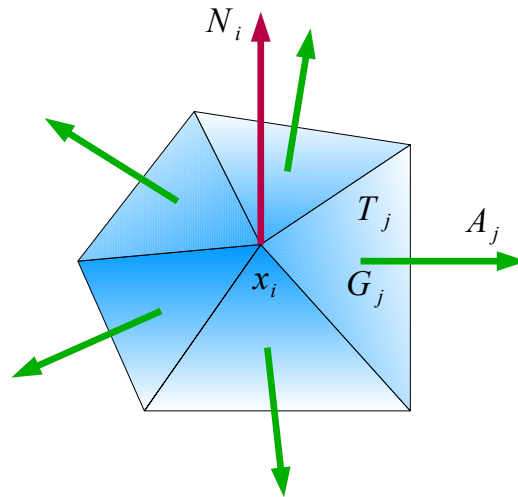


FIGURE 5.10. – Présentation des différentes quantités nécessaires pour calculer la contribution d'un point  $x_i$  au volume total de l'objet.  $A_j$  est le vecteur d'aire de la face  $j$  et  $N_i$  la somme des contributions de chacun des  $A_j$ .

### 5.3.2 Projection du gradient

Pendant la simulation, la déformation résultant des forces externes appliquées au modèle change le volume de l'objet dont uniquement l'enveloppe externe est prise en compte. Nous allons donc déplacer les nœuds de la coque dans le but de satisfaire la contrainte de volume. Le but de l'algorithme présenté dans cette partie est de déterminer ce déplacement.

La figure 5.11 illustre cette idée en considérant le vecteur de position généralisé  $\mathbf{X}$  comprenant toutes les positions des nœuds du maillage (noté  $\mathbf{X}^t$  au temps  $t$ ) déplacé au temps  $t + dt$  à la position  $\phi(\mathbf{X}^t)$  sous l'effet des forces externes et de l'élasticité du modèle.  $\phi(\mathbf{X}^t)$  est ensuite projeté dans l'espace de la contrainte de volume pour avoir la nouvelle position  $\mathbf{X}^{t+dt}$  qui satisfait la contrainte.

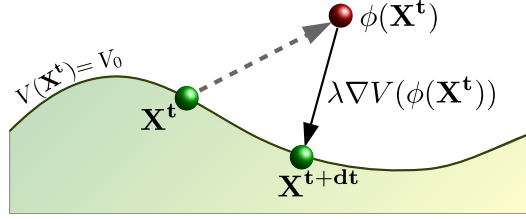


FIGURE 5.11. – Projection sur la contrainte de volume.  $\phi(\mathbf{X}^t)$  est l'état après les déformations mécaniques.

Afin d'obtenir le nouveau vecteur de positions, le système suivant doit ainsi être résolu pour trouver la valeur de la variable  $\lambda$  :

$$\begin{cases} \mathbf{X}^{t+dt} = \phi(\mathbf{X}^t) + \lambda \nabla V(\phi(\mathbf{X}^t)) \\ V(\mathbf{X}^{t+dt}) = V_0 \end{cases} \quad (5.39)$$

où  $V_0$  est le volume initial. En utilisant l'équation (5.38), le système précédent est équivalent à :

$$\begin{cases} \mathbf{X}^{t+dt} = \phi(\mathbf{X}^t) + \lambda \nabla V(\phi(\mathbf{X}^t)) \\ \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{nb} V_i = V_0 \end{cases} \quad (5.40)$$

Résoudre l'équation précédente revient à résoudre une équation en  $\lambda$  et l'utiliser pour corriger le position donnée par le modèle mécanique. En utilisant les équations (5.37) et (5.38), et en remplaçant dans le système (5.40), on obtient une équation du 3<sup>ème</sup> degré en  $\lambda$  :

$$\lambda^3 \sum_i^{nb} b_i + \lambda^2 \sum_i^{nb} c_i + \lambda \sum_i^{nb} d_i + \sum_i^{nb} e_i - V_0 = 0 \quad (5.41)$$

où  $b_i, c_i, d_i, e_i$  sont des fonctions intermédiaires détaillées dans l'algorithme 5.1 qui présente les opérations à effectués pour un pas de temps. Parmi les solutions de l'équation, on choisit la solution réelle de valeur absolue minimale.

Les vecteurs  $\nabla_i$  définissent la direction dans laquelle agit la contrainte de volume. Dans le cas présenté dans l'algorithme 5.1, il représente la direction de la normale discrète au nœud  $i$  (voir figure 5.12a). Toutefois, cette direction peut être

---

**Algorithme 5.1 :** Calcul de la contrainte de volume et correction du vecteur de position.

---

```

 $x' = \phi(x^t)$ 
for  $j = 1 \rightarrow m$  do
   $A_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 x_k^j \times x_{k\oplus 1}^j$ 
end for
for  $i = 1 \rightarrow nb$  do
   $\nabla_i = \sum_{f_j \in s_i} \frac{1}{3} A_j$ 
end for
... {Prise en compte d'autres contraintes éventuelles}
for  $j = 1 \rightarrow m$  do
   $u_j = \sum_{k=1}^3 \nabla_k^j \times \nabla_{k\oplus 1}^j$ 
   $v_j = \sum_{k=1}^3 \left( x_k^j \times \nabla_{k\oplus 1}^j - x_{k\oplus 1}^j \nabla_k^j \right)$ 
end for
 $b \leftarrow 0$ 
 $c \leftarrow 0$ 
 $d \leftarrow 0$ 
 $e \leftarrow 0$ 
for  $i = 1 \rightarrow nb$  do
   $\beta_i = \frac{1}{2} \sum_{f_j \in s_i} \frac{1}{3} u_j$ 
   $\gamma_i = \frac{1}{2} \sum_{f_j \in s_i} \frac{1}{3} v_j$ 
   $b \leftarrow b + \nabla_i \cdot \beta_i$ 
   $c \leftarrow c + x'_i \cdot \beta_i + \nabla_i \cdot \gamma_i$ 
   $d \leftarrow c + x'_i \cdot \gamma_i + \nabla_i \cdot \nabla_i$ 
   $e \leftarrow e + x'_i \cdot \nabla_i$ 
end for
 $d \leftarrow d - 3V_0$ 
 $\lambda = \text{resoudreEquationDu3emeDegre}(b,c,d,e)$ 
for  $i = 1 \rightarrow nb$  do
   $x^{t+dt} \leftarrow x'_i + \lambda \nabla_i$ 
end for

```

---

modifiée pour prendre en compte d'autres contraintes éventuelles. Par exemple, on peut combiner l'incompressibilité avec une contrainte de collision avec un plan en projetant  $\nabla_i$  sur ce plan (voir figure 5.12c).  $\nabla_i$  peut également être annulé si le déplacement du nœud est fixé par une autre contrainte (voir figure 5.12b).

Si on désire un comportement plus local, on peut envisager de définir des coefficients multiplicateur pour les  $\nabla_i$  afin par exemple de concentrer l'effet de la contrainte de volume autour d'une région particulière. Enfin, le volume cible n'est pas obligatoirement le volume initial  $V_0$  de l'objet. On peut imaginer définir une autre valeur cible.

Ces considérations mettent en évidence la souplesse de notre méthode de conservation de volume, d'autant plus qu'elle est applicable quel que soit le modèle élastique utilisé.

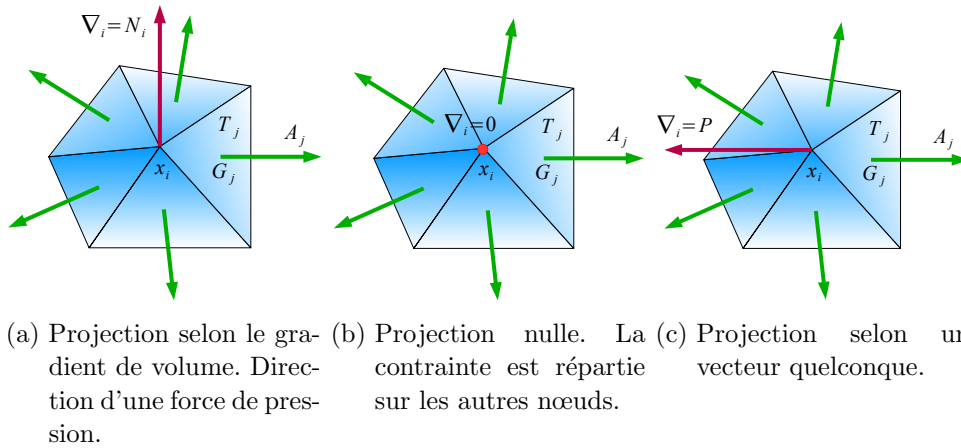


FIGURE 5.12. – Différents types de contrôle local de la contrainte de volume.

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un modèle éléments finis de la tête fœtale qui répond partiellement aux contraintes que nous nous sommes imposées. En effet, celui-ci se base sur la mécanique des milieux continus, ce qui nous permettra de le paramétrer avec des données expérimentales issues de la littérature. De plus, la structure du crâne de la tête fœtale correspond aux hypothèses de la théorie des plaques minces. Notre modèle tient également compte de la matière intra-crânienne sans toutefois la modéliser explicitement grâce à l'utilisation d'une contrainte de volume garantissant l'incompressibilité de celle-ci à chaque pas de simulation. Cette méthode permet d'économiser du temps de calcul car la contrainte est très rapide à calculer.

Toutefois, le temps de simulation peut être amélioré en utilisant le calcul sur GPU (Graphical Processing Unit). Dans le chapitre suivant, nous allons présenter les détails d'implémentation du modèle et de la contrainte de volume sur GPU et détailler la boucle de simulation avec notamment la méthode d'intégration temporelle et la résolution du système.

## Bibliographie

- David Baraff and Andrew Witkin. Large steps in cloth simulation. In Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, SIGGRAPH '98, pages 43–54, New York, NY, USA, 1998. ACM. ISBN 0-89791-999-8. doi : 10.1145/280814.280821. URL <http://doi.acm.org/10.1145/280814.280821>. 74
- Jean-Louis Batoz, Klaus-JÜRgen Bathe, and Lee-Wing Ho. A study of three-node triangular plate bending elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15(12) :1771–1812, 1980. ISSN 1097-0207. doi : 10.1002/nme.1620151205. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620151205>. 82
- Cheng Chang, Andrew Borgart, Airong Chen, and MaxA.N. Hendriks. Direct gradient projection method with transformation of variables technique for structural topology optimization. Structural and Multidisciplinary Optimization, pages 1–13, 2013. ISSN 1615-147X. doi : 10.1007/s00158-013-0964-z. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00158-013-0964-z>. 88
- Min Gyu Choi, Seung Yong Woo, and Hyeong-Seok Ko. Real-time simulation of thin shells. Computer Graphics Forum, 26(3) :349–354, 2007. ISSN 1467-8659. doi : 10.1111/j.1467-8659.2007.01057.x. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-8659.2007.01057.x>. 75
- H. Delingette. Triangular springs for modeling nonlinear membranes. Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on, 14(2) :329–341, 2008. ISSN 1077-2626. doi : 10.1109/TVCG.2007.70431. 75
- R. Diziol, J. Bender, and D. Bayer. Robust real-time deformation of incompressible surface meshes. In Proceedings of the 2011 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation, SCA '11, pages 237–246, New York, NY, USA, 2011. ACM. ISBN 978-1-4503-0923-3. doi : 10.1145/2019406.2019438. URL <http://doi.acm.org/10.1145/2019406.2019438>. 89
- CA Felippa and B Haugen. A unified formulation of small-strain corotational finite elements : I. theory. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194(21) :2285–2335, 2005. 87
- Mattias Gärdback and Gunnar Tibert. A comparison of rotation-free triangular shell elements for unstructured meshes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196(49) :5001–5015, 2007. 82
- Eitan Grinspun, Anil N Hirani, Mathieu Desbrun, and Peter Schröder. Discrete shells. In Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation, pages 62–67. Eurographics Association, 2003. vi, 75
- Min Hong, Min-Hyung Choi, S. Jung, S. Welch, and J. Trapp. Effective constrained dynamic simulation using implicit constraint enforcement. In Robotics and Automation, 2005. ICRA 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on, pages 4520–4525, 2005. doi : 10.1109/ROBOT.2005.1570816. 89
- Min Hong, S. Jung, Min-Hyung Choi, and S.W.J. Welch. Fast volume preservation for a mass-spring system. Computer Graphics and Applications, IEEE, 26(5) :83–91, 2006. ISSN 0272-1716. doi : 10.1109/MCG.2006.104. 89
- Matthias Müller, Julie Dorsey, Leonard McMillan, Robert Jagnow, and Barbara Cutler. Stable real-time deformations. In Proceedings of the 2002 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation, SCA '02, pages 49–54, New York, NY, USA, 2002. ACM. ISBN 1-58113-573-4. doi : 10.1145/545261.545269. URL <http://doi.acm.org/10.1145/545261.545269>. 87
- Matthias Müller, Bruno Heidelberger, Matthias Teschner, and Markus Gross. Meshless deformations based on shape matching. ACM Trans. Graph., 24(3) :471–478, July 2005. ISSN 0730-0301. doi : 10.1145/1073204.1073216. URL <http://doi.acm.org/10.1145/1073204.1073216>. 89
- Matthieu Nesme, Yohan Payan, and François Faure. Efficient, Physically Plausible Finite Elements. In Eurographics, Dublin, Irlande, 2005. URL <http://hal.inria.fr/inria-00394480>. 88
- E. Promayon, P. Bacconnier, and C. Puech. Physically-based deformations constrained in displacements and volume. Computer Graphics Forum, 15(3) :155–164, 1996. ISSN 1467-8659. doi : 10.1111/1467-8659.1530155. URL <http://dx.doi.org/10.1111/1467-8659.1530155>. 88
- Junuthula Narasimha Reddy. Theory and analysis of elastic plates and shells. CRC press, 2006. 76



# CHAPITRE 6

## SIMULATION DYNAMIQUE ET IMPLÉMENTATION GPU

42

Le Guide du voyageur intergalactique,  
Douglas Adams

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Système dynamique</b>	<b>98</b>
6.1.1	Intégration temporelle	99
6.1.2	Résolution	100
<b>6.2</b>	<b>Implémentation sur GPU</b>	<b>101</b>
6.2.1	Architecture GPU NVIDIA	101
6.2.2	Approche séquentielle sur CPU	102
6.2.3	Approche parallèle sur GPU	104
6.2.4	Gestion de la mémoire	106
<b>6.3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>111</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>112</b>

---



Dans le chapitre précédent, nous avons présenté le modèle de coque utilisé pour la tête fœtale et sa discrétisation spatiale en utilisant la méthode des éléments finis. Nous avons explicité le fait que ce modèle présente un double avantage : il correspond bien à la nature de la tête fœtale tout en permettant de ne pas modéliser directement l'intérieur de celle-ci et ainsi de sauvegarder du temps de calcul. La recherche d'efficacité a donc opéré sur le choix du modèle. Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur l'efficacité au niveau de la résolution du système et de l'implémentation. Dans la première partie nous présenterons les choix qui ont été fait au niveau de l'intégration temporelle et dans un second temps nous présenterons l'implémentation GPGPU (General Purpose Graphical Processing Unit).

Le travail de développement se présente sous la forme d'une bibliothèque de calcul intégrée à la plateforme logicielle CamITK. CamITK est outil de développement et de prototypage rapide pour les applications destinées au milieu médical tels que le traitement d'image, la navigation chirurgicale ou les simulation biomécaniques [Fouard et al., 2012, Promayon et al., 2013].

## 6.1 Système dynamique

Les différentes simulations de la descente fœtale devant étant destinées à l'apprentissage interactif avec un simulateur haptique, nous devons proposer des simulations dynamiques nécessitant une intégration temporelle.

Le système dynamique considéré sous sa forme discrétisée en espace se présente sous la forme d'une Équation Différentielle Ordinaire (EDO) du second ordre :

$$M \frac{d^2 U(t)}{dt^2} = F \left( \frac{dU(t)}{dt}, U(t), t \right) \quad (6.1)$$

avec :

- $U(t)$  le vecteur généralisé des inconnues du système au temps  $t$ . Dans notre cas  $U = (u_1, v_1, w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{z1}, \dots, u_n, v_n, w_n, \theta_{xn}, \theta_{yn}, \theta_{zn})^T$  avec  $n$  le nombre de nœuds du maillage éléments finis.
- $M$  la matrice de masse.
- $F \left( \frac{dU(t)}{dt}, U(t), t \right)$  l'ensemble des forces s'appliquant au système. On note  $F = F_i + F_e$  avec  $F_i$  les forces produites par le modèle de coque (*c-à-d* les forces internes) et  $F_e$  l'ensemble des forces extérieures s'appliquant au système.

Comme tout système du second ordre, il peut se ramener à une EDO du premier ordre :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} U(t) \\ MV(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(t) \\ F(V(t), U(t), t) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

avec  $V(t) = \frac{dU(t)}{dt}$ .

### 6.1.1 Intégration temporelle

Il existe deux grandes familles de méthodes pour résoudre les EDO : les méthodes explicites et les méthodes implicites. Les méthodes explicites sont les plus simples et ne nécessitent que de pouvoir évaluer  $F$  à chaque pas de temps. Toutefois cette famille de méthodes, dont la plus connue est la méthode d'Euler, ne sont pas inconditionnellement stables. En effet, elles nécessitent des pas de temps très faibles quand le système est dit « rigide » (*c-à-d* avec un module de Young élevé), ce qui est notre cas puisque, comme nous le verrons dans le prochain chapitre, le module de Young des os du crâne de la tête fœtale est de l'ordre du gigapascal. Ceci nous amène à choisir une méthode de résolution implicite dont nous allons brièvement rappeler la formulation pour les EDO du second ordre [Baraff and Witkin, 1998].

Dans ce qui suit, nous noterons  $k$  l'indice d'un pas de temps particulier et  $h$  la valeur du pas de temps lui-même. On pose  $\Delta U = U^{k+1} - U^k$  et  $\Delta V = V^{k+1} - V^k$  et en appliquant une itération de la méthode implicite d'Euler on obtient :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta U \\ M\Delta V \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} V^{k+1} \\ F^{k+1} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

En appliquant un développement en série de Taylor au premier ordre, on obtient :

$$F^{k+1} \approx F^k + \frac{\partial F^k}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial F^k}{\partial U} \Delta U \quad (6.4)$$

En reprenant la deuxième ligne de l'équation 6.3 et en y substituant l'équation 6.4 et  $\Delta U = hV^{k+1} = h(V^k + \Delta V)$  on obtient :

$$M\Delta V = h \left( F^k + \frac{\partial F^k}{\partial U} h (V^k + \Delta V) + \frac{\partial F^k}{\partial V} \Delta V \right) \quad (6.5)$$

En réarrangeant les termes pour trouver  $\Delta V$ , on a finalement :

$$\left( M - h \frac{\partial F^k}{\partial V} - h^2 \frac{\partial F^k}{\partial U} \right) \Delta V = h \left( F^k + h \frac{\partial F^k}{\partial U} V^k \right) \quad (6.6)$$

et on pose :

$$\begin{aligned}
A &= M - h \frac{\partial F^k}{\partial V} - h^2 \frac{\partial F^k}{\partial U} \\
B &= h \left( F^k + h \frac{\partial F^k}{\partial U} V^k \right)
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Une fois le système résolu pour  $\Delta V$ , on trouve de manière triviale  $\Delta U = h(V^K + \Delta V)$ .

En admettant que les forces externes ne sont pas dépendantes de  $U$  et de  $V$ , on a  $\frac{\partial F^k}{\partial U} = \frac{\partial F_i^k}{\partial U} = K$  où  $K$  est la matrice (semi-définie positive) de rigidité du modèle. On pose aussi  $D = (\alpha M + \beta K) = \frac{\partial F^k}{\partial V}$  la matrice d'amortissement du système avec  $\alpha$  et  $\beta$  les paramètres de Rayleigh. La matrice  $M$  est quand à elle une matrice diagonale.

### 6.1.2 Résolution

La matrice  $M$  étant précalculée, l'essentiel de la puissance de calcul est utilisée pour calculer  $K$  et résoudre le système linéaire 6.6 de taille  $6n \times 6n$  où  $n$  est le nombre de nœuds du maillage. Étant donné que  $K$  est semi-définie positive et que  $M$  est diagonale,  $A$  est aussi semi-définie positive et nous pouvons utiliser la méthode du gradient conjugué pour résoudre le système 6.6.

L'utilisation de la méthode du gradient conjugué a ici deux avantages :

- comme nous aurons un nombre conséquent d'inconnues, les méthodes itératives sont plus avantageuses en temps de calcul.
- Pour chaque itération de la méthode, il est seulement nécessaire de connaître le produit  $AX_l$  où  $X_l$  est le résultat de l'itération  $l$  de l'algorithme. De ce fait, il n'est pas nécessaire d'assembler explicitement et de stocker en mémoire la matrice  $A$ . Ceci représente un avantage à la fois en coût mémoire et en temps de calcul car il ne sera pas nécessaire de gérer et de mettre à jour des structures de matrices creuses. Cette méthode est en particulier utilisée dans la plateforme [SOFA](#) [Allard et al., 2007].

La boucle de simulation sur CPU est présentée sur la figure 6.1. Dans la suite, nous allons donc voir quelle est la manière la plus efficace de calculer le produit  $KX$ . L'extension au calcul de  $AX$  est alors trivial.

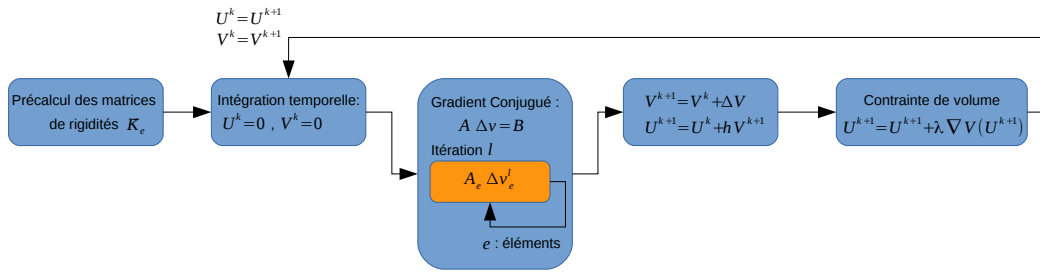


FIGURE 6.1. – Boucle de simulation sur CPU.

## 6.2 Implémentation sur GPU

### 6.2.1 Architecture GPU NVIDIA

Une architecture de carte graphique NVIDIA (GPU) est composée de multiprocesseurs (*streaming multiprocessors*), eux même composés de cœurs de processeurs (*streaming processor cores*) capables d'effectuer une opération sur un entier, ou un flottant en simple précision, par cycle.

Tous les multiprocesseurs ont accès à la mémoire globale (DRAM), accessible de n'importe quel endroit mais lente (plusieurs centaines de cycles). Chaque multiprocesseur a un espace mémoire pour ses registres et un espace de mémoires partagée par ses cœurs de processeur. Ces mémoires offrent de meilleures performances au point de vue latence mais ont une capacité moindre que la mémoire globale.

L'hôte est le CPU qui demande au périphérique (le GPU) d'effectuer des calculs en lançant des kernels. Un kernel est une portion de code de type SIMD (Single Instruction Multiple Data) exécuter en parallèle par un groupe de threads.

Au niveau de l'architecture, le GPU est vue comme une grille constituée de blocs pouvant lancer un certains nombre de threads (voir figure 6.2). Un bloc est un élément des calculs, dissociable d'autres blocs : les blocs ne doivent donc pas être exécutés dans un certain ordre : parallèlement, consécutivement ou toute autre combinaison est possible. C'est pourquoi les threads ne peuvent communiquer qu'avec des threads du même bloc, celui-ci étant géré par un seul multiprocesseur. Un warp est un ensemble de 32 threads, envoyés ensemble à l'exécution et exécutés simultanément. Quel que soit le GPU utilisé, quel que soit la quantité de données à traiter, dans n'importe quel cas, un warp sera exécuté sur deux cycles. Un thread est exécuté par un processeur, le bloc est le multiprocesseur et la grille représente l'entièreté de la carte. L'écriture et le lancement des kernels se fait à travers le framework CUDA qui procure un langage d'interface avec le périphérique de type C/C++.

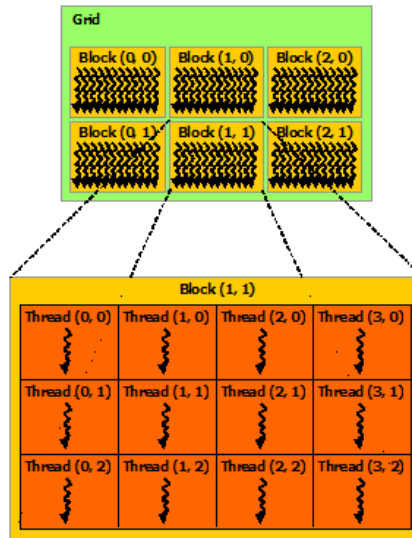


FIGURE 6.2. – Architecture en grille/bloc/thread.

### 6.2.2 Approche séquentielle sur CPU

Pour calculer le produit  $KX$  sur un maillage non structuré constitué de  $n_T$  triangles à 3 nœuds, on a besoin au minimum de quatre types de structures :

- Un tableau `coords` pour stocker les coordonnées de chaque nœud de taille  $3 \times n$ . La fonction `coords(i)` permet de récupérer le vecteur comprenant les 3 composantes de la position initiale du nœud  $i$ .
- Un tableau `dofs` pour stocker la valeur courante des degrés de libertés de chaque nœuds de taille  $6 \times n$ . La fonctions `dofs(i)` permet de récupérer le vecteur comprenant les valeurs des 6 degrés de libertés au nœud  $i$ .
- Un tableau `vec` de taille  $6 \times n$  pour stocker  $X$ . La fonction `vec(i)` permet de récupérer le vecteur comprenant les 6 valeurs de  $X$  au nœud  $i$ .
- Un tableau `connect` qui associe chaque élément aux indices de ses nœuds, de taille  $3 \times n_T$ . La fonction `connect(e, i)` permet de récupérer l'indice du nœuds  $i$  de l'élément  $e$ .
- Un tableau `res` pour stocker le résultat du produit  $KX$  de taille  $6 \times n$ . la fonction `res(i)` renvoie un vecteur  $6 \times n$ .

Comme nous utilisons un modèle linéaire, la matrice de rigidité  $\bar{K}_e$  de chaque élément  $e$  est constante dans le repère local de l'élément et peut donc être précalculée et les stockée. L'approche séquentielle classique est d'itérer sur chaque élément de la manière suivante :

- on récupère les coordonnées, les variables nodales, la valeur de  $X$  et la matrice de rigidité locale de l'élément grâce au tableau de connectivité `connect`. Par exemple, pour récupérer les variables nodales, on aura :

```
U[] = [dofs(connect(e,1)) dofs(connect(e,2)) dofs(connect(e,3))].
```

Cette étape est l'étape de collecte (*gathering*).

- On calcule la matrice de rigidité globale de l'élément  $K_e$  comme indiquée au chapitre 3.
- On calcule le produit  $F_e = K_e X_e$ .
- On met le résultat dans le tableau de résultat :  

```
res[connect(e,1), connect(e,2), connect(e,3)] += [Fe[1] Fe[2] Fe[3]].
```

 Cette étape est l'étape de dispersion (*scattering*).

À la fin du parcours des éléments, le produit  $KX$  est calculé et cette opération est répétée pour chaque itération du gradient conjugué. La figure 6.3 représente les accès aux différents tableaux lors calcul de la contribution d'un élément au produit  $KX$ .

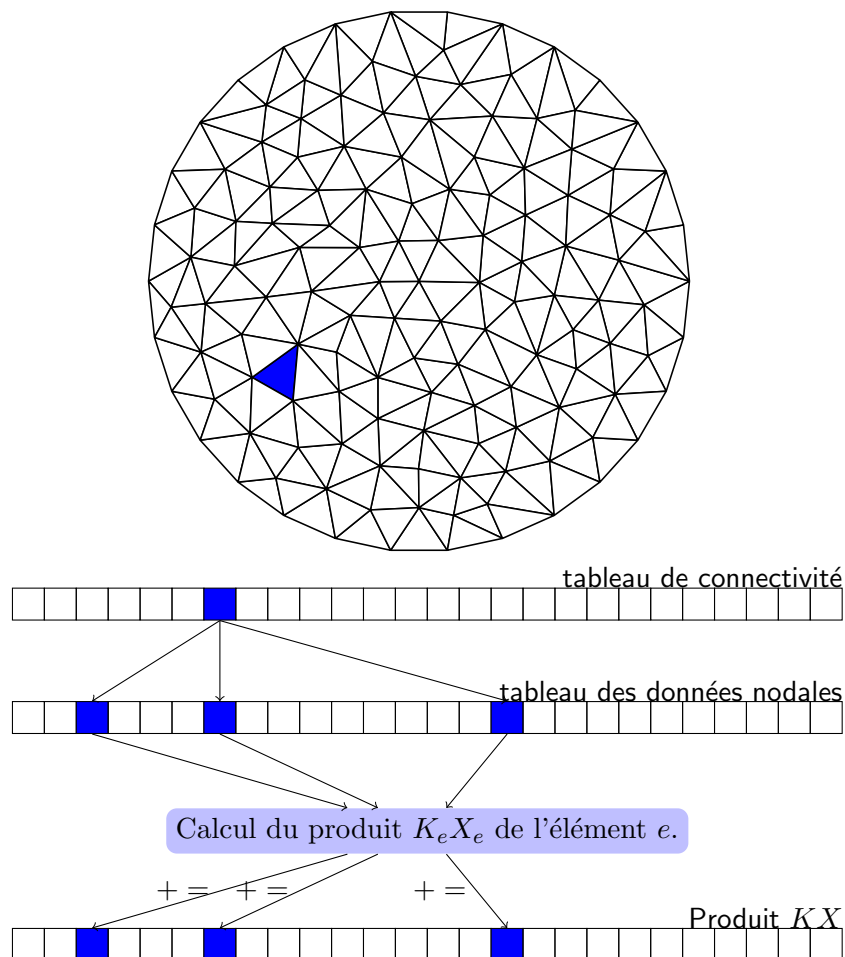


FIGURE 6.3. – Calcul de la contribution au produit  $KX$  d'un élément.

On distingue deux types d'accès mémoire aux différents tableaux :

- l'accès en lecture pour rassembler les informations nodales locales à l'élément  $e$  à partir des indices des nœuds de l'élément.
- l'accès en écriture dans le tableau de résultat est l'opération inverse où on disperse et accumule le résultat local du produit  $K_e X_e$  dans le tableau de résultat global.

### 6.2.3 Approche parallèle sur GPU

Une méthode possible de parallélisation de l'algorithme séquentiel précédent est de calculer indépendamment les produits  $K_e X_e$ . Un thread sera donc associé à chaque élément. Dans le cas où les opérations sont les mêmes pour chaque élément (ce qui est notre cas), les calculs de chaque thread seront les mêmes. Ceci correspond au fonctionnement optimal de l'architecture CUDA qui est SIMD (Single Instruction Multiple Data).

Toutefois, il peut y avoir des problèmes d'écriture concurrentes (*race condition*) lors de la phase d'accumulation dans la matrice globale (voir figure 6.4). Les threads gérant les éléments qui partagent un ou plusieurs nœuds sont susceptibles d'écrire en même temps et au même endroit dans la matrice globale. Les GPU NVIDIA étant des machines CREW (Concurrent Read Exclusive Write), un tel comportement doit être évité. On peut néanmoins noter que CUDA fournit des fonctions permettant de réaliser des opérations atomiques mais celles-ci ralentissent drastiquement les calculs.

Pour éviter les accès concurrents en écriture dans la matrice globale, une méthode possible est de créer des groupes d'éléments ne partageant aucun degré de liberté. Ce problème se ramène à un problème de coloration de graphe connexe, non orienté. Colorer un graphe signifie attribuer une couleur à chacun de ses sommets de manière à ce que deux sommets reliés par une arête soient de couleur différente. Est souvent recherchée l'utilisation d'un nombre minimal de couleurs, dit nombre chromatique [Kubale, 2004].

Chaque élément du maillage constitue un sommet du graphe. Il y a un lien entre deux sommets lorsque les éléments qui leurs sont associés partagent au moins un nœud (voir figure 6.5). Le problème de coloration de graphe est un problème NP-complet. Toutefois, il existe des méthodes heuristiques en temps polynomial comme l'algorithme DSATUR ou celui de Welsh et Powell [Pardalos et al., 1999]. Le temps de calcul de la coloration du graphe n'est pas critique car sous réserve que le maillage ne change pas de topologie au cours de la simulation, les groupes de couleurs peuvent être fait en précalcul. Nous choisissons donc d'utiliser une des heuristiques les plus simples qui est l'algorithme DSATUR [Brélaz, 1979] dont nous allons brièvement exposé le principe.

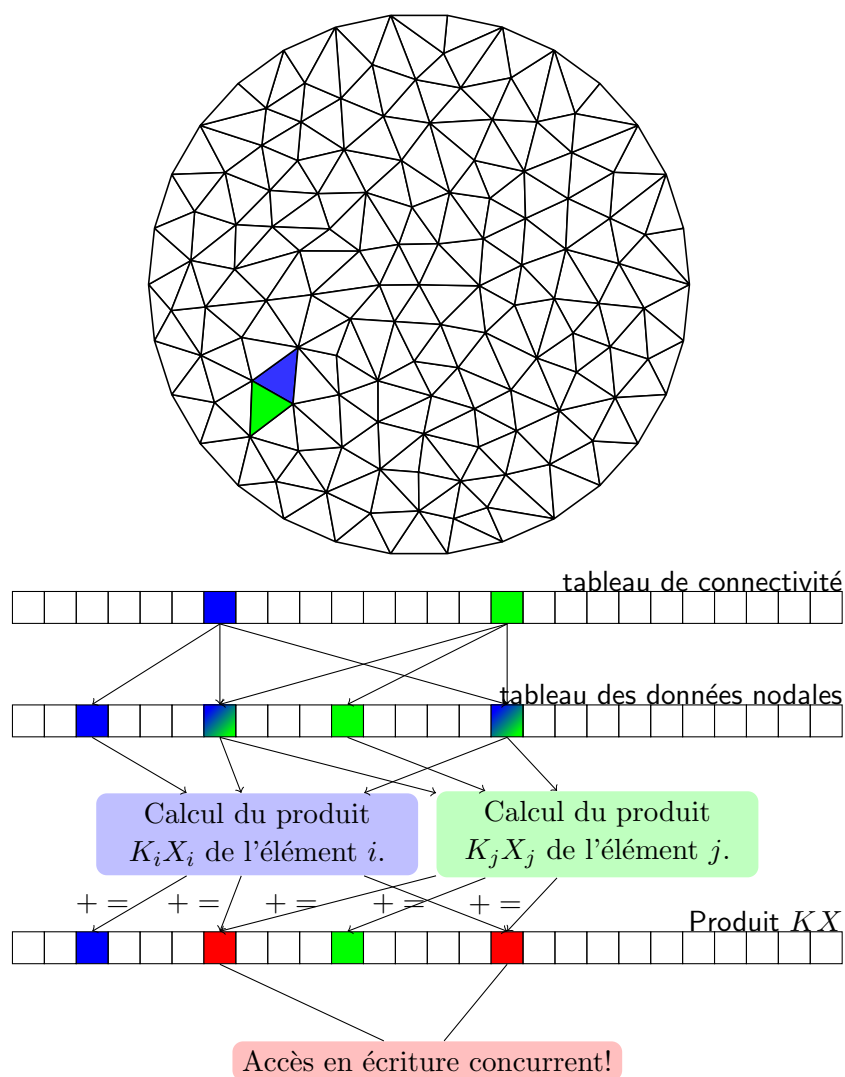


FIGURE 6.4. – Écritures concurrentes lors de l'exécution en parallèle sur des éléments partageant des nœuds.

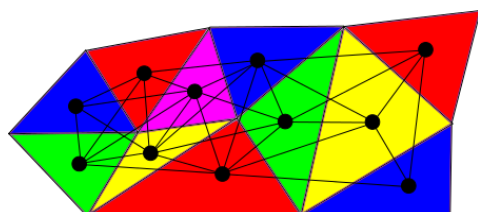
Le graphe d'adjacence des éléments d'un maillage est un graphe non orienté et connexe  $G = (V, E)$ . Pour chaque sommet  $v \in V$ , on calcule le degré de saturation  $DSAT(v)$  qui représente le nombre de couleurs différentes dans les sommets adjacents à  $v$  (nous rappelons que les sommets du graphe sont les éléments du maillage). Ensuite, on utilisera ce nombre ainsi que le degré des sommets pour déterminer l'ordre de coloration du graphe. L'algorithme s'arrête lorsque tous les sommets de  $G$  sont colorés. Les différentes étapes de l'algorithme sont :

1. Ordonner les sommets par ordre décroissant de degrés.

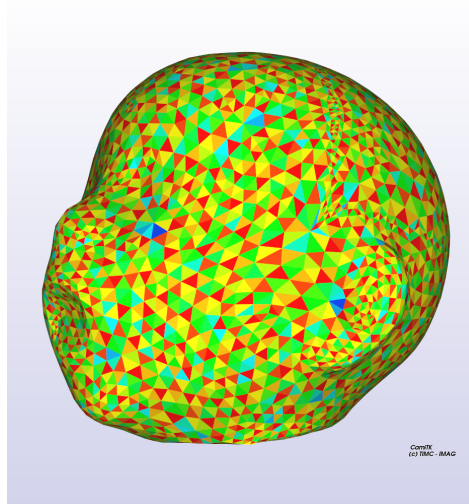


2. Colorer un sommet de degré maximum avec la couleur 1.
3. Choisir un sommet où la fonction  $DSAT$  est maximale. En cas d'égalité, choisir un sommet de degré maximal.
4. Colorer ce sommet avec la plus petite couleur possible.
5. Si tous les sommets sont colorés alors on arrête l'algorithme, sinon on retourne au point 3.

Une fois qu'on a les  $n_c$  groupes d'éléments  $\mathcal{E}_i$  avec  $i \in 1..n_c$  constituant une partition de l'ensemble des éléments, les calculs pour chacun des groupes peuvent alors être exécutés en parallèles (voir figure 6.6).



(a) Exemple de coloriage de maillage avec le graphe correspondant.



(b) Coloriage des éléments d'un maillage de tête fœtale (10 partitions)

FIGURE 6.5. – Partitionnement de l'ensemble des éléments par coloriage de graphe.

Maintenant que nous avons vu un moyen de paralléliser le calcul du produit  $KX$ , nous allons adresser un autre problème important quand on fait des calculs sur GPU : la gestion de la mémoire.

### 6.2.4 Gestion de la mémoire

Un des aspects critique du calcul sur GPU est la gestion de la mémoire. Tout d'abord les accès à la mémoire globale, appelés transactions mémoire, sont coûteux et nécessitent plusieurs centaines de cycles selon le modèle du GPU. Il convient donc de minimiser le nombre de transactions mémoire effectuées dans un kernel.

Une différence importante entre le CPU et le GPU est l'organisation des données en mémoire. En général sur le CPU, les données sont généralement groupées en

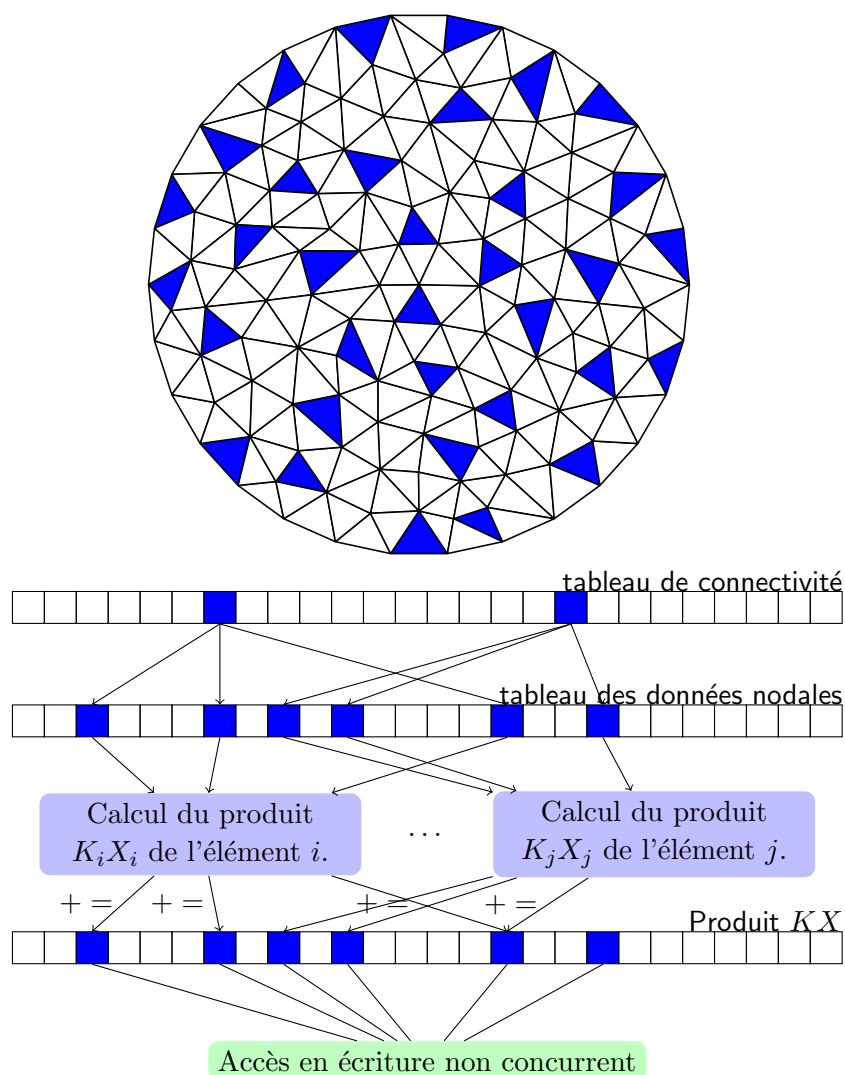


FIGURE 6.6. – Exécutions parallèles sur le groupe  $\mathcal{E}_i$  dont les éléments ne partagent aucun nœuds.

structures ou classes qui sont elles-mêmes stockées dans des tableaux (configuration appelée *array of structures*, voir figure 6.8). Par exemple les tableaux `coords`, `vec`, `dofs` et `res` contiennent des vecteurs. Quand on effectue des calculs sur GPU, les données doivent être réorganisées pour obtenir le maximum de performances. Ainsi, on obtient une efficacité maximale si un groupe de threads consécutifs accèdent à des données qui sont stockées de manière contiguë dans la mémoire globale et alignées sur 4,8 ou 16 octets (*coalesced memory*). Dans cette configuration, un ensemble de 32 threads CUDA (appelé *warp*) ne fera qu'une seule transaction mémoire pour

accéder aux données. Cette configuration est présentée sur la figure 6.7.

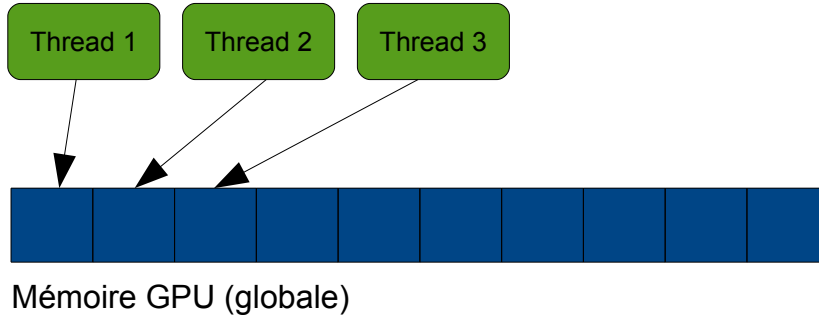


FIGURE 6.7. – Accès mémoire *coalesced*.

Si chaque thread s’occupe d’un élément comme dans notre cas, les transactions mémoire ne sont pas groupées pour deux raisons :

1. les données nodales sont stockées sous la forme *array of structures*.
2. Les données nodales d’un élément ne sont pas contiguës en mémoire et en pratique ne peuvent pas l’être.

Sur les figure 6.6 et 6.9, on peut voir que les accès aux données nodales ne sont pas groupées.

Pour résoudre le premier problème, on peut passer à une structure de type *structure of arrays* où chaque composante est stockée dans un tableau séparé (voir figure 6.8). Par exemple, le tableau de coordonnées `coord` est décomposé en trois tableaux `coordX`, `coordY` et `coordZ` dont l’alignement est de 8 octets car nous travaillons en double précision. Il en est de même pour les autres tableaux contenant des coordonnées nodales ainsi que pour le tableau `connec` contenant les indices des nœuds de chaque élément. Toutefois cette structuration ne permet pas de résoudre totalement le problème car les indices globaux des nœuds de chaque éléments ne se suivent pas forcément dans les tableaux des données nodales. Pour palier à cet état de fait, nous allons réutiliser les groupes d’éléments  $\mathcal{E}_i$  construits précédemment. À l’intérieur de chacun de ces groupes, par construction chaque nœuds n’appartient

```

struct AoS {
    double x;
    double y;
    double z;
} coords [N];

struct SoA {
    double x[N];
    double y[N];
    double z[N];
} coords;

```

FIGURE 6.8. – Stockage des coordonnées sous la forme *array of structures* et *structure of arrays*.

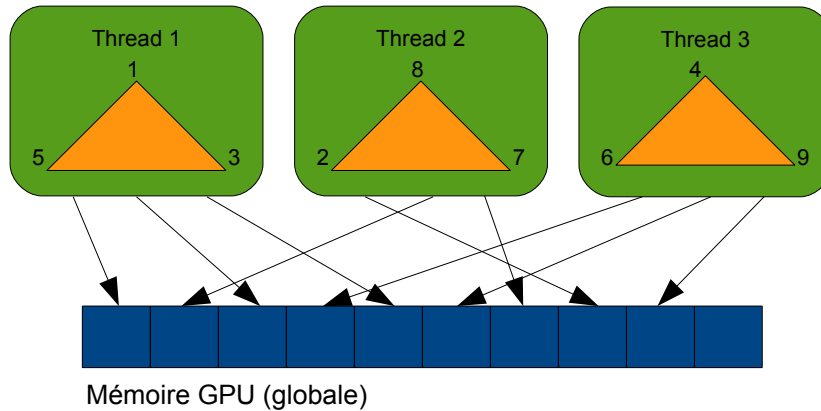


FIGURE 6.9. – Accès mémoire non *coalesced* quand la parallélisation est effectuée sur les éléments. Les accès aux données des nœuds sont désordonnés.

qu'a un seul élément. En utilisant ce résultat, on peut construire  $n_c$  tableaux contenant les données nodales correspondantes à un seul groupe. Dans ce cas on a des accès mémoire groupés pour chaque warp. Ainsi, les tableaux des coordonnées nodales sont établis par groupes. Pour le groupe  $\mathcal{E}_i$ , un tableau de donnée est de taille  $3 \times |\mathcal{E}_i|$  et est divisé en trois parties égales contenant une donnée nodale pour chacun des 3 nœuds d'un élément. En reprenant l'exemple des tableaux des coordonnées, on a les tableaux `coordXi`, `coordYi` et `coordZi` de taille  $3 \times |\mathcal{E}_i|$  avec  $i \in 1, \dots, n_c$ . Cette configuration est illustrée sur la figure 6.10.

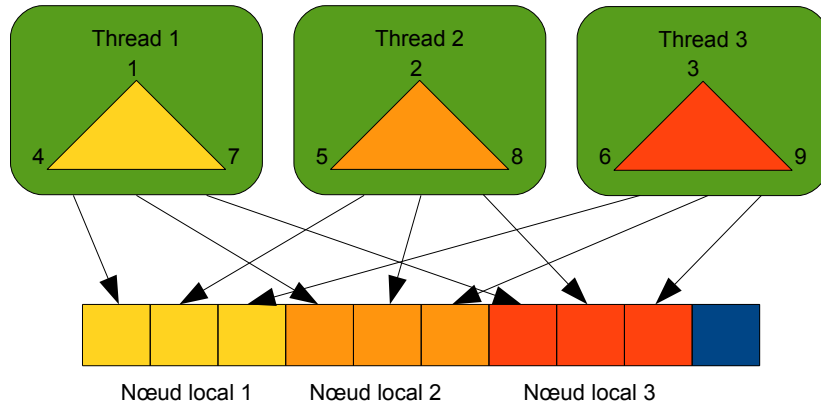


FIGURE 6.10. – Accès mémoire *coalesced* quand la parallélisation est effectuée sur les éléments avec une renumérotation des nœuds et une structure en *SoA*. Chaque accès aux données d'un nœud est réalisé de manière contiguë dans la mémoire du GPU.

Le calcul du produit  $KX$  est fait en parallèle sur les éléments de chaque groupe. Une partie de l'algorithme est donc séquentiel et consiste à itérer sur les  $n_c$  groupes

d'éléments. Sur la figure 6.11, on peut voir les transactions mémoire des threads d'un groupe d'éléments.

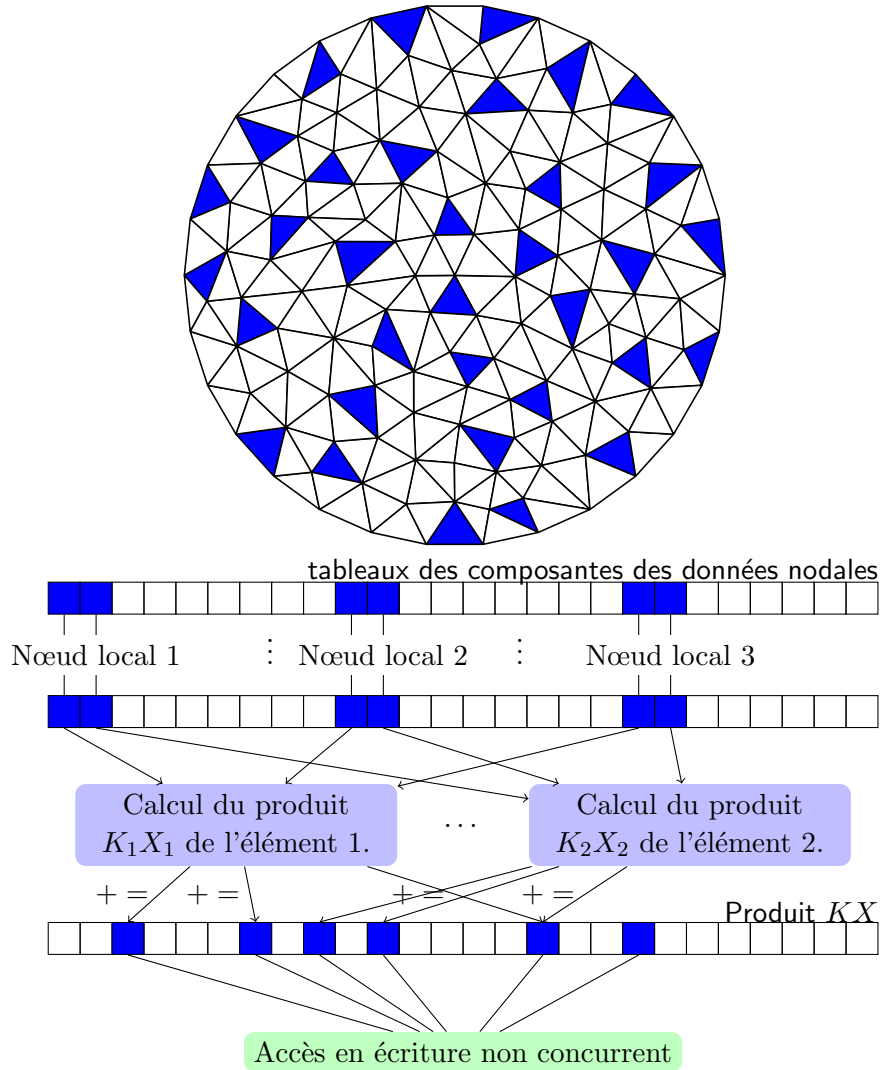


FIGURE 6.11. – Exécutions parallèles sur le groupe  $\mathcal{E}_i$  avec réorganisation des tableaux des données nodales pour avoir des transactions mémoire groupées.

Cette construction confère un coût d'accès mémoire optimal pour la phase de collecte. Dans ce cas, on peut garantir que le nombre de transactions mémoire est optimal. En contrepartie, l'occupation mémoire sera plus importante. En effet, comme un nœud appartient à plusieurs éléments de groupes différents, les données nodales seront dupliquées. Théoriquement, l'occupation mémoire sera au maximum

multipliée par le degré maximum des sommets du graphe qui est inférieur au nombre de groupes d'éléments  $n_c$ . En pratique, avec les maillages présentés dans le prochain chapitre dont les éléments sont de « bonne qualité » (*c-à-d* sans angles trop aigus ou trop obtus),  $n_c$  est égal à 10 avec l'algorithme DSATUR.

Enfin, la méthode de calcul sur GPU présentée ici peut être utilisée pour n'importe quel type d'éléments finis. La boucle de simulation sur GPU est présentée sur la figure 6.12.

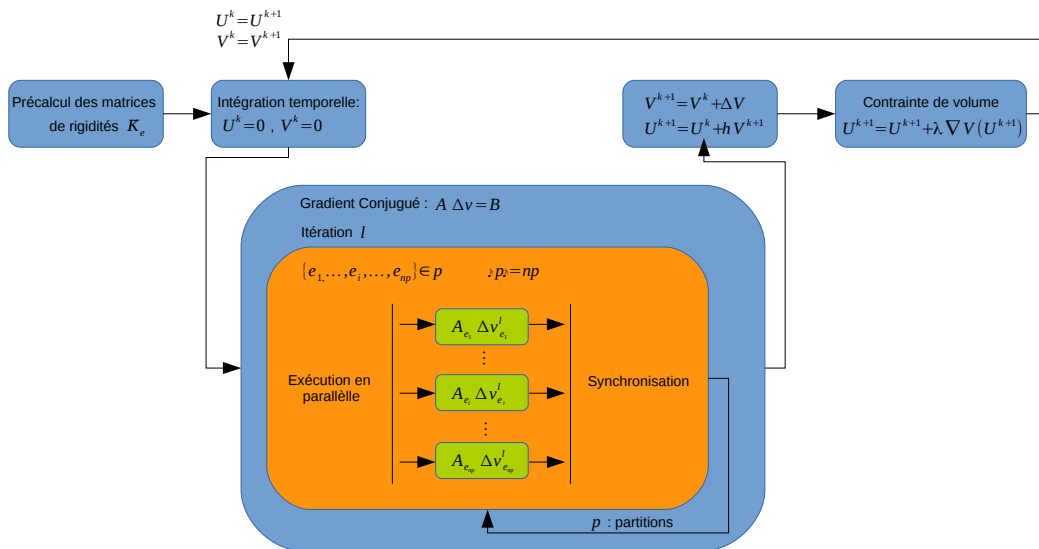


FIGURE 6.12. – Boucle de simulation sur GPU.

### 6.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la méthode d'intégration temporelle que nous utilisons ainsi qu'une implémentation GPU permettant l'utilisation d'une méthode d'intégration implicite. Notre implémentation GPU se base sur une parallélisation sur les éléments avec une méthode de coloriage de graphe pour éviter les écritures concurrentes en mémoire. Nous avons amélioré cette approche en optimisant la gestion de la mémoire moyennant un sur-coût en occupation mémoire. Dans le chapitre précédent nous allons présenter le résultat de simulations effectuées avec notre méthode.

## Bibliographie

- Jérémie Allard, Stéphane Cotin, François Faure, Pierre-Jean Bensoussan, François Poyer, Christian Duriez, Hervé Delingette, Laurent Grisoni, et al. Sofa-an open source framework for medical simulation. In Medicine Meets Virtual Reality, MMVR 15, 2007. 100
- David Baraff and Andrew Witkin. Large steps in cloth simulation. In Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, SIGGRAPH '98, pages 43–54, New York, NY, USA, 1998. ACM. ISBN 0-89791-999-8. doi : 10.1145/280814.280821. URL <http://doi.acm.org/10.1145/280814.280821>. 99
- Daniel Br l z. New methods to color the vertices of a graph. Communications of the ACM, 22(4) :251–256, 1979. 104
- Céline Fouard, Aurélien Deram, Yannick Keraval, and Emmanuel Promayon. Camitk : a modular framework integrating visualization, image processing and biomechanical modeling. In Soft Tissue Biomechanical Modeling for Computer Assisted Surgery, pages 323–354. Springer, 2012. 98
- M. Kubale. Graph Colorings. Contemporary mathematics (American Mathematical Society) v. 352. American Mathematical Society, 2004. ISBN 9780821856871. URL <http://books.google.fr/books?id=nEmcID52qtsC>. 104
- Panos M Pardalos, Thelma Mavridou, and Jue Xue. The graph coloring problem : A bibliographic survey. In Handbook of combinatorial optimization, pages 1077–1141. Springer, 1999. 104
- Emmanuel Promayon, Céline Fouard, Mathieu Bailet, Aurélien Deram, Gaëlle Fiard, Nikolai Hungr, Vincent Luboz, Yohan Payan, Johan Sarrazin, Nicolas Saubat, et al. Using camitk for rapid prototyping of interactive computer assisted medical intervention applications. In Conference Proceedings, volume 2013, page 4933. Inserm, 2013. 98

# CHAPITRE 7

## SIMULATIONS ET VALIDATION

Toute science commence comme  
philosophie et se termine en art.

---

Histoire de la philosophie, Will Durant

### Sommaire

---

<b>7.1 Simulations sur GPU</b> . . . . .	<b>114</b>
7.1.1 Simulation en compression . . . . .	115
7.1.2 Simulation avec gravité . . . . .	117
7.1.3 Simulation avec application d'une force ponctuelle . . . . .	118
7.1.4 Simulation de collision avec un objet rigide . . . . .	119
<b>7.2 Étude préliminaire de la descente fœtale</b> . . . . .	<b>122</b>
<b>7.3 Simulation de la pression intra-utérine sur la tête fœtale.</b> . . . . .	<b>124</b>
<b>7.4 Intégration dans la plateforme CamiTK</b> . . . . .	<b>127</b>
<b>7.5 Conclusion</b> . . . . .	<b>128</b>
<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>130</b>

---



Dans ce chapitre, nous allons mettre en œuvre le modèle développé dans le chapitre 5 et sa méthode de résolution détaillée dans le chapitre 6. Dans un premier temps, nous allons montrer le comportement du modèle avec divers types de maillages et de conditions de chargement, et mesurer les temps d'exécution sur CPU et GPU. Nous présenterons ensuite une étude préliminaire de la descente fœtale pouvant être utilisée en conjonction avec le simulateur BirthSim. Dans une troisième partie, nous allons effectuer une simulation de la pression intra-utérine sur la tête fœtale et comparer nos résultats avec ceux de la littérature. Enfin, nous présenterons brièvement la plateforme CamiTK dans laquelle a été implémenté le code de calcul.

## 7.1 Simulations sur GPU

Nous présentons dans cette section des simulations avec divers maillages permettant de mettre en évidence le comportement du modèle de coque constitué d'éléments CST-DKT, la conservation du volume et le temps d'exécution. Ces simulations sont réalisées selon différents scénarios pour évaluer leurs comportements sous différentes conditions de chargement.

Les données de ces différentes simulations sont résumées dans le tableau 7.1. La méthode de simulation utilisée est celle présentée au chapitre précédent avec 15 itérations pour le gradient conjugué sans assemblage de la matrice du système et un pas de temps de 0.04 ms. Les tests ont été effectués sur une machine avec un intel core i7 et un GPU NVIDIA Quadro 600 avec 96 cœurs CUDA et 1GB de mémoire.

### 7.1.1 Simulation en compression

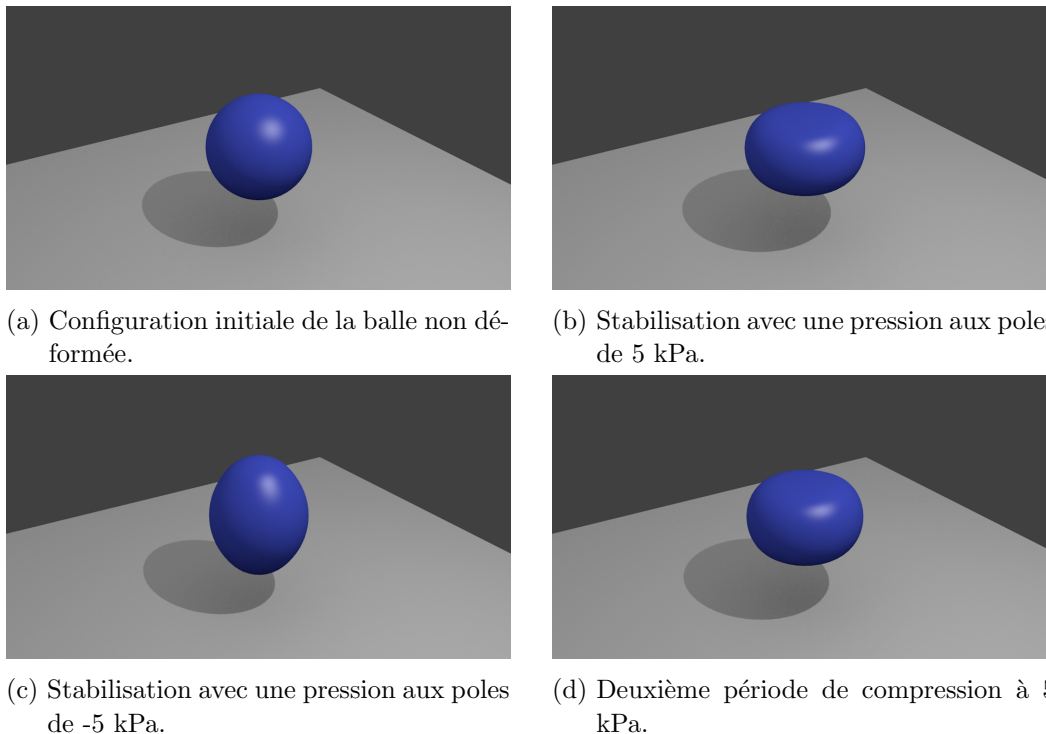


FIGURE 7.1. – Déformation d’une balle incompressible subissant une pression périodique aux pôles.

**Objectifs** L’objectif de cette simulation est de montrer le comportement du modèle lorsqu’il subit une compression induite par des forces de pression en surface. En effet, ce genre de chargement est caractéristique des efforts que subit la tête fœtale lors de son passage à travers le col de l’utérus ou lors de l’utilisation de ventouses obstétricales.

**Modèle** Nous utilisons un maillage de sphère représentant une balle de 10 cm comprenant 2000 triangles, 1002 nœuds et 6012 degrés de libertés (voir figure 7.1a). Pour ce modèle, le module de Young est de 30 kPa, le coefficient de Poisson est 0.45, l’épaisseur est de 10 cm et la masse volumique de  $100 \text{ kg} / \text{m}^3$ . Une pression surfacique est appliquée aux deux pôles de manière périodique alternant entre 5 kPa (voir figure 7.1b) et -5 kPa (voir figure 7.1c) avec une période 5 secondes.

**Résultat** Les résultats de cette simulation sont visibles sur la figure 7.1. Sans la contrainte de volume, la perte de volume est au maximum de 7.22 %. Avec la

contrainte de volume, il n'y a aucune perte de volume (variation de 0 %). L'exécution sur GPU fournit une accélération du temps de calcul d'un facteur 3.

## 7.1.2 Simulation avec gravité

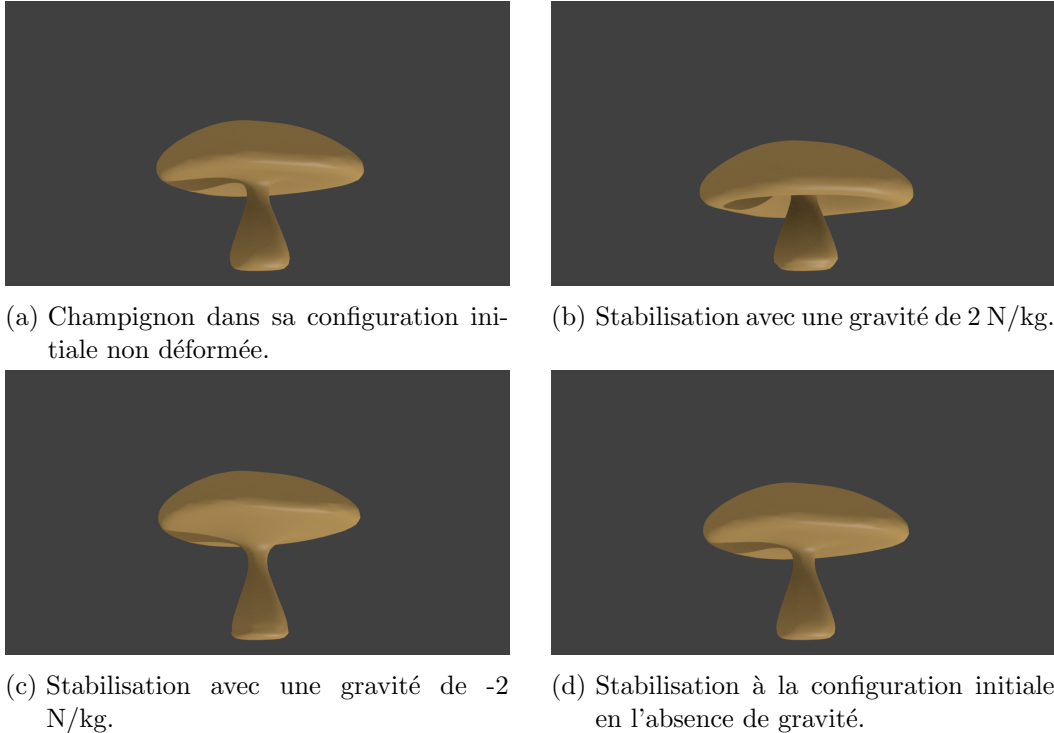


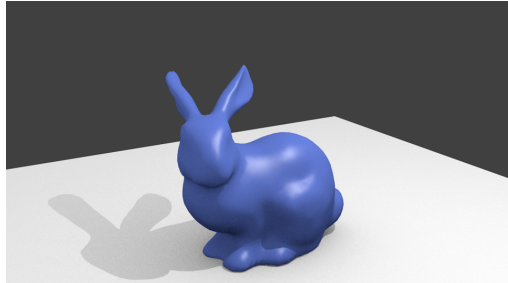
FIGURE 7.2. – Déformation d'un champignon sous l'effet de la gravité.

**Objectifs** L'objectif de cette simulation est de montrer le comportement de notre modèle sous l'effet de la gravité. Nous utilisons pour cette simulation un modèle géométrique comportant des courbures importantes.

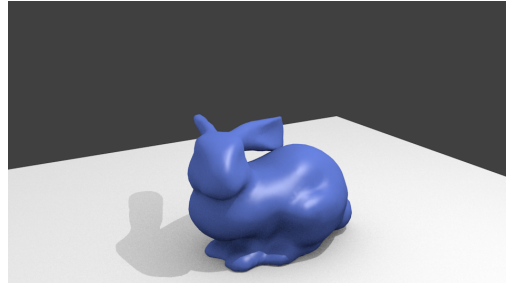
**Modèle** Nous utilisons pour cette simulation un maillage représentant un champignon composé de 4000 triangles, 2002 nœuds et 12012 degrés de libertés (voir figure 7.2a). Pour ce modèle, le module de Young est de 3 kPa, le coefficient de Poisson est 0.45, l'épaisseur est de 10 cm et la masse volumique de  $100 \text{ kg} / \text{m}^3$ . Les nœuds du pied du champignon sont fixés et il subit une gravité périodique alternant entre 2 N/kg (voir figure 7.2b) et -2 N/kg (voir figure 7.2c) avec une période de 5 secondes.

**Résultat** Les résultats de cette simulations sont visibles sur la figure 7.2. Sans la contrainte de volume, la perte de volume est au maximum de 19.5 %. Avec la contrainte de volume, il n'y a aucune perte de volume (variation de 0 %). L'exécution sur GPU fournit une accélération du temps de calcul d'un facteur 3.5.

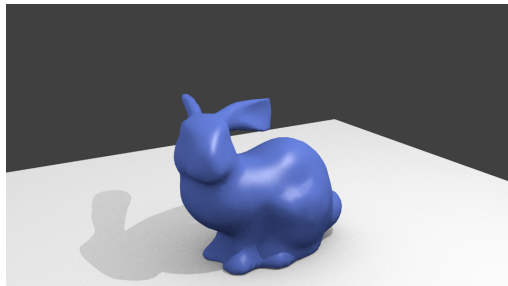
### 7.1.3 Simulation avec application d'une force ponctuelle



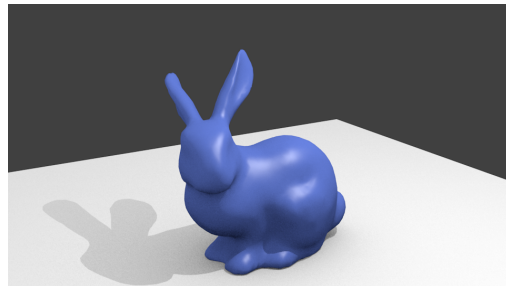
(a) Lapin dans sa configuration initiale non déformée.



(b) Stabilisation avec une gravité de 10 N/kg.



(c) Début de suppression de la gravité.



(d) Force ponctuelle appliquée sur l'oreille gauche.

FIGURE 7.3. – Déformation d'un lapin sous la gravité et par application d'une force ponctuelle.

**Objectifs** L'objectif de cette simulation est de montrer le comportement de notre modèle lorsqu'on lui applique une force ponctuelle sur un nœud.

**Modèle** Nous utilisons pour cette simulation un maillage représentant un lapin composé de 5000 triangles, 2502 nœuds et 15012 degrés de libertés (voir figure 7.3a). Pour ce modèle, le module de Young est de 3 kPa, le coefficient de Poisson est 0.45, l'épaisseur est de 10 cm et la masse volumique de  $100 \text{ kg} / \text{m}^3$ . Les nœuds au pied du lapin sont fixés et il subit une gravité gravité de 10 N/kg (voir figure 7.3b) relâché au bout de 5 secondes. Il lui ai ensuite appliqué une force ponctuelle sur l'oreille gauche (voir figure 7.3d).

**Résultat** Les résultats de cette simulation sont visibles sur la figure 7.3. L'exécution sur GPU fournit une accélération du temps de calcul par d'un facteur 3.5. Les déformations des oreilles qui subissent une rotation permet de mettre en évidence de la prise en compte de non-linéarité géométrique par la formulation co-rotationnelle utilisée.

## 7.1.4 Simulation de collision avec un objet rigide

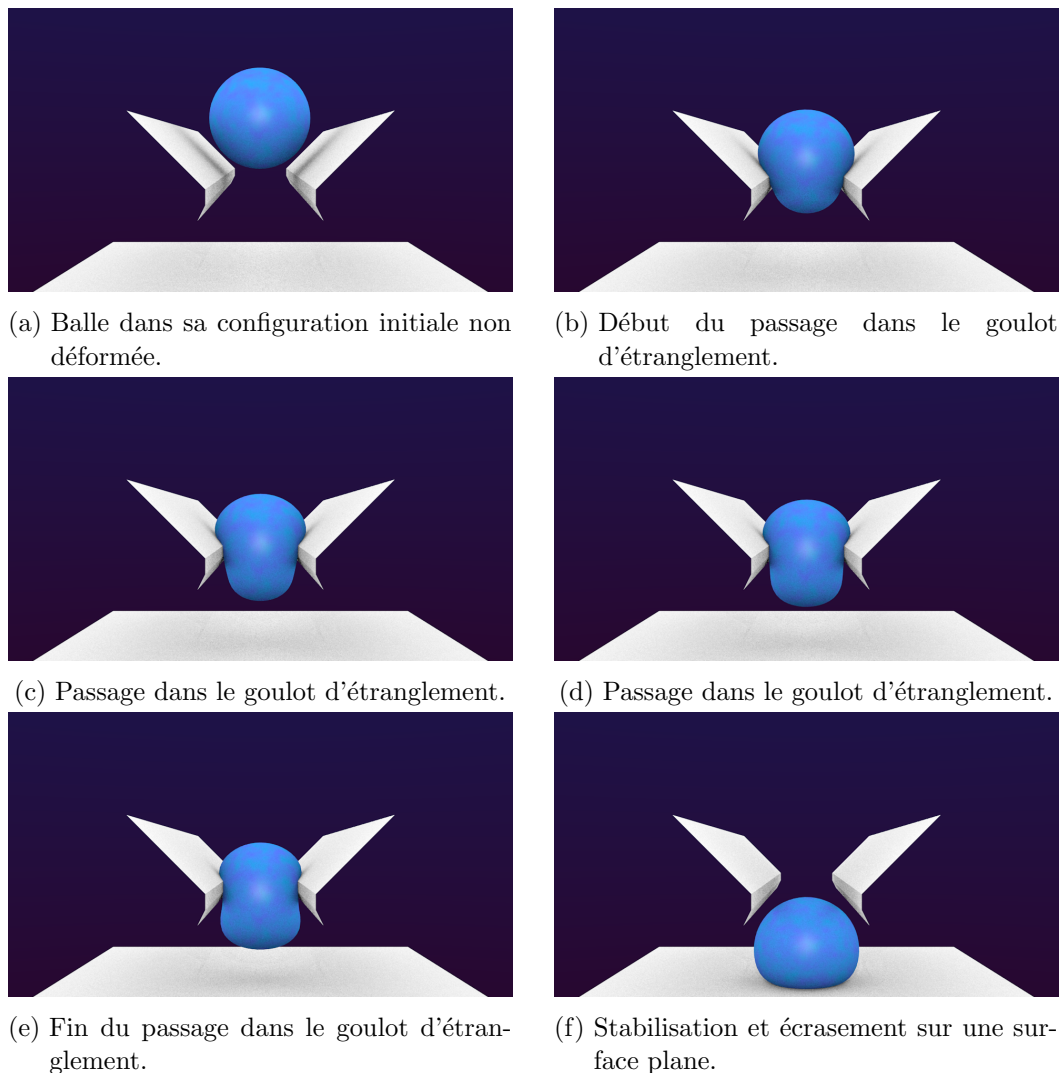


FIGURE 7.4. – Déformation d'une balle par collision avec un objet rigide.

**Objectifs** L'objectif de cette simulation est de montrer le comportement de notre modèle lorsqu'il rentre en collision avec un objet rigide. Ici les objets rigides sont un goulot d'étranglement et une surface plane. Cela nous permettra d'évaluer le comportement du modèle en vue d'une utilisation dans le cadre de collisions entre la tête fœtale et le bassin maternel.

**Modèle** Le modèle utilisé est le même que pour la première simulation (voir figure 7.1a). La contrainte de volume agissant directement sur les déplacements, elle est

prise en compte après les collisions. Les vecteurs  $\nabla_i$ , correspondant à la direction dans laquelle s'applique la contrainte (voir chapitre 3), sont nuls pour les nœuds qui sont en collision. De ce fait, la non-pénétration avec les objets rigides est respectée et les effets de la contrainte de volume se répartit sur les autres nœuds pour garantir un volume constant tout au long de la simulation. Lorsque la balle est en collision avec un plan (voir figure 7.1d), les  $\nabla_i$  des nœuds en contact avec celui-ci sont projeté sur le plan. Ainsi, la contrainte de volume agit sur ces nœuds mais sans violer la contrainte d'interpénétration et provoque avec un effet d'étalement.

**Résultat** Entre les figure 7.4b et 7.4e, on remarque que le volume se « déplace » du haut du goulot d'étranglement vers le bas sous l'effet de la contrainte de volume. Nous rappelons que le volume reste constant tout au long de la simulation.

Maillage	Nb. nœuds	Nb. dofs	Nb. triangles	Perte en vol.	Temps (ms)	Temps add.	Accel.
Balle (CPU)	1002	6012	2000	7.22 %	105 ms		
Balle +cte vol. (CPU)	1002	6012	2000	0 %	121 ms	13.22%	
Balle (GPU)	1002	6012	2000	7.22 %	39 ms		2.69
Balle +cte vol. (GPU)	1002	6012	2000	0 %	41 ms	5.12%	2.95
Champignon (CPU)	2002	12012	4000	19.5 %	189 ms		
Champignon +cte vol. (CPU)	2002	12012	4000	0%	212 ms	10.84%	
Champignon (GPU)	2002	12012	4000	19.5 %	54 ms		3.5
Champignon +cte vol. (GPU)	2002	12012	4000	0%	57 ms	5.6%	3.71
Lapin +cte vol. (CPU)	2502	15012	5000	0 %	219 ms		
Lapin +cte vol. (GPU)	2502	15012	5000	0 %	65 ms		3.36

Tab. 7.1. – Résultats des simulations sur CPU et GPU, avec ou sans contrainte de volume. Pour chaque modèle, il est indiqué le nombre de nœuds, degrés de liberté (dofs) et de triangles. Il est également indiqué la perte maximale en volume en pourcentage par rapport au volume initial et le temps moyen pour un pas de temps. L'avant dernière colonne représente le temps additionnel nécessaire pour calculer la contrainte de volume. Enfin, la dernière colonne représente le facteur d'accélération avec le calcul sur GPU.



## 7.2 Étude préliminaire de la descente fœtale

La première approche dans le cadre de ce travail a été basée sur les travaux de [Buttin et al. \[2013\]](#) déjà décrit dans le chapitre 4.3 (page 61). Son modèle complet de l'unité utéro-fœtale comprend l'utérus, le fœtus, le bassin et l'abdomen et la simulation a été réalisée avec le logiciel ABAQUS. En partant de ce modèle, nous avons remplacé les modèles hyperélastiques de l'utérus, du fœtus et de l'abdomen par des modèles linéaires co-rotationnels et le bassin par un modèle rigide (voir figure 7.5). Les contractions sont modélisées par des forces de pression sur l'utérus : le haut de l'utérus subit les poussées maternelles et le bas les contractions utérines involontaires dont l'amplitude sinusoïdale est récupérée dans [Buttin et al. \[2013\]](#). Enfin, les nœuds correspondant au dos sont fixe, les déplacements des nœuds de la zone vaginale et du canal vaginal sont contraints dans le plan axial. En utilisant le logiciel Sofa pour la simulation, cette approche ne fut pas concluante pour deux raisons. Premièrement, ce modèle comprend des centaines de milliers d'éléments et sa simulation n'est pas en mesure de respecter la contrainte de temps interactif. Ensuite, comme le fœtus et l'utérus sont en contact quasi permanent et que l'utérus est une structure très fine, le logiciel n'était pas en mesure de détecter correctement l'ensemble des collisions. Le temps de calcul est considérablement le temps de calcul.

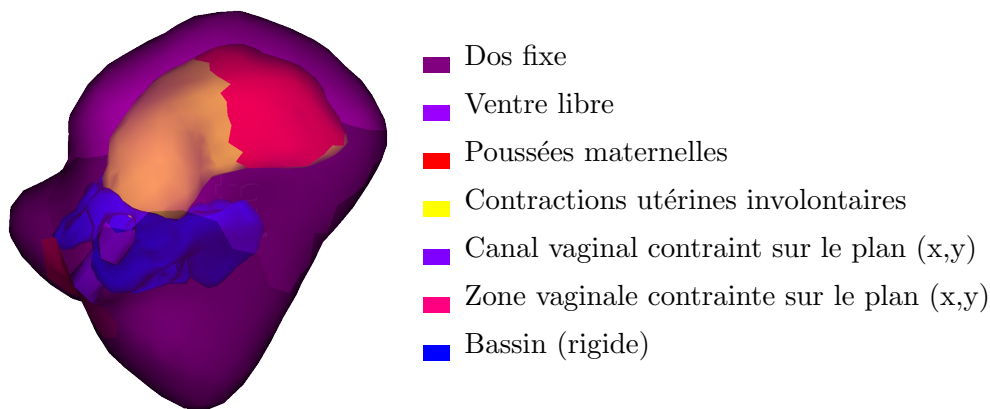


FIGURE 7.5. – Modèle de l'unité utéro-fœtale.

D'après l'étude anatomique et physiologique réalisée au chapitre 2, nous proposons de simplifier le modèle précédent pour qu'il puisse être utilisé en temps interactif dans le cadre d'une utilisation future en conjonction avec le simulateur BirthSim. Pour cela, nous avons fait les hypothèses suivantes :

- il est inutile de modéliser le corps du fœtus car la partie la plus critique d'un point de vue des dommages potentiels est la tête fœtale.
- On peut se passer de la modélisation de l'utérus et simuler son action en appliquant une force axiale sur la base de la tête fœtale. De plus, cette hypothèse correspond bien à la configuration du simulateur BirthSim qui

- ne possède qu'un actionneur pneumatique axial qui agit sur la tête foetale.
- Il est inutile de modéliser la partie supérieure de l'abdomen en l'absence d'un modèle de l'utérus.
  - Le bassin peut être considéré comme rigide et constitue les conditions aux bords du bas de l'abdomen.

Ces considérations nous ont amené à la configuration présentée sur la figure 7.6.

- La tête foetale utilisant le modèle de coque CST-DKT avec la contrainte de volume présentée dans le chapitre 3.
- La partie basse de l'abdomen composée de 22554 tétraèdres et 4174 nœuds avec un modèle linéaire co-rotationnel.
- Le bassin rigide qui constitue les conditions aux bords de bas de l'abdomen.

Dans cette configuration simplifiée, on peut utiliser pour le modèle de l'abdomen une implémentation GPU similaire à celle présentée pour le modèle de coque au chapitre 6. De plus, les collisions à gérer se limitent au canal vaginal et au bas de l'utérus avec la tête foetale. Pour les développements futurs, nous comptons utiliser la cohérence spatiale et temporelle des collisions entre ces deux zones pour les gérer de manière efficace. En effet, ces deux zones sont en contact permanent et leur déplacement relatif est connu a priori.

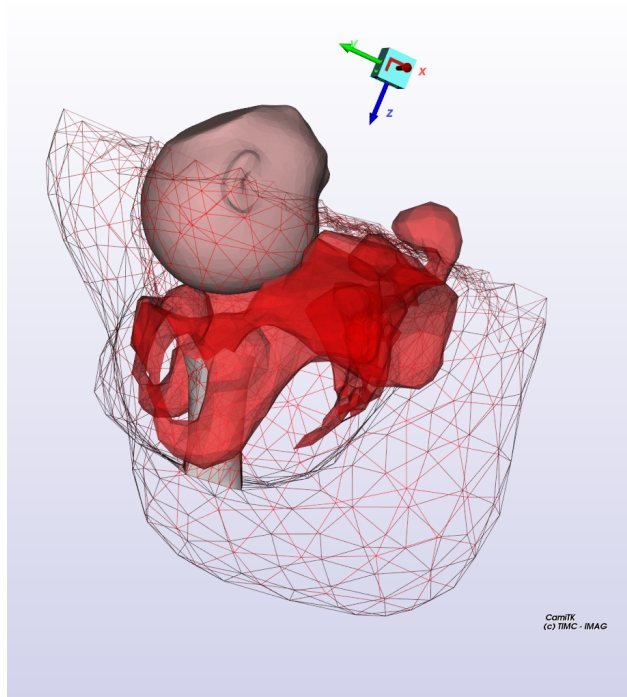


FIGURE 7.6. – Configuration simplifiée de la descente foetale.

### 7.3 Simulation de la pression intra-utérine sur la tête fœtale.

Notre modèle est utilisé pour simuler les pressions intra-utérine et cervicales sur la tête fœtale pendant la première phase de travail. Cette configuration a été choisie car il existe dans la littérature des données de comparaison avec des expériences *in vivo* [Sorbe and Dahlgren, 1983] et numériques [Lapeer and Prager, 2001].

Le maillage utilisé est un maillage de tête fœtale générique provenant du mannequin utilisé par le simulateur BirthSim. Cette tête de mannequin a été scannée et reconstruite pour former un maillage de 4466 nœuds et 8928 triangles. Ce maillage est séparé en deux zones correspondant aux os du crâne et aux fontanelles et sutures qui ont des propriétés mécaniques différentes. La zone correspondant aux fontanelles et sutures a été raffinée car celle-ci est plus étroite et a un module de Young plus faible ce qui entraînera des déformations plus importantes dans cette zone. Ces deux zones sont visibles sur la figure 7.7.

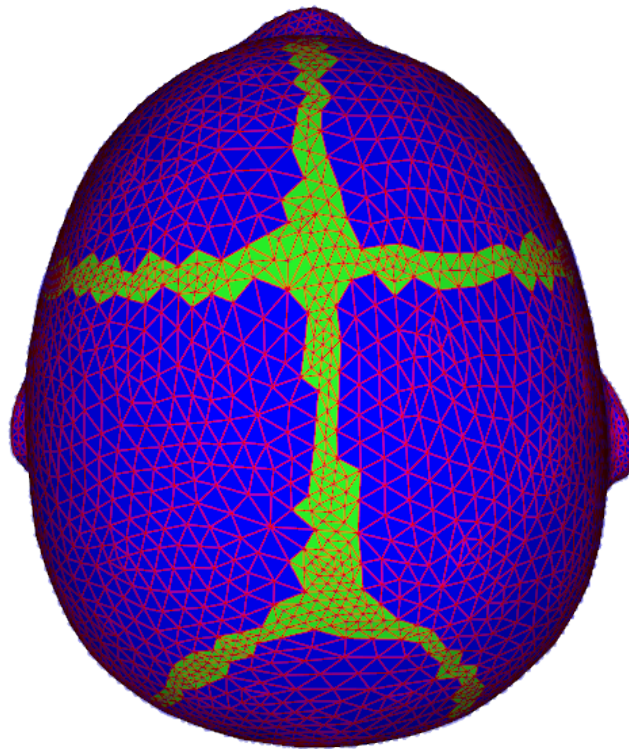


FIGURE 7.7. – Maillage et diamètre de la tête fœtale. Le maillage contient 4466 nœuds et 8928 triangles. Les deux zones matérielles sont : les os du crâne en bleu et les fontanelles et sutures en vert.

Les propriétés matérielles sont extraites des travaux de McPherson and Kriewall [1980] et de McElhaney et al. [1970] sur les propriétés biomécaniques du crâne. Ainsi,

les os du crâne ont un module de Young  $E = 2$  GPa, un coefficient de poisson  $\nu = 0.22$ , une densité de 1.8 et une épaisseur de 0.8 mm. Les fontanelles et sutures ont quant à elle un module de Young  $E = 31.5$  MPa, un coefficient de poisson  $\nu = 0.45$ , une densité de 1 et une épaisseur de 0.6 mm. Au niveau des conditions aux frontières, les nœuds à la base du cou sont fixés pour éviter des déplacements rigides.

Les conditions de chargement correspondent aux pressions intra-utérines et du col de l'utérus telles que mesurées dans [Rempen and Kraus \[1991\]](#). À partir de ces mesures de pressions intra-utérines, nous avons déterminé un champ de pressions discret pour pouvoir l'appliquer à notre modèle. Nous avons donc considéré trois zones de chargement (voir figure 7.8) :

- les fontanelles et sutures ne subissent aucune pression.
- La zone autour du plan suboccipito-bregmatique (SOB) est elle même divisée en trois zones dont les pressions sont égales à, en partant du haut du crâne : 45 KPa, 40 KPa, 30 KPa. Cette zone est celle qui est en contact avec le col de l'utérus.
- Le reste du crâne est soumis à la pression amniotique de 7kPa.

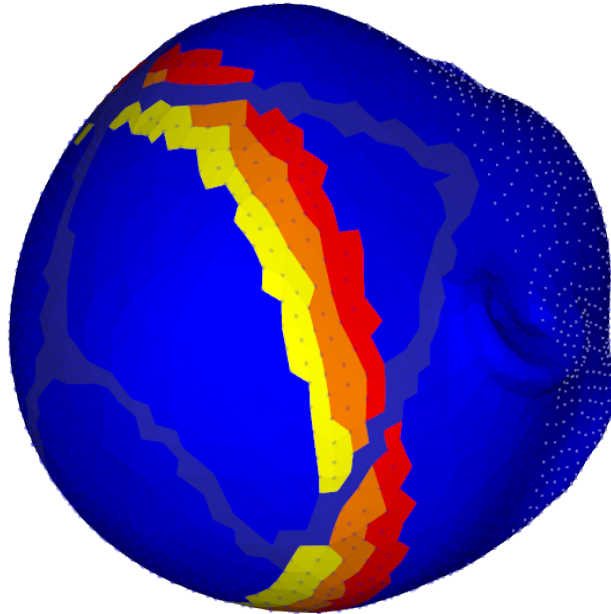


FIGURE 7.8. – Pressions intra-utérines et du col de l'utérus. Les fontanelles et sutures ne subissent aucune pression. La zone autour du plan suboccipito-bregmatique (SOB) est elle même divisée en trois zones dont les pressions sont égales à, en partant du haut du crâne : 45 KPa, 40 KPa, 30 KPa. Le reste du crâne est soumis à la pression amniotique de 7kPa.

L'évaluation des déformations est basée sur la mesure de trois des diamètres détaillés précédemment dans le chapitre 2 : le SOB, le OrV et le MaV (voir figure 7.9). Ces diamètres ont été choisis car ce sont ceux qui sont le plus affectés par la pression intra-utérine. De plus, ce sont ceux qui sont le plus statistiquement significatifs dans les travaux de [Sorbe and Dahlgren \[1983\]](#).

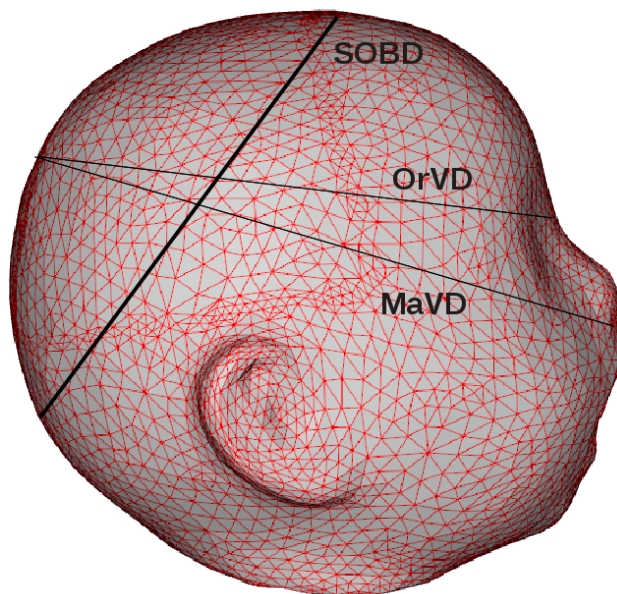


FIGURE 7.9. – Diamètres mesurés au cours de la simulation.

La déformation de la tête est visible sur la figure 7.10. Nous avons reporté les changements de diamètre dans le tableau 7.2 avec les résultats de [Sorbe and Dahlgren \[1983\]](#) et ceux de [Lapeer and Prager \[2001\]](#). Nous pouvons voir que nous sommes dans le même ordre de grandeur que les résultats de Lapeer sauf pour le SOB pour laquelle la variation est plus importante dans notre modèle. On peut noter une similitude des résultats malgré le fait que Lapeer utilise un modèle anisotropique pour les os du crâne et hyperélastique pour les fontanelles et sutures. On remarque aussi un chevauchement des os pariétaux, phénomène classique lors de la déformation de la tête fœtale pendant l'accouchement [[Schaal, 2007](#)].

	Sorbe 1983		Lapeer 2001		Bailet 2013	
Measures	$\phi$	var.	$\phi$	var.	$\phi$	var.
MaV	140.5	+1.90	129.3	+1.43	124.6	+1.29
OrV	126.9	+2.20	119.3	+1.24	110.9	+1.13
SOB	117.1	-1.70	88.7	-2.52	107.4	-3.57

Tab. 7.2. – Diamètres de la tête fœtale ( $\phi$ ) et ses variations (var.).

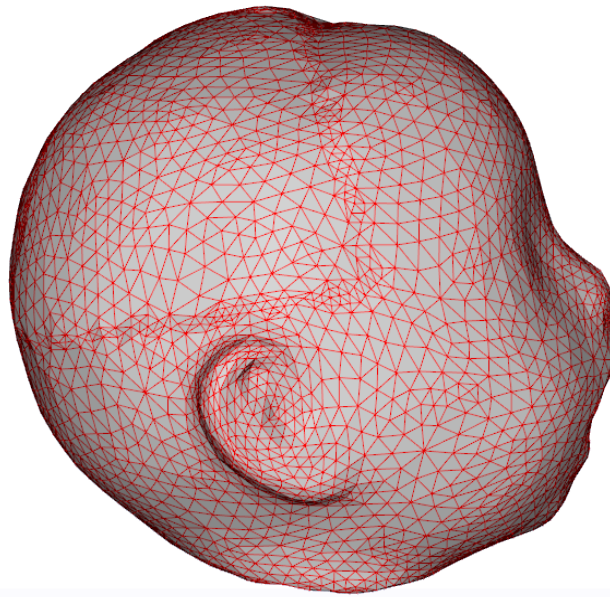


FIGURE 7.10. – Déformations de la tête foetale subissant la pression intra-utérine et le contact avec le col de l’utérus.

## 7.4 Intégration dans la plateforme CamiTK

CamiTK est une plateforme logicielle ouverte, libre et multi-plateforme visant au prototypage rapide d’application médicale [Fouard et al., 2012]. Il permet de manipuler des images ou des maillages et d’intégrer sur une même plateforme différents outils provenant de différents domaines propres aux GMCAO tels que la visualisation, le traitement d’image ou la navigation. Cette agglomération d’outils et d’algorithmes permet de faciliter l’intégration de nouveaux algorithmes en réutilisant ceux déjà présent sur la plateforme.

Les codes de calculs développés dans cette thèse ont été ajoutés dans CamiTK sous forme d’une extension. Ceci nous a permis de réutiliser les outils de manipulation de maillage et de visualisation déjà présents dans le logiciel et d’y ajouter la capacité de lancer des simulations biomécaniques directement depuis le logiciel (voir figure 7.11).

En plus du modèle de coque et de la contrainte de volume présenté dans ce manuscrit, notre bibliothèque permet de créer d’autres types de modèles :

- masses-ressorts,
- éléments finis solides (tétraèdres et hexaèdres) avec différents modèles : linéaire, co-rotationnel, Saint-Venant et Neo-Hookéen,
- différents types de chargements et contraintes.

En plus de cette librairie, nous avons développé un plugin pour le framework MML (Markup Modeling Language) de CamiTK [Deram, 2012] qui est en en-

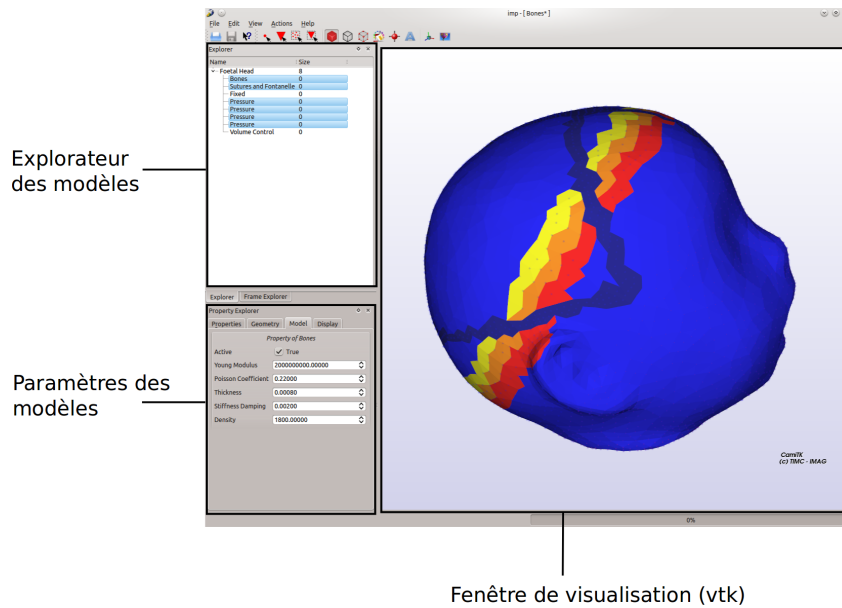


FIGURE 7.11. – Interface graphique de CamiTK. On peut voir ici la configuration pour la simulation de la pression intra-utérine sur la tête foetale.

vironnement générique permettant la comparaison et la validation de modèle. Ce framework est basé sur la technologie XML pour la description des objets physiques, des chargements et conditions limites.

En terme de développement, nous avons aussi ajouté différentes fonctionnalités et algorithmes à la plate-forme CamiTK qui ont été nécessaires pour mener nos expérimentations. Ainsi, nous avons développé entre autres la sélection multiple de nœuds et d'éléments sur les maillages, la gestion du format de fichier *msh* et des données associées aux éléments et nœuds d'un maillage à des fins de visualisation. Tous ces développements sont disponibles dans la dernière version de la plate-forme CamiTK (version 3.4, <http://camitk.imag.fr/changelog.php>).

## 7.5 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre la mise en œuvre du modèle de coque CST-DKT avec la contrainte de volume développée au chapitres 3 et 6 que nous avons testé notre modèle avec divers types de conditions de chargement. Nous avons mis en évidence un gain en temps avec le calcul sur GPU par rapport à celui sur CPU. Cependant, comme nous avons effectué nos tests sur une carte graphique comportant peu de cœurs et en double précision, le gain reste assez modeste. Nous espérons des gains plus significatifs avec des cartes graphiques plus récentes. Le gain sera d'autant plus important que notre algorithme garantit un nombre de transactions mémoire minimal. Dans ces différentes situations le modèle restitue un bon com-

portement de membrane et de flexion et lorsqu'il subit des grands déplacements. Le modèle a été testé sur une situation médicale bien documentée qui est la pression intra-utérine exercée sur la tête fœtale. Dans ce cas, notre modèle donne des résultats très proches de la littérature. Nous avons mis en place une configuration de modélisation de la descente fœtale qui pourra être utilisée en conjugaison avec le simulateur haptique BirthSim. Enfin, nos travaux sont disponibles sur la plateforme CamiTK, un outil de développement ouvert pour le GMCAO.



## Bibliographie

- Romain Buttin, Florence Zara, Behzad Shariat, Tanneguy Redarce, and Gilles Grangé. Biomechanical simulation of the fetal descent without imposed theoretical trajectory. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 111(2) :389 – 401, 2013. ISSN 0169-2607. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.cmpb.2013.04.005>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169260713001132>. 122
- Aurelien Deram. *Environnement générique pour la validation de simulations médicales*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2012. 127
- Céline Fouard, Aurélien Deram, Yannick Keraval, and Emmanuel Promayon. Camitk : a modular framework integrating visualization, image processing and biomechanical modeling. In *Soft Tissue Biomechanical Modeling for Computer Assisted Surgery*, pages 323–354. Springer, 2012. 127
- R.J. Lapeer and R.W. Prager. Fetal head moulding : finite element analysis of a fetal skull subjected to uterine pressures during the first stage of labour. *Journal of Biomechanics*, 34(9) :1125 – 1133, 2001. ISSN 0021-9290. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9290\(01\)00070-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9290(01)00070-7). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021929001000707>. 124, 126
- James H McElhaney, John L Fogle, John W Melvin, Russell R Haynes, Verne L Roberts, and Nabih M Alem. Mechanical properties of cranial bone. *Journal of Biomechanics*, 3(5) :495–511, 1970. 124
- Gregg K McPherson and Timothy J Kriewall. The elastic modulus of fetal cranial bone : a first step towards an understanding of the biomechanics of fetal head molding. *Journal of Biomechanics*, 13(1) :9–16, 1980. 124
- Andreas Rempfen and Martin Kraus. Pressures on the fetal head during normal labor. *Journal of Perinatal Medicine-Official Journal of the WAPM*, 19(3) :199–206, 1991. 125
- J.P. Schaal. *Mécanique et Techniques Obstétricales*. Sauramps Médical, 2007. ISBN 9782840234715. 126
- B. Sorbe and S. Dahlgren. Some important factors in the molding of the fetal head during vaginal delivery - a photographic study. *International Journal of Gynecology & Obstetrics*, 21(3) :205 – 212, 1983. ISSN 0020-7292. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7292\(83\)90081-4](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7292(83)90081-4). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020729283900814>. 124, 126

La vraie science est une ignorance qui se sait.

---

Montaigne

### 8.1 Conclusion générale

Ce travail de recherche a permis la mise en place d'un modèle de l'unité utéro-foetale et en particulier de la tête foetale. Le modèle de la tête foetale que nous avons proposé est basé sur un modèle éléments finis de coque utilisant l'élément CST-DKT avec une contrainte globale de volume et pour lequel nous avons proposé une formulation co-rotationnelle et une implémentation GPU. Au niveau de la tête foetale, contrairement aux modèles existants, notre modèle permet de prendre en compte la matière intra-cranienne grâce à la contrainte de volume. De plus, la configuration simplifiée de l'unité utéro-foetale proposée permet une utilisation en temps interactif destinée à terme à être utilisée avec l'interface haptique BirthSim.

Dans la première partie de ce manuscrit, nous avons proposé un état de l'art couvrant à la fois le champ d'application médical de notre travail et celui de la modélisation des tissus mous. Ainsi, dans le chapitre 2 nous avons réalisé une étude de l'anatomie obstétricale et de la physiologie de l'accouchement qui nous a permis de déterminer une hiérarchie de l'importance des organes et structures à prendre en compte pour une simulation numérique.

Nous avons proposé ensuite dans le chapitre 3 un état de l'art de la modélisation physique des objets déformables et en particulier des tissus mous. Cet état de l'art a permis de mettre en relief la dualité entre les techniques de modélisation discrètes et continues au niveau des performances et du temps de calcul. Étant donné le domaine d'application de notre simulation qui nécessite de la précision et de pouvoir

paramétrer notre modèle avec des grandeurs physiques, nous nous sommes tournés vers les méthodes continues et en particulier la MEF.

La dernière partie de l'état de l'art (chapitre 4) concernent les travaux de modélisation des organes pelviens, de la dynamique pelvienne et des simulateurs d'accouchements existants. Cette partie nous a permis de mettre en évidence les carences des modèles existants et de constater qu'il n'existe pas actuellement de simulation biomécanique interactive de l'accouchement.

La seconde partie de ce manuscrit a été consacrée à notre modèle de tête fœtale et à la mise en place d'une configuration de simulation adaptée à un usage interactif avec le simulateur haptique BirthSim en utilisant l'étude bibliographique de la partie précédente. Dans le chapitre 5, nous avons présenté un modèle biomécanique de tête fœtale basée sur l'élément de coque CST-DKT dont nous avons proposé une formulation co-rotationnelle pour prendre en compte les non-linéarités géométriques dues au grand déplacements. Contrairement aux travaux précédents, nous avons pris en compte la matière intra-crânienne de manière implicite grâce à une contrainte de volume qui maintient le volume intra-crânien constant lors de la simulation.

Dans le chapitre 6, nous avons proposé une implémentation sur GPU Nvidia de notre modèle de coque basée sur une approche par élément avec coloriage de graphe. Afin d'améliorer le temps de calcul, nous avons mis en place une réorganisation des données en mémoire qui, moyennant une augmentation de la mémoire utilisée, nous a permis de garantir un nombre minimal de transactions mémoire et ainsi d'utiliser au maximum les capacités de lecture concurrentes du GPU.

Enfin, dans le chapitre 7 nous avons présenter diverses simulations afin de montrer le comportement de notre modèle de coque avec différentes conditions de chargement. Nous avons ensuite simuler un scénario où la pression intra-utérine est appliquée sur la tête fœtale. Nous avons choisi ce scénario car il existe dans la littérature des données *in-vivo* et de simulations permettant de comparer nos résultats et de valider notre modèle de tête fœtale. Par extension, notre modèle pourra aussi être utilisé pour des applications en informatique graphique pour simuler des objets volumétriques incompressibles avec un temps de calcul réduit par rapport aux méthodes prenant en compte l'intérieur des objets. Dans de cas, nous devons proposer des comparaisons avec les autres types de modèles existants comme les éléments finis 3D et les masses-ressorts pour étudier la précision et la rapidité de notre modèles par rapports à ceux-ci.

Pour répondre à la problématique d'un modèle biomécanique précis et utilisable en temps interactif, nous avons donc agit sur plusieurs fronts :

- nous avons repéré la structure essentielle qui peut potentiellement subir le plus de dommages : le tête fœtale.
- Nous en avons proposer un modèle original.
- Nous avons proposer une implémentation GPU de ce modèle.
- Nous avons testé ce modèle sur un cas documenté pour le valider.

## 8.2 Perspectives

Les perspectives de notre travail concernent principalement l'amélioration du modèle biomécanique et à plus long terme, le couplage avec l'interface haptique BirthSim.

### 8.2.1 Modèles et Simulations

Dans le travail que nous avons présenté, la plupart des développements concernent la tête fœtale. Nous avons en place une configuration pour modéliser la descente fœtale. La prochaine étape de ce travail est de développer une méthode de collision efficace entre la tête fœtale et le col de l'utérus en tirant parti du fait que les deux structures sont en contact permanent et que nous connaissons à priori la direction de descente. Une fois cette méthode mise en place nous pourrions proposer une simulation complète de la descente fœtale avec différents scénarios de placement initial de la tête fœtale.

Au niveau de l'information à l'utilisateur, il serait ensuite intéressant de pouvoir déterminer des seuils sur des mesures physiques (tel que le stress de Von-Mises) permettant de connaître le moment où la tête fœtale peut potentiellement subir des dommages importants.

Le modèle pourrait être complexifié en y ajoutant des structures pelviennes tels que le plancher pelvien qui joue un rôle non négligeable lors de la descente fœtale. Le plancher pelvien étant un ensemble de fibre musculaire constituant une structure fine, on pourrait réutiliser notre modèle de coque en l'étendant pour qu'il puisse avoir un comportement anisotrope et lui ajouter une composante active pour le tonus musculaire.

Enfin, pour étudier des cas spécifiques, les différents organes modélisés pourraient provenir de segmentation d'images IRM de femme enceinte. Ainsi, le simulateur pourrait proposer des simulations patient-spécifique de la descente fœtale.

### 8.2.2 Couplage avec le dispositif haptique BirthSim

À plus long terme, nous considérerons le couplage avec l'interface haptique BirthSim. Le logiciel de simulation prendra en entrée la position initiale de la tête fœtale et commencera la simulation avec les contractions utérines modélisées par une force uniaxiale sur la tête fœtale. L'information de position de celle-ci sera envoyée au simulateur haptique qui en retour enverra les informations de tractions et les autres données induites par l'interaction avec l'utilisateur (par exemple la position des forceps). Pendant la simulation, un observateur devra aussi être dans la capacité de modifier les paramètres de la simulation tels que l'amplitude des contractions. Le retour visuel devra quant à lui permettre de visualiser les efforts subis par les différents tissus. Le résumé des interactions est proposé dans la figure 8.1.

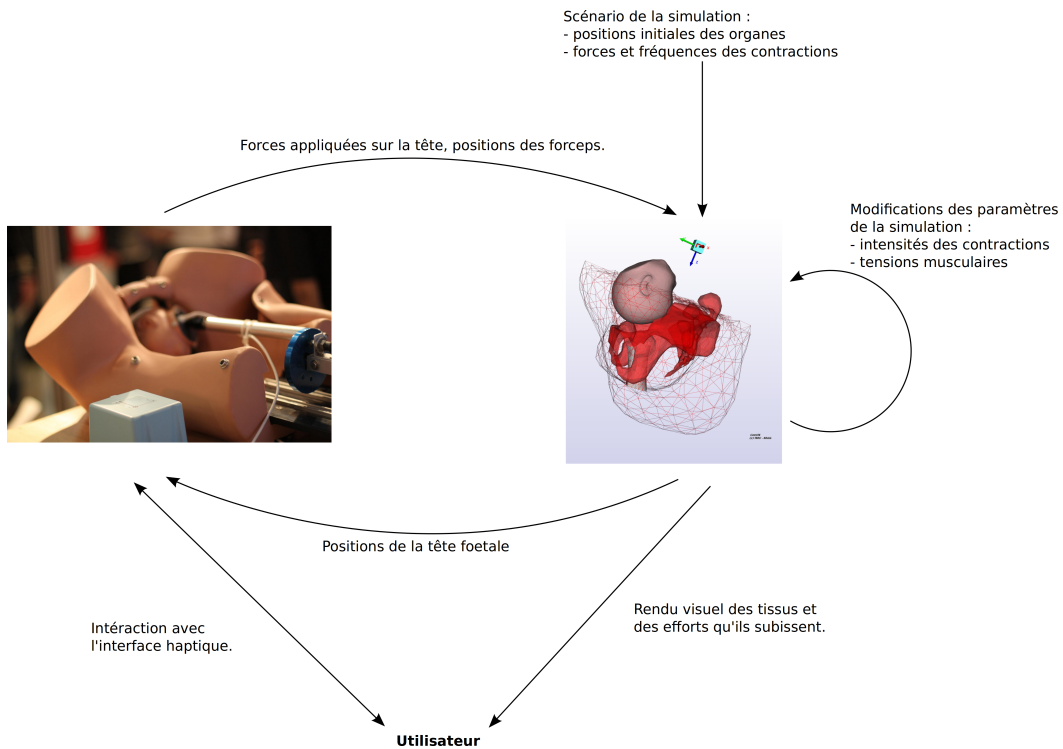


FIGURE 8.1. – Couplage de la simulation d'accouchement avec le dispositif haptique BirthSim.

Enfin, le simulateur devra également proposer différents scénarios d'accouchements (instrumentés ou non) en vue d'enrichir l'expérience utilisateur et de lui fournir un vaste éventail de situations.

Un outil de simulation complet, fournissant à la fois des informations qualitatives grâce à l'interface haptique et quantitatives grâce à une simulation précise et rapide de la descente fœtale serait un outil précieux dans la formation des futurs obstétriciens. Ils auraient ainsi la possibilité de pratiquer sur une grande variété de cas de et de procédures cliniques avec une expérience proche de la réalité. Le formateur pourrait quant à lui apprécier plus précisément la qualité du geste obstétrical de l'apprenant. Dans ce manuscrit, nous avons posé les premiers jalons numériques permettant la réalisation prochaine de ce simulateur.

En sus de son utilisation dans un simulateur d'apprentissage obstétrique, un modèle numérique complet et patient-spécifique de la descente fœtale constituerait à terme un outil d'aide à la décision médicale précieux pour détecter en amont les complications qui seraient susceptibles d'apparaître lors de d'un accouchement. Ainsi le praticien serait en mesure d'adapter son action en prenant compte les résultats de la simulations.

### 8.3 Publications

Pendants ces travaux, les publications suivantes ont été soumises et acceptées :

Une autre publication a été rédigé et est en attente de soumission dans la revue *Graphical Model*. Elle concerne l'utilisation de notre modèle de coque avec la contrainte de volume pour simuler les objets déformables pleins incompressibles. Enfin, une publication est en cours de rédaction reprenant le travail sur la tête foetale.



## BIBLIOGRAPHIE

- Jérémie Allard, Stéphane Cotin, François Faure, Pierre-Jean Bensoussan, François Poyer, Christian Duriez, Hervé Delingette, Laurent Grisoni, et al. Sofa-an open source framework for medical simulation. In Medicine Meets Virtual Reality, MMVR 15, 2007.
- D. Aulignac, J.A.C. Martins, E.B. Pires, T. Mascarenhas, and R.M. Natal Jorge. A shell finite element model of the pelvic floor muscles. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, 8 (5) :339–347, 2005. doi : 10.1080/10255840500405378. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10255840500405378>. PMID : 16298856.
- E. Avrahami, E. Frishman, and M. Minz. Ct demonstration of intracranial haemorrhage in term newborn following vacuum extractor delivery. Neuroradiology, 35(2) :107–108, 1993. ISSN 0028-3940. doi : 10.1007/BF00593964. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF00593964>.
- David Baraff and Andrew Witkin. Large steps in cloth simulation. In Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, SIGGRAPH '98, pages 43–54, New York, NY, USA, 1998. ACM. ISBN 0-89791-999-8. doi : 10.1145/280814.280821. URL <http://doi.acm.org/10.1145/280814.280821>.
- Jean-Louis Batoz, Klaus-J r gen Bathe, and Lee-Wing Ho. A study of three-node triangular plate bending elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15(12) :1771–1812, 1980. ISSN 1097-0207. doi : 10.1002/nme.1620151205. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620151205>.
- Vincent Baudet, Micha l Beuve, Fabrice Jaillet, Behzad Shariat, and Florence Zara. Integrating tensile parameters in hexahedral mass-spring system for simulation. 2009.
- M.-E. Bellemare, N. Pirro, L. Marsac, and O. Durieux. Toward the simulation of the strain of female pelvic organs. In Engineering in Medicine and Biology Society, 2007. EMBS 2007. 29th Annual International Conference of the IEEE, pages 2752–2755, Aug 2007. doi : 10.1109/IEMBS.2007.4352898.
- Ted Belytschko, Wing Kam Liu, and Brian Moran. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. Wiley, 1999. ISBN 471-98773-5.
- J. Berkley, G. Turkiyyah, D. Berg, M. Ganter, and S. Weghorst. Real-time finite element modeling for surgery simulation : an application to virtual suturing. Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on, 10(3) :314–325, May 2004. ISSN 1077-2626. doi : 10.1109/TVCG.2004.1272730.
- J. D Boissonnat and B. Geiger. 3d simulation of delivery. In Visualization, 1993. Visualization '93, Proceedings., IEEE Conference on, pages 416–419, Oct 1993. doi : 10.1109/VISUAL.1993.398903.
- Daniel Br laz. New methods to color the vertices of a graph. Communications of the ACM, 22(4) :251–256, 1979.
- Morten Bro-Nielsen and Stephane Cotin. Real-time volumetric deformable models for surgery simulation using finite elements and condensation. Computer Graphics Forum, 15(3) :57–66, 1996. ISSN 1467-8659. doi : 10.1111/1467-8659.1530057. URL <http://dx.doi.org/10.1111/1467-8659.1530057>.
- Romain Buttin. Modélisation biomécanique du système reproductif féminin et du f tus humain pour la réalisation d'un simulateur virtuel. Thèse de doctorat en informatique, Université Claude Bernard Lyon 1, October 2010.



- Romain Buttin, Florence Zara, Behzad Shariat, TanneGuy Redarce, and Gilles Grangé. Biomechanical simulation of the fetal descent without imposed theoretical trajectory. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 111(2) :389 – 401, 2013. ISSN 0169-2607. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.cmpb.2013.04.005>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169260713001132>.
- WE Caldwell and HC Moley. Anatomical variations in the female pelvis : Their classification and obstetrical significance :(section of obstetrics and gynæcology). *Proceedings of the Royal Society of Medicine*, 32 (1) :1, 1938.
- Cheng Chang, Andrew Borgart, Airong Chen, and MaxA.N. Hendriks. Direct gradient projection method with transformation of variables technique for structural topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, pages 1–13, 2013. ISSN 1615-147X. doi : 10.1007/s00158-013-0964-z. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00158-013-0964-z>.
- Y. Chen, Qing-Hong Zhu, A. Kaufman, and S. Muraki. Physically-based animation of volumetric objects. In *Computer Animation 98. Proceedings*, pages 154–160, 1998. doi : 10.1109/CA.1998.681920.
- Min Gyu Choi and Hyeong-Seok Ko. Modal warping : real-time simulation of large rotational deformation and manipulation. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 11(1) :91–101, 2005. ISSN 1077-2626. doi : 10.1109/TVCG.2005.13.
- Min Gyu Choi, Seung Yong Woo, and Hyeong-Seok Ko. Real-time simulation of thin shells. *Computer Graphics Forum*, 26(3) :349–354, 2007. ISSN 1467-8659. doi : 10.1111/j.1467-8659.2007.01057.x. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-8659.2007.01057.x>.
- O Claris, P Audra, G Mellier, G Putet, and B Salle. Les risques du forceps : le point de vue du pédiatre et de l’obstétricien. *Revue française de gynécologie et d’obstétrique*, 85(10) :549–551, 1990.
- Antonio Coca, Helia Estévez, Camino Fernández, and Gonzalo Esteban. Building 3d models for reconstructing a virtual cataract surgery haptic simulation. In *Proceedings of the First International Conference on Technological Ecosystem for Enhancing Multiculturality*, pages 43–48. ACM, 2013.
- Olivier Comas, Zeike A. Taylor, Jérémie Allard, Sébastien Ourselin, Stéphane Cotin, and Josh Passenger. Efficient nonlinear FEM for soft tissue modelling and its GPU implementation within the open source framework SOFA. In *Proceedings of the 4th international symposium on Biomedical Simulation, ISBMS '08*, Berlin, Heidelberg, 2008. Springer-Verlag. ISBN 978-3-540-70520-8. doi : 10.1007/978-3-540-70521-5\_4. URL [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-70521-5\\_4](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-70521-5_4).
- Olivier Comas, Stéphane Cotin, and Christian Duriez. A shell model for real-time simulation of intra-ocular implant deployment. In Fernando Bello and Stéphane Cotin, editors, *Biomedical Simulation*, volume 5958 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 160–170. Springer Berlin Heidelberg, 2010. ISBN 978-3-642-11614-8. doi : 10.1007/978-3-642-11615-5\_17. URL [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-11615-5\\_17](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-11615-5_17).
- Michel Cosson, C. Rubod, A. Vallet, J.F. Witz, P. Dubois, and M. Brieu. Simulation of normal pelvic mobilities in building an mri-validated biomechanical model. *International Urogynecology Journal*, 24 (1) :105–112, 2013. ISSN 0937-3462. doi : 10.1007/s00192-012-1842-8. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00192-012-1842-8>.
- Stéphane Cotin, H. Delingette, and N. Ayache. Real-time elastic deformations of soft tissues for surgery simulation. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 5(1) :62–73, 1999. ISSN 1077-2626. doi : 10.1109/2945.764872.
- Stéphane Cotin, Hervé Delingette, and Nicholas Ayache. A hybrid elastic model for real-time cutting, deformations, and force feedback for surgery training and simulation. *The Visual Computer*, 16(8) :437–452, 2000. ISSN 0178-2789. doi : 10.1007/PL00007215. URL <http://dx.doi.org/10.1007/PL00007215>.
- Gilles Debunne, Mathieu Desbrun, Marie-Paule Cani, and Alan H. Barr. Dynamic real-time deformations using space & time adaptive sampling. In *Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, SIGGRAPH '01*, pages 31–36, New York, NY, USA, 2001. ACM. ISBN 1-58113-374-X. doi : 10.1145/383259.383262. URL <http://doi.acm.org/10.1145/383259.383262>.
- H. Delingette. Toward realistic soft-tissue modeling in medical simulation. *Proceedings of the IEEE*, 86 (3) :512–523, March 1998. ISSN 0018-9219. doi : 10.1109/5.662876.
- H. Delingette. Triangular springs for modeling nonlinear membranes. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 14(2) :329–341, 2008a. ISSN 1077-2626. doi : 10.1109/TVCG.2007.70431.
- Herve Delingette and Nicholas Ayache. Hepatic surgery simulation. *Commun. ACM*, 48(2) :31–36, February 2005. ISSN 0001-0782. doi : 10.1145/1042091.1042116. URL <http://doi.acm.org/10.1145/1042091.1042116>.

- Hervé Delingette, Stéphane Cotin, and Nicholas Ayache. A hybrid elastic model allowing real-time cutting, deformations and force-feedback for surgery training and simulation. In Computer animation, 1999. Proceedings, pages 70–81. IEEE, 1999.
- Hervé Delingette. Biquadratic and quadratic springs for modeling st venant kirchhoff materials. In Fernando Bello and P.J.Eddie Edwards, editors, Biomedical Simulation, volume 5104 of Lecture Notes in Computer Science, pages 40–48. Springer Berlin Heidelberg, 2008b. ISBN 978-3-540-70520-8. doi : 10.1007/978-3-540-70521-5\_5. URL [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-70521-5\\_5](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-70521-5_5).
- Hervé Delingette and Nicholas Ayache. Soft tissue modeling for surgery simulation. In N. Ayache, editor, Computational Models for the Human Body, volume 12 of Handbook of Numerical Analysis, pages 453 – 550. Elsevier, 2004. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1570865903120054>.
- Jérémie Dequidt, Hadrien Courtecuisse, Olivier Comas, Jérémie Allard, Christian Duriez, Stéphane Cotin, Elodie Dumortier, Olivier Wavreille, and Jean-François Rouland. Computer-based training system for cataract surgery. Simulation, 89(12) :1421–1435, 2013.
- Aurelien Deram. Environnement générique pour la validation de simulations médicales. PhD thesis, Université de Grenoble, 2012.
- R. Diziol, J. Bender, and D. Bayer. Robust real-time deformation of incompressible surface meshes. In Proceedings of the 2011 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation, SCA '11, pages 237–246, New York, NY, USA, 2011. ACM. ISBN 978-1-4503-0923-3. doi : 10.1145/2019406.2019438. URL <http://doi.acm.org/10.1145/2019406.2019438>.
- O Dupuis, R Silveira, T Redarce, A Dittmar, and R.-C Rudigoz. Extraction instrumentale en 2002 au sein du réseau aurore : incidence et complications néo-natales graves. Gynécologie Obstétrique & Fertilité, 31(11) :920 – 926, 2003. ISSN 1297-9589. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.gyobfe.2003.09.007>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1297958903002807>.
- J.S. Eggert, M.S. Eggert, and P. Vallejo. Interaction education system for teaching patient care, October 3 2006. US Patent 7,114,954.
- CA Felippa and B Haugen. A unified formulation of small-strain corotational finite elements : I. theory. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194(21) :2285–2335, 2005.
- Céline Fouard, Aurélien Deram, Yannick Keraval, and Emmanuel Promayon. Camitk : a modular framework integrating visualization, image processing and biomechanical modeling. In Soft Tissue Biomechanical Modeling for Computer Assisted Surgery, pages 323–354. Springer, 2012.
- Y.C. Fung. Biomechanics : Mechanical Properties of Living Tissues. Biomechanics. Springer, 1993. ISBN 9780387979472. URL <http://books.google.fr/books?id=4HaMStG0HwC>.
- Roxane Gardner. Simulation and simulator technology in obstetrics : past, present and future. Expert Review of Obstetrics & Gynecology, 2(6) :775–790, 2007. doi : 10.1586/17474108.2.6.775. URL <http://dx.doi.org/10.1586/17474108.2.6.775>.
- Roxane Gardner and Daniel B. Raemer. Simulation in obstetrics and gynecology. Obstetrics and Gynecology Clinics of North America, 35(1) :97 – 127, 2008. ISSN 0889-8545. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ogc.2007.12.008>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0889854507001258>. Patient Safety in Obstetrics and Gynecology : Improving Outcomes, Reducing Risks.
- Mattias Gärdback and Gunnar Tibert. A comparison of rotation-free triangular shell elements for unstructured meshes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196(49) :5001–5015, 2007.
- Sarah FF Gibson and Brian Mirtich. A survey of deformable modeling in computer graphics. MERL, TR-97, 19, 1997.
- P. Govaert, P. Vanhaesebrouck, C. Praeter, K. Moens, and J. Leroy. Vacuum extraction, bone injury and neonatal subgaleal bleeding. European Journal of Pediatrics, 151(7) :532–535, 1992. ISSN 0340-6199. doi : 10.1007/BF01957762. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01957762>.
- Paul Govaert. Cranial haemorrhage in the term newborn infant, volume 129. Cambridge University Press, 1993.
- J. Graves and G. Savannah. Educational apparatus for teaching obstetrics and midwifery, May 1 1951. US Patent 2,551,433.
- Eitan Grinspun, Anil N Hirani, Mathieu Desbrun, and Peter Schröder. Discrete shells. In Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation, pages 62–67. Eurographics Association, 2003.
- Anne Kirkeby Hansen, Kirsten Wisborg, Niels Ulbjerg, and Tine Brink Henriksen. Risk of respiratory

- morbidity in term infants delivered by elective caesarean section : cohort study. *Bmj*, 336(7635) :85–87, 2008.
- Min Hong, Min-Hyung Choi, S. Jung, S. Welch, and J. Trapp. Effective constrained dynamic simulation using implicit constraint enforcement. In *Robotics and Automation, 2005. ICRA 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on*, pages 4520–4525, 2005. doi : 10.1109/ROBOT.2005.1570816.
- Min Hong, S. Jung, Min-Hyung Choi, and S.W.J. Welch. Fast volume preservation for a mass-spring system. *Computer Graphics and Applications, IEEE*, 26(5) :83–91, 2006. ISSN 0272-1716. doi : 10.1109/MCG.2006.104.
- G. Irving, J. Teran, and R. Fedkiw. Invertible finite elements for robust simulation of large deformation. In *Proceedings of the 2004 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation, SCA '04*, pages 131–140, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2004. Eurographics Association. ISBN 3-905673-14-2. doi : 10.1145/1028523.1028541. URL <http://dx.doi.org/10.1145/1028523.1028541>.
- Doug L. James and Dinesh K. Pai. Artdefo : accurate real time deformable objects. In *Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, SIGGRAPH '99*, pages 65–72, New York, NY, USA, 1999. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co. ISBN 0-201-48560-5. doi : 10.1145/311535.311542. URL <http://dx.doi.org/10.1145/311535.311542>.
- Štěpán Janda, Frans CT van der Helm, and Sjoerd B de Blok. Measuring morphological parameters of the pelvic floor for finite element modelling purposes. *Journal of Biomechanics*, 36(6) :749 – 757, 2003. ISSN 0021-9290. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9290\(03\)00008-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9290(03)00008-3). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021929003000083>.
- Pierre Kamina. *Anatomie clinique : Tome 1, Anatomie générale, membres*. Anatomie clinique. Maloine, 4e édition édition, 2009.
- A. Kheddar, C. Devine, M. Brunel, C. Duriez, and O. Sibony. Preliminary design of a childbirth simulator haptic feedback. In *Intelligent Robots and Systems, 2004. (IROS 2004). Proceedings. 2004 IEEE/RSJ International Conference on*, volume 4, pages 3270–3275 vol.4, Sept 2004. doi : 10.1109/IROS.2004.1389921.
- R. Khelifi, M. Rahim, B. Ratni, A. Rabahi, and M.-E. Bellemare. Simulation and evaluation of the strain of female pelvic organs with mass-spring and finite-elements models. In *IX International Seminar on Medical Information Processing and Analysis*, volume 8922, pages 892212–892212–8. International Society for Optics and Photonics, 2013. doi : 10.1117/12.2035522. URL <http://dx.doi.org/10.1117/12.2035522>.
- M. Kubale. *Graph Colorings*. Contemporary mathematics (American Mathematical Society) v. 352. American Mathematical Society, 2004. ISBN 9780821856871. URL <http://books.google.fr/books?id=nEmcID52qtsC>.
- R. Lapeer, M.S. Chen, and J. Villagrana. An augmented reality based simulation of obstetric forceps delivery. In *Mixed and Augmented Reality, 2004. ISMAR 2004. Third IEEE and ACM International Symposium on*, pages 274–275, Nov 2004. doi : 10.1109/ISMAR.2004.13.
- R.J. Lapeer and R.W. Prager. Finite element model of a fetal skull subjected to labour forces. In Chris Taylor and Alain Colchester, editors, *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention MICCAI 1999*, volume 1679 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1143–1155. Springer Berlin Heidelberg, 1999. ISBN 978-3-540-66503-8. doi : 10.1007/10704282\_124. URL [http://dx.doi.org/10.1007/10704282\\_124](http://dx.doi.org/10.1007/10704282_124).
- R.J. Lapeer and R.W. Prager. Fetal head moulding : finite element analysis of a fetal skull subjected to uterine pressures during the first stage of labour. *Journal of Biomechanics*, 34(9) :1125 – 1133, 2001. ISSN 0021-9290. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9290\(01\)00070-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9290(01)00070-7). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021929001000707>.
- Xinshan Li, Jennifer A Kruger, Martyn P Nash, and Poul MF Nielsen. Effects of nonlinear muscle elasticity on pelvic floor mechanics during vaginal childbirth. *Journal of biomechanical engineering*, 132(11) : 111010, 2010.
- Shiliang Liu, Robert M Liston, KS Joseph, Maureen Heaman, Reg Sauve, Michael S Kramer, et al. Maternal mortality and severe morbidity associated with low-risk planned cesarean delivery versus planned vaginal delivery at term. *Canadian medical association journal*, 176(4) :455–460, 2007.
- K.L. Lounsbury. Anatomical model, April 14 1992. US Patent 5,104,328.
- Barry Lowe. Fear of failure : a place for the trial of instrumental delivery. *BJOG : An International Journal of Obstetrics & Gynaecology*, 94(1) :60–66, 1987.
- Maud Marchal, Emmanuel Promayon, Jocelyne Troccaz, et al. Simulating prostate surgical procedures

- with a discrete soft tissue model. In Proceedings of 3rd Workshop in Virtual Reality Interactions and Physical Simulation, 2006.
- Stéphanie Marchesseau, Tobias Heimann, Simon Chatelin, Rémy Willinger, and Hervé Delingette. Fast porous visco-hyperelastic soft tissue model for surgery simulation : Application to liver surgery. Progress in Biophysics and Molecular Biology, 103(23) :185 – 196, 2010. ISSN 0079-6107. doi : 10.1016/j.pbiomolbio.2010.09.005. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0079610710000738>. <ce :title>Special Issue on Biomechanical Modelling of Soft Tissue Motion</ce :title>.
- J. A. C. Martins, M. P. M. Pato, E. B. Pires, R. M. Natal Jorge, M. Parente, and T. Mascarenhas. Finite element studies of the deformation of the pelvic floor. Annals of the New York Academy of Sciences, 1101(1) :316–334, 2007. ISSN 1749-6632. doi : 10.1196/annals.1389.019. URL <http://dx.doi.org/10.1196/annals.1389.019>.
- J.A.C. Martins, E.B. Pires, R. Salvado, and P.B. Dinis. A numerical model of passive and active behavior of skeletal muscles. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 151(3) : 419 – 433, 1998. ISSN 0045-7825. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00162-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00162-X). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578259700162X>. Containing papers presented at the Symposium on Advances in Computational Mechanics.
- James H McElhaney, John L Fogle, John W Melvin, Russell R Haynes, Verne L Roberts, and Nabih M Alem. Mechanical properties of cranial bone. Journal of Biomechanics, 3(5) :495–511, 1970.
- Gregg K McPherson and Timothy J Kriewall. The elastic modulus of fetal cranial bone : a first step towards an understanding of the biomechanics of fetal head molding. Journal of Biomechanics, 13(1) :9–16, 1980.
- U. Meier, O. López, C. Monserrat, M.C. Juan, and M. Alcañiz. Real-time deformable models for surgery simulation : a survey. Computer Methods and Programs in Biomedicine, 77(3) :183 – 197, 2005. ISSN 0169-2607. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.cmpb.2004.11.002>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169260704002093>.
- S Meyer, P Hohlfeld, C Ahtari, A Russolo, and P de Grandi. Birth trauma : short and long term effects of forceps delivery compared with spontaneous delivery on various pelvic floor parameters. BJOG : An International Journal of Obstetrics & Gynaecology, 107(11) :1360–1365, 2000.
- R.N. Miftahof and H.G. Nam. Biomechanics of the Gravid Human Uterus. SpringerLink : Bücher. Springer, 2011. ISBN 9783642214738.
- Richard Moreau. Le simulateur d'accouchement BirthSIM : un outil complet pour la formation sans risque en obstétrique. These, INSA de Lyon, December 2007. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00267771>.
- Matthias Müller and Markus Gross. Interactive virtual materials. In Proceedings of Graphics Interface 2004, GI '04, pages 239–246, School of Computer Science, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 2004. Canadian Human-Computer Communications Society. ISBN 1-56881-227-2. URL <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1006058.1006087>.
- Matthias Müller, Julie Dorsey, Leonard McMillan, Robert Jagnow, and Barbara Cutler. Stable real-time deformations. In Proceedings of the 2002 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation, SCA '02, pages 49–54, New York, NY, USA, 2002. ACM. ISBN 1-58113-573-4. doi : 10.1145/545261.545269. URL <http://doi.acm.org/10.1145/545261.545269>.
- Matthias Müller, Bruno Heidelberger, Matthias Teschner, and Markus Gross. Meshless deformations based on shape matching. ACM Trans. Graph., 24(3) :471–478, July 2005. ISSN 0730-0301. doi : 10.1145/1073204.1073216. URL <http://doi.acm.org/10.1145/1073204.1073216>.
- Andrew Nealen, Matthias Müller, Richard Keiser, Eddy Boxerman, and Mark Carlson. Physically based deformable models in computer graphics. Computer Graphics Forum, 25(4) :809–836, 2006. ISSN 1467-8659. doi : 10.1111/j.1467-8659.2006.01000.x. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-8659.2006.01000.x>.
- Matthieu Nesme, Yohan Payan, and François Faure. Efficient, Physically Plausible Finite Elements. In Eurographics, Dublin, Irlande, 2005. URL <http://hal.inria.fr/inria-00394480>.
- Matthieu Nesme, Paul G. Kry, Lenka Jeřábková, and François Faure. Preserving topology and elasticity for embedded deformable models. ACM Trans. Graph., 28(3) :52 :1–52 :9, July 2009. ISSN 0730-0301. doi : 10.1145/1531326.1531358. URL <http://doi.acm.org/10.1145/1531326.1531358>.
- Panos M Pardalos, Thelma Mavridou, and Jue Xue. The graph coloring problem : A bibliographic survey. In Handbook of combinatorial optimization, pages 1077–1141. Springer, 1999.

- M.P.L. Parente, R.M.Natal Jorge, T. Mascarenhas, A.A. Fernandes, and J.A.C. Martins. Deformation of the pelvic floor muscles during a vaginal delivery. *International Urogynecology Journal*, 19(1) : 65–71, 2008. ISSN 0937-3462. doi : 10.1007/s00192-007-0388-7. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00192-007-0388-7>.
- Y. Payan. *Soft Tissue Biomechanical Modeling for Computer Assisted Surgery*. Studies in Mechanobiology, Tissue Engineering and Biomaterials. Springer, 2012. ISBN 9783642290145.
- Guillaume Picinbono, Herve Delingette, and Nicholas Ayache. Real-time large displacement elasticity for surgery simulation : Non-linear tensor-mass model. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention–MICCAI 2000*, pages 643–652. Springer, 2000.
- Guillaume Picinbono, Hervé Delingette, and Nicholas Ayache. Non-linear anisotropic elasticity for real-time surgery simulation. *Graphical models*, 65(5) :305–321, 2003.
- E. Promayon, P. Baconnier, and C. Puech. Physically-based deformations constrained in displacements and volume. *Computer Graphics Forum*, 15(3) :155–164, 1996. ISSN 1467-8659. doi : 10.1111/1467-8659.1530155. URL <http://dx.doi.org/10.1111/1467-8659.1530155>.
- Emmanuel Promayon, Céline Fouard, Mathieu Baillet, Aurélien Deram, Gaëlle Fiard, Nikolai Hungr, Vincent Luboz, Yohan Payan, Johan Sarrazin, Nicolas Saubat, et al. Using camitk for rapid prototyping of interactive computer assisted medical intervention applications. In *Conference Proceedings*, volume 2013, page 4933. Inserm, 2013.
- M. Rahim, M.-E. Bellemare, N. Pirro, and R. Bulot. A quantitative approach for the assessment of the pelvic dynamics modeling. *{IRBM}*, 32(5) :311–315, 2011. ISSN 1959-0318. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.irbm.2011.09.003>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1959031811001199>. Numéro spécial {RITS}.
- Junuthula Narasimha Reddy. *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC press, 2006.
- Andreas Rempen and Martin Kraus. Pressures on the fetal head during normal labor. *Journal of Perinatal Medicine-Official Journal of the WAPM*, 19(3) :199–206, 1991.
- R. Riener and R. Burgkart. Aktiver geburtensimulator mit starrem antrieb, July 31 2003. DE Patent App. DE2,002,102,504.
- D Riethmuller, P Roth, A Martin, R Maillet, and JP Schaal. Benefits of ultrasonography in the delivery room. *Gynecol Obstet Fertil*, 32(5) :427–432–, May 2004. URL <http://europepmc.org/abstract/MED/15177215>.
- C Rubod, P Lecomte-Grosbras, M Brieu, G Giraudet, N Betrouni, and M Cosson. 3d simulation of pelvic system numerical simulation for a better understanding of the contribution of the uterine ligaments. *International urogynecology journal*, 24(12) :2093–2098, 2013.
- J.P. Schaal. *Mécanique et Techniques Obstétricales*. Sauramps Médical, 2007. ISBN 9782840234715.
- S.-Y. Selmi, G. Fiard, E. Promayon, L. Vadcard, and J. Troccaz. A virtual reality simulator combining a learning environment and clinical case database for image-guided prostate biopsy. In *Computer-Based Medical Systems (CBMS), 2013 IEEE 26th International Symposium on*, pages 179–184, June 2013. doi : 10.1109/CBMS.2013.6627785.
- S.-Y Selmi, E. Promayon, J. Sarrazin, and J. Troccaz. 3D interactive ultrasound image deformation for realistic prostate biopsy simulation. In *6th International Symposium on Biomedical Simulation, ISBMS 2014*, Lecture Notes in Computer Science. Springer Verlag, 2014.
- R. Silveira, Minh Tu Pham, T. Redarce, M. Betemps, and O. Dupuis. A new mechanical birth simulator : Birthsim. In *Intelligent Robots and Systems, 2004. (IROS 2004). Proceedings. 2004 IEEE/RSJ International Conference on*, volume 4, pages 3948–353. vol.4, Sept 2004. doi : 10.1109/IROS.2004.1390031.
- B. Sorbe and S. Dahlgren. Some important factors in the molding of the fetal head during vaginal delivery - a photographic study. *International Journal of Gynecology & Obstetrics*, 21(3) :205 – 212, 1983. ISSN 0020-7292. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7292\(83\)90081-4](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7292(83)90081-4). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020729283900814>.
- Demetri Terzopoulos, John Platt, Alan Barr, and Kurt Fleischer. Elastically deformable models. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 21(4) :205–214, August 1987. ISSN 0097-8930. doi : 10.1145/37402.37427. URL <http://doi.acm.org/10.1145/37402.37427>.
- Shi Wu Wen, Shiliang Liu, Michael S Kramer, Sylvie Marcoux, Arne Ohlsson, Reg Sauvé, and Robert Liston. Comparison of maternal and infant outcomes between vacuum extraction and forceps deliveries. *American journal of epidemiology*, 153(2) :103–107, 2001.

- 
- Xunlei Wu, Michael S. Downes, Tolga Goktekin, and Frank Tendick. Adaptive nonlinear finite elements for deformable body simulation using dynamic progressive meshes. Computer Graphics Forum, 20(3) : 349–358, 2001. ISSN 1467-8659. doi : 10.1111/1467-8659.00527. URL <http://dx.doi.org/10.1111/1467-8659.00527>.
- R Yiou, P Costa, F Haab, and V Delmas. Functional anatomy of the pelvic floor]. Progrès en urologie : journal de l'Association française d'urologie et de la Société française d'urologie, 19(13) :916, 2009.
- D. Zerbato, S. Galvan, and P. Fiorini. Calibration of mass spring models for organ simulations. In Intelligent Robots and Systems, 2007. IROS 2007. IEEE/RSJ International Conference on, pages 370–375, 2007. doi : 10.1109/IROS.2007.4399289.