



**HAL**  
open science

# Gradiomètre planaire aéroporté pour l'étude de la gravité en zones littorales

K. Douch

► **To cite this version:**

K. Douch. Gradiomètre planaire aéroporté pour l'étude de la gravité en zones littorales. Instrumentations et Détecteurs [physics.ins-det]. UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS CITÉ, 2015. Français. NNT: . tel-01151736

**HAL Id: tel-01151736**

**<https://hal.science/tel-01151736>**

Submitted on 13 May 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS CITÉ



Thèse préparée  
à l'INSTITUT DE PHYSIQUE DU GLOBE DE PARIS  
École doctorale STEP'UP - ED N°560  
IPGP - Équipe de gravimétrie et géodésie spatiale

# Gradiomètre planaire aéroporté pour l'étude de la gravité en zones littorales

par  
Karim Douch

Présentée et soutenue publiquement le  
23 Janvier 2015

Thèse de doctorat de Sciences de la Terre et de l'environnement  
dirigée par Michel Diamant

Devant le jury composé de :

<b>Kasser Michel</b> Professeur (HEIG-VD - Suisse)	Rapporteur
<b>Grandjean Gilles</b> Ingénieur (BRGM)	Rapporteur
<b>Crawford Wayne</b> Chargé de recherche (CNRS)	Membre
<b>Panet Isabelle</b> Chargée de recherche (IGN)	Co-encadrante
<b>Christophe Bruno</b> Ingénieur (Onera)	Directeur des travaux
<b>Michel Diamant</b> Physicien (IPGP)	Directeur de thèse



# Remerciements

En écrivant ces quelques lignes, je constate avec joie que je suis enfin venu à bout de la rédaction de cette thèse. Voilà un exercice, certes très utile et enrichissant, mais que je ne recommencerais pas de sitôt! L'écriture de ce court paragraphe a cependant une saveur toute différente car bien que ces quelques lignes se trouvent au début de ce mémoire, elles closent en quelques sortes ma thèse. De plus je suis à peu près sûr qu'elles ne seront pas soumises au jugement et à la sentence de mes examinateurs. C'est donc sereinement et l'esprit léger que je peux faire le bilan de ces trois ans de travail et surtout remercier ceux qui ont contribué à en faire une heureuse expérience. Et ils sont nombreux! Je vais me risquer à faire une succincte, quoiqu'à peu près exhaustive liste de ceux à qui je ne peux qu'exprimer ma gratitude<sup>1</sup>.

Pour commencer par le commencement, mes premiers remerciements vont à Michel Diamant, Bruno Christophe, Isabelle Panet, Gwendoline Pajot-Métivier et Bernard Foulon qui m'ont fait confiance pour travailler sur ce sujet à cheval sur les aspects instrumentaux et géophysiques associés à la conception et l'utilisation de GREMLIT. Inutile de dire que cette thèse m'a permis de réaliser ma première expérience formatrice d'apprenti chercheur, de découvrir le monde du spatial avec l'Onera, de la recherche en sciences de la Terre avec l'IPGP, mais aussi de faire mes premières conférences internationales, mon premier voyage aux États-Unis et plein d'autres choses encore. Je suis tout particulièrement reconnaissant aux deux encadrants qui ont supervisé mon travail tout au long de ces trois années, Isabelle et Bruno. Ils ont su m'aider à maintenir un bon équilibre entre la liberté dans le travail de recherche (qui est fondamental pour moi) et la discipline nécessaire à sa mise en œuvre et sans laquelle je n'aurais pas abouti à grand-chose. Ils m'ont poussé, lu, corrigé, encouragé, orienté, recorrecté, questionné, critiqué, aidé, appris, et j'en passe. Bref, Encore une fois merci! Un grand merci également à Bernard Foulon que j'ai soumis à la question un bon nombre de fois, mais qui n'a pas une seule fois rechigné à m'expliquer, voire réexpliquer, la physique et toute l'ingéniosité qui se cache derrière GREMLIT. De même pour Gwendoline Pajot-Métivier qui m'a fait profiter de ses connaissances en gravimétrie et du monde de la gravimétrie, et qui a été une relectrice scrupuleuse de mes divers écrits et articles. A ce stade, il me faut également exprimer toute ma gratitude aux membres de mon comité de suivi de

---

<sup>1</sup>En relisant ces deux dernières phrases, je me rends compte de leurs côtés légèrement flagorneurs. Je suis donc dans sur la bonne voie...

## Remerciements

---

thèse: Marie-Françoise Lalancette-Lequentrec, Gilles Grandjean et Jérôme Verdun, qui ont pris le temps de comprendre et analyser mon travail pour me proposer des perspectives et orientations pertinentes dans la poursuite de mon travail. Enfin je ne peux oublier de signaler ma grande reconnaissance à Michel Diament, mon directeur de thèse officiel, dont l'aide a été plus que précieuse pour tenir droit le cap lors de ma tumultueuse fin de thèse et ce jusqu'à la soutenance!

Il y a ensuite quelques dizaines de sincères remerciements qui vont bien évidemment à toutes celles et ceux avec qui j'ai partagé ces trois années et qui m'ont aidé d'une manière ou d'une autre. Je pense notamment aux secrétaires Hélène Robic et Hélène Meler qui malgré ma "phobie administrative"<sup>2</sup>, m'ont aidé à gérer toutes les démarches administratives collatérales de mon travail. Je n'oublie pas la salutaire exigence de Prisca Rasolofomanana sans qui je n'aurais pas eu l'extension de 2 mois qui m'ont permis de finaliser la rédaction de ma thèse. Enfin il y a toutes les personnes avec qui j'ai pu longuement parler de sciences, des problèmes existentialistes spécifiques aux doctorants, de mes turpitudes propres mais aussi (et surtout?) de tout un tas d'autres choses: spéciale dédicace à mes collègues de bureau, Émilie, Raphaël et Quentin, mais aussi Ratana, Françoise, Manuel, Damien, Joël, Phuong-Anh, Vincent, Patrick etc. Grâce à eux j'ai toujours bénéficié d'une ambiance de travail agréable et conviviale. Je garderai en particulier un très bon souvenir de nos nombreuses conversations autour d'un café et des nouvelles du jours, qu'elles soient tirées de 20 Minutes ou bien du Monde diplomatique.

Last but not least, je ne peux oublier de rappeler que sans ma famille et mes amis, je ne serais certainement pas arrivé à ce point-là (cette phrase est à comprendre dans son acception positive, bien-sûr...). Infini merci à eux donc et plus particulièrement à Shelitha et Joost, qui de leur lointain pays sont venus me soutenir pour la dernière ligne droite: *hartelijk dank!*

Merci à tous!

*Hanovre, 28 Janvier 2015*

D. K.

---

<sup>2</sup>Maladie qui d'après l'actualité récente est apparemment reconnu

## Abstract

The variations of the gravitational field at wavelengths lower than 100km are essential to address many geodetic and geophysical questions but still remain poorly covered. It is particularly the case in land-sea transition areas where the gravity field data are quite uneven and their quality heterogeneous. Here we put forward airborne gravity gradiometry as a convenient way to address these limitations and we analyze in this thesis a new airborne acceleration gradiometer: GREMLIT. First, the adaptation of this ultra-sensitive sensor to airborne conditions is studied. To avoid saturation, the accelerations sensed by the sensitive axis of the gradiometer's accelerometers must be below  $10^{-4} \text{ m.s}^{-2}$ . The suggested solution consists in fixing GREMLIT on a double-gimbal controlled platform. This solution is evaluated and validated for real flight dynamic conditions. Then, we assess thanks to a numerical simulator the total error on the gravitational gradients that would have been determined during an airborne survey. The simulation includes a gyrometer's bias calibration which is fully described. We show that it is possible to reach a precision ( $1\sigma$ ) of 2E for a spatial resolution of 2km, after an along-track Gaussian filtering in the local reference frame. The interest of airborne gravitational gradiometry for the study of coastal currents is finally discussed. In particular, a numerical method to compute the vertical deflection from gridded gravity gradients data is presented.

Key words: airborne gravimetry, electrostatic gradiometer, numerical simulation, marine geodesy, instrumentation

### Résumé

Les variations du champ de gravité aux échelles inférieures à 100km recèlent beaucoup d'informations utiles en géodésie, géophysique et prospection mais restent peu couvertes. C'est notamment le cas des transitions terre-mer où les données gravimétriques sont éparses et de qualité hétérogène. Pour dépasser ces limitations, nous proposons d'utiliser la gradiométrie en gravimétrie aéroportée et analysons dans cette thèse un nouveau concept de gradiomètre électrostatique : GREMLIT. Dans un premier temps, l'adaptation de cet instrument ultrasensible à l'environnement dynamique d'un avion est étudiée. Les accélérations sur les axes sensibles des accéléromètres composant le gradiomètre doivent en effet rester inférieures à  $10^{-4}\text{m.s}^{-2}$  pour éviter la saturation. La solution proposée consiste à fixer GREMLIT sur une plateforme asservie en rotation. Cette solution est évaluée pour des conditions de vol réelles et validée. Par la suite, nous estimons grâce à un simulateur l'erreur totale sur les gradients de gravité qui seraient déterminés lors d'un relevé aéroporté. Cette simulation comprend notamment une phase indispensable d'étalonnage des biais des gyromètres qui est décrite. Nous montrons qu'il est possible d'atteindre une précision ( $1\sigma$ ) de 2E pour une résolution de 2km après un filtrage gaussien sur les gradients de gravité exprimés dans le repère local. L'utilisation et l'intérêt de la gradiométrie aéroportée pour l'étude des courants côtiers sont finalement discutés. A cet effet, les bases d'une méthode numérique de calcul de la déviation de la verticale à partir d'une grille de mesure de gradient de pesanteur sont présentées.

Mots clefs : gravimétrie aéroportée, gradiomètre électrostatique, simulation numérique, géodésie marine, instrumentation

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Résumé (Anglais/Français)</b>	<b>iii</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xiii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 La gradiométrie en gravimétrie comme moyen d'étude du milieu côtier</b>	<b>5</b>
1.1 Contexte général et motivations . . . . .	5
1.1.1 Enjeux de l'étude du milieu littoral . . . . .	5
1.1.2 Connaissance du champ de gravité en zones côtières : besoins et appli- cations . . . . .	7
1.1.3 Cas du suivi de la circulation côtière . . . . .	9
1.2 Le champ de gravité et ses gradients . . . . .	14
1.2.0.1 Tenseur gradient de gravité . . . . .	15
1.2.0.2 Gradient de gravité et résolution spatiale du champ . . . . .	17
1.2.0.3 Gradient de gravité et séparation des sources . . . . .	20
1.3 Méthodes spatiales pour la détermination du champ de gravité à haute- résolution . . . . .	20
1.3.1 La gradiométrie spatiale : GOCE . . . . .	23
1.3.1.1 Description et objectifs de la mission GOCE . . . . .	23
1.3.1.2 Utilisation des données GOCE . . . . .	25
1.3.2 Les missions d'altimétrie . . . . .	26
1.3.2.1 Principe de l'altimétrie radar et principales missions . . . . .	26
1.3.2.2 Performances et limites de l'altimétrie spatiale pour la déter- mination du champ . . . . .	28
1.4 Les méthodes aéroportées . . . . .	29
1.4.1 Le développement de la gravimétrie aéroportée . . . . .	30
1.4.1.1 Principe et modélisation de la gravimétrie dynamique . . . . .	30



## Table des matières

---

1.4.1.2	Performances en gravimétrie aéroportée . . . . .	33
1.4.2	La gradiométrie en gravimétrie aéroportée . . . . .	34
1.4.2.1	Équation de la mesure des gradients de gravité dans un mobile . . . . .	34
1.4.2.2	Historique et état de l'art . . . . .	36
<b>2</b>	<b>GREMLIT : gradiomètre planaire électrostatique aéroporté</b>	<b>41</b>
2.1	Présentation du gradiomètre aéroporté GREMLIT . . . . .	41
2.1.1	Résumé de l'article 1 . . . . .	41
2.1.2	Article 1 . . . . .	46
2.2	Compléments . . . . .	69
2.2.1	Principe de fonctionnement des accéléromètres électrostatiques . . . . .	69
2.2.1.1	Asservissement en position de la masse d'épreuve . . . . .	69
2.2.1.2	Force électrostatique dans le cas unidimensionnel . . . . .	69
2.2.2	Mesures effectuées par le gradiomètre d'accélération . . . . .	76
2.2.2.1	Modélisation des défauts de couplage et d'alignement sur les mesures du gradiomètre . . . . .	76
2.2.2.2	Modélisation des erreurs de longueur sur les mesures du gradiomètre . . . . .	81
<b>3</b>	<b>Caractérisation de l'erreur et traitement des mesures GREMLIT à partir de simulations numériques</b>	<b>85</b>
3.1	Résumé de l'article 2 . . . . .	85
3.2	Article 2 . . . . .	89
3.3	Compléments : utilisation des invariants par rotation du GGT . . . . .	116
	<b>Conclusion générale</b>	<b>121</b>
<b>A</b>	<b>Annexe I</b>	<b>125</b>
A.1	Les champs de gravité et de pesanteur terrestre . . . . .	125
A.1.1	Champ de gravité : définitions et premières propriétés . . . . .	125
A.1.2	Développement en harmoniques sphériques du champ . . . . .	126
A.1.3	Le champ de pesanteur de la Terre . . . . .	128
A.1.3.1	Définitions et propriétés . . . . .	128
A.1.3.2	Surfaces équipotentielles et lignes de champ . . . . .	129
A.1.4	Ellipsoïde de référence, anomalie de gravité et géoïde . . . . .	130
<b>B</b>	<b>Annexe II</b>	<b>133</b>
B.1	Détermination de l'orientation et de la dynamique de la plateforme contrôlée . . . . .	133
<b>C</b>	<b>Annexe III</b>	<b>137</b>
C.1	Résolution théorique du champ accessible en aéroporté . . . . .	137

<b>D Annexe IV</b>	<b>141</b>
D.1 Calcul de la déviation de la verticale à partir des gradients de pesanteur . . . .	141
D.1.1 Courbures du champ de pesanteur . . . . .	141
D.1.2 Définition et calcul de la déviation de la verticale . . . . .	143
D.1.2.1 définition . . . . .	143
D.1.2.2 Lien entre la déviation de la verticale et la hauteur de géoïde .	143
D.1.3 Calcul intégral de la déviation de la verticale à partir des gradients de gravité . . . . .	146
<b>E Annexe V</b>	<b>153</b>
E.1 Programme MATLAB de simulation des mesures et estimations des gradients de gravité avec GREMLIT . . . . .	153
<b>Bibliographie</b>	<b>176</b>



# Table des figures

1.1	Illustration de la notion de topographie dynamique des océans . . . . .	10
1.2	Courants de différentes natures se formant dans le golfe de Gascogne, jusqu'à la limite du plateau continental. Source : <a href="http://www.eoearth.org/view/article/150448/">http://www.eoearth.org/view/article/150448/</a> (consulté le 27/08/2014) d'après l'article de Koutsikopoulos <i>et al.</i> [1]. . . . .	13
1.3	Ondulations du géoïde issu du modèle sur le Golfe de Gascogne, pour les longueurs d'onde inférieures à 100km. . . . .	14
1.4	Illustration du GGT créé par une masse parallélépipédique de $4 \times 10^9$ de tonnes, observé sur un plan situé à 200m d'altitude par rapport à la face supérieure. .	16
1.5	Résolution sur le champ de gravité théoriquement atteignable pour un relevé aéroporté, en fonction de l'altitude. En bleu la résolution maximale atteinte grâce à la détermination de $D_z$ , en rouge celle atteinte grâce à la détermination de $D_{zz}$ . . . . .	18
1.6	Schéma illustrant le signal gravimétrique associé à 2 masses ponctuelles distantes de $D$ , situées à une même profondeur $H$ par rapport à la ligne de mesure.	21
1.7	Séparation de 2 sources ponctuelles vue à travers l'anomalie de gravité (en haut) et l'anomalie de gradient de gravité $V_{zz}$ (en bas) . . . . .	22
1.8	Vue d'artiste du satellite GOCE avec ses ailerons et son profil aérodynamique permettant de stabiliser le satellite et de limiter les forces de frottement atmosphérique. A l'arrière, l'ensemble du moteur ionique. Source : <a href="http://www.esa.int/spaceinimages/Missions/GOCE/%28class%29/image">http://www.esa.int/spaceinimages/Missions/GOCE/%28class%29/image</a> (consulté le 09/06/2014) . . . . .	24
1.9	Le gradiomètre électrostatique embarqué sur le satellite GOCE. A gauche, une vue de l'instrument tel qu'il a été fixé dans le satellite. A droite, une vue schématique de la disposition et de l'orientation des 6 accéléromètres électrostatiques constituant le gradiomètre. Source : ESA. . . . .	25
1.10	Notation et représentation des différentes hauteurs utilisées dans la détermination du niveau de la mer par altimétrie spatiale. . . . .	27

1.11	Illustration du repère terrestre $\mathcal{R}_{ECEF}$ , en rouge, et de la paramétrisation en coordonnées ellipsoïdales, également appelées géographiques. La longitude $\lambda_e$ est la même qu'en coordonnées sphériques ; la latitude est notée $\phi_e$ , la hauteur ellipsoïdale d'un point P est notée $h_e$ et correspond à la distance entre P et son projeté orthogonal A sur l'ellipsoïde. Ce paramétrage permet de définir le repère géographique local $\mathcal{R}_{ENU}$ dont le centre est sur l'ellipsoïde, l'axe $Z_{ENU}$ est orienté vers l'extérieur selon la normale locale à l'ellipsoïde, l'axe $X_{ENU}$ est orienté vers l'est et l'axe $Y_{ENU}$ est orienté vers le nord. On note enfin $N(\phi_e)$ le rayon de courbure normal. Le repère géocentrique $\mathcal{R}_{ECI}$ , en bleu, est considéré comme inertiel avec une très bonne approximation. . . . .	32
1.12	Illustration d'un plan de vol de relevé gravimétrique aéroporté tirée de Hwang <i>et.al.</i> [2]. L'anomalie à l'air libre à altitude de vol est donnée sur les traces des vols du relevé au-dessus de Taïwan. L'altitude moyenne est de 5156 m et la vitesse d'environ 306 km/h par rapport à la surface. . . . .	35
1.13	Schéma d'une platine rotative du FTG, avec la disposition de ses quatre accéléromètres. Schéma tiré de [3]. . . . .	37
1.14	Vues des principaux gradiomètres aéroportés existants ou en cours de développement : (a) le gradiomètre FTG de Lockheed Martin, (b) le VK1 de Rio Tinto, (c) l'EKG d'ARKeX. Actuellement seul le gradiomètre FTG de Lockheed Martin, basé sur une technologie développée dans les années 70 par la marine américaine et adaptée par la suite pour la prospection géophysique, est commercialisé. L'EKG d'ARKeX et le VK1 de Rio Tinto sont toujours à l'heure actuelle en phase de développement ou de test. . . . .	39
2.1	Schéma de la configuration planaire du gradiomètre d'accélération de GREMLIT. Chaque carré représente un accéléromètre planaire mesurant les composantes x et y de l'accélération en son centre $O_i$ , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . $\vec{a}_h$ désigne la projection dans le plan (O,x,y) de l'accélération ressentie dans le repère de l'instrument . . . . .	42
2.2	Vue générale du gradiomètre d'accélération de GREMLIT dans son boîtier (a) et vue éclatée des composants du gradiomètre (b) . . . . .	43
2.3	Illustration du défaut de perpendicularité entraînant l'apparition d'un bruit de mode commun . . . . .	46
2.4	Schéma de la boucle d'asservissement en position de la masse d'épreuve d'un accéléromètre électrostatique. . . . .	70
2.5	Représentation simplifiée de la configuration de l'accéléromètre avec variation d'entrefer. A l'équilibre (figure de gauche), la masse d'épreuve centrée en $O_m$ est située entre et à égale distance $e_{eq}$ des 2 électrodes. Les 2 condensateurs $C_1$ et $C_2$ sont figurés en vert et violet. A droite, un petit déplacement z de la masse d'épreuve le long de l'axe Z fait varier l'entrefer des 2 côtés. . . . .	70

2.6	Contrôle en position unidimensionnelle de la masse d'épreuve par variation d'entrefer. . . . .	72
2.7	A gauche : configuration à l'équilibre de la masse d'épreuve recouvrant d'une même longueur l'électrode du haut et celle du bas. A droite, configuration dans le cas d'un déplacement $x$ selon l'axe X. L'entrefer $e_{eq}$ séparant verticalement les électrodes de la masse d'épreuve est supposé constant. . . . .	74
2.8	Illustration des défauts d'alignement des points de mesure des accélérations. Dans le cas théorique, les centres des masses d'épreuve $O_1, O_2, O_3$ et $O_4$ forment un carré, ici en noir, dont les côtés sont parallèles aux 2 axes X et Y du repère de mesure $\mathcal{R}_m$ . Dans la réalité, les centres des masses d'épreuve sont légèrement décalés et les axes selon lesquels les dérivées sont réellement évaluées, ici en rouge, ne sont pas parallèles à X ou Y. Ces défauts de parallélisme sont paramétrés par 4 angles $\theta_{14}, \theta_{12}, \theta_{23}$ et $\theta_{34}$ . . . . .	78
A.1	Illustration de la fonction $\bar{\mathcal{C}}_{10,4} = \bar{P}_{10,4}(\sin\phi) \cdot \cos 4\lambda$ de degrés 10 et ordre 4. La sphère est divisée en compartiments successivement positifs (rouges) et négatifs (bleues). On parle d'harmoniques tésserales, ce qui correspond au cas où le degré est supérieur ou égal à 2 et l'ordre est différent de 0 et du degré. 127	
A.2	Illustration en 2 dimensions du repère local : l'axe z est perpendiculaire localement à la surface équipotentielle et le plan (x,y) lui est tangent. . . . .	130
A.3	Représentation schématique du géoïde et de l'ellipsoïde de référence pour le calcul du vecteur anomalie de pesanteur. La hauteur du géoïde est définie par sa hauteur ellipsoïdale notée N . . . . .	131
B.1	Exemple de séries temporelles des composantes $a_x, a_y$ et $a_z$ de l'accélération mesurée par l'INS de l'avion lors d'un vol de la campagne de relevé gravimétrique en Corse. . . . .	134
B.2	Exemple de séries temporelles des composantes $\Omega_x, \Omega_y$ et $\Omega_z$ de la vitesse angulaire mesurée par l'INS de l'avion lors d'un vol de la campagne de relevé gravimétrique en Corse. . . . .	136
C.1	Spectre de $D_z$ à différentes altitudes comprises entre 1 à 10 km, en fonction du degré de développement en harmoniques sphériques. La représentation est limitée au degré 3000 afin de mieux observer la partie issue du modèle EIGEN6C3-stat comprise entre 3 et 1950. . . . .	140
C.2	Spectre de $D_{zz}$ à différentes altitudes comprises entre 1 à 10km, en fonction du degré de développement en harmoniques sphériques. La représentation est limitée au degré 3000 afin de mieux observer la partie issue du modèle EIGEN6C3-stat pour les degrés entre 3 et 1950. . . . .	140

## Table des figures

---

D.1	Les deux directions orthogonales selon lesquelles sont calculées les courbures de l'équipotentielle. Figure inspirée de <i>Physical Geodesy</i> [4]. . . . .	142
D.2	Schéma d'interprétation géométrique des deux termes $\xi$ et $\eta$ définissant la déviation de la verticale, à partir d'une sphère de rayon 1. Figures tirées de <i>Physical Geodesy</i> [4]. . . . .	144
D.3	Relation entre la déviation de la verticale et la hauteur du géoïde . . . . .	145
D.4	Repère local ENU au point $P_0$ pour le calcul des composantes de la déviation de la verticale en ce point et au point $P_i$ . . . . .	147
D.5	Schéma représentant la décomposition de la variation de la déviation de la verticale dans le plan (yz) pour un déplacement élémentaire $dy$ . . . . .	150

## Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques des courants dans le golfe de Gascogne . . . . .	12
1.2	Énergie du signal d'anomalie de gravité aux courtes longueurs d'onde à 1km de hauteur . . . . .	19
1.3	Énergie du signal d'anomalie de gradient de gravité vertical aux courtes longueurs d'onde à 10km de hauteur . . . . .	19
1.4	Caractéristiques et performances des principaux gravimètres commerciaux .	31
1.5	Caractéristiques de quelques relevés gravimétriques aéroportés . . . . .	34





# Introduction générale

La géophysique est l'étude des caractéristiques physiques de la planète Terre. Au sens large, l'objet d'étude de la géophysique s'étend du centre de notre planète à l'environnement spatial de celle-ci, en passant par des couches fluides superficielles de la Terre, telles que les océans, l'atmosphère, ou encore la cryosphère. De ce fait, l'investigation géophysique repose sur l'observation et l'étude d'une grande diversité de phénomènes physiques. Ainsi, l'étude de la propagation des ondes sismiques, des caractéristiques spatio-temporelles du champ magnétique de la Terre, ou encore la connaissance du flux de chaleur à sa surface, permettent de renseigner de manière indirecte sur la structure et la composition de la Terre interne. Bien que l'analyse de ces observables apporte des informations nouvelles, elle ne permet généralement pas d'inférer de manière univoque un modèle de Terre expliquant ces observations. A ce niveau, la difficulté réside donc dans la formulation et la combinaison optimale de l'ensemble des observations avec des informations *a priori*, afin d'obtenir un ensemble plus réduit de modèles explicatifs, consistants et réalistes.

Dans une telle démarche, le champ gravitationnel terrestre représente une observable de premier plan pour l'étude de la répartition des masses ou variations de densité, tant au niveau de l'intérieur de la Terre que de ses couches superficielles. En effet, la loi universelle de gravitation établie par Newton permet de relier l'accélération gravitationnelle en un point à la distribution de masse qui la produit. Le problème inverse consistant à déterminer une distribution de masse expliquant un champ gravitationnel observé est un problème mal posé dans le sens où la solution n'est jamais unique. Cependant, les mesures du champ gravitationnel permettent de révéler les différences, ou anomalies, entre un modèle de champ *a priori* et les observations. Ces observations serviront alors à mieux contraindre de nouveaux modèles de distribution de masse tenant compte de ces anomalies. La mesure, le traitement et l'interprétation du champ de gravité terrestre constituent le domaine de la gravimétrie. L'intérêt de la détermination de la distribution des masses en profondeur est multiple : il peut être économique dans le cas de la prospection pétrolière ou minière, qui nécessite une bonne connaissance du contexte géologique du lieu exploré ; sécuritaire dans la mesure où l'on chercherait à identifier des structures enfouies potentiellement dangereuses (marnières, crevasses, rivières souterraines) ; et enfin scientifique quand il

## Liste des tableaux

---

s'agit d'étudier la structure interne de la Terre ou le transport de matière en son sein ou dans ses couches superficielles. La Terre est en effet un système dynamique dans lequel les flux de matière changent en permanence la distribution des masses. De ce fait les données gravimétriques trouvent des utilisations dans divers domaines des géosciences. On peut citer à titre d'exemples non exhaustifs la surveillance des chambres magmatiques des volcans [5] [6], le suivi du cycle hydrologique [7] [8] ou encore l'étude de la variation de masse des glaciers et des calottes glaciaires [9] [10]. Dans tous ces domaines, on se sert de l'inhomogénéité et des variations temporelles du champ pour refléter celles des masses.

Un autre domaine d'étude où intervient la connaissance du champ de gravité terrestre est la géodésie physique. D'après la définition donnée par le géodésien allemand Friedrich Robert Helmert (1880), la géodésie est *la science de la mesure et de la cartographie de la surface de la Terre* [11]. Cette définition reste toujours d'actualité mais il est important de la compléter en y ajoutant la détermination du champ de pesanteur terrestre. La pesanteur est en effet une force essentielle qui façonne la forme de la Terre à toutes les échelles. Par ailleurs, les mesures de hauteur et autres observations géodésiques sont la plupart du temps réalisées par rapport à la verticale locale qui est donnée par le fil à plomb et correspondant à la direction de l'accélération de pesanteur. Connaître précisément les variations spatiales de ce champ permet donc de rapporter de manière cohérente les mesures de nivellement. On définit également la Figure de la Terre [12] [13] à partir du champ de pesanteur. Cette définition permet de généraliser à l'ensemble du globe l'idée que la Figure de la Terre se confond dans le domaine océanique avec la surface des océans au repos, c'est-à-dire en l'absence de toutes perturbations telles que les marées et les courants. Cette surface d'équilibre correspond à une équipotentielle de pesanteur appelée géoïde qui est aussi par définition le niveau zéro des altitudes. En océanographie physique, le géoïde joue un rôle important puisque tout écart de la surface réelle de l'océan à celui-ci révèle l'existence de forces perturbatrices qui sont les moteurs de la circulation océanique. Le géoïde ainsi que la surface réelle de la surface océanique constituent donc deux quantités nécessaires à l'étude de la dynamique des océans.

La connaissance du champ de gravité terrestre n'a pas forcément les mêmes caractéristiques selon les applications envisagées. En fonction des cas, on privilégiera la connaissance du champ en un point géographique précis, sur une région donnée ou encore sur l'ensemble de la Terre. De plus, seules les variations à une certaine échelle spatiale et/ou temporelle auront un intérêt pour l'objectif visé. Dans le cas de la prospection géophysique par exemple, seule la connaissance du champ de gravité sur l'étendue de la zone d'exploration sera nécessaire. De plus, seules les variations de ce champ sur des échelles compatibles avec les dimensions et la profondeur des structures géologiques que l'on cherche à identifier seront utiles. De même, les caractéristiques du champ de pesanteur nécessaires à la détermination d'un géoïde utile en océanographie physique dépendent du type de courants océaniques que

l'on cherche à déterminer, et de la précision souhaitée : l'étude de la circulation océanique globale ou bien celle des gyres en zones côtières nécessitera des résolutions et des précisions différentes sur le champ de pesanteur.

Il est donc essentiel de concevoir les moyens techniques permettant la mesure du champ de gravité sur l'ensemble du spectre de résolution spatiale, voire temporelle, pour améliorer et augmenter notre compréhension de la physique de la Terre. Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre du développement d'un nouvel instrument nommé GREMLIT, destiné à mesurer des gradients du champ de gravité lors de relevés aéroportés. Si le champ d'utilisation des mesures d'un tel instrument est vaste, on se focalisera ici plus particulièrement sur les applications nécessitant une détermination haute résolution du champ de gravité en zones littorales.

Ce mémoire commence par la revue et la caractérisation des besoins en mesures gravimétriques en géophysique de manière générale et dans l'environnement côtier en particulier. Un état de l'art des différents moyens développés pour répondre à ces besoins dans le domaine littoral est également détaillé. En particulier, l'apport spécifique de la gradiométrie en gravimétrie à la connaissance du champ est mis en relief notamment par rapport à la gravimétrie classique. Ces analyses permettent de situer précisément les besoins auxquels GREMLIT pourra répondre (chapitre 1). Après cette mise en contexte, la suite du mémoire portera à proprement parler sur le travail réalisé au cours de la thèse. L'instrument GREMLIT étant en phase de conception, le travail présenté ici est largement prospectif. Le chapitre 2 rentre dans le cœur du sujet avec une présentation du concept de gradiomètre de gravité GREMLIT. GREMLIT se compose de l'ensemble des sous-systèmes nécessaires à l'obtention des gradients de gravité horizontaux dans le repère de mesure. A ce titre, il comprend un gradiomètre planaire d'accélération et trois gyromètres mesurant le vecteur vitesse angulaire du repère de mesure par rapport à un repère inertiel. Le composant le plus critique du système GREMLIT est le gradiomètre d'accélération planaire dont le principe de fonctionnement est décrit et les performances en termes de bruit sont quantifiées. A partir de ce premier concept établi par les ingénieurs de l'Onera, la question cruciale de l'adaptation de cet instrument ultra-sensible à l'environnement fortement perturbé de l'avion porteur est tout d'abord traitée. Ensuite, partant de l'estimation des performances du gradiomètre d'accélération de GREMLIT et d'autres hypothèses de travail, le troisième chapitre s'attache à quantifier la précision finale sur les gradients de gravité déterminés. Cette étude se base sur un code réalisé pendant la thèse et permettant de simuler numériquement un relevé aéroporté mené avec l'instrument GREMLIT. Le simulateur inclut l'ensemble de la chaîne de traitement des données, des mesures brutes réalisées dans l'avion aux gradients de gravité exprimés dans un repère fixe. Le mémoire se termine par une conclusion générale sur les travaux réalisés et des propositions de piste de travail à explorer. Enfin certaines des notions, démonstrations et méthodes utilisées dans ce mémoire sont exposées et décrites

## Liste des tableaux

---

avec de plus amples détails dans les annexes. En particulier, le travail effectué sur le calcul numérique de la pente du géoïde à partir des gradients de pesanteur y est détaillé.

# 1 La gradiométrie en gravimétrie comme moyen d'étude du milieu côtier

## Objectifs du chapitre 1

- Rappeler les enjeux et l'intérêt de l'étude géophysique du milieu côtier
- Décrire comment la mesure du champ de gravité peut contribuer à mieux comprendre cet environnement
- Définir sur quel segment se situe le gradiomètre GREMLIT par rapport aux autres méthodes et instruments de détermination du champ de gravité sur le littoral

## 1.1 Contexte général et motivations

### 1.1.1 Enjeux de l'étude du milieu littoral

Il n'y a pas de différence claire en français entre les termes côte et littoral. On se focalisera dans le cadre de ce travail sur les zones côtières au sens large, à savoir de part et d'autre de l'interface terre-mer. La définition et délimitation de l'extension géographique de ces zones dépend de plusieurs facteurs (environnementaux, juridiques, économiques), et peuvent évoluer avec le temps. Pour cette présentation, on suivra la définition de Martínez *et.al* [14], étendant la zone côtière du talus continental ou de l'isobathe de 200m pour ce qui concerne le domaine maritime, jusqu'à 100km du trait de côtes dans les terres. La limite de l'isobathe de 200m est un choix arbitraire, mais il correspond généralement à la profondeur à partir de laquelle commence le talus. Étant donné la pente de ce dernier, typiquement de 1 :10, fixer une limite à 200 ou 500m de profondeur ne la déplace horizontalement

## Chapitre 1. La gradiométrie en gravimétrie comme moyen d'étude du milieu côtier

---

que légèrement. Avec une isobathe de 500m, la partie côtière de l'océan ne représente environ que 9% de la surface et moins de 0,5% du volume des océans [15]. Cet espace particulier a pourtant une influence majeure et est l'objet d'enjeux à la fois politiques, économiques et environnementaux [16] qui sont eux-mêmes liés à d'importantes questions d'ordre scientifique.

Politique car tous les états côtiers peuvent prétendre à une extension de leurs juridictions au-delà de leurs ZEE (Zone Économique Exclusive) jusqu'à la limite du plateau continental (la définition de ce dernier est à comprendre dans le sens juridique et non purement géophysique). La ZEE typique est fixée, lorsque cela est possible, à 200 milles marins (370km) des côtes. Dans cette zone, les états souverains ont le droit d'exploiter les ressources en mer, sur le fond et dans le sous-sol. La ratification de la Convention des Nations unies sur le droit de la mer permet cependant à tout état côtier de demander auprès de la commission des limites du plateau continental (CLPL) et dans les 10 ans qui suivent, une extension de la ZEE à la limite de son plateau continental. Le plateau continental tel qu'il est défini juridiquement correspond soit à la limite extérieure de la marge continentale (sens géophysique du terme) soit à la ZEE si celle-ci s'étend plus loin que la marge. Dans le cas où la marge continentale s'étend au-delà de 200 milles, l'état peut demander une extension de sa ZEE soit au maximum de 350 milles soit au maximum de 100 milles de l'isobathe 2500m. Une connaissance documentée de la géologie de la marge et de son extension est donc critique pour réaliser une telle requête. L'enjeu géopolitique de l'extension de la ZEE est particulièrement bien illustré par le cas de l'extension des frontières maritimes sur l'océan Arctique revendiquée par le Canada, les États-Unis, la Russie, la Norvège et le Danemark [17][18]. Le changement climatique et la fonte des glaces ont en effet provoqué un regain d'intérêt pour ces zones potentiellement riches en hydrocarbure et jusqu'alors inexploitable. En particulier, la Russie, le Canada et le Groenland sous souveraineté danoise cherchent activement à démontrer par des arguments géologiques que la dorsale de Lomonossov et de Mendeleïev sont des extensions de leur plateau continental respectif. La dorsale de Lomonossov va de la marge continentale est-sibérienne, traverse l'océan Arctique et rejoint la marge de Lincoln au nord du Groenland. Si celle-ci venait à être considérée officiellement comme le prolongement du plateau continental d'un de ces pays, ce dernier pourrait alors prétendre étendre sa souveraineté sur une grande partie du pôle Nord [19].

Le milieu côtier est également d'une importance économique capitale pour de nombreux pays et l'ensemble de la planète en général. Costanza *et al.* [20] ont ainsi estimé que l'ensemble de l'écosystème côtier produit chaque année des services et des capitaux naturels bénéficiant à l'Homme, directement ou indirectement équivalent à plus de 12 500 milliards \$US. De plus, de nombreux secteurs de l'économie sont en liaison avec la mer. On peut citer entre-autres la pêche, le transport, l'exploitation off-shore des ressources du sous-sol avec notamment les énergies fossiles, le tourisme et de plus en plus les énergies renouvelables.

La production pétrolière en mer représente par exemple 33% de la production mondiale et pourrait atteindre 48% d'ici à 2030 [21]. Cette production est quasiment exclusivement réalisée sur les plateaux continentaux [22] où les réserves connues sont plus facilement exploitables. C'est également sur les plateaux continentaux que se trouvent l'essentiel des ressources pélagiques [20] du fait de la grande productivité biologique qui s'y développe. On estime ainsi que 26% de la production primaire globale est réalisée en zones côtières et que près de 85% de la pêche mondiale a lieu dans les ZEE [23]. L'intensité de ces activités et la croissance future de certaines d'entre elles est à l'origine de l'augmentation constante de la pression anthropique sur le milieu côtier. Ainsi en France en 2005 11,8% de la population métropolitaine vivait dans les cantons littoraux, soit 6% du territoire, d'après une étude de l'INSEE [24], et ce sans compter la forte capacité d'accueil touristique. Cette population augmente d'ailleurs plus vite que l'ensemble de la population. A l'échelle mondiale, c'est près de 41% de la population mondiale qui vit dans les zones côtières [14]. Cette pression n'est pas sans occasionner des dégradations voire des destructions de l'environnement (érosions, artificialisation du littoral, surpêche, pollutions industrielles). Martínez *et.al* [14] estiment par exemple que près de 28% des côtes sont touchées d'une manière ou d'une autre par l'empreinte de l'homme. Ces impacts entraînent à leur tour une plus grande exposition aux risques, mettant en danger la population et les activités économiques sur place [23].

### 1.1.2 Connaissance du champ de gravité en zones côtières : besoins et applications

La connaissance et la surveillance scientifique du milieu littoral est bien-sûr multiforme est englobe toute une série de variables quantifiables liées à des paramètres de différentes natures : géologique, géophysique, biologique, chimique etc. Un de ces paramètres géophysiques est le champ de gravité. Dans toute la suite de ce mémoire, on définit **la connaissance haute-résolution du champ de gravité comme étant la connaissance du champ pour les demi-longueurs d'ondes inférieures à 100km** (*cf.* annexe I pour la définition de la résolution associée à un degré de la décomposition en harmoniques sphériques). La connaissance des variations fines du champ de gravité en milieu côtier est nécessaire dans plusieurs cas. On pourra citer de manière non exhaustive :

- la prospection des ressources naturelles, où les méthodes potentielles (étude du champ magnétique et de gravité) sont généralement utilisées pour réaliser une première exploration d'une zone d'intérêt. En effet, une partie importante des hydrocarbures se trouve dans des bassins sédimentaires en bordure des continents. En reflétant la distribution de densité dans le sous-sol, la mesure du champ de gravité permet d'avoir une première idée de la configuration géologique, évitant ainsi l'utilisation de



moyens plus onéreux tels que les campagnes sismiques ou les forages prospectifs. En outre, ces mesures permettent d'apporter des contraintes sur l'estimation de certains paramètres géologiques, comme par exemple l'épaisseur d'une couche de sédiments. Comme cela est décrit plus loin dans la section 1.4.2, les méthodes gravimétriques sont d'ailleurs parmi les premières méthodes d'investigation à être utilisées systématiquement en prospection pétrolière [25]. Parfois, les méthodes potentielles et la gravimétrie en particulier sont les seules méthodes permettant d'améliorer l'imagerie d'une zone où la sismique échoue. C'est le cas typiquement lorsque l'on cherche à caractériser la base des dômes de sel [26]. Les dômes de sel sont des structures diapiriques dont la forte réflectance va empêcher la pénétration des ondes sismiques, rendant impossible l'imagerie plus en profondeur. La gradiométrie en gravimétrie permet alors dans ce cas de fortement contraindre la géométrie du dôme [27].

- La détermination du géoïde comme référence altimétrique à terre comme en mer. La définition d'une altitude nécessite théoriquement de connaître la direction de la verticale locale, donnée par le champ de gravité et la référence des altitudes [4]. Cette dernière est définie physiquement par une surface équipotentielle du champ de pesanteur passant par un point de référence. En choisissant une définition énergétique (le potentiel est une énergie massique) plutôt qu'une définition purement géométrique, on peut ainsi mieux rendre compte du potentiel d'écoulement des eaux [28]. Historiquement, le point de référence des altitudes est pris en un point de la côte où le niveau moyen de la mer est estimé. Dans le cas de la France par exemple, il s'agit par convention du niveau moyen estimé au marégraphe de Marseille entre 1885 et 1897 [29]. On peut noter que du fait des variations séculaires du niveau de la mer, le niveau moyen actuel de la mer à Marseille est 11cm au dessus de la référence retenue. Cette variation n'est pas seulement temporelle mais aussi spatiale, de sorte que les déterminations du niveau moyen de la mer réalisées par différents pays peuvent varier de plusieurs dizaines de centimètre, ces variations se répercutant ensuite sur la détermination des altitudes qui en découle. Une telle différence s'explique par l'approximation consistant à considérer que le niveau moyen de la mer en un point passe par le géoïde. Ce dernier, comme il a été défini dans l'introduction, est la surface équipotentielle de pesanteur qui se confondrait avec la surface libre d'un océan hypothétique recouvrant l'ensemble de la Terre et uniquement soumis à l'attraction gravitationnelle et la rotation de celle-ci. Ceci étant, il apparaît que l'unification des systèmes de références passe par la définition précise et globale du géoïde afin que toutes les altitudes soient rapportées de manière consistante à celui-ci [28] [30] [31]. Outre l'unification des systèmes nationaux de nivellement, une meilleure connaissance du géoïde est un outil important dans la prévention de certains risques, notamment près des côtes. Ainsi, le projet *Gravity for the Redefinition of the American Vertical Datum* ou GRAV-D, mené par le NGS et qui vise à redéfinir la référence géodé-

sique américaine (American Vertical Datum) à l'horizon 2022 pourrait contribuer à économiser 3,6 milliard de dollars sur 15 ans [32], grâce notamment à une meilleure connaissance du risque d'inondation.

- la navigation passive où la connaissance exacte du champ de gravité est une condition primordiale pour assurer la précision du positionnement. Ce type de navigation, généralement rencontré dans le domaine militaire, consiste en effet à estimer sa position en utilisant uniquement des mesures inertielles, assurant ainsi l'indépendance vis-à-vis des moyens de localisation de type GNSS (*Global Navigation Satellite System*). Le principe de la navigation passive classique est de mesurer avec une centrale inertielle l'accélération du porteur par rapport à un repère inertiel. De cette mesure et connaissant la position initiale on peut alors par un traitement adapté et une double intégration déduire ses coordonnées dans le repère terrestre. En toute rigueur, c'est l'accélération cinématique qu'il faut intégrer. De ce fait, il faut d'abord soustraire l'accélération de la pesanteur des mesures inertielles qui elles ne permettent pas de faire la distinction entre les deux types d'accélération, en vertu du principe d'équivalence. Étant donnée la double intégration, minimiser l'erreur sur la connaissance du champ de pesanteur est critique pour limiter la dérive de l'estimation de la position [33]. En outre, d'autres principes de navigation passive utilisant le champ de gravité et plus particulièrement les gradients de gravité font actuellement l'objet de recherches importantes [33][34].

Une application sera plus particulièrement développée dans ce mémoire et concerne le suivi de la circulation océanique. Elle fait l'objet de la partie suivante où le lien avec la nécessité d'une bonne connaissance du champ de gravité à haute-résolution sera établi.

### 1.1.3 Cas du suivi de la circulation côtière

Le suivi, la compréhension et la prévision de la circulation côtière permettent de mieux connaître une des forces naturelles majeures impactant l'environnement côtier. Ces courants conditionnent entre autres le transport des sédiments, des polluants et nutriments ainsi que l'équilibre écologique des côtes [35]. L'observation spatiale a révolutionné notre connaissance des propriétés de l'océan et de sa dynamique, en offrant une couverture globale, répétitive et haute-résolution de sa surface. La salinité, la température et la couleur de surface, mais aussi la rugosité et les variations de hauteur de la surface d'eau sont les principales observables à partir desquelles les propriétés physiques de l'océan peuvent être étudiées, à l'échelle globale ou locale. En particulier, la mesure des variations de hauteur de la surface de l'eau ou niveau de la mer, s'est particulièrement développée avec les progrès de l'altimétrie spatiale [36] (voir section 1.3). Plus précisément, on définit la hauteur du niveau

## Chapitre 1. La gradiométrie en gravimétrie comme moyen d'étude du milieu côtier

de la mer, noté par la suite SSH (acronyme de *Sea Surface Height* couramment utilisé), comme la hauteur ellipsoïdale de la surface libre de la mer en un point et un instant donnés (voir figure 1.1). La hauteur du niveau de la mer varie dans le temps et l'espace. Or, en l'absence de perturbations (marées, forçages extérieurs, gradients internes de pression, salinité et température), la surface libre des océans à l'équilibre hydrostatique se confond avec une équipotentielle du champ de pesanteur, qui est par définition le géoïde. La différence entre la SSH et le géoïde est donc liée à la présence de perturbations qui provoquent l'apparition de courants, induisant des ondulations de la SSH autour de la surface d'équilibre du géoïde. Cet écart appelé topographie dynamique (abrégié en SST pour *Sea Surface Topography*, acronyme le plus couramment utilisé) et noté  $\zeta$  (cf. figure 1.1) est donné par la relation :

$$\zeta = SSH - N \quad (1.1)$$

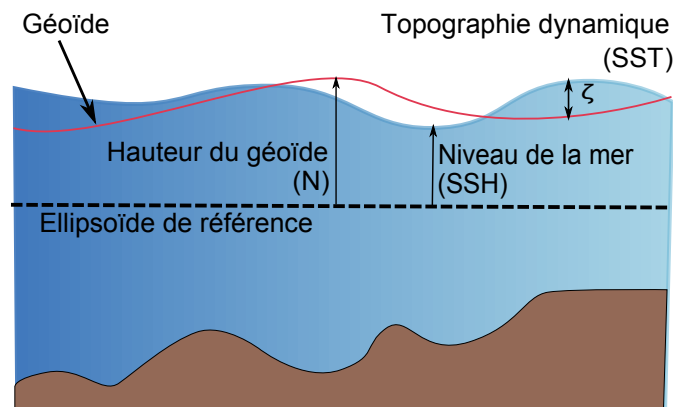


FIGURE 1.1 – Illustration de la notion de topographie dynamique des océans

La topographie dynamique, dont l'amplitude est au maximum de l'ordre de  $\pm 1\text{m}$ , constitue donc un reflet de la dynamique océanique. La moyenne temporelle  $\langle SSH \rangle$  de SSH permet de la même manière de calculer la topographie moyenne dynamique  $\langle \zeta \rangle$ , qui reflète elle la topographie dynamique due aux courants permanents[37]. L'information contenue dans  $\zeta$  sur les caractéristiques des courants qu'elle révèle va dépendre du raffinement de la modélisation utilisée. Un exemple simple de relation liant la SST à la dynamique des courants océaniques est donné par les courants à l'équilibre géostrophique (courants à faible nombre de Rossby), pour lesquels les forces de gradient de pression et de Coriolis s'équilibrent. En notant  $u$  (resp.  $v$ ) la composante nord-sud (resp. est-ouest) du champ de vitesse du courant

de surface à l'équilibre géostrophique, on établit les relations suivantes [36] :

$$u = -\frac{g}{2\Omega \sin \phi a} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} \quad (1.2)$$

$$v = \frac{g}{2\Omega \sin \phi a \cos \phi} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} \quad (1.3)$$

Où  $\Omega$  est la vitesse de rotation de la Terre en  $rad.s^{-1}$ ,  $a$  le rayon de Terre,  $g$  la pesanteur et  $\rho$  la masse volumique de l'eau de mer. On aura par exemple à  $30^\circ$  de latitude pour une pente équivalente à  $\zeta = 1cm$  sur une distance de 10km une vitesse de surface d'environ  $10cm.s^{-1}$ . On note à travers cet exemple que ce qui est porteur d'information ici, et de manière générale, n'est pas tant la topographie dynamique  $\zeta$  que la pente de la surface libre par rapport à celle du géoïde. Typiquement, la SSH est déterminée par altimétrie. La pente du géoïde doit quant à elle être déterminée de manière indépendante par des mesures gravimétriques [37].

A ce titre, l'interprétation du tenseur gradient en termes géométriques nous a semblé particulièrement intéressante. Les dérivées secondes du potentiel de gravité rassemblées dans le GGT sont en effet liées à des quantités géométriques : les courbures de surfaces équipotentielles et des lignes de champ. Il apparaît donc pertinent d'établir une relation entre les gradients de gravité et la pente du géoïde ou une de ses fonctionnelles afin de mettre à profit de manière originale les mesures gradiométriques aéroportées en domaine côtier. Un travail a été mené afin de trouver une telle relation. On peut tout d'abord établir facilement que la pente du géoïde en un point est entièrement définie par la donnée des deux composantes de la déviation de la verticale,  $\xi$  pour l'azimut nord-sud et  $\eta$  selon l'azimut est-ouest (*cf.* Annexe IV, section D.1.2). Dès lors, il suffit d'établir les deux équations permettant de calculer l'évolution de ces deux quantités en fonction des gradients de pesanteur. On trouvera dans l'Annexe IV section D.1.3 les détails du principe de calcul de  $\xi$  et  $\eta$  à partir des gradients de pesanteur sur une grille de points. Ce type de calcul est à rapprocher des méthodes astrogéodésiques de détermination du géoïde (*cf.*[4]) et consiste en la résolution de deux équations aux différences finies :

$$\xi_i - \xi_k = \frac{1}{2T_z} \left( \begin{bmatrix} T_{yx}^k \\ T_{yy}^k \\ T_{yz}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{yx}^i \\ T_{yy}^i \\ T_{yz}^i \end{bmatrix} \right)^t \cdot \vec{l} + \varphi_k - \varphi_i \quad (1.4)$$

$$\eta_i - \eta_k = \left( \frac{1}{2T_z} \left( \begin{bmatrix} T_{xx}^k \\ T_{xy}^k \\ T_{xz}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{xx}^i \\ T_{xy}^i \\ T_{xz}^i \end{bmatrix} \right) \cdot \vec{l} + \lambda_k - \lambda_i \right) \cos\left(\frac{\varphi_i + \varphi_k}{2}\right) \quad (1.5)$$

où les indices  $i$  et  $k$  (en exposant pour les composantes du tenseur gradient de pesanteur  $\underline{T}$ ) réfèrent à deux points  $P_i$  et  $P_k$  de coordonnées ellipsoïdales respectives  $(\varphi_i, \lambda_i)$  et  $(\varphi_k, \lambda_k)$  suffisamment proches pour considérer la variation du tenseur gradient de pesanteur  $\underline{T}$  linéaire entre ces deux points,  $\vec{l} = \overrightarrow{P_k P_i}$  et  $x, y$  et  $z$  désignent les coordonnées du repère géographique local en  $P_k$ . La résolution complète de ces équations nécessite toutefois de connaître les composantes de la déviation de la verticale en au moins un des points de la grille ainsi que la valeur de la pesanteur  $T_z \approx g$ . La résolution numérique de ces équations sur un exemple synthétique n'a pas été faite par manque de temps. Toutefois cet exercice serait intéressant afin de tester la précision atteinte, l'influence des différentes méthodes d'intégration des équations ou encore du niveau de bruit sur les gradients de pesanteur.

L'extension spatiale du courant et la précision que l'on veut atteindre sur le champ de vitesse vont dicter la résolution et la précision à obtenir sur  $\zeta$ . La dynamique des courants océaniques sur les plateaux et talus continentaux est complexe du fait des nombreux processus de forçage qui interviennent et de leurs interactions [38]. Les marées, le vent, les structures turbulentes induites par les instabilités de la circulation générale et la rencontre avec des eaux douces issues des fleuves sont les principaux moteurs de ces courants. Ces courants sont souvent très intenses et leur comportement chaotique [23]. De plus, ils se développent à des échelles spatiales de l'ordre de quelques dizaines de kilomètres. On parle de circulation mésoéchelle pour les structures mettant en jeu des échelles spatiales de l'ordre de la centaine de kilomètres et submésoéchelle pour des échelles entre le kilomètre et la dizaine de kilomètre [39]. A titre d'exemple, les principales caractéristiques des courants situés dans le golfe de Gascogne (*cf.* 1.2) sont résumées dans le tableau 1.1.

Courants	échelle spatiale (km)	durée de vie (h)	$\zeta$ (m)
courant de bord	30	1400	1
courant sur le talus	10-100	$\geq 3$	0,001-0,1
tourbillons	20	$\geq 3$	0,08
courant de marées	50-100	$\geq 3$	1
upwelling/downwelling	10	$\geq 3$	0,15

TABLE 1.1 – Principales caractéristiques des courants se formant dans le golfe de Gascogne. D'après [40], [41] et [1]

On peut dès lors se poser la question suivante : les variations du géoïde pour les échelles

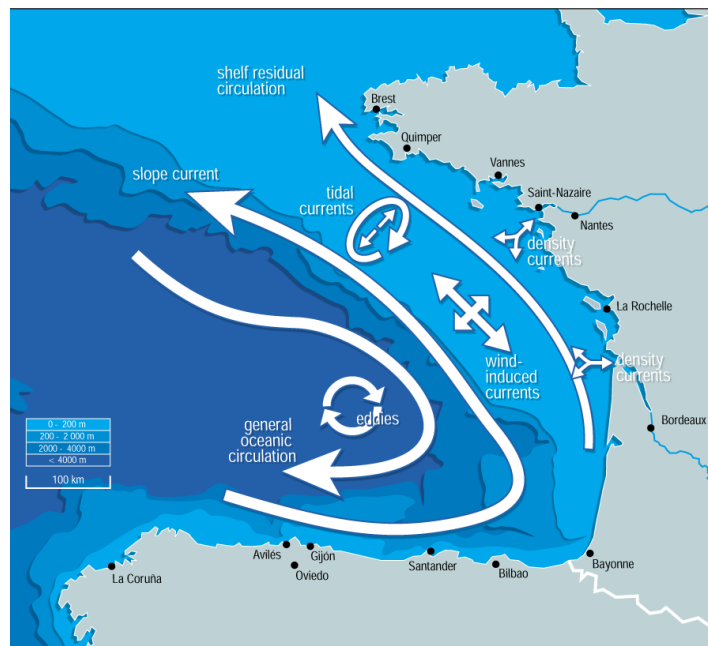


FIGURE 1.2 – Courants de différentes natures se formant dans le golfe de Gascogne, jusqu'à la limite du plateau continental. Source : <http://www.eoearth.org/view/article/150448/> (consulté le 27/08/2014) d'après l'article de Koutsikopoulos *et al.* [1].

comprises entre 1 et 100km sont-elles significatives pour être prise en compte dans la détermination précise de la topographie dynamique de mésoéchelle et submésoéchelle ? En d'autres termes, l'amplitude des ondulations du géoïde à ces échelles sont-elles négligeables par rapport à celle des courants ? On peut se rendre compte de l'ordre de grandeur de cette amplitude sur l'exemple du golfe de Gascogne. L'objectif est d'estimer si dans cette région le géoïde présente encore de "l'énergie" pour les longueurs d'ondes inférieures à 100km. La figure 1.3 représente les ondulations du géoïde filtré pour ne conserver que les longueurs d'onde inférieures à 100km. Le modèle de champ de gravité utilisé pour calculer ce géoïde est EIGEN-6C2 [42]. Ce modèle de champ se présente sous forme de développement en harmoniques sphériques jusqu'au degrés/ordre 1949, soit une résolution spatiale d'un peu plus de 10km. La synthèse de ce modèle est une combinaison de données des missions GRACE, GOCE, LAGEOS, de mesures d'altimétrie spatiale sur les océans et d'un ensemble de mesure du champ de gravité en mer et sur terre. Le géoïde qui en est déduit est filtré passe-haut au degrés/ordre 223, soit une résolution spatiale de 90km. Afin d'atténuer les effets de bords dus à la troncature du spectre, notamment au niveau de la marge continentale, on utilise une fenêtre d'apodisation gaussienne. On observe alors sur le résultat final des ondulations d'amplitude maximale typiquement de l'ordre de  $\pm 2m$ . L'écart-type de ces ondulations est de 34cm. Comparée à l'amplitude typique de la topographie dynamique des courants considérés, l'ondulation du géoïde aux échelles inférieures à 100km n'est pas négligeable. En outre on peut noter que ce résultat est sous-estimé du fait que le modèle de

champ utilisé ne permet pas de prendre en compte la contribution des longueurs d'onde inférieures à 10km.

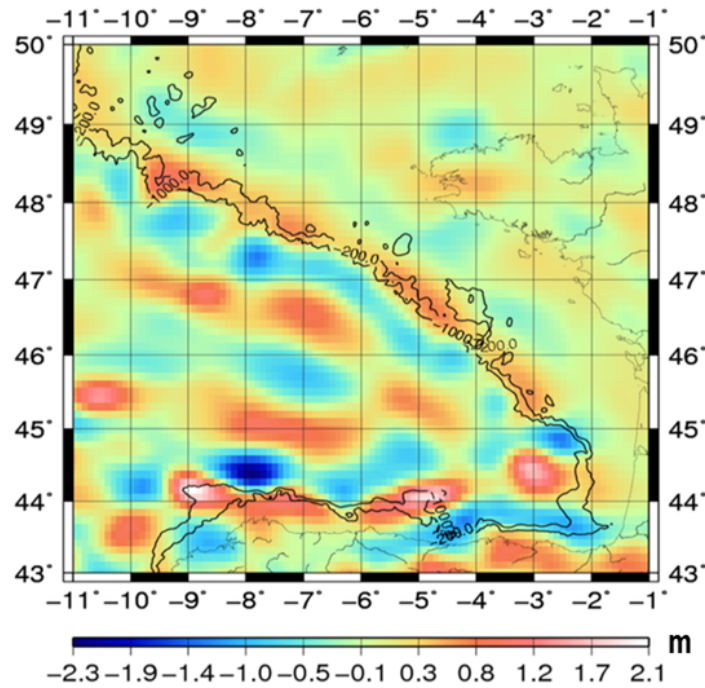


FIGURE 1.3 – Ondulations du géoïde issu du modèle sur le Golfe de Gascogne, pour les longueurs d'onde inférieures à 100km.

La détection de la topographie dynamique  $\zeta$  va donc nécessiter des mesures de SSH et des modèles de géoïdes gravimétriques à haute-résolution. Pourtant, comme on le verra dans la suite de ce chapitre, c'est précisément à ces échelles spatiales que la détermination du géoïde est limitée, notamment du fait du manque de données gravimétriques.

## 1.2 Le champ de gravité et ses gradients

Avant de voir plus en détails les principales techniques permettant d'accéder à une connaissance du champ de gravité à haute-résolution, il est pertinent de se demander quelle observable du champ est la plus à même de révéler les fines variations du champ. Par observable on entend ici une quantité déterminable par la mesure et qui est directement liée au champ de gravité par une fonction mathématique. Dans cette section nous allons plus particulièrement présenter une des observables du champ qui est au centre de ce travail et de l'instrument GREMLIT : le tenseur gradient de gravité.

### 1.2.0.1 Tenseur gradient de gravité

On rappelle (cf. Annexe I) qu'une distribution de masse crée un potentiel gravitationnel  $V$  défini en tout point  $M$  en dehors des masses par :

$$V = \mathcal{G} \iiint_{P \in v} \frac{\rho \cdot dv}{\|\vec{PM}\|} \quad (1.6)$$

où  $dv$  est un élément infinitésimal de volume et  $\rho$  est la masse volumique. De ce potentiel découle un champ de gravité  $\vec{a}^g$ , homogène à une accélération donné par :

$$\vec{a}^g = \vec{\nabla} V \quad (1.7)$$

Les mesures gravimétriques (au sol, en mer ou dans les airs) les plus répandues consistent la plupart du temps à déterminer l'amplitude de la gravité (gravimétrie scalaire) et dans une moindre mesure les trois composantes de  $\vec{a}^g$  (gravimétrie vectorielle). Outre la mesure directe de la gravité, qui reste encore très largement utilisée, une autre manière d'accéder au champ de gravité consiste à déterminer par la mesure ses dérivées spatiales, encore appelées gradients de gravité. Le tenseur gradient de gravité, par la suite abrégé en GGT (pour *Gravity Gradient Tensor*) est noté  $\underline{\underline{V}}$ . Le terme *gravity* en anglais désigne la pesanteur et non la gravité. Toutefois l'expression *Gravity Gradient Tensor* est généralement utilisée dans la littérature pour désigner le tenseur gradient de gravité. Ce tenseur d'ordre 2 est assimilable à la matrice jacobienne du champ de gravité, soit une matrice carrée de dimension  $3 \times 3$ . Étant donné que le champ de gravité dérive du potentiel  $V$ , le GGT est aussi la matrice hessienne de  $V$ , regroupant les dérivées spatiales secondes du potentiel :

$$\underline{\underline{V}} = \mathbb{J}(\vec{\nabla} V) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} V & \partial_{xy} V & \partial_{xz} V \\ \partial_{yx} V & \partial_{yy} V & \partial_{yz} V \\ \partial_{zx} V & \partial_{zy} V & \partial_{zz} V \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les coordonnées d'une base de l'espace.  $\underline{\underline{V}}$  est symétrique et d'après l'équation A.5 (voir Annexe I), sa trace est nulle en dehors des sources. Les gradients de gravité sont homogènes à une accélération par unité de longueur et sont généralement exprimés en Eötvös (E) avec  $1E = 10^{-9} s^{-2} = 0,1 \mu gal.m^{-1}$ .

Le champ de gradient de gravité créé par une masse parallélépipédique de densité constante et calculé à une hauteur constante par rapport au plan de sa face supérieure est illustré Figure 1.4. Cette figure montre la sensibilité des gradients de gravité à la géométrie des variations de densité, soulignant ainsi les contours de la structure. Les gradients  $V_{xx}$  et



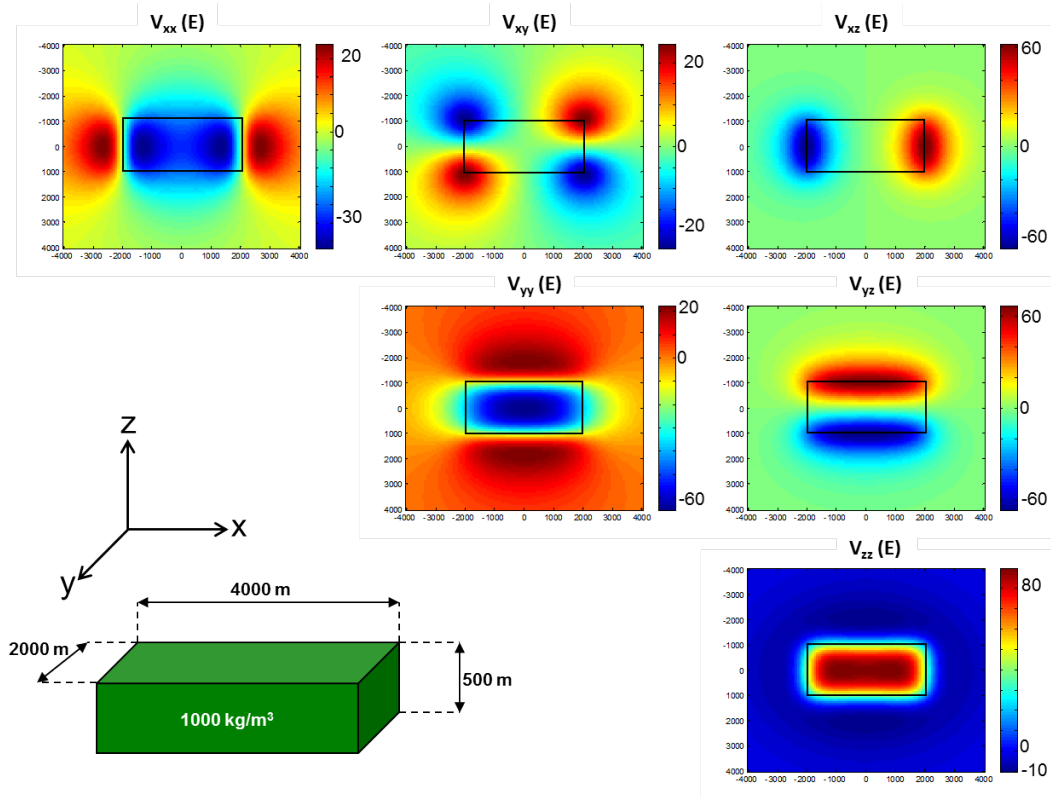


FIGURE 1.4 – Illustration du GGT créé par une masse parallélépipédique de  $4 \times 10^9$  de tonnes, observé sur un plan situé à 200m d'altitude par rapport à la face supérieure.

$V_{xz}$  (resp.  $V_{yy}$  et  $V_{yz}$ ) selon la direction  $x$  (resp.  $y$ ) mettent en relief les structures allongées selon la direction  $y$  (resp.  $x$ ). La directionnalité des gradients de gravité est une qualité importante, particulièrement mise à profit dans l'identification de la géométrie de structures géologiques en prospection géophysique. Par ailleurs, diverses méthodes utilisant les propriétés algébriques du tenseur ont été développées pour obtenir des informations complémentaires pour une meilleure interprétation des données gradiométriques. Elles permettent de mieux contraindre la profondeur, les dimensions, l'épaisseur et le contraste de densité des sources [43], ou encore de réaliser des filtres non-linéaires mettant en relief les contours des structures géologiques enfouies [44]. En particulier, les gradients de gravité verticaux ont montré leurs intérêts pour délimiter les discontinuités de densités en 3D, notamment dans le cas du chevauchement de plusieurs structures [45]. Étant un tenseur réel symétrique, le GGT peut être diagonalisé et possède par conséquent trois vecteurs propres. Dans le cas d'une masse ponctuelle, on peut montrer théoriquement qu'en tout point de son voisinage, le vecteur propre du GGT associé à la plus grande valeur propre (en valeur absolue) pointent vers sa position [46]. Beiki *et al.* (2010) [47] montrent comment ces vecteurs propres peuvent être utilisés afin d'estimer la profondeur du centre de masse des sources, et dans le cas de structures aplaties, leurs pendage. Outre les vecteurs propres, le

GGT possède 3 invariants par rotation. Ces invariants sont donc caractéristiques du champ de gravité local et par la même des masses qui en sont la source. C'est ainsi que Pedersen *et al.* (1990) [46] ont mis en évidence un indice adimensionnel variant entre 0 à 1 permettant de caractériser la structure plus ou moins aplatie de la masse enfouie. Mikhailov *et al.* (2007) [48] combinent eux les invariants du tenseur et la méthode de déconvolution d'Euler dans une méthode appelée déconvolution tensorielle afin de localiser les centres de masse de sources équivalentes.

### 1.2.0.2 Gradient de gravité et résolution spatiale du champ

Une autre qualité importante liée à la mesure des gradients de gravité est la plus grande sensibilité aux courtes longueurs d'onde du champ, comparativement à la mesure de la gravité. La mesure des gradients de gravité peut en effet être vue comme le résultat d'un filtre dérivateur dont l'effet est d'amplifier les hautes fréquences du signal gravitationnel. Cette propriété est également mise à profit pour la prospection géophysique où les dimensions des structures que l'on cherche à identifier varient entre la centaine de mètres et plusieurs kilomètres. Dans le cadre de ce travail, où on se focalise sur l'obtention d'une meilleure résolution spatiale sur le champ de gravité, c'est plus particulièrement cette propriété d'amplification des courtes longueurs d'ondes qui sera mise en avant. On se propose donc d'illustrer et de quantifier de deux manières différentes la plus grande sensibilité aux courtes longueurs d'onde du champ par rapport à la mesure plus classique de la gravité. La première manière d'illustrer ce point est de comparer la résolution théorique du champ accessible par la mesure des gradients par rapport à la mesure de la gravité. Pour cela on s'inspire de la méthode développée par Hwang *et al.* (2007)[2] qui permet de dériver de manière théorique et indépendamment des caractéristiques des instruments de mesure la résolution accessible en fonction de l'altitude, pour ces observables. Cette méthode s'appuyant sur un modèle de potentiel perturbateur globale noté  $D$  (pour plus de détails sur cette notion, voir la section A.1.4 de l'annexe I), les conclusions qui en résultent ne sont valables qu'en moyenne. Toutefois elles permettent de donner une première idée de la résolution du champ atteignable par la détermination de l'observable gradients de gravité par rapport à l'observable gravité. Le principe de la méthode ainsi que le modèle de champ utilisés pour déduire la résolution théorique dans le cas de la détermination des observables  $D_{zz} = \partial_{zz}D$  et de  $D_z = \partial_z D$  sont détaillés dans l'annexe III. Ici  $z$  correspond à la direction de la verticale ellipsoïdale  $Z_{ENU}$  (voir Figure 1.11) et  $D_z$  peut en première approximation être interprétée comme l'anomalie de gravité et  $D_{zz}$  comme l'anomalie de gradient de gravité vertical. Les résultats de l'application de cette technique sont exposés dans la Figure 1.5, où la résolution théorique est tracée en fonction de la hauteur de mesure pour la détermination de l'anomalie de gravité en bleu et l'anomalie de gradient de gravité vertical en rouge.

On voit ici que la résolution minimale sur le champ de gravité à une altitude donnée est

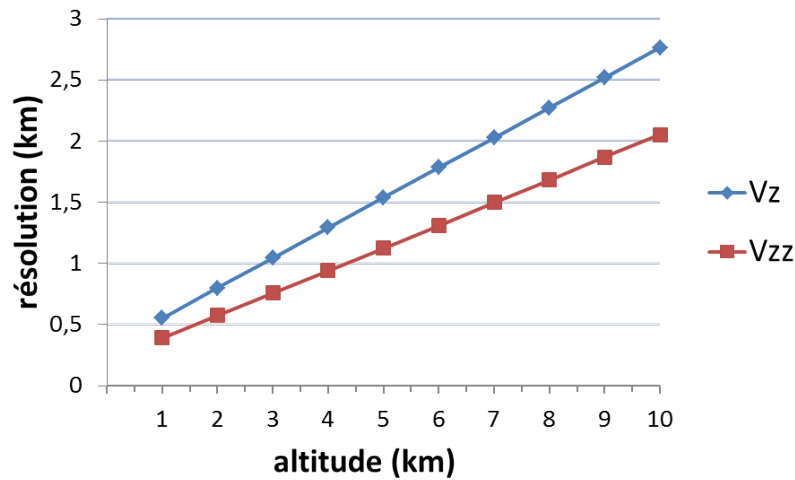


FIGURE 1.5 – Résolution sur le champ de gravité théoriquement atteignable pour un relevé aéroporté, en fonction de l'altitude. En bleu la résolution maximale atteinte grâce à la détermination de  $D_z$ , en rouge celle atteinte grâce à la détermination de  $D_{zz}$

meilleure lorsque c'est l'anomalie de gradient qui est déterminée. On retrouve également que la résolution spatiale minimale augmente dans les 2 cas avec l'altitude, comme on pouvait s'y attendre. Cependant elle augmente plus vite dans le cas de la détermination de l'anomalie de gravité que dans le cas de l'anomalie de gradient vertical. Ainsi pour des altitudes comprises entre 0,5 et 10km on peut établir une relation linéaire empirique entre la résolution minimale théorique  $\epsilon$  et la hauteur  $h$  de réalisation des mesures : pour l'anomalie de gravité on trouve  $\epsilon \propto 0.245h$  et pour l'anomalie de gradient  $\epsilon \propto 0.185h$ . Ces résultats restent toutefois purement théoriques et sont susceptibles d'être dégradés par les post-traitements et par l'erreur présente sur les mesures. En outre ils dépendent fortement du contenu spectral du champ, qui peut être à l'échelle régionale très différent de celui calculé à l'échelle globale.

La seconde manière de mettre en évidence et quantifier cette amplification des hautes fréquences du champ est de comparer la part de l'énergie du signal associée aux courtes longueurs d'onde, dans le cas de la détermination de  $D_{zz}$  et de  $D_z$ . Pour ce faire, on utilise le modèle de champ de gravité global développé en harmoniques sphériques et le formalisme introduits tout deux dans l'annexe III. A partir de ce modèle on dérive le spectre en degré-variance  $p_z^2(n)$  (resp.  $p_{zz}^2(n)$ ) de  $D_z$  (resp. de l'anomalie en  $D_{zz}$ ). On peut dès lors calculer le rapport  $\rho(N) = \sum_{n=N}^{+\infty} p_z^2(n) / \sum_{n=2}^{+\infty} p_z^2(n)$  (resp.  $\rho(N) = \sum_{n=N}^{+\infty} p_{zz}^2(n) / \sum_{n=2}^{+\infty} p_{zz}^2(n)$ ) entre l'énergie du signal associé aux harmoniques de degré supérieur à  $N$  et l'énergie totale du signal. Ce rapport dépend par ailleurs de la hauteur à laquelle il est évalué : le facteur de propagation verticale présent dans le développement en harmoniques sphériques du champ montre en effet que plus le degré est grand plus l'amplitude du signal qui lui est

## 1.2. Le champ de gravité et ses gradients

associé diminue rapidement avec l'altitude. Enfin, on rappelle que le degré  $N$  d'une harmonique est directement associé à une résolution spatiale  $\epsilon$  selon la relation  $\epsilon = 20000/N$  km. On évalue donc le rapport  $\rho(N)$  pour différentes valeurs de  $N$  associées aux longueurs d'ondes 100, 50, 10 et 5km pour les observables  $D_z$  et  $D_{zz}$ . Les résultats sont donnés dans le tableau 1.2 pour une évaluation à une hauteur de 1km et dans le tableau 1.3 pour une évaluation à 10km de hauteur.

	$\rho$ (%) pour $D_{zz}$	$\rho$ (%) pour $D_z$
$\epsilon \leq 100\text{km}$	95	16
$\epsilon \leq 50\text{km}$	85	6
$\epsilon \leq 10\text{km}$	40	0,3
$\epsilon \leq 5\text{km}$	16	0,046

TABLE 1.2 – Part en % de l'énergie du signal d'anomalie de gradient de gravité vertical  $D_{zz}$  (resp. du signal d'anomalie de gravité  $D_z$ ) associée aux longueurs d'onde inférieures à 100, 50, 10 et 5 km, pour un champ de gravité calculé à une hauteur de 1km.

	$\rho$ (%) pour $V_{zz}$	$\rho$ (%) pour $V_z$
$\epsilon \leq 100\text{km}$	70	7
$\epsilon \leq 50\text{km}$	35	1,3
$\epsilon \leq 10\text{km}$	0,15	$3,5 \times 10^{-4}$
$\epsilon \leq 5\text{km}$	$2,4 \times 10^{-4}$	$1,6 \times 10^{-7}$

TABLE 1.3 – Part en % de l'énergie du signal d'anomalie de gradient de gravité vertical  $D_{zz}$  (resp. du signal d'anomalie de gravité  $D_z$ ) associée aux longueurs d'onde inférieures à 100, 50, 10 et 5 km, pour un champ de gravité calculé à une hauteur de 10km.

On peut constater à travers ces deux tableaux qu'à altitude donnée, l'énergie du signal associé aux variations du champ de gravité inférieures à 100km est toujours plus grande dans le cas de l'observation de  $D_{zz}$  que de  $D_z$ , comme on pouvait s'y attendre. Ainsi, les structures du champ inférieures à 10km représentent en moyenne 40% du signal lorsqu'on observe  $D_{zz}$ , contre seulement 0,3% lorsqu'on observe  $D_z$ . En outre, il existe une relation linéaire liant la longueur d'onde d'une ondulation du champ de gravité à la profondeur maximale de la source qui pourrait en être la cause [49]. Par cette relation on trouve par exemple que pour un champ de gravité évalué à 1km de hauteur, 84,7% du signal  $D_{zz}$  est causé par des sources se situant au plus à une profondeur de 50km. Comparativement, c'est moins de 15% du signal  $D_z$  qui correspond à cette couche. Encore une fois, ces résultats se basent sur un modèle de champ global et sont donc vérifiés en moyenne à travers le globe. Ils donnent toutefois une première indication sur les caractéristiques de ce que l'on peut déterminer avec ces deux observables lors d'un relevé aéroporté.

### 1.2.0.3 Gradient de gravité et séparation des sources

Une conséquence de cette plus grande sensibilité des gradients de gravité aux courtes longueurs d'onde est un meilleur "pouvoir séparateur" comparé à celui de l'observable gravité. Par pouvoir séparateur on entend ici la capacité à discerner deux sources ponctuelles identiques, proches mais disjointes, à partir du signal observé. On va comparer cette fois-ci les signaux  $V_z$  et  $V_{zz}$  avec un indicateur de pouvoir séparateur, noté  $\alpha$ . Pour pouvoir définir cet indicateur on se place dans un cas à deux dimensions et on s'intéresse aux deux signaux,  $V_z$  et  $V_{zz}$ , calculés sur un même profil à la hauteur  $H$ , comme indiqué sur la Figure 1.6. La forme du signal est dans les deux cas constituée de deux pics situés au-dessus des masses ponctuelles et qui peuvent coalescer en un seul pic selon la configuration des masses ponctuelles et la hauteur  $H$ .

En suivant les notations de la Figure 1.6 l'expression de  $\alpha$  est donnée par :

$$\alpha = \frac{a_{min}}{a_{max}}$$

$\alpha$  varie de 0 à 1. On fixe de manière arbitraire  $\alpha_0 = 0, 1$  comme étant la limite de distinction des deux masses ponctuelles dans les signaux  $V_z$  et  $V_{zz}$ . On peut alors calculer l'évolution de l'indicateur  $\alpha$  en fonction de la hauteur  $H$  et de la distance  $d$  entre les deux masses ponctuelles. Afin d'être indépendant de la valeur de la masse de ces deux corps, on normalise ces deux signaux par la constante  $Gm$  où  $m$  est la masse d'une masse ponctuelle. Les résultats sont tracés sur la Figure 1.7.

Ces figures montrent que pour une hauteur  $H$  donnée, le gradient  $V_{zz}$  permet de séparer des masses ponctuelles distantes d'une longueur  $d$  encore plus petite que la longueur minimale dans le cas  $V_z$ . Inversement, pour une distance de séparation  $d$  donnée,  $V_{zz}$  permet de distinguer les deux sources à des altitudes supérieures à l'altitude maximale dans le cas  $V_z$ . De manière générale, le rapport  $\alpha$  est toujours plus grand dans le cas de  $V_{zz}$  que de  $V_z$ . En amplifiant les fines variations du champ, la mesure des gradients permet donc de mieux dissocier des corps disjointes que la mesure gravimétrique classique.

## 1.3 Méthodes spatiales pour la détermination du champ de gravité à haute-résolution

L'avènement de l'ère spatiale a grandement contribué aux progrès réalisés dans l'observation et l'étude de la Terre dans un cadre global. Les missions satellites ont été utilisées dès la fin des années cinquante pour étudier le champ de gravité de la Terre [50] et fournissent de nos jours des mesures du champ de gravité globales, homogènes et dans un

### 1.3. Méthodes spatiales pour la détermination du champ de gravité à haute-résolution

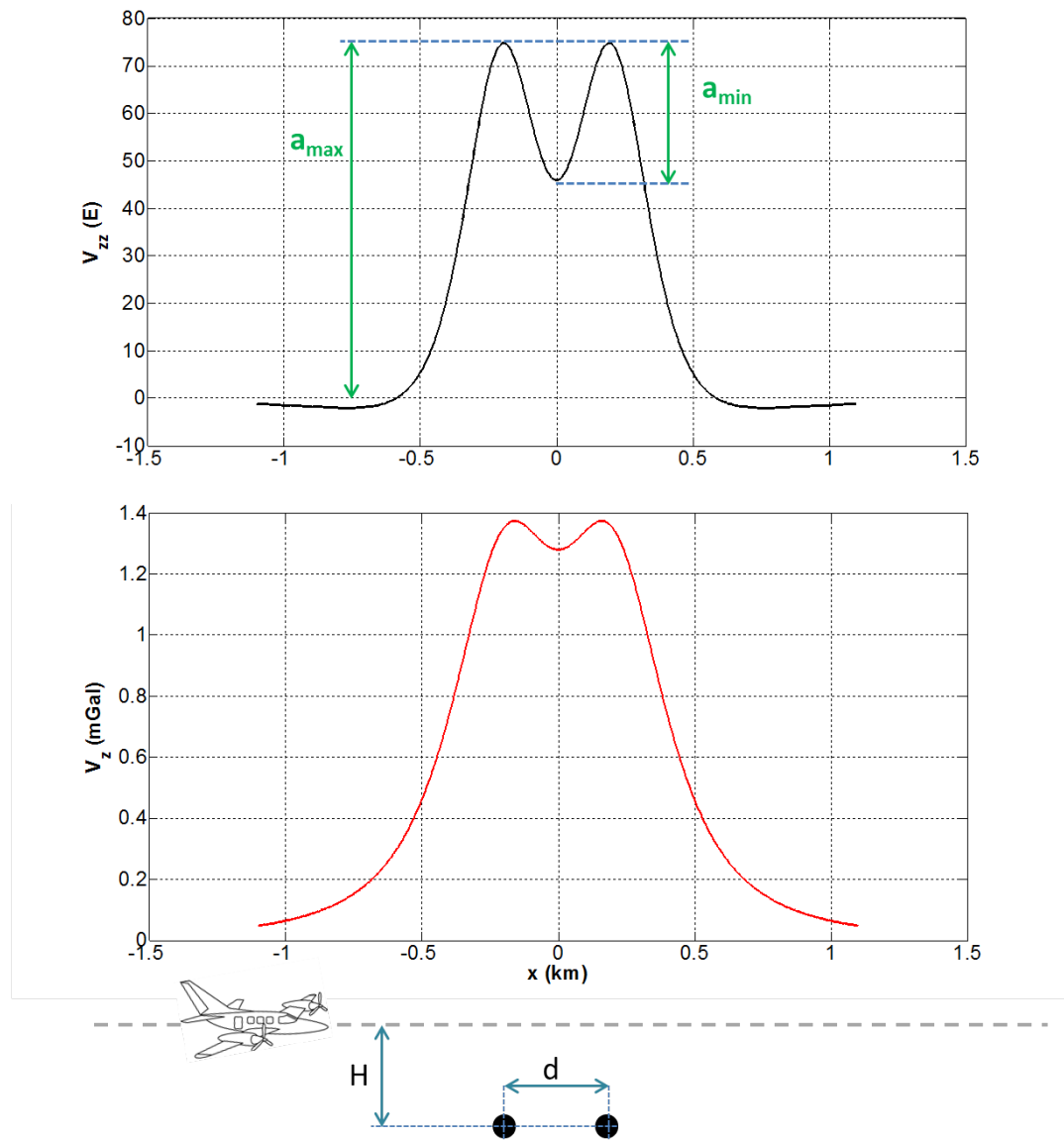


FIGURE 1.6 – Schéma illustrant le signal gravimétrique associé à 2 masses ponctuelles distantes de  $D$ , situées à une même profondeur  $H$  par rapport à la ligne de mesure. En rouge le profil de l'anomalie de gravité, en noir le profil de  $V_{zz}$ . Le paramètre  $\alpha$  est déterminé à partir des caractéristiques de ces profils.

intervalle de temps raisonnable. La qualité des observations spatiales du champ de gravité est cependant limitée, en particulier en ce qui concerne la détermination haute-résolution du champ de gravité et le milieu côtier. Deux types de techniques spatiales ont été et sont mises en œuvre pour accéder à des mesures directes ou indirectes du champ de gravité dit à haute-résolution : l'altimétrie et la gradiométrie en gravimétrie. Toutes deux ont été rendues possibles grâce aux importantes avancées réalisées dans le domaine de l'orbitographie de

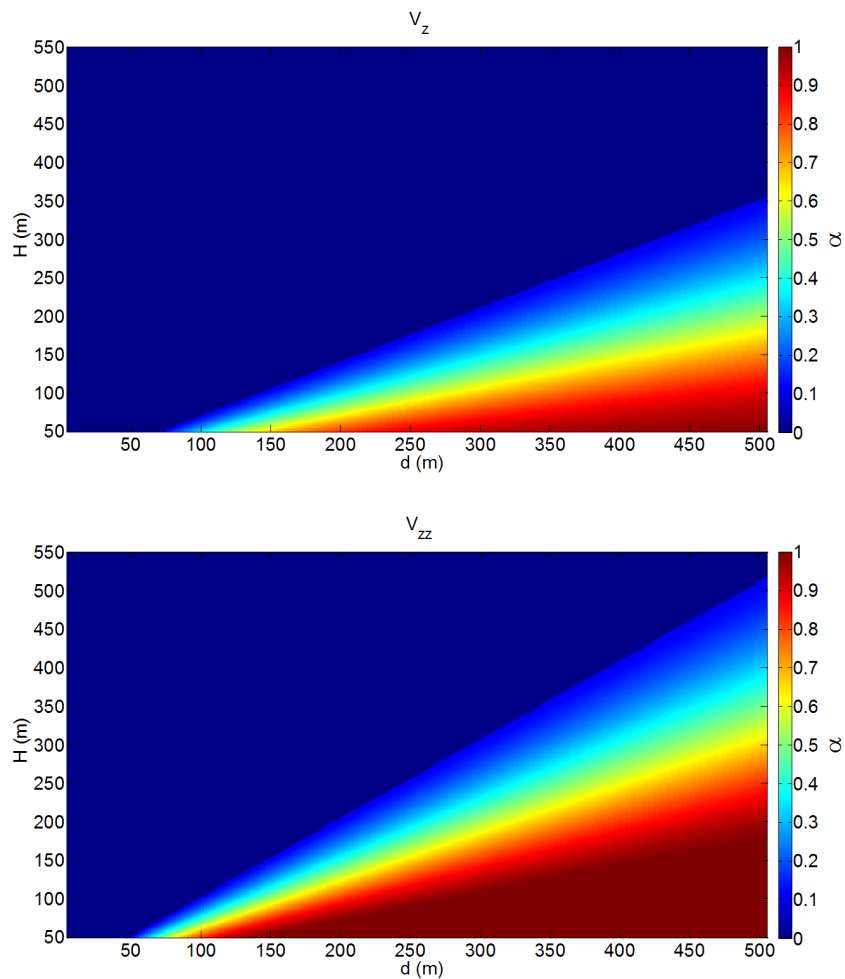


FIGURE 1.7 – .

Séparation de 2 sources ponctuelles vue à travers l'anomalie de gravité (en haut) et l'anomalie de gradient de gravité  $V_{zz}$  (en bas). Dans les 2 cas, le graphique représente l'évolution du paramètre  $\alpha$  en fonction de la distance entre les 2 masses et la hauteur à laquelle le signal gravimétrique associé est calculé.

précision. On peut noter que l'altimétrie revêt ici une double importance :

1. Elle constitue d'abord la première technique utilisée pour la détermination des anomalies de gravité à l'échelle planétaire (quoique restreinte au domaine océanique) grâce à la mesure de la hauteur moyenne de la surface des océans. Comme cela a été indiqué précédemment, si on néglige les courants permanents, la SSH moyenne notée  $\langle SSH \rangle$  correspond alors au géoïde et donc à une équipotentielle du champ de pesanteur. De la connaissance de l'ondulation de cette équipotentielle on peut ensuite remonter à l'anomalie de gravité associée. Cette méthode et ses limites sont plus longuement discutées par Sandwell (1997)[51]. Les mesures altimétriques peuvent

### **1.3. Méthodes spatiales pour la détermination du champ de gravité à haute-résolution**

également être combinées avec d'autres type de mesures, comme par exemple des mesures gravimétriques aéroportées afin d'obtenir une meilleure détermination du champ de gravité, notamment près des côtes [52].

2. Inversement, avec une précision sur la SSH devenue centimétrique aujourd'hui, les mesures altimétriques combinées avec un modèle de géoïde permettent de calculer la topographie dynamique (voir section 1.1.3) et donc de révéler la dynamique des courants océaniques. Pour que la topographie soit obtenue de manière consistante, les deux observables SSH et hauteur de géoïde doivent être estimées par des mesures indépendantes.

On constate donc avec ce dernier point le rôle complémentaire de la mesure altimétrique et de la mesure gravimétrique : la première pour l'estimation de la SSH, la seconde pour la détermination du géoïde gravimétrique. C'est notamment dans cette perspective que s'inscrit la mission GOCE, dont l'un des objectifs scientifiques principaux était précisément de déterminer un modèle de géoïde gravimétrique afin d'étudier de la circulation océanique en synergie avec l'altimétrie spatiale. Une telle démarche pourra également s'appliquer avec GREMLIT pour l'étude de la circulation mésoéchelle et submésoéchelle près des côtes. GOCE est la première mission de gradiométrie en gravimétrie spatiale. Étant données les nombreuses analogies du projet GREMLIT avec cette mission spatiale : objectifs scientifiques, technologies employées et traitement des mesures, la mission GOCE est également présentée de manière plus détaillée.

#### **1.3.1 La gradiométrie spatiale : GOCE**

##### **1.3.1.1 Description et objectifs de la mission GOCE**

La mission GOCE est la première mission de gravimétrie spatiale cherchant à atteindre une résolution proche de ce que l'on a défini comme la haute-résolution, à savoir la détection des structures du champ aux dimensions comprises entre 1 à 100km. GOCE (*Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer*) est une mission du programme Living Planet de l'ESA. L'objectif premier de la mission est de fournir une mesure de la composante statique du champ de gravité terrestre avec une grande précision et résolution spatiale. Plus spécifiquement, la mission vise [53] :

- La détermination des anomalies de gravité jusqu'à une résolution de 100km, avec une précision meilleure que 1mGal
- La détermination du géoïde jusqu'à une résolution de 100km, avec une précision de 1cm



## Chapitre 1. La gradiométrie en gravimétrie comme moyen d'étude du milieu côtier

---

Le satellite GOCE a été lancé le 17 mars 2009 et a été placé sur une orbite polaire héliosynchrone. Son altitude initiale en mode mesure était de 255km [54], soit une altitude où les frottements atmosphériques ne peuvent pas être négligés. De ce fait, GOCE était équipé d'un moteur ionique permettant de compenser la traînée du satellite pour d'une part maintenir le satellite en orbite et d'autre part pour diminuer l'accélération subie par les accéléromètres à un niveau acceptable. La mission a duré plus de 4 ans, soit plus que la durée spécifiée, avant de rentrer définitivement dans l'atmosphère terrestre le 11 novembre 2013.

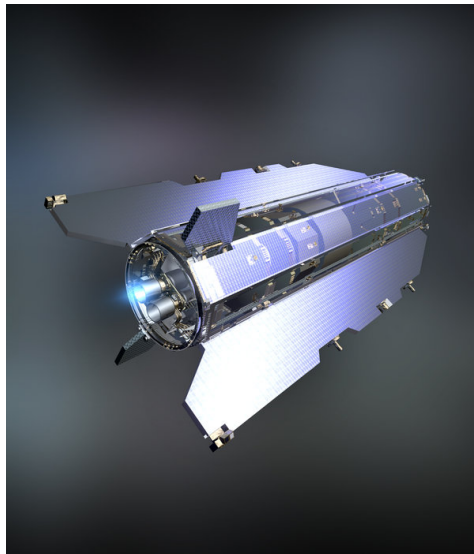


FIGURE 1.8 – Vue d'artiste du satellite GOCE avec ses ailerons et son profil aérodynamique permettant de stabiliser le satellite et de limiter les forces de frottement atmosphérique. A l'arrière, l'ensemble du moteur ionique. Source : <http://www.esa.int/spaceinimages/Missions/GOCE/%28class%29/image> (consulté le 09/06/2014)

L'élément principal de la charge utile de GOCE est le gradiomètre, permettant de mesurer le tenseur gradient d'accélération en un point situé au centre de masse du satellite. Cet instrument nommé EGG pour *Electrostatic Gravity Gradiometer*, est composé de six accéléromètres électrostatiques arrangés par paire et distant de 50cm. Chacune des trois paires forme un axe du gradiomètre se croisant perpendiculairement en leur milieu comme indiqué sur la figure 1.9(b). Chaque accéléromètre électrostatique mesure les trois composantes de l'accélération dans son repère, avec cependant une sensibilité moindre selon l'un des axes [55]. Le principe des accéléromètres de GOCE repose sur le contrôle en position d'une masse d'épreuve placée dans le vide. La force électrostatique appliquée sur cette masse pour la maintenir en position est alors directement proportionnelle à la différence entre l'accélération du centre de masse du satellite et l'accélération gravitationnelle à laquelle est soumise la masse d'épreuve. On montre alors que la différence d'accélération mesurée entre 2 extrémités d'un bras est proportionnelle au gradient d'accélération dans la direction

### 1.3. Méthodes spatiales pour la détermination du champ de gravité à haute-résolution

du bras.

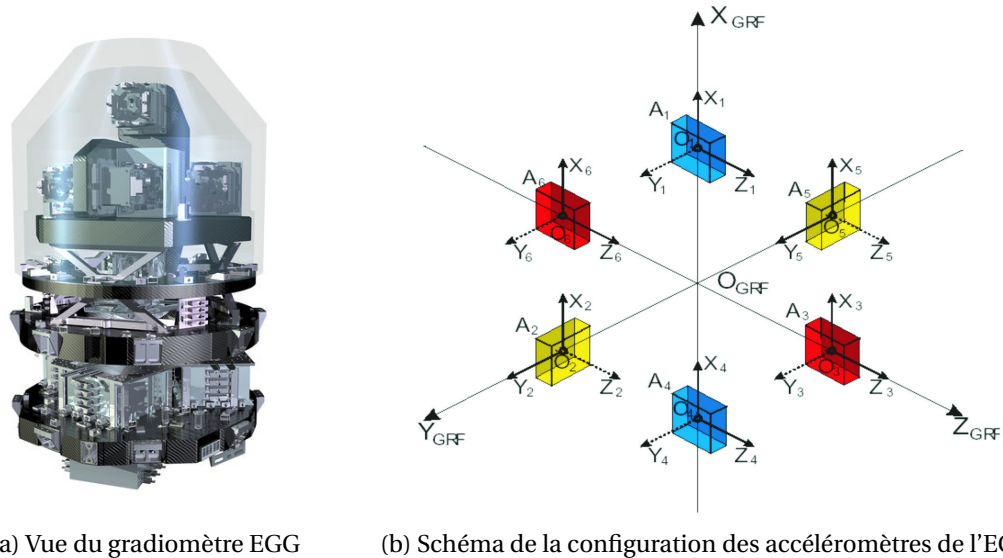


FIGURE 1.9 – Le gradiomètre électrostatique embarqué sur le satellite GOCE. A gauche, une vue de l'instrument tel qu'il a été fixé dans le satellite. A droite, une vue schématique de la disposition et de l'orientation des 6 accéléromètres électrostatiques constituant le gradiomètre. Source : ESA.

#### 1.3.1.2 Utilisation des données GOCE

Les principaux produits issus des données GOCE (fournis par l'ESA) sont des modèles de champ de gravité exprimés sous forme de coefficients de développement en harmoniques sphériques. La cinquième génération du modèle de champ de gravité issue uniquement de mesures GOCE a été rendu publique en Juillet 2014. C'est un modèle en harmoniques sphériques allant jusqu'au degré/ordre 280, soit une résolution spatiale d'un peu plus de 70km. Il a été calculé à partir d'environ 42 mois de mesure, incluant notamment les mesures réalisées par le satellite sur sa dernière orbite stable à 235km [56].

Comme le sigle de GOCE l'indique, l'un des principaux objectifs scientifiques de la mission est de permettre une meilleure connaissance du champ de gravité afin de mieux observer la circulation océanique : à partir des mesures gradiométriques est déduit un géoïde qui va permettre de déterminer les courants à l'équilibre géostrophique selon le principe décrit précédemment (section 1.1.3). Avec cette mission spatiale, la topographie dynamique moyenne des océans a été révélée pour la toute première fois avec une résolution homogène de l'ordre de 100km. Avec une meilleure précision sur le géoïde, la précision des champs de vitesse de courant s'est accrue par rapport aux modèles précédents. Ainsi, Pail *et.al.*

(2014)[57] montrent que pour une résolution donnée (degrés/ordre 180), l'erreur sur le champ de vitesse diminue de 12 à 10cm/s pour un modèle de géoïde issu uniquement de mesures GOCE, par rapport à un modèle issu uniquement de données GRACE. Des conclusions concordantes sont obtenues par Knudsen *et.al.* (2011)[58] en utilisant seulement les données issues des 2 premiers mois de mesure GOCE. Une amélioration des résultats obtenus est attendue avec la dernière génération de modèle de champ.

L'intérêt des données gradiométriques de GOCE ne se limite pas seulement à son utilisation en océanographie physique et géodésique [59]. Outre l'aspect d'une meilleure résolution spatiale sur le champ de gravité global, la directionnalité des gradients s'est révélée être pertinente pour l'étude des distributions de masses au sein de la Terre et pour la géodynamique en général. Ainsi Panet *et al.* (2014) [60] ont pu mettre en relation des structures spatiales apparaissant dans les anomalies de gradient de gravité à l'altitude de GOCE avec la distribution de masse et la dynamique mantellique. Les motifs de grande échelle (quelques milliers de kilomètres) que l'on peut observer dans les gradients de GOCE sont en effet associés à des anomalies de masse en profondeur, correspondant par exemple à d'anciennes zones de subduction, à des plumes profondes ou encore des instabilités convectives présentes à des profondeurs comprises entre 1000 et 2500km. Les données gradiométriques spatiales apparaissent donc comme un moyen complémentaire de la tomographie sismique pour révéler la dynamique du manteau et sa géométrie. La sensibilité des gradients de gravité de GOCE aux distributions de masse peu profondes est également mise à profit pour l'étude de la lithosphère. On peut citer entre autres la détermination de la limite entre la croûte terrestre et le manteau supérieur (Moho) en Amérique du sud[61][62] ou sous le Tibet [63]. Ce type d'étude vise à identifier la contribution dans le signal gravimétrique de la variation d'épaisseur de la croûte et de la compensation isostatique afin de mieux caractériser en retour les structures géologiques de sub-surface intéressantes [64]. De ce fait, les données GOCE peuvent également être utiles à des fins de prospection minière [65].

### 1.3.2 Les missions d'altimétrie

#### 1.3.2.1 Principe de l'altimétrie radar et principales missions

Le principe de base de l'altimétrie est de déterminer la distance  $R$  séparant le satellite d'une cible en mesurant le temps mis par une onde électromagnétique pour parcourir l'aller-retour satellite-cible. Dans le cas de l'altimétrie spatiale, l'onde électromagnétique est émise par un radar et la cible est la surface de l'eau sur laquelle va se réfléchir l'onde. On aura donc  $R = \Delta t / 2c_m$  où  $\Delta t$  est le temps passé entre l'émission de l'impulsion électromagnétique et la réception de son écho et  $c_m$  est la vitesse moyenne de propagation de l'onde sur son parcours. En combinant cette mesure avec une estimation indépendante de la position

### 1.3. Méthodes spatiales pour la détermination du champ de gravité à haute-résolution

du satellite, et notamment de la hauteur ellipsoïdale  $S$  du satellite, on déduit la SSH. On a d'après la figure 1.10 la relation :

$$SSH = S - R \quad (1.9)$$

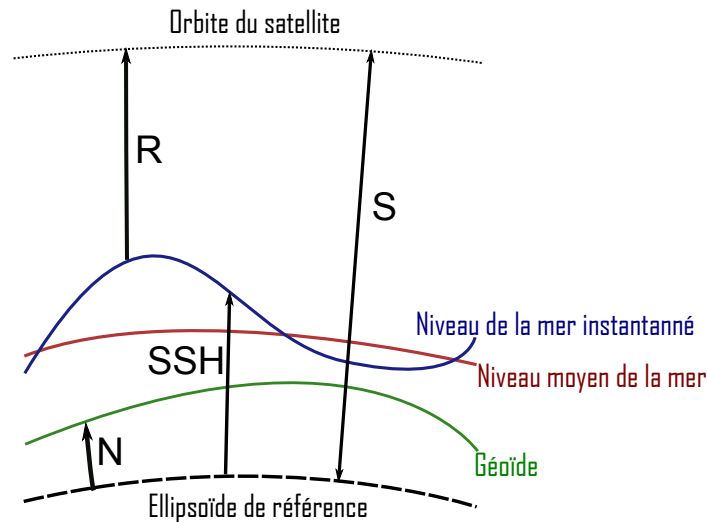


FIGURE 1.10 – Notation et représentation des différentes hauteurs utilisées dans la détermination du niveau de la mer par altimétrie spatiale.

Les deux hauteurs  $R$  et  $S$  doivent être déterminées avec une très grande précision, typiquement centimétrique, pour pouvoir fournir des informations pertinentes sur l'état dynamique de la mer. Ainsi l'estimation de la hauteur  $R$  nécessite de nombreux traitements afin de prendre en compte tous les phénomènes physiques affectant le temps de parcours de l'onde, dont notamment la correction ionosphérique et de la troposphère humide [66].

L'estimation de la position du satellite par rapport à un ellipsoïde de référence peut-être réalisée grâce à :

- un réseau de balises réparties sur l'ensemble du globe et qui mesurent par effet Doppler la vitesse du satellite, de laquelle est déduite sa position. C'est le cas du système DORIS qui permet de localiser un satellite avec une précision pouvant atteindre 1cm [67].
- l'ensemble des satellites des systèmes de positionnement tels que GPS ou GLONASS
- la télémétrie laser (généralement appelée SLR) basée sur des stations de poursuite au sol

- des combinaisons des précédentes techniques, comme c'est le cas par exemple pour le satellite Jason-1 et 2 [68].

### 1.3.2.2 Performances et limites de l'altimétrie spatiale pour la détermination du champ

La précision des mesures altimétriques s'est sans cesse améliorée depuis les débuts de l'altimétrie spatiale. Ces progrès sont dus à l'évolution des technologies et des méthodes de traitement des données. Ainsi, bien que les distances mises en jeu sont de plusieurs centaines de kilomètres, la distance  $R$  est estimée typiquement avec une précision de 2cm et  $S$  avec une précision de 3cm [68]. Ces performances dépendent toutefois d'un choix de compromis entre précision et résolution temporelle.

Les mesures d'altimétrie radar demeurent encore les données les plus importantes pour obtenir un modèle de géoïde haute-résolution en mer [69]. Dérivée des anomalies de gravité [70] à partir de mesures altimétriques en domaine océanique se fait théoriquement par la détermination de la pente du géoïde [71] [72] et l'utilisation des formules de Vening-Meinesz [4] permettant de remonter à l'anomalie. L'erreur sur les anomalies dépend donc de la précision sur la SSH moyenne  $\langle SSH \rangle$  et de la précision des modèles numériques de topographie moyenne dynamique  $\langle \zeta \rangle$  à retrancher. Toutefois, Sandwell *et al.* (2009)[51] obtiennent sans réaliser cette correction (i.e. ils assimilent la SSH moyenne directement au géoïde), un écart-type sur l'erreur d'anomalie de gravité estimé à 2-3mGal, avec un maximum de 20mGal sur les zones situées au dessus des zones avec une forte variabilité de la bathymétrie (ex : crêtes de monts sous-marins). Pour ce qui concerne les zones côtières, Andersen *et al.* (2000)[73] trouvent une erreur allant de 4.6 à 6mGal pour le champ déduit de l'altimétrie par rapport à des mesures marines *in situ* prises comme référence. Ces mesures se situent de 10 à 15km des côtes dans le cas des îles des Açores et du détroit de Skagerrak. A l'inverse, Slobbe *et al.* (2014)[69] montrent comment la précision sur le quasi-géoïde déduit de mesures altimétriques sur la mer du Nord dépend fortement de la qualité des modèles de topographie dynamique utilisés pour réaliser cette correction. En particulier, l'utilisation d'un modèle hydrodynamique en eau peu profonde, prenant en compte des modèles de marées complexes et l'influence de l'atmosphère, permet d'atténuer fortement les erreurs corrélées spatialement.

Il est important de noter que jusqu'à récemment, les mesures altimétriques spatiales restaient cantonnées au domaine océanique, voire au delà d'une certaine distance des côtes. L'utilisation de l'altimétrie à des fins géodésiques dans le domaine côtier présente en effet des limites spécifiques [73] [74]. En premier lieu, la correction de la troposphère humide qui est très variable dans ce milieu est plus difficile à estimer. Ensuite, la forme d'onde de l'écho radar est fortement modifiée par l'interférence des terres émergées et devient difficilement traitable. Enfin la correction du signal dû aux marées peut introduire une

erreur non négligeable car celles-ci ont une dynamique et une variabilité également plus complexe à modéliser près des côtes.

De ce fait, beaucoup d'efforts ont été menés afin d'étendre l'exploitation des données altimétriques au plus près des côtes. Il s'agit pour les données acquises jusqu'à présent d'améliorer le traitement des mesures, avec en particulier le traitement de la forme d'onde de l'écho (retracking) [74]. L'amélioration des techniques de post-traitement n'est pas la seule marge de progrès puisque l'évolution technologique permet et permettra de mettre en orbite des satellites altimétriques plus performants en terme de précision, de résolution et de couverture. On peut noter trois évolutions principales. Pour les radar altimétrique d'abord, le passage de la bande Ku et C à la bande Ka (35,75GHz), comme cela est actuellement testé avec la mission Saral-Altika. En utilisant une fréquence plus élevée, la tache illuminée au sol est réduite et la côte peut être mieux approchée. Ensuite le passage de l'altimétrie nadir au mode SAR (pour *Synthetic Aperture Radar*) comme c'est en partie le cas avec la mission Cryosat-2. Le mode SAR consiste à traiter et combiner une série d'échos réfléchis par un même point de la surface. Un même point peut en effet être illuminé par plusieurs pulses successifs émis par l'altimètre le long de sa trajectoire. Les échos correspondants contiennent donc le signal associé à ce point vu sous différents angles. Un traitement approprié tire parti de cette redondance afin d'augmenter la résolution le long de la trace. Enfin l'utilisation du mode InSAR (pour *Interferometric SAR*) qui sera testé sur la future mission SWOT du CNES et de la NASA [75] combine le mode SAR avec l'interférométrie afin d'obtenir une plus grande fauché à terre.

## 1.4 Les méthodes aéroportées

Les progrès réalisés grâce aux récentes missions de gravimétrie spatiale ont grandement amélioré notre connaissance du champ de gravité statique à l'échelle planétaire. Ces progrès restent cependant cantonnés aux échelles supérieures à 70km et ne permettent donc pas de résoudre tout un éventail de structures de taille inférieure. A ce stade, il faut changer de méthode de mesure et c'est la gravimétrie dynamique, i.e. la mesure du champ de gravité ou de pesanteur dans un mobile sur mer ou dans les airs, qui va offrir une plus grande résolution spatiale.

La réalisation de mesures aéroportées du champ de gravité présente trois avantages : d'abord elle permet d'atteindre facilement les endroits difficiles d'accès, telles que les zones désertiques, les forêts denses, ou les hautes-montagnes [76]. Ensuite elle offre la possibilité économique de couvrir rapidement et de manière homogène les zones d'intérêt à une échelle régionale. C'est notamment la technique idéale pour couvrir de manière continue la zone de transition terre/mer. Enfin, en fonction des caractéristiques du relevé, il est possible

de mesurer les variations haute-résolution du champ de gravité. De ce fait, la gravimétrie aéroportée est considérée comme la méthode la plus appropriée pour compléter localement les modèles de champ issus des mesures satellitaires et *in situ* dans le domaine de longueur d'onde [1-100]km. Dans cette section deux techniques de détermination aéroportée du champ de gravité sont présentées successivement. D'abord la gravimétrie aéroportée qui est historiquement la première méthode ainsi que la plus utilisée jusqu'à présent. Ensuite, la gradiométrie aéroportée qui est en plein développement actuellement et qui peut être vue comme la principale solution technique pour dépasser les limites de la gravimétrie aéroportée. La description de ces deux méthodes permettra de mieux dégager les qualités de la gradiométrie aéroportée qui est au cœur de ce travail.

### 1.4.1 Le développement de la gravimétrie aéroportée

#### 1.4.1.1 Principe et modélisation de la gravimétrie dynamique

Dès les années 50, la possibilité de réaliser des mesures gravimétriques aéroportées était reconnue par les géophysiciens et géodésiens comme beaucoup plus économique et efficace que les mesures classiques réalisées point après point [77][78]. Toutefois il était à cette époque techniquement impossible de réaliser ce type de mesure avec une précision pertinente pour les applications et études envisagées. Les premières tentatives de mesures gravimétriques aéroportées datent des années 60 et se sont poursuivies dans les années 70. Ce n'est qu'à partir des années 80 que la gravimétrie aéroportée a réellement pris son essor, notamment grâce au développement des systèmes de positionnement et de datation par satellites (souvent abrégé en GNSS pour *Global Navigation Satellite System*) tel que le système GPS. Les mesures gravimétriques aéroportées sont donc opérationnelles depuis une trentaine d'années, les premiers essais concluants ayant eu lieu en 1984 [79].

La mesure statique du vecteur accélération de la pesanteur ou d'une de ses composantes est réalisée avec un gravimètre. Le gravimètre est un accéléromètre suffisamment sensible pour détecter les variations de pesanteur que l'on cherche à mesurer. Les caractéristiques et performances des principaux gravimètres commerciaux sont résumées dans le tableau 1.4. Dans le cas d'un gravimètre scalaire, on cherche à mesurer la composante verticale de la pesanteur, autrement dit sa norme. L'axe sensible du gravimètre doit donc être orienté le mieux possible dans la direction de la pesanteur. Si le relevé gravimétrique est réalisé dans un porteur mobile, le gravimètre va mesurer une accélération ressentie  $\vec{a}^{res}$ , correspondant à la somme du champ de gravité et de l'accélération cinématique  $-\ddot{\vec{x}}$  due aux mouvements de l'instrument par rapport à un référentiel inertiel. Les accélérations cinématiques doivent donc être estimées de manière indépendantes pour être ensuite soustraites de la mesure du gravimètre afin d'isoler la seule accélération de pesanteur. La mesure dans un mobile

du vecteur accélération de la pesanteur ou d'une de ses composantes nécessite donc 2 systèmes :

1. un gravimètre pour mesurer l'accélération ressentie
2. un système de navigation précis pour l'estimation de l'accélération cinématique du porteur

Nom	marque	utilisation	bruit ( $\mu Gal/\sqrt{Hz}$ )	répétabilité ( $\mu Gal$ )	précision ( $\mu Gal$ )
FG5-X	Micro-g LaCoste	statique	15	1	2
A10	Micro-g LaCoste	statique	100	10	10
iGrav	GWR instruments	statique	0,3	-	0,05
CG-5	Scintrex	à terre	-	-	5
Burris Gravity Meter	ZLS corporation	à terre	-	7	3
MGS-6	Micro-g LaCoste	marine	-	20	0,6
ZLS Dynamic Meter	ZLS corporation	marine	-	0,1	1
TAGS-6	Micro-g LaCoste	aéroporté	-	20	0,6

TABLE 1.4 – Caractéristiques et performances des principaux gravimètres commerciaux

Pour modéliser mathématiquement la mesure on considérera le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_{ECI}$  inertiel (voir figure 1.11). Le principe de base des gravimètres généralement rencontrés consiste soit à mesurer la contre-force  $\vec{F}^{c-f}(P)$  assurant l'équilibre d'une masse d'épreuve de masse  $m$  située au point  $P$  et soumise au champ d'accélération  $\vec{a}^{res}(P)$  dans le repère de l'instrument, soit à mesurer directement l'accélération de la masse d'épreuve libre. On se place au point de mesure dans le repère géographique  $\mathcal{R}_{ENU}$ , que l'on supposera confondu avec le repère de l'instrument. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse d'épreuve en  $P$  dans le référentiel de l'instrument on montre :

$$\frac{1}{m} \vec{F}^{c-f}(P) = -\vec{a}^{res}(P) = -(\vec{\nabla}V(P) - \ddot{\vec{x}}(P)) \quad (1.10)$$

où  $\ddot{\vec{x}}(P)$  est l'accélération du point de mesure dans  $\mathcal{R}_{ECI}$ . En développant sous une forme matricielle cette expression dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_{ECEF}$  on trouve l'expression de la pesanteur au point  $P$  :

$$\vec{g}(P) = \vec{a}^{res}(P) + \left( \dot{\vec{V}}_{vol}(P) + \left( 2\underline{\underline{\Omega}}_T + \underline{\underline{\Omega}}_a \right) \vec{V}_{vol}(P) \right) \quad (1.11)$$



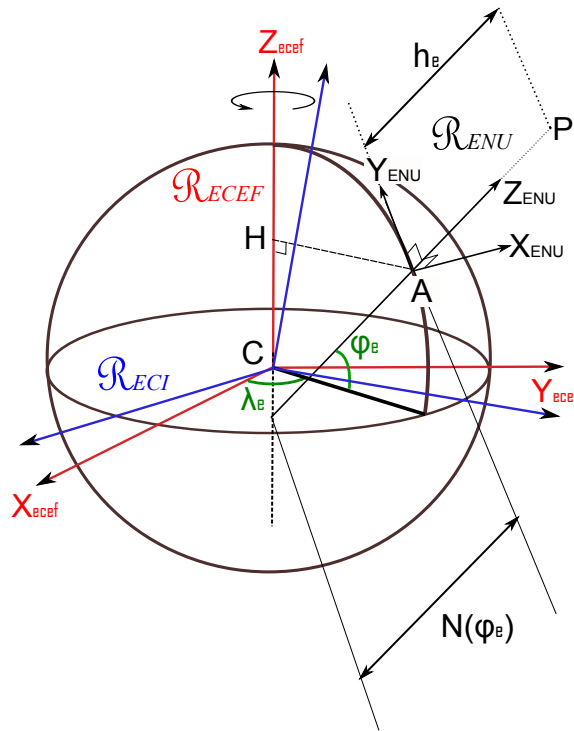


FIGURE 1.11 – Illustration du repère terrestre  $\mathcal{R}_{ECEF}$ , en rouge, et de la paramétrisation en coordonnées ellipsoïdales, également appelées géographiques. La longitude  $\lambda_e$  est la même qu'en coordonnées sphériques ; la latitude est notée  $\phi_e$ , la hauteur ellipsoïdale d'un point P est notée  $h_e$  et correspond à la distance entre P et son projeté orthogonal A sur l'ellipsoïde. Ce paramétrage permet de définir le repère géographique local  $\mathcal{R}_{ENU}$  dont le centre est sur l'ellipsoïde, l'axe  $Z_{ENU}$  est orienté vers l'extérieur selon la normale locale à l'ellipsoïde, l'axe  $X_{ENU}$  est orienté vers l'est et l'axe  $Y_{ENU}$  est orienté vers le nord. On note enfin  $N(\phi_e)$  le rayon de courbure normal. Le repère géocentrique  $\mathcal{R}_{ECI}$ , en bleu, est considéré comme inertiel avec une très bonne approximation.

où :

$\vec{V}_{vol}(P)$  est le vecteur vitesse de l'avion dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_{ECEF}$

$\underline{\underline{\Omega}}_T$  est la matrice antisymétrique associée au vecteur vitesse de rotation de la Terre par rapport au repère géocentrique  $\mathcal{R}_{ECI}$

$\underline{\underline{\Omega}}_a$  est la matrice antisymétrique associée au vecteur vitesse de rotation de l'avion par rapport à  $\mathcal{R}_{ENU}$

Avant l'introduction du GPS, les systèmes de navigation précis se basaient sur des mesures inertielles, des mesures barométriques peu précises et/ou des mesures d'altimétrie radar, beaucoup plus précises, mais limitées aux relevés au dessus de surfaces réfléchissantes (océans, lacs). En outre, les perturbations étaient atténuées en volant à haute altitude et

grande vitesse, ce qui a pour inconvénient de réduire la résolution du champ accessible à la mesure. De nos jours, l'estimation de l'attitude et de la dynamique de l'avion est typiquement réalisée par l'assimilation de mesures inertielles et DGPS (pour Differential GPS), qui est une méthode exploitant la phase du signal GPS reçu par 2 antennes différentes afin d'augmenter la précision du positionnement.

### 1.4.1.2 Performances en gravimétrie aéroportée

La qualité d'un relevé gravimétrique aéroporté est donnée par la précision associée à la résolution finale sur l'estimation du champ de gravité (ou d'une autre de ses fonctionnelles). Les performances atteintes dépendent de la précision des mesures, des caractéristiques du vol mais aussi de l'ensemble des post-traitements réalisés sur les mesures. De nos jours, les relevés aéroportés peuvent atteindre une précision de 1 à 2mGal pour une résolution allant jusqu'à 2km, voire mieux selon la densité de points de mesures. Outre les nombreux relevés acquis dans un cadre de commercial (prospection minière, gazière et pétrolière), plusieurs relevés aéroportés ont été réalisés pour des missions de géophysique ou de géodésie. On peut citer entre autres le relevé suisse réalisé en 1992 [80], le relevé dans les Alpes franco-suisse de 1998 [81], le relevé réalisé sur l'ensemble de l'île de Taïwan [2] entre 2004 et 2005 et illustré sur la figure 1.12, dans l'ouest de l'Antarctique [82] en 1999, le nord-est du Groenland [83]. On peut également noter le projet GRAV-D (cf. section 1.1.2) visant à redéfinir la référence géodésique américaine et qui est basée essentiellement sur des relevés gravimétriques aéroportés. Plus précisément, l'objectif de ce projet est d'obtenir un géoïde avec une précision absolue centimétrique sur l'ensemble du territoire continental (Alaska, Îles Vierges américaines et Puerto Rico) [84] [85]. Les caractéristiques et performances de ces relevés sont résumées dans le tableau 1.5.

En comparant la précision que peuvent atteindre les gravimètres actuels (cf. tableau 1.4) et celle des anomalies de gravité (cf. tableau 1.5), on déduit que l'essentiel de l'erreur introduite provient de la correction de l'accélération cinématique [86]. De ce fait, augmenter la précision accessible en gravimétrie aéroportée passe d'abord par l'amélioration de la précision sur l'accélération du porteur, dérivé des données GNSS. Si les moyens de navigation par satellite ont permis l'essor de la gravimétrie aéroportée, ils constituent donc aussi la limite de précision et donc de résolution de cette technique. Dans ce contexte, la gradiométrie en gravimétrie aéroportée apparaît pour beaucoup comme une méthode prometteuse pour pallier à cette limitation. L'équation de la mesure mobile des gradients de gravité (voir chapitre suivant) peut en effet être résolue en utilisant seulement des mesures issues d'instruments inertiels, typiquement des accéléromètres et des gyromètres. En suivant Jekeli [87], on peut dès lors imaginer que des améliorations technologiques sur les mesures inertielles se répercuteront de manière identiques sur les accéléromètres et les gyromètres, les amenant à des précisions comparables. Cependant, le signal du gradient est

## Chapitre 1. La gradiométrie en gravimétrie comme moyen d'étude du milieu côtier

relevé	date	type de gravimètre	altitude (m)	vitesse (km/h)	résolution spatiale (km)	précision estimée (mGal)
Suisse	1992	LCR S marine gravimeter	5100	270	10-15	11
Alpes françaises	1998	LCR air-sea gravimeter (SA)	5100	280	8	7,68
Taiïwan	2004-2005	LCR SystemII air-sea gravimeter	5156	306	6	2-3
Antarctique ouest	2004-2005	Bell Aerospace BGM-3 et LCR "S" gravimeter	>300	252	5,5	2,98
GRAV-D Puerto Rico	2009	Micro-g LaCoste	10668 et 1524	519	20	-
Groënland nord	1998	LCR "S" gravimeter	100-300	241	6	2

TABLE 1.5 – Caractéristiques et performances de quelques relevés gravimétriques aéroportés

d'intensité beaucoup plus faible que celle de l'accélération de la gravité. Sa mesure nécessite donc des instruments ultra-sensibles dont l'utilisation dans un environnement aéroporté turbulent peut s'avérer délicate [88].

### 1.4.2 La gradiométrie en gravimétrie aéroportée

#### 1.4.2.1 Équation de la mesure des gradients de gravité dans un mobile

Pour obtenir l'équation de mesure des gradients de gravité dans un mobile on reprend l'équation 1.10 et on développe le terme d'accélération inertielle  $\ddot{\underline{x}}$ . En prenant le gradient de l'expression obtenue on montre l'égalité suivante [87] :

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{V}} - \underline{\underline{\dot{\Omega}}} - \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \quad (1.12)$$

où  $\underline{\underline{\Gamma}} = \vec{\nabla} \otimes \vec{a}^{res}$  est le tenseur gradient du champ d'accélération dans le référentiel de mesure avec  $\otimes$  le produit tensoriel et  $\underline{\underline{\Omega}}$  est la matrice anti-symétrique associée au vecteur vitesse

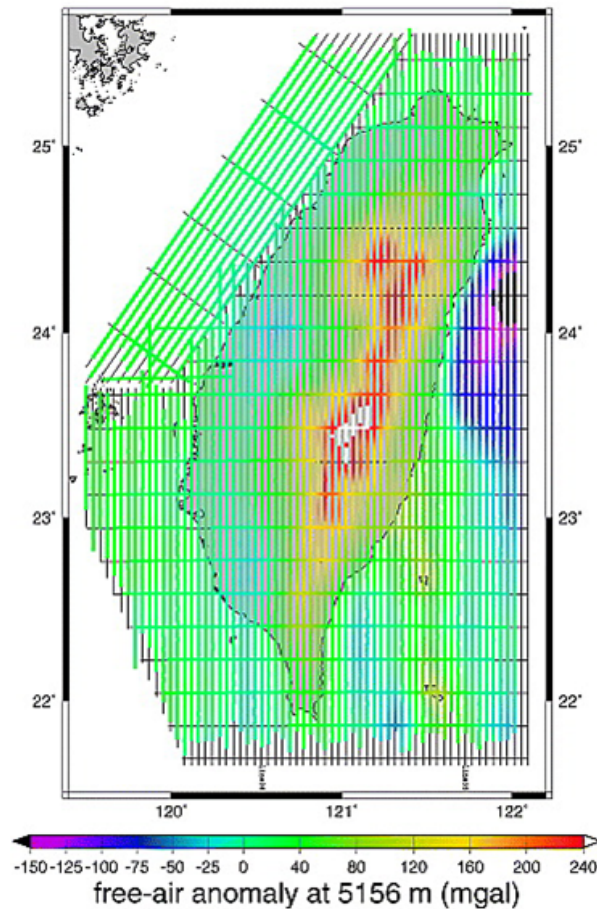


FIGURE 1.12 – Illustration d’un plan de vol de relevé gravimétrique aéroporté tirée de Hwang *et.al.* [2]. L’anomalie à l’air libre à altitude de vol est donnée sur les traces des vols du relevé au-dessus de Taïwan. L’altitude moyenne est de 5156 m et la vitesse d’environ 306 km/h par rapport à la surface.

angulaire du repère lié au gradiomètre par rapport à un repère inertiel :

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

On constate alors que la détermination du tenseur gradient de gravité peut se faire dans le référentiel de mesure dans un mobile en n’utilisant que des instruments inertiels : gradiomètre d’accélération pour  $\underline{\underline{\Gamma}}$  et gyromètres pour  $\underline{\underline{\Omega}}$ . On soulignera toutefois que pour compléter ces mesures, d’autres techniques comme la navigation par satellite peuvent être nécessaire pour estimer la position des points de mesures et l’orientation du repère de

mesure par rapport à un repère de référence.

### 1.4.2.2 Historique et état de l'art

L'intérêt pour la mesure des gradients de pesanteur et de gravité n'est en réalité pas nouveau. Dès la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle la mesure au sol de gradients de gravité est utilisée par Loránd Eötvös pour réaliser des relevés gravimétriques. Le physicien hongrois utilise pour cela une balance de torsion qu'il a inventée et qui s'inspire de celle de Cavendish, fabriquée à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle pour mesurer la constante de gravitation universelle. Dès le début du XX<sup>ème</sup> siècle l'utilisation de la balance d'Eötvös devient un outil essentiel de la prospection géophysique grâce à sa sensibilité prouvée aux structures géologiques locales. En 1929, environ 170 balances d'Eötvös étaient utilisées en Amérique du nord, essentiellement autour du Golfe du Mexique, pour la localisation de dômes de sel dans le cadre de la prospection pétrolière. Pour une description plus exhaustive de l'utilisation de la gradiométrie et la gravimétrie dans le domaine pétrolier, on pourra se référer à l'article d'Eckhardt[25] et de Bell *et. al.* [89]. La balance d'Eötvös reste toutefois un instrument lourd, difficilement utilisable à l'extérieur et très sensible à la topographie et aux structures géologiques environnantes, ce qui implique une correction de terrain introduisant inévitablement une erreur. De plus, l'arrivée à partir des années 30 de nouveaux types de gravimètre relatif à ressort, notamment le LaCoste Romberg, plus compact, simple et rapide d'utilisation, va totalement éclipser les méthodes gradiométriques en prospection [89]. La conception de nouveaux gradiomètres est remise au goût du jour au début des années 70, mais cette fois-ci sous l'impulsion de l'US Navy et pour les besoins de navigation inertielle de ses sous-marins. Parmi les différentes technologies développées à l'époque, c'est le Gravity Sensors System (GSS) fabriqué par Bell Aerospace (maintenant Lockheed Martin) qui est sélectionné puis amélioré par l'US Navy. Le même instrument est également choisi en 1983 par l'Air Force Geophysics Laboratory aux États-Unis pour étudier la faisabilité de relevés gradiométriques aéroportés avec cet instrument. C'est à cette occasion notamment qu'un tout premier essai de relevé gradiométrique aéroporté [88] [3] a été effectué en 1986. Du fait notamment de la trop grande dérive des biais des gyromètres employés et de problèmes de positionnement par GPS, le niveau de bruit des mesure estimé entre 30 et  $40E/\sqrt{Hz}$  n'a pas été jugé suffisant pour les applications en prospection. Avec la déclassification de ces technologies militaires, Lockheed Martin, l'entreprise détentrice de ces brevets, a pu développer et améliorer le GSS pour l'adapter aux besoins de la prospection géophysique. Le produit de ce développement est le FTG, pour Full Tensor Gradiometer. Dès 1998 et en collaboration avec Bell Geospace, le FTG est adapté pour fonctionner en mer et à partir de 2002 à bord d'un avion. En 2011, seuls dix gradiomètres aéroportés étaient utilisés et ce par quatre sociétés de prospection : ARKeX, Bell Geospace, BHP Billiton et Fugro. Il est important de noter que bien que différents, tous ces gradiomètres ne sont que des adaptations du modèle FTG réalisées

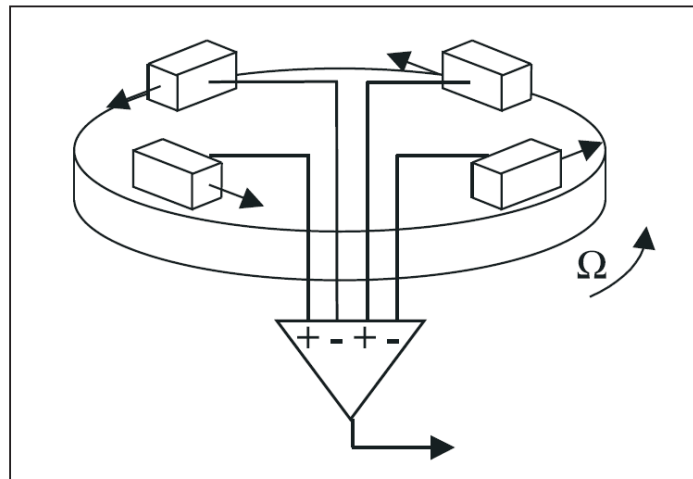


FIGURE 1.13 – Schéma d'une platine rotative du FTG, avec la disposition de ses quatre accéléromètres. Schéma tiré de [3].

avec la collaboration de Lockheed Martin, le principe et le cœur de l'instrument restant le même. C'est le cas par exemple du gradiomètre FALCON™ appartenant à BHP Billiton ou du air-FTG pour Bell Geospace. Le principe de fonctionnement de ce gradiomètre mérite donc une attention particulière. Le FTG se compose à la base de trois platines rotatives agencées de sorte que leurs axes de rotation forment un trièdre régulier et forment un angle de  $35^\circ$  avec l'horizontal. Sur chacune de ces platines sont disposés quatre accéléromètres uni-axiaux mesurant l'accélération dans la direction orthoradiale comme indiqué sur la Figure 1.13. Chacun de ces trois ensembles forme un GGI pour Gravity Gradient Instrument. Les accéléromètres fonctionnent selon le principe du maintien en position d'une masse d'épreuve. Ceci est réalisé par application d'une force connue annulant dans le repère de l'instrument l'accélération de la masse (dans le cas idéal cette accélération est composée de l'accélération gravitationnelle et de l'accélération inertielle). Pour ce faire, la position de la masse d'épreuve est détectée par un pont capacitif. La contre-force de maintien en position de la masse d'épreuve est une force magnétique dont le réglage fin est réalisé grâce au contrôle de l'intensité d'une boucle de courant [3]. Chaque platine tourne à une fréquence de 0,25Hz, ce qui permet de moduler les signaux gradiométriques à une fréquence double, soit 0,5Hz et de s'affranchir des biais des accéléromètres. On peut montrer en effet [3] que dans la configuration horizontale de la Figure 1.13 où on suppose que l'axe de rotation et selon la verticale z la sortie du GGI est :

$$2R [\sin(2\Omega t) (\Gamma_{xy} + \Gamma_{yx}) + \cos(2\Omega t) (\Gamma_{yy} - \Gamma_{xx})] \quad (1.14)$$

## Chapitre 1. La gradiométrie en gravimétrie comme moyen d'étude du milieu côtier

---

où  $x$  et  $y$  désignent les axes orthogonaux contenus dans le plan de la platine rotative,  $t$  est le temps,  $\Omega$  est la vitesse de rotation de la platine et  $R$  est la distance entre son centre et les accéléromètres. Cette modulation permet de transporter le spectre du signal gradiométrique à des fréquences plus grandes où le niveau de bruit des accéléromètres est plus faible. En outre, atteindre une précision de l'ordre de  $10E/\sqrt{Hz}$  sur les gradients (comme c'est le cas pour Le FALCON™) dans un environnement aussi bruyé qu'un avion en vol requiert d'avoir un contrôle très précis de l'alignement, de l'égalisation des sensibilités et de la distance entre les paires d'accéléromètres opposés. Le gradiomètre est de ce fait intégré dans une structure permettant de limiter ou compenser les variations des caractéristiques des accéléromètres [3]. En particulier le gradiomètre aéroporté de BHP Billiton est adapté sur une plateforme inertielle stabilisée utilisée afin de limiter la contribution des rotations du repère de mesure au signal gradiométrique.

La quasi-totalité des relevés gradiométriques aéroportés effectués jusqu'à présent l'ont été par les entreprises de prospections géophysiques mentionnées plus haut et ont donc des caractères commerciaux. Par conséquent il n'existe que très peu de publications donnant des informations relatives aux performances des gradiomètres utilisés pour les relevés aéroportés et *a fortiori* sur la précision des gradients de gravité ainsi déterminés. Le FALCON™ a été développé avec des spécifications nominales afin d'obtenir une précision inférieure à  $10E/\sqrt{Hz}$  [3] [88]. De plus, dans le cas des entreprises de prospection, c'est la capacité à révéler des anomalies de gravité liées à des structures géologiques d'intérêts qui est critique. A ce titre on peut citer le cas remarquable de la détection lors d'un relevé gradiométrique aéroporté d'un diatrème de Kimberlite de 100m de diamètre ainsi que la résolution de dykes parallèles séparés de 300m [90].

Plusieurs concepts et prototypes de gradiomètre mettant en œuvre des technologies différentes sont en cours de développement actuellement. Les principaux prototypes sont brièvement décrits dans le chapitre suivant (voir également la Figure 1.14). Dans tous les cas, l'objectif de précision est fixé à  $1E$  sur les gradients. A notre connaissance aucun n'est pleinement opérationnel pour le moment.

La conception à l'Onera du nouveau gradiomètre aéroporté GREMLIT s'inscrit donc dans le regain d'intérêt pour cette méthode et la possibilité de mesurer le champ de gravité avec une précision et une résolution nouvelle. La description du principe de fonctionnement de GREMIT ainsi que son adaptation à l'environnement aéroporté font l'objet du chapitre suivant.



FIGURE 1.14 – Vues des principaux gradiomètres aéroportés existants ou en cours de développement : (a) le gradiomètre FTG de Lockheed Martin, (b) le VK1 de Rio Tinto, (c) l'EGG d'ARKeX. Actuellement seul le gradiomètre FTG de Lockheed Martin, basé sur une technologie développée dans les années 70 par la marine américaine et adaptée par la suite pour la prospection géophysique, est commercialisé. L'EGG d'ARKeX et le VK1 de Rio Tinto sont toujours à l'heure actuelle en phase de développement ou de test.

### Bilan du chapitre 1

Que ce soit pour l'exploitation des ressources naturelles, l'étude physique du milieu littoral ou encore pour les besoins de la navigation passive, la connaissance précise et à haute-résolution du champ de gravité dans les zones côtières devient une donnée de plus en plus importante. Si les méthodes de mesure spatiales ont permis d'améliorer énormément notre connaissance du champ de gravité à l'échelle planétaire, elles ne permettent pas actuellement de connaître de manière satisfaisante les variations du champ pour les longueurs d'ondes comprises entre [10-100] km. De plus, les mesures gravimétriques classiques (scalaires ou vectorielles) sur terre, sur mer ou dans les airs, présentent des limites que ce soit en termes de couverture spatiale ou de précision. La mesure aéroportée des gradients de gravité apparaît comme une solution permettant de palier à ces limitations : d'une part en augmentant la sensibilité de la mesure aux courtes longueurs d'onde du champ, et d'autre part en assurant la continuité et donc l'homogénéité de la mesure sur la transition terre-mer. Le gradiomètre GREMLIT est un concept instrumental qui vise à répondre à ces deux objectifs.





## 2 GREMLIT : gradiomètre planaire électrostatique aéroporté

### Objectifs du chapitre 2

- Établir l'équation de la mesure, liant les gradients d'accélération mesurés aux gradients de gravité dans le cas d'un référentiel non inertiel
- Décrire le principe de fonctionnement de GREMLIT et des accéléromètres électrostatiques puis caractériser le bruit instrumental affectant les mesures de gradients d'accélération
- Valider sur des données de vols réels la solution d'adaptation du gradiomètre GREMLIT à l'environnement aéroporté grâce à une plateforme rotative contrôlée
- Fournir des spécifications sur les performances de la plateforme contrôlée

## 2.1 Présentation du gradiomètre aéroporté GREMLIT

### 2.1.1 Résumé de l'article 1

La nécessité d'avoir des mesures homogènes de champ de gravité de plus en plus précises et résolues spatialement, sur des zones parfois peu accessibles et en un temps raisonnable, a motivé le développement de l'instrument GREMLIT. GREMLIT est un nouveau concept de gradiomètre de gravité destiné à évoluer dans un environnement aéroporté. Plus précisément, il s'agit d'un gradiomètre planaire, c'est à dire qu'il fournit les 3 composantes  $V_{xx}$ ,  $V_{yy}$  et  $V_{xy} = V_{yx}$  du tenseur gradient de gravité (noté GGT) dans le repère de mesure, où x et y

désignent 2 axes perpendiculaires définissant le plan de mesure. Au cœur de cet instrument se trouve le gradiomètre planaire d'accélération qui donne une mesure en son centre des gradients d'accélération  $\Gamma_{xx}$ ,  $\Gamma_{yy}$ ,  $\Gamma_{xy}$  et  $\Gamma_{yx}$  desquels sont extraits les 3 gradients de gravité. Le gradiomètre d'accélération est composé de 4 accéléromètres électrostatiques planaires (voir le schéma Figure 2.1) dont les mesures sont combinées pour obtenir les 4 gradients d'accélération par une approximation linéaire. Ces accéléromètres ont été développés à l'Onera qui possède une expertise reconnue dans le développement d'accéléromètres électrostatiques spatiaux [91]. C'est en effet à l'Onera qu'ont été développés les accéléromètres embarqués dans les satellites d'observation de la Terre tels que CHAMP (CHALLENGING Mini-satellite Payload) [92] [93], GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) [94] et GOCE, ou encore pour des missions de physique fondamentale comme la mission MICROSCOPE [95] [96].

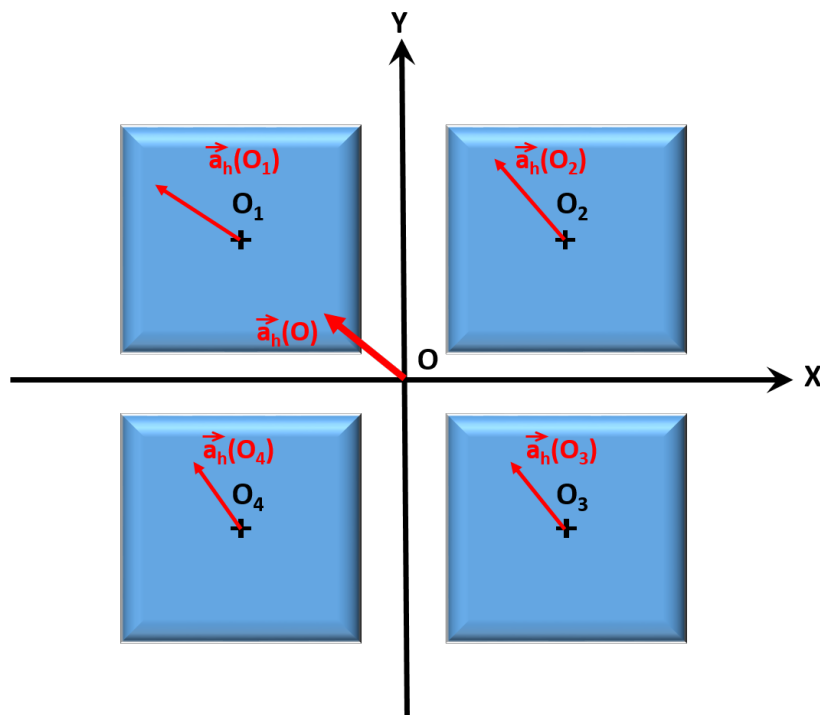


FIGURE 2.1 – Schéma de la configuration planaire du gradiomètre d'accélération de GREMLIT. Chaque carré représente un accéléromètre planaire mesurant les composantes x et y de l'accélération en son centre  $O_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .  $\vec{a}_h$  désigne la projection dans le plan (O,x,y) de l'accélération ressentie dans le repère de l'instrument

La présentation de GREMLIT fait l'objet de l'article *ultra-sensitive electrostatic planar acceleration gradiometer for airborne geophysical surveys*, publié dans le journal *Measurement Science and Technology* et reproduit ci-après. Outre la présentation du principe de fonctionnement de GREMLIT, de la configuration du gradiomètre d'accélération, 2 points importants sont abordés : la caractérisation spectrale de l'incertitude sur les gradients d'accélération

## 2.1. Présentation du gradiomètre aéroporté GREMLIT

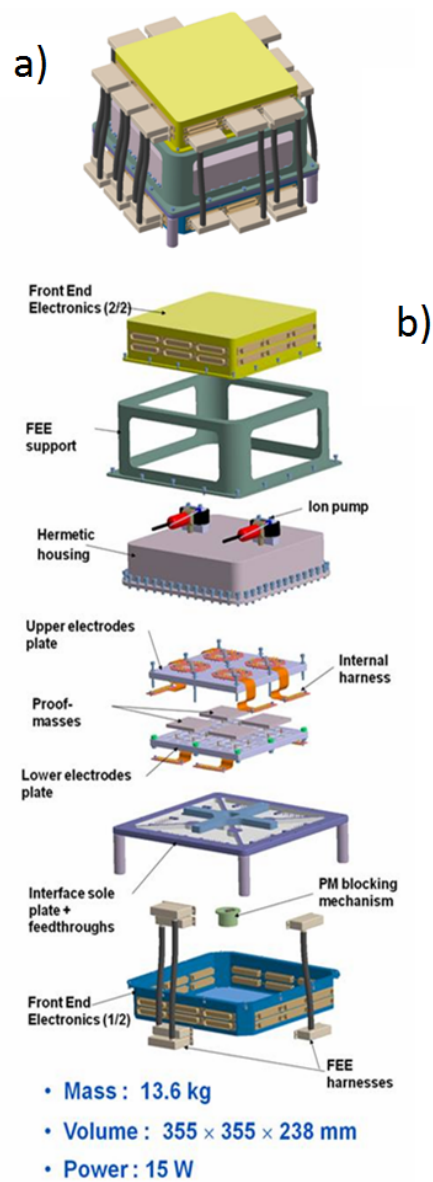


FIGURE 2.2 – Vue générale du gradiomètre d'accélération de GREMLIT dans son boîtier (a) et vue éclatée des composants du gradiomètre (b)

## Chapitre 2. GREMLIT : gradiomètre planaire électrostatique aéroporté

---

mesurés et l'adaptation de l'instrument à l'environnement aéroporté grâce à une plateforme contrôlée.

Une analyse de l'état de l'art concernant le développement de nouveaux gradiomètres de gravité montre que l'objectif affiché est d'atteindre une précision meilleure que 1E. Si un tel niveau de performance est largement accessible dans l'espace, comme c'est le cas pour GOCE, cela représente un réel défi technologique dans l'environnement dynamique et fortement bruité d'un avion. A partir d'une analyse des différentes sources d'erreur et de bruit au niveau des accéléromètres, une étude préliminaire menée par les ingénieurs de l'Onera montre qu'un niveau d'erreur quasiment constant et inférieur à  $1E/\sqrt{Hz}$  dans la plage fréquentielle de mesure  $[10^{-3}, 0,2]Hz$  peut être atteint. Cela correspond en temporel à un bruit d'écart-type inférieur à 0,45E sur les gradients d'accélération. En supposant une vitesse de vol linéaire de  $300km.h^{-1}$ , la bande fréquentielle de mesure équivaut dans le domaine spatial à une plage de mesure comprise entre 0,417km et 83km le long de la trajectoire.

Toutefois, maintenir une telle performance nécessite de travailler pour chacun des accéléromètres autour d'une accélération proche de zéro suivant les 2 axes x et y. Pour ce faire, nous proposons de placer l'instrument sur une plateforme contrôlée, orientant le gradiomètre d'accélération de manière à annuler son mode commun. De la sorte, la composante uniforme du champ d'accélération horizontale dans le référentiel de mesure est annulée et seule subsiste une accélération résiduelle sur chacun des accéléromètres, causée par la composante non uniforme du champ. De manière plus mathématique, la stratégie peut se formuler de la manière suivante en développant le champ d'accélération ressentie  $\vec{a}^s$  dans le repère de mesure au premier ordre autour du point O :

$$\vec{a}^s(O_i) = \vec{a}^s(O) + \underline{\underline{\Gamma}} \cdot \overrightarrow{OO_i} \quad (2.1)$$

où avec les notation de la partie 1.4.2 on a :

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{V}} - \underline{\underline{\dot{\Omega}}} - \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \quad (2.2)$$

avec  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  et  $\underline{\underline{\Gamma}}$  le tenseur gradient d'accélération. Le mode commun est par définition la moyenne des quatre accélérations mesurées, ce qui donne au premier ordre et du fait de la configuration géométrique des accéléromètres :

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \vec{a}^s(O_i) = \vec{a}^s(O) \quad (2.3)$$

Comme on ne s'intéresse qu'aux deux premières composantes du vecteur accélération, on mettra par la suite un indice h à  $\vec{a}^s$ . On constate donc qu'en annulant le mode commun :

## 2.1. Présentation du gradiomètre aéroporté GREMLIT

$\vec{a}_h^s(O) = \vec{0}$ , on réduit l'accélération ressentie par les accéléromètres à l'accélération résiduelle suivante :

$$\vec{a}_h^s(O_i) = \left[ \underline{\Gamma} \cdot \overrightarrow{OO_i} \right]_h \quad (2.4)$$

Par ailleurs, on constate aisément qu'annuler le mode commun équivaut géométriquement à orienter en permanence l'axe Z de la plateforme parallèlement au vecteur  $\vec{a}^s(O)$  (voir Figure 2.3).

En supposant maintenant que la plateforme est parfaitement asservie, c'est-à-dire que le mode commun du gradiomètre d'accélération est nul en permanence, il reste à répondre à la question suivante : l'accélération selon les axes sensibles des accéléromètres est-elle suffisamment faible pour rester dans la limite de saturation de  $\pm 10^{-4} m.s^{-2}$  ? L'un des principaux résultats de l'article 1 a été de montrer que dans des conditions de dynamique de vol réelle, l'accélération résiduelle reste inférieure à la limite de saturation dans plus de 99,7% du temps de vol. Cette démonstration nécessite de synthétiser les séries temporelles des accélérations résiduelles perçues par chaque axe horizontal des accéléromètres du gradiomètre. Pour se faire, on utilise des enregistrements en vol des mesures accélérométriques et gyrométriques fournies par l'INS (Inertial Navigation System) de l'avion. La synthèse des accélérations résiduelles se fait en deux étapes : dans un premier temps on calcule en chaque point l'orientation du repère de mesure. Celle-ci est obtenue en calculant dans le référentiel de l'avion la rotation de la plateforme qui oriente son axe Z dans la direction du vecteur accélération ressenti au centre du gradiomètre. Ce calcul est entièrement décrit dans l'annexe II et ne dépend que de l'accélération ressentie au point O. Dans un second temps, on calcule le terme d'accélération résiduelle sur un accéléromètre dans le repère de l'instrument. Comme la contribution du gradient de gravité est négligeable devant celle des termes de rotation, on ne se concentre que sur ces derniers. Sur les trois différents vols testés, l'accélération résiduelle synthétisée à une distribution normale, de moyenne nulle, et dans le cas le plus perturbé, un écart-type de  $2,87 \times 10^{-5} < 10^{-4} m.s^{-2}$ . A partir de l'équation 2.4, on montre facilement que cet écart-type est proportionnel à la distance  $OO_j$ . On voit donc apparaître le nécessaire compromis entre d'une part une distance suffisamment grande entre les centres des accéléromètres, afin d'être sensible aux variations de gravité, et d'autre part une distance au centre du gradiomètre suffisamment faible pour limiter la saturation des accéléromètres.

Cependant, ce résultat n'est valable que sous l'hypothèse de l'annulation parfaite du mode commun du gradiomètre ce qui n'est pas réaliste. Il faut donc prendre en compte, en plus de l'accélération résiduelle, l'addition d'un bruit de mode commun. Le niveau de ce bruit dépendant des performances de la plateforme contrôlée, nous nous bornons ici à fournir une spécification sur la réjection de ce mode commun. On peut interpréter le bruit

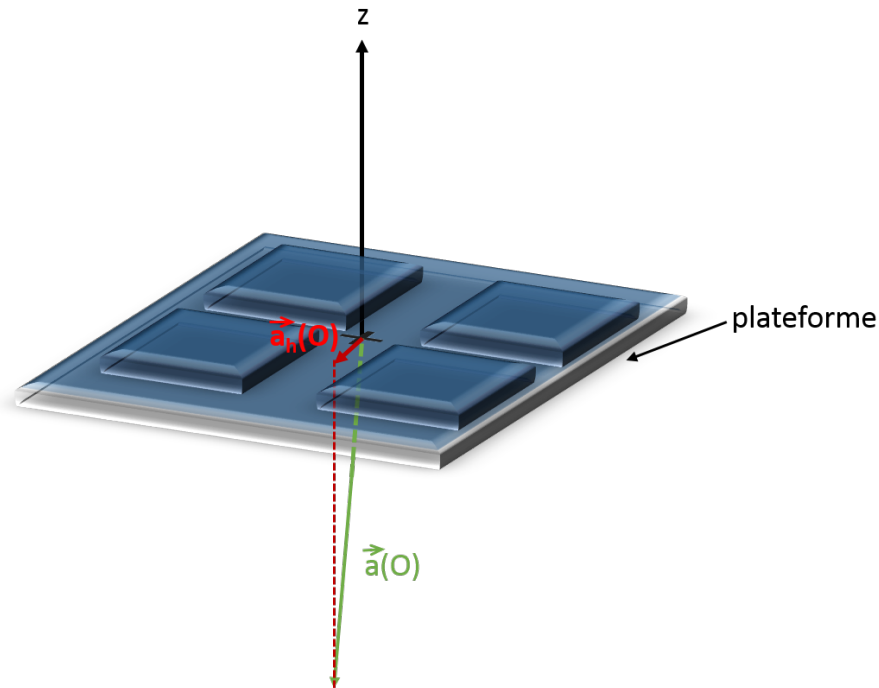


FIGURE 2.3 – Illustration du défaut de perpendicularité entraînant l'apparition d'un bruit de mode commun

de mode commun comme la projection du champ d'accélération uniforme sur les axes horizontaux des accéléromètres. En d'autres termes, ce bruit de mode commun provient du défaut de perpendicularité entre le plan horizontal de la plateforme et la direction du vecteur accélération de mode commun qui vient se projeter légèrement dessus (voir Figure 2.3). A partir d'hypothèses réalistes sur les caractéristiques statistiques du bruit de mode commun et d'accélération résiduelle, nous montrons statistiquement que pour que les accéléromètres ne soient pas saturés 95% du temps, la réjection du mode commun doit être meilleure que  $4,1 \times 10^{-5} \text{m.s}^{-2}$ . Pour un vecteur accélération  $\vec{a}^s(O)$  dont la norme est typiquement de  $10 \text{m.s}^{-2}$ , une telle spécification équivaut à une précision sur le contrôle en rotation de la plateforme meilleure que  $2,35 \times 10^{-4} \text{deg}$ . Cette limite est très importante car elle contraint l'ensemble du budget d'erreur de l'asservissement en position angulaire de la plateforme, notamment du point de vue mécanique avec des actionneurs qui devront être très précis. Si une telle performance reste un défi technique pour le contrôle fin de la dynamique de la plateforme, une telle précision en rotation est déjà atteinte sur un pendule asservi se trouvant à l'Onera.

### 2.1.2 Article 1

# Ultra-sensitive electrostatic planar acceleration gradiometer for airborne geophysical surveys.

Karim Douch<sup>1,2</sup>, Bruno Christophe<sup>2</sup>, Bernard Foulon<sup>2</sup>, Isabelle Panet<sup>3</sup>, Gwendoline Pajot-Métivier<sup>3</sup>, and Michel Diament<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Univ Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, Institut de Physique du Globe de Paris, CNRS, F-75013 Paris, France

<sup>2</sup>Onera - The French Aerospace Lab, F-92322 Châtillon, France

<sup>3</sup>IGN LAREG, Univ Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 5 rue Thomas Mann, 75205 Paris Cedex 13, France

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Overview of the gravity gradients properties</b>	<b>4</b>
2.1	The gravity gradient tensor . . . . .	4
2.2	Advantages of the GGT measurement . . . . .	5
<b>3</b>	<b>GREMLIT: a planar acceleration gradiometer</b>	<b>6</b>
3.1	Principle of GREMLIT . . . . .	6
3.2	Gravity gradients measurement with GREMLIT . . . . .	7
3.3	GREMLIT accelerometers . . . . .	9
3.4	Integration of the accelerometers . . . . .	10
3.5	Noise budget . . . . .	11
3.5.1	Electrostatic measurement . . . . .	11
3.5.2	Accelerometers noise . . . . .	12
3.5.3	Gradiometer noise . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Adaptation of the gradiometer to airborne conditions</b>	<b>13</b>
4.1	Necessity of a controlled platform . . . . .	13
4.2	Principle of the controlled platform . . . . .	14
4.3	Validation on a test case . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Discussion and conclusion</b>	<b>18</b>
<b>A</b>	<b>Appendix</b>	<b>19</b>
<b>B</b>	<b>Acknowledgement</b>	<b>19</b>



## Abstract

We propose a new concept of gravity gradiometer, GREMLIT, for the determination of the spatial derivatives of the gravitational acceleration during airborne surveys. The core of this instrument is the acceleration gradiometer composed of four ultra-sensitive electrostatic planar accelerometers, inheriting from technologies developed for the GRACE and GOCE satellite gravity missions. Data from these missions have greatly improved our knowledge of the Earth's gravity field and its time variations. However, resolving wavelengths of a few 10km or less, beyond reach of the satellite resolution, is of utmost importance to study a number of crustal geophysical processes and geological structures. We first present the benefits for a new gravity gradiometer, then we describe the planar acceleration gradiometer, which put together with three orthogonal gyroscopes, constitutes the gravity gradiometer GREMLIT. The acceleration gradiometer enables measurement at one point of the horizontal spatial derivatives of the acceleration horizontal components. We explain the measurement principle and describe the computation of the gravity gradients along with the necessary ancillary measurements. From a detailed error budget analysis of the accelerometers, an expected spectral sensitivity below  $1E/\sqrt{Hz}$  is found in the  $[10^{-3}, 0.2]$ Hz measurement bandwidth. To maintain such performance in flight, we finally discuss the adaptation of the acceleration gradiometer to the turbulent airborne environment. To limit the saturation of the accelerometers, we propose to cancel the common-mode output of the acceleration gradiometer by integrating the instrument on a double-gimbal platform controlled by the common-mode. We demonstrate on a real case study that with such a solution, it is technically possible to prevent the saturation of the accelerometers at least 95% of the time and it is not damaging to the airborne survey.

### Keywords:

Gravity gradiometry, electrostatic accelerometer, controlled platform, airborne surveys, geophysics

## 1 Introduction

Because gravity variations follow mass heterogeneities, measurements of the Earth's gravity field are one of the means to study the Earth's structure and dynamics at different spatial scales. Mapping the gravity field can be used, among other applications, to study the structure of sedimentary basins and constrain the geometry, location and depth of geological structures relevant in hydrocarbon or mineral exploration [1]. Besides finding and monitoring natural resources, the knowledge of the gravity variations at high resolution also plays a key role in the determination of the coastal currents, driving sediments and pollutant fluxes. Most of these currents can indeed be determined from the difference between the sea surface height, measured by satellite altimetry, and a reference surface of gravitational equilibrium, called the geoid [2]. The geoid is a surface of constant gravitational potential, also central to the definition of geodetic references as it is the zero-level for the altitudes. Inertial navigation is another example of use of a high resolution gravity field model [3]. These various applications require highly precise, high resolution gravity field models. Yet, the gravity data coverage is quite heterogeneous and often sparse in coastal areas and mountainous areas. More specifically, near the coasts, where the socio-economic demands are high, the link

between marine and land gravity surveys is essential to provide a continuity of the gravity field models on the entire land-sea transition area. A homogeneous coverage has been obtained from the recent satellite missions GRACE [4] and GOCE [5][6], which considerably advances our knowledge of the gravity field at resolution down to 90km. However, the smaller scale components (tens of kilometers to kilometers scales) remain beyond their reach.

Here we put forward airborne gravity gradiometry as a convenient mean to address the challenge of homogeneous, high-resolution gravity field mapping and geological structure determination. Gravity gradiometry is the measurement of the spatial derivatives of the gravitational field. Compared to classical gravimetry, gravity gradiometry amplifies the small variations of the gravity field which makes it particularly attractive to fill the spectral gap between satellite and surface data, while airborne surveys permit a rapid, continuous and homogeneous mapping of the studied areas. In this work, we propose a new concept of airborne gravity gradiometer called GREMLIT, for *airborne gradiometer for the study of coastal gravity* (French acronym: GRadiomètre EMbarqué pour l'étude de la gravité du LITtoral). The development of this instrument at Onera, the French Aerospace Lab, follows the success of the recent GOCE satellite mission which accelerometers were designed and made at Onera. With GOCE, a gravity gradiometer was operated for the very first time in a satellite. It included three pairs of ultra-sensitive accelerometers (Figure 1) mounted at the end points of three orthogonal axis. These accelerometers (with a noise of some  $\text{pm}\cdot\text{s}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$ ) have been crucial to the success of the mission [7][8].

The determination of the gravity field and mass structures through the measurement of gravity gradients was in the early twentieth century the first method of geophysical exploration, with Loránd Eötvös torsion balance. Eötvös' balance enabled the static measurement of the horizontal derivatives of the vertical component of the gravity field. Though it proved significantly useful in oil and gas exploration [9], it was almost completely abandoned in favour of scalar gravimetry, because of its time-consuming setting up in a very stable environment. It is only in the seventies that gravity gradiometry resurfaced, and, contrary to its earlier development, took the form of moving-base systems. The origins of the development of airborne gradiometry can be found in the gradiometer GSS (for Gravity Sensor System) designed in the 70's by Bell Aerospace (now Lockheed Martin) for the passive navigation of US Navy submarines [10]. This technology was partially declassified in the mid 1990's and Lockheed Martin developed the Full Tensor Gradiometer, FTG, an improved version of the GSS for hydrocarbon and mineral exploration [9]. In 1998, Bell Geospace adapted a FTG for seaborne hydrocarbon exploration and modified it in 2002 for airborne surveys. In the same time, BHP Billiton developed with Lockheed Martin the Airborne Gravity Gradiometer (AGG), a partial tensor system, part of the BHP Billiton FALCON technology (a registered trademark of BHP Billiton) and deployed it in the first successful airborne survey in 1999 [9]. In 2011, ten gravity gradiometers were operated for airborne surveys [11] by three companies, ARKeX, Bell Geospace and Fugro. These systems were also deployed on an airship and helicopters [12]. All these gradiometers derive from the same technology as the Lockheed Martin system.

This limited choice of technology has spurred to the active development of alternative gravity gradiometers. An instrumental accuracy better than  $1\text{E}/\sqrt{\text{Hz}}$  ( $1\text{E}=1\text{Eötvös}=10^{-9}\text{s}^{-2}$ ) is now commonly seen as a realistic though challenging performance [13]. Among the new concepts for airborne surveys one can note [11][13]:

- the Exploration Gravity Gradiometer, EGG, from ARKeX. This sensor is the result of the evolution of a previous gravity gradiometer concept designed for the European Space Agency. The EGG is based on superconducting accelerometers. The specified performances are a resolution of  $1\text{E}/\sqrt{\text{Hz}}$  for a 200m-60km bandwidth [14].
- the GEDEX High Definition Airborne Gravity Gradiometer, HD-AGG<sup>TM</sup>, with a technology goal defined as  $1\text{E}/\sqrt{\text{Hz}}$  [15]
- the VK-1 gradiometer from the University of Western Australia and Rio Tinto, anticipated to be better than  $1\text{E}/\sqrt{\text{Hz}}$  in a bandwidth of 1Hz [16]

The instrument we investigate, GREMLIT, is a compact planar gravity gradiometer concept for airborne surveys. At the core of this instrument is a planar acceleration gradiometer based on differential measurement from pairs of electrostatic accelerometers. These accelerometers inherit from technologies specifically developed for the GOCE and GRACE missions. In this paper, we address the question of bringing these technologies to the field of airborne gradiometry while maintaining state of the art performances.

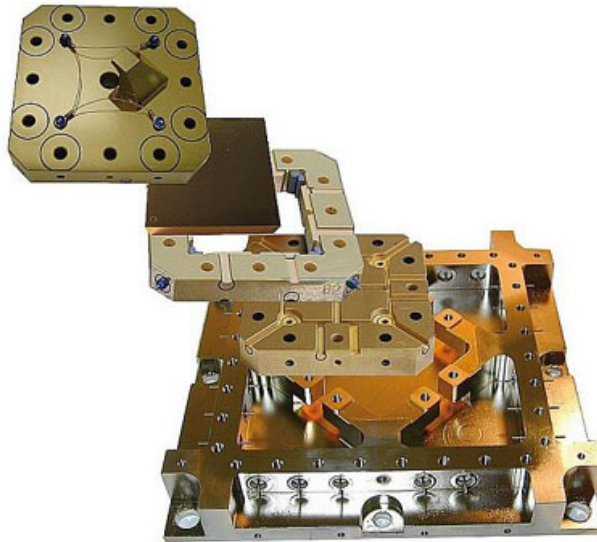


Figure 1: Exploded view of GOCE accelerometer. From bottom to top, the accelerometer base, the bottom plate, on which 4 symmetrical electrodes are engraved, the ring plate with the lateral electrodes, the plan-parallel proof mass and finally the upper plate with a set of electrodes identical to the lower plate one.

## 2 Overview of the gravity gradients properties

### 2.1 The gravity gradient tensor

Gravity gradiometry is based on the measurement of the spatial derivatives of the gravitational acceleration  $\vec{g}$ . We summarize in this section the fundamental definitions and properties of the

gravity gradients. From the law of universal gravitation, the gravitational field at point M created by a mass distribution in a volume  $v$  is given by:

$$\vec{g}(M) = -\mathcal{G} \iiint_{P \in v} \frac{\rho(P) \cdot dv \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \quad (1)$$

where  $\mathcal{G}$  is the gravitational constant and  $\rho(P)$  is the density at point P. The field  $\vec{g}$  derives from a gravitational potential V:

$$\vec{g} = \vec{\nabla} V = (\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V) \quad (2)$$

where  $\partial_i$  denotes the partial derivative with respect to the spatial coordinate  $i \in (x, y, z)$ . The Jacobian matrix ( $\mathbb{J}$ ) of the Earth's gravity field is the tensor:

$$\mathbb{J}(\vec{g}) = \vec{\nabla} \otimes \vec{g} = \begin{pmatrix} \partial_x g_x & \partial_x g_y & \partial_x g_z \\ \partial_y g_x & \partial_y g_y & \partial_y g_z \\ \partial_z g_x & \partial_z g_y & \partial_z g_z \end{pmatrix} \quad (3)$$

This tensor can therefore be expressed as a function of the potential V:

$$\mathbb{J}(\vec{g}) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} V & \partial_{xy} V & \partial_{xz} V \\ \partial_{yx} V & \partial_{yy} V & \partial_{yz} V \\ \partial_{zx} V & \partial_{zy} V & \partial_{zz} V \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{V}}} \quad (4)$$

which is the matrix of second-order partial derivatives of the gravitational potential V. Thereafter, this tensor will be called GGT for Gravity Gradient Tensor and noted  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ . As the gravity potential is a smooth function in continuous media, the GGT is symmetric:  $\partial_{ij} \underline{\underline{\mathbf{V}}} = \partial_{ji} \underline{\underline{\mathbf{V}}}$ . Furthermore, the gravity potential satisfies Poisson's equation:

$$\Delta V = -4\pi\mathcal{G}\rho \quad (5)$$

When dealing with airborne surveys, equation (5) should theoretically stand as the density of the atmosphere is non-zero and approximately  $1.2\text{kg/m}^3$  at sea level where Poisson's equation gives  $\Delta V \approx 1E$ . However, this term is usually neglected or corrected [17]. This approximation leads to Laplace's equation:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (6)$$

$\underline{\underline{\mathbf{V}}}$  will be considered trace-free: the potential V is a harmonic function.

## 2.2 Advantages of the GGT measurement

A first interest of measuring the gradients of  $\vec{g}$  rather than  $\vec{g}$  itself or its magnitude can be found in the amplification of the short wavelengths components of the gravity signal. Let  $\tilde{V}(k_x, k_y, k_z)$  be the

Fourier transform of  $V(x, y, z)$ , where  $k_i = \frac{2\pi}{\lambda_i}$  is the wavenumber associated to the wavelength  $\lambda_i$  in the direction  $i$ . Then we have:

$$\mathcal{F} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial i \partial j} \right] = k_i \cdot k_j \cdot \tilde{V} \quad (7)$$

where  $\mathcal{F}[\ ]$  is the Fourier transform operator. This equation shows that the shorter the wavelength, the higher the gradients amplitude. The gravity gradiometer can thus be regarded as a high-pass filter of the gravitational field, which makes it more sensitive to close mass distribution [18]. As a consequence, gravity gradients enable a better imaging of the gravity signal caused by geological structures close to the surface.

Furthermore, the directionality of the derivatives in the GGT makes them sensitive to the geometrical structure of the gravitational field [19], and, indirectly of the causative bodies [20][21]. This comes from the fact that a directional derivative enhances mass structures elongated in the orthogonal direction. In addition, the measurement of the different components of the GGT brings redundancy as they are all related to the same gravitational field. This redundancy can be used for instance to increase the signal to noise ratio of the measurements in a post-treatment phase [22].

### 3 GREMLIT: a planar acceleration gradiometer

#### 3.1 Principle of GREMLIT

The equivalence principle in the general theory of relativity postulates that it is not possible to measure and distinguish locally, in a non-inertial frame, the acceleration due to gravity from kinematic accelerations. The separation of both effects requires to determine independently the kinematic acceleration of the instrument reference frame with respect to an inertial reference frame. By extension, the principle of GREMLIT is to measure in the instrument moving reference frame the acceleration gradients, from which the gravity gradients have to be extracted.

For that aim, at the core element of GREMLIT is a planar acceleration gradiometer composed of an ensemble of 4 two-axial planar electrostatic accelerometers ( $A_1, A_2, A_3, A_4$ ). These accelerometers are fixed on a plate and centred at each corner of a square  $O_1 O_2 O_3 O_4$  of 89 mm size, as illustrated on Figure 2. Each planar accelerometer measures in its frame of reference the  $x$  and  $y$ -components of the acceleration at their respective centre. Similarly to the GGT  $\underline{\underline{V}}$ , we note  $\underline{\underline{\Gamma}}$  the tensor of acceleration gradients. It is therefore possible to compute in the instrument frame ( $O, x, y$ ) (see Figure 2) four elements of  $\underline{\underline{\Gamma}}$  at the gradiometer centre  $O$  by finite acceleration difference: from a first order Taylor-series of the acceleration vector at point  $O$ , we obtain a linear approximation of the acceleration at  $O_1, O_2, O_3$  and  $O_4$  which yields, after rearrangement of the terms:

$$\Gamma_{\mathbf{xx}}(O) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{a_x(O_3) - a_x(O_4)}{L} + \frac{a_x(O_2) - a_x(O_1)}{L} \right) + o(L) \quad (8)$$

$$\Gamma_{\mathbf{yy}}(O) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{a_y(O_1) - a_y(O_4)}{L} + \frac{a_y(O_2) - a_y(O_3)}{L} \right) + o(L) \quad (9)$$

$$\Gamma_{\mathbf{xy}}(O) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{a_y(O_3) - a_y(O_4)}{L} + \frac{a_y(O_2) - a_y(O_1)}{L} \right) + \circ(L) \quad (10)$$

$$\Gamma_{\mathbf{yx}}(O) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{a_x(O_1) - a_x(O_4)}{L} + \frac{a_x(O_2) - a_x(O_3)}{L} \right) + \circ(L) \quad (11)$$

where  $\circ(L)$  contains the terms of higher order and will be omitted afterwards since they are negligible for the distance  $L$  between 2 accelerometer centres.

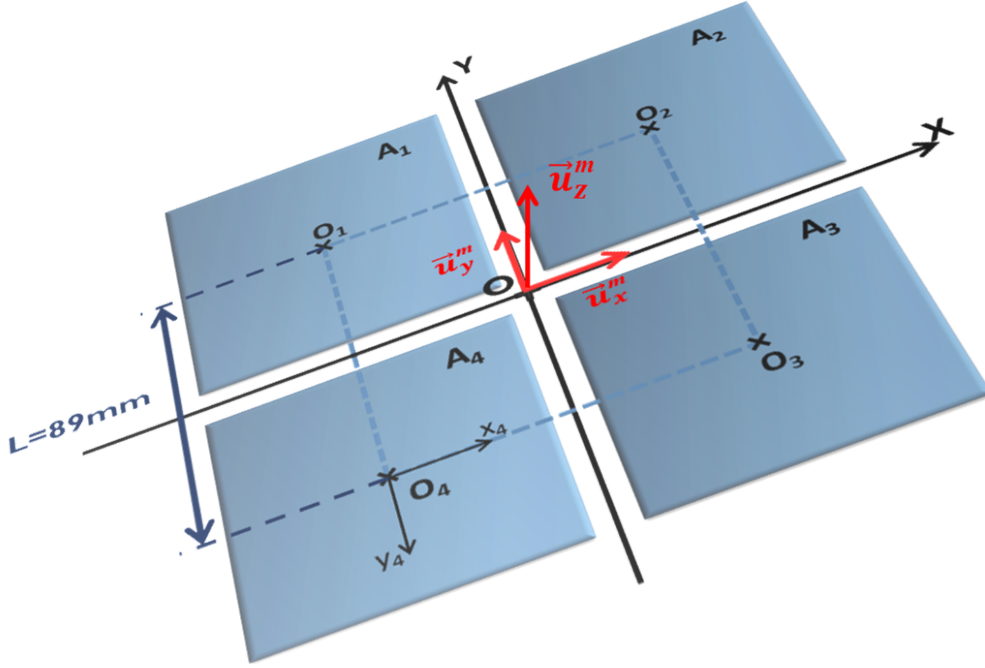


Figure 2: Each planar accelerometer  $A_i$  is represented by a green square, centred on each corner of a 89 mm-square  $O_1O_2O_3O_4$ . The acceleration measured by  $A_4$  for instance is the projection on  $(x_4, y_4)$  of the acceleration sensed at point  $O_4$  in the measurement frame of reference

### 3.2 Gravity gradients measurement with GREMLIT

Starting from the acceleration measurement principle used in GREMLIT, we establish in this section the measurement equation of the gravity gradients, for the general case of a non-inertial frame of reference. The principle of the electrostatic accelerometer is to maintain motionless a proof-mass in levitation according to its six degrees of freedom at the centre of an electrode cage. Capacitive measurements detect any motion of the proof-mass with respect to the cage and a closed loop control allows to apply electrostatic forces needed to keep the proof-mass still at the cage centre. The acceleration at the proof mass centre is then deduced from these electrostatic forces. We note  $\mathcal{R}_m = (O, \vec{u}_x^m, \vec{u}_y^m, \vec{u}_z^m)$  the measurement reference frame (see Figure 2),  $\mathcal{R}_i$  an inertial frame,  $m$  the

mass of a proof mass number  $n$  and  $O_n$  its centre of mass. The angular velocity vector (resp. matrix) of a frame  $\mathcal{R}_k$  with respect to a frame  $\mathcal{R}_j$  is called thereafter  $\vec{\Omega}_{k/j}$  (resp.  $\underline{\underline{\Omega}}_{k/j}$ ). The forces acting on the proof mass in  $\mathcal{R}_m$  are:

- $\vec{F}_{elec}$  the controlled electric force of the electrodes on the proof mass
- $\vec{F}_{grav}$  the gravitational force on the proof mass
- $\vec{F}_{fic}$  the fictitious force due to the motion of the gradiometer
- $\vec{F}_{par}$  the parasitic forces, which gather all the undesired perturbations: the damping forces, the gold wire damping, uncontrolled electromagnetic forces etc.

As the proof mass is at rest in  $\mathcal{R}_m$ , the net force acting upon it is zero in this reference frame and we obtain:

$$\vec{F}_{elec} = -\vec{F}_{grav} - \vec{F}_{fic} - \vec{F}_{par} \quad (12)$$

The left term of this equation is thus the quantity actually measured by the accelerometer. We note  $\vec{a}^s$  the sensed acceleration deduced from the measurement of  $\vec{F}_{elec}$ . We expand equation (12) in terms of accelerations as follows:

$$\vec{a}^s = -\frac{\vec{F}_{elec}}{m} = \underbrace{\vec{g}(O) + \underline{\underline{V}} \cdot \overrightarrow{OO_n}}_{\vec{F}_{grav}/m} - \underbrace{\vec{a}(O)_{|\mathcal{R}_i} - \dot{\underline{\underline{\Omega}}}_{m/i} \times \overrightarrow{OO_n} - \underline{\underline{\Omega}}_{m/i} \times (\underline{\underline{\Omega}}_{m/i} \times \overrightarrow{OO_n})}_{\vec{F}_{fic}/m} + \frac{\vec{F}_{par}}{m} \quad (13)$$

where, after dividing equation (12) by  $m$ , the gravitational acceleration in  $O_n$  is given by a linear approximation around  $O$  and the fictitious force has been expanded into the centrifugal and Euler forces. The Coriolis force is not introduced as we made the assumption that the proof mass was fixed in  $\mathcal{R}_m$ . Thereafter the parasitic forces will be omitted for the sake of clarity and included in the final instrumental noise budget. Taking the gradient of (13) leads to the tensorial equation:

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{V}} - \underline{\underline{\dot{\Omega}}} - \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \quad (14)$$

Where  $\underline{\underline{\Gamma}} = \vec{\nabla} \otimes \vec{a}^s$  and  $\underline{\underline{\Omega}}$  is the skew-symmetric matrix representing the angular velocity vector  $\vec{\Omega}_{m/i}$ :

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

In the case of the planar gradiometer GREMLIT, only three elements of the GGT:  $V_{xx}$ ,  $V_{yy}$  and  $V_{xy} = V_{yx}$ , called horizontal gravity gradients, can be determined:

$$\mathbf{V}_{\mathbf{xx}} = \Gamma_{\mathbf{xx}} - \omega_z^2 - \omega_y^2 \quad (16)$$

$$\mathbf{V}_{yy} = \Gamma_{yy} - \omega_z^2 - \omega_x^2 \quad (17)$$

$$\mathbf{V}_{xy} = \mathbf{V}_{yx} = \frac{1}{2} \cdot (\Gamma_{xy} + \Gamma_{yx} + 2 \cdot \omega_y \cdot \omega_x) \quad (18)$$

In addition, we can derive  $\mathbf{V}_{zz}$  from equation (6):  $\mathbf{V}_{zz} = -\mathbf{V}_{xx} - \mathbf{V}_{yy}$ .  $\Gamma_{xx}$ ,  $\Gamma_{xy}$ ,  $\Gamma_{yx}$  and  $\Gamma_{yy}$  are measured thanks to GREMLIT acceleration gradiometer, while *a priori*,  $\underline{\underline{\Omega}}$  is measured independently with gyroscopes.

Until now,  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$  has been expressed in the measurement frame of reference, which may vary at each point. It is therefore necessary to know the orientation of  $\mathcal{R}_m$  with respect to a conventional frame of space vectors, like for example the local East-North-Up coordinate system, noted  $\mathcal{R}_l$ , where the GGT will be more easily interpreted. With the change-of-basis matrix  $\mathbf{M}_{\mathcal{R}_m}^{\mathcal{R}_l}$  the GGT is then expressed in  $\mathcal{R}_l$  according to the following formula:

$$\underline{\underline{\mathbf{V}}}^l = \mathbf{M}_{\mathcal{R}_m}^{\mathcal{R}_l} \cdot \underline{\underline{\mathbf{V}}}^m \cdot \left( \mathbf{M}_{\mathcal{R}_m}^{\mathcal{R}_l} \right)^t \quad (19)$$

where the superscript t refers to the transpose of the matrix.

### 3.3 GREMLIT accelerometers

The core of an accelerometer is a plane-parallel proof mass in electrostatic levitation between two symmetrical plates, the upper and the lower plate, on which a dedicated set of electrodes are engraved (see Figure 3). The proof-mass is polarised through a thin gold wire of 7.5  $\mu\text{m}$  diameter, allowing to supply a DC voltage (to linearise the measurement) and a AC voltage for the capacitive detection. The electrodes are used for both detection and action in the closed-loop control of the proof mass position and attitude. As an accelerometer is composed of eight pairs of electrodes, this implies a redundancy in the active control of the six degrees of freedom of the proof mass (three rotations and three translations). This redundancy can be used to cross-check the performances of the position and attitude control of the proof mass. The vertical axis is dedicated to the levitation of the proof-mass under  $1g \pm 1g$ . The control of the proof mass vertical position is based on air gap variation measurements and is performed with two sets (upper and lower) of four symmetrical electrodes  $\mathbf{z}_i$  ( $i \in 1, 2, 3, 4$ ). The surface of one electrode is 263.71mm<sup>2</sup>. Because of the high electrical potential applied to these electrodes, typically 100V, the  $z$ -axis acceleration measurement is not sufficiently resolved to compute accurate gravity gradients. The  $z$ -axis is thus not used to perform acceleration gradients measurement.

In contrast, the  $\mathbf{x}_i$  and  $\mathbf{y}_i$  ( $i \in 1, 2, 3, 4$ ) electrodes are used to measure the horizontal acceleration of the proof mass. The detection of the horizontal gravity gradients requires a high resolution measurement and consequently the measurement range on these sensitive axis is limited to  $10^{-4} \text{m.s}^{-2}$ . At the same time, the electrodes are used to control it by a capacitive surface variation system. This strategy ensures the linearity of the control feedback loop and then of the acceleration



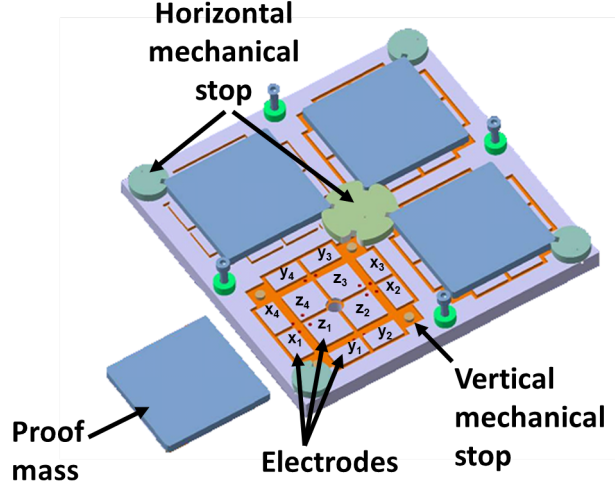


Figure 3: View of the lower plate with 4 identical sets of engraved electrodes and the 4 corresponding identical proof masses. The upper plate is not represented. All these elements are made in ULE.

measurement. The electrostatic force applied on the proof-mass along one horizontal direction  $\vec{u}_x$  by the 4 pairs of upper and lower electrodes  $\mathbf{x}_i$  (see figure 4) is expressed by:

$$\vec{f}_{elec} = \frac{8 \cdot \epsilon_0 \cdot b}{d} \cdot V_p \cdot V_x \cdot \vec{u}_x \quad (20)$$

where  $b$  is the width of one electrode,  $d$  is the vertical gap between proof-mass and electrode,  $\epsilon_0$  is the vacuum permittivity,  $V_p$  is the DC polarisation voltage of the proof-mass and  $V_x$  is the controlled voltage, used for measuring the acceleration. Compared with the GOCE accelerometers, the main improvements in GREMLIT are firstly the one-block electrode plates minimizing the misalignment and lever arm inaccuracy, and secondly, the variation surface electrode improving the linearity of the measurement.

### 3.4 Integration of the accelerometers

As previously mentioned, the planar gradiometer is composed of four identical electrostatic accelerometers. To ensure the mechanical and thermal stability of the electrodes alignment, the four sets of identical upper and lower electrodes are engraved by ultra-sonic machining [23] on a single ULE (Ultra Low Expansion) silica glass frame. The upper and lower plates are interfaced by 5.1mm long ULE cones which ensure the parallelism of the the two plates and a vacuum gap of  $50\mu\text{m}$ . The proof mass, in golden ULE, is a 60mm by 60mm plate, 5mm thick, for a mass of 39.6g. A  $7.5\mu\text{m}$  thick and 17.5mm long gold wire connects the proof mass surface to a highly stable polarization source. Finally, the proof mass displacement along the  $x$  and  $y$ -axis is limited to  $\pm 50\mu\text{m}$  by four mechanical stops and to  $\pm 20\mu\text{m}$  on the  $z$ -axis, to avoid contact of the proof mass with electrodes. The whole core of the instrument is placed in a vacuum and hermetic housing. A nominal vacuum below  $2.7 \times 10^{-4}\text{Pa}$  (or  $2 \times 10^{-6}\text{Torr}$ ) is maintained by the two ion pumps. Previous tests on spatial

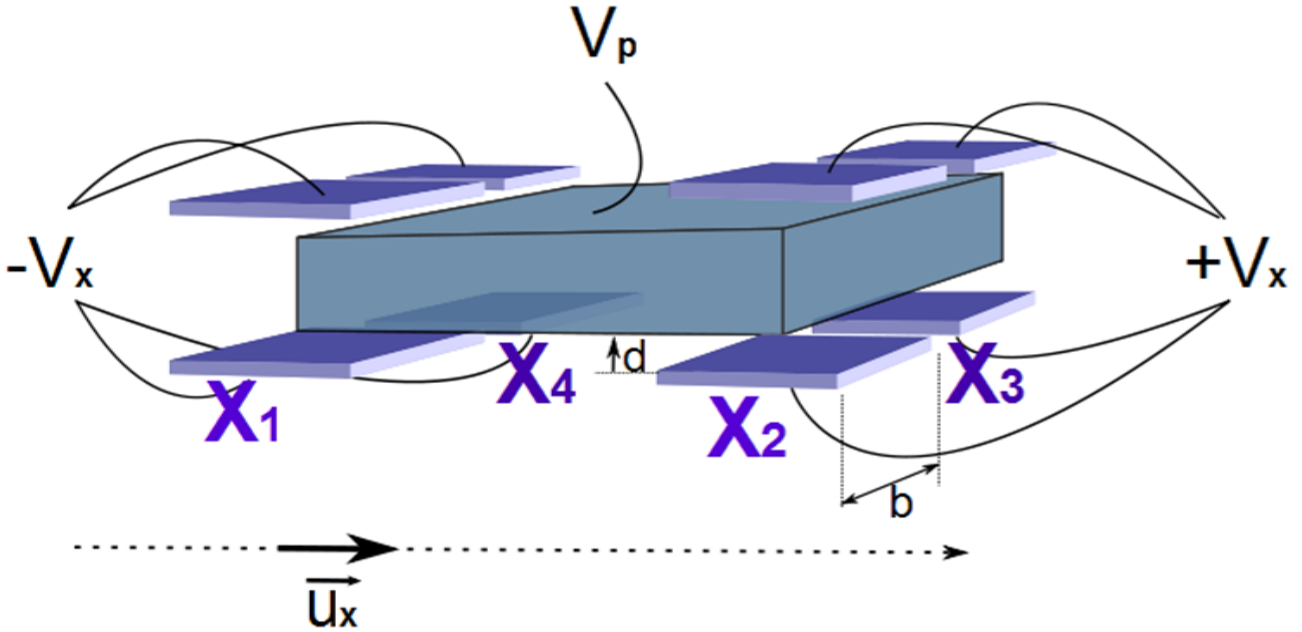


Figure 4: Schematic of a one-dimensional electrostatic accelerometer along the  $x$ -axis. The electric potential of the proof-mass is  $V_p$ . The 4 pairs of upper and lower electrodes on the left and right side have a variable opposite potential  $\pm V_x$  from which the electric force is deduced. The lower electrodes ( $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $X_4$ ) are also represented on Figure 3.

accelerometers have demonstrated that such a vacuum is sufficient to allow on the one hand the application of high tensions for levitation and on the other hand to limit the damping forces on the proof masses.

### 3.5 Noise budget

#### 3.5.1 Electrostatic measurement

Let us call  $\Gamma^{true}$  the acceleration gradient signal that we want to measure and  $\Gamma^{mes}$  the acceleration gradient actually measured by GREMLIT. The measurement error  $\epsilon$  is thus  $\epsilon = \Gamma^{mes} - \Gamma^{true}$ . The uncertainties on the acceleration gradients measured by GREMLIT have two origins: the one originating from the accelerometric measurements and the other due to defects in the geometric configuration of the gradiometer. The latter includes the accelerometer misalignments with respect to the gradiometer frame of reference and the uncertainties on the distances between accelerometers. These errors introduced in the measurement chain can be modelled through the relation between  $\Gamma^{mes}$  and  $\Gamma^{true}$ .

$$\Gamma^{mes} = (1 + \delta K_1)\Gamma^{true} + K_2(\Gamma^{true})^2 + b + n \quad (21)$$

Where  $\delta K_1$  is called the scale factor error,  $K_2$  the quadratic factor,  $b$  is the bias and  $n$  is the noise. The quadratic factor can be neglected since the measurement of the horizontal accelerations is

linear and the error induced by geometric defects does not introduce quadratic terms. The scale factor and the bias can be estimated thanks to an on-board calibration of the instrument, therefore we will only focus in the following on the acceleration gradient noise  $n$  and its characterisation.

### 3.5.2 Accelerometers noise

The four accelerometers being identical, we assume that their respective noise has identical spectral characteristics on each sensitive axis. A preliminary study, based on numerical simulations, ground experiments and the post-treatment of GOCE gradiometer error spectrum [8][24], shows that the main contributors are:

- the detector which corresponds to the noise associated to the electronics in charge of measuring the position of the proof mass along one axis. It is the major contributor for frequencies higher than 0.1Hz,
- The damping induced by the gold wire,
- The thermal variation of the bias,
- The DVA for Drive Voltage Amplifier, which function is to translate the signal computed by the controller into an electrical potential applied to the electrodes,
- The ADC for Analog-to-Digital Converter, responsible for a quantization noise, which does not depend on the frequency. The quantization noise decreases with the number of bits but increases with the voltage range. It is therefore important to work with a voltage range sufficiently small to have a resolution better than 1E. This implies to limit the acceleration range on the accelerometers to  $10^{-4}\text{m.s}^{-2}$ ,
- The fluctuation of the CPD, which stands for Contact-Potential Differences. This also includes the patch effect temporal variation [25].

### 3.5.3 Gradiometer noise

The random noise on the measured acceleration gradients is a linear combination of the accelerometers noise (see equations 8 to 11). Let us now note  $\phi_a(f)$  (resp.  $\phi_\Gamma(f)$ ) the square-root of the power spectral density (PSD) of the accelerometric (resp. gradiometric) noise at frequency  $f$ . We suppose that the noises on each sensitive axis of each accelerometer are independent random processes. The acceleration gradient noise is thus given by:

$$\phi_\Gamma(f) = \frac{\phi_a(f)}{L} \tag{22}$$

Figure 5 shows the square-root of the PSD of the gradiometer total noise, along with the corresponding contributions aforementioned. This error budget is valid for a measurement range of  $10^{-4}\text{m.s}^{-2}$ .

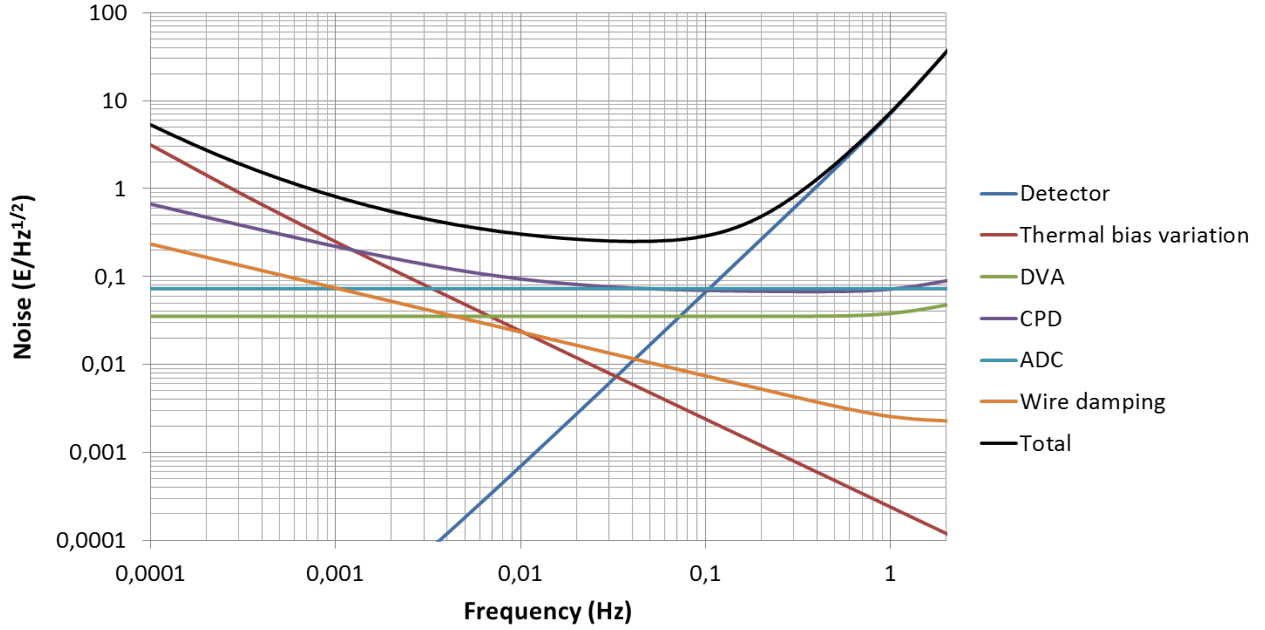


Figure 5: Square-root of the spectral power density of the total instrumental noise of GREMLIT acceleration gradients (in black) and of the main contributors (in colours).

An analytical formula (obtained by curve fitting) of the square root of GREMLIT noise PSD as a function of frequency is given by:

$$\phi_{\Gamma}(f) = 0.08 \sqrt{\left(\frac{f_{c1}}{f}\right)^2 + \left(\frac{f_{c0}}{f}\right)^4 + 1 + \left(\frac{f}{f_{c2}}\right)^4} \quad (23)$$

Where  $f_{c1} = 0.003\text{Hz}$ ,  $f_{c0} = 2 \times 10^{-5}\text{Hz}$  and  $f_{c2}=0.12\text{Hz}$ . With a lever arm of 89mm between adjacent proof-masses, it is therefore possible to measure acceleration gradients with a precision better than  $1\text{E}/\sqrt{\text{Hz}}$  for the bandwidth  $[10^{-3}, 0.2]\text{Hz}$ . For an aircraft speed of  $300\text{km.h}^{-1}$  this bandwidth corresponds to wavelengths between 0.4km and 83km, which is approximately the targeted bandwidth.

## 4 Adaptation of the gradiometer to airborne conditions

### 4.1 Necessity of a controlled platform

Hereafter “horizontal” will refer to the plane described by the two orthogonal vectors  $\vec{u}_x^m$  and  $\vec{u}_y^m$  (see Figure 2). We also remind that the expression “sensed acceleration at one point” refers to the sum of the kinematic acceleration and the gravitational acceleration at this point. The saturation of the accelerometers horizontal sensitive axis for accelerations larger than  $10^{-4}\text{m.s}^{-2}$  requires to work around a zero horizontal acceleration. In other words, the projection of the sensed acceleration onto the unit vectors  $\vec{u}_x^m$  and  $\vec{u}_y^m$  at each point  $O_1, O_2, O_3$  and  $O_4$  in  $\mathcal{R}_m$  (see Figure 2) must not exceed  $\pm 10^{-4}\text{m.s}^{-2}$ . This condition forbids a strap-down configuration of the gradiometer in the aircraft as

the accelerations in an aircraft will largely overpass this limit. We illustrate this statement with the three time series of the three components of the acceleration vector measured by a strap-down INS (Inertial Navigation System) Sagem ULISS 45i in a Fokker 27 aircraft during a geophysical survey around Corsica [26]. The sampling rate is 1Hz and the flight altitude was fixed to 300m for a flight speed around  $310\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$  (take-off and landing phases excluded). These three examples represent 8 hours of flight and 28,805 measurement points. We introduce an intermediate frame associated to the INS, called INS reference frame, which axis are parallel to the INS sensitive axis. This frame is noted  $\mathcal{R}_a = (O, \vec{u}_x^a, \vec{u}_y^a, \vec{u}_z^a)$  and, to simplify, we assume for the rest of the study that  $\mathcal{R}_a$  is centred on the same point O as  $\mathcal{R}_m$ . This is tantamount to assuming that GREMLIT would be at the same place as the INS in the aircraft and thus subjected to the same acceleration field. The standard deviation of the measured acceleration along  $\vec{u}_x^a$  and  $\vec{u}_y^a$  is respectively  $0.0978\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$  and  $0.1096\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ . These numbers are to be compared with values from the literature; we note that turbulence levels in low level geophysical surveys are most of the time above  $0.4\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$  [27]. We therefore conclude that GREMLIT accelerometers  $x$ - and  $y$ -axis would be constantly saturated in case of a strap-down configuration. As a consequence, a real-time solution to limit the accelerometer saturation as much as possible in the aircraft is needed.

## 4.2 Principle of the controlled platform

For the sake of clarity, we assume in a first phase that the acceleration field is uniform in  $\mathcal{R}_m$ : the acceleration vector is the same everywhere. The strategy put forward here consists in setting the acceleration gradiometer up on a controlled double-gimbal platform. The platform rotates so that the gradiometer common-mode signal is cancelled. The common-mode signal is the average of the horizontal accelerations sensed by the four planar accelerometers at points  $O_1, O_2, O_3$  and  $O_4$ , which corresponds in a linear approximation to the horizontal acceleration at point O in  $\mathcal{R}_m$ . The rejection of the common-mode is equivalent to cancelling the projection of the sensed acceleration at point O in  $\mathcal{R}_m$  onto the plane  $(\vec{u}_x^m, \vec{u}_y^m)$ . Geometrically speaking, it is equivalent to directing the gradiometer  $z$ -axis  $\vec{u}_z^m$  parallel to the sensed acceleration vector at O in  $\mathcal{R}_m$ . Put another way, it performs a rotation of the platform in order to project on the horizontal measurement axis the gravitational acceleration to compensate for the aircraft horizontal acceleration. This can be done by mounting the gradiometer on a double-gimbal platform controlled by the gradiometer common-mode output (see Figure 6). The horizontal acceleration at each accelerometer is therefore theoretically zero since the sensed acceleration is totally supported by their vertical axis  $\vec{u}_z^m$ . Such a principle has been implemented on a pendulum at Onera for several years to test on the ground the space accelerometers [28]: the pendulum inclination enables to compensate for the seismic noise thanks to the projection of the gravity acceleration.

It is however essential to quantify to what extent this solution can keep the  $x$ - and  $y$ -axis acceleration sensed by each accelerometers in the  $\pm 10^{-4}\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$  range: if the average horizontal acceleration is cancelled on the four accelerometers, there is still a residual horizontal acceleration due to the fact that the acceleration field is not uniform (this is due to gravitational gradients and to the rotation of the measurement reference frame with respect to an inertial frame). Without loss of generality, only the residual acceleration on accelerometer  $A_1$  is analysed here. First of all, it is assumed that the

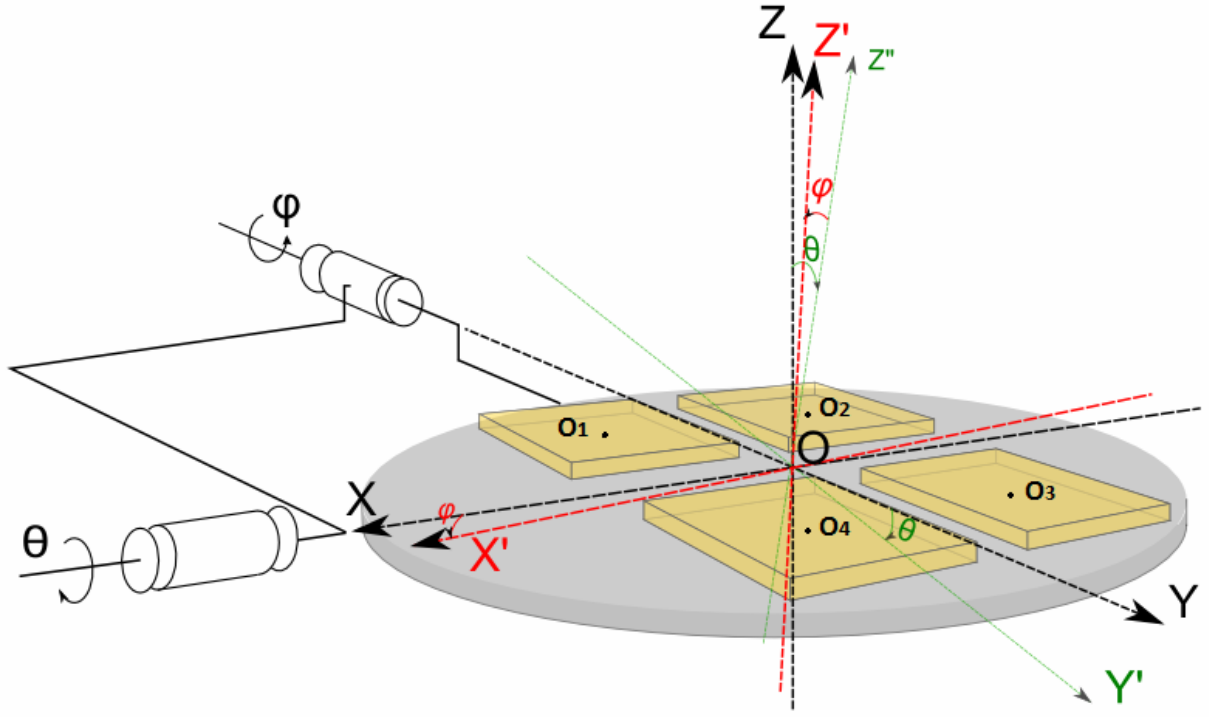


Figure 6: The double-gimbal platform enables to direct the vertical axis of the gradiometer towards the direction of the resulting acceleration in O. On this figure, the X and Y-axis of rotation are initially superimposed on the horizontal axis of  $\mathcal{R}_m$ . The initial frame (O, X, Y, Z) becomes (O, X, Y', Z') after a rotation about X by an angle (angle  $\theta$ ) and then (O, X', Y', Z') after a rotation about Y' by an angle (angle  $\varphi$ ).

control loop is running perfectly and consequently the gradiometer common-mode is cancelled. The residual acceleration sensed at  $O_1$ , noted  $\vec{a}^d$  is then given by:

$$\vec{a}^d = \left( \left( \underline{\underline{\mathbf{V}}} - \underline{\underline{\dot{\Omega}}} - \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \right) \cdot \overrightarrow{OO_1} \right)_{\mathcal{R}_m} \times \vec{u}_z^m \quad (24)$$

A sufficient condition to maintain non saturation is to have  $|\vec{a}_x^d| \leq 10^{-4} \text{m.s}^{-2}$  and  $|\vec{a}_y^d| \leq 10^{-4} \text{m.s}^{-2}$ .

### 4.3 Validation on a test case

We test the validity of this condition for a real airborne environment in the case of the previously described airborne surveys over Corsica. To do so, we compute the different terms contributing to the residual acceleration with the available time series of angular velocity and acceleration vectors collected by the aircraft INS during the surveys (see Appendix A for a description of the method). One can note that  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$  is negligible as the maximum value of the gravity gradients on the ground is around 10,000E, giving an acceleration contribution of approximately  $6.3 \cdot 10^{-7} \ll 10^{-4} \text{m.s}^{-2}$ .

For the three different flights during the airborne surveys in Corsica, the computed residual acceleration on the  $x$ -axis of accelerometer  $O_1$  is plotted on Figure 7.

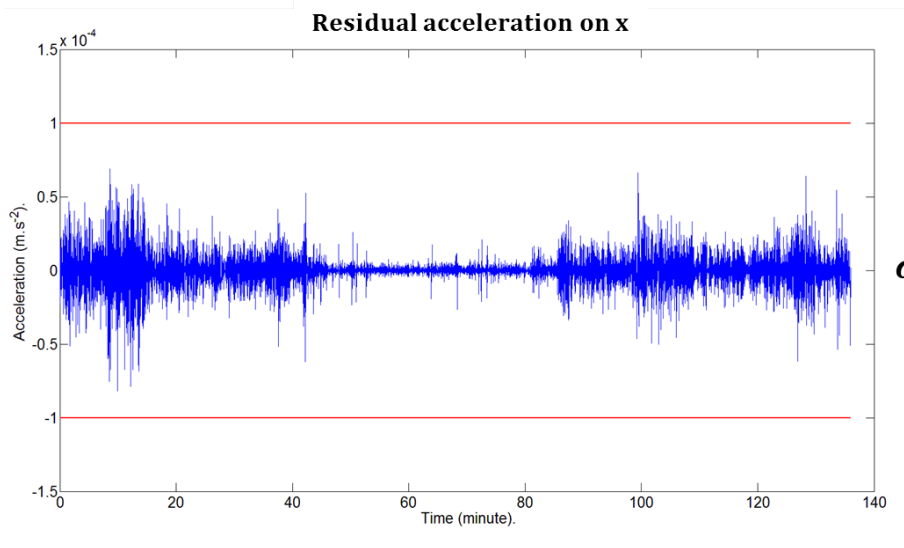
An analytical development of equation (24) shows that the residual acceleration on the other axis of the other accelerometers is either the same or the opposite, so that the saturations occur at the same time on all accelerometers. A statistical analysis carried out with the software R [29] shows that these residual accelerations are zero mean and normally distributed. For the three flights, the saturation occurs 74 times, which is less than 0.3% of the total number of points. Such a performance is sufficient. However, a perfectly null common-mode is not realistic, therefore we must consider that a common-mode noise noted  $\vec{\delta a}^c$  is superimposed to the residual horizontal acceleration. The new total residual acceleration sensed at  $O_1$  is then given by:

$$\vec{a}^{tot} = \vec{a}^d + \vec{\delta a}^c \quad (25)$$

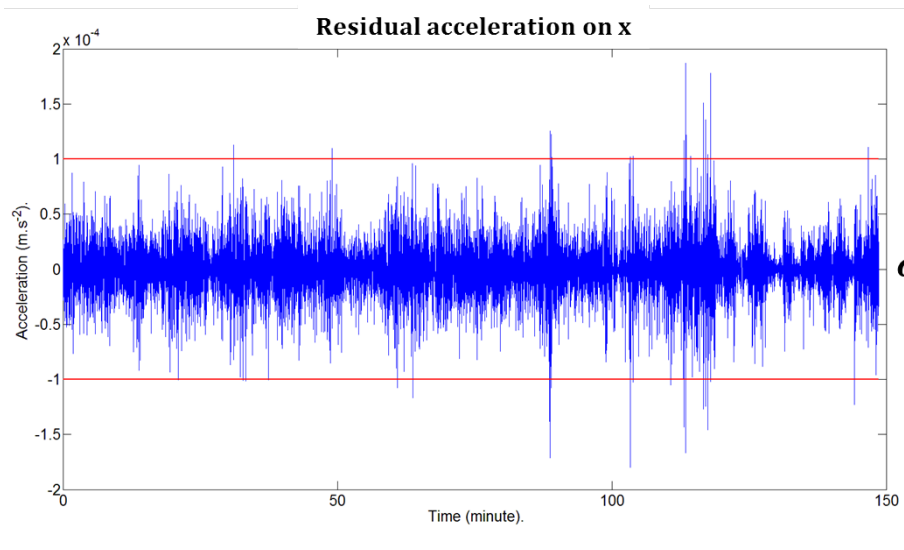
$\vec{\delta a}^c$  is zero mean by definition, independent of the residual accelerations, and we assume that its components are normally distributed. As a consequence  $\vec{a}^{tot}$  is also zero mean and has a normal distribution with a standard deviation given by:

$$\sigma_{\vec{a}^{tot}}^2 = \sigma_{\vec{a}^d}^2 + \sigma_{\vec{\delta a}^c}^2 \quad (26)$$

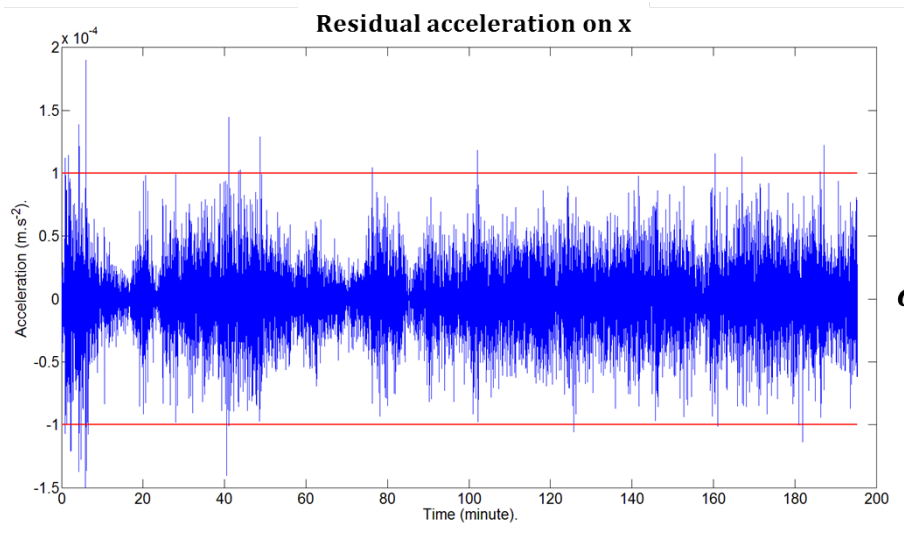
We can now derive a specification on the standard deviation of the common-mode noise. Considering the characteristics of flight 3, and if we tolerate a saturation of the accelerometers 5% of the time, then we can write that statistically the condition  $2.\sigma_{\vec{a}^{tot}} \leq 10^{-4}\text{m.s}^{-2}$  is sufficient. This requires a standard deviation of the common-mode noise below  $4.1 \times 10^{-5}\text{m.s}^{-2}$ . For 1% of the time, the requirement becomes  $2.8 \times 10^{-5}\text{m.s}^{-2}$ .



**Flight 1**  
 $\sigma = 1.18 \times 10^{-5} m.s^{-2}$



**Flight 2**  
 $\sigma = 2.73 \times 10^{-5} m.s^{-2}$



**Flight 3**  
 $\sigma = 2.87 \times 10^{-5} m.s^{-2}$

Figure 7: The common-mode cancelling strategy is evaluated for three real flights of similar characteristics. The residual acceleration on one horizontal axis of one accelerometer is computed and plotted for the three flights. The red lines mark out the saturation limits. On the right, the standard deviation of each time series is indicated.



## 5 Discussion and conclusion

The technology of ultra-sensitive electrostatic accelerometers developed for space missions is used to design a new concept of planar acceleration gradiometer. Based on the knowledge acquired with previous space accelerometers, a preliminary study shows that a sensitivity below  $1\text{E}/\sqrt{Hz}$  is expected in the bandwidth  $[10^{-3}, 0.2]\text{Hz}$  on the horizontal acceleration gradients. This planar acceleration gradiometer together with three gyroscopes, constitute the planar gravity gradiometer GREMLIT, allowing us to derive the three independent gravity gradients:  $V_{xx}$ ,  $V_{yy}$ ,  $V_{xy}$  and to deduce  $V_{zz}$  in the measurement frame. The adaptation of GREMLIT to airborne conditions requires the cancellation of the acceleration gradiometer common-mode, which is done by integrating GREMLIT on a controlled platform. The validity of such a solution has been tested only for one case study, however we claim that the latter is representative of the airborne conditions during surveys with good meteorological conditions. Assuming a perfect cancellation of the common-mode, the saturation of the accelerometers happens only occasionally, in less than 0.3% of the time. This positive outcome raises the question of the actual precision of the common-mode cancellation. We have found that, if we consider acceptable a saturation of the accelerometers 5% of the time, we can tolerate a common-mode noise with a standard deviation below  $4.1 \times 10^{-5}\text{m.s}^{-2}$ . For 1% of the time, the standard deviation falls below  $2.8 \times 10^{-5}\text{m.s}^{-2}$ . Such a specification on the common-mode noise has already been reached at Onera on a pendulum whose inclination is controlled thanks to an ultra-sensitive accelerometer: Touboul *et al.* [7] show that a noise level as low as  $3 \times 10^{-8}\text{m.s}^{-2}/\sqrt{Hz}$  for frequencies below  $2 \times 10^{-1}\text{Hz}$  is obtained. However, the design of a controlled platform adapted to the airborne environment dynamic and respecting the above specification is a technological challenge. Assuming that such a platform can be made, we regard the system {GREMLIT + controlled platform} as being able to provide the measurement of the four horizontal acceleration gradients, in the gradiometer reference frame in an aircraft, with an error below 1E.

Based on these promising results, future works will be dedicated (1) to the realization of a prototype of the horizontal acceleration gradiometer and controlled platform and (2) to the retrieval of the gravitational information from the set of measurements. In this respect, two important steps should be emphasized:

- First, the determination of the horizontal gravity gradients in  $\mathcal{R}_m$ , along with the characterization of the corresponding error. This requires to subtract the angular velocity terms from the acceleration gradients. The angular velocity is measured by three gyros. Jekeli [30] demonstrates that, for an error of 1E on the acceleration gradients, a commensurate bias on the angular velocity measurement must be below  $0.015^\circ.\text{h}^{-1}$ , which requires highly accurate gyroscopes. As a consequence, if we want to use navigation-grade gyros with a less restrictive bias requirement, we need a method to calibrate the bias of the gyros.
- Second, the interpretation of the gravity gradients will be facilitated if they are expressed in a frame with fixed orientation such as the local East-North-Up frame  $\mathcal{R}_l$ . The change of reference frame is done by a rotation of the GGT (see equation (19)), which requires the knowledge of the five independent elements of the tensor while we only know three of

them. For small rotation angles, typically a few degrees, a possible solution to overcome this problem consists in completing the measured GGT in the measurement reference frame  $\mathcal{R}_m$  with gravity gradients computed from an Earth's gravity model before the rotation. An error analysis is needed to assess the impact of this solution and of rotation angle uncertainties on the precision of the horizontal gravity gradients  $\mathbf{V}_{xx}^{\mathcal{R}_1}$ ,  $\mathbf{V}_{xy}^{\mathcal{R}_1}$  and  $\mathbf{V}_{yy}^{\mathcal{R}_1}$ .

Aiming to reach a 1E precision on the obtained gravity gradients, we see airborne gravity gradiometry with GREMLIT as a powerful mean to give rapidly a high resolution map of the gravity field, especially in coastal and mountainous areas. We claim that with such a precision and sensitivity to short wavelengths, it is possible to detect the very fine variations of the gravity field that will improve exploration surveys efficiency, and open new possibilities in coastal current monitoring and inertial navigation.

## A Appendix

We recall the expression of the residual horizontal acceleration sensed at  $O_1$ :

$$\vec{a}^d = \left( \left( \underline{\underline{\mathbf{V}}} - \underline{\underline{\dot{\Omega}}} - \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \right) \cdot \overrightarrow{OO_1} \right) \times \vec{u}_z^m \quad (27)$$

As previously mentioned, the contribution of  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$  to the residual acceleration is negligible. We determine  $\underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{\Omega}}_{m/i}$ , by splitting it into 2 terms:

$$\underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{\Omega}}_{m/a} + \underline{\underline{\Omega}}_{a/i} \quad (28)$$

We have the time series of  $\underline{\underline{\Omega}}_{a/i}$ , expressed in  $\mathcal{R}_a$ , directly from the data collected by the aircraft INS gyros. The computation of  $\underline{\underline{\Omega}}_{m/a}$ , which is the angular velocity matrix of the controlled platform with respect to the aircraft, is done in two steps: first we compute the time series of  $\theta$  and  $\varphi$  and then their derivative in  $\mathcal{R}_a$ . From the three acceleration components measured by the INS in  $\mathcal{R}_a$ , we deduce the required rotation angles  $\theta$  and  $\varphi$  (see Figure 6) enabling to align  $\vec{u}_z^m$  on the sensed acceleration vector in O for each sample. As rotations are not commutative in 3 dimensions, we assume, again without loss of generality, that the platform first rotates around  $X$  and then around  $Y'$  (see Figure 6). Then, the time series of  $\dot{\varphi}$  (resp.  $\dot{\theta}$ ) are derived from the time series of  $\varphi$  (resp.  $\theta$ ), thanks to a polynomial interpolation: for each data point  $n$  at time  $t_n$ , a polynomial function of degree 5 is computed to fit the 5 data points from  $(n-2)$  to  $(n+2)$ . Then the polynomial is derived and calculated at time  $t_n$ . The choice of a degree 5 polynomial is arbitrary, however we consider it as a good trade-off between matching the true dynamics of the continuous signal and limiting Runge's phenomenon. The same algorithm is used to compute  $\underline{\underline{\dot{\Omega}}}$  from  $\underline{\underline{\Omega}}$ . Finally, we project  $\underline{\underline{\Omega}}$  into  $\mathcal{R}_m$  where expression (23) is easily evaluated.

## B Acknowledgement

The authors would like to thank José Cali, Françoise Duquenne, Jérôme Verdun and IGN, for providing the time series of the flight dynamics of the airborne survey in Corsica. We also acknowledge

Nicolas Tanguy, Eddy Perrot and Vincent Lebat for providing the CAD model views of GREMLIT. This study benefits from a grant from ANR ASTRID and Karim Douch from a PhD grant from Onera. This is IPGP contribution number XXXXX.

## References

- [1] M. Nabighian, M. Ander, V. Grauch, R. Hansen, T. LaFehr, Y. Li, W. Pearson, J. Peirce, J. Phillips, and M. Ruder. Historical development of the gravity method in exploration. *Geophysics*, 70(6):63ND–89ND, 2005.
- [2] P. Knudsen, O. Andersen, R. Forsberg, H. Föh, A. Olesen, A. Vest, D. Solheim, O. Omang, R. Hipkin, A. Hunegnaw, K. Haines, R. Bingham, JP. Drecourt, J. Johannessen, H. Drange, F. Siegmund, F. Hernandez, G. Larnicol, MH. Rio, and P. Schaeffer. Combining altimetric/-gravimetric and ocean model mean dynamic topography models in the gocina region. In Paul Tregoning and Chris Rizos, editors, *Dynamic Planet*, volume 130 of *International Association of Geodesy Symposia*, pages 3–10. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [3] C. Jekeli. Precision free-inertial navigation with gravity compensation by an onboard gradiometer. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 29(3):704–713, 2006.
- [4] B. D. Tapley, S. Bettadpur, M. Watkins, and C. Reigber. The Gravity Recovery and Climate Experiment: Mission overview and early results. *Geophysical Research Letters*, 31(9):n/a–n/a, 2004.
- [5] R. Rummel, W. Yi, and C. Stummer. GOCE gravitational gradiometry. *Journal of Geodesy*, 85:777–790, 2011. 10.1007/s00190-011-0500-0.
- [6] J.A. Johannessen, G. Balmino, C. Le Provost, R. Rummel, R. Sabadini, H. Sünkel, C.C. Tscherning, P. Visser, P. Woodworth, C. Hughes, P. Legrand, N. Sneeuw, F. Perosanz, M. Aguirre-Martinez, H. Rebhan, and M. Drinkwater. The European Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer Satellite Mission Its Impact on Geophysics. *Surveys in Geophysics*, 24(4):339–386, 2003.
- [7] P. Touboul, E. Willemenot, B. Foulon, and V. Josselin. Accelerometers for CHAMP, GRACE and GOCE space missions: synergy and evolution. *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata*, 40(3-4):321–327, 1999.
- [8] B. Christophe, J.-P. Marque, and B. Foulon. In-orbit data verification of the accelerometers of the ESA GOCE mission. In S. Boissier, M. Heydari-Malayeri, R. Samadi, and D. Valls-Gabaud, editors, *SF2A-2010: Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics*, page 113, December 2010.
- [9] M. Dransfield. Airborne gravity gradiometry in the search for mineral deposits. In *Proceedings of Exploration*, volume 7, pages 341–354, 2007.

- [10] R. E. Bell, R. Anderson, and L. Pratson. Gravity gradiometry resurfaces. *The Leading Edge*, 16(1):55–59, 1997.
- [11] D. Difrancesco. Gravity gradiometry: Systems, applications, and future prospects. In *International Workshop on Gravity, Electrical and Magnetic Methods and Their Applications, Beijing, China*, pages 31–31, 2011.
- [12] D. Boggs, RAM. Maddever, J. Lee, R. Turner, M. Downey, and M. Dransfield. First test survey results from the FALCON helicopter-borne airborne gravity gradiometer system. *Preview*, 126:26–28, 2007.
- [13] D. Difrancesco. Advances and challenges in the development and deployment of gravity gradiometer systems. In *EGM 2007 International Workshop*, 2007.
- [14] JM. Lumley, JP. White, G. Barnes, D. Huang, and HJ. Paik. A superconducting gravity gradiometer tool for exploration. In *Gradiometry workshop SEG*, volume 2001, 2001.
- [15] GEDEX. <http://www.gedex.ca/Technology/TheImportanceof1EHZ.aspx>. Accessed: 29/01/2014.
- [16] J. Anstie, T. Aravanis, P. Johnston, A. Mann, M. Longman, A. Sergeant, R. Smith, FV. Kann, G. Walker, G. Wells, et al. Preparation for flight testing the VK1 gravity gradiometer. In *Airborne Gravity 2010-Abstracts from the ASEG-PESA Airborne Gravity 2010 Workshop*, 2010.
- [17] R. Rummel and R. H. Rapp. The influence of the atmosphere on geoid and potential coefficient determinations from gravity data. *Journal of Geophysical Research*, 81(32):5639–5642, 1976.
- [18] R. G. Hipkin. The statistics of pink noise on a sphere: applications to mantle density anomalies. *Geophysical Journal International*, 144(2):259–270, 2001.
- [19] A. Marussi. Fondements de géométrie différentielle absolue du champ potentiel terrestre. *Bulletin géodésique*, 14(1):411–439, 1949.
- [20] V. Mikhailov, G. Pajot, M. Diament, and A. Price. Tensor deconvolution: A method to locate equivalent sources from full tensor gravity data. *Geophysics*, 72(5):I61–I69, 2007.
- [21] X. Li and C. Cevallos. Curvature of the equipotential surface, gravity potential, field and gradient anomalies. In *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2013*, pages 1180–1184, 2013.
- [22] G. Pajot, O. De Viron, M. Diament, M-F. Lequentrec-Lalancette, and V. Mikhailov. Noise reduction through joint processing of gravity and gravity gradient data. *Geophysics*, 73(3):I23–I34, 2008.
- [23] G. Campergue, R. Gouhier, D. Horrier, and A. Thiriot. Machine for ultrasonic abrasion machining. US patent 4934103, 1990.

- [24] J. Bergé, B. Christophe, and B. Foulon. GOCE accelerometers data revisited: stability and detector noise. In *Proceedings of ESA Living Planet Symposium 2013*, 2013.
- [25] C. C. Speake. Forces and force gradients due to patch fields and contact-potential differences. *Classical and Quantum Gravity*, 13(11A):A291, 1996.
- [26] H. Duquenne, AV. Olesen, R. Forsberg, and A. Gidskehaug. Improvement of the gravity field and geoid around Corsica by aerial gravimetry. *Gravity and Geoid*, pages 167–172, 2002.
- [27] X. Li, Y. Li, X. Meng, and M. Dransfield. Airborne gravity gradiometry. the state of the art. In *International Workshop on Gravity, Electrical and Magnetic Methods and Their Applications, Beijing, China*, pages 32–32, 2011.
- [28] B. Lenoir, B. Christophe, and S. Reynaud. Experimental demonstration of bias rejection from electrostatic accelerometer measurements. *Measurement*, 46(4):1411–1420, 2013.
- [29] R Core Team. R: A language and environment for statistical computing. Vienna, Austria, 2013.
- [30] C. Jekeli. Airborne gradiometry error analysis. *Surveys in Geophysics*, 27(2):257–275, 2006.

## 2.2 Compléments

### 2.2.1 Principe de fonctionnement des accéléromètres électrostatiques

Il existe deux grandes familles d'accéléromètres, mettant toutes deux en jeu une masse d'épreuve enfermée dans une cage. Dans le premier cas la masse d'épreuve est libre et on déduit l'accélération de l'étude de son mouvement par rapport à la cage, en suivant précisément sa position. Dans le second cas, la masse d'épreuve est asservie en position est on déduit l'accélération de la force de rappel qui lui est appliquée. La mesure utile sur le gradiomètre GREMLIT est basée sur ce second principe. Afin de mettre en évidence le principe physique du contrôle en position de la masse d'épreuve selon les axes horizontaux et verticaux, on propose dans cette section des modélisations électrostatiques simplifiées des accéléromètres.

#### 2.2.1.1 Asservissement en position de la masse d'épreuve

L'élément clé du gradiomètre d'accélération étant l'accéléromètre, il convient de décrire plus précisément le fonctionnement de celui-ci. Comme précisé dans l'article 1, un ensemble d'électrodes, dites électrodes  $z$  et situées en dessous et au-dessus de la masse d'épreuve, servent à maintenir celle-ci en lévitation électrostatique. Les électrodes  $x$  et  $y$  servent quant-à-elles à maintenir la masse en position horizontale. Dans les deux cas, la mesure de la variation de position et l'application de la force électrostatique nécessaire à maintenir la masse en position sont effectuées à travers les mêmes électrodes, comme illustré par la boucle d'asservissement schématisée sur la figure 2.4. La variation de position de la masse va induire une variation de la capacité créée par cette dernière avec les différentes électrodes. C'est cette variation de capacité qui est mesurée. Enfin, le signal d'accélération horizontal va être déduit de la consigne d'action du contrôle en position horizontale. Deux types différents de détection capacitive sont toutefois mis en œuvre pour asservir la masse d'épreuve en position verticale et horizontale. C'est respectivement un contrôle par variation d'entrefer selon l'axe  $z$  et un contrôle par variation de surface de recouvrement pour les axes  $x$  et  $y$ .

#### 2.2.1.2 Force électrostatique dans le cas unidimensionnel

**2.2.1.2.1 Contrôle par variation d'entrefer** Dans cette configuration, les deux faces opposées de la masse d'épreuve en regard avec les électrodes forment deux condensateurs. Ces deux condensateurs 1 et 2 de capacité respective  $C_1$  et  $C_2$  sont en fait appariés et forment un pont de capacité. On obtient alors la différence de courant entre les 2 branches en parallèle grâce à un transformateur différentiel. Le signal est ensuite converti en une tension et est amplifié de manière à ce que le détecteur capacitif fournisse une tension  $V_{det}$

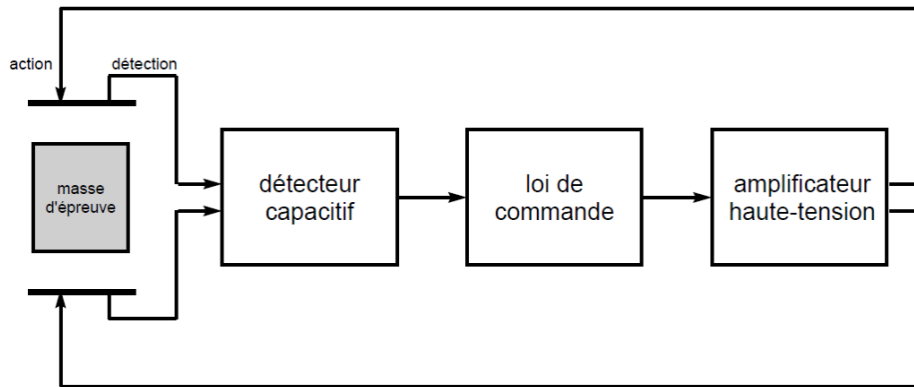


FIGURE 2.4 – Schéma de la boucle d'asservissement en position de la masse d'épreuve d'un accéléromètre électrostatique.

proportionnelle à la différence de capacité entre les 2 électrodes appariées :

$$V_{det} = K_{det}(C_1 - C_2) \quad (2.5)$$

où  $K_{det}$  est le facteur de sensibilité du détecteur capacitif.

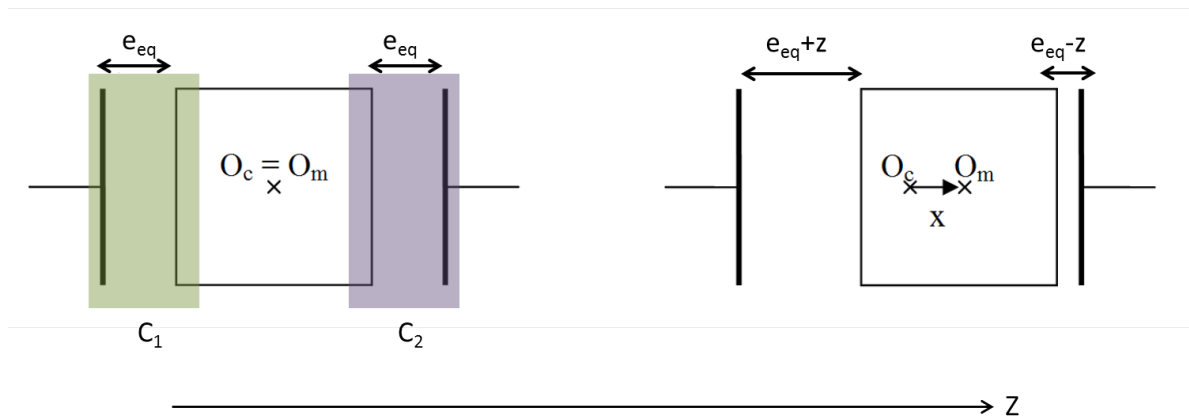


FIGURE 2.5 – Représentation simplifiée de la configuration de l'accéléromètre avec variation d'entrefer. A l'équilibre (figure de gauche), la masse d'épreuve centrée en  $O_m$  est située entre et à égale distance  $e_{eq}$  des 2 électrodes. Les 2 condensateurs  $C_1$  et  $C_2$  sont figurés en vert et violet. A droite, un petit déplacement  $z$  de la masse d'épreuve le long de l'axe  $Z$  fait varier l'entrefer des 2 côtés.

En négligeant les effets de bord et les variations de surface de recouvrement, la capacité  $C_i$

du condensateur  $i$  créée par une électrode et la masse d'épreuve a pour expression :

$$C_i = \frac{\epsilon_0 S}{e_i} \quad (2.6)$$

avec  $\epsilon_0$  la permittivité du vide,  $S$  la surface constante de vis-à-vis de l'électrode en regard avec la masse d'épreuve et  $e_i$  la distance entre ces deux surfaces. A l'équilibre on a donc :

$$C_1 = C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{e_{eq}} \quad (2.7)$$

et le détecteur capacitif délivre un signal nul. Si la masse d'épreuve est déplacée d'une quantité  $z$  dans la direction correspondant à la paire d'électrodes, on obtient alors :

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{e_{eq} + z} \quad (2.8)$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{e_{eq} - z} \quad (2.9)$$

Pour des petits déplacements ( $z \ll e_{eq}$ ) on obtient par un développement limité au premier ordre en  $z$  l'expression de la tension de sortie du détecteur capacitif :

$$V_{det} = K_{det} \left( \frac{\epsilon_0 S}{e_{eq} + z} - \frac{\epsilon_0 S}{e_{eq} - z} \right) \quad (2.10)$$

$$= \frac{2K_{det}\epsilon_0 S}{e_{eq}^2} z + o\left(\frac{z}{e_{eq}}\right) \quad (2.11)$$

On a ici la relation linéaire liant la sortie du détecteur au déplacement de la masse d'épreuve par rapport à la position d'équilibre. Utiliser la tension  $V_{det}$  dans la boucle d'asservissement en position requiert de connaître le facteur de proportionnalité qui est fonction des caractéristiques du détecteur et de la géométrie de l'accéléromètre.

Cette tension est ensuite amplifiée et traitée dans la boucle d'asservissement. Celle-ci fournit la tension à appliquer en retour sur les électrodes afin de produire une force électrique sur la masse d'épreuve permettant de la ramener à sa position d'équilibre verticale. Dans le cas des accéléromètres de GREMLIT, les électrodes de l'axe vertical servent aussi à maintenir la masse d'épreuve en lévitation et donc à compenser le champ de gravité. De ce fait les électrodes inférieures et supérieures ne jouent pas le même rôle. Considérons à nouveaux les deux condensateurs  $C_1$  et  $C_2$ . La masse d'épreuve est polarisée à un potentiel  $V_m$  par l'intermédiaire du fil d'or. L'électrode du haut (du condensateur  $C_2$ ) est polarisée à un potentiel  $V_e$  tandis que l'électrode de  $C_1$ , en bas, est polarisée au même potentiel  $V_m$  que la



masse d'épreuve afin de ne pas exercer de force d'attraction sur elle (voir figure 2.6). Dans ces conditions, l'énergie potentielle électrique  $E_p$  de ce système est :

$$E_p = \frac{1}{2}C_2(V_m - V_e)^2 = \frac{1}{2}C_2(V_m - V_g - \delta V_e)^2 \quad (2.12)$$

L'énergie potentielle se situe donc seulement dans le condensateur  $C_2$ . Par conséquent, seule la force électrique qui en dérive et exercée par l'électrode du haut permet de compenser le poids de la masse d'épreuve et de la maintenir en lévitation. Il est donc pertinent de décomposer le potentiel  $V_e = V_g + \delta V_e$  où  $V_g$  et le potentiel fixe correspondant à la force électrique compensant le poids de la masse d'épreuve et  $\delta V_e \ll V_g$  le potentiel réglable d'ajustement en position de cette dernière.

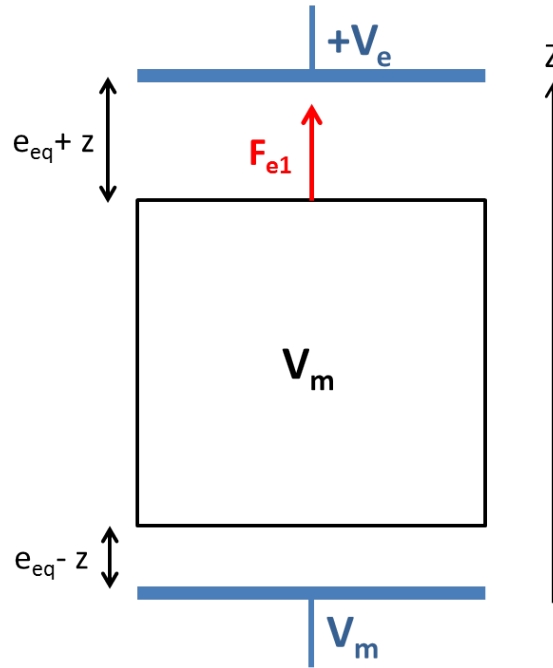


FIGURE 2.6 – Contrôle en position unidimensionnelle de la masse d'épreuve par variation d'entrefer.

Le travail élémentaire de la force électrique pour un petit déplacement  $\vec{dl}$  de la masse d'épreuve est défini par :

$$\delta W_{F_{el}} = \vec{F}_{el} \vec{dl} = -dE_p \quad (2.13)$$

La force électrique dérive de cette énergie potentielle de sorte que l'on a :

$$\vec{F}_{el} = -\vec{\nabla} E_p \quad (2.14)$$

Dans notre cas unidimensionnel, l'application de cette formule donne :

$$\vec{F}_{el} = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} C_2 (V_m - V_g - \delta V_e)^2 \quad (2.15)$$

$$= + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{(e_{eq} - z)^2} (V_m - V_g - \delta V_e)^2 \vec{u}_z \quad (2.16)$$

De nouveau, on fait un développement limité au premier ordre en  $z$  et on obtient :

$$F_{el} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{e_{eq}^2} \left(1 + 2 \frac{z}{e_{eq}}\right) \left(2(V_g - V_m) \delta V_e + \delta V_e^2 + (V_g - V_m)^2\right) + o(z) \quad (2.17)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à 2, le développement de la formule précédente donne :

$$F_{el} \approx \underbrace{\frac{\epsilon_0 S}{e_{eq}^2} (V_g - V_m) \delta V_e}_{(1)} + \underbrace{\frac{\epsilon_0 S}{e_{eq}^3} (V_g - V_m)^2 z}_{(2)} + o(z) \quad (2.18)$$

où le terme (1) correspond à la force de réglage en position vertical de la masse et dépendant linéairement de  $\delta V_e$  et le terme (2) correspond à la force électrique à appliquer pour le maintien en lévitation. L'accélération notée  $a$  associée à cette force se déduit alors en divisant par la masse  $m$  de la masse d'épreuve :

$$a = \frac{F_{el}}{m} = \frac{\epsilon_0 S}{m e_{eq}^2} (V_g - V_m) \delta V_e + \frac{\epsilon_0 S}{m e_{eq}^3} (V_g - V_m)^2 z + o(z) \quad (2.19)$$

avec :

- $G_e = \frac{\epsilon_0 S}{m e_{eq}^2} (V_g - V_m)$  le facteur de sensibilité
- $\omega^2 = \frac{\epsilon_0 S}{m e_{eq}^3} (V_g - V_m)^2$  le coefficient de raideur

On voit donc que pour de petits déplacements ( $z \ll e_{eq}$ ) selon l'axe  $Z$  et autour du point de fonctionnement, l'accélération est proportionnelle à la tension  $\delta V_e$  appliquée aux électrodes. On déduit donc l'accélération à partir de  $\delta V_e$  à condition de bien connaître le facteur de sensibilité du système. Il existe toutefois un second terme perturbateur dit de raideur électrostatique. Ce terme introduit un biais et des non-linéarités quadratiques lorsque la masse n'est pas asservie au point d'équilibre. En se limitant à des déplacements de très faible amplitude, ce terme est minimisé de manière à le rendre négligeable devant le terme en  $\delta V_e$ . Dans le cas de la mission GOCE, les 6 accéléromètres électrostatiques du gradiomètre fonctionnent selon ce principe, à savoir la mesure de l'accélération par variation d'entrefer sur chacun des axes. Toutefois et contrairement à GREMLIT, les masses d'épreuve dans GOCE

sont en chute libre, tout comme le satellite. Dès lors, aucun ensemble d'électrodes n'est spécifiquement utilisé pour les maintenir en lévitation. Les paires d'électrodes opposées jouent donc des rôles identiques et sont soumises à des potentiels électriques strictement opposés. De ce fait l'équation liant l'accélération selon un axe au potentiel d'électrode  $V_e$  et au déplacement  $z$  est légèrement différente de 2.19. Elle fait cependant apparaître un terme de sensibilité et un terme de raideur, qui montre que la mesure n'est pas parfaitement linéaire sur les accéléromètres de GOCE.

**2.2.1.2.2 Contrôle par variation de surface de recouvrement** Pour la mesure du déplacement horizontal de la masse d'épreuve et son contrôle en position, une autre méthode est mise en œuvre. Cette fois-ci ce n'est plus l'entrefer des condensateurs que l'on fait varier mais la surface de recouvrement. Cette technique présente notamment l'avantage d'être beaucoup plus linéaire que la précédente. Considérons la configuration simplifiée de la figure 2.7 où la masse d'épreuve polarisée à  $V_m$  recouvre partiellement les deux électrodes horizontales polarisées à  $+V_e$  et  $-V_e$ . Pour simplifier la modélisation, on supposera l'entrefer parfaitement constant et comme dans la section précédente on néglige les effets de bord et la permittivité relative de l'entrefer. L'interaction électrique entre l'électrode du haut et la masse d'épreuve crée un condensateur  $C_1$ , celle avec l'électrode du bas crée un condensateur  $C_2$ . Par une démarche analogue à la précédente, on trouve :

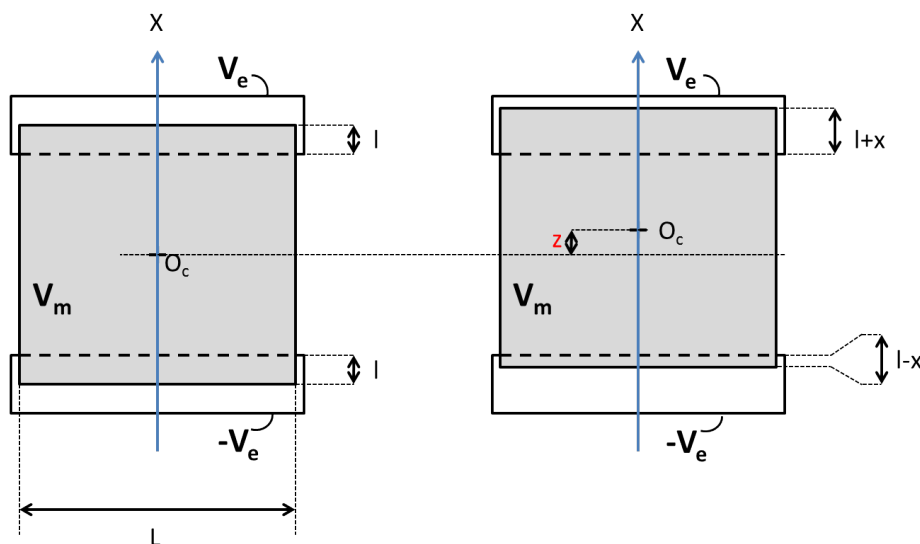


FIGURE 2.7 – A gauche : configuration à l'équilibre de la masse d'épreuve recouvrant d'une même longueur  $l$  l'électrode du haut et celle du bas. A droite, configuration dans le cas d'un déplacement  $x$  selon l'axe  $X$ . L'entrefer  $e_{eq}$  séparant verticalement les électrodes de la masse d'épreuve est supposé constant.

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 L(l+x)}{e_{eq}} \quad (2.20)$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 L(l-x)}{e_{eq}} \quad (2.21)$$

On a alors directement et sans approximation pour le détecteur capacitif :

$$V_{det} = K_{det} \left( \frac{\epsilon_0 L(l-x)}{e_{eq}} - \frac{\epsilon_0 L(l+x)}{e_{eq}} \right) \quad (2.22)$$

$$= -2K_{det} \frac{\epsilon_0 Lx}{e_{eq}} \quad (2.23)$$

La tension de sortie du détecteur capacitif est donc parfaitement proportionnelle au déplacement  $x$ . Pour déterminer l'expression du potentiel à appliquer aux électrodes afin de créer la force électrique ramenant la masse à sa position d'équilibre, on procède comme précédemment. On a :

$$\vec{F}_{el} = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} C_1 (-V_e - V_m)^2 - \frac{1}{2} \vec{\nabla} C_2 (V_m - V_e)^2 \quad (2.24)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\epsilon_0 L(l+x)}{e_{eq}} (V_e + V_m)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\epsilon_0 L(l-x)}{e_{eq}} (V_m - V_e)^2 \vec{u}_z \quad (2.25)$$

$$= \frac{2\epsilon_0 LV_m}{e_{eq}} V_e \vec{u}_z \quad (2.26)$$

soit en notant  $a$  l'accélération selon l'axe  $x$  :

$$a = G_r \cdot V_e \quad (2.27)$$

avec

$$G_r = \frac{2\epsilon_0 LV_m}{me_{eq}} \quad (2.28)$$

le facteur de sensibilité. Dans le cas d'un contrôle par variation de recouvrement il n'y a pas de terme de raideur contrairement au cas de la variation d'entrefer. On a de plus une parfaite linéarité entre le potentiel de contrôle  $V_e$  appliqué aux électrodes et l'accélération ressentie au centre de masse. Cette linéarité facilite le contrôle de la masse d'épreuve et améliore la qualité de la mesure, comparativement au cas du contrôle par variation d'entrefer exposé précédemment.

### 2.2.2 Mesures effectuées par le gradiomètre d'accélération

Précédemment, le spectre du bruit de mesure sur les gradients d'accélération (en  $E/\sqrt{Hz}$ ) était dérivé à partir de celui du bruit susceptible de contaminer la mesure de l'accélération selon un axe sensible d'un accéléromètre (voir section 3.5 de l'article 1). Le calcul des gradients à partir des mesures accélérométriques fait cependant apparaître de nouvelles sources d'erreur d'origine géométrique qui n'ont pas été prises en compte jusqu'à présent. La géométrie en mécanique n'est en effet pas parfaite et des défauts de fabrication ou des déformations des différentes pièces vont entraîner de nouvelles erreurs sur l'estimation des gradients. On se propose ici d'analyser plus précisément ces différents termes d'erreur et de les quantifier afin de s'assurer qu'ils peuvent être négligés ou, dans la mesure du possible, fournir des spécifications sur les incertitudes inhérentes à ces termes. Pour ce faire, on part de l'équation de la mesure sur un axe d'accéléromètre puis nous l'appliquons à la formulation des gradients d'accélération en faisant attention à chaque fois à prendre en compte les différents défauts géométriques de l'instrument ainsi que les possibles termes de couplages entre axes. Ce développement permet d'obtenir l'expression du terme d'erreur total sur les gradients. On prendra notamment en compte :

1. la non orthogonalité des axes sensibles de chacun des 4 accéléromètres par rapport aux axes du repère de référence du gradiomètre
2. le non parallélisme des axes sensibles par rapport aux axes du repère de référence du gradiomètre
3. le non parallélisme des axes ( $O_4O_1$ ) et ( $O_3O_2$ ) (resp. ( $O_4O_3$ ) et ( $O_1O_2$ )) par rapport à l'axe Y (resp. X) du repère de référence du gradiomètre
4. l'erreur sur les distances entre les centres de masses d'épreuve et le centre du gradiomètre.

#### 2.2.2.1 Modélisation des défauts de couplage et d'alignement sur les mesures du gradiomètre

Une mesure notée  $m$  de l'accélération  $\tilde{a}$  sur un axe horizontal d'un accéléromètre peut être modélisée de la manière suivante :

$$m = (1 + \delta K)\tilde{a} + b + n \quad (2.29)$$

où, en suivant une notation similaire à celle utilisée dans l'article 1 (*cf* équation 21),  $\delta K$

est l'incertitude relative sur le facteur d'échelle avec  $\delta K \ll 1$ ,  $b$  est le biais et  $n$  le bruit. Le terme  $\delta K$  représente par exemple la méconnaissance que l'on a sur le facteur de sensibilité décrit dans la section 2.2.1.2.2. Sa détermination nécessite de connaître précisément la longueur des électrodes, la tension de polarisation  $V_m$ , l'entrefer mais aussi la valeur des gains électroniques de mesure de la tension  $V_e$ . Le biais  $b$  est la différence entre l'espérance mathématique de la mesure  $m$  et la quantité  $(1 + \delta K)\tilde{a}$ . Les sources de biais sont notamment le biais de l'électronique de mesure de  $V_e$ , les accélérations parasites s'appliquant à la masse d'épreuve tel que la pression de radiation, la viscosité du gaz résiduel ou encore la raideur du fil d'or. Le biais est un signal temporel déterministe à la différence de  $n$  qui est un processus stochastique, stationnaire et de moyenne nulle. La caractérisation spectrale du bruit a été déduite celle du bruit  $n$  sur un axe sensible. Par la suite on notera  $x^i$  et  $y^i$  les 2 axes sensibles de mesure de chaque accéléromètre  $A_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . On notera également  $\tilde{a}_x^i$  (resp.  $\tilde{a}_y^i$ ) la composante selon  $x^i$  (resp.  $y^i$ ) de l'accélération au centre  $O_i$  de l'accéléromètre  $A_i$  (voir figure 2 dans l'article 1). De manière analogue,  $m_x^i$  (resp.  $m_y^i$ ) désigne la mesure de l'accélération associée à  $\tilde{a}_x^i$  (resp.  $\tilde{a}_y^i$ ). De la sorte, on peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m_x^i \\ m_y^i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 + \delta K_x^i & 0 \\ 0 & 1 + \delta K_y^i \end{bmatrix}}_{[K^i]} \begin{bmatrix} \tilde{a}_x^i \\ \tilde{a}_y^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x^i \\ b_y^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_x^i \\ n_y^i \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Le repère de référence par rapport auquel les gradients et les accélérations sont par définition mesurés est le repère de mesure  $\mathcal{R}_m = (O, \vec{u}_x^m, \vec{u}_y^m, \vec{u}_z^m)$ . Cependant, on ne peut pas s'attendre dans la réalité à avoir pour chaque accéléromètre un parfait parallélisme entre l'axe sensible  $x^i$  (resp.  $y^i$ ) et le vecteur  $\vec{u}_x^m$  (resp.  $\vec{u}_y^m$ ). Ce défaut est modélisé mathématiquement par la relation linéaire suivante, liant  $\tilde{a}_x^i$  et  $\tilde{a}_y^i$  aux composantes  ${}^t(a_x^i, a_y^i, a_z^i)$  du vecteur accélération en  $O_i$  exprimé dans la base  $(\vec{u}_x^m, \vec{u}_y^m, \vec{u}_z^m)$  :

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_x^i \\ \tilde{a}_y^i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \eta_{xy}^i & \eta_{xz}^i \\ \eta_{yx}^i & 1 & \eta_{yz}^i \end{bmatrix}}_{[\eta^i]} \begin{bmatrix} a_x^i \\ a_y^i \\ a_z^i \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

On définit la matrice de sensibilité  $[M^i] = [K^i].[\eta^i]$ , avec, toujours au premier ordre :

$$[M^i] = \begin{bmatrix} 1 + \delta K_x^i & \eta_{xy}^i & \eta_{xz}^i \\ \eta_{yx}^i & 1 + \delta K_y^i & \eta_{yz}^i \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Maintenant que l'on a une modélisation mathématique plus réaliste des accélérations mesurées, on peut former par combinaison linéaire les gradients d'accélération accessibles à la mesure comme indiqué par les équations 8 à 11 de l'article 1. De nouveau, il faut considérer que dans un cas réaliste, les axes  $(O_1O_4)$  et  $(O_2O_3)$  (resp.  $(O_1O_2)$  et  $(O_4O_3)$ ) ne sont pas exactement colinéaires à l'axe porté par le vecteur  $\vec{u}_y^m$  (resp.  $\vec{u}_x^m$ ). Par exemple, dans le cas spécifique de  $\Gamma_{xy}$  qui correspond à la dérivée selon l'axe X de la composante Y de l'accélération, la direction de dérivation n'est pas exactement parallèle à X. On suppose par la suite, par souci de simplification mais sans perte de généralité, que le problème reste parfaitement planaire et que les défauts d'orientations des directions de dérivation sont paramétrés comme indiqué sur la figure 2.8.

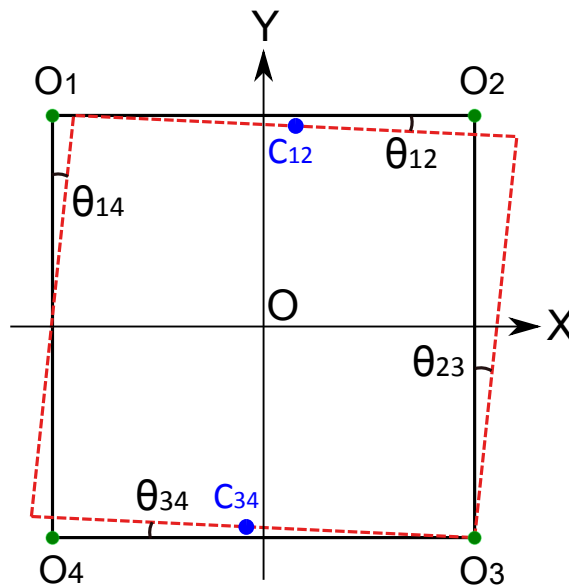


FIGURE 2.8 – Illustration des défauts d'alignement des points de mesure des accélérations. Dans le cas théorique, les centres des masses d'épreuve  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  et  $O_4$  forment un carré, ici en noir, dont les côtés sont parallèles aux 2 axes X et Y du repère de mesure  $\mathcal{R}_m$ . Dans la réalité, les centres des masses d'épreuve sont légèrement décalés et les axes selon lesquels les dérivées sont réellement évaluées, ici en rouge, ne sont pas parallèles à X ou Y. Ces défauts de parallélisme sont paramétrés par 4 angles  $\theta_{14}$ ,  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$  et  $\theta_{34}$ .

Comme théoriquement les 4 accéléromètres sont identiques et le gradiomètre symétrique par rapport aux axes x et y, on ne traite ici que le cas de la mesure  $\tilde{\Gamma}_{xy}$  du gradient d'accélération  $\Gamma_{xy}$ , les résultats étant analogues pour les 3 autres gradients. On a :

$$\tilde{\Gamma}_{xy}(O) = \frac{1}{2} \cdot (\tilde{\Gamma}_{34y}(C_{34}) + \tilde{\Gamma}_{12y}(C_{12})) + o(L) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{m_y^3 - m_y^4}{L} + \frac{m_y^2 - m_y^1}{L} \right) + o(L) \quad (2.33)$$

Soit :

$$\tilde{\Gamma}_{xy}(O) = \frac{1}{2L} \cdot \left[ (a_y^3 - a_y^4) + (a_y^2 - a_y^1) + \epsilon_y^3 - \epsilon_y^4 + \epsilon_y^2 - \epsilon_y^1 \right] + o(L) \quad (2.34)$$

avec :

$$\epsilon_y^i = \eta_{yx}^i a_x^i + \delta K_y^i a_y^i + \eta_{yz}^i a_z^i + b_y^i + n_y^i \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (2.35)$$

$$\tilde{\Gamma}_{xy}(O) = \frac{1}{2} \left[ \Gamma_{34y}(C_{34}) + \Gamma_{12y}(C_{12}) + \left( \frac{\epsilon_y^3 - \epsilon_y^4 + \epsilon_y^2 - \epsilon_y^1}{L} \right) \right] + o(L) \quad (2.36)$$

On obtient alors au premier ordre :

$$\tilde{\Gamma}_{xy}(O) = \frac{1}{2} \left[ \Gamma_{xy}(C_{34}) + \Gamma_{xy}(C_{12}) + \theta_{34} \Gamma_{yy}(C_{34}) + \theta_{12} \Gamma_{yy}(C_{12}) + \left( \frac{\epsilon_y^3 - \epsilon_y^4 + \epsilon_y^2 - \epsilon_y^1}{L} \right) \right] + o(L) \quad (2.37)$$

$$\tilde{\Gamma}_{xy}(O) = \Gamma_{xy}(O) + (\theta_{34} + \theta_{12}) \Gamma_{yy}(0) + \frac{\epsilon_y^3 - \epsilon_y^4 + \epsilon_y^2 - \epsilon_y^1}{2L} + o(L) \quad (2.38)$$

Outre le terme  $\Gamma_{xy}(O)$ , la mesure du gradient d'accélération comprend donc un terme de projection du gradient  $\Gamma_{yy}(0)$ , dû au désalignement des accéléromètres et un terme regroupant des mesures d'accélération parasites dues aux incertitudes sur les paramètres des accéléromètres. Afin de spécifier ces incertitudes, on va réécrire ce terme sous une forme plus développée et appropriée. Pour cela on introduit les notations d'accélération de mode commun et de mode différentiel. Soient les 2 composantes d'accélération  $a_w^i, a_w^j$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  et  $w \in \{x, y, z\}$ , on note :

$$a_{wC}^{ij} = a_w^i + a_w^j \text{ l'accélération de mode commun} \quad (2.39)$$

$$a_{wD}^{ij} = a_w^i - a_w^j \text{ l'accélération de mode différentiel} \quad (2.40)$$

Par souci de clarté, on développe d'abord le terme  $(\epsilon_y^3 - \epsilon_y^4)$  :



$$\epsilon_y^3 - \epsilon_y^4 = \left( \eta_{yx}^3 a_x^3 + \delta K_y^3 a_y^3 + \eta_{yz}^3 a_z^3 + b_y^3 + n_y^3 \right) - \left( \eta_{yx}^4 a_x^4 + \delta K_y^4 a_y^4 + \eta_{yz}^4 a_z^4 + b_y^4 + n_y^4 \right) \quad (2.41)$$

$$= \frac{\eta_{yx}^3 - \eta_{yx}^4}{2} a_{xC}^{34} + \frac{\eta_{yx}^3 + \eta_{yx}^4}{2} a_{xD}^{34} \quad (2.42)$$

$$+ \frac{\delta K_y^3 - \delta K_y^4}{2} a_{yC}^{34} + \frac{\delta K_y^3 + \delta K_y^4}{2} a_{yD}^{34} \quad (2.43)$$

$$+ \frac{\eta_{yz}^3 - \eta_{yz}^4}{2} a_{zC}^{34} + \frac{\eta_{yz}^3 + \eta_{yz}^4}{2} a_{zD}^{34} \quad (2.44)$$

$$+ b_y^3 - b_y^4 + n_y^3 - n_y^4 \quad (2.45)$$

On établit de même une expression parfaitement similaire pour le terme  $\epsilon_y^2 - \epsilon_y^1$ . La somme de ces 2 termes permet d'établir l'expression suivante du terme des accélérations parasites :

$$\frac{\epsilon_y^3 - \epsilon_y^4 + \epsilon_y^2 - \epsilon_y^1}{2L} = \frac{\eta_{yxD}}{L} a_x(0) + \frac{\delta K_{yD}}{L} a_y(0) + \frac{\eta_{yzD}}{L} a_z(0) \quad (2.46)$$

$$+ \frac{\eta_{yxC}}{2} \Gamma_{xx}(0) + \frac{\delta K_{yC}}{2} \Gamma_{xy}(0) + \frac{\eta_{yzC}}{2} \Gamma_{xz}(0) \quad (2.47)$$

$$+ b_y^3 - b_y^4 + n_y^3 - n_y^4 + b_y^2 - b_y^1 + n_y^2 - n_y^1 \quad (2.48)$$

avec :

$$\eta_{yxD} = (\eta_{yx}^3 - \eta_{yx}^4) + (\eta_{yx}^2 - \eta_{yx}^1) \quad (2.49)$$

$$\eta_{yxC} = \eta_{yx}^3 + \eta_{yx}^4 + \eta_{yx}^2 + \eta_{yx}^1 \quad (2.50)$$

$$\delta K_{yD} = (\delta K_y^3 - \delta K_y^4) + (\delta K_y^2 - \delta K_y^1) \quad (2.51)$$

$$\delta K_{yC} = \delta K_y^3 + \delta K_y^4 + \delta K_y^2 + \delta K_y^1 \quad (2.52)$$

$$\eta_{yzD} = (\eta_{yz}^3 - \eta_{yz}^4) + (\eta_{yz}^2 - \eta_{yz}^1) \quad (2.53)$$

$$\eta_{yzC} = \eta_{yz}^3 + \eta_{yz}^4 + \eta_{yz}^2 + \eta_{yz}^1 \quad (2.54)$$

Plusieurs approximations ont été faites dans l'équation 2.46 :

$$\frac{a_{xD}^{34}}{L} \approx \frac{a_{xD}^{12}}{L} \approx \Gamma_{xy}(C_{34})$$

de sorte que

$$\frac{a_{xD}^{34} + a_{xD}^{12}}{2L} \approx \Gamma_{xy}(O)$$

Ces approximations sont cependant totalement justifiées dans la mesure où à partir de maintenant on cherche à évaluer l'ensemble de ce terme à partir des ordres de grandeur sur chaque paramètre et variable.

A partir des relations établies précédemment et en les développant complètement, on pourra évaluer numériquement la contribution totale de ces différentes sources d'erreur (coefficients de couplage entre les axes sensibles des accéléromètres et erreurs d'alignement) à l'erreur totale sur les gradients d'accélération. Pour cela, on se basera sur les valeurs *a priori* de précisions que l'on peut espérer réaliser techniquement. Inversement, étant donné l'objectif de maintenir en dessous de 1E l'erreur sur les gradients d'accélération, on pourra se servir de la formulation proposée afin de répartir au mieux cette erreur dans les différents postes d'incertitude.

### 2.2.2.2 Modélisation des erreurs de longueur sur les mesures du gradiomètre

Outre les défauts liés aux couplages des axes et aux défauts d'alignement des accéléromètres, il faut également prendre en compte les erreurs sur les distances entre accéléromètres. La première conséquence d'une erreur sur la longueur séparant le centre de masse de deux masses d'épreuve adjacentes est sur la valeur du gradient d'accélération. On montre que l'erreur relative sur le gradient est au premier ordre l'opposé de celle sur la longueur. En effet, pour une erreur  $\delta L$  sur la longueur  $L$  on a :

$$\frac{a_x(O_3) - a_x(O_4)}{L + \delta L} = \frac{a_x(O_3) - a_x(O_4)}{L} \left(1 - \frac{\delta L}{L}\right) + o(\delta L) \quad (2.55)$$

On peut évaluer l'ordre de grandeur de la spécification que l'on doit avoir sur l'erreur  $\delta L$ . Pour des gradients d'accélération valant au plus  $10^5$  et une erreur sur ces derniers inférieure à 1E, on déduit pour  $L=89\text{mm}$  :

$$\delta L \leq L \frac{1}{10^5} = 0,89\mu\text{m}$$

L'erreur sur la connaissance de  $L$  provient de la libre course des masses d'épreuve dans leur cage et de l'imprécision intrinsèque sur la longueur séparant le centre de deux cages d'accéléromètre. La libre course horizontale des masses d'épreuve dans leur cage est limitée par des butées à  $\pm 50\mu\text{m}$ . Cependant elle est dans la réalité beaucoup plus réduite grâce à l'asservissement en position des masses. En effet, avec l'asservissement, la course libre de

## Chapitre 2. GREMLIT : gradiomètre planaire électrostatique aéroporté

---

la masse va être limitée par les performances en termes de bruit et de biais du détecteur, ce qui nous ramène à une incertitude sur la position de la masse d'épreuve dans sa cage de l'ordre du pm, ce qui est négligeable devant  $0,89\mu m$ . Si l'on connaît avec une précision suffisante les positions des masses dans leurs cages respectives, il reste encore à avoir une erreur sur la distance entre les cages inférieure à la spécification, soit inférieure à  $0,89\mu m$ . Les cages et notamment les électrodes sont gravées dans une même plaque en ULE, ce qui assure une plus grande précision de positionnement des différentes paires d'électrodes lors de leurs réalisations. Toutefois l'opération de gravure est réalisée avec une précision de  $10^{-5}m$ , ce qui est donc insuffisant. On peut cependant réaliser un étalonnage *a posteriori* afin de mesurer la distance L. Les méthodes métrologiques 3D à disposition ne permettent de réaliser ces mesures qu'avec une précision micrométrique, ce qui est tout juste suffisant aux vues de la spécification.

On peut également s'interroger sur l'impact de l'erreur de distance sur la saturation des accéléromètres. D'après la formule (24) dans l'article 1, l'accélération résiduelle sur les accéléromètres dépend linéairement de la distance du centre de la masse d'épreuve au centre du gradiomètre O. On montre cependant que ces défauts peuvent être facilement négligés étant donnée la précision de réalisation mécanique des pièces et le contrôle de leur longueur. Ainsi une erreur dans le sens positif (i.e. dans le sens de l'éloignement du centre de la masse d'épreuve par rapport au point O) de  $50\mu m$  de la longueur  $OO_1$  va augmenter l'écart type de l'accélération résiduelle d'environ 0,8% par rapport à la valeur nominale. Dans le cas du vol 3 cela équivaut à passer d'un écart-type de  $2,87 \times 10^{-5} m.s^{-2}$  à  $2,89 \times 10^{-5} m.s^{-2}$ , ce qui est négligeable par rapport à la limite de  $10^{-4} m.s^{-2}$ .

### Bilan du chapitre 2

Ce chapitre a permis d'une part de mettre en évidence le budget d'erreur sur les mesures des gradients d'accélération horizontaux et d'autre part de donner les conditions à respecter afin de rendre GREMLIT opérable dans des conditions aéroportées typiques. Les retours d'expériences de l'Onera sur les précédents accéléromètres et une première analyse détaillée du gradiomètre GREMLIT montre que l'on peut espérer un bruit inférieur à  $1E/\sqrt{Hz}$  dans la plage fréquentielle de mesure  $[10^{-3}, 0,2]Hz$ , soit un bruit d'écart-type inférieur à  $0,45E$ . Une telle performance n'est possible que pour des accélérations à mesurer comprises entre  $\pm 10^{-4} m.s^{-2}$ . Pour parvenir à cette condition dans un environnement aussi bruité que celui d'un avion, GREMLIT doit être adapté à une plateforme en rotation elle-même asservie au gradiomètre. Cette dernière doit pouvoir notamment suivre une consigne angulaire avec une précision meilleure que  $2,35 \times 10^{-4} deg$ , ce qui constitue un défi technique. L'opérabilité de GREMLIT en avion dépendra donc de la capacité à réaliser une telle performance.





# 3 Caractérisation de l'erreur et traitement des mesures GREMLIT à partir de simulations numériques

## Objectif du chapitre 3

- Justifier et décrire l'architecture d'un simulateur de relevé gradiométrique aéroporté utilisant GREMLIT, afin d'obtenir des synthétiques de mesures de gradients de gravité et donc du signal d'erreur
- Justifier la nécessité d'estimer les biais des gyromètres de GREMLIT et décrire une méthode d'étalonnage suffisamment précise pour maintenir l'erreur sur les gradients de gravité de l'ordre de 1E
- Caractériser l'erreur finale sur les gradients de gravité mesurés, dans le repère de mesure et dans le repère géographique local

## 3.1 Résumé de l'article 2

Après avoir vérifié dans le chapitre précédent les conditions d'opérabilité du gradiomètre d'accélération de GREMLIT dans un environnement aéroporté, nous abordons ici l'analyse des performances de GREMLIT. Par performance on entend la donnée du couple précision (en Eötvös) et résolution (en km) des champs de gradient de gravité mesurés grâce à cet instrument. L'étude présentée dans ce chapitre vise donc à répondre à la question suivante : Quelle précision et résolution peut-on espérer obtenir avec un relevé aéroporté réalisé avec GREMLIT et quels sont les facteurs limitant ces performances ? On peut à ce stade noter 2 difficultés majeures liées à cette question : premièrement, l'instrument GREMLIT n'est qu'à l'état de concept et il est donc tout simplement impossible de réaliser un test

### Chapitre 3. Caractérisation de l'erreur et traitement des mesures GREMLIT à partir de simulations numériques

---

réel de ses performances. Les estimer se fera donc *a priori* et reposera sur des hypothèses de travail qu'il faudra préciser. Deuxièmement et dans la lignée du précédent point, la précision et la résolution des gradients de gravité relevés durant un vol dépend largement des caractéristiques de vols et n'est donc pas directement généralisable. Notamment, la résolution du champ de gradient ainsi mesuré va dépendre de plusieurs paramètres tels que l'altitude à laquelle est faite la mesure, la vitesse de l'avion, la fréquence d'échantillonnage ou encore la distance inter-trace.

Il existe peu de publications consacrées à l'estimation de la précision des relevés gradiométriques aéroportés. Une des raisons est que la plupart de ces relevés sont réalisés par des compagnies privées dans le cadre de prospections minières ou pétrolières. De ce fait les résultats et le détail des mesures ne sont le plus souvent pas rendus publics. On peut toutefois citer le travail de Jekeli [87] qui donne une estimation du spectre de l'erreur sur les différentes composantes du GGT mesurées en vol. Comme on le verra dans la suite de ce chapitre, l'erreur contaminant les estimations des gradients de gravité dans le repère de mesure sont la somme de plusieurs contributions d'origines différentes. Jekeli a fait l'hypothèse que ces différents termes sont statistiquement indépendants, ce qui n'a rien d'évident. En particulier, les trois composantes du vecteur vitesse angulaire de l'avion par rapport à un repère inertiel qui interviennent dans le budget d'erreur du GGT ne sont *a priori* ni indépendantes ni décorrélées deux à deux. De plus, Jekeli suppose dans son article que les neuf composantes du tenseur gradient d'accélération sont mesurées, ce qui n'est pas le cas avec GREMLIT et va donc demander une analyse spécifique.

La stratégie adoptée pour répondre à la question qui intéresse ce chapitre est basée sur la simulation numérique dans le domaine temporel de mesures gradiométriques aéroportées. En d'autres termes, on cherche à reproduire numériquement les gradients de gravité tels qu'ils seraient mesurés lors d'un relevé géophysique aéroporté réalisé avec GREMLIT et ce de la manière la plus réaliste possible. En particulier, des données de dynamique de vols réels sont utilisées. Il est alors possible de déterminer et caractériser exactement l'erreur sur les gradients de gravité, à différents niveaux de traitement, en calculant simplement la différence entre les gradients bruités simulés et les gradients non bruités. L'ensemble de la démarche, des données utilisées et des résultats sont détaillés et développés dans l'article *Error analysis of a new planar electrostatic gravity gradiometer for airborne surveys* soumis à *Journal of Geodesy* et reproduit ci-après.

Afin de donner aux résultats de la simulation une portée suffisamment générale, des paramètres de vol typiques des relevés aéroportés ont été choisis : une altitude de vol de 500m, une vitesse de 300km/h et une fréquence d'échantillonnage de 0,25Hz. En outre les séries temporelles réelles de paramètres dynamiques de vol (accélération, vitesse angulaire et attitude de l'avion), en partie utilisées dans le chapitre 2, sont utilisées dans le simulateur

afin de modéliser l'environnement fortement bruité dans lequel est placé l'instrument. On rappelle que ces données sont issues d'enregistrements de vol réalisés durant des relevés aéroportés autour de la Corse et de la mer Ligure. L'altitude moyenne des vols était de l'ordre de 300m au-dessus du niveau de la mer et la vitesse moyenne de 310km/h. Plus de détails sur le plan de vol, les instruments utilisés et les méthodes de traitements des mesures peuvent être trouvés dans [97]. La première étape du travail a consisté à coder sous MATLAB le simulateur réalisant la chaîne de traitement des données. Celle-ci s'organise de la manière suivante :

- Pour chaque point de mesure du relevé simulé, un GGT (Gravity Gradient Tensor) synthétique  $\underline{\underline{V}}$  exprimé dans le repère géographique local et une matrice de rotation  $\mathbf{M}_{enu}^m$  du repère géographique local vers le repère de mesure sont préalablement calculés. La matrice de rotation est synthétisée à partir des angles d'attitude de l'avion enregistrés et des angles de rotation de la plateforme contrôlée. L'obtention de ces derniers est décrite dans l'annexe II.
- Le GGT est ensuite projeté dans le repère de mesure. Les 4 gradients de gravité horizontaux  $V_{xx}$ ,  $V_{xy}$ ,  $V_{yx}$  et  $V_{yy}$  ainsi obtenus sont ceux mesurés par GREMLIT.
- A partir de ces gradients de gravité et des vitesses angulaires, on reconstruit les gradients d'accélération mesurés  $\tilde{\Gamma}_{ij}$ , auxquels on soustrait les termes de gradient d'accélération d'entraînement :  $\underline{\underline{\dot{\Omega}}} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}$  obtenus directement des mesures gyrométriques. On obtient de la sorte une première estimation des gradients de gravité dans le repère de mesure. Il est intéressant de rappeler que la configuration symétrique du gradiomètre permet d'éliminer arithmétiquement le terme d'accélération angulaire présent sur les composantes hors diagonale et qui n'est donc pas à traiter. Ici, il est important d'observer que parmi les termes d'erreur présents sur les gradients de gravité, un terme est supérieur de près de 2 ordres de grandeur au signal de gravité. Ce terme est le couplage entre les mesures de vitesse angulaire et les biais des gyromètres. A ce stade il est donc nécessaire d'estimer les biais des gyromètres afin de minimiser l'amplitude de ce couplage. Nous proposons et discutons dans l'article une méthode d'étalonnage des biais par régression linéaire utilisant la méthode des moindres carrés ordinaires. Cette régression se base uniquement sur les signaux issus des gyromètres et du gradiomètre d'accélération dans le repère de mesure.
- Une fois les biais des gyromètres estimés et les gradients de gravité horizontaux déterminés dans le repère de mesure, il peut être intéressant d'exprimer ces derniers dans le repère géographique local afin de mieux les visualiser et réaliser un filtrage spatial. Ceci nécessite deux choses : d'une part de connaître la matrice de rotation permettant de passer d'un repère à l'autre et d'autre part, de compléter le tenseur gradient de gravité pour pouvoir effectivement réaliser sa rotation. La détermination



### Chapitre 3. Caractérisation de l'erreur et traitement des mesures GREMLIT à partir de simulations numériques

---

de la matrice de rotation est nécessaire dans tous les cas et on montre dans l'article comment la déterminer dans la pratique en passant par trois rotations successives. Enfin, le tenseur est complété dans le repère de mesure avec les composantes du tenseur gradient de gravité du champ normal ( $U_{xz}$  et  $U_{yz}$ ) projetées dans ce même repère avec la matrice de rotation préalablement estimée.

- Enfin, les gradients de gravité horizontaux exprimés dans le repère géographique local sont filtrés le long de la trace afin de diminuer l'écart-type ( $1\sigma$ ) de l'erreur.

Le programme principal du simulateur est donné commenté dans l'annexe V. Les principales variables d'entrées de ce programme sont : les 6 composantes du GGT synthétisées à chaque point de mesures et mise en format XYZ, les 6 composantes du GGT du champ normal dans un format identique, les séries temporelles des composantes du vecteur vitesse angulaire du repère de mesure par rapport à un repère inertiel, les séries temporelles des angles d'attitude de l'avion et de la la plateforme contrôlée par rapport au repère de l'avion, la vitesse de vol, la période d'échantillonnage et les trois valeurs estimées des biais des gyromètres. Toutes les séries temporelles sont échantillonnées à la fréquence des mesures, soit 0,25Hz. En outre, les séries temporelles des bruits additifs sur les gradients d'accélération mesurées sont synthétisées à partir de leur DSP par un sous programme codé pour les besoins de la simulation. Les bruits additifs contaminant les mesures gyrométriques et les erreurs d'estimation des différents angles de rotation sont produits quant à eux à partir d'un générateur de bruit blanc gaussien. Les différents biais ont été tirés de façon aléatoire. Un cycle complet de la simulation, comprenant la phase de synthèse des observables, leurs traitements et l'obtention des gradients de gravité horizontaux se déroule dans la pratique en trois étapes. La première est réalisée en modifiant légèrement le code du simulateur afin d'avoir en sortie uniquement les séries temporelles des mesures gyrométriques et du gradiomètre. On assignera donc la valeur 0 aux trois estimations de biais en entrée du programme. La seconde étape consiste précisément à partir de ces signaux à estimer les biais des gyromètres. Cette étape n'est pas codée dans le programme principal du simulateur, mais dans des programmes annexes, non reportés ici. Enfin la dernière étape utilise de nouveau le programme, en entrant cette fois-ci la valeur estimée des biais afin de fournir en sortie l'estimation finale des gradients de gravité.

Plusieurs conclusions peuvent être tirées de cette étude : d'abord la méthode proposée d'étalonnage des biais des gyromètres par moindres carrés permet de les estimer avec une précision suffisante pour corriger les gradients de gravité avec une précision ( $1\sigma$ ) inférieure à 2E dans le repère de mesure. En conséquence, il n'est pas nécessaire de maintenir une spécification stricte sur les biais des gyromètres équipant GREMLIT. Ainsi, des gyromètres de navigation moins onéreux peuvent être utilisés. Une question reste cependant ouverte à ce stade : la méthode d'estimation des biais retenue est la méthode des moindres carrés

ordinaires, c'est-à-dire sans l'introduction d'une matrice de pondération déduite de la matrice de variance-covariance de l'erreur contaminant les mesures. Or le meilleur estimateur linéaire dans notre cas, où l'erreur est *a priori* corrélée et de variance non constante, est théoriquement l'estimateur des moindres carrés généralisés, qui utilise cette pondération. Cependant, on constate que la mise en œuvre des moindres carrés généralisés ne fournit pas une meilleure estimation des biais. Une explication de ce résultat étonnant pourrait être la trop mauvaise estimation de la matrice de variance-covariance de l'erreur avec la méthode proposée dans l'article. D'autres méthodes d'estimation de cette matrice devraient donc testées afin d'améliorer encore la précision de l'estimateur.

Ensuite, il est techniquement possible d'obtenir la matrice de rotation donnant l'orientation du repère de mesure par rapport au repère géographique local avec la précision requise pour maintenir l'erreur induite de l'ordre de 1E. Enfin, le fait de compléter le GGT par un modèle de champ normal (avec les éléments  $U_{xz}$  et  $U_{yz}$ ) introduit une erreur inférieure à 1E sur les gradients horizontaux exprimés dans le repère géographique local. Il faut toutefois noter que ceci est vrai seulement dans la mesure où les axes verticaux du repère de mesure et du repère géographique local ne diffèrent que de quelques degrés. Dans ce cas et uniquement dans ce cas, la projection des gradients verticaux sur les gradients horizontaux est quasiment nulle. Pour que cette condition soit satisfaite, il faut que les accélérations horizontales auxquelles est soumis le gradiomètre soient suffisamment faibles, ce qui nécessite donc un environnement de vol peu turbulent. Au final, on trouve à l'issue de la simulation une précision sur les gradients de gravité horizontaux de l'ordre de 2E pour une résolution au sol de 2km. Les couplages des biais des gyromètres avec les composantes de la vitesse angulaire du référentiel de mesure par rapport à un référentiel galiléen sont les principaux contributeurs à l'erreur contaminant les gradients de gravité estimés.

## 3.2 Article 2

# Error analysis of a new planar electrostatic gravity gradiometer for airborne surveys.

Karim Douch<sup>1,2</sup>, Isabelle Panet<sup>3</sup>, Gwendoline Pajot-Métivier<sup>3</sup>, Bruno Christophe<sup>2</sup>, Bernard Foulon<sup>2</sup>, Marie-Françoise Lalancette Lequentrec<sup>4</sup>, and Michel Diament<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Univ Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, Institut de Physique du Globe de Paris, CNRS, F-75013 Paris, France

<sup>2</sup>Onera - The French Aerospace Lab, F-92322 Châtillon, France

<sup>3</sup>IGN LAREG, Univ Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 5 rue Thomas Mann, 75205 Paris Cedex 13, France

<sup>4</sup>SHOM, CS 92803, 29228 BREST Cedex 2, France

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Gravity gradiometry with GREMLIT</b>	<b>4</b>
2.1	The gravity gradient tensor . . . . .	4
2.2	The equation of moving-base gravity gradiometry . . . . .	4
2.3	Overview of GREMLIT . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Numerical simulation of GREMLIT derived gravitational gradients</b>	<b>8</b>
3.1	Measurement and error equations in the measurement frame . . . . .	8
3.2	Calibration of the gyroscope biases . . . . .	10
3.3	Determination of the rotation matrix . . . . .	12
3.4	Principle of the simulation . . . . .	12
3.5	Input data of the simulation . . . . .	14
3.5.1	General setting . . . . .	14
3.5.2	Computation of the noise-free GGT . . . . .	15
3.5.3	Simulation of the rotation matrix . . . . .	15
3.5.4	Simulation of the angular velocity . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Results</b>	<b>17</b>
4.1	Gravitational gradients error in the instrumental frame . . . . .	17
4.2	Gravitational gradients error in the geodetic frame . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Discussion and conclusion</b>	<b>21</b>

**Abstract**

Moving-base gravity gradiometry has proven to be a convenient method to determine the Earth's gravity field. The ESA mission GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) has enabled to map the Earth gravity field and its gradients with a resolution of 80km, leading to significant advances in physical oceanography and solid Earth physics. At smaller scales, airborne gravity gradiometry has been increasingly used during the past decade in mineral and hydrocarbon exploration. In both cases the sensitivity of gradiometers to the short wavelengths of the gravity field is of crucial interest. Here, we quantify and characterize the error on the gravity gradients estimated from measurements performed with a new instrument concept called GREMLIT, for typical airborne conditions. GREMLIT is a ultra-sensitive planar gravitational gradiometer which consists in a planar acceleration gradiometer together with 3 gyroscopes. To conduct this error analysis, a simulation of a realistic airborne survey with GREMLIT is carried out. We first simulate realistic GREMLIT synthetic data, taking into account the acceleration gradiometer and gyroscope noises and biases and the variation of orientation of the measurement reference frame. Then, we estimate the gravity gradients from these data. A special attention is paid to the processing of the gyroscopes measurements whose accuracy is not commensurate with the ultra-sensitive gradiometer. We propose a method to calibrate the gyroscopes biases with a precision of the order  $10^{-8}$ rad/s. In order to transform the tensor from the measurement frame to the local geodetic frame, we estimate the error induced when replacing the non-measured elements of the gravity gradient tensor by an a priori model. With the appropriate smoothing, we show that it is possible to achieve a precision better than 2E for an along-track spatial resolution of 2km.

**Keywords:**

Airborne gravitational gradiometry error analysis electrostatic accelerometer

**1 Introduction**

Over the last forty years, the development of space technologies has tremendously changed the way the Earth's gravity field is mapped. This breakthrough has opened new possibilities for a global, homogeneous mapping of the gravity field. Passive laser ranging satellites such as LAGEOS [6], space altimetry [5], satellite-to-satellite tracking with GRACE [32] or satellite gravity gradiometry with GOCE [31] have enabled to dramatically increase the precision, the spatial (and in some cases the temporal) resolution of gravity field models. Space technologies have also made possible the rise of airborne gravimetry thanks to the development in the eighties of Global Navigation Satellite Systems (GNSS) such as GPS.

The airborne measurement of the gravity field requires the separation of the gravitational acceleration from the kinematic one, which is not possible with inertial sensors, according to the principle of equivalence. Therefore, the kinematic acceleration must be assessed independently by tracking the motion of the measurement frame with respect to a reference frame. It is only with the advent of GPS that aircraft positioning has become sufficiently accurate to compute by differentiation the

velocity and acceleration with a relevant precision to yield exploitable gravity data [28]. Airborne scalar gravimetry, which consists in measuring the vertical component of the gravity, and to a lower extent vector gravimetry, where the full vector is measured, are now efficient and economical means to map the gravity field homogeneously over large areas. Airborne gravimetry is widely used in the hydrocarbon and mineral exploration industry [28][20]. Besides its utilization for geophysical exploration, airborne gravimetry is also increasingly used for geodetic [29][21][18] and oceanographic purposes [24][15][16], from regional to continental scales. Aerial surveys are well-suited to provide gravity measurements at wavelengths between 10 and 100km, bridging the gap between spaceborne gravity measurements which cover wavelengths down to 80km [13], and *in situ* data, which provide the shortest wavelength components. Another advantage of airborne measurements is that they enable to bridge the gap between offshore marine gravity observations and terrestrial data, which is critical to create consistent common references for levelling and marine charting datums.

The precision typically reached for airborne gravity data is now of 1mGal [17]. Still, the limiting factor remains the kinematic acceleration determination [25], as the sensitivity of commercial airborne gravimeters exceeds by several orders of magnitude the sensitivity of the kinematic corrections [22]. Therefore a better precision of airborne gravimetry data is primarily governed by the improvement of the precision of kinematic acceleration derived from GPS. Airborne gravitational gradiometry is seen as a way to overcome this limitation since measuring the gradients of the components of the gravitational field can be done by using only inertial sensors, which are *a priori* of commensurate precision. Moreover, a gravitational gradiometer can be regarded as a directional high-pass filter of the gravitational field which increases the sensitivity to the geometry of the causative bodies and enhances the spatial resolution of the survey as compared to classical gravimetry in similar conditions [12] [1]. The first airborne gravity gradiometry survey was successfully carried out in 1999 with a FTG gradiometer [11]. The FTG for *Full Tensor Gradiometer* is an adaptation of another sensor, the GSS (*Gravity Sensor System*), developed in the seventies by Bell Geospace (now Lockheed Martin) to improve the performances of US submarines' inertial navigation systems [3]. This system was declassified only in the early nineties. In 2011, 3 exploration companies were operating 10 gravity gradiometers, all derived from the GSS technology. New gravity gradiometer concepts for airborne survey are now (in 2014) under development, including the EGG from ARKeX, the HD-AGG™ from GEDEX or the VK-1 from the university of Western Australia and Rio Tinto. A more detailed review on current technologies can be found in [8][7].

We have previously introduced a new airborne gravity gradiometer concept called GREMLIT [10]. It consists of a planar acceleration gradiometer together with 3 gyroscopes implemented on a controlled platform. The acceleration gradiometer inherits from the well-established technology of electrostatic accelerometer developed by Onera for gravity missions such as CHAMP, GRACE or GOCE [34][33]. The objective of this study is to identify the main sources of errors and to quantify the precision on the gravity gradients deduced from GREMLIT-type measurements. We first describe the principle of GREMLIT then we introduce the time-domain simulator used to perform this study. This simulator computes realistic noisy GREMLIT measurements of the observables required to estimate gravitational gradients during an airborne survey and yields their respective total error. We then run a simulation to quantify and characterize the error corrupting the retrieved gravitational

signals. We finally discuss these results with regards to the assumptions made in the simulation.

## 2 Gravity gradiometry with GREMLIT

### 2.1 The gravity gradient tensor

We summarize in this section the definition and main properties of the gravitational gradients. We define  $x, y$  and  $z$  to be the 3 spatial Cartesian coordinates. The Gravitational Gradient Tensor (hereafter called GGT) is the Jacobian matrix of the Earth gravitational field  $\vec{g} = (g_x, g_y, g_z)^t$  where  $()^t$  denotes to the transpose of a vector or a matrix), or equivalently, the Hessian matrix of the gravity potential  $V$ . It is therefore a second-order tensor whose elements are the second-order partial derivative of  $V$ :

$$\underline{\underline{V}} = \mathbb{J}(\vec{g}) = \vec{\nabla} \otimes \vec{g} = \begin{pmatrix} \partial_{xx}V & \partial_{xy}V & \partial_{xz}V \\ \partial_{yx}V & \partial_{yy}V & \partial_{yz}V \\ \partial_{zx}V & \partial_{zy}V & \partial_{zz}V \end{pmatrix} \quad (1)$$

where  $\partial_{ij}$  denotes the second-order partial derivative of  $V$  with respect to, successively,  $j$  and  $i$ . Since  $V$  is a smooth function in free space, the GGT is symmetric:  $\partial_{ij}V = \partial_{ji}V$ . Gravitational gradients are usually expressed in Eötvös E, with  $1E=10^{-9} s^{-2}$ . Hereafter,  $\partial_{xx}V, \partial_{xy}V, \partial_{yx}V$  and  $\partial_{yy}V$ , respectively noted  $V_{xx}, V_{xy}, V_{yx}$ , and  $V_{yy}$  will be called horizontal gravitational gradients. The gravity potential satisfies Poisson's equation:

$$\Delta V = -4\pi\mathcal{G}\rho \quad (2)$$

leading in free space to Laplace's equation:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

As a result the GGT is trace-free in free space. By measuring the second-order partial derivatives of the gravitational potential, a gravitational gradiometer acts as a high-pass filter which amplifies the short variations of the field. As a consequence, gravitational gradiometry is particularly suitable for high-resolution mapping of the gravitational field, which is essentially related to the nearby mass distribution. Furthermore, the directionality of the derivatives highlights the geometrical structure of the mass anomalies.

### 2.2 The equation of moving-base gravity gradiometry

For the sake of clarity, we first describe the different reference frames used in this study and illustrated on figure 1. We note  $\mathcal{R}_{in}$  an inertial reference frame,  $\mathcal{R}_{enu}$  the local East-North-Up geodetic frame,  $\mathcal{R}_a = (A, \mathbf{u}_x^a, \mathbf{u}_y^a, \mathbf{u}_z^a)$  the aircraft-fixed reference frame whose axes are defined by the IMU (Inertial Measurement Unit),  $\mathcal{R}_m = (O, \mathbf{u}_x^m, \mathbf{u}_y^m, \mathbf{u}_z^m)$  the measurement reference frame associated to the gradiometer in the aircraft.  $\mathcal{R}_{mo}$  is a fixed frame in the aircraft that coincides

with  $\mathcal{R}_m$  when the aircraft is stationary on the ground, before the start of the survey.  $\mathcal{R}_m$  is just an intermediate frame used to compute the attitude of  $\mathcal{R}_m$  with respect to  $\mathcal{R}_{enu}$ , as further discussed in section 3.3. To make the notation clearer, the reference frame where a quantity is expressed will be indicated hereafter by putting in superscript the subscript of the frame. For instance, the Gravitational Gradient Tensor  $\underline{\underline{V}}$  expressed in  $\mathcal{R}_m$  will be noted  ${}^m\underline{\underline{V}}$ .

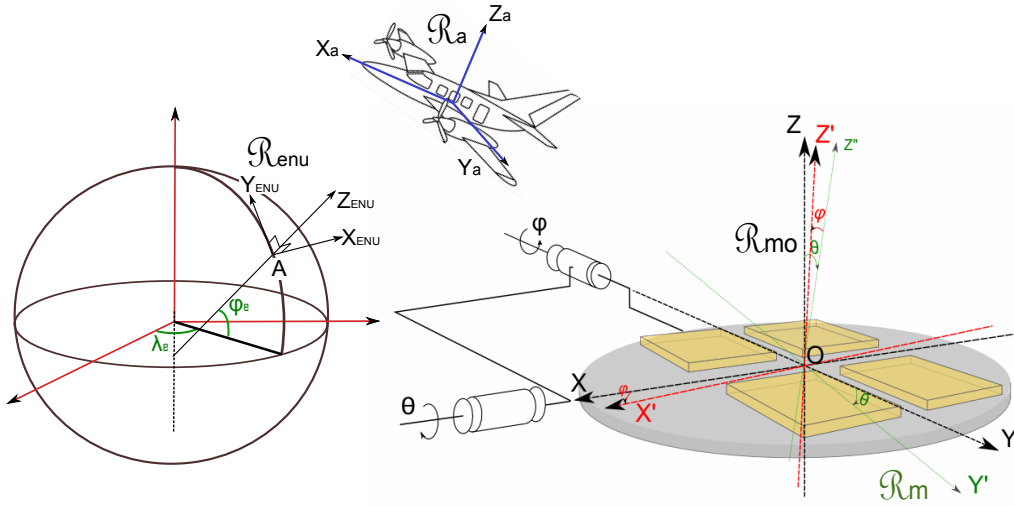


Figure 1: The different reference frames used in this study. On the right-hand side, a simplified view of GREMLIT on a double gimbal platform is presented to show both  $\mathcal{R}_m$  and  $\mathcal{R}_{mo}$ .  $\mathcal{R}_m$  rotates with the platform and is therefore associated to the set of axes  $(X'', Y'', Z')$  while  $\mathcal{R}_{mo}$  is associated to the set of axes  $(X, Y, Z)$

Let  $\vec{a}_s$  be the sensed acceleration field which is the sum of the gravitational and the kinematic accelerations. Let  $\underline{\underline{\Gamma}}$  be the gradient tensor of  $\vec{a}_s$ :

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \vec{\nabla} \otimes \vec{a}_s \quad (4)$$

where  $\otimes$  is the tensor product. Let us now consider the sensed acceleration in a non inertial frame, which is the general framework for moving base gravity gradiometry. From Newton's laws we derive the expression of  $\vec{a}_s(P)$ , the sensed acceleration at point P in  $\mathcal{R}_m$ :

$$\vec{a}_s(P) = \vec{g}(P) - \vec{a}_{in}(O) - \dot{\vec{\Omega}}_{m/in} \times \vec{OP} - \vec{\Omega}_{m/in} \times (\vec{\Omega}_{m/in} \times \vec{OP}) \quad (5)$$

Equation 5 is equivalently expressed in a matrix form:

$$\underline{a}_s(P) = \underline{g}(P) - \underline{a}_{in}(O) - \underline{\dot{\Omega}}_{m/in} \cdot \underline{OP} - \underline{\Omega}_{m/in} \cdot \underline{\Omega}_{m/in} \cdot \underline{OP} \quad (6)$$

where  $\underline{\underline{\Omega}}_{m/in}$  is the skew-symmetric matrix representing the angular velocity vector  $\vec{\Omega}_{m/in}$  of  $\mathcal{R}_m$  with respect to  $\mathcal{R}_{in}$ :

$$\underline{\underline{\Omega}}_{m/in} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Since there will be no ambiguity afterwards,  $\underline{\underline{\Omega}}_{m/in}$  will be noted simply  $\underline{\underline{\Omega}}$ . Taking the gradient of equation 6 gives [23]:

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}} - \underline{\underline{\dot{\Omega}}} - \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \quad (8)$$

which is the constitutive equation of moving-base gravity gradiometry. In the case of GREMLIT, where only the horizontal acceleration gradients are measured, we deduce  $V_{xx}$ ,  $V_{xy} = V_{yx}$  and  $V_{yy}$  as follows:

$$\mathbf{V}_{xx} = \Gamma_{xx} - \omega_z^2 - \omega_y^2 \quad (9)$$

$$\mathbf{V}_{yy} = \Gamma_{yy} - \omega_z^2 - \omega_x^2 \quad (10)$$

$$\mathbf{V}_{xy} = \mathbf{V}_{yx} = \frac{1}{2} \cdot (\Gamma_{xy} + \Gamma_{yx} + 2 \cdot \omega_y \cdot \omega_x) \quad (11)$$

The determination of the 3 gravitational gradients  $V_{xx}$ ,  $V_{xy} = V_{yx}$  and  $V_{yy}$  in the measurement reference frame thus requires the measurement of the 3 angular velocity components  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  and  $\omega_z$ , which is done using 3 uni-axial gyroscopes. Determining  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$  therefore requires the measurement of both  $\underline{\underline{\Gamma}}$  and  $\underline{\underline{\Omega}}$ . Furthermore, the definition of a tensor is complete only if the frame in which it is expressed is defined. So far,  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$  is likely to be expressed in  $\mathcal{R}_m$  which varies with time. The orientation of  $\mathcal{R}_m$  with respect to another frame, say  $\mathcal{R}_{enu}$ , is given by the rotation matrix  $\mathbf{M}_{enu}^m = (\mathbf{M}_m^{enu})^t$  from  $\mathcal{R}_{enu}$  to  $\mathcal{R}_m$  so that any vector  $J_m \in \mathbb{R}^3$  expressed in  $\mathcal{R}_m$  is transformed in  $\mathcal{R}_{enu}$  as follows:

$$J_{enu} = \mathbf{M}_{enu}^m \cdot J_m$$

and the GGT:

$${}^{enu}\underline{\underline{\mathbf{V}}} = \mathbf{M}_{enu}^m \cdot {}^m\underline{\underline{\mathbf{V}}} \cdot (\mathbf{M}_{enu}^m)^t \quad (12)$$

where  ${}^{enu}\underline{\underline{\mathbf{V}}}$  (resp.  ${}^m\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ ) is the GGT expressed in  $\mathcal{R}_{enu}$  (resp.  $\mathcal{R}_m$ ).

## 2.3 Overview of GREMLIT

In this section we briefly describe the measurement principle and technology of GREMLIT together with its adaptation to an airborne environment. The reader is referred to [10] and [9] for more details.

The principle of GREMLIT is to measure the acceleration gradients from which the gravitational gradients are extracted. Its planar acceleration gradiometer is composed of 4 ultra-sensitive planar



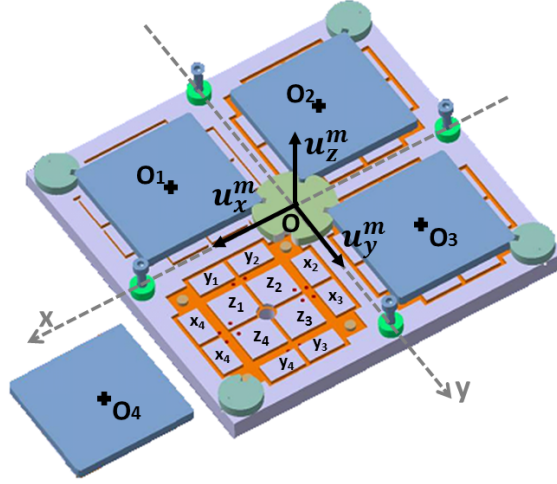


Figure 2: View of GREMLIT lower electrodes plate and the 4 proof masses of the 4 planar accelerometers. The  $z_i$   $i \in \{1,2,3,4\}$  lower electrodes keep the proof mass in levitation, the  $x_i$  (resp.  $y_i$ ) electrodes are used to control the position and measure the acceleration of the proof mass along the x-axis (resp. y-axis). Modified from *Ultra-sensitive electrostatic planar acceleration gradiometer for airborne geophysical surveys* [10]

electrostatic accelerometers assembled in a square configuration, on the same Cartesian plane  $(O,x,y)$  as illustrated on figure 2. These accelerometers inherit from mature technologies developed by Onera for spatial geodetic missions such as GRACE or GOCE, whose success critically relied on the accelerometers' performances. Each planar accelerometer senses at its centre ( $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  and  $O_4$ ) the x and y components of the acceleration field. From these measurements it is possible to compute in  $\mathcal{R}_m$  the 4 acceleration gradients  $\Gamma_{xx}$ ,  $\Gamma_{xy}$ ,  $\Gamma_{yx}$  and  $\Gamma_{yy}$  through a linear approximation:

$$\Gamma_{xx}(O) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{a_x(O_4) - a_x(O_3)}{L} + \frac{a_x(O_1) - a_x(O_2)}{L} \right) + o(L) \quad (13)$$

$$\Gamma_{yy}(O) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{a_y(O_4) - a_y(O_1)}{L} + \frac{a_y(O_3) - a_y(O_2)}{L} \right) + o(L) \quad (14)$$

$$\Gamma_{xy}(O) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{a_y(O_4) - a_y(O_3)}{L} + \frac{a_y(O_1) - a_y(O_2)}{L} \right) + o(L) \quad (15)$$

$$\Gamma_{yx}(O) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{a_x(O_4) - a_x(O_1)}{L} + \frac{a_x(O_3) - a_x(O_2)}{L} \right) + o(L) \quad (16)$$

The measurement range of the accelerometers' sensitive axes is limited to  $\pm 10^{-4} m.s^{-2}$  [10]. As a consequence, it is essential to find a technical solution to limit the horizontal acceleration sensed by the accelerometers. This is all the more true in the noisy environment of an aircraft. In [10] the authors propose to integrate the whole instrument on a double-gimbal platform controlled by the common mode signal of the gradiometer. This solution is illustrated in the right-hand side of figure 1. The principle of this solution is to rotate the vertical axis  $\mathbf{u}_z^m$  of the gradiometer towards the net acceleration sensed at point O in  $\mathcal{R}_m$  so that the projection of this acceleration on the  $(x,y)$  plane, or horizontal acceleration, is zero. For that, we use the average signal of the four horizontal

accelerometers, which is in a first-order approximation equal to the horizontal sensed acceleration at O. This signal is used as the input of a control-loop that rotates the platform in order to cancel it in real time. We will consider here that GREMLIT is fixed on the controlled platform and that the common mode is perfectly cancelled. As a result, the z-axis of  $\mathcal{R}_m$  is always parallel to the sensed acceleration at O.

### 3 Numerical simulation of GREMLIT derived gravitational gradients

In this section, the computation of the total error on GREMLIT-derived gravitational gradients is described along with the input data and the sensor error models used in the simulation. Hereafter, for any quantity Q,  $\tilde{Q}$  will refer to its estimation through a direct or indirect measurement.

#### 3.1 Measurement and error equations in the measurement frame

Three different quantities must be estimated in order to determine gravitational gradients in a non-inertial reference frame: acceleration gradients, angular velocity and the rotation matrix from  $\mathcal{R}_m$  to  $\mathcal{R}_{enu}$ . The measurement of these quantities is subjected to errors. Here we will only consider additive errors on these quantities, such as random bias, white noise and red noise.

**Measurement equation of the acceleration gradients** The 4 acceleration gradients  $\Gamma_{xx}$ ,  $\Gamma_{xy}$ ,  $\Gamma_{yx}$  and  $\Gamma_{yy}$  are measured with the planar acceleration gradiometer. We model the measurement as follows:

$$\tilde{\Gamma}_{xx} = \Gamma_{xx} + n_{\Gamma_{xx}} \quad (17)$$

$$\tilde{\Gamma}_{xy} = \Gamma_{xy} + n_{\Gamma_{xy}} \quad (18)$$

$$\tilde{\Gamma}_{yx} = \Gamma_{yx} + n_{\Gamma_{yx}} \quad (19)$$

$$\tilde{\Gamma}_{yy} = \Gamma_{yy} + n_{\Gamma_{yy}} \quad (20)$$

where  $n_{\Gamma_{ij}}$   $i, j \in \{x, y\}$  are red noises modelled by stochastic processes. The power spectral density (PSD) of these processes have been estimated in [10] and its square root is plotted on figure 3. Since the acceleration gradiometer biases can be calibrated at rest before the survey, we assume that the uncalibrated part of the bias are sufficiently small to be neglected. The measurement bandwidth ranges from  $10^{-3}$ Hz to 0.3Hz, where the gradiometer noise is the lowest.

An analytic function obtained by curve fitting of the square root of GREMLIT noise PSD as a function of frequency is given for the simulation [10]:

$$\phi_{\Gamma}(f) = 0.08 \sqrt{\left(\frac{f_{c1}}{f}\right)^2 + \left(\frac{f_{c0}}{f}\right)^4 + 1 + \left(\frac{f}{f_{c2}}\right)^4} \quad (21)$$

where  $f_{c1} = 0.003$ Hz,  $f_{c0} = 2 \times 10^{-5}$ Hz and  $f_{c2} = 0.12$ Hz.

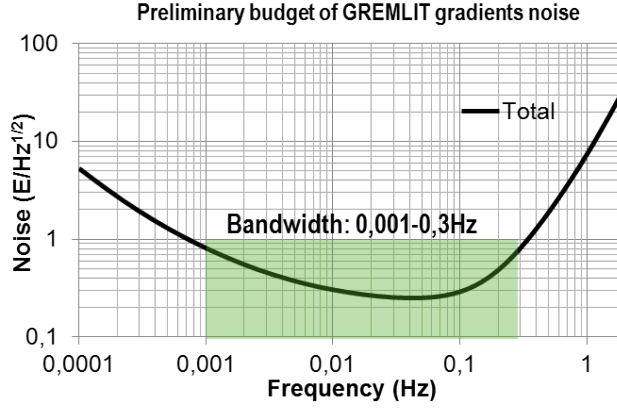


Figure 3: Preliminary estimation of the square-root of the PSD of the total instrumental noise on GREMLIT acceleration gradients. In green, the measurement bandwidth

**Measurement equation of the angular velocity** The 3 angular velocity measurements  $\tilde{\omega}_x$   $j \in \{x, y, z\}$ , are assumed to be corrupted by a bias  $b_{\omega_j}$  and a white Gaussian noise  $n_{\omega_j}$  [36]:

$$\tilde{\omega}_x = \omega_x + b_{\omega_x} + n_{\omega_x} \quad (22)$$

$$\tilde{\omega}_y = \omega_y + b_{\omega_y} + n_{\omega_y} \quad (23)$$

$$\tilde{\omega}_z = \omega_z + b_{\omega_z} + n_{\omega_z} \quad (24)$$

**Measurement equation of the gravitational gradients** By inserting equations 17 to 20 and 22 to 24 into equations 9 to 11 and expressing  $\tilde{\mathbf{V}}_{ij}$  as a function of  $\mathbf{V}_{ij}$  we obtain:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{V}}_{xx} &= \tilde{\Gamma}_{xx} - \tilde{\omega}_z^2 - \tilde{\omega}_y^2 \\ &= (\mathbf{V}_{xx} + \omega_z^2 + \omega_y^2 + n_{\Gamma_{xx}}) - (\omega_z + b_{\omega_z} + n_{\omega_z})^2 - (\omega_y + b_{\omega_y} + n_{\omega_y})^2 \\ &= \underbrace{\mathbf{V}_{xx} - 2\tilde{\omega}_z b_{\omega_z} - 2\tilde{\omega}_y b_{\omega_y} + b_{\omega_z}^2 + b_{\omega_y}^2 - 2\omega_z n_{\omega_z} - 2\omega_y n_{\omega_y} - n_{\omega_z}^2 - n_{\omega_y}^2 + n_{\Gamma_{xx}}}_{\delta \mathbf{V}_{xx}} \end{aligned} \quad (25)$$

Similarly, we have for  $\tilde{\mathbf{V}}_{yy}$  and  $\tilde{\mathbf{V}}_{xy}$ :

$$\tilde{\mathbf{V}}_{yy} = \mathbf{V}_{yy} - \underbrace{2\tilde{\omega}_z b_{\omega_z} - 2\tilde{\omega}_x b_{\omega_x} + b_{\omega_z}^2 + b_{\omega_x}^2 - 2\omega_z n_{\omega_z} - 2\omega_x n_{\omega_x} - n_{\omega_z}^2 - n_{\omega_x}^2 + n_{\Gamma_{yy}}}_{\delta \mathbf{V}_{yy}} \quad (26)$$

$$\tilde{\mathbf{V}}_{xy} = \mathbf{V}_{xy} + \underbrace{\tilde{\omega}_y b_{\omega_x} + \tilde{\omega}_x b_{\omega_y} - b_{\omega_y} b_{\omega_x} + \omega_y n_{\omega_x} + \omega_x n_{\omega_y} + n_{\omega_y} n_{\omega_x} + \frac{n_{\Gamma_{xy}} + n_{\Gamma_{yx}}}{2}}_{\delta \mathbf{V}_{xy}} \quad (27)$$

Although in reality the horizontal acceleration gradients and the angular velocities have to be measured, equations 25 26 27 show that for the simulation it is not necessary to fully reconstruct

the measured acceleration gradients. The first estimation of the horizontal gravitational gradients can be simulated by computing each term in the expanded form of equations 25, 26 and 27, where the  $\tilde{\Gamma}$  terms are not explicitly present. Because the position is also an observable, a position error on the gravitational gradients (also known as registration error) should theoretically be taken into account. For a small position error this term can be expressed by a first order approximation. However, following Jekeli's analysis, this term can be safely ignored with cm-level GPS positioning accuracy [23].

A rough analysis of the order of magnitude of each term shows that, at this stage, the largest terms in the estimation of the gravitational gradients are the coupling of the measured angular velocity with the gyroscope biases  $\tilde{\omega}b_{\omega}$ . For this analysis we consider the models of typical PSD of gravitational gradients and angular rates given by Jekeli [23]. Following his assumptions, that are a linear flight at a constant speed of 250km/hr and an altitude of 1000m, the gravitational gradients range approximately from below  $1E/\sqrt{Hz}$  to  $100E/\sqrt{Hz}$  in the measurement bandwidth and the angular rates are all greater than  $10^{-3}\text{rad.s}^{-1}/\sqrt{Hz}$ . The gyroscope bias depends on the quality of the sensor. Typical navigation-grade gyroscopes, like the one considered for the simulation (see section 3.5.4), have a random bias standard deviation of  $0.003^{\circ}/s$ . The coupling of the angular velocities with the bias is therefore greater than  $50E/\sqrt{Hz}$ , which is comparable to the order of magnitude of the gravitational gradients. Furthermore, we have not taken into account in this analysis the rotation of the controlled platform which is likely to increase the value of the angular rates. Since the gravitational signals and the angular velocity signals are both present in the measurement bandwidth, no frequency domain filtering can significantly enhance the signal to noise ratio. It is therefore necessary to estimate the gyroscope biases to remove the coupling terms  $\tilde{\omega}b_{\omega}$  and  $b_{\omega}^2$ . We describe in the next section a solution based on the calibration of these biases on the acceleration gradient measurements.

### 3.2 Calibration of the gyroscope biases

The calibration of the gyroscope biases is done in  $\mathcal{R}_m$  using a linear least squares regression on equations 25, 26 and 27. For each equation the estimated gravitational gradient is linearly related to two angular velocities and the corresponding regression parameters are gyroscope biases. The three biases are estimated twice and their final estimation will be the average of the two. In this section we will only describe the regression method for equation 25 since similar regression equations for the two other equations can be derived accordingly. Let us suppose we have timeseries of n points. To simplify, equation 25 is rewritten as follows:

$$\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{xx}} = \tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{zy}} \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{zy}} + \underline{\epsilon}_{\mathbf{xx}} \quad (28)$$

where:

$$\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{xx}} = [\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{xx}}(1), \tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{xx}}(2), \dots, \tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{xx}}(n)]^t \quad (29)$$

$$\underline{\tilde{\Omega}}_{zy} = -2 \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_z(1) & \tilde{\omega}_y(1) & 1 \\ \tilde{\omega}_z(2) & \tilde{\omega}_y(2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\omega}_z(n) & \tilde{\omega}_y(n) & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\underline{\epsilon}_{xx} = [\epsilon_{xx}(1), \epsilon_{xx}(2), \dots, \epsilon_{xx}(n)]^t \quad (31)$$

with:

$$\epsilon_{xx} = V_{xx} + b_{\omega_z}^2 + b_{\omega_y}^2 - 2\omega_z n_{\omega_z} - 2\omega_y n_{\omega_y} - n_{\omega_z}^2 - n_{\omega_y}^2 + b_{\Gamma_{xx}} + n_{\Gamma_{xx}} - b_0 \quad (32)$$

where  $b_0$  is the mean of the time series  $\underline{\epsilon}_{xx}$ , and finally:

$$\mathbf{B}_{zy} = \begin{bmatrix} b_{\omega_z} \\ b_{\omega_y} \\ -\frac{b_0}{2} \end{bmatrix} \quad (33)$$

is the parameter vector containing the two unknown biases. Although knowing the term  $b_0$  is of no interest, it is artificially introduced in the equation to ensure that  $\underline{\epsilon}_{xx}$  is zero-mean, which is a prerequisite to perform a least squares regression. Being a function of the gravity gradients and of angular velocities,  $\underline{\epsilon}_{xx}$  can be modelled as a correlated and heteroscedastic random variable, whose covariance matrix is *a priori* unknown. Therefore, the Ordinary Least Squares (OLS) method is not the best linear unbiased estimator according to the Gauss-Markov theorem. For this reason, we apply the Feasible Generalised Least squares regression (FGLS) method [2]. FGLS is a two-step linear regression: first, the OLS regression is applied to have a first estimation of  $\mathbf{B}_{zy}$ :

$$\hat{\mathbf{B}}_{zy} = \left( \underline{\tilde{\Omega}}_{zy}^t \cdot \underline{\tilde{\Omega}}_{zy} \right)^{-1} \cdot \underline{\tilde{\Omega}}_{zy}^t \cdot \underline{\tilde{V}}_{xx} \quad (34)$$

From this first estimation of the parameter vector, we compute the residual  $\underline{\mathbf{r}}_{xx}$  given by:

$$\underline{\mathbf{r}}_{xx} = \underline{\tilde{V}}_{xx} - \underline{\tilde{\Omega}}_{zy} \cdot \hat{\mathbf{B}}_{zy} \quad (35)$$

Then, it is assumed that the statistical properties of  $\underline{\epsilon}_{xx}$  and  $\underline{\mathbf{r}}_{xx}$  are identical. As a consequence, it is now possible to apply the Generalised Least squares (GLS) regression method on equation 28. GLS is in this case the best linear unbiased estimator of the parameter vector. This method requires one to know the variance-covariance matrix  $\mathbf{W}$  of the error  $\underline{\epsilon}_{xx}$  which is assumed to be the same as the one of  $\underline{\mathbf{r}}_{xx}$ . The new estimate of  $\mathbf{B}_{zy}$  is given by:

$$\hat{\mathbf{B}}_{zy} = \left( \underline{\tilde{\Omega}}_{zy}^t \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \underline{\tilde{\Omega}}_{zy} \right)^{-1} \cdot \underline{\tilde{\Omega}}_{zy}^t \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \underline{\tilde{V}}_{xx} \quad (36)$$

Here, the Generalised Least squares regression is performed in the frequency domain. This theoretically does not change the solution but simplifies the estimation of the weighting matrix. It can be shown that under a few hypothesis, the discrete Fourier transform of the variance-covariance matrix is a diagonal matrix whose elements are given by the error PSD. A proof of this result and a further description of the GLS in the frequency domain are given in appendix A. Here, this PSD is approximated by the PSD of  $\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{xx}}$  which is estimated with the periodogram method.

### 3.3 Determination of the rotation matrix

Jekeli shows [23] that an error standard deviation on the rotation angles commensurate with an error of 1E on the gravitational gradients should be around  $0.6^\circ$ . For the simulation, we suggest a simple method to determine the rotation matrix from  $\mathcal{R}_m$  to  $\mathcal{R}_{enu}$ . Using the Euler angles formalism, we split up the rotation matrix  $\mathbf{M}_m^g$  into three rotations whose parameters can be more easily determined in practice. A diagram illustrates this method on figure 4. The three intermediate rotation matrices are described in more details below:

- We first introduce an *ad hoc* reference frame, namely  $\mathcal{R}_{mo}$ , which coincides at rest with the measurement reference  $\mathcal{R}_m$ .  $\mathcal{R}_{mo}$  is a fixed frame with respect to the aircraft reference frame and can be initially calibrated on the ground. The rotation matrix  $\mathbf{M}_m^{mo}$  is determined thanks to 2 optical absolute encoders, one on each rotation axis (angles  $\phi$  and  $\theta$ ) of the controlled platform. These encoders are initialized during a ground calibration.
- The rotation matrix  $\mathbf{M}_{mo}^a$  from the initial measurement reference frame to the aircraft reference frame is a constant rotation matrix, determined once and for all in the initial calibration phase. We therefore neglect potential deformations of the aircraft during the flight, or slight uncontrolled rotations of the platform which may introduce biases in this rotation matrix.
- Finally, the rotation matrix  $\mathbf{M}_a^{enu}$  from the aircraft reference frame to the local geodetic reference frame is assumed to be determined with conventional flight attitude GNSS data. The orientation of the aircraft is fully determined by the three parameters: yaw, pitch and roll.

### 3.4 Principle of the simulation

The simulation workflow is given in figure 5. The simulation chain can be divided into two phases: first the generation and computation of all the observables that are measured during the surveys and second, the effective post-processing of these data to solve the measurement equation and extract the gravitational signal. The simulation workflow can be described as follows:

- For each measurement point of the airborne survey, an error-free GGT  ${}^{enu}\underline{\underline{V}}$  expressed in the geographical frame  $\mathcal{R}_{enu}$  is computed together with a rotation matrix  $\mathbf{M}_m^{enu}$ .
- ${}^{enu}\underline{\underline{V}}$  is transformed into  ${}^m\underline{\underline{V}}$  through  $\mathbf{M}_m^{enu}$ .

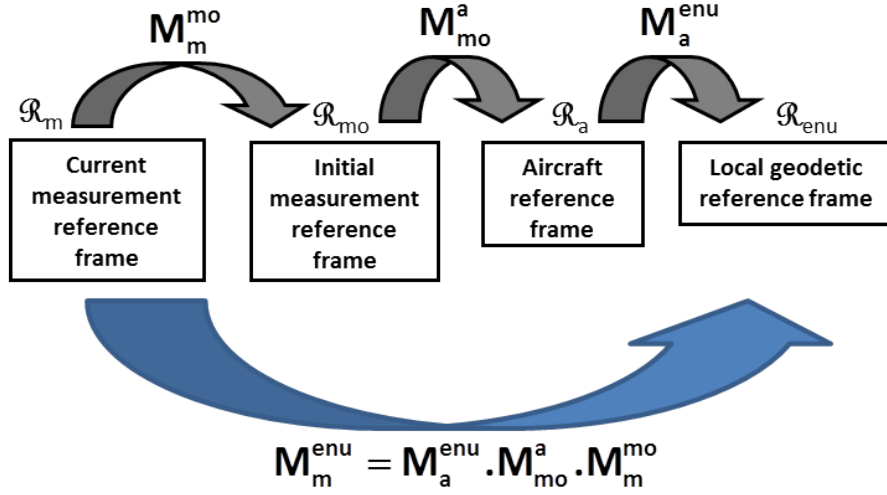


Figure 4: Diagram for rotation matrix  $\mathbf{M}_m^{\text{enu}}$

- With  ${}^m \underline{V}$ , the angular velocity data and the sensors noises and biases we then compute the pre-calibration noisy values of  ${}^m \tilde{V}_{xx}$ ,  ${}^m \tilde{V}_{xy}$  and  ${}^m \tilde{V}_{yy}$  as given by equations 25, 26 and 27. This step is exactly equivalent to simulating the measured acceleration gradients  $\tilde{\Gamma}_{xx}$ ,  $\tilde{\Gamma}_{xy}$ ,  $\tilde{\Gamma}_{yx}$  and  $\tilde{\Gamma}_{yy}$ , the measured angular velocities  $\tilde{\omega}_x$ ,  $\tilde{\omega}_y$  and  $\tilde{\omega}_z$  and deducing from these quantities the gravity gradients  $\tilde{V}_{xy}$ ,  $\tilde{V}_{yx}$  and  $\tilde{V}_{yy}$ , as it would be done in reality. This step requires the generation of gyroscope biases, angular velocity time series, gradiometer and gyroscope noise time series. A description of the simulation of these quantities is given in section 3.5.
- The calibration of the gyroscope biases is performed and the gravity gradients are estimated.
- Finally, the estimated horizontal gravitational gradients are projected into  $\mathcal{R}_{\text{enu}}$ . This is done by first replacing the non-measured gravitational gradients of the GGT  ${}^m \underline{\tilde{V}}$  in  $\mathcal{R}_m$  by an *a priori* model and then rotating the tensor with the estimated rotation matrix  $\tilde{\mathbf{M}}_m^{\text{enu}}$ . In this simulation, we compute the normal ellipsoidal GGT  ${}^{\text{enu}} \underline{\check{V}}$  for each measurement point and rotate it in  $\mathcal{R}_m$  with  $\tilde{\mathbf{M}}_{\text{enu}}^m$ .  ${}^m \check{V}_{xz}$  and  ${}^m \check{V}_{yz}$  are used as surrogate data to complete  ${}^m \underline{\check{V}}$  while we use the trace-free property to deduce  ${}^m \check{V}_{zz} = -{}^m \check{V}_{xx} - {}^m \check{V}_{yy}$ .

Along with the initial input data, the simulator yields the horizontal gravitational gradients expressed in  $\mathcal{R}_m$ , before and after calibration and in  $\mathcal{R}_{\text{enu}}$ .

It is worth mentioning that the latest operation is not necessary in one specific case: when the gradiometer vertical axis  $\mathbf{u}_z^m$  coincides with the upward axis of  $\mathcal{R}_{\text{enu}}$ , the rotation to change from one reference frame to another leave invariant the horizontal subspace. However such a situation is quite unlikely considering the airborne environment and the controlled platform dynamics.

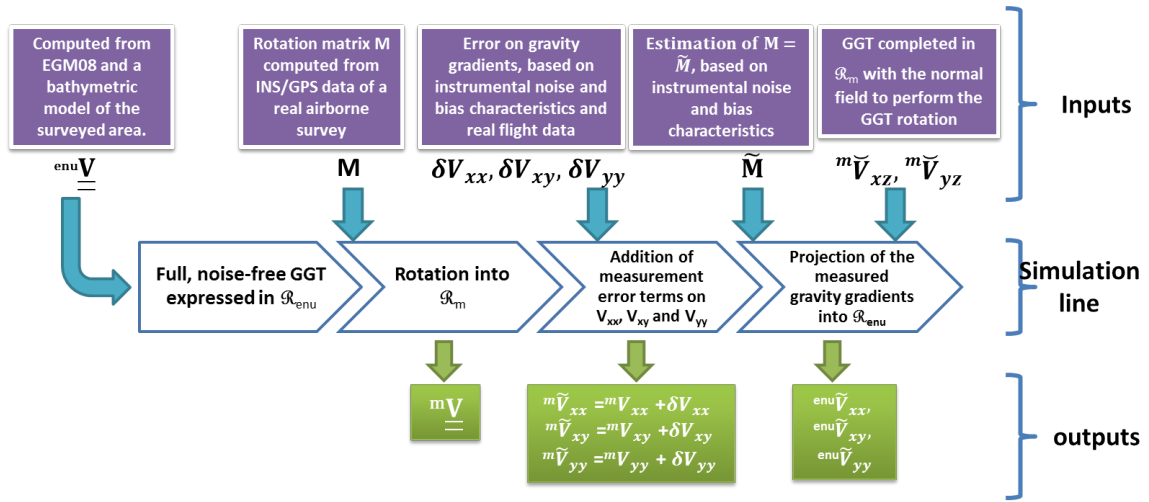


Figure 5: Diagram of the airborne survey simulator

### 3.5 Input data of the simulation

#### 3.5.1 General setting

We consider an airborne survey over a continental margin in the the Gulf of Lion, in the Mediterranean coast of France (see figure 6). The surveyed area is delimited between  $41.5^\circ$  and  $43.1^\circ$ N, and  $3.9^\circ$  and  $5^\circ$ E, representing an area of approximately  $177.8 \times 122.2 \text{ km}^2$ . It has been chosen for the diversity of morphological features, with different orientations, scales and depths. This area covers the continental-shelf, whose typical depth is -90m and the continental slope which extends to a depth of approximately -2500m. The Gulf of Lion is a passive margin whose morphology is characterised by the incision of several submarine canyons all along the slope [4]. The canyons' side can reach a height of 1000m like in the Sète canyon (which looks like an inverted, elongated S between latitude  $4^\circ$  and  $4.5^\circ$ ), with an average slope of  $20^\circ$ .

The aircraft is supposed to fly at an altitude of 500m, with a speed of  $300\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ . The different data, including the measured acceleration gradients by GREMLIT, are sampled at a frequency of 0.25Hz, corresponding to an along-track spatial sampling of 333m. The aircraft track consists in 61 North-South lines and a line spacing of 2km. The transition from one line to another is not taken into account. This results in a  $534 \times 61$  grid, or a total of 32,574 data points. With this hypothesis, the total continuous track flown for this survey represents 10,844km or 36 hours of flight.

The simulation input data are: a time series of noise-free GGT  $enu\mathbf{V}$  in the geographical frame, the angular velocity of  $\mathcal{R}_m$  with respect to an inertial frame  $\Omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^t$ , its corresponding simulated measurement  $\tilde{\Omega}$ , the orientation of  $\mathcal{R}_m$  with respect to  $\mathcal{R}_{enu}$ , given by a rotation matrix  $\mathbf{M}_m^{enu}$  and the estimation of  $\mathbf{M}_m^{enu}$  and its corresponding simulated measurement  $\tilde{\mathbf{M}}_m^{enu}$ . It is assumed that the instrument errors are not correlated, neither the instrument errors and the sensed quantity. The computation of time series for these quantities is presented in the next sections.



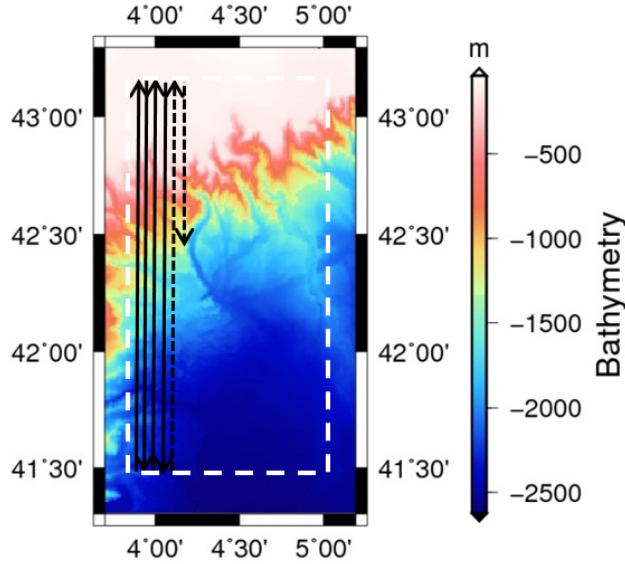


Figure 6: Bathymetry of the surveyed areas in the simulation, along with the direction of the aircraft flight

### 3.5.2 Computation of the noise-free GGT

The GGT at each measurement point is considered as the sum of 2 terms: the contribution of the bathymetry for the short wavelengths of the GGT field, and the contribution of the longer wavelengths, larger than the smallest dimension of the surveyed area i.e. 120 km. It is worth mentioning that the total measurement error on the gravitational gradients in  $\mathcal{R}_m$  is independent of the GGT signal (see equations 25, 26 and 27). We therefore think that the resulting GGT field is sufficiently realistic, in terms of amplitude and spectral content, for an error analysis. The long wavelength components of the GGT field are computed from the EGM2008 model [30] up to degree-order 328. The contribution of the bathymetry is directly computed with the free software Tesseroids [35], whose inputs are a numerical model of the bathymetry of the area and the density contrast between sea water and continental crust. This density contrast is set to  $-1765 \text{ kg.m}^{-3}$ . The numerical model of the bathymetry is a 1km grid extracted from [27]. The contribution of the whole bathymetry displayed on figure 6 is taken into account when computing the gravitational gradients for each point.

### 3.5.3 Simulation of the rotation matrix

The decomposition of  $\mathbf{M}_m^{enu}$  proposed in section 3.3 is used to compute this rotation matrix. For each synthetic rotation matrix  $\mathbf{M}$ , we also compute the corresponding noisy rotation matrix  $\tilde{\mathbf{M}}$ . To be as realistic as possible in the simulation, we use data recorded during an airborne geophysical survey in Corsica [14]. These data consist in time series of the aircraft attitude, angular rate and acceleration. The three rotation matrices are simulated as follows:

- $\mathbf{M}_m^{mo}$  requires first the calculation of the 2 angles of rotation  $\phi$  and  $\theta$  of the controlled platform that align its vertical axis parallel to the net acceleration vector. As a consequence,  $\phi$  and  $\theta$  only

depend on the acceleration vector at the centre of the gradiometer. We use the acceleration measurements recorded during the surveys in Corsica to compute the corresponding angles and we consider without loss of generality that the first rotation is the  $\theta$ -rotation. More details can be found in Douch *et al.* [10].  $\tilde{\mathbf{M}}_m^{mo}$  is obtained by adding a random Gaussian error to the 2 angles. To set the standard deviation of this random variable, we chose the characteristic of a commercial optical absolute encoder whose accuracy ( $1\sigma$ ) is  $0.03''$ .

- $\mathbf{M}_{mo}^a$  is set, without loss of generality, to the identity matrix, which is equivalent to consider that the aircraft reference frame  $\mathcal{R}_a$  coincides with the initial measurement frame  $\mathcal{R}_{mo}$ . To calculate  $\tilde{\mathbf{M}}_{mo}^a$  we assume that the 3 angles of this rotation matrix would be determined with an accuracy ( $1\sigma$ ) better than  $0.1^\circ$ .
- $\mathbf{M}_a^{enu}$  is directly computed from the 3 angles of rotation, namely roll pitch and yaw estimated during the real flight.  $\tilde{\mathbf{M}}_a^{enu}$  is obtained by adding a random Gaussian error to the 3 angles. Following the conclusions of Giorgi *et al.* [19] and Li *et al.* [26] who use GNSS carrier phase measurements to derive the attitude parameters, aircraft yaw, pitch and roll are assumed to be determined with an accuracy of  $0.2^\circ$ .

To illustrate the result of  $\mathbf{M}_m^{enu}$  simulation, we plot on Figure 7 the absolute value of the angle  $\psi$  between the platform z-axis and the local vertical direction given by the  $z_{enu}$ -axis for one flight of the survey over Corsica.

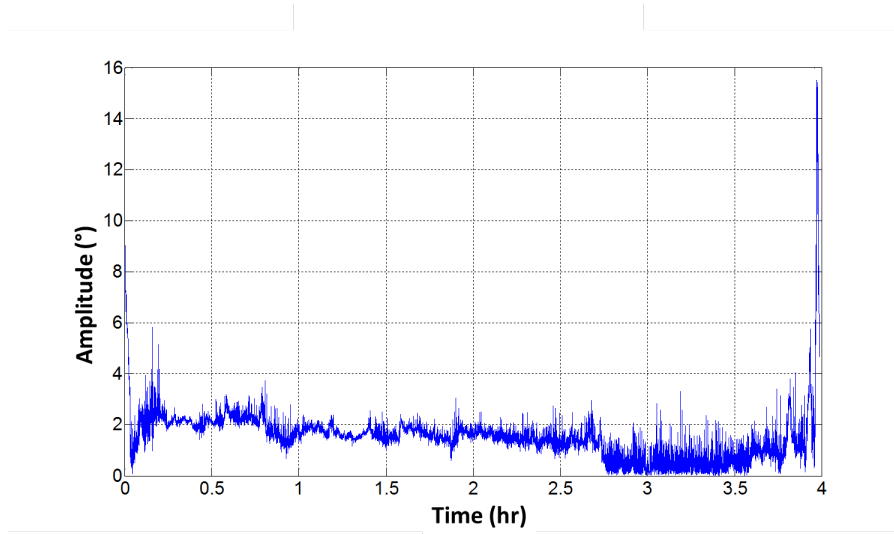


Figure 7: Time series of the absolute value of the deflection of the platform Z-axis from the local vertical direction for one flight. This time series includes the take-off and the landing.

### 3.5.4 Simulation of the angular velocity

The computation of the angular velocity matrix  $\underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{\Omega}}_{m/i}$  is also described in Douch *et al.* [10]: the matrix is first splitted into two terms:

$$\underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{\Omega}}_{m/i} = \underline{\underline{\Omega}}_{m/a} + \underline{\underline{\Omega}}_{a/i} \quad (37)$$

$\underline{\underline{\Omega}}_{m/a}$  is the platform angular velocity vector with respect to  $\mathcal{R}_a$  and is derived from the  $\phi$  and  $\theta$  time series computed beforehand. For  $\underline{\underline{\Omega}}_{a/i}$ , the angular velocity of the aircraft with respect to an inertial frame, we use the data directly recorded by the gyroscopes of the aircraft INS during the Corsica survey. For bias and noise characteristics we will consider commercial gyroscopes, namely the fiber optic gyroscope VG 031H with a white Gaussian noise of  $0.02^\circ/h/\sqrt{Hz}$  and a bias of  $0.003^\circ/s$ . The three biases are randomly drawn from a uniform distribution on the interval  $[-0.003, 0.003]^\circ/s$ . We assume that these biases do not drift over the whole simulated survey.

## 4 Results

### 4.1 Gravitational gradients error in the instrumental frame

**Gyroscope biases calibration** The calibration of the gyroscope biases is done over the full time series. The results of this calibration show that the first step of the regression, the ordinary least squares regression, gives a sufficiently accurate estimation of the biases. Unexpectedly, the GLS regression in the frequency domain does not improve this estimation. Two reasons may explain this result: (1) when designing the weighting matrix  $\mathbf{W}^{-1}$ , the approximation of the PSD of  $\underline{\underline{\epsilon}}_{xx}$  (resp.  $\underline{\underline{\epsilon}}_{yy}$  and  $\underline{\underline{\epsilon}}_{xy}$ ) by the PSD of the residuals of the corresponding OLS regression is not good enough and (2), the estimation of the residual PSD by the periodogram method is not sufficiently precise. The estimated biases are given in Table 1.

		estimated by regression on:				
	true value	$\tilde{\mathbf{V}}_{xx}$	$\tilde{\mathbf{V}}_{xy}$	$\tilde{\mathbf{V}}_{yy}$	average	error
$b_{\omega_x}$	$9.075810^{-6}$		$9.023910^{-6}$	$9.080010^{-6}$	$9.052010^{-6}$	$2.3910^{-8}$
$b_{\omega_y}$	$5.35710^{-7}$	$4.8410^{-7}$	$5.25510^{-7}$		$5.04710^{-7}$	$3.1010^{-8}$
$b_{\omega_z}$	$-2.874110^{-5}$	$-2.875910^{-5}$		$-2.879210^{-5}$	$-2.877510^{-5}$	$3.4010^{-8}$

Table 1: Results of the regression of the gyro biases by ordinary least squares.

**Error on the estimated gravity gradients** Once the biases are estimated, it is possible to estimate the horizontal gravitational gradients in the instrumental frame. The error  $\delta\mathbf{V}_{xx}$  (resp.  $\delta\mathbf{V}_{xy}$  and  $\delta\mathbf{V}_{yy}$ ) corrupting the signal  $V_{xx}$  (resp.  $V_{xy}$  and  $V_{yy}$ ) is simply determined by calculating the difference between the estimated gravitational gradients and the noise-free ones.  $\delta\mathbf{V}_{zz}$  is deduced from the trace-free property of the GGT. The main characteristics of the errors are summarized in Table 2. With the gyroscope bias calibration, the error on the estimated horizontal gravitational gradients in the measurement reference frame is lower than 2E. The correlation matrix of the errors is given in Table 3:

### 4.2 Gravitational gradients error in the geodetic frame

The noise-free gravitational gradients, the estimated gravitational gradients and the error are plotted on Figure 8. We note  $\Delta\mathbf{V}_{xx}$  (resp.  $\Delta\mathbf{V}_{yy}$  and  $\Delta\mathbf{V}_{xy}$ ) the error on  $\mathbf{V}_{xx}$  (resp.  $\mathbf{V}_{xx}$  and  $\mathbf{V}_{xx}$ ) in the geodetic

	std (E)	max $\ \cdot\ $ (E)
$\delta\mathbf{V}_{xx}$	1.103	16.9
$\delta\mathbf{V}_{xy}$	0.84	14.2
$\delta\mathbf{V}_{yy}$	1.86	26
$\delta\mathbf{V}_{zz}$	2.28	30.6

Table 2: Characteristics of the error on the horizontal gravitational gradients in  $\mathcal{R}_m$  after the gyroscope biases calibration

	$\delta\mathbf{V}_{xx}$	$\delta\mathbf{V}_{xy}$	$\delta\mathbf{V}_{yy}$
$\delta\mathbf{V}_{xx}$	1		
$\delta\mathbf{V}_{xy}$	-0.013	1	
$\delta\mathbf{V}_{yy}$	0.126	0.154	1

Table 3: Correlation matrix of the errors on the three horizontal gravitational gradients estimated in  $\mathcal{R}_m$

reference frame. The standard deviation and maximum values of the error are given in Table 4.

	std (E)	max $\ \cdot\ $ (E)
$\Delta\mathbf{V}_{xx}$	2.7	41.3
$\Delta\mathbf{V}_{xy}$	1.9	34.6
$\Delta\mathbf{V}_{yy}$	2.57	41.3
$\Delta\mathbf{V}_{zz}$	3.8	44

Table 4: Characteristics of the error on the estimated horizontal gravitational gradients after the rotation to  $\mathcal{R}_{enu}$

Again, we can compute the correlation matrix of the error signals (see Table 5).

	$\Delta\mathbf{V}_{xx}$	$\Delta\mathbf{V}_{xy}$	$\Delta\mathbf{V}_{yy}$
$\Delta\mathbf{V}_{xx}$	1		
$\Delta\mathbf{V}_{xy}$	0.067	1	
$\Delta\mathbf{V}_{yy}$	0.043	0.1	1

Table 5: Correlation matrix of the errors on the three horizontal gravitational gradients estimated in  $\mathcal{R}_{enu}$

At this stage, it is possible to improve the accuracy of the gravitational gradients and down-weight the outliers with an along-track Gaussian filtering. In Figure 9, the standard deviation of the error (solid lines) is plotted as a function of the Gaussian filter width and compared to the error standard deviation induced by smoothing the noise-free gravitational gradients (his latter error is similar to a truncation or omission error). For a window width of 2km (or equivalently a temporal Gaussian filtering over 24s), the error on the three horizontal gradients is below 2E. The spatial width of the Gaussian window can be interpreted as the along-track spatial resolution.

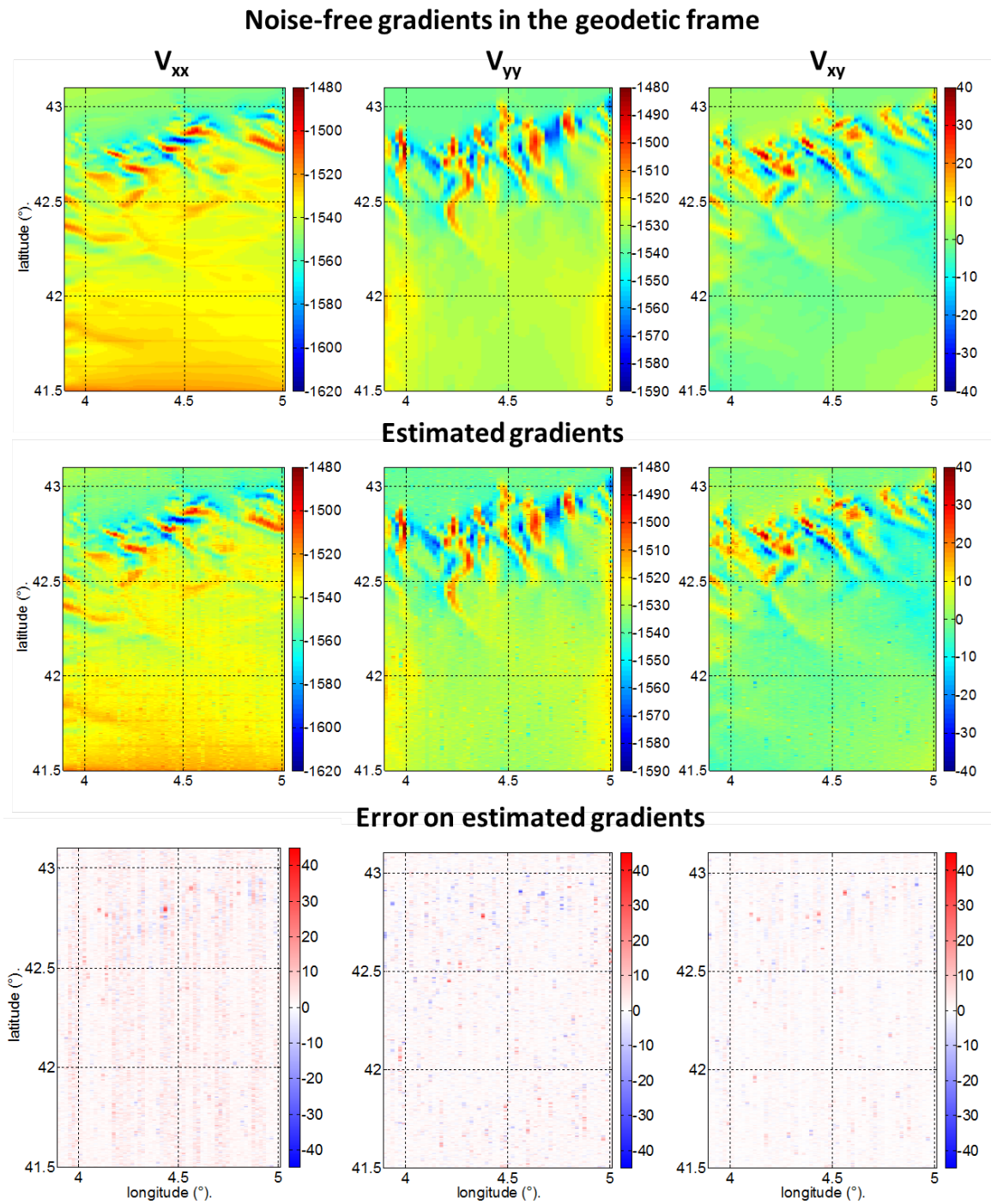


Figure 8: Gravitational gradients expressed in  $\mathcal{R}_{enu}$ : the noise-free gravitational gradients are plotted on the first row, the estimated gravitational gradients are in the second row and the difference between noise-free and corrupted signals is plotted in the third row

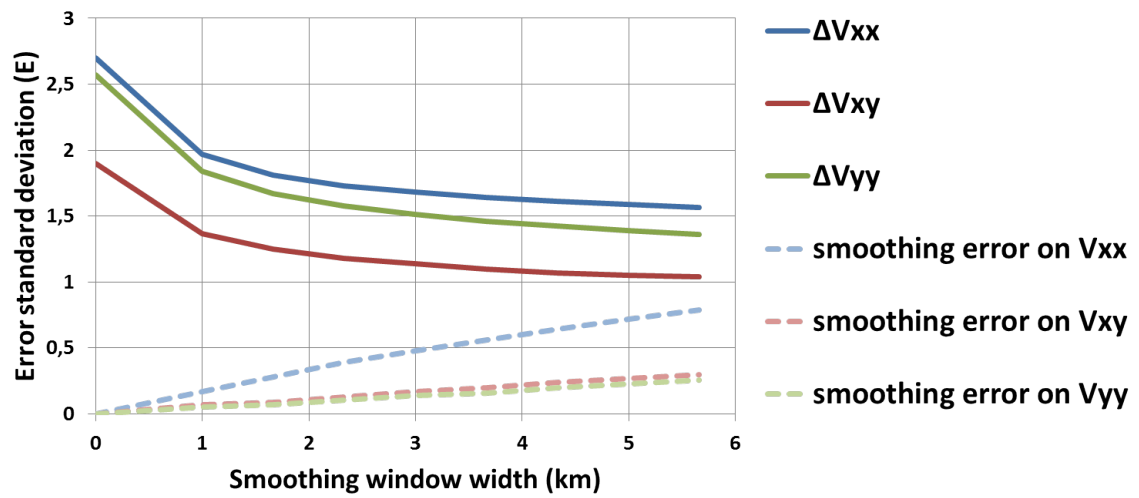


Figure 9: Error on the horizontal gravitational gradients expressed in  $\mathcal{R}_{enu}$  as a function of the width of the along-track Gaussian filtering. The solid lines are for the estimated gravitational gradients, while the dashed lines refer to the error induced by smoothing the noise-free signal.

## 5 Discussion and conclusion

Moving-base gravity gradiometry only requires inertial instruments to determine gravitational gradients. It is therefore a promising way to overcome the limits of performance of classical airborne scalar or vectorial gravimetry, bounded by the precision of GPS-derived velocity. This contribution focused on the estimation of the potential precision of gravitational gradients recovered from an airborne survey, using a gravity gradiometer concept called GREMLIT. To this aim, a simulator has been designed to yield GREMLIT-type time series, from which the horizontal gravitational gradients are deduced. Two main issues have more particularly been addressed in this case study: how to deal with gyroscope precisions which are not commensurate with the one of the acceleration gradiometer and then, how to transform the estimated horizontal gravitational gradients from the measurement reference frame to the geodetic one.

First, we showed that conventional navigation-grade gyroscope biases couple with the angular velocity, yielding an error larger than the signal of interest in the measurement bandwidth. We propose a solution to post-calibrate the gyroscope biases with a sufficient precision to compute horizontal gravitational gradients with an error ( $1\sigma$ ) lower than  $2E$  in the measurement frame. Therefore, it is possible to relax the requirement on the gyroscope biases, so that commercial navigation-grade gyroscopes can be used together with GREMLIT horizontal acceleration gradiometer, while keeping a good precision. It must be pointed out that with the instrumental errors taken into account in this simulator, the total error term on the estimated gravitational gradients in the measurement frame is independent of the gravitational signal. This error term remains dominated by the coupling of the angular rates with the uncalibrated bias of the gyroscopes. As a consequence, this error is lower when the aircraft accelerations and angular velocity are smaller. This means that the turbulence conditions will impact the error level. Here our calibration relies on the assumption that the unknown gyroscope biases are constant over the whole flights, which represent here more than 32,000 data points. A more realistic assumption would be to consider the biases constant over shorter time spans, depending on the bias stability. Future work will concentrate on evaluating the performances of piecewise bias estimations and taking into account possible bias drift in the calibration process.

Second, being a horizontal gravity gradiometer, it is only possible with GREMLIT to measure the 4 horizontal gravitational gradients in the measurement reference frame. To transform the gravitational gradients from the measurement reference frame to the geodetic one it is therefore necessary to complete the GGT and to determine precisely the rotation parameters from one frame to another. In this article, the GGT is completed with a normal field GGT model. We have suggested a technically feasible method to determine the measurement reference frame orientation with the precision specified in [23]. This processing results in an increase of the error. This error has 2 origins: the error on the rotation parameters and the error due to the projection of the truncated gravitational gradients used to fill in the GGT. The error on the rotation parameters increases with the amplitude of the GGT components. But, in the specific case of our simulation, the synthetic gravity gradients are likely to be larger than in reality: the continental margin in the area is indeed known to be covered by a layer of sediment whose thickness ranges from 2km at the shelf edge up to 10km in the basin [4]. Owing to the fact that the sediment density is smaller than the crustal

density, the density contrast used to compute the GGT field for the simulation is overestimated, and so are the gravitational gradients. Consequently, the simulation can be seen as a worse case in what concerns the effect of rotation parameters errors on the magnitude of the gravitational gradients error. The contribution of the truncated gravitational gradients to the total error when transforming the GGT to the geodetic reference frame is also below 1E. The projection of  $V_{xz}$ ,  $V_{yz}$  and  $V_{zz}$  on the horizontal gradients is indeed very small in our case. This is due to the fact that the z-axis of both the geodetic and measurement reference frames only differ by a few degrees. Ideally, if they were parallel, the projection would be exactly zero.

Finally, although this work is based on the study of a single simulation, we think that this example is representative of typical airborne conditions encountered during geophysical surveys. We therefore consider that it is possible to keep the error on the horizontal gravitational gradients in the geodetic reference frame below 2E after an along-track Gaussian filtering with GREMLIT at 500m altitude. It must be pointed out that the reachable resolution depends also on the survey parameters such as aircraft speed, sampling rate, cross-track distance and altitude [12]. Nonetheless, providing that GREMLIT can be successfully operated in an aircraft, we regard it as being able to precisely map the very short variations of the gravity field.

The authors would like to thank José Cali, Françoise Duquenne, Jérôme Verdun and IGN, for providing the time series of the flight dynamics of the airborne survey in Corsica. This study benefits from a grant from ANR ASTRID and Karim Douch from a PhD grant from ONERA. This is IPGP contribution number XXXX.

## References

- [1] Gary J. Barnes, John M. Lumley, Phill I. Houghton, and Richard J. Gleave. Comparing gravity and gravity gradient surveys. *Geophysical Prospecting*, 59(1):176–187, 2011.
- [2] Christopher F Baum. *An introduction to modern econometrics using Stata*. Stata Press, 2006.
- [3] R. E. Bell, R. Anderson, and L. Pratson. Gravity gradiometry resurfaces. *The Leading Edge*, 16(1):55–59, 1997.
- [4] S. Berné and C. Gorini. The gulf of lions: An overview of recent studies within the french margins programme. *Marine and Petroleum Geology*, 22(6–7):691 – 693, 2005. The Gulf of Lions: an overview of recent studies within the French Margins Programme.
- [5] Wolfgang Bosch. Geodetic application of satellite altimetry. In Cheinway Hwang, C.K. Shum, and Jiancheng Li, editors, *Satellite Altimetry for Geodesy, Geophysics and Oceanography*, volume 126 of *International Association of Geodesy Symposia*, pages 3–21. Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [6] Steven C. Cohen and David E. Smith. Lageos scientific results: Introduction. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 90(B11):9217–9220, 1985.



- [7] D. Difrancesco. Advances and challenges in the development and deployment of gravity gradiometer systems. In *EGM 2007 International Workshop*, 2007.
- [8] D. Difrancesco. *Gravity gradiometry: Systems, applications, and future prospects*, chapter 30, pages 31–31. 2011.
- [9] K. Douch, B. Foulon, B. Christophe, M. Diament, G. Pajot-Métivier, and I. Panet. A new planar electrostatic gravity gradiometer for airborne surveys. In *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2013*, pages 1216–1219, 2013.
- [10] Karim Douch, Bruno Christophe, Bernard Foulon, Isabelle Panet, Gwendoline Pajot-Métivier, and Michel Diament. Ultra-sensitive electrostatic planar acceleration gradiometer for airborne geophysical surveys. *Measurement Science and Technology*, 25(10):105902, 2014.
- [11] M Dransfield. Airborne gravity gradiometry in the search for mineral deposits. In *Proceedings of Exploration*, volume 7, pages 341–354, 2007.
- [12] Mark H Dransfield and Asbjorn N Christensen. Performance of airborne gravity gradiometers. *The Leading Edge*, 32(8):908–922, 2013.
- [13] Mark R Drinkwater, R Haagmans, D Muzi, A Popescu, R Floberghagen, M Kern, and M Fehringer. The goce gravity mission: Esa’s first core earth explorer. In *Proceedings of the 3rd international GOCE user workshop*, pages 6–8. European Space Agency Noordwijk, The Netherlands, 2006.
- [14] H. Duquenne, AV. Olesen, R. Forsberg, and A. Gidskehaug. Improvement of the gravity field and geoid around Corsica by aerial gravimetry. *Gravity and Geoid*, pages 167–172, 2002.
- [15] R Forsberg, K Hehl, L Bastos, A Giskehaug, and U Meyer. Development of an airborne geoid mapping system for coastal oceanography (agmasco). In *Gravity, Geoid and Marine geodesy*, pages 163–170. Springer, 1997.
- [16] R Forsberg, AV Olesen, K Keller, M Møller, Arne Gidskehaug, and D Solheim. Airborne gravity and geoid surveys in the arctic and baltic seas. In *Proceedings of International Symposium on Kinematic Systems in Geodesy, Geomatics and Navigation (KIS-2001), Banff*, pages 586–593, 2001.
- [17] Rene Forsberg and Arne V Olesen. Airborne gravity field determination. In *Sciences of Geodesy-I*, pages 83–104. Springer, 2010.
- [18] Rene Forsberg, Arne Vestergaard Olesen, Adel Alshamsi, Arne Gidskehaug, Sahrum Ses, Majid Kadir, and Benny Peter. Airborne gravimetry survey for the marine area of the united arab emirates. *Marine Geodesy*, 35(3):221–232, 2012.
- [19] Gabriele Giorgi, Peter JG Teunissen, Sandra Verhagen, and Peter J Buist. Testing a new multivariate gnss carrier phase attitude determination method for remote sensing platforms. *Advances in Space Research*, 46(2):118–129, 2010.

- [20] W. Gumert. An historical review of airborne gravity. *The Leading Edge*, 17(1):113–116, 1998.
- [21] Cheinway Hwang, Yu-Shen Hsiao, Hsuan-Chang Shih, Ming Yang, Kwo-Hwa Chen, Rene Forsberg, and Arne V. Olesen. Geodetic and geophysical results from a taiwan airborne gravity survey: Data reduction and accuracy assessment. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 112(B4):n/a–n/a, 2007.
- [22] C. Jekeli. On precision kinematic accelerations for airborne gravimetry. *Journal of Geodetic Science*, 1(4):367–378, 2011.
- [23] Christopher Jekeli. Airborne gradiometry error analysis. *Surveys in geophysics*, 27(2):257–275, 2006.
- [24] Per Knudsen, R Forsberg, O Andersen, D Solheim, R Hipkin, K Haines, J Johannessen, and F Hernandez. The gocina project-an overview and status. In *Proc. Second International GOCE User Workshop “GOCE, The Geoid and Oceanography”*, ESA-ESRIN, 2004.
- [25] X Li. Examination of two major approximations used in the scalar airborne gravimetric system—a case study based on the lcr system. *Journal of Geodetic Science*, 3(1):32–39, 2013.
- [26] Y Li, K Zhang, C Roberts, and M Murata. On-the-fly gps-based attitude determination using single-and double-differenced carrier phase measurements. *GPS Solutions*, 8(2):93–102, 2004.
- [27] B Loubrieu and J Mascle. Medimap group. *Morpho-Bathymetry of the Mediterranean Sea. CIESM & Ifremer Special Publication, Atlases and Maps, one map at 1/3 000 000.*, 1(3.000):000, 2007.
- [28] M. Nabighian, M. Ander, V. Grauch, R. Hansen, T. LaFehr, Y. Li, W. Pearson, J. Peirce, J. Phillips, and M. Ruder. Historical development of the gravity method in exploration. *Geophysics*, 70(6):63ND–89ND, 2005.
- [29] P. Novák, M. Kern, K.-P. Schwarz, M.G. Sideris, B. Heck, S. Ferguson, Y. Hammada, and M. Wei. On geoid determination from airborne gravity. *Journal of Geodesy*, 76(9-10):510–522, 2003.
- [30] Nikolaos K Pavlis, Simon A Holmes, Steve C Kenyon, and John K Factor. An earth gravitational model to degree 2160: Egm2008. *EGU General Assembly*, pages 13–18, 2008.
- [31] Reiner Rummel, Weiyong Yi, and Claudia Stummer. Goce gravitational gradiometry. *Journal of Geodesy*, 85(11):777–790, 2011.
- [32] B. D. Tapley, S. Bettadpur, M. Watkins, and C. Reigber. The Gravity Recovery and Climate Experiment: Mission overview and early results. *Geophysical Research Letters*, 31(9):n/a–n/a, 2004.
- [33] P Touboul, E Willemenot, B Foulon, and V Josselin. Accelerometers for champ, grace and goce space missions: synergy and evolution. *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata*, 40(3-4):321–327, 1999.

- [34] Pierre Touboul. Space accelerometers: Present status. In Claus Lämmerzahl, C.W.Francis Everitt, and FriedrichW. Hehl, editors, *Gyros, Clocks, Interferometers...: Testing Relativistic Graviy in Space*, volume 562 of *Lecture Notes in Physics*, pages 273–291. Springer Berlin Heidelberg, 2001.
- [35] Leonardo Uieda, Everton P. Bomfim, Carla Braitenberg, and Eder Molina. Optimal forward calculation method of the marussi tensor due to a geologic structure at goce height. In *Proceedings of the 4th International GOCE User Workshop*, 2011.
- [36] Richard J Vaccaro and Ahmed S Zaki. Statistical modeling of rate gyros. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 61(3):673–684, 2012.

## A Appendix

### A.1 Generalized least squares in the frequency domain

We recall the regression model equation 28:

$$\underline{\tilde{V}}_{\text{xx}} = \underline{\tilde{\Omega}}_{\text{zy}} \cdot \mathbf{B}_{\text{zy}} + \underline{\epsilon}_{\text{xx}}$$

where  $\mathbf{B}_{\text{zy}}$  is the regression coefficients vector. The best linear unbiased estimator for  $\mathbf{B}_{\text{zy}}$  is given by:

$$\hat{\mathbf{B}}_{\text{zy}} = \left( \underline{\tilde{\Omega}}_{\text{zy}}^t \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \underline{\tilde{\Omega}}_{\text{zy}} \right)^{-1} \cdot \underline{\tilde{\Omega}}_{\text{zy}}^t \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \underline{\tilde{V}}_{\text{xx}}$$

where  $\mathbf{W} = \text{cov}(\underline{\epsilon}_{\text{xx}})$  is the the variance-covariance matrix of  $\underline{\epsilon}_{\text{xx}}$ .

It can be shown that the estimator remains unchanged when multiplying the regression equation by any matrix  $\mathbf{Q}$  such that  $\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{Q} = \lambda [\mathbf{I}]$ , where  $[\ ]^*$  denotes the conjugate transpose operator,  $\lambda \in \mathbb{C}$  and  $[\mathbf{I}]$  is the identity matrix. Let us take now the discrete Fourier transform of equation 28 which can be obtained by multiplying it by matrix  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P} = \left[ e^{-2i\pi(k-1)(j-1)/n} \right]_{kj} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-2i\pi/n} & e^{-2i\pi 2/n} & e^{-2i\pi 3/n} & \dots & e^{-2i\pi(n-1)/n} \\ 1 & e^{-2i\pi 2/n} & e^{-2i\pi 4/n} & e^{-2i\pi 6/n} & \dots & e^{-2i\pi 2(n-1)/n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-2i\pi(n-1)/n} & e^{-2i\pi 2(n-1)/n} & e^{-2i\pi 3(n-1)/n} & \dots & e^{-2i\pi(n-1)(n-1)/n} \end{bmatrix}$$

where  $i$  is the imaginary unit,  $k$  the row number and  $j$  the column number and  $n$  the total number of data points.  $\mathbf{P}$  is a Vandermonde matrix which verifies  $\mathbf{P}^* \cdot \mathbf{P} = n[\mathbf{I}]$ . The new regression model equation is now:

$$\mathbf{P} \cdot \underline{\tilde{V}}_{\text{xx}} = \mathbf{P} \cdot \underline{\tilde{\Omega}}_{\text{zy}} \cdot \mathbf{B}_{\text{zy}} + \mathbf{P} \cdot \underline{\epsilon}_{\text{xx}}$$

but the result of the GLS estimation is theoretically the same. We apply the GLS solution to this equation. The critical point here is the determination of the new optimal weighting matrix  $\mathbf{W} =$

$\text{cov}(\mathbf{P}\underline{\epsilon}_{\mathbf{xx}})$ . We can demonstrate that  $\mathbb{W}$  is a diagonal matrix whose elements are given by the PSD of  $\underline{\epsilon}$ . Let  $X(\nu)$  be the discrete Fourier transform  $X(\nu)$  of a random correlated signal  $x(n)$ :

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu n} x(n) \quad 0 \leq \nu < 1$$

The variance-covariance of  $X(\nu)$  is then given by:

$$\begin{aligned} \text{cov}(X(\nu)) &= E[X(\nu)X^*(\nu')] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu n} e^{-2i\pi\nu' n'} E[x(n)x^*(n')] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu n} e^{-2i\pi\nu' n'} \text{cov}(x(n), x(n')) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu n} e^{-2i\pi\nu' n'} \text{cov}_{xx}(d = n - n') \quad (\text{second-order stationary process}) \\ &= \sum_{d=-\infty}^{+\infty} \text{cov}_{xx}(d) e^{-2i\pi\nu d} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi(\nu-\nu')n'} \\ &= \Pi(\nu)\delta(\nu - \nu') \end{aligned}$$

where  $\Pi(\nu)$  is the PSD of  $x$  and  $\delta$  is the Dirac distribution. This property is true only for infinite time series. However we will make this approximation and consider  $\mathbb{W}$  as a diagonal matrix.  $\mathbb{W}$  is therefore obtained by estimating the PSD of  $\underline{\epsilon}_{\mathbf{xx}}$  thanks to the periodogram method. Because in our case we have no access to  $\underline{\epsilon}_{\mathbf{xx}}$ , the PSD is estimated from the residual  $\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{xx}}$  of the first OLS.

### 3.3 Compléments : utilisation des invariants par rotation du GGT

Dans le cas du gradiomètre planaire GREMLIT, l'expression dans un repère autre que celui lié au référentiel de mesure des gradients de gravité estimés nécessite *a priori* deux choses : d'une part la détermination de la matrice de rotation du repère de mesure vers un repère d'expression souhaité, typiquement le repère géographique local, et d'autre part de compléter le tenseur gradient afin de pouvoir lui appliquer cette rotation. Comme cela a été montré dans l'article 2, dans des conditions de vols peu perturbés, l'axe z du repère de mesure ne diffère que de quelques degrés de la verticale ellipsoïdale, de sorte qu'il est suffisant de simplement compléter le GGT avec les composantes  $U_{xz}$  et  $U_{yz}$  du champ normal pour projeter le tenseur dans le repère local, tout en limitant l'erreur introduite à  $2E$  ( $1\sigma$ ). Cependant, une erreur sur la matrice de passage d'un repère à l'autre entraîne inévitablement une erreur de projection des gradients de gravité dans le nouveau repère. C'est pour cette raison qu'une autre possibilité a été initialement envisagée afin de réaliser ce changement de repère d'expression du GGT.

Cette solution est basée sur l'utilisation des invariants par rotations du tenseur et ne nécessite donc pas la connaissance de la matrice de changement de repère. En contre-partie cette méthode requiert d'avoir une représentation analytique paramétrée du champ de gravité et est plus coûteuse en terme de puissance de calcul [98]. Seul le principe de cette méthode est exposé dans la suite de cette section. Le choix d'un modèle de représentation analytique du champ de gravité sur une étendue régionale est en effet critique pour la mise en œuvre de cette méthode et représente un travail important qui n'a malheureusement pas pu être entrepris dans le cadre de cette thèse. Un exemple de représentation analytique du champ de gravité local est par l'intermédiaire des fonctions à base radiale [99] [100] (encore appelées fonctions à base sphérique). Les fonctions à base radiale sont des fonctions à symétrie radiale dont la majeure partie de l'énergie est localisée dans un domaine spatial limité. Le *point mass kernel* est un exemple de fonction à base radiale et est défini par :

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_l) = \frac{\alpha}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_l\|} \quad (3.1)$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  est la variable d'espace et  $\mathbf{y}_l \in \mathbb{R}^3$  est la position du centre de la fonction.

Étant un tenseur d'ordre 2, le GGT possède 3 invariants par rotation. En utilisant la symétrie

### 3.3. Compléments : utilisation des invariants par rotation du GGT

du tenseur, ces 3 invariants ont pour expression :

$$I_1 = \text{tr} \underline{\underline{V}} = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} \quad (3.2)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[ (\text{tr} \underline{\underline{V}})^2 - \text{tr}(\underline{\underline{V}}^2) \right] = V_{xx} \cdot V_{yy} + V_{xx} \cdot V_{zz} + V_{yy} \cdot V_{zz} - V_{xy}^2 - V_{xz}^2 - V_{yz}^2 \quad (3.3)$$

$$I_3 = \det(\underline{\underline{V}}) = V_{xx} \cdot V_{yy} \cdot V_{zz} + 2 \cdot V_{xy} \cdot V_{xz} \cdot V_{yz} - V_{xx} \cdot V_{yz}^2 - V_{yy} \cdot V_{xz}^2 - V_{zz} \cdot V_{xy}^2 \quad (3.4)$$

Ce triplet d'invariant n'est en fait pas unique : on pourrait également utiliser la famille suivante :

$$J_1 = \text{tr} \underline{\underline{V}} = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} \quad (3.5)$$

$$J_2 = V_{xx}^2 + V_{yy}^2 + V_{zz}^2 + 2 \cdot V_{xy}^2 + 2 \cdot V_{xz}^2 + 2 \cdot V_{yz}^2 \quad (3.6)$$

$$J_3 = V_{xx}^3 + V_{yy}^3 + V_{zz}^3 + 3 \cdot V_{xx} \cdot V_{xy}^2 + 3 \cdot V_{xx} \cdot V_{xz}^2 + 3 \cdot V_{yy} \cdot V_{xy}^2 + 3 \cdot V_{yy} \cdot V_{yz}^2 \\ + 3 \cdot V_{zz} \cdot V_{xz}^2 + 3 \cdot V_{zz} \cdot V_{yz}^2 + 6 \cdot V_{xy} \cdot V_{xz} \cdot V_{yz} \quad (3.7)$$

On peut noter que pour les deux triplets, le premier invariant mathématique est la trace du tenseur qui est aussi un invariant "physique" du champ, caractéristique de son harmonicité. Par ailleurs chaque triplet d'invariant peut être transformé en l'autre par des relations polynomiales. Pour la suite de cet exposé les invariants  $J_2$  et  $J_3$  seront utilisés. Supposons que l'on dispose d'une représentation paramétrique du potentiel de gravité sur la zone d'intérêt ainsi qu'une série de points de mesure où toutes les composantes du GGT ont été estimées. On note le modèle analytique de champ de gravité  $V$  de la manière suivante :

$$V = U + \delta V \quad (3.8)$$

avec  $U$  le champ normal et  $\delta V$  la perturbation de gravité. Cette dernière est développée pour simplifier sous la forme d'une somme de fonctions à base radiale  $\Psi$  :

$$\delta V = \sum_{l=1}^n \alpha_l \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_l) \quad (3.9)$$

A partir de cette représentation, on déduit l'expression de chaque gradient de gravité  $V_{ij}$  aux points de mesure  $\mathbf{x}_k$  :

$$V_{ij}(\mathbf{x}_k) = U_{ij}(\mathbf{x}_k) + \delta V_{ij}(\mathbf{x}_k) = U_{ij} + \sum_{l=1}^n \alpha_l \partial_{ij} \Psi(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_l) \quad (3.10)$$

On peut dès lors calculer une expression analytique des invariants  $J_2$  et  $J_3$  en chaque point  $\mathbf{x}_k$ . Par ailleurs, on a également accès aux valeurs numériques  $J_2^m$  et  $J_3^m$  de ces invariants grâce aux gradients mesurés. On obtient alors un système d'équation dont la résolution

### Chapitre 3. Caractérisation de l'erreur et traitement des mesures GREMLIT à partir de simulations numériques

permet de déterminer notre modèle paramétrique du champ :

$$\begin{cases} J_2(\mathbf{x}_k) = J_2^m(\mathbf{x}_k) \\ J_3(\mathbf{x}_k) = J_3^m(\mathbf{x}_k) \end{cases} \quad (3.11)$$

On peut remarquer deux limites à cette méthode : tout d'abord elle nécessite de connaître l'ensemble du tenseur gradient, ce qui ne sera pas le cas avec GREMLIT. Deuxièmement, le système d'équations ainsi obtenu est largement non-linéaire et la précision sur les paramètres qui seront déterminés vont donc *a priori* dépendre de la méthode de résolution numérique employée. Pour palier ces deux contraintes, Baur *et.al.* [101] ont proposé de linéariser le problème en considérant non pas les  $J_2$  et  $J_3$  mais les perturbations des invariants, notées respectivement  $\delta J_2$  et  $\delta J_3$  et définis par :

$$\delta J_2 = J_2 - J_2^{ref} \quad (3.12)$$

$$\delta J_3 = J_3 - J_3^{ref} \quad (3.13)$$

où  $J_2^{ref}$  (resp.  $J_3^{ref}$ ) est l'invariant  $J_2$  (resp.  $J_3$ ) calculé pour le GGT du champ de gravité normal. A titre d'exemple, on aura pour  $J_2$  :

$$\delta J_2 = J_2 - J_2^{ref} \quad (3.14)$$

$$= V_{xx}^2 + V_{yy}^2 + V_{zz}^2 + 2.V_{xy}^2 + 2.V_{xz}^2 + 2.V_{yz}^2 \quad (3.15)$$

$$- U_{xx}^2 - U_{yy}^2 - U_{zz}^2 - 2.U_{xy}^2 - 2.U_{xz}^2 - 2.U_{yz}^2 \quad (3.16)$$

$$= (U_{xx} + \delta V_{xx})^2 + (U_{yy} + \delta V_{yy})^2 + (U_{zz} + \delta V_{zz})^2 + 2.(U_{xy} + \delta V_{xy})^2 \quad (3.17)$$

$$+ 2.(U_{xz} + \delta V_{xz})^2 + 2.(U_{yz} + \delta V_{yz})^2 - U_{xx}^2 - U_{yy}^2 - U_{zz}^2 - 2.U_{xy}^2 - 2.U_{xz}^2 - 2.U_{yz}^2$$

$$= 2(U_{xx}.\delta V_{xx} + U_{yy}.\delta V_{yy} + U_{zz}.\delta V_{zz} + 2.U_{xy}.\delta V_{xy} + 2.U_{xz}.\delta V_{xz} + 2.U_{yz}.\delta V_{yz}) + O(\delta V_{ij}^2) \quad (3.18)$$

où l'on a négligé les termes d'ordre 2 en  $\delta V_{ij}$  devant les termes linéaires. Le système d'équations à résoudre est maintenant linéaire et consiste en :

$$\begin{cases} \delta J_2 = J_2^m - J_2^{ref} \\ \delta J_3 = J_3^m - J_3^{ref} \end{cases} \quad (3.19)$$

que l'on peut résoudre avec les techniques de régression classiques.

Encore une fois, ce système d'équations nécessite de mesurer toutes les composantes du tenseur gradient de gravité. Afin de traiter le cas où une ou plusieurs composantes hors-diagonale ne sont pas déterminées, Baur *et.al.* [101] et Yu *et.al.* [102] proposent une méthode itérative de synthèse des gradients non observés. En effet dans le cas des mesures de GOCE, les termes  $V_{xy}$  et  $V_{yz}$  ont une précision beaucoup plus faible que les autres composantes du

### 3.3. Compléments : utilisation des invariants par rotation du GGT

---

tenseur estimé, et sont de fait considérés comme non-observés. Cependant et du fait de l'orientation et de la configuration du satellite GOCE, ils notent que les composantes hors-diagonale sont largement inférieures, par trois ordres de grandeur, aux termes diagonaux. De ce fait, leurs contributions à la valeur des invariants peut être négligées. Ainsi, on peut dans une première itération calculer les invariants  $J_2^m$  et  $J_3^m$  en ne considérant que la contribution des termes diagonaux et résoudre le système 3.19. Cette première solution donne un premier modèle analytique du champ à partir duquel les gradients manquant sont synthétisés, permettant un calcul actualisé des invariants et la résolution du système 3.19. Cette procédure est ainsi répétée jusqu'à atteindre un seuil de convergence fixé.

Si l'application de cette méthode à des données de type GOCE donne des résultats concluant [101], il n'est pas sûr que se soit le cas pour des relevés aéroportés. On peut noter tout d'abord que la méthode de linéarisation proposée est basée sur la méthode des perturbations. Ceci implique que les perturbations de gradient de gravité doivent être négligeables devant le champ normal. Cette hypothèse est valable à l'altitude de GOCE mais ne l'est pas forcément à très faible altitude où la perturbation sur les gradients de gravité peut être localement du même ordre de grandeur que les gradients de gravité du champ normal. Enfin, avoir l'essentiel de l'énergie du signal gradiométrique contenu dans les termes diagonaux du tenseur est également une hypothèse valable pour GOCE du fait de l'orientation de son repère de mesure (son axe Z est approximativement radial, i.e. pointant vers le centre de la Terre) mais ce ne sera *a priori* pas forcément le cas lors d'un relevé aéroporté avec GREMLIT.



## Chapitre 3. Caractérisation de l'erreur et traitement des mesures GREMLIT à partir de simulations numériques

---

### Bilan du chapitre 3

Dans ce chapitre nous avons procédé grâce à une simulation numérique à une estimation des gradients de gravité horizontaux tels qu'ils seraient déduits de mesures aéroportées réalisées avec GREMLIT. Les mesures simulées sont les gradients d'accélération horizontaux, les vitesses angulaires et l'orientation du repère de mesure. A partir d'une simulation dans le Golfe du Lion, incorporant des données réelles de dynamique de vols, nous avons montré que :

1. maintenir une erreur sur les gradients de gravité de l'ordre de l'Eötvös tout en utilisant des gyromètres commerciaux, dont la précision n'est pas équivalente à celle du gradiomètre, est possible moyennant un étalonnage *a posteriori* de leur biais sur les mesures gradiométriques.
2. l'orientation du repère de mesure par rapport au repère géographique peut être déterminée simplement et avec une précision suffisante pour n'induire qu'une erreur de l'ordre de 1E
3. pour des conditions de vols normales, la rotation du GGT du repère de mesure vers le repère géographique peut être réalisée en le complétant avec un modèle de champ normal. L'erreur introduite par cette approximation reste négligeable tant que l'axe z de la plateforme asservie ne dévie que de quelques degrés de la verticale, ce qui sera le cas pour des vols peu turbulents, comme dans notre simulation.

## Conclusion générale

Avec l'avènement d'instruments de navigation par satellite (GNSS) tel que le GPS, la gravimétrie aéroportée a pu prendre son essor au point de devenir aujourd'hui l'un des outils de l'investigation géophysique, que ce soit pour la prospection de ressources minières et fossiles, ou bien l'étude de la Terre. Si les moyens GNSS ont permis de systématiser la gravimétrie aéroportée, ils en constituent aussi l'élément limitant la précision. Cette limitation amène à chercher d'autres moyens pour mesurer les variations de plus en plus faibles et courtes du champ de gravité, tout en conservant l'efficacité et la rapidité que permet l'aéroporté. La mesure des gradients de gravité, qui ne nécessite que des instruments inertiels (accéléromètres et gyromètres), permet de s'affranchir des limites de précision du GPS tout en augmentant la sensibilité aux courtes longueurs d'onde du champ. C'est dans cette progression que s'inscrit le développement à l'Onera d'un nouveau concept de gradiomètre d'accélération planaire, composant central du gradiomètre de gravité GREMLIT. Cependant, les défis techniques sont loin d'être simples, étant donnée la faiblesse du signal à détecter et l'environnement fortement bruité que constitue l'avion. Le travail présenté dans cette thèse s'attache donc à les analyser dans le cas spécifique de GREMLIT et tente d'y apporter des éléments de réponse. Les deux axes majeurs qui articulent cette thèse correspondent aux deux questions suivantes : Comment intégrer un instrument inertiel aussi sensible que GREMLIT dans un environnement aussi bruité que celui d'un avion ? En supposant qu'une telle intégration soit possible, quelle précision peut-on espérer obtenir sur les gradients de gravité ainsi mesurés ?

Mesurer des variations de gravité de l'ordre de l'Eötvös nécessite au préalable de travailler dans un champ d'accélération (horizontal) suffisamment faible. Dans le cas du gradiomètre d'accélération de GREMLIT la plage de mesure est  $\pm 10^{-4} m.s^{-2}$ , ce qui est largement inférieur à la gamme d'accélération ressentie dans un avion. La solution théorique consistant à placer le gradiomètre planaire sur une plateforme à double cardan a été validée par simulation numérique sur des données de vol réelles. Les résultats de la simulation et une analyse statistique montrent que cette solution permet de maintenir l'accélération horizontale ressentie par chaque accéléromètre dans la limite  $\pm 10^{-4} m.s^{-2}$  pendant 95% du temps du relevé à condition de pouvoir garantir un bruit de mode commun infé-

### Chapitre 3. Caractérisation de l'erreur et traitement des mesures GREMLIT à partir de simulations numériques

---

rieur à  $4,1 \times 10^{-5} m.s^{-2}$ . Cela équivaut typiquement à orienter la plateforme en temps réel avec une précision meilleure que  $2,35 \times 10^{-4}$  degrés. Cette condition peut être considérée comme la spécification essentielle en termes de performance pour l'élaboration de la loi de commande de l'asservissement et le choix des actionneurs. Ces deux tâches n'ont pas été abordées dans cette thèse mais constituent un important travail de développement pour la suite du projet. On peut toutefois noter que de telles performances ont déjà été atteintes sur un pendule contrôlé dans les conditions de laboratoire. Par ailleurs, un prototype de gradiomètre composé d'une paire d'accéléromètres est en cours de réalisation. Ce prototype permettra notamment de valider les résultats sur le niveau de bruit présent sur les mesures de gradients d'accélération ainsi que les performances du système {plateforme contrôlée + gradiomètre}.

Outre ces aspects d'intégration technique, le second axe de travail mentionné précédemment est primordial pour justifier la poursuite du projet GREMLIT. Avec le gradiomètre GREMLIT, c'est une précision de l'ordre de l'Eötvös qui est accessible sur les gradients horizontaux d'accélération. Pour évaluer avec quelle précision les gradients de gravité pourraient être extraits des mesures gradiométriques et gyrométriques, la stratégie adoptée a consisté à simuler de la manière la plus réaliste possible des mesures aéroportées réalisées avec GREMLIT. Il ressort de cette étude qu'il est possible de limiter l'erreur sur les gradients de gravité horizontaux dans le repère de mesure à environ 2E, et à 2E dans le repère géographique local après un filtrage spatial. Avec le post-traitement des mesures proposé dans ce travail, on peut conclure que s'il est nécessaire d'avoir un gradiomètre d'accélération performant avec une erreur inférieure à 1E, qui sera *a priori* un instrument coûteux, il n'est pas nécessaire d'avoir des gyromètres dont la précision intrinsèque permet directement des corrections de l'ordre de l'Eötvös. On montre en effet que par une procédure d'étalonnage des biais des gyromètres sur les mesures du gradiomètre, on peut déterminer ces biais avec une précision suffisante pour une correction de l'ordre de l'Eötvös. La spécification sur les biais peut donc être relâchée et des gyromètres moins onéreux peuvent être utilisés. Ce résultat doit toutefois être nuancé car soumis à l'hypothèse d'un biais constant sur plus d'une trentaine d'heures de vol. Cela suppose donc une dérive temporelle du biais suffisamment faible pour être négligeable, ce qui nécessite des gyromètres encore très performants. Afin de relâcher également la spécification sur la dérive des biais des gyromètres, une procédure d'estimation de ces derniers doit être établie. Plusieurs solutions sont possibles, comme par exemple considérer le biais constant sur des intervalles de temps plus petits, ce qui permettrait d'utiliser la procédure d'étalonnage par moindres carrés proposée dans ce mémoire. A ce titre, il serait intéressant de bien quantifier l'influence sur la précision de l'estimation de la taille des intervalles sur lesquels serait fait l'étalonnage. En outre, la méthode FGLS ou d'autres méthodes d'estimation itératives doivent être plus particulièrement étudiées afin de maintenir une erreur d'estimation de l'ordre de  $3 \times 10^{-8}$  rad/s malgré un nombre de points plus petit disponible pour la régression. D'autre part, l'inconvénient de

### 3.3. Compléments : utilisation des invariants par rotation du GGT

---

ne mesurer qu'une partie du tenseur gradient de gravité dans le repère de mesure, rendant mathématiquement impossible la projection des gradients mesurés dans un autre repère, a pu être contourné par l'utilisation du champ normal en introduisant une erreur limitée de l'ordre de 1E. Que ce soit pour l'intégration de l'instrument dans l'environnement aéroporté ou bien la précision des estimations des gradients de gravité, le niveau de turbulence auquel est soumis l'avion (accélération et rotation) est un paramètre primordial. Plus il y aura de turbulence, plus longtemps l'instrument sera saturé et plus grande sera l'erreur moyenne sur les gradients de gravité, pour une résolution donnée. Les résultats énoncés jusqu'ici ont été obtenus avec des données de dynamique de vol d'un relevé réalisé à 300m d'altitude environ. Il pourrait être intéressant de réaliser des études similaires pour d'autres types de conditions de vol : altitude de quelques milliers de mètre, vitesses de vol supérieures ; voire pour d'autres porteurs : hélicoptère, ballon dirigeable ou encore drone.

Au-delà de l'amélioration du rapport signal à bruit des gradients de gravité, une étape importante dans le traitement de données gravimétriques aéroportées concerne le prolongement vers le bas des gradients estimés. Ce traitement est également une source d'erreur qu'il serait intéressant de quantifier. Si pour des applications comme la prospection et pour des faibles altitudes de vol (typiquement inférieures à 500m) ce traitement n'est pas indispensable, il peut l'être dans l'optique de déterminer le géoïde, où certaines méthodes de calcul requièrent que les données soient rapportées au niveau de l'ellipsoïde de référence. Dans ce cas, il serait intéressant de voir comment les méthodes analytiques développées pour le prolongement des anomalies de gravité pourraient être étendues aux gradients de gravité. Il peut aussi être pertinent d'utiliser les propriétés géométriques du tenseur gradient afin de réaliser ce prolongement vers le bas non pas sur les gradients mais sur une autre observable du champ de pesanteur qui est la déviation de la verticale.

Le calcul par intégration de la déviation de la verticale à partir du GGT a été ébauché dans l'annexe IV et met à profit l'ensemble des gradients de gravité. En supposant que ce calcul soit fait au niveau des points de mesures à l'altitude de l'avion, les déviations de la verticale peuvent ensuite être prolongées géométriquement vers le bas selon les méthodes développées en astrogéodésie. De la sorte, et avec un plan de vol adéquate, on pourrait déterminer sur la région couverte par le relevé aéroporté la pente du géoïde qui est avec la hauteur de surface de mer l'une des deux grandeurs nécessaires à la détermination des courants à l'équilibre géostrophique. A ce stade il sera crucial d'étudier comment combiner au mieux les mesures gradiométriques aéroportées avec les mesures au sol, en mer et satellitaires, afin d'obtenir la meilleure précision possible sur l'ensemble du spectre des longueurs d'onde. L'accès à une plus grande résolution spatiale de la déviation de la verticale permettra de tirer pleinement profit des nouvelles avancées en altimétrie spatiale, notamment de la future mission SWOT qui apportera une couverture accrue et une résolution sans précédent de la hauteur de surface de mer, notamment près des côtes.

### Chapitre 3. Caractérisation de l'erreur et traitement des mesures GREMLIT à partir de simulations numériques

---

On sait en effet que la résolution et la précision sur le géoïde sont la principale limitation de la détermination des courants à l'équilibre géostrophique. On peut donc envisager que la combinaison de ces deux grandeurs fournira quantité d'information sur la dynamique océanique côtière (sub-)mésoscale, jusqu'à présent très difficilement observable. Il reste cependant à optimiser les méthodes d'intégration et de calcul de la déviation de la verticale et à quantifier la précision atteignable sur ces derniers et sur la hauteur du géoïde pour les applications géodésiques.

Cette démarche basée sur la détermination de la déviation de la verticale nécessite théoriquement de connaître l'ensemble du tenseur. Cette remarque soulève la possibilité de réaliser un gradiomètre permettant d'estimer l'ensemble du GGT. Cela est théoriquement possible en superposant verticalement deux gradiomètres d'accélération planaires. En doublant ainsi le dispositif, on peut estimer les composantes  $V_{xz}$  et  $V_{yz}$ ,  $V_{zz}$  étant toujours calculé par la propriété de trace nulle. On gagne également en précision sur les gradients horizontaux puisqu'ils sont calculés en moyennant deux fois plus de mesures. Par ailleurs, le problème de la rotation du GGT dans le repère géographique ne se poserait plus. Un gradiomètre à deux étages constitue donc une option technologique intéressante et devrait également faire l'objet de travaux futurs.

Si la gradiométrie aéroportée n'a pas encore atteint le niveau de maturité de la gravimétrie aéroportée, tant d'un point de vue technique que méthodologique, elle ouvre comme on l'a vu des perspectives prometteuses. Outre la meilleure sensibilité aux courtes longueurs d'onde du champ que l'on pourra atteindre et la directionnalité des gradients qui permet de mieux contraindre la géométrie des masses, un autre paramètre intéressant reste à caractériser : la capacité de la gradiométrie aéroportée à déterminer les variations temporelles du champ de gravité et donc de la distribution des masses. On peut imaginer en effet que dans un futur proche l'utilisation de drones rendra possible et facilitera les relevés gradiométriques réguliers sur des zones d'intérêts. La mission GRACE a montré le fort potentiel de la gravimétrie en hydrologie pour le suivi des stocks d'eau dans les bassins hydrologiques et en glaciologie pour le suivi des variations de masse des calottes polaires. Mais la résolution spatiale ne permet pas d'étudier des structures inférieures à 400km sans compromettre la résolution temporelle. La gradiométrie aéroportée pourrait donc également être envisagée comme outil complémentaire des missions spatiales afin d'augmenter la résolution spatiale dans le cadre du suivi du transport de masse.

# A Annexe I

## A.1 Les champs de gravité et de pesanteur terrestre

Dans cette annexe, les principales définitions utiles à l'étude du champ de gravité sont rappelées. Les propriétés fondamentales du champ sont également exposées sans toutefois être démontrées ou justifiées. Ces rappels permettent de faire le liens entre les différentes propriétés du champ de gravité et les quantités physiques liées au champ qui sont effectivement observables et utilisées dans ce mémoire. C'est de ces quantités que l'on tirera l'information sur le champ de gravité. Cette annexe est très largement inspirée des ouvrages *physical geodesy* [4] et *Geodesy* [11].

### A.1.1 Champ de gravité : définitions et premières propriétés

La loi de gravitation universelle d'Isaac Newton permet de définir la force massique gravitationnelle, encore appelée gravité, créée par un point matériel A de masse  $m_A$ , en tout point M de l'espace différent du point A. Ce champ, noté  $\vec{a}^g$ , est homogène à une accélération et est donné par l'expression suivante :

$$\vec{a}^g = -\mathcal{G} \frac{m_A}{\|AM\|^3} \vec{AM} \quad (\text{A.1})$$

où  $\mathcal{G}$  est la constante universelle de gravitation. Le NIST (*National Institute of Standards and Technology*) recommande depuis 2010 d'utiliser  $\mathcal{G} = (6,67384 \pm 0,0008) \cdot 10^{-11} m^3 \cdot kg^{-1} s^{-2}$  [103]. Il est intéressant de noter qu'avec une incertitude proche de  $1,2 \cdot 10^{-4}$ , c'est une des constantes fondamentales de la physique les moins bien connues. L'intensité du champ de gravité est généralement exprimée en gal ou mGal, avec  $1 mGal = 10^{-5} m \cdot s^{-2}$ . On montre que ce champ de gravité dérive d'un potentiel, dit potentiel gravitationnel et noté  $V$ , de

sorte que l'on peut écrire :

$$\vec{a}^g = \vec{\nabla} V \quad (\text{A.2})$$

Il s'agit ici de la convention utilisée en géodésie. En géophysique, on définit le champ de gravité comme l'opposé du gradient du potentiel. Le potentiel est homogène à une énergie par unité de masse. Ces définitions peuvent être généralisées à une distribution continue de points matériels. Notamment, le potentiel de gravité  $V$  en un point  $M$  produit par un corps de volume  $v$  est donné par :

$$V = \mathcal{G} \iiint_{P \in v} \frac{\rho \cdot dv}{\|\vec{PM}\|} \quad (\text{A.3})$$

où  $dv$  est un élément infinitésimal de volume et  $\rho$  est la masse volumique. Le potentiel de gravité satisfait à l'équation de Poisson :

$$\Delta V = -4\pi\mathcal{G}\rho \quad (\text{A.4})$$

où  $\Delta$  représente l'opérateur laplacien. Cette équation différentielle peut être considérée comme une équation constitutive du champ car elle relie localement le champ à ses sources. Connaissant les conditions aux limites ainsi que la distribution de masse, la résolution de l'équation de Poisson permet de déterminer le champ de gravité global. En dehors des sources, l'équation de Poisson se simplifie et le potentiel vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0 \quad (\text{A.5})$$

Cette équation est importante car on ne s'intéresse et on n'a accès généralement qu'au champ en dehors des masses. Dans les régions où cette relation est vérifiée, le potentiel est dit harmonique. La propriété d'harmonicité garantit que le champ est analytique et peut donc être développé en série de Taylor jusqu'à n'importe quel ordre.

### A.1.2 Développement en harmoniques sphériques du champ

Dans le cas de la représentation mathématique du champ de gravité d'un corps tel que la Terre, les coordonnées sphériques sont le paramétrage le plus naturel. On introduit donc les coordonnées  $(\lambda, \phi, r)$  correspondant respectivement à la longitude, la latitude et au rayon. La propriété d'harmonicité exprimée dans un repère sphérique conduit naturellement à l'introduction du développement en harmoniques sphériques solides du champ de gravité. De manière analogue aux séries de Fourier, le développement en harmoniques sphériques est une décomposition sur une base orthogonale (en dimension infinie) de fonctions elles-mêmes harmoniques. On obtient ainsi pour le potentiel de gravité de la Terre la formule

suivante :

$$V(\lambda, \phi, r) = \frac{\mathcal{G}M}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} [A_{nm} \bar{\mathcal{C}}_{nm}(\lambda, \phi) + B_{nm} \bar{\mathcal{S}}_{nm}(\lambda, \phi)] \quad (\text{A.6})$$

où  $\mathcal{G}M$  est le produit de la constante universelle de gravitation par la masse de la Terre,  $A_{nm}$  et  $B_{nm}$  sont des scalaires dits coefficients de Stokes et  $R$  est le rayon de la sphère de référence, qui n'a qu'un sens mathématique ici. Les fonctions  $\bar{\mathcal{C}}_{nm}$  et  $\bar{\mathcal{S}}_{nm}$  sont définies de la manière suivante :

$$\bar{\mathcal{C}}_{nm}(\lambda, \phi) = \bar{P}_{nm}(\sin \phi) \cdot \cos m\lambda \quad \bar{\mathcal{S}}_{nm}(\lambda, \phi) = \bar{P}_{nm}(\sin \phi) \cdot \sin m\lambda \quad (\text{A.7})$$

où  $\bar{P}_{nm}$  est le polynôme de Legendre normalisé de degré  $n$  et d'ordre  $m$ . L'ensemble des fonctions  $\bar{\mathcal{C}}_{nm}$  et  $\bar{\mathcal{S}}_{nm}$  constitue une base orthonormale des fonctions harmoniques de la sphère unité vers  $\mathbb{R}$ . La fonction  $\bar{\mathcal{C}}_{10,4} = \bar{P}_{10,4}(\sin \phi) \cdot \cos 4\lambda$  est par exemple illustrée sur la Figure A.1.

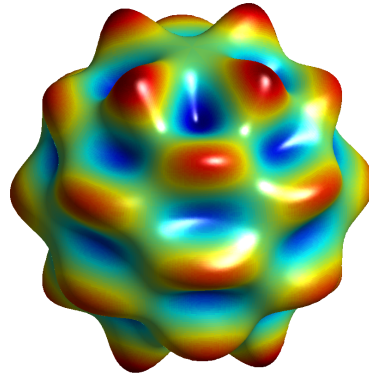


FIGURE A.1 – Illustration de la fonction  $\bar{\mathcal{C}}_{10,4} = \bar{P}_{10,4}(\sin \phi) \cdot \cos 4\lambda$  de degrés 10 et ordre 4. La sphère est divisée en compartiments successivement positifs (rouges) et négatifs (bleues). On parle d'harmoniques tésserales, ce qui correspond au cas où le degré est supérieur ou égal à 2 et l'ordre est différent de 0 et du degré.

L'équation A.6 introduit une somme infinie dans la décomposition du champ de gravité en harmoniques sphériques normalisées. Dans la réalité, on est toujours limité à un certain degré, voire ordre dans la décomposition, et le modèle mathématique du champ est tronqué. On définit à partir de cette formulation analytique du champ de gravité la résolution  $\epsilon$  à la surface de la Terre comme étant la demi-longueur d'onde associée au degré maximal du



développement en harmoniques sphériques :

$$\epsilon = \frac{20000}{n_{max}} km \quad (\text{A.8})$$

On peut interpréter la résolution comme la longueur caractéristique de la plus petite ondulation observable du champ. Par ailleurs, on définit **la connaissance haute-résolution du champ de gravité comme étant la connaissance du champ pour les demi-longueurs d'ondes inférieures à 100km.**

Enfin, on appelle spectre d'un champ  $V$  décomposé en harmoniques sphériques normalisées (cf. équation A.6) la fonction :

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.9})$$

$$n \mapsto \sigma_n = \sqrt{\sum_{m=0}^n A_{nm}^2 + B_{nm}^2} \quad (\text{A.10})$$

L'utilisation du spectre du signal gravitationnel terrestre permet de visualiser comment se répartit l'énergie du signal gravitationnel en fonction du degré et donc de la longueur d'onde.

### A.1.3 Le champ de pesanteur de la Terre

#### A.1.3.1 Définitions et propriétés

Dans le cas de la Terre, un corps au repos à sa surface sera soumis à deux forces : l'attraction gravitationnelle de la Terre et la pseudo-force centrifuge due à la rotation de la Terre par rapport à un référentiel inertiel. En considérant le référentiel géocentrique comme inertiel (cf. Figure 1.11), la pseudo-force centrifuge  $\vec{F}^c(A)$  subie par le point matériel A de masse  $m_A$  a alors pour expression :

$$\vec{F}^c(A) = m_A \omega^2 \vec{d}(A) \quad (\text{A.11})$$

où  $\omega$  est la vitesse angulaire de la Terre par rapport au repère géocentrique et  $\vec{d}(A) = \overrightarrow{HA}$  est le vecteur distance à l'axe de rotation de la Terre avec H le projeté orthogonal du point A sur l'axe des moyen des pôles. Comme pour la force de gravité, on définit le champ d'accélération centrifuge  $\vec{a}^{centri}$  comme étant la force centrifuge par unité de masse :

$$\vec{a}^{centri} = \omega^2 \vec{d} \quad (\text{A.12})$$

## A.1. Les champs de gravité et de pesanteur terrestre

Avec  $\vec{d}$  le vecteur distance à l'axe de rotation de la Terre. Le champ d'accélération centrifuge dérive également d'un potentiel dit potentiel centrifuge, noté  $W$ , avec :

$$\vec{a}^{centri} = \vec{\nabla} W = \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} \omega^2 d^2 \right) \quad (\text{A.13})$$

La somme du champ de gravité et du champ de pseudo-force centrifuge forme le champ de pesanteur noté  $\vec{g}$  qui par linéarité découle aussi d'un potentiel dit potentiel de pesanteur, noté  $T$  avec  $T=V+W$  :

$$\vec{g} = \vec{\nabla} T = \vec{\nabla} (V + W) \quad (\text{A.14})$$

Le laplacien de ce potentiel donne dans le cas général :

$$\Delta T = -4\pi\mathcal{G}\rho + \omega^2 \quad (\text{A.15})$$

On voit donc que même en dehors des masses, et contrairement au potentiel de gravité, le potentiel de pesanteur n'est pas harmonique et n'est donc pas développable en harmoniques sphériques. Enfin on définit de manière analogue au GGT, le tenseur gradient de pesanteur que l'on note  $\underline{\underline{T}}$ .

### A.1.3.2 Surfaces équipotentielles et lignes de champ

On introduit ici deux notions liées au champ de pesanteur : les surfaces équipotentielles et les lignes de champ de pesanteur. Les surfaces équipotentielles sont les surfaces de potentiel  $T$  constant. Ces surfaces ont la propriété d'être en tout point orthogonales au vecteur pesanteur  $\vec{g} = \vec{\nabla} T$ . Les lignes de champ de pesanteur sont les lignes en tout point colinéaires au vecteur pesanteur  $\vec{g}$  (cf. Figure A.2). Elles peuvent de manière équivalente être décrites comme les lignes en tout point orthogonales aux surfaces équipotentielles. La tangente à une ligne de champ de pesanteur en un point donne la direction de la verticale locale, soit la direction donnée par le fil à plomb. On peut dès lors définir en tout point  $O$  dans le champ de pesanteur un système de coordonnées locales  $(xyz)$  dans lequel l'axe  $z$  est selon la direction de la verticale, de sens opposé à celui de  $\vec{g}$ , et les axes orthogonaux  $x$  et  $y$  sont tangents en  $O$  à l'équipotentielle, comme indiqué sur la Figure A.2. Dans ce repère, on peut en particulier écrire les égalités suivantes :

$$g = \|\vec{g}\| = -\frac{\partial T}{\partial z} = -T_z \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -T_{zz} \quad (\text{A.17})$$

On définit une surface de référence : le géoïde, comme la surface équipotentielle de pesanteur  $T = T_0$  qui se confondrait avec la surface des océans, si ceux-ci étaient parfaitement au repos (absence de courants, de vents, de gradient de température etc.). On montre en effet en hydrostatique qu'au repos, la surface d'eau est confondue avec une équipotentielle de pesanteur. C'est cette équipotentielle particulière que l'on appelle encore *Figure de la Terre*. Cette surface se déduit de la connaissance du champ de gravité terrestre, et est considérée par convention comme la référence de l'altitude nulle.

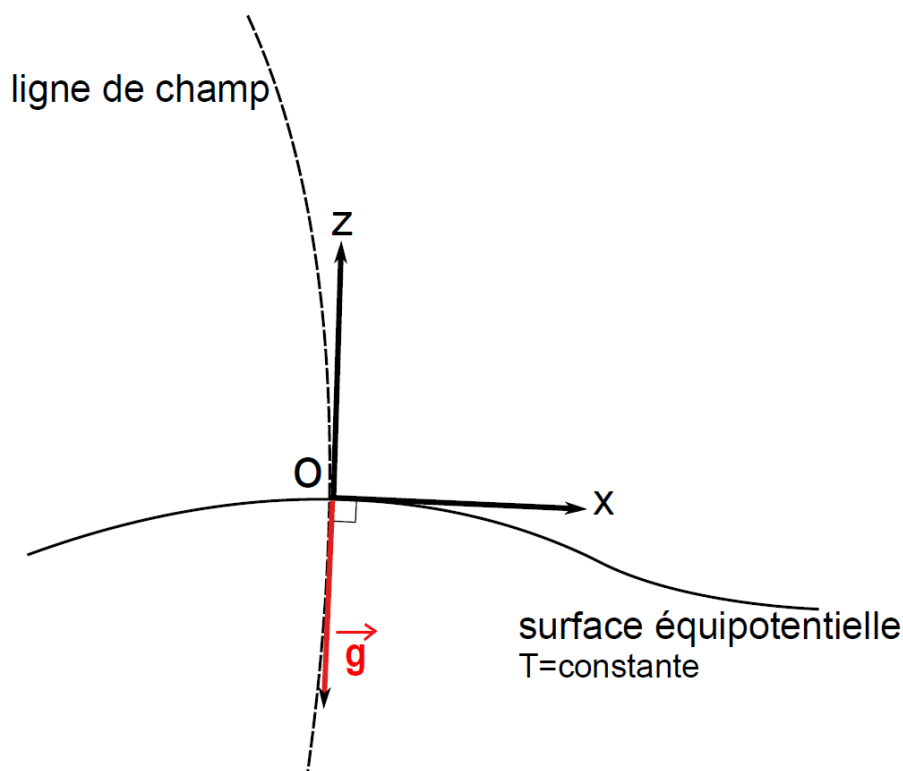


FIGURE A.2 – Illustration en 2 dimensions du repère local : l'axe z est perpendiculaire localement à la surface équipotentielle et le plan (x,y) lui est tangent.

#### A.1.4 Ellipsoïde de référence, anomalie de gravité et géoïde

La Figure de la Terre peut être approximée au second ordre par un ellipsoïde de révolution. L'ellipsoïde de révolution est une figure d'équilibre des corps fluides homogènes auto-gravitants et en rotation [12][104]. Les inhomogénéités de densité à la surface et à l'intérieur de la Terre expliquent les écarts entre le géoïde et l'ellipsoïde et plus généralement entre le champ de pesanteur terrestre  $g$  et le champ de pesanteur de l'ellipsoïde de révolution noté  $\gamma$ , encore appelé champ de pesanteur normal. On notera par ailleurs  $U$  le potentiel dont dérive ce champ normal. Ce dernier est totalement défini par la donnée de la surface équipotentielle  $U = T_0$ , représentée par l'ellipsoïde de révolution, la constante  $\mathcal{G}M$  de la

## A.1. Les champs de gravité et de pesanteur terrestre

terre où  $M$  est la masse totale de la Terre et sa vitesse de rotation  $\omega$ . Ces paramètres sont définis exactement pour des systèmes de référence géodésiques tels que le GRS1980 ou le WGS84 qui sont le plus couramment utilisés. Ainsi la surface de l'ellipsoïde est le pendant "normal" de la surface du géoïde et de ce fait la surface de référence à laquelle la hauteur du géoïde est rapportée. cette différence entre les deux varie entre -106m et +86m. Pour faciliter le traitement et l'utilisation des mesures gravimétriques et géodésiques on utilise donc un champ normal comme modèle de référence par rapport auquel des déviations sont observées dans la réalité. Ces déviations sont le reflet de l'écart à cette figure idéale et sont suffisamment petites pour être traitées linéairement (i.e. par des développements au premier ordre). Comme on cherche à comparer le géoïde à l'ellipsoïde de référence, on introduit le vecteur anomalie de pesanteur  $\Delta\vec{g}$  en suivant les notations de la Figure A.3 :

$$\Delta\vec{g} = \vec{g}(P) - \vec{\gamma}(Q) \quad (\text{A.18})$$

On définit de même l'anomalie de pesanteur comme la différence des amplitudes de ces vecteurs :

$$\Delta g = g(P) - \gamma(Q) \quad (\text{A.19})$$

Enfin on appelle **dévi**ation de la verticale la différence de direction des deux vecteurs. Cette grandeur est décrite plus longuement dans l'annexe IV.

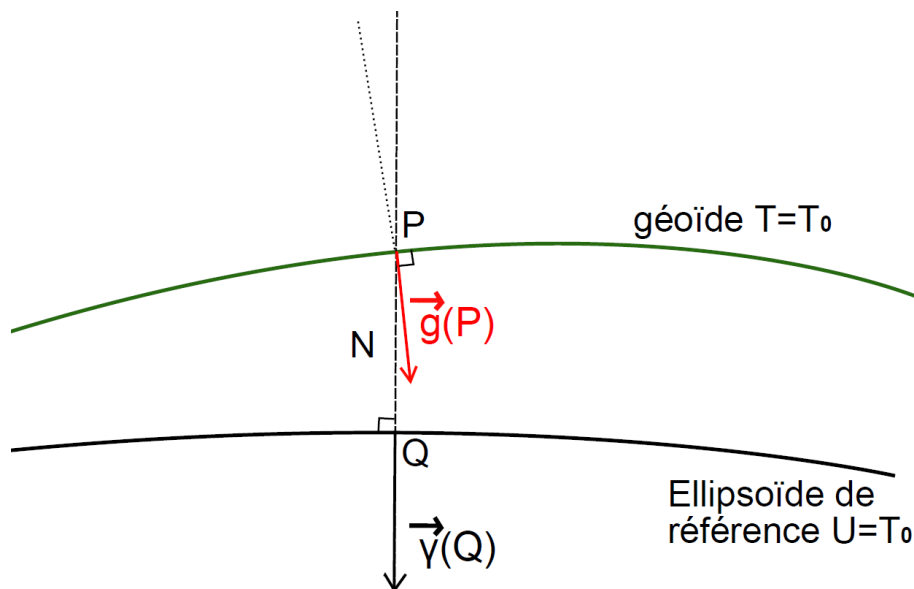


FIGURE A.3 – Représentation schématique du géoïde et de l'ellipsoïde de référence pour le calcul du vecteur anomalie de pesanteur. La hauteur du géoïde est définie par sa hauteur ellipsoïdale notée  $N$

Jusqu'ici, les anomalies sont définies comme la différence d'une quantité considérée en un point P sur le géoïde et cette même quantité pour le champ normal sur le projeté orthogonal Q de P sur l'ellipsoïde de référence. Cette projection permet d'introduire la hauteur ellipsoïdale  $N=QP$  qui est la hauteur du géoïde. Introduisons le potentiel perturbateur défini par  $D=T-U$ . On démontre alors par un développement au premier ordre la formule de Bruns donnant la hauteur du géoïde :

$$N = \frac{D}{\gamma} \quad (\text{A.20})$$

De plus en plus, on utilise la notion de vecteur perturbation de pesanteur (*gravity disturbance* en anglais), noté  $\delta\vec{g}$  qui est défini en un point donné par la différence entre le champ de pesanteur et le champ normal :

$$\delta\vec{g} = \vec{g}(P) - \vec{\gamma}(P) \quad (\text{A.21})$$

$$= \vec{\nabla}T - \vec{\nabla}U \quad (\text{A.22})$$

$$= \vec{\nabla}D \quad (\text{A.23})$$

On notera que comme l'accélération centrifuge est la même dans  $\vec{g}(P)$  et  $\vec{\gamma}(P)$ ,  $\delta\vec{g}$  est la différence vectorielle entre l'accélération gravitationnelle réelle et l'accélération gravitationnelle du champ normal. Par conséquent le champ de perturbation de pesanteur est égale harmonique en dehors des sources. De manière similaire, on définit la perturbation de pesanteur  $\delta g$  :

$$\delta g = g(P) - \gamma(P) \quad (\text{A.24})$$

$$= \|\vec{g}(P)\| - \|\vec{\gamma}(P)\| \quad (\text{A.25})$$

la déviation de la verticale reste la même, qu'elle soit définie à partir de l'anomalie de pesanteur ou bien de la perturbation comme on peut le vérifier à partir du schéma A.3.

## B Annexe II

### B.1 Détermination de l'orientation et de la dynamique de la plateforme contrôlée

On se propose dans cette annexe de décrire le calcul des angles de rotation  $\phi$  et  $\theta$  de la plateforme contrôlée par rapport au repère de l'avion, ainsi que la matrice de rotation et les vecteurs vitesse et accélération angulaire qui en dérivent et qui sont successivement utilisés dans les chapitres II et III. Pour ce calcul on fera l'hypothèse que l'axe z de la plateforme est en permanence orienté parallèlement à la résultante de l'accélération ressentie au centre O du gradiomètre dans le repère de l'avion. Par ailleurs, on suppose que les séries temporelles des trois composantes de ce vecteur accélération sont données par les enregistrements en vol de l'INS (Inertial Navigation System) de l'avion lors du relevé Corse. Cela équivaut à supposer que le repère initial du gradiomètre, noté  $\mathcal{R}_{mo}$ , est celui de l'INS dans l'avion. Un exemple de série temporelle des composantes de l'accélération mesurée dans l'avion est donné à titre illustratif dans la Figure B.1.

Sans perte de généralité, on fera l'hypothèse que  $\mathcal{R}_{mo}$  (donc celui de l'INS) est confondu avec le repère de l'avion  $\mathcal{R}_a$ . Enfin on suppose, toujours sans perte de généralité, qu'à chaque instant les rotations de la plateforme s'effectuent dans l'ordre suivant : rotation d'axe X et d'angle  $\theta$  puis d'axe Y' et d'angle  $\phi$  (voir le schéma de la figure 6 de l'article 1 dans le chapitre 2). La rotation d'axe x et de angle  $\theta$  s'écrit :

$$R_X(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

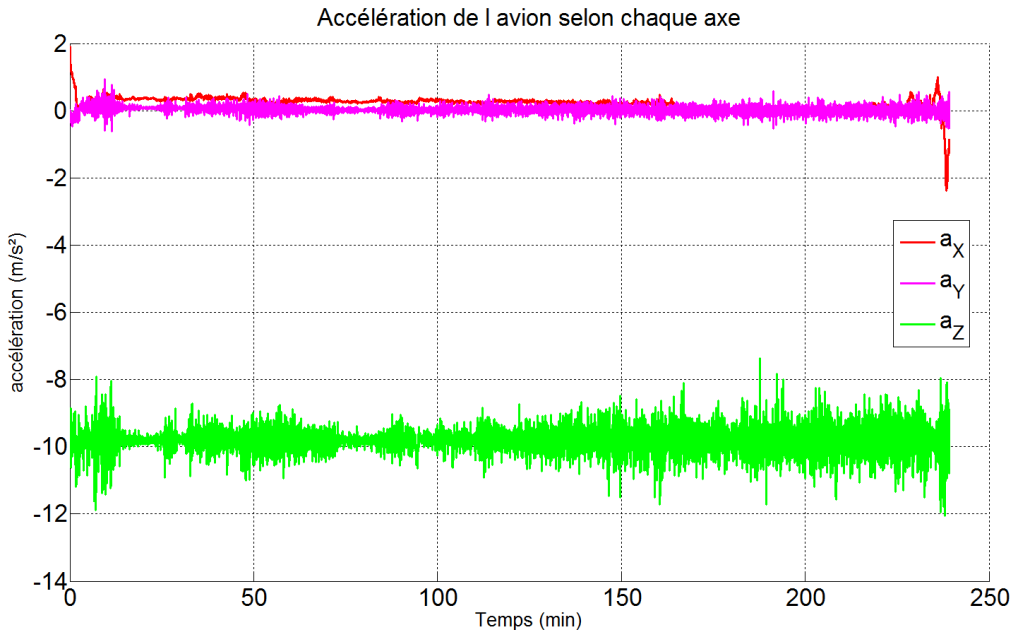


FIGURE B.1 – Exemple de séries temporelles des composantes  $a_x$ ,  $a_y$  et  $a_z$  de l'accélération mesurée par l'INS de l'avion lors d'un vol de la campagne de relevé gravimétrique en Corse.

De même on a pour la rotation d'angle  $\phi$  :

$$R_{Y'}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

De sorte que la combinaison successive des deux rotations donne la matrice de rotation :

$$R(\phi, \theta) = R_X(\theta)R_{Y'}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ -\sin \phi \sin \theta & \cos \theta & \cos \phi \sin \theta \\ -\sin \phi \cos \theta & -\sin \theta & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Dans le repère de mesure initial, le vecteur unitaire vertical dirigé vers le haut  $\vec{u}_z = (001)^t$  devient après la rotation précédemment décrite le vecteur  $\vec{u}_{z'}$  avec :

$$\vec{u}_{z'} = R(\phi, \theta) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

## B.1. Détermination de l'orientation et de la dynamique de la plateforme contrôlée

Notons  $\vec{a}$  le vecteur accélération mesuré par l'INS de l'avion. Soit  $\vec{u}_a$  le vecteur unitaire colinéaire à  $\vec{a}$  :

$$\vec{u}_a = -\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \quad (\text{B.6})$$

Le signe - dans la définition mathématique de  $\vec{u}_a$  permet de s'assurer que celui-ci est bien orienté vers le haut, étant donné que du fait de la pesanteur, l'accélération  $\vec{a}$  est vraisemblablement toujours dirigée vers le bas. La condition d'asservissement parfait de la plateforme contrôlée permet alors d'identifier les vecteurs  $\vec{u}_a$  et  $\vec{u}_{z'}$ . De la sorte, on obtient un système de 3 équations à 2 inconnues. Sa résolution donne les formules suivantes pour les angles  $\phi$  et  $\theta$  :

$$\phi = \arcsin\left(-\frac{a_x}{\|\vec{a}\|}\right) \quad (\text{B.7})$$

$$\theta = \arcsin\left(-\frac{a_y}{\|\vec{a}\| \sqrt{1 - \left(\frac{a_x}{\|\vec{a}\|}\right)^2}}\right) \quad (\text{B.8})$$

Ces deux formules sont appliquées pour chaque point de sorte que l'on peut maintenant calculer la matrice de rotation  $R(\phi, \theta)$  de la plateforme pour chaque instant.

A partir de la série temporelle de ces deux angles, on peut estimer le vecteur vitesse angulaire  $\vec{\Omega}_{m/a}$  du repère de mesure  $\mathcal{R}_m$  par rapport au repère de l'avion  $\mathcal{R}_a$  :

$$\vec{\Omega}_{m/a} = -\dot{\theta}\vec{u}_X + \dot{\phi}\vec{u}_{Y'} \quad (\text{B.9})$$

soit, exprimé dans le repère de mesure initial  $\mathcal{R}_{m0}$  assimilé à  $\mathcal{R}_a$  :

$$\vec{\Omega}_{m/a} = -\dot{\theta}\vec{u}_X + \dot{\phi}R^t(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \\ \cos\theta\dot{\phi} \\ \sin\theta\dot{\phi} \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Le terme  $\dot{\theta}$  (resp.  $\dot{\phi}$ ) est obtenu en construisant pour chaque point de la série temporelle de  $\theta$  un polynôme d'interpolation de Lagrange sur cinq points : le point courant et deux points de part et d'autre. On calcule alors la dérivée de ce polynôme au point considéré. De la même manière, on calcule le vecteur accélération angulaire :

$$\dot{\vec{\Omega}}_{m/a} = \begin{pmatrix} -\ddot{\theta} \\ \cos\theta\ddot{\phi} - \sin\theta\dot{\theta}\dot{\phi} \\ \sin\theta\ddot{\phi} + \cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$



## Annexe B. Annexe II

Comme on a la relation  $\vec{\Omega}_{m/i} = \vec{\Omega}_{m/a} + \vec{\Omega}_{a/i}$ , on peut alors calculer directement  $\vec{\Omega}_{m/i}$  en ajoutant le terme  $\vec{\Omega}_{a/i}$  qui nous est donné par les enregistrements en vols de l'INS de l'avion. Un exemple de série temporelle des composantes de la vitesse angulaire mesurée dans l'avion est donné à titre illustratif dans la Figure B.1.

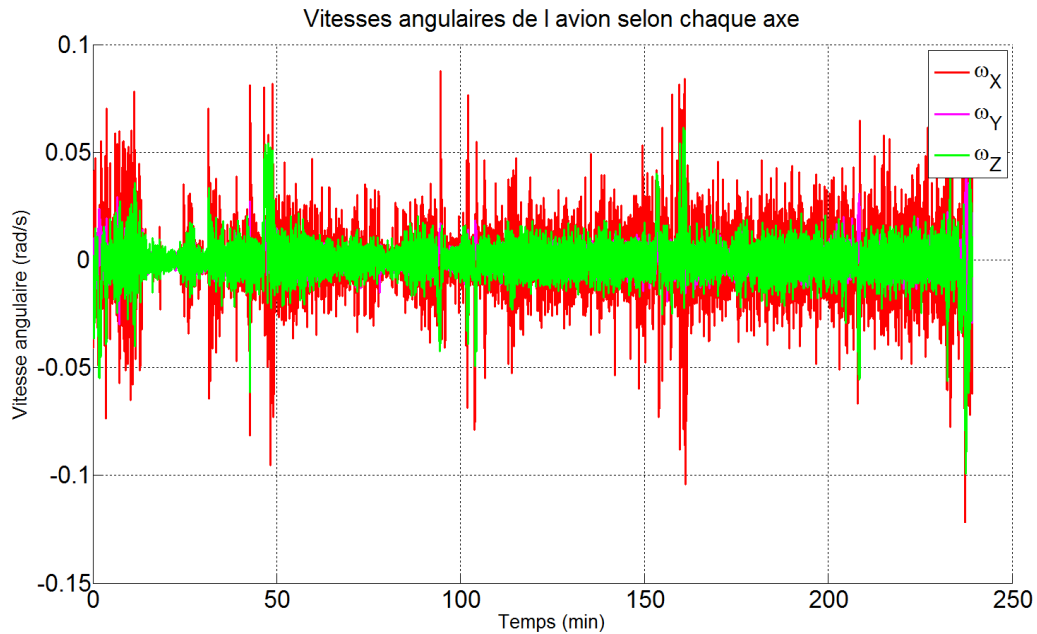


FIGURE B.2 – Exemple de séries temporelles des composantes  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$  et  $\Omega_z$  de la vitesse angulaire mesurée par l'INS de l'avion lors d'un vol de la campagne de relevé gravimétrique en Corse.

## C Annexe III

### C.1 Résolution théorique du champ accessible en aéroporté

On rappelle que la résolution spatiale  $\epsilon$  sur le champ de gravité peut être définie à partir de la connaissance de son développement en harmoniques sphériques jusqu'aux degrés  $N_{max}$  par  $\epsilon = 20000/N_{max}$  km. Estimer la résolution atteignable lors d'un relevé gravimétrique aéroporté va dépendre de plusieurs paramètres. On trouve d'abord les limites mathématiques dues au théorème de l'échantillonnage de Shannon, imposées d'une part par la distance inter-trace du relevé et d'autre part par la fréquence d'échantillonnage spatiale  $f_{spat}$  du signal le long de la trace. Cette dernière dépend de la vitesse  $v$  de l'avion et de la fréquence d'échantillonnage temporelle  $f_t$  selon la relation  $f_{spat} = f_t/v$ . Au-delà des limites mathématiques qui peuvent être gérées par un choix adéquat de ces différents paramètres, c'est la capacité à détecter le signal gravimétrique associé aux courtes longueurs d'onde qui peut devenir le facteur limitant. Ceci est d'autant plus vrai quand l'altitude du relevé augmente. En effet, l'expression du champ sous forme d'harmoniques sphériques montre que les composantes de degrés  $N$  sont d'autant plus atténuées en se propageant vers le haut que  $N$  est grand (voire figures C.1 et C.2). La capacité à détecter les courtes longueurs d'onde va donc dépendre du contenu spectral du champ de gravité local, de l'altitude à laquelle est mesuré le champ et enfin de la précision des mesures. Sur ces trois paramètres, seule l'altitude peut être maîtrisée. Enfin, on peut également noter que la résolution va aussi dépendre de l'observable utilisée pour accéder au champ de gravité. Dans cette étude on se propose de comparer entre la perturbation de gravité  $D_z = \partial_z D$  et celle de gradient de gravité vertical  $D_{zz} = \partial_{zz} D$  (voir l'annexe I section A.1.4 pour plus de détail sur la notion de perturbation).

On se propose ici de déterminer théoriquement la résolution spatiale le long de la trace atteignable dans le cas d'un relevé gravimétrique et gradiométrique aéroporté, et ce en fonction de l'altitude. Afin d'obtenir des conclusions de portée générale et indépendantes du niveau

de bruit qui pourrait contaminer ces observables, on applique la méthode développée par Hwang *et.al.* [2]. L'idée sous-jacente à cette méthode est de fournir la résolution maximale sur le champ qu'il est possible d'atteindre, indépendamment de la capacité à identifier dans les mesures les variations du signal gravitationnel à cette échelle. Cette capacité dépend en effet du rapport signal à bruit des mesures effectuées et des méthodes de traitement utilisées pour pousser la résolution au maximum. La méthode est la suivante : supposons que l'on dispose d'un modèle de potentiel perturbateur  $D$  développé en harmoniques sphériques jusqu'au degré  $J$ . On peut alors écrire pour la composante  $D_z$  :

$$D_z(h, \lambda, \phi, J) = \frac{\mathcal{G}M}{R^2} \sum_{n=2}^J (n+1) \left( \frac{R}{R+h} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n [\Delta A_{nm} \bar{\mathcal{C}}_{nm}(\lambda, \phi) + \Delta B_{nm} \bar{\mathcal{S}}_{nm}(\lambda, \phi)] \quad (C.1)$$

avec  $\mathcal{G}M = 3986005 \times 10^8 m^3 s^{-2}$  le produit de la constante gravitationnelle par la masse de la Terre,  $R=6378137m$  le rayon de la sphère de référence pris égal au rayon équatorial de l'ellipsoïde de référence GRS80,  $h$  la hauteur par rapport à la sphère de référence,  $\lambda$  la longitude,  $\phi$  la latitude géocentrique,  $\Delta A_{nm}$  et  $\Delta B_{nm}$  sont des scalaires dits coefficients de Stokes de degré  $n$  et ordre  $m$ . On définit la fonction  $P_z(h, K)$  qui au modèle de  $D_z$  associe l'intégrale du spectre en degré-variance du degrés 2 au degré  $K > 2$  :

$$\begin{aligned} P_z(h, K) &= \frac{1}{4\pi(R+h)^2} \int_{\phi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\lambda=-0}^{2\pi} \Delta(D_z)^2 (R+h)^2 \cos \phi d\phi d\lambda \quad (C.2) \\ &= \left( \frac{\mathcal{G}M}{R^2} \right)^2 \sum_{n=2}^K \left( \frac{R}{R+h} \right)^{2n+4} (n+1)^2 \sigma_n^2 \\ &= \sum_{n=2}^K p_z^2(n) \end{aligned}$$

avec

$$\sigma_n^2 = \sum_{m=0}^n \Delta A_{nm}^2 + \Delta B_{nm}^2$$

Les propriétés du développement du champ de gravité en harmoniques sphériques ainsi que la notion de spectre sont détaillées dans l'annexe I. Le degré maximal  $K_{max}$  détectable à une altitude  $h$  est défini tel que :

$$\frac{P_z(h, \infty) - P_z(h, K_{max})}{P_z(h, \infty)} = \tau \quad (C.3)$$

## C.1. Résolution théorique du champ accessible en aéroporté

où  $\tau$  est un nombre très petit. Suivant le choix fait par Hwang *et.al.*, nous prenons  $\tau = 10^{-14}$  qui est la limite de précision de l'environnement de calcul double précision fixée par l'*Institute of Electrical and Electronics Engineers* (IEEE). En toute rigueur, il n'est pas possible de calculer la limite de  $P_z(h, n)$  quand  $n$  tend vers l'infini car le champ n'est connu qu'à un degré fini. On fera donc l'approximation  $P_z(h, \infty) = P_z(h, K_{0.1})$  où  $K_{0.1}$  est le degré équivalent à une résolution de 0,1km, soit  $K_{0.1} = 400302$ . Comme on ne dispose pas de modèle de champ de gravité global allant jusqu'à un tel degré, on adopte la méthode suivante pour calculer le spectre de degré-variance :

- pour les degrés compris entre 2 et 1950 on utilise le modèle EIGEN-6C3stat établi en 2014. Ce modèle est synthétisé notamment à partir de données GOCE, GRACE et du modèle EGM2008 [105]. Afin de ne conserver que le signal associé au potentiel perturbateur, on soustrait le champ normal jusqu'au degré 8.
- Pour les degrés supérieurs à 1950 on utilise un modèle analytique, plus précisément le modèle 4 de degré-variance de perturbation de gravité de Tscherning et Rapp (1974) [106] avec pour le degré  $n$  :

$$p_z^2(n) = \left( \frac{a}{a+z} \right)^{2n+4} \frac{A(n-1)}{(n-2)(n+24)} \sigma_0^{n+2}$$

où  $A = 425.28 mGal^2$ , et  $\sigma_0 = 0.999617$ . Ce modèle est ajusté par une constante multiplicative  $C=11,5$  afin de minimiser la discontinuité à la transition au degré 1950 entre les deux spectres. La constante  $C$  est déterminée par une régression par moindres carrés ordinaires du modèle analytique sur les 100 derniers coefficients du spectre de degré-variance de EIGEN-6C3stat.

Le spectre en degré-variance de  $D_z$  en fonction de l'altitude est tracée jusqu'au degré 3000 sur la Figure C.1. De manière analogue, on définit la fonction  $P_{zz}(h, K)$  pour la perturbation du gradient vertical  $D_{zz}$ . Pour cela on a besoin du spectre en degré-variance  $p_{zz}^2$  de ce dernier que l'on peut directement calculer à partir de celui de  $D_z$  de la façon suivante :

$$p_{zz}^2(n) = \frac{(n+2)^2}{(R+h)^2} \cdot p_z^2(n) \tag{C.4}$$

Le spectre en degré-variance de  $D_{zz}$  est donné Figure C.2 pour plusieurs altitudes comprises entre 1 et 10km.

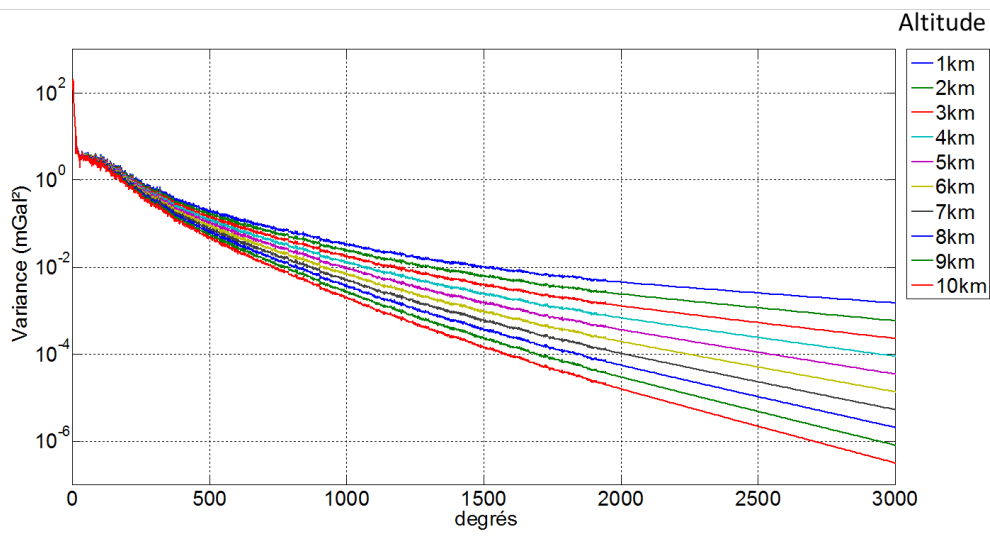


FIGURE C.1 – Spectre de  $D_z$  à différentes altitudes comprises entre 1 à 10 km, en fonction du degré de développement en harmoniques sphériques. La représentation est limitée au degré 3000 afin de mieux observer la partie issue du modèle EIGEN6C3-stat comprise entre 3 et 1950.

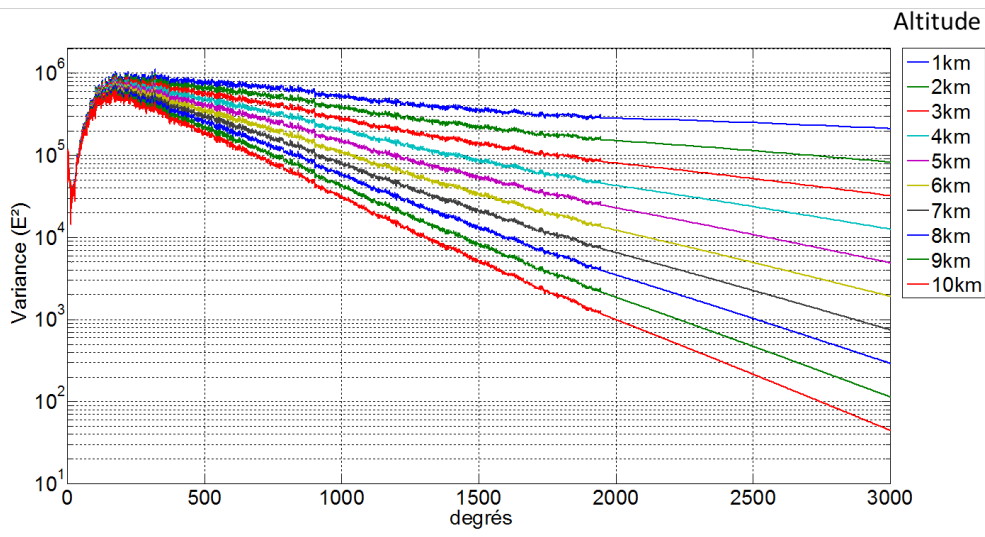


FIGURE C.2 – Spectre de  $D_{zz}$  à différentes altitudes comprises entre 1 à 10km, en fonction du degré de développement en harmoniques sphériques. La représentation est limitée au degré 3000 afin de mieux observer la partie issue du modèle EIGEN6C3-stat pour les degrés entre 3 et 1950.

## D Annexe IV

### D.1 Calcul de la déviation de la verticale à partir des gradients de pesanteur

#### D.1.1 Courbures du champ de pesanteur

Cette section est largement inspirée de *physical geodesy* [4]. Connaissant la pesanteur  $g = \|\vec{g}\|$  et le gradient de pesanteur  $\underline{T}$ , il est possible de calculer simplement les courbures de l'équipotentielle et de la ligne de champ passant en un point O. La courbure d'un arc en un point peut être interprétée comme l'inverse du rayon du cercle osculateur en ce point de l'arc, autrement dit du cercle qui épouse au mieux l'arc en ce point. La courbure d'un arc indique donc la propension d'une courbe à se comporter localement comme un cercle de rayon plus ou moins grand. Afin d'appliquer cette notion au champ de pesanteur, on se place dans le repère orthonormé (O,x,y,z) appelé par la suite repère astronomique et illustré sur la figure D.1. L'axe z est perpendiculaire à l'équipotentielle passant par O et orienté vers le haut. Les axes x et y sont eux tangents à cette même équipotentielle. Ce repère oriente la surface, permettant ainsi de définir la notion de courbure sur celle-ci. On montre que la courbure  $K_x$  en O de la courbe définie par l'intersection du plan (O,x,z) et de l'équipotentielle (voir Figure D.1) a pour expression :

$$K_x = \frac{T_{xx}}{g} \tag{D.1}$$

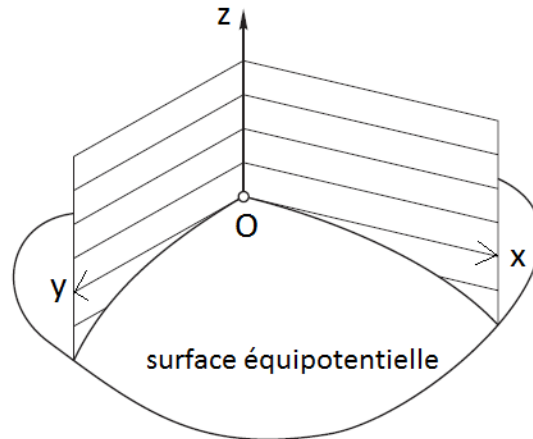


FIGURE D.1 – Les deux directions orthogonales selon lesquelles sont calculées les courbures de l'équipotentielle. Figure inspirée de *Physical Geodesy* [4].

De même pour la courbure  $K_y$  en O de la courbe définie par l'intersection du plan (O,y,z) et de l'équipotentielle :

$$K_y = \frac{T_{yy}}{g} \quad (D.2)$$

On définit la courbure moyenne H par :

$$H = -\frac{1}{2}(K_x + K_y) = -\frac{T_{xx} + T_{yy}}{2g} \quad (D.3)$$

La courbure moyenne est caractéristique de la surface et invariante par rotation du repère autour de l'axe z.

On peut également définir des courbures au point O associées à la ligne de champ. En particulier on peut calculer la courbure  $\kappa_1$  en O de la projection de la ligne de champ sur le plan (O,x,z), comme illustré sur la Figure A.2 :

$$\kappa_1 = \frac{T_{xz}}{g} \quad (D.4)$$

De même pour la projection de la ligne de champ sur le plan (O,y,z) :

$$\kappa_2 = \frac{T_{yz}}{g} \quad (D.5)$$

## D.1. Calcul de la déviation de la verticale à partir des gradients de pesanteur

On définit par ailleurs la courbure totale de la ligne de champ par :

$$\kappa = \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} = \frac{1}{g} \sqrt{T_{xz}^2 + T_{yz}^2} \quad (\text{D.6})$$

La connaissance de ces courbures est notamment utile pour prolonger verticalement au niveau du géoïde les mesures de la déviation de la verticale.

### D.1.2 Définition et calcul de la déviation de la verticale

#### D.1.2.1 définition

La déviation de la verticale (*deflection of the vertical* en anglais) correspond à la différence de direction en un point entre la normale ellipsoïdale et la direction de la pesanteur. Cette déviation est complètement décrite par la donnée de sa composante selon la direction nord-sud notée  $\xi$  et de sa composante  $\eta$  selon la direction est-ouest. Ces deux composantes sont illustrées sur la Figure D.2. A droite la sphère unité est centrée sur le point P où est évaluée la déviation de la verticale. L'axe  $\|\mathbf{z}\|$  est l'axe parallèle à l'axe de rotation de la Terre et passant par P. On définit également le plan équatorial de la sphère passant par P et perpendiculaire à  $\|\mathbf{z}\|$  de sorte que l'on puisse transposer sur la sphère le système de coordonnées géographiques parallèle à celui de la Terre (*cf.* figure de gauche). On peut alors définir l'orientation de la normale ellipsoïdale  $n'$  par ses coordonnées ellipsoïdales données par les angles  $\varphi$  et  $\lambda$ . De même pour l'orientation de la verticale (direction de  $\vec{g}$ )  $n$  définit par ses coordonnées astronomiques  $\Phi$  et  $\Lambda$ . On peut alors directement lire sur la sphère les composantes  $\xi$  et  $\eta$  de la déviation de la verticale.

Plus formellement on a les relations :

$$\xi = \Phi - \varphi \quad (\text{D.7})$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos \varphi \quad (\text{D.8})$$

#### D.1.2.2 Lien entre la déviation de la verticale et la hauteur de géoïde

Considérons la Figure D.3 représentant l'intersection de l'ellipsoïde de référence et du géoïde avec un plan d'azimut quelconque. Le terme  $\epsilon$  représente la déviation de la verticale dans ce plan. Avec les notations introduites dans cette figure on établit alors la relation au premier ordre suivante :



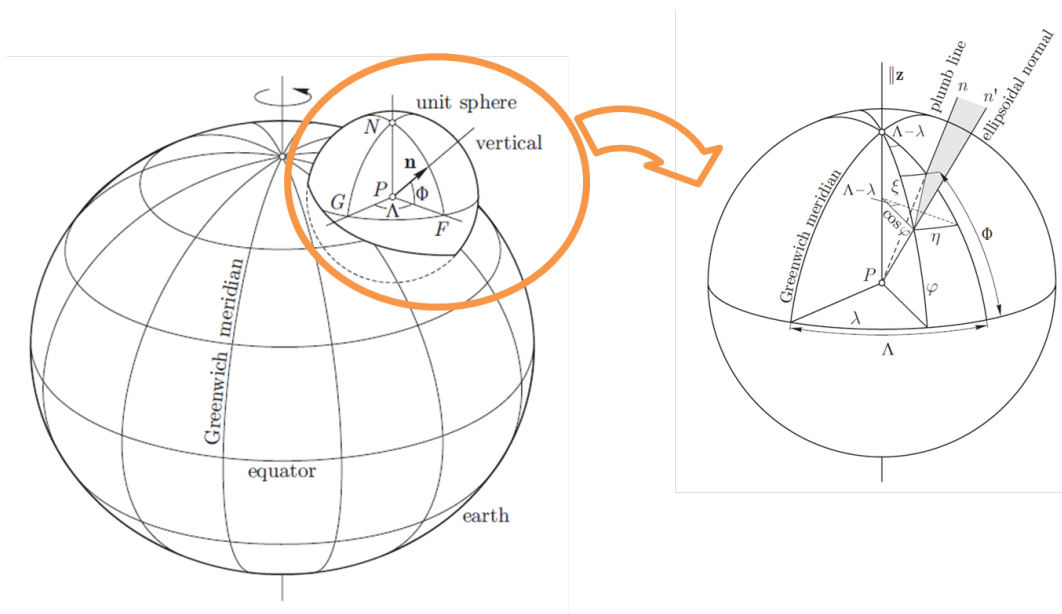


FIGURE D.2 – Schéma d’interprétation géométrique des deux termes  $\xi$  et  $\eta$  définissant la déviation de la verticale, à partir d’une sphère de rayon 1. Figures tirées de *Physical Geodesy* [4].

$$dN = \epsilon ds \tag{D.9}$$

ou de manière équivalente :

$$\epsilon = \frac{dN}{ds} \tag{D.10}$$

avec  $ds$  un élément de longueur sur l’ellipsoïde. Si l’azimut est selon la direction nord-sud (resp. est-ouest) on aura  $\epsilon = \xi$  (resp.  $\epsilon = \eta$ ) et l’élément de longueur  $ds$  aura pour expression  $ds = ds_\varphi = a d\varphi$  (resp.  $ds = ds_\lambda = a \cos \varphi d\lambda$ ) en faisant l’approximation d’une Terre sphérique de rayon  $a$ . En spécifiant l’équation D.10 pour ces deux azimuts on obtient finalement :

$$\xi = -\frac{dN}{ds_\varphi} = -\frac{1}{a} \frac{\partial N}{\partial \varphi} \tag{D.11}$$

$$\eta = -\frac{dN}{ds_\lambda} = -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial N}{\partial \lambda} \tag{D.12}$$

## D.1. Calcul de la déviation de la verticale à partir des gradients de pesanteur

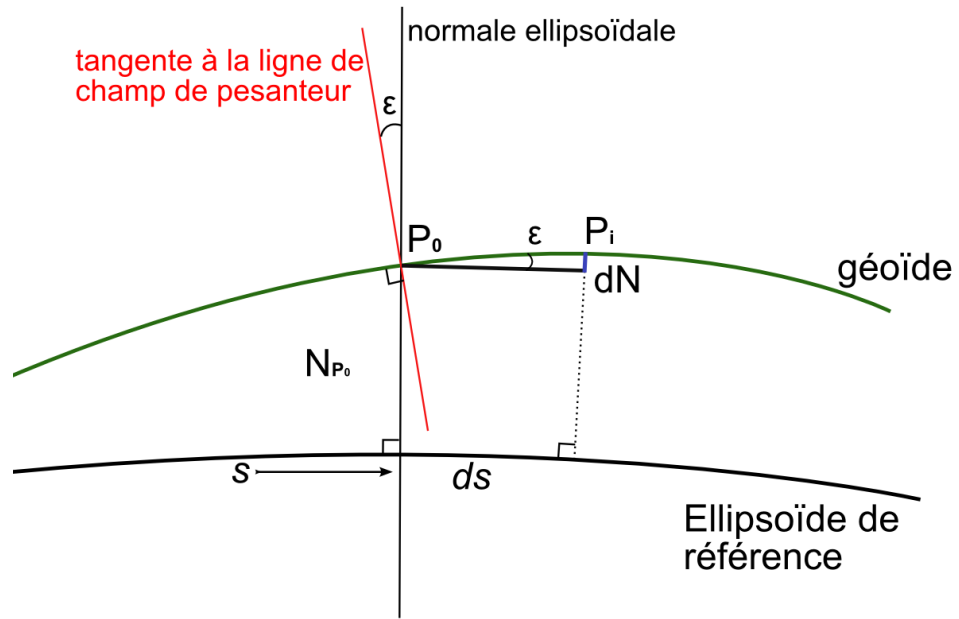


FIGURE D.3 – Relation entre la déviation de la verticale et la hauteur du géoïde

De manière générale et plus pragmatique, on peut intégrer l'équation D.10 comme suit : pour deux points  $P_0$  et  $P_i$  qui définissent une direction d'azimut  $\alpha$  et distant d'une longueur  $S_{0i}$  suffisamment faible pour considérer les variations de  $\xi$  et  $\eta$  linéaires entre eux deux, on peut établir la relation suivante :

$$dN = N_{P_i} - N_{P_0} = \left( \frac{\xi_0 + \xi_i}{2} \cos \alpha + \frac{\eta_0 + \eta_i}{2} \sin \alpha \right) \cdot S_{0i} \quad (D.13)$$

où  $\xi_0$  et  $\eta_0$  (resp.  $\xi_i$  et  $\eta_i$ ) sont les composantes de la déviation de la verticale au point  $P_0$  (resp.  $P_i$ ). On peut maintenant faire un parallèle avec les équations 1.2 donnant le champ de vitesse horizontal des courants à l'équilibre géostrophique et reproduite ici :

$$u = -\frac{g}{2\Omega \sin \phi a} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} = -\frac{g}{2\Omega \sin \phi} \left( \frac{\partial SSH}{a \partial \phi} - \xi \right) \quad (D.14)$$

$$v = \frac{g}{2\Omega \sin \phi a \cos \phi} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} = \frac{g}{2\Omega \sin \phi} \left( \frac{\partial SSH}{a \cos \phi \partial \lambda} - \eta \right) \quad (D.15)$$

où  $\zeta = SSH - N$ . On peut conclure aux vues de ces équations que plus que le géoïde, ce sont les deux composantes de la déviation de la verticale qui interviennent directement dans l'expression du champ de vitesse. Il serait donc intéressant de voir comment on peut relier la déviation de la verticale aux gradients de gravité qui seront estimés grâce à GREMLIT.

### D.1.3 Calcul intégral de la déviation de la verticale à partir des gradients de gravité

L'exploitation de mesures *in situ* de gradients de pesanteur pour la détermination de la déviation de la verticale et de la hauteur de géoïde a été notamment étudiée par Völgyesi [107] [108] [109]. L'objectif final de son travail est de tirer profit d'une grille dense de plus de 240000 points de mesures de gradients horizontaux de pesanteur réalisés à travers la Hongrie avec des balances d'Eötvös. La méthode qu'introduit Völgyesi se base sur un calcul aux différences finies reliant la déviation de la verticale en 2 points voisins. Cette équation est ensuite intégrée sur l'ensemble des points de mesure considérés. On se propose ici d'étendre en partie ce travail sur le calcul de la déviation de la verticale à partir des gradients de pesanteur, en supposant que l'on connaît cette fois-ci toutes les composantes du tenseur. On rappelle les conventions de notation de l'annexe I :

- $\vec{g} = \vec{\nabla} T$  est le champ de pesanteur dérivant du potentiel non-harmonique T
- Pour  $i \in \{x, y, z\}$  une coordonnée spatiale, on note  $T_i = \partial_i T = \frac{\partial T}{\partial i}$ . Ce terme correspond d'après le point précédent à la composante  $g_i$  de  $\vec{g}$ . On pourra donc noter indifféremment  $g_i$  ou  $T_i$  cette composante. On utilisera par la suite la notation faisant intervenir le potentiel T, soit  $T_i$ .
- de la même manière on note pour  $i \in \{x, y, z\}$   $T_{ij} = \partial_{ij} T = \frac{\partial T}{\partial i \partial j}$

Pour commencer on se place en un point  $P_0$  de coordonnées ellipsoïdale  $(\Lambda_0, \Phi_0, h_0)$ . On note  $B_0$  la base locale ENU (East-North-Up) au point  $P_0$  comme illustré sur la figure... Par soucis de clarté, toutes les quantités liées à un point  $P_j$  seront également notées avec un indice j sauf si cette quantité est déjà indicée, auquel cas le j sera noté en exposant. On suppose enfin que l'on connaît les 3 composantes  $(T_x, T_y, T_z)^t$  du vecteur  $\vec{g}_0$  exprimé dans la base  $B_0$ . La norme de  $\vec{g}_0$  est notée  $g_0$ . On montre alors que la déviation de la verticale au point  $P_0$  est donnée par :

$$\sin(\Phi_0 - \varphi_0) = \sin(\xi_0) = -\frac{g_y^0}{g_0} = -\frac{T_y^0}{g_0} \quad (\text{D.16})$$

$$\sin(\Lambda_0 - \lambda_0) = -\frac{g_x^0}{g_0} = -\frac{T_x^0}{g_0} \quad (\text{D.17})$$

Comme la différence entre la latitude (resp. longitude) astronomique et ellipsoïdale est au maximum de l'ordre de  $\pm 110$  arcsec (resp.  $\pm 90$  arcsec) [110], on pourra faire l'approximation

## D.1. Calcul de la déviation de la verticale à partir des gradients de pesanteur

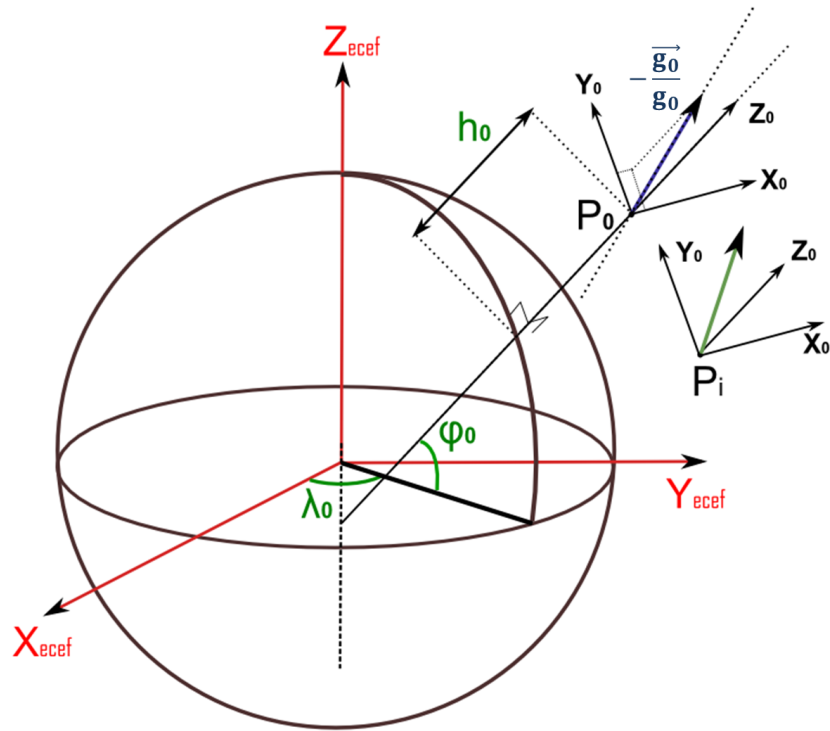


FIGURE D.4 – Repère local ENU au point  $P_0$  pour le calcul des composantes de la déviation de la verticale en ce point et au point  $P_i$ .

au premier ordre :

$$\xi_0 = -\frac{T_y^0}{g_0} \quad (D.18)$$

$$\Lambda_0 - \lambda_0 = -\frac{T_x^0}{g_0} \quad (D.19)$$

On fera également l'approximation suivante valable pour le vecteur de pesanteur  $\vec{g}$  exprimé dans le repère local ENU :

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} &= \frac{1}{\sqrt{T_z^2 + T_x^2 + T_y^2}} = \frac{1}{T_z \sqrt{1 + \frac{T_x^2}{T_z^2} + \frac{T_y^2}{T_z^2}}} \\ &= \frac{1}{T_z \sqrt{1 + \tan^2(\Lambda - \lambda) + \tan^2(\xi)}} \\ &\approx \frac{1}{T_z \sqrt{1 + (\Lambda - \lambda)^2 + (\xi)^2}} \approx \frac{1}{T_z} \end{aligned}$$

On obtient finalement l'expression des 2 composantes de la déviation de la verticale :

$$\xi_0 = -\frac{T_y^0}{T_z^0} \quad (\text{D.20})$$

$$\eta_0 = -\frac{T_x^0}{T_z^0} \cos \varphi_0 \quad (\text{D.21})$$

Soit  $P_i$  un point au voisinage de  $P_0$ . Soit  $(T_x^i, T_y^i, T_z^i)^t$  les coordonnées du vecteur  $\vec{g}_i$  exprimé dans la base  $B_0$ . Par une démarche analogue à la précédente on établit :

$$\Phi_i - \varphi_0 = -\frac{T_y^i}{T_z^i} \quad (\text{D.22})$$

$$\Lambda_i - \lambda_0 = -\frac{T_x^i}{T_z^i} \quad (\text{D.23})$$

Continuons avec le terme de déviation de la verticale  $\xi$ . Au point  $P_i$  on a par définition :

$$\xi_i = \Phi_i - \varphi_i \quad (\text{D.24})$$

$$= \Phi_i - \varphi_0 + \varphi_0 - \varphi_i \quad (\text{D.25})$$

$$= -\frac{T_y^i}{T_z^i} + \varphi_0 - \varphi_i \quad (\text{D.26})$$

De même en un point  $P_k$  on a :

$$\xi_k = -\frac{T_y^k}{T_z^k} + \varphi_0 - \varphi_k \quad (\text{D.27})$$

En formant la différence entre les 2 précédentes expressions on obtient :

$$\xi_i - \xi_k = \frac{T_y^k}{T_z^k} - \frac{T_y^i}{T_z^i} + \varphi_k - \varphi_i \quad (\text{D.28})$$

Il est important de noter ici que dans l'équation D.28 les composantes du vecteur  $\vec{g}$  aux points  $P_i$  et  $P_k$  sont exprimées dans la base  $B_0$  i.e. celle liée au repère géographique local du point  $P_0$ . Toutefois l'équation reste valable si ces composantes sont exprimées dans les repères géographiques locaux en  $P_i$  ou  $P_k$  de base respective  $B_i$  et  $B_k$ . Il faut maintenant évaluer le terme  $\frac{T_y^k}{T_z^k} - \frac{T_y^i}{T_z^i}$ . Soit  $\vec{l} = \overrightarrow{P_i P_k}$  et  $\vec{dl}$  le vecteur élémentaire associé. On a alors la

## D.1. Calcul de la déviation de la verticale à partir des gradients de pesanteur

relation suivante :

$$\int_{P_i}^{P_k} d\left(\frac{T_y}{T_z}\right) = \int_{P_i}^{P_k} \left[ \vec{\nabla}\left(\frac{T_y}{T_z}\right) \right]^t \cdot \vec{dl} = \frac{T_y^k}{T_z^k} - \frac{T_y^i}{T_z^i} \quad (\text{D.29})$$

avec

$$\vec{\nabla}\left(\frac{T_y}{T_z}\right) = \begin{bmatrix} \partial_x \left(\frac{T_y}{T_z}\right) \\ \partial_y \left(\frac{T_y}{T_z}\right) \\ \partial_z \left(\frac{T_y}{T_z}\right) \end{bmatrix} = \frac{1}{T_z} \begin{bmatrix} T_{yx} - \xi T_{zx} \\ T_{yy} - \xi T_{zy} \\ T_{yz} - \xi T_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{D.30})$$

Ce vecteur peut être interprété géométriquement. Pour simplifier, considérons un déplacement infinitésimal  $dy$  selon la direction  $Y_{ENU}$  d'un point A à un point B. Comme ces points sont voisins on peut supposer que leurs latitudes ellipsoïdales sont identiques de sorte que la variation  $d\xi$  de  $\xi$  entre ces 2 points est donnée par :

$$d\xi = \frac{1}{T_z} (T_{yy} - \xi T_{zy}) dy \quad (\text{D.31})$$

La déviation de la verticale étant très faible, on peut faire l'approximation que les valeurs des composantes du vecteur et des gradients de pesanteur sont identiques dans le repère local ENU et dans le repère astronomique  $(x,y,z)$  défini dans la section D.1.1. Cette approximation permet de reformuler les 2 termes apparaissant dans l'équation D.31 :

$$\frac{T_{yy}}{T_z} dy \approx \frac{T_{yy}}{g} dy \approx K_y dy \approx \frac{dy}{R_y} \quad (\text{D.32})$$

$$\frac{T_{zy}}{T_z} \xi dy \approx \kappa_2 \xi dy \approx \frac{\xi dy}{r_2} \quad (\text{D.33})$$

avec  $K_y$  (resp.  $R_y$ ) la courbure (resp. le rayon de courbure) dans le plan  $(yz)$  de l'équipotentielle passant par A et  $\kappa_2$  (resp.  $r_2$ ) la courbure (resp. le rayon de courbure) de la projection dans le plan  $(yz)$  de la ligne de champ passant par A. On peut maintenant donner une interprétation géométrique de l'équation D.31 avec l'aide du schéma de la Figure D.5 :

- le terme  $\frac{T_{yy}}{T_z} dy$  correspond à la variation  $d\xi_{AB'}$  de  $\xi$  lorsqu'on passe du point A au point B'. Cette variation est due à la courbure de l'équipotentielle entre ces 2 points. En effet si on se place dans le triangle AB'B, on a immédiatement  $AB' = \frac{dy}{\cos \xi} \approx dy$  au premier ordre. En assimilant le segment  $[AB']$  à l'arc  $\widehat{AB'}$  du cercle osculateur à l'équipotentiel en A qui est de rayon  $R_y$ , on a immédiatement  $d\xi_{AB'} = \frac{dy}{R_y}$ .
- le terme  $\frac{T_{zy}}{T_z} \xi dy$  vient du fait que le point B ne se trouve pas sur la même équipotentielle que A. Il correspond à la variation  $d\xi_{B'B}$  de  $\xi$  lorsqu'on passe du point B' au

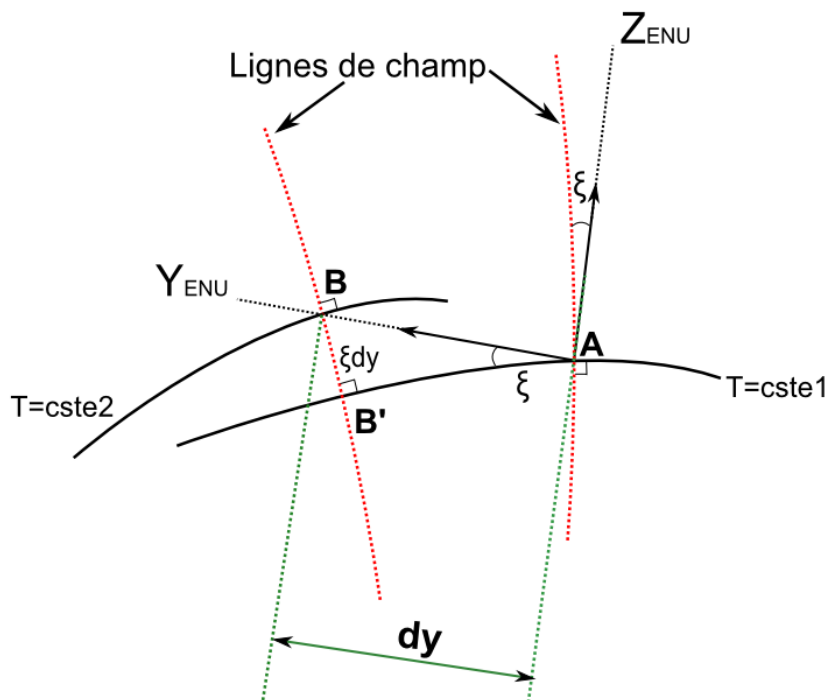


FIGURE D.5 – Schéma représentant la décomposition de la variation de la déviation de la verticale dans le plan (yz) pour un déplacement élémentaire  $dy$ .

point B. Cette variation est due à la courbure de la ligne de champ entre ces 2 points. Par un raisonnement analogue au point précédent, on établit au premier ordre que  $B'B = \xi dy$  et par conséquent  $d\xi_{B'B} = \frac{\xi dy}{r_2}$ .

On remarquera que le second terme est négligeable devant le premier. On peut même constater à travers une application numérique simple ( $T_{zy} = 5000E$ ,  $T_z = 10m.s^{-2}$ ,  $\xi = 100arcsec$ ) que ce terme reste 10 fois inférieure à la précision souhaitable sur la déviation de la verticale (0,1 arcsec) pour une distance  $dy < 200m$ . Par la suite on négligera ce second terme et on simplifiera :

$$\vec{\nabla} \left( \frac{T_y}{T_z} \right) \approx \frac{1}{T_z} \begin{bmatrix} T_{yx} \\ T_{yy} \\ T_{yz} \end{bmatrix} \quad (D.34)$$

Cette approximation est finalement équivalente à considérer le repère local ENU et le repère astronomique confondus. Revenons maintenant au calcul de l'intégrale de l'équation D.29. On suppose que les points  $P_i$  et  $P_k$  sont suffisamment proches de manière à pouvoir considérer :

## D.1. Calcul de la déviation de la verticale à partir des gradients de pesanteur

---

1. les bases  $B_i$  et  $B_k$  parallèles
2. la variation de  $\left(\frac{T_y}{T_z}\right)$  entre les points  $P_i$  et  $P_k$  est linéaire

On obtient alors immédiatement que :

$$\int_{P_i}^{P_k} d\left(\frac{T_y}{T_z}\right) = \int_{P_i}^{P_k} \left[ \vec{\nabla} \left( \frac{T_y}{T_z} \right) \right]^t \vec{dl} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T_z^k} \begin{bmatrix} T_{yx}^k \\ T_{yy}^k \\ T_{yz}^k \end{bmatrix} + \frac{1}{T_z^i} \begin{bmatrix} T_{yx}^i \\ T_{yy}^i \\ T_{yz}^i \end{bmatrix} \right)^t \cdot \vec{l} \quad (\text{D.35})$$

En supposant que  $T_z^k \approx T_z^i \approx T_z$  on a alors :

$$\xi_i - \xi_k = \frac{1}{2T_z} \left( \begin{bmatrix} T_{yx}^k \\ T_{yy}^k \\ T_{yz}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{yx}^i \\ T_{yy}^i \\ T_{yz}^i \end{bmatrix} \right)^t \cdot \vec{l} + \varphi_k - \varphi_i \quad (\text{D.36})$$

Un raisonnement identique peut être réalisé pour la composante est-ouest de la déviation de la verticale. Il faut toutefois faire une approximation supplémentaire consistant à négliger la variation de latitude entre les 2 points :  $\cos \varphi_i \approx \cos \varphi_k \approx \cos\left(\frac{\varphi_i + \varphi_k}{2}\right)$  :

$$\eta_i - \eta_k = \left( \frac{1}{2T_z} \left( \begin{bmatrix} T_{xx}^k \\ T_{xy}^k \\ T_{xz}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{xx}^i \\ T_{xy}^i \\ T_{xz}^i \end{bmatrix} \right)^t \cdot \vec{l} + \lambda_k - \lambda_i \right) \cos\left(\frac{\varphi_i + \varphi_k}{2}\right) \quad (\text{D.37})$$





## E Annexe V

### E.1 Programme MATLAB de simulation des mesures et estimations des gradients de gravité avec GREMLIT

```
1 %
   =====
2 % FONCTION SIMU_FLIGHTLION
3 %
   =====
4 %simu_flightlion realise la fonction suivante: a partir des series
   temporelles des 6 gradients de gravite, on derive les signaux
   effectivement mesures par le gradiometre planaire 1 tage. Il y a
   plusieurs etapes:
5
6 %1. On projette le tenseur gradient de gravite dans le repere de mesure.
   Les variations d'orientation du repere de mesure sont celles simulees a
   partir des DSP d'attitude d'avion ou des series temporelles de l'INS de
   l'avion du leve Corse.
7
8 %2. On ajoute l'erreur due a la soustraction des termes cinematiques qui
9 %sont estimes avec une certaine erreur, avant et apres calibration des
10 %biais des gyrometres.
11
12 %3. On ajoute le bruit instrumental sur chaque mesure.
13
14 %4. On reprojette avec une certaine erreur dans le repere geographique
   local apres avoir prealablement complete le GGT avec un modele de champ
   normal.
15
```

```
16
17 function [omx, omy, omz, tsxxmes, tsxymes, tsyymes, tsxx, tsyy, tsxy] =
    simu_flightlion(npts_lat, npts_long, matxy, data_raw, dataCN, cap,
    omegax, omegay, omegaz, roll, pitch, yaw, theta, phi, vitesse, Tech_spa,
    truemapxx, truemapxy, truemapyy, estimbx, estimby, estimbz)
18 %Les entrees de la fonction sont:
19     % -npts_lat et npts_long: le nombre de point en latitude (nbre de
    lignes) et
20     % longitude (nbre de colonne) de la grille de points de mesure
21     %-matxy est une matrice 2*2 contenant les latitudes et longitudes min
    et
22     %max de la zone d'interet pour tracer les cartes
23     %-data_raw est un tableau contenant les gradients de gravite noise-
    free
24     %calculés l'altitude de l'avion et exprimes dans le repere de l'
    avion.
25     %Il est compose de 6 colonnes correspondant aux 6 gradients de gravite
    :
26     %colonne 1 pour Vxx, 2 pour Vxy, 3 pourVxz, 4 pour Vyy, 5 pour Vyz et
    6
27     %pour Vzz.
28     %-dataCN: identique a data_raw mais contient les gradients du champ
29     %normal.
30     %cap est le cap de la premiere ligne de vol. Ici c'est sud->nord, donc
31     %90 .
32     %-omegax, omegay, omegaz sont les composantes du vecteur vitesse
33     %angulaire du repere de mesure par rapport au repere inertiel et
    exprime
34     %dans le repere de mesure.
35     %-roll, pitch et yaw sont les angles d'attitude de l'avion
36     %-theta, phi sont les angles de rotation de la plateforme par rapport
    %l'avion.
37     %-vitesse et la vitesse de l'avion en km/h
38     %-Tech_spa et la periode spatiale d'echantillonnage
39     %-truemapxx, truemapxy, truemapyy sont les cartes des gradients de
40     %gravite Vxx, Vxy et Vyy exprimes dans le repere géographique local.
41
42
43
44 % nombre de points de mesure total npts:
45 npts=npts_long*npts_lat;
46
47 %On reorganise les points de mesures contenus dans dataraw dans le sens
    chronologique du survol du terrain par l'avion en series temporelles qui
    seront traitees par la suite.
48 data_vol=zeros(size(data_raw));
49 CN=zeros(size(data_raw));
```

## E.1. Programme MATLAB de simulation des mesures et estimations des gradients de gravité avec GREMLIT

---

```
50
51     for j=1:npts_long
52         if mod(j,2)==1
53             for k=1:npts_lat
54                 data_vol((j-1)*npts_lat+k,:)=data_raw(npts_long*(k-1)+j,:);
55                 CN((j-1)*npts_lat+k,:)=dataCN(npts_long*(k-1)+j,:);
56             end
57         else
58             for k=1:npts_lat
59                 data_vol((j-1)*npts_lat+k,:)=data_raw(npts-npts_long*k+j,:);
60                 ;
61                 CN((j-1)*npts_lat+k,:)=dataCN(npts-npts_long*k+j,:);
62             end
63         end
64
65 %On realise le tableau en 3 dimensions (dimensions 1 et 2 pour le tenseur,
66     dimension 3 pour le temps) representant la serie temporelle du tenseur
67     gradient de gravite reelle et du tenseur gradient du champ normal note
68     ggtCN.
69 ggtens(1,1,:)=data_vol(:,1);
70 ggtens(1,2,:)=data_vol(:,2);
71 ggtens(1,3,:)=data_vol(:,3);
72 ggtens(2,1,:)=data_vol(:,2);
73 ggtens(2,2,:)=data_vol(:,4);
74 ggtens(2,3,:)=data_vol(:,5);
75 ggtens(3,1,:)=data_vol(:,3);
76 ggtens(3,2,:)=data_vol(:,5);
77 ggtens(3,3,:)=data_vol(:,6);
78
79 ggtCN(1,1,:)=CN(:,1);
80 ggtCN(1,2,:)=CN(:,2);
81 ggtCN(1,3,:)=CN(:,3);
82 ggtCN(2,1,:)=CN(:,2);
83 ggtCN(2,2,:)=CN(:,4);
84 ggtCN(2,3,:)=CN(:,5);
85 ggtCN(3,1,:)=CN(:,3);
86 ggtCN(3,2,:)=CN(:,5);
87 ggtCN(3,3,:)=CN(:,6);
88
89 %On met aussi de cote les series temporelles des gradients de gravite
90     noise-free aux points de mesure et exprimes dans le repere geographique
91     local.
92 tsxxtrue=data_vol(:,1);
93 tsxytrue=data_vol(:,2);
94 tsyytrue=data_vol(:,4);
```

```

91
92 %
=====
93 %SIMULATION DES OBSERVABLES ET DE LEURS ERREURS
94 %
=====
95
96 %On simule maintenant les series temporelles des mesures des angles theta
    et phi de la plateforme par rapport a l'avion, notes respectivement
    tathe et iph; les angles d'attitude de l'avion sont roll, pitch et yaw (
    transforme en heading) et leur mesures bruitees llor, chtip et dinghead.
97
98 %Pour l'angle xi (= angle de la derniere rotation de la plateforme autour
    de son axe z pour orienter les axes x et y dans les direction est et
    nord), on introduit un biais aleatoire qui traduit l'erreur constante d'
    orientation du repere de mesure par rapport au repere geographique
    local. Cette erreur est due a l'erreur de calibration initiale. La
    fonction randn donne une suite aleatoire suivant une loi normale d'ecart
    type 1 et de moyenne nulle. le coefficient multiplicatif (en degres)
    devant est l'ecart-type de la serie. On initialise pour chaque serie
    aleatoire le noyau de maniere a avoir les meme valeurs pour chaque
    simulation.
99
100
101 theta=theta(500:(499+npts));
102 rng(76, 'v5normal');
103 tathe=theta+pi/180*(-0.14+2/3600*randn( npts, 1));
104 %biais de -0.14 et bruit de 2" d'ecart-type
105
106 phi=phi(500:(499+npts));
107 rng(77, 'v5normal');
108 iph=phi+pi/180*(-0.03+2/3600*randn( npts, 1));
109 %biais de -0.03 et bruit de 2" d'ecart-type
110
111
112 %les 3 angles de l'attitude de l'avion, roll, pitch et yaw sont donnees par
    les donnees du leve Corse. L'erreur les contaminant est un bruit
    additif, aleatoire, gaussien et centre dont l'ecart-type est donne par l
    'article Inertially aided GPS.
113
114 roll=roll(500:(499+npts));
115 rng(78, 'v5normal');
116 llor=roll+pi/180*(0.18*randn( npts, 1));
117
118 pitch=pitch(500:(499+npts));

```

## E.1. Programme MATLAB de simulation des mesures et estimations des gradients de gravité avec GREMLIT

```
119 rng(79, 'v5normal');
120 chtip=pitch+pi/180*(0.3*randn( npts, 1));
121
122 %Ici le yaw, c'est a dire le lacet, sert a calculer le cap exact pour
    chaque aller et retour, i.e. le heading= cap vrai = cap constant + yaw.
    A chaque retour, le cap constant varie de 180 degres. dinghead est l'
    estimation de l'angle heading.
123
124 yaw=yaw(500:(499+npts));
125 heading=zeros(npts,1);
126     for j=1:npts_long
127         if mod(j,2)==1
128             for k=1:npts_lat
129                 heading((j-1)*npts_lat+k)=pi/180*(cap)+yaw((j-1)*npts_lat+k
                    );
130             end
131         else
132             for k=1:npts_lat
133                 heading((j-1)*npts_lat+k)=pi/180*(cap+180)-yaw((j-1)*
                    npts_lat+k);
134             end
135         end
136     end
137 rng(80, 'v5normal');
138 dinghead=heading+pi/180*(0.41*randn( npts, 1));
139
140
141 %
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
142 % On realise les series temporelles de bruits colores sur les 4 gradients
    d'acceleration mesures. Ils sont 2 a 2 non correles i.e. la matrice de
    variance-covariance est diagonale. Pour cela on utilise la fonction
    annexe crea_bruit, qui synthetise ces series temporelles a partir de
    leur DSP.
143
144 brxx=crea_bruit(nextpow2(npts)+2,vitesse, Tech_spa, 4);
145 brxy=crea_bruit(nextpow2(npts)+2,vitesse, Tech_spa, 6);
146 bryx=crea_bruit(nextpow2(npts)+2,vitesse, Tech_spa, 8);
147 bryy=crea_bruit(nextpow2(npts)+2,vitesse, Tech_spa, 10);
148
149 %
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
150 %On cree maintenant les series temporelles des vitesses angulaires de la
    plateforme par rapport a un repere inertiel, exprimes dans le repere de
    l'instrument. On cree egalement leur estimation par les gyrometres en
```

```
ajoutant un biais et un bruit
151
152 %Les biais des gyrometres sont entres ici, pour chacun des 3 axes: Valeurs
    coherentes avec les garanties constructeurs (|biais|<5.2e-5)
153 bx=9.07582e-6;
154 by=5.35756e-7;
155 bz=-2.8741e-5;
156
157 %On cree maintenant les series temporelles des termes d'erreur dus a la
    correction a partir des mesures gyrometriques des termes cinematiques
    presents dans l'expression des gradients d'acceleration. Pour ce terme d
    'erreur, on ne conserve QUE LES TERMES D'ORDRE 1: les termes (produits
    bruit gyro)* (produits bruit gyro) sont negliges. Par ailleurs ce sont
    les valeurs des biais des gyros avant calibration qui sont pris en
    compte ici:
158
159 rng(1, 'v5normal');% bruit blanc centre gaussien sur la mesure de omegax;
    on rajoute un biais de mesure de 4.07582e-6 rad/s.
160 omx=omegax(550:549+npts)+bx+(0.53e-7)*randn( npts, 1);
161 brxxcin=-2*omx*bx -2*omegax(550:549+npts).*((0.53e-7)*randn( npts, 1))+bx
    ^2;
162 brxycin=2*omegay(550:549+npts).*((0.53e-7)*randn( npts, 1)) +2*omx*by -2*
    by*bx;
163
164 rng(6, 'v5normal');% bruit blanc centre gaussien sur la mesure de omegay;
    on rajoute un biais de mesure de 5.35756e-7 rad/s
165 omy=omegay(550:549+npts)+by+(0.53e-7)*randn( npts, 1);
166 brxxcin=-2*omy*by -2*omegay(550:549+npts).*((0.53e-7)*randn( npts, 1)) +by
    ^2;
167 brxycin=brxycin+2*omegax(550:549+npts).*((0.53e-7)*randn( npts, 1))+2*omy*
    bx;
168
169 rng(11, 'v5normal');% bruit blanc centre gaussien sur la mesure de omegaz;
    on rajoute un biais de mesure de -2.8741e-6 rad/s
170 omz=omegaz(550:549+npts)+bz+(0.53e-7)*randn( npts, 1);
171 brxxcin=brxxcin-2*omegaz(550:549+npts).*((0.53e-7)*randn( npts, 1))+bz
    ^2-2*omz*bz;
172 brxycin=brxycin-2*omegaz(550:549+npts).*((0.53e-7)*randn( npts, 1))+bz
    ^2-2*omz*bz;
173
174 %On insere les series temporelles du bruits du gradiometre dans un tableau
    de dimension 3, analogue au tableau ggtens:
175 br_in(1,1,:)=brxx;
176 br_in(1,2,:)=brxy;
177 br_in(2,1,:)=bryx;
178 br_in(2,2,:)=bryy;
179
```

## E.1. Programme MATLAB de simulation des mesures et estimations des gradients de gravité avec GREMLIT

```
180 %L'erreur de correction des termes cinematiques est exprimée en Eotvos:
181 br_cine(1,1,:)=brxxcin*10^9;
182 br_cine(1,2,:)=brxycin*10^9;
183 br_cine(2,2,:)=bryycin*10^9;
184
185 %
186 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
187 %On projette le tenseur gradient (initialement exprime dans le repere
188 %geographique
189 %local) dans le repere de l'instrument. Pour cela on cree les matrices de
190 %rotation pour chaque point de mesure. Les matrices de rotations sont
191 %rangees dans un tableau de 3 dimensions analogue ggtens. Chaque
192 %matrice
193 %de rotation et la combinaison de la rotation de l'avion par rapport au
194 %repere geographique local et de la rotation de la rotation de la
195 %plateforme par rapport au repere de l'avion.
196 %On alloue d'abord la memoire pour chacune des matrices qui interviennent
197 %dans le calcul de la rotation du tenseur gradient:
198 Rtheta=zeros(3,3,npts);
199 Rtathe=zeros(3,3,npts);
200 Rphi=zeros(3,3,npts);
201 Riph=zeros(3,3,npts);
202 Rroll=zeros(3,3,npts);
203 Rllor=zeros(3,3,npts);
204 Rpitch=zeros(3,3,npts);
205 Rctip=zeros(3,3,npts);
206 Rheading=zeros(3,3,npts);
207 Rdinghead=zeros(3,3,npts);
208 Mrot=zeros(3,3,npts);
209 Mtor=zeros(3,3,npts);
210 ggtmes=zeros(2,2,npts);
211 ggtmes2=zeros(3,3,npts);
212 ggtf=zeros(3,3,npts);
213
214 %Les "tsijmes" sont les series temporelles des gradients d'acceleration
215 %corriges des termes en omega*omega, avant la calibration des biais. C'est
216 %justement sur ces series que seront realises les regressions pour estimer
217 %les biais des gyrometres.
218 tsxxmes=zeros(npts,1);
219 tsxymes=zeros(npts,1);
220 tsyymes=zeros(npts,1);
221
222 %les "tsij" sont les series temporelles des gradients de gravite noise-
223 %free
224 %exprimes dans le repere de mesure, qui change donc en chaque point:
225 tsxx=zeros(npts,1);
```



## Annexe E. Annexe V

---

```
222 tsxy=zeros(npts,1);
223 tsyy=zeros(npts,1);
224
225 %Les "tsijmrot" sont les gradients de gravite estimees, apres calibration
226 %des biaisis des gyros, et apres rotation du GGT vers le repere local:
227 tsxxmrot=zeros(npts,1);
228 tsxymrot=zeros(npts,1);
229 tsyymrot=zeros(npts,1);
230 tszzmrot=zeros(npts,1);
231
232 %Pour chaque point de mesure, on calcule les differentes matrices de
233 %rotation bruitees et non bruitees:
234 for y=1:npts
235     Rtheta(:,:,y)=[-1 0 0; 0 cos(-theta(y)) sin(-theta(y)); 0 -sin(-
        theta(y)) cos(-theta(y))];
236     %Matrice de rotation d'angle theta estime:
237     Rtathe(:,:,y)=[-1 0 0; 0 cos(-tathe(y)) sin(-tathe(y)); 0 -sin(-tathe
        (y)) cos(-tathe(y))];
238
239     Rphi(:,:,y)=[cos(-phi(y)) 0 sin(-phi(y)); 0 1 0; -sin(-phi(y)) 0 cos
        (-phi(y))];
240     %Matrice de rotation d'angle phi estime:
241     Riph(:,:,y)=[cos(-iph(y)) 0 sin(-iph(y)); 0 1 0; -sin(-iph(y)) 0 cos
        (-iph(y))];
242
243     Rroll(:,:,y)=[1 0 0; 0 cos(roll(y)) sin(roll(y)); 0 -sin(roll(y)) cos
        (roll(y))];
244     %Matrice de rotation d'angle roll estime:
245     Rllor(:,:,y)=[1 0 0; 0 cos(llor(y)) sin(llor(y)); 0 -sin(llor(y)) cos
        (llor(y))];
246
247     Rpitch(:,:,y)=[cos(pitch(y)) 0 sin(pitch(y)); 0 1 0; -sin(pitch(y)) 0
        cos(pitch(y))];
248     %Matrice de rotation d'angle pitch estime:
249     Rchtip(:,:,y)=[cos(chtip(y)) 0 sin(chtip(y)); 0 1 0; -sin(chtip(y)) 0
        cos(chtip(y))];
250
251     Rheading(:,:,y)=[cos(heading(y)) sin(heading(y)) 0; -sin(heading(y))
        cos(heading(y)) 0; 0 0 -1];
252     %Matrice de rotation d'angle heading estime:
253     Rdinghead(:,:,y)=[cos(dinghead(y)) sin(dinghead(y)) 0; -sin(dinghead(
        y)) cos(dinghead(y)) 0; 0 0 -1];
254
255     Mrot(:,:,y)=[1 0 0;0 1 0;0 0 -1]*Rtheta(:,:,y)'*Rphi(:,:,y)'*Rroll
        (:,:,y)'*Rpitch(:,:,y)'*Rheading(:,:,y)';
256     %Matrice de rotation totale estime:
```

## E.1. Programme MATLAB de simulation des mesures et estimations des gradients de gravité avec GREMLIT

```

257     Mtor(:, :, y)=[1 0 0;0 1 0;0 0 -1]*Rtathe(:, :, y)'*Riph(:, :, y)'*Rllor
        ( :, :, y)'*Rchtip(:, :, y)'*Rdinghead(:, :, y)';
258
259     ggtens(:, :, y)=Mrot(:, :, y)*ggtens(:, :, y)*(Mrot(:, :, y)');
260     ggtCN(:, :, y)=Mtor(:, :, y)*ggtCN(:, :, y)*(Mtor(:, :, y)');
261
262     tsxx(y)=ggtens(1,1,y);
263     tsxy(y)=ggtens(1,2,y);
264     tsyy(y)=ggtens(2,2,y);
265
266
267
268 %Ici on calcule les gradients de gravite *ggtmes* deduits directement des
        mesures et sans etalonnage (ce sont les signaux utilises precisement
        pour la phase d'etalonnage par moindres carres des biais), ou apres
        etalonnage des biais des gyrometres (les estimates des biais des gyros
        sont notes respectivement estimbx, estimby et estimbz pour bx, by et bz)
        . Les resultats de l'etalonnage sont rappels ci-dessous:
269 %estimbx=9.05195e-6;
270 %estimby=5.0475e-7;
271 %estimbz=-2.87755e-5;
272
273     %Premiere estimation du gradient Vxy, sans la correction des biais
        des gyrometres:
274     ggtmes(1,2,y)=0.5*(ggtens(1,2,y)+br_in(1,2,y)+ggtens(2,1,y)+br_in(2,1,
        y)+br_cine(1,2,y));
275     %Avec la correction du biais des gyros apres les avoir estimates:
276     ggtmes(1,2,y)=ggtmes(1,2,y) - ((omx(y)-estimbx)*estimby + (omy(y)-
        estimby)*estimbx)*10^9+(estimbx*estimby)*10^9;
277
278     ggtmes(2,1,y)=ggtens(1,2,y);
279
280     %Premiere estimation du gradient Vxx, sans la correction des biais
        des gyrometres:
281     ggtmes(1,1,y)=ggtens(1,1,y)+br_in(1,1,y)+br_cine(1,1,y);
282     %Avec la correction du biais des gyros, apres les avoir estimates:
283     ggtmes(1,1,y)=ggtmes(1,1,y) + 2*((omy(y)-estimby)*estimby + (omz(y)-
        estimbz)*(estimbz))*10^9-((estimby)^2+(estimbz)^2)*10^9;
284
285     %Premiere estimation du gradient Vyy, sans la correction des biais
        des gyrometres:
286     ggtmes(2,2,y)=ggtens(2,2,y)+br_in(2,2,y)+br_cine(2,2,y);
287     %Avec la correction du biais des gyros, apres les avoir estimates:
288     ggtmes(2,2,y)=ggtmes(2,2,y) + 2*((omx(y)-estimbx)*estimbx + (omz(y)-
        estimbz)*(estimbz))*10^9-((estimbx)^2+(estimbz)^2)*10^9;
289

```

## Annexe E. Annexe V

---

```
290 %Les series temporelles des gradients de gravite estimees apres
    calibration dans le repere de mesure
291 tsxxmes (y)=ggtmes (1,1,y);
292 tsxymes (y)=ggtmes (1,2,y);
293 tsyymes (y)=ggtmes (2,2,y);
294
295 %Pour pouvoir effectuer la rotation inverse vers le repere
    geographique
296 %local en chaque point, on complete le GGT mesure avec des composantes
297 %du GGT normal ggtCN. Vzz zst pris egale a l'opposee de la somme de
    Vxx et Vyy:
298 ggtmes2 (:, :, y)=[ggtmes (1,1,y) ggtmes (1,2,y) ggtCN (1,3,y); ggtmes (2,1,y
    ) ggtmes (2,2,y) ggtCN (2,3,y); ggtCN (3,1,y) ggtCN (3,2,y) -ggtmes (1,1,y
    )-ggtmes (2,2,y)];
299
300 %Puis on effectue la rotation avec la matrice de rotation estimee Mtor
    :
301 ggtf (:, :, y)=Mtor (:, :, y)'*ggtmes2 (:, :, y)*Mtor (:, :, y);
302
303 tsxxmrot (y)=ggtf (1,1,y);
304 tsxymrot (y)=ggtf (1,2,y);
305 tsyymrot (y)=ggtf (2,2,y);
306 tszzmrot (y)=ggtf (3,3,y);
307 end
308
309 %
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
310 % La derniere etape est de remettre les series temporelles dans le format
311 % xyz afin de pouvoir tracer les gradients de gravite estimees sous forme
    de
312 % carte.
313
314 tsgxx (:, 1)=ggtf (1,1,:);
315 tsgxy (:, 1)=ggtf (1,2,:);
316 tsgyx (:, 1)=ggtf (2,1,:);
317 tsgyy (:, 1)=ggtf (2,2,:);
318
319
320 matfxx=zeros (npts_lat, npts_long);
321 for t=1:npts_long;
322     if mod (t, 2)==0
323         matfxx (:, t)=tsgxx ((t-1)*npts_lat+1:t*npts_lat);
324     else
325         matfxx (:, t)=flipud (tsgxx ((t-1)*npts_lat+1:t*npts_lat));
326     end
327 end
```

## E.1. Programme MATLAB de simulation des mesures et estimations des gradients de gravité avec GREMLIT

---

```
328
329 matfxy=zeros(npts_lat, npts_long);
330 for t=1:npts_long;
331     if mod(t,2)==0
332         matfxy(:,t)=tsgxy((t-1)*npts_lat+1:t*npts_lat);
333     else
334         matfxy(:,t)=flipud(tsgxy((t-1)*npts_lat+1:t*npts_lat));
335     end
336 end
337
338 matfyx=zeros(npts_lat, npts_long);
339 for t=1:npts_long;
340     if mod(t,2)==0
341         matfyx(:,t)=tsgyx((t-1)*npts_lat+1:t*npts_lat);
342     else
343         matfyx(:,t)=flipud(tsgyx((t-1)*npts_lat+1:t*npts_lat));
344     end
345 end
346
347 matfyy=zeros(npts_lat, npts_long);
348 for t=1:npts_long;
349     if mod(t,2)==0
350         matfyy(:,t)=tsgyy((t-1)*npts_lat+1:t*npts_lat);
351     else
352         matfyy(:,t)=flipud(tsgyy((t-1)*npts_lat+1:t*npts_lat));
353     end
354 end
355
356
357 matfxy=0.5*(matfxy+matfyx);
358
359 matfxx=flipud(matfxx);
360 matfyy=flipud(matfyy);
361 matfxy=flipud(matfxy);
362
363
364 xmax=max(matxy(:,1));
365 xmin=min(matxy(:,1));
366 ymax=max(matxy(:,2));
367 ymin=min(matxy(:,2));
368
369 x=(0:0.1:(xmax-xmin))+xmin;
370 y=(0:0.1:(ymax-ymin))+ymin;
371
372
373 figure;
374 axes('FontSize', 28);
```

```
375 imagesc(x, y, truemapyy);
376 grid on;
377 xlabel(' \fontsize{28}longitude ( ).');
378 set(gca, 'YDir', 'normal')
379 colorbar('Eastoutside', 'FontSize', 28);
380 caxis([-1590 -1480]);
381 hold off
382
383 figure;
384 axes('FontSize', 28);
385 imagesc(x, y, truemapxy);
386 grid on;
387 set(gca, 'YDir', 'normal')
388 colorbar('Eastoutside', 'FontSize', 28);
389 caxis([-40 40]);
390 hold off
391
392 figure;
393 axes('FontSize', 28);
394 imagesc(x, y, truemapxx);
395 grid on;
396 ylabel(' \fontsize{28}latitude ( ).');
397 set(gca, 'YDir', 'normal')
398 colorbar('Eastoutside', 'FontSize', 28);
399 caxis([-1620 -1480]);
400 hold off
401
402 figure;
403 axes('FontSize', 28);
404 imagesc(x, y, matfyy);
405 grid on;
406 xlabel(' \fontsize{28}longitude ( ).');
407 set(gca, 'YDir', 'normal')
408 colorbar('Eastoutside', 'FontSize', 28);
409 caxis([-1590 -1480]);
410 hold off
411
412 figure;
413 axes('FontSize', 28);
414 imagesc(x, y, matfxy);
415 grid on;
416 set(gca, 'YDir', 'normal')
417 colorbar('Eastoutside', 'FontSize', 28);
418 caxis([-40 40]);
419 hold off
420
421 figure;
```

## E.1. Programme MATLAB de simulation des mesures et estimations des gradients de gravité avec GREMLIT

---

```
422 axes('FontSize', 28);
423 imagesc(x, y, matfxx);
424 grid on;
425 ylabel(' \fontsize{28}latitude ( ).');
426 set(gca, 'YDir', 'normal')
427 colorbar('Eastoutside', 'FontSize', 28);
428 caxis([-1620 -1480]);
429 hold off
430
431 %
432 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
433 %On trace egalement la carte d'erreur d'estimation des gradients de
434 %gravite par simple soustraction entre champ estime et champ vrai:
435
436 figure;
437 axes('FontSize', 28);
438 colormap(b2r(-45,45));
439 imagesc(x, y, (truemapyy-matfyy));
440 grid on;
441 xlabel(' \fontsize{28}longitude ( ).');
442 set(gca, 'YDir', 'normal')
443 colorbar('Eastoutside', 'FontSize', 28);
444 caxis([-45 45]);
445 hold off
446
447 figure;
448 axes('FontSize', 28);
449 colormap(b2r(-45,45));
450 imagesc(x, y, (truemapxy-matfxy));
451 grid on;
452 xlabel(' \fontsize{28}longitude ( ).');
453 set(gca, 'YDir', 'normal')
454 colorbar('Eastoutside', 'FontSize', 28);
455 caxis([-45 45]);
456 hold off
457
458 figure;
459 axes('FontSize', 28);
460 colormap(b2r(-45,45));
461 imagesc(x, y, (truemapxx-matfxx));
462 grid on;
463 xlabel(' \fontsize{28}longitude ( ).');
464 ylabel(' \fontsize{28}latitude ( ).');
465 set(gca, 'YDir', 'normal')
466 colorbar('Eastoutside', 'FontSize', 28);
467 caxis([-45 45]);
```



## Bibliographie

- [1] Constantin Koutsikopoulos and Bernard Le Cann. Physical processes and hydrological structures related to the bay of biscay anchovy. *Scientia Marina*, 60 :9–19, 1996.
- [2] Cheinway Hwang, Yu-Shen Hsiao, Hsuan-Chang Shih, Ming Yang, Kwo-Hwa Chen, Rene Forsberg, and Arne V. Olesen. Geodetic and geophysical results from a taiwan airborne gravity survey : Data reduction and accuracy assessment. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 112(B4) :n/a–n/a, 2007.
- [3] James B Lee. Falcon gravity gradiometer technology. *Exploration Geophysics*, 32(3/4) :247–250, 2001.
- [4] Bernhard Hofmann-Wellenhof and Helmut Moritz. *Physical geodesy*. Springer, 2005.
- [5] Daniele Carbone and Michael P Poland. Gravity fluctuations induced by magma convection at kilauea volcano, hawai ‘i. *Geology*, 40(9) :803–806, 2012.
- [6] Ciro Del Negro, Gilda Currenti, Giuseppe Solaro, Filippo Greco, Antonio Pepe, Rosalba Napoli, Susi Pepe, Francesco Casu, and Eugenio Sansosti. Capturing the fingerprint of etna volcano activity in gravity and satellite radar data. *Scientific reports*, 3, 2013.
- [7] J. Hinderer, J. Pfeffer, M. Boucher, S. Nahmani, C. De Linage, J.-P. Boy, P. Genthon, L. Seguis, G. Favreau, O. Bock, and M. Descloitres. Land water storage changes from ground and space geodesy : First results from the ghyraf (gravity and hydrology in africa) experiment. *Pure and Applied Geophysics*, 169(8) :1391–1410, 2012.
- [8] J. Neumeyer, F. Barthelmes, O. Dierks, F. Flechtner, M. Harnisch, G. Harnisch, J. Hinderer, Y. Imanishi, C. Kroner, B. Meurers, S. Petrovic, Ch. Reigber, R. Schmidt, P. Schwintzer, H.-P. Sun, and H. Virtanen. Combination of temporal gravity variations resulting from superconducting gravimeter (sg) recordings, grace satellite observations and global hydrology models. *Journal of Geodesy*, 79(10-11) :573–585, 2006.
- [9] JL Chen, CR Wilson, D Blankenship, and BD Tapley. Accelerated antarctic ice loss from satellite gravity measurements. *Nature Geoscience*, 2(12) :859–862, 2009.



## Bibliographie

---

- [10] G Ramillien, A Lombard, A Cazenave, ER Ivins, M Llubes, F Remy, and R Biancale. Interannual variations of the mass balance of the antarctica and greenland ice sheets from grace. *Global and Planetary Change*, 53(3) :198–208, 2006.
- [11] Wolfgang Torge. *Geodesy*. Walter de Gruyter, 2001.
- [12] Alexis Claude Clairaut and Claude Augustin Duflos. *Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique. Par M. Clairaut...* chez David fils, libraire, rue Saint-Jacques, a la Plume d'or, 1743.
- [13] James R Smith. *Introduction to geodesy : the history and concepts of modern geodesy*, volume 1. John Wiley & Sons, 1997.
- [14] M.L. Martínez, A. Intralawan, G. Vázquez, O. Pérez-Maqueo, P. Sutton, and R. Landgrave. The coasts of our world : Ecological, economic and social importance. *Ecological Economics*, 63(2–3) :254 – 272, 2007. Ecological Economics of Coastal Disasters Coastal Disasters Special Section.
- [15] John H Simpson and Jonathan Sharples. *Introduction to the physical and biological oceanography of shelf seas*. Cambridge University Press, 2012.
- [16] Christopher D. G. Harley, A. Randall Hughes, Kristin M. Hultgren, Benjamin G. Miner, Cascade J. B. Sorte, Carol S. Thornber, Laura F. Rodriguez, Lars Tomanek, and Susan L. Williams. The impacts of climate change in coastal marine systems. *Ecology Letters*, 9(2) :228–241, 2006.
- [17] Rosemary Rayfuse. Melting moments : The future of polar oceans governance in a warming world. *Review of European Community International Environmental Law*, 16(2) :196–216, 2007.
- [18] Alf Håkon Hoel. Do we need a new legal regime for the arctic ocean ? *The International Journal of Marine and Coastal Law*, 24(2) :443–456, 2009.
- [19] Mel Weber. Defining the outer limits of the continental shelf across the arctic basin : The russian submission, statesapos ; rights, boundary delimitation and arctic regional cooperation. *The International Journal of Marine and Coastal Law*, 24(4) :653–681, 2009.
- [20] Robert Costanza, Ralph d'Arge, Rudolf de Groot, Stephen Farber, Monica Grasso, Bruce Hannon, Karin Limburg, Shahid Naeem, Robert V O'Neill, and Jose Paruelo. The value of the world's ecosystem services and natural capital. *Ecological Economics*, 25(1) :3–15, 1998.

- [21] David Sällh, Henrik Wachtmeister, Xu Tang, and Mikael Höök. Offshore oil : Investigating production parameters of fields of varying size, location and water depth. *Fuel*, 139(0) :430 – 440, 2015.
- [22] Wallace G Dow. Petroleum source beds on continental slopes and rises. *AAPG Bulletin*, 62(9) :1584–1606, 1978.
- [23] C Rajasekara Murthy, Prabhas Chandra Sinha, and YR Rao. *Modelling and monitoring of coastal marine processes*. Springer, 2008.
- [24] INSEE. La population littorale a fortement augmenté depuis trente ans. [http://www.insee.fr/fr/insee\\_regions/aquitaine/themes/edossier/edos0901/3\\_populat.pdf](http://www.insee.fr/fr/insee_regions/aquitaine/themes/edossier/edos0901/3_populat.pdf). visité le 21/06/2014.
- [25] E. Eckhardt. A brief history of the gravity method of prospecting for oil. *GEOPHYSICS*, 5(3) :231–242, 1940.
- [26] M Moorkamp, A Roberts, M Jegen, B Heincke, and R Hobbs. 3d joint inversion of complex geological structures : Example of a salt dome. In *AGU Fall Meeting Abstracts*, volume 1, page 1682, 2012.
- [27] Chris Ennen, Stuart Hall, et al. Structural mapping of the vinton salt dome louisiana using gravity gradiometry data. In *2011 SEG Annual Meeting*. Society of Exploration Geophysicists, 2011.
- [28] A.A. Ardalan and A. Safari. Global height datum unification : a new approach in gravity potential space. *Journal of Geodesy*, 79(9) :512–523, 2005.
- [29] A. Ballay, B. Simon, and G. Wäppelmann. Towards a globally consistent nautical chart datum definition in france. In Hermann Drewes, AlanH. Dodson, LuizPaulo-Souto Fortes, Laura SÁnchez, and Pedro Sandoval, editors, *Vertical Reference Systems*, volume 124 of *International Association of Geodesy Symposia*, pages 270–275. Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [30] Reiner Rummel. Global unification of height systems and goce. In MichaelG. Sideris, editor, *Gravity, Geoid and Geodynamics 2000*, volume 123 of *International Association of Geodesy Symposia*, pages 13–20. Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [31] Christian Gerlach and Reiner Rummel. Global height system unification with goce : a simulation study on the indirect bias term in the gbvp approach. *Journal of Geodesy*, 87(1) :57–67, 2013.
- [32] B. Johnson. Noaa project to measure gravity aims to improve coastal monitoring, 2009.

## Bibliographie

---

- [33] T.C. Welker, M. Pachter, and R.E. Huffman. Gravity gradiometer integrated inertial navigation. In *Control Conference (ECC), 2013 European*, pages 846–851, July 2013.
- [34] T.C. Welker, R.E. Huffman, and M. Pachter. Modeling earth's gravitational gradients for gps-free navigation. In *American Control Conference (ACC), 2013*, pages 1602–1607, June 2013.
- [35] Maurice Schwartz. *Encyclopedia of coastal science*. Springer, 2006.
- [36] Carl Wunsch and Detlef Stammer. Satellite altimetry, the marine geoid, and the oceanic general circulation. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 26(1) :219–253, 1998.
- [37] Roger Hipkin. Modelling the geoid and sea-surface topography in coastal areas. *Physics and Chemistry of the Earth, Part A : Solid Earth and Geodesy*, 25(1) :9 – 16, 2000.
- [38] Z.Y. Hu, A.A. Petrenko, A.M. Doglioli, and I. Dekeyser. Study of a mesoscale anticyclonic eddy in the western part of the gulf of lion. *Journal of Marine Systems*, 88(1) :3 – 11, 2011. 41st International Liege Colloquium on Ocean Dynamics Science based management of the coastal waters.
- [39] Lynne D Talley, George L Pickard, William J Emery, and James H Swift. *Descriptive physical oceanography : an introduction*. Academic Press, 2011.
- [40] Muriel Lux, Pierre De Mey, Julien Lamouroux, John Huthnance, Guilhem Moreaux, Christopher Hughes, Georges Balmino, Enrique Alvarez, Vicente Fernandez, and Laurent Roblou. Gravity improvement of continental slope and shelf ocean circulation modelling. Technical Report Contract 19740/06/NL/HE, ESA/ESTEC, 2008.
- [41] I Puillat, P Lazure, A.M Jégou, L Lampert, and PI Miller. Hydrographical variability on the french continental shelf in the bay of biscay, during the 1990s. *Continental Shelf Research*, 24(10) :1143 – 1163, 2004.
- [42] Christoph Förste, Sean Bruinsma, Frank Flechtner, Jean-Charles Marty, Christoph Dahle, Oleh Abrykosov, Jean-Michel Lemoine, Hans Neumayer, Franz Barthelmes, Richard Biancale, et al. Eigen-6c2-a new combined global gravity field model including goce data up to degree and order 1949 of gfz potsdam and grgs toulouse. In *EGU General Assembly Conference Abstracts*, volume 15, page 4077, 2013.
- [43] Majid Beiki and Laust B Pedersen. Window constrained inversion of gravity gradient tensor data using dike and contact models. *Geophysics*, 76(6) :I59–I72, 2011.

- [44] Majid Beiki. Analytic signals of gravity gradient tensor and their application to estimate source location. *Geophysics*, 75(6) :I59–I74, 2010.
- [45] I. Marson and E. Klingele. Advantages of using the vertical gradient of gravity for 3-d interpretation. *GEOPHYSICS*, 58(11) :1588–1595, 1993.
- [46] L. Pedersen and T. Rasmussen. The gradient tensor of potential field anomalies : Some implications on data collection and data processing of maps. *GEOPHYSICS*, 55(12) :1558–1566, 1990.
- [47] Majid Beiki and Laust B Pedersen. Eigenvector analysis of gravity gradient tensor to locate geologic bodies. *Geophysics*, 75(6) :I37–I49, 2010.
- [48] Valentin Mikhailov, Gwendoline Pajot, Michel Diament, and Antony Price. Tensor deconvolution : A method to locate equivalent sources from full tensor gravity data. *Geophysics*, 72(5) :I61–I69, 2007.
- [49] Gwendoline Pajot. *Caractérisation, analyse et interprétation des données de gradiométrie en gravimétrie*. PhD thesis, Institut de physique du globe de paris-IPGP, 2007.
- [50] DG King-Hele. The earth’s gravitational potential, deduced from the orbits of artificial satellites. *Geophysical Journal International*, 4(Supplement 1) :3–16, 1961.
- [51] David T. Sandwell and Walter H. F. Smith. Global marine gravity from retracked geosat and ers-1 altimetry : Ridge segmentation versus spreading rate. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 114(B1) :n/a–n/a, 2009.
- [52] Cheinway Hwang, Jinyun Guo, Xiaoli Deng, Hsin-Ying Hsu, and Yuting Liu. Coastal gravity anomalies from retracked geosat/gm altimetry : Improvement, limitation and the role of airborne gravity data. *Journal of Geodesy*, 80(4) :204–216, 2006.
- [53] M.R. Drinkwater, R. Floberghagen, R. Haagmans, D. Muzi, and A. Popescu. Goce : Esa’s first earth explorer core mission. In G. Beutler, M.R. Drinkwater, R. Rummel, and R. Von Steiger, editors, *Earth Gravity Field from Space – From Sensors to Earth Sciences*, volume 17 of *Space Sciences Series of ISSI*, pages 419–432. Springer Netherlands, 2003.
- [54] Goce : facts and figures. [http://www.esa.int/Our\\_Activities/Observing\\_the\\_Earth/GOCE/Facts\\_and\\_figures](http://www.esa.int/Our_Activities/Observing_the_Earth/GOCE/Facts_and_figures). Consulté le 15/09/2014.
- [55] Reiner Rummel, Weiyong Yi, and Claudia Stummer. Goce gravitational gradiometry. *Journal of Geodesy*, 85(11) :777–790, 2011.

## Bibliographie

---

- [56] Torsten Mayer-Guerr, Jan Martin Brockmann, Ina Krasbutter, Eduard Höck, Norbert Zehentner, Roland Pail, and Wolf-Dieter Schuh. Status of the fifth generation goce time-wise earth gravity field model. In *EGU General Assembly Conference Abstracts*, volume 16, page 10469, 2014.
- [57] Roland Pail, Alberta Albertella, Daniel Rieser, JanMartin Brockmann, Wolf-Dieter Schuh, and Roman Savcenko. Satellite gravity models and their use for estimating mean ocean circulation. In Chris Rizos and Pascal Willis, editors, *Earth on the Edge : Science for a Sustainable Planet*, volume 139 of *International Association of Geodesy Symposia*, pages 275–281. Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [58] P. Knudsen, R. Bingham, O. Andersen, and Marie-Helene Rio. A global mean dynamic topography and ocean circulation estimation using a preliminary goce gravity model. *Journal of Geodesy*, 85(11) :861–879, 2011.
- [59] M. van der Meijde, R. Pail, R. Bingham, and R. Floberghagen. {GOCE} data, models, and applications : A review. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, 35, Part A(0) :4 – 15, 2015. {GOCE} earth science applications and models(Based on the {ESA} {GOCE} solid earth workshop, 16-17 October 2012).
- [60] Isabelle Panet, Gwendoline Pajot-Métivier, Marianne Greff-Lefftz, Laurent Métivier, Michel Diament, and Mioara Manda. Mapping the mass distribution of earth/'s mantle using satellite-derived gravity gradients. *Nature Geoscience*, 7(2) :131–135, 2014.
- [61] M. van der Meijde, J. Julià, and M. Assumpção. Gravity derived moho for south america. *Tectonophysics*, 609(0) :456 – 467, 2013. Moho : 100 years after Andrija Mohorovicic.
- [62] Patrizia Mariani, Carla Braitenberg, and Naomi Ussami. Explaining the thick crust in paraná basin, brazil, with satellite {GOCE} gravity observations. *Journal of South American Earth Sciences*, 45(0) :209 – 223, 2013.
- [63] Daniele Sampietro, Mirko Reguzzoni, and Carla Braitenberg. The goce estimated moho beneath the tibetan plateau and himalaya. In Chris Rizos and Pascal Willis, editors, *Earth on the Edge : Science for a Sustainable Planet*, volume 139 of *International Association of Geodesy Symposia*, pages 391–397. Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [64] Carla Braitenberg. Exploration of tectonic structures with {GOCE} in africa and across-continent. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, 35, Part A(0) :88 – 95, 2015. {GOCE} earth science applications and models(Based on the {ESA} {GOCE} solid earth workshop, 16-17 October 2012).

- [65] Carla Braitenberg. Goce observations for mineral exploration in africa and across continents. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, 2013.
- [66] David A. Imel. Evaluation of the topex/poseidon dual-frequency ionosphere correction. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 99(C12) :24895–24906, 1994.
- [67] Pascal Willis, Hervé Fagard, Pascale Ferrage, Frank G. Lemoine, Carey E. Noll, Ron Noomen, Michiel Otten, John C. Ries, Markus Rothacher, Laurent Soudarin, Gilles Tavernier, and Jean-Jacques Valette. The international {DORIS} service (ids) : Toward maturity. *Advances in Space Research*, 45(12) :1408 – 1420, 2010. DORIS : Scientific Applications in Geodesy and Geodynamics.
- [68] Claudia Flohrer, Michiel Otten, Tim Springer, and John Dow. Generating precise and homogeneous orbits for jason-1 and jason-2. *Advances in Space Research*, 48(1) :152 – 172, 2011.
- [69] D.C. Slobbe and R. Klees. The impact of the dynamic sea surface topography on the quasi-geoid in shallow coastal waters. *Journal of Geodesy*, 88(3) :241–261, 2014.
- [70] R. I. Hackney and W. E. Featherstone. Geodetic versus geophysical perspectives of the ‘gravity anomaly’. *Geophysical Journal International*, 154(1) :35–43, 2003.
- [71] Cheinway Hwang, Eu-Chi Kao, and Barry Parsons. Global derivation of marine gravity anomalies from seasat, geosat, ers-1 and topex/poseidon altimeter data. *Geophysical Journal International*, 134(2) :449–459, 1998.
- [72] Ole Baltazar Andersen and Per Knudsen. Global marine gravity field from the ers-1 and geosat geodetic mission altimetry. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 103(C4) :8129–8137, 1998.
- [73] Ole B Andersen and Per Knudsen. The role of satellite altimetry in gravity field modelling in coastal areas. *Physics and Chemistry of the Earth, Part A : Solid Earth and Geodesy*, 25(1) :17 – 24, 2000.
- [74] Stefano Vignudelli, Andrey G Kostianoy, Paolo Cipollini, and Jérôme Benveniste. *Coastal altimetry*. Springer, 2011.
- [75] D. Esteban-Fernandez, Lee-Lueng Fu, E. Rodriguez, S. Brown, and R. Hodges. Ka-band sar interferometry studies for the swot mission. In *Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS), 2010 IEEE International*, pages 4401–4402, July 2010.
- [76] A Olesen and René Forsberg. Airborne scalar gravimetry for regional gravity field mapping and geoid determination. In *Proceedings, Gravity Field of the Earth–1st Meeting of the International Gravity Field Service*, volume 73, pages 277–282, 2007.

## Bibliographie

---

- [77] M. N. Nabighian, M. E. Ander, V. J. S. Grauch, R. O. Hansen, T. R. LaFehr, Y. Li, W. C. Pearson, J. W. Peirce, J. D. Phillips, and M. E. Ruder. Historical development of the gravity method in exploration. *Geophysics*, 70(6) :63ND–89ND, 2005.
- [78] W. Gumert. An historical review of airborne gravity. *The Leading Edge*, 17(1) :113–116, 1998.
- [79] J. Brozena. A preliminary analysis of the nrl airborne gravimetry system. *GEOPHYSICS*, 49(7) :1060–1069, 1984.
- [80] E. E. Klingelé, M. Cocard, H.-G. Kahle, and M. Halliday. Kinematic gps as a source for airborne gravity reduction in the airborne gravity survey of switzerland. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 102(B4) :7705–7715, 1997.
- [81] Jérôme Verdun, Emile E Klingelé, Roger Bayer, Marc Cocard, Alain Geiger, and Hans-Gert Kahle. The alpine swiss-french airborne gravity survey. *Geophysical Journal International*, 152(1) :8–19, 2003.
- [82] R. E. Bell, V. A. Childers, R. A. Arko, D. D. Blankenship, and J. M. Brozena. Airborne gravity and precise positioning for geologic applications. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 104(B7) :15281–15292, 1999.
- [83] A.V Olesen, R Forsberg, K Keller, and A Gidskehaug. Airborne gravity survey of lincoln sea and wandel sea, north greenland. *Physics and Chemistry of the Earth, Part A : Solid Earth and Geodesy*, 25(1) :25 – 29, 2000.
- [84] D.A Smith and D.R Roman. How noaa’s grav-d project impact and contributes to noaa science, 2010. vue le : 23/06/2014.
- [85] D.A Smith. Grav-d project plan, 2007. vue le : 23/06/2014.
- [86] Ch Jekeli. On precision kinematic accelerations for airborne gravimetry. *Journal of Geodetic Science*, 1(4) :367–378, 2011.
- [87] Christopher Jekeli. Airborne gradiometry error analysis. *Surveys in geophysics*, 27(2) :257–275, 2006.
- [88] M Dransfield. Airborne gravity gradiometry in the search for mineral deposits. In *Proceedings of exploration*, volume 7, pages 341–354, 2007.
- [89] R. E. Bell, R. Anderson, and L. Pratson. Gravity gradiometry resurfaces. *The Leading Edge*, 16(1) :55–59, 1997.

- [90] Guimin Liu, Peter Diorio, Peter Stone, Grant Lockhart, Asbjorn Christensen, Nick Fitton, and Mark Dransfield. Detecting kimberlite pipes at ekati with airborne gravity gradiometry. *ASEG Extended Abstracts*, 2001(1) :1–4, 2001.
- [91] Pierre Touboul, Bernard Foulon, and Eric Willemenot. Electrostatic space accelerometers for present and future missions. *Acta Astronautica*, 45(10) :605 – 617, 1999.
- [92] Ch. Reigber, H. Lühr, and P. Schwintzer. {CHAMP} mission status. *Advances in Space Research*, 30(2) :129 – 134, 2002.
- [93] Christoph Reigber, Georges Balmino, Peter Schwintzer, Richard Biancale, Albert Bode, Jean-Michel Lemoine, Rolf König, Sylvain Loyer, Hans Neumayer, Jean-Charles Marty, Franz Barthelmes, Felix Perosanz, and Shen Yuan Zhu. A high-quality global gravity field model from champ gps tracking data and accelerometry (eigen-1s). *Geophysical Research Letters*, 29(14) :37–1–37–4, 2002.
- [94] Jakob Flury, Srinivas Bettadpur, and Byron D. Tapley. Precise accelerometry onboard the {GRACE} gravity field satellite mission. *Advances in Space Research*, 42(8) :1414 – 1423, 2008.
- [95] Pierre Touboul, Manuel Rodrigues, Gilles Métris, and Bernard Taty. Microscope, testing the equivalence principle in space. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series {IV} - Physics*, 2(9) :1271 – 1286, 2001.
- [96] D. Hudson, R. Chhun, and P. Touboul. Development of a differential accelerometer to test the equivalence principle in the microscope mission. *Acta Astronautica*, 57(2–8) :341 – 347, 2005. Infinite Possibilities Global Realities, Selected Proceedings of the 55th International Astronautical Federation Congress, Vancouver, Canada, 4-8 October 2004.
- [97] H. Duquenne, AV. Olesen, R. Forsberg, and A. Gidskehaug. Improvement of the gravity field and geoid around Corsica by aerial gravimetry. *Gravity and Geoid*, pages 167–172, 2002.
- [98] Oliver Baur and ErikW. Grafarend. High-performance goce gravity field recovery from gravity gradient tensor invariants and kinematic orbit information. In J. Flury, R. Rummel, C. Reigber, M. Rothacher, G. Boedeker, and U. Schreiber, editors, *Observation of the Earth System from Space*, pages 239–253. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [99] Tobias Wittwer and Nederlandse Commissie voor Geodesie. *Regional gravity field modelling with radial basis functions*. NCG, Nederlandse Commissie voor Geodesie, 2009.



## Bibliographie

---

- [100] R Klees, R Tenzer, I Prutkin, and T Wittwer. A data-driven approach to local gravity field modelling using spherical radial basis functions. *Journal of Geodesy*, 82(8) :457–471, 2008.
- [101] Oliver Baur, Nico Sneeuw, and Erik W Grafarend. Methodology and use of tensor invariants for satellite gravity gradiometry. *Journal of Geodesy*, 82(4-5) :279–293, 2008.
- [102] JinHai Yu and DongMing Zhao. The gravitational gradient tensor's invariants and the related boundary conditions. *Science China Earth Sciences*, 53(5) :781–790, 2010.
- [103] Peter J Mohr, Barry N Taylor, and David B Newell. Codata recommended values of the fundamental physical constants : 2010a). *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, 41(4) :043109, 2012.
- [104] S. Chandrasekhar. *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*. 1969.
- [105] Nikolaos K. Pavlis, Simon A. Holmes, Steve C. Kenyon, and John K. Factor. The development and evaluation of the earth gravitational model 2008 (egm2008). *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 117(B4), 2012.
- [106] Carl Christian Tscherning and Richard H Rapp. Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations, and deflections of the vertical implied by anomaly degree variance models. *Scientific Interim Report Ohio State Univ., Columbus. Dept. of Geodetic Science.*, 1, 1974.
- [107] Lajos Völgyesi. Interpolation of deflection of the vertical based on gravity gradients. *Civil Engineering*, 37(2) :137–166, 1993.
- [108] Lajos Völgyesi. Test interpolation of deflection of the vertical in hungary based on gravity gradients. *Civil Engineering*, 39(1) :37–75, 1995.
- [109] L Völgyesi. Deflections of the vertical and geoid heights from gravity gradients. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 40(2) :147–159, 2005.
- [110] Christian Hirt, Sten Claessens, Thomas Fecher, Michael Kuhn, Roland Pail, and Moritz Rexer. New ultrahigh-resolution picture of earth's gravity field. *Geophysical Research Letters*, 40(16) :4279–4283, 2013.



## Gradiomètre planaire aéroporté pour l'étude de la gravité en zones littorales

Les variations du champ de gravité aux échelles inférieures à 100 km recèlent beaucoup d'informations utiles en géodésie, géophysique et prospection mais restent peu couvertes. C'est notamment le cas des transitions terre-mer où les données gravimétriques sont éparées et de qualité hétérogène. Pour dépasser ces limitations, nous proposons d'utiliser la gradiométrie en gravimétrie aéroportée et analysons dans cette thèse un nouveau concept de gradiomètre électrostatique : GREMLIT. Dans un premier temps, l'adaptation de cet instrument ultrasensible à l'environnement dynamique d'un avion est étudiée. Les accélérations sur les axes sensibles des accéléromètres composant le gradiomètre doivent, en effet, rester inférieures à  $10e-4m.s^{-2}$  pour éviter la saturation. La solution proposée consiste à fixer GREMLIT sur une plateforme asservie en rotation.

Cette solution est évaluée pour des conditions de vol réelles et validée. Par la suite, nous estimons grâce à un simulateur l'erreur totale sur les gradients de gravité qui seraient déterminés lors d'un relevé aéroporté. Cette simulation comprend notamment une phase indispensable d'étalonnage des biais des gyromètres qui est décrite. Nous montrons qu'il est possible d'atteindre une précision  $1E/(Hz)^{1/2}$  pour une résolution de 2 km après un filtrage gaussien sur les gradients de gravité exprimés dans le repère local. L'utilisation et l'intérêt de la gradiométrie aéroportée pour l'étude des courants côtiers sont finalement discutés. A cet effet, les bases d'une méthode numérique de calcul de la déviation de la verticale à partir d'une grille de mesure de gradient de pesanteur sont présentées.

**Mots-clés :** GRAVIMETRIE AEROPORTEE ; GRADIOMETRE ELECTROSTATIQUE ; SIMULATION NUMERIQUE ;  
GEODESIE MARINE ; INSTRUMENTATION

## Airborne planar gradiometer for gravity study in coastal aera

The variations of the gravitational field at a spatial resolution lower than 100 km is essential to address many geodetic and geophysical questions but still remain poorly covered. It is particularly the case in land-sea transition area where the gravity fiels is poorly covered and the quality is heterogeneous. Here we put forward airborne gravity gradiometry as a convenient way to adress these limitations and we analyze in this thesis a new airborne acceleration gradiometer : GREMLIT. First, the adaptation fo this ultra-sensitive sensor to airborne conditions is studied. To avoid saturation, the accelerations detected by the sensitive axis of the gradiometer's accelerometers must be below  $10e-4m.s^{-2}$ . The suggested solution consists in fixing GREMLIT on a double-gimbal controlled platform.

This solution is evaluated and validated for real flight dynamic conditions. Then, we assess thanks to a numerical simulator the total error on the gravitational gradients that would have been determined during an airborne survey. The simulation includes a gyrometer's bias calibration which is fully described. We show that it is possible to reach a precision  $1E/(Hz)^{1/2}$  for a spatial resolution of 2 km, after an along-track Gaussian filtering in the local reference frame. The interested of airborne gravitational gradiometry for the study of coastal currents is finally discussed. In particular, a numerical method to compute the vertical deflection from gridded gravity gradients data is presented.

**Keywords :** AIRBORNE GRAVIMETRY ; ELECTROSTATIC GRADIOMETER ; NUMERICAL SIMULATION ; MARINE  
GEODESY ; INSTRUMENTATION