



**HAL**  
open science

# CONTRIBUTIONS À L'ANALYSE DE SYSTÈMES À RETARDS : APPLICATION À LA SYNCHRONISATION DE SYSTÈMES EN RÉSEAU

Araceli Gárate-García

► **To cite this version:**

Araceli Gárate-García. CONTRIBUTIONS À L'ANALYSE DE SYSTÈMES À RETARDS : APPLICATION À LA SYNCHRONISATION DE SYSTÈMES EN RÉSEAU. Automatique. Ecole Centrale de Nantes (ECN); CICESE, Ensenada, Mexique, 2011. Français. NNT: . tel-01146480

**HAL Id: tel-01146480**

**<https://hal.science/tel-01146480>**

Submitted on 28 Apr 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole Centrale de Nantes

ÉCOLE DOCTORALE

SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'INFORMATION ET MATHÉMATIQUES

Année 2011

N° B.U. :

## Thèse de DOCTORAT

Spécialité : AUTOMATIQUE ET INFORMATIQUE APPLIQUÉE

Présentée et soutenue publiquement par :

ARACELI – GÁRATE-GARCÍA

le 12 juillet 2011  
au CICESE, Ensenada, Mexique

### TITRE

**CONTRIBUTIONS À L'ANALYSE DE SYSTÈMES À RETARDS : APPLICATION À LA SYNCHRONISATION DE SYSTÈMES EN RÉSEAU**

### JURY

Président :	J. ÁLVAREZ GALLEGOS	Professeur, CICESE, Ensenada, Mexique
Rapporteurs :	J.P. RICHARD J. DE LEÓN-MORALES	Professeur, École Centrale de Lille Professeur, Universidad Autónoma de Nuevo León, Monterrey, Mexique
Examineurs :	C.H. MOOG L.A. MÁRQUEZ-MARTÍNEZ I. ORLOV	Directeur de recherche CNRS Professeur, CICESE, Ensenada, Mexique Professeur, CICESE, Ensenada, Mexique

---

Co-Directeur de thèse : Claude H. MOOG  
Laboratoire : IRCCyN  
Co-Directeur de thèse : Luis Alejandro MÁRQUEZ-MARTÍNEZ  
Laboratoire : CICESE

N° ED 503-133



*A mis padres Guadalupe García Contreras y Francisco Gárate Velarde(†)* a quienes debo todo. Gracias por guiarme por el camino de la vida con su amor y su ejemplo.

*A mis tíos Ana Ma. García y Fred Castro. A mis hermanas de corazón Glenda Castro, Paola García y Cristina Chrétien.* Gracias por su apoyo incondicional.



# Remerciements

Les travaux ont été dirigés par messieurs L.A. Márquez-Martínez et C.H. Moog, à qui je tiens à exprimer ma profonde gratitude pour leur soutien et pour me permettre de travailler, d'apprendre, de croître d'un point de vue professionnel et personnel à leur côté durant ces dernières années.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers les membres du jury, dont la renommée et la qualité scientifique honorent grandement ce travail : Tout d'abord à M. J. Álvarez-Gallegos, que je remercie pour son intervention en tant que président de jury et pour toutes les remarques importantes qui m'ont permis d'améliorer ce mémoire. À M. J.P. Richard, M. J. de León-Morales et à M. I. Orlov-Kuchina, pour leur lecture attentive et détaillée de ce manuscrit ainsi que pour leurs nombreux commentaires constructifs. Mes remerciements particuliers aux docteurs E. Moulay et M. di Loreto, de même que à mes copains E. García et T. Menard, pour ses discussions enrichissantes.

À l'ensemble des personnels de l'IRCCyN et du CICESE.

Merci à mes amis de Nantes, ma famille en France. Particulièrement à C. Chrétien, S. Martínez, M. Ezzat, A. Mahamoud, R. Kassem, D. Galvez, D. Tlalolini, R. Zou, X. Wu, C. Rengifo, S. Hénaff, D. Bertrand, R. Bacos, D. Vautrin, D. Traore et C. Diallo. Merci aux "filles", mon admiration et respect : A. González, E. Obiala, R. Leal, C. Maya, V. Rodríguez, M. Necochea, D. Sánchez, B. Figueroa et E. Ramírez.

Ce travail a été possible grâce au support financier du CONACyT (bourse doctorale Réf. 165432). Un support additionnel a été donné par le programme Eiffel Doctorat, CICESE, l'institut de recherche IRCCyN de l'École Centrale de Nantes et les projets CONACyT Réf. 631293 et ECOS NORD M05M01.



## Agradecimientos

A mis directores de tesis, Dr. L.A. Márquez-Martínez y Dr. C.H. Moog, por permitirme trabajar, aprender, crecer personal y profesionalmente a su lado.

A los miembros del comité de tesis por aceptar formar parte de este proyecto, por su tiempo y por sus valiosos comentarios y sugerencias.

Al personal de CICESE y del IRCCyN por las facilidades brindadas para estudiar el posgrado.

Al Dr. F. Díaz Muñoz por sembrar en mí la inquietud de estudiar un doctorado.

A mi familia por su increíble apoyo, son la mayor bendición en mi vida.

Haciendo el recuento de esta historia son muchos los círculos de amigos y poco el espacio para expresar mi gratitud por todos los momentos vividos.

- A “las chicas”, mi admiración y respeto: A. González, E. Obiala, R. Leal, C. Maya, V. Rodríguez, M. Necochea, D. Sánchez, B. Figueroa y E. Ramírez.

- A R. Meza. Gracias por esas pláticas nocturnas, si fue bendita la coincidencia.

- A mis amigos de siempre y a quienes tuve la fortuna de conocer. Gracias por su compañía y palabras de aliento aún a la distancia en algún momento de este camino. En especial a I. González, A. Zaragoza, S. García, L. Mireles, P. Vasconcelos, F. Pérez, Fam. Bustillos Napoles, G. Chaparro, I. Salgado, R. Morales, E. Castellanos, V. Varela, A. García, C. Morales, O. Peñaloza, R. Santiesteban, O. Gómez, M. Miranda, R. Martínez, D. Rosas, E. Álvarez, R. Cuesta, H. Estrada y a mis queridos Tulicanos.

Este trabajo fue posible gracias al apoyo económico de CONACyT (beca doctoral Ref. 165432). Apoyo adicional fue brindado por el programa Eiffel Doctorat, CICESE, el instituto de investigación IRCCyN de l'École Centrale de Nantes, y los proyectos CONACyT Ref. 631293 y ECOS NORD M05M01.





# Contenido

	Página
<b>Dedicatoria</b>	<b>i</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>iii</b>
<b>Contenido</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tablas</b>	<b>xiii</b>
<b>Notación</b>	<b>xv</b>
<b>I. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
I.1 Antecedentes . . . . .	4
I.2 Objetivos . . . . .	8
I.2.1 Objetivo general . . . . .	8
I.2.2 Objetivos específicos . . . . .	8
I.3 Motivación . . . . .	9
I.4 Contribuciones . . . . .	10
<b>II. MODELADO.</b>	<b>13</b>
II.1 Preliminares. . . . .	14
II.1.1 Sistemas considerados. . . . .	14
II.1.2 Conceptos básicos de sistemas con retardos. . . . .	15
II.1.3 Planteamiento del problema de equivalencia de SLR. . . . .	19
II.2 Errores de modelado en SLR. . . . .	19
II.2.1 Equivalencia de SLR. . . . .	20
II.2.2 Eliminación de retardos. . . . .	23
II.2.3 Reducción de retardos. . . . .	27
II.3 Conclusiones del capítulo. . . . .	29
<b>III. SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS EN RED.</b>	<b>31</b>
III.1 Preliminares. . . . .	31
III.1.1 Sistemas considerados. . . . .	31
III.1.2 Planteamiento del problema de sincronización de NCSs. . . . .	33
III.2 Sistemas sin interconexiones físicas. . . . .	34
III.2.1 La solución estándar es no causal. . . . .	35
III.2.2 Solución causal. . . . .	38

## Contenido (continuación)

	Página
III.3 Sistemas con interconexiones físicas. . . . .	44
III.4 Conclusiones del capítulo. . . . .	48
<b>IV. SISTEMAS DE POTENCIA INTERCONECTADOS</b>	<b>51</b>
IV.1 Modelado del sistema de potencia . . . . .	52
IV.1.1 Definiciones preliminares. . . . .	55
IV.1.2 Formulación del problema de sincronización de SPI. . . . .	56
IV.2 Diseño de un controlador descentralizado . . . . .	57
IV.2.1 Formulación en LMIs de los objetivos de ubicación de polos . . . . .	61
IV.2.2 Metodología . . . . .	64
IV.2.3 Resultados de simulación . . . . .	65
IV.3 Control centralizado . . . . .	69
IV.3.1 Sistema linealizado . . . . .	70
IV.3.2 Metodología . . . . .	75
IV.3.3 Caso de estudio . . . . .	76
IV.4 Conclusiones del capítulo . . . . .	78
<b>V. CONCLUSIONES GENERALES</b>	<b>81</b>
V.1 Aportaciones principales . . . . .	81
V.2 Trabajo futuro . . . . .	82
<b>VI. RÉSUMÉ EN FRANÇAIS</b>	<b>85</b>
VI.1 Introduction générale . . . . .	86
VI.1.1 Les systèmes à retards . . . . .	86
VI.1.2 Objectifs . . . . .	93
VI.1.3 Motivation . . . . .	94
VI.1.4 Des contributions . . . . .	95
VI.2 MODÉLISATION . . . . .	97
VI.2.1 Préliminaires . . . . .	98
VI.2.2 Des erreurs de modélisation dans les SLR . . . . .	103
VI.2.3 Des conclusions sur l'équivalence de SLR . . . . .	113
VI.3 SYNCHRONISATION DE SYSTÈMES EN RÉSEAU. . . . .	114
VI.3.1 Systèmes considérés. . . . .	114
VI.3.2 Définition du problème de synchronisation de NCSs. . . . .	116
VI.3.3 Systèmes sans interconnexions physiques. . . . .	117
VI.3.4 Systèmes avec des interconnexions physiques. . . . .	125
VI.3.5 Des conclusions sur la synchronisation des NCSs. . . . .	131

## Contenido (continuación)

	Página
VI.4 SYSTÈMES DE PUISSANCE INTERCONNECTÉS . . . . .	131
VI.4.1 Modélisation des systèmes de puissance . . . . .	132
VI.4.2 Définitions préliminaires. . . . .	135
VI.4.3 Formulation du problème de synchronisation de SPI. . . . .	137
VI.4.4 Conception d'une commande décentralisée . . . . .	138
VI.4.5 Conception d'une commande centralisée . . . . .	150
VI.4.6 Des conclusions . . . . .	157
VI.5 CONCLUSIONS GÉNÉRALES . . . . .	161
VI.5.1 Des contributions principales . . . . .	161
VI.5.2 Perspectives . . . . .	162
<b>REFERENCIAS</b>	<b>164</b>
<b>A. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LA ECUACIÓN DE ERROR</b>	<b>173</b>



# Lista de Figuras

Figura		Página
1	Esquema ilustrativo NCS sin interconexiones físicas . . . . .	35
2	Ecuaciones de error del Ejemplo 3. . . . .	45
3	Entradas de control del Ejemplo 3. . . . .	49
4	Esquema ilustrativo NCS con interconexiones físicas. . . . .	50
5	WSCC. Sistema de 3 máquinas, 9 buses . . . . .	66
6	Región deseada para el sistema en lazo cerrado. . . . .	68
7	Resultados de simulación de las ecuaciones de error. . . . .	71
8	Entradas de control. . . . .	72
9	Errores de seguimiento y sincronización para $\sigma_1 = 20ms$ y diferentes valores de $\tau$ . . . . .	79
10	Entradas de control. . . . .	80
11	Un schéma illustrant NCSs sans interconnexions physiques . . . . .	118
12	Des équations d'erreur de l'exemple 4. . . . .	127
13	Entrées de commande de l'exemple 4. . . . .	128
14	Schéma illustratif NCS avec des interconnexions physiques. . . . .	129
15	Système WSCC. . . . .	146
16	Région souhaitée pour le système en boucle fermée. . . . .	149
17	Équations d'erreur. . . . .	151
18	Entrées de commande. . . . .	152
19	Erreurs de suivi et synchronisation pour $\sigma_1 = 20ms$ et des valeurs différents de $\tau$ . . . . .	159
20	Entrées de commande. . . . .	160



## Lista de Tablas

Tabla		Página
I	Valor de los parámetros del Ejemplo 3. . . . .	44
II	Coefficientes de las ecuaciones de error. . . . .	44
III	Ejemplo de regiones LMI . . . . .	63
IV	Parámetros, descripción y valores. . . . .	67
V	Valeur des paramètres de l'exemple 4. . . . .	125
VI	Coefficients des équations d'erreur. . . . .	125
VII	Exemple de régions LMI . . . . .	143
VIII	Paramètres, description et valeurs. . . . .	147





## NOTACIÓN

La siguiente notación se considera a lo largo de este trabajo:

- Dado un vector  $\mathbf{x}_i(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^n$  y una constante  $\phi \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{x}_i(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} x_{i,1}(t) & x_{i,2}(t) & \dots & x_{i,n}(t) \end{bmatrix}^T$ ,  
 $\mathbf{x}_i(\mathbf{t} - \phi) = \begin{bmatrix} x_{i,1}(t - \phi) & x_{i,2}(t - \phi) & \dots & x_{i,n}(t - \phi) \end{bmatrix}^T$ .

- $\nabla$  es el operador retardo:  $\nabla^\phi \mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}(\mathbf{t} - \phi)$ , con  $\phi \in \mathbb{N}$ .

- $\mathbb{R}[\nabla]$  es el anillo de polinomios en  $\nabla$  con coeficientes en  $\mathbb{R}$ .

- $L_{f_N}^{(k)} h_N(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{1}), \dots, \mathbf{x}_N(\mathbf{t} - \tau))$  con  $\tau \in \mathbb{R}^+$  define la k-ésima derivada de Lie repetida de la función  $h_N(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{1}), \dots, \mathbf{x}_N(\mathbf{t} - \tau))$  a lo largo de la función  $f_N$ , donde

$$L_{f_N} h_N(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{1}), \dots, \mathbf{x}_N(\mathbf{t} - \tau)) = \sum_{i=0}^{\tau} \frac{\partial h_N(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{1}), \dots, \mathbf{x}_N(\mathbf{t} - \tau))}{\partial \nabla^i \mathbf{x}(\mathbf{t})} \nabla^i f_N.$$

Por recursión,

$$L_{f_N}^{(k)} h_N(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{1}), \dots, \mathbf{x}_N(\mathbf{t} - \tau)) = L_{f_N} [L_{f_N}^{(k-1)} h_N(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{1}), \dots, \mathbf{x}_N(\mathbf{t} - \tau))] \quad \forall k \geq 1.$$

- $\deg(\mathbf{T}[\nabla])$  es el máximo grado polinomial de  $T[\nabla]$ .
- $\sup(\tau_a, \tau_m)$  define el máximo valor entre las constantes  $\tau_a$  y  $\tau_m$ .
- $\mathcal{D}$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ .



# Capítulo I

## INTRODUCCIÓN

En la descripción matemática de un proceso, por lo general se supone que su comportamiento solo depende del estado presente; esto es válido para una amplia clase de sistemas dinámicos. Sin embargo, hay situaciones especiales en los que esta suposición no se satisface debido a una dependencia de sucesos pasados, originada por fenómenos de transporte (de materia, energía, información), de tiempos de reacción (de sensores, actuadores, procesos biológicos) y de cómputo. Estos son los llamados sistemas con retardos o hereditarios.

El crecimiento de una población es un ejemplo de esta clase de sistemas, el cual se representa en su modelo más simple, por la ecuación (Górecki *et al.*, 1989):

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = g(\mathbf{x}(\mathbf{t})) - g(\mathbf{x}(\mathbf{t} - \tau)) \quad (1)$$

donde  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$  es el número de individuos en una población en un tiempo  $t$ ,  $g(\mathbf{x}(\mathbf{t}))$  el número de nacimientos por unidad de tiempo y el retardo  $\tau$  el tiempo promedio de vida de los individuos. La dinamita es otro ejemplo, donde el tiempo muerto entre el momento de encendido de la mecha y la explosión es de mucha utilidad. Lo cierto es que podemos encontrar estos procesos en un número importante de aplicaciones en áreas del conocimiento tan distintas como biología, economía, ecología y robótica, por mencionar algunas (ver Górecki *et al.* (1989); Azorin *et al.* (2004); Tian (2005); Zhang *et al.* (2005) y referencias incluidas).

Un sistema con retardos, por definición, es entonces aquel sistema dinámico cuya evolución en el tiempo no solo depende de su estado presente  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ , sino también de su historia pasada (Gu *et al.*, 2003). Al intentar resolver este tipo de ecuaciones, llamadas ecuaciones diferenciales funcionales (FDEs, por sus siglas en inglés), el estado no puede ser un vector  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$  definido en un valor discreto de tiempo  $t$ , como en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs, por sus siglas en inglés), sino una función  $x_t$  correspondiente a cada instante dentro de un intervalo de tiempo pasado (Richard, 2003), es decir  $\dot{x}(t) = F(t, x_t)$ . Por ejemplo, en el caso de la ecuación (1),  $x_t$  corresponde al estado del sistema (Gouaisbaut & Peaucelle, 2006):

$$x_t(\cdot) = \begin{cases} [-\tau, t] & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \theta & \mapsto x_t(\theta) = x(t + \theta) \end{cases}$$

El vector  $\mathbf{x}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^n$  se denomina el estado instantáneo y se trata de la función  $x_t$  evaluada en el instante  $\theta=0$ . La función  $x_t$  se puede ver como un número infinito de condiciones iniciales, por lo que los sistemas con retardos pertenecen a la clase de sistemas de dimensión infinita. Uno de los problemas principales en los sistemas con retardos es la necesidad, en general, de conocer los valores futuros del estado para usarlos en la síntesis de leyes de control por retroalimentación, esta restricción representa un obstáculo para su implementación directa. Diferentes soluciones se han propuesto en la literatura, desde el estudio de técnicas de aproximación para obtener modelos simplificados libres de retardos, tales como la aproximación de Padé de primer y segundo orden (Philipp *et al.*, 1999; Wang & Hu, 1999; Probst *et al.*, 2010), la serie Laguerre-Fourier (Mäkilä, 1990) y las de Kautz (Mäkilä & Partington, 1999; Taheri, 2008), por mencionar algunas; el uso de predictores de estado, que permiten obtener una estimación aproximada de los valores futuros de la solución del sistema analizado, resolviendo así el problema de causalidad (ver Maza-Casas *et al.* (1999); Mohagheghi *et al.* (2007); Witrant *et al.*

(2007a) y referencias incluidas); hasta la caracterización de condiciones para encontrar soluciones causales para problemas de control comunes, tal es el caso de la linealización entrada/salida (Márquez-Martínez & Moog, 2004), el telecontrol maestro esclavo para sistemas mecánicos subactuados (Peñaloza Mejía *et al.*, 2008), el seguimiento de trayectoria (Estrada-García *et al.*, 2008), el desacoplamiento de perturbaciones (Moog *et al.*, 2000), entre otros.

Desafortunadamente, respecto a las aproximaciones racionales, aunque permiten aproximar el sistema a uno de dimensión finita para así manejarlo con técnicas usuales de control, el ignorar algunos efectos que se pueden representar por FDEs puede ser una fuente de problemas, o al menos, constituye una limitación en el análisis del proceso representado (Richard, 2003). La convergencia de la aproximación propuesta de los predictores de estado se analiza considerando el error entre el valor futuro exacto y la estimación aproximada propuesta, de manera que, aunque constituyen una herramienta muy útil para reconstruir los valores futuros del estado (la salida), son muy sensibles a variaciones paramétricas. Por ello, en este trabajo de tesis consideramos técnicas de control que buscan soluciones causales, de esta forma el problema se resuelve con la información al instante de tiempo en que se recibe en el sistema. Por ejemplo, un vehículo robótico de exploración controlado mediante computadora recibe las señales de posición deseada  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$  con un retardo  $\tau$ . Un controlador causal sería aquel que usara las señales de posición en un tiempo  $\mathbf{x}(\mathbf{t} - \tau)$  y no al tiempo  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ , ya que estas últimas no se tienen y tendrían que reconstruirse mediante un predictor.

De lo expuesto anteriormente se deduce la importancia de desarrollar una teoría

particular, así como nuevas herramientas matemáticas adaptadas a sistemas con retardos. Existen avances significativos, sobre todo en el campo de sistemas lineales, sin embargo aún quedan varios problemas abiertos. Más información se puede consultar en textos especializados como Hale (1977); Górecki *et al.* (1989); Kolmanovskii & Myshkis (1992); Niculescu (1997); Mahmoud (2000); Gu *et al.* (2003) y referencias incluidas.

Enseguida se detallan diversos aspectos de la problemática a tratar, especificando antecedentes, objetivos, motivación y alcances de esta investigación.

## I.1 Antecedentes

En este trabajo se estudian, de forma general, los sistemas controlados en red (NCSs, por sus siglas en inglés) y como aplicación específica los sistemas de potencia. Ambos presentan dos tipos de retardos, uno en las interconexiones y otro en el canal de comunicación, que en el sistema de potencia se deben a las líneas de transmisión y al uso de sistemas de medición de área amplia (WAMS, por sus siglas en inglés), respectivamente.

Es bien sabido que las etapas de modelado e identificación de parámetros son cruciales en el proceso de diseño de un controlador, ya que si el modelo no aproxima correctamente el comportamiento dinámico del proceso que se desea controlar, entonces el desempeño del controlador será pobre (Sung *et al.*, 2009). Es por ello que siempre se busca tener “el mejor modelo”, de acuerdo a los objetivos del control.

En la búsqueda del mejor modelo posible, en cuanto a un sistema con retardos se

refiere, desde principios de los años ochenta se investiga el problema de eliminación o reducción de retardos en sistemas lineales con retardos (SLR), esto ya que no se puede estudiar, analizar, controlar razonablemente un sistema con retardos sin comprender si realmente está retardado. Sorprendentemente, este problema ha permanecido abierto y, aunque se han encontrado soluciones parciales, es un tema de investigación vigente, como se muestra en los trabajos de Pugh *et al.* (1996); Fiagbedzi (2002); Boudellioua (2007); Boudellioua & Quadrat (2008).

Antes de comenzar a trabajar con sistemas interconectados se aborda este tema. El resultado más relacionado a este trabajo de tesis es el de Lee *et al.* (1982), donde se da una condición suficiente para reducir el número de términos retardados para SLR de la forma  $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}[\nabla]\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_1\nabla^h\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \dots + \mathbf{A}_\phi\nabla^{\phi h}\mathbf{x}(\mathbf{t})$  con  $h \in \mathbb{R}^+$  y  $\phi \in \mathbb{Z}^+$ . Este resultado se basa en que la existencia de un vector cíclico  $\mathbf{B}[\nabla]$  permite encontrar la forma con el mínimo número de retardos en tiempo mediante la transformación

$$\mathbf{z}(\mathbf{t}) = \left[ \mathbf{B}[\nabla] \quad \mathbf{A}[\nabla]\mathbf{B}[\nabla] \quad \dots \quad \mathbf{A}[\nabla]^{n-1}\mathbf{B}[\nabla] \right]^{-1} \mathbf{x}(\mathbf{t}). \quad (2)$$

Además, (2) lleva a un sistema sin retardos en el caso de sistemas monoentrada fuertemente controlables si  $\mathbf{B}[\nabla]$  es la matriz de coeficientes de la entrada. Más adelante se dará solución a este problema, que ha inquietado a la comunidad científica durante tanto tiempo.

El uso de sistemas en red se ha vuelto popular como resultado de su arquitectura flexible y los bajos costos de instalación y mantenimiento (Zampieri, 2008). Además de los retardos en la red, estos sistemas presentan otros problemas debido a la influencia del canal de comunicación, como son el muestreo asíncrono y la pérdida y cuantización



de los datos, lo cual hace más complejo la estimación, análisis y síntesis de controladores. En Hokayem & Abdallah (2004); Hespanha *et al.* (2007); Zampieri (2008) y referencias incluídas se dan algunos resultados para resolver algunos de estos problemas específicos. En este trabajo se analiza únicamente la sincronización maestro-esclavo para NCSs tomando en cuenta los retardos en el canal de comunicación y eventualmente en sistemas que presentan interconexiones físicas.

El retardo causado por la red de comunicación en NCSs no puede despreciarse (Witrant *et al.*, 2006) y, como vimos en la sección anterior, puede degradar el desempeño del sistema o incluso desestabilizarlo, si no se considera en el análisis (ver Branicky *et al.* (2000) y referencias incluídas). Los procedimientos usuales son aproximarlos por alguna metodología o utilizar un compensador no causal y un predictor para calcular los valores futuros del estado. Algunas de estas técnicas de control propuestas son: teoría estocástica (Nilsson, 1998), control robusto (Goktas, 2000), teoría de perturbaciones (Walsh *et al.*, 1999) y compensadores del retardo basados en predictores (ver por ejemplo Hespanha *et al.* (2007), Witrant *et al.* (2007a,b), Zhang *et al.* (2007), Zampieri (2008) y referencias incluídas). En el área de teleoperación algunos trabajos han estudiado los retardos de transmisión, principalmente para el caso de dos sistemas, con retardos constantes (García *et al.*, 2000; Azorin *et al.*, 2003; Fattouh & Sename, 2003) o variables (Witrant *et al.*, 2003; Yue *et al.*, 2004; Chopra *et al.*, 2008; Seuret & Richard, 2008; Hua & Liu, 2011; Zhang *et al.*, 2011; Kruszewski *et al.*, 2011). Tales retardos son inducidos por el canal de comunicación y no por interconexiones físicas. Una red de sistemas de potencia presenta ambos retardos, uno debido a las interconexiones físicas y otro debido al uso de WAMS (Duan *et al.*, 2009). Sin embargo, hasta

donde sabemos no existen precedentes que estudien los NCSs considerando ambos tipos de retardo. Resultados preliminares se encuentran en Moog & Gárate-García (2008).

En los últimos años el estudio de sistemas de potencia interconectados (SPI) ha cobrado importancia. El aumento en la demanda de electricidad ha llevado a operar estos sistemas cerca de sus límites de transferencia de potencia. Como consecuencia se han descubierto varios modos de oscilación entre áreas lejanas que son difíciles de controlar mediante un control local (Chang & Xu, 2007).

Diferentes modelos y técnicas de control se han propuesto para solucionar este problema. Una alternativa interesante es el uso de WAMS, donde se utilizan señales remotas para el control. Algunas mejoras significativas han sido reportadas usando esta técnica (ver por ejemplo Snyder *et al.* (2000); Kamwa *et al.* (2001); Chaudhuri *et al.* (2004); Zabaiou *et al.* (2008)), sin embargo, el problema más significativo asociado a esta tecnología es el retardo existente entre el instante de medición y el tiempo en que estas señales están disponibles para el controlador.

Lo cierto es que la atención brindada al análisis de los retardos asociados a las grandes redes de SPI se ha incrementado. Como se mencionó, podemos identificar dos tipos de retardos: aquellos asociados a la longitud de la línea de transmisión, que generalmente son muy pequeños (del orden de 10 ms) (Wu & Heydt, 2003), y los retardos debido al uso de WAMS, que están en el rango de 100-700 ms., dependiendo del tipo de enlace y otras características (Naduvathuparambil *et al.*, 2002). Su impacto es crucial cuando los controladores intercambian datos a través de la red (ver Wu *et al.* (2004);

Jia *et al.* (2008)), de ahí la investigación en este trabajo de tesis.

## I.2 Objetivos

### I.2.1 Objetivo general

Establecer condiciones para la reducción del retardo máximo en sistemas lineales mediante una transformación bicausal, así como esquemas de sincronización maestro-esclavo que eviten o minimicen el uso de predictores para sistemas controlados en red y para sistemas de potencia interconectados.

### I.2.2 Objetivos específicos

- Establecer condiciones necesarias y suficientes para determinar que sistemas con retardos son equivalentes a un sistema sin retardos. Esto es útil para identificar aquellos sistemas que se encuentran falsamente retardados por algún error de modelado o una mala elección de variables.
- Encontrar una transformación bicausal que lleve un sistema con retardos a una representación con el menor retardo máximo posible. Esto lleva a una contribución en el área de estabilidad ya que existen resultados en la literatura para una cantidad fija de retardos que podrían utilizarse en el sistema reducido.
- Brindar soluciones causales para el problema de sincronización de NCSs, en particular para sistemas que presentan interconexiones físicas entre los sistemas maestro y esclavo.
- Modelar una red de SPI con retardos de comunicación.

- Proponer métodos causales de sincronización para SPI.

## I.3 Motivación

Esta investigación es motivada por varias razones:

- Un sistema con retardos equivalente a un sistema sin retardos puede estabilizarse con técnicas de control clásico.
- La reducción de retardos aumenta las posibilidades de utilizar criterios de estabilidad ya existentes, puesto que existen varios resultados desarrollados para sistemas con cantidades mínimas de retardos (ver por ejemplo Gu *et al.* (2003); Michiels & Niculescu (2008) y referencias incluidas).
- Transformar un sistema hereditario a uno con una cantidad menor de retardos requiere menos recursos de memoria, lo que permite resolver sistemas de más ecuaciones e incrementar la velocidad de cómputo de algunos procedimientos numéricos.
- La reducción de retardos permite caracterizar la ventana temporal mínima requerida para definir el estado.
- Caracterizar la equivalencia de sistemas con un orden distinto de retardos abre la puerta al estudio de la equivalencia de dichos sistemas a nivel de sus soluciones.
- Brindar una alternativa para disminuir las oscilaciones inter-área en las redes de sistemas de potencia.

## I.4 Contribuciones

En secciones precedentes se estableció la importancia de desarrollar herramientas de análisis específicas para sistemas con retardos así como las razones que motivaron la elección de los diversos temas que conforman la investigación y sus antecedentes. Enseguida se describen las aportaciones principales de esta tesis.

En el Capítulo II se muestra uno de los resultados más importantes de este trabajo, publicado en Gárate-García *et al.* (2011): la caracterización de aquellos sistemas con retardos que son equivalentes, mediante transformaciones bicausales, a un sistema sin retardos o a un sistema con un retardo máximo menor que el de las coordenadas de origen. Los criterios presentados brindan condiciones necesarias y suficientes, en el caso de SLR, dando una solución completa a un problema que permanecía abierto desde hace más de tres décadas.

En el Capítulo III se presenta una metodología para desarrollar controladores causales que resuelven el problema de sincronización maestro-esclavo de NCSs con retardos originados tanto por el canal de comunicación como por interconexiones físicas. Se muestra que una condición suficiente para que exista dicha solución causal, en sistemas que tienen únicamente retardos de comunicación, es que ciertas ecuaciones de error de seguimiento de trayectoria y de sincronización planteadas con retardos sean asintóticamente estables. En sistemas que tienen además los retardos de interconexión se requiere, adicional a lo anterior, que dichos retardos sean mayores al del canal de comunicación para que el controlador siga siendo causal. Esta contribución teórica es una generalización del trabajo de Estrada-García *et al.* (2007) en cuanto al uso de

ecuaciones de error retardadas para la sincronización pero, hasta donde sabemos, es el primero que incluye el análisis en NCSs con retardos debido tanto al canal de comunicación como a las interconexiones físicas. Algunos resultados se pueden consultar en Moog & Gárate-García (2008).

En el Capítulo IV se establece un modelo para redes de SPI que presentan retardos causados por interconexiones físicas (las líneas de transmisión) y eventualmente por el canal de comunicación al usar WAMS. Se realiza la síntesis de dos esquemas de control causales basados en el criterio de estabilidad de Lyapunov-Krasovskii y en el uso de desigualdades lineales matriciales (LMIs, por sus siglas en inglés). Un esquema es de tipo descentralizado, es decir, usando solo las variables locales de cada generador y el otro es centralizado, usando las variables proporcionadas por los WAMS. Las aportaciones principales son la síntesis de un controlador causal, aunque local, que considera retardos originados tanto por las líneas de transmisión como por el uso de WAMS ya que, aunque varios trabajos en la literatura estudian el impacto del retardo causado por WAMS son pocos los que abordan la síntesis del controlador; que la metodología propuesta, para ambos tipos de control, evita o minimiza el uso de predictores y además es sencilla de implementar usando un programa especializado para LMIs; también se muestra que un control descentralizado es capaz de estabilizar los SPI. Algunos resultados se presentan en Gárate-García *et al.* (2009).



## Capítulo II

# MODELADO.

En la sección anterior se mencionó la importancia de la exactitud del modelo matemático de un proceso y el efecto de los retardos en el análisis y síntesis de controladores para sistemas que tienen tiempos muertos. En el presente capítulo se dan condiciones necesarias y suficientes para verificar si un SLR es equivalente, mediante operaciones bicausales, a un sistema sin retardos o bien, si esto no es posible, se busca una representación con el menor retardo máximo posible. Esto ayuda a identificar errores de modelado donde se incluyen retardos que no existen o bien a encontrar una representación en un sistema de coordenadas distinto donde existan más contribuciones en la literatura para el análisis del sistema o la síntesis de controladores. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) - x_1(t-1) \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t-1) - x_1(t-2) + x_1(t)\end{aligned}$$

es equivalente al sistema

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= z_1(t)\end{aligned}$$

usando el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}z_1(t) &= -x_1(t-1) + x_2(t) \\ z_2(t) &= x_1(t).\end{aligned}$$



Aunque este problema ha sido explorado desde principios de los ochenta, ha permanecido abierto aún para los SLR. Respecto a los sistemas no lineales con retardos (SNLR) el único resultado reciente, hasta donde sabemos, se da en (Califano *et al.*, 2010) donde se presenta una condición necesaria y suficiente para la equivalencia de un SNLR, mediante transformaciones bicausales, a un sistema lineal sin retardos.

Enseguida, después de describir los sistemas a tratar y revisar algunos aspectos relevantes sobre la teoría de sistemas con retardos, se desarrolla uno de los resultados principales de esta tesis, las condiciones necesarias y suficientes que resuelven la equivalencia para SLR, dando así una solución completa a este problema.

## II.1 Preliminares.

Se establecen algunos conceptos relacionados con los sistemas con retardos, así como el tipo de sistemas con el que se va a trabajar a lo largo del presente capítulo.

### II.1.1 Sistemas considerados.

Los sistemas considerados en el presente trabajo son lineales con retardos constantes, descritos por

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{\tau_a} \mathbf{A}_i \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{r}_i) + \sum_{j=0}^{\tau_b} \mathbf{B}_j \mathbf{u}(\mathbf{t} - \mathbf{r}_j) \quad (3)$$

con  $r_0 < r_1 < \dots < r_{sup(\tau_a, \tau_b)}$ , donde  $\mathbf{x}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^n$  es el estado instantáneo del sistema,  $\mathbf{u}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^m$  la entrada,  $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}_j \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $\tau_a, \tau_b \in \mathbb{N}$ . Si los retardos además son conmensurables, es decir retardos múltiplos de un retardo base están descritos por

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{\tau_a} \mathbf{A}_i \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{i}\mathbf{h}) + \sum_{j=0}^{\tau_b} \mathbf{B}_j \mathbf{u}(\mathbf{t} - \mathbf{j}\mathbf{h}), \quad (4)$$

donde  $h \in \mathbb{R}^+$  es el retardo base. Por simplicidad de la notación y sin pérdida de generalidad, se supone que el tiempo  $t$  ha sido reescalado para tener  $h = 1$ . Entonces (4) se puede expresar como

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{\tau_a} \mathbf{A}_i \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{i}) + \sum_{j=0}^{\tau_b} \mathbf{B}_j \mathbf{u}(\mathbf{t} - \mathbf{j}). \quad (5)$$

Cada elemento del anillo  $\mathbb{R}[\nabla]$  se puede escribir como

$$a[\nabla] = a_0 + a_1 \nabla + \cdots + a_{r_a} \nabla^{r_a}, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

donde  $r_a$  es el grado polinomial de  $a[\nabla]$ . La suma y la multiplicación se definen de la forma usual.

El sistema (5) siempre puede ser representado de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) &= \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \sum_{l=1}^{\tau_a} \mathbf{A}_l \boldsymbol{\xi}_l(\mathbf{t}) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(\mathbf{t}) + \sum_{m=1}^{\tau_b} \mathbf{B}_m \boldsymbol{\psi}_m(\mathbf{t}) \\ \boldsymbol{\xi}_l(\mathbf{t}) &= \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{l}), \quad l > 0, \\ \boldsymbol{\psi}_m(\mathbf{t}) &= \mathbf{u}(\mathbf{t} - \mathbf{m}), \quad m > 0, \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $\boldsymbol{\xi}_l(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^n$  y  $\boldsymbol{\psi}_m(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^m$ . El resto de las variables son definidas como en el sistema (3).

## II.1.2 Conceptos básicos de sistemas con retardos.

A continuación se verán algunas definiciones fundamentales para la comprensión de este trabajo.

**Definición 1** (Richard, 2001) **Matriz unimodular.** Una matriz polinomial  $\mathbf{A}[\nabla] \in \mathbb{R}[\nabla]^{n \times n}$  es llamada unimodular si su inversa también es polinomial.

**Definición 2** (Richard, 2001) **Polinomios invariantes de Smith.** Cada matriz polinomial  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\lambda})$  de dimensiones  $m \times n$  y rango  $r$  es equivalente a la matriz  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\lambda})$ :

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{U}_1(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{S}(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{U}_2(\boldsymbol{\lambda})$$

donde  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\lambda}) & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix}$ ,  $\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\lambda}) = \text{diag}[d_1(\lambda), \dots, d_r(\lambda)]$  tal que  $d_i(\lambda)$  es divisible entre  $d_{i-1}(\lambda)$  con  $i = 2, \dots, r$  y las matrices  $\mathbf{U}_1(\boldsymbol{\lambda})$  y  $\mathbf{U}_2(\boldsymbol{\lambda})$  son unimodulares.

La matriz polinomial  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\lambda})$  es la llamada forma de Smith de  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\lambda})$  y los elementos  $d_i(\lambda)$  sobre la diagonal se denominan invariantes de Smith.

La noción estándar de cambio de coordenadas requiere la asociación de las coordenadas de estado  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$  a las nuevas coordenadas  $\mathbf{z}(\mathbf{t})$  mediante un mapeo invertible. Esto es bien conocido para sistemas sin retardos; sin embargo, el requerimiento de invertibilidad lleva a la siguiente definición específica para SLR.

**Definición 3** (Márquez-Martínez et al., 2002) **Cambio de coordenadas.** Considerando el sistema con retardos (5), con coordenadas de estado  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ , entonces

$$\mathbf{z}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}[\nabla]\mathbf{x}(\mathbf{t}), \text{ con } \mathbf{T}[\nabla] \in \mathbb{R}[\nabla]^{n \times n} \quad (7)$$

es un cambio de coordenadas causal si los polinomios invariantes de Smith de  $\mathbf{T}[\nabla]$  son de la forma  $\nabla^{\tau_i}$  para algunos  $\tau_i \in \mathbb{N}$ . Si  $\tau_i = 0 \forall i = 1 \dots n$ , entonces el cambio de coordenadas se dice que es bicausal.

$z(t) = x(t) - x(t - \tau)$  no es un cambio de coordenadas porque  $z(t) \equiv 0 \not\Rightarrow x(t) \equiv 0$ . Toda función  $x(t) = \phi(t)$  de periodo  $\tau$  mapea a  $z(t) = 0$ , por lo que la única manera de diferenciarlas a partir de un tiempo inicial  $t_0$  es conocer las condiciones iniciales en

un periodo de tiempo  $[t_0 - \tau, t_0]$ . Sin embargo, para cambios de coordenadas causales y bicausales  $z(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0$  después de un periodo de tiempo.

El cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} z_1(t) &= x_1(t-1) \\ z_2(t) &= x_1(t-1) + x_2(t) \end{aligned}$$

es una transformación causal pero su inversa

$$\begin{aligned} x_1(t) &= z_1(t+1) \\ x_2(t) &= -z_1(t) + z_2(t) \end{aligned} \tag{8}$$

no lo es. Aplicando (8) a un sistema dado (e.g.  $\dot{z}_1(t) = z_2(t); \dot{z}_2(t) = u(t)$ ) se obtiene una solución no causal. Por lo tanto, solo *transformaciones bicausales* serán consideradas en el resto de este trabajo.

Es fácil mostrar que la transformación (7) es *un cambio de coordenadas bicausal* si y solo si  $\mathbf{T}[\nabla]$  es unimodular.

La noción general de sistemas equivalentes es la siguiente.

**Definición 4 Equivalencia de sistemas.** *Dos sistemas lineales*

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{\tau_a} \mathbf{A}_i \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{i}) + \sum_{j=0}^{\tau_b} \mathbf{B}_j \mathbf{u}(\mathbf{t} - \mathbf{j}), \tag{9}$$

y

$$\dot{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) = \sum_{j=0}^{\tau_c} \bar{\mathbf{A}}_j \mathbf{z}(\mathbf{t} - \mathbf{j}) + \sum_{k=0}^{\tau_d} \bar{\mathbf{B}}_k \mathbf{u}(\mathbf{t} - \mathbf{k}), \tag{10}$$

son equivalentes si existe una matriz unimodular  $\mathbf{T}[\nabla]$  que asocie las soluciones  $\mathbf{z}(\mathbf{t})$  del sistema (10) con la solución  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$  del sistema (9) mediante  $\mathbf{z}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}[\nabla] \mathbf{x}(\mathbf{t})$ , bajo condiciones iniciales apropiadas.

### Condiciones de estabilidad para sistemas con retardos.

En esta sección se establecen algunos conceptos y herramientas útiles relacionados con la estabilidad de sistemas con retardos.

**Proposición 1** (*Gu et al., 2003*) *Un sistema con retardos en el tiempo es asintóticamente estable si existe una funcional cuadrática acotada de Lyapunov-Krasovskii  $V(\phi)$  tal que para algún  $\varepsilon > 0$ , se satisface que*

$$V(\phi) \geq \varepsilon \|\phi(0)\|^2,$$

*y su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema, satisface*

$$\begin{aligned} \dot{V}(\phi) &= \dot{V}(x_t)|_{x_t=\phi}, \\ &\leq -\varepsilon \|\phi(0)\|^2. \end{aligned}$$

**Nota 1** *En el caso de sistemas lineales con retardos constantes sin incertidumbres, ni paramétricas ni sobre los retardos, las nociones de estabilidad exponencial y de estabilidad asintótica son equivalentes, aunque la tasa de convergencia exponencial no se conoce a priori. En el caso general (no lineal, no estacionario, retardos variables) esta equivalencia no se mantiene (Seuret, 2006).*

Considerando (3) en lazo cerrado, se tiene el sistema descrito por

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{\varrho} \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{r}_i). \quad (11)$$

La siguiente proposición asegura la existencia de dicha funcional  $V(\phi)$ , dando una condición suficiente para la estabilidad independiente de retardos del sistema (11):

**Proposición 2** (Gu et al., 2003) *El sistema con múltiples retardos descrito por (11) es asintóticamente estable si existen matrices simétricas reales  $\mathbf{P} > 0$  y  $\mathbf{S}_i > 0$ , para  $i = 1, \dots, \varrho$ , tales que  $\mathbf{\Pi}_\varrho < 0$ , donde*

$$\mathbf{\Pi}_\varrho = \begin{bmatrix} \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}_0 + \tilde{\mathbf{A}}_0^T\mathbf{P} + \sum_{i=1}^{\varrho} \mathbf{S}_i & \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}_1 & \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}_2 & \dots & \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}_\varrho \\ \tilde{\mathbf{A}}_1^T\mathbf{P} & -\mathbf{S}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{\mathbf{A}}_2^T\mathbf{P} & 0 & -\mathbf{S}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{A}}_\varrho^T\mathbf{P} & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{S}_\varrho \end{bmatrix}. \quad (12)$$

### II.1.3 Planteamiento del problema de equivalencia de SLR.

Considerando el SLR descrito por (5) y un cambio de coordenadas bicausal

$$\mathbf{z}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}[\nabla]\mathbf{x}(\mathbf{t}), \quad (13)$$

se desea caracterizar aquellos SLR que son equivalentes a un sistema sin retardos mediante (13). Si tal transformación no existe, entonces se busca una nueva representación del sistema

$$\dot{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) = \bar{\mathbf{A}}[\nabla]\mathbf{z}(\mathbf{t}) + \bar{\mathbf{B}}[\nabla]\mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad (14)$$

que tenga el mínimo grado polinomial posible en  $\nabla$ .

## II.2 Errores de modelado en SLR.

En esta sección se resuelve el problema planteado en la Sección II.1.3. Primero se presenta el teorema de equivalencia de SLR, que aunque puede parecer que tiene un limitado interés práctico, es gracias a él que se puede caracterizar si un sistema está

falsamente retardado por algún error de modelado o de elección de variables, puesto que es la base para derivar las condiciones de eliminación y reducción de retardos.

### II.2.1 Equivalencia de SLR.

**Teorema 1** *Considere dos sistemas lineales, descritos por (9) y (10). Sea  $\tau_x = \sup(\tau_a, \tau_b)$ ,  $\tau_z = \sup(\tau_c, \tau_d)$ . Se supone, sin pérdida de generalidad, que  $\tau_x \geq \tau_z$ . Entonces, ambos sistemas son equivalentes si y solo si existen  $\mathbf{T}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , para  $i = 0, 1, \dots, \tau_m$ , con  $\tau_m = \sup(\tau_a, (n-1)\tau_b)$ , tales que*

$$(i) \sum_{i=0}^k \mathbf{T}_i \mathbf{A}_{k-i} = \sum_{j=0}^k \bar{\mathbf{A}}_j \mathbf{T}_{k-j} \text{ para } k = 0, 1, \dots, \gamma, \text{ donde } \gamma = \tau_a + \tau_m \text{ si } \tau_a > \tau_c; \text{ de lo contrario } \gamma = \tau_c + \tau_m. \bar{\mathbf{A}}_j = \mathbf{0}_{n \times n} \text{ para } j > \tau_c.$$

$$(ii) \sum_{i=0}^k \mathbf{T}_i \mathbf{B}_{k-i} = \bar{\mathbf{B}}_k \text{ para } k = 0, 1, \dots, \vartheta, \text{ donde } \vartheta = \tau_b + \tau_m \text{ si } \tau_a > \tau_c; \text{ en otro caso } \vartheta = \tau_d + \tau_m. \bar{\mathbf{B}}_i = \mathbf{0}_{n \times 1} \text{ para } i > \tau_d.$$

$$(iii) \det\left(\sum_{i=0}^{\tau_m} \mathbf{T}_i \nabla^i\right) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

**Prueba.** Se define  $\mathbf{T}[\nabla] = \sum_{i=0}^{\tau_m} \mathbf{T}_i \nabla^i$ . Sin pérdida de generalidad, se supone que  $\tau_x \geq \tau_z$ .

*Necesidad.*

Suponiendo que los sistemas (5) y (14) son equivalentes. Entonces existe una transformación unimodular  $\mathbf{T}[\nabla]$  que satisface (13). Unimodularidad implica (iii).

De (6) y (13) se tiene que

$$\dot{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}[\nabla][\mathbf{A}_0 \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \sum_{l=1}^{\tau_a} \mathbf{A}_l \xi_l(\mathbf{t}) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(\mathbf{t}) + \sum_{m=1}^{\tau_b} \mathbf{B}_m \psi_m(\mathbf{t})] \quad (15)$$

(10) y (15) implican

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) &= \bar{\mathbf{A}}[\nabla] \mathbf{z}(\mathbf{t}) + \bar{\mathbf{B}}[\nabla] \mathbf{u}(\mathbf{t}) \\ &= \bar{\mathbf{A}}[\nabla] \mathbf{T}[\nabla] \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \bar{\mathbf{B}}[\nabla] \mathbf{u}(\mathbf{t}). \end{aligned} \quad (16)$$

Considerando  $\mathbf{T}[\nabla] = \sum_{i=0}^{\tau_m} \mathbf{T}_i \nabla^i$  con  $\mathbf{T}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , despues de aplicar el operador retardo, se pueden expresar (15) y (16) en forma matricial como

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 & \dots & \mathbf{T}_{\tau_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{t}) + \dots + \mathbf{A}_{\tau_a} \boldsymbol{\xi}_{\tau_a}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\xi}_2(\mathbf{t}) + \dots + \mathbf{A}_{\tau_a} \boldsymbol{\xi}_{\tau_a+1}(\mathbf{t}) \\ \vdots \\ \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\xi}_{\tau_m}(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\xi}_{\tau_m+1}(\mathbf{t}) + \dots + \mathbf{A}_{\tau_a} \boldsymbol{\xi}_{\tau_m+\tau_a}(\mathbf{t}) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 & \dots & \mathbf{T}_{\tau_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{t}) + \dots + \mathbf{B}_{\tau_b} \boldsymbol{\psi}_{\tau_b}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{t}) + \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{t}) + \dots + \mathbf{B}_{\tau_b} \boldsymbol{\psi}_{\tau_b+1}(\mathbf{t}) \\ \vdots \\ \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\psi}_{\tau_m}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\psi}_{\tau_m+1}(\mathbf{t}) + \dots + \mathbf{B}_{\tau_b} \boldsymbol{\psi}_{\tau_m+\tau_b}(\mathbf{t}) \end{bmatrix} \\
&= \bar{\mathbf{A}}[\nabla] \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 & \dots & \mathbf{T}_{\tau_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\mathbf{t}) \\ \boldsymbol{\xi}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_{\tau_m} \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{B}}[\nabla] \mathbf{u}(\mathbf{t}) \tag{17} \\
&= \bar{\mathbf{A}}_0 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 & \dots & \mathbf{T}_{\tau_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\mathbf{t}) \\ \boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{t}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_{\tau_m}(\mathbf{t}) \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{A}}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 & \dots & \mathbf{T}_{\tau_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{t}) \\ \boldsymbol{\xi}_2(\mathbf{t}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_{\tau_m+1}(\mathbf{t}) \end{bmatrix} \\
&+ \dots + \bar{\mathbf{A}}_{\tau_c} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 & \dots & \mathbf{T}_{\tau_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{\tau_c}(\mathbf{t}) \\ \boldsymbol{\xi}_{\tau_c+1}(\mathbf{t}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_{\tau_m+\tau_c}(\mathbf{t}) \end{bmatrix} \\
&+ \bar{\mathbf{B}}_0 \mathbf{u}(\mathbf{t}) + \bar{\mathbf{B}}_1 \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{t}) + \dots + \bar{\mathbf{B}}_{\tau_d} \boldsymbol{\psi}_d(\mathbf{t}).
\end{aligned}$$



Los coeficientes de  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ ,  $\boldsymbol{\xi}_i(\mathbf{t})$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{t})$  y  $\boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{t})$  tienen que ser iguales, lo cual implica (i) y (ii).

Sea  $\tau_m = \deg(\mathbf{T}[\nabla])$ . El procedimiento de inversión utilizado es el método de Gauss-Jordan. La inversa puede expresarse como la matriz adjunta, dividida por el determinante, el cual es constante para el caso de matrices unimodulares. Entonces, el máximo grado polinomial de la inversa, no puede ser mayor que cualquier elemento de la matriz adjunta. Puesto que sus elementos son determinantes de  $(n-1) \times (n-1)$  matrices polinomiales, su grado polinomial no puede ser mayor que  $(n-1)\tau_m$ , por lo que  $\deg(\mathbf{T}[\nabla]^{-1}) \leq \tau_m(n-1)$ .

De las ecuaciones (9), (10) y (13) se tiene que

$$\mathbf{A}[\nabla] = \mathbf{T}[\nabla]^{-1} \bar{\mathbf{A}}[\nabla] \mathbf{T}[\nabla] \quad (18)$$

y

$$\mathbf{B}[\nabla] = \mathbf{T}[\nabla]^{-1} \bar{\mathbf{B}}[\nabla]. \quad (19)$$

Se debe tener el mismo grado polinomial en ambos lados de la ecuación (18), el peor caso posible para lograrlo es  $\tau_m = \tau_a$ . En el caso de la ecuación (19) el peor caso posible es requerir  $\tau_m = (n-1)\tau_b$ . Entonces  $\tau_m = \sup(\tau_a, (n-1)\tau_b)$ .

*Suficiencia.*

De (iii),  $\mathbf{T}[\nabla]$  es una transformación bicausal. De (i) y (ii), se prueba directamente que (13) implica (17). ■

Utilizando el teorema anterior, es posible definir condiciones para eliminar retardos en sistemas de la forma (5).

## II.2.2 Eliminación de retardos.

En esta sección se presentan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un cambio de coordenadas que elimina los retardos. Se muestra que no es restrictivo definir  $\mathbf{T}_0$  como la matriz identidad para calcular la transformación  $\mathbf{T}[\nabla]$ . Este teorema es un caso especial del Teorema 1.

**Teorema 2** *El sistema (5) es equivalente a un sistema sin retardos si y solo si existen matrices  $\mathbf{T}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  para  $i = 0, 1, \dots, \tau_m$ , con  $\tau_m = \sup(\tau_a, (n-1)\tau_b)$ , tales que*

$$(i) \sum_{i=0}^k \mathbf{T}_i \mathbf{A}_{k-i} = \bar{\mathbf{A}}_0 \mathbf{T}_k \text{ para } k = 0, 1, \dots, \tau_m + \tau_a, \text{ con } \bar{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{A}_0.$$

$$(ii) \sum_{i=0}^k \mathbf{T}_i \mathbf{B}_{k-i} = \bar{\mathbf{B}}_k \text{ para } k = 0, 1, \dots, \tau_m + \tau_b, \text{ con } \bar{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{B}_0 \text{ y } \bar{\mathbf{B}}_k = \mathbf{0}_{n \times n} \quad \forall k > 0.$$

$$(iii) \det\left(\sum_{i=0}^{\tau_m} \mathbf{T}_i \nabla^i\right) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

**Prueba.** Del Teorema 1, y considerando  $\bar{\mathbf{A}}_k = \mathbf{0} \quad \forall k \geq 1$  y  $\bar{\mathbf{B}}_k = \mathbf{0} \quad \forall k \geq 1$ . ■

Notar que, sin pérdida de generalidad,  $\mathbf{T}_0$  puede definirse como la matriz identidad.

Para ver esto, considere un cambio general de coordenadas  $\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{t})$ .

$$\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{T}}[\nabla] \mathbf{x}(\mathbf{t})$$

$$\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) = [\tilde{\mathbf{T}}_0 + \tilde{\mathbf{T}}_1 \nabla + \dots + \tilde{\mathbf{T}}_\tau \nabla^\tau] \mathbf{x}(\mathbf{t})$$

Sea

$$\mathbf{z}(\mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{T}}_0^{-1} \tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{t})$$

$$\mathbf{z}(\mathbf{t}) = [\mathbb{I} + \tilde{\mathbf{T}}_0^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_1 \nabla + \dots + \tilde{\mathbf{T}}_0^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_\tau \nabla^\tau] \mathbf{x}(\mathbf{t})$$

$$\mathbf{z}(\mathbf{t}) = [\mathbb{I} + \mathbf{T}_1 \nabla + \dots + \mathbf{T}_\tau \nabla^\tau] \mathbf{x}(\mathbf{t})$$

lo cual implica  $\bar{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{A}_0$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{B}_0$  y las condiciones (i) y (ii).

**Ejemplo 1** *Considérese el sistema*

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - x_2(t-1) + u(t) \quad (20)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -x_2(t-1) - x_3(t)$$

el cual puede expresarse como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) &= \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{t}) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(\mathbf{t}) \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{t}) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{t}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{t}) \\ \boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{t}) &= \mathbf{x}(\mathbf{t}-1) \\ \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{t}) &= \mathbf{u}(\mathbf{t}-1) \end{aligned}$$

Las condiciones (i) y (ii) del Teorema 2 resultan en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_0\mathbf{A}_0 &= \bar{\mathbf{A}}_0\mathbf{T}_0 \\
\mathbf{T}_0\mathbf{A}_1 + \mathbf{T}_1\mathbf{A}_0 &= \bar{\mathbf{A}}_0\mathbf{T}_1 \\
\mathbf{T}_0\mathbf{A}_2 + \mathbf{T}_1\mathbf{A}_1 + \mathbf{T}_2\mathbf{A}_0 &= \bar{\mathbf{A}}_0\mathbf{T}_2 \\
\mathbf{T}_0\mathbf{B}_0 &= \bar{\mathbf{B}}_0 \\
\mathbf{T}_0\mathbf{B}_1 + \mathbf{T}_1\mathbf{B}_0 &= \mathbf{0}_{n \times n}
\end{aligned} \tag{21}$$

Se define  $\mathbf{T}_0 = \mathbb{I}$ ,  $\mathbf{A}_0 = \bar{\mathbf{A}}_0$ ,  $\mathbf{B}_0 = \bar{\mathbf{B}}_0$  y  $\mathbf{T}_2 = \mathbf{0}_{n \times n}$  ya que  $\tau_a = 1$  y  $\tau_b = 0$ . Resolviendo (21) se tiene que

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

donde  $k \in \mathbb{R}$ . La condición (iii) se cumple si y solo si  $k = 0$ . Entonces tenemos que

$$\mathbf{T}[\nabla] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \nabla = \begin{bmatrix} 1 & -\nabla & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\nabla & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculando la forma de Smith de la matriz de transformación se tiene que los polinomios invariantes son  $\{1,1,1\}$ , cumpliéndose la condición de la Definición 3,  $\mathbf{T}[\nabla]$  es una transformación bicausal.

El sistema sin retardos equivalente a (20) es

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= -z_1(t) + u(t) \\ \dot{z}_2(t) &= -2z_2(t) \\ \dot{z}_3(t) &= -z_3(t).\end{aligned}$$

Cabe mencionar que las condiciones previas son dadas por un sistema de ecuaciones lineales y que este método es constructivo, por lo que las condiciones y la matriz de transformación se pueden calcular fácilmente.

**Nota 2** Usualmente la ecuación característica  $\Delta(s) := \det[s\mathbb{I} - A[\nabla]]$  de un sistema lineal con retardos tiene un número infinito de raíces. Sin embargo, existen FDE (llamadas degeneradas) donde  $\Delta(s)$  es un polinomio que no depende de  $\nabla$  y el número de raíces es finito (Kolmanovskii & Nosov, 1986). No cualquier FDE degenerada es equivalente a un sistema sin retardos mediante una transformación bicausal, aunque su espacio solución sea de dimensión finita para un tiempo suficientemente largo. Por ejemplo, es fácil comprobar que en

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} 1 & \nabla \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(\mathbf{t})$$

el sistema de ecuaciones, dadas por la condición (i) del Teorema 2, es inconsistente y el retardo no puede ser eliminado.

**Nota 3** Para estas FDE degeneradas se considera el problema de Cauchy sin historia previa, para el cual el intervalo inicial se dice que degenera a un punto y por lo tanto en lugar de una función inicial, solo se tiene que dar un valor inicial  $x(t_0)$  (Kolmanovskii & Nosov, 1986).

### II.2.3 Reducción de retardos.

En el caso de aquellos sistemas en que el retardo no puede eliminarse, aún es útil encontrar una representación equivalente con un retardo máximo menor al del sistema original. Dicha transformación puede encontrarse, si existe, aplicando iterativamente las condiciones (i)-(iii) del Teorema 1. Para ello, se define  $\mathbf{T}_0$  como la matriz identidad, lo cual ya se mostró no es restrictivo. El sistema (5) es equivalente a un sistema con retardo máximo  $\tau_z = l$  si existe una solución para  $\bar{\mathbf{A}}_j$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_j$  y  $\mathbf{T}_i$ , con  $j \leq l$  e  $i = \{1, \dots, \tau_m\}$ . Esto se muestra en el siguiente ejemplo:

#### Ejemplo 2

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t-1) + 2x_1(t) + x_2(t-2) - x_2(t-1) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t-1) \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) &= \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\xi}_2(\mathbf{t}) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{t}) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_2(\mathbf{t}) \\ \boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{t}) &= \mathbf{x}(\mathbf{t}-1) \\ \boldsymbol{\xi}_2(\mathbf{t}) &= \mathbf{x}(\mathbf{t}-2). \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones, dado por la condición (i) del Teorema 2, es inconsistente. Entonces, los retardos no se pueden eliminar. Sin embargo, resolviendo (i) del Teorema 1 en  $\bar{\mathbf{A}}_1, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ , con  $\mathbf{T}_0 = \mathbb{I}$ ,  $\bar{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{A}_0$ , se tiene la siguiente solución.

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{T}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\bar{\mathbf{A}}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{24}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}[\nabla] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \nabla + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \nabla^2 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \nabla \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\det(\mathbf{T}[\nabla]) = 1$  y los polinomios invariantes de Smith son  $\{1,1\}$  por lo que la transformación  $\mathbf{T}[\nabla]$  es bicausal. El sistema equivalente es

$$\dot{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} 2 & -3\nabla \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}(\mathbf{t})$$

$$\dot{z}_1(t) = 2z_1(t) - 3z_2(t-1)$$

$$\dot{z}_2(t) = -z_1(t)$$

con un retardo máximo  $\tau_a = 1$ .

Las condiciones para reducir retardos en un sistema sin deriva continúan descritas por sistemas de ecuaciones lineales y se reducen a las condiciones (ii) y (iii) del Teorema 1, lo cual se prueba directamente definiendo  $\mathbf{A}_j = \mathbf{0}_{\mathbf{n} \times \mathbf{n}} \forall j$ .

## II.3 Conclusiones del capítulo.

Se ha establecido una completa caracterización de la equivalencia de SLR. Las condiciones necesarias y suficientes propuestas en este trabajo son fáciles de probar para el caso de equivalencia a un sistema sin retardos. La cantidad y complejidad de las ecuaciones a resolver se incrementa para el problema de reducción de retardos. Sin embargo, el enfoque utilizado es útil y proporciona un método constructivo para encontrar la transformación bicausal.

Se requiere más investigación para extender estos resultados al caso de SNLR.

En los capítulos siguientes se analizan sistemas interconectados, cuyos retardos no pueden ser eliminados. Primeramente se presenta un análisis teórico sobre NCSs y enseguida una aplicación tecnológica, una red de SPI. En ambos casos de investigación se presentan retardos originados por interconexiones físicas, que afectan el modelo del sistema aún en lazo abierto, y por el canal de comunicación que afectan al sistema únicamente al cerrar el lazo de control.





## Capítulo III

# SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS EN RED.

En este capítulo se buscan soluciones causales (sin términos anticipativos) para resolver la sincronización maestro-esclavo de NCSs. Se consideran dos clases de retardos en el sistema, uno debido al canal de comunicación y eventualmente, en caso de que existan, otro debido a sus interconexiones físicas. Se muestra que utilizando ecuaciones de error con retardos, tanto para el seguimiento de trayectoria del maestro como para el error de sincronización, en lugar de ecuaciones diferenciales ordinarias, es posible llegar a dichas leyes causales de control.

### III.1 Preliminares.

#### III.1.1 Sistemas considerados.

Una red de  $N$  sistemas sin interconexiones físicas descritos por ecuaciones de la forma

$$\Sigma = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i(t) &= \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i(t)) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i(t))u_i(t), \quad (i = 1, \dots, N); \\ y_i(t) &= h_i(x_i(t)) \end{cases} \quad (25)$$

se estudia en la Sección III.2.  $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado instantáneo de  $\Sigma_i$ ,  $u_i(t) \in \mathbb{R}$  la entrada del sistema y  $y_i(t) \in \mathbb{R}$  la salida.

En la Sección III.3, se analiza una red de  $N$  sistemas con interconexiones físicas,

cada uno modelado por

$$\Sigma = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i(\mathbf{t}) &= \mathbf{f}_i(\cdot) + \mathbf{g}_i(\cdot)u_i(t), \quad (i = 1, \dots, N); \\ y_i(t) &= h_i(x_i(t)); \end{cases} \quad (26)$$

donde

$$\mathbf{f}_i(\cdot) := \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_1(\mathbf{t} - \sigma), \mathbf{x}_2(\mathbf{t} - \sigma), \dots, \mathbf{x}_{i-1}(\mathbf{t} - \sigma), \mathbf{x}_i(\mathbf{t}), \mathbf{x}_{i+1}(\mathbf{t} - \sigma), \dots, \mathbf{x}_N(\mathbf{t} - \sigma))$$

y, de manera similar, se define a  $\mathbf{g}_i(\cdot)$ . El vector de estado instantáneo de  $\Sigma_i$  es  $\mathbf{x}_i(\mathbf{t}) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_j(\mathbf{t} - \sigma) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  el vector de estado instantáneo al tiempo  $t - \sigma$  para  $j = 1, \dots, N$  con  $i \neq j$ , la entrada de control  $u_i \in \mathbb{R}$  y la salida  $y_i \in \mathbb{R}$ . Los sistemas están físicamente interconectados mediante  $\mathbf{x}_j(\mathbf{t} - \sigma)$  donde  $\sigma$  es un retardo constante.

Note que varios retardos de interconexión  $\sigma_{ij}$  pueden considerarse, donde  $\sigma_{ij}$  es el retardo de transmisión entre  $\Sigma_i$  y  $\Sigma_j$ . Sin embargo en este trabajo se supone, sin pérdida de generalidad, que  $\sigma_{ij} = \sigma$ . La extensión de la metodología propuesta al caso general es trivial dado que solo implica indicar los retardos individuales en la ley de control resultante.

Las siguientes suposiciones se hacen para los sistemas (25) y (26):

- Las funciones  $f_i$ ,  $g_i$  y  $h_i$  son localmente analíticas.
- Todos los subsistemas tienen el mismo grado relativo:  $\rho_i = \rho$  para  $i = 1, \dots, N$ .
- El sistema tiene estabilidad interna.

- El sistema tiene grado relativo tipo III según la definición en Germani *et al.* (2003), en todo su dominio.

**Nota 4** *Es bien sabido que en SNLR tener grado relativo completo no implica estabilidad interna para el problema de linealización entrada/salida y que una dinámica cero no nula se puede inducir ya sea por las variables de estado o por la entrada de control (para mayores detalles ver Germani et al. (2003)). En este trabajo se supone que existe dicha estabilidad interna y que la  $n$ -ésima derivada de la salida al tiempo  $t$  es una función afín a la entrada al instante  $t$  y no de sus valores pasados (la variable de control no induce una dinámica interna y la estabilidad de la dinámica cero del estado trivialmente implica la estabilidad de la dinámica cero, lo cual corresponde a un sistema con grado relativo tipo III en Germani et al. (2003)).*

### III.1.2 Planteamiento del problema de sincronización de NCSs.

Dados  $N$  sistemas  $\Sigma$ , donde el sistema  $N$  es el maestro y los sistemas  $1 \dots N - 1$  son los esclavos, una salida de referencia  $y_{ref}(t)$  que es  $C^\infty$ ,  $t \geq 0$  y un retardo de comunicación  $\tau$ , encontrar entradas de control  $u_i$  de la forma

$$u_i(t) = \eta_i(x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \dots, x_{i-1}(t-\tau), x_i(t), x_i(t-\tau), x_{i+1}(t-\tau), \dots, x_N(t-\tau)),$$

para  $i = 1, \dots, N$ . (27)

para sistemas sin interconexiones físicas, o

$$u_i(t) = \eta_i(x_1(t-\sigma), \dots, x_{i-1}(t-\sigma), x_i(t), x_i(t-\tau), x_{i+1}(t-\sigma), \dots, x_N(t-\sigma), x_N(t-\tau))$$

para  $i = 1, \dots, N - 1$ . (28)

para sistemas con interconexiones físicas, tal que el error de sincronización  $e_l(t) = y_N(t) - y_l(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_l(t) = 0 \text{ para } l = 1, \dots, N - 1, \quad (29)$$

y el error de seguimiento de trayectoria  $e_N(t) = y_{ref}(t) - y_N(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_N(t) = 0. \quad (30)$$

Los retardos de comunicación son, en general, variantes en el tiempo. Sin embargo, no es restrictivo considerar  $\tau$  como la cota superior de todos los retardos de comunicación en la red ya que, utilizando una técnica de memoria muelle en cada sistema, se puede establecer este retardo constante (Estrada-Garcia *et al.*, 2007; Lelevé *et al.*, 2001; Luck & Ray, 1990; Ploplys *et al.*, 2004; Berestesky *et al.*, 2004).  $\sigma$  también se supone constante.

## III.2 Sistemas sin interconexiones físicas.

Sistemas sin retardos, controlados a través de una red de comunicación, que induce tiempos muertos, son muy comunes. Un esquema ilustrativo del intercambio de datos en este tipo de NCSs se muestra en la Fig. 1. Teleoperación (Estrada-Garcia *et al.*, 2007; Witrant *et al.*, 2003) y telerobótica (Sheridan, 1993) son solo algunos ejemplos de las diferentes áreas donde esta clase de sistemas se presenta.

El procedimiento estándar para resolver el problema de sincronización maestro-esclavo lleva a compensadores no causales. Sin embargo enseguida se muestra que al definir la dinámica del error de seguimiento usando una ecuación diferencial lineal con retardos es posible encontrar soluciones causales.

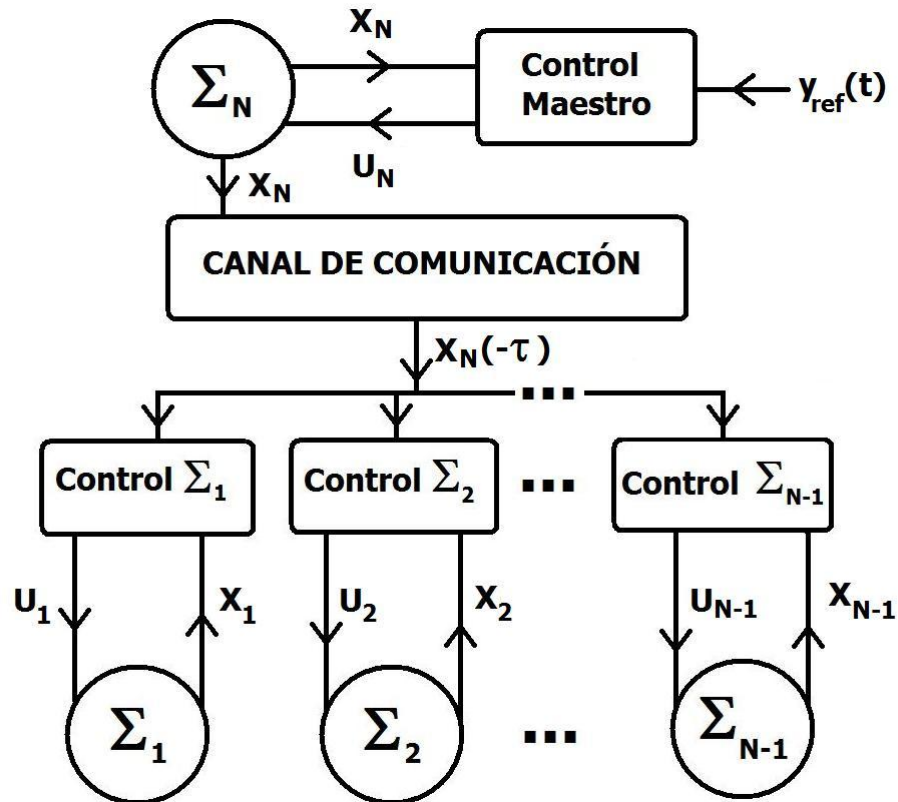


Figura 1. Esquema ilustrativo NCS sin interconexiones físicas

### III.2.1 La solución estándar es no causal.

En esta sección una metodología clásica para sistemas sin retardos se aplicará para resolver el problema planteado en la sección anterior. Se mostrará que de esta manera no es posible encontrar una solución causal considerando sistemas de la forma (25) y un retardo de comunicación  $\tau$  en la red.

Primero, se resolverá el problema de seguimiento de trayectoria para el maestro.

### Seguimiento de trayectoria.

Derivando el error de seguimiento de trayectoria  $e_N(t) = y_{ref}(t) - y_N(t)$  hasta el grado relativo  $\rho$  se obtiene

$$\begin{aligned} e_N^{(\rho)}(t) &= y_{ref}^{(\rho)}(t) - y_N^{(\rho)}(t) \\ &= y_{ref}^{(\rho)}(t) - [\varphi(x_N(t)) + \psi(x_N(t))u_N(t)], \end{aligned} \quad (31)$$

donde  $\varphi$  y  $\psi$  son las apropiadas funciones.

Es estándar considerar la siguiente ODE

$$e_N^{(\rho)}(t) = \sum_{k=0}^{\rho-1} \beta_k e_N^{(k)}(t) \quad (32)$$

donde  $\beta_k$  son constantes que estabilizan (32).

Combinando (31) y (32), y resolviendo en  $u_N(t)$

$$u_N(t) = \frac{y_{ref}^{(\rho)}(t) - \varphi(x_N(t)) - \sum_{k=0}^{\rho-1} \beta_k [y_{ref}^{(k)}(t) - L_{f_N}^{(k)} h_N(x_N(t))]}{\psi(x_N(t))}, \quad (33)$$

lo cual implica (30).

### Técnica estándar de sincronización maestro-esclavo.

Se define el error de sincronización  $e_i(t) = y_N(t) - y_i(t)$  para  $i = 1, \dots, N-1$ . Derivando cada error hasta su grado relativo  $\rho$  se obtiene

$$e_i^{(\rho)}(t) = y_N^{(\rho)}(t) - [\alpha_i(x_i(t)) + \gamma_i(x_i(t))u_i(t)] \quad (34)$$

Considérese la ODE

$$e_i^{(\rho)}(t) = \sum_{m=0}^{\rho-1} \lambda_{i,m} e_i^{(m)}(t). \quad (35)$$

donde  $\lambda_{i,m}$  son constantes que estabilizan (35).

Combinando (34) y (35), y resolviendo en  $u_i(t)$

$$u_i(t) = \frac{y_N^{(\rho)}(t) - \alpha_i(x_i(t)) - \sum_{m=0}^{\rho-1} \lambda_{i,m} [L_{f_N}^{(m)} h_N(x_N(t)) - L_{f_i}^{(m)} h_i(x_i(t))]}{\gamma_i(x_i(t))} \quad (36)$$

Note que el canal de comunicación introduce un retardo  $\tau$  cuando sensores, actuadores y controladores intercambian datos a través de la red, como se muestra en la Fig. 1. Entonces la señal  $x_N(t)$  enviada por el maestro al  $i$ -ésimo sistema esclavo siempre va a ser recibida con un retardo  $\bar{\tau}(t)$  (se puede usar una memoria muelle para ajustar el retardo a un valor constante igual a un límite superior  $\tau$ , Berestesky *et al.* (2004)). Éste es un punto crucial del problema y la razón por la cual se quiere una entrada de control de la forma (27). Desafortunadamente, (36) no tiene la forma deseada pues es no causal, ya que las variables  $x_N(t)$  del maestro no están disponibles en el esclavo  $i$  en el instante  $t$ ; una solución común es el uso de predictores (Witrant



*et al.*, 2007a) para reconstruir estas señales anticipativas en (36), sin embargo esto trae diversos inconvenientes, tal como se discutió en la Sección I.

El reto consiste ahora en encontrar una retroalimentación de la forma (27) que resuelva el problema.

### III.2.2 Solución causal.

En la Sección III.2.1 se vió que la solución clásica usando ODEs para la sincronización maestro-esclavo no permite obtener soluciones causales, ya que aparecen términos anticipativos en (36). Ahora, la clave para derivar una retroalimentación causal a este problema será el uso de ecuaciones diferenciales con retardos para ambos, el seguimiento de trayectoria y los errores de sincronización.

#### Seguimiento de trayectoria usando una ecuación de error con retardos.

Considere la siguiente ecuación de error con retardos

$$e_N^{(\rho)}(t) = \sum_{k=0}^{\rho-1} \beta_k e_N^{(k)}(t - \tau) \quad (37)$$

donde los coeficientes  $\beta_k$  son constantes que cumplen con las condiciones de estabilidad dadas en (Cahlon & Schmidt, 2007a,b).

Combinando (31) y (37), y resolviendo en  $u_N(t)$

$$u_N(t) = \frac{y_{ref}^{(\rho)}(t) - \varphi(x_N(t)) - \sum_{k=0}^{\rho-1} \beta_k [y_{ref}^{(k)}(t - \tau) - L_{f_N}^{(k)} h_N(x_N(t - \tau))]}{\psi(x_N(t))} \quad (38)$$

lo cual implica (30).

Se muestra en el Apéndice A que una ecuación de error del tipo de (37) no puede ser estable independiente del retardo para  $\rho \geq 2$ , esto es, que los coeficientes  $\beta_k$  tienen que elegirse de acuerdo al retardo  $\tau$  para asegurar estabilidad. Tales condiciones son dadas en (Cahlon & Schmidt, 2007a,b) para ecuaciones diferenciales con retardos de orden par e impar, respectivamente. Dichos autores hacen notar que mientras mayor sea el orden de  $\rho$  se vuelve más difícil estabilizar la ecuación (37).

### Solución causal a la sincronización maestro-esclavo.

Considere el error de sincronización  $e_i(t) = y_N(t) - y_i(t)$ , para  $i = 1, \dots, N - 1$ . La siguiente ecuación de error lineal con retardos se utilizará para derivar una solución causal. Esto se logra al utilizar una ecuación lineal con retardos en vez del enfoque clásico basado en la ODE (35).

$$e_i^{(\rho)}(t) = \sum_{m=0}^{\rho-1} \lambda_{i,m} e_i^{(m)}(t - \tau), \text{ para } i = 1, \dots, N - 1. \quad (39)$$

Combinando (34) y (39), y resolviendo en  $u_i(t)$

$$u_i(t) = \frac{y_N^{(\rho)}(t) - \alpha_i(x_i(t)) - \sum_{m=0}^{\rho-1} \lambda_{i,m} [L_{f_N}^{(m)} h_N(x_N(t - \tau)) - L_{f_i}^{(m)} h_i(x_i(t - \tau))]}{\gamma_i(x_i(t))} \quad (40)$$

Comparando (40) con (36) la utilidad de la ecuación de error con retardos (39) se puede deducir fácilmente. Ahora los términos  $L_{f_N}^{(m)} h_N(x_N(t - \tau))$  aparecen en (40) al instante  $t - \tau$ , el cual es el tiempo de llegada de las señales del maestro al  $i$ -ésimo esclavo y no hay más problemas de causalidad en el control por retroalimentación del

sistema esclavo.

Sin embargo, el término  $y_N^{(\rho)}(t)$  todavía depende de las señales del maestro al tiempo  $t$ . La siguiente proposición se establece para resolver el problema de sincronización maestro-esclavo de manera causal.

**Proposición 3** *Sean  $N$  sistemas modelados cada uno por (25), una trayectoria de referencia  $y_{ref}(t)$  suficientemente suave, y un retardo de comunicación  $\tau$ . Existe una ley de control causal de la forma*

$$u_i(t) = \eta_i(x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \dots, x_{i-1}(t-\tau), x_i(t), x_i(t-\tau), x_{i+1}(t-\tau), \dots, x_N(t-\tau)),$$

para  $i = 1, \dots, N$ ,

(41)

el cual resuelve el problema de sincronización maestro-esclavo si el grado relativo de  $y_i(t)$  es finito y existen coeficientes  $\beta_k$  y  $\lambda_{i,m}$  para estabilizar las ecuaciones (37) y (39).

**Prueba.** De (31)

$$y_N^{(\rho)}(t) = y_{ref}^{(\rho)}(t) - e_N^{(\rho)}(t). \tag{42}$$

Dada la ley de control (40) para  $i = 1, \dots, N-1$ . La señal  $y_N^{(\rho)}(t)$  puede reconstruirse de (42) considerando la ecuación de error con retardos (37). El resultado es la siguiente entrada de control

$$\begin{aligned}
u_i(t) = & \frac{y_{ref}^{(\rho)}(t) - \sum_{k=0}^{\rho-1} \beta_k [y_{ref}^{(k)}(t - \tau) - L_{f_N}^{(k)} h_N(x_N(t - \tau))] - \alpha_i(x_i(t))}{\gamma_i(x_i(t))} \\
& - \frac{\sum_{m=0}^{\rho-1} \lambda_{i,m} [L_{f_N}^{(m)} h_N(x_N(t - \tau)) - L_{f_i}^{(m)} h_i(x_i(t - \tau))]}{\gamma_i(x_i(t))}.
\end{aligned} \tag{43}$$

La solución es causal y tiene la forma (41). ■

Note que el diseño de la ley de control (43) se puede desarrollar para cualquier retardo  $\tau$ . Sin embargo, la elección de los parámetros  $\beta_k$  y  $\lambda_m$  depende del retardo lo cual impacta en el tiempo de estabilización (ver Apéndice A).

La ventaja de considerar la ecuación diferencial con retardos (39) es que no aparecen términos no causales que dependen de  $x_N(t)$  en la entrada de control (40) como sería el caso si se usara la ODE sin retardos (32) en (42) para reconstruir  $y_N^{(\rho)}(t)$ .

El siguiente ejemplo, tomado de Khalil (2002), se utiliza para ilustrar la metodología propuesta.

**Ejemplo 3** *Un manipulador simple con unión flexible se puede representar por un modelo de cuarto orden de la forma*

$$\Sigma_i = \begin{cases} \dot{x}_{i,1} &= x_{i,2} \\ \dot{x}_{i,2} &= -a_i \text{sen}(x_{i,1}) - b_i(x_{i,1} - x_{i,3}) \\ \dot{x}_{i,3} &= x_{i,4} \\ \dot{x}_{i,4} &= c_i(x_{i,1} - x_{i,3}) + d_i u_i \end{cases} \tag{44}$$

Dados  $N$  manipuladores modelados cada uno por (44) con retardo en el canal de comunicación, y una trayectoria de referencia  $y_{ref}(t)$  que es  $C^\infty$ , encontrar, si es posible, una ley de control tal que la diferencia  $e_i(t)$  entre la salida del esclavo  $y_i(t) = x_{i,1}(t)$  y la referencia del maestro  $y_N(t)$  sea asintóticamente estable.

Considerando la trayectoria de referencia para el maestro, se define la señal de error:

$$e_N(t) = y_{ref}(t) - x_{N,1}(t) \quad (45)$$

El sistema (44) tiene grado relativo  $\rho = 4$  con salida  $y_i(t) = x_{i,1}(t)$ . Entonces derivando (45) hasta el grado relativo se obtiene

$$\begin{aligned} e_N^{(4)}(t) &= y_{ref}^{(4)}(t) - x_{N,1}^{(4)} \\ &= y_{ref}^{(4)}(t) - \varphi(x_{N,1}(t), x_{N,2}(t), x_{N,3}(t)) - b_N d_N u_N(t) \end{aligned} \quad (46)$$

para la función apropiada  $\varphi_N$ . La ecuación de error con retardos (37) se convierte en

$$e_N^{(4)}(t) = \sum_{k=0}^3 \beta_k e_N^{(k)}(t - \tau) \quad (47)$$

que es estable bajo las condiciones dadas en (Cahlon & Schmidt, 2007b).

Combinando (46) y (47), y resolviendo en  $u_N(t)$

$$u_N(t) = \frac{y_{ref}^{(4)}(t) - \varphi(x_{N,1}(t), x_{N,2}(t), x_{N,3}(t)) - \sum_{k=0}^3 \beta_k [y_{ref}^{(k)}(t - \tau) - L_{f_N}^{(k)} x_{N,1}(t - \tau)]}{b_N d_N}$$

Para la sincronización, usando el mismo método propuesto anteriormente, la señal de error está dada por

$$e_i(t) = x_{N,1}(t) - x_{i,1}(t) \quad \text{para } i = 1, \dots, N - 1. \quad (48)$$

Derivando hasta el grado relativo del sistema

$$\begin{aligned}
e_i(t) &= x_{N,1}(t) - x_{i,1}(t), \\
&\vdots = \vdots \\
e_i^{(4)}(t) &= x_{N,1}^{(4)}(t) - x_{i,1}^{(4)}(t) \\
&= x_{N,1}^{(4)}(t) - \alpha_i(x_{i,1}(t), x_{i,2}(t), x_{i,3}(t)) - b_i d_i u_i(t)
\end{aligned} \tag{49}$$

para las funciones apropiadas  $\alpha_i$ . La ecuación (39) se convierte en

$$e_i^{(4)}(t) = \sum_{m=0}^3 \lambda_{i,m} e_i^{(m)}(t - \tau) \tag{50}$$

Combinando (49) y (50), y resolviendo en  $u_i(t)$ ,

$$\begin{aligned}
u_i(t) &= \frac{y_{ref}^{(4)}(t) - \sum_{k=0}^3 \beta_k [y_{ref}^{(k)}(t - \tau) - L_{f_N}^{(k)} x_{N,1}(t - \tau)]}{b_i d_i} \\
&\quad - \frac{-\alpha_i(x_{i,1}(t), x_{i,2}(t), x_{i,3}(t)) - \sum_{m=0}^3 \lambda_{i,m} [L_{f_N}^{(m)} x_{N,1}(t - \tau) - L_{f_i}^{(k)} x_{i,1}(t - \tau)]}{b_i d_i}.
\end{aligned} \tag{51}$$

La entrada de control (51) tiene la forma deseada (41), no existen problemas de causalidad gracias al uso de las ecuaciones de error con retardos (47) y (50), las cuales son estables bajo las condiciones reportadas en Cahlon & Schmidt (2007b).

Las Fig. 2 y 3 muestran los resultados para el caso de 2 manipuladores ( $N = 2$ ). Los parámetros del sistema y los coeficientes de las ecuaciones de error están dados en las Tablas I y II, respectivamente. El valor de retardo considerado es  $\tau = 0.1$  s.

Tabla I. Valor de los parámetros del Ejemplo 3.

Parámetros	$i = 1$	$i = 2$
$a_i$	1	0.1
$b_i$	1.1	0.5
$c_i$	0.8	0.4
$d_i$	1	0.5

Tabla II. Coeficientes de las ecuaciones de error.

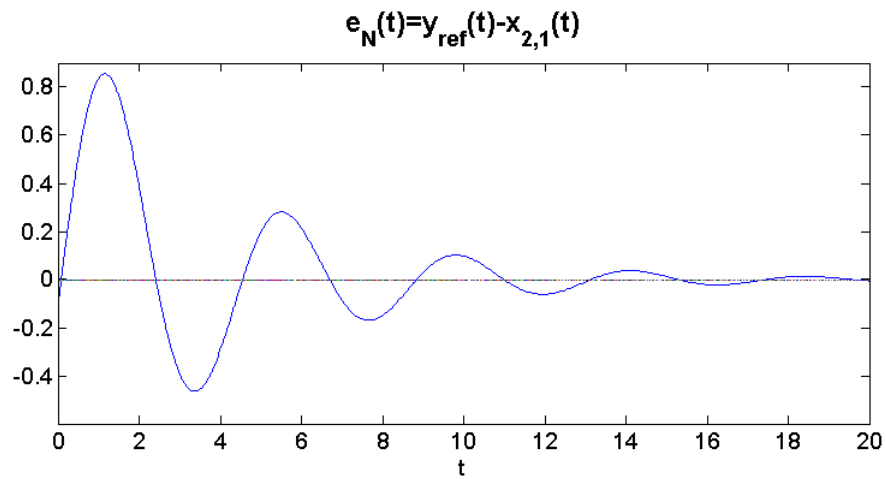
$i = 1$	$i = 2$
$\lambda_{1,0} = -5$	$\beta_0 = -4$
$\lambda_{1,1} = -8$	$\beta_1 = -6$
$\lambda_{1,2} = -7$	$\beta_2 = -5$
$\lambda_{1,3} = -4$	$\beta_3 = -3$

### III.3 Sistemas con interconexiones físicas.

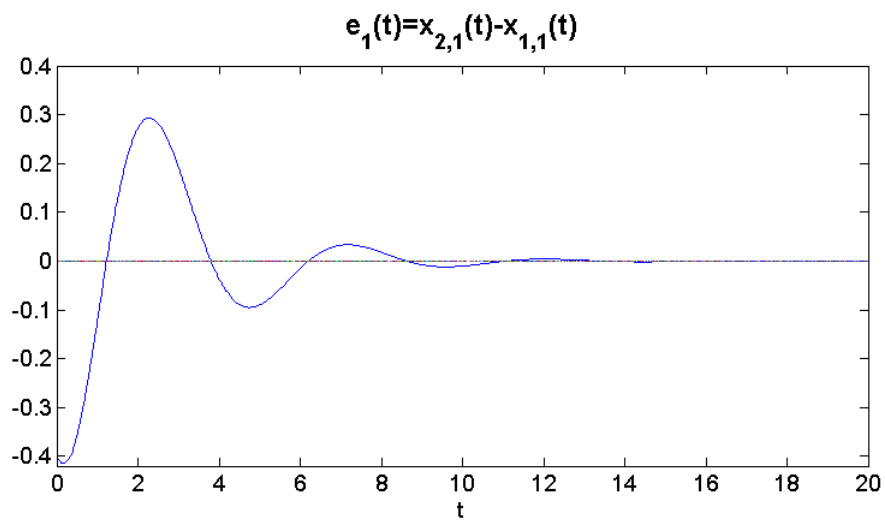
En la Fig. 4 se muestra el intercambio de datos en los sistemas con interconexiones físicas. Se tiene el retardo  $\tau$  debido al canal de comunicación pero además el retardo  $\sigma$ , que es propio del modelo del sistema, y aparece aún en lazo abierto.

Enseguida se deriva una condición suficiente para la sincronización de sistemas modelados por (26).

**Proposición 4** *Dados  $N$  sistemas modelados cada uno por (26), una trayectoria de referencia  $y_{ref}(t)$  suficientemente suave, y un retardo de comunicación  $\tau$ . Existe una ley de control causal que resuelve el problema de sincronización maestro-esclavo de la*



(a) Error de seguimiento



(b) Error de sincronización

Figura 2. Ecuaciones de error del Ejemplo 3.



forma

$$u_i(t) = \eta_i(x_1(t-\sigma), \dots, x_{i-1}(t-\sigma), x_i(t), x_i(t-\tau), x_{i+1}(t-\sigma), \dots, x_N(t-\sigma), x_N(t-\tau))$$

para  $i = 1, \dots, N - 1$ . (52)

lo cual lleva a (29) y a (30) si existen coeficientes  $\beta_k$  y  $\lambda_{i,m}$  que estabilicen las ecuaciones (37) y (39), si el grado relativo de  $y_i(t)$  es finito y si  $\sigma \geq \tau$ .

**Nota 5** La metodología es similar a la propuesta en la sección anterior. Se utiliza una ecuación de error con retardos para las ecuaciones de error de seguimiento de trayectoria y de sincronización pues las técnicas clásicas de síntesis de controladores usando ODEs llevan a una solución no causal.

### Prueba.

Derivando el error de seguimiento  $e_N(t) = y_{ref}(t) - y_N(t)$  hasta el grado relativo  $\rho$

$$\begin{aligned} e_N^{(\rho)}(t) &= y_{ref}^{(\rho)}(t) - y_N^{(\rho)}(t) \\ &= y_{ref}^{(\rho)}(t) - [\varphi(\star) + \psi(\star)u_N(t)] \end{aligned} \quad (53)$$

donde la función  $\varphi(\star) := \varphi(x_1(t - \sigma), x_2(t - \sigma), \dots, x_{N-1}(t - \sigma), x_N)$  y  $\psi(\star)$  es otra función que se define de manera similar.

Combinando (37) y (53), y resolviendo en  $u_N(t)$

$$u_N(t) = \frac{y_{ref}^{(\rho)}(t) - \varphi(\star) - \sum_{k=0}^{\rho-1} \beta_k [y_{ref}^{(k)}(t - \tau) - L_{f_N}^{(k)} h_N(x_N(t - \tau))]}{\psi(\star)}$$

esto implica (30).

Ahora, se define el error de sincronización  $e_i(t) = y_N(t) - y_i(t)$ . Derivando hasta el grado relativo

$$e_i^{(\rho)}(t) = y_N^{(\rho)}(t) - [\alpha_i(*) + \gamma_i(*)u_i(t)] \text{ para } i = 1, \dots, N - 1, \quad (54)$$

donde la función

$$\alpha_i(*) := \alpha_i(x_1(t - \sigma), x_2(t - \sigma), \dots, x_{i-1}(t - \sigma), x_i(t), x_{i+1}(t - \sigma), \dots, x_N(t - \sigma))$$

y la función  $\gamma_i(*)$  se define de forma similar.

Combinando la ecuación de error con retardos (39) y (54), y resolviendo en  $u_i(t)$

$$u_i(t) = \frac{y_{ref}^{(\rho)}(t) - \sum_{k=0}^{\rho-1} \beta_k [y_{ref}^{(k)}(t - \tau) - L_{f_N}^{(k)} h_N(x_N(t - \tau))] - \alpha_i(*)}{\gamma_i(*)} - \frac{\sum_{m=0}^{\rho-1} \lambda_{i,m} [L_{f_N}^{(m)} h_N(x_N(t - \tau)) - L_{f_i}^{(m)} h_i(x_i(t - \tau))]}{\gamma_i(*)}. \quad (55)$$

La ecuación (55) tiene la forma (28) y es causal si  $\sigma \geq \tau$ . ■

Note que cuando el retardo en el canal de comunicación  $\tau$  es mayor que el retardo  $\sigma$  de la interconexión física la metodología ya no es aplicable. El retardo de las interconexiones del sistema  $\sigma$  no se puede manipular y los datos recibidos  $\xi(t) = x(t - \tau)$  que se usan para calcular el estado requerido  $\xi(t + \tau - \sigma) = \xi(t - \sigma)$  se vuelven no causales si  $\tau > \sigma$ .

### III.4 Conclusiones del capítulo.

Se presentaron condiciones suficientes para la existencia de una ley de control causal para resolver la sincronización maestro-esclavo con retardos en el canal de comunicación y eventualmente en las interconexiones del sistema. Se ha mostrado que la solución clásica usando ecuaciones de error sin retardos resulta en entradas de control no causales (con términos anticipativos), las cuales deben ser reconstruidas con predictores o algunas técnicas de aproximación. En este capítulo se propuso una metodología usando ecuaciones de error con retardos. El uso de dichas ecuaciones para ambos, el seguimiento de trayectoria y el problema de sincronización maestro-esclavo son instrumentales para encontrar esquemas de control causales que garanticen la estabilidad y sincronización de los sistemas considerados.

Esta metodología no es aplicable para sistemas con retardos en las interconexiones físicas menores al retardo en el canal de comunicación. El desarrollo de un procedimiento que brinda leyes de control causales, aunque locales, para la sincronización maestro-esclavo de un caso particular de esta clase de sistemas, una red de sistemas de potencia, se aborda en el siguiente capítulo.

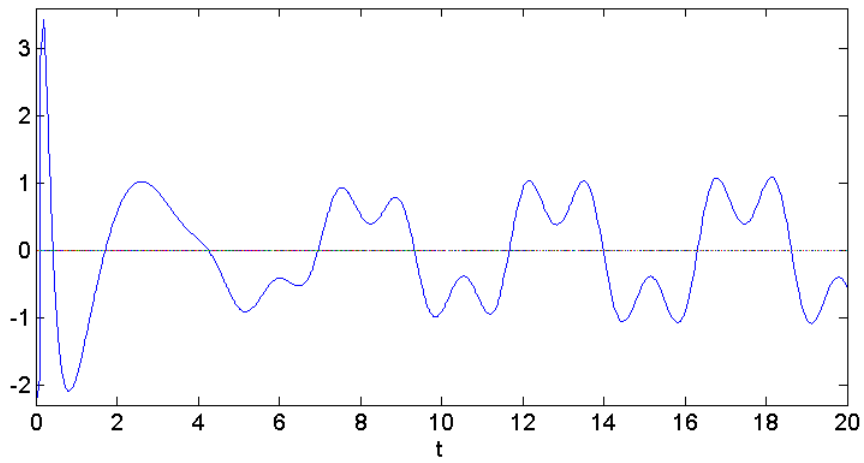
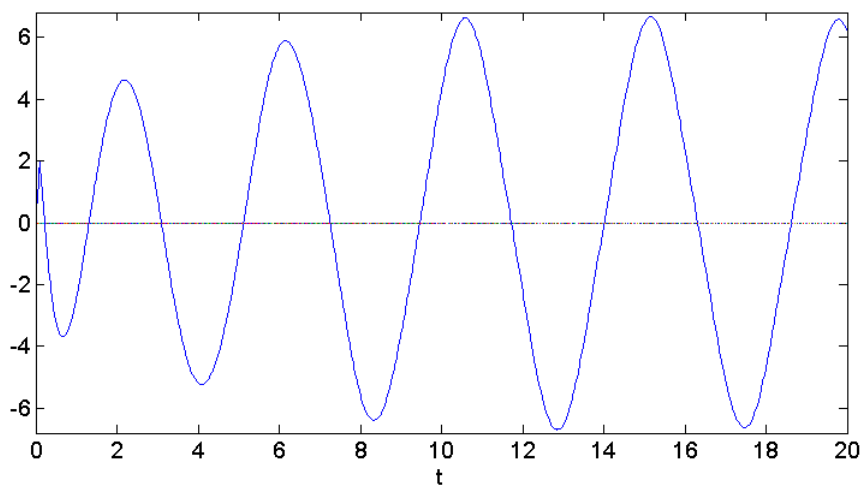
(a) Entrada  $u_1(t)$ (b) Entrada  $u_2(t)$ 

Figura 3. Entradas de control del Ejemplo 3.

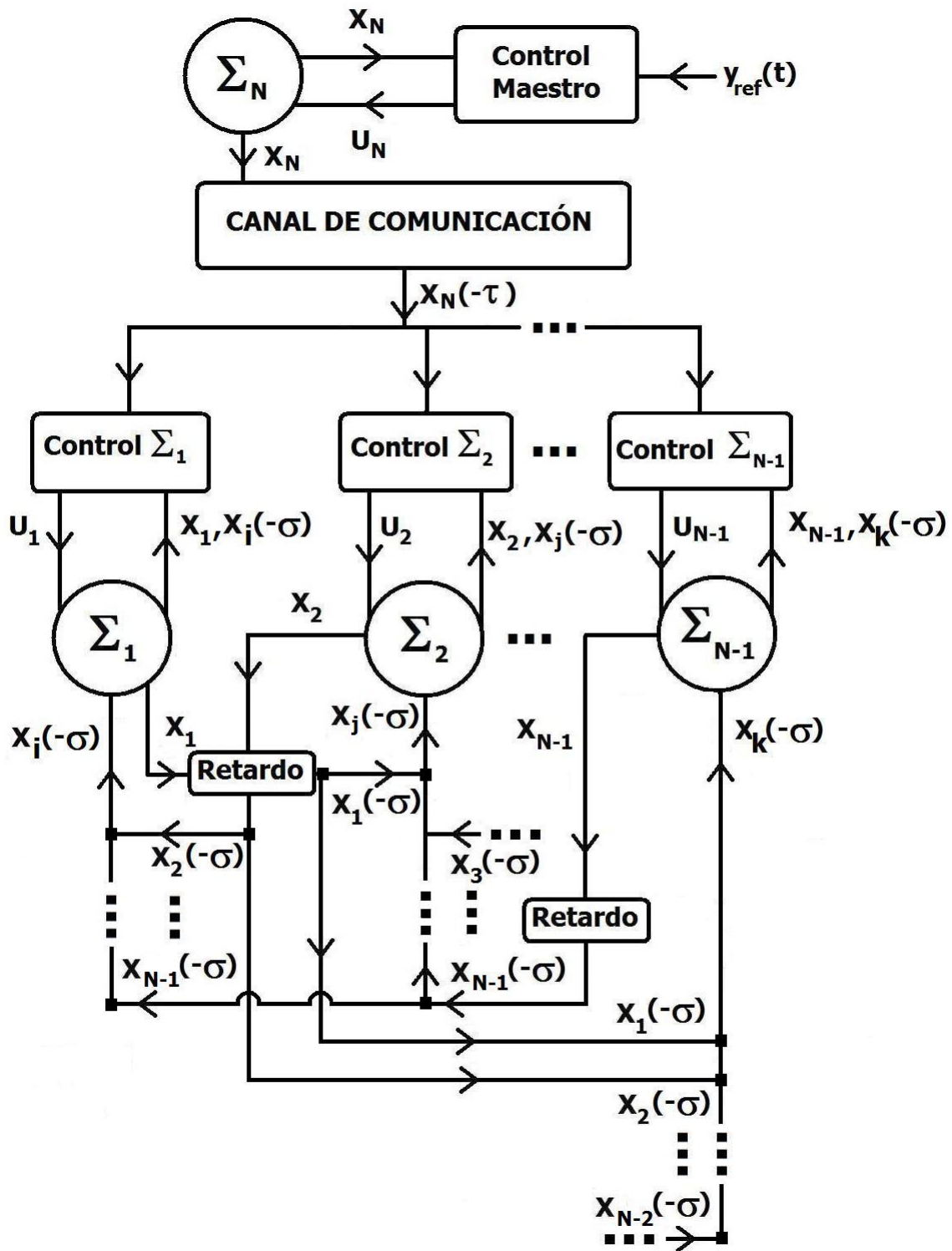


Figura 4. Esquema ilustrativo NCS con interconexiones físicas.

## Capítulo IV

# SISTEMAS DE POTENCIA INTERCONECTADOS

Una red de sistemas de potencia presenta retardos originados por el intercambio de energía, a través de las líneas de transmisión, entre las distintas máquinas que la conforman, y si además se utilizan WAMS entonces existen retardos por el intercambio de datos de medición, cuya magnitud es de 10 a 70 veces mayor que los originados por las interconexiones físicas dependiendo del tipo de enlace de comunicación utilizado (para mayores detalles sobre retardos en WAMS ver Naduvathuparambil *et al.* (2002)).

En este capítulo se brinda una metodología para desarrollar controladores causales que resuelven el problema de sincronización maestro-esclavo de una red de SPI basados en el criterio de Lyapunov-Krasovskii y en el uso de LMIs. En primer lugar se desarrolla una ley de control que utiliza únicamente las variables locales de cada generador y se muestra que dicho controlador descentralizado es capaz de estabilizar la red a pesar del retardo ocasionado por las líneas de transmisión. Enseguida, se desarrolla un controlador de tipo centralizado, es decir, se utilizan las variables de los otros generadores para calcular la ley de control. En la literatura de SPI son pocos los trabajos que, considerando retardos en el modelado del sistema, además de estudiar su impacto en la red proponen procedimientos para la síntesis de controladores y si lo hacen usualmente requieren de predictores para aproximar el comportamiento de algunas variables no disponibles (por ejemplo, Dou *et al.* (2007); Duan *et al.* (2009); Li *et al.* (2010)).

De ahí la importancia de este trabajo ya que la metodología planteada evita el uso de predictores, considera además de los retardos por el uso de WAMS también los de las líneas de transmisión y es sencilla de implementar usando un programa especializado de LMIs. Algunos resultados se presentan en Gárate-García *et al.* (2009).

## IV.1 Modelado del sistema de potencia

La dinámica de  $N$  generadores interconectados puede describirse por un modelo clásico de flujo decaente bajo ciertas suposiciones estándares. Si además se consideran las cargas como impedancias constantes y las conductancias de la línea  $G_{ij}$  despreciables con respecto a las susceptancias  $B_{ij}$  ( $G_{ij} \ll B_{ij}$ ), el modelo dinámico de la  $i$ -ésima máquina, sin retardos en las líneas de transmisión, se representa en lazo abierto por (Pai, 1989)

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_i(t) &= \omega_i(t) - \omega_s \\ \dot{\omega}_i(t) &= \frac{\omega_s}{2H_i}(P_{m_i} - E'_{q_i}(t)I_{q_i}(t) - D_i(\omega_i(t) - \omega_s))\end{aligned}\tag{56}$$

$$\dot{E}'_{q_i}(t) = \frac{1}{T'_{d_i}}(E_{f_i}(t) - E'_{q_i}(t) - (X_{d_i} - X'_{d_i})I_{d_i}(t))$$

donde

$$\begin{aligned}I_{q_i}(t) &= \sum_{j=1, j \neq i}^N E'_{q_j}(t)B_{ij}\text{sen}(\delta_i(t) - \delta_j(t)) \\ I_{d_i}(t) &= - \sum_{j=1, j \neq i}^N E'_{q_j}(t)B_{ij}\text{cos}(\delta_i(t) - \delta_j(t))\end{aligned}$$

Se tiene que  $I_{d_i}(t)$  e  $I_{q_i}(t)$  representan las corrientes en el eje directo y en el eje de cuadratura del generador  $i$ -ésimo, respectivamente;  $E'_{q_i}(t)$  es la tensión transitoria en el eje de cuadratura;  $E_{q_i}(t)$  es la tensión en el eje de cuadratura;  $E_{f_i}(t)$  es la tensión de campo,  $\delta_i(t)$  es el ángulo del rotor con respecto a un marco de referencia absoluto, en radianes, y  $\omega_i(t)$  representa la velocidad angular del rotor. Los parámetros se definen en la Tabla IV.

El vector de estado instantáneo de la  $i$ -ésima máquina (para  $i = 1, \dots, N$ ) se representa por  $\mathbf{x}_i(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \delta_i(t) & \omega_i(t) & E'_{q_i}(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ , el del sistema completo por  $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(\mathbf{t})^T, \dots, \mathbf{x}_N(\mathbf{t})^T \end{bmatrix}^T$  y su entrada de control es  $u_i(t) = \frac{E_{f_i}}{T'_{d_i}}$ .

Tomando en cuenta los retardos de comunicación debido a la distancia entre las máquinas, el sistema (56) se expresa de la siguiente forma (Dou *et al.*, 2007)

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_i(t) &= \omega_i(t) - \omega_s & (57) \\ \dot{\omega}_i(t) &= -a_i(\omega_i(t) - \omega_s) + b_i - c_i E'_{q_i}(t) \sum_{j=1, j \neq i}^N [E'_{q_j}(t - \sigma_{ij}) B_{ij} \text{sen}(\delta_i(t) - \delta_j(t - \sigma_{ij}))] \\ \dot{E}'_{q_i}(t) &= u_i(t) - e_i E'_{q_i}(t) + d_i \sum_{j=1, j \neq i}^N [E'_{q_j}(t - \sigma_{ij}) B_{ij} \text{cos}(\delta_i(t) - \delta_j(t - \sigma_{ij}))] \end{aligned}$$

donde  $a_i = \frac{D_i}{2H_i}$ ,  $b_i = \frac{\omega_s P_{m_i}}{2H_i}$ ,  $c_i = \frac{\omega_s}{2H_i}$ ,  $d_i = \frac{(X_{d_i} - X'_{d_i})}{T'_{d_i}}$ ,  $e_i = \frac{1}{T'_{d_i}}$ , son los parámetros del sistema y  $u_i(t) = e_i E_{f_i}(t)$  es la entrada de control para  $i = 1, \dots, N$ ;  $\sigma_{ij}$  representa el tiempo requerido para que la energía fluya entre los generadores  $i$  y  $j$  a través de la línea de transmisión, para  $i, j = 1, \dots, N$ .



Nótese que con el uso de sistemas de control centralizado aparece un retardo de transmisión de datos  $\bar{\tau}_{ij}$  inducido por el WAMS. Este retardo implica que en la máquina  $i$  no se dispone de la información del estado de la máquina  $j$  al instante  $t$  sino hasta  $\tau_{ij}$  segundos después, por lo que un control será causal si la entrada es de la forma  $u_i(\delta_i, \omega_i, E'_{q_i}, \delta_j(t - \tau_{ij}), \omega_j(t - \tau_{ij}), E'_{q_j}(t - \tau_{ij}))$  con  $\tau_{ij} \geq \bar{\tau}_{ij}$  siempre que  $j \neq i$ . La solución común para usar todas las variables en un tiempo  $\mathbf{x}_j(\mathbf{t})$  es diseñar un predictor para determinarlas. Sin embargo esto causa un costo extra en términos de tiempo, dinero y esfuerzo, dependiendo del número de variables a reconstruir. En este capítulo se presenta el diseño de dos tipos de controladores causales, los cuales utilizan:

- (i) la información de la máquina local únicamente (descentralizado), ver Sección IV.2.
- (ii) la información local y además las variables retrasadas de las otras máquinas (centralizado), de esta forma se evita el uso de predictores de estado, ver Sección IV.3.

Los puntos de equilibrio  $(\delta_i^*, \omega_i^*, E'_{q_i^*}, \bar{u}_i)$ , de los sistemas (56) y (57) satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}
 \omega_i^* &= \omega_s \\
 b_i &= c_i E'_{q_i^*} \sum_{j=1, j \neq i}^N (E'_{q_j^*} B_{ij} \text{sen}(\delta_i^* - \delta_j^*)) \\
 \bar{u}_i &= e_i E'_{q_i^*} - d_i \sum_{j=1, j \neq i}^N (E'_{q_j^*} B_{ij} \cos(\delta_i^* - \delta_j^*)).
 \end{aligned} \tag{58}$$

A continuación se definen algunos conceptos básicos para comprender el problema a resolver.

### IV.1.1 Definiciones preliminares.

El problema de estabilización está relacionado con el de sincronización. Las siguientes definiciones son utilizadas a lo largo de este capítulo.

**Definición 5** (*Alberto & Bretas, 1999*) **Sincronización.** *Las soluciones  $x(t)$  y  $y(t)$  de dos sistemas autónomos  $\dot{x} = f(x)$  y  $\dot{y} = f(y)$  se consideran en sincronía si para cada número real  $L_0 > 0$ , existe un número real  $L = L(L_0) > 0$  tal que para cada condición inicial  $x(t_0)$  y  $y(t_0)$  que satisface  $\|x(t_0) - y(t_0)\| < L_0$ , las soluciones  $x(t)$  y  $y(t)$  satisfacen la desigualdad  $\|x(t) - y(t)\| < L$ , para todo  $t > t_0$ .*

**Definición 6 Estabilidad.** *El punto de equilibrio  $x = 0$  del sistema autónomo  $\dot{x}(t) = F(x_t)$  es*

- estable si, para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0;$$

- inestable si no es estable;
- asintóticamente estable si es estable y existe  $\mu$  tal que

$$\|x(0)\| < \mu \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

La estabilidad asintótica, en el sentido de Lyapunov, de un punto de equilibrio de la dinámica de error implica la sincronización entre las máquinas en el sentido de

la Definición 5. Es claro que la sincronización no implica estabilización. Un sistema puede estar sincronizado y ser inestable. Además, la propiedad de estabilidad es una herramienta para alcanzar la sincronización entre las máquinas del sistema de potencia. En el equilibrio, la velocidad y aceleración de los rotores de las  $N$  máquinas deben ser iguales.

Una discusión más detallada sobre la sincronización y estabilidad de sistemas de potencia se encuentra en Alberto & Bretas (1999). Ahora se define formalmente el problema a resolver.

#### IV.1.2 Formulación del problema de sincronización de SPI.

Dados  $N$  sistemas descritos cada uno por (57), y una referencia constante  $\delta^*$ , encontrar controladores descentralizados

$$u_i(t) = -k_{i,1}(\delta_i(t) - \delta_i^*) - k_{i,2}(\omega_i(t) - \omega_i^*) - k_{i,3}(Eq'_i(t) - Eq'_i^*) \quad (59)$$

o centralizados

$$\begin{aligned} u_i(t) = & -k_{i,1}(\delta_i(t) - \delta_i^*) - k_{i,2}(\omega_i(t) - \omega_i^*) - k_{i,3}(Eq'_i(t) - Eq'_i^*) \\ & -k_{ij,1}(\delta_j(t - \tau_{ij}) - \delta_j^*) - k_{ij,2}(\omega_j(t - \tau_{ij}) - \omega_j^*) - k_{ij,3}(Eq'_j(t - \tau_{ij}) - Eq'_j^*) \end{aligned} \quad (60)$$

tales que para los errores de sincronización  $e_j(t) = \delta_1(t) - \delta_j(t)$  y el de seguimiento de trayectoria  $e_1(t) = \delta_1(t) - \delta^*$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_j(t) = 0 \quad (61)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0, \quad (62)$$

independientemente de los retardos  $\sigma_{ij}$  y  $\tau_{ij}$ .

En las siguientes secciones se resolverá este problema, empezando por el caso descentralizado, bajo las suposiciones que se enlistan a continuación:

- (i) La máquina N es considerada como referencia, entonces  $E'_{qN} = constante = 1\angle 0^\circ$ .
- (ii) Los retardos  $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$  puesto que el tiempo de transmisión de la energía es independiente de la dirección.
- (iii) Se pueden considerar varios retardos de interconexión entre las máquinas i-ésima y j-ésima debido a WAMS  $\tau_{i,j}$ ; sin embargo en este trabajo, por simplicidad de notación y sin pérdida de generalidad, se supone que  $\tau_{ij} = \tau$ .

## IV.2 Diseño de un controlador descentralizado

Los WAMS proporcionan el valor de las variables de estado de cada uno de los generadores que conforman la red de SPI a una central de control, de esta forma se cuenta con un sistema de alarma de rápido tiempo de reacción en caso de presentarse algún evento que genere inestabilidad. Sin embargo, al requerirse en la máquina  $i$  las variables de otros generadores para la síntesis del controlador estos datos se tienen al instante  $t - \tau$  y no al instante  $t$  puesto que transcurren milisegundos desde que se mide la variable en la máquina  $j$ , se transmiten los datos de medición, hasta que se reciben en el generador  $i$ . La magnitud del retardo depende sobre todo del tipo de enlace de comunicación utilizado, por ejemplo si es vía satélite, oscila alrededor de los 700 ms (Naduvathuparambil *et al.*, 2002).

En esta sección se propone un procedimiento sistemático para estabilizar el sistema de

potencia (57) en un punto de operación preestablecido. La idea consiste en diseñar un controlador descentralizado de la forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{K}(\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}^*), \quad (63)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i &= \begin{bmatrix} k_{i,1} & k_{i,2} & k_{i,3} \end{bmatrix}, \quad \forall \\ \mathbf{K} &= \text{diag}\{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_{N-1}\}, \end{aligned} \quad (64)$$

combinando la técnica de LMIs y el criterio de estabilidad de Lyapunov-Krasovskii para SLR. El sistema linealizado (65) es estable, independientemente de los retardos generados por las líneas de transmisión, lo cual proporciona robustez ante la magnitud de los retardos al estabilizar localmente (57). Esta ley de control (63) evita el uso de predictores o de alguna técnica de aproximación, como las mencionadas en la Sección I, ya que usa solo información local de las variables de cada generador.

Linealizando (57) alrededor del punto de operación  $(\delta^*, \omega_s, E_{q_i}^*)$ , para  $i = 1, \dots, N - 1$ , el sistema resultante es

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i,1} &= x_{i,2} \\ \dot{x}_{i,2} &= p_i x_{i,1} - a_i x_{i,2} + q_i x_{i,3} + \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} s_{ij} x_{j,1}(t - \sigma_{ij}) \\ \dot{x}_{i,3} &= r_i x_{i,1} - e_i x_{i,3} + \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} d_i B_{ij} x_{j,3}(t - \sigma_{ij}) + u_i \end{aligned} \quad (65)$$

con  $\mathbf{x}_i(\mathbf{t}) = [x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}]^T = [\delta_i, \omega_i, E'_{q_i}]^T$ , donde

$$\begin{aligned} p_i &= -c_i E'_{q_i} \left[ \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} (E'_{q_j} B_{ij}) + B_{iN} \cos(\delta^*) \right] \\ q_i &= -c_i B_{iN} \text{sen}(\delta^*) \\ r_i &= -d_i B_{iN} \text{sen}(\delta^*) \\ s_{ij} &= c_i E'_{q_j} E'_{q_i} B_{ij}, \text{ para } j = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Claramente, el sistema linealizado en lazo abierto (65) tiene la forma

$$\dot{\mathbf{x}}_i(\mathbf{t}) = \mathbf{A}_{0,i} \mathbf{x}_i(\mathbf{t}) + \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} \mathbf{A}_{i,j} \mathbf{x}_j(\mathbf{t} - \sigma_{ij}) + \mathbf{B}_i u_i(t). \quad (66)$$

$$\text{donde } \mathbf{A}_{0,i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ p_i & -a_i & q_i \\ r_i & 0 & -e_i \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s_{i,j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_i B_{i,j} \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Note que debido a la suposición (i) el  $i$ -ésimo generador no se considera en el modelo. Tomando en cuenta las suposiciones (i) y (ii) establecidas en la Sección IV.1.2, el sistema completo está dado por

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \sum_{j=1}^{\varrho} \mathbf{A}_j \mathbf{x}(\mathbf{t} - \sigma_j) + \mathbf{B} \mathbf{u}(\mathbf{t}), \quad (67)$$

donde el número de retardos es  $\varrho = \frac{(N-2)(N-1)}{2}$ ,  $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = [\mathbf{x}_1(\mathbf{t})^T \mathbf{x}_2(\mathbf{t})^T \dots \mathbf{x}_{N-1}(\mathbf{t})^T]^T$  es el vector de estado instantáneo,  $\mathbf{x}(\mathbf{t} - \sigma_{i,j}) \in \mathbb{R}^{3(N-1)}$  es el vector de estado instantáneo a un tiempo  $t - \sigma_{i,j}$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^{(N-1)}$ ,  $\mathbf{A}_0 = \text{diag} \left[ \mathbf{A}_{0,1}, \mathbf{A}_{0,2}, \dots, \mathbf{A}_{0,N-1} \right] \in \mathbb{R}^{3(N-1) \times 3(N-1)}$ , y  $\mathbf{B} = \text{diag} \{ \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{N-1} \} \in \mathbb{R}^{3(N-1) \times (N-1)}$ .

Por simplicidad de notación, sea  $\sigma_j$  el  $k$ -ésimo elemento de la lista ordenada  $\left[ \sigma_{1,2} \ \sigma_{1,3} \ \dots \ \sigma_{1,(N-1)} \ \sigma_{2,3} \ \sigma_{2,4} \ \dots \ \sigma_{2,(N-1)} \ \dots \ \sigma_{(N-2),(N-1)} \right]$  y sea  $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{3(N-1) \times 3(N-1)}$  la matriz correspondiente al retardo  $\sigma_k$ , con

$$\mathbf{A}_k = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Col. i} & \text{Col. j} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Fila i} \\ \text{Fila j} \end{array} & \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & \dots & \dots & 0_{3 \times 3} \\ & \ddots & & \\ \vdots & 0_{3 \times 3} & \mathbf{A}_{i,j} & \vdots \\ & & \ddots & \\ \vdots & \mathbf{A}_{j,i} & 0_{3 \times 3} & \vdots \\ & & & \ddots \\ 0_{3 \times 3} & \dots & \dots & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Aplicando (63) al sistema (67) el sistema linealizado en lazo cerrado es

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}_0 + \mathbf{BK}]\mathbf{x}(t) + \sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{A}_k \mathbf{x}(t - \sigma_j) \quad (68)$$

con  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times 3(N-1)}$ .

Como se mencionó anteriormente, la metodología propuesta para la síntesis de controladores de SPI en este capítulo se basa en el criterio de Lyapunov-Krasovskii para SLR, visto en la Sección II.1.2, y en el enfoque de LMIs. Algunos conceptos importantes para entender este último tema se explican a continuación.

## IV.2.1 Formulación en LMIs de los objetivos de ubicación de polos

Es bien conocido que la estabilidad y el comportamiento transitorio de un sistema lineal están estrechamente relacionados con la ubicación de sus polos.

Una región convexa se puede representar por LMIs, en consecuencia, si la ubicación de polos deseada se restringe a una región de este tipo se pueden usar estas desigualdades para obtener una ley de control lineal (Chilali *et al.*, 1999). El enfoque de LMIs consiste en expresar cada especificación u objetivo de control como una restricción adicional tal que el sistema continúe siendo estable. Enseguida se establecen algunas definiciones necesarias para comprender la síntesis de controladores basados en LMIs.

**Definición 7** (Chilali *et al.*, 1999) **Región LMI.** *Un subconjunto  $\mathcal{D}$  del plano complejo que puede definirse como*

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{z} \in \mathbf{C} : \mathbf{f}_{\mathcal{D}}(\mathbf{z}) = \mathbf{L} + \mathbf{z}\mathbf{M} + \bar{\mathbf{z}}\mathbf{M}^T < 0\}$$

*se llama región LMI.  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{M}$  son matrices reales y  $\mathbf{L}^T = \mathbf{L}$ .*

**Definición 8** (Chilali *et al.*, 1999) **Un sistema  $\mathcal{D}$ -estable.** *Sea  $\mathcal{D}$  una región del semiplano izquierdo. Un sistema dinámico descrito por:  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  es llamado  $\mathcal{D}$ -estable si todos sus polos se ubican en  $\mathcal{D}$ . Por extensión,  $\mathbf{A}$  es llamada  $\mathcal{D}$ -estable si existe una matriz simétrica  $\mathbf{P} > 0$  tal que*

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}}(\mathbf{A}, \mathbf{P}) := \mathbf{L} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{M} \otimes \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{M}^T \otimes \mathbf{P}\mathbf{A}^T < 0$$

*donde  $\otimes$  se usa para representar el producto Kronecker de matrices.*



**Definición 9** (Chilali et al., 1999) Dadas dos regiones LMI  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  es ambos  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  estable si y solo si existe una matriz simétrica definida positiva  $\mathbf{P}$  tal que  $\mathbf{M}_{\mathcal{D}_1} < 0$  y  $\mathbf{M}_{\mathcal{D}_2} < 0$ .

Algunos ejemplos de regiones LMI y las desigualdades que representan las restricciones de la ubicación de polos, tomadas de Chilali *et al.* (1999), se muestran en la Tabla III. Una región en el plano complejo se puede describir por la intersección de varias regiones LMI, de acuerdo con la Definición 9. Regiones LMI más sofisticadas se pueden encontrar en Chilali *et al.* (1999).

Enseguida, se investiga la existencia de un control por retroalimentación descentralizado para el sistema (57) tal que la linealización del sistema en lazo cerrado cumpla las condiciones de la Proposición 2, para el SPI.

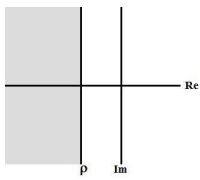
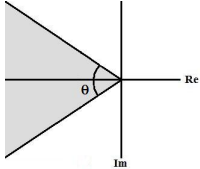
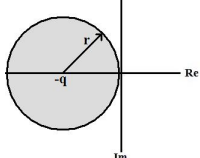
**Proposición 5** El origen del sistema (67) es asintóticamente estable con el control por retroalimentación de estado

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{K}\mathbf{x}(\mathbf{t})$$

con  $\mathbf{K}$  definida como en (64), si existen matrices simétricas reales  $\mathbf{Q}, \bar{\mathbf{S}}_1, \dots, \bar{\mathbf{S}}_e$  definidas positivas, una matriz rectangular  $\mathbf{Y} = \mathbf{K}\mathbf{Q}$ , y

$$\Pi_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0\mathbf{Q} + \mathbf{B}\mathbf{Y} + \mathbf{Q}\mathbf{A}_0^T + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T + \sum_{i=1}^e \bar{\mathbf{S}}_i & \mathbf{A}_1\mathbf{Q} & \mathbf{A}_2\mathbf{Q} & \dots & \mathbf{A}_e\mathbf{Q} \\ & \mathbf{Q}\mathbf{A}_1^T & -\bar{\mathbf{S}}_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \mathbf{Q}\mathbf{A}_2^T & 0 & -\bar{\mathbf{S}}_2 & \dots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \mathbf{Q}\mathbf{A}_e^T & 0 & 0 & \dots & -\bar{\mathbf{S}}_e \end{bmatrix} < 0. \quad (69)$$

Tabla III. Ejemplo de regiones LMI

	<p><b>Semiplano izquierdo delimitado por una línea vertical <math>-\rho</math>, es decir, <math>Re(z) &lt; -\rho</math>.</b></p> $\mathbf{f}_{\mathcal{D}} = \mathbf{z} + \bar{\mathbf{z}} + 2\rho \quad (70)$
	<p><b>Sector cónico con vértice en el origen y ángulo interno <math>0 &lt; \theta &lt; \frac{\pi}{2}</math>.</b></p> $\mathbf{f}_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} \text{sen}\theta(z + \bar{z}) & \text{cos}\theta(z - \bar{z}) \\ \text{cos}\theta(\bar{z} - z) & \text{sen}\theta(z + \bar{z}) \end{bmatrix} \quad (71)$ <p>El sector cónico proporciona un factor de amortiguamiento mínimo <math>\xi = \text{sen}(\theta)</math>.</p>
	<p><b>Disco centrado en <math>(-q, 0)</math> con radio <math>r</math>.</b></p> $\mathbf{f}_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} -r & z + q \\ \bar{z} + q & -r \end{bmatrix} \quad (72)$ <p>El disco proporciona una frecuencia natural máxima <math>\omega_n = r</math>.</p>

**Prueba.** Considere la ecuación (12) y el sistema (68).

$$\mathbf{\Pi}_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}[\mathbf{A}_0 + \mathbf{BK}] + [\mathbf{A}_0 + \mathbf{BK}]^T \mathbf{P} + \sum_{i=1}^{\mathbf{e}} \mathbf{S}_i & \mathbf{P}\mathbf{A}_1 & \mathbf{P}\mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{P}\mathbf{A}_{\mathbf{e}} \\ \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} & -\mathbf{S}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P} & 0 & -\mathbf{S}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{\mathbf{e}}^T \mathbf{P} & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{S}_{\mathbf{e}} \end{bmatrix} < 0, \quad (73)$$

sin embargo, (73) no es una desigualdad lineal matricial en las variables de decisión  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{K}$  ya que los términos  $\mathbf{PBK}$  y  $\mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P}$  son no lineales. Pre-multiplicando y

post-multiplicando (73) por  $(\mathbf{P}^{-1})^T$  y  $\mathbf{P}^{-1}$ , respectivamente, se obtiene

$$\mathbf{\Pi}_\rho = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{P}^{-1} + & & & & & \\ \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_0^T + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{K}^T\mathbf{B}^T + \sum_{i=1}^{\rho} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}_i\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{A}_1\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{A}_2\mathbf{P}^{-1} & \dots & \mathbf{A}_\rho\mathbf{P}^{-1} & \\ & \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_1^T & -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}_1\mathbf{P}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ & \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_2^T & 0 & -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}_2\mathbf{P}^{-1} & \dots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_\rho^T & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}_\rho\mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

Aplicando el cambio de variables  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$ ,  $\mathbf{Y} = \mathbf{K}\mathbf{Q}$  y  $\bar{\mathbf{S}}_i = \mathbf{Q}\mathbf{S}_i\mathbf{Q}$ ,

$$\mathbf{\Pi}_\rho = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0\mathbf{Q} + \mathbf{B}\mathbf{Y} + \mathbf{Q}\mathbf{A}_0^T + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T + \sum_{i=1}^{\rho} \bar{\mathbf{S}}_i & \mathbf{A}_1\mathbf{Q} & \mathbf{A}_2\mathbf{Q} & \dots & \mathbf{A}_\rho\mathbf{Q} \\ & \mathbf{Q}\mathbf{A}_1^T & -\bar{\mathbf{S}}_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \mathbf{Q}\mathbf{A}_2^T & 0 & -\bar{\mathbf{S}}_2 & \dots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \mathbf{Q}\mathbf{A}_\rho^T & 0 & 0 & \dots & -\bar{\mathbf{S}}_\rho \end{bmatrix} < 0. \quad \blacksquare$$

## IV.2.2 Metodología

**Paso 1.** Linealizar el sistema (57) alrededor del punto de operación  $(\delta^*, \omega_s, E'_{q_i}^*)$ , para  $i = 1, \dots, N - 1$ . El sistema linealizado resultante es (67).

**Paso 2.** Revisar las desigualdades de la Proposición 5 y de las restricciones de la ubicación de polos deseada para el sistema linealizado en lazo cerrado (68) (desigualdades (70), (71) y (72)) usando un programa para LMIs. Las desigualdades (70), (71), y (72) se utilizan, de acuerdo con los objetivos deseados de control del problema, definiendo

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}_0\mathbf{Q} + \mathbf{B}\mathbf{Y} \text{ y } \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{Q}\mathbf{A}_0^T + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T.$$

**Paso 3.** El origen del sistema (68) es estable independiente del retardo aplicando un control descentralizado  $\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{K}\mathbf{x}(\mathbf{t})$  con  $\mathbf{K} = \mathbf{Y}\mathbf{Q}^{-1}$ , donde  $\mathbf{K}$  tiene la estructura definida en (64). El controlador estabiliza el sistema independientemente de los retardos de las líneas de transmisión si las condiciones son realizables.

**Paso 4.** El punto de equilibrio  $(\delta^*, \omega_s, E'_{qi})$  del sistema (57) es localmente estable, robusto con respecto a los retardos  $\sigma_{ij}$  con un control descentralizado  $\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{K}(\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}^*)$ .

### IV.2.3 Resultados de simulación

El popular sistema WSCC, mostrado en la Fig. 5, que consta de 3 máquinas y 9 buses, se considera para ilustrar la metodología propuesta<sup>1</sup>. La red consiste de 3 generadores modelados cada uno por (57) y el generador 3 se toma como referencia, por lo que  $E'_{q3} = \text{constante} = 1\angle 0^\circ$  (N=3). En cada subsistema la entrada de control es  $u_i = \frac{E'_{fi}}{T'_{di}}$ . Los parámetros del sistema, tomados de Sauer & Pai (1998), se muestran en la Tabla IV.

Linealizando (57) alrededor del punto de equilibrio  $(\delta^* = 0.5236, \omega_s = 377, E'_{q1} = 1.03, \bar{u}_1 = -0.4498, )$ , y  $(\delta^* = 0.5236, \omega_s = 377, E'_{q2} = 1.01, \bar{u}_2 = -0.7659)$  el sistema está dado por

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(\mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma}_1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad (74)$$

con matrices

---

<sup>1</sup>Tomado de Sauer & Pai (1998) con ligeras modificaciones.

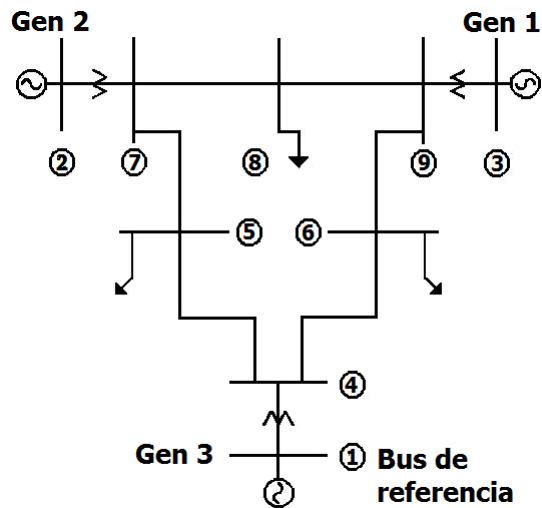


Figura 5. WSCC. Sistema de 3 máquinas, 9 buses

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -145.7805 & -0.3906 & -33.1790 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.14569430897694 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -308.7264 & -0.4983 & -71.2356 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2185 & 0 & -0.1698 & 0 \end{bmatrix}$$

Tabla IV. Parámetros, descripción y valores.

NOTACIÓN	DESCRIPCIÓN	VALORES	
		Máq. 1	Máq. 2
$X_{di}$	Reactancias síncronas del eje directo.*	0.8958	1.3125
$X'_{di}$	Reactancias transitorias del eje directo.*	0.1198	0.1813
$D_i$	Factor de amortiguamiento.*	5	3
$H_i$	Constante de inercia, en segundos.	6.4	3.01
$T'_{di}$	Constante de tiempo de corto circuito transitorio del eje directo, en segundos.	6.0	5.89
$\omega_s$	Velocidad de la máquina síncrona, en rad/s.	$120\pi$	$120\pi$
$B$	La matriz (simétrica) de susceptancias reducida a nodos internos*	$\begin{bmatrix} -5.114 & 2.826 & 2.253 \\ 2.826 & -5.023 & 2.275 \\ 2.253 & 2.275 & -4.695 \end{bmatrix}$	

\* Todos los parámetros están en el sistema por unidad.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 86.5889 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3655 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 184.1093 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5428 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

El objetivo de control para este ejemplo es ubicar los polos en lazo cerrado dentro de la región delimitada por la línea vertical en el semiplano izquierdo  $-\rho = -30$ , un círculo con centro en el origen y radio  $r = 120$  y un sector cónico con  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , como se muestra en la Figura 6.

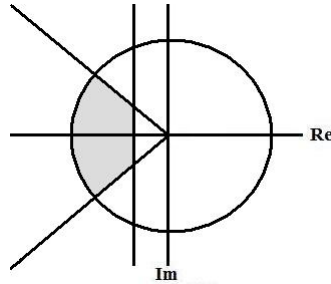


Figura 6. Región deseada para el sistema en lazo cerrado.

Las desigualdades (70), (71), (72), (69) con los valores indicados para  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $q$  y  $r$ , se probaron usando el programa para LMIs de Matlab<sup>©</sup> Ver. 7.8.0.347. Las matrices resultantes son:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 102.3397 \times 10^{-3} & -3.2080 & -2.8025 & 0 & 0 & 0 \\ -3.2080 & 120.2756 & 133.8884 & 0 & 0 & 0 \\ -2.8025 & 133.8884 & 205.4848 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 165.4135 \times 10^{-3} & -5.2241 & -2.4381 \\ 0 & 0 & 0 & -5.2241 & 208.9869 & 131.8814 \\ 0 & 0 & 0 & -2.4381 & 131.8814 & 119.6255 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 23.4927 \times 10^{-3} & -3.4080 & -10.7309 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13.4223 \times 10^{-3} & -4.2793 & -7.8712 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4284.0056 & 287.6751 & -181.2356 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1948.9612 & 146.8901 & -188.0160 \end{bmatrix}$$

El controlador tiene la forma deseada (63)

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 4284.0056(\delta_1(t) - \delta^*) + 287.6751(\omega(t) - \omega_s) - 181.2356(E_{q_1}(t) - E_{q_1}^*) \\ u_2(t) &= 1948.9612(\delta_2(t) - \delta^*) + 146.8901(\omega(t) - \omega_s) - 188.0160(E_{q_2}(t) - E_{q_2}^*) \end{aligned}$$

y se probó en el sistema (57) usando las siguientes condiciones iniciales: ( $\delta_1 = 0.45$ ,  $\omega_1 = 376$ ,  $E'_{q_1} = 0.9$ ) y ( $\delta_2 = 0.5$ ,  $\omega_2 = 377.5$ ,  $E'_{q_2} = 1.1$ ). En la Fig. 7 se muestra que la estabilidad se mantiene para retardos de 0.7 s, el cual es grande para una red de sistemas de potencia. El sistema continúa siendo estable para retardos de mayor magnitud. La estabilidad local del sistema (57) bajo los retardos de la línea de transmisión y la existencia de un controlador por retroalimentación de estado descentralizado se garantizan mediante la condición suficiente de estabilidad de la Proposición 2 y la realización de las LMIs en la región de ubicación de polos deseada. Las entradas de control  $u_1$  y  $u_2$  se saturan mediante la función  $u_{sat} = u_{max} \text{sat}\left(\frac{u}{u_{max}}\right)$  para  $u_{max} = 30$ .

### IV.3 Control centralizado

Las oscilaciones de uno o más generadores en un área con respecto al resto del sistema se pueden disminuir con métodos tradicionales como los controladores descentralizados. Sin embargo, dichos controladores son insuficientes para atenuar las oscilaciones entre dos o más áreas, lo cual es una de las principales restricciones en la transmisión de



potencia (Chang & Xu, 2007).

Diferentes enfoques se han propuesto en la literatura para solucionar este problema, ver Klein *et al.* (1991); Roman Messina (2009) y referencias incluidas. Una interesante alternativa es el uso de un control centralizado utilizando la información de medición remota dada por los WAMS. Varias contribuciones reportan mejoras significativas utilizando esta tecnología (ver por ejemplo Snyder *et al.* (2000); Kamwa *et al.* (2001); Chaudhuri *et al.* (2004); Okou *et al.* (2005); Dou *et al.* (2007); Zabaïou *et al.* (2008)). Sin embargo, un control centralizado clásico implica el uso de términos no disponibles debido al retardo inherente al enlace de comunicación. Enseguida se propone un controlador de la forma (60), el cual emplea los términos retrasados, evitando así problemas de causalidad.

### IV.3.1 Sistema linealizado

En la sección anterior se vió que linealizando (57) alrededor del punto de operación  $(\delta^*, \omega_s, E_{q_i}^{'*})$ , para  $i = 1, \dots, N - 1$  se obtiene el sistema linealizado en lazo abierto (67) y que el par  $(\mathbf{A}_0, \mathbf{B})$  es controlable. Considerando una entrada de control de la forma (60) se obtiene el sistema en lazo cerrado

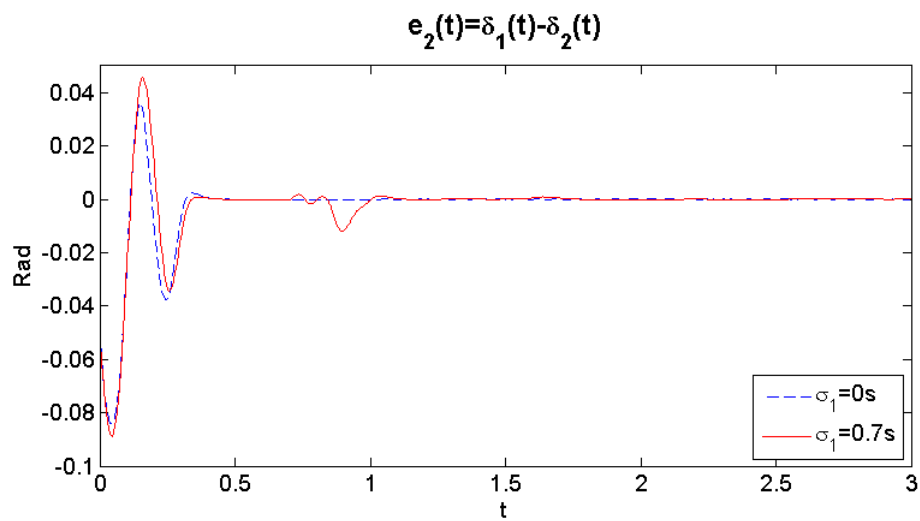
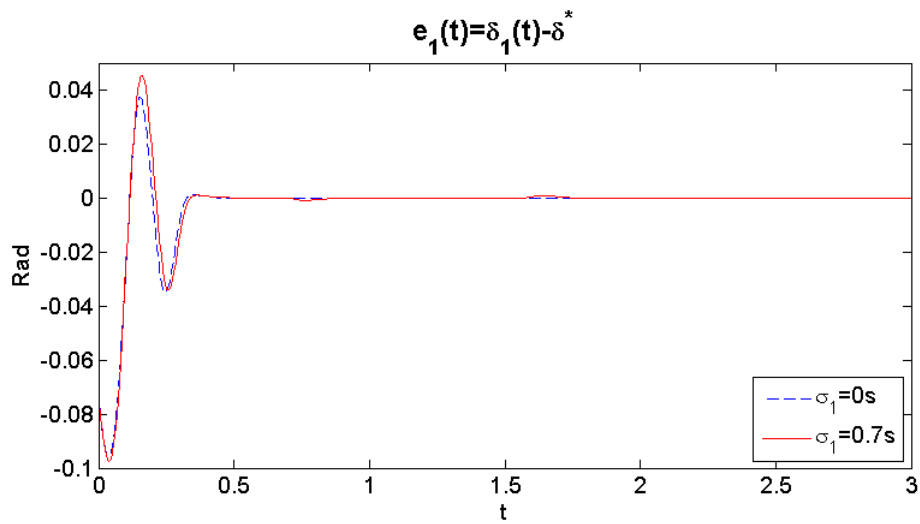


Figura 7. Resultados de simulación de las ecuaciones de error.

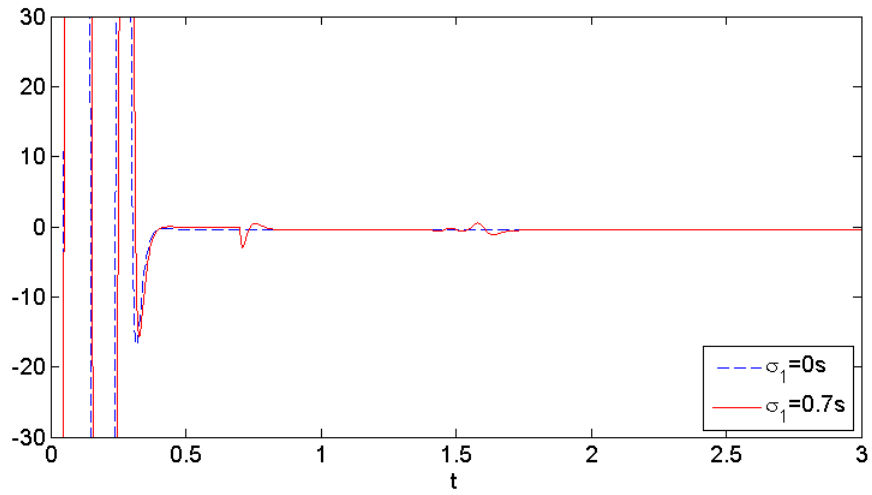
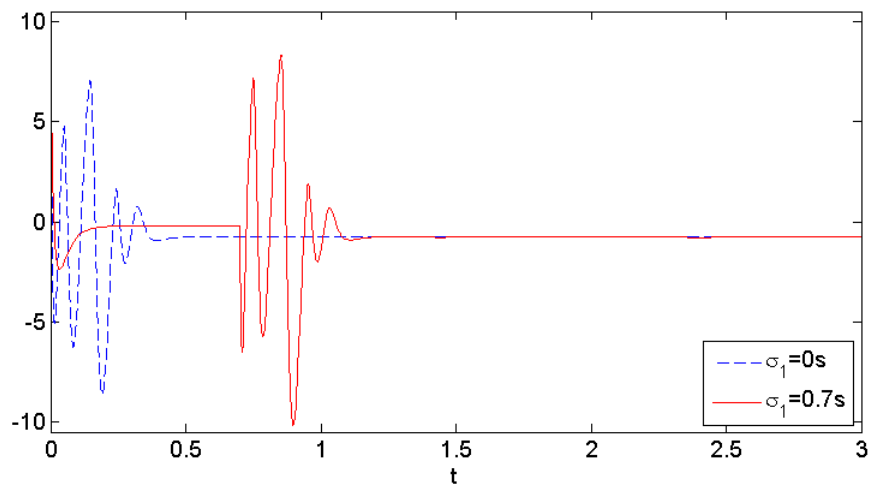
(a) Entrada de control  $u_1(t)$ (b) Entrada de control  $u_2(t)$ 

Figura 8. Entradas de control.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}_0 + \mathbf{BK}_0]\mathbf{x}(t) + \sum_{j=1}^{\varrho} \mathbf{A}_j \mathbf{x}(t - \sigma_j) + \mathbf{BK}_1 \mathbf{x}(t - \tau), \quad (75)$$

donde  $\mathbf{K}_{i,1} = \begin{bmatrix} k_{i,1} & k_{i,2} & k_{i,3} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{K}_{i,j,1} = \begin{bmatrix} k_{i,j,1} & k_{i,j,2} & k_{i,j,3} \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1 \in \mathbb{R}^{(N-1) \times 3(N-1)}$ , con

$$\mathbf{K}_0 = \text{diag}\{\mathbf{K}_{1,1}, \mathbf{K}_{2,1}, \dots, \mathbf{K}_{N-1,1}\},$$

y

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 3} & \mathbf{K}_{1,2,1} & \mathbf{K}_{1,3,1} & \dots & \mathbf{K}_{1,N-1,1} \\ \mathbf{K}_{2,1,1} & 0_{1 \times 3} & \mathbf{K}_{2,3,1} & \dots & \mathbf{K}_{2,N-1,1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ \mathbf{K}_{N-2,1,1} & \mathbf{K}_{N-2,2,1} & \mathbf{K}_{N-2,3,1} & 0_{1 \times 3} & \mathbf{K}_{N-2,N-1,1} \\ \mathbf{K}_{N-1,1,1} & \mathbf{K}_{N-1,2,1} & \dots & \mathbf{K}_{N-1,N-2,1} & 0_{1 \times 3} \end{bmatrix}.$$

**Proposición 6** *El origen del sistema de potencia (67) es asintóticamente estable con un controlador centralizado de la forma (60) para cualquier valor de retardos fijos  $\sigma_j$  y  $\tau$  si existen matrices reales simétricas  $\mathbf{Q}$ ,  $\bar{\mathbf{S}}_i$  definidas positivas, con  $i = 1, \dots, \varrho + 1$ , y matrices rectangulares  $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{BK}_0$ ,  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{BK}_1$ , tales que*

$$\mathbf{Q} > 0;$$

$$\bar{\mathbf{S}}_i > 0;$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0\mathbf{Q} + \mathbf{B}\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Q}\mathbf{A}_0^T + \mathbf{Y}_0^T\mathbf{B}^T + \sum_{i=1}^{\varrho+1} \bar{\mathbf{S}}_i \mathbf{A}_1\mathbf{Q} \dots \mathbf{A}_\varrho\mathbf{Q} & \mathbf{B}\mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Q}\mathbf{A}_1^T & -\bar{\mathbf{S}}_1 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \vdots & 0 \ \ddots \ 0 \\ \mathbf{Q}\mathbf{A}_\varrho^T & 0 \ 0 \ -\bar{\mathbf{S}}_\varrho \ 0 \\ \mathbf{Y}_1^T\mathbf{B}^T & 0 \ \dots \ 0 \ -\bar{\mathbf{S}}_{\varrho+1} \end{bmatrix} < 0. \quad (76)$$

**Prueba.** La Proposición 2 proporciona una condición suficiente para asegurar la estabilidad de (67) independientemente de la magnitud del retardo. Entonces solo resta comprobar la desigualdad (76) para el sistema en lazo cerrado.

Considere el sistema (75) y la Proposición 2.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}[\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}\mathbf{K}_0] + [\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}\mathbf{K}_0]^T\mathbf{P} + \sum_{i=1}^{\varrho+1} \mathbf{S}_i \mathbf{P}\mathbf{A}_1\mathbf{P}\mathbf{A}_2 \dots \mathbf{P}\mathbf{A}_\varrho\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K}_1 \\ \mathbf{A}_1^T\mathbf{P} & -\mathbf{S}_1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \\ \mathbf{A}_2^T\mathbf{P} & 0 \ -\mathbf{S}_2 \ \dots \ 0 \ 0 \\ \vdots & \vdots \ \vdots \ \ddots \ \vdots \ \vdots \\ \mathbf{A}_\varrho^T\mathbf{P} & 0 \ 0 \ \dots \ -\mathbf{S}_\varrho \ 0 \\ [\mathbf{B}\mathbf{K}_1]^T\mathbf{P} & 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ -\mathbf{S}_{\varrho+1} \end{bmatrix} < 0.$$

Sin embargo, esta matriz no es una LMI en las variables de decisión  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{K}_0$  y  $\mathbf{K}_1$ , debido a los términos  $\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K}_0$  y  $\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K}_1$ . Premultiplicando y postmultiplicando por  $[\mathbf{P}^{-1}]^T$  y  $\mathbf{P}^{-1}$  respectivamente y aplicando el cambio de variables  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$ ,  $\bar{\mathbf{S}}_i = \mathbf{Q}\mathbf{S}_i\mathbf{Q}$ ,

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{B}\mathbf{K}_0 \text{ y } \mathbf{Y}_1 = \mathbf{B}\mathbf{K}_1.$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0\mathbf{Q} + \mathbf{B}\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Q}\mathbf{A}_0^T + \mathbf{Y}_0^T\mathbf{B}^T + \sum_{i=1}^{\varrho+1} \bar{\mathbf{S}}_i \mathbf{A}_1\mathbf{Q} \dots \mathbf{A}_\varrho\mathbf{Q} & \mathbf{B}\mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Q}\mathbf{A}_1^T & -\bar{\mathbf{S}}_1 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \vdots & 0 \ \ddots \ 0 \\ \mathbf{Q}\mathbf{A}_\varrho^T & 0 \ 0 \ -\bar{\mathbf{S}}_\varrho \ 0 \\ \mathbf{Y}_1^T\mathbf{B}^T & 0 \ \dots \ 0 \ -\bar{\mathbf{S}}_{\varrho+1} \end{bmatrix} < 0. \quad \blacksquare$$

### IV.3.2 Metodología

El procedimiento es similar al del control descentralizado. Después de linealizar (57) alrededor del punto de operación  $(\delta^*, \omega_s, E'_{qi^*})$ , para  $i = 1, \dots, N$  se llega al sistema (65). Entonces se procede a plantear el problema como un sistema de LMIs de acuerdo a los objetivos de control (ver Tabla III) con base en la Proposición 2.

Se define  $\mathbf{z} = \mathbf{A}_0\mathbf{Q} + \mathbf{B}\mathbf{Y}_0$  y  $\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{Q}\mathbf{A}_0^T + \mathbf{Y}_0^T\mathbf{B}^T$  para aplicar las desigualdades (70), (71) y (72) al sistema (75).

El sistema (75) es estable independiente de la magnitud del retardo aplicando el controlador  $\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{K}_0\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{K}_1\mathbf{x}(\mathbf{t} - \tau)$  con  $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Y}_0\mathbf{Q}^{-1}$  y  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{Y}_1\mathbf{Q}^{-1}$  si las condiciones en las LMIs se cumplen y por lo tanto, el sistema (57) es localmente estable, robusto con respecto a los retardos  $\sigma_j$  y  $\tau$ , aplicando el control centralizado  $\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{K}_0(\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}^*) + \mathbf{K}_1(\mathbf{x}(\mathbf{t} - \tau) - \mathbf{x}^*)$ .

### IV.3.3 Caso de estudio

Se continúa con el ejemplo de la Sección IV.2.3, ahora para ilustrar la viabilidad de la ley de control (60). En este caso, los objetivos de control deseado son polos menores a 10, un factor de amortiguamiento menor a  $\xi = \sin(\frac{\pi}{4})$  y una frecuencia natural máxima de  $\omega_n = 100$ , por lo que los polos están delimitados por  $\rho = 10$ , un sector cónico con  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , y un disco de radio  $r = 100$  centrado en el origen.

Probando las desigualdades de la Proposición 6 y de las restricciones de la ubicación de polos deseada (ver Tabla III) para el sistema linealizado en lazo cerrado las condiciones son realizables. El controlador estabiliza el sistema independientemente de los retardos con matrices:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} 932.8488 \times 10^{-3} & -11.4883 & -7.0591 & 0 & 0 & 0 \\ -11.4883 & 210.2686 & 174.8647 & 0 & 0 & 0 \\ -7.0591 & 174.8647 & 203.9146 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5304 & -17.6764 & -8.3888 \\ 0 & 0 & 0 & -17.6764 & 330.9190 & 186.6700 \\ 0 & 0 & 0 & -8.3888 & 186.6700 & 137.7677 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \\
 \mathbf{Y}_0 &= \begin{bmatrix} -14.0409 \times 10^{-3} & -2.5602 & -8.6585 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.6810 \times 10^{-3} & -3.8276 & -6.7019 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{Y}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 932.8488 \times 10^{-3} & -11.4883 & 210.2686 \\ -7.0591 & 174.8647 & 203.9146 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \\
 \mathbf{K}_0 &= \begin{bmatrix} 626.7850 & 137.1344 & -138.3616 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 29.9682 & 69.7829 & -141.3746 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -20.1254 & -5.4288 & 7.6566 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La entrada de control

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 626.7850(\delta_1(t) - \delta_1^*) + 137.1344(\omega_1(t) - \omega^*) - 138.3616(E_{q_1}(t) - E_{q_1}^*) \\ &\quad - 20.1254(\delta_2(t - \tau) - \delta_2^*) - 5.4288(\omega_2(t - \tau) - \omega_2^*) + 7.6566(E_{q_2}(t - \tau) - E_{q_2}^*) \\ u_2(t) &= 29.9682(\delta_2(t) - \delta_2^*) + 69.7829(\omega_2(t) - \omega^*) - 141.3746(E_{q_2}(t) - E_{q_2}^*) \\ &\quad + (E_{q_1}(t - \tau) - E_{q_1}^*) \end{aligned}$$

fue probada en el sistema (57) con las condiciones iniciales:  $(\delta_1 = 0.5, \omega_1 = 375.5, E'_{q_1} = 0.9)$  y  $(\delta_2 = 0.6, \omega_2 = 376, E'_{q_2} = 1)$ .

Note que las condiciones se aplican a  $\mathbf{A}_0 + \mathbf{BK}_0$  y no al sistema completo. Esto asegura que las LMIs de la Proposición 6 se cumplan para valores de ganancia del controlador que ubiquen los polos lejos del eje imaginario. Los cálculos en este trabajo se realizaron con la herramienta para LMIs de Matlab<sup>©</sup> Ver. 7.8.0.347.

Los resultados se muestran en las Figuras 9 y 10 donde el retardo de interconexión se mantiene en  $\sigma_1 = 20ms$  y el sistema es estable para retardos hasta de  $\tau = 1s$ . La estabilidad local del sistema no lineal bajo los retardos de la línea de transmisión y de los WAMS se garantiza al cumplirse la condición suficiente dada en la Proposición 6 y a que las condiciones de LMIs de la región deseada de polos son realizables.

Las entradas de control  $u_1$  y  $u_2$  se saturan mediante la función  $u_{sat} = u_{max} \text{sat}\left(\frac{u}{u_{max}}\right)$  para  $u_{max} = 10$ .

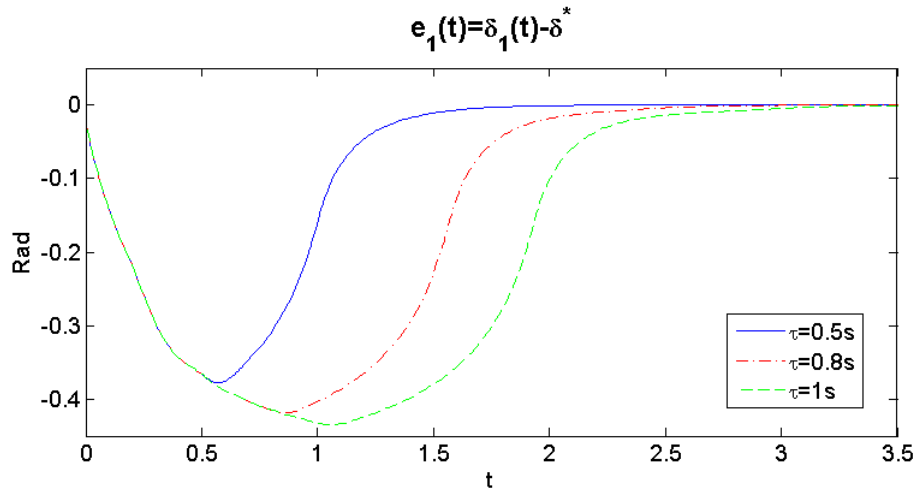


## IV.4 Conclusiones del capítulo

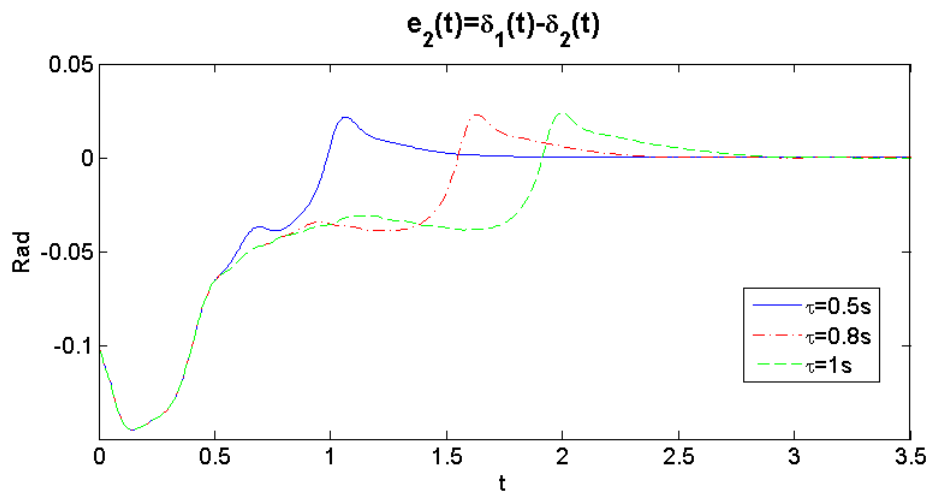
Se derivaron condiciones suficientes para la sincronización maestro-esclavo de SPI modelados con retardos inducidos por la longitud de las líneas de transmisión y por el uso de WAMS. El procedimiento de síntesis de los controladores se desarrolla empleando técnicas de linealización, el criterio de estabilidad de Lyapunov-Krasovskii para sistemas con retardos y el enfoque de LMIs. El sistema de potencia linealizado es estable independientemente de la magnitud de los retardos, por lo que el sistema no lineal es localmente estable y robusto ante los retardos.

Se mostró que un controlador descentralizado es capaz de estabilizar la red de sistemas de potencia, a pesar del retardo en las líneas de transmisión. Además se desarrolló un controlador centralizado, que al utilizar las variables retrasadas de los otros generadores no tiene problemas de causalidad y no se requiere el uso de predictores de estado.

Las condiciones de estabilidad son fáciles de verificar utilizando un programa especializado para LMIs. En ambos casos, tanto para el control centralizado como para el descentralizado, los parámetros del controlador se calculan automáticamente si las condiciones planteadas en las LMIs son realizables.

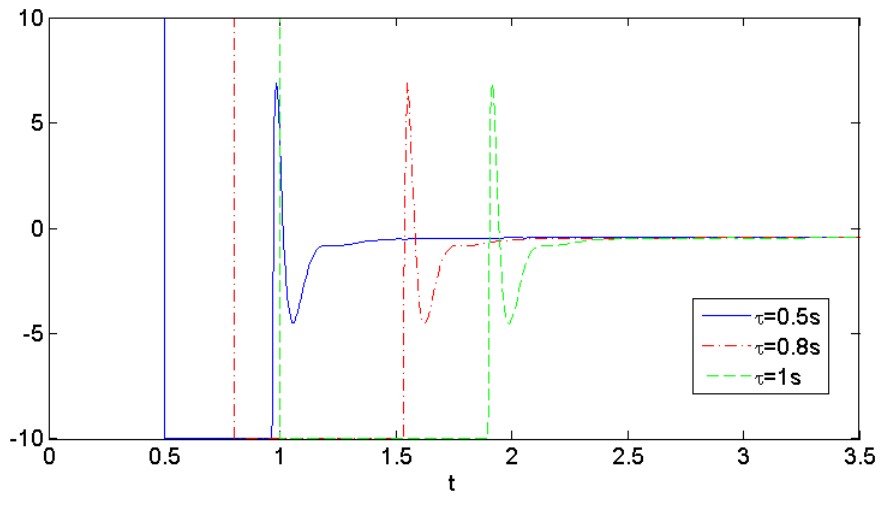


(a) Error de seguimiento

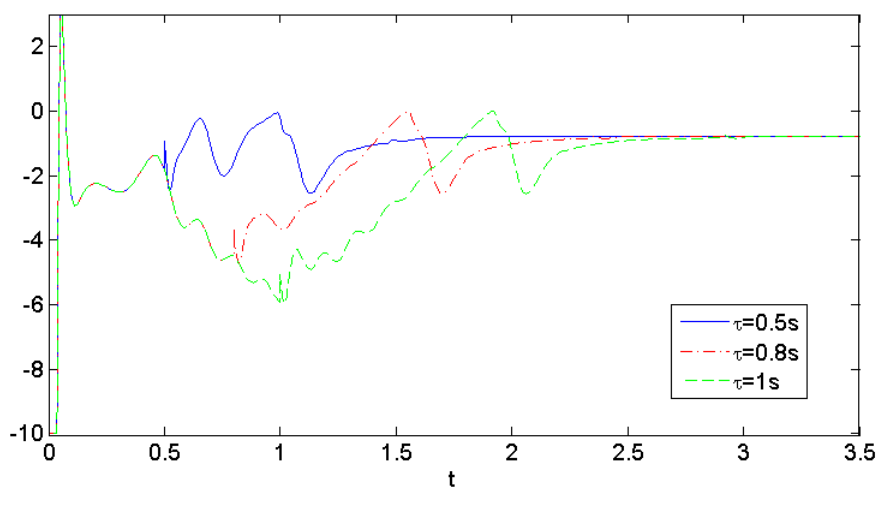


(b) Error de sincronización

Figura 9. Errores de seguimiento y sincronización para  $\sigma_1 = 20ms$  y diferentes valores de  $\tau$ .



(a) Entrada de control  $u_1(t)$



(b) Entrada de control  $u_2(t)$

Figura 10. Entradas de control.

## Capítulo V

# CONCLUSIONES GENERALES

### V.1 Aportaciones principales

Las aportaciones de este trabajo de tesis son las siguientes:

- Se dan condiciones necesarias y suficientes para eliminar retardos de un SLR mediante una transformación bicausal. Esto permite simplificar el análisis, control, y simulación numérica de los mismos. Estos resultados permiten detectar sistemas falsamente retardados debido a errores de modelado o a la elección de variables de estado.
- Se brinda un método sistemático para encontrar una transformación bicausal para reducir retardos en sistemas lineales, lo cual amplía las herramientas que se pueden aplicar en el análisis y síntesis de controladores, ya que existen varios resultados para sistemas con unos cuantos retardos.
- El uso de ecuaciones de error con retardos para NCSs permite establecer condiciones suficientes para la sincronización maestro-esclavo en esta clase de sistemas que presentan retardos en el canal de comunicación y eventualmente en las interconexiones físicas. Esta es una solución causal así que no es necesario el uso de predictores o alguna técnica de aproximación para reconstruir vectores de estado

retardados.

- Se dan condiciones suficientes para la estabilidad robusta, respecto a los retardos, en sistemas de potencia interconectados modelados con retardo en las interconexiones físicas (inducido por la longitud de las líneas de transmisión) y eventualmente en el canal de comunicación cuando se usan WAMS. La metodología propuesta se basa en técnicas de linealización, mediante LMIs y el método de Lyapunov-Krasovskii para estabilidad independiente del retardo en el sistema linealizado. Aunque recientemente se han reportado muchos trabajos sobre WAMS, en la literatura son pocos los que consideran el retardo, o únicamente analizan su impacto en el sistema sin brindar un procedimiento de diseño del controlador, así que esta tesis brinda una propuesta en un campo de investigación actual y poco explorado.

## V.2 Trabajo futuro

- Buscar un procedimiento alternativo para la reducción de retardos en sistemas lineales, ya que el método actual implica aplicar un algoritmo iterativo de solución de ecuaciones lineales que se incrementa en complejidad con la cantidad de retardos.
- Buscar condiciones para la eliminación y reducción de retardos en sistemas no lineales con retardo utilizando herramientas de control geométrico, tales como el recientemente propuesto corchete extendido de Lie (Califano *et al.*, 2010).

- Los retardos en la sincronización maestro-esclavo son considerados constantes y conmensurables, después de aplicar alguna técnica de almacenamiento de datos. Una alternativa a explorar es considerar los retardos variables.
- Respecto a los NCSs la topología de la red en su estado actual implica comunicación bidireccional de todos los sistemas en red, lo cual puede modificarse para explorar otra clase de sistemas.
- Respecto al uso de WAMS en sistemas de potencia se puede explorar el uso de ecuaciones de error con retardos, despreciando el retardo originado por las líneas de transmisión, el cual es mucho más pequeño que el originado por el uso de WAMS o utilizar funcionales de Lyapunov Krasovskii más complejas, como por ejemplo las propuestas en (Zhang *et al.*, 2011; Kruszewski *et al.*, 2011), para tratar el caso de retardos variables.



## Capítulo VI

# RÉSUMÉ EN FRANÇAIS

### NOTATION

Les notations suivantes sont considérées tout au long de ce travail:

- Étant donné un vecteur  $\mathbf{x}_i(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^n$  et une constante  $\phi \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbf{x}_i(\mathbf{t}) = \left[ x_{i,1}(t) \ x_{i,2}(t) \ \dots \ x_{i,n}(t) \right]^T$ ,  $\mathbf{x}_i(\mathbf{t} - \phi) = \left[ x_{i,1}(t - \phi) \ x_{i,2}(t - \phi) \ \dots \ x_{i,n}(t - \phi) \right]^T$ .
- $\nabla$  est l'opérateur retard:  $\nabla^\phi \mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}(\mathbf{t} - \phi)$ , avec  $\phi \in \mathbb{N}$ .
- $\mathbb{R}[\nabla]$  est l'anneau des polynômes en  $\nabla$  avec des coefficients dans  $\mathbb{R}$ .
- $L_{f_N}^{(k)} h_N(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{1}), \dots, \mathbf{x}_N(\mathbf{t} - \tau))$  avec  $\tau \in \mathbb{R}^+$  définit la k-ième dérivée de Lie répétée de la fonction  $h_N(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{1}), \dots, \mathbf{x}_N(\mathbf{t} - \tau))$  le long du champ de vecteur  $f_N$ , où

$$L_{f_N} h_N(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{1}), \dots, \mathbf{x}_N(\mathbf{t} - \tau)) = \sum_{i=0}^{\tau} \frac{\partial h_N(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{1}), \dots, \mathbf{x}_N(\mathbf{t} - \tau))}{\partial \nabla^i \mathbf{x}(\mathbf{t})} \nabla^i f_N.$$

Par récurrence,

$$L_{f_N}^{(k)} h_N(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{1}), \dots, \mathbf{x}_N(\mathbf{t} - \tau)) = L_{f_N} [L_{f_N}^{(k-1)} h_N(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{1}), \dots, \mathbf{x}_N(\mathbf{t} - \tau))] \quad \forall k \geq 1.$$

- $\deg(\mathbf{T}[\nabla])$  est le degré polynômial de la matrice  $T[\nabla]$ .
- $\sup(\tau_a, \tau_m)$  définit la valeur maximale des constantes  $\tau_a$  et  $\tau_m$ .
- $\mathcal{D}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ .



## VI.1 Introduction générale

Dans cette section introductive, nous présentons dans un premier temps les systèmes à retards et les propriétés inhérentes à cette classe de systèmes. Ensuite, nous ferons le point sur l'état de l'art et la problématique de la thèse. Nous proposerons pour conclure un bref résumé des contributions présentées dans la thèse et la façon dont elles sont liées.

### VI.1.1 Les systèmes à retards

Dans la description mathématique d'un processus physique, on suppose en général que son évolution dépend uniquement de l'état présent. Mais il existe des situations particulières dans lesquelles cette supposition n'est pas satisfaite en raison d'une dépendance d'événements passés, provoquées par des phénomènes de transport (de matière, d'énergie, de l'information), de temps de réaction (des capteurs, des actionneurs, des processus biologiques) et de calcul (Michel, 1994). Ces systèmes sont appelés génériquement systèmes à retards et ils apparaissent naturellement dans une multitude de domaines : chimie, biologie, transports, communications, mécanique, mécanique des fluides, etc. (consulter à ce sujet Azorin *et al.* (2004); Tian (2005); Zhang *et al.* (2005) et les références incluses).

La croissance d'une population est un exemple de cette classe des systèmes, qui se représente dans son modèle le plus simple, par l'équation (Górecki *et al.*, 1989):

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = g(\mathbf{x}(\mathbf{t})) - g(\mathbf{x}(\mathbf{t} - \tau)) \quad (77)$$

où  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$  est le nombre d'individus dans une population au temps  $t$ ,  $g(\mathbf{x}(\mathbf{t}))$  le nombre

de naissances par unité de temps et le retard  $\tau$  le temps moyen de vie des individus. La dynamite est autre exemple, où le temps mort entre le moment d'allumage de la mèche et l'explosion est très utile.

Contrairement aux systèmes sans retards dont l'évolution est déterminée à partir de la valeur de l'état  $x$  à l'instant présent  $t$ , celle des systèmes à retards dépend du surcroît des valeurs passées de l'état. Pour résoudre ce type d'équations, appelées équations différentielles fonctionnelles (FDES, par ses initiales en anglais), l'état ne peut pas être un vecteur  $\mathbf{x}(t)$  défini dans une valeur discrète de temps  $t$ , comme dans le cas d'équations différentielles ordinaires (ODEs, par ses initiales en anglais), mais une fonction  $x_t$  correspondant à chaque instant dans un intervalle de temps passé (Richard, 2003), alors  $x(t) = F(t, x_t)$ . Par exemple, dans le cas de l'équation (77),  $x_t$  est l'état (Gouaisbaut & Peaucelle, 2006) :

$$x_t(\cdot) = \begin{cases} [-\tau, t] & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \theta & \mapsto x_t(\theta) = x(t + \theta) \end{cases}$$

Le vecteur  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  se nomme l'état instantané et il s'agit de la fonction  $x_t$  évaluée à l'instant  $\theta = 0$ . La fonction  $x_t$  peut être vue comme un nombre infini de conditions initiales. De ce fait, les systèmes à retards appartiennent à la classe des systèmes de dimension infinie.

Les techniques de commande classiques (en dimension finie), appliquées aux systèmes à retards, conduisent en général à des solutions qui requièrent la connaissance de valeurs futures de l'état. Ces solutions sont non causales et empêchent une implémentation directe de la commande (Michiels & Niculescu, 2008). Différentes solutions ont été proposées dans la littérature pour contourner cette difficulté ; une stratégie est de remplacer les opérateurs de retard par des approximations rationnelles, comme les approximations de Padé au premier et au second ordre (Philipp *et al.*, 1999; Wang & Hu, 1999;

Probst *et al.*, 2010), de Laguerre-Fourier (Mäkilä, 1990), de Kautz (Mäkilä & Partington, 1999; Taheri, 2008) ; l'usage de prédicteurs d'état, qui permettent d'obtenir une estimation des valeurs futures de l'état (voir Maza-Casas *et al.* (1999); Mohagheghi *et al.* (2007); Witrant *et al.* (2007a) et références comprises) ; et une autre approche est la recherche de solutions causales pour les problèmes de commande, tels que la linéarisation entrée/sortie (Márquez-Martínez & Moog, 2004), la commande maître-esclave à distance pour des systèmes mécaniques sous-actionnés (Peñaloza Mejía *et al.*, 2008), le suivi de trajectoire (Estrada-García *et al.*, 2008), le rejet de perturbations (Castro-Linares *et al.*, 1997), entre autres.

Malheureusement, les méthodes avec des approximants rationnelles trouvent rapidement leur limite, notamment parce qu'elles conduisent à des systèmes d'ordre élevé dont la régulation n'est finalement pas plus simple que celle du modèle initial (Richard, 2003). En ce qui concerne l'approche des prédicteurs d'état, leur convergence est analysée en considérant l'erreur entre la valeur future exacte et l'estimation donnée, de sorte que, bien qu'ils constituent un outil très utile pour reconstruire les valeurs futures de l'état ou de la sortie. Ils sont très sensibles aux variations des paramètres. Dans cette thèse nous considérons la recherche de solutions causales<sup>1</sup> de commande afin d'éviter, si possible, les approximations décrites plus haut. Nous allons présenter divers problèmes de la commande pouvant être résolus sans faire appel aux prédicteurs d'état.

---

<sup>1</sup>Un véhicule téléopéré d'exploration commandé par ordinateur, par exemple, reçoit les signaux de position désirée  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$  avec un retard  $\tau$ . Une commande causale serait celle qui utilise les signaux de position  $\mathbf{x}(\mathbf{t} - \tau)$  disponible à l'instant  $t - \tau$  et non  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$  disponible à l'instant  $t$ , car ces derniers ne sont pas connus et devraient être reconstruits au moyen d'un prédicteur.

De l'exposé antérieur, il est essentiel de développer une théorie particulière, et de nouveaux outils mathématiques adaptés aux systèmes à retards. Il y a eu des progrès significatifs, surtout dans le domaine des systèmes linéaires, cependant, il reste encore de nombreux problèmes ouverts. Plus d'information est disponible dans les textes spécialisés comme Hale (1977); Górecki *et al.* (1989); Kolmanovskii & Myshkis (1992); Niculescu (1997); Mahmoud (2000); Gu *et al.* (2003) et les références incluses.

Ensuite, divers aspects des problèmes à traiter dans la thèse sont détaillés, en précisant le contexte, les objectifs, la motivation et les contributions de cette thèse.

## **État de l'art**

On aborde, de manière générale, dans ce travail les systèmes commandés en réseau (NCSs, par ses initiales en anglais) et comme application spécifique les systèmes de puissance. Tous les deux présentent deux types de retards, l'un dans les interconnexions et l'autre sur le canal de communication qui, dans le système de puissance. Ils sont dus à des lignes de transmission et à l'usage de systèmes de mesure à grande échelle (WAMS, par ses initiales en anglais), respectivement.

Lors de l'étude d'un système, les étapes de modélisation et d'identification des paramètres sont essentielles car elles conditionnent les méthodes qui seront ensuite utilisées pour analyser ses propriétés et pour le contrôler. Si le modèle ne représente pas correctement le système étudié alors la performance de la commande est aussi dégradée (Sung *et al.*, 2009). Par conséquent on cherche toujours à déterminer le meilleur modèle possible en accord avec les objectifs de la commande.

Ainsi dans la recherche du meilleur modèle possible, en ce qui concerne à des systèmes à retards, le problème de l'élimination ou de la réduction des retards a déjà été exploré par la communauté scientifique depuis les années quatre-vingt pour les systèmes linéaires à retards (SLR), car on ne peut pas raisonnablement étudier, analyser, commander les systèmes à retards sans avoir compris s'ils sont réellement à retards. Étonnamment, bien que des solutions partielles existent, ce problème est resté ouvert et il constitue un sujet de recherche actuel, comme il est montré dans les travaux de Pugh *et al.* (1996); Fiagbedzi (2002); Boudellioua (2007); Boudellioua & Quadrat (2008).

Avant de commencer à travailler avec des systèmes interconnectés on étudie et on résoud ce problème d'élimination des retards. Le résultat le plus rattaché à ce travail de thèse est celui de Lee *et al.* (1982), où une condition suffisante pour réduire le nombre de retards est donnée pour un SLR de la forme  $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}[\nabla]\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_1\nabla^h\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \dots + \mathbf{A}_\phi\nabla^{\phi h}\mathbf{x}(\mathbf{t})$  avec  $h \in \mathbb{R}^+$  et  $\phi \in \mathbb{Z}^+$ . Ce résultat est fondé sur l'existence d'un vecteur cyclique  $\mathbf{B}[\nabla]$  et lorsqu'il existe, la forme avec le nombre minimum de retards peut être trouvée avec la transformation

$$\mathbf{z}(\mathbf{t}) = \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{B}[\nabla] & \mathbf{A}[\nabla]\mathbf{B}[\nabla] & \dots & \mathbf{A}[\nabla]^{n-1}\mathbf{B}[\nabla] \end{array} \right]^{-1} \mathbf{x}(\mathbf{t}). \quad (78)$$

S'il existe (78) pour le SLR monoentrée fortement commandable  $\mathbf{A}[\nabla]\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}[\nabla]u(\mathbf{t})$ , alors il est équivalent à un système sans retards au moyen de cette transformation (Lee *et al.*, 1982), cependant le problème est resté non résolu par les systèmes d'autre type. Par la suite on le donnera une solution complète.

L'utilisation de systèmes en réseau est devenue populaire en raison de son archi-

tecture flexible et des bas coûts d'installation et de maintenance (Zampieri, 2008). Ces systèmes, connus comme NCSs, présentent un retard non négligeable en raison de l'influence du canal de communication (Witrant *et al.*, 2006). Quelques problèmes présentés par cette influence sont, en plus des retards dans le réseau, l'échantillonnage asynchrone et la perte et la quantification de données, ce qui rend l'estimation, l'analyse et la synthèse de contrôleurs plus complexes pour ce type de systèmes. Dans Hokayem & Abdallah (2004); Hespanha *et al.* (2007); Zampieri (2008) et les références incluses quelques résultats sont donnés pour résoudre ces problèmes spécifiques. Dans ce travail, on analyse uniquement la synchronisation maître-esclave pour les NCSs en prenant en compte les retards sur le canal de communication et éventuellement dans les systèmes qui présentent des interconnexions physiques.

Le retard occasionné par le réseau de communication peut dégrader la performance du système s'il n'est pas considéré dans l'analyse ou même le déstabiliser (Branicky *et al.*, 2000). La procédure usuelle est de remplacer les termes retardés par des approximations d'ordre réduit, ou l'utilisation d'un compensateur non causal et un prédicteur pour calculer les valeurs futures de l'état. Certaines de ces techniques de commande proposées sont : théorie stochastique (Nilsson, 1998), commande robuste (Goktas, 2000), théorie des perturbations (Walsh *et al.*, 1999) et compensateurs de retard basés sur prédicteurs (voir par exemple Hespanha *et al.* (2007), Witrant *et al.* (2007a,b), Zhang *et al.* (2007), Zampieri (2008) et les références incluses). Dans le domaine de la téléopération certains travaux ont étudié les retards de transmission, surtout pour le cas de deux systèmes avec des retards constants (García *et al.*, 2000; Azorin *et al.*, 2003; Fattouh & Sename, 2003) ou variables (Witrant *et al.*, 2003; Yue

*et al.*, 2004; Chopra *et al.*, 2008; Seuret & Richard, 2008; Hua & Liu, 2011; Zhang *et al.*, 2011; Kruszewski *et al.*, 2011). Ces retards sont induits par le canal de communication et des interconnexions physiques n'existent pas. Un réseau de systèmes de puissance présente les deux retards, l'un en raison des interconnexions physiques et l'autre induit par l'usage des WAMS (Duan *et al.*, 2009). Cependant, à notre connaissance, il n'existe aucun précédent dans l'étude des NCSs en considérant les deux types de retard. Des résultats préliminaires se trouvent dans Moog & Gárate-García (2008).

Tout de suite on aborde l'étude des réseaux de systèmes de puissance interconnectés (SPI). Ce problème est devenu important car la demande croissante d'électricité et la dérégulation de l'industrie incite les exploitants à faire fonctionner les réseaux électriques au plus près de leurs limites, ce qui rend ces réseaux plus vulnérables aux perturbations extérieures. En conséquence, quelques modes d'oscillation inter-régions, qui sont difficiles à contrôler au moyen d'une commande locale, ont été découverts (Chang & Xu, 2007). Différents modèles et des techniques de commande ont été proposés pour résoudre ce problème. Une alternative intéressante est l'usage de WAMS, où des signaux lointains sont utilisés pour le contrôle. Des améliorations significatives ont été rapportés en utilisant cette technique (voir par exemple Snyder *et al.* (2000); Kamwa *et al.* (2001); Chaudhuri *et al.* (2004); Zabaïou *et al.* (2008)), cependant, le problème le plus important lié à cette technologie est le retard entre l'instant de la mesure et l'instant auquel ces signaux sont disponibles pour le contrôleur.

L'attention accordée à l'analyse des retards associés aux grands réseaux de systèmes de puissance a augmenté. Nous pouvons identifier deux types de retards dans les SPI :

ceux associés à la longueur de la ligne de transmission, qui sont généralement très petits (environ 10 ms) (Wu & Heydt, 2003), et les retards dus à l'utilisation de WAMS, qui sont de l'ordre de 100-700 ms., selon le type de liaison et d'autres caractéristiques (Naduvathuparambil *et al.*, 2002). Son impact est crucial lorsque les contrôleurs échangent des données via un réseau (consulter Wu *et al.* (2004); Jia *et al.* (2008)).

## VI.1.2 Objectifs

### objectif général

Établir des conditions pour la réduction du retard maximal dans les systèmes linéaires au moyen d'une transformation bicausale, ainsi que des schémas de synchronisation maître-esclave qui évitent ou minimisent l'utilisation de prédicteurs pour des systèmes commandés en réseau et pour des systèmes de puissance interconnectés.

### Objectifs spécifiques

- Établir des conditions nécessaires et suffisantes pour identifier ces systèmes à retards équivalents à un système sans retards. Ceci est utile pour identifier ces systèmes qui sont faussement retardés en raison d'une erreur de modélisation ou d'un mauvais choix de variables.
- Trouver une transformation bicausale pour minimiser le retard maximal d'un système à retards. Cela conduit à une contribution dans le domaine de la stabilité car il y a plusieurs contributions dans la littérature pour des systèmes avec une quantité faible de retards et ces résultats peuvent alors être utilisés dans le système réduit.



- Déterminer des solutions causales pour le problème de synchronisation des NCSs, en particulier pour les systèmes qui présentent des interconnexions physiques entre les systèmes maître et esclave.
- Modélisation d'un réseau de SPI avec des retards de communication.
- Déterminer des méthodes causales de synchronisation pour les SPI.

### VI.1.3 Motivation

Cette recherche est motivée par les considérations suivantes:

- Un système à retards équivalent à un système sans retards peut se stabiliser avec des techniques de commande classique.
- La réduction des retards augmente les possibilités d'utiliser des critères de stabilité déjà existants, car il y a plusieurs résultats de stabilité développés pour les systèmes avec des quantités faibles de retards (voir par exemple Gu *et al.* (2003); Michiels & Niculescu (2008) et références incluses).
- Transformer un système héréditaire en un autre avec une quantité moindre de retards requiert moins de ressources de mémoire, ce qui permet de résoudre des systèmes comportant davantage d'équations et d'augmenter la vitesse de calcul des procédures numériques.
- La réduction de retards permet de caractériser la fenêtre temporelle minimale requise pour définir l'état.
- Caractériser l'équivalence de systèmes avec un ordre différent de retards ouvre la porte à l'étude de l'équivalence de ces systèmes au niveau de leurs solutions.

- Fournir une alternative pour réduire les oscillations inter-régions dans les réseaux de systèmes de puissance.

#### VI.1.4 Des contributions

Dans les sections précédentes on a précisé l'importance de développer des outils spécifiques d'analyse pour les systèmes à retards ainsi que les raisons qui ont motivé le choix des divers thèmes recherche. A présent, les apports principaux de cette thèse sont décrits.

La section VI.2 de ce mémoire montre un des résultats les plus importants de ce travail, publié dans Gárate-García *et al.* (2011), la caractérisation de ces systèmes à retards qui sont équivalents, au moyen des transformations bicausales, à un système sans retards ou à un système avec un retard maximum inférieur que celui dans les coordonnées d'origine. Les critères présentés offrent des conditions nécessaires et suffisantes, dans le cas des SLR, en donnant une solution complète à un problème qui est resté ouvert pendant plus de trois décennies.

Le troisième chapitre traite des systèmes commandés en réseau. On présente une méthodologie pour développer des contrôleurs causaux qui résolvent le problème de synchronisation maître-esclave des NCSs avec des retards provoqués autant par le canal de communication que par des interconnexions physiques. Il est démontré qu'une condition suffisante pour l'existence d'une telle solution causale, dans les systèmes qui n'ont que des retards de communication, est que certaines équations d'erreur de suivi de trajectoire et de synchronisation soient asymptotiquement stables. Nous montrons

que si en plus des retards de communication, les systèmes comportent des retards d'interconnexion, alors il est requis que ces derniers soient plus grands que les retards de communication afin de garantir la causalité de la commande. Cette contribution théorique est une généralisation du travail de Estrada-Garcia *et al.* (2007) en ce qui concerne à l'usage d'équations d'erreur retardées pour la synchronisation mais, à notre connaissance, c'est le premier à inclure l'analyse de NCSs avec des retards causés tant par le canal de communication comme que par les interconnexions physiques. Quelques résultats peuvent être trouvés dans Moog & Gárate-García (2008).

Dans le Chapitre IV un modèle est établi pour les réseaux de SPI qui inclut des retards causés par des interconnexions physiques (les lignes de transmission) et éventuellement par le canal de communication en utilisant les WAMS. Ces retards rarement figurent dans la littérature de SPI car usuellement ils sont négligés ou bien ils sont considérés comme des perturbations dans le modèle. Par la suite on réalise la synthèse de deux schémas causaux de commande basés sur le critère de stabilité de Lyapunov-Krasovskii et sur les inégalités linéaires matricielles (LMIs, par ses initiales en anglais). La causalité des solutions obtenues est assurée non par l'utilisation de prédicteurs, mais en utilisant les termes à l'instant qu'ils sont disponibles pour la commande. Un schéma est de type décentralisé, c'est à dire, en utilisant uniquement des variables locales de chaque générateur, et l'autre est centralisé, en utilisant les variables fournies par les WAMS. Certains résultats sont présentés dans Gárate-García *et al.* (2009)

Pour finir, nous donnerons quelques conclusions concernant nos travaux et nous

esquisserons quelques perspectives de recherche.

## VI.2 MODÉLISATION

Dans la section précédente on a mentionné l'importance de la pertinence du modèle mathématique d'un processus et l'effet des retards dans l'analyse et la synthèse de contrôleurs pour les systèmes à retards. Ensuite, des conditions nécessaires et suffisantes sont données pour vérifier si un SLR est équivalent, moyennant des opérations bicausales, à un système sans retards ou bien, si cela n'est pas possible, on cherche une représentation avec le plus petit retard possible. Ceci permet d'identifier les erreurs de modélisation où sont inclus les retards qui ne sont pas intrinsèques au système. La réduction du nombre de retards revient à trouver une réalisation dans un système de coordonnées adéquat pour laquelle les critères de stabilité connus sont plus nombreux ou exploitables. Par exemple, le système

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) - x_1(t-1) \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t-1) - x_1(t-2) + x_1(t)\end{aligned}$$

est équivalent au système

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= z_1(t)\end{aligned}$$

en utilisant le changement de coordonnées bicausal

$$\begin{aligned}z_1(t) &= -x_1(t-1) + x_2(t) \\ z_2(t) &= x_1(t).\end{aligned}$$

Étonnamment, bien que ce problème ait été exploré depuis le début des années quatre-vingts, il est resté ouvert même pour les SLR. En ce qui concerne les systèmes non linéaires à retards (SNLR) le seul résultat récent, à notre connaissance, est donné dans (Califano *et al.*, 2010), où il se présente une condition nécessaire et suffisante pour l'équivalence d'un SNLR, au moyen de transformations bicausales, à un système linéaire sans retard.

Ensuite, après avoir décrit les systèmes à traiter et revu quelques aspects significatifs sur la théorie de systèmes à retards, nous présentons un des résultats principaux de cette thèse : les conditions nécessaires et suffisantes qui résolvent ce problème d'équivalence pour SLR, en donnant ainsi une solution complète à un problème ouvert depuis plus de 30 ans.

## VI.2.1 Préliminaires

Nous définissons la classe de systèmes étudiés dans cette section et établissons quelques résultats préliminaires.

### Classe de systèmes

Les systèmes considérés ici sont des systèmes linéaires avec des retards constants, décrits par

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{\tau_a} \mathbf{A}_i \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{r}_i) + \sum_{j=0}^{\tau_b} \mathbf{B}_j \mathbf{u}(\mathbf{t} - \mathbf{r}_j) \quad (79)$$

avec  $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{\sup(\tau_a, \tau_b)}$ , où  $\mathbf{x}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^n$  est l'état instantané du système,  $\mathbf{u}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^m$  l'entrée,  $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}_j \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $\tau_a, \tau_b \in \mathbb{N}$ . Si les retards sont de plus

commensurables, c.-à-d. multiples d'un retard de base, ils sont décrits par

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{\tau_a} \mathbf{A}_i \mathbf{x}(\mathbf{t} - i\mathbf{h}) + \sum_{j=0}^{\tau_b} \mathbf{B}_j \mathbf{u}(\mathbf{t} - j\mathbf{h}), \quad (80)$$

où  $h \in \mathbb{R}^+$  est le retard de base. Par simplicité de la notation, et sans perte de généralité, on suppose que l'axe du temps  $t$  a été modifié pour avoir  $h = 1$ . Alors (80) peut s'exprimer comme

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{\tau_a} \mathbf{A}_i \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{i}) + \sum_{j=0}^{\tau_b} \mathbf{B}_j \mathbf{u}(\mathbf{t} - \mathbf{j}). \quad (81)$$

Chaque élément de l'anneau  $\mathbb{R}[\nabla]$  peut être écrit comme

$$a[\nabla] = a_0 + a_1 \nabla + \cdots + a_{r_a} \nabla^{r_a}, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

où  $r_a$  est le degré polynômial de  $a[\nabla]$ . L'addition et la multiplication sont définies comme d'habitude.

Le système (81) peut toujours se représenter de la manière suivante

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) &= \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \sum_{l=1}^{\tau_a} \mathbf{A}_l \boldsymbol{\xi}_l(\mathbf{t}) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(\mathbf{t}) + \sum_{m=1}^{\tau_b} \mathbf{B}_m \boldsymbol{\psi}_m(\mathbf{t}) \\ \boldsymbol{\xi}_l(\mathbf{t}) &= \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{l}), \quad l > 0, \\ \boldsymbol{\psi}_m(\mathbf{t}) &= \mathbf{u}(\mathbf{t} - \mathbf{m}), \quad m > 0, \end{aligned} \quad (82)$$

où  $\boldsymbol{\xi}_l(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^n$  et  $\boldsymbol{\psi}_m(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^m$ . Le reste des variables est défini comme dans le système (79).

### Concepts de base des systèmes à retards

Ensuite on verra quelques définitions clés pour la compréhension de ce travail.

**Définition 10** *Richard (2001) (Matrice unimodulaire).* Une matrice polynomiale  $\mathbf{A}[\nabla] \in \mathbb{R}[\nabla]^{n \times n}$  est dite unimodulaire si elle admet un inverse polynomial.

**Définition 11** *Richard (2001) (Polynômes invariants de Smith).* Chaque matrice polynomiale  $\mathbf{P}(\lambda)$  de dimension  $m \times n$  et rang  $r$  est équivalente à la matrice  $\mathbf{S}(\lambda)$ :

$$\mathbf{P}(\lambda) = \mathbf{U}_1(\lambda)\mathbf{S}(\lambda)\mathbf{U}_2(\lambda)$$

où  $\mathbf{S}(\lambda) = \begin{bmatrix} \Delta(\lambda) & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix}$ ,  $\Delta(\lambda) = \text{diag}[d_1(\lambda), \dots, d_r(\lambda)]$  tel que  $d_i(\lambda)$  est divisible entre  $d_{i-1}(\lambda)$  avec  $i = 2, \dots, r$  et les matrices  $\mathbf{U}_1(\lambda)$  et  $\mathbf{U}_2(\lambda)$  sont unimodulaires. La matrice polynomiale  $\mathbf{S}(\lambda)$  est appelée la forme Smith de  $\mathbf{P}(\lambda)$  et les éléments  $d_i(\lambda)$  sur la diagonale sont appelés invariants de Smith.

La notion standard de changement de coordonnées requiert l'association des coordonnées d'état  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$  aux nouvelles coordonnées  $\mathbf{z}(\mathbf{t})$  moyennant une application bijective. Ceci est bien connu pour des systèmes sans retard ; cependant, l'exigence d'inversibilité conduit à la définition suivante spécifique pour SLR.

**Définition 12** *Márquez-Martínez et al. (2002) (Changement de coordonnées).* En considérant le système à retards (81), avec des coordonnées d'état  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ , alors

$$\mathbf{z}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}[\nabla]\mathbf{x}(\mathbf{t}), \text{ avec } \mathbf{T}[\nabla] \in \mathbb{R}[\nabla]^{n \times n} \quad (83)$$

est un changement de coordonnées causal si les polynômes invariants de Smith  $\mathbf{T}[\nabla]$  sont de la forme  $\nabla^{\tau_i}$  pour certains  $\tau_i \in \mathbb{N}^+$ . Si  $\tau_i = 0 \forall i = 1 \dots n$ , alors le changement de coordonnées est dit bicausal.

La transformation  $z(t) = x(t) - x(t - \tau)$  n'est pas un changement de coordonnées parce que  $z(t) \equiv 0 \not\Rightarrow x(t) \equiv 0$ . Toute fonction  $x(t) = \phi(t)$  de période  $\tau$  est  $z(t) = 0$  dans les coordonnées transformées. La seule manière de les différencier à un temps initial  $t_0$  est de connaître les conditions initiales dans une période de temps  $[t_0 - \tau, t_0]$ . Cependant, pour des changements de coordonnées causaux et bicausaux  $z(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0$  après un certain temps.

Le changement de coordonnées

$$\begin{aligned} z_1(t) &= x_1(t - 1) \\ z_2(t) &= x_1(t - 1) + x_2(t) \end{aligned}$$

est une transformation causale mais son inverse

$$\begin{aligned} x_1(t) &= z_1(t + 1) \\ x_2(t) &= -z_1(t) + z_2(t) \end{aligned} \tag{84}$$

ne l'est pas. En appliquant (84) à un système quelconque (e.g.  $\dot{z}_1(t) = z_2(t); \dot{z}_2(t) = u(t)$ ) on obtient une solution non causale. Par conséquent, seulement des *transformations bicausales* seront considérées dans le reste de ce mémoire.

Il est facile de montrer que la transformation (83) est *un changement de coordonnées bicausal* si et seulement si  $T[\nabla]$  est unimodulaire.

La notion générale de systèmes équivalents est la suivante.

**Définition 13** (*Équivalence des systèmes*). Deux systèmes linéaires

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{\tau_a} \mathbf{A}_i \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{i}) + \sum_{j=0}^{\tau_b} \mathbf{B}_j \mathbf{u}(\mathbf{t} - \mathbf{j}), \tag{85}$$



et

$$\dot{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) = \sum_{j=0}^{\tau_c} \bar{\mathbf{A}}_j \mathbf{z}(\mathbf{t} - \mathbf{j}) + \sum_{k=0}^{\tau_d} \bar{\mathbf{B}}_k \mathbf{u}(\mathbf{t} - \mathbf{k}), \quad (86)$$

sont équivalents s'il existe une matrice unimodulaire  $\mathbf{T}[\nabla]$  qui associe les solutions  $\mathbf{z}(\mathbf{t})$  du système (10) avec la solution  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$  du système (9) au moyen de  $\mathbf{z}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}[\nabla]\mathbf{x}(\mathbf{t})$ , sous des conditions initiales appropriées.

### Conditions de stabilité pour des systèmes à retards.

Cette section présente des outils utiles liés à la stabilité des systèmes à retards.

**Proposition 7** (Gu et al., 2003) *Un système à retards est asymptotiquement stable s'il existe une fonctionnelle quadratique bornée de Lyapunov-Krasovskii  $V(\phi)$  tel que pour quelque  $\varepsilon > 0$ ,  $V(\phi) \geq \varepsilon \|\phi(0)\|^2$ , et que*

$$\begin{aligned} \dot{V}(\phi) &= \dot{V}(x_t)|_{x_t=\phi}, \\ &\leq -\varepsilon \|\phi(0)\|^2. \end{aligned}$$

En considérant (79) en boucle fermée, on a le système décrit par

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{\varrho} \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{x}(\mathbf{t} - \mathbf{r}_i). \quad (87)$$

**Remarque 6** *Dans le cas de systèmes linéaires à retards sans incertitudes sur les retards et sur les paramètres, les notions de stabilité asymptotique et exponentielle sont équivalentes, bien que même si l'existence du taux de convergence exponentielle est garantie, il n'est pas connu a priori. Dans le cas général (non linéaire, non stationnaire, retard variable) cette équivalence ne tient plus (Seuret, 2006).*

La proposition suivante assure l'existence de cette fonctionnelle  $V(\phi)$ , en donnant une condition suffisante pour la stabilité indépendante des retards du système (87) :

**Proposition 8** (Gu et al., 2003) *Le système avec de multiples retards décrit par (87) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices réelles symétriques  $\mathbf{P}, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_\rho$  telles que  $\mathbf{P} > 0$ , et  $\mathbf{\Pi}_\rho < 0$ , où*

$$\mathbf{\Pi}_\rho = \begin{bmatrix} \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}_0 + \tilde{\mathbf{A}}_0^T\mathbf{P} + \sum_{i=1}^{\rho} \mathbf{S}_i & \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}_1 & \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}_2 & \dots & \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}_\rho \\ \tilde{\mathbf{A}}_1^T\mathbf{P} & -\mathbf{S}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{\mathbf{A}}_2^T\mathbf{P} & 0 & -\mathbf{S}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{A}}_\rho^T\mathbf{P} & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{S}_\rho \end{bmatrix}. \quad (88)$$

### L'approche du problème d'équivalence de SLR.

En considérant le système à retards décrit par (81) et un changement de coordonnées bicausal

$$\mathbf{z}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}[\nabla]\mathbf{x}(\mathbf{t}), \quad (89)$$

on souhaite caractériser ces SLR qui sont équivalents à un système sans retard moyennant (89). Si une telle transformation n'existe pas, alors on cherche une nouvelle représentation du système

$$\dot{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) = \bar{\mathbf{A}}[\nabla]\mathbf{z}(\mathbf{t}) + \bar{\mathbf{B}}[\nabla]\mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad (90)$$

qui a le degré polynomial minimal en  $\nabla$ .

## VI.2.2 Des erreurs de modélisation dans les SLR

Dans cette section on résout le problème posé dans la Section VI.2.1. On présente d'abord le théorème d'équivalence des SLR, que bien qu'il puisse avoir un intérêt pratique limité, c'est grâce à lui que l'on peut caractériser si un système est faussement

retardé par une erreur de modélisation ou en raison du choix des variables, car il constitue le fondement pour obtenir les conditions d'élimination et de réduction de retards.

### Équivalence de SLR

**Théorème 3** *On considère deux systèmes linéaires, décrits par (85) et (86). Soient  $\tau_x = \sup(\tau_a, \tau_b)$ ,  $\tau_z = \sup(\tau_c, \tau_d)$ . On suppose, sans perte de généralité, que  $\tau_x \geq \tau_z$ . Alors, les deux systèmes sont équivalents si et seulement s'il existe des  $\mathbf{T}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , pour  $i = 0, 1, \dots, \tau_m$ , avec  $\tau_m = \sup(\tau_a, (n-1)\tau_b)$ , tels que*

$$(i) \sum_{i=0}^k \mathbf{T}_i \mathbf{A}_{k-i} = \sum_{j=0}^k \bar{\mathbf{A}}_j \mathbf{T}_{k-j} \text{ pour } k = 0, 1, \dots, \gamma, \text{ où } \gamma = \tau_a + \tau_m \text{ si } \tau_a > \tau_c; \text{ dans le cas contraire } \gamma = \tau_c + \tau_m. \bar{\mathbf{A}}_j = \mathbf{0}_{n \times n} \text{ pour } j > \tau_c.$$

$$(ii) \sum_{i=0}^k \mathbf{T}_i \mathbf{B}_{k-i} = \bar{\mathbf{B}}_k \text{ pour } k = 0, 1, \dots, \vartheta, \text{ où } \vartheta = \tau_b + \tau_m \text{ si } \tau_a > \tau_c; \text{ dans un autre cas } \vartheta = \tau_d + \tau_m. \bar{\mathbf{B}}_i = \mathbf{0}_{n \times 1} \text{ pour } i > \tau_d.$$

$$(iii) \det\left(\sum_{i=0}^{\tau_m} \mathbf{T}_i \nabla^i\right) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

**Preuve.** On définit  $\mathbf{T}[\nabla] = \sum_{i=0}^{\tau_m} \mathbf{T}_i \nabla^i$ . Sans perte de généralité, on suppose que  $\tau_x \geq \tau_z$ .

*Nécessité.*

Supposons que les systèmes (81) et (90) soient équivalents. Alors il existe une transformation unimodulaire  $\mathbf{T}[\nabla]$  qui satisfait (89). Cela entraîne la condition (iii).

De (82) et (89) on a que

$$\dot{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}[\nabla][\mathbf{A}_0 \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \sum_{l=1}^{\tau_a} \mathbf{A}_l \xi_l(\mathbf{t}) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(\mathbf{t}) + \sum_{m=1}^{\tau_b} \mathbf{B}_m \psi_m(\mathbf{t})] \quad (91)$$

(86) et (91) impliquent

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) &= \bar{\mathbf{A}}[\nabla] \mathbf{z}(\mathbf{t}) + \bar{\mathbf{B}}[\nabla] \mathbf{u}(\mathbf{t}) \\ &= \bar{\mathbf{A}}[\nabla] \mathbf{T}[\nabla] \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \bar{\mathbf{B}}[\nabla] \mathbf{u}(\mathbf{t}). \end{aligned} \quad (92)$$

En considérant  $\mathbf{T}[\nabla] = \sum_{i=0}^{\tau_m} \mathbf{T}_i \nabla^i$  avec  $\mathbf{T}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , après avoir appliqué l'opérateur retard, on peut exprimer (91) et (92) sous forme matricielle

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{z}}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 & \dots & \mathbf{T}_{\tau_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\xi}_1(t) + \dots + \mathbf{A}_{\tau_a} \boldsymbol{\xi}_{\tau_a}(t) \\ \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\xi}_1(t) + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\xi}_2(t) + \dots + \mathbf{A}_{\tau_a} \boldsymbol{\xi}_{\tau_a+1}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\xi}_{\tau_m}(t) + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\xi}_{\tau_m+1}(t) + \dots + \mathbf{A}_{\tau_a} \boldsymbol{\xi}_{\tau_m+\tau_a}(t) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 & \dots & \mathbf{T}_{\tau_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_1 \psi_1(t) + \dots + \mathbf{B}_{\tau_b} \psi_{\tau_b}(t) \\ \mathbf{B}_0 \psi_1(t) + \mathbf{B}_1 \psi_2(t) + \dots + \mathbf{B}_{\tau_b} \psi_{\tau_b+1}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{B}_0 \psi_{\tau_m}(t) + \mathbf{B}_1 \psi_{\tau_m+1}(t) + \dots + \mathbf{B}_{\tau_b} \psi_{\tau_m+\tau_b}(t) \end{bmatrix} \\
&= \bar{\mathbf{A}}[\nabla] \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 & \dots & \mathbf{T}_{\tau_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\xi}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_{\tau_m} \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{B}}[\nabla] \mathbf{u}(t) \tag{93} \\
&= \bar{\mathbf{A}}_0 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 & \dots & \mathbf{T}_{\tau_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\xi}_1(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_{\tau_m}(t) \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{A}}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 & \dots & \mathbf{T}_{\tau_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1(t) \\ \boldsymbol{\xi}_2(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_{\tau_m+1}(t) \end{bmatrix} \\
&+ \dots + \bar{\mathbf{A}}_{\tau_c} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 & \dots & \mathbf{T}_{\tau_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{\tau_c}(t) \\ \boldsymbol{\xi}_{\tau_c+1}(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_{\tau_m+\tau_c}(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$+ \bar{\mathbf{B}}_0 \mathbf{u}(\mathbf{t}) + \bar{\mathbf{B}}_1 \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{t}) + \cdots + \bar{\mathbf{B}}_{\tau_d} \boldsymbol{\psi}_d(\mathbf{t}).$$

Les coefficients de  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ ,  $\boldsymbol{\xi}_i(\mathbf{t})$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{t})$  et  $\boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{t})$  doivent être égaux, ce qui implique (i) et (ii).

Soit  $\tau_m = \deg(\mathbf{T}[\nabla])$ . La procédure d'inversion utilisée est la méthode de Gauss-Jordan. L'inverse peut s'exprimer comme la matrice adjointe, divisée par le déterminant. Ce dernier est un scalaire - ou polynôme de degré nul - dans le cas de matrices unimodulaires. Alors, le degré maximal des polynômes de la matrice inverse, ne peut pas être supérieur au degré de n'importe quel élément de la matrice adjointe. Puisque les éléments de cette matrice sont des déterminants de matrices polynomiales des dimensions  $(n-1) \times (n-1)$  et que  $\deg(\mathbf{T}[\nabla]^{-1}) \leq \tau_m(n-1)$ , le degré de ces polynômes ne peut pas être supérieur à  $(n-1)\tau_m$ .

A partir des équations (85), (86) et (89) on a que

$$\mathbf{A}[\nabla] = \mathbf{T}[\nabla]^{-1} \bar{\mathbf{A}}[\nabla] \mathbf{T}[\nabla] \quad (94)$$

et

$$\mathbf{B}[\nabla] = \mathbf{T}[\nabla]^{-1} \bar{\mathbf{B}}[\nabla]. \quad (95)$$

On doit avoir le même degré polynomial dans les deux côtés de l'équation (94), le pire cas possible pour l'obtenir est  $\tau_m = \tau_a$ . Dans le cas de l'équation (95) le cas limite est  $\tau_m = (n-1)\tau_b$ . Alors  $\tau_m = \sup(\tau_a, (n-1)\tau_b)$ .

*Suffisance.*

De (iii),  $\mathbf{T}[\nabla]$  est une transformation bicausale. De (i) et (ii), on prouve directement que (89) implique (93). ■

En utilisant le théorème précédent, il est possible de définir des conditions pour éliminer des retards dans des systèmes de la forme (81).

### Élimination de retards

Dans cette section nous présentons des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un changement de coordonnées tel que les termes retardés sont supprimés. On montre qu'il n'est pas restrictif de définir  $\mathbf{T}_0$  comme la matrice identité pour calculer la transformation  $\mathbf{T}[\nabla]$ . Ce théorème est un cas particulier du Théorème 3.

**Théorème 4** *Le système (81) est équivalent à un système sans retard si et seulement s'il existe des matrices  $\mathbf{T}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pour  $i = 0, 1, \dots, \tau_m$ , avec  $\tau_m = \sup(\tau_a, (n-1)\tau_b)$ , tels que*

$$(i) \quad \sum_{i=0}^k \mathbf{T}_i \mathbf{A}_{k-i} = \bar{\mathbf{A}}_0 \mathbf{T}_k \text{ pour } k = 0, 1, \dots, \tau_m + \tau_a, \text{ avec } \bar{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{A}_0.$$

$$(ii) \quad \sum_{i=0}^k \mathbf{T}_i \mathbf{B}_{k-i} = \bar{\mathbf{B}}_k \text{ pour } k = 0, 1, \dots, \tau_m + \tau_b, \text{ avec } \bar{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{B}_0 \text{ et } \bar{\mathbf{B}}_k = \mathbf{0}_{n \times n} \quad \forall k > 0.$$

$$(iii) \quad \det\left(\sum_{i=0}^{\tau_m} \mathbf{T}_i \nabla^i\right) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

**Preuve:** Elle est obtenue à partir du Théorème 3, et en considérant  $\bar{\mathbf{A}}_k = \mathbf{0} \quad \forall k \geq 1$  et  $\bar{\mathbf{B}}_k = \mathbf{0} \quad \forall k \geq 1$ . ■

On remarque que, sans perte de généralité,  $\mathbf{T}_0$  peut être défini comme la matrice identité. Pour voir cela, on considère un changement général de coordonnées  $\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{t})$ .

$$\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{T}}[\nabla] \mathbf{x}(\mathbf{t})$$

$$\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) = [\tilde{\mathbf{T}}_0 + \tilde{\mathbf{T}}_1 \nabla + \dots + \tilde{\mathbf{T}}_\tau \nabla^\tau] \mathbf{x}(\mathbf{t})$$

Soit

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(\mathbf{t}) &= \tilde{\mathbf{T}}_0^{-1}\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{z}(\mathbf{t}) &= [\mathbb{I} + \tilde{\mathbf{T}}_0^{-1}\tilde{\mathbf{T}}_1\nabla + \cdots + \tilde{\mathbf{T}}_0^{-1}\tilde{\mathbf{T}}_\tau\nabla^\tau]\mathbf{x}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{z}(\mathbf{t}) &= [\mathbb{I} + \mathbf{T}_1\nabla + \cdots + \mathbf{T}_\tau\nabla^\tau]\mathbf{x}(\mathbf{t})\end{aligned}$$

ce qui implique  $\bar{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{A}_0$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{B}_0$  et les conditions (i) et (ii).

*Exemple 1.* Considérons le système

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - x_2(t-1) + u(t) \quad (96)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -x_2(t-1) - x_3(t)$$

qui peut s'exprimer comme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) &= \mathbf{A}_0\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_1\xi_1(\mathbf{t}) + \mathbf{B}_0\mathbf{u}(\mathbf{t}) \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xi_1(\mathbf{t}) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{t}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \psi_1(\mathbf{t}) \\ \xi_1(\mathbf{t}) &= \mathbf{x}(\mathbf{t}-1) \\ \psi_1(\mathbf{t}) &= \mathbf{u}(\mathbf{t}-1)\end{aligned}$$

Les conditions (i) et (ii) du Théorème 4 conduisent au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_0 \mathbf{A}_0 &= \bar{\mathbf{A}}_0 \mathbf{T}_0 \\
\mathbf{T}_0 \mathbf{A}_1 + \mathbf{T}_1 \mathbf{A}_0 &= \bar{\mathbf{A}}_0 \mathbf{T}_1 \\
\mathbf{T}_0 \mathbf{A}_2 + \mathbf{T}_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{T}_2 \mathbf{A}_0 &= \bar{\mathbf{A}}_0 \mathbf{T}_2 \\
\mathbf{T}_0 \mathbf{B}_0 &= \bar{\mathbf{B}}_0 \\
\mathbf{T}_0 \mathbf{B}_1 + \mathbf{T}_1 \mathbf{B}_0 &= \mathbf{0}_{n \times n}
\end{aligned} \tag{97}$$

On définit  $\mathbf{T}_0 = \mathbb{I}$ ,  $\mathbf{A}_0 = \bar{\mathbf{A}}_0$ ,  $\mathbf{B}_0 = \bar{\mathbf{B}}_0$  et  $\mathbf{T}_2 = \mathbf{0}_{n \times n}$  puisque  $\tau_a = 1$  y  $\tau_b = 0$ . En résolvant (97) on a que

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{98}$$

où  $k \in \mathbb{R}$ . La condition (iii) est satisfaite si et seulement si  $k = 0$ . Ensuite, nous avons

$$\mathbf{T}[\nabla] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \nabla = \begin{bmatrix} 1 & -\nabla & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\nabla & 1 \end{bmatrix}.$$

En calculant la forme de Smith de la matrice de transformation, on a que les polynômes invariants sont  $\{1,1,1\}$ , et la condition de la Définition 12 est remplie, alors  $\mathbf{T}[\nabla]$  est une transformation bicausale.

Le système sans retard équivalent à (96) est



$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= -z_1(t) + u(t) \\ \dot{z}_2(t) &= -2z_2(t) \\ \dot{z}_3(t) &= -z_3(t).\end{aligned}$$

Il est à noter que les conditions préalables sont données par un système d'équations linéaires et que cette méthode est constructive, de sorte que les conditions et la matrice de transformation peuvent être calculées facilement.

**Remarque 7** *Usuellement l'équation caractéristique  $\Delta(s) := \det[s\mathbb{I} - A[\nabla]]$  d'un système linéaire à retards a un nombre infini de racines. Cependant, il existe FDE (dénommées FDE dégénérées) où  $\Delta(s)$  est un polynôme qui ne dépend pas de  $\nabla$  et le nombre de racines est fini (Kolmanovskii & Nosov, 1986). Toutefois, non tout FDE dégénérée est équivalent à un système sans retards au moyen d'une transformation bicausale, bien que son espace solution soit d'une dimension finie pour un temps suffisamment long. Par exemple, il est facile de vérifier que dans*

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} 1 & \nabla \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(\mathbf{t})$$

le système d'équations, données par la condition (i) du Théorème 4, n'a pas de solution et le retard ne peut pas être éliminé.

**Remarque 8** *Pour ces FDE dégénérées est considéré que le problème de Cauchy sans l'histoire préalable, dans lequel l'intervalle initial est dit qui dégénère à un point, et donc au lieu d'une fonction initiale, on ne définit qu'un point  $x(t_0)$  (Kolmanovskii & Nosov, 1986).*

### Réduction de retards

Dans le cas de ces systèmes où le retard ne peut pas être éliminé, il est encore utile de trouver une représentation canonique équivalente avec un retard maximal plus petit que celui du système original. Cette transformation peut être trouvée, s'il existe, en appliquant itérativement les conditions (i) - (iii) du Théorème 3. À cet effet, on définit  $\mathbf{T}_0$  comme la matrice identité, ce qui a été déjà montré n'est pas restrictif. Le système (81) est équivalent à un système avec un retard maximal  $\tau_z = l$  s'il existe une solution pour  $\bar{\mathbf{A}}_j$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_j$  et  $\mathbf{T}_i$ , avec  $j \leq l$  et  $i = \{1, \dots, \tau_m\}$ . Ceci est montré dans l'exemple suivant:

*Exemple 2.*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t-1) + 2x_1(t) + x_2(t-2) - x_2(t-1) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t-1) \end{aligned} \quad (99)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) &= \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\xi}_2(\mathbf{t}) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{t}) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_2(\mathbf{t}) \\ \boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{t}) &= \mathbf{x}(\mathbf{t}-1) \\ \boldsymbol{\xi}_2(\mathbf{t}) &= \mathbf{x}(\mathbf{t}-2). \end{aligned}$$

Le système d'équations, donné par la condition (i) du Théorème 4 n'a pas de solution. Alors, les retards ne peuvent pas être éliminés. Cependant, en résolvant (i) du Théorème 3 en  $\bar{\mathbf{A}}_1, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ , avec  $\mathbf{T}_0 = \mathbb{I}$ ,  $\bar{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{A}_0$ , on a la solution suivante.

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{T}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\bar{\mathbf{A}}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{100}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}[\nabla] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \nabla + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \nabla^2 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \nabla \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\det(\mathbf{T}[\nabla]) = 1$  et les polynômes invariants de Smith sont  $\{1,1\}$ , alors la transformation  $\mathbf{T}[\nabla]$  est bicausale. Le système équivalent est

$$\dot{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} 2 & -3\nabla \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}(\mathbf{t})$$

soit,

$$\dot{z}_1(t) = 2z_1(t) - 3z_2(t-1)$$

$$\dot{z}_2(t) = -z_1(t)$$

Alors, le système (99) est équivalent à un système qui a comme retard maximal  $\tau_a = 1$ .

Les conditions donnés dans le Théorème 3 sont réduits aux conditions (i) et (iii) pour un système non forcé  $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}[\nabla]\mathbf{x}(\mathbf{t})$  et aux conditions (ii) et (iii) pour un

système sans dérive  $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{B}[\nabla]\mathbf{u}(\mathbf{t})$ . Ce qui est directement prouvé en définissant  $\mathbf{B}_j = \mathbf{0}_{n \times m}$  et  $\mathbf{A}_j = \mathbf{0}_{n \times n} \forall j$ , respectivement.

### VI.2.3 Des conclusions sur l'équivalence de SLR

On a établi une caractérisation complète de l'équivalence de SLR. Les conditions nécessaires et suffisantes proposées dans ce mémoire sont faciles à mettre en oeuvre pour le cas de l'équivalence à un système sans retard. La quantité et la complexité des équations à résoudre augmente pour le problème de réduction de retards. Cependant, l'approche utilisée est utile et il fournit une méthode constructive pour trouver la transformation bicausale.

Des efforts de recherche supplémentaires sont requis pour étendre ces résultats à une classe de systèmes non linéaires à retards.

Dans les sections suivantes on analyse des systèmes qui sont réellement retardés. D'abord, nous présentons une analyse théorique sur les NCSs ainsi qu'une application technologique, un réseau de SPI. Dans les deux cas, nous sommes confrontés à des retards dus aux interconnexions physiques, qui affectent le modèle du système, même en boucle ouverte, et dus aux canaux de communication qui affectent le système seulement en fermant la boucle de contrôle.

## VI.3 SYNCHRONISATION DE SYSTÈMES EN RÉSEAU.

Ensuite on cherche des solutions causales pour résoudre la synchronisation maître-esclave de NCSs. Nous considérons deux retards dans le système, un en raison du canal de communication et, éventuellement, un autre s'il existe des interconnexions physiques. On montre qu'en utilisant des équations d'erreur à retards, autant pour le suivi de trajectoire du maître que par l'erreur de synchronisation, au lieu des équations différentielles ordinaires, il est possible de trouver des lois causales de commande.

### VI.3.1 Systèmes considérés.

Dans la Section VI.3.3 on étudie un réseau de  $N$  systèmes sans interconnexions physiques décrits par des équations de la forme

$$\Sigma = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i(t) &= \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i(t)) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i(t))u_i(t), \quad (i = 1, \dots, N); \\ y_i(t) &= h_i(x_i(t)) \end{cases} \quad (101)$$

$\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état instantané de  $\Sigma_i$ ,  $u_i(t) \in \mathbb{R}$  est l'entrée du système et  $y_i(t) \in \mathbb{R}$  la sortie.

Dans la Section VI.3.4, on analyse un réseau de  $N$  systèmes avec des interconnexions physiques, chacun modélisé par

$$\Sigma = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i(t) &= \mathbf{f}_i(\cdot) + \mathbf{g}_i(\cdot)u_i(t), \quad (i = 1, \dots, N); \\ y_i(t) &= h_i(x_i(t)); \end{cases} \quad (102)$$

où on définit de même

$$\mathbf{f}_i(\cdot) := \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_1(\mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma}), \mathbf{x}_2(\mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma}), \dots, \mathbf{x}_{i-1}(\mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma}), \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}(\mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma}), \dots, \mathbf{x}_N(\mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma}))$$

et  $\mathbf{g}_i(\cdot)$ . Le vecteur d'état instantané de  $\Sigma_i$  est  $\mathbf{x}_i(\mathbf{t}) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ , le vecteur d'état instantané au temps  $t - \sigma$   $\mathbf{x}_j(\mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma}) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  pour  $j = 1, \dots, N$  avec  $i \neq j$ , l'entrée de commande est  $u_i \in \mathbb{R}$  et la sortie  $y_i \in \mathbb{R}$ . Les systèmes sont physiquement interconnectés par  $\mathbf{x}_j(\mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma})$  où  $\sigma$  est un retard constant.

Notez que plusieurs retards d'interconnexion  $\sigma_{ij}$  peuvent être considérés, où  $\sigma_{ij}$  est le retard de transmission entre  $\Sigma_i$  et  $\Sigma_j$ . Toutefois dans ce travail on suppose, sans perte de généralité, que  $\sigma_{ij} = \sigma$ . L'extension de la méthodologie proposée au cas général est triviale car elle implique seulement indiquer les retards individuels dans la loi de commande développée.

Les suppositions suivantes sont faites pour les systèmes (101) et (102):

- Les fonctions  $f_i$ ,  $g_i$  et  $h_i$  sont localement analytiques.
- Tous les sous-systèmes ont le même degré relatif:  $\rho_i = \rho$  pour  $i = 1, \dots, N$ .
- Le système a stabilité interne pour le problème de la linéarisation entrée/sortie.
- Le système a un degré relatif type III, selon la définition de Germani *et al.* (2003), dans tout son domaine.

**Remarque 9** *Il est bien connu que par les SNLR avoir degré relatif complet n'implique pas stabilité interne pour le problème de la linéarisation entrée/sortie et qu'une dynamique zéro non nulle peut être induit même par les variables d'état que par l'entrée de commande (plus de détails dans Germani et al. (2003)). Dans ce travail on suppose*

qu'il existe cette stabilité interne et que la dérivée  $n$ -ième de la sortie au temps  $t$  est une fonction affine à l'entrée à l'instant  $t$  et non à ses valeurs passées (la variable de commande n'induit pas une dynamique interne et la stabilité de la dynamique zéro de l'état implique trivialement la stabilité de la dynamique zéro, ce qui correspond à un système avec degré relatif type III dans Germani et al. (2003)).

### VI.3.2 Définition du problème de synchronisation de NCSs.

Etant donnés  $N$  systèmes  $\Sigma$  avec un retard  $\tau$  dans le canal de communication et une trajectoire de référence  $C^\infty y_{ref}(t)$ ,  $t \geq 0$ , trouver des entrées de commande  $u_i$  de la forme

$$u_i(t) = \eta_i(x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \dots, x_{i-1}(t-\tau), x_i(t), x_i(t-\tau), x_{i+1}(t-\tau), \dots, x_N(t-\tau)),$$

pour  $i = 1, \dots, N$ ,

(103)

pour les systèmes sans interconnexions physiques, ou

$$u_i(t) = \eta_i(x_1(t-\sigma), \dots, x_{i-1}(t-\sigma), x_i(t), x_i(t-\tau), x_{i+1}(t-\sigma), \dots, x_N(t-\sigma), x_N(t-\tau))$$

pour  $i = 1, \dots, N - 1$ ,

(104)

pour les systèmes avec des interconnexions physiques, telles que autant par l'erreur de synchronisation  $e_l(t) = y_N(t) - y_l(t)$  que par celui de suivi de trajectoire  $e_N(t) = y_{ref}(t) - y_N(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_l(t) = 0 \text{ pour } l = 1, \dots, N - 1,$$
(105)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_N(t) = 0.$$
(106)

Le système  $N$  est le maître et les systèmes  $1 \dots N - 1$  sont les esclaves.

Les retards de communication sont, en général, variables dans le temps. Cependant, il n'est pas restrictif de considérer  $\tau$  comme la limite supérieure de tous les retards de communication dans le réseau puisque, en utilisant une technique de mémoire tampon sur chaque système, on peut établir le retard constant (Estrada-Garcia *et al.*, 2007; Lelevé *et al.*, 2001; Luck & Ray, 1990; Ploplys *et al.*, 2004; Berestesky *et al.*, 2004).  $\sigma$  est supposé aussi constant.

### VI.3.3 Systèmes sans interconnexions physiques.

La Fig. 11 présente l'échange de données dans la classe de systèmes modélisés par (101). Le canal de communication induit un retard et l'information du système maître à l'instant  $t$  n'est pas disponible pour la commande des systèmes esclaves parce qu'elle est reçu à l'instant  $t - \tau$ .

La procédure standard pour résoudre le problème de synchronisation maître-esclave conduit à des compensateurs non causaux. Cependant, ensuite on montre qu'en utilisant une équation différentielle linéaire à retards, pour la dynamique des erreurs de suivi et de synchronisation, il est possible trouver des solutions causales.

#### La solution standard est non causale.

D'abord, on résout le problème de suivi de trajectoire pour le maître. En dérivant l'erreur  $e_N(t) = y_{ref}(t) - y_N(t)$  jusqu'à le degré relatif  $\rho$  on obtient

$$\begin{aligned} e_N^{(\rho)}(t) &= y_{ref}^{(\rho)}(t) - y_N^{(\rho)}(t) \\ &= y_{ref}^{(\rho)}(t) - [\varphi(x_N(t)) + \psi(x_N(t))u_N(t)]. \end{aligned} \tag{107}$$



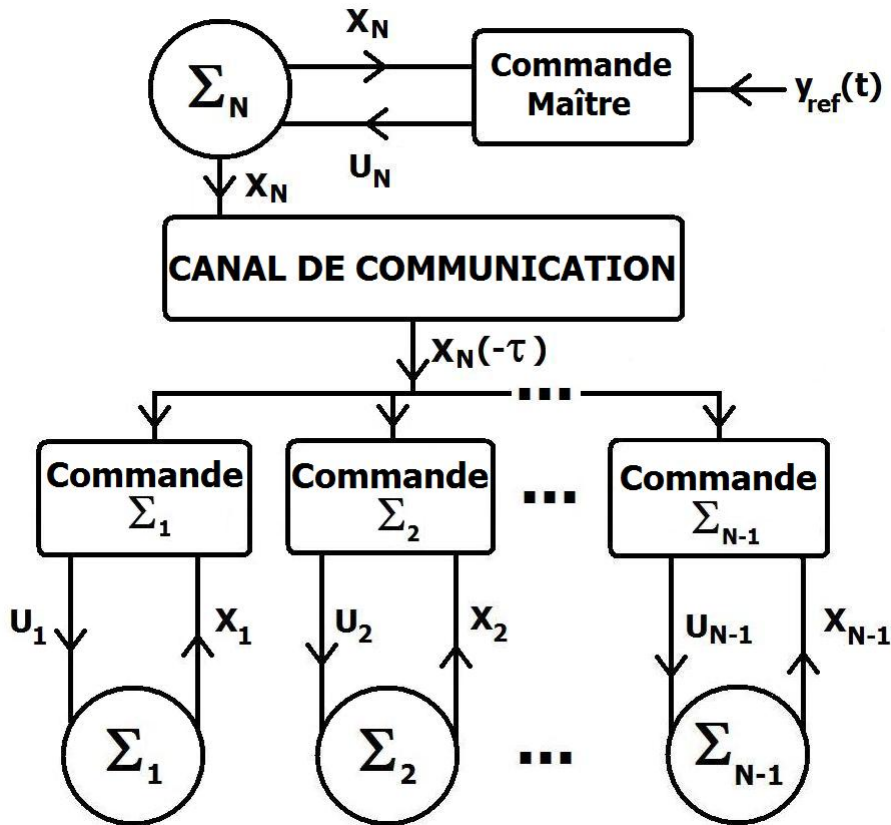


Figure 11. Un schéma illustrant NCSs sans interconnexions physiques

où  $\varphi$  et  $\psi$  sont des fonctions appropriées.

Il est standard considérer l'équation différentielle ordinaire (ODE, par ses initiales en anglais) suivant

$$e_N^{(\rho)}(t) = \sum_{k=0}^{\rho-1} \beta_k e_N^{(k)}(t). \quad (108)$$

où  $\beta_k$  sont des constants qui stabilisent (108).

En résolvant la combinaison de (107) et (108) pour  $u_N(t)$

$$u_N(t) = \frac{y_{ref}^{(\rho)}(t) - \varphi(x_N(t)) - \sum_{k=0}^{\rho-1} \beta_k [y_{ref}^{(k)}(t) - L_{f_N}^{(k)} h_N(x_N(t))]}{\psi(x_N(t))}, \quad (109)$$

ce qui conduit à (106).

Nous définissons les erreurs de synchronisation  $e_i(t) = y_N(t) - y_i(t)$  pour  $i = 1, \dots, N-1$ . En dérivant chaque erreur jusqu'à son degré relatif  $\rho$  on obtient

$$e_i^{(\rho)}(t) = y_N^{(\rho)}(t) - [\alpha_i(x_i(t)) + \gamma_i(x_i(t))u_i(t)] \quad (110)$$

Considérons l'équation

$$e_i^{(\rho)}(t) = \sum_{m=0}^{\rho-1} \lambda_{i,m} e_i^{(m)}(t). \quad (111)$$

où  $\lambda_{i,m}$  sont des constants qui stabilisent (111). En résolvant la combinaison de (110) et (111) pour  $u_i(t)$  on obtient l'entrée de commande

$$u_i(t) = \frac{y_N^{(\rho)}(t) - \alpha_i(x_i(t)) - \sum_{m=0}^{\rho-1} \lambda_{i,m} [L_{f_N}^{(m)} h_N(x_N(t)) - L_{f_i}^{(m)} h_i(x_i(t))]}{\gamma_i(x_i(t))}. \quad (112)$$

Malheureusement, la lois de commande (112) est non causale car les variables  $x_N(t)$  du système maître ne sont pas disponibles pour les systèmes esclaves, comme on a montré plus haut. Les solutions communes sont l'utilisation d'approximations rationnelles des retards ou de prédicteurs d'état, cependant, elles présentent divers inconvénients tels qu'on a discuté dans la Section VI.1.

### Une solution causale à la synchronisation maître-esclave.

Le défi est alors de trouver une commande de la forme souhaitée (103). Tout de suite on montre que la clé pour l'obtenir est l'utilisation d'équations d'erreur linéaires à retards autant par le suivi de trajectoire que par la synchronisation.

Considérons l'équation suivante

$$e_N^{(\rho)}(t) = \sum_{k=0}^{\rho-1} \beta_k e_N^{(k)}(t - \tau). \quad (113)$$

Les coefficients constants  $\beta_k$  remplissent les conditions de stabilité données dans Cahlon & Schmidt (2007a,b) et la solution nulle de (113) est asymptotiquement stable.

En résolvant la combinaison de (107) et (113), pour  $u_N(t)$

$$u_N(t) = \frac{y_{ref}^{(\rho)}(t) - \varphi(x_N(t)) - \sum_{k=0}^{\rho-1} \beta_k [y_{ref}^{(k)}(t - \tau) - L_{f_N}^{(k)} h_N(x_N(t - \tau))]}{\psi(x_N(t))} \quad (114)$$

ce qui implique (106).

**Remarque 10** *Il est facile de montrer que (113) n'est pas stable indépendant du retard pour  $\rho \geq 2$ , c.-a.-d. que le choix des coefficients  $\beta_k$  qui garantissent la stabilité asymptotique de l'équation est fait par rapport à  $\tau$ . Il faut représenter (113) par*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_{\rho-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_N(t) \\ e_N^{(1)}(t) \\ \vdots \\ e_N^{(\rho-1)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{\rho-1} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 \\ \beta_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_N(t - \tau) \\ e_N^{(1)}(t - \tau) \\ \vdots \\ e_N^{(\rho-1)}(t - \tau) \end{bmatrix}$$

et utiliser le Théorème 2.1 de (Gu et al., 2003). Les conditions de stabilité dépendant du retard sont données dans (Cahlon & Schmidt, 2007a,b) pour des équations d'ordre pair et impair, respectivement. Ces auteurs indiquent que plus l'ordre de  $\rho$  est élevé, plus difficile devient stabiliser l'équation (113).

La suivante équation d'erreur linéaire à retards est utilisée, au lieu de l'approche traditionnelle basée sur l'ODE (111), pour la synchronisation

$$e_i^{(\rho)}(t) = \sum_{m=0}^{\rho-1} \lambda_{i,m} e_i^{(m)}(t - \tau), \quad \text{pour } i = 1, \dots, N - 1. \quad (115)$$

En combinant (110) et (115), et en résolvant pour  $u_i(t)$

$$u_i(t) = \frac{y_N^{(\rho)}(t) - \alpha_i(x_i(t)) - \sum_{m=0}^{\rho-1} \lambda_{i,m} [L_{f_N}^{(m)} h_N(x_N(t - \tau)) - L_{f_i}^{(m)} h_i(x_i(t - \tau))]}{\gamma_i(x_i(t))} \quad (116)$$

La différence, en comparant les entrées de commande (116) et (112), est que pour mettre en oeuvre la première on utilise les termes disponibles  $L_{f_N}^{(m)} h_N(x_N(t - \tau))$ , les quelles apparaissent à l'instant  $t - \tau$ . Cependant, il y a encore un problème de causalité car le signal  $y_N^{(\rho)}(t)$  dépend des variables d'état du maître à l'instant  $t$ . La proposition suivante donne une condition suffisante pour trouver une solution causale à la synchronisation maître-esclave.

**Proposition 9** *Etant donnés  $N$  systèmes modélisés chacun par (101) avec un retard de communication  $\tau$  et une trajectoire de référence  $y_{ref}(t)$ . Il existe une loi de commande causale qui résoudre la synchronisation maître-esclave de la forme*

$$u_i(t) = \eta_i(x_1(t - \tau), x_2(t - \tau), \dots, x_{i-1}(t - \tau), x_i(t), x_i(t - \tau), x_{i+1}(t - \tau), \dots, x_N(t - \tau)), \quad (117)$$

pour  $i = 1, \dots, N$ ,

si  $y_i(t)$  a un degré relatif fini et s'il existe des coefficients  $\beta_k$  et  $\lambda_{i,m}$  tels que les solutions des équations (113) et (115) soient asymptotiquement stables.

**Preuve.** Nous pouvons reconstruire le signal  $y_N^{(\rho)}(t)$  en utilisant l'équation (113) et la trajectoire de référence  $y_{ref}(t)$ , laquelle est connu, puisque de l'équation (107) on a

$$y_N^{(\rho)}(t) = y_{ref}^{(\rho)}(t) - e_N^{(\rho)}(t). \quad (118)$$

En remplaçant (118) dans l'équation précédente on a la suivante loi de commande

$$u_i(t) = \frac{y_{ref}^{(\rho)}(t) - \sum_{k=0}^{\rho-1} \beta_k [y_{ref}^{(k)}(t - \tau) - L_{f_N}^{(k)} h_N(x_N(t - \tau))] - \alpha_i(x_i(t))}{\gamma_i(x_i(t))} - \frac{\sum_{m=0}^{\rho-1} \lambda_{i,m} [L_{f_N}^{(m)} h_N(x_N(t - \tau)) - L_{f_i}^{(m)} h_i(x_i(t - \tau))]}{\gamma_i(x_i(t))}. \quad (119)$$

La solution causale précédente a la forme souhaitée (117). ■

L'avantage de considérer les équations différentielles linéaires à retards est montrée. Tous les termes dans (119) sont disponibles pour la commande. Le suivant exemple, pris de Khalil (2002), est utilisé pour illustrer la méthodologie proposée.

**Exemple 4** *Un manipulateur simple avec joint flexible peut être représenté par un modèle de quatrième ordre*

$$\Sigma_i = \begin{cases} \dot{x}_{i,1} &= x_{i,2} \\ \dot{x}_{i,2} &= -a_i \sin(x_{i,1}) - b_i(x_{i,1} - x_{i,3}) \\ \dot{x}_{i,3} &= x_{i,4} \\ \dot{x}_{i,4} &= c_i(x_{i,1} - x_{i,3}) + d_i u_i. \end{cases} \quad (120)$$

Etant donnés  $N$  manipulateurs modélisés chacun par (120) avec un retard dans le canal de communication, et une trajectoire de référence  $y_{ref}(t) \in C^\infty$ , trouver, si possible, une loi de commande causale telle que la différence  $e_i(t)$  entre les sorties des esclaves  $y_i(t) = x_{i,1}(t)$  et la sortie du maître  $y_N(t)$  soient asymptotiquement stables.

En considérant la trajectoire de référence pour le maître, le signal d'erreur est défini:

$$e_N(t) = y_{ref}(t) - x_{N,1}(t) \quad (121)$$

Le système (120) a un degré relatif  $\rho = 4$  avec une sortie  $y_i(t) = x_{i,1}(t)$ . En dérivant (121) jusqu'au le degré relatif on obtient

$$\begin{aligned} e_N^{(4)}(t) &= y_{ref}^{(4)}(t) - x_{N,1}^{(4)} \\ &= y_{ref}^{(4)}(t) - \varphi(x_{N,1}(t), x_{N,2}(t), x_{N,3}(t)) - b_N d_N u_N(t) \end{aligned} \quad (122)$$

pour la fonction appropriée  $\varphi_N$ . L'équation d'erreur à retards (113) devient

$$e_N^{(4)}(t) = \sum_{k=0}^3 \beta_k e_N^{(k)}(t - \tau) \quad (123)$$

qui est stable sous les conditions données dans Cahlon & Schmidt (2007b).

En résolvant la combinaison de (122) et (123) pour  $u_N(t)$  on obtient

$$u_N(t) = \frac{y_{ref}^{(4)}(t) - \varphi(x_{N,1}(t), x_{N,2}(t), x_{N,3}(t)) - \sum_{k=0}^3 \beta_k [y_{ref}^{(k)}(t - \tau) - L_{f_N}^{(k)} x_{N,1}(t - \tau)]}{b_N d_N}$$

Pour la synchronisation, en utilisant la même méthode proposée dans la section précédente, le signal d'erreur est

$$e_i(t) = x_{N,1}(t) - x_{i,1}(t) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N - 1. \quad (124)$$

En dérivant jusqu'au le degré relatif

$$\begin{aligned} e_i(t) &= x_{N,1}(t) - x_{i,1}(t), \\ &\vdots = \vdots \\ e_i^{(4)}(t) &= x_{N,1}^{(4)}(t) - x_{i,1}^{(4)}(t) \\ &= x_{N,1}^{(4)}(t) - \alpha_i(x_{i,1}(t), x_{i,2}(t), x_{i,3}(t)) - b_i d_i u_i(t) \end{aligned} \quad (125)$$

pour les fonctions appropriées  $\alpha_i$ . L'équation (115) devient

$$e_i^{(4)}(t) = \sum_{m=0}^3 \lambda_{i,m} e_i^{(m)}(t - \tau) \quad (126)$$

En résolvant la combinaison de (125) et (126) pour  $u_i(t)$  on obtient

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \frac{y_{ref}^{(4)}(t) - \sum_{k=0}^3 \beta_k [y_{ref}^{(k)}(t - \tau) - L_{f_N}^{(k)} x_{N,1}(t - \tau)]}{b_i d_i} \\ &\quad - \frac{\alpha_i(x_{i,1}(t), x_{i,2}(t), x_{i,3}(t)) - \sum_{m=0}^3 \lambda_{i,m} [L_{f_N}^{(m)} x_{N,1}(t - \tau) - L_{f_i}^{(k)} x_{i,1}(t - \tau)]}{b_i d_i} \end{aligned} \quad (127)$$

L'entrée de commande (127) a la forme (117), alors il n'y a pas des problèmes de causalité grâce à l'usage des équations d'erreur avec retards (123) et (126), lesquelles sont stables sous les conditions données dans Cahlon & Schmidt (2007b). Les Fig. 12 et 13 montrent les résultats pour le cas de 2 manipulateurs ( $N = 2$ ). Les paramètres du système et les coefficients des équations d'erreur sont donnés dans les tables V et VI, respectivement. La valeur du retard est  $\tau = 0.1$  s.

Table V. Valeur des paramètres de l'exemple 4.

Paramètres	$i = 1$	$i = 2$
$a_i$	1	0.1
$b_i$	1.1	0.5
$c_i$	0.8	0.4
$d_i$	1	0.5

Table VI. Coefficients des équations d'erreur.

$i = 1$	$i = 2$
$\lambda_{1,0} = -5$	$\beta_0 = -4$
$\lambda_{1,1} = -8$	$\beta_1 = -6$
$\lambda_{1,2} = -7$	$\beta_2 = -5$
$\lambda_{1,3} = -4$	$\beta_3 = -3$

### VI.3.4 Systèmes avec des interconnexions physiques.

La Fig. 14 montre l'échange de données dans les NCSs avec des interconnexions physiques modélisés par (102). Il existe un retard  $\tau$  en raison du canal de communication et en plus un autre  $\sigma$ , qui est propre du modèle de système, et il apparaît même en boucle ouverte. Ensuite se présente une condition suffisante pour la synchronisation maître-esclave de tels systèmes.

**Proposition 10** *Etant donnés  $N$  systèmes modélisés chacun par (102), avec un retard de communication  $\tau$  et une trajectoire de référence  $y_{ref}(t)$  suffisamment régulière. Il existe une loi de commande causale qui résoudre la synchronisation maître-esclave de*



la forme

$$u_i(t) = \eta_i(x_1(t-\sigma), \dots, x_{i-1}(t-\sigma), x_i(t), x_i(t-\tau), x_{i+1}(t-\sigma), \dots, x_N(t-\sigma), x_N(t-\tau))$$

pour  $i = 1, \dots, N - 1$ . (128)

si  $y_i(t)$  a un degré relatif fini, s'il existe des coefficients  $\beta_k$  et  $\lambda_{i,m}$  tels que les solutions des équations (113) et (115) et si  $\sigma \geq \tau$ .

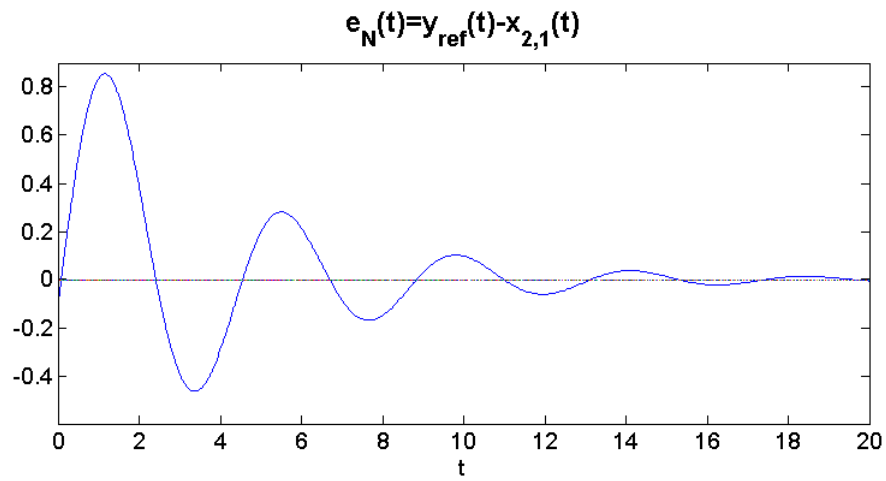
**Remarque 11** *La méthodologie est similaire à celle proposée dans la section précédente. Une équation d'erreur à retards est utilisée pour les équations d'erreur de suivi de trajectoire et de synchronisation car les techniques classiques de commande en utilisant ODEs conduisent à des solutions non causales.*

**Preuve.**

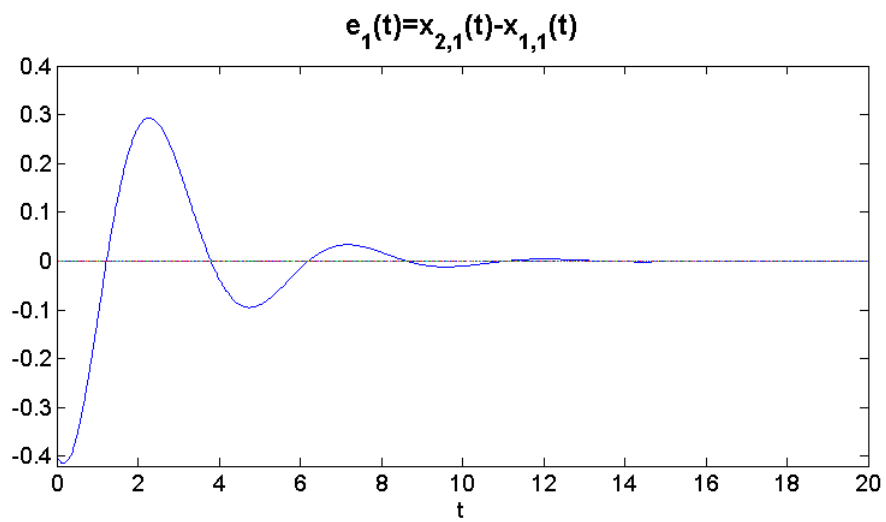
En dérivant l'erreur de suivi  $e_N(t) = y_{ref}(t) - y_N(t)$  jusqu'au le degré relatif  $\rho$  on obtient

$$\begin{aligned} e_N^{(\rho)}(t) &= y_{ref}^{(\rho)}(t) - y_N^{(\rho)}(t) \\ &= y_{ref}^{(\rho)}(t) - [\varphi(\star) + \psi(\star)u_N(t)] \end{aligned} \tag{129}$$

où on définit de même les fonctions  $\varphi(\star) := \varphi(x_1(t-\sigma), x_2(t-\sigma), \dots, x_{N-1}(t-\sigma), x_N)$  et  $\psi(\star)$ .



(a) Erreur de suivi



(b) Erreur de synchronisation

Figure 12. Des équations d'erreur de l'exemple 4.

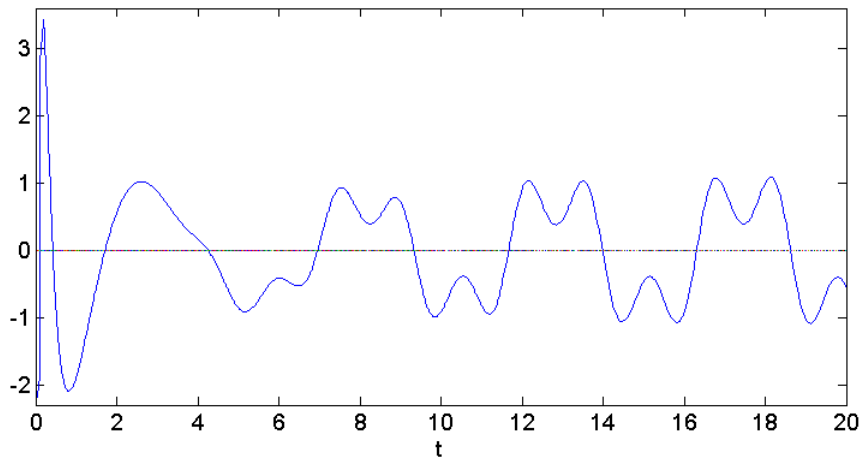
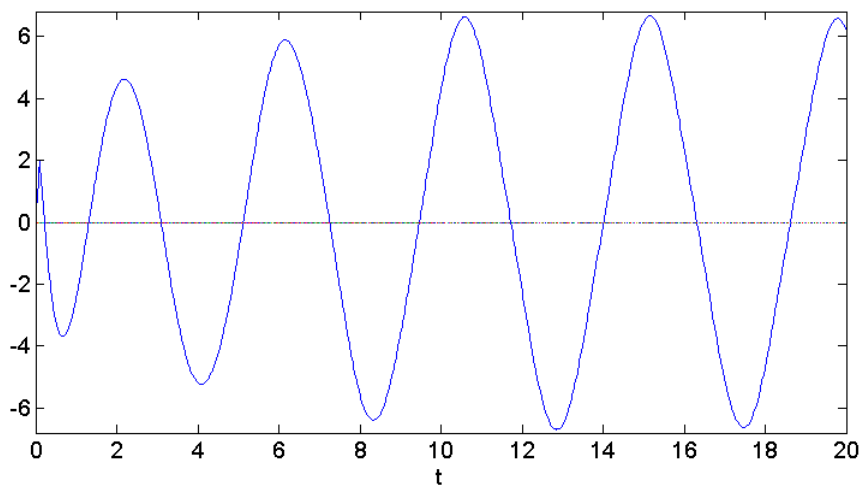
(a) Entrée  $u_1(t)$ (b) Entrée  $u_2(t)$ 

Figure 13. Entrées de commande de l'exemple 4.

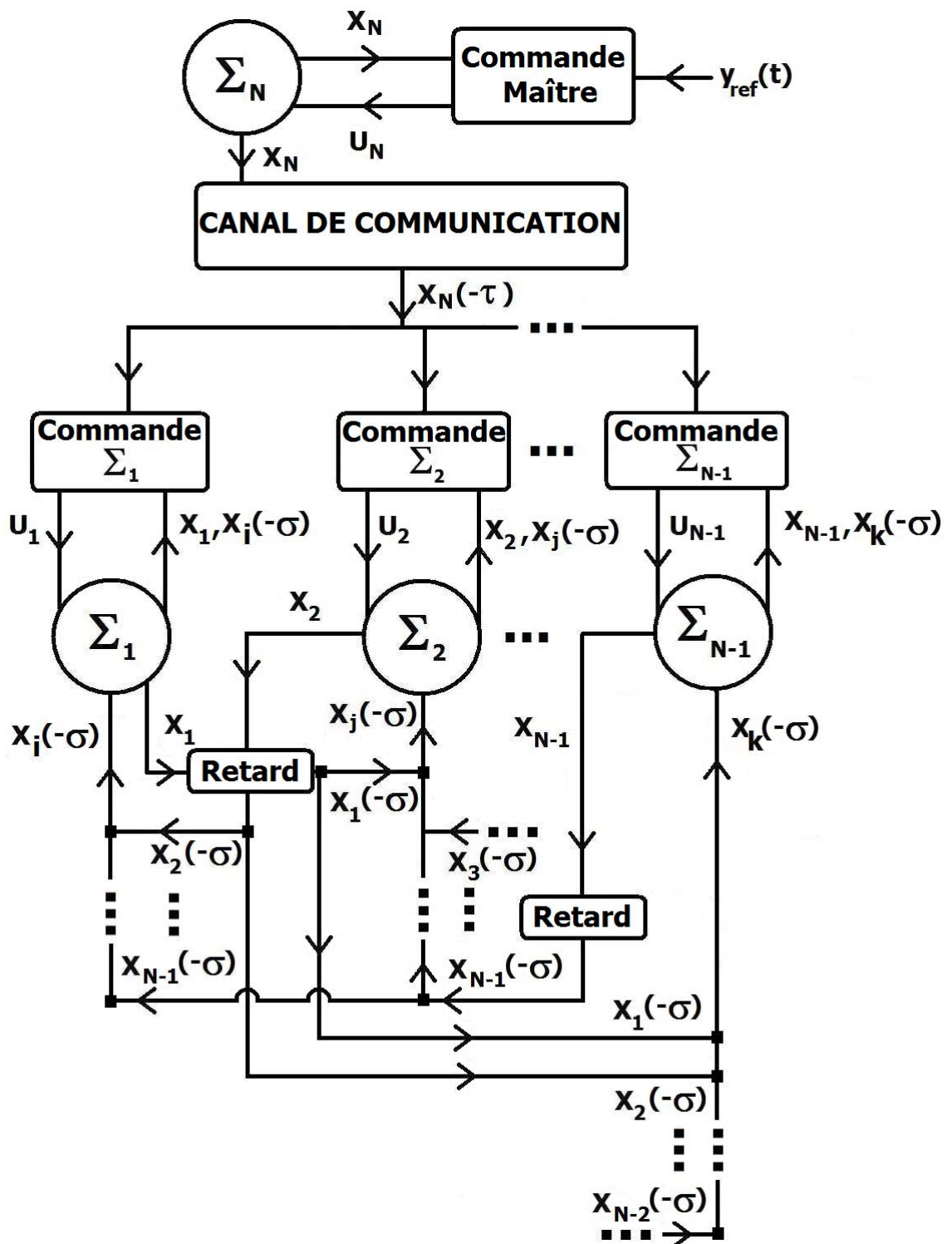


Figure 14. Schéma illustratif NCS avec des interconnexions physiques.

En résolvant la combinaison de (113) et (129) pour  $u_N(t)$

$$u_N(t) = \frac{y_{ref}^{(\rho)}(t) - \varphi(\star) - \sum_{k=0}^{\rho-1} \beta_k [y_{ref}^{(k)}(t - \tau) - L_{f_N}^{(k)} h_N(x_N(t - \tau))]}{\psi(\star)}$$

ce qui conduit à (106).

Considérons l'erreur de synchronisation  $e_i(t) = y_N(t) - y_i(t)$ . En dérivant jusqu'au son degré relatif on obtient

$$e_i^{(\rho)}(t) = y_N^{(\rho)}(t) - [\alpha_i(\star) + \gamma_i(\star)u_i(t)] \text{ pour } i = 1, \dots, N - 1, \quad (130)$$

où on définit de même

$$\alpha_i(\star) := \alpha_i(x_1(t - \sigma), x_2(t - \sigma), \dots, x_{i-1}(t - \sigma), x_i(t), x_{i+1}(t - \sigma), \dots, x_N(t - \sigma))$$

et  $\gamma_i(\star)$ .

En combinant les équations (115) et (130), et en résolvant pour  $u_i(t)$

$$u_i(t) = \frac{y_{ref}^{(\rho)}(t) - \sum_{k=0}^{\rho-1} \beta_k [y_{ref}^{(k)}(t - \tau) - L_{f_N}^{(k)} h_N(x_N(t - \tau))] - \alpha_i(\star)}{\gamma_i(\star)} - \frac{\sum_{m=0}^{\rho-1} \lambda_{i,m} [L_{f_N}^{(m)} h_N(x_N(t - \tau)) - L_{f_i}^{(m)} h_i(x_i(t - \tau))]}{\gamma_i(\star)} \quad (131)$$

L'équation (131) a la forme (104) et elle est causale si  $\sigma \geq \tau$ . ■

Le retard des interconnexions  $\sigma$  ne peut pas être manipulé et les données reçues pour les systèmes esclaves  $\xi(t) = x(t - \tau)$ , que sont utilisées pour calculer l'état requis

$\xi(t + \tau - \sigma) = \xi(t - \sigma)$ , deviennent non causales si  $\tau > \sigma$ .

### VI.3.5 Des conclusions sur la synchronisation des NCSs.

Des conditions suffisantes pour l'existence d'une loi de commande causale qui résoudre la synchronisation maître-esclave de NCSs avec retards dans le canal de communication et, éventuellement, dans les interconnexions physiques se sont présentées. On a montré que la solution traditionnelle en utilisant ODEs pour les équations d'erreur de suivi et de synchronisation devient non causale, cependant, si on utilise des équations à retards il n'y a pas besoin des prédicteurs d'état ou des techniques d'estimation pour reconstruire les termes non disponibles.

L'utilisation des équations d'erreur à retards n'est pas utile pour obtenir les schémas causaux de commande si le retard de transmission dans le canal de communication est plus grand que ceux des interconnexions physiques. Une procédure pour la synchronisation maître-esclave d'un cas particulier de cette classe de systèmes, un réseau de systèmes de puissance, qui donne des lois de commande causales, bien que locales, est traitée dans la section suivante.

## VI.4 SYSTÈMES DE PUISSANCE INTERCONNECTÉS

Un réseau de systèmes de puissance a des retards provoqués par l'échange d'énergie, à travers des lignes de transmission, entre les machines constituant le réseau, et si de plus

il ya des WAMS alors il existe des retards dus à l'échange de données de mesure qui sont de 10 à 70 fois plus grands que ceux des interconnexions physiques en dépendant du type de lien de communication utilisé (plus détails sur les WAMS dans Naduvathuparambil *et al.* (2002)).

Dans cette section on propose une méthodologie pour développer des lois de commande causales pour la synchronisation maître-esclave d'un réseau de SPI basés sur le critère de Lyapunov-Krasovskii et dans l'usage de LMIs. Tout d'abord, on montre qu'une loi de commande décentralisée, c.-à.-d., une entrée de commande qui utilise uniquement les variables locales, est capable de stabiliser le réseau malgré les retards causés par les lignes de transmission. Ensuite, une commande de type centralisé est développée ; elle utilise les variables d'autres générateurs pour calculer la loi de commande. Dans la littérature de SPI peu de travaux de recherche ont été consacrés précisément aux retards, et la plupart de ceux qui existent analysent son impact sans donner une procédure pour la synthèse de la commande ou elle donne des solutions qui requièrent de termes non disponibles (par exemple, Dou *et al.* (2007); Duan *et al.* (2009); Li *et al.* (2010)). La méthodologie proposée dans ce travail donne des schémas causaux de synchronisation, considère en plus des retards par l'usage de WAMS aussi ceux-là de la ligne de transmission et l'implémentation est simple en utilisant un logiciel spécialisé de LMIs. Certains résultats sont présentés dans Gárate-García *et al.* (2009).

#### **VI.4.1 Modélisation des systèmes de puissance**

La dynamique de  $N$  générateurs interconnectés peut être décrite par le suivant modèle en considérant les charges comme des impédances constantes et les conductances de la

ligne  $G_{ij}$  négligeables en ce qui concerne les susceptances  $B_{ij}$  ( $G_{ij} \ll B_{ij}$ ). Le modèle dynamique de la machine  $i$ , sans retard dans les lignes de transmission, s'écrit en boucle ouverte sous la forme (Pai, 1989)

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_i(t) &= \omega_i(t) - \omega_s \\ \dot{\omega}_i(t) &= \frac{\omega_s}{2H_i}(P_{m_i} - E'_{q_i}(t)I_{q_i}(t) - D_i(\omega_i(t) - \omega_s))\end{aligned}\quad (132)$$

$$\dot{E}'_{q_i}(t) = \frac{1}{T'_{d_i}}(E_{f_i}(t) - E'_{q_i}(t) - (X_{d_i} - X'_{d_i})I_{d_i}(t))$$

où

$$\begin{aligned}I_{q_i}(t) &= \sum_{j=1, j \neq i}^N E'_{q_j}(t) B_{ij} \sin(\delta_i(t) - \delta_j(t)) \\ I_{d_i}(t) &= - \sum_{j=1, j \neq i}^N E'_{q_j}(t) B_{ij} \cos(\delta_i(t) - \delta_j(t))\end{aligned}$$

Notations :  $I_{d_i}(t)$  et  $I_{q_i}(t)$  représentent les courants dans l'axe direct et dans l'axe en quadrature du générateur  $i$ , respectivement ;  $E'_{q_i}(t)$  est la tension transitoire dans l'axe en quadrature ;  $E_{q_i}(t)$  est la tension dans l'axe en quadrature ;  $E_{f_i}(t)$  est la tension de champ,  $\delta_i(t)$  est l'angle rotorique, l'écart entre l'angle électrique  $\theta$  et une référence synchrone, en radians, et  $\omega_i(t)$  représente la vitesse angulaire de la machine synchrone. Le reste des paramètres sont définis dans la Table VIII.

Le vecteur d'état instantané de la machine  $i$ -ième (pour  $i = 1, \dots, N$ ) est représenté par  $\mathbf{x}_i(\mathbf{t}) = \left[ \delta_i(t) \quad \omega_i(t) \quad E'_{q_i}(t) \right]^T \in \mathbb{R}^3$ , celui du système complet par



$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \left[ \mathbf{x}_1(\mathbf{t})^T, \dots, \mathbf{x}_N(\mathbf{t})^T \right]^T$  et l'entrée de commande est  $u_i(t) = \frac{E_{fi}}{T'_{d_i}}$ .

En considérant les retards de communication provoqués par la longueur de la ligne de transmission, le système (132) devient (Dou *et al.*, 2007)

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_i(t) &= \omega_i(t) - \omega_s & (133) \\ \dot{\omega}_i(t) &= -a_i(\omega_i(t) - \omega_s) + b_i - c_i E'_{q_i}(t) \sum_{j=1, j \neq i}^N [E'_{q_j}(t - \sigma_{ij}) B_{ij} \sin(\delta_i(t) - \delta_j(t - \sigma_{ij}))] \\ \dot{E}'_{q_i}(t) &= u_i(t) - e_i E'_{q_i}(t) + d_i \sum_{j=1, j \neq i}^N [E'_{q_j}(t - \sigma_{ij}) B_{ij} \cos(\delta_i(t) - \delta_j(t - \sigma_{ij}))] \end{aligned}$$

où  $a_i = \frac{D_i}{2H_i}$ ,  $b_i = \frac{\omega_s P_{m_i}}{2H_i}$ ,  $c_i = \frac{\omega_s}{2H_i}$ ,  $d_i = \frac{(X_{d_i} - X'_{d_i})}{T'_{d_i}}$ ,  $e_i = \frac{1}{T'_{d_i}}$ , sont les paramètres du système et  $u_i(t) = e_i E_{f_i}(t)$  est l'entrée de commande pour  $i = 1, \dots, N$ ;  $\sigma_{ij}$  représente les retards provoqués par la longueur des lignes de transmission entre les générateurs  $i - j$  pour  $i, j = 1, \dots, N$ .

Dans la commande centralisée, en utilisant les WAMS, il existe des retards  $\tau_{ij}$ . Ça qu'implique que la machine  $i$  n'a pas l'état de la machine  $j$  à l'instant  $t$ , mais  $\tau_{ij}$  seconds après. Par conséquent, une commande centralisée a la forme  $u_i(\delta_i, \omega_i, E'_{q_i}, \delta_j(t - \bar{\tau}_{ij}), \omega_j(t - \bar{\tau}_{ij}), E'_{q_j}(t - \bar{\tau}_{ij}))$  avec  $\bar{\tau}_{ij} \geq \tau_{ij}$  pour  $j \neq i$ . La solution traditionnelle pour utiliser les variables à l'instant  $t$  est dessiner un prédicteur pour les reconstruire avec les inconvénients déjà mentionnés dans la Section VI.1.

L'objectif de ce travail est développer des contrôleurs en utilisant soit :

- (i) l'information locale de la machine (commande décentralisée), voir la Section VI.4.4.
- (ii) l'information locale et en plus les variables retardées d'autres machines (commande centralisée), ainsi on évite l'utilisation de prédicteurs d'état, voir la Section VI.4.5.

Les points d'équilibre  $(\delta_i^*, \omega_i^*, E_{q_i}^*, \bar{u}_i)$ , des systèmes (132) et (133) remplissent les conditions suivantes

$$\begin{aligned}
 \omega_i^* &= \omega_s \\
 b_i &= c_i E_{q_i}^* \sum_{j=1, j \neq i}^N (E_{q_j}^* B_{ij} \sin(\delta_i^* - \delta_j^*)) \\
 \bar{u}_i &= e_i E_{q_i}^* - d_i \sum_{j=1, j \neq i}^N (E_{q_j}^* B_{ij} \cos(\delta_i^* - \delta_j^*)).
 \end{aligned} \tag{134}$$

Ensuite quelques concepts de base sont définis.

## VI.4.2 Définitions préliminaires.

Le problème de stabilisation est lié à celui-là de la synchronisation. Les définitions suivantes sont utilisées le long de cette section.

**Définition 14** (*Alberto & Bretas, 1999*) **Synchronisation.** *Les solutions  $x(t)$  et  $y(t)$  de deux systèmes autonomes décrits par  $\dot{x} = f(x)$  et  $\dot{y} = f(y)$  sont considérées en synchronisation si pour tout nombre réel  $L_0 > 0$ , il existe un nombre réel  $L = L(L_0) > 0$  tel que pour toutes les conditions initiales  $x(t_0)$  et  $y(t_0)$  qui satisfont*

$\|x(t_0) - y(t_0)\| < L_0$ , les solutions  $x(t)$  et  $y(t)$  satisfont l'inégalité  $\|x(t) - y(t)\| < L$ , pour tout  $t > t_0$ .

**Définition 15 Stabilité.** *Le point d'équilibre  $x = 0$  d'un système autonome décrit par  $\dot{x} = F(x_t)$  est*

- *stable si, pour chaque  $\epsilon > 0$  il existe  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tel que*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0;$$

- *instable s'il n'est pas stable;*
- *asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe  $\mu$  tel que*

$$\|x(0)\| < \mu \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

La stabilité asymptotique, au sens de Lyapunov, d'un point d'équilibre de la dynamique de l'erreur implique la synchronisation entre les machines au sens de la Définition 14. Il est clair que la synchronisation n'implique pas de stabilisation car un système peut être synchronisé et instable. Dans l'équilibre, la vitesse et l'accélération des  $N$  machines doivent être égales.

Une discussion plus détaillée sur la synchronisation et la stabilité de systèmes de puissance se trouve dans Alberto & Bretas (1999). Maintenant le problème à résoudre est formellement défini.

### VI.4.3 Formulation du problème de synchronisation de SPI.

Etant donnés N systèmes décrits par (133), et une référence constante  $\delta^*$ , trouver des entrées de commande décentralisées de la forme

$$u_i(t) = -k_{i,1}(\delta_i(t) - \delta_i^*) - k_{i,2}(\omega_i(t) - \omega_i^*) - k_{i,3}(Eq'_i(t) - Eq'_i^*) \quad (135)$$

ou centralisées

$$\begin{aligned} u_i(t) = & -k_{i,1}(\delta_i(t) - \delta_i^*) - k_{i,2}(\omega_i(t) - \omega_i^*) - k_{i,3}(Eq'_i(t) - Eq'_i^*) \\ & -k_{ij,1}(\delta_j(t - \tau_{ij}) - \delta_j^*) - k_{ij,2}(\omega_j(t - \tau_{ij}) - \omega_j^*) - k_{ij,3}(Eq'_j(t - \tau_{ij}) - Eq'_j^*) \end{aligned} \quad (136)$$

tels que pour les erreurs de synchronisation  $e_j(t) = \delta_1(t) - \delta_j(t)$  et de suivi de trajectoire  $e_1(t) = \delta_1(t) - \delta^*$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_j(t) = 0 \quad (137)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0, \quad (138)$$

indépendamment des retards  $\sigma_{ij}$  et  $\tau_{ij}$ .

Le problème est résolu sous les suppositions suivantes :

- (i) La machine N est considérée comme référence, alors  $E'_{q_N} = constante = 1 \angle 0^\circ$ .
- (ii) Les retards  $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$  puisque le temps de transmission de l'énergie est indépendant de la direction.
- (iii) On peut considérer plusieurs retards d'interconnexion  $\tau_{i,j}$  entre les machines i-sième et j-sième dus à les WAMS ; cependant, dans ce travail, par simplicité de notation et sans perte de généralité, on suppose que  $\tau_{ij} = \tau$ .

#### VI.4.4 Conception d'une commande décentralisée

Les WAMS fournissent la valeur des variables d'état de chaque générateur à une centrale de commande, alors on dispose d'un système d'alerte rapide si un évènement qui génère l'instabilité du réseau se présente. Pourtant, il existe un intervalle de quelques millisecondes entre la transmission et la réception de données. La grandeur du retard dépend surtout du type de lien de communication utilisé, par exemple, s'il est par satellite le retard oscille autour des 700 ms (Naduvathuparambil *et al.*, 2002).

Ensuite on propose une procédure systématique pour stabiliser le système de puissance (133) dans un point d'opération prédéterminé. L'idée est d'utiliser seulement les variables locales de chaque machine pour la commande, et on évite l'usage des termes non disponibles.

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{K}(\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}^*), \quad (139)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i &= \begin{bmatrix} k_{i,1} & k_{i,2} & k_{i,3} \end{bmatrix}, \text{ et} \\ \mathbf{K} &= \text{diag}\{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_{N-1}\}, \end{aligned} \quad (140)$$

En combinant la technique de LMIs et le critère de stabilité de Lyapunov-Krasovskii pour des SLR. Le système linéarisé (141) est stable, indépendamment des retards générés par les lignes de transmission, ce qui fournit une certaine robustesse locale au système (133) en boucle fermée.

En linéarisant (133) autour du point d'opération  $(\delta^*, \omega_s, E'_{q_i^*})$ , pour  $i = 1, \dots, N - 1$ , le système résultant est

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{i,1} &= x_{i,2} \\
\dot{x}_{i,2} &= p_i x_{i,1} - a_i x_{i,2} + q_i x_{i,3} + \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} s_{ij} x_{j,1}(t - \sigma_{ij}) \\
\dot{x}_{i,3} &= r_i x_{i,1} - e_i x_{i,3} + \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} d_i B_{ij} x_{j,3}(t - \sigma_{ij}) + u_i
\end{aligned} \tag{141}$$

avec  $\mathbf{x}_i(\mathbf{t}) = [x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}]^T = [\delta_i, \omega_i, E'_{q_i}]^T$ , où

$$\begin{aligned}
p_i &= -c_i E'_{q_i} \left[ \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} (E'_{q_j} B_{ij}) + B_{iN} \cos(\delta^*) \right] \\
q_i &= -c_i B_{iN} \text{sen}(\delta^*) \\
r_i &= -d_i B_{iN} \text{sen}(\delta^*) \\
s_{ij} &= c_i E'_{q_j} E'_{q_i} B_{ij}, \text{ pour } j = 1, \dots, N-1.
\end{aligned}$$

lequel a la forme

$$\dot{\mathbf{x}}_i(\mathbf{t}) = \mathbf{A}_{0,i} \mathbf{x}_i(\mathbf{t}) + \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} \mathbf{A}_{i,j} \mathbf{x}_j(\mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma}_{ij}) + \mathbf{B}_i u_i(t). \tag{142}$$

avec des matrices  $\mathbf{A}_{0,i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ p_i & -a_i & q_i \\ r_i & 0 & -e_i \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{A}_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s_{i,j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_i B_{i,j} \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ .

En raison de l'hypothèse (i) le générateur  $N$ -ième n'est pas considéré dans le modèle (142). En considérant les suppositions (i) et (ii), établies à la VI.4.3, le système complet est donné par

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \sum_{j=1}^{\varrho} \mathbf{A}_j \mathbf{x}(\mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma}_j) + \mathbf{B} \mathbf{u}(\mathbf{t}), \quad (143)$$

où le nombre de retards est  $\varrho = \frac{(N-2)(N-1)}{2}$ ,  $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \left[ \mathbf{x}_1(\mathbf{t})^T \mathbf{x}_2(\mathbf{t})^T \dots \mathbf{x}_{N-1}(\mathbf{t})^T \right]^T$  est le vecteur d'état instantané,  $\mathbf{x}(\mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma}_{i,j}) \in \mathbb{R}^{3(N-1)}$  est le vecteur d'état instantané au temps  $t - \sigma_{ij}$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^{(N-1)}$ ,  $\mathbf{A}_0 = \text{diag} \left[ \mathbf{A}_{0,1}, \mathbf{A}_{0,2}, \dots, \mathbf{A}_{0,N-1} \right] \in \mathbb{R}^{3(N-1) \times 3(N-1)}$ , et  $\mathbf{B} = \text{diag} \{ \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{N-1} \} \in \mathbb{R}^{3(N-1) \times (N-1)}$ .

Par simplicité de notation, soit  $\sigma_k$  le  $k$ -ième élément de la liste ordonnée  $\left[ \sigma_{1,2} \ \sigma_{1,3} \ \dots \ \sigma_{1,(N-1)} \ \sigma_{2,3} \ \sigma_{2,4} \ \dots \ \sigma_{2,(N-1)} \ \dots \ \sigma_{(N-2),(N-1)} \right]$  et  $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{3(N-1) \times 3(N-1)}$  la matrice correspondante au retard  $\sigma_k$ , avec

$$\mathbf{A}_k = \begin{array}{c} \text{Ligne i} \\ \text{Ligne j} \end{array} \begin{array}{c} \text{Col. i} \\ \text{Col. j} \end{array} \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & \dots & \dots & 0_{3 \times 3} \\ & \ddots & & \\ \vdots & 0_{3 \times 3} & \mathbf{A}_{i,j} & \vdots \\ & & \ddots & \\ \vdots & \mathbf{A}_{j,i} & 0_{3 \times 3} & \vdots \\ & & & \ddots \\ 0_{3 \times 3} & \dots & \dots & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}.$$

En appliquant (139) au système (143) le système linéarisé en boucle fermée est

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = [\mathbf{A}_0 + \mathbf{BK}] \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \sum_{j=1}^{\varrho} \mathbf{A}_k \mathbf{x}(\mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma}_j) \quad (144)$$

avec  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times 3(N-1)}$ .

La méthodologie proposée pour la synthèse de la commande de SPI est basé sur

le critère de Lyapunov-Krasovskii vu dans la Section VI.2.1, et sur l'usage de LMIs. Certains concepts importants pour comprendre ce dernier thème s'expliquent ci-dessous.

### Formulation en LMIs des objectifs de placement de pôles

Il est bien connu que la stabilité et le comportement transitoire d'un système linéaire sont liés à l'emplacement des pôles.

Une région convexe peut être représentée par LMIs, donc, si la localisation des pôles souhaitée se restreint à une région de ce type, on peut obtenir une loi de commande linéaire en utilisant des inégalités pour exprimer chaque spécification ou objectif de la commande comme une restriction supplémentaire (Chilali *et al.*, 1999). Tout de suite on donne quelques définitions pour comprendre cette approche.

**Définition 16** (Chilali *et al.*, 1999) **Région LMI.** *Un sous-ensemble  $\mathcal{D}$  du plan complexe qui peut être défini comme*

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{z} \in \mathbf{C} : \mathbf{f}_{\mathcal{D}}(\mathbf{z}) = \mathbf{L} + \mathbf{z}\mathbf{M} + \bar{\mathbf{z}}\mathbf{M}^T < 0\}$$

*s'appelle région LMI.  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{M}$  sont des matrices réelles et  $\mathbf{L}^T = \mathbf{L}$ .*

**Définition 17** (Chilali *et al.*, 1999) **Un système  $\mathcal{D}$ -stable.** *Soit  $\mathcal{D}$  une région du demi-plan complexe gauche. Un système dynamique décrit par :  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  est appelé  $\mathcal{D}$ -stable si tous ses pôles se trouvent dans  $\mathcal{D}$ . Par extension,  $\mathbf{A}$  est appelé  $\mathcal{D}$ -stable s'il existe une matrice symétrique  $\mathbf{P} > 0$  telle que*

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}}(\mathbf{A}, \mathbf{P}) := \mathbf{L} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{M} \otimes \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{M}^T \otimes \mathbf{P}\mathbf{A}^T < 0$$



où  $\otimes$  représente le produit Kronecker des matrices.

**Définition 18** (Chilali et al., 1999) *En étant données deux régions LMI  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  le système  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  est  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  stable si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive  $\mathbf{P}$  telle que  $\mathbf{M}_{\mathcal{D}_1} < 0$  et  $\mathbf{M}_{\mathcal{D}_2} < 0$ .*

Quelques exemples de régions LMI et les inégalités qui représentent les restrictions du placement des pôles, tirés de Chilali *et al.* (1999), sont montrés dans la Table VII. Une région dans le plan complexe peut être décrit par l'intersection de plusieurs régions LMI, selon la définition 18. On peut trouver des régions LMI plus sophistiquées dans Chilali *et al.* (1999).

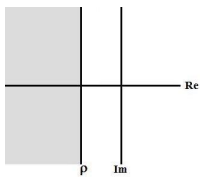
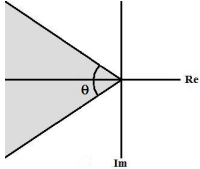
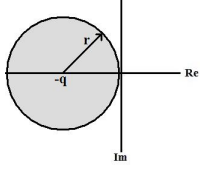
Ensuite, on donne une condition suffisante pour l'existence d'une commande décentralisée pour le système (133) tel que la linéarisation du système en boucle fermée satisfait les conditions de la Proposition 8, pour le SPI.

**Proposition 11** *L'origine du système (143) est asymptotiquement stable avec l'entrée de commande*

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{K}\mathbf{x}(\mathbf{t})$$

où  $\mathbf{K}$  est définie comme dans (140), s'il existe des matrices symétriques réelles  $\mathbf{Q}$ ,

Table VII. Exemple de régions LMI

	<p><b>Demi-plan complexe gauche délimité par une ligne verticale <math>-\rho</math>, c.-à.-d., <math>Re(z) &lt; -\rho</math>.</b></p> $\mathbf{f}_{\mathcal{D}} = \mathbf{z} + \bar{\mathbf{z}} + 2\rho \quad (145)$
	<p><b>Un secteur conique avec l'angle interne <math>0 &lt; \theta &lt; \frac{\pi}{2}</math> et apex à l'origine.</b></p> $\mathbf{f}_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} \text{sen}\theta(z + \bar{z}) & \cos\theta(z - \bar{z}) \\ \cos\theta(\bar{z} - z) & \text{sen}\theta(z + \bar{z}) \end{bmatrix} \quad (146)$ <p>Le secteur conique fournit un coefficient d'amortissement minimum <math>\xi = \text{sen}(\theta)</math>.</p>
	<p><b>Disque centré sur <math>(-q, 0)</math> avec radio <math>r</math>.</b></p> $\mathbf{f}_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} -r & z + q \\ \bar{z} + q & -r \end{bmatrix} \quad (147)$ <p>Le disque fournit une fréquence naturelle maximum <math>\omega_n = r</math>.</p>

$\bar{\mathbf{S}}_1, \dots, \bar{\mathbf{S}}_e$  définies positives, une matrice rectangulaire  $\mathbf{Y} = \mathbf{KQ}$ , et

$$\Pi_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0\mathbf{Q} + \mathbf{B}\mathbf{Y} + \mathbf{Q}\mathbf{A}_0^T + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T + \sum_{i=1}^e \bar{\mathbf{S}}_i & \mathbf{A}_1\mathbf{Q} & \mathbf{A}_2\mathbf{Q} & \dots & \mathbf{A}_e\mathbf{Q} \\ & \mathbf{Q}\mathbf{A}_1^T & -\bar{\mathbf{S}}_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \mathbf{Q}\mathbf{A}_2^T & 0 & -\bar{\mathbf{S}}_2 & \dots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \mathbf{Q}\mathbf{A}_e^T & 0 & 0 & \dots & -\bar{\mathbf{S}}_e \end{bmatrix} < 0. \quad (148)$$

**Preuve.** En considérant l'équation (88) et le système (144).

$$\Pi_{\rho} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}[\mathbf{A}_0 + \mathbf{BK}] + [\mathbf{A}_0 + \mathbf{BK}]^T \mathbf{P} + \sum_{i=1}^{\rho} \mathbf{S}_i & \mathbf{P}\mathbf{A}_1 & \mathbf{P}\mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{P}\mathbf{A}_{\rho} \\ & \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} & -\mathbf{S}_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \mathbf{A}_2^T \mathbf{P} & 0 & -\mathbf{S}_2 & \dots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \mathbf{A}_{\rho}^T \mathbf{P} & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{S}_{\rho} \end{bmatrix} < 0, \quad (149)$$

cependant, (149) n'est pas une inégalité linéaire matricielle dans les variables  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{K}$  puisque les termes  $\mathbf{PBK}$  et  $\mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P}$  sont non linéaires. Pré-et post-multipliant (149) par  $(\mathbf{P}^{-1})^T$  et  $\mathbf{P}^{-1}$ , respectivement, on obtient

$$\Pi_{\rho} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{BK} \mathbf{P}^{-1} + \\ \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_0^T + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T + \sum_{i=1}^{\rho} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S}_i \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{A}_1 \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{A}_2 \mathbf{P}^{-1} & \dots & \mathbf{A}_{\rho} \mathbf{P}^{-1} \\ & \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_1^T & -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{S}_1 \mathbf{P}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ & \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_2^T & 0 & -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{S}_2 \mathbf{P}^{-1} & \dots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_{\rho}^T & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{S}_{\rho} \mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

En appliquant le changement de variables  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$ ,  $\mathbf{Y} = \mathbf{KQ}$  et  $\bar{\mathbf{S}}_i = \mathbf{QS}_i \mathbf{Q}$ ,

$$\Pi_{\rho} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \mathbf{Q} + \mathbf{B} \mathbf{Y} + \mathbf{Q} \mathbf{A}_0^T + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}^T + \sum_{i=1}^{\rho} \bar{\mathbf{S}}_i & \mathbf{A}_1 \mathbf{Q} & \mathbf{A}_2 \mathbf{Q} & \dots & \mathbf{A}_{\rho} \mathbf{Q} \\ & \mathbf{Q} \mathbf{A}_1^T & -\bar{\mathbf{S}}_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \mathbf{Q} \mathbf{A}_2^T & 0 & -\bar{\mathbf{S}}_2 & \dots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \mathbf{Q} \mathbf{A}_{\rho}^T & 0 & 0 & \dots & -\bar{\mathbf{S}}_{\rho} \end{bmatrix} < 0.$$

■

### Méthodologie proposée

En premier lieu : Linéariser le système (133) autour du point d'opération  $(\delta^*, \omega_s, E'_{q_i})$ , pour  $i = 1, \dots, N - 1$ . Le système résultant est (143).

Ensuite : Vérifier les inégalités de la Proposition 11 et des restrictions du placement des pôles souhaités pour le système linéarisé en boucle fermée (144) en utilisant un logiciel pour LMIs. Les inégalités (145), (146), et (147) sont utilisés en définissant  $\mathbf{z} = \mathbf{A}_0 \mathbf{Q} + \mathbf{B} \mathbf{Y}$  et  $\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{Q} \mathbf{A}_0^T + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}^T$ .

Enfin : L'origine du système (144) est stable indépendant du retard, en appliquant une commande décentralisé  $\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{K} \mathbf{x}(\mathbf{t})$  avec  $\mathbf{K} = \mathbf{Y} \mathbf{Q}^{-1}$ , où  $\mathbf{K}$  est définie dans (140), si les LMIs sont réalisables. Le point de fonctionnement  $(\delta^*, \omega_s, E'_{q_i})$  du système (133) est localement stable, robuste en ce qui concerne les retards  $\sigma_{ij}$ , avec une commande  $\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{K}(\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}^*)$ .

### Résultats de simulation

Le système WSCC, montré dans la Fig. 15, est considéré pour illustrer la méthodologie proposée<sup>2</sup>. Le réseau se compose de 3 machines modelés chacun par (133). Le générateur 3 est le générateur balancier ou slack bus, de sorte que  $E'_{q3} = constant = 1\angle 0^\circ$  (N=3).

Les paramètres du système, pris de Sauer & Pai (1998), sont montrés dans la Table VIII.

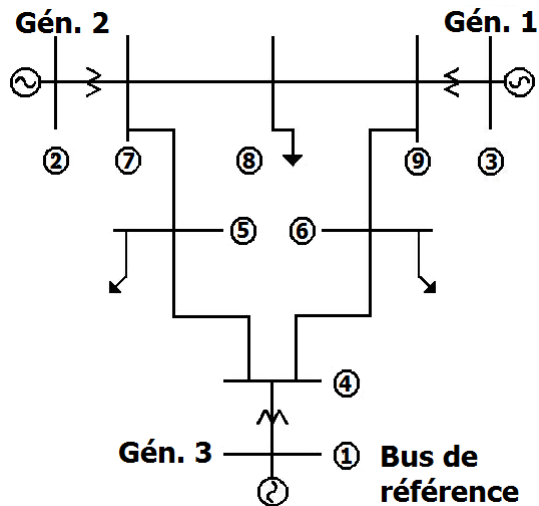


Figure 15. Système WSCC.

En linéarisant (133) autour du point d'équilibre ( $\delta^* = 0.5236$ ,  $\omega_s = 377$ ,  $E'_{q1} = 1.03$ ,  $\bar{u}_1 = -0.4498$ , ), et ( $\delta^* = 0.5236$ ,  $\omega_s = 377$ ,  $E'_{q2} = 1.01$ ,  $\bar{u}_2 = -0.7659$ ) on obtient

<sup>2</sup>Tiré de Sauer & Pai (1998) avec de légères modifications.

Table VIII. Paramètres, description et valeurs.

NOTATION	DESCRIPTION	VALEURS	
		Mach. 1	Mach. 2
$X_{di}$	Réactances synchrones de l'axe direct.*	0.8958	1.3125
$X'_{di}$	Réactances transitoires de l'axe direct.*	0.1198	0.1813
$D_i$	Facteur d'amortissement.*	5	3
$H_i$	Constante d'inertie, en seconds.	6.4	3.01
$T'_{di}$	Constante de temps de court-circuit transitoire de l'axe direct, en seconds.	6.0	5.89
$\omega_s$	Vitesse de rotation nominale, en rad/s.	$120\pi$	$120\pi$
$B$	Matrice des susceptances (symétrique) au niveau des noeuds internes*	$\begin{bmatrix} -5.114 & 2.826 & 2.253 \\ 2.826 & -5.023 & 2.275 \\ 2.253 & 2.275 & -4.695 \end{bmatrix}$	

\* Tous les paramètres sont dans le système de per-unit.

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(\mathbf{t} - \sigma_1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad (150)$$

avec des matrices

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -145.7805 & -0.3906 & -33.1790 & 0 & 0 & 0 \\ -0.14569430897694 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -308.7264 & -0.4983 & -71.2356 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2185 & 0 & -0.1698 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 86.5889 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3655 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 184.1093 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5428 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

L'objectif de la commande est de placer les pôles dans la région montrée dans la Fig. 16, laquelle est délimitée par la ligne verticale sur le demi-plan complexe gauche  $-\rho = -30$ , un cercle centré à l'origine et de rayon  $r = 120$  et un secteur conique avec  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

Les inégalités (145), (146), (147), (148) ont été testés en utilisant le logiciel Matlab<sup>©</sup>

Ver. 7.8.0.347. Les matrices résultantes sont :

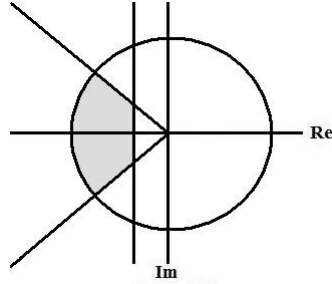


Figure 16. Région souhaitée pour le système en boucle fermée.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 102.3397 \times 10^{-3} & -3.2080 & -2.8025 & 0 & 0 & 0 \\ -3.2080 & 120.2756 & 133.8884 & 0 & 0 & 0 \\ -2.8025 & 133.8884 & 205.4848 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 165.4135 \times 10^{-3} & -5.2241 & -2.4381 \\ 0 & 0 & 0 & -5.2241 & 208.9869 & 131.8814 \\ 0 & 0 & 0 & -2.4381 & 131.8814 & 119.6255 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 23.4927 \times 10^{-3} & -3.4080 & -10.7309 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13.4223 \times 10^{-3} & -4.2793 & -7.8712 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4284.0056 & 287.6751 & -181.2356 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1948.9612 & 146.8901 & -188.0160 \end{bmatrix}$$

L'entrée de commande a la forme souhaitée (139)

$$u_1(t) = 4284.0056(\delta_1(t) - \delta^*) + 287.6751(\omega(t) - \omega_s) - 181.2356(E_{q_1}(t) - E_{q_1}^*)$$

$$u_2(t) = 1948.9612(\delta_2(t) - \delta^*) + 146.8901(\omega(t) - \omega_s) - 188.0160(E_{q_2}(t) - E_{q_2}^*).$$

Les erreurs de suivi et de synchronisation sont montrés dans la Fig. 17. Le système



(133) est asymptotiquement stable pour retards même de 0.7 s. en utilisant les conditions initiales :  $(\delta_1 = 0.45, \omega_1 = 376, E'_{q_1} = 0.9)$  et  $(\delta_2 = 0.5, \omega_2 = 377.5, E'_{q_2} = 1.1)$ .

Le système reste stable pour des retards plus grands.

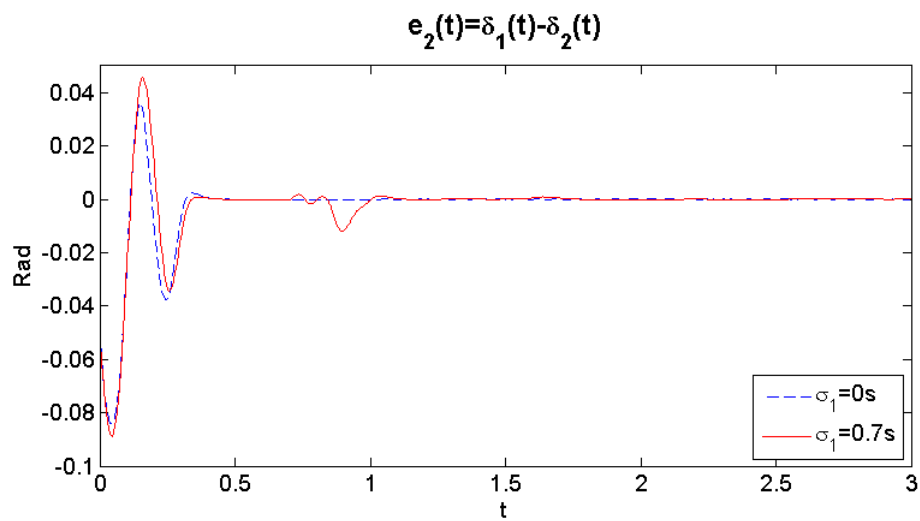
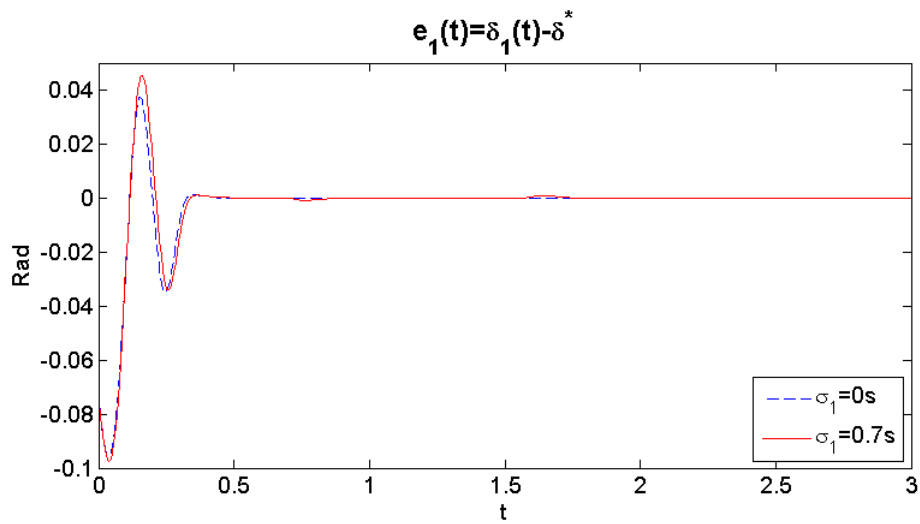
Les entrées de commande  $u_1$  et  $u_2$  sont montrés dans la Fig. 18. Elles sont saturées au moyen de la fonction  $u_{sat} = u_{max} \text{sat}\left(\frac{u}{u_{max}}\right)$  avec  $u_{max} = 30$ .

## VI.4.5 Conception d'une commande centralisée

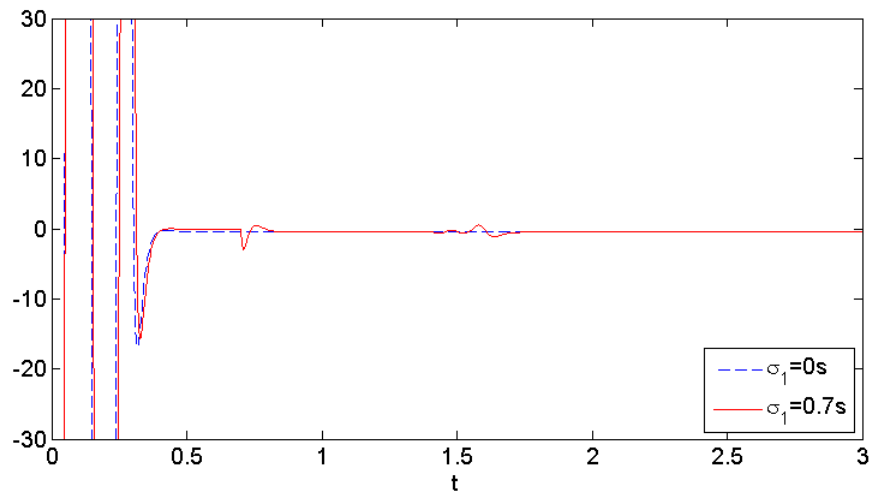
Atténuer les oscillations entre deux ou plusieurs régions où il y a des générateurs est difficile avec une commande décentralisée, ce qui est une des principales restrictions de la transmission de puissance (Chang & Xu, 2007). Différentes approches ont été proposées dans la littérature pour résoudre ce problème, voir Klein *et al.* (1991); Roman Messina (2009) et les références incluses. Une alternative intéressante est l'utilisation d'une commande centralisée en utilisant les informations de mesure à distance des WAMS. Cependant, une commande centralisée classique implique l'utilisation de termes non disponibles en raison du retard inhérent à la lien de communication. Ensuite, nous proposons une commande centralisé de la forme (136), qui utilise les termes retardés, en évitant ainsi les solutions non causales.

### Système linéarisé

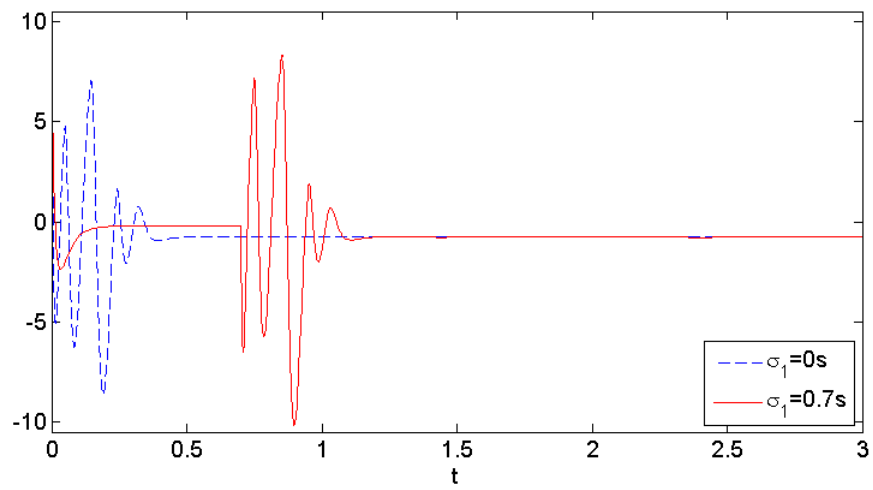
Dans la section précédente on a vu qu'en linéarisant le système (133) autour du point d'opération  $(\delta^*, \omega_s, E'_{q_i^*})$ , pour  $i = 1, \dots, N - 1$  on obtient le système en boucle ouverte (143). Maintenant, si on considère une commande de la forme (136) le système résultant en boucle fermée est



(b) Erreur de synchronisation  
Figure 17. Équations d'erreur.



(a) Entrée  $u_1(t)$



(b) Entrée  $u_2(t)$

Figure 18. Entrées de commande.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}_0 + \mathbf{BK}_0]\mathbf{x}(t) + \sum_{j=1}^{\varrho} \mathbf{A}_j \mathbf{x}(t - \sigma_j) + \mathbf{BK}_1 \mathbf{x}(t - \tau), \quad (151)$$

où  $\mathbf{K}_{i,1} = \begin{bmatrix} k_{i,1} & k_{i,2} & k_{i,3} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{K}_{i,j,1} = \begin{bmatrix} k_{ij,1} & k_{ij,2} & k_{ij,3} \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1 \in \mathbb{R}^{N-1 \times 3(N-1)}$ , avec

$$\mathbf{K}_0 = \text{diag}\{\mathbf{K}_{1,1}, \mathbf{K}_{2,1}, \dots, \mathbf{K}_{N-1,1}\},$$

et

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 3} & \mathbf{K}_{1,2,1} & \mathbf{K}_{1,3,1} & \dots & \mathbf{K}_{1,N-1,1} \\ \mathbf{K}_{2,1,1} & 0_{1 \times 3} & \mathbf{K}_{2,3,1} & \dots & \mathbf{K}_{2,N-1,1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ \mathbf{K}_{N-2,1,1} & \mathbf{K}_{N-2,2,1} & \mathbf{K}_{N-2,3,1} & 0_{1 \times 3} & \mathbf{K}_{N-2,N-1,1} \\ \mathbf{K}_{N-1,1,1} & \mathbf{K}_{N-1,2,1} & \dots & \mathbf{K}_{N-1,N-2,1} & 0_{1 \times 3} \end{bmatrix}.$$

**Proposition 12** *L'origine du système de puissance (143) est asymptotiquement stable avec une commande centralisé de la forme (136) s'il existe des matrices symétriques réelles  $\mathbf{Q}$ ,  $\bar{\mathbf{S}}_i$  définies positives, avec  $i = 1, \dots, \varrho + 1$ , et des matrices rectangulaires  $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{BK}_0$ ,  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{BK}_1$ , telles que*

$$\mathbf{Q} > 0;$$

$$\bar{\mathbf{S}}_i > 0;$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0\mathbf{Q} + \mathbf{B}\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Q}\mathbf{A}_0^T + \mathbf{Y}_0^T\mathbf{B}^T + \sum_{i=1}^{\varrho+1} \bar{\mathbf{S}}_i \mathbf{A}_1\mathbf{Q} \dots \mathbf{A}_\varrho\mathbf{Q} & \mathbf{B}\mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Q}\mathbf{A}_1^T & -\bar{\mathbf{S}}_1 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \vdots & 0 \ \ddots \ 0 \\ \mathbf{Q}\mathbf{A}_\varrho^T & 0 \ 0 \ -\bar{\mathbf{S}}_\varrho \ 0 \\ \mathbf{Y}_1^T\mathbf{B}^T & 0 \ \dots \ 0 \ -\bar{\mathbf{S}}_{\varrho+1} \end{bmatrix} < 0. \quad (152)$$

**Preuve.**

La Proposition (8) donne une condition suffisante pour la stabilité de (143) indépendamment de la grandeur du retard. Alors il reste à vérifier que l'inégalité (152) est valable pour le système en boucle fermée.

En considérant le système (151) et la Proposition 8.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}[\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}\mathbf{K}_0] + [\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}\mathbf{K}_0]^T\mathbf{P} + \sum_{i=1}^{\varrho+1} \mathbf{S}_i \mathbf{P}\mathbf{A}_1 \mathbf{P}\mathbf{A}_2 \dots \mathbf{P}\mathbf{A}_\varrho \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K}_1 \\ \mathbf{A}_1^T\mathbf{P} & -\mathbf{S}_1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \\ \mathbf{A}_2^T\mathbf{P} & 0 \ -\mathbf{S}_2 \ \dots \ 0 \ 0 \\ \vdots & \vdots \ \vdots \ \ddots \ \vdots \ \vdots \\ \mathbf{A}_\varrho^T\mathbf{P} & 0 \ 0 \ \dots \ -\mathbf{S}_\varrho \ 0 \\ [\mathbf{B}\mathbf{K}_1]^T\mathbf{P} & 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ -\mathbf{S}_{\varrho+1} \end{bmatrix} < 0$$

Cependant, cette matrice n'est pas une LMI car les termes  $\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K}_0$  et  $\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K}_1$  sont non linéaires. Pré-et-post-multipliant par  $[\mathbf{P}^{-1}]^T$  et  $\mathbf{P}^{-1}$  et en appliquant le changement de variables  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$ ,  $\bar{\mathbf{S}}_i = \mathbf{Q}\mathbf{S}_i\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{B}\mathbf{K}_0$  et  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{B}\mathbf{K}_1$  on obtient

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0\mathbf{Q} + \mathbf{B}\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Q}\mathbf{A}_0^T + \mathbf{Y}_0^T\mathbf{B}^T + \sum_{i=1}^{\varrho+1} \bar{\mathbf{S}}_i \mathbf{A}_1\mathbf{Q} \dots \mathbf{A}_\varrho\mathbf{Q} & \mathbf{B}\mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Q}\mathbf{A}_1^T & -\bar{\mathbf{S}}_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ \vdots & 0 \quad \ddots \quad 0 \\ \mathbf{Q}\mathbf{A}_\varrho^T & 0 \quad 0 \quad -\bar{\mathbf{S}}_\varrho \quad 0 \\ \mathbf{Y}_1^T\mathbf{B}^T & 0 \quad \dots \quad 0 \quad -\bar{\mathbf{S}}_{\varrho+1} \end{bmatrix} < 0. \quad \blacksquare$$

### Méthodologie proposée

La procédure est semblable à celle de la commande décentralisée. Après de la linéarisation de (133) autour du point de fonctionnement  $(\delta^*, \omega_s, E'_{qi^*})$ , pour  $i = 1, \dots, N$  le système résultant est (141). Ensuite le problème est posé comme un système de LMIs en fonction des objectifs de la commande (voir Table VII) et fondé sur la Proposition (8) les gains de la commande sont calculés pour le système (151) automatiquement.

On définit  $\mathbf{z} = \mathbf{A}_0\mathbf{Q} + \mathbf{B}\mathbf{Y}_0$  et  $\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{Q}\mathbf{A}_0^T + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T$  pour appliquer les inégalités (145), (146) et (147) au système (151).

L'origine du système (151) est stable indépendant de l'ampleur du retard en utilisant la commande  $\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{K}_0\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{K}_1\mathbf{x}(\mathbf{t} - \tau)$  avec  $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Y}_0\mathbf{Q}^{-1}$  y  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{Y}_1\mathbf{Q}^{-1}$  si les conditions LMIs sont remplis et donc, le point de fonctionnement  $(\delta^*, \omega_s, E'_{qi^*})$  du système (133) est localement stable, robuste en ce qui concerne les retards  $\sigma_j$  et  $\tau$ , en appliquant la commande centralisée  $\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{K}_0(\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}^*) + \mathbf{K}_1(\mathbf{x}(\mathbf{t} - \tau) - \mathbf{x}^*)$ .

### Cas d'étude

La viabilité de la loi de commande (136) sera illustrée avec l'exemple du système WSCC de la Section VI.4.4. Les objectifs de la commande sont le placement de pôles dans la région delimitée par  $\rho = 10$ , le secteur conique avec apex à l'origine,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  et le disque

de rayon  $r = 100$  centré à l'origine.

En prouvant les inégalités de la Proposition 12 et les restrictions de placement de pôles souhaités les conditions sont réalisables. La commande qui stabilise le système indépendamment des retards a les suivantes matrices:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 932.8488 \times 10^{-3} & -11.4883 & -7.0591 & 0 & 0 & 0 \\ -11.4883 & 210.2686 & 174.8647 & 0 & 0 & 0 \\ -7.0591 & 174.8647 & 203.9146 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5304 & -17.6764 & -8.3888 \\ 0 & 0 & 0 & -17.6764 & 330.9190 & 186.6700 \\ 0 & 0 & 0 & -8.3888 & 186.6700 & 137.7677 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$\mathbf{Y}_0 = \begin{bmatrix} -14.0409 \times 10^{-3} & -2.5602 & -8.6585 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.6810 \times 10^{-3} & -3.8276 & -6.7019 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 932.8488 \times 10^{-3} & -11.4883 & 210.2686 \\ -7.0591 & 174.8647 & 203.9146 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} 626.7850 & 137.1344 & -138.3616 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 29.9682 & 69.7829 & -141.3746 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -20.1254 & -5.4288 & 7.6566 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'entrée de commande

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 626.7850(\delta_1(t) - \delta_1^*) + 137.1344(\omega_1(t) - \omega_1^*) - 138.3616(E_{q_1}(t) - E_{q_1}^*) \\ &\quad - 20.1254(\delta_2(t - \tau) - \delta_2^*) - 5.4288(\omega_2(t - \tau) - \omega_2^*) + 7.6566(E_{q_2}(t - \tau) - E_{q_2}^*) \\ u_2(t) &= 29.9682(\delta_2(t) - \delta_2^*) + 69.7829(\omega_2(t) - \omega_2^*) - 141.3746(E_{q_2}(t) - E_{q_2}^*) \\ &\quad + (E_{q_1}(t - \tau) - E_{q_1}^*) \end{aligned}$$

a été testé dans le système (133) avec les conditions initiales:  $(\delta_1 = 0.5, \omega_1 = 375.5, E'_{q_1} = 0.9)$  et  $(\delta_2 = 0.6, \omega_2 = 376, E'_{q_2} = 1)$ .

Les conditions ne s'appliquent pas au système complet, mais à  $\mathbf{A}_0 + \mathbf{BK}_0$ . Cela assure que les LMIs de la Proposition 12 s'accomplissent pour des valeurs de la commande qui placent les pôles loin de l'axe imaginaire. Les calculs effectués dans ce travail ont été réalisés avec l'outil pour LMIs de Matlab<sup>©</sup> Ver. 7.8.0.347.

Les résultats sont montrés dans les Figures 19 et 20. Le retard d'interconnexion est maintenue en  $\sigma_1 = 20ms$  et le système est stable pour des retards même de  $\tau = 1s$ . La stabilité locale du système non linéaire est garantie en étant accompli la condition suffisante donnée dans la Proposition 12.

Les entrées de commande  $u_1$  et  $u_2$  sont saturées au moyen de la fonction  $u_{sat} = u_{max} \text{sat}\left(\frac{u}{u_{max}}\right)$  pour  $u_{max} = 10$ .

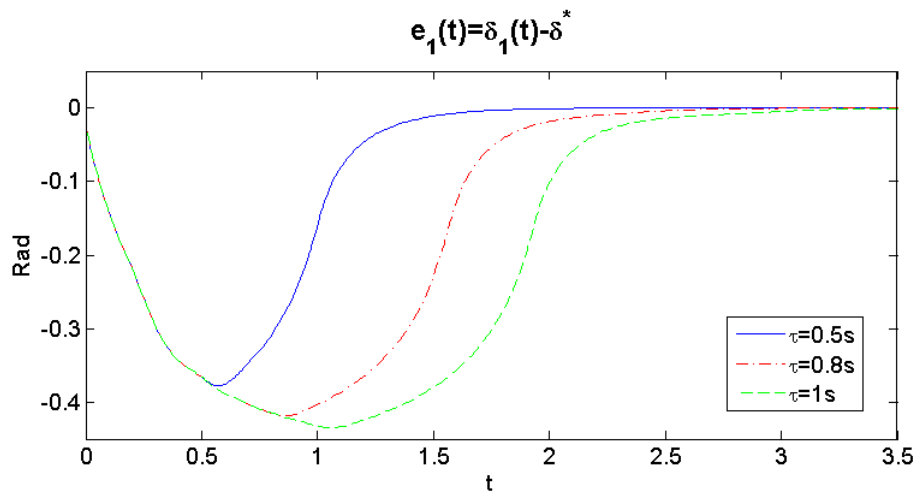
## VI.4.6 Des conclusions

Des conditions suffisantes pour la synchronisation maître-esclave de SPI modélisés avec des retards induits par la longueur des lignes de transmission et par l'usage de WAMS ont été dérivés. La procédure de synthèse de la commande est développée en employant des techniques de linéarisation, le critère de Lyapunov-Krasovskii pour systèmes à retards et l'analyse de LMIs. Le système de puissance linéarisé est stable indépendamment de l'ampleur des retards, de sorte que le système non linéaire est localement stable et robuste aux retards.

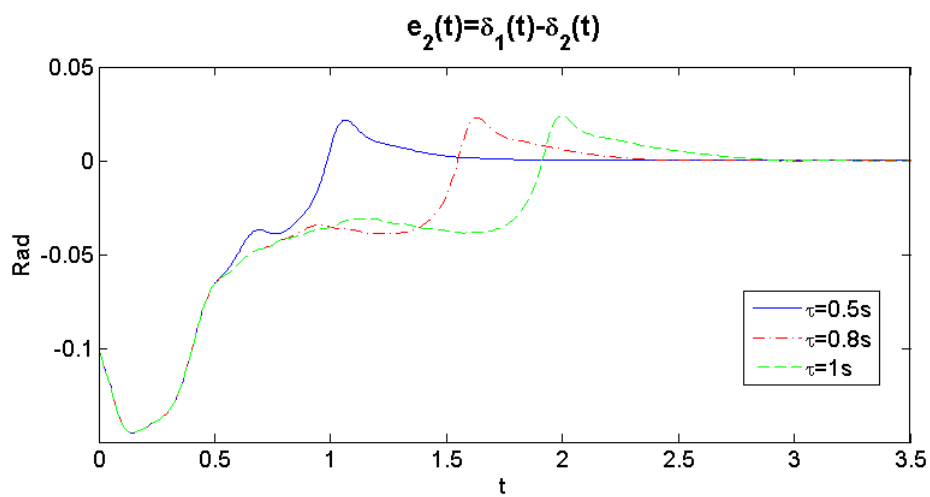


On a montré qu'une commande décentralisée est capable de stabiliser le réseau de systèmes de puissance, malgré le retard dans les lignes de transmission. De plus s'est développé une commande centralisée, en utilisant les variables retardées d'autres générateurs, alors il n'existe pas des problèmes de causalité et les prédictors d'état ne sont pas nécessaires.

Les conditions de stabilité sont facilement vérifiées en utilisant un logiciel spécialisé pour LMIs. Dans les deux cas de commande, centralisée et décentralisée, les paramètres du régulateur sont calculés automatiquement si les conditions imposées par les LMIs sont réalisables.



(a) Erreur de suivi



(b) Erreur de synchronisation

Figure 19. Erreurs de suivi et synchronisation pour  $\sigma_1 = 20ms$  et des valeurs différents de  $\tau$ .

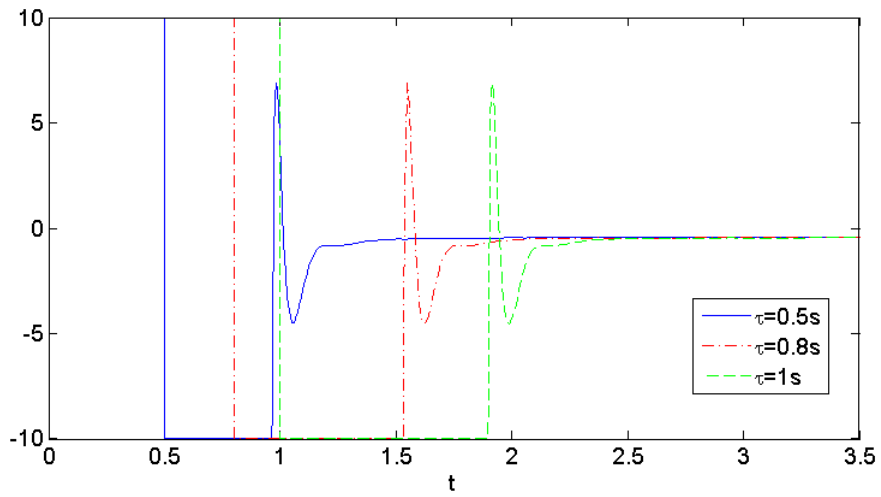
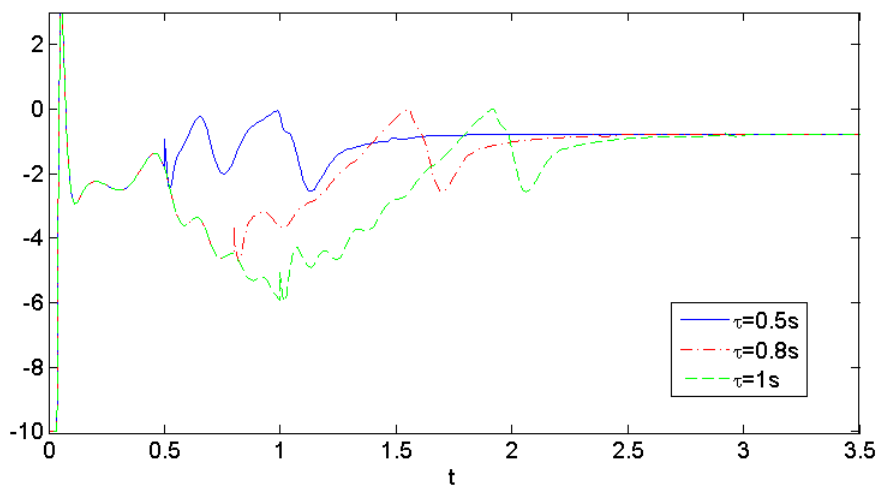
(a) Entrée  $u_1(t)$ (b) Entrée  $u_2(t)$ 

Figure 20. Entrées de commande.

## VI.5 CONCLUSIONS GÉNÉRALES

### VI.5.1 Des contributions principales

Les contributions de ce travail de thèse sont les suivantes :

- Des conditions nécessaires et suffisantes sont données pour éliminer des retards d'un SLR au moyen d'une transformation bicausale. Cela permet de simplifier l'analyse, le contrôle, et la simulation numérique de ces systèmes. Ces résultats permettent de détecter des systèmes faussement retardés en raison d'erreurs de modélisation ou de choix de variables d'état. Curieusement, ce problème fut resté ouvert durant plus de trente ans !
- Une méthode systématique est fournie pour trouver une transformation bicausale pour réduire des retards dans les systèmes linéaires, ce qui permet d'appliquer des outils mathématiques standard pour l'analyse et la synthèse de commande, car il y a plusieurs résultats pour les systèmes avec quelques retards.
- L'utilisation d'équations d'erreur avec des retards pour les NCSs permet d'établir des conditions suffisantes pour la synchronisation maître-esclave dans cette classe de systèmes qui présentent des retards sur le canal de communication et éventuellement dans les interconnexions physiques. Il s'agit d'une solution causale et il n'est donc pas nécessaire d'utiliser des prédicteurs.
- Des conditions suffisantes sont données pour la stabilité robuste, par rapport aux retards, dans des systèmes de puissance interconnectés modélisés avec retard dans

les interconnexions physiques (induit par la longueur des lignes de transmission) et éventuellement dans le canal de communication quand on utilise des WAMS. La méthodologie proposée est basée sur des techniques de linéarisation, au moyen de LMIs et la méthode de Lyapunov-Krasovskii pour la stabilité indépendante du retard du système linéarisé. Bien que de nombreux articles ont rapporté récemment sur les WAMS, dans la littérature il y a peu de contributions qui considèrent le retard, ou alors, elles analysent uniquement l'impact du retard sur le système sans offrir une procédure de conception de la commande. Nos travaux ouvrent ce champ de recherche actuelle et peu exploré.

### VI.5.2 Perspectives

- Trouver une procédure alternative et des conditions abstraites, pour réduire les retards dans les systèmes linéaires, car la méthode actuelle implique l'application d'un algorithme itératif de résolution d'équations linéaires qui augmente en complexité avec la quantité de retards.
- Trouver des conditions pour l'élimination et la réduction des retards dans les systèmes non linéaires à retards en utilisant des outils de contrôle géométrique, comme le crochet étendu de Lie, récemment proposé par Califano *et al.* (2010), par exemple.
- Les retards dans la synchronisation maître-esclave sont considérés comme constants et commensurables, après avoir appliqué une technique de stockage de données. Une alternative à explorer est de considérer les retards variables.
- En ce qui concerne les NCSs, actuellement la communication maître-esclaves est

bidirectionnelle, ce qui peut être modifié pour explorer d'autres topologies.

- En ce qui concerne l'utilisation de WAMS dans des systèmes de puissance, on peut explorer l'utilisation d'équations d'erreur avec des retards, en négligeant le retard causé par les lignes de transmission, qui est beaucoup plus petit que celui provoqué par l'utilisation de WAMS ou utiliser fonctionnels de Lyapunov Krasovskii plus complexes, comme par exemple celles utilisées dans (Zhang *et al.*, 2011; Kruszewski *et al.*, 2011), pour traiter le cas des retards variables.



## Referencias

- Alberto, L. F. & Bretas, N. G. (1999). Synchronism versus stability in power systems. *Electrical Power and Energy Systems*, **21**: 261–267.
- Azorin, J., Reinoso, O., Sabater, J., Neco, R., & Aracil, R. (2003). Dynamic analysis for a teleoperation system with time delay. En *Proc. of 2003 IEEE Conference on Control Applications*, páginas 1170–1175, Estambul, Turquía. 23–25 de junio.
- Azorin, J., Reinoso, O., Aracil, R., & Ferre, M. (2004). Generalized control method by state convergence for teleoperation systems with time delay. *Automatica*, **40**(9): 1575–1582.
- Berestesky, P., Chopra, N., & Spong, M. W. (2004). Discrete time passivity in bilateral teleoperation over the internet. Proc. of IEEE International Conference on Robotics and Automation, páginas 4557–4564, New Orleans, Luisiana, Estados Unidos de América. 26 de abril – 1 de mayo.
- Boudellioua, M. (2007). Equivalence and reduction of delay-differential systems. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, **17**(1): 15–22.
- Boudellioua, M. S. & Quadrat, A. (2008). Reduction of linear systems based on Serre's theorem. Proc. of Mathematical Theory of Networks and Systems, Virginia, Estados Unidos de América. 28 de julio – 1 de agosto.
- Branicky, M., Phillips, S., & Zhang, W. (2000). Stability of networked control systems: Explicit analysis of delay. Proc. of the IEEE American Control Conference, Chicago, Illinois. 28–30 de junio.
- Cahlon, B. & Schmidt, D. (2007a). Stability criteria for certain high odd order delay differential. *J. Comput. Appl. Math.*, **200**(1): 408—423.
- Cahlon, B. & Schmidt, D. (2007b). Stability criteria for certain high even order delay differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **334**(2): 859—875.
- Califano, C., Marquez-Martinez, L. A., & Moog, C. H. (2010). On linear equivalence for time-delay systems. Proc. of 18th IFAC World Congress, páginas 6567–6572, Baltimore, Maryland, Estados Unidos de América. 30 de junio – 2 de julio.
- Castro-Linares, R., Moog, C. H., & Velasco-Villa, M. (1997). Bi-causal solutions to the disturbance decoupling problem for time-delay nonlinear systems. En *Proc. of 36th IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 2, páginas 1621 – 1622, San Diego, Estados Unidos de América, 10–12 de diciembre.



- Chang, Y. & Xu, Z. (2007). A novel SVC supplementary controller based on wide-area signals. *Electric Power Systems Research*, **77**(12): 1569–1574.
- Chaudhuri, B., Majumder, R., & Pal, B. C. (2004). Wide-area measurement-based stabilizing control of power system considering signal transmission delay. *IEEE Transactions on Power Systems*, **19**(4): 1971–1979.
- Chilali, M., Gahinet, P., & Apkarian, P. (1999). Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44**(12): 2257–2270.
- Chopra, N., Berestesky, P., & Spong, M. (2008). Bilateral teleoperation over unreliable communication networks. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **16**(2): 304–313.
- Dou, C., Jia, Q., Jin, S., & Bo, Z. (2007). Delay-independent decentralized stabilizer design for large interconnected power systems based on WAMS. *Electrical Power Energy Systems*, **29**: 775–782.
- Duan, Z., Zhang, C., Hu, Z., & Zhang, Y. (2009). Robust control of interconnected power system based on wams considering signals transmission delay. In IEEE Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference APPEEC 2009, Wuhan, China. 38–31 de marzo.
- Estrada-García, H. J., Peñaloza-Mejía, O., Moog, C. H., & Márquez-Martínez, L. A. (2008). Trajectory tracking problem: causal solutions for non-linear time-delay systems. *International Journal of Control*, **81**: 1202 – 1209.
- Estrada-García, H. J., Márquez-Martínez, L. A., & Moog, C. H. (2007). Master-slave synchronization for two inverted pendulums with communication time-delay. Proc. of 7th Workshop on Time-Delay Systems,, Nantes, Francia. 17–19 de septiembre.
- Fattouh, A. & Sename, O. (2003).  $h_{\infty}$ -based impedance control of teleoperation systems with time delay. Vol. 2 de *Proc. of IEEE Conference on Control Applications*, páginas 1170–1175, Estambul, Turquía. 23–25 de junio.
- Fiagbedzi, Y. (2002). Finite-dimensional representation of delay systems. *Applied Mathematics Letters*, **15**: 527–532.
- Gárate-García, A., De León-Morales, J., Márquez-Martínez, L., & Moog, C. (2009). Decentralized stabilizer design of wide-area interconnected power systems. En *Memorias del Congreso Nacional de la Asociación de México de Control Automático*, Zacatecas, Mexico. 30 de septiembre.
- Gárate-García, A., Márquez-Martínez, L. A., & Moog, C. H. (2011). Equivalence of linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **56**(3): 666–670.

- García, C., Morales, B., Carelli, R., & Postigo, J. (2000). Stability analysis for a teleoperation system with time delay and force feedback. Proc. of IEEE Conference on Decision and Control, páginas 3453–3458, Sydney, Australia. 12–15 de diciembre.
- Germani, A., Manes, C., & Pepe, P. (2003). Input-output linearization with delay cancellation for nonlinear delay systems: the problem of the internal stability. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **13**: 909—937.
- Goktas, F. (2000). *Distributed control of systems over communication networks. Ph.D. dissertation..* Tesis de doctorado, University of Pennsylvania, Sweden.
- Górecki, H., Fuksa, S., Grabowski, P., & Korytowski, A. (1989). *Analysis and Synthesis of Time-Delay Systems*. John Wiley & Sons.
- Gouaisbaut, F. & Peaucelle, D. (2006). Delay dependent robust stability of time delay-systems. Proc. of 5th IFAC Symposium on Robust Control Design, Toulouse, Francia. 5–7 de julio.
- Gu, K., Kharitonov, V., & Chen, J. (2003). *Stability Of Time-Delay Systems*. Birkhäuser Boston, United States of America.
- Hale, J. (1977). *Theory of functional differential equations*. Springer-Verlag.
- Hespanha, J., Naghshtabrizi, P., & Xu, Y. (2007). A survey of recent results in networked control systems. Vol. 95 de *Proc. of IEEE special issue on technology of networked control systems*, páginas 138–162.
- Hokayem, P. & Abdallah, C. (2004). Inherent issues in networked control systems: a survey. Proc. of the IEEE American Control Conference, Boston, Massachusetts, Estados Unidos de América. 30 de junio – 2 de julio.
- Hua, C. & Liu, X. (2011). Delay-dependent stability criteria of teleoperation systems with asymmetric time-varying delays. *IEEE Transactions on Robotics*, **26**(5): 925–932.
- Jia, H., Yu, X., Yu, Y., & Wang, C. (2008). Power system small signal stability region with time delay. *Electrical Power and Energy Systems*, **30**: 16–22.
- Kamwa, I., Grondin, R., & Hébert, Y. (2001). Wide-area measurement based stabilizing control of large power systems – a decentralized/hierarchical approach. *IEEE Transactions on Power Systems*, **16**(1): 136–153.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice Hall, tercera edición.
- Klein, M., Rogers, G. J., & Kundur, P. (1991). A fundamental study of inter-area oscillations in power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, **6**: 914–921.

- Kolmanovskii, V. & Myshkis, A. (1992). *Applied theory of functional differential equations*. Kluwer Academic Publishers, London.
- Kolmanovskii, V. & Nosov, V. (1986). *Stability of functional differential equations*. Academic Press, London.
- Kruszewski, A., Jiang, W., Fridman, E., Richard, J., & Toguyeni, A. (2011). A switched system approach to exponential stabilization through communication network. *Por aparecer en IEEE Transactions on Control Systems Technology*.
- Lee, E., Neftci, S., & Olbrot, A. (1982). Canonical forms for time-delay systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, **27**(1): 128–132.
- Lelevé, A., Fraisse, P., & Dauchez, P. (2001). Telerobotics over IP networks: towards a low-level real-time architecture. Proc. of International Conference on Intelligent Robots and Systems IROS 2001, Maui, Hawaii, Estados Unidos de América. 29 de octubre – 3 de noviembre.
- Li, T., Wu, M., & He, Y. (2010). Lyapunov-Krasovskii functional based power system stability analysis in environment of WAMS. *Journal of Central South University of Technology*, **17**(4): 801–806.
- Luck, R. & Ray, A. (1990). An observer-based compensator for distributed delays. *Automatica*, **26**(5): 903–908.
- Mahmoud, M. (2000). *Robust control and filtering for time-delay systems*. Marcel Dekker, Inc., United States of America.
- Mäkilä, P. (1990). Laguerre series approximation of infinite dimensional systems. *Automatica*, **26**(6): 985 – 995.
- Mäkilä, P. & Partington, J. (1999). Laguerre and Kautz shift approximations of delay systems. *International Journal of Control*, **72**(10): 932 – 946.
- Márquez-Martínez, L. A. & Moog, C. H. (2004). Input-output feedback linearization of time-delay systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, **49**(5): 781 – 785.
- Márquez-Martínez, L. A., Moog, C. H., & Velasco-Villa, M. (2002). Observability and observers for nonlinear systems with time delay. *Kybernetika*, **38**(4): 445–456.
- Maza-Casas, L., Velasco-Villa, M., & Alvarez-Gallegos, J. (1999). On the state prediction of linear systems with time-delays in the input and the state. Vol. 1 de *Proc. of 38th IEEE Conference on Decision and Control*, páginas 239 – 244, Phoenix, Arizona, Estados Unidos de América. 7–10 de diciembre.
- Michel, D. (1994). *Contribution à l'étude de la stabilité des systèmes à retards*. Tesis de doctorado, Université de Sciences et Technologies de Lille, Lille, Francia.

- Michiels, W. & Niculescu, S. (2008). *Stability And Stabilization Of Time-Delay Systems: An Eigenvalue-Based Approach*. Society For Industrial & Applied Mathematics, Philadelphia.
- Mohagheghi, S., Venayagamoorthy, G., & Harley, R. (2007). Optimal wide area controller and state predictor for a power system. *IEEE Transactions on Power Systems*, **22**(2): 693–705.
- Moog, C. H. & Gárate-García, A. (2008). Master slave tracking for nonlinear systems with time delays. Proc. of World Congress on Intelligent Control and Automation, Chongqing China June 25–27.
- Moog, C. H., Castro-Linares, R., Velasco-Villa, M., & Márquez-Martínez, L. A. (2000). Disturbance decoupling for time-delay nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, **48**(2): 305–309.
- Naduvathuparambil, B., Valenti, M. C., & Feliachi, A. (2002). Communication delays in wide area measurement systems. Proc. of 34-th. Southeastern Symposium on System Theory, páginas 118–122, Huntsville, Alabama, Estados Unidos de América. 18–19 de marzo. IEEE Press.
- Niculescu, S.-I. (1997). *Systèmes à retard. Aspects qualitatifs sur la stabilité et la stabilisation*. Diderot multimedia.
- Nilsson, J. (1998). *Real-Time-Control Systems with Delays*. Tesis de doctorado, Lunde Institut of Technology, Sweden.
- Okou, F., Dessaint, L.-A., & Akhrif, O. (2005). Power systems stability enhancement using a wide-area signals based hierarchical controller. *IEEE Transactions on Power Systems*, **20**(3): 1465–1477.
- Pai, M. (1989). *Energy Function Analysis for Power System Stability*. Springer-Verlag.
- Peñaloza Mejía, O., Álvarez-Gallegos, J., & Márquez-Martínez, L. (2008). Master-slave telecontrol of a class of underactuated mechanical systems with communication time-delay. Proc. of the International Federation of Automatic Control, IFAC, páginas 9174–9179, Seúl, Corea del Sur. 6–11 de julio.
- Philipp, L., Mahmood, A., & Philipp, B. (1999). An improved refinable rational approximation to the ideal time delay. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, **46**(5): 637–640.
- Ploplys, N., Kamwka, P., & Alleyne, A. (2004). Closed-loop control over wireless networks. *IEEE Control Systems Magazine*.

- Probst, A., Magaña, M., & Sawodny, O. (2010). Using a Kalman filter and a Pade approximation to estimate random time delays in a networked feedback control system. *Control Theory Applications, IET*, **4**(11): 2263–2272.
- Pugh, A., McInerney, S., Hou, M., & Hayton, G. (1996). A transformation for 2-D systems and its invariants. En *Proc. of the 35th. IEEE Conference on Decision Control*, páginas 2157–2158.
- Richard, J. P. (2001). *Algèbre et analyse pour l'automatique*. Hermes Sciences Publicat.
- Richard, J. P. (2003). Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, **39**: 1667—1694.
- Roman Messina, A., editor (2009). *Inter-area Oscillations in Power Systems: A Nonlinear and Nonstationary Perspective*. Power Electronics and Power Systems. Springer, Estados Unidos de América.
- Sauer, P. W. & Pai, M. (1998). *Power system dynamics and stability*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Seuret, A. (2006). *Commande et observation des systèmes à retards variables: théorie et applications*. Tesis de doctorado, École Centrale de Lille en conjunto con Université de Sciences et Technologies de Lille, Lille, Francia.
- Seuret, A. & Richard, J. (2008). Control of a remote system over network including delays and packet dropout. En *17th IFAC World Congress*, Seúl, República de Corea. IFAC.
- Sheridan, T. (1993). Space teleoperation through: review and prognosis. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, **9**(5): 592—606.
- Snyder, A. F., Ivanescu, D., HadjSaïd, N., Georges, D., & Margotin, T. (2000). Delayed-input wide-area stability control with synchronized phasor-measurements and linear matrix inequalities. Vol. 2 de *Proc. of Power Engineering Society Summer Meeting*, páginas 1009–1014, 16–20 de julio. IEEE Press.
- Sung, S., Lee, J., & Lee, I. (2009). *Process Identification and PID Control*. John Wiley & Sons Ltd.
- Taheri, E. (2008). Kautz-based adaptive control. 3rd International Symposium on Communications, Control and Signal Processing, páginas 619 – 623, St Julians, Estados Unidos de América. 12–14 de marzo.
- Tian, Y. (2005). A general stability criterion for congestion control with diverse communication delays. *Automatica*, **41**(7): 1255–1262.

- Walsh, G., Beldiman, O., & Bushnell, L. (1999). Asymptotic behavior of networked control systems. Proc. of IEEE International Conference on Control Applications 1999, páginas 2876–2880, San Diego, California, Estados Unidos de América.
- Wang, Z. & Hu, H. (1999). Robust stability test for dynamic systems with short delays by using padé approximation. *Nonlinear Dynamics*, **18**(3): 275–287.
- Witrant, E., Canudas, C., & Georges, D. (2003). Remote output stabilization under two channels time-varying delays. In 4th. IFAC Workshop on Time-Delay Systems, Rocquencourt, Francia. 8–10 de septiembre.
- Witrant, E., Georges, D., & Canudas, C. (2006). Du canal de communication à la problématique des systèmes commandés par réseaux. IEEE Conférence Internationale Francophone d’Automatique, CIFA 2006, Bordeaux, Francia. 30–31 de mayo – 1 de junio.
- Witrant, E., Georges, D., Canudas, C., & Alamir, M. (2007a). On the use of state predictors in networked control systems. En *Applications of Time-Delay Systems*, Vol. 352 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, páginas 17–35. Springer.
- Witrant, E., Georges, D., Canudas, C., & Sename, O. (2007b). Stabilisation des systèmes commandés par réseau: une approche prédictive. En *Systèmes commandés en réseau*, Traité IC2 – Systèmes automatisés, páginas 83–121. Hermès-Lavoisier.
- Wu, H. & Heydt, G. (2003). Design of delayed-input wide area power system stabilizer using gain scheduling method. Vol. 3 de *Proceedings of the IEEE Power Engineering Society General Meeting*, páginas 1704–1709, Toronto, Canada. 13–17 de julio. IEEE Press.
- Wu, H., Tsakalis, K. S., & Heydt, G. T. (2004). Evaluation of time-delay effects to wide-area power system stabilizer design. *IEEE Transactions on Power Systems*, **19**(4): 1935–1941.
- Yue, D., Han, Q. L., & Peng, C. (2004). State feedback controller design of networked control systems. *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp. Briefs*, **51**(11): 640–644.
- Zabaiou, T., Dessaint, L., Okou, F., & Grondin, R. (2008). Wide-area measurements based coordination of SVCs and synchronous generators. Proceedings of the IEEE Power Engineering Society General Meeting, páginas 1–8, Pittsburgh, Estados Unidos de América. 20–24 de julio. IEEE Press.
- Zampieri, S. (2008). Trends in networked control systems. Proc. of the International Federation of Automatic Control, IFAC, páginas 2886–2894, Seoul, Korea.
- Zhang, B., Kruszewski, A., & Richard, J. (2011). A novel control scheme for teleoperation with guaranteed performance under time-varying delays. Proc. of 23th Chinese Control and Decision Conference, Mianyang, China. 23–25 de mayo.

Zhang, G., Chen, X., & Chen, T. (2007). A model predictive control approach to networked systems. Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, Luisiana, Estados Unidos de América. 12–14 de diciembre.

Zhang, Q., Wei, X., & Xu, J. (2005). An improved result for complete stability of delayed cellular neural networks. *Automatica*, **41**: 333–337.

## Apéndice A

# ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LA ECUACIÓN DE ERROR

**Proposición 13** *La dinámica de error*

$$e^{(\rho)}(t) = \sum_{k=0}^{\rho-1} \beta_k e^{(k)}(t - \tau) \quad (153)$$

no puede ser estable independiente del retardo para  $\rho \geq 2$ .

**Prueba.** El Teorema 2.1 de (Gu *et al.*, 2003) establece que el sistema

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau), \quad \tau \geq 0. \quad (154)$$

es estable independiente del retardo si y solo si

- (i).  $A_0$  es estable,
- (ii).  $A_0 + A_1$  es estable y
- (iii).  $\varrho((j\omega\mathbb{I} - A_0)^{-1}A_1) < 1, \quad \forall \omega > 0,$

donde  $\varrho(\bullet)$  representa el radio espectral de una matriz.

El caso especial de (153) se reduce a

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_{\rho-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} \beta_{\rho-1} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 \\ \beta_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } x(t) = \begin{bmatrix} e(t), & e^{(1)}(t), & \dots, & e^{(\rho-1)}(t) \end{bmatrix}^T.$$



La condición (iii) da

$$\left| \sum_{k=1}^{\rho} (-j)^k \frac{\beta_{\rho-k}}{\omega^k} \right| < 1, \quad \forall \omega > 0; \text{ for } \rho \geq 2. \quad (155)$$

Claramente, para un conjunto fijo de constantes  $\beta_{\rho-k}$  la desigualdad (155) no puede ser satisfecha para todo  $\omega > 0$  y por lo tanto (153) no puede ser estable independiente del retardo. ■

Por lo que ecuaciones estables se pueden obtener solo usando condiciones de estabilidad dependiente del retardo. Tales condiciones sobre los coeficientes  $\beta_k$  que aseguran la estabilidad asintótica de (153) se pueden encontrar en (Cahlon & Schmidt, 2007a,b).

Dans cette thèse, l'analyse de systèmes à retards est abordée. La contribution principale est la solution d'un problème qui est resté ouvert depuis plus de trente ans : des conditions nécessaires et suffisantes vérifiables ont été obtenues pour caractériser l'équivalence sous transformation bicausale d'un système linéaire à retards avec un système sans retard, ou avec un nombre de retards réduit. Ce résultat est fondamental en soi, et il augmente le nombre d'outils mathématiques pouvant être utilisés pour l'analyse et la synthèse de ces systèmes. Une autre contribution est dans le domaine de la synchronisation maître-esclave de systèmes interconnectés. On aborde, de manière générale, les systèmes commandés en réseau et comme application spécifique, les systèmes de puissance. Les systèmes en réseau présentent deux types de retards : l'un sur le canal de communication et l'autre dans les interconnexions. Dans les systèmes de puissance, ils sont respectivement dus à l'usage de systèmes de mesure sur de grandes régions géographiques et aux lignes de transmission. L'originalité de notre méthodologie est d'éviter ou de réduire l'usage de prédicteurs.

Mots-clés : systèmes à retards, systèmes en réseau, systèmes de puissance, solutions causales.

Titre et résumé en anglais

Contribution to the analysis of time-delay systems : application to the synchronization of networked systems

This thesis deals with the analysis of time-delay systems. The main contribution is the solution of a problem that remained open for more than thirty years, and consists in necessary and sufficient checkable conditions to characterize the equivalence of a linear time-delay system to a system with a reduced order of delays, or to a system without delays, by means of a bicausal transformation. This result is fundamental by its own and it enlarges the mathematical tools available for the analysis and synthesis of the transformed system. Another contribution is in the area of master-slave synchronization of interconnected systems. General networked control systems are studied and, as a specific application, networked power systems are considered. Those systems have delays induced by the communication channel and eventually, when they exist, by physical interconnections. For power systems, they are induced respectively by the use of wide area measurement systems and by the transmission lines. The proposed methodology avoids or minimizes the use of predictors.

Keywords: time-delay systems, networked systems, power systems, causal solutions.