



**HAL**  
open science

# Modélisation du phénomène de diffusion radiale au sein des ceintures de radiation terrestres par technique de changement d'échelle

S. Lejosne

► **To cite this version:**

S. Lejosne. Modélisation du phénomène de diffusion radiale au sein des ceintures de radiation terrestres par technique de changement d'échelle. Physique de l'espace [physics.space-ph]. Université de Toulouse, 2013. Français. NNT: . tel-01132913

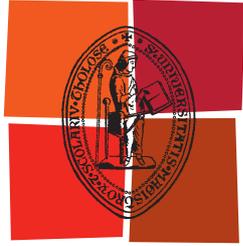
**HAL Id: tel-01132913**

**<https://hal.science/tel-01132913>**

Submitted on 18 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)

---

**Présentée et soutenue par :**

**Solène LEJOSNE**

**le** lundi 30 septembre 2013

**Titre :**

Modélisation du phénomène de diffusion radiale au sein des ceintures de radiation terrestres par technique de changement d'échelle

---

**École doctorale et discipline ou spécialité :**

ED SDU2E : Astrophysique, sciences de l'espace, planétologie

**Unité de recherche :**

Équipe d'accueil ISAE-ONERA PSI

**Directeur(s) de Thèse :**

M. Daniel BOSCHER (directeur de thèse)  
M. Vincent MAGET (co-directeur de thèse)

**Jury :**

M. Pierre-Louis BLELLY - Président  
M. Michel BLANC - Examineur  
M. Daniel BOSCHER - Directeur de thèse  
M. Dominique DELCOURT - Rapporteur  
Mme Dominique FONTAINE - Examinatrice  
M. Fabrice MOTTEZ - Rapporteur

# Merci !

Pour commencer, je remercie mon directeur de thèse, Daniel Boscher, pour la liberté et la confiance accordées.

Je remercie également Vincent Maget pour son aide, sa gentillesse et sa bonne humeur. Merci aussi pour les bons souvenirs de conférence.

De manière plus générale, merci au Département d'Environnement Spatial pour m'avoir accueillie pendant un peu plus de trois ans. Merci en particulier à Jean-François Roussel, pour l'oreille attentive, à Christine Pujol, pour le soutien administratif, et à Guillaume Hubert et Gaël Murat pour leur amitié et leur sens de l'humour.

Merci au CNES et en particulier merci à Guy Rolland, pour les encouragements et le soutien. Merci également de m'avoir aidée à valoriser mon travail.

Merci à Iannis Dandouras, pour sa bienveillance et pour m'avoir aidée à diffuser mon travail au sein de la communauté.

Merci à mes rapporteurs, pour le travail de relecture effectué, et plus généralement, merci à mon jury de thèse, pour s'être rendu disponible et pour avoir contribué à faire du jour de ma soutenance une excellente journée ! Merci donc à Dominique Fontaine, Dominique Delcourt, Michel Blanc, Fabrice Mottez et Pierre-Louis Blelly pour le soutien, le temps et l'intérêt accordés.

Merci à mon école doctorale SDU2E et à l'ISAE pour l'encadrement administratif et les formations de qualité. Merci à l'Université de Toulouse et au Muséum de Toulouse, et en particulier, merci à Meryem Ouertani pour m'avoir fait profiter pleinement de l'aventure « Champs Libres », un aparté enrichissant et revitalisant tombé à point nommé !

Merci enfin à ceux qui m'ont entourée, supportée et soutenue pendant ces quelques années de combat ordinaire.

Merci à mes parents, que j'aime.

Merci à mes amis, que j'aime aussi.

Merci en particulier à Gaëlle Bonnet-Dégaches, Laure Thiberge, Sophie Dagès, Alyssa Bennet et Antoine Moulet pour leur amitié indéfectible. Merci à mes amis de Toulouse. Merci à mes amis para.

Merci à Laurence Saincry, pour la réflexion.

Merci à Lia Kelinsky, pour m'avoir aidée à conclure en beauté ce chapitre de vie.

Merci enfin à Juan G. Roederer, pour cette fabuleuse histoire de science et d'amitié.

À tous, je vous dédie ce manuscrit.

# Résumé

Cette étude s'inscrit dans le domaine de la description de la dynamique des ceintures de radiation terrestres. Elle consiste à modéliser le phénomène de diffusion radiale en travaillant avec une résolution spatio-temporelle plus fine que celle utilisée pour décrire la dynamique des ceintures par le biais d'une équation de diffusion. La démarche s'est organisée en trois temps. Tout d'abord, l'objectif a été d'étudier le phénomène de diffusion radiale d'un point de vue théorique afin de mettre en lumière les principaux pilotes du processus et d'explicitier une formulation des coefficients de diffusion radiale. Une fois l'expression de ces coefficients établie, l'objectif a ensuite été de les quantifier. Pour cela, nous avons développé des protocoles analytiques et numériques puis des protocoles expérimentaux. Nous avons discuté les résultats obtenus ainsi que les atouts et les limites de ces protocoles. Cette étude met en évidence le rôle central de l'asymétrie des variations du champ électromagnétique et des champs électriques induits dans le processus de diffusion radiale. Elle propose des pistes pour la quantification numérique et expérimentale de ces deux pilotes. Elle apporte également un regard critique sur les travaux de la littérature. Elle ouvre la voie pour une nouvelle quantification des coefficients de diffusion basée sur une modélisation adéquate de la dynamique de l'environnement électromagnétique.

# Abstract

This study falls within the field of the Earth's radiation belt dynamics. It consists of modeling the radial diffusion process based on a spatiotemporal resolution higher than the resolution at which radiation belt dynamics are described in terms of a diffusion equation. The approach has been organized in three parts. First, we described radial diffusion theoretically, highlighting the main drivers of the phenomenon and giving a ready-made formula of the radial diffusion coefficients. Then, based on this formula, we aimed to quantify the radial diffusion coefficients. In order to reach this goal, we developed analytical and numerical procedures, and then, observational procedures. Finally, we discussed the results and the pros and cons of each method. This study highlights the central role of asymmetric variations of the electromagnetic fields and induced electric fields in the driving of the intensity of the radial diffusion process. It provides tracks for numerical and experimental quantification of these two drivers. It also provides tools for a critical review of the literature. It paves the way for a more accurate determination of radial diffusion coefficients based on a more precise description of the electromagnetic environment and its variations.



# Sommaire

Notations .....	7
-----------------	---

<b>Introduction : De l'environnement spatial à la modélisation physique des ceintures de radiation terrestres.....</b>	<b>11</b>
--	-----------

<b>Chapitre 1 : Outils théoriques pour une modélisation physique des ceintures de radiation .....</b>	<b>19</b>
---	-----------

1. Rappels sur le mouvement d'une particule chargée des ceintures de radiation.....	19
2. Rappels sur l'approche statistique de la dynamique des particules des ceintures de radiation .....	29
2.1. Fonction de distribution et flux différentiel unidirectionnel .....	30
2.2. Équation d'évolution .....	32

<b>Chapitre 2 : Analyse théorique du processus de diffusion radiale par technique de changement d'échelle .....</b>	<b>37</b>
---	-----------

1. Définition du cadre de l'analyse théorique de la diffusion radiale par technique de changement d'échelle .....	38
2. Étude théorique du processus de diffusion radiale à l'échelle mésoscopique .....	40
2.1. Expression de la variation du flux magnétique d'une particule équatoriale en l'absence de champ électrostatique .....	40
2.1.1. 1 <sup>ère</sup> approche : décomposition spatio-temporelle de la variation du flux magnétique.....	42
2.1.2. 2 <sup>e</sup> approche : évaluation de la variation du flux magnétique par différenciation avec le flux du contour de dérive initial déformé .....	48
2.1.3. Reformulation de la variation du flux magnétique comme l'expression d'un écart à la moyenne de dérive .....	52
2.2. Expression générale de la variation du flux magnétique à l'échelle mésoscopique .....	55
3. De la variation du flux magnétique à l'échelle mésoscopique à la caractérisation du coefficient de diffusion radiale.....	57

<b>Chapitre 3 : Évaluations analytiques et numériques des coefficients de diffusion radiale des ceintures de radiation terrestres.....</b>	<b>61</b>
--	-----------

1. Rappels sur la modélisation de l'environnement électromagnétique des ceintures de radiation terrestres .....	61
2. Analyse de la dynamique de dérive de particules équatoriales dans un modèle de champ électromagnétique de type Mead.....	64
2.1. Rappels sur la modélisation électromagnétique de type Mead.....	65
2.2. Rappels sur la dérive stationnaire de particules équatoriales dans un modèle électromagnétique de type Mead.....	66

2.3.	Étude analytique de la diffusion radiale de particules équatoriales dans le cas du modèle électromagnétique de Mead .....	68
2.4.	Méthode de modélisation locale de Mead appliquée au modèle de champ numérique Tsyganenko 89 .....	74
3.	Modélisation numérique de la dynamique de dérive des particules et estimation des coefficients de diffusion radiale .....	79
3.1.	Description de la méthode d'évaluation numérique des coefficients de diffusion radiale.....	79
3.1.1.	Initialisation .....	79
3.1.2.	Tracé du contour de dérive et définition d'une famille associée .....	79
3.1.3.	Transport de la famille de points du contour .....	80
3.1.4.	Calcul des coefficients de diffusion radiale.....	85
3.2.	Analyse de l'évaluation numérique des coefficients de diffusion radiale dans le cas équatorial .....	87
3.2.1.	Dynamique des particules d'énergie nulle en fonction du paramètre de Roederer $L^*$ .....	88
3.2.2.	Étude numérique de la dépendance en énergie du processus de diffusion radiale.....	92

#### **Chapitre 4 : Détermination expérimentale des coefficients de diffusion radiale pour des particules équatoriales à l'orbite GEO..... 97**

1.	Description du protocole expérimental pour le calcul de coefficients de diffusion radiale pour des particules équatoriales à l'orbite GEO.....	98
1.1.	Définition d'un cadre pour l'application de la méthode de modélisation locale de Mead .....	98
1.2.	Définition de la méthode d'échantillonnage et présentation du jeu de données .....	101
1.3.	Modélisation de la fonction d'autocorrélation relative aux variations de l'asymétrie du champ magnétique.....	103
2.	Analyse des résultats obtenus.....	105
2.1.	Dépendance en l'énergie.....	105
2.2.	Influence de la période d'échantillonnage .....	107
3.	Discussion des résultats obtenus.....	110

#### **Conclusions et perspectives ..... 117**

#### **Annexe A : Expression du temps de rebond dans le cas limite équatorial ..... 121**

#### **Annexe A : Expression du temps de rebond dans le cas limite équatorial ..... 121**

#### **Annexe B : Expression de la vitesse de dérive moyennée sur le mouvement de rebond et reportée au niveau de l'équateur magnétique ..... 123**

#### **Annexe C : Lien entre la fonction de distribution $f(M, K, L^*)$ et le flux différentiel unidirectionnel $j(r_0, \mu_0, E_c)$ ..... 127**

#### **Références ..... 129**

# Notations

$\mathbf{A}_{\text{pot}}$	vecteur potentiel magnétique
$A_{r_0}$	ruban d'intégration pour le calcul de la variation du flux magnétique
$A(t)$	terme asymétrique du modèle électromagnétique de Mead ( $\text{T} \cdot \text{Re}^{-1}$ )
$\alpha_0$	angle d'attaque équatorial
$\alpha$	coordonnée des potentiels d'Euler (~coordonnée radiale)
$\mathbf{B}$	champ magnétique
$B_m$	module du champ magnétique au niveau du point miroir
$B_0$	module du champ magnétique équatorial
$\mathbf{b}$	vecteur unitaire du système de coordonnées naturelles de dérive, tangent au contour de dérive dans le plan équatorial
$\beta$	coordonnée des potentiels d'Euler (~coordonnée longitudinale)
$C_m$	constante topologique du contour de dérive calculée au point miroir
$C_0$	constante topologique du contour calculée au niveau de l'équateur magnétique
$C_1$	paramètre du temps court pour la modélisation de la fonction d'autocorrélation
$C_2$	paramètre du temps long pour la modélisation de la fonction d'autocorrélation
$c$	vitesse de la lumière
$D_i$	coefficient de transport dans l'espace des invariants adiabatiques
$D_{ij}$	coefficient de diffusion dans l'espace des invariants adiabatiques
$D_{LL}$	coefficient de diffusion radiale
$dh_{r_0}$	largeur du ruban $A_{r_0}$
$d\tau$	pas de temps caractéristique de la variation du champ électromagnétique
$d\tau_1$	temps court de la fonction d'autocorrélation
$d\tau_2$	temps long de la fonction d'autocorrélation
$d\tau_s$	période d'échantillonnage des données observationnelles
$\mathbf{E}$	champ électrique
$\mathbf{E}_{\text{ind}}$	champ électrique induit
$\mathbf{E}_0$	champ électrique équatorial
$e$	charge élémentaire
$\mathbf{e}_0$	vecteur unitaire du système de coordonnées naturelles de dérive, dans le sens du champ magnétique équatorial
$\varepsilon$	énergie totale du centre-guide
$\varepsilon_c$	énergie cinétique du centre-guide
$\varepsilon_0$	énergie de masse

$f$	fonction de distribution
$\Phi$	flux magnétique, 3 <sup>e</sup> invariant adiabatique
$\varphi$	longitude
$g$	fonction d'autocorrélation des variations de l'asymétrie du champ magnétique
$\Gamma_{r_0}$	contour de dérive relatif au centre-guide situé en $\mathbf{r}_0$
$\gamma$	$= (1 - (v/c)^2)^{-1/2}$ facteur relativiste
$I$	$= J/2p$
IGRF	International Geomagnetic Reference Field
$J$	invariant longitudinal, 2 <sup>e</sup> invariant adiabatique
$\mathbf{j}$	flux différentiel unidirectionnel
$K$	$= I\sqrt{B_m}$
$Kp$	indice d'activité géomagnétique
$k_0$	moment magnétique du dipôle terrestre. $k_0 = 3.11 \times 10^{-5} \text{T.R}_e^3$
$L^*$	$= -2\pi k_0 / (\Phi R_e)$ , paramètre de Roederer
$\lambda$	taux d'injection de particules par unité d'invariants adiabatiques
$\lambda_1$	$= 1/d\tau_1$
$\lambda_2$	$= 1/d\tau_2$
$M$	moment magnétique relativiste, 1 <sup>er</sup> invariant adiabatique
$m$	masse relativiste
$m_0$	masse au repos
$\mu_0$	cosinus de l'angle d'attaque équatorial. $\mu_0 = \cos \alpha_0$
$\mathbf{n}$	vecteur unitaire du système de coordonnées naturelles de dérive, dans le sens opposé du gradient d'énergie
$P$	fonction de probabilité dans l'espace des invariants adiabatiques
$p$	quantité de mouvement
$p_\perp$	norme de la composante de la quantité de mouvement normale à la direction du champ magnétique
$q$	charge électrique d'une particule
$R_c$	rayon de courbure
$R_e$	rayon terrestre ( $\approx 6400\text{km}$ )
$r_0$	distance équatoriale
$\rho_g$	rayon de Larmor
$S_b$	distance parcourue entre deux points miroirs
$S(t)$	terme de fluctuation symétrique dans le modèle de Mead
$s$	abscisse curviligne
$s_m$	abscisse curviligne au niveau du point miroir

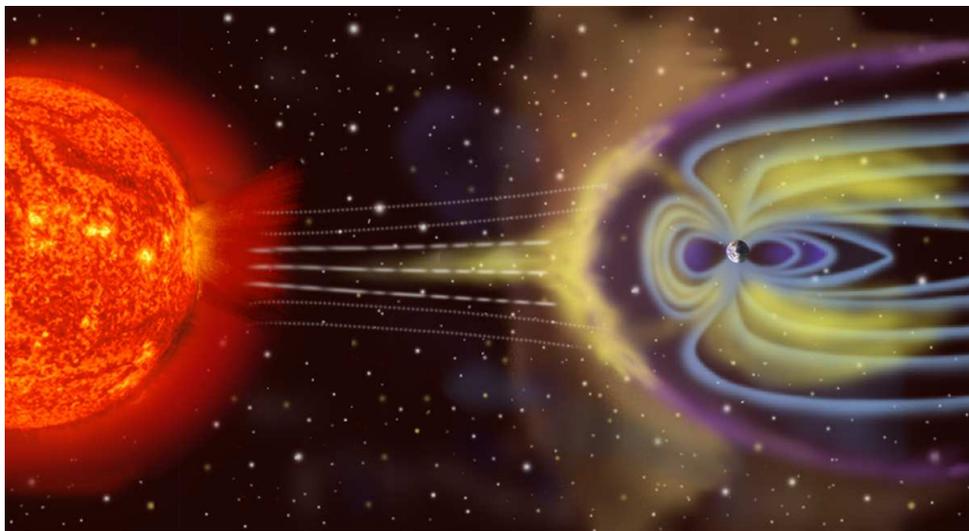
$\Sigma_{r_0}$	surface initiale d'intégration pour le calcul de la variation du flux magnétique
$\sigma$	taux d'injection de particules par unité d'invariants adiabatiques
T89	modèle de champ magnétique externe de type Tsyganenko 89
$t$	temps
$\tau_B$	période de rebond
$\tau_C$	temps caractéristique de variation des conditions électromagnétiques
$\tau_g$	période de giration
$\tau_D$	période de dérive
$\theta$	colatitude magnétique
$U$	potentiel électrostatique
$V_D$	vitesse de dérive
$v$	vitesse de la particule
$Z$	$= \Delta t \int_{v=0}^{\Delta t} g(Kp, v) \cos(\Omega v) dv$
$\langle \cdot \rangle$	moyenne sur le contour de dérive, orientée par le sens de dérive des particules
$\langle \cdot \rangle_{Max}$	moyenne sur le contour de dérive, orientée selon le repère de Maxwell



# Introduction :

## De l'environnement spatial à la modélisation physique des ceintures de radiation terrestres

Le Soleil est une étoile active. En outre, il est doté d'un champ magnétique intense et variable. La direction du champ magnétique s'inverse tous les onze ans. L'intensité du champ magnétique est de l'ordre de 1 Gauss en moyenne en surface. Ces propriétés en font le siège de tout un ensemble d'évènements qui définissent l'activité solaire. Les taches solaires, les éruptions solaires, les éjections de masse coronale ou encore les variations du vent solaire sont des manifestations de l'activité solaire. Ces évènements ont une probabilité d'occurrence ou des propriétés variables dans leur ensemble en fonction du cycle solaire. Un cycle solaire est une période d'une durée moyenne de 11 ans durant laquelle l'activité solaire évolue d'un pic vers le suivant en passant par une période de minimum. Ainsi, le nombre de taches solaires sert par exemple d'indicateur du cycle solaire depuis plus de deux cent cinquante ans. Cependant, les observations montrent que tous les cycles solaires ne sont pas identiques, que ce soit en durée comme en amplitude, ce qui rend l'activité solaire difficilement prévisible à long terme. C'est pourtant l'activité solaire qui agit sur l'environnement spatial terrestre par le biais du vent solaire, comme l'illustre la **Figure 0-1**.



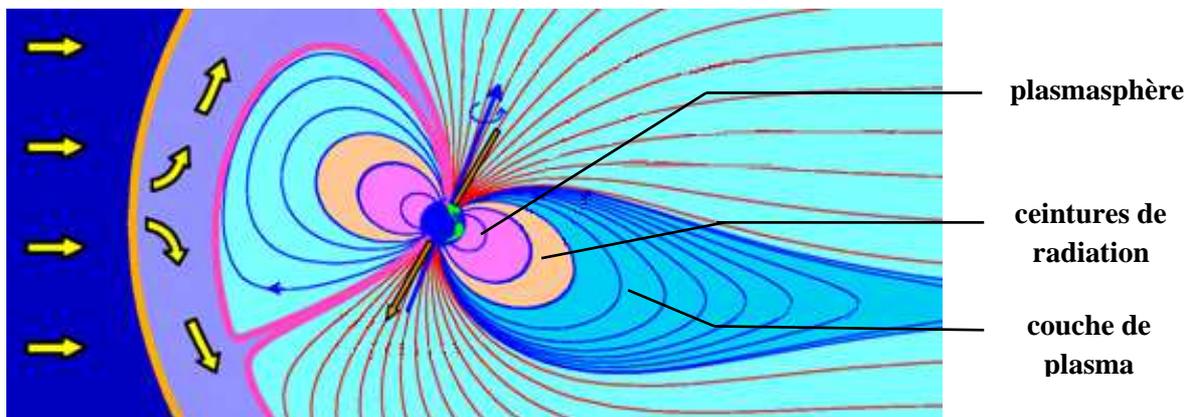
**Figure 0-1 : une vue d'artiste des relations Terre-Soleil**

Le vent solaire est un plasma éjecté en permanence de la couronne solaire dans toutes les directions de l'espace à des vitesses typiquement comprises entre 300 et 1000 km.s<sup>-1</sup>. Sa densité à l'orbite terrestre est de l'ordre de la dizaine de particules par cm<sup>-3</sup>. Il est composé essentiellement de protons et d'électrons de basse énergie thermique, de l'ordre de la dizaine d'eV. Il contient également 7 à 8 % de particules plus lourdes (principalement de l'hélium

ionisé). Ces caractéristiques restent néanmoins dépendantes de l'activité solaire. En outre, le vent solaire véhicule le champ magnétique interplanétaire, de l'ordre de 5 nT au niveau de l'orbite terrestre.

De son côté, la Terre possède également un champ magnétique. Il est d'origine interne. Son allure au premier ordre est celle d'un dipôle. Son intensité en surface est de l'ordre de 0,3 G. Ainsi, dans l'espace environnant la Terre, le champ magnétique est la somme d'une composante d'origine interne, relativement stable et dominante, et d'une composante d'origine externe, variable en fonction de l'activité solaire. À mesure que nous nous éloignons de la Terre, l'intensité de la composante interne diminue. En première approximation, elle devient du même ordre de grandeur que l'intensité du champ magnétique interplanétaire à une quinzaine de rayons terrestres environ. La région spatiale au-delà de l'ionosphère au sein de laquelle le mouvement des particules chargées est contrôlé principalement par le champ magnétique terrestre définit la magnétosphère.

Quand le vent solaire rencontre le champ magnétique de la Terre, il est dévié et une onde de choc est générée. Cependant, des mécanismes de transfert d'énergie et de particules entre le vent solaire et la magnétosphère existent. Des estimations indiquent que 2% de l'énergie cinétique et 1% des particules du vent solaire parviennent à être transférés du milieu interplanétaire à la magnétosphère terrestre [Sauvaud, 2002]. L'interaction de la magnétosphère terrestre avec le vent solaire entraîne des variations de ses propriétés sur des échelles de temps caractéristique allant de la minute jusqu'à l'échelle du cycle solaire. L'allure de la magnétosphère varie également en fonction de l'activité solaire. Elle est plus ou moins comprimée côté jour et elle est plus ou moins étirée en une longue queue magnétique côté nuit. En dépit de cette variabilité, il reste tout de même possible de la structurer en plusieurs populations aux caractéristiques différentes (**Figure 0-2**).



**Figure 0-2 : quelques populations remarquables de la magnétosphère terrestre**

Les ceintures de radiation sont l'une de ces populations magnétosphériques. Comme leur nom l'indique, les ceintures de radiation ceinturent la Terre. Ce milieu peut s'étendre jusqu'à une dizaine de rayons terrestres, en fonction de l'activité solaire. Il constitue la partie interne haute énergie de la magnétosphère, avec des gammes d'énergies supérieures au keV. Les énergies

peuvent atteindre la dizaine de MeV pour les électrons et plusieurs centaines de MeV pour les protons. Les électrons et les protons qui composent les ceintures sont piégés par le champ magnétique terrestre, avec des temps de résidence de l'ordre du mois voire de l'année.

La plasmasphère partage un espace commun avec les ceintures de radiation. Il s'agit d'un plasma froid et dense, alimenté par l'ionosphère. Les énergies sont de l'ordre de l'eV, la densité de  $10^3$  à  $10^4$  cm<sup>-3</sup>. Sa frontière, la plasmopause, marque une chute brutale de la densité de plasma entre 3 et 5 rayons terrestres, en fonction de l'activité solaire. C'est le lieu privilégié d'intensification d'ondes électromagnétiques interagissant avec les électrons des ceintures de radiation.

La couche de plasma quant à elle est située en périphérie externe des ceintures de radiation. Elle est présente dans la queue de la magnétosphère. Elle est peu dense ( $\sim 0,1$  cm<sup>-3</sup>) et son énergie caractéristique assez faible, de l'ordre du keV. Elle est constituée principalement de particules provenant du vent solaire. Lors de modifications brutales de l'environnement électromagnétique, ses particules peuvent être accélérées et se trouver piégées dans les ceintures de radiation.

L'environnement spatial de la Terre est donc constitué de plasma dont les caractéristiques et la dynamique sont pilotées en premier lieu par l'interaction du milieu avec l'activité solaire. Tout au long de l'histoire humaine, le Soleil a conservé des caractéristiques globalement identiques. À notre échelle, les relations Terre-Soleil sont stables. L'activité humaine en revanche a changé. Tout comme la nature, elle s'appuie désormais sur des particules chargées et des ondes électromagnétiques pour le transport d'énergie et d'informations [*Lilensten et Bornarel, 2001*]. En outre, l'espace est devenu un marché. Il demeure également porteur d'enjeux stratégiques. Les agences spatiales nationales et internationales, les organismes militaires, les industriels ou encore les scientifiques occupent l'espace à des fins d'observation, de surveillance, de télédétection ou de communication par exemple. En 2012, les estimations indiquaient un millier de satellites opérationnels en orbite autour de la Terre, dont près de la moitié à l'orbite géostationnaire [*Horne et al., 2013*]. Ce sont les satellites de télécommunications qui sont placés principalement à l'orbite géostationnaire (GEO). Les satellites de positionnement (satellites GPS, GLONASS, Galileo) se trouvent quant à eux à l'orbite circulaire intermédiaire (MEO). Or, les orbites MEO et GEO sont telles que les satellites qui s'y trouvent circulent en quasi permanence au sein des ceintures de radiation. Les ceintures de radiation sont également un lieu de passage obligé pour les satellites placés sur orbite elliptique ou sur orbite basse par exemple. Ainsi, la plupart des satellites en orbite autour de la Terre interagissent avec les ceintures de radiation.

Or, les particules de haute énergie des ceintures constituent un rayonnement ionisant. Autrement dit, ces particules sont capables de déposer assez d'énergie dans la matière qu'elles traversent pour créer une ionisation. Elles sont donc en mesure de créer des dommages aussi bien sur les satellites que sur les constituants cellulaires de l'organisme. Dans la vie quotidienne, les faibles doses de rayonnement ionisant produisent des lésions réparables. Dans l'espace, les doses sont plus fortes. Elles peuvent entraîner des dysfonctionnements, des pathologies, voire la mort des êtres vivants. Des doses limites d'exposition des astronautes ont donc été établies et des méthodes de prévention de la surexposition ont été développées par le

« Space Radiation Analysis Group » de la NASA par exemple (<http://srag-nt.jsc.nasa.gov/>). Au niveau des satellites, le rayonnement ionisant peut mener à des effets de dose cumulée, avec une dérive des caractéristiques des composants électroniques et une perte de fonctionnalité à long terme, des effets singuliers sur les composants à forte intégration, ou encore, du bruit de fond au niveau des capteurs. En outre, lorsqu'un satellite circule dans le plasma, il peut être soumis à un flux inégal d'ions et d'électrons. Il développe alors une charge induite. Que ce soit en surface ou en volume, des phénomènes de décharge électrostatique sont susceptibles d'apparaître et d'entraîner jusqu'à la perte du satellite [Bourrieau *et al.*, 2008]. Par conséquent, la circulation des satellites au sein de l'environnement spatial, et en particulier, au sein des ceintures de radiation, est source d'anomalies de nature et de durée variables. Des interruptions de service, des pertes de données, des dégradations des capteurs, des pannes de sous-systèmes voire des pertes de missions sont envisageables. Cette sensibilité des satellites aux conditions d'environnement spatial est en outre amplifiée par la tendance à la miniaturisation des composants électroniques embarqués par exemple. Toutefois, ce sujet reste délicat car il est porteur d'enjeux économiques conséquents. Tout porte à croire que beaucoup de défaillances relatives aux satellites commerciaux ne sont pas signalées [Koons *et al.*, 2000]. L'industrie du spatial est un secteur très concurrentiel. La communauté reconnaît néanmoins que les incidents se multiplient et bon nombre d'exemples de dysfonctionnements ont déjà été reportés [Bedingfield *et al.*, 1996].

Pour améliorer la tenue des systèmes aux irradiations, des moyens existent. La structure du satellite peut être blindée par exemple, avec la pénalisation en poids et les conséquences économiques que cela entraîne. La date de lancement, l'orbite, ou encore le choix des composants peuvent être adaptés. Des mesures peuvent être prises pour atténuer les risques d'interruption de service, les manœuvres orbitales peuvent être reprogrammées et les systèmes non essentiels à la mission peuvent être éteints par moments par exemple.

Les projets spatiaux et les opérateurs ont alors besoin de modèles sur lesquels s'appuyer pour spécifier l'environnement propre à leur mission. En parallèle, des centres opérationnels comme le « Space Weather Prediction Center » de la NOAA ou le « Solar Influence Data Analysis Center » de l'Observatoire Royal de Belgique se développent. Ils proposent une surveillance de l'activité solaire et diffusent des alertes en temps réel à destination des acteurs du spatial. Ils ont également besoin de modèles pour être en mesure d'analyser les observations. Ainsi, une connaissance suffisante des conditions d'environnement spatial dans lesquelles une mission prend place est nécessaire pour minimiser efficacement les risques et les coûts des programmes, pour optimiser la qualité de conception et pour atteindre l'objectif de la mission. C'est dans ce cadre que sont développés en particulier des modèles représentatifs des caractéristiques et de la dynamique des particules de haute énergie des ceintures de radiation terrestres en fonction de l'activité solaire.

Pour établir un modèle relatif aux particules de haute énergie peuplant les ceintures de radiation terrestres, deux outils complémentaires sont à disposition : les données observationnelles et la modélisation physique.

Les premiers modèles historiques de ceintures étaient des modèles empiriques. Il s'agit des modèles AE et AP (Aerospace Corporation Electrons et Protons) de la NASA, dont les versions les plus abouties sont les versions AE8 et AP8 [Vette, 1991 ; Sawyer and Vette, 1976]. Ces modèles sont le fruit de l'analyse statistique de mesures effectuées par une vingtaine de satellites dans les années 60 et 70. Ils sont destinés au dimensionnement des satellites artificiels. Ils fournissent des spectres omnidirectionnels moyens d'électrons et de protons piégés au sein de la magnétosphère interne. Ils présentent l'avantage de couvrir des gammes spatiale et spectrale plus étendues que la plupart des modèles empiriques [Maget, 2007]. Cependant, la restitution de la dynamique des ceintures en fonction de l'activité se limite à l'évaluation d'extrema correspondant aux périodes de minimum et de maximum solaires. Les modèles AE8 et AP8 ne sont donc pas des modèles dynamiques. En outre, des nouvelles campagnes de mesures les ont mis en défaut. Il est reconnu par exemple que les mesures utilisées pour AE8 et AP8 sont contaminées à basse altitude par les résidus des tests nucléaires effectués à la fin des années 50 et au début des années 60, dont les résidus de l'explosion nucléaire Starfish Prime du 9 juillet 1962 [Abel et al., 1994]. Un autre inconvénient à l'emploi des modèles AE8 et AP8 est qu'ils ne fournissent pas d'estimation de l'incertitude sur les flux. Toutefois, en dépit de leurs limitations [Daly et al., 1996 ; Rodgers, 1997] et de la nouvelle génération de modèles présentée en 2013 [Ginet et al., 2013], les modèles AE8 et AP8 restent aujourd'hui encore des modèles de référence pour les applications d'ingénierie spatiale. D'autres modèles de spécification empiriques existent néanmoins, comme les modèles CRRESELE [Brautigam and Bell, 1995] et CRRESPRO [Meffert and Gussenhoven, 1994] de l'AFRL (Air Force Research Laboratory) par exemple. Ces modèles ont été établis à partir de 14 mois de mesures effectuées en période de maximum solaire par le satellite CRRES, un satellite lancé en juillet 1990 sur l'orbite GTO. Les couvertures spatiales et spectrales de ces modèles sont plus restreintes que celles proposées par les modèles AE8 et AP8. En revanche, dans le cas de CRRESELE en particulier, la dynamique de l'environnement en fonction de l'activité solaire est restituée. Ainsi, chaque modèle empirique possède des caractéristiques spatiales, spectrales et temporelles qui lui sont propres. Ces caractéristiques dépendent à la fois du jeu de données sous-jacent et des choix d'analyse statistique. La manière de rendre compte des variations de l'activité solaire par exemple nécessite le choix d'un paramétrage, un choix variable d'un modèle à l'autre. En ce qui concerne le jeu de données, plus la taille de l'échantillon augmente, plus ses caractéristiques statistiques sont représentatives des caractéristiques de l'ensemble de la population. Or, même si beaucoup de satellites sont en orbite autour de la Terre, relativement peu d'opérateurs choisissent de les équiper de capteurs, ce qui est un frein à l'analyse de l'environnement spatial. Toutefois, au fil des années, les bases de données observationnelles s'enrichissent. Ainsi, les modèles empiriques sont aujourd'hui le fruit de statistiques établies sur des intervalles de temps qui peuvent s'étendre sur plusieurs dizaines d'années, soit un ou deux cycles solaires. C'est le cas du modèle IGE, qui fournit les flux moyens d'électrons à l'orbite GEO en fonction de la phase du cycle solaire [Sicard-Piet et al., 2008], ou du modèle MOLE à l'orbite MEO [Sicard-Piet and Bourdarie, 2006] par exemple. Les mesures satellites permettent donc de mettre en place des modèles statistiques significatifs au niveau des orbites les plus fréquentées. Cependant, les capteurs eux-mêmes ne fournissent qu'une information

partielle sur l'environnement dans lequel ils se trouvent. Ils sont limités en résolution angulaire et en résolution spectrale. En outre, ils sont sujets à contamination ou à saturation et ils peuvent également mesurer des bruits de fond plus ou moins forts et dynamiques. Ces anomalies sont justement dues à l'interaction des capteurs avec l'environnement spatial. Toutefois, même si les anomalies sont porteuses d'une certaine information, elles brouillent les mesures. Les données des capteurs ne peuvent donc jamais être intégrées directement aux modèles. Les mesures doivent tout d'abord être nettoyées et calibrées. Cette étape requiert par exemple d'être en mesure de discerner le bruit de fond de l'information, elle peut donc introduire un biais.

Par conséquent, les modèles empiriques donnent accès à des fragments d'information sur les ceintures de radiation. Ils sont plus ou moins significatifs, en fonction de la qualité et de la pertinence de l'échantillonnage sur lequel ils sont basés et de la manière dont l'échantillon a été prétraité et calibré, ils sont limités spatialement et temporellement, puisqu'ils sont cantonnés aux orbites les plus fréquentées, et ils ont des résolutions angulaires et spectrales contraintes par les capacités des détecteurs. Il est alors nécessaire d'interpoler et d'extrapoler à partir de ces informations parcellaires pour combler les lacunes des modèles empiriques. C'est le rôle de la modélisation physique de recomposer une image d'ensemble à partir de ces informations éparses. Au dix-neuvième siècle déjà, George Sand évoquait cet acte de recombinaison « à l'aide de la science » dans sa critique du roman historique *Salammbô* de Flaubert.

« Quant à la couleur locale, il est d'usage de la recomposer à l'aide de la science, et permis de la compléter par les forces de la logique d'induction. C'est avec des fragments incomplets que la paléontologie a reconstruit des mondes plus anciens que le monde punique. Ceci exige de grandes études que tout le monde n'est pas en état de vérifier, et ni vous ni moi ne pouvons nous permettre de dire que l'auteur de *Salammbô* a forcé ou atténué sa peinture. Il nous faudrait peut-être, à nous comme à lui, une dizaine d'années consacrées à étudier l'objet et les moyens. » George SAND, *La Presse*, 27 janvier 1863

De même, la famille de codes numériques *Salammbô* est un exemple de travail de modélisation physique de la dynamique des ceintures de radiation [Beutier, 1993 ; Bourdarie, 1996 ; Vacaresse, 1999 ; Varotsou, 2005 ; Maget, 2007]. Un modèle physique a pour objectif de représenter les structures essentielles d'un milieu réel afin d'en expliquer et d'en reproduire la dynamique.

À la différence des modèles empiriques, les modèles physiques des ceintures de radiation permettent d'avoir accès à de l'information sur des intervalles continus, que ce soit en temps, en espace ou encore en énergie par exemple. En revanche, ils nécessitent un travail d'analyse théorique préparatoire afin d'identifier les principaux pilotes de la dynamique du milieu réel et de fixer les représentations de ces pilotes. Parmi ces pilotes, nous trouvons entre autres le champ électromagnétique. La modélisation physique de la dynamique des ceintures de radiation s'appuie donc sur des modèles de champs électromagnétiques. La pertinence de l'information fournie par les modèles physiques est inévitablement fonction de la pertinence du travail de modélisation des pilotes.

Pour décrire le plasma des ceintures de radiation, la modélisation cinétique est privilégiée à la modélisation fluide. La modélisation cinétique est une approche statistique de la dynamique des particules des ceintures de radiation. Elle présente l'avantage de décrire l'évolution de fonctions de distribution relatives aux populations de particules du plasma, des grandeurs proportionnelles aux flux de particules mesurés par les détecteurs. Quant à l'approche fluide, elle se limite à la description de l'évolution des moments correspondants. L'approche cinétique apporte donc plus d'informations que l'approche fluide. En contrepartie, elle peut s'avérer coûteuse en calculs puisqu'elle nécessite a priori de se placer dans un espace de grandes dimensions (3 pour l'espace des positions, 3 pour l'espace des vitesses et 1 pour le temps). Pour lever cette difficulté, l'objectif est alors de chercher à réduire le nombre de dimensions à traiter. Cela peut passer par l'étude de cas particuliers, par la prise en compte de symétries du problème ou encore par l'utilisation de quantités conservées par exemple. En ce qui concerne les ceintures de radiation, la réduction du nombre de dimensions à traiter passe par la mise à profit de la théorie des invariants adiabatiques.

La théorie des invariants adiabatiques et la modélisation cinétique de la dynamique des particules des ceintures de radiation sont les deux principaux outils théoriques pour la mise en place de codes numériques tels que les codes de la famille Salammbô. Ils sont rappelés **Chapitre 1**.



# Chapitre 1 :

## Outils théoriques pour une modélisation physique des ceintures de radiation

La théorie des invariants adiabatiques est un outil pour réduire le nombre de dimensions de la représentation statistique de la dynamique des particules des ceintures de radiation en fonction de la résolution temporelle souhaitée pour le modèle. Nous rappelons ici quelques notions relatives à la théorie des invariants adiabatiques en cherchant à décrire le mouvement d'une particule chargée des ceintures de radiation terrestres. Nous détaillons ensuite l'équation d'évolution statistique que la théorie des invariants adiabatiques permet d'instaurer. Grâce à cette équation, nous définissons les coefficients de diffusion radiale et nous présentons le phénomène physique associé.

### 1. Rappels sur le mouvement d'une particule chargée des ceintures de radiation

Une particule chargée de masse  $m$  et de charge  $q$  dans un champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  est soumise à la force de Lorentz. Son mouvement est régi par l'équation

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = q \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right). \quad (1)$$

Dans le cas général, il n'existe pas de solution analytique simple à cette équation du mouvement. Dans le cas des ceintures de radiation en revanche, les caractéristiques géométriques des champs électromagnétiques et les gammes d'énergie des populations étudiées sont telles que nous disposons d'un cadre pour une description simplifiée des trajectoires des particules [Roederer, 1970].

En effet, au niveau des ceintures de radiation, l'énergie des particules est telle la force électrique est négligeable en première approximation par rapport à la force magnétique [Schulz, 1991]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \ll \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \quad (2)$$

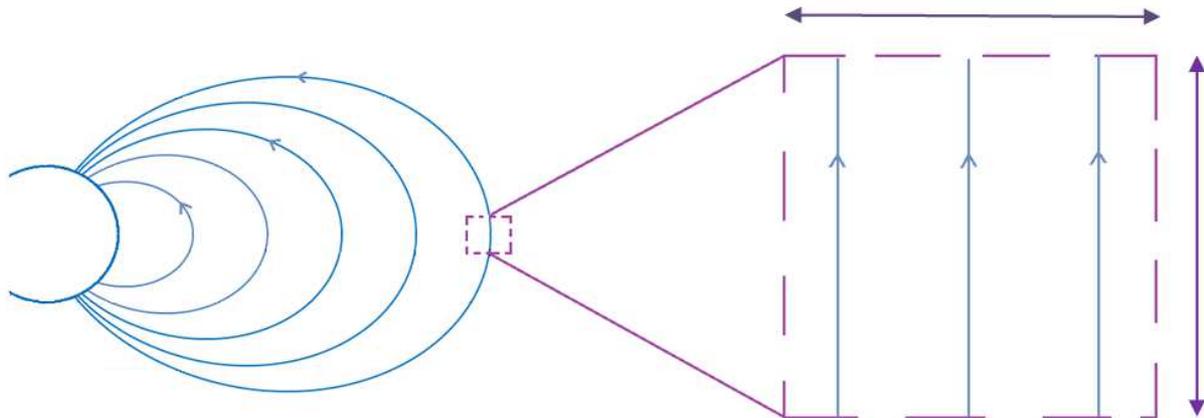
En outre, localement, tout se passe comme si les effets des variations spatiales et temporelles du champ magnétique étaient négligeables. Tout se passe donc comme si le mouvement des

particules était régi en première approximation par la force de Lorentz d'un champ magnétique uniforme et stationnaire (**Figure 1-1**).

Ainsi, l'équation du mouvement devient

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = q \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}. \quad (3)$$

Dans ce cas, puisque la force magnétique ne travaille pas, les particules conservent leur énergie cinétique.



**Figure 1-1 : Allure des lignes de champ géomagnétique et échelle caractéristique de variation spatiale du champ**

Localement, le mouvement d'une particule chargée des ceintures de radiation terrestres est donc celui d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire. C'est un mouvement d'enroulement hélicoïdal, le mouvement de giration. Son rayon définit le rayon de Larmor  $\rho_g$ . Il est donné par l'expression

$$\rho_g = \frac{p_{\perp}}{|q|B}, \quad (4)$$

où  $p_{\perp}$  est la norme de la composante de la quantité de mouvement normale à la direction du champ magnétique. Quant à la période de giration de la particule, elle s'écrit

$$\tau_g = \frac{2\pi m}{|q|B}. \quad (5)$$

À ce mouvement de giration est associé le moment magnétique relativiste  $M$ , une quantité qui est définie par l'expression

$$M = \frac{p_{\perp}^2}{2m_0 B}. \quad (6)$$

Le moment magnétique est un invariant adiabatique. Autrement dit, c'est une quantité conservée tant que les caractéristiques électromagnétiques du milieu varient suffisamment lentement par rapport aux dimensions et au temps caractéristiques du mouvement de giration de la particule. Mathématiquement, ces conditions d'adiabaticité spatiale et temporelle s'écrivent

$$\rho_g \ll \frac{Q}{\nabla_{\perp} Q} \quad (7)$$

et

$$\tau_g \ll \frac{Q}{dQ/dt} \quad (8)$$

où  $Q$  est une grandeur liée au champ électromagnétique. Typiquement,  $Q = B$ .

Dans la deuxième inégalité, notons que la dérivée temporelle est une dérivée totale. Elle représente donc la variation vue par la particule. Elle contient ainsi une condition spatiale implicite qui porte sur le gradient parallèle de  $Q$ . Cette condition spatiale s'écrit

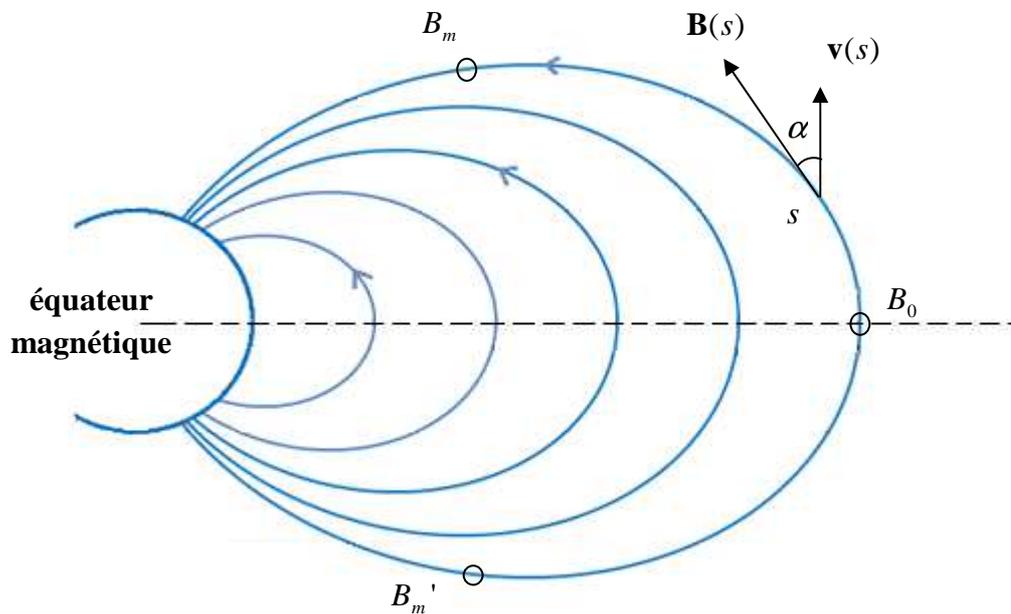
$$d_{\parallel} \ll \frac{Q}{\nabla_{\parallel} Q} \quad (9)$$

où  $d_{\parallel} = v_{\parallel} \tau_g$  est la distance parcourue le long de la ligne de champ pendant une giration.

C'est dans le cadre de ces relations d'ordre que s'inscrit l'approximation du centre-guide. L'approximation du centre-guide consiste à représenter le mouvement de la particule non pas par sa trajectoire exacte mais par une trajectoire moyenne qui correspond à celle du point autour duquel la particule semble tourner à chaque instant. Ce point particulier définit le centre-guide.

Considérons maintenant la surface correspondant à l'équateur magnétique. Dans la partie interne de la magnétosphère, elle est définie par l'ensemble des points tels que l'intensité du champ magnétique est un minimum pour les lignes de champ sur lesquelles ces points se

situent (**Figure 1-2**).<sup>1</sup> Pendant les périodes d'activité géomagnétique calme et modérée, l'équateur magnétique est une surface quasiment plane.



**Figure 1-2 : Paramètres associés au mouvement de rebond**

Au niveau de l'équateur magnétique, lançons une particule avec une composante de vitesse dans la direction du champ magnétique. Localement, le mouvement de la particule est un mouvement d'enroulement hélicoïdal. Le centre-guide suit la ligne de champ sur laquelle il a été lancé tout en cherchant à conserver son énergie cinétique et son moment magnétique. Or, à mesure que le centre-guide s'éloigne de l'équateur magnétique, le champ magnétique ressenti augmente. Afin de conserver son moment magnétique (équation (6)), la norme de la vitesse de la particule dans la direction perpendiculaire au champ magnétique augmente donc en conséquence. Par conservation de l'énergie cinétique, la norme de la vitesse de la particule dans la direction parallèle au champ magnétique s'en trouve diminuée. La norme de la vitesse parallèle diminue ainsi jusqu'à s'annuler pour atteindre un point particulier. Si le centre-guide interagit avec l'atmosphère avant d'atteindre ce point, nous le perdons. Si au contraire, le centre-guide atteint ce point avant d'entrer dans l'ionosphère, il rebrousse chemin le long de la ligne de champ en direction de l'équateur magnétique. Il passe au niveau de l'équateur magnétique avec une vitesse parallèle maximum, égale à la vitesse parallèle initiale. Il

<sup>1</sup> En choisissant de nous placer dans la partie interne de la magnétosphère, nous nous affranchissons de l'étude de la dynamique des particules lors de la traversée de topologies magnétiques complexes telles que le côté jour de la magnétopause par exemple. Même si cette zone de bifurcation peut pourtant jouer un rôle significatif pour la dynamique des particules énergétiques qui la traversent [e.g., *Delcourt et Sauvaud, 1999*], nous choisissons de négliger ce phénomène dans le cadre de la description de la dynamique des ceintures de radiation.

rebondit ensuite de l'autre côté de l'équateur magnétique. Il effectue ainsi un mouvement de rebond de part et d'autre de l'équateur magnétique.

Au niveau de l'équateur magnétique, plus l'angle entre la direction du champ magnétique et la vitesse de la particule est faible, plus l'altitude atteinte par la particule est basse. L'angle d'attaque minimal en-dessous duquel la particule est perdue dans l'atmosphère définit le cône de perte. À l'inverse, plus l'angle est important, plus l'amplitude du mouvement de rebond du centre-guide diminue et plus la trajectoire se restreint aux environs de l'équateur magnétique. Dans le cas limite, l'angle entre la vitesse et le champ est de  $\pi/2$ . Les particules correspondant à ce cas limite sont les particules équatoriales.

L'angle entre la direction du champ magnétique et la vitesse de la particule définit l'angle d'attaque. Les points particuliers situés de part et d'autre de l'équateur magnétique sont les points miroirs (angle d'attaque égal à  $\pi/2$ ). Le module du champ magnétique au niveau des points miroirs  $B_m$  se déduit de la conservation de l'énergie cinétique et du moment magnétique de la particule le long de la ligne de champ. Il est défini par l'équation

$$B_m = \frac{B_0}{\sin^2 \alpha_0}. \quad (10)$$

où  $B_0$  désigne le module du champ magnétique au niveau de l'équateur et  $\alpha_0$  l'angle d'attaque équatorial (**Figure 1-2**).

Les positions des points miroirs d'abscisses curvilignes  $s_m$  et  $s_m'$  s'obtiennent en inversant l'équation reliant  $B_m$  et  $B_0$ . Elles dépendent donc de l'allure du champ magnétique considéré. Quant au temps de rebond, il est égal au temps mis par la particule pour faire un aller-retour entre les points miroirs

$$\tau_B(s_m) = 2 \int_{s_m}^{s_m'} \frac{ds}{v_{\parallel}(s)}. \quad (11)$$

Dans le cas de particules équatoriales, cette expression tend vers une limite finie non nulle égale à

$$\tau_B(0) = \frac{2\pi\sqrt{2}R_c(0)}{v}, \quad (12)$$

où  $R_c(0)$  correspond au rayon de courbure au niveau de l'équateur magnétique,

$$R_c(0) = \left( \frac{1}{B_0} \frac{\partial^2 B}{\partial s^2} \right)_0^{-1/2}. \quad (13)$$

Nous démontrons ce résultat en **Annexe A**.

Au mouvement de rebond est associé l'invariant longitudinal

$$J = \oint p_{\parallel} ds. \quad (14)$$

C'est le deuxième invariant adiabatique. Il est conservé tant que les caractéristiques électromagnétiques du milieu varient suffisamment lentement par rapport au temps de rebond. En définissant

$$I = \int_{s_m}^{s_m'} \sqrt{1 - \frac{B(s)}{B_m}} ds, \quad (15)$$

le deuxième invariant vérifie l'égalité

$$J = 2pI. \quad (16)$$

Lorsque les lignes de champ sont des équipotentielles, il peut être intéressant de substituer à  $J$  la quantité

$$K = I\sqrt{B_m}. \quad (17)$$

En effet, lorsque les lignes de champ sont des équipotentielles,  $K$  est également un invariant adiabatique [Roederer, 1970]. En outre,  $K$  présente l'avantage d'être une grandeur géométrique. Autrement dit, il ne dépend pas de l'énergie de la particule considérée. Il dépend uniquement de l'angle d'attaque équatorial et de la topologie magnétique, c'est-à-dire de l'allure des lignes de champ en trois dimensions. La grandeur  $K$  constitue donc un outil intéressant pour la représentation des trajectoires des particules par exemple [e.g., Whipple, 1978 ; Min et al., 2013].

Tout au long de son mouvement de giration et de rebond, la particule est soumise à un champ magnétique qui n'est pas uniforme. Le gradient et la courbure du champ magnétique engendrent une force qui fait dériver la particule dans un plan perpendiculaire à la direction du champ. En tenant compte également de l'effet de la force électrique, la vitesse de dérive du centre-guide moyennée sur le mouvement de rebond et reportée au niveau de l'équateur magnétique s'écrit [Roederer, 1970, p.47]

$$\mathbf{V}_D = \frac{2p}{q\tau_B B_0} \nabla_0 I \times \mathbf{e}_0 + \frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{e}_0}{B_0}. \quad (18)$$

où  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{B}_0 / B_0$  est le vecteur unitaire dirigé dans la direction du champ magnétique équatorial,  $\mathbf{E}_0$  est la somme des champs électrostatiques et des champs électriques induits par la variation du champ magnétique et  $\nabla_0 I$  désigne le gradient de la quantité  $I$  calculé au niveau de l'équateur magnétique.

Dans l'**Annexe B**, nous montrons que l'expression de la vitesse de dérive moyennée sur le mouvement de rebond se met également sous la forme

$$\mathbf{V}_D = \frac{-\nabla_0 \varepsilon \times \mathbf{e}_0}{qB_0} + \frac{\mathbf{E}_{ind} \times \mathbf{e}_0}{B_0}. \quad (19)$$

où  $\varepsilon$  est l'énergie totale du centre-guide. Elle s'écrit

$$\varepsilon = \varepsilon_c + qU, \quad (20)$$

avec  $U$  le potentiel dont dérivent les champs électrostatiques et  $\varepsilon_c$  l'énergie cinétique du centre-guide

$$\varepsilon_c = \varepsilon_0 \sqrt{1 + \frac{2MB_m}{\varepsilon_0}} - \varepsilon_0. \quad (21)$$

Lorsque les conditions électromagnétiques sont stationnaires, ou, de manière plus générale, lorsque les variations temporelles des champs sont négligeables à l'échelle du mouvement de dérive, l'expression de la vitesse de dérive moyennée sur le rebond devient

$$\mathbf{V}_D = \frac{-\nabla_0 \varepsilon \times \mathbf{e}_0}{qB_0}. \quad (22)$$

Ainsi, en moyenne lors du rebond, le centre-guide se déplace au niveau de l'équateur magnétique dans une direction orthogonale à la fois à la direction du champ magnétique équatorial ( $\mathbf{e}_0$ ) et au gradient d'énergie ( $\nabla_0 \varepsilon$ ). Le centre-guide suit donc une courbe d'énergie  $\varepsilon$  constante au niveau de l'équateur magnétique. Cette courbe définit le contour de dérive.

En l'absence de potentiel électrostatique ( $U = 0$ ) ou en supposant que la gamme d'énergie considérée est telle que le potentiel électrostatique est négligeable ( $qU \ll \varepsilon_c$ ), l'expression de la vitesse de dérive devient

$$\mathbf{V}_D = \frac{-M\nabla_0 B_m \times \mathbf{e}_0}{\gamma q B_0}. \quad (23)$$

Par conséquent, le contour de dérive se caractérise par une courbe telle que le module du champ magnétique au point miroir  $B_m$  est constant. Il ne dépend donc pas de l'énergie des particules considérées. Il dépend uniquement de l'angle d'attaque équatorial. Ainsi, dans un champ asymétrique, des particules originaires d'une même ligne de champ vont peupler des coquilles de dérive différentes en fonction de leur angle d'attaque équatorial initial. Ce phénomène de différenciation des trajectoires de dérive en fonction de l'angle d'attaque équatorial s'appelle le « shell splitting » [e.g., *Roederer*, 1970].

Enfin, dans le cas particulier de particules équatoriales, lorsque le potentiel électrostatique est négligeable, la caractérisation des contours de dérive est la plus simple. Les contours de dérive sont les courbes telles que le module du champ magnétique équatorial est constant ( $B_m = B_0$ ). Quelque soit l'énergie considérée, des particules équatoriales lancées d'un même point partagent le même contour de dérive.

Dans le cas général, lorsque le contour de dérive d'une particule correspond à une courbe fermée, la particule est piégée par le champ électromagnétique. La dérive est alors un mouvement périodique de période

$$\tau_D = \oint \frac{dl}{V_D}. \quad (24)$$

À ce mouvement de dérive est associé le troisième invariant adiabatique. Il correspond au flux magnétique à travers la surface délimitée par le contour de dérive. Il s'écrit

$$\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (25)$$

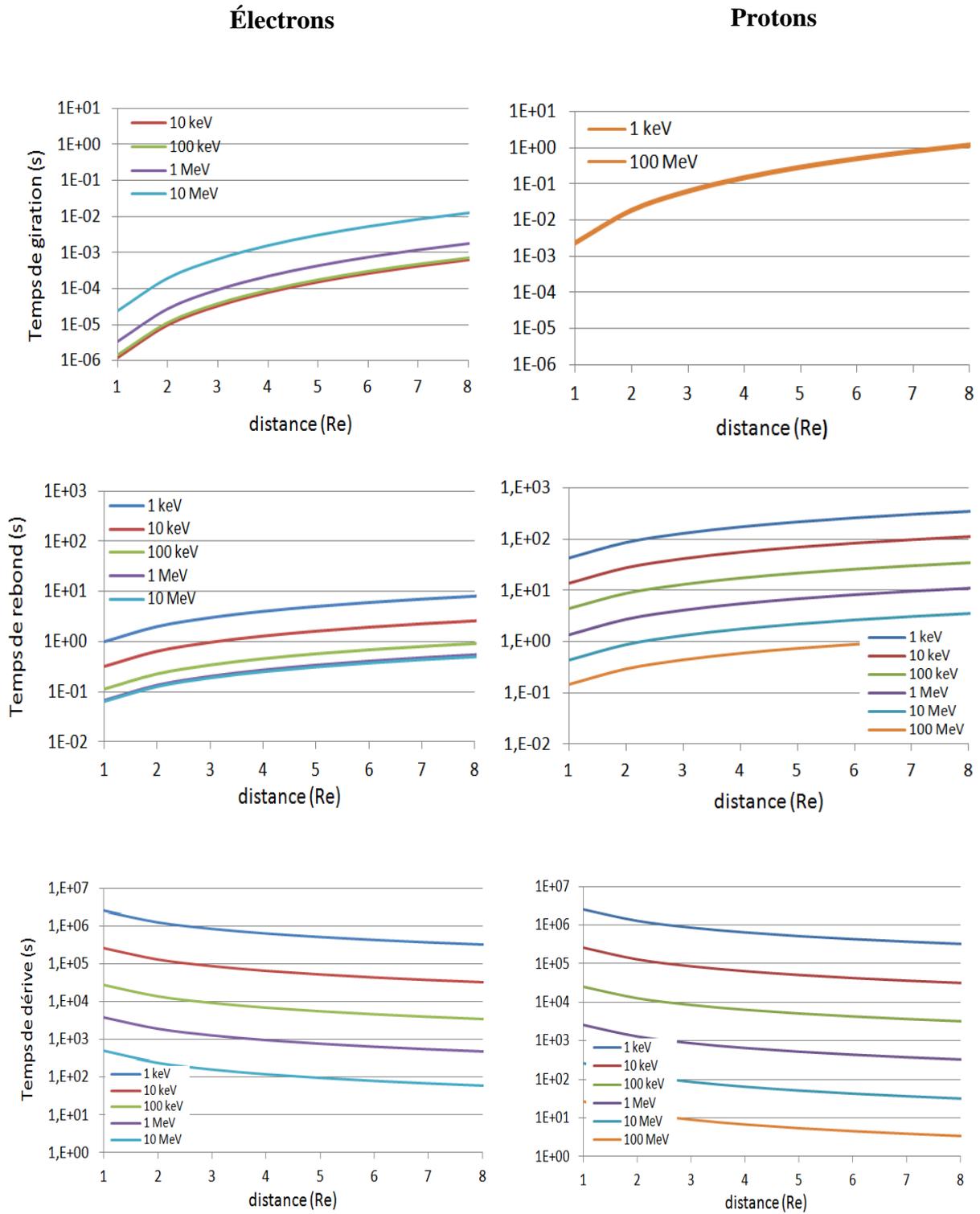
Le flux magnétique est une quantité conservée tant que les caractéristiques électromagnétiques du milieu varient suffisamment lentement par rapport au temps de dérive. Cette invariance peut aussi être caractérisée par le paramètre  $L^*$ . C'est un paramètre sans dimension équivalent au flux magnétique. Il s'écrit [*Roederer*, 1970, p.107]

$$L^* = -\frac{2\pi k_0}{\Phi R_e} \quad (26)$$

où  $k_0$  est le moment magnétique du dipôle terrestre.

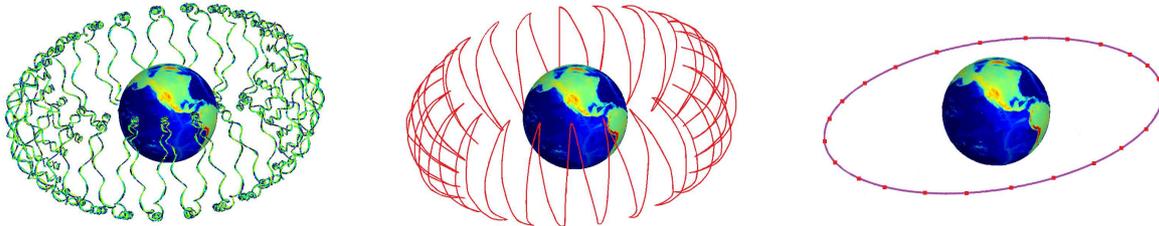
Le paramètre  $L^*$  se confond avec le rayon adimensionné du contour de dérive dans le cas d'un champ magnétique dipolaire. En considérant une topologie magnétique quelconque, le paramètre  $L^*$  correspond donc au rayon final du contour de dérive considéré si le champ magnétique évoluait très lentement jusqu'à atteindre une configuration dipolaire. Par conséquent, le paramètre  $L^*$  présente l'avantage d'être plus significatif que le flux magnétique. C'est pourquoi il est fréquemment utilisé pour la caractérisation de la dynamique des ceintures de radiation terrestres [e.g., *Min et al.*, 2013].

En résumé, lorsque le milieu électromagnétique est stationnaire ou lorsqu'il varie suffisamment lentement, le mouvement d'une particule chargée des ceintures est la somme de trois mouvements périodiques: la giration, le rebond et la dérive. Les ordres de grandeur de ces trois temps caractéristiques sont fournis **Figure 1-3** dans le cas de particules équatoriales en champ dipolaire. La différence entre le temps de giration d'un électron et le temps de giration d'un proton est due en premier lieu à la différence de leur masse. Le proton étant près de 2000 fois plus lourd que l'électron, il tourne 2000 fois moins vite. Le facteur relativiste augmente cette différence et joue un rôle pour les électrons au-dessus de 100 keV. Le temps de rebond est proportionnel à  $1/v$ . Pour une même énergie, la différence entre électrons et protons est donc d'un facteur  $\sqrt{2000} \approx 45$ . Quant au temps de dérive, la différence entre électrons et protons réside dans le facteur relativiste. Elle est négligeable jusqu'à 100 keV. Au-delà, elle atteint un facteur 2 au maximum.



**Figure 1-3 : Temps de giration, de rebond et de dérive d'électrons et de protons équatoriaux pour des gammes d'énergie caractéristiques des ceintures de radiation dans un champ magnétique dipolaire en fonction de la distance radiale**

Que ce soit pour les électrons ou les protons, pour une même gamme d'énergie, les mouvements de giration, rebond et dérive des particules évoluent sur trois échelles de temps caractéristiques différentes. Par conséquent, en fonction de la résolution temporelle souhaitée pour le modèle physique des ceintures de radiation, une représentation moyennée sur une ou plusieurs échelles de temps caractéristiques du mouvement est envisageable (**Figure 1-4**).



**Figure 1-4 : Trajectoire exacte d'une particule piégée des ceintures de radiation (à gauche), trajectoire de son centre-guide (coquille de dérive - au centre), et trajectoire du centre-guide moyennée sur le mouvement de rebond, reportée au niveau de l'équateur magnétique (contour de dérive - à droite)**

L'objectif des modèles physiques tels que Salammbô 3D est de restituer la dynamique des ceintures de radiation en fonction de l'activité solaire sur des échelles de temps de l'ordre de la journée [e.g., *Beutier*, 1993]. Par conséquent, une représentation statistique moyennée sur les phases des trois mouvements périodiques suffit. Pour la description de l'évolution des fonctions de distribution, nous passons ainsi d'un espace des phases à 6 dimensions à un espace des invariants à 3 dimensions. Cette réduction du nombre de dimensions à traiter facilite la mise en place de codes de calcul. En contrepartie, le modèle physique ainsi développé a une résolution temporelle supérieure au temps de dérive.

## **2. Rappels sur l'approche statistique de la dynamique des particules des ceintures de radiation**

Pour décrire la dynamique moyenne d'une particule des ceintures de radiation, nous avons introduit l'espace des invariants adiabatiques  $(M, J, \Phi)$  associés aux trois composantes périodiques du mouvement. Nous nous intéressons maintenant à la modélisation de la dynamique de toute une population de particules des ceintures de radiation. L'objectif est alors de décrire l'évolution des fonctions de distribution dans l'espace des invariants adiabatiques et de relier les informations obtenues avec les données observationnelles d'un capteur idéal, c'est-à-dire avec un nombre de particules (« counts ») directement proportionnel au flux différentiel unidirectionnel. Dans cette partie, nous établissons tout d'abord la relation de proportionnalité entre la fonction de distribution dans l'espace des invariants et le flux différentiel unidirectionnel tel qu'il peut être mesuré par un capteur idéal.

Nous présentons ensuite l'équation d'évolution qui pilote la dynamique des fonctions de distributions dans l'espace des invariants.

## 2.1. Fonction de distribution et flux différentiel unidirectionnel

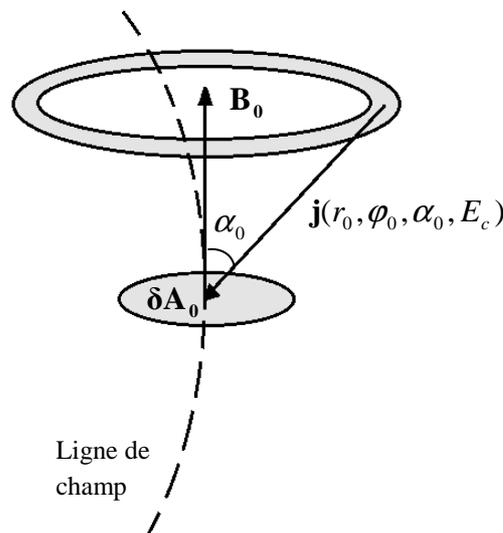
Soit  $\delta A_0$  une surface infinitésimale située au niveau de l'équateur magnétique en  $(r_0, \varphi_0)$  et orientée dans la direction du champ magnétique.

Soit  $\delta N$  le nombre de particules d'énergie cinétique comprise entre  $E_c$  et  $E_c + \delta E_c$ , d'angle d'attaque équatorial compris entre  $\alpha_0$  et  $\alpha_0 + \delta \alpha_0$ , traversant  $\delta A_0$  pendant un temps infinitésimal  $\delta t$ . Ce nombre de particules s'écrit

$$\delta N = 2\pi \mathbf{j}(r_0, \varphi_0, \alpha_0, E_c) \cdot \delta \mathbf{A}_0 \sin \alpha_0 \delta \alpha_0 \delta E_c \delta t \quad (27)$$

où  $\mathbf{j}(r_0, \varphi_0, \alpha_0, E_c)$  est le flux de particules en  $(r_0, \varphi_0)$  dans la direction  $\alpha_0$  pour l'énergie  $E_c$  (**Figure 1-5**).

$\mathbf{j}(r_0, \varphi_0, \alpha_0, E_c)$  représente un flux différentiel unidirectionnel tel qu'il peut être mesuré par un capteur idéal.



**Figure 1-5 : Paramètres associés au flux différentiel unidirectionnel**

Puisque  $\mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{A}_0 = j \delta A_0 \cos \alpha_0$  (**Figure 1-5**), en posant  $\mu_0 = \cos \alpha_0$ , le nombre de particules  $\delta N$  s'écrit également

$$\delta N = 2\pi j(r_0, \varphi_0, \mu_0, E_c) \mu_0 \delta A_0 \delta \mu_0 \delta E_c \delta t \quad (28)$$

Or, pour les besoins du modèle, une description de la dynamique des particules moyennée sur les trois composantes périodiques du mouvement suffit. Ainsi, nous négligeons la dépendance des observables en les phases associées aux mouvements périodiques de giration, de rebond et de dérive. En ce qui concerne le mouvement de giration, cette simplification a déjà été effectuée implicitement en considérant un angle solide initial intégré sur toutes les phases du mouvement cyclotron ( $\delta\Omega = 2\pi \sin \alpha_0 \delta\alpha_0$ ). Pour le mouvement de dérive, cela revient à considérer que le flux est indépendant de la phase  $\varphi_0$  du point considéré, ou, de manière équivalente, que le flux  $j$  est une moyenne sur toutes les phases d'une même coquille de dérive  $L^* \approx r_0$ . Enfin, pour le mouvement de rebond, cette simplification contraint le temps infinitésimal d'échantillonnage  $\delta t$  au temps de rebond  $\tau_B$ . Nous obtenons ainsi l'expression

$$\delta N = 2\pi j(r_0, \mu_0, E_c) \mu_0 \delta A_0 \delta \mu_0 \delta E_c \tau_B \quad (29)$$

Or, à un jeu de paramètres ( $r_0 \approx L^*, \mu_0, E_c$ ) correspond un unique jeu d'invariants adiabatiques ( $M, J, \Phi$ ). En outre, en introduisant la fonction de distribution  $f(M, J, \Phi)$  représentative du nombre de particules ayant un moment magnétique compris entre  $M$  et  $M + dM$ , un invariant longitudinal dans l'intervalle  $J$  et  $J + dJ$  et un flux magnétique compris entre  $\Phi$  et  $\Phi + d\Phi$ , nous pouvons également écrire

$$\delta N = f(M, J, \Phi) \delta M \delta J \delta \Phi \quad (30)$$

En égalisant les deux formulations de  $\delta N$ , nous obtenons alors la relation de proportionnalité entre les fonctions de distribution dans l'espace des invariants adiabatiques et les flux différentiels unidirectionnels tels qu'ils peuvent être mesurés par des capteurs idéaux [Roederer, 1970, p.95]

$$f(M, J, \Phi) = 2\pi n_0 \frac{j(r_0, \mu_0, E_c)}{p^2} \quad (31)$$

Notons cependant que l'espace ( $M, J, \Phi$ ) n'est pas l'unique solution pour une représentation statistique simplifiée de la dynamique des particules des ceintures de radiation.

L'espace ( $M, K, L^*$ ) par exemple présente deux avantages. Premièrement, à la différence de l'invariant  $J$ , la grandeur  $K$  ne dépend pas de l'énergie des particules considérées. Cela représente donc un gain de temps de calculs pour les modèles numériques. Deuxièmement, le paramètre  $L^*$  est plus significatif que le flux magnétique  $\Phi$  dont il dérive. Il peut être vu en

effet au premier ordre comme le rayon adimensionné moyen de la coquille de dérive considérée. Le paramètre  $L^*$  facilite donc les interprétations physiques. Dans cet espace, le lien entre flux différentiel unidirectionnel et fonction de distribution s'écrit alors

$$f(M, K, L^*) = \frac{k_0}{R_e} \left( \frac{4\pi}{L^*} \right)^2 \sqrt{\frac{m_0^3 M}{2}} \frac{j(r_0, \mu_0, E_c)}{p^2} \quad (32)$$

Nous montrons cette égalité **Annexe C**.

## 2.2. Équation d'évolution

Cherchons maintenant à décrire la dynamique des fonctions de distribution dans l'espace des invariants adiabatiques.

Soit  $\Delta t$  la résolution temporelle du modèle. Elle est supérieure au temps de dérive.  $\Delta t \gg \tau_D$ . Supposons que nous connaissons la répartition des particules dans l'espace des invariants adiabatiques à l'instant  $t$ . Alors, à l'instant  $t + \Delta t$ , la nouvelle répartition des particules est une réponse aux variations de l'environnement électromagnétique pendant  $\Delta t$ . Or, un invariant adiabatique est une quantité conservée tant que le temps caractéristique de variation de l'environnement électromagnétique est grand devant le temps caractéristique du mouvement périodique associé. Ainsi, si les variations de l'environnement électromagnétique sont négligeables pendant  $\Delta t$  par exemple, en négligeant les injections et les pertes de particules, la fonction de distribution est conservée. Par conséquent, entre  $t$  et  $t + \Delta t$ , nous nous attendons à une dispersion plus ou moins intense des populations de particules autour de leur position dans l'espace des invariants adiabatiques à l'instant  $t$  en fonction de l'intensité des variations de l'environnement électromagnétique et de ses échelles de temps caractéristiques.

Dans l'espace des invariants  $(M, J, \Phi)$ , introduisons  $P(m, j, \phi | M - m, J - j, \Phi - \phi, t)$  la densité de probabilité d'avoir une variation des invariants adiabatiques égale à  $m$ ,  $j$  et  $\phi$  au bout de  $\Delta t$  sachant que leurs valeurs à l'instant  $t$  étaient respectivement  $M - m$ ,  $J - j$  et  $\Phi - \phi$ . Alors, en négligeant les injections et les pertes de particules, la fonction de distribution dans l'espace des invariants adiabatiques  $f$  à l'instant  $t + \Delta t$  s'écrit

$$f(M, J, \Phi, t + \Delta t) = \int \int \int_{m \ j \ \phi} f(M - m, J - j, \Phi - \phi, t) P(m, j, \phi | M - m, J - j, \Phi - \phi, t) dm dj d\phi \quad (33)$$

En outre, la fonction de densité de probabilité vérifie

$$\iiint_{m \ j \ \phi} P dm dj d\phi = 1 \quad (34)$$

Afin d'obtenir l'équation d'évolution de  $f$ , notons  $x_i)_{i \in \{1,2,3\}}$  les variations des invariants adiabatiques  $X_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ . Un développement de  $fP$  à l'ordre 2 centré en  $X = (X_1, X_2, X_3)$  nous donne la relation

$$f(X, t + \Delta t) = f(X, t) - \sum_i \frac{\partial}{\partial X_i} \left( \iiint x_i P \right) f + \sum_{i < j} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} \left( \iiint x_i x_j P \right) f + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial X_i^2} \left( \iiint x_i^2 P \right) f \quad (35)$$

Elle se réécrit sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial X_i} D_i f + \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} D_{ij} f \quad (36)$$

où les coefficients sont définis par les relations

$$D_i = \frac{\iiint x_i P}{\Delta t} \quad (37)$$

et

$$D_{ij} = \frac{\iiint x_i x_j P}{2\Delta t} \quad (38)$$

En tenant compte des injections  $\sigma$  et des pertes  $\lambda$  possibles de particules par unité d'invariants, nous obtenons alors l'équation d'évolution de la fonction de distribution dans l'espace des invariants adiabatiques

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial X_i} D_i f + \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} D_{ij} f + \sigma - \lambda \quad (39)$$

Pour implémenter un code de calculs, l'objectif est donc d'évaluer les différents paramètres  $D_i$ ,  $D_{ij}$ ,  $\sigma$  et  $\lambda$  de l'équation d'évolution (39).

Le paramètre  $D_{LL}$  est l'un de ces paramètres. Il s'écrit

$$D_{LL} = \frac{\iiint l^2 P(m, k, l^* | M, K, L^*, t) dm dk dl}{2\Delta t} \quad (40)$$

Nous considérons en outre que la probabilité de faire un saut de  $m$ ,  $k$  et  $l^*$  au bout de  $\Delta t$  sachant que les invariants adiabatiques à l'instant  $t$  étaient  $M$ ,  $K$  et  $L^*$  se rapporte à la probabilité d'occurrence de trois évènements indépendants. En d'autres termes,

$$P(m, k, l^* | M, K, L^*, t) = P(m | M, K, L^*, t) P(k | M, K, L^*, t) P(l^* | M, K, L^*, t) \quad (41)$$

avec

$$\int_{x_i} P(x_i | X, t) dx_i = 1 \quad (42)$$

Ainsi, le coefficient de diffusion radiale  $D_{LL}$  s'écrit

$$D_{LL} = \frac{\int l^2 P(l | M, K, L^*, t) dl}{2\Delta t} \quad (43)$$

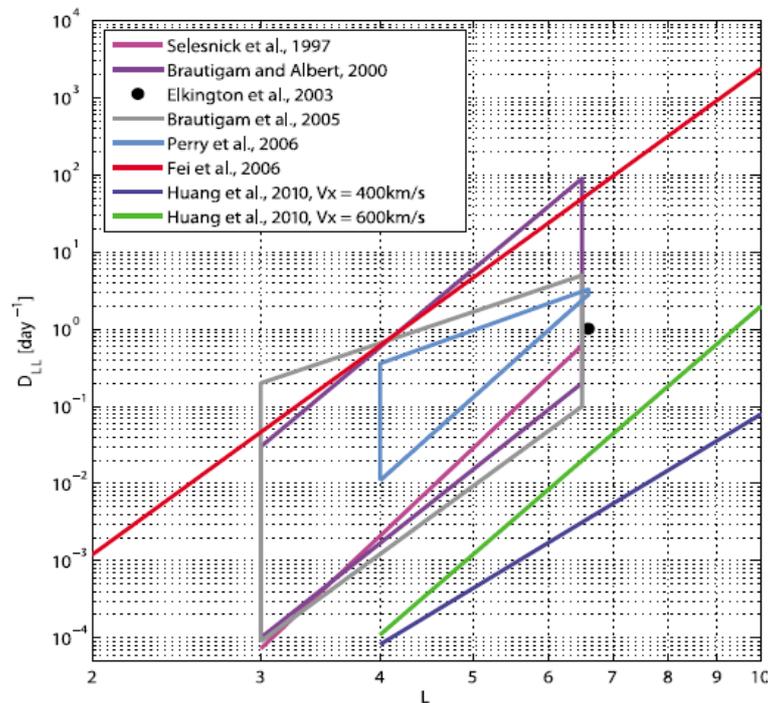
Avec  $\Phi = 2\pi k_0 / (L^* R_e)$  en valeur absolue, le coefficient de diffusion est aussi égal à

$$D_{LL} = \frac{(L^*)^4 R_e^2 \int \phi^2 P(\phi | M, K, L^*, t) d\phi}{(2\pi k_0)^2 2\Delta t} \quad (44)$$

Puisque  $L^* \approx r_0$ , le phénomène d'étalement en  $L^*$  dans l'espace des invariants adiabatiques se confond en première approximation avec le phénomène d'étalement radial dans l'espace réel. C'est pourquoi  $D_{LL}$  est qualifié de coefficient de diffusion radiale.

Le phénomène de diffusion radiale est une manifestation de la variabilité du paramètre  $L^*$  d'une population de particules piégées soumise à un champ électromagnétique dynamique. Autrement dit, les populations de particules piégées peuvent changer de contours de dérive  $L^*$  dans l'espace des invariants adiabatiques lorsque le champ électromagnétique varie dans le temps. Dans l'espace réel, cela revient donc à considérer que les populations de particules piégées peuvent s'éloigner ou s'approcher de la Terre lorsque le champ électromagnétique varie. Il s'agit alors de quantifier ce transport en fonction des variations des conditions électromagnétiques, et donc en fonction de l'activité solaire. Lorsque la résolution temporelle du modèle considéré est à l'échelle du temps de dérive, la diffusion radiale est décrite par le biais de coefficients de diffusion. Ils sont représentatifs de la variabilité du paramètre  $L^*$  à l'échelle du temps de dérive. Dans la littérature, l'expression des coefficients de diffusion passe par des lois empiriques [e.g., Schulz, 1991 ; Brautigam et Albert, 2000] ou par des formulations analytiques déduites de l'étude de modèles de champs électromagnétiques

particuliers [e.g., Fälthammar, 1965 ; Fei et al., 2006]. Or, les estimations des coefficients de diffusion radiale fournies par la littérature sont dispersées sur plusieurs décades (**Figure 1-6**).



**Figure 1-6 : quelques coefficients de diffusion de radiale de la littérature, d'après [Huang et al., 2010]**

**Figure 1-6**, nous observons également une multiplication des travaux portant sur la diffusion radiale. Un tel constat nous informe de la place de premier plan occupée par la question de la caractérisation du phénomène de diffusion radiale dans la description de la dynamique des ceintures de radiation terrestres. En outre, la dispersion des résultats obtenus montre que la question reste en suspens. Dans les modèles physiques des ceintures de radiation, la diffusion radiale est vue comme une boîte noire. Les incertitudes de plusieurs décades sur les coefficients sont alors une limite remarquable à la pertinence de la modélisation physique des ceintures de radiation. Nous rendons compte dans ce manuscrit des réponses apportées par nos travaux de recherche à la question de la caractérisation du phénomène de diffusion radiale. Nous exposons dans un premier temps la démarche théorique établie pour une caractérisation analytique du phénomène. Nous détaillons ensuite les protocoles numériques et expérimentaux mis en place pour une quantification des coefficients de diffusion radiale. Nous présentons enfin l'apport de ces travaux en discutant quelques références de la littérature en termes de caractérisation du phénomène de diffusion radiale.



## Chapitre 2 :

# Analyse théorique du processus de diffusion radiale par technique de changement d'échelle

Le phénomène de diffusion radiale est une représentation de la variabilité du paramètre  $L^*$  d'une population de particules piégées soumise à un champ électromagnétique dynamique. Lorsque la résolution temporelle du modèle physique considéré est à l'échelle du temps de dérive, la diffusion radiale est décrite par le biais de coefficients de diffusion. Ces coefficients sont de la forme

$$D_{LL} = \frac{(L^*)^4 R_e^2 \int \phi^2 P(\phi|M, K, L^*, t) d\phi}{(2\pi k_0)^2 2\Delta t} \quad (1)$$

où  $P(\phi|M, K, L^*, t)$  représente la probabilité d'avoir une variation du flux magnétique égale à  $\phi$  au bout d'un temps  $\Delta t \gg \tau_D$  en partant du point  $(M, K, L^*)$  à l'instant  $t$  dans l'espace des invariants adiabatiques.

La diffusion radiale est donc liée à la violation du troisième invariant adiabatique. Puisque la violation du troisième invariant adiabatique est activée par des variations des champs électromagnétiques sur des échelles de temps courtes devant le temps de dérive, nous avons décidé de travailler à une échelle de temps adaptée. L'objectif de ce chapitre est de mener une étude théorique du processus de diffusion radiale à une échelle temporelle plus fine que le temps de dérive afin de mettre en lumière les principaux pilotes de ce phénomène et d'explicitier l'expression des coefficients de diffusion.

Après avoir défini le cadre de cette analyse, nous étudions tout d'abord en détails le cas particulier de particules piégées équatoriales, en l'absence de champ électrostatique. En effet, dans les ceintures, la gamme d'énergie considérée est telle que l'action du potentiel électrostatique est négligeable en première approximation [Schulz, 1991]. En outre, l'équateur magnétique représente une position d'équilibre par laquelle passent toutes les particules. L'étude des particules équatoriales permet donc d'avoir accès au premier ordre à des informations sur le comportement de l'ensemble des particules des ceintures. Enfin, en imposant un angle équatorial de  $\pi/2$  ( $K = 0$ ) et en négligeant les potentiels électrostatiques ( $U = 0$ ), nous simplifions l'étude théorique en restreignant le nombre de paramètres en jeu. L'étude du cas particulier de particules équatoriales en l'absence de champ électrostatique présente donc le double avantage d'être à la fois simple tout en restant représentatif.

Ensuite, afin d'accéder à une compréhension nuancée du phénomène, nous étendons la méthode mise en place dans ce cas particulier au cas le plus général possible, c'est-à-dire à

une population de particules piégées quelconque, en présence ou non de champ électrostatique.

Enfin, nous relierons ce travail d'analyse théorique à une description de la diffusion radiale à l'échelle du temps de dérive afin de fournir une formulation analytique générale prête pour le calcul de coefficients de diffusion radiale.

## 1. Définition du cadre de l'analyse théorique de la diffusion radiale par technique de changement d'échelle

La diffusion radiale est la manifestation de la violation du troisième invariant adiabatique de particules piégées soumises à un champ électromagnétique dynamique. Pour l'étude de la diffusion radiale, il est communément admis que les variations du champ sont telles qu'il est possible de supposer la conservation des deux premiers invariants adiabatiques [e.g., *Fälthammar*, 1968]. Nous supposons donc que les critères d'adiabaticité spatiale et temporelle sont satisfaits afin de nous placer dans le cadre de l'approximation du centre-guide (équations (7) et (8) **Chapitre 1**). Nous supposons également que les variations électromagnétiques sont lentes par rapport au temps de rebond des particules considérées. Enfin, afin de définir le troisième invariant, nous travaillons avec une population de particules piégées, i.e. une population telle que les particules dérivent le long de coquilles fermées en régime stationnaire.

Considérons une population de particules piégées aux caractéristiques identiques. Soient  $(q, M, K, L^*)$  ces caractéristiques. Soient  $\tau_g$ ,  $\tau_B$  et  $\tau_D$  respectivement les temps de giration, de rebond et de dérive de cette population. Soit  $\tau_C$  un temps caractéristique de variation électromagnétique tel que seul le troisième invariant  $\Phi$  est violé.

Alors

$$\tau_g \ll \tau_B \ll \tau_C \ll \tau_D \quad (2)$$

Pour nous placer à une échelle de temps adaptée à cette relation d'ordre, nous définissons l'échelle de temps mésoscopique, une échelle intermédiaire entre le temps de rebond et le temps de dérive. Soit  $dt$  un pas de temps infinitésimal à cette échelle mésoscopique. Il est défini tel que

$$\tau_g \ll \tau_B \ll dt \ll \tau_D \quad (3)$$

L'ordre de grandeur de ce pas de temps  $dt$  en fonction de la distance radiale et de la gamme d'énergie étudiée se déduit de la **Figure 1-3**.

À l'échelle mésoscopique, nous pouvons nous affranchir de la représentation de la dynamique d'une particule piégée sur les phases de la giration et du rebond. En outre, d'après *Roederer* [1970, eq.(1.29) p. 19], dans un champ électromagnétique dynamique, une expression de la vitesse de dérive instantanée  $\mathbf{V}_D$  d'une particule des ceintures de radiation est

$$\mathbf{V}_D = \frac{\mathbf{B}}{qB^2} \times \left( -q\mathbf{E} + \frac{m}{2B} (v_{\perp}^2 + 2v_{\parallel}^2) \nabla_{\perp} B + m \frac{d\mathbf{V}_D}{dt} \right). \quad (4)$$

Ainsi, nous remarquons l'apparition d'un terme d'inertie lors de variations de la vitesse de dérive ( $\frac{m\mathbf{B}}{qB^2} \times \frac{d\mathbf{V}_D}{dt}$ ). Cependant, cette formulation nous indique également que le temps caractéristique d'inertie est égal à

$$\left| \frac{m}{qB} \right| = \frac{\tau_g}{2\pi} \ll dt \quad (5)$$

Par conséquent, lorsque le champ électromagnétique varie, tout se passe comme si l'inertie était négligeable et la vitesse variait instantanément à l'échelle mésoscopique, de manière discontinue, d'état stationnaire en état stationnaire. Nous nous plaçons donc dans le cadre d'une approximation des régimes quasi-stationnaires. Ainsi, à chaque instant à l'échelle de temps mésoscopique, nous décidons de représenter la vitesse de dérive par son expression moyennée sur le rebond et reportée au niveau de l'équateur magnétique :

$$\mathbf{V}_D = \frac{2p}{q\tau_B B_0} \nabla_0 I \times \mathbf{e}_0 + \frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{e}_0}{B_0} \quad (6)$$

où  $\mathbf{E}_0$  représente l'ensemble des champs électriques, qu'ils soient d'origine électrostatique ou induits par une variation du champ magnétique.

Enfin, nous choisissons de confondre la notion de dérivée temporelle de flux magnétique  $\Phi$  avec son taux de variation sur un pas de temps infinitésimal à l'échelle mésoscopique seulement :

$$\frac{\Phi(t+dt) - \Phi(t)}{dt} \xrightarrow{dt \rightarrow 0^+} \frac{d\Phi}{dt} \quad (7)$$

avec

$$dt \rightarrow 0^* \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dt}{\tau_D} \ll 1 \\ \frac{dt}{\tau_B} \gg 1 \end{cases} \quad (8)$$

## 2. Étude théorique du processus de diffusion radiale à l'échelle mésoscopique

L'objectif de cette partie est de déterminer la variation du flux magnétique  $d\Phi$  à l'échelle de temps mésoscopique  $dt$  afin de pouvoir ensuite formuler la variation du flux magnétique  $\Delta\Phi$  à l'échelle du temps de dérive  $\Delta t$ ,  $\Delta\Phi = \int^{\Delta t} d\Phi$ .

Intéressons-nous dans un premier temps à la variation du flux magnétique d'une particule équatoriale piégée dans un champ magnétique variable, en l'absence de potentiel électrostatique.

### 2.1. Expression de la variation du flux magnétique d'une particule équatoriale en l'absence de champ électrostatique

Soit une particule équatoriale dérivant autour de la Terre ( $q, M, K = 0, L^*$ ).

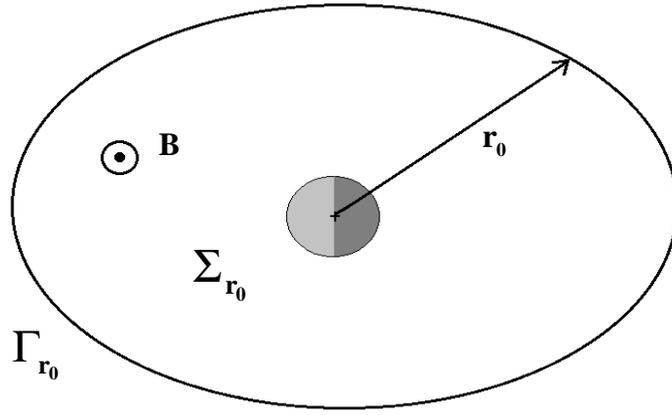
Soit  $\mathbf{r}_0$  la position du centre-guide de cette particule à un instant  $t$ .

Soit  $\Gamma_{r_0}$  le contour de dérive instantané associé à ce centre-guide. Il correspond à la trajectoire parcourue par le centre-guide si le champ magnétique est stationnaire.  $\Gamma_{r_0}$  est un contour fermé. Il est défini tel que le module du champ magnétique ressenti par le centre-guide est constant :

$$\forall \mathbf{r} \in \Gamma_{r_0}, B(\mathbf{r}) = B(\mathbf{r}_0). \quad (9)$$

Soit  $\Sigma_{r_0}$  la surface encerclée par  $\Gamma_{r_0}$ . Le flux magnétique relatif à la particule équatoriale dont le centre-guide est situé en  $\mathbf{r}_0$  à l'instant  $t$  correspond au flux intégré sur la surface  $\Sigma_{r_0}$  (**Figure 2-1**).

$$\Phi(\mathbf{r}_0, t) = \iint_{\Sigma_{r_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}. \quad (10)$$

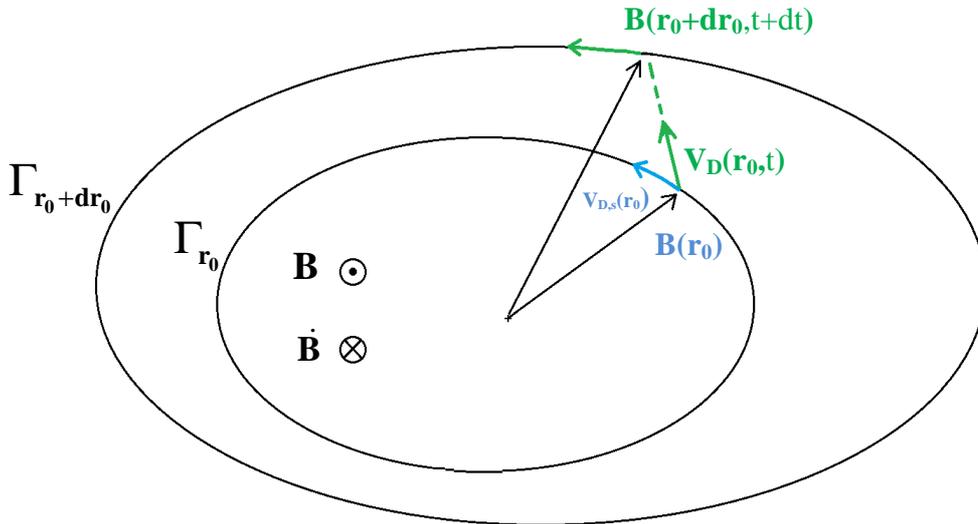


**Figure 2-1 : Le contour de dérive  $\Gamma_{r_0}$**

Entre  $t$  et  $t + dt$ , nous supposons que le champ magnétique varie de manière telle que les deux premiers invariants adiabatiques restent conservés. À l'instant  $t$ , du fait de la variation du champ magnétique, un champ électrique induit apparaît et la particule en  $\mathbf{r}_0$  est déviée de son contour de dérive initial. À l'instant  $t + dt$ , la particule se trouve en  $\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}_0$ . Si la perturbation s'arrêtait, la particule reprendrait alors son mouvement de dérive magnétique autour de la Terre en suivant le contour de dérive fermé  $\Gamma_{r_0 + d\mathbf{r}_0}$  défini tel que

$$\forall \mathbf{r} \in \Gamma_{r_0 + d\mathbf{r}_0}, B(\mathbf{r}) = B(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}_0, t + dt). \quad (11)$$

La surface encerclée par ce nouveau contour est  $\Sigma_{r_0 + d\mathbf{r}_0}$  (**Figure 2-2**<sup>2</sup>).



**Figure 2-2 : Le champ électrique induit par la variation du champ magnétique modifie le mouvement de dérive du centre-guide.**

<sup>2</sup> Pour l'orientation des schémas de la démonstration, nous supposons une diminution du module du champ magnétique. En outre, la population de particules choisie est une population d'électrons (dérive dans le sens antihoraire).

L'objectif est de quantifier la variation du flux magnétique de la particule entre  $t$  et  $t + dt$ .  
Formellement, cette variation s'écrit

$$d\Phi(\mathbf{r}_0, t) = \Phi(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}_0, t + dt) - \Phi(\mathbf{r}_0, t) = \iint_{\Sigma_{\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t + dt) \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\Sigma_{\mathbf{r}_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}. \quad (12)$$

### 2.1.1. 1<sup>ère</sup> approche : décomposition spatio-temporelle de la variation du flux magnétique

#### *Analyse*

Dans l'équation (12), nous remarquons que la variation du flux  $d\Phi(\mathbf{r}_0, t)$  prend son origine à la fois dans la variation temporelle du champ magnétique ( $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  à comparer avec  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t + dt)$ ) et dans la variation de la surface d'intégration ( $\Sigma_{\mathbf{r}_0}$  à comparer avec  $\Sigma_{\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}_0}$ ). L'idée est donc d'évaluer séparément chacune de ces contributions. Pour cela, nous ajoutons et nous soustrayons la quantité  $\Phi(\mathbf{r}_0, t + dt)$  à  $d\Phi(\mathbf{r}_0, t)$ .

$$d\Phi(\mathbf{r}_0, t) = (\Phi(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}_0, t + dt) - \Phi(\mathbf{r}_0, t + dt)) + (\Phi(\mathbf{r}_0, t + dt) - \Phi(\mathbf{r}_0, t)) \quad (13)$$

Soit  $d\Phi_A(\mathbf{r}_0, t)$  la contribution spatiale à la variation du flux,

$$d\Phi_A(\mathbf{r}_0, t) = \Phi(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}_0, t + dt) - \Phi(\mathbf{r}_0, t + dt). \quad (14)$$

Elle correspond à la variation de la surface d'intégration.

Soit  $d\Phi_\Sigma(\mathbf{r}_0, t)$  la contribution temporelle à la variation du flux,

$$d\Phi_\Sigma(\mathbf{r}_0, t) = \Phi(\mathbf{r}_0, t + dt) - \Phi(\mathbf{r}_0, t). \quad (15)$$

Elle correspond à la variation du champ pendant  $dt$  à travers la surface initiale  $\Sigma_{\mathbf{r}_0}$ .

La variation totale du flux magnétique est la somme de ces deux contributions (**Figure 2-3**)

$$d\Phi(\mathbf{r}_0, t) = d\Phi_A(\mathbf{r}_0, t) + d\Phi_\Sigma(\mathbf{r}_0, t). \quad (16)$$

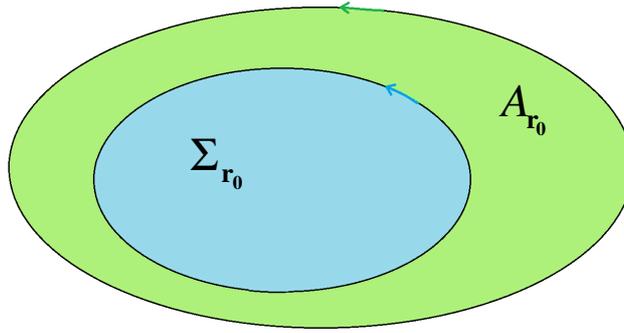


Figure 2-3 : Définition des surfaces d'intégration

Expression de la contribution spatiale  $d\Phi_A(\mathbf{r}_0, t)$

La contribution spatiale à la variation du flux s'écrit

$$d\Phi_A(\mathbf{r}_0, t) = \Phi(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}_0, t + dt) - \Phi(\mathbf{r}_0, t + dt). \quad (17)$$

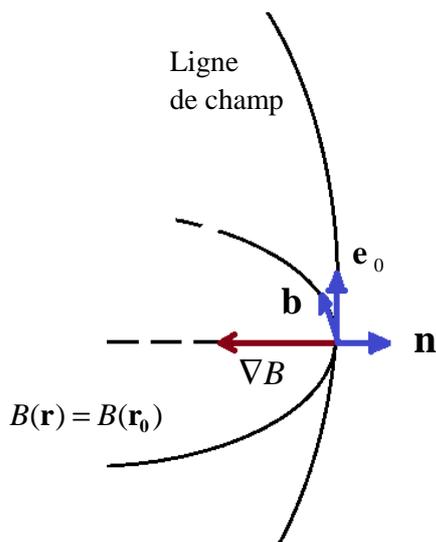
Autrement dit,

$$d\Phi_A(\mathbf{r}_0, t) = \iint_{\Sigma_{r_0+d\mathbf{r}_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t + dt) \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\Sigma_{r_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t + dt) \cdot d\mathbf{S}. \quad (18)$$

$d\Phi_A(\mathbf{r}_0, t)$  correspond au flux magnétique pris à l'instant  $t + dt$  sur le ruban  $A_{r_0}$ , défini comme la différence entre  $\Sigma_{r_0}$  et  $\Sigma_{r_0+d\mathbf{r}_0}$ .

Soit  $d\mathbf{h}_{r_0}(\mathbf{r})$  la largeur du ruban  $A_{r_0}$  en  $\mathbf{r}$ . Soit  $d\mathbf{l}$  un élément infinitésimal de  $\Gamma_{r_0}$ .

Nous définissons leur orientation dans le système de coordonnées naturelles de dérive  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  présenté Figure 2-4.



$\mathbf{e}_0 = \mathbf{B}_0/B_0$  indique le sens du champ magnétique équatorial.

$\mathbf{b}$  est le vecteur unitaire tangent au contour de dérive dans le plan équatorial.

$\mathbf{n}$  complète le trièdre, il est contenu dans le plan équatorial, dans le sens opposé au gradient du module du champ magnétique.

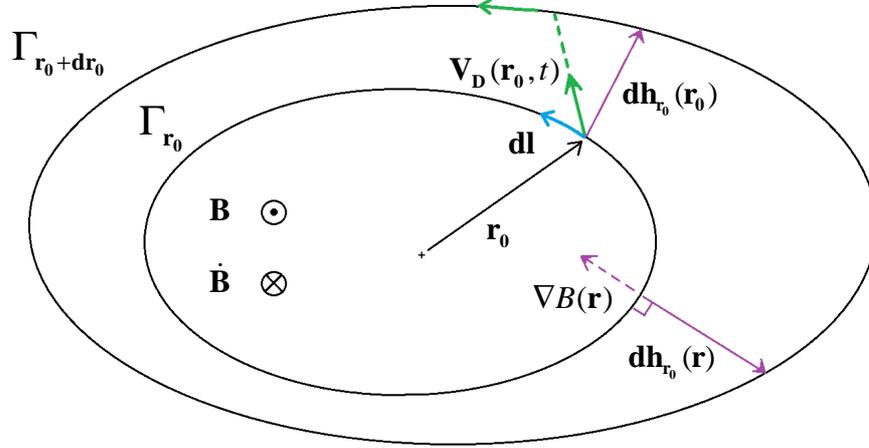
Figure 2-4 : le système de coordonnées naturelles de dérive

Dans le système de coordonnées naturelles de dérive, l'orientation des vecteurs  $\mathbf{dh}_{r_0}$  et  $\mathbf{dl}$  est  $\mathbf{dh}_{r_0} = dh_{r_0} \mathbf{n}$  et  $\mathbf{dl} = dl \mathbf{b}$ . Nous réécrivons ainsi la contribution spatiale  $d\Phi_A(\mathbf{r}_0, t)$  sous la forme

$$d\Phi_A(\mathbf{r}_0, t) = \oint_{\mathbf{r} \in \Gamma_{r_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t + dt) \cdot (\mathbf{dh}_{r_0}(\mathbf{r}) \times \mathbf{dl}) \quad (19)$$

ou encore (**Figure 2-5**)

$$d\Phi_A(\mathbf{r}_0, t) = \oint_{\mathbf{r} \in \Gamma_{r_0}} B(\mathbf{r}, t + dt) dh_{r_0}(\mathbf{r}) dl. \quad (20)$$



**Figure 2-5 : Définition de la largeur du ruban  $\mathbf{dh}_{r_0}(\mathbf{r})$**

La largeur  $\mathbf{dh}_{r_0}(\mathbf{r})$  relie le point en  $\mathbf{r}$  de l'ancien contour  $\Gamma_{r_0}$  au point de  $\Gamma_{r_0 + dr_0}$  situé dans la direction du gradient du champ magnétique. Au point  $\mathbf{r}_0$ , la largeur est proportionnelle à la composante normale de la vitesse de dérive  $\mathbf{dh}_{r_0}(\mathbf{r}_0) = (\mathbf{V}_D(\mathbf{r}_0, t) dt \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$ . Plus généralement, la largeur vérifie la relation

$$\forall \mathbf{r} \in \Gamma_{r_0}, B(\mathbf{r}, t + dt) + \nabla B(\mathbf{r}, t + dt) \cdot \mathbf{dh}_{r_0}(\mathbf{r}) = B(\mathbf{r}_0 + \mathbf{dr}_0, t + dt), \quad (21)$$

ce qui équivaut à l'égalité algébrique

$$\forall \mathbf{r} \in \Gamma_{r_0}, B(\mathbf{r}, t + dt) - |\nabla B(\mathbf{r}, t + dt)| dh_{r_0}(\mathbf{r}) = B(\mathbf{r}_0 + \mathbf{dr}_0, t + dt). \quad (22)$$

Or, par définition du contour  $\Gamma_{\mathbf{r}_0}$  (équation (9)),

$$\forall \mathbf{r} \in \Gamma_{\mathbf{r}_0}, B(\mathbf{r}, t + dt) = B(\mathbf{r}_0, t) + \frac{\partial B}{\partial t}(\mathbf{r}, t) dt. \quad (23)$$

Donc, à l'ordre 1 en  $dt$ , l'expression algébrique de la largeur  $dh_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})$  est

$$\forall \mathbf{r} \in \Gamma_{\mathbf{r}_0}, dh_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) = \frac{dt}{|\nabla B(\mathbf{r}, t)|} \left( \frac{\partial B}{\partial t}(\mathbf{r}, t) - \frac{dB}{dt}(\mathbf{r}_0, t) \right). \quad (24)$$

Ainsi, l'expression de la contribution spatiale à la variation du flux magnétique  $d\Phi_A(\mathbf{r}_0, t)$  s'écrit

$$d\Phi_A(\mathbf{r}_0, t) = dt \oint_{\Gamma_{\mathbf{r}_0}} \frac{B(\mathbf{r}, t)}{|\nabla B(\mathbf{r}, t)|} \left( \frac{\partial B}{\partial t}(\mathbf{r}, t) - \frac{dB}{dt}(\mathbf{r}_0, t) \right) dl. \quad (25)$$

Intéressons-nous maintenant à la reformulation de la contribution temporelle à la variation du flux magnétique.

*Expression de la contribution temporelle  $d\Phi_\Sigma(\mathbf{r}_0, t)$*

La contribution temporelle à la variation du flux s'écrit

$$d\Phi_\Sigma(\mathbf{r}_0, t) = \Phi(\mathbf{r}_0, t + dt) - \Phi(\mathbf{r}_0, t). \quad (26)$$

Autrement dit,

$$d\Phi_\Sigma(\mathbf{r}_0, t) = \iint_{\Sigma_{\mathbf{r}_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t + dt) \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\Sigma_{\mathbf{r}_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = dt \iint_{\Sigma_{\mathbf{r}_0}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}. \quad (27)$$

En reconnaissant la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday, nous obtenons alors

$$d\Phi_\Sigma(\mathbf{r}_0, t) = -dt \oint_{\Gamma_{\mathbf{r}_0}} \mathbf{E}_{\text{ind}}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l}. \quad (28)$$

Or, dans le système de coordonnées naturelles de dérive,

$$\mathbf{E}_{\text{ind}}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = E_{\text{ind},b}(\mathbf{r}, t) dl . \quad (29)$$

En outre, nous remarquons que la projection de la vitesse de dérive selon la normale  $\mathbf{n}$  s'écrit

$$\mathbf{V}_D(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{V}_D(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla B(\mathbf{r}, t)}{|\nabla B(\mathbf{r}, t)|} = \frac{E_{\text{ind},b}(\mathbf{r}, t)}{B(\mathbf{r}, t)} . \quad (30)$$

Ainsi, nous écrivons

$$\mathbf{E}_{\text{ind}}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{B(\mathbf{r}, t)}{|\nabla B(\mathbf{r}, t)|} \mathbf{V}_D(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla B(\mathbf{r}, t) dl . \quad (31)$$

La contribution temporelle à la variation du flux s'écrit donc

$$d\Phi_{\Sigma}(\mathbf{r}_0, t) = dt \oint_{\Gamma_{\mathbf{r}_0}} \frac{B(\mathbf{r}, t)}{|\nabla B(\mathbf{r}, t)|} \mathbf{V}_D(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla B(\mathbf{r}, t) dl . \quad (32)$$

*Bilan : expression de la variation du flux magnétique d'une particule équatoriale située en  $\mathbf{r}_0$*

Nous sommes les contributions spatiale et temporelle en notant que la dérivée totale du champ magnétique vérifie l'égalité

$$\forall(\mathbf{r}, t), \frac{dB}{dt}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial B}{\partial t}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{V}_D(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla B(\mathbf{r}, t) . \quad (33)$$

Nous obtenons alors

$$d\Phi(\mathbf{r}_0, t) = dt \oint_{\Gamma_{\mathbf{r}_0}} \frac{B(\mathbf{r}, t)}{|\nabla B(\mathbf{r}, t)|} \left( \frac{dB}{dt}(\mathbf{r}, t) - \frac{dB}{dt}(\mathbf{r}_0, t) \right) dl . \quad (34)$$

Enfin, avec

$$\frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{r}_0, t) = \lim_{dt \rightarrow 0^*} \frac{d\Phi(\mathbf{r}_0, t)}{dt} , \quad (35)$$

l'expression de la dérivée du flux magnétique à l'échelle mésoscopique est

$$\frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{r}_0, t) = \oint_{\Gamma_{r_0}} \frac{B(\mathbf{r}, t)}{|\nabla B(\mathbf{r}, t)|} \left( \frac{dB}{dt}(\mathbf{r}, t) - \frac{dB}{dt}(\mathbf{r}_0, t) \right) dl. \quad (36)$$

### *Commentaires*

Dans le cas particulier d'un champ axisymétrique, du fait de l'invariance du problème par rotation,

$$\forall \mathbf{r} \in \Gamma_{r_0}, \frac{dB}{dt}(\mathbf{r}, t) = \frac{dB}{dt}(\mathbf{r}_0, t). \quad (37)$$

donc

$$\frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{r}_0, t) = 0. \quad (38)$$

Nous constatons ainsi le rôle de l'asymétrie des variations électromagnétiques dans la variation du troisième invariant adiabatique. C'est le fait que le champ magnétique ne varie pas avec la même intensité le long du contour de dérive qui est à l'origine de la violation du troisième invariant.

En outre, en l'absence de potentiel électrostatique, nous remarquons que l'expression de la variation du flux magnétique d'une particule équatoriale ne dépend ni de la charge, ni de l'énergie considérées. En effet, dans ce cas, tous les centres-guide passant par  $\mathbf{r}_0$  partagent le même contour de dérive  $\Gamma_{r_0}$ , caractérisé par un module du champ magnétique constant. La charge détermine le sens dans lequel les centres-guide parcourent le contour de dérive. L'énergie détermine la vitesse à laquelle ils le parcourent. Lors d'une variation du champ magnétique, les champs électriques induits engendrent un terme de vitesse, la vitesse des champs croisés  $\mathbf{V}_{\text{ExB}}$  :

$$\mathbf{V}_{\text{ExB}} = \frac{\mathbf{E}_{\text{ind}} \times \mathbf{e}_0}{B_0} \quad (39)$$

La vitesse des champs croisés s'applique de la même manière à toutes les particules, quelque soit la charge ou l'énergie. C'est elle qui est à l'origine de la déviation des centres-guide du contour de dérive initial. C'est elle qui pilote la largeur du ruban  $A_{r_0}$ . C'est pourquoi la variation du flux magnétique d'une population de particules équatoriales ne dépend ni de la charge, ni de l'énergie considérée.

Néanmoins, il est nécessaire de noter que ces remarques sont correctes dans la mesure où le cadre de l'étude est respecté, i.e. dans la mesure où le pas de temps infinitésimal considéré  $dt$  est tel que  $\tau_B \ll dt \ll \tau_D$ . Ainsi, pour un pas de temps infinitésimal  $dt$  fixé, la gamme d'énergie considérée est implicitement restreinte par le cadre de l'étude :  $\tau_B \ll dt \ll \tau_D$ . Par conséquent, même dans le cas d'une particule équatoriale dérivant dans un champ magnétique en l'absence de potentiel électrostatique, il y a une dépendance implicite du processus de diffusion radiale en la gamme d'énergie considérée. Cette notion de dépendance de la diffusion radiale en l'énergie des particules est discutée de nouveau dans les chapitres suivants.

Afin de s'approprier davantage la physique sous-jacente à la démonstration, nous présentons une deuxième méthode pour l'évaluation de la variation du flux magnétique d'une particule équatoriale en l'absence de potentiel électrostatique. Nous considérons cette fois-ci le déplacement de l'ensemble des particules équatoriales d'un même contour de dérive et non la trajectoire d'une particule isolée. Cette preuve s'appuie sur la propriété de conservation du flux par déformation du contour de dérive. Nous démontrons cette propriété dans un premier temps.

### 2.1.2. 2<sup>e</sup> approche : évaluation de la variation du flux magnétique par différenciation avec le flux du contour de dérive initial déformé

Soit  $\Gamma_{r_0}$  un contour de dérive relatif à un ensemble de particules équatoriales aux caractéristiques identiques ( $q, M, K = 0, L^*$ ). Le contour de dérive est défini tel que le module du champ magnétique vu par la particule est constant :

$$\forall \mathbf{r} \in \Gamma_{r_0}, B(\mathbf{r}) = B(\mathbf{r}_0). \quad (40)$$

Entre  $t$  et  $t + dt$ , nous supposons que le champ magnétique varie de manière telle que les deux premiers invariants adiabatiques restent conservés.

À l'instant  $t$ , du fait de la variation du champ magnétique, un champ électrique induit apparaît et l'ensemble des centres-guide de  $\Gamma_{r_0}$  est transporté, point  $\mathbf{r}$  par point  $\mathbf{r}$  de  $\Gamma_{r_0}$ , à la vitesse de dérive  $\mathbf{V}_D(\mathbf{r}, t)$ .

Soit  $\tilde{\Gamma}$  l'image de  $\Gamma_{r_0}$  par ce transport d'ensemble (**Figure 2-6**).

Soit  $\tilde{\Phi}$  le flux magnétique à travers la surface encerclée par  $\tilde{\Gamma}$ . Il s'écrit

$$\tilde{\Phi}(t + dt) = \iint_{\Sigma_{r_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t + dt) \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\Gamma_{r_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t + dt) \cdot (\mathbf{V}_D(\mathbf{r}, t) dt \times d\mathbf{l}). \quad (41)$$

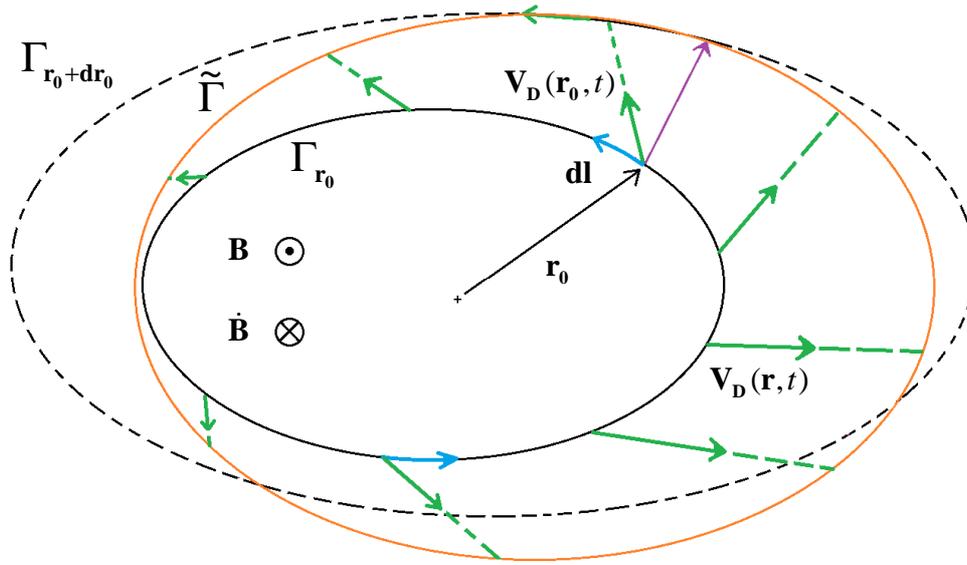


Figure 2-6 : Définition de l'image  $\tilde{\Gamma}$

Or,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t + dt) \cdot (\mathbf{V}_D(\mathbf{r}, t) dt \times d\mathbf{l}) = (\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{V}_D(\mathbf{r}, t) dt) \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E}_{\text{ind}}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} dt . \quad (42)$$

Ainsi

$$\oint_{\Gamma_{r_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t + dt) \cdot (\mathbf{V}_D(\mathbf{r}, t) dt \times d\mathbf{l}) = dt \oint_{\Gamma_{r_0}} \mathbf{E}_{\text{ind}}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} . \quad (43)$$

Donc, en appliquant la relation de Maxwell-Faraday,

$$\oint_{\Gamma_{r_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t + dt) \cdot (\mathbf{V}_D(\mathbf{r}, t) dt \times d\mathbf{l}) = -dt \iint_{\Sigma_{r_0}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} , \quad (44)$$

ce qui s'écrit aussi

$$\oint_{\Gamma_{r_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t + dt) \cdot (\mathbf{V}_D(\mathbf{r}, t) dt \times d\mathbf{l}) = \iint_{\Sigma_{r_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\Sigma_{r_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t + dt) \cdot d\mathbf{S} . \quad (45)$$

Par conséquent, en combinant les équations (41) et (45), nous obtenons

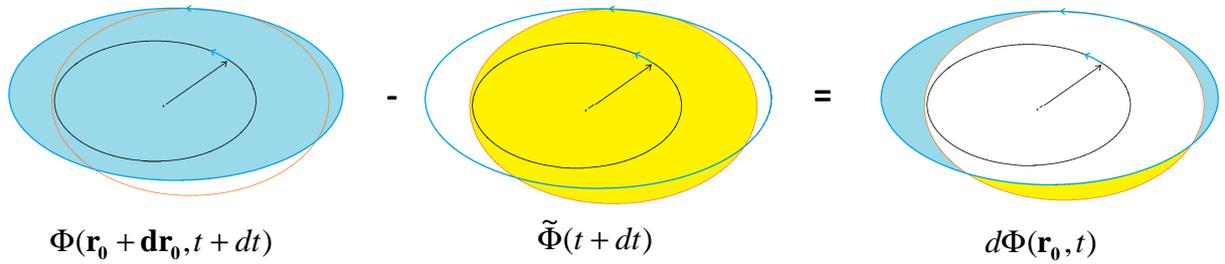
$$\tilde{\Phi}(t + dt) = \iint_{\Sigma_{r_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \Phi(\mathbf{r}_0, t) . \quad (46)$$

Le contour de dérive se déforme de manière à conserver le flux magnétique initial [Newcomb, 1958]. Cependant, le module du champ magnétique n'est pas nécessairement constant le long

de  $\tilde{\Gamma}$ . Autrement dit, si la perturbation s'arrêtait à l'instant  $t + dt$ , tous les centres-guide issus de  $\Gamma_{\mathbf{r}_0}$  ne se déplaceraient pas nécessairement le long de  $\tilde{\Gamma}$ .  $\tilde{\Gamma}$  n'est pas nécessairement un contour de dérive. À l'instant  $t + dt$ , le contour de dérive associé à une particule située en  $\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}_0$  est  $\Gamma_{\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}_0}$ . En combinant l'équation (12) avec la propriété (46), nous exprimons la variation du flux magnétique lié à  $\mathbf{r}_0$  sous la forme

$$d\Phi(\mathbf{r}_0, t) = \Phi(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}_0, t + dt) - \tilde{\Phi}(t + dt). \quad (47)$$

C'est la différence entre le flux encerclé par  $\Gamma_{\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}_0}$  et le flux encerclé par  $\tilde{\Gamma}$  qui détermine l'intensité de la variation du flux magnétique (**Figure 2-7**).



**Figure 2-7 : représentation géométrique de la variation du flux magnétique**

À l'ordre 1 en  $dt$ , en combinant les équations (41) et (47)

$$d\Phi(\mathbf{r}_0, t) = d\Phi_A(\mathbf{r}_0, t) - \oint_{\tilde{\Gamma}_{\mathbf{r}_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot (\mathbf{V}_D(\mathbf{r}, t) dt \times d\mathbf{l}). \quad (48)$$

Ainsi, avec (19),

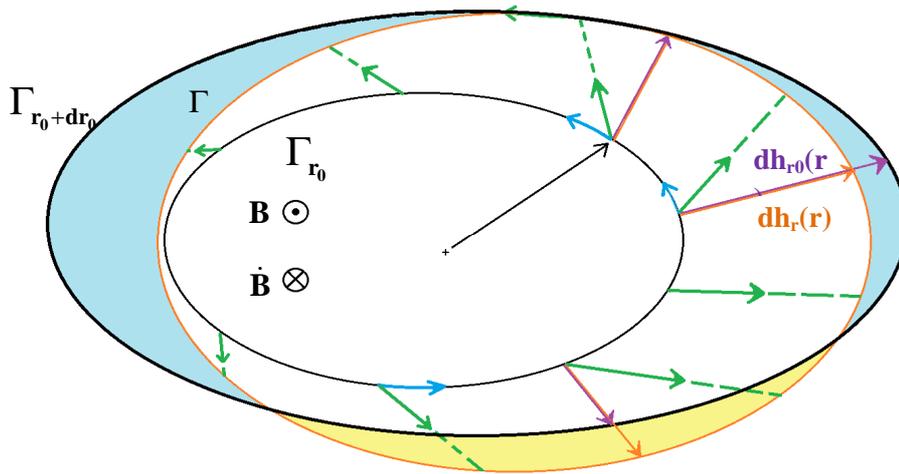
$$d\Phi(\mathbf{r}_0, t) = \oint_{\mathbf{r} \in \Gamma_{\mathbf{r}_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot ((d\mathbf{h}_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) - \mathbf{V}_D(\mathbf{r}, t) dt) \times d\mathbf{l}). \quad (49)$$

Cette équation se met également sous la forme

$$d\Phi(\mathbf{r}_0, t) = \oint_{\mathbf{r} \in \Gamma_{\mathbf{r}_0}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot ((d\mathbf{h}_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) - d\mathbf{h}_{\mathbf{r}}(\mathbf{r})) \times d\mathbf{l}) \quad (50)$$

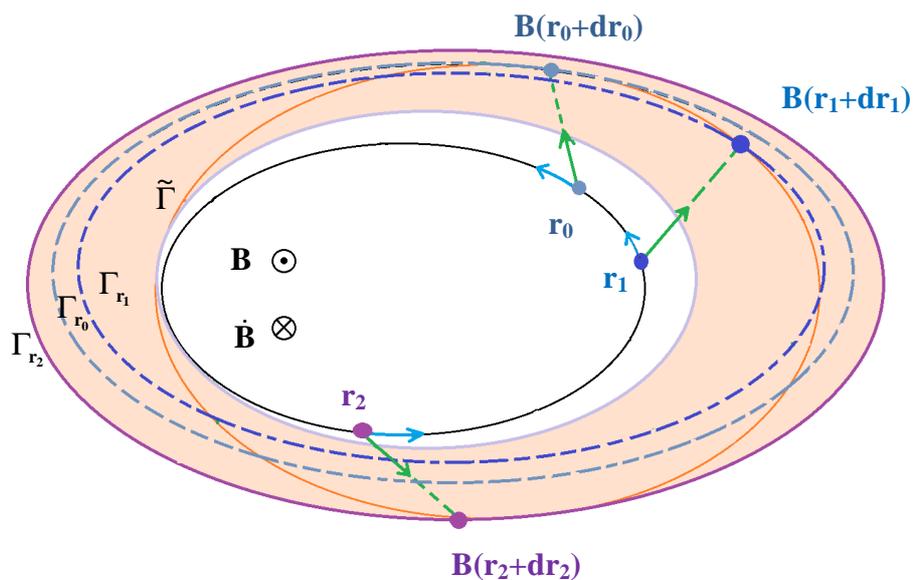
soit (**Figure 2-8**)

$$d\Phi(\mathbf{r}_0, t) = \oint_{\mathbf{r} \in \Gamma_{\mathbf{r}_0}} B(\mathbf{r}, t) (dh_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) - dh_{\mathbf{r}}(\mathbf{r})) dl. \quad (51)$$



**Figure 2-8 : une interprétation géométrique de la variation du flux magnétique**

Nous retrouvons le rôle de l'asymétrie dans la variation du flux magnétique. En revanche, nous l'exprimons cette fois sous un angle géométrique. Nous constatons en effet que c'est la différence entre  $\tilde{\Gamma}$  et  $\Gamma_{r_0+dr_0}$  qui intervient dans l'expression de la variation du flux magnétique. Dans le cas particulier d'un champ axisymétrique, du fait de l'invariance du problème par rotation, il n'est pas possible de différencier les centres-guide. Il n'est donc pas possible de différencier  $\tilde{\Gamma}$  et  $\Gamma_{r_0+dr_0}$ . Quelque soit la position initiale  $\mathbf{r}$  de  $\Gamma_{r_0}$ ,  $\tilde{\Gamma}$  s'identifie avec  $\Gamma_{r+dr}$ , et le flux magnétique est conservé. Lors de variations asymétriques du champ, les nouveaux contours de dérive  $(\Gamma_{r+dr})_{r \in \Gamma_{r_0}}$  se différencient de  $\tilde{\Gamma}$ . Le phénomène de diffusion radiale est alors initié (**Figure 2-9**).



**Figure 2-9 : Asymétrie et diffusion radiale**

### 2.1.3. Reformulation de la variation du flux magnétique comme l'expression d'un écart à la moyenne de dérive

Nous présentons ici une troisième écriture de la variation du flux magnétique d'une particule équatoriale en l'absence de champ électrostatique. Cette écriture présente l'avantage d'être plus compacte que les formulations précédentes. En outre, elle permet de démontrer l'équivalence de notre démarche avec celle proposée par *Northrop* [1963].

La démarche consiste à remplacer l'opération d'intégration spatiale par un opérateur identifiable à une opération d'intégration temporelle en régime stationnaire.

Soit  $\mathbf{V}_{D,s}$  la vitesse de dérive en régime stationnaire.

Elle s'écrit

$$\mathbf{V}_{D,s}(\mathbf{r}, t) = -\frac{M}{\gamma q} \frac{\nabla B(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{e}_0}{B(\mathbf{r}, t)} = -\frac{M}{\gamma q} \frac{|\nabla B(\mathbf{r}, t)|}{B(\mathbf{r}, t)} \mathbf{b}. \quad (52)$$

L'orientation de la vitesse de dérive  $\mathbf{V}_{D,s}$  est dépendante de la charge de la particule considérée. Au contraire, l'orientation d'un élément infinitésimal du contour de dérive  $d\mathbf{l} = d\mathbf{l}\mathbf{b}$  est indépendante de la charge de la particule considérée. Ainsi, nous effectuons le changement de variable

$$d\mathbf{l} = -\frac{q}{|q|} \mathbf{V}_{D,s} d\tau. \quad (53)$$

où  $d\tau$  un pas de temps infinitésimal à l'échelle mésoscopique.

En tenant compte de l'équation (52), la variation du flux magnétique se réécrit alors sous la forme

$$\frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{r}_0, t) = \int_{\tau=0}^{\tau_D} \frac{M}{\gamma q} \left( \frac{dB}{dt}(\mathbf{r}_0, t) - \frac{dB}{dt}(\mathbf{r}(\tau), t) \right) d\tau. \quad (54)$$

Nous introduisons alors l'opérateur moyenne de dérive  $\langle \rangle$  défini par

$$\langle f \rangle(t) = \frac{1}{\tau_D} \int_0^{\tau_D} f(\mathbf{r}(\tau), t) d\tau. \quad (55)$$

Il s'agit d'un opérateur spatial linéaire. Notons en effet que l'instant  $t$  est fixé.  $\langle f \rangle$  évalue la moyenne de  $f$  sur toutes les phases du contour de dérive, pondérées par le temps de passage

en ces différentes phases en régime stationnaire ( $|d\tau| = |dl/\mathbf{V}_{D,s}|$ ).  $\langle f \rangle$  représente donc la moyenne de la quantité  $f$  prise sur une dérive en régime stationnaire.

La variation du flux magnétique se réécrit

$$\frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\tau_D}{q} \left( \frac{M}{\gamma} \frac{dB}{dt}(\mathbf{r}_0, t) - \left\langle \frac{M}{\gamma} \frac{dB}{dt} \right\rangle(t) \right). \quad (56)$$

En outre, en remarquant que l'énergie du centre-guide (**Chapitre 1**, eq. (20) et (21)) vérifie

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{M}{\gamma} \frac{dB}{dt}, \quad (57)$$

l'expression de la variation du flux devient

$$\frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\tau_D}{q} \left( \frac{d\mathcal{E}}{dt}(\mathbf{r}_0, t) - \left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle(t) \right). \quad (58)$$

### *Commentaires*

Cette forme souligne le fait que les variations du flux magnétique sont nulles en moyenne le long du contour de dérive

$$\left\langle \frac{d\Phi}{dt} \right\rangle(t) = 0. \quad (59)$$

En outre, puisque le pas de temps infinitésimal  $dt$  est beaucoup plus grand que le temps de rebond, les variations de l'énergie du centre-guide  $d\mathcal{E}/dt$  considérées sont des variations moyennées sur les phases de rebond. Nous retrouvons ainsi la formulation de *Northrop* [1963, eq. (3.80), p.64].

Enfin, même si cette réécriture présente l'avantage d'être plus compacte que les formulations intégrales, il est nécessaire de l'utiliser avec précaution. En effet, écrite sous la forme (56) ou (58), la variation du flux magnétique d'une particule équatoriale en l'absence de champ électrostatique semble présenter une dépendance en la charge des particules considérées. Il s'agirait alors d'une contradiction avec les conclusions précédentes. Pour lever cette apparente contradiction, il est important de se rappeler une propriété de l'opérateur moyenne de dérive  $\langle \rangle$ . Par définition de la moyenne de dérive  $\langle \rangle$ , le sens d'intégration est déterminé par le sens de dérive de la particule en régime stationnaire. En effet, quelque soit la charge de

la population de particules considérée, l'intégration se fait de  $\tau = 0$  à  $\tau = \tau_D$ . Or, il s'agit d'une opération d'intégration spatiale. Ainsi, pour une charge positive ou négative, l'opération d'intégration se fait respectivement dans le sens horaire ou antihoraire. La moyenne de dérive  $\langle \rangle$  est donc une opération spatiale qui dépend de la charge de la population de particules considérée. Au contraire, dans les approches précédentes, le sens d'intégration le long de  $\Gamma_{\mathbf{r}_0}$  se faisait suivant  $d\mathbf{l}$ , un vecteur infinitésimal dont l'orientation était fixée par le champ magnétique et la règle du tire-bouchon de Maxwell. Il s'agissait donc d'une opération indépendante de la charge. Ainsi, nous pouvons également choisir de fixer à nouveau le sens d'intégration suivant la règle du tire-bouchon de Maxwell. Soit  $\langle \rangle_{Max}$  cet opérateur. Il se confond avec l'opérateur moyenne de dérive  $\langle \rangle$  dans le cas d'une population de particules ayant une charge négative. La variation du flux magnétique devient alors

$$\frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\tau_D}{|q|} \left( \left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle_{Max}(t) - \frac{d\varepsilon}{dt}(\mathbf{r}_0, t) \right), \quad (60)$$

une quantité indépendante de la charge. L'apparente contradiction est ainsi levée.

De même, cette nouvelle formulation semble indiquer une dépendance explicite de la variation du flux magnétique en l'énergie des particules considérées. La dépendance en énergie est présente à la fois dans le temps de dérive  $\tau_D$  et dans l'expression de l'énergie  $\varepsilon$ . Cependant, dans le cas de particules équatoriales en l'absence de champ électrostatique, ces deux contributions s'annulent. En effet, en utilisant l'expression de la vitesse de dérive stationnaire (52), nous obtenons la relation

$$\frac{\tau_D}{|q|} = \frac{\gamma}{M} \oint_{\Gamma_{\mathbf{r}_0}} \frac{B(\mathbf{r}, t)}{|\nabla B(\mathbf{r}, t)|} dl, \quad (61)$$

et donc, en définissant  $C_0$  l'intégrale liée au contour de dérive

$$C_0 = \oint_{\Gamma_{\mathbf{r}_0}} \frac{B(\mathbf{r}, t)}{|\nabla B(\mathbf{r}, t)|} dl, \quad (62)$$

l'expression de la variation du flux devient

$$\frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{r}_0, t) = C_0 \left( \left\langle \frac{dB}{dt} \right\rangle_{Max}(t) - \frac{dB}{dt}(\mathbf{r}_0, t) \right). \quad (63)$$

Nous perdons ainsi la dépendance explicite en l'énergie des particules. Qu'en est-il dans le cas général ?

## 2.2. Expression générale de la variation du flux magnétique à l'échelle mésoscopique

Considérons une particule piégée dérivant autour de la Terre, avec un angle d'attaque quelconque, en présence ou non de champs électrostatiques.

Soient  $(q, M, K, L^*)$  les caractéristiques de cette particule.

Soit  $U$  le potentiel électrostatique dont dérivent les champs électrostatiques.

Soit  $\mathbf{r}_0$  la position moyennée sur le rebond du centre-guide de la particule reportée au niveau de l'équateur magnétique à un instant  $t$ .

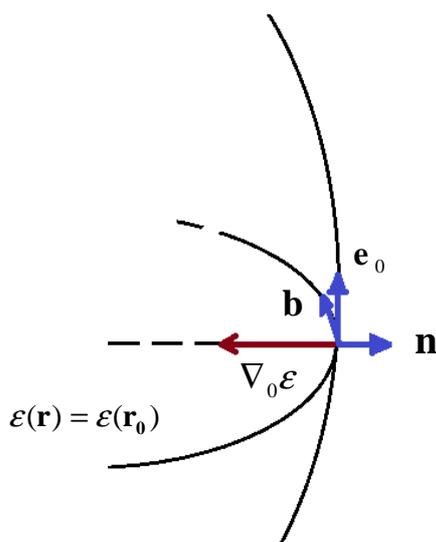
Soit  $\Gamma_{\mathbf{r}_0}$  le contour de dérive instantané associé à ce centre-guide.

$\Gamma_{\mathbf{r}_0}$  est un contour fermé. Il correspond à la trajectoire moyennée sur le rebond et rapportée au niveau de l'équateur magnétique du centre-guide en régime stationnaire. Il est tel que l'énergie totale du centre-guide est une constante :

$$\forall \mathbf{r} \in \Gamma_{\mathbf{r}_0}, \mathcal{E}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}(\mathbf{r}_0). \quad (64)$$

Nous reprenons alors le même raisonnement que celui effectué dans le cas de particules équatoriales en l'absence de champ électrostatique et nous exprimons la variation du flux magnétique lié à la particule en  $\mathbf{r}_0$  en apportant les corrections idoines.

Dans le cas général, nous redéfinissons alors le système de coordonnées naturelles de dérive  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  (Figure 2-10).



$\mathbf{e}_0 = \mathbf{B}_0 / B_0$  indique le sens du champ magnétique équatorial.

$\mathbf{b}$  est le vecteur unitaire tangent au contour de dérive dans le plan équatorial.

$\mathbf{n}$  complète le trièdre, il est contenu dans le plan équatorial, dans le sens opposé au gradient de l'énergie.

Figure 2-10 : le système de coordonnées naturelles de dérive

L'expression algébrique de la largeur du ruban  $dh_{r_0}$  (24) devient

$$\forall \mathbf{r} \in \Gamma_{r_0}, dh_{r_0}(\mathbf{r}) = \frac{dt}{|\nabla_0 \mathcal{E}(\mathbf{r}, t)|} \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) - \frac{d\mathcal{E}}{dt}(\mathbf{r}_0, t) \right), \quad (65)$$

où  $\nabla_0 \mathcal{E}$  désigne le gradient de l'énergie du centre-guide calculé au niveau de l'équateur magnétique. Ainsi, la variation du flux magnétique (25) devient

$$\frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{r}_0, t) = \oint_{\Gamma_{r_0}} \frac{B_0(\mathbf{r}, t)}{|\nabla_0 \mathcal{E}(\mathbf{r}, t)|} \left( \frac{d\mathcal{E}}{dt}(\mathbf{r}, t) - \frac{d\mathcal{E}}{dt}(\mathbf{r}_0, t) \right) dl, \quad (66)$$

où  $B_0$  est la valeur du champ magnétique au niveau du plan équatorial. En outre, l'expression géométrique de la variation du flux (50) est encore vérifiée

$$d\Phi(\mathbf{r}_0, t) = \oint_{\Gamma_{r_0}} \mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t) \cdot \left( (d\mathbf{h}_{r_0}(\mathbf{r}) - d\mathbf{h}_r(\mathbf{r})) \times d\mathbf{l} \right). \quad (67)$$

Enfin, en tenant compte de la relation entre le gradient équatorial d'énergie et la vitesse de dérive stationnaire (**Annexe B**),

$$|\nabla_0 \mathcal{E}| = |qB_0 \mathbf{V}_{D,S}|, \quad (68)$$

nous retrouvons l'expression de la variation du flux comme l'écart de la variation locale de l'énergie du centre-guide à la moyenne de dérive de la variation de l'énergie du centre-guide (58)

$$\frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\tau_D}{q} \left( \frac{d\mathcal{E}}{dt}(\mathbf{r}_0, t) - \left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle(t) \right). \quad (69)$$

Notons qu'en l'absence de potentiel électrostatique, cette expression devient

$$\frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{r}_0, t) = C_m \left( \left\langle \frac{dB_m}{dt} \right\rangle_{Max}(t) - \frac{dB_m}{dt}(\mathbf{r}_0, t) \right), \quad (70)$$

avec

$$C_m = \oint_{\Gamma_{r_0}} \frac{B_0(\mathbf{r}, t)}{|\nabla_0 B_m(\mathbf{r}, t)|} dl, \quad (71)$$

une constante topologique. Cette constante dépend uniquement du contour de dérive et de la topologie magnétique considérée. Ainsi, nous retrouvons le fait que la variation du flux magnétique ne dépend pas explicitement de l'énergie de la population de particules considérée en l'absence de potentiel électrostatique. Elle ne dépend pas non plus de la charge de la population de particules considérée.

En présence d'un potentiel électrostatique  $U$ , des électrons et des protons de caractéristiques  $M$  et  $K$  identiques passant par un même point  $\mathbf{r}_0$  au niveau de l'équateur magnétique n'ont pas la même énergie totale  $\varepsilon = \varepsilon_c + qU$ . Ils ne partagent donc pas le même contour de dérive. Cette distinction est d'autant plus marquée que les forces électrostatiques sont importantes. Dans ce cas, il est alors possible d'avoir une dépendance de la variation du flux en la charge des particules.

Dans cette section, nous avons donc décrit la variation du flux magnétique dans le cas le plus général, à l'échelle mésoscopique, sous trois formes différentes.

L'objectif est maintenant de fournir une formulation analytique générale des coefficients de diffusion radiale. Pour cela, nous mettons à profit l'analyse théorique du phénomène à l'échelle mésoscopique  $dt$  pour caractériser le phénomène à l'échelle de la résolution temporelle des modèles physiques à 3 dimensions spatiales dans l'espace des invariants, i.e. à une échelle de temps  $\Delta t$  de l'ordre du temps de dérive.

### 3. De la variation du flux magnétique à l'échelle mésoscopique à la caractérisation du coefficient de diffusion radiale

Puisque le coefficient de diffusion radiale s'écrit

$$D_{LL}(M, K, L^*) = \frac{(L^*)^4 R_e^2}{(2\pi k_0)^2} \frac{\int \phi^2 P(\phi|M, K, L^*, t) d\phi}{2\Delta t} \quad (72)$$

nous cherchons à expliciter  $\int \phi^2 P(\phi|M, K, L^*, t) d\phi$ . Cette intégrale caractérise la dispersion du flux magnétique autour de sa valeur initiale dans l'espace des invariants adiabatiques.

Soit un point  $(M, K, L^*)$  de l'espace des invariants adiabatiques.

À ce point correspond un unique contour de dérive dans l'espace réel.

Soit  $\Gamma$  ce contour.

À l'échelle mésoscopique, nous savons que la variation du flux magnétique relative à un point de l'espace des invariants adiabatiques  $(M, K, L^*)$  dépend seulement de la position  $\mathbf{r}_0$  sur le contour de dérive  $\Gamma$  à l'instant  $t_0$ . Nous avons en effet

$$\frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{r}_0, t_0) = \frac{\tau_D}{q} \left( \frac{d\varepsilon}{dt}(\mathbf{r}_0, t_0) - \left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle(t_0) \right). \quad (73)$$

où  $\mathbf{r}_0 \in \Gamma$  est une position possible d'un centre-guide de caractéristiques  $(q, M, K, L^*)$  à l'instant  $t_0$ . Par conséquent, au bout d'un temps  $\Delta t$ , nous connaissons également la variation du flux magnétique lié à ce point. Elle s'écrit

$$\phi(\mathbf{r}_0) = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{r}(t), t) dt. \quad (74)$$

avec  $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ .

Ainsi, l'ensemble des variations de flux possibles issues du point  $(M, K, L^*)$  au bout d'un temps  $\Delta t$  dans l'espace des invariants adiabatiques correspond à l'ensemble des variations issues des différents points  $\mathbf{r}$  du contour de dérive  $\Gamma$ . En outre, la probabilité d'avoir une variation du flux magnétique égale à  $\phi(\mathbf{r}_0)$  au bout d'un temps  $\Delta t$  à l'instant  $t$  correspond à la probabilité de présence en  $\mathbf{r}_0 \in \Gamma$  à l'instant  $t_0$ . Elle se confond donc avec le temps passé au voisinage de ce point par rapport au temps de dérive en régime stationnaire. En d'autres termes,

$$\int \phi^2 P(\phi | M, J, \Phi, t) d\phi = \int_{\mathbf{r}(\tau) \in \Gamma_{t_0}} \phi^2(\mathbf{r}(\tau)) \frac{d\tau}{\tau_D} = \langle \phi^2 \rangle \quad (75)$$

La dispersion du flux magnétique dans l'espace des invariants adiabatiques  $(M, K, L^*)$  correspond à la moyenne de dérive du carré des variations évaluée sur le contour de dérive  $\Gamma$ , correspondant à la projection de  $(M, K, L^*)$  dans l'espace réel.

Or, formellement, le carré de la variation de flux magnétique (74) prise en un point  $\mathbf{r}(\tau) \in \Gamma$  à l'échelle de la résolution temporelle  $\Delta t$  s'écrit

$$\phi^2(\mathbf{r}(\tau)) = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{r}(\tau + u), u) \frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{r}(\tau + t), t) du dt. \quad (76)$$

En outre, nous supposons que la moyenne de dérive  $\langle \rangle$  ne dépend pas au premier ordre des déformations du contour d'intégration  $\Gamma_{\mathbf{r}_0}$  entre  $t_0$  et  $t_0 + \Delta t$ . Nous obtenons ainsi

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{\tau_D^2}{q^2} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left( \left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt}(\mathbf{r}(u), u) \frac{d\mathcal{E}}{dt}(\mathbf{r}(t), t) \right\rangle - \left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle(u) \left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle(t) \right) dudt. \quad (77)$$

Nous définissons alors l'autocovariance spatiale d'une fonction  $f$  le long de  $\Gamma$  entre les temps  $t$  et  $u$  par

$$Cov_{\Gamma}(f(u); f(t)) = \langle f(u)f(t) \rangle - \langle f(u) \rangle \langle f(t) \rangle \quad (78)$$

Ainsi, la moyenne de dérive du carré des variations de flux magnétique se réécrit sous la forme

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{\tau_D^2}{q^2} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} Cov_{\Gamma} \left( \frac{d\mathcal{E}}{dt}(u); \frac{d\mathcal{E}}{dt}(t) \right) dudt. \quad (79)$$

En l'absence de champ électrostatique, elle devient

$$\langle \phi^2 \rangle = C_m^2 \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} Cov_{\Gamma} \left( \frac{dB_m}{dt}(u); \frac{dB_m}{dt}(t) \right) dudt. \quad (80)$$

L'expression générale du coefficient de diffusion lié au point  $(M, K, L^*)$  de l'espace des invariants adiabatiques est donc donnée par

$$D_{LL}(M, K, L^*) = \frac{(L^*)^4 R_e^2}{8(q\pi k_0)^2 \Delta t} \tau_D^2 \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} Cov_{\Gamma_{\mathbf{r}_0}} \left( \frac{d\mathcal{E}}{dt}(u); \frac{d\mathcal{E}}{dt}(t) \right) dudt \quad (81)$$

En supposant les potentiels électrostatiques négligeables, cette expression devient

$$D_{LL}(M, K, L^*) = \frac{(L^*)^4 R_e^2}{8(\pi k_0)^2 \Delta t} C_m^2 \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} Cov_{\Gamma} \left( \frac{dB_m}{dt}(u); \frac{dB_m}{dt}(t) \right) dudt \quad (82)$$

avec

$$C_m = \oint_{\Gamma} \frac{B_0(\mathbf{r}, t)}{|\nabla_0 B_m(\mathbf{r}, t)|} dl. \quad (83)$$

## *Conclusions*

Dans ce second chapitre, nous avons explicité une formulation générale de la variation instantanée du troisième invariant adiabatique à l'échelle mésoscopique sous trois formes équivalentes ((66), (67) et (69)). Cette formulation présente l'avantage de fournir une expression de la variation du flux sans passer par le calcul d'un flux initial et d'un flux final. En outre, nous avons montré le rôle moteur des champs électriques induits dans le pilotage de la dynamique des particules des ceintures de radiation. Nous avons également dégagé le rôle de l'asymétrie des variations du champ électromagnétique. C'est le fait que le champ électromagnétique ne varie pas avec la même intensité le long du contour de dérive d'un centre-guide qui est à l'origine de la variation de son flux magnétique. Lorsque les champs électrostatiques sont négligeables, nous avons montré l'indépendance du phénomène en la charge des particules considérées. Dans ce cas en effet, le principal pilote est le champ électrique induit par les variations du champ magnétique. Le champ électrique induit engendre alors un terme de vitesse des champs croisés (39) indépendant de la charge et de l'énergie des particules auxquelles il s'applique.

Nous avons ensuite déduit de cette étude à l'échelle mésoscopique une expression analytique générale d'un coefficient de diffusion radiale lié à un point  $(M, K, L^*)$  de l'espace des invariants adiabatiques (81).

Notons enfin que les formulations de ce chapitre s'inscrivent dans le cadre de l'approximation du centre-guide. Elles s'appliquent lorsqu'il est possible de supposer les deux premiers invariants adiabatiques conservés et les contours de dérive instantanés (64) fermés.

Dans la suite de nos travaux de recherche, l'objectif a été d'évaluer les coefficients de diffusion radiale dans le cas des ceintures de radiation terrestres à partir des formulations établies dans ce second chapitre. Pour cela, dans un premier temps, nous avons abordé le problème d'un point de vue analytique en utilisant un modèle de champ électromagnétique variable en fonction de l'activité solaire. Nous avons opté pour le modèle de champ électromagnétique dynamique le plus simple possible. Nous avons ensuite utilisé des modèles de champs électromagnétiques numériques afin d'aborder le problème de manière plus réaliste tout en gardant le contrôle de la dynamique du milieu. Nous exposons notre démarche

### **Chapitre 3.**

# Chapitre 3 :

## Évaluations analytiques et numériques des coefficients de diffusion radiale des ceintures de radiation terrestres

Nous avons établi au **Chapitre 2** une expression analytique générale des coefficients de diffusion radiale. L'objectif de ce chapitre est de présenter les outils développés pour l'évaluation analytique et numérique des coefficients de diffusion radiale des ceintures de radiation terrestres à partir des formulations établies dans le **Chapitre 2** et de discuter les premiers ordres de grandeur établis.

La structure du chapitre est la suivante : tout d'abord, nous rappelons brièvement pourquoi il est nécessaire d'introduire un modèle d'environnement électromagnétique pour l'évaluation des coefficients de diffusion radiale. Ensuite, nous effectuons une première analyse dans le cas d'un modèle d'environnement électromagnétique analytique simple afin de dégager les principales caractéristiques du processus de diffusion radiale. Enfin, nous étudions l'influence des modèles d'environnement électromagnétique choisis dans l'évaluation des coefficients de diffusion radiale. Pour cela, nous présentons la méthode numérique développée pour l'évaluation des coefficients de diffusion radiale. Cette méthode prend appui sur des modèles numériques d'environnement électromagnétique plus réalistes que le premier modèle analytique choisi. Nous discutons enfin les ordres de grandeur des coefficients de diffusion radiale obtenus dans le cas équatorial.

### 1. Rappels sur la modélisation de l'environnement électromagnétique des ceintures de radiation terrestres

La dynamique des particules chargées est pilotée par les champs électromagnétiques locaux. Réciproquement, la dynamique de ces particules peut générer des variations de l'environnement électromagnétique qui la pilote. Néanmoins, au niveau des ceintures de radiation, le champ magnétique local est vu comme la somme de contributions de systèmes de courants qui sont principalement d'origine externe [*Stern, 1994*]. Ces contributions sont donc indépendantes de la dynamique du plasma des ceintures. Ainsi, l'effet rétroactif de la dynamique des ceintures sur le champ magnétique local est négligeable et les modèles de champ magnétique au niveau des ceintures sont indépendants des populations qu'ils contiennent.

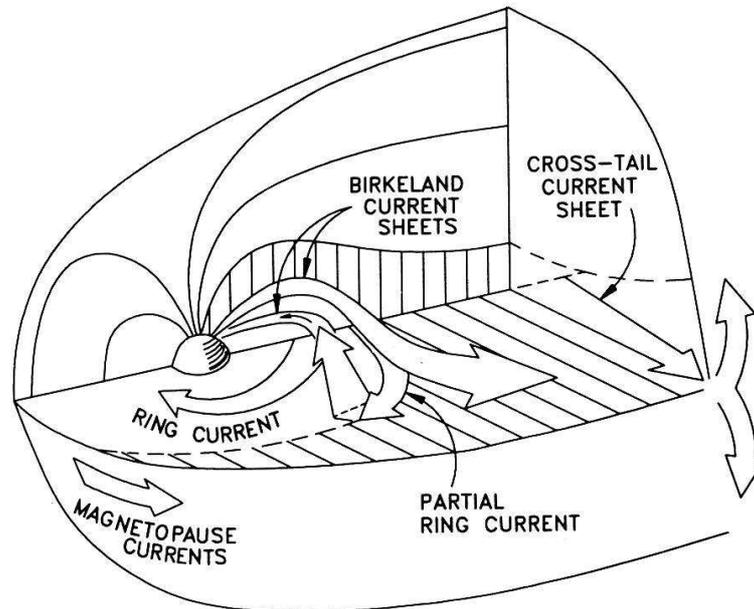
En revanche, en ce qui concerne les champs électriques, nous ne pouvons pas négliger l'effet de la dynamique d'une population chargée sur l'environnement local. En effet, puisque les particules chargées se déplacent facilement le long des lignes de champ magnétique, toute différence de potentiel entre deux points d'une même ligne de champ est facilement court-

circuitée [e.g., *Kivelson et Russel*, 1995]. Classiquement, nous supposons donc que les champs électrique et magnétique sont orthogonaux en tout point des ceintures de radiation du fait de la présence du plasma

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1)$$

Pour établir un modèle physique des ceintures de radiation, il faut donc avant tout disposer d'un modèle de champ magnétique, c'est-à-dire d'une cartographie de champ. C'est grâce à cette cartographie que nous effectuons le lien entre la dynamique des particules dans l'espace des invariants adiabatiques et l'espace réel, en repérant les contours de dérive ou les points miroirs par exemple. Pour développer une telle cartographie, l'une des principales difficultés réside dans le fait que le champ magnétique varie en fonction de l'activité solaire. Or, un modèle ne peut correspondre qu'à la représentation d'un état moyen de l'environnement électromagnétique. Ainsi, pour développer un modèle de champ variable en fonction de l'activité solaire, il est avant tout nécessaire de classifier cette dépendance, de la paramétrer. Les modèles de champ magnétique visant à restituer une dynamique en fonction de l'activité solaire dépendent donc de paramètres d'entrée. Ce sont des paramètres du vent solaire ou des indices d'activité géomagnétique par exemple. Un indice d'activité géomagnétique est un paramètre élaboré à partir de mesures au sol du champ magnétique afin de rendre compte de sa dynamique. Plus les modèles cherchent à simuler de manière réaliste la dynamique de l'environnement électromagnétique en fonction de l'activité solaire, plus ils se complexifient. Le nombre de paramètres dont ils dépendent augmente alors en conséquence. Cependant, la complexification des modèles passe également par une compréhension plus fine des mécanismes d'interactions entre la dynamique du champ de la magnétosphère, les conditions d'environnement interplanétaire et les perturbations au niveau du sol. Ces mécanismes sont aujourd'hui encore mal connus. Notons toutefois que le processus de modélisation est facilité lorsque le champ magnétique est décrit comme la somme de contributions de divers systèmes de courants. En effet, parmi les systèmes de courants se trouve le système de courant interne à la planète. Ce courant est à l'origine d'un champ magnétique assez stable. En première approximation, ce champ est celui d'un dipôle magnétique dont l'axe de rotation se différencie légèrement de l'axe de rotation terrestre. L'axe géomagnétique est incliné de 11 degrés par rapport à l'axe de rotation terrestre. Il est également décalé d'environ 500 km vers le Pacifique Ouest. Son moment  $k_0$  est de l'ordre de  $3.11 \times 10^{-5} \text{T.R}_e^3$ . Le modèle IGRF (« International Geomagnetic Field Reference ») propose une description plus précise du champ magnétique interne. Cependant, au delà de 2.5 rayons terrestres, l'approximation dipolaire suffit [e.g., *Roederer*, 1970]. Quant aux principaux systèmes de courants externes, *Stern* [1994] en identifie quatre. Ils sont représentés **Figure 3-1**. Ce sont le système de courants de la magnétopause (« magnetopause currents »), le courant annulaire (« ring current »), le courant de queue (« cross-tail current sheet ») et les courants de Birkeland (« Birkeland current sheets »). À la différence du système de courant interne, les contributions des systèmes de courants externes sont variables en fonction de l'activité solaire. Ainsi, les modèles de champ magnétique s'attachent généralement à décrire la contribution de chacune

des sources externes jugées primordiales avant d'en faire la somme pour formuler un modèle analytique d'ensemble du champ magnétique terrestre. Ce modèle restitue différentes cartographies moyennes du champ magnétique en fonction de paramètres jugés représentatifs d'une dynamique.



**Figure 3-1 : Principales sources de champ magnétique externe, d'après Stern [1994]**

Le modèle de *Tsyganenko* [1989] (T89) est un exemple de modèle de champ magnétique externe variable en fonction de l'activité solaire. Il présente l'avantage de ne dépendre que d'un seul paramètre, l'indice d'activité géomagnétique  $K_p$ . L'indice  $K_p$  est un indice établi à partir de mesures au sol du champ géomagnétique. Ces mesures sont réalisées par une dizaine de stations réparties entre  $48^\circ$  et  $63^\circ$  de latitude géomagnétique et sélectionnées afin de restituer une bonne couverture longitudinale. L'indice  $K_p$  est la moyenne planétaire des différents indices  $K$  établis au niveau de chaque station. Il restitue une information moyenne relative à un intervalle de temps de 3 heures. Cette information est classée sur une échelle logarithmique de 0 à 9, allant du plus calme au plus perturbé. L'indice  $K_p$  présente l'avantage de fournir une information simple sur l'activité géomagnétique. En contrepartie, cette information peut parfois s'avérer trop simpliste pour les besoins du modèle. Par exemple, l'indice  $K_p$  ne fournit pas d'informations sur l'évolution des conditions d'environnement électromagnétique sur des échelles de temps inférieure à trois heures. Le modèle T89 fournit six états moyens de la magnétosphère. Ils correspondent à 6 intervalles en  $K_p$ .

De leur côté, les modèles relatifs aux champs électriques de corotation et de convection sont des modèles stationnaires à l'échelle du temps de dérive. Leur effet sur la dynamique des particules piégées porte donc uniquement sur la caractérisation des contours de dérive. En présence de potentiel électrique, les contours sont définis par une énergie  $\mathcal{E}$  constante et non

par un module du champ magnétique  $B_m$  constant (**Chapitre 1**, eq. (22) et (23)). Cependant, la différence entre ces deux contours est d'autant plus négligeable que l'énergie des particules considérées est élevée. En outre, les cartographies de champs électrostatiques sont encore aujourd'hui mal connues [e.g., *Woelfflé*, 2010]. Dans IRBEM par exemple (« International Radiation Belt Environment Modeling Library »), ils sont paramétrés de 8 manières différentes. L'une des difficultés majeures dans la mise en place de ces cartographies réside dans le fait que les champs électrostatiques ne sont pas directement accessibles par la mesure. En effet, les mesures de champ électrique sont toujours la somme de deux contributions confondues : l'une d'origine électrostatique, l'autre induite par les variations du champ magnétique. Nous ne disposons pas de méthodes pour séparer ces deux termes.

Par conséquent, nous choisissons de négliger l'effet des champs électriques de corotation et de convection sur la dynamique des particules des ceintures de radiation et de ne pas les intégrer aux modèles d'environnement électromagnétique.

En revanche, la modélisation théorique du phénomène de diffusion radiale a mis en lumière le rôle moteur des champs électriques induits dans la dynamique des particules (**Chapitre 2**). La modélisation des champs électriques induits par la variation du champ magnétique est donc une étape indispensable pour le calcul de coefficients de diffusion radiale. Or, tout comme les champs électrostatiques, les champs électriques induits ne sont pas mesurables. Nous avons donc développé deux méthodes pour pallier cette difficulté. La première méthode choisie passe par la modélisation de l'environnement électromagnétique par le biais d'un potentiel vecteur magnétique (Section 2). La seconde méthode passe par une cartographie numérique de l'espace réel en termes de potentiels d'Euler [*Stern*, 1970] (Section 3).

## **2. Analyse de la dynamique de dérive de particules équatoriales dans un modèle de champ électromagnétique de type Mead**

Dans un premier temps, nous choisissons de dégager les principales caractéristiques du processus de diffusion radiale en nous limitant à sa plus simple description. Pour cela, nous choisissons de travailler avec l'exemple d'une population de particules équatoriales dérivant dans un modèle de champ électromagnétique de *Mead* [1964]. En effet, ce modèle d'environnement électromagnétique présente l'avantage d'être à la fois simple tout en restituant les paramètres clés liés à la diffusion radiale. Il est dynamique, il est asymétrique et il dérive d'un potentiel vecteur. Ainsi, grâce au potentiel vecteur, nous disposons à la fois de l'expression du champ magnétique et des champs électriques induits par ses variations. Nous choisissons également de limiter l'étude au cas de particules équatoriales afin de limiter le nombre de paramètres à traiter. En outre, c'est dans le cas équatorial que le phénomène de diffusion radiale est maximum. Ce sont en effet les particules équatoriales qui ont les coquilles de dérive les plus déformées par l'asymétrie du champ électromagnétique. Ce sont donc ces coquilles qui sont le plus facilement modifiées par des variations asymétriques du champ [*Schulz*, 1972].

## 2.1. Rappels sur la modélisation électromagnétique de type Mead

La modélisation de *Mead* [1964] consiste à superposer deux perturbations variables dans le temps à un champ magnétique dipolaire, supposé constant et dominant. Dans un repère sphérique, le potentiel vecteur dont dérive le champ magnétique s'écrit [Fälthammar, 1965]

$$\mathbf{A}_{\text{pot}}(r, \theta, \varphi, t) = \begin{pmatrix} -\frac{A(t)}{7} r^2 \sin \theta \sin \varphi \\ \frac{2A(t)}{7} r^2 \cos \theta \sin \varphi \\ -\frac{k_0}{r^2} \sin \theta - \frac{S(t)}{2} r \sin \theta + \frac{2A(t)}{21} r^2 (3 - 7 \sin^2 \theta) \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (2)$$

où  $r$  est la distance radiale,  $\theta$  la colatitude magnétique et  $\varphi$  la longitude magnétique. ( $\varphi = 0$ ) correspond à minuit heure locale magnétique.

Le terme  $S(t)$  pilote les variations symétriques du champ. Il s'applique avec la même intensité quelque soit la position longitudinale  $\varphi$ . Au contraire, le terme  $A(t)$  est le coefficient asymétrique. Il quantifie la dépendance du champ magnétique en la position longitudinale. C'est lui qui se charge de restituer une dynamique variable de compression et d'étirement des lignes de champ respectivement côté jour et côté nuit de la magnétosphère. Dans cette modélisation, les termes symétrique et asymétrique sont de petites perturbations. En d'autres termes

$$\frac{S(t)r^3}{k_0} \ll 1 \quad (3)$$

et

$$\frac{A(t)r^4}{k_0} \ll 1. \quad (4)$$

Les quantités calculées seront donc issues de développements limités à l'ordre 1. En utilisant la relation  $\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A})$ , le champ magnétique s'écrit

$$\mathbf{B}(r, \theta, \varphi, t) = \begin{pmatrix} -\frac{2k_0}{r^3} \cos \theta - S(t) \cos \theta - A(t)r \sin 2\theta \cos \varphi \\ -\frac{k_0}{r^3} \sin \theta + S(t) \sin \theta - A(t)r \cos 2\theta \cos \varphi \\ A(t)r \cos \theta \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Sa norme s'écrit

$$B(r, \theta, \varphi, t) = k_0 r^{-3} F(\theta) + S(t)G(\theta) + A(t)H(\theta)r \cos \varphi, \quad (6)$$

avec

$$\begin{aligned} F(\theta) &= (3 \cos^2 \theta + 1)^{1/2} \\ G(\theta) &= (3 \cos^2 \theta - 1)(3 \cos^2 \theta + 1)^{-1/2} \\ H(\theta) &= \sin \theta (6 \cos^2 \theta - 1)(3 \cos^2 \theta + 1)^{-1/2} \end{aligned} \quad (7)$$

Dans ce modèle, l'équateur magnétique est donc le plan d'équation  $\theta = \pi/2$ .

En utilisant la relation  $\mathbf{E}_{\text{ind}} = -\partial \mathbf{A} / \partial t$ , les champs électriques induits s'écrivent

$$\mathbf{E}_{\text{ind}}(r, \theta, \varphi, t) = \begin{pmatrix} \frac{\dot{A}(t)}{7} r^2 \sin \theta \sin \varphi \\ -\frac{2\dot{A}(t)}{7} r^2 \cos \theta \sin \varphi \\ \frac{\dot{S}(t)}{2} r \sin \theta - \frac{2\dot{A}(t)}{21} r^2 (3 - 7 \sin^2 \theta) \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Avec (5) et (8), nous vérifions ainsi que les champs électriques induits et le champ magnétique sont orthogonaux au premier ordre en tout point de l'espace (hypothèse (1)).

Notre objectif est de quantifier le phénomène de diffusion radiale dans cet environnement électromagnétique. Pour cela, nous nous attachons dans un premier temps à caractériser le mouvement de dérive stationnaire de particules équatoriales dans ce milieu.

## 2.2. Rappels sur la dérive stationnaire de particules équatoriales dans un modèle électromagnétique de type Mead

Afin d'évaluer les informations relatives au troisième invariant adiabatique des particules équatoriales, nous négligeons les variations temporelles des termes symétrique  $S$  et asymétrique  $A$  à l'échelle du temps de dérive. Au niveau de l'équateur magnétique, le module du champ magnétique s'écrit

$$B(r, \theta = \pi/2, \varphi) = \frac{k_0}{r^3} - S - Ar \cos \varphi. \quad (9)$$

Puisque les trajectoires de particules équatoriales sont telles que le module du champ magnétique est constant, nous déduisons l'équation de ces trajectoires de la formulation du module du champ magnétique équatorial.

Soit  $(r_0, \varphi_0)$  la position d'un centre-guide équatorial. Alors, en tout point  $(r, \varphi)$  de sa trajectoire de dérive, nous avons la relation

$$\frac{k_0}{r^3} - S - Ar \cos \varphi = \frac{k_0}{r_0^3} - S - Ar_0 \cos \varphi_0. \quad (10)$$

La trajectoire de dérive est donc un contour fermé  $\Gamma_{r_0}$ . Elle vérifie l'équation

$$r(\varphi) = r_0 - \frac{Ar_0^5}{3k_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0). \quad (11)$$

De manière équivalente au premier ordre, cette trajectoire se met aussi sous la forme

$$r(\varphi) = \frac{r_0}{1 + \frac{Ar_0^4}{3k_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)}. \quad (12)$$

Nous reconnaissons l'équation d'une ellipse, de paramètre  $r_0$  et d'excentricité  $Ar_0^4/3k_0 \ll 1$ . Les trajectoires de dérive sont donc quasi-circulaires. Ce sont exactement des cercles dans le cas d'un champ symétrique ( $A = 0$ ).

Le troisième invariant adiabatique relatif au centre-guide situé en  $(r_0, \varphi_0)$  d'une particule équatoriale en l'absence de potentiel électrostatique ne dépend pas des caractéristiques  $(q, M, K = 0)$  de la particule (**Chapitre 2**). Il correspond au flux traversant la surface  $\Sigma_{r_0}$  encerclant  $\Gamma_{r_0}$ . De manière générale, il s'écrit

$$\Phi(r_0, \varphi_0) = \iint_{\Sigma_{r_0}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (13)$$

ou de manière équivalente,

$$\Phi(r_0, \varphi_0) = \oint_{\Gamma_{r_0}} \mathbf{A}_{\text{pot}} \cdot d\mathbf{l}. \quad (14)$$

En utilisant l'expression du potentiel vecteur et la formulation du contour de dérive  $\Gamma_{r_0}$ , nous obtenons ainsi

$$\Phi(r_0, \varphi_0) = -2\pi \frac{k_0}{r_0} - \pi S r_0^2 + \frac{2\pi}{3} \frac{A r_0^3}{k_0} \cos \varphi_0. \quad (15)$$

En outre, la vitesse de dérive d'une particule de moment magnétique  $M$  et de charge  $q$  située en  $(r, \varphi)$  s'écrit

$$\mathbf{V}_{D,s} = \frac{-M}{\gamma B^2} \nabla B \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{-MAr^3 \sin \varphi}{\gamma k_0} \\ 0 \\ \frac{-3M}{\gamma r} - \frac{3MSr^2}{\gamma k_0} - \frac{4MAr^3 \cos \varphi}{\gamma k_0} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Pour déduire le temps de dérive à partir de cette expression, nous projetons le long de la composante longitudinale et nous séparons les variables. En tenant compte de l'équation du contour de dérive  $\Gamma_{r_0}$ , nous obtenons

$$\tau_D(r_0, \varphi_0) = \frac{2\pi\gamma r_0^2}{3M} \left( 1 - \frac{S r_0^3}{k_0} + \frac{2A r_0^4}{3k_0} \cos \varphi_0 \right). \quad (17)$$

avec  $2\pi\gamma r_0^2/(3M)$  le temps de dérive d'une particule  $(q, M, J = 0)$  située en  $r_0$  en champ dipolaire.

### 2.3. Étude analytique de la diffusion radiale de particules équatoriales dans le cas du modèle électromagnétique de Mead

Supposons maintenant une variation temporelle des termes symétrique et asymétrique du modèle de champ magnétique. Alors, un champ électrique induit apparaît et la vitesse des champs croisés s'écrit

$$\frac{\mathbf{E}_{\text{ind}} \times \mathbf{B}}{B^2}(r, \theta = \pi/2, \varphi, t) = \begin{pmatrix} \frac{r^4}{k_0} \left( \frac{\dot{S}(t)}{2} + \frac{8\dot{A}(t)}{21} r \cos \varphi \right) \\ 0 \\ -\frac{r^5}{k_0} \frac{\dot{A}(t)}{7} \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Nous disposons alors de deux outils pour évaluer la variation du flux magnétique.

D'une part, nous pouvons dériver l'expression du flux magnétique établie en régime stationnaire.

$$\dot{\Phi} = 2\pi \frac{k_0}{r^2} \dot{r} - \pi \dot{S} r^2 - 2\pi S r \dot{r} + \frac{2\pi}{3} \frac{\dot{A}(t) r^3}{k_0} \cos \varphi + 2\pi \frac{\dot{A}(t) r^2 \dot{r}}{k_0} \cos \varphi - \frac{2\pi}{3} \frac{A(t) r^3 \dot{\varphi}}{k_0} \sin \varphi. \quad (19)$$

En remplaçant  $\dot{r}$  et  $r\dot{\varphi}$  par les composantes radiale et longitudinale de la vitesse de dérive  $\mathbf{V}_D = \mathbf{V}_{D,s} + \mathbf{E}_{\text{ind}} \times \mathbf{B} / B^2$ , nous avons vérifié que les termes liés à l'énergie de la particule ( $\mathbf{V}_{D,s}$ ) s'annulent. En outre, nous écrivons l'expression de la dérivée du flux magnétique

$$\dot{\Phi}(r, \varphi, t) = \frac{10}{7} \pi \dot{A}(t) r \cos \varphi(t). \quad (20)$$

D'autre part, nous pouvons également exprimer la dérivée du flux magnétique sans passer par l'expression du flux magnétique. Pour cela, nous utilisons l'expression de la dérivée du flux magnétique dans le cas de particules équatoriales en l'absence de champ électrostatique du **Chapitre 2**, eq. (63).

$$\dot{\Phi}(\mathbf{r}_0, t) = C_0 \left( \left\langle \frac{dB}{dt} \right\rangle_{\text{Max}}(t) - \frac{dB}{dt}(\mathbf{r}_0, t) \right), \quad (21)$$

où l'opérateur  $\langle \rangle_{\text{Max}}$  se confond avec la moyenne longitudinale,

$$C_0 = \oint_{r_0} \frac{B(\mathbf{r}, t)}{|\nabla B(\mathbf{r}, t)|} dl \quad (22)$$

et

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\mathbf{E}_{\text{ind}} \times \mathbf{B}}{B^2} \cdot \nabla B. \quad (23)$$

Dans le cas du modèle de Mead,

$$\frac{dB}{dt} = -\frac{5}{2}\dot{S} - \frac{15}{7}\dot{A}r \cos \varphi. \quad (24)$$

Nous obtenons ainsi

$$\left\langle \frac{dB}{dt} \right\rangle_{Max}(t) - \frac{dB}{dt}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{15}{7}\dot{A}r \cos \varphi. \quad (25)$$

Avec

$$C_0(\mathbf{r} \in \Gamma) = \frac{2\pi r^2}{3}, \quad (26)$$

la dérivée du flux magnétique s'écrit donc

$$\dot{\Phi}(r, \varphi, t) = \frac{10}{7}\pi\dot{A}(t)r \cos \varphi. \quad (27)$$

Par conséquent, nous vérifions l'équivalence des deux démarches. Nous validons ainsi analytiquement l'approche théorique présentée **Chapitre 2** dans le cas particulier de l'environnement électromagnétique de Mead.

En outre, nous vérifions qu'en moyenne le long du contour de dérive, la variation du flux magnétique est nulle

$$\left\langle \dot{\Phi} \right\rangle_{Max}(t) = 0. \quad (28)$$

Enfin, la formulation du coefficient de diffusion radiale dans le cas de particules équatoriales en l'absence de potentiel électrostatique est (**Chapitre 2**, eq. (82))

$$D_{LL}(L^*) = \frac{(L^*)^4 R_e^2}{8(\pi k_0)^2 \Delta t} C_0^2 \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} Cov_{\Gamma} \left( \frac{dB_0}{dt}(u); \frac{dB_0}{dt}(t) \right) dudt \quad (29)$$

Or, pour notre modèle d'environnement électromagnétique, la covariance spatiale de la dérivée du champ magnétique (24) s'écrit

$$Cov_{\Gamma}\left(\frac{dB_0}{dt}(u); \frac{dB_0}{dt}(t)\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{15}{7} r\right)^2 \dot{A}(u) \dot{A}(t) \cos(\Omega(u-t)) \quad (30)$$

où  $\Omega = \dot{\phi} = 2\pi/\tau_D$  est la vitesse de dérive angulaire.

Ainsi, avec  $r = L^* R_e$ , l'expression du coefficient de diffusion devient

$$D_{LL}(L^*) = \frac{(L^*)^{10} R_e^8}{(2k_0)^2} \left(\frac{5}{7}\right)^2 \frac{Z(\Omega, \Delta t)}{\Delta t} \quad (31)$$

où la fonction  $Z$  est égale à

$$Z(\Omega, \Delta t) = \int_{t=t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{u=t_0}^{t_0+\Delta t} \dot{A}(u) \dot{A}(t) \cos(\Omega(u-t)) du dt . \quad (32)$$

Nous soulignons ici le rôle de la compétition entre le temps caractéristique de variation de l'asymétrie et le temps de dérive de la particule dans l'intensité du processus de diffusion radiale. Supposons par exemple que le temps de variation de  $A$  soit très court devant la période de dérive, avec un signal de la forme

$$\dot{A}(t) = \begin{cases} 0; t < t_0 \\ dA/\tau_c; t \in [t_0, t_0 + \tau_c] \\ 0; t > t_0 + \tau_c \end{cases} \quad (33)$$

où  $\tau_c$  est le temps caractéristique de variation de  $A$ .  $\tau_c \ll 2\pi/\Omega$ . Alors

$$Z(\Omega, \Delta t) = (dA)^2 \quad (34)$$

et

$$D_{LL}(L^*) = \frac{(L^*)^{10} R_e^8}{(2k_0)^2} \left(\frac{5}{7}\right)^2 \frac{(dA)^2}{\Delta t} \quad (35)$$

En effet, entre  $t_0$  et  $t_0 + \tau_c$ , l'asymétrie varie et nous avons une diffusion radiale de la population. Ainsi, à l'instant  $t_0 + \tau_c$ , le coefficient de diffusion est égal à

$$D_{LL}(L^*, \tau_c) = \frac{(L^*)^{10} R_e^8}{(2k_0)^2} \left(\frac{5}{7}\right)^2 \frac{(dA)^2}{\tau_c} \quad (36)$$

Entre  $t_0 + \tau_c$  et  $t_0 + \Delta t$ , les flux magnétiques sont conservés et le coefficient de diffusion radial est nul.

$$D_{LL}(L^*, \Delta t - \tau_c) = 0 \quad (37)$$

À  $t_0 + \Delta t$ , nous définissons le coefficient de diffusion total. Il est représentatif de la diffusion sur l'intervalle de temps  $[t_0; t_0 + \Delta t]$ . Il correspond donc à la moyenne pondérée des coefficients relatifs à chaque sous-intervalle

$$D_{LL}(L^*, \Delta t) = \frac{\tau_c D_{LL}(L^*, \tau_c) + (\Delta t - \tau_c) D_{LL}(L^*, \Delta t - \tau_c)}{\Delta t} \quad (38)$$

$$D_{LL}(L^*) = \frac{(L^*)^{10} R_e^8}{(2k_0)^2} \left(\frac{5}{7}\right)^2 \frac{(dA)^2}{\Delta t} \quad (39)$$

Au contraire, supposons maintenant que le temps de variation de  $A$  soit très grand devant la période de dérive  $\tau_c \gg 2\pi/\Omega$ , avec un signal de la forme

$$\dot{A}(t) = dA/\tau_c ; t \in [t_0, t_0 + \Delta t]. \quad (40)$$

Alors nous obtenons la majoration

$$Z(\Delta t) \leq \frac{2}{\Omega^2} \left(\frac{dA}{\tau_c}\right)^2 \ll (dA)^2. \quad (41)$$

Le coefficient de diffusion obtenu est alors négligeable par rapport au premier cas (34).

**Chapitre 1**, nous avons présenté le flux magnétique comme un invariant adiabatique, c'est-à-dire une grandeur conservée tant que le temps caractéristique de variation de l'environnement magnétique est grand devant la période associée, ici, le temps de dérive. Nous précisons maintenant cette notion en nous aidant de l'étude analytique du cas particulier de Mead. De manière générale, le flux magnétique associé à un centre-guide piégé n'est pas une constante

du mouvement dans un environnement électromagnétique dynamique. L'amplitude des variations du flux magnétique est proportionnelle à l'amplitude de l'asymétrie dans les variations de l'environnement électromagnétique. Elle dépend également du rapport entre le temps caractéristique de variation du champ électromagnétique et le temps de dérive du centre-guide considéré. Lorsque le temps caractéristique de variation du champ est très long devant le temps de dérive d'un centre-guide, alors le centre-guide a le temps de parcourir l'ensemble de la coquille de dérive avant de ressentir une modification significative des conditions de l'environnement magnétique. Ainsi, au cours d'une dérive, la variation totale du flux magnétique  $\phi$  se confond avec la moyenne spatiale de dérive de la variation instantanée du flux (55). En d'autres termes

$$\phi = \oint_{\Gamma} \frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{r}(t), t) dt \approx \int_0^{\tau_D} \frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{r}(\tau), t) d\tau = \tau_D \left\langle \frac{d\Phi}{dt} \right\rangle(t). \quad (42)$$

Par conséquent, dans ce cas, la variation totale du flux magnétique  $\phi$  tend à s'annuler

$$\phi \approx \tau_D \left\langle \frac{d\Phi}{dt} \right\rangle(t) = 0. \quad (43)$$

Lorsque le temps caractéristique de variation du champ est très long devant le temps de dérive d'un centre-guide, les variations du flux magnétique associé se compensent lors de la dérive. À chaque instant, la variation du flux est exactement égale à 0 dans le cas limite d'un temps caractéristique de variation du champ infiniment grand, autrement dit, dans le cas d'un champ stationnaire. Au contraire, lorsque le temps caractéristique de variation du champ est très court devant le temps de dérive d'un centre-guide, ce phénomène de compensation par mouvement de dérive n'est pas possible. La variation du flux est irréversible. L'intensité du processus de diffusion radiale est maximale.

Notre objectif est maintenant de quantifier les coefficients de diffusion radiale relatifs au modèle d'environnement électromagnétique de Mead (eq. (31), (32)). Pour cela, nous cherchons donc à quantifier les paramètres de Mead, et en particulier la fonction  $A(t)$ . Notre première idée consiste à mettre à profit un modèle numérique de champ magnétique externe variable en fonction de l'activité géomagnétique, le modèle T89. En effet, notre objectif est de déterminer des coefficients de diffusion radiale prêts à être intégrés dans un code de simulation à 3 dimensions dans l'espace des invariants adiabatiques tel que le code Salammbô. Il s'agit donc de calculer des coefficients de diffusion représentatifs d'une dynamique en fonction de paramètres de l'activité solaire. Or, pour Salammbô, la dynamique en fonction de l'activité solaire est pilotée par l'indice d'activité géomagnétique  $K_p$ . C'est pourquoi nous avons opté pour le modèle T89, un modèle de champ externe piloté par l'indice  $K_p$ .

## 2.4. Méthode de modélisation locale de Mead appliquée au modèle de champ numérique Tsyganenko 89

Pour quantifier  $A(t)$  numériquement, l'idée consiste à appliquer le modèle analytique de champ magnétique de Mead sur les cartographies numériques issues de la superposition du modèle IGRF avec le modèle T89 au niveau de l'équateur magnétique. Néanmoins, puisque la diffusion radiale est un phénomène local en  $L^* \approx r$ , nous choisissons de ne pas chercher un jeu de paramètres  $(A, S)$  global, représentatif de l'allure du champ magnétique sur l'ensemble des ceintures de radiation. Nous cherchons au contraire le jeu de paramètres  $(A, S)$  le plus adapté pour une distance radiale  $r$  donnée. En outre, dans les modèles T89, la dynamique du champ magnétique est restituée par le biais de l'indice d'activité géomagnétique  $Kp$ . Ainsi, la dépendance temporelle des paramètres  $(A, S)$  du modèle de Mead est limitée à une dépendance en  $Kp$ . La résolution temporelle pour la description des fonctions  $A$  et  $S$  est donc la résolution temporelle de l'indice  $Kp$ , c'est-à-dire 3 heures.

$$(A(t), S(t)) \approx r \mapsto (A(r, Kp), S(r, Kp)). \quad (44)$$

Soit  $B : (r, \varphi, Kp) \mapsto B(r, \varphi, Kp)$  la norme du champ magnétique numérique au niveau de l'équateur magnétique. Nous définissons la moyenne circulaire locale  $\bar{B}$  par l'équation

$$\bar{B}(r, Kp) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B(r, \varphi, Kp) d\varphi. \quad (45)$$

et l'écart à la moyenne circulaire locale  $\tilde{B}$  par l'équation

$$\tilde{B}(r, \varphi, Kp) = B(r, \varphi, Kp) - \bar{B}(r, Kp). \quad (46)$$

Nous avons ainsi une décomposition du champ de la forme

$$B(r, \varphi, Kp) = \bar{B}(r, Kp) + \tilde{B}(r, \varphi, Kp). \quad (47)$$

avec

$$\int_0^{2\pi} \tilde{B}(r, \varphi, Kp) d\varphi = 0. \quad (48)$$

Cette démarche est analogue à la décomposition de Reynolds en mécanique des fluides.

Par identification de ces quantités avec le modèle analytique de Mead pour une distance radiale  $r$  fixée, nous obtenons les relations

$$S(r, Kp) = \frac{k_0}{r^3} - \bar{B}(r, Kp). \quad (49)$$

et

$$A(r, Kp) = \frac{-\tilde{B}(r, \varphi, Kp)}{r \cos \varphi}. \quad (50)$$

Or, l'asymétrie du modèle T89 n'est pas nécessairement représentée par le biais d'une fonction cosinus. Ainsi, numériquement, le coefficient asymétrique peut présenter une dépendance non négligeable en longitude.

$$\frac{-\tilde{B}(r, \varphi, Kp)}{r \cos \varphi} = A(r, \varphi, Kp). \quad (51)$$

Nous choisissons alors d'attribuer au coefficient asymétrique sa valeur moyenne circulaire locale

$$A(r, Kp) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(r, \varphi, Kp) d\varphi. \quad (52)$$

Les coefficients  $(A, S)$  sont représentés **Figures 3-2** et **3-3**.

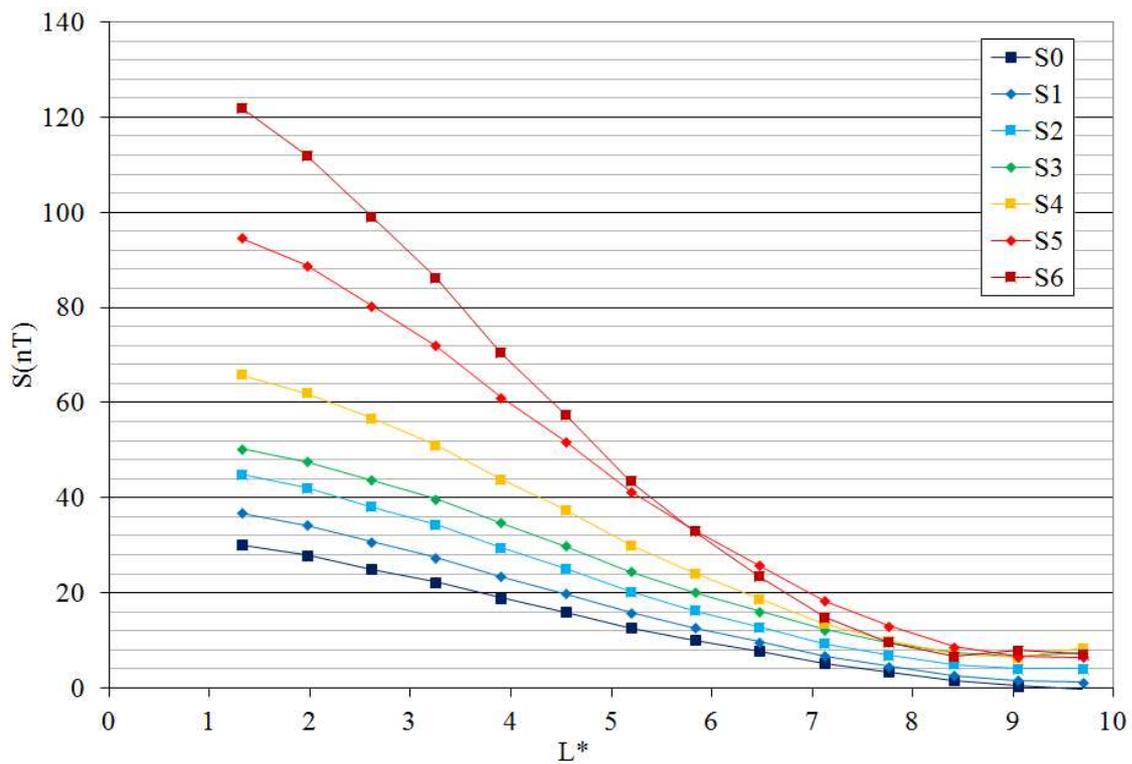


Figure 3-2 : Évaluation numérique de la fluctuation symétrique en fonction de la distance radiale pour différents indices Kp (en légende : SKp)

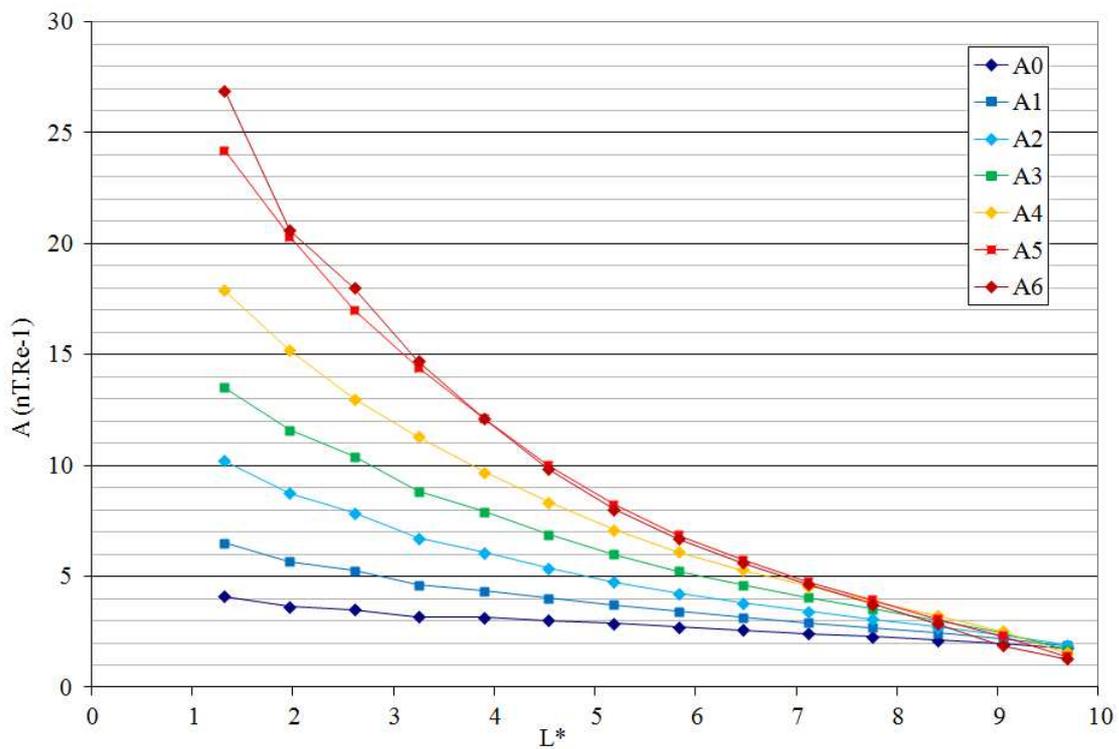
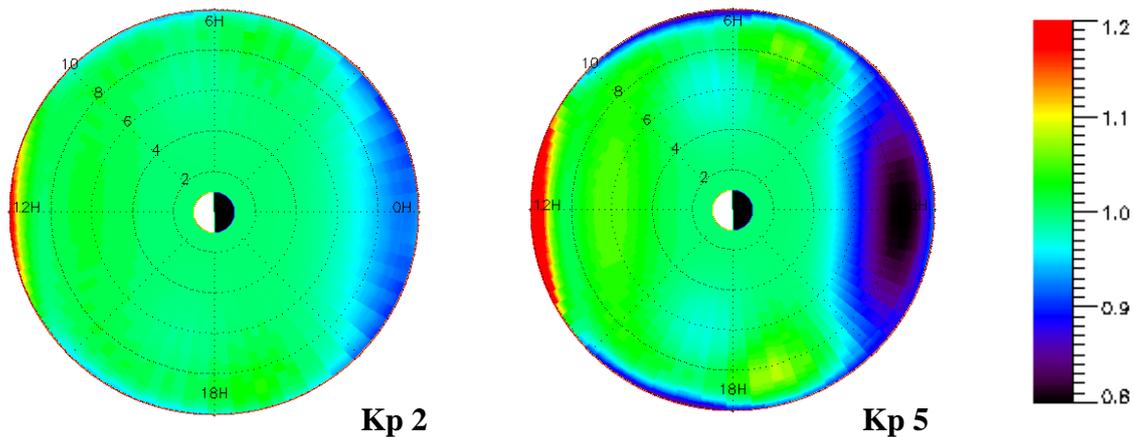


Figure 3-3 : Évaluation numérique du coefficient asymétrique en fonction de la distance radiale pour différents indices Kp (en légende : AKp)

Nous vérifions que ces termes constituent bien de petites perturbations par rapport au signal dipolaire (avec  $k_0 = 31100nT.R_e^3$ ). Néanmoins, le rapport des perturbations sur le terme dipolaire augmente à mesure que la distance augmente et/ou que l'activité magnétique augmente. En outre, ils présentent une dépendance de plus en plus marquée en  $r$  à mesure que l'activité magnétique augmente. Cela confirme a posteriori le choix d'une modélisation locale de type Mead afin d'améliorer la précision avec laquelle nous évaluons les coefficients de diffusion radiale. Afin d'estimer l'erreur commise, nous comparons le module du champ T89 au module reconstruit à partir des coefficients estimés

$$e : (r, \varphi, Kp) \mapsto \frac{k_0/r^3 - S(r, Kp) - A(r, Kp)r \cos \varphi}{B(r, \varphi, Kp)}. \quad (53)$$

La **Figure 3-4** représente l'erreur  $e$  pour une activité magnétique modérée ( $Kp=2$ ) et pour une activité magnétique forte ( $Kp=5$ ).



**Figure 3-4 : Erreur  $e$  représentant le rapport du module du champ magnétique reconstruit sur le module du champ numérique pour une activité magnétique modérée (à gauche) et une activité magnétique forte (à droite)**

L'application de la méthode de modélisation locale de Mead aux cartographies fournies par T89 au niveau de l'équateur magnétique engendre donc une erreur. Elle est généralement inférieure à 20%. Elle est due à la modélisation de la dépendance longitudinale du champ magnétique équatorial par une fonction cosinus forcée. Cette modélisation est de moins en moins adaptée à mesure que la distance radiale ou l'activité magnétique augmente.

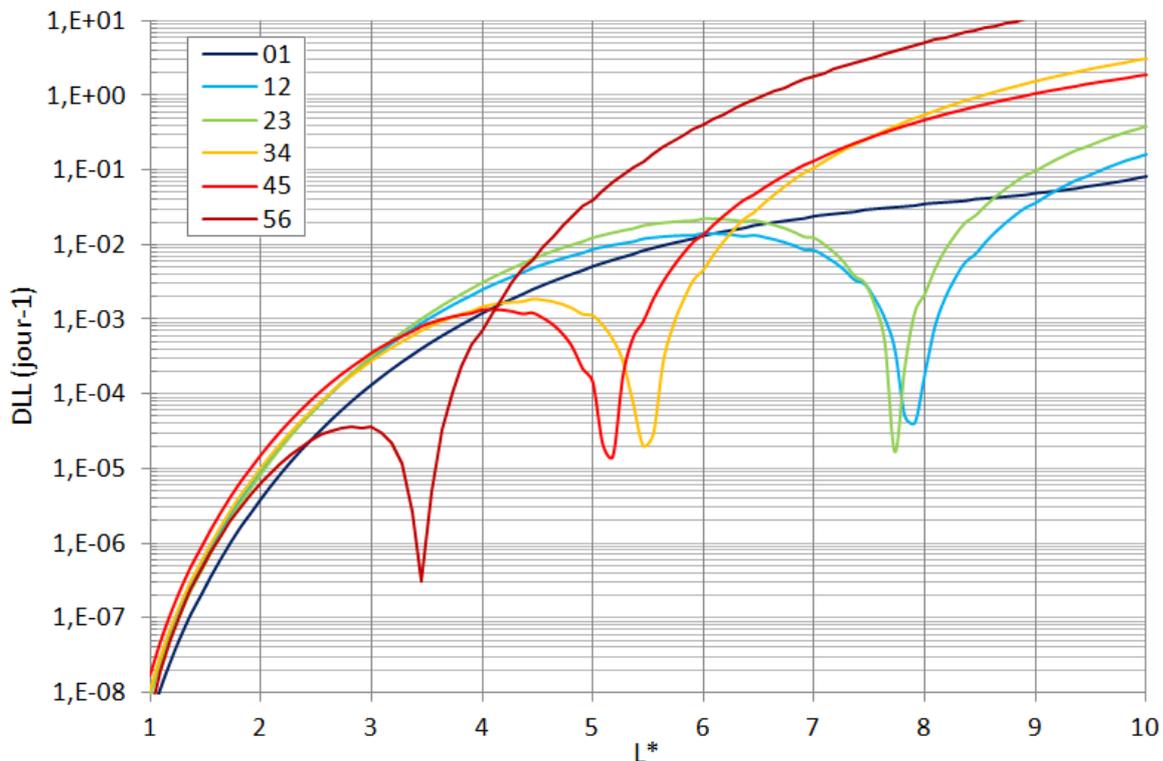
Pour évaluer les coefficients de diffusion, nous supposons que le signal  $A$  varie d'une valeur à un état de  $Kp$  à une valeur sur un état de  $Kp$  voisin en un temps caractéristique très rapide par rapport au temps de dérive. Nous estimons alors le coefficient de diffusion relatif à cette

transition d'un état de  $K_p$  à un état voisin avec une résolution temporelle égale à la résolution de l'indice géomagnétique, i.e. 3 heures, avec l'équation (35)

$$D_{LL}(L^*, K_p K_{p+}) = \frac{(L^*)^{10} R_e^8 \left(\frac{5}{7}\right)^2}{(2k_0)^2} \frac{(dA(r, K_p))^2}{\Delta t} \quad (54)$$

où  $\Delta t = 3h$  et  $dA(r) = A(r, K_p + 1) - A(r, K_p)$ .

Les coefficients dépendent uniquement de la distance entre les valeurs du coefficient d'asymétrie à chaque  $K_p$ . Ils ne dépendent pas donc pas du sens de la transition (montée en  $K_p$  ou descente en  $K_p$ ). Ils sont présentés **Figure 3-5**.



**Figure 3-5 : Coefficients de diffusion radiale lors du passage d'un état  $K_p$  à un état  $K_p$  voisin, estimés avec la méthode de modélisation locale de Mead**

Nous nous attendons à ce que le phénomène de diffusion radiale s'intensifie à mesure que l'activité magnétique ou la distance radiale augmente.

Pour la transition entre  $K_p$  0 et 1, le coefficient de diffusion radiale augmente à mesure que le paramètre de coquille  $L^*$  augmente. L'allure de la courbe est donc conforme à l'intuition.

Pour les autres transitions, nous observons une croissance, puis un chute soudaine du coefficient de diffusion, puis une nouvelle croissance à mesure que le paramètre de coquille

$L^*$  augmente. Cette chute est due à la chute de la différence entre les paramètres d'asymétrie évalués à un même  $L^*$  pour deux états  $K_p$  voisins.

Nous interprétons donc ces irrégularités comme des erreurs dues à la baisse de la pertinence de la modélisation de l'asymétrie par la méthode locale de Mead à mesure que le paramètre  $K_p$  ou  $L^*$  augmente. Pour nous affranchir de cette limitation, nous établissons une modélisation numérique plus sophistiquée du phénomène de diffusion radiale.

### **3. Modélisation numérique de la dynamique de dérive des particules et estimation des coefficients de diffusion radiale**

#### **3.1. Description de la méthode d'évaluation numérique des coefficients de diffusion radiale**

Nous avons développé un code permettant d'évaluer les coefficients de diffusion radiale relatifs aux transitions entre les différents états moyens d'un même modèle de champ magnétique numérique variable en fonction de l'activité solaire. Ce code est composé de quatre étapes.

##### **3.1.1. Initialisation**

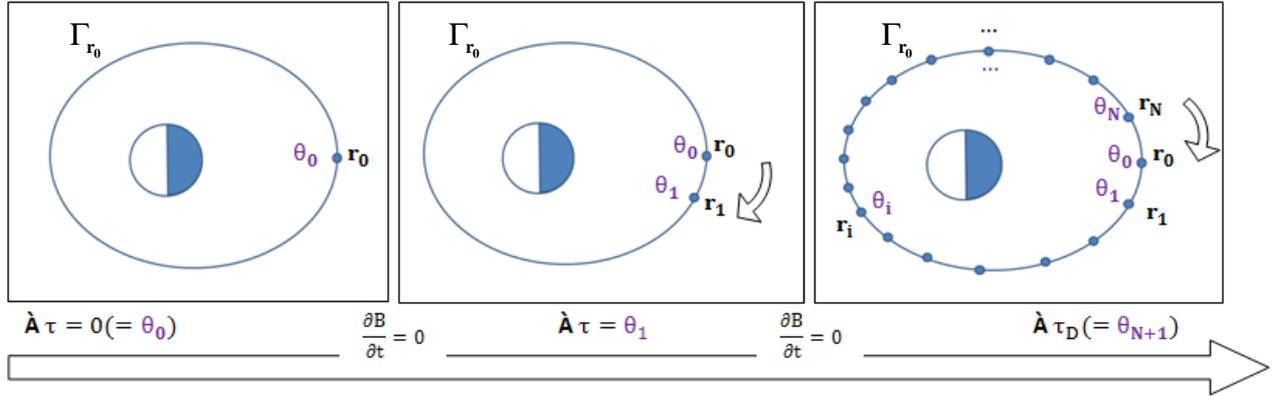
Tout d'abord, nous choisissons un type de particules, typiquement des électrons ou des protons. Nous définissons ensuite les caractéristiques initiales : l'énergie cinétique, l'angle d'attaque équatorial et la position au niveau de l'équateur magnétique  $(m_0, q, Ec, \alpha_0, \mathbf{r}_0)$ . Nous déduisons de ces informations les deux premiers invariants adiabatiques associés à une particule initiale.

##### **3.1.2. Tracé du contour de dérive et définition d'une famille associée**

À partir de ces informations, nous faisons dériver une particule dans un modèle numérique de champ stationnaire. Pour cela, nous implémentons la vitesse de dérive moyennée sur le rebond donnée par *Roederer* [1970].

En suivant la trajectoire de la particule pas à pas au niveau de l'équateur magnétique, nous créons une famille de points relatives à un même contour de dérive  $\Gamma_{\mathbf{r}_0}$ . Cette famille de points  $(\mathbf{r}_i \in \Gamma_{\mathbf{r}_0})$  correspond à une famille de particules aux caractéristiques adiabatiques identiques  $(q, M, J, \Phi)$ . En outre, nous stockons les temps de passage en ces différents points

$\mathbf{r}_i : (\theta_i \in [0; \tau_D])$ . Ils serviront de pondération pour le calcul de la moyenne de dérive  $\langle \cdot \rangle$  (Chapitre 2, eq. (55)). **Figure 3-6**, nous proposons un schéma de principe de cette étape.



**Figure 3-6 : Tracé d'une coquille de dérive  $\Gamma_{r_0}$  en champ stationnaire, schéma de principe dans le cas d'un proton**

### 3.1.3. Transport de la famille de points du contour

Ensuite, pendant un intervalle de temps de taille  $\Delta t$  choisie, nous supposons que le champ magnétique varie d'une cartographie initiale  $\mathbf{B}_i(\mathbf{r})$  vers une cartographie finale  $\mathbf{B}_f(\mathbf{r})$ .

À chaque instant entre  $t_0$  et  $t_0 + \Delta t$ , le champ magnétique est une interpolation entre ces deux états

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_i(\mathbf{r}) + F(t)(\mathbf{B}_f(\mathbf{r}) - \mathbf{B}_i(\mathbf{r})) \quad (55)$$

avec  $F$  une fonction d'interpolation temporelle telle que  $F(t_0) = 0$  et  $F(t_0 + \Delta t) = 1$ .

La variation du champ magnétique entraîne l'apparition de champs électriques induits. Les particules sont alors transportées par la somme de la dérive magnétique et de la dérive des champs croisés.

#### *Modélisation des champs électriques induits*

Pour modéliser les champs électriques induits, nous choisissons de reformuler les cartographies numériques initiales et finales en termes de potentiels d'Euler [Stern, 1967a, 1967b]. En effet, les potentiels d'Euler  $(\alpha, \beta)$  sont des grandeurs définies telles que, en tout point, le champ magnétique vérifie la relation

$$\mathbf{B} = \nabla \alpha \times \nabla \beta \quad (56)$$

Ainsi, par définition, les potentiels d'Euler  $(\alpha, \beta)$  sont des grandeurs constantes le long d'une ligne de champ. En outre, en supposant que les pieds des lignes de champ sont ancrés à la surface de la Terre, la dynamique des potentiels d'Euler est liée aux champs électriques induits par la relation

$$\mathbf{E}_{\text{ind}} = -\frac{\partial \alpha}{\partial t} \nabla \beta + \frac{\partial \beta}{\partial t} \nabla \alpha \quad (57)$$

L'idée de la démarche est donc de déterminer les cartographies de couples de potentiels d'Euler associés aux états initiaux et finaux du champ magnétique, respectivement  $(\alpha_i, \beta_i)$  et  $(\alpha_f, \beta_f)$ , afin d'en déduire une dynamique et donc évaluer les champs électriques induits par interpolation temporelle. Avec

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{r}, t) &= \alpha_i(\mathbf{r}) + F(t)(\alpha_f(\mathbf{r}) - \alpha_i(\mathbf{r})) \\ \beta(\mathbf{r}, t) &= \beta_i(\mathbf{r}) + F(t)(\beta_f(\mathbf{r}) - \beta_i(\mathbf{r})) \end{aligned} \quad (58)$$

le champ électrique induit s'écrit

$$\mathbf{E}_{\text{ind}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{dF}{dt}(t)(\alpha_f(\mathbf{r}) - \alpha_i(\mathbf{r}))\nabla \beta(\mathbf{r}, t) + \frac{dF}{dt}(t)(\beta_f(\mathbf{r}) - \beta_i(\mathbf{r}))\nabla \alpha(\mathbf{r}, t) \quad (59)$$

Cependant, il n'existe pas de formulation analytique simple des potentiels d'Euler pour un modèle de champ magnétique numérique quelconque [Peymirat et Fontaine, 1999]. Pour dépasser cette difficulté, nous choisissons donc de mettre à profit le fait que les potentiels d'Euler sont constants le long des lignes de champ. En effet, lorsque nous suivons une ligne de champ magnétique jusqu'à son pied à la surface de la Terre, nous nous déplaçons vers un environnement magnétique qui devient majoritairement dipolaire. Or, dans le cas particulier d'un champ magnétique dipolaire, des formulations analytiques des potentiels d'Euler sont bien connues. Une formulation possible est par exemple donnée par [e.g., Stern, 1994]

$$\begin{aligned} \alpha(r, \theta, \varphi) &= -\frac{k_0 R_e^3 \sin^2 \theta}{r} \\ \beta(r, \theta, \varphi) &= \varphi \end{aligned} \quad (60)$$

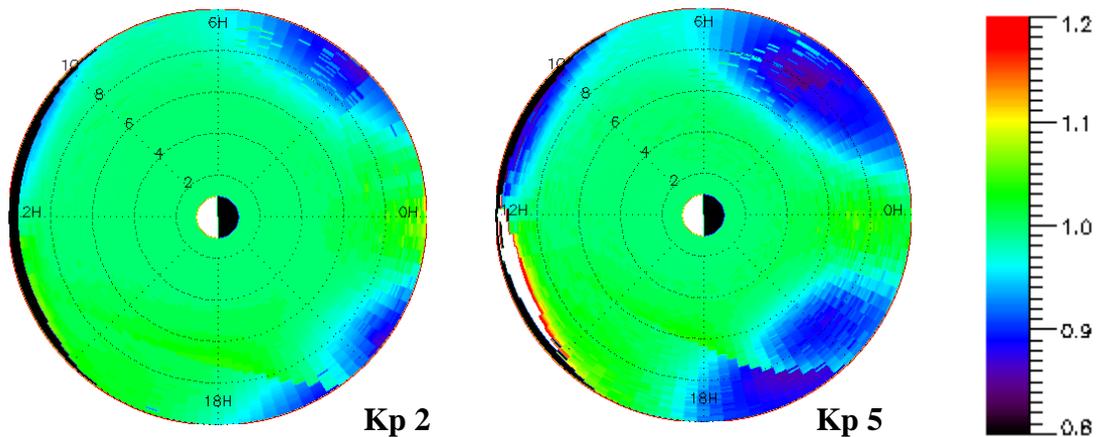
Par conséquent, avec  $(r, \theta, \varphi)$  un point d'une ligne de champ et  $(1, \theta_e, \varphi_e)$  le point d'intersection de cette ligne de champ avec la surface terrestre, les potentiels d'Euler associés s'écrivent

$$\begin{aligned}\alpha(r, \theta, \varphi) &= \alpha(1, \theta_e, \varphi_e) = -k_0 R_e^3 \sin^2 \theta_e \\ \beta(r, \theta, \varphi) &= \beta(1, \theta_e, \varphi_e) = \varphi_e\end{aligned}\quad (61)$$

Pour vérifier la précision de cette cartographie, nous comparons le module du champ magnétique numérique au module reconstruit à partir des potentiels d'Euler au niveau de l'équateur magnétique

$$e : (r, \varphi, Kp) \mapsto \frac{|\nabla \alpha(r, \varphi, Kp) \times \nabla \beta(r, \varphi, Kp)|}{B(r, \varphi, Kp)}.\quad (62)$$

Dans le cas d'un modèle de champ magnétique externe de type T89 superposé à un dipôle, l'erreur  $e$  est généralement inférieure à 10% (**Figure 3-7**).

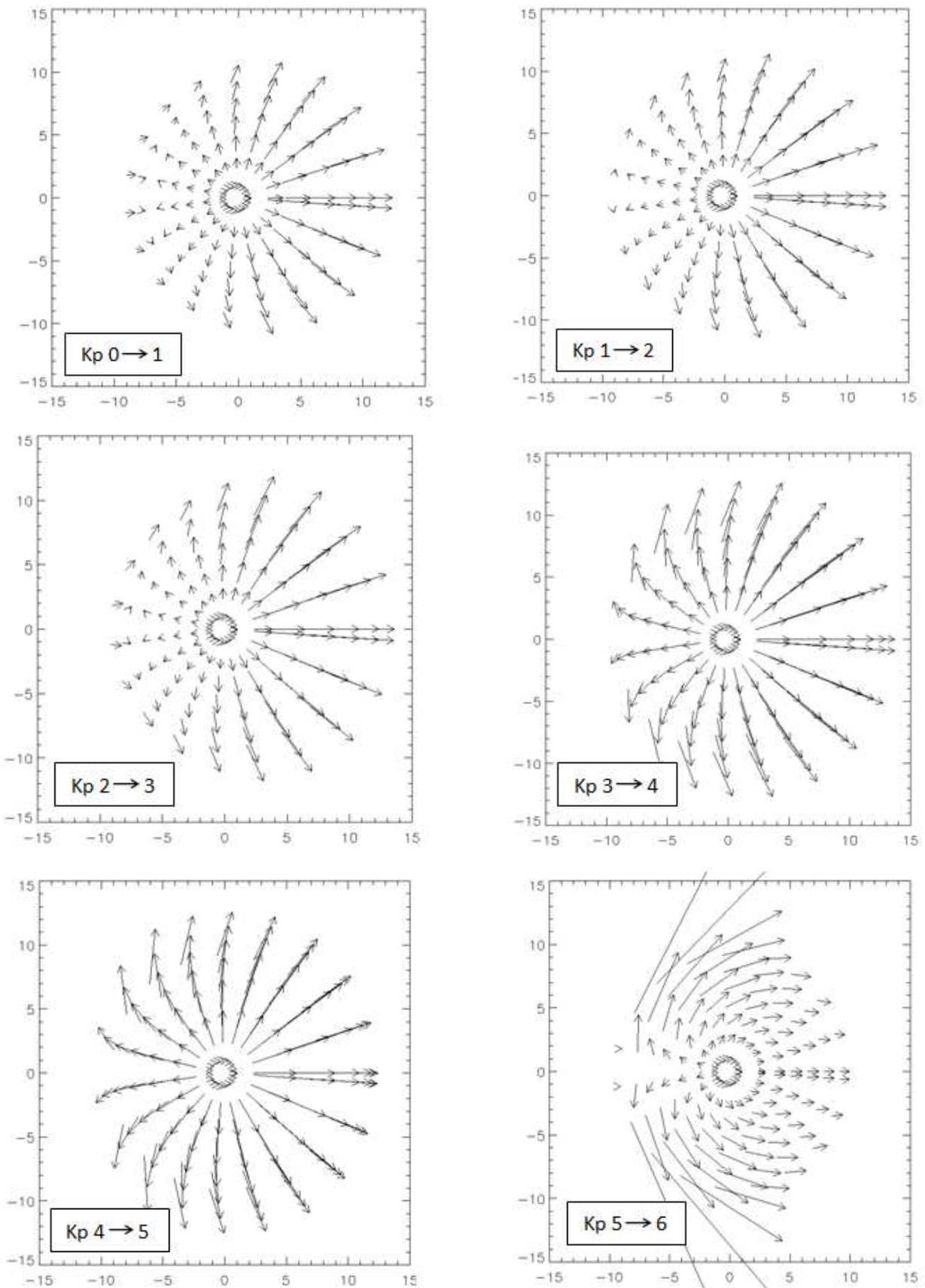


**Figure 3-7 : Erreur  $e$  représentant le rapport du module du champ magnétique reconstruit sur le module du champ numérique pour une activité magnétique modérée (à gauche) et une activité magnétique forte (à droite)**

Nous interprétons la perte de précision de la méthode des potentiels d'Euler à mesure que nous nous éloignons de la Terre comme un manque de précision au niveau du suivi des lignes de champ magnétique et au niveau de la reconnexion entre le champ interne et le champ externe. Cependant, cette méthode reste à la fois plus générale et plus précise que la méthode de modélisation locale de Mead (**Figure 3-4**).

C'est pourquoi nous avons choisi d'évaluer les champs électriques induits par la méthode des potentiels d'Euler. À partir de ces champs électriques induits, nous déterminons alors

numériquement la vitesse de dérive des champs croisés. En outre, si nous supposons que les pieds de ligne de champ sont fixés au niveau de la Terre, la vitesse des champs croisés correspond à la vitesse de déplacement d'une ligne de champ [*Stern*, 1994]. La direction de cette vitesse est représentée **Figure 3-8** dans le cas d'un modèle T89 par passage d'un état moyen d'indice Kp à l'état moyen d'indice Kp supérieur. La dynamique de cet exemple correspond à une dynamique d'étirement des lignes de champ côté nuit et à une légère compression des lignes de champ côté jour. C'est ce que nous observons graphiquement.



**Figure 3-8 : Direction de la vitesse des champs croisés  $E_{ind} \times B / B^2$  au niveau de l'équateur magnétique lors du passage d'un état moyen d'indice Kp à l'état moyen d'indice Kp+1 établie par interpolation linéaire des potentiels d'Euler**

### Calcul des nouvelles positions

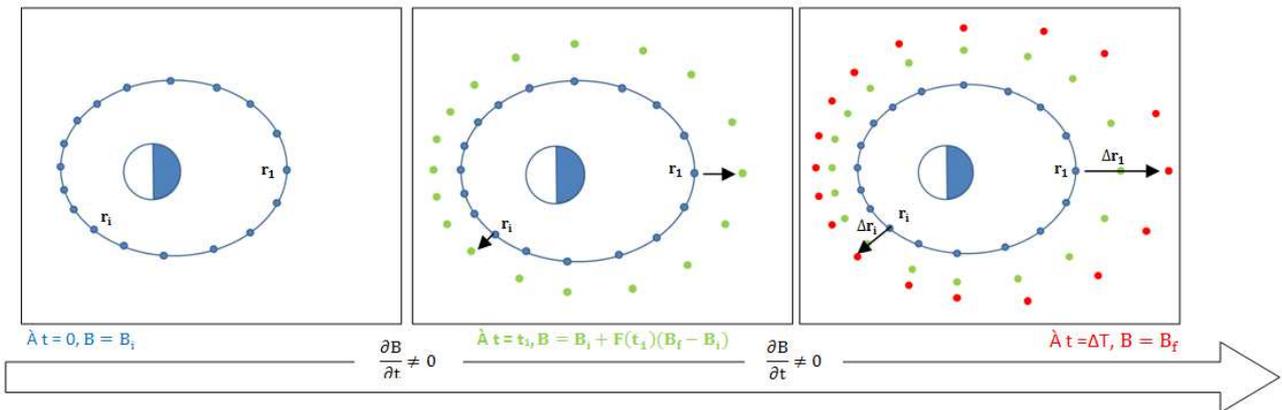
À chaque instant entre  $t_0$  et  $t_0 + \Delta t$ , la position d'un centre-guide  $\mathbf{r}$  suit l'équation

$$\mathbf{r} + d\mathbf{r} = \mathbf{r} + \left( \mathbf{V}_{D,s}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{E}_{\text{ind}}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{B^2(\mathbf{r}, t)} \right) dt, \quad (63)$$

où  $\mathbf{V}_{D,s}(\mathbf{r}, t)$  est l'interpolation temporelle des vitesses de dérive stationnaire magnétique à l'état initial  $\mathbf{V}_{D,i}(\mathbf{r}, t)$  et l'état final  $\mathbf{V}_{D,f}(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{V}_{D,s}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}_{D,i}(\mathbf{r}) + F(t)(\mathbf{V}_{D,f}(\mathbf{r}) - \mathbf{V}_{D,i}(\mathbf{r})). \quad (64)$$

Nous transportons ainsi les particules de  $t_0$  à  $t_0 + \Delta t$  (**Figure 3-9**).



**Figure 3-9 : Transport des centres-guide dans un champ électromagnétique variable**

La position d'un centre-guide situé en  $\mathbf{r}_i$  à l'instant  $t_0$  est notée  $\mathbf{r}_i + \Delta\mathbf{r}_i$  à l'instant  $t_0 + \Delta t$ .

#### 3.1.4. Calcul des coefficients de diffusion radiale

Passé l'intervalle de temps  $\Delta t$ , nous calculons les variations de flux magnétique relatives à chaque centre-guide de la famille ( $\mathbf{r}_i \in \Gamma_{r_0}$ ) et nous évaluons le coefficient de diffusion radiale associé.

Pour un centre-guide  $\mathbf{r}_i$  de trajectoire  $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ , la variation du flux entre  $t_0$  et  $t_0 + \Delta t$  s'écrit

$$\phi(\mathbf{r}_i) = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{r}(t), t) dt, \quad (65)$$

et la variation instantanée du flux magnétique relatif à  $(\mathbf{r}(t), t)$  s'écrit de manière équivalente à l'équation (69) du **Chapitre 2**

$$\frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{r}(t), t) = \frac{1}{q} \oint_{[0; \tau_D]} \left( \frac{d\mathcal{E}}{dt}(\mathbf{r}(t), t) - \frac{d\mathcal{E}}{dt}(\mathbf{r}(\tau), t) \right) d\tau. \quad (66)$$

Nous supposons que la déformation du contour de dérive entre  $t_0$  et  $t_0 + \Delta t$  est négligeable au premier ordre dans l'évaluation de la variation du flux. Alors, nous échangeons les deux opérations d'intégration temporelle (65) et spatiale (66). L'expression de la variation du flux magnétique devient

$$\phi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{q} \oint_{[0; \tau_D]} \left( (\mathcal{E}(\mathbf{r}_i + \Delta\mathbf{r}_i, t_0 + \Delta t) - \mathcal{E}(\mathbf{r}_i, t_0)) - (\mathcal{E}(\mathbf{r}(\tau) + \Delta\mathbf{r}(\tau), t_0 + \Delta t) - \mathcal{E}(\mathbf{r}(\tau), t_0)) \right) d\tau. \quad (67)$$

Or, par définition, quels que soient les points  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{r}(\tau)$  du contour de dérive initial

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_i, t_0) = \mathcal{E}(\mathbf{r}(\tau), t_0), \quad (68)$$

donc

$$\phi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{q} \oint_{[0; \tau_D]} (\mathcal{E}(\mathbf{r}_i + \Delta\mathbf{r}_i, t_0 + \Delta t) - \mathcal{E}(\mathbf{r}(\tau) + \Delta\mathbf{r}(\tau), t_0 + \Delta t)) d\tau. \quad (69)$$

Numériquement, pour un nombre fini  $N$  de points du contour de dérive initial, cette équation devient

$$\phi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{q} \sum_{n=1}^N (\mathcal{E}(\mathbf{r}_i + \Delta\mathbf{r}_i, t_0 + \Delta t) - \mathcal{E}(\mathbf{r}_n + \Delta\mathbf{r}_n, t_0 + \Delta t)) (\theta_{n+1} - \theta_n) \quad (70)$$

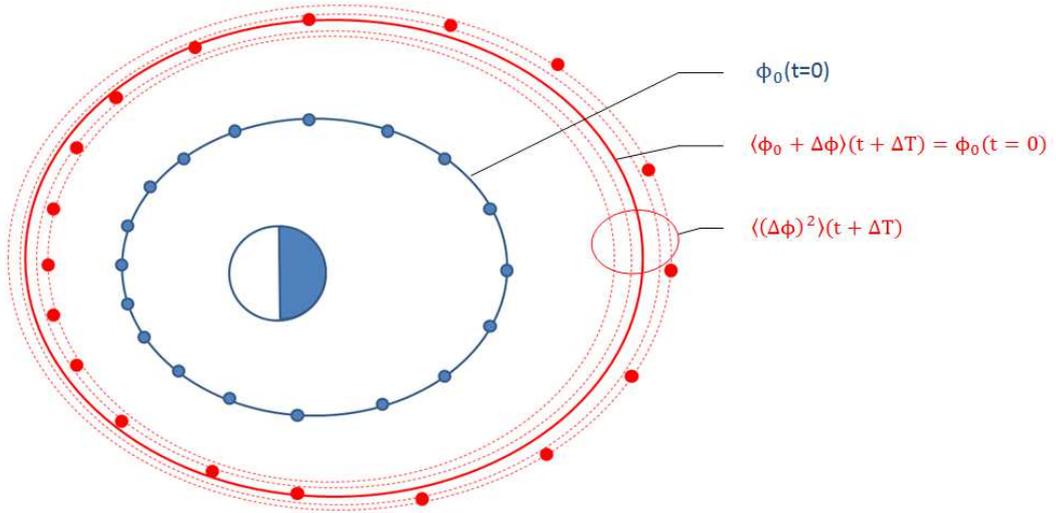
où  $\theta_n$  correspond au temps de passage de  $\mathbf{r}_0$  en  $\mathbf{r}_n \in \Gamma_{\mathbf{r}_0}$  et  $\theta_{N+1} = \tau_D$ .

Nous calculons ensuite la dispersion autour de la valeur de flux magnétique initiale (**Figure 3-10**). Elle s'écrit

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{1}{\tau_D} \sum_{i=1}^N \phi^2(\mathbf{r}_i)(\theta_{i+1} - \theta_i) \quad (71)$$

et le coefficient de diffusion radiale associé est calculé suivant la relation

$$D_{LL} = \frac{(L^*)^4 R_e^2 \langle \phi^2 \rangle}{(2\pi k_0)^2 2\Delta t} \quad (72)$$



**Figure 3-10 : le coefficient de diffusion radiale mesure le taux d'étalement statistique des nouvelles valeurs de flux magnétique**

Après avoir implémenté les différentes étapes de ce protocole, nous avons lancé des simulations avec le modèle de champ magnétique externe T89 en fonction de transitions de l'indice Kp. Le code a néanmoins été conçu de manière à s'adapter facilement à n'importe quel modèle de champ magnétique externe [Garault, 2012]. Il est également capable d'intégrer un modèle de champ électrostatique.

### 3.2. Analyse de l'évaluation numérique des coefficients de diffusion radiale dans le cas équatorial

Nous supposons tout d'abord que le temps caractéristique de variation du champ magnétique est très court devant le temps de dérive des particules considérées. Ce sont en effet dans ces conditions que le phénomène de diffusion radiale est le plus intense. De manière équivalente, cette hypothèse revient à considérer le temps de dérive des centres-guide comme infiniment

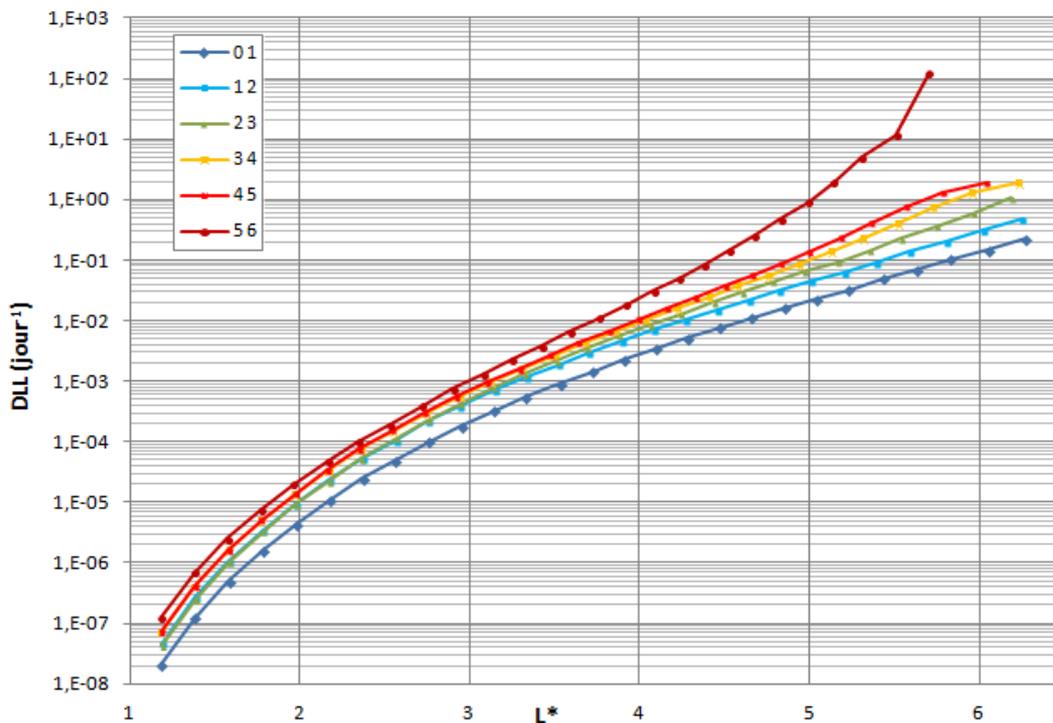
long devant l'intervalle de temps  $\Delta t$  de la simulation. En d'autres termes, lors du transport de la configuration initiale vers la configuration finale de la magnétosphère, la vitesse de dérive magnétique de ces particules est négligeable devant la vitesse des champs croisés.

$$\mathbf{r} + d\mathbf{r} = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{E}_{\text{ind}}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{B^2(\mathbf{r}, t)} dt. \quad (73)$$

Nous définissons ces particules de vitesse de dérive magnétique négligeable comme les particules d'énergie nulle.

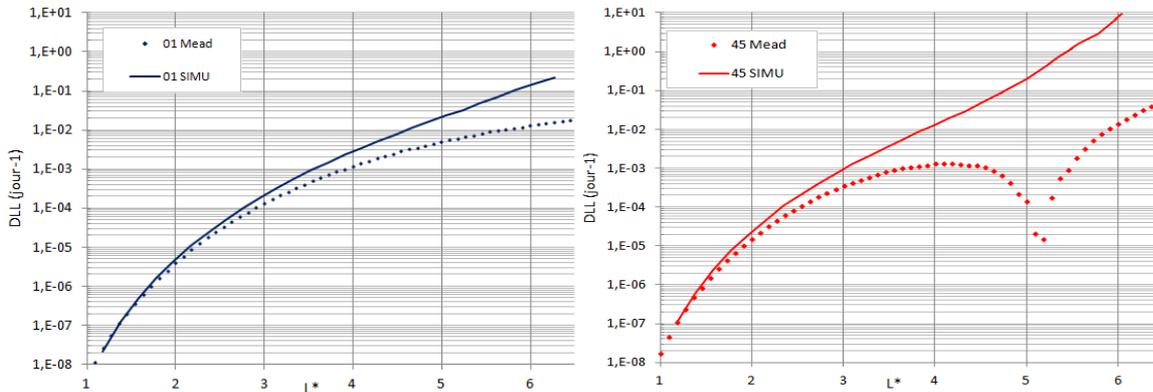
### 3.2.1. Dynamique des particules d'énergie nulle en fonction du paramètre de Roederer $L^*$

La **Figure 3-11** présente les coefficients de diffusion radiale estimés sur  $\Delta t = 3h$  dans le cas d'un modèle de champ dipolaire sur lequel nous avons superposé le modèle de champ externe T89.



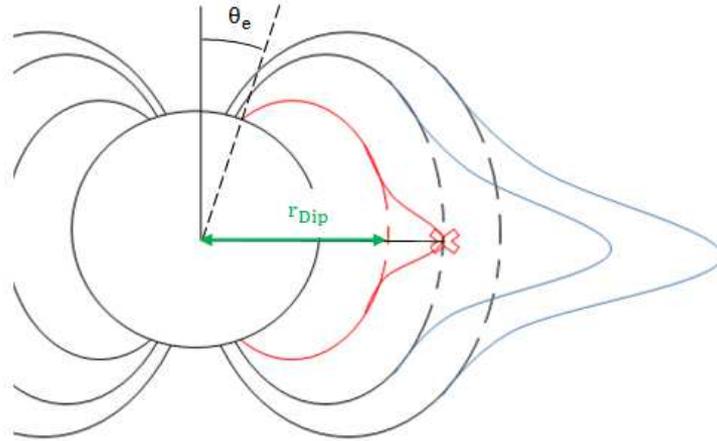
**Figure 3-11 : Coefficients de diffusion radiale déduits dans le cas d'un modèle de champ dipolaire + T89 lors d'un passage d'un état  $K_p$  à l'état  $K_p$  voisin pour des particules d'énergie nulle**

Lorsque nous comparons ces résultats avec les coefficients de diffusion radiale estimés par la méthode de modélisation locale de Mead (**Figure 3-5**), nous remarquons que les irrégularités ont disparu. Cela confirme donc à nouveau le fait que la méthode des potentiels d'Euler est plus précise que la méthode de modélisation locale de Mead. Cependant, les ordres de grandeurs restent les mêmes à faible distance radiale ou pour une faible activité magnétique. Une comparaison est proposée **Figure 3-12** pour deux transitions de  $K_p$  différentes.



**Figure 3-12 : Comparaison des coefficients de diffusion radiale déduits de la méthode locale de Mead (pointillés) et de la méthode des potentiels d'Euler (ligne pleine) pour une transition à  $K_p$  faibles (à gauche) et à  $K_p$  forts (à droite)**

Dans le cas des particules d'énergie nulle, le transport de l'état initial vers l'état final de la magnétosphère est assuré par la vitesse de dérive des champs croisés. Or, cette vitesse correspond également à la vitesse de déplacement des lignes de champ. Ainsi, entre  $t_0$  et  $t_0 + \Delta t$ , tout se passe comme si les particules étaient figées sur leur ligne de champ initiale. Par conséquent, l'évaluation des coefficients de diffusion radiale de particules d'énergie nulle ne dépend pas de la forme de la fonction d'interpolation  $t \mapsto F(t)$  choisie pour l'implémentation des champs électriques induits. En effet, ce qui importe dans la simulation n'est pas le chemin emprunté pour passer de l'état initial à l'état final mais plutôt la différence entre ces deux états. Identifier les lignes de champ et analyser leur déplacement suffit à la caractérisation de la diffusion radiale d'une population de particules d'énergie nulle. Cette identification se fait aisément par le biais des potentiels d'Euler. En utilisant le potentiel d'Euler  $\alpha$  par exemple, nous retrouvons la distance équatoriale magnétique de la ligne de champ si l'allure du champ magnétique revenait à l'état dipolaire (**Figure 3-13**).



**Figure 3-13 : Dipolarisation et calcul du rayon dipolaire équivalent**

Pour un point  $r$  à l'équateur magnétique dont la ligne de champ rencontre la surface terrestre en  $(1, \theta_e, \varphi_e)$ , le potentiel d'Euler  $\alpha$  s'écrit

$$\alpha(r) = -k_0 R_e^3 \sin^2 \theta_e, \quad (74)$$

alors que dans le cas dipolaire, il s'écrit

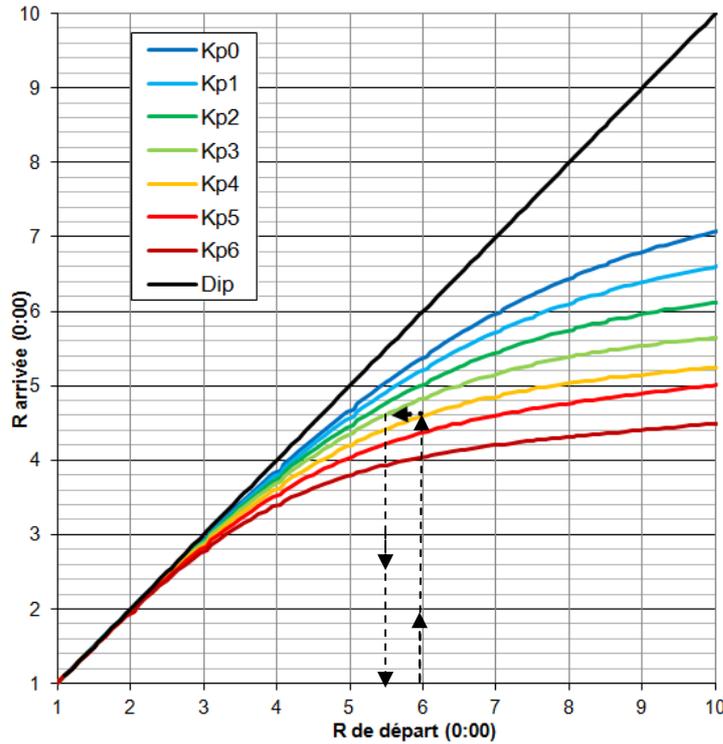
$$\alpha(r_{Dip}) = -\frac{k_0 R_e^3}{r_{Dip}}. \quad (75)$$

Ainsi, si le champ magnétique revenait à l'état dipolaire, la distance de la ligne de champ magnétique au niveau de l'équateur serait donc

$$r_{Dip} = 1/\sin^2 \theta_e. \quad (76)$$

Cette méthode fournit donc un ordre de grandeur local de l'étalement d'une population en fonction de la distance radiale (**Figure 3-14**).

Sur la **Figure 3-14**, il est possible de lire le déplacement radial lors d'un passage d'un état de Kp à l'autre avec le modèle de champ externe T89.



**Figure 3-14: Distance radiale équatoriale dipolaire équivalente à minuit heure locale en fonction de l'état moyen considéré**

Pour un passage de Kp 4 à Kp 3 par exemple, en nous plaçant initialement à  $(r = 6, \theta = \pi/2, \varphi = 0)$ , nous nous déplaçons jusqu'à  $r \cong 5,5$ . En confondant  $r$  avec le paramètre de Roederer  $L^*$ , nous déduisons de cette information locale un premier ordre de grandeur du coefficient de diffusion radiale. Avec  $\Delta t = 3h = 1/8j$ , il s'écrit

$$D_{LL}(L^* \approx 6, Kp : 4 \rightarrow 3) \approx \frac{(\Delta L^*)^2}{2\Delta t} = \frac{(0,5)^2}{2 \times \frac{1}{8}} = 1j^{-1}. \quad (77)$$

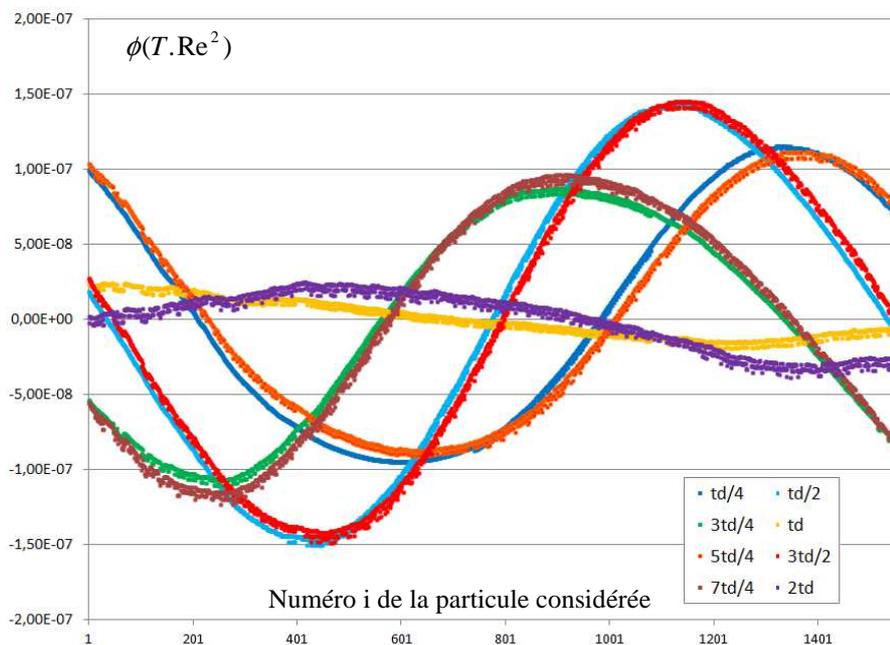
Nous vérifions **Figure 3-11** que cet ordre de grandeur fournit effectivement une excellente première approximation, avec une erreur de l'ordre d'un facteur 2.

Discutons maintenant le rôle joué par l'énergie des particules dans la caractérisation de l'intensité de la diffusion radiale.

### 3.2.2. Étude numérique de la dépendance en énergie du processus de diffusion radiale

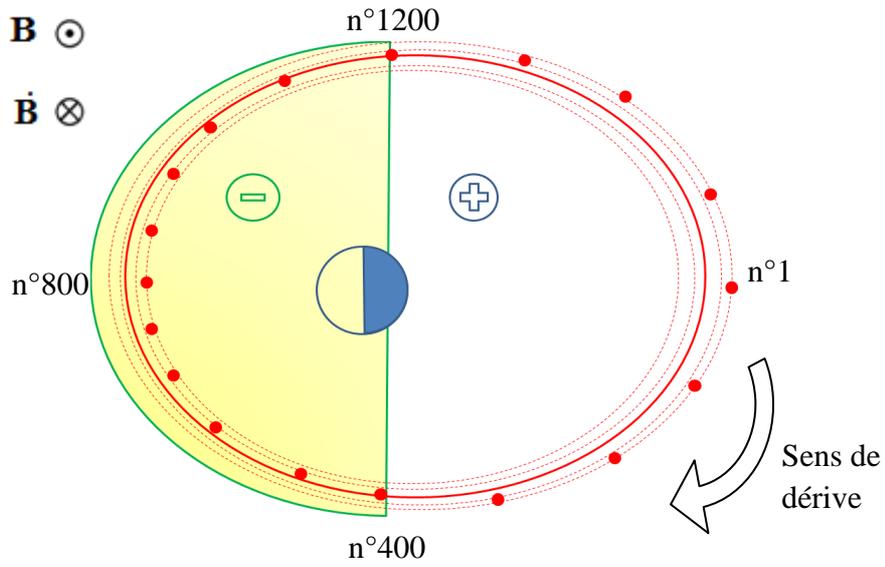
Nous simulons numériquement le transport d'une population de protons d'un état initial à un instant  $t_0$  vers un état final à un instant  $t_0 + \Delta t$ , avec  $\Delta t = 2\tau_D$ .

La **Figure 3-15** représente la variation du flux magnétique  $\phi$  d'une famille de particules  $i \in [1;1600]$  mesurée en différents instants compris entre  $t_0$  et  $t_0 + 2\tau_D$  dans le cas d'un passage d'un état moyen d'indice Kp 2 à un état moyen d'indice Kp 3.



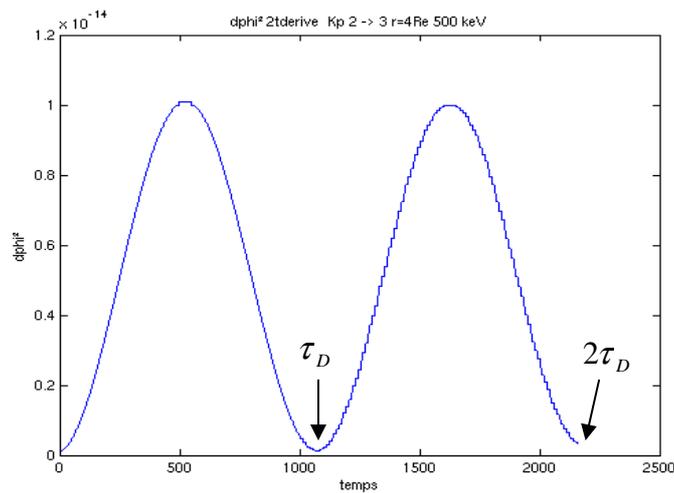
**Figure 3-15 : Variation du flux magnétique  $\phi$  pour différents instants de mesure et différentes particules d'un même contour de dérive**

Ce graphique s'interprète à la lumière de la **Figure 3-16**. En fonction de la position longitudinale, les variations instantanées du flux magnétique  $d\Phi$  n'ont pas le même signe. Pour cet exemple, l'indice Kp augmente. Les lignes de champ s'étirent et les variations instantanées du flux sont positives côté nuit. Au contraire, les lignes de champ sont compressées et les variations instantanées du flux sont négatives côté jour (**Figure 3-16**). Par conséquent, ce sont les protons qui partent de l'aube (n°1200) ou du crépuscule (n°400) qui atteignent la variation de flux la plus grande au bout d'un demi-temps de dérive ( $td/2$  et  $3td/2$  **Figure 3-15**). Au bout d'une période de dérive, toutes les particules ont parcouru toutes les positions longitudinales possibles et la variation totale du flux tend vers zéro ( $td$  et  $2td$  **Figure 3-15**).



**Figure 3-16 : Signe des variations de flux instantanées  $d\Phi$  en fonction de la position longitudinale**

En outre, nous observons une périodicité dans l'évolution temporelle de la variation du flux  $\phi$  de période  $\tau_D$ . Nous représentons la variance relative à l'évolution des flux magnétiques de la famille de particules  $i \in [1;1600]$  **Figure 3-17**.



**Figure 3-17 : Phénomène de battement de  $\langle \phi^2 \rangle (T^2.R_e^4)$  en fonction du temps pour une population de protons de 500 keV lancée à 4 Re ( $\tau_D \approx 1200s$ ) lors d'une transition Kp 2 – Kp3.**

**Figure 3-17**, nous observons un phénomène de battement de la variance relative à l'évolution des flux magnétiques de la famille de particules  $i \in [1;1600]$ . Ce phénomène de battement est fonction du temps de simulation.  $\langle \phi^2 \rangle$  atteint une valeur maximale lorsque  $t = k\tau_D + \tau_D/2, k \in N$ . Cette valeur maximale de l'ordre de  $10^{-14} T^2 \cdot R_e^4$ . Le coefficient diffusion radiale associé est donc de l'ordre de

$$D_{LL} = \frac{(L^*)^4 R_e^2 \langle \phi^2 \rangle}{(2\pi k_0)^2 2\Delta t} \approx \frac{4^4}{(2\pi \times 3.1 \times 10^{-5})^2} \frac{10^{-14}}{2 \times \frac{1200}{24 \times 3600}} \approx 2.4 \times 10^{-3} j^{-1}. \quad (78)$$

Afin de comparer cet ordre de grandeur avec le coefficient de diffusion radiale de particules d'énergie nulle soumises aux mêmes conditions de variation de l'environnement électromagnétique, nous utilisons la **Figure 3-11**. La **Figure 3-11** représente l'évaluation numérique des coefficients de diffusion radiale de particules d'énergie nulle soumise à un champ magnétique variable d'un état Kp à un état Kp voisin pendant un intervalle de temps de 3 heures. Pour un intervalle de temps de 3 heures, nous lisons **Figure 3-11** que le coefficient de diffusion radiale à 4 Re associé à un passage d'un état de Kp 3 à un état de Kp 4 est égal à  $D_{LL} \approx 1 \times 10^{-2} j^{-1}$ . Pour un intervalle de temps de 1200s, le coefficient de diffusion radiale à 4 Re associé à un passage d'un état de Kp 3 à un état de Kp 4 est donc égal à

$$D_{LL}(\mathcal{E} = 0) \approx 1 \times 10^{-2} \times \frac{3 \times 3600}{1200} j^{-1} \approx 9 \times 10^{-2} j^{-1}. \quad (79)$$

Par conséquent, nous obtenons  $D_{LL}(\mathcal{E} = 0) / D_{LL} \approx 50$ . Nous retrouvons bien avec cet exemple le fait que l'intensité du phénomène de diffusion radiale décroît à mesure que le temps caractéristique de variation du champ électromagnétique devient de l'ordre du temps de dérive des particules.

### Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté des méthodes analytiques et numériques dédiées à l'évaluation des coefficients de diffusion radiale dans le cadre des ceintures de radiation terrestres. Ces méthodes se basent sur les formulations établies **Chapitre 2**. Pour l'étude analytique, nous avons choisi d'utiliser le modèle électromagnétique de Mead. Ce modèle présente en effet l'avantage d'être simple tout en restituant les paramètres clés liés à la diffusion radiale : il propose une expression des variations asymétriques du champ et il fournit l'expression des champs électriques induits par les variations du champ magnétique. Nous avons ensuite raffiné l'approche en développant un code numérique capable de simuler le phénomène de diffusion radiale de populations de particules aux caractéristiques identiques. Dans ce code, la dynamique de l'environnement électromagnétique est simulée par une

interpolation temporelle de deux états magnétiques stationnaires différents. Nous avons alors choisi d'exprimer les cartographies équatoriales du champ magnétique en termes de potentiels d'Euler afin d'estimer numériquement les champs électriques induits par les variations du champ. Ces méthodes fournissent une illustration à l'approche théorique présentée **Chapitre 2** dans le cas équatorial. En outre, elles permettent une meilleure compréhension de la physique sous-jacente. En particulier, nous avons étudié la dépendance de l'intensité du phénomène de diffusion radiale en fonction de l'énergie de la population considérée. Par le biais d'exemples analytiques et numériques, nous avons montré que l'intensité du processus de diffusion radiale était le fruit de la compétition entre le temps de dérive de la population de particules et le temps caractéristique de variation de l'environnement électromagnétique. Cependant, numériquement, nous ne connaissons pas le temps caractéristique de variation de l'environnement électromagnétique. Nous avons seulement établi un temps de passage d'une configuration stationnaire à l'autre. Nous avons fixé arbitrairement ce temps de passage à 3 heures, une échelle de temps adaptée au pilotage de la dynamique du champ par le biais de l'indice d'activité géomagnétique  $K_p$ . Une autre limite à la démarche d'évaluation numérique des coefficients de diffusion radiale réside dans le fait que les modèles numériques ne permettent de ne rendre compte que d'un état moyen. La résolution temporelle de la restitution de la dynamique de l'environnement électromagnétique est donc toujours limitée. Par conséquent, nous sommes donc portés à croire que les coefficients établis **Figure 3-11** sous-estiment l'intensité du phénomène.

Pour pallier ces limitations, l'idée est alors d'utiliser des observations afin de déterminer à la fois l'asymétrie instantanée de l'environnement électromagnétique et la dynamique de ce paramètre.



## Chapitre 4 :

# Détermination expérimentale des coefficients de diffusion radiale pour des particules équatoriales à l'orbite GEO

Il est difficile de quantifier directement le phénomène de diffusion radiale à partir d'observations de la dynamique des ceintures de radiation. En effet, la dynamique des particules des ceintures de radiation est pilotée par plusieurs phénomènes parmi lesquels se trouve la diffusion radiale [e.g., *Schulz*, 1991]. Pour déduire des coefficients de diffusion radiale à partir d'observations de la dynamique des particules, il est donc nécessaire de supposer que les autres pilotes de la dynamique sont soit négligeables, soit parfaitement connus et quantifiés. C'est pourquoi les coefficients de diffusion radiale sont plutôt déduits de manière indirecte, par le biais de mesures de la dynamique de l'environnement électromagnétique.

Nous avons montré **Chapitre 2** que l'intensité du phénomène de diffusion radiale dépend de la dynamique de l'environnement électromagnétique à l'échelle mésoscopique, c'est-à-dire à une échelle de temps comprise entre le temps de rebond et le temps de dérive. L'échelle mésoscopique est l'ordre de la minute environ (**Figure 1-3**). **Chapitre 3**, nous avons calculés numériquement des coefficients de diffusion radiale. Cependant, nous pensons qu'ils sous-estiment l'intensité du phénomène. En effet, les modèles numériques de champ magnétique utilisés ne permettent pas de rendre compte de la dynamique de l'environnement à l'échelle mésoscopique. Nous avons alors choisi de restituer la dynamique de l'environnement électromagnétique artificiellement, par interpolation temporelle entre deux états stationnaires voisins, sur une échelle de temps caractéristique du pilote de la dynamique (3 h pour Kp). L'approche numérique reste donc limitée.

L'idée est donc de se servir de mesures expérimentales afin d'avoir accès à une information sur la dynamique de l'environnement électromagnétique à des échelles de temps de l'ordre de l'échelle mésoscopique. Cette information sera alors mise à profit pour le calcul de coefficients de diffusion radiale expérimentaux à partir des formulations établies **Chapitre 2**. Afin de réduire le nombre de paramètres à déterminer, nous choisissons de négliger l'effet des potentiels électrostatiques et de calculer des coefficients de diffusion radiale relatifs à des particules équatoriales. Dans ce cas, l'expression de la variation instantanée du flux magnétique à l'échelle mésoscopique s'écrit (eq. (65), **Chapitre 2**):

$$\dot{\Phi}(\mathbf{r}_0, t) = C_0 \left( \left\langle \frac{dB}{dt} \right\rangle_{Max}(t) - \frac{dB}{dt}(\mathbf{r}_0, t) \right). \quad (1)$$

Notre objectif est de quantifier cette équation à partir de données observationnelles. Pour cela, nous voulons donc identifier expérimentalement un contour de dérive. Nous souhaitons également mesurer en tout point de ce contour la norme du champ magnétique, son gradient, ses variations temporelles ainsi que les champs électriques induits associés.

Or, il n'est pas possible de mesurer le champ magnétique et ses variations en tout point de l'espace au même instant. Un satellite ne fournit en effet qu'une information sur l'environnement électromagnétique relatif aux points de sa trajectoire aux moments de la mesure. En revanche, nous savons qu'en période d'activité solaire calme, le champ magnétique est principalement symétrique. Les contours de dérive sont alors des cercles au niveau de l'équateur magnétique. C'est pourquoi nous choisissons l'orbite géostationnaire (GEO), une orbite située dans le plan de l'équateur géographique au voisinage de  $r = 6.6R_e$ . Nous travaillons alors en permanence au voisinage d'un même contour de dérive dont les déformations varient en fonction de l'activité solaire.

La structure de ce chapitre est la suivante : dans un premier temps, nous présentons le protocole expérimental établi pour le calcul de coefficients de diffusion radiale de particules équatoriales à l'orbite GEO en fonction de l'activité solaire. Ensuite, nous analysons les résultats obtenus. Enfin, nous replaçons ces travaux dans le contexte scientifique associé en proposant une brève discussion de quelques références de la littérature en termes de caractérisation du phénomène de diffusion radiale. Nous montrons alors en quoi nos travaux de recherche permettent d'acquérir un regard critique sur les travaux publiés.

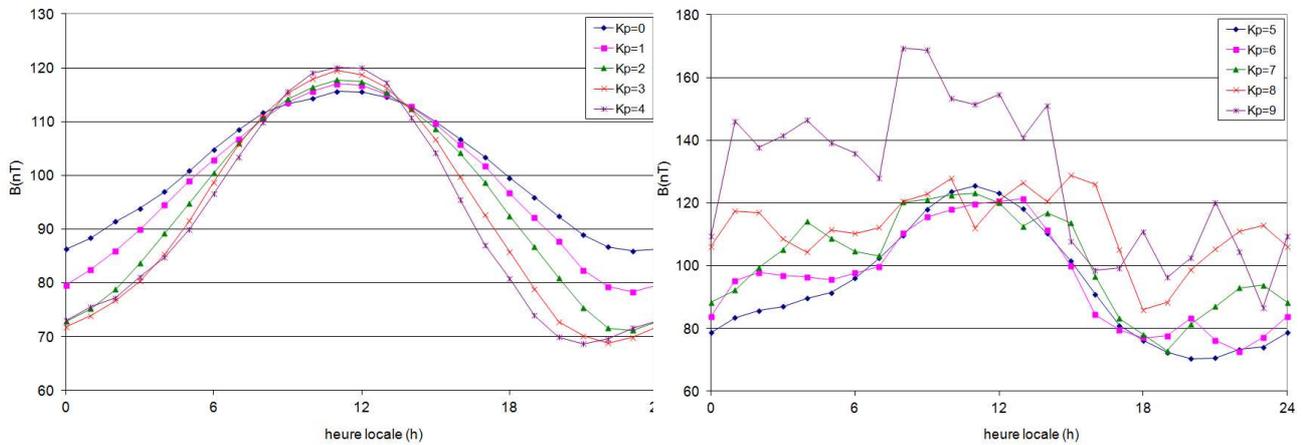
## **1. Description du protocole expérimental pour le calcul de coefficients de diffusion radiale pour des particules équatoriales à l'orbite GEO**

Expérimentalement, il n'est pas possible de déterminer les caractéristiques de l'environnement électromagnétique au même instant en tout point d'un contour de dérive. L'idée est donc d'appliquer la méthode de modélisation locale de Mead à des jeux de données observationnelles. Dans un premier temps, nous cherchons à savoir si le simple modèle d'environnement électromagnétique de Mead peut convenir à l'orbite GEO.

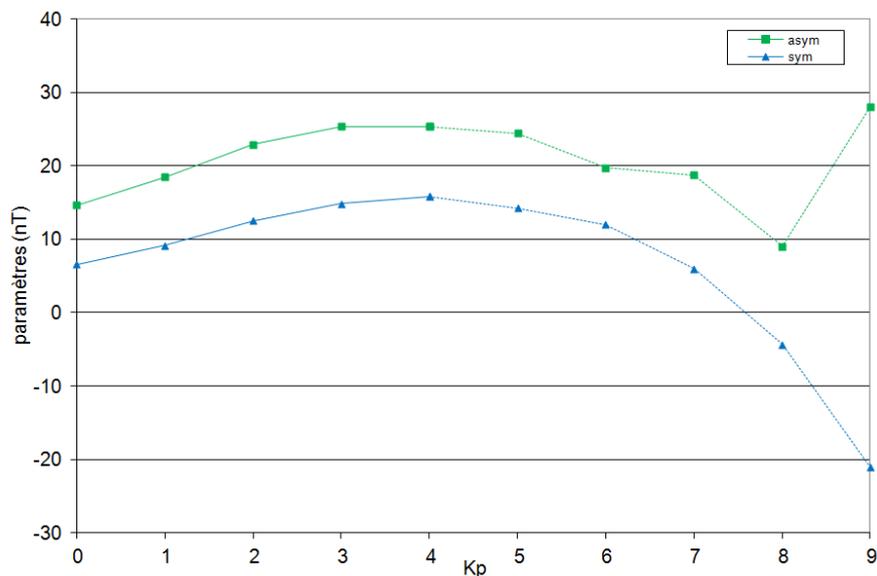
### **1.1. Définition d'un cadre pour l'application de la méthode de modélisation locale de Mead**

La **Figure 4-1** présente le champ magnétique moyen mesuré à l'orbite géostationnaire par le satellite NOAA-GOES10 entre Septembre 1998 et Juin 2006 en fonction de l'heure locale pour différents indices Kp. Elle nous montre que le choix d'une modélisation de la dépendance en heure locale par le biais d'une fonction cosinus est particulièrement justifié en moyenne pour un indice Kp compris entre 0 et 4. À partir de ces informations sur le champ magnétique moyen en fonction de l'heure locale et de l'indice géomagnétique Kp, nous déduisons tout d'abord les paramètres symétriques du modèle (sym). Ils correspondent à la

différence entre l'intensité du champ dipolaire à l'orbite GEO (~108 nT) et les moyennes longitudinales du champ (équation (49) **Chapitre 3**). Nous déduisons ensuite les paramètres asymétriques (asym) du modèle, caractéristiques de l'écart à la moyenne (équation (50) **Chapitre 3**). Nous présentons les résultats **Figure 4-2**.



**Figure 4-1 : Champ magnétique moyen mesuré par NOAA-GOES 10 entre Septembre 1998 et Juin 2006 en fonction de l'heure locale et de l'activité magnétique. Les valeurs moyennes relatives aux indices Kp entre 0 et 4 sont représentées à droite, les moyennes relatives aux indices entre 5 et 9 sont représentées à gauche.**



**Figure 4-2 : Composantes symétrique et asymétrique du champ magnétique moyen à l'orbite GEO en fonction de l'indice Kp**

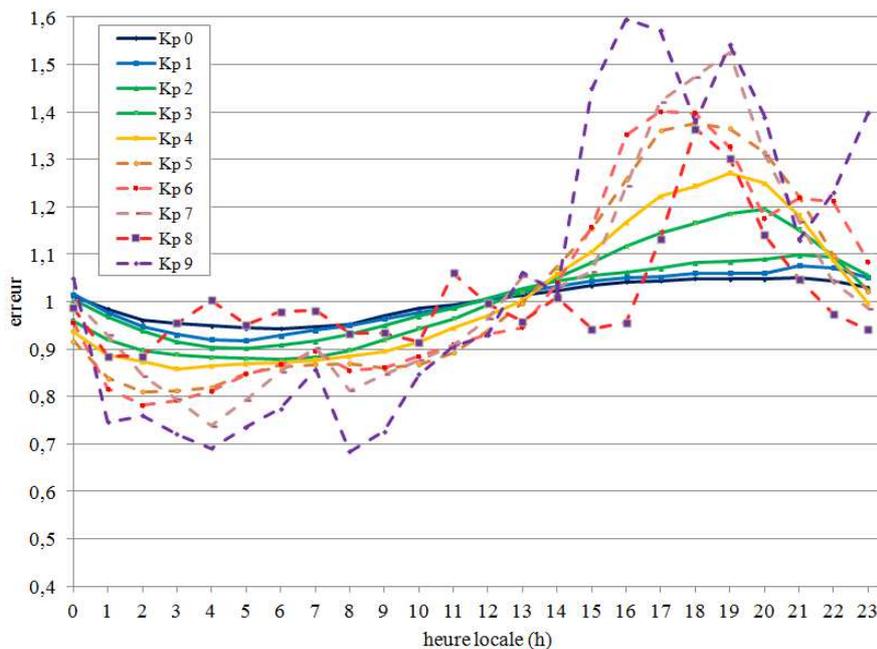
Nous vérifions que les paramètres indiqués **Figures 4-2** et **4-3** au voisinage de  $r = 6.6R_e$  et les paramètres estimés **Figure 4-2** sont du même ordre de grandeur pour un indice Kp

compris entre 0 et 4. Au-delà de Kp 4, les paramètres moyens **Figure 4-2** diminuent avec Kp. Nous interprétons cette diminution comme la baisse de pertinence de la modélisation de la dépendance du champ magnétique en la position longitudinale par une fonction cosinus forcée. Afin d'estimer l'erreur moyenne commise, nous comparons le module du champ magnétique moyen mesuré au niveau de l'orbite géostationnaire ( $B_{GEO}(\varphi, Kp)$ ) avec le module du champ magnétique moyen reconstruit ( $B_{dip} - sym(Kp) - asym(Kp) \cos \varphi$ ) :

$$e : (\varphi, Kp) \mapsto \frac{B_{dip} - sym(Kp) - asym(Kp) \cos \varphi}{B_{GEO}(\varphi, Kp)} \quad (2)$$

où  $B_{dip} \approx 108nT$  est une estimation de la composante du champ magnétique dipolaire à l'orbite géostationnaire.

L'erreur  $e$  est représentée **Figure 4-3** en fonction de la position longitudinale (heure locale) pour différents indices d'activité géomagnétique Kp.



**Figure 4-3 : Erreur  $e$  représentant le rapport du module du champ magnétique reconstruit sur le module du champ magnétique moyen mesuré en fonction de la position longitudinale (mlt) pour différents indices d'activité géomagnétique**

Le simple modèle d'environnement électromagnétique de Mead semble convenir à l'orbite GEO. Cependant, l'erreur moyenne commise augmente à mesure que l'indice Kp augmente. C'est pourquoi, dans la suite de cette étude expérimentale, nous choisissons de restreindre le

champ d'application de la méthode de modélisation locale de Mead aux périodes d'activité magnétique calme à modérée, avec un indice Kp compris entre 0 et 4.

## 1.2. Définition de la méthode d'échantillonnage et présentation du jeu de données

L'objectif de l'approche est de déterminer des coefficients de diffusion radiale prêts à être intégrés dans un code de simulation à 3 dimensions dans l'espace des invariants adiabatiques tel que le code Salammbô. Il s'agit donc de calculer des coefficients de diffusion moyens, représentatifs d'une dynamique en fonction de paramètres de l'activité solaire. Pour Salammbô, la dynamique en fonction de l'activité solaire est pilotée par l'indice d'activité géomagnétique Kp. Par conséquent, suivant l'équation (31) du **Chapitre 3**, nous cherchons à quantifier l'expression

$$D_{LL} = \frac{(L^*)^{10} R_e^8}{(2k_0)^2} \left(\frac{5}{7}\right)^2 \frac{[Z(\Omega, \Delta t)]_{Kp}}{\Delta t} \quad (3)$$

avec

$$Z(\Omega, \Delta t) = \int_{t=t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{u=t_0}^{u_0+\Delta t} [\dot{A}(u)\dot{A}(t)]_{Kp} \cos(\Omega(u-t)) du dt . \quad (4)$$

où  $[\cdot]_{Kp}$  représente une moyenne statistique sur les intervalles de temps de taille  $\Delta t$  relatifs à l'indice Kp.

Nous définissons la fonction d'autocorrélation  $g$  du signal  $\dot{A}$  par la relation

$$g(Kp, v) = [\dot{A}(t)\dot{A}(t+v)]_{Kp} . \quad (5)$$

Alors, la fonction  $Z$  se met sous la forme

$$Z(\Omega, \Delta t) = \Delta t \int_{v=0}^{\Delta t} g(Kp, v) \cos(\Omega v) dv \quad (6)$$

et l'expression du coefficient de diffusion devient

$$D_{LL} = \frac{(L^*)^{10} R_e^8}{(2k_0)^2} \left(\frac{5}{7}\right)^2 \int_{v=0}^{\Delta t} g(Kp, v) \cos(\Omega v) dv \quad (7)$$

L'objectif est donc de mener une étude statistique du signal  $A(t)$  et de ses variations. Or, le modèle de champ électromagnétique de Mead est une fonction de deux paramètres  $S(t)$  et  $A(t)$ . Par conséquent, en mesurant le champ magnétique à l'orbite géostationnaire en deux points différents au même instant  $t$ , nous estimons ces paramètres en résolvant un système de deux équations à deux inconnus.

Soient  $(r, \theta_1, \varphi_1)$  et  $(r, \theta_2, \varphi_2)$  les positions de deux satellites géostationnaires à l'instant  $t$ . Ces satellites mesurent un champ magnétique dont les intensités respectives sont  $B_1(t)$  et  $B_2(t)$ . D'après l'équation (6) du **Chapitre 3**, ces deux intensités sont données par le jeu d'équations

$$\begin{aligned} B_1(t) &= k_0 r^{-3} F(\theta_1) + S(t)G(\theta_1) + A(t)H(\theta_1)r \cos \varphi_1 \\ B_2(t) &= k_0 r^{-3} F(\theta_2) + S(t)G(\theta_2) + A(t)H(\theta_2)r \cos \varphi_2 \end{aligned} \quad (8)$$

Par conséquent, la partie asymétrique du champ magnétique à l'instant  $t$  s'écrit

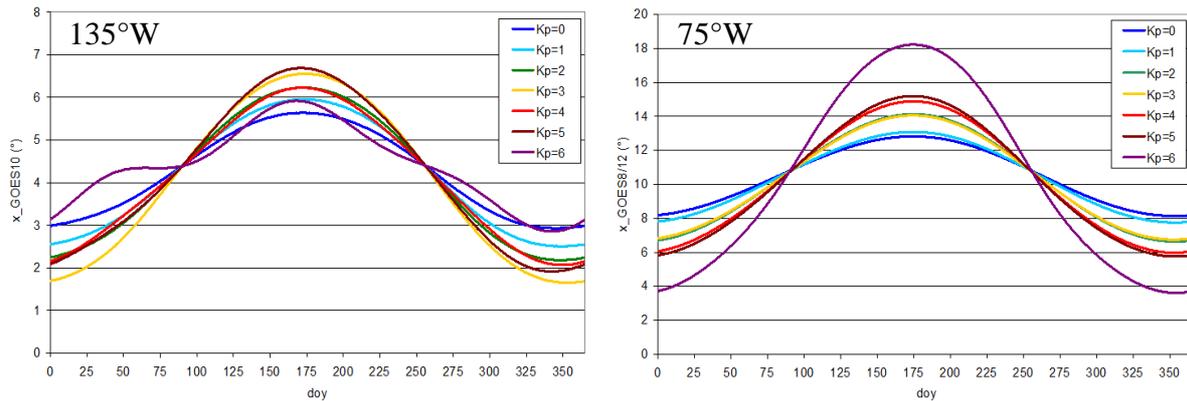
$$A(t)r = \frac{B_1(t)G(\theta_2) - B_2(t)G(\theta_1) - k_0 r^{-3} (F(\theta_1)G(\theta_2) - F(\theta_2)G(\theta_1))}{G(\theta_2)H(\theta_1) \cos \varphi_1 - G(\theta_1)H(\theta_2) \cos \varphi_2} \quad (9)$$

lorsque  $G(\theta_2)H(\theta_1) \cos \varphi_1 \neq G(\theta_1)H(\theta_2) \cos \varphi_2$

De même, il est possible de déterminer la perturbation symétrique à l'instant  $t$ .

Nous utilisons plus de 7 ans de mesures du champ magnétique à l'orbite GEO. Ces mesures ont été effectuées entre septembre 1998 et juin 2006. La résolution temporelle est de 5 minutes. De septembre 1998 à mai 2003, nous utilisons le couple NOAA-GOES 10 (135°W) et NOAA-GOES 8 (75°W). Ensuite, de mai 2003 à juin 2006, nous utilisons le couple NOAA-GOES 10 (135°W) et NOAA-GOES12 (75°W).

Par définition de l'orbite GEO, ces satellites se situent au niveau de l'équateur géographique de la Terre. Or, l'équateur magnétique est incliné par rapport à l'équateur géographique. En outre, cette inclinaison est variable en fonction des conditions d'activité solaire. Chaque satellite du couple est donc situé à une colatitude magnétique  $\theta$  différente. Pour déterminer cette colatitude magnétique numériquement, nous utilisons un modèle T89 superposé au modèle de champ interne IGRF. Nous calculons la colatitude magnétique en fonction du jour de l'année (doy) et de l'activité magnétique (Kp). La latitude magnétique  $x = |\pi/2 - \theta|$  est présentée **Figure 4-4** pour un satellite géostationnaire situé à 135°W et pour un satellite géostationnaire situé à 75°W.



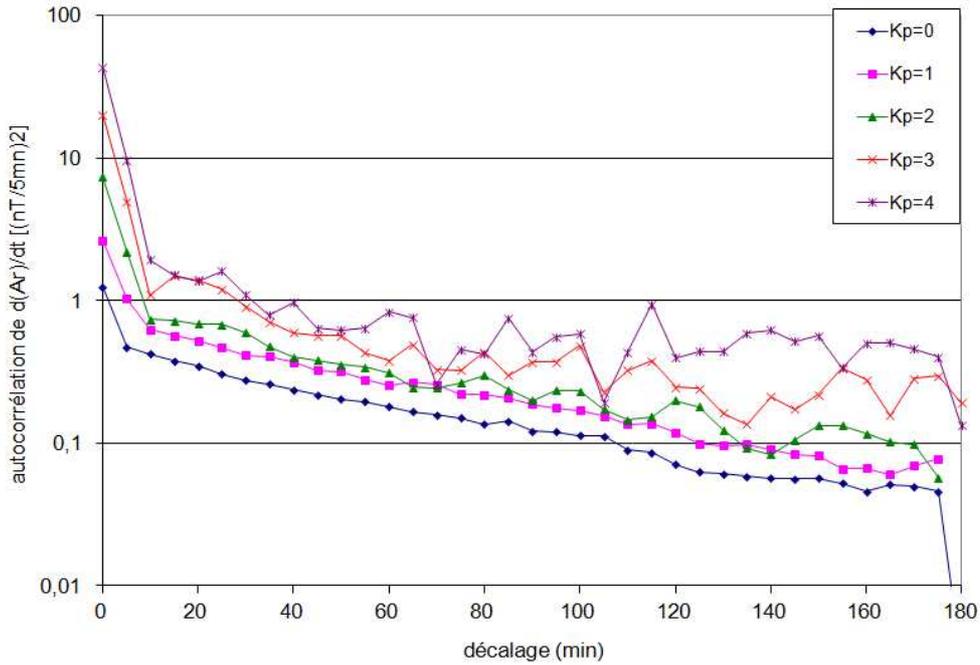
**Figure 4-4 : Latitude magnétique  $x$  en fonction du jour de l'année (doy) et de l'activité magnétique ( $K_p$ ) pour un satellite géostationnaire positionné à  $135^\circ\text{W}$  (à gauche) et un satellite géostationnaire positionné à  $75^\circ\text{W}$  (à droite)**

Nous observons bien une variation de la latitude magnétique moyenne des satellites géostationnaires en fonction de leur position longitudinale. La latitude varie également en fonction de l'orientation de l'axe du dipôle terrestre par rapport au Soleil (doy) et en fonction de l'activité magnétique ( $K_p$ ).

Nous implémentons ces informations (eq. (9)) afin de déterminer le paramètre d'asymétrie instantané  $A(t)$ . Nous menons ensuite une étude statistique de ses variations.

### 1.3. Modélisation de la fonction d'autocorrélation relative aux variations de l'asymétrie du champ magnétique

**Figure 4-5**, nous représentons la fonction d'autocorrélation  $g$  des variations de l'asymétrie du champ magnétique en fonction du décalage temporel  $\nu$  pour un indice d'activité magnétique  $K_p$  compris entre 0 et 4 (eq. (5)).



**Figure 4-5 : Autocorrélation des variations de l'asymétrie du champ magnétique pour différents niveaux d'activité magnétique**

Nous choisissons de modéliser l'allure de cette fonction d'autocorrélation comme une somme de deux exponentielles

$$g(Kp, \nu) = C_1(Kp) \exp(-\lambda_1 \nu) + C_2(Kp) \exp(-\lambda_2 \nu). \quad (10)$$

Nous donnons les valeurs des paramètres  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  en fonction de l'indice d'activité géomagnétique  $Kp$  **Tableau 1**.

$Kp$	$C_1$ ( $\text{nT}^2 \cdot \text{Re}^{-2} \text{min}^{-2}$ )	$C_2$ ( $\text{nT}^2 \cdot \text{Re}^{-2} \text{min}^{-2}$ )	$\lambda_1$ ( $\text{min}^{-1}$ )	$\lambda_2$ ( $\text{min}^{-1}$ )
0	$1.06 \times 10^{-3}$	$2.24 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-1}$	$1.43 \times 10^{-2}$
1	$3.15 \times 10^{-3}$	$3.58 \times 10^{-4}$		
2	$1.09 \times 10^{-2}$	$7.30 \times 10^{-4}$		
3	$3.06 \times 10^{-2}$	$1.13 \times 10^{-3}$		
4	$6.72 \times 10^{-2}$	$1.54 \times 10^{-3}$		

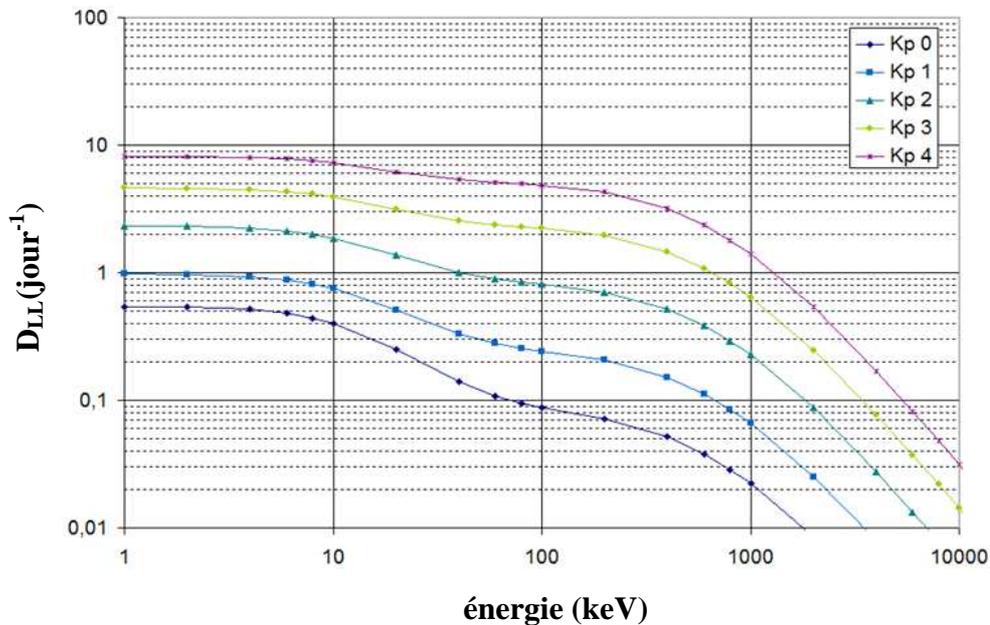
**Tableau 1 : Paramètres de la fonction d'autocorrélation  $g$  en fonction de l'indice  $Kp$  (résolution temporelle de 5 min)**

Le temps court  $d\tau_1 = 1/\lambda_1$  est de l'ordre de 2.5 min, soit la moitié de la période d'échantillonnage. Le temps long  $d\tau_2 = 1/\lambda_2$  quant à lui est de l'ordre de 70 min quelque soit l'indice Kp.

Nous supposons que l'intervalle de temps choisi  $\Delta t$  est de l'ordre de plusieurs heures, de manière à ce que  $\lambda_2 \Delta t \gg 1$ . En injectant (10) dans (7), nous obtenons une expression analytique des coefficients de diffusion radiale. Elle correspond à

$$D_{LL} = \frac{(L^*)^{10} R_e^8}{(2k_0)^2} \left(\frac{5}{7}\right)^2 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \Omega^2} C_1(Kp) + \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2 + \Omega^2} C_2(Kp) \right) \quad (11)$$

Nous remarquons une dépendance des coefficients de diffusion radiale en l'énergie des particules équatoriales considérées. La **Figure 4-6** présente les résultats obtenus.



**Figure 4-6 : Coefficients de diffusion radiale en fonction de l'énergie des particules considérées pour Kp entre 0 et 4 à l'orbite GEO (résolution temporelle de 5 minutes)**

## 2. Analyse des résultats obtenus

### 2.1. Dépendance en l'énergie

**Figure 4-6**, nous observons une diminution de l'intensité des coefficients de diffusion à mesure que l'énergie cinétique augmente. Cette diminution est en accord avec les conclusions

du **Chapitre 3**. En effet, **Chapitre 3**, nous avons montré que plus le temps caractéristique de variation du champ est court devant le temps de dérive des particules considérées, plus le phénomène de diffusion radiale est un phénomène significatif dans la description de la dynamique des particules. De la même manière mais d'un point de vue statistique cette fois, les variations de l'asymétrie corrélées sur de grands intervalles de temps perdent en efficacité pour la production de diffusion à mesure que le temps de dérive diminue. Les variations corrélées sur de courts intervalles de temps en revanche maintiennent leur effet. Par conséquent, nous divisons la gamme d'énergie en trois intervalles. Ils sont définis par comparaison du temps court  $d\tau_1 \approx 2,5 \text{ min}$  et du temps long  $d\tau_2 \approx 70 \text{ min}$  de la fonction d'autocorrélation  $g$  avec le temps de dérive des particules étudiées. Tout d'abord, nous définissons les basses énergies. Ce sont les particules telles que la période de dérive est supérieure à  $d\tau_2$ . Sur la **Figure 4-6**, ce sont les particules d'une énergie inférieure à 10 keV. Dans ce cas, c'est toute la gamme du signal qui contribue à la diffusion des particules. Avec  $\Omega \ll \lambda_2 \ll \lambda_1$ , l'expression du coefficient de diffusion radiale devient

$$D_{LL} = \frac{(L^*)^{10} R_e^8}{(2k_0)^2} \left(\frac{5}{7}\right)^2 \left( \frac{C_1(Kp)}{\lambda_1} + \frac{C_2(Kp)}{\lambda_2} \right). \quad (12)$$

Dans la gamme d'énergie intermédiaire, centrée autour de 100 keV **Figure 4-6**, les variations de l'asymétrie du champ magnétique corrélées sur de longs intervalles de temps sont coupées proportionnellement à  $\Omega^{-2}$ . Les variations corrélées sur de courts intervalles de temps en revanche sont encore pleinement capables de violer le troisième invariant. L'expression du coefficient de diffusion radiale devient

$$D_{LL} = \frac{(L^*)^{10} R_e^8}{(2k_0)^2} \left(\frac{5}{7}\right)^2 \left( \frac{C_1(Kp)}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2 C_2(Kp)}{\Omega^2} \right) \quad (13)$$

Enfin, pour les énergies supérieures à 1 MeV, lorsque la période de dérive  $\tau_D$  est de l'ordre du temps court  $d\tau_1$  ou inférieure à celui-ci, alors, les contributions des variations de l'asymétrie du champ magnétique corrélées sur de courts intervalles de temps sont également coupées proportionnellement à  $\Omega^{-2}$ .

$$D_{LL} = \frac{(L^*)^{10} R_e^8}{(2k_0)^2} \left(\frac{5}{7}\right)^2 \left( \frac{\lambda_1 C_1(Kp)}{\Omega^2} \right) \quad (14)$$

Cependant, la fonction d'autocorrélation  $g$  a été déduite d'une étude statistique des variations du champ magnétique avec une résolution temporelle de l'ordre de 5 min. Par conséquent, la dérivée de l'asymétrie du champ  $\dot{A}$  est une estimation observationnelle. Elle correspond à

$$\dot{A}(t) \approx \frac{A(t + d\tau_s) - A(t)}{d\tau_s} \quad (15)$$

où  $d\tau_s = 5$  min est la période d'échantillonnage.

En outre, d'après le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon, il y a une perte d'informations pour des fréquences de variation de l'asymétrie supérieures à 1/10 min. Ces deux effets peuvent conduire à une sous-estimation du processus de diffusion radiale. Tout comme au **Chapitre 3**, cette sous-estimation du phénomène de diffusion radiale est due à une résolution temporelle limitée pour la description de la dynamique du champ. Afin d'étudier l'influence de la fréquence d'échantillonnage sur le calcul des coefficients de diffusion, nous procédons à la même étude statistique avec une résolution temporelle égale à 1 minute.

## 2.2. Influence de la période d'échantillonnage

Nous donnons les nouvelles valeurs des paramètres  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  en fonction de  $Kp$

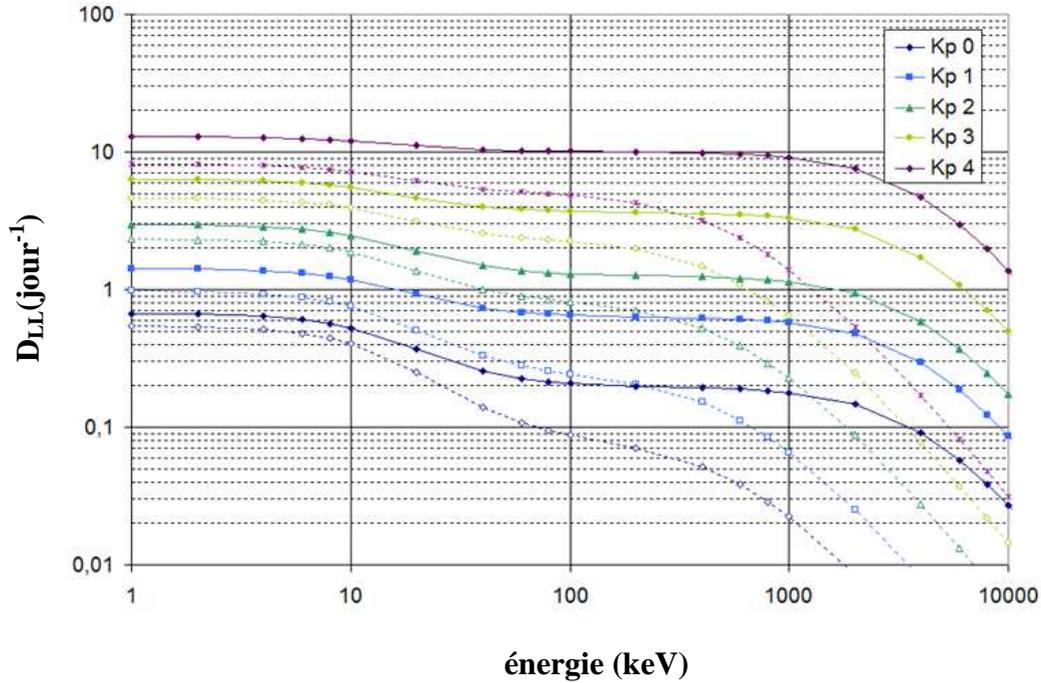
**Tableau 2.**

$Kp$	$C_1$ (nT <sup>2</sup> .Re <sup>-2</sup> min <sup>-2</sup> )	$C_2$ (nT <sup>2</sup> .Re <sup>-2</sup> min <sup>-2</sup> )	$\lambda_1$ (min <sup>-1</sup> )	$\lambda_2$ (min <sup>-1</sup> )
0	$1.32 \times 10^{-2}$	$2.28 \times 10^{-4}$	2	$1.43 \times 10^{-2}$
1	$4.26 \times 10^{-2}$	$3.83 \times 10^{-4}$		
2	$8.48 \times 10^{-2}$	$8.31 \times 10^{-4}$		
3	$2.45 \times 10^{-1}$	$1.31 \times 10^{-3}$		
4	$6.78 \times 10^{-1}$	$1.36 \times 10^{-3}$		

**Tableau 2 : Paramètres de la fonction d'autocorrélation  $g$  en fonction de l'indice  $Kp$  (résolution temporelle de 1 min)**

Le temps court  $d\tau_1 = 1/\lambda_1$  est maintenant de l'ordre de la moitié de la nouvelle période d'échantillonnage, soit 30s. Le temps long  $d\tau_2 = 1/\lambda_2$  en revanche reste de l'ordre de 70 min. Par conséquent, nous nous attendons à ce que la fréquence de coupure représentative de la compétition entre le temps de dérive  $\tau_D$  et le temps court  $d\tau_1$  soit déplacée vers les hautes

énergies. La **Figure 4-7** compare les coefficients de diffusion radiale obtenus avec une période d'échantillonnage de 5 min et les coefficients obtenus avec une période d'échantillonnage de 1 min.



**Figure 4-7 : Coefficients de diffusion radiale en fonction de l'énergie des particules considérées pour Kp entre 0 et 4 à l'orbite GEO : comparaison entre les résultats déduits d'un échantillonnage de période 5 min (pointillés) et les résultats déduits d'un échantillonnage de période 1 min (trait plein)**

**Figure 4-7**, nous observons bien un déplacement de la fréquence de coupure représentative de la compétition entre le temps de dérive et le temps court vers les hautes énergies pour un passage d'une résolution temporelle de 5 min vers une résolution temporelle d'1 min. Nous observons également une augmentation de l'intensité des coefficients de diffusion radiale. Cette augmentation est conforme à nos attentes. Elle est due à l'augmentation de la résolution temporelle.

En outre, avec une période d'échantillonnage d'1 min, un second plateau apparaît pour des énergies comprises entre 100 keV et 1 MeV. Il correspond à la gamme d'énergie telle que la période de dérive est très courte par rapport au temps long  $d\tau_2 \approx 70$  min tout en restant très grande devant le temps court  $d\tau_1 \approx 30$  s. La valeur de ce second plateau est donnée par l'équation

$$D_{LL} = \frac{(L^*)^{10} R_e^8}{(2k_0)^2} \left(\frac{5}{7}\right)^2 \frac{C_1(Kp)}{\lambda_1} \quad (16)$$

La différence relative entre le plateau des énergies moyennes et le plateau aux basses énergies est donnée par le facteur

$$\Delta(Kp) = \frac{C_2(Kp)\lambda_1}{C_1(Kp)\lambda_2} \quad (17)$$

À mesure que l'indice  $Kp$  augmente, le facteur  $\Delta$  diminue. Cela signifie que nous pouvons considérer les variations de l'asymétrie comme des variations décorréliées après des intervalles de temps plus courts en moyenne. Par exemple, pour un indice  $Kp$  égal à 4, nous avons  $\Delta = 0,28 \ll 1$ . Lorsque  $\Delta \ll 1$  et lorsque le temps de dérive des particules reste très grand par rapport à la période d'échantillonnage, la dynamique moyenne des particules piégées est pilotée par les variations d'un signal totalement décorrélé.

En outre, en supposant que le temps court  $d\tau_1 = d\tau$  correspond au plus petit temps caractéristique de variation du champ magnétique, alors

$$\dot{A}(t) = \frac{dA(t)}{d\tau} \quad (18)$$

avec  $dA(t) = A(t + d\tau) - A(t)$ .

Ainsi, le paramètre  $C_1(Kp)$  s'écrit

$$C_1(Kp) = [\dot{A}^2]_{Kp} = \frac{[(dA)^2]_{Kp}}{d\tau^2} \quad (19)$$

Par conséquent, le coefficient de diffusion radiale devient

$$D_{LL} = \frac{(L^*)^{10} R_e^8}{(2k_0)^2} \left(\frac{5}{7}\right)^2 \frac{[(dA)^2]_{Kp}}{d\tau} \quad (20)$$

En remarquant que la moyenne de la variation instantanée du flux magnétique s'écrit

$$\langle (d\Phi)^2 \rangle = 2 \left(\frac{5\pi}{7}\right)^2 (dA)^2 r^6 \quad (21)$$

le coefficient de diffusion radiale se met également sous la forme

$$D_{LL} = \frac{(L^*)^4 R_e^2 \left[ \langle (d\Phi)^2 \rangle \right]_{Kp}}{(2\pi k_0)^2 2d\tau} \quad (22)$$

Cette équation correspond à l'expression du coefficient de diffusion radiale moyen lorsque nous supposons que les variations du signal asymétrique comme parfaitement décorrélés (à Kp 4 par exemple). Elle s'applique tant que le temps de dérive des particules est très grand devant le temps le plus court de variation du champ  $d\tau$ . Nous estimons que le temps court est inférieur à la minute. Or, pour la gamme d'énergie relative aux particules piégées des ceintures de radiation, le temps de dérive est très grand par rapport à la minute (**Figure 1-3**). La relation d'ordre est donc satisfaite.

Après un intervalle de temps  $\Delta t$ , le coefficient de diffusion caractérise la dispersion des particules dans son ensemble, c'est donc la moyenne de tous les coefficients de diffusion instantanés, c'est-à-dire des coefficients de diffusion déterminés après chaque pas de temps mésoscopique  $d\tau$ . Nous perdons alors la dépendance en énergie des coefficients de diffusion radiale moyens en fonction de l'indice Kp.

### 3. Discussion des résultats obtenus

L'objectif de cette partie est de placer ce travail de recherche dans son contexte physique afin d'en présenter les apports.

Actuellement, la communauté semble considérer l'intensité du processus de diffusion radiale comme pilotée en premier lieu par les résonances entre les variations de l'environnement électromagnétique et le temps de dérive des particules considérées [e.g., *Tu et al.*, 2012]. En remontant à l'origine de cette affirmation, nous remarquons qu'il s'agit en fait d'une des conclusions de l'article de référence écrit par *Fälthammar* [1965]. Tout comme dans le travail analytique présenté **Chapitre 3**, *Fälthammar* se place dans le cadre du modèle de champ électromagnétique de Mead. Dans un premier temps, il s'attache à caractériser le déplacement radial d'une famille de particules équatoriales soumise à un champ magnétique dynamique. Dans nos travaux, nous cherchons plutôt à déterminer la variation du flux magnétique associé à cette famille de particules équatoriales. Il est possible de vérifier aisément que les deux formulations de la dynamique des particules en termes de variation de la distance radiale et en termes de variation du flux magnétique sont équivalentes [*Lejosne et al.*, 2012]. Ensuite, *Fälthammar* intègre la variation de la distance radiale sur un intervalle de temps  $\Delta t$  grand par rapport à la période de dérive. Cette variance est égale à

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta r)^2 \rangle &= \frac{r_0^4}{4k_0^2} (S(\Delta t) - S(0))^2 \\
&+ \frac{1}{2} \left( \frac{8}{21} \right)^2 \frac{r_0^4}{k_0^2} (A^2(\Delta t) + A^2(0) - 2A(\Delta t)A(0)\cos(\Omega\Delta t)) \\
&+ \frac{r_0^4 \Omega^2}{k_0^2} \left( \frac{5}{7} \right)^2 \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} A(t)A(u)\cos(\Omega(t-u))dtdu
\end{aligned} \tag{23}$$

De manière équivalente, en utilisant l'équation (27) du **Chapitre 3**, la variance spatiale du flux magnétique s'écrit

$$\langle \phi^2 \rangle = 2 \left( \frac{10}{7} \right)^2 \pi^2 r^2 \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \dot{A}(u)\dot{A}(t)\cos(\Omega(u-t))dudt. \tag{24}$$

Une intégration par partie nous permet de réécrire cette équation sous la forme

$$\langle \phi^2 \rangle = 2 \left( \frac{10}{7} \right)^2 \pi^2 r_0^2 Z(\Omega, \Delta t) \tag{25}$$

où  $Z(\Omega, \Delta t)$  est la fonction définie par

$$\begin{aligned}
Z(\Omega, \Delta t) &= A^2(0) + A^2(\Delta t) - 2A(0)A(\Delta t)\cos(\Omega\Delta t) \\
&- 2\Omega \left( A(\Delta t) \int_{u=0}^{\Delta t} A(u)\sin(\Omega(\Delta t - u))du + A(0) \int_{u=0}^{\Delta t} A(u)\sin(\Omega u)du \right) \\
&+ \Omega^2 \int_{t=0}^{\Delta t} \int_{u=0}^{\Delta t} A(t)A(u)\cos(\Omega(t-u))dtdu
\end{aligned} \tag{26}$$

Ensuite, *Fälthammar* effectue un traitement statistique du problème. Il suppose que le signal  $A$  est un signal stationnaire. Par conséquent, il considère que seul le terme relatif à la double

intégrale de l'asymétrie  $\frac{r_0^4 \Omega^2}{k_0^2} \left( \frac{5}{7} \right)^2 \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} A(t)A(u)\cos(\Omega(t-u))dtdu$  fournit une contribution

significative à la variance de la distance radiale à mesure que l'intervalle de temps augmente. Il suppose que les contributions des autres termes restent bornées. Ces contributions sont donc négligées pour un intervalle de temps  $\Delta t$  infiniment long. Tout se passe donc comme si les effets produits par les autres termes étaient réversibles. Il considère alors que le coefficient de diffusion s'écrit

$$D_{LL}(\Gamma) = \frac{1}{8} \left( \frac{5}{7} \right)^2 \frac{R_e^8 \Omega^2 H(\Omega)}{k_0^2} L^{10}, \quad (27)$$

avec  $H(\Omega)$  la densité spectrale de puissance de l'asymétrie

$$H(\Omega) = 4 \int_{v=0}^{\infty} [A(0)A(v)] \cos(\Omega v) dv. \quad (28)$$

Ensuite, il décrit le cas particulier d'un champ magnétique dont la norme augmente rapidement puis décroît lentement par rapport à la période de dérive. Ces variations du champ se produisent à des instants aléatoires pendant un intervalle de temps infiniment long. Il indique alors que la densité spectrale de puissance est proportionnelle à  $\Omega^{-2}$ . Il en conclut que le coefficient de diffusion radiale ne dépend pas dans ce cas de l'énergie des particules considérées (cf. eq. (27)).

Au contraire, en effectuant une analyse statistique des mesures de champ magnétique à l'orbite GEO, nous concluons que la diffusion d'une population de particules équatoriales est due à des variations de l'asymétrie du champ sur des périodes très courtes devant le temps de dérive. Nous montrons que ces contributions des variations du champ sur de très courts intervalles de temps ne sont pas réversibles en moyenne. Nous trouvons d'ailleurs qu'il s'agit là de la principale contribution à l'intensité de la diffusion radiale. À l'échelle mésoscopique, nous définissons des coefficients de diffusion instantanés. Ils décrivent le taux d'étalement du troisième invariant dans l'espace des invariants adiabatiques après chaque intervalle de temps typique de la variation de l'asymétrie du champ. Ce temps caractéristique  $d\tau$  est toujours très court devant la période de dérive des particules, quelque soit l'énergie considérée. Par conséquent, en supposant que les variations de l'asymétrie sont parfaitement décorrélatées, nous montrons qu'en moyenne ce sont les trois premiers termes de  $Z$  (26) qui sont les principaux pilotes de l'intensité des coefficients de diffusion radiale.

$$[Z(\Omega, d\tau)] = [A^2(0) + A^2(d\tau) - 2A(0)A(d\tau)] = [(dA)^2] \quad (29)$$

Afin de déterminer des coefficients de diffusion sur des échelles de temps réalistes, nous décrivons le processus sur des intervalles de temps  $\Delta t$  très grands devant le temps de dérive des particules. Nous supposons alors que la dispersion totale est la somme de toutes les dispersions instantanées

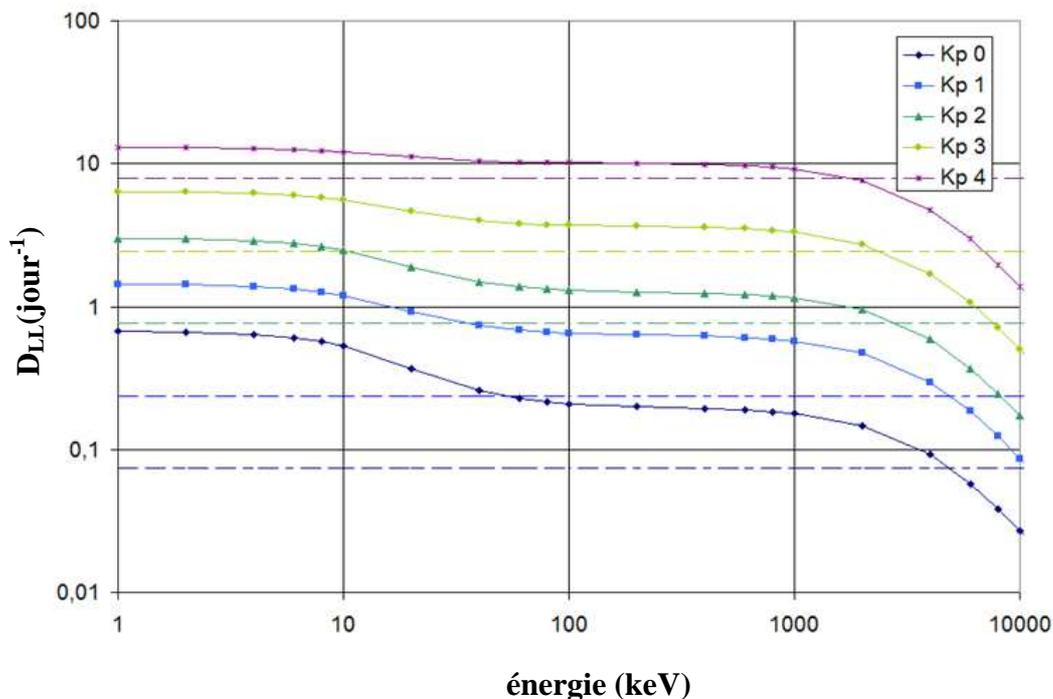
$$[Z(\Omega, \Delta t)] = \sum [Z(\Omega, d\tau)] = \sum [(dA)^2] = \frac{\Delta t}{d\tau} [(dA)^2] \quad (30)$$

Le coefficient de diffusion total est donc la moyenne des coefficients de diffusion instantanés

$$D_{LL} = \frac{(L^*)^4 R_e^2 \left\langle \left( \frac{d\Phi}{d\tau} \right)^2 \right\rangle}{(2\pi k_0)^2} \quad (31)$$

Nous retrouvons ainsi l'équation (22).

Par conséquent, à la différence des travaux précédents, nous affirmons que la diffusion des particules des ceintures de radiation n'est pas pilotée en premier lieu par des variations du champ en résonance avec la période de dérive. Nous étendons au contraire la capacité à violer le troisième invariant adiabatique de manière irréversible à une gamme de fréquence beaucoup plus large. Nous obtenons ainsi des coefficients plus grands que ceux déduits des études précédentes, en particulier, à basse énergie. **Figure 4-8**, nous présentons une comparaison de nos travaux avec les coefficients fournis par *Brautigam et Albert* [2000].



**Figure 4-8 : Coefficients de diffusion radiale en fonction de l'énergie des particules considérées pour Kp entre 0 et 4 à l'orbite GEO : comparaison entre les résultats de nos travaux (1min de résolution, trait plein) et les résultats de *Brautigam et Albert* [2000] (pointillés).**

Les coefficients de diffusion radiale de *Brautigam et Albert* [2000] sont des coefficients empiriques. Ils proviennent d'une interpolation radiale entre les valeurs ponctuelles déterminées par *Lanzerotti et Morgan* [1973] et *Lanzerotti et al.* [1978] à L=4 et L=6.6 respectivement. Les coefficients de diffusion radiale de *Brautigam et Albert* [2000] sont des références pour les simulations numériques de la dynamique des ceintures de radiation

terrestres. Les ordres de grandeur obtenus suivant notre protocole de modélisation locale de Mead sont comparables. De manière générale, ils sont supérieurs aux coefficients de *Brautigam et Albert* [2000]. Cette observation est en accord avec le fait que nous étendons la capacité à violer le troisième invariant adiabatique de manière irréversible à une gamme de fréquence beaucoup plus large que la seule fréquence de résonance. Ils sont supérieurs d'un facteur 10 maximum en particulier à basse énergie et à Kp faible. Tout comme les coefficients de *Brautigam et Albert* [2000], pour une activité magnétique moyenne (Kp 4), nous perdons la dépendance des coefficients de diffusion en l'énergie de la population de particules équatoriales piégées considérée.

Des articles récents tels que ceux de *Ozeke et al.* [2012] ou *Tu et al.* [2012] affirment que les coefficients de diffusion estimés par *Brautigam et Albert* [2000] sont une surestimation du processus de diffusion radiale. Cependant, ces articles s'appuient sur la formulation de la diffusion radiale donnée par *Fei et al.* [2006]. Notre travail théorique du **Chapitre 2** fournit les outils pour en relever les écueils.

Tout d'abord, *Fei et al.* [2006] choisissent de décomposer le phénomène de diffusion radiale en une somme de deux contributions :

$$D_{LL} = D_{LL}^B + D_{LL}^E \quad (32)$$

Ils calculent séparément un coefficient de diffusion d'origine magnétique ( $D_{LL}^B$ ) et un coefficient de diffusion d'origine électrique ( $D_{LL}^E$ ). Le coefficient de diffusion magnétique caractérise l'effet de la variation du champ magnétique sur la dynamique des particules. Le coefficient de diffusion électrique rend compte à la fois des effets des champs électriques induits et des effets des champs électrostatiques. Ainsi, dans le cas des variations d'un champ magnétique symétrique, nous avons  $D_{LL}^B > 0$ . Du fait de l'apparition de champs électriques induits, nous avons également  $D_{LL}^E > 0$ . Par conséquent, avec la formulation de *Fei et al.* [2006], nous obtenons  $D_{LL} > 0$ . Nous sommes donc menés à penser que les variations d'un champ magnétique symétrique peuvent conduire à de la diffusion radiale. Or, cette approche est en contradiction avec la théorie [e.g., **Chapitre 2** ; *Northrop*, 1963]. Elle induit donc une erreur dans le calcul de coefficients de diffusion radiale.

De plus, dans l'évaluation de la diffusion décrite par *Fei et al.* [2006], que ce soit pour le coefficient de diffusion d'origine magnétique ou pour le coefficient de diffusion d'origine électrique, ce sont les variations totales qui sont prises en compte et non la partie asymétrique des variations le long de la coquille de dérive. Cette approche est également en contradiction avec la théorie [e.g., **Chapitre 2** ; *Northrop*, 1963].

Enfin, tout comme *Fälthammar* [1965], *Fei et al.* [2006] font l'hypothèse de signaux stationnaires. L'évaluation des coefficients de diffusion radiale passe alors par le calcul de la densité spectrale de puissance à des fréquences multiples de la fréquence de dérive. Une telle approche n'est pas compatible avec le calcul de coefficients de diffusion relatifs à des

intervalles de temps de taille finis, représentatifs d'une dynamique en fonction de l'activité solaire (**Chapitre 4**).

### *Conclusions*

Dans ce chapitre, nous avons présenté un protocole pour le calcul de coefficients de diffusion radiale à l'orbite GEO. Ce protocole s'appuie sur la modélisation de l'environnement électromagnétique au voisinage de l'équateur magnétique par le biais du modèle de Mead. Il se limite donc aux périodes d'activité magnétique calme à modérée. Plus précisément, nous avons choisi de restreindre le cadre de ce protocole aux intervalles de temps dont l'indice Kp se situe entre 0 et 4. Nous avons procédé à une analyse statique des variations de l'asymétrie du champ magnétique à l'orbite GEO sur une période de plus de 7 ans, de septembre 1998 à juin 2006. Nous avons noté que les propriétés statiques des variations de l'asymétrie du champ magnétique sont variables en fonction de l'indice Kp. Les variations de l'asymétrie du champ magnétique ne correspondent donc pas aux variations d'un signal stationnaire. Ainsi, à la différence de l'article de référence de *Fälthammar* [1965], nous ne supposons pas que le signal  $A$  est un signal stationnaire. Nous avons simplement quantifié les coefficients de diffusion radiale à l'orbite GEO à l'aide d'une modélisation de la fonction d'autocorrélation des variations de l'asymétrie du champ magnétique en une somme de deux exponentielles. Nous obtenons alors des ordres de grandeurs pour les coefficients de diffusion radiale comparables à ceux fournis par *Brautigam et Albert* [2000]. À la différence des coefficients de *Brautigam et Albert* [2000], nos coefficients présentent une légère dépendance en l'énergie des particules considérées. Néanmoins, lorsqu'il est possible de considérer le signal des variations de l'asymétrie du champ magnétique comme un signal parfaitement décorrélé, le coefficient de diffusion radiale moyen est alors simplement la moyenne des coefficients de diffusion déterminés à l'échelle mésoscopique après chaque temps caractéristique de variation du champ. À mesure que l'activité magnétique Kp augmente, la dépendance des coefficients de diffusion radiale en l'énergie des particules considérées diminue. Ainsi, nous montrons que le phénomène de diffusion radiale des particules piégées des ceintures de radiation n'est pas piloté en premier lieu par des résonances entre les variations du champ électromagnétique et la période de dérive des particules. Au contraire, nous étendons la capacité à violer le troisième invariant adiabatique à une gamme de fréquence beaucoup plus large que la fréquence de dérive.



## Conclusions et perspectives

Le phénomène de diffusion radiale est une manifestation de la variabilité du troisième invariant adiabatique d'une population de particules piégées soumise à un champ électromagnétique dynamique. Lorsque la résolution temporelle du modèle statistique de la dynamique des particules piégées est à l'échelle du temps de dérive, la diffusion radiale est décrite par le biais de coefficients de diffusion dans l'espace des invariants adiabatiques. La multiplication des résultats fournis par la littérature nous informe de la place de choix occupée par la question de la caractérisation du phénomène de diffusion radiale dans la description de la dynamique des ceintures de radiation terrestres. En outre, la dispersion des résultats sur plusieurs décades montre que cette question reste en suspens. Ainsi, dans les modèles physiques des ceintures de radiation, la diffusion radiale est vue comme une boîte noire. Les incertitudes de plusieurs décades sur les coefficients sont alors une limite remarquable à la pertinence de la modélisation physique des ceintures de radiation.

Pour apporter une réponse à la question de la caractérisation du phénomène de diffusion radiale au sein des ceintures de radiation, nous avons opté pour une technique de changement d'échelle. Nous nous sommes placés à une échelle mésoscopique, i.e. une échelle de temps adaptée à la dynamique de la diffusion, comprise entre le temps de rebond et le temps de dérive de la population de particules piégées considérées. Nous avons travaillé dans l'espace réel. Nous avons exprimé la variation instantanée du troisième invariant adiabatique relatif à une particule piégée à partir d'un suivi de sa trajectoire de dérive moyennée sur le rebond et reportée au niveau de l'équateur magnétique. Nous avons dégagé le rôle des champs électriques induits par les variations du champ magnétique. Les champs électriques induits engendrent un terme de vitesse des champs croisés qui s'ajoute à la vitesse de dérive magnétique des particules d'un même contour de dérive. C'est ce terme qui pilote le déplacement dans l'espace réel des particules par rapport au contour de dérive initial. Il est indépendant de la charge et de l'énergie des particules considérées. Dans le cas d'un champ magnétique symétrique, c'est le déplacement dû à la vitesse de dérive des champs croisés qui assure la conservation du troisième invariant adiabatique. Les particules sont alors immobiles dans l'espace des invariants adiabatiques. Nous avons ainsi mis en lumière le rôle central de l'asymétrie des variations des champs électromagnétiques dans la violation du troisième invariant adiabatique. En outre, nous avons reformulé la variation instantanée du flux magnétique sous une forme compacte semblable à celle déterminée par *Northrop* [1963] dans l'espace des potentiels d'Euler. Cette forme compacte signale le rôle de la compétition entre le temps de dérive et le temps caractéristique de variation du champ électromagnétique dans l'intensité du processus de diffusion radiale.

Grâce à ce travail d'analyse théorique à l'échelle mésoscopique, nous avons établi une expression analytique d'un coefficient de diffusion radiale lié à un point  $(M, K, L^*)$  de l'espace des invariants adiabatiques. Cette formulation est adaptée au cas le plus général dans la mesure où les deux premiers invariants sont conservés et la population de particules piégée.

Elle n'est donc pas restreinte au cas de l'environnement électromagnétique terrestre. Nous pourrions ainsi envisager de la mettre à profit pour la caractérisation de la dynamique des particules piégées des ceintures de radiation d'autres planètes du système solaire telles que Jupiter ou Saturne par exemple.

Les approches analytiques et numériques pour le calcul des coefficients de diffusion radiale fournissent une illustration de l'approche théorique générale. Elles fournissent également de premiers ordres de grandeur pour les coefficients. En outre, nous avons montré par des exemples analytiques et numériques l'issue de la compétition entre temps de dérive et temps de variation de l'environnement électromagnétique : c'est lorsque le temps caractéristique de variation de l'environnement électromagnétique est très court devant le temps de dérive des particules que l'intensité du processus de diffusion radiale est maximale. Au contraire, lorsque le temps caractéristique de variation du champ électromagnétique est très grand devant le temps de dérive, tout se passe comme si l'environnement électromagnétique était stationnaire à l'échelle de la dérive. La variation du flux magnétique associé tend alors vers zéro.

Que ce soit d'un point de vue numérique ou expérimental, le calcul des coefficients de diffusion radiale passe par la description des pilotes du phénomène à l'échelle mésoscopique. L'objectif était donc d'estimer les variations de l'asymétrie du champ magnétique et de quantifier les champs électriques induits à l'échelle mésoscopique. Les protocoles numériques et observationnels développés sont donc limités à la fois par la qualité de la restitution de la dynamique de l'environnement électromagnétique, par la qualité de la quantification de l'asymétrie du champ magnétique et par la qualité de la détermination des champs électriques induits. La pertinence des coefficients de diffusion radiale estimés numériquement est limitée la résolution temporelle des modèles d'environnement électromagnétique. En effet, puisqu'il s'agit de modèles, ils ne peuvent correspondre qu'à la représentation d'un état moyen de l'environnement électromagnétique en fonction de paramètres représentatifs de l'activité solaire. Dans le cas du modèle de champ T89 piloté par l'indice  $K_p$ , la résolution temporelle est de l'ordre de plusieurs heures. Elle n'est donc pas adaptée à l'échelle mésoscopique. Les variations de l'environnement électromagnétique sur des temps courts par rapport au temps de dérive sont filtrés par la modélisation du champ externe de type T89. Nous sommes donc amenés à penser que les coefficients de diffusion radiale obtenus numériquement sous-estiment l'intensité du phénomène, en particulier pour les périodes d'activité magnétique modérée à agitée. Des coefficients de diffusion radiale plus précis pourraient être évalués numériquement en mettant à profit des modèles de dynamique de l'environnement électromagnétique disposant d'une excellente résolution temporelle, i.e. une résolution temporelle de l'ordre de l'échelle mésoscopique.

Afin de nous affranchir de cette limitation, nous avons alors mené une analyse statistique de mesures du champ magnétique à l'orbite GEO. Nous avons développé un protocole pour le calcul de diffusion radiale à l'orbite GEO à partir de la modélisation de l'environnement électromagnétique au voisinage de l'équateur magnétique par le biais du modèle de Mead. Nous avons noté que les propriétés statiques des variations de l'asymétrie du champ magnétique étaient variables en fonction de l'indice d'activité géomagnétique  $K_p$ . Nous n'avons donc pas fait l'hypothèse d'un signal d'asymétrie stationnaire. Nous avons simplement quantifié les coefficients de diffusion radiale à l'orbite GEO à l'aide d'une

modélisation de la fonction d'autocorrélation des variations de l'asymétrie du champ magnétique en une somme de deux exponentielles. Nous avons obtenu des coefficients en accord avec une loi empirique couramment utilisée dans les modèles physiques de description de la dynamique des ceintures de radiation. Nous avons montré que le phénomène de diffusion radiale des particules piégées des ceintures de radiation n'était pas piloté en premier lieu par des résonances entre les variations du champ électromagnétique et la période de dérive des particules. Au contraire, nous avons étendu la capacité à violer le troisième invariant adiabatique à une gamme de fréquence beaucoup plus large que la fréquence de dérive. C'est pourquoi nous obtenons des coefficients de diffusion radiale supérieurs dans l'ensemble aux coefficients de diffusion fournis par la littérature (**Figure 1-6**). Des coefficients de diffusion radiale plus précis pourraient être évalués expérimentalement en mettant à profit des modèles analytiques de dynamique de l'environnement électromagnétique disposant d'une représentation de l'asymétrie du champ magnétique plus précise que celle proposée par le modèle de Mead. La modélisation de la dépendance en heure locale du champ magnétique par une fonction cosinus forcée nous limite en effet aux périodes d'activité magnétique calme à modérée. Avec un modèle d'environnement analytique plus raffiné, nous pourrions étendre la démarche aux périodes de Kps forts. Les méthodes numériques et analytiques dédiées au calcul des coefficients de diffusion radiale appellent donc à un effort de modélisation adaptée de l'environnement électromagnétique et de sa dynamique. Pour les besoins de Salammbô, les coefficients de diffusion radiale déduits de ces méthodes ont été calculés en fonction de l'indice d'activité géomagnétique Kp. Ces méthodes pourraient être aisément transposées à d'autres indicateurs de l'activité magnétique.

En outre, l'analyse statistique des mesures de champ magnétique a permis d'estimer le temps caractéristique le plus court pour la variation de l'environnement électromagnétique. Son ordre de grandeur est inférieur à la minute. Dans ce cas, une violation du deuxième invariant adiabatique est également envisageable pour certaines populations des ceintures de radiation, en particulier pour les protons de basse énergie des ceintures de radiation (**Figure 1-3**). Nous pourrions donc envisager d'étudier la violation des deux premiers invariants adiabatiques en transposant à des résolutions temporelles plus fines la technique de changement d'échelle présentée dans ce manuscrit.



## Annexe A : Expression du temps de rebond dans le cas limite équatorial

L'expression du temps de rebond est

$$\tau_B(s_m) = 2 \int_{s_m}^{s_m'} \frac{ds}{v_{//}(s)} \quad (\text{A1})$$

avec

$$v_{//}(s) = v \sqrt{1 - \frac{B(s)}{B_m}}. \quad (\text{A2})$$

Soit  $\varepsilon_m$  un déplacement élémentaire le long de la ligne de champ magnétique. Nous cherchons à déterminer

$$\tau_B(\varepsilon_m) = \frac{2}{v} \int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_m'} \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{B(s)}{B_m}}} = \frac{4}{v} \int_0^{\varepsilon_m} \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{B(s)}{B_m}}}. \quad (\text{A3})$$

Posons

$$S(\varepsilon_m) = \int_0^{\varepsilon_m} \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{B(s)}{B_m}}} \quad (\text{A4})$$

Puisque l'abscisse curviligne  $s$  tend vers 0, nous effectuons un développement limité à l'ordre 2 du module du champ magnétique au voisinage de l'équateur magnétique

$$B(s) = B_0 + s \left. \frac{\partial B}{\partial s} \right|_0 + \frac{s^2}{2} \left. \frac{\partial^2 B}{\partial s^2} \right|_0 + \sigma(s^2) \quad (\text{A5})$$

Par définition de l'équateur magnétique,  $\left. \frac{\partial B}{\partial s} \right|_0 = 0$ .

Ainsi,

$$B(s) = B_0 + \frac{s^2}{2} \left. \frac{\partial^2 B}{\partial s^2} \right|_0 + \sigma(s^2). \quad (\text{A6})$$

En appliquant cette relation au point  $\varepsilon_m$ , nous obtenons

$$\varepsilon_m = \sqrt{\frac{2(B_m - B_0)}{\left(\frac{\partial^2 B}{\partial s^2}\right)_0}}. \quad (\text{A7})$$

et  $S(\varepsilon_m)$  devient

$$S(\varepsilon_m) = \sqrt{\frac{B_m}{B_m - B_0}} \int_0^{\varepsilon_m} \frac{ds}{\left(1 - \left(\frac{s}{\varepsilon_m}\right)^2\right)^{1/2}}. \quad (\text{A8})$$

Avec le changement de variable  $u = s/\varepsilon_m$ , puisque

$$\int_0^1 \frac{du}{(1-u^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2}, \quad (\text{A9})$$

$$S(\varepsilon_m) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2\left(\frac{1}{B_m} \frac{\partial^2 B}{\partial s^2}\right)_0^{1/2}}. \quad (\text{A10})$$

En confondant  $B_m$  et  $B_0$ , le temps de rebond équatorial s'écrit

$$\tau_B(\varepsilon_m) = \frac{2\pi\sqrt{2}}{v\left(\frac{1}{B_0} \frac{\partial^2 B}{\partial s^2}\right)_0^{1/2}}. \quad (\text{A11})$$

Donc

$$\tau_B(0) = \frac{2\pi\sqrt{2}R_c(0)}{v} \quad (\text{A12})$$

avec

$$R_c(0) = \left(\frac{1}{B_0} \frac{\partial^2 B}{\partial s^2}\right)_0^{-1/2}. \quad (\text{A13})$$

Dans le cas dipolaire,  $R_c(0) = r_0/3$ , et nous obtenons la formulation exacte correspondant à l'approximation de *Schulz* [1991].

$$\tau_B(0) = \frac{4r_0T(1)}{v} \quad (\text{A14})$$

avec  $T(1) \cong 0,74$ .

## Annexe B :

# Expression de la vitesse de dérive moyennée sur le mouvement de rebond et reportée au niveau de l'équateur magnétique

L'expression de la vitesse de dérive moyennée sur le mouvement de rebond et reportée au niveau de l'équateur magnétique est donnée par *Roederer* [1970, (2.41.a)]

$$\mathbf{V}_D = \frac{2p\nabla_0 I \times \mathbf{e}_0}{q\tau_B B_0} + \frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{e}_0}{B_0}, \quad (\text{B1})$$

où les variables sont définies de la manière suivante:  $p$  est la quantité de mouvement de la particule,  $\nabla_0 I$  est le gradient de  $I$  au niveau de l'équateur magnétique déterminé en conservant l'intensité du champ magnétique au point miroir  $B_m$  constant et  $\mathbf{E}_0$  sont les champs électriques au niveau de l'équateur, y compris les champs électriques induits.

Or, l'énergie totale du centre-guide s'écrit

$$\varepsilon = \varepsilon_c + qU \quad (\text{B2})$$

Avec  $U$  le potentiel électrostatique et  $\varepsilon_c$  l'énergie cinétique du centre-guide

$$\varepsilon_c = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2 = \varepsilon_0 \sqrt{1 + \frac{2MB_m}{\varepsilon_0}} - \varepsilon_0. \quad (\text{B3})$$

Par conséquent, le gradient de l'énergie totale du centre-guide pris à  $B_m$  constant s'écrit

$$\nabla_0 \varepsilon = -q\mathbf{E}_{\text{stat}} + \frac{M}{\gamma} \nabla_0 B_m \quad (\text{B4})$$

avec  $\mathbf{E}_{\text{stat}} = -\nabla_0 U_0$  les champs électrostatiques au niveau de l'équateur magnétique

Dans le cas de particules équatoriales et en l'absence de potentiel électrostatique, nous obtenons donc l'expression

$$\mathbf{V}_D = -\frac{M}{\gamma q} \frac{\nabla B \times \mathbf{e}_0}{B}. \quad (\text{B4})$$

Dans le cas le plus général, nous cherchons à établir le lien entre  $\nabla_0 B_m$  et  $\nabla_0 I$ . Pour cela, nous utilisons la conservation de la quantité  $K = I\sqrt{B_m}$ .

Nous obtenons alors la relation

$$\nabla_0 B_m = -\frac{2B_m}{I} \nabla_0 I_K \quad (\text{B5})$$

où  $\nabla_0 I_K$  est le gradient équatorial de  $I$  déterminé pour une valeur de  $K$  constante.

En outre, en utilisant les équations (A.V.2) p.152 et (2.8) p.36 de *Roederer* [1970], nous obtenons la relation

$$\nabla_0 I_K = \frac{2I}{v\tau_b} \nabla_0 I. \quad (\text{B6})$$

Par conséquent, puisque  $M = p^2 / (2m_0 B_m)$ ,

$$\frac{M}{\gamma} \nabla_0 B_m = -\frac{2p}{\tau_b} \nabla_0 I. \quad (\text{B7})$$

Ainsi, nous obtenons

$$\nabla_0 \mathcal{E} = -q\mathbf{E}_{stat} - \frac{2p}{\tau_b} \nabla_0 I, \quad (\text{B8})$$

Et nous vérifions donc l'égalité

$$\frac{-\nabla_0 \mathcal{E} \times \mathbf{e}_0}{qB_0} + \frac{\mathbf{E}_{ind} \times \mathbf{e}_0}{B_0} = \frac{2p \nabla_0 I \times \mathbf{e}_0}{q\tau_b B_0} + \frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{e}_0}{B_0}, \quad (\text{B9})$$

où  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{\text{stat}} + \mathbf{E}_{\text{ind}}$  représente les champs électriques au niveau de l'équateur magnétique, y compris les champs électriques induits.

L'expression de la vitesse de dérive moyennée sur le mouvement de rebond et reportée au niveau de l'équateur magnétique s'écrit donc de manière équivalente

$$\mathbf{V}_D = \frac{-\nabla_0 \varepsilon \times \mathbf{e}_0}{qB_0} + \frac{\mathbf{E}_{\text{ind}} \times \mathbf{e}_0}{B_0}. \quad (\text{B10})$$



## Annexe C :

### Lien entre la fonction de distribution $f(M, K, L^*)$ et le flux différentiel unidirectionnel $j(r_0, \mu_0, E_c)$

Soit  $\delta A_0$  une surface infinitésimale située au niveau de l'équateur magnétique et orientée dans la direction du champ magnétique.

Le nombre de particules  $\delta N$  d'énergie cinétique comprise entre  $E_c$  et  $E_c + \delta E_c$ , d'angle d'attaque équatorial compris entre  $\alpha_0$  et  $\alpha_0 + \delta \alpha_0$ , traversant  $\delta A_0$  pendant un temps infinitésimal  $\delta t$  s'écrit

$$\delta N = 2\pi j(r_0, \mu_0, E_c) \mu_0 \delta \mu_0 \delta A_0 \delta E_c \tau_B \quad (C1)$$

Il s'écrit également

$$\delta N = f(M, K, L^*) \delta M \delta K \delta L^* \quad (C2)$$

Donc

$$f(M, K, L^*) = \frac{2\pi \mu_0 \delta \mu_0 \delta A_0 \delta E_c \tau_B}{\delta M \delta K \delta L^*} j(r_0, \mu_0, E_c) \quad (C3)$$

Or, puisque

$$L^* = -\frac{2\pi k_0}{\Phi R_e} \quad (C4)$$

$$\delta L^* = \frac{(L^*)^2 R_e}{2\pi k_0} B_0 \delta A_0 \quad (C5)$$

En outre,

$$\delta M \delta K = \begin{vmatrix} \frac{\partial M}{\partial \mu_0} & \frac{\partial K}{\partial \mu_0} \\ \frac{\partial M}{\partial E_c} & \frac{\partial K}{\partial E_c} \end{vmatrix} \delta \mu_0 \delta E_c \quad (C6)$$

avec

$$\frac{\partial K}{\partial E_c} = 0. \quad (\text{C7})$$

Donc

$$\delta M \delta K = \left| \frac{\partial M}{\partial E_c} \frac{\partial K}{\partial \mu_0} \right| \delta \mu_0 \delta E_c \quad (\text{C8})$$

En suivant *Roederer* [1970]

$$\frac{\partial M}{\partial E_c} = \frac{\gamma(1-\mu_0^2)}{B_0} \quad (\text{C9})$$

Et, avec  $S_b = v\tau_B/2$ ,

$$\frac{\partial K}{\partial \mu_0} = \frac{\partial B_m}{\partial \mu_0} \frac{S_b}{2\sqrt{B_m}} = \frac{\mu_0 S_b \sqrt{B_0}}{(1-\mu_0^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 v \sqrt{B_0}}{2(1-\mu_0^2)^{3/2}} \tau_B \quad (\text{C10})$$

donc

$$\delta M \delta K \delta L^* = \frac{(L^*)^2 R_e}{2\pi k_0} \frac{\gamma \sqrt{B_m}}{2} \mu_0 \tau_B \delta A_0 \delta \mu_0 \delta E_c \quad (\text{C11})$$

Ainsi

$$\frac{2\pi\mu_0\delta\mu_0\delta A_0\delta E_c\tau_B}{\delta M\delta K\delta L^*} = \frac{8\pi^2 k_0}{(L^*)^2 R_e \gamma \sqrt{B_m}} \quad (\text{C12})$$

En notant que

$$\sqrt{B_m} = \frac{p}{\sqrt{2m_0 M}} \quad (\text{C13})$$

$$f(M, K, L^*) = \frac{k_0}{R_e} \left( \frac{4\pi}{L^*} \right)^2 \sqrt{\frac{m_0^3 M}{2}} \frac{j(r_0, \mu_0, E_c)}{p^2} \quad (\text{C14})$$

# Références

Abel, B., R.M. Thorne, and A.L. Vampola (1994), Solar cyclic behavior of trapped energetic electrons in Earth's inner radiation belt, *J. Geophys. Res.*, 99, A10, 19427-19431, doi:10.1029/94JA01626.

Bedingfield, K.L., Leach, R.D., and M.B., Alexander, Editor (1996), *Spacecraft System Failures and Anomalies Attributed to the Natural Space Environment*, NASA Reference Publication 1390.

Beutier, T. (1993), *Modélisation tri-dimensionnelle pour l'étude de la dynamique des ceintures de radiation*, thèse de doctorat – ENSAE.

Bourdarie, S. (1996), *Modélisation de la dynamique des ceintures de radiations à l'échelle de l'orage magnétique*, thèse de doctorat – ENSAE.

Bourrieau, J., David, J.-P., et L. Lévy (2008), *Environnement spatial*, notes de cours Formation SUPAERO, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace.

Brautigam, D. H., and J. M. Albert (2000), Radial diffusion analysis of outer radiation belt electrons during the October 9, 1990, magnetic storm, *J. Geophys. Res.*, 105(A1), 291–309, doi:10.1029/1999JA900344.

Brautigam, D.H., and J.T. Bell (1995), CRRESELE Documentation, PL-TR-95-2128, *Environmental Research Papers*, 1178, Phillips Laboratory.

Daly, E.J., J. Lemaire, D. Heynderickx, and D.J. Rodgers (1996), Problems with models of the radiation belts, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, vol. 43, no. 2, pp. 403-415.

Delcourt, D.C., and J.-A. Sauvaud (1999), Populating of the cusp and boundary layers by energetic (hundreds of keV) equatorial particles, *J. Geophys. Res.*, 104(A10), 22635-22648, doi: 10.1029/1999JA900251.

Fälthammar, C.G. (1965), Effects of time-dependent electric fields on geomagnetically trapped radiation, *J. Geophys. Res.*, 70, 11, 2503.

Fälthammar, C.G. (1968), Radial diffusion by violation of the third adiabatic invariant, *B.M. McCormac*, 157.

Fei, Y., A.A. Chan, S.R. Elkington, and M.J. Wiltberger (2006), Radial diffusion and MHD particle simulations of relativistic electron transport by ULF waves in September 1998 storm, *J. Geophys. Res.*, *111*, A12209, doi: 10.1029/2005JA011211.

Garault, E. (2012), Modélisation de la variabilité du processus de diffusion radiale au sein des ceintures de radiation terrestres, Rapport de stage Master 2 Techniques spatiales et instrumentation.

Ginet, G.P., O'Brien, T.P., Huston, S.L., Johnston, W.R., Guild, T.B., Friedel, R., Lindstorm, C.D., Roth, C.J., Whelan, P., Quinn, R.A., Madden, D., Morley, S., Su, Yi-Jiun (2013), AE9, AP9 and SPM : New Models for Specifying the Trapped Energetic Particle and Space Plasma Environment, *Space Sci Rev*, doi: 10.1007/s11214-013-9964-y.

Horne, R.B., S.A. Glauert, N.P. Meredith, D. Boscher, V. Maget, D. Heynderickx and D., Pitchford (2013), Space weather impacts on satellites and forecasting the Earth's electron radiation belts with SPACECAST, *Space Weather*, *11*, doi: 10.1002/swe.2023.

Huang, C.L., H.E. Spence, M.K. Hudson, and S.R. Elkington (2010), Modeling radial belt diffusion in ULF wave fields: 2. Estimating rates of radial diffusion using combined MHD and particle codes, *J. Geophys. Res.*, *115*, A06216, doi: 10.1029/2009JA014918.

IRBEM, The international radiation belt environment modeling library, disponible à l'adresse <http://irbem.svn.sourceforge.net/viewvc/irbem/web/index.html>.

Kivelson, M.G. and C.T. Russell, Editors (1995), *Introduction to Space Physics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Koons, H.C., Mazur, J.E., Selesnick, R.S., Blake, J.B., Fennell, J.F., Roeder, J.L., and P.C., Anderson (2000), The impact of the space environment on space systems, 6<sup>th</sup> Spacecraft Charging Technology Conference, AFRL-VS-TR-20001578.

Lanzerotti, L.J., and C.G. Morgan (1973), ULF geomagnetic power near L=4: 2. Temporal variation of the radial diffusion coefficient for relativistic electrons, *J. Geophys. Res.*, *78*(22), 4600-4610, doi : 10.1029/JA078i022p04600.

Lanzerotti, L.J., D.C. Webb, and C.W. Arthur (1978), Geomagnetic field fluctuations at synchronous orbit 2. Radial diffusion, *J. Geophys. Res.*, *83*(A8), 3866-3870, doi: 10.1029/JA083iA08p03866.

Lejosne, S., D. Boscher, V. Maget and G. Rolland (2012), Bounce-averaged approach to radial diffusion modeling: From a new derivation of the instantaneous rate of change of the third adiabatic invariant to the characterization of the radial diffusion process, *J. Geophys. Res.*, *117*, A08321, doi:10.1029/2012JA018011.

Lilensten, J., Bornarel, J. (2001), *Sous les feux du Soleil, Vers une météorologie de l'espace*, Collection Grenoble Sciences, EDP Sciences.

Maget, V., (2007), *Développement et comparaison de méthodes d'assimilation de données appliquées à la restitution de la dynamique des ceintures de radiation terrestres*, thèse de doctorat – ISAE.

Mead, G.D. (1964), Deformation of the Geomagnetic Field by the Solar Wind, *J. Geophys. Res.*, 69(7), 1181-1195, doi: 10.1029/JZ069i007p01181.

Meffert, J.D., and M.S., Gussenhoven (1994), CRRESPRO Documentation, PL-TR-94-2218, *Environmental Research Papers, 1158*, Phillips Laboratory.

Min K., J. Bortnik, and J. Lee (2013), A novel technique for rapid L\* calculation: algorithm and implementation, *J. Geophys. Res. Space Physics*, 118, doi: 10.1002/jgra.50250.

Newcomb, W.A. (1958), Motion of magnetic lines of Force, *Annals of Physics*, 3, 347-385.

Northrop, T.G. (1963), *The Adiabatic Motion of Charged Particles*, Wiley-Interscience, Hoboken, N.J.

Ozeke, L.G., I.R. Mann, K.R. Murphy, I.J. Rae, D.K. Milling, S.R. Elkington, A.A. Chan, and H.J. Singer (2012), ULF wave derived radiation belt radial diffusion coefficients, *J. Geophys. Res.*, 117, A04222, doi: 10.1029/2011JA017463.

Peymirat, D. and D. Fontaine (1999), A numerical method to compute Euler potentials for non dipolar magnetic fields, *Ann. Geophys.*, 17, 328-337.

Rodgers, D.J. (1997), Empirical radiation belt models, *AGU Geophys. Monogr.*

Roederer, J.G. (1970), *Dynamics of Geomagnetically Trapped Radiation*, Springer-Verlag, New York.

Sauvaud, J.A. (2002), Earth magnetosphere, in *Space environment: Prevention and Risks related to Spacecraft Charging*, éd. Cépadués, p.81.

Sawyer, D. and J. Vette (1976), AP-8 trapped proton environment for solar maximum and solar minimum, National Space Science Data Center, Report 76-06, Greenbelt, Maryland.

Schulz, M. (1972), Drift-shell splitting at arbitrary pitch angle, *J. Geophys. Res.*, 77 (4), 624-634, doi: 10.1029/JA077i004p00624.

- Schulz, M. (1991), *The Magnetosphere*, Geomagnetism Vol 4, 88-293.
- Sicard-Piet, A., and S. Bourdarie (2006), Solar cycle electron radiation environment at GNSS like altitude, IAC-06-D5-2, IAC conference, Valencia, 2006.
- Sicard-Piet, A., S. Bourdarie, D. Boscher, R. H. W. Friedel, M. Thomsen, T. Goka, H. Matsumoto, and H. Koshiishi (2008), A new international geostationary electron model: IGE-2006, from 1 keV to 5.2 MeV, *Space Weather*, 6, S07003, doi:10.1029/2007SW000368.
- Stern, D.P. (1967a), The motion of magnetic field lines, *Space Sci. Rev.*, 6, 147-173.
- Stern, D.P. (1967b), Geomagnetic Euler Potentials, *J. Geophys. Res.*, 72 (15), 3995-4005, doi: 10.1029/JZ072i015p03995.
- Stern, D.P. (1970), Euler Potentials, *Am. J. Phys.*, 38, 494.
- Stern, D.P. (1994), The art of mapping the magnetosphere, *J. Geophys. Res.*, 99 (A9), 17169-17198, doi: 10.1029/94JA01239.
- Tsyganenko, N.A. (1989), A magnetospheric magnetic field model with a warped tail current sheet, *Planet. Space Sci.*, 37, 5-20.
- Tu, W., S. R. Elkington, X. Li, W. Liu, and J. Bonnell (2012), Quantifying radial diffusion coefficients of radiation belt electrons based on global MHD simulation and spacecraft measurements, *J. Geophys. Res.*, 117, A10210, doi: 10.1029/2012JA017901.
- Vacaresse A. (1999), *Contribution à l'élaboration de modèles de référence des ceintures de radiation terrestres*, thèse de doctorat – ENSAE.
- Varotsou, A. (2005), *Utilisation de modèles physiques pour comprendre la dynamique des ceintures de radiation d'électrons de la Terre*, thèse de doctorat – ISAE.
- Vette, J. (1991), The AE-8 trapped electron model environment, National Space Science Data Center, Report 91-24, Greenbelt, Maryland.
- Whipple, E.C. Jr. (1978), (U,B,K) coordinates: a natural system for studying magnetospheric convection, *J. Geophys. Res.*, 83, A9.
- Woelfflé, A. (2010), *Étude et modélisation du transport de plasma dans la magnétosphère interne*, thèse de doctorat – ISAE.