

THÈSE

En vue de l'obtention du grade de
Docteur de l'UEVE & l'ENIT

Présentée le 26 Mai 2014 par :

Naim Zoghlami

**Stabilité et stabilisation en temps fini des systèmes dynamiques
interconnectés et problème de consensus en temps fini**

JURY

Rapporteurs :	Lionel Rosier	Pr., Université de Lorraine
	Mohamed Djemai	Pr., Université de Valenciennes
	Mohamed Ali Hammami	Pr., Université de Sfax
Examineurs :	Jean Michel Coron	Pr., Université Pierre-et-Marie-Curie
	Wilfrid Peruquetti	Pr., Ecole Centrale de Lille
Directeurs :	Azgal Abichou	Pr., Ecole Polytechnique de Tunisie
	Lotfi Beji	MCF, HDR, Université d'Evry
Co-encadrant	Rhouma Mlayeh	MA., INSAT Tunis

Thèse préparée aux Laboratoires, IBISC, Université d'Evry val d'Essonne &
LIM, École polytechnique de Tunisie.

Remerciements

J'exprime mes profonds remerciements à mes encadreurs, M. Azgal Abichou, M. Lotfi Beji et M. Rhouma Mlayeh pour les aides compétentes qu'ils m'ont apporté. M. Abichou, votre oeil critique m'a été très précieux pour structurer le travail et pour améliorer la qualité des différentes sections.

Je tiens à remercier Le Professeur Lionel Rosier, le professeur Mohamed Djemai et Le Professeur Mohamed Ali Hammami d'avoir consacré du temps à la lecture minutieuse de ce mémoire et de m'avoir fait part de leurs remarques et suggestions, toujours d'une grande pertinence.

Je remercie également le Professeur Jean-Michel Coron et le professeur Wilfrid Perruquetti d'avoir pris du temps pour examiner ma thèse.

A mon directeur de thèse Monsieur Lotfi Beji

Monsieur Beji, je vous remercie pour votre patience et votre encouragement pour finir ce travail. Je tiens à vous témoigner toute ma reconnaissance pour la confiance que vous m'avez accordée. Sans vous tout ceci n'aurait pas été possible.

A mon cher ami Rhouma Mlayeh

J'aimerais spécialement remercier Rhouma Mlayeh. Merci pour ton temps et ta patience envers mes questions. Tu ne seras jamais oublié.

Je souhaite aussi remercier mes parents mes frères et soeurs, pour leur soutien indéfectible, mes amis, pour tous les moments de détente passés ensemble. C'est grâce à vous que j'ai pu trouvé la force de ramener quand l'objectif semblait si lointain.

j'exprime ma gratitude à mes amis au sein du Laboratoire IBISC.

Table des matières

Table des figures	5
Notations et abréviations	9
1 Introduction générale	11
1.1 Motivations et contributions	11
1.2 Publications associées aux résultats	17
2 Stabilité des systèmes autonomes et non autonomes et théorie des graphes	19
2.1 Introduction	19
2.2 Théorèmes d'existence et d'unicité	20
2.3 Stabilité au sens de Lyapunov	22
2.3.1 Préliminaires et définitions	22
2.3.2 Systèmes autonomes	24
2.3.3 Systèmes non autonomes	26
2.4 Stabilité en temps fini	29
2.4.1 Cas des systèmes autonomes	30
2.4.2 Cas des systèmes non autonomes	33
2.5 Systèmes homogènes	35
2.6 Stabilisation en temps fini	38
2.7 Théorie de graphe	38
2.8 Propriétés du produit de Kronecker	42
2.9 Conclusion	43
Première Partie : Stabilité et stabilisation en temps fini des systèmes perturbés	45

3	Stabilité en temps fini des systèmes perturbés	47
3.1	Introduction	47
3.2	Système non autonome perturbé	48
3.2.1	Perturbation qui s'annule à l'origine	48
3.3	Système autonome perturbé	53
3.3.1	Cas scalaire	53
3.3.2	Cas homogène dans \mathbb{R}^n	55
3.4	Système homogène et T-périodique	57
3.5	Application au modèle d'un drone type XSF	61
3.5.1	Modèle de l'XSF	61
3.5.2	Stabilisation en temps fini	62
3.5.3	Résultats de simulation	67
3.6	Conclusion	68
4	Stabilité et stabilisation en temps fini des systèmes interconnectés	69
4.1	Introduction	69
4.2	Stabilisation en temps fini des systèmes dynamiques interconnectés	70
4.2.1	Systèmes dynamiques avec terme de dérive	71
4.2.2	Systèmes dynamiques sans terme de dérive	77
4.3	Stabilité en temps fini des systèmes interconnectés	79
4.3.1	Généralités sur les modèles interconnectés	80
4.3.2	Exemple d'un couplage structurel	83
4.3.3	De la stabilité à la stabilisation des systèmes interconnectés	83
4.4	Poursuite de trajectoire en temps fini d'un système multi-unicycles	86
4.4.1	Stratégie de poursuite pour un unicycle	87
4.4.2	Résultats de simulation d'un unicycle	89
4.4.3	Stratégie de poursuite d'un système multi-unicycles	90
4.4.4	Résultats de simulation d'un multi-unicycles	92
4.5	Conclusion	95
	Deuxième partie : Problèmes de consensus en temps fini	99
5	Consensus en temps fini des systèmes dynamiques contrôlés	101
5.1	Introduction	101
5.2	Préliminaires et outils	103

5.3	Formulation du problème et objectifs	104
5.4	Consensus associé au système dynamique multi- Σ_1	106
5.5	Consensus associé au système dynamique multi- Σ_2	113
5.6	Exemples d'application	117
5.6.1	Consensus d'un système multi-unicycles	118
5.6.2	Système multi-unicycles sous un graphe orienté	120
5.6.3	Système multi-unicycles sous un graphe non orienté	122
5.6.4	Consensus d'un système multi-agents (double intégrateur)	124
5.6.5	Systèmes double intégrateur sous un graphe orienté	125
5.6.6	Systèmes double intégrateur sous un graphe non orienté	127
5.7	Conclusion	129
6	Consensus moyen et stabilisation d'une formation en temps fini	131
6.1	Introduction	131
6.2	Préliminaires et outils	133
6.3	Formulation du problème et objectifs	133
6.4	Consensus moyen du système multi- Σ_1	136
6.5	Consensus moyen du système multi- Σ_2	139
6.5.1	Multi- Σ_2 : cas d'un terme de dérive linéaire	140
6.5.2	Multi- Σ_2 : cas d'un terme de dérive non linéaire	142
6.6	Stabilisation du système multi- Σ_1 en formation	144
6.7	Stabilisation du système multi- Σ_2 en formation	146
6.8	Exemples d'application	149
6.8.1	Consensus moyen d'un système multi-unicycles	150
6.8.2	Consensus moyen d'un multi-systèmes basé sur un second ordre	152
6.8.3	Consensus moyen d'un système multi-pendules	154
6.8.4	Résultats sur la stabilisation en temps fini d'une formation	155
6.9	Conclusion	157
7	Conclusion générale	159
	Bibliographie	163

Table des figures

2.1	Comportement de la solution en $x(\cdot)$ (stabilité)	25
2.2	Comportement de la solution en $x(\cdot)$ (stabilité en temps fini).	31
2.3	Exemple d'un graphe de connexion entre 4 agents.	40
2.4	Exemples de graphe : graphe orienté (à gauche), graphe non orienté (à droite).	40
3.1	stabilité en temps fini du système (3.10)	52
3.2	système non perturbé	53
3.3	système perturbé	53
3.4	Solution du système non perturbé $\dot{x} = -\varphi_{\frac{1}{3}}(x)$	55
3.5	Solution du système perturbé (3.14)	55
3.6	Model de l'XSF à quatre rotors dont deux sont orientables.	62
3.7	Stabilisation de l'origine pour deux états initiaux différents et à une altitude en z atteinte.	67
4.1	Diagramme de plusieurs systèmes interconnectés	72
4.2	Graphe \mathcal{G} associé aux 4 unicycles.	76
4.3	Dynamique y_i avec u_i	76
4.4	Dynamique y_i sans u_i	76
4.5	Dynamique z_i avec u_i	77
4.6	Dynamique z_i sans u_i	77
4.7	Stabilité en temps fini du système interconnecté (4.23)	84
4.8	Les erreurs en z_i	90
4.9	Plan de phase en (x, y)	90
4.10	Graphe \mathcal{G} associé aux 4 unicycles.	92
4.11	Erreurs en $z_{1,i} = (x_i - x_r)$ avec u^{inter}	94
4.12	Erreurs en $z_{1,i} = (x_i - x_r)$ sans u^{inter}	94
4.13	Erreurs en $z_{2,i} = (y_i - y_r)$ avec u^{inter}	95
4.14	Erreurs en $z_{2,i} = (y_i - y_r)$ sans u^{inter}	95
4.15	Erreurs en $z_{3,i} = \tan(\theta_i - \theta_r)$ avec u^{inter}	95
4.16	Erreurs en $z_{3,i} = \tan(\theta_i - \theta_r)$ sans u^{inter}	95
4.17	Commandes $u_{1,i}$ (m/s) avec u^{inter}	95
4.18	Commandes $u_{1,i}$ (m/s) sans u^{inter}	95
4.19	Commandes $u_{2,i}$ (rad/s) avec u^{inter}	96
4.20	Commandes $u_{2,i}$ (rad/s) sans u^{inter}	96
4.21	Plan de phase en (x, y) avec u^{inter}	96

4.22	Plan de phase en (x, y) sans u^{inter}	96
5.1	\mathcal{G} Graphe orienté de 3 agents (a), et non orienté de 4 agents (b).	118
5.2	Consentement d'un point commun par les 3 unicycles sous la matrice de commande C_1 (graphe \mathcal{G} orienté).	121
5.3	Consentement d'un point commun par les 3 unicycles sous la matrice de commande C_2 (graphe \mathcal{G} orienté).	121
5.4	Comportement des protocoles u_i avec la matrice de commande C_1 (graphe \mathcal{G} orienté)	121
5.5	Comportement des protocoles u_i avec la matrice de commande C_2 (graphe \mathcal{G} orienté)	121
5.6	Comportement des protocoles w_i avec la matrice de commande C_1 (graphe \mathcal{G} orienté)	122
5.7	Comportement des protocoles w_i avec la matrice de commande C_2 (graphe \mathcal{G} orienté)	122
5.8	Consentement d'un point commun par les 4 unicycles sous la matrice de commande C_1 (graphe \mathcal{G} non orienté).	123
5.9	Consentement d'un point commun par les 4 unicycles sous la matrice de commande C_2 (graphe \mathcal{G} non orienté).	123
5.10	Comportement des protocoles u_i avec la matrice de commande C_1 (graphe \mathcal{G} non orienté)	123
5.11	Comportement des protocoles u_i avec la matrice de commande C_2 (graphe \mathcal{G} non orienté)	123
5.12	Comportement des protocoles w_i avec la matrice de commande C_1 (graphe \mathcal{G} non orienté)	124
5.13	Comportement des protocoles w_i avec la matrice de commande C_2 (graphe \mathcal{G} non orienté)	124
5.14	Positions de 3 agents réalisant un consensus avec $v_i(0) = 0$ sous un graphe orienté.	126
5.15	Vitesses de 3 agents réalisant un consensus avec $v_i(0) = 0$ sous un graphe orienté.	126
5.16	Positions de 3 agents réalisant un consensus avec $v_i(0) \neq 0$ sous un graphe orienté.	127
5.17	Vitesses de 3 agents réalisant un consensus avec $v_i(0) \neq 0$ sous un graphe orienté.	127
5.18	Protocoles en accélérations avec $v_i(0) = 0$ sous un graphe orienté.	127
5.19	Protocoles en accélérations avec $v_i(0) \neq 0$ sous un graphe orienté.	127
5.20	Positions de 4 agents réalisant un consensus avec $v_i(0) = 0$ sous un graphe non orienté.	129
5.21	Vitesses de 4 agents réalisant un consensus avec $v_i(0) = 0$ sous un graphe non orienté.	129
5.22	Positions de 4 agents réalisant un consensus avec $v_i(0) \neq 0$ sous un graphe non orienté.	129
5.23	Vitesses de 4 agents réalisant un consensus avec $v_i(0) \neq 0$ sous un graphe non orienté.	129

5.24	Protocoles en accélérations avec $v_i(0) = 0$ sous un graphe non orienté. . . .	130
5.25	Protocoles en accélérations avec $v_i(0) \neq 0$ sous un graphe non orienté. . . .	130
6.1	\mathcal{G} pour un système avec 4 agents.	149
6.2	Positions x_i réalisant un consensus moyen instationnaire.	151
6.3	Positions y_i réalisant un consensus moyen instationnaire.	151
6.4	Rotations θ_i réalisant un consensus moyen instationnaire.	151
6.5	Objectif du consensus moyen en $\ x^i(t) - \chi(t)\ $	151
6.6	Trajectoire moyenne en position atteinte par 4 agents.	153
6.7	Trajectoire moyenne en vitesse atteinte par 4 agents.	153
6.8	Energie cinétique moyenne consentie par 4 agents.	153
6.9	Positions angulaires θ_i réalisant un consensus moyen instationnaire.	155
6.10	Vitesses angulaires $\dot{\theta}_i$ réalisant un consensus moyen instationnaire.	155
6.11	Stabilisation de la position en x_i	156
6.12	Stabilisation de la position en y_i	156
6.13	Entrée de commande en vitesse linéaire u_i	156
6.14	Stabilisation de la rotation en θ_i	157
6.15	Entrée de commande en vitesse angulaire w_i	157

Notations et abréviations

\mathbb{R}	Corps des réels
\mathbb{R}_+	Ensemble des nombres réels positifs
\mathbb{R}^n	\mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n
$\mathbb{R}^{n \times n}$	l'ensemble des matrices de dimension $n \times n$
$\text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$	matrice diagonale
$I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$	est la matrice identité
\otimes	produit de Kronecker
$\ \cdot\ $	Norme euclidienne sur \mathbb{R}^n
$C^0(E, F)$	Ensemble des fonctions continues de E dans F
$C^k(E, F)$	Ensemble des fonctions de classe k de E dans F
$CL^0(E, F)$	Ensemble des fonctions de E dans F localement Lipschitziennes sur $E \setminus \{0\}$
$CL^k(E, F) =$	$C^0(E, F) \cap C^k(E \setminus \{0\}, F)$
$\text{sgn}(\cdot)$	la fonction signe
$\varphi_a(x) :$	$\varphi_a(x) = \text{sgn}(x) x ^a, x \in \mathbb{R}$
$x^i :$	$x^i = (x_1^i, \dots, x_n^i)^T \in \mathbb{R}^n$
$\mathbf{x} :$	$\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^N)^T$ est le vecteur d'états dans \mathbb{R}^{nN}
$\mathbf{1}_n :$	$\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)^T$
$\phi_\alpha(x^i) :$	$\phi_\alpha(x^i) = (\varphi_\alpha(x_1^i), \dots, \varphi_\alpha(x_n^i))^T$
EDO	Equation différentielle ordinaire
STF	Stable en temps fini

Chapitre 1

Introduction générale

Le but de cette thèse est d'apporter une contribution dans les domaines suivants : stabilité en temps fini des systèmes perturbés, stabilité et stabilisation en temps fini des systèmes dynamiques interconnectés, problèmes de consensus et consensus moyen en temps fini et la stabilisation en temps fini d'une formation. On s'intéresse particulièrement au couplage structurel dans un modèle et à l'interconnexion entre plusieurs systèmes en formation. La dynamique de chaque système est régie par une équation différentielle ordinaire du premier ordre fortement non linéaire.

1.1 Motivations et contributions

Dans un premier temps, nous considérons un schéma de couplage structurel dans le modèle d'un système, traduisant une connexion interne. Par rapport au modèle nominal, nous spécifions la perturbation. Par conséquent, nous analysons la stabilité en temps fini d'un système bouclé perturbé de type autonome et non autonome. Pour assurer la stabilité en temps fini d'un groupe formé par plusieurs systèmes dynamiques évoluant dans un voisinage et afin de distinguer la perturbation, la deuxième démarche consiste à designer la commande et la topologie de la formation. On montre que la perturbation est dépendante de l'interconnexion. Comme démarche, il s'agit d'analyser la stabilité et la stabilisation en temps fini des systèmes dynamiques interconnectés.

Afin de répondre à des objectifs liés aux systèmes en formation, nous allons énoncer et

analyser les problèmes de *consensus* et le *consensus moyen* auxquels on cherche à associer les *protocoles* ou les commandes appropriés. Nos schémas d'étude se baseront sur des modèles dynamiques affines à la commande. Par conséquent, nous allons étudier le cas où les modèles sont identiques traduisant un multi-systèmes homogène et le cas où les modèles sont différents impliquant un multi-systèmes hétérogène.

Les outils et les méthodes qui vont être développés s'appuient sur le contrôle des systèmes autonomes et non autonomes et les systèmes dynamiques affines à la commande évoluant sous une topologie d'interconnexion donnée. Ils se distinguent par les deux parties suivantes :

- **Partie I** : Stabilité et stabilisation en temps fini des systèmes perturbés
 - (a) : *Systèmes autonomes et non autonomes perturbés.*
 - (b) : *Systèmes dynamiques interconnectés.*
- **Partie II** : Problèmes de consensus et stabilisation en temps fini d'une formation
 - (c) : *Consensus en temps fini.*
 - (d) : *Consensus moyen et stabilisation d'une formation en temps fini.*

Par la suite, nous situons les parties I et II par rapport aux résultats de la littérature et pour répondre aux problèmes sous-jacents, nous décrivons les résultats obtenus sous forme de contributions.

En vue de l'élaboration d'outils spécifiques à *la stabilité et à la stabilisation en temps fini des systèmes perturbés* (partie I), dans le cas autonome et non autonome, rappelons qu'en 1986 Haimo [16] était le premier auteur qui s'est intéressé à la notion de stabilité en temps fini. L'auteur s'est intéressé aux systèmes scalaires autonomes de la forme $\dot{x} = f(x)$ en donnant une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité en temps fini. A partir de 1995, plusieurs contributions théoriques ont été apportées par Bhat et Bernstein en donnant une condition nécessaire et suffisante de stabilité en temps fini pour les systèmes homogènes et autonomes avec unicité à droite des solutions [17] [18] [20] [19] [21]. En s'inspirant des travaux de Bhat, Moulay [22] a développé la notion de stabilité en temps fini des systèmes non autonomes : $\dot{x} = f(t, x)$. Plus tard, Haddad [24] a abordé cette même notion de stabilité en proposant le théorème inverse de Lyapunov pour les

systèmes non autonomes. Cependant, de point de vue pratique, la résolution de problèmes de stabilité/stabilisation en temps fini en utilisant les résultats énoncés ci-dessus n'est pas triviale. Car, il est difficile de distinguer explicitement la bonne fonction de Lyapunov par rapport aux complexités du modèle. Afin de s'affranchir des difficultés rencontrées lors de la construction d'une fonction de Lyapunov pour le cas d'un système non autonome, nous utilisons la technique de moyennisation. Cette technique est couramment utilisée pour répondre aux problèmes de stabilité exponentielle [30] et asymptotique [29]. Notre objectif consiste à étendre ces résultats aux problèmes de stabilité en temps fini dans le cas d'un système homogène et T-périodique.

Contribution (chapitre 3). Nous reprenons le problème posé en (a). Dans le cas d'un système autonome/non autonome, nous proposons des techniques qui garantissent la stabilité en temps fini pour certaines classes de systèmes perturbés. Nous introduisons le cas d'une perturbation qui s'annule et celle qui ne s'annule pas à l'origine. Pour un système non autonome homogène et T-périodique, par le biais d'une transformation adéquate et la technique de moyennisation, l'analyse conduit à un système autonome perturbé auquel on associe des conditions suffisantes conduisant à la stabilité en temps fini. Comme application en simulation, nous procéderons à la stabilisation de l'équilibre du modèle non linéaire et sous-actionné d'un drone XSF du laboratoire.

Par rapport à la première partie de ce mémoire, nous allons nous intéresser aux systèmes perturbés suite à une interaction par rapport au voisinage. Au delà d'une simple commande décentralisée, nous associons une topologie comme plate-forme d'échange d'informations sur l'état de chaque système. Ainsi, nous posons le problème lié à la stabilité et à la stabilisation en temps fini des *systèmes dynamiques interconnectés* (b). Rappelons que la stabilité asymptotique des systèmes dynamiques interconnectés a été abordée par Khalil [30] et Fax [76]. Sans évoquer la notion d'interconnexion qui parvient généralement d'une commande, Khalil a présenté la dynamique de la i^{me} variable d'état d'un système sous la forme $\dot{x}_i = f_i(t, x_i) + g_i(t, x)$. Par rapport au système nominal, il est clair que ce système présente un terme d'interconnexion lié à $g_i(t, x)$ qui est aussi considéré comme une perturbation. Le résultat de stabilité asymptotique a été établi en se basant sur les

techniques de Lyapunov. Ces résultats parviennent à maîtriser une perturbation liée au couplage structurel et restent généraux, surtout lorsqu'on veut s'attaquer aux systèmes en réseau.

Plus tard, pour l'étude de systèmes dynamiques interconnectés, Fax et Murray [76] ont posé clairement le i^{me} modèle dynamique d'un système affine en la commande, soit $\dot{x}_i = f_i(x_i) + Bu_i$, avec B une matrice constante. Une commande décentralisée en u_i qui assure l'interconnexion entre plusieurs systèmes a été proposée et le résultat est de type asymptotique.

Dans l'optique où la commande réalisera l'interconnexion entre plusieurs systèmes évoluant dans un voisinage, nous proposons de résoudre la problématique posée en **(b)**, soit : *la stabilité et la stabilisation en temps fini des systèmes dynamiques interconnectés*. Nous allons reprendre les résultats de Fax et Murray [76] dans le cas où la matrice de commande B est dépendante de l'état. Nous étudions la stabilisation des systèmes dynamiques interconnectés avec et sans termes de dérive. En outre, nous étendrons les résultats présentés par Khalil [30] vers une stabilité en temps fini en mettant en évidence la dépendance entre la perturbation et un graphe de connexion, adopté dans le cas d'un multi-systèmes.

Contribution (chapitre 4). Il s'agit de concevoir une commande qui résout le problème posé en **(b)**. Pour les systèmes dynamiques affines à la commande présentés par Fax [76], nous présentons un résultat de stabilisation en temps fini avec une matrice de commande B dépendante de l'état. On montre que la réalisation des résultats de stabilité nécessite une fonction de Lyapunov de type quadratique. Etant donnée la forme de la commande u_i , pour prouver nos résultats, l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique peut ne pas être triviale. Comme alternative, nous ramenons l'étude à celle présentée par Khalil [30] en proposant des conditions suffisantes qui assurent la stabilité en temps fini des systèmes dynamiques interconnectés.

Afin de répondre aux besoins d'une connexion complexe introduisant un nombre important de systèmes dynamiques contrôlés, on va s'intéresser aux cas multi-agents en formation. Comme cela est décrit dans la partie II de ce mémoire, nous analysons une formation particulière à l'aide des protocoles conçus afin de répondre aux *problèmes de*

consensus et consensus moyen en temps fini (c). Ces protocoles seront adaptés pour achever la stabilisation de l'équilibre en temps fini d'une formation. D'où la problématique qu'on pose en (d).

Rappelons que l'évolution d'une flotte de systèmes autonomes dans un environnement complexe devra préserver à la fois une cohésion au sein du groupe, un échange permanent de données, une stabilité locale de chaque agent et une stabilité globale du système multi-agents. L'entente sur une valeur commune, un lieu de rendez-vous ou une répartition de la tâche, se traduit par la résolution d'un problème de *consensus* et où la commande à concevoir s'appelle *protocole*. On évoquera le *consensus moyen* dans le cas où la valeur commune est la moyenne, définie à partir des conditions initiales ou l'état instantané.

Dans la littérature, les problèmes de consensus sont étudiés à travers des modèles simples où la dynamique d'un agent i est considérée comme celle d'un point matériel de la forme $\dot{x}_i = u_i$ ou $\ddot{x}_i = u_i$ (plus de détails sont dans [86][60][63][93][67]). Les résultats asymptotiques ont été étendus aux problèmes de consensus et consensus moyen en temps fini en se référant à [87] [88] [90] [91] [94].

Cependant, les principaux défis dans le contrôle des systèmes dynamiques en réseau sont l'hétérogénéité des composants, la non linéarité du modèle et la grande dimension du vecteur d'état. Par rapport à la littérature, il existe deux type de modèles décrivant la dynamique du i^{me} système en réseau de la forme $\dot{x}_i = f_i(x_i) + B(x_i)u_i$ et $\dot{x}_i = B(x_i)u_i$ où u_i est le protocole que l'on cherche à élaborer et répondant aux problèmes de consensus en temps fini. Il est important de noter que les structures de f_i et B peuvent varier d'un système à l'autre. Selon la problématique posée, on distinguera un multi-systèmes homogène et hétérogène.

Contribution (chapitre 5). On cherche à résoudre le problème posé en (c) dans le cas d'un modèle dynamique affine à la commande. Etant donné N systèmes dynamiques avec et sans termes de dérive et un graphe de connexion orienté et non orienté, définissant une topologie stationnaire d'évolution, nous proposons des protocoles solvant les problèmes de consensus en temps fini. Pour prouver nos approches, nous utilisons la théorie de stabilité en temps fini et la méthode de Lyapunov.

Dans la littérature, le consensus moyen statique a été étudié dans ([63], [96], [100]) où les auteurs proposent des protocoles linéaires, alors que dans ([90], [98],[99]) les protocoles sont de forme non linéaires. Pour le consensus moyen dynamique sous un protocole non linéaire, on peut se référer à ([99]). D'une manière générale, la dynamique de l'agent reste simple ce qui permet de répondre aux problèmes de consensus et consensus moyen en positions et en vitesses d'un nombre important d'agents. Cependant, si la dynamique de l'agent est non linéaire et le vecteur de son état est de dimension élevée, l'analyse du protocole n'est pas triviale. On cherche à analyser deux formes de protocoles attendus pour les problèmes de consensus moyen et la stabilisation d'un groupe en formation. Afin de répondre aux problèmes de consensus moyen et la stabilisation d'une formation, l'objectif est de reconduire nos investigations pour les deux types de systèmes dynamiques dont le premier est de la forme $\dot{x}_i = f_i(x_i) + B(x_i)u_i$ et le second est décrit par $\dot{x}_i = B(x_i)u_i$ où u_i est le protocole.

Contribution (chapitre 6). Le problème du consensus moyen tel qu'il a été posé dans ce manuscrit s'est avéré différent de celui étudié dans la littérature. Au delà d'un comportement moyen du groupe qui présente une valeur moyenne fixe (moyenne des conditions initiales des agents), nos résultats achèvent un consentement instantané (trajectoire moyenne instantanée). De plus, par rapport aux objectifs d'un groupe en terme d'un comportement collectif et stable, nos deux modèles d'étude ne sont pas explicités et couvrent les modèles cinématiques/dynamiques de plusieurs agents autonomes. On note également que le fait de s'attaquer à la stabilité d'un groupe d'agents, permet de conclure sur la stabilité de chaque agent alors que la forme de l'entrée de commande n'a pas un objectif directement compensatoire des termes de dérive.

Ce mémoire se distingue par les deux parties I et II citées ci-dessus auxquelles on associera quatre chapitres (deux chapitres par partie). En outre, sous forme de chapitre, l'introduction générale, les outils mathématiques et la conclusion générale complèteront le manuscrit de cette thèse.

1.2 Publications associées aux résultats

Les résultats qui vont être détaillés dans ce mémoire ont donné lieu aux publications suivantes.

1. N.Zoghlami, L. Beji, R. Mlayeh, and A. Abichou, *Finite time stability of perturbed systems*, IEEE Multi-conference on Systems and Control (MSC 12), Dubrovnick, Croatia, 2012.
2. N. Zoghlami, L. Beji, R. Mlayeh, and A. Abichou, *Local finite time stability and stabilization of interconnected systems*, 9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS 13), Toulouse, France, 2013.
3. N. Zoghlami, L. Beji, R. Mlayeh, and A. Abichou, *Finite time stabilization of interconnected nonlinear systems*, IEEE Multi-conference on Systems and Control (MSC 13), Hyderabad, India, 2013.
4. N. Zoghlami, L. Beji, R. Mlayeh, and A. Abichou, *Finite time consensus and stabilization of networked nonlinear systems* 52nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC 13), Florence, Italy, 2013.
5. N. Zoghlami, L. Beji, R. Mlayeh, and A. Abichou, *Finite time consensus of networked nonlinear systems under directed graph* Accepted to the European Control Conference (ECC 14), Strasbourg, France, 2014.
6. N. Zoghlami, L. Beji, R. Mlyah, and A. Abichou, *Finite-time average consensus in networked nonlinear dynamic systems*, Submitted to the 53rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Los Angeles, USA, 2014.
7. N. Zoghlami, L. Beji, R. Mlayeh, and A. Abichou, *Finite-time consensus in networked dynamic systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, en révision, janvier 2014.
8. N. Zoghlami, L. Beji, R. Mlayeh, and A. Abichou, *Average consensus and stability analysis in networked dynamic systems*, Automatica, en révision, janvier 2014.

Chapitre 2

Stabilité des systèmes autonomes et non autonomes et théorie des graphes

2.1 Introduction

Aujourd'hui, la stabilité asymptotique et exponentielle des équations différentielles ordinaire (EDO) est bien maîtrisée. Au 19^{ème} siècle, le célèbre Alexander Mikhailovič Lyapunov a été le premier qui a avoir formulé mathématiquement cette idée. Lyapunov a montré que l'existence de certaines fonctions, définie positive, prouvait la stabilité pour les EDO continues. Pour permettre d'étudier analytiquement le problème de stabilité d'un point d'équilibre, Lyapunov [45] a généralisé la notion d'énergie en regardant l'évolution de cette dernière. La méthode de Lyapunov, consiste à étudier la stabilité du système sans connaître la solution explicite du système étudié. En effet, le procédure de base est de générer une fonction "de type énergie" dite fonction de Lyapunov pour le système dynamique et d'en examiner sa dérivée temporelle le long de ces trajectoire. Ce qui traduit physiquement l'idée que si l'énergie totale du système est dissipée de manière continue alors le système devra rejoindre un point d'équilibre dans un temps infini (stabilité asymptotique) ou dans un temps fini (stabilité en temps fini). En d'autre termes, le système est stable si son énergie diminue et elle est minimale à l'équilibre. Plus tard en 1963 J. Kurzweil a démontré dans [44] l'équivalence entre l'existence de ces fonctions, appelées fonctions de Lyapunov, et la stabilité pour les EDO continues.

Ce chapitre exhibe les notions générales et les outils mathématiques qui permettent de distinguer la stabilité au sens de Lyapunov dans le cas asymptotique et dans le cas temps fini. Nous décrivons entre autre les résultats théoriques de stabilité associés aux systèmes autonomes et non autonomes. Nous introduisons des exemples simples pour clarifier quelques résultats. Comme le montre le sujet de cette thèse, nous mettons d'avantage l'accent sur l'importance de la stabilité en temps fini et les techniques conduisant à une telle conclusion. On ne peut pas parler des systèmes interconnectés, des systèmes en consensus et des systèmes en formation sans faire appel à des topologies d'interconnexion, appelées aussi graphes. Ce chapitre, dans sa dernière partie, détaille la notion d'interconnexion et les systèmes en réseau. Nous introduisons la notion du graphe orienté et non-orienté et le graphe stationnaire. Enfin nous faisons appel à quelques exemples simples avant d'attaquer les objectifs d'une interconnexion par rapport aux systèmes dynamiques qu'on traite.

Dans un premier temps nous introduisons les théorèmes d'existence et d'unicité liés aux systèmes autonomes et non autonomes.

2.2 Théorèmes d'existence et d'unicité

On désigne par Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}^*$) et par I un intervalle non vide de \mathbb{R} , non borné à droite.

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue, on lui associe le système autonome :

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue, on lui associe le système non-autonome :

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.2}$$

$x(t, t_0, x_0)$ désigne une solution $x(t)$ du système (2.1) ou du système (2.2) telle que $x(t_0) = x_0$

Théorème 2.1 (Arzela Péano)[30] On considère le système (2.2). Alors, pour tout point $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ passe au moins une solution maximale $x(t, t_0, x_0)$ définie sur $J \subset I$.

Théorème 2.2 (Carathéodory)[30] Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

- (i) pour tout $x \in \Omega$, $\varphi_y : t \in I \mapsto f(t, x)$ est mesurable.
- (ii) pour presque tout t , $\phi_t : x \in \Omega \mapsto f(t, x)$ est continue.
- (iii) pour tout compact K de Ω , il existe $m_k : I \mapsto \mathbb{R}_+$ intégrable sur I telle que :

$$\forall (t, x) \in I \times K, \quad |f(t, x)| \leq m_k(t)$$

On considère le système :

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in I$$

dit système de Carthéodory. Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in \overset{\circ}{I} \times \Omega$ passe au moins une solution $x(t, t_0, x_0)$ définie pour tout t .

Définition 2.3 [30] Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, on dit que

1. f est localement lipschitzienne par rapport à la première variable, si pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) dans $I \times \Omega$ et une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall ((t_1, y), (t_2, y)) \in V^2, \quad \|f(t_1, y) - f(t_2, y)\| \leq c \|t_1 - t_2\|$$

2. f est localement lipschitzienne en la deuxième variable, si pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) dans $I \times \Omega$ et une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall ((t, y_1), (t, y_2)) \in V^2, \quad \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq c \|y_1 - y_2\|$$

Théorème 2.4 (Cauchy-Lipshitz)[30] Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue, f est localement lipschitzienne en la deuxième variable, on considère le système (2.2), alors pour tout point $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ passe une seule solution maximale $x(t, t_0, x_0)$ définie sur $J \subset I$

2.3 Stabilité au sens de Lyapunov

Par définition, la stabilité signifie que si un système est en équilibre, il restera dans cet état quand le temps varie. L'analyse de la stabilité au sens de Lyapunov consiste en l'étude des trajectoires du système quand l'état initial est proche d'un état d'équilibre. L'objectif de la stabilité est de tirer des conclusions quant au comportement du système sans calculer explicitement ses trajectoires. Afin d'étudier les résultats classiques sur la notion de stabilité au sens de Lyapunov, nous devons rappeler les définitions suivantes.

2.3.1 Préliminaires et définitions

Définition 2.5 *Un point $\bar{x} \in \Omega$ est un **point d'équilibre**, ou point singulier du système (2.1) (resp. de (2.2)) si $f(\bar{x}) = 0$ (resp. $\forall t \in I, f(t, \bar{x}) = 0$).*

On considère toujours l'équilibre en 0. Pour le cas général, il suffit de faire une translation.

Définition 2.6 *On considère le système (2.1), et $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ayant des dérivées partielles sur Ω . On définit la dérivée totale \dot{V} pour le système (2.1) par :*

$$\dot{V}(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(y) f_i(y)$$

Définition 2.7 *On considère le système (2.2), et $V : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ayant des dérivées partielles sur $I \times \Omega$. On définit la dérivée totale \dot{V} pour le système (2.2) par :*

$$\dot{V}(y) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, y) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, y) f_i(t, y)$$

Définition 2.8 *Soient $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ et $g : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application continue, on dit que g appartient à la classe \mathcal{K} si :*

(i) g est strictement croissante,

(ii) $g(0) = 0$.

On dit que g appartient à la classe \mathcal{K}^∞ si g vérifie (i), (ii) avec $a > 0$ arbitraire et

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = +\infty$$

Définition 2.9 Une fonction $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite semi-définie positive (resp. semi-définie négative) s'il existe un voisinage \mathcal{V} de 0 tel que :

1. $v(0) = 0$
2. $\forall y \in \mathcal{V}, v(y) \geq 0$ (resp. $v(y) \leq 0$).

Elle est dite définie positive (resp. définie négative) s'il existe un voisinage \mathcal{V} de 0 tel que :

1. $v(0) = 0$
2. $\forall y \in \mathcal{V} \setminus \{0\}, v(y) > 0$ (resp. $v(y) < 0$).

Définition 2.10 Une fonction $v : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite semi-définie positive (resp. semi-définie négative) s'il existe un voisinage \mathcal{V} de 0 tel que :

1. $\forall t \in I, v(t, 0) = 0$
2. $\forall t \in I, \forall y \in \mathcal{V}, v(t, y) \geq 0$ (resp. $v(t, y) \leq 0$).

Elle est dite définie positive (resp. définie négative) s'il existe un voisinage \mathcal{V} de 0 tel que :

1. $\forall t \in I, v(t, 0) = 0$
2. il existe $v_0 : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ définie positive telle que :

$$\forall t \in I, \forall y \in \mathcal{V}, \quad v(t, y) \geq v_0(y)$$

$$(resp. v(t, y) \leq v_0(y))$$

Définition 2.11 Une fonction $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est radialement non bornée si :

$$\lim_{\|y\| \rightarrow +\infty} v(y) = +\infty$$

Une fonction $v : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est radialement non bornée si

$$\lim_{\|y\| \rightarrow +\infty} v(t, y) = +\infty$$

uniformément en t , c'est à dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall y \in \mathbb{R}^n, (\|y\| > \delta) \Rightarrow (\forall t \in \mathbf{I}, v(t, y) > \epsilon)$$

Définition 2.12 Une fonction $v : \mathbf{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est décroissante si

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} v(t, y) = 0$$

uniformément en t , c'est à dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall y \in \Omega, (\|y\| < \delta) \Rightarrow (\forall t \in \mathbf{I}, v(t, y) < \epsilon)$$

2.3.2 Systèmes autonomes

Nous considérons le cas des systèmes autonomes donnés par l'équation (2.1).

Définition 2.13 [30] L'origine est **stable** pour le système (2.1) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que si $\|x(0)\| < \delta$ alors chaque solution $x(t)$ satisfait $\|x(t)\| < \epsilon$ pour tout $t \geq 0$.

Définition 2.14 [30] L'origine du système (2.1) est **asymptotiquement stable** si l'origine du système (2.1) est stable et si $\exists \delta_0 > 0$ tel que $\|x(0)\| < \delta_0$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$.

Cette définition est illustrée sur la figure 2.1.

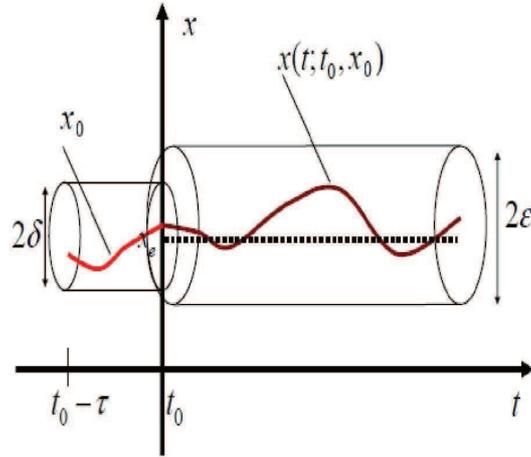
Par la suite, on introduit le théorème de Lyapunov associé aux systèmes autonomes.

Théorème 2.15 [30] Supposons que l'origine est un point d'équilibre du système autonome (2.1). S'il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ de 0 et une fonction

$$V : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

continue, ayant des dérivées partielles continues telles que :

i) V soit définie positive

FIGURE 2.1 – Comportement de la solution en $x(\cdot)$ (stabilité)

ii) la dérivée totale \dot{V} pour (2.1) soit semi définie négative, alors 0 est stable, V s'appelle une **fonction de Lyapunov**. De plus si la dérivée totale \dot{V} pour (2.1) est définie négative alors 0 est asymptotiquement stable, V s'appelle une **fonction stricte de Lyapunov**.

Exemple 2.16 On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1x_2 - x_2^3 \end{cases} \quad (2.3)$$

Pour déterminer la stabilité de l'équilibre 0, posons

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2$$

On a $V(0) = 0$ et V est définie positive. La dérivée de V pour le système (2.3) vaut

$$\dot{V}(y_1, y_2) = y_1(-y_1^3 - y_2^2) + y_2(y_1y_2 - y_2^3) = -(y_1^4 + y_2^4)$$

\dot{V} est clairement définie négative. D'après le théorème 2.15, on en déduit que 0 est asymptotiquement stable.

2.3.3 Systèmes non autonomes

Les notions de stabilité et de stabilité asymptotique d'un point d'équilibre sont essentiellement les mêmes que celles mises en place dans la définition précédente des systèmes autonomes. L'élément nouveau ici est que la solution de système non autonome peut dépendre à la fois de t et de t_0 . Par conséquent, le comportement de la stabilité du point d'équilibre dépend, en général, de t_0 .

Définition 2.17 [30] *L'origine du système (2.2) est dit*

- i) **stable** si pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $t_0 \geq 0$, il existe $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que si $\|x(0)\| < \delta(\varepsilon, t_0)$ alors chaque solution $x(t)$ satisfait $\|x(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$.

- ii) **asymptotiquement stable** si il est stable et pour tout $t_0 \geq 0$, il existe une constante positive $c(t_0)$ telle que si $\|x(t_0)\| < c(t_0)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$.

Définition 2.18 [30] *L'origine du système (2.2) est uniformément asymptotiquement stable si :*

- i) *l'origine est uniformément stable i.e pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que si $\|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon)$ alors $\|x(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$.*
- ii) *il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x(t_0)\| < \delta$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$.*

Par la suite, on introduit le théorème de Lyapunov associé aux systèmes non autonomes.

Théorème 2.19 [30] *Soit l'origine un point d'équilibre du système non autonome (2.2), s'il existe un voisinage $\mathcal{V}_{t_0} \subset \mathbb{R}^n$ de 0 et une fonction*

$$V : \mathcal{V}_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

continue, ayant des dérivées partielles continues telle que :

i) V soit définie positive

ii) la dérivée totale \dot{V} pour (2.2) est négative (respectivement définie négative)

alors 0 est uniformément stable. De plus si on a :

iii) V est décroissante (Définition 2.12). Alors 0 est uniformément stable (respectivement uniformément asymptotiquement stable).

Si de plus :

iv) $\Omega = \mathbb{R}^n$ et si V est radialement non bornée, alors 0 est globalement uniformément stable (respectivement globalement uniformément asymptotiquement stable).

Exemple 2.20 On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - e^{-2t}x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \quad (2.4)$$

Pour déterminer la stabilité de l'équilibre 0, posons

$$V(t, y) = y_1^2 + (1 + e^{-2t})y_2^2$$

Cette fonction est définie positive, car elle domine la fonction positive

$$V(y) = y_1^2 + y_2^2$$

indépendante de t . Elle est aussi décroissante car elle est dominée par une fonction définie positive

$$V(y) = y_1^2 + 2y_2^2$$

indépendante de t . De plus, la dérivée de V pour le système vaut

$$\dot{V}(t, y) = -2(y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2(1 + 2e^{-2t}))$$

ce qui montre que

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, y) &\leq -2(y_1^2 - y_1 y_2 + y_2^2) \\ &\leq -(y_1 - y_2)^2 - y_1^2 - y_2^2\end{aligned}$$

On en déduit alors que \dot{V} est définie négative, et que 0 est uniformément asymptotiquement stable.

Maintenant, on présente le théorème inverse de Lypaunov. (pour plus de détails voir [47])

Théorème 2.21 *On considère le système (2.2) avec $\Omega = \mathbb{R}^n$, $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n)$ et f est localement lipshitzienne en la deuxième variable où 0 est un équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable. Alors, il existe une fonction de Lyapunov*

$$V : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$$

associée au système telles que :

1. V est décroissante (Définition 2.12),
2. V est localement lipshitzienne en la première et la deuxième variable,
3. \dot{V} est définie négative,
4. V est radialement non bornée.

On rappelle le théorème de Hahn

Théorème 2.22 [46] *Si l'équilibre 0 d'un système différentiel autonome (2.1) ou non autonome (2.2) périodique en t est asymptotiquement stable¹, alors il est uniformément asymptotiquement stable.*

Dans un second temps, nous rappelons la notion de stabilité en temps fini. Cette stabilité, qui n'est qu'une extension de la stabilité asymptotique, est cependant très importante du point de vue pratique et industriel, car elle permet d'estimer au bout de combien de temps le système atteint la stabilité.

1. on a le même résultat si l'origine est stable en temps fini [46]

2.4 Stabilité en temps fini

La notion de stabilité en temps fini est assez intuitive : l'idée consiste à certifier que le système, au bout d'un temps bien déterminé, atteint le point d'équilibre et en y restant par la suite. La connaissance de l'instant où la trajectoire réelle rejoindra celle désirée est notamment un aspect important dans les applications pratiques qui cherchent à garantir une bonne performance.

Historiquement, Haimo fut le premier dans [16], à publier un article traitant de la stabilité en temps fini. Il faudra attendre la fin des années 90 pour que cette théorie se développe sous l'impulsion de Bhat et Bernstein [17] [18] en montrant qu'avec certaines propriétés d'homogénéité du système, la stabilité asymptotique est équivalente à la stabilité en temps fini. Dans [20], les auteurs présentent une application à la robotique. Et dans [19], ils démontrent le premier théorème réciproque ajoutant une nouvelle page à la théorie. Moulay et Perruquetti ont repris ces travaux et ils ont étendu les résultats à différentes classes de systèmes (non autonome) [22]. Signalons qu'il ne faut pas confondre les termes "temps fini" et "stabilité" avec les notions de stabilité pratique et où les auteurs définissent la stabilité sur un intervalle de temps fini où l'état ne dépasse pas une certaine limite pendant un temps fini, citons par exemple les travaux de Amato dans [48] et les travaux de Lazarevic dans [49].

A présent, introduisons un exemple élémentaire d'un système stable en temps fini dont on connaît explicitement les solutions. Soit la dynamique suivante :

$$\dot{x} = -\text{sgn}(x)|x|^\alpha \tag{2.5}$$

avec $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0, 1[$.

dont les solutions du système sont données par

$$x(t, t_0, x_0) = \begin{cases} \text{sgn}(x_0)[|x_0|^{1-\alpha} - t(1-\alpha)]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{|x_0|^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces solutions décroissent et finissent par être nulles à partir d'un certain temps. L'origine du système (2.5) est dit stable en temps fini. Notons que l'équation (2.5) n'est pas lipschitzienne à l'origine. Dans ce cas, la stabilité en temps fini ne peut être obtenue du fait de l'unicité des solutions. Et pour cela la condition de non-lipschitzienne à l'origine est une condition nécessaire pour la stabilité en temps fini.

2.4.1 Cas des systèmes autonomes

Rappelons à présent la dynamique d'un système autonome, soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.6}$$

Définition 2.23 [19] *L'origine du système (2.6) est dit stable en temps fini s'il existe un voisinage \mathcal{V} de l'origine et une fonction $T : \mathcal{V} \setminus \{0\} \rightarrow [0, +\infty[$ appelée fonction temps d'établissement, telles que*

(i) *l'origine est stable au sens de Lyapunov.*

(ii) *les solutions convergent en temps fini : $\lim_{t \rightarrow T(x)} x(t, t_0, x_0) = 0$*

Si de plus, $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ alors l'origine est globalement stable en temps fini.

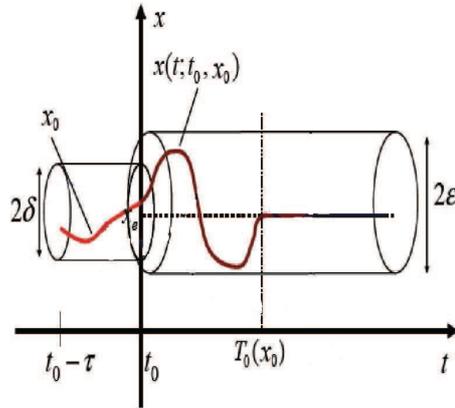
Cette définition est illustrée sur la figure 2.2.

Rappelons un résultat élémentaire donné par Haimo [16] sur la stabilité en temps fini des systèmes autonomes scalaires de la forme

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dans ce cas particulier, il existe une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité en temps fini.

Théorème 2.24 *Supposons que l'origine soit un point d'équilibre du système (2.7) où f est continue. Alors, l'origine est stable en temps fini pour le système (2.7) si et seulement*

FIGURE 2.2 – Comportement de la solution en $x(\cdot)$ (stabilité en temps fini).

s'il existe un voisinage Ω de l'origine tel que pour tout $x \in \Omega \setminus \{0\}$,

1. $xf(x) < 0$ et
2. $\int_x^0 \frac{dz}{f(z)} < +\infty$

Exemple 2.25 On reprend l'exemple élémentaire (2.5)

Soit $\alpha \in]0, 1[$, considérons le système

$$\dot{x} = -\varphi_\alpha(x)$$

(on rappelle $\varphi_\alpha(x) = \text{sgn}(x)|x|^\alpha$, voir Notation).

On a $-x\varphi_\alpha(x) < 0$ pour $x \neq 0$ et si $x \in \mathbb{R}$ alors

$$\int_x^0 \frac{dz}{-|z|^\alpha \text{sgn}(z)} = \frac{|x|^{1-\alpha}}{1-\alpha} < +\infty$$

Les hypothèses du Théorème 2.24 sont satisfaites. Donc, l'origine est stable en temps fini et les solutions $\phi^x(\tau)$ tendent vers l'origine avec le temps d'établissement $T(x) = \frac{|x|^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Théorème 2.26 [19] S'il existe une fonction de Lyapunov $V(x) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

i) V est définie positive.

ii) il existe un voisinage de l'origine $\mathcal{V} \subset \Omega$ tel que $\dot{V} + c(V(x))^\beta \leq 0$, $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ avec $c > 0$ et $\beta \in]0, 1[$.

Alors l'origine du système (2.6) est stable en temps fini et la fonction temps d'établissement $T(x)$ est continue et satisfait l'inégalité suivante

$$T(x) \leq \frac{V(x(0))^{1-\beta}}{c(1-\beta)} \quad (2.8)$$

De plus, si $\Omega = \mathbb{R}^n$ et \dot{V} est définie négative sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors l'origine du système (2.1) est globalement stable en temps fini.

Exemple 2.27 considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\varphi_\alpha(x_1) - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -\varphi_\alpha(x_2) - x_2^3 - x_1 \end{cases}$$

En prenant $V(x) = \frac{\|x\|_2^2}{2}$, on obtient $\dot{V}(x_1, x_2) = -\sum_{i=1}^2 (x_i^4 + |x_i|^{\alpha+1}) \leq 0$. V est une fonction de Lyapunov pour le système vérifiant

$$\dot{V} \leq -2^{\frac{\alpha+1}{2}} V^{\frac{\alpha+1}{2}}$$

Donc l'origine est stable en temps fini avec un temps d'établissement continu vérifiant

$$T(x) \leq \frac{2\|x\|_2^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Le théorème 2.26 implique que pour un système stable en temps fini et une fonction temps d'établissement discontinue, il n'existe pas une fonction de Lyapunov satisfaisant les hypothèses du théorème 2.26. Dans le cas où la fonction temps d'établissement est continue, le théorème suivant fournit un inverse au théorème précédent.

Théorème 2.28 [19] Supposons que l'origine du système (2.6) est stable en temps fini et la fonction temps d'établissement T est continue en 0. Soit \mathcal{V} un voisinage de 0 et $\beta \in]0, 1[$. Alors il existe une fonction $V(x) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et vérifie :

- i) V est définie positive.
 ii) \dot{V} est continue sur \mathcal{V} et il existe $c > 0$ telle que

$$\dot{V} + c(V(x))^\beta \leq 0 \quad x \in \mathcal{V}$$

2.4.2 Cas des systèmes non autonomes

Nous présentons la notion de stabilité en temps fini pour les systèmes non autonomes, par conséquent, la définition suivante généralise celle 2.23 de Bhat [19].

Définition 2.29 *L'origine du système (2.2) est dit **stable en temps fini** s'il existe un voisinage \mathcal{V} de l'origine et une fonction $T : [0, +\infty[\times \mathcal{V} \setminus \{0\} \rightarrow [0, +\infty[$, appelée fonction temps d'établissement tels que :*

(i) *l'origine est stable² pour le système (2.2)*

(ii) *pour tout $t_0 \geq 0$ et $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, $x(t, t_0, x_0)$ est définie sur $[t_0, T(t_0, x_0)[$, pour tout $t \in [t_0, T(t_0, x_0)[$ on a $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ et $\lim_{t \rightarrow T(t_0, x_0)} x(t, t_0, x_0) = 0$*

$$T_0(t_0, x_0) = \inf\{T(t_0, x_0) \geq 0 : x(t, t_0, x_0) = 0 \quad \forall t \geq t_0 + T(x_0)\}$$

s'appelle le temps d'établissement de la solution $x(t, t_0, x_0)$

Si de plus $\mathcal{V} = \Omega = \mathbb{R}^n$ alors l'origine du système (2.2) est globalement stable en temps fini.

Pour les systèmes plus généraux décrits par (2.2), Moulay et Perequetti ont montré que les fonctions de Lyapunov permettent d'obtenir des conditions suffisantes sur la stabilité en temps fini.

L'idée est basée sur l'existence d'une fonction de Lyapunov V et d'une fonction continue définie positive $r : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ vérifiant l'inégalité différentielle suivante

$$\dot{V}(t, x) \leq -r(V(t, x)) \tag{2.9}$$

2. stable au sens de Lyapunov définition 2.17

pour tout $(t, x) \in I \times \Omega$.

Une condition suffisante pour la stabilité en temps fini est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.30 *S'il existe une fonction de Lyapunov continûment différentiable $V(t, x)$ vérifiant la condition (2.9) telle que pour tout $\varepsilon > 0$ pour lequel*

$$\int_0^\varepsilon \frac{dz}{r(z)} < +\infty$$

alors l'origine du système (2.2) est stable en temps fini. La fonction temps d'établissement pour ce système satisfait l'inégalité suivante

$$T_0(t, x) \leq \int_0^{V(t, x)} \frac{dz}{r(z)}$$

Exemple 2.31 *Considérons le système scalaire non autonome suivant*

$$\dot{x} = -(1 + t^2)\varphi_\alpha(x)$$

$t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ soit la fonction de Lyapunov $V(x) = x^2$

$$\dot{V}(t, x) = -2(1 + t^2)x\varphi_\alpha(x) \leq -r(V(x))$$

avec $r(V) = 2\varphi_\beta(x^2)$ et $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$, puisque $\int_0^\varepsilon \frac{dz}{r(z)} < +\infty$, le théorème 2.30 assure que l'origine est stable en temps fini avec la fonction temps d'établissement du système $T_0(t, x) \leq \frac{4|x|^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

Dans le cas où la fonction temps d'établissement est continue, on a le théorème inverse suivant.

Théorème 2.32 [24] *Soit $\lambda \in (0, 1)$ et \mathcal{V} un voisinage ouvert de l'origine. Il existe une fonction $\nu : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe \mathcal{K} , avec $r > 0$, tel que pour $t \geq 0$ on a $x \in B_r(0) \subseteq \mathcal{V}$, alors*

$$\|f(t, x)\| \leq \nu(\|x\|) \tag{2.10}$$

Si l'origine est stable en temps fini et le temps d'établissement $T(\cdot)$ est continu en $(t, 0)$

pour $t \geq 0$, alors il existe une fonction $\alpha(\cdot)$ de classe \mathcal{K} , une constante $k > 0$, une fonction continue $V : [0, \infty) \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ et un voisinage de l'origine \mathcal{M} tel que $\dot{V}(t, x)$ est définie et pour $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$, on a :

1. $V(t, 0) = 0 ; t \in [0, \infty)$.
2. $\alpha(\|x\|) \leq V(t, x), t \in [0, \infty), x \in \mathcal{M}$.
3. $\dot{V}(t, x) \leq -k(V(t, x))^\lambda, t \in [0, \infty), x \in \mathcal{M}$.

2.5 Systèmes homogènes

L'étude des systèmes homogènes a attiré l'attention de plusieurs chercheurs au cours des dernières années surtout dans l'étude de stabilité ou de stabilisation des systèmes non linéaires. Cependant, l'homogénéité de degré négatif dans l'étude de stabilité en temps fini a été bien développée par S. Bhat dans [18].

Sans perte de généralité, les définitions suivantes sont aussi utiles dans le cas d'un système homogène non autonome (pour plus de détails on peut se référer à [21], [29] et [28]).

Considérons le système

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.11}$$

où f est continue, et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. La dilatation souvent considérée dans la littérature de la forme (2.12) (voir [50], [51], [52], [54] et [55]).

Définition 2.33 La dilatation $\Delta_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est définie par le choix de $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et de n rationnel $r = (r_1 \leq, \dots, \leq r_n)$ et de $\lambda > 0$ telle que

$$\Delta_\lambda x = (\lambda^{r_1} x_1, \dots, \lambda^{r_n} x_n) \tag{2.12}$$

Définition 2.34 Le système (2.11) est homogène de degré d par rapport à la dilatation Δ_λ s'il existe $(r_1, \dots, r_n) \in ((0, \infty))^n$ telle que

$$f_i(\lambda^{r_1} x_1, \dots, \lambda^{r_n} x_n) = \lambda^{r_i + d} f_i(x_1, \dots, x_n)$$

pour tout $\lambda > 0$.

Notons qu'il y a une autre forme de dilatation qui s'appelle dilatation d'Euler. Pour plus de détails, on peut se référer aux ouvrages [53], [27] et [56]. Dans cette thèse on se limitera à la dilatation donnée par la relation (2.12).

Exemple 2.35 *On considère le système de dimension deux suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2(\varphi_{\frac{1}{3}}(x_1) + \varphi_{\frac{1}{2}}(x_2)) \end{cases} \quad (2.13)$$

La fonction $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -2(\varphi_{\frac{1}{3}}(x_1) + \varphi_{\frac{1}{2}}(x_2)) \end{pmatrix}$ définit dans le système (2.13) est homogène de degré -1 par rapport à la dilatation $\Delta_\lambda(x_1, x_2) = (\lambda^3 x_1, \lambda^2 x_2)$.

Dans le théorème suivant on présente le lien entre l'homogénéité de degré négative et la stabilité en temps fini. Cet important résultat a été prouvé par Bhat [21].

Théorème 2.36 [21] *Supposons que le système (2.11) est homogène de degré $d < 0$, alors l'origine du système (2.11) est stable en temps fini si et seulement si il est asymptotiquement stable.*

Exemple 2.37 *Il est intéressant d'étudier la stabilité en temps fini d'un système homogène scalaire, d'où l'exemple suivant, ($\alpha > 0$) :*

$$\dot{x} = -k \cdot \text{sgn}(x) |x|^\alpha \quad (2.14)$$

le système scalaire (2.14) est continu sur \mathbb{R} et homogène de degré $\alpha - 1$ respectant la dilatation standard³ $\Delta_\lambda(x) = 1$. L'équation (2.14) peut être facilement intégrée et on obtient

$$x(t, t_0, x_0) = \begin{cases} \text{sgn}(x_0) \left(\frac{1}{|x_0|^{\alpha-1}} + k(\alpha-1)t \right)^{-\frac{1}{\alpha-1}}, & \alpha > 1 \\ e^{kt} x_0, & \alpha = 1 \\ \text{sgn}(x_0) \left[|x_0|^{1-\alpha} - t(1-\alpha) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, & 0 \leq t \leq \frac{|x_0|^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)} \\ 0 & t \geq \frac{|x_0|^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)} \end{cases} \quad (2.15)$$

3. La dilatation standard est définie comme dans (2.12) pour $r_1 = \dots = r_n = 1$.

A partir de (2.15), il est clair que l'origine du système (2.14) est asymptotiquement stable ssi $k > 0$ et stable en temps fini ssi $k > 0$ et $\alpha < 1$. En d'autre terme, l'origine du système (2.14) est stable en temps fini ssi l'origine du système (2.14) est asymptotiquement stable et le degré d'homogénéité du système (2.14) est négatif. En outre, dans le cas que $k > 0$ et $\alpha < 1$, la fonction temps d'établissement est donnée comme suite

$$T(x) = \frac{|x|^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)}$$

Maintenant, on présente deux importants théorèmes utiles à l'étude des propriétés d'homogénéité des systèmes, ceci étant dans les deux premiers chapitres de cette thèse.

Théorème 2.38 [21] Si V est homogène de degré $l > 0$ par rapport à une dilatation donnée dans (2.12) et V est de classe C^1 , alors on a :

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} = lV$$

Théorème 2.39 [21][57] On suppose que f est homogène de degré m par rapport à une dilatation (2.12) et l'origine est asymptotiquement stable. Alors pour tout $l > \max\{0, -m\}$, il existe une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue, définie positive, de classe C^1 dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, homogène de degré l par rapport à la dilatation (2.12) et \dot{V} est continue, définie négative et homogène de degré $l + m$.

Théorème 2.40 [19][21] On suppose que V_1 et V_2 deux fonctions continues dans \mathbb{R}^n , homogènes par rapport à la dilatation Δ_λ de degré respectivement $l_1 > 0$ et $l_2 > 0$ avec V_1 est définie positive alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\left[\min_{\{z:V_1(z)=1\}} V_2(z) \right] [V_1(x)]^{\frac{l_2}{l_1}} \leq V_2(x) \leq \left[\max_{\{z:V_1(z)=1\}} V_2(z) \right] [V_1(x)]^{\frac{l_2}{l_1}}$$

2.6 Stabilisation en temps fini

Jusqu'à maintenant, nous avons parlé que de la notion de stabilité. Dans la théorie de contrôle, l'objectif est de trouver une commande qui garantit la stabilisation de l'origine. Nous allons exposer la définition de la stabilisation en temps fini pour les systèmes contrôlés de la forme :

$$\dot{x} = f(x, u(x)) \quad (2.16)$$

où f est continue pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée de commande.

Définition 2.41 *Le système (2.16) est **stabilisable en temps fini** s'il existe une commande $u \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^m)$ telle que*

1. $u(0) = 0$
2. *l'origine du système bouclé $\dot{x} = f(x, u(x))$ soit stable en temps fini.*

2.7 Théorie de graphe

Dans ce paragraphe, nous introduisons quelques concepts de base sur la théorie de graphe. Nous commençons par rappeler quelques notions et définitions de base de la théorie des graphes qui seront utilisés par la suite. Pour plus de détails on peut se référer à [84], [58], [59], [61] et [65]. Un graphe de configuration des liens qu'on note $\mathcal{G}(\nu, \epsilon)$ est défini par deux ensembles : le premier est l'ensemble des indexes des N nœuds, noté par :

$$\nu = \{1, \dots, N\}$$

et le deuxième est l'ensemble des arrêtes qui relient deux nœuds :

$$\epsilon = \{(i, j) \in \nu \times \nu, j \in N_i\}$$

où N_i est l'ensemble des indexes des nœuds en liaison avec le i^{me} nœud. La notation (i, j) veut dire une arrête ou connexion entre i et j , et que $j \in N_i$ et i n'appartient pas nécessairement à N_j . Ce qui implique que (i, j) et (j, i) ne présentent pas nécessairement

la même arrête. Ces connexions établies entre les noeuds sont regroupées dans une matrice $A = [a_{ij}]$, qu'on appelle matrice de liaison ou matrice adjacente. Dans ce manuscrit, on se limite à une matrice adjacente binaire (stationnaire), tel que si le $i^{\text{ème}}$ noeud prend une information du $j^{\text{ème}}$ noeud, alors

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in N_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note par D la matrice diagonale tel que son $i^{\text{ème}}$ terme diagonal correspond au nombre de liaisons qui peut établir le $i^{\text{ème}}$ agent avec les autres. On définit la matrice laplacienne (ou le Laplacien) $L = [l_{ij}]$ comme suite :

$$L = D - A$$

les éléments de cette matrice sont tels que

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^N a_{ik} & \text{si } j = i \\ -a_{ij} & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Par rapport à l'exemple de la figure 2.3 où, par exemple, l'agent 1 reçoit une information de l'agent 2 et donne une information à l'agent 3 et l'agent 4. Ce graphe présente 4 noeuds et 5 arrêtes, les matrices A (adjacente), D (diagonale) et L (laplacienne) associées au graphe 2.3 sont :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Selon les deux définitions suivantes, il existe deux types de graphes.

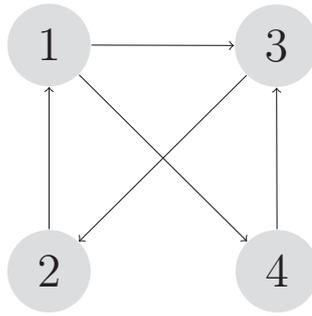


FIGURE 2.3 – Exemple d'un graphe de connexion entre 4 agents.

Définition 2.42 (*graphe non-orienté*⁴). Un graphe **non-orienté** est tel que la connexion entre deux noeuds est réciproque, c'est à dire simultanément $j \in N_i$ et $i \in N_j$. La matrice adjacente associée à un graphe non-orienté est symétrique ($a_{ij} = a_{ji}$).

Définition 2.43 (*graphe orienté*⁵). Un graphe **orienté** est telles que les connexions ne sont pas nécessairement réciproques. la matrice adjacente associée n'est pas nécessairement symétrique.

Comme on peut le remarquer à partir de la définition de ces deux graphes, que tout graphe non-orienté est orienté et le contraire est faux.

Exemples. Les matrices adjacentes suivantes sont respectivement, A_1 celle du graphe

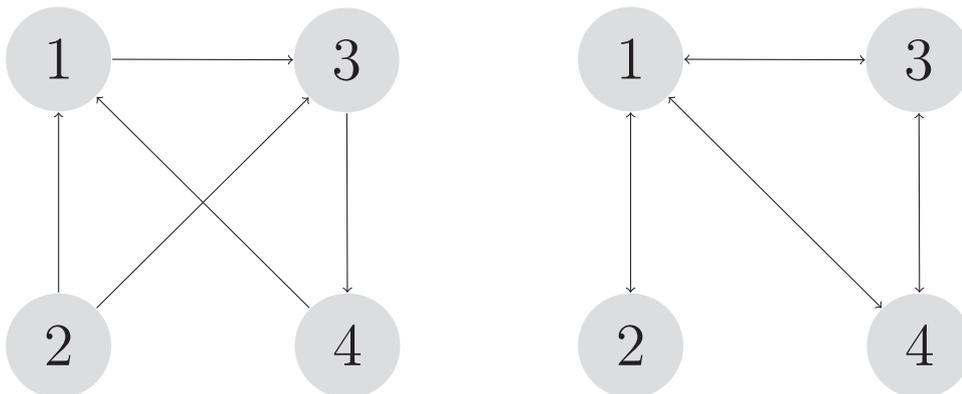


FIGURE 2.4 – Exemples de graphe : graphe orienté (à gauche), graphe non orienté (à droite).

4. Dans la littérature on l'appelle aussi graphe indirecte, graphe non dirigé ou graphe symétrique

5. Dans la littérature on l'appelle aussi graphe directe ou graphe dirigé

orienté de la figure 2.4 (gauche) et A_2 celle du graphe non orienté de la figure 2.4 (droite).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 2.44 (*arbre couvrant*). Un graphe dit "arbre couvrant", c'est un graphe orienté qui comporte un noeud qui ne reçoit aucune information des nœuds du groupe.

Ainsi, s'il s'agit du $k^{\text{ème}}$ noeud, alors la $k^{\text{ème}}$ ligne de la matrice adjacente est nulle. On peut voir la deuxième ligne de la matrice A_1 ci-dessus, associée au graphe à gauche de la figure 2.4.

Définition 2.45 Un graphe est dit fortement connexe lorsque pour tout couple (i, j) , il existe un chemin de i à j dans le graphe. Si le graphe est non orienté, on dit simplement qu'il est connexe.

On note que les graphes ci-dessus ne sont pas fortement connexes car il n'y a pas de connexion entre (2,4) (graphe à gauche) et ((2,3) et (2,4)) (graphe à droite).

Définition 2.46 Un graphe pondéré \mathcal{G} est celui dont les éléments de la matrice adjacente sont positifs.

Dans un graphe pondéré, si le $i^{\text{ème}}$ noeud prend une information du $j^{\text{ème}}$ noeud ($j \in N_i$), alors $a_{ij} > 0$. Autrement, $a_{ij} = 0$.

Le théorème suivant introduit les propriétés de la matrice laplacienne associée à un graphe donné.

Théorème 2.47 [63]-[60]-[69] Soit $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice Laplacienne d'un graphe \mathcal{G}

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^N a_{ik} & \text{si } j = i \\ -a_{ij} & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

alors on a :

- (i) 0 est une valeur propre de L et $\mathbf{1}$ est son vecteur propre associé.
- (ii) Si \mathcal{G} est un arbre couvrant, alors 0 est une valeur propre simple et toutes les autres valeurs propres sont strictement positives.
- (iii) Si \mathcal{G} est fortement connexe, alors il existe un vecteur colonne strictement positif⁶ tel que $W^T L = 0$.
- (iv) Supposons que \mathcal{G} est fortement connexe et soit $w > 0$ tel que $w^T L = 0$, alors $\text{diag}(w)L + L^T \text{diag}(w)$ est la matrice Laplacienne du graph pondéré non orienté $\mathcal{G}(\text{diag}(w)L + L^T \text{diag}(w))$.

Si \mathcal{G} est non orienté, alors on a :

- (v) Pour $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, on a $x^T L x = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j)^2$ et de plus L est une matrice semi définie positive ce qui implique que toutes les valeurs propres sont positives.
- (vi) On note les valeurs propres de la matrice Laplacienne dans l'ordre croissant

$$0 = \lambda_1(L) \leq \lambda_2(L) \leq \dots \leq \lambda_n(L)$$

alors $\lambda_2 > 0$.

- (vii) De plus on a $\lambda_2 = \min_{x \neq 0, \mathbf{1}^T x = 0} \frac{x^T L x}{x^T x}$ et $x^T L x \geq \lambda_2 x^T x$.

2.8 Propriétés du produit de Kronecker

La collecte des informations provenant de plusieurs systèmes et de plusieurs commandes nécessite de faire appel au produit de Kronecker. Pour la manipulation de ce produit, on se réfère aux résultats suivants.

Definition 2.8.1 [76][26] : Soient les matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ($A = [a_{i,j}]$) et $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$, le

6. $W = (w_1, \dots, w_n)^T$, le vecteur W est dit positif (resp. strictement positif) si $w_i \geq 0$ (resp. $w_i > 0$)

produit de Kronecker de A et B , noté $A \otimes B$, est une matrice dans $\mathbb{R}^{np \times mq}$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,m}B \end{pmatrix}$$

Théorème 2.48 [76][26] : Le produit de Kronecker a les propriétés suivantes :

1. $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$
2. $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$
3. $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$

2.9 Conclusion

Dans ce chapitre, au vu de résultats de cette thèse, on a réussi à introduire les outils mathématiques liés essentiellement à la stabilité asymptotique et à la stabilité en temps fini des systèmes autonomes et non autonomes. Nous avons présenté brièvement la théorie de Lyapunov ainsi que les principaux résultats concernant la stabilité à l'aide des fonctions de Lyapunov. En complément, pour l'étude de stabilité et le problème de stabilisation en temps fini des systèmes dynamiques interconnectés et les systèmes multi-agents, on a introduit la notion des graphes, les propriétés des matrices associées. Tout au long de cette thèse, nous ferons usage de ces résultats pour démontrer nos propositions et valider nos simulations.

Première Partie : Stabilité et
stabilisation en temps fini des systèmes
perturbés

Chapitre 3

Stabilité en temps fini des systèmes perturbés

3.1 Introduction

L'analyse de la stabilité des modèles mathématiques utilisés en physique à travers les comportements des solutions s'avère parfois difficile car la forme explicite de la solution est difficile à obtenir. Particulièrement, quand des petits paramètres sont présents dans le modèle. Lorsque l'on annule un petit paramètre, noté de façon symbolique ε , il se peut que la solution du problème initial ne tende pas uniformément vers la solution du problème réduit. On est alors confronté à un problème dit de perturbation singulière pour lequel de grandes difficultés pour l'analyse de la stabilité peuvent se poser. Sans se confronter aux problèmes de calcul de solutions pour l'analyse de stabilité, on suppose que cette solution existe et qu'il est judicieux de distinguer un tel système par sa forme nominale et celle de la perturbation. D'une façon générale, l'analyse de la stabilité d'un système perturbé passe par l'analyse de stabilité de la forme nominale à laquelle est associée les conditions sur le terme de perturbation. Autrement dit, l'étude de systèmes perturbés se ramène généralement à une étude de robustesse de la stabilité de l'origine du système nominal. L'analyse asymptotique et exponentielle est traitée dans [30] pour le cas d'un système non autonome perturbé. Le résultat de stabilité en temps fini a été développé par Bhat [19],[21] pour le cas d'un système autonome perturbé.

Dans ce chapitre on étudie les systèmes autonomes et non autonomes perturbés dont on cherche à définir les conditions de stabilité en temps fini de l'origine. Ainsi, nous allons étendre les résultats de stabilité asymptotique présentés par Khalil [30] et ceux obtenus par Bhat [19], dans le cas autonome, afin de résoudre le cas temps fini. Après avoir isolé la fonction de perturbation, nous étudions le cas où la perturbation s'annule à l'origine, préservant l'équilibre du système. Suite aux modèles physiques bouclés qu'on a pu rencontrer, l'écriture qui se prête à la résolution du problème de stabilisation consiste à gérer la fonction de perturbation comme étant une fonction à variables séparables. Finalement, nous introduisons des exemples d'application au fur et à mesure de l'exposition des résultats.

3.2 Système non autonome perturbé

Etant donné un système non autonome de la forme :

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{3.1}$$

où $f : [0, +\infty[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue en (t, x) et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n contenant l'origine, le système perturbé est défini par :

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x) \tag{3.2}$$

avec $g : [0, +\infty[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. La fonction $g(t, x)$, continue en (t, x) , est une perturbation qui apparaît comme un terme additif et qui pourrait résulter des erreurs de modélisation ou des systèmes exogènes. Dans la réalité, on peut ne pas avoir la forme explicite de $g(t, x)$, néanmoins, pour l'analyse de stabilité du système perturbé, $g(t, x)$ doit être bornée. Pour la suite de l'étude, nous considérons une perturbation qui s'annule à l'origine.

3.2.1 Perturbation qui s'annule à l'origine

L'étude de systèmes perturbés se ramène généralement à une étude de robustesse de la stabilité de l'origine du système nominal. Pour assurer cette propriété de robustesse,

on montre que la connaissance de la forme explicite de la fonction de Lyapunov n'est pas nécessaire. On suppose que l'origine est un point d'équilibre pour le système non perturbé (3.1). Une perturbation qui s'annule à l'origine se traduit par $g(t, 0) = 0$. L'objectif est d'étendre le résultat de stabilité en temps fini dans le cas autonome [19],[21] au cas d'un système non autonome. Nous énonçons la stabilité en temps fini de l'origine d'un système non autonome perturbé dans la proposition suivante.

Proposition 3.2.1 *Sous les hypothèses,*

1. $x = 0$ est stable en temps fini pour (3.1),
2. $f(t, \cdot)$ est homogène de degré $m < 0$ par rapport à une dilatation Δ_λ ,
3. $g(t, x) = O(x^\beta)$ avec $\beta > 0$,

alors l'origine du système (3.2) est stable en temps fini.

Preuve. Par hypothèse $x = 0$ est stable en temps fini pour le système non perturbé (3.1). En se basant sur le Théorème 2.32, il existe une fonction de Lyapunov $V : [0, \infty[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\forall (t, x) \in [0, \infty[\times \Omega$, on a :

- i) $V(t, 0) = 0$; $t \in [0, \infty[$.
- ii) Il existe une fonction α de classe \mathcal{K} telle que

$$\alpha(\|x\|) \leq V(t, x)$$

- iii) $\exists k > 0$ tel que $\dot{V}(t, x) \leq -k[V(t, x)]^\lambda$ avec $\lambda \in]0, 1[$.

En dérivant cette même fonction de Lyapunov le long des trajectoires du système perturbé (3.2), on obtient :

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x). \quad (3.3)$$

Par rapport aux deux premiers termes de l'égalité ci-dessus, d'après iii), on a :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -k[V(t, x)]^\lambda \quad (3.4)$$

Maintenant, par rapport à l'hypothèse 2, selon le Théorème 2.39 (Chapitre 2), $V(t, \cdot)$ est homogène de degré $l = \max\{0, -m\}$ par rapport à la dilatation Δ_λ . De plus, en utilisant les propriétés des fonctions homogènes, on a :

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} = lV \quad (3.5)$$

Or, d'après l'hypothèse 3, $\exists c_1 > 0$ tel que $\forall x \in \Omega$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\|g(t, x)\| \leq c_1 \|x\|^\beta \quad (3.6)$$

En utilisant (5.19), (3.4), (3.5) et (3.6), on se ramène à l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &\leq -k[V(t, x)]^\lambda + c_1 \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \|x\|^\beta \\ &\leq -k[V(t, x)]^\lambda + c_1 lV \|x\|^\beta \end{aligned} \quad (3.7)$$

Les propriétés des fonctions homogènes permettent d'écrire (Théorème 2.40) :

$$\|x\|^\beta \leq c_2 V^{\frac{\beta}{l}} \quad (3.8)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &\leq -k[V(t, x)]^\lambda + c_1 c_2 lV^{\frac{\beta+l}{l}} \\ &\leq -[V(t, x)]^\lambda (k - c_1 c_2 lM V^{\frac{\beta+l}{l} - \lambda}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

le fait que la fonction V est continue et s'annule à l'origine ($V(t, 0) = 0$) et $\frac{\beta+l}{l} - \lambda > 0$, alors $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in B_\delta(0)$, on a $V(t, x) \leq \frac{k}{2c_1 c_2 lM}$, ce qui permet d'écrire

$$\dot{V}(t, x) \leq -\frac{k}{2}[V(t, x)]^\lambda$$

Comme conclusion, l'origine du système perturbé (3.2) est stable en temps fini. Le temps d'établissement est estimé par

$$T_{(3.2)}(t, x) \leq \frac{2}{1-\lambda} [V(t, x)]^{1-\lambda}$$

■

Notons que la majoration de la norme du gradient de V par rapport à l'état a été substituée dans la preuve par les propriétés d'homogénéité de la fonction V . Ceci concernera les systèmes non autonomes homogènes perturbés. Ainsi, de point de vue pratique, pour une perturbation qui s'annule à l'origine et qui vérifie certaines conditions, on peut se limiter aux résultats de stabilité en temps fini du système non perturbé. La condition évoquée sur g peut être substituée par le fait que g soit β -Holdérienne. Nous illustrons nos résultats théoriques sur deux exemples.

Exemple 1. On considère le système scalaire ($t \geq 0, x \in \mathbb{R}$)

$$\dot{x} = -(1+t)\operatorname{sgn}(x)|x|^{1/2} + \sin(t)|x|^2 \quad (3.10)$$

En conservant les mêmes notations précédentes on a, $f(t, x) = -(1+t)\operatorname{sgn}(x)|x|^{1/2}$ et $g(t, x) = \sin(t)|x|^2$. Il est clair que le système non perturbé $\dot{x} = f(t, x)$ présente $x = 0$ comme point d'équilibre. Sous la fonction de Lyapunov $V(t, x) = \frac{1}{2}x^2$, sa dérivée donne

$$\dot{V}(t, x) = -(t+1)|x|^{3/2} \leq -|x|^{3/2} = -|x^2|^{3/4} = -2^{4/3}r(V)$$

où pour $z \mapsto r(z) = |z|^{3/4}$, fonction définie positive et la fonction $\frac{1}{r(z)}$ intégrable au voisinage de 0 (au sens de Riemann). Ce qui achève la stabilité en temps fini de l'origine du système non perturbé.

Afin de vérifier l'homogénéité de $f(t, \cdot)$. Soit $\Delta_\lambda(x) = \lambda^2 x$, il est facile de vérifier que $f(t, \Delta_\lambda(x)) = \lambda f(t, x)$. Ainsi $f(t, \cdot)$ est homogène de degré -1 par rapport à la dilatation Δ_λ .

Il est trivial de montrer que $|g(t, x)| \leq |x|^2$, par conséquent, $|g(t, x)| = O(|x|^2)$ avec $\beta = 2$.

Les hypothèses de la proposition sont atteintes et l'origine du système perturbé (3.10) est stable en temps.

La figure 3.1 illustre la solution du système non perturbé et celle du système perturbé.

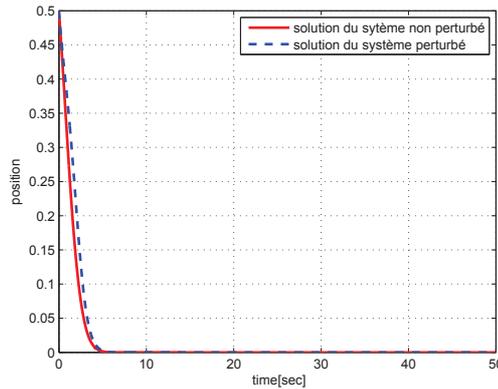


FIGURE 3.1 – stabilité en temps fini du système (3.10)

Exemple 2. On considère un système de dimension deux (cas d'un double intégrateur perturbé), et soit $k > 0$.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x_1 \\ \dot{x}_1 &= -\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{1/2} - \operatorname{sgn}(x)|x|^{1/3} + e^{-t/k}\sqrt{x_1^2 + x^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

On note alors,

$$f(t, x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{1/2} - \operatorname{sgn}(x)|x|^{1/3} \end{pmatrix} \text{ et } g(t, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t/k}\sqrt{x_1^2 + x^2} \end{pmatrix}.$$

Vérifions les hypothèses de la proposition précédente. Pour 1) et 2), on a $f(t, \cdot)$ est homogène de degré -1 respectant la dilatation $\Delta_\lambda(\lambda^3 x, \lambda^2 x_1)$. D'autre part, $x = 0$ est stable en temps fini pour le système non perturbé $\dot{x} = f(t, x)$.

Concernant le terme de perturbation, on a $\|g(t, x)\| \leq \|x\|$. Par conséquent, on conclut que $x = 0$ reste stable en temps fini pour le système perturbé. Le résultat de simulation du système (3.11) est illustré par les figures 3.2-3.3 ($k = 0.25$).

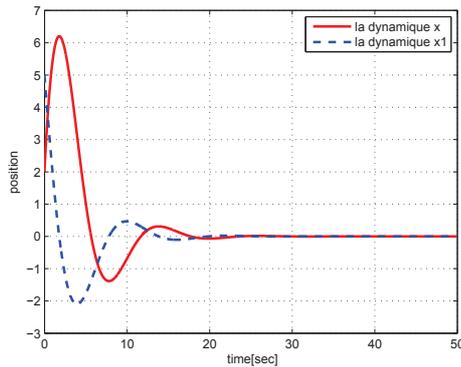


FIGURE 3.2 – système non perturbé

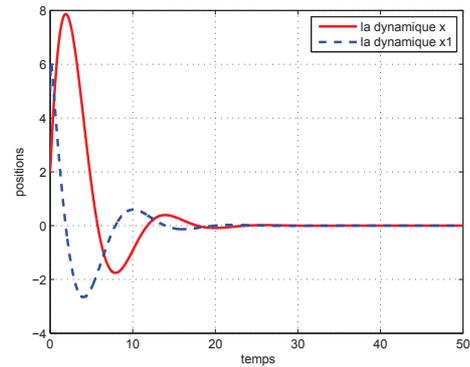


FIGURE 3.3 – système perturbé

3.3 Système autonome perturbé

Nous analysons la stabilité d'un système perturbé ou la partie nominale dépend uniquement de l'état du système (autonome). Ainsi toute perturbation qui s'ajoute résulte d'une entrée de commande ou d'un système exogène. Par conséquent, cette perturbation peut avoir une forme instationnaire à partir de laquelle on distingue l'état et la forme explicite du temps. Nous nous intéressons à cette forme particulière de perturbation qui apparaît comme le produit d'une fonction dépendante de l'état et un terme dépendant du temps d'où la notion : perturbation à variables séparables. Nous présentons une étude dans le cas scalaire et le cas général.

3.3.1 Cas scalaire

Par rapport au système autonome suivant,

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.12)$$

on définit le système perturbé par :

$$\dot{x} = f(x) + R(t)g(x) \quad (3.13)$$

où $t \in [0, \infty[$, $x \in \mathbb{R}$ et f , R et g sont des fonctions continues. On suppose que l'origine est un point d'équilibre pour le système (3.13)

Proposition 3.3.1 *Si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $xf(x) \leq -r(V)$ où $r(s) = 2^{\frac{\alpha}{2}} s^{\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha \in]0, 2[$
2. la fonction $R(t)$ est bornée pour tout $t \in \mathbb{R}_+$
3. $g(x) = O(|x|^\alpha)$ pour tout x dans un voisinage de l'origine

alors l'origine du système perturbé (3.13) est stable en temps fini.

□

Preuve. Soit $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ associée au système perturbé (3.13). Le long du système (3.13), la dérivée de V est donnée par

$$\dot{V} = xf(x) + xR(t)g(x)$$

Sous les hypothèses 1. et 2., il existe $M > 0$ telle que

$$\dot{V} \leq -|x|^\alpha + M|x|^{\alpha+1} \leq -|x|^\alpha(1 - M|x|)$$

Finalement, comme la fonction $z \mapsto |z|$ est continue et nulle à l'origine alors il existe $C > 0$ telle que,

$$\dot{V} \leq -C|x|^\alpha = -C_1r(V)$$

avec $C_1 = C2^{-\frac{\alpha}{2}}$.

Ce qui achève la stabilité en temps fini de l'origine du système scalaire (3.13).

Exemple. soit le système donné par

$$\dot{x} = -\varphi_{\frac{1}{3}}(x) + \frac{1}{1+t}|x|^{\frac{1}{2}} \quad (3.14)$$

Si on prend $\beta(t) = \frac{1}{1+t}$ et $g(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$ qui vérifient bien 2. et 3., sous ces conditions ce système est stable en temps fini. Les solutions du système perturbé et non perturbé sont illustrées respectivement par les figures 3.3.1 et 3.3.1.

Les résultats de simulation impliquent que l'origine du système perturbé reste stable. Cependant, le temps de convergence du système perturbé est nettement supérieur par

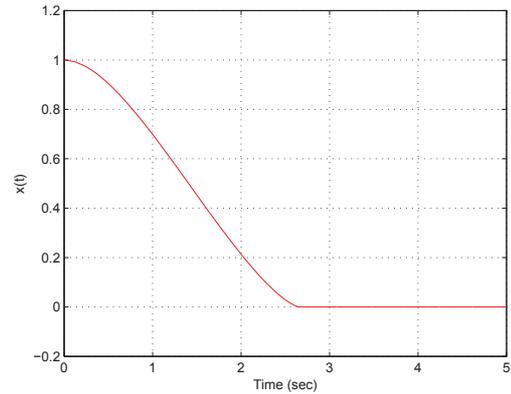
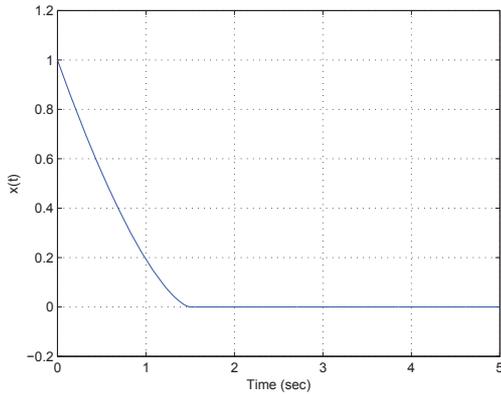


FIGURE 3.4 – Solution du système non perturbé $\dot{x} = -\varphi_{\frac{1}{3}}(x)$ FIGURE 3.5 – Solution du système perturbé (3.14)

rapport au système non perturbé. D'où le temps requis par le système pour rejeter la perturbation.

3.3.2 Cas homogène dans \mathbb{R}^n

On définit l'homogénéité par rapport au système nominal pour une dilatation donnée. On traite par la suite, pour x dans \mathbb{R}^n , le système autonome perturbé à variables séparables de la forme :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^k R_i(t)g_i(x) \quad (3.15)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, f et g_i ($i = 1, \dots, k$) sont des fonctions continues dans \mathbb{R}^n . Les termes de perturbation $R_i(t)$ ($i = 1, \dots, k$) apparaissent comme une somme qui pondère les fonction $g_i(x)$ et sont considérés comme fonctions continues dans \mathbb{R}_+ . Notons que les termes R_i peuvent être non identiques.

L'objectif est d'aboutir à des conditions sur les perturbations qui préservent la stabilité en temps fini de l'origine du système autonome non perturbé. Pour cela, nous avons la proposition suivante.

Proposition 3.3.2 *Etant donné le système (3.15), la stabilité en temps fini de son ori-*

gine est garantit sous les hypothèses suivantes :

1. f est homogène de degré $m < 0$ par rapport à une dilatation Δ_λ et l'origine du système non perturbé $\dot{x} = f(x)$ est asymptotiquement stable.
2. la fonction $R_i(t)$ est bornée pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
3. la fonction $g_i(x) = O(\|x\|^{\alpha_i})$ au voisinage de l'origine, avec $\alpha_i \in]0, l[$, $l > \{0, -m\}$ et $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k$.

□

Preuve . D'après 1. il existe une fonction de Lyapunov V de classe \mathcal{C}^1 dans \mathbb{R}^n , homogène de degré $l > \max\{0, m\}$ pour la dilatation Δ_λ . D'autre part, en se basant sur le Théorème 2.39, \dot{V} est homogène de degré $l + m$ par rapport à Δ_λ . Il existe $c = \max_{\{z:V(z)=1\}} \dot{V}(z) > 0$, telle que :

$$\dot{V} \leq -cV^{\frac{l+m}{l}}$$

En utilisant 2., il existe $M_1 > 0$ avec

$$M_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{1 \leq i \leq k} R_i(t)$$

et d'après 3., il existe $M_2 > 0$ telle que

$$\|g_i(x)\| \leq M_2 \|x\|^{\alpha_i}$$

Pour la suite, soit $M = \max(M_1, M_2)$.

Le fait que V est une fonction continue et homogène de degré $l > 0$, alors $\frac{\partial V}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} = lV$.

A présent, la dérivé de V sera exprimée tout au long de la trajectoire du système (3.15).

D'où le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -cV^{\frac{l+m}{l}} + M_1 \|\nabla V\| \|g_i(x)\| \\ &\leq -cV^{\frac{l+m}{l}} + lM_2 M_1 V \|x\|^{\alpha_i} \\ &\leq -cV^{\frac{l+m}{l}} + lMV \|x\|^{\alpha_1} \end{aligned}$$

Selon les propriétés liées aux fonctions homogènes (Théorème 2.40), on a :

$$\|x\|^{\alpha_1} \leq c_2 V^{\frac{\alpha_1}{l}}$$

avec $c_2 = \max_{\{z:V(z)=1\}} \|z\|^{\alpha_1}$.

Ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -cV^{\frac{l+m}{l}} + c_2 l M V^{\frac{\alpha_1+l}{l}} \\ &\leq -V^{\frac{l+m}{l}} [c - c_2 l M V^{\frac{\alpha_1-m}{l}}] \end{aligned}$$

Comme V est continue et nulle à l'origine et $\frac{\alpha_1-m}{l} > 0$, alors

$\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in B_\delta(0)$, on a :

$$\dot{V}(t, x) \leq -\frac{c}{2} [V(t, x)]^{\frac{l+m}{l}}$$

Ce qui achève le résultat de la proposition. ■

En terme d'application, nous allons présenter dans la section 1.5 le modèle d'un drone où on cherche à élaborer une commande qui stabilise en temps fini l'état d'équilibre.

3.4 Système homogène et T-périodique

Dans cette section, on s'intéresse à la stabilité en temps fini d'une dynamique perturbée de la forme (3.16) où ε présente une valeur faible non nulle. Ce système, supposé homogène et T-périodique, décrit une large variété de modèle en boucle fermée sous une commande instationnaire. En utilisant la technique de moyennisation, il s'agit d'identifier la partie moyenne (non autonome) comme étant le système non perturbé, au quelle s'additionne un terme de perturbation. Pour s'affranchir de la forme explicite de la fonction de Lyapunov, la technique de moyennisation a été utilisée dans le cas d'un système non autonome, homogène et T-périodique et les résultats de stabilité sont de type exponentielle [30] et asymptotique [29]. Dans cette section, on cherche à décrire les conditions suffisantes

à travers le comportement du système moyennisé et qui permettent de conclure sur la stabilité en temps fini du système initial.

On s'intéresse à une classe de système de la forme :

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon) \quad (3.16)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$ telle que f est continue en (t, x, ε) , T-périodique en t et $f(\cdot, x, \cdot)$ est homogène de degré $m < 0$ selon une dilatation Δ_λ .

On définit le système moyennisé à partir de (3.16) par :

$$\dot{x} = \varepsilon f_{moy}(x) \quad (3.17)$$

avec

$$f_{moy}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, x, 0) d\tau$$

Notons aussi que f_{moy} est homogène de degré $m < 0$ par rapport à Δ_λ . Le problème fondamental de la méthode de moyennisation consiste à déterminer dans quel sens le comportement du système autonome (3.17) se rapproche du comportement du système non autonome (3.16). Nous énonçons nos résultats dans la proposition suivante.

Proposition 3.4.1 *Supposons que l'origine du système moyennisé (3.17) est stable en temps fini alors, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, l'origine du système initial (3.16) est stable en temps fini.*

□

Preuve. Soit le changement de variable suivant :

$$x = z + \varepsilon u(t, z)$$

où $u(t, x) = \int_0^t [f(\tau, x, 0) - f_{moy}(x)] d\tau$.

On a la fonction $f(\tau, x, 0) - f_{moy}(x)$ est T-périodique en t et de moyenne nulle et la fonction $u(t, x)$ est T-périodique en t , alors $u(t, x)$ est bornée en (t, x) .

De plus, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(\tau, x, 0) - f_{moy}(x)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} [f(\tau, x, 0) - f_{moy}(x)] d\tau$$

La dérivée de x par rapport au temps conduit à

$$\dot{x} = \dot{z} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(t, z) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \dot{z}$$

En utilisant (3.16), la nouvelle équation en z est décrite par :

$$\begin{aligned} [I + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}] \dot{z} &= \varepsilon f(t, z + \varepsilon u, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \varepsilon f(t, z + \varepsilon u, \varepsilon) - \varepsilon f(t, z, 0) + \varepsilon f_{moy}(z) \\ &= \varepsilon f_{moy}(z) + \varepsilon p(t, z, \varepsilon) \end{aligned}$$

avec $p(t, z, \varepsilon) = p_1(t, z, \varepsilon) + p_2(t, z, \varepsilon)$ où $p_1(t, z, \varepsilon) = [f(t, z + \varepsilon u, \varepsilon) - f(t, z, \varepsilon)]$ et $p_2(t, z, \varepsilon) = [f(t, z, \varepsilon) - f(t, z, 0)]$, I est la matrice identité dans \mathbb{R}^n .

en utilisant le théorème d'accroissement fini pour les fonctions $p_1(t, z, \varepsilon)$ et $p_2(t, z, \varepsilon)$, on obtient

$$p_1(t, z, \varepsilon) = F_1(t, z, \varepsilon u, \varepsilon) \varepsilon u$$

$$p_2(t, z, \varepsilon) = F_2(t, z, \varepsilon) \varepsilon$$

D'autre part, on a $\frac{\partial u}{\partial z}$ est bornée en (t, z) alors la matrice $I + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}$ est inversible. Pour ε suffisamment petit on a :

$$[I + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}]^{-1} = I + O(\varepsilon)$$

Par conséquent, l'équation d'état en z est donnée par

$$\dot{z} = \varepsilon f_{moy}(z) + \varepsilon^2 q(t, z, \varepsilon) \tag{3.18}$$

La fonction q est bornée en t, z et ε . Un changement d'échelle en temps $s = \varepsilon t$ permet de

transformer (3.18) selon :

$$\frac{dz}{ds} = f_{moy}(z) + \varepsilon q(s/\varepsilon, z, \varepsilon) \quad (3.19)$$

L'écriture (3.19) représente un système autonome (moyen) perturbé.

Partant du fait que f_{moy} est une fonction homogène de degré $m < 0$ par rapport à Δ_λ et que l'origine du système moyennisé (3.17) est stable en temps fini, alors, il existe une fonction de Lyapunov V de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n homogène de degré $l > \max\{0, -m\}$ par rapport à Δ_λ . Le long du système moyennisé (3.17), il existe $c > 0$ telle que la dérivée de V vérifie $\dot{V} \leq -cV^{\frac{l+m}{l}}$.

Comme $\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} = lV$ et que q est bornée en (t, z, ε) pour $M = \sup_{(s, z, \varepsilon)} q(s, z, \varepsilon)$, la dérivée de V le long du système (3.19) s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -cV^{\frac{l+m}{l}} + \varepsilon \|\nabla V\| \|q(s/\varepsilon, z, \varepsilon)\| \\ &\leq V^{\frac{l+m}{l}} [c - lM V^{-\frac{m}{l}}] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Le fait que $\frac{-m}{l} > 0$ et que V est une fonction continue et nulle à l'origine, alors il existe un voisinage \mathcal{V} de l'origine tel que

$$\dot{V} \leq -\frac{c}{2} V^{\frac{l+m}{l}}$$

On a l'origine du système (3.19) est stable en temps fini.

Il reste à prouver que l'origine du système (3.16) est stable en temps fini. En utilisant $x = z + \varepsilon u(t, z)$ avec u est bornée en (t, x) , alors au voisinage de $\varepsilon = 0$

$$x(t) - z(s) = O(\varepsilon)$$

Par conséquent, il existe $M_1 > 0$ tel que $\|x(t) - z(s)\| \leq M_1 \varepsilon$. Comme l'équilibre du système (3.19) est stable en temps fini, alors par définition, il existe un temps d'établissement T_z , tel que $\lim_{s \rightarrow T_z} z(s) = 0$.

D'autre part, pour $\gamma > 0$, il existe $\varepsilon^* = \frac{\gamma}{M} > 0$ et $\exists \beta > 0$ tel que $|s - T_z| < \beta$. Par conséquent, $\|z(s)\| \leq \gamma - M\varepsilon > 0$ pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon^*[$. De même, $\|x(t)\| \leq M\varepsilon + \|z(\varepsilon t)\|$,

alors pour $|t - \frac{T_z}{\varepsilon}| < \frac{\beta}{\varepsilon}$, on a $\|x\| \leq \gamma$. Ce qui permet $\lim_{t \rightarrow \frac{T_z}{\varepsilon}} x(t) = 0$.

Comme conclusion, l'origine du système (3.16) est stable en temps fini. Ce qui achève la démonstration. ■

Les résultats théoriques de stabilité en temps fini d'un système homogène et T-périodique sont important dans le sens où on ramène l'étude à un système moyennisé autonome dont la stabilité en temps fini de son origine ne nécessite pas la connaissance de la forme explicite de la fonction de Lyapunov.

3.5 Application au modèle d'un drone type XSF

3.5.1 Modèle de l'XSF

L'XSF est un mini-hélicoptère à quatre rotors disposés d'une manière croisée. Ce drone a été élaboré par le laboratoire IBISC et présente une particularité de deux rotors orientables. On peut se référer à [10] et [11] pour plus de détails sur les caractéristiques géométriques, inertielles et la dynamique de cet engin. Par rapport à la figure 3.6, on se limite dans cet exemple à un modèle plan dont l'altitude z peut varier. Il est très connu que le modèle conventionnel du drone X4, pour changer de direction selon x et y , l'inclinaison de l'appareil en tangage et roulis est nécessaire. On cherche à travers cet exemple de contrôler les deux directions par la variation du lacet du moment que l'XSF dispose de deux rotors inclinables. Par conséquent, on va se limiter à un modèle à quatre degrés de liberté contrôlés par trois entrées (sous-actionné).

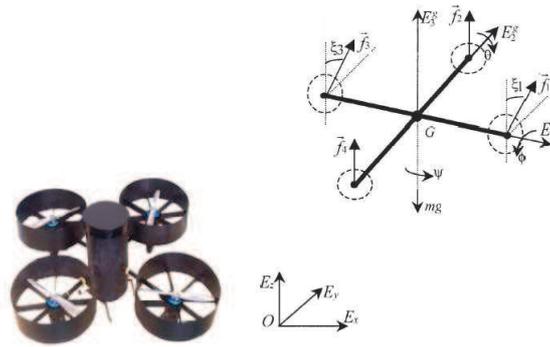


FIGURE 3.6 – Model de l'XSF à quatre rotors dont deux sont orientables.

3.5.2 Stabilisation en temps fini

Dans un référentiel cartésien, la dynamique issue de la figure 3.6 est donnée par :

$$m\ddot{x} = u \sin(\psi)$$

$$m\ddot{y} = u \cos(\psi)$$

$$m\ddot{z} = mg - v$$

$$\ddot{\psi} = \tau_\psi$$

où (x, y, z) définit la position, ψ définit l'orientation autour de z (lacet), m la masse et g la gravité. (u, v, τ_ψ) sont en fonction de quatre forces de poussée (\vec{f}_i) [11], désigne le

vecteur d'entrée. Un modèle équivalent est donné par :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x_1 \\ \dot{x}_1 &= \frac{1}{m}u \sin(\psi) \\ \dot{y} &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= \frac{1}{m}u \cos(\psi) \\ \dot{z} &= z_1 \\ \dot{z}_1 &= g - \frac{1}{m}\nu \\ \dot{\psi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \tau_\psi\end{aligned}$$

En ajoutant les intégrateurs suivants :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x_1 \\ \dot{x}_1 &= \frac{1}{m}\alpha \sin(\beta) \\ \dot{y} &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= \frac{1}{m}\alpha \cos(\beta) \\ \dot{z} &= z_1 \\ \dot{z}_1 &= g - \frac{1}{m}\nu \\ \dot{\alpha} &= u \\ \dot{\beta} &= \psi \\ \dot{\psi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \tau_\psi\end{aligned}$$

Il est clair qu'on peut désigner les bonnes commandes qui stabilisent en temps fini la dynamique de (z, ψ) ce qui signifie la stabilisation du drone à une altitude en z et une attitude en ψ données. Il reste à stabiliser en temps fini la position (x, y) dont la dynamique

reste toujours dépendant de ψ et qui s'exprime par :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= x_1 \\
\dot{x}_1 &= \frac{1}{m} \alpha \sin(\beta) \\
\dot{y} &= y_1 \\
\dot{y}_1 &= \frac{1}{m} \alpha \cos(\beta) \\
\dot{\alpha} &= u \\
\dot{\beta} &= \psi
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Rappelons que le système (3.21) ne vérifie pas Brockett [11] (réf Brockett).

Proposition 3.5.1 : *Etant données les entrées auxiliaires suivantes :*

$$\begin{aligned}
\alpha_d &= 2m\rho(\bar{x}) \sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - 2m(\varphi_{\frac{1}{3}}(y) + \varphi_{\frac{1}{2}}(y_1)) \\
\beta_d &= -2\frac{\sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)}{\rho(\bar{x})}(\varphi_{\frac{1}{3}}(x) + \varphi_{\frac{1}{2}}(x_1))
\end{aligned} \tag{3.22}$$

et les commandes stabilisantes

$$\begin{aligned}
u &= -k_1\varphi_{\frac{1}{3}}(\alpha - \alpha_d) + \dot{\alpha}_d \\
\psi &= -k_2\varphi_{\frac{1}{3}}(\beta - \beta_d) + \dot{\beta}_d
\end{aligned} \tag{3.23}$$

avec $\bar{x} = (x, x_1, y, y_1)$ et $\rho(\bar{x}) = |x^2 + x_1^3 + y^2 + y_1^3|^{\frac{1}{6}}$, $k_1, k_2 > 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le retour d'état instationnaire en u et ψ stabilise localement en temps fini l'origine du système (3.21).

Preuve. Pour tout $X = (x, x_1, y, y_1, \alpha, \beta)^t \in \mathbb{R}^6$, le système (3.21) s'écrit :

$$\dot{X} = f(X, t)$$

avec

$$f(X, t) = \left(x_1, \frac{1}{m}\alpha \sin(\beta), y_1, \frac{1}{m}\alpha \cos(\beta), u, \psi\right)^T$$

A partir duquel on obtient le modèle linéarisé suivant :

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= x_1 \\
 \dot{x}_1 &= \frac{1}{m} \alpha \beta \\
 \dot{y} &= y_1 \\
 \dot{y}_1 &= \frac{1}{m} \alpha \\
 \dot{\alpha} &= u \\
 \dot{\beta} &= \psi
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

En appliquant les commandes en u et ψ , en boucle fermée, on a :

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= x_1 \\
 \dot{x}_1 &= \frac{1}{m} \alpha_d \beta_d \\
 \dot{y} &= y_1 \\
 \dot{y}_1 &= \frac{1}{m} \alpha_d
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Afin d'appliquer les résultats de stabilité en temps fini obtenues dans le cas d'un système homogène et T -périodique et dont le terme de perturbation est à variables séparables, la forme compacte du modèle bouclé est donnée par :

$$\dot{X} = f(X) + R_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)g_1(X) + R_2\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)g_2(X) \tag{3.26}$$

où

$$f(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2(\varphi_{1/3}(x) + \varphi_{1/2}(x_1)) \\ y_1 \\ -2(\varphi_{1/3}(y) + \varphi_{1/2}(y_1)) \end{pmatrix}$$

$$g_1(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{\rho_x}(\varphi_{1/3}(x) + \varphi_{1/2}(x_1))(\varphi_{1/3}(y) + \varphi_{1/2}(y_1)) \\ 0 \\ 2\rho_x \end{pmatrix}$$

$$g_2(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4(\varphi_{1/3}(x) + \varphi_{1/2}(x_1)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1(t) = \sin(t)$$

et

$$R_2(t) = \sin^2(t) - \frac{1}{2}$$

Le système (3.26) présente une partie nominale $f(X)$ et une perturbation à variables séparables, c'est la partie restante de cette écriture. De même, ce système est homogène et 2π -périodique. Par conséquent, on peut appliquer les résultats des propositions 3.4.1 et 3.3.2. Par rapport à la dilatation $\Delta_\lambda(X, t) = (\lambda^3 x, \lambda^2 x_1, \lambda^3 y, \lambda^2 y_1)$, on peut facilement vérifier que $f(X)$ est homogène de degré (-1) .

Si on se réfère à la proposition 3.3.2, le système nominal s'exprimant par,

$$\dot{X} = f(X) \tag{3.27}$$

présente une origine stable en temps fini avec $R_i(t)$ et $g_i(X)$ vérifiant les hypothèses de la Proposition 3.3.2. A présent, on peut conclure que l'origine du système perturbé (3.26) est stable en temps fini.

Maintenant, en appliquant la technique de moyennisation au système (3.26), sachant que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_1(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_2(t) dt = 0$$

par conséquent, la moyenne du système (3.26) est à présent aussi le système nominal (3.27). Après avoir appliqué les résultats de la proposition 3.4.1 et partant du fait que

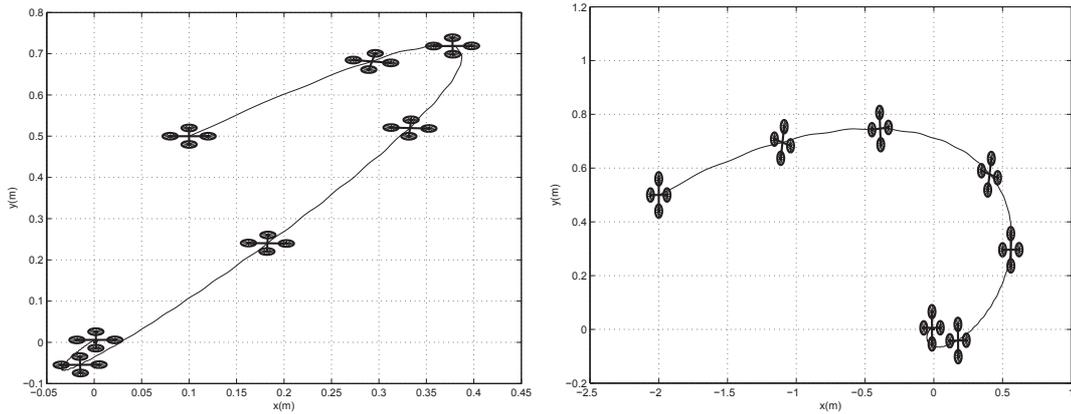


FIGURE 3.7 – Stabilisation de l'origine pour deux états initiaux différents et à une altitude en z atteinte.

l'origine du système moyennisé est stable en temps fini, nous pouvons conclure que l'origine du système (3.26) reste stable en temps fini. Ce qui achève la démonstration.

■

3.5.3 Résultats de simulation

Dans cete section, on présente les résultats de simulation associés au modèle de l'XSF (3.21) auquel on associe les entrées de commande (3.22)-(3.23). Les constantes sont telles que $m = 1$, $\varepsilon = 0.034$, $k_1 = 0.25$ et $k_2 = 0.25$. Dans le plan, pour une altitude en z atteinte, deux positions initiales on été figées de la forme $(x_0, y_0, \psi_0) = (0.1m, 0.5m, -\frac{\pi}{2})$ et $(x_0, y_0, \psi_0) = (-2m, 0.5m, 0rd)$. La figure 3.7 illustre la stabilité de l'origine pour les deux états initiaux. De point de vue robustesse de la commande par rapport à un système exogène (perturbation externe), non compensé par la commande, on se ramène au cas ou la perturbation ne s'annule pas à l'origine. On peut toujours appliquer les résultats de la section 1.2.2 où le terme de perturbation devrait être borné (voir proposition ??). Cette même analyse de robustesse peut concerner le cas où une erreur de modélisation affecte le modèle qui a servi pour l'élaboration de la commande. Ainsi, cette perturbation dépend forcément de l'état et on peut toujours la traiter sous la forme d'une perturbation qui s'annule à l'origin. Ce cas de figure est associé aux résultats de la proposition 3.2.1.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à la stabilité en temps fini des systèmes perturbés. Pour un système nominal autonome et non autonome, dont l'origine est supposé stable en temps fini, auquel est additionné un terme de perturbation qui s'annule et ne s'annule pas à l'origine, nous avons établi les conditions de stabilité en temps fini de l'origine du système initial. Comme constat, la connaissance de la forme explicite de la fonction de Lyapunov n'est pas nécessaire alors que l'homogénéité de la fonction qui représente le système nominal par rapport à une dilatation donnée est requise. Par rapport aux problèmes de stabilisation des systèmes contrôlés dont le vecteur de commande est instationnaire (systèmes qui ne vérifient pas Brockett, tels que l'unicycle, dirigeable, véhicule terrestre, drone, ect.), nous avons présenté des résultats théoriques généraux pour les systèmes bouclés dans le cas où la perturbation est à variables séparables et le cas d'un système singulièrement perturbé. La technique de moyennisation est montrée efficace pour l'étude de stabilité des systèmes homogènes et T-périodiques. La complexité du modèle a été franchie par l'étude de propriétés du système moyennisé qui est rendu autonome. Afin de distinguer les différentes propositions de ce chapitre, outre les exemples simples présentés comme application directe de chaque résultat, on a présenté un exemple détaillé concernant la stabilisation en temps fini de l'origine de la dynamique plan du drone XSF du laboratoire. A travers ce dernier exemple, on s'est aperçu que la commande stabilisante est robuste vis-à-vis d'une perturbation qui peut être liée à une erreur de modélisation ou à un système exogène.

Chapitre 4

Stabilité et stabilisation en temps fini des systèmes interconnectés

4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de mieux comprendre et de bien formaliser les effets induits par les termes d'interconnexion dans la stabilité et la stabilisation des systèmes dynamiques éventuellement non linéaires et complexes. Il s'agit de développer des méthodes et des outils pour l'analyse et la commande de tels systèmes. La question fondamentale est : connaissant la forme nominale associée à un système dynamique et dont l'analyse de la stabilité peut être rendue triviale avec les outils classiques, comment peut-on étendre ces outils pour l'étude du système de départ ? Plusieurs auteurs se sont attaqués à l'analyse de propriétés de stabilité des systèmes interconnectés [80]-[81] dont l'idée fondamentale est de subdiviser le système en des sous-systèmes liés entre eux par des termes d'interconnexion induisant des états croisés. Cette forme d'interconnexion est toujours existante dans la dynamique d'un système suite au couplage interne entre les variables d'état et à la présence de non linéarités. Du point de vue des résultats, l'analyse des systèmes interconnectés a conduit à des stabilités de type exponentielles et asymptotiques [30]. Partant du fait que l'interconnexion résulte d'un couplage interne tel que les systèmes chaînés, des résultats sur la stabilité de ce type de systèmes sont détaillés dans [70]. Des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilisation d'une formation de véhicules (vu comme des systèmes

interconnectés) ont été présentées dans [71], dans le cas linéaire et en utilisant la théorie du graphe. L'étude de la stabilité a été conduite dans le cas d'un système non linéaire interconnecté dans [72] et [30]. Les auteurs parviennent à un résultat de stabilité de type asymptotique. Pour l'étude des systèmes dynamiques, la notion de stabilité en temps fini est un concept plus pratique [16], [21] et [22] auxquelles nous allons faire référence pour analyser la stabilité et la stabilisation en temps fini des systèmes interconnectés.

Etant donné que la plupart de systèmes dynamiques contrôlés présentent un modèle non linéaire affine à la commande avec ou sans terme de dérive, nous présentons les outils qui réalisent la stabilisation en temps fini de l'origine de ce type de système après avoir formé les dynamiques interconnectées (section 2). Partant du fait qu'on peut souvent séparer la forme nominale et la perturbation à partir de la dynamique d'un système, nous allons présenter une démarche qui permet de dégager les conditions sur la perturbation pour lesquelles le système global reste stable en temps fini (section 3). Dans la section 3, nous faisons aussi la différence entre le couplage structurel et le couplage qui résulte d'une commande d'interconnexion. Dans la section 4, une large partie de ce chapitre est réservée à l'étude de la poursuite de trajectoire en temps fini d'un système multi-unicycles. A travers les résultats de simulation, nous engageons une discussion sur la robustesse de la commande vis-à-vis de l'ajout de l'entrée d'interconnexion comme une perturbation. Pour chaque unicycle nous proposons une commande qui réalise la poursuite en temps fini. Pour le groupe nous proposons, pour une topologie fixe donnée, une commande d'interconnexion qui preserve la stabilité en temps fini du groupe.

4.2 Stabilisation en temps fini des systèmes dynamiques interconnectés

La stabilisation de l'équilibre d'un système dynamique isolé où le modèle apparaît affine à la commande, a été largement traitée dans la littérature [80],[81],[70],[71],[72]. On distingue plusieurs variétés de commandes telles que, la commande par retour d'état, la commande instationnaire, la commande discontinue, etc. L'objectif de cette section n'est

pas de dériver la commande d'un système isolé, mais d'introduire la notion de stabilité dans le cas où le système isolé se met en réseau réalisant ainsi un système interconnecté. Généralement, le couplage interne entre les variables d'états introduit un couplage structurel. Cependant, le système ne peut être considéré comme interconnecté. Dans l'étude que nous menons, la source d'interconnexion est associée à la commande. Par conséquent, chaque système isolé présente les commandes appropriées qui lui assurent son autonomie, et sa stabilisation par rapport à son origine. Par rapport aux systèmes dynamiques contrôlés, nous allons formaliser sous forme d'un groupe les systèmes avec ou sans termes de dérive, affines à la commande. Indépendamment de la nature physique du modèle d'étude, hormis les exemples qu'on donne, les formes explicites des fonctions qui composent chaque modèle ne sont pas nécessaires, ce qui conduit à des résultats de stabilité et de stabilisation généraux. Les applications qui peuvent tirer profit de l'originalité de la démarche sont multiples et où la stabilité en temps fini des systèmes dynamiques interconnectés est requise. Particulièrement, les études, qui se basent sur le système multi-agents dont les dynamiques sont généralement simplifiées, sont conduites ici pour des modèles complexes et non linéaires. Un tel exemple de systèmes en interaction est décrit dans la figure 4.1.

4.2.1 Systèmes dynamiques avec terme de dérive

Un système dynamique avec dérive, affine à la commande, est représenté par une équation différentielle ordinaire du premier ordre par rapport au vecteur d'état. Ce modèle est représentatif de la plupart des systèmes dynamiques contrôlés. Dans le cas d'un modèle sous actionné, où la dimension du vecteur de commande est inférieure au nombre de degrés de liberté du système, la matrice qui apparaît comme coefficient du vecteur d'entrée, appelée aussi matrice de commande, n'est pas carrée. Par conséquent, même dans le cas de l'étude de la stabilité d'un système dynamique isolé, suite aux non linéarités dans le modèle, le problème s'avère difficile à résoudre. Nous avons présenté les outils mathématiques dans le chapitre précédent qui permettent d'analyser la stabilité d'un système bouclé sous forme perturbé. Ainsi, nous allons supposer le fait que chaque système isolé satisfait les conditions de stabilité d'une manière décentralisée et nous cherchons à établir les conditions de stabilité par rapport à plusieurs systèmes en réseau.

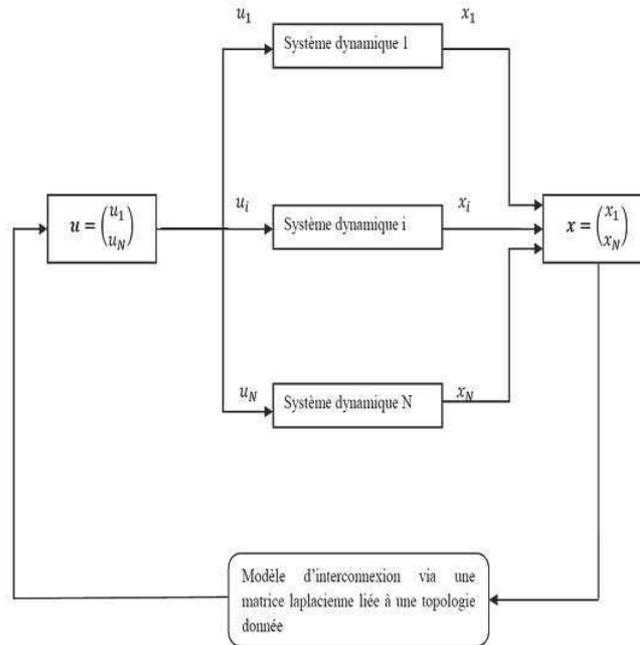


FIGURE 4.1 – Diagramme de plusieurs systèmes interconnectés

Par rapport aux systèmes physiques, en terme d'application et vu la présence d'un nombre croissant de systèmes autonomes en robotique et véhicules en formation, la stabilité de l'ensemble et l'échange d'informations entre les membres (agents) du groupe sont utiles. A titre d'exemple, nous citons la surveillance d'une zone commune par plusieurs véhicules aériens autonomes, la réalisation d'une tâche commune par plusieurs robots manipulateurs ou robots mobiles, etc.

Etant donné un ensemble de systèmes $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ tel que $\forall i \in \mathcal{I}$, la dynamique du $i^{\text{ième}}$ système est donnée par la forme algébrique :

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \sum_{j=1}^m g_{i,j}(x_i)u_j \quad (4.1)$$

où $x_i \in \mathbb{R}^n$, $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue et $\forall 1 \leq j \leq m$, $g_{i,j} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue. Sous une forme matricielle, le i^{me} système (4.1) conduit à,

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + B(x_i)u_i \quad (4.2)$$

avec $B(x_i) = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la matrice de commande dépendante de l'état du système et l'entrée de commande est $u_i \in \mathbb{R}^m$.

Notons que dans le cas d'une matrice B constante, l'étude des dynamiques interconnectées étant formalisée à partir de (4.2), Cremean et Murray [76] ont établi un résultat de stabilité asymptotique. L'ensemble du système auquel nous allons associer des conditions de stabilité en temps fini est défini par :

$$\dot{x} = f(x) + (I_N \otimes B(x_i))u \quad (4.3)$$

où I_N est la matrice identité, le vecteur d'état est $x \in \mathbb{R}^{Nn}$, le vecteur de commande est $u \in \mathbb{R}^{Nm}$ et les termes de dérive sont regroupés dans le vecteur $f(x) = (f_1(x_1), \dots, f_N(x_N))^T$ et \otimes est le symbole de Kronecker. L'objectif est de concevoir la commande u qui assure la stabilisation en temps fini de l'origine du système (4.3) sous une topologie fixe dont L est la matrice laplacienne.

Proposition 4.2.1 *Considérons la commande suivante*

$$u(x) = -[L \otimes I_m][I_N \otimes C]x \quad (4.4)$$

où la matrice $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice constante et L est la matrice laplacienne associée à une topologie fixe donnée. Sous l'entrée (4.4), l'origine du système interconnecté (4.3) est stable en temps fini si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1. $\exists k \geq 0$ tel que $\forall x \neq 0$, $x^T f(x) \leq -k(x^T x)^\beta$ avec $\beta \in]0, 1[$.
2. $x^T [L \otimes B(x_i)C]x \geq 0$.

\otimes est le symbole de Kronecker.

□

Preuve. En injectant la commande (4.4) dans le système (4.3) et en utilisant les propriétés du produit de Kronecker (voir chapitre 2), la dynamique du système interconnecté en

boucle fermée est donnée par

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f(x) + (I_N \otimes B(x_i))u \\
 &= f(x) - (I_N \otimes B(x_i))[L \otimes I_m](I_N \otimes C)x \\
 &= f(x) - [L \otimes B(x_i)C]x
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Utilisons la fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = \frac{1}{2}x^T x$, l'évaluation de la dérivée de V le long de (4.5) donne

$$\dot{V} = x^T f(x) - x^T [L \otimes B(x_i)C]x$$

suite à l'hypothèse 1.,

$$\dot{V} \leq -k(x^T x)^\beta - x^T [L \otimes B(x_i)C]x$$

L'hypothèse 2. dans la proposition 4.2.1 implique que le deuxième terme de \dot{V} est semi-défini négatif, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -k(x^T x)^\beta \\
 &\leq -2^\beta k[V]^\beta
 \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de la stabilité en temps fini de l'origine du système interconnecté (4.3). ■

Remarque 4.1 *L'hypothèse 1. implique que l'origine de chaque système est stable en temps fini pour une fonction appropriée de Lyapunov de type quadratique.*

Remarque 4.2 *L'hypothèse 2. équivaut à dire que la matrice $L \otimes B(x_i)C$ est semi-définie positive. Par conséquent, en utilisant les propriétés du produit de Kronecker, $B(x_i)C$ et L sont deux matrices semi-définies positives ou semi-définies négatives, simultanément. Ainsi, l'efficacité de l'entrée (4.4) dépend du choix du graphe \mathcal{G} et de la conception de C .*

Pour l'étude de la stabilité d'un multi-système avec dérive, le terme de dérive est souvent compensé par la commande, ainsi, il n'apparaît pas dans l'écriture de la dérivée de la fonction V . Or, dans notre cas d'étude, ce terme n'est pas compensé par la commande (4.4) ce qui impose la condition 1. qui figure dans la proposition 4.2.1. D'un point de vue pratique, cette condition est difficile à remplir car elle dépend fortement des caractéristiques physiques du système d'étude. Afin de prendre en compte le terme de dérive par une commande auxiliaire, nous proposons de dissocier la commande en deux parties : une partie qui se charge d'assurer la stabilité de chaque système isolé et la deuxième qui préserve la stabilité du système global tout en assurant l'échange d'informations sur l'état de chaque système. Nous allons introduire cette technique dans le cas d'un multi-systèmes sans dérive et l'étendre au cas d'un multi-systèmes avec dérive. Les détails sont donnés dans la section suivante.

Exemple. On considère le système contrôlé suivant, $\forall i \in \mathcal{I}$,

$$\begin{aligned}\dot{y}_i &= z_i \\ \dot{z}_i &= -\varphi_\alpha(y_i) - \varphi_\alpha(z_i) + u_i\end{aligned}\quad (4.6)$$

avec $\varphi_\alpha(y_i) = \text{sgn}(y_i)|y_i|^\alpha$ (de même pour $\varphi_\alpha(z_i)$) $\alpha \in]0, 1[$ et $x_i = (y_i \ z_i)^T$. Ce système se met sous la forme (4.3) avec

$$f_i(x_i) = \begin{pmatrix} z_i \\ -\varphi_\alpha(y_i) - \varphi_\alpha(z_i) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_N)^T$ et $f(x) = (f_1(x_1), \dots, f_N(x_N))^T$. On vérifie facilement que $\forall x \neq 0$, $x^T f(x) \leq -k(x^T x)^\alpha$. En se basant sur la Proposition 4.2.1, on propose une matrice d'interconnexion de la forme $C = (0 \ 1)^T$ et la commande d'interconnexion est donnée par :

$$u_i = -\sum_{j=1}^N a_{ij}(z_i - z_j) \quad (4.7)$$

où a_{ij} sont les éléments de la matrice adjacente du graphe fixe (figure 4.2).

Déduite du graphe \mathcal{G} , la matrice adjacente A s'écrit

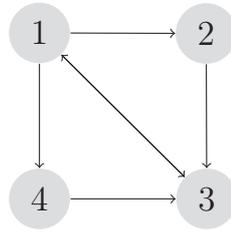


FIGURE 4.2 – Graphe \mathcal{G} associé aux 4 unicycles.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un test de simulation a été effectué pour $\alpha = \frac{2}{3}$ et $N = 4$. Indépendamment de l'action de u_i qui est appliquée pour former le système interconnecté, les dynamiques en y_i et z_i sont données respectivement par les figures 4.4 et 4.6. En présence de u_i , les résultats sont donnés par les figures 4.3 et 4.5. Clairement, l'origine du système interconnecté est stable en temps fini.

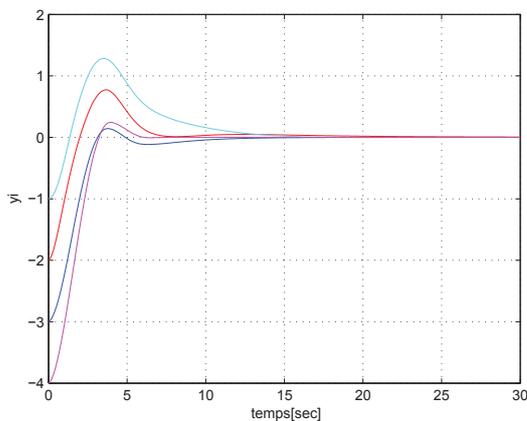


FIGURE 4.3 – Dynamique y_i avec u_i

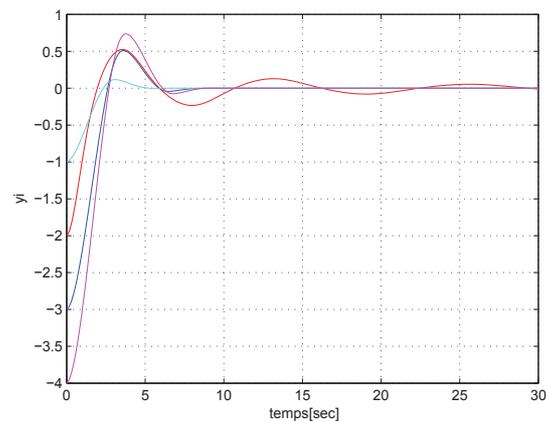
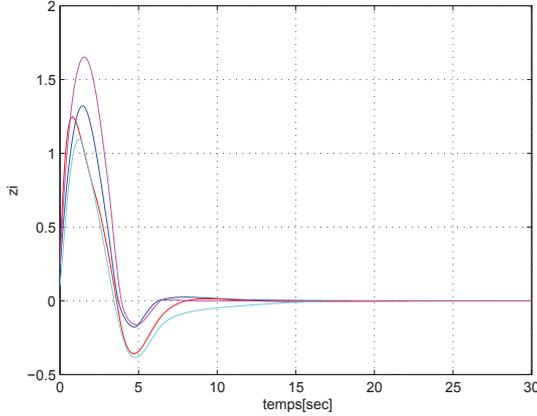
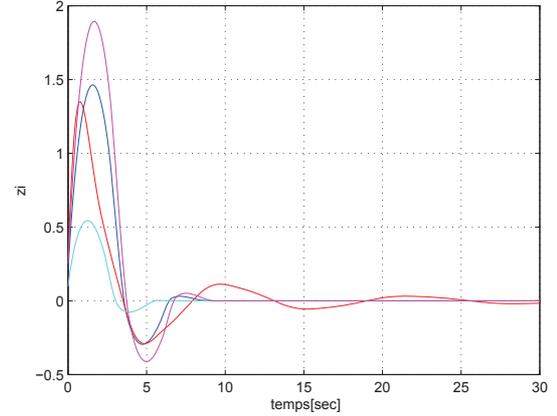


FIGURE 4.4 – Dynamique y_i sans u_i

FIGURE 4.5 – Dynamique z_i avec u_i FIGURE 4.6 – Dynamique z_i sans u_i

4.2.2 Systèmes dynamiques sans terme de dérive

Par rapport à la section précédente, un système dynamique sans terme de dérive est tel que $f_i(x_i) = 0$. Plusieurs systèmes physiques se décrivent sous cette forme, nous citons par exemple, la cinématique d'un satellite, la cinématique d'un unicycle et la dynamique d'une simple particule. On cherche à stabiliser un multi-système dont le modèle du $i^{\text{ème}}$ système est de la forme ($\forall i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$) :

$$\dot{x}_i = B(x_i)u_i \quad (4.8)$$

où $B(x_i) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $u_i \in \mathbb{R}^m$. Soit le vecteur d'état $x = (x_1, \dots, x_N)^T$, sous forme matricielle, la dynamique d'un multi-système est donnée par :

$$\dot{x} = (I_N \otimes B(x_i))u \quad (4.9)$$

avec $u \in \mathbb{R}^{Nm}$. La stabilité de l'origine des systèmes interconnectés issus de (4.9) est donnée par la proposition suivante.

Proposition 4.2.2 *Soit u de la forme*

$$u(x) = u^{stf}(x) + u^{inter}(x) \quad (4.10)$$

avec u^{stf} telle que

$$x^T (I_N \otimes B(x_i)) u^{stf}(x) \leq -k(x^T x)^\beta \quad (4.11)$$

et

$$u^{inter}(x) = -[L \otimes I_m][I_N \otimes C]x \quad (4.12)$$

avec $k > 0$, $\beta \in]0, 1[$ et la matrice $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Sous les commandes (4.10), (4.11), (4.12) et l'hypothèse

$$x^T [L \otimes B(x_i)C]x \geq 0$$

l'origine du système interconnecté (4.9) est stable en temps fini.

□

Preuve. Après avoir appliqué la commande (4.10) au système (4.9), on obtient

$$\dot{x} = (I_N \otimes B)u^{stf}(x) + (I_N \otimes B)u^{inter}(x)$$

En substituant l'expression de $u^{inter}(x)$, on a

$$\dot{x} = (I_N \otimes B)u^{stf}(x) - (I_N \otimes B)[L \otimes I_m](I_N \otimes C)x \quad (4.13)$$

D'après les propriétés du produit de Kronecker,

$$\dot{x} = (I_N \otimes B)u^{stf}(x) - [L \otimes BC]x \quad (4.14)$$

La fonction de Lyapunov candidate est $V = \frac{1}{2}x^T x$ dont la dérivée le long de (4.14) s'écrit

$$\dot{V} = x^T (I_N \otimes B)u^{stf}(x) - x^T [L \otimes BC]x \quad (4.15)$$

En utilisant (4.11) et (4.13), on déduit l'inégalité suivante

$$\dot{V} \leq -2^\beta k [V]^\beta \quad (4.16)$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 4.3 *La forme quadratique de la fonction de Lyapunov V associée à la commande (4.4) permet de prouver, par rapport à une topologie fixe donnée, une interconnexion de type asymptotique. Si l'on veut aboutir à une interconnexion de type temps fini, on peut prendre comme entrée $u^{inter} = -[L \otimes I_m][I_N \otimes C]\phi_\alpha(x)$. Cependant, pour la forme quadratique de V , l'hypothèse $x^T[L \otimes B(x_i)C]\phi_\alpha(x) \geq 0$ n'est pas vérifiée. Dans l'étude d'un multi-système, où l'interconnexion peut être considérée comme une perturbation et sans avoir recours à la forme explicite de V , des résultats généraux seront présentés dans la section suivante.*

Notons aussi qu'on n'a pas donné de forme explicite à une partie de la commande u , à savoir u^{stf} . Cette dernière dépend de la fonction de Lyapunov associée à chaque système isolé ainsi que de sa dynamique. L'élaboration de la forme explicite de u^{stf} revient à étudier la stabilité en temps fini de chaque système seul, alors que l'inégalité (4.11) favorise une forme quadratique de la fonction V . A noter aussi que, en se référant aux résultats de l'étude de stabilité d'un multi-système avec dérive, la commande u^{stf} peut être désignée en fonction du terme de dérive ce qui affaiblit l'hypothèse 1. de la proposition 4.2.1.

4.3 Stabilité en temps fini des systèmes interconnectés

Dans cette section, nous complétons l'analyse théorique présentée au chapitre 3 où nous avons étudié la stabilité des systèmes dynamiques perturbés. Par rapport au système nominal, le terme de perturbation provient de la nécessité de mettre plusieurs systèmes dynamiques en réseau à travers leurs entrées de commande. L'étude que nous menons n'exclut pas les perturbations liées à un couplage structurel. Nous proposons également des exemples pour clarifier les résultats théoriques.

4.3.1 Généralités sur les modèles interconnectés

A présent, le modèle d'un $i^{\text{ème}}$ système dynamique bouclé s'écrit sous la forme ($i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$) :

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i) + g_i(t, x) \quad (4.17)$$

avec $x_i \in \mathbb{R}^n$ et $x = [x_1, \dots, x_N]^T$. Supposons que f_i et g_i soient continues en (t, x) . Le terme $g_i(t, x)$ peut être interprété comme une perturbation par rapport au système nominal suivant,

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i) \quad (4.18)$$

avec $\forall i \in \mathcal{I}, f_i(t, 0) = 0$ et $g_i(t, 0) = 0$.

Supposons que l'origine de chaque système (4.18) est stable en temps fini et que $V_i(x, t)$ est la fonction de Lyapunov associée, vérifiant l'inégalité suivante

$$\dot{V}_i(t, x) \leq -k_i [V_i(t, x)]^{\lambda_i} \quad (4.19)$$

avec $\lambda_i \in (0, 1)$ et $k_i > 0$.

Notons que l'existence d'une telle fonction de Lyapunov pour la forme nominale de chaque système peut être réalisée grâce au théorème inverse de Lyapunov, présenté par Haddad [24] lors de l'étude de la stabilité en temps fini des systèmes non autonomes.

Proposition 4.4 *Supposons que le terme d'interconnection $g_i(t, x)$ satisfait l'inégalité suivante*

$$\|g_i(t, x)\| \leq \sum_{j=1}^N \theta_{ij} \psi_j(x_j) \quad (4.20)$$

où les θ_{ij} sont des constantes strictement positives et $\psi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et définie positive et telle que $\psi_j(x_j) = O(x_j^\beta)$ avec $\beta > 0$. L'équilibre du système interconnecté (4.17) est localement stable en temps fini si les hypothèses suivantes sont satisfaites :

1. $f_i(t, \cdot)$ est homogène de degré $m < 0$ par rapport à une dilatation Δ_λ ,
2. l'origine de chaque système nominal (4.18) est stable en temps fini.

□

Preuve. Nous introduisons une fonction de Lyapunov $V(t, x)$ globale qui combine l'interaction entre les N systèmes issus de (4.18), soit

$$V(t, x) = \sum_{i=1}^N c_i V_i(t, x), \quad c_i > 0 \quad (4.21)$$

Maintenant, par rapport aux systèmes perturbés, la dérivée de $V(t, x)$ est donnée par

$$\dot{V}(t, x) = \sum_{i=1}^N c_i \left[\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial x_i} f_i(t, x_i) \right] + \sum_{i=1}^N c_i \frac{\partial V_i}{\partial x_i} g_i(t, x) \quad (4.22)$$

Or, à partir de l'hypothèse 2., il existe une fonction de Lyapunov $V_i(t, x)$ vérifiant l'inégalité (4.19). Par conséquent, on obtient

$$\sum_{i=1}^N c_i \left[\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial x_i} f_i(t, x_i) \right] \leq - \sum_{i=1}^N c_i k_i [V_i(t, x)]^\lambda$$

D'autre part, comme la fonction $f_i(t, \cdot)$ est homogène de degré m ce qui implique que la fonction de Lyapunov V_i est aussi homogène de degré $l = \max\{0, -m\}$. On a alors,

$$\sum_{k=1}^n r_k x_{i_k} \frac{\partial V_i}{\partial x_{i_k}} = l V_i$$

avec x_{i_k} est un élément de $x_i = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$. A partir de l'écriture (4.22) et la condition (4.20),

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &\leq - \sum_{i=1}^N c_i k_i [V_i(t, x)]^\lambda + \sum_{i=1}^N c_i l V_i \sum_{j=1}^N \theta_{ij} \psi_j(x_j) \\ &\leq - \sum_{i=1}^N c_i [V_i(t, x)]^\lambda \left[k_i - \sum_{j=1}^N l V_i^{1-\lambda} \theta_{ij} \psi_j(x_j) \right] \end{aligned}$$

Comme $1 - \lambda > 0$, $V_i(t, \cdot)$ et $\psi_j(\cdot)$ sont des fonctions continues qui prennent la valeur 0 à

l'origine, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in B_\delta(0)$, on a

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_i k_i [V_i(t, x)]^\lambda \\ &\leq -\frac{M}{2} \sum_{i=1}^N [c_i V_i(t, x)]^\lambda\end{aligned}$$

avec $M = \max_{i \in \mathcal{I}} (k_i c_i^{1-\lambda})$. Rappelons que pour toute variable $\xi_1, \dots, \xi_N \geq 0$ et $\lambda \in (0, 1)$,

$$\left(\sum_{i=1}^N \xi\right)^\lambda \leq \sum_{i=1}^N \xi^\lambda \leq N^{1-\lambda} \left(\sum_{i=1}^N \xi\right)^\lambda$$

Ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\frac{M}{2} \left(\sum_{i=1}^N c_i V_i(t, x)\right)^\lambda \\ &= -\frac{M}{2} [V(t, x)]^\lambda\end{aligned}$$

Ainsi, l'origine du système perturbé (4.17) reste stable en temps fini.

■

Les résultats de cette section, en terme de stabilité en temps fini sur les systèmes interconnectés, vont être appliqués sur deux exemples. La première application concerne un seul système où le couplage apparaît entre les variables d'état (couplage interne ou structurel). Dans le deuxième exemple, le terme de perturbation est dû à un couplage externe, conçu à partir d'une topologie fixe et la commande d'interconnexion. On résout, par conséquent, le problème de stabilisation en temps fini d'un multi-système dynamique et d'une interconnexion en temps fini.

4.3.2 Exemple d'un couplage structurel

On considère la dynamique d'un système interconnecté dans \mathbb{R}^2 où l'interconnexion résulte d'un couplage interne

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\text{sign}(x_1)|x_1|^a + \nu x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\text{sign}(x_2)|x_2|^a - \nu x_1 \end{aligned} \quad (4.23)$$

avec $\nu > 0$ et $a \in]0, 1[$. Ce système peut se représenter sous la forme (4.17)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} f_1(x_1) \\ f_2(x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

avec $x = (x_1 \ x_2)^T$ et

$$f_1(x_1) = -\text{sign}(x_1)|x_1|^a ; \quad f_2(x_2) = -\text{sign}(x_2)|x_2|^a$$

$$g_1(x) = \nu x_2 ; \quad g_2(x) = -\nu x_1$$

. On vérifie bien les hypothèses de la Proposition 4.4, soit :

- $f_i(x_i)$ est homogène de degré $1 - \frac{1}{a}$ par rapport à la dilatation $\Delta_\lambda(x_i) = \lambda^{\frac{1}{a}} x_i$.
- $x_i = 0$ est stable en temps fini pour le système nominal $\dot{x}_i = f_i(x_i)$.
- $|g_1(x)| = \nu|x_2|$ et $|g_2(x)| = \nu|x_1|$, les termes d'interconnexion vérifient l'inégalité (4.20).

Un test de simulation a été effectué pour $a = \frac{1}{2}$ et $\nu = 0.25$. La figure 4.7 montre la stabilité en temps fini de l'origine du système ci-dessus.

4.3.3 De la stabilité à la stabilisation des systèmes interconnectés

Afin de s'affranchir de la forme quadratique de la fonction de Lyapunov qui s'adapte sans doute à la résolution du problème de stabilisation dans le cas d'une interconnexion asymptotique, nous conduisons nos investigations de la stabilité générale de la section précédente à la stabilisation dans le cas des systèmes contrôlés. En outre, on introduit le

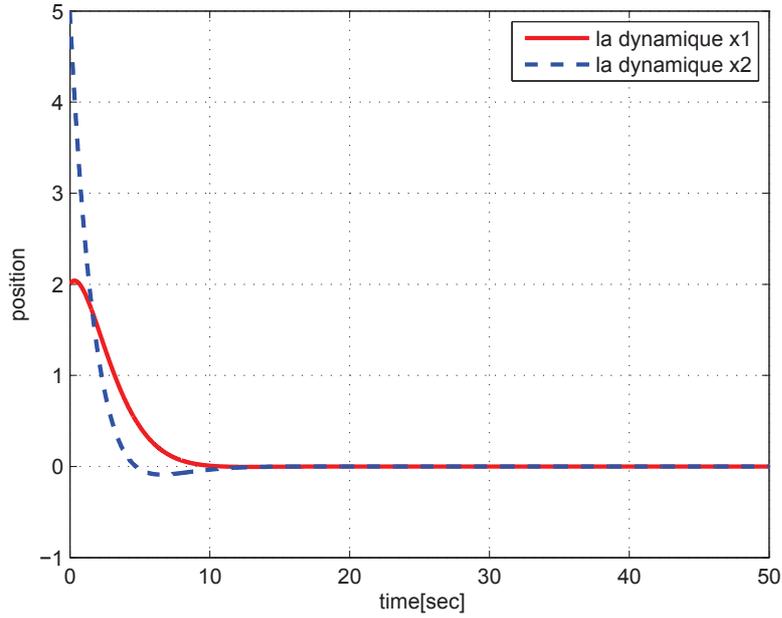


FIGURE 4.7 – Stabilité en temps fini du système interconnecté (4.23)

problème d'une interconnexion temps fini.

Soient N systèmes de la forme

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + B(x_i)u_i \quad (4.24)$$

avec $x_i \in \mathbb{R}^n$, $B(x_i) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $u_i \in \mathbb{R}^m$. Rappelons aussi la forme matricielle des systèmes interconnectés qui se prête à la commande,

$$\dot{x} = f(x) + (I_N \otimes B(x_i))u \quad (4.25)$$

où I_N est la matrice identité, $x \in \mathbb{R}^{Nn}$, $u \in \mathbb{R}^{Nm}$ et $f(x) = (f_1(x_1), \dots, f_N(x_N))^T$.

A présent, décomposons la commande u en deux termes

$$u(t, x) = u^{stf}(t, x) + u^{inter}(t, x) \quad (4.26)$$

$u^{inter}(t, x) = u^{inter}(x)$ car on traite le cas où la topologie est stationnaire. Si on applique

cette commande au système (4.24), on obtient,

$$\dot{x} = f(x) + (I_N \otimes B(x_i))u^{stf} + (I_N \otimes B(x_i))u^{inter} \quad (4.27)$$

Etant donnée une topologie stationnaire à laquelle est associée la matrice laplacienne L , on propose de résoudre le problème d'interconnexion en temps fini à l'aide de u^{inter} de la forme :

$$u^{inter} = -[L \otimes I_m][I_N \otimes C]\phi_\alpha(x) \quad (4.28)$$

A ce stade, après avoir appliqué cette commande au système (4.27), on obtient

$$\dot{x} = f(x) + (I_N \otimes B(x_i))u^{stf} - (I_N \otimes B(x_i))[L \otimes I_m][I_N \otimes C]\phi_\alpha(x) \quad (4.29)$$

Si on extrait la dynamique du $i^{\text{ème}}$ système, on peut écrire

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + B(x_i)u_i^{stf} - \sum_{j=1}^N a_{ij}B(x_i)C[\phi_\alpha(x_i) - \phi_\alpha(x_j)]$$

Après réarrangement,

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) - \sum_{j=1}^N a_{ij}B(x_i)C\phi_\alpha(x_i) + B(x_i)u_i^{stf} + \sum_{j=1}^N a_{ij}B(x_i)C\phi_\alpha(x_j)$$

qui se met sous la forme

$$\dot{x}_i = h_i(t, x_i) + g_i(t, x)$$

avec

$$h_i(t, x_i) = f_i(x_i) - \sum_{j=1}^N a_{ij}B(x_i)C\phi_\alpha(x_i) + B(x_i)u_i^{stf}$$

et

$$g_i(t, x) = \sum_{j=1}^N a_{ij}B(x_i)C\phi_\alpha(x_j)$$

Il est clair que le système nominal s'écrit $\dot{x}_i = h_i(t, x_i)$ où il apparaît que la dynamique du $i^{\text{ème}}$ système est perturbée par $g_i(t, x)$. La stabilité de l'origine du système interconnecté

est formulée dans la proposition suivante.

Proposition 4.5 *S'il existe une commande u^{stf} qui stabilise en temps fini l'origine du système nominal $\dot{x}_i = h_i(t, x_i)$ et sous la condition (4.20), donnée par la Proposition 4.4, alors l'origine du système (4.27) est stable en temps fini.*

□

Preuve. Par rapport à l'étude de stabilité des systèmes interconnectés (section précédente) où on a présenté une démonstration détaillée sur ce qui résulte de l'existence de u^{stf} , il reste à vérifier la condition sur $g_i(t, x)$. Ce terme vérifie bien l'inégalité suivante

$$\|g_i(t, x)\| \leq \sum_{j=1}^N a_{ij} \psi_j(x_j)$$

avec $\psi_j(x_j) = \|BC\phi_\alpha(x_j)\|$ qui est une application continue et définie positive. Ce qui achève la preuve.

■

Remarque 4.6 *Même si on prétend que la commande d'interconnexion réalise un couplage en temps fini, l'absence de la forme explicite de la fonction de Lyapunov ne permet pas de prouver cette propriété. On va rencontrer cette problématique lors de l'achèvement de la stabilisation d'une formation en temps fini.*

4.4 Poursuite de trajectoire en temps fini d'un système multi-unicycles

Dans la littérature, le problème de poursuite de trajectoire des robots mobiles (unicycles) a reçu une grande attention. Différentes méthodes ont été proposées pour résoudre ce problème (citons les travaux de Samson [77] où l'auteur propose une approche globale). La stabilité de type exponentielle des erreurs de poursuite a été obtenue dans [78]. Sans faire appel à la technique de Lyapunov, en se basant sur la théorie des systèmes perturbés, Li dans [75] a proposé un résultat résolvant le problème de poursuite de trajectoire

en temps fini. Nous procéderons différemment ici la forme quadratique d'une fonction de Lyapunov sera candidate pour résoudre le problème de poursuite de trajectoire en temps fini d'un système multi-unicycles. Nous nous inspirons d'un résultat asymptotique proposé par Morin [79] qui va servir dans l'analyse du problème de poursuite d'un unicycle.

4.4.1 Stratégie de poursuite pour un unicycle

Le modèle de l'unicycle est cinématiquement non holonome pourvu que la relation cinématique de contrainte ne soit pas intégrable. Pour le problème de poursuite de trajectoire, cette cinématique a été largement étudiée dans littérature, conduisant à des résultats de stabilité de type exponentiels et asymptotiques. Par la suite, et afin de résoudre le problème de poursuite de trajectoire dans le cas d'un système interconnecté qui se basera sur plusieurs unicycles, on étudie le modèle cinématique suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u_1 \cos(\theta) \\ \dot{y} &= u_1 \sin(\theta) \\ \dot{\theta} &= u_2\end{aligned}\tag{4.30}$$

où (x, y) désignent les coordonnées du centre de masse, θ est l'angle d'orientation et u_1, u_2 sont respectivement, l'entrée en vitesse linéaire et l'entrée en vitesse angulaire. A l'image du modèle (4.30), le modèle de référence est donné par

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= u_{1,r} \cos(\theta_r) \\ \dot{y}_r &= u_{1,r} \sin(\theta_r) \\ \dot{\theta}_r &= u_{2,r}\end{aligned}\tag{4.31}$$

où $u_{1,r}$ est la vitesse linéaire de référence, considérée constante, et $u_{2,r}$ est la vitesse angulaire de référence qui peut varier avec le temps. Nous allons définir un système d'erreurs de poursuite tel que $e = (x - x_r, y - y_r, \theta - \theta_r) \triangleq (e_{1,r}, e_{2,r}, e_{3,r})$ dont la dynamique est

décrite par :

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{1,r} &= u_{2,r}e_{2,r} + u_1 \cos(e_{3,r}) - u_{1,r} \\
\dot{e}_{2,r} &= -u_{2,r}e_{1,r} + u_1 \sin(e_{3,r}) \\
\dot{e}_{3,r} &= u_2 - u_{2,r}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

où $e_{3,r} \in]-\pi/2, \pi/2[$. En terme d'erreurs, en introduisant les changements de variable suivants [79],

$$\begin{aligned}
z_1 &= e_{1,r} \\
z_2 &= e_{2,r} \\
z_3 &= \tan e_{3,r} \\
w_1 &= u_1 \cos(e_{3,r}) - u_{1,r} \\
w_2 &= \frac{u_2 - u_{2,r}}{\cos^2(e_{3,r})}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Ceci impose donc $e_{3,r} \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$. Dont la dynamique est déduite de (4.33) avec w_1 et w_2 comme nouvelles entrées,

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= u_{2,r}z_2 + w_1 \\
\dot{z}_2 &= -u_{2,r}z_1 + u_{1,r}z_3 + w_1z_3 \\
\dot{z}_3 &= w_2
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Proposition 4.4.1 *Avec les commandes suivantes*

$$w_1 = -|u_{1,r}|(\text{sign}(z_1)|z_1|^\alpha + z_2z_3) \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
w_2 &= -|u_{1,r}|[z_2 - \text{sign}(z_1)|z_1|^\alpha + (z_1z_2 + \text{sign}(z_1)|z_1|^\alpha z_2 \\
&\quad + z_2^2z_3 - \frac{1}{\arctan(\varepsilon)}\text{sign}(z_3)|z_2|^{\alpha+1})]
\end{aligned} \tag{4.36}$$

l'origine du système (4.33) est stable en temps fini, par conséquent, le système (4.29) suit la référence (4.30) en temps fini, avec $\varepsilon > 0$, $e_{3,r} > \varepsilon$ et $\alpha \in]0, 1[$.

Preuve. Prenons la fonction de Lyapunov quadratique suivante

$$V(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)$$

la dérivée de V le long du système (4.33) est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 + z_3 \dot{z}_3 \\ &= z_1 w_1 + z_2 z_3 w_1 + z_3 w_2 + u_{1,r} z_2 z_3 \\ &= -|u_{1,r}|(|z_1|^{\alpha+1} + |z_2|^{\alpha+1} + |z_3|^{\alpha+1}) \\ &= -|u_{1,r}| \sum_{i=1}^3 |z_i|^{\alpha+1} \end{aligned} \tag{4.37}$$

Partant du fait que la fonction $z_i \mapsto z_i^{\alpha+1}$ est convexe, on a,

$$\left(\sum_{i=1}^3 \frac{z_i}{3}\right)^{\alpha+1} \leq \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 z_i^{\alpha+1}$$

De plus,

$$\left(\sum_{i=1}^3 z_i\right)^{\alpha+1} \geq \left(\sum_{i=1}^3 z_i^2\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}$$

Alors, on prouve que

$$\dot{V} \leq -\frac{|u_{1,r}|}{3^\alpha} 2^{\frac{\alpha+1}{2}} V^{\frac{\alpha+1}{2}}$$

On peut conclure que l'origine du système (4.33) est stable en temps fini.

4.4.2 Résultats de simulation d'un unicycle

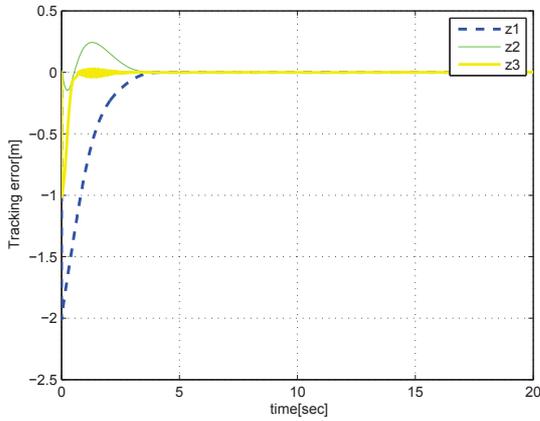
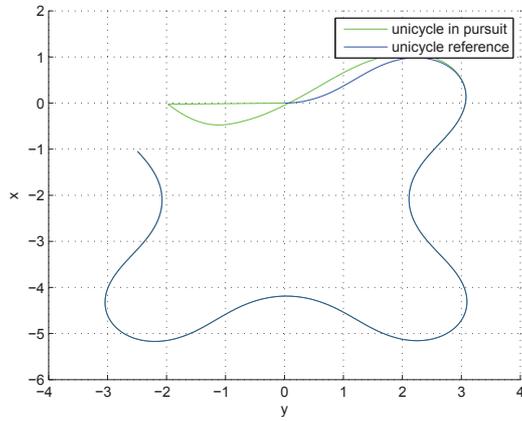
Les références en vitesses sont telles que

$$u_{1,r} = 1m/s$$

$$u_{2,r} = \cos(t) - \frac{1}{4} \text{rad/s}$$

Les conditions suivantes sont adoptées : $\alpha = 0.5$, $(x, y)(t = 0) = (-2, 0)m$, $(x_r, y_r)(t = 0) = (0, 0)m$ et $(\theta, \theta_r)(t = 0) = (3\pi/4, 0)\text{rad/s}$. La trajectoire de référence est obtenue numériquement à partir de (4.32).

Nous avons simulé l'unicycle avec les commandes de poursuite (4.35) et (4.36). Le résultats de simulation présenté dans la figure 4.8 montre la stabilisation des erreurs z_1 , z_2 et z_3 . Par conséquent, on achève la poursuite en temps fini de trajectoire de référence, comme le montre la figure 4.9 (plan de phase en (x, y)).

FIGURE 4.8 – Les erreurs en z_i FIGURE 4.9 – Plan de phase en (x, y)

4.4.3 Stratégie de poursuite d'un système multi-unicycles

Le modèle d'un unicycle est sans terme de dérive, nous allons appliquer directement les résultats de la Proposition 4.2.2 pour un ensemble de N unicycles. Rappelons la forme compacte du $i^{\text{ème}}$ modèle

$$\dot{q}_i = B(q_i)u_i \quad (4.38)$$

avec $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, $q_i = (x_i, y_i, \theta_i)^T$, $u_i = (u_{1,i}, u_{2,i})^T$ et

$$B(q_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & 0 \\ \sin(\theta_i) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le modèle de référence de chaque unicycle est défini par (4.32) et le $i^{\text{ème}}$ système d'erreurs est donné par (à partir de l'écriture (4.33))

$$\begin{aligned}\dot{z}_{1,i} &= u_{2,r}z_{2,i} + w_{1,i} \\ \dot{z}_{2,i} &= u_{2,r}z_{1,i} + u_{1,r}z_{3,i} + w_{1,i}z_{3,i} \\ \dot{z}_{3,i} &= w_{2,i}\end{aligned}\tag{4.39}$$

Etant donné un graphe fixe \mathcal{G} dont la matrice laplacienne est L qui décrit la connexion entre tous les unicycles, et C est une matrice dans $\mathbb{R}^{2 \times 3}$ qui vérifie l'hypothèse 2. dans la proposition 4.2.1, nous avons la proposition suivante.

Proposition 4.4.2 *Soit $w_i^{stf} = (w_{1,i}^{stf}, w_{2,i}^{stf})^T$, si on considère les commandes suivantes*

$$w_{1,i}^{stf} = -|u_{1,r}|(\text{sign}(z_{1,i})|z_{1,i}|^\alpha + z_{2,i}z_{3,i})\tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}w_{2,i}^{stf} &= -|u_{1,r}|[z_{2,i} - \text{sign}(z_{1,i})|z_{1,i}|^\alpha \\ &\quad + (z_{1,i}z_{2,i} + \text{sign}(z_{1,i})|z_{1,i}|^\alpha z_{2,i} \\ &\quad + z_{2,i}^2 z_{3,i} - \frac{1}{\arctan(\varepsilon)} \text{sign}(z_{3,i})|z_{2,i}|^{\alpha+1})]\end{aligned}\tag{4.41}$$

alors chaque unicycle poursuit la trajectoire de référence en temps fini. Si de plus pour $z_i = (z_{1,i}, z_{2,i}, z_{3,i})^T$, l'entrée d'interconnexion est de la forme

$$w_i^{inter} = - \sum_{j=1}^N a_{ij} C(z_i - z_j)\tag{4.42}$$

où a_{ij} sont les éléments de la matrice adjacente de \mathcal{G} , alors la commande $w_i = w_i^{stf} + w_i^{inter}$ stabilise en temps fini l'origine du système (4.39), ce qui achève la poursuite de trajectoire en temps fini du système multi-unicycles.

□

Preuve. On introduit la commande w_i dans le système (4.39) :

$$z_i = f_i(z_i) + B(z_i)w_i^{inter}$$

avec $z_i = (z_{1,i}, z_{2,i}, z_{3,i})^T$,

$$B(z_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_{3,i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$f_i(z_i) = \begin{pmatrix} u_{2,r}z_{2,i} \\ u_{2,r}z_{1,i} + u_{1,r}z_{3,i} \\ 0 \end{pmatrix} + B(z_i)w_i^{stf}$$

En se basant sur la preuve de la proposition 4.4.1, alors l'hypothèse 1. de la Proposition 4.2.1 est vérifiée avec $k = \frac{|u_{1,r}|}{3^\alpha} 2^{\frac{\alpha+1}{2}}$ et $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$. Ainsi, on conclut que l'origine du système bouclé (4.39) est stable en temps fini.

4.4.4 Résultats de simulation d'un multi-unicycles

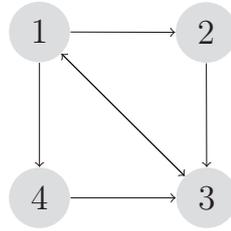


FIGURE 4.10 – Graphe \mathcal{G} associé aux 4 unicycles.

Nous allons simuler le comportement de quatre unicycles ($N = 4$) avec le graphe de connexion donné par la figure 4.10. Déduite du graphe \mathcal{G} , la matrice adjacente A et la matrice laplacienne L s'écrivent

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On propose de prendre pour la commande (4.41), la matrice C

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nos résultats de simulation sont tels que $\alpha = 0,5$, les conditions initiales sur chaque unicycles sont

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)(t = 0) = (-3, -2, -1, -4)(m)$$

$$(y_1, y_2, y_3, y_4)(t = 0) = (0.5, 2, -2, -4)(m)$$

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)(t = 0) = \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)(rad)$$

Nous adoptons une seule référence pour tous les unicycles, qui est définie par : $(x_r, y_r, \theta_r)(t = 0) = (0, 0, 0)$. Les vitesses de référence sont telles que

$$u_{1,r} = 1m.s^{-1}, \quad u_{2,r} = \cos(t) - \frac{1}{4}rad.s^{-1}$$

L'étude théorique menée implique que la stabilité et la stabilisation des systèmes interconnectés nécessitent, dans un premier temps, une commande stabilisante pour chaque système isolé. La poursuite de trajectoire d'un système multi-unicycles, d'après la Proposition 4.4.2, est transformée en un problème de stabilisation du système d'erreurs de chaque unicycle à travers la commande w_i^{stf} pour tout $i = 1, \dots, 4$. Cette commande est augmentée par une commande d'interconnexion w_i^{inter} afin de réaliser une poursuite de trajectoire respectant la topologie stationnaire \mathcal{G} de la figure 4.10. Pour pouvoir comparer l'effet de la commande suggérée, nous avons réalisé des simulations où chaque unicycle évolue individuellement sous l'effet uniquement de la commande w_i^{stf} , cherchant à atteindre la trajectoire de référence indépendamment des comportements des autres unicycles. Pour cela, les figures 4.12-4.14-4.16-4.18-4.20-4.22 illustrent le comportement de chaque unicycle en l'absence de toute perturbation liée à la commande d'interconnexion. Ces résultats vont être comparés aux cas où on ajoutera une stratégie de communication qui imposera l'échange de données sur l'état de chaque unicycle avant d'atteindre l'objectif. Cet échange restera tout au long de la poursuite, assuré par le terme d'interconnexion

w_i^{inter} (figures 4.11-4.13-4.15-4.17-4.19-4.21).

On remarque qu'avec (figure 4.21) et sans (figure 4.22) le terme d'interconnexion, la poursuite de trajectoire est réalisée par les quatre unicycles. Ceci permet de conclure que les commandes sont robustes vis-à-vis des perturbations. On constate aussi que les comportements des unicycles sont apparus sous forme hiérarchique dans le plan de phase (figure 4.21) quand l'échange d'informations sur l'état de chaque unicycle est présent. Particulièrement, un tel comportement est ordonné dans l'intervalle de temps qui sépare les états initiaux et le moment qui a permis d'atteindre la trajectoire de référence. En suivant la figure 4.20 (sans perturbation), l'entrée qui contrôle la vitesse de rotation de chaque unicycle s'annule quand la trajectoire de référence est atteinte. Dans le cas d'unicycles en réseau, la figure 4.19 montre que cette commande en vitesse de rotation change d'allure (oscillations) et tend vers zéro. Ce qui permet de conclure sur sa robustesse.

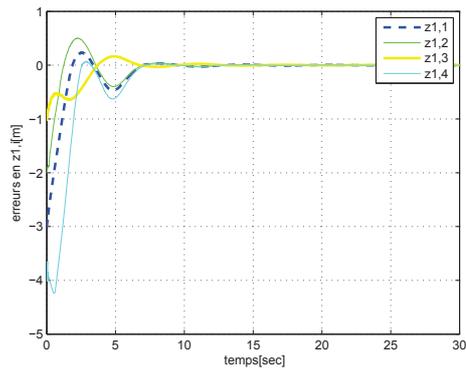
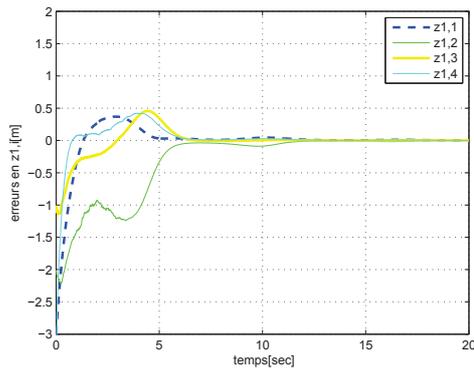


FIGURE 4.11 – Erreurs en $z_{1,i} = (x_i - x_r)$ avec u^{inter} . FIGURE 4.12 – Erreurs en $z_{1,i} = (x_i - x_r)$ sans u^{inter} .

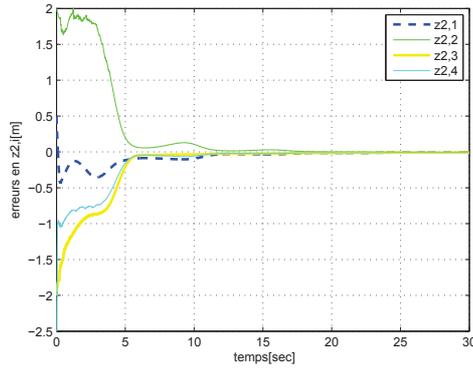


FIGURE 4.13 – Erreurs en $z_{2,i} = (y_i - y_r)$ avec u^{inter} .

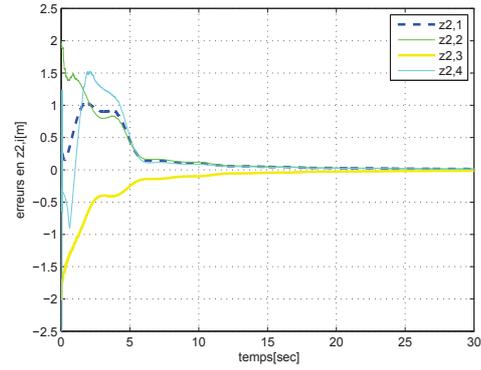


FIGURE 4.14 – Erreurs en $z_{2,i} = (y_i - y_r)$ sans u^{inter} .

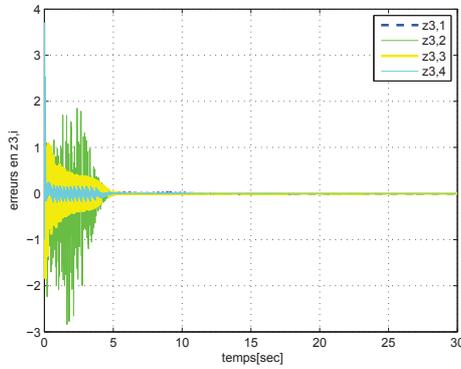


FIGURE 4.15 – Erreurs en $z_{3,i} = \tan(\theta_i - \theta_r)$ avec u^{inter} .

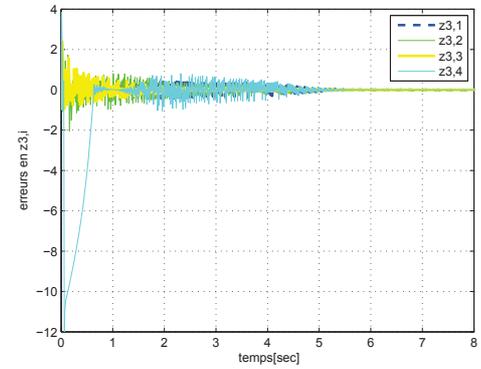


FIGURE 4.16 – Erreurs en $z_{3,i} = \tan(\theta_i - \theta_r)$ sans u^{inter} .

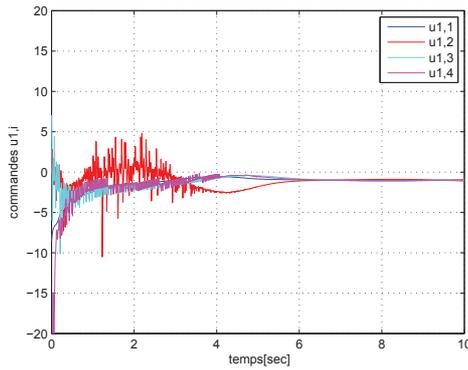


FIGURE 4.17 – Commandes $u_{1,i}$ (m/s) avec u^{inter} .

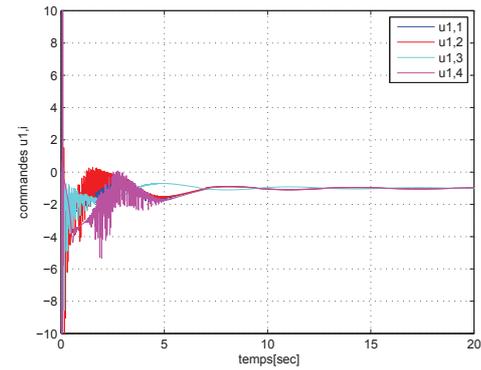


FIGURE 4.18 – Commandes $u_{1,i}$ (m/s) sans u^{inter} .

4.5 Conclusion

La stabilité et la stabilisation en temps fini des systèmes interconnectés ont pu être formalisées par une équation différentielle ordinaire du premier ordre où le terme d'in-

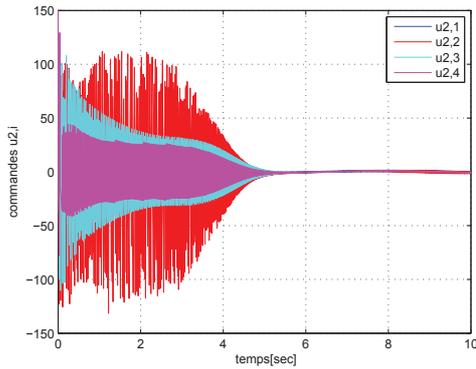


FIGURE 4.19 – Commandes $u_{2,i}$ (rad/s) avec u^{inter} .

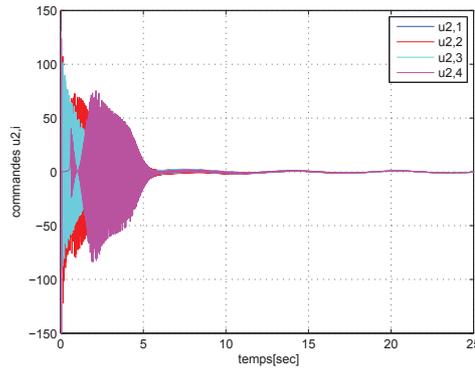


FIGURE 4.20 – Commandes $u_{2,i}$ (rad/s) sans u^{inter} .

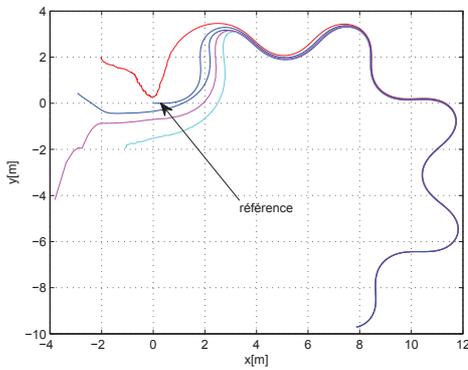


FIGURE 4.21 – Plan de phase en (x, y) avec u^{inter} .

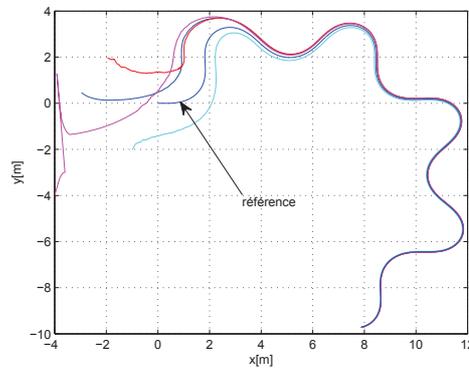


FIGURE 4.22 – Plan de phase en (x, y) sans u^{inter} .

terconnexion apparaît comme une perturbation par rapport au système nominal. Lors de l'étude des systèmes interconnectés, nous avons fait l'hypothèse que le système nominal était stable en temps fini et nous avons suggéré des conditions sur les perturbations pour que le système global reste stable en temps fini. Comme technique, sans avoir recours à la forme explicite de la fonction de Lyapunov, dont l'existence découle de la stabilité en temps fini du système nominal, on calcule la dérivée de cette fonction le long des trajectoires d'un multi-systèmes pour prouver sa stabilité. Hormis l'exemple d'un système formalisé par un couplage structurel entre les variables d'état, qui est considéré comme un système interconnecté, nous nous sommes intéressés à la dynamique contrôlée de plusieurs systèmes en réseau. Une commande d'interconnexion a été élaborée dans le cas des systèmes contrôlés avec ou sans terme de dérive. L'idée fondamentale est de couvrir

une large variété des systèmes autonomes dont la dynamique est affine en la commande. On a fourni un exemple de système multi-unicycle qui est stable en temps fini lors de la poursuite d'une trajectoire de référence et pour lequel l'entrée de commande est robuste vis-à-vis d'une perturbation provenant des interconnexions.

Deuxième partie : Problèmes de consensus en temps fini

Chapitre 5

Consensus en temps fini des systèmes dynamiques contrôlés

5.1 Introduction

L'étude des systèmes dynamiques en réseau est un domaine scientifique émergent dans l'industrie automobile, en biologie, en écologie, en communication, en science sociale, etc. Les systèmes dynamiques contrôlés en réseau peuvent être considérés comme un système multi-agents formant ainsi un groupe collectif homogène ou hétérogène. Le groupe est dit homogène si l'écriture de la dynamique de chaque agent est identique. Dans le cas contraire, le groupe est dit hétérogène. L'interconnexion entre plusieurs systèmes dynamiques facilite la réalisation de la tâche, permet une répartition de la charge de travail, assure un comportement global cohérent et permet de faire face aux différentes perturbations extérieures. Chacun des objectifs cités, alors que d'autres objectifs peuvent être intégrés, nécessite l'identification d'un modèle mathématique approprié, sa prise en compte par une commande collective et sa répartition vers les commandes décentralisées. La coordination entre chaque agent consiste à élaborer des protocoles distribués sur la base d'une information locale qui permet à tous les agents de parvenir à un accord par rapport à l'objectif. Ce type de coordination est un mouvement collectif et cohérent, appelé aussi *consensus*. Une fois que ce problème est résolu, le groupe d'agent va adopter une direction commune de déplacement tout en restant assez proche. L'évitement de collision

entre les membres du groupe et la coordination une fois l'objectif atteint est un problème de formation.

Le problème du consensus a été initié en informatique. Au cours des dernières années, ce problème a été introduit dans l'étude des systèmes multi-agents déployant une stratégie distribuée qui permet d'atteindre un objectif. Dans [85], Vicsek propose un modèle discret en temps pour lequel un protocole est conçu pour diriger les déplacements des agents dans un plan. Ce résultat a été adopté par la suite en réseau informatique comme solution aux problèmes d'animation. Dans ce sens, le mouvement de chaque agent est mis à jour par une règle locale qui dépend de son état et des états voisins. Par la suite, Jadbabaie *et al.* [86] ont fait le lien théorique entre le modèle de Vicsek et les propriétés d'un consensus en utilisant la théorie des graphes. Saber et Murray [63] ont étendu les résultats de Jadbabaie et Vicsek en un modèle continu. Les auteurs ont utilisé un graphe orienté qui modélise la topologie de communication entre les agents et qui a donné naissance à trois formes de graphe. A savoir, les graphes orientés auxquels sont associés une topologie fixe, les graphes orientés avec permutation de la topologie et les graphes non orientés fixes qui intègrent les problèmes à retard.

Pour favoriser les applications pratiques liées aux systèmes dynamiques contrôlés, l'aspect temps fini associé au problème de consensus exprime notamment un besoin industriel et une nécessité dans la prise de décisions. Le problème du consensus en temps fini d'un système multi-agents a été abordé par Cortes [87] où le protocole de consensus est non régulier. Pour le même objectif, dans [88] et [91], les auteurs sont parvenus à un protocole non linéaire et continu qui assure un consensus en temps fini pour un graphe fixe non orienté. Dans [94], les auteurs ont traité le problème du consensus en temps fini dans le cas du double intégrateur sous un graphe fixe non orienté.

Notons que les problèmes de consensus ont été étudiés à travers des dynamiques simples où un agent i est considéré comme étant un point matériel, c'est-à-dire avec une dynamique de la forme $\dot{x}_i = u_i$ et $\ddot{x}_i = u_i$ visant un nombre important d'agents (cas de "flocking", "schooling", essaims). Pour cela, on peut se référer à [86], [60], [63] et [93] dans le cas d'un consensus asymptotique et aux résultats dans [87], [88], [90], [91], [93] et [94], dans le cas d'un consensus en temps fini. Dans l'ensemble, ces travaux se sont limités dans

le choix du modèle d'étude d'un agent et dans la stratégie de communication qui se focalise, dans la plupart du temps, sur les graphes non orientés. Il a été montré qu'un graphe non orienté facilite l'analyse de stabilité d'un groupe d'agents car les matrices adjacente et laplacienne sont symétriques. Néanmoins, les modèles dynamiques contrôlés sont non linéaires et complexes, la dimension de leur vecteur d'état est assez importante et l'hétérogénéité des termes dans le modèle est forte. Dans cette optique, afin que notre étude couvre la plupart des modèles présents dans les domaines, incluant, la robotique, les véhicules terrestres, les véhicules aériens et les véhicules sous-marins, nous proposons deux modèles d'étude généraux sans décrire leurs formes explicites. La description de chaque modèle sera décrite dans ce chapitre. Sur la base de cette description, on va mener une démarche théorique qui permet d'aboutir aux protocoles adéquats qui vont servir à la résolution du problème de consensus en temps fini. Comme stratégie de communication entre le vecteur d'état de chaque système (agent) qui occupe un noeud d'un graphe, on fera appel à une topologie fixe de type orienté et non orienté. En termes d'applications en simulation, on étudie le problème de consensus en temps fini d'un système multi-unicycles et d'un système multi-agents qui se base sur le modèle d'un double intégrateur.

5.2 Préliminaires et outils

Dans cette section, nous rappelons les principaux résultats théoriques de la littérature à travers les lemmes ci-dessous. Nous introduisons, dans un premier temps, le résultat de Bhat sur la stabilité en temps fini des systèmes autonomes. Ensuite, nous rappelons les lemmes qui font les liens entre les propriétés d'un graphe orienté et non orienté, la matrice laplacienne et l'état de chaque noeud. La solution issue de la dynamique d'un agent donne une information sur le comportement du noeud qui lui est associé. Plus de détails sont fournis dans la référence associée à chaque lemme.

Lemme 5.1 [19] *On considère le système $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, $f(0) = 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. S'il existe une fonction de Lyapunov $V(\mathbf{x}) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et un voisinage de l'origine $U_0 \subset U$ tel que $\dot{V} + c(V(\mathbf{x}))^\beta \leq 0$, $\mathbf{x} \in U_0 \setminus \{0\}$ avec $c > 0$ et $\beta \in]0, 1[$, alors $V(\mathbf{x})$ converge vers zéro en temps fini. De plus, le temps d'établissement T_* satisfait $T_* \leq \frac{V(\mathbf{x}(0))^{1-\beta}}{c(1-\beta)}$.*

Lemme 5.2 [63] *Soit \mathcal{G} est arbre couvrant. Nous avons les propriétés suivantes :*

1. *La valeur propre 0 est simple et les autres valeurs propres sont strictement positives.*
2. *Si de plus \mathcal{G} est fortement connexe, alors il existe un vecteur colonne strictement positif $w \in \mathbb{R}^n$ tel que $w^T L = 0$.*

Lemme 5.3 [90] *Supposons que \mathcal{G} est fortement connexe et soit $w > 0$ tel que $w^T L = 0$, alors $\text{diag}(w)L + L^T \text{diag}(w)$ est la matrice Laplacienne du graphe pondéré non orienté $\mathcal{G}(\text{diag}(w)L + L^T \text{diag}(w))$.*

Lemme 5.4 [63] *Pour un graphe non orienté \mathcal{G} , la matrice laplacienne L de \mathcal{G} a les propriétés suivantes :*

$$\mathbf{x}^T L \mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j)^2$$

ce qui implique que L est semi définie positive. 0 est une valeur propre simple de L et $\mathbf{1}$ est le vecteur propre associé. Soient $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de L vérifiant $0 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, alors $\lambda_2 > 0$. Si de plus $\mathbf{1}^T \mathbf{x} = 0$, alors

$$\mathbf{x}^T L \mathbf{x} \geq \lambda_2 \mathbf{x}^T \mathbf{x}.$$

Lemme 5.5 [101]. *Soit $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ et $0 < p \leq 1$, alors*

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^p \leq \sum_{i=1}^n x_i^p \leq n^{1-p} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^p$$

5.3 Formulation du problème et objectifs

Par rapport aux systèmes dynamiques contrôlés tels que les systèmes autonomes, nous nous sommes confrontés à deux types de modèles qui sont décrits par une équation différentielle du premier ordre affine à la commande. Hormis le cas d'une simple particule, cette dynamique est fortement non linéaire suite à l'interdépendance entre les variables d'états. Nous rencontrons également le cas où la dimension du vecteur de commande est inférieure au nombre de degrés de liberté du système, c'est le cas d'une dynamique sous actionnée. Dans l'étude que nous menons, l'appellation "multi-agents" est utilisée quand plusieurs

systèmes dynamiques contrôlés sont en réseau. Nous présentons le premier modèle Σ_1 de la forme (5.1) et le second Σ_2 décrit par (5.2). Nous faisons usage de la notation multi- Σ_1 quand le système multi-agents se base sur l'interconnexion de plusieurs noeuds dont la dynamique de chaque noeud est décrite par le système Σ_1 . De même, un système multi- Σ_2 se traduit par l'association de plusieurs noeuds dont la dynamique est donnée par Σ_2 . Les résultats de la littérature sont largement consacrés au cas d'une simple particule ($\dot{x}^i = u^i$, $\ddot{x}^i = u^i$) ([86] [60] [63] [93] [87] [88] [90] [91] [93] [94]) et aux modèles interconnectés de la forme $\dot{x}^i = f^i(x^i) + Bu^i$ avec B une matrice constante. D'une manière générale, les études d'un système multi-agents ciblent directement les applications. Du point de vue théorique, le problème n'a jamais été formalisé et généralisé. Nous apportons, par la suite, des résultats théoriques associés à des modèles généraux.

On considère un système multi-agents pour lequel la dynamique de chaque agent est décrite par ($\forall i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$)

$$\Sigma_1 : \dot{x}^i = B(x^i)u^i \quad (5.1)$$

$$\Sigma_2 : \dot{x}^i = f^i(x^i) + B(x^i)u^i \quad (5.2)$$

avec $x^i \in \mathbb{R}^n$, et pour $1 \leq i \leq N$, $x^i = [x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i]^T$, $B(x^i) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $f^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue et $u^i \in \mathbb{R}^m$ représente l'entrée de commande (protocole). Soit $B(x^i) = [b_{kl}]$ pour $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq l \leq m$.

Definition 5.3.1 *On dit que le protocole u^i résout le problème de consensus en temps fini du système multi- Σ_1 , respectivement multi- Σ_2 , si pour toute condition initiale de Σ_1 , respectivement Σ_2 , il existe un temps d'établissement T_* tel que*

$$\lim_{t \rightarrow T_*} \|x^i(t) - x^j(t)\| = 0 \quad (5.3)$$

pour tout $i, j \in \mathcal{I}$.

Nous sommes maintenant en mesure de présenter le protocole u^i , candidat pour le problème de consensus en temps fini de multi- Σ_1 et multi- Σ_2 .

$$u^i = -C(x^i)\phi_\alpha\left(\sum_{j=1}^N a_{ij}(x^i - x^j)\right) \quad (5.4)$$

où $C(x^i) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\alpha \in]0, 1[$, a_{ij} sont les éléments de la matrice adjacente associée au graphe fixe \mathcal{G} et $\phi_\alpha(x^i) = (\varphi_\alpha(x_1^i), \dots, \varphi_\alpha(x_n^i))^T$. A présent, pour prouver nos résultats, nous introduisons les hypothèses suivantes.

Hypothèse 5.6 Soit $\tilde{B}(x^i) = B(x^i)C(x^i)$ avec $\tilde{B}(x^i) = [\tilde{b}_{mk}]_{m,k}$ pour $1 \leq m, k \leq n$. On suppose qu'il existe une matrice $C(x^i) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que $\tilde{B}(x^i)$ est une matrice semi-définie positive.

Hypothèse 5.7 Pour tout $x^i \in \mathbb{R}^n$ (respectivement $x^j \in \mathbb{R}^n$), le terme de dérive $f^i(x^i)$ (respectivement $f^j(x^j)$) dans le modèle Σ_2 , vérifie l'inégalité suivante ($\forall i \in \mathcal{I}$)

$$\left\| \sum_{j=1}^N a_{ij}(f^i(x^i) - f^j(x^j)) \right\| \leq \mu \left\| \sum_{j=1}^N a_{ij}(x^i - x^j) \right\| \quad (5.5)$$

avec μ est une constante positive.

5.4 Consensus associé au système dynamique multi- Σ_1

En se basant sur la dynamique d'un agent décrite par la relation (5.1) et le protocole (5.4), on va construire le système multi-agents qui permet d'étudier le comportement d'un modèle décrit par multi- Σ_1 . L'objectif est de résoudre le problème de consensus en temps fini pour le système dynamique multi- Σ_1 dans le cas d'un graphe fixe orienté et non orienté. Nos résultats sont formalisés dans la Proposition 5.4.1 (graphe orienté) et la Proposition 6.11 (graphe non orienté).

Proposition 5.4.1 Pour un graphe fixe \mathcal{G} donné, si \mathcal{G} est orienté et fortement connexe, le protocole (5.4), appliqué au système multi- Σ_1 , résout le problème de consensus en temps fini.

□

Preuve. Soit $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^N)^T$ et $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^N)^T$, le système dynamique multi- Σ_1 est défini par

$$\dot{\mathbf{x}} = I_N \otimes B(x^i) \mathbf{u} \quad (5.6)$$

A l'aide d'un changement de variable approprié le problème de consensus en temps fini défini par (5.3) est aussi ramené à un problème de stabilité en temps fini. Pour cela, soit

$$y^i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x^i - x^j) \quad (5.7)$$

Soit $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^N)^T$ écrit sous forme matricelle,

$$\mathbf{y} = (L \otimes I_n) \mathbf{x} \quad (5.8)$$

Après avoir appliqué le protocole u^i et le changement de variable (5.7), la dynamique bouclée de chaque système s'écrit

$$\dot{x}^i = \tilde{B}(x^i) \phi_\alpha(y^i) \quad (5.9)$$

avec $\tilde{B}(x^i) = B(x^i)C(x^i)$. En utilisant le fait que \mathbf{u} peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{u} = -(I_N \otimes C(x^i)) \phi_\alpha(\mathbf{y}) \quad (5.10)$$

alors, le système multi- Σ_1 en boucle fermée est donné par

$$\dot{\mathbf{x}} = -(I_N \otimes B(x^i))(I_N \otimes C(x^i)) \phi_\alpha(\mathbf{y}) \quad (5.11)$$

En utilisant les propriétés du produit de Kronecker et en dérivant (5.8), après avoir utilisé (5.11), on obtient

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{y}} &= (L \otimes I_n) \dot{\mathbf{x}} \\
&= -(L \otimes I_n)(I_N \otimes B(x^i))(I_N \otimes C(x^i))\phi_\alpha(\mathbf{y}) \\
&= -(L \otimes \tilde{B}(x^i))\phi_\alpha(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Ceci montre bien que le problème de consensus en temps fini est réduit à un problème de stabilité en temps fini. Ainsi, l'objectif est de prouver que \mathbf{y} converge vers zéro en temps fini.

D'après le Lemme 5.2, comme \mathcal{G} est fortement connexe, alors il existe un vecteur strictement positif $\mathbf{w} = [w^1, w^2, \dots, w^N]^T \in \mathbb{R}^{nN}$ tel que $\mathbf{w}^T L = 0$ avec pour $1 \leq i \leq N$, $w^i = [w_1^i, w_2^i, \dots, w_n^i]^T$.

Prenons comme fonction de Lyapunov candidate

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{1 + \alpha} \sum_{i=1}^N \langle w^i, \delta^{1+\alpha}(y^i) \rangle, \tag{5.13}$$

où $\langle \dots \rangle$ désigne le produit scalaire et $\delta^{1+\alpha}(y^i) = [|y_1^i|^{1+\alpha}, \dots, |y_n^i|^{1+\alpha}]^T$. La forme détaillée de V est donnée par

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{1 + \alpha} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n w_k^i |y_k^i|^{1+\alpha}.$$

Calculons la dérivée de V le long du système bouclé (5.12). Utilisant (5.7) et (5.9), on obtient

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n w_k^i \varphi_\alpha(y_k^i) \frac{dy_k^i}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n w_k^i \varphi_\alpha(y_k^i) \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} (\dot{x}_k^i - \dot{x}_k^j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n w_k^i \varphi_\alpha(y_k^i) \left(\sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^n a_{ij} [\tilde{b}_{km} \varphi_\alpha(y_m^i) - \tilde{b}_{km} \varphi_\alpha(y_m^j)] \right)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Sous forme matricielle, la dernière égalité permet d'écrire

$$\dot{V}(\mathbf{y}) = -\phi_\alpha^T(\mathbf{y})(I_N \otimes \text{diag}(w))(L \otimes \tilde{B})\phi_\alpha(\mathbf{y})$$

Soit $E \triangleq \frac{1}{2}((\text{diag}(w)L \otimes \tilde{B}) + (L \otimes \tilde{B}\text{diag}(w)))^T$. Alors

$$\dot{V} = -\phi_\alpha^T(\mathbf{y})E\phi_\alpha(\mathbf{y}). \quad (5.15)$$

Introduisons l'ensemble

$$\Omega = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{nN} : \mathbf{z}^T \mathbf{z} = 1 \text{ et } z = \phi_\alpha(\vartheta) \text{ pour } \vartheta \perp w \text{ tel que } w > 0\}.$$

Il est bien clair que l'ensemble Ω est compact et que la fonction $z^T E z$ est continue dans Ω , donc il existe un minimum $\min_{z \in \Omega} z^T E z \neq 0$. De plus, E peut être interprétée comme la matrice laplacienne du graphe pondéré non orienté $\mathcal{G}(E)$ qui, d'après le Lemme 5.3, est semi-définie positive. Ceci permet de conclure que $\min_{z \in \Omega} z^T E z > 0$.

Soit $K_1 = \min_{z \in \Omega} z^T E z > 0$. Comme $\frac{\phi_\alpha(\mathbf{y})}{\sqrt{\phi_\alpha^T(\mathbf{y})\phi_\alpha(\mathbf{y})}} \in \Omega$, on a

$$\frac{\phi_\alpha^T(\mathbf{y})E\phi_\alpha(\mathbf{y})}{\phi_\alpha^T(\mathbf{y})\phi_\alpha(\mathbf{y})} = \frac{\phi_\alpha^T(\mathbf{y})}{\sqrt{\phi_\alpha^T(\mathbf{y})\phi_\alpha(\mathbf{y})}} E \frac{\phi_\alpha(\mathbf{y})}{\sqrt{\phi_\alpha^T(\mathbf{y})\phi_\alpha(\mathbf{y})}} \geq K_1$$

Montrons à présent qu'il existe un $c > 0$ et $\beta \in]0, 1[$ tels que la dérivée de V satisfait $\dot{V} \leq -cV^\beta$. Par (5.15), on a

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\phi_\alpha^T(\mathbf{y})E\phi_\alpha(\mathbf{y})}{\phi_\alpha^T(\mathbf{y})\phi_\alpha(\mathbf{y})} \frac{\phi_\alpha^T(\mathbf{y})\phi_\alpha(\mathbf{y})}{V^\beta} V^\beta \\ &\leq -K_1 \frac{\phi_\alpha^T(\mathbf{y})\phi_\alpha(\mathbf{y})}{V^\beta} V^\beta \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_\alpha^T(\mathbf{y})\phi_\alpha(\mathbf{y})}{V^\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n |y_k^i|^{2\alpha}}{\left(\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \frac{w_k^i}{\alpha+1} |y_k^i|^{1+\alpha} \right)^\beta} \\
&\geq \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n |y_k^i|^{2\alpha}}{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \left(\frac{w_k^i}{\alpha+1} \right)^\beta |y_k^i|^{(1+\alpha)\beta}} \quad (\text{Lemma 5.5})
\end{aligned}$$

En choisissant $\beta = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$ et pour $k_2 = \max_i \max_k \left(\frac{w_k^i}{\alpha+1} \right)^\beta$, il est clair que $k_2 > 0$. En fixant $c = \frac{K_1}{K_2} > 0$,

$$\dot{V}(\mathbf{y}) \leq -c(V(\mathbf{y}))^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} \quad (5.16)$$

Donc V converge vers zéro en temps fini T_* , d'après le Lemme 5.1, et

$$T_*(\mathbf{y}(0)) = \frac{(\alpha+1)}{(1-\alpha)c} V(\mathbf{y}(0))^{\frac{1-\alpha}{\alpha+1}}.$$

En conclusion, le protocole (5.4) appliqué au système dynamique multi- Σ_1 résout le problème de consensus en temps fini dans le sens de (5.3). ■

On cherche toujours à définir les conditions qui permettent au système dynamique de type multi- Σ_1 de réaliser un consensus en temps fini entre les vecteurs d'états, où chaque vecteur d'état est associé au système dynamique Σ_1 . On se positionne dans le cas où l'échange des données n'est pas hiérarchique, c'est-à-dire dans le cas où le graphe \mathcal{G} est non orienté. Dans la proposition suivante, nous analysons le protocole (5.4).

Proposition 5.4.2 *Pour un graphe fixe \mathcal{G} non orienté, le protocole (5.4) associé au système dynamique multi- Σ_1 résout le problème de consensus en temps fini.*

□

Preuve. Rappelons que le système dynamique multi- Σ_1 est défini par

$$\dot{\mathbf{x}} = I_N \otimes B(x_i)\mathbf{u} \quad (5.17)$$

avec $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^N)^T$ et le protocole $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^N)^T$.

Effectuons le changement de variable en y^i donné par (5.7), le vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{Nn}$, exprimé dans (5.8) a une dérivée $\dot{\mathbf{y}}$ comme dans (5.12). L'objectif reste toujours de prouver que \mathbf{y} tend vers zéro en temps fini.

Pour ce faire, prenons la fonction de Lyapunov $V : \mathbb{R}^{Nn} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{Nn}$

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{1 + \alpha} \mathbf{y}^T \phi_\alpha(\mathbf{y}). \quad (5.18)$$

Il est trivial de vérifier que V est définie positive. Le calcul de la dérivée de V par rapport au temps le long de (5.12), donne

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{y}) &= \phi_\alpha^T(\mathbf{y}) \frac{d\mathbf{y}}{dt} \\ &= -\phi_\alpha^T(\mathbf{y})(L \otimes \tilde{B})\phi_\alpha(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Soit la matrice

$$D(x^i) = \begin{bmatrix} 0_n & & & \\ & \gamma_2(x^i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_N(x^i) \end{bmatrix}$$

où $0_n = \text{diag}\{0, \dots, 0\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et $\forall j = 2, \dots, N$ $\gamma_j(x^i) = \lambda_j(L)\varrho_n(x^i)$ avec $\varrho_n(x^i) = \text{diag}\{0, \mu_2(x^i), \dots, \mu_n(x^i)\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Notons que $\mu_2(x^i), \dots, \mu_n(x^i)$ sont les valeurs propres de la matrice $\tilde{B}(x^i)$, données dans un ordre croissant. $\lambda_j(L)$ est la $j^{\text{ème}}$ valeur propre de L . Soient $\lambda_2(L), \dots, \lambda_N(L)$ données dans l'ordre croissant. On a, d'après le Lemme 5.2, $\lambda_2(L) > 0$. Ce qui implique que $\forall x^i$, on a $\lambda_2\mu_2(x^i) > 0$.

De plus, $L \otimes \tilde{B}(x^i) \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$ est une matrice symétrique. Par conséquent, il existe une matrice orthogonale $P \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$ telle que $L \otimes \tilde{B}(x^i) = P^T D(x^i) P$. Soit $\mathbf{z}_\alpha = P\phi_\alpha(\mathbf{y})$, à

partir de (5.19) on peut écrire,

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\mathbf{z}_\alpha^T D \mathbf{z}_\alpha \\ &\leq -\lambda_2 \mu_1(x^i) \|\mathbf{z}_\alpha\|^2 \\ &\leq -\lambda_2 \mu_1(x^i) \|\phi_\alpha(\mathbf{y})\|^2\end{aligned}\tag{5.20}$$

avec $\lambda_2 \mu_1(x^i) = \min_{\mathbf{z}_\alpha \perp \mathbf{1}_{Nn}} \frac{\mathbf{z}_\alpha^T D \mathbf{z}_\alpha}{\mathbf{z}_\alpha^T \mathbf{z}_\alpha}$.

Prenons $k = \min_{x^i \in \mathbb{R}^N} \lambda_2 \mu_1(x^i) > 0$ et $\mathbf{y} = \mathbf{1}_N \otimes y^i = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{Nn})^T$. On a

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -k \sum_{i=1}^{Nn} |\varphi_\alpha(\tilde{y}_i)|^2 \\ &\leq -k \sum_{i=1}^{Nn} |\tilde{y}_i|^{2\alpha} \\ &\leq -k \left(\sum_{i=1}^{Nn} |\tilde{y}_i|^{\alpha+1} \right)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \quad (\text{par le Lemme 5.5})\end{aligned}\tag{5.21}$$

Ceci permet de conclure que

$$\dot{V} \leq -k(\alpha + 1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} V^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}\tag{5.22}$$

Or $0 < \frac{2\alpha}{\alpha+1} < 1$ et $k(\alpha + 1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} > 0$. En se basant sur le résultat du Lemme 5.1, la fonction de Lyapunov tend vers zéro en temps fini T_* donné par :

$$T_*(\mathbf{y}(0)) = \frac{(\alpha + 1)V(\mathbf{y}(0))^{\frac{1-\alpha}{\alpha+1}}}{(1 - \alpha)k(\alpha + 1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}}.$$

En associant le protocole (5.4) au multi- Σ_1 , l'ensemble étant traité comme un système multi-agents auquel les propriétés d'un graphe fixe non orienté sont appliquées, les différents états parviennent à un consensus en temps fini. ■

Remarque 5.8 Pour un graphe \mathcal{G} fixe orienté et non orienté, si on prend $\alpha = 1$ dans les inégalités (5.22) et (5.22), alors le problème de consensus en temps fini du système

dynamique multi- Σ_1 devient un consensus asymptotique.

5.5 Consensus associé au système dynamique multi- Σ_2

En se basant sur la dynamique d'un agent décrite par la relation (5.2) et le protocole (5.4), on va construire le système multi-agents qui permet d'étudier le comportement d'un modèle décrit par multi- Σ_2 . L'objectif est de résoudre le problème de consensus en temps fini pour le système dynamique multi- Σ_2 dans le cas d'un graphe fixe orienté et non orienté. Nos résultats sont formalisés dans la Proposition 5.5.1 (graphe orienté) et la Proposition 5.5.2 (graphe non orienté).

Proposition 5.5.1 *Si le graphe \mathcal{G} est fortement connexe, s'il possède un sous arbre couvrant et si le terme de dérive satisfait l'inégalité (5.5), alors le protocole (5.4) associé au système dynamique multi- Σ_2 résout un problème de consensus en temps fini.*

□

Preuve. En utilisant le changement de variable donné par (5.7), on obtient

$$\dot{y}^i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(f^i(x^i) - f^j(x^j)) + \sum_{j=1}^N a_{ij}[B(x^i)u^i - B(x^j)u^j] \quad (5.23)$$

soit $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^N)^T$ et $f(\mathbf{x}) = (f^1(x^1), \dots, f^N(x^N))^T$ et à partir de (5.8), la dynamique du système multi- Σ_2 est donnée par

$$\dot{\mathbf{y}} = (L \otimes I_n)f(\mathbf{x}) - (L \otimes \tilde{B})\phi_\alpha(\mathbf{y}) \quad (5.24)$$

A partir de inégalité (5.5), on a

$$\|(L \otimes I_n)f(\mathbf{x})\| \leq c\|(L \otimes I_n)\mathbf{x}\| = c\|\mathbf{y}\| \quad (5.25)$$

En conservant la fonction de Lyapunov (5.13), la dérivée de V le long du système bouclé (5.24) vaut

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n w_k^i \varphi_\alpha(y_k^i) \frac{dy_k^i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n w_k^i \varphi_\alpha(y_k^i) \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} (\dot{x}_k^i - \dot{x}_k^j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n w_k^i \varphi_\alpha(y_k^i) \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} (f_k^i(x^i) - f_k^j(x^j)) \right) + \dot{V}_{/(1)}\end{aligned}$$

où $\dot{V}_{/(1)}$ est la dérivée de la fonction de Lyapunov rencontrée lors de l'étude du système multi- Σ_1 (5.1) et qui satisfait l'inégalité (5.22). Maintenant, en utilisant l'Hypothèse 5.7 et l'inégalité (5.14), on obtient

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{y}) &\leq \mu \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n w_k^i \operatorname{sgn}(y_k^i) |y_k^i|^\alpha \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} (x^i - x^j) - c(V(\mathbf{y})) \right)^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} \\ &\leq \mu \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n w_k^i |y_k^i|^{\alpha+1} - c(V(\mathbf{y}))^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} \\ &\leq \mu(1+\alpha)V(\mathbf{y}) - c(V(\mathbf{y}))^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} \\ &\leq -V^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \left(c - \mu(1+\alpha)V^{\frac{1-\alpha}{\alpha+1}} \right).\end{aligned}\tag{5.26}$$

Or $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} > 0$ et V est une fonction continue avec $V(0) = 0$, donc il existe un voisinage ouvert Ω de l'origine tel que $\forall y \in \Omega$

$$\dot{V}(\mathbf{y}) \leq -\frac{c}{2} [V(\mathbf{y})]^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}\tag{5.27}$$

En utilisant le Lemme 5.2, V converge vers zéro en temps fini et le temps d'établissement est donné par

$$T_*(\mathbf{y}(0)) = \frac{2(\alpha+1)}{c(1-\alpha)} V(\mathbf{y}(0))^{\frac{1-\alpha}{\alpha+1}}$$

En associant le protocole (5.4) au multi- Σ_2 , l'ensemble est traité aussi comme un système multi-agents auquel les propriétés d'un graphe fixe orienté sont appliquées. Ceci prouve le consensus en temps fini entre les états. ■

Le cas d'un consensus en temps fini pour la dynamique d'un système basé sur multi- Σ_2 est aussi traité dans le cas où la topologie est fixe et non orientée. Dans ce cas de figure, l'échange d'information sur l'état de chaque agent (noeud) est jugé utile dans un sens comme dans l'autre.

Proposition 5.5.2 *Pour un graphe fixe non orienté \mathcal{G} , supposons que l'inégalité (5.5) est vérifiée, alors le protocole (5.4) résout le problème de consensus en temps fini du système dynamique multi- Σ_2 .* □

Preuve. En préservant le changement de variable donné par (5.7), en introduisant les dynamiques du $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ systèmes à partir de (5.2), on peut écrire

$$\dot{y}^i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(f^i(x^i) - f^j(x^j)) + \sum_{j=1}^N a_{ij}[B(x^i)u^i - B(x^j)u^j] \quad (5.28)$$

Soient $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^N)^T$ et $f(\mathbf{x}) = (f^1(x^1), \dots, f^N(x^N))^T$. A partir de (5.8), la dynamique du système multi- Σ_2 s'exprime par :

$$\dot{\mathbf{y}} = (L \otimes I_n)f(\mathbf{x}) - (L \otimes \tilde{B})\phi_\alpha(\mathbf{y}) \quad (5.29)$$

Par l'inégalité (5.5), on a

$$\|(L \otimes I_n)f(\mathbf{x})\| \leq \mu\|(L \otimes I_n)\mathbf{x}\| = \mu\|\mathbf{y}\| \quad (5.30)$$

En utilisant la fonction de Lyapunov (6.21), la dérivée de $V(\mathbf{y})$ le long (5.29) s'écrit

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{y}) &= \phi_\alpha^T(\mathbf{y})(L \otimes I_n)f(\mathbf{x}) - \phi_\alpha^T(\mathbf{y})(L \otimes \tilde{B})\phi_\alpha(\mathbf{y}) \\ &\leq \mu \|\phi_\alpha^T(\mathbf{y})\mathbf{y}\| - \phi_\alpha^T(\mathbf{y})(L \otimes \tilde{B})\phi_\alpha(\mathbf{y})\end{aligned}$$

Soit $\mathbf{y} = \mathbf{1}_N \otimes y^i = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{Nn})^T$. On déduit de (5.21) que

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{y}) &\leq \mu \sum_{i=1}^{Nn} |\tilde{y}_i|^{\alpha+1} - k \left(\sum_{i=1}^{Nn} |\tilde{y}_i|^{\alpha+1} \right)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \\ &\leq -V^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \left[k(\alpha+1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} - \mu V^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \right]\end{aligned}\tag{5.31}$$

avec $k = \min_{x^i \in \mathbb{R}^n} \lambda_2 \mu_1(x^i)$ définie dans la preuve de la Proposition 5.4.1. Comme $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} > 0$ et que V est une fonction continue avec $V(0) = 0$, alors il existe un voisinage ouvert de l'origine Ω tel que $\forall y \in \Omega$

$$\dot{V}(\mathbf{y}) \leq -\frac{k(\alpha+1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}}{2} [V(\mathbf{y})]^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}\tag{5.32}$$

En se basant sur le Lemme 5.1, on a que V tend vers zéro en temps fini et que le temps d'établissement est défini par

$$T_*(\mathbf{y}(0)) = \frac{(\alpha+1)V(\mathbf{y}(0))^{\frac{1-\alpha}{\alpha+1}}}{2(1-\alpha)k(\alpha+1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}}.$$

Le consensus en temps fini entre les états a bien été prouvé en associant le protocole (5.4) au multi- Σ_2 . L'ensemble est considéré comme étant un système multi-agents pour lequel on a fait appel aux propriétés d'un graphe fixe non orienté.

■

Remarque 5.9 *Il est trivial de prouver que si on prend $\alpha = 1$ dans le protocole (5.4), par l'inégalité (5.32) issue de la dynamique de multi- Σ_2 en boucle fermée, le consensus en temps fini se transforme en un consensus asymptotique.*

Dans l'étude d'un système de type multi- Σ_1 et multi- Σ_2 , nous avons proposé un protocole adéquat pour résoudre le problème de consensus en temps fini. Ces résultats théoriques ont été prouvés moyennant les propriétés des graphes orientés et non orientés. Nous remarquons que dans le cas d'un graphe non orienté la matrice laplacienne est symétrique ce qui a facilité l'analyse théorique. De point de vue pratique, un graphe non orienté entraîne un échange important des données, ainsi l'application du protocole requis est plus de temps d'exécution, voire plus de capteurs. Par conséquent, on favorise l'utilisation d'un graphe orienté auquel on a apporté une analyse complète pour un système de type multi- Σ_1 et multi- Σ_2 .

Pour terminer cette analyse théorique, nous allons introduire dans le cas d'un système multi-agents la notion d'un multi-systèmes homogène et hétérogène. En se basant sur l'écriture (5.1) associée au système Σ_1 , la structure de la matrice $B(x^i)$ est supposée identique, ainsi l'étude concerne un multi- Σ_1 homogène. Si on se réfère à l'écriture (5.2) pour décrire le système multi- Σ_2 , si $f^i(x^i)$ présente une forme identique, alors le système multi- Σ_2 est dit homogène. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si la structure de $f^i(x^i)$ est différente d'un système à l'autre, le système d'étude multi- Σ_2 est hétérogène. Si, de plus, le système multi-agents intègre les deux dynamiques Σ_1 et Σ_2 , on est face à un multi-systèmes hétérogène. Sur la base des modèles généraux ci-dessus, cette dernière analyse n'a pas été traitée. Par rapport à la littérature, le modèle hétérogène formant un problème de consensus en temps fini a été décrit par les deux dynamiques de type $\dot{x}^i = u^i$ et $\ddot{x}^i = u^i$.

5.6 Exemples d'application

A travers les résultats théoriques ci-dessus, on s'est attaqué aux systèmes avec et sans terme de dérive, avec l'objectif d'aboutir à un consensus en temps fini entre les variables d'états décrivant le comportement des noeuds d'un graphe. L'exemple type d'un système sans le terme de dérive est celui de la cinématique d'un unicycle. Le système multi-unicycles fera appel ainsi à l'étude menée dans le cas du système multi- Σ_1 . Afin de décrire les systèmes avec terme de dérive, nous nous sommes limités au cas d'un système multi-agents décrit par plusieurs doubles intégrateurs. Sous forme d'états, au premier ordre,

cette dynamique est avec un terme de dérive. Par conséquent, ceci permet d'appliquer nos résultats dans le cas d'un système multi- Σ_2 . Nous allons définir par la suite les deux graphes fixes (figure 5.1) dans le cas de trois agents (graphe orienté (a)) et le cas de quatre agents (graphe non orienté (b)).

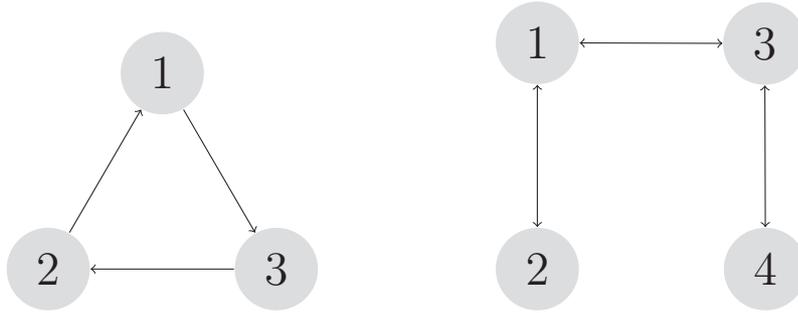


FIGURE 5.1 – \mathcal{G} Graphe orienté de 3 agents (a), et non orienté de 4 agents (b).

5.6.1 Consensus d'un système multi-unicycles

On considère N unicycles où le $i^{\text{ème}}$ modèle cinématique est donné par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ w_i \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, N \quad (5.33)$$

avec (x_i, y_i) représente la position du centre de masse et θ_i l'orientation de l'unicycle par rapport à un repère cartésien. Les deux entrées de commande u_i et w_i sont respectivement, la vitesse linéaire et la vitesse angulaire, exprimées dans un repère local. Ces entrées vont servir comme des protocoles pour l'achèvement du consensus du système multi-unicycles. Le modèle (5.33) se met sous la forme

$$\dot{x}^i = B(x^i)u^i \quad (5.34)$$

avec $x^i = (x_i, y_i, \theta_i)^T$, $u^i = (u_i, w_i)^T$ et

$$B(x^i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rappelons aussi l'écriture du protocole (Proposition 5.4.1),

$$u^i = -C(x^i)\phi_\alpha \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}(x^i - x^j) \right) \quad (5.35)$$

qui dépend du choix de la matrice $C(x^i)$ vérifiant que le produit $B(x^i)C(x^i)$ est semi-définie positive (Hypothèse.6.4). Pour l'étude en simulation, deux formes de la matrice $C(x^i)$ sont proposées :

$$C_1(x^i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_2(x^i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 1 \end{pmatrix}$$

Signalons qu'il est facile de vérifier que BC_1 et BC_2 sont semi-définies positives (Hypothèse.6.4) dont les valeurs propres sont respectivement $\{0, 0, 1\}$ et $\{0, 1, 1\}$.

En se basant sur la Proposition 5.4.1, le problème de consensus en temps fini est résolu à partir des commandes suivantes : $((u_i)_{C_1}, (w_i)_{C_1})$ et $((u_i)_{C_2}, (w_i)_{C_2})$ avec $(u_i)_{C_1} = (u_i)_{C_2} = u_i$. La notation liée au protocole $(u_i)_{C_1}$ implique que ce protocole est calculé à partir de la matrice C_1 , de même pour le protocole $(u_i)_{C_2}$ qui dépend de la matrice C_2 . Pour les

deux matrices C_1 et C_2 ci-dessus, tous calculs faits, on obtient :

$$(u_i)_{C_1} = (u_i)_{C_2} = u_i$$

$$u_i = -\varphi_\alpha \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}(x_i - x_j) \right) \cos \theta_i - \varphi_\alpha \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}(y_i - y_j) \right) \sin \theta_i \quad (5.36)$$

$$(w_i)_{C_1} = \varphi_\alpha \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}(x_i - x_j) \right) \sin \theta_i - \varphi_\alpha \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}(y_i - y_j) \right) \cos \theta_i \quad (5.37)$$

$$(w_i)_{C_2} = \varphi_\alpha \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}(x_i - x_j) \right) \sin \theta_i - \varphi_\alpha \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}(y_i - y_j) \right) \cos \theta_i$$

$$- \varphi_\alpha \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}(\theta_i - \theta_j) \right) \quad (5.38)$$

5.6.2 Système multi-unicycles sous un graphe orienté

Chaque noeud du graphe orienté de la figure 5.1-a représente la dynamique (5.34) et l'élément d'échange entre les unicycles sera le vecteur d'état x^i pondéré par les a_{ij} . Rappelons que $a_{ij} = 1$ si l'unicycle i reçoit l'information de celui de j , autrement $a_{ij} = 0$. Les états initiaux des 3 unicycles sont donnés par :

$$x^1 = (x_1, y_1, \theta_1)(t = 0) = \left(4, 2, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x^2 = (x_2, y_2, \theta_2)(t = 0) = \left(2, -1, -\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x^3 = (x_3, y_3, \theta_3)(t = 0) = \left(-6, 10, \frac{\pi}{2}\right)$$

Les figures 5.2, 5.4 et 5.6 sont obtenues avec les protocoles (5.36) et (5.37) qui dépendent du choix de la matrice de commande C_1 . Pour les figures 5.3, 5.5 et 5.7, ce sont les résultats des protocoles (5.36) et (5.38). Par rapport aux plans de phase (x, y) , donnés par la figure 5.6 (avec C_1) et pour la figure 5.7 (avec C_2), on constate que le choix de C_2 donne un résultat de consentement nettement meilleur que C_1 . De même, sur chaque plan de phase, les trois unicycles se rencontrent en un seul point qui est aussi un point de rendez-vous. Le problème de consensus est transformé en un problème de rendez-vous. Le consentement présumé en matière d'une position commune dépend des conditions initiales,

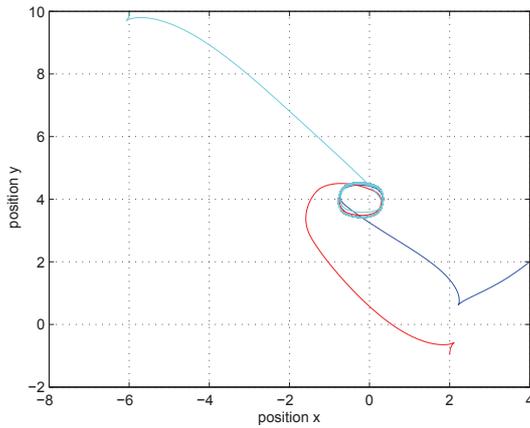


FIGURE 5.2 – Consentement d'un point commun par les 3 unicycles sous la matrice de commande C_1 (graphe \mathcal{G} orienté).

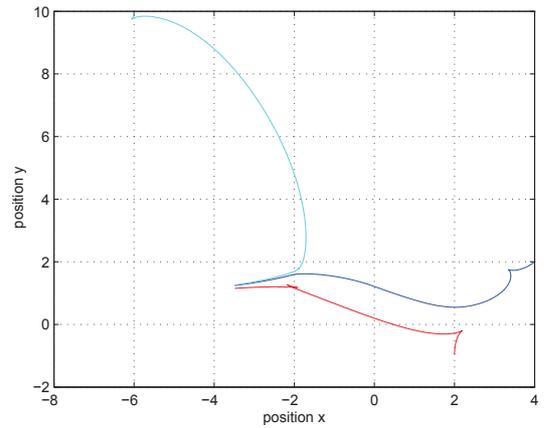


FIGURE 5.3 – Consentement d'un point commun par les 3 unicycles sous la matrice de commande C_2 (graphe \mathcal{G} orienté).

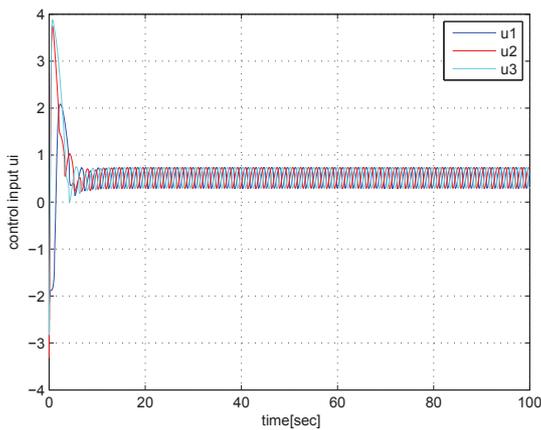


FIGURE 5.4 – Comportement des protocoles u_i avec la matrice de commande C_1 (graphe \mathcal{G} orienté)

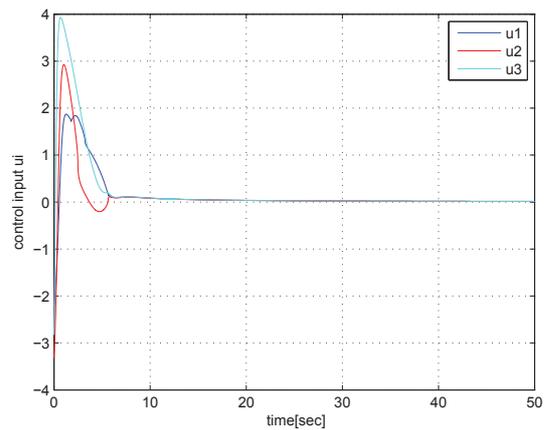


FIGURE 5.5 – Comportement des protocoles u_i avec la matrice de commande C_2 (graphe \mathcal{G} orienté)

toutefois, on peut toujours modifier les protocoles pour atteindre la position prédéfinie d'une cible. Ce cas d'étude est communément appelé problème de formation qui sort du cadre de cette thèse. Nous comparons aussi le comportement de chaque protocole pour les deux choix de la matrice de commande C . Ainsi, par rapport au protocole u_i , la figure 5.4 est associée à C_1 et la figure 5.5 à C_2 . On remarque que le choix de cette matrice impacte les amplitudes des vitesses linéaires, et la matrice C_1 conduit à des oscillations en régime permanent. Par rapport aux protocoles w_i , cette même constatation peut être dégagée de

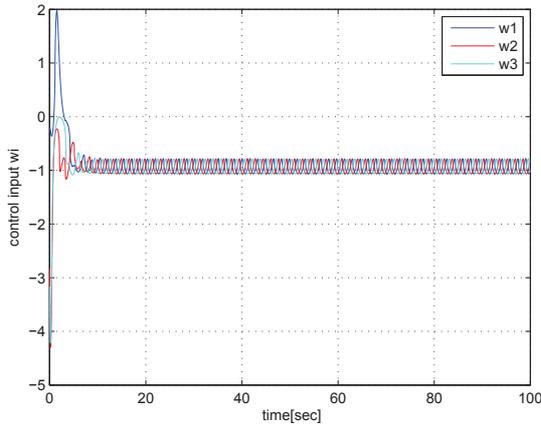


FIGURE 5.6 – Comportement des protocoles w_i avec la matrice de commande C_1 (graphe \mathcal{G} orienté)

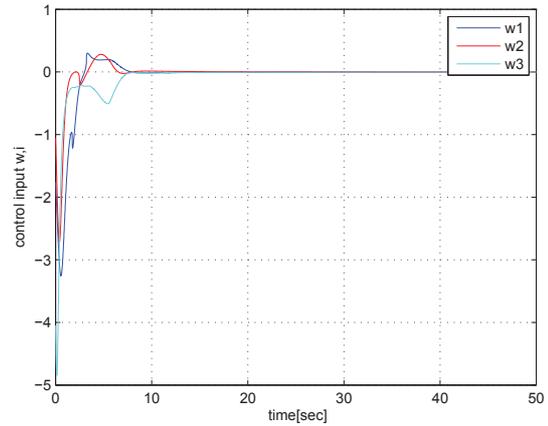


FIGURE 5.7 – Comportement des protocoles w_i avec la matrice de commande C_2 (graphe \mathcal{G} orienté)

la figure 5.6 (choix de C_1) et de celle de la figure 5.7 (choix de C_2).

5.6.3 Système multi-unicycles sous un graphe non orienté

Rappelons qu'un graphe non orienté est un graphe dans lequel chaque agent (unicycle) à la fois donne et reçoit l'information, de sorte que les matrices adjacente et laplacienne sont symétriques. On procède à la simulation du comportement de quatre unicycles par des matrices de commande C_1 et C_2 . Les états initiaux sont tels que :

$$\begin{aligned} x^1 &= (x_1, y_1, \theta_1)(t = 0) = \left(4, 2, \frac{\pi}{4}\right) \\ x^2 &= (x_2, y_2, \theta_2)(t = 0) = \left(2, -1, -\frac{\pi}{2}\right) \\ x^3 &= (x_3, y_3, \theta_3)(t = 0) = \left(1, 8, \frac{2\pi}{3}\right) \\ x^4 &= (x_4, y_4, \theta_4)(t = 0) = (-1, -4, \pi) \end{aligned}$$

Les protocoles dépendant du choix de C_1 et C_2 sont donnés par (5.36)-(5.38). Le consentement d'un point de rendez-vous est donné par la figure 5.8 (cas C_1) et la figure 5.9 (cas C_2). La performance réalisée sous la matrice de commande C_2 est significative, entraînant la convergence rapide des protocoles vers zéro. Celle-ci est apparente sur la

figure 5.11, comparée à la figure 5.10. Nous tirons le même constat des deux figures 5.12 et 5.13. L'achèvement du problème de consensus par les quatre unicycles qui est aussi un problème de rendez-vous a fait appel à des protocoles bornés en amplitudes, comparé aux résultats de stabilisation de type instationnaires (discontinues) dans le cas d'un unicycle (condition de Brockett non vérifiée).

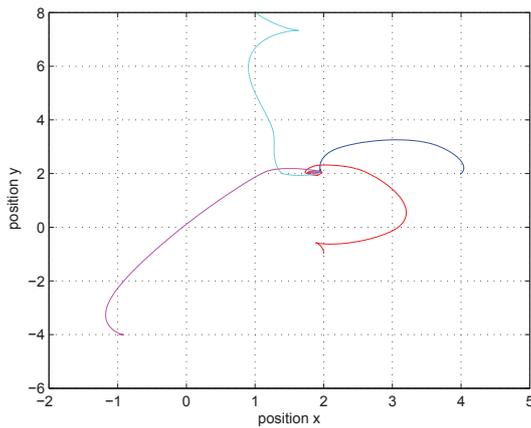


FIGURE 5.8 – Consentement d'un point commun par les 4 unicycles sous la matrice de commande C_1 (graphe \mathcal{G} non orienté).

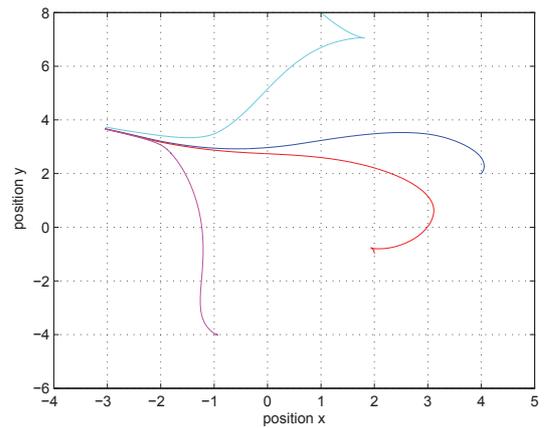


FIGURE 5.9 – Consentement d'un point commun par les 4 unicycles sous la matrice de commande C_2 (graphe \mathcal{G} non orienté).

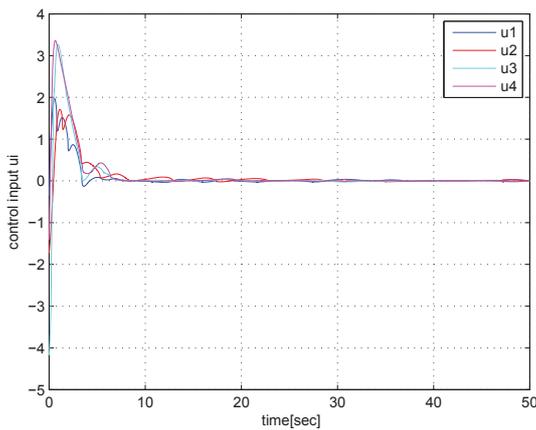


FIGURE 5.10 – Comportement des protocoles u_i avec la matrice de commande C_1 (graphe \mathcal{G} non orienté)

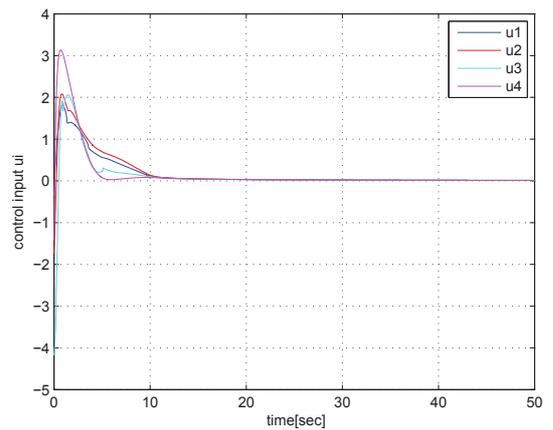


FIGURE 5.11 – Comportement des protocoles u_i avec la matrice de commande C_2 (graphe \mathcal{G} non orienté)

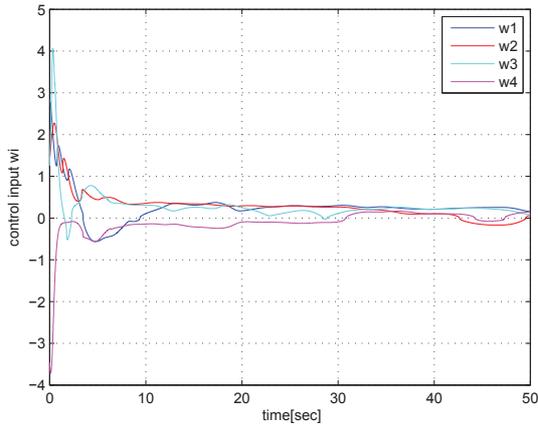


FIGURE 5.12 – Comportement des protocoles w_i avec la matrice de commande C_1 (graphe \mathcal{G} non orienté)

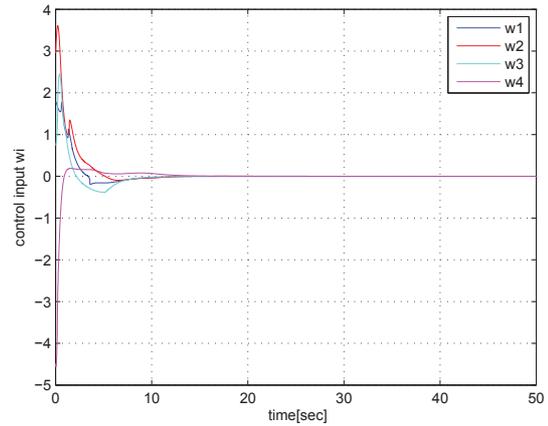


FIGURE 5.13 – Comportement des protocoles w_i avec la matrice de commande C_2 (graphe \mathcal{G} non orienté)

5.6.4 Consensus d'un système multi-agents (double intégrateur)

Comme application aux résultats des propositions 5.5.1 et 5.5.2 liées aux systèmes avec dérive, on considère que chaque agent obéit à la dynamique d'une simple particule qui est aussi un double intégrateur. Soit pour l'agent i :

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= v_i \\ \dot{v}_i &= u_i\end{aligned}\tag{5.39}$$

où $x_i \in \mathbb{R}^n$ est la position, $v_i \in \mathbb{R}^n$ désigne la vitesse et $u_i \in \mathbb{R}^n$ représente la commande. La dynamique (6.35) peut être mise sous la forme (5.2), c'est-à-dire

$$\dot{x}^i = f^i(x^i) + B(x^i)u^i\tag{5.40}$$

avec $x^i = \begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix}$, $f^i(x^i) = \begin{pmatrix} v_i \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u^i = u_i$

Il est évident de vérifier la condition sur f^i (5.5) conformément à l'Hypothèse 5.7. Pour

parvenir à compléter l'expression du protocole en u^i suivant,

$$u^i = -C(x^i)\phi_\alpha \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}(x^i - x^j) \right) \quad (5.41)$$

on propose de prendre une matrice $C = (1 \ 1)$. Sous forme explicite, on obtient :

$$u_i = -\varphi_\alpha \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}(x_i - x_j) \right) - \varphi_\alpha \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}(v_i - v_j) \right) \quad (5.42)$$

Tel que le montre le protocole ci-dessus, dans le cas d'un double intégrateur, on résout un consensus en temps fini en position et en vitesse. Signalons que le problème de consensus en temps fini d'un système multi-agents de type double intégrateur a été étudié par Wang [93] dans le cas d'un graphe non orienté (matrices adjacente et laplacienne symétriques). Cependant, du point de vue de son écriture, le protocole qu'on propose est différent de celui de Wang [93], car, sous les hypothèses des propositions 5.5.2 et 5.5.1, il résout le consensus en temps fini sous un graphe orienté et non orienté.

5.6.5 Systèmes double intégrateur sous un graphe orienté

Chaque agent du graphe orienté de la figure 5.1-a est représenté par un double intégrateur dont la dynamique est donnée par (5.40). L'échange des données se fera sur l'état $x^i = (x_i, v_i)$ pondéré par les éléments de la matrice adjacente déduite du graphe orienté. Les simulations numériques se basent sur les données suivantes ($\alpha = 0.5$) :

- Cas où les vitesses initiales sont nulles

$$\begin{aligned} x^1 &= (x_1, v_1)(t = 0) = (5(m), 0(m/s)) \\ x^2 &= (x_2, v_2)(t = 0) = (10(m), 0(m/s)) \\ x^3 &= (x_3, v_3)(t = 0) = (1(m), 0(m/s)) \end{aligned} \quad (5.43)$$

- Cas où les vitesses initiales sont non nulles

$$\begin{aligned}
 x^1 &= (x_1, v_1)(t = 0) = (5(m), 2(m/s)) \\
 x^2 &= (x_2, v_2)(t = 0) = (10(m), 1(m/s)) \\
 x^3 &= (x_3, v_3)(t = 0) = (1(m), 2.5(m/s))
 \end{aligned}
 \tag{5.44}$$

Sous un graphe orienté, nous avons simulé les comportements de trois agents dans le cas où les vitesses initiales sont nulles (5.43) et non nulles (5.44). Du point de vue des résultats, le consensus en vitesse est de $1.8m/s$ dans le cas (5.44) alors que ceci est réduit à $0.2m/s$ dans le cas (5.43). Le consensus en position est amené vers la droite de pente $1.8m/s$ selon la condition (5.44). Cette pente est dégressive quand les vitesses initiales se rapprochent de zéro. Par rapport aux résultats de la figure 5.18 (condition (5.43)) et la figure 5.19 (condition (5.44)), on remarque que l'amplitude de chaque protocole ne subit pas beaucoup de variations et reste bornée.

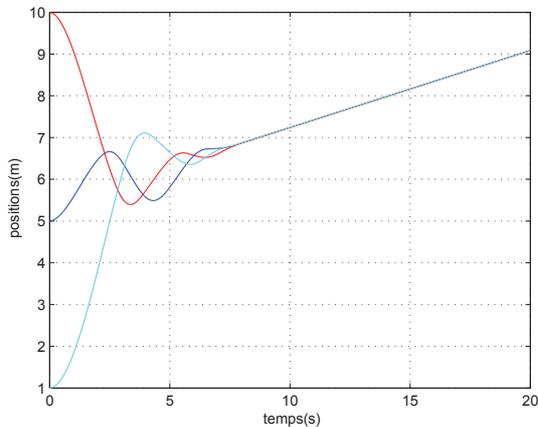


FIGURE 5.14 – Positions de 3 agents réalisant un consensus avec $v_i(0) = 0$ sous un graphe orienté.

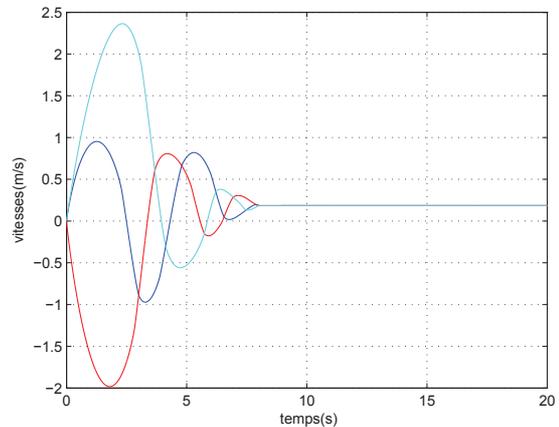


FIGURE 5.15 – Vitesses de 3 agents réalisant un consensus avec $v_i(0) = 0$ sous un graphe orienté.

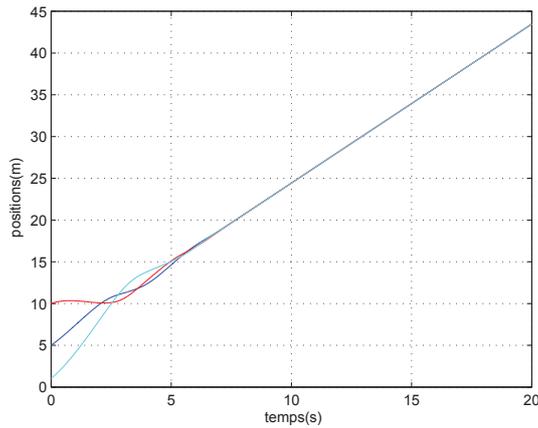


FIGURE 5.16 – Positions de 3 agents réalisant un consensus avec $v_i(0) \neq 0$ sous un graphe orienté.

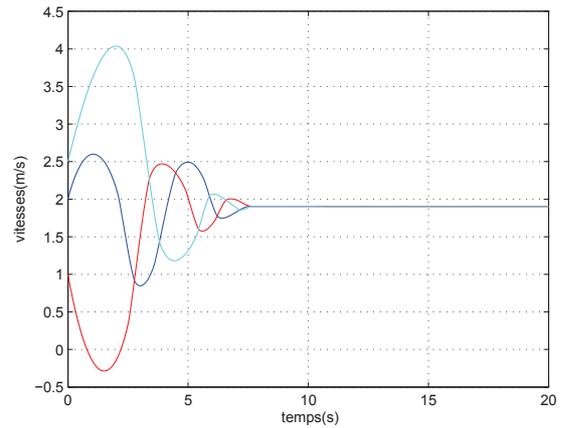


FIGURE 5.17 – Vitesses de 3 agents réalisant un consensus avec $v_i(0) \neq 0$ sous un graphe orienté.

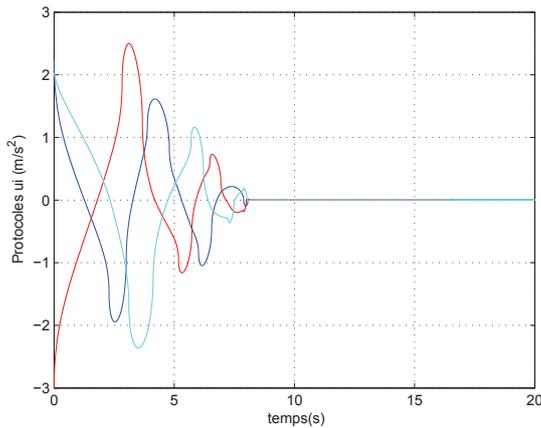


FIGURE 5.18 – Protocoles en accélérations avec $v_i(0) = 0$ sous un graphe orienté.

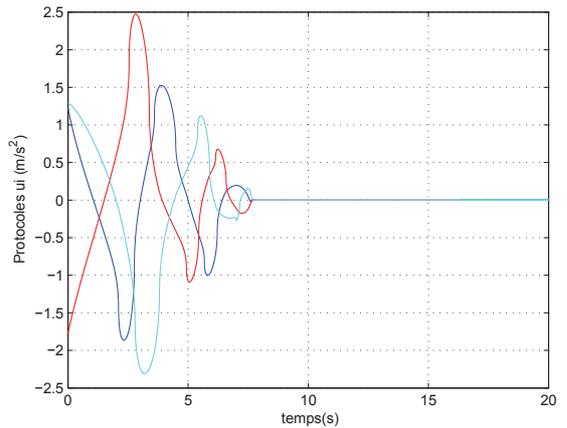


FIGURE 5.19 – Protocoles en accélérations avec $v_i(0) \neq 0$ sous un graphe orienté.

5.6.6 Systèmes double intégrateur sous un graphe non orienté

Pour le cas de quatre agents évoluant sous un graphe non orienté (figure 5.1-b), on a pris $\alpha = 0.5$ et les conditions initiales suivantes :

- Cas où les vitesses initiales sont nulles

$$\begin{aligned}
 x^1 &= (x_1, v_1)(t = 0) = (5(m), 0(m/s)) \\
 x^2 &= (x_2, v_2)(t = 0) = (10(m), 0(m/s)) \\
 x^3 &= (x_3, v_3)(t = 0) = (1(m), 0(m/s)) \\
 x^4 &= (x_4, v_4)(t = 0) = (-5(m), 0(m/s))
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

- Cas où les vitesses initiales sont non nulles

$$\begin{aligned}
 x^1 &= (x_1, v_1)(t = 0) = (5(m), 1(m/s)) \\
 x^2 &= (x_2, v_2)(t = 0) = (10(m), 2(m/s)) \\
 x^3 &= (x_3, v_3)(t = 0) = (1(m), 1.5(m/s)) \\
 x^4 &= (x_4, v_4)(t = 0) = (-5(m), 2.5(m/s))
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Par rapport aux conditions (5.45) et (5.46), le système multi-agents réalise un consensus en temps fini répondant aux résultats théoriques de ce chapitre (figures 5.20 et 5.21 pour le cas (5.45) et figures 5.22 et 5.23 selon les conditions (5.46)). Le fait d'adopter un graphe non orienté a conduit à un consentement en vitesses et positions proche de zéro si les conditions initiales sur les vitesses sont nulles (conditions (5.45)). Indépendamment des conditions initiales, les protocoles donnés par la figure 5.24 (conditions (5.45)) et la figure 5.25 (5.46)), restent inchangés et les agents subissent des accélérations bornées.

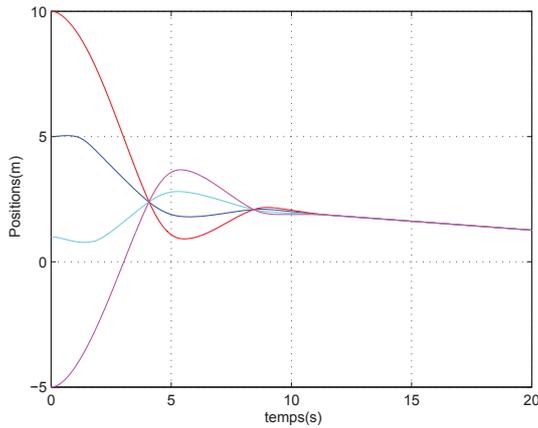


FIGURE 5.20 – Positions de 4 agents réalisant un consensus avec $v_i(0) = 0$ sous un graphe non orienté.

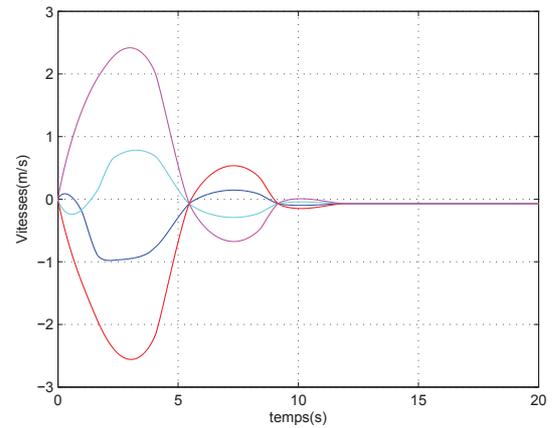


FIGURE 5.21 – Vitesses de 4 agents réalisant un consensus avec $v_i(0) = 0$ sous un graphe non orienté.

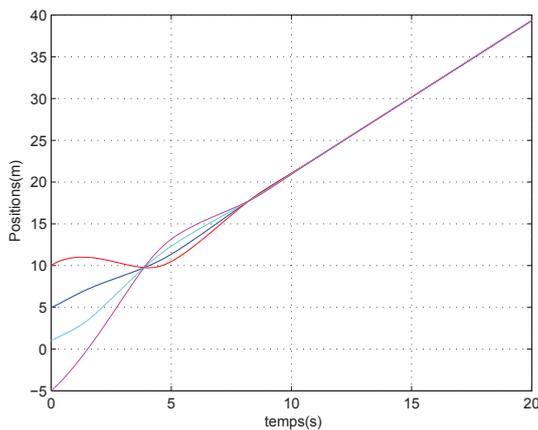


FIGURE 5.22 – Positions de 4 agents réalisant un consensus avec $v_i(0) \neq 0$ sous un graphe non orienté.

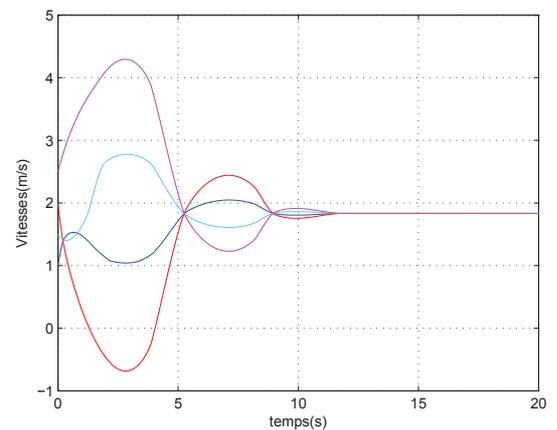


FIGURE 5.23 – Vitesses de 4 agents réalisant un consensus avec $v_i(0) \neq 0$ sous un graphe non orienté.

5.7 Conclusion

Même si le problème de consensus en temps fini des systèmes multi-agents a fait l'objet de plusieurs résultats dans la littérature, dans ce chapitre, nous avons abordé cette notion en ciblant les systèmes dynamiques contrôlés non linéaires et complexes. Les deux modèles décrits, avec et sans terme de dérive affine en la commande, sont toutefois largement étudiés en terme de stabilité moyennant les théories de commande linéaires et non linéaires, mais non analysés sous la problématique de consensus telle qu'elle a été

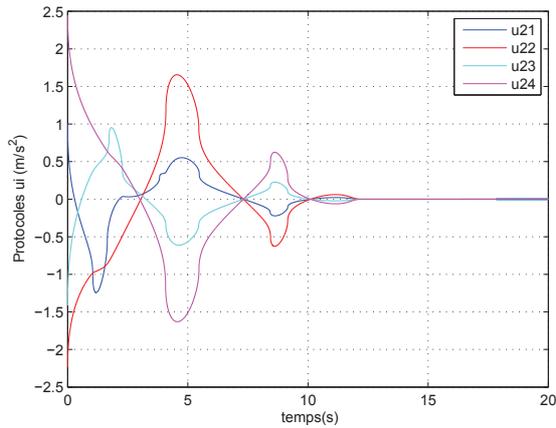


FIGURE 5.24 – Protocoles en accélérations avec $v_i(0) = 0$ sous un graphe non orienté.

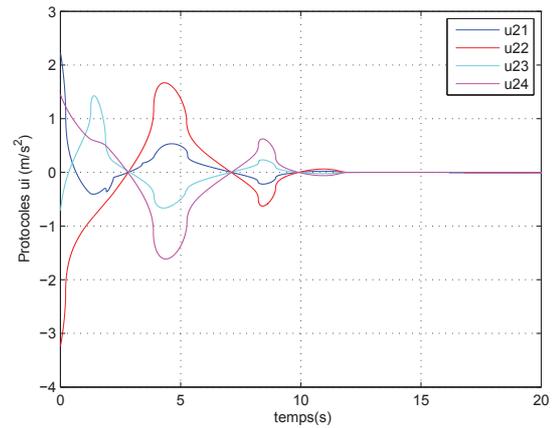


FIGURE 5.25 – Protocoles en accélérations avec $v_i(0) \neq 0$ sous un graphe non orienté.

posée dans ce chapitre. Nous avons mis en exergue un protocole résolvant le problème de consensus en temps fini entre les états de tels systèmes. En terme de stratégie de communication entre les agents, nous avons déployé deux graphes fixes de type orientés et non orientés. Il s'est avéré que, dans la validation de nos protocoles, le graphe non orienté a facilité nos preuves pourvu que la matrice laplacienne est symétrique mais au détriment d'un échange important de données. D'un point de vue pratique, nous avons appliqué nos résultats dans le cas d'un système multi-unicycles (système sans terme de dérive) et un système multi-agents basé sur un double intégrateur (système avec terme de dérive). Comme constat, le système multi-unicycles répond au problème de rendez-vous à travers ses états sous un protocole qui dépend uniquement de l'état de chaque unicycle et de son voisinage. Un tel protocole est un retour d'état pour le système interconnecté pondéré par les éléments de la matrice adjacente alors qu'il est connu qu'un unicycle ne peut être stabilisé par un retour d'état stationnaire. Enfin, les résultats énoncés peuvent être étendus aux problèmes de consensus en temps fini des systèmes hétérogènes mélangeant des dynamiques contrôlées avec ou sans terme de dérive. On peut citer l'exemple d'un consensus hétérogène entre les engins volants et les véhicules terrestres.

Chapitre 6

Consensus moyen et stabilisation d'une formation en temps fini

6.1 Introduction

En système multi-agents ou pour les systèmes dynamiques en réseau, rappelons que le problème du consensus se traduit par l'achèvement d'un comportement en masse cohérent envers un objectif commun qui dépend des états initiaux de tous les agents. L'algorithme d'un consensus est un protocole qui définit les règles d'interaction en spécifiant les informations à échanger entre l'agent et son voisinages dans le graphe de connexion. Sans s'attarder trop sur la notion de consensus, pour plus de détails le lecteur peut se référer au chapitre précédent et sur la manière dont on a pu poser le problème et la solution. Ainsi, par rapport au problème du consensus ordinaire, le consensus moyen se distingue par deux problématiques : le consensus moyen statique et le consensus moyen dynamique. Un consensus moyen statique est un problème de cohérence et de convergence de tous les agents vers une valeur fixe bien définie. Celle-ci peut être calculée, par exemple, à partir des conditions initiales connues de tous les agents. Ainsi, la dynamique de la moyenne est nulle, par conséquent, elle n'affecte pas la dynamique de l'agent ni du groupe. Le problème du consensus moyen dynamique c'est une convergence vers une moyenne qui est définie en fonction des états instantanés des agents. Cette moyenne dynamique peut être définie aussi comme la moyenne des signaux de référence. Dans ce chapitre, hormis

les complexités de nos modèles d'étude, à partir de l'évaluation de l'état de chaque agent traduisant l'état de chaque noeud, nous proposons le protocole qui résout le problème de consensus moyen dynamique. Ainsi, la difficulté réside dans le fait que le consensus moyen qu'on traite n'est pas défini par rapport aux conditions initiales ni par rapport à la moyenne des signaux de référence.

Dans la littérature, le consensus moyen statique a été étudié dans ([63], [96], [100]) où les auteurs proposent des protocoles linéaires, alors que dans ([90], [98],[99]) les protocoles sont de forme non linéaire. Pour le consensus moyen dynamique sous un protocole non linéaire, on peut se référer à ([99]). D'une manière générale, la dynamique de l'agent reste simple ce qui permet de répondre aux problèmes de consensus et consensus moyen en positions et en vitesses d'un nombre important d'agents. Cependant, si la dynamique de l'agent est non linéaire et le vecteur de son état est de dimension élevée, l'analyse du protocole n'est pas triviale.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, on fera la différence entre deux protocoles dont les expressions sont très semblables. Cependant le premier est dévolu à la résolution du problème de consensus moyen et le deuxième s'attaque à la stabilité de l'équilibre d'une formation. Les agents en formation étudiés dans la littérature présentent une dynamique linéaire assez simple, inspirée de celle d'une particule. La formation multi-agents qu'on pose se base sur des modèles non linéaires pour lesquels la dimension du vecteur d'état du groupe est assez consistante. De plus, on n'a pas la forme explicite du modèle de chaque agent et les modèles sont généraux et largement présents pour l'étude des systèmes autonomes (véhicules, drones, sous-marin, etc.). Les modèles sont affines en la commande (avec ou sans terme de dérive non linéaire) et la matrice de commande est non constante mais dépendante de l'état. D'où la complexité de l'étude de stabilisation qu'on mène. A noter que la réussite de la stabilisation du groupe par le protocole permet d'orienter la formation vers d'autres objectifs tels que l'alignement, le contournement d'une cible et l'évitement de collision (on peut se référer à la thèse de ElKamel [13] pour tous ces objectifs, traitant le cas d'un simple agent sous forme d'un simple intégrateur en formation). Toujours dans le cas de la dynamique d'un simple et double intégrateur, le système multi-agents répondant aux problèmes dites 'flocking' et 'schooling' a été étudié par Saber

[64].

6.2 Préliminaires et outils

Dans cette section, nous rappelons un résultat de Hong sur la stabilité en temps fini via la notion d'homogénéité.

Lemme 6.1 [82] *Etant donné un système de la forme*

$$\dot{x} = g(x) + \hat{g}(x) \tag{6.1}$$

avec $g(0) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $g(x)$ est continue et homogène de degré $k < 0$ par rapport à une dilatation $\Delta_\lambda(x) = (\lambda^{r_1}x_1, \dots, \lambda^{r_n}x_n)$ et $\hat{g}(x) \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant $\hat{g}(0) = 0$. Supposons que :

1. l'origine du système (6.1) est asymptotiquement stable,
2. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\hat{g}_i(\lambda^{r_1}x_1, \dots, \lambda^{r_n}x_n)}{\lambda^{k+r_i}} = 0$ (localement homogène).

Alors, l'origine du système (6.1) est stable en temps fini.

6.3 Formulation du problème et objectifs

Les systèmes dynamiques contrôlés qu'on étudie dans ce chapitre sont identiques à ceux présentés au chapitre précédent. Les motivations envers les choix des modèles ont déjà été clarifiées dans le chapitre précédent. Nous nous intéressons ainsi aux systèmes dynamiques contrôlés décrits par une équation différentielle du premier ordre affine en la commande avec ou sans terme de dérive. L'appellation "multi-agents" est utilisée quand plusieurs systèmes dynamiques contrôlés sont en réseau. Rappelons que le premier modèle Σ_1 est de la forme (6.2) et le second modèle Σ_2 est décrit par la relation (6.3) ci-dessous. Nous faisons usage de la notation multi- Σ_1 (multi-agents) quand la dynamique de chaque noeud (agent) est décrite par Σ_1 . De même, un système multi- Σ_2 est tel que la dynamique d'un noeud est régie par Σ_2 . Par rapport aux objectifs d'un consensus, la résolution d'un problème de consensus moyen consiste à faire converger tous les agents vers un consentement moyen.

A présent, rappelons les deux systèmes d'étude, $\forall i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$

$$\Sigma_1 : \dot{x}^i = B(x^i)u^i \quad (6.2)$$

$$\Sigma_2 : \dot{x}^i = f^i(x^i) + B(x^i)u^i \quad (6.3)$$

avec $x^i \in \mathbb{R}^n$, et pour $1 \leq i \leq N$, $x^i = [x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i]^T$, $B(x^i) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $f^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue et $u^i \in \mathbb{R}^m$ représente l'entrée de commande (protocole).

Définition 6.2 (*Stabilisation*) Etant donnée une commande d'interconnexion $u^i(x^i, x^j)$ pour tout $j \in \mathcal{N}_i$, l'origine du $i^{\text{ème}}$ système issu de (6.2) ou (6.3) est dit stable en temps fini si (pour tout $i \in \mathcal{I}$) :

1. l'origine du $i^{\text{ème}}$ système bouclé est stable.
2. il existe un temps d'établissement T_* tel que $\lim_{t \rightarrow T_*} \|x^i(t)\| = 0$.

Définition 6.3 (*Consensus moyen*) Etant donné un protocole $u^i(x^i, x^j)$ pour tout $j \in \mathcal{N}_i$, on dit que le $i^{\text{ème}}$ système répond à un consensus moyen en temps fini si, pour toutes données initiales, il existe un temps d'établissement T_* tel que :

$$\lim_{t \rightarrow T_*} \|x^i(t) - \chi(t)\| = 0 \quad (6.4)$$

pour tout $i \in \mathcal{I}$ avec $\chi(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x^j(t)$.

La moyenne $\chi(t)$ peut être interprétée comme le consentement moyen instantané qui sert les objectifs du groupe. $\chi(t)$ peut être également considéré comme le vecteur d'état moyen du groupe. Nous montrons par la suite que la dynamique de $\chi(t)$ dépend fortement de la topologie adoptée.

Pour les systèmes multi- Σ_1 et multi- Σ_2 on procédera à l'analyse des propriétés de convergence à la fois du protocole non linéaire (6.5) pour le problème de consensus moyen et de l'entrée de commande non linéaire (6.6) pour le problème de stabilisation d'une formation.

$$u^i = -C(x^i) \sum_{j=1}^N a_{ij} \phi_\alpha(x^i - x^j) \quad (6.5)$$

$$u^i = -C(x^i) \sum_{j=1}^N a_{ij} (\phi_\alpha(x^i) - \phi_\alpha(x^j)) \quad (6.6)$$

où les coefficients a_{ij} sont les éléments de la matrice adjacente de \mathcal{G} , $\alpha \in]0, 1[$ et $\phi_\alpha(x^i) = (\varphi_\alpha(x_1^i), \dots, \varphi_\alpha(x_n^i))^T$. La matrice de commande $C(x^i) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est fonction de l'état, elle sera fixée par la suite.

Comme nous pouvons le constater dans les protocoles (6.5) et (6.6), la notion de consensus moyen en temps fini est étroitement liée à la stabilité en temps fini. La différence principale est que le consensus moyen implique que l'état de chaque système converge vers la trajectoire moyenne. Cependant, le problème de stabilité d'un groupe d'agents en formation implique que chaque agent converge vers son état d'équilibre qui forme par conséquent l'état d'équilibre du groupe. L'hypothèse suivante donne une forme conceptuelle de $C(x^i)$ par rapport aux systèmes dynamiques étudiés.

Hypothèse 6.4 *La matrice non nulle $C(x^i)$ est telle que le produit matriciel $B(x^i)C(x^i)$ est semi-défini positif.*

Par la suite, on désigne par $\tilde{B}(x^i) = B(x^i)C(x^i)$ où $\tilde{B} = [\tilde{b}_{lk}(x^i)]_{l,k}$ pour $1 \leq l, k \leq n$ et $\tilde{B}(x^i) \geq 0$ pour tout $i \in \mathcal{I}$.

Hypothèse 6.5 *La matrice $C(x^i)$ est fixée par l'hypothèse 6.4. Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, on suppose que*

$$(\phi_\alpha(z_1) - \phi_\alpha(z_2))^T \tilde{B}(x^i) \phi_\alpha(z_1 - z_2) \geq (\phi_\alpha(z_1) - \phi_\alpha(z_2))^T \tilde{B}(x^i) (\phi_\alpha(z_1) - \phi_\alpha(z_2)) \quad (6.7)$$

Hypothèse 6.6 *On suppose que le champs de vecteur*

$$g(x^i) \triangleq - \sum_{j=1}^N a_{ij} \tilde{B}(x^i) \phi_\alpha(x^i - x^j) \quad (6.8)$$

est localement homogène de degré d par rapport à une dilatation $[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$.

Pour chaque système dynamique multi- Σ_1 et multi- Σ_2 , nous allons aborder le problème de consensus moyen en temps fini et le problème de stabilisation d'une formation.

6.4 Consensus moyen du système multi- Σ_1

La problématique du consensus moyen en temps fini du système multi- Σ_1 se base sur une topologie d'interaction stationnaire non orientée entre les agents. Chaque dynamique associée à Σ_1 va occuper un noeud appartenant au graphe \mathcal{G} et l'échange d'informations sur son état, pondéré par les éléments a_{ij} de la matrice laplacienne de \mathcal{G} , se fera à travers le protocole (6.5). Comme la structure de la matrice $B(x^i)$ est prise identique pour chaque Σ_1 , alors, on peut voir le système comme un système multi-agents homogène. Rappelons que pour un groupe d'agents où chaque dynamique est de la forme $\dot{x}^i = u^i$ [62], [90], si la topologie d'interconnexion se base sur un graphe non orienté, le consensus moyen est tel que tous les agents convergent vers la moyenne des états initiaux [62], [90], c'est-à-dire $\chi(t) = \sum_{i=1}^N x^i(0)$.

Proposition 6.7 *Soit \mathcal{G} un graphe stationnaire non orienté, sous le protocole (6.5) et les hypothèses 6.4, 6.5 et 6.6, le système multi- Σ_1 réalise un consensus moyen en temps fini dans le sens de (6.4).*

Preuve. Par rapport aux objectifs fixés dans la relation (6.4), nous introduisons le changement de variable suivant $\xi^i(t) = x^i(t) - \chi(t)$ et soit $\xi(t) = [\xi^1, \dots, \xi^N]^T$. Le fait que $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$ (graphe non orienté) et que φ_α soit une fonction impaire, entraîne que la dynamique de la moyenne sous le protocole (6.5) est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \dot{\chi}(t) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{x}^i(t) \\
 &= -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \tilde{B}(x^i) \phi_\alpha(x^i - x^j) \\
 &= -\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \left(\tilde{B}(x^i) - \tilde{B}(x^j) \right) \phi_\alpha(x^i - x^j)
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

En introduisant le protocole (6.5) dans la dynamique de $\xi^i(t)$ et en incorporant le résultat (6.9), on obtient

$$\begin{aligned}\dot{\xi}^i(t) &= \dot{x}^i(t) - \dot{\chi}(t) \\ &= - \sum_{j=1}^N a_{ij} \tilde{B}(x^i) \phi_\alpha(x^i - x^j) + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \left(\tilde{B}(x^i) - \tilde{B}(x^j) \right) \phi_\alpha(x^i - x^j) \quad (6.10) \\ &= - \sum_{j=1}^N a_{ij} \tilde{B}(x^i) \phi_\alpha(\xi^i - \xi^j) + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \left(\tilde{B}(x^i) - \tilde{B}(x^j) \right) \phi_\alpha(\xi^i - \xi^j)\end{aligned}$$

Pour $\xi(t) = (\xi^1, \dots, \xi^N)$, on peut réécrire la dernière égalité sous la forme suivante :

$$\dot{\xi}^i(t) = g(\xi^i) + \tilde{g}(\xi) \quad (6.11)$$

où

$$g(\xi^i) = - \sum_{j=1}^N a_{ij} \tilde{B}(x^i) \phi_\alpha(\xi^i - \xi^j)$$

et

$$\tilde{g}(\xi) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \left(\tilde{B}(x^i) - \tilde{B}(x^j) \right) \phi_\alpha(\xi^i - \xi^j)$$

Il est important de noter que le problème de consensus moyen est amené à un problème de stabilité en temps fini. Ainsi, l'objectif est de prouver que l'équilibre du système (6.11) est stable en temps fini et ceci sera atteint en deux étapes, répondant aux conditions du Lemme 6.1. Partant du fait que la dynamique (6.11) est identique à celle donnée par (6.1), nos étapes se résument par :

Étape 1. On s'intéresse à la stabilité en temps fini de l'équilibre du système

$$\dot{\xi}^i(t) = g(\xi^i) \quad (6.12)$$

La fonction de Lyapunov candidate est la suivante :

$$V(\xi(t)) = \frac{1}{\alpha + 1} \sum_{i=1}^N (\xi^i)^T \phi_\alpha(\xi^i) \quad (6.13)$$

Calculons la dérivée de V le long du système bouclé (6.12)

$$\begin{aligned}\dot{V}(\xi(t)) &= \sum_{i=1}^N (\phi_\alpha(\xi^i))^T \dot{\xi}^i \\ &= - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} (\phi_\alpha(\xi^i))^T \tilde{B}(x^i) \phi_\alpha(\xi^i - \xi^j) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} (\phi_\alpha(\xi^i) - \phi_\alpha(\xi^j))^T \tilde{B}(x^i) \phi_\alpha(\xi^i - \xi^j)\end{aligned}$$

En utilisant l'Hypothèse 6.5, on obtient

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} (\phi_\alpha(\xi^i) - \phi_\alpha(\xi^j))^T \tilde{B}(x^i) (\phi_\alpha(\xi^i) - \phi_\alpha(\xi^j)) \\ &= -\frac{1}{2} \phi_\alpha^T(\xi) \left(L \otimes \tilde{B}(x^i) \right) \phi_\alpha(\xi) \\ &= -\frac{1}{4} \phi_\alpha^T(\xi) \Theta \phi_\alpha(\xi)\end{aligned}$$

avec $\Theta = \frac{1}{2} \left(L \otimes \tilde{B}(x^i) + L \otimes \tilde{B}^T(x^i) \right)$.

Soit

$$D(x^i) = \text{diag}\{0_n, \gamma_2(x^i), \dots, \gamma_N(x^i)\}$$

où $0_n = \text{diag}\{0, \dots, 0\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\forall j = 2, \dots, N$ $\gamma_j(x^i) = \lambda_j(L) \varrho_n(x^i)$ avec $\varrho_n(x^i) = \text{diag}\{0, \mu_2(x^i), \dots, \mu_n(x^i)\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Notons que $\mu_2(x^i), \dots, \mu_n(x^i)$ sont les valeurs propres de la matrice $\tilde{B}(x^i)$, données dans un ordre croissant. $\lambda_j(L)$ est la $j^{\text{ème}}$ valeur propre de L . Soient $\lambda_2(L), \dots, \lambda_N(L)$ données dans l'ordre croissant. On a, à partir du Lemme 5.4 (chapitre 5), $\lambda_2(L) > 0$. Ce qui implique que $\forall x^i$, on a $\lambda_2 \mu_2(x^i) > 0$.

De plus, on a $\Theta \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$ est une matrice symétrique. Par conséquent, il existe une matrice orthogonale $P \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$ telle que $\Theta = P^T D(x^i) P$. Soit $z_\alpha = P \phi_\alpha(\xi)$, alors à partir de (6.14) on peut écrire,

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\frac{1}{4} z_\alpha^T D z_\alpha \\ &\leq -\frac{1}{4} \lambda_2 \mu_1(x^i) \|z_\alpha\|^2 \\ &= -\frac{1}{4} \lambda_2 \mu_1(\xi^i) \|\phi_\alpha(\xi)\|^2\end{aligned}$$

où $\lambda_2\mu_1(x^i) = \min_{z_\alpha \perp \mathbf{1}_{Nn}} \frac{z_\alpha^T D z_\alpha}{z_\alpha^T z_\alpha}$.

Soit $k = \min_{x^i \in \mathbb{R}^N} \lambda_2\mu_1(x^i) > 0$ et $\xi = \mathbf{1}_N \otimes \xi^i = (\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_{Nn})^T$, par conséquent,

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{k}{4} \sum_{i=1}^{Nn} |\varphi_\alpha(\tilde{\xi}_i)|^2 \\ &\leq -\frac{k}{4} \sum_{i=1}^{Nn} |\tilde{\xi}_i|^{2\alpha} \\ &\leq -\frac{k}{4} \left(\sum_{i=1}^{Nn} |\tilde{\xi}_i|^{\alpha+1} \right)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire

$$\dot{V} \leq -\frac{k}{4} (\alpha + 1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} V^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \quad (6.14)$$

Or $0 < \frac{2\alpha}{\alpha+1} < 1$ et $\frac{k}{4} (\alpha + 1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} > 0$, en se basant sur le Lemme 5.1 (chapitre 5), la fonction de Lyapunov tend vers zéro en temps fini et par conséquent l'équilibre du système (6.12) est stable en temps fini.

Étape 2. En utilisant l'Hypothèse 6.6, le vecteur $g(\xi^i)$ est homogène de degré d . Le fait que l'équilibre de $\dot{\xi}^i = g(\xi^i)$ est stable en temps fini implique que d est négative. De plus à partir de l'écriture $\tilde{g}(\xi)$, pour $k = 1, \dots, n$, il est simple de vérifier que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{g}_k(\varepsilon^{\sigma_1} \xi_1^i, \dots, \varepsilon^{\sigma_n} \xi_n^i)}{\varepsilon^{d+\sigma_i}} = 0$$

Par conséquent, en utilisant le Lemme 6.1, l'équilibre du système (6.11) est stable en temps fini.

En conclusion, le protocole (6.5) appliqué au système dynamique multi- Σ_1 résout le problème de consensus moyen en temps fini dans le sens (6.4). ■

6.5 Consensus moyen du système multi- Σ_2

En se référant à la dynamique d'un agent décrite par la relation (6.3) et le protocole (6.5), on construira le système multi-agents qui permet d'étudier le comportement d'un

modèle décrit par multi- Σ_2 . En se basant sur le développement théorique présenté dans le paragraphe précédent, l'objectif est de résoudre le problème de consensus moyen en temps fini pour le système dynamique multi- Σ_2 dans le cas d'un graphe stationnaire non orienté. En présence du terme de dérive, vu la complexité du changement de variable, deux cas de figure seront analysés, le cas de l'application linéaire $f^i(x^i) \triangleq \tilde{A}x^i$ avec \tilde{A} une matrice constante, et celui d'une application non linéaire. Nos résultats sont formalisés dans les propositions 6.8 (cas linéaire) et 6.9 (cas non linéaire).

6.5.1 Multi- Σ_2 : cas d'un terme de dérive linéaire

A présent, le système Σ_2 est tel que l'agent i est modélisé par :

$$\dot{x}^i = \tilde{A}x^i + B(x^i)u^i \quad (6.15)$$

où $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\tilde{A} = [\tilde{a}_{p,q}]_{1 \leq p,q \leq n}$.

Proposition 6.8 *Etant donné un graphe stationnaire non orienté \mathcal{G} , sous le protocole (6.5), le système multi-agents basé sur le modèle (6.15) réalise un consensus moyen en temps fini dans le sens de (6.4).*

Preuve. Nous introduisons le changement de variable $\xi^i(t) = x^i(t) - \chi(t)$. L'objectif est de réécrire l'équation (6.15) en boucle fermée en fonction de ξ^i et de prouver que ξ converge vers zéro en un temps fini. Le fait que $a_{ij} = a_{ji}$ et que $\phi_\alpha(\cdot)$ soit une fonction impaire, entraîne

$$\begin{aligned} \dot{\chi}(t) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{A}x^i + B(x^i)u^i) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{A}x^i + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N B(x^i)u^i \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{A}x^i - \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \left(\tilde{B}(x^i) - \tilde{B}(x^j) \right) \phi_\alpha(x^i - x^j) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\dot{\xi}^i = \tilde{A}\xi^i - \sum_{j=1}^N a_{ij}\tilde{B}(x^i)\phi_\alpha(\xi^i - \xi^j) + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \left(\tilde{B}(x^i) - \tilde{B}(x^j) \right) \phi_\alpha(\xi^i - \xi^j)$$

En suivant les mêmes étapes de la preuve précédente, nous obtenons une dynamique de la forme

$$\dot{\xi}^i = h(\xi^i) + \tilde{h}(\xi)$$

avec

$$h(\xi^i) = \tilde{A}\xi^i - \sum_{j=1}^N a_{ij}\tilde{B}(x^i)\phi_\alpha(\xi^i - \xi^j)$$

et

$$\tilde{h}(\xi) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \left(\tilde{B}(x^i) - \tilde{B}(x^j) \right) \phi_\alpha(\xi^i - \xi^j)$$

On remarque que $\tilde{h}(\xi) \triangleq \tilde{g}(\xi)$ alors pour prouver nos résultats, il sera suffisant de montrer que l'origine du système suivant est stable en temps fini.

$$\dot{\xi}^i = h(\xi^i) \tag{6.16}$$

En utilisant la fonction de Lyapunov (6.13), la dérivée de $V(\xi)$ le long du système (6.16) est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &= \sum_{i=1}^N \phi_\alpha^T(\xi^i) \dot{\xi}^i \\ &= \sum_{i=1}^N \phi_\alpha^T(\xi^i) \tilde{A}\xi^i - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \phi_\alpha^T(\xi^i) \tilde{B}(x^i) \phi_\alpha(\xi^i - \xi^j) \\ &\leq \|\tilde{A}\|_\infty \sum_{i=1}^N \phi_\alpha^T(\xi^i) \xi^i - \frac{k}{4} (\alpha + 1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} V^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \\ &\leq \|\tilde{A}\|_\infty V(\xi(t)) - \frac{k}{4} (\alpha + 1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} V^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \\ &\leq -V(\xi(t))^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \left[\frac{k}{4} (\alpha + 1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} - \|\tilde{A}\|_\infty (V(\xi(t)))^{\frac{1-\alpha}{\alpha+1}} \right] \end{aligned}$$

où $\|\tilde{A}\|_\infty = \max_{1 \leq p \leq n} \sum_{q=1}^n |\tilde{a}_{pq}| > 0$. Le fait que $\frac{1-\alpha}{\alpha+1} > 0$ et que V soit une fonction continue et nulle à l'origine ($V(\xi) = 0$) entraîne qu'il existe un voisinage Ω de l'origine tel que

$$\dot{V}(\xi(t)) \leq -\frac{k}{8}(\alpha+1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} V(\xi(t))^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \quad (6.17)$$

en utilisant le résultat de Bhat [21], on a V tend vers zéro en temps fini. Par conséquent, l'origine du système (6.16) est stable en temps fini. Pour finir la démonstration, nous pouvons suivre l'étape 2 de la proposition 6.7. ■

6.5.2 Multi- Σ_2 : cas d'un terme de dérive non linéaire

On considère que le terme de dérive dans (6.3) est non linéaire, un cas qui est couramment rencontré dans les systèmes dynamiques contrôlés. Rajoutons que si la structure f^i dans les systèmes dynamiques est identique alors le multi-système est dit homogène. Autrement, le multi-système est appelé hétérogène.

Proposition 6.9 *Soit \mathcal{G} un graphe non orienté stationnaire et supposons que $f^i(x^i)$ est convexe. Sous le protocole (6.5), pour une condition initiale donnée, la solution du système multi- Σ_2 (hétérogène ou non hétérogène) basée sur le modèle (6.3) converge vers la trajectoire moyenne en temps fini dans le sens de (6.4).*

Preuve. On introduit $\xi^i(t) = x^i(t) - \chi(t)$. L'objectif est de montrer que ξ^i converge vers zéro en un temps fini. Comme f^i est supposée convexe, alors elle vérifie (inégalité de Jensen)

$$f^i(x^i) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^i(x^i) \leq f^i(x^i) - f^i\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^i\right)$$

De plus, la fonction f^i est localement lipschitzienne, alors il existe un voisinage $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert contenant ξ tel que

$$\begin{aligned} f^i(x^i) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^i(x^i) &\leq \|f^i(x^i) - f^i(\chi)\| \\ &\leq c \|\xi^i\| \end{aligned}$$

où $c > 0$ est la constante de Lipschitz. Maintenant, on considère la fonction de Lyapunov (6.13), on montre que :

$$\begin{aligned}\dot{V}(\xi(t)) &= \sum_{i=1}^N (\phi_\alpha(\xi^i))^T \dot{\xi}^i \\ &\leq c \sum_{i=1}^N \phi_\alpha^T(\xi^i) \xi^i - \frac{k}{4} (\alpha + 1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} V^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \\ &\leq -V(\xi(t))^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \left[\frac{k}{4} (\alpha + 1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} - c(V(\xi(t)))^{\frac{1-\alpha}{\alpha+1}} \right]\end{aligned}$$

Or $\frac{1-\alpha}{\alpha+1} > 0$ et V est une fonction continue avec $V(0) = 0$ donc il existe un voisinage ouvert Ω de l'origine tel que pour $\xi(t) \in \Omega$

$$\dot{V}(\xi(t)) \leq -\frac{k}{8} (\alpha + 1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} V(\xi(t))^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \quad (6.18)$$

Par conséquent, on conclut que sous le protocole (6.5), le système dynamique multi- Σ_2 issue de (6.3) réalise un consensus moyen en temps fini.

■

Remarque 6.10 *Notons que dans le cas où le terme de dérive est non linéaire et la propriété de convexité de la fonction f^i n'est pas satisfaite, l'alternative est de linéariser ce terme dans chaque système Σ_2 et d'utiliser le résultat obtenu dans le cas d'un multi-système basé sur (6.15).*

En se basant sur des modèles dynamiques contrôlés et non explicites, dans la première partie de ce chapitre, nous avons étendu les résultats de la littérature qui consistent à résoudre le problème de consensus moyen décrit par une valeur moyenne constante à atteindre. Cette valeur est calculée à partir des positions initiales connues des agents. Les résultats qu'on apporte sont différents de la littérature, car le consensus moyen qu'on résout est celui de la trajectoire moyenne décrite par le vecteur d'état instantané de tous les agents.

Afin de distinguer les formes des deux protocoles (6.5) et (6.6), dans la deuxième partie de ce chapitre, on traite le problème de la stabilisation en temps fini de systèmes

dynamiques en formation. Pour une topologie stationnaire donnée, après avoir formé le modèle de la formation, on cherche à rendre l'équilibre stable moyennant l'entrée de commande (6.6). Nous allons traiter une formation décrite par le système multi- Σ_1 et celle associée au système multi- Σ_2 .

6.6 Stabilisation du système multi- Σ_1 en formation

Rappelons qu'un multi- Σ_1 décrit le comportement de plusieurs systèmes en formation et qui ne présentent pas un terme de dérive dans le modèle. Nous citons l'exemple de la cinématique d'un système multi-unicycles et le modèle en attitude de multi-satellites. Par conséquent, nous allons donner par la suite des résultats généraux qui peuvent être appliqués à une large variété de systèmes dynamiques en formation.

Proposition 6.11 *Soit \mathcal{G} une topologie stationnaire non-orientée. L'entrée de commande (6.6), appliquée au multi- Σ_1 , résout le problème de stabilisation de l'origine de la formation en temps fini.*

Preuve. Soient $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^N)^T \in \mathbb{R}^{Nn}$ et $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^N)^T \in \mathbb{R}^{Nm}$ avec $x^i \in \mathbb{R}^n$ et $u^i \in \mathbb{R}^m$. Pour le système en formation, étant donnée l'expression de la commande (6.6), on formalise l'entrée stabilisante sous la forme :

$$\mathbf{u} = -(L \otimes I_n)(I_N \otimes C(x^i))\phi_\alpha(\mathbf{x}) \quad (6.19)$$

En utilisant les propriétés du produit de Kronecker [76], en introduisant la commande (6.19), le système dynamique multi- Σ_1 en formation est décrit par (en se référant à l'écriture (6.2)) :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (I_N \otimes B(x^i))\mathbf{u} \\ &= -(I_N \otimes B(x^i))(L \otimes I_n)(I_N \otimes C(x^i))\phi_\alpha(\mathbf{x}) \\ &= -(L \otimes \tilde{B}(x^i))\phi_\alpha(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (6.20)$$

On propose la fonction de Lyapunov candidate suivante $V : \mathbb{R}^{Nn} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{Nn}$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \alpha} \mathbf{x}^T \phi_\alpha(\mathbf{x}) \quad (6.21)$$

La fonction V est définie positive, sa dérivée le long des solutions du système bouclé (6.20) est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \phi_\alpha^T(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ &= -\phi_\alpha^T(\mathbf{x}) (L \otimes \tilde{B}) \phi_\alpha(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Soit la matrice diagonale

$$D(x^i) = \begin{bmatrix} 0_n & & & \\ & \gamma_2(x^i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_N(x^i) \end{bmatrix}$$

où $0_n = \text{diag}\{0, \dots, 0\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\forall j = 2, \dots, N$, $\gamma_j(x^i) = \lambda_j(L) \varrho_n(x^i)$ avec $\varrho_n(x^i) = \text{diag}\{0, \mu_2(x^i), \dots, \mu_n(x^i)\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Notons que $\mu_2(x^i), \dots, \mu_n(x^i)$ sont les valeurs propres de la matrice $\tilde{B}(x^i)$, données dans un ordre croissant. $\lambda_j(L)$ est la $j^{\text{ème}}$ valeur propre de L . $\lambda_2(L), \dots, \lambda_N(L)$ sont données dans un ordre croissant. On a, à partir du Lemme 5.4 (chapitre 5) $\lambda_2(L) > 0$. Ce qui implique que $\forall x^i$, $\lambda_2 \mu_2(x^i) > 0$.

En outre, puisque $L \otimes \tilde{B} \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$ est une matrice symétrique, alors il existe une matrice orthogonale $P \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$ telle que $L \otimes \tilde{B} = P^T D(x^i) P$. Soit $\mathbf{z}_\alpha = P \phi_\alpha(\mathbf{x})$. Alors

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\mathbf{z}_\alpha^T D \mathbf{z}_\alpha \\ &\leq -\lambda_2 \mu_1(x^i) \|\mathbf{z}_\alpha\|^2 \\ &\leq -\lambda_2 \mu_1(x^i) \|\phi_\alpha(\mathbf{x})\|^2 \end{aligned} \quad (6.22)$$

avec

$$\lambda_2 \mu_1(x^i) = \min_{\mathbf{z}_\alpha \perp \mathbf{1}_{Nn}} \frac{\mathbf{z}_\alpha^T D \mathbf{z}_\alpha}{\mathbf{z}_\alpha^T \mathbf{z}_\alpha}$$

Soit $k = \min_{x^i \in \mathbb{R}^N} \lambda_2 \mu_1(x^i) > 0$ et $\mathbf{x} = \mathbf{1}_N \otimes x^i = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{Nn})^T$, ainsi on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -k \sum_{i=1}^{Nn} |\varphi_\alpha(\tilde{x}_i)|^2 \\ &\leq -k \sum_{i=1}^{Nn} |\tilde{x}_i|^{2\alpha} \\ &\leq -k \left(\sum_{i=1}^{Nn} |\tilde{x}_i|^{\alpha+1} \right)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \end{aligned} \quad (6.23)$$

ce qui permet d'écrire

$$\dot{V} \leq -k(\alpha + 1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} V^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \quad (6.24)$$

Or $0 < \frac{2\alpha}{\alpha+1} < 1$ et $k(\alpha + 1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} > 0$, en se basant sur le lemme 5.1 (chapitre 5) l'équilibre du système (6.2) est stable en temps fini. Le temps d'établissement est donné par

$$T_*(\mathbf{x}(0)) = \frac{(\alpha + 1)V(\mathbf{x}(0))^{\frac{1-\alpha}{\alpha+1}}}{(1 - \alpha)k(\alpha + 1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}}$$

■

6.7 Stabilisation du système multi- Σ_2 en formation

Rappelons que le système dynamique multi- Σ_2 est basé sur l'équation différentielle ordinaire, affine en la commande avec un terme de dérive non linéaire, de la forme

$$\Sigma_2 : \quad \dot{x}^i = f^i(x^i) + B(x^i)u^i \quad (6.25)$$

où la structure de f^i peut être différente dans chaque système d'étude. Dans ce cas, la formation est dite hétérogène. Dans un premier temps, nous supposons que

$$\phi_\alpha^T(x^i) f^i(x^i) \leq 0 \quad (6.26)$$

La stabilisation de la formation type multi- Σ_2 est obtenue dans la proposition suivante.

Proposition 6.12 *Supposons que l'inégalité (6.26) est satisfaite. Pour un graphe \mathcal{G} stationnaire non orienté donné, la commande (6.6) associée au système dynamique multi- Σ_2 résout le problème de stabilisation de la formation en temps fini.*

Preuve. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{Nn}$ et $f(\mathbf{x}) = (f^1(x^1), \dots, f^N(x^N))^T$. En utilisant la commande stabilisante (6.19), le système dynamique multi- Σ_2 en boucle fermée s'écrit :

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) - (L \otimes \tilde{B})\phi_\alpha(\mathbf{x}) \quad (6.27)$$

Analysons la fonction de Lyapunov (6.21), sa dérivée le long du système (6.27) est donnée par

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \phi_\alpha^T(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) - \phi_\alpha^T(\mathbf{x})(L \otimes \tilde{B})\phi_\alpha(\mathbf{x}) \quad (6.28)$$

En introduisant l'inégalité (6.26), le premier terme dans (6.28) est négatif. D'autre part, le terme restant dans (6.28) vérifie l'inégalité donnée par (6.24). Par conséquent, on conclut que l'origine du système dynamique multi- Σ_2 en formation (6.27) est stable en temps fini. ■

Remarque 6.13 *La condition (6.26) sur le terme de dérive peut s'avérer difficile à vérifier car elle dépend fortement du système étudié. Dans le cas d'un pendule simple, le terme de dérive qui résulte de la dynamique, sous certaines simplifications, vérifie l'inégalité (6.26). On ramène nos résultats de stabilisation à une condition sur $f^i(x^i)$ moins sévère dans la proposition suivante.*

Proposition 6.14 *Supposons que $f^i(x^i)$ est une fonction localement lipschitzienne avec $f^i(0) = 0$. Etant donné la commande (6.6) et un graphe \mathcal{G} non orienté, alors l'origine du système dynamique multi- Σ_2 (6.25) est stable en temps fini.*

Preuve. En utilisant la propriété de Lipschitz et le fait que le terme de dérive est nul à l'origine, la dérivée de la fonction de Lyapunov (6.21) s'écrit

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= \phi_\alpha^T(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) - \phi_\alpha^T(\mathbf{x})(L \otimes \tilde{B}(x^i))\phi_\alpha(\mathbf{x}) \\ &\leq c\|\phi_\alpha^T(\mathbf{x})\mathbf{x}\| - \phi_\alpha^T(\mathbf{x})(L \otimes \tilde{B})\phi_\alpha(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (6.29)$$

où $c > 0$ est la constante de Lipschitz. Soit $\mathbf{x} = \mathbf{1}_N \otimes x^i = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{Nn})^T$, par conséquent, en utilisant les inégalités (6.23) et (6.29), on obtient

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &\leq c \sum_{i=1}^{Nn} |\tilde{x}_i|^{\alpha+1} - k \left(\sum_{i=1}^{Nn} |\tilde{x}_i|^{\alpha+1} \right)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \\ &\leq -V^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} [k(\alpha+1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} - cV^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}]\end{aligned}\quad (6.30)$$

où $k = \min_{x^i \in \mathbb{R}^N} \lambda_2 \mu_1(x^i)$ est définie dans la preuve de la Proposition 6.11. Si $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} > 0$ et V est une fonction continue qui s'annule à l'origine, alors il existe un voisinage ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^{Nn}$ de l'origine tel que $\forall x \in \Omega$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\frac{k(\alpha+1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}}{2} [V(\mathbf{x})]^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}\quad (6.31)$$

En se basant sur le Lemme 5.1 (chapitre 5), V atteint zéro en un temps fini estimé par

$$T_*(\mathbf{x}(0)) = \frac{(\alpha+1)V(\mathbf{x}(0))^{\frac{1-\alpha}{\alpha+1}}}{2(1-\alpha)k(\alpha+1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}}$$

Par conséquent, l'origine du système dynamique multi- Σ_2 en formation est stable en temps fini. ■

Afin de conclure les analyses théoriques de ce chapitre, rappelons qu'on a proposé deux formes de protocole résolvant dans un premier temps le problème de consensus moyen et en second lieu le problème de stabilisation d'un groupe en formation. L'étude et les résultats sur les systèmes sans terme de dérive ont été étendus aux systèmes avec un terme de dérive. Le problème du consensus moyen tel qu'il a été posé dans ce chapitre s'est

avéré différent de celui étudié dans la littérature. Au delà d'un comportement moyen du groupe qui consente une valeur moyenne fixe (moyenne des conditions initiales des agents), nos résultats réalisent un consentement instantané (trajectoire moyenne instantanée). Ainsi, par rapport aux objectifs d'un groupe en terme d'un comportement collectif et stable, nos deux modèles d'étude ne sont pas explicités et couvrent les modèles cinématiques/dynamiques de plusieurs agents autonomes. On note également que le fait de s'attaquer à la stabilité d'un groupe d'agents, permet de conclure sur la stabilité de chaque agent alors que la forme de l'entrée de commande n'a pas un objectif directement compensatoire des termes de dérive. Cependant, sous certaines conditions sur ces termes on peut toujours se ramener à la stabilité du groupe. Les exemples de simulation, présentés dans la section suivante, vont éclaircir d'avantage toutes les démarches théoriques de ce chapitre.

6.8 Exemples d'application

Afin de valider les résultats théoriques de ce chapitre, les exemples en simulation concernent : le comportement cinématique d'un système multi-unicycles et qui se traduit par les analyses menées sur le système multi- Σ_1 et le comportement dynamique à la fois de plusieurs double intégrateur et pendules, qui illustre les résultats obtenus dans le cas de multi- Σ_2 . Nous analysons les objectifs liés à un consensus moyen et à la stabilité du groupe en formation. Tous les résultats de simulation se basent sur le graphe de connexion de quatre agents donné par la figure (Fig.6.1). Cette topologie est considérée stationnaire et non orientée (undirected graph).

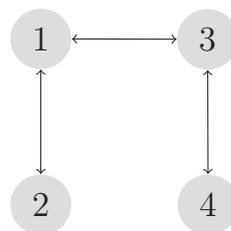


FIGURE 6.1 – \mathcal{G} pour un système avec 4 agents.

6.8.1 Consensus moyen d'un système multi-unicycles

Considérons N unicycles où le i^{me} modèle cinématique nonholonome est donné par : posant $x^i = (x_i, y_i, \theta_i)$ et $u^i = (u_i, w_i)$

$$\dot{x}^i = \begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ w_i \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

où, pour $i = 1, \dots, N$, (x_i, y_i) désigne la position du centre de masse et θ_i représente l'orientation de l'unicycle par rapport à un repère cartésien. Les entrées de commande u_i et w_i sont respectivement, la vitesse linéaire et la vitesse angulaire, exprimées dans un repère local. Soient

$$B(x^i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C(x^i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 1 \end{pmatrix}$$

En se basant sur la Proposition 6.7, le problème de consensus moyen en temps fini peut être réalisé en appliquant les protocoles suivant :

$$u_i = - \sum_{j=1}^N a_{ij} \varphi_\alpha(x_i - x_j) \cos \theta_i - \sum_{j=1}^N a_{ij} \varphi_\alpha(y_i - y_j) \sin \theta_i \quad (6.33)$$

$$w_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \varphi_\alpha(x_i - x_j) \sin \theta_i - \sum_{j=1}^N a_{ij} \varphi_\alpha(y_i - y_j) \cos \theta_i - \sum_{j=1}^N a_{ij} \varphi_\alpha(\theta_i - \theta_j) \quad (6.34)$$

où a_{ij} sont les termes de la matrice adjacente associée au graphe de la figure Fig 6.1. Les résultats de simulation sont limités à $N = 4$ agents et intègrent les conditions initiales suivantes :

$$x^1 = (x_1, y_1, \theta_1)(t = 0) = (4, 2, \frac{\pi}{4})(m, m, rad)$$

$$x^2 = (x_2, y_2, \theta_2)(t = 0) = (2, -1, -\frac{\pi}{2})$$

$$x^3 = (x_3, y_3, \theta_3)(t = 0) = (1, 8, \frac{2\pi}{3})$$

$$x^4 = (x_4, y_4, \theta_4)(t = 0) = (-1, -4, \pi)$$

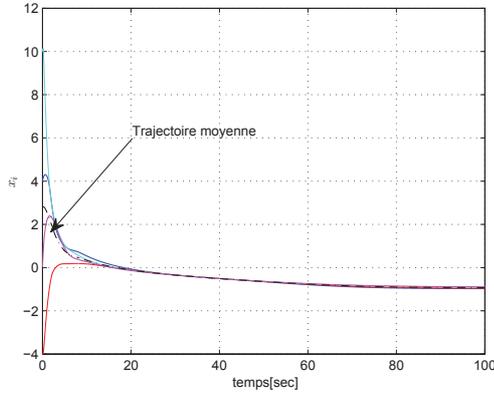


FIGURE 6.2 – Positions x_i réalisant un consensus moyen instationnaire.

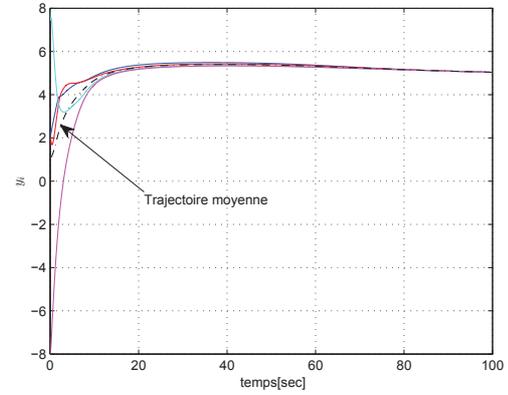


FIGURE 6.3 – Positions y_i réalisant un consensus moyen instationnaire.

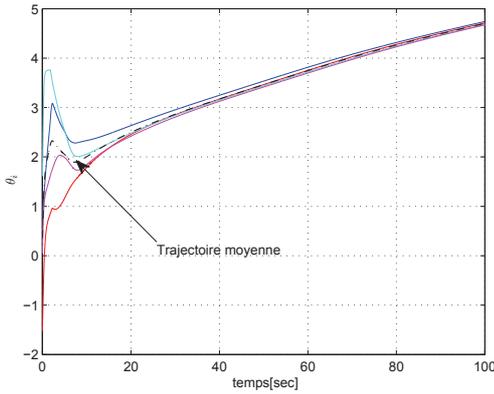


FIGURE 6.4 – Rotations θ_i réalisant un consensus moyen instationnaire.

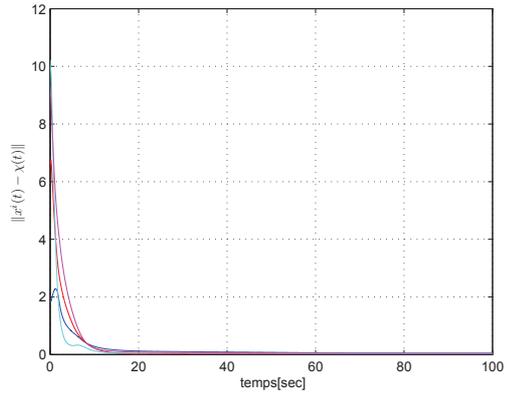


FIGURE 6.5 – Objectif du consensus moyen en $\|x^i(t) - \chi(t)\|$

Les simulations numériques sont obtenues moyennant les protocoles (6.33)-(6.34), appliqués au modèle (6.32). Les figures 6.2, 6.3 et 6.4 montrent le consentement par les agents de la moyenne en position et en orientation. Cette moyenne est instationnaire et se montre oscillante au départ des agents mais elle prend une allure linéaire quand les positions des agents deviennent assez proches. La figure 6.5 montre aussi l'objectif du consensus moyen tel qu'il a été défini dans (6.4), soit $\|x^i(t) - \chi(t)\|$ qui tend vers zéro en un temps fini.

6.8.2 Consensus moyen d'un multi-systèmes basé sur un second ordre

On traite un exemple couramment utilisé dans la littérature qui est un système multi-agents dont la dynamique de chaque agent est représentée par un second ordre (dynamique d'une simple particule). Soit,

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= v_i \\ \dot{v}_i &= u_i\end{aligned}\tag{6.35}$$

où pour $i = 1, \dots, N$, $x^i = (x_i, v_i) \in \mathbb{R}^2$ est l'état et $u_i \in \mathbb{R}$ est l'entrée de commande. La dynamique (6.35) prend la forme donnée par (6.15) avec

$$x^i = \begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix}, \quad f^i(\mathbf{x}^i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^i \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour le protocole (6.5) nous prenons une matrice de commande de la forme $C = (1 \ 1)$ qui vérifie les Hypothèses 6.4-6.5. En utilisant le résultat théorique de la proposition 6.8, chaque protocole u_i pour la dynamique (6.35) est de la forme

$$u_i = - \sum_{j=1}^N a_{ij} (\varphi_\alpha(x_i - x_j) + \varphi_\alpha(v_i - v_j))\tag{6.36}$$

Pour le cas de quatre agents ($N = 4$) évoluant sous un graphe non orienté, on a pris $\alpha = 0,5$ et les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned}x^1 &= (x_1(0), v_1(0)) = (5(m), 2(m/s)) \\ x^2 &= (x_2(0), v_2(0)) = (10(m), -1(m/s)) \\ x^3 &= (x_3(0), v_3(0)) = (1(m), 8(m/s)) \\ x^4 &= (x_4(0), v_4(0)) = (-5(m), -4(m/s))\end{aligned}\tag{6.37}$$

Pour $i = 1, \dots, 4$, la position x_i (Fig. 6.6) et la vitesse v_i (Fig. 6.7) montrent la conver-

gence des trajectoires vers une valeur commune.

Remarque 6.15 *D'autres procédés peuvent être étudiés où la moyenne est une valeur d'un accord entre les états comme par exemple, une donnée commune issue de plusieurs capteurs et où les fluctuations peuvent être importantes. La consommation d'énergie est également un facteur important pour la stabilité des générateurs électriques en réseau. La figure 6.8 montre que l'énergie cinétique d'un système multi-particules (dynamique du second ordre) converge vers la moyenne.*

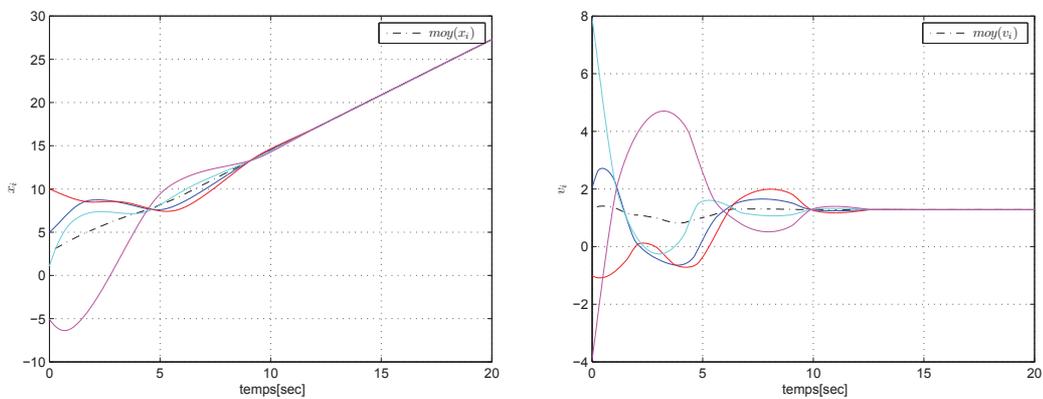


FIGURE 6.6 – Trajectoire moyenne en position atteinte par 4 agents. FIGURE 6.7 – Trajectoire moyenne en vitesse atteinte par 4 agents.

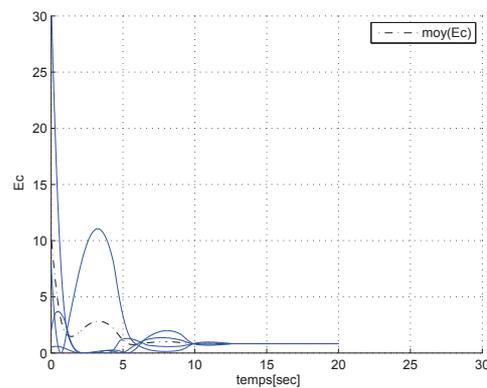


FIGURE 6.8 – Energie cinétique moyenne consentie par 4 agents.

6.8.3 Consensus moyen d'un système multi-pendules

Considérons un pendule simple soumis à la force de gravité g , à une force de frottement visqueux (proportionnelle à la vitesse de rotation) et à un couple u_i comme entrée de commande. Cette dynamique est décrite par :

$$\ddot{\theta}_i = -\frac{g}{l_i} \sin(\theta_i) - \frac{\psi_i}{m_i l_i} \dot{\theta}_i + u_i \quad (6.38)$$

où m_i , g , l_i et ψ_i sont des constantes positives. En posant $x^i = (\theta_i, \dot{\theta}_i)^T$, le modèle est du premier ordre avec terme de dérive donné par :

$$f^i(x^i) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_i \\ -\frac{g}{l_i} \sin(\theta_i) - \frac{\psi_i}{m_i l_i} \dot{\theta}_i \end{pmatrix}.$$

En prenant $C = (1 \ 1)$, le protocole associé au système multi-pendules s'exprime par (suite à l'écriture (6.5))

$$u_i = -\sum_{j=1}^N a_{ij} (\varphi_\alpha(\theta_i - \theta_j) + \varphi_\alpha(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_j)). \quad (6.39)$$

Un ensemble de quatre pendules a été analysé en simulations. Le système multi-pendules est hétérogène par rapport aux paramètres suivants $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$ et $m_4 = 4$ kg, la gravité $g = 9.8\text{ms}^{-2}$, chaque longueur $l_i = 1$ m et le coefficient $\psi_i = 0, 1\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$. Les conditions initiales sont telles que $\theta_i(0) = (-0.8, 0.4, 1, 2, 1.6)$ (rad) et $\dot{\theta}_i(0) = (0, 0, 0, 0)$ (rad.s⁻¹).

Il est clair qu'à partir des figures 6.9 et 6.10, les pendules se synchronisent vers la trajectoire moyenne en positions et en vitesses angulaires. Il est important de noter que la moyenne est instationnaire et que le système multi-pendules est hétérogène par rapport aux masses qui ne sont pas identiques. Ces résultats sont encourageants pour d'autres types d'applications dont la dynamique est complexe tels que les robots manipulateurs, les véhicules terrestres et aériens, etc.

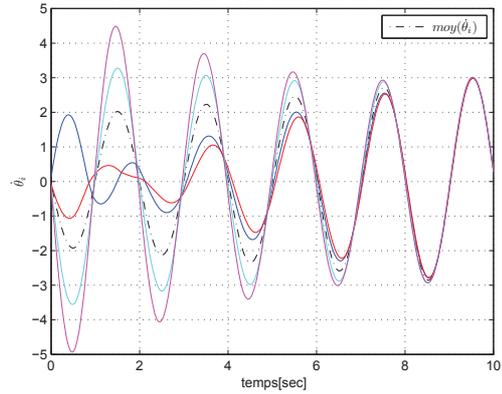
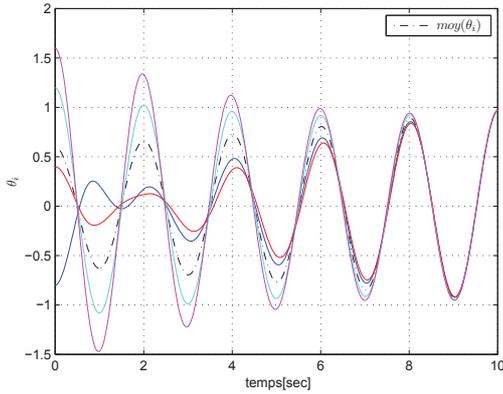


FIGURE 6.9 – Positions angulaires θ_i réalisant un consensus moyen instationnaire. FIGURE 6.10 – Vitesses angulaires $\dot{\theta}_i$ réalisant un consensus moyen instationnaire.

6.8.4 Résultats sur la stabilisation en temps fini d'une formation

Pour l'analyse de stabilisation d'une formation, on considère le système dynamique multi-unicycles qui représente la forme en réseau (6.2) (sans dérive). Le protocole associé est déduit de (6.6) et du graphe donné par Fig. 6.1. En utilisant la Proposition 6.11, la stabilisation en temps fini est atteinte en fixant la matrice

$$C = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 1 \end{pmatrix}$$

et les entrées stabilisantes

$$u_i = -\sum_{j=1}^N a_{ij}(\varphi_\alpha(x_i) - \varphi_\alpha(x_j)) \cos \theta_i - \sum_{j=1}^N a_{ij}(\varphi_\alpha(y_i) - \varphi_\alpha(y_j)) \sin \theta_i \quad (6.40)$$

$$w_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(\varphi_\alpha(x_i) - \varphi_\alpha(x_j)) \sin \theta_i - \sum_{j=1}^N a_{ij}(\varphi_\alpha(y_i) - \varphi_\alpha(y_j)) \cos \theta_i - \sum_{j=1}^N a_{ij}(\varphi_\alpha(\theta_i) - \varphi_\alpha(\theta_j)) \quad (6.41)$$

Prenant $N = 4$ agents, les conditions initiales sont telles que :

$$x^1 = (x_1, y_1, \theta_1)(t = 0) = (4, 2, \frac{\pi}{4})(m, m, rad)$$

$$x^2 = (x_2, y_2, \theta_2)(t = 0) = (12, -10, -\frac{\pi}{2})$$

$$x^3 = (x_3, y_3, \theta_3)(t = 0) = (10, -8, \frac{2\pi}{3})$$

$$x^4 = (x_4, y_4, \theta_4)(t = 0) = (-10, -14, \pi)$$

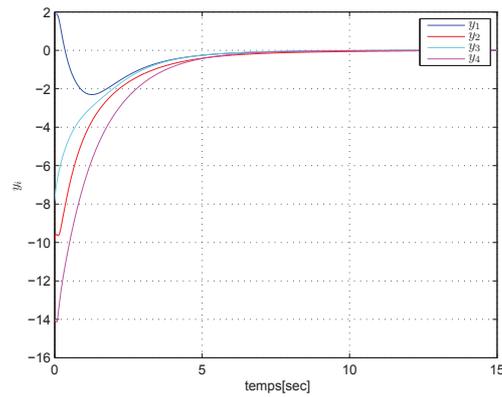
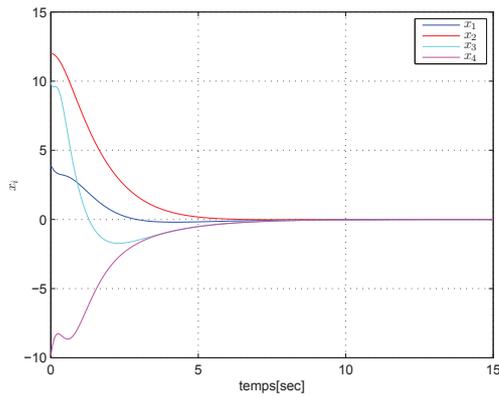


FIGURE 6.11 – Stabilisation de la position en x_i .

FIGURE 6.12 – Stabilisation de la position en y_i .

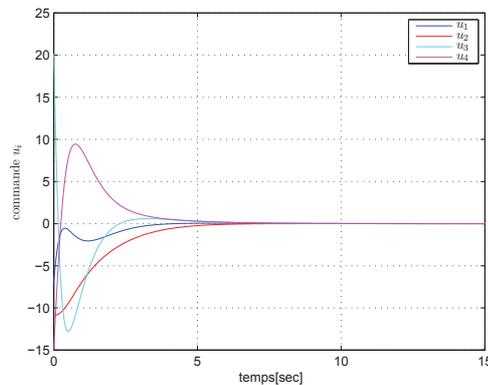


FIGURE 6.13 – Entrée de commande en vitesse linéaire u_i .

Les résultats de stabilisation sont représentés par les figures 6.11, 6.12 et 6.14 et les commandes sont données par les figures 6.13 et 6.15. Les entrées de commande (figures 6.13 et 6.15) ne présentent pas de pics et sont régulières, ces phénomènes sont présents dans la plupart de résultats de commande instationnaire ou discontinue. D'où l'avantage

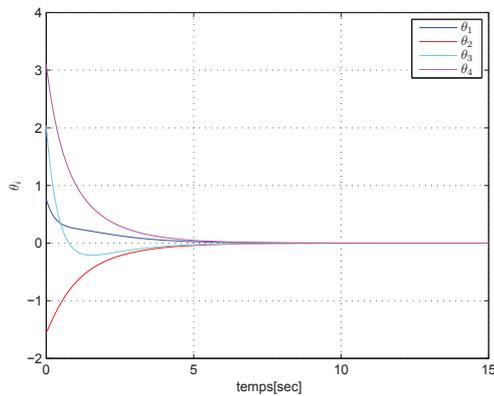


FIGURE 6.14 – Stabilisation de la rotation en θ_i .

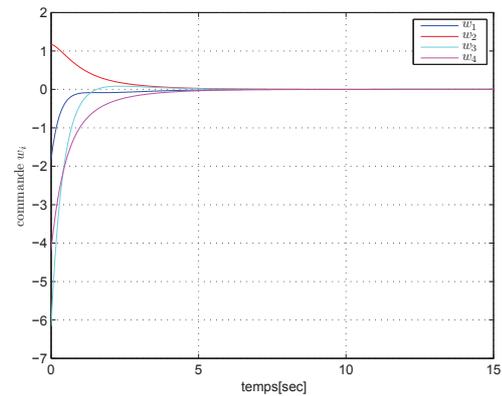


FIGURE 6.15 – Entrée de commande en vitesse angulaire w_i .

de l'analyse menée sur le groupe d'agents en formation.

6.9 Conclusion

Dans ce chapitre, l'étude d'un système multi-agents est formulée par deux modèles non linéaires traduisant les comportements des systèmes autonomes dynamiquement et/ou cinématiquement contrôlés. Pour obtenir un mouvement en masse et un comportement cohérent d'un tel multi-systèmes, nous avons proposé un protocole qui définit la règle d'interaction tout en amenant l'agent à interagir avec son voisinage et à répondre à un consensus moyen. Puisque on s'attaque à des modèles complexes et non linéaires, le problème de consensus moyen qu'on a pu résoudre dans ce travail est complètement différent de celui posé dans la littérature. En effet, la moyenne atteinte par le groupe est rendue non constante par le protocole (moyenne constante dans le cas du simple intégrateur), par conséquent, son calcul n'est plus fonction uniquement des conditions initiales. Dans ce cas de figure, la dynamique de la moyenne affecte la dynamique du groupe. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous nous sommes intéressés au problème de convergence de l'état du groupe vers l'équilibre. Une deuxième forme de protocole est proposée et analysée et les résultats assurent la stabilité en temps fini de chaque agent, ceci étant pour les deux modèles d'étude (avec et sans terme de dérive). Rappelons que nos résultats se limitent à des topologies instationnaires et non orientées. Plusieurs modèles (multi-unicycles, multi-

pendules, multi-systèmes double intégrateur) ont été étudiés en simulation et les résultats sont encourageants pour d'autres applications (systèmes véhicules terrestres et aériens, multi-robots, etc.). L'analyse reste ouverte pour l'intégration d'une topologie dynamique et orientée.

Chapitre 7

Conclusion générale

Le manuscrit de cette thèse est fondé autour de deux grandes parties. Deux piliers, sous formes de deux chapitres, sont les porteurs de chaque partie, une introduction générale et les outils mathématiques qui représentent la fondation et une conclusion générale matérialisant la toiture de cette contribution scientifique. Pour la réussite de l'œuvre, l'analyse de l'interconnexion, l'identification de la perturbation et l'étude de stabilité en un temps fini sont requises. Par le biais d'une bonne cohésion vers un objectif bien défini, on peut toujours se ramener à un consensus, voir à un consensus moyen sous l'action d'un protocole adéquat.

Dans première partie de ce manuscrit, nous avons posé le problème de stabilité et stabilisation en temps fini des systèmes perturbés. Dans le premier chapitre, nous nous sommes intéressés à la stabilité en temps fini des systèmes perturbés. Pour un système nominal autonome ou non autonome, dont l'origine est supposée stable en temps fini, auquel est ajouté un terme de perturbation qui s'annule et ou s'annule pas à l'origine, nous avons établi les conditions de stabilité en temps fini de l'origine du système initial. Nous observons que la connaissance de la forme explicite de la fonction de Lyapunov n'est pas nécessaire alors que l'homogénéité de la fonction qui représente le système nominal par rapport à une dilatation donnée est requise. Par rapport aux problèmes de stabilisation des systèmes contrôlés dont le vecteur de commande est instationnaire (systèmes qui ne vérifient pas Brockett, tels que l'unicycle, dirigeable, véhicule terrestre, drone, etc.), nous avons présenté des résultats théoriques généraux pour les systèmes bouclés dans le

cas où la perturbation est à variables séparables et le cas d'un système singulièrement perturbé. La technique de moyennisation se révèle efficace pour l'étude de la stabilité des systèmes homogènes et T-périodiques. La complexité du modèle est surmontée par l'étude des propriétés du système moyennisé qui est rendu autonome. Un exemple a été détaillé concernant la stabilisation en temps fini de l'origine de la dynamique plan du drone XSF du laboratoire.

Dans le deuxième chapitre de cette thèse, les problèmes de stabilité et de stabilisation en temps fini des systèmes dynamiques interconnectés ont été formalisés par une équation différentielle ordinaire du premier ordre où le terme d'interconnexion apparaît comme une perturbation. Lors de l'étude des systèmes interconnectés, nous avons fait l'hypothèse que le système nominal était stable en temps fini et nous avons suggéré des conditions sur les perturbations pour que le système global reste stable en temps fini. Comme technique, sans avoir recours à la forme explicite de la fonction de Lyapunov, dont l'existence découle de la stabilité en temps fini du système nominal, nous évaluons la dérivée de cette fonction tout au long des trajectoires d'un multi-systèmes pour prouver sa stabilité. A coté de l'exemple d'un système présentant un couplage structurel entre les variables d'état, qui est considéré comme un système interconnecté, nous nous sommes intéressés à la dynamique contrôlée de plusieurs systèmes en réseau. Une commande d'interconnexion a été élaborée dans le cas des systèmes contrôlés avec ou sans terme de dérive. L'idée fondamentale est de couvrir une large variété de systèmes autonomes dont la dynamique est affine en la commande. L'exemple d'un système multi-unicycles se révèle être stable en temps fini lors de la poursuite d'une trajectoire de référence et l'entrée de commande est robuste vis-à-vis d'une perturbation provenant des interconnexions.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous avons abordé le problème du consensus en temps fini et de la stabilisation en temps fini d'un groupe d'agents. Même si le problème de consensus en temps fini des systèmes multi-agents a fait l'objet de plusieurs résultats dans la littérature, dans le troisième chapitre de cette thèse, nous avons abordé cette notion en ciblant les systèmes dynamiques contrôlés non linéaires et complexes. Les deux modèles décrits, avec et sans terme de dérive et affine en la commande, sont toutefois largement étudiés en terme de stabilité à l'aide des théories de commande linéaires et non linéaires,

mais n'ont pas analysés sous la problématique d'un consensus telle qu'elle a été posée dans ce chapitre. Nous avons mis en exergue un protocole résolvant le problème du consensus en temps fini entre les états de tels systèmes. En terme de stratégie de communication entre les agents, nous avons considéré deux graphes fixes de type orientés ou non orientés. Il s'est avéré que dans la validation de nos protocoles, le graphe non orienté a facilité nos preuves parce que la matrice laplacienne est symétrique, mais cela s'est sent au détriment d'un échange important de données. D'un point de vue pratique, nous avons appliqué nos résultats au cas d'un système multi-unicycles (système sans terme de dérive) et à un système multi-agents, basé sur un double intégrateur (système avec terme de dérive). Nous observons que le système multi-unicycles répond au problème de rendez-vous à travers ses états sous un protocole qui dépend uniquement de l'état de chaque unicycle et de son voisinage. Un tel protocole est un retour d'état pour le système interconnecté pondéré par les éléments de la matrice adjacente alors qu'il est connu qu'un unicycle ne peut être stabilisé par un retour d'état stationnaire. Finalement, les résultats énoncés peuvent être étendus aux problèmes de consensus en temps fini des systèmes hétérogènes croisant les dynamiques contrôlées avec et sans terme de dérive. On peut citer l'exemple d'un consensus hétérogène entre les engins volants et les véhicules terrestres.

Dans le dernier chapitre de cette thèse, l'étude d'un système multi-agents est formulée pour deux modèles non linéaires traduisant les comportements des systèmes autonomes dynamiquement et/ou cinématiquement contrôlés. Dans la perspective, un mouvement de masse et un comportement cohérent d'un tel multi-systèmes, nous avons proposé un protocole qui définit la règle d'interaction tout en amenant l'agent à interagir avec son voisinage et de répondre à un consensus moyen. Si l'on considère des modèles complexes et non linéaires, le problème de consensus moyen qu'on a pu résoudre dans ce travail est complètement différent de celui traité dans la littérature. En effet, la moyenne atteinte par le groupe est rendue non constante par le protocole (moyenne constante dans le cas du simple intégrateur). Par conséquent, son calcul n'est plus fonction uniquement du conditions initiales. Dans ce cas de figure, la dynamique de la moyenne affecte la dynamique du groupe. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous nous sommes intéressés au problème de convergence de l'état du groupe vers l'équilibre. Une deuxième forme d'un protocole

est proposée et analysée et les résultats assurent la stabilité en temps fini de chaque agent, ceci étant pour les deux modèles d'étude (avec ou sans terme de dérive). Rappelons que nos résultats se limitent à des topologies instationnaires et non orientées. Plusieurs modèles (multi-unicycles, multi-pendules, multi-systèmes double intégrateur) ont été étudiés en simulation et les résultats sont encourageants pour d'autres applications (systèmes véhicules terrestres et aériens, multi-robots, etc.). L'analyse reste ouverte pour l'intégration d'une topologie dynamique et orientée.

Enfin, en terme de résultats, le travail effectué tout au long de ces années de recherche a pu favoriser notre présence et celle du laboratoire dans des conférences internationales de renommée et dans deux revues scientifiques de grande qualité en cours d'évaluation (voir bibliographie).

Bibliographie

- [1] N.Zoghlami, L. Beji, R. Mlayeh, and A. Abichou, "Finite time stability of perturbed systems, *IEEE Multi-conference on systems and control*, Dubrovnick, Croatia, 2012.
- [2] N. Zoghlami, L. Beji, R. Mlayeh, and A. Abichou, "Local finite time stability and stabilization of interconnected systems", *9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS 13)*, Toulouse, France, 2013.
- [3] N. Zoghlami, L. Beji, R. Mlayeh, and A. Abichou, "Finite time stabilization of interconnected nonlinear systems", *IEEE Multi-conference on systems and control*, Hyderabad, India, 2013.
- [4] N. Zoghlami, L. Beji, R. Mlayeh, and A. Abichou, "Finite time consensus and stabilization of networked nonlinear systems", *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, Florence, Italy, 2013.
- [5] N. Zoghlami, L. Beji, R. Mlayeh, and A. Abichou, "Finite time consensus of networked nonlinear systems under directed graph", *To be presented to the European Control Conference*, ECC 2014.
- [6] N. Zoghlami, L. Beji, R. Mlyah, and A. Abichou, "Finite-time average consensus in networked nonlinear dynamic systems", *Submitted to the 53rd IEEE Conference on Decision and Control*, Los Angeles, USA, 2014.
- [7] N. Zoghlami, L. Beji, R. Mlayeh, and A. Abichou, "Finite-time consensus in networked dynamic systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, en révision, janvier 2014.
- [8] N. Zoghlami, L. Beji, R. Mlayeh, and A. Abichou, "Average consensus and stability analysis in networked dynamic systems", *Automatica*, en révision, janvier 2014.

-
- [9] L. Beji, M. ElKamel, A. Abichou, "A strategy for multi-robot navigation", *in Proc. of CDC-ECC*, Orlando, FL, USA, Decembre 2011.
- [10] L.Beji and A.Abichou, "Streamlind rotors mini rotocraft : Trajectory generation and traking". *Int. J. of Control, Automation, and Systems*, 87-99, 2005.
- [11] R. Mlayeh, L. Beji and A. Abichou, "B-UAV tracking control integrating planned yaw and longitudinal/lateral inputs," *3rd US-European Workshop and Competition about Micro-Aerial Vehicules, MAV07*, Toulouse, France, 2007.
- [12] R.Mlayeh, L.Beji and A.Abichou, "Yaw-based Control of X4-bidirectional Flyer Planar Motion", *International Journal of Factory Automation, Robotics and Soft Computing*, 166-172 April 2007.
- [13] M. A. El Kamel "Stabilisation et régulation de robots mobiles opérant en groupe", *Thèse de doctorat, université d'Evry Val d'Essonne & Ecole polytechnique de Tunisie*, 2012.
- [14] Jean-Michel Coron. "On the stabilization in finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback law," *SIAM J. Control Optim*, 33(3) : pp 804-833, 1995.
- [15] Jean-Michel Coron. "Control and nonlinearity," *Mathematical Surveys and Monographs*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [16] V. T. Haimo, "Finite Time Controllers," *SIAM, J. Control Optim*, 1986, pp. 760–770.
- [17] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Lyapunov Analysis of Finite Time Differential Equations," *Proc. of the ACC 1995 Conference*, Seattle, WA, USA, 1995.
- [18] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Finite-time stability of homogeneous systems," *Proc. of the ACC 1997 Conference*, Albuquerque, NM , USA, 1997.
- [19] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Finite Time Stability of Continuous Autonomous Systems," *SIAM J. Control Optim*, vol.38, 2000, pp 751–766.
- [20] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Continuous Finite-Time Stabilization of the Translational and Rotational Double Integrator," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol.43, 1998, pp 678–682.

-
- [21] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Geometric homogeneity with applications to finite-time stability," *Math. Control Signals Systems*, vol.17, 2005, pp 101–127.
- [22] E. Moulay and W. Perruquetti, "Finite Time Stability of Non Linear Systems", *In IEEE Conference on Decision and Control*, Hawaii, USA, 2003.
- [23] Y. Orlov, "Finite time stability of homogeneous switched systems," *Proc. of the CDC 2003 Conference*, Maui, Hawaii, USA, 2003.
- [24] W. M. Haddad, S. G. Nersesov and D. Liang, "Finite-time stability for time-varying nonlinear dynamical systems," *Proc. of the ACC 2008 Conference*, Seattle, WA, USA, 2008.
- [25] R. W. Brockett, "Asymptotic stability and feedback stabilization," *in Differential Geometric Control Theory*, vol.27, 1983, pp.181–191.
- [26] Louis L. Whitcombe, "Notes on Kronecker products". URL : <http://robotics.me.jhu.edu/llw/courses/me530647/kron1.pdf>. 14
- [27] M.Kawski, "Homogeneous stabilizing feedback laws," *Control-Theory and Advanced Technology*, vol.6, 1990, pp.497–516.
- [28] R. T. M'Closkey and R. M. Murray, "Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback," *IEEE Transactions on automatic control*, vol.42, 1997, pp.614–628.
- [29] R. T. M'Closkey, "An averaging theorem for time-periodic degree zero homogeneous differential equations," *Systems & Control Letters*, vol.32, 1997, pp.179–183.
- [30] H.K.Khalil, *Nonlinear systems (third edition)*, Prentice Hall, 2002.
- [31] Y.Hong, "Finite time stabilization and stabilizability of class of controllable systems," *Systems Control Lett*, vol.46, 2002, pp 231–236.
- [32] R. T M'Closkey, "An averaging theorem for time-periodic degree zero homogeneous differential equations", *Systems Control Letters*, 32 pages 179-183, 1997.
- [33] E. Moulay, "Une contribution à l'étude de la stabilité en temps fini et de la stabilisation" *Thèse de doctorat, université des sciences et technologie de Lille*, 2005.

-
- [34] E. Bernuau, A. Polyakov, D. Emov, and W. Perruquetti, "Verification of ISS, iISS and IOSS properties applying weighted homogeneity". *Systems & Control Letters*, 62(12) :1159-1167, 2013.
- [35] Menard T., Moulay E., Perruquetti W., "A Global High-Gain Finite-Time Observer", *IEEE Transactions on Automatic Control (IF : 2.11)*, Vol. 55, No. 6, pp. 1500-1506, 2010.
- [36] Perruquetti W., Floquet T., Moulay E., "Finite time observers : application to secure communication", *IEEE Transactions on Automatic Control (IF : 2.11)*, Vol. 53, No. 2, 2008.
- [37] E.Moulay, M.Dambrine, N.Yeganefar, W.Perruquetti, "Finite-time stability and stabilization of time-delay systems", *Systems & Control Letters (IF : 1.718)*, Vol. 57, No. 7, pp. 561-566, 2008.
- [38] E.Moulay, W.Perruquetti, "Finite-time stability for non-autonomous continuous systems", *International Journal of control (IF : 0.977)*, Vol. 81, No. 5, pp. 797-803, May 2008.
- [39] E.Moulay, W.Perruquetti, "Finite time stability and stabilization of a class of continuous systems", *Journal of Mathematical Analysis and Applications (IF : 1.001)*, Vol. 323, pp. 1430-1443, Elsevier, 2006.
- [40] E.Moulay, W.Perruquetti, "Finite-time stability of differential inclusions", *IMA J. Math. Control Inform. (IF : 0.382)*, Vol. 22, No. 4, pp. 465-475, 2005.
- [41] Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W. "Finite-time Stabilization Using Implicit Lyapunov Function Technique", *IFAC NOLCOS 2013*, France (2013).
- [42] Bernuau E., Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W., "Robustness of finite-time stability property for sliding modes", *Joint SSSC, TDS, FDA 2013*, France (2013).
- [43] Bernuau E., Perruquetti W., Efimov D., Moulay E. "Finite-Time Output Stabilization of the Double Integrator", *In proc. 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC 12)*, Maui, Hawaii, USA, December 10-13, 2012.
- [44] J. Kurzweil "On the Inversion of Liapunov's Second Theorem on Stability of Motion" *Amer. Math. Soc. Transl*, vol. 24, pages 19-77, 1963.

-
- [45] A. M. Lyapunov, "Stability of Motion : General Problem" *Internat. J. Control*, Lyapunov Centenary issue. vol. 55, no. 3, pages 520-790, march 1992.
- [46] W. Hahn, "Theory and Application of Liapunov's Direct Method" *Prentice Hall inc.*, N.J. 1963.
- [47] T. Yoshizawa, "Stability Theory by Liapunov's Second Method", *The Mathematical Society of Japon*, 1966.
- [48] F. Amato M. Ariola, C. Cosentino C.T. Abdallah, P. Dorato, "Necessary and Sufficient Conditions for Finite-Time Stability of Linear Systems", *American Control Conference*, 4-6 June 2003.
- [49] Lazarevic, M., Debeljkovic, D., Nenadic, Z., et Milinkovic, S, "Finite-time stability of delayed systems" *J. Math. Control Inform*, vol. 17 :101-109.
- [50] Dayawansa WP, Martin CF, "Some sufficient conditions for the asymptotic stability of three dimensional homogeneous polynomial systems", *Proceedings of conference on decision and control*. Tampa, pp 1366-1369, 1989.
- [51] Hermes. H, "Homogeneous coordinates and continuous asymptotically stabilizing feedback controls" *In : Elaydi S (ed) Differential equations, stability and control. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, vol 127. Marcel Dekker, NewYork, pp 249-260, 1991.
- [52] Hermes. H, "Nilpotent and high-order approximations of vector field systems" *SIAM Rev*, 33 : 238-264, 1991.
- [53] Hermes. H, "Vector field approximations ; flow homogeneity", *In : Wiener J, Hale JK (eds) Ordinary and delay differential equations*, Longman Sci Tech, pp 80-89, 1992.
- [54] Hermes. H, "Homogeneous feedback controls for homogeneous systems", *Syst Control Lett*, 24 :7-11, 1995.
- [55] Kawski M, "Stabilizability and nilpotent approximations" *Proceedings of conference on decision and control*, Austin, pp 1244-1248, 1988.
- [56] Kawski M, "Geometric homogeneity and stabilization", *Krener A, Mayne D (eds) IFAC postprint volumes series. Elsevier*. Amsterdam 1999.

-
- [57] Rosier L, "Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field", *Syst Control Lett*, 19 :467-473, 1992.
- [58] C. Godsil and G. Royal, "Algebraic Graph Theory", *New York : Springer-Verlag*, 2001.
- [59] Wei Ren, "Multi-vehicle consensus with time varying reference state", *Systems & Control letters*, Vol. 56 , Pp. 474-483, 2007.
- [60] W. Ren and R. W. Beard, "Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 50, no. 5, pp. 655-661, 2005.
- [61] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, "Consensus Problems in Networks of Agents With Switching Topology and Time-Delays", *IEEE Transactions On Automatic Control*, VOL. 49, NO. 9, September 2004.
- [62] R. Olfati-Saber, R. Fax, J.A . Murray. R. M, "Consensus and cooperation in networked multi-agent systems", *Proceedings of the IEEE*, 95(1), pp. 215-133, 2007.
- [63] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, "Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 49, no. 9, pp. 1520-1533, 2004.
- [64] R. Olfati-Saber, "Flocking for Multi-Agent Dynamic Systems : Algorithms and Theory", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(3), pp. 401-420, 2006.
- [65] Chunkai Gao, Jorge Cortés, Francesco Bullo, "Notes on averaging over acyclic digraphs and discrete coverage control", *Automatica*, Vol. 44, No. 9, Pp. 2120-2127, 2008.
- [66] W. Perruquetti and J. P. Barbot, "Sliding mode control in engineering", *Marcel Dekker Hardcover*, 2002.
- [67] M. Defoort, S. Di Gennaro, and M. Djemai, "Self-Triggered Control For Multi-Agent Systems under a Directed Switching Graph", *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, Florence, Italy, 2013.
- [68] Yuanshi Zheng and Long Wang, "Finite-time consensus of heterogeneous multi-agent

-
- systems with and without velocity measurements", *Systems & control Letters*, 61 pp. 871-878, 2012.
- [69] F. Xiao and L. Wang, "Consensus behavior of agents in networked systems under general communication topologies", *Proc. the 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, 862-867, 2006.
- [70] D. Swaroop and J. K. Hedrick, "String stability of interconnected systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3), pp. 349-357, 1996.
- [71] J. Alex Fax and Richard M. Murray, "Graph Laplacians and vehicle formation stabilization", *In Proc. of the 15th IFAC World Congress*, pp. 23-53, 2002.
- [72] J. Alex Fax and Richard M. Murray, "Stability Analysis of Interconnected Nonlinear Systems Under Matrix Feedback", *In Proc. of the 42nd Conference on Decision and Control*, vol. 3, pp. 3078-3083, Dec 2003.
- [73] Feng. Xiao, Long Wang, Jie Chen, and Yanping Gao, "Finite-time formation control for multi-agent systems", *Automatica*, 45, pp. 2605-2611, 2009.
- [74] Xiaoli. Wang, and Yiguang. Hong, "Finite-Time Consensus for Multi-Agent Networks with Second-Order Agent Dynamic", *Proceedings of the 17th World Congress IFAC*, pp. 15185-15190, July. 2008.
- [75] S. Li, and Y.P. Tian, "Finite-time stability of cascaded time-varying systems", *International Journal of Control*, vol. 80, No.4, pp. 646-657, April 2007.
- [76] Lars B. Cremean, Richard M. Murray, "Stability Analysis of Interconnected Nonlinear Systems Under Matrix Feedback", *Proc. of the Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii, USA, 2003.
- [77] C. Samson, "Velocity and torque feedback control a nonholonomic cart", *Int. Workshop on Adaptive and Nonlinear Control*, Grenoble, pp. 125-151, 1990.
- [78] E. Panteley, and A. Loria, "On global uniform asymptotic stability of nonlinear time-varying systems in cascade", *Syst. Cont. Lett*, 33, pp. 131-138, 1998.
- [79] P. Morin and C. Samson, "Commande", *chapter in La robotique mobile, Hermes*, 2001.

-
- [80] Siljak. D. D, "Large scale dynamic systems : stability and structure", *North Holland, New York*, 1978.
- [81] Michel A. N et Miller R.K, "Qualitative analysis of large scale dynamical systems", *Mathematic science and Engineering*, vol 134, Academic Press, 1977.
- [82] Hong.Y, Xu. Y and Huang. J, "Finite-time control for robot manipulators", *Systems and Control Letters*, 46(4), pp. 243-253, 2002.
- [83] Y. Hong and Z. P. Jiang, "Finite-time stabilization of nonlinear systems with parametric and dynamic uncertainties", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 49, pp. 1950-1956, 2006.
- [84] Bollobas, B., "Modern graph theory," *Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag*, 1998.
- [85] T. Vicsek, A. Czirrok, E. Ben-Jacob, I. Cohen and O. Schochet, "Novel type of phase-transition in a system of self-driven particles", *Phys. Rev. Lett*, vol. 75, no 6, pp. 1226-1229, 1995.
- [86] A. Jadbabaie, J. Lin and A. S. Morse, "Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules", *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol 48, no 9, pp. 988-1001, 2003.
- [87] J. Cortes "Finite-time convergent gradient flows with applications to network consensus" *Automatica*, vol . 42, pp. 1993-2000, 2006.
- [88] Q. Hui, W. M. Haddad and S.P. Bhat "Finite-time semistability and consensus for nonlinear dynamical networks", *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol 53, no 8, pp. 1887-1890, septembre 2008.
- [89] F. Xiao and L. Wang, "State consensus for multi-agent systems with switching topologies and time-varying delays", *International Journal of Control*, vol. 79, no. 10, pp. 1277-1284, 2006.
- [90] L. Wang and F. Xiao, "Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents", *IEEE Transactions Automatic Control*, vol. 55, no. 4, pp. 950-955, 2010.
- [91] F. Xiao, L. Wang, J. Chen, and Y. Gao, "Finite-time formation control for multi-agent systems", *Automatica*, vol. 45, no. 11, pp. 2605-2611, 2009.

-
- [92] X. Wang and Y. Hong, "Distributed finite-time χ -consensus algorithms for multi-agent systems with variable coupling topology", *Journal of Systems Science and Complexity*, vol. 23, no. 2, pp. 209-218, 2010.
- [93] Xiaoli Wang and Yiguang Hong, "Finite-time consensus for multi-agent networks with second-order agent dynamics", in *IFAC World Congress*, Soeul, Korea, pp. 15185-15190, July 2008.
- [94] Yongcan and Wei Ren, "Finite-time Consensus for Second-order Multi-agent Networks with Inherent Nonlinear Dynamics Under Fixed Graph", in *Proc. of IEEE CDC*, Orlando, FL, USA, Decembre 2011.
- [95] Hong.Y, Xu. Y and Huang. J. "Finite-time control for robot manipulators", *Systems and Control Letters*, 46(4), pp. 243-253, 2002.
- [96] Zhu. M and Martínez. S, "Discrete-time dynamic average consensus", *Automatica* , pages 322–329, 2010.
- [97] Fangcui Jiang and Long Wang. "Finite-time information consensus for multi-agent systems with fixed switching topologies", *Physica D*, pages 1550–1560, 2009.
- [98] Fangcui Jiang and Long Wang. "Finite-time weighted average consensus with respect to a monotonic function and its application", *Systemes&Control Letters*, pages 718–725, 2011.
- [99] Shahram Nosrati, Masoud Shafiee, Mohammad Bagher Menhaj, "Dynamic average consensus via nonlinear protocols" *Automatica* , pages 2262–2270, 2012.
- [100] Shuai Liu, Tao Li, Lihua Xie, Minyue Fud, Ji-Feng Zhangc. "Continuous-time and sampled-data-based average consensus with logarithmic quantizers", *Automatica* , pages 3329–3336, 2013.
- [101] Hardy, G., Littlewood, J., and Polya, G, "Inequalities", *Cambridge University Press*, 1952.