



HAL
open science

Essay on gravitation

Jérôme Perez

► **To cite this version:**

| Jérôme Perez. Essay on gravitation. Physique [physics]. Université Paris 7, 2007. tel-01141419

HAL Id: tel-01141419

<https://hal.science/tel-01141419v1>

Submitted on 20 Apr 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

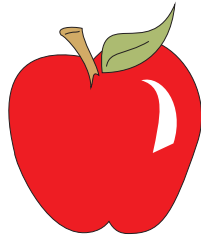
Thèse d 'Habilitation à diriger des recherches de l 'Université Paris 7 Denis Diderot

Jérôme Perez

Laboratoire de Mathématiques
Appliquée

Ecole Nationale Supérieure de Technqiues Avancéess

Essai de Gravitation



*des univers homogènes
à la dynamique des systèmes
autogravitants*

Soutenue le Vendredi 26 janvier 2007
devant le jury composé de

Président: Marcello Fuchignoni

Rapporteur : Marc Héneaux

Rapporteur : Gary Mamon

Examineur : Jean-Michel Alimi

Examineur : Marc Lenoir

Table des matières

I	Essai de gravitation relativiste	9
1	Équations d'Einstein	11
2	Sections spatiales homogènes et isotropes	13
2.1	Équations de Friedmann	13
2.2	Contenu des équations de Friedmann	14
3	Sections spatiales homogènes	17
3.1	Univers de Bianchi	17
3.2	Formulation BKL	20
3.3	Formulation Hamiltonienne	23
3.3.1	Réduction du terme "cinétique"	23
3.3.2	Terme potentiel	25
3.3.3	Dynamique Hamiltonienne	26
4	Résultats analytiques	29
4.1	Intégrabilité du système de l'Univers homogène	29
4.1.1	Systèmes différentiels autonomes et auto-similaires	29
4.1.2	Exposants de Kovalewskaya et cosmologies anisotropes	31
4.1.3	Compléments algébriques	38
4.2	Quelques solutions analytiques et une conjecture	39
4.2.1	Propriétés du volume de l'Univers	39
4.2.2	Dynamique de l'Univers B_I	40
4.2.3	Dynamique de l'Univers B_{II} ou B_{IV}	44
4.2.4	Conjecture BKL pour l'Univers B_{IX}	46
4.3	Dynamique par le formalisme hamiltonien	47
4.3.1	Super temps et dynamique 2D	48
4.3.2	Comportement initial ou tardif	48
4.3.3	De l'introduction d'un billard cosmique	49
4.3.4	Analyse fine du billard B_{IX}	55
5	Résultats numériques	61
5.1	Modélisation numérique de la dynamique B_{IX} dans le formalisme BKL	61
5.1.1	Test de la conjecture BKL	61
5.1.2	L'attracteur de la dynamique	66
5.2	Modélisation numérique des billards de Bianchi	69
5.2.1	Solutions des équations du mouvement dans les billards statiques	70

5.2.2	Étude numérique de la transition vers le chaos	72
5.2.3	Comparaison d'attracteurs	75
6	Conclusion	79
7	Annexe	81
7.1	Quelques propriétés algébriques	81
II	Essai de gravitation classique	87
8	Gravitation, dimension et physique statistique	89
8.1	La dimension de l'espace	89
8.2	Thermodynamique et gravitation en dimension 3	91
8.3	Introduction	94
8.4	Statement of the problems	95
8.4.1	Assumptions and important physical quantities	95
8.4.2	The problems	96
8.5	Upper bounds on the entropy maximizer in $\mathcal{G}(N, E)$	96
8.5.1	The case of a bounded system	96
8.5.2	Upper bound on the entropy	96
8.5.3	Existence of an entropy maximizer	97
8.5.4	Uniqueness of the entropy maximizer	99
8.6	Upper bounds on the entropy and nonexistence of an entropy maximizer in $\mathcal{G}(N, E, J)$	100
8.7	Upper bounds on H -functions and generalized entropies	101
8.7.1	Definitions	102
8.7.2	Upper bounds on H_q, S_{rq}, S_{tq}	102
8.8	Conclusion	103
9	Vers une nouvelle méthode pour le traitement du problème transitoire du problème à N corps gravitationnel	105
9.1	Introduction	109
9.2	Hypotheses	109
9.3	Vlasov-Poisson as a Hamiltonian system	111
9.4	Some uses	113
9.4.1	Generalities	113
9.4.2	Stability analysis	114
9.4.3	Study of the transient regime of gravitational Vlasov-Poisson dynamics	116
9.5	Conclusion	120
10	Une approche numérique de l'effondrement gravitationnel classique d'une assemblée de particules en interaction gravitationnelle.	121
10.1	Introduction	123
10.2	Numerical procedures	124
10.2.1	Dynamics	124

10.2.2	Initial Conditions	125
10.2.3	Observables	127
10.3	Description of the results	130
10.3.1	Relevant number of particles	130
10.3.2	Morphological segregation	130
10.3.3	Characteristic size segregation	131
10.3.4	Equilibrium Distribution Function	132
10.3.5	Influence of rotation	132
10.3.6	Thermodynamical segregation	133
10.4	Interpretations, Conclusions and Perspectives	134
10.5	Tables of results	135

III Informations générales sur l'auteur

151

Introduction générale

Le présent document constitue le rapport de mon habilitation à diriger des recherches. Le sujet général est la gravitation qui constitue mon thème de recherche. Trois parties indépendantes forment le corps de ce document. Un essai de gravitation relativiste traite des propriétés dynamiques de l'Univers homogène et anisotrope. Un essai de gravitation classique rassemble trois de mes articles emblématiques sur ce sujet préfacés chacun d'une introduction. La dernière partie est consacrée à des informations générales sur l'auteur.

La première partie est un travail de revue et de contributions originales publiées ici pour la première fois. Il résume plusieurs années de recherches sur le thème des propriétés dynamiques des solutions des équations d'Einstein dans le contexte d'un Univers homogène et anisotrope. Bien que faisant l'objet de nombreuses publications depuis les années 1970, ce thème est assez peu connu de la communauté des astronomes ou des physiciens non spécialistes. Contrairement aux solutions homogènes et isotropes issues du principe cosmologique, bien peu d'ouvrages de synthèse ou de cours présentent ce sujet passionnant tant sur le plan physique que mathématique. Les travaux récents des physiciens théoriciens de l'Univers primordial (voir par exemple [29] et [30] de la bibliographie de la première partie) semblent toutefois montrer que ce type de modélisation de l'Univers pourrait retenir l'attention des générations futures de cosmologistes. L'arbre de Friedmann aurait alors fini de cacher la forêt de Bianchi !

Dans tous les cas, et quoi que deviennent les modèles cosmologiques, comment passer sous silence la beauté mathématique et le raffinement physique des Univers de Bianchi.

La deuxième partie est plus conventionnelle quant à la forme, pour un rapport d'habilitation, son contenu est cependant atypique. L'interaction gravitationnelle classique est en effet un sujet qui, d'un point de vue global, est fort délaissé des physiciens ou astrophysiciens théoriciens. Je vois essentiellement deux raisons à ce constat : Sur le plan théorique nombreux sont ceux qui pensent que les problèmes simples sont compris et que les problèmes complexes le sont beaucoup trop. Sur le plan numérique, la puissance actuelle des machines pousse le modélisateur moderne à raffiner son modèle (prise en compte de l'évolution stellaire, de l'hydrodynamique, de l'expansion de l'Univers, ...) avant même que soient bien compris les problèmes de base posés par le problème à N corps purement gravitationnel. Pourquoi les amas globulaires sont-ils principalement sphériques ? Peut-on former des galaxies elliptiques sans fusionner deux galaxies spirales ? Pourquoi les galaxies abritent-elles des trous noirs non stellaires alors que ce n'est pas le cas des amas globulaires ? Quelles sont les équations qui modélisent les objets auto-gravitants, et comment ces derniers peuvent-ils être à l'équilibre ? Voici un échantillon de questions que semble ignorer la communauté scientifique, lui préférant une litanie de questions beaucoup plus précises dont les réponses sont aussi nombreuses et variées que les publications dans ce domaine. Peut-être les réponses viendront-elles de l'accumulation d'indices variés, il faudra

alors faire preuve d'un esprit de synthèse hors du commun quand on dénombre par exemple les paramètres ajustables contenus dans le moindre code qui plus est accessible à tous ... Peut-être aussi que la solution naîtra de l'analyse patiente des différents maillons indépendants qui gouvernent l'évolution de ces magnifiques objets. C'est la voie que j'ai décidé de suivre, une chose est sûre elle est moins prolifique, mais je la considère plus digne de ce métier ...

Première partie

Essai de gravitation relativiste

Chapitre 1

Équations d'Einstein

Les équations de la dynamique de l'Univers sont classiquement obtenues par la variation d'une action contenant deux densités de Lagrangien : L'une \mathcal{L}_c décrit l'état de courbure de l'Univers et l'autre \mathcal{L}_m décrit l'énergie impulsion présente dans l'Univers, nous avons ainsi

$$S = \frac{1}{\chi} \int (\mathcal{L}_c + \mathcal{L}_m) \sqrt{-g} d^4x \quad (1.1)$$

Le terme $\sqrt{-g}$, racine carrée du déterminant de la métrique considérée, est le jacobien d'une transformation générale de coordonnées. Ce terme assure la covariance de l'élément de volume $\sqrt{-g} d^4x$.

Dans la relativité générale d'Einstein, le lagrangien de courbure est simplement le scalaire de courbure,

$$\mathcal{L}_c = R \quad (1.2)$$

trace du tenseur de Ricci, double contraction du tenseur de courbure de Riemann

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.3)$$

on rappelle que le symbole de Christoffel $\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\lambda\mu,\nu}) g^{\nu\sigma}$ permet de calculer les composantes du tenseur de Riemann

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= \frac{1}{2} [g_{\nu\lambda,\mu,\kappa} + g_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - g_{\lambda\kappa,\nu,\mu} + g_{\mu\kappa,\nu,\lambda}] \\ &\quad + g_{\eta\sigma} [\Gamma_{\lambda\nu}^\eta \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma - \Gamma_{\lambda\kappa}^\eta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma] \end{aligned} \quad (1.4)$$

et celles du Ricci

$$R_{\nu\beta} = \Gamma_{\nu\lambda,\beta}^\lambda + \Gamma_{\nu\beta,\lambda}^\lambda + \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\beta}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma \quad (1.5)$$

La densité de lagrangien de matière dépend directement de la nature de celle ci. C'est à partir de \mathcal{L}_m que l'on forme le tenseur énergie-impulsion

$$T_{\mu\nu} = 2 \left[\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m \right] \quad (1.6)$$

Le minimum de l'action (1.1) pour des variations de la métrique est atteint pour les équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} \quad (1.7)$$

Sous cette forme elles font apparaître le scalaire de courbure R trace du tenseur de Ricci, on peut aussi les écrire en faisant apparaître le scalaire d'énergie impulsion $T := g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$, une ligne de calcul donne

$$R_{\mu\nu} = \chi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \quad (1.8)$$

La constante de couplage est obtenue par limite en champ faible de la théorie, on trouve

$$\chi = 8\pi G/c^4. \quad (1.9)$$

Chapitre 2

Sections spatiales homogènes et isotropes

2.1 Équations de Friedmann

Pour étudier la dynamique de l'Univers, il convient alors de faire des hypothèses sur ses propriétés de symétrie. L'hypothèse la plus courante a reçu le nom de principe cosmologique, elle décide que l'Univers est homogène et isotrope. Dans ces conditions, les composantes covariantes non nulles du tenseur métrique sont

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= -1 \\ g_{11} &= \frac{a(t)^2}{1 - kr^2} = a(t)^2 \tilde{g}_{rr} \end{aligned} \right\| \left. \begin{aligned} g_{22} &= r^2 a(t)^2 = a(t)^2 \tilde{g}_{\theta\theta} \\ g_{33} &= r^2 \sin^2 \theta a(t)^2 = a(t)^2 \tilde{g}_{\varphi\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

en séparant les parties spatiales et temporelles on écrit souvent

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a(t)^2 d\sigma^2 - dt^2 \quad (2.2)$$

avec

$$d\sigma^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) \quad (2.3)$$

Seuls deux degrés de liberté demeurent dans la dynamique de cet univers homogène et isotrope : le facteur d'échelle $a(t)$, il indique "l'état" d'expansion de l'Univers. La constante de courbure spatiale k laisse 3 possibilités : $k = 1$ Univers fermé sphérique, $k = -1$ Univers ouvert hyperbolique et $k = 0$ Univers plat. La métrique (2.1) est dite de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Intéressons-nous à la dynamique de l'Univers associé.

Si l'on fait l'hypothèse que l'Univers est rempli d'un gaz parfait, le tenseur énergie impulsion se laisse écrire ($c^2 = 1$)

$$T_{\mu\nu} = P g_{\mu\nu} + (P + \epsilon) u_\mu u_\nu$$

ou P et ϵ représentent respectivement la pression et la densité d'énergie de ce gaz, et u_μ les composantes de sa 4-vitesse, des équations d'Einstein il ne reste plus que

$$\left\{ \begin{aligned} a' &= -\frac{4\pi G}{3} (\epsilon + 3P) a \\ \left(\frac{a'}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G\epsilon}{3} - \frac{k}{a^2} \end{aligned} \right. \quad (2.4)$$

appelées équations de Friedmann dans lesquelles le point indique une dérivée temporelle totale.

2.2 Contenu des équations de Friedmann

La fonction $a(t)$ est positive par définition, $\dot{a}(t)$ est actuellement positive comme nous l'indique la loi de Hubble. Ainsi la première des équations de Friedmann affirme que pour de la matière classique¹ $\ddot{a}(t)$ est négatif. Le facteur d'échelle est ainsi une fonction positive, croissante et concave qui s'annule donc en un temps passé que nous nommerons singularité. Cet instant passé correspond à ce qu'il est convenu d'appeler Big-Bang. Le volume de l'Univers étant directement proportionnel à ce facteur d'échelle, à l'approche de la singularité ce volume tend donc vers zéro poussant ϵ et P vers l'infini, d'où le nom de singularité ...

Cette approche heuristique est confirmée par l'étude de la deuxième équation dans le cas général d'un gaz barotrope $P = (\Gamma - 1)\epsilon$. Dans ce régime en effet, il est facile de résoudre les équations de Friedmann pour les diverses valeurs physiques de Γ et les trois choix possibles de k . Il est alors loisible de constater que toutes les solutions $a(t)$ s'annulent au bout d'un temps fini dans le passé.

La présence d'une singularité dans une théorie n'est pas très réconfortante et semble discréditer celle-ci. Que peut-on faire ?

Éliminons tout d'abord une piste qui brûlait les lèvres de nombreux lecteurs ...

Il est bien connu que les équations d'Einstein les plus générales doivent incorporer une constante cosmologique² Λ . La prise en compte de ce terme modifie évidemment les équations de Friedmann qui deviennent

$$\begin{cases} \ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\epsilon + 3P - 2\Lambda)a \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G(\epsilon + \Lambda)}{3} - \frac{k}{a^2} \end{cases}$$

Il est moins simple de voir que ces équations contiennent toujours une singularité mais c'est pourtant bien le cas. Pour s'en convaincre, il suffit de penser que si P et ϵ deviennent très grands, leur enlever deux fois une constante ne change pas grand chose ...

Une remarque s'impose à ce stade : que Λ soit nul ou pas, si l'Univers est fermé ($k = 1$), une autre singularité apparaît potentiellement, dans le futur cette fois ci, elle est parfaitement symétrique de celle qui grève le passé de tous ces modèles cosmologiques. Cet instant futur correspond à ce qu'il est convenu d'appeler Big-Crunch.

En fait une démonstration topologique de R. Penrose et S. Hawking proposée à partir des années 60 (voir [2]) indique que toutes les solutions des équations d'Einstein contiennent des singularités, c'est-à-dire des géodésiques qui ne peuvent être prolongées au delà d'une certaine valeur de leur paramètre. Outre les singularités primordiales, d'autres singularités peuplent la relativité générale, celle du trou noir de Schwarzschild par exemple. Nous savons cependant

1. Pour une telle matière on a $(\epsilon + 3P) > 0$, pour le moins c'est une définition ...

2. Les équations d'Einstein s'écrivent $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$. Une conséquence de l'identité de Bianchi tient dans le fait que la dérivée covariante du tenseur d'Einstein est nulle $D^\mu G_{\mu\nu} = 0$. Il en va de même pour le tenseur énergie-impulsion pour qui $D^\mu T_{\mu\nu} = 0$ implique la conservation de l'énergie-impulsion. Les équations d'Einstein peuvent donc s'écrire comme une sorte d'équation de conservation $D^\mu (G_{\mu\nu} - \chi T_{\mu\nu}) = 0$. Le principe d'équivalence stipule par ailleurs que $D^\mu g_{\mu\nu} = 0$, les équations d'Einstein les plus générales se laissent donc écrire $D^\mu (G_{\mu\nu} - \chi T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) = 0$ c'est-à-dire

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

que ce type de singularités dites fermées, sont entourées d'un horizon. En masquant toutes les expériences envisageables dans son enceinte, cet horizon soigne en quelque sorte la théorie qui reste cohérente au delà. Les singularités de type Big-Bang ou Big-Crunch qui ne semblent pas posséder d'horizon apparaissent donc bien plus surnoises ... On les nomme singularités ouvertes!

Si le principe cosmologique semble une bonne hypothèse à l'époque de l'émission du fond diffus cosmologique, il devient discutable dans les situations extrêmes que représentent les abords spatio-temporels des singularités ouvertes.

L'hypothèse d'homogénéité sans aucune autre symétrie laisse beaucoup plus de liberté : Est-il possible que ces nouvelles libertés géométriques apportent avec elles le remède contre ces trous béants que représentent les singularités ouvertes dans les modèles homogènes et isotropes. La réponse à cette question de principe est l'objet des prochains chapitres ...

Chapitre 3

Sections spatiales homogènes

3.1 Univers de Bianchi

Soit l'espace métrique de la relativité générale (espace-temps), si nous supposons qu'il existe un référentiel synchrone, à un instant donné t , dans ce référentiel synchrone la métrique se décomposera de la façon suivante

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dl^2 - dt^2 := \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j - dt^2 \quad (3.1)$$

L'homogénéité d'un espace métrique tient à l'identité de ses propriétés métriques en tous ses points. L'espace-temps est dit homogène si, à chaque instant, sa section spatiale (l'espace, d'élément de longueur dl^2) admet un ensemble de transformations conservant l'élément de longueur dl^2 et permettant de mettre en relation tout point de l'espace avec tout autre : un ensemble d'isométrie. Cet ensemble est appelé groupe des déplacements.

Par transformation par un élément du groupe des déplacements nous devons donc avoir

$$dl^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j = \tilde{g}_{ij}(x^\mu) dx^i dx^j = \tilde{g}_{ij}(x'^\mu) dx'^i dx'^j$$

Dans le cas de l'espace euclidien, le groupe des déplacements est celui qui conserve les trois différentielles indépendantes (dx^1, dx^2, dx^3) , la seule liberté d'invariance pour un vecteur est son transport parallèle, nous devons donc avoir

$$dx'^1 = dx^1 + a, \quad dx'^2 = dx^2 + b, \quad dx'^3 = dx^3 + c$$

ou (a, b, c) est un vecteur constant de \mathbb{R}^3 , le groupe des déplacements est donc l'ensemble des translations.

Dans le cas non euclidien, l'affaire est bien plus complexe : le groupe des déplacements laisse invariant trois formes différentielles linéaires indépendantes, mais celles-ci ne se réduisent plus à des différentielles totales, nous aurons donc

$$\text{pour chaque } i = 1, 2, 3 \quad dx^i = e^i_j dy^j \quad (3.2)$$

les vecteurs indépendants $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$ fonctions des coordonnées s'appelant les vecteurs repères¹. L'élément de longueur invariant par le groupe des déplacements s'écrit donc

$$dl^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j = dl^2 = \tilde{g}_{ij} e^i_k e^j_l dy^k dy^l$$

1. Dans cette notation \mathbf{e}^i n'est pas la composante contravariante de e , mais bel et bien un vecteur de \mathbb{R}^3 dont les composantes dans la base canonique sont (e^i_1, e^i_2, e^i_3) .

les composantes spatiales de la métrique vérifient donc

$$\tilde{g}_{kl} = \tilde{g}_{ij} e_k^i e_l^j$$

Du fait de la symétrie des \tilde{g}_{ij} nous déduisons de cette relation

$$e_j^i e_k^j = \delta_k^i \quad \text{et} \quad e_j^i e_i^k = \delta_j^k$$

La conservation de l'élément de longueur dl^2 est donc équivalente à

$$\text{pour chaque } i = 1, 2, 3 \quad e_j^i (y^\mu) dy^j = e_j^i (y'^\mu) dy'^j$$

en multipliant cette condition par $e_i^k (y'^\mu)$, il vient

$$\begin{aligned} e_i^k (y'^\mu) e_j^i (y^\mu) dy^j &= e_i^k (y'^\mu) e_j^i (y'^\mu) dy'^j \\ &= \delta_j^k dy'^j \\ &= \frac{\partial y'^k}{\partial y^j} dy^j \end{aligned}$$

qui signifie donc que

$$\frac{\partial y'^k}{\partial y^j} = e_i^k (y'^\mu) e_j^i (y^\mu) \quad (3.3)$$

En se donnant les vecteurs repères les plus généraux, cette relation devient une équation différentielle dont la solution nous donne l'ensemble des transformations possibles : Le groupe des déplacements.

En notation relativiste, l'équation (3.3) s'écrit

$$\partial_j y'^k = e_i^k e_j^i$$

ou nous avons écrit, par abus de notation,

$$e_j^i (y^\mu) = e_j^i \quad \text{et} \quad e_i^k (y'^\mu) = e_i^k$$

comme $\partial_l (\partial_j y'^k) = \partial_j (\partial_l y'^k)$, il vient après quelques lignes de calcul

$$(\partial_i e_j^c - \partial_j e_i^c) e_a^j e_b^i = (\partial_i' e_j'^c - \partial_j' e_i'^c) e_a'^j e_b'^i \quad (3.4)$$

soit deux relations identiques, l'une en variable y^μ l'autre en variable y'^μ , l'expression de l'équation (3.4) est donc constante

$$(\partial_i e_j^c - \partial_j e_i^c) e_a^j e_b^i = C_{ab}^c \quad (3.5)$$

ces constantes² sont appelées constantes de structure du groupe des déplacements. La définition de ces constantes permet de vérifier qu'elles possèdent trois propriétés fondamentales :

1. Les C_{ab}^c sont les composantes d'un tenseur d'ordre 3 de $(\mathbb{R}^{3*})^{\otimes 2} \otimes \mathbb{R}^3$;
2. Les C_{ab}^c sont antisymétriques pour leurs composantes covariantes $C_{ab}^c = -C_{ba}^c$;

2. les indices prennent les valeurs 1,2 et 3

3. Les C_{ab}^c vérifient une identité de Jacobi

$$C_{ab}^e C_{ec}^d + C_{bc}^e C_{ea}^d + C_{ca}^e C_{eb}^d = 0 \quad (3.6)$$

Il est commode de décomposer ces constantes de structure en une partie symétrique et une partie antisymétrique. Ceci est toujours possible en écrivant

$$C_{ab}^c = \varepsilon_{abd} N^{dc} + \delta_b^c A_a - \delta_a^c B_b \quad (3.7)$$

où ε_{abd} est le tenseur unité complètement antisymétrique et δ_b^c le symbole de Kronecker, N^{ab} est la composante complètement contravariante d'un tenseur symétrique d'ordre 2, et (pour respecter l'identité de Jacobi) le vecteur A doit vérifier

$$N^{ab} A_b = N_{ab} A^b = 0 \quad (3.8)$$

La décomposition (3.7) permet de voir clairement qu'il existe neuf types distincts d'espaces homogènes en dimension 3. Six proviennent des 6 degrés de libertés introduits par les six composantes indépendantes du tenseur symétrique N , et trois des composantes du vecteur A .

Une spécification plus précise est toujours possible : Le tenseur N étant symétrique il existe toujours une base dans laquelle il est diagonal. Dans cette base, nous aurons

$$N^{ab} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Toujours dans cette base, et sans restreindre la généralité de notre propos, la relation (3.8) permet de poser $A_b = [a, 0, 0]$ pourvu que

$$an_1 = 0 \quad (3.10)$$

L'énumération des cas distincts peut alors se faire en considérant toutes les possibilités de multiplicité algébrique pour une valeur propre nulle de N , les différentes signatures de cette matrice et la condition (3.10)

Il vient

	n_1	n_2	n_3	a	Nom
0 est valeur propre triple de N	0	0	0	0	B_I
	0	0	0	\forall	B_V
0 est valeur propre double de N	1	0	0	0	B_{II}
	0	1	0	\forall	B_{IV}
0 est valeur propre simple de N	1	1	0	0	B_{VII_o}
	0	1	1	\forall	B_{VII_a}
	1	-1	0	0	B_{VI_o}
	0	1	-1	$\neq 1$	B_{VI_a}
	0	1	-1	1	B_{III}
0 n'est pas valeur propre de N	1	1	1	0	B_{IX}
	1	1	-1	0	B_{VIII}

Les cas dégénérés équivalents n'ont pas été indiqués pour des raisons de concision. Par exemple, le cas $n_1 = -1, n_2 = 1, n_3 = -1$ et donc forcément $a = 0$ est dans la classe d'équivalence B_{IX} avec une signature $+$ et 0 hors du spectre. Nous retrouvons bien les neuf cas distincts d'espaces riemanniens homogènes de dimension 3. Les chiffres romains associés aux types indiqués correspondent à la classification faite par L. Bianchi en 1898 (voir [B1],[B2]).

Une fois les espaces homogènes classifiés, il est possible dans chaque cas d'écrire le tenseur métrique associé et d'en déduire les composantes du tenseur de Ricci.

3.2 Formulation BKL

Le tenseur métrique est toujours diagonalisable. La recherche des formes différentielles invariantes de base (voir (3.2)) a été réalisée dans le cas général par Mac Callum en 1979 (voir [3]), il obtient

Type	ω^1	ω^2	ω^3
B_I	dx_1	dx_2	dx_3
B_{II}	$dx_1 - x_3 dx_2$	dx_2	dx_3
B_{III}, B_{IV}	dx_1	$e^{x_1} dx_2$	$e^{x_1} (dx_3 + x_1 dx_2)$
B_V	dx_1	$e^{x_1} dx_2$	$e^{x_1} dx_3$
B_{VI}	dx_1	$e^{ax_1} (\text{ch}(x_1) dx_2 - \text{sh}(x_1) dx_3)$	$e^{ax_1} (-\text{sh}(x_1) dx_2 + \text{ch}(x_1) dx_3)$
B_{VII}	dx_1	$e^{ax_1} (\cos(x_1) dx_2 - \sin(x_1) dx_3)$	$e^{ax_1} (\sin(x_1) dx_2 - \cos(x_1) dx_3)$
B_{VIII}	$ch(x_2) \cos(x_3) dx_1 - \sin(x_3) dx_2$	$ch(x_2) \sin(x_3) dx_1 + \cos(x_3) dx_2$	$sh(x_2) dx_1 + dx_3$
B_{IX}	$\cos(x_2) \cos(x_3) dx_1 - \sin(x_3) dx_2$	$\cos(x_2) \sin(x_3) dx_1 + \cos(x_3) dx_2$	$\sin(x_2) dx_1 + dx_3$

Dans la définition générale (3.1) en posant $\tilde{g}_{ij} dx^i dx^j = \gamma(\tau) \omega^i \omega^j$ et en introduisant un temps conforme tel que $dt = N(\tau) d\tau$ où $N(\tau)$ est appelée fonction "lapse", on obtient

$$ds^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j - dt^2 = \gamma(\tau) \omega^i \omega^j - N^2(\tau) d\tau^2 \quad (3.11)$$

la dépendance temporelle de la composante spatiale de la métrique se diagonalise $\gamma(\tau) = \text{diag}(\alpha_i(t))$. Dans cette représentation les composantes non nulles du tenseur de Ricci s'obtiennent après quelques calculs

$$\left\{ \begin{array}{l} 2N^2 \frac{R_{00}}{g_{00}} = (\ln(V^2))'' - \frac{1}{2} (\ln(N^2))' (\ln(V^2))' + \frac{1}{2} (A_1'^2 + A_2'^2 + A_3'^2) \\ 2N^2 \frac{R_{11}}{\tilde{g}_{11}} = A_1'' + \frac{1}{2} A_1' (\ln V^2 - \ln N^2)' + K^2 (n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2) \\ 2N^2 \frac{R_{22}}{\tilde{g}_{22}} = A_2'' + \frac{1}{2} A_2' (\ln V^2 - \ln N^2)' + K^2 (n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2) \\ 2N^2 \frac{R_{33}}{\tilde{g}_{33}} = A_3'' + \frac{1}{2} A_3' (\ln V^2 - \ln N^2)' + K^2 (n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2) \end{array} \right. \quad (3.12)$$

ou $V(\tau) = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{1/2}$ est proportionnel à chaque instant au volume de la section spatiale de l'Univers, $A_i = \ln(\alpha_i)$ est toujours défini car $\alpha_i > 0$, $K^2 = N^2/V^2$, et $' = d/d\tau$.

Il ne reste plus qu'à écrire les équations d'Einstein (1.8) pour obtenir la dynamique de l'Univers homogène anisotrope. Dans le cas d'un fluide parfait, de pression P de densité d'énergie ϵ et décrit par un champ de quadrivitesse de composante covariante u_μ au repos dans le référentiel synchrone ($u_0 = c = 1$, $u_i = 0$)

$$T_{\mu\nu} = P g_{\mu\nu} + (P + \epsilon) u_\mu u_\nu \quad (3.13)$$

Ainsi $T = T_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 3P - \epsilon$ et

$$R_{\mu\nu} = \chi \left((P + \epsilon) u_\mu u_\nu - \frac{1}{2} (P - \epsilon) g_{\mu\nu} \right) \quad (3.14)$$

Les équations d'Einstein s'écrivent

$$R_{00} = -\frac{\chi}{2} (3P + \epsilon) g_{00} \quad \text{et} \quad R_{ii} = -\frac{\chi}{2} (P - \epsilon) \tilde{g}_{ii} \quad (3.15)$$

Ainsi en injectant les résultats (3.12) dans ces équations et en choisissant une fonction lapse $N^2 = V^2 = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$, les équations de la dynamique deviennent

$$\begin{cases} \chi V^2 (3P + \epsilon) &= -(\ln(V^2))'' + \frac{1}{2} ((\ln(V^2))')^2 - \frac{1}{2} (A_1'^2 + A_2'^2 + A_3'^2) \\ \chi V^2 (\epsilon - P) &= A_1'' + n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2 \\ \chi V^2 (\epsilon - P) &= A_2'' + n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2 \\ \chi V^2 (\epsilon - P) &= A_3'' + n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2 \end{cases} \quad (3.16)$$

On peut alors remplacer la première de ces équations par la somme de toutes ces équations, il reste

$$\begin{cases} 0 &= E_c + E_p + E_m \\ \chi V^2 (\epsilon - P) &= A_1'' + n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2 \\ \chi V^2 (\epsilon - P) &= A_2'' + n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2 \\ \chi V^2 (\epsilon - P) &= A_3'' + n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2 \end{cases} \quad (3.17)$$

avec

$$\begin{aligned} E_c &= A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' \\ E_p &= 2(n_1 n_2 \alpha_1 \alpha_2 + n_1 n_3 \alpha_1 \alpha_3 + n_3 n_2 \alpha_3 \alpha_2) - n_1^2 \alpha_1^2 - n_2^2 \alpha_2^2 - n_3^2 \alpha_3^2 \\ &= \sum_{i \neq j=1}^3 n_i n_j e^{A_i + A_j} - \sum_{i=1}^3 n_i^2 e^{2A_i} \\ E_m &= -4\chi \epsilon V^2 = -32\pi G \epsilon e^{(A_1 + A_2 + A_3)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Les équations (3.17) sont les équations les plus générales décrivant la dynamique de l'Univers homogène et anisotrope contenant un gaz parfait dans le cadre de la relativité générale d'Einstein.

Elles contiennent bien évidemment la conservation de l'énergie-impulsion $D^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Nous pouvons toutefois écrire cette dernière équation de façon plus explicite.

Un simple calcul montre que

$$D^\mu T_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow g_{\mu\nu} \partial^\mu P + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial^\mu ([P + \epsilon] \sqrt{-g} u_\mu u_\nu) = 0$$

la composante temporelle de cette équation dans notre référentiel synchrone nous indique donc que

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial t} ([P + \epsilon] \sqrt{-g}) \quad (3.19)$$

souvenons-nous à présent que $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \gamma(t) \omega^i \omega^j - dt^2$ ou $\gamma(t)$ est une matrice 3×3 diagonale $\gamma(t) = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et les fonctions de base ω^i dépendent du type d'anisotropie considérée, généralement de (x_1, x_2, x_3) mais pas de t (voir tableau (3.2)). Il est simple de se convaincre que la racine du déterminant de la métrique s'écrit

$$\sqrt{-g} = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \phi(x_1, x_2, x_3) = V(t) \phi(x_1, x_2, x_3)$$

ou la fonction ϕ dépend du type d'anisotropie. Ainsi l'équation (3.19) devient

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} ([P + \epsilon] V)$$

V , P et ϵ étant des fonctions du temps seul, quelques manipulations fournissent finalement

$$P = - \frac{d(\epsilon V)}{dV} \quad (3.20)$$

C'est l'équation de conservation de l'énergie-impulsion que nous utiliserons.

Une petite remarque : En considérant le volume de la section spatiale de l'univers à l'instant t , c'est-à-dire

$$\mathcal{V}(t) = \int \sqrt{-g} \prod_{i=1}^3 dx_i = V(t) \int \phi(x_1, x_2, x_3) \prod_{i=1}^3 dx_i = kV(t) \quad (3.21)$$

où la constante k dépend du type d'anisotropie. Ce volume contient une énergie totale

$$E = \epsilon \mathcal{V} = k\epsilon V$$

La conservation de l'énergie impulsion (3.20) s'écrit donc

$$P = - \frac{dE}{k dV} = - \frac{dE}{d\mathcal{V}} \Leftrightarrow P d\mathcal{V} + dE = 0$$

en application du premier principe de la thermodynamique, cette relation témoigne donc d'une évolution adiabatique de l'Univers : $dS = 0$.

Il est alors courant de faire une dernière hypothèse ...

Nous considérerons que le fluide parfait contenu dans l'Univers est barotropique. C'est-à-dire qu'il suit une équation d'état de la forme

$$P = (\Gamma - 1) \epsilon \quad (3.22)$$

ou $\Gamma \in [0, 2]$ est la constante barotropique. Une telle relation est très générale et s'applique à de nombreux fluides pour peu qu'ils contiennent une phase dominante.

En couplant les équations (3.20) et (3.22) il vient immédiatement

$$\frac{d\epsilon}{\epsilon} = -\Gamma \frac{dV}{V} \quad (3.23)$$

soit

$$\epsilon = \epsilon_o V^{-\Gamma} = \epsilon_o (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{-\Gamma/2} \quad (3.24)$$

Où ϵ_o est une constante d'intégration, positive pour de la matière ordinaire.

Sous l'hypothèse barotropique les équations de la dynamique de l'Univers homogène et anisotrope deviennent

$$\begin{cases} 0 = E_c + E_p + E_{mb} \\ \chi \epsilon_o V^{2-\Gamma} (2-\Gamma) = A_1'' + n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2 \\ \chi \epsilon_o V^{2-\Gamma} (2-\Gamma) = A_2'' + n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2 \\ \chi \epsilon_o V^{2-\Gamma} (2-\Gamma) = A_3'' + n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2 \end{cases} \quad (3.25)$$

avec $E_{mb} = -4\chi \epsilon_o V^{2-\Gamma}$, $\chi = 8\pi G$ et $\epsilon_o > 0$ si $0 \leq \Gamma \leq 2$

3.3 Formulation Hamiltonienne

La composante temporelle des équations de la dynamique peut s'interpréter comme la conservation d'une énergie. Nous avons en effet

$$H := E_c + E_p - 4\chi \epsilon e^{(A_1+A_2+A_3)} = 0 \quad (3.26)$$

avec

$$E_c = A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2'$$

et
$$E_p = \sum_{i \neq j=1}^3 n_i n_j e^{A_i + A_j} - \sum_{i=1}^3 n_i^2 e^{2A_i}$$

l'idée sous-jacente au formalisme hamiltonien est la recherche d'un changement de variables pour lequel, l'intégrale première H , s'écrit comme un Hamiltonien en termes de grandeurs *canoniquement* conjuguées. Cela revient en fait à réduire la forme quadratique associée à l'énergie cinétique.

3.3.1 Réduction du terme "cinétique"

Le terme cinétique E_c dépend des dérivées premières par rapport à τ , il s'agit d'une forme quadratique qui s'écrit sous forme matricielle

$$E_c = \frac{1}{2} \mathbf{x} M \mathbf{x}^T$$

avec

$$\mathbf{x} := [A_1', A_2', A_3'] \text{ et } M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

une première partie du travail consiste donc à chercher une matrice P telle que $M = P\Delta P^T$ où Δ est une matrice diagonale. Les valeurs propres de M sont $\lambda_1 = -1$ (double) et $\lambda_2 = 2$, les sous espaces propres associés sont

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\} \\ \mathcal{E}_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}\end{aligned}$$

la base orthogonale la plus générale de \mathcal{E}_1 est donc $\{\mathbf{u}_{11} = [a, -a, 0]^T; \mathbf{u}_{12} = [b, b, -2b]^T\}$ la base de \mathcal{E}_2 est de la forme $\{\mathbf{u}_2 = [c, c, c]^T\}$, la matrice passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 à une base orthogonale de $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ est donc

$$P := \begin{bmatrix} a & b & c \\ -a & b & c \\ 0 & -2b & c \end{bmatrix}$$

pour que P soit une matrice orthogonale, il faut orthogonaliser aussi les lignes, cela revient à imposer les conditions

$$\begin{cases} -a^2 + b^2 + c^2 = 0 \\ -2b^2 + c^2 = 0 \end{cases}$$

soit $a = \pm b\sqrt{3}$ et $c = \pm b\sqrt{2}$, enfin la condition de normalisation $P^T P = P P^T = I$, impose finalement la condition $6b^2 = 1$ d'où la matrice de passage

$$P := \begin{bmatrix} \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Dans ces conditions la matrice de la forme quadratique E_c s'écrit

$$M = P \cdot \text{diag}(-1, -1, 2) \cdot P^{-1} = P \cdot \text{diag}(-1, -1, 2) \cdot P^T := P\Delta P^T$$

et E_c elle même

$$E_c = \frac{1}{2} \mathbf{x} M \mathbf{x}^T = \frac{1}{2} \mathbf{x} P \Delta P^T \mathbf{x}^T = \frac{\mathbf{x} P}{\sqrt{2}} \cdot \Delta \cdot \left(\frac{\mathbf{x} P}{\sqrt{2}} \right)^T$$

en posant $\mathbf{x} = \sqrt{2} \mathbf{y} P^T$ et $\mathbf{y} = [x, y, z]$, il vient donc $E_c(x, y, z) = -x^2 - y^2 + 2z^2$. A ce stade, une petite remarque s'impose, par certaines homothéties agissant dans les sous espaces propres, il est possible d'affecter les coefficients numériques présents devant les carrés mais sans qu'il soit possible d'affecter leurs signes relatifs, la signature $(-, -, +)$ est en effet une propriété globale de la forme quadratique E_c et en ce sens non modifiable. Au lieu de choisir le changement de variable induit par la matrice $\sqrt{2} P^T$ comme le suggère la définition de \mathbf{y} , pour obtenir une forme se rapprochant le plus possible d'une énergie cinétique écrite en variables canoniques, nous prendrons (l'arbitraire \pm ne change rien au résultat sur E_c)

$$x = \sqrt{2} \mathbf{y}' P'^T \quad \text{avec} \quad P' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

le facteur $1/\sqrt{2}$ extérieur est destiné à faire apparaître le facteur $1/2$ de nos chères énergies cinétiques, et le facteur $1/\sqrt{2}$ intérieur agit sur le sous-espace propre \mathcal{E}_2 pour normaliser la contribution du troisième argument de E_c . En posant $\mathbf{y}' = [p_1, p_2, p_3]$, nous obtenons finalement

$$[A'_1, A'_2, A'_3] = [p_1, p_2, p_3] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

et

$$E_c(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2} (p_3^2 - p_1^2 - p_2^2)$$

en introduisant les coordonnées généralisées $\mathbf{q} := [q_1, q_2, q_3]^T$ associées aux moments $\mathbf{p} := \mathbf{y}' = [p_1, p_2, p_3]^T$, c'est-à-dire

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad p_i = \frac{dq_i}{d\tau} = q'_i \quad (3.27)$$

nous avons immédiatement (à une constante près choisie nulle pour avoir $(q_i, p_i) \rightarrow (0, 0)$ quand $\tau \rightarrow \infty$)

$$\begin{cases} A'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}q'_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}q'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}q'_3 \\ A'_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}q'_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}q'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}q'_3 \\ A'_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}q'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}q'_3 \end{cases} \iff \begin{cases} q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 - A_2) \\ q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(A_1 + A_2 - 2A_3) \\ q_3 = \frac{2}{\sqrt{6}}(A_1 + A_2 + A_3) \end{cases} \quad (3.28)$$

on constate donc que la variable q_3 est une fonction affine du logarithme du volume de l'Univers :

$$q_3 = \frac{2}{\sqrt{6}} \ln(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = \frac{4}{\sqrt{6}} \ln V = \frac{4}{\sqrt{6}} (\ln \mathcal{V} - \ln k) \quad (3.29)$$

où la constante k dépend du type d'anisotropie considérée (cf. relation (3.21)).

3.3.2 Terme potentiel

En effectuant le changement de variable (3.28) dans la partie "potentielle" de l'intégrale première H nous constatons que les variables (q_1, q_2) et q_3 se séparent en

$$E_p = \xi(q_1, q_2) e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_3}$$

avec

$$\begin{aligned} \xi(q_1, q_2) = & -n_1^2 e^{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}q_2 + \sqrt{2}q_1\right)} - n_2^2 e^{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}q_2 - \sqrt{2}q_1\right)} - n_3^2 e^{-\frac{2\sqrt{6}}{3}q_2} \\ & + 2n_1n_2 e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_2} + 2n_1n_3 e^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}q_1 - \frac{\sqrt{6}}{6}q_2\right)} + 2n_2n_3 e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}q_1 + \frac{\sqrt{6}}{6}q_2\right)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

cette séparation des variables est reliée à la signature de la forme quadratique E_c et donc à des propriétés fondamentales des métriques de l'espace homogène.

Pour la forme un dernier petit changement de variables $q_+ = q_1/\sqrt{2}$ et $q_- = q_2/\sqrt{6}$ permet d'avoir une forme encore plus aboutie pour le potentiel

$$\begin{aligned} \xi(q_+, q_-) = & 2n_1n_2 e^{2q_-} + 2n_1n_3 e^{(q_+ - q_-)} + 2n_2n_3 e^{-(q_+ + q_-)} \\ & - n_1^2 e^{2(q_+ + q_-)} - n_2^2 e^{2(-q_+ + q_-)} - n_3^2 e^{-4q_-} \end{aligned}$$

mais attention en variables (q_+, q_-, q_3) c'est la symétrie hamiltonienne qui est brisée ...

3.3.3 Dynamique Hamiltonienne

Les constructions précédentes nous permettent donc d'écrire l'intégrale première H de la dynamique des Univers homogènes sous la forme

$$H = \frac{1}{2} (p_3^2 - p_1^2 - p_2^2) + e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_3} \xi(q_1, q_2) - 4\chi\epsilon e^{\frac{\sqrt{6}}{2}q_3} = 0 \quad (3.31)$$

les équations de la dynamique prennent alors une forme tout à fait sympathique. Les définitions (3.27) et notre travail de diagonalisation montrent directement que

$$p_{1,2} := \frac{dq_{1,2}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial p_{1,2}} \quad \text{et} \quad p_3 := \frac{dq_3}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_3}$$

Les équations de la dynamique sont bien de type hamiltonien. on peut vérifier par le calcul que (en utilisant successivement (3.31), (3.30), (3.28) et (3.17))

$$\frac{dp_{1,2}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_{1,2}}$$

la dernière est plus instructive :

$$\frac{\partial H}{\partial q_3} = \frac{\sqrt{6}}{3} E_p + \frac{\sqrt{6}}{2} E_m - 4\chi \frac{\partial \epsilon}{\partial q_3} e^{\frac{\sqrt{6}}{2}q_3} \quad (3.32)$$

mais l'équation (3.29) fournit $V = e^{\frac{\sqrt{6}}{4}q_3}$ ainsi

$$\frac{\partial H}{\partial q_3} = \frac{\sqrt{6}}{3} E_p - 2\sqrt{6}\chi\epsilon V^2 - \chi\sqrt{6}V^3 \frac{\partial \epsilon}{\partial V}$$

Utilisant à présent la conservation de l'énergie impulsion (3.20) , il vient

$$V \frac{d\epsilon}{dV} = -(P + \epsilon)$$

et donc

$$\frac{\partial H}{\partial q_3} = \frac{\sqrt{6}}{3} [E_p + 3\chi V^2 (P - \epsilon)]$$

En ajoutant les trois composantes spatiales des équations de la dynamique on obtient par ailleurs

$$E_p + 3\chi V^2 (P - \epsilon) = -(A_1'' + A_2'' + A_3'')$$

$\sqrt{6}/3$ et $2/\sqrt{6}$ ne faisant qu'un, en se rappelant de la définition de q_3 dans (3.28) on trouve finalement

$$\frac{\partial H}{\partial q_3} = -\frac{2}{\sqrt{6}} (A_1 + A_2 + A_3)'' = -\frac{d^2 q_3}{d\tau^2} = -\frac{dp_3}{d\tau}$$

En variables (q_i, p_i) , la dynamique de l'Univers homogène est une dynamique quasi-hamiltonienne dont les équations sont

$$\begin{aligned} q'_{1,2} &= \frac{dq_{1,2}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial p_{1,2}} & p'_{1,2} &= \frac{dp_{1,2}}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial q_{1,2}} \\ q'_3 &= \frac{dq_3}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_3} & p'_3 &= \frac{dp_3}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_3} \end{aligned} \quad (3.33)$$

La précaution "quasi-" vient informer le lecteur que ces variables ne sont pas complètement conjuguées à cause des signes moins qui ornent les 2 équations indicées 1 et 2. Pour les aficionados on remarquera que les crochets associés à une telle dynamique ne sont pas anticommutatifs et donc que la structure algébrique de ces équations n'est pas gouvernée par une algèbre de Lie. Néanmoins, beaucoup de techniques hamiltoniennes restent praticables dans ce contexte.

Chapitre 4

Résultats analytiques

4.1 Intégrabilité du système de l'Univers homogène

4.1.1 Systèmes différentiels autonomes et auto-similaires

Un système différentiel autonome est un ensemble d'équations différentielles dont les inconnues sont généralement des fonctions $x_{i=1,\dots,n}$ de la variable t que l'on regroupe en un vecteur $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ vérifiant

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

La fonction \mathbf{f} de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n décrit la dynamique du système et associe à tout \mathbf{x} le vecteur $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})]^T$. Un tel système est réputé auto-similaire s'il jouit de la propriété d'invariance sous la double transformation

$$\begin{aligned} t &\mapsto t/\alpha \\ \forall i = 1, \dots, n \quad x_i &\mapsto \alpha^{g_i} x_i \end{aligned} \quad (4.2)$$

la constante réelle α caractérise l'auto similarité du système tout autant que les n poids g_i que l'on regroupe dans le vecteur $\mathbf{g} := [g_1, \dots, g_n]^T$. Si de plus la matrice

$$A(\mathbf{x}) \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad A_{ij} = x_j \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \delta_{ij} f_i(\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

est inversible pour presque tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, alors le vecteur \mathbf{g} , dont les composantes sont des nombres rationnels, est unique.

L'intérêt de ces systèmes auto-similaires réside dans le fait qu'ils admettent toujours une solution particulière autosimilaire $\tilde{\mathbf{x}}_{as} = [c_1 (t - t_o)^{-g_1}, \dots, c_n (t - t_o)^{-g_n}]^T$. L'exploitation de la propriété d'auto-similarité montre en effet que les constantes c_i regroupées dans le vecteur $\mathbf{c} := [c_1, \dots, c_n]^T$ vérifient un système d'équations algébriques de la forme

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{c}) = -g_1 c_1 \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{c}) = -g_n c_n \end{cases} \quad (4.4)$$

Nous connaissons ainsi autant de solutions particulières non triviales qu'il y a de solutions au système (4.4).

La technique de Kovalewskaya s'applique alors : Cette méthode consiste à linéariser le système (4.1) au voisinage d'une solution particulière $\tilde{\mathbf{x}}_{as}$, le système linéaire obtenu s'écrit alors

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = D\mathbf{f}(\mathbf{x})(\tilde{\mathbf{x}}_{as}) \mathbf{z} \quad (4.5)$$

où $D\mathbf{f}(\mathbf{x})(\tilde{\mathbf{x}}_{as})$ est la matrice jacobienne de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ calculée au point $\tilde{\mathbf{x}}_{as}$. Le théorème de Fuchs montre alors que la solution générale de (4.5) est autosimilaire et de la forme

$$\mathbf{z} = [k_1 (t - t_o)^{\rho_1 - g_1}, \dots, k_n (t - t_o)^{\rho_n - g_n}]^T \quad (4.6)$$

Les quantités $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ sont appelées exposants de Kovalewskaya, elles sont obtenues en calculant les valeurs propres de la matrice de Kovalewskaya ¹

$$K := D\mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{c}) + \text{diag}(\mathbf{g}). \quad (4.7)$$

Les exposants de Kovalewskaya peuvent être interprétés comme une généralisation des indices de Fuchs pour les systèmes non linéaires (voir [M4] paragraphes 5.6 et 5.7), ils peuvent donc être utilisés pour construire des séries solutions du système non linéaire. Au voisinage d'un point t_o (singularité), ces solutions sont de la forme

$$x_i(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k x_i^{(k)}(t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_i^{(0)} = c_i (t - t_o)^{g_i} \\ x_i^{(1)} = k_i (t - t_o)^{\rho_i - g_i} \\ \exists 1 \leq p, q \leq n, \quad x_i^{(2)} = c_p k_q (t - t_o)^{g_p + \rho_q - g_q} \\ \text{etc} \dots \end{cases}$$

plus succinctement on peut écrire

$$x_i(t) \propto (t - t_o)^{g_i} S[(t - t_o)^{\rho_1}, \dots, (t - t_o)^{\rho_n}] \quad (4.8)$$

ou $S[]$ est une série multiple. On constate donc avec une émotion non retenue, que si les exposants de Kovalewskaya sont des nombres entiers ou rationnels, le développement (4.8) permet formellement d'espérer obtenir la solution générale du système différentiel ² et donc de qualifier le système d'intégrable. Si par contre il existe ne serait ce qu'un exposant réel, ou pire complexe, plus rien n'est à espérer de la barbare relation (4.8).

Ces considérations se trouvent concrétisées dans une série de théorèmes dont le plus important est du à Yoshida :

1. En posant pour chaque $i = 1, \dots, n$: $x_i(t) = \tilde{x}_i + z_i t^{-g_i}$ et en linéarisant les équations pour \mathbf{z} on obtient

$$\left\{ t \frac{dz_i}{dt} = \sum_{j=1}^n K_{ij} z_j \right.$$

avec $K := D\mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{c}) + \text{diag}(\mathbf{g})$. Dans la base qui diagonalise K avec les valeurs propres (ρ_1, \dots, ρ_n) en transformant $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{y}$, on obtient le système

$$\left\{ t \frac{dy_i}{dt} = \rho_i y_i \right.$$

dont la solution est $y_i(t) = cste.t^{\rho_i}$. Chercher des solutions autosimilaires au voisinage d'une orbite autosimilaire revient donc à déterminer les valeurs propres de K .

2. On obtient en fait une collection d'intégrales premières indépendantes ...

Théorème 1 *Une condition nécessaire pour qu'un système différentiel auto-similaire soit algébriquement intégrable est que tous ses exposants de Kovalewskaya soient des nombres rationnels . S'il existe au moins un exposant irrationnel, imaginaire ou complexe, le système n'admet pas un ensemble complet d'intégrales premières algébriques.*

Dans le cas d'exposants irrationnels, selon [M7], il reste la place pour des intégrales premières transcendentes, mais rien n'est garanti. Il semble toutefois que l'intégrabilité soit exclue dans le cas d'exposants complexes comme le montre la théorie de Ziglin [M8].

4.1.2 Exposants de Kovalewskaya et cosmologies anisotropes

Les travaux présentés ci-dessous ont été initiés par l'école russe dirigée par Melnikov dans les années 80-90 (voir [32]). Ils se sont concrétisés par un travail dans un cas particulier par [33] et une tentative de généralisation par [34]. Les résultats présentés par ces derniers auteurs étant soit faux soit imprécis, nous préférons reprendre cette étude dans sa totalité.

Mise en place

Le constat principal consiste à remarquer que le hamiltonien du système dynamique associé à l'Univers homogène est celui d'un réseau de Toda généralisé pour lequel de nombreux travaux théoriques ont été menés.

Ceci n'est pas très difficile : en introduisant les vecteurs

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &:= [0, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}] & \mathbf{a}_2 &:= [\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}] & \mathbf{a}_3 &:= [-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}] \\ \mathbf{a}_4 &:= [\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}] & \mathbf{a}_5 &:= [-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}] & \mathbf{a}_6 &:= [0, -\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}] \\ \mathbf{a}_7 &:= [0, 0, \frac{(2-\Gamma)\sqrt{6}}{4}] \end{aligned} \quad (4.9)$$

qu'il n'est pas anodin de représenter dans l'espace (voir figure 4.1).

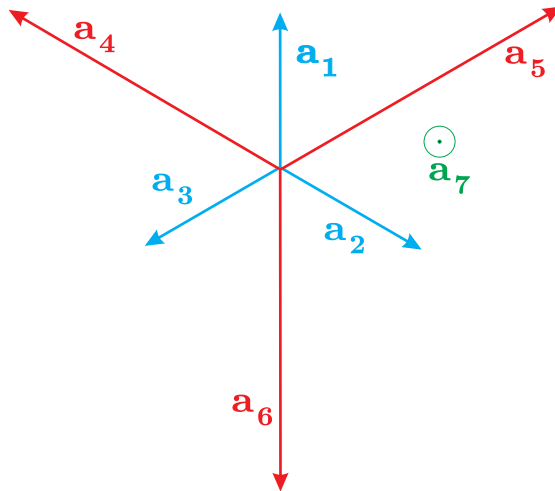


FIGURE 4.1 – Représentation spatiale des vecteurs intervenant dans le Hamiltonien des Univers de Bianchi. Les vecteurs sont projetés sur le plan $\Pi = 0xy$. On constate que $a_7 \perp \Pi$, on vérifie que $a_{1,\dots,6}$ forment un angle de $\pi/4$ avec leur projection orthogonale sur Π .

Puis en définissant les formes

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \quad \begin{aligned} (x, y) &:= +x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\ \langle x, y \rangle &:= -x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 \end{aligned}$$

et les constantes

$$\begin{aligned} k_1 &:= 2n_1n_2 & k_2 &:= 2n_1n_3 & k_3 &:= 2n_2n_3 \\ k_4 &:= -n_1^2 & k_5 &:= -n_2^2 & k_6 &:= -n_3^2 \\ & & k_7 &:= -4\varepsilon_o\chi \end{aligned}$$

il est clair qu'en présence d'un fluide barotropique de paramètre Γ conduisant à la relation (3.24), au vu de la relation (3.29), le Hamiltonien (3.31) s'écrit

$$H = \frac{1}{2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \sum_{i=1}^7 k_i e^{(\mathbf{a}_i, \mathbf{q})} \quad (4.10)$$

Après la formulation BKL puis hamiltonienne, les esprits chagrins pourraient penser que cette formulation à la Toda vient uniquement se rajouter à une liste (que l'on pourrait d'ailleurs compléter par celle de Wainwright cf.[36] chapitre 6 ou [37]), en fait chaque formulation possède son champ d'application, et celui du Toda est l'intégrabilité ...

Un petit changement de variables

Originellement introduit à six dimensions par l'école russe de Melnikov citée plus haut, effectuons le changement de variable

$$\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\} \mapsto \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{u} \in \mathbb{R}^7, u_{i=1,\dots,7} := \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{p} \rangle \\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^7, v_{i=1,\dots,7} := \exp(\mathbf{a}_i, \mathbf{q}) \end{cases}$$

Notons au passage que ce changement de variables fait passer le nombre de degrés de liberté du système de 6 en variables $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\}$ à 14 en variables $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Les équations de la dynamique (3.33) s'écrivent alors (le ' indique toujours une dérivation totale par rapport au temps conforme τ)

— Pour la variable \mathbf{v}

$$\begin{aligned} v'_i &= (\mathbf{a}_i, \mathbf{q}') e^{(\mathbf{a}_i, \mathbf{q})} = (\mathbf{a}_i, \mathbf{q}') v_i \\ &= \left(-\frac{\partial H}{\partial p_1} a_{i1} - \frac{\partial H}{\partial p_2} a_{i2} + \frac{\partial H}{\partial p_3} a_{i3} \right) v_i \\ &= (-p_1 a_{i1} - p_2 a_{i2} + p_3 a_{i3}) v_i \\ &= \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{p} \rangle v_i \\ &= u_i v_i \end{aligned}$$

— Pour la variable \mathbf{u}

$$\begin{aligned} u'_i &= \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{p}' \rangle = \frac{\partial H}{\partial q_1} a_{i1} + \frac{\partial H}{\partial q_2} a_{i2} - \frac{\partial H}{\partial p_3} a_{i3} \\ &= \sum_{j=1}^7 k_j v_j (a_{j1} a_{i1} + a_{j2} a_{i2} - a_{j3} a_{i3}) \\ &= - \sum_{j=1}^7 k_j v_j \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle \end{aligned}$$

en introduisant la matrice M carrée d'ordre 7 qui, dans la base canonique, a pour composantes les nombres m_{ij} tels que

$$m_{ij} := -k_j \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle$$

l'équation de la dynamique pour la variable \mathbf{u} devient

$$u'_i = \sum_{j=1}^7 m_{ij} v_j$$

Pour les nouvelles variables $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ la dynamique est polynomiale, elle s'écrit

$$\forall i = 1, \dots, 7 \quad \begin{cases} v'_i = u_i v_i \\ u'_i = \sum_{j=1}^7 m_{ij} v_j \end{cases}$$

En introduisant le vecteur $\mathbf{x} = [\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T]$, le système dynamique s'écrit sous la forme d'un système autonome du premier ordre évoqué lors du paragraphe précédent (cf. 4.1) :

$$\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) := [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_{14}(\mathbf{x})]^T \quad (4.11)$$

avec

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^7 m_{ij} x_{j+7} \quad \text{si } i = 1, \dots, 7$$

$$f_i(\mathbf{x}) = x_i x_{i-7} \quad \text{si } i = 8, \dots, 14$$

Le système différentiel est polynomial donc autosimilaire : la condition d'invariance (4.2) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^7 m_{ij} x_{j+7} \Leftrightarrow \alpha^{g_i+1} \frac{dx_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^7 m_{ij} x_{j+7} \alpha^{g_i+\tau} & \text{si } i = 1, \dots, 7 \\ \frac{dx_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^7 m_{ij} x_{j+7} \Leftrightarrow \alpha^{g_i+1} \frac{dx_i}{d\tau} = \alpha^{g_i+g_i-7} x_i x_{i-7} & \text{si } i = 8, \dots, 14 \end{cases}$$

Cette condition est vérifiée pour tout α non nul à condition d'avoir

$$g_1 = \dots = g_7 = 1 \quad \text{et} \quad g_8 = \dots = g_{14} = 2$$

Il n'est pas compliqué de vérifier que ce choix de \mathbf{g} est unique car la condition (4.3) est satisfaite. Le système (4.11) admet donc une solution particulière autosimilaire

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{c} t^{-\mathbf{g}} = [\lambda_1 t^{-1}, \dots, \lambda_7 t^{-1}, \mu_1 t^{-2}, \dots, \mu_7 t^{-2}]^T$$

conformément à (4.4), les constantes $\mathbf{c} = [\lambda, \mu] = [\lambda_1, \dots, \lambda_7, \mu_1, \dots, \mu_7]$ non toutes nulles, vérifient un système d'équations algébriques de la forme

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^7 m_{ij} \mu_j = -\lambda_i \\ \lambda_i \mu_i = -2\mu_i \end{cases} \quad (4.12)$$

à chaque solution de ce système d'équations correspond une solution particulière autosimilaire du système différentiel et donc un jeu de 14 exposants Kovalewskaya ...

Solutions du système d'équations algébriques

Compte-tenu de son importance nous détaillons la recherche de l'ensemble des solutions de l'équation algébrique associée à la mise en évidence des exposants de Kovalewskaya.

Commençons tout d'abord par une première remarque simplificatrice : La matrice M carrée d'ordre 7 associée à cette équation, dont les composantes dans la base canonique de \mathbb{R}^7 sont $m_{ij}/k_j = -\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle$ ou plus explicitement ($\gamma = 2 - \Gamma$)

$$M := \begin{bmatrix} 0 & -2n_1n_3 & -2n_3n_2 & 0 & 0 & 2n_3^2 & 2\varepsilon_o\chi\gamma \\ -2n_1n_2 & 0 & -2n_3n_2 & 0 & 2n_2^2 & 0 & 2\varepsilon_o\chi\gamma \\ -2n_1n_2 & -2n_1n_3 & 0 & 2n_1^2 & 0 & 0 & 2\varepsilon_o\chi\gamma \\ 0 & 0 & 4n_3n_2 & -2n_1^2 & 2n_2^2 & 2n_3^2 & 2\varepsilon_o\chi\gamma \\ 0 & 4n_1n_3 & 0 & 2n_1^2 & -2n_2^2 & 2n_3^2 & 2\varepsilon_o\chi\gamma \\ -4n_1n_2 & 0 & 0 & 2n_1^2 & 2n_2^2 & -2n_3^2 & 2\varepsilon_o\chi\gamma \\ -\gamma n_1n_2 & -\gamma n_1n_3 & -\gamma n_2n_3 & \frac{1}{2}\gamma n_1^2 & \frac{1}{2}\gamma n_2^2 & \frac{1}{2}\gamma n_3^2 & \frac{3\varepsilon_o\chi}{2}\gamma^2 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

est de rang 3, ainsi tout déterminant d'ordre supérieur à 3 extrait de cette matrice est nul!

Le vecteur nul de \mathbb{R}^7 est toujours solution du système (4.12) celui-ci ne convient cependant pas à notre quête d'exposant qui requiert des solutions non triviales.

Quelques notations pour commencer : on notera $E_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, de plus, pour la résolution du système linéaire, nous manipulerons les mineurs de M jusqu'à l'ordre 3 :

$$\forall (i, j, k) \in E_7 \times E_7 \times E_7 \quad \Theta_i = m_{ii}, \Theta_{i,j} = \begin{vmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & m_{jj} \end{vmatrix} \\ \Theta_{i,j,k} = \begin{vmatrix} m_{ii} & m_{ij} & m_{ik} \\ m_{ji} & m_{jj} & m_{jk} \\ m_{ki} & m_{kj} & m_{kk} \end{vmatrix}$$

ainsi que les déterminants

$$\Delta_{2i} = \begin{vmatrix} 2 & m_{ij} \\ 2 & m_{jj} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2j} = \begin{vmatrix} m_{ii} & 2 \\ m_{ji} & 2 \end{vmatrix} \\ \Delta_{3i} = \begin{vmatrix} 2 & m_{ij} & m_{ik} \\ 2 & m_{jj} & m_{jk} \\ 2 & m_{kj} & m_{kk} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{3j} = \begin{vmatrix} m_{ii} & 2 & m_{ik} \\ m_{ji} & 2 & m_{jk} \\ m_{ki} & 2 & m_{kk} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{3k} = \begin{vmatrix} m_{ii} & m_{ij} & 2 \\ m_{ji} & m_{jj} & 2 \\ m_{ki} & m_{kj} & 2 \end{vmatrix}$$

il existe trois familles de solutions non triviales au système (4.12) :

1. Solution de type 1 (T1) : $\exists! i \in E_7$ tel que $\mu_i \neq 0$ et $\forall j \in E_7 / \{i\}, \mu_j = 0$

L'équation du bas de (4.12) stipule donc que $\lambda_i = -2$ ainsi

— Si $\Theta_i = 0$: Pas de solutions

— Si $\Theta_i \neq 0$: $\mu_i = 2/\Theta_i$ et $\forall j \in E_7 / \{i\}, \lambda_j = -2m_{ji}/\Theta_i$

2. Solution de type 2 (T2) : $\exists! (i, j) \in E_7 \times (E_7 / \{i\})$ tel que $\{\mu_i, \mu_j\} \neq \{0, 0\}$ et $\forall k \in E_7 / \{i, j\}, \mu_k = 0$

L'équation du bas de (4.12) stipule donc que $\lambda_i = \lambda_j = -2$ ainsi

— Si $\Theta_{i,j} = 0$: Pas de solutions

— Si $\Theta_{i,j} \neq 0$: $\mu_i = \Delta_{2i}/\Theta_{ij}$ et $\mu_j = \Delta_{2j}/\Theta_{i,j}$ puis $\forall k \in E_7 / \{i, j\}, \lambda_k = (m_{ki}\Delta_{2i} + m_{kj}\Delta_{2j})/\Theta_{i,j}$

3. Solution de type 3 (T3) : $\exists! (i, j, k) \in E_7 \times (E_7/\{i\}) \times (E_7/\{i, j\})$ tel que $\{\mu_i, \mu_j, \mu_k\} \neq \{0, 0, 0\}$ et $\forall l \in E_7/\{i, j, k\}, \mu_l = 0$

L'équation du bas de (4.12) stipule donc que $\lambda_i = \lambda_j = \lambda_k = -2$ ainsi

- Si $\Theta_{i,j,k} = 0$: Pas de solutions
- Si $\Theta_{i,j,k} \neq 0$: $\mu_i = \Delta_{3i}/\Theta_{i,j,k}$, $\mu_j = \Delta_{3j}/\Theta_{i,j,k}$ et $\mu_k = \Delta_{3k}/\Theta_{i,j,k}$ puis $\forall l \in E_7/\{i, j, k\}, \lambda_l = (m_{li}\Delta_{3i} + m_{lj}\Delta_{3j} + m_{lk}\Delta_{3k})/\Theta_{i,j,k}$

Compte-tenu du rang de la matrice M il n'existe pas d'autre solution non triviale. Il y en a déjà suffisamment, surtout lorsqu'on se souvient de ce que l'on va faire de ces solutions ...

Détermination des exposants de Kovalewskaya

Pour déterminer les exposants de Kovalewskaya nous devons procéder en trois étapes :

1. Spécifier le type d'Univers étudié : Cela revient à choisir un jeu de $n_{i=1,2,3}$ dans le tableau de la page 19. Si cet Univers est vide toutes les 7^{ème} composantes du formalisme précédemment développé seront inutilisées, la matrice de Kovalewskaya est donc d'ordre 12. Si par contre l'Univers contient un fluide barotropique, le paramètre Γ de cet univers ainsi que les constantes ε_o et χ restent dans les calculs et la matrice de Kovalewskaya est d'ordre 14.

Signalons à cet instant, que des généralisations des résultats proposés ici sont possibles dans le cas de la prise en compte d'une constante cosmologique, d'une théorie à plus de trois dimensions d'espaces ou éventuellement dans la prise en compte d'une théorie scalaire tenseur de la relativité générale : Dans tous ces cas en effet, la dynamique de l'Univers homogène anisotrope reste modélisable par un réseau de Toda généralisé. Il "suffit" alors de rajouter le bon vecteur \mathbf{a}_n à la liste (4.9) associé à la bonne constante k_n et donc d'augmenter de 2 la dimension du problème et par induction celle de la matrice de Kovalewskaya ... Ce travail est en cours de réalisation.

Une fois spécifié le type d'Univers nous disposons d'une matrice M carrée d'ordre 6 dans le vide, 7 avec de la matière, et plus si affinité ...

2. Déterminer *tous* les déterminants mineurs d'ordre inférieur ou égal à 3 non nuls de M . A titre d'exemple pour motiver les courageux nous indiquons ci-dessous les mineurs concernés par le modèle B_{VIII} avec matière

- $\Theta_{1,4,7}, \Theta_{1,3,6}, \Theta_{3,5,7}, \Theta_{2,3,6}, \Theta_{1,2,3}, \Theta_{2,4,7}, \Theta_{1,4,6}, \Theta_{2,3,7}, \Theta_{2,4,5}, \Theta_{1,5,7}, \Theta_{2,3,4},$
 $\Theta_{5,6,7}, \Theta_{2,5,6}, \Theta_{4,6,7}, \Theta_{3,6,7}, \Theta_{4,5,7}, \Theta_{1,5,6}, \Theta_{3,4,6}, \Theta_{1,2,7}, \Theta_{2,3,5}, \Theta_{1,3,4}, \Theta_{1,2,4},$
 $\Theta_{3,4,5}, \Theta_{1,2,5}, \Theta_{1,3,5}, \Theta_{4,5,6}, \Theta_{1,2,6}, \Theta_{2,6,7}, \Theta_{1,3,7}$
- $\Theta_{2,5}, \Theta_{6,7}, \Theta_{3,7}, \Theta_{1,7}, \Theta_{1,3}, \Theta_{2,7}, \Theta_{1,6}, \Theta_{4,7}, \Theta_{2,3}, \Theta_{1,2}, \Theta_{3,4}, \Theta_{5,7}$
- $\Theta_4, \Theta_5, \Theta_6, \Theta_7$

3. Pour chaque mineur, résoudre le système algébrique (4.12) afin de construire, conformément à la définition (4.7), la matrice de Kovalewskaya. Dans le cas de notre \mathbf{f} polynomial

les calculs sont simples et fournissent

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & m_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{N1} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & Id_N & \ddots & \vdots & \vdots & & M & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & m_{1N} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{NN} \\ \mu_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_1 + 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mu_N & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_N + 2 \end{bmatrix}$$

Le cas $N = 6$ est celui de l'Univers vide, les vecteurs λ et μ du système (4.12) sont dans \mathbb{R}^6 , et K est carrée d'ordre 12. En présence de matière barotropique d'indice Γ , $N = 7$, il faut travailler dans \mathbb{R}^7 pour la résolution du système linéaire et K est d'ordre 14, etc ...

Tous les calculs ont été effectués en utilisant des procédures Maple afin de minimiser les risques d'erreur ... Les résultats sont rassemblés ci-après :

B_I	Vide	Matière
T1	\emptyset	E_γ
T2	\emptyset	\emptyset
T3	\emptyset	\emptyset

B_{II} et B_{IV}	Vide	Matière
T1	E_o	E_γ $-1, 3 - \frac{\Gamma}{2}, 2(\times 3), 4(\times 3), 1(\times 6)$
T2	\emptyset	$-1, 2, A_\pm, \frac{\gamma}{2}(\times 2), \gamma(\times 3), 1(\times 5)$
T3	\emptyset	\emptyset

$B_{III}, B_{VI_{o,a}}$ $B_{VII_{o,a}}$	Vide	Matière
T1	E_o	E_γ $-1, 3 - \frac{\Gamma}{2}, 2(\times 3), 4(\times 3), 1(\times 6)$
T2	\emptyset	$-1, 2, A_\pm, \frac{\gamma}{2}(\times 2), \gamma(\times 3), 1(\times 5)$ $-1, 2, B_\pm, 2\gamma, 0(\times 2), \gamma(\times 2), 1(\times 5)$
T3	\emptyset	$-1, 2, B_\pm, C_\pm, 1(\times 4), 2\gamma, 0, \gamma(\times 2)$ $-1, 2, B_\pm, 2\gamma, 0(\times 2), \gamma(\times 2), 1(\times 5)$

B_{VIII} et B_{IX}	Vide	Matière
T1	E_o	E_γ $-1, 3 - \frac{\Gamma}{2}, 2(\times 3), 4(\times 3), 1(\times 6)$
T2	$-1, -2(\times 3), 7^{\pm i}, 2(\times 2), 1(\times 4)$ $-1, 2, 15^{\pm i}, 1(\times 4), 0(\times 4)$	$-1, 2, A_\pm, \frac{\gamma}{2}(\times 2), \gamma(\times 3), 1(\times 5)$ $-1, 2, B_\pm, 2\gamma, 0(\times 2), \gamma(\times 2), 1(\times 5)$ $-1, -2(\times 3), 7^{\pm i}, 2(\times 2), 1(\times 5), 2\Gamma - 2$ $-1, -1 + \frac{3}{2}\Gamma, 2, 15^{\pm i}, 0(\times 4), 1(\times 5)$
T3	$-1, 2, 15^{\pm i}(\times 2), 1(\times 3), 0(\times 3)$ $-1, 2, 3^{\pm i}(\times 2), 1(\times 3), 0(\times 3)$ $-1, 2, 15^{\pm i}, 1(\times 4), 0(\times 4)$ $-1(\times 2), 2(\times 2), 7^{\pm i}, 1(\times 3), 0(\times 3)$	$-1, -1 + \frac{3}{2}\Gamma, 2, 3^{\pm i}(\times 2), 0(\times 3), 1(\times 4)$ $-1, 2, C_\pm, D_\pm, -2\gamma, 2\gamma(\times 3), 1(\times 4)$ $-1, -1 + \frac{3}{2}\Gamma, 2, 0(\times 3), 1(\times 4), 15^{\pm i}(\times 2)$ $-1, -1 + \frac{3}{2}\Gamma, 2, 0(\times 4), 1(\times 5), 15^{\pm i}$ $-1, 2, B_\pm, C_\pm, 1(\times 4), 2\gamma, 0, \gamma(\times 2)$ $-1(\times 2), -1 + \frac{3}{2}\Gamma, 7^{\pm i}, 2(\times 2), 0(\times 3), 1(\times 4)$ $-1, 2, B_\pm, 2\gamma, 0(\times 2), \gamma(\times 2), 1(\times 5)$

sous l'hypothèse $0 \leq \Gamma < 2$, on a posé, $\gamma = (3\Gamma - 2)/(\Gamma - 2)$, pour $\alpha = 3, 5$ et 7 , on note $2\alpha^{\pm i} = 1 \pm i\sqrt{\alpha}$,

$$2A_\pm = 1 \pm \sqrt{\frac{16-22\Gamma+3\Gamma^2}{4-2\Gamma}} \quad 2B_\pm = 1 \pm \sqrt{5-6\Gamma}$$

$$2C_\pm = 1 \pm \sqrt{\frac{25\Gamma-18}{\Gamma-2}} \quad 2D_\pm = 1 \pm \sqrt{\frac{18-41\Gamma+24\Gamma^2}{2-\Gamma}}$$

et

$$E_\gamma := \left\{ -1, 2, 1(\times 6), \frac{2\gamma}{3}(\times 6) \right\} \quad E_o := \left\{ -1, 4(\times 3), 2(\times 3), 1(\times 5) \right\}$$

Analyse des exposants et conclusions

Dans le vide, rien ne semble s'opposer à l'intégrabilité des équations de la dynamique des Univers de Bianchi de type I à VII (exposants entiers). Par contre, la présence d'exposants complexes dans la dynamique des Univers de type B_{VIII} et B_{IX} rend ces modèles non intégrables. La présence d'un fluide barotropique complique singulièrement l'analyse (nous restreignons l'étude au cas physique : $0 \leq \Gamma \leq 2$) :

- Dans le cas d'un fluide de matière raide ($\Gamma = 2 \Rightarrow \gamma = 0$), la matrice (4.13) se réduit à celle du vide bordée d'une ligne et d'une colonne de 0, les systèmes correspondants jouissent donc des mêmes propriétés d'intégrabilité que leurs contreparties vides.
- Systèmes B_{I} et B_{V} : le seul exposant pouvant poser des problèmes est $2k/3$. Cette quantité demeure rationnelle pour $\Gamma \in \mathbb{Q}$: Les valeurs raisonnables de Γ , c'est-à-dire $\Gamma = 0$ (champ scalaire), $\Gamma = 1$ (poussière), $\Gamma = 4/3$ (gaz parfait quantique), $\Gamma = 5/3$ (gaz parfait classique), ou le cas déjà évoqué de la matière raide correspondent donc à des cas d'intégrabilité de ces modèles.
- Systèmes B_{II} et B_{IV} : Les exposants de la famille E_γ sont rationnels si $\Gamma \in \mathbb{Q}$, le problème vient cependant de A_\pm qui est complexe pour $\Gamma \in]\Gamma_o = \frac{11+\sqrt{73}}{3} \simeq 0.82, 2[$ et presque partout irrationnel pour $\Gamma \in [0, \Gamma_o]$, le seul cas d'intégrabilité physique est celui du champ scalaire $\Gamma = 0$, pour lequel $A_\pm = -1/2$ ou $3/2$.
- Systèmes B_{III} , $B_{\text{VI},a}$ ou $B_{\text{VII},a}$: L'adjonction des termes $0, B_\pm$ et C_\pm ne change rien à l'intégrabilité des cas physiques. B_\pm n'est plus réel dès que $\Gamma \geq 5/6$ et C_\pm dès que

$\Gamma \geq 18/25$. Le cas du champ scalaire n'est plus intégrable car pour $\Gamma = 0$, $C_{\pm} = -1$ ou 2, mais $B_{\pm} = 1/2 \pm \sqrt{5}/2$ n'est pas rationnel ... La seule possibilité pourrait être l'existence d'intégrales premières transcendentes ...

— Les systèmes B_{VIII} , B_{IX} souffrent déjà de non intégrabilité dans le cas vide ...

Nantis de ces précieuses informations d'intégrabilité, notre programme est désormais clairement établi :

- Nous tenterons donc la recherche d'une solution générale analytique dans le cas B_{I} ou B_{V} vide ou avec matière ainsi que dans le cas B_{II} ou B_{IV} vide ou avec champ scalaire ;
- Nous tenterons d'éclaircir le mystère des dynamiques B_{VI} et B_{VII} ;
- Nous clarifierons numériquement les propriétés des dynamiques B_{VI} et B_{VII} ;

4.1.3 Compléments algébriques

Les résultats d'intégrabilité obtenus dans la section précédente peuvent être complétés ou étayés par une approche plus algébrique basée sur les résultats obtenus par la communauté des dynamiciens sur les réseaux de Toda (On trouvera un condensé de ces résultats dans l'ouvrage de A.M. Perelomov [46]).

L'outil principal à la base de ces investigations est un théorème

Théorème 2 Soit $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E muni d'une forme notée $(,)$. Si Π constitue un système de racines simples d'une algèbre de Lie alors le hamiltonien

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i=1}^n g_i e^{2(\alpha_i, q_i)}$$

engendre une dynamique complètement intégrable pour les variables canoniquement conjuguées $(q_{i=1\dots n}, p_{i=1\dots n})$.

L'idée cachée sous ce théorème (voir [46]) est la suivante : Si les conditions très restrictives permettant d'obtenir un système radiciel d'algèbre de Lie sont réunies (voir annexe), la dynamique admet une représentation de Lax. Cette caractéristique assure l'existence d'un changement de variable pour lequel la dynamique s'écrit matriciellement

$$\frac{dL}{dt} = [L, M] = LM - ML$$

Il est alors facile de montrer que les valeurs propres de la matrice L et donc les fonctions

$$I_{k=1\dots n} = \frac{1}{k} \text{tr} (L^k)$$

sont des intégrales premières du mouvement, dont le nombre est suffisant pour assurer la partition complète de l'espace des phases du système et donc son intégrabilité.

Les résultats obtenus dans ce domaine sont encourageants, demeurent très préliminaires, et sont en cours de développement :

- Le hamiltonien (4.10) est tout à fait semblable à celui évoqué par Perelomov, il contient cependant une différence fondamentale : La forme utilisée pour le produit scalaire des impulsions dans le hamiltonien de Bianchi ne possède pas de signe déterminé. Comme nous l'avons fait remarquer plus haut, c'est une caractéristique essentielle des univers homogènes. Faute de mieux, nous avons fait l'hypothèse que ceci ne modifie pas en profondeur les conclusions du théorème 2.

- Sous la restriction ci-dessus, nous avons pu apporter une preuve algébrique de l'intégrabilité des Univers B_I , B_{II} , B_{IV} et B_V vides, ainsi que B_I et B_V avec matière barotropique (pour tout $\Gamma \in [0, 2]$).
- Des indications précises d'intégrabilité semblent pouvoir être mises en avant dans le contexte des Univers B_{VI} et B_{VII} vides : un lien avec des algèbres de type A_n semble effectif contre des hypothèses plausibles mais encore sous investigation.
- La non intégrabilité des modèles B_{VIII} et B_{IX} semble confirmée, sans qu'une preuve complète puisse être mise en avant par ce type de méthodes.

Globalement, ces investigations algébriques récentes semblent donc s'accorder avec les résultats obtenus à l'aide des exposants de Kovalewskaya. Il nous paraît évident qu'un lien étroit existe entre ces deux approches, dans l'état d'avancement de nos recherches sur ce sujet, nous ne pouvons cependant pas en dire plus.

4.2 Quelques solutions analytiques et une conjecture

4.2.1 Propriétés du volume de l'Univers

La composante temporelle des équations de la dynamique ne dépend pas du type d'anisotropie considéré, comme nous l'avons vu (cf. équation (3.16)), elle s'écrit pour un gaz parfait sans hypothèse sur l'équation d'état

$$\chi V^2 (3P + \epsilon) = - (\ln (V^2))'' + \frac{1}{2} \left((\ln (V^2))' \right)^2 - \frac{1}{2} (A_1'^2 + A_2'^2 + A_3'^2) \quad (4.14)$$

Dans cette équation la fonction lapse $N(\tau) = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2} = V$ et le temps conforme τ tel que $dt = N(\tau) d\tau$ ont été adoptés. Le ' désigne la dérivation par rapport à τ , le point désigne la dérivation par rapport à t .

Une petite analyse est alors possible : Pour toute fonction f du temps conforme τ seul, on a

$$f' = \frac{df}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{df}{dt} = V f \cdot \quad (4.15)$$

un simple calcul montre alors que

$$(\ln (V^2))'' = V V \cdot (\ln V^2)' + V^2 (\ln V^2)''$$

et

$$\frac{1}{2} \left((\ln (V^2))' \right)^2 = \frac{V^2}{2} \ln (V^2)' \ln (V^2)' = \frac{V^2}{2} \frac{2V V \cdot}{V^2} \ln (V^2)' = V V \cdot (\ln V^2)'$$

ainsi en injectant ces deux petits résultats dans (4.14) il vient

$$(\ln V^2)'' = -\chi (3P + \epsilon) - \frac{1}{2} \frac{(A_1'^2 + A_2'^2 + A_3'^2)}{V^2} \quad (4.16)$$

Le volume de l'Univers \mathcal{V} est comme nous l'avons vu proportionnel à V (cf. relation (3.21)). Si $3P + \epsilon > 0$, ce qui est le cas de la matière ordinaire, la relation (4.16) indique donc que $(\ln \mathcal{V})'' < 0$. Nous en déduisons 2 propriétés importantes du volume :

- Si $(\ln \mathcal{V})'' < 0$ alors \mathcal{V}'/\mathcal{V} est strictement décroissante. Pour $t > 0$, \mathcal{V} est une fonction strictement positive du temps, ainsi \mathcal{V}' ne peut s'annuler au plus qu'une seule fois.

- Si $(\ln \mathcal{V})'' < 0$ alors $\mathcal{V} \mathcal{V}'' < (\mathcal{V}')^2$. L'existence d'un minimum local de la fonction \mathcal{V} , qui impliquerait simultanément $\mathcal{V}' = 0$ et $\mathcal{V}'' > 0$, est donc exclue.

En conséquence après un épisode transitoire où il peut éventuellement passer par un maximum, le volume de l'univers est une fonction monotone du temps. Ainsi comme pour l'Univers homogène trois cas sont envisageables : Univers fermé avec 2 singularités, une de type Big-Bang et une de type Big-Crunch (Figure 4.2-gauche), Univers asymptotiquement plat avec une singularité de type Big-Bang (Figure 4.2-centre) et Univers ouvert avec une singularité de type Big-Bang (Figure 4.2-droite).

Le volume des Univers anisotropes n'est donc pas une fonction oscillante.

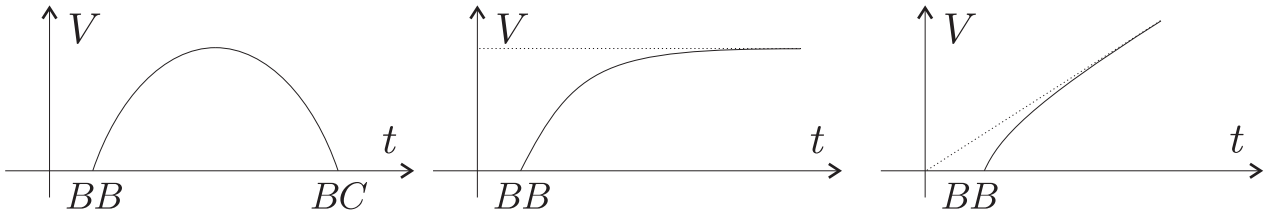


FIGURE 4.2 – Différents comportements possibles pour du volume d'un Univers anisotrope modélisé par la relativité générale et dont le contenu matériel vérifie la condition $3P + \epsilon > 0$.

La singularité ouverte du début des univers de Friedmann persiste donc à l'extension anisotrope. Comme nous allons le voir dans les prochains chapitres c'est sa nature qui va changer de façon drastique ...

4.2.2 Dynamique de l'Univers B_i

Formalisme Hamiltonien : Le comportement

La dynamique de l'Univers B_i contenant un fluide barotropique est décrite par le hamiltonien

$$H = \frac{1}{2} (p_3^2 - p_1^2 - p_2^2) - 4\chi\epsilon_o e^{\frac{\sqrt{6}}{4}(2-\Gamma)q_3} = 0$$

Les équations (3.33) de cette dynamique montrent que les variables q_1 et q_2 sont cycliques. Il vient immédiatement

$$\begin{aligned} q_1(\tau) &= a\tau + k_1 & \text{et} & & p_1 &= a = cste \\ q_2(\tau) &= b\tau + k_2 & \text{et} & & p_2 &= b = cste \end{aligned}$$

L'évolution de la variable q_3 , proportionnelle au logarithme du volume V (cf. équation (3.29)), est moins triviale mais demeure accessible : Les équations de Hamilton associées à la dynamique sont pour cette variable

$$q_3' = p_3 \quad , \quad p_3' = -\frac{\partial H}{\partial q_3} \quad \implies \quad q_3'' = K^2 e^{\alpha q_3} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = \sqrt{6}(2-\Gamma)/4 \\ K^2 = \sqrt{6}\chi\epsilon_o(2-\Gamma) \end{cases} \quad (4.17)$$

En multipliant cette équation par q_3' , elle perd un ordre par intégration et devient

$$\frac{1}{2} (q_3')^2 = \frac{K^2}{\alpha} e^{\alpha q_3} + \lambda \quad (4.18)$$

Sans contrainte sur les conditions au bord, la constante d'intégration λ n'est pas forcément positive mais vérifie seulement $\lambda > -\frac{K^2}{\alpha} e^{\alpha q_3(\tau)}$ pour tout τ . Si l'on impose au volume de s'annuler en la singularité temporelle mise en évidence dans la section précédente, c'est-à-dire³

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} V(\tau) = 0 \quad \text{ou bien} \quad \lim_{\tau \rightarrow -\infty} q_3(\tau) = -\infty$$

alors $\lambda \geq 0$ et l'équation (4.18) s'intègre quasi instantanément pour donner

$$q_3(\tau) = \frac{2}{\alpha} \left\{ \ln \left(\frac{\lambda}{8\chi\epsilon_o} \right) - \ln \left(\text{sh} \left[\pm \sqrt{\lambda} (\tau - \mu) \right] \right) \right\}$$

Où μ est une dernière constante d'intégration que rien n'empêche d'annuler⁴. Pour $\tau \rightarrow -\infty$, la fonction q_3 est asymptotiquement affine (comme ses congénères q_1 et q_2). Sans présence de matière, q_3 qui vérifie une équation de la forme $q_3'' = 0$ est directement affine. L'introduction de matière dans l'Univers B_1 ne change pas globalement la dynamique et ne la perturbe que sur un temps exponentiellement faible⁵.

En revenant à la définition (3.29) de q_3 on peut obtenir le volume en fonction de τ

$$V(\tau) = \left(\frac{\lambda}{8\chi\epsilon_o \text{sh}^2(\sqrt{\lambda}\tau)} \right)^{1/(2-\Gamma)}$$

On peut même avoir un lien asymptotique entre le temps conforme τ et le temps tout-court : Pour $\tau \rightarrow -\infty$ ⁶ il vient

$$\tau \propto \ln(t) \quad (4.19)$$

La singularité temporelle primordiale ($t = 0$) est bien rejetée à l'infini négatif pour le temps conforme.

Formalisme BKL : La solution de Kasner

En présence de matière barotropique En présence de matière barotropique et dans le formalisme originel de Belinski-Khalatnikov et Lifschitz (BKL voir [1] ou [35]), les équations de la dynamique de l'Univers B_1 s'écrivent (cf. (3.25))

$$\begin{cases} A_1'' = \chi\epsilon_o (2 - \Gamma) V^{2-\Gamma} \\ A_2'' = \chi\epsilon_o (2 - \Gamma) V^{2-\Gamma} \\ A_3'' = \chi\epsilon_o (2 - \Gamma) V^{2-\Gamma} \\ A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' = 4\chi\epsilon_o V^{2-\Gamma} \end{cases} \quad (4.20)$$

En introduisant les constantes $k_1 = A_1' - A_2'$, $k_2 = A_2' - A_3'$ et $k_3 = A_3' - A_1'$ liées par l'équation

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0 \quad (4.21)$$

3. Comme nous le verrons plus loin (voir (4.19)) la limite $t \rightarrow 0$ est associée à $\tau \rightarrow -\infty$

4. Prendre $\mu = 0$ revient à fixer la valeur du volume à un nombre positif pour un temps positif.

5. Cette propriété se généralise plus ou moins rigoureusement pour chaque Univers de Bianchi pourvu que la matière soit barotropique et $\Gamma \in [0, 2[$. Le cas de la matière raide ($\Gamma = 2$) est pathologique et peut modifier la dynamique de l'Univers qui l'abrite

6. Ce comportement est d'ailleurs aussi valide pour $\tau \rightarrow +\infty$.

On peut injecter les 3 premières équations intégrées une fois chacune dans la 4^{me} équation qui devient une équation de Ricatti unidimensionnelle pour chacune des dérivées des inconnues du problème. Pour la fonction A_1 , nous avons par exemple

$$3A_1'^2 + 2(k_3 - k_1)A_1' - k_1k_3 = \frac{4}{2 - \Gamma}A_1''$$

Il est toujours possible d'intégrer ce type d'équation si l'on connaît une solution particulière. Une fonction linéaire fait ici bien l'affaire : La nouvelle fonction $f_1 = A_1' - a_1$, avec a_1 racine réelle du polynôme

$$P_1(X) = 3X^2 + 2(k_3 - k_1)X - k_1k_3 = 0$$

vérifie une équation de Bernoulli de la forme

$$3f_1^2 + [6a_1 + 2(k_3 - k_1)]f_1 = \frac{4}{2 - \Gamma}f_1'$$

que l'on intègre facilement en posant $g_1 = 1/f_1$. Tous calculs faits, on trouve pour tout $i = 1, 2, 3$ modulo 3 (i.e. $0 = 3, 4 = 1, \dots$)

$$A_i' = a_i + \frac{K_i}{K_i\lambda_i \exp[-(2 - \Gamma)K_i\tau/4] - 3} \quad (4.22)$$

où les λ_i sont des constantes d'intégration, les a_i des racines réelles des polynômes $P_i(X) = 3X^2 + 2(k_{i-1} - k_i)X - k_i k_{i-1} = 0$ et $K_i = 6a_i + 2(k_{i-1} - k_i)$ soit, plus explicitement

$$3a_i = k_i - k_{i-1} \pm \sqrt{k_i^2 + k_{i-1}^2 + k_i k_{i-1}}$$

$$K_i = \pm 2\sqrt{k_i^2 + k_{i-1}^2 + k_i k_{i-1}}$$

Les 3 premières équations de la dynamique imposent alors que pour tout $i = 1, 2, 3$ on ait $A_i'' = \chi\epsilon_o(2 - \Gamma)V^{2-\Gamma}$ ce qui se traduit par

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad \frac{2 - \Gamma}{4}\lambda_i K_i^3 \frac{K_i}{(\lambda_i K_i \exp[-(2 - \Gamma)K_i\tau/4] - 3)^2} = \chi\epsilon_o(2 - \Gamma)V^{2-\Gamma}$$

Il est facile de montrer que l'on ne peut réaliser cet exploit qu'à condition d'avoir $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ et $K_1 = K_2 = K_3 := K$. Tout va donc bien car cette dernière contrainte, adjointe à (4.21), ne laisse plus qu'un degré de liberté au triplet (k_1, k_2, k_3) qui se voit réduit à

$$(k_1, k_2, k_3) = \left\{ k \in R_+, \left| \begin{array}{l} k_3 = k \\ k_2 = \{x \in \mathbb{R}, x^2 + kx + k^2 - K^2 = 0\} \\ k_1 = -k_2 - k \end{array} \right. \right\}$$

On peut alors raisonnablement finir le travail d'intégration qui donne

$$A_i(\tau) = \left(a_i - \frac{(2 - \Gamma)K}{4} \right) \tau + \mu_i - \frac{4}{3(\Gamma - 2)} \ln \left(K \exp \left[\frac{-(2 - \Gamma)K\tau}{4} \right] - 3 \right)$$

Ou les μ_i sont 3 nouvelles constantes d'intégration. Les conditions initiales doivent donc permettre un choix de K tel que $K \exp \left[-\frac{(2-\Gamma)K\tau}{4} \right] > 3$, une fois la période initiale passée, l'exponentielle l'emporte sur le 3 et la solution devient rapidement asymptotiquement affine. Comme l'indiquait le formalisme hamiltonien ...

Le cas du vide La solution vide est dans le formalisme BKL est à la fois simple et riche. Elle mérite une étude détaillée.

Si $\epsilon_o = 0$, les équations (4.20) admettent des solutions affines

$$A_i = a_i \tau + \mu_i$$

Ou les a_i et les μ_i sont des constantes d'intégration. On peut cependant en dire beaucoup plus sur ces solutions : L'équation $A_i'' = 0$ et le fait que $\alpha_i = \ln A_i$ permettent d'écrire que (cf. (4.15))

$$(VA_i)' = 0 \iff \exists k_i \in \mathbb{R}, \quad VA_i = k_i \iff \text{Si } V \neq 0, \quad \alpha_i = \frac{k_i}{V} \alpha_i \quad (4.23)$$

Du fait que $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$, la relation (4.23) s'écrit finalement

$$V = \frac{1}{2} (k_1 + k_2 + k_3) := \frac{\Omega}{2} \quad \text{soit} \quad V = \frac{\Omega}{2} t + \Omega_o \quad (4.24)$$

La constante Ω_o doit être choisie nulle si l'on veut que volume et temps s'annulent simultanément. Il vient donc pour les facteurs d'échelles

$$\alpha_i = \lambda_i t^{2k_i/\Omega} \quad (4.25)$$

les constantes positives λ_i ne sont pas liées autrement que par la définition du volume qui donne $4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \Omega^2$. En injectant le résultat (4.25) dans la composante temps des équations d'Einstein (équation du bas de (4.20) dans le vide), une autre contrainte sur les k_i fait son apparition, $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \Omega^2$. En ajoutant cette relation à la définition (4.24) du taux de variation du volume, il est possible de paramétrer les k_i :

$$\begin{aligned} p_1 &:= k_1/\Omega = -\frac{u}{(1+u+u^2)} \\ p_2 &:= k_2/\Omega = \frac{(1+u)}{(1+u+u^2)} \quad \text{avec } u \in [1, +\infty[\\ p_3 &:= k_3/\Omega = \frac{u(1+u)}{(1+u+u^2)} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Il est facile de remarquer que tout choix du paramètre réel u conduit à

$$-\frac{1}{3} \leq p_1 < 0 < p_2 \leq \frac{2}{3} \leq p_3 < 1$$

Ainsi, à l'approche de la singularité et donc à rebours du temps t , le facteur d'échelle associé à α_1 *croît* exponentiellement à taux constant alors que ceux associés à α_2 et α_3 *décroissent* exponentiellement à taux constant. Le volume décroissant linéairement à vitesse constante. La métrique associée

$$ds^2 = \lambda_1 t^{2p_1} dx_1^2 + \lambda_2 t^{2p_2} dx_2^2 + \lambda_3 t^{2p_3} dx_3^2 - dt^2$$

est une solution connue des équations d'Einstein, due à E. Kasner (1921).

Les constantes λ_i peuvent être incorporées dans la définition des vecteurs de base associés aux axes du repère. La donnée d'une valeur de l'indice de Kasner $u \in [1, +\infty[$ et d'une valeur de taux de variation du volume Ω permet donc de définir de façon univoque ce qu'il est convenu d'appeler une ère ou un état de Kasner.

4.2.3 Dynamique de l'Univers B_{ii} ou B_{iv}

Les Univers B_{ii} ou B_{iv} semblent posséder une dynamique beaucoup plus complexe. Nous traiterons le cas B_{ii} vide car, comme nous l'a indiqué notre étude préliminaire sur l'intégrabilité des dynamiques des Univers de Bianchi, l'adjonction de matière devient sans doute rédhitoire, sauf dans le cas d'un champ scalaire.

En variables BKL, les équations de la dynamique s'écrivent dans le vide

$$\begin{cases} A_1'' = -e^{2A_1} \\ A_2'' = e^{2A_1} \\ A_3'' = e^{2A_1} \\ \alpha_1^2 = A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' \end{cases} \quad (4.27)$$

Une fois la première équation résolue, les 2 suivantes tomberont et la dernière pourra contraindre les constantes. L'œil désormais avisé de notre lecteur reconnaîtra dans cette équation une forme semblable au signe près, à celle rencontrée pour la dynamique B_1 avec matière en formulation hamiltonienne (cf. équation (4.17)). Les mêmes techniques d'intégration donnent ici

$$\alpha_1 = e^{A_1} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\text{ch} \left[\sqrt{\lambda} (\tau - \mu) \right]}$$

ou 2 constantes d'intégrations $\lambda \in [1, +\infty[$ et $\mu \in \mathbb{R}$, apparaissent. Comme promis les deux équations du milieu de (4.27) fournissent après quelques manipulations en trigonométrie hyperbolique

$$\alpha_{2,3} = e^{A_{2,3}} = \mu_{2,3} e^{\tau \lambda_{2,3}} \text{ch} \left[\sqrt{\lambda} (\tau - \mu) \right]$$

On peut toujours fixer $\mu = 0$ ce qui revient à imposer l'instant où le logarithme du temps ($\propto \tau$) s'annule. Les constantes $\mu_{2,3}$ peuvent sans problème être incorporées dans les fonctions de base ω^2 et ω^3 du tableau de la page 20. Il est alors possible de prendre en compte la contrainte associée à la composante temporelle des équations de la dynamique. Après de modestes calculs, celle-ci se résume à $\lambda_2 \lambda_3 = \lambda \geq 1$.

La solution des équations de la dynamique B_{ii} s'écrit donc

$$\begin{cases} \alpha_1 = \sqrt{\lambda} / \text{ch} \left(\sqrt{\lambda} \tau \right) \\ \alpha_2 = e^{\lambda_2 \tau} \text{ch} \left(\sqrt{\lambda} \tau \right) \\ \alpha_3 = e^{\lambda_3 \tau} \text{ch} \left(\sqrt{\lambda} \tau \right) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda \in [1, +\infty[\\ \lambda_2 = \lambda / \lambda_3 \end{cases}$$

Il est clair que le volume $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$ est exponentiellement proportionnel à τ , le temps conforme peut donc être relié au temps physique

$$dt = V d\tau \Rightarrow t \propto e^\tau$$

Dans le problème de l'approche vers la singularité la condition initiale sera fixée pour un temps positif et donc dans une limite $\tau \rightarrow +\infty$, la condition finale correspondra quant à elle à une limite $\tau \rightarrow -\infty$. Étudions ces deux cas limites plus en détail :

— État asymptotique droit (Conditions initiales, $\tau \gg 1$)

Dans la limite $\tau \rightarrow +\infty$, un développement limité du cosinus hyperbolique donne à l'ordre 1

$$\alpha_1 \propto e^{-\sqrt{\lambda}\tau}, \alpha_2 \propto e^{(\lambda_2 + \sqrt{\lambda})\tau}, \alpha_3 \propto e^{(\lambda_3 + \sqrt{\lambda})\tau}$$

Le système est donc dans un état de Kasner de paramètres (voir 4.26)

$$k_1 = -\sqrt{\lambda}, k_2 = \sqrt{\lambda} + \lambda_2, k_3 = \sqrt{\lambda} + \lambda_3 \quad \text{et} \quad \Omega = \lambda_2 + \lambda_3 + \sqrt{\lambda}$$

quel miracle⁷!

— État asymptotique droit (Conditions finales, $\tau \ll 1$)

Dans la limite $\tau \rightarrow -\infty$, un développement limité du cosinus hyperbolique donne à l'ordre 1

$$\alpha_1 \propto e^{\sqrt{\lambda}\tau}, \alpha_2 \propto e^{(\lambda_2 - \sqrt{\lambda})\tau}, \alpha_3 \propto e^{(\lambda_3 - \sqrt{\lambda})\tau}$$

Il s'agit là encore d'un état de Kasner dont les paramètres sont à présent

$$k'_1 = \sqrt{\lambda}, k'_2 = \lambda_2 - \sqrt{\lambda}, k'_3 = \lambda_3 - \sqrt{\lambda} \quad \text{et} \quad \Omega' = \lambda_2 + \lambda_3 - \sqrt{\lambda}$$

Notons que momentanément le ' ne désigne plus la dérivée par rapport à τ . Une question devient brûlante : Existe-t-il une relation entre ces deux états de Kasner asymptotiques. La réponse fut apportée avec tout le problème dans les articles fondateurs du formalisme BKL ([1],[35]). Les propriétés de l'état de Kasner font que, pour l'état initial

$$\exists! u \in [1, +\infty[\quad \text{tel que} \quad \begin{cases} p_1 = \frac{k_1(u)}{\Omega} = \frac{-u}{1+u+u^2} \\ p_2 = \frac{k_2(u)}{\Omega} = \frac{1+u}{1+u+u^2} \\ p_3 = \frac{k_3(u)}{\Omega} = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2} \end{cases}$$

et pour l'état final

$$\exists! v \in [1, +\infty[\quad \text{tel que} \quad \begin{cases} p'_1 = \frac{k'_1(v)}{\Omega'} = \frac{-v}{1+v+v^2} \\ p'_2 = \frac{k'_2(v)}{\Omega'} = \frac{1+v}{1+v+v^2} \\ p'_3 = \frac{k'_3(v)}{\Omega'} = \frac{v(1+v)}{1+v+v^2} \end{cases}$$

La remarque triviale $\Omega' = \Omega - 2\sqrt{\lambda}$ permet de prouver que les deux ères de Kasner sont reliées par une transition $v = u - 1$. Un simple calcul permet de voir que pour tout $i = 1, 2, 3$ on a $p'_i(1/u) = p_i(u)$. Ainsi pour une valeur de $u \in [1, 2[$ décrivant l'état kasnérien gauche, on peut toujours associer une valeur de $v = 1/(u - 1)$ permettant de préserver la contrainte $v \in [1, +\infty[$ inhérente à l'état kasnérien droit. Une représentation graphique des p_i et des p'_i est l'objet de la figure 4.3.

7. Ceux qui ne croient pas aux miracles peuvent toujours s'assurer que, comme dans tout état kasnérien

$$\Omega = k_1 + k_2 + k_3 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$$

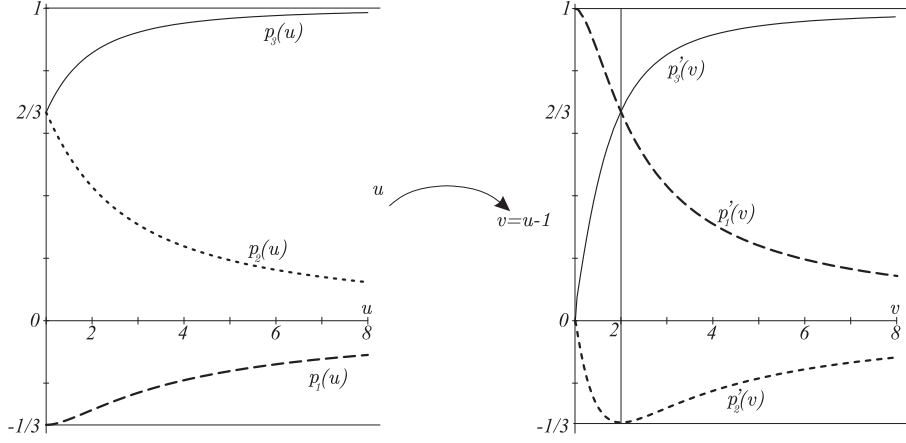


FIGURE 4.3 – Transition entre les deux régimes asymptotiquement kasnériens de la dynamique B_{II} .

L'état initial des Univers B_{II} ou B_{IV} est donc un état asymptotiquement kasnérien décrit par le couple $(\Omega ; u)$ tel que

$$-\frac{1}{3} \leq \frac{k_1(u)}{\Omega} < 0 < \frac{k_2(u)}{\Omega} \leq \frac{2}{3} \leq \frac{k_3(u)}{\Omega} < 1$$

et l'état final asymptotique (singularité) est un autre état kasnérien décrit par le couple $(\Omega' ; v)$ avec $\Omega' = \Omega + 2k_1(u)$ et

$$\begin{cases} v = u - 1 & \text{et} & -\frac{1}{3} \leq \frac{k_2(v)}{\Omega'} < 0 < \frac{k_3(v)}{\Omega'} \leq \frac{2}{3} \leq \frac{k_1(v)}{\Omega'} < 1 & \text{Si } u \in]2, +\infty[\\ v = (u - 1)^{-1} & \text{et} & -\frac{1}{3} \leq \frac{k_2(v)}{\Omega'} < 0 < \frac{k_1(v)}{\Omega'} \leq \frac{2}{3} \leq \frac{k_3(v)}{\Omega'} < 1 & \text{Si } u \in [1, 2] \end{cases} \quad (4.28)$$

La dynamique B_{II} vide se résume donc par une transition entre 2 état kasnérien parfaitement définis. C'est certainement ce résultat magnifique, obtenu par le groupe BKL dans les années 70, qui est en partie à l'origine de l'intérêt suscité par les Univers de Bianchi.

4.2.4 Conjecture BKL pour l'Univers B_{IX}

La dynamique de l'Univers B_{IX} (ou B_{VIII}) est certainement la plus complexe. Dans le formalisme BKL avec matière barotrope, elle est décrite par le système (voir 3.25)

$$\begin{cases} 0 & = & E_c + E_p + E_{mb} \\ A_1'' & = & (e^{A_2} - e^{A_3})^2 - e^{2A_1} + \chi \epsilon_o V^{2-\Gamma} (2 - \Gamma) \\ A_2'' & = & (e^{A_3} - e^{A_1})^2 - e^{2A_2} + \chi \epsilon_o V^{2-\Gamma} (2 - \Gamma) \\ A_3'' & = & (e^{A_1} - e^{A_2})^2 - e^{2A_3} + \chi \epsilon_o V^{2-\Gamma} (2 - \Gamma) \end{cases} \quad (4.29)$$

Dans le vide, $\epsilon_o = 0$, ce système se prête à une analyse remarquable introduite dès les années 1970 par l'école russe BKL (voir [1], [35]). Les A_i correspondent aux logarithmes des facteurs d'échelles. En vertu des propriétés dynamiques du volume de l'Univers, a priori, lorsque l'on se rapproche de la singularité, ces derniers deviennent de plus en plus négatifs, de sorte que les seconds membres des trois dernières équations de (4.29) sont quasiment nuls. La dynamique pourrait donc être similaire à celle des équations (4.20) de l'Univers B_I .

Faisons donc l'hypothèse qu'à un instant positif t_o , les trois variables A_i soient telles que

$$A_i \propto e^{2k_i t/\Omega}$$

avec (k_i, Ω) définissant un état de Kasner : L'un des k_i (par exemple k_1) sera négatif et verra s'expandre l'axe associé à l'approche de la singularité ($A_1 \nearrow$), les deux autres associés aux k_i positifs verront dans la même limite leurs deux axes se contracter (A_2 et $A_3 \searrow$). Si l'état kasnérien de l'instant t_o est approximativement correct, cela ne va pas durer.

En se rapprochant de la singularité l'axe A_1 va voir son importance dynamique croître et il ne sera très rapidement plus possible de le négliger. Dans le même temps l'erreur commise sur les deux autres axes deviendra de plus en plus négligeable ... Il paraît donc judicieux de remplacer un temps, la dynamique par celle de l'Univers B_{II} dans laquelle un seul axe est pris en compte. C'est alors que notre travail analytique se révèle payant : Nous avons montré qu'une dynamique B_{II} dans laquelle l'axe subsistant est celui associé au $k_i < 0$ d'un état kasnérien assurait la transition vers un autre état kasnérien parfaitement déterminé et pour lequel l'axe en expansion changeait, ce nouvel état paraît donc voué au même transit que son prédécesseur ... L'approche de la singularité dans la dynamique B_{IX} vide semble donc claire : Tout le temps nécessaire étant disponible ($\tau \rightarrow -\infty$) la singularité de l'Univers B_{IX} vide ne sera atteinte qu'après une succession infinie d'ères de Kasner décrites par la transition associée à la dynamique B_{II} (voir (4.28)). C'est la conjecture BKL.

La présence de matière Barotropique ne change notablement la dynamique, comme le montre nos solutions exactes B_I , l'introduction de matière ($\Gamma < 2$) devient négligeable dans la limite $\tau \rightarrow -\infty$. Le cas de la matière raide est plus sournois : Dans ce cas précis (cf. [3]), l'état kasnérien est tel que

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 > 1$$

la dynamique B_{II} met en évidence une possible transition vers un état décrit par trois p_i positifs et donc trois axes en contraction. État qui ne permet plus d'assurer la transition ...

Cette conjecture est à l'origine d'une multitude de travaux dans tous les domaines tant mathématiques, que physiques ou numériques. Depuis le colossal article d'Hans Ringström [31], on peut considérer que la conjecture BKL n'en n'est plus une mais constitue bel et bien un théorème :

Théorème 3 *En présence d'un fluide parfait raide, la solution générale des équations converge un unique point pour tout type de classe A de Bianchi. Pour tout autre idéalisation du contenu matériel, les solutions de type IX de Bianchi convergent de manière générique vers un attracteur qui consiste en la fermeture de toutes les trajectoires de type II de Bianchi.*

Le problème de la dynamique des Univers anisotropes en relativité générale est donc complètement résolu d'un point de vue mathématique. La grande technicité de l'article de Ringström laisse cependant la place à de nombreux travaux tant sur plan numérique que dans une caractérisation plus précise de l'attracteur. Ces deux points seront l'objet des chapitres suivants.

4.3 Dynamique par le formalisme hamiltonien

Le formalisme Hamiltonien introduit dans la section 3.3 se prête à une analyse introduite initialement par C.W. Misner [2], et qui s'est développée conjointement avec le formalisme BKL . Nous formulerons ce problème selon la technique présentée par Ugla (eg. [38] section 3.2, page 226), en proposant toutefois des résultats étendus.

4.3.1 Super temps et dynamique 2D

Le Hamiltonien associé à la dynamique des espaces homogènes vides s'écrit

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sigma_i p_i^2 + e^{\frac{\sqrt{6}}{3} q_3} \xi(q_1, q_2) = 0 \quad (4.30)$$

avec $\sigma = [-1, -1, +1]^T$ et

$$\begin{aligned} \xi(q_1, q_2) = & -n_1^2 e^{\left(\frac{\sqrt{6}}{3} q_2 + \sqrt{2} q_1\right)} - n_2^2 e^{\left(\frac{\sqrt{6}}{3} q_2 - \sqrt{2} q_1\right)} - n_3^2 e^{-\frac{2\sqrt{6}}{3} q_2} \\ & + 2n_1 n_2 e^{\frac{\sqrt{6}}{3} q_2} + 2n_1 n_3 e^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} q_1 - \frac{\sqrt{6}}{6} q_2\right)} + 2n_2 n_3 e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2} q_1 + \frac{\sqrt{6}}{6} q_2\right)} \end{aligned} \quad (4.31)$$

les équations de la dynamique associée sont

$$q'_i = \frac{dq_i}{d\tau} = \sigma_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad p'_i = \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (4.32)$$

On introduit alors les quantités

$$m(q_3) = e^{\frac{\sqrt{6}}{3} q_3} \quad \text{et} \quad E(q_3, p_3) = \frac{p_3^2}{2m} \quad (4.33)$$

et le nouveau temps \tilde{t} (le super-temps selon Bob Jantzen [39]) tel que $d\tilde{t} = m d\tau = m dt/V$. En se rappelant que $q_3 = \frac{4}{\sqrt{6}} \ln V$, on en déduit que $m = V^{4/3}$, et les équations de la dynamique deviennent

$$E = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} - \xi(q_1, q_2) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{dq_{1,2}}{d\tilde{t}} = \frac{p_{1,2}}{m} = \frac{\partial E}{\partial p_{1,2}} \\ \frac{dp_{1,2}}{d\tilde{t}} = \frac{\partial \xi}{\partial q_{1,2}} = -\frac{\partial E}{\partial q_{1,2}} \end{cases} \quad (4.34)$$

complétées par

$$\frac{dm}{d\tilde{t}} = \frac{4}{3} \frac{dV}{d\tilde{t}} \quad \text{et} \quad \frac{dE}{d\tilde{t}} = -\frac{2}{3} \frac{p_1^2 + p_2^2}{m^2} \frac{dV}{d\tilde{t}} \quad (4.35)$$

Il s'agit donc d'un système hamiltonien à deux dimensions concernant une particule de masse $m(\tilde{t})$ repérée par sa position $[q_1(\tilde{t}), q_2(\tilde{t})]^T$, d'énergie totale $E(\tilde{t})$ et dont l'énergie potentielle est $-\xi(q_1, q_2)$.

Les propriétés respectives de V et ξ permettent d'affiner l'étude du comportement du système.

4.3.2 Comportement initial ou tardif

L'analyse de la section 4.2.1, nous a montré que la fonction $V(t)$ n'était pas quelconque. Il existe deux possibilités issues des trois cas évoqués sur la figure 4.2.

1. Univers fermé (1 Big-Bang et un Big-Crunch : figure 4.2 gauche)

— A l'approche du Big-Bang, et donc à rebours du temps, t décroît, V décroît et donc E est croissante alors que m est décroissante.

- A l'approche du Big-Crunch t croît, V décroît et donc E est croissante alors que m est décroissante.
- 2. Univers ouvert (1 Big-Bang uniquement)
 - L'approche du Big-Bang se fait dans les mêmes conditions que précédemment : $E \nearrow$ et $m \searrow$.
 - La limite $t \rightarrow +\infty$ comporte recèle deux sous-cas :
 - (a) Univers plat (figure 4.2 milieu) : Comme $\frac{dV}{dt} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, dans cette même limite nous aurons $E = cste$ et $m = cste$.
 - (b) C'est le cas du Big-Ripp (figure 4.2 droite) : Comme $\frac{dV}{dt} \rightarrow cste > 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, dans cette même limite nous aurons $E \searrow$ et $m \nearrow$.

Dans tous les cas évoqués ci-dessus les fonctions du temps E et m sont monotones. A l'approche de la singularité de type Big Bang, la particule bidimensionnelle modélisant l'Univers voit son énergie croître vers l'infini et sa masse décroître vers 0. Suffisamment proche de la singularité de type Big-Bang on pourra toujours négliger les variations de m par rapport à E .

4.3.3 De l'introduction d'un billard cosmique

Le cadre

Les équations de la dynamique s'écrivent

$$m \frac{d^2 q_{1,2}}{d\tilde{t}^2} + \frac{dm}{d\tilde{t}} \frac{dq_{1,2}}{d\tilde{t}} - \frac{\partial \xi}{\partial q_{1,2}} = 0$$

La nature exponentielle du potentiel ξ permet une étude heuristique introduite historiquement par Misner et reprise jusque dans les transpositions multidimensionnelles récentes du modèle (voir [30]). Considérons le cas de l'approche du Big-Bang : $E \nearrow$ et $m \searrow$, et plaçons nous d'emblée dans la situation où la masse de la particule varie presque plus, précisément

$$|E| \gg |m| \gg \left| \frac{dm}{d\tilde{t}} \right| \quad \text{i.e.} \quad \left| \frac{d \ln m}{d\tilde{t}} \right| = \frac{4}{3} \left| \frac{d \ln V}{d\tilde{t}} \right| \gg 1$$

soit proche de la singularité. Le terme dissipatif central dans les équations de la dynamique peut alors être négligé. Le cas B_1 avec $\xi(q_1, q_2) \equiv 0$ permet d'identifier la solution kasnérienne $q_{1,2}(\tilde{t}) = \lambda_{1,2} \tilde{t} + \mu$ qui dans cette représentation correspond à une évolution de la particule Univers en ligne droite dans le plan (q_1, q_2) . Les autres autres modèles de Bianchi correspondent à des valeurs non toutes nulles des n_i qui confèrent à ξ une dépendance exponentielle en q_1 et q_2 . Pour plus de précisions considérons l'équation différentielle suivante

$$y \leq 0 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -k^2 e^y \quad \text{avec} \quad y(0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (4.36)$$

dont la solution s'obtient facilement en suivant la méthode introduite lors de la section 4.2.2. On trouve

$$y(x) = \ln \left[1 - \text{th}^2 \left(\frac{kx}{\sqrt{2}} \right) \right] = -2 \ln \left[\text{ch} \left(\frac{kx}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

la courbe représentative (figure 4.4) de cette solution est fort intéressante pour illustrer notre propos.

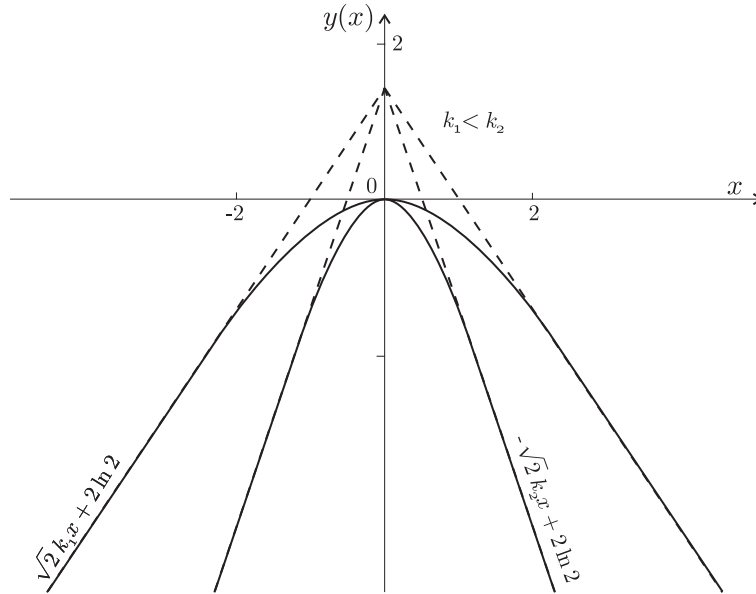


FIGURE 4.4 – Représentation graphique de la solution de l'équation (4.36) : Le rebond idéal.

La solution de l'équation (4.36) présente deux régimes asymptotiques affines en $\pm\infty$. Dans le formalisme de la particule bidimensionnelle cette solution s'interprète clairement comme un rebond sur un mur : La bille vient de l'infini négatif, en variable \tilde{t} son mouvement est rectiligne uniforme (elle ne ressent aucun potentiel car $y(x)$ est très négatif et donc $e^{y(x)} \simeq 0$), Si $x < 0$, la fonction $y(x)$ est croissante, en se rapprochant de $y = 0$ le potentiel prend de plus en plus d'ampleur ce qui affecte la vitesse de la bille en intensité et en direction. Tant que la vitesse de la bille ne s'inverse pas cette amplification du potentiel et de la force contraire continue, la condition au bord

$$y(0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

impose à la particule de changer de direction en $x = 0$ et $y(x)$ décroît vers les régions à $x > 0$ et $y(x) < 0$ qui vont rapidement redonner une dynamique affine, le potentiel devenant de plus en plus négligeable.

Le "point" de coordonnées (x, y) subit une sorte de rebond sur l'axe qui sépare les régions des y positifs et celle des y négatifs. Une autre caractéristique importante de ce rebond est son amplitude : Nous constatons en effet que les régimes asymptotiques, décrits par les demi-droites

$$y(x) = \pm k\sqrt{2}|x| + 2 \ln 2$$

L'angle θ_k caractéristique de l'ouverture rebond est donc tel que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \theta_k = 0$$

au plus k est grand, au plus le rebond est pincé !

Cette solution idéalisée correspond à la solution générique de l'Univers B_{II} (voir 4.2.3) : Deux régimes kasnériens asymptotiques (dynamique affine) séparés par une transition (rebond). Le potentiel idéal de l'exemple proposé dans la relation (4.36) est en effet celui de l'Univers B_{II}

pour lequel le triplet (n_1, n_2, n_3) ne contient qu'une seule composante non nulle⁸, en choisissant $n_3 = 1$, il vient $\xi(q_1, q_2) = -e^{-\frac{2\sqrt{6}}{3}q_2}$ et le tour est joué ...

Dans le cas général, le potentiel ξ est plus compliqué mais demeure asymptotiquement exponentiellement négatif et la dynamique reste donc qualitativement identique : Pourvu que l'on soit suffisamment proche de la singularité pour négliger la variation de m , la dynamique est une suite de régimes kasnériens séparés par des rebonds dont le type générique est décrit par la dynamique B_{II} , mais qui, comme nous allons le voir, peuvent être exceptionnellement plus fantasques ...

Dans la véritable dynamique asymptotique, les rebonds en questions ne se font plus avec la ligne séparant les valeurs positives et négatives de la fonction y du problème idéalisé, mais avec la courbe des "vitesses" nulles

$$\frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} = E + \xi(q_1, q_2) = 0 \quad (4.37)$$

L'énergie E étant une fonction positive et croissante lors de l'approche du Big-Bang, les courbes (4.37) sont donc des isovaleurs croissantes de la fonction $-\xi(q_1, q_2)$. Nous avons représenté sur la Figure 4.5, ces diverses courbes isovaleurs pour toutes les triplets (n_1, n_2, n_3) correspondants aux classes d'équivalences d'Univers de Bianchi.

Dès que l'on peut négliger la friction introduite par la perte de masse, la dynamique est donc très bien représentée par le mouvement d'une bille dans un billard dont les bandes s'éloignent lorsque l'on se rapproche de la singularité. Pour peu que l'on soit suffisamment proche de la singularité, la vitesse de la bille

$$v_u^2 = \left(\frac{dq_1}{d\tilde{t}}\right)^2 + \left(\frac{dq_2}{d\tilde{t}}\right)^2$$

est toujours plus grande que la vitesse de la bande que l'on peut identifier au module de la variation d'énergie

$$v_b^2 = \frac{2}{3} \frac{p_1^2 + p_2^2}{m^2} \frac{dV}{dt} = \frac{2}{3} v_u^2 \frac{dV}{dt}$$

La forme des billards est particulièrement intéressante :

- Deux familles de modèles sont à considérer : Le modèle B_{IX} possède une bande fermée alors que tous les autres ont des bandes ouvertes. Contrairement à ce que l'on peut lire dans certains articles le modèle B_{VIII} possède bien une bande ouverte vers la région $q_1 \simeq 0$ et $q_2 \rightarrow +\infty$.
- Quatre types de rebonds sont à considérer :
 1. Le rebond sur bande rectiligne qui concerne certains passages de la dynamique B_{II} ou B_{IV} de façon générique ou bien par exemple⁹ la dynamique B_{VIII} ou B_{IX} lorsque $q_2 \rightarrow -\infty$ et $q_1 \rightarrow 0$.

8. Comme nous l'avons vu dans la section 3.1, il existe une classe d'équivalence pour le choix de (n_1, n_2, n_3) . Ces classes correspondent aux divers choix possibles permettant de faire varier les caractéristiques du noyau d'une matrice 3×3 diagonale (voir (3.9)). Pour obtenir un Univers B_{II} avec $(n_1, n_2, n_3) = (0, 0, 1)$ il aurait suffi de choisir $A_b = [0, 0, a]$, l'identité de Jacobi (3.6) aurait alors impliqué $an_3 = 0$, mais tout le reste de l'affaire aurait été inchangé ..

9. Il en existe beaucoup d'autres que nous laissons à la perspicacité du lecteur

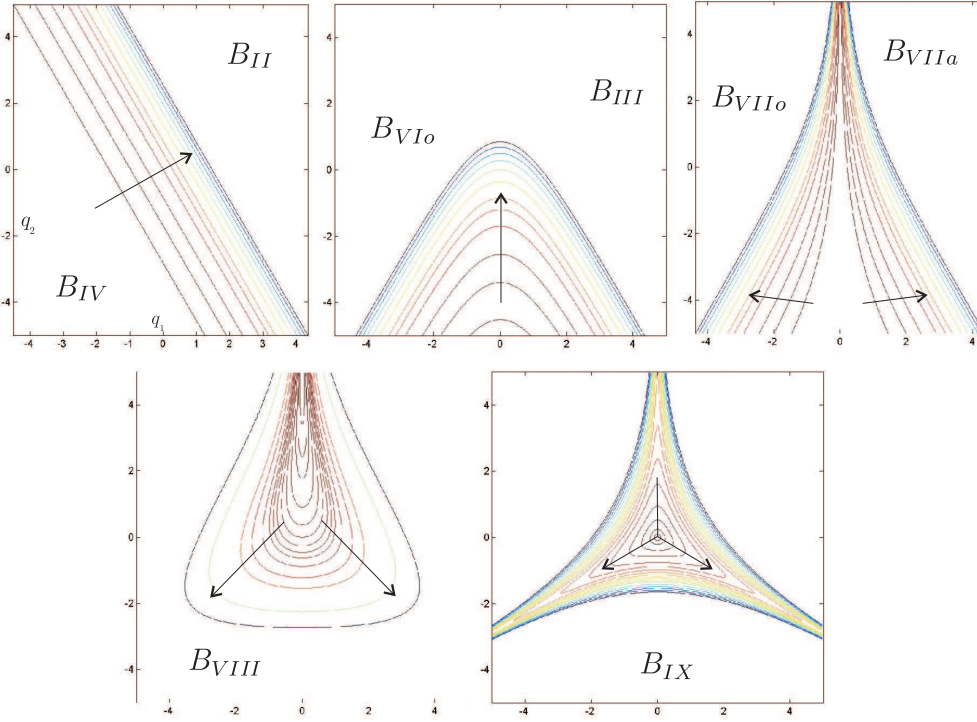


FIGURE 4.5 – Représentation graphique dans le plan (q_1, q_2) des courbes isovaleurs des différentes fonctions $\xi(q_1, q_2)$ associées aux différents modèles d'Univers de Bianchi. Les flèches indiquent le sens des pentes décroissant vers $-\infty$.

2. Le rebond dans un coin mou comme par exemple le cas de la dynamique B_{VI_o} lorsque $q_1 \rightarrow +\infty$ et $q_2 \rightarrow 0$. On peut retrouver de tels passages en dynamique B_{III} et B_{VIII}
3. Le rebond dans un coin dur, c'est l'apanage unique de la dynamique B_{IX} lorsque par exemple $q_2 \rightarrow +\infty$ et $q_1 \simeq 0$.
4. Le rebond dans un canal comme par exemple le cas de la dynamique $B_{VII_{o,a}}$ ou B_{VIII} lorsque $q_2 \rightarrow +\infty$ et $q_1 \simeq 0$.

La différence entre le canal et le coin dur réside simplement dans le fait que le coin dur est fermé en haut ce qui n'est pas le cas du canal qui ne se referme qu'asymptotiquement. Les bandes compliquées du billard B_{VIII} se décomposent en la somme de morceaux de bandes élémentaires associées aux modèles B_{II} , B_{VI_o} et B_{IX_o} . Loin de la singularité, les bandes du billard B_{IX} sont constituées de coins mous à la B_{VI_o} reliés par des lignes droites à la B_{II} , à l'approche de la singularité les coins mous deviennent durs.

L'étude de l'interaction avec les bandes est très ancienne puisque les premiers résultats sur ce sujet sont mentionnés dès la fin des années soixante dans l'un des deux articles fondateur de Misner [40], ils furent complétés par une série d'article de Ryan (voir par exemple [41]) et détaillés par Jantzen [39]. Nous reprenons ici l'idée de ces travaux dans le contexte de la bande rectiligne et nous proposons un scénario original pour le comportement dans les coins.

Les rebonds

La situation de la bille "loin" de la bande (au milieu du billard) est commune à tous les cas : On alors $\xi \simeq 0$ et par conséquent $p_3^2 = p_1^2 + p_2^2$, en utilisant le super temps et la définition des

p_i il vient donc

$$\left(\frac{dq_1}{d\tilde{t}}\right)^2 + \left(\frac{dq_2}{d\tilde{t}}\right)^2 = \left(\frac{dq_3}{d\tilde{t}}\right)^2$$

Si $\frac{dq_3}{d\tilde{t}} \neq 0$, il vient donc

$$\left(\frac{dq_1}{dq_3}\right)^2 + \left(\frac{dq_2}{dq_3}\right)^2 = 1$$

L'idée de Misner et Ryan ([40],[41]), est de faire intervenir dans cette dernière relation les sinus et cosinus de l'angle incident θ_i et réfléchi θ_r de la bille avec la bande avant et après le rebond.

Rebonds sur une bande rectiligne

Le rebond sur une bande rectiligne s'effectue de façon générique dans l'univers B_{II} , on le retrouve aussi de façon occasionnelle dans d'autres Univers, B_{VIII} ou B_{IX} lorsque $q_2 \rightarrow -\infty$, par exemple. Conformément à la Figure 4.6, on peut définir les angles θ_i et θ_r tels que

$$\begin{aligned} \sin \theta_i &= \left(\frac{dq_1}{dq_3}\right)_i & \sin \theta_r &= \left(\frac{dq_1}{dq_3}\right)_r \\ \cos \theta_i &= -\left(\frac{dq_2}{dq_3}\right)_i & \cos \theta_r &= \left(\frac{dq_2}{dq_3}\right)_r \end{aligned} \quad (4.38)$$

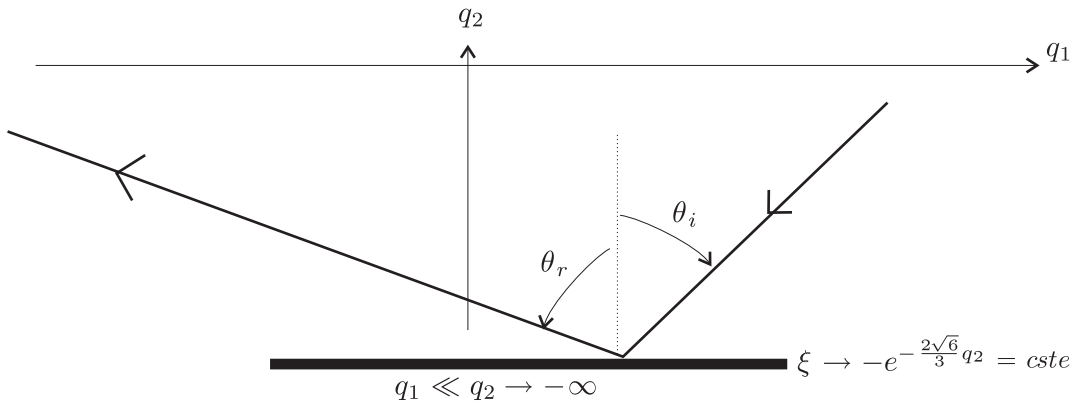


FIGURE 4.6 – Rebond sur une bande droite

Toutes les situations d'interactions avec une bande droite (B_{II} , ou B_{VIII} , B_{IX} quand $q_2 \rightarrow -\infty$, ...) correspondent à une situation dans laquelle

$$\xi(q_1, q_2) \rightarrow -e^{-\frac{2\sqrt{6}}{3}q_2}$$

la tendance est parfaite en B_{II} , asymptotique dans tous les autres cas ...

Le hamiltonien de l'interaction avec la bande droite est donc

$$H = \sum_{i=1}^3 \sigma_i p_i^2 - e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_3 - \frac{2\sqrt{6}}{3}q_2}$$

les équations de la dynamique fournissent alors

$$\frac{dp_1}{d\tau} = 0 \quad \frac{dp_2}{d\tau} = -\frac{2\sqrt{6}}{3} e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_3 - \frac{2\sqrt{6}}{3}q_2} \quad \text{et} \quad \frac{dp_3}{d\tau} = \frac{\sqrt{6}}{3} e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_3 - \sqrt{2}q_1}$$

desquelles on déduit que les quantités p_1 et $p_2 + 2p_3$ se conservent lors du rebond.

La conservation de $p_1 = \frac{dq_1}{d\tau}$ assure que

$$\left(\frac{dq_1}{d\tau}\right)_i = \left(\frac{dq_1}{d\tau}\right)_r \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dq_3}{d\tau}\right)_i \sin \theta_i = \left(\frac{dq_3}{d\tau}\right)_r \sin \theta_r \quad (4.39)$$

La conservation de $p_2 + 2p_3 = \frac{dq_2}{d\tau} + 2\frac{dq_3}{d\tau}$ assure quant à elle

$$\left(\frac{dq_3}{d\tau}\right)_i [2 - \cos \theta_i] = \left(\frac{dq_3}{d\tau}\right)_r [2 + \cos \theta_r] \quad (4.40)$$

un mélange de ces deux lois de conservation permet donc d'obtenir

$$\frac{\sin \theta_i}{2 - \cos \theta_i} = \frac{\sin \theta_r}{2 + \cos \theta_r}$$

de sordides calculs permettent alors de récrire cette loi de transition sous la forme (e.g. [41])

$$\sin \theta_r = \frac{3 \sin \theta_i}{5 - 4 \cos \theta_i} \quad (4.41)$$

il est même possible de relier cet angle au paramètre u de la solution de Kasner. La transition de l'Univers B_{II} étant équivalente au rebond sur la bande droite avec (e.g. [36] p.237).

$$u = \frac{2 - \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta}{2 \cos \theta - 1}$$

Rebonds dans les coins ou les canaux

Levons tout d'abord une partie du voile : De nos trois types de coins, deux seulement s'avèrent dynamiquement différents : En effet, ces formes de bandes sont atteintes lorsque $q_2 \rightarrow +\infty$, situation dans laquelle nous avons

$$\xi(q_1, q_2) \rightarrow \mp 2e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_2} \left[1 \pm \text{ch}(\sqrt{2}q_1) \right] \quad (4.42)$$

Le signe du haut correspond au potentiel de l'Univers B_{VI_o} et celui du bas au cas de l'Univers B_{VII_o} , ce comportement est asymptotique ($q_2 \rightarrow +\infty$) dans les Univers B_{IX} et B_{VIII} , la différence de fermeture entre le canal et le coin dur n'est due qu'aux termes asymptotiquement négligés.

Pour éviter toute tentative apparemment vaine¹⁰, signalons tout d'abord que la technique de recherche de quantités conservées lors du rebond (e.g. Misner et Ryan pour la bande droite) semble inadéquate à cause de la présence du terme en $\text{ch}(\sqrt{2}q_1)$ dans le potentiel qui est maintenant une fonction de deux variables ... Nous préférons donc une étude plus analytique mais très concluante.

10. Je parle pour moi en tous cas ...

Avec le potentiel (4.42) et en posant $(x, y) = \left(\sqrt{2}q_1, \frac{\sqrt{6}}{3}q_2 \right)$ la dynamique s'écrit

$$\begin{cases} x'' = -4e^y \operatorname{sh}x \\ y'' = \mp \frac{4}{3}e^y (1 \pm \operatorname{ch}x) \end{cases}$$

Il n'est pas question ici de résoudre un tel système, cette tâche semble perdue d'avance ... Il semble toutefois possible de décrire le comportement de la bille dès lors qu'elle s'engouffre dans un coin !

Imaginons que $y \propto q_2$ soit initialement, une fonction croissante : Suivant la variation de $x \propto q_1$, la bille se dirige soit vers la bande de droite (positive) soit vers la bande de gauche (négative)¹¹. Prenons la première hypothèse, tôt ou tard, la bille va se retrouver dans une région $x > 0$ pour laquelle on pourra négliger la partie décroissante du sinus hyperbolique et se retrouver avec une équation ressemblant à s'y méprendre à notre cas analytique idéalisé (4.36) avec cependant un paramètre $k = 2e^{y/2}$ variable !

Une fois le rebond sur la bande positive effectué, x décroît, la bille se dirige donc vers la bande négative. Une alternative se produit toutefois dans le rebond quant au comportement de y : Nous avons vu que l'amplitude de k se retrouvait dans la pente des régimes asymptotiques d'avant et d'après le rebond. Au plus k est grand au plus le rebond est "pincé", attendu que ce dernier est symétrique par rapport à la normale au point de contact, un rebond trop pincé sur ces bandes hyperboliques conduira inéluctablement à une décroissance de y . Réciproquement, un rebond largement ouvert pourra préserver le sens de variation de y . L'interaction avec la bande négative est complètement symétrique, il suffit pour s'en convaincre de procéder au changement de variable $\tilde{x} = -x$. Lorsqu'une bille entre dans un coin elle effectue de façon générique tout d'abord des rebonds entre les 2 bandes concernées, ces derniers sont de plus en plus pincés au fil de l'entrée dans le coin ($y \nearrow$), les bandes n'étant pas strictement verticales un trop fort pincement conduit à l'inversion du processus et la bille ressort du coin en continuant à rebondir de façon réciproque. Ce processus est illustré par le schéma de la Figure 4.7.

Quelques remarques s'imposent pour conclure notre épopée billardistique.

- Même si le billard B_{VIII} ne possède pas une structure de bande fermées, et grâce au mécanisme de sortie du canal décrit ci-dessus, il semble impossible¹² pour la bille de pouvoir profiter de l'ouverture située en $q_2 \rightarrow +\infty$.
- Le comportement de la bille dans chacun des 2 coins durs du bas du billard B_{IX} se traite par application d'une rotation de $\pm\pi/3$ qui laisse invariant le potentiel B_{IX} et donc la dynamique ...
- Notre approche heuristique basée sur l'analyse de l'équation différentielle (4.36) reste à confirmer par quelques solutions numériques bien choisies. Elles font l'objet de la section 5.2.1.

4.3.4 Analyse fine du billard B_{IX}

Nous avons mentionné plus haut que les coins des bandes du billard B_{IX} changeait à l'approche de la singularité : loin de la singularité (faibles valeurs de E) il s'agirait de 3 coins mous, proche de la singularité, il s'agirait de 3 coins durs.

11. La courbe des isovaleurs de $\xi (q_1 \propto x, q_2 \propto y)$ est invariante par symétrie selon l'axe des x car le potentiel (4.42) est pair en q_1

12. sauf peut-être pour un ensemble de mesure nulle de conditions initiales ...

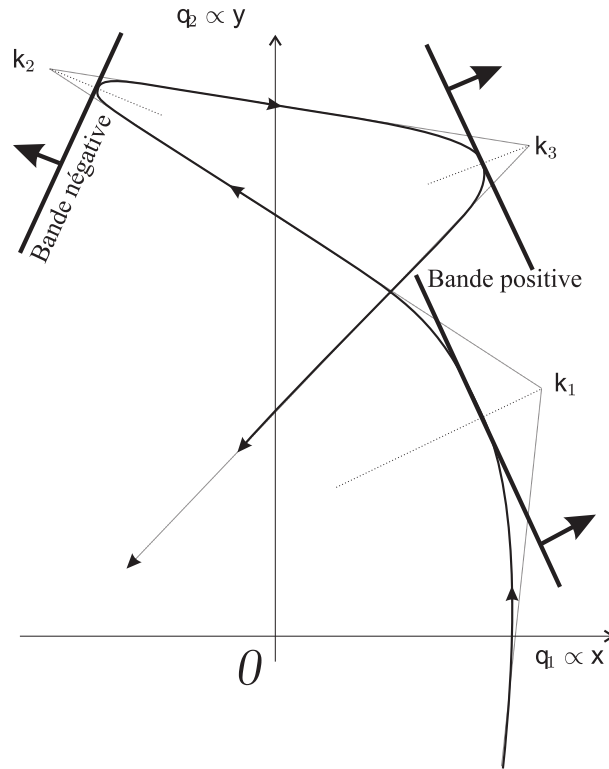


FIGURE 4.7 – Rebond dans les coins . Les bandes s'éloignent. Les facteurs $k = 2e^y$ de chaque collision sont différents : $k_2 > k_3 > k_1$

La comparaison avec un billard n'est pas simplement ludique, elle permet aussi de déterminer les propriétés dynamiques du système. La dynamique sur un billard est effet connue au moins dans deux cas particuliers (cf. [42],[44],[43],[45])

- Le plan de phase d'un système évoluant sur un billard dont les bandes sont des courbes fermées à courbure strictement négative (bande concave : géométrie elliptique), contient principalement des orbites quasi-périodiques ;
- Les orbites d'un système évoluant sur un billard dont les bandes sont des courbes fermées à courbure strictement positive (bande convexe : géométrie hyperbolique), ne sont pas périodiques.

Ce résultat mathématique est très intuitif : si, lors du rebond, la courbure de la bande est négative (bande concave) ce dernier aura tendance à confiner la trajectoire, à l'inverse un rebond sur une bande convexe aura plutôt tendance à introduire de la diffusion dans les trajectoires. Le cas intermédiaire de bandes fermées à courbure de signe indéfini n'est pas associé à un théorème mathématique mais il est tout de même permis de penser que si la particule est amenée à interagir avec toute la longueur des bandes du billard, les zones hyperboliques introduiront inévitablement une diffusion néfaste à la quasi-périodicité des orbites.

S'il existe bien une transition coins mous/ coins durs lors de l'approche de la singularité B_{IX} , la structure des bandes passera dans le même temps d'une situation elliptique à une situation hyperbolique. Il est donc important d'étudier une telle transition, nous procéderons pour cela à l'étude de la courbure des courbes isovaleurs du potentiel B_{IX}

En conservant les variables

$$x = \sqrt{2}q_1 \quad \text{et} \quad y = \frac{\sqrt{6}}{3}q_2$$

et en introduisant un facteur de normalisation négatif¹³ en vue de simplifier quelques calculs, il vient

$$-\frac{\xi(q_1, q_2)}{3} := V(x, y) = \frac{e^{-4y} + 2e^{2y} [\operatorname{ch}(2x) - 1] - 4e^{-y} \operatorname{ch}(x)}{3}$$

ce potentiel est manifestement pair en x , de plus il possède un minimum global situé à l'origine, le facteur $1/3$ est d'ailleurs destiné à la normalisation de ce minimum à la valeur -1 , nous avons donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad V(x, y) \in]-1, +\infty[\quad > \quad V(0, 0) = -1$$

Détection de la transition coin dur/coin mou

L'étude des courbes définies par une relation du type $f(x, y) = 0$ n'est pas chose aisée mais leur courbure $R(x, y)$ est en principe calculable. Le calcul basé sur le théorème des fonctions implicites fournit cependant un résultat difficilement exploitable dans le cas qui nous intéresse.

Il est tout à fait préférable de lui substituer une analyse plus fine : La nature des courbes de niveau indiquée par la Figure 4.5 suggère l'étude des intersections entre les courbes $V(x, y) = u$ et les droites $y = \lambda$ d'ordonnée constante. Nous sommes donc conduits à l'étude des solutions de l'équation $V(x, \lambda) = u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $u \in [-1, +\infty[$, posant $k = e^\lambda$ et $a = \operatorname{ch}(x)$, en notant que $\operatorname{ch}(2x) = 2a^2 - 1$, l'équation à résoudre s'écrit

$$\left. \begin{array}{l} a \geq 1 \\ k > 0 \\ u > -1 \end{array} \right\} \text{ tels que } 4k^2 a^2 - \frac{4}{k} a - \frac{1}{k^4} - 4k^2 - 3u = 0$$

la résolution de cette équation est très simple, en choisissant la variable a deux solutions apparaissent

$$a_{\pm}(k, u) = \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{k^2} \pm \sqrt{4k^2 + 3u} \right)$$

pour que $\sqrt{4k^2 + 3u}$ soit réel, dans chaque cas a_+ et a_- deux régimes doivent être envisagés :

- Si $u \in [-1, 0[$ alors $k \in [k_o, +\infty[$ avec $k_o = \sqrt{-3u/4}$
- Si $u \in [0, +\infty[$ alors $k \in [0, +\infty[$

Avant de nous lancer dans l'étude signalons que chaque valeur de $a \geq 1$ correspond à deux valeurs de x compte tenu de la parité du cosinus hyperbolique.

Étude de a_+ Nous cherchons à déterminer l'existence de nombres k et u vérifiant la contrainte $\sqrt{4k^2 + 3u} \in \mathbb{R}$ et tels que

$$a_+(k, u) = \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{k^2} + \sqrt{4k^2 + 3u} \right) \geq 1$$

1. $u \in [0, +\infty[\Rightarrow k \in [0, +\infty[$

Sur ces intervalles nous avons

$$\lim_{k \rightarrow 0} a_+ = +\infty \quad , \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} a_+ = 1^+$$

ainsi que

$$\frac{\partial a_+(k, u)}{\partial k} < 0$$

13. C'est en effet les courbes $-\xi = cste$ qui interviennent dans le problème ...

Il existe donc une paire (k, u) associée à deux valeurs opposées de x correspondant à deux intersections entre la courbe de niveau $V(x, y) = u$ et la droite $y = \ln k$

2. $u \in [-1, 0[\Rightarrow k \in [k_o, +\infty[$

Sur ces intervalles nous avons

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_+ = 1^-$$

ainsi que

$$\frac{\partial a_+(k, u)}{\partial k} = 0 \iff k = k_{\pm} = \frac{\sqrt{2}}{|u|} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 + \frac{3u^3}{4}}}$$

il faut noter que $k_- > k_o$ et $a_+(k_-, u) \geq 1$, la valeur 1 étant atteinte pour le cas limite $u = -1$, de plus $a_+(k_+, u) < 1$. Il existe donc une paire (k, u) associée à deux valeurs opposées de x correspondant à deux intersections entre la courbe de niveau $V(x, y) = u$ et la droite $y = \ln k$. Si $u = -1$, la courbe de niveau est un point, l'intersection a lieu avec la droite $y = 0$ en $x = 0$.

Étude de a_- Nous cherchons à déterminer l'existence de nombres k et u vérifiant la contrainte $\sqrt{4k^2 + 3u} \in \mathbb{R}$ et tels que

$$a_-(k, u) = \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{k^2} - \sqrt{4k^2 + 3u} \right) \geq 1$$

1. $u \in [0, +\infty[\Rightarrow k \in [0, +\infty[$

Sur ces intervalles nous avons

$$\lim_{k \rightarrow 0} a_- = +\infty \quad , \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} a_- = -1$$

ainsi que

$$\frac{\partial a_-(k, u)}{\partial k} = 0 \iff k = k_+ = \frac{\sqrt{2}}{u} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{3u^3}{4}}}$$

il n'est pas simple de vérifier que $a_-(k_+, u) < 0$, et qu'ainsi il existe une paire (k, u) associée à deux valeurs opposées de y correspondant à deux intersections entre la courbe de niveau $V(x, y) = u$ et la droite $y = \ln k$. Pour u fixé, la valeur de k est dans l'intervalle $[0, k_m]$ avec $k_m < k_+$.

2. $u \in [-1, 0[\Rightarrow k \in [k_o, +\infty[$

Sur ces intervalles nous avons

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_- = -1$$

ainsi que

$$\frac{\partial a_-(k, u)}{\partial k} < 0$$

la fonction $a_-(k, u)$ est donc strictement décroissante en k , sa position par rapport à 1 est déterminée par la valeur de

$$a_-(k_o, u) = \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{3u} \right)^{\frac{3}{2}}$$

(a) Si $a_-(k_o, u) \geq 1$ c'est-à-dire $u \in \left[-\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}, 0\right[$

Il existe une paire (k, u) associée à deux valeurs opposées de x correspondant à deux intersections entre la courbe de niveau $V(x, y) = u$ et la droite $y = \ln k$.

(b) Si $a_-(k_o, u) < 1$ c'est-à-dire $u \in \left[-1, -\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}\right[$

Il n'existe pas de paire (k, u) associée à deux valeurs opposées de x permettant d'obtenir une intersection entre la courbe de niveau $V(x, y) = u$ et la droite $y = \ln k$.

En résumé de toute cette analyse, et en introduisant le paramètre $u_o = -\frac{2\sqrt[3]{2}}{3} \approx -0.84$, nous pouvons conclure que :

- Si $u \in [-1, u_o[$, il existe au maximum 2 intersections entre les lignes de niveau $V(x, y) = u$ et une droite $y = cste$. Ces lignes ont une courbure définie négative
- Si $u \in [u_o, +\infty[$, il peut exister jusqu'à 4 intersections entre les lignes de niveau $V(x, y) = u$ et une droite $y = cste$. Ces lignes ont une courbure qui change de signe.

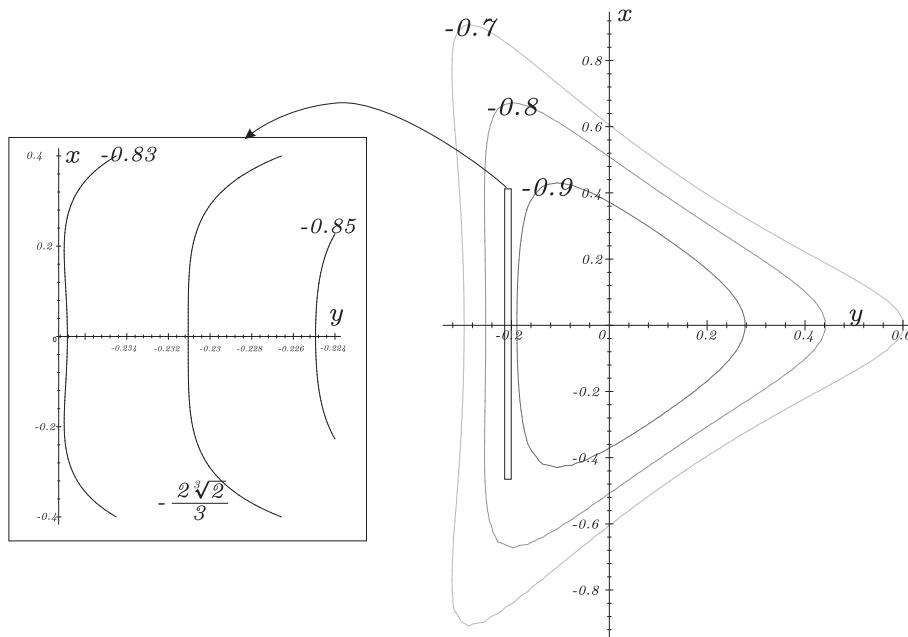


FIGURE 4.8 – Inversion du signe de la courbure de la bande dans le billard associé à la dynamique B_{IX} vide. Le carré de gauche est un "zoom" en y de la région où l'inversion se produit

Ce comportement est illustré sur la Figure 4.8. La transition existe donc et est unique : Tant que nous sommes loin de la singularité la bille interagit avec des bandes dont la structure est complètement elliptique. Pour une valeur critique du temps liée à la valeur de l'énergie $E = -2\sqrt[3]{2} \simeq -2.52$ certaines parties de la bande ont une structure hyperbolique. Cette transition ne se produit qu'une seule fois lorsque $(E \rightarrow +\infty)$ et que l'on se rapproche de la singularité. Nous tâcherons d'illustrer cette transition lors de nos études numériques.

Chapitre 5

Résultats numériques

5.1 Modélisation numérique de la dynamique B_{IX} dans le formalisme BKL

Nous proposons dans cette section d'illustrer le travail analytique de Ringström [31] par une série d'expériences numériques. Effectuées dans le cadre de la dynamique B_{IX} vide, ces simulations auront deux objectifs : Le premier sera de retrouver par des méthodes de type Monte-Carlo la convergence de la dynamique vers une fermeture des trajectoires de type B_{II} , c'est-à-dire une série de transition infinie entre ères de Kasner de la forme (4.28), ce travail s'effectue dans la continuité des travaux de S. Rugh ([17], [20] et [21]). Le deuxième objectif de cette étude numérique sera de reprendre une partie des travaux initiés par Cornish et Lewin [24] qui visent à quantifier la sensibilité de la dynamique aux conditions initiales. L'imprécision de certaines techniques et l'incomplétude de certains résultats présentés dans cet article (voir [28]) laissent la place à de nombreux développements.

5.1.1 Test de la conjecture BKL

Le système différentiel associé à la dynamique B_{IX} vide est le suivant

$$\begin{cases} 0 &= E_c + E_p = H \\ A_1'' &= (e^{A_2} - e^{A_3})^2 - e^{2A_1} \\ A_2'' &= (e^{A_3} - e^{A_1})^2 - e^{2A_2} \\ A_3'' &= (e^{A_1} - e^{A_2})^2 - e^{2A_3} \end{cases} \quad (5.1)$$

les fonctions $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$ et $A_3(\tau)$ sont à valeurs dans \mathbb{R} et vérifient à chaque temps conforme τ la contrainte

$$0 = H = \underbrace{A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2'}_{E_c} + \underbrace{2(e^{A_1+A_2} + e^{A_1+A_3} + e^{A_2+A_3}) - (e^{2A_1} + e^{2A_2} + e^{2A_3})}_{E_p} \quad (5.2)$$

Dans ce contexte, l'évolution vers la singularité s'effectue en prenant la limite $\tau \rightarrow \pm\infty$. L'infini positif revient à étudier un Big-Crunch (l'Univers B_{IX} est fermé), l'infini négatif correspond à l'étude d'un Big-Bang, ces deux singularités sont identiques. D'un point de vue numérique, il s'agit de résoudre le système (5.1) en imposant à $\tau = 0$ ($t = 1$), la contrainte $H = 0^1$. Le

1. H est une intégrale première, sa valeur est donc conservée au cours de l'évolution.

schéma numérique que nous avons mis en place est basé sur l'algorithme Runge-Kutta d'ordre 4 avec adaptation du pas de temps sur la vitesse de variation des solutions. Nous avons envisagé trois familles de conditions initiales : Aléatoires, quasi-kasnériennes et anti-kasnériennes.

Cas général : Conditions initiales aléatoires

Pour chaque expérience, nous avons généré 5 nombres aléatoires dans l'intervalle $[-1, 1]$ pour $A_{1o}, A_{2o}, A_{3o}, A'_{1o}$ et A'_{2o} à $\tau = 0$ et calculé la valeur de A'_{3o} permettant de satisfaire la contrainte $E_c = -E_p$. La résolution de l'équation algébrique associée est effectuée par une méthode itérative, en Fortran double précision, à $\tau = 0$ nous avons $|H| \leq 2 \cdot 10^{-14}$.

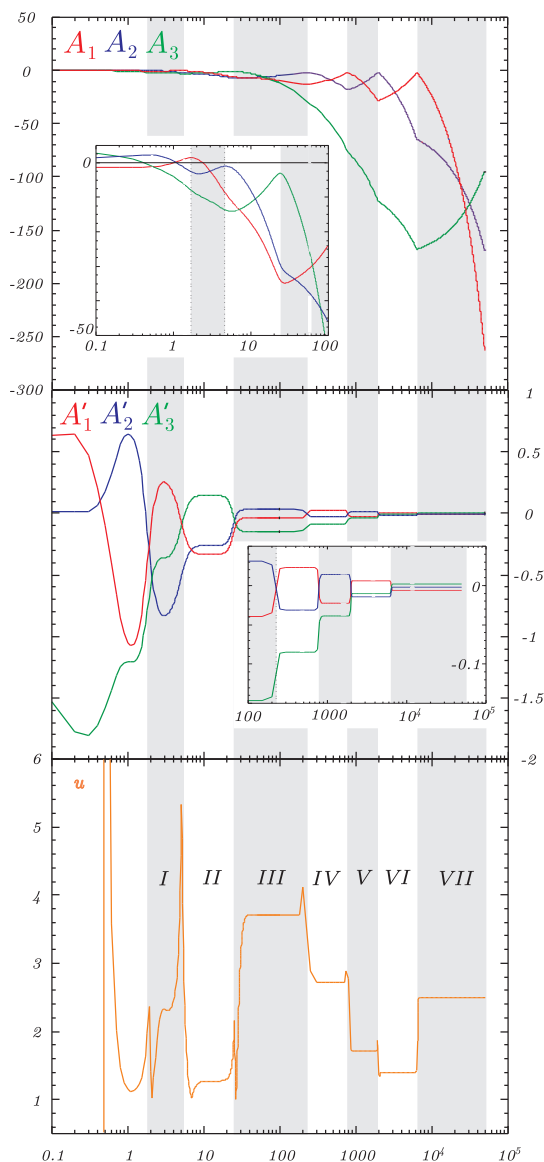


FIGURE 5.1 – Représentation graphique des solutions numériques obtenues pour une dynamique B_{ix} vide avec des conditions initiales aléatoires vérifiant la propriété $H = 0$.

La figure 5.1 montre l'évolution dynamique calculée pour $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$ et $A_3(\tau)$ pour le graphique du haut, $A'_1(\tau)$, $A'_2(\tau)$ et $A'_3(\tau)$ pour le graphique du milieu et de la quantité

$$u(\tau) = \frac{\min(A'_1, A'_2, A'_3)}{A'_1 + A'_2 + A'_3 - [\min(A'_1, A'_2, A'_3) + \max(A'_1, A'_2, A'_3)]} \quad (5.3)$$

pour le graphique du bas. Cette quantité introduite par S. Rugh [17], est égale à l'indice de Kasner lorsque celui-ci existe. Diverses ères peuvent aisément être identifiées sur ces graphiques et ont été repérées par des lettres romaines. Les caractéristiques de ces diverses ères sont rassemblées dans le tableau ci-dessous

Ère	Ordre des axes	Valeur de u
I	● ● ●	2.31
II	● ● ●	1.272
III	● ● ●	3.71450
IV	● ● ●	2.71462
V	● ● ●	1.71482
VI	● ● ●	1.39996
VII	● ● ●	2.49721

Nous avons codé dans ce tableau $A_1 = \bullet$, $A_2 = \bullet$ et $A_3 = \bullet$. La valeur de u présentée est la valeur de stabilisation de la quantité (5.3) pendant au minimum 10 itérations successives.

Après une phase transitoire qui s'étend environ jusqu'à $\tau \approx 30$, les conditions initiales arbitraires se retrouvent proches un état kasnérien (Ère I), les oscillations kasnériennes de la conjecture BKL se produisent alors suivant le carte (4.28) avec une précision remarquable (1 pour mille). Cette précision croît avec τ .

Conditions initiales quasi-kasnériennes : $E_c = E_p = 0$.

Choisir $H = 0$ en imposant $E_c = E_p = 0$ revient à se placer, aux erreurs numériques près², dans une ère de Kasner. Un paramétrage des conditions initiales possible est le suivant (e.g. [26]) :

$$\begin{aligned} A'_1(0) &= \frac{-3\omega_o(1+x_o)}{(1+x_o+x_o^2)} \\ A'_2(0) &= \frac{3\omega_o x_o}{(1+x_o+x_o^2)} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$A'_3(0) = \frac{-3\omega_o x_o(1+x_o)}{(1+x_o+x_o^2)}$$

et

$$\begin{aligned} A_1(0) &= \frac{3\Omega_o}{(1+y_o+x_o y_o)} \\ A_2(0) &= 0 \\ A_3(0) &= \frac{3\Omega_o(y_o+x_o y_o)}{(1+y_o+x_o y_o)} \end{aligned} \quad (5.5)$$

2. d'où le nom de quasi...

avec $(x_o, y_o) \in [1, 2]^2$, $\omega_o \in \mathbb{R}^+$ de façon à avoir deux axes en contraction et un axe en expansion pour $\tau \rightarrow \pm\infty$, et Ω_o solution *négative* de l'équation

$$1 - 2\chi + \chi^{\frac{1}{1+z}} \left(\chi^{\frac{1}{1+z}} - 2 \right) + \chi^{\frac{z}{1+z}} \left(\chi^{\frac{z}{1+z}} - 2 \right) = 0 \quad (5.6)$$

avec $\chi = e^{6\Omega_o} \in [0, 1]$ et $z = y_o + x_o y_o$. Dans ce paramétrage il est facile d'interpréter x_o comme la valeur de u^* correspondant à l'ère de Kasner proche de laquelle nous voulons partir, y_o comme le paramètre nécessaire au positionnement respectif des axes, Ω_o et ω_o caractérisent le volume de l'Univers à $\tau = 0$. Le choix $\omega_o > 0$ assure un taux de variation initial du logarithme du volume

$$\left. \frac{d \ln V}{dt} \right|_{\tau=0} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 A'_i(0) = -\frac{3\omega_o}{2}$$

négatif pour nos simulations : V décroît vers 0 à l'approche de la singularité. Le choix $\Omega_o < 0$, correspond à un Univers de petit volume, car

$$\ln V|_{\tau=0} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 A_i(0) = \frac{3\Omega_o}{2}$$

un tel choix n'est pas fondamental mais correspond aux observations qui montre un Univers isotrope dès qu'il est gros (après la recombinaison).

Enfin, le choix $A_2(0) = 0$ fixe le cinquième degré de liberté (qui n'enlève rien à la généralité de la simulation), mais impose alors que $A'_2(0)$ soit positif.

La Figure 5.2 montre l'évolution des fonctions $A'_1(\tau)$, $A'_2(\tau)$ et $A'_3(\tau)$ à l'approche de la singularité de type Big-Crunch ($\tau \rightarrow +\infty$), pour un choix de conditions initiales quasi-kasnériennes issues du paramétrage suivant :

$$\begin{aligned} x_o &= 1.123456789000 & \omega_o &= 1 \\ y_o &= 1.987654321000 & \Omega_o &= -0.542912942 \end{aligned} \quad (5.7)$$

A $\tau = 0$, la contrainte $H = 0$ est vérifiée à $1.42 \cdot 10^{-14}$ près.

Comme on peut le voir sur la figure 5.2 la durée des ères de Kasner successive est de plus en plus longue. La représentation d'une ère par une valeur de u constante (au moyen de la relation (5.3)) est de plus en plus bonne lorsque τ grandit et que l'on se rapproche de la singularité. La succession des changements d'axe (ordre des couleurs) est conforme à la carte (4.28) sur toute la simulation. La valeur de u n'est en accord remarquable avec la carte théorique que pour $\tau \gtrsim 100$. La valeur de u correspondante n'a alors plus grand lien avec la valeur de x_o qui devait initialiser cette carte : le passage de 1.123456789 à 1.189221501 est le fruit d'une période transitoire complexe.

Cette phase transitoire n'est en fait due qu'au choix du paramètre ω_o : Dans le paramétrage (5.4), la grandeur ω_o représente en effet le module de la vitesse de variation du logarithme du volume, pour Ω_o fixé, ω_o permet de se placer plus ou moins loin de la singularité. Pour une valeur donnée Ω_o , la durée de la période transitoire avant accrochage complet de la transition kasnérienne doit donc être inversement proportionnel à la valeur de ω_o . Ce comportement se vérifie tout à fait lors des simulations. Sur la figure 5.3 nous avons repris les mêmes valeurs pour x_o , y_o et Ω_o mais nous nous sommes numériquement rapprochés de la singularité ($\omega_o = 20$).

La représentation de cette solution est sans équivoque : dès la première ère, correspondant aux valeurs des conditions initiales, nous sommes déjà dans un état kasnérien et l'écart entre $u = 1.1257\dots$ et $x_o = 1.1234\dots$ est très faible.

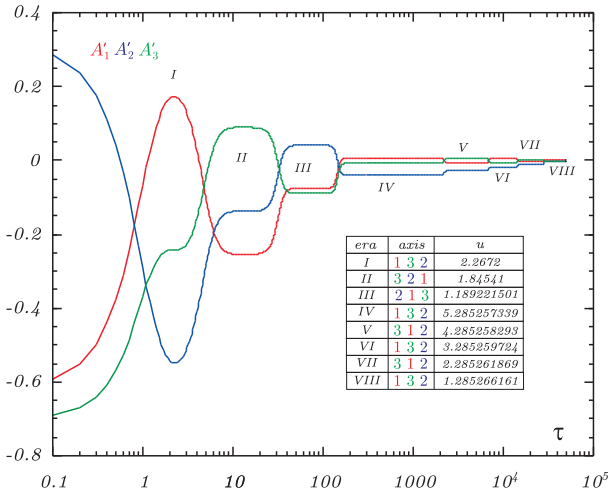


FIGURE 5.2 – Représentation graphique des solutions numériques obtenues pour une dynamique B_{IX} vide avec des conditions initiales quasi kasnériennes issues des relations (5.4) et (5.5) avec $x_o \simeq 1.12$, $y_o \simeq 1.98$, $\omega_o = 1$ et $\Omega_o \simeq -0.54$. Le tableau indique la valeur de u et la disposition des trois facteurs d'échelles dans chacune des ères de Kasner atteintes.

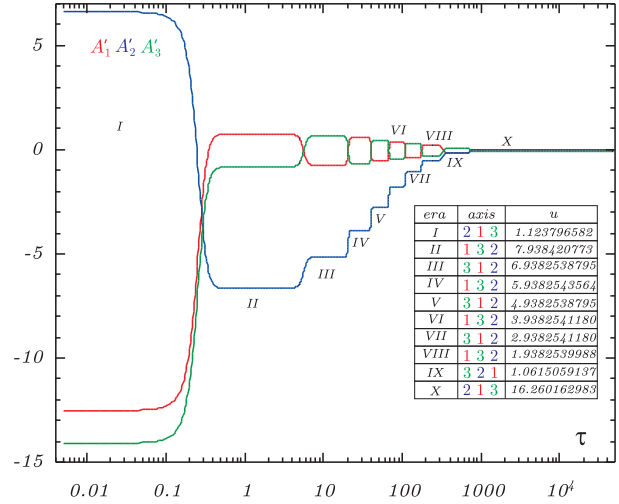


FIGURE 5.3 – Représentation graphique des solutions numériques obtenues pour une dynamique B_{IX} vide avec des conditions initiales quasi kasnériennes issues des relations (5.4) et (5.5) avec $x_o \simeq 1.12$, $y_o \simeq 1.98$, $\omega_o = 20$ et $\Omega_o \simeq -0.54$. Le tableau indique la valeur de u et la disposition des trois facteurs d'échelles dans chacune des ères de Kasner atteintes.

Conditions initiales anti-kasnériennes

Pour montrer à quel point l'accrochage à une transition kasnérienne est persistant nous avons enfin choisi des conditions initiales "anti-kasnériennes". Il suffit pour cela de choisir, dans les conditions initiales quasi-kasnériennes, $\omega_o < 0$ et $\Omega_o > 0$ (ceci est possible car l'équation (5.6) possède toujours une racine $\chi > 1$). Comme on peut le voir sur la figure 5.4, ce type de conditions initiales (peu astucieuses) pour lesquelles, à $\tau = 0$ deux axes sont en expansion et un axe en contraction (anti-kasnérien), fournissent une dynamique du même type que les précédentes. La seule différence notable est simplement le fait que le "transitoire" est plus agité, car il faut "retourner" l'état du système, mais le résultat est le même. Dès que $\tau \approx 100$, le système "accroche" *ad infinitum* la transition entre ères de Kasner paramétrées suivant la carte (4.28).

Les trois types de conditions initiales testées (aléatoires, quasi et anti-kasnériennes) manifestent toutes l'accrochage au régime de transition kasnériennes dicté par la carte issue de la dynamique B_{II} . Nous avons en outre mis en évidence le fait que l'adéquation entre le modèle théorique et le résultat numérique est d'autant plus bonne que l'on se rapproche de la singularité.

Lorsque le temps conforme est la variable dynamique la singularité est repoussée à $\tau \rightarrow \pm\infty$, même si la durée des ères est de plus en plus longue, il semble donc que la singularité ne soit atteinte qu'après une succession infinie d'ères de Kasner. De plus, bien que la carte (4.28) soit complètement déterministe, il semble clair qu'elle présente une sensibilité aux conditions initiales. L'objet de la prochaine section vise à déterminer si cette propriété de la dynamique asymptotique se transpose dans la dynamique B_{IX} . Deux tests complémentaires ont été menés, ils concernent l'influence de la matière barotrope d'indice Γ sur la dynamique B_{IX} . Ils confirment

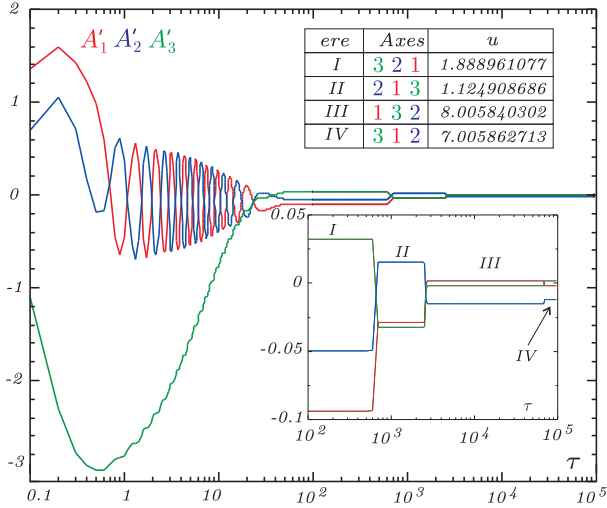


FIGURE 5.4 – Représentation graphique des solutions numériques obtenues pour une dynamique B_{IX} vide avec des conditions initiales anti- kasnériennes

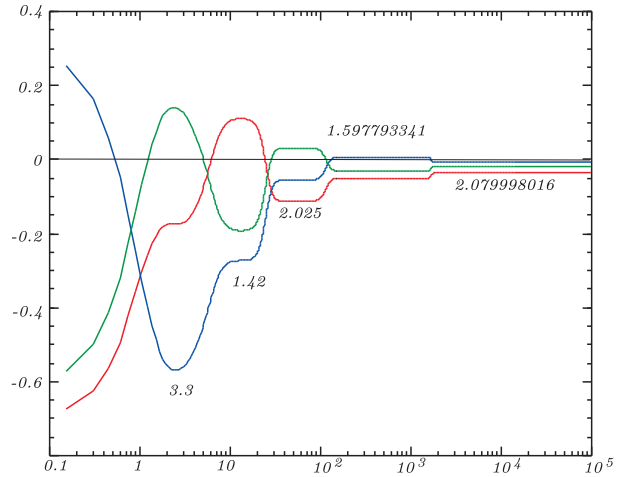


FIGURE 5.5 – Représentation graphique des solutions numériques obtenues pour une dynamique B_{IX} avec matière raide ($\Gamma = 2$) pour des conditions initiales kasnériennes

les déclarations théoriques :

- Si $0 \leq \Gamma < 2$ les oscillations et donc la dynamique sont inchangées.
- Si $\Gamma = 2$ Il existe un temps τ_c tel que si $\tau > \tau_c$ les 3 A_i sont négatifs, les oscillations s'arrêtent, les trois facteurs d'échelle collapsent uniformément vers la singularité (voir Figure 5.5)

5.1.2 L'attracteur de la dynamique

Le fait que la dynamique B_{IX} ne soit pas intégrable, laisse présager l'apparition d'une forme de chaos à l'approche de la singularité. Afin de pouvoir caractériser plus avant le caractère chaotique de cette dynamique, nous allons suivre une voie initiée par Cornish et Lewin ([24]) destinée à mettre en évidence une structure fractale dans l'attracteur dont Ringström prouvera l'existence quelques années plus tard.

Les travaux de Cornish et Lewin demeurant superficiels, nous avons décidé de les reprendre en détail tant dans leur mise en œuvre que dans leur interprétation. Il s'agit de représenter la dynamique du système dans un plan simulant une section de Poincaré. Nous avons en effet montré au paragraphe précédent que les différents choix possibles de conditions initiales conduisaient à une dynamique semblable. Cette dynamique est essentiellement décomposable en deux domaines : un transitoire complexe suivi d'une succession illimitée de transitions kasnériennes paramétrées par la carte (4.28).

Nous choisissons donc d'étudier la sensibilité aux variations de conditions initiales dans le cas où celles-ci sont proches d'un état de Kasner (cf 5.1.1).

Dans ce contexte parmi les 6 degrés de liberté du système deux sont fixés ($H = 0$, et $A_2(0) = 0$), deux ont un comportement régulier (Ω_o et ω_o) car ils représentent le volume de l'Univers et sa dérivée dont le comportement est monotone et régulier (cf. 4.2.1). Seuls x_o et y_o semblent pouvoir receler la complexité de la dynamique. Nous choisissons donc de faire des coupes de la dynamique dans le plan (x_o, y_o) .

Pour une valeur fixée Ω_o et ω_o (une carte), nous avons déterminé 25 000 conditions initiales

par carte, correspondant à un choix de (x_o, y_o) répartis dans l'ensemble $[1, 2] \times [1, 2]$ projeté sur une grille régulière 500×500 .

Pour chaque condition initiale, nous avons résolu numériquement le système (5.1) par le même algorithme et dans les mêmes conditions que celles décrite au paragraphe précédent. Après une phase transitoire ce dernier "accroche" dans tous les cas une succession de transitions kasnériennes que nous stoppons dès que son paramètre u devient plus grand qu'un certain seuil u_{exit} . Nous codons alors, le résultat par une couleur (3 :vert, 2 :bleu, 1 :rouge) associée à l'axe en expansion ($p_i < 0$) au moment où $u > u_{exit}$.

Plusieurs critiques peuvent d'ores et déjà être avancées : La technique utilisée décrit une dynamique tronquée. La véritable dynamique de l'Univers B_{IX} vide correspond à $u_{exit} = +\infty$. Nous devons donc étudier les variations de nos résultats en fonction de u_{exit} . Les choix de Ω_o et ω_o conditionnent comme nous l'avons vu la durée et l'influence du transitoire, lors de nos conclusions nous devons donc nous affranchir des éventuels effets introduits par les variations de ces paramètres.

De façon générique la figure obtenue lors de nos simulations possède une structure multi-fractale (voir figure 5.6).

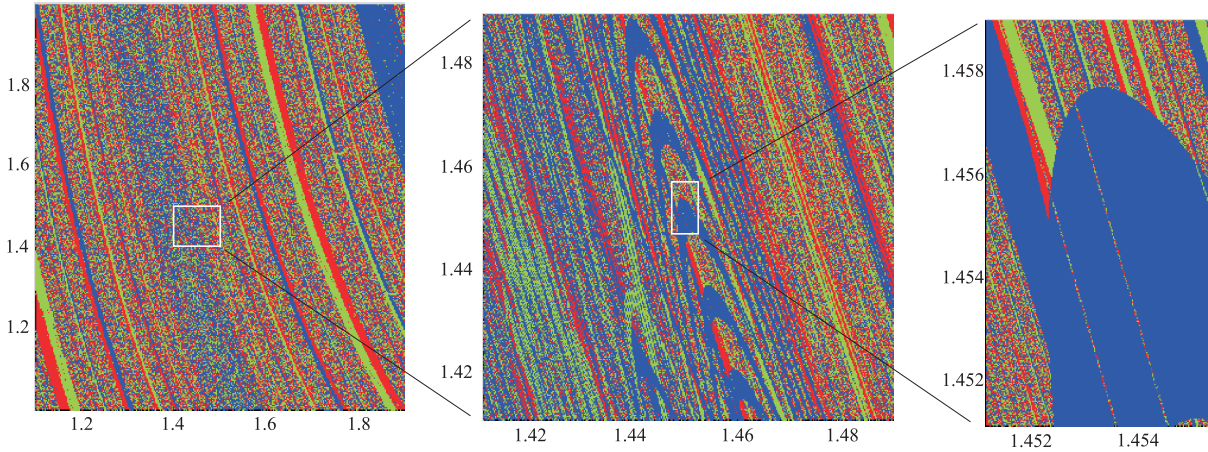


FIGURE 5.6 – Cartes correspondant à la dynamique B_{IX} vide. La représentation s'effectue dans le plan (x_o, y_o) découpé en une grille régulière 500×500 . Pour chaque condition initiale nous avons choisi $\omega_o = 1/3$ et stoppé la dynamique dès que $u \geq u_{exit} = 8$. Les couleurs indiquent le facteur d'échelle associé à l'indice de Kasner négatif : rouge $\leftrightarrow A_1$, bleu $\leftrightarrow A_2$ et vert $\leftrightarrow A_3$.

Afin de quantifier plus avant cette structure nous avons décidé de calculer les différentes dimensions de Hausdorff associées à chacune des cartes obtenues. Cette grandeur est définie par

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (5.8)$$

Où $N(\varepsilon)$ est le nombre de points sur l'attracteur dans le carré de côté ε centré sur un point arbitraire de l'attracteur. Trois attracteurs mêlés sont présents sur chacun de nos graphiques : Le rouge, le bleu et le vert. Il correspondent chacun à un état de sortie identique du processus décrit plus haut. Si aucun des axes n'est privilégié par notre dynamique tronquée les trois dimensions de Hausdorff de chacun des attracteurs doivent être égales. Une dimension "moyenne" d_m a

aussi été calculée en pondérant chaque dimension $d_{r,b,v}$ par la proportion respective de points rouges, bleus ou verts présents dans la carte.

Nous avons obtenus les résultats suivants dans le cas $\omega_o = 1$, (avec 500 points choisis au hasard *sur* l'attracteur).

$(u, v) \in [1.0, 2.0] \times [1.0, 1.9]$	$(u, v) \in [1.4, 1.5] \times [1.4, 1.5]$
$d_r = 1.6751 \pm 0.0093$	$d_r = 1.6317 \pm 0.0114$
$d_b = 1.6779 \pm 0.0078$	$d_b = 1.6537 \pm 0.0099$
$d_v = 1.7252 \pm 0.0111$	$d_v = 1.7921 \pm 0.0111$
$d_m = 1.6918 \pm 0.0094$	$d_m = 1.6772 \pm 0.0108$

La valeur indiquée de la dimension correspond à la valeur moyenne des 500 résultats, l'erreur est estimée au triple de l'écart-type des mesures. Il est clair que la valeur numérique de cette dimension fractale dépend des deux facteurs imposés par le type de simulations numériques que nous effectuons : La dissymétrie dans les valeurs d_r, d_b et d_v est tout à fait explicable par la rupture de symétrie que nous imposons par notre choix d'annuler l'un des facteurs d'échelle à $\tau = 0$, pour oublier ce choix particulier et en quelque sorte rendre isotrope notre dimension fractale, il conviendrait d'augmenter la valeur de u_{exit} . La valeur de la dimension est sans doute aussi affectée par le choix de ω_o : En effet, pour $\omega_o \gg 1$, la période transitoire est définitivement absente et le système est immédiatement dans une phase d'oscillations entre ères de Kasner, les cartes correspondantes ne doivent alors plus dépendre du paramètre y_o . Pour vérifier les comportements prévus nous avons donc réalisé deux séries de cartes complémentaires : Pour la première série nous avons fixé u_{exit} et modifié le paramètre ω_o de chaque simulation, afin de tenter de mettre en évidence une progressive non influence de y_o dans les résultats. C'est bien ce que montre la figure 5.7.

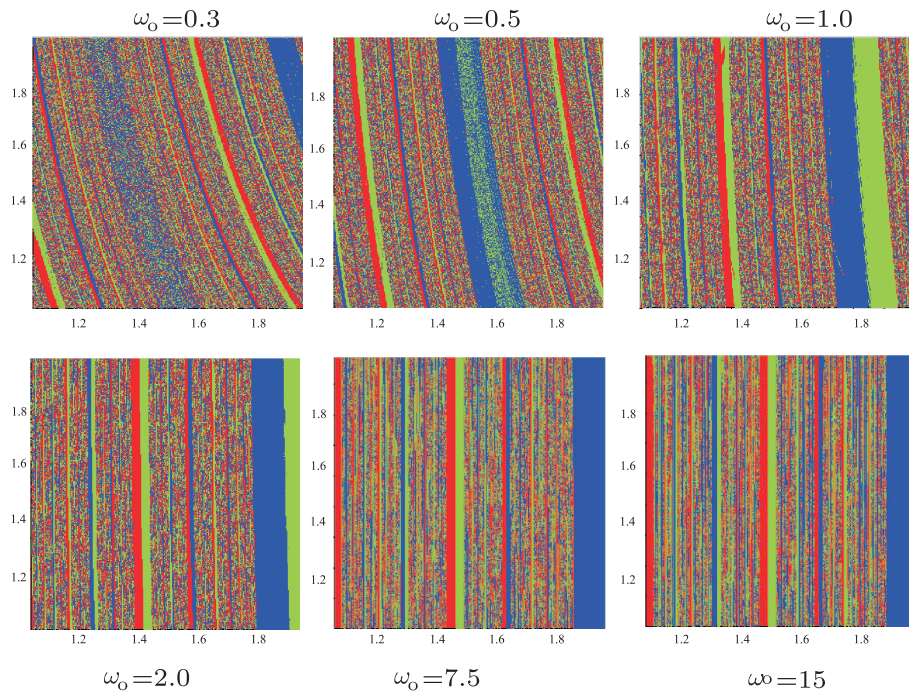


FIGURE 5.7 – Cartes représentant la dynamique B_{IX} vide calculée pour u_{exit} fixé (= 8) et diverses valeurs de $\omega_o = 0,3$; $0,5$; $1,0$; $2,0$; $7,5$ et 15 .

Pour des valeurs croissantes de ω_o les cartes obtenues deviennent de plus en plus indépendantes de la valeur de y_o . Ce dernier paramètre est nécessaire à un bon balayage de l'ensemble des conditions initiales possibles mais n'affecte pas la structure de l'attracteur final. Tout ceci conformément au Théorème de Ringström.

Pour la deuxième série de cartes (figure 5.8), en conservant $\omega_o = 4$, nous avons étudié l'influence de u_{exit} sur les différentes valeurs de dimensions de Hausdorff.

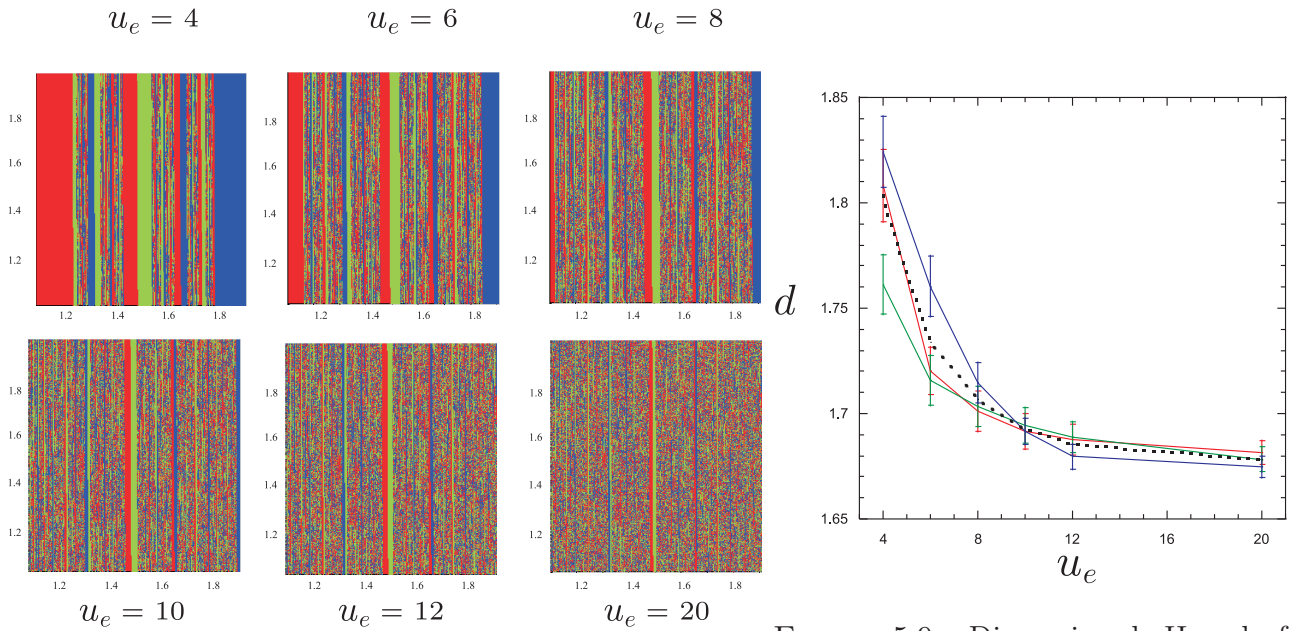


FIGURE 5.9 – Dimension de Hausdorff

FIGURE 5.8 – Cartes représentant la dynamique B_{IX} vide en fonction de u_e calculée pour ω_o fixé ($= 4$) et diverses valeurs de $u_{exit} = 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12$ et 20 .

Là encore le résultat est sans appel, la largeur des "bandes" isochromes diminue lorsque u_{exit} augmente. Ces bandes qui sont associées à des points fixes correspondant aux valeurs fractionnaires de x_o , sont le facteur essentiel de dissymétrie des valeurs des dimensions. Cette dimension s'isotropise donc bien lorsque u_{exit} augmente. Ceci est encore plus visible sur la figure 5.9 où sont représentées les différentes dimensions des attracteurs correspondants aux cartes ci dessus en fonction de u_{exit} .

La dynamique B_{IX} vide est donc caractérisée par l'existence d'un attracteur possédant une structure multi fractale. Cette caractéristique est de façon générique associée à la présence de chaos.

5.2 Modélisation numérique des billards de Bianchi

Deux illustrations des résultats analytiques sont envisagées dans cette section. Dans un premier temps nous nous attacherons à vérifier si les solutions des équations de la dynamique hamiltonienne sont bien idéalisables par le mouvement d'une bille à l'intérieur des bandes

d'un billard. Dans un second temps nous nous efforcerons de mettre en évidence certaines des propriétés chaotiques prévues par la transition coin mou - coin dur dans la dynamique B_{IX} . Sans contrepartie analytique autre que la présomption, nous terminerons par la présentation de l'attracteur fractal que nous avons pu mettre en évidence en couplant les approches BKL et Billard pour la dynamique B_{VIII} .

5.2.1 Solutions des équations du mouvement dans les billards statiques

Afin d'illustrer les calculs analytiques effectués lors de la section 4.3, nous allons dans un premier temps résoudre numériquement les équations de la dynamique des Univers de Bianchi dans le formalisme hamiltonien. Pour mettre pleinement en évidence numériquement le comportement d'une bille à l'intérieur d'un billard, nous imposerons une contrainte supplémentaire de la forme

$$m = e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_3} = 1$$

Cette contrainte du type $t = cste$ ³, permet de caractériser les différentes phases dynamiques vécues par l'Univers lors de son approche vers la singularité, de façon plus imagée cela revient à stopper l'expansion des bandes du billard afin de mieux étudier ses propriétés dynamiques. Le système différentiel⁴ à résoudre s'écrit donc conformément à (4.34)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial \xi(q_1, q_2)}{\partial q_1} \\ \frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial \xi(q_1, q_2)}{\partial q_2} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dq_1}{dt} = p_1 \\ \frac{dq_2}{dt} = p_2 \end{array} \right. \quad (5.9)$$

de telle équations assurent la conservation de la quantité $E := (p_1^2 + p_2^2)/2 - \xi(q_1, q_2)$:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial E}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial E}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = 0$$

Le potentiel $\xi(q_1, q_2)$ est donné par la relation (3.30) que nous rappelons ci dessous

$$\begin{aligned} \xi(q_1, q_2) = & -n_1^2 e^{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}q_2 + \sqrt{2}q_1\right)} - n_2^2 e^{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}q_2 - \sqrt{2}q_1\right)} - n_3^2 e^{-\frac{2\sqrt{6}}{3}q_2} \\ & + 2n_1 n_2 e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_2} + 2n_1 n_3 e^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}q_1 - \frac{\sqrt{6}}{6}q_2\right)} + 2n_2 n_3 e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}q_1 + \frac{\sqrt{6}}{6}q_2\right)} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Les conditions initiales du système (5.9), i.e. $(q_1, q_2)_{t=0} = (q_{1o}, q_{2o})$ et $(dq_1/dt, dq_2/dt)_{t=0} = (p_{1o}, p_{2o})$ sont liées par la contrainte

$$E = \frac{p_{1o}^2 + p_{2o}^2}{2} - \xi(q_{1o}, q_{2o})$$

qui constitue une intégrale première. Pour chacun des modèles étudiés nous avons choisi les conditions initiales suivantes

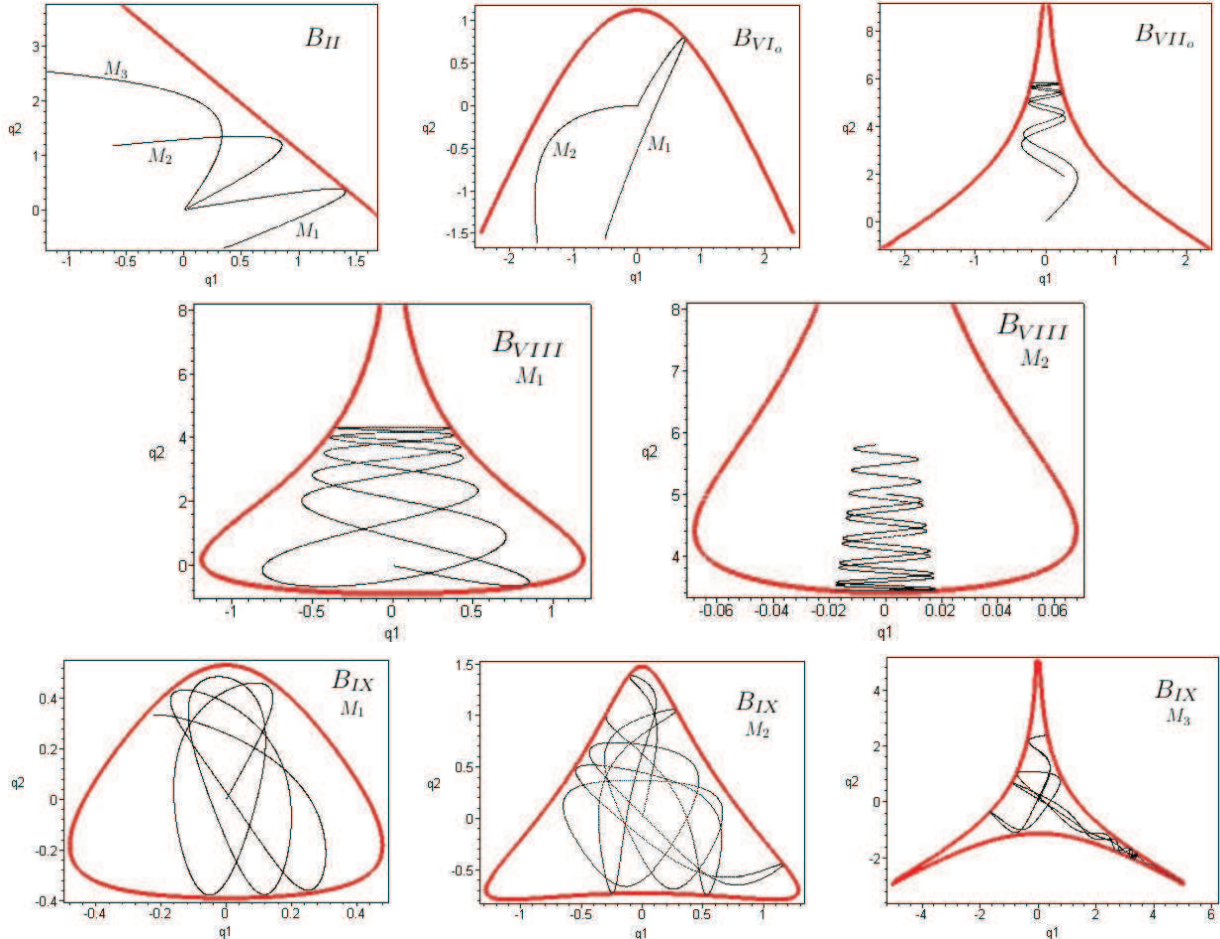
3. Nous avons en effet signalé à nombreuses reprises que q_3, V ou t étaient en relation bijective.

4. Le paramètre t utilisé dans ces équations est sans rapport le temps t indiqué par les horloges comobiles de notre Univers anisotrope. Il est par contre associé au mouvement d'une particule de masse fixe ($m = 1$) dans le potentiel ξ .

Modèle	E	(q_{1o}, q_{2o})	(p_{1o}, p_{2o})
B_{II}	10	(0, 0)	$M_1 : (4, \sqrt{2})$ $M_2 : (2\sqrt{2}, \sqrt{10})$ $M_3 : (\sqrt{2}, 4)$
B_{VI_o}	10	(0, 0)	$M_1 : (2, 2\sqrt{2})$ $M_2 : (-2\sqrt{3}, 0)$
B_{VII_o}	10	(0, 0)	$(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$
B_{VIII}	$M_2 : 1$ $M_1 : 10$	(0, 5) (0, 0)	(0.2, -0.95) (2, $-\sqrt{6}$)
B_{IX}	$M_1 : -2.8$ $M_2 : -2.1$ $M_3 : 0$	(0, 0)	(0.25, 0.58) (0.25, 1.31) (1, $\sqrt{5}$)

(5.11)

Pour chacune de ces conditions initiales nous avons résolu le système (5.9), les portraits de phase des différentes solutions obtenues sont représentées sur les figures ci-après.



Sur chacune de ces figures nous avons représenté en plus de l'orbite issue des conditions initiales, l'isovaleur $\xi = -E$. Les rebonds analytiques sont remarquablement observables pour chacun des modèles. Plusieurs remarques s'imposent :

- Le rebond non spéculaire sur bande rectiligne à la Misner et Ryan (voir section 4.3.3 ou directement [41]) se confirme très bien dans le cas de B_{II} pour lequel la transition semble bien vérifier $\theta_r > \theta_i$ en accord avec (4.41). Par contre tous les autres cas d'interaction avec

une bande rectiligne semblent plutôt indiquer une réflexion symétrique par rapport à la direction normale à la tangente au point de rebroussement, comme prévu par la solution analytique de l'équation (4.36). Les réflexions quasi-spéculaires que nous observons sont peut-être imputables au fait que nous stoppons l'éloignement des bandes ($m' = 0$) dans notre modèle ce qui revient à prendre

$$\left(\frac{dq_3}{d\tau}\right)_i = \left(\frac{dq_3}{d\tau}\right)_r$$

et donc $\sin \theta_i = \sin \theta_r$ selon (4.39).

- L'argument analytique que nous avons mis en avant pour montrer que la bille qui s'engage dans le canal de B_{VIII} ou le coin dur de B_{IX} rebrousse chemin est magnifiquement mis en évidence pour $M1$ de B_{VIII} et $M3$ de B_{IX} .

Dans le vide, deux modèles étaient pointés du doigt par notre analyse d'intégrabilité : B_{VIII} et B_{IX} . La mise en évidence de l'attracteur fractal pour la dynamique B_{IX} (cf. section 5.1.2, e.g. [24]) avait d'ailleurs confirmé ces soupçons. L'analyse des trajectoires vient ici apporter un complément de choix. Nous constatons en effet, que les propriétés dynamiques des orbites sont en accord avec les résultats analytiques évoqués dans la section 4.3.4 :

- La dynamique loin de la singularité (i.e. faibles valeurs de E soit M_1 ou M_2 pour B_{IX} et M_2 pour B_{VIII}) semble bien associée à des orbites de type périodique.
- La dynamique plus proche de la singularité (i.e. plus grandes valeurs de E , soit M_3 pour B_{IX} et M_1 pour B_{VIII}) semble bien associée à des orbites plus "chahutées".

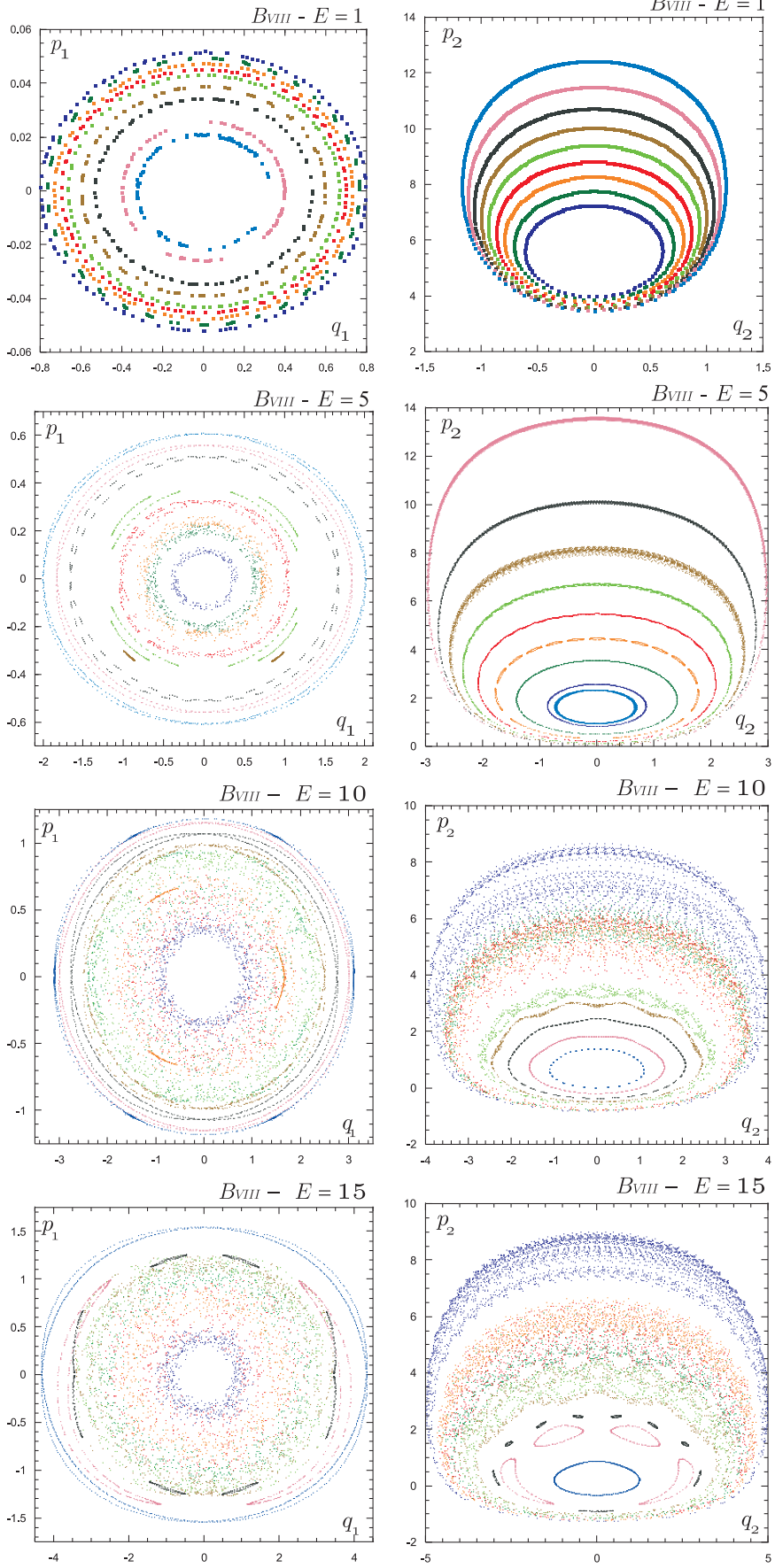
Bien que révélateurs, les portraits de phases ne sont pas adaptés pour une qualification précise de la nature chaotique des orbites d'un système, nous préférons pour ce faire utiliser des outils plus précis tels que les sections de Poincaré. Tel est l'objet de la prochaine section.

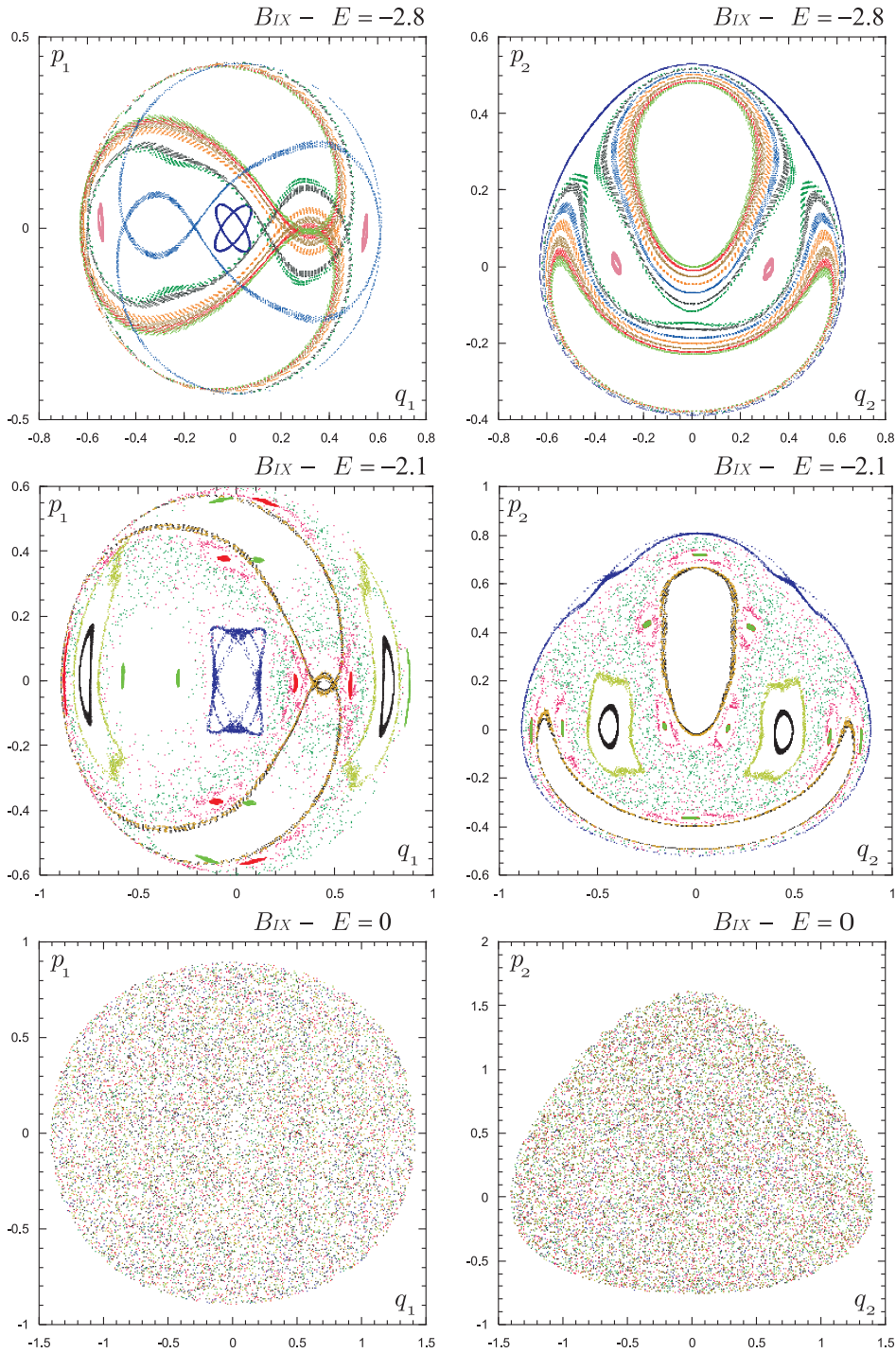
5.2.2 Étude numérique de la transition vers le chaos

Afin de préciser les éventuelles propriétés chaotiques des billards suspects intervenant dans les dynamiques B_{VIII} et B_{IX} , nous avons procédé à une analyse via des sections de Poincaré : Pour les systèmes dynamiques décrits par les équations (5.9) qui se mettent sous la forme hamiltonienne

$$i = 1, 2 \quad \begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial E}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial E}{\partial q_i} \end{cases} \quad \text{avec} \quad E = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - \xi(q_1, q_2)$$

Pour les valeurs de E de chacun des modèles M_1, M_2, M_3 de B_{IX} et M_1, M_2 de B_{VIII} (ainsi que trois intermédiaires), nous avons considéré un jeu de 9 conditions initiales réparties uniformément dans l'espace des phases du modèle et déterminé l'intersection des orbites correspondantes avec les hyperplans $\Pi_1 = \{q_1 = 0, p_1 = 0\}$ et $\Pi_2 = \{q_2 = 0, p_2 = 0\}$. Les points d'intersection se répartissent donc dans le plan (q_2, p_2) pour la coupe par Π_1 et (q_1, p_1) pour la coupe par Π_2 . Les figures correspondantes sont représentées ci-après.





Dans les deux cas la transition vers le chaos s'effectue bien alors que l'on se rapproche de la singularité ($E \nearrow$) :

- Loin de la singularité (faibles valeurs de E) les orbites sont quasi-périodiques, les intersections avec Π_1 et Π_2 sont donc des courbes dont l'épaisseur n'est due qu'aux erreurs numériques et à une trop faible résolution, ces intersections sont idéalement de mesure nulle dans le plan.
- Proche de la singularité (fortes valeurs de E) les orbites sont périodiques, les intersections ont tendance à se répartir dans des régions denses de l'espace des phases, elles ne sont plus de mesure nulle, c'est le chaos.

Notons de plus que la valeur de E correspondant à la transition chaotique théorique pour le billard B_{IX} est $E = -2,52$ (voir page 59), cette valeur est en parfait accord avec ces résultats numériques.

5.2.3 Comparaison d'attracteurs

Les équations des dynamiques B_{VIII} et B_{IX} s'écrivent dans le vide et en variable BKL de la façon suivante

$$\begin{cases} 0 &= E_c + E_p = H \\ A_1'' &= (e^{A_2} \mp e^{A_3})^2 - e^{2A_1} \\ A_2'' &= (e^{A_3} \mp e^{A_1})^2 - e^{2A_2} \\ A_3'' &= (e^{A_1} - e^{A_2})^2 - e^{2A_3} \end{cases} \quad (5.12)$$

Le signe du haut correspond à l'Univers B_{IX} alors que celui du bas représente B_{VIII} . La section précédente semble montrer que la présence du canal assure la transition vers le chaos à l'approche de la singularité dans la dynamique B_{VIII} . Nous avons déjà mis en évidence une telle propriété dans la dynamique B_{IX} , la transition étant dans ce cas assuré par la présence des coins durs. L'objectif de cette section est donc double : En utilisant les mêmes techniques que celles utilisées pour la dynamique B_{IX} dans la section 5.1.2 (e.g. [24]), nous proposons de mettre en évidence les propriétés fractales pour la dynamique B_{VIII} . Nous serons alors en mesure de comparer dynamiquement ces deux modèles à l'approche de la singularité.

Afin d'explorer une partie de l'espace des phases directement associée au canal des billards B_{VIII} et au coin dur des billards B_{IX} , nous avons choisi des conditions initiales basées sur la dynamique hamiltonienne (cf.(3.28)) :

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}_{ini} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \ln a \\ \Omega \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}_{ini} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \omega \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

La valeur initiale Ω de q_3 est déterminée par la contrainte (cf. (3.31)) $H = 0$ dans le vide. Le choix initial de (q_1, q_2) est arbitraire sans nuire à la généralité de l'approche, il se situe sur l'axe de symétrie du potentiel ξ , la forme de q_2 permet d'obtenir une valeur de Ω relativement simple :

$$H = 0 \quad \iff \quad \Omega = \frac{3}{\sqrt{6}} \ln \left(\pm \frac{a^4 (1 - \omega^2)}{2(4a^3 \mp 1)} \right)$$

Pour que la quantité dans le logarithme soit positive pour les deux types d'Univers il faut que $a < 4^{-3/2}$, nous avons choisi $a = 1/2$. Pour décrire l'approche de la singularité la variation du volume de l'Univers doit être négative, il convient donc de choisir $\omega < 0$. Une variation de θ permet de varier l'angle de la vitesse de départ dans la représentation billard, une variation de ω permet de se placer plus ou moins proche de la singularité (cf. section 5.1.1).

Nous avons vérifié qu'après une phase transitoire, toute condition initiale issue d'un couple (θ, ω) converge vers un cycle d'oscillations kasnériennes illimitées et descriptibles par des transitions de type B_{II} . En généralisant l'idée de Cornish et Lewin [24] (voir aussi notre étude section 5.1.2), nous avons pu construire un attracteur pour la dynamique B_{VIII} , en faisant varier (θ, ω) dans $[0, \pi/2] \times [-2, -3]$ sur une grille régulière 500×500 , et en stoppant la dynamique dès que $u > u_{exit} = 8$. Les cartes obtenues sont présentées sur la figure 5.10 pour la dynamique B_{VIII} et sur la figure 5.11 pour la dynamique B_{IX} .

Le caractère fractal de ces deux cartes ne fait aucun doute, les deux dynamiques sont donc chaotiques. La dépendance en θ indique que les conditions initiales dirigées vers le canal ou le coin dur correspondent à des dynamiques beaucoup plus complexes que les autres. Cette remarque confirme bien le fait que ce chaos trouve bien son origine dans les coins dur ou le canal. Une analyse plus fine de ces deux cartes peut être envisagée via le calcul de la dimension de Hausdorff (cf. (5.8)), on trouve

$$\begin{aligned}d_r &= 1.6944 \pm 7.8 \times 10^{-3} \\d_b &= 1.7034 \pm 7.9 \times 10^{-3} \\d_v &= 1.6947 \pm 10.8 \times 10^{-3}\end{aligned}$$

et une valeur moyenne pondérée par les surface de $d_m = 1.6976 \pm 8.9 \times 10^{-3}$ pour l'attracteur de la dynamique B_{VIII} et

$$\begin{aligned}d_r &= 1.7183 \pm 7.6 \times 10^{-3} \\d_b &= 1.7256 \pm 9.7 \times 10^{-3} \\d_v &= 1.6992 \pm 9.6 \times 10^{-3}\end{aligned}$$

avec une valeur moyenne pondérée par les surface de $d_m = 1.7141 \pm 8.5 \times 10^{-3}$ pour l'attracteur de la dynamique B_{IX} . L'aspect général ainsi que les deux dimensions des deux cartes étant compatibles nous pouvons sereinement en déduire une certaine équivalence entre les deux dynamiques.

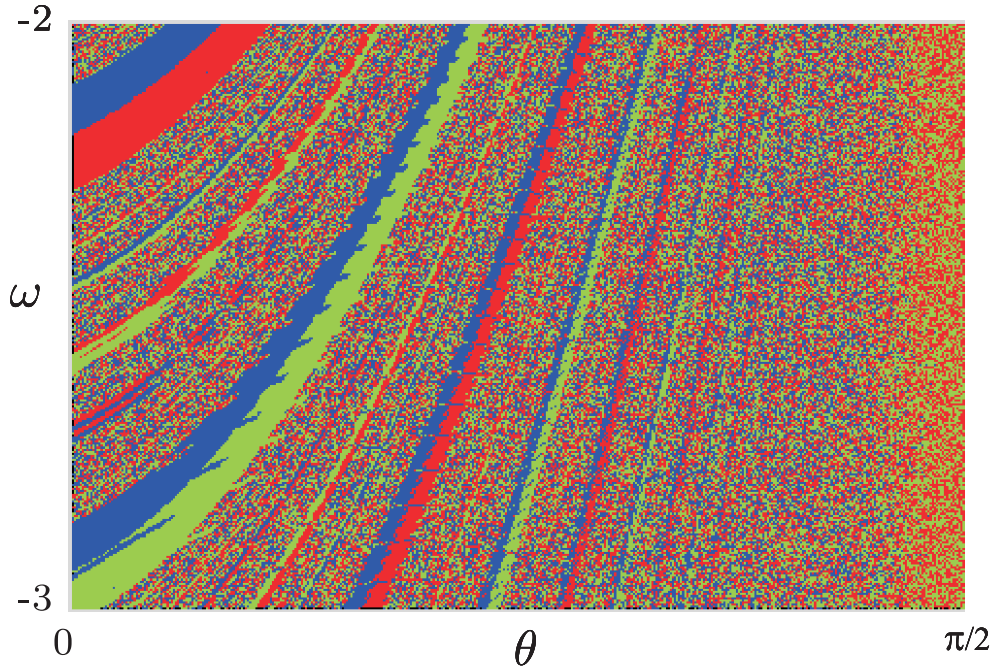


FIGURE 5.10 – Carte correspondant à la dynamique B_{VIII} vide. La représentation s'effectue dans le plan (θ, ω) découpé en une grille régulière 500×500 . Pour chaque condition initiale issue de (5.13), la dynamique est stoppée dès que $u \geq u_{\text{exit}} = 8$. Les couleurs indiquent le facteur d'échelle associé à l'indice de Kasner négatif : Rouge $\leftrightarrow A_1$, Bleu $\leftrightarrow A_2$ et Vert $\leftrightarrow A_3$.

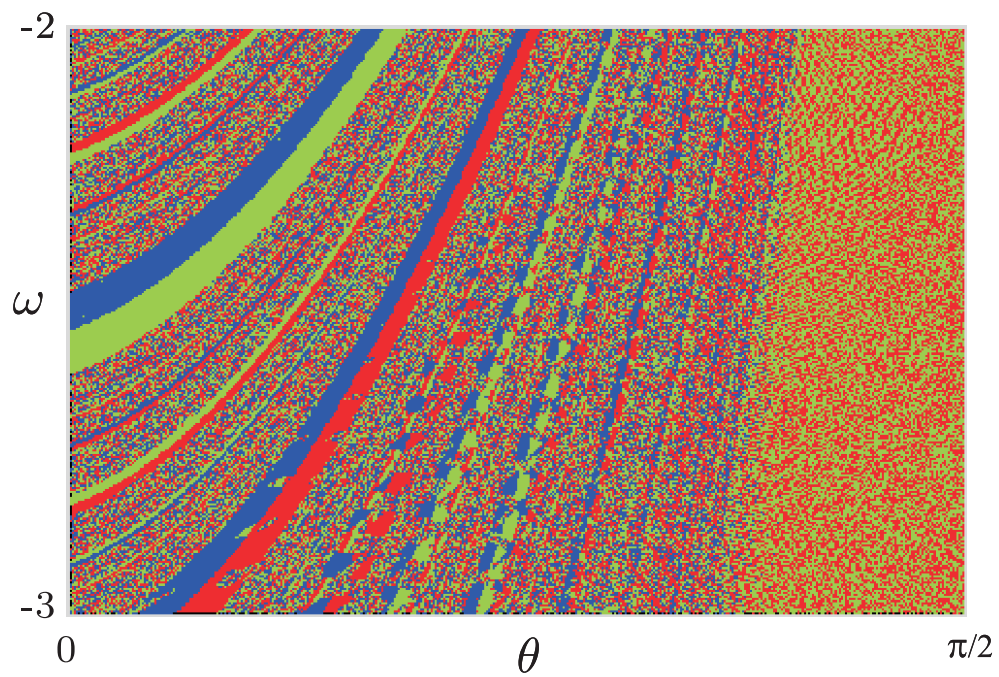


FIGURE 5.11 – Carte obtenue avec la même représentation que la Figure 5.10 mais pour la dynamique B_{IX} .

Chapitre 6

Conclusion

Dans cette première partie nous avons étudié la dynamique associée aux solutions des équations d'Einstein de la relativité générale dans le contexte d'un Univers homogène et anisotrope (Univers de Bianchi).

Nous avons dans un premier temps introduit de façon progressive trois formalismes équivalents pour ce problème : BKL, Hamiltonien et Toda généralisé. Nous nous sommes alors posés la question de l'intégrabilité des dynamiques de Bianchi de façon globale. Cette étude a permis de mettre en évidence quatre classes de dynamiques équivalentes d'un point de vue algébrique :

- Classe 1 : Univers de Bianchi I et V
- Classe 2 : Univers de Bianchi II et IV
- Classe 3 : Univers de Bianchi III, VI et VII
- Classe 4 : Univers de Bianchi VIII et IX

Ces classes sont directement reliées à la dimension des sous-espaces nilpotents de la partie symétrique du tenseur de structure du groupe des déplacements (voir tableau de la page 19). Cette remarque permet peut-être d'entrevoir une généralisation possible de ces résultats pour des espaces possédant des dimensions supplémentaires.

Le comportement général du volume des Univers de Bianchi ainsi que les dynamiques B_I et B_{II} ont alors été détaillés. Le mécanisme de la transition BKL pour la dynamique B_{IX} a été décortiqué.

Dans le formalisme hamiltonien, nous avons présenté l'analogie entre la dynamique des Univers de Bianchi et le mouvement d'une bille dans un billard à bandes mobiles. Une analyse fine du billard B_{IX} couplée à certains résultats de la théorie des systèmes dynamiques, nous a permis de mettre en évidence la vraisemblable transition vers le chaos de la dynamique B_{IX} à l'approche de la singularité.

Sur le plan numérique, nous avons repris et complété l'analyse de Cornish et Lewin sur l'existence d'un attracteur fractal pour la dynamique B_{IX} . Nous avons illustré les propriétés dynamiques envisagées pour les différents billards associés aux divers Univers de Bianchi. Nous avons finalement mis en évidence un attracteur fractal pour la dynamique B_{VIII} .

De façon générique la dynamique des Univers homogènes peut se résumer comme suit :

1. Dans le vide ou en présence de matière barotrope $0 \leq \Gamma < 2$:
 - Classe 1 : Dynamique monotone de type Kasner ;
 - Classe 2 : Transition entre 2 états de Kasner ;
 - Classe 3 : Nombre fini de transitions entre états de Kasner ;
 - Classe 4 : Infinité de transitions entre états de Kasner .

Les classes 1,2,3 sont généralement intégrables, ce qui n'est pas le cas de la classe 4, pour laquelle l'approche de la singularité ($t = 0$) est chaotique

2. En présence de matière raide $\Gamma = 2$:

Tous les modèles tendent vers la singularité ($t = 0$) de façon régulière. Cette approche n'est pas kasnérienne : Les trois facteurs d'échelle se contractent.

En l'absence de matière raide les modèles de la classe 4 fournissent une échappatoire intéressante au problème de la singularité ouverte des équations de la relativité générale : Ce n'est plus un horizon qui protège l'expérimentateur de la singularité, mais un voile chaotique.

Chapitre 7

Annexe

7.1 Quelques propriétés algébriques

Une algèbre de Lie \mathfrak{L} est un espace vectoriel muni d'un loi de composition interne $[\cdot, \cdot]$ qui possède les propriétés suivantes

- $[\cdot, \cdot]$ est bilinéaire et antisymétrique
- $[\cdot, \cdot]$ vérifie une identité de Jacobi, c'est-à-dire

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathfrak{L}^3 \quad [\alpha, [\beta, \gamma]] + [\gamma, [\alpha, \beta]] + [\beta, [\gamma, \alpha]] = 0_{\mathfrak{L}}$$

Une façon simple de caractériser une algèbre de lie est de présenter un système de racines (ou système radiciel). Pour tout $\alpha \in \mathfrak{L}$, en notant (\cdot, \cdot) le produit scalaire sur \mathfrak{L} , on définit la réflexion σ_{α} par

$$\forall \beta \in \mathfrak{L} \quad \sigma_{\alpha}(\beta) = \beta - \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$$

On dit que $R \subset \mathfrak{L} / \{0_{\mathfrak{L}}\}$ est un système radiciel de \mathfrak{L} si et seulement si

- R engendre \mathfrak{L}
- Pour tout $(\alpha, \beta) \in R^2$ on a $\sigma_{\alpha}(\beta) \in R$
- Pour tout $(\alpha, \beta) \in R^2$ on a

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$$

Les éléments de R sont appelés racines de \mathfrak{L} . Un sous-ensemble $B \subset R$ est appelé système de racines simple si et seulement si

- B est une base de \mathfrak{L}
- $\forall \beta \in R$, on peut écrire

$$\beta = \sum_{\alpha \in B} k_{\alpha}^{\beta} \alpha \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_{\alpha}^{\beta} \in \mathbb{Z}^+ \\ \text{ou} \\ k_{\alpha}^{\beta} \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$$

Les éléments de B sont appelés racines simples. Si finalement les seuls multiples de α sont $\pm\alpha$, le système est dit réduit. Pour chaque racine simple β est défini une taille (β) par la relation

$$(\beta) := \sum_{\alpha \in B} k_{\alpha}^{\beta}$$

Si $(\beta) > 0$ (resp. < 0) la racine est dite positive (resp. négative). L'ensemble des racines positives (resp. négatives) est noté R^+ (resp. R^-). On vérifie sans peine que

$$R^+ = -R^- \quad \text{et} \quad R = R^+ \cup R^-$$

Un système de racines est dit irréductible s'il ne peut s'écrire comme l'union de 2 sous ensembles orthogonaux. Un tel système est complètement déterminé par une de ses bases et correspond à une algèbre de Lie simple.

Considérons $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ une base d'un système de racines R de \mathfrak{L} . La matrice carrée C dont les éléments sont

$$\forall i, j = 1, \dots, n \quad c_{ij} := \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

est appelée matrice de Cartan de \mathfrak{L} . Les propriétés très restrictives des éléments de B font que

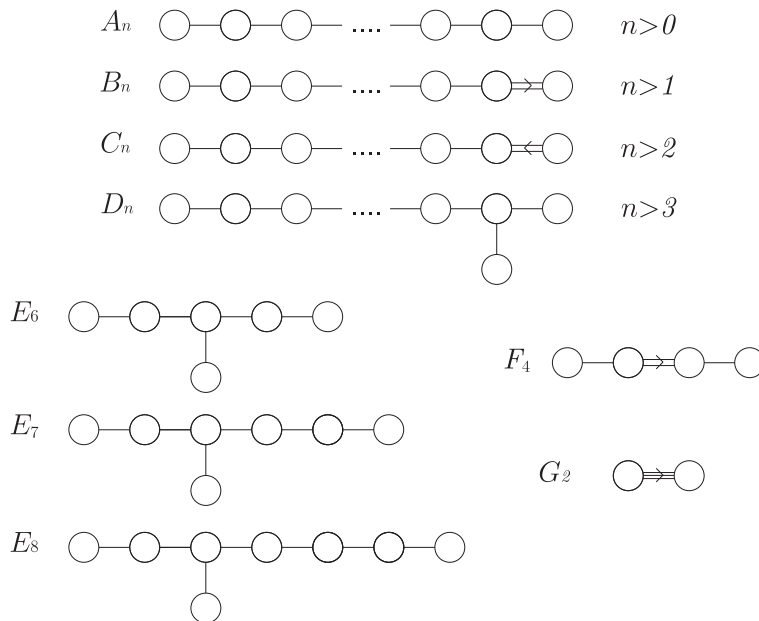
$$\text{Si } i \neq j = 1, \dots, n \quad (\widehat{\alpha_i, \alpha_j}) \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

On en déduit immédiatement que les composantes de la matrice de Cartan vérifient

$$c_{ii} = 2, \quad \text{et si } i \neq j \quad c_{ij} < 0, \quad c_{ij}c_{ji} \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Un ensemble B de racines simple et donc l'algèbre de Lie associée se représente schématiquement sous la forme d'un diagramme de Dynkin : Chaque racine représente un nœud du diagramme (représenté par un cercle). Les nœuds associés aux racines α_i et α_j sont reliés par $c_{ij}c_{ji}$ traits. Si $c_{ij}c_{ji} = 2$ ou 3 , α_i et α_j sont de tailles différentes, on superpose aux traits une flèche pointant vers la plus petite racine. Les diverses propriétés énumérées font que chaque racine au moins à une et au plus à deux autres, ces diagrammes ne présentent pas de boucles ce qui permet une représentation longiligne.

Il n'existe que 9 types d'algèbre de Lie simple, 4 potentiellement infinies et 5 cas exceptionnels. Les diagrammes de Dynkin associés sont représentés sur la figure ci dessous



Bibliographie

- [1] V. A. Belinskii, L.M. Khalatnikov, E.M. Lifshitz, Oscillatory approach to a singular point in relativistic cosmology, *Adv. Phys.*, 19,525,1970
- [2] R. Penrose, *Phys. Rev. Lett.* 14, 57 (1965); S. W. Hawking, *Phys. Rev. Lett.* 17, 444 (1966); S. W. Hawking and R. Penrose, *Proc. Roy. Soc. Lond.* A314, 529 (1970); S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973)
- [3] M.MacCallum, Anisotropic and Inhomogeneous Relativistic Cosmologies, dans [100], page 533-580
- [100] S. Hawking, W. Israel, *General relativity : an Einstein Centenary Survey*, Cambridge University Press, (1979)
- [2] C.W. Misner, Mixmaster Universe, *Phys. Rev. Lett.*, 22,1071, 1969
- [3] V. A. Belinskii, L.M. Khalatnikov, Effect of scalar and vector fields on the nature of the cosmological singularity, *Sov. Phys. JETP*, 36,591, 1973
- [4] J.D. Barrow, F.J. Tipler, Analysis of the generic singularity studies by Belinskii, Khalatnikov and Lifschitz, *Physics Reports*, 56, 371, 1979
- [5] J.D. Barrow, Chaotic behaviour in general relativity, *Physics Reports*, 85,1, 1982
- [6] D. F. Chernoff, J.D. Barrow, Chaos in the Mixmaster Universe, *Phys. Rev. Lett*, 50, 134,1983
- [7] Y. Elskens, Alternative descriptions of the discrete mixmaster Universe, *Phys. Rev. D*, 28,1033, 1983
- [8] E.M. Lifshitz, I. M. Khalatnikov, Ya. G. Sinai, K.M. Khanin, L.N. Shchur, On the stochastic properties of relativistic cosmological models near the singularity, *Sov. Phys. JETP Lett.*, 38, 91, 1983
- [9] L.M. Khalatnikov, E.M. Lifchitz, K.M. Khanin, L.N. Shchur, Ya. G. Sinai, On staochasticity in relativistic cosmology, *J. of Stat. Phys.*, 38,97,1985
- [10] T. Furusawa, A. Hosoya, Is anisotropic Kaluza-Klein Model of Universe chaotic ?, *Prog. Th. Phys.*, 73,467,1985
- [11] J. Demaret, M. Henneaux, P.Spindel, *Phys. Lett.* 164B, 27, 1985
- [12] J. Demaret, J.L. Hanquin, M. Henneaux, P.Spindel, A. Taormina, *Phys. Lett.* 175B, 129, 1986
- [13] ,Y. Elskens, M. Henneaux, Ergodic theory of the mixmaster Universe in higher space-time dimensions, *Nuclear Phys.*, B290,111,1987
- [14] Y. Elskens, M. Henneaux, Chaos in Kaluza-klein models, *Cass. Quantum Grav.*, 4, L161, 1987

- [15] Y. Elskens, Ergodic theory of the mixmaster Universe in higher space-time dimensions II, J. of stat. Phys., 48,1269,1987
- [16] G. Francisco, G.E. Matsas, Qualitative and numerical Study of Bianchi IX models, Gen. Rel. and Grav., 20,1047,1988
- [17] S.E. Rugh, Cand. Scient. Thesis, The niels Bohr Institute, 1990
- [18] B. K. Berger, Gen. Relativ. Gravit., 23, 1385, 1991
- [19] D. Hobill, D. Bernstein, D. Simkins, M. Welge, Class. Quantum Grav., 8, 1155, 1991
- [20] S.E. Rugh, Chaotic Behaviour and oscillating three-volume in B_{IX} Universes, Phys. Lett. A, 147,353,1990
- [21] S. E. Rugh, Chaos in the Einstein equations - characterization and importance, in Deterministic Chaos in General Relativity, ed. by D. Hobill, A. Burd and A. Coley, Plenum New york, 1991, [*arXiv : gr - qc 9406008*]
- [22] A. Latifi, M.Musette, R. Comte, The bianchi IX (mixmaster) cosmological model is not integrable, Phys. Rev A, 194,83,1994
- [23] G. Contopoulos, B. Gramaticos, A. Ramani, J. Phys. A, 27,5357,1994
- [24] J. P. Mimoso, D. Wands, Massless fields in scalar-tensor cosmologies , Phys. Rev. D, 51, 477, 1994
- [25] J. P. Mimoso, D. Wands, Anisotropic scalar-tensor cosmologies, Phys. Rev. D, 52, 5612, 1995
- [26] A.A. Kirilov, V.N. Melnikov, Dynamics of the metric in the vicinity of a singularity in multidimensional cosmology, Phys. Rev. D, 52, 723,1995
- [24] N.J. Cornish, J.J. Levin, Mixmaster universe : A chaotic Farey tale, Phys. Rev. D, 55, 7489, 1997
- [25] M. di Bari, P. Cipriani, The(In)stability of the bianchi IX Dynamics : The geodesic deviation equation in the Finsler space, gr-cq 9807022, Jul 1998
- [26] J. D. Barrow, M. P. Dabrowski, Is there chaos in low-energy string cosmology, Phys. Rev. D, 57, 7204, 1998
- [27] M. Weaver, J. Isenberg, B. K. Berger, Mixmaster behavior in inhomogeneous cosmological spacetimes, Phys. Rev. Lett., 80, 2984,1998
- [28] A. E. Motter, P. S. Letelier, Mixmaster chaos, [*arXiv : gr - qc 0011001*], nov 2000
- [29] T. Damour, M. Henneaux, Chaos in Superstring cosmology, Phys. Rev. Lett., 85,920,2000
- [30] T. Damour, M. Henneaux et H. Nicolai, Cosmological Billiards, Clas. Quant. Grav., 20, R145,2003[*arXiv : hep - th 0212256*]
- [31] H. Ringström, The bianchi IX attractor, Ann. Inst. H.Poincaré, 2,405, 2001[*arXiv : gr - cq 0006035*]
- [32] V.R. Gavrilov, V.D. Ivashchuk et V.N. Melnikov, Multidimensional cosmology with multicomponent perfect fluids dans toda lattices, Abstracts of the reports at the international school seminar, p66, 20-26 june 1994
- [33] V.I. Pavlov, The mixmaster cosmological problem as a pseudoeuclidian generalized toda chain, Regular and chaotic behaviour,1, 111,1996
- [34] M. Szydłowski, M. Biesiada, Kovalevski exponents and integrability properties in class A homogeneous cosmological models, Journal of non linear mathematical physics, 9,L1,2002

- [35] L.D. Landau et E.M. Lifshitz, Théorie des champs classiques, Editions Mir Moscou, Chapitre XII, 1970, ce chapitre est présent uniquement à partir de la 3^{ème} édition ...
- [36] J.Wainwright et G.E.R. Ellis, Dynamical systems in cosmology, 1997, Cambridge University Press
- [37] J.Wainwright et L. Hsu, A dynamical systems approach to Bianchi cosmologies : orthogonal models of class A, *Class. and Quant. Grav.*, 6, 1409, 1989
- [38] C. Uggla, Hamiltonian cosmology, Chapitre 10 de l'ouvrage [36], 1997
- [39] R.T. Jantzen, Spatially homogeneous dynamics : A unified picture, version reformulée et corrigée de *Proc. Int. Sch. Phys E. Fermi, Course LXXXVI (1982)*, on "Gamov Cosmology", R. Ruffini, F. Melchiorri Eds., North Holland, Amsterdam, 61-147, 1987 [*arXiv : gr - cq 0102035*]
- [40] C.W. Misner, Quantum Cosmology, *Physical Review* 186,5,1319,1969
- [41] M.P. Ryan, Qualitative cosmology : Diagramatic solutions for Bianchi Type IX Universes with expansion, Rotation and Shear. I the symmetric case, *Ann. Phys.*, 65,506,1971
- [44] L. A. Bunimovitch, Billiards and other hyperbolic systems, in *Dynamical systems Ergodic theory and applications*, ed. by J. Fröhlich, S.P. Novikov, D. Ruelle, Springer,
- [42] L. A. Bunimovitch, *Funktsional'nyl Analiz Ego Prilozheniya*, Vol. 6, N°3, p73-74, 1974
- [43] L. A. Bunimovitch, A theorem on ergodicity of two dimensional hyperbolic billiards, *Comm. Math. Phys*, 130,599,1990
- [45] L. A. Bunimovitch, Ya. G. Sinai, N.I. Chernov, Statistical properties of two dimensional hyperbolic billiards, *Russian Math. Survey*, 46,4,47,1991
- [46] A.M. Perelomov, *Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras*, Vol. 1, Springer Verlag, 1990
- [M1] E. Ott, *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University press, 1993
- [M2] L-S Young, *Ergodic theory of chaotic dynamical systems*, ?
- [M3] L. Salasnich, *Instability and chaos in spatially homogeneous field theories*, *J. of Math. Phys.*, 40,4429,1999
- [M4] R. Conte, The Painlevé approach to non linear ODE, p.77-180, dans *The Painlevé property : One century later*, CRM series in Mathematical Physics, Editeur R. Conte, Springer Verlag, 1999
- [M5] Haruo Yoshida, Necessary condition for the existence of algebraic first integrals I : Kowalevski exponents, *Celestial mechanics*, 31,363, 1983
- [M6] Haruo Yoshida, Necessary condition for the existence of algebraic first integrals II : Conditions for algebraic , *Celestial mechanics*, 31,381, 1983
- [M7] C. Scheen, *Contribution à l'étude de la dynamique de modèles cosmologiques anisotropes au voisinage de la singularité initiale*, Publication de la classe des sciences de l'académie royale de Belgique, 2001
- [M8] A. Ramani, B. Grammaticos et T. Bountis, The painlevé property and singularity analysis of integrable and non-integrable systems, *Physics reports*, 180,3,159,1989

- [B1] L. Bianchi, Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti [On three-dimensional spaces which admit a continuous group of motions], Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze, Serie Terza, vol. 11, p.267-352, 1898
- [B2] L. Bianchi, Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finite di trasformazioni [Lectures on the theory of finite continuous transformation groups (1902-1903)], Pisa, 1918, pp.550-557 traduction en anglais : General Relativity and Gravitation, 33, 2157-2170, 2001 et General Relativity and Gravitation, 33, 2171-2253, 2001

Deuxième partie

Essai de gravitation classique

Chapitre 8

Gravitation, dimension et physique statistique

8.1 La dimension de l'espace

Les sections spatiales de l'Univers dans lequel nous vivons possèdent 3 dimensions !

Voilà une affirmation profonde qui signifie que sans contrainte particulière et à chaque instant, 3 nombres sont nécessaires et suffisants pour repérer un évènement ou une quantité physique. Cette prophétie mérite tout de même une justification plus solide tant elle revêt un caractère fondateur de la physique classique. Beaucoup d'expériences courantes que l'on peut imaginer et qui auraient cet objectif sont généralement très locales (hauteur, largeur, profondeur ...) et ne prouvent généralement que la nécessité de trois grandeurs, laissant la place à un Univers plus étendu qu'il ne pourrait paraître.

Dans ce contexte, avec son statut de propriété de l'espace-temps, la gravitation est une "interaction" de choix pour ce genre d'investigation. La relativité générale et ses prédictions semblent être le cadre théorique qu'il faudrait mettre en avant pour appréhender cette question de façon universelle. Nous allons nous efforcer de montrer dans ce paragraphe qu'une analyse simple et classique de quelques objets autogravitants permet toutefois de répondre à cette question sur des échelles astronomiques. Nous verrons ensuite que c'est bel et bien à partir de 3 que le nombre de dimension pose un problème d'un point de vue gravitationnel, faut-il y voir une raison ? En 1999, avec Jean-Jacques Aly nous montrâmes qu'en dimension 2, dans le contexte de la gravitation, le traitement "habituel" de nombreux problèmes admet généralement une unique solution.

D'un point de vue classique l'interaction gravitationnelle est décrite par un champ scalaire ψ fonction de la position \mathbf{r} et du temps t . L'action de ce champ sur une particule de masse m est décrite par une énergie potentielle $U = m\psi$ de laquelle dérive la force subie par la particule $\mathbf{F} = -\text{grad}U$. Le champ ψ est créé par une densité de masse $\rho(\mathbf{r}, t)$, ces deux quantités sont reliées par l'équation de Poisson

$$\Delta_3 \psi(\mathbf{r}, t) = 4\pi G \rho(\mathbf{r}, t)$$

En écrivant cette équation sous forme intégrale, on perçoit mieux sa portée

$$\psi(\mathbf{r}, t) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = 4\pi G (g_{\Delta_3} * \rho)(\mathbf{r}, t) \quad (8.1)$$

dans cette dernière relation nous avons introduit la fonction de Green du laplacien radial de \mathbb{R}^3 ,

$$g_{\Delta_3}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}|}$$

distribution radiale solution de l'équation $\Delta_3 g_{\Delta_3} = \delta$. La forme (8.1) de l'équation de Poisson s'interprète via la théorie de l'information : supposons l'existence d'une boîte noire disposant d'une entrée E et d'une sortie S , (cf. figure 8.1)



FIGURE 8.1 – Système complexe

Il est bien connu que dans un cadre suffisamment général pour ce qui nous intéresse la sortie est le produit de convolution entre l'entrée et la réponse impulsionnelle g du système.

$$S = g * E$$

La réponse impulsionnelle d'un opérateur comme le laplacien radial est simplement sa fonction de Green. Il est donc naturel d'interpréter le champ gravitationnel ψ comme la réponse d'un certain système à l'entrée que constitue la répartition de masse ρ à l'instant t . Le système en question est associé au laplacien qui est à la fois un opérateur spatial et isotrope. Les deux facteurs présents dans l'équation (8.1) sont facilement interprétables : la constante de gravitation G fixe les unités de manière à ce que le gradient de ψ soit une force (ou U une énergie), le terme 4π est simplement la surface de la sphère dans \mathbb{R}^3 qui intervient du fait de la dépendance purement radiale de l'interaction gravitationnelle. Vu sous cet angle, la gravitation est donc un potentiel radial réponse (instantanée) de l'espace (isotrope) lorsqu'il se voit peuplé d'une répartition de masse ρ . Notons qu'il s'agit là de la dernière proposition faite par la physique classique pour décrire la gravitation. L'apport des relativités ne sera pas des moindres : non instantanéité, géométrie quelconque (pas seulement isotrope) et généralisation de la masse à l'énergie-impulsion. Il n'en demeure pas moins vrai que le lien étroit que l'on tisse entre espace et gravitation trouve ici une origine classique (assez peu connue, il est vrai ...), il n'est donc pas nécessaire d'introduire des concepts relativistes pour faire ce lien.

Ceci étant dit, la généralisation classique du champ gravitationnel dans un espace de dimension n quelconque devient claire, on aura simplement

$$\psi = G S_{n-1} g_{\Delta_n} * \rho \quad (8.2)$$

La constante de gravitation conserve a priori la même valeur, la surface S_{n-1} de la sphère de \mathbb{R}^n persiste avec l'aspect radial de l'interaction, la fonction de Green g_{Δ_n} du laplacien radial de \mathbb{R}^n est à présent la solution radiale de l'équation $\Delta_n g_{\Delta_n} = \delta$. De simples calculs donnent

$$S_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \quad \text{avec} \quad \forall z \in \mathbb{R}_*^+ \quad \Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{z-1} ds$$

et

$$\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}_*^n \quad g_{\Delta_n}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r}| & \text{si } n = 2 \\ -\frac{1}{(n-2)S_{n-1}} \frac{1}{|\mathbf{r}|^{n-2}} & \text{si } n > 2 \end{cases} \quad (8.3)$$

Revenons à notre problème de départ qui visait à fournir une sorte de preuve de notre appartenance à un Univers dont les sections spatiales sont de dimension 3. Nous allons pour cela utiliser le théorème du viriel qui dit en substance (voir par exemple [52]) : Pour un système isolé donné, d'énergie cinétique totale K , de matrice d'inertie I , si l'énergie potentielle totale est une fonction homogène de degré α des positions alors

$$2K - \alpha U = \frac{1}{2} \frac{d^2 \text{Tr}(I)}{dt^2}$$

Pour un système à l'équilibre cette relation devient donc simplement $2K - \alpha U = 0$.

Dans un espace de dimension n , la définition (8.2) et la forme (8.3) de la fonction de Green du laplacien montrent clairement que si $n > 2$, l'énergie potentielle totale d'un système autogravitant est une fonction homogène de degré $\alpha = 2 - n$. Le cas bidimensionnel est pathologique, U n'est pas homogène et le merveilleux théorème du viriel s'estompe.

Faisant l'hypothèse que certains objets autogravitants de notre Univers sont en équilibre (ce qui semble être le cas de nombreux amas globulaires et de la plupart des galaxies que l'on observe ...), en mesurant l'énergie cinétique et potentielle de ces objets (à priori, quelques photos et spectres suffisent ...) nous devrions être capables de sonder les dimensions de l'espace en divers points. Si ce dernier est de dimension 3 par exemple, nous devrions trouver une relation du genre $2K + U = 0$.

Mis à part quelques ajouts de matière noire, c'est bien le résultat obtenu par les astronomes !

8.2 Thermodynamique et gravitation en dimension 3

Il semble louable de modéliser certains systèmes autogravitants par un gaz d'étoiles. Il apparaît alors une contradiction notoire soulevée dès la fin des années 1930 par le fameux Fritz Zwicky (voir [62]), et dont les premiers éléments de réponse ne furent apportés qu'à la fin des années 1960 par Donald Lynden-Bell et sont toujours le sujet de publications.

Il est bien connu qu'un gaz habituel¹ passe d'un état d'équilibre à un autre sous l'effet des collisions entre ses constituants microscopiques. Si les constantes de temps de réaction ou d'évolution des gaz habituels sont de l'ordre de quelques secondes à quelques heures, il n'en va pas du tout de même pour les gaz autogravitants. De façon générale deux constantes de temps sont à considérer dans une modélisation de type champ moyen pour un gaz :

- Le temps dynamique ou temps de vol T_d : Il correspond au temps pendant lequel le constituant élémentaire transporte les informations dont il dispose (sa vitesse par exemple, ...) sans que celles-ci soient modifiées. Pour un gaz parfait, il s'agit par exemple du temps moyen entre deux collisions, pour un gaz autogravitant, il s'agira plutôt du temps mis

1. Nous regroupons sous ce terme mystérieux les gaz dont les composants sont, soit des molécules peu ou pas ionisées, soit des particules élémentaires. Si ces composants sont libres, on parle alors de gaz parfait classique ou quantique suivant les cas. Ces gaz peuvent devenir réels si l'on considère certaines interactions moléculaires moyennes, de type Van der Waals par exemple.

par une étoile test pour parcourir le système d'un bout à l'autre à la vitesse moyenne de ses constituants. Si l'on note $\bar{\rho}$ la densité moyenne de ce système autogravitant, on montre facilement que

$$T_d \simeq (G\bar{\rho})^{-1/2}$$

- Le temps de relaxation par collisions T_r : Il correspond au temps mis par le processus de collision pour modifier effectivement la vitesse moyenne d'un gaz. Ce temps dépend directement du nombre N de composantes du gaz. Pour un système autogravitant, le calcul (voir par exemple [9] p.187) donne

$$T_r \simeq \frac{N}{\ln N} T_d$$

Le paradoxe de Zwicky est donc le suivant : Pour un amas globulaire on a typiquement un temps dynamique de quelques dizaines de millions d'années pour quelques dizaines de milliers d'étoiles, pour une galaxie quelques centaines de millions d'années pour quelques dizaines de milliards d'étoiles. Comment expliquer dans ces conditions l'état d'équilibre apparent dans lequel nous observons ces différents objets ?

Compte-tenu de leur ages, quelques milliards d'années tout au plus, ce ne sont certainement pas les collisions qui permettent aux amas globulaires ou aux galaxies d'arborer des caractéristiques aussi calmes et régulières. Au lieu de chercher une cause locale pour cet équilibre, D. Lynden-Bell eût l'idée en 1967 (voir [36]) d'invoquer un processus collectif qui demeure connu sous le nom de relaxation violente.

Comme dans tout problème de thermodynamique on caractérise le système par sa fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. L'argument de base contenu dans la théorie de la relaxation violente repose sur l'idée que la fonction de distribution d'équilibre $f_o(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ du système correspond à un problème d'optimisation : On cherche la fonction qui maximise l'entropie

$$S[f] = - \int f \ln[f] \, d\mathbf{r}d\mathbf{p}$$

sous la contrainte de la double conservation de l'énergie totale et du nombre de particules

$$\begin{aligned} N[f] &:= \int f \, d\mathbf{r}d\mathbf{p} = \mathcal{N} = cste \\ H[f] &:= \frac{1}{2m} \int \mathbf{p}^2 f \, d\mathbf{r}d\mathbf{p} + \frac{m^2}{2} \int f \psi(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}d\mathbf{p} = \mathcal{E} = cste \end{aligned}$$

Comme l'explique Lynden-Bell dans son fameux article, la prise en compte d'une énergie potentielle nous met en présence d'un gaz non parfait. La singularité $r = 0$ de la gravitation vient jouer le rôle d'un principe d'exclusion de Pauli classique, W. C. Saslaw(voir [55]) invente même le terme de grexons pour qualifier les particules de ce gaz autogravitant. Dans ce contexte, il n'est donc pas étonnant de trouver comme solution à ce problème d'extremum une fonction de distribution de type Fermi-Dirac

$$f_o = \frac{\lambda_{\mathcal{N}}}{e^{E/\sigma^2} + 1}$$

les constantes $\lambda_{\mathcal{N}}$ et σ^2 sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux deux contraintes de conservation, la quantité $E(\mathbf{r}, \mathbf{p}) := \mathbf{p}^2/2m + m\psi(\mathbf{r})$ est simplement l'énergie moyenne par

particule². Dans les cas de faible dégénérescence (qui correspond au contexte des amas globulaires et des galaxies), on retrouve la non moins fameuse distribution de Maxwell-Boltzmann (en adaptant la constante $\lambda_{\mathcal{N}}$ en un ν_o plus explicite ...)

$$f_o = (2\pi m\sigma^2)^{-3/2} \nu_o e^{-E/\sigma^2}$$

On peut alors calculer la densité de masse d'équilibre ρ_o en fonction du potentiel gravitationnel d'équilibre ψ_o

$$\rho_o := m \int f_o \, d\mathbf{p} = m\nu_o e^{-\psi_o/\sigma^2}$$

L'équation de Poisson s'écrit donc à l'équilibre

$$\Delta_3 \psi_o(\mathbf{r}) = 4\pi G m \nu_o e^{-\psi_o(\mathbf{r})/\sigma^2}$$

Les solutions de ce problème sont radiales, ce n'est pas le moindre des résultats de l'article [48]. Une analyse plus détaillée permet d'obtenir le comportement asymptotique ($r \rightarrow +\infty$) de ces solutions on trouve

$$\begin{aligned} \psi_o(r) &\sim 2\sigma^2 \ln(r/r_c) && \text{avec } r_c = 3\sigma (4\pi G m \nu_o)^{-1/2} \\ \text{soit } \rho_o(r) &\sim r^{-2} \end{aligned}$$

L'intégration dans \mathbb{R}^3 tout entier de cette densité conduit à une divergence du nombre de particule!

Le résultat du calcul de Lynden-Bell est donc incompatible avec ses hypothèses ($\mathcal{N} < \infty$).

On retrouve ce genre de pathologie dès que la dimension n de l'espace est au moins égale à 3. Bien que l'on dispose dans ce cas précis d'un théorème du viriel issu d'une modélisation de champ moyen, l'état d'équilibre d'un système autogravitant plus que bidimensionnel n'est pas issu d'une thermodynamique "classique".

On pourrait bien sur placer le système dans une boîte et trouver un long argumentaire en faveur de cette pratique, nous ne le ferons pas ici³.

Restait à étudier le cas de la dimension 2 pour laquelle nous ne disposons pas d'un théorème du viriel. C'est ce que nous avons fait dans l'article ci-après : Le résultat est probant. Pour $n = 2$, le problème standard de physique statistique "Trouver f qui réalise un maximum de l'entropie en conservant le nombre et l'énergie des particules" admet une solution unique. Il est à noter que ce résultat n'est plus vrai si l'on rajoute la contrainte de la conservation du moment cinétique. Pour résumer nous dirons

- Si $n = 2$ - La physique statistique standard est prédictive pour décrire l'état d'équilibre d'un système auto-gravitant, mais cet état n'est pas du ressort du théorème du viriel.
- Si $n \geq 2$ - La physique statistique standard n'est plus prédictive pour décrire l'état d'équilibre d'un système auto-gravitant, par contre cet état s'il existe est décrit par un théorème du viriel. Pour les amas globulaires et certaines galaxies ce théorème est d'ailleurs plus ou moins vérifié par les observations qui confirment que dans ces régions, les sections spatiales de l'Univers sont de dimension 3.

2. Dans cette modélisation "à la Vlasov" toutes les particules ont la même masse m .

3. L'introduction de cette boîte permet d'obtenir de très beaux résultats comme l'instabilité d'Antonov [6], ou de constater l'existence d'extrema locaux pour l'entropie, mais ceci est pour le moins une autre histoire ...

Thermodynamics of a two-dimensional unbounded self-gravitating system

Jean-Jacques Aly, Jérôme Perez

Physical Review E, 60.5185, 1999

Abstract

The thermodynamics of a two-dimensional self-gravitating system occupying the whole plane is considered in the mean-field approximation. First, it is proven that, if the number N of particles and the total energy E are imposed as the only external constraints, then the entropy admits the least upper bound $S_+(N, E) = 2E/N + N \ln(e\pi^2)$ (in appropriate units). Moreover, there does exist a unique state of maximum entropy, which is characterized by a Maxwellian distribution function with a temperature $T = N/2$ independent of E . Next, it is shown that, if the total angular momentum J is imposed as a further constraint, the largest possible value of the entropy does not change, and there is no admissible state of maximum entropy, but in the case $J = 0$. Finally, some inequalities satisfied by a class of so-called H functions and related generalized entropies are given.

8.3 Introduction

The problem of the mean-field thermodynamics of a two-dimensional self-gravitating system confined inside a bounded plane domain D has been considered by Katz & Lynden-Bell[32] and more recently by Aly[3] (Paper I hereafter). In this last paper, it was shown in particular that the Boltzmann entropy of an isolated system constituted of N particles and having an energy E , is bounded from above by a number $S^*(N, E)$ independent of D . Moreover, it was proven that, at least when D is a disk, the maximum of the entropy is reached by only one distribution function, which is naturally of Maxwellian type. Then the system admits a unique thermodynamically stable equilibrium state.

The main purpose of this paper is twofold. First, we want to extend the results quoted above to an unconfined – i.e., occupying the whole plane \mathbf{R}^2 – isolated system of N particles having a prescribed energy E . Secondly, we want to discuss how the equilibrium state is affected when the total angular momentum J is imposed as a further constraint. Fixing the value of J is certainly natural, as angular momentum is a constant of motion for an unconfined system whose evolution is governed by any one of the classical kinetic equations (J is also conserved when the system is confined inside a disk; in that case, the constraint $J = 0$ was assumed in Ref. [1] and in Paper I).

The paper is organized as follows. The problems we want to solve are given a precise mathematical formulation in Sec. 2. The existence of an entropy maximum and that of an entropy maximizer are discussed in Secs 3 and 4 when N and E , and N , E and J , respectively, are imposed to take fixed values. Finally, the bound derived in Sec. 3 for the Boltzmann entropy is shown in Sec. 5 to imply upper bounds for a class of so-called H -functions and related generalized entropies[53, 59].

8.4 Statement of the problems

8.4.1 Assumptions and important physical quantities

We consider a two-dimensional self-gravitating system constituted of particles of mass m occupying the whole plane \mathbf{R}^2 . We work with dimensionless variables, the units of length, velocity and mass being taken to be, respectively, L_0 (an arbitrarily chosen quantity), $V_0 := (Gm)^{1/2}$ (with G the two-dimensional gravitational constant) and $M_0 := m$.

A state of the system is assumed to be entirely described by the one-particle distribution function $f(\mathbf{w})$ [unit $f_0 := (L_0V_0)^{-2}$] defined over the phase space $\mathbf{R}^4 = \{\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \mathbf{v})\}$, where \mathbf{x} and \mathbf{v} denote the position and the velocity of a particle in a Galilean frame of origin O . $f(\mathbf{w})$ gives the density of particles in the phase-space, while

$$n(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \, d\mathbf{v} \quad (8.4)$$

gives the particle density in the physical space [an integral with respect to $d\mathbf{w}$ (resp., $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{v}$) is taken over the whole \mathbf{R}^4 (resp., \mathbf{R}^2)]. Without loss of generality, we impose O to coincide with the center of mass of the system, i.e., we assume that

$$\int n(\mathbf{x})\mathbf{x} \, d\mathbf{x} = 0. \quad (8.5)$$

f generates the mean gravitational potential (unit $\psi_0 := V_0^2 = Gm$)

$$\psi(\mathbf{x}) := 2 \int \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| f(\mathbf{w}') \, d\mathbf{w}' = 2 \int \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| n(\mathbf{x}') \, d\mathbf{x}'. \quad (8.6)$$

A choice of gauge is implicit in this relation : the potential created by a particle is taken to vanish at a unit distance. Of course, ψ satisfies Poisson equation

$$\nabla^2 \psi = 4\pi n = 4\pi \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \, d\mathbf{v}. \quad (8.7)$$

>From f , we can compute the following global quantities :

— *Number of particles* :

$$N[f] := \int f(\mathbf{w}) \, d\mathbf{w} = \int n(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (8.8)$$

— *Energy* (unit $E_0 := M_0V_0^2 = Gm^2$) :

$$E[f] := \frac{1}{2} \int v^2 f(\mathbf{w}) \, d\mathbf{w} + \frac{1}{2} \int f(\mathbf{w}) \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{w} \quad (8.9)$$

$$= \frac{1}{2} \int v^2 f(\mathbf{w}) \, d\mathbf{w} + \frac{1}{2} \int n(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad (8.10)$$

where the first term in each of the two last members represents the kinetic energy $E_c[f]$ and the second one the potential energy $E_p[f] = E_p[n]$.

— *Angular momentum with respect to the center of mass* (unit $M_0V_0L_0$) :

$$J[f] = \int r v_\phi f(\mathbf{w}) \, d\mathbf{w},$$

where we have used polar coordinates (r, ϕ) .

— *Boltzmann entropy* (unit $S_0 := k_b$, Boltzmann constant) :

$$S[f] := - \int f(\mathbf{w}) \ln[f(\mathbf{w})] \, d\mathbf{w}. \quad (8.11)$$

8.4.2 The problems

We are interested in this paper in determining the stable equilibria – i.e., the maximum entropy states – to which an isolated collisional system should relax when it evolves by conserving its number N of particles, its energy E and possibly its angular momentum J . We thus need to consider the two following problems :

- Consider the set $\mathcal{G}(N, E)$ of all the distribution functions which have well-defined kinetic energy, potential energy and entropy, and a given number N of particles and a given energy E . Is there among them one for which the entropy is a global maximum ?
- Consider the subset $\mathcal{G}(N, E, J)$ of $\mathcal{G}(N, E)$ constituted of all the functions having a well defined angular momentum equal to J . Is there among them one for which the entropy is a global maximum ?

8.5 Upper bounds on the entropy maximizer in $\mathcal{G}(N, E)$

8.5.1 The case of a bounded system

For a system confined in a bounded domain $D \subset \mathbf{R}^2$, it is proven in Paper I that the entropy is bounded from above in the set $\mathcal{G}(D, N, E)$ containing the functions of $\mathcal{G}(N, E)$ vanishing for $\mathbf{x} \notin D$, with

$$S^+(D, N, E) := \sup_{f \in \mathcal{G}(D, N, E)} S[f] \leq \frac{2E}{N} + N \ln(e\pi^2) =: S^*(N, E). \quad (8.12)$$

[Eq. (8.12) is given in Paper I as Eq. (5.9), but without proof. Owing to its importance here, we indicate in Appendix A how it can be derived].

Moreover, it is shown therein that there is a unique entropy maximizer f_R^+ when D is a disk of radius R and area $V = \pi R^2$, f_R^+ and its potential ψ_R^+ being given respectively by

$$f_R^+ = \frac{N\beta}{\pi^2 R^2} \frac{(2 - \beta N)}{[(2 - \beta N) + \beta N r^2 / R^2]^2} e^{-\beta v^2 / 2}, \quad (8.13)$$

and

$$\psi_R^+ = 2N \ln R + \frac{2}{\beta} \ln \left[\frac{2 - \beta N}{2} + \frac{\beta N}{2} \frac{r^2}{R^2} \right], \quad (8.14)$$

where $\beta(N, E, V) < 2/N$ is the unique solution to the equation

$$E = \frac{N^2}{2} \left[\ln \frac{V}{\pi} + \frac{4}{\beta N} + \left(\frac{2}{\beta N} \right)^2 \ln \left(1 - \frac{\beta N}{2} \right) \right]. \quad (8.15)$$

8.5.2 Upper bound on the entropy

Inequality (8.12) has the remarkable property that its RHS does not depend on the particular domain D under consideration. This suggests that the entropy of an unconfined plane system having N particles and an energy E should also admit $S^*(N, E)$ as an upper bound. That this is the case can be seen as follows.

Consider an arbitrary function f in $\mathcal{G}(N, E)$, and define $f_k = f$ for $r \leq k$, $k \in \mathbf{N}$, and $f_k = 0$ for $k < r$. We can apply Eq. (8.12) to f_k , which characterizes a system having N_k ($\leq N$) particles, and well defined energy and entropy. Then we get the seeked inequality

$$S[f] \leq S^+(N, E) := \sup_{\mathcal{G}(N, E)} S[f] \leq \frac{2E}{N} + N \ln(e\pi^2) \quad (8.16)$$

by taking the limit $k \rightarrow \infty$ and by applying a standard convergence theorem.

8.5.3 Existence of an entropy maximizer

Next we show the existence of an entropy maximizer, i.e., of a function f^+ such that

$$S[f^+] = S^+(N, E). \quad (8.17)$$

For that, we consider the formal Euler-Lagrange equation associated with our maximization problem and construct a particular solution to it belonging to $\mathcal{G}(N, E)$. Then we check a posteriori that the latter satisfies Eq. (8.17).

A solution to Euler-Lagrange equation is of the standard form

$$f^+ = e^{-\alpha - \beta(v^2/2 + \psi^+)}, \quad (8.18)$$

where α and β are Lagrange multipliers relative to the particles number and energy constraints, respectively, and the potential ψ^+ of f^+ satisfies Poisson equation

$$\nabla^2 \psi^+ = \frac{8\pi^2}{\beta} e^{-\alpha - \beta\psi^+}. \quad (8.19)$$

The latter can be solved easily if we restrict our attention to circularly symmetric solutions, in which case we get the well known expression

$$\beta\psi^+ = 2 \ln \left(\lambda^2 + \frac{\pi^2 e^{-\alpha}}{\lambda^2} r^2 \right),$$

where $r = |\mathbf{x}|$ and λ^2 is an arbitrary positive constant.

The values of the three parameters α , β and λ^2 can be fixed in such a way that f^+ belongs to $\mathcal{G}(N, E)$ and that the gauge condition of Sec. 2 is fulfilled by ψ^+ . Indeed :

— The condition $N[f] = N$ gives

$$N = \frac{\lambda^2}{\pi^2} \int \frac{e^{-\beta v^2/2}}{(r^2 + \lambda^2)^2} d\mathbf{w} = \frac{2}{\beta}.$$

Whence

$$\beta = \frac{2}{N},$$

and

$$\psi^+ = N \ln(\lambda^2 + r^2), \quad (8.20)$$

$$f^+ = \frac{\lambda^2}{\pi^2} \frac{e^{-v^2/N}}{(\lambda^2 + r^2)^2}. \quad (8.21)$$

— After some straightforward algebra, the kinetic, potential and total energies of the function f^+ given by Eq. (8.21) are found to be given, respectively, by

$$\begin{aligned} E_c[f^+] &= \frac{N^2}{2}, \\ E_p[f^+] &= \frac{N^2}{2}(1 + \ln \lambda^2), \\ E[f^+] &= E_c[f] + E_p[f] = \frac{N^2}{2}(2 + \ln \lambda^2). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Then the condition $E[f^+] = E$ is satisfied by taking

$$\lambda^2 = e^{2(E-N^2)/N^2}. \quad (8.23)$$

— $\beta\psi^+$ has the asymptotic behaviour

$$\beta\psi^+ \simeq_{r \rightarrow \infty} 4 \ln r + 2 \ln \frac{\pi^2 e^{-\alpha}}{\lambda^2} + \frac{2\lambda^4}{\pi^2 e^{-\alpha} r^2} + \dots$$

Our gauge condition on the gravitational potential imposes the vanishing of the constant term, which gives

$$\pi^2 e^{-\alpha} = \lambda^2.$$

Therefore the Euler-Lagrange equation admits a unique circularly symmetric solution in $\mathcal{G}(N, E)$. It is given by

$$f^+ = \frac{e^{2(E-N^2)/N^2}}{\pi^2} \frac{e^{-v^2/N}}{(e^{2(E-N^2)/N^2} + r^2)^2} \quad (8.24)$$

and generates the potential

$$\psi^+ = N \ln \left(e^{2(E-N^2)/N^2} + r^2 \right).$$

We remark that : (i) Our construction shows that the set $\mathcal{G}(N, E)$ is nonempty whichever be the values of N and E . (ii) f^+ and ψ^+ are the limits when $R \rightarrow \infty$ of the functions f_R^+ and ψ_R^+ given by Eq. (8.13) and (8.14), respectively. For E and N fixed, Eq. (8.15) shows indeed that

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} (\beta N) &= 2, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} [(2 - \beta N) \ln R] &= 0, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} [(2 - \beta N) R^2 / 2] &= e^{2(E-N^2)/N^2}, \end{aligned} \quad (8.25)$$

which implies for $R \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \psi_R^+ &= N \left[-\frac{(2 - \beta N) \ln R}{\beta N} + \frac{2}{\beta N} \ln \left(\frac{2 - \beta N}{2} R^2 + \frac{\beta N}{2} r^2 \right) \right] \\ &\rightarrow N \ln \left(e^{2(E-N^2)/N^2} + r^2 \right) = \psi^+, \\ f_R^+ &= \frac{\beta N}{2\pi^2} \frac{(2 - \beta N) R^2 / 2}{[(2 - \beta N) R^2 / 2 + (\beta N / 2) r^2]^2} e^{-\beta v^2 / 2} \\ &\rightarrow \frac{1}{\pi^2} \frac{e^{2(E-N^2)/N^2}}{e^{2(E-N^2)/N^2} + r^2} e^{-v^2/N} = f^+. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Consider now the entropy of f^+ . A short calculation gives

$$S[f^+] = \frac{2E}{N} + N \ln(e\pi^2). \quad (8.27)$$

Comparing Eqs (8.27) and (8.16), we see at once that f^+ has the largest possible value allowed by the latter equation. Therefore,

$$S[f^+] = S^+(N, E) = \frac{2E}{N} + N \ln(e\pi^2), \quad (8.28)$$

and f^+ maximizes the entropy over $\mathcal{G}(N, E)$.

8.5.4 Uniqueness of the entropy maximizer

The argument above gives a particular maximizer f^+ , and the next question which needs to be addressed is that of the existence of other entropy maximizers. To discuss this problem, we first note that any maximizer needs to satisfy the Euler-Lagrange equation of our problem (see the discussion in [5]). Therefore, it is clear from the arguments above that f^+ is the only circularly symmetric maximizer. On the other hand, nonsymmetric maximizers do not exist. This can be proven by noting that the associated potential should be a solution to Eq. (8.19) and by applying to the latter the following result[19, 33] : *Any solution u to the equation*

$$\nabla^2 u = e^{-u} \quad \text{in } \mathbf{R}^2 \quad (8.29)$$

which satisfies the condition

$$\int e^{-u} \, d\mathbf{r} < \infty \quad (8.30)$$

is necessarily circularly symmetric.

To summarize this section, we can assert that, among the states of a system having prescribed values of the number of particles and energy, there is one and only one which maximizes entropy. The associated distribution function, given by Eq. (8.24), is a Maxwellian at the temperature

$$T = \beta^{-1} = N/2, \quad (8.31)$$

or, in dimensional form,

$$T = \frac{Gm^2 N}{2k_b}. \quad (8.32)$$

It is remarkable that this value is independent of the energy.

It should be noted that the existence of a unique temperature at which an equilibrium can exist can also be established by using virial-type relations (see Paper I, Appendix C, for an expression of the virial theorem for a gravitational system confined in a bounded domain, which strongly suggests at first sight that the relation $2T = N$ should hold indeed for a system occupying the whole plane; and Ref. [7] for a virial-type relation valid for an unconfined two-dimensional non-neutral plasma – a system which has strong formal connections with the one considered here).

8.6 Upper bounds on the entropy and nonexistence of an entropy maximizer in $\mathcal{G}(N, E, J)$

We now reconsider the previous problem in the set of admissible functions $\mathcal{G}(N, E, J)$. As

$$\mathcal{G}(N, E, J) \subset \mathcal{G}(N, E), \quad (8.33)$$

entropy is also bounded from above on $\mathcal{G}(N, E, J)$, with

$$S^+(N, E, J) := \sup_{\mathcal{G}(N, E, J)} S[f] \leq S^+(N, E) := \sup_{\mathcal{G}(N, E)} S[f]. \quad (8.34)$$

Let us determine the value of the least upper bound $S^+(N, E, J)$.

We first introduce the particular distribution function f_R defined as follows :

- f_R has the same number density n as the function given by Eq. (8.21), where we take λ to be a free parameter ; therefore, f_R has N particles and a potential energy [see Eq. (8.22)]

$$E_p[f_R] = \frac{N^2}{2} [1 + \ln \lambda^2],$$

and the particles contained inside the disk $B_R := \{r < R\}$ of radius R have a moment of inertia

$$\begin{aligned} I_R[f_R] &:= \int_{B_R \times \mathbf{R}^2} r^2 f_R d\mathbf{w} \\ &= N\lambda^2 \left\{ \ln \frac{\lambda^2 + R^2}{\lambda^2} - \frac{R^2}{\lambda^2 + R^2} \right\} =: I(R, \lambda) \end{aligned}$$

with respect to O .

- Outside B_R , f_R is a Maxwellian with an inverse temperature $\beta > 0$. Inside B_R , it is a Maxwellian with the same β when viewed in a frame rotating at the angular velocity

$$\Omega := \frac{J}{I(R, \lambda)}.$$

Setting $\Omega(r) := \Omega\Theta(R - r)$ (with Θ the usual Heavyside step-function) we thus have

$$f_R(r, v_r, v_\phi) := \frac{N\beta\lambda^2}{2\pi^2} \frac{1}{(r^2 + \lambda^2)^2} e^{-\beta[v_r^2 + (v_\phi - r\Omega(r))^2]/2}.$$

Then the angular momentum of f_R is equal to J , and its kinetic energy is given by

$$E_c[f_R] = \frac{N}{\beta} + \frac{J^2}{2I(R, \lambda)}.$$

- The values of λ and β are fixed in such a way that

$$E[f_R] = \frac{N}{\beta} + \frac{J^2}{2I_R[f_R]} + \frac{N^2}{2} [1 + \ln \lambda^2] = E.$$

As for λ , we take the value given by Eq. (8.23), which is independant of R . Thus we need to choose β in such a way that

$$\frac{\beta N}{2} = \frac{N^2}{N^2 - J^2/I(R, \lambda)},$$

which is possible if R is large enough for having $N^2 > J^2/I(R, \lambda)$ [note that $I(R, \lambda) \rightarrow \infty$ when $R \rightarrow \infty$].

Our function f_R thus belongs to $\mathcal{G}(N, E, J)$ – which appears to be nonempty for any choices of N , E and J . Its entropy is related to that of the maximizer f^+ in $\mathcal{G}(N, E)$ by

$$\begin{aligned} S[f_R] &= S[f^+] - N \ln \frac{\beta N}{2} \\ &= S^+(N, E) - N \ln \frac{N^2}{N^2 - J^2/I(R, \lambda)} \\ &\leq S^+(N, E, J) \leq S^+(N, E), \end{aligned}$$

where we have made use of Eq. (8.34) to write the last inequality. If we take the limit $R \rightarrow \infty$, we thus have

$$\lim_{R \rightarrow \infty} S[f_R] = S^+(N, E) \leq S^+(N, E, J) \leq S^+(N, E),$$

whence

$$S^+(N, E, J) = S^+(N, E). \quad (8.35)$$

Adding the angular momentum constraint does not change the least upper bound on the entropy!

Let us then suppose that there is a function $f_1^+ \in \mathcal{G}(N, E, J)$ which maximises the entropy. The result above implies that it also maximizes the entropy in $\mathcal{G}(N, E)$. But we know by the results of Sec. 3 that there is only one maximizer in $\mathcal{G}(N, E)$, f^+ , and the latter has zero angular momentum. Then, but for the case where $J = 0$, the problem of maximizing entropy in $\mathcal{G}(N, E, J)$ has no solutions belonging to that set. Clearly, what happens here is that the angular momentum constraint is “lost at infinity” in the process of entropy maximization.

The nonexistence of an entropy maximizer – but not the equality (8.35) – can also be deduced by the following argument. If a maximizer f_1^+ existed in $\mathcal{G}(N, E, J)$, it would be related to its potential ψ_1^+ by

$$f_1^+ = e^{-\alpha - \beta[v_r^2/2 + (v_\phi - r\omega)^2/2 + \psi_1^+ - \omega^2 r^2/2]},$$

which can be derived by the same standard techniques as Eq. (8.18), α , β and $\beta\omega$ being the Lagrange multipliers associated with the N , E and J -constraints. But clearly such an equation cannot have any solution of finite mass owing to the exponentially growing factor $e^{\beta\omega^2 r^2/2}$ present in its RHS (we have $\beta > 0$ as a consequence of the kinetic energy being positive).

Note that an argument quite similar to the one reported here, although not presented in a completely formalized way, has been previously applied to three-dimensional systems[4].

8.7 Upper bounds on H -functions and generalized entropies

H -functions have been introduced in gravitational physics by Tremaine et al.[58] as a useful tool for studying the phenomenon of violent relaxation suggested by Lynden-Bell[36]. For future reference, we show here that the upper bound on the entropy derived above implies at once the existence of a non-trivial upper bound on a large class of H -functions of two-dimensional systems.

8.7.1 Definitions

If $C(f)$ is a convex function such that $C(0) = 0$, the functional

$$H_C[f] := - \int C[f(\mathbf{w})] \, d\mathbf{w} \quad (8.36)$$

is called an “ H -function”[58]. For instance, the quantities

$$H_q[f] := - \int f^q \, d\mathbf{w} \quad (8.37)$$

are H -functions for any real number $q > 1$ [$C(f) = f^q$]. Related to them are the so-called Renyi’s and Tsallis’s q -entropies, defined respectively by[53]

$$S_{rq} = - \frac{N}{q-1} \ln \frac{|H_q[f]|}{N}, \quad (8.38)$$

and[59]

$$S_{tq} = - \frac{|H_q[f]| - N}{q-1}. \quad (8.39)$$

Both quantities reduce to Boltzmann’s entropy (8.11) when $q \rightarrow 1^+$:

$$\lim_{q \rightarrow 1^+} S_{rq}[f] = \lim_{q \rightarrow 1^+} S_{tq}[f] = - \int f \ln f \, d\mathbf{w} = S[f]. \quad (8.40)$$

8.7.2 Upper bounds on H_q , S_{rq} , S_{tq}

Using the inequality (valid for $x, y \geq 0$) : $x \ln(x/y) \geq (x - y)$, which is an immediate consequence of the convexity of the function f defined by $f(x) = x \ln x$ for $x > 0$ and $f(0) = 0$, we obtain

$$\int \frac{f}{N} \ln \frac{f/N}{f^q/|H_q[f]|} \, d\mathbf{w} \geq 0. \quad (8.41)$$

Combining this relation with Eq. (8.16), we obtain for any f in $\mathcal{G}(N, E)$

$$S_{rq}[f] = - \frac{N}{q-1} \ln \frac{|H_q[f]|}{N} \leq S[f] \leq \frac{2E}{N} + N \ln(e\pi^2), \quad (8.42)$$

whence

$$H_q[f] \leq - \frac{N}{(e\pi^2)^{(q-1)}} e^{-2(q-1)E/N^2} < 0, \quad (8.43)$$

and

$$S_{tq}[f] \leq - \frac{N}{q-1} \left[\frac{e^{-2(q-1)E/N^2}}{(e\pi^2)^{(q-1)}} - 1 \right] < \frac{N}{q-1}. \quad (8.44)$$

Then all the quantities H_q , S_{rq} and S_{tq} admit upper bounds over $\mathcal{G}(N, E)$. It must be noted that the boundedness of H_q is nothing but surprising, as H_q is the integral of a nonpositive function. What is more important regarding this quantity is that it admits a strictly negative upper bound.

The bound on $H_q[f]$ implies at once that

$$H_C[f] \leq aH_q[f] \leq -\frac{aN}{(e\pi^2)^{(q-1)}} e^{-2(q-1)E/N^2} < 0 \quad (8.45)$$

for any H -function associated to a C such that, for some constants $a > 0$ and $q > 1$,

$$\forall s \geq 0 : \quad as^q \leq C(s). \quad (8.46)$$

This provides us with a nontrivial upper bound for a fairly large class of H -functions.

8.8 Conclusion

Let us summarize and briefly comment the results which have been obtained in this paper :

- Boltzmann entropy is bounded from above over the set $\mathcal{G}(N, E)$ of all the distribution functions having a given number N of particles and a given energy E . The maximum of the entropy is reached for only one distribution function, which is a Maxwellian at a temperature $Gm^2N/2k_b$. It should be noted that a similar result holds true in exact statistical mechanics : in the microcanonical ensemble, the temperature of a system characterized by N , E and $J = 0$ can be shown indeed to be given by

$$k_bT = \frac{N - 3/2}{N - 1} \frac{Gm^2N}{2}.$$

- The argument leading to the previous conclusion also shows that there is no equilibrium state for a system in contact with a thermostat, but if the temperature of the latter takes the peculiar value recalled above. This is in contrast with the case of a confined system, for which equilibria were found in Paper I to exist for any temperature $T > Gm^2N/2k_b$. But it is in accordance with the non-existence of the statistical mechanics canonical ensemble for an unconfined system.
- The upper bound on the entropy is not changed if a further constraint fixing the total angular momentum J of the system is imposed. When $J \neq 0$, there is no distribution function in $\mathcal{G}(N, E, J)$ maximizing the entropy. Here, there is a difference with the microcanonical approach of exact statistical mechanics, which leads to well defined results for a system having N , E and J fixed.
- Each H -function H_q ($q > 1$) admits a strictly negative upper bound $H_q^+(N, E)$ over $\mathcal{G}(N, E)$. This result can be reexpressed in terms of upper bounds for Renyi's and Tsallis's q -entropies S_{rq} and S_{tq} , which have proven to be useful quantities in statistical physics and information theory. It also naturally extends to all the H -functions associated to a convex function C satisfying $C(f) \geq af^q$ for some constants $a > 0$ and $q > 1$.

Appendix A : Derivation of the explicit upper bound (8.12)

Let D be some arbitrary bounded domain. As shown in Paper I, the entropy of an arbitrary function $f \in \mathcal{G}(D, N, E)$ is bounded by

$$S[f_R^+] = \beta E + N \left[(1 - \beta N) \ln \frac{V}{\pi} + 1 - \ln \frac{\beta N}{2} - \left(1 - \frac{2}{\beta N} \right) \ln \left(1 - \frac{\beta N}{2} \right) \right],$$

with R the radius of a disk having the same area as D and f_R^+ given by Eq. (8.13). Combining the latter equation with Eq. (8.15) – which determines $\beta \in]0, 2/N[$ as a function of N and E – and setting

$$\theta := \frac{2}{\beta N} \in]1, +\infty[,$$

we obtain

$$\begin{aligned} S^+(D, N, E) &\leq S[f_R^+] \\ &\leq \frac{2E}{N} + N \left[\ln(e\pi^2) + 2 + \ln \theta - 2\theta - (\theta - 1)^2 \ln \left(1 - \frac{1}{\theta} \right) \right] \\ &=: \frac{2E}{N} + N [\ln(e\pi^2) + g(\theta)] . \end{aligned} \tag{8.47}$$

After a little algebra, we get

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= (\theta - 1) \left[\frac{2 - 3\theta}{\theta(\theta - 1)} - 2 \ln \left(1 - \frac{1}{\theta} \right) \right] \\ &=: (\theta - 1)h(\theta) , \end{aligned} \tag{8.48}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} h(\theta) = 0 , \tag{8.49}$$

$$h'(\theta) = \frac{1 + (\theta - 1)^2}{\theta^2(\theta - 1)^2} > 0 . \tag{8.50}$$

$h(\theta)$ being an increasing function vanishing at infinity, is negative on $]1, +\infty[$. Then $g'(\theta) < 0$, and $g(\theta)$ decreases monotonically, which implies

$$\forall \theta \in]1, +\infty[: \quad g(\theta) < \lim_{\theta \rightarrow 1^+} g(\theta) = 0 .$$

Eq. (8.12) thus follows immediately by reinjecting this result into Eq. (8.47).

Chapitre 9

Vers une nouvelle méthode pour le traitement du problème transitoire du problème à N corps gravitationnel

Il est relativement facile de produire des équations dont on peut penser qu'elles modélisent raisonnablement le comportement d'un système physique. Il est pourtant généralement impossible de résoudre exactement ces équations.

Dans ce contexte le cas de la physique non dissipative est édifiant. Depuis l'avènement de la mécanique symplectique, on sait que les équations qui décrivent des systèmes physiques isolés s'écrivent sous la forme canonique (voir [38], [50])

$$\frac{dF}{d\lambda} = \langle F, \Lambda \rangle \quad (9.1)$$

ou F est une quantité qui décrit le système considéré et le couple (Λ, λ) est un couple dit de Noether intervenant dans un couplage symétrie/conservation. La loi de composition interne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire, antisymétrique et vérifie l'identité de Jacobi (elle permet donc de définir une algèbre de Lie voir l'annexe correspondante).

Pour fixer les idées, prenons par exemple le cas de la dynamique d'une assemblée de particules de masse m dont les forces mutuelles dérivent entièrement d'une énergie potentielle U , on parle alors de système conservatif. Si le système possède s degrés de liberté, il existe alors un jeu de coordonnées généralisées $q_{i=1,\dots,s}$ associées à des impulsions généralisées $p_{i=1,\dots,s}$ et un hamiltonien¹

$$H = \sum_{i=1}^s \frac{p_i^2}{2m_i} + U(q_1, \dots, q_s)$$

les équations de la dynamique sont les équations de Hamilton : Toute fonction f des coordonnées et des impulsions généralisées (mais pas explicitement du temps t) est solution de l'équation

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}$$

1. On peut introduire un spectre de masse, il suffit alors de les indiquer comme il faut : en coordonnées cartésiennes pour un système de 2 particules libres de masse m et M dans l'espace à 3 dimensions on écrira ($s = 6$)

$$\begin{array}{l} m_1 = m_2 = m_3 = m \\ m_4 = m_5 = m_6 = M \end{array} \quad \text{et} \quad H = \sum_{i=1}^6 \frac{p_i^2}{2m_i} + U(q_1, \dots, q_6).$$

La fonction f décrit le système considéré, le couple (H, t) est un couple de Noether (conservation de l'énergie totale \leftrightarrow invariance par translation dans le temps), le crochet de Poisson $\{, \}$ est bien une relation permettant de construire une algèbre de Lie.

La consultation des références [38] et [50] permettra de constater que toutes les équations fondatrices de la physique non dissipative (Équation d'Einstein, de Dirac, de Vlasov-Maxwell ou Poisson et comme illustré ici de Hamilton) se mettent bien sous la forme (9.1). Bien plus qu'une grande synthèse, cette formulation permet bien des exploits insoupçonnables.

L'équation (9.1) s'écrit en effet

$$\frac{dF}{d\lambda} = - \langle \Lambda, . \rangle F := \mathcal{O}F \quad (9.2)$$

Supposons que pour un système physique donné l'ensemble des F forme un espace vectoriel normé complet (Espace de Banach). Cet espace est de dimension finie s dans le cas d'un système de particules possédant s degrés de liberté, sa dimension est par contre infinie en théorie des champs classique ou quantique. Compte-tenu des propriétés de \langle, \rangle et du théorème de Noether, il est clair que l'opérateur \mathcal{O} ne dépend pas explicitement de λ . Dans ce cas précis, si l'on fixe des conditions initiales pour $\lambda = \lambda_o$, $F = F_o$, la théorie des équations différentielles² nous donne la solution de l'équation (9.2)

$$F(\lambda) = \exp[\mathcal{O} \cdot (\lambda - \lambda_o)] F_o$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la très générale formule de Campbell-Hausdorff pour obtenir

$$F(\lambda) = F_o - \langle \Lambda, F \rangle_{\lambda=\lambda_o} \frac{(\lambda - \lambda_o)}{1!} + \langle \Lambda, \langle \Lambda, F \rangle \rangle_{\lambda=\lambda_o} \frac{(\lambda - \lambda_o)^2}{2!} + \quad (9.3)$$

$$\dots + (-1)^n \langle \Lambda \langle \dots, \langle \Lambda, F \rangle \rangle \rangle_{\lambda=\lambda_o} \frac{(\lambda - \lambda_o)^n}{n!} + \dots \quad (9.4)$$

Tout ceci semble bien formel et très peu utilisable!

En fait il n'en est rien : cette relation permet de décrire directement le comportement d'un système physique non dissipatif sans passer par tous les détours habituels ...

Un petit exemple encore une fois!

Considérons par exemple, le système mécanique bidimensionnel de la figure 9.1

Les deux masses dans le champ de gravité uniforme g possèdent chacune un degré de liberté, nous avons donc $s = 2$, l'espace des phases du système est quand à lui de dimension 4. Notons (q_1, q_2) les coordonnées généralisées et (p_1, p_2) les impulsions généralisées. Dans ces variables le hamiltonien s'écrit (si l désigne la longueur de la tige)

$$H = \frac{M + m}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{ml^2}{2} \dot{q}_2^2 + ml(\dot{q}_1 \dot{q}_2 + g) \cos q_2 + kq_1^2$$

avec

$$\dot{q}_1 = \frac{l p_1 - p_2 \cos q_2}{l(M + m \sin^2 q_2)} \quad \text{et} \quad \dot{q}_2 = \frac{(M + m) p_2 - ml p_1 \cos q_2}{ml^2 (M + m \sin^2 q_2)}$$

2. C'est un des rares cas où la résolvante est explicite!

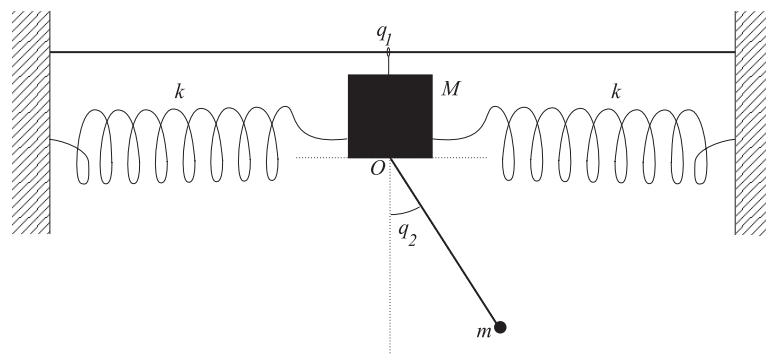


FIGURE 9.1 – Oscillateur mobile

Ce système, pourtant simple, est sans l'ombre d'un doute non intégrable. Les équations du mouvement dans ces variables sont à l'évidence épouvantables à résoudre, bien que relativement faciles à écrire. Il n'empêche que certains mécaniciens peuvent être intéressés par quelques propriétés des solutions de ces équations. S'il veulent connaître le comportement d'une fonction f des coordonnées et des impulsions généralisées, ils vont, soit entreprendre un démarche numérique (possiblement sujette à caution), soit tenter une démarche analytique souvent lourde. Cette dernière se finira généralement par l'obtention des quelques premiers termes d'une série représentant (si tout va bien ...) le comportement de f dans une région de l'espace des phases (petits angles, petits temps, ...). Ce développement étant bien souvent obtenu à partir des équations du mouvement écrites pour q_i et les p_i et non pour f directement ...

Un tel exploit est d'emblée à la portée de la relation (9.4), qui plus est, pour le coût modique du calcul récursif de quelques crochets

Par exemple le comportement temporel initial de la fonction $f = q_1^2 p_1^2 / \cos q_2$ pour le système de la figure (9.1) s'écrira

$$f = f_o - f_1 t + \frac{f_2}{2} t^2 + O(t^2)$$

avec

$$f_o = \left. \frac{q_1^2 p_1^2}{\cos q_2} \right|_{t=0}$$

$$f_1 = \left\{ H, \left. \frac{q_1^2 p_1^2}{\cos q_2} \right\} \right|_{t=0}$$

$$f_2 = \left\{ H, \left\{ H, \left. \frac{q_1^2 p_1^2}{\cos q_2} \right\} \right\} \right|_{t=0}$$

pour un problème de mécanique non trivial on ne pourra généralement jamais obtenir mieux qu'un début de série. Pourquoi donc utiliser une autre méthode ?

Le champ d'action de ce formalisme ne se limite pas au secours de quelques mécaniciens désespérés. Sa prise en compte complète (non encore effective à ce jour ...), nous a permis d'étudier en détail certaines propriétés de stabilité des solutions stationnaires de l'équation de Vlasov-Poisson. Ce fut l'objet de ma thèse. Lors d'un programme à plus long terme (4 ans de travail périodique), ce formalisme m'a mis sur la piste de quelques propriétés analytiques des

solutions transitoires de ce même système d'équations dont l'objectif est de décrire le comportement d'un système auto-gravitant de particules non collisionnelles. La synthèse des résultats obtenus dans le cadre de ce programme a fait l'objet d'une publication dans la revue *Transport Theory and Statistical Physics*, dont il est reproduit une version ci-après.

L'un des principaux résultats de cette analyse est la mise en évidence analytique du comportement oscillant (amorti) des phases initiales de l'effondrement gravitationnel.

Vlasov and Poisson equations in the context of self-gravitating systems

Jérôme Perez

Transport Theory and Statistical Physics, 2005, Vol. 34, Page 1

Abstract

We present Vlasov's equation and its association with Poisson's equation in the context of modelling self-gravitating systems such as Globular Clusters or Galaxies. We first review the classical hypotheses of the model. We continue with a presentation of the Hamilton-Morrison structure of Vlasov's equation to study the equilibrium and the stability of self-gravitating systems. Finally, we present some preliminary results concerning some properties of the time dependent solutions of the Vlasov-Poisson system.

9.1 Introduction

In this paper we present a review on the use of Vlasov and Poisson equation in the gravitationnal context. Such system of equations could be used to describe the dynamical evolution of self-gravitating astrophysical systems like globular clusters or galaxies. In a first part we present classical hypotheses of this modelisation. In a second part we explain how to transpose the so-called Morrison formalism into the gravitationnal context : we write gravitationnal Vlasov-Poisson system as an hamiltonian one. This work wasn't done for this system in a rigorous way. In a third part, we finally present some uses of this formalism. We first present in a direct an formal way a Taylor-like expansion for any functional involving in the self-gravitating systems dynamical theory. In a particular case of this expansion, we recall how one can deduce stability properties of self-gravitating steady states configurations. In another more original particular case, we present how this formalism could be used to obtain transient regime global properties.

9.2 Hypotheses

It is well known that Vlasov's equation can be used to describe the dynamics of a self gravitating system. We recall the usual descriptive hypotheses.

First, we consider a set of N point mass particles of individual masses $m_{i=1,\dots,N}$ and we consider the associated N particle distribution function in the phase space $f^{(N)}$ such that, at any time t

$$1 = \int f^{(N)}(\mathbf{\Gamma}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_N, t) \prod_{i=1}^N d\mathbf{\Gamma}_i \quad , \quad (9.5)$$

where $\mathbf{\Gamma}_i = (\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i)$ is the 6-vector which indicates the position \mathbf{q}_i and the impulsion \mathbf{p}_i of the i^{th} particle. Provided that each \mathbf{p}_i and \mathbf{q}_i are Hamiltonian conjugated variables and all the forces are conservative, one can obtain directly from this normalization equation a conservation equation (Liouville's theorem)

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathbf{p}_i}{m} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{q}_i} - \frac{\partial U_i}{\partial \mathbf{q}_i} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}} \right) = 0 \quad (9.6)$$

where U_i is the potential energy at the origin of the force \mathbf{f}_i seen by the i^{th} particle

$$\mathbf{f}_i = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -\frac{\partial U_i}{\partial \mathbf{q}_i} \quad (9.7)$$

If the only force considered is gravitation, we have

$$U_i = -G \sum_{i \neq j=1}^N \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|} \quad (9.8)$$

In order to obtain a gravitational Vlasov's equation, we first need to introduce marginal distribution functions $f^{(1)}$, and $f^{(2)}$ respectively for one and two particles as

$$f^{(1)}(\mathbf{\Gamma}_i, t) = \int f^{(N)}(\mathbf{\Gamma}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_N, t) \prod_{j \neq i=1}^N d\mathbf{\Gamma}_j \quad (9.9)$$

$$f^{(2)}(\mathbf{\Gamma}_i, \mathbf{\Gamma}_j, t) = \int f^{(N)}(\mathbf{\Gamma}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_N, t) \prod_{k \neq j \neq i=1}^N d\mathbf{\Gamma}_k \quad (9.10)$$

We then make use of the Boltzmann ansatz which assumes the existence of a two-particle correlation function $k(\mathbf{\Gamma}_i, \mathbf{\Gamma}_j, t)$ such that

$$\forall i \neq j = 1, \dots, N \quad f^{(2)}(\mathbf{\Gamma}_i, \mathbf{\Gamma}_j, t) = f^{(1)}(\mathbf{\Gamma}_i, t) f^{(1)}(\mathbf{\Gamma}_j, t) + k(\mathbf{\Gamma}_i, \mathbf{\Gamma}_j, t) \quad (9.11)$$

We now have suppose that the particles are indiscernible³, and have the same probability law $f(\mathbf{\Gamma}, t) = f^{(1)}(\mathbf{\Gamma}, t)/N$. Some direct calculations then give

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} - m \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = N^2 G m \int \frac{\partial k(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma}', t)}{\partial \mathbf{p}} \frac{(\mathbf{q} - \mathbf{q}')}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^3} d\mathbf{\Gamma}' \quad (9.12)$$

where $\psi(\mathbf{q}, t)$ is the mean field gravitational potential defined from f by the inverse Poisson equation⁴

$$\psi(\mathbf{q}, t) = -Gm \int \frac{f(\mathbf{\Gamma}', t)}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d\mathbf{\Gamma}' \quad (9.13)$$

It is well known (see e.g. Binney and Tremaine[9]) that in the case of self-gravitating systems the time T_r taken by collisions to relax it, can be evaluated by the Chandrasekhar formula

$$T_r \approx \frac{N}{\ln N} T_d \approx \frac{N}{\ln N} (G\bar{\rho})^{-1/2} \quad (9.14)$$

3. In particular this means that all particles have the same mass m .

4. Poisson equation writes $\Delta\psi(\mathbf{q}, \mathbf{t}) = 4\pi G\rho(\mathbf{q}, \mathbf{t})$ where the mass density is directly related to the distribution function by $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{t}) = m \int f(\mathbf{q}, \mathbf{p}', t) d\mathbf{p}'$. As one can verify in 3D that

$$\Delta \left(\frac{-1}{4\pi|\mathbf{q}|} \right) = \delta_D(\mathbf{q})$$

where δ_D is the classical Dirac distribution, and as this distribution is the neutral element of the convolution algebra, one can directly see that Poisson equation can be written as

$$\psi(\mathbf{q}, \mathbf{t}) = -G\rho(\mathbf{q}, \mathbf{t}) * \frac{1}{|\mathbf{q}|}$$

which is called inverse Poisson equation.

where T_d is the dynamical or crossing time of the system and $\bar{\rho}$ its mean mass density. The collisional relaxing time then ranges from $10^{9,10}yr$ for Globular Clusters ($N \sim 10^5$) or $10^{11,15}yr$ for a typical galaxy ($N \sim 10^{10}$) to $10^{13,17}yr$ for Galaxy Clusters ($N \sim 10^3$). Hence, during a reasonable time of about a few hundreds dynamical times one can actually consider that two-particle correlations (namely gravitational collisions) are dynamically unimportant, and by consequence that

$$k(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma}', t) \equiv 0 \quad (9.15)$$

During this long period the mean field dynamics of a self-gravitating system are governed by the Vlasov-Poisson system

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} - m \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (9.16)$$

$$\psi(\mathbf{q}, t) = -Gm \int \frac{f(\mathbf{\Gamma}', t)}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d\mathbf{\Gamma}' \quad (9.17)$$

9.3 Vlasov-Poisson as a Hamiltonian system

It is often quoted that Vlasov's equation is a Hamiltonian system. It is true but the formulation of such a problem is generally unclear. Using classical Poisson brackets defined for any scalar fields $A(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ and $B(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ by

$$\{A, B\} := \frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial B}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial B}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial A}{\partial \mathbf{p}} \quad (9.18)$$

one can write Vlasov's equation in the form

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} - m \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, E\} = 0 \quad (9.19)$$

where

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + m\psi = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - Gm^2 \int \frac{f(\mathbf{\Gamma}', t)}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d\mathbf{\Gamma}' \quad (9.20)$$

is the mean field energy per particle. It is a fact that relation (9.19) is not a Hamiltonian equation. As a matter of fact, general Hamiltonian equations give the *total* derivative of a canonical variable from a lie bracket between this variable and a propagator. Nevertheless, a series of works initiated by Morrison ([40], [41], [44], [42], [28], [43]), have shown that a Hamiltonian formulation of non dissipative physics is generally possible. Let us recall these results in the context of Vlasov's equation.

We consider any physical functional of the distribution function, in a very general context this functional can be written

$$F[f] = \int \varphi(f, \mathbf{\Gamma}) d\mathbf{\Gamma} \quad (9.21)$$

where φ is a very general suitable function, for example if φ do not depend on $\mathbf{\Gamma}$, $F[f]$ is called a Casimir and it can be easily proven that this is a conserved quantity during the Vlasov dynamics. By direct calculation we have

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} = \int \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial f} d\mathbf{\Gamma} \quad (9.22)$$

It is important to note here that

$$\frac{\partial \varphi}{\partial f} = \frac{\delta F}{\delta f} \quad (9.23)$$

where $\delta/\delta f$ indicates the usual functional derivative defined in the case of (9.21) by the relation

$$F[f + \delta f] - F[f] = \int \left[\frac{\delta F}{\delta f} \delta f + \mathcal{O}(\delta f) \right] d\Gamma \quad (9.24)$$

Using (9.22), (9.23) and (9.19), one can then write

$$\frac{dF}{dt} = \int \{E, f\} \frac{\delta F}{\delta f} d\Gamma \quad (9.25)$$

Using definition (9.24), one can verify that the total energy contained in the system

$$H[f] := \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m} f(\Gamma, t) d\Gamma - \frac{Gm^2}{2} \int \frac{f(\Gamma, t) f(\Gamma', t)}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d\Gamma d\Gamma' \quad (9.26)$$

which is a functional of the form (9.21), is such that

$$\frac{\delta H}{\delta f} = E \quad . \quad (9.27)$$

Then, integrating the RHS of (9.25) by parts⁵ and employing (9.27) one gets

$$\frac{dF}{dt} = \int \left\{ \frac{\delta F}{\delta f}, \frac{\delta H}{\delta f} \right\} f d\Gamma \quad (9.29)$$

which is the result introduced, perhaps more directly, by Morrison[40]. This last equation can be formulated as

$$\frac{dF}{dt} = \langle F, H \rangle \quad (9.30)$$

where we have introduced the Morrison's bracket defined for any functional $A[f]$ and $B[f]$ of the form (9.21), by the relation

$$\langle A, B \rangle = \int \left\{ \frac{\delta A}{\delta f}, \frac{\delta B}{\delta f} \right\} f d\Gamma \quad (9.31)$$

Some very simple calculations show that Morrison's bracket is skew-symmetric, verify Jacobi's identity and can be used to form a Lie algebra. Hence, equation (9.30) naturally defines the Hamiltonian structure of Vlasov's equation. We can note that in this formulation there is no conjugated variable to the canonical f .

5. This is actually an integration by parts. One can directly show indeed that for functions that decay sufficiently rapidly at $|\mathbf{q}|$ and $|\mathbf{p}|$ tend to ∞ we have

$$\int d\Gamma A \{B, C\} = - \int d\Gamma C \{B, A\} = \int d\Gamma \{A, B\} C \quad (9.28)$$

In the case of equation (9.29) surface terms vanish as the distribution function vanishes at infinity.

9.4 Some uses ...

9.4.1 Generalities

It is well known that a regular Hamiltonian formulation of a problem provides room for much formal analysis. Let us see what is possible with Vlasov's equation. In a pure formal way, one can always write

$$\frac{dF}{dt} = \langle F, H \rangle = - \langle H, \cdot \rangle F := \mathcal{T}(F) \quad . \quad (9.32)$$

Here, the functional operator \mathcal{T} appearing in this last equation does not depend explicitly on time t , because the total energy of the system $H[f]$ is a conserved quantity. Hence, one can utilize the resolvent of the Ordinary Differential Equation (9.32) and we have

$$F[f] = \exp[-(t - t_o) \langle H, \cdot \rangle] F[f_o] \quad (9.33)$$

$$\begin{aligned} &= F[f_o] - \frac{(t-t_o)}{1!} \langle H, F[f_o] \rangle_{f=f_o} + \frac{(t-t_o)^2}{2!} \langle H, \langle H, F[f_o] \rangle \rangle_{f=f_o} \\ &+ \mathcal{O}((t - t_o)^2) \end{aligned} \quad (9.34)$$

where $f_o = f(\mathbf{\Gamma}, t_o)$. It is possible to compare this expansion with the general Taylor expansion obtained from equation (9.21) which has the form

$$F[f(\mathbf{\Gamma}, t)] = \int \varphi(f(\mathbf{\Gamma}, t), \mathbf{\Gamma}) d\mathbf{\Gamma} \quad (9.35)$$

$$\begin{aligned} &= \int \left[\varphi(f(\mathbf{\Gamma}, t_o), \mathbf{\Gamma}) + \frac{(t-t_o)}{1!} \frac{\partial \varphi(f(\mathbf{\Gamma}, t_o), \mathbf{\Gamma})}{\partial f} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(t-t_o)^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi(f(\mathbf{\Gamma}, t_o), \mathbf{\Gamma})}{\partial f^2} + \mathcal{O}((t - t_o)^2) \right] d\mathbf{\Gamma} \end{aligned} \quad (9.36)$$

Hence, we arrive at

$$\frac{\partial \varphi(f(\mathbf{\Gamma}, t_o), \mathbf{\Gamma})}{\partial f} = - \langle H, F[f_o] \rangle \quad (9.37)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(f(\mathbf{\Gamma}, t_o), \mathbf{\Gamma})}{\partial f^2} = \langle H, \langle H, F[f_o] \rangle \rangle \quad (9.38)$$

etc ... It is well known from quantum field theory that this expansion allows us see that the total energy H is the time propagator of the system. In a more general way, Noether's Theorem says that any conserved quantity is associated to a symmetry of the system, hence invoking a general canonical transformation, the functional Vlasov's equation can be written (see Perez and Lachieze-Rey[50] for details)

$$\frac{dF}{d\lambda} = \langle F, K \rangle \quad (9.39)$$

where the pair $(K[f], \lambda)$ represents the conserved quantity (e.g. $H[f]$) and the variable related to system's symmetry (e.g. t -translation), respectively.

Below, we present two natural uses of these seemingly formal developments

9.4.2 Stability analysis

We now consider a steady state solution $f_o(\mathbf{\Gamma})$ of the Vlasov's equation. In a general way, Hamilton's theory of canonical transformations says us that any physical perturbation of this equilibrium is generated by some functional generator G , such that for any functional $F[f]$ of the distribution function we have

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \langle F, G \rangle \quad (9.40)$$

where ε controls the perturbation (see Perez and Lachize-Rey [50] and reference therein). In particular, if the perturbed state is described by a distribution function $f(\mathbf{\Gamma}, t)$ written as

$$f(\mathbf{\Gamma}, t) = f_o(\mathbf{\Gamma}) + \varepsilon f_1(\mathbf{\Gamma}, t) + \varepsilon^2 f_2(\mathbf{\Gamma}, t) + O(\varepsilon^2) \quad (9.41)$$

Taking the identity functional for F in equation (9.40), i.e.

$$F[f] = Id[f] := \int f(\mathbf{\Gamma}', t) \delta_D(\mathbf{\Gamma}' - \mathbf{\Gamma}) d\mathbf{\Gamma}' = f(\mathbf{\Gamma}, t) \quad (9.42)$$

where δ_D indicates the standart Dirac distribution, one can then directly verify that

$$f_1(\mathbf{\Gamma}, t) = \{g, f_o\}, \quad f_2(\mathbf{\Gamma}, t) = \frac{1}{2!} \{g, \{g, f_o\}\}, \quad \text{etc...} \quad (9.43)$$

where the so-called generating function g is the functional derivative of G . This kind of theory says that the linearized perturbation $f_1 := \{g, f_o\}$ is generated from the unperturbed distribution $f_o(\mathbf{\Gamma})$ via a canonical transformation by some small perturbation $g(\mathbf{\Gamma}, t)$. And so on for high order non linear terms.

Considering such kinds of perturbation is not restrictive. As a matter of fact, only perturbations of this form can be generated via a deformation that enforces all the constraints associated with conservation of phase (Liouville's theorem).

Taking $F = H$ in equation (9.40) allows us to obtain an energy perturbation induced by equilibrium perturbation

$$\begin{aligned} H[f] &= H_o + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + O(\varepsilon^2) \\ &= H[f_o] - \varepsilon \langle G, H \rangle_{f=f_o} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \langle G, \langle G, H[f_o] \rangle \rangle_{f=f_o} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (9.44)$$

The first two terms of this expansion are very useful in stability analysis.

Equilibrium

It is a well known property that if a system is in an equilibrium⁶ state, the first order variation of its total energy vanishes. This property can be directly shown from the use of the ε -order term in the expansion (9.44). As a matter of fact,

$$H_1 = - \langle G, H \rangle_{f=f_o} = - \int \left\{ \frac{\delta G}{\delta f}, \frac{\delta H}{\delta f} \right\} f_o d\mathbf{\Gamma} = \int f_o \left\{ E, \frac{\delta G}{\delta f} \right\} d\mathbf{\Gamma} \quad (9.45)$$

an integration by parts and the use of Vlasov's equation then gives

$$H_1 = \int \{f_o, E\} \frac{\delta G}{\delta f} d\mathbf{\Gamma} = \int \frac{\partial f_o}{\partial t} \frac{\delta G}{\delta f} d\mathbf{\Gamma} \quad (9.46)$$

which is evidently a vanishing term if f_o is an equilibrium state.

General equilibrium states are the following :

6. By equilibrium, we mean here a stationary solution of the Vlasov-Poisson system.

- $f_o = f_o(E)$ distribution functions represent all \mathbf{q} -spherical and \mathbf{p} -isotropic equilibria of collisionless self-gravitating systems ;
- $f_o = f_o(E, L^2)$ distribution functions where L^2 is the mean field squared angular momentum per particle, represent all \mathbf{q} -spherical and \mathbf{p} -anisotropic equilibria of collisionless self-gravitating systems ;
- $f_o = f_o(E, L_z)$ distribution functions where L_z is the mean field z -component of the angular momentum per particle, represent an equilibrium self-gravitating system with a z -symmetry in \mathbf{q} -space.

For detailed proofs of these affirmations and properties of these equilibria, we refer to Perez and Aly[48] .

Equilibrium stability

The stability of a given equilibrium described by the time-independent distribution function f_o is classically related to the sign of the ε^2 -order term in the expansion (9.44)

$$H_2 = \frac{1}{2} \langle G, \langle G, H[f_o] \rangle \rangle_{f=f_o} \quad (9.47)$$

More precisely, one can prove that an equilibrium state described by a distribution function f_o is guaranteed to be linearly stable if the second variation H_2 is strictly positive for all perturbations. The positivity of H_2 thus provides a sufficient criterion for linear stability. If H_2 is of indeterminate sign, the situation is less obvious. In fact the existence of negative energy perturbations does not necessarily imply an instability (there exist some counterexample). However, one *does* at least expect that it guarantees non linear instability in the presence of dissipation. This idea goes back at least to Moser [45] . The implications for the Vlasov's equation were first considered by P.J. Morrison[41] in the context of plasma physics. That negative energy perturbations imply an instability towards dissipation was proved more recently in a fairly general context by Bloch et al [10] .

Let us indicates below the essential calculations which yields an explicit formula for H_2 . From (9.31) , taking $g := \delta G / \delta f$, we get

$$H_2 = \frac{1}{2} \int f_o \left\{ g, \frac{\delta}{\delta f} \left[\int \{g', E'\} f' d\mathbf{\Gamma}' \right] \right\}_{f=f_o} d\mathbf{\Gamma} \quad (9.48)$$

from the differential properties of the Poisson bracket we have

$$H_2 = \frac{1}{2} \int f_o \left\{ g, \int \left[\left\{ \frac{\delta g'}{\delta f}, E' \right\} f'_o + \left\{ g', \frac{\delta E'}{\delta f} \right\} f'_o + \{g', E'\} \delta_a(\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}') \right] d\mathbf{\Gamma}' \right\} d\mathbf{\Gamma} . \quad (9.49)$$

An integration by parts of the two first terms in the middle sum and the integration of the δ_a Dirac mass term gives

$$H_2 = \frac{1}{2} \int f_o \left\{ g, \left[\{g, E\} + \int \frac{\delta g'}{\delta f} \{E', f'_o\} d\mathbf{\Gamma}' - \int \{g', f'_o\} \frac{\delta E'}{\delta f} d\mathbf{\Gamma}' \right] \right\} d\mathbf{\Gamma} . \quad (9.50)$$

If f_o is an equilibrium then $\{E, f_o\}$ vanishes, we remark also that from (9.20)

$$\frac{\delta E'}{\delta f} = m \frac{\delta \psi'}{\delta f} = \frac{-Gm^2}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \quad (9.51)$$

to arrive at

$$H_2 = \frac{1}{2} \int f_o \{g, \{g, E\}\} d\Gamma + \frac{Gm^2}{2} \int f_o \left\{ g, \int \frac{\{g', f'_o\}}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d\Gamma' \right\} d\Gamma . \quad (9.52)$$

A last integration by parts on each term allows us to see that

$$H_2 = -\frac{1}{2} \int \{g, f_o\} \{g, E\} d\Gamma - \frac{Gm^2}{2} \int \int \frac{\{g, f_o\} \{g', f'_o\}}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d\Gamma' d\Gamma \quad (9.53)$$

Studying of the sign of this quantity, one can study the stability of equilibrium associated to f_o against perturbations generated by g . Classical results are presented in Perez and Aly[48], Perez et al. [49] and Kandrup[29], [30], [31] . They can be summarized as follow :

- If $f_o = f_o(E)$ and $f_{oE} := \partial f_o / \partial E < 0$, then for all g we have $H_2 > 0$. Hence, any spherical and isotropic stellar system with an outwardly decreasing distribution function is linearly stable against all perturbations.
- If $f_o = f_o(E, L^2)$, $f_{oE} < 0$, and g is such that $\{g, L^2\} = 0$ then $H_2 > 0$, such perturbations are called preserving perturbations. All radial perturbations are preserving⁷. Hence, any spherical and anisotropic stellar system with an outwardly decreasing distribution function is linearly stable at least against all radial perturbations.
- If $f_o = f_o(E, L^2)$ (resp. $f_o(E, L_z)$), $f_{oE} < 0$, and $f_{oL^2} < 0$ (resp. $f_{oL_z} < 0$) then there always exists non radial (resp. nonaxisymmetric) perturbations, corresponding to nonzero mass density perturbations, for which $H_2 < 0$. It was conjectured[49] that when $f_o(E, L^2) \rightarrow f_o(E) \delta_d(L^2)$ (resp. $f_o(E, L_z) \rightarrow f_o(E) \delta_d(L_z)$) then $H^{(2)} < 0$ for all perturbation generator g . This may be associated to Radial Orbit Instability.

9.4.3 Study of the transient regime of gravitational Vlasov-Poisson dynamics

The transition to a steady state is a crucial problem in self-gravitating systems dynamics. As a matter of fact, observations suggest that almost all galaxies or globular clusters manifest overall similarities and that they do not deviate very much from a statistical equilibrium. We may also note that numerical simulation of collections of point masses tend to typically evidence a rapid, systematic evolution, on dynamical time scale T_d , towards a state, which is at least in a statistical sense, nearly time-independent (see Roy and Perez[51]).

In the toy model of one dimensional gravity, where one considers the interactions of infinite one dimensional-plane sheets, careful simulations can be performed (e.g. Mineau et al.[39]). The net result of such integrations is that typically such systems do not exhibit a pointwise evolution toward a steady state configuration. It is significant that solutions of 1D Vlasov-Poisson system for the same initial conditions also exhibit an evolution toward a final state which is not strictly time-independent. On the other hand particle simulations with 1D gravity [61] appears to approach an equilibrium distribution on very long time scales, but this relaxation is incomplete

In the unphysical 2D gravity model, a complete thermodynamical approach can be performed and show that there can exist an unique and well defined equilibrium state associated to a maximum entropy principle (see Aly and Perez[5] for a work generated originally by Katz

7. This proposition is not reciprocal.

and Lynden-Bell [32]). This result should be soon confronted with numerical simulations of 2D Vlasov-Poisson system.

In the real 3D world, one can ask if there exists a correspondence between time-dependent Vlasov-Poisson solutions, numerical simulations of large collections of point masses and corresponding thermodynamical systems (e.g. the state obtained by Lynden-Bell violent relaxation [36]).

In order to progress toward this end, let us present now, some uses of Hamiltonian techniques presented above which perhaps could allow one to exhibit time-dependent solutions of 3D Vlasov-Poisson system.

It is a fact that, at a given position \mathbf{q} and for a given time t the gravitational potential is a functional of the distribution function

$$\psi_{\mathbf{q},t}[f] = -Gm \int \frac{f(\mathbf{\Gamma}', t)}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d\mathbf{\Gamma}' \quad (9.54)$$

one can then always take $F := \psi$ in the functional Vlasov's equation to have

$$\frac{d\psi}{dt} = \langle \psi, H \rangle = - \langle H, \cdot \rangle \psi \quad (9.55)$$

hence, we can have a formal time development of the potential from which, applying Laplacian operator one can deduce the temporal evolution of the mass density. There is no problem in principle, rather only technical ones ...

As $-\langle H, \cdot \rangle$ is a time-independent operator, we can employ the resolvent of equation (9.55) to write

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{q},t}[f] &= \psi_{\mathbf{q},t_0}^{(0)} + \frac{(t-t_0)}{1!} \psi_{\mathbf{q},t_0}^{(1)} + \frac{(t-t_0)^2}{2!} \psi_{\mathbf{q},t_0}^{(2)} + \mathcal{O}((t-t_0)^2) \\ &= \psi_{\mathbf{q},t_0}[f_0] - \frac{(t-t_0)}{1!} \langle H, \psi_{\mathbf{q},t_0}[f_0] \rangle_{f=f_0} \\ &\quad + \frac{(t-t_0)^2}{2!} \langle H, \langle H, \psi_{\mathbf{q},t_0}[f_0] \rangle_{f=f_0} \rangle_{f=f_0} + \mathcal{O}((t-t_0)^2) \end{aligned} \quad (9.56)$$

The three first terms of this expansion are easily calculable.

The first term is obtained by definition

$$\psi_{\mathbf{q},t_0}[f_0] := -Gm \int \frac{f(\mathbf{\Gamma}', t_0)}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d\mathbf{\Gamma}' \quad (9.57)$$

From this relation one can see that

$$\frac{\delta \psi_{\mathbf{q},t_0}}{\delta f} = \frac{-Gm}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \quad (9.58)$$

and one can compute the second term

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{q},t_0}^{(1)} &:= - \langle H, \psi_{\mathbf{q},t_0}[f_0] \rangle_{f=f_0} = - \int \left\{ \frac{\delta H'}{\delta f}, \frac{\delta \psi_{\mathbf{q},t_0}}{\delta f} \right\} f(\mathbf{\Gamma}', t_0) d\mathbf{\Gamma}' \\ &= \int \left\{ E', Gm |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^{-1} \right\} f(\mathbf{\Gamma}', t_0) d\mathbf{\Gamma}' \\ &= -G \int \mathbf{p}' \cdot \frac{\partial |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^{-1}}{\partial \mathbf{q}'} f(\mathbf{\Gamma}', t_0) d\mathbf{\Gamma}' \end{aligned} \quad (9.59)$$

A first hypothesis on the initial distribution function can be now posed.

Hypothesis 1 : The initial state is symmetric in the velocity space. The consequence of this assumption is that for any vectorial space field $B(\mathbf{q})$ and any vectorial *odd* velocity field $A(\mathbf{p})$, we have

$$\int A(\mathbf{p}) \cdot B(\mathbf{q}) f(\mathbf{\Gamma}, t_o) d\mathbf{\Gamma} = 0 \quad (9.60)$$

One can naturally expect such a symmetry for initial conditions before gravitational collapse. Under this hypothesis, one can easily show that

$$\psi_{\mathbf{q}, t_o}^{(1)} = 0 \quad (9.61)$$

Moreover, in a general way one sees also that

$$\frac{\delta \psi_{\mathbf{q}, t_o}^{(1)}}{\delta f} = -G \mathbf{p}' \cdot \frac{\partial |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^{-1}}{\partial \mathbf{q}'} \quad (9.62)$$

which allows the computation of the third term in the potential expansion.

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{q}, t_o}^{(2)} &= \left\langle H, \psi_{\mathbf{q}, t_o}^{(1)} \right\rangle_{f=f_o} = -G \int \left\{ E', \mathbf{p}' \cdot \frac{\partial |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^{-1}}{\partial \mathbf{q}'} \right\} f(\mathbf{\Gamma}', t_o) d\mathbf{\Gamma}' \\ &= \mathcal{A} + \mathcal{B} \end{aligned} \quad (9.63)$$

where

$$\mathcal{A} = -Gm \int d\mathbf{\Gamma}' f(\mathbf{\Gamma}', t_o) \frac{\partial \psi_{\mathbf{q}', t_o}}{\partial \mathbf{q}'} \cdot \frac{\partial |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^{-1}}{\partial \mathbf{q}'} \quad (9.64)$$

and

$$\mathcal{B} = +\frac{G}{m} \int d\mathbf{\Gamma}' f(\mathbf{\Gamma}', t_o) \mathbf{p}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}'} \left(\mathbf{p}' \cdot \frac{\partial |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^{-1}}{\partial \mathbf{q}'} \right) \quad (9.65)$$

$\psi_{\mathbf{q}, t_o}^{(2)}$ could be greatly simplified assuming some physical properties of the initial state $f(\mathbf{\Gamma}, t_o)$. First, we suppose that the initial density is constant on a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Then we may pose

Hypothesis 2

$$\int f(\mathbf{\Gamma}, t_o) d\mathbf{p} = \nu_o \cdot \chi_\Omega = \frac{\rho_o}{m} \cdot \chi_\Omega \quad (9.66)$$

where $\rho_o = m\nu_o$ is a strictly positive constant (ν_o is the value of the uniform initial number density whereas ρ_o represent the mass density) and χ_Ω denotes the characteristic function⁸ on Ω .

This hypothesis which can appear very restrictive, is fairly adapted for the description of the initial state of the physical material before it collapses to form a self-gravitating structure. Under this hypothesis, we have

$$\mathcal{A} = -G\rho_o \int_{\mathbf{q}' \in \Omega} \frac{\partial \psi_{\mathbf{q}', t_o}}{\partial \mathbf{q}'} \cdot \frac{\partial |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^{-1}}{\partial \mathbf{q}'} \quad , \quad (9.67)$$

8. Classically, the characteristic function is defined to be unity on Ω , and is zero elsewhere.

an integration by parts in which all surface terms vanish then gives

$$\mathcal{A} = G\rho_o \int_{\mathbf{q}' \in \Omega} \psi_{\mathbf{q}', t_o} \cdot \Delta' \left(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^{-1} \right) . \quad (9.68)$$

It is well known that $|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^{-1}$ is proportional to the Fundamental solution of the 3D radial Laplacian, more precisely we have

$$\Delta' \left(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^{-1} \right) = -4\pi\delta_d(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \quad (9.69)$$

hence

$$\mathcal{A} = -\frac{\psi_{\mathbf{q}, t_o}}{\tau_o^2} \quad (9.70)$$

where we have introduced the Jeans time $\tau_o := (4\pi G\rho_o)^{-1/2}$.

The second term is a little bit more complicated, in Cartesian coordinates we have

$$\mathcal{B} = \frac{G}{m} \sum_{i,j=1}^3 \int d\Gamma' f(\Gamma', t_o) p'_i p'_j \frac{\partial^2 |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^{-1}}{\partial q'_i \partial q'_j} \quad (9.71)$$

We now make our last assumption.

Hypothesis 3 : The initial state has an isotropic and constant velocity dispersion σ^2

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad \int d\mathbf{p} f(\mathbf{\Gamma}, t_o) p_i^2 = \nu_o \frac{m^2 \sigma^2}{3} \chi_\Omega = \rho_o \frac{m \sigma^2}{3} \chi_\Omega \quad (9.72)$$

Physically this assumption means that the initial state is isothermal.

Coupling all the hypotheses, we have

$$\mathcal{B} = \sigma^2 G\rho_o \int_{\mathbf{q}' \in \Omega} \Delta' \left(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^{-1} \right) = -\frac{\sigma^2}{\tau_o^2} \quad (9.73)$$

The beginning of the potential expansion may be written as

$$\psi_{\mathbf{q}, t} [f] = \psi_{\mathbf{q}, t_o} [f_o] - \frac{(t-t_o)^2}{2\tau_o^2} [\psi_{\mathbf{q}, t_o} [f_o] + \sigma^2] + \mathcal{O}((t-t_o)^2) \quad (9.74)$$

Attempting to go further in this expansion is extremely perilous. As a matter of fact, we see from the term \mathcal{A} that, the functional derivatives of $\psi_{\mathbf{q}, t_o}^{(2)}$ do not come directly due to the f -non linearity incoming in the term $\psi \cdot f$. The calculus then becomes extremely tedious ...

At this stage, only some general remarks can be made using such a technique in a general way :

— Under hypothesis 2, all odd terms vanish in the expansion

$$\psi_{\mathbf{q}, t_o}^{(2k+1)} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (9.75)$$

— Keeping only linear terms, i.e. only terms of the same nature of $\psi_{\mathbf{q}, t_o}^{(2)}$ one gets

$$\psi_{\mathbf{q}, t_o}^{(2k)} \propto (-1)^k \frac{\psi_{\mathbf{q}, t_o} [f_o]}{\tau_o^{2k}} + cst, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (9.76)$$

neglecting the constant, this gives

$$\psi_{\mathbf{q}, t} = \psi_{\mathbf{q}, t_o} [f_o] \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(t-t_o)^{2k}}{(2k)! \tau_o^{2k}} = \psi_{\mathbf{q}, t_o} [f_o] \cos \left(\frac{t-t_o}{\tau_o} \right) \quad (9.77)$$

this maybe corroborates the τ_o -periodic damped regime which appear in generic gravitational collapse numerical experiments.

9.5 Conclusion

In this paper we have presented a complete description of the hamiltonian Morrison formalism in the context of self-gravitating Vlasov-Poisson system. This work was partially and not rigorously done in the literature. We have also proposed a general method which could be used to study transient regimes for such systems. These method is constructed on the fact that in such isolated systems one can exhibit almost explicitly the so-called resolvent function (fundamental system of solutions). The result proposed seems to exhibit a periodic regime in a linear-like solution, this is corroborated by numerical simulations of quiet gravitational collapse.

Chapitre 10

Une approche numérique de l'effondrement gravitationnel classique d'une assemblée de particules en interaction gravitationnelle.

Que se passe-t-il lorsque l'on met en présence un ensemble de N particules massives en interaction gravitationnelle ?

Voilà une question qui semble fondamentale en astrophysique !

De façon paradoxale et faute d'une étude exhaustive, jusqu'à une époque très récente il n'y avait pas de réponse précise à cette question .

L'approche analytique complète est une gageure à laquelle l'article présenté dans le chapitre précédent tente d'apporter une réponse. Sur le plan numérique, même si le problème semble relativement simple, force est de constater qu'avant l'article présenté ci-après aucune étude complète n'avait été menée !

Quelques travaux et résultats pouvaient cependant être recensés :

- C'est sans doute Lord Jeans qui remarqua au début du XX^{ème} siècle que deux types d'évolutions pouvaient survenir : L'évaporation ou l'effondrement. En incorporant N particules de masse m dans un volume de taille caractéristique L , à la température cinétique T , le rapport de l'énergie gravitationnelle E_p à l'énergie cinétique E_C fait apparaître la longueur de Jeans

$$\frac{E_G}{E_c} \simeq \left(\frac{L}{\lambda_J} \right)^2 \quad \text{avec} \quad \lambda_J := \sqrt{\frac{kTL^3}{GNm^2}}$$

Plusieurs analyses¹ montrent alors qu'un système plus grand que sa longueur de Jeans s'effondre sous l'effet de son propre poids, alors qu'un système plus petit a tendance à s'évaporer n'étant pas suffisamment lié. Un raisonnement sur le rapport du viriel

$$\kappa := \frac{2E_c}{E_p} < 0$$

1. Les plus simples sont quelques considérations de bon sens physique, les plus complexes mettent en avant des analyses de stabilité de solutions stationnaires d'équations de type Vlasov-Poisson ...

est équivalent : si $\kappa < -1$, le système contient trop d'énergie cinétique et il s'évapore, si $\kappa \in]-1, 0[$ il s'effondre. Finalement, si $\kappa = -1$, il est à l'équilibre, et, s'il ne subit aucune perturbation, il y reste !

La phase d'effondrement accroît la valeur absolue de l'énergie potentielle ($E_p \propto -L^{-1}$), la conservation de l'énergie produit donc de l'énergie cinétique, et le système se réchauffe. Cet effondrement cesse lorsque l'on atteint $\kappa = -1$. Suivant les régimes on s'attend à des oscillations amorties (que d'aucun nomment amortissement Landau) ou pas !

- Sur le plan numérique, deux types d'analyses ont été menées : Les simulations cosmologiques qui envisagent l'expérience décrite plus haut dans le contexte d'un Univers en expansion et les simulations que nous appellerons N -Corps ou l'expansion n'est pas prise en compte. Les simulations cosmologiques sont un vaste domaine d'investigation mais elles ne présentent qu'un rapport lointain avec la problématique évoquée en début de chapitre. Elles étudient des caractéristiques particulières de l'Univers sur des échelles caractérisées et limitées, l'étude de l'effondrement d'un seul objet n'est généralement pas particularisée.

En ce qui concerne les simulations N -corps, après des débuts prometteurs par Van Albada en 1982 [60], et quelques compléments plus modernes énumérés au début de l'article qui suit, bien peu d'analyses pertinentes et exhaustives étaient recensables. Le seul message clair qui semblait transparaître de ces analyses était que certaines caractéristiques de l'état d'équilibre pouvaient dépendre des conditions initiales du système. Hormis cette idée vague mais néanmoins importante, rien de beaucoup plus précis.

Un travail de trois années, articulé autour d'une centaine de simulations numériques représentant plus d'un an de calculs précis, mené en collaboration avec Fabrice Roy, nous a permis de combler cette lacune. L'ensemble de nos résultats n'a pas été fragmenté en une litanie de publications et se trouve condensé dans l'article détaillé ci-après.

Les conclusions de cette étude sont multiples et variées, elles fournissent un cadre général pour la formation des structures à petite échelle (amas globulaire et galaxies). Les principales caractéristiques observationnelles actuelles de ces différents objets s'accordent spectaculairement avec le paradigme proposé dans l'article (profil de densité, caractéristiques morphologiques, absence (au sein des amas) et présence (pour les galaxies) d'un trou noir super massif central). L'amélioration des moyens d'observation devrait dans la prochaine décennie (projet GAIA notamment) permettre d'obtenir des propriétés cinématiques complémentaires qui permettront d'affiner la comparaison entre les prédictions de notre étude et la réalité galactique.

Dissipationless collapse of a set of N massive particles

F. Roy & J. Perez

Monthly Notices of the Royal Astronomical Society , Vol. 348, Issue 1, p. 62, 2004

Abstract

The formation of self-gravitating systems is studied by simulating the collapse of a set of N particles which are generated from several distribution functions. We first establish that the results of such simulations depend on N for small values of N . We complete a previous work by Aguilar & Merritt concerning the morphological segregation between spherical and elliptical equilibria. We find and interpret two new segregations : one concerns the equilibrium core size and the other the equilibrium temperature. All these features are used to explain some of the global properties of self-gravitating objects : origin of globular clusters and central black hole or shape of elliptical galaxies.

10.1 Introduction

It is intuitive that the gravitational collapse of a set of N masses is directly related to the formation of astrophysical structures like globular clusters or elliptical galaxies (the presence of gas may complicate the pure gravitational N -body problem for spiral galaxies). From an analytical point of view, this problem is very difficult. When N is much larger than 2, direct approach is intractable, and since Poincaré results of non analyticity, exact solutions may be unobtainable. In the context of statistical physics, the situation is more favorable and, in a dissipationless approximation², leads to the Collisionless Boltzmann Equation (hereafter denoted by CBE)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + m \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (10.1)$$

where $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ and $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$ are respectively the distribution function of the system with respect to the canonically conjugated (\mathbf{r}, \mathbf{p}) phase space variables and the mean field gravitational potential. As noted initially by [25], this formalism holds for such systems if and only if we consider N identical point masses equal to m . This problem splits naturally into two related parts : the time dependent regime and the stationary state. We can reasonably think that these two problems are not completely understood. The transient time dependent regime was investigated mainly considering self-similar solutions ([37], [26], [11] and [35]). These studies conclude that power law solutions can exist for the spatial dependence of the gravitational potential (with various powers). Nevertheless, there is no study which indicates clearly that the time dependence of the solutions disappears in a few dynamical times, giving a well defined equilibrium-like state. On the other hand, applying Jeans theorem (e.g. [9] hereafter BT87, p. 220), it is quite easy to find a stationary solution. For example, every positive and integrable function of the mean field energy per mass unit E is a potential equilibrium distribution function for a spherical isotropic system. Several approaches are possible to choose the equilibrium distribution function. Thermodynamics (Violent Relaxation paradigm : [36], [17], [47]) indicate that isothermal spheres or polytropic systems are good candidates. Stability analyses can be

2. The dissipationless hypothesis is widely accepted in the context of gravitational N -body problem because the ratio of the two-body relaxation time over the dynamical time is of the order of N . For a system composed of more than $\sim 10^4$ massive particles a study during a few hundreds dynamical times can really be considered as dissipationless, the unique source of dissipation being two-body encounters.

split into two categories. In the CBE context (see [48] for a review), it is well known that spherical systems (with decreasing spatial density) are generally stable except in the case where a large radial anisotropy is present in the velocity space. This is the Radial Orbit Instability, hereafter denoted by ROI (see [48], and [49] for a detailed analytic and numeric study of these phenomena) which leads to a bar-like equilibrium state in a few dynamical times. In the context of thermodynamics of self-gravitating systems, in a pioneering work by [6], it was shown that an important density contrast leads to the collapse of the core of system (see [18] for details). In all these studies there is no definitive conclusion, and the choice of the equilibrium distribution remains unclear. Introducing observations and taking into account analytical constraints, several models are possible : chronologically, we can cite (see for example BT87, p. 223-239) the Plummer model (or other polytropic models), de Vaucouleurs $r^{1/4}$ law, King and isochrone Hénon model or more recently the very simple but interesting Hernquist model ([27]) for spherical isotropic systems. In the anisotropic case, Ossipkov-Merritt or generalized polytropes can be considered. Finally for non spherical systems, there also exists some models reviewed in BT87 (p. 245-266). Considering this wide variety of possibilities, one can try to make accurate numerical simulations to clarify the situation. Surprisingly, such a program has not been completely carried on. In a pioneering work, [60] remarked that the dissipationless collapse of a clumpy cloud of N equal masses could lead to a final stationary state that is quite similar to elliptical galaxies. This kind of study was reconsidered in an important work by [2], with more details and a crucial remark concerning the correlation between the final shape (spherical or oblate) and the virial ratio of the initial state. These authors explain this feature invoking ROI. Some more recent studies ([14], [12] and [57]) concentrate on some particularities of the preceding works. Finally, two works ([21] and [15]) develop new ideas considering the influence of the Hubble flow on the collapse. However, the problem is only partially depicted.

The aim of this paper is to analyse the dissipationless collapse of a large set of N Body systems with a very wide variety of 'realistic' initial conditions. As we will see, the small number of particles involved, the numerical technique or the specificity of the previous works did not allow their authors to reach a sufficiently precise conclusion. The layout of this paper is as follows. In section 2 we describe in detail the numerical procedures used in our experiments. Section 3 describes the results we have obtained. These results are then interpreted in section 4, where some conclusions and perspectives are also proposed.

10.2 Numerical procedures

10.2.1 Dynamics

The Treecode used to perform our simulations is a modified version of the [7] Treecode, parallelised by D. Pfenniger using the MPI library. We implemented some computations of observables and adapted the code to suit our specific problems. The main features of this code are a hierarchical $O(N \log(N))$ algorithm for the gravitational force calculation and a leap-frog algorithm for the time integration. We introduced an adaptative time step, based on a very simple physical consideration. The time step is equal to a fraction n_{ts} of the instantaneous

dynamical time T_d (³), i.e. $\Delta t = T_d/n_{ts}$. The simulations were run on a Beowulf cluster (25 dual CPU processors whose speed ranges from 400MHz to 1GHz).

10.2.2 Initial Conditions

The initial virial ratio is an important parameter in our simulations. The following method was adopted to set the virial ratio to the value $V_{initial}$. Positions \mathbf{r}_i and velocities \mathbf{v}_i are generated. We can then compute

$$V_p = \frac{2K}{U} \quad (10.2)$$

where

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \quad (10.3)$$

and

$$U = -\frac{G}{2} \sum_{i \neq j}^N \frac{m_i m_j}{(\max((\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2, \epsilon^2))^{1/2}} \quad (10.4)$$

In this relation ϵ is a softening parameter whose value is discussed in section 10.2.3. As the potential energy depends only on the positions, we obtain a system with a virial ratio equal to $V_{initial}$ just by multiplying all the particle velocities by the factor $(V_{initial}/V_p)^{1/2}$. For convenience we define

$$\eta = |V_{initial}| \times 10^2 \quad (10.5)$$

Homogeneous density distribution (\mathbf{H}_η)

As we study large N -body systems, we can produce a homogeneous density by generating positions randomly. These systems are also isotropic. We produce the isotropic velocity distribution by generating velocities randomly.

Clumpy density distribution (\mathbf{C}_η^n)

A type of inhomogeneous systems is made of systems with a clumpy density distribution. We first generate n small homogeneous spherical systems with radius R_g . Centers of these subsystems are uniformly distributed in the system. The empty space is then filled using a homogeneous density distribution. In the initial state, each clump contains about 1% of the total mass of the system and have a radius which represents 5% of the initial radius of the whole system. These systems are isotropic.

3. The fraction n_{ts} is adapted to the virial parameter η and ranges roughly from $n_{ts} = 300$ when $\eta = 90$ to $n_{ts} = 5000$ when $\eta = 08$. The dynamical time we used is given by

$$T_d = \frac{\sum_{i=1}^N \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}{\sum_{i=1}^N \sqrt{vx_i^2 + vy_i^2 + vz_i^2}}$$

Power law $r^{-\alpha}$ density distribution (\mathbf{P}_η^α)

We first generate the φ and z cylindrical coordinates using two uniform random numbers u_1 and u_2 :

$$(z, \varphi) = (2u_1 - 1, 2\pi u_2) \quad . \quad (10.6)$$

Using the inverse transformation method, if

$$r = RF^{-1}(u) \quad \text{with} \quad F(r) = \frac{1}{S} \int_0^r x^{2-\alpha} dx \quad (10.7)$$

where R is the radius of the system, u is a uniform random number, $\iota \ll 1$ and

$$S = \int_0^1 x^{2-\alpha} dx \quad , \quad (10.8)$$

then the probability density of r is proportional to $r^{2-\alpha}$, and the mass density ρ is proportional to $r^{-\alpha}$. Finally, one gets

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r\sqrt{1-z^2} \cos \varphi \\ r\sqrt{1-z^2} \sin \varphi \\ rz \end{bmatrix} \quad (10.9)$$

These systems are isotropic.

Gaussian velocity distribution (\mathbf{G}_η^σ)

Most of the systems we use have a uniform velocity distribution. But we have also performed simulations with systems presenting a gaussian initial velocity distribution. These systems are isotropic, but the x-, y- and z-components of the velocity are generated following a gaussian distribution. Using a standard method we generate two uniform random numbers u_1 and u_2 , and set

$$v_i = \sqrt{-2\sigma^2 \ln u_1} \cos(2\pi\sigma^2 u_2) \quad i = x, y, z \quad (10.10)$$

where σ is the gaussian standard deviation.

Global rotation (\mathbf{R}_η^f)

Some of our initial systems are homogeneous systems with a global rotation around the Z -axis. The method we choose to generate such initial conditions is the following. We create a homogeneous and isotropic system (an H-type system). We then compute the average velocity of the particles.

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{v}_i\| \quad (10.11)$$

We project the velocities on a spherical referential, and add a fraction of \bar{v} to v_ϕ with regard to the position of the particle. We set

$$v_{i,\phi} = v_{i,\phi} + f \frac{\rho_i \bar{v}}{R} \quad (10.12)$$

where f is a parameter of the initial condition, ρ_i is the distance from the particle to the Z -axis and R the radius of the system. The amount of rotation induced by this method can be evaluated through the ratio :

$$\mu = K_{rot}/K, \quad (10.13)$$

where K is the total kinetic energy defined above, whereas K_{rot} is the rotation kinetic energy defined by [46] :

$$K_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{(\mathbf{J}_i \cdot \hat{\mathbf{J}}_{tot})^2}{[\mathbf{r}_i^2 - (\mathbf{r}_i \cdot \hat{\mathbf{J}}_{tot})^2]} \quad (10.14)$$

Above, \mathbf{J}_i is the specific angular momentum of particle i , $\hat{\mathbf{J}}_{tot}$ is a unit vector in the direction of the total angular momentum of the system. In order to exclude counter-rotating particles, the sum in equation (10.14) is actually carried out only over those particles which verify the condition $(\mathbf{J}_i \cdot \hat{\mathbf{J}}_{tot}) > 0$.

Power-law initial mass function(M_η^k)

Almost all the simulations we made assume particles with equal masses. However, we have created some initial systems with a power-law mass function, like

$$n(M) = \alpha M^\beta \quad (10.15)$$

The number of particles whose mass is $M \leq m \leq M + dM$ is $n(M)dM$. In some models, the value of α and β depends on the range of mass that is considered. We have used several types of mass functions, among them the initial mass function given by [34] ($k = I$), the one given by [54] ($k = II$) and an M^{-1} mass function ($k = III$). In order to generate masses following these functions, we first calculate α_k to produce a continuous function. We then can calculate the number of particles whose mass is between M and $M + dM$. We generate $n(M)$ masses

$$m_i = M + udM \quad 1 \leq i \leq n(M) \quad (10.16)$$

where $0 \leq u \leq 1$ is a uniform random number. In the initial state, these systems have a homogeneous number density, a quasi homogeneous mass density and they are isotropic.

Nomenclature

We indicate below the whole set of our non rotating initial conditions.

- Homogeneous H_η models : H_{88} , H_{79} , H_{60} , H_{50} , H_{40} , H_{30} , H_{20} , H_{15} and H_{10}
- Clumpy C_η^n models : C_{67}^{20} , C_{65}^{20} , C_{61}^{20} , C_{48}^{20} , C_{39}^{20} , C_{29}^{20} , C_{14}^{20} , C_{10}^{20} , C_{07}^{20} and C_{10}^{03}
- Power Law P_η^α models : $P_{50}^{2.0}$, $P_{09}^{2.0}$, $P_{50}^{1.0}$, $P_{50}^{0.5}$, $P_{10}^{1.0}$, $P_{08}^{1.5}$ and $P_{40}^{1.5}$
- Gaussian velocity profiles G_η^σ models : G_{50}^1 , G_{50}^2 , G_{50}^3 , G_{12}^4 and G_{50}^5
- Mass spectra M_η^k models : M_{50}^I , M_{50}^{II} , M_{51}^{III} , M_{35}^I , M_{25}^{II} , M_{15}^{III} and M_{07}^I

For all these models we ran the numerical simulations with 30 000 particles (see § 10.3.1)

10.2.3 Observables

Units

Our units are not the commonly used ones (see [24]). We did not set the total energy E of the system to -0.25 because we wanted to prescribe instead the initial virial ratio $V_{initial}$, the size R of the system and its mass M . We thus have $M = 1$, $R = 10$ and $G = 1$, and values of $V_{initial}$ and E depending on the simulation. We can link the units we have used with more

standard ones. We have chosen the following relationships between our units of length and mass and common astrophysical ones :

$$M = 10^6 M_\odot \text{ and } R = 10 \text{ pc} \quad (10.17)$$

Our unit of time u_t is given by :

$$1u_t = \sqrt{\frac{R_c^3 G_s M_s}{R_s^3 G_c M_c}} \approx 4.72 \cdot 10^{11} \text{ s} = 1.50 \cdot 10^4 \text{ yr} \quad (10.18)$$

where variables X_s are expressed in our simulation units and variables X_c in standard units.

Potential softening and energy conservation

The non conservation of the energy during the numerical evolution has three main sources. The softening parameter ε introduced in the potential calculus (cf. equation 10.4) is an obvious one. This parameter introduces a lower cutoff Λ in the resolution of length in the simulations. Following [8], structural details up to scale $\Lambda \leq 10\varepsilon$ are sensitive to the value of ε . Moreover, in order to be compatible with the collisionless hypothesis, the softening parameter must be greater than the scale where important collisions can occur. Still following [8], this causes

$$\frac{\varepsilon}{10} \geq \frac{G \langle m \rangle}{\langle v^2 \rangle} \quad (10.19)$$

In our collapse simulation with $3 \cdot 10^4$ particles, this results in $\varepsilon\eta \geq 2/3$. The discretization of time integration introduces inevitably another source of energy non conservation, particularly during the collapse. The force computation also generates errors. The choice of the opening angle Θ , which governs the accuracy of the force calculation of the Treecode, is a compromise between speed and accuracy. For all these reasons, we have adopted $\varepsilon = 0.1$. This choice imposes $\eta \geq 6$ (for $30 \cdot 10^4$ particles). This trade-off allowed to perform simulations with less than 1% energy variation without requiring too much computing time. For each of our experiments, the total CPU time ranges between 3 to 24 hours for 3000 u_t and $3 \cdot 10^4$ particles. The total aggregated CPU time of all our collapse experiments is approximately 6 months.

We have tested two other values of the softening parameter ($\varepsilon = 0.03$ and $\varepsilon = 0.3$) for several typical simulations. These tests did not reveal significant variations of the computed observables.

Spatial indicators

As indicators of the geometry of the system, we computed axial ratios, radii containing 10% (R_{10}), 50% (R_{50}) and 90% (R_{90}) of the mass, density profile $\rho(r)$ and equilibrium core radius. The axial ratios are computed with the eigenvalues λ_1 , λ_2 and λ_3 of the (3x3) inertia matrix I , where $\lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$ and, if the position of the particle i is $\mathbf{r}_i = (x_{1,i}; x_{2,i}; x_{3,i})$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{\mu\nu} = - \sum_{i=1}^N m_i x_{\mu,i} x_{\nu,i} \quad \text{for } \mu \neq \nu = 1, 2, 3 \\ I_{\mu\mu} = \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - x_{\mu,i}^2) \quad \text{for } \mu = 1, 2, 3 \end{array} \right. \quad (10.20)$$

The axial ratios a_1 and a_2 are given by $a_2 = \lambda_1/\lambda_2 \geq 1.0$ and $a_1 = \lambda_3/\lambda_2 \leq 1.0$.

The density profile ρ , which depends only on the radius r , together with the R_δ ($\delta = 10, 50, 90$) have a physical meaning only for spherical or nearly spherical systems. For all the spatial indicators computations we have only considered particles whose distance to the center of mass of the system is less than $6 \times R_{50}$ of the system. This assumption excludes particles which are inevitably ‘ejected’ during the collapse⁴.

After the collapse a core-halo structure forms in the system. In order to measure the radius of the core, we have computed the density radius as defined by Casertano and Hut (see [16]). The density radius is a good estimator of the theoretical and observational core radius.

We have also computed the radial density of the system. The density is computed by dividing the system into spherical bins and by calculating the total mass in each bin.

Statistical indicators

When the system has reached an equilibrium state, we compute the temperature of the system

$$T = \frac{2 \langle K \rangle}{3Nk_B} \quad (10.21)$$

where K is the kinetic energy of the system, k_B is the Boltzmann constant (which is set to 1) and the notation $\langle A \rangle$ denotes the mean value of the observable A , defined by

$$\langle A \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i \quad (10.22)$$

In order to characterise the system in the velocity space we have computed the function

$$\kappa(r) = \frac{2 \langle v_{i,rad}^2 \rangle_{r \leq r_i < r+dr}}{\langle v_{i,tan}^2 \rangle_{r \leq r_i < r+dr}} \quad (10.23)$$

where $v_{i,rad}$ is the radial velocity of the i^{th} particle, and $v_{i,tan}$ its tangential velocity. For spherical and isotropic systems ($a_1 \simeq a_2 \simeq 1$ and $\kappa(r) \simeq 1$), we have fitted the density by

1- a polytropic law

$$\rho = \rho_0 \psi^\gamma \quad (10.24)$$

which corresponds to a distribution function

$$f(E) \propto E^{\gamma-3/2} \quad (10.25)$$

2- an isothermal sphere law

$$\rho = \rho_1 e^{\psi/s^2} \quad (10.26)$$

which corresponds to a distribution function

$$f(E) = \frac{\rho_1}{(2\pi s^2)^{3/2}} e^{-\frac{E}{s^2}} \quad (10.27)$$

Using the least square method in the $\ln(\rho) - \ln(\psi)$ plane we get $(\gamma, \ln(\rho_0))$ and $(s^2, \ln(\rho_1))$.

4. The number of excluded particles ranges from 0% to 30% of the total number of particles, depending mostly on η . For example, the number of excluded particles is 0% for H₈₀, 3% for C₆₇²⁰, 5% for H₅₀, 22% for C₁₀²⁰ and 31% for H₁₀.

10.3 Description of the results

We have only studied systems with an initial virial ratio corresponding to $\eta \in [7, 88]$. In such systems, the initial velocity dispersion cannot balance the gravitational field. This produces a collapse. After this collapse, in all our simulations the system reaches an equilibrium state characterised by a temporal mean value of the virial ratio equal to -1 , i.e $\eta = 100$, and stationary physical observables. These quantities (defined in section 2) are presented in a table of results in the appendix of this paper. The following results will be discussed and interpreted in section 10.4.

10.3.1 Relevant number of particles

In all previous works on this subject ([60], [2], [14] and [12]), the authors did not really consider the influence of the number of particles on their results. In the first two and more general works, this number is rather small (not more than a few thousands in the largest simulations). The two other studies are more specific and use typically 10^4 and, in a few reference cases, $2 \cdot 10^4$ particles.

FIGURE 10.1 – Influence of the number of particles on the physical observables of a collapsing system. Axial ratios are on the top panel, radius containing 50% of the total mass and density radius are on the middle pannel and the best s^2 and γ fit for respectively isothermal and polytropic distribution function are on the bottom panel. All cases are initially homogeneous with $\eta = 10$ (solid line), $\eta = 50$ (dotted line) and $\eta = 80$ (dashed line). The number N of particles used is in units of 10^3 .

In order to test the influence of the number of particles on the final results, we have computed several physical observables of some collapsing systems with various numbers of particles. The results are presented in Figure 10.1. In order to check the influence of N in the whole phase

space, we have studied positions and velocities related observables : a_1 , a_2 , R_{10} , R_{50} and R_{90} and parameters of isothermal and polytropic fit models namely γ and s^2 . Moreover, in order to be model-independent, we have studied three representative initial conditions : H_{80} , H_{50} and H_{10} , i.e. respectively initially hot, warm and cold systems. The number of particles used in each case ranges from 10^2 to 10^5 . We can see in Figure 10.1 that some observables are N -dependent when $N < 3.10^4$. In particular, R_{50} and R_d present a monotonic variation larger than 50% when N varies from 10^2 to 10^5 and the ellipticity of the final state is overestimated for small values of N . As a conclusion of this preliminary study, we claim that the relevant number of particles for collapse simulations is $N \geq 3.10^4$. As all simulations have been completed with a total energy loss smaller than 1%, we state moreover that this result is independent of the numerical scheme used (Treecode or Direct N-Body). As a consequence, the simulations presented hereafter have been performed using $N = 3.10^4$ particles.

10.3.2 Morphological segregation

An important study by [2] shows that, in the case of an initial density profile $\rho \propto r^{-1}$, the shape of the virialized state depends on η : a very small η leads to a flattened equilibrium state, when a more quiet collapse produces a spherical one. Our investigations concern a wide range of different initial conditions (homogeneous, clumpy,...) and show that the influence of η depends on the properties of the initial system⁵. Figure 10.2 shows the axial ratios of the equilibrium state reached by our simulations. In fact, only a few simulations produced a final state with an ellipticity greater than E1. Every homogeneous initial condition (i.e. H_η , G_η^σ and M_η^k) resulted in a spherical equilibrium state independently of the values of η we tested. Cold clumpy systems have a weakly flattened equilibrium state. The only final systems with an ellipticity significantly greater than E1 are those produced by the collapse of cold P_η^α . Previous studies invoked ROI to explain this morphological segregation. However, it seems that ROI requires inhomogeneities near the center to be triggered.

10.3.3 Characteristic size segregation

In addition to the morphological segregation, presented in the previous section, we discovered a finer phenomenon.

In the Figures 10.3, 10.4, 10.5, 10.6 and 10.7, we have plotted the mass density of all equilibrium states produced by the collapse of our initial conditions as a function of the ratio r/R_{50} . These plots represent the density at the end of our simulations (after about 100 crossing times). These

5. The particular case of rotating initial conditions is discussed in a special section.

FIGURE 10.2 – Axial ratios of equilibrium states reached from Homogeneous, Clumpy, Gaussian velocity dispersion, Power law and Mass spectrum initial conditions.

functions do not significantly evolve after the collapse except for M_{07}^I . For this special case, a comparative plot is the subject of Figure 10.8.

All equilibrium states we obtain clearly fall into two categories :

— Flat Core Systems

All these systems present a core halo structure, i.e. a large central region with a constant density and a steep envelope. These systems are typically such that $\ln(R_{50}/R_d) < 0.5$ and $\ln(R_{10}/R_d) < -0.05$.

— Small Core Systems

For such systems, the central density is two order of magnitude larger than for Flat Core systems. There is no central plateau and the density falls down regularly outward. These systems are typically such that $\ln(R_{50}/R_d) > 0.7$ and $\ln(R_{10}/R_d) > 0.1$.

The diagram $\ln(R_{10}/R_d)$ vs $\ln(R_{50}/R_d)$ is the subject of Figure 10.9. One can see in this figure that each equilibrium state belongs to one or the other family except in a few particular cases. In the Flat Core family we found all H_η , G_η^σ and M_η^k systems except M_7^I , and two P_η^α systems namely $P_{50}^{0.5}$ and P_{50}^1 . These systems are all initially homogeneous or slightly inhomogeneous (e.g. $P_{50}^{0.5}$ and P_{50}^1 systems). In the Small Core family, we found all C_η^{20} and the $P_{50}^{2.0}$ and $P_{09}^{2.0}$ systems. These systems are all initially rather very inhomogeneous. Finally, there are 5 systems in-between the two categories : C_{10}^{03} , $P_{40}^{1.5}$, $P_{08}^{1.5}$, P_{10}^1 and M_{07}^I . This last model is the only one which migrates from Flat core set (when $t \simeq 10Td$) to the edge of the small core region (when $t \simeq 100Td$).

FIGURE 10.3 – Density profile for H_η models plotted in units of R_{50} .

10.3.4 Equilibrium Distribution Function

In order to compare systems in the whole phase space, we fitted the equilibrium state reached by each system with two distinct isotropic models, e.g. polytropic and isothermal (see equations 10.24-10.27 or BT87, p.223-232). Figure 10.10 shows these two fits for the $P_{50}^{0.5}$ simulation. The technique used for the fit is described in section 2 of this paper. The result obtained for this special study is the following : the equilibrium states reached by our initial conditions can be fitted by the two models with a good level of accuracy. As long as $\eta < 70$, the polytropic fit gives a mean value $\gamma = 4.77$ with a standard deviation of $2.48 \cdot 10^{-1}$. This deviation represents 5.1% of the mean value. This value corresponds typically to the well known Plummer model for which $\gamma = 5$ (see BT87 P.224 for details). When the collapse is very quiet (typically $\eta > 70$) polytropic fit is always very good but the value of the index is much larger than Plummer model, e.g. $\gamma = 6.86$ for H_{79} and $\gamma = 7.37$ for H_{88} . The corresponding plot is the subject of the Figure 10.12. All the data can be found in appendix. As we can see on the example plotted in Figure 10.10, the isothermal fit is generally not as good as the polytropic one. On the whole set of equilibria, isothermal fits give a mean value $s^2 = 2.5 \cdot 10^{-2}$ with a standard deviation of $1.6 \cdot 10^{-2}$ (60%). The corresponding plot is the subject of Figure 10.11. All the data can be found in appendix.

In fact both isothermal and polytropic fits are reasonable : as long as the model is able to reproduce a core halo structure the fit is correct. The success of the Plummer model, which density is given by

$$\rho(r) = \frac{3}{4\pi b^3} \left[1 + \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right]^{-5/2}$$

FIGURE 10.4 – Density profile for C_η^n models plotted in units of R_{50} . The dashed line corresponds to the C_{10}^{03} model

can be explained by its ability to fit a wide range of models with various ratio of the core size over the half-mass radius. The adjustment of this ratio is made possible by varying the free parameter b . We expect that other core halo models like King or Hernquist models work as well as the Plummer model. As a conclusion of this section, let us say that as predicted by theory there is not a single universal model to describe the equilibrium state of isotropic spherical self-gravitating system.

10.3.5 Influence of rotation

We saw in section 10.3.2 a source of flattening for self-gravitating equilibrium. Let us now show the influence of initial rotation, which is a natural candidate to produce flattening. The way we have added a global rotation and the significance of our rotation parameters f and μ are explained in section 10.2.2.

The set of simulations performed for this study contains 31 different elements. The initial virial ratio ranges from $\eta = 10$ to $\eta = 50$, and the rotation parameter from $f = 0$ (i.e. $\mu = 0$) to $f = 20$ (i.e. $\mu = 0.16$ when $\eta = 50$). As a matter of fact, equilibrium states always preserve a rather important part of the initial rotation⁶ and, observed elliptical gravitating systems generally possess very small amount of rotation (see e.g. [20]). We thus exclude large values of f .

Our experiments exhibit two main features (see Figure 10.13) : on the one hand, rotation produces a flattened equilibrium state only when f exceeds a triggering value (typically $f =$

6. We observed that μ is always smaller in the equilibrium state than in the initial one, typically each rotating systems conserves 65% of the initial μ

FIGURE 10.5 – Density profile for P_η^α models plotted in units of R_{50} .

$f_o \simeq 4$). On the other hand, we have found that for a given value of η , the flatness of the equilibrium is roughly f -independent, provided that $f > f_o$.

10.3.6 Thermodynamical segregation

As we study isolated systems, the total energy E contained in the system is constant during the considered dynamical evolution. This property remains true as long as we consider collisionless evolutions. For gravitational systems, this means that we cannot carry out any simulation of duration larger than a few hundred dynamical times. We have obviously taken this constraint into account in our experiments. All systems which experience a violent relaxation reach an equilibrium state which is stationary in the whole phase space. Spatial behaviour like morphological segregation produced by ROI was confirmed and further detailed thanks to our study. A new size segregation was found in section 10.3.3. Now let us consider another new segregation appearing in the velocity space. Each equilibrium state is associated with a constant temperature T , calculated using equation (10.21). More precisely, we have calculated the temporal mean value⁷ of the temperatures, evaluated every one hundred time units. As we can see in Figure 10.14, after the collapse and whatever the nature of the initial system is, the temperature is a very stable parameter.

Figure 10.15 shows the $E - T$ diagram of the set of all non rotating simulations. It reveals a very interesting feature of post-collapse self-gravitating systems.

7. The temporal mean value is computed from the time when the equilibrium is reached until the end of the simulation

FIGURE 10.6 – Density profile for G_η^σ models plotted in units of R_{50} .

On the one hand, the set of systems with a total energy $E > -0.054$ can be linearly fitted in the $E - T$ plane. We call this set Low Branch 1 (hereafter denoted by LB1, see Figure 10.15). On the other hand, the set of the systems with a total energy $E < -0.054$ splits into two families. The first is an exact continuation of LB1. Hence we named it Low Branch 2 (hereafter denoted by LB2). The second can also be linearly fitted, but with a much greater slope (one order of magnitude). We label this family High Branch (hereafter denoted by HB).

In LB1 or LB2, we find every H, G, and M systems with $\eta > 25$, every P and every C with $n > 10$. In HB, we find C_{10}^{03} and every H, G and M systems with $\eta < 25$. This segregation thus affects violent collapses (cold initial data) : on the one hand, when $\eta > 25$ all systems are on LB1, on the other hand for $\eta < 25$, initially homogeneous or quasi-homogeneous (e.g. C_{10}^{03}) systems reach HB when initially inhomogeneous systems stay on LB2 instead.

10.4 Interpretations, Conclusions and Perspectives

Let us now recapitulate the results we have obtained and propose an interpretation :

1. The equilibrium state produced by the collapse of a set of N gravitating particles is N -independent provided that $N > 3.0 \cdot 10^4$.
2. Without any rotation, the dissipationless collapse of a set of gravitating particles can produce two relatively distinct equilibrium states :
 - If the initial set is homogeneous, the equilibrium has a large core and a steep envelope.
 - If the initial set contains significant inhomogeneities ($n > 10$ for clumpy systems or $\alpha > 1$ for power law systems), the equilibrium state has only a small core around of which the density falls down regularly.

The explanation of this core size segregation is clear : it is associated to the Antonov core-collapse instability occurring when the density contrast between central and outward region of a gravitating system is very big. As a matter of fact, if the initial set

FIGURE 10.7 – Density profile for M_η^k models plotted in units of R_{50} .

contains inhomogeneities, these collapse much more quickly than the whole system⁸ and fall quickly into the central regions. The density contrast becomes then very large and the Antonov instability triggers producing a core collapse phenomenon. The rest of the system then smoothly collapses around this collapsed core. If there are no inhomogeneities in the initial set, the system collapses as a whole, central density grows slowly without reaching the triggering value of the Antonov instability. A large core then forms. Later evolution can also produce core collapse : this is what occurs for our M_{07}^I system (see Figure 10.8). This is an initially homogeneous system with Kroupa mass spectrum which suffers a very strong collapse. As the mass spectrum is not sufficient to bring quickly enough a lot of mass in the center of the system, Antonov instability does not trigger and a large core forms. As the collapse is very violent, an increasing significant part of particles are progressively "ejected" and the core collapse takes progressively place. This is the same phenomenon which is generally invoked to explain the collapsed core of some old globular clusters (e.g. [22]) : during its dynamical evolution in the galaxy, some stars are tidally extracted from a globular cluster, to compensate this loss the cluster concentrate its core, increasing then the density contrast, triggering sooner or later the Antonov instability.

3. Without any rotation, the collapse (violent or quiet) of an homogeneous set of gravitating particles produces an E0 (i.e. spherical) isotropic equilibrium state. There are two possible ways to obtain a flattened equilibrium :
 - Introduce a large amount of inhomogeneity near the center in the initial state, and make a violent collapse ($\eta < 25$).
 - Introduce a sufficient amount ($f > 4$) of rotation in the initial state.

These two ways have not the same origin and do not produce the same equilibrium state. In the first case, one can reasonably invoke the Radial Orbit Instability : as a matter

8. Because their Jeans length is much more smaller than the one of the whole system.

FIGURE 10.8 – Comparison between the evolution of the mass density with respect to time for C_{10}^{20} (top-panel) and M_{07}^I . For each case, plotted times are 10,20,30,40,50,75 and 100 T_d

of fact, as it is explained in a lot of works (see [?] for example) two features are associated to this phenomenon. First of all, it is an instability which needs an equilibrium state from which it grows. Secondly, it triggers only when a sufficient amount of radial orbits are present. The only non rotating flattened systems we observed just combine this two conditions : sufficient amount of radial orbits because the collapse is violent and something from which ROI can grow because we have seen in the previous point that inhomogeneities collapse first and quickly join the center. The fact that cold P_η^α systems are more flattened than C_η^α ones is in complete accordance with our interpretation : as a matter of fact, by construction, power law systems have an initial central overdensity, whereas clumpy systems create (quickly but not instantaneously) this overdensity bringing the collapsed clumps near the center. The ROI flattening is oblate ($a_2 \simeq 1$ and $a_1 < 1$).

The rotational flattening is more natural and occurs when the centrifugal force overcomes the gravitational pressure. The rotational flattening is prolate ($a_2 > 1$ and $a_1 \simeq 1$). We notice that initial rotation must be invoked with parsimony to explain the ellipticity of some globular clusters or elliptical galaxies. As a matter of fact, these objects are very weakly rotating systems and our study has shown that the amount of rotation is almost constant during the collapse.

4. Spherical equilibria can be suitably fitted by both isothermal and polytropic laws with various indexes. It suggests that any distribution function of the energy exhibiting an adaptable core halo structure (Polytrope, Isothermal, King, Hernquist,...) can suitably fit the equilibrium produced by the collapse of our initial conditions.
5. There exists a temperature segregation between equilibrium states. It concerns only initially cold systems (i.e. systems which will suffer a violent collapse) : for such systems when η decreases, the equilibrium temperature T increases much more for initially homogeneous systems than for initially inhomogeneous systems. On the other hand, whatever

FIGURE 10.9 – The core size segregation : $\ln(R_{10}/r_c)$ vs $\ln(R_{50}/r_c)$ is plotted for all non rotating systems.

their initial homogeneity, quiet collapses are rather all equivalent from the point of view of the equilibrium temperature : T increases in the same way for all systems as η decreases. This feature may be the result of the larger influence of the dynamical friction induced by the primordial core on the rapid particles in a violent collapse.

All these properties may be directly confronted to physical data from globular clusters (see Harris catalogue [23]) or galaxies observations.

As a matter of fact, in the standard "bottom-up" scenario of the hierarchical growth of structures, galaxies naturally form from very inhomogeneous medium. Our study then suggests for the equilibrium state of such objects a potential flattening and a collapsed core. This is in very good accordance with the E0 to E7 observed flatness of elliptical galaxies and may be a good explanation for the presence of massive black hole in the center of galaxies (see [56]).

On the other hand Globular Clusters observations show that these are spherical objects (the few low flattened clusters all possess a low amount of rotation), and that their core is generally not collapsed (the collapsed core of almost 10% of the galactic Globular Clusters can be explained by their dynamical evolution through the galaxy). Our study then expect that Globular Clusters form from homogeneous media.

These conclusions can be tested using the $E - T$ plane. As a matter of fact, we expect that an $E - T$ plane build from galactic data would not present any High Branch whereas the same plane build from Globular Clusters data would.

10.5 Tables of results

Homogeneous Initial Conditions : H_η

FIGURE 10.10 – Polytropic and isothermal fit for the $P_{50}^{0.5}$ simulation.

η	ΔE (%)	η (end)	a_1	a_2	R_{10}	R_{50}	R_{90}	R_d	γ	Σ_γ^2 ($\times 10^2$)	s^2 ($\times 10^2$)	$\Sigma_{s^2}^2$ ($\times 10^3$)	T ($\times 10^{11}$)	$-E$ ($\times 10^2$)
88	0.0	98	1.02	0.99	3.39	6.53	10.6	5.02	7.37	-6	1.12	-3	2.30	3.30
79	0.0	99	1.00	1.00	3.11	6.01	9.8	4.59	6.86	-4	1.37	-3	2.20	3.60
60	0.0	96	1.01	0.98	2.41	4.73	11.5	3.41	5.05	-1	2.04	-2	2.89	4.20
50	0.0	96	1.01	0.98	2.04	4.09	15.1	2.81	4.73	-2	2.49	-2	3.04	4.50
40	0.1	96	1.01	0.99	1.72	3.51	25.7	2.30	4.72	-2	2.79	-2	3.39	4.80
30	0.0	96	1.02	0.99	1.36	2.88	253.2	1.75	4.66	-2	3.27	-3	3.74	5.10
20	0.0	101	1.01	0.99	0.95	2.22	874.1	1.17	4.68	-1	4.03	-5	4.78	5.39
15	0.0	108	1.01	0.99	0.74	1.89	1143.0	0.88	4.66	-1	4.73	-6	5.83	5.53
10	1.4	120	1.02	0.98	0.52	1.59	1448.0	0.60	4.59	-1	5.76	-9	7.71	5.66

Clumpy Initial Condition : C_η^n

η	n	ΔE (%)	η (end)	a_1	a_2	R_{10}	R_{50}	R_{90}	R_d	γ	Σ_γ^2 ($\times 10^2$)	s^2 ($\times 10^2$)	$\Sigma_{s^2}^2$ ($\times 10^3$)	T ($\times 10^{11}$)	$-E$ ($\times 10^2$)
10	3	0.1	97	1.03	0.96	0.55	1.85	1241.0	0.58	4.61	-1	5.21	-11	6.99	5.82
67	20	0.8	95	1.01	0.94	0.93	6.14	16.1	0.66	5.00	-1	1.98	-10	2.86	3.96
65	20	0.9	95	1.02	0.96	0.93	5.63	13.5	0.63	5.27	-2	2.00	-13	3.07	4.29
61	20	0.6	95	1.05	0.98	0.86	5.15	12.3	0.58	5.43	-3	2.09	-11	3.32	4.64
48	20	0.6	94	1.03	0.99	0.81	4.24	11.8	0.59	5.15	-3	2.61	-13	3.79	5.31
39	20	0.5	94	1.04	0.99	0.76	3.84	12.8	0.40	4.72	-1	3.20	-10	4.06	5.65
29	20	1.2	94	1.04	0.99	0.72	3.42	15.4	0.56	4.42	-1	3.81	-6	4.24	5.97
14	20	0.3	93	1.09	0.98	0.64	2.72	39.5	0.48	4.56	-1	4.27	-7	4.66	6.50
10	20	1.4	97	1.13	0.99	0.61	2.54	345.5	0.54	4.70	-9	4.25	-15	4.98	6.66
7	20	0.3	94	1.14	0.92	0.57	2.44	224.6	0.45	4.74	-1	4.41	-12	5.36	6.76

FIGURE 10.11 – Best fit of the s^2 parameter for an isothermal model for all non rotating systems studied. The error bar correspond to the least square difference between the data and the model.

Power Law Initial Conditions : P_η^α

η	α	ΔE (%)	η (end)	a_1	a_2	R_{10}	R_{50}	R_{90}	R_d	γ	Σ_γ^2 ($\times 10^2$)	s^2 ($\times 10^2$)	Σ_{s^2} ($\times 10^3$)	T ($\times 10^{11}$)	$-E$ ($\times 10^2$)
50	0.5	0.0	95	1.01	0.99	1.84	3.92	13.5	2.53	4.66	-1	2.65	-2	3.54	4.69
50	1	0.0	94	1.01	0.99	1.56	3.77	12.1	2.01	4.77	-6	2.78	-3	3.69	5.00
10	1	0.1	96	1.00	0.80	0.69	2.71	382.2	0.70	4.61	-8	4.05	-8	4.85	6.32
8	1.5	0.1	96	1.01	0.71	0.62	2.63	25.1	0.61	4.63	-7	4.42	-9	5.52	7.18
50	2	1.7	93	1.02	0.99	0.53	3.20	9.2	0.34	5.30	-6	3.35	-9	5.30	7.32
40	1.5	0.1	96	1.00	0.99	0.97	3.31	11.0	1.03	4.71	-8	3.44	-6	4.42	5.99
9	2	1.6	96	1.01	0.78	0.38	2.51	10.6	0.18	4.68	-10	5.21	-20	6.73	9.31

Mass Spectrum Initial Conditions : M_η^i

η	i	ΔE (%)	η (end)	a_1	a_2	R_{10}	R_{50}	R_{90}	R_d	γ	Σ_γ^2 ($\times 10^2$)	s^2 ($\times 10^2$)	Σ_{s^2} ($\times 10^3$)	T ($\times 10^{11}$)	$-E$ ($\times 10^2$)
7	Krou	5.0	132	1.02	0.99	0.25	2.04	1721.0	0.37	4.26	-1	5.16	-15	9.97	5.62
15	1/M	0.6	101	1.01	0.98	0.68	2.04	366.8	0.97	4.65	-1	4.35	-10	5.72	5.53
25	Salp	0.4	99	1.01	0.98	1.18	2.51	225.5	1.54	4.66	-2	3.59	-3	4.08	5.23
35	Krou	0.2	98	1.01	0.99	1.55	3.18	39.8	2.09	4.66	-2	2.97	-3	3.51	4.95
51	1/M	0.2	95	1.01	0.98	1.79	4.19	14.2	2.83	4.67	-9	2.39	-4	3.15	4.48
50	Krou	0.1	96	1.02	0.98	1.93	4.09	15.1	2.87	4.60	-1	2.45	-3	3.19	4.50
50	Salp	0.1	96	1.01	0.98	2.03	4.13	15.1	2.87	4.70	-2	2.45	-2	3.08	4.49

Gaussian Velocity Dispersion Initial Conditions : G_η^σ

FIGURE 10.12 – Best fit of the γ parameter for a polytropic model for all non rotating systems studied. The error bars correspond to the least square difference between the data and the model.

η	σ	ΔE (%)	η (end)	a_1	a_2	R_{10}	R_{50}	R_{90}	R_d	γ	Σ_γ^2 ($\times 10^2$)	s^2 ($\times 10^2$)	$\Sigma_{s^2}^2$ ($\times 10^3$)	T ($\times 10^{11}$)	$-E$ ($\times 10^2$)
48	G1	0.0	95	1.00	1.00	1.72	3.98	14.6	2.23	4.66	-5	2.64	-3	3.13	4.50
49	G2	0.0	95	1.02	0.99	1.74	4.02	14.4	2.28	4.65	-6	2.61	-3	3.13	4.50
50	G3	0.0	95	1.00	1.00	1.90	4.08	14.1	2.56	4.72	-8	2.52	-2	3.09	4.50
12	G4	0.4	118	1.03	0.98	0.56	1.77	1312.0	0.64	4.56	-1	5.33	-10	6.08	5.63
50	G5	0.0	96	1.01	0.99	1.98	4.11	14.8	2.72	4.71	-1	2.50	-2	3.19	4.50

FIGURE 10.13 – Axial ratios as for different values of η as a function of the initial solid rotation parameter f

FIGURE 10.14 – Evolution of the temperature as a function of time

FIGURE 10.15 – Energy-Temperature diagram

Bibliographie

- [1] R. Abraham and J. E. Marsden, Foundations of Mechanics. The Benjamin, Cummings Publishing Company
- [2] L.Aguilar and D.Merritt , 1990, ApJ, 354, 33
- [3] J.J. Aly, Phys. Rev. E **49**, 3771 (1994).
- [4] J.J. Aly , Mon. Not. R. Astron. Soc. **241**, 15 (1989) ; B. Stahl, H.J. Ziegler and H. Wiechen, Mon. Not. R. Astron. Soc. **244**, 260 (1989).
- [5] Aly J.-J. and Perez J., Phys. Rev. E, 60, 5185, 1999
- [6] Antonov, V.A., Vest. Len. Univ., 7, 135, 1962 in russian translated in english in Dynamics of star clusters, Ed. Goodman J. & Hut P. (IAU 113, Reidel 1985)
- [7] Barnes, J. and Hut, P., 1986, Nature, 324, 446
- [8] Barnes, J. and Hut, P., 1989, ApJS, 70, 389
- [9] Binney, J., and Tremaine, S., 1987, Galactic dynamics, Princeton University Press
- [10] Bloch A.M., Krishnaprasad P.S., Marsden J.E. and Ratiu T.S., Ann. Inst. Henri Poincaré : Non linear analysis, 11, 37, 1994
- [11] Blottiau, P., Bouquet, S., Chièze,J.-P., 1988,A&A, 207, 24
- [12] Boily, C.M., Clarke, C.J., Murray, S.D., 1999,M.N.R.A.S., 302, 399
- [13] E. Caglioti, P.L. Lions, C. Marchioro and M. Pulvurenti, Commun. Math. Phys. **174**, 229 (1995).
- [14] Cannizzo,J.K., and Hollister, T.C., 1992, ApJ, 400, 58
- [15] Carpintero,D.D., Muzzio, J.C., 1995, ApJ, 440, 5
- [16] Casertano, S., Hut,P., 1985, ApJ, 298, 80
- [17] Chavanis, P.-H.,2002,Submitted to Phys. Rev. E, cond-mat/0107345
- [18] Chavanis, P.-H., A& A,401, 15, 2003
- [19] W. Chen and C. Li, Duke Math. J. **63**, 615 (1991) ; S. Chanillo and M. Kiessling, Commun. Math. Phys. **160**, 217 (1994).
- [20] Combes, F., Boissé, P., Mazure, A., Blanchard, A., 1995, Galaxies and cosmology, Springer Verlag
- [21] Dantas, C.C., Capelato, H.V., de Carvalho, R.Ribiero, A.L.B, 2002, A&A, astroph-0201247
- [22] Djorgovski, S., King, I. R., Vuosalo, C., Oren, A., Penner, H.,IAU Symp.118, Ed. J.B. Hearnshaw, P.L. Cottrell, 1986
- [23] Harris, W.E. 1996, AJ, 112, 1487

- [24] Heggie, D.C., and Mathieu R.D., 1986, in *The Use of Supercomputers in Stellar Dynamics*, ed. P. Hut & S. L. W. McMillan, Springer Verlag.
- [25] Hénon, M. , 1960, *An.Astro*, 23, 472
- [26] Henriksen, R.N., and Widrow, L.M., 1995, *M.N.R.A.S*, 276, 679
- [27] Hernquist, 1990, *ApJ*, 356, 359
- [28] Huanchun Ye and P.J.Morrison, *Physics of Fluids B*, vol 4, 771, 1992
- [29] Kandrup H.E. , *ApJ*, 351, 104, 1990
- [30] Kandrup, H.E., *ApJ*, 370, 312, 1991
- [31] Kandrup, H.E., *ApJ*, 380, 511, 1991
- [32] Katz J. and Lynden-Bell D., *MNRAS*, 184, 709, 1978
- [33] M. Kiessling, *J. Plasma Phys.* **54**, 11 (1995).
- [34] Kroupa, P., 2001, *M.N.R.A.S.*, 322, 231
- [35] Lancellotti, C.,Kiessling, M., 2001,*ApJ*, 549, L93
- [36] Lynden-Bell D., *MNRAS*, 136, 101, 1967
- [37] Lynden-Bell, D., and Eggleton, P.P., 1980, *M.N.R.A.S.*, 191, 483
- [38] J. Marsden, P.J. Morrison, and W.B. Thompson, *Covariant Poisson Brackets for Classical Field Theories*, *Annals of Physics*, vol. 169, 29-48, 1986
- [39] Mineau P., Feix M. and Rouet J., *Astron. & Astroph.*, 228, 344, 1990
- [40] Morrison P.J. , *Phys. Lett. A*, 80, 383, 1980
- [41] Morrison P.J., *Z. Naturforschung. Teil A* 42,1115,1987
- [42] P.J.Morrison, and D.Pfirsch, *Phys. Rev A*, 40, 3898, 1989
- [43] P.J.Morrison and D. Pfirsch, *Physics of Fluids B*, 2, 1105, 1990
- [44] P.J.Morrison, *Transport Theory and Statistical*, 29, 397, 2000
- [45] Moser J., *Mem.,Am. Math. Soc*, 81,1, 1968
- [46] Navarro, J.E., White, S.D.M. 1993, *M.N.R.A.S.*, 265, 271
- [47] Nakamura, T.K., 2000, *ApJ*, 531, 739
- [48] Perez J., Aly J.-J., *MNRAS*, 280, 689,1996
- [49] Perez J., Alimi J.-M., Aly J.-J. and Scholl H., *MNRAS*, 280, 700, 1996
- [50] Perez J. and Lachieze-Rey M., *ApJ*, 465 ,54,1996
- [51] Perez J. and Roy F, *MNRAS*, 2004, *MNRAS*, 348, 72, 2004
- [52] J. Perez, *Cours de gravitation classique*, Editions de l'Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 2001
- [53] A. Renyi, *Probability Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1970).
- [54] Salpeter, E.E., 1955, *ApJ*, 121, 161
- [55] W.C. Saslaw, *Gravitationnal Physics of stellar and galactic systems*, Cambridge University Press, 1985
- [56] R. Schodel, T. Ott, R. Genzel, R. Hofmann, M. Lehnert, A. Eckart, N. Mouawad, T. Alexander, M.J. Reid, R. Lenzen, M. Hartung, F. Lacombe, D. Rouan, E. Gendron, G. Rousset, A.-M. Lagrange, W. Brandner, N. Ageorges, C. Lidman, A.F.M. Moorwood, J. Spyromilio, N. Hubin, K.M. Menten ,17 Oct 2002 ,*Nature*

- [57] Theis, C. and Spurzem, R., 1999, *A&A*, 341, 361
- [58] S. Tremaine, M. Hénon and D. Lynden-Bell, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **219**, 285 (1986).
- [59] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52**, 479 (1988).
- [60] van Albada, T.S., 1982, *M.N.R.A.S.*, 201, 939
- [61] K. R. Yawn and B. N. Miller, *Phys. Rev. E*, 68, 56120 , 2003
- [62] F. Zwicky."On the Formation of Clusters of Nebulae and the Cosmological Time Scale"
,*Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Volume
25, Issue 12, pp. 604-609

Troisième partie

Informations générales sur l'auteur

Quelques dates

- 1990 - Magistère Inter-universitaire de Physique de l'École Normale Supérieure (Ulm)
- 1991 - Diplôme d'études approfondies, astrophysique et techniques spatiales obtenu avec la mention très bien, major de promotion.
- 1995 - Thèse de Doctorat de l'Université Paris VII au service d'Astrophysique du CEA Saclay, sur le sujet " Stabilité des systèmes de particules en interaction gravitationnelle " sous la direction de Jean-Jacques Aly, obtenue avec la mention très honorable.
- Depuis 1996, enseignant-chercheur à l'École Nationale Supérieure de Techniques Avancées, Laboratoire de Mathématiques Appliquées (CNRS URA D853) et chercheur associé au Laboratoire de l'Univers et de ses Théories l'observatoire de Paris-Meudon.
- Depuis 2000, Professeur à l'École Doctorale d'Astronomie et d'Astrophysique d'Ile de France

Thèmes de Recherche

Mes activités de recherche concernent essentiellement l'interaction gravitationnelle et se décomposent en deux domaines complémentaires :

— Gravitation Classique

Il s'agit de la modélisation mathématique et numérique des systèmes auto-gravitant. Sur le plan théorique, il est tout d'abord question de comprendre la nature des équations qui sont susceptibles de modéliser le comportement dynamique d'objets tels que les amas globulaires ou les galaxies régulières. Il s'agit ensuite de résoudre ces équations dans les divers cas que peuvent être la formation des objets (processus de relaxation), la stabilité des équilibres et les mécanismes d'évolution séculaire. Dans ce contexte, nous avons déployé un certain nombre de méthodes algébriques permettant d'étudier efficacement les phases non dissipatives de la dynamique des galaxies, et proposé des techniques permettant de rendre compte de l'état dynamique des galaxies. Ces travaux théoriques sont le plus souvent possible associés à des simulations numériques utilisant d'importantes ressources (Cluster Linux ou machines massivement parallèles). De plus, de récentes collaborations devraient permettre d'intégrer directement des résultats observationnels dans nos approches, et rendre possible une étude détaillée de l'aspect des amas globulaires en fonction de leurs caractéristiques orbitales au sein des galaxies.

— Gravitation Relativiste

J'ai entrepris depuis quelques années l'étude des propriétés des solutions homogènes et anisotropes des équations de la relativité générale. De l'étude des caractéristiques de la singularité inhérente à cette théorie, aux raisons pouvant expliquer l'observation d'un univers quasiment isotrope, nombreuses sont les motivations de ce questionnement. Une étude relativement exhaustive des modèles d'Univers anisotropes (Univers de Bianchi) est entreprise. L'intégrabilité des équations de la dynamique associée est étudiée dans un large contexte. Les propriétés dynamiques des divers systèmes sont présentées de façon globale en utilisant diverses approches comparées.

Ces derniers travaux initialement menés en collaboration avec Jean-Michel Alimi et Thierry Lehner du Laboratoire de l'Univers et de ses Théories de l'observatoire de Meudon se poursuivent depuis près de deux ans de façon autonome.

Activités d'enseignement

- ▲ École Doctorale d'Astronomie et d'Astrophysique d'Ile de France (Depuis 2000)
 - Professeur du cours de tronc commun de gravitation (M2-TC2)
 - Cours Post-DEA : Dynamique des Galaxies : Équilibre et stabilité.
- ▲ École Nationale Supérieure de Techniques Avancées (Depuis 1998)
 - Responsable de l'enseignement thématique " Astrophysique théorique " MAT40 et professeur du cours de gravitation classique MAT42 - 1^{ère} année ENSTA
 - Professeur du cours de théorie des champs classiques de l'enseignement thématique "Vision géométrique de la physique " AOT10 - 1^{ère} année ENSTA
 - Petites classes du cours " Équation différentielles, équilibre, linéarisation et stabilité " AO102 - 1^{ère} année ENSTA
 - Responsable du module "Applications scientifiques du calcul parallèle et réparti" A1-4 - 3^{ème} année ENSTA
- ▲ Master Simulation et Modélisation INSTN-UVSQ-ENSTA-CENTRALE-CACHAN (Depuis 2004)
 - Responsable du Module M2-B9 " Modélisation en astrophysique "
 - Professeur du cours d'introduction aux systèmes astrophysiques du module B8.
- ▲ Université d'Evry Val d'Essonne (Depuis 1994)
 - Professeur du cours de systèmes dynamiques - IUP Ingénierie Économique et Statistique depuis 1994.
- ▲ Membre du jury de l'épreuve commune de TIPE du concours des grandes écoles d'ingénieurs depuis juin 2003.

Publications

- Articles scientifiques publiés dans des revues ou des actes à comité de lecture
1. Dynamical properties of orbits in a spherical gravitational potential,- Jérôme Perez & Nicolas Kielbasiewicz - Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, en préparation
 2. Integrability of Bianchin Universes in scalar tensor theory of gravitation Julien Larena & Jérôme Perez - Classical and Quantum gravity, en préparation
 3. Gravity, Dimension, Equilibrium & Thermodynamics - Jérôme Perez - Comptes rendus de l'académie des sciences , 2006, in press
 4. Dynamics of anisotropic universes - Jérôme Perez - Proceedings Albert Einstein Centenary International Conference held in Paris Unesco Juillet 2005, American Institute of Physics Conference Proceedings, Eds. J.M. Alimi and A. Füzfa, 2006
 5. Vlavov and Poisson equations in the context of self-gravitating systems - Jérôme Perez - Transport Theory and Statistical Physics, Volume 34, Number 3-5 , pp. 91 - 406, 2005
 6. Dissipationless collapse of a set of N massive particles - Jérôme Perez & F. Roy - Monthly Notices of the Royal Astronomical Society Vol. 348, Issue 1, p. 62, 2004
 7. Can we know how globular clusters form ? - Jérôme Perez & F. Roy - New Horizons in Globular Cluster Astronomy, ASP Conference Proceedings, Vol. 296, held 24-28 June 2002 at Dipartimento di Astronomia, Universita' di Padova, Padova, Italy. Edited by Giampaolo Piotto, Georges Meylan, S. George Djorgovski and Marco Riello. 2003, p.503, 2002
 8. Thermodynamics of a two dimensional unbounded self-gravitating system - Aly J.J, Perez J. - Physical Review E, 1999, 60, 5185
 9. Stability of rotating spherical stellar systems - J. Perez, J.M. Alimi, A. Serna - Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1999, 305, 859
 10. Analytical Results for Distributions Functions and Gravitational Potential for 3D and 2D Stellar Systems, - J. Perez , Astronomische Gesellschaft Meeting, 2000,75
 11. A symplectic approach of gravitationnal instability - J. Perez, M. Lachieze-Rey - The Astrophysical Journal, 1996, 465, 54
 12. Stability of spherical stellar systems I : Analytical results - J. Perez, J.J. Aly - Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1996, 280, 689
 13. Stability of spherical stellar systems II : Numerical results - J. Perez, J.M. Alimi, J.J. Aly, H. Scholl - Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1996, 280, 700
 14. Formation, évolution et stabilité de structures dans l'univers - J.M. Alimi, J.Perez, A. Serna A, Scholl H. - Chroniques Hyperparallèles, Juillet 1994

15. Recent results on the stability of self-gravitating spherical systems - J. Perez, J.J. Aly - International workshop on ergodic concepts in stellar dynamics- Observatoire de Genève 1993 - Ed. D. Pfenniger & V. Gurzadyan - Springer Verlag
16. The stability of spherical stellar systems : A numerical approach - J. Perez, J.J. Aly - European meeting on N Body gravitating systems- CNRS Aussois 1993 0 - Ed. F. Combes & E. Athanassoula - Hermann
17. On the stability of a gaseous sphere against non-radial perturbations - J.-J. Aly & Jérôme Perez, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 259, Issue 1, pp 95-103,1992

— Ouvrages

1. Stabilité des systèmes de particules en interaction gravitationnelle - J. Perez - Thèse de doctorat de l'Université Paris VII - 224 pages, Mai 1995
2. Cours de gravitation classique - J. Perez , Editions de l'École Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 135 pages, Juin 1999
3. Cours de théorie des champs classiques - J. Perez , Éditions de l'École Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 125 pages, Juin 2002
4. Systèmes dynamiques pour l'économétrie - J. Perez , Éditions de Université d'Évry, 155 pages, Juin 1999
5. Publication en ligne du cours de Tronc commun de gravitation TC2 de l'École Doctorale d'Astronomie et Astrophysique d'Ile de France - J. Perez , Septembre 2004

— Activités éditoriales

Referee pour les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Transport Theory and Statistical Physics

Participation à des séminaires scientifiques

1. Enrico Fermi School on Galaxy Formation, Varenna, Italy, Aout 1992
2. Gravitational Dynamics and the N-body Problem, Aussois, France, March 1993
3. Ergodic Concepts in Stellar Dynamics, Observatoire de Genève, Suisse, Mars 1993
4. Astrophysics School VI, Organized by the European Astrophysics Doctoral Network (EADN) in Thessaloniki, Greece, 13-23 July 1993
5. National Astronomy Meeting, Edinburgh, Scotland, April 1994
6. Structure and Dynamics of Gravitating Systems, Petrozavodsk, Russia, Aout 1994
7. Conceptions of space in physics, Les houches, France, octobre 1997
8. 28-th SAAS-FEE Advanced Course, "Star clusters", March 30 - Apr. 4. 1998, Les Diablerets, Switzerland
9. 2nd ICRA Network Workshop on "The chaotic universe", Rome-Pescara, Italy, February 1999
10. Joint European and National Astronomical Meeting (JENAM 99) ,Toulouse, France, September 6-11, 1999
11. Star 2000 : The challenges for stellar dynamics, International Spring Meeting of the Astronomische Gesellschaft, , Heidelberg, Germany, March 20-24, 2000
12. New horizons in globular cluster astronomy, Universita di Padova, Padova, Italy 24 - 28 July, 2003
13. Vlasovia 2003, First International Workshop on the Theory and Applications of the Vlasov Equation , Nancy, France, 26-28 November 2003
14. Albert Einstein Century International Conference, Paris Unesco, 18 - 22 July 2005
15. Statistical mechanics of non-extensive systems, Paris, 24 - 25 Octobre 2005

Séminaires scientifiques invités

- Stabilité d'un système d'étoiles, Séminaire de l'observatoire de Strasbourg, Décembre 1997
- Modélisation des amas globulaires et des galaxies elliptiques, Séminaire de l'observatoire de Toulouse, Avril 1998
- Modélisation numérique d'amas stellaire , GdR ParaMas, Palaiseau, France, novembre 2001.
- Étude de l'approche vers la singularité dans les Univers de type Bianchi IX, Séminaire du Service d'Astrophysique Théorique du CE Saclay, Avril 2002
- Relativité générale et Univers anisotrope, Séminaire du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA, Décembre 2002
- Effondrement d'un système de particules en interaction gravitationnelle, Séminaire LUTH & GEPI, Observatoire de Meudon, Lundi 28 avril 2003
- Effondrement d'un système de particules en interaction gravitationnelle, Séminaire de l'Observatoire Astronomique Marseille-Provence, Vendredi 5 décembre 2003
- Effondrement d'un système de particules en interaction gravitationnelle, Séminaire de l'Observatoire de Strasbourg, 23 Janvier 2004

Encadrement d'étudiants

★ Thèses de doctorat

- Fabrice Roy, sur le sujet " Formation des amas globulaires et des galaxies elliptiques ", Université de Versailles-St Quentin, Thèse soutenue en Juillet 2004, Fabrice Roy a obtenu un poste d'Ingénieur de recherche au CNRS au LUTH (Observatoire de Meudon) en Juillet 2005
- Nicolas Kielbasiewicz, sur le sujet " Gravitation multi-échelle ", depuis Septembre 2004, Université de Versailles-St Quentin, École doctorale de l'école Polytechnique

★ Stages de DEA

- Nicolas Kielbasiewicz, (DEA, Mathématiques de la Modélisation, Simulations et applications à la Physique, Université de Versailles-St Quentin), Dynamique gravitationnelle multi-échelle, Mars à Juin 2004
- Fabrice Roy (DEA, Mathématiques de la Modélisation, Simulations et applications à la Physique, Université de Versailles-St Quentin), Phases transitoires dans les processus dynamiques gravitationnels , Mars à Juin 2000

★ Stages de 2^{ème} année du Magistère Inter universitaire de Physique d'Ile de France (Maîtrise)

- Benjamin Renaud (École Normale Supérieure, Paris) - Équilibre et transition vers l'équilibre des systèmes auto-gravitants. de Janvier à Juillet 2001.

★ Projets personnels en laboratoire, 2^{ème} année ENSTA (Maîtrise)

- De Janvier à Juin 1997
 - Callixte Cauchois et Ronan Troadec (ENSTA) Modélisation numérique de l'effondrement gravitationnel
- De Janvier à Juin 1998
 - Nikos Leterier et Laurent Carlier (ENSTA), Modèles physiques de naines blanches
 - Benoit Colas et Nicolas Dutertrey (ENSTA), Étude du cycle solaire, en collaboration avec Jean-Jacques ALY (CEA Sap)
- De Janvier à Juin 1999
 - Sébastien Tordeux (ENSTA) : Solutions analytiques du systèmes de Vlasov-Poisson.
 - Grégoire Ducasse (ENSTA) : Propriétés des orbites stellaires dans les galaxies.
 - Nadjeda Orlova (ENSTA) : Propagation d'ondes radar dans le plasma ionosphérique.
- De Janvier à Juin 2000
 - Guillaume Farinole (ENSTA) : La ceinture de radiation jovienne, en collaboration avec Sébastien Bourdarie (ONERA Toulouse, département environnement spatial)
 - Mathieu Caillat et Mathieu Lepelley (ENSTA) : Équilibre dynamiques de croissance endogène avec taxation et monnaie, en collaboration avec Stéfano Bosi

- (Université d'Evry, département d'économie).
- François Detchevery (ENSTA) : Étude variationnelle en Monte-Carlo de l'Hélium 4, en collaboration avec Philippe Sindzingre, (Université Paris VI, laboratoire de physique théorique des liquides).
 - Karim N'Diaye (ENSTA) : Micro-manipulation de molécules d'ADN, en collaboration avec Vincent Croquette (ENS, Laboratoire de Physique Statistique)
- De Janvier à Juin 2001
- Laurent Valex (ENSTA) : Modélisation des ceintures de radiation de Saturne, en collaboration avec Sébastien Bourdarie (ONERA Toulouse, département environnement spatial).
 - Denis Garet et Romain Gautier (ENSTA) : Simulation de galaxies : génération de modèles et représentation graphique.
 - Serge Lefranc (ENSTA) : Mise en évidence de structures dans la distribution des vitesses radiales des galaxies, en collaboration avec Laurent Notale (Observatoire de Meudon, DAEC).
 - Bruno Audebert (ENSTA) : Structure magnétique des protubérances solaires, en collaboration avec Jean-Jacques ALY (CEA Sap).
 - Philippe Gaucher (ENSTA) : Mesure de la profondeur optique de microlentilles gravitationnelles en direction du bulbe galactique, en collaboration avec Christophe Alard (CNRS, Institut d'Astrophysique de Paris)
- De Janvier à Juin 2002
- Julien Larena (ENSTA) : Formation et structure des systèmes autogravitants
 - Eli Laucoin (ENSTA) : Collaboration ATLAS du CERN.
 - Maïtis Chalain (ENSTA), Erreurs numériques sur les FFT : Application aux calculs polynomiaux, en collaboration avec Jacques Laskar (Observatoire de Paris)
 - Jérémie Danicourt (ENSTA), Simulations hydrodynamiques : test du projet Flash, en collaboration avec Daniel Pfenniger (Observatoire de Genève)
- De Janvier à Juin 2003
- Nicolas Kielbasiewicz(ENSTA), Simulation numérique de vents stellaires relativistes à l'aide de méthodes spectrales, en collaboration avec Christophe Sauty (LUTH)
 - Sophie Daudier(ENSTA), Equations différentielles avec retard, en collaboration avec Alfredo Bellen (Département de Mathématiques de l'Université de Trieste)
 - Mathieu Remazeilles(ENSTA), Étude des mésons Ds à l'aide de la ChromoDynamique Quantique sur réseau, en collaboration avec Asnaa Abada (Laboratoire de Physique Théorique d'Orsay)
- De Janvier à Juin 2004
- Kumiko Kotera, Arnaud Bichon & Jérôme Quenu (ENSTA), Propriétés statistiques des objets auto-gravitant
 - Alexandre Beaussier (ENSTA), Étude des "planètes-océans" aux abords des étoiles de type spectral M, en collaboration avec Jean-François LESTRADE (LERMA)
 - Vaïtua LEROI (ENSTA), Recherche d'objets de Kuiper par occultation stellaire à l'ESO, en collaboration avec Françoise ROQUES (LESIA)
- De Janvier à Juin 2005
- Pierre INIZAN (ENSTA), Utilisation de méthodes algébriques en vue de la classification des différents modèles d'univers homogènes anisotropes,
 - Yann ESCURIOL (ENSTA), La formation d'étoiles super massives dans les nuages

interstellaires, en collaboration avec Michael BURTON (University of New South Wales, Australie)

- Nicolas HOUDEAU (ENSTA), Mésons B et violation CP, en collaboration avec Sébastien DESCOTES-GENON (Laboratoire de physique théorique Université Paris 11)

★ Tutorat d'élèves de 3ème année ENSTA

— Année scolaire 2002-2003

- Julien Larena (ENSTA) : Majeure de Physique de l'école Polytechnique et stage de fin d'étude au laboratoire de Physique Corpusculaire et Cosmologie du Collège de France : Cartographie pour l'analyse des anisotropies du fond diffus cosmologique, en collaboration avec Jacques Delabrouille (PPC Collège de France)

— Année scolaire 2003-2004

- Mathieu Remazeilles (ENSTA) : Majeure de Physique de l'école Polytechnique et stage de fin d'étude à l'Institut d'Astrophysique de Paris : Modèle PEGASE d'évolution des galaxies, en collaboration avec Brigitte Rocca-Volmerange (IAP)
- Nicolas Kielbasiewicz (ENSTA), DEA Mathématiques de la Modélisation, Simulations et applications à la Physique, Université de Versailles-St Quentin et stage de DEA sur la dynamique gravitationnelle multi-échelle

— Année scolaire 2004-2005

- Kumiko Kotera (ENSTA) : Majeure de Physique de l'école Polytechnique et stage de fin d'étude au laboratoire de physique de l'Université d'Oxford : Simulations of galaxy formation and evolution in cosmological environments, en collaboration avec Hughes MATHIS et Joseph SILK (Oxford University, Department of Physics)

— Année scolaire 2005-2006

- Pierre Inizan (ENSTA) : Majeure de Physique de l'école Polytechnique
- Nicolas Houdeaux (ENSTA) : Majeure de Physique de l'école Polytechnique

Activités de vulgarisation des sciences

- ✓ Depuis 2000 je contribue au Festival International d'Astronomie de Fleurance (Gers) : Participation à l'élaboration du programme et détermination de certaines orientations (création de cours grand public, animations scientifiques). Ce festival est devenu un événement incontournable, il rassemble chaque année plus d'une vingtaine de conférenciers et plusieurs milliers de festivaliers.
 - Août 2000
 - Histoire de la représentation du monde d'Anaximandre à Poincaré (Cours)
 - Quelques grandes questions de l'astrophysique ... (Conférence)
 - Août 2001
 - La vie privée des galaxies (Conférence)
 - Août 2002
 - Tout tourne (Conférence)
 - Le problème des 2 corps en astrophysique (Cours)
 - Août 2003
 - Du chaos dans le cosmos ... (Conférence)
 - Août 2004
 - Le théorème du viriel et ses applications en astrophysique (Cours)
 - Août 2005
 - Un cadavre d'étoile, ça pèse un âne mort (Cours)
 - La distance de la nébuleuse de l'œil du chat (Atelier pratique)
- ✓ Depuis 2002, Je participe aux journées portes ouvertes des établissements d'enseignement supérieur parisiens, organisé par la mairie de Paris : "Envie d'Amphi!". Tout en restant grand public, depuis 2004 cet événement permet à l'ENSTA d'illustrer le thème général des TIPE du concours commun des grandes écoles d'ingénieurs sous la forme d'une conférence.
 - ENSTA, décembre 2002 : Une histoire de la représentation du monde
 - ENSTA, décembre 2003 : (Des)ordres cosmiques
 - ENSTA, décembre 2004 : Erreurs et progrès dans l'histoire de l'astronomie
 - ENSTA, décembre 2005 : La fabuleuse histoire des trous noirs
- ✓ Organisation de conférences grand public (hors cadre du festival de Fleurance)
 - Cycle de conférence de vulgarisation d'histoire des sciences à l'ENSTA : "Il était une fois... des sciences"
 - Décembre 2001 - Une histoire de la mécanique quantique - Olivier Darrigol Directeur de recherche CNRS, Laboratoire de recherches épistémologiques et historiques sur les sciences exactes et les institutions scientifiques, Université Paris VII
 - Janvier 2002 - De l'antiquité à Copernic ... Michel Lerner, Responsable de

l'équipe " Histoire de l'astronomie ancienne ", Département d'astronomie fondamentale, Observatoire de Paris

- Février 2002 - Lavoisier, fondateur de la chimie moderne? Bernadette Bensaude-Vincent, Professeur d'histoire et philosophie des sciences à l'Université Paris X, Département de philosophie, Université Paris X
- Mars 2002 - La petite histoire des équations aux dérivées partielles - Haïm Brezis, Professeur de Mathématiques à l'Université Paris VI, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris VI
- Mai 2002 - Débat de clôture : Le procès de Galilée avec Son éminence le Cardinal Poupard, ministre de la culture du Vatican et Michel Lerner, animé par Stéphane Deligeorges (France -Culture)
- Novembre 2003 - Conférence exceptionnelle : La physique de Star Wars - Roland Lehoucq - Service d'Astrophysique du Centre d'Étude de Saclay.
- Cycle de conférences " Se déplacer dans l'Univers"
 - Février 2004 - Les voyages interstellaires : ce que permet la Physique - Roland Lehoucq - Service d'Astrophysique du Centre d'Étude de Saclay.
 - Mars 2004 - L'évolution de la propulsion spatiale - Marcel Pouliquen - SNECMA
 - Avril 2004 - Dynamique des mission spatiales - Yves Langevin - Institut d'Astrophysique Spatiale
- Journée d'information sur les changements climatiques
 - Février 2005 - La Terre en Danger - Yves Lancelot, Paléocéanographe, Directeur de Recherche au CNRS au Centre d'Océanographie de Marseille.

✓ Publications dans des revues de vulgarisation des sciences

La singularité voilée, Perez J. & Alimi J.-M., Pour la Science, n° 298, août 2002, p. 62-67