



**HAL**  
open science

# Optimisation hydrodynamique et contrôle optimal d'un récupérateur de l'énergie des vagues

Aurélien Babarit

► **To cite this version:**

Aurélien Babarit. Optimisation hydrodynamique et contrôle optimal d'un récupérateur de l'énergie des vagues. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Ecole Centrale de Nantes (ECN); Université de Nantes, 2005. Français. NNT: . tel-01156563

**HAL Id: tel-01156563**

**<https://hal.science/tel-01156563>**

Submitted on 28 May 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ÉCOLE DOCTORALE**

**MECANIQUE, THERMIQUE ET GENIE CIVIL**

*Année 2005*

N° B.U. :

**Thèse de DOCTORAT**

***Diplôme délivré conjointement par  
L'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes***

Spécialité : DYNAMIQUE DES FLUIDES ET TRANSFERTS

Présentée et soutenue publiquement par :

AURELIEN BABARIT

le 27 octobre 2005  
à l'Ecole Centrale de Nantes - France

**OPTIMISATION HYDRODYNAMIQUE ET CONTROLE OPTIMAL D'UN  
RECUPERATEUR DE L'ENERGIE DES VAGUES**

.....

**JURY**

Président :	M. BILLARD Jean Yves	Professeur, Ecole Navale (Brest)
Rapporteurs :	M. MOLIN Bernard M. FALCAO Antonio	HDR, Professeur attaché, Ecole Généraliste d'Ingénieurs de Marseille Professeur, Instituto Superior Tecnico (Lisbonne)
Examineurs :	M. CLEMENT Alain M. GUGLIELMI Michel M. MULTON Bernard	HDR, Ingénieur de recherche, Ecole Centrale de Nantes HDR, Ingénieur de recherche, Ecole Centrale de Nantes Professeur, Ecole Normale Supérieure de Cachan (Rennes)

*à mon grand-père*



# Remerciements

Je ne dérogerais pas à la règle en remerciant en tout premier lieu les deux rapporteurs de cette thèse, Messieurs Bernard Molin et Antonio Falcão pour leur relecture attentive de ce mémoire. Je suis également reconnaissant à Bernard Multon, Jean-Yves Billard et Michel Guglielmi d'avoir accepté de faire partie du jury. Je salue particulièrement ce dernier pour les fructueuses discussions que nous avons pu avoir sur les thèmes de la commande optimale, du contrôle par latching et par "anti-latching".

Je tiens à exprimer également toute ma gratitude à Alain Clément, mon directeur de thèse pendant ces trois années, pour m'avoir communiqué sa passion pour l'énergie des vagues. Il est probable que s'il n'avait pas abordé ce sujet, par un détour inattendu lors d'un cours de DEA de décembre 2002, je serais passé à côté d'un domaine de recherche fascinant où beaucoup reste à faire. Je le remercie aussi pour m'avoir fait confiance tout au long de ces trois années pour mener à bien ce projet. L'autonomie dont j'ai pu jouir est quelque chose auquel on prend vite goût...

Puisque j'en suis aux remerciements, je serais bien ingrat de ne pas avoir une pensée pour l'équipe du Centre de Ressource Informatique de l'École Centrale de Nantes, dont les compétences ont permis de sauver la majeure partie de mon travail après un "crash disk" malvenu. Merci également à Anne Lagatu, secrétaire du laboratoire, pour sa gentillesse, sa patience et sa compétence dans les sphères administratives.

Je remercie aussi à tous ceux qui ont fait de ces trois ans trois années dont je me souviendrais avec plaisir : les anciens : Gaëlle, David et Christophe, je leur dois de savoir (un peu) jouer au badminton, les modernes : Félicien, Mathieu et Yann, je leur dois le virus de la voile ; et les jeunes : Jean-Christophe, Romain, Mikaël, ainsi que Jean-Baptiste, Pierre-Michel, Guillaume dit English Bob, Pierre et Oussama, à qui je dois de mémorables parties en réseaux.... Plus sérieusement, toutes ces bandes d'anciens thésards ou futurs docteurs est un groupe hétérogène, mais homogène dans leur curiosité, leur respect et leur gentillesse.

Finalement, merci aussi à Eliz' pour ces judicieux conseils judicieux lors de la préparation du powerpoint de la soutenance de cette thèse, et pour le reste.

Cher lecteur, bonne lecture.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Equations du mouvement.</b>	<b>5</b>
<b>1 Mise en équation : mécanique linéaire et non linéaire de SEAREV.</b>	<b>7</b>
1.1 Description du système et notations. . . . .	7
1.2 Mouvements dans l'espace : SEAREV à 8 et 7 degrés de liberté. . . . .	8
1.2.1 Formulation vectorielle. . . . .	8
1.2.2 Equations linéarisées. . . . .	16
1.3 Mouvements plans : SEAREV à quatre degrés de liberté. . . . .	16
1.3.1 Simplification. . . . .	17
1.3.2 Paramétrage. . . . .	17
1.3.3 Equation du mouvement. . . . .	17
1.3.4 Equation du mouvement linéarisé. . . . .	18
1.3.5 Identification avec le montage double pendule IRCCYN. . . . .	18
<b>2 Modélisation des interactions fluide-structure.</b>	<b>21</b>
2.1 Formulation du problème de tenue à la mer. . . . .	21
2.1.1 Problème aux limites. . . . .	21
2.1.2 Expression des efforts. . . . .	22
2.1.3 Equation intégrale. . . . .	24
2.2 Deux approches pour la résolution du problème. . . . .	24
2.2.1 Approche classique du problème de diffraction-radiation. . . . .	24
2.2.2 Une approche alternative : méthode des déformations généralisées. . . . .	27
2.3 Résolution dans le domaine temporel. . . . .	28
2.3.1 Equation intégrale discrète. . . . .	28
2.3.2 Résolution numérique. . . . .	29
2.3.3 Résultats numériques. . . . .	30
2.4 Résolution dans le domaine fréquentiel. . . . .	35

2.4.1	Problème aux limites dans le domaine fréquentiel. . . . .	35
2.4.2	Expression des efforts. . . . .	36
2.4.3	Equation intégrale. . . . .	37
2.4.4	Résolution numérique. . . . .	37
2.5	Conclusion. . . . .	37
<b>3</b>	<b>Bilan des efforts.</b>	<b>38</b>
3.1	Efforts exercés sur le système {flotteur+pendule}. . . . .	38
3.1.1	Formulation générale. . . . .	38
3.1.2	Efforts de pesanteur. . . . .	38
3.1.3	Efforts de pression. . . . .	39
3.1.4	Efforts d’ancrage. . . . .	44
3.2	Efforts exercés sur le pendule. . . . .	44
3.2.1	Efforts de pesanteur. . . . .	44
3.2.2	Efforts dus au convertisseur d’énergie. . . . .	45
3.2.3	Efforts de liaison. . . . .	45
3.3	Bilan. . . . .	46
3.3.1	Cas 3D. . . . .	46
3.3.2	Cas 2D. . . . .	49
3.4	Conclusion . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Simulations numériques.</b>	<b>52</b>
4.1	Description du système considéré. . . . .	52
4.2	Description des modèles numériques. . . . .	52
4.2.1	Rappel de l’équation du mouvement. . . . .	52
4.2.2	Le modèle 2DHLMLt. . . . .	53
4.2.3	Modèle 2DHLMNLT. . . . .	54
4.2.4	Modèles 3DHLMLt et 3DHLMNLT. . . . .	56
4.3	Prédiction de la production d’énergie. . . . .	57
4.3.1	Prédiction initiale avec le modèle plan linéaire. . . . .	57
4.3.2	Influence des non linéarités dans la mécanique. . . . .	58
4.3.3	Influence de l’étalement directionnel de la houle. . . . .	61
<b>II</b>	<b>Contrôle.</b>	<b>67</b>
<b>5</b>	<b>Résultats sur l’absorption d’énergie par SEAREV.</b>	<b>69</b>
5.1	Contrôle optimal des récupérateurs d’énergie des vagues. . . . .	69
5.1.1	Puissance absorbée par un flotteur à 6 degrés de liberté. . . . .	69

5.1.2	Maximum de puissance absorbée. . . . .	71
5.2	Equations du contrôle optimal pour SEAREV. . . . .	72
5.2.1	Domaine fréquentiel. . . . .	72
5.2.2	Domaine temporel. . . . .	76
5.3	Des contrôles sub-optimaux. . . . .	80
5.3.1	S'affranchir de l'anti-causalité. . . . .	80
5.3.2	Le contrôle par latching. . . . .	80
<b>6</b>	<b>Contrôle par latching : méthode semi-analytique.</b>	<b>82</b>
6.1	Equation analytique du latching. . . . .	82
6.1.1	Hypothèses et notations. . . . .	82
6.1.2	Equation générale du mouvement. . . . .	83
6.1.3	Analyse du problème. . . . .	83
6.1.4	Condition de nullité. . . . .	85
6.1.5	Fonctionnement alternatif. . . . .	85
6.2	Application à un système à un degré de liberté. . . . .	86
6.2.1	Description du système. . . . .	86
6.2.2	Equation du mouvement du système libre. . . . .	87
6.2.3	Equation du mouvement du système bloqué. . . . .	89
6.2.4	Résultats. . . . .	90
6.3	Application à un système à deux degrés de liberté. . . . .	95
6.3.1	Description du système. . . . .	97
6.3.2	Equations du mouvement. . . . .	97
6.3.3	Résultats. . . . .	100
6.4	Application à SEAREV. . . . .	108
6.4.1	Equation des mouvements. . . . .	108
6.4.2	Résultats. . . . .	112
<b>7</b>	<b>Contrôle par latching : méthode de la commande optimale.</b>	<b>116</b>
7.1	Théorie de la commande optimale par latching. . . . .	116
7.1.1	Le problème de la commande optimale . . . . .	116
7.1.2	La commande optimale par latching. . . . .	117
7.2	Application à un système à un degré de liberté. . . . .	117
7.2.1	Equation du mouvement du système. . . . .	117
7.2.2	Equations de la commande optimale. . . . .	118
7.2.3	Etudes de convergence. . . . .	119
7.2.4	Résultats. . . . .	121
7.3	Application à SEAREV. . . . .	123
7.3.1	Equation du mouvement. . . . .	123

7.3.2	Equations de la commande optimale. . . . .	125
7.3.3	Etude de convergence. . . . .	126
7.3.4	Résultats. . . . .	127
<b>III</b>	<b>Optimisation.</b>	<b>133</b>
<b>8</b>	<b>Optimisation de forme pour SEAREV.</b>	<b>135</b>
8.1	Le problème de l'optimisation de forme en mécanique des fluides. . . . .	136
8.1.1	Méthodes d'optimisation de forme. . . . .	136
8.1.2	Description de la forme. . . . .	137
8.2	Mise en oeuvre dans le cas de SEAREV, cas général. . . . .	138
8.2.1	Vue globale de la méthode. . . . .	138
8.2.2	Paramétrage et maillage. . . . .	138
8.2.3	Calcul de l'énergie. . . . .	140
8.2.4	Conclusion. . . . .	142
8.3	Mise en oeuvre dans le cas du modèle linéarisé : méthode découplée. . . . .	142
8.3.1	Calcul de l'énergie. . . . .	142
8.3.2	Deux problèmes d'optimisation. . . . .	144
8.3.3	Détermination du pendule optimal pour un flotteur donné. . . . .	145
8.3.4	Conclusion. . . . .	149
<b>9</b>	<b>Optimisation sans contrôle.</b>	<b>150</b>
9.1	Type 1 : barge parallélépipédique. . . . .	150
9.1.1	Description. . . . .	150
9.1.2	Résultats de l'optimisation. . . . .	151
9.1.3	Conclusions. . . . .	153
9.2	Type 2 : barge cylindrique. . . . .	153
9.2.1	Description. . . . .	153
9.2.2	Résultats. . . . .	154
9.2.3	Conclusions. . . . .	156
9.3	Type 3 : barge cylindrique avec franc bord. . . . .	156
9.3.1	Description. . . . .	156
9.3.2	Résultats. . . . .	157
9.3.3	Conclusion. . . . .	157
9.4	Type 4 : barge cylindrique à quille. . . . .	159
9.4.1	Description de la géométrie. . . . .	159
9.4.2	Résultats. . . . .	159
9.4.3	Conclusion. . . . .	162

9.5	Type 5 : Barge cylindrique à quille et bords arrondis. . . . .	164
9.5.1	Description. . . . .	164
9.5.2	Résultats. . . . .	165
9.5.3	Conclusion. . . . .	165
9.6	Synthèse. . . . .	165
9.6.1	Comparatif des frontières de Pareto. . . . .	165
9.6.2	Le flotteur optimal. . . . .	167
9.7	Etudes de sensibilité. . . . .	168
9.7.1	Influence du site sur la frontière de Pareto. . . . .	168
9.7.2	Sensibilité de la prédiction de la production aux paramètres mécaniques. . . . .	170
9.7.3	Facteur d'échelle. . . . .	172
9.7.4	Conclusion. . . . .	173
<b>10</b>	<b>Optimisation avec contrôle.</b>	<b>174</b>
10.1	Noyau de l'optimisation. . . . .	174
10.1.1	Calcul de l'énergie absorbée. . . . .	174
10.1.2	Description de la géométrie. . . . .	174
10.2	Optimisation sur le cylindre d'inertie. . . . .	175
10.2.1	Position du problème. . . . .	175
10.2.2	Résultats. . . . .	176
10.3	Optimisation globale. . . . .	178
10.3.1	Position du problème. . . . .	178
10.3.2	Résultats. . . . .	178
	<b>Conclusion</b>	<b>181</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>182</b>
	<b>Annexes</b>	<b>190</b>
<b>A</b>	<b>SEAREV à 7 ou 8 degrés de liberté : matrice d'inertie et forces de Coriolis.</b>	<b>191</b>
A.1	Vecteurs rotations. . . . .	191
A.2	Vitesses et accélérations des centres de gravité. . . . .	192
A.3	Moments cinétiques et moments dynamiques. . . . .	194
A.4	Equations générales des mouvements. . . . .	197
A.5	Equations des mouvements linéarisées. . . . .	201

<b>B SEAREV à 4 degrés de liberté : matrice d'inertie et forces de Coriolis.</b>	<b>204</b>
B.1 Cinématique et cinétique. . . . .	204
B.2 Equation du mouvement. . . . .	206
B.3 Equation du mouvement linéarisé. . . . .	208
<b>C Identification par la méthode de Prony.</b>	<b>209</b>
<b>D Données géométriques et mécaniques des SEAREV considérés.</b>	<b>211</b>
D.1 DES2595. . . . .	211
D.2 DES2953. . . . .	211
D.3 DES1451. . . . .	213

# Introduction.

Lorsque le vent souffle sur l'océan, une partie de son énergie est transmise à l'élément liquide et forme des vagues. Plus le vent souffle fort, longtemps et sur une grande distance et plus la longueur d'onde et la hauteur des vagues générées sont grandes, signes que l'énergie présente dans ces vagues est importante. Cette énergie, gratuite et renouvelable, est ensuite transportée, presque sans dissipation et sur, parfois, des milliers de kilomètres, jusqu'à une côte où elle est dissipée.

A l'échelle planétaire, la ressource est estimée à 1 à 10  $TW$  en grande profondeur ( $>100$  m) [60]. La ressource exploitable est estimée à 140 à 750  $TWh$  par an [68]. La figure (1) présente les flux moyen d'énergie en  $kW/m$  en différents points du globe.

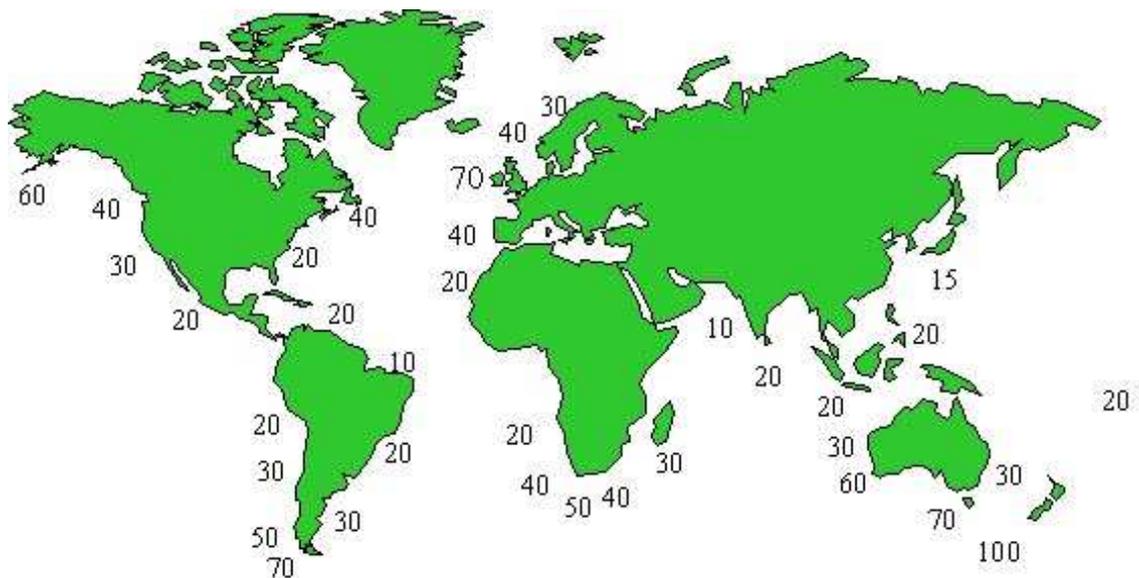


FIG. 1 – Puissance moyenne de la houle en kW par mètre de front de vague.

C'est avec ces données en tête que les premiers systèmes de récupération de l'énergie des vagues furent imaginés, dans les années 70 et à la suite des chocs pétroliers. Cette première génération de récupérateurs d'énergie des vagues étaient pour la plupart des systèmes à colonne d'eau oscillante et furent installés sur la côte, comme par exemple le LIMPET sur l'île de Islay en Ecosse [8] ou la centrale de Pico aux Açores [25]. Ces systèmes, en délivrant les premiers kWh au réseau, ont eu le grand mérite de démontrer la faisabilité de la récupération de l'énergie des vagues.

Aujourd'hui, la tendance dans cette discipline est aux systèmes en mer, installés à quelques

kilomètres des côtes, comme par exemple le Pelamis [61]. On parle alors de systèmes "near-shore". L'intérêt de ces systèmes de deuxième génération est de s'affranchir des inconvénients dus à une implantation côtière, comme la dissipation de la ressource énergétique à l'approche de la côte et les problèmes environnementaux que posent l'intégration d'installations massives sur des littoraux en général protégés.

Le système SEAREV - pour Système Electrique Autonome de Récupération de l'Energie des Vagues - appartient à cette seconde génération de systèmes. Il est composé d'un corps flottant, complètement clos, dans lequel est suspendu une masse mobile. Sous l'action de la houle, le flotteur comme la masse interne développent des mouvements qui leur sont propres. Le mouvement relatif existant alors entre le flotteur et la masse mobile est mis à profit pour actionner un système de conversion de l'énergie mécanique en électricité.

La tâche du convertisseur d'énergie est donc de transformer l'énergie mécanique contenue dans le mouvement relatif du pendule en une énergie transmissible et utilisable à terre. On peut imaginer utiliser plusieurs moyens de parvenir à cette fin.

- Par exemple, il est possible d'utiliser une génératrice électrique directe, capable de transformer le mouvement de rotation relatif du pendule en électricité. Cette possibilité est en cours d'évaluation par M. Ruellan, doctorante au Laboratoire SATIE de Rennes.
- Il est également possible de passer par l'intermédiaire d'actionneurs hydrauliques. Le mouvement relatif est alors utilisé pour pomper un fluide dans des accumulateurs, puis le fluide sous pression est utilisé pour actionner une ou des génératrices. Cette possibilité a été étudié par C. Josset, en post-doc au laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Ecole Centrale de Nantes et s'est révélée prometteuse.

Quel que soit le système de conversion, le système produit de l'électricité. Dans un premier temps, il est envisagé de renvoyer cette électricité au continent mais, dans un futur plus lointain, elle pourrait être utilisé sur place pour produire de l'hydrogène... Ceci sort du cadre de cette étude, revenons en au système SEAREV.

Les intérêts d'un tel système sont multiples :

- Toutes les parties mobiles sont contenues à l'intérieur du système, à l'abri des agressions du milieu marin. Il en résulte une réduction des coûts de maintenance et une fiabilité accrue par rapport à un système dont les articulations sont au contact de l'océan.
- La masse mobile est en fait un cylindre d'inertie dont le centre de gravité est déporté par rapport à son axe principal. Le système ne présente ainsi pas de butées. Le cylindre peut faire un tour sur lui-même, ou le flotteur un tour autour du cylindre sans mettre en péril l'intégrité du système. Le système est donc particulièrement résistant à des conditions extrêmes.
- Il ne nécessite pas de référence externe. Sa référence - la gravité - est "embarquée". Les ancrages sont donc souples car ils ne servent qu'à s'opposer aux efforts de dérive et leur coût est réduit par rapport à des ancrages tendus. Ceci permet de s'accomoder sans souci de la marée.

Les équations du mouvement du cylindre d'inertie sont semblables à celle d'un pendule simple. Si l'on néglige les mouvements de translation du flotteur dans une toute première approximation, son équation du mouvement est elle aussi celle d'un pendule simple, et la dynamique du système est celle d'un double pendule. C'est-à-dire un système de deux oscillateurs mécaniques couplés, pourvu de deux pulsations de résonance. Ces deux pulsations peuvent être accordés vis à vis de la houle incidente en faisant varier les paramètres mécaniques du système,

mais le nombre de paramètres étant très important pour le système complet, il faut en passer par l'optimisation numérique.

Comme pour les autres systèmes de récupération de l'énergie des vagues, l'absorption d'énergie est maximale en houle régulière aux résonances du système, et faible lorsque les pulsations de la houle et du système ne sont plus accordés. L'excitation de la mer étant aléatoire, il est nécessaire d'introduire un moyen de contrôler la dynamique du système, afin d'améliorer la production lorsque la houle et le système ne sont plus en accord. Le contrôle envisagé pour SEAREV est un contrôle par latching sur le mouvement relatif du pendule interne. Le contrôle par latching, initialement introduit par J. Falnes et K. Budal [12], consiste ici à bloquer le mouvement de la masse mobile lorsque celle-ci arrive en fin de course, puis à le relâcher au bout de quelques secondes, lorsque les conditions sont plus favorables. L'intérêt de ce système de contrôle est qu'il est passif, c'est-à-dire qu'il n'implique pas d'apport d'énergie au système, le blocage du mouvement se faisant à vitesse nulle. Toute la difficulté de son implémentation réside dans le calcul du temps de blocage optimal en houle aléatoire.

L'ensemble des caractéristiques du système SEAREV que nous avons présenté ici en fait un récupérateur de l'énergie des vagues original et innovant. Il a fait l'objet du dépôt d'un brevet par le CNRS en 2004 [1].

Sur SEAREV, notre travail s'est principalement attaché à la définition et à l'évaluation des performances du système, en terme de production d'énergie. Ce mémoire s'articule en conséquence autour de trois parties.

Tout d'abord, nous présentons le travail qui a été effectué sur la modélisation du système. Cette partie précise les notations utilisées et la mise en équation. La cinématique est donnée sous l'hypothèse de mouvements plans, dans le cas d'une houle de face, mais également dans tout l'espace, dans le cas d'une houle directionnelle. Dans les deux cas, elle est fournie dans le cas de petits mouvements (cinématique linéarisée) et dans le cas de grands mouvements (cinématique non linéaire). Les interactions fluide-structure sont modélisés de manière classique, dans le cadre de la théorie potentielle linéarisée, dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel. Les équations du problème de tenue à la mer sont rappelées et nous présentons une contribution à la résolution du problème par une approche alternative dans le domaine temporel. Cette approche est ensuite utilisée pour déterminer les efforts d'excitation dans le cas d'une houle directionnelle. Le principe fondamental de la dynamique est ensuite appliqué au système, fournissant les équations différentielles du mouvement pour chaque jeu d'hypothèses effectuées sur la cinématique. A chaque jeu d'hypothèses est associé un simulateur numérique, basé sur l'intégration numérique des équations du mouvement. Finalement, des comparaisons entre les résultats fournis par les différents modèles permettent de fixer les ordres de grandeurs de l'influence des non linéarités et de la directionnalité de la houle.

Dans la seconde partie, à partir de la modélisation définie dans la première partie, nous nous sommes intéressés à l'application des théories du contrôle optimal dans le domaine de l'énergie des vagues à SEAREV. Il est démontré que, dans le domaine temporel, le contrôleur optimal pour le système est anti-causal et n'est donc pas réalisable. Le contrôle sub-optimal par latching est donc envisagé. Afin d'évaluer sa capacité à améliorer les performances du système, deux méthodes sont exposées. La première est basée sur une résolution semi-analytique des équations du mouvement, dans le cas d'une houle régulière. Elle est appliquée non seulement à SEAREV, mais également à deux autres types de récupérateur de l'énergie des vagues à un et deux degrés de liberté. Pour le système à un degré de liberté, cette méthode permet

de retrouver des résultats bien connus de la littérature dans le cas des bouées pilonnantes. Pour le système à deux degrés de liberté, il est montré que le contrôle par latching permet d'améliorer la production d'énergie par le système en houle régulière. Les résultats sur le contrôle en houle régulière sont ensuite utilisés afin de déterminer des algorithmes de contrôle en houle irrégulière. Pour SEAREV, la méthode semi analytique est utilisée afin de démontrer la capacité du contrôle par latching à améliorer la production d'énergie. La seconde méthode est basée sur les équations de la commande optimale. Il est montré que cette méthode est moins performante que la première dans le cas d'une houle régulière, mais son intérêt réside dans le fait qu'elle permet d'évaluer le système en houle irrégulière. Elle montre là encore la capacité du contrôle par latching à améliorer la production.

Dans la troisième et dernière partie, nous présentons le travail d'optimisation qui a été réalisé sur la forme du système. Evidemment, la quantité d'énergie absorbée dépend du système que l'on place dans la houle et nous nous sommes attaché à rechercher un système qui soit efficace. Les méthodes d'optimisation utilisées sont présentées ainsi que les résultats. Deux cas d'optimisation ont été effectués. Le premier a été réalisé dans le cas des mouvements en l'absence de contrôle. Plusieurs géométries ont été testées et ont permis d'aboutir à un dimensionnement du système. Le second cas d'optimisation a été réalisé avec contrôle par latching et a permis de montrer le gain qui pouvait être obtenu.

**Première partie**  
**Equations du mouvement.**



# Chapitre 1

## Mise en équation : mécanique linéaire et non linéaire de SEAREV.

Ce chapitre présente les notations utilisées pour décrire les mouvements du système ainsi que les explicitations des accélérations des centres de gravité et des moments dynamiques. En fait, le membre de gauche du principe fondamental de la dynamique.

### 1.1 Description du système et notations.

Le système SEAREV est composé de deux solides liés par une rotule à un doigt ou un pivot. Un des solides, le flotteur, est soumis à l'action de la houle et contient dans son volume intérieur le second solide : un cylindre d'inertie ou pendule. Le pendule possède selon les configurations un ou deux degrés de liberté. Au repos, ses axes de rotations sont perpendiculaires à la verticale et perpendiculaires entre eux. Si le pendule est supposé n'avoir qu'un seul axe de liberté, c'est le mouvement de rotation dans le plan perpendiculaire à la houle qui est bridé.

On supposera également que le solide flotteur présente deux plans verticaux de symétrie.

Le centre de gravité du flotteur est appelé  $G$ . Le centre de rotation du pendule est noté  $A$ . Au repos, il est décalé par rapport au centre de gravité du flotteur selon l'axe vertical d'une longueur noté  $d$ . On appelle  $P$  le centre de gravité du cylindre d'inertie, il est décentré selon l'axe vertical au repos d'une longueur  $l$ . La figure (1.1) résume l'ensemble de ce paramétrage.

La masse du flotteur est noté  $m_b$ , la matrice d'inertie du flotteur en son centre de gravité est noté  $\mathbf{I}_b$ . La masse du pendule est noté  $m_p$ , sa matrice d'inertie  $\mathbf{I}_p$ . Enfin, le module du champ de gravité est noté  $g$ .

Dans le cas le plus général, le flotteur est excité selon ses six degrés de liberté. Le pendule interne, selon le cas étudié, possède 1 ou deux degrés de liberté propre en rotation. Globalement, le système est donc doté de sept à huit degrés de liberté.

Dans la majeure partie de cette étude, nous supposons que le flotteur est excité par une houle cylindrique selon son axe principal. Il en résulte que seuls trois de ses six degrés de liberté seront excités. De même, le pendule ne sera excité que selon un degré de liberté. Sous cette hypothèse, le système se comporte comme s'il n'avait que quatre degrés de liberté.

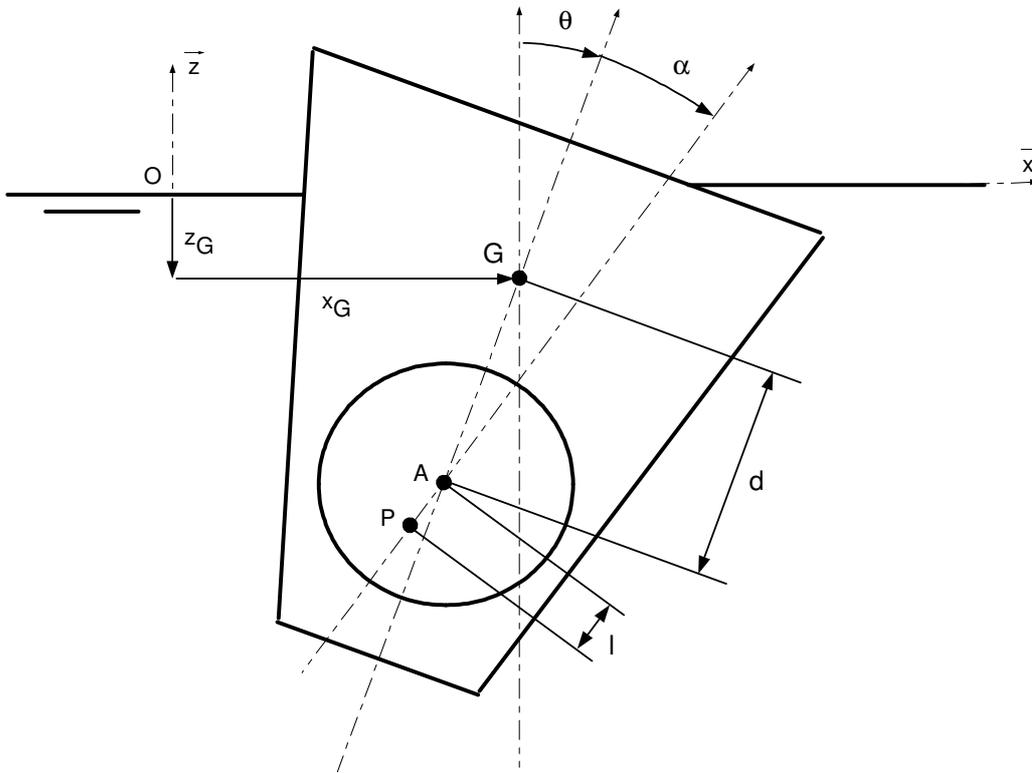


FIG. 1.1 – Description et paramétrage de SEAREV

## 1.2 Mouvements dans l'espace : SEAREV à 8 et 7 degrés de liberté.

Dans cette partie, nous allons nous attacher à déterminer les équations qui régissent la dynamique du mouvement du SEAREV dans le cas le plus général. Plus particulièrement, le lecteur trouvera ici les explicitations de la matrice d'inertie et des efforts de Coriolis du système.

### 1.2.1 Formulation vectorielle.

#### Paramétrage.

Considérons le système SEAREV le plus général. On définit un repère de base galiléen  $R_0 = (I, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  quelconque, mais dont l'axe  $\vec{z}_0$  est parallèle et contraire au champ de gravité.

Plaçons nous maintenant au centre de gravité  $G$  du flotteur, au repos. Soit l'axe  $\vec{x}_b$  correspondant à la direction suivant laquelle le flotteur doit voir venir la houle. L'axe  $\vec{z}_b$  est associé à la verticale et il est orienté vers le haut. Enfin, l'axe  $\vec{y}_b$  est défini tel que  $\vec{y}_b = \vec{z}_b \wedge \vec{x}_b$ . On appellera  $R_b = (G, \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b)$  le repère lié au flotteur, cf figure (1.2)

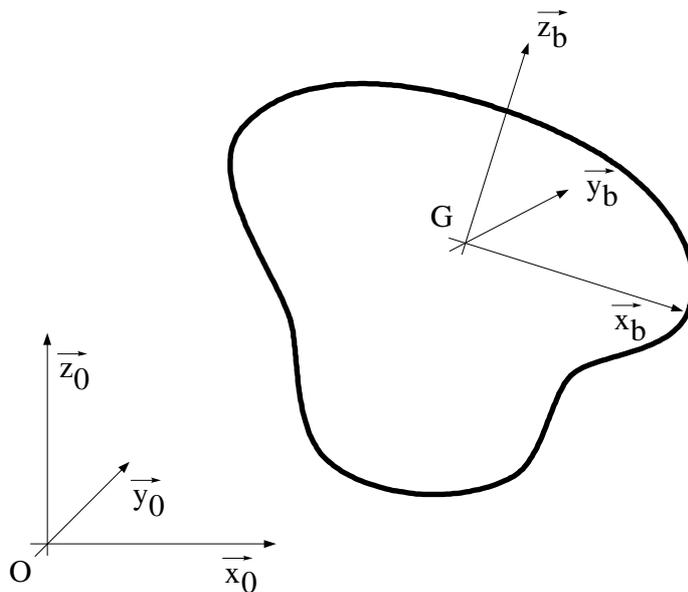


FIG. 1.2 – Repère lié au flotteur

**Repère lié au flotteur.** Le passage du repère  $R_0$  au repère lié au flotteur  $R_b = (G, \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b)$  se fait par l'intermédiaire d'une translation  $\vec{IG} = x_G \vec{x}_0 + y_G \vec{y}_0 + z_G \vec{z}_0$  et par l'enchaînement de trois rotations d'angles  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  autour du centre de gravité du flotteur.

Les angles de lacet, tangage et roulis sont définis comme sur la figure (1.3). Le choix des angles est celui des angles de Cardan.

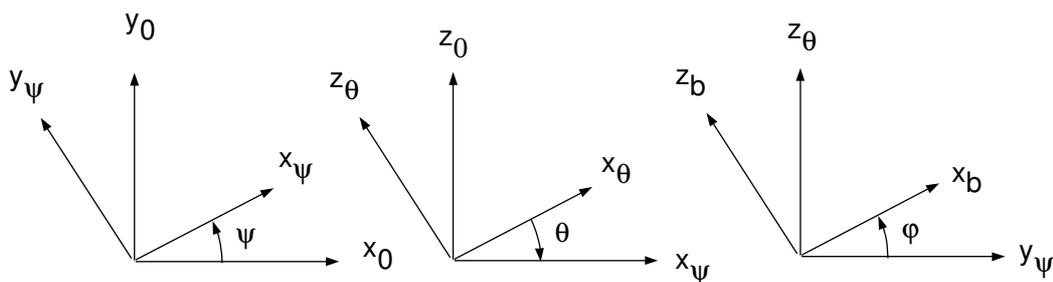


FIG. 1.3 – Définition des angle de lacet, tangage et roulis.

En conséquence, la matrice de passage  $\mathbf{T}_{0\psi}$  de la base  $R_\psi$  à la base  $R_0$  vaut :

$$\mathbf{T}_{0\psi} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Les matrices de passage associées au tangage et roulis valent :

$$\mathbf{T}_{\psi\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{T}_{\theta b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

La matrice de passage du repère  $R_b$  au repère  $R_0$  est alors :

$$\mathbf{T}_{0b} = \mathbf{T}_{0\psi} \mathbf{T}_{\psi\theta} \mathbf{T}_{\theta b} \quad (1.4)$$

**Repère lié au pendule.** On considère ici le pendule à deux degrés de liberté.

Définissons un repère lié au pendule  $R_p = (P, \vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p)$  - figure (1.4) - à partir du repère lié au flotteur. Soit au repos  $\vec{x}_p = \vec{x}_b$ ,  $\vec{y}_p = \vec{y}_b$  et donc  $\vec{z}_p = \vec{z}_b$ . Lorsque les repères ne sont plus confondus, le passage de l'un à l'autre se fait par l'intermédiaire d'une translation  $\vec{GP}$  et de deux rotations successives d'angle  $\beta$  et  $\alpha$ .

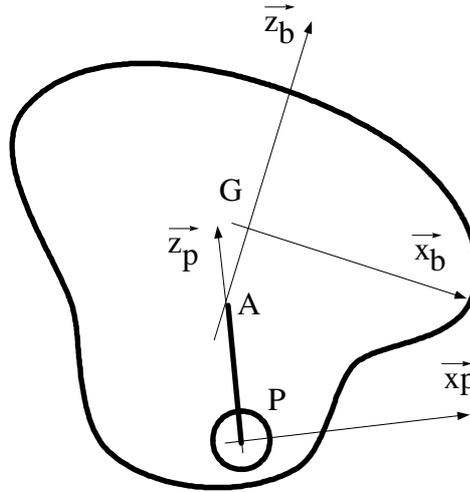


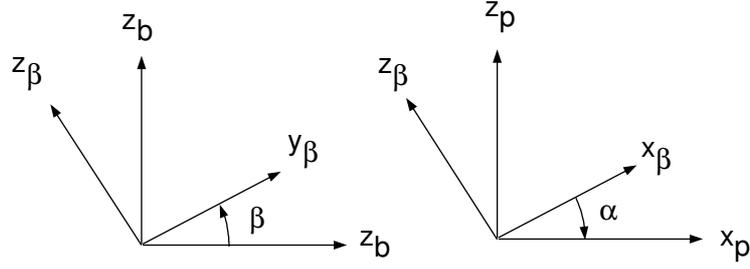
FIG. 1.4 – Repère lié au pendule

Les angles  $\beta$  et  $\alpha$ , et les repères associés  $R_\beta$  et  $R_p$  sont définis sur la figure (1.5).

La matrice de passage associée à ce changement de repère par la rotation d'angle  $\beta$  s'écrit :

$$\mathbf{T}_{b\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

et la matrice de passage associée à la rotation  $\alpha$  :


 FIG. 1.5 – Définition des angles relatifs  $\beta$  et  $\alpha$ , angles du pendule.

$$\mathbf{T}_{\beta p} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Finalement, la matrice de passage du repère  $R_p$  au repère  $R_b$  est alors :

$$\mathbf{T}_{bp} = \mathbf{T}_{b\beta} \mathbf{T}_{\beta p} \quad (1.7)$$

### Equation du mouvement.

Les calculs des accélérations et des moments dynamiques sont détaillées en annexe. Par application du principe fondamental de la dynamique, ils nous permettent d'obtenir l'écriture de l'équation du mouvement sous la forme :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F} - \mathbf{H} \quad (1.8)$$

avec :

- $\mathbf{X} = (x_G \ y_G \ z_G \ \varphi \ \theta \ \psi \ \beta \ \alpha)^t$  vecteur des paramètres de position.
- $\mathbf{M}$  matrice 9x8. C'est la matrice masse du système. Elle est donnée d'après les équations (A.9), (A.13), (A.16), (A.20) et (A.22) par :

$$\mathbf{M}_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3} = \begin{pmatrix} m_b + m_p & 0 & 0 \\ 0 & m_b + m_p & 0 \\ 0 & 0 & m_b + m_p \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{M}_{1 \leq i \leq 3, 4} = m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{M}_{1 \leq i \leq 3, 5} = m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

$$\mathbf{M}_{1 \leq i \leq 3,6} = m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{M}_{1 \leq i \leq 3,7} = m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{M}_{1 \leq i \leq 3,8} = m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

$$\mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6,1} = m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

$$\mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6,2} = m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

$$\mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6,3} = m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6,4} &= (\mathbf{T}_{0b} \mathbf{II}_b \mathbf{T}_{b\theta} + \mathbf{T}_{0p} \mathbf{II}_p \mathbf{T}_{p\theta}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ & m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \\ & \left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6,5} &= (\mathbf{T}_{0b} \mathbf{II}_b \mathbf{T}_{b\psi} + \mathbf{T}_{0p} \mathbf{II}_p \mathbf{T}_{p\psi}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ & m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \\ & \left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6,6} &= (\mathbf{T}_{0b} \mathbf{II}_b \mathbf{T}_{b0} + \mathbf{T}_{0p} \mathbf{II}_p \mathbf{T}_{p0}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \\
 & m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \\
 & \left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (1.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6,7} &= \mathbf{T}_{0p} \mathbf{II}_p \mathbf{T}_{p\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \quad (1.21) \\
 & m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \left( \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6,8} &= \mathbf{T}_{0p} \mathbf{II}_p \mathbf{T}_{p\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \quad (1.22) \\
 & m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \left( \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,1} = m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,2} = m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,3} = m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,4} &= \mathbf{T}_{0p} \mathbf{II}_p \mathbf{T}_{p\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \quad (1.26) \\
 & m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,5} &= \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ & m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,6} &= \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \\ & m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,7} = \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \left( \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (1.29)$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,8} = \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{pb} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \left( \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (1.30)$$

–  $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{C}_p \end{pmatrix}$  avec  $\mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)^t$  le vecteur des efforts extérieurs s'exerçant sur le

système {flotteur+pendule} et exprimé dans la base  $R_0$ ;  $\mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z)^t$  le vecteur des couples extérieurs s'exerçant sur le système {flotteur+pendule} et exprimé dans la base  $R_0$  au point  $G$  et  $\mathbf{C}_p = (C_{xp}, C_{yp}, C_{zp})^t$  le vecteur des couples extérieurs s'exerçant sur le système pendule et exprimé dans la base  $R_0$  au point  $O$ .

–  $\mathbf{H}$  est le vecteur des efforts de Coriolis. Il s'écrit :

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = \begin{pmatrix} m_p \mathbf{f}_1(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{f}_3(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \\ \mathbf{f}_4(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_1(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) &= \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \left( \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0\psi}) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0\theta}) \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &+ \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \left( \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0\beta}) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt}\mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \frac{d}{dt}\mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} \wedge \vec{\Omega}_{b,0} \\
 &+ \frac{d}{dt}\mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \vec{\Omega}_{p,0}
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_2(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) &= \mathbf{T}_{0b}\mathbf{I}_b\mathbf{T}_{b0} \left( \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0\psi}) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0\theta}) \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &+ \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0b})\mathbf{I}_b\mathbf{T}_{b0}\vec{\Omega}_{b,0} + \mathbf{T}_{0b}\mathbf{I}_b\frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{b0})\vec{\Omega}_{b,0}
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_3(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) &= m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{f}_1(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \\
 &+ \mathbf{T}_{0p}\mathbf{I}_p\mathbf{T}_{p0} \left( \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0\psi}) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0\theta}) \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &\quad + \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0\beta}) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt}\mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg) \\
 &+ \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0p})\mathbf{I}_p\mathbf{T}_{p0}\vec{\Omega}_{p,0} + \mathbf{T}_{0p}\mathbf{I}_p\frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{p0})\vec{\Omega}_{p,0}
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

$$\mathbf{f}_4(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = \mathbf{f}_3(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) - m_p\mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \wedge \mathbf{f}_1(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \tag{1.35}$$

L'équation (1.8) est une équation différentielle du second ordre, à coefficients non constants et composée de 9 équations différentielles scalaires pour 8 inconnues. En fait les deux dernières équations ne sont pas indépendantes, et le rang de la matrice  $\mathbf{M}$  est 8.

Le vecteur des efforts n'est pas explicité ici. Il constitue un sujet à part entière qui sera abordé dans les deux chapitres suivants.

### 1.2.2 Equations linéarisées.

Supposons à présent que les mouvements restent suffisamment petits pour pouvoir linéariser les équations. De ce fait, les matrices de passage se réduisent toutes à l'identité. La dynamique se simplifie alors et l'équation du mouvement devient :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F} \quad (1.36)$$

avec :

- $\mathbf{X} = (x_G \ y_G \ z_G \ \varphi \ \theta \ \psi \ \beta \ \alpha)^t$  vecteur des paramètres de position.
- $\mathbf{M}$  matrice 9x8 donnée par :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_b + m_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_b + m_p & 0 & 0 & m_p(l-d) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_b + m_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_p(l-d) & 0 & 0 & I_{b,x} + I_{p,x} + m_p(l-d)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_p(d-l) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_p l & 0 & 0 & I_{p,x} + m_p(l-d)l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_p l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_p(d-l) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_p l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_p l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p,x} + m_p(l-d)l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{b,y} + I_{p,y} + m_p(d-l)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p,y} + m_p(l-d)l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{b,z} + I_{p,z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p,x} + m_p l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{p,y} + m_p(l-d)l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p,y} + m_p l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{p,z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

- $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{C}_p \end{pmatrix}$  vecteur des efforts linéarisés.

### 1.3 Mouvements plans : SEAREV à quatre degrés de liberté.

Dans une grande part de cette étude, la modélisation des 7 ou 8 degrés de liberté du système n'est pas nécessaire. En effet, à partir du moment où la houle est supposée cylindrique et dans l'axe du flotteur, le système n'est pas excité en embardée, roulis et lacet, et les mouvements restent plans.

Dans cette section, le lecteur trouvera explicité la matrice de masse et les efforts de Coriolis pour le système et sous ces hypothèses.

### 1.3.1 Simplification.

Supposons que le flotteur présente le plan  $(G, \vec{x}_b, \vec{z}_b)$  comme plan de symétrie. La houle incidente est supposée se propager selon l'axe  $\vec{x}_b$  du flotteur.

Avec ces hypothèses, seuls les mouvements de cavalement, pilonnement, tangage et le mouvement relatif  $\alpha$  sont excités. Les mouvements restent alors dans le plan  $(G, \vec{x}_b, \vec{z}_b)$ .

### 1.3.2 Paramétrage.

Soit :

- Un repère fixe  $R_0 = (I, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$  correspondant à la position à l'équilibre du système.
- Un repère d'expression des efforts  $R_f = (G, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$ .
- Un repère lié au flotteur  $R_b = (G, \vec{x}_b, \vec{z}_b)$ .

Le passage du repère  $R_0$  au repère  $R_f$  se fait par une translation  $x_G \vec{x}_0 + z_G \vec{z}_0$  et le passage du repère  $R_f$  au repère  $R_b$  par une rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\vec{y}_0$ , avec  $\vec{y}_0$  tel que  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  soit direct.

Soit un repère lié au pendule  $R_p = (O, \vec{x}_p, \vec{z}_p)$ . Il se déduit du repère  $R_b$  par une rotation autour de l'axe  $\vec{y}_0$  d'un angle  $\alpha$ .

### 1.3.3 Equation du mouvement.

Soit  $\mathbf{X} = (x_G, z_G, \theta, \alpha)^t$ . D'après les calculs détaillés en annexe, l'équation du mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{F}_p = \mathbf{F} \quad (1.38)$$

avec :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_b + m_p & 0 \\ 0 & m_b + m_p \\ m_p(d \cos \theta - l \cos(\theta + \alpha)) & -m_p(d \sin \theta - l \sin(\theta + \alpha)) \\ -m_p l \cos(\theta + \alpha) & m_p l \sin(\theta + \alpha) \\ m_p(d \cos \theta - l \cos(\theta + \alpha)) & -m_p l \cos(\theta + \alpha) \\ -m_p(d \sin \theta - l \sin(\theta + \alpha)) & m_p l \sin(\theta + \alpha) \\ I_b + I_y + m_p(d^2 + l^2) - 2m_p d l \cos \alpha & I_y + m_p l^2 - m_p d l \cos \alpha \\ I_y + m_p l^2 - m_p d l \cos \alpha & I_y + m_p l^2 \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

$$\mathbf{F}_p = \begin{pmatrix} m_p \left( l (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 \sin(\theta + \alpha) - d \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) \\ m_p \left( l (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \cos(\theta + \alpha) - d \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) \\ m_p d l (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 \sin \alpha - m_p d l \sin \alpha \dot{\theta}^2 - m_p g (d \sin \theta - l \sin(\theta + \alpha)) \\ -m_p d l \dot{\theta}^2 \sin \alpha + m_p g l \sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_z - (m_b + m_p)g \\ C_y \\ C_{PTO} \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

où  $(F_x, F_z)^t$  est le vecteur des efforts extérieurs s'exerçant sur le système {flotteur+pendule}, moins les efforts de gravité,  $C_y$  est le couple réduit au point  $G$  des efforts extérieurs exercés sur ce système, moins le couple du au champ de pesanteur. Il est également supposé que l'effort exercé par le convertisseur d'énergie sur le pendule peut être modélisé par un couple  $C_{PTO}$  au point  $O$  d'accroche du pendule.

### 1.3.4 Equation du mouvement linéarisé.

Si les mouvements restent petits, l'équation du mouvement devient :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (1.42)$$

avec :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_b + m_p & 0 & m_p(d-l) & -m_pl \\ 0 & m_b + m_p & 0 & 0 \\ m_p(d-l) & 0 & I_b + I_y + m_p(d-l)^2 & I_y + m_pl^2 - m_pdl \\ -m_pl & 0 & I_y + m_pl^2 - m_pdl & I_y + m_pl^2 \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_pg(d-l) & m_pgl \\ 0 & 0 & m_pgl & m_pgl \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_z - (m_b + m_p)g \\ C_y \\ C_{PTO} \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

### 1.3.5 Identification avec le montage double pendule IRCCYN.

Dans le but d'étudier le contrôle du système, il a été développé à l'IRCCYN<sup>1</sup> un montage constitué d'un double pendule, comme présenté sur la figure (1.6).

Soit  $I_1$  l'inertie du porteur,  $m_1$  sa masse et  $l_1$  sa longueur,  $I_2$  l'inertie du pendule porté,  $m_2$  sa masse et  $l_2$  sa longueur,  $d$  la longueur  $O_1O_2$ . Les variables  $x$  et  $y$  valent 0. Soit  $X = (\theta, \alpha)^t$ . L'équation différentielle du mouvement s'écrit [22] :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{F}_p = \mathbf{F} \quad (1.46)$$

<sup>1</sup>Institut de Recherche en Communication et Cybernétique de Nantes, UMR 6597 du CNRS

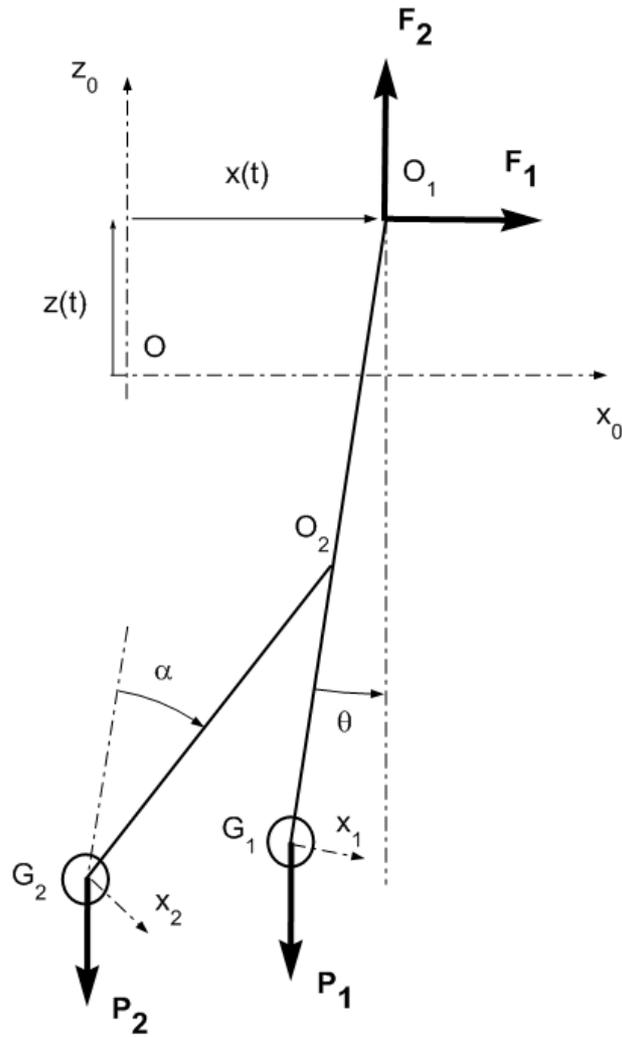


FIG. 1.6 – Montage double pendule IRCCYN

avec :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} I_1 + I_2 + m_1 l_1^2 + m_2 (d^2 + l_2^2 + 2dl_2 \cos \alpha) & I_2 + m_2 l_2 (l_2 + d \cos \alpha) \\ I_2 + m_2 l_2 (l_2 + d \cos \alpha) & I_2 + m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

$$\mathbf{F}_p = \begin{pmatrix} -m_2 dl_2 \dot{\alpha} (\dot{\alpha} + 2\dot{\theta}) \sin \alpha + (m_1 l_1 + m_2 d) g \sin \theta + m_2 l_2 g \sin (\theta + \alpha) \\ m_2 dl_2 \dot{\theta}^2 \sin \alpha + m_2 g l_2 \sin (\theta + \alpha) \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

Ces équations sont similaires à celle du SEAREV, équations (1.39), (1.40), (1.41) et (1.38), en posant :

- $I_b = I_1 + m_1 l_1^2$
- $I_y = I_2$
- $l_2 = l$
- $d = -d$
- $m_p = m_2$
- $m_1 l_1 + m_2 d = -m_p d$

# Chapitre 2

## Modélisation des interactions fluide-structure.

Pour un système houlomoteur, c'est dans l'action de la houle sur la structure que se situe l'origine de la force d'excitation. Pour dimensionner le système, il est donc nécessaire de modéliser d'une manière adaptée les interactions qui existent entre le flotteur et l'océan qui l'environne.

Si nous voulions simuler précisément le mouvement d'un flotteur dans la houle, il nous faudrait résoudre les équations de Navier-Stokes pour l'écoulement du fluide autour du corps et les équations de la dynamique pour ses mouvements. C'est un problème complexe, toujours soumis à de nombreux travaux de recherches de part le monde. De nombreuses méthodes existent pour résoudre le problème, avec des succès divers selon les champs d'application.

Dans le travail exposé ici, nous avons choisi de modéliser les interactions fluide-structure dans le cadre de la théorie linéarisée des écoulements à potentiel. Cette méthode présente l'avantage d'être rapide et robuste, donc est bien adaptée à cette étude qui vise principalement à dimensionner SEAREV et optimiser sa production d'énergie.

### 2.1 Formulation du problème de tenue à la mer.

#### 2.1.1 Problème aux limites.

On s'intéresse au problème de tenue à la mer d'une structure flottante mobile soumis à l'excitation d'une houle incidente. Le fluide est supposé incompressible, parfait et l'écoulement est supposé irrotationnel. La vitesse du fluide en tout point du domaine dérive alors d'un potentiel  $\Phi(M, t)$ .

On suppose également que les mouvements du corps et que la cambrure des vagues sont suffisamment petits pour que les équations sur la surface libre et sur le corps puissent être linéarisées.

Avec ces hypothèses, le problème aux limites pour le potentiel  $\Phi$  dans le domaine temporel s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta\Phi(M, t) = 0 & \forall M \in \Omega & t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial n}\Phi(M, t) = 0 & \forall M \in S_F \cup S_\infty & t \geq 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(M, t) + g\frac{\partial}{\partial z}\Phi(M, t) = 0 & \forall M \in S_{SL} & t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial n}\Phi(M, t) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}(M, t) & \forall M \in S_c & t \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

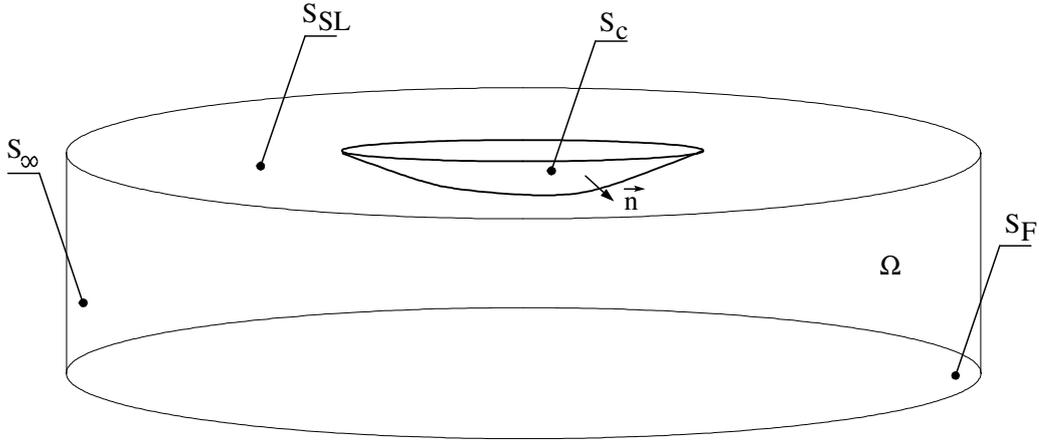


FIG. 2.1 – Volume fluide

### 2.1.2 Expression des efforts.

L'effort généralisé s'exerçant sur le flotteur s'exprime :

$$\mathbf{F} = - \iint_{S_c} p(M, t) \mathbf{N}(M) dS \quad (2.2)$$

avec  $\mathbf{N}$  le vecteur de la normale généralisée définie au point  $M$  par :

$$\mathbf{N}(M) = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ y.n_z - z.n_y \\ z.n_x - x.n_z \\ x.n_y - y.n_x \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

En théorie linéarisée, la relation de Bernoulli s'écrit :

$$p = p_0 - \rho g z - \rho \frac{\partial}{\partial t} \Phi \quad (2.4)$$

et on constate que la pression est composée d'un terme hydrostatique  $p_0 - \rho g z$  et d'un terme dynamique  $-\rho \frac{\partial}{\partial t} \Phi$ . Classiquement, on décompose l'effort total d'interaction fluide-structure en une partie hydrostatique et une partie hydrodynamique.

### Effort hydrostatique.

L'intégration de la composante hydrostatique de la pression conduit à l'obtention de la poussée d'Archimède  $\mathbf{R}_A$ . Sur la base  $R_0$  :

$$\mathbf{R}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g V_b \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

où  $V_b$  est le volume de fluide déplacé. Ce volume dépend a priori de la géométrie du flotteur et de ses paramètres de position.

Le point d'application de la poussée d'Archimède, appelé centre de poussée, dépend également de la géométrie complète du flotteur et de ses paramètres de position. Cependant, dans le cadre d'une théorie linéarisée, le flotteur reste proche de sa position d'équilibre. Le volume de fluide déplacé est alors sensiblement tel que  $\rho V_b = (m_b + m_p)$  et la perturbation due à la différence de position du flotteur avec sa position d'équilibre peut être modélisée par un terme de force de rappel généralisée. Ainsi, l'effort généralisé dû à la poussée d'Archimède peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{F}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (m_b + m_p)g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \mathbf{K}_H \mathbf{Y} \quad (2.6)$$

où  $\mathbf{Y} = (x_G \ y_G \ z_G \ \varphi \ \theta \ \psi)^t$  et où  $\mathbf{K}_H$  est une matrice à coefficients constants appelée matrice de raideur hydrostatique. Seule une partie de cette matrice est non nulle et on écrit usuellement :

$$\mathbf{K}_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{h33} & K_{h34} & K_{h35} & 0 \\ 0 & 0 & K_{h34} & K_{h44} & K_{h45} & 0 \\ 0 & 0 & K_{h35} & K_{h45} & K_{h55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Les développements associés à chacun des termes non nuls de cette matrice sont classiques, le lecteur pourra se référer à Molin [58] pour de plus amples détails.

### Effort hydrodynamique.

L'effort généralisé associée à la composante dynamique de la pression s'obtient lui par :

$$\mathbf{F} = \rho \iint_{S_c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(M, t) \mathbf{N}(M) dS \quad (2.8)$$

Son calcul nécessite la connaissance du potentiel  $\Phi$  sur la surface du corps  $S_c$ , et donc la résolution du problème (2.1) pour le potentiel  $\Phi$ .

### 2.1.3 Equation intégrale.

Considérons la fonction de Green qui satisfait l'ensemble du problème aux limites (2.1) dans le domaine temporel, sauf la condition de glissement sur le corps :

$$G(M', t', M, t) = \delta(t - t') G_0(M', M) + H(t - t') F(M', t', M, t) \quad (2.9)$$

avec :

$$G_0(M', M) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right) \quad (2.10)$$

$$F(M', t', M, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(kr) e^{k(z+z')} \sqrt{gk} \sin(\sqrt{gk}(t-t')) dk \quad (2.11)$$

et :

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (2.12)$$

$$R = \sqrt{r^2 + (z-z')^2} \quad (2.13)$$

$$R_1 = \sqrt{r^2 + (z+z')^2} \quad (2.14)$$

En utilisant la troisième formule de Green, Wehausen [69] a montré que le potentiel est solution de l'équation intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(M, t)}{2} - \iint_{S_c} \Phi(M', t) \frac{\partial}{\partial n} G_0(M', M) dS &= - \iint_{S_c} G_0(M', M) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}(M, t) dS \\ &+ \int_0^t \iint_{S_c} \left[ \begin{array}{l} \Phi(M', t') \frac{\partial}{\partial n} F(M', t', M, t) \\ -F(M', t', M, t) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}(M', t') \end{array} \right] dS dt' \end{aligned} \quad (2.15)$$

Le problème de la détermination du potentiel dans le domaine fluide se ramène alors au calcul du potentiel sur la surface du corps.

## 2.2 Deux approches pour la résolution du problème.

### 2.2.1 Approche classique du problème de diffraction-radiation.

Lorsque l'on considère le problème de détermination des efforts associés aux mouvements d'un flotteur dans la houle, il est d'usage de procéder à la décomposition du potentiel en :

$$\Phi(M, t) = \Phi_0(M, t) + \sum_{i=1}^7 \Phi_i(M, t) \quad (2.16)$$

où  $\Phi_0$  représente le potentiel associé au champ de vagues incident,  $\Phi_7$  représente le potentiel associé au champ diffracté et  $\Phi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$  correspond au potentiel de radiation associé aux mouvements du corps en cavalement, embardée, pilonnement, roulis, tangage et lacet.

Cette décomposition, proposée initialement par Haskind [43], fait apparaître les différentes composantes du potentiel comme solution de problèmes élémentaires indépendants. La solution du problème global s'obtient ensuite par superposition.

Ainsi, les potentiels de radiation sont solutions des problèmes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta \Phi_i(M, t) = 0 & \forall M \in \Omega & t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi_i(M, t) = 0 & \forall M \in S_F \cup S_\infty & t \geq 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_i(M, t) + g \frac{\partial}{\partial z} \Phi_i(M, t) = 0 & \forall M \in S_{SL} & t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi_i(M, t) = \dot{Y}_i N_i(M, t) & \forall M \in S_c & t \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.17)$$

avec  $\mathbf{Y} = (x_G \ y_G \ z_G \ \varphi \ \theta \ \psi)^t$  et  $N_i$  les composantes de la normale généralisée.

Le potentiel de diffraction est lui solution de :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta \Phi_7(M, t) = 0 & \forall M \in \Omega & t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi_7(M, t) = 0 & \forall M \in S_F \cup S_\infty & t \geq 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_7(M, t) + g \frac{\partial}{\partial z} \Phi_7(M, t) = 0 & \forall M \in S_{SL} & t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi_7(M, t) = -\nabla \Phi_0 \cdot \mathbf{n}(M, t) & \forall M \in S_c & t \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.18)$$

et apparaît comme solution d'un problème de radiation particulier.

Le vecteur vitesse du flotteur pouvant être quelconque, on considère les problèmes de radiation pour des vitesses impulsives :  $\dot{Y}_i = \delta(t)$ . La résolution de chacun de ces problèmes conduit à la définition d'une matrice de masse d'eau ajoutée  $\boldsymbol{\mu}_\infty$  et d'une matrice des réponses impulsives  $\mathbf{K}(t)$ . Ensuite, d'après la théorie des systèmes linéaires, les efforts de radiation associés à un mouvement  $\mathbf{Y}(t)$  du flotteur s'obtiennent par :

$$\mathbf{F}_R(t) = \sum_{i=1}^6 \left( -\boldsymbol{\mu}_{\infty, i} \frac{d}{dt} V_i(t) - \int_0^t \mathbf{K}_i(t - \tau) \dot{Y}_i(\tau) d\tau \right) \quad (2.19)$$

Les efforts de diffraction et les efforts dus au potentiel de houle incidente (efforts de Froude-Krylov) sont les efforts d'excitation que subit la structure. King [50] a montré qu'ils pouvaient s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{F}_{I+D}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{K}_0(t - \tau) + \mathbf{K}_7(t - \tau)) \eta_0(\tau) d\tau \quad (2.20)$$

où  $\mathbf{K}_0$  et  $\mathbf{K}_7$  sont respectivement les efforts de Froude-Krylov et de les efforts de diffraction associés à une "élévation impulsive" sur la surface libre au point  $O$  dans une direction  $\beta$  et où  $\eta_0$  est la déformée de surface libre en  $O$ .

### Calcul de $\mathbf{K}_0$

Le potentiel associé à une impulsion en  $O$  sur la surface libre est donné en tout point du domaine fluide par :

$$\Phi_0(M, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left( \int_0^\infty \frac{ig}{\omega} e^{k(z-i\bar{\omega})} e^{i\omega t} d\omega \right) \quad (2.21)$$

avec  $k = \frac{\omega^2}{g}$  et  $\bar{\omega} = x \cos \beta + y \sin \beta$ .

La réponse impulsionnelle pour l'effort de Froude-Krylov est alors :

$$\mathbf{K}_0(t) = \iint_{S_c} \frac{\rho g}{\pi} \operatorname{Re} \left( \int_0^\infty e^{k(z-i\bar{\omega})} e^{i\omega t} d\omega \right) dS \quad (2.22)$$

où l'intégrale sur les pulsations peut-être calculée analytiquement. D'après Abramowitz et al. [2] :

$$\int_0^\infty e^{k(z-i\bar{\omega})} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{b^2/\alpha} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{b}{\sqrt{\alpha}} \right) \right) \quad (2.23)$$

avec  $\alpha = -\left(\frac{z-i\bar{\omega}}{g}\right)$  et  $b = -\frac{it}{2}$ . Cette expression peut-être relié à la fonction  $w(z)$  par :

$$\int_0^\infty e^{k(z-i\bar{\omega})} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} w \left( \frac{ib}{\sqrt{\alpha}} \right) \quad (2.24)$$

Finalement :

$$\mathbf{K}_0(t) = \frac{1}{2} \frac{\rho g}{\pi} \iint_{S_c} \operatorname{Re} \left( \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} w \left( \frac{ib}{\sqrt{\alpha}} \right) \right) dS \quad (2.25)$$

L'évaluation numérique de la fonction de Faddeeva  $w(z)$  est effectué suivant l'algorithme proposé et codé par Poppe et al. [62]. On a porté sur la figure (2.2) la fonction  $\mathbf{K}_0$  pour une demi-sphère discrétisé en 256 facettes. Le résultat obtenu est identique à celui présenté dans la thèse de King [50].

## Elements du calcul de $\mathbf{K}_7$

Si  $\beta$  est la direction de propagation de la houle, le gradient du potentiel associé à une impulsion en  $O$  sur la surface libre à  $t = 0$  s'écrit :

$$\nabla \Phi_0(P, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left( \left( \begin{array}{c} \cos \beta \\ \sin \beta \\ i \end{array} \right) \int_0^\infty \omega e^{k(z-i\bar{\omega})} e^{i\omega t} d\omega \right) \quad (2.26)$$

Comme précédemment, l'intégrale sur les pulsations peut-être évalué analytiquement à partir de la fonction  $w(z)$  [2] :

$$\int_0^\infty \omega e^{k(z-i\bar{\omega})} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\alpha} \left( 1 - b \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} w \left( \frac{ib}{\sqrt{\alpha}} \right) \right) \quad (2.27)$$

D'où :

$$\nabla \Phi_0(P, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left( \left( \begin{array}{c} \cos \beta \\ \sin \beta \\ i \end{array} \right) \frac{1}{2\alpha} \left( 1 - b \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} w \left( \frac{ib}{\sqrt{\alpha}} \right) \right) \right) \quad (2.28)$$

---

<sup>1</sup>SEAREV étant destiné à être déployé offshore, la profondeur d'eau est supposée infinie dans tout ce travail.

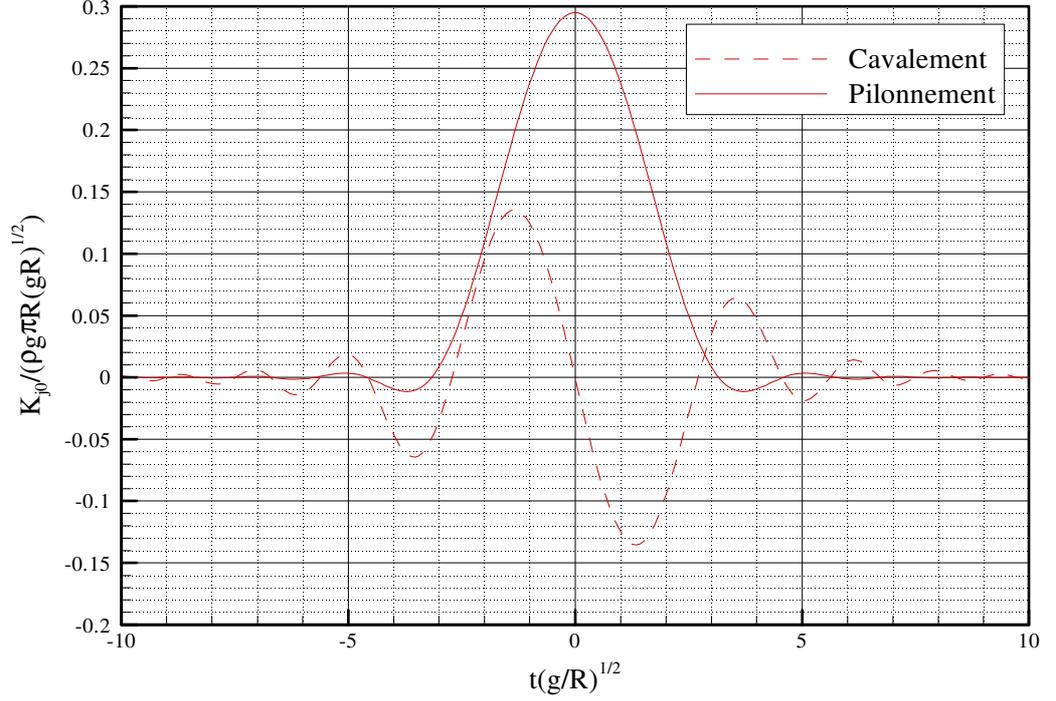


FIG. 2.2 – Réponse impulsionnelle de l'effort de Froude-krylov pour une demi-sphère.

$\mathbf{K}_7$  s'obtient alors en résolvant le problème aux limites de diffraction (2.18).

### 2.2.2 Une approche alternative : méthode des déformations généralisées.

L'approche considérée ici est celle proposée par Bingham [7]. Elle consiste à déterminer le potentiel  $\Phi_P$  pour une impulsion de vitesse en un unique point  $P$  du corps. On considère donc le problème aux limites suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta \Phi_P(M, t) = 0 & \forall M \in \Omega & t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi_P(M, t) = 0 & \forall M \in S_f \cup S_\infty & t \geq 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_P(M, t) + g \frac{\partial}{\partial z} \Phi_P(M, t) = 0 & \forall M \in S_{SL} & t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi_P(M, t) = \delta(t) \delta\left(\left\| \overrightarrow{PM} \right\| \right) & \forall M \in S_c & t \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.29)$$

où  $\delta$  symbolise la distribution de Dirac.

L'effort associé à cette impulsion vaut :

$$\mathbf{F}_P(t) = \rho \iint_{S_c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_P(M, t) \mathbf{N}(M, t) dS \quad (2.30)$$

Pour toute distribution de vitesses  $\mathbf{V}(M, t)$  sur la surface du corps, on peut calculer l'effort

correspondant par :

$$\mathbf{F}(t) = \rho \iint_{S_c} dS \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}_P(t - \tau) (\mathbf{V}(P, \tau) \cdot \mathbf{n}(P)) d\tau \quad (2.31)$$

En particulier, les réponses impulsionnelles de radiation se retrouvent en posant  $\mathbf{V}(P, t) \cdot \mathbf{n}(P) = N_i(P)$ . Par exemple, la réponse impulsionnelle en cavement s'obtient par :

$$\mathbf{F}_x(t) = \iint_{S_c} \mathbf{F}_P(t) n_x(P) dS \quad (2.32)$$

Pour un problème de diffraction quelconque, associé à un potentiel de houle incidente  $\Phi_0(P, t)$ , l'effort dû à la houle diffracté s'obtient par :

$$\mathbf{F}_D(t) = - \iint_{S_c} dS \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}_P(t - \tau) (\nabla \Phi_0(P, \tau) \cdot \mathbf{n}(P)) d\tau \quad (2.33)$$

En particulier, si  $\Phi_0$  est le potentiel associé à une impulsion en  $O$  sur la surface libre à  $t = 0$ , on obtient :

$$\mathbf{K}_7(t) = - \iint_{S_c} dS \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}_P(t - \tau) (\nabla \Phi_0(P, \tau) \cdot \mathbf{n}(P)) d\tau \quad (2.34)$$

## 2.3 Résolution dans le domaine temporel.

### 2.3.1 Equation intégrale discrète.

La résolution de l'équation intégrale (2.15) associée au problème aux limites (2.29) passe par la discrétisation en espace des surfaces, et la discrétisation de la variable temporelle en pas de temps. Le potentiel et les dérivées normales du potentiel seront ici supposés constants sur les facettes du maillage. Pour des raisons numériques, le problème considéré est un problème indiciel pour les facettes plutôt que impulsionnel.

Soit  $S_f$  la facette  $f$  du maillage. Nous nous intéressons au problème :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta \Phi_{S_f}(M, t) = 0 & \forall M \in \Omega & t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi_{S_f}(M, t) = 0 & \forall M \in S_F \cup S_\infty & t \geq 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_{S_f}(M, t) + g \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{S_f}(M, t) = 0 & \forall M \in S_{SL} & t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi_{S_f}(M, t) = H_{S_f}(M, t) & \forall M \in S_c & t \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.35)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_{S_f}(M, t) = 1 & \forall M \in S_f \text{ et } \forall t \geq 0 \\ H_{S_f}(M, t) = 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Soit  $\sigma_{S_f, j}(t) = \frac{\partial}{\partial n_j} \Phi_{S_f}(M_j, t)$ , soit  $\mu_{S_f, j}(t) = -\Phi_{S_f}(M_j, t)$ . L'équation intégrale discrète

s'écrit [20] :

$$[D_{ij}] [\mu_{S_f,j} (t)] = -H (t) [S_{ij}] [\sigma_j (0)] - \int_0^t [d_{ij} (t - \tau)] [\mu_{S_f,j} (t)] d\tau \quad (2.37)$$

avec :

$$\begin{aligned} - D_{ij} &= \iint_{S_j} \frac{\partial}{\partial n_j} G_0 (M_i, M_j) dS \\ - S_{ij} &= \iint_{S_j} G_0 (M_i, M_j) dS \\ - d_{ij} (t) &= \iint_{S_j} \frac{\partial}{\partial n_j} F (M_i, 0, M_j, t) dS \\ - s_{ij} (t) &= \iint_{S_j} F (M_i, 0, M_j, t) dS \end{aligned}$$

### 2.3.2 Résolution numérique.

#### Le code ACHIL3D.

Il existe au Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Ecole Centrale de Nantes le code numérique ACHIL3D développée par Clément [20] et Masson [56] qui résout l'équation intégrale discrète (2.37) pour les problèmes de radiation et des corps à 0,1 ou 2 symétries. Ce code est basé sur une méthode aux éléments frontières d'ordre 0, c'est-à-dire que l'intégration sur les facettes se fait par la méthode de Gauss à un point, car Ferrant [35] a montré qu'il valait mieux augmenter le nombre de facettes plutôt que le nombre de points de Gauss. Il existe cependant également des méthodes d'ordre plus élevé qui utilise des interpolations sur les facettes. Pour les méthodes d'ordre 1, l'interpolation est linéaire. Pour les méthodes d'ordre supérieur, l'interpolation se fait par des NURBS.

Le calcul de la partie instationnaire de la fonction de Green, équation (2.10), se fait par intégration des équations différentielles dont elle est solution, résultat connu sous le nom de lemme de Clément [21].

#### Modification apportée à ACHIL3D.

Les modifications apportées à ACHIL3D pour résoudre le problème (2.29) consistent simplement à transformer les  $[\sigma_j (0)]$  en  $[\sigma_{S_f,j} (0)] = [\delta_{fj}]$  et à résoudre autant de problèmes qu'il y a de facettes. En sortie du programme, nous obtenons les fonctions :

$$\begin{aligned} \mathbf{CM}_f (t) &= \rho \iint_S \Phi_f (M, t) \mathbf{n} (M) dS \\ \mathbf{CL}_f (t) &= \rho \iint_S \frac{\partial}{\partial t} \Phi_f (M, t) \mathbf{n} (M) dS \end{aligned}$$

Comme ces fonctions sont les résultats du calcul pour un échelon sur la facette  $f$ , l'effort

généralisé  $\mathbf{F}_f(t)$  associé à une impulsion sur la facette  $f$  s'obtient à partir des fonctions  $\mathbf{CL}_f$  et  $\mathbf{CM}_f$  par :

$$\mathbf{F}_f(t) = -\mathbf{CM}_f(0) \dot{\delta}(t) - \dot{\mathbf{CL}}_f(t) \quad (2.38)$$

L'utilisation des symétries, comme expliqué par Masson [56], permet de diviser considérablement la taille du problème. Pour un corps à un plan de symétrie, la méthode consiste à considérer un problème symétrique, noté + et un problème antisymétrique, noté -. On obtient alors en sortie les fonctions  $\mathbf{CM}_{f+}(t)$ ,  $\mathbf{CM}_{f-}(t)$  et  $\mathbf{CL}_{f+}(t)$ ,  $\mathbf{CL}_{f-}(t)$ . Il reste alors à reconstruire les réponses indicielles pour chaque facette du maillage par combinaison de ces fonctions :

$$\begin{aligned} \mathbf{CM}_f(t) &= \frac{1}{2} (\mathbf{CM}_{f+}(t) + \mathbf{CM}_{f-}(t)) \\ \mathbf{CM}_{sym(f)}(t) &= \frac{1}{2} (\mathbf{CM}_{f+}(t) - \mathbf{CM}_{f-}(t)) \\ \mathbf{CL}_f(t) &= \frac{1}{2} (\mathbf{CL}_{f+}(t) + \mathbf{CL}_{f-}(t)) \\ \mathbf{CL}_{sym(f)}(t) &= \frac{1}{2} (\mathbf{CL}_{f+}(t) - \mathbf{CL}_{f-}(t)) \end{aligned}$$

Pour un corps à deux plans de symétrie, il faut considérer quatre problèmes, notés + + + +, +- -+, +-+-, + + - -. Les réponses de chaque facette s'obtiennent alors par :

$$\begin{aligned} \mathbf{CM}_f(t) &= \frac{1}{4} (\mathbf{CM}_{f++++}(t) + \mathbf{CM}_{f+---}(t) + \mathbf{CM}_{f-+-}(t) + \mathbf{CM}_{f+--+}(t)) \\ \mathbf{CM}_{sym,x(f)}(t) &= \frac{1}{4} (\mathbf{CM}_{f++++}(t) - \mathbf{CM}_{f+---}(t) - \mathbf{CM}_{f-+-}(t) + \mathbf{CM}_{f+--+}(t)) \\ \mathbf{CM}_{sym,xy(f)}(t) &= \frac{1}{4} (\mathbf{CM}_{f++++}(t) - \mathbf{CM}_{f+---}(t) + \mathbf{CM}_{f-+-}(t) - \mathbf{CM}_{f+--+}(t)) \\ \mathbf{CM}_{sym,y(f)}(t) &= \frac{1}{4} (\mathbf{CM}_{f++++}(t) + \mathbf{CM}_{f+---}(t) - \mathbf{CM}_{f-+-}(t) - \mathbf{CM}_{f+--+}(t)) \\ \mathbf{CL}_f(t) &= \frac{1}{4} (\mathbf{CL}_{f++++}(t) + \mathbf{CL}_{f+---}(t) + \mathbf{CL}_{f-+-}(t) + \mathbf{CL}_{f+--+}(t)) \\ \mathbf{CL}_{sym,x(f)}(t) &= \frac{1}{4} (\mathbf{CL}_{f++++}(t) - \mathbf{CL}_{f+---}(t) - \mathbf{CL}_{f-+-}(t) + \mathbf{CL}_{f+--+}(t)) \\ \mathbf{CL}_{sym,xy(f)}(t) &= \frac{1}{4} (\mathbf{CL}_{f++++}(t) - \mathbf{CL}_{f+---}(t) + \mathbf{CL}_{f-+-}(t) - \mathbf{CL}_{f+--+}(t)) \\ \mathbf{CL}_{sym,y(f)}(t) &= \frac{1}{4} (\mathbf{CL}_{f++++}(t) + \mathbf{CL}_{f+---}(t) - \mathbf{CL}_{f-+-}(t) - \mathbf{CL}_{f+--+}(t)) \end{aligned}$$

### 2.3.3 Résultats numériques.

#### Utilisation des symétries.

Pour valider la méthode d'utilisation des symétries, on a considéré trois maillages correspondant à une demi-sphère, un quart de sphère et un huitième de sphère. On a porté sur la figure (2.3), les fonctions  $\mathbf{CL}_1(t) \cdot \vec{x}$  pour la facette 1 dans les trois cas de calcul.

La décomposition des problèmes élémentaires en mode fonctionne bien et permet de reconstruire correctement les réponses pour chaque facette. D'un point de vue numérique, le calcul

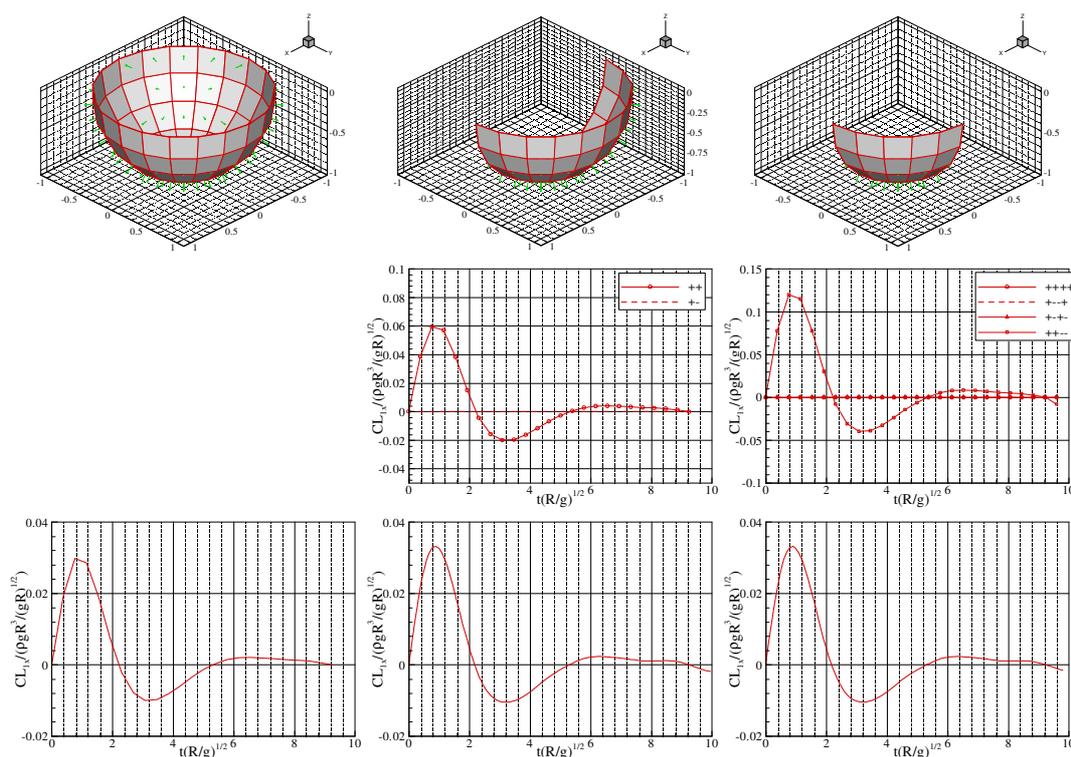


FIG. 2.3 – Utilisation des symétries. Chaque colonne présente le maillage utilisé, les réponses indicielles suivant chaque mode et le résultat pour la facette 1.

est fortement accéléré lorsque l'on exploite toutes les symétries, car même si on résout le même nombre de problèmes élémentaire ( $N_{sym}N_{facettes}$  est invariant), chaque problème nécessite la résolution de systèmes linéaires beaucoup plus petit ( $N_{facettes}^2$ ).

### Problème de radiation.

Les réponses indicielles d'un corps à un échelon de vitesse dans une direction s'obtiennent à partir des réponses indicielles sur chaque facette par :

$$\mathbf{CL}_j(t) = \sum_{facettes} \mathbf{CL}_f(t) N_j \quad (2.39)$$

Sur la figure (2.4), nous avons porté les réponses indicielles en cavalemt et tangage d'une demi-sphère immergée obtenus selon la formule (2.39) et le résultat d'un calcul ACHIL3D pour le même maillage. Graphiquement, il est impossible de déceler la moindre différence.

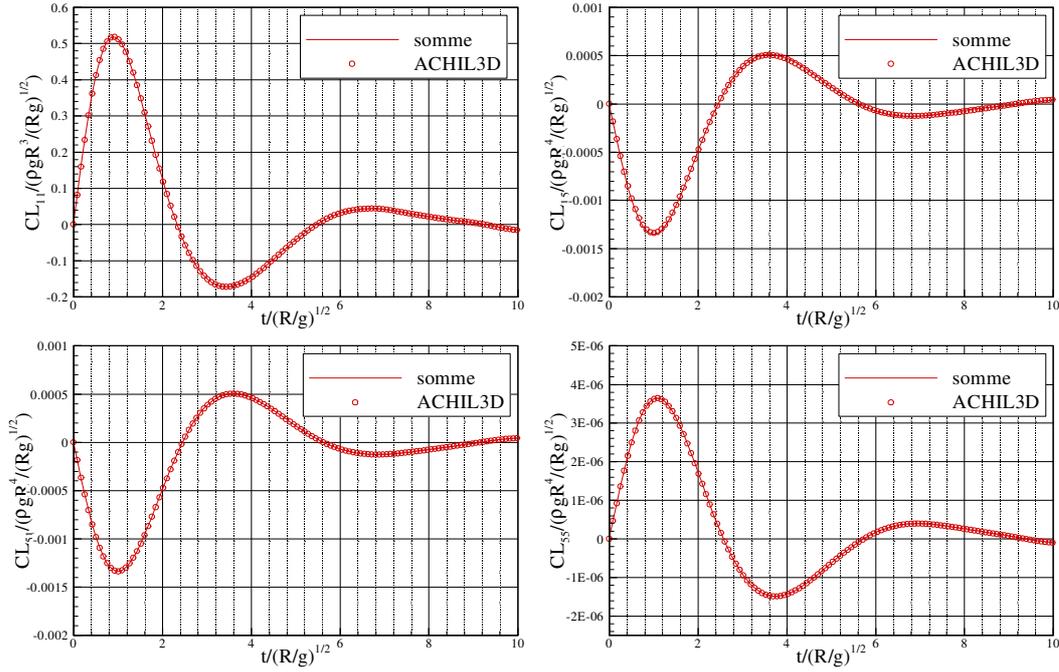


FIG. 2.4 – Réponse indicielle en cavalemt et tangage d'une demi-sphère.

### Problème de diffraction.

Pour le problème de diffraction, l'effort est donné en fonction du gradient de la houle incidente par :

$$\mathbf{F}_D(t) = - \iint_{S_c} dS \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}_P(t - \tau) (\nabla \Phi_0(P, \tau) \cdot \mathbf{n}(P)) d\tau \quad (2.40)$$

Pour le problème discret, cette formule devient :

$$\mathbf{F}_D(t) = - \sum_{\text{facettes}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}_f(t - \tau) (\nabla \Phi_{0,f}(\tau) \cdot \mathbf{n}_f) d\tau \quad (2.41)$$

où l'on suppose que le gradient est constant et égal à sa valeur au centre de chaque facette.

L'effort généralisé  $\mathbf{F}_f(t)$  s'obtient à partir des fonctions  $\mathbf{CL}_f$  et  $\mathbf{CM}_f$  par :

$$\mathbf{F}_f(t) = -\mathbf{CM}_f(0) \dot{\delta}(t) - \dot{\mathbf{CL}}_f(t) \quad (2.42)$$

La détermination numérique de la dérivée temporelle de  $\mathbf{CL}_f$  introduit des problèmes importants de précision dans les calculs, du fait que les  $\mathbf{CL}_f$  proviennent déjà d'une dérivation numérique dans le code ACHIL3D. Cette difficulté peut être supprimé par une manipulation algébrique.

Considérons en effet la convolution de  $\dot{\mathbf{CL}}_f$  avec le gradient du potentiel sur cette facette

et intégrons là par partie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\mathbf{C}}\mathbf{L}_f(t-\tau) (\nabla\Phi_{0,f}(\tau) \cdot \mathbf{n}_f) d\tau = -[\mathbf{C}\mathbf{L}_f(t-\tau) (\nabla\Phi_{0,f}(\tau) \cdot \mathbf{n}_f)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{C}\mathbf{L}_f(t-\tau) (\nabla\dot{\Phi}_{0,f}(\tau) \cdot \mathbf{n}_f) d\tau \quad (2.43)$$

On a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{C}\mathbf{L}_f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{C}\mathbf{L}_f(t) = 0$$

donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\mathbf{C}}\mathbf{L}_f(t-\tau) (\nabla\Phi_{0,f}(\tau) \cdot \mathbf{n}_f) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{C}\mathbf{L}_f(t-\tau) (\nabla\dot{\Phi}_{0,f}(\tau) \cdot \mathbf{n}_f) d\tau \quad (2.44)$$

qui traduit le fait que la convolution de la réponse impulsionnelle avec le gradient normal du potentiel incident est égal à la convolution de la réponse indicielle avec la dérivée du gradient normal de potentiel incident. Finalement :

$$\mathbf{F}_D(t) = \sum_{\text{facettes}} \left( \mathbf{C}\mathbf{M}_f(0) (\nabla\dot{\Phi}_{0,f}(t) \cdot \mathbf{n}_f) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{C}\mathbf{L}_f(t-\tau) (\nabla\dot{\Phi}_{0,f}(\tau) \cdot \mathbf{n}_f) d\tau \right) \quad (2.45)$$

### Calcul de $\mathbf{K}_7$

Pour le calcul de  $\mathbf{K}_7$ , il faut déterminer :

$$\nabla\dot{\Phi}_0(p, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left( i \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \\ i \end{pmatrix} \int_0^\infty \omega^2 e^{k(z-i\bar{w})} e^{i\omega t} d\omega \right) \quad (2.46)$$

L'intégrale sur les pulsations peut-être évalué analytiquement, comme précédemment, à partir de la fonction  $w(z)$  :

$$\int_0^\infty \omega^2 e^{k(z-i\bar{w})} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{b}{\alpha} + \left( \frac{b^2}{\alpha} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} w \left( \frac{ib}{\sqrt{\alpha}} \right) \right) \quad (2.47)$$

D'où :

$$\nabla\dot{\Phi}_0(p, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left( \left( \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \\ i \end{pmatrix} \frac{i}{2\alpha} \left( \frac{b}{\alpha} + \left( \frac{b^2}{\alpha} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} w \left( \frac{ib}{\sqrt{\alpha}} \right) \right) \right) \right) \quad (2.48)$$

La figure (2.5) présente le calcul de  $\mathbf{K}_7$  pour une demi-sphère discrétisée en 256 facettes, et soumise à une houle d'angle d'incidence  $\beta = -90^\circ$ . Cette figure présente également un excellent accord avec le résultat de la thèse de King [50].

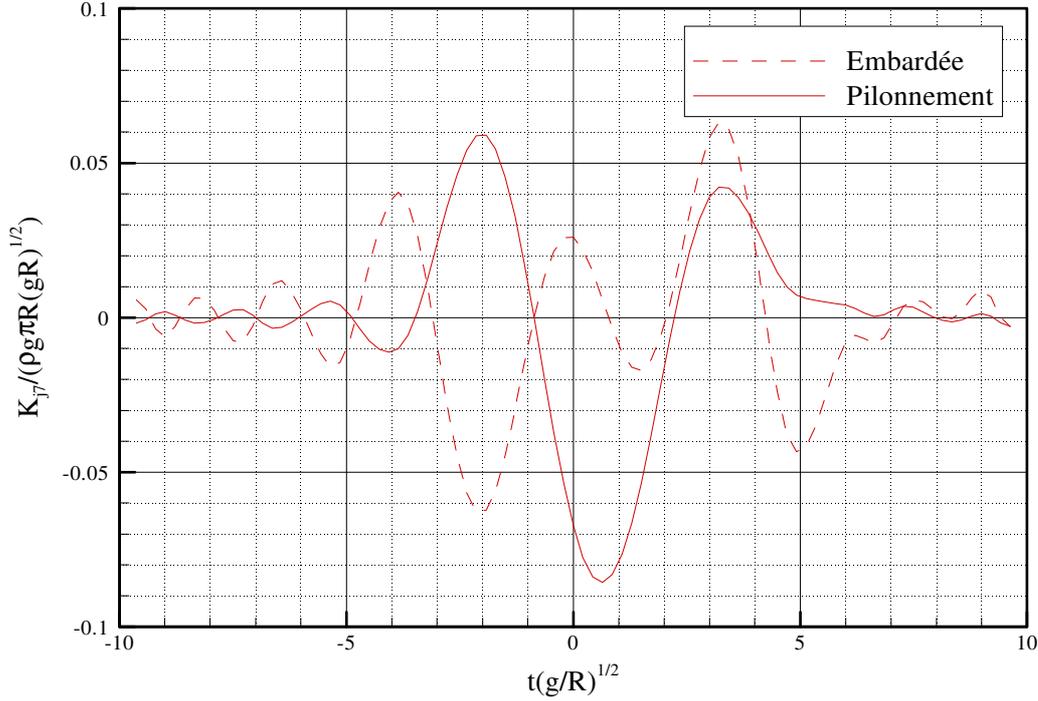


FIG. 2.5 – Réponse impulsionnelle en diffraction d'une demi-sphère.

### Effort d'excitation pour une houle monochromatique.

le potentiel de la houle d'Airy en profondeur infinie s'écrit :

$$\Phi_0(M, t) = \operatorname{Re} \left( \frac{ig}{\omega} A e^{k(z-i\bar{\omega})} e^{i\omega t} \right) \quad (2.49)$$

La pression associée en tout point du domaine fluide vaut :

$$p(M, t) = \operatorname{Re} (\rho g A e^{k(z-i\bar{\omega})} e^{i\omega t})$$

donc l'effort de Froude-Krylov est donné par :

$$\mathbf{F}_I(t) = - \iint_{S_c} \operatorname{Re} (\rho g A e^{k(z-i\bar{\omega})} e^{i\omega t}) \mathbf{N}(M) dS \quad (2.50)$$

La dérivée temporelle du gradient du potentiel de la composante de la houle incidente considérée vaut :

$$\nabla \dot{\Phi}_0(M, t) = \operatorname{Re} \left( \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \\ i \end{pmatrix} i\omega^2 A e^{k(z-i\bar{\omega})} e^{i\omega t} \right) \quad (2.51)$$

L'effort de diffraction associé à cette composante de la houle s'obtient alors suivant la formule (2.45).

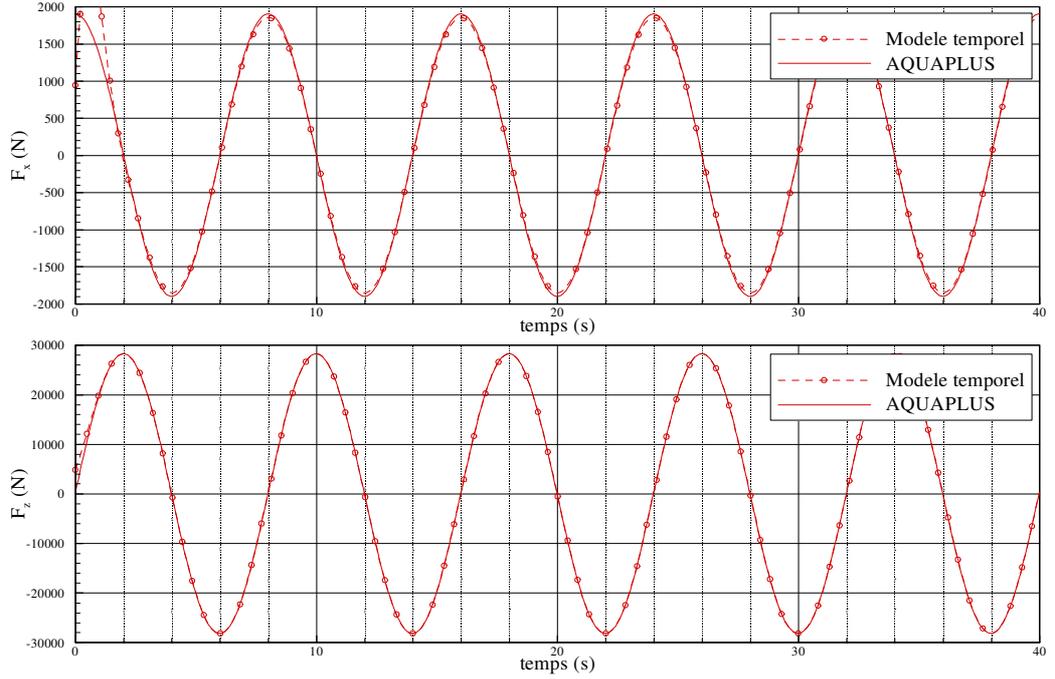


FIG. 2.6 – Comparaison des efforts d’excitation en pilonnement et cavement calculés dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. Le corps est une demi-sphère et la houle incidente est monochromatique, de période 8 secondes et d’amplitude 1 mètre. L’incidence vaut  $0^\circ$ .

La figure (2.6) présente les efforts d’excitation (somme des efforts de Froude-Krylov et de diffraction) en cavement et pilonnement pour une demi-sphère soumise à une houle de période 8 secondes, d’amplitude 1 mètre et d’angle d’incidence  $\beta = 0^\circ$ . On y compare les résultats obtenus par la méthode exposée ici, et le résultat d’un calcul dans le domaine fréquentiel réalisé avec AQUAPLUS [27]. L’accord entre les deux méthodes est excellent.

## 2.4 Résolution dans le domaine fréquentiel.

### 2.4.1 Problème aux limites dans le domaine fréquentiel.

Dans le domaine fréquentiel, le problème aux limites s’écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\varphi(M) = 0 & \forall M \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n}\varphi(M) = 0 & \forall M \in S_F \cup S_\infty \\ -\omega^2\varphi(M) + g\frac{\partial}{\partial z}\varphi(M) = 0 & \forall M \in S_{SL} \\ \frac{\partial}{\partial n}\varphi(M) = -i\omega\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}(M) & \forall M \in S_c \end{array} \right. \quad (2.52)$$

avec  $\varphi$  et  $\mathbf{x}$  tel que :

$$\Phi(M, t) = \Re(\varphi(M) e^{-i\omega t}) \quad (2.53)$$

$$\mathbf{V}(M, t) = \Re(-i\omega\mathbf{x} e^{-i\omega t}) \quad (2.54)$$

A nouveau, introduisons le problème de radiation [58] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\varphi_j(M) = 0 & \forall M \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n}\varphi_j(M) = 0 & \forall M \in S_F \cup S_\infty \\ -\omega^2\varphi_j(M) + g\frac{\partial}{\partial z}\varphi_j(M) = 0 & \forall M \in S_{SL} \\ \frac{\partial}{\partial n}\varphi_j(M) = N_j & \forall M \in S_c \end{array} \right. \quad (2.55)$$

où  $N_j$  est la  $j$ -ième composante de la normale généralisée; et le problème de diffraction :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\varphi_7(M) = 0 & \forall M \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n}\varphi_7(M) = 0 & \forall M \in S_F \cup S_\infty \\ -\omega^2\varphi_7(M) + g\frac{\partial}{\partial z}\varphi_7(M) = 0 & \forall M \in S_{SL} \\ \frac{\partial}{\partial n}\varphi_7(M) = -\nabla\varphi_0 \cdot \mathbf{n} & \forall M \in S_c \end{array} \right. \quad (2.56)$$

où  $\varphi_0$  est le potentiel complexe associée à une houle d'Airy en profondeur infinie :

$$\varphi_0(M) = -i\frac{Ag}{\omega}e^{ik(x\cos\beta+y\sin\beta)} \quad (2.57)$$

A étant l'amplitude de la houle et  $\beta$  la direction de propagation.

## 2.4.2 Expression des efforts.

Les efforts de radiation sont fournies par :

$$\mathbf{f}_R(\omega) = -\rho\omega^2 \sum_{j=1}^6 \left( \iint_{S_c} \varphi_j \mathbf{N}(M) dS \right) \mathbf{x}_j \quad (2.58)$$

On définit alors la matrice de masse d'eau ajoutée et la matrice d'amortissement de radiation par :

$$\mathbf{C}_M(\omega) + i\frac{\mathbf{C}_A(\omega)}{\omega} = \left( \begin{array}{cccc} \rho \iint_{S_c} \varphi_1 \mathbf{N}(M) dS & \cdots & \rho \iint_{S_c} \varphi_6 \mathbf{N}(M) dS & \end{array} \right) \quad (2.59)$$

Les efforts de radiation s'écrivent alors :

$$\mathbf{f}_R(\omega) = (-\omega^2\mathbf{C}_M(\omega) + i\omega\mathbf{C}_A(\omega)) \mathbf{x} \quad (2.60)$$

Les efforts d'excitation s'exerçant sur la structure s'obtiennent par la sommation des efforts de houle incidente et de houle diffractée :

$$\mathbf{f}_{ex}(\omega) = -\rho i\omega \iint_{S_c} (\varphi_0 + \varphi_7) \mathbf{N}(M) dS \quad (2.61)$$

### 2.4.3 Equation intégrale.

Pour la résolution du problème aux limites, on considère une fonction de Green  $G$  satisfaisant la condition de Laplace et les conditions aux limites, excepté la condition de glissement sur la carène.

D'après la troisième formule de Green, le potentiel est alors solution de :

$$\frac{\varphi(M)}{2} - \iint_{S_c} \varphi(M') \frac{\partial}{\partial n} G(M', M) dS = i\omega \iint_{S_c} G(M', M) \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}(M, t) dS \quad (2.62)$$

### 2.4.4 Résolution numérique.

La résolution numérique du problème de diffraction - radiation dans le domaine fréquentiel a fait l'objet du développement de nombreux codes de part le monde. La plupart repose sur la méthode de l'équation intégrale. La carène est discrétisée en facettes sur lesquelles sont exprimées l'équation intégrale.

Au laboratoire de mécanique des fluides de l'Ecole Centrale de Nantes, le code AQUAPLUS, développé par G. Delhommeau [27] résout ainsi ce problème depuis plus d'une dizaine d'années. Pour le calcul des efforts d'excitation et les matrices associées aux efforts de radiation, c'est ce logiciel que nous avons utilisé.

## 2.5 Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les équations et les méthodes utilisées pour traiter le problème de la tenue à la mer dans le cadre d'une théorie potentielle linéarisée. Dans le domaine fréquentiel, nous avons utilisé le code AQUAPLUS. Dans le domaine temporel, le code ACHIL3D a été modifié afin de pouvoir traiter le problème de diffraction. Nous disposons donc à présent d'un outil capable de calculer les efforts d'excitation s'exerçant sur un flotteur dans le domaine temporel. S'il n'est pas particulièrement adapté pour calculer les efforts d'excitation en houle cylindrique, il est par contre tout à fait efficace pour les calculer dans la cas d'une houle directionnelle, comme nous le verrons dans le chapitre 4.

# Chapitre 3

## Bilan des efforts.

Dans ce chapitre, nous dressons le bilan des efforts qui s'appliquent sur le système et nous présentons les différentes modélisations qui ont été adoptées afin de les représenter.

Nous désignerons par  $\mathbf{R}_{force,base}$  la résultante du torseur de l'effort *force* considéré exprimé dans la base  $R_{base}$  et par  $\mathbf{M}_{force,base}(point)$  son moment résultant exprimé dans la base  $R_{base}$  et au point *point*. Sauf mention contraire, tous les torseurs d'efforts seront explicités sur la base fixe  $R_0$ .

### 3.1 Efforts exercés sur le système {flotteur+pendule}.

#### 3.1.1 Formulation générale.

D'une manière générale, les efforts s'exerçant sur le système {flotteur+pendule} se décomposent en trois parties. Une partie est due à l'action sur le système du champ de pesanteur. La seconde est due aux efforts de pression qu'exerce le fluide sur la surface mouillée du flotteur, surface que l'on notera  $S_c$ . La dernière correspond à l'effort appliqué par les ancrages sur le système.

La résultante  $\vec{R}_{ex}$  des efforts extérieurs s'exerçant sur le système {flotteur+pendule} s'écrit donc :

$$\vec{R}_{ex} = (m_b + m_p) \vec{g} + \iint_{S_c} p \vec{n} dS + \vec{F}_a \quad (3.1)$$

Le moment résultant  $\vec{M}_{ex}$  correspondant à ces efforts et écrit un point  $Q$  quelconque est alors donné par :

$$\vec{M}_{ex}(Q) = \vec{QG} \wedge m_b \vec{g} + \vec{QP} \wedge m_p \vec{g} + \iint_{S_c} \vec{QM} \wedge p(M) \vec{n} dS + \vec{QA} \wedge \vec{F}_a \quad (3.2)$$

#### 3.1.2 Efforts de pesanteur.

Explicitons le terme correspondant au champ de pesanteur dans l'expression des efforts extérieurs.

Pour le système {flotteur+pendule}, l'action du champ de pesanteur se décompose en l'action du poids du flotteur au centre de gravité du flotteur et du poids du pendule au centre de gravité du pendule. Il se réduit donc à un torseur de résultante  $\vec{R}_g = -(m_b + m_p)g \vec{z}_0$  et de moment en  $G$  donné par  $\vec{M}_g(G) = \vec{GP} \wedge m_p \vec{g}$ .

Sur la base  $R_0$ , la résultante  $\mathbf{R}_{g,0}$  vaut :

$$\mathbf{R}_{g,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(m_b + m_p)g \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

et le moment résultant  $\mathbf{M}_{g,0}$  en  $G$  :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{g,0}(G) &= \vec{GP} \wedge m_p \vec{g} \\ \vec{M}_{g,0}(G) &= (\vec{GO} + \vec{OP}) \wedge m_p \vec{g} \\ \mathbf{M}_{g,0}(G) &= \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_p g \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

L'effort généralisé dû à la pesanteur s'écrit donc :

$$\mathbf{F}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(m_b + m_p)g \\ \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_p g \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

### 3.1.3 Efforts de pression.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les efforts de pression peuvent être décomposés en trois termes dans le cadre d'une théorie potentielle linéarisée. Ces trois termes sont :

- les efforts hydrostatiques. Ils correspondent à l'intégration sur la surface mouillée du terme de pression statique. Sous l'hypothèse de petits déplacements de la structure, ils se ramènent à un effort de rappel.
- les efforts d'excitation. Ils proviennent de l'intégration de la pression dû au champ de houle incidente et au champ diffractée sur la surface mouillée.
- les efforts de radiation. Ils correspondent aux efforts associés au champ de vagues générés par les mouvements de la structure.

### Efforts hydrostatiques.

Soit le vecteur position  $\mathbf{Y} = (x_G \ y_G \ z_G \ \varphi \ \theta \ \psi)$ . Les efforts hydrostatiques s'écrivent :

$$\mathbf{F}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (m_b + m_p)g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \mathbf{K}_H \mathbf{Y} \quad (3.6)$$

où  $\mathbf{K}_H$  est la matrice de raideur hydrostatique.

### Efforts d'excitation.

Lorsque la houle considérée est régulière, elle est modélisée mathématiquement par une onde monochromatique dont le potentiel est donnée en tout point du domaine fluide par :

$$\Phi_0(M, t) = \text{Re} \left( \frac{ig}{\omega} A e^{k(z-i\bar{\omega})} e^{i\omega t} \right) \quad (3.7)$$

En utilisant un code fréquentiel, l'effort généralisé est alors donné dans le domaine temporel par

$$\mathbf{F}_{ex}(t) = a \Im \left( \mathbf{F}_{I+D}(\omega) e^{i(\omega t + \varphi)} \right) \quad (3.8)$$

avec  $\mathbf{F}_{I+D}(\omega)$  vecteur à variables complexes des efforts de diffraction-radiation au point  $O$ . En utilisant cette approche, il est implicitement supposé que le corps est soumis à cette houle depuis un temps suffisamment long pour que les effets transitoires soient dissipés.

En utilisant un code temporel, l'effort généralisé est donné par :

$$\mathbf{F}_{ex}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{K}_0(t-\tau) + \mathbf{K}_7(t-\tau)) \eta_0(\tau) d\tau \quad (3.9)$$

avec  $\mathbf{K}_0$  et  $\mathbf{K}_7$  les réponses impulsionnelles en effort pour la houle incidente et la houle diffractée et  $\eta_0$  la déformée de surface libre associée au potentiel de la houle incidente :

$$\begin{aligned} \eta_0(t) &= -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_0(O, t)}{\partial t} \\ \eta_0(t) &= A \cos \omega t \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dans le cas d'une houle irrégulière, elle est modélisée simplement comme une superposition de  $N$  ondes monochromatiques, dont chaque phase à l'origine est aléatoire. Des études statistiques ont montré que l'état de la mer, c'est-à-dire la quantité d'énergie contenue dans chacune des ondes élémentaires qui compose une houle, est une fonction lentement variable du temps. L'état de mer peut alors être correctement modélisé dans l'espace des fréquences  $f$  sur plusieurs dizaines de minutes par une fonction  $S(f)$ , appelée spectre d'énergie. Cette fonction est dépendante de deux paramètres :

- Un paramètre de hauteur significative noté  $H_{1/3}$ . Historiquement, il correspond à la hauteur de la moyenne du tiers supérieur des amplitudes observées.

– Une période de pic  $T_1$ , période de la raie possédant le plus d'énergie dans le spectre.

Il existe plusieurs modèles possibles pour la fonction  $S$ , selon le point du globe et les conditions que l'on considère. Pour représenter les houles rencontrées dans l'océan atlantique, la plus souvent usitée est la formule I.S.S.C.[64] :

$$S(f) = \frac{A}{f^5} e^{-\frac{B}{f^4}} \quad (3.11)$$

avec

$$A = \frac{5}{16} \frac{H_{1/3}^2}{T_1^4} \quad (3.12)$$

$$B = \frac{5}{4} \frac{1}{T_1^4} \quad (3.13)$$

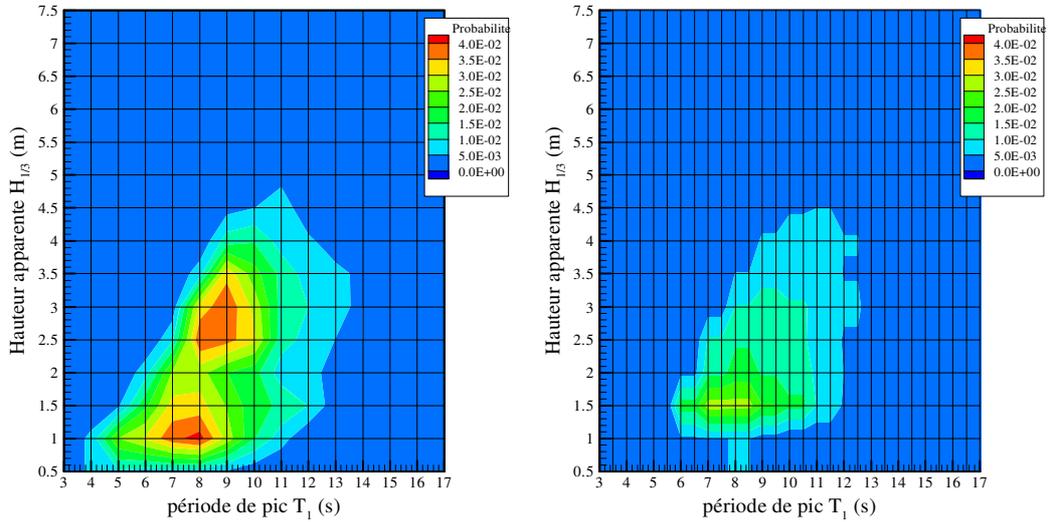


FIG. 3.1 – Probabilités de rencontre des états de mer  $(T_1, H_{1/3})$  à gauche à l'île d'Yeu et à droite à Ouessant.

Des bouées océanographiques placées en mer ont permis de dresser des cartes de densité de probabilité de rencontre d'un état de mer  $(H_{1/3}, T_1)$  pour différents points du littoral français. La figure (3.1) présente à gauche une de ces cartes pour une bouée placée au large de l'île d'Yeu et à droite la même carte pour une bouée placée à Ouessant.

Imaginons maintenant que l'on veuille simuler numériquement une houle vraisemblable de hauteur significative  $H_{1/3}$  mètres et de période de pic  $T_1$  secondes sur un site comme l'île d'Yeu. La méthode consiste alors à considérer la houle comme la superposition de  $N$  sinusoides de fréquence  $f_i$ , régulièrement espacées d'un pas  $\Delta f$ , de phases initiales  $\varphi_i$  et d'amplitudes élémentaires  $a_i$ . L'amplitude de chacune des sinusoides est alors donnée par :

$$a_i = \sqrt{2S(f_i) \Delta f} \quad (3.14)$$

Les phases initiales  $\varphi_i$  sont obtenues en utilisant un générateur de nombres aléatoires entre

0 et  $2\pi$ . L'élévation de surface libre correspondant ainsi à la houle reconstruite est donnée par :

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^N a_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i) \quad (3.15)$$

Le signal ainsi reconstruit présente les mêmes caractéristiques statistiques qu'un signal réel et peut ainsi être utilisé pour les simulations numériques.

En utilisant les résultats fréquentiels, puisque nous sommes en théorie linéarisée, on peut superposer les efforts élémentaires dus à chaque pulsation présente dans la houle. Ainsi, l'effort d'excitation peut s'écrire :

$$\mathbf{F}_{ex}(t) = \sum_{i=1}^N a_i \mathfrak{F}(\mathbf{F}_{I+D}(\omega_i) e^{i(\omega_i t + \varphi_i)}) \quad (3.16)$$

avec  $\omega_i = 2\pi f_i$ .

Directement dans le domaine temporel, l'effort généralisé d'excitation s'écrit :

$$\mathbf{F}_{ex}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{K}_0(t-\tau) + \mathbf{K}_\tau(t-\tau)) \left( \sum_{i=1}^N a_i \cos(\omega_i \tau + \varphi_i) \right) d\tau \quad (3.17)$$

### Efforts de radiation.

Dans le domaine fréquentiel, l'effort généralisé de radiation s'écrit :

$$\mathbf{f}_R = -(-\omega^2 \mathbf{C}_M(\omega) + i\omega \mathbf{C}_A(\omega)) \mathbf{y} \quad (3.18)$$

Dans le domaine temporel, il s'écrit :

$$\mathbf{F}_R = -\boldsymbol{\mu}_\infty \ddot{\mathbf{Y}} - \int_0^t \mathbf{K}(t-\tau) \dot{\mathbf{Y}}(\tau) d\tau \quad (3.19)$$

avec  $\boldsymbol{\mu}_\infty$  matrice à coefficients constants appelés coefficients de masse d'eau ajoutée, et  $\mathbf{K}$  matrice à coefficients fonctions du temps, chacun correspondant à une réponse impulsionnelle suivant le degré de liberté correspondant.

Le terme de réponse impulsionnelle  $\mathbf{K}$  de l'effort de radiation peut être calculé de deux manières :

- La première consiste à utiliser directement un code BEM dans le domaine temporel, tel que ACHIL3D [18].
- La seconde consiste à utiliser un code fréquentiel tel que AQUAPLUS. En effet, la réponse impulsionnelle est reliée aux coefficients d'amortissement hydrodynamique dans le domaine fréquentiel par la formule de Cummins [24] :

$$\mathbf{K}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathbf{C}_A(\omega) \cos(\omega t) d\omega \quad (3.20)$$

La matrice de masse d'eau ajoutée  $\boldsymbol{\mu}_\infty$  correspond elle à  $\mathbf{C}_M(\omega)$  lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ .

L'équation (3.19) fait apparaître le calcul d'un produit de convolution. Numériquement,

son calcul est peu pratique et nous avons voulu nous en affranchir.

Considérons la quantité :

$$I(t) = \int_0^t g(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (3.21)$$

avec  $f$  et  $g$  fonctions réelles du temps. Si  $g$  est une fonction tendant suffisamment rapidement vers 0 lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , le baron Riche de Prony [26] a montré comment on pouvait approximer  $g$  par :

$$g(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i e^{\beta_i t} \quad (3.22)$$

avec les couples  $(\alpha_i, \beta_i)$  soit couples de valeurs réels, soit couples de valeurs complexes et associées par paire de raies conjuguées. La méthode proposée par le baron de Prony a été implémentée par A.H. Clément [19] pour les réponses impulsionnelles des efforts de radiation, et testée avec succès dans [28]. Un exposé de la méthode est proposé en annexe.

En injectant l'équation (3.22) dans (3.21), on obtient :

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^t \sum_{i=1}^N \alpha_i e^{\beta_i(t-\tau)} f(\tau) d\tau \\ I(t) &= \sum_{i=1}^N \int_0^t \alpha_i e^{\beta_i(t-\tau)} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.23)$$

Posons alors :

$$I_i(t) = \int_0^t \alpha_i e^{\beta_i(t-\tau)} f(\tau) d\tau \quad (3.24)$$

En dérivant cette dernière expression par rapport au temps, on obtient, tout calcul fait :

$$\dot{I}_i = \beta_i I_i + \alpha_i f(t) \quad (3.25)$$

On constate donc que le calcul du produit de convolution (3.21) peut être remplacé par une somme de  $N$  états, chacun d'entre eux étant obtenu par l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants :

$$\begin{cases} I = \sum_{i=1}^N I_i \\ \dot{I}_i = \beta_i I_i + \alpha_i f(t) \\ I_i(0) = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

En procédant de même, on montre que le terme de convolution de l'équation de l'effort de radiation (3.19) peut se mettre sous la forme :

$$\int_0^t \mathbf{K}(t - \tau) \dot{\mathbf{Y}}(\tau) d\tau = \mathbf{I}(t) \quad (3.27)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{I}(t) = \left( \sum_{j=1}^6 \sum_{r=1}^{N_{ij}} I_{ijr}(t) \right)_{i=1,6} \\ \dot{I}_{ijr} = \beta_{ijr} I_{ijr} + \alpha_{ijr} \dot{\mathbf{Y}}_j(t) \\ I_{ijr} = 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

On écrira donc à présent l'effort de radiation sous la forme :

$$\mathbf{F}_R = -\mu_\infty \ddot{\mathbf{Y}} - \mathbf{I} \quad (3.29)$$

avec  $\mathbf{I}$  donné selon (3.28).

### 3.1.4 Efforts d'ancrage.

L'ancrage est un problème complexe, bien connu des milieux travaillant dans l'offshore. Il existe des codes numériques dédiés à ces problèmes. N'ayant pas encore défini, à ce stade de l'étude, les caractéristiques techniques de l'amarrage du corps, on s'est contenté ici de modéliser ces efforts par une raideur proportionnelle aux déplacements horizontaux. D'après ce que nous avons pu lire, il n'est pas complètement idiot de prendre pour coefficients des grandeurs de l'ordre de quelques dizaines de  $kN/m$ . On modélise donc :

$$\mathbf{F}_a = - \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_\psi \end{pmatrix} \mathbf{Y} = -\mathbf{K}_A \mathbf{Y} \quad (3.30)$$

## 3.2 Efforts exercés sur le pendule.

Le pendule est soumis à deux efforts. L'un est l'action de son propre poids. L'autre est dû au convertisseur d'énergie.

### 3.2.1 Efforts de pesanteur.

Au point  $O$ , le pendule exerce en ce point un couple dû à son propre poids donné par :

$$\vec{M}_g(O) = \vec{OP} \wedge m_p \vec{g} \quad (3.31)$$

Soit, sur la base  $R_0$  :

$$\mathbf{M}_{g,0}(O) = \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_p g \end{pmatrix}_0 \quad (3.32)$$

### 3.2.2 Efforts dus au convertisseur d'énergie.

#### Cas du pendule à deux degrés de liberté.

A ce stade de l'étude, l'effort fourni par le convertisseur est modélisé par un torseur dont le couple vaut au point  $O$  :

$$\vec{C}_{PTO}(O) = C_\beta \vec{x}_b + C_\alpha \vec{y}_p \quad (3.33)$$

et dont la résultante est nulle.

Sur le repère lié au flotteur, le couple dû au convertisseur s'écrit :

$$\vec{C}_{PTO} = C_\beta \vec{x}_b + C_\alpha \cos \beta \vec{y}_b + C_\alpha \sin \beta \vec{z}_b \quad (3.34)$$

Donc sur le repère  $R_0$  :

$$\mathbf{C}_{PTO} = \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} C_\beta \\ C_\alpha \cos \beta \\ C_\alpha \sin \beta \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Les efforts  $C_\beta$  et  $C_\alpha$  sont assimilés à un amortisseur et un ressort en parallèle :

$$C_\alpha = -B_\alpha \dot{\alpha} - k_\alpha \alpha \quad (3.36)$$

$$C_\beta = -B_\beta \dot{\beta} - k_\beta \beta \quad (3.37)$$

Cette modélisation, simpliste, présente l'avantage d'être linéaire. De plus, vis à vis des thématiques de cette étude, elle a été jugée suffisante.

#### Cas du pendule à un degré de liberté.

Dans le cas d'un pendule à un degré de liberté, oscillant dans le plan de symétrie du flotteur, le couple dû au convertisseur se réduit à :

$$\vec{C}_{PTO}(O) = C_\alpha \vec{y}_p \quad (3.38)$$

De même,  $C_\alpha$  sera modélisé par :

$$C_\alpha = -B_\alpha \dot{\alpha} - k_\alpha \alpha \quad (3.39)$$

### 3.2.3 Efforts de liaison.

#### Cas du pendule à deux degrés de liberté.

La liaison entre le pendule et le flotteur au point  $A$  est une rotule à un doigt dans le cas du pendule à deux degrés de liberté. Son torseur s'écrit en  $A$  sur la base associée au pendule

$R_p$  :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{liaison,p} \\ \mathbf{M}_{liaison,p}(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Sur la base  $R_0$ , le moment de liaison s'exprime :

$$\mathbf{M}_{liaison,0}(A) = \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

### Cas du pendule à un degré de liberté.

Dans le cas du pendule à un degré de liberté, la liaison est un pivot et son torseur s'écrit dans la base  $R_p$  :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{liaison,p} \\ \mathbf{M}_{liaison,p}(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ P \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

## 3.3 Bilan.

### 3.3.1 Cas 3D.

#### Pendule à 2 degrés de liberté.

D'après ce que l'on vient d'exprimer, le second membre de l'équation (A.24) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{C}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\mathbf{K}_H + \mathbf{K}_A) \mathbf{Y} + \mathbf{F}_{ex} - \mu_\infty \ddot{\mathbf{Y}} - \mathbf{I} \\ \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} C_\beta \\ C_\alpha \cos \beta \\ C_\alpha \sin \beta \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \mathbf{F}_P \quad (3.43)$$

avec :

$$\mathbf{F}_{ex} = \sum_{i=1}^N a_i \mathfrak{S}(\mathbf{F}_{I+D}(\omega_i) e^{i(\omega_i t + \varphi)}) \quad (3.44)$$

et

$$\mathbf{F}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(m_b + m_p)g \\ \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_p g \end{pmatrix} \\ \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_p g \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Sous sa formulation vectorielle, l'équation différentielle des mouvements s'écrit :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} -(\mathbf{K}_H + \mathbf{K}_A) \mathbf{Y} + \mathbf{F}_{ex} - \boldsymbol{\mu}_\infty \ddot{\mathbf{Y}} - \mathbf{I} \\ \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} C_\beta \\ C_\alpha \cos \beta \\ C_\alpha \sin \beta \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \mathbf{H} + \mathbf{F}_P \quad (3.46)$$

ou encore :

$$(\mathbf{M} + \boldsymbol{\mu}_\infty) \ddot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} -(\mathbf{K}_H + \mathbf{K}_A) \mathbf{Y} + \mathbf{F}_{ex} - \mathbf{I} \\ \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} C_\beta \\ C_\alpha \cos \beta \\ C_\alpha \sin \beta \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \mathbf{H} + \mathbf{F}_P \quad (3.47)$$

Malheureusement, cette expression fait apparaître le moment de liaison  $R$ . Multiplions l'équation à gauche et à droite par la matrice :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_6 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_{p0} \end{pmatrix}$$

L'équation des mouvements devient :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_6 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_{p0} \end{pmatrix} (\mathbf{M} + \boldsymbol{\mu}_\infty) \ddot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_6 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_{p0} \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} -(\mathbf{K}_H + \mathbf{K}_A) \mathbf{Y} + \mathbf{F}_{ex} - \mathbf{I} \\ \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} C_\beta \\ C_\alpha \cos \beta \\ C_\alpha \sin \beta \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \mathbf{H} + \mathbf{F}_P \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Dans cette formulation, le moment  $R$  n'apparaît plus que sur la 9<sup>e</sup> ligne. En ne considérant

alors que les huit premières, on obtient l'équation différentielle des mouvements que l'on peut intégrer numériquement. La dernière ligne fournit finalement le moment de liaison de la rotule au cours du temps.

Si on s'intéresse également à déterminer la résultante de l'effort de liaison du pendule sur le flotteur, il faut écrire le principe fondamental de la dynamique pour l'accélération du pendule :

$$m_p \vec{\gamma}_{p,0}(P) = m_p \vec{g} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Soit la résultante donnée en fonction de la dynamique du système par :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{p0} \left( \begin{pmatrix} m_p \mathbf{I}_3 & \mathbf{M}_{1 \leq i \leq 3, 4 \leq j \leq 8} \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{H}_{1 \leq i \leq 3} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_p g \end{pmatrix} \right) \quad (3.50)$$

### Pendule à 1 degré de liberté.

Considérons le cas du pendule à un seul degré de liberté. L'équation des mouvements s'exprime alors à présent :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_6 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_{p0} \end{pmatrix} (\mathbf{M} + \boldsymbol{\mu}_\infty) \ddot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_6 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_{p0} \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} -(\mathbf{K}_H + \mathbf{K}_A) \mathbf{Y} + \mathbf{F}_{ex} - \mathbf{I} \\ \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ C_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \mathbf{H} + \mathbf{F}_P \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Les moments de liaison  $P$  et  $R$  sont données par les lignes 7 et 9 de cette équation. Les mouvements s'obtiennent désormais en inversant le système 7x7 restant.

### Cas linéarisé, 1 degré de liberté.

Si on considère des petits mouvements du flotteur, les matrices de passage  $\mathbf{T}_{xy}$  se réduisent à la matrice identité  $\mathbf{I}_3$ . Le vecteur des efforts de Coriolis est du second ordre et disparaît dans l'équation du mouvement. Le vecteur  $\mathbf{F}_P$  se réduit lui à une raideur dû à la gravitation et la matrice de masse  $M$  se simplifie également en supprimant tous les termes du second ordre.

L'équation des mouvements devient alors :

$$(\mathbf{M} + \boldsymbol{\mu}_\infty) \ddot{\mathbf{X}} = \left( \left( \begin{array}{c} -(\mathbf{K}_H + \mathbf{K}_A) \mathbf{Y} + \mathbf{F}_{ex} - \mathbf{I} \\ \left( \begin{array}{c} 0 \\ C_\alpha \\ 0 \end{array} \right) \end{array} \right) + \mathbf{K}_P \mathbf{X} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

### 3.3.2 Cas 2D.

Si la houle arrive dans l'axe du flotteur, les mouvements du système restent dans un plan contenant l'axe principal du flotteur et l'axe vertical. C'est en ce sens que l'on parle de cas 2D. Le problème reste tridimensionnel, mais les équations du mouvement se simplifient. Ainsi, le vecteur des efforts peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{ex} - \boldsymbol{\mu}_\infty \ddot{\mathbf{X}} - \mathbf{I} - (\mathbf{K}_h + \mathbf{K}_a) \mathbf{X} - \mathbf{F}_p + \mathbf{C}_{PTO}$$

avec :

$$\begin{aligned} - \mathbf{X} &= (x_G \ z_G \ \theta \ \alpha)^t \\ - \mathbf{F}_{ex}(t) &= \sum_{i=1}^N a_i \mathfrak{S} \left( \begin{pmatrix} F_{I+D,1}(\omega_i) \\ F_{I+D,3}(\omega_i) \\ F_{I+D,5}(\omega_i) \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega_i t + \varphi)} \right) \\ - \boldsymbol{\mu}_\infty &= \begin{pmatrix} \mu_{\infty,11} & \mu_{\infty,13} & \mu_{\infty,15} & 0 \\ \mu_{\infty,13} & \mu_{\infty,33} & \mu_{\infty,35} & 0 \\ \mu_{\infty,15} & \mu_{\infty,35} & \mu_{\infty,55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ - \mathbf{I}(t) &= \sum_{j=\{1,3,5\}} \begin{pmatrix} \sum_{r=1}^{N_{ij}} I_{1jr} \\ \sum_{r=1}^{N_{ij}} I_{3jr} \\ \sum_{r=1}^{N_{ij}} I_{5jr} \\ 0 \end{pmatrix} \\ - (\mathbf{K}_h + \mathbf{K}_a) &= \begin{pmatrix} K_{H,11} + k_x & K_{H,13} & K_{H,15} & 0 \\ K_{H,13} & K_{H,33} & K_{H,35} & 0 \\ K_{H,15} & K_{H,35} & K_{H,55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ - \mathbf{F}_p &= \begin{pmatrix} m_p \left( l (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 \sin(\theta + \alpha) - d \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) \\ m_p \left( l (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \cos(\theta + \alpha) - d \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) \\ m_p d l (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 \sin \alpha - m_p d l \dot{\theta}^2 \sin \alpha - m_p g (d \sin \theta - l \sin(\theta + \alpha)) \\ -m_p d l \dot{\theta}^2 \sin \alpha + m_p g l \sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$- \mathbf{C}_{PTO} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -B_\alpha \dot{\alpha} - k_\alpha \alpha \end{pmatrix}$$

En injectant cette formulation dans l'équation des mouvements (1.38), et après simplification, on peut alors écrire l'équation des mouvements sous la forme :

$$(\mathbf{M} + \boldsymbol{\mu}_\infty) \ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_{ex} - \mathbf{I} - (\mathbf{K}_h + \mathbf{K}_a) \mathbf{X} - \mathbf{F}_p + \mathbf{C}_{PTO} \quad (3.53)$$

avec :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_b + m_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_b + m_p & 0 & 0 \\ m_p(d \cos \theta - l \cos(\theta + \alpha)) & m_p(d \sin \theta - l \sin(\theta + \alpha)) & 0 & 0 \\ -m_p l \cos(\theta + \alpha) & m_p l \sin(\theta + \alpha) & 0 & 0 \\ m_p(d \cos \theta - l \cos(\theta + \alpha)) & -m_p l \cos(\theta + \alpha) & 0 & 0 \\ -m_p(d \sin \theta - l \sin(\theta + \alpha)) & m_p l \sin(\theta + \alpha) & 0 & 0 \\ I_b + I_y + m_p(d^2 + l^2) - 2m_p d l \cos \alpha & I_y + m_p l^2 - m_p d l \cos \alpha & 0 & 0 \\ I_y + m_p l^2 - m_p d l \cos \alpha & I_y + m_p l^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

Linéarisée, l'équation du mouvement devient :

$$(\mathbf{M} + \boldsymbol{\mu}_\infty) \ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_{ex} - \mathbf{I} - \mathbf{B} \dot{\mathbf{X}} - (\mathbf{K}_h + \mathbf{K}_a + \mathbf{K}_p) \mathbf{X} \quad (3.55)$$

avec :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_b + m_p & 0 & m_p(d-l) & -m_p l \\ 0 & m_b + m_p & 0 & 0 \\ m_p(d-l) & 0 & I_b + I_y + m_p(d-l)^2 & I_y + m_p l^2 - m_p d l \\ -m_p l & 0 & I_y + m_p l^2 - m_p d l & I_y + m_p l^2 \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_\alpha \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{K}_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_p g(d-l) & m_p g l \\ 0 & 0 & m_p g l & m_p g l + k_\alpha \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a explicité l'équation du mouvement du système SEAREV sous deux formulations. La formulation tridimensionnelle est une contribution au modèle W2W<sup>1</sup>, visant à développer un modèle complet de la dynamique du système. La dernière formulation, effectuée

<sup>1</sup>Wave To Wire

sous l'hypothèse de houle incidente dans l'axe du flotteur, est beaucoup plus légère et est utilisée dans tout le travail de dimensionnement.

# Chapitre 4

## Simulations numériques.

Dans ce chapitre, nous présentons les modèles numériques que nous avons développé et des résultats de simulation qui leur sont associés. En particulier, nous nous sommes intéressés à quantifier l'influence des non linéarités mécaniques et de la directionnalité de la houle sur la production d'énergie en comparant les prédictions annoncées par les différents modèles.

### 4.1 Description du système considéré.

Dans ce chapitre, nous avons considéré le SEAREV identifié par le matricule DES2595. Comme sur la vue d'artiste (4.1), le flotteur présente de manière générique un volume important à la flottaison et une quille profonde dans laquelle s'inscrit le cylindre d'inertie. Celui-ci est ainsi placé dans les fonds du flotteur.

Les caractéristiques géométriques et mécaniques du DES2595 sont fournies en annexe.

### 4.2 Description des modèles numériques.

#### 4.2.1 Rappel de l'équation du mouvement.

Dans tous les modèles que nous avons considérés, l'interaction fluide structure est modélisé dans le cadre d'une théorie potentielle linéarisée.

Quelle que soit la formulation adoptée (tri ou bidimensionnelle, pendule à un ou deux degrés de liberté) et d'après les équations (3.55), (3.53), (3.52), (3.51) et (3.48), effectuer des simulations temporelles des mouvements du système nécessite de résoudre une équation différentielle du type :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \cdot \ddot{\mathbf{X}} &= \mathbf{f}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{I}) + \mathbf{F}_{ex} \\ \dot{\mathbf{I}} &= [\beta] \mathbf{I} + [\alpha] \dot{\mathbf{X}} \end{aligned}$$

où :

- $\mathbf{X}$  est le vecteur de position.
- $\mathbf{I}$  est le vecteur des coefficients  $I_{ijr}$  résultant de l'identification du terme mémoire des efforts de radiation.

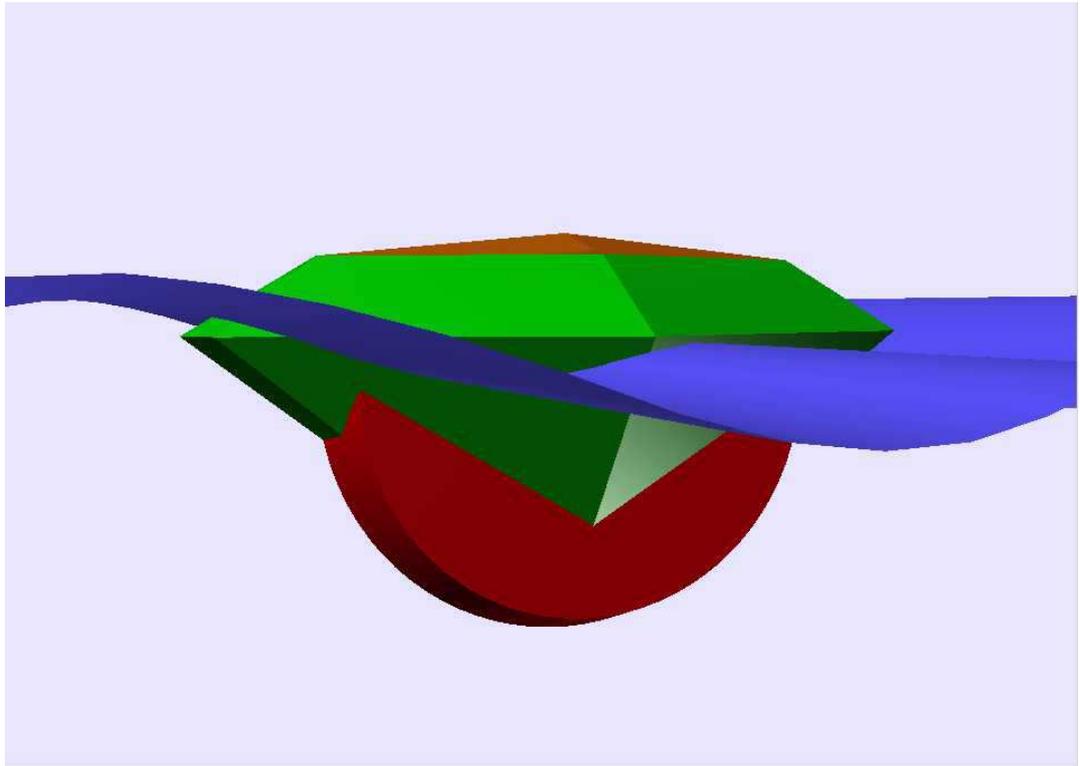


FIG. 4.1 – Vue d’artiste de SEAREV

Cette intégration est réalisée numériquement par la méthode de Runge Kutta d’ordre 4, à pas fixe. L’algorithme est tiré de Numerical Recipes [63] et la modélisation est programmé en FORTRAN90.

#### 4.2.2 Le modèle 2DHLMLt.

Cette codification correspond à mouvement plan (2D), hydrodynamique linéaire (HL), mécanique linéaire (ML), domaine temporel (t). Ainsi, ce premier modèle est basé sur deux hypothèses :

- La houle incidente est cylindrique et se propage dans la direction principale du flotteur.
- L’amplitude des mouvements est supposée suffisamment petite pour pouvoir considérer les équations de la mécanique linéarisées.

L’équation différentielle qui correspond à ce modèle est l’équation (3.55).

La figure (4.2) présente les résultats de simulation des mouvements avec ce modèle pour différents pas de temps. Les trois courbes se superposent parfaitement. Par la suite, la plupart des simulations ont été effectuée avec  $\Delta t = 0.05$  s.

Sur la courbe correspondant au cavalement, il existe des oscillations lentes, de période égale à la période de résonance pour l’amarrage du système. Ces oscillations proviennent du fait que pour les grandes périodes, l’amortissement hydrodynamique est très faible. L’amortissement du régime transitoire sur le cavalement est donc très long. Cependant, comme nous le verrons par la suite, cela ne pose pas de problèmes pour le dimensionnement.

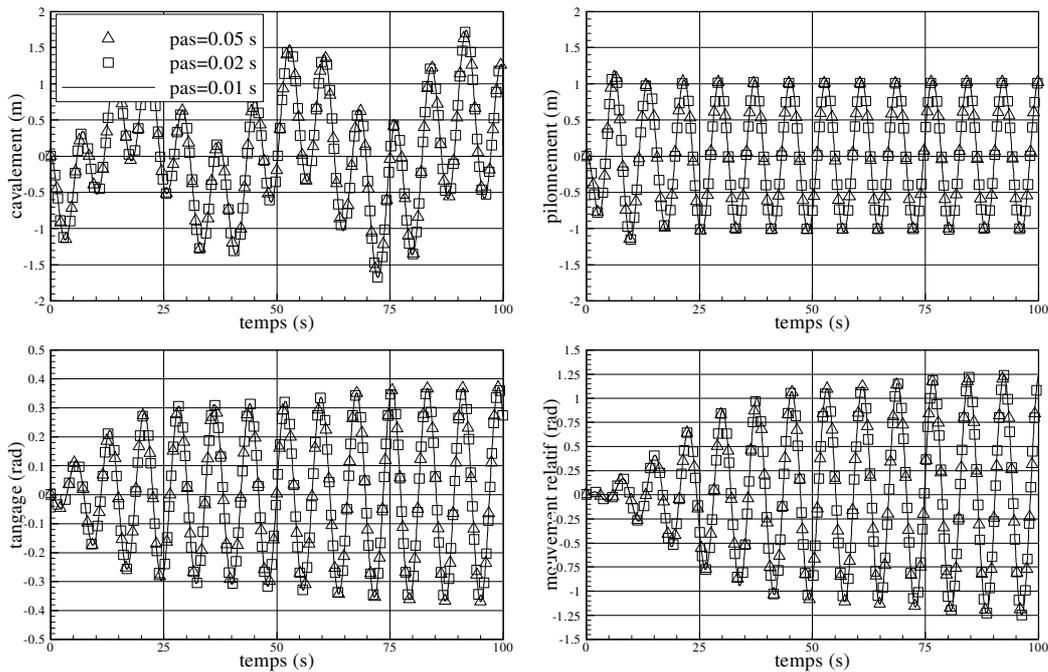


FIG. 4.2 – Simulations des mouvements pour différents pas de temps. La période de la houle vaut 8 secondes et l’amplitude 1 mètre.

La figure (4.3) présente une comparaison entre la fonction du transfert du système linéarisé calculé dans le domaine fréquentiel, et l’amplitude des mouvements en régime établi, avec le modèle linéarisé. L’accord est excellent et nous permet de valider à la fois le modèle temporel et la méthode de calcul et d’identification des efforts de radiation.

Cependant, nous n’avons pas porté sur cette figure le mouvement de cavalemt, car le problème déjà évoqué d’amortissement des oscillations lentes ne nous permet pas d’obtenir le régime établi. L’influence sur la puissance absorbée semble cependant être quasi nulle et nous permet raisonnablement d’espérer que cette difficulté peut être négligé pour le calcul du dimensionnement.

### 4.2.3 Modèle 2DHLMNlt.

Dans ce modèle, la houle est à nouveau supposée se propager dans la direction principale du flotteur, mais par contre l’amplitude des mouvements est à présent quelconque. La codification de ce modèle signifie ainsi mouvements plans (2D), hydrodynamique linéaire (HL), mécanique **non** linéaire (MNL) et domaine temporel (t). L’équation différentielle qui lui correspond est l’équation (3.53).

L’intérêt de ce modèle est qu’il reste consistant même lorsque l’amplitude des oscillations du pendule devient grande. Il faut toutefois prendre garde à ce que les mouvements du flotteur restent petits, car la théorie hydrodynamique reste la théorie potentiel ici.

Sur la figure (4.4), on a porté une comparaison des fonctions de transfert issues d’un calcul fréquentiel et d’un calcul avec le modèle 2DHLMNlt, mais avec une amplitude de houle suffisamment faible pour que les effets non linéaires soient négligeables. Les résultats sont

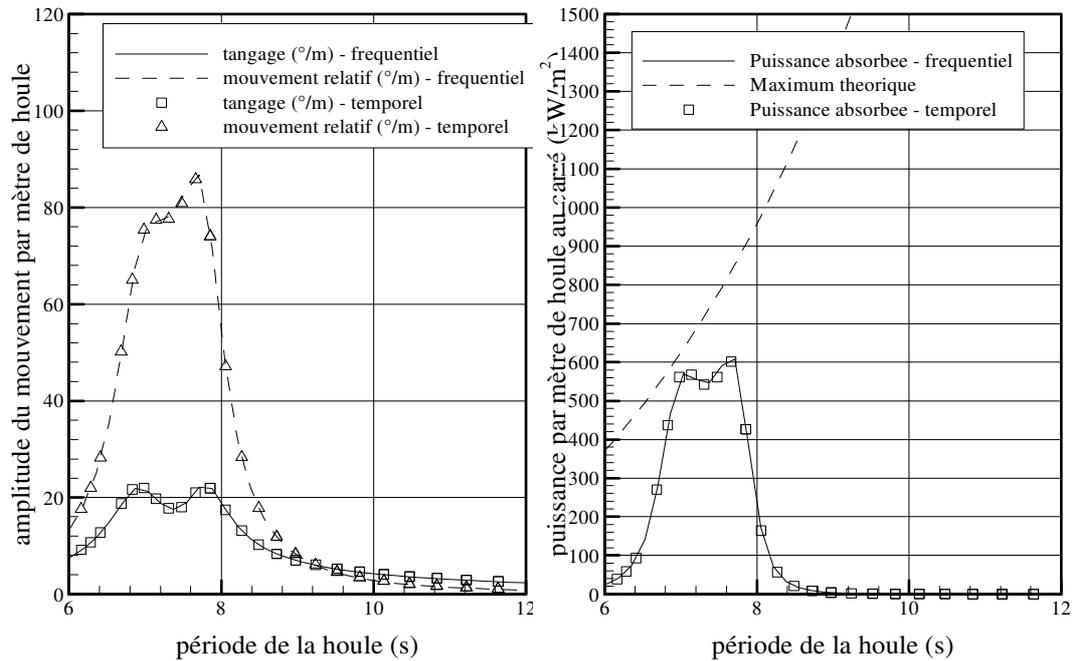


FIG. 4.3 – Comparaison des fonctions de transfert calculée avec le modèle temporel et le modèle fréquentiel.

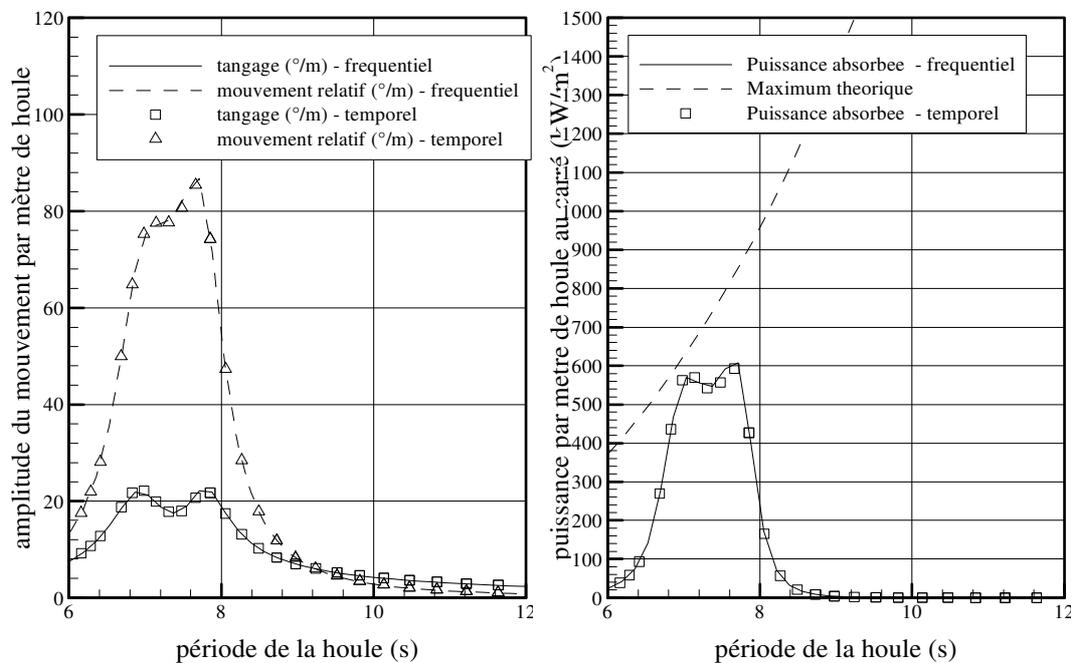


FIG. 4.4 – Comparatif des fonctions de transfert obtenues avec le modèle fréquentiel et non linéaire. Pour le modèle non linéaire, l'amplitude de la houle vaut 0.1 mètres.

identiques à ceux obtenus avec le modèle linéaire.

#### 4.2.4 Modèles 3DHLMLt et 3DHLMNLt.

Dans ces modèles, la direction de propagation de la houle est à présent quelconque, de sorte que le flotteur oscille selon ses six degrés de liberté. Comme pour les modèles plans, les modèles tridimensionnels (codification 3D) permettent l'intégration des équations du mouvement avec les équations de la mécanique linéarisée ou non, équations (3.52) et (3.51). Les simulations peuvent être effectuées indifféremment avec un pendule à 1 ou 2 degrés de liberté.

La figure (4.5) présente une comparaison des mouvements du système en réponse à une houle monodirectionnelle de période 8 secondes et d'amplitude 1 mètre dans l'axe du flotteur. Le calcul a été effectué avec les modèles 2DHLMLt et 3DHLMNLt.

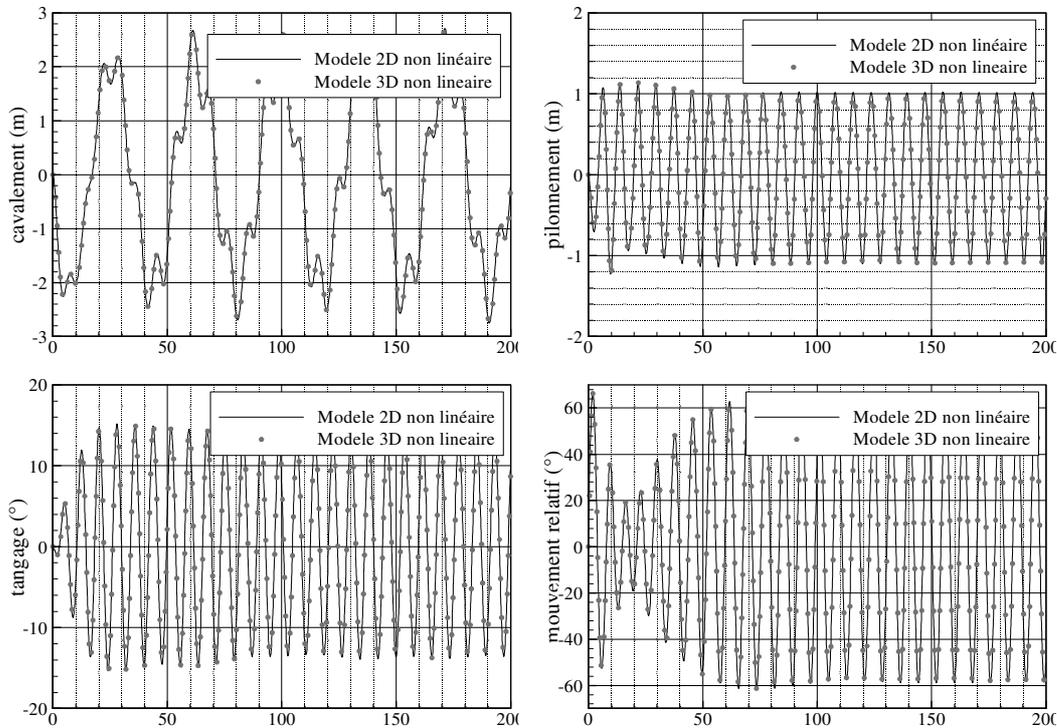


FIG. 4.5 – Simulations des mouvements de SEAREV soumis à une houle de face de période 8 secondes et d'amplitude 1 mètre. Comparaison des modèles 2D et 3D non linéaires.

Les mouvements se superposent parfaitement, et valident en partie l'implémentation en FORTRAN de l'équation des mouvements tridimensionnelles non linéaires (3.51).

En modifiant légèrement le modèle 2DHLNLt ( $\theta \rightarrow -\varphi, \alpha \rightarrow -\beta$ ), la réponse du SEAREV peut être simulé pour une houle de côté avec le modèle 2D non linéaire. La figure (4.6) présente ainsi les mouvements du SEAREV résultant d'une telle simulation lorsqu'il est soumis à une houle de côté monodirectionnelle et régulière, d'amplitude 1 mètre et de période 8 secondes. Le modèle 3D utilisé pour comparaison est le modèle 3DHLMLt avec pendule à deux degrés de liberté.

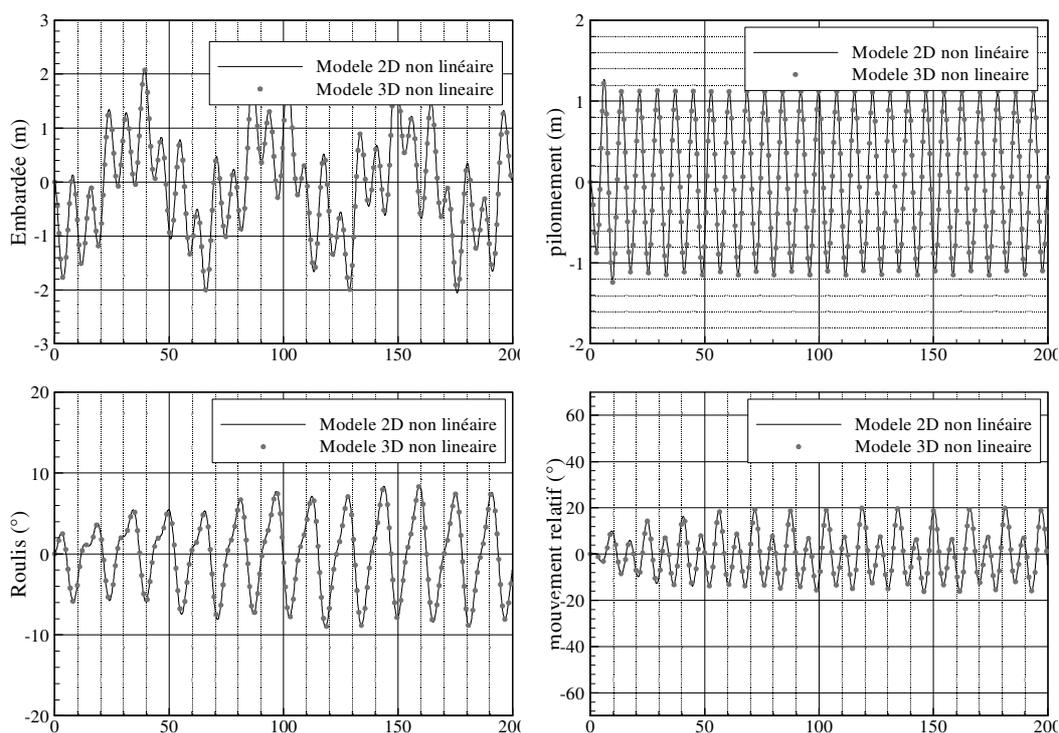


FIG. 4.6 – Comparaison de simulations de mouvements pour une houle de côté.

Une fois encore, la superposition des mouvements calculés avec les deux modèles est excellente, et valide le modèle. Le lecteur pourra considérer avec intérêt le caractère hautement non linéaire de la réponse sur les mouvements de roulis et mouvement relatif.

## 4.3 Prédiction de la production d'énergie.

### 4.3.1 Prédiction initiale avec le modèle plan linéaire.

Considérons à présent des cas de houle aléatoire, mais toujours cylindrique. La figure (4.7) présente les matrices correspondant aux réponses du système pour différents états de mer. Pour diminuer le biais induit par le tirage de phases aléatoires pour la houle incidente, la valeur de chaque coefficient des matrices a été obtenue à partir de la moyenne de cinq simulations de 360 secondes chacune.

Sur la matrice en haut à gauche est portée la puissance absorbée par le système. Il apparaît que l'efficacité du système est la plus grande pour les mers dont la période de pic est comprise entre 7 et 9 secondes, ce qui est consistant avec sa fonction de transfert. Dans les petites mers ( $T_1 < 5s$ ), l'efficacité du système s'effondre rapidement. Cependant, le peu d'énergie présente dans ce cas permet de relativiser ce point. Dans les mers plus formées ( $T_1 > 10s$ ), l'efficacité du système se dégrade à mesure que la période de pic de la houle augmente, malgré l'augmentation de la puissance linéique ( $P_I \simeq 0.42T_1H_{1/3}^2$ ). Les isocontours de puissance ont ainsi un comportement quasi linéaire avec la période.

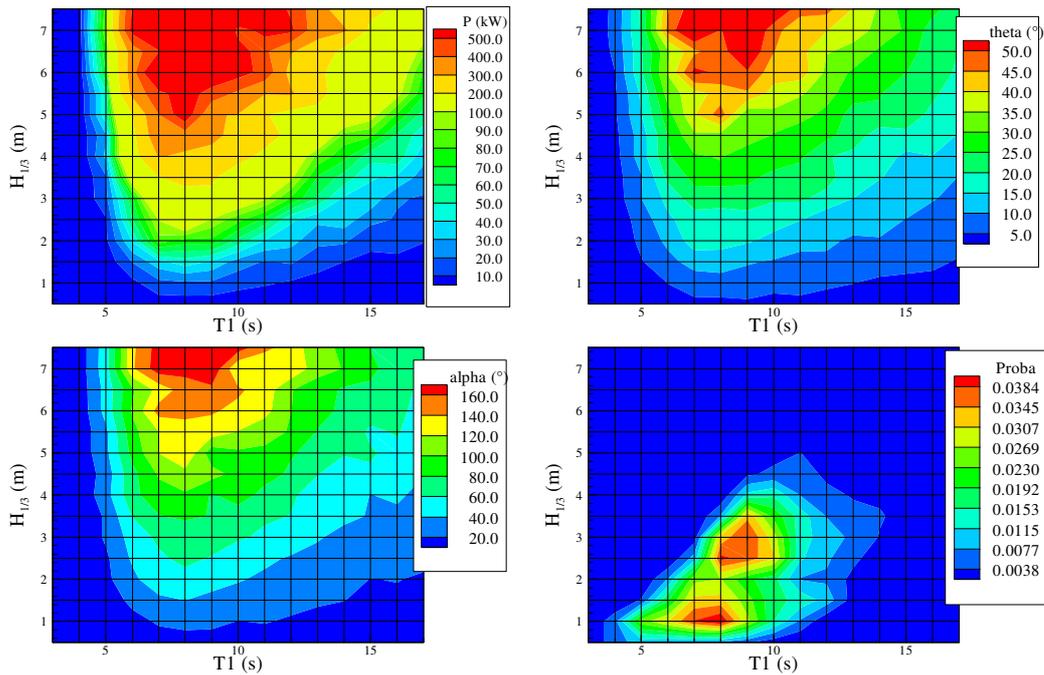


FIG. 4.7 – Matrices de réponse de SEAREV à différents états de mer.

Les matrices en haut à droite et en bas à gauche présente la moyenne des maxima d'amplitude de mouvement rencontrés sur chacune des cinq simulations. Elles fournissent ainsi un bon indicateur de l'amplitude des mouvements et permettent de déterminer les zones de consistance du modèle. Sur la matrice présentant le tangage, on constate que l'amplitude de ce mouvement reste limitée ( $< 60^\circ$ ) et dans les domaines de validité du modèle tant que la hauteur significative ne dépasse pas 3 mètres. Par contre, en ce qui concerne le mouvement relatif, les amplitudes deviennent rapidement excessive avec la hauteur apparente pour le modèle linéaire. Les effets non linéaires sur la mécanique du pendule ne seront ainsi certainement pas négligeables.

Considérons maintenant le site de l'île d'Yeu. En appliquant sur la matrice de puissance absorbée, matrice en haut à gauche sur la figure (4.7), la grille de probabilité d'occurrence des différents états de mer à l'île d'Yeu, matrice en bas à droite sur la figure (4.7), on peut déterminer par sommation pondérée la quantité d'énergie générée annuellement par le système sur ce site. Pour le système SEAREV considéré, avec la modélisation adoptée ci-dessus, la prédiction de production d'énergie vaut environ 700 MWh par an.

Ce résultat doit cependant être considéré avec prudence, car le calcul n'est consistant vis à vis des hypothèses du problème que dans les états de mer faiblement énergétiques. C'est un ordre de grandeur, et il doit être traité comme tel.

### 4.3.2 Influence des non linéarités dans la mécanique.

A ce point de l'étude, il est intéressant de quantifier l'influence des non linéarités issues de la mécanique. Pour cela, nous avons porté sur la figure (4.8) les fonctions de transfert du système calculées à partir de l'analyse dans le domaine fréquentiel avec l'amplitude des

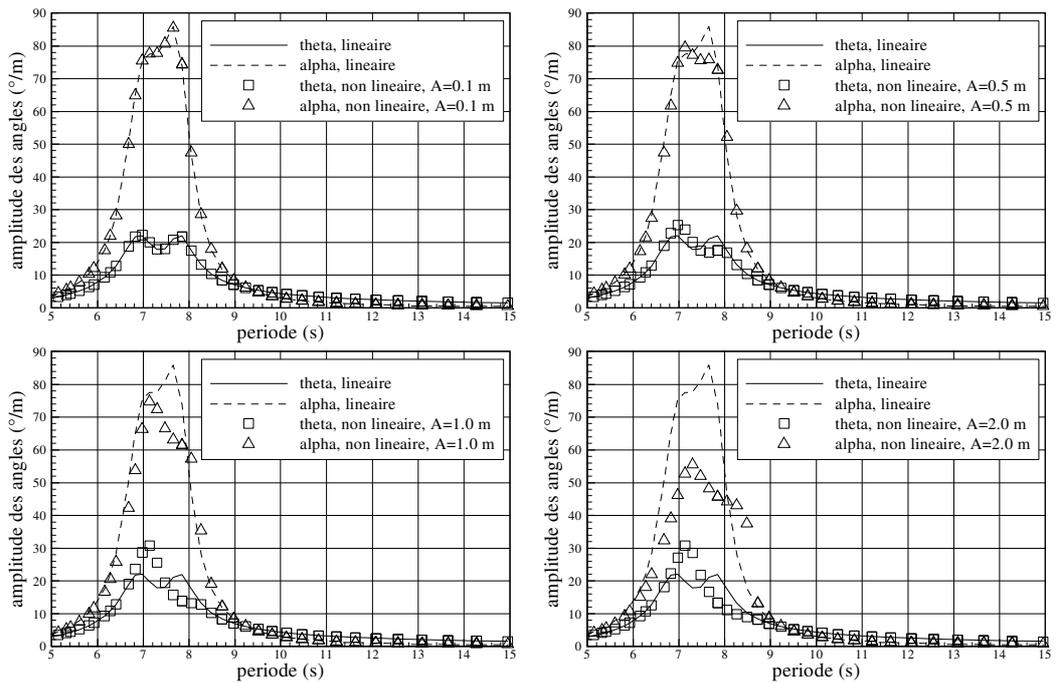


FIG. 4.8 – Comparaison de l'évolution des fonctions de transfert linéaire et non linéaires pour différentes amplitudes de houle.

mouvements obtenue en régime établi prédite par le modèle 2DHLMNLt.

Quatre amplitudes pour la houle incidente ont été considérées : 0.1 m, 0.5 m, 1.0 m et 2.0 m. Pour chacune d'entre elles, nous avons déterminés par simulations temporelles avec le modèle 2DHLMNLt l'amplitude du mouvement en régime établi. Ces valeurs ont ensuite été divisées par l'amplitude de la houle afin de pouvoir les comparer avec la fonction de transfert issue du modèle fréquentiel.

Sur la figure en haut à gauche, on constate ainsi que pour une amplitude de houle de 0.1 mètres, les effets non linéaires sont négligeables mais, figure en haut à droite, ils apparaissent dès les amplitudes de houle de 0.5 mètres. Sur le mouvement de tangage, l'amplitude au premier pic est amplifiée, alors qu'elle est diminuée au second. Sur le mouvement relatif, l'amplitude du mouvement est diminué. A mesure que l'amplitude de la houle augmente, figures du bas, l'intensité de ces effets non linéaires augmentent.

Comme on peut le voir sur la figure (4.9), ces effets ont une influence négative sur la puissance absorbée. De même, sur chacune de ces figures est portée la puissance absorbée lors des simulations temporelles divisée par le carré de l'amplitude de la houle considérée. Même si on constate un très léger élargissement de la bande passante du système pour les houles de plus forte cambrure, les effets non linéaires ont tendance à réduire l'efficacité du système.

La figure (4.10) correspond au scatter diagram des réponses de SEAREV à différents états de mer avec le modèle 2DHLMNLt, chaque coefficient étant obtenu de la même manière que dans le cas de calcul en houle aléatoire avec le modèle 2DHLMNLt :

- La puissance absorbée est la moyenne de la puissance absorbée par le système sur cinq simulations temporelles de 360 secondes. Par rapport aux résultats du modèle linéaire, la puissance absorbée diminue surtout là où la production était importante. En dessous

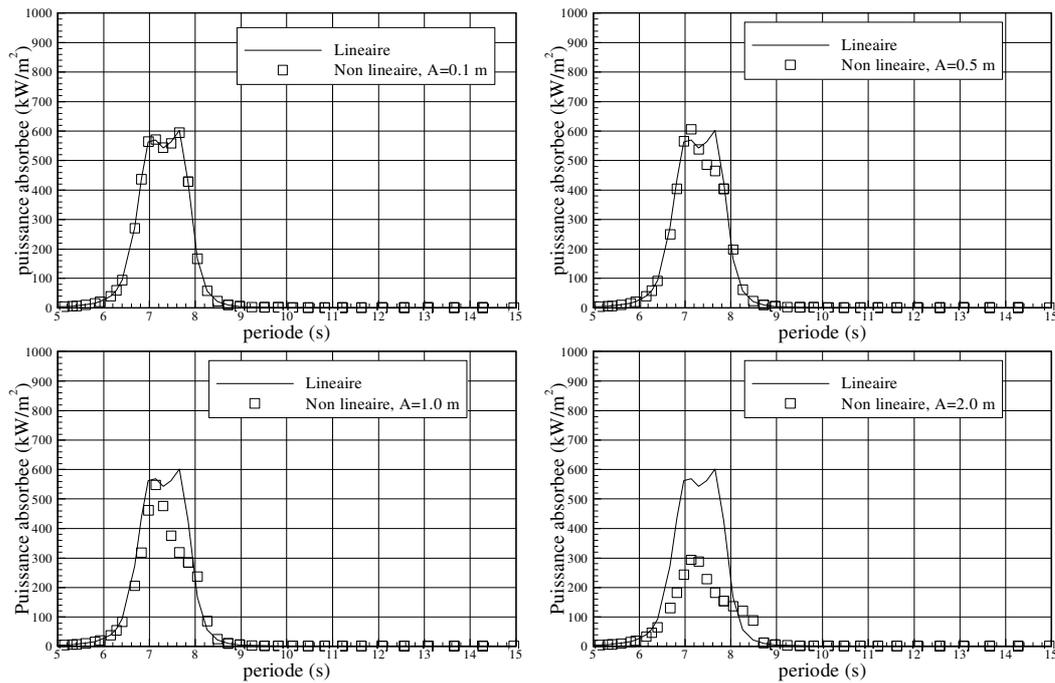


FIG. 4.9 – Comparaison des fonctions puissance absorbée avec les modèles 2D linéaires et non linéaires en fonction de la cambrure de la houle.

de 300 kW, les effets non linéaires se font peu sentir.

- Les figures sur les amplitudes de mouvement  $\alpha$  et  $\theta$  sont la moyenne des maximum d’amplitude de mouvement sur chacune des cinq simulations. Même remarque, les effets non linéaires sont d’autant plus important que les mouvements sont grands. On remarquera sur la figure présentant le mouvement relatif que le modèle temporel prédit toujours des amplitudes de mouvement grande pour le pendule, supérieure à  $90^\circ$ .
- La dernière figure est la probabilité de chaque état de mer à l’île d’Yeu.

La prédiction de la production annuelle d’énergie vaut avec ce modèle 650 MWh. Ce modèle prédit donc une production inférieure de 7 % au modèle linéaire.

Cependant, il faut émettre ici les mêmes réserves que dans le cas précédent. En effet, les différences entre le modèle linéaire et non linéaire se font surtout sentir dans les cas de houle très énergétique. De plus, elles se manifestent pour les grandes amplitudes de mouvement en tangage, qui mettent en défaut l’hypothèse d’hydrodynamique linéarisée. Donc de même, la valeur de la prédiction de la production est un ordre de grandeur.

Nous retiendrons donc simplement que :

- comme on pouvait s’y attendre, les effets non linéaires dans la mécanique, ont un effet défavorable, car limitant l’amplitude des mouvements.
- l’ordre de grandeur de la prédiction d’énergie reste le même, donc l’effet négatif des termes non linéaires reste limité, en tout cas pour ceux provenant des non linéarités dans la cinématique.

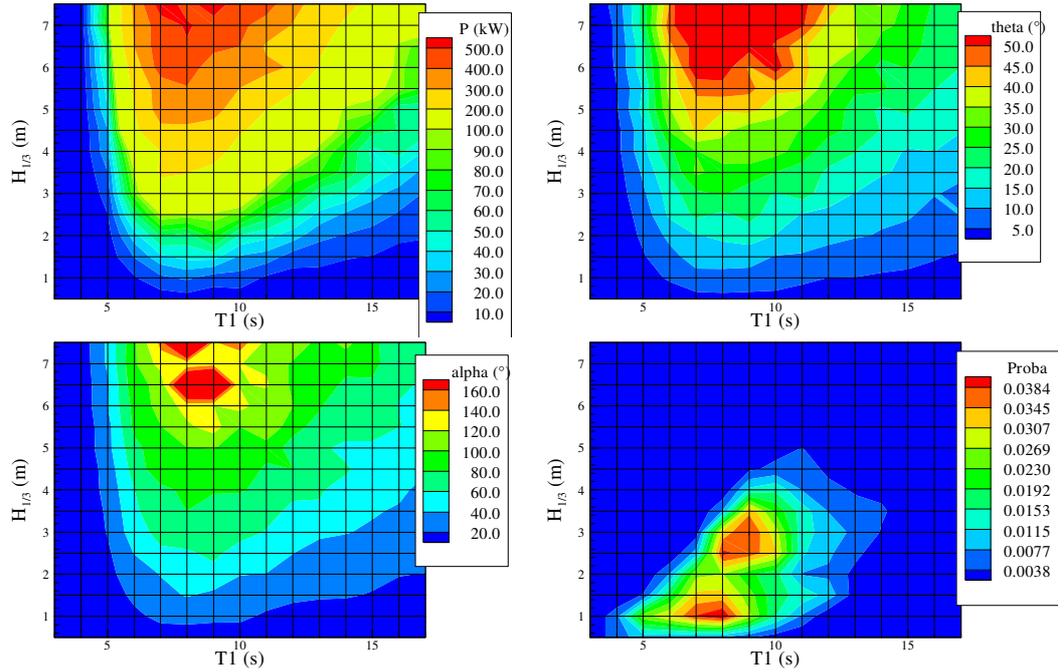


FIG. 4.10 – Matrices de réponses de SEAREV à différents cas de houle aléatoire calculées avec le modèle 2D non linéaire.

### 4.3.3 Influence de l'étalement directionnel de la houle.

#### La houle directionnelle.

**Modèle.** Une meilleure modélisation de la houle réelle peut être obtenue en considérant un spectre de houle directionnelle  $S(\omega, \theta)$ , où  $\omega$  est la pulsation et  $\theta$  la direction de la vague élémentaire considéré en lieu et place du spectre fréquentiel de houle plane  $S(\omega)$ .

Classiquement [55], le spectre bidimensionnel est exprimé comme le produit du spectre fréquentiel  $S(\omega)$  par une fonction de répartition angulaire  $D(\omega, \theta)$ .

$$S(\omega, \theta) = S(\omega) D(\omega, \theta) \quad (4.1)$$

avec :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} D(\omega, \theta) d\theta = 1 \quad (4.2)$$

Dans la pratique, on utilise pour  $D$  la fonction en cosinus introduite par Longuet-Higgins [53] :

$$D(\theta) = D_0 \cos^{2s} \left( \frac{\theta - \bar{\theta}}{2} \right) \quad |\theta - \bar{\theta}| < \pi \quad (4.3)$$

avec  $D_0$  telle que la condition (4.2) soit respectée.

Comme les vagues que nous considérons sont générées par le vent, le paramètre  $s$  est pris égal à 10 [46]. Sur la figure (4.11), nous avons porté le spectre directionnel en coordonnées polaires d'une houle de direction principale  $\beta = 0^\circ$ , de période de pic 9 secondes et de hauteur significative 2.5 mètres avec  $s = 10$ .

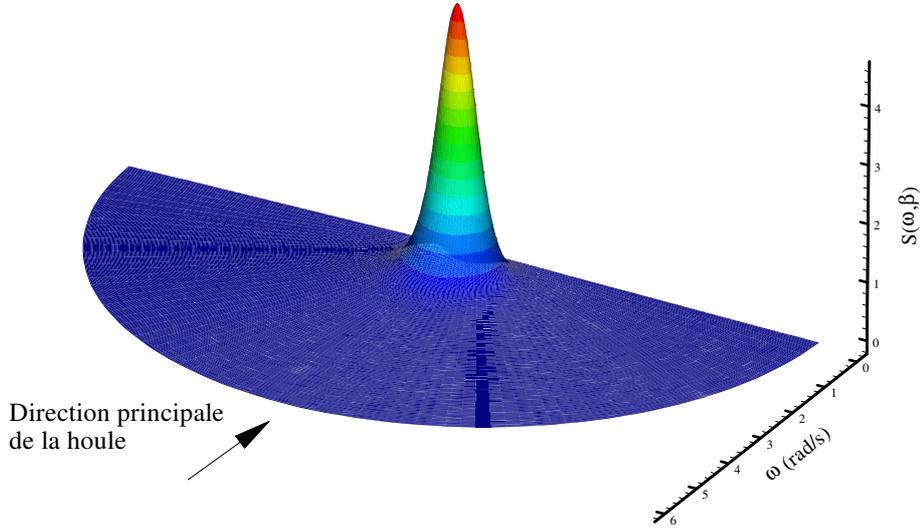


FIG. 4.11 – Spectre directionnel d’une houle de direction principale  $\beta = 0^\circ$ ,  $T_1 = 9s$ ,  $H_{1/3} = 2.5m$  et  $s = 10$ .

**Simulation numérique de houle directionnelle.** Pour simuler numériquement une houle directionnelle, on suppose qu’elle est représentée par une double somme de vagues élémentaires monochromatiques et unidirectionnelles. La déformée de surface libre en un point  $(x, y)$  est alors donnée au cours du temps par :

$$\eta(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N_\omega} \sum_{j=1}^{N_\theta} a(\omega_i, \theta_j) \sin(k_i(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j) - \omega_i t + \varphi_{ij}) \quad (4.4)$$

avec  $a(\omega_i, \theta_j)$  tel que :

$$a^2(\omega_i, \theta_j) = 2S(\omega_i, \theta_j) \Delta\omega \Delta\theta \quad (4.5)$$

et  $\varphi_{ij}$  des phases tirées aléatoirement.

### Calcul des efforts d’excitation.

**Approche classique.** Le calcul de la partie linéaire des efforts s’exerçant sur un corps dans la houle se fait classiquement en additionnant l’ensemble des efforts élémentaires associées à chaque composante de la houle directionnelle, définie par  $(\omega_i, \theta_j, a(\omega_i, \theta_j), \varphi_{ij})$ .

Ainsi, pour  $\omega_i$  et  $\theta_j$  donnés, des codes aux éléments frontières comme AQUAPLUS ou WAMIT donnent les efforts d’excitation  $\mathbf{F}_{ex}(\omega_i, \theta_j)$  sur le corps dans le domaine fréquentiel. De part la linéarité de la modélisation, l’effort total dans le domaine temporel s’obtient alors

par :

$$\mathbf{F}_{ex}(t) = \sum_{i=1}^{N_\omega} \sum_{j=1}^{N_\theta} \Im \left( a(\omega_i, \theta_j) \mathbf{F}_{ex}(\omega_i, \theta_j) e^{i(k_i(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j) - \omega_i t + \varphi_{ij})} \right) \quad (4.6)$$

L'application de cette dernière formule dans le contexte d'une simulation dans le domaine temporel sous entend que le corps est lâché à l'instant initial dans une houle établie depuis une durée infinie.

**Approche alternative.** Une approche alternative consiste à utiliser la Méthode des Déformations Généralisées exposée dans le chapitre 2 pour calculer les efforts d'excitation.

Pour chaque direction élémentaire de la houle  $\theta_j$ , on définit le train de houle incidente à l'origine :

$$\eta_j(t) = \sum_{i=1}^{N_\omega} a(\omega_i, \theta_j) \sin(-\omega_i t + \varphi_{ij}) \quad (4.7)$$

On procède alors au calcul des réponses impulsionnelles  $\mathbf{K}_{0,j}(t)$  et  $\mathbf{K}_{7,j}(t)$  suivant les formules (2.25) et (2.34) pour chaque direction élémentaire de la houle. Le calcul de l'effort total s'obtient alors en additionnant les efforts d'excitation  $\mathbf{F}_{I+D,j}(t)$  obtenus sur chaque direction par la formule (2.20) :

$$\mathbf{F}_{ex}(t) = \sum_{j=1}^{N_\theta} \mathbf{F}_{I+D,j}(t) \quad (4.8)$$

C'est cette approche que nous avons utilisée pour le calcul des efforts en houle directionnelle.

## Résultats.

Le modèle utilisé pour la simulation des mouvements est le modèle 3DHLMLt avec un pendule à un seul degré de liberté. La figure (4.12) présente les simulations des mouvements du système dans le cas d'une houle de spectre directionnel et dans le cas d'une houle cylindrique. Dans les deux cas, la période de pic du spectre vaut 9 secondes et la hauteur significative 2.5 mètres.

Quel que soit le mouvement considéré, les dynamiques des réponses en mouvement sont très similaires. La seule différence qualitative réside dans le fait que dans le cas du spectre directionnel, le système est excité selon ses modes transverses, figure (4.13). Selon ces modes, la réponse reste faible. On notera sur le mouvement de lacet une oscillation à basse fréquence. Comme pour le mouvement de cavement, il s'agit là de la résonance associé à l'ancrage. La raideur d'ancrage en lacet étant faible, la pulsation de résonance en lacet se trouve à grande période, là où l'amortissement hydrodynamique est très faible. Il en résulte un régime transitoire très lent à se dissiper.

Afin d'évaluer quantitativement l'influence de la directionnalité de la houle, nous avons procédé à six simulations de la réponse du système sur 200 secondes à une houle aléatoire directionnelle de période de pic 9 secondes et de hauteur significative égale à 2.5 mètres. Le tableau suivant présente la puissance moyenne absorbée sur chaque essai.

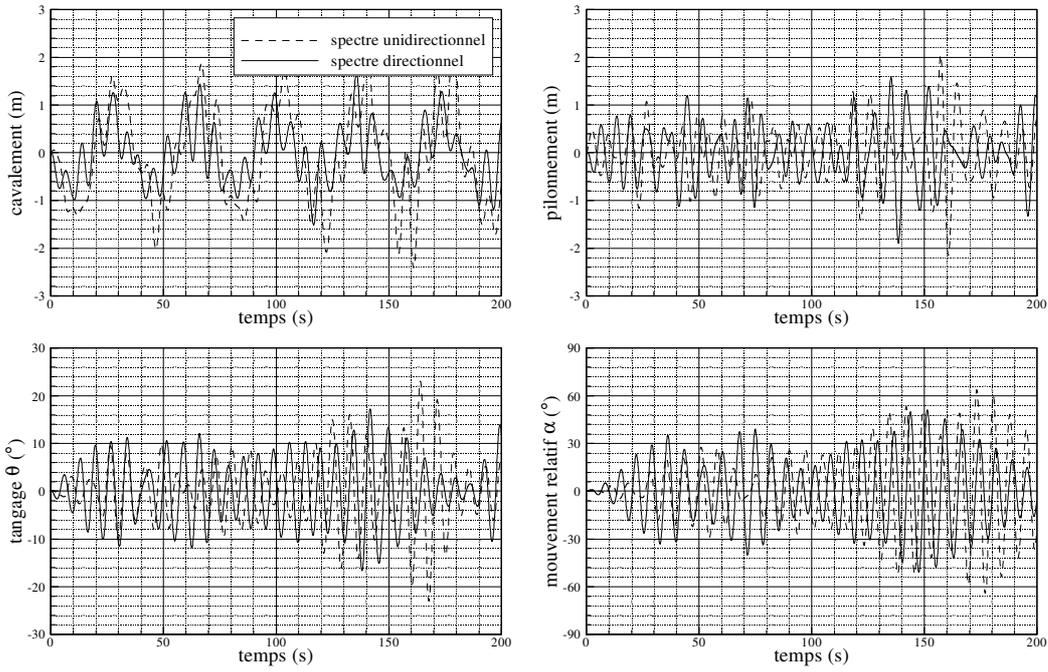


FIG. 4.12 – Comparatif de la dynamique du système en houle aléatoire lorsque le spectre est et n'est pas directionnel

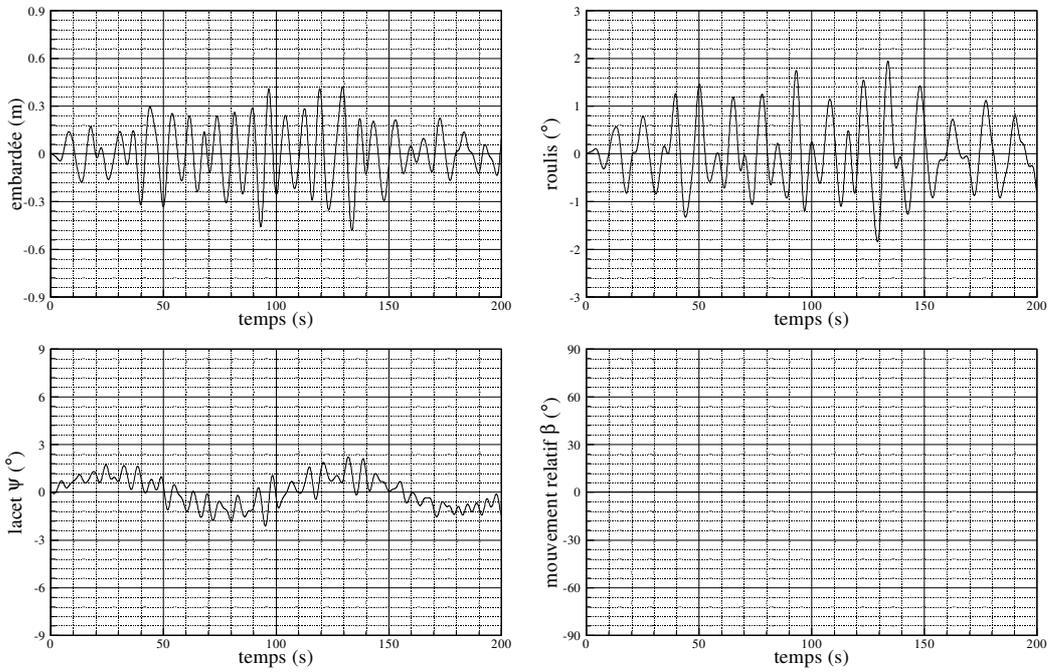


FIG. 4.13 – Réponses des modes transverses dans le cas d'un spectre de houle directionnel.

essai	1	2	3	4	5	6
$\langle P \rangle$ (kW)	68	82	56	51	132	43

La dispersion est importante d'un essai à l'autre, de part la variété des tirages de phase aléatoire. Cependant, il apparaît clairement que l'étalement directionnel de la houle a une influence négative sur la production d'énergie. Alors que le modèle linéaire 2DHLMLt prédit environ 95 kW en moyenne pour un tel état de mer, le niveau de puissance est ici plus proche de 70 kW, soit une perte de 26%.

Ce quart de puissance en moins est perdu dans les mouvements transverses du système. Initialement, le système avec un pendule à deux degrés de liberté avait été envisagé afin de pouvoir capter l'énergie présente dans les mouvements latéraux. Cette solution, séduisante sur le papier, doit à mon avis être modulée par des considérations de faisabilité. Ainsi, on ne peut imaginer l'ajout de ce second degré de liberté sans compliquer et considérablement fragiliser les mécanismes et réduire à néant les points forts du système que sont sa robustesse et sa simplicité? Souvenons-nous que l'ordre de grandeur de la masse du pendule est plusieurs centaines de tonnes. L'investissement associé à ce second degré de liberté est donc très certainement beaucoup plus important que le gain qu'il peut éventuellement apporter, et pour cette raison, cette solution ne devrait pas être retenue.



# Deuxième partie

## Contrôle.



# Chapitre 5

## Résultats sur l'absorption d'énergie par SEAREV.

Le contrôle optimal dans la récupération de l'énergie des vagues par un système à un ou plusieurs degrés de liberté a tout d'abord été étudié par Budal [10], puis plus systématiquement par Evans [31] et Falnes [32]. En 2002, Falnes a publié une compilation de ces travaux dans [33]. Une large part de ce chapitre en reprend les résultats, adaptés à la problématique de SEAREV.

### 5.1 Contrôle optimal des récupérateurs d'énergie des vagues.

#### 5.1.1 Puissance absorbée par un flotteur à 6 degrés de liberté.

Considérons un flotteur quelconque, animé d'un mouvement harmonique selon ses six degrés de liberté. On note  $\hat{v}$  l'amplitude complexe du signal harmonique temporel  $v(t)$ . Ainsi  $v(t) = \Re(\hat{v}e^{i\omega t})$ . En théorie linéarisée et dans le domaine fréquentiel, l'amplitude complexe de la force généralisée exercée selon le degré de liberté  $i$  du système,  $i = 1, 6$  est donnée par :

$$\hat{F}_{u,i} = \hat{F}_{ex,i} - \sum_{j=1,6} Z_{ij}\hat{u}_j \quad (5.1)$$

où  $\hat{F}_{ex,i}$  est l'amplitude complexe de la force d'excitation due à la houle incidente, et  $\sum_{j=1,6} Z_{ij}\hat{u}_j$  est le produit de l'impédance du système multiplié par sa vitesse généralisée. Ce terme regroupe les efforts de radiation, de raideur hydrostatique et d'ancrage.

La puissance moyenne absorbée par le flotteur selon le degré de liberté  $i$  est fournie par :

$$P_i = \frac{1}{T} \int_0^{T \rightarrow +\infty} \Re(\hat{F}_{u,i}e^{i\omega t}) \Re(\hat{u}_i e^{i\omega t}) dt \quad (5.2)$$

En exprimant les parties réelles sous forme de demi-sommes, et en développant :

$$\begin{aligned}
 P_i &= \frac{1}{4T} \int_0^{T \rightarrow +\infty} \left( \widehat{F}_{u,i} e^{i\omega t} + \widehat{F}_{u,i}^* e^{-i\omega t} \right) \left( \widehat{u}_i e^{i\omega t} + \widehat{u}_i^* e^{-i\omega t} \right) dt \\
 P_i &= \frac{1}{4T} \int_0^{T \rightarrow +\infty} \left( \widehat{F}_{u,i} \widehat{u}_i^* + \widehat{F}_{u,i}^* \widehat{u}_i + \widehat{F}_{u,i} \widehat{u}_i e^{2i\omega t} + \widehat{F}_{u,i}^* \widehat{u}_i^* e^{2i\omega t} \right) dt
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

La moyenne temporelle des termes évoluant à la pulsation  $2\omega$  est nulle, donc il reste :

$$P_i = \frac{1}{4} \left( \widehat{F}_{u,i} \widehat{u}_i^* + \widehat{F}_{u,i}^* \widehat{u}_i \right) \tag{5.4}$$

ou encore, d'après l'équation (5.1) :

$$P_i = \frac{1}{4} \left( \widehat{F}_{ex,i} \widehat{u}_i^* + \widehat{F}_{ex,i}^* \widehat{u}_i \right) - \sum_{j=1,6} \left( Z_{ij} \widehat{u}_j \widehat{u}_i^* + Z_{ij}^* \widehat{u}_j^* \widehat{u}_i \right) \tag{5.5}$$

Soit  $P_e$  la puissance d'excitation :

$$P_e = \frac{1}{4} \sum_{i=1,6} \left( \widehat{F}_{ex,i} \widehat{u}_i^* + \widehat{F}_{ex,i}^* \widehat{u}_i \right) = \frac{1}{4} \left( \widehat{\mathbf{F}}_{ex}^t \widehat{\mathbf{u}}^* + \widehat{\mathbf{F}}_{ex} \widehat{\mathbf{u}} \right) \tag{5.6}$$

Soit  $P_r$  la puissance rayonnée, soit  $\mathbf{C}_A$  la matrice des coefficients d'amortissement hydrodynamiques :

$$\begin{aligned}
 P_r &= \frac{1}{4} \sum_{i=1,6} \sum_{j=1,6} \left( Z_{ij} \widehat{u}_j \widehat{u}_i^* + Z_{ij}^* \widehat{u}_j^* \widehat{u}_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1,6} \sum_{j=1,6} C_{Aij} \widehat{u}_j \widehat{u}_i^* \\
 P_r &= \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{u}}^{*t} \mathbf{C}_A \widehat{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{u}}^* \mathbf{C}_A \widehat{\mathbf{u}}^t
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

La puissance totale absorbée par le système est la somme des puissances absorbées selon chaque degré de liberté. D'après l'équation (5.5), elle est alors égale à la soustraction de la puissance d'excitation moins la puissance rayonnée :

$$P = \sum_{i=1,6} P_i = P_e - P_r \tag{5.8}$$

Dans les récupérateurs d'énergie des vagues basés sur les mouvements de corps flottants, la puissance primaire convertie est donc égale à la différence entre la puissance d'excitation et la puissance rayonnée. D'après l'équation (5.6), la puissance d'excitation est une fonction linéaire en module de la vitesse du corps. Ainsi, si la vitesse du flotteur est nulle, le système n'absorbe pas d'énergie. D'un autre côté, la puissance rayonnée est une fonction quadratique de la vitesse. Asymptotiquement, quand la vitesse tend vers l'infini, la puissance rayonnée tend vers l'infini plus vite que le terme de puissance incidente et la différence devient négative, c'est à dire que le système fournit de l'énergie à la mer, ce qui serait un comble pour un récupérateur de l'énergie des vagues. Il existe donc entre ces deux extrêmes une vitesse intermédiaire qui correspond au maximum de puissance absorbée, que nous allons nous attacher à déterminer

dans la section suivante.

### 5.1.2 Maximum de puissance absorbée.

Soit le vecteur :

$$\boldsymbol{\delta} = \widehat{\mathbf{u}} - \widetilde{\mathbf{u}} \quad (5.9)$$

avec  $\widetilde{\mathbf{u}}$  une solution de l'équation :

$$\mathbf{C}_A \widetilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{F}}_{ex} \quad (5.10)$$

Comme la matrice d'amortissement hydrodynamique est symétrique, elle est égale à sa transposée. Alors, d'après l'équation (5.8),

$$P = \frac{1}{4} \left( \widehat{\mathbf{F}}_{ex}^t \widehat{\mathbf{u}}^* + \widehat{\mathbf{F}}_{ex}^{t*} \widehat{\mathbf{u}} \right) - \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{u}}^* \mathbf{C}_A \widehat{\mathbf{u}}^t \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \widehat{\mathbf{F}}_{ex}^t \widetilde{\mathbf{u}}^* + \frac{1}{4} \widehat{\mathbf{F}}_{ex}^{t*} \widetilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{4} \widehat{\mathbf{F}}_{ex}^t \boldsymbol{\delta}^* + \frac{1}{4} \widehat{\mathbf{F}}_{ex}^{t*} \boldsymbol{\delta} \\ &\quad - \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{u}}^{t*} \mathbf{C}_A \widetilde{\mathbf{u}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^{t*} \mathbf{C}_A \widetilde{\mathbf{u}} - \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{u}}^{t*} \mathbf{C}_A \boldsymbol{\delta} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^* \mathbf{C}_A \boldsymbol{\delta}^t \end{aligned} \quad (5.12)$$

Or dans cette équation, tous les termes sont des scalaires et sont donc égaux à leurs transposées. Ainsi :

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^{t*} \mathbf{C}_A \widetilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{u}}^t \mathbf{C}_A \boldsymbol{\delta}^* \quad (5.13)$$

De plus, en transposant l'équation (5.10), on obtient :

$$\widetilde{\mathbf{u}}^t \mathbf{C}_A = \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{F}}_{ex}^t \quad (5.14)$$

Constatons alors dans l'équation (5.12), le terme 2 s'annule avec le terme 5, le terme 3 avec le terme 6 et le terme 4 avec le terme 7. Il reste :

$$P = \frac{1}{4} \widehat{\mathbf{F}}_{ex}^t \widetilde{\mathbf{u}}^* - \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^* \mathbf{C}_A \boldsymbol{\delta}^t \quad (5.15)$$

La puissance rayonnée est toujours positive, donc nécessairement  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^* \mathbf{C}_A \boldsymbol{\delta}^t \geq 0$ . La puissance maximum que peut absorber le système est alors :

$$P_{\max} = \frac{1}{4} \widehat{\mathbf{F}}_{ex}^t \widetilde{\mathbf{u}}^* \quad (5.16)$$

et est atteinte lorsque  $\widehat{\mathbf{u}}$  est solution de (5.10).

D'après l'équation (5.1), la puissance maximum peut alors être absorbée à condition d'assurer par l'intermédiaire d'un système de contrôle :

$$\widehat{\mathbf{F}}_u = -\mathbf{Z}^* \widetilde{\mathbf{u}} \quad (5.17)$$

Ce type de contrôle est connu sous le nom de contrôle réactif ou contrôle complexe conjugué. Il pose un problème technique de réalisation car il suppose d'apporter de l'énergie au cours de

chaque cycle. Les rendements des convertisseurs doivent donc être excellents pour ne pas voir le gain en énergie apporté par le contrôle être entièrement consommé par les actionneurs.

## 5.2 Equations du contrôle optimal pour SEAREV.

Dans cette section, on va s'attacher à déterminer les équations du contrôle optimal pour SEAREV, à partir des résultats plus généraux présentés ci-dessus. On va également montrer que dans le domaine temporel, le contrôleur optimal présente des problèmes de réalisation, car il est anti causal.

### 5.2.1 Domaine fréquentiel.

#### Rappel de l'équation du mouvement.

SEAREV est supposé fonctionner dans le cas nominal. La houle arrive de face et les mouvements du système sont plans à 4 degrés de liberté. En théorie linéarisée, le pilonnement est découplé des autres mouvements et ne contribue pas à la production d'énergie, équation (1.42). Dans le domaine fréquentiel, nous disposons alors des trois équations suivantes pour décrire les mouvements productifs du système :

$$\left[ \left( (m_b + m_p + C_{M11}(\omega)) - \frac{k_x}{\omega^2} \right) i\omega + C_{A11}(\omega) \right] \hat{x}_G \quad (5.18)$$

$$+ [(m_p(d-l) + C_{M15}(\omega)) i\omega + C_{A15}(\omega)] \hat{\theta} + [-m_p l i\omega] \hat{\alpha} = \hat{F}_{ex1} \\ [(m_p(d-l) + C_{M15}(\omega)) i\omega + C_{A15}(\omega)] \hat{x}_G + \quad (5.19)$$

$$\left[ \left( (I_b + I_y + m_p(d-l)^2 + C_{M55}(\omega)) - \frac{K_{H55} - m_p g(d-l)}{\omega^2} \right) i\omega + C_{A55}(\omega) \right] \hat{\theta} \\ + \left[ \left( (I_y + m_p l(l-d)) - \frac{m_p g l}{\omega^2} \right) i\omega \right] \hat{\alpha} = F_{ex5} \\ [-m_p l i\omega] \hat{x}_G + \left[ \left( (I_y + m_p l(l-d)) - \frac{m_p g l}{\omega^2} \right) i\omega \right] \hat{\theta} \quad (5.20) \\ + \left[ \left( (I_y + m_p l^2) - \frac{m_p g l}{\omega^2} \right) i\omega \right] \hat{\alpha} = U(\omega)$$

où le terme  $U(\omega)$  représente l'action (couple) du contrôleur et du convertisseur d'énergie.

**Formulation alternative de l'équation du mouvement.**

Posons :

$$H_1 = (m_b + m_p + C_{M11}(\omega)) - \frac{k_x}{\omega^2} \quad (5.21)$$

$$H_{15} = (m_p(d-l) + C_{M15}(\omega)) \quad (5.22)$$

$$H_5 = \left( (I_b + I_y + m_p(d-l)^2 + C_{M55}(\omega)) - \frac{K_{H55} - m_p g(d-l)}{\omega^2} \right) \quad (5.23)$$

$$H_{5p} = \left( (I_y + m_p l(l-d)) - \frac{m_p g l}{\omega^2} \right) \quad (5.24)$$

$$H_p = \left( (I_y + m_p l^2) - \frac{m_p g l}{\omega^2} \right) \quad (5.25)$$

Les équations (5.18) et (5.19) peuvent alors se mettre sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} C_{A11} & C_{A15} \\ C_{A15} & C_{A55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_G \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} + i\omega \begin{pmatrix} H_1 & H_{15} \\ H_{15} & H_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_G \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{ex1} \\ F_{ex5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -m_p l \\ H_{5p} \end{pmatrix} i\omega \hat{\alpha} \quad (5.26)$$

Notons que les mouvements du flotteur sont ainsi décrits sans faire intervenir explicitement le couple  $U$  exercé par le système de contrôle. L'effet du système de contrôle se fait sentir indirectement sur la dynamique du flotteur à travers le contrôle de la dynamique du mouvement relatif.

Soit :

$$\mathbf{Z}_f = \mathbf{C}_A + \mathbf{H}_f i\omega \quad (5.27)$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -m_p l \\ H_{5p} \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

Alors, en inversant l'équation (5.26), on obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \mathbf{Z}_f^{-1} \mathbf{F}_{ex} - \mathbf{Z}_f^{-1} \mathbf{T} i\omega \hat{\alpha} \quad (5.29)$$

Considérons alors l'équation (5.20), on peut l'écrire :

$$\begin{aligned} H_p i\omega \hat{\alpha} &= U(\omega) + m_p l i\omega \hat{x}_G - H_{5p} i\omega \hat{\theta} \\ H_p i\omega \hat{\alpha} &= U(\omega) - i\omega \mathbf{T}^t \begin{pmatrix} \hat{x}_G \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.30)$$

En combinant avec l'équation (5.29), on obtient :

$$\begin{aligned} H_p i\omega \hat{\alpha} &= U - i\omega \mathbf{T}^t \mathbf{Z}_f^{-1} \mathbf{F}_{ex} - \mathbf{T}^t \mathbf{Z}_f^{-1} \mathbf{T} \omega^2 \hat{\alpha} \\ (i\omega H_p + \omega^2 \mathbf{T}^t \mathbf{Z}_f^{-1} \mathbf{T}) \hat{\alpha} &= U - i\omega \mathbf{T}^t \mathbf{Z}_f^{-1} \mathbf{F}_{ex} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Soit :

$$Z_i = i\omega H_p + \omega^2 \mathbf{T}^t \mathbf{Z}_f^{-1} \mathbf{T} \quad (5.32)$$

$$F = -i\omega \mathbf{T}^t \mathbf{Z}_f^{-1} \mathbf{F}_{ex} \quad (5.33)$$

L'équation du mouvement relatif s'exprime simplement :

$$Z_i(\omega) \dot{\alpha}(\omega) = F(\omega) + U(\omega) \quad (5.34)$$

Dans cette dernière équation, le mouvement relatif du pendule est exprimé seulement en fonction d'une force représentant la force d'excitation  $F$  et du contrôle appliqué  $U$ . Cette formulation nous sera utile par la suite pour l'expression du contrôleur optimal.

### Expression du contrôleur optimal.

On recherche ici l'expression du contrôle  $U$  qui maximise la puissance absorbée. Pour cela, il faut assurer, d'après l'équation (5.17) :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}i\omega \hat{\alpha} &= \mathbf{Z}_f^* \begin{pmatrix} \hat{x}_G \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \hat{x}_G \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} &= \mathbf{Z}_f^{*-1} \mathbf{T}i\omega \hat{\alpha} \end{aligned} \quad (5.35)$$

D'après l'équation (5.30),

$$\begin{aligned} H_p i\omega \hat{\alpha} &= U + \omega^2 \mathbf{T}^t \mathbf{Z}_f^{*-1} \mathbf{T} \hat{\alpha} \\ U &= -(-i\omega H_p + \omega^2 \mathbf{T}^t \mathbf{Z}_f^{-1} \mathbf{T} i\omega) \hat{\alpha} \end{aligned} \quad (5.36)$$

où l'on reconnaît le conjugué de  $Z_i$ . La transformée de Fourier du contrôleur optimal est donc donné par :

$$U(\omega) = -Z_i^*(\omega) \hat{\alpha}(\omega) \quad (5.37)$$

, soit un contrôleur de type réactif.

D'après les équations (5.37) et (5.34), la vitesse optimale pour le mouvement relatif du pendule est fournie par :

$$\tilde{\alpha}^*(\omega) = \frac{F(\omega)}{2R_i(\omega)} \quad (5.38)$$

où  $R_i(\omega) = \Re(Z_i(\omega))$  et la puissance absorbée par le système est la puissance maximale.

D'après l'équation (5.16) :

$$P_{\max} = \frac{1}{4} \left( F_{ex1} \tilde{x}_G + F_{ex5} \tilde{\theta} \right) \quad (5.39)$$

avec  $\tilde{x}_G$  et  $\hat{\theta}$  tel que :

$$\mathbf{C}_A \begin{pmatrix} \tilde{x}_G \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{F}}_{ex} \quad (5.40)$$

En inversant l'équation (5.40), la puissance maximum absorbée s'écrit :

$$P_{\max} = \frac{1}{8} \hat{\mathbf{F}}_{ex}^t \mathbf{C}_A^{-1} \hat{\mathbf{F}}_{ex} \quad (5.41)$$

où l'on retrouve un résultat établi par Falnes [33].

Sur la figure (5.1) est tracée la fonction de transfert d'un SEAREV avec et sans contrôle optimal, le contrôle optimal étant calculé suivant la loi (5.37). On a également porté le maximum théorique de la puissance absorbée  $P_{\max}$ , équation (5.41).

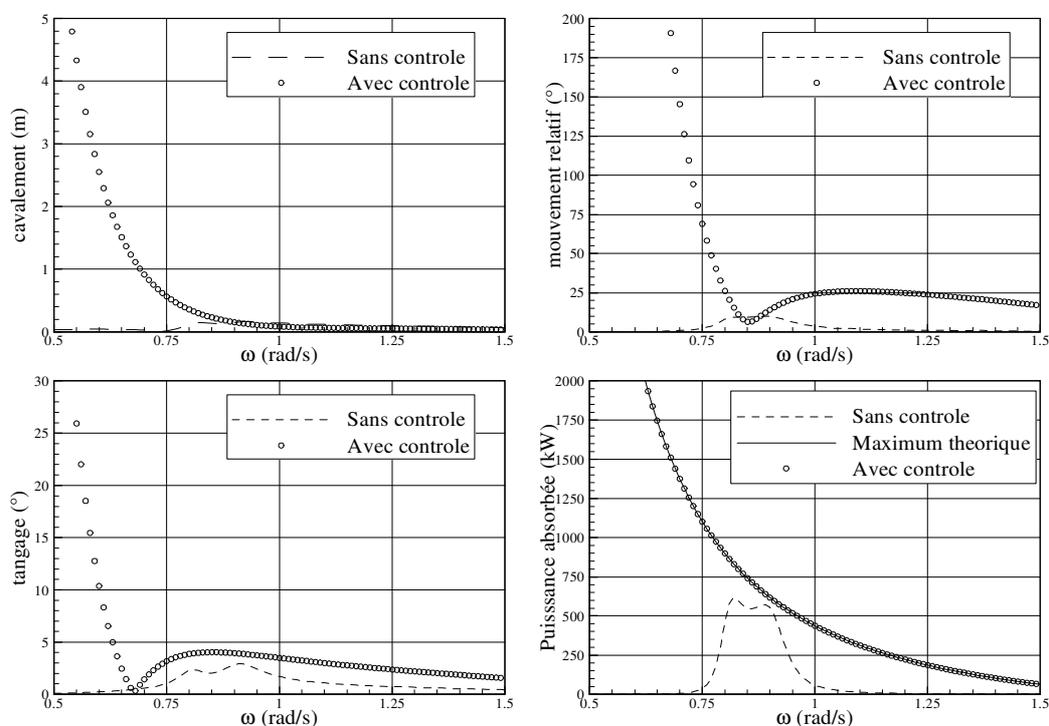


FIG. 5.1 – Fonction de transfert d'un SEAREV typique avec et sans contrôle optimal.

Nous pouvons constater sur la courbe représentant les puissances que la puissance absorbée avec contrôle permet effectivement l'absorption de toute la puissance disponible dans toute la bande de fréquence.

Il apparaît cependant que dans les basses fréquences, l'amplitude des mouvements devient déraisonnable que ce soit en tangage, cavalement ou mouvement relatif. Cela provient du fait que les coefficients d'amortissement hydrodynamiques deviennent faibles lorsque la pulsation devient petite.

D'un point de vue plus philosophique, il est évident qu'il sera difficile de faire fonctionner le système à basse fréquence, lorsque la longueur d'onde devient grande par rapport à la longueur du corps. En effet, pour ce type de houle, le flotteur aura tendance à suivre la déformée de

surface en pilonnement, comme un bouchon, et ne sera pratiquement pas excité en rotation. Inversement, à haute fréquence, les longueurs d'onde seront trop petites par rapport à la longueur du corps et le flotteur ne verra pas l'excitation. Il existe en fait une bande de fréquence où la houle sera bien adaptée pour faire tanguer le corps, la position et la largeur de cette bande dépendant évidemment de la longueur du flotteur. Un travail d'optimisation doit être réalisé afin de faire correspondre cette bande de fréquence au cas de houle sur site. Ce point sera abordé dans la partie suivante.

## 5.2.2 Domaine temporel.

### La non causalité du contrôleur optimal.

Intéressons nous de plus près à la fonction  $Z_i(\omega)$  pour pouvoir définir la réponse impulsionnelle du contrôleur optimal. Soit les paramètres  $m_i$  et  $k_i$  tels que :

$$H_i = m_i - \frac{k_i}{\omega^2} \quad (5.42)$$

Soit  $\Delta$  le déterminant de la matrice  $\mathbf{Z}_f$ . Il est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta\omega^2 = & (-m_1m_5 + m_{15}^2)\omega^4 + i(-2C_{A15}m_{15} + m_1C_{A55} + m_5C_{A11})\omega^3 \\ & + (C_{A11}C_{A55} + m_1k_5 + k_1m_5 - C_{A15}^2)\omega^2 - i(C_{A11}k_5 + C_{A55}k_1)\omega - k_1k_5 \end{aligned} \quad (5.43)$$

$\omega$  étant réel, le produit  $\Delta\omega^2$  ne s'annule que lorsque  $\omega = 0$ .

L'inverse  $\mathbf{Z}_f^{-1}$  de la matrice  $\mathbf{Z}_f$  est donné par :

$$\mathbf{Z}_f^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} C_{A55} + i\omega(m_5 - \frac{k_5}{\omega^2}) & C_{A15} + i\omega m_{15} \\ C_{A15} + i\omega m_{15} & C_{A11} + i\omega m_1 \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

Et on peut montrer que le produit  $(\Delta\omega^2)\omega^2\mathbf{T}^t\mathbf{Z}_f^{-1}\mathbf{T}$  s'écrit :

$$(\Delta\omega^2)\omega^2\mathbf{T}^t\mathbf{Z}_f^{-1}\mathbf{T} = a_1(i\omega)^5 + a_2(i\omega)^4 + a_3(i\omega)^3 + a_4(i\omega)^2 + a_5(i\omega)^1 + a_6(i\omega)^0 + a_7(i\omega)^{-1} \quad (5.45)$$

où les coefficients  $a_i$  sont réels et dépendent de la pulsation  $\omega$ . Plus précisément :

$$\begin{aligned} a_1 &= m_p^2 l^2 m_5 + 2m_p l m_{5p} m_{15} + m_{5p}^2 m_1 \\ a_2 &= (m_p l C_{A55} + m_{5p} C_{A15}) m_p l + (m_{5p} C_{A11} + m_p l C_{A15}) m_{5p} \\ a_3 &= (m_p l k_5 + m_{15} k_{5p}) m_p l + (k_{5p} m_1 + k_1 m_{5p}) m_{5p} + (m_p l m_{15} + m_{5p} m_1) k_{5p} \\ a_4 &= (k_{5p} C_{A11} m_{5p} + (m_{5p} C_{A11} + m_p l C_{A15}) k_{5p} + k_{5p} C_{A15} m_p l) \\ a_5 &= (k_{5p} k_1 m_{5p} + (k_{5p} m_1 + m_{5p} k_1) k_{5p}) \\ a_6 &= k_{5p}^2 C_{A11} \\ a_7 &= k_{5p}^2 k_1 \end{aligned} \quad (5.46)$$

Le terme  $\omega^2\mathbf{T}^t\mathbf{Z}_f^{-1}\mathbf{T}$  est une fraction rationnelle qui peut s'écrire :

$$\omega^2\mathbf{T}^t\mathbf{Z}_f^{-1}\mathbf{T} = b_1 i\omega + b_2 + b_3 \frac{1}{i\omega} \quad (5.47)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 -b_1 &= \frac{a_1}{-m_1 m_5 + m_{15}^2} \\
 -b_2 &= (a_2 + b_1 (-2C_{A15} m_{15} + m_1 C_{A55} + m_5 C_{A11})) (i\omega)^4 + \\
 &\quad (a_3 + b_1 (C_{A11} C_{A55} + m_1 k_5 + k_1 m_5 - C_{A15}^2)) (i\omega)^3 + \\
 &\quad (a_4 + b_1 (C_{A11} k_5 + C_{A55} k_1)) (i\omega)^2 + (a_5 + b_1 k_1 k_5) \omega + a_6 \\
 -b_3 &= \frac{a_7}{\Delta \omega^2}
 \end{aligned}$$

D'après les équations (5.42), (5.43) et (5.46) :

$$\begin{aligned}
 \lim_{\omega \rightarrow +\infty} b_1 &= b_1(+\infty) \\
 &= \frac{\left( \begin{array}{l} m_p^2 l^2 (I_b + I_y + m_p (d-l)^2 + C_{M55} (+\infty)) + \\ 2m_p l (I_y + m_p l (l-d)) (m_p (d-l) + C_{M15} (+\infty)) + \\ (I_y + m_p l (l-d))^2 (m_b + m_p + C_{M11} (+\infty)) \end{array} \right)}{\left( \begin{array}{l} - (m_b + m_p + C_{M11} (+\infty)) (I_b + I_y + m_p (d-l)^2 + C_{M55} (+\infty)) \\ + (m_p (d-l) + C_{M15} (\omega))^2 \end{array} \right)} \quad (5.48)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} b_2 = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} b_2 = 0 \quad (5.49)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} b_3 = b_3(0) = -\frac{(m_p g l)^2}{K_{H55} - m_p g (d-l)} \quad (5.50)$$

La fonction  $Z_i$  du pendule peut alors s'écrire :

$$Z_i(\omega) = (I_y + m_p l^2 + b_1(+\infty)) + (b_1 - b_1(+\infty)) i\omega + b_2 + (b_3 - b_3(0)) \frac{1}{i\omega} + \frac{m_p g l + b_3(0)}{i\omega} \quad (5.51)$$

Elle fait apparaître un intégrateur de coefficient  $m_p g l + b_3(0)$  et un dérivateur de coefficient  $I_y + m_p l^2 + b_1(+\infty)$ . La figure (5.2) présente les parties réelle et imaginaire de cette fonction  $Z_i(\omega)$  pour un SEAREV typique. Sur les parties réelles de la fonction, on observe un pic correspondant à la pulsation propre associée à la résonance en tangage. Sur la partie imaginaire, on observe bien la présence d'un terme proportionnel à  $\omega$ , correspondant au dérivateur, et un terme proportionnel à  $1/\omega$ , l'intégrateur. Cela signifie simplement que dans le domaine temporel, le membre de droite de l'équation (5.34) fait intervenir l'accélération et la position du pendule.

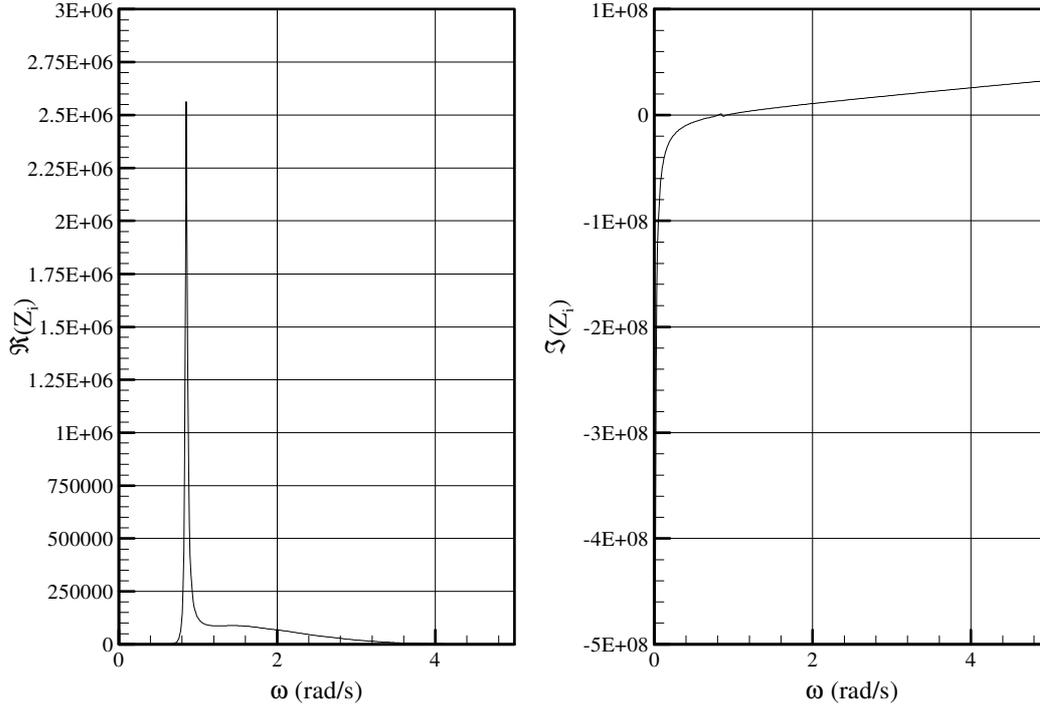
Soit :

$$b_4(\omega) = (b_1 - b_1(+\infty)) i\omega + b_2 + (b_3 - b_3(0)) \frac{1}{i\omega} \quad (5.52)$$

Par transformée de Fourier inverse, l'équation (5.34) du pendule dans le domaine fréquentiel devient dans le domaine temporel :

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} h_p(t-\tau) \ddot{\alpha}(\tau) d\tau + (m_p g l + b_3(0)) \alpha \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}_f(t-\tau) \mathbf{F}_{ex}(\tau) d\tau + U(t) \quad (5.53)$$

Sans contrôle (c-a-d  $U(t) = 0$  quelquesoit  $t$ ), le système linéaire défini par  $\mathbf{F}_{ex}(t)$  en entrée et  $\alpha(t)$  en sortie est causal, donc nécessairement les fonctions  $h_p$  et  $\mathbf{h}_f$  sont nulles pour tout  $t \leq 0$ . Lorsque  $t \geq 0$ , elles s'obtiennent par transformée de Fourier inverse


 FIG. 5.2 – Fonction  $Z_i$  pour un SEAREV typique.

Plus particulièrement, pour  $h_p(t)$  :

$$\begin{cases} h_p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} b_4(\omega) e^{i\omega t} d\omega & \forall t \geq 0 \\ h_p(t) = 0 & \forall t \leq 0 \end{cases} \quad (5.54)$$

$h_p$  est une fonction réelle du temps, donc nécessairement  $b_4(\omega) = b_4^*(-\omega)$ . Pour tout  $t \geq 0$ ,  $h_p(t)$  est donc donnée par :

$$h_p(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re(b_4(\omega) e^{i\omega t}) d\omega \quad (5.55)$$

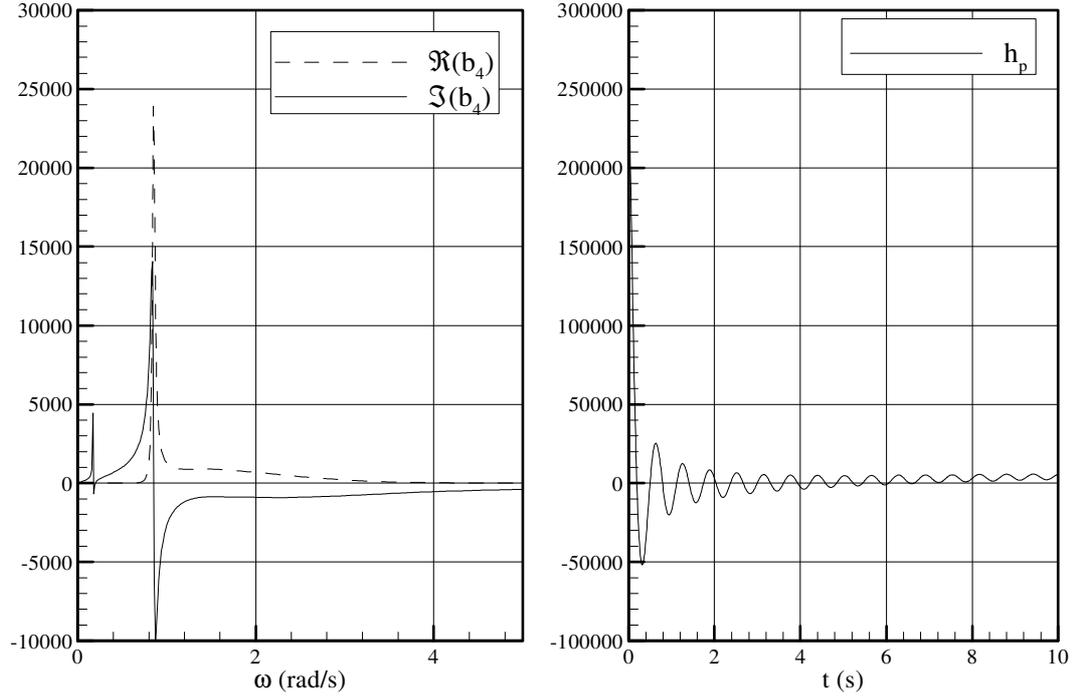
La figure (5.3) présente la fonction  $h_p$  pour un SEAREV typique.

Le contrôleur optimal est défini dans le domaine fréquentiel par :

$$U(\omega) = -Z_i^*(\omega) \dot{\alpha}(\omega) \quad (5.56)$$

Dans le domaine temporel, la commande au cours du temps est alors donnée par :

$$U(t) = \begin{pmatrix} (I_y + m_p l^2 + b_1(+\infty)) \ddot{\alpha} - \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} b_4^*(\omega) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega \right) \dot{\alpha}(\tau) d\tau \\ + (m_p g l + b_3(0)) \alpha \end{pmatrix} \quad (5.57)$$


 FIG. 5.3 – Fonction  $b_4(\omega)$  et fonction  $h_p(t)$  pour un SEAREV typique.

Or, nous avons dit précédemment que  $b_4^*(\omega) = b_4(-\omega)$ , donc :

$$U(t) = (I_y + m_p l^2 + b_1(+\infty)) \ddot{\alpha} - \int_{-\infty}^{+\infty} h_p(\tau - t) \dot{\alpha}(\tau) d\tau + (m_p g l + b_3(0)) \alpha \quad (5.58)$$

Dans cette dernière formulation apparaît le produit de convolution  $\int_{-\infty}^{+\infty} h_p(\tau - t) \dot{\alpha}(\tau) d\tau$ . D'après le principe de causalité, nous avons vu que  $h_p(t) = 0$  lorsque  $t \leq 0$ . Le produit de convolution se simplifie alors en :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_p(\tau - t) \dot{\alpha}(\tau) d\tau = \int_t^{+\infty} h_p(\tau - t) \dot{\alpha}(\tau) d\tau$$

Il apparaît alors que la valeur de la commande à l'instant  $t$  dépend non pas de l'histoire de la vitesse du mouvement relatif, mais de ses valeurs futures. Le contrôleur dont l'entrée d'information serait le mouvement du pendule et la sortie le couple résistant du générateur est donc anti-causal. Cela signifie que le calcul du contrôleur nécessite la connaissance de l'intégralité du futur de la houle incidente. Il est donc pas physiquement réalisable.

## 5.3 Des contrôles sub-optimaux.

### 5.3.1 S'affranchir de l'anti-causalité.

Le contrôleur optimal pour SEAREV dans le domaine temporel est donc anti causal. Ce résultat, a priori surprenant, est cependant un résultat classique connu dans la communauté des chercheurs travaillant sur l'énergie des vagues depuis le travail de Naito [59].

Pour dépasser ce problème, plusieurs approches ont été envisagées, conduisant à des stratégies de commande sub-optimales. La première consiste à chercher à prédire le futur proche de la force d'excitation, ce qui ne pose pas de problème lorsque la houle est régulière, mais est de plus en plus difficile à mesure que le spectre de houle s'élargit. La seconde méthode consiste à chercher une approximation des fonctions de transferts par des fonctions réalisables, conduisant à une commande causale. Sur ce sujet, on pourra se référer aux thèses de Maison-dieu [54] et Chatry [17] sur l'absorption dynamique des ondes de gravité, et sur les résultats dérivés [28] et [16].

### 5.3.2 Le contrôle par latching.

Une autre manière de procéder consiste à utiliser un contrôle de phase tel que proposé initialement par Budal et Falnes [11],[13] et indépendamment par Jones [41] et par French [37]. Il s'agit du contrôle par latching, qui consiste à bloquer le degré de liberté productif du système lorsque sa vitesse s'annule, puis à le relâcher après un délai de blocage optimal. Le contrôle est ainsi appliqué à des instants particuliers du cycle, et on parle alors de contrôle discret. En automatique, ce type de contrôle appartient à la famille des contrôles "bang-bang" (tout ou rien).

Dans leurs travaux, Budal et Falnes ont considéré un système houlomoteur constitué d'une simple bouée pilonnante [12]. Ils ont montré que la vitesse du flotteur est optimale si elle est en phase avec la force d'excitation hydrodynamique, ce qui se passe naturellement à la résonance du flotteur en pilonnement. La difficulté inhérente au contrôle par latching réside dans la détermination du délai de blocage qui va permettre de réaliser cette condition de mise en phase. En houle régulière, lorsque la période de la houle est supérieure à la période propre du système, introduire un délai de blocage sur la vitesse égal à la moitié de la différence entre la période de la houle et la période propre du système est une assez bonne approximation et donne de bons résultats [47]. En houle irrégulière, Budal et al. [14] ont appliqué cette méthode expérimentalement en la couplant avec un filtre de Kalman déterminant la pulsation, et donc la "période instantanée" de la houle. Les résultats expérimentaux présentés dans ce papier sont encourageants et les auteurs espéraient un facteur 5 entre la puissance produite avec et sans contrôle. Malheureusement, les estimations de coût ne leur étant pas favorables, aucun prototype à l'échelle 1 ne fut construit.

L'essor de l'informatique a permis par la suite à différents auteurs d'évaluer numériquement le contrôle par latching sur différents systèmes de récupération de l'énergie des vagues. Sur une bouée pilonnante, Greenhow et White [39] ont réalisé une étude systématique de l'influence du délai de blocage sur la puissance absorbée en houle régulière et ont mis en évidence l'existence de régimes périodiques avec contrôle tels que la période de la réponse est égale au triple de la période de la force d'excitation. Pour le même système, Eidsmoen [30] a effectué des simulations numériques en houle irrégulière sur un site situé sur la côte norvégienne, en

utilisant un délai de blocage calculé pour mettre en phase la force d'excitation et la vitesse en pilonnement. Il montre ainsi que le contrôle par latching permet de multiplier par trois la production énergétique annuelle. De notre côté, nous avons effectué des calculs analogues sur un cylindre immergé, avec trois méthodes pour calculer le délai de blocage et avons obtenu des résultats similaires [4].

Un avantage majeur du contrôle par latching vis à vis du contrôle réactif est qu'il ne nécessite pas d'apport d'énergie au cours du cycle. En effet, le contrôle réactif consiste en partie à annuler la réactance du système, cf équation (5.17). Cela se traduit par une dépense énergétique qui n'est compensé par une amélioration globale de la production que si les convertisseurs ont un excellent rendement. Dans le contrôle par latching, le blocage se fait à vitesse nulle, et il nécessite donc très peu d'énergie (que l'on pense à un frein à main d'automobile). Un autre avantage a été montré par Hals et al.[42], toujours sur le système de bouée pilonnante. En comparant le rapport de puissance instantanée maximale sur la puissance moyenne en houle régulière, ils se sont rendus compte que ce rapport est beaucoup plus faible dans le cas d'un contrôle par latching que dans le cas d'un contrôle réactif. D'un point de vue dimensionnement, le choix du contrôle par latching permet donc de choisir des actionneurs et des moteurs plus petits, donc moins coûteux que le contrôle réactif.

Dans [45], Hoskin et al. ont appliqué les équations de la commande optimale au contrôle par latching, afin de déterminer les délais de blocage optimaux, sur un système de bouée pilonnante et sur un système à colonne d'eau oscillante en houle régulière et irrégulière. Le problème de cette approche réside dans le fait qu'elle suppose la connaissance de l'intégralité du futur de la houle incidente. Cependant, elle permet d'évaluer de manière systématique le gain que l'on est en droit d'espérer du contrôle considéré, pour un système quelconque, y compris en houle irrégulière. Ils ont montré que le contrôle par latching pouvait conduire à un gain jusqu'à 50 en houle régulière et compris entre 8 et 25 en houle irrégulière pour une bouée pilonnante. Korde [52] a ainsi utilisé cette méthode pour un système comportant une masse mobile sur un flotteur.

# Chapitre 6

## Contrôle par latching : méthode semi-analytique.

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode semi-analytique générale permettant de calculer le délai de blocage optimal pour un récupérateur d'énergie des vagues en houle régulière, pour peu que son équation du mouvement puisse être représentée sous la forme d'une équation d'état.

La méthode est appliquée ici à un système à un degré de liberté (bouée pilonnante), à un système à deux degrés de liberté (porteur porté, type FROG) et enfin à SEAREV. Elle a été publiée pour un système masse ressort simple dans [3].

### 6.1 Equation analytique du latching.

#### 6.1.1 Hypothèses et notations.

On travaille ici dans le domaine temporel, mais en présence d'une excitation harmonique établie (houle régulière).

Soit  $\mathbf{X}$  le vecteur d'état du système. Soit  $n$  la dimension de  $\mathbf{X}$ . Soit  $k$  l'indice du champ du vecteur d'état qui correspond à la vitesse du mouvement qui peut-être bloquée quand sa vitesse s'annule, soit  $X_k$ . On suppose que le système est soumis à une force d'excitation sinusoïdale, et que l'on peut écrire l'équation du mouvement du système sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients matriciels constants  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \Re(\mathbf{B}e^{i(\omega t + \varphi_0)}) \quad (6.1)$$

avec  $\mathbf{A}$  matrice appartenant à  $\mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathbf{B}$  vecteur appartenant à  $\mathbb{C}^n$ .

On suppose que lorsqu'un contrôle par latching est appliqué, la dynamique du système est régie par une équation de la même forme, avec des coefficients matriciels différents  $\mathbf{A}'$  et  $\mathbf{B}'$  :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}'\mathbf{X} + \Re(\mathbf{B}'e^{i(\omega t + \varphi_0)}) \quad (6.2)$$

### 6.1.2 Equation générale du mouvement.

Les solutions homogènes des équations différentielles (6.1) et (6.2) s'écrivent :

$$\mathbf{X}_H(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{C} \quad (6.3)$$

où  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^n$  et  $\exp(\mathbf{A}t)$  est l'exponentielle de la matrice  $\mathbf{A}t$ , définie par  $\exp(\mathbf{A}t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^j}{j!}$ .

Cherchons à présent une solution particulière de l'équation (6.1) du type :

$$\mathbf{X}_P(t) = \Re(\mathbf{x}_p e^{i(\omega t + \varphi_0)}) \quad (6.4)$$

avec  $\mathbf{x}_p \in \mathbb{C}^n$ .

L'équation à résoudre est :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \Re(\mathbf{B}e^{i(\omega t + \varphi_0)}) \quad (6.5)$$

En y injectant l'équation (6.4) :

$$\Re(i\omega \mathbf{x}_p e^{i(\omega t + \varphi_0)}) = \mathbf{A} \Re(\mathbf{x}_p e^{i(\omega t + \varphi_0)}) + \Re(\mathbf{B}e^{i(\omega t + \varphi_0)}) \quad (6.6)$$

$$\Re(i\omega \mathbf{x}_p e^{i(\omega t + \varphi_0)}) = \Re(\mathbf{A} \mathbf{x}_p e^{i(\omega t + \varphi_0)}) + \Re(\mathbf{B}e^{i(\omega t + \varphi_0)})$$

$$0 = \Re(i\omega \mathbf{x}_p e^{i(\omega t + \varphi_0)} - \mathbf{A} \mathbf{x}_p e^{i(\omega t + \varphi_0)} - \mathbf{B}e^{i(\omega t + \varphi_0)})$$

$$0 = ((i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{x}_p - \mathbf{B}) e^{i(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\mathbf{x}_p = (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (6.7)$$

Notons que ce résultat n'est valable que si la matrice  $\mathbf{A}$  est à valeurs réelles. Si cette condition est vérifiée, la partie imaginaire de  $i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}$  se réduit à  $i\omega \mathbf{I}$  et la matrice  $i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}$  est alors toujours inversible.

En combinant maintenant les résultats (6.4) et (6.7), on obtient la forme générale de la solution de l'équation (6.1) :

$$\mathbf{X}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{C} + \Re((i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}e^{i(\omega t + \varphi_0)}) \quad (6.8)$$

Supposons de plus que l'on dispose d'une condition initiale  $\mathbf{X}(t = t_i) = \mathbf{X}_i$ , la constante  $\mathbf{C}$  est alors donnée par :

$$\mathbf{X}_i = \exp(\mathbf{A}t_i)\mathbf{C} + \Re((i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}e^{i(\omega t_i + \varphi_0)})$$

$$\mathbf{C} = \exp(-\mathbf{A}t_i) (\mathbf{X}_i - \Re((i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}e^{i(\omega t_i + \varphi_0)})) \quad (6.9)$$

et la forme générale de la solution s'exprime en fonction de la condition initiale :

$$\mathbf{X}(t) = \exp(\mathbf{A}(t - t_i))\mathbf{X}_i + \Re((\mathbf{I}e^{i\omega(t-t_i)} - \exp(\mathbf{A}(t - t_i))) (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}e^{i(\omega t_i + \varphi_0)}) \quad (6.10)$$

### 6.1.3 Analyse du problème.

On suppose :

- le régime contrôlé par latching établi depuis  $t = -\infty$ .

– la force d'excitation sinusoidale.

Recherchons alors une solution périodique pour le mouvement contrôlé.

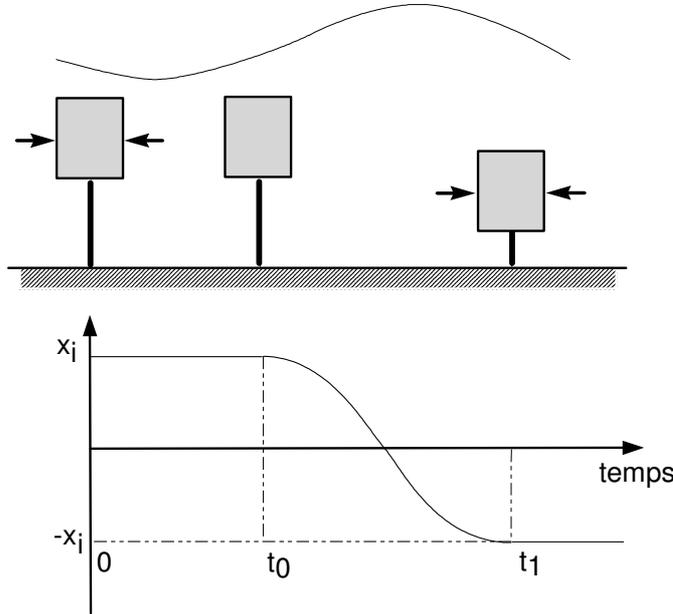


FIG. 6.1 – Séquence de latching : définitions

L'origine des temps est placée à un instant où la vitesse s'annule, cf figure (6.1). Soit  $t_0$  la durée pendant laquelle le mouvement sur lequel s'exerce le contrôle est bloqué. A  $t = t_0$ , ce degré de liberté est relâché et le système évolue jusqu'à un instant  $t = t_1$ , où sa vitesse s'annule à nouveau et où il est à nouveau verrouillé. Pour assurer la périodicité du mouvement, il faut que le système soit tel qu'à  $t = t_1$  deux conditions soient respectées.

– La première porte sur le vecteur d'état. Il doit être opposé à ce qu'il était à l'instant initial  $t = 0$ , soit :

$$\mathbf{X}(t = t_1) = -\mathbf{X}(0) = -X_i \quad (6.11)$$

– La seconde porte sur la force d'excitation. Elle doit elle aussi être opposée à sa valeur à  $t = 0$ , soit :

$$\begin{aligned} \Re(\mathbf{B}e^{i(\omega t_1 + \varphi_0)}) &= -\Re(\mathbf{B}e^{i\varphi_0}) \\ e^{i\omega t_1} &= -1 \\ \omega t_1 &= \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N} \\ t_1 &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Cette dernière condition montre que si il existe des solutions de mouvement périodique avec contrôle par latching, leurs périodes sont nécessairement des multiples impairs de la période de la force d'excitation ( $t_1$  étant la demi-période du mouvement, cf fig 6.1).

### 6.1.4 Condition de nullité.

À  $t = t_0$ , d'après les équations (6.2) et (6.10), le vecteur d'état vaut :

$$\mathbf{X}(t = t_0) = \mathbf{X}_0 = \exp(\mathbf{A}'t_0)\mathbf{X}_i + \Re \left( (\mathbf{I}e^{i\omega t_0} - \exp(\mathbf{A}'t_0)) (i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1} \mathbf{B}' e^{i\varphi_0} \right) \quad (6.13)$$

À  $t = t_1$ , d'après les équations (6.1), (6.10) et la condition (6.11), le vecteur d'état vaut :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t = t_1) &= -\mathbf{X}_i & (6.14) \\ &= \exp(\mathbf{A}(t_1 - t_0))\mathbf{X}_0 + \Re \left( (\mathbf{I}e^{i\omega(t_1 - t_0)} - \exp(\mathbf{A}(t_1 - t_0))) (i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} e^{i(\omega t_0 + \varphi_0)} \right) \end{aligned}$$

En combinant ces deux équations, et en posant  $\Delta = t_1 - t_0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} -\mathbf{X}_i &= \exp(\mathbf{A}\Delta) \left( \exp(\mathbf{A}'t_0)\mathbf{X}_i + \Re \left( (\mathbf{I}e^{i\omega t_0} - \exp(\mathbf{A}'t_0)) (i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1} \mathbf{B}' e^{i\varphi_0} \right) \right) \\ &\quad + \Re \left( (\mathbf{I}e^{i\omega\Delta} - \exp(\mathbf{A}\Delta)) (i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} e^{i(\omega t_0 + \varphi_0)} \right) \\ -\mathbf{X}_i &= \exp(\mathbf{A}\Delta) \exp(\mathbf{A}'t_0)\mathbf{X}_i + \\ &\quad \Re \left( \begin{array}{c} \exp(\mathbf{A}\Delta) (\mathbf{I}e^{i\omega t_0} - \exp(\mathbf{A}'t_0)) (i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1} \mathbf{B}' e^{i\varphi_0} \\ + (\mathbf{I}e^{i\omega\Delta} - \exp(\mathbf{A}\Delta)) (i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} e^{i(\omega t_0 + \varphi_0)} \end{array} \right) \\ \mathbf{0} &= (\mathbf{I} + \exp(\mathbf{A}\Delta) \exp(\mathbf{A}'t_0)) \mathbf{X}_i + \\ &\quad \Re \left( \begin{array}{c} \exp(\mathbf{A}\Delta) (\mathbf{I} - \exp(\mathbf{A}'t_0)e^{-i\omega t_0}) (i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1} \mathbf{B}' \\ + (\mathbf{I}e^{i\omega\Delta} - \exp(\mathbf{A}\Delta)) (i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \end{array} \right) e^{i(\omega t_0 + \varphi_0)} \\ \mathbf{X}_i &= -(\mathbf{I} + \exp(\mathbf{A}\Delta) \exp(\mathbf{A}'t_0))^{-1} \times & (6.15) \\ &\quad \Re \left( \begin{array}{c} \exp(\mathbf{A}\Delta) (\mathbf{I} - \exp(\mathbf{A}'t_0)e^{-i\omega t_0}) (i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1} \mathbf{B}' \\ + (\mathbf{I}e^{i\omega\Delta} - \exp(\mathbf{A}\Delta)) (i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \end{array} \right) e^{i(\omega t_0 + \varphi_0)} \end{aligned}$$

Soit le vecteur :  $\mathbf{U} = [0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]$  avec la valeur non nulle de  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^n$  dans la  $k^{\text{ème}}$  colonne. Ayant supposé que le contrôle par latching n'est appliqué que lorsque la vitesse du mouvement associé au contrôle s'annule, nécessairement, il faut que les paramètres  $t_0, \Delta, \varphi_0$  soient tels que :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X}_i = 0 \quad (6.16)$$

Cette condition est la condition de nullité.

Donnons-nous alors une valeur pour  $k$ , c'est-à-dire que nous fixons la période du mouvement. Pour  $\varphi_0$  donné dans l'intervalle  $[0, \pi]$ , nous pouvons alors rechercher – numériquement – l'ensemble des valeurs  $t_0$  prises dans l'intervalle  $[0, (k + \frac{1}{2})\frac{2\pi}{\omega}]$  qui satisfont la condition de nullité (6.16). En procédant au même calcul pour une autre valeur de  $\varphi_0$  prise dans l'intervalle  $[0, \pi]$ , nous déterminons ainsi l'ensemble des couples  $(\varphi_0, t_0)$  qui satisfont l'équation du latching. Il ne reste ensuite qu'à sélectionner celui qui est le plus performant par rapport à un critère donné (puissance, amplitude, ...)

### 6.1.5 Fonctionnement alternatif.

Dans la littérature [12], [47], [39], [42], [34], [51], le contrôle par latching a toujours été considéré de manière à ce que la position finale du système soit de signe opposée par rapport à

la position initiale sur chaque rampe de mouvement. Il existe cependant une seconde manière d'envisager le mouvement contrôlé, en considérant l'état final de signe identique à celui de l'état initial.

Selon la démarche exposée dans ce chapitre, cela revient à assurer la périodicité du mouvement en houle régulière par les deux conditions :

- A  $t = t_1$ , le vecteur d'état est égal à sa valeur à l'instant initial

$$\mathbf{X}(t = t_1) = \mathbf{X}(0) = X_i \quad (6.17)$$

- A  $t = t_1$ , la force d'excitation doit être égale à sa valeur à  $t = 0$ , soit :

$$\begin{aligned} \Re(\mathbf{B}e^{i(\omega t_1 + \varphi_0)}) &= \Re(\mathbf{B}e^{i\varphi_0}) \\ e^{i\omega t_1} &= 1 \\ \omega t_1 &= 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N}^* \\ t_1 &= \frac{2k\pi}{\omega} \end{aligned} \quad (6.18)$$

D'après cette dernière condition, si il existe des solutions de mouvement périodique avec contrôle par latching, leurs périodes sont à présent des multiples pairs de la période de la force d'excitation ( $t_1$  étant maintenant la période du mouvement).

Par le même raisonnement que précédemment, on montre que nécessairement :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i &= (\mathbf{I} - \exp(\mathbf{A}\Delta) \exp(\mathbf{A}'t_0))^{-1} \times \\ &\Re \left( \left( \begin{array}{l} \exp(\mathbf{A}\Delta) (\mathbf{I} - \exp(\mathbf{A}'t_0)e^{-i\omega t_0}) (i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1} \mathbf{B}' \\ + (\mathbf{I}e^{i\omega\Delta} - \exp(\mathbf{A}\Delta)) (i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \end{array} \right) e^{i(\omega t_0 + \varphi_0)} \right) \end{aligned} \quad (6.19)$$

Du point de vue des équations, ce fonctionnement alternatif se traduit par un simple changement de signe dans l'expression du vecteur  $\mathbf{X}_i$ . La condition de nullité reste elle inchangée, il faut que les paramètres  $t_0, \Delta, \varphi_0$  soient tels que :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X}_i = 0 \quad (6.20)$$

## 6.2 Application à un système à un degré de liberté.

### 6.2.1 Description du système.

Soit un système générique simple (Fig.6.2) constitué d'un cylindre en équilibre indifférent sous l'effet de son poids, de la poussée hydrostatique et d'une force d'amarrage verticale simplifiée ici sous la forme d'une simple raideur verticale linéaire  $k$ . Ce mécanisme peut-être considéré comme une idéalisation du système AWS, qui a été testé en 2004 par les hollandais au Portugal.

Tous les mouvements autres que le pilonnement décrit par la variable  $\zeta(t)$  sont supposés idéalement bridés.

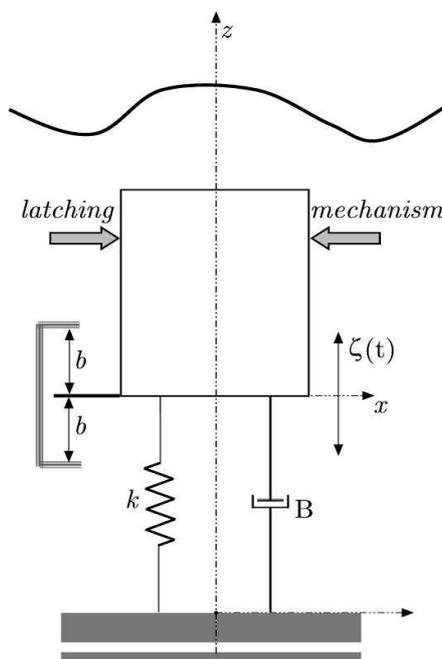


FIG. 6.2 – Schéma de principe d'un houlomoteur à un degré de liberté et contrôlé par latching.

En présence d'une houle incidente, une force d'excitation va se développer et mettre le corps en mouvement oscillatoire, actionnant un système de production d'énergie (PTO) développant un effort antagoniste. Ce PTO est représenté ici par un simple amortissement linéaire proportionnel à  $\dot{\zeta}(t)$  de coefficient constant  $B$ .

### 6.2.2 Equation du mouvement du système libre.

#### Forme classique de l'équation du mouvement.

L'équation du mouvement d'un tel système s'écrit dans le domaine temporel [36], en théorie linéarisée, dans le cas d'une force d'excitation monochromatique :

$$(M + \mu_\infty)\ddot{\zeta}(t) + \int_0^t \dot{\zeta}(\tau)K(t - \tau)d\tau + B\dot{\zeta}(t) + k\zeta(t) = |F_{ex}| \cos(\omega t + \varphi_0 + \varphi_{ex}) \quad (6.21)$$

où les efforts de radiation sont donnés dans la formulation de W.E. Cummins [24] par le terme de masse ajoutée instantanée  $\mu_\infty \ddot{\zeta}(t)$  et le produit de convolution sur la vitesse  $\int_0^t \dot{\zeta}(\tau)K(t - \tau)d\tau$ . Le noyau  $K(t)$  de cette intégrale, qui est la réponse impulsionnelle de radiation, se calcule soit par transformée de Fourier des coefficients d'amortissement hydrodynamique calculés dans le domaine fréquentiel, soit directement en domaine temporel, en utilisant les codes adaptés.

### Identification du terme de mémoire des efforts de radiation.

Comme nous l'avons déjà dit dans la première partie de ce mémoire, le produit de convolution dans l'équation du mouvement peut être représenté par une somme d'états additionnels :

$$\int_0^t \dot{\zeta}(\tau) \alpha_i e^{\beta_i(t-\tau)} d\tau = \sum_{i=1}^N I_i(t)$$

Les états  $I_i$ , à valeurs complexes, sont fournies par les équations différentielles :

$$\dot{I}_i(t) = \beta_i I_i(t) + \alpha_i \dot{\zeta}(t) \quad (6.22)$$

dont les coefficients  $(\alpha_i, \beta_i)$  sont déterminés par la méthode proposée par R. Prony [26] déjà évoquée. Cependant, le produit de convolution étant à valeurs réelles, les coefficients  $(\alpha_i, \beta_i)$  sont nécessairement soit réels soit associés par paire de raies conjuguées, et on peut écrire :

$$\int_0^t \dot{\zeta}(\tau) \alpha_i e^{\beta_i(t-\tau)} d\tau = \sum_{i=1}^N I_i^R(t)$$

où la notation  $x^R$  désigne la partie réelle du complexe  $x$ , la partie imaginaire étant noté  $x^I$ .

En prenant les parties réelles et imaginaires des équations différentielles régissant l'évolution des états  $I_i$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{I}_i^R(t) &= \beta_i^R I_i^R(t) - \beta_i^I I_i^I(t) + \alpha_i^R \dot{\zeta}(t) \\ \dot{I}_i^I(t) &= \beta_i^R I_i^I(t) + \beta_i^I I_i^R(t) + \alpha_i^I \dot{\zeta}(t) \end{aligned}$$

Et globalement l'équation du mouvement s'écrit sous la forme d'un système d'équations différentielles réelles à coefficients constants :

$$\left\{ \begin{aligned} (M + \mu_\infty) \ddot{\zeta}(t) + \sum_{i=1}^N I_i^R(t) + B \dot{\zeta}(t) + k \zeta(t) &= |F_{ex}| \cos(\omega t + \varphi_0 + \varphi_{ex}) \\ \dot{I}_i^R(t) &= \beta_i^R I_i^R(t) - \beta_i^I I_i^I(t) + \alpha_i^R \dot{\zeta}(t) \\ \dot{I}_i^I(t) &= \beta_i^R I_i^I(t) + \beta_i^I I_i^R(t) + \alpha_i^I \dot{\zeta}(t) \end{aligned} \right. \quad (6.23)$$

### Formulation matricielle.

Soit le vecteur d'état  $\mathbf{X} = [\zeta \quad \dot{\zeta} \quad I_1^R \quad I_1^I \quad \dots \quad I_N^R \quad I_N^I]^T$ . L'équation du mouvement du système libre se met alors sous la forme :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathfrak{R}(\mathbf{B}e^{i(\omega t + \varphi_0)}) \quad (6.24)$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{k}{M+\mu_\infty} & -\frac{B}{M+\mu_\infty} & -\frac{1}{M+\mu_\infty} & 0 & \cdots & -\frac{1}{M+\mu_\infty} & 0 \\ 0 & \alpha_1^R & \beta_1^R & -\beta_1^I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^I & \beta_1^I & \beta_1^R & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_N^R & 0 & 0 & \cdots & \beta_N^R & -\beta_N^I \\ 0 & \alpha_N^I & 0 & 0 & \cdots & \beta_N^I & \beta_N^R \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{|F_{ex}|}{M+\mu_\infty} e^{i\varphi_{ex}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

### 6.2.3 Equation du mouvement du système bloqué.

Lorsque l'on utilise un contrôle par latching, un effort extérieur supplémentaire  $L$  est appliqué au système qui permet de le bloquer en position. L'équation du mouvement devient :

$$(M + \mu_\infty)\ddot{\zeta}(t) + \int_0^t \dot{\zeta}(\tau)K(t - \tau)d\tau + B\dot{\zeta}(t) + k\zeta(t) = |F_{ex}| \cos(\omega t + \varphi_0 + \varphi_{ex}) + L(t) \quad (6.27)$$

Cet effort  $L$  n'est appliqué qu'à partir d'un instant où  $\dot{\zeta} = 0$ , et empêche tout mouvement, alors nécessairement :

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta}(t) &= 0 \\ L(t) &= -|F_{ex}| \cos(\omega t + \varphi_0 + \varphi_{ex}) + \int_0^t \dot{\zeta}(\tau)K(t - \tau)d\tau + k\zeta(t) \end{aligned}$$

Les paramètres de position sont alors fixes. Cependant les termes  $I_i$  correspondant à la mémoire des efforts de radiation évoluent toujours. L'équation du système fluide-flotteur devient alors :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = 0 \\ \ddot{\zeta}(t) = 0 \\ \dot{I}_i^R(t) = \beta_i^R I_i^R(t) - \beta_i^I I_i^I(t) \\ \dot{I}_i^I(t) = \beta_i^R I_i^I(t) + \beta_i^I I_i^R(t) \end{cases} \quad (6.28)$$

Sous forme matricielle, en utilisant le même vecteur d'état  $\mathbf{X}$  que dans la section précédente,

l'équation d'état du système bloqué s'écrit alors :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}'\mathbf{X} + \Re(\mathbf{B}'e^{i(\omega t + \varphi_0)}) \quad (6.29)$$

avec :

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1^R & -\beta_1^I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1^I & \beta_1^R & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_N^R & -\beta_N^I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_N^I & \beta_N^R \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{0} \quad (6.31)$$

### 6.2.4 Résultats.

Ayant exprimé les équations du mouvement de l'oscillateur hydrodynamique sous des formes matricielles adaptées, nous pouvons appliquer la théorie développée dans la première partie 6.1 et procéder aux simulation numériques en régime de contrôle optimal par latching.

#### Validation des calculs.

L'équation (6.16) est résolue numériquement en utilisant MATLAB. Le corps considéré est un cylindre immergé, dont les caractéristiques géométriques sont :

- $I = 10$  mètres.
- $H = 20$  mètres.
- $R = 5$  mètres.
- $M = 314$  tonnes.
- $B = 19$  kN.s/m.
- $k = 326$  kN/m.

Sa période propre a été calée sur 10 secondes, soit une pulsation de résonance égale à 0.6 rad/s. Les coefficients hydrodynamiques ont été déterminés en utilisant le code numérique AQUAPLUS. La réponse impulsionnelle en pilonnement est obtenue par la formule de Cummins [24] :

$$K(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty C_A(\omega) \cos(\omega t) d\omega \quad (6.32)$$

La réponse impulsionnelle a ensuite été identifiée, et nous avons obtenu les différents coefficients  $(\alpha, \beta)$  de l'équation (??).

Considérons tout d'abord le régime contrôlé de fonctionnement où la condition initiale et la condition finale sont de signe opposé.

La figure (6.3) présente la durée de blocage en fonction de la phase à l'instant  $t = 0$ . La figure (6.4) présente l'amplitude du pilonnement en fonction de cette phase. La pulsation de la force d'excitation vaut 0.5 rad/s. La pulsation propre du système vaut 0.623 rad/s. Les calculs correspondant à ces courbes ont été effectués pour  $k = 0$ . On constate qu'il existe un domaine où  $\frac{\omega t_0}{2\pi}$  vaut  $\frac{1}{2}$  et où l'amplitude du mouvement est nulle. Ce domaine correspond au domaine

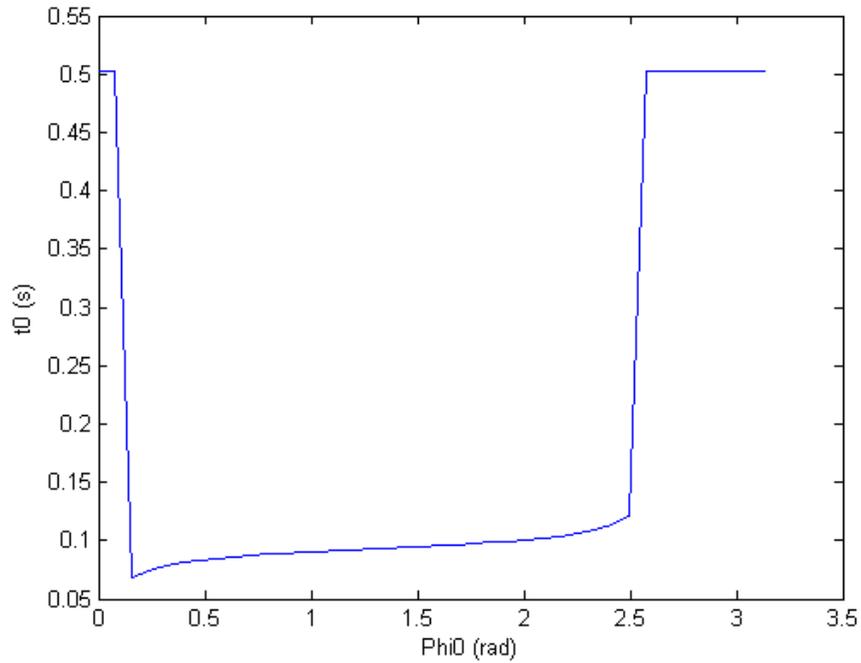


FIG. 6.3 – Durée de verrouillage  $\frac{\omega t_0}{2\pi}$  du corps en fonction de la phase  $\varphi_0$  à l'instant de blocage.

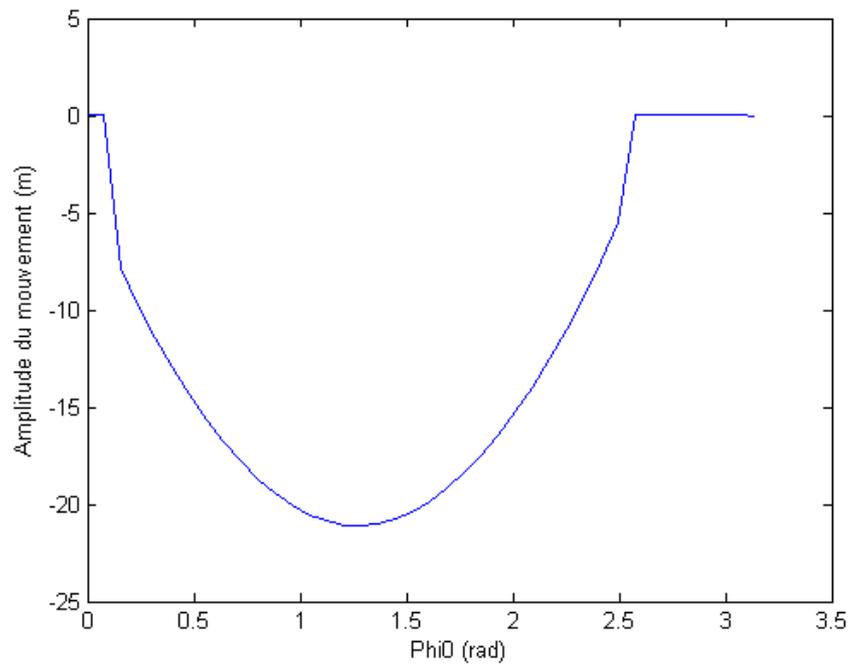


FIG. 6.4 – Amplitude du pilonnement  $X_1(1)$  en fonction de la phase  $\varphi_0$  à l'instant  $t = 0$ .

où la seule solution de la condition de nullité (6.16) est la solution où le corps ne bouge jamais. Mais il existe également un intervalle de valeurs de  $\varphi_0$  où la solution en amplitude est non triviale, avec, comme on le voit sur la figure (6.4), la présence d'un maximum.

Nous avons déduit des calculs précédents la durée de blocage qu'il faut appliquer au corps dans le domaine temporel pour obtenir l'amplitude maximale des mouvements. La figure (6.5) présente les résultats d'une simulation temporelle avec et sans ce contrôle. La première courbe correspond au mouvement contrôlé et non contrôlé, la seconde présente les vitesses associées et sur la troisième est porté la force d'excitation. L'amplification du mouvement est ici considérable. Remarquez que les maxima de la vitesse du mouvement contrôlé sont en phase avec les maxima de la force d'excitation. Historiquement [12], c'est toujours selon ce dernier critère qu'a été calculé les durées de latching.

### Fonctions de transfert (RAO) du système contrôlé.

Au sens strict, l'appellation "fonction de transfert" est impropre dans le cas du système contrôlé. En effet, le contrôle par latching étant non linéaire, la réponse du système à la somme de deux forces d'excitation de pulsations différentes ne sera pas la somme des réponses du système à chacune de ces forces. Cependant, en multipliant la force d'excitation par un coefficient  $c$ , la réponse du système sera aussi multiplié par  $c$ , et c'est cette propriété qui nous a poussé à porter les résultats sous cette forme de pseudo fonctions de transfert.

Sur la figure (6.6) est ainsi porté l'amplitude des mouvements en fonction de la pulsation de la houle incidente. Trois fonctions de transfert sont tracées sur cette figure, correspondantes aux cas sans contrôle, avec contrôle avec le paramètre de périodicité du mouvement  $k$  égal à 0 et avec  $k = 1$ . Dans le cas où  $k = 0$ , la période de la réponse du système est égal à la période de la force d'excitation, dans le cas où  $k = 1$ , elle vaut trois fois la période de l'excitation.

Il existe deux zones où les comportements sont différents. Pour  $\omega < \omega_0$ , le contrôle par latching permet d'amplifier considérablement l'amplitude des mouvements, que  $k$  soit égal à 0 ou 1. L'amplitude est cependant plus importante avec  $k = 0$ . Lorsque  $\omega > \omega_0$ , il n'existe pas de solutions autre que la solution en régime forcé pour le cas  $k = 0$ . En effet, grossièrement, le mouvement contrôlé par latching se compose de successions de période de durée de blocage  $t_0$  et de rampes de mouvements de durée  $\frac{\pi}{\omega_0}$ , avec  $t_0 \geq 0$ . On comprend donc que des solutions avec contrôle dont la période est égale à la période de la force d'excitation ne peuvent exister que lorsque la période de la force d'excitation est plus grande que la période propre du système. Lorsque la période de la réponse est triple ( $k = 1$ ), il est alors possible de trouver des solutions non triviales pour le contrôle par latching pour  $\omega < 3\omega_0$ . Plus généralement, il existe des solutions pour une réponse à  $k$  donné pour  $\omega < (2k + 1)\omega_0$ .

En ce qui concerne la puissance absorbée, considérons la figure suivante (6.7).

Comme nous l'espérons, le contrôle par latching permet un gain en puissance considérable à toute les pulsations, même si il fonctionne mieux pour les périodes d'excitation supérieures à la période propre. Pour les pulsations inférieures à la pulsation de résonance, le meilleur choix sur  $k$  est  $k = 0$ . En effet, pour  $k = 1$ , le bénéfice qu'apporte l'amplification du mouvement par le contrôle est réduit par la durée plus importante pendant laquelle le système est bloqué. Pour les pulsations supérieures à la pulsation de résonance, le contrôle avec  $k = 1$  permet de convertir une grande partie de la puissance disponible avec une réponse à la période triple de la période de la houle.

Globalement, la bande passante est considérablement élargie. Nous avons montré ici que le

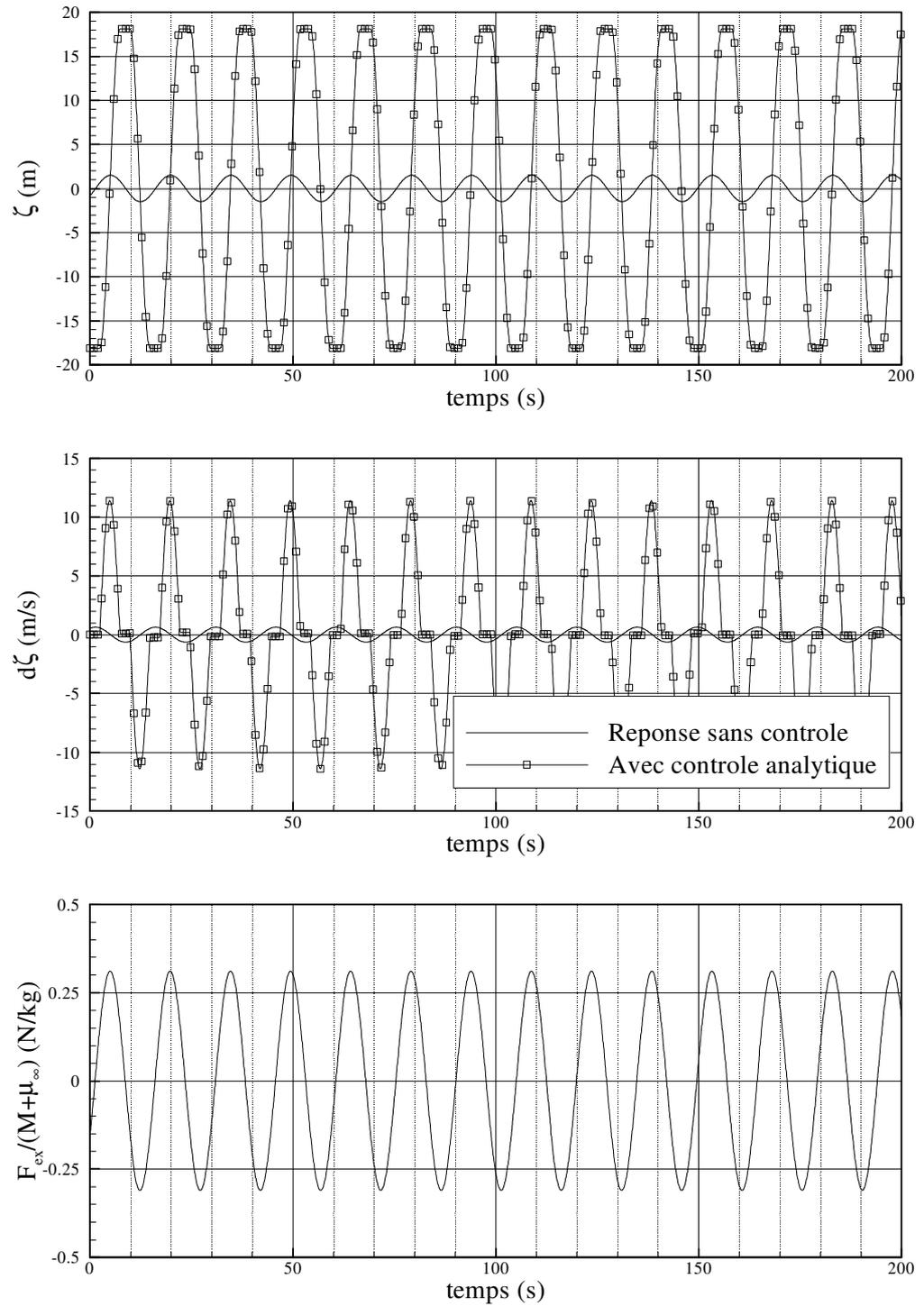


FIG. 6.5 – Simulation temporelle des mouvements d'un cylindre immergé avec et sans contrôle par latching. La période de la houle vaut 15 secondes et l'amplitude 1 mètre.

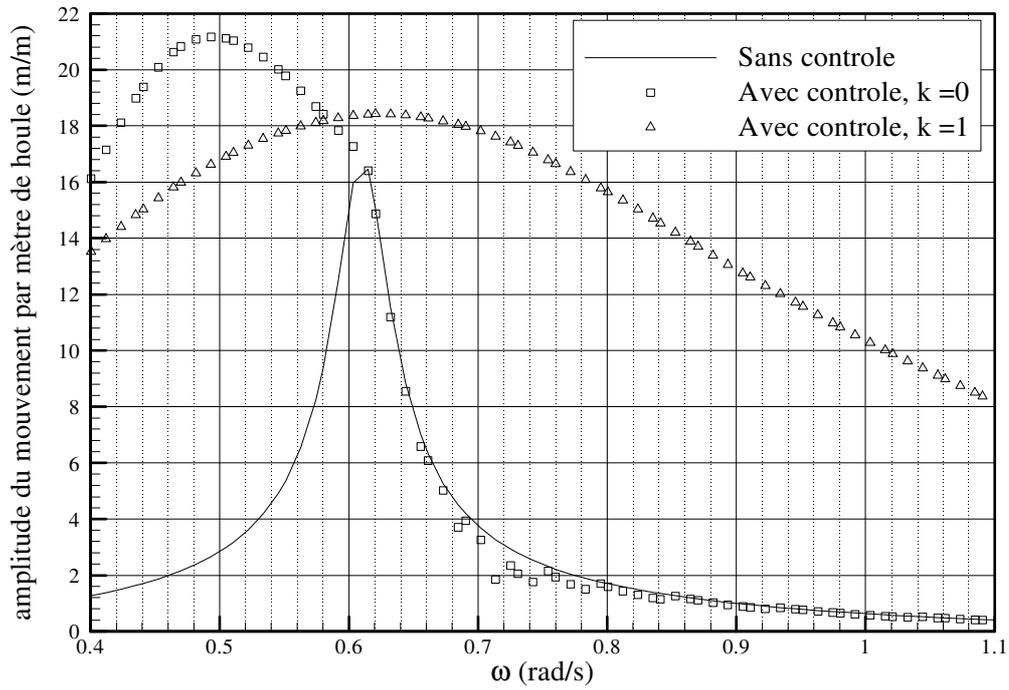


FIG. 6.6 – Fonction de transfert du cylindre immergé avec et sans contrôle.

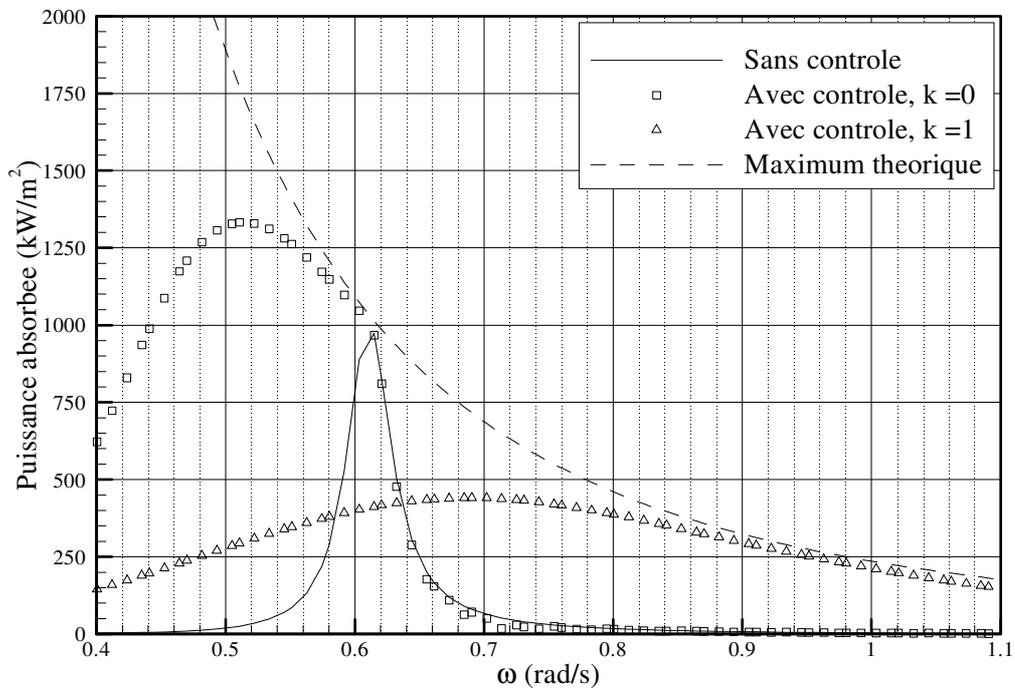


FIG. 6.7 – Fonction de transfert en puissance pour le cylindre immergé.

contrôle par latching permet de capter une très grande partie de l'énergie incidente dans une grande gamme de pulsations en houle régulière. Malheureusement, la méthode présentée ici ne peut pas s'appliquer au cas réel de la houle aléatoire et il faut donc trouver d'autres stratégies de contrôle. Plusieurs stratégies étendant les critères de houle régulière à la houle irrégulière de façon heuristique ont été évaluées et publiées [5].

### Fonctionnement alternatif

Considérons à présent le régime de fonctionnement alternatif, où le système revient à sa position initiale à la fin de chaque rampe de mouvement. Sur la figure (6.8), nous avons porté une simulation temporelle du mouvement avec et sans contrôle pour une houle incidente d'amplitude 1 mètre et de période 15 secondes. Le paramètre  $k$  vaut dans ce calcul 1, c'est-à-dire que la période du mouvement contrôlé est égale à la période de la houle.

On observe à nouveau une amplification importante de l'amplitude des mouvements, mais elle apparaît être inférieure à l'amplification que nous avons obtenu avec le régime de contrôle par latching où condition finale et condition initiale sont de signe opposé. On notera qu'à présent les maxima de la vitesse ne sont plus exactement en phase avec les maxima de la force d'excitation.

Nous avons porté sur la figure (6.9) les fonctions de transfert du système avec contrôle par latching calculé analytiquement de manière à ce que l'état final soit égal à l'état initial, symboles en rouge. Comme dans le cas précédent, lorsque la pulsation de la houle est inférieure à la pulsation propre du système, le contrôle par latching avec  $k = 1$ , c'est-à-dire que la période de la réponse est égale à la période de la houle permet d'améliorer considérablement la production d'énergie. Lorsque la pulsation de la houle est supérieure à la pulsation de résonance, c'est un contrôle avec  $k = 2$ , c'est-à-dire que la période de la réponse est le double de la période de la houle, qui permet une amélioration de l'absorption d'énergie.

À titre de comparaison, nous avons également porté sur cette figure, en bleu, les résultats associés au calcul précédent où le contrôle est effectué de manière à ce que l'état final soit égal à l'opposé de l'état initial, en bleu. On constate que pour les pulsations de houle inférieures à la pulsation de résonance, ce type de contrôle est bien meilleur que le contrôle avec états initial et final égaux. Lorsque la pulsation est supérieure à la pulsation de résonance, les deux types de contrôle se valent, avec un avantage pour les états égaux entre 0.6 et 0.8 rad/s et un avantage pour les états opposés près 0.8 rad/s.

En conclusion, il semble donc que le contrôle par latching est plus efficace lorsque les états finaux et initiaux sont opposés sur chaque rampe de mouvement. L'autre possibilité ne sera pas considéré par la suite.

## 6.3 Application à un système à deux degrés de liberté.

Avant d'envisager l'application de ce contrôle au système SEAREV, nous avons étudié un système apparenté mais à deux degrés de liberté seulement.

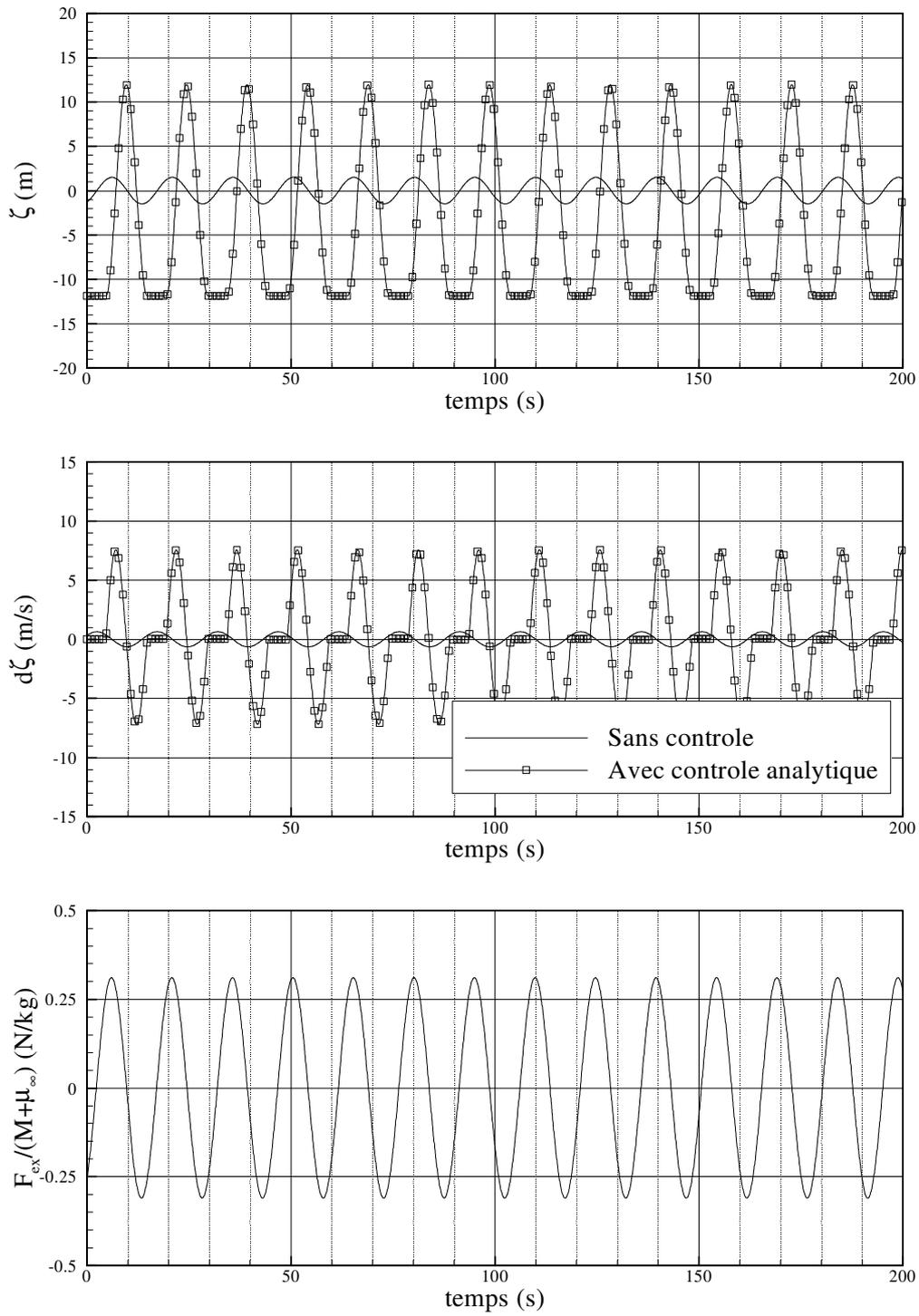


FIG. 6.8 – Simulation de la réponse temporelle du mouvement sans contrôle et avec contrôle en fonctionnement alternatif.

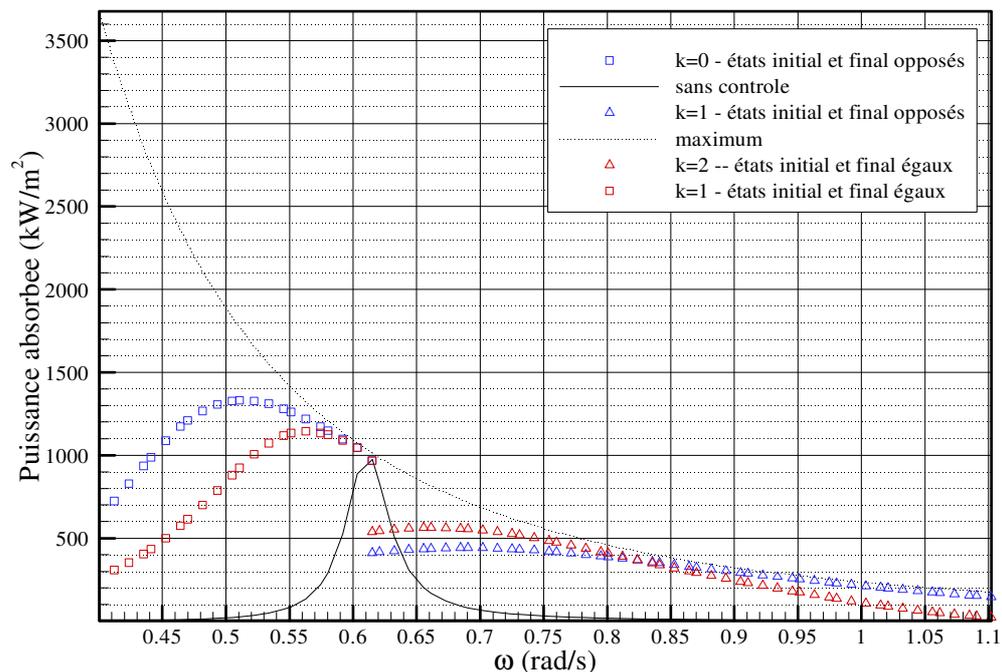


FIG. 6.9 – Fonctions puissance du système à 1 degré de liberté avec et sans contrôle analytique.

### 6.3.1 Description du système.

On considère un récupérateur de l'énergie des vagues composé de deux masses  $m_1$  et  $m_2$  reliées par un amortisseur  $b_2$  et un ressort  $k_2$ . On suppose que la masse  $m_1$  est liée au fond de la mer par un amarrage que l'on peut modéliser par un ressort de raideur  $k_1$ , et qu'il est soumis à une force d'excitation sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , de module  $F_{ex}$  et de phase  $\varphi_0$ . L'ensemble du montage est représenté sur la figure (6.10).

Soit  $x_1$  la distance de perturbation de la masse  $m_1$  par rapport à sa position au repos. Soit  $x_2$  la distance de perturbation de la masse  $m_2$  par rapport à la masse  $m_1$ .

### 6.3.2 Equations du mouvement.

**Système libre de ses mouvements.**

Les équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned} (m_1 + \mu_\infty) \ddot{x}_1 + m_2 (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= |F_{ex}| \cos(\omega t + \varphi_0 + \varphi_{ex}) - k_1 x_1 - \int_0^t \dot{x}_1(\tau) K(t - \tau) d\tau \\ m_2 (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= -k_2 x_2 - b_2 \dot{x}_2 \end{aligned} \quad (6.33)$$

en utilisant les mêmes notations pour décrire les efforts hydrodynamiques que dans la partie précédente.

Comme ci-dessus, le produit de convolution est identifié et la forme modifiée des équations

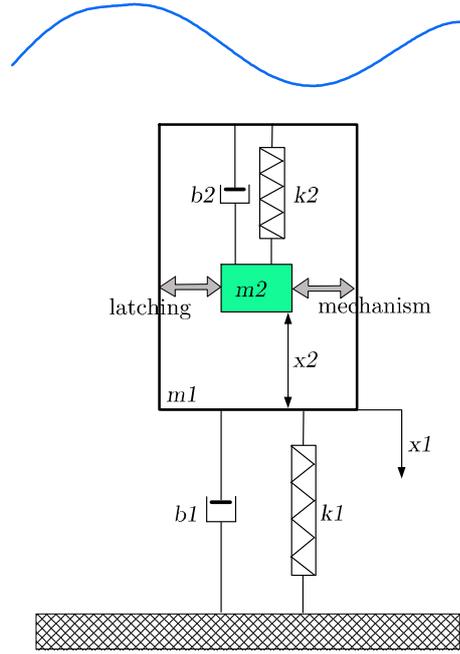


FIG. 6.10 – Principe de fonctionnement d'un WEC à deux degrés de liberté.

du mouvement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_1 + \mu_\infty) \ddot{x}_1 + m_2 (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = |F_{ex}| \cos(\omega t + \varphi_0 + \varphi_{ex}) - k_1 x_1 - \sum_{i=1}^N I_i^R(t) \\ m_2 (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k_2 x_2 - b_2 \dot{x}_2 \\ \dot{I}_i^R(t) = \beta_i^R I_i^R(t) - \beta_i^I I_i^I(t) + \alpha_i^R \dot{x}_1(t) \\ \dot{I}_i^I(t) = \beta_i^R I_i^I(t) + \beta_i^I I_i^R(t) + \alpha_i^I \dot{x}_1(t) \end{array} \right. \quad (6.34)$$

En introduisant le vecteur d'état  $\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ I_1^R \ I_1^I \ \dots \ I_N^R \ I_N^I]$ , l'équation du mouvement se met sous la forme de l'équation matricielle :

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \Re(\mathbf{D}e^{i(\omega t + \varphi_0)})$$

avec :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_1 + m_2 + \mu_\infty & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & -b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^R & 0 & \beta_1^R & -\beta_1^I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^I & 0 & \beta_1^R & \beta_1^I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_N^R & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_N^R & -\beta_N^I \\ 0 & 0 & \alpha_N^I & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_N^R & \beta_N^I \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |F_{ex}| e^{i\varphi_{ex}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

La formulation en équation d'état s'obtient :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \Re(\mathbf{B}e^{i(\omega t + \varphi_0)}) \quad (6.38)$$

en posant  $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$  et  $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}$ .

### Système bloqué.

Comme dans le cas à un seul degré de liberté, introduire un contrôle par latching signifie introduire une force de contrôle qui vient bloquer un degré de liberté. La conséquence en est la modification suivante des équations du mouvement :

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2 + \mu_\infty) \ddot{x}_1 &= |F_{ex}| \cos(\omega t + \varphi_0 + \varphi_{ex}) - k_1 x_1 - \int_0^t \dot{x}_1(\tau) K(t - \tau) d\tau \\ \dot{x}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.39)$$

Comme ci-dessus, par identification :

$$\left\{ \begin{aligned} (m_1 + m_2 + \mu_\infty) \ddot{x}_1 &= |F_{ex}| \cos(\omega t + \varphi_0 + \varphi_{ex}) - k_1 x_1 - \sum_{i=1}^N I_i^R(t) \\ \dot{x}_2 &= 0 \\ \dot{I}_i^R(t) &= \beta_i^R I_i^R(t) - \beta_i^I I_i^I(t) + \alpha_i^R \dot{x}_1(t) \\ \dot{I}_i^I(t) &= \beta_i^R I_i^I(t) + \beta_i^I I_i^R(t) + \alpha_i^I \dot{x}_1(t) \end{aligned} \right. \quad (6.40)$$

Avec le vecteur d'état  $\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ I_1^R \ I_1^I \ \cdots \ I_N^R \ I_N^I]$ , l'équation du mouvement se met sous la forme d'une équation matricielle d'état modifiée :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}'\mathbf{X} + \Re(\mathbf{B}'e^{i(\omega t + \varphi_0)}) \quad (6.41)$$

avec :

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1+m_2+\mu_\infty} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m_1+m_2+\mu_\infty} & 0 & \cdots & -\frac{1}{m_1+m_2+\mu_\infty} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^R & 0 & \beta_1^R & -\beta_1^I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^I & 0 & \beta_1^R & \beta_1^I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_N^R & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_N^R & -\beta_N^I \\ 0 & 0 & \alpha_N^I & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_N^R & \beta_N^I \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{|F_{ex}|e^{i\varphi_{ex}}}{m_1+m_2+\mu_\infty} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.43)$$

Ayant écrit le modèle du système sous la forme de deux équations d'état () et (), on peut appliquer la méthode analytique exposée au paragraphe 6.1 pour calculer le délai de latching optimal en houle régulière.

### 6.3.3 Résultats.

#### Fonctions de transfert du système contrôlé.

La géométrie du système porteur, en interaction avec la houle, est celle du cylindre immergé présenté dans le cas du système à un degré de liberté. Les caractéristiques mécaniques du système sont prises égales à :

- $m_1 = 239000$  kg.
- $m_2 = 75000$  kg.
- $k_1 = 367000$  N.m<sup>-1</sup>.
- $k_2 = 48000$  N.m<sup>-1</sup>.
- $b_2 = 7500$  N.m<sup>-1</sup>s.

La fonction de transfert, contrôlé ou non, est tracé sur la figure (6.11). Dans ce cas de calcul, la période des mouvements contrôlés est égale à la période de la force d'excitation ( $k = 0$ ).

Sans contrôle, les résonances du système apparaissent à 0.62 et 0.9 rad/s. En système découplé, la pulsation propre du porteur  $\omega_1$  vaut 0.7 rad/s et la pulsation propre de la masse portée vaut 0.8 rad/s, et il apparaît que l'effet du couplage des masses consiste en un écartement des résonances

Il existe des conditions de fonctionnement contrôlé non triviales, conduisant à une amplification de l'amplitude des mouvements presque partout où la pulsation est inférieure à 0.9 rad/s. Comme dans le cas du système à un degré de liberté, les solutions non triviales pour le mouvement contrôlé de période égale à la période de la force d'excitation existe lorsque la

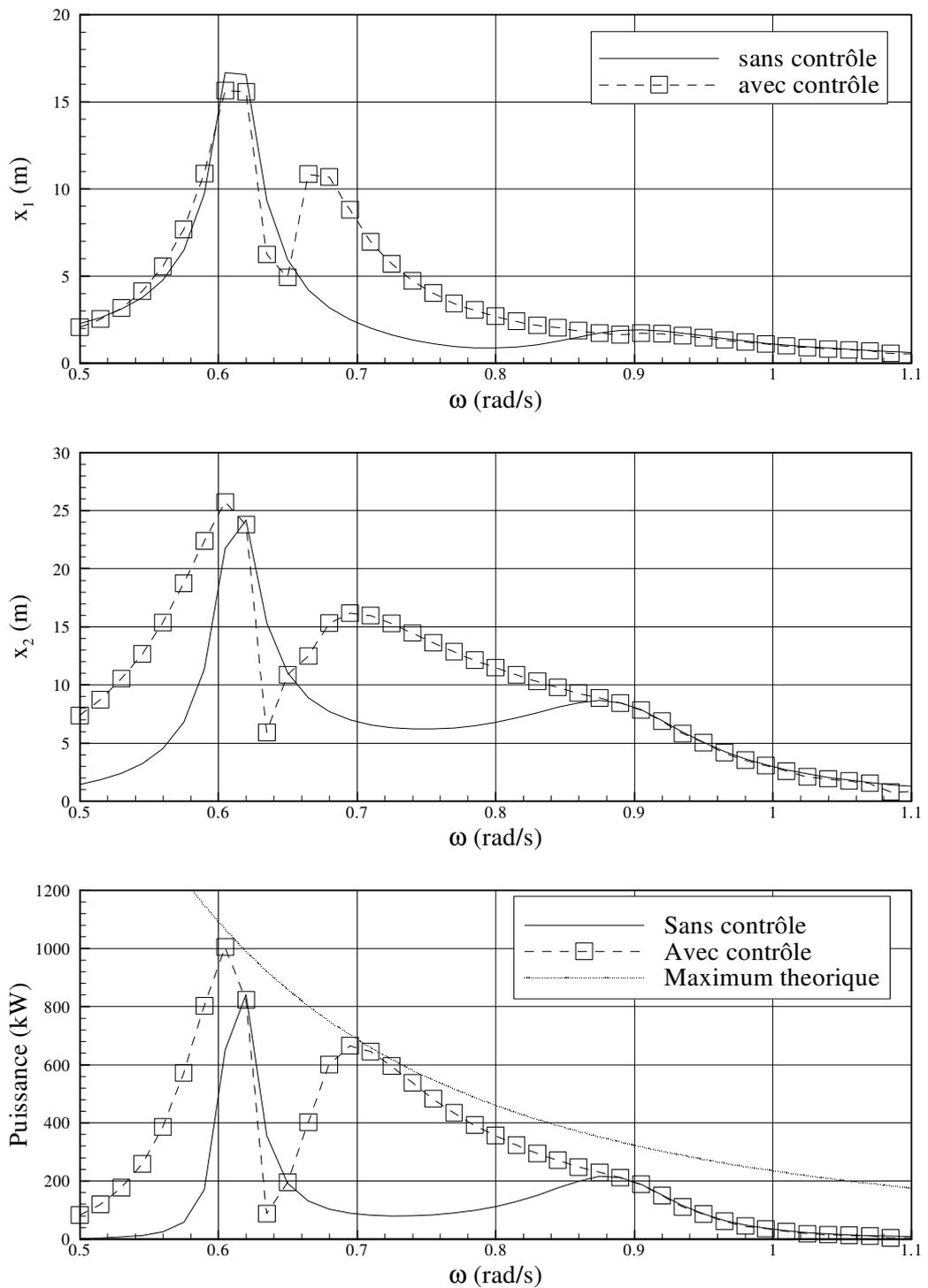


FIG. 6.11 – Fonctions de transferts du système à deux masses couplées, la période des oscillations est égale à la période de la force d'excitation.

période de la houle est supérieure à la période de résonance de la masse embarquée  $m_2$ . Les deux points où la courbe de réponse contrôlée passe en dessous de la réponse non contrôlée correspondent à des imprécisions de calcul, en particulier une discrétisation pas assez importante de l'intervalle des phases  $\varphi_0$ . Cependant, il existe à cet endroit un phénomène que l'on pourrait assimiler à un phénomène de pulsation de coupure, en théorie des oscillateurs couplés.

La troisième figure laisse apprécier des gains en production d'énergie aussi substantiels que dans le cas à un seul degré de liberté.

### Application dans le domaine temporel.

Lorsque l'on considère un absorbeur ponctuel à un degré de liberté, on peut montrer qu'il existe un contrôle optimal qui maximise l'absorption d'énergie [33]. Il se caractérise notamment par le fait que, comme à la résonance, la vitesse de l'oscillateur et la force d'excitation sont en phase. C'est cette caractéristique qui a amené Budal et Falnes à introduire l'idée de contrôle par latching pour améliorer l'efficacité des absorbeurs ponctuels au début des années 80 [12]. Leur idée de départ consistait à bloquer et lâcher le système de manière à obtenir les maxima de la force d'excitation et de la vitesse en phase.

Sur la figure (6.12), nous avons porté la différence de phase entre les maxima de la force d'excitation et de la vitesse pour l'oscillateur simple présenté au paragraphe 6.2 et sur lequel on exerçait un contrôle par latching calculé analytiquement. On constate que lorsque le contrôle est possible, c'est-à-dire pour les pulsations inférieures à la pulsation de résonance ( $\omega_0 = 0.6 \text{ rad/s}$ ), la différence de phase entre les maxima est nulle aux erreurs numériques près. On retrouve bien le résultat que l'on attendait, sur lequel il est possible de bâtir une stratégie permettant d'implémenter un contrôle dans le domaine temporel [4].

Malheureusement, dans le cas d'un système à deux oscillateurs couplés, le résultat est plus complexe, comme on peut le voir sur la figure (6.13), où nous avons porté cette différence de phase entre les maxima de vitesses de la masse embarquée  $m_2$  et de forces d'excitation. Non seulement la différence de phase n'est plus nulle partout où il existe des solutions pour le mouvement contrôlé, mais de plus elle n'est pas constante. Asymptotiquement, cependant, il semble exister deux régimes, l'un pour les pulsations comprises entre les deux résonances du système :  $0.62 < \omega < 0.9$ , où la différence de phase vaut environ 3 rad, et l'autre pour les pulsations inférieures à 0.62 rad/s, où la différence de phase vaut environ 0 rad.

**Contrôle optimal.** En fait, ce résultat n'est pas si surprenant, car si l'on procède au calcul du contrôle optimal que l'on doit appliquer à la seconde masse pour maximiser l'absorption d'énergie, à la manière de Falnes [34], on se rend rapidement compte que la différence entre la phase de la vitesse optimale et la phase de la force d'excitation dépend de la pulsation. En effet, dans le domaine fréquentiel, en notant  $U$  l'effort exercé par le PTO, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2 + C_M) i\omega u_1 + m_2 i\omega u_2 &= F_{ex} - k_1 \frac{u_1}{i\omega} - C_A u_1 \\ m_2 i\omega u_1 + m_2 i\omega u_2 &= -U(\omega) \end{aligned}$$

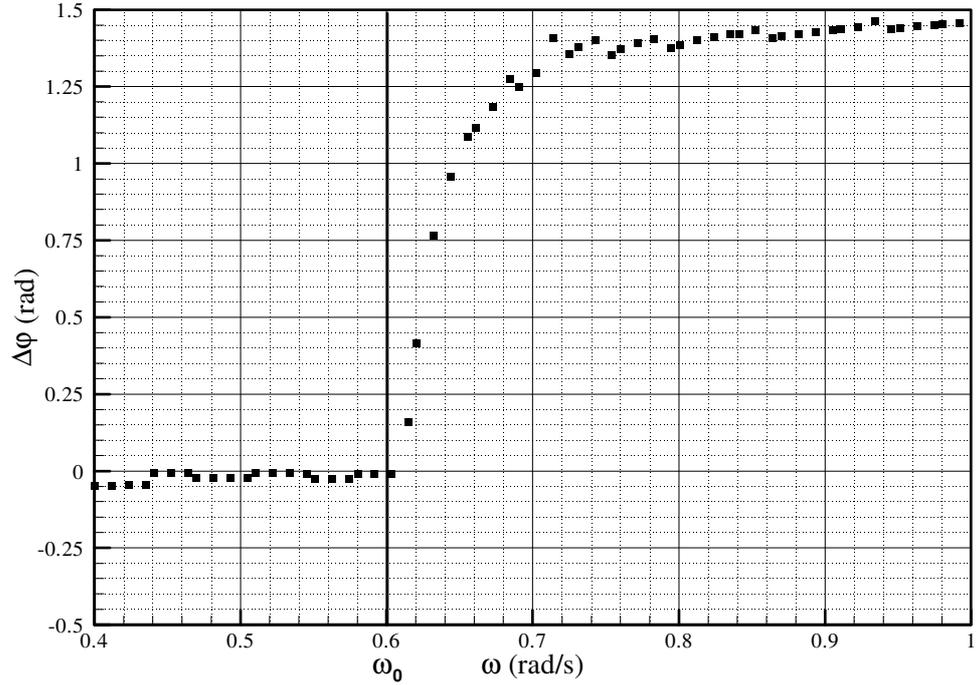


FIG. 6.12 – Différences de phase entre les maxima de la vitesse contrôlé et de la force d'excitation pour un système à un degré de liberté.

En combinant des deux équations, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left[ (m_1 + m_2 + C_M) i\omega + C_A - i\frac{k_1}{\omega} \right] u_1 &= F_{ex} - m_2 i\omega u_2 \\ m_2 i\omega \left[ 1 - \frac{m_2 i\omega}{(m_1 + m_2 + C_M) i\omega + C_A - i\frac{k_1}{\omega}} \right] u_2 + U &= -m_2 i\omega \frac{F_{ex}}{(m_1 + m_2 + C_M) i\omega + C_A - i\frac{k_1}{\omega}} \end{aligned}$$

Ainsi, la seconde équation prend la forme générale :

$$Z_i(\omega)u_2(\omega) + U(\omega) = F(\omega) \quad (6.44)$$

pour laquelle on sait [33] que la puissance absorbée sera maximale si :

$$U(\omega) = Z_i^*(\omega)u_2(\omega)$$

En supposant cette condition respectée, on en déduit la vitesse optimale  $\hat{u}_2$  dans le domaine fréquentiel :

$$\tilde{u}_2(\omega) = \frac{F(\omega)}{2\Re(Z_i(\omega))} \quad (6.45)$$

$$\tilde{u}_2(\omega) = \frac{1}{m_2 i\omega} \frac{F_{ex}(\omega)}{2C_A(\omega)} \left[ - (m_1 + m_2 + C_M) i\omega + C_A + i\frac{k_1}{\omega} \right] \quad (6.46)$$

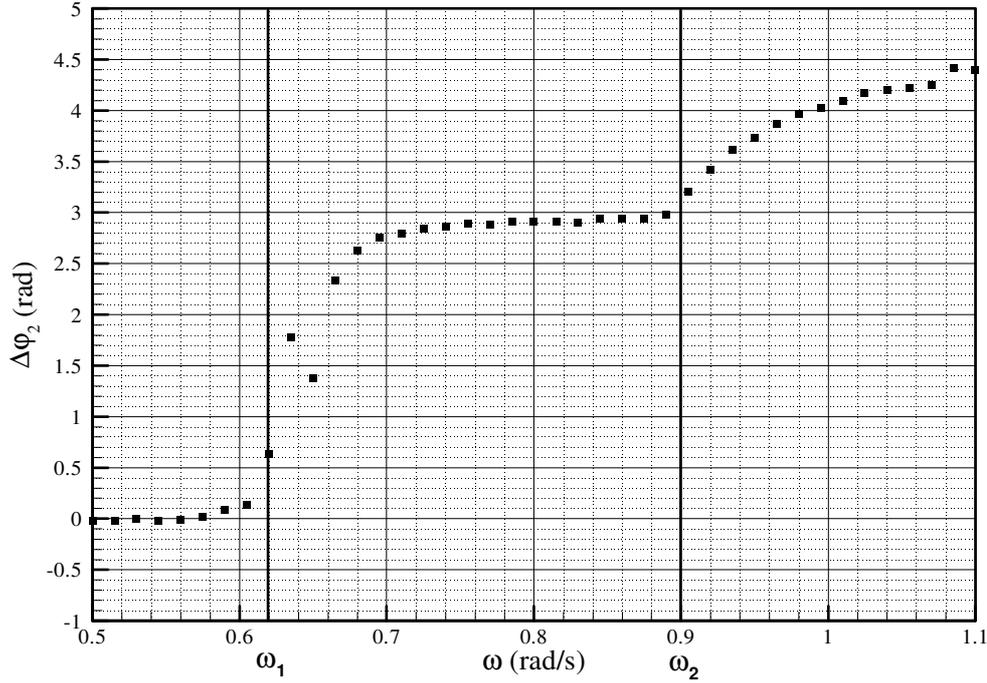


FIG. 6.13 – Différence de phase entre les maxima de la vitesse de la masse  $m_2$  et de la force d'excitation. Système à deux degrés de liberté.

et la vitesse optimale  $\tilde{u}_1$  :

$$\tilde{u}_1(\omega) = \frac{F_{ex}(\omega)}{2C_A(\omega)} \quad (6.47)$$

La condition de phase nulle sur la vitesse  $\tilde{u}_2$  apparaît entre la vitesse  $\tilde{u}_2$  et la force  $F$  que "voit" la masse embarquée  $m_2$ , mais on constate sur l'équation (6.46) que la différence entre la phase de la force d'excitation  $F_{ex}$  et la phase du mouvement  $u_2$  sur lequel on applique le contrôle est maintenant liée à la pulsation, ce qui complique le problème d'application du contrôle par latching. Pour la vitesse du porteur  $m_1$  par contre, on retrouve bien la condition de phase nulle (6.47), sachant que  $C_A(\omega)$  est réel.

Supposons maintenant que l'on applique le contrôle optimal, les vitesses sont reliées, dans le domaine fréquentiel, par :

$$m_2 i \omega \hat{u}_2(\omega) = \left[ -(m_1 + m_2 + \mu_\infty) i \omega + (C_A + (C_M - \mu_\infty) i \omega)^* + i \frac{k_1}{\omega} \right] \hat{u}_1(\omega) \quad (6.48)$$

La réponse impulsionnelle de radiation du flotteur s'obtient par transformée de Fourier inverse :

$$K(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (C_A + (C_M - \mu_\infty) i \omega) e^{i\omega t} d\omega & \forall t \geq 0 \\ 0 & \forall t < 0 \end{cases} \quad (6.49)$$

On peut alors montrer que la transformée de Fourier inverse du conjugué de l'effort de radiation vaut  $K(-t)$ .

Par transformée de Fourier inverse, il en résulte que l'équation (6.48) s'écrit dans le domaine temporel :

$$m_2 \hat{x}_2(t) = -(m_1 + m_2 + \mu_\infty) \hat{x}_1(t) + \int_t^\infty \tilde{x}_1(\tau) K(\tau - t) d\tau - k_1 \hat{x}_1(t) \quad (6.50)$$

et on voit réapparaître la non causalité.

La loi de commande s'écrit en fonction des accélérations optimales des deux masses :

$$U(t) = -m_2 \tilde{\ddot{x}}_1(t) - m_2 \tilde{\ddot{x}}_2(t) \quad (6.51)$$

ou encore en fonction de l'état de la masse  $m_1$  en utilisant l'équation (6.48) :

$$U(t) = (m_1 + \mu_\infty) \ddot{x}_1(t) - \int_t^\infty \dot{x}_1(\tau) K(\tau - t) d\tau + k_1 x_1(t)$$

L'effort que devrait fournir l'actionneur de contrôle se décompose en trois parties distinctes. La première est proportionnelle à l'accélération du flotteur. La seconde est proportionnelle à la position du flotteur. La dernière, non causale, fait intervenir les valeurs futures de la vitesse comme le confirme le tracé du noyau de la convolution, figure (6.14). Un tel contrôle n'est alors pas réalisable. On retombe naturellement sur le théorème de Naito [59].

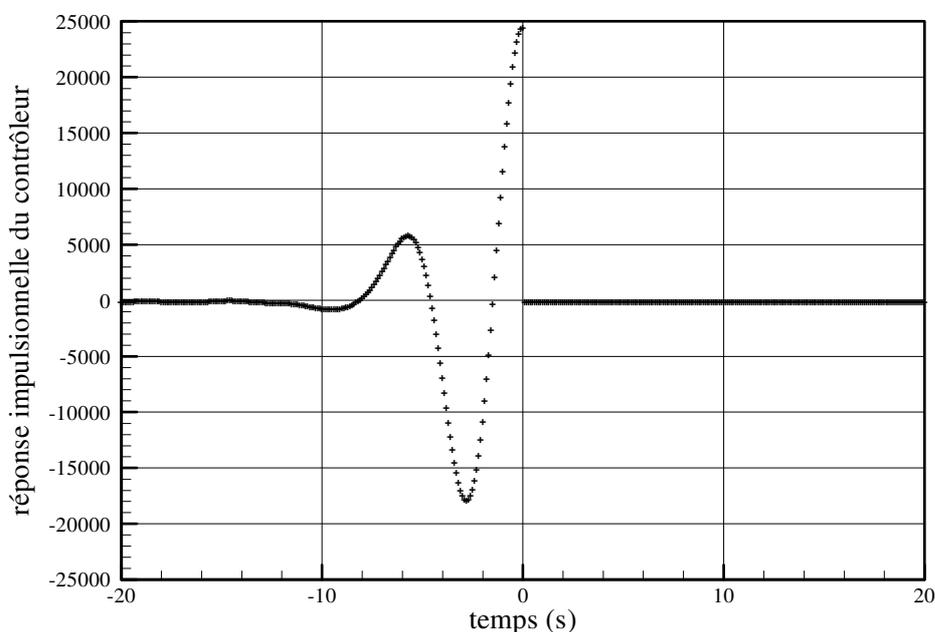


FIG. 6.14 – Réponse impulsionnelle du contrôleur  $K(-t)$ .

**Latching dans le cas monochromatique.** Dans le cas où la houle est monochromatique, on peut calculer le latching dans le domaine temporel de telle manière que les différences de

phase entre les maxima de la vitesse du mouvement contrôlé et les maxima de la force d'excitation soient égales à celles obtenues par la méthode analytique, pour la pulsation considérée. On construit ainsi une stratégie temporelle à partir des résultats de la méthode analytique qui présente malheureusement l'inconvénient de nécessiter une prédiction du futur de la force d'excitation, ce qui sera malaisé en régime aléatoire.

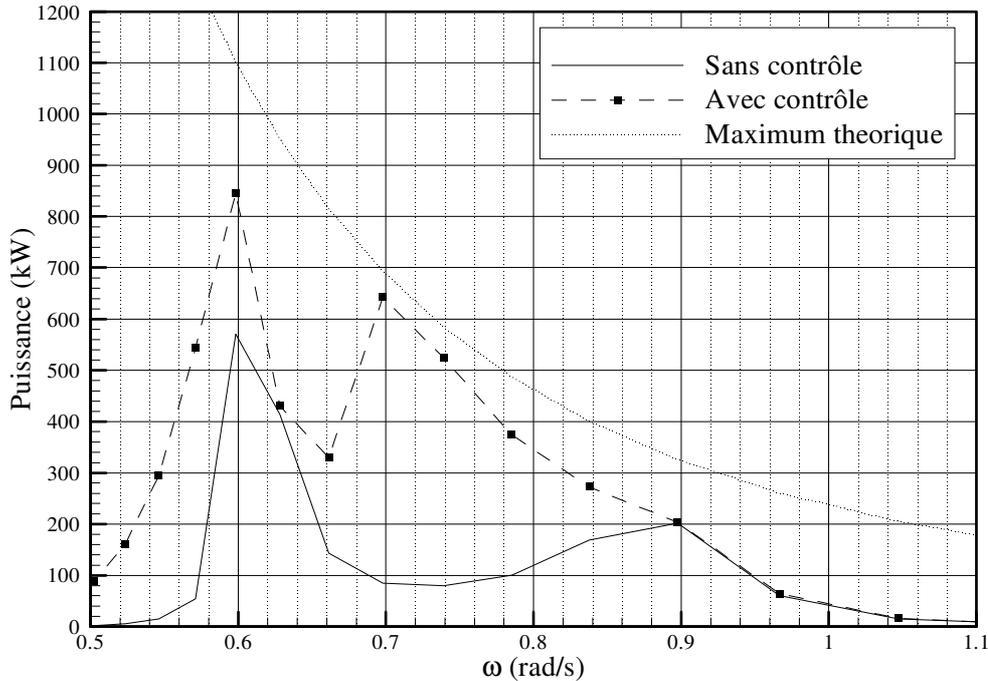


FIG. 6.15 – Puissance absorbée par le système à deux degrés de liberté par mètre de houle incidente en fonction de la période .

Comme on peut le voir sur la figure (6.15), cette stratégie fonctionne bien. Elle conduit dans le cas d'une houle monochromatique à des résultats sensiblement équivalents à ceux obtenus par le calcul analytique, cf figure (6.15).

**Latching dans le cas d'une houle aléatoire.** Dans le cas de la houle aléatoire, nous avons adapté cet algorithme de contrôle de la manière suivante. La force d'excitation est considérée comme une suite de demi sinusoides de pulsations et d'amplitudes variables. La pulsation de chaque demi sinusoides est calculée à partir de la durée séparant deux annulations de la force. Connaissant cette pulsation, on applique le contrôle de manière à ce que la différence de phase entre le prochain maximum de la vitesse  $\dot{x}_2$  et de la force d'excitation soit égale à la valeur calculée analytiquement pour cette pulsation. Comme on le voit sur la figure (6.16), cette stratégie fonctionne de manière assez satisfaisante. Ainsi, sur ce cas de houle aléatoire, le contrôle permet un gain d'énergie de quasiment 100 %.

Sur la figure (6.17) sont portés les matrices de puissance pour les cas de système non contrôlé et contrôlé avec l'algorithme décrit ci-dessus. On constate que le contrôle par latching dérivé ici permet à la fois d'élargir la bande passante du système et d'améliorer la production

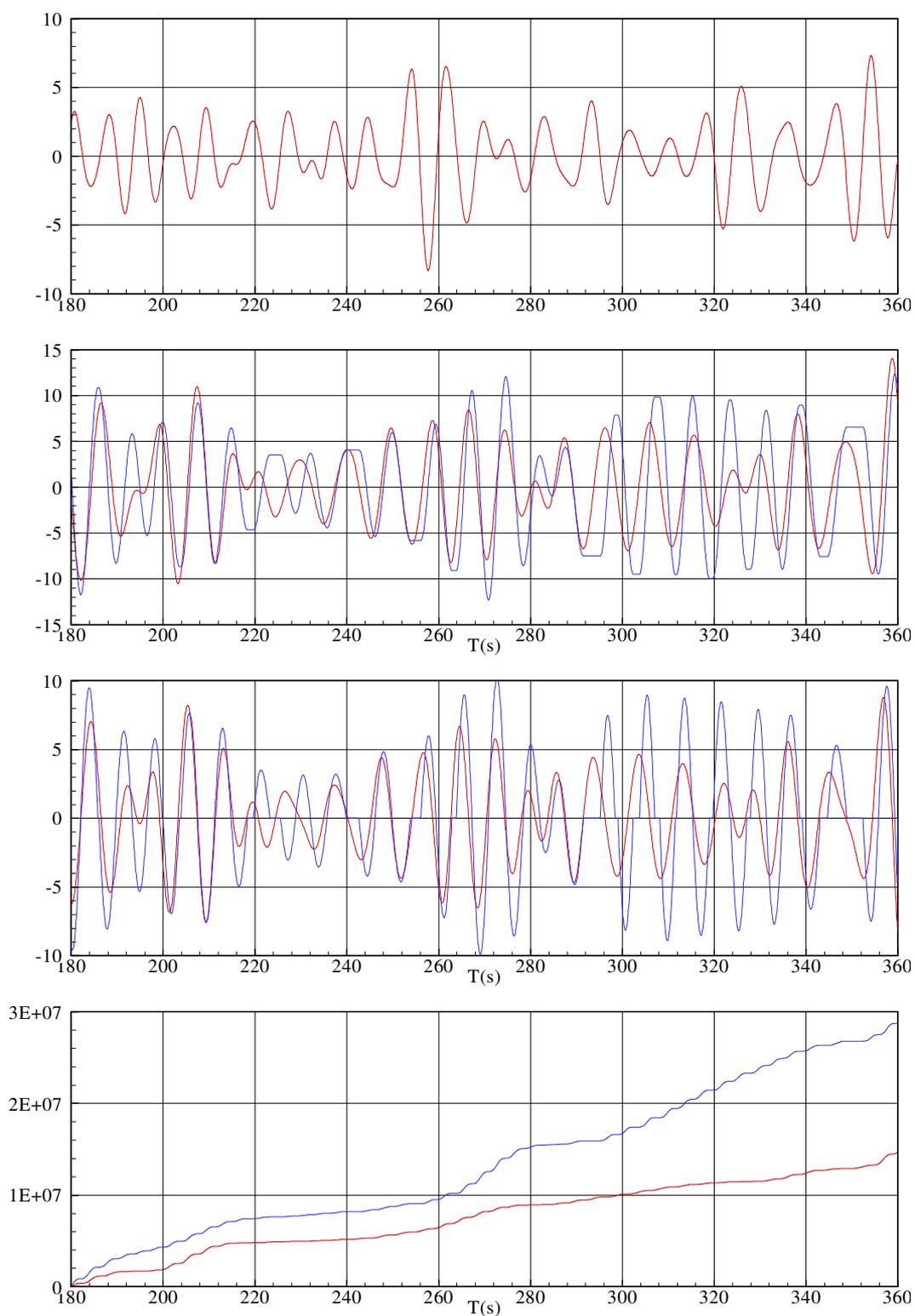


FIG. 6.16 – Simulation temporelle des mouvements dans un cas de houle aléatoire de période apparente égale à 9 secondes et de hauteur apparente 2.5 mètres. La première figure représente la force d'excitation, la seconde les mouvements  $x_2$ , la troisième la vitesse  $\dot{x}_2$  et la quatrième l'énergie cumulée à partir de 180 secondes. Les courbes en bleu sont les résultats avec contrôle.

à période donnée. En pondérant ces matrices par les probabilités de rencontre des états de mer à l'île d'Yeu, on obtient une puissance produite en moyenne annuelle de 82.5 kW sans contrôle contre 133 kW avec contrôle. Soit un gain de 60 % en production.

L'algorithme de contrôle utilisé ici en houle aléatoire est non causal, c'est-à-dire qu'il nécessite la prédiction du futur de la force d'excitation, et ne peut qu'être difficilement mis en pratique. Cependant, l'intérêt des résultats présentés dans ce paragraphe est de mettre en évidence la capacité du contrôle par latching à améliorer la production d'énergie de systèmes houlomoteurs à plus d'un degré de liberté. Ce travail a été publié dans [6].

## 6.4 Application à SEAREV.

### 6.4.1 Equation des mouvements.

**Système libre.**

D'après la première partie, nous avons vu que les mouvements du système peuvent s'écrire en théorie linéarisée sous la forme :

$$(\mathbf{M} + \boldsymbol{\mu}_\infty) \ddot{\mathbf{X}} = \Re(\mathbf{F}_{ex} e^{i\omega t + \varphi_0}) - \boldsymbol{\delta}\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{X} - \mathbf{B}\dot{\mathbf{X}} \quad (6.52)$$

$$\dot{\mathbf{I}} = \boldsymbol{\beta}\mathbf{I} + \boldsymbol{\alpha}\dot{\mathbf{X}} \quad (6.53)$$

avec :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_G \\ \theta \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (6.54)$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{ijr}^R \\ I_{ijr}^I \end{pmatrix}_{i \in \{1,5\}, j \in \{1,5\}, 1 \leq r \leq N_{ij}} \quad (6.55)$$

On remarquera que l'on a supprimé dans le vecteur d'état le mouvement de pilonnement. Il est en effet totalement découplé des autres mouvements dans le modèle linéaire et ne contribue pas à la production d'énergie.

Les différentes matrices qui apparaissent dans l'équation du mouvement sont données par :

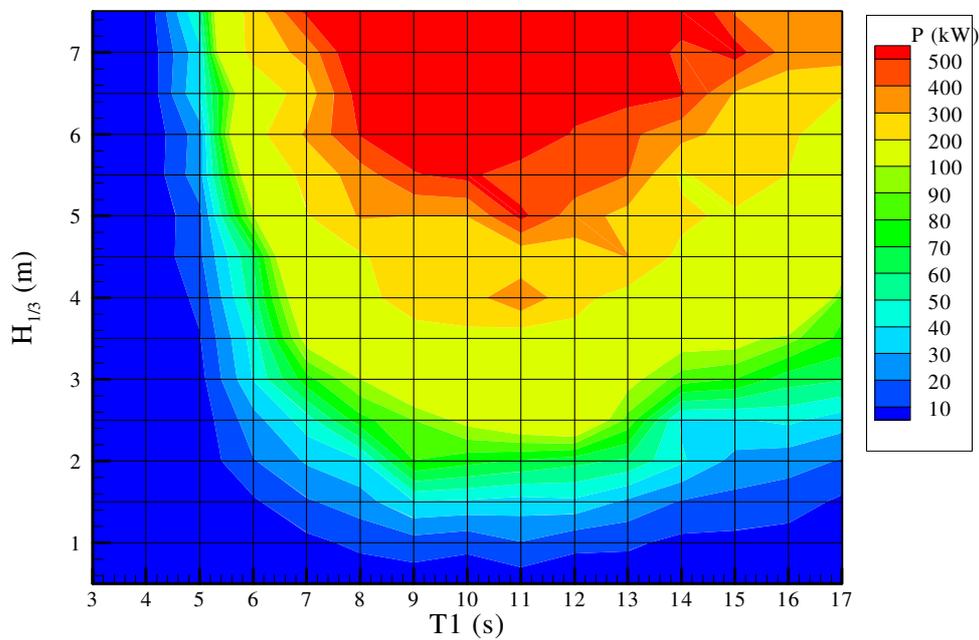
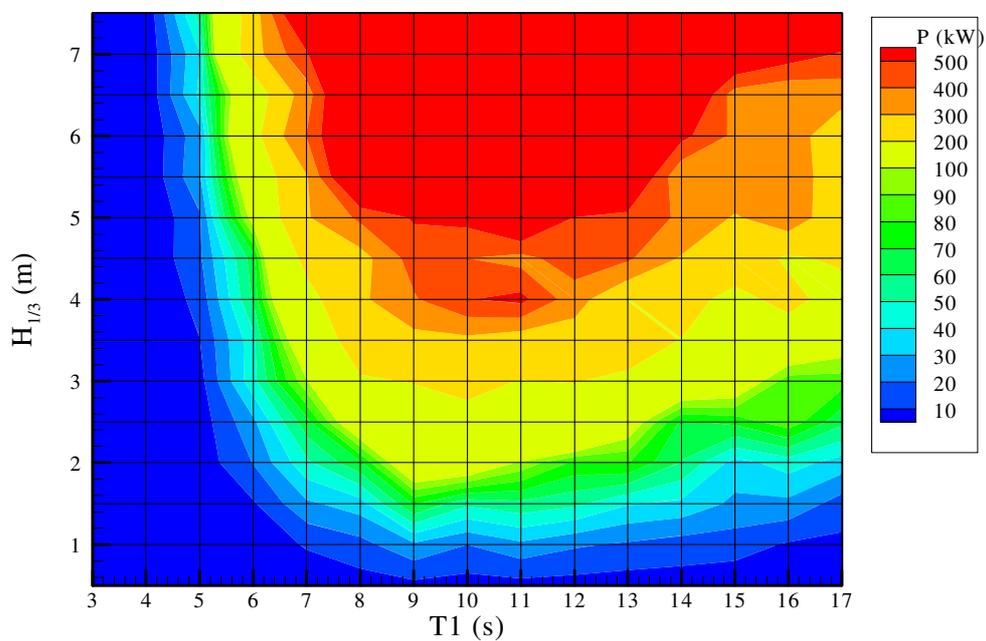
Sans contrôle :  $\langle P \rangle = 82.5$  kWAvec contrôle non causal :  $\langle P \rangle = 133$  kW

FIG. 6.17 – Matrices de puissance en houle aléatoire pour le système à deux degrés de liberté avec et sans contrôle.

$$\mathbf{F}_{ex} = \begin{pmatrix} F_{ex1} \\ F_{ex5} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.56)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_b + m_p & m_p(d-l) & -m_p l \\ m_p(d-l) & I_b + I_y + m_p(d-l)^2 & I_y + m_p l^2 - m_p d l \\ -m_p l & I_y + m_p l^2 - m_p d l & I_y + m_p l^2 \end{pmatrix} \quad (6.57)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & K_{H55} - m_p g(d-l) & m_p g l \\ 0 & m_p g l & m_p g l \end{pmatrix} \quad (6.58)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{PTO} \end{pmatrix} \quad (6.59)$$

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} (1)_{1 \leq j \leq 2N_{11} + 2N_{15}} & 0 \\ 0 & (1)_{1 \leq j \leq 2N_{15} + 2N_{55}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.60)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_{ijr}^R & -\beta_{ijr}^I \\ \beta_{ijr}^I & \beta_{ijr}^R \end{pmatrix}_{i \in \{1,5\}, j \in \{1,5\}, 1 \leq r \leq N_{ij}} \quad (6.61)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \left( \begin{pmatrix} \alpha_{ijr}^R \\ \alpha_{ijr}^I \end{pmatrix} \delta_{1j} \quad \begin{pmatrix} \alpha_{ijr}^R \\ \alpha_{ijr}^I \end{pmatrix} \delta_{5j} \quad \mathbf{0} \right)_{i \in \{1,5\}, j \in \{1,5\}, 1 \leq r \leq N_{ij}} \quad (6.62)$$

Soit le vecteur d'état  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix}$

L'équation du mouvement peut alors se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{2N_{11} + 4N_{15} + 2N_{55}} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{B} & -\boldsymbol{\delta} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{ex} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (6.63)$$

En inversant la matrice de masse, on obtient la formulation de l'équation de mouvement sous la forme d'une équation d'état :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \Re(\mathbf{B}e^{i(\omega t + \varphi_0)}) \quad (6.64)$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{2N_{11}+4N_{15}+2N_{55}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{B} & -\delta \\ \mathbf{0} & \alpha & \beta \end{pmatrix} \quad (6.65)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{2N_{11}+4N_{15}+2N_{55}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{ex} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (6.66)$$

### Système bloqué

Lorsque le système est bloqué, les équations du mouvement deviennent :

$$(\mathbf{M}' + \boldsymbol{\mu}_\infty) \ddot{\mathbf{X}} = \Re(\mathbf{F}_{ex} e^{i\omega t + \varphi_0}) - \delta \mathbf{I} - \mathbf{K}' \mathbf{X} \quad (6.67)$$

$$\dot{\mathbf{i}} = \beta \mathbf{I} + \alpha \dot{\mathbf{X}} \quad (6.68)$$

avec :

$$\mathbf{F}_{ex} = \begin{pmatrix} F_{ex1} \\ F_{ex5} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.69)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_b + m_p & m_p(d-l) & 0 \\ m_p(d-l) & I_b + I_y + m_p(d-l)^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_y + m_p l^2 \end{pmatrix} \quad (6.70)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & K_{H55} - m_p g(d-l) & m_p g l \\ 0 & 0 & m_p g l \end{pmatrix} \quad (6.71)$$

L'équation du mouvement peut alors s'écrire :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}' \mathbf{X} + \Re(\mathbf{B}' e^{i(\omega t + \varphi_0)}) \quad (6.72)$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}'^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{2N_{11}+4N_{15}+2N_{55}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}' & \mathbf{0} & -\delta \\ \mathbf{0} & \alpha & \beta \end{pmatrix} \quad (6.73)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}'^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{2N_{11}+4N_{15}+2N_{55}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{ex} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (6.74)$$

Sont ainsi exprimés les équations du mouvements du système SEAREV dans le domaine temporel et en théorie linéarisée sous la forme d'équations d'état. La méthode présentée dans la première section peut alors s'appliquer de nouveau pour évaluer le potentiel que peut engendrer l'application d'un contrôle par latching au système en houle régulière.

## 6.4.2 Résultats.

### Système considéré.

Le système SEAREV considéré dans ce paragraphe est présenté en annexe et référencé sous la dénomination DES2953.

### Fonction de transferts du système contrôlé.

La figure (6.18) présente les fonctions de transfert de ce système contrôlé et non contrôlé dans le cas où  $k = 0$ , c'est-à-dire que la période de la réponse est égale à la période de houle incidente.

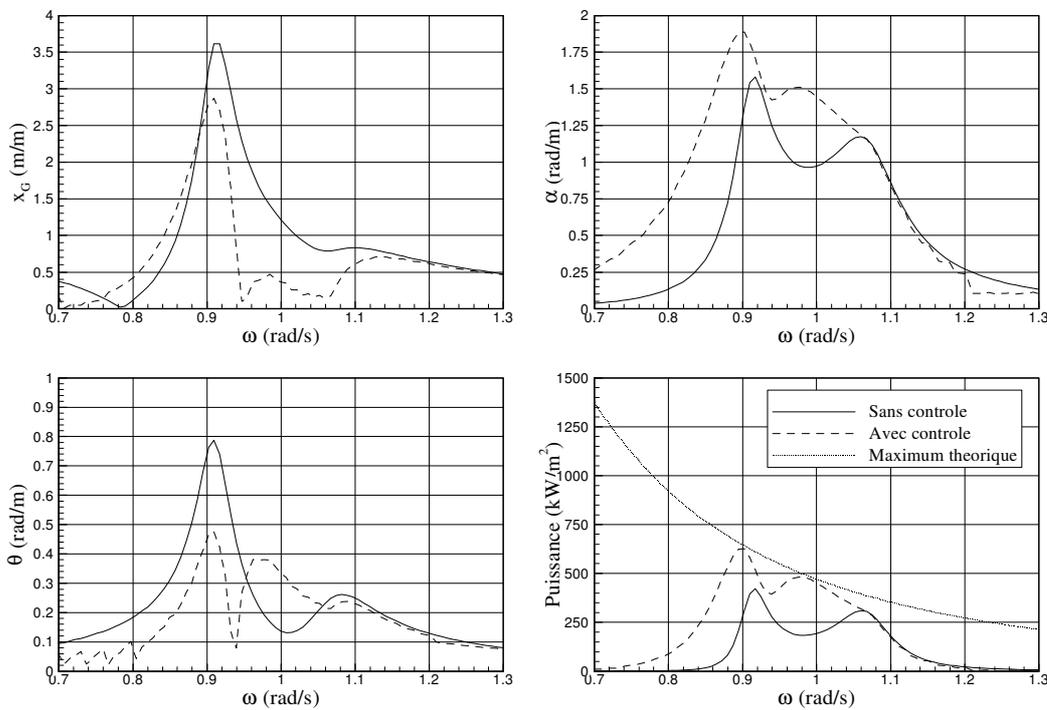


FIG. 6.18 – Fonction de transfert d'un SEAREV typique avec et sans contrôlé par latching. Le période de la réponse contrôlé est égale à la période de la réponse non contrôlé.

En système découplé, la pulsation propre du flotteur vaut 0.9 rad/s et celle du pendule vaut 1.0. Comme dans le cas du système à deux degrés de liberté, le couplage a tendance à écarter les résonances du système.

Globalement, les fonctions de transfert calculés pour SEAREV contrôlé sont similaires à celle obtenues dans le cas du système simplifié à deux degrés de liberté étudié précédemment. Le contrôle engendre une amplification du mouvement relatif pour les pulsations supérieures à la pulsation propre du pendule, avec le même phénomène de fréquence de coupure à mesure que l'on se rapproche de la pulsation propre du flotteur. L'effet du contrôle sur les mouvements de tangage et de cavement est par contre plus compliqué. En particulier, sur le tangage, il apparaît que le contrôle tend à diminuer l'amplitude des mouvements pour les pulsations

proches de la résonance du flotteur, et à l'amplifier pour les pulsations proches de la résonance du pendule.

Sur la figure présentant les puissances absorbées, on retrouve également le même type de résultats que pour le système à deux degrés de liberté. Le contrôle par latching a ainsi deux effets : il permet d'élargir quelque peu la bande passante en basse fréquence et il améliore l'absorption pour les fréquences comprises entre les résonances du système. Finalement, le contrôle par latching à  $k = 0$  (période de la réponse égale à la période de la houle) multiplie par deux l'aire sous la courbe de puissance et va même jusqu'à autoriser l'absorption du maximum théorique de puissance pour  $\omega = 0.9$  rad/s.

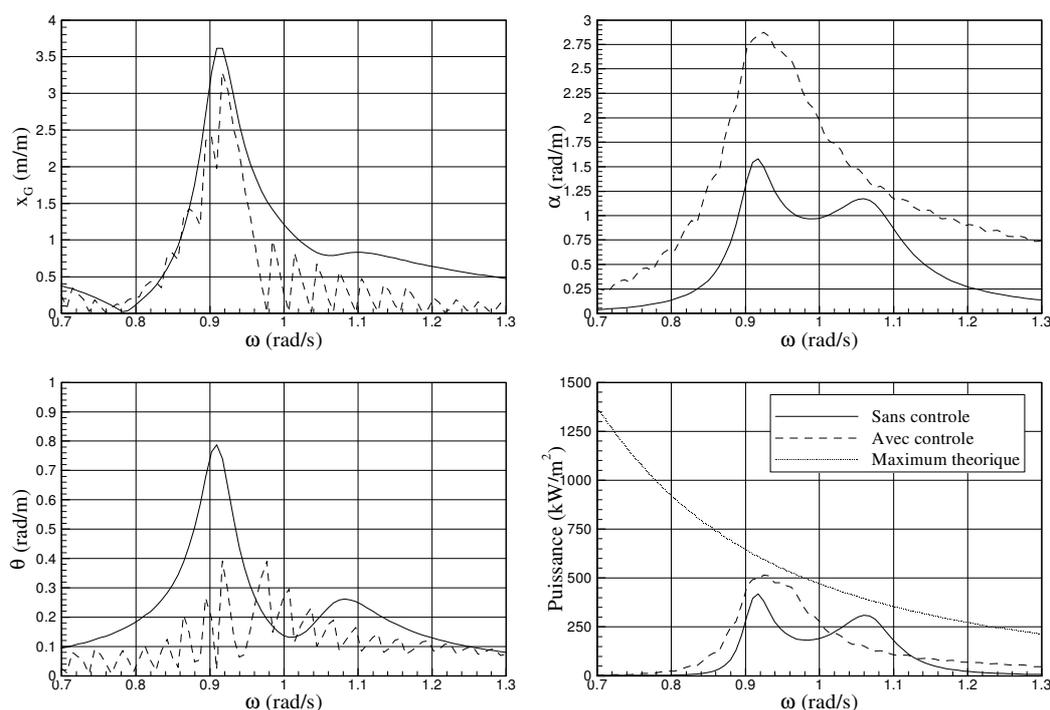


FIG. 6.19 – Fonction de transfert d'un SEAREV typique avec et sans contrôlé par latching. Le période de la réponse contrôlé est à présent égale au triple de la période de la réponse non contrôlé.

Nous considérons sur la figure (6.19) un contrôle par latching à  $k = 1$ , c'est-à-dire que nous recherchons des solutions pour le mouvement contrôlé de période triple à celle de la houle incidente. Comme on peut le voir sur la figure représentant le mouvement relatif, l'amplitude du mouvement du pendule est amplifié pour toutes les pulsations. L'amplitude des mouvements du flotteur reste tendanciellement plus faible à celle qu'elle est sans contrôle. Le phénomène de dents de scie que l'on observe provient d'une discrétisation insuffisante des phases.

Comparativement au contrôle à  $k = 0$ , le contrôle à  $k = 1$  a pour intérêt d'améliorer la puissance absorbée pour les pulsations supérieures à la pulsation de résonance associée au pendule ( $\omega = 1.05$  rad/s), et pour une petite zone de pulsation proche de la pulsation de coupure. Dans le reste du domaine de fréquence, la puissance absorbée est moindre que celle avec le contrôle à  $k = 0$  et est même moindre que sans contrôle lorsque la pulsation est proche

de la pulsation propre du pendule. Elle est ainsi globalement moins intéressante, ce qui est dû au fait que, dans ce mode de contrôle, même si l'amplitude du mouvement est plus grande, la durée de travail sur un cycle est bien moindre.

### Application en houle régulière.

On a tracé sur les figures (6.20) et (6.21) des simulations temporelles des mouvements du SEAREV sans puis avec contrôle par latching en houle régulière. Le système est initialement au repos à  $t = 0$ , puis est soumis à une houle régulière. Pendant les 360 premières secondes de la simulation, aucun contrôle n'est appliqué et le régime transitoire pour les mouvements est amorti petit à petit pour atteindre le régime forcé. A  $t=360$  secondes, le contrôle par latching est appliqué de la manière suivante. A chaque passage de la vitesse du mouvement relatif à zéro, le pendule est bloqué pendant le délai qui maximise la puissance absorbée. Le calcul du délai optimal est réalisé d'après la méthode présentée au paragraphe 6.1. Le pendule est ensuite relâché et le processus est itéré.

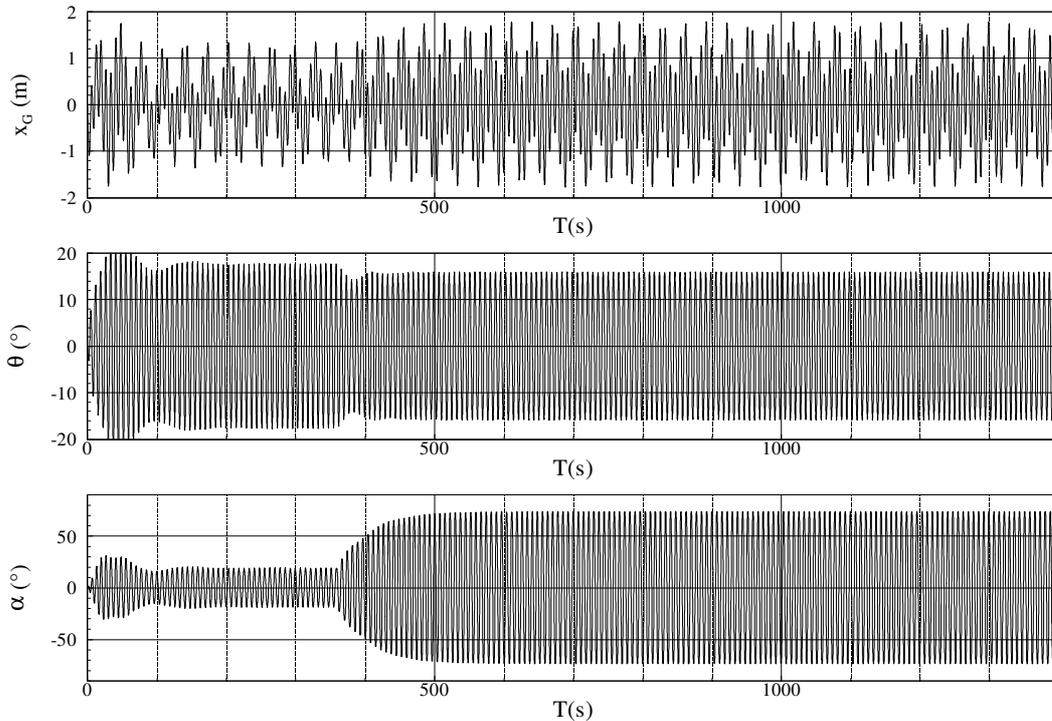


FIG. 6.20 – Simulation temporelle des mouvements d'un SEAREV sans puis avec contrôle par latching. Le contrôle est appliqué à  $t = 360$  s. La pulsation de la houle vaut  $\omega = 0.85$  rad/s et l'amplitude 1 mètre.

La figure (6.20) met en évidence la capacité du contrôle par latching à faire naître des résonances paramétriques dans la dynamique du système. A partir de 360 secondes et après une période de transition où l'amplitude croît, on constate que les mouvements du système deviennent périodiques. L'amplitude du mouvement relatif est multiplié par 4 et la puissance absorbée est multipliée par 18, passant ainsi de 16 à 280 kW. Comme prédit par la méthode

semi analytique, l'amplitude du mouvement de tangage diminue avec le contrôle et l'amplitude du cavalement augmente. Quantitativement, l'amplitude des mouvements est en accord avec les résultats de la figure (6.18).

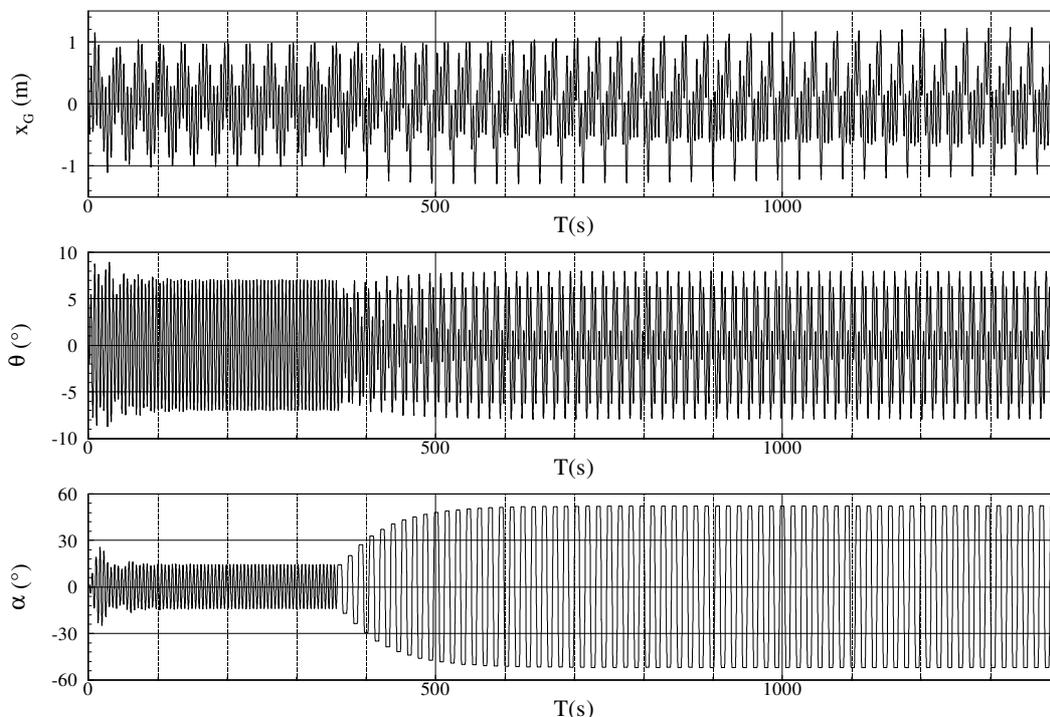


FIG. 6.21 – Simulation temporelle des mouvements d'un SEAREV sans puis avec contrôle par latching. Le contrôle est appliqué à  $t = 360$  s. La pulsation de la houle vaut  $\omega = 1.2$  rad/s et l'amplitude 1 mètre.

La figure (6.21) présente une simulation où la période de la réponse avec le contrôle par latching vaut trois fois la période de la force d'excitation ( $k = 1$ ). Là encore, après un régime transitoire, le mouvement s'établit et l'amplitude du mouvement est multiplié par 4. La puissance absorbée est elle multipliée par 3.5, passant de 18 à 70 kW. On pourra remarquer l'apparition des surharmoniques dans la réponse en tangage, dus à la non linéarité intrinsèque de ce contrôle.

### Houle irrégulière.

Contrairement au cas du système à deux degrés de liberté, nous ne sommes pas parvenu pour l'instant à définir pour SEAREV des stratégies de commande qui permettent d'exploiter les possibilités du latching en houle irrégulière. Nous nous sommes alors tourné vers la théorie de la commande optimale.

# Chapitre 7

## Contrôle par latching : méthode de la commande optimale.

### 7.1 Théorie de la commande optimale par latching.

#### 7.1.1 Le problème de la commande optimale

##### Position du problème.

Le problème consiste à maximiser l'énergie absorbée par un système de conversion de l'énergie des vagues en présence d'une houle régulière ou aléatoire. Du point de vue des mathématiciens, il s'agit de minimiser la fonctionnelle :

$$\max_u E(u) = \int_0^T F(\mathbf{X}, u) dt \quad (7.1)$$

où  $u$  est la variable de contrôle,  $\mathbf{X}$  le vecteur d'état du système et  $F(\mathbf{X}, u)$  est ici la puissance instantanée absorbée.

L'état du système est régi par l'équation d'état :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}, u) \quad (7.2)$$

avec une condition initiale

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \quad (7.3)$$

Soit également :

$$u(t) \in \Omega \quad (7.4)$$

avec  $\Omega$  domaine borné qui représente les limites de variation du contrôle.

##### Le principe du maximum.

Soit le hamiltonien du problème, défini par :

$$H = -F + \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{f} \quad (7.5)$$

où  $\boldsymbol{\lambda}$  est un vecteur d'état associé au problème.

Le vecteur  $\lambda$  est déterminé par le jeu d'équations adjointes :

$$\dot{\lambda} = -\mathbf{H}_X(\mathbf{X}, u, \lambda) \quad (7.6)$$

et la condition finale :

$$\lambda(T) = 0 \quad (7.7)$$

Le principe du maximum de Pontryaguin [9] implique que la commande optimale est celle qui maximise le hamiltonien. Inversement, si la commande rend le hamiltonien maximum à chaque instant, c'est la commande optimale. Elle sera notée  $u^*$ .

### Application pratique.

En pratique numérique, nous procéderons par itération suivant la méthode proposée par Hoskin et Nichols [45].

Tout d'abord, on choisit une approximation pour le contrôle. C'est-à-dire que l'on se donne une séquence de contrôle arbitraire. Les équations d'état (7.2) sont ensuite intégrés dans le sens de l'écoulement du temps. Connaissant alors l'état du système à chaque instant, on intègre les équations adjointes (7.6) dans le sens inverse de l'écoulement du temps et on en déduit la commande qui maximise le hamiltonien (7.5). Il ne reste alors plus qu'à itérer la procédure.

La convergence de la méthode a été montrée par Gruver et Sachs [40].

### 7.1.2 La commande optimale par latching.

Comme nous l'avons déjà vu, le contrôle par latching consiste à bloquer par des moyens mécaniques un des degrés de liberté du système lorsque sa vitesse s'annule, puis à le relâcher après un laps de temps optimal dans le but de faire naître dans la dynamique du système des résonances paramétriques. Puisque le système est bloqué à vitesse nulle, la dépense énergétique est minimale. Du point de vue du système, tout se passe comme si il était introduit instantanément un amortissement infini sur le degré de liberté considéré.

Dans la pratique numérique du calcul du contrôle par latching optimal, l'amortissement infini doit être remplacé par un amortissement grand. En effet, pour garantir la stabilité du calcul, Hoskin et al. [45] ont constaté que le pas de temps devait respecter  $h < 2/G$  où  $G$  est le coefficient d'amortissement lorsque la méthode d'intégration est la méthode des trapèzes.

L'effort généré par le contrôle par latching sera donc modélisé par la suite dans les équations du système par :

$$F = -Gu(t)\dot{x}$$

avec  $u \in [0, 1]$  et  $G$  très grand.

## 7.2 Application à un système à un degré de liberté.

### 7.2.1 Equation du mouvement du système.

Considérons à nouveau le système générique simple constitué d'un cylindre en équilibre indifférent sous l'effet de son poids, de la poussée hydrostatique et d'une force d'amarrage verticale présenté au paragraphe 6.2. Le mouvement de pilonnement est noté  $\zeta$  et nous avons

vu que l'équation de son mouvement pouvait se mettre sous la forme d'un système d'équations différentielles à coefficients constants :

$$\left\{ \begin{array}{l} (M + \mu_\infty)\ddot{\zeta}(t) + \sum_{i=1}^N I_i^R(t) + (B + Gu(t))\dot{\zeta}(t) + k\zeta(t) = F_{ex}(t) \\ \dot{I}_i^R(t) = \beta_i^R I_i^R(t) - \beta_i^I I_i^I(t) + \alpha_i^R \dot{\zeta}(t) \\ \dot{I}_i^I(t) = \beta_i^R I_i^I(t) + \beta_i^I I_i^R(t) + \alpha_i^I \dot{\zeta}(t) \end{array} \right.$$

On remarquera l'introduction dans ces équations du terme de contrôle  $uG\dot{\zeta}$ .

Soit  $z = \zeta$  et  $v = \dot{\zeta}$ . L'équation du mouvement peut s'écrire sous forme de l'équation d'état :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = v \\ \dot{v} = f_{ex} - \frac{1}{M + \mu_\infty} (B + Gu)v - \omega_0^2 z - \frac{1}{M + \mu_\infty} \sum_{i=1}^N I_i^R \\ \dot{I}_i^R = \beta_i^R I_i^R - \beta_i^I I_i^I + \alpha_i^R v \\ \dot{I}_i^I = \beta_i^R I_i^I + \beta_i^I I_i^R + \alpha_i^I v \end{array} \right. \quad (7.8)$$

## 7.2.2 Equations de la commande optimale.

Pour ce premier problème, il s'agit de maximiser l'absorption d'énergie pendant une période d'utilisation  $T$ , soit minimiser le critère :

$$\max_u E(u) = - \int_0^T Bv^2 dt \quad (7.9)$$

Soit alors le hamiltonien défini selon la loi (7.5) :

$$\begin{aligned} H &= Bv^2 + \lambda_1 v + \lambda_2 \left( f_{ex} - \frac{1}{M + \mu_\infty} (B + Gu)v - \omega_0^2 z - \frac{1}{M + \mu_\infty} \sum_{i=1}^N I_i^R \right) \\ &+ \sum_{i=1}^N \lambda_i^R (\beta_i^R I_i^R - \beta_i^I I_i^I + \alpha_i^R v) + \lambda_i^I (\beta_i^R I_i^I + \beta_i^I I_i^R + \alpha_i^I v) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Les équations adjointes du problème de commande optimale sont alors, d'après (7.6) :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \omega_0^2 \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 &= -2Bv - \lambda_1 + \lambda_2 (B + Gu) - \sum_{i=1}^N (\lambda_i^R \alpha_i^R + \lambda_i^I \alpha_i^I) \\ \dot{\lambda}_i^R &= -\lambda_i^R \beta_i^R - \lambda_i^I \beta_i^I + \frac{\lambda_2}{M + \mu_\infty} \\ \dot{\lambda}_i^I &= \lambda_i^R \beta_i^I - \lambda_i^I \beta_i^R \end{aligned} \quad (7.11)$$

Le hamiltonien étant linéaire par rapport à  $u$ , le contrôle est de type bang-bang. Cela signifie que  $u$  prend pour valeur ses bornes 0 ou 1. Ainsi, à chaque instant, le hamiltonien sera

maximum si :

$$u = \begin{cases} 1 & \text{si } -\lambda_2 G v > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.12)$$

En utilisant les équations (7.8), (7.11) et (7.12), nous sommes désormais en mesure de déterminer la loi de contrôle optimal par latching pour n'importe quel système de ce type pendant une période  $T$  de houle régulière ou irrégulière donnée.

### 7.2.3 Etudes de convergence.

Dans toutes les simulations, le calcul de la loi de commande a été réalisé par la méthode itérative. Afin d'étudier sa vitesse de convergence, nous avons porté sur la figure (7.1) la puissance absorbée (en  $W$ ) en fonction du nombre d'itérations dans le cas d'une houle monochromatique de 12 secondes de période et 1 mètre d'amplitude.

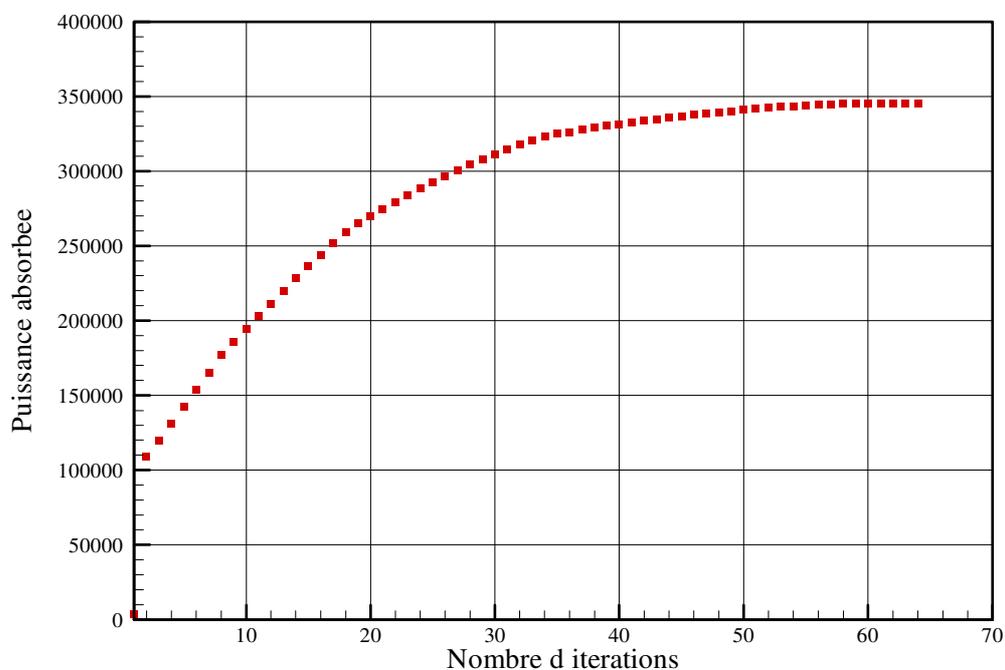


FIG. 7.1 – Convergence de la loi de commande optimale pour une houle monochromatique de période 12 secondes et d'amplitude 1 mètre.

A la première itération, la puissance absorbée est multipliée par 20. Ensuite, d'itérations en itérations, la puissance absorbée croît régulièrement jusqu'à convergence pour environ 70 itérations, et ce seuil est apparu comme le seuil de convergence dans la plupart des simulations.

La figure (7.2) présente une étude de la convergence de la réponse avec contrôle en fonction du coefficient de latching  $G$ . Les simulations temporelles présentées ici correspondent à des calculs convergés sur le nombre d'itérations. Nous nous sommes limités à  $G = 80 (M + \mu_\infty)$  pour des raisons de temps de calcul. En effet, il faut diminuer drastiquement le pas de temps au fur et à mesure que  $G$  augmente pour conserver un schéma d'intégration stable.

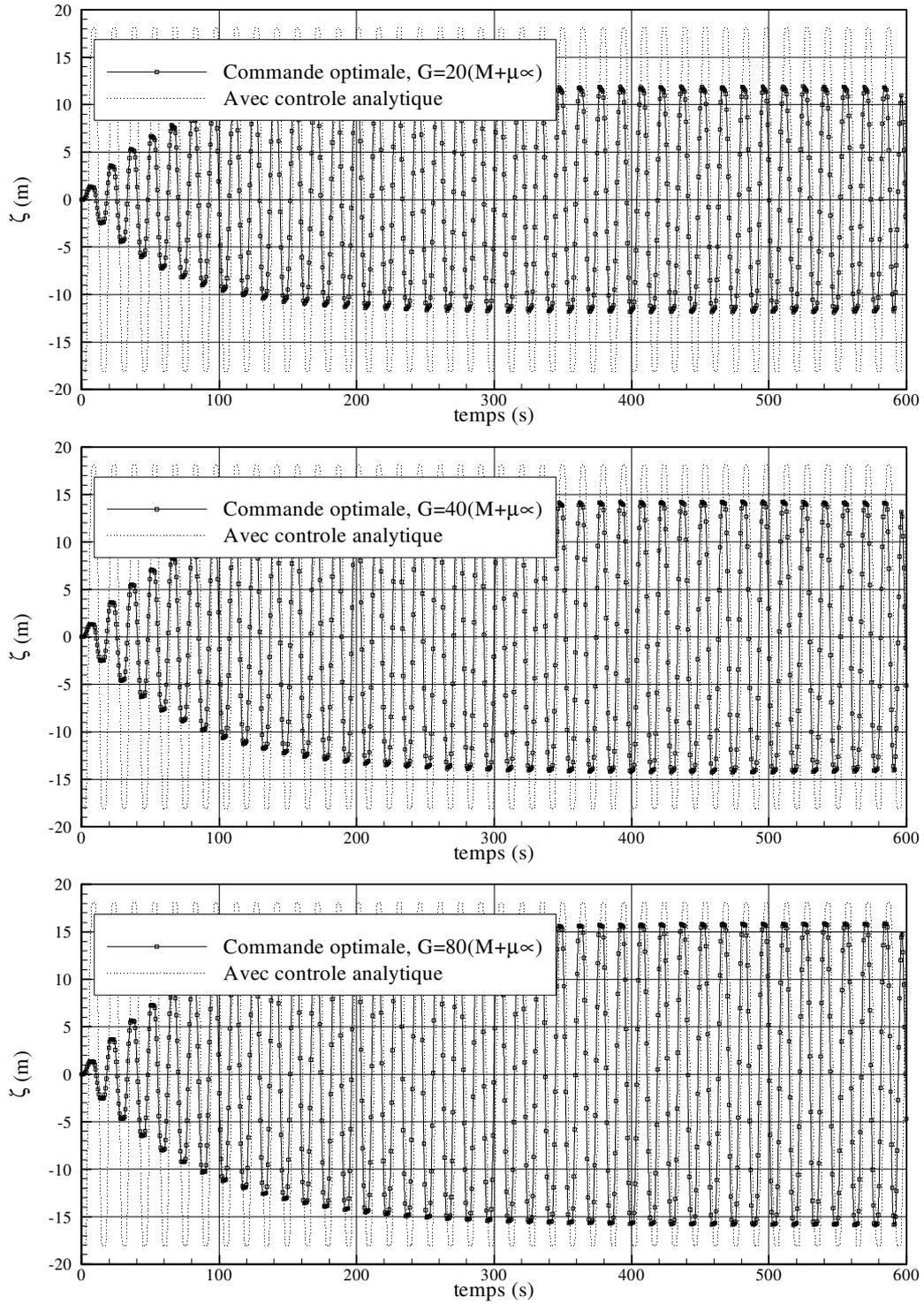


FIG. 7.2 – Comparaison des résultats de commande optimale pour différentes valeurs du coefficient de latching  $G$  et par rapport à la solution analytique. La période de la houle vaut 12 secondes et l'amplitude 1 mètre.

Immédiatement, il apparaît que le calcul du contrôle par latching par la commande optimale et par la méthode analytique ne concordent pas exactement. Ce résultat ne doit pas nous surprendre, puisque les équations du mouvement à résoudre ne sont pas tout à fait les mêmes dans les deux cas. Ainsi, dans le cas du contrôle analytique, tout se passe comme si la valeur du coefficient  $G$  valait  $+\infty$ . Dans le cas du calcul par la commande optimale, le latching est quelque peu dégradé,  $G$  à une valeur finie et il apparaît sur la figure (7.2) que plus la valeur de  $G$  est grande, et plus la solution tend vers la solution issue de la méthode analytique.

De ces résultats, nous pouvons conclure que la dégradation du coefficient  $G$  à des valeurs finies a un effet non négligeable et pénalisant sur la puissance. Ainsi, dans le cas d'un contrôle du type  $-Gu\dot{a}$ , la valeur optimale pour le coefficient  $G$  est l'infini, c'est-à-dire le contrôle par latching. Notons qu'un constat similaire a été formulé par Ringwood et al. [65].

## 7.2.4 Résultats.

### Houle régulière.

La figure (7.3) présente les fonctions de transfert en puissance du système à 1 degré de liberté sans contrôle, avec contrôle par commande optimale et avec contrôle par le calcul semi analytique. Pour le calcul de la puissance avec contrôle par commande optimale, le résultat est obtenu à partir d'une simulation temporelle sur 600 secondes et la puissance calculée par moyenne sur les 300 dernières secondes, afin d'éliminer le régime transitoire. Le paramètre de latching  $G$  est pris égal à  $80(M + \mu_\infty)$ .

Sur la première figure, on constate que le calcul du contrôle par latching par la théorie de la commande optimale prédit une amélioration considérable de la puissance absorbée pour les périodes supérieures à la période de résonance. Cependant, on constate que le niveau de puissance obtenu est inférieur au résultat du calcul analytique. Comme nous l'avons déjà dit, ce résultat est à mettre sur le compte de la valeur non infinie du coefficient  $G$  dans le calcul avec la commande optimale.

Sur le second graphique de la figure (7.3), on constate que le calcul du latching par commande optimale ne prédit pas le triplement de période ( $k = 1$ ). En fait, il faut comprendre que le problème de détermination de la commande optimale est un problème d'optimisation, où il s'agit de maximiser le hamiltonien. Comme dans de nombreux problèmes d'optimisation, le hamiltonien peut présenter des maxima locaux, et le maximum vers lequel converge le processus d'optimisation dépend de la méthode utilisée. Avec le processus itératif, la loi de commande optimale obtenue est le maximum local le plus proche de la loi de commande initiale. Comme on initialise le processus avec la réponse sans commande, le processus converge vers la solution à période égale.

Ainsi, en houle régulière, la méthode de latching par commande optimale prédit moins bien le gain en puissance absorbée que permet le latching que la méthode analytique. Cependant, et c'est là tout son avantage, elle permet de traiter le problème de la stratégie de commande optimale en houle irrégulière.

### Houle irrégulière

La figure (7.4) présente la puissance absorbée en houle aléatoire en fonction de la période de pic du spectre. Chaque point correspond à la puissance moyenne absorbée pour une simulation

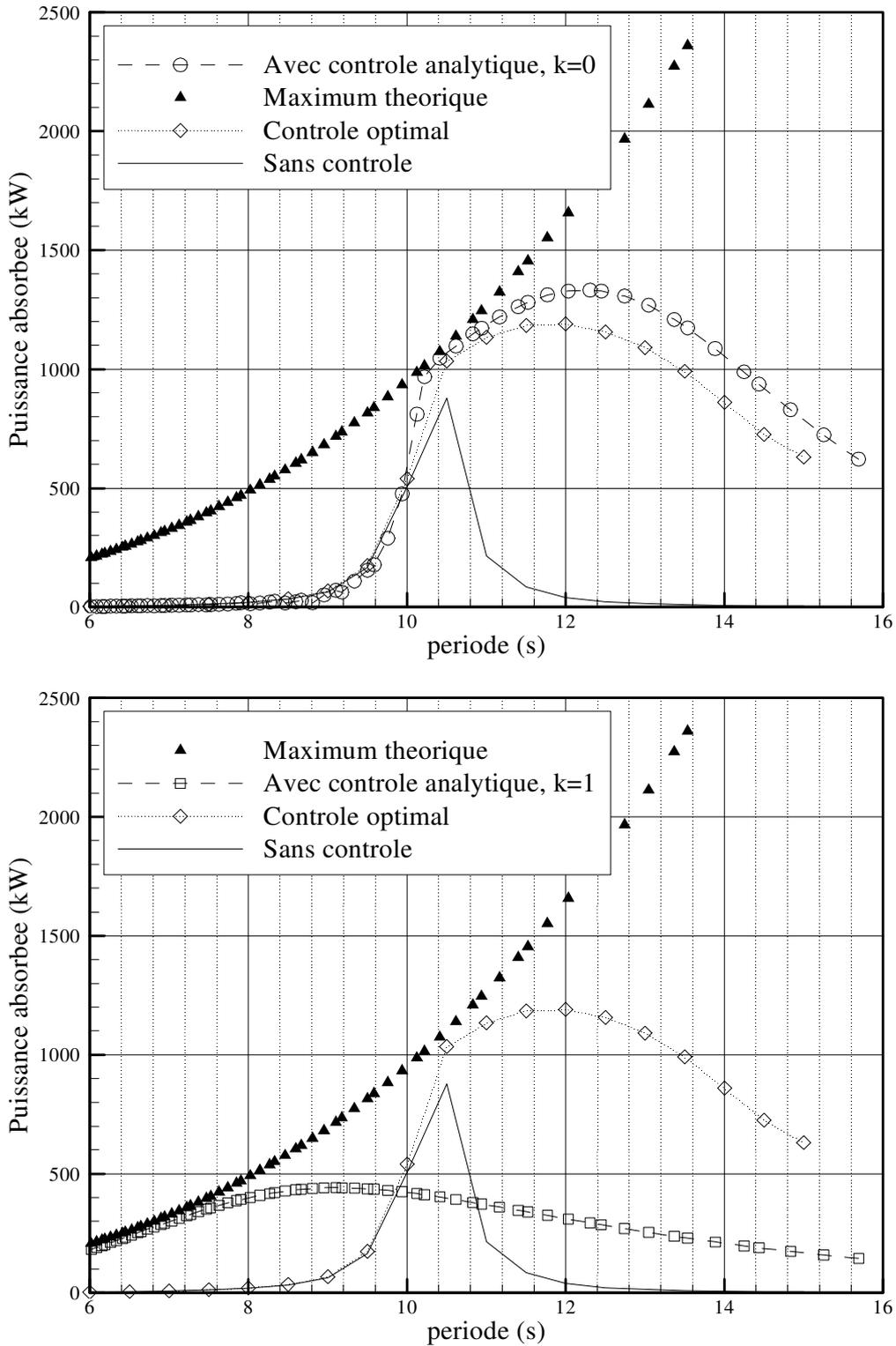


FIG. 7.3 – Comparaison des puissances absorbées par un système masse ressort avec contrôle optimal, analytique avec  $k=0$  et  $k=1$ .

pendant 600 secondes avec et sans contrôle. Le paramètre de latching  $G$  vaut  $80(M + \mu_\infty)$ .

Malgré une dispersion importante, due à la durée finie des simulations et au tirage aléatoire des phases des raies spectrales, on constate que le contrôle permet une amplification importante de la puissance absorbée pour les périodes de pics supérieures à 8 secondes. Dans l'ensemble la puissance est multipliée par un facteur 2 à 3.

Cette figure confirme que la théorie de la commande optimale permet d'évaluer le gain en énergie apporté par ce type de contrôle en houle irrégulière. Par la suite, on l'appliquera au module SEAREV afin de l'évaluer pour notre système.

## 7.3 Application à SEAREV.

On considère ici le même système SEAREV que dans le chapitre précédent.

### 7.3.1 Equation du mouvement.

L'équation d'état est :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, u)$$

avec :

$$\begin{aligned} \dot{x}_G &= u \\ \dot{z}_G &= w \\ \dot{\theta} &= \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} &= \dot{\alpha} \\ \mathbf{M} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_{ex,1}(t) - \sum_{j=1}^3 \sum_{r=1}^{N_{1j}} I_{1jr}^R - k_x x_G \\ F_{ex,3}(t) - \sum_{j=1}^3 \sum_{r=1}^{N_{2j}} I_{2jr}^R - K_{H33} z_G \\ F_{ex,5}(t) - \sum_{j=1}^3 \sum_{r=1}^{N_{3j}} I_{3jr}^R - (K_{H55} - m_p g (d-l)) \theta - m_p g l \alpha \\ - (B_{PTO} + Gu) \dot{\alpha} - m_p g l (\theta + \alpha) \end{pmatrix} \\ \overset{\cdot}{I}_{ijr}^R &= \beta_{ijr}^R I_{ijr}^R - \beta_{ijr}^I I_{ijr}^I + \alpha_{ijr}^R (\delta_{1j} u + \delta_{2j} w + \delta_{3j} \dot{\theta}) \\ \overset{\cdot}{I}_{ijr}^I &= \beta_{ijr}^R I_{ijr}^I + \beta_{ijr}^I I_{ijr}^R + \alpha_{ijr}^I (\delta_{1j} u + \delta_{2j} w + \delta_{3j} \dot{\theta}) \end{aligned} \tag{7.13}$$

où  $(x_G, z_G)$  est la position du centre de gravité du flotteur,  $\theta$  l'angle de tangage et  $\alpha$  la mesure de l'angle relatif entre le pendule et le flotteur. Les produits de convolution représentant le terme de mémoire de l'effort de radiation ont été identifiés selon la méthode décrite dans la section précédente et apparaissent sous la forme des sommes sur  $I$ . Le contrôle par latching est implémenté comme précédemment sous la forme préconisée par Hoskin et al. [45], soit un amortissement additionnel  $-Gu\dot{\alpha}$ , avec  $G$  grand.

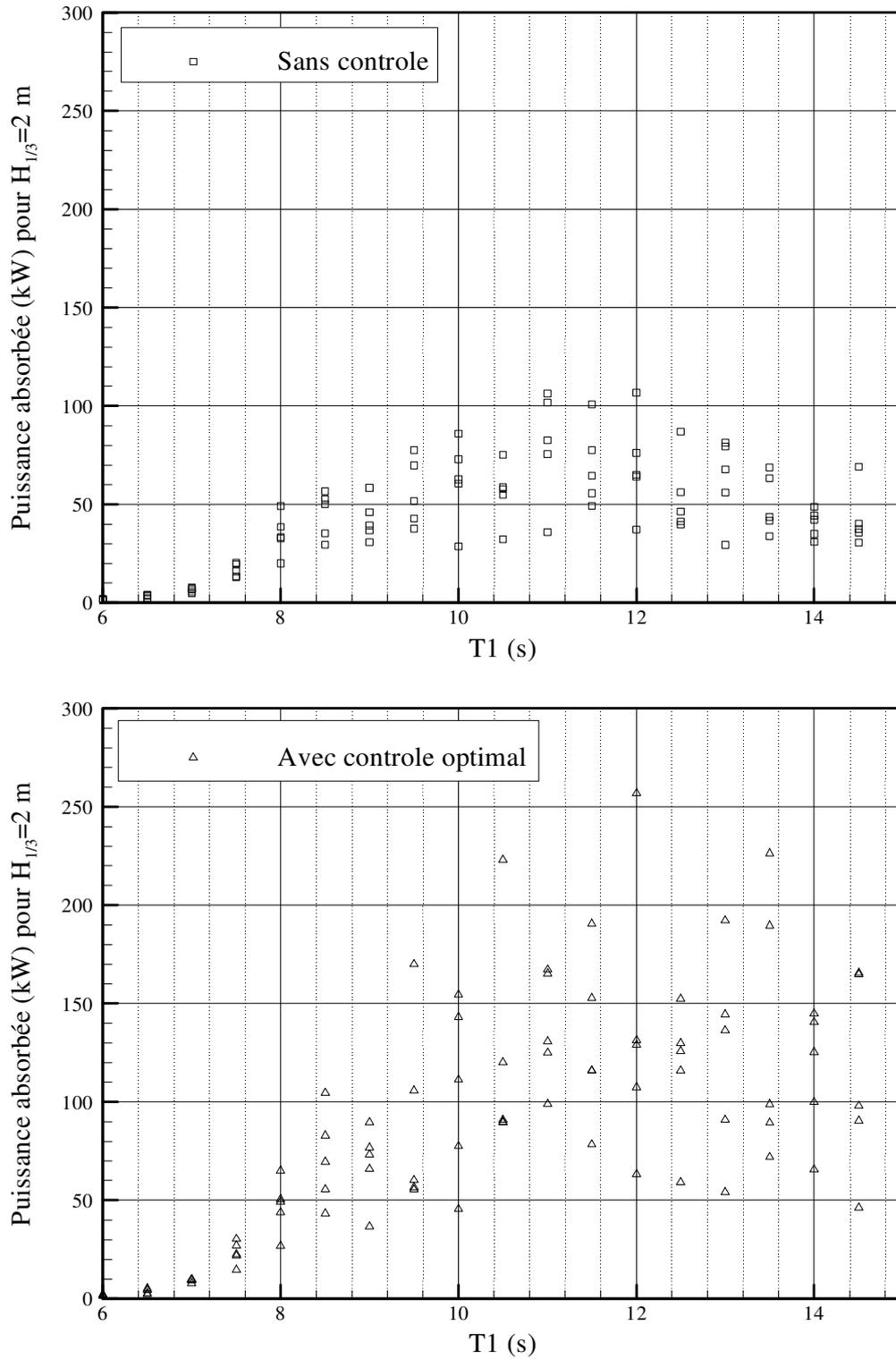


FIG. 7.4 – Simulations temporelles de la puissance absorbée par un système masse ressort sans contrôle et avec contrôle par commande optimale.

### 7.3.2 Equations de la commande optimale.

On définit le hamiltonien :

$$\begin{aligned}
H &= B\dot{\alpha}^2 + \lambda_1 u + \lambda_2 w + \lambda_3 \dot{\theta} + \lambda_4 \dot{\alpha} + (\lambda_5 \ \lambda_6 \ \lambda_7 \ \lambda_8) \times \\
&\mathbf{M}^{-1} \left( \begin{array}{c} F_{ex,1}(t) - \sum_{j=1}^3 \sum_{r=1}^{N_{1j}} I_{1jr}^R - k_x x_G \\ F_{ex,3}(t) - \sum_{j=1}^3 \sum_{r=1}^{N_{2j}} I_{2jr}^R - K_{H33} z_G \\ F_{ex,5}(t) - \sum_{j=1}^3 \sum_{r=1}^{N_{3j}} I_{3jr}^R - (K_{H55} - m_p g (d-l)) \theta - m_p g l \alpha \\ -(B_{PTO} + Gu) \dot{\alpha} - m_p g l (\theta + \alpha) \end{array} \right) + \\
&\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{r=1}^{N_{ij}} \lambda_{ijr}^R \left( \beta_{ijr}^R I_{ijr}^R - \beta_{ijr}^I I_{ijr}^I + \alpha_{ijr}^R \left( \delta_{1j} u + \delta_{2j} w + \delta_{3j} \dot{\theta} \right) \right) \\
&+ \lambda_{ijr}^I \left( \beta_{ijr}^R I_{ijr}^I + \beta_{ijr}^I I_{ijr}^R + \alpha_{ijr}^I \left( \delta_{1j} u + \delta_{2j} w + \delta_{3j} \dot{\theta} \right) \right)
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Les équations adjointes s'obtiennent par dérivation partielle du hamiltonien par rapport aux états du système :

$$\begin{aligned}
(\dot{\lambda}_1 \ \dot{\lambda}_2 \ \dot{\lambda}_3 \ \dot{\lambda}_4) &= (\lambda_5 \ \lambda_6 \ \lambda_7 \ \lambda_8) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \\
\dot{\lambda}_5 &= -\lambda_1 - \sum_{i=1}^3 \sum_{r=1}^{N_{i1}} (\lambda_{i1r}^R \alpha_{i1r}^R + \lambda_{i1r}^I \alpha_{i1r}^I) \\
\dot{\lambda}_6 &= -\lambda_2 - \sum_{i=1}^3 \sum_{r=1}^{N_{i1}} (\lambda_{i2r}^R \alpha_{i2r}^R + \lambda_{i2r}^I \alpha_{i2r}^I) \\
\dot{\lambda}_7 &= -\lambda_3 - \sum_{i=1}^3 \sum_{r=1}^{N_{i1}} (\lambda_{i3r}^R \alpha_{i3r}^R + \lambda_{i3r}^I \alpha_{i3r}^I) \\
\dot{\lambda}_8 &= -2B_{PTO} \dot{\alpha} - \lambda_4 + (\lambda_5 \ \lambda_6 \ \lambda_7 \ \lambda_8) \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_{PTO} + GU \end{pmatrix} \\
\dot{\lambda}_{ijr}^R &= (\lambda_5 \ \lambda_6 \ \lambda_7 \ \lambda_8) \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \delta_{i1} \\ \delta_{i2} \\ \delta_{i3} \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda_{ijr}^R \beta_{ijr}^R - \lambda_{ijr}^I \beta_{ijr}^I \\
\dot{\lambda}_{ijr}^I &= \lambda_{ijr}^R \beta_{ijr}^I - \lambda_{ijr}^I \beta_{ijr}^R
\end{aligned} \tag{7.15}$$

avec :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{H33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (K_{H55} - m_p g (d-l)) & m_p g l \\ 0 & 0 & m_p g l & m_p g l \end{pmatrix}$$

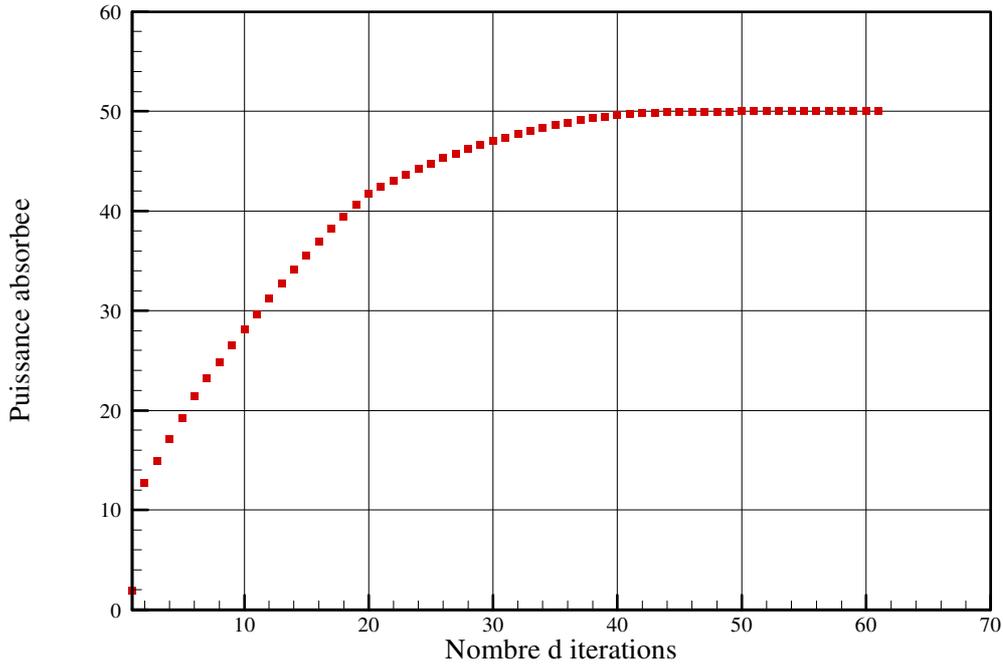


FIG. 7.5 – Convergence de la puissance absorbée avec contrôle par commande optimale en fonction du nombre d’itérations.

Enfin, le hamiltonien sera maximum si à chaque instant :

$$u = \begin{cases} 1 & \text{si } -(\lambda_5 \ \lambda_6 \ \lambda_7 \ \lambda_8) \mathbf{M}^{-1} (0 \ 0 \ 0 \ G)^t \dot{\alpha} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.16)$$

A partir des équations (7.13), (7.15) et (7.16), la détermination de la commande optimale se fait de manière itérative selon la méthode exposée dans la première section.

### 7.3.3 Etude de convergence.

La figure (7.5) présente la convergence de la commande en fonction du nombre d’itérations, pour un cas de houle régulière de période 8 secondes et d’amplitude 2 mètres. Le paramètre de latching  $G$  vaut  $40 (I_y + m_p l^2)$ , le pas de temps vaut 0.02 secondes et la durée de simulation est 600 s. Le critère de convergence est la puissance absorbée. Le nombre maximum d’itérations est égal à 100. On constate ici que la convergence se fait en environ 60 itérations. A la première itération, la puissance bondit de 1 à 12 kW, puis croît rapidement pendant les 20 premières itérations jusqu’à atteindre 42 kW. La croissance ralentit ensuite jusqu’à convergence.

### 7.3.4 Résultats.

#### Houle régulière.

Le système considéré est le même que dans le chapitre précédent. Les caractéristiques du système sont données dans l'annexe D, référence DES2953. La figure (7.6) présente les fonctions de transfert en puissance en houle régulière sans contrôle, avec contrôle calculé par la théorie de la commande optimale, et avec contrôle analytique. Le coefficient de latching  $G$  vaut  $40 (I_y + m_p l^2)$ .

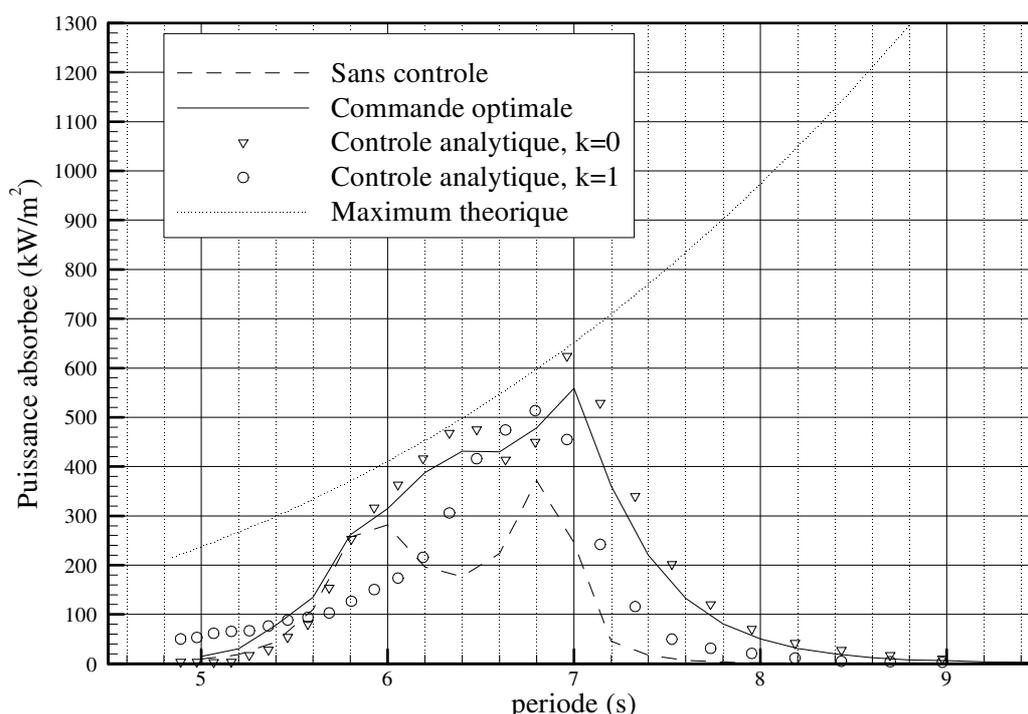


FIG. 7.6 – Fonction de transfert en puissance pour un SEAREV typique avec et sans contrôles.

Comme dans le cas du cylindre immergé, le résultat du calcul du contrôle avec commande optimale prédit le même type de comportement que le calcul analytique avec  $k = 0$  et des niveaux de puissance légèrement inférieur, presque partout. Il existe cependant deux zones, où la commande optimale est meilleure :

- Pour les périodes proches de 6.6 secondes, la commande optimale est située entre le résultat analytique à  $k = 0$  et  $k = 1$ .
- Pour les périodes proches de 5.5 secondes, la commande optimale est meilleure. Dans cette zone, c'est peut être  $k = 1/2$  qu'il faudrait choisir.

Cependant, globalement, la fonction de transfert est du même type que dans le cas du contrôle analytique.

La théorie de la commande optimale appliquée au contrôle par latching permet ainsi de prédire correctement le gain que permet le contrôle en houle régulière dans le cas de SEAREV. Bien qu'elle ne soit pas applicable au réel car elle nécessite la connaissance de l'intégralité du

futur de la houle incidente, elle va nous permettre d'évaluer le gain en houle irrégulière que l'on est en droit d'attendre du contrôle par latching.

### Houle aléatoire.

Sur la figure (7.7), on a porté une simulation temporelle du mouvement d'un SEAREV avec et sans contrôle avec commande optimale. La houle est aléatoire de période 9 secondes et de hauteur significative 2.5 mètres.

Sur ce cas de calcul, la puissance absorbée sans contrôle vaut en moyenne 42 kW contre 91 kW avec contrôle calculé par la méthode de la commande optimale. Sur la courbe présentant le mouvement relatif, on constate que les amplitudes des oscillations du mouvement contrôlé sont toujours supérieures à celle du mouvement non contrôlé. Cependant, le contrôle n'a pas le même type d'effet sur les mouvements de cavement et tangage, et aurait plutôt tendance à les diminuer.

La modélisation du contrôle par un couple d'amortissement grand est judicieuse ici car elle nous permet d'utiliser la théorie de la commande optimale afin de déterminer la séquence de contrôle par latching optimale. Cependant, nous avons vu avec le système à un degré de liberté que cette modélisation peut introduire un biais dans la prédiction de l'énergie produite, en la sous estimant. Pour s'affranchir en partie de ce problème, on peut utiliser la loi de commande  $u(t)$  obtenue à la fin du calcul de la commande optimale comme loi de commande pour réaliser une simulation temporelle du mouvement contrôlé avec un contrôle par latching "absolu", c'est-à-dire que lorsque le contrôle par latching est appliquée, le mouvement est bloqué et pas seulement amorti. Cela peut se faire à condition bien entendu que la vitesse du mouvement relatif soit nulle au moment du blocage. La figure (7.8) illustre ce principe. Comme on peut le voir, les différences entre les mouvements issues du calcul avec la commande optimale et avec le contrôle "absolu" sont très faibles. Au niveau de la production d'énergie, elle vaut sur cet exemple 102 kW avec la commande optimale et 107 kW avec le contrôle "absolu" contre 61 kW sans contrôle. Le contrôle "absolu" prédit ainsi 5 % d'énergie absorbée en plus que le résultat avec commande optimale et 75 % d'énergie que le fonctionnement sans contrôle.

La figure (7.9) présente les matrices de production d'énergie en fonctions des états de mer pour le SEAREV considéré. La matrice du haut correspond à la production d'énergie sans contrôle et celle du bas avec le contrôle par latching "absolu", dont la loi de commande est déduite de la loi de commande optimale. Chaque cellule de la matrice est obtenue en moyennant cinq simulations temporelles des mouvements sur 400 secondes. Le paramètre de latching  $G$  vaut  $40(I_y + m_p l^2)$  dans le calcul de la loi de commande optimale et le pas de temps 0.02 secondes.

Sur cette figure, on constate que le contrôle améliore les performances du système à la fois en élargissant la bande passante et en augmentant à période de pic égale la puissance absorbée.

En multipliant cette matrice par les probabilités d'occurrence sur un site donné, on peut calculer l'énergie primaire produite par le système. Ainsi, à l'île d'Yeu, la production d'énergie vaut 455 MWh par an sans contrôle contre 797 MWh avec le contrôle par latching. Le gain en énergie annuelle produite est dans ce cas de 75 %.

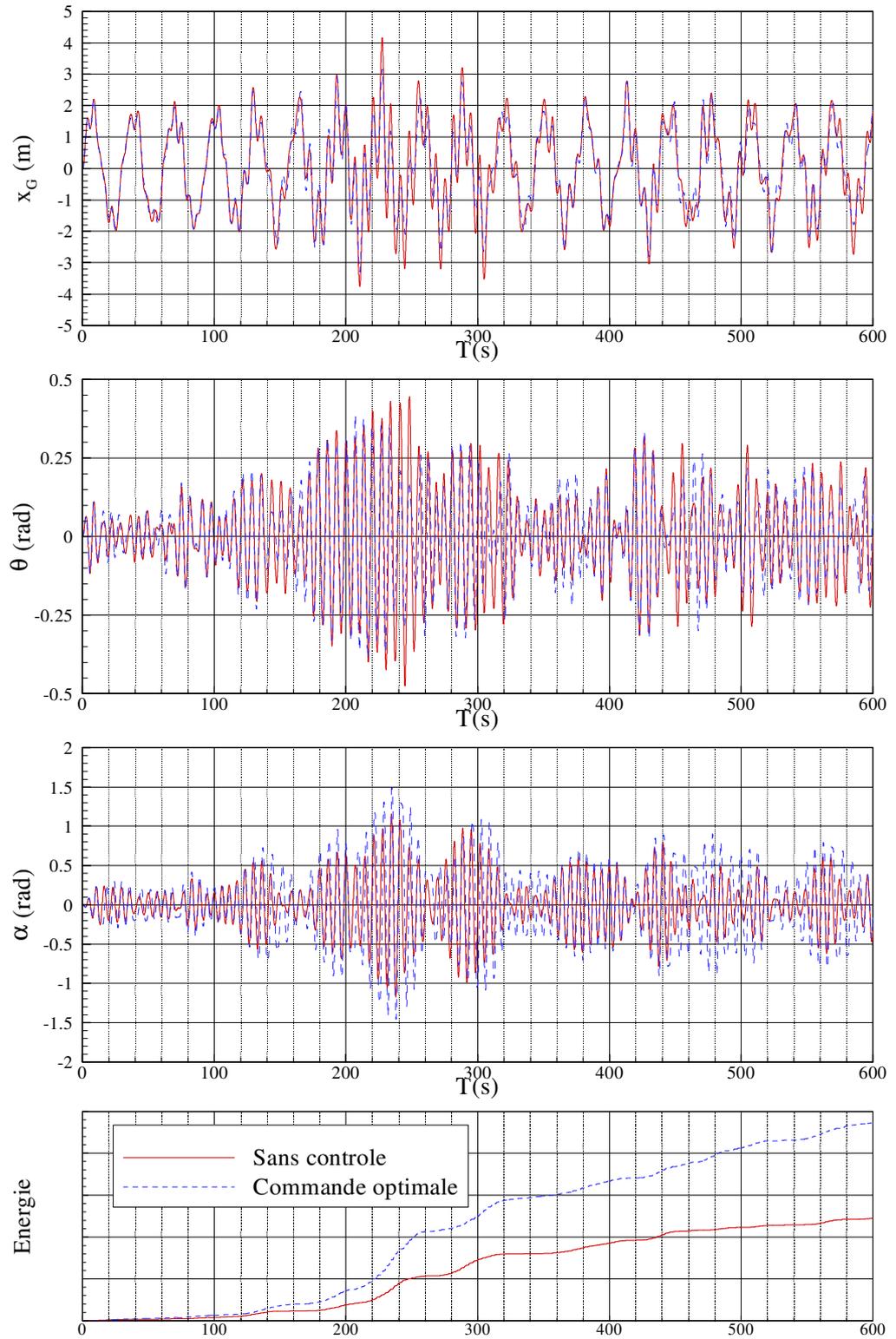


FIG. 7.7 – Simulation temporelle du mouvement en houle aléatoire avec et sans contrôle.

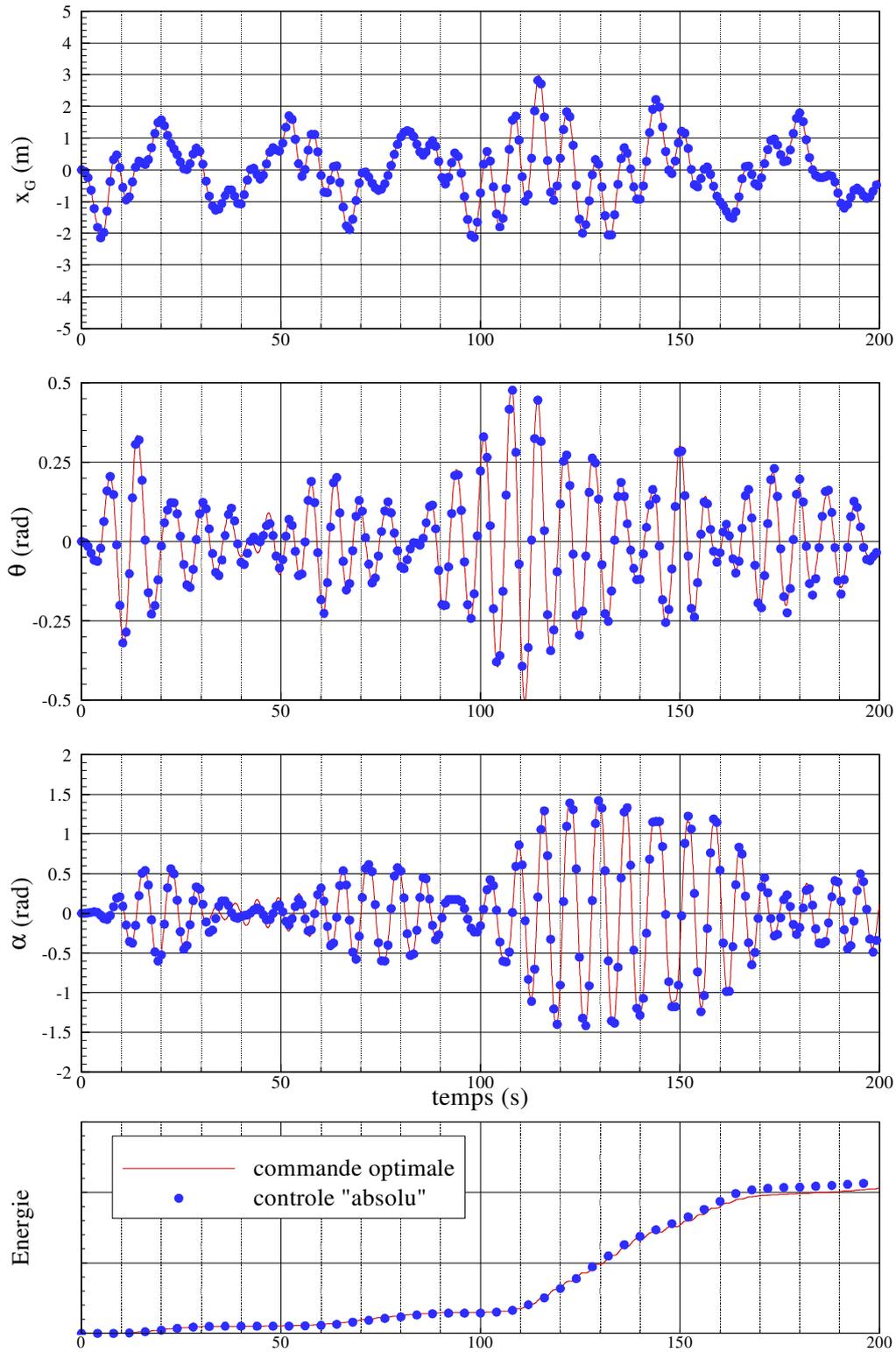


FIG. 7.8 – Simulations temporelles des mouvements avec contrôle par commande optimale et contrôle par latching "absolu". La houle incidente est aléatoire de période 9 secondes et de hauteur significative 2.5 mètres.

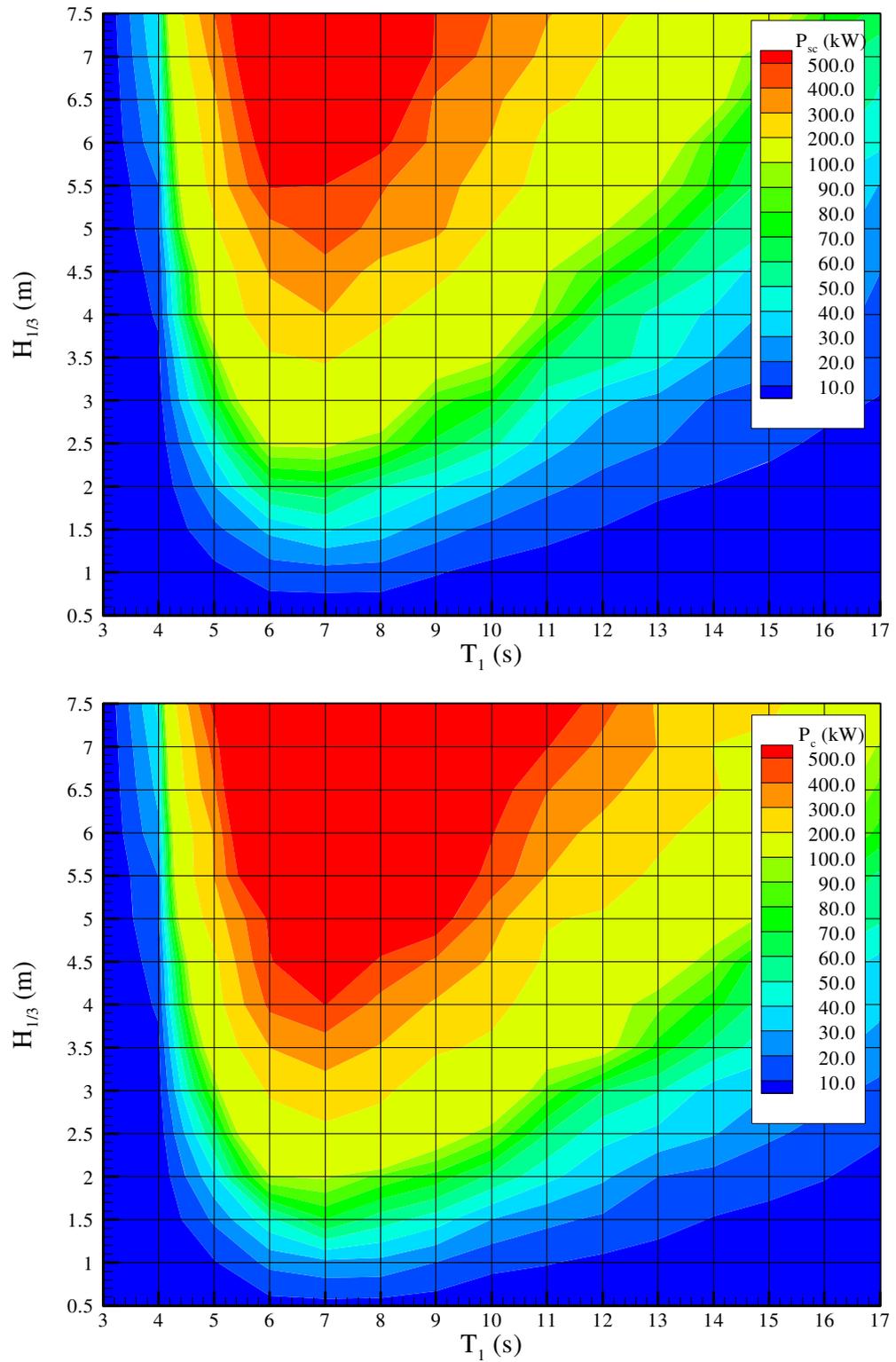


FIG. 7.9 – Matrices de puissance en houle aléatoire pour un SEAREV sans contrôle à gauche et avec contrôle par commande optimale à droite.



**Troisième partie**  
**Optimisation.**



# Chapitre 8

## Optimisation de forme pour SEAREV.

L'objectif du projet SEAREV est à terme de concevoir une centrale houlomotrice viable économiquement pour un niveau de ressource modéré, de l'ordre de 20 kW/m. La production d'énergie doit alors être maximisée tout en minimisant les coûts de fabrication et d'exploitation. Malheureusement, à ce stade de l'étude, nous ne disposons pas d'une fonction de coût utilisable à cette fin. Nous avons donc décidé de remplacer l'objectif de minimisation des coûts de production par un objectif de minimisation du déplacement total du système, sur l'hypothèse que cette fonction de coût sera dominée par un terme de volume.

Pour cette étude, nous avons choisi le site de l'île d'Yeu comme site de référence. Les données statistiques de houle sont alors une donnée du problème. Le travail d'optimisation doit alors se faire de manière à optimiser la production du système sur le site. Pour maximiser la production d'énergie tout en minimisant le déplacement, il faut donc se préoccuper d'optimiser les paramètres mécaniques du système dont dépend sa réponse, de manière à l'adapter au site.

Quels sont les paramètres dont dépend la réponse de SEAREV ? D'après les équations du mouvement exposés dans la première partie, ce sont :

- L'ensemble des paramètres mécaniques décrivant le pendule interne. Ce sont la masse du pendule  $m_p$ , sa longueur  $l$ , la hauteur à laquelle il est "accroché" par rapport au centre de gravité du flotteur  $d$ , son inertie propre autour de son centre de gravité  $I_y$ , et la valeur du coefficient d'amortissement  $B_{PTO}$  représentant le convertisseur d'énergie.
- L'ensemble des paramètres mécaniques et géométriques du flotteur. Ce sont ainsi sa masse propre  $m_b$ , son inertie  $I_b$  et la position de son centre de gravité  $z_G$ . Ce sont également, à travers les matrices de coefficients hydrodynamiques  $\mathbf{C}_A$ ,  $\mathbf{C}_M$ ,  $\mathbf{F}_{ex}$ ,  $\boldsymbol{\mu}_\infty$  et la matrice de réponse impulsionnelle  $\mathbf{K}$ , la forme de la surface mouillée du flotteur. Nous sommes donc en présence d'un problème d'optimisation sur des paramètres numériques, mais également en présence d'un problème d'optimisation de forme.

Les objectifs de l'optimisation sont :

- maximiser l'énergie absorbée.
- minimiser le déplacement.

Le problème d'optimisation appartient donc à la famille des problèmes d'optimisation de forme multi-objectifs. Le nombre de paramètres est tel qu'il ne peut-être traité analytiquement et nous nous sommes donc tourné vers les méthodes numériques d'optimisation.

## 8.1 Le problème de l'optimisation de forme en mécanique des fluides.

L'essor de la puissance de calcul a permis depuis quelques années de développer l'optimisation de forme dans de nombreux domaines, dont l'hydrodynamique navale. Elle repose sur deux points clés. Bien évidemment, du choix de l'algorithme d'optimisation dépend la qualité du résultat mais également de la manière dont on décrit et dont l'on déforme le maillage dépend la variété des résultats. Algorithmes d'optimisation et remaillage sont ainsi deux domaines de recherche à part entière très actifs. Sur ces sujets, la thèse de Duvigneau [29] fournit une revue très complète des méthodes utilisées et de leurs champs d'application.

### 8.1.1 Méthodes d'optimisation de forme.

Il existe principalement deux familles d'algorithmes d'optimisation performants pour l'optimisation de forme.

#### Méthodes à base de gradient.

La première famille est celle des algorithmes à base de gradient. Dans ces méthodes, on utilise les informations tirées des dérivées de la fonction d'évaluation de l'objectif considéré pour minimiser de manière itérative sa valeur. Ainsi, à partir d'un point initial, on calcule une direction et un pas d'itération qui diminue la valeur de l'objectif, puis on itère le processus, jusqu'à convergence vers un minimum. Initialement, Cauchy [15] a choisi en 1847 l'opposé du gradient de la fonction comme direction d'itération, donnant naissance à la méthode de la plus grande pente. Cette méthode, de piètre efficacité, a été remplacée au fil des ans par des algorithmes de plus en plus performants, utilisant en plus du gradient de la fonction des approximations des dérivées d'ordre supérieure. Sur le sujet, on pourra se référer à Culioli [23] pour une revue de détail des algorithmes existants. A l'heure actuelle, l'algorithme le plus performant est la méthode NLPQLP, développée par Schittkowski [67].

Ces méthodes sont performantes à partir du moment où la fonction à minimiser est régulière et leur principal avantage est qu'elles convergent très rapidement. De plus, elles sont censées être indépendantes de la dimension du problème, c'est-à-dire que la convergence se fait à la même vitesse quel que soit le nombre de paramètres. Cependant, elles ne peuvent traiter que des problèmes à un seul objectif, et dans le cas où l'on veut optimiser sur plusieurs critères, on est obligé d'introduire une fonction de coût dont les coefficients sont fixés arbitrairement. Enfin, elles ne peuvent réaliser que des optimisations locales, c'est-à-dire qu'elles convergent vers le plus proche minimum local du point initial et sont donc très sensibles au bruitage d'erreur, générant des minima locaux. Elles sont donc le plus souvent utilisées pour améliorer une solution d'un problème déjà dégrossi. Ainsi, chez MARINTEK en Norvège, elles sont utilisées avec succès pour optimiser les ancrages et le système de risers de plateforme offshore [38].

#### Les algorithmes génétiques.

Lorsqu'il s'agit plutôt de dégrossir un problème d'optimisation de forme, on utilise plutôt des algorithmes évolutionnaires du type algorithmes génétiques. Ceux-ci présentent en effet des

propriétés de robustesse qui leur permettent de réaliser une optimisation globale du problème en évitant le piège des minima locaux. De plus, ce sont des algorithmes capables de traiter des problèmes multi objectifs sans passer par une fonction de coût. Leur convergence est par contre beaucoup plus lente que les algorithmes à base de gradient et ils nécessitent donc beaucoup plus d'itérations. La solution réside souvent dans une parallélisation des calculs, solution retenue aujourd'hui au Bassin d'Essai des Carènes de Val de Rueil, où il sont largement utilisées pour optimiser les carènes de navires militaires et de voiliers [48].

Initialement développé par Holland [44], les algorithmes génétiques imitent le processus darwinien de sélection naturelle. A un jeu de paramètres du problème d'optimisation, correspondant à un individu, est associé par l'intermédiaire d'un processus de codage un génome. Une population initiale est générée par un ensemble d'individus. Cette population est ensuite évaluée, au sens de leur adéquation avec les objectifs du problème, et comme dans le processus darwinien, les génomes des individus les plus performants sont retenus. Les algorithmes génétiques réalisent alors des croisements et des mutations sur ces génomes afin de générer une nouvelle population, mieux adaptée que la population précédente. L'itération du processus finit par aboutir à l'optimum.

Les algorithmes génétiques ont démontré empiriquement leur capacité à résoudre des problèmes très complexes, pour peu que les temps de calculs autorisent un grand nombre d'évaluations du problème. La meilleure manière de procéder est alors, si on le peut, de dégrossir le problème avec des algorithmes génétiques, puis d'améliorer les meilleurs individus avec une descente de gradient.

### 8.1.2 Description de la forme.

L'optimisation de forme en mécanique des fluides nécessite nécessairement un remaillage du problème en fonction du nouveau jeu de paramètres. Le choix de la méthode de description des formes est donc très important. Il doit être fait de telle manière que :

- Les maillages générées restent dans le domaine de validité du code de calcul.
- Les maillages générées soient les plus variées possibles.
- Le nombre de paramètre soit le plus faible possible.

Nous présentons dans la suite quelques méthodes admissibles dans notre cas.

#### **Approche directe.**

Dans l'approche directe, ce sont chacun des points du maillage qui sont des paramètres de l'optimisation. Cette approche, la plus simple a priori, pose deux types de problème. Premièrement, elle nécessite un lissage après remaillage, pour assurer une régularité suffisante du maillage. Deuxièmement, le nombre de paramètres peut rapidement devenir très important, jusqu'à plusieurs milliers dans des cas tridimensionnels, et l'optimisation ne peut alors se faire que par des algorithmes à base de gradient.

Cette approche a cependant été implémentée avec succès pour des optimisations de profils portants dans le cadre des équations d'Euler et de Navier-Stokes [49], [57].

### **Courbe et surface paramétrique.**

Dans cette approche, la forme est représentée par une somme de fonctions de bases à une ou deux variables. Les fonctions de base peuvent être des splines, des carreaux de splines ou des NURBS. Les paramètres de l'optimisation sont alors les variables des fonctions de base.

Cette approche permet évidemment de diminuer considérablement le nombre de paramètres de l'optimisation, mais restreint également la variété des formes qui peuvent être générées. Elle est couramment utilisée en aéronautique avec des méthodes de gradient ou des algorithmes génétiques.

### **Approche analytique.**

Dans cette approche, les coordonnées des points de la surface sont décrits par une fonction analytique faisant intervenir quelques variables. Cette approche très simple à mettre en oeuvre peut permettre d'obtenir une forme parfaitement adaptée au problème. Cependant, elle reste très spécifique, car il faut pouvoir décrire par une fonction la forme étudiée.

### **Approche free form deformation.**

Dans cette dernière approche, ce n'est plus la forme que l'on déforme, mais l'espace qui la contient. Cette méthode permet de déformer des surfaces très complexes de manière très simple. Elle est particulièrement adaptée au cas de maillage tridimensionnel non structurés [29].

## **8.2 Mise en oeuvre dans le cas de SEAREV, cas général.**

Après cette revue rapide des méthodes disponibles, revenons au problème appliqué à SEAREV.

### **8.2.1 Vue globale de la méthode.**

Le choix de l'algorithme d'optimisation s'est porté sur les algorithmes génétiques, parce qu'ils sont multi-objectifs et pour leur propriété de convergence globale. La mise en oeuvre des algorithmes est laissée au bon soin du logiciel commercial d'optimisation modeFRONTIER, développé par ESTECO [70].

L'évaluation des individus de chaque population est effectuée numériquement par une chaîne d'exécutables FORTRAN. Elle est constituée de trois étapes :

- Tout d'abord, la génération d'un maillage à partir des paramètres de l'individu considéré.
- Ensuite, le calcul de l'ensemble des coefficients hydrodynamiques de la forme.
- Enfin, le calcul de l'énergie absorbée pendant sur une année sur le site de référence.

L'ensemble de la méthode d'optimisation est schématisé figure (8.1).

### **8.2.2 Paramétrage et maillage.**

Dans le problème de l'optimisation de forme pour SEAREV, il existe deux groupes de paramètres : les uns servent à la description de la forme du système, les autres servent à la

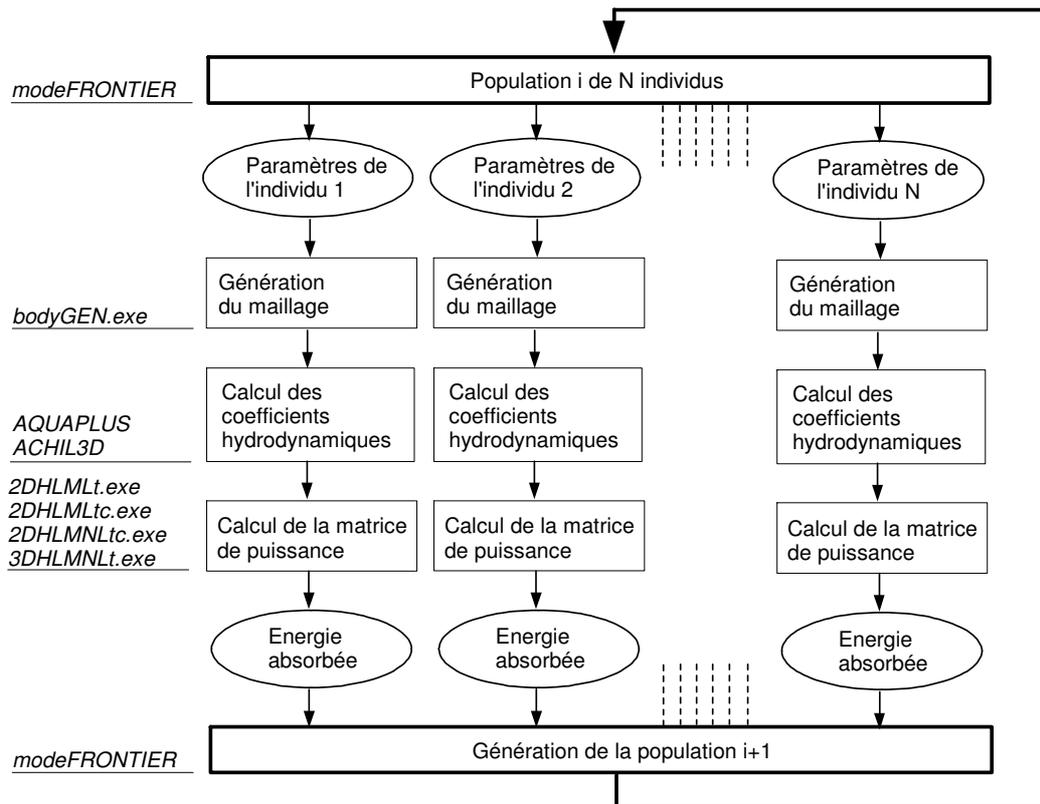


FIG. 8.1 – Méthode générale pour l’optimisation de forme de SEAREV.

description des paramètres mécaniques telles que la répartition des masses, les positions des centres de gravité du flotteur et de pendule, etc.

### Choix de la méthode de description de la forme du flotteur, paramétrage associé.

Le calcul des coefficients hydrodynamiques en approche linéarisée se fait en utilisant les codes aux éléments frontières AQUAPLUS et ACHIL3D et donc ne nécessite le maillage que de la surface mouillée du corps à sa position d’équilibre moyenne. De plus, il a été décidé que le flotteur devait être constitué d’un assemblage de panneaux plans, dans le but de diminuer les coûts de fabrication. La méthode de description de forme que nous avons retenue est alors à mi chemin entre l’approche paramétrique et l’approche analytique. Ainsi, à partir d’un ensemble de paramètres, on déduit l’ensemble des coins de chaque panneau du flotteur, que l’on maille ensuite automatiquement. La manière dont on déduit des paramètres les coins de la forme dépend de chaque famille de flotteur étudié.

Ainsi, le premier maillage que nous avons considéré est celui d’une barge parallélépipédique, décrite par ses trois paramètres de longueur, largeur et tirant d’eau. Les six faces de cette géométrie se déduisent aisément de ces paramètres. Pour les géométries plus complexes, un exécutable lit les paramètres et génère le tableau des intersections entre les faces du maillage. Il est ensuite utilisé pour générer le maillage du corps.

Cette manière de procéder permet, en partant de famille de formes simples, de comprendre

quelles sont les grandeurs importantes dans le problème. Ainsi, de famille en famille, nous avons raffiné les formes étudiées et généré des flotteurs de plus en plus performants, mais aussi de plus en plus complexes, en utilisant les résultats des familles précédentes.

On le voit, le nombre de paramètres pour la description du flotteur dépend de la famille considérée. Pour être complet sur la description du flotteur, il nous faut rajouter, un paramètre  $\eta_{z_G} \in [0, 1]$ , qui représente le coefficient de position verticale du centre de gravité du flotteur. Ainsi,  $z_G = -\frac{1}{2}\eta_{z_G}T$ , où  $T$  est le tirant d'eau du flotteur.

### Paramètres supplémentaires.

Le second intérêt de cette méthode de description de la forme est qu'elle nous permet de facilement déduire le volume intérieur du flotteur dans lequel doit s'inscrire le volant pendulaire. Ce volume est le volume associé au plus grand parallélépipède inscrit à l'intérieur du flotteur de longueur  $2r_C$ , où  $r_C$  est le rayon du volant pendulaire. La largeur de ce parallélépipède est noté  $b_C$  et sa hauteur  $t_C$ .

On peut alors définir le cylindre d'inertie de l'individu lambda non pas de manière absolue mais de manière relative comme une fraction particulière de ce volume. En procédant ainsi, on évite de calculer des individus dont le cylindre d'inertie intersecte le flotteur, ou dont le cylindre pourrait même se trouver à l'extérieur du flotteur.

En conséquence, le cylindre d'inertie est défini pour un flotteur par son rayon  $r_C$ , un coefficient de masse  $\eta_{m_p} \in [0, 1]$ , un coefficient de longueur  $\eta_l \in [0, 1]$ , un coefficient de position verticale  $\eta_d \in [0, 1]$  et un coefficient de PTO,  $\eta_{B_{PTO}} \in [0, 1]$ . Les caractéristiques mécaniques du pendule sont obtenues par :

- $m_p = \eta_{m_p} m_{p,\max}$ , avec  $m_{p,\max}$  la masse maximale de pendule admissible, égale au minimum de :
  - $\rho_C \pi b_C r_C^2$ , avec  $\rho_C$  la densité du béton armé,  $\rho_C = 2800 \text{ kg/m}^3$ .
  - $0.85 \times V$ , avec  $V$  le déplacement du flotteur.
- $I_y = \frac{1}{2} m_p r_C^2$ . Pour  $l/r_C = 25 \%$ , cela correspond à un volant dont 60% de la masse rempli uniformément le cylindre et dont 40% de la masse est décentré à 60 % du rayon du cylindre.
- $l = \frac{1}{2} \eta_l r_C$
- $d = -\eta_d (t_C - r_C + z_G)$
- $B_{PTO} = 5 \eta_{B_{PTO}} (I_y + m_p l^2)$

### Conclusion sur le paramétrage.

Le problème est totalement paramétré par  $(r_C, \eta_{z_G}, \eta_{m_p}, \eta_l, \eta_d, \eta_{B_{PTO}})$  + les  $p$  paramètres de forme. Il présente donc  $6+p$  paramètres.

### 8.2.3 Calcul de l'énergie.

#### Site de référence, scatter diagrams.

Pour réaliser le calcul de la production annuelle d'énergie, il nous a fallu choisir un site de référence. Dans toute cette étude, on a choisi comme site pour une éventuelle implantation du

système le large de l'île d'Yeu, pour lequel on dispose de relevés statistiques d'état de mer sur 2 années obtenues par bouée de mesure.

Un état de mer, défini par une hauteur apparente  $H_{1/3}$  et une période apparente  $T_1$ , peut-être modélisé par une superposition d'ondes monochromatiques de pulsations différentes et de phases aléatoires les unes par rapport aux autres. Leurs amplitudes doivent par contre être calculées à partir d'un spectre d'énergie. On a considéré le spectre ITTC [64] :

$$S(f) = \frac{A}{f^5} e^{-\frac{B}{f^4}}$$

dont les coefficients sont fournies par  $A = \frac{5}{16} \frac{H_{1/3}^2}{T_1^4}$  et  $B = \frac{5}{4} \frac{1}{T_1^4}$ .

L'amplitude de la composante de houle de fréquence  $f$  est alors  $a(f) = \sqrt{2S(f) \Delta f}$ . Un échantillon représentatif de la houle pour l'état de mer  $(H_{1/3}, T_1)$  peut donc être construit par :

$$\eta(t) = \sum_{j=1}^{N\omega} a\left(\frac{\omega_j}{2\pi}\right) \cos(\omega_j t + \varphi_j) = \text{Re} \left( \sum_{j=1}^{N\omega} a\left(\frac{\omega_j}{2\pi}\right) e^{i(\omega_j t + \varphi_j)} \right) \quad (8.1)$$

où  $\eta$  est la déformée de surface libre, et  $\varphi_j$  sont des phases tirées aléatoirement.

Les données statistiques d'état de mer se présentent sous la forme d'un tableau fournissant la probabilité d'occurrence d'un état de mer en nombres d'heure par an en fonction de la hauteur apparente et de la période apparente de la houle. Ce tableau est appelé scatter diagram, figure (8.2).

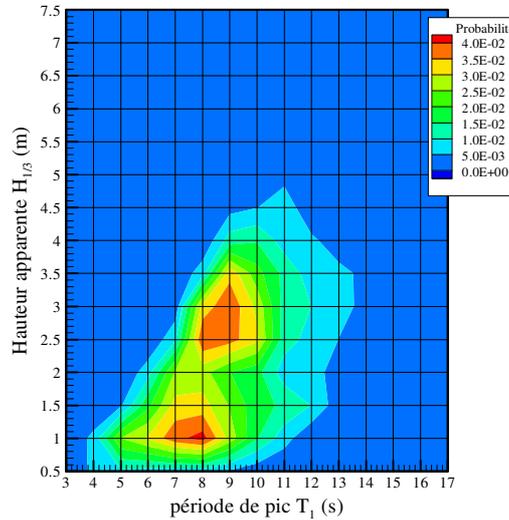


FIG. 8.2 – Probabilités d'occurrence des états de mer sur une année au large de l'île d'Yeu.

### Matrice de puissance.

A partir des équations du mouvement du SEAREV obtenues dans les parties précédentes, nous avons développé différents simulateurs numériques de la réponse du système. Ainsi selon

le niveau d'hypothèses et le mode de fonctionnement choisi, on peut traiter de la réponse du système pour une houle mono ou multidirectionnelle, avec les équations de la mécanique linéarisées ou non et avec ou sans contrôle par latching. Une fois le choix d'un modèle effectué, le calcul de la production d'énergie peut se faire de deux manières :

- soit en simulant directement la réponse du système à une année de houle sur site.
- soit en calculant la matrice de puissance du système, puis en la multipliant avec le scatter diagram du site. Cette seconde méthode, plus rapide, est celle que nous avons retenue.

La matrice de puissance est définie comme étant la matrice des puissances moyennes absorbées en fonction des états de mer  $(H_{1/3}, T_1)$ . Dans le cas général, on l'obtient en effectuant plusieurs simulations de la réponse du système pour des échantillons représentatifs de la houle pour chaque état de mer, puis en calculant la puissance moyenne sur l'ensemble de ces réalisations.

Pratiquement, la valeur de chaque case des matrices de puissance calculées et présentées ici est obtenue en moyennant les puissances absorbées sur 5 simulations temporelles de 400 secondes chacune.

### Calcul de l'énergie.

Finalement, le calcul de l'énergie est effectuée en sommant l'ensemble des cases de la matrice produit de la matrice de puissance par le scatter diagram du site.

## 8.2.4 Conclusion.

Nous avons dans cette section défini plus précisément la manière dont nous avons choisi de paramétrer le problème, la manière dont nous calculons la production d'énergie et la méthode d'optimisation utilisée. L'intérêt de cette mise en oeuvre est qu'elle est très générale et supporte n'importe quel simulateur numérique des mouvements. Cependant, elle n'est pas la plus efficace dans le cas où le simulateur est le modèle linéarisé.

## 8.3 Mise en oeuvre dans le cas du modèle linéarisé : méthode découplée.

### 8.3.1 Calcul de l'énergie.

#### Fonction puissance.

On se place en théorie linéarisée, du point de vue de la mécanique comme de l'hydrodynamique. On suppose la houle monodirectionnelle, arrivant dans l'axe du flotteur. On n'exerce aucun contrôle. Le flotteur est alors excité en pilonnement, cavalement et tangage et excite à son tour le mouvement relatif  $\alpha$  du volant pendulaire. En théorie linéarisée, le mouvement de pilonnement du flotteur est découplé des autres mouvements, et il ne contribue pas à la production d'énergie. Nous ne le considérerons donc pas ici.

Dans la première partie, nous avons vu que dans le domaine fréquentiel, l'amplitude du mouvement et les phases sont données par l'équation matricielle :

$$(-(\mathbf{M} + \mathbf{C}_M)\omega^2 + i(\mathbf{B} + \mathbf{C}_A)\omega + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_H)) \mathbf{X} = \mathbf{F}_{ex} \quad (8.2)$$

avec :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_G \\ \theta \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{F}_{ex} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_t & m_p(d-l) & -m_pl \\ m_p(d-l) & I_b + I_y + m_p(d-l)^2 & I_y + m_pl(l-d) \\ -m_pl & I_y + m_pl(l-d) & I_y + m_pl^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{PTO} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & K_{H55} + m_pg(l-d) & m_pgl \\ 0 & m_pgl & m_pgl \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_M = \begin{pmatrix} C_{M11} & C_{M15} & 0 \\ C_{M15} & C_{M55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_A = \begin{pmatrix} C_{A11} & C_{A15} & 0 \\ C_{A15} & C_{A55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit alors la fonction puissance pour le système :

$$p(\omega) = \frac{1}{2} B_{PTO} \omega^2 |\alpha|^2 \quad (8.3)$$

qui représente la moyenne sur une période de la puissance absorbée par le flotteur soumis à une houle monochromatique de pulsation  $\omega$  et d'amplitude 1 mètre.  $\alpha$  est simplement la troisième composante du vecteur  $\mathbf{X}$  obtenu en résolvant l'équation (8.2).

### Calcul de l'énergie.

Pour un état de mer donné, la puissance moyenne s'obtient par :

$$\langle P \rangle = \sum_{j=1}^{N_\omega} p(\omega_j) \left( a \left( \frac{\omega_j}{2\pi} \right) \right)^2 \quad (8.4)$$

où les amplitudes  $a$  ne dépendent que de l'état de mer considéré. Pour obtenir la puissance absorbée moyenne sur une année, il suffit de sommer tous les cas de houle pondérés par leur

probabilité  $C$  d'occurrence. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \langle P \rangle_{annuelle} &= \sum_{H_{1/3}} \sum_{T_1} C(H_{1/3}, T_1) \sum_{j=1}^{N\omega} p(\omega_j) \left( a\left(\frac{\omega_j}{2\pi}, H_{1/3}, T_1\right) \right)^2 \\ \langle P \rangle_{annuelle} &= \sum_{j=1}^{N\omega} p(\omega_j) \sum_{H_{1/3}} \sum_{T_1} C(H_{1/3}, T_1) \left( a\left(\frac{\omega_j}{2\pi}, H_{1/3}, T_1\right) \right)^2 \end{aligned} \quad (8.5)$$

D'après cette dernière équation, on peut définir pour chaque pulsation de discrétisation du spectre une amplitude moyenne à l'année par :

$$(a_{annuelle}(\omega_j))^2 = \sum_{H_{1/3}} \sum_{T_1} C(H_{1/3}, T_1) \left( a\left(\frac{\omega_j}{2\pi}, H_{1/3}, T_1\right) \right)^2 \quad (8.6)$$

La puissance annuelle devient alors :

$$\langle P \rangle_{annuelle} = \sum_{j=1}^{N\omega} p(\omega_j) (a_{annuelle}(\omega_j))^2 \quad (8.7)$$

et l'énergie produite s'obtient par :

$$E = \langle P \rangle_{annuelle} \times 365 \times 24 \quad (8.8)$$

L'intérêt de cette dernière formulation est qu'elle est beaucoup plus rapide à calculer que la formulation en passant par le domaine temporel. Le modèle est cependant plus grossier et le gain induit par le contrôle ne peut pas être évalué de cette façon.

### 8.3.2 Deux problèmes d'optimisation.

Dans le cas du modèle linéarisé sans contrôle, il est possible d'utiliser la méthode globale définie ci-dessus pour optimiser la forme de SEAREV. Cependant, si l'on regarde plus en détail la fonction d'évaluation de la production d'énergie, il apparaît qu'il existe deux niveaux d'optimisation dont on peut tirer profit pour accélérer la convergence de l'optimisation. En effet c'est l'évaluation des coefficients hydrodynamiques qui coûte cher, alors que le calcul de la puissance moyenne, une fois l'hydrodynamique calculée, est quasi immédiat. La décomposition du problème d'optimisation en deux sous problèmes est alors très avantageuse.

L'idée consiste à procéder dans un premier temps au calcul des coefficients hydrodynamiques pour une forme de flotteur donnée. Le flotteur étant fixé, le déplacement l'est aussi. Sur les deux objectifs initiaux, il ne reste plus alors qu'à maximiser la production d'énergie. Pour cela, on ne peut alors que rechercher les caractéristiques de pendule qui la maximise, c'est-à-dire le pendule optimal pour le flotteur considéré.

Nous sommes donc confrontés à un sous problème d'optimisation sur les paramètres  $\eta_{mp}$ ,  $\eta_l$ ,  $\eta_d$ ,  $\eta_{BPTO}$  maintenant mono-objectif : il s'agit de maximiser la production d'énergie en déterminant le pendule optimal. Dans ce cas, les méthodes de descente de gradient sont bien adaptées.

On définit ainsi une boucle d'optimisation interne qui, pour une forme de flotteur donnée,

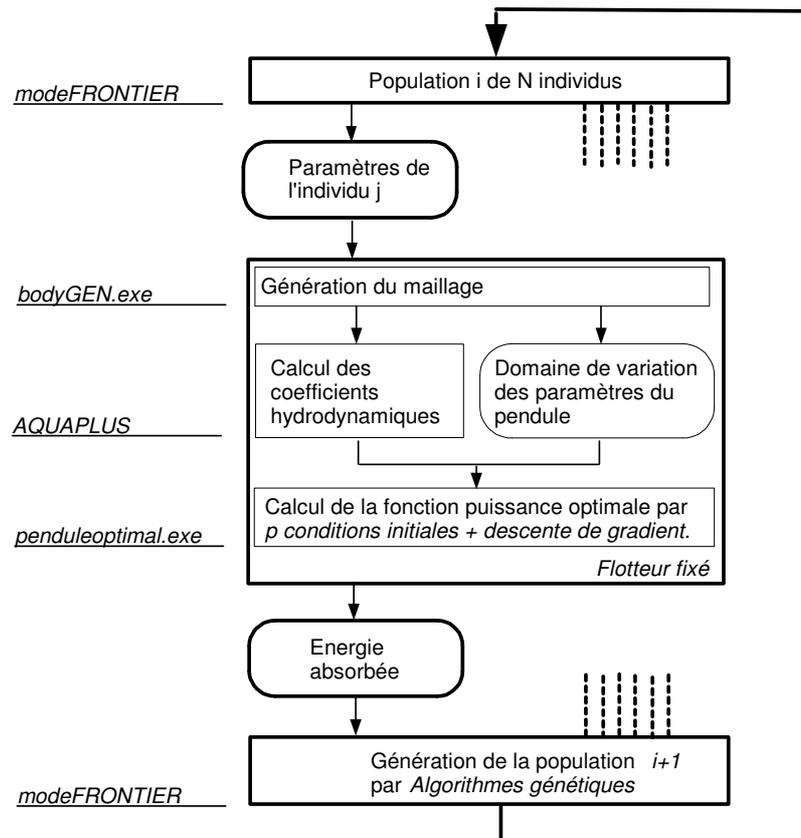


FIG. 8.3 – Méthode découplée pour l’optimisation de forme de SEAREV dans le cas du modèle linéarisée sans contrôle.

détermine le pendule optimal. Reste alors à optimiser la forme du flotteur, tâche dévolue aux algorithmes génétiques. La figure (8.3) schématise la méthode d’optimisation découplée dans ce problème.

L’intérêt d’une telle méthode est de réduire le nombre de paramètres par 4 dans la boucle d’optimisation avec les algorithmes génétiques. La convergence du processus est ainsi largement accélérée.

### 8.3.3 Détermination du pendule optimal pour un flotteur donné.

#### Choix de l’algorithme.

**L’algorithme de Fletcher-Reeves.** Pour l’optimisation sur le pendule, la méthode de descente de gradient retenue est la méthode de gradient conjugué initialement proposé par Fletcher-Reeves, avec la modification proposé par Polak et Ribiere, cf [23].

Soit  $E(\boldsymbol{\eta})$  la fonction qui fournit l’énergie produite par an par le système en fonction du jeu de paramètres  $\boldsymbol{\eta}$ . Le problème d’optimisation est de déterminer les paramètres  $\boldsymbol{\eta}$  qui maximise la fonction  $E$  :

$$\max_{\boldsymbol{\eta}} E(\boldsymbol{\eta}) \quad (8.9)$$

Conventionnellement, on préfère considérer des problèmes de minimisation, on s'intéressera donc à déterminer :

$$\min_{\boldsymbol{\eta}} -E(\boldsymbol{\eta}) \quad (8.10)$$

Soit  $\boldsymbol{\eta}_0$  le jeu de paramètres initiaux. Soit  $\mathbf{g}_0 = \nabla E(\boldsymbol{\eta}_0)$ . Soit  $\mathbf{h}_0 = \mathbf{g}_0$ . L'algorithme de Fletcher-Reeves conduit à construire les séquences de vecteurs  $\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{g}_i$  et  $\mathbf{h}_i$  suivant les lois de récurrence :

$$\boldsymbol{\eta}_{i+1} = \boldsymbol{\eta}_i + \lambda \mathbf{h}_i \quad (8.11)$$

$$\mathbf{g}_{i+1} = \nabla E(\boldsymbol{\eta}_{i+1}) \quad (8.12)$$

$$\mathbf{h}_{i+1} = \mathbf{g}_{i+1} + \gamma_i \mathbf{h}_i \quad (8.13)$$

avec :

- le coefficient  $\lambda$  tel que  $\lambda$  minimise la fonction  $-E(\boldsymbol{\eta}_i + \lambda \mathbf{h}_i)$
- $\gamma_i$  donnée par

$$\gamma_i = \frac{(\mathbf{g}_{i+1} - \mathbf{g}_i) \cdot \mathbf{g}_{i+1}}{\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_i} \quad (8.14)$$

Cette formulation pour  $\gamma_i$  est la modification de l'algorithme initial de Fletcher et Reeves par Polak et Ribière.

A chaque itération, l'algorithme détermine le minimum  $\boldsymbol{\eta}_{i+1}$  de la fonction dans la direction de  $\mathbf{h}_i$ , équation (8.11), puis calcule le gradient de la fonctionnelle en ce nouveau point, équation (8.12), et enfin calcule la direction selon laquelle chercher le prochain minimum, équation (8.13). Un test d'arrêt sur la norme de la différence entre deux valeurs de la fonctionnelle consécutive met fin à l'algorithme.

Le code implémenté est celui proposé dans Numerical Recipes in Fortran 77. [63].

**Etudes de convergences.** Afin de vérifier le codage et les performances de l'algorithme, on a procédé à la résolution de deux problèmes classiques de minimisation.

**Fonction parabolique.** On choisit comme premier test simple de minimiser une fonctionnelle parabolique à deux variables :

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$$

Ce problème admet comme unique solution le point  $(0., 0.)$ . On choisit comme point de départ le point  $(-2., -2.)$ .

Comme on peut le voir sur la figure (8.4), la convergence est très rapide (3 itérations).

**Fonction de Rosenbrock.** On considère maintenant le problème d'optimisation plus difficile, initialement proposé par Rosenbrock [66] :

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1. - x_1)^2$$

Le point initial a pour position  $(-1.2, 1.)$ . la solution, unique, se situe en  $(1., 1.)$ .

Là encore, malgré la difficulté du problème, la convergence a lieu très rapidement.

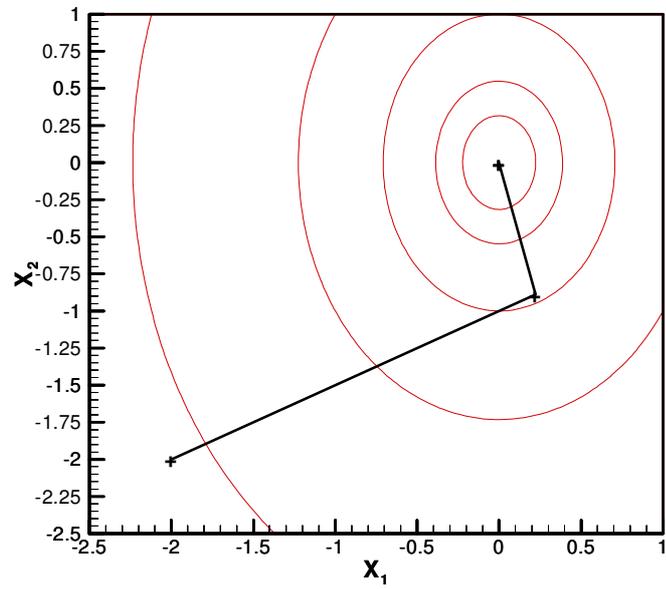


FIG. 8.4 – Fonction parabolique - convergence de la méthode FRPR en 3 itérations.

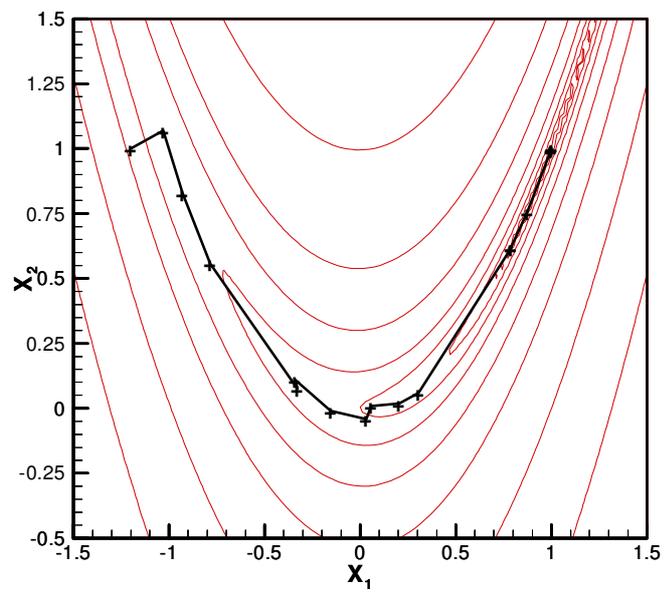


FIG. 8.5 – Fonction de Rosenbrock - Convergence en 19 itérations.

### Traitement des contraintes.

Initialement, les algorithmes de descente de gradient sont des algorithmes d'optimisation sans contraintes. Or, dans le problème de l'optimisation sur le pendule, il existe un certain nombre de contraintes sur le domaine de variation des paramètres qu'il nous faut prendre en compte. Ainsi, les quatre paramètres  $\eta_{m_p}, \eta_l, \eta_d, \eta_{BPTO}$  ont un domaine de variation borné entre 0 et 1. De plus, le système SEAREV doit être stable en roulis comme en tangage, c'est-à-dire que les paramètres  $\eta_{m_p}, \eta_l, \eta_d$  doivent être tels que :

$$K_{H55} - m_p g(d + l) \geq 0 \quad (8.15)$$

$$K_{H44} - m_p g(d + l) \geq 0 \quad (8.16)$$

Plusieurs méthodes ont été développées pour pouvoir les prendre en compte dans les algorithmes avec gradient. Ici, on a choisi de les traiter d'une manière similaire à celle proposée par Rosenbrock [66], en introduisant une fonction de pénalisation continue.

L'idée de base consiste à tirer partie du fait que la fonction que l'on cherche à maximiser est de signe constant – positif, puisque l'on calcule une puissance moyenne – et ce quelquesoit le jeu de paramètres. En tirant partie du comportement de la fonction  $\tanh$  on remplace le problème avec contraintes :

$$\max f(\eta), \eta_{\min} \leq \eta \leq \eta_{\max} \quad (8.17)$$

par le problème :

$$\max f(\eta) \left( \frac{1 + \tanh(G(\eta - \eta_{\min}))}{2} \right) \left( \frac{1 + \tanh(G(\eta_{\max} - \eta))}{2} \right) \quad (8.18)$$

On voit que lorsque  $\eta$  sort du domaine  $[\eta_{\min}, \eta_{\max}]$ , la fonction  $\left( \frac{1 + \tanh(G(\eta - \eta_{\min}))}{2} \right) \left( \frac{1 + \tanh(G(\eta_{\max} - \eta))}{2} \right)$  tend vers 0 d'autant plus vite que la constante  $G$  est grande. A la limite, sur les bords, la fonction vaut  $\frac{1}{2}$ . Dans le domaine, elle vaut 1 sauf près des bords. La constante  $G$  permet d'ajuster la "vitesse" de pénalisation de la fonction à l'approche des bornes.

### Recherche d'un maximum global.

Nous l'avons déjà dit, les algorithmes à base de gradient convergent tous vers le plus proche minimum du point initial. De plus, en introduisant des fonctions de pénalisation sur le calcul de la puissance moyenne, nous avons introduit de nouveaux minima locaux. En partant d'un point initial aléatoire, rien ne nous assure de la convergence vers le pendule optimal global. Cependant, si l'on se donnait une infinité de points initiaux, on serait certain qu'une partie d'entre eux nous mèneraient au maximum global.

Une méthode pour s'affranchir de ce problème est alors de sélectionner un nombre  $N_{CI}$  de points initiaux, tirés aléatoirement, de réaliser l'optimisation sur chacun de ceux-ci puis de retenir le minimum des minima comme pendule optimal. En pratique, nous avons pu observer que  $N_{CI} = 50$  donne de bons résultats.

#### **8.3.4 Conclusion.**

On a défini et présenté ici une méthode plus rapide pour optimiser SEAREV dans le cas où le modèle considéré est linéarisé et dans le cas où il n'est pas exercé de contrôle. C'est ce modèle que nous avons essentiellement utilisé dans cette étude pour définir les ordres de grandeur du système.

# Chapitre 9

## Optimisation sans contrôle.

Ce chapitre présente le travail d'optimisation réalisé sur SEAREV pour maximiser l'énergie absorbée tout en minimisant le déplacement total. Nous avons ici utilisé la méthode découplée, c'est-à-dire avec une boucle d'optimisation interne sur le pendule.

### 9.1 Type 1 : barge parallélépipédique.

#### 9.1.1 Description.

On a considéré initialement une forme très simple : une barge parallélépipédique de longueur  $L$ , de largeur  $B$  et de tirant d'eau  $T$ . Parce que l'on suppose que le flotteur aura naturellement tendance à s'orienter vis à vis de la houle dans sa direction de plus grande longueur, on a imposé comme contrainte  $\frac{1}{2}L > B$ . Il existe de plus deux paramètres supplémentaires pour la boucle d'optimisation externe : la position verticale du centre de gravité  $z_G$  et le rayon du cylindre d'inertie  $r_C$ . Le tableau suivant donne les plages de variation des paramètres pour l'optimisation :

	min	max
$L$ (m)	10.0	60.0
$B$ (m)	$0.1L$	$0.5L$
$T$ (m)	5.0	20.0
$z_G$ (m)	$-\frac{1}{2}T$	0
$r_C$ (m)	5	5

Dans ce premier calcul, nous avons choisi de travailler avec le rayon du cylindre fixé égal à 5 m.

Pour une forme de flotteur parallélépipédique telle que celle décrite ici, le volume admissible dans lequel peut s'inscrire le cylindre d'inertie est défini par :  $2r_C \times B \times T$ .

En ce qui concerne les caractéristiques du cylindre interne, on rappelle qu'elles se déduisent des quatre paramètres  $\eta_{m_p}, \eta_l, \eta_d, \eta_{BPTO}$  sur lesquels s'exercent la boucle d'optimisation interne par :

- $m_p = \eta_{m_p} m_{p,\max}$ , avec  $m_{p,\max}$  la masse maximale de pendule admissible, égale au minimum de :
  - $\rho_C \pi b_C r_C^2$ , avec  $\rho_C$  la densité du béton armé,  $\rho_C = 2800 \text{ kg/m}^3$ .

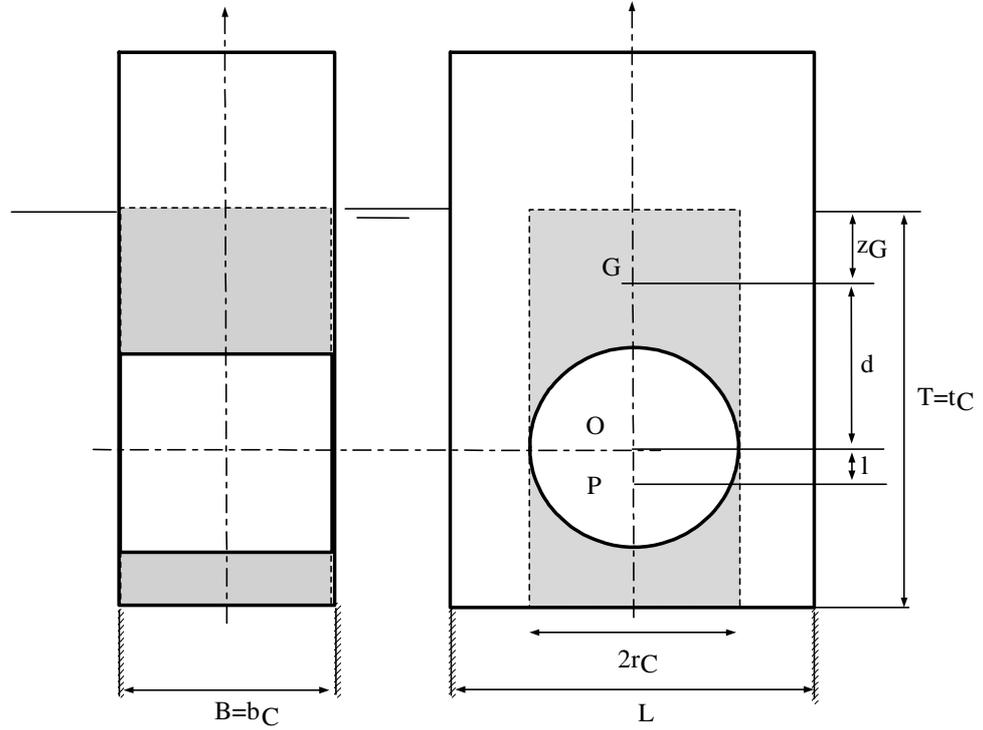


FIG. 9.1 – Paramétrisation du flotteur barge parallélépipédique.

- $0.85 \times V$ , avec  $V$  le déplacement du flotteur.
- $I_y = \frac{1}{2}m_p r_C^2$ , soit l'inertie d'un cylindre uniformément rempli.
- $l = \frac{1}{2}\eta_l r_C$
- $d = -\eta_d (t_C - r_C + z_G)$
- $B_{PTO} = 5\eta_{B_{PTO}} (I_y + m_p l^2)$

La figure (9.1) récapitule l'ensemble de la paramétrisation de cette première forme. La zone grisée représente le volume dans lequel peut venir s'inscrire le cylindre d'inertie.

### 9.1.2 Résultats de l'optimisation.

Nous avons porté sur la figure (9.2) les résultats associés à ce premier travail d'optimisation de forme, réalisé sur des populations de 30 individus pendant 60 générations. Chacune des six sous-figures présente en abscisse le déplacement total du système et en ordonnée la puissance moyenne absorbée sur le site de l'île d'Yeu.

Rappelons nos objectifs : maximiser la puissance absorbée tout en minimisant le déplacement total. Sur cette première géométrie, les individus les plus performants sont donc ceux qui se trouvent le plus en haut à gauche sur les figures. Or, nous observons qu'il n'existe pas un individu qui se dégage en particulier dans cette zone mais plutôt qu'il existe une frontière au delà de laquelle il n'existe pas d'individus. Cette frontière est connue sous le nom de frontière de Pareto. Ainsi, un individu appartient à la frontière de Pareto si l'un de ces critères d'optimisation ne peut pas être amélioré sans dégrader un autre critère.

La frontière de Pareto est donc la frontière sur laquelle se concentrent les meilleurs com-

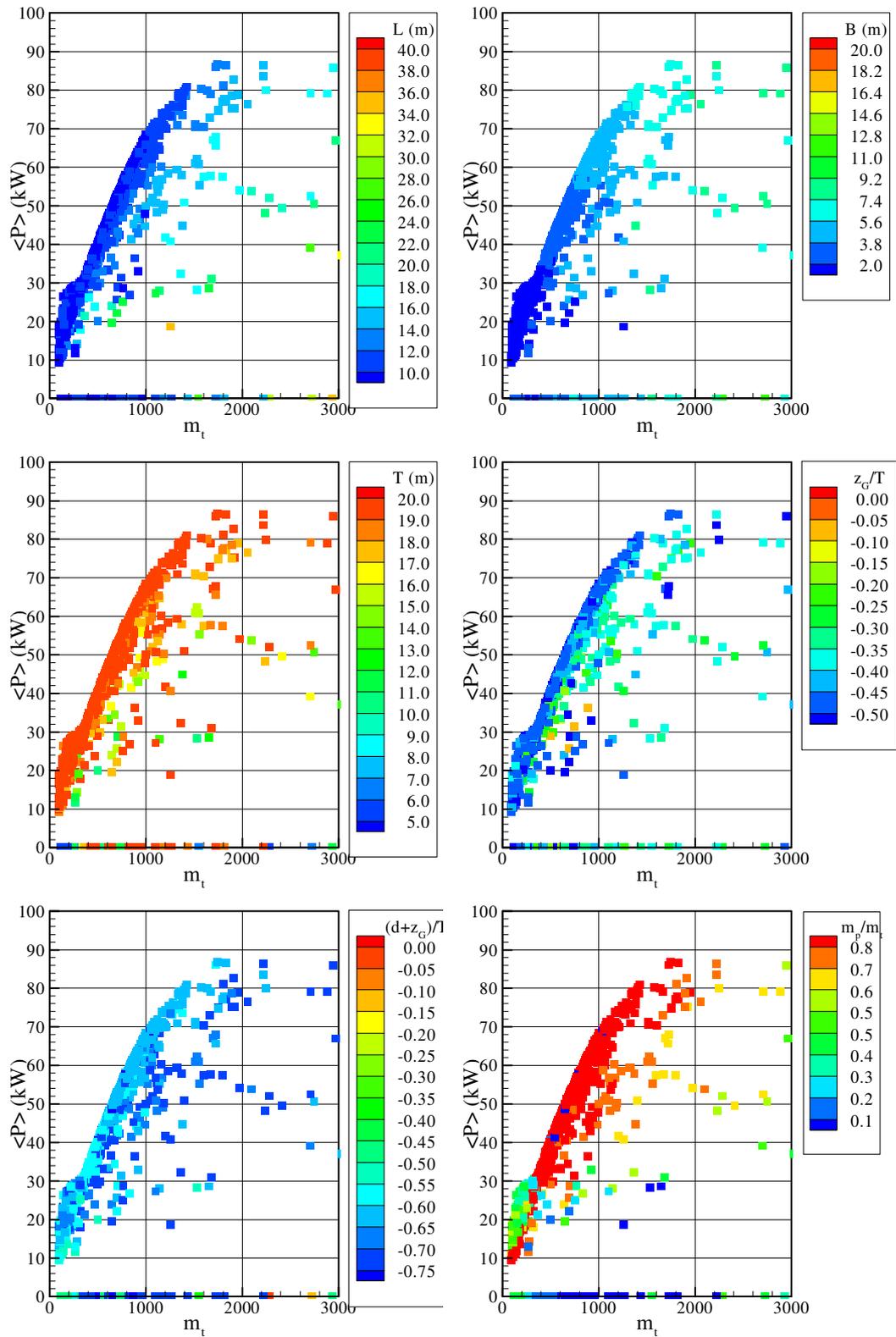


FIG. 9.2 – Résultats de l'optimisation de la forme de SEAREV pour une géométrie de flotteur de type parallélépipède.

promis entre les différents objectifs de l'optimisation. Dans une optimisation multi objectifs, il n'y a pas le plus souvent une solution optimale, mais un ensemble de bons individus, à classer en fonction de l'importance que le designer accorde à chaque critère. On estime alors le calcul convergé lorsque la frontière de Pareto est suffisamment bien dessinée.

- Le calcul sur cette première géométrie nous permet de fixer quelques ordres de grandeurs :
- Le rapport de la puissance moyenne absorbée sur le déplacement est de l'ordre de 100  $W/t$ , diminuant avec le déplacement pour atteindre 50  $W/t$  pour des individus déplaçant environ 2000 tonnes.
  - Sur la frontière de Pareto, les individus ont des longueurs et des tirants d'eau constants égaux à respectivement 10 et 20 mètres. L'augmentation du déplacement total le long de l'axe des  $x$  se fait par un élargissement des systèmes. Ainsi, et c'était loin d'être évident a priori, les flotteurs optimaux maximisent le tirant d'eau plutôt que la longueur du système.
  - L'explication physique du résultat du point précédent est à rechercher sur la figure présentant le rapport  $(d + z_G) / T$ . En effet, on constate que ce rapport est minimisé sur la frontière de Pareto, c'est-à-dire que la position optimale pour le cylindre est au fond du flotteur, au plus bas de ce qu'il est possible.
  - Le centre de gravité du système est placé à sa limite basse par l'optimisation, pour des raisons de stabilité latérale.
  - Enfin, le rapport de la masse accordée au cylindre par rapport au déplacement total du système montre que les solutions optimales convergent vers la borne supérieure pour la masse du cylindre.

### 9.1.3 Conclusions.

Ce premier calcul nous permet de valider la méthode et fixe quelques principes et ordres de grandeurs.

- Il apparaît que l'on peut espérer absorber, en moyenne et environ, une puissance égale à 50-100 watts par tonne de fluide déplacée.
- L'optimisation oriente les formes vers des systèmes de grand tirant d'eau.
- Concernant le pendule, il semble que l'on s'oriente vers des pendules **très** massifs (masse de pendule égale à la borne maximum).

## 9.2 Type 2 : barge cylindrique.

L'un des inconvénients du flotteur de type 1 est la présence d'angles vifs sur sa forme, sources d'un amortissement visqueux important néanmoins non pris en compte dans la présente modélisation. Comme notre modèle s'appuie sur les hypothèses de fluide parfait, ces effets visqueux ne sont absolument pas pris en compte. Nous nous sommes donc intéressés à une géométrie de type cylindre horizontal.

### 9.2.1 Description.

La seconde géométrie considérée est une barge cylindrique de rayon  $r$  et de largeur  $B$ . La partie cylindrique est plus ou moins émergée, en fonction d'un paramètre  $e$ . La position verti-

cale du centre de gravité  $z_G$  est également un paramètre. La figure (9.3) récapitule l'ensemble du paramétrage pour le flotteur et présente le volume pouvant contenir le cylindre d'inertie.

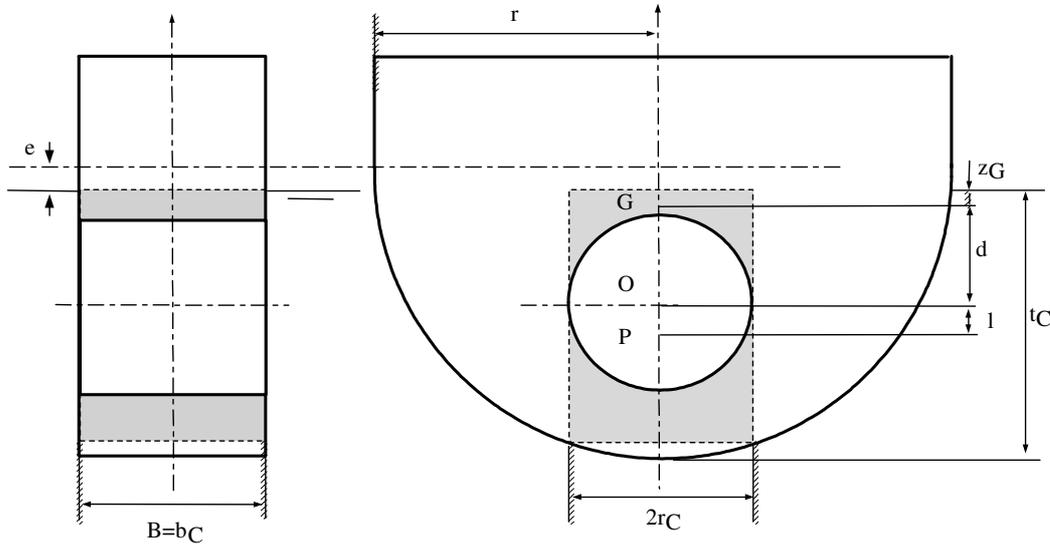


FIG. 9.3 – Paramétrage de la barge cylindrique.

Dans l'optimisation que nous avons réalisé, les paramètres du flotteur avaient pour domaine de variation :

	min	max
$r$ (m)	5.0	20.0
$B$ (m)	$0.2r$	$1.0r$
$e$ (m)	0	$0.75r$
$z_G$ (m)	$-\frac{1}{2}(r - e)$	0

## 9.2.2 Résultats.

L'optimisation a été effectuée sur des populations de 30 individus sur 20 générations. La figure (9.4) présente les résultats associées à ce calcul.

D'emblée, on constate sur cette figure que cette seconde forme de flotteur est beaucoup moins performante que la forme étudiée auparavant. Ainsi, pour un déplacement de 1000 tonnes, les individus sur la frontière de Pareto pour cette description du flotteur ne produisent que 30 kW en moyenne annuelle à l'île d'Yeu, alors que ceux de la forme précédente produisaient jusqu'à 70 kW, soit plus du double !

On constate également que contrairement au cas de la barge parallélépipédique, la longueur, la largeur et le tirant d'eau du flotteur évoluent tous les trois continûment le long de la frontière de Pareto. Ainsi, pour les systèmes légers, le tirant d'eau des systèmes optimaux est faible, par comparaison aux 20 mètres du flotteur précédent et c'est un avantage de cette forme.

Les figures présentant les positions verticales par rapport à la flottaison du centre de gravité et du cylindre montrent par contre toutes les deux que le centre de gravité du flotteur est situé plutôt à la flottaison. Le cylindre est lui plutôt dans les fonds, comme pour le parallélépipède.

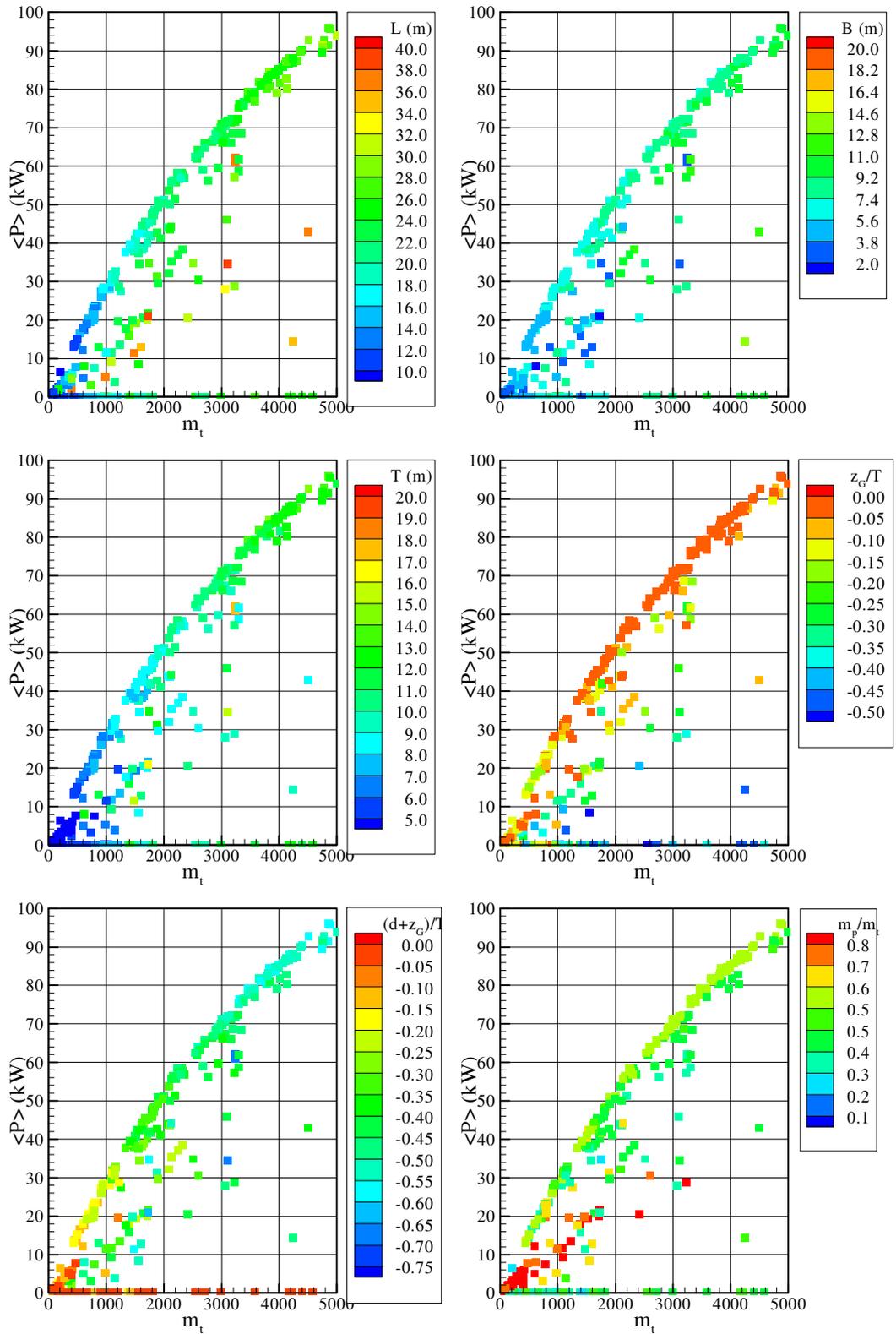


FIG. 9.4 – Résultats de l'optimisation sans contrôle sur le flotteur cylindrique.

Finalement, concernant le rapport des masses de cylindre par rapport au déplacement total, il est de l'ordre de 0.6 sur la frontière de Pareto, soit des pendules moins massifs que dans le premier cas et une répartition des masses plus équilibrée.

### 9.2.3 Conclusions.

Cette seconde géométrie apparaît être moins performante. Sur la frontière de Pareto, on constate que la principale différence avec la géométrie précédente est en fait le tirant d'eau. Il semble donc que la puissance moyenne absorbée et le tirant d'eau soient très fortement couplés. Nous allons donc à présent considérer une géométrie sans angles vifs, mais avec un tirant d'eau réglable.

## 9.3 Type 3 : barge cylindrique avec franc bord.

### 9.3.1 Description.

Nous avons constaté que le tirant d'eau est un paramètre important dans la production d'énergie. En conséquence on s'intéresse à une géométrie de flotteur mélangeant les deux géométries considérées jusqu'à présent. Il s'agit d'un demi cylindre immergé de rayon  $r$  et prolongé par une partie droite de hauteur  $e$ . La position verticale du centre de gravité  $z_G$  est toujours un paramètre, ainsi que la largeur du flotteur  $B$ . Dans ce cas de calcul, on a aussi considéré le rayon du cylindre  $r_C$  comme un paramètre de l'optimisation. La figure (9.5) récapitule l'ensemble du paramétrage pour le flotteur et présente le volume pouvant contenir le cylindre d'inertie.

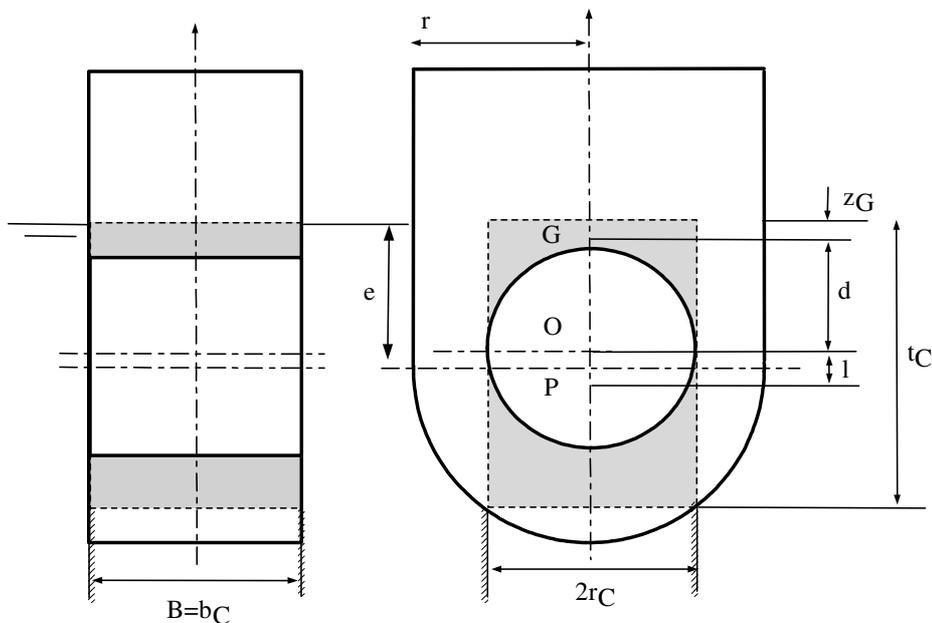


FIG. 9.5 – Paramétrage de la barge cylindrique à franc bord.

Dans l'optimisation que nous avons réalisé, les paramètres du flotteur avaient pour domaine de variation :

	min	max
$r$ (m)	5.0	15.0
$B$ (m)	$0.1r$	$1.0r$
$e$ (m)	0	10.0
$z_G$ (m)	$-\frac{1}{2}(r + e)$	0
$r_C$ (m)	2.0	5.0

On a également ajouté une contrainte sur le tirant d'eau, à savoir :

$$T \leq 20.0 \text{ m.} \quad (9.1)$$

### 9.3.2 Résultats.

La figure (9.6) présente les résultats de l'optimisation de forme avec cette géométrie. L'optimisation a portée sur une population de 30 individus sur 20 générations.

Les systèmes associés à cette géométrie de flotteur sont performants, les largeurs de capture prédites sont de l'ordre de 50% et le rapport puissance/ déplacement varie entre 100 et 50 W/t pour les systèmes de déplacement compris entre 300 et 2000 tonnes. On remarquera que les individus à fort déplacement affichent des performances tout à fait remarquables, la puissance absorbée dépassant ainsi 100 kW en moyenne annuelle.

Si on s'intéresse aux dimensions générales du flotteur, nous constatons que comme dans le cas de la barge parallélépipédique, les individus situés sur la frontière de Pareto présentent une longueur minimale, 10 mètres. Le tirant d'eau varie de quelques mètres autour d'une valeur moyenne de 15 mètres, et l'ajustement en déplacement se fait sur la largeur. La position moyenne du centre de gravité est plutôt située à sa borne minimum.

La position verticale du cylindre interne est à nouveau dans les fonds et l'on retrouve l'idée de pendules très massifs pour l'optimum.

L'optimisation réalisée ici comportait également comme paramètre le rayon du cylindre d'inertie. La figure (9.7) présente les résultats associés à cette variable. Nous constatons que le rayon du cylindre est maximisé sur la frontière de Pareto.

### 9.3.3 Conclusion.

Cette géométrie présente des performances comparables avec la géométrie parallélépipédique. La forme moyenne du flotteur optimal pour cette géométrie est un flotteur profond, de tirant d'eau de l'ordre de 15 mètres, d'une longueur faible et d'une largeur égale à la moitié de sa longueur. Intuitivement, une telle forme est peu stable en roulis, et il est possible que ce soit la cause de la position verticale basse du centre de gravité. C'est pourquoi nous avons considéré la forme suivante.

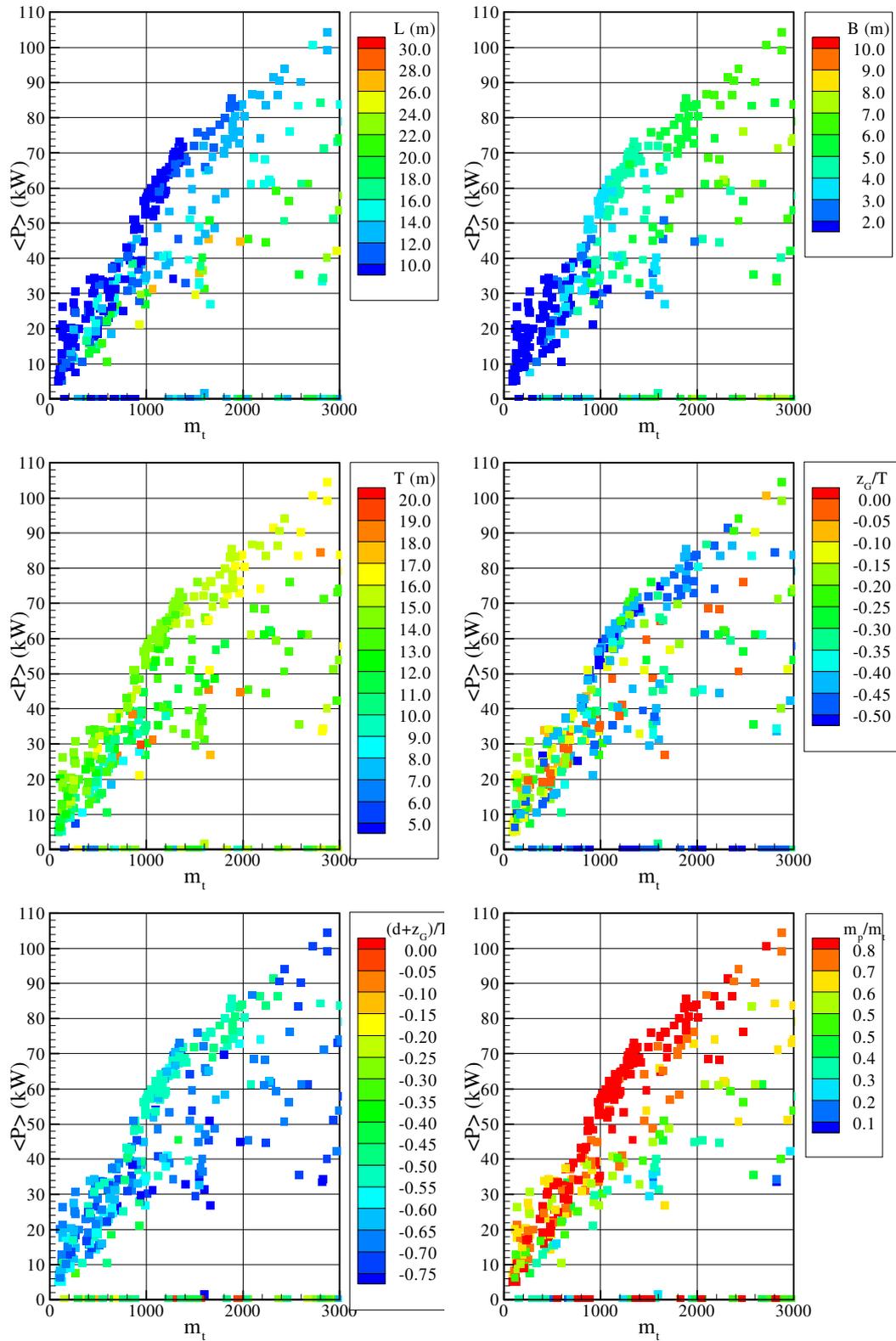


FIG. 9.6 – Résultats de l'optimisation sur la géométrie de flotteur cylindrique avec franc bord.

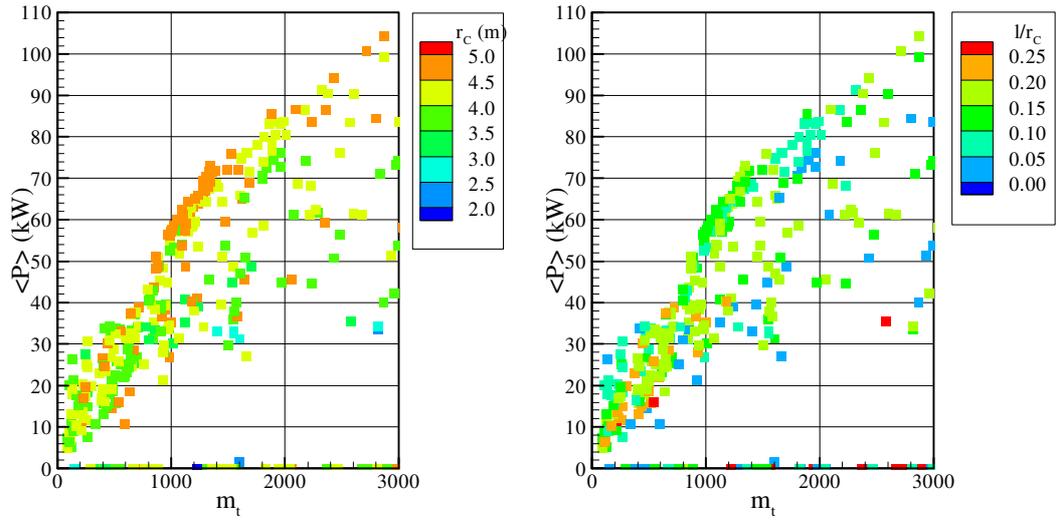


FIG. 9.7 – Résultats

## 9.4 Type 4 : barge cylindrique à quille.

### 9.4.1 Description de la géométrie.

A ce stade de l'étude, nous avons conclu que la géométrie du flotteur devait permettre de positionner le cylindre le plus dans les fonds. Pour la stabilité en roulis, il nous alors paru intéressant d'ajouter une réserve de flottabilité au niveau de la surface libre, sous la forme d'un demi-cylindre de rayon  $r$  et de largeur  $B$  plus ou moins émergé, paramètre  $e$ . Le cylindre d'inertie est lui contenu dans une "quille" située à une valeur  $e_C$  sous le demi-cylindre. La quille est alors définie par trois paramètres :  $r_C$ ,  $b_C$  et  $e_C$ .

Le tableau suivant récapitule le domaine de variation des paramètres de l'optimisation :

	min	max
$r$ (m)	5.0	20.0
$B$ (m)	$0.2r$	$2.0r$
$e$ (m)	0.0	$0.8r$
$z_G$ (m)	$-\frac{1}{2}(r - e + e_C + r_C)$	0
$r_C$ (m)	2.0	5.0
$b_C$ (m)	$0.2r_C$	$0.5r_C$
$e_C$ (m)	0.0	10.0

### 9.4.2 Résultats.

La figure (9.9) présente les résultats de l'optimisation de la forme de SEAREV avec la géométrie de flotteur cylindre à quille. On constate que cette dernière géométrie est la plus performante de toutes celles que nous avons étudiées jusqu'à présent. Ainsi, pour un déplacement de 1000 tonnes, les individus situés sur la frontière de Pareto absorbent en moyenne annuelle jusqu'à 90 kW, alors que jusqu'ici la production des meilleurs individus rencontrés au

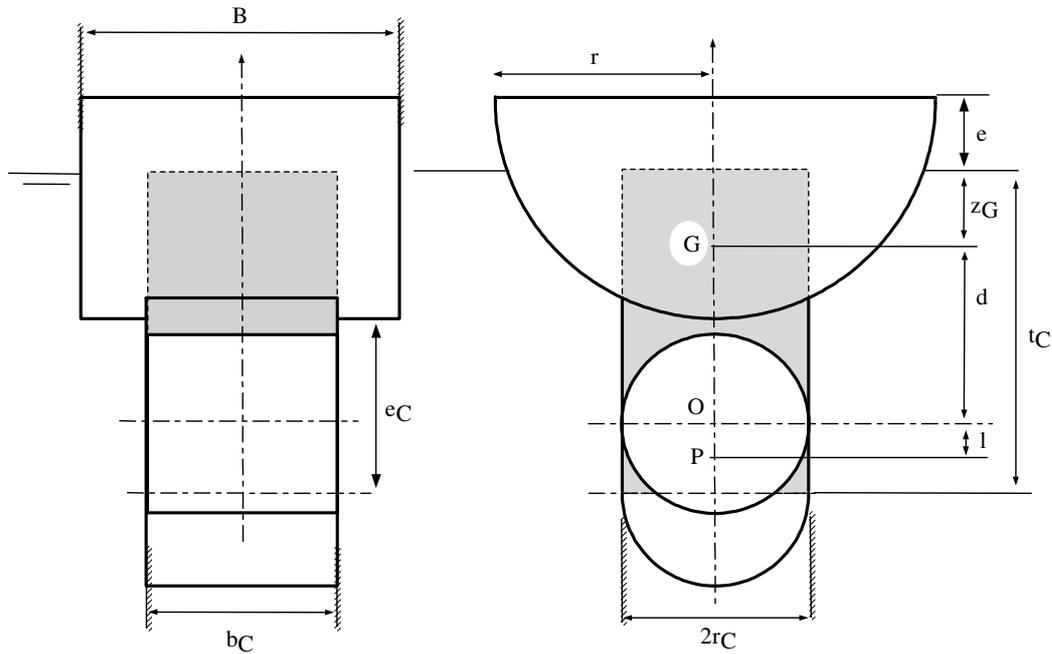


FIG. 9.8 – Paramétrage de la géométrie barge cylindrique à quille.

cours de nos optimisations n'excédaient pas 75 kW. Pour les individus à faible déplacement, le rapport puissance / déplacement est supérieur à 150 W/t et il faut remarquer que pour la première fois, on observe des individus capables d'absorber environ 140 kW en moyenne annuelle.

Sur ce type de géométrie, on retrouve le même type de résultats sur la frontière de Pareto que dans le cas de la géométrie précédente, mais avec une production d'énergie supérieure. Ainsi :

- Le long de la frontière de Pareto, la longueur, la largeur et le tirant d'eau croissent avec le déplacement.
- Le centre de gravité du flotteur est plutôt placé proche de la flottaison, le cylindre est placé dans les fonds. Un peu sous la frontière de Pareto, on observe cependant quelques exceptions à cette règle.
- Le rapport masse pendule sur déplacement total tend à nouveau vers la borne supérieure, 80 %.
- Sur la figure (9.10), on observe également que le rayon du cylindre croît à mesure que le déplacement augmente. Concernant le rapport  $l/r_C$ , les résultats sont variés et peu concluants.

Au vu de ces résultats, on peut conclure que nous sommes parvenus à une géométrie de flotteur globalement performante. Cependant, les formes obtenues ont été jugées trop extrêmes et nous avons décidées d'augmenter les contraintes. Ainsi, le tirant d'eau a été limité à 15

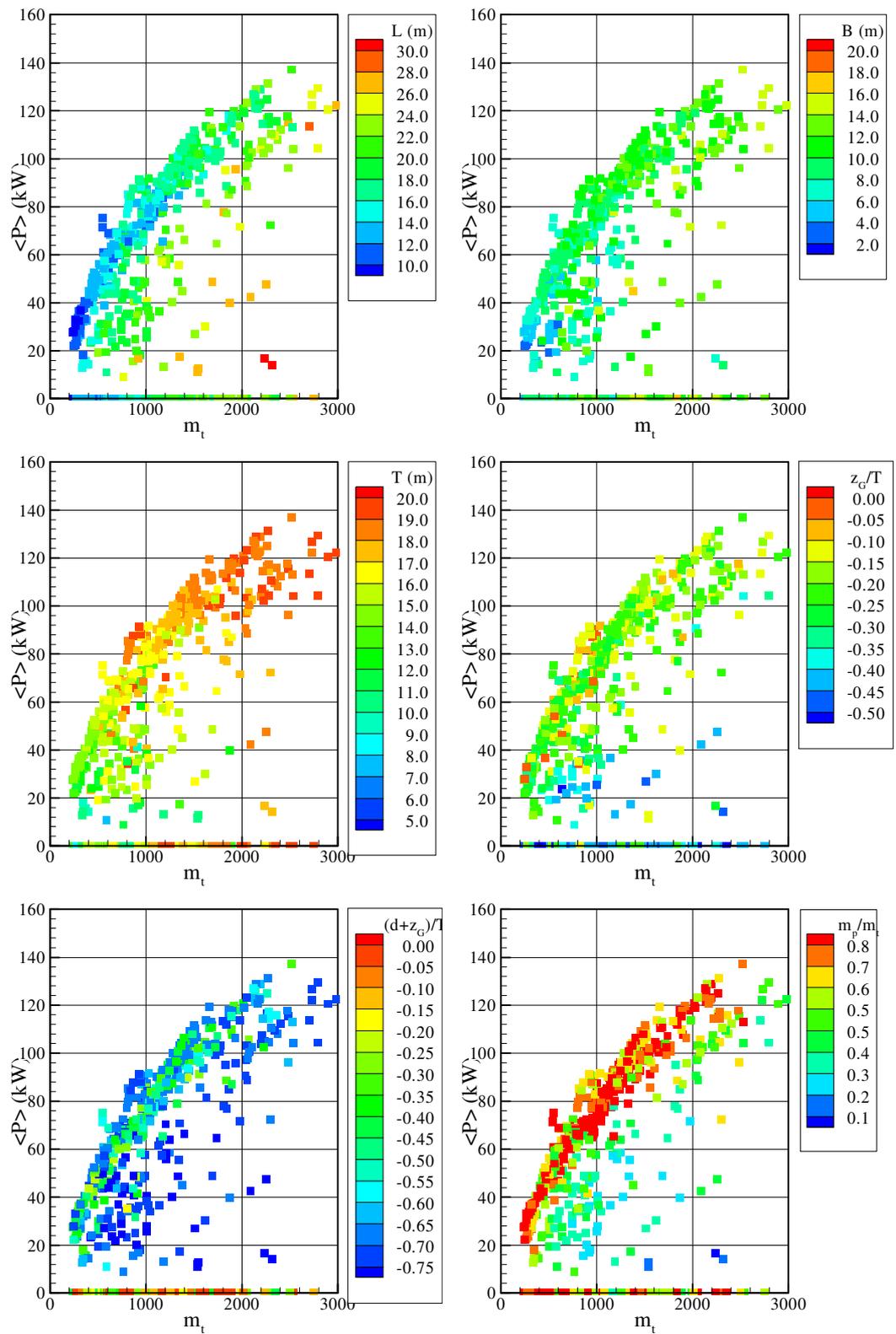


FIG. 9.9 – Résultats de l'optimisation de forme sur le type 12.

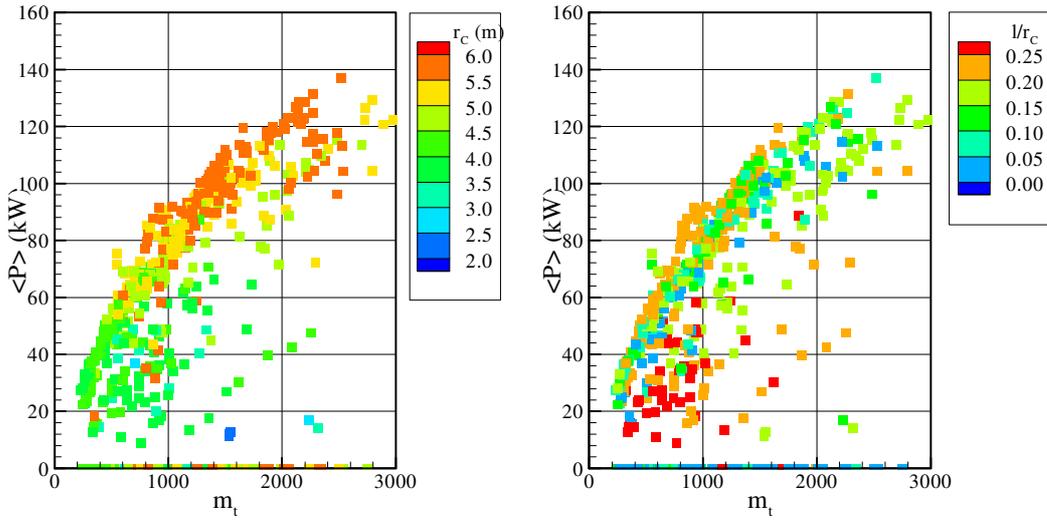


FIG. 9.10 – Résultats complémentaires type 12

mètres, le rayon du cylindre à 5 mètres et le rapport masse pendule sur déplacement à 50 % :

$$\begin{aligned} T &\leq 15 \text{ m} \\ r_C &\leq 5 \text{ m} \\ \frac{m_p}{m_t} &\leq 0.5 \end{aligned}$$

Sur la figure (9.11), nous avons porté le résultat d'une optimisation de la forme de SEAREV avec ces contraintes. L'optimisation a porté sur 2700 individus.

La frontière de Pareto apparaît être bien définie et on constate que, bien que les performances du système soient quelque peu dégradées, la production d'énergie reste encourageante pour des individus dont le déplacement est de l'ordre de 1000 tonnes. Ainsi, si on considère l'individu 2610, la puissance absorbée en moyenne annuelle vaut environ 72 kW pour un déplacement de 906 tonnes, mais avec une masse de pendule de 452 tonnes et un tirant d'eau de 15 mètres, alors que dans l'optimisation précédente, pour un déplacement comparable, l'individu 1003, de déplacement 864 tonnes produisant 88 kW en moyenne annuelle présentait un tirant d'eau de 19 mètres et une masse de pendule de 563 tonnes. Ainsi, une réduction du tirant d'eau de 21 % et de la masse de pendule de 19.7 % engendre une réduction de puissance de 18 %. Cependant, d'un point de vue faisabilité technique, le gain est d'un ordre supérieur.

### 9.4.3 Conclusion.

Cette dernière géométrie est relativement satisfaisante pour notre problème, si ce n'est que pour le passage dans la houle et pour l'auto orientation du système, amarré sur un point, les formes plates à l'avant ne nous ont pas paru favorables. Nous avons donc décidé d'arrondir les formes des plans perpendiculaires à la direction de propagation de la houle, et d'introduire un angle à l'étrave.

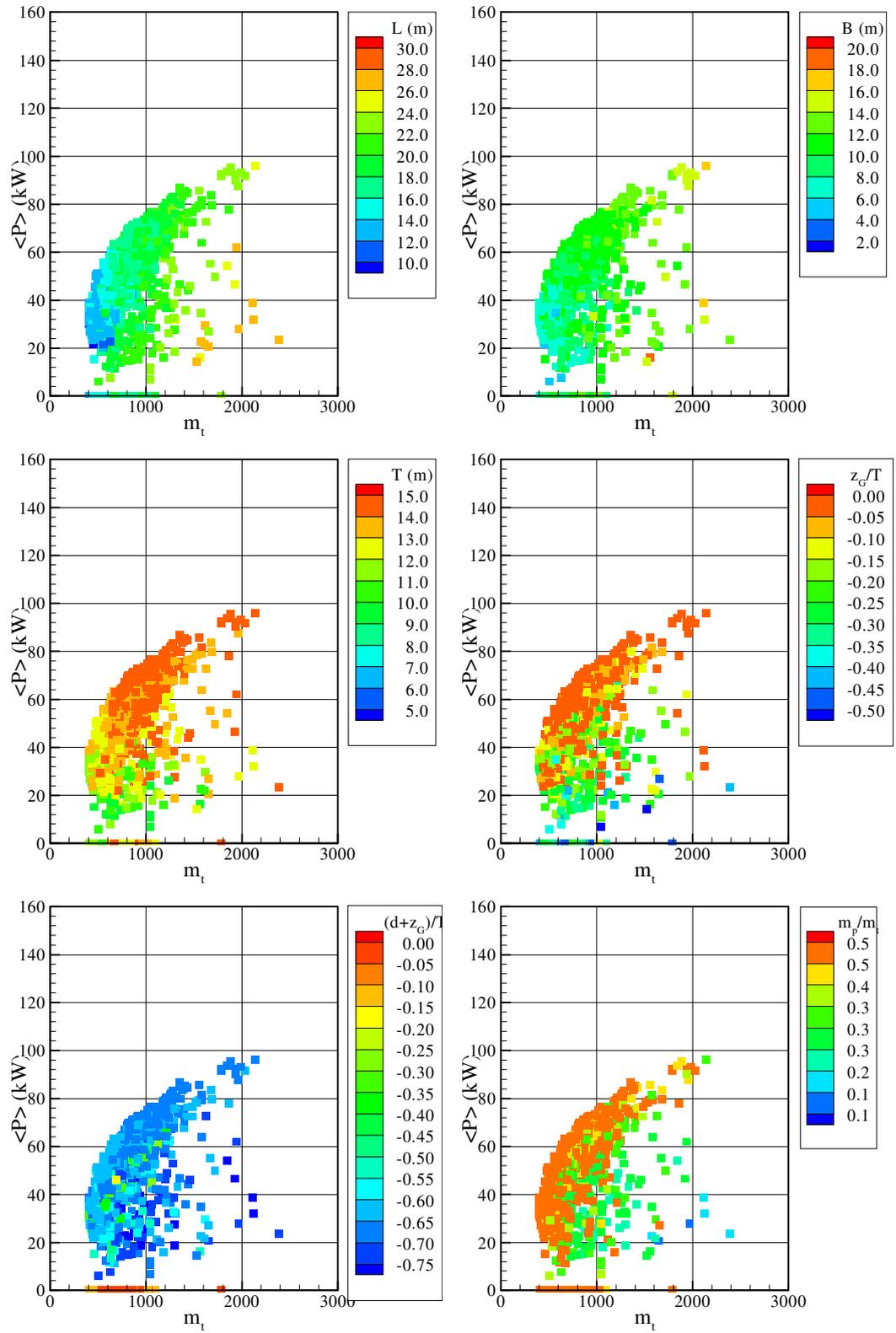


FIG. 9.11 – Résultats de l'optimisation de forme de SEAREV sur la géométrie 12.

## 9.5 Type 5 : Barge cylindrique à quille et bords arrondis.

### 9.5.1 Description.

Finalement, nous avons voulu considérer une géométrie présentant un aspect plus proche d'une coque de navire, pour faciliter le passage dans la forte houle et limiter le slamming. Cette dernière géométrie découle ainsi largement de la description précédente, mais avec des bords arrondis et un angle d'entrée  $a_0$  dans la houle. On retrouve un volume important à la flottaison et une quille profonde où peut prendre place le cylindre. La figure (9.12) décrit cette forme et présente le paramétrage adopté.

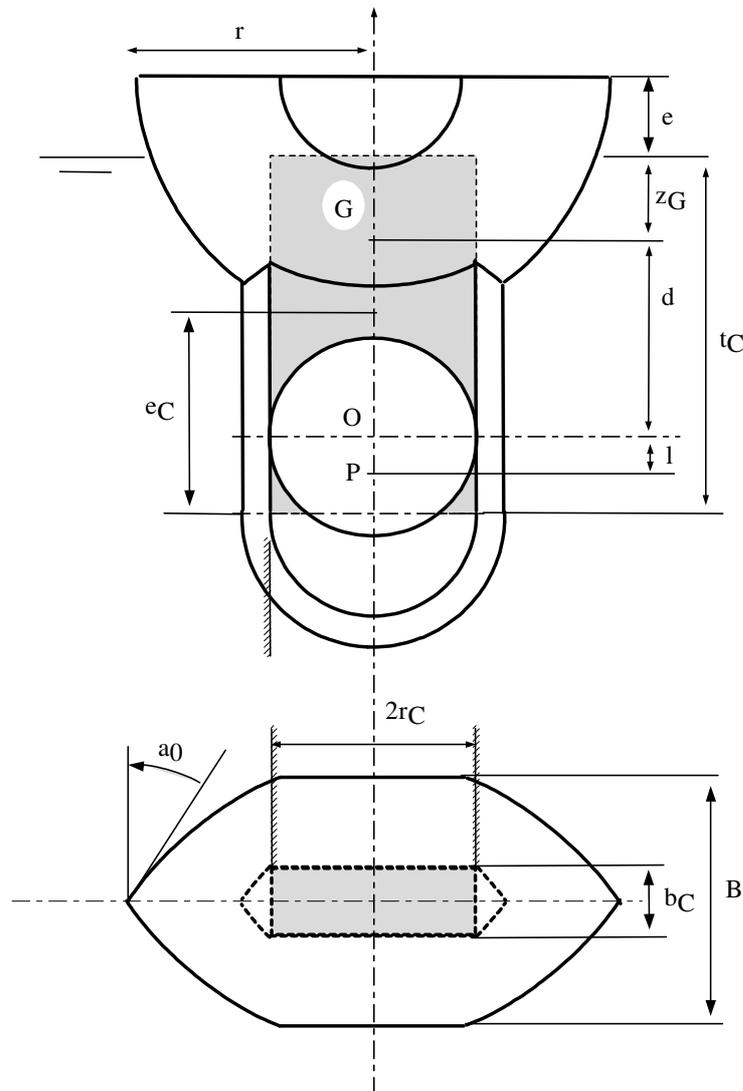


FIG. 9.12 – la barge cylindrique à quille et bords arrondis.

Le tableau suivant récapitule le domaine de variation des paramètres de l'optimisation :

	min	max
$r$ (m)	5.0	20.0
$B$ (m)	$0.2r$	$2.0r$
$e$ (m)	0.0	$0.8r$
$z_G$ (m)	$-\frac{1}{2}(r - e + e_C + r_C)$	0
$r_C$ (m)	2.0	5.0
$b_C$ (m)	$0.2r_C$	$0.5r_C$
$e_C$ (m)	0.0	10.0
$a_0$ (°)	10	45

### 9.5.2 Résultats.

La figure (9.13) présente les résultats de l'optimisation sur cette dernière géométrie. Le calcul a porté sur 1500 individus sur 25 générations.

Sur la frontière de Pareto, le rapport puissance sur masse est compris entre 100 et 70 W/tonne, dans l'ordre des déplacements croissants. Les performances sont semblables à celles de la géométrie précédente. On constate également qu'il n'existe pas de solutions pour les déplacements supérieurs à 1000 tonnes, de part les contraintes que nous avons imposées et les domaines de variation des paramètres.

Cette dernière géométrie a l'avantage de présenter des rapports masse du cylindre sur masse du flotteur raisonnables sur la frontière de Pareto, de l'ordre de 0.5, contrairement aux géométries initiales.

### 9.5.3 Conclusion.

Cette dernière géométrie est la dernière que nous avons optimisée. En effet, elle nous a paru satisfaisante du point de vue du respect des contraintes et des performances. De plus, nous avons eu le sentiment que ce qui pouvait éventuellement encore être gagné était d'un ordre inférieur à ce qui avait été gagné jusque là, et que du coup, de part les limites relatives aux hypothèses du calcul, le jeu n'en valait pas la chandelle.

## 9.6 Synthèse.

### 9.6.1 Comparatif des frontières de Pareto.

Dans le but de synthétiser l'ensemble des résultats de ce travail d'optimisation de la forme de SEAREV, nous avons extrait de chaque calcul les individus situés sur la frontière de Pareto et nous les avons tracé sur la figure (9.15).

On constate que selon la géométrie étudiée, à déplacement fixé, l'énergie absorbée peut varier du simple au triple sur la frontière de Pareto. D'un point de vue opposé, à production d'énergie donnée, ce travail d'optimisation a permis de réduire le déplacement nécessaire, supposé ici être proportionnel au coût.

Il est difficile de dire exactement quel a été la part de ces deux phénomènes, mais finalement, la géométrie la plus performante est indubitablement celle composée d'un cylindre et d'une

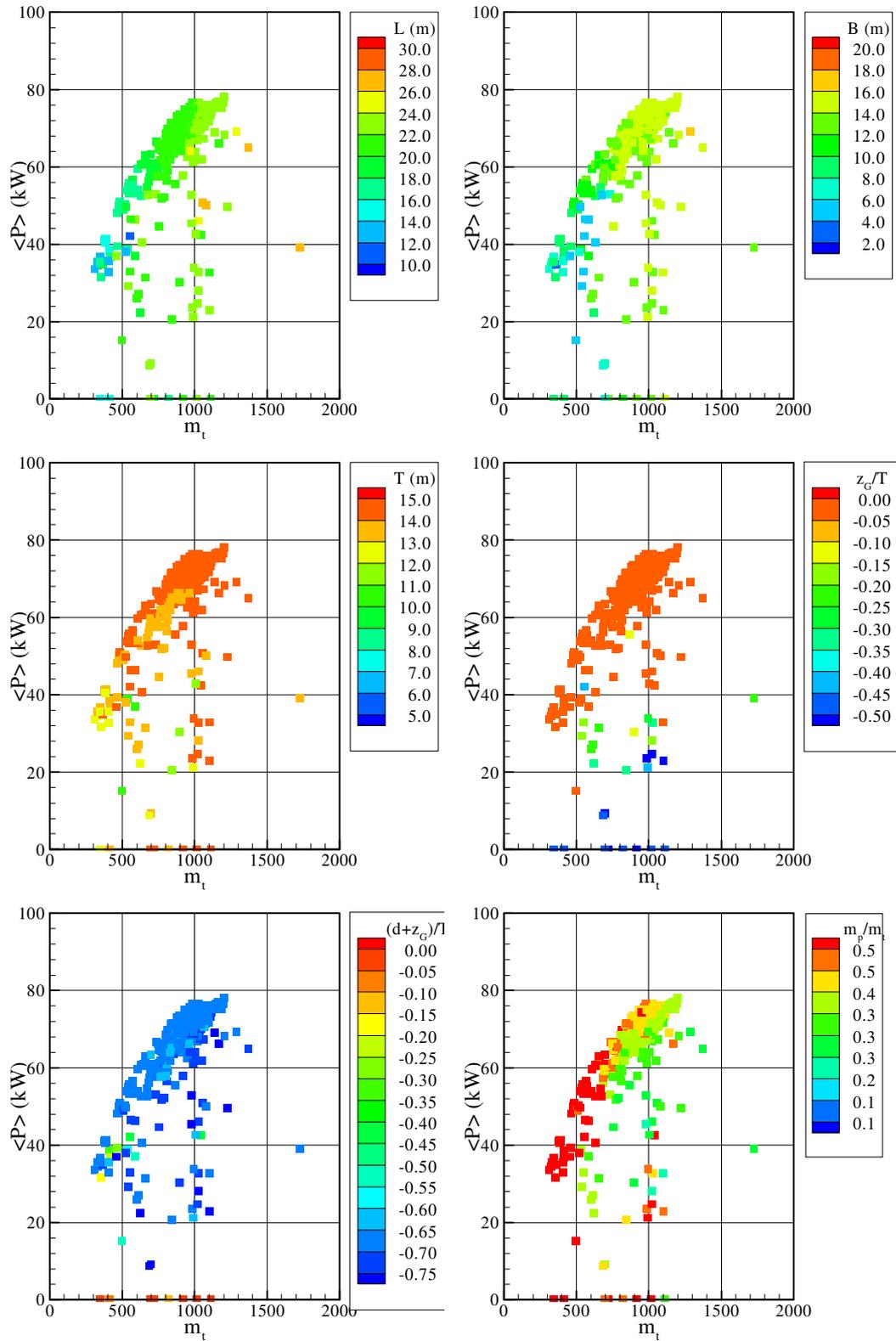


FIG. 9.13 – Résultats de l'optimisation de forme sur la géométrie 17.

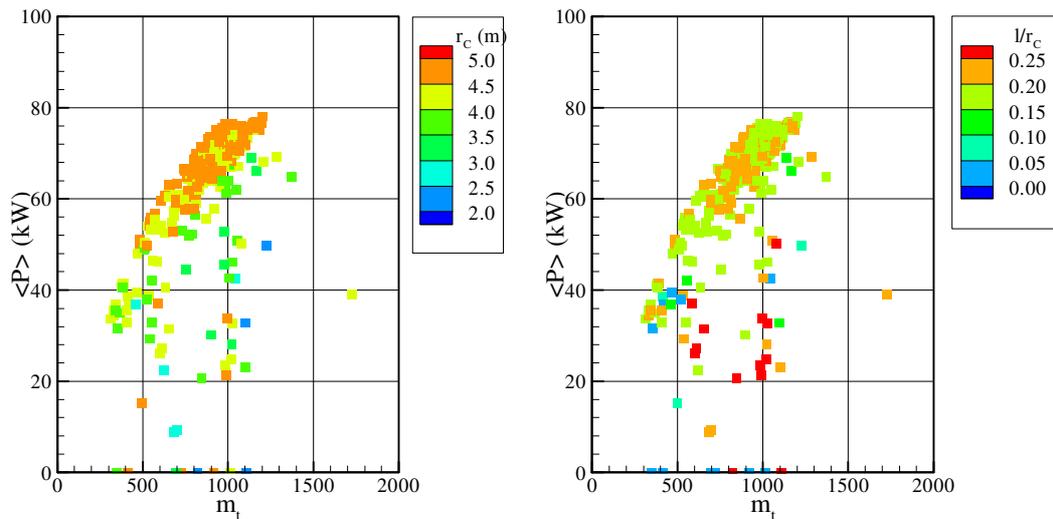


FIG. 9.14 – Résultats complémentaires

quille. Plus généralement, l'idée derrière cette géométrie est d'avoir un volume important à la flottaison, plus ou moins de type carène, pour assurer une excitation forte et la stabilité, et avoir une quille profonde, dans laquelle s'inscrit le cylindre, pour avoir un bras de levier important. Dans cette géométrie, on comprend bien l'utilité des volumes et leur placement, et l'on peut dire que cette optimisation s'est faite sur une économie des volumes "morts". Cela se ressent également sur le rapport de la masse du cylindre par rapport à la masse du flotteur qui a été réduite par ce processus de 85 à 50 % de la masse totale. Ce point est très positif, car il représente une économie très importante en terme de structure. De plus, il autorise une plus grande liberté du point de vue du choix des matériaux pour la construction du flotteur en lui-même et permettra certainement de prévoir une partie du déplacement en ballasts liquides.

En comparant les types 5 et 4 bis, on constate que l'ajout d'un angle d'entrée sur le flotteur n'apparaît pas avoir un impact sensible sur les performances pour les géométries de cylindre avec quille. Une optimisation plus poussée sur la forme de la coque et de la quille ne semble donc pas franchement nécessaire.

La réduction du tirant d'eau de 15 à 20 mètres induit par contre une diminution importante des performances, dans un rapport quasi proportionnel. En fait, derrière ce tirant d'eau se cache la longueur du bras de levier  $d$ , longueur entre le centre de rotation du cylindre et le centre de gravité du flotteur. Plus elle est grande, et plus la production d'énergie est grande.

Pour le rayon du cylindre, la valeur optimale est également la borne supérieure, 5 mètres.

Finalement, à la lecture de la figure (9.15), le flotteur optimal apparaît être le flotteur DES1451 de la famille des géométries de type 5.

### 9.6.2 Le flotteur optimal.

Sur les caractéristiques du système optimal, DES1451, le lecteur pourra se référer à l'annexe D.

La figure (9.16) présente la fonction de transfert de ce système. On constate que l'amplitude

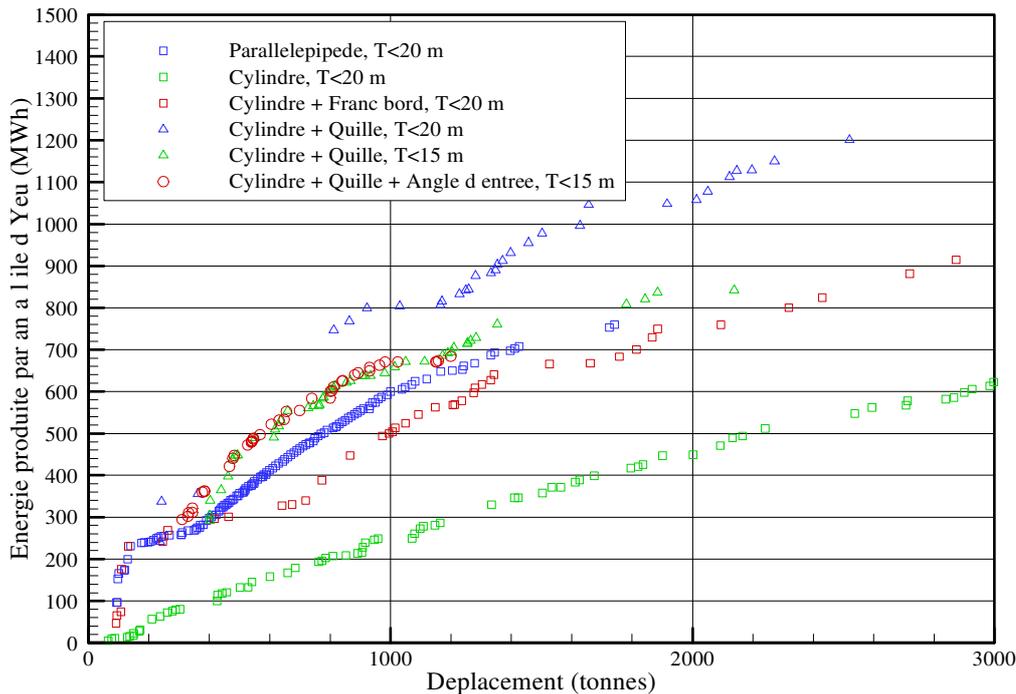


FIG. 9.15 – Frontières de Pareto pour les différentes géométries de flotteur.

du mouvement relatif est grande, au niveau des deux pulsations de résonances du système en rotation comme entre elles. On a également porté sur cette figure le maximum théorique pour la puissance absorbée, calculée d'après l'équation (5.41). On constate que la fonction puissance est large par rapport à celle que l'on pourrait obtenir avec un système à un seul degré de liberté, et que le système est capable d'absorber ainsi une grande partie de la puissance pour une large bande de périodes.

Sur le site de l'île d'Yeu, le modèle fréquentiel prédit une production d'énergie de 660 MWh. La figure (9.17) présente la matrice de puissance associée. Les niveaux de puissance absorbée varient en fonction de l'état de mer entre 0 et plus de 500 kW. L'efficacité du système est la plus grande pour une période de pic égale à 8 secondes et il apparaît que l'optimisation a conduit à privilégier comme compromis un système efficace dans les mers moyennes.

## 9.7 Etudes de sensibilité.

### 9.7.1 Influence du site sur la frontière de Pareto.

Le travail d'optimisation que nous avons présenté ici a été réalisé sur un site particulier, au large de l'île d'Yeu, où le niveau de puissance incidente en moyenne annuelle vaut 23 kW/m. Nous en avons déduit un flotteur optimal, pour ce site, capable d'absorber 660 MWh par an. Mais nous disposons également de statistiques de houle pour un point située à Ouessant, où le niveau de puissance en moyenne annuelle vaut 45 kW/m. Sur ce deuxième site, la production d'énergie pour le flotteur optimal à l'île d'Yeu vaut 815 MWh.

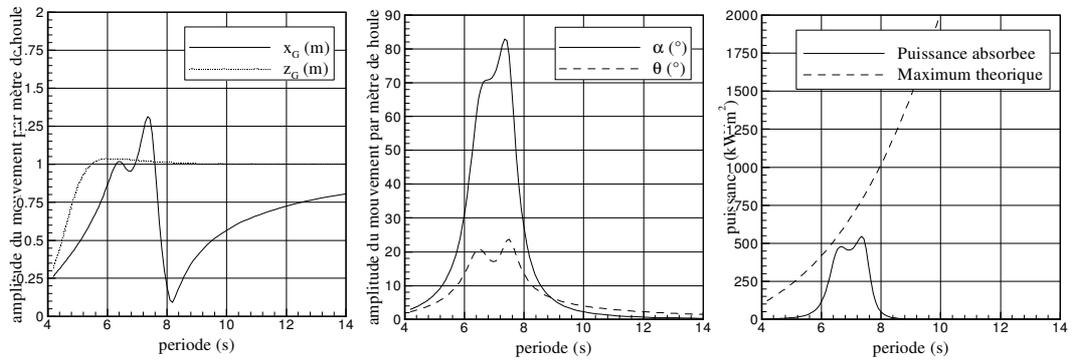


FIG. 9.16 – Fonction de transfert du SEAREV DES1451

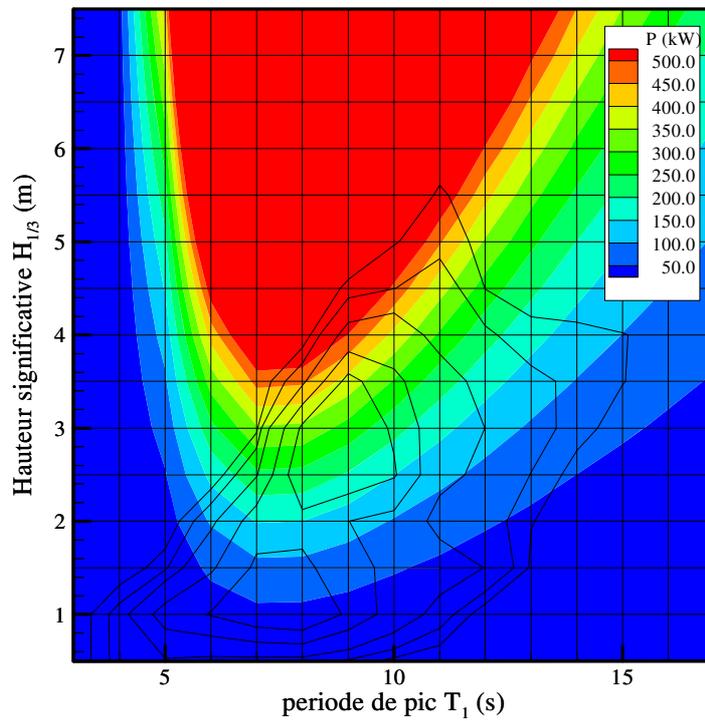


FIG. 9.17 – Matrice de puissance pour le SEAREV DES1451

Cependant, il n’y a priori aucune raison pour que le système qui était optimal à l’île d’Yeu le soit encore à Ouessant. Afin d’évaluer cette influence du site, nous avons procédé à une nouvelle optimisation du système, avec la géométrie type 5 en utilisant les données de houle pour Ouessant. La figure (9.18) présente les résultats associés à cette optimisation.

Evidemment, la puissance absorbée en moyenne annuelle par les individus situés sur la frontière de Pareto est supérieure dans cette optimisation à celle qui était absorbée à l’île d’Yeu. Ainsi, les individus de 1000 tonnes sont ici capables d’absorber en moyenne annuelle presque 100 kW. Cependant, le rapport entre les puissances moyennes annuelles absorbées n’est pas dans la mesure du rapport des puissances linéiques. Ainsi, alors que le site de Ouessant présente un flux d’énergie 1.95 fois plus élevé que le site de l’île d’Yeu, la puissance absorbée est multipliée par un facteur 1.26.

Par rapport aux résultats de l’optimisation sur l’île d’Yeu, les caractéristiques des individus sur la frontière de Pareto sont les mêmes à Ouessant, que ce soit au niveau des dimensions générales comme au niveau des rapports de masse. Sur la figure en haut à gauche, nous avons porté une croix noir qui représente l’individu DES1451, flotteur optimal de l’optimisation sur l’île d’Yeu. On constate qu’il reste dans cette optimisation sur le site de Ouessant sur la frontière de Pareto.

Inversement, si on sélectionne l’individu DES986 sur cette optimisation à Ouessant, son déplacement vaut 978 tonnes et sa production d’énergie 840 MWh à Ouessant. Le même individu à l’île d’Yeu produit 680 MWh par an, et est donc également situé sur la frontière de Pareto pour ce site. A la lumière de ces résultats, il apparaît qu’un individu performant sur un site donnée le reste pour un autre site. L’optimisation semble finalement peu sensible au site considéré et il n’est sans doute pas nécessaire de prévoir une gamme de systèmes pour répondre à la demande sur chaque site.

### 9.7.2 Sensibilité de la prédiction de la production aux paramètres mécaniques.

On considère le système DES1451. On s’intéresse ici à l’évaluation de la sensibilité de la production d’énergie lorsque l’on fait varier les paramètres mécaniques du système.

	-10%	0	+10%
$I_b$	654	665	664
$m_p$	656	665	631
$I_y$	607	665	652
$l$	634	665	633
$d$	644	665	717
$B_{PTO}$	665	665	665

D’après le tableau ci-dessus, on constate que la production d’énergie est assez peu sensible aux variations des paramètres. Dans l’ensemble, une variation de 10 % d’un paramètre ne dégrade pas la production d’énergie de plus de 5 %, mis à part les cas particuliers des paramètres  $I_y$  et  $d$ .

Dans le cas de l’inertie en rotation du cylindre autour de son centre de gravité,  $I_y$ , une diminution de 10 % entraîne une diminution du même ordre sur la production d’énergie. Dans le cas de la hauteur du point d’accroche  $d$ , si on remonte le cylindre d’un mètre, la production

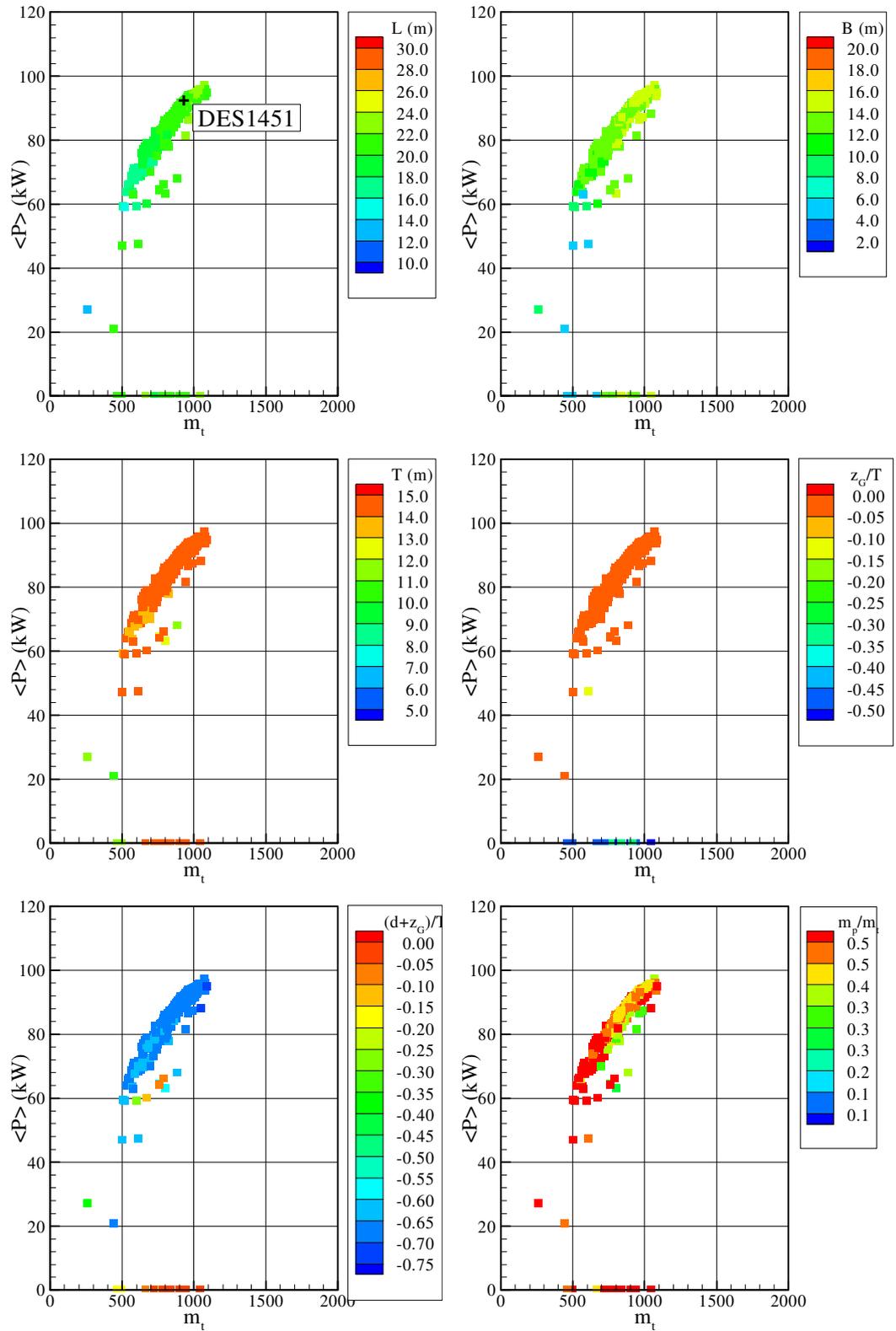


FIG. 9.18 – Optimisation type 17 à Ouessant

n'est dégradé que de 3%, alors que si on l'abaisse d'un mètre, il y a gain sur l'énergie, de l'ordre de 8 %. Le problème est alors que le cylindre sort du flotteur !

La solution retenue, DES1451, apparaît donc être peu sensible à de petites variations sur ses paramètres mécaniques. Pour parler avec le langage de l'optimisation, on parle d'une solution robuste.

### 9.7.3 Facteur d'échelle.

Considérons un flotteur en similitude géométrique par rapport au système DES1451. Soit  $\lambda$  le rapport d'échelle. Les paramètres mécaniques du système et les coefficients hydrodynamiques du flotteur en similitude se déduisent par la similitude de Froude.

Nous avons porté sur la figure (9.19) l'énergie produite par le système en fonction du rapport d'échelle au cube. Pour chaque valeur du rapport d'échelle, les coefficients hydrodynamiques et les paramètres mécaniques ont été recalculés en accord avec la similitude de Froude. L'énergie produite est obtenue en réoptimisant à chaque fois le volant pendulaire.

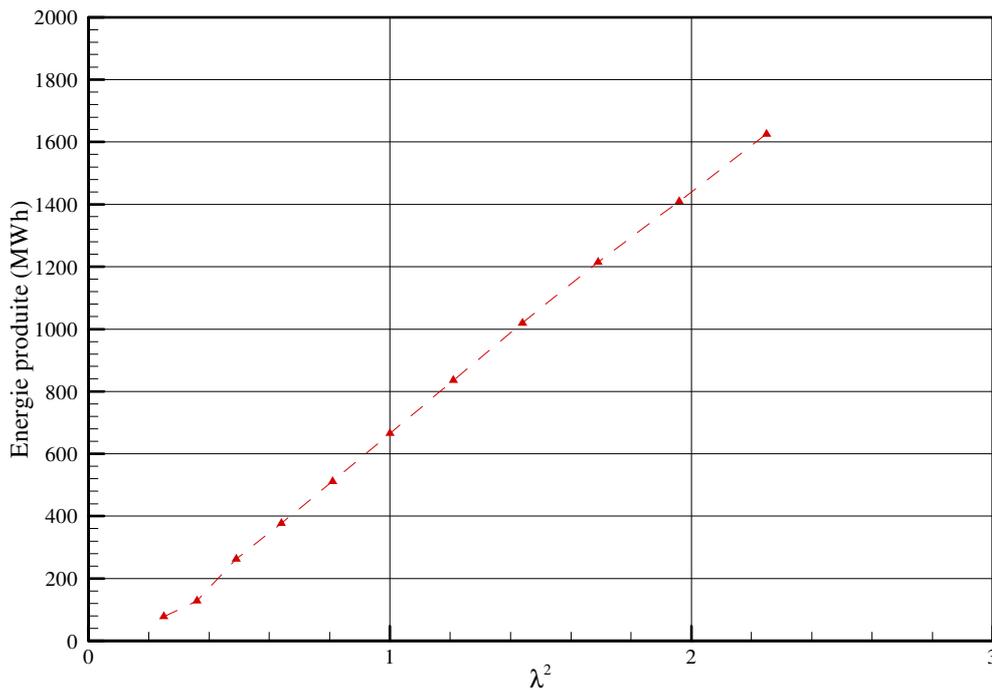


FIG. 9.19 – Production d'énergie en fonction du carré du facteur d'échelle. La géométrie est celle du DES1451.

On constate que la production d'énergie croît quasiment linéairement avec le carré du facteur d'échelle. Cette constatation permettra, lorsque nous disposerons d'une fonction de coût plus précise, de déterminer le facteur d'échelle optimal, donc finalement le capteur optimal.

#### 9.7.4 Conclusion.

Il apparaît que le flotteur optimal que nous avons défini est une solution robuste et performante au problème d'optimisation que nous nous sommes posés. Personnellement, je le recommanderais comme base de travail pour les bureaux d'étude.

# Chapitre 10

## Optimisation avec contrôle.

### 10.1 Noyau de l'optimisation.

#### 10.1.1 Calcul de l'énergie absorbée.

Dans le cas où l'on désire calculer l'énergie produite annuellement par le système contrôlé, on ne peut plus raisonner dans le domaine fréquentiel car le système est globalement non linéaire. Afin d'estimer la production, il est nécessaire de réaliser plusieurs simulations temporelles de la réponse du système contrôlé pour chaque état de mer, puis de sommer le produit des puissances obtenues en moyenne avec les probabilités d'occurrence.

La stratégie de contrôle par latching est obtenue à partir de la théorie de la commande optimale, comme exposée dans la seconde partie. Pour chaque état de mer, cinq réalisations de houle sont effectuées avec des phases tirées aléatoirement. La puissance moyenne pour l'état de mer considéré est ensuite obtenue en faisant la moyenne des puissances obtenues sur chaque cas de houle. Pour obtenir l'énergie produite, il ne reste plus qu'à sommer les produits des puissances moyennes sur chaque état de mer par leurs probabilités d'occurrence.

Comme nous travaillons dans le domaine temporel, il en résulte des temps de calcul de l'énergie absorbée annuellement beaucoup plus importants et la réalisation de l'ensemble des opérations décrites ici prend environ 3 heures sur un Pentium 4 à 2.4 GHz, car, sur le site de l'île d'Yeu, il faut réaliser 1125 simulations temporelles des mouvements. Cependant, toutes ces simulations sont indépendantes et le calcul de l'énergie est très facilement parallélisable. Ainsi, sur un ordinateur CRAY XD1 à 16 processeurs Opteron, le calcul est réalisé en une quinzaine de minutes.

#### 10.1.2 Description de la géométrie.

La géométrie de flotteur que nous avons considérée pour l'optimisation de la forme avec contrôle est la géométrie barge cylindrique avec quille et bords arrondis, tel que décrite dans le chapitre précédent. On rappelle qu'elle est définie à partir de 8 paramètres dont les domaines

de variation sont donnés par le tableau suivant :

	min	max
$r$ (m)	5.0	20.0
$B$ (m)	$0.1r$	$r$
$e$ (m)	0.0	$0.8r$
$z_G$ (m)	$-\frac{1}{2}(r - e + e_C + r_C)$	0
$r_C$ (m)	2.0	5.0
$b_C$ (m)	$0.5r_C$	$r_C$
$e_C$ (m)	0.0	10.0
$a_0$ (°)	10	45

A ces 8 paramètres, il nous faut rajouter les 4 paramètres relatifs à la description du pendule interne, car il n'est plus judicieux désormais de réaliser une boucle d'optimisation interne du fait de la durée des temps de calcul. Ce sont les paramètres  $\eta_{m_p}, \eta_l, \eta_d, \eta_{PTO}$  dont découle la description mécanique du pendule par :

- $m_p = \eta_{m_p} m_{p,\max}$ , avec  $m_{p,\max}$  la masse maximale de pendule admissible, égale au minimum de :
  - $\rho_C \pi b_C r_C^2$ , avec  $\rho_C$  la densité du béton armé,  $\rho_C = 2800 \text{ kg/m}^3$ .
  - $0.85 \times V$ , avec  $V$  le déplacement du flotteur.
- $I_y = \frac{1}{2} m_p r_C^2$ , soit l'inertie d'un cylindre uniformément rempli.
- $l = \frac{1}{2} \eta_l r_C$
- $d = -\eta_d (t_C - r_C + z_G)$
- $B_{PTO} = 5 \eta_{B_{PTO}} (I_y + m_p l^2)$

## 10.2 Optimisation sur le cylindre d'inertie.

### 10.2.1 Position du problème.

On considère le flotteur DES1451. Rien n'assure que le pendule que nous avons défini comme optimal dans le cas de l'optimisation sans contrôle est également optimal lorsque l'on ajoute du contrôle par latching dans la dynamique du système. Dans cette première optimisation, nous allons donc nous intéresser à la définition du pendule optimal lorsque le système est contrôlé et à géométrie fixée, afin de quantifier les différences qu'il peut exister entre le pendule optimal avec et sans contrôle.

Dans cette optimisation effectuée, les domaines de variation des paramètres liées au cylindre sont donnés par le tableau suivant :

	min	max
$\eta_{m_p}$	0.1	0.9
$\eta_l$	0.0	1.0
$\eta_d$	0.0	0.1
$\eta_{PTO}$	0.0	0.5

Le paramètre  $\eta_d$  est volontairement limité à 0.1 pour des raisons de stabilité hydrostatique du système.

### 10.2.2 Résultats.

L'optimisation a porté sur 30 générations de 30 individus. Le calcul a été effectué sur 16 processeurs, chaque évaluation durant alors environ 10 minutes.

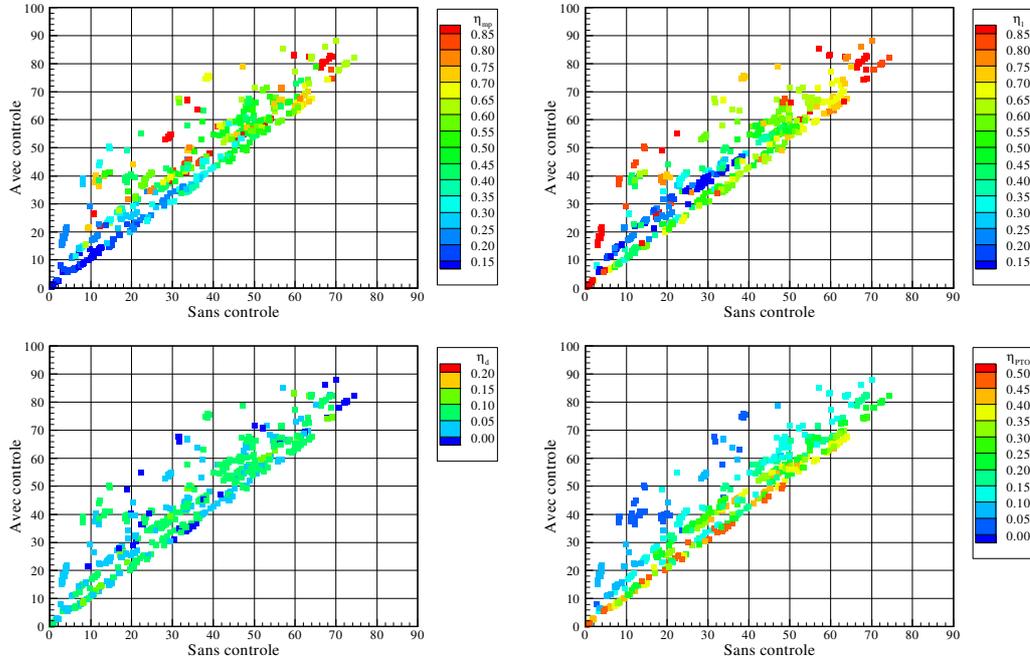


FIG. 10.1 – Résultats de l'optimisation du cylindre d'inertie avec contrôle pour le flotteur DES1451

Nous avons porté sur la figure (10.1) les résultats associés à ce calcul. En abscisse est portée la puissance absorbée sans contrôle et en ordonnée la puissance absorbée avec contrôle. Il apparaît que le contrôle permet un gain en terme de puissance produite pouvant aller jusqu'à 6 fois la puissance sans contrôle. Cependant, les grands gains apparaissent dans le cas où le cylindre n'est pas très bon, dans le sens où la production d'énergie sans contrôle est très faible par rapport à ce qu'elle pourrait être.

Les points vraiment intéressants apparaissent dans le coin supérieur droit des figures. Le meilleur individu produit 90 kW avec contrôle, contre 70 sans contrôle. Le gain engendré par le contrôle est donc de 30 % sur ce flotteur. La figure (10.2) présente ses matrices de puissance sans contrôle, en haut, et avec contrôle par latching, en bas.

Le tableau suivant présente le comparatif des caractéristiques du cylindre optimal dans les cas sans contrôle et avec contrôle :

	sans contrôle	avec contrôle
$m_p (t)$	415	425
$l (m)$	1.0	0.96
$d (m)$	-9.9	-9.9
$B_{PTO} (kN.m.s)$	700	600

Il apparaît que les cylindres sont quasiment équivalents dans les cas avec et sans contrôle.

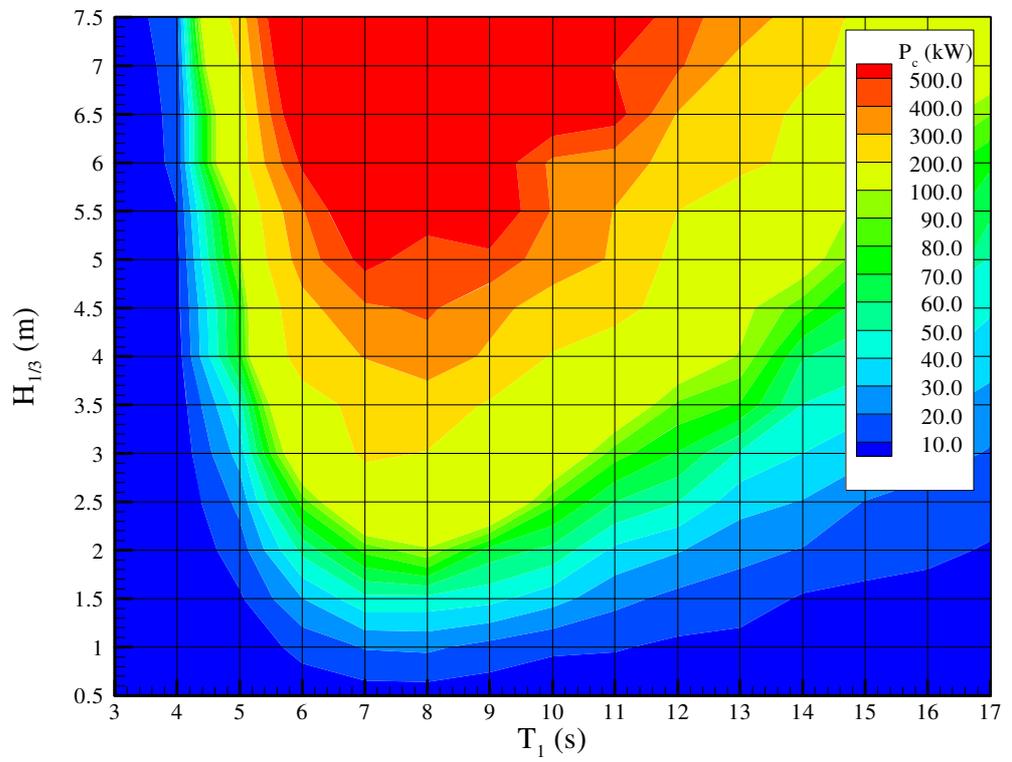
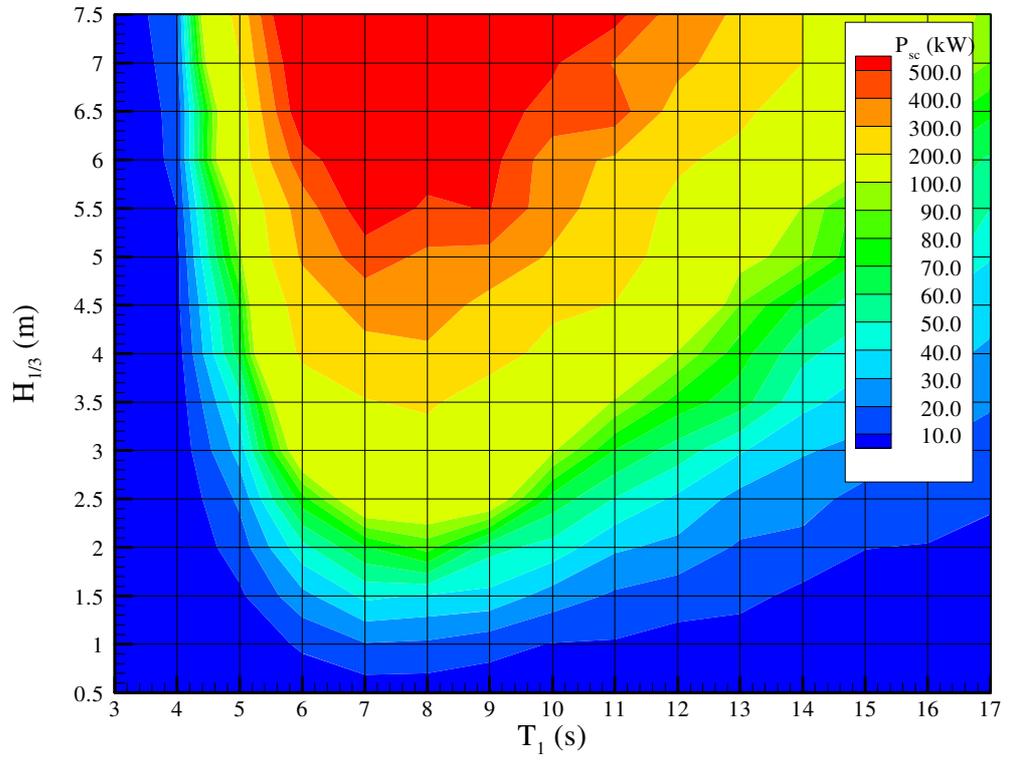


FIG. 10.2 – Matrices de puissance avec et sans contrôle par latching du meilleur individu.

Cependant, la géométrie du flotteur considéré dans cette optimisation est le résultat de l'optimisation sans contrôle et peut être la source d'un biais dans les résultats. En effet, rien ne nous garantit que la géométrie de flotteur optimale sans contrôle l'est aussi lorsque l'on applique le contrôle. L'optimisation suivante examine cette possibilité.

## 10.3 Optimisation globale.

### 10.3.1 Position du problème.

Nous avons réalisé ici une optimisation globale de la géométrie avec contrôle, c'est-à-dire une optimisation à la fois sur le cylindre d'inertie et sur la géométrie du flotteur. Le tableau suivant rappelle le domaine de variation des paramètres qui décrivent le cylindre d'inertie.

	min	max
$\eta_{m_p}$	0.1	0.9
$\eta_l$	0.0	1.0
$\eta_d$	0.0	0.2
$\eta_{PTO}$	0.0	0.5

On rappelle également que la forme extérieure du flotteur considérée ici est la forme barge cylindrique à bords arrondies avec quille, figure (9.12)

### 10.3.2 Résultats.

L'optimisation a porté sur 24 générations et un total de 720 individus, ce qui représente une semaine de calcul sur 20 processeurs. On a porté sur la figure (10.3) les résultats de cette optimisation.

Sur cette figure, on constate que la frontière de Pareto est assez bien dessinée et que l'ordre de grandeur du rapport puissance absorbée (avec contrôle) sur déplacement est de l'ordre de 100 W/t, soit un rapport supérieur à ce que l'on avait pu obtenir lors des optimisations sans contrôle pour cette géométrie. On observe également que sur cette frontière, les longueurs, largeurs et tirant d'eau croissent progressivement à mesure que le déplacement augmente, comme nous avons pu l'observer dans les optimisations précédentes.

La figure (10.4) présente le comparatif des puissances obtenues avec et sans contrôle pour chaque individu. On constate que la frontière de Pareto avec contrôle est au dessus de la frontière de Pareto sans contrôle. Selon les individus, le gain varie de 100 % pour les individus de petit déplacement à 30 % pour les individus dont le déplacement avoisine les 1000 tonnes. Ce dernier résultat met ainsi en évidence le fait qu'il est nécessaire de procéder à une optimisation de forme avec contrôle pour dégager des individus pour lesquels le fonctionnement contrôlé est avantageux.

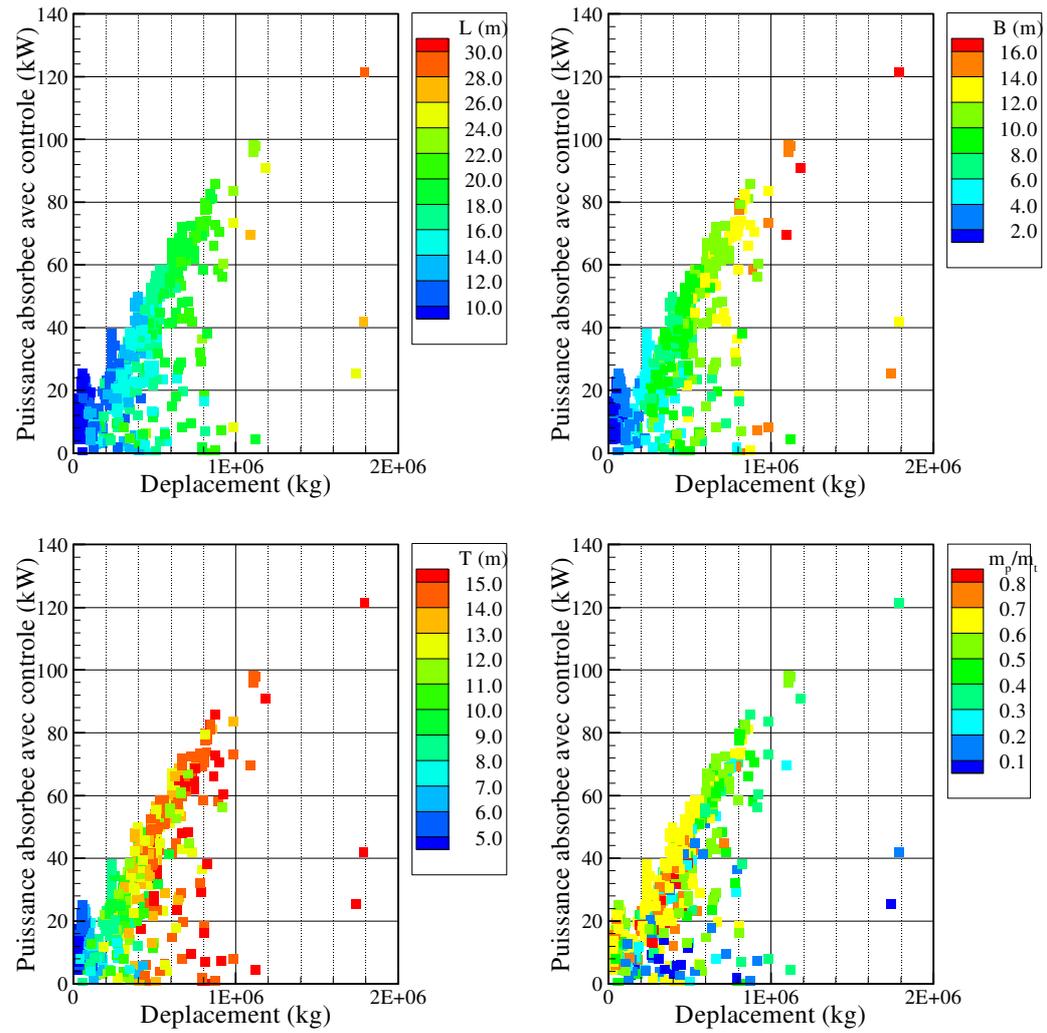


FIG. 10.3 – Résultats de l'optimisation globale de SEAREV avec contrôle.

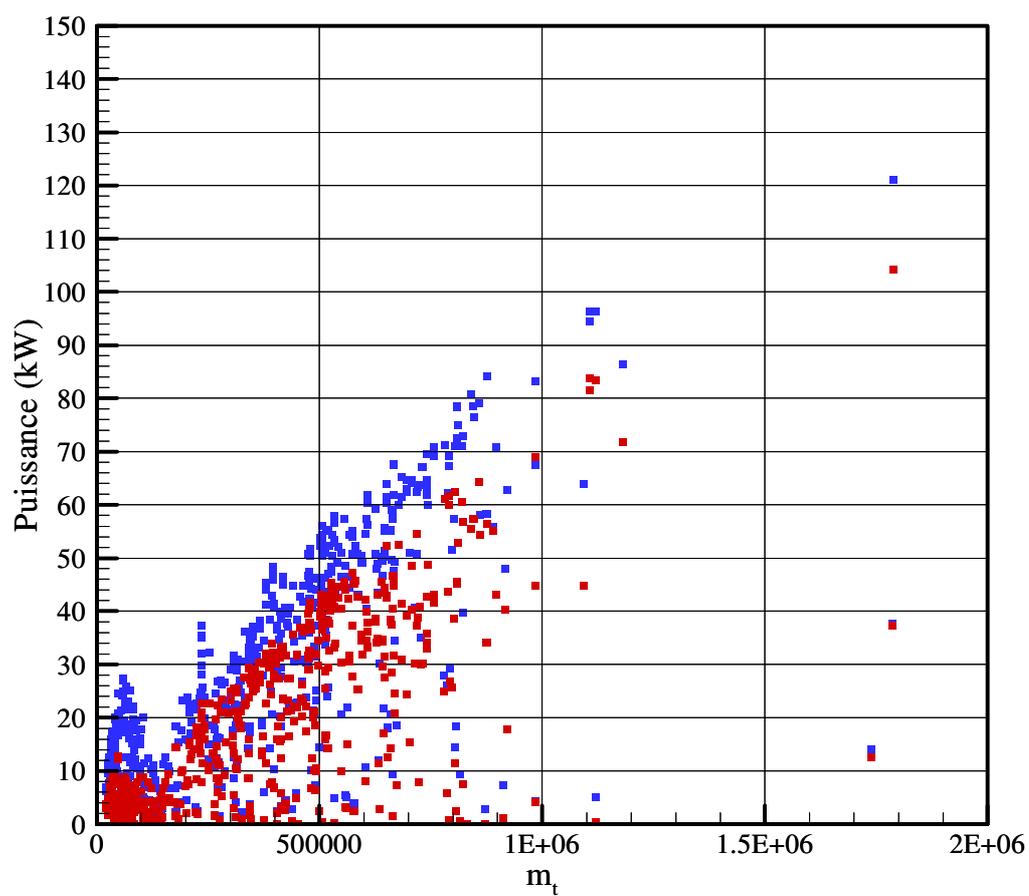


FIG. 10.4 – Comparatif des puissances obtenues avec et sans contrôle

# Conclusion.

Dans le cadre de cette thèse, nous avons élaboré un modèle numérique hybride du récupérateur de l'énergie des vagues SEAREV dans lequel l'hydrodynamique est linéarisée alors que la cinématique est totalement non linéaire. Ce modèle permet la réalisation de simulations du fonctionnement du système dans le domaine temporel et nous a permis de valider le concept initial et le principe utilisé.

Le contrôle par latching a également été étudié par deux méthodes. La première est une méthode semi-analytique originale qui permet d'évaluer les performances du contrôle en houle régulière. La seconde est basée sur les lois de la commande optimale et le principe de Pontryagin qui permet de traiter le cas de la houle irrégulière. Appliquées à SEAREV, ces méthodes ont montré le bénéfice apporté par le contrôle par latching au système.

A partir des modèles de simulations du mouvement, avec et sans contrôle, des optimisations ont pu être conduites tant sur la forme que sur les paramètres mécaniques du système. Elles nous ont permis de déterminer les ordres de grandeurs clés du système. Nous avons montré que, dans le cas sans contrôle, la puissance absorbée par le système vaut environ 50 Watts par tonnes de déplacement sans contrôle, et environ 100 Watts par tonnes de déplacement avec contrôle par latching.

Cependant, la méthode de calcul du mouvement avec contrôle par latching nécessite la connaissance du futur de la force d'excitation, et n'est donc pas réalisable en pratique. Un travail doit à présent être mené visant à la recherche d'algorithmes causaux pour le contrôle par latching, comme nous l'avons fait et présenté dans ce mémoire pour le système de récupération de l'énergie des vagues à deux degrés de liberté. Comme le nombre de degrés de liberté est plus important pour SEAREV, ce travail est plus difficile et des solutions envisagées est de faire appel aux réseaux de neurones pour prédire les durées de blocage. Un stage sur ce sujet devrait prochainement démarrer.

Dans le cadre du projet SEAREV, un montage de double pendule a été développé en parallèle au laboratoire IRCCYN (UMR CNRS 6597), à l'Ecole Centrale de Nantes. Un contrôle par latching est prévu sur ce montage et un doctorant, José Carlos Lopes, travaille actuellement à déterminer des algorithmes permettant d'amplifier les mouvements.

Suivant les résultats de ce futur travail, le contrôle pourra être appliqué à la maquette du SEAREV qui sera testée à partir de janvier 2006 au bassin de houle de l'Ecole Centrale de Nantes. Ces essais, qui seront conduits par Mathieu Durand, ingénieur CNRS, permettront également un retour d'expérience par rapport aux modèles numériques et ouvriront en conséquence de nouvelles voies de recherche dans le développement du modèle numérique.

Un des objectifs du projet SEAREV est en effet de réaliser un modèle numérique du système le plus complet et le plus proche de la physique, beaucoup plus élaboré que les modèles numériques présentés ici. Ce modèle, dit Wave To Wire (W2W), est une muraille de Chine dont

les modèles présentées ici, et particulièrement le modèle 3DHLMNLT, doivent être considéré comme les premières pierres. Sur ces fondations pourront s'appuyer et se greffer les travaux des futurs doctorants et chercheurs amenés à travailler sur SEAREV.

Si on considère les équations du modèle 3DHLMNLT, l'ensemble des termes ayant trait à la mécanique, à gauche dans le principe fondamental de la dynamique, sont résolus sans approximation. Les mouvements peuvent ainsi être absolument quelconque. A mon sens, le travail devrait donc à présent porter sur le terme de droite dans le PFD, à savoir les efforts.

Trois pistes sont à explorer :

- Les efforts d'interaction fluide-structure. Dans ce qui a été présenté ici, ils sont traités dans le cadre d'une théorie linéarisée. Pour améliorer le modèle, il serait intéressant dans un premier temps de disposer des efforts de rappel hydrostatique exacts en fonction de la position du flotteur. Ce travail est l'objet de la thèse de Jean-Christophe Gilloteaux, travail commencé en 2003.
- Le convertisseur d'énergie. Dans tout ce mémoire, le convertisseur d'énergie a été modélisé par un simple couple d'amortissement linéaire. Afin d'améliorer ce modèle, Christophe Josset, post-doctorant au laboratoire, étudie un convertisseur hydraulique constitué de pompes, d'accumulateurs et d'un moteur hydraulique. Au laboratoire SATIE à Rennes, Marie Ruellan, doctorante, étudie elle la faisabilité d'un génératrice électrique directe.
- L'amarrage. Problème tout aussi complexe que les autres, l'amarrage mérite une modélisation plus poussée que celle présentée ici. L'acquisition d'un logiciel de calcul d'ancrage serait tout à fait profitable au projet, et permettrait d'étudier son influence dans la dynamique.

On le voit, le travail présenté ici, constitue la base d'un grand tout. Reste à la valider expérimentalement lors de la campagne d'essai qui sera conduite l'année prochaine.

# Bibliographie

- [1] Système électrique autonome de récupération de l'énergie des vagues, 2004. Brevet FR 0410927.
- [2] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications inc., New York, 9<sup>e</sup> édition, 1970.
- [3] A. Babarit, G. Duclos, and A.H. Clément. Contrôle discret par latching d'un système houlomoteur à un degré de liberté. *Proc. of 9<sup>èmes</sup> Journées de l'Hydrodynamique.*, pages 251–264, 10–12 mars 2003.
- [4] A. Babarit, G. Duclos, and A.H. Clément. Benefit of latching control for heaving wave energy device in random sea. *Proc. 13<sup>th</sup> Int Offshore and Polar Engineering Conf. ISOPE2003*, 1 :341–348, 2003. ISBN 1-880653-60-5.
- [5] A. Babarit, G. Duclos, and A.H. Clément. Comparison of latching control strategies for a heaving wave energy device in random sea. *Applied Ocean Research*, 26 :227–238, 2005.
- [6] A. Babarit, G. Duclos, A.H. Clément, and J.C. Gilloteaux. Latching control of a power take off oscillator carried by a wave activated body. *Proc. 20<sup>th</sup> International Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, pages xxx–yyy, 2005.
- [7] H. Bingham. Computing the green function for linear wave-body interaction. In *Proc. Of the 13<sup>th</sup> International Workshop on Water Waves and Floating Bodies.*, pages 5–8, 1999.
- [8] C. Boake, M. Folley, A. Thompson, and T.J.T Whittaker. Instrumentation and data management of the LIMPET OWC wave power plant. *Proceedings of the fifth European Wave Energy Conference, Cork*, 2003.
- [9] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella, and I. Zambettakis. *Méthodes et techniques de l'ingénieur, Automatique : Commande et optimisation des processus*. TECNIP-Paris, 1990.
- [10] K. Budal. Theory of absorption of wave power by a system of interacting bodies. *Journal of Ship Research*, 21 :248–253, 1977.
- [11] K. Budal and J. Falnes. A system for the conversion of sea wave energy, 1978. British patent No 1522661.
- [12] K. Budal and J. Falnes. *Interacting point absorbers with controlled motion, in Power from Sea Waves*. BM Count, Academic Press, 1980.
- [13] K. Budal and J. Falnes. Apparatus for utilising or absorbing wave energy, 1981. British patent No 1587344.
- [14] K. Budal, J. Falnes, L.C. Iversen, P.M. Lillebeken, G. Oltedal, T. Hals, T. Onshus, and A.S. Hoy. The norwegian wave-power buoy project. *The Second International Symposium on Wave Energy Utilization*, pages 323–344, June 1982.

- [15] A. Cauchy. Méthode générale pour la résolution de systèmes d'équations simultanées. *Compte rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, pages 536–538, 1847.
- [16] G. Chatry, A.H. Clément, and A.J.N.A Sarmiento. Simulation of a self adaptatively controlled OWC in a non linear numerical wave tank. *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, 10-4 :269–275, 2000.
- [17] Gontran Chatry. *Développement et Simulation D'une Méthode de Régulation Auto-Adaptative Pour L'absorption Dynamique Des Ondes de Gravité*. PhD thesis, Université de Nantes, Ecole Centrale de Nantes, 1999.
- [18] A.H. Clément. Hydrodynamique instationnaire : identification de la fonction de green. Technical Report 9501, Ecole Centrale de Nantes, Laboratoire de Mécanique des fluides, Division hydrodynamique navale, Mai 1995. Rapport d'étude établi pour la société SI-RENHA en exécution du contrat d'application n°92/04/CA.
- [19] A.H. Clément. Identification de la fonction de green de l'hydrodynamique transitoire par des modeles continus. *Proc. 5emes Journees de l'Hydrodynamique*, pages 319–332, 1995.
- [20] A.H. Clément. Hydrodynamique instationnaire linéarisée : Mise en oeuvre d'une méthode de singularités utilisant un modèle différentiel de la fonction de green. Technical Report LHN-9703, Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Ecole Centrale de Nantes, CNRS UMR 6598, 1997.
- [21] A.H. Clément. An ordinary differential equation for the green function of time-domain free-surface hydrodynamics. *Journal of Engineering Mathematics*, 33(2) :201–217, 1998.
- [22] A.H. Clément and A. Babarit. Equations du double pendule IRCCYN, 2003. Document interne.
- [23] Jean-Christophe Culioli. *Introduction À L'optimisation*. ellipses, 1994.
- [24] W.E. Cummins. The impulse response function and ship motions. *Schiffstechnik*, pages 491–502, 1962.
- [25] A.F. de O. Falcão. The shoreline OWC wave power plant at the azores. *Proceedings of the 4th European Wave Energy Conference*, pages 42–48, 2000.
- [26] Baron Riche de Prony. Essai expérimental et analytique sur les lois de la dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alcool à différentes températures. *Ecole polytechnique 1, cahier 2*, pages 24–76, 1795.
- [27] G. Delhommeau. Seakeeping codes AQUADYN and AQUAPLUS. In *19th WEGEMT SCHOOL Numerical Simulation of Hydrodynamics : Ships and Offshore Structures*, 1993.
- [28] G. Duclos, A.H. Clément, and G. Chatry. Absorption of outgoing waves in a numerical wave tank using a self-adaptive boundary condition. *Int. Journal of Offshore and Polar Engineering*, 11(3) :168–175, 2001.
- [29] Régis Duvigneau. *Contribution À L'optimisation de Formes Pour Des Écoulements À Forts Nombres de Reynolds Autour de Géométries Complexes*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes et Université de Nantes, 2002.
- [30] H. Eidsmoen. Tight-moored amplitude-limited heaving buoy wave energy converter with phase control. *Applied Ocean Research*, 20 :157–161, 1998.
- [31] D.V. Evans. *Power from Sea Waves*, chapter Some analytic results for two and three dimensional wave-energy absorbers, pages 213–249. Academic Press, London, 1980.

- 
- [32] J. Falnes. Radiation impedance matrix and optimum power absorption for interacting oscillators in surface waves. *Applied Ocean Research*, 2 :77–80, 1980.
- [33] J. Falnes. *Ocean Waves and Oscillating Systems, Linear interactions including wave-energy extraction*. Cambridge University Press, 1 edition, 2002.
- [34] J. Falnes. Optimum control of oscillation of wave-energy converters. *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, 12(2) :147–155, 2002.
- [35] P. Ferrant. *Radiation D’ondes de Gravité Par Les Mouvements de Grande Amplitude D’un Corps Immergé*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique, 1988.
- [36] P. Ferrant. Problèmes de l’hydrodynamique : Tenue à la mer. Note de Cours de D.E.A. Dynamique des fluides et transferts, option HGO, 2002.
- [37] M.J. French. A generalized view of resonant energy transfer. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 21 :299–300, 1979.
- [38] Ivar Fylling and Jorgen Krokstad. Optimisation of mooring and riser systems. In *FLOAT-TECH Workshop*, 2005.
- [39] M. Greenhow and S.P. White. Optimal heave motion of some axisymmetric wave energy devices in sinusoidal waves. *Applied Ocean Research*, 19 :141–159, 1997.
- [40] W.A. Gruver and E. Sachs. *Algorithmic Methods in Optimal Control*. Pitman, 1980.
- [41] D.A. Guenther, D. Jones, and D.G. Brown. An investigative study of a wave-energy device. *Energy*, 4 :299–306, 1979.
- [42] J. Hals, T. Bjarte-Larsson, and J. Falnes. Optimum reactive control and control by latching of a wave-absorbing semisubmerged heaving sphere. *Proc. of OMAE’02, 21st International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, pages 1–9, June 2002.
- [43] M. D. Haskind. The hydrodynamic theory of ship oscillations in roll and pitching. *Prikl. Mat. Mekh.*, 10 :33–66, 1946.
- [44] J. Holland. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, 1975.
- [45] R.E. Hoskin and N.K. Nichols. Optimal strategies for phase control of wave energy devices. In Michael E. McCormick and Young C. Kim, editors, *Utilization of Ocean Waves : Wave to Energy Conversion*, pages 184–199, 345 East 47th Street New York, New York 10017-2398, 1986. American society of civil engineers.
- [46] Suzan Ilic, Andrew Chadwick, and Jacob Helm-Petersen. An evaluation of directional analyses techniques for multidirectional, partially reflected waves. part 1 : Numerical investigations. *Journal of Hydraulic Research*, 38(4) :243–252, 2000.
- [47] L.C. Iversen. Numerical method for computing the power absorbed by a phase-controlled point absorber. *Applied Ocean Research*, 4(3) :173–180, 1982.
- [48] E. Jacquin, B. Alessandrini, D. Bellevre, and S. Cordier. Nouvelle méthode de design des carènes de voiliers de compétition. In *9 Journées de L’hydrodynamique*, pages 193–206, mars 2003.
- [49] A. Jameson. Aerodynamic design via control theory. *Journal of Scientific Computing*, 3 :233–260, 1988.

- [50] B. King. *Time-Domain Analysis of Wave Exciting Forces on Ships and Bodies*. PhD thesis, The University of Michigan, 1987.
- [51] U.A. Korde. Dynamics of a floating buoy under latching control. *Proc. of OMAE'02, 21st International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 2002.
- [52] U.A. Korde. Latching control of deep water wave energy devices using an active reference. *Ocean engineering*, 29(11) :1343–1355, 2002.
- [53] M.S. Longuet-Higgins, D.E Cartwright, and N.D. Smith. Observations of the directionnal spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy. *Ocean Wave Spectrum*, pages 111–136, 1961.
- [54] Christophe Maisondieu. *L'absorption Dynamique Des Ondes de Gravité En Régime Instationnaire*. PhD thesis, Université de Nantes, Ecole Centrale de Nantes., 1993.
- [55] S. R. Massel. *Ocean Surface Waves : Their Physics and Prediction*. Advanced Series on Ocean Engineering. World Scientific, 1996.
- [56] O. Masson. Développements du programme ACHIL3D. Technical report, Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Ecole Centrale de Nantes, CNRS UMR6598, 1998.
- [57] B. Mohammadi. A new optima shape design procedure for inviscid and viscous turbulent flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 25 :183–203, 1997.
- [58] B. Molin. *Hydrodynamique Des Structures Offshore*. Guides Pratiques sur Les Ouvrages En Mer. TECHNIP, 2002.
- [59] S. Naito and S. Nakamura. Wave energy absorption in irregular waves by feedforward control system. In Springer-Verlag, editor, *Hydrodynamics of Ocean Wave-Energy Utilization (D.V. Evans A.F. De O. Falcão Editors)*, pages 269–280, 1986.
- [60] N.N. Panicker. Power resource potential of ocean surface waves. *Proceeding of Wave Salinity Gradient Workshop*, pages J1–J48, 1976.
- [61] D. Pizer, Chris Retzler, Ross Henderson, Jacob Ahlqvist, Fiona Cowieson, and Martin Shaw. Pelamis WEC - advances in the numerical and experimental modelling programme. In *Fifth European Wave Energy Conference*. University College Cork, 17-20th september 2003.
- [62] G.P.M. Poppe and C.M.J. Wijers. More efficient computation of the complex error-function. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 16(1) :47, 1990.
- [63] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brain P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran 77*. Cambridge University Press, 1992.
- [64] K.J. Rawson and F.C. Tupper. *Basic ship theory*, volume 1. Longman, 3 edition, 1983.
- [65] John Ringwood and Shane Butler. Optimisation of a wave energy converter. *Proc. of the IFAC conference on Control Applications in Marine Systems*, pages 155–160, 2004.
- [66] H. Rosenbrock. An automatic method for finding the greatest or least value of a function. *Computer Journal* 3, pages 175–184, 1960.
- [67] K. Schittkowski. NLPQLP20 : A fortran implementation of a sequential quadratic programming algorithm with distributed and non-mononte line search - user's guide. Technical report, Department od Computer Science, University of Bayreuth, 2004.

- [68] Wavenet. Final report of the European Thematic Network on Wave Energy available on [www.wave-energy.net](http://www.wave-energy.net), 2003.
- [69] John V. Wehausen. *Surface Waves*. Springer-Verlag, 1960.
- [70] [Www.Esteco.It](http://Www.Esteco.It).



# **Annexes.**



## Annexe A

# SEAREV à 7 ou 8 degrés de liberté : matrice d'inertie et forces de Coriolis.

### A.1 Vecteurs rotations.

Le vecteur rotation du solide flotteur vaut :

$$\vec{\Omega}_b = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{y}_\psi + \dot{\varphi}\vec{x}_\theta \quad (\text{A.1})$$

Soit exprimé dans le repère  $R_0$  :

$$\vec{\Omega}_{b,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_0 + \mathbf{T}_{0\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_\psi + \mathbf{T}_{0\theta} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\theta \quad (\text{A.2})$$

Sa dérivée s'obtient par :

$$\frac{d}{dt}\vec{\Omega}_{b,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ddot{\psi} + \mathbf{T}_{0\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ddot{\theta} + \mathbf{T}_{0\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ddot{\varphi} + \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0\psi}) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0\theta}) \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Le vecteur rotation du solide pendule vaut :

$$\vec{\Omega}_p = \vec{\Omega}_b + \dot{\alpha}\vec{y}_\beta + \dot{\beta}\vec{x}_b \quad (\text{A.4})$$

Soit, exprimé dans le repère le repère  $R_0$  :

$$\vec{\Omega}_{p,0} = \vec{\Omega}_{b,0} + \mathbf{T}_{0\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Sa dérivée s'obtient par :

$$\frac{d}{dt} \vec{\Omega}_{p,0} = \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_{b,0} + \mathbf{T}_{0\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}_{\beta} + \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} \ddot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_b + \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{0\beta}) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}_{\beta} + \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{0b}) \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_b \quad (\text{A.6})$$

Soit, d'après l'équation (A.3) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_{p,0} = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ddot{\psi} + \mathbf{T}_{0\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ddot{\theta} + \mathbf{T}_{0\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ddot{\varphi} + \mathbf{T}_{0\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ddot{\alpha} + \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ddot{\beta} \\ & + \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{0\psi}) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{0\theta}) \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{0\beta}) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

## A.2 Vitesses et accélérations des centres de gravité.

Soit  $u, v, w$  les composantes de la vitesse absolue du centre de gravité  $G$  du flotteur dans le repère  $R_0$ . D'après les théorèmes de mécanique du solide, elles sont fournies à partir des coordonnées de position de  $G$  dans  $R_0$  par :

$$\vec{V}_{b,0}(G) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \\ \dot{z}_G \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

puisque le repère  $R_0$  est galiléen.

De même, l'accélération de  $G$  est donnée en fonction de  $u, v, w$  par :

$$\vec{\gamma}_{b,0}(G) = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

La vitesse absolue du point  $O$  de coordonnées  $(0 \ 0 \ d)$  dans le repère du flotteur et exprimée dans le repère  $R_0$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{b,0}(O) &= \vec{V}_{b,0}(G) + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{\Omega}_{b,0} \\ \vec{V}_{b,0}(O) &= \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} \wedge \vec{\Omega}_{b,0} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

La vitesse absolue du centre de gravité  $P$  du pendule dans le repère  $R_0$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_{p,0}(P) &= \vec{V}_{p,0}(O) + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{\Omega}_{p,0} \\
 \vec{V}_{p,0}(P) &= \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} \wedge \vec{\Omega}_{b,0} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \vec{\Omega}_{p,0}
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Donc son accélération vaut :

$$\begin{aligned}
 \vec{\gamma}_{p,0}(P) &= \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} \wedge \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_{b,0} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_{p,0} \\
 &\quad + \frac{d}{dt} \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} \wedge \vec{\Omega}_{b,0} + \frac{d}{dt} \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \vec{\Omega}_{p,0}
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Soit encore, d'après les équations (A.3) et (A.7) :

$$\begin{aligned}
 \vec{\gamma}_{p,0}(P) &= \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} + \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ddot{\psi} \\
 &\quad + \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ddot{\theta} \\
 &\quad + \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ddot{\varphi} \\
 &\quad + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ddot{\alpha} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ddot{\beta} + \mathbf{f}_1(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_1(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) &= \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \left( \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{0\psi}) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{0\theta}) \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &\quad + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \left( \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{0\beta}) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &\quad + \frac{d}{dt} \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} \wedge \vec{\Omega}_{b,0} + \frac{d}{dt} \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \vec{\Omega}_{p,0}
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

### A.3 Moments cinétiques et moments dynamiques.

Soit  $\mathbf{I}_b$  la matrice d'inertie du flotteur dans le repère lié au flotteur  $R_b$ . Le moment dynamique du flotteur vaut en  $G$  :

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_{b,0}(G) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0b}\mathbf{I}_b\mathbf{T}_{b0}\vec{\Omega}_{b,0}) \\ \vec{\delta}_{b,0}(G) &= \mathbf{T}_{0b}\mathbf{I}_b\mathbf{T}_{b0}\frac{d}{dt}\vec{\Omega}_{b,0} + \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0b})\mathbf{I}_b\mathbf{T}_{b0}\vec{\Omega}_{b,0} + \mathbf{T}_{0b}\mathbf{I}_b\frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{b0})\vec{\Omega}_{b,0}\end{aligned}\quad (\text{A.15})$$

En faisant apparaître explicitement les dérivées secondes des angles, à partir de l'équation (A.3) :

$$\vec{\delta}_{b,0}(G) = \mathbf{T}_{0b}\mathbf{I}_b\mathbf{T}_{b0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ddot{\psi} + \mathbf{T}_{0b}\mathbf{I}_b\mathbf{T}_{b\psi}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ddot{\theta} + \mathbf{T}_{0b}\mathbf{I}_b\mathbf{T}_{b\theta}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ddot{\varphi} + \mathbf{f}_2(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \quad (\text{A.16})$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_2(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) &= \mathbf{T}_{0b}\mathbf{I}_b\mathbf{T}_{b0}\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0\psi})\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0\theta})\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &\quad + \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0b})\mathbf{I}_b\mathbf{T}_{b0}\vec{\Omega}_{b,0} + \mathbf{T}_{0b}\mathbf{I}_b\frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{b0})\vec{\Omega}_{b,0}\end{aligned}\quad (\text{A.17})$$

Soit  $\mathbf{I}_p$  la matrice d'inertie du pendule dans le repère lié au pendule  $R_b$ . Le moment dynamique du pendule en  $P$  vaut :

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_{p,0}(P) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0p}\mathbf{I}_p\mathbf{T}_{p0}\vec{\Omega}_{p,0}) \\ \vec{\delta}_{p,0}(P) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0p})\mathbf{I}_p\mathbf{T}_{p0}\vec{\Omega}_{p,0} + \mathbf{T}_{0p}\mathbf{I}_p\frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{p0})\vec{\Omega}_{p,0} + \mathbf{T}_{0p}\mathbf{I}_p\mathbf{T}_{p0}\frac{d}{dt}\vec{\Omega}_{p,0}\end{aligned}\quad (\text{A.18})$$

Soit, transporté en  $G$  :

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_{p,0}(G) &= \vec{\delta}_{p,0}(P) + \overrightarrow{GP} \wedge m_p\vec{\gamma}_{p,0}(P) \\ \vec{\delta}_{p,0}(G) &= \vec{\delta}_{p,0}(P) + \left(\mathbf{T}_{0b}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix}\right) \wedge m_p\vec{\gamma}_{p,0}(P) \\ \vec{\delta}_{p,0}(G) &= \mathbf{T}_{0p}\mathbf{I}_p\mathbf{T}_{p0}\frac{d}{dt}\vec{\Omega}_{p,0} + \left(\mathbf{T}_{0b}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}_b + \mathbf{T}_{0p}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix}_p\right) \wedge m_p\vec{\gamma}_{p,0}(P) \\ &\quad + \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{0p})\mathbf{I}_p\mathbf{T}_{p0}\vec{\Omega}_{p,0} + \mathbf{T}_{0p}\mathbf{I}_p\frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{p0})\vec{\Omega}_{p,0}\end{aligned}\quad (\text{A.19})$$

où  $m_p$  est la masse du pendule.

En faisant apparaître explicitement les accélérations :

$$\begin{aligned}
 \vec{\delta}_{p,0}(G) = & m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} \\
 & + \left( \begin{array}{l} \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \\ \wedge \left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array} \right) \ddot{\psi} \\
 & + \left( \begin{array}{l} \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \\ \wedge \left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{array} \right) \ddot{\theta} \\
 & + \left( \begin{array}{l} \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \\ \wedge \left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{array} \right) \ddot{\varphi} \\
 & + \left( \begin{array}{l} \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \\ \wedge \left( \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{array} \right) \ddot{\alpha} \\
 & + \left( \begin{array}{l} \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \\ \wedge \left( \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{array} \right) \ddot{\beta} \\
 & + \mathbf{f}_3(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_3(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) &= m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{f}_1(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \\
 &+ \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p0} \left( \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{0\psi}) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{0\theta}) \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{0\beta}) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &\quad + \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{0p}) \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p0} \vec{\Omega}_{p,0} + \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{p0}) \vec{\Omega}_{p,0}
 \end{aligned}$$

Et en  $O$  :

$$\vec{\delta}_{p,0}(O) = \vec{\delta}_{p,0}(P) + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix}_p \wedge m_p \vec{\gamma}_{p,0}(P) \quad (\text{A.21})$$

En faisant apparaître les dérivées secondes des vecteurs positions, d'après les équations (A.22) et (A.13) :

$$\begin{aligned}
 \vec{\delta}_{p,0}(O) = & m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} \\
 & + \left( \begin{array}{l} \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \\ \left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array} \right) \ddot{\psi} \\
 & + \left( \begin{array}{l} \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \\ \left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{array} \right) \ddot{\theta} \\
 & + \left( \begin{array}{l} \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \\ \left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{array} \right) \ddot{\varphi} \\
 & + \left( \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \left( \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \ddot{\alpha} \\
 & + \left( \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \left( \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \ddot{\beta} \\
 & + \mathbf{f}_4(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

avec

$$\mathbf{f}_4(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = \mathbf{f}_3(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) - m_p \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \wedge \mathbf{f}_1(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \tag{A.23}$$

## A.4 Equations générales des mouvements.

Soit  $\mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)^t$  le vecteur des efforts extérieurs s'exerçant sur le système {flotteur+pendule} et exprimé dans la base  $R_0$ . Soit  $\mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z)^t$  le vecteur des couples extérieurs s'exerçant sur le système {flotteur+pendule} et exprimé dans la base  $R_0$  au point  $G$ . Soit  $\mathbf{C}_p = (C_{xp}, C_{yp}, C_{zp})^t$  le vecteur des couples extérieurs s'exerçant sur le système pendule et exprimé dans la base  $R_0$  au point  $O$ .

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on obtient l'équation régissant les

mouvements du système :

$$\begin{pmatrix} m_b \vec{\gamma}_{b,0}(G) + m_p \vec{\gamma}_{p,0}(P) \\ \vec{\delta}_{b,0}(G) + \vec{\delta}_{p,0}(G) \\ \vec{\delta}_{p,0}(O) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{C}_p \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

Cette équation est une équation différentielle du second ordre, à coefficients non constants, qui cache 9 équations différentielles scalaires pour 8 inconnues. En fait, les deux dernières ne sont pas indépendantes, et le rang du système est 8.

D'après les formulations (A.9), (A.13), (A.16), (A.20) et (A.22), l'équation du mouvement peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F} - \mathbf{H} \quad (\text{A.25})$$

avec :

- $\mathbf{X} = (x_G \ y_G \ z_G \ \varphi \ \theta \ \psi \ \beta \ \alpha)$  vecteur des paramètres de position.
- $\mathbf{M}$  matrice 9x8. C'est la matrice masse du système. Elle est donnée d'après les équations (A.9), (A.13), (A.16), (A.20) et (A.22) par :

$$\mathbf{M}_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3} = \begin{pmatrix} m_b + m_p & 0 & 0 \\ 0 & m_b + m_p & 0 \\ 0 & 0 & m_b + m_p \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{M}_{1 \leq i \leq 3, 4} = m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{M}_{1 \leq i \leq 3, 5} = m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{M}_{1 \leq i \leq 3, 6} = m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{M}_{1 \leq i \leq 3, 7} = m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

$$\mathbf{M}_{1 \leq i \leq 3, 8} = m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

$$\mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6, 1} = m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.32})$$

$$\mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6, 2} = m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.33})$$

$$\mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6,3} = m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.34})$$

$$\mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6,4} = (\mathbf{T}_{0b} \mathbf{II}_b \mathbf{T}_{b\theta} + \mathbf{T}_{0p} \mathbf{II}_p \mathbf{T}_{p\theta}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \quad (\text{A.35})$$

$$m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \quad (\text{A.36})$$

$$\left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{A.37})$$

$$(\text{A.38})$$

$$\mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6,5} = (\mathbf{T}_{0b} \mathbf{II}_b \mathbf{T}_{b\psi} + \mathbf{T}_{0p} \mathbf{II}_p \mathbf{T}_{p\psi}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \quad (\text{A.39})$$

$$m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \quad (\text{A.40})$$

$$\left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{A.39})$$

$$(\text{A.40})$$

$$\mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6,6} = (\mathbf{T}_{0b} \mathbf{II}_b \mathbf{T}_{b0} + \mathbf{T}_{0p} \mathbf{II}_p \mathbf{T}_{p0}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \quad (\text{A.41})$$

$$m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \quad (\text{A.41})$$

$$\left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{A.41})$$

$$\mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6,7} = \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.42})$$

$$+ m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \left( \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{A.43})$$

$$\mathbf{M}_{4 \leq i \leq 6,8} = \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{pb} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

$$+ m_p \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \right) \wedge \left( \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{A.45})$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,1} = m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.46})$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,2} = m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.47})$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,3} = m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.48})$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,4} = \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \quad (\text{A.49})$$

$$\left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{A.50})$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,5} = \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I}_p \mathbf{T}_{p\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \quad (\text{A.51})$$

$$\left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \mathbf{T}_{0\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{A.52})$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,6} = \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I} \mathbf{T}_{p0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \quad (\text{A.53})$$

$$\left( \left( \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{A.54})$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,7} = \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I} \mathbf{T}_{p\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \left( \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{A.55})$$

$$\mathbf{M}_{7 \leq i \leq 9,8} = \mathbf{T}_{0p} \mathbf{I} \mathbf{T}_{pb} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_p \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} \wedge \left( \mathbf{T}_{0p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \wedge \mathbf{T}_{0b} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{A.56})$$

$$- \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{C}_p \end{pmatrix}$$

–  $\mathbf{H}$  est la matrice des efforts de second ordre. Elle s'écrit, d'après les équations (A.9), (A.13), (A.16), (A.20) et (A.22) :

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = \begin{pmatrix} m_p \mathbf{f}_1(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{f}_3(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \\ \mathbf{f}_4(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.57})$$

## A.5 Equations des mouvements linéarisées.

On suppose que les mouvements restent suffisamment petits pour pouvoir linéariser les équations. De ce fait, les matrices de passage se réduisent toutes à l'identité. La dynamique se simplifie alors.

Concernant les vecteurs rotations et leurs dérivées, on a désormais :

$$\vec{\Omega}_{b,0} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (\text{A.58})$$

$$\vec{\Omega}_{p,0} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} + \beta \\ \dot{\theta} + \alpha \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (\text{A.59})$$

Sa dérivée s'obtient par :

$$\frac{d}{dt} \vec{\Omega}_{b,0} = \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} \quad (\text{A.60})$$

$$\frac{d}{dt} \vec{\Omega}_{p,0} = \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} + \ddot{\beta} \\ \ddot{\theta} + \ddot{\alpha} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} \quad (\text{A.61})$$

Pour les accélérations :

$$\vec{\gamma}_{b,0}(G) = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} \quad (\text{A.62})$$

$$\vec{\gamma}_{p,0}(P) = \begin{pmatrix} \dot{u} + (d-l)\ddot{\theta} - l\ddot{\alpha} \\ \dot{v} + (l-d)\ddot{\varphi} + l\ddot{\beta} \\ \dot{w} \end{pmatrix} \quad (\text{A.63})$$

Et pour les moments dynamiques :

$$\vec{\delta}_{b,0}(G) = \mathbf{II}_b \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} \quad (\text{A.64})$$

$$\vec{\delta}_{p,0}(G) = \mathbf{II}_p \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} + \ddot{\beta} \\ \ddot{\theta} + \ddot{\alpha} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} + m_p \begin{pmatrix} (l-d)\dot{v} + (l-d)^2\ddot{\varphi} + (l-d)l\ddot{\beta} \\ (d-l)\dot{u} + (d-l)^2\ddot{\theta} - l(d-l)\ddot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.65})$$

et :

$$\vec{\delta}_{p,0}(G) = \mathbf{II}_p \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} + \ddot{\beta} \\ \ddot{\theta} + \ddot{\alpha} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} + m_p \begin{pmatrix} l\dot{v} + l(l-d)\ddot{\varphi} + l^2\ddot{\beta} \\ -l\dot{u} - (d-l)l\ddot{\theta} - l^2\ddot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.66})$$

L'équation du mouvement se réduit à présent à :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F} \quad (\text{A.67})$$

avec :

–  $\mathbf{X} = (x_G \ y_G \ z_G \ \varphi \ \theta \ \psi \ \beta \ \alpha)$  vecteur des paramètres de position.

–  $\mathbf{M}$  matrice 9x8 donnée par :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_b + m_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_b + m_p & 0 & 0 & m_p(l-d) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_b + m_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_p(l-d) & 0 & 0 & I_{b,x} + I_{p,x} + m_p(l-d)^2 & 0 & 0 & 0 \\ m_p(d-l) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_p l & 0 & 0 & I_{p,x} + m_p(l-d)l & 0 & 0 & 0 \\ -m_p l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_p(d-l) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_p l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_p l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p,x} + m_p(l-d)l & 0 & 0 & 0 \\ I_{b,y} + I_{p,y} + m_p(d-l)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p,y} + m_p(l-d)l & 0 \\ 0 & 0 & I_{b,z} + I_{p,z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p,x} + m_p l^2 & 0 & 0 & 0 \\ I_{p,y} + m_p(l-d)l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p,y} + m_p l^2 \\ 0 & 0 & I_{p,z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

–  $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{C}_p \end{pmatrix}$  vecteur des efforts linéarisés.

# Annexe B

## SEAREV à 4 degrés de liberté : matrice d'inertie et forces de Coriolis.

### B.1 Cinématique et cinétique.

Le vecteur instantané de rotation du flotteur vaut :

$$\vec{\Omega}_b = \dot{\theta} \vec{y}_0 \quad (\text{B.1})$$

Le vecteur rotation instantané associée au pendule vaut :

$$\vec{\Omega}_p = (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \vec{y}_0 \quad (\text{B.2})$$

Soit  $(u, w)$  les composantes de la vitesse du centre de gravité  $G$  du flotteur exprimées dans le repère  $R_0$  :

$$\vec{V}_b(G) = u \vec{x}_0 + w \vec{z}_0 \quad (\text{B.3})$$

$(u, w)$  sont reliés à  $x_G$  et  $z_G$  par :

$$\begin{aligned} u &= \dot{x}_G \\ w &= \dot{z}_G \end{aligned}$$

L'accélération du centre de gravité du flotteur est donnée par :

$$\vec{\gamma}_b(G) = \dot{u} \vec{x}_0 + \dot{w} \vec{z}_0 \quad (\text{B.4})$$

Le moment cinétique du flotteur s'écrit en son centre de gravité :

$$\vec{\sigma}_b(G) = I_b \dot{\theta} \vec{y}_0 \quad (\text{B.5})$$

où  $I_b$  représente l'inertie du flotteur selon l'axe  $\vec{y}_0$ .

Le moment dynamique du flotteur s'écrit alors :

$$\vec{\delta}_b(G) = I_b \ddot{\theta} \vec{y}_0 \quad (\text{B.6})$$

On introduit  $O$  le point d'accroche du pendule, situé à une distance  $d$  du centre de gravité du flotteur sur l'axe  $\vec{z}_b$ .

La vitesse de  $O$  exprimée dans le repère  $R_f$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{V}_b(O) &= \vec{V}_b(G) + \vec{OG} \wedge \vec{\Omega}_b \\ \vec{V}_b(O) &= u\vec{x}_0 + w\vec{z}_0 - d\vec{z}_b \wedge \dot{\theta}\vec{y}_0 \\ \vec{V}_b(O) &= \left(u + d\dot{\theta} \cos \theta\right) \vec{x}_0 + \left(w - d\dot{\theta} \sin \theta\right) \vec{z}_0\end{aligned}$$

La vitesse absolue du centre de gravité du pendule  $P$  est donnée par :

$$\begin{aligned}\vec{V}_p(P) &= \vec{V}_p(O) + \vec{PO} \wedge \vec{\Omega}_p \\ \vec{V}_p(P) &= \left(u + d\dot{\theta} \cos \theta\right) \vec{x}_0 + \left(w - d\dot{\theta} \sin \theta\right) \vec{z}_0 + l\vec{z}_p \wedge \left(\dot{\theta} + \dot{\alpha}\right) \vec{y}_0 \\ \vec{V}_p(P) &= \left(u + d\dot{\theta} \cos \theta - l\left(\dot{\theta} + \dot{\alpha}\right) \cos(\theta + \alpha)\right) \vec{x}_0 \\ &\quad + \left(w - d\dot{\theta} \sin \theta + l\left(\dot{\theta} + \dot{\alpha}\right) \sin(\theta + \alpha)\right) \vec{z}_0\end{aligned}\tag{B.7}$$

L'accélération absolue du pendule est alors donnée par :

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_p(P) &= \left(\dot{u} + d \cos \theta \ddot{\theta} - d\dot{\theta}^2 \sin \theta - l\left(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}\right) \cos(\theta + \alpha) + l\left(\dot{\theta} + \dot{\alpha}\right)^2 \sin(\theta + \alpha)\right) \vec{x}_0 + \\ &\quad \left(\dot{w} - d \sin \theta \ddot{\theta} - d\dot{\theta}^2 \cos \theta + l\left(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}\right) \sin(\theta + \alpha) + l\left(\dot{\theta} + \dot{\alpha}\right)^2 \cos(\theta + \alpha)\right) \vec{z}_0\end{aligned}$$

Il reste, après simplifications :

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_p(P) &= \left(\begin{array}{l} \dot{u} + (d \cos \theta - l \cos(\theta + \alpha)) \ddot{\theta} - l \ddot{\alpha} \cos(\theta + \alpha) \\ + l(\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 \sin(\theta + \alpha) - d\dot{\theta}^2 \sin \theta \end{array}\right) \vec{x}_0 + \\ &\quad \left(\begin{array}{l} \dot{w} + (-d \sin \theta + l \sin(\theta + \alpha)) \ddot{\theta} + l \ddot{\alpha} \sin(\theta + \alpha) \\ + l(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \cos(\theta + \alpha) - d\dot{\theta}^2 \cos \theta \end{array}\right) \vec{z}_0\end{aligned}\tag{B.8}$$

Soit  $I_y$  le moment d'inertie du pendule selon l'axe  $\vec{y}_0$ . Son moment cinétique, exprimé en son centre d'inertie, vaut :

$$\vec{\sigma}_p(P) = I_y(\dot{\alpha} + \dot{\theta})\vec{y}_0$$

Et son moment dynamique vaut alors en  $P$  :

$$\vec{\delta}_p(P) = I_y(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta})\vec{y}_0$$

Soit, transporté en  $G$  :

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_p(G) &= \vec{\delta}_p(P) + \overrightarrow{GP} \wedge m_p \vec{\gamma}_p(P) \\ \vec{\delta}_p(G) &= I_y(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta})\vec{y}_0 + ((d \sin \theta - l \sin(\theta + \alpha))\vec{x}_0 + (d \cos \theta - l \cos(\theta + \alpha))\vec{z}_0) \wedge \\ &\quad m_p \left( \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} \dot{u} + (d \cos \theta - l \cos(\theta + \alpha))\ddot{\theta} - l\ddot{\alpha} \cos(\theta + \alpha) \\ + l(\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 \sin(\theta + \alpha) - d\dot{\theta}^2 \sin \theta \end{array} \right) \vec{x}_0 + \\ \left( \begin{array}{c} \dot{w} + (-d \sin \theta + l \sin(\theta + \alpha))\ddot{\theta} + l\ddot{\alpha} \sin(\theta + \alpha) \\ + l(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \cos(\theta + \alpha) - d\dot{\theta}^2 \cos \theta \end{array} \right) \vec{z}_0 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\vec{\delta}_p(G) = \left( \begin{array}{c} (I_b + I_y + m_p(d^2 + l^2 - 2dl \cos \alpha))\ddot{\theta} \\ + (I_y + m_p l^2 - m_p dl \cos \alpha)\ddot{\alpha} + \\ m_p(d \cos \theta - l \cos(\theta + \alpha))\dot{u} - m_p(d \sin \theta - l \sin(\theta + \alpha))\dot{w} \\ + m_p dl(\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 \sin \alpha - m_p dl \sin \alpha \dot{\theta}^2 \end{array} \right) \vec{y}_0 \quad (\text{B.10})$$

Et encore en  $O$  :

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_p(O) &= \vec{\delta}_p(P) + \overrightarrow{OP} \wedge m_p \vec{\gamma}_p(P) \\ \vec{\delta}_p(O) &= I_y(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta})\vec{y}_0 - (l \sin(\theta + \alpha)\vec{x}_0 - l \cos(\theta + \alpha)\vec{z}_0) \wedge \\ &\quad m_p \left( \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} \dot{u} + (d \cos \theta - l \cos(\theta + \alpha))\ddot{\theta} - l\ddot{\alpha} \cos(\theta + \alpha) \\ + l(\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 \sin(\theta + \alpha) - d\dot{\theta}^2 \sin \theta \end{array} \right) \vec{x}_0 + \\ \left( \begin{array}{c} \dot{w} + (-d \sin \theta + l \sin(\theta + \alpha))\ddot{\theta} + l\ddot{\alpha} \sin(\theta + \alpha) \\ + l(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \cos(\theta + \alpha) - d\dot{\theta}^2 \cos \theta \end{array} \right) \vec{z}_0 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\vec{\delta}_p(O) = \left( \begin{array}{c} (I_y + m_p l^2 - m_p l d \cos \alpha)\ddot{\theta} + (I_y + m_p l^2)\ddot{\alpha} - m_p l \cos(\theta + \alpha)\dot{u} \\ + m_p l \sin(\theta + \alpha)\dot{w} - m_p dl \dot{\theta}^2 \sin \alpha \end{array} \right) \vec{y}_0 \quad (\text{B.12})$$

## B.2 Equation du mouvement.

Notons  $(F_x, F_z)^t$  le vecteur des efforts extérieurs s'exerçant sur le système {flotteur+pendule}, moins les efforts de gravité. Soit  $C_y$  le couple des efforts extérieurs exercés sur ce système réduit au point  $G$ , moins le couple du au champ de pesanteur. On suppose que l'effort exercé par le convertisseur d'énergie sur le pendule peut être modélisé par un couple  $C_{PTO}$  au point  $O$  d'accroche du pendule. Par application du principe fondamental de la dynamique, on obtient

les 4 équations différentielles décrivant le mouvement :

$$\begin{aligned}
 F_x &= m_b \dot{u} + m_p \begin{pmatrix} \dot{u} + (d \cos \theta - l \cos(\theta + \alpha)) \ddot{\theta} - l \ddot{\alpha} \cos(\theta + \alpha) \\ + l (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 \sin(\theta + \alpha) - d \dot{\theta}^2 \sin \theta \end{pmatrix} \\
 F_z - (m_b + m_p) g &= m_b \dot{w} + m_p \begin{pmatrix} \dot{w} + (-d \sin \theta + l \sin(\theta + \alpha)) \ddot{\theta} + l \ddot{\alpha} \sin(\theta + \alpha) \\ + l (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \cos(\theta + \alpha) - d \dot{\theta}^2 \cos \theta \end{pmatrix} \\
 C_y + (\overrightarrow{OG} \wedge m_p \overrightarrow{g}) \cdot \overrightarrow{y_0} &= (I_b + I_y + m_p (d^2 + l^2 - 2dl \cos \alpha)) \ddot{\theta} + \\
 &\quad (I_y + m_p l^2 - m_p dl \cos \alpha) \ddot{\alpha} + \\
 &\quad m_p (d \cos \theta - l \cos(\theta + \alpha)) \dot{u} - m_p (d \sin \theta - l \sin(\theta + \alpha)) \dot{w} \\
 &\quad + m_p dl (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 \sin \alpha - m_p dl \sin \alpha \dot{\theta}^2 \\
 C_{PTO} + (\overrightarrow{OP} \wedge m_p \overrightarrow{g}) \cdot \overrightarrow{y_0} &= (I_y + m_p l^2 - m_p dl \cos \alpha) \ddot{\theta} + (I_y + m_p l^2) \ddot{\alpha} - m_p l \cos(\theta + \alpha) \dot{u} \\
 &\quad + m_p l \sin(\theta + \alpha) \dot{w} - m_p dl \dot{\theta}^2 \sin \alpha
 \end{aligned}$$

On explicite les termes dus aux efforts de pesanteur :

$$\overrightarrow{GP} \wedge m_p \overrightarrow{g} = (d \overrightarrow{z}_b - l \overrightarrow{z}_p) \wedge -m_p g \overrightarrow{z}_0 \quad (\text{B.13})$$

$$(d \overrightarrow{z}_b - l \cos \alpha \overrightarrow{z}_b - l \sin \alpha \overrightarrow{x}_b) \wedge (m_p g \sin \theta \overrightarrow{x}_b - m_p g \cos \theta \overrightarrow{z}_b) \quad (\text{B.14})$$

$$\overrightarrow{GP} \wedge m_p \overrightarrow{g} = m_p g (d \sin \theta - l \sin(\theta + \alpha)) \overrightarrow{y_0} \quad (\text{B.15})$$

$$\overrightarrow{OP} \wedge m_p \overrightarrow{g} = -l \overrightarrow{z}_p \wedge -m_p g \overrightarrow{z}_0 = -m_p gl \sin(\theta + \alpha) \overrightarrow{y_0} \quad (\text{B.16})$$

Soit  $\mathbf{X} = (x_G, z_G, \theta, \alpha)^t$ . On peut alors écrire l'équation des mouvements sous la forme :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{F}_p = \mathbf{F} \quad (\text{B.17})$$

avec :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_b + m_p & 0 & & & & \\ 0 & m_b + m_p & & & & \\ m_p (d \cos \theta - l \cos(\theta + \alpha)) & m_p (d \sin \theta - l \sin(\theta + \alpha)) & & & & \\ -m_p l \cos(\theta + \alpha) & m_p l \sin(\theta + \alpha) & & & & \\ m_p (d \cos \theta - l \cos(\theta + \alpha)) & -m_p l \cos(\theta + \alpha) & & & & \\ -m_p (d \sin \theta - l \sin(\theta + \alpha)) & m_p l \sin(\theta + \alpha) & & & & \\ I_b + I_y + m_p (d^2 + l^2) - 2m_p dl \cos \alpha & I_y + m_p l^2 - m_p dl \cos \alpha & & & & \\ I_y + m_p l^2 - m_p dl \cos \alpha & I_y + m_p l^2 & & & & \end{pmatrix} \quad (\text{B.18})$$

$$\mathbf{F}_p = \begin{pmatrix} m_p \left( l (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 \sin(\theta + \alpha) - d\dot{\theta}^2 \sin \theta \right) \\ m_p \left( l (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \cos(\theta + \alpha) - d\dot{\theta}^2 \cos \theta \right) \\ m_p dl (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 \sin \alpha - m_p dl \sin \alpha \dot{\theta}^2 - m_p g (d \sin \theta - l \sin(\theta + \alpha)) \\ -m_p dl \dot{\theta}^2 \sin \alpha + m_p gl \sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_z - (m_b + m_p) g \\ C_y \\ C_{PTO} \end{pmatrix} \quad (\text{B.20})$$

### B.3 Equation du mouvement linéarisé.

Si l'on suppose maintenant que les mouvements du pendule restent eux aussi petits, l'équation du mouvement devient :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (\text{B.21})$$

avec :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_b + m_p & 0 & m_p(d-l) & -m_pl \\ 0 & m_b + m_p & 0 & 0 \\ m_p(d-l) & 0 & I_b + I_y + m_p(d-l)^2 & I_y + m_pl^2 - m_pdl \\ -m_pl & 0 & I_y + m_pl^2 - m_pdl & I_y + m_pl^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.22})$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_pg(d-l) & m_pgl \\ 0 & 0 & m_pgl & m_pgl \end{pmatrix} \quad (\text{B.23})$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x + (m_b + m_p) g\theta \\ F_z - (m_b + m_p) g \\ C_y \\ C_{PTO} \end{pmatrix} \quad (\text{B.24})$$

# Annexe C

## Identification par la méthode de Prony.

Soit  $f(t)$  une fonction réelle définie et bornée sur un intervalle  $[t_0, +\infty] \in \mathbb{R}$ , tel que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ . On cherche une approximation  $\tilde{f}(t)$  de  $f(t)$  sur un intervalle fini  $[t_0, t_f]$  par une somme d'exponentielles complexes :

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \exp \beta_k t \quad (\text{C.1})$$

On suppose que la fonction est connue en un nombre de points  $n$  disposés régulièrement,  $t_i = t_0 + idt$ , avec  $dt$  le pas de discrétisation en temps. Soit  $c_k = \alpha_k \exp \beta_k t_0$  et  $V_k = \exp \beta_k dt$ . L'équation (C.1) peut s'écrire :

$$\{c_1 V_1^i + \dots + c_m V_m^i\} = f(t_i), i = 1, \dots, n \quad (\text{C.2})$$

Soit le polynôme unitaire  $P_m$  de degré  $m$  défini par :

$$P_m = \prod_{k=1}^m (v - V_k) = \sum_{k=0}^m s_k v^{m-k}, s_0 = 1 \quad (\text{C.3})$$

En multipliant les  $m+1$  premières lignes de l'équation (C.2) par les coefficients  $s_m, s_{m-1}, \dots, s_0$  et en additionnant l'ensemble, on obtient :

$$c_1 P_m(V_1) + \dots + c_m P_m(V_m) = s_m f(t_0) + \dots + s_0 f(t_m) \quad (\text{C.4})$$

Puisque les coefficients  $V_k$  sont les racines de  $P_m$ , et puisque  $s_0 = 1$ , l'équation précédente se simplifie en :

$$s_m f(t_0) + \dots + s_1 f(t_{m-1}) = -f(t_m) \quad (\text{C.5})$$

En répétant ce processus itérativement par translation du point de départ par un jusqu'au



## **Optimisation hydrodynamique et contrôle optimal d'un récupérateur de l'énergie des vagues.**

Le projet SEAREV est un nouveau concept de récupération de l'énergie des vagues basé sur un principe robuste et un contrôle sophistiqué. Le récupérateur est ainsi composé d'un flotteur clos contenant en son sein un cylindre d'inertie à centre de gravité décentré. Le contrôle envisagé est un contrôle « tout ou rien » (latching control) qui consiste à bloquer le mouvement relatif du cylindre interne en des moments bien choisis de son cycle.

Dans le cadre de cette thèse, quatre simulateurs numériques des mouvements du système dans le domaine temporel ont été développés, pour quatre jeux d'hypothèses sur la cinématique du mouvement. La modélisation des efforts d'interaction fluide-structure a elle été abordée dans le cadre d'une théorie potentielle linéarisée classique. Des comparaisons entre les résultats des différents modèles sont présentés et permettent de quantifier des effets tels que les non linéarités dans la mécanique du cylindre et la directionnalité de la houle.

Le contrôle optimal du système et le contrôle sub-optimal par latching sont ensuite considérés, dans le but d'améliorer les performances du système. Deux méthodes sont proposées afin d'évaluer le gain que l'on peut attendre d'un contrôle par latching. La première est une méthode semi-analytique originale qui permet de résoudre le problème de la durée de blocage en houle régulière. La seconde est basée sur le principe de Pontriaguine et les lois de la commande optimale. Moins performante en houle régulière, elle permet cependant de traiter le problème en houle aléatoire.

Les performances du système dépendant évidemment de ses caractéristiques géométriques, une optimisation a été conduite sur la forme du flotteur et les caractéristiques mécaniques du cylindre. Une méthode faisant intervenir deux niveaux d'optimisation, l'un basé sur les algorithmes génétiques et l'autre sur une méthode de gradient est présentée dans le cas d'une optimisation du système non contrôlé. Les résultats sur plusieurs types de géométrie fournissent un dimensionnement du système. Une optimisation du système contrôlé a également été conduite et présentée. Ces résultats fournissent l'ordre de grandeur du gain que peut apporter le contrôle par latching aux systèmes houlomoteurs.

**Mots-clés :** hydrodynamique, énergie des vagues, contrôle optimal, contrôle par latching, commande optimale, optimisation, algorithmes génétiques.

## **Hydrodynamic optimization and optimal control of a wave energy converter.**

The SEAREV project is a new concept of wave energy converter based on a robust principle and a sophisticated control. The wave energy converter is composed of a floating body containing a cylinder of inertia with an off-centered gravity center. The control is known as "latching control" and consists in locking the cylinder to the floating body at some moments of the cycle.

In this study, four time domain simulators of the motions have been derived, for four sets of assumptions. Interaction between the fluid and the floating body has been described by the standard linear potential theory. Comparisons are made between the results of the four different simulators to quantify the effects of the non linearities into the mechanics of the cylinder and of the directionality of the incoming wave.

Then, optimal control of the system and sub-optimal latching control are considered, the aim being to improve the energy capture of the system. Two methods are introduced in order to assess the benefit that can be brought by latching control. First one is a semi analytical method which allows to solve the problem of the calculation of the latching duration in regular wave. The second one is based on the Pontriaguine's principle. It is less efficient than the first one in regular wave, but it allows to make simulations in random seas.

Energy production depends obviously on the mechanical characteristics of the device, so an optimization has been done on the floating body shape and on the mechanical characteristics of the cylinder. A method using two levels is given when optimization is done without control. The upper level uses genetic algorithm, the lower one is based on a gradient algorithm. Results on different shapes give the key dimensions of the device. Another optimization has been done, using the latching control and gives the order of magnitude of the benefit that can be brought by this kind of control to such systems.

**Key words :** Hydrodynamic, wave energy, optimal control, latching control, optimization, genetic algorithms.