



**HAL**  
open science

# Géométrie des espaces de tenseurs - Une approche effective appliquée à la mécanique des milieux continus

Marc Olive

► **To cite this version:**

Marc Olive. Géométrie des espaces de tenseurs - Une approche effective appliquée à la mécanique des milieux continus. Théorie des représentations [math.RT]. Aix Marseille université, 2014. Français. NNT: . tel-01131429

**HAL Id: tel-01131429**

**<https://hal.science/tel-01131429v1>**

Submitted on 13 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License



UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE

École Doctorale Mathématiques et Informatique E.D. 184

I2M/UMR 7373

THESE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

Marc OLIVE

Géométrie des espaces de tenseurs

*Une approche effective appliquée à la mécanique des milieux continus*

Soutenue le 19 11 2014

Composition du jury :

Nicolas AUFFRAY	Maître de conférences	Université de Paris-Est	Co-directeur de thèse
Samuel FOREST	Directeur de recherche	Mines ParisTech	Examineur
Aziz HAMDOUNI	Professeur	Université de La Rochelle	Rapporteur
Boris KOLEV	Chargé de recherche	Aix-Marseille Université	Directeur de thèse
Joël MERKER	Professeur	Université de Paris-Sud	Rapporteur
Christophe RITZENTHALER	Professeur	Université de Rennes 1	Examineur
Erwan ROUSSEAU	Professeur	Aix-Marseille Université	Examineur
Pierre SEPPECHER	Professeur	Université de Toulon	Examineur



Cette oeuvre est mise à disposition selon les termes de la [Licence Creative Commons Attribution - Pas d'utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France](#).

« La réponse est le malheur de la question »  
Maurice Blanchot

A mon fils - Laélien

# Résumé

Plusieurs lois de comportement mécaniques possèdent une formulation tensorielle, comme c'est par exemple le cas pour l'étude des matériaux élastiques. Dans ce cas intervient un sous-espace de tenseurs d'ordre 4, noté  $\mathbb{E}la$  et appelé espace des tenseurs d'élasticité. Les questions de classification des matériaux élastiques passent alors par la nécessité de décrire les orbites de l'espace  $\mathbb{E}la$  sous l'action du groupe  $SO(3)$ . Plus généralement, on est amené à étudier la géométrie d'un espace de tenseurs sur  $\mathbb{R}^3$ , via l'action du groupe  $O(3)$ .

Cette géométrie est tout d'abord caractérisée par ses différentes classes d'isotropies, encore appelées classes de symétries. Chaque espace de tenseurs possède en effet un nombre fini de classes d'isotropies. Nous proposons dans notre travail une méthode originale et générale pour obtenir les classes d'isotropie d'un espace de tenseurs quelconque. Nous avons ainsi pu obtenir pour la première fois les classes d'isotropie d'un espace de tenseurs d'ordre 8 intervenant en théorie de l'élasticité linéaire du second-gradient de la déformation.

Dans le cas d'une représentation réelle d'un groupe compact, l'algèbre des polynômes invariants sépare les orbites, ce qui motive donc la recherche d'une famille génératrice minimale de polynômes invariants. Celle-ci se fait en exploitant le lien existant entre les espaces de tenseurs et les espaces de formes binaires et plus précisément la théorie classique des invariants. On ne fait donc plus intervenir le groupe  $SO(3)$  mais le groupe  $SL(2, \mathbb{C})$ . Nous avons ainsi repris et ré-interprété les approches effectives de cette théorie, notamment développées par Gordan au XIX<sup>e</sup> siècle. Cette ré-interprétation nous a permis d'obtenir de nombreux résultats, notamment la détermination d'une famille génératrice minimale d'invariants pour l'élasticité mais aussi pour la piézoélectricité. Notons aussi que nous avons pu retrouver d'une façon simple des relations importantes intervenant en théorie classique des invariants, à savoir les fameuses séries de Gordan, ainsi que des relations plus récentes d'Abdesselam–Chipalkatti sur les transvectants de formes binaires.

Mots clés : Théorie classique des invariants, transvectants, covariants de formes binaires, Elasticité linéaire

# Abstract

Tensorial formulation of mechanical constitutive equations is a very important matter in continuum mechanics. For instance, the space of *elastic tensors* is a subspace of 4th order tensors with a natural  $SO(3)$  group action. More generally, we have to study the geometry of a tensor space defined on  $\mathbb{R}^3$ , under  $O(3)$  group action.

To describe such a geometry, we first have to exhibit its isotropy classes, also named symmetry classes. Indeed, each tensor space possesses a finite number of isotropy classes. In this present work, we propose an original method to obtain isotropy classes of a given tensor space. As an illustration of this new method, we get for the first time the isotropy classes of a 8th order tensor space occurring in second strain-gradient elasticity theory.

In the case of a real representation of a compact group, invariant algebra separates the orbits. This observation motivates the purpose to find a finite generating set of polynomial invariants. For that purpose, we make use of the link between tensor spaces and spaces of binary forms, which belongs to the *classical invariant theory*. We thus have to deal with  $SL(2, \mathbb{C})$  group action. To obtain new results, we have reformulated and reinterpreted effective approaches of Gordan's algorithm, developed during XIXth century. We then obtain for the first time a minimal generating family of elasticity tensor space, and a generating family of piezoelectricity tensor space. Using linear algebra arguments, we were also able to get important relations of classical invariant theory, such as the Gordan's series and the Abdesselam–Chipalkatti's quadratic relations on transvectants.

Key-Words : Classical invariant theory, transvectants, covariants of binary forms, Linear elasticity.

# Remerciements

Voici donc un moment qui s'achève : trois années à être immergé dans des questionnements, des lectures, des errements. Il y eut dans cette expérience la fragrance particulière d'un voyage, ponctué de rencontres d'une richesse indéniable. L'accueil fait par Boris Kolvev fut des plus chaleureux, et les premières questions abordées m'ont immédiatement plongée dans un plaisir certain, à l'image d'un paysage - oublié depuis bien des années - mais qui me fut donner de revoir dans toute son étendue. Ce fut aussi en cette occasion que je fis la connaissance de Nicolas Auffray. La science mécanique, que je n'avais pu voir jusque là que comme une lointaine contrée, me fut alors présentée avec attention et rigueur. La richesse de nos échanges me fit rapidement prendre goût pour cette science - nouvelle à mes yeux - de part son histoire, ses méthodes, ses problématiques.

Ainsi, accompagné par ces deux directeurs de thèse - pour qui je transmets mon plus grand respect - je pu rencontrer, échanger, découvrir et me *forger* à ce travail de jeune chercheur. Loin d'un travail solitaire et aride, l'échange et les rapports humains développés à cette occasion ont été un élément central de cette activité. Il en fut ainsi lorsqu'il me fallu affronter un point central de ma thèse - à savoir : le calcul effectif d'une base d'invariants de l'élasticité. A cette occasion, le hasard me fit rencontrer Christophe Ritzenthaler et Reynald Lercier. Tous deux avaient dû, eux aussi, affronter des calculs effectifs. Ils m'ont alors donné une impulsion certaine pour comprendre, décortiquer et renouveler le fameux algorithme de Gordan. Ce qui s'installa pour moi à cette occasion fut essentielle : une collaboration, une ouverture, et aussi une rencontre avec une expérience du métier de chercheur - que ce soit en mathématique ou en informatique.

Car, finalement, s'il y a bien une chose que j'ai pu (enfin !) observer, c'est bien cela : les chercheurs forment une communauté dans laquelle le questionnement et l'enrichissement sont essentielles. Très vite, il n'a plus été question pour moi de mathématique, de physique, de mécanique ou d'informatique, mais bel et bien du *cheminement* de la science. Je pu notamment le sentir à travers ces nombreux livres étudiés, ces nombreux articles, mais aussi à travers bon nombre de rencontres humaines. Cela fut le cas avec Michel Petitot - dont l'expérience en mathématique et en informatique est indéniable - mais aussi avec Erwan Rousseau, qui a accueilli mon travail avec chaleur, puis finalement Pierre Seppecher, Patrick Ballard (en mathématique et en mécanique) ou encore Samuel Forest (en mécanique théorique et appliquée).

Pour finir, je tiens à remercier Joël Merker et Aziz Hamdouni qui ont tous deux accepté d'examiner et d'évaluer mon mémoire doctoral. Leur lecture et commentaires ont été source pour moi d'une réelle motivation à persister dans mon travail de recherche.

La dernière pensée est pour mes proches. Mon fils, sans vraiment le savoir du fait de son jeune âge, a pu me soutenir à sa façon. Mon père et ma mère - témoins de ce long voyage et de tous mes détours. Et pour finir une lumière étonnante venue de l'orient - aux noms de Dinh et de May.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>4</b>
<b>Abstract</b>	<b>4</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>12</b>
<b>1 Motivations mécaniques</b>	<b>19</b>
1.1 Invitation à la mécanique des milieux continus	20
1.1.1 Équations canoniques	20
1.1.2 Élasticité linéaire	23
1.1.3 Des tenseurs d'ordre 3 en mécanique	25
1.1.4 De manière générale	27
1.1.5 Une donnée supplémentaire, l'anisotropie	27
1.2 Caractérisation des matériaux élastiques	28
1.2.1 Changement d'orientation	29
1.2.2 Classes d'isotropie	29
1.2.3 Identification	30
<b>2 Représentation linéaire d'un groupe compact</b>	<b>35</b>
2.1 Préambule	35
2.2 Notions de base	37
2.2.1 Stratification isotropique	37
2.2.2 Espace de points fixes et tranches linéaires	39
2.3 Algèbre d'invariants	42
2.3.1 Théorème de finitude	42
2.3.2 Structure de Cohen-Macaulay	44
2.3.3 Série de Hilbert	47
2.3.4 Structure semi-algébrique sur l'espace des orbites	49
2.4 Polarisation et séparants	54
2.4.1 Théorèmes fondamentaux	54
2.4.2 Famille de séparants et polarisation	56
2.4.3 Séparants d'espaces de tenseurs d'ordre inférieur ou égal à 2	59
<b>3 Représentation linéaire des groupes <math>O(3)</math> et <math>SO(3)</math></b>	<b>63</b>
3.1 La décomposition harmonique	63
3.1.1 Représentations irréductibles de $O(3)$ et $SO(3)$	63
3.1.2 Décomposition harmonique de l'espace $\mathbb{P}^{ie2}$	66
3.1.3 Décomposition harmonique de l'espace $\mathbb{E}^{la}$	70



3.2	Isotropie des représentations irréductibles	71
3.2.1	Sous-groupes fermés de $O(3)$ et $SO(3)$	71
3.2.2	Isotropies des représentations irréductibles	77
3.3	Invariants de tenseurs et espaces de formes binaires	78
3.3.1	Complexification d'une représentation réelle	78
3.3.2	Isomorphisme $SL(2, \mathbb{C})$ équivariant	79
3.3.3	Calculs explicites	83
<b>4</b>	<b>Isotropie des espaces de tenseurs</b>	<b>85</b>
4.1	Préambule	85
4.2	Opérations de clips et isotropies d'espaces de tenseurs	86
4.3	Application à la mécanique des milieux continus	92
4.3.1	Géométrie de l'espace des tenseurs piézoélectriques	92
4.3.2	Géométrie de l'espace des tenseurs d'élasticité	94
4.4	Théorèmes généraux sur les lois de comportement tensorielles	95
4.4.1	Isotropie des espaces de tenseurs d'ordre pair	96
4.4.2	Isotropie des espaces de tenseurs d'ordre impair	97
4.A	Opérations de clips sur les sous-groupes fermés de $SO(3)$	99
4.A.1	Sous-groupes planaires	99
4.A.2	Opérations de clips sur les sous-groupes maximaux et exceptionnels	100
4.B	Opérations de clips sur les sous-groupes fermés de $O(3)$	105
4.C	Normalisateurs des sous-groupes fermés de $O(3)$	110
<b>5</b>	<b>Invariants et covariants des formes binaires</b>	<b>113</b>
5.1	Théorie classique des invariants	113
5.2	Covariants et morphismes $SL_2(\mathbb{C})$ équivariants	117
5.2.1	Opérateurs bi-différentiels et transvectants	118
5.2.2	Covariants moléculaires	121
5.2.3	Transvectants et covariants moléculaires	126
5.3	Bases vectorielles de morphismes $SL_2(\mathbb{C})$ équivariants	130
5.3.1	Bases vectorielles de transvectants	130
5.3.2	Séries de Gordan et relations quadratiques	134
<b>6</b>	<b>Méthodes effectives</b>	<b>142</b>
6.1	Préambule	142
6.2	Méthode de Hilbert	144
6.2.1	Nilcône d'un espace de formes binaires	144
6.2.2	Nilcône et famille génératrice d'invariants	145
6.3	Algorithme de Gordan	148
6.3.1	Algorithme de Gordan pour les covariants joints	148
6.3.2	Algorithme de Gordan pour des covariants simples	155
6.3.3	Exemples et applications	161
<b>7</b>	<b>Applications à la mécanique des milieux continus</b>	<b>176</b>
7.1	Opérateurs invariants	176
7.1.1	Transvectants de tenseurs	177
7.1.2	Covariants généralisés d'un tenseur	177

7.2	Invariants du tenseur piézoélectrique	179
7.2.1	Famille génératrice minimale de l'algèbre $\mathbf{Inv}(S_6 \oplus S_2 \oplus S_4 \oplus S_2)$	179
7.2.2	Famille génératrice des polynômes $SO(3)$ invariants	183
7.2.3	Famille génératrice des polynômes $O(3)$ invariants	185
7.3	Invariants du tenseur d'élasticité	185
	<b>Conclusion et perspectives de recherche</b>	<b>196</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>197</b>
	<b>Index</b>	<b>210</b>
	<b>ANNEXES</b>	<b>211</b>
A	Dimensions des espaces de points fixes	211
B	Relations de Stroh et relations de degré 3	212
C	Familles relativement complètes d'une forme binaire simple	214

# Liste des notations

- $S^d(V)$   $d$ ième puissance symétrique de  $V$   
 $g^T, \mathbf{A}^T$  Transposée d'une matrice  $g, \mathbf{A}$   
 $g^{-1}$  Inverse d'une matrice  $g$   
 $\mathbb{T}^n$  Espace des tenseurs d'ordre  $n$  sur  $\mathbb{R}^3$   
 $\mathbb{S}^n$  Espace des tenseurs totalement symétriques d'ordre  $n$  sur  $\mathbb{R}^3$   
 $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$  Espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 sur  $\mathbb{R}^3$   
 $\mathbb{H}^n$  Espace des tenseurs harmoniques d'ordre  $n$  sur  $\mathbb{R}^3$   
 $\mathbb{S}^n(\mathbb{R}^3)$  Espace des polynômes homogènes de degré  $n$  sur  $\mathbb{R}^3$   
 $\mathbb{H}_n(\mathbb{R}^3)$  Espace des polynômes homogènes harmoniques de degré  $n$  sur  $\mathbb{R}^3$   
 $\mathbb{S}_n$  Espace des formes binaires de degré  $n$  sur  $\mathbb{C}$   
 $\mathbb{S}_n(\mathbb{C}^d)$  Espace des formes  $d$ -aires de degré  $n$  sur  $\mathbb{C}$   
 $\text{SL}(n, \mathbb{C})$  Groupe spécial linéaire de  $\mathbb{C}^n$   
 $\text{O}(3)$  Groupe des transformations orthogonales de  $\mathbb{R}^3$   
 $\text{SO}(3)$  Groupe des rotations de  $\mathbb{R}^3$   
 $\mathfrak{S}_n$  Groupe des permutations de  $n$  éléments  
 $[H]$  Classe de conjugaison d'un sous-groupe  $H$   
 $\Sigma_{[H]}$  Strate associée à la classe d'isotropie  $[H]$   
 $\text{T}_{\mathbf{x}}X$  Espace tangent au point  $\mathbf{x}$  à  $X$   
 $E \simeq F$   $E$  est isomorphe à  $F$   
 $\text{Mor}_G(E, F)$  Espace des morphismes  $G$ -équivariants de  $E$  vers  $F$   
 $\text{End}(V)$  Espace des endomorphisme de  $V$   
 $|\mathbf{n}|$   $n_1 + \dots + n_s$  où  $\mathbf{n} := (n_1, \dots, n_s)$   
 $\mathbb{k}[V]$  Anneau des coordonnées d'un  $\mathbb{k}$  espace vectoriel  $V$   
 $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  Idéal engendré par  $a_1, \dots, a_n$   
 $\mathbb{k}[V]^G$  Anneau des polynômes  $G$  invariants sur  $V$   
 $\text{Cov}(\mathbb{S}_n)$  Algèbre des covariants des formes binaires de degré  $n$

$\mathbf{Inv}_j(S_n \oplus S_p)$  Algèbre des invariants joints de degré non nul en  $n$  et en  $p$

$\mathbf{Inv}(S_n)$  Algèbre des invariants des formes binaires de degré  $n$

$[x]$  Partie entière d'un réel  $x$

$A \sqcup B$  Union disjointe des ensembles  $A$  et  $B$

$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$  Produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$

# Introduction générale

La formulation tensorielle des *lois de comportement linéaires* occupe une part très importante dans diverses théories physiques, touchant des domaines allant de l'électromagnétisme à la mécanique des milieux continus :

- dans le cadre de l'élasticité linéaire, le tenseur des contraintes  $\sigma$  (d'ordre 2) et le tenseur des déformations  $\varepsilon$  (d'ordre 2) d'un matériau sont liés par la loi de Hooke généralisée  $\sigma = \mathbf{C}\varepsilon$ . Le tenseur  $\mathbf{C}$ , d'ordre 4, est appelé *tenseur d'élasticité*.
- dans le cadre de la piézoélectricité, le tenseur des déformations  $\varepsilon$  (d'ordre 2) et le tenseur électrique  $\mathbf{E}$  (d'ordre 1) sont liés par la loi tensorielle  $\varepsilon = \mathbf{P}\mathbf{E}$ , où le *tenseur piézoélectrique*  $\mathbf{P}$  est un tenseur d'ordre 3 ;

Dans ces formulations tensorielles, les *matériaux* sont décrits par des tenseurs mais une telle correspondance n'est pas univoque. Elle dépend en effet de l'*orientation* du matériau dans l'espace. Du point de vue mathématique, cela correspond à l'*action du groupe des rotations* sur l'espace des tenseurs étudié. Ainsi, pour *reconnaître et identifier* un matériau, il est nécessaire de connaître et d'identifier l'*orbite* du tenseur associé.

De même, il est tout aussi important de tenir compte des *symétries* du milieu [Cur94]. Les symétries matériels peuvent être directement déduites des caractéristiques microscopiques du milieu. D'un autre côté, les symétries physiques du matériau, qui sont définies pour un comportement donné, se déterminent théoriquement en étudiant les *isotropies* de l'espace des orbites.

On remarque donc que cette formulation tensorielle sous-tend des questions mathématiques qui ont leur intérêt (et leur difficulté) propre. A savoir : une fois donnée une représentation tensorielle  $(\mathbb{T}, \rho)$  du groupe  $G = O(3)$  ou  $G = SO(3)$ , comment obtenir des méthodes *effectives* pour

- déterminer les *classes d'isotropie* de cette représentation ;
- décrire l'espace des orbites  $\mathbb{T}/G$ .

Ces deux questions, bien sûr, ne sont pas spécifiques aux représentations tensorielles du groupe  $O(3)$  ou  $SO(3)$ . Par la suite, on se place donc dans le cas d'une représentation linéaire  $(V, \rho)$  d'un *groupe de Lie compact*. Qu'il s'agisse de questions relatives aux classes d'isotropie ou bien à l'espace des orbites, il existe de nombreux résultats théoriques importants que nous rappellerons. Mais dans ces deux cas, les questions d'effectivité restent difficiles.

## Calcul effectif des classes d'isotropie

Etant dans le cas d'une représentation d'un groupe compact, l'espace  $(V, \rho)$  se décompose en une réunion finie et disjointe de classes d'isotropie (ou *strates*). Chacune de ces strates correspond ainsi à une symétrie donnée, indexée par une classe de conjugaison d'un sous-groupe fermé de  $G$ . Un problème important et pour lequel il n'existe pas

de méthode effective générale, est de déterminer explicitement les différentes classes d'isotropie de cette représentation.

Dans le cas d'une représentation tensorielle du groupe  $O(3)$  ou  $SO(3)$ , les classes d'isotropie du tenseur d'élasticité n'ont été obtenues qu'en 1996 par Forte et Vianello [FV96]. Par la suite, cette méthode a permis d'établir d'autres résultats [GW02 ; FV97 ; LH11]. Néanmoins, il semble que cette approche n'ait pas permis de dégager une méthode systématique.

Dans le cas d'une *représentation irréductible* du groupe  $G = O(3)$  ou  $G = SO(3)$ , les classes d'isotropie ont été obtenues par Ihrig et Golubitsky [IG84]. A partir de ces résultats, nous avons développé un outil, baptisé *opération de clips*, permettant de déterminer les classes d'isotropie de la somme directe  $\mathbb{T}_1 \oplus \mathbb{T}_2$  de deux représentations de  $G = O(3)$  ou  $G = SO(3)$ , connaissant celles de  $\mathbb{T}_1$  et  $\mathbb{T}_2$ . Nous avons pu en déduire un algorithme pour toute représentation (de dimension finie) de  $G = O(3)$  ou  $G = SO(3)$ .

A partir de cette nouvelle approche, nous avons aussi pu établir des théorèmes généraux (théorèmes 4.4.3 et 4.4.7) concernant les classes d'isotropie associées à tout type de lois de comportement, modélisées par un espace de tenseurs d'ordre pair [OA13] ou d'ordre impair [OA14]. On a pu ainsi clore définitivement la question relative aux classes d'isotropie d'une représentation tensorielle quelconque<sup>a</sup>.

## Espace des orbites et structure semi-algébrique

Dans le cas d'une représentation *réelle* d'un groupe compact  $G$ , l'algèbre des invariants *sépare les orbites*. Cette observation permet de construire une structure *semi-algébrique* sur l'espace des orbites  $V/G$  de toute représentation réelle de dimension finie de  $G$ . Un procédé systématique permettant, à partir de la donnée d'une *famille génératrice d'invariants polynomiaux*, d'engendrer une telle structure a été décrit par Abud-Sartori [AS83] puis rigoureusement établi mathématiquement par Procesi-Schwarz [PS85]. Il s'agit d'une généralisation de la *méthode de Hermite* qui permet d'obtenir les inéquations que doivent satisfaire les coefficients d'un polynôme réel pour avoir toutes ses racines réelles (dans ce cas particulier,  $G$  est le groupe symétrique qui agit par permutation des coordonnées sur  $\mathbb{R}^n$ ).

La stratification en classes d'isotropie peut alors (en théorie) être décrite par de nouvelles équations/inéquations. Une telle étude, dans le cas du tenseur d'élasticité, a été initiée par Auffray, Kolev et Petitot dans [AKP14].

Dans tous les cas, les calculs associés nécessitent la connaissance d'une *famille génératrice finie de l'algèbre des polynômes invariants*.

## Algèbres d'invariants : calculs effectifs

Sur ce point, qui touche à la *théorie des invariants*, il existe de nombreux résultats théoriques. Le plus fameux est notamment le résultat de *finitude* de Hilbert. En effet, pour toute représentation (réelle ou complexe) d'un groupe *algébrique linéaire réductif*<sup>b</sup>,

---

a. Nous avons obtenu, en particulier et pour la première fois, les classes d'isotropie du tenseur de comportement d'ordre 6 intervenant en théorie de l'élasticité du second gradient [Min64 ; OA14].

b. Un tel groupe peut être vu comme un sous-groupe du groupe linéaire.

l'algèbre des invariants est de *type fini*. Théoriquement, il existe donc une *famille génératrice finie* de l'algèbre des polynômes invariants mais sa détermination effective reste un problème très difficile<sup>c</sup>.

La première preuve de finitude de Hilbert est essentiellement existentielle [Hil90]. Face à de nombreuses critiques formulées par ses contemporains<sup>d</sup>, il proposa une deuxième preuve, plus constructive, trois ans plus tard [Hil93]. Finalement, suite à ce résultat de Hilbert, il y eut un désintérêt certain pour les questions d'effectivité en théorie des invariants [Fis66 ; Cri88].

A partir des années 1955, cependant, de nombreux travaux de mécanique des milieux continus ont abordé ces questions de calculs effectifs dans le cas des espaces de tenseurs d'ordre inférieur ou égal à 2. De telles questions avaient été initiées par Rivlin–Ericksen [RE55]. C'est ensuite vers les années 70 que des résultats complets furent obtenus, essentiellement établis par des procédés géométriques élémentaires [Wan70 ; Smi71]. D'autres travaux [Bet87 ; BKO94 ; SB97] ont alors abordé des espaces de tenseurs d'ordre 3 ou 4 mais en utilisant principalement des résultats déjà connus sur les formes binaires.

Dans les années 80 et du fait de l'émergence de l'informatique, il y eut un regain d'intérêt pour les questions relatives aux calculs effectifs sur les algèbres d'invariants en mathématique. Les approches étaient essentiellement influencées par les travaux de Hilbert et des outils de *géométrie algébrique*. On trouve ainsi dans [Der99 ; Stu08] une formulation moderne de cette méthode, qui s'applique dans des situations très générales. Mais à notre connaissance, les exemples traités demeurent assez simples.

Dans le cas spécifique des formes binaires, de nouveaux résultats ont été obtenus récemment [BP10a ; BP10b]. Les méthodes de calcul sont elles aussi basées sur des outils de géométrie algébrique et s'appuient en grande partie sur les travaux de Dixmier et al [Dix81 ; Dix82 ; DL88]. Par ces méthodes, il a été possible d'obtenir des familles génératrices finies (et minimales) pour les invariants de formes binaires de degré 9 et 10.

Néanmoins, cette approche trouve ses limites lorsqu'il s'agit de calculer des bases d'*invariants joints* (en particulier des bases de *covariants*) car une des étapes essentielles consiste à déterminer un *système de paramètres*. Or il n'existe pas, à notre connaissance, d'algorithme général pour obtenir un tel système pour une algèbre de type fini donnée. De plus, un résultat théorique établi par M. Brion [Bri82, Théorème 3] montre qu'il est particulièrement difficile, dans le cas générique, de trouver un système de paramètres d'une algèbre d'*invariants joints*.

## Invariants de tenseurs et formes binaires

Par un procédé de complexification, le calcul des invariants de tenseurs se ramène au calcul des polynômes  $SL(2, \mathbb{C})$  invariants sur l'espace des *formes binaires*, ce qui constitue la *théorie classique des invariants* [Olv99].

---

c. Ce point délicat où intervient un résultat théorique d'existence qui n'est pas associé à une construction effective, a été l'objet de nombreux débats épistémologiques au XIX<sup>e</sup> siècle [Bon04].

d. Sa première preuve de finitude fut notamment relue par Gordan qui se serait écrié « Ce n'est pas de la mathématique mais de la théologie ».

Historiquement, cette théorie, qui est née au début du XIX<sup>e</sup> siècle, est en fait le berceau de la théorie des invariants. Les préoccupations des « anciens <sup>e</sup> », étaient tout autant effectives que théoriques. Ainsi, un résultat dû à Gordan [Gor68] établit la finitude des algèbres de *covariants* des formes binaires. Par sa preuve, *algorithmique*, il obtint une percée importante dans la détermination effective de familles génératrices finies de *covariants* <sup>f</sup>.

## Calcul symbolique et morphismes équivariants

Les démonstrations que nous connaissons de cette preuve de finitude de Gordan sont basées sur le calcul symbolique <sup>g</sup> [GY10 ; Gle15]. En suivant la démarche de Weyl [Wey97], nous avons réinterprété les *opérations symboliques* figurant au cœur de leurs calculs explicites (l'*opérateur de Cayley* et les *transvectants*), en termes de morphismes  $SL(2, \mathbb{C})$  équivariants.

Par cette approche, un *covariant* n'est rien d'autre qu'un morphisme équivariant, défini sur des *tenseurs symétriques*. En travaillant alors sur des *produits tensoriels*, nous pouvons exploiter la *décomposition de Clebsch–Gordan* et on découvre alors que les *transvectants* forment des bases (vectorielles) naturelles de morphismes équivariants. La difficulté, bien sûr, est de repasser des produits tensoriels (non symétriques) aux produits tensoriels symétriques <sup>h</sup>.

## Relations fondamentales

Les *transvectants* forment des projecteurs naturels sur les décompositions en irréductibles de produits tensoriels de formes binaires. On sait aussi que de tels *transvectants* permettent de construire une famille génératrice *infinie* de l'algèbre des *covariants*.

De cette famille infinie, il faut donc être capable d'en extraire une famille finie. Avant cela, nous montrons comment, par de simples arguments d'algèbre linéaire, il est possible de retrouver certaines relations fondamentales sur les algèbres de *covariants*.

La première famille de relations concernent les *séries de Gordan*, essentielles dans les calculs effectifs de bases d'invariants, voir notamment les travaux de Shioda [Shi67] ou de von Gall [Gal80].

La deuxième famille de relations a été établie dans le cadre de la *théorie du re-couplage* <sup>i</sup> directement issue de la mécanique quantique [CFS95 ; KL94]. Dans ce cadre, les travaux d'Abdesselam–Chipalkatti [AC09, Théorème 1.2] établissent un théorème sur des relations quadratiques entre *covariants*, essentiellement démontré par des outils homologiques et de géométrie algébrique. Dans notre approche, ce théorème se réduit à un résultat d'algèbre linéaire. Notons aussi que l'approche développée dans cette théorie du re-couplage est une version duale de notre travail.

e. Tels Boole, Cayley, Sylvester, Clebsch, Gordan, Aronhold, etc [Cri86 ; Cri88 ; Par89].

f. von Gall [Gal80] fut notamment le premier à obtenir une famille génératrice finie (non minimale) des *covariants* d'une forme binaire de degré 8, en 1880.

g. Il existe une version moderne de cette preuve dans [Wey93], dont la formulation est très algébrique. A notre connaissance, une telle approche n'a pas permis d'obtenir de nouveaux résultats effectifs.

h. La difficulté de ce passage au quotient est particulièrement visible dans l'approche de Kung–Rota par le calcul *Umbral* [KR84].

i. A travers notamment les questions relatives aux  $6j$  – *symbols* et aux  $9j$  – *symbols* qui formalisent les changements de bases sur des projecteurs  $SL(2, \mathbb{C})$  équivariants.



## L'algorithme de Gordan re-visité

Le cœur de l'algorithme de Gordan consiste à extraire, de la famille génératrice infinie de transvectants, une famille finie. Néanmoins, pour pouvoir appliquer un tel algorithme, nous avons choisi de le reformuler [Oli14], de manière à développer des méthodes de calcul efficaces dans le cas des bases de covariants joints.

Une telle reformulation avait déjà été tentée par Pasechnik [Pas96] puis par Cröni [Cro02] mais il ne semble pas qu'ils en aient déduit de nouveaux résultats effectifs. De même, Olver avait aussi proposé une méthode appelée *méthode de Gordan* [Olv99]. Mais cette méthode, qui ne correspond pas à l'algorithme de Gordan original, a été corrigée et complétée par Brini et al. dans [BRT06]. Sa faiblesse principale est de ne fournir qu'une « borne glissante » sur les degrés des covariants à calculer, ce qui rend les calculs pratiques assez délicats.

## De nouveaux résultats

Dans notre cas, l'algorithme de Gordan, une fois optimisé, nous a permis d'obtenir pour la première fois des bases de covariants joints qui étaient restées jusqu'à présent inaccessibles, à savoir une famille génératrice finie minimale de covariants de l'espace

$$S_6 \oplus S_4$$

des formes binaires de degré 6 et 4.

Mais par cette reformulation, nous avons surtout pu répondre à une question vieille de plus de 30 ans en mécanique des milieux continus : calculer effectivement une famille génératrice finie des invariants du tenseur d'élasticité<sup>j</sup>.

En plus de ce résultat, il nous a également été possible d'obtenir pour la première fois une famille génératrice minimale des polynômes  $SO(3)$  invariants de l'espace des tenseurs piézoélectriques.

En résumé, au cours de ce travail de thèse, nous sommes parvenu à :

- produire une méthode générale et algorithmique pour déterminer les classes d'isotropie d'une représentation tensorielle quelconque ;
- produire des théorèmes généraux sur les classes d'isotropie des espaces de tenseurs associés à des *lois de comportement* ;
- obtenir pour la première fois une famille génératrice minimale de l'algèbre des invariants polynomiaux (sous  $SO(3)$ ) du tenseur d'élasticité ;
- obtenir une famille génératrice minimale des polynômes  $SO(3)$  invariants de l'espace des tenseurs piézoélectriques.

Notons aussi que l'algorithme de Gordan possède une variante qui permet de calculer une base de covariants d'une forme binaire de degré  $n$ , connaissant des bases de covariants pour les formes binaires de degré  $k < n$ . Un travail commun avec R. Lercier [OL14] va donner pour la première fois une famille génératrice minimale de *covariants* des formes binaires de degré 9 et 10. Nous avons également bon espoir que cette

---

j. Seule une partie de cette base était connue [BKO94], laquelle base ayant été directement déduite du travail de Shioda [Shi67].

approche permette de déterminer une famille génératrice minimale de covariants des formes binaires de degré 12, aujourd’hui inconnue.

## Plan de la thèse

Le [chapitre 1](#) commence par une présentation assez générale du contexte *mécanique* qui a motivé notre travail de thèse. La [sous-section 1.1.2](#) présente ainsi les notions essentielles de théorie de l’*élasticité linéaire*, puis nous introduisons dans la [sous-section 1.1.3](#) quelques situations faisant intervenir des espaces de tenseurs d’ordre 3, notamment le cas de la piézoélectricité.

Nous explicitons ensuite dans la [section 1.2](#) les problématiques physiques associées aux formulations tensorielles, à savoir les questions relatives à l’identification, la reconnaissance et les symétries physiques d’un matériau élastique. Nous montrons dans la même section comment ces problématiques se formulent mathématiquement, ce qui nous permet d’aboutir au cadre proprement mathématique de notre thèse, qui consiste à développer des méthodes effectives pour

- déterminer les classes d’isotropie d’une représentation linéaire  $(V, \rho)$  d’un groupe compact ;
- déterminer une famille génératrice finie de l’algèbre  $\mathbb{R}[V]^G$  des polynômes invariants.
- décrire l’espace des orbites  $V/G$  d’une représentation linéaire d’un groupe de Lie compact  $G$  ;

Nous nous sommes particulièrement intéressés aux approches *effectives*, appliquées aux cas des représentations tensorielles du groupe  $O(3)$  ou  $SO(3)$ .

Dans le [chapitre 2](#), nous rappelons quelques propriétés essentielles des représentations linéaires des groupes compacts. La [section 2.2](#) aborde ainsi les questions liées aux classes d’isotropie, à la stratification et à la géométrie des espaces d’orbites. Nous précisons ensuite dans la [section 2.3](#) la notion de système de paramètres, la structure de *Cohen–Macaulay* de ces algèbres et leur *série de Hilbert*. Nous montrons dans la [section 2.4](#) qu’il est possible de considérer des familles de *séparants*, qui est une alternative intéressante à la notion d’invariants. La [sous-section 2.4.3](#) reprend d’ailleurs les résultats établis en mécanique des milieux continus sur les séparants d’espaces de tenseurs d’ordre inférieur ou égal à 2.

Le [chapitre 3](#) spécifie un certain nombre de résultats généraux du [chapitre 2](#) au cas des représentations linéaires des groupes  $O(3)$  et  $SO(3)$ . On aborde ainsi dans la [section 3.1](#) la *décomposition harmonique* des espaces de tenseurs, qui consiste à décomposer les représentations tensorielles en espaces irréductibles (dont un modèle est donné par des espaces de tenseurs dits *harmoniques*). Les [sous-sections 3.1.2](#) et [3.1.3](#) détaillent la décomposition harmonique de l’espace des tenseurs piézoélectriques et élastiques. Nous précisons ensuite dans la [section 3.2](#) des résultats sur les classes d’isotropie des représentations irréductibles de  $O(3)$  et  $SO(3)$ , ce qui nécessite de décrire dans la [sous-section 3.2.1](#) la géométrie de leurs sous-groupes fermés. Enfin, dans la [section 3.3](#) nous explicitons un isomorphisme entre le *complexifié* des représentations tensorielles et les représentations irréductibles du groupe  $SL(2, \mathbb{C})$ . En termes d’invariants, le problème se ramène ainsi à la théorie classique des invariants.

Dans le [chapitre 4](#), nous définissons l’*opération de clips* sur les classes d’isotropie et

nous donnons le résultat de ces opérations de clips sur les sous-groupes fermés de  $SO(3)$  (théorème 4.2.7) puis de  $O(3)$  (théorème 4.2.8). A l'aide de ces résultats, on peut déduire les classes d'isotropie de toute représentation tensorielle et nous illustrons cette démarche dans le cas de la piézoélectricité (sous-section 4.3.1) puis dans le cas de l'élasticité (sous-section 4.3.2). La section 4.4 présente alors les théorèmes généraux sur les classes d'isotropie des lois de comportement tensorielles, d'abord dans le cas des tenseurs d'ordre pair (théorème 4.4.3) puis dans le cas des tenseurs d'ordre impair (théorème 4.4.7). Les section 4.A et 4.B donnent les démonstrations des théorèmes 4.2.7 et 4.2.8 sur les opérations de clips des sous-groupes fermés de  $SO(3)$  et  $O(3)$ . La section 4.C donne enfin des résultats utiles à la description de la géométrie des espaces d'orbites dans le cas des représentations des groupes  $SO(3)$  et  $O(3)$ .

Dans le chapitre 5, nous introduisons la *théorie classique des invariants*. Dans la section 5.1, nous définissons les notions d'*invariant* et de *covariant* d'une forme binaire, puis nous introduisons dans la section 5.2 la notion de *morphisme*  $SL(2, \mathbb{C})$  *équivariant*. Ces morphismes sont construits à partir de l'*opérateur de Cayley* et des *transvectants*, définis dans la sous-section 5.2.1. Ils permettent notamment d'avoir une forme explicite de la *décomposition de Clebsch–Gordan*. Dans la sous-section 5.2.2, nous représentons graphiquement les morphismes équivariants à l'aide de *molécules*, ce qui permet ensuite de définir les *covariants moléculaires*, à la base de l'algorithme de Gordan. Nous montrons alors dans la sous-section 5.2.3 comment passer des transvectants aux covariants moléculaires. En se plaçant dans l'espace des morphismes  $SL(2, \mathbb{C})$  équivariants définis sur des *produits tensoriels* (non symétriques), nous exhibons dans la sous-section 5.3.1 des *bases vectorielles* de transvectants, ce qui nous permet de re-démontrer (par des arguments élémentaires) que l'algèbre des covariants est engendrée par la famille infinie des transvectants (théorème 5.3.10). Certaines des relations obtenues à partir de ces bases vectorielles de transvectants aboutissent alors à des *relations fondamentales* que nous détaillons dans la sous-section 5.3.2 : il s'agit des séries de Gordan (corollaire 5.3.13) et des relations quadratiques d'Abdesselam–Chipalkatti (théorème 5.3.15), que nous avons pu re-démontrer par de simples arguments d'algèbre linéaire.

Dans le chapitre 6, nous présentons différentes approches pour les calculs effectifs de famille génératrice d'une algèbre d'invariant. Nous présentons tout d'abord la *méthode de Hilbert* dans la section 6.2, principalement basée sur la notion de *nilcône*, définie dans la sous-section 6.2.1. Nous donnons ensuite dans la sous-section 6.2.2 les techniques récentes de Brouwer–Popoviciu [BP10a] utilisées dans le cas des invariants des formes binaires de degré 9 et 10. Après cela, nous présentons deux *algorithmes de Gordan* : celui concernant les covariants joints dans la sous-section 6.3.1, puis celui concernant les covariants simples dans la sous-section 6.3.2. La sous-section 6.3.3 illustre ensuite ces algorithmes dans un certain nombre de situations nouvelles, telles celles des covariants de  $S_6 \oplus S_4$  puis de  $S_6 \oplus S_4 \oplus S_2$ .

En guise de conclusion, nous produisons dans le chapitre 7 une famille génératrice finie de l'espace des tenseurs piézoélectrique ainsi qu'une famille génératrice finie (minimale) de l'espace des tenseurs d'élasticité, ce qui, à notre connaissance, n'avait pas été obtenu jusqu'à présent.

# 1. Motivations mécaniques

La mécanique des milieux continus<sup>a</sup> repose en grande partie sur l'utilisation d'un formalisme tensoriel. Même si ce formalisme est commun à d'autres domaines de la physique, comme par exemple l'électromagnétisme, la spécificité de la mécanique des milieux continus<sup>b</sup> est son utilisation de tenseurs d'ordre supérieur à 2. Pour ces tenseurs d'ordre supérieur, l'analyse classique au travers de représentations vectorielles ou matricielles ne suffit pas. De fait il y a en mécanique des milieux continus de nombreux problèmes ouverts associés à ces espaces de tenseurs.

Parmi ces problèmes, nous nous sommes particulièrement intéressé à :

1. la détermination effective de leur stratification isotropique ;
2. la détermination effective d'une famille génératrice finie de leur algèbre d'invariants (sous l'action des groupes  $SO(3)$  et/ou  $O(3)$ ).

A notre connaissance, il n'existe pas à ce jour de réponse globale et systématique à ces deux questions. Au cours de notre travail, cependant, nous avons pu produire un algorithme effectif pour la détermination de la stratification isotropique, et nous avons aussi repris et développé des concepts et outils permettant d'obtenir, pour la première fois, une famille génératrice finie des algèbres d'invariants associées aux deux espaces de tenseurs suivants :

- $\mathbb{E}la := \mathbb{S}^2(\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3))$  ;
- $\mathbb{P}iez := \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{R}^3$  ;

Le but de ce premier chapitre est d'introduire les problèmes physiques qui ont motivé cette thèse. Comme nous le verrons par la suite, ces questions de stratification et d'algèbres d'invariants sont liés à des problématiques expérimentales qui concernent la *reconnaissance* et l'*identification* de matériaux élastiques et piézoélectriques. Au cœur de ces questions se pose le problème de la description géométrique explicite des espaces de tenseurs  $\mathbb{E}la$  ainsi que  $\mathbb{P}iez$ .

Il est important de noter que ces questions de description géométrique d'espaces de tenseurs d'ordre supérieur (modulo  $O(3)$  ou  $SO(3)$ ) constituent des problèmes de mathématique et de calculs effectifs à part entière.

---

a. Pour une approche générale et détaillée de la mécanique des milieux continus, nous proposons au lecteur de se reporter aux ouvrages classiques [Tru66 ; GM80 ; Sid80 ; Gur81 ; MH94 ; Cia05 ; For+09]. Notons aussi que des notes historiques intéressantes sur cette discipline, assez jeune (elle est née au XIX<sup>e</sup> siècle), se trouvent dans [Tim53 ; Dug88 ; Tru03 ; Mau13].

b. Une telle discipline englobe la mécanique des fluides et la mécanique des solides déformables comme sous domaines. Dans le cadre de cette thèse, seule la mécanique des solides déformables sera considérée. De fait, nous parlerons de mécanique des milieux continus de manière un peu abusive.

## 1.1. Invitation à la mécanique des milieux continus

De manière à contextualiser notre travail de thèse dans le domaine scientifique qui a motivé ces questions, nous proposons un bref panorama de la mécanique des solides déformables. L'exposé visant à une certaine concision, nous nous placerons dans toute la suite en :

1. *Statique* : les effets d'inertie sont ainsi négligés par la suite ;
2. *Petite Transformation* : les configurations initiale et finale du domaine matériel ne sont pas distinguées ;
3. *Réponse Linéaire* : les lois de comportement qui modélisent les propriétés de la matière sont linéaires donc tensorielles.

Ces hypothèses seront précisées dans les paragraphes suivants.

### 1.1.1. Équations canoniques

Au niveau le plus général, la mécanique des milieux continus est définie en dehors de tout comportement et de tout matériau. Les concepts associés à ce niveau traitent d'une part de la cinématique du milieu, et d'autre part de l'équilibre du milieu<sup>c</sup>. Comme nous le verrons, ces équations sont insuffisantes pour résoudre un problème donné.

#### Cinématique

Précisons à présent l'objet de notre étude. On modélise un *système de points matériels* par une variété différentielle nue, désignée par l'anglicisme *Body*. Une *configuration* de ce body, noté  $\mathcal{B}$ , est un *plongement* de  $\mathcal{B}$  dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , muni de sa métrique canonique  $q$ . Un *mouvement* de ce body est un chemin dans l'espace des configurations

$$t \mapsto \phi_t, \quad \phi_t : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

On définit alors une *transformation* du body par

$$\chi_t := \phi_t \circ \phi_0^{-1} : \mathcal{P}_0 \longrightarrow \mathcal{P}_t.$$

où  $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}_t$  désignent, respectivement, les configurations initiale et actuelle du body.

---

c. Il est à noter que la dénomination d'équations canoniques est abusive, en effet elles reposent sur des choix de modélisation. Toutefois elles se situent à un niveau plus fondamental que celui des lois de comportement.

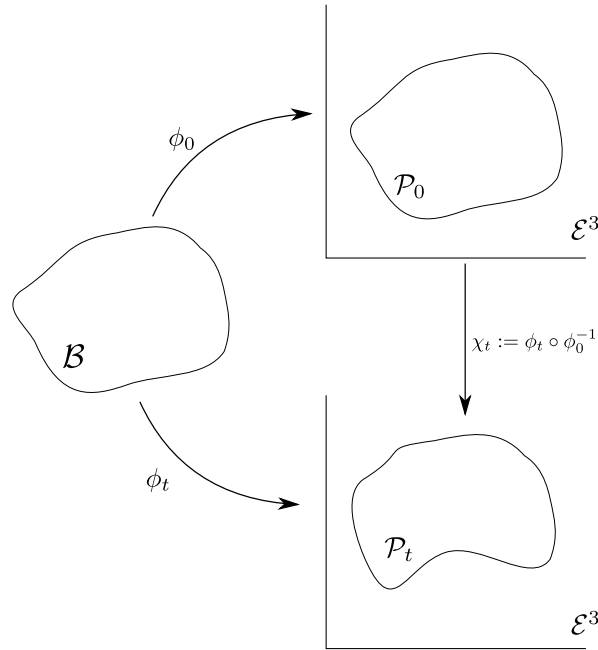


Figure 1.1. – Transformation d'un Body

L'hypothèse des petites transformations que nous avons retenue consiste *physiquement* à considérer la transformation comme une perturbation de la configuration initiale. Par conséquent, sous cette hypothèse, on confond configurations initiale  $\mathcal{P}_0$  et actuelle  $\mathcal{P}_t$ . Mathématiquement, le mouvement  $t \mapsto \chi_t$  est dans ce cas le flot d'un champ de vecteur  $\mathbf{u}$  défini sur  $\mathcal{P} := \mathcal{P}_0$ . Ce champ  $\mathbf{u}$  représente le *déplacement infinitésimal* du milieu.

En tant que tel,  $\mathbf{u}$  ne nous renseigne pas directement sur la déformation de la matière. Pour ce faire, on introduit une nouvelle quantité, appelée le *tenseur des petites déformations*

$$\varepsilon := \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [(\chi_t^*(\mathbf{q}) - \mathbf{q})]_{|_{t=0}},$$

où  $\chi_t^*(\mathbf{q})$  désigne le pull-back de la métrique par la transformation  $\chi_t$ . Notons que, la transformation  $\chi_t$  étant le flot du champ  $\mathbf{u}$ , il revient au même d'écrire

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{u}}(\mathbf{q}),$$

où  $\mathcal{L}_{\mathbf{u}}$  désigne la dérivée de Lie selon le champ des déplacements. Au delà de cette interprétation géométrique, la définition la plus usuelle de ce tenseur est la suivante :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T),$$

où  $\nabla$  est l'opérateur gradient<sup>d</sup> et  $T$  désigne la transposition. De manière évidente,  $\varepsilon$  appartient à l'espace  $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$  des tenseurs d'ordre 2 symétriques sur  $\mathbb{R}^3$ .

d. Il s'agit en fait de la connexion canonique de la métrique  $\mathbf{q}$ .

## Statique

A coté de la description cinématique, il nous faut des équations pour déterminer l'équilibre d'un body soumis à un ensemble de forces.

Pour cela, il faut déterminer la nature des efforts qu'un élément de matière est capable de supporter. On suppose dans le cadre de la mécanique des milieux continus classique qu'un élément de matière est soumis à

- des efforts à distance modélisés par une densité volumique d'effort ( $\mathbf{f}$ ) ;
- des efforts de contact à son interface modélisés par une densité surfacique d'effort.

Ces hypothèses<sup>e</sup> conduisent à l'existence d'un tenseur  $\sigma$  d'ordre 2, appelé *tenseur des contraintes* modélisant les efforts internes. Les équations d'équilibre volumiques s'écrivent alors<sup>f</sup>

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma + \mathbf{f} = 0 \\ \sigma - \sigma^T = 0 \end{cases}$$

La première équation indique la nullité de la somme des forces, et la seconde la nullité de la somme des moments. Comme dans le cadre de la mécanique des milieux continus classique, de tels moments ne sont pas pris en compte, cela impose la symétrie du tenseur  $\sigma$ . De fait,  $\sigma$  est un élément de  $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$ , et l'équilibre se résume à :

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f} = 0.$$

Cet équation constitue l'expression locale du principe fondamental de la statique.

Physiquement, le concept de contrainte représente les efforts de *cohésion* au sein de la matière [MH94]. Il s'agit en fait d'une notion duale de la déformation, qui traduit les efforts infinitésimaux qui s'opposent à elle. La sommation, sur le volume, du *produit* contrainte-déformation donne l'énergie de déformation du corps étudié. Nous reviendrons sur ce point lorsque nous parlerons d'élasticité.

## Loi de comportement

Ces concepts de déformations et de contraintes, ainsi que leurs équations associées, définissent une classe de modèle mais ne permettent pas de résoudre un problème en particulier. En effet, nous faisons le constat suivant :

- il y a 9 inconnues provenant des champs de déplacement et de contraintes ;
- il y a 3 équations provenant du principe fondamental de la statique.

Il nous faut donc des équations supplémentaires pour fermer le problème<sup>g</sup>.

---

e. De nombreux résultats et travaux justifient l'existence d'un tel champ de tenseurs [Nol59 ; Ger73 ; GM80 ; MH94 ; DS95 ; TN04 ; For+09] qui a été introduit par Cauchy. Nous avons fait ici le choix de postuler son existence. L'approche historique est basée sur la méthode dite du *tétraèdre de Cauchy* qui consiste à écrire la conservation de la quantité de mouvement pour un volume tétraédrique tendant vers 0. Une approche plus actuelle repose sur le principe des puissances virtuelles, et construit les quantités de type contrainte via un processus de dualité. Une dernière approche, peu exploitée à ce jour, repose sur l'approche par tenseurs distributions proposée par Souriau [Sou91 ; Kol04].

f. Dans la définition complète du problème il ne faut pas oublier la prise en compte des conditions aux limites. Toutefois ce point se situe en dehors du cadre de notre étude.

g. Ce problème de fermeture des équations n'est nullement lié à une insuffisance de la mécanique des milieux continus mais est une caractéristique générale des théories physiques de champ.

Remarquons ainsi qu'à ce niveau, les équations que l'on possède ne précisent pas :

1. de modèle de comportement ;
2. de matériau.

En toute généralité, de telles équations peuvent donc tout aussi bien décrire le comportement élastique du bois que l'élasto-plasticité d'un acier. Ainsi, avant de parler de matériau, il nous faut choisir un modèle de comportement. Ceci est réalisé via l'introduction d'une loi de comportement qui relie, sous certaines hypothèses et dans une certaine plage de paramètres, le tenseur des contraintes à celui des déformations. De manière générale cette loi de comportement n'a aucune raison particulière d'être linéaire. Comme précisé en amont, nous ferons néanmoins cette hypothèse de linéarité dans la suite.

En mécanique des solides déformables, le comportement fondamental est l'élasticité. On peut d'une certaine manière considérer tout autre comportement comme une extension de ce dernier.

### 1.1.2. Elasticité linéaire

Du point de vue physique, un comportement *élastique* est caractérisé par le fait :

1. que la contrainte ne dépend que de l'état final, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de dépendance au trajet de chargement ;
2. que la suppression du chargement ayant provoqué la transformation ramène le solide dans sa configuration initiale.

Cela signifie donc qu'il y a réversibilité du phénomène et qu'il n'y a pas de déformation résiduelle.

Le prototype de l'élasticité en mécanique des milieux continus est le modèle du *ressort*, où on a la relation linéaire

$$\mathbf{f} = -k\mathbf{u}$$

qui est la loi de Hooke établie en 1678. En latin, cette loi s'exprime *ut tension sic vis*, ce qui signifie : « telle extension, telle force ». La constante  $k$  est la *constante de raideur* du ressort. La *loi de Hooke généralisée* est la version tensorielle de cette relation. Il s'agit d'une *relation linéaire* entre le tenseur des déformations  $\varepsilon$  et le tenseur des contraintes  $\sigma$ . Une telle relation linéaire entre les espaces de tenseurs  $\varepsilon$  et  $\sigma$  est alors obtenue à partir d'un tenseur  $\mathbf{C}$  d'ordre 4<sup>h</sup>

$$\sigma^{ij} = C_{ij}^{kl} \varepsilon_{kl}.$$

Du fait de l'existence d'une métrique euclidienne, nous pouvons cependant ne plus distinguer entre les indices covariants et contravariants. Ensuite, du fait des symétries des tenseurs  $\varepsilon$  et  $\sigma$ , on a

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} \quad (1.1.1)$$

Pour plus de concision, on résumera ces symétries, dites *petites symétries* en mécanique, de la manière suivante :

$$C_{(ij)(kl)} \quad (1.1.2)$$

---

h. Dans cette écriture, et de manière plus générale dans la suite de cette thèse, nous avons utilisé la *sommation d'Einstein* sur les indices répétés.



où la notation  $(..)$  désigne l'invariance par permutation des indices entre parenthèses.

On peut à présent revenir sur la notion d'énergie de déformation évoquée précédemment. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, on définit l'énergie élastique  $W_\varepsilon$  du système en posant

$$\delta W_\varepsilon(\delta\varepsilon) := \boldsymbol{\sigma} : \delta\varepsilon, \quad W_\varepsilon(\delta\varepsilon) := \int_{\mathcal{P}} \delta W_\varepsilon(\delta\varepsilon) \text{ vol} = \int_{\mathcal{P}} (\mathbf{C} : \varepsilon) : \delta\varepsilon \text{ vol}$$

où  $:$  désigne la double contraction des tenseurs d'ordre 2 et  $\text{vol}$  la mesure volume sur  $\mathcal{P}$ . On peut alors remarquer que cette énergie définit une 1-forme sur l'espace des tenseurs  $\varepsilon$ . Pour préciser les choses, notons  $S^2\text{TP}$  le fibré des tenseurs d'ordre 2 symétriques sur  $\mathcal{P}$  et

$$\pi : S^2\text{TP} \longrightarrow \mathcal{P}$$

la projection associée. Notons alors  $\Gamma$  l'espace vectoriel des champs de tenseurs  $\varepsilon$ , i.e des sections du fibré  $S^2\text{TP}$

$$\Gamma = \{s : \mathcal{P} \longrightarrow S^2\text{TP} \mid \pi \circ s = \text{id}\}$$

On voit ainsi que l'énergie  $W_\varepsilon$  est une 1-forme sur  $\Gamma$ . Lorsque l'énergie provient d'un potentiel, autrement dit, lorsque cette 1-forme est exacte, on dit que le milieu est *hyper-élastique*. Puisque  $\Gamma$  est un espace vectoriel, cela reviendra au même de dire que  $W_\varepsilon$  est une 1-forme fermée. Dans le cas d'un milieu hyper-élastique, la condition de fermeture se traduit alors par la symétrie supplémentaire, dite *grande symétrie*

$$\mathbf{C}_{(ij)(kl)} = \mathbf{C}_{(kl)(ij)} \tag{1.1.3}$$

La grande symétrie traduit le fait que l'application linéaire entre  $\varepsilon$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  est auto-adjointe. On résumera l'ensemble des symétries indicielles du tenseur d'élasticité de la manière suivante :

$$\mathbf{C}_{\underline{(ij)} \underline{(lm)}} \tag{1.1.4}$$

où la notation  $\underline{\dots}$  désigne une invariance par permutation des blocs soulignés.

Ceci nous amène à définir le premier des deux espaces de tenseurs que nous étudierons de manière explicite au cours de cette thèse.

**Définition 1.1.1.** L'espace vectoriel des tenseurs d'élasticité, noté  $\mathbb{E}la$ , est le sous-espace vectoriel<sup>i</sup> des tenseurs  $\mathbf{C}$  d'ordre 4 sur  $\mathbb{R}^3$  possédant les symétries (1.1.1) et (1.1.4). Cet espace, de dimension 21, est l'espace des tenseurs d'ordre 2 symétriques sur  $S^2(\mathbb{R}^3)$  :

$$\mathbb{E}la = S^2(S^2(\mathbb{R}^3))$$

*Remarque 1.1.2.* Dans la plupart des cas étudiés en mécanique des milieux continus, le nombre de composantes d'un tenseur d'élasticité est ramené à 2 car on suppose que la réponse mécanique ne dépend pas de la direction par rapport à laquelle le matériau est sollicité. Dans cette situation, il existe plusieurs choix possibles pour ces coefficients. Les plus couramment utilisés sont les *coefficients de Lamé*  $\lambda, \mu$  ou bien le couple *coefficient*

i. En toute rigueur, on devrait supposer que ces tenseurs sont définis positifs pour que la notion d'énergie élastique ait un sens. Notre étude ne concerne cependant que l'espace vectoriel  $\mathbb{E}la$ .

de Poisson  $\nu$  et module d'Young  $E$ . Un tenseur d'élasticité défini par ses coefficients de Lamé  $\lambda, \mu$  sera noté  $\mathbf{C}_{\lambda, \mu}$ .

Avant de conclure cette sous section, introduisons un point de terminologie qui sera utilisé par la suite. Quand l'on considère une loi tensorielle de la forme

$$\sigma_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl}.$$

celle-ci implique deux types de tenseurs de natures physiques différentes :

- $\mathbf{C}$  qui représente la loi de comportement, sa nature tensorielle vient de la linéarité du modèle de comportement choisi. Nous qualifierons de tels tenseurs de *tenseurs de comportement* ;
- $\sigma$  et  $\varepsilon$  qui représentent l'état de la matière en un point donné. Leur nature tensorielle est indépendante des hypothèses faites sur le modèle de comportement. Nous qualifierons de tels tenseurs de *tenseurs d'état*, le premier étant du type *sthénique*, le deuxième du type *cinématique*.

### 1.1.3. Des tenseurs d'ordre 3 en mécanique

La relation de comportement élastique est l'archétype des relations de comportement linéaire que l'on peut trouver en mécanique. Dans son formalisme, elle ne fait intervenir que des tenseurs d'ordre 2 et d'ordre 4. De fait, tout modèle faisant intervenir des tenseurs d'ordre 3 sera une généralisation du modèle élastique. On va considérer 2 de ces généralisations :

- la piézoélectricité ;
- l'élasticité à gradient de déformation.

Dans la première approche, le tenseur d'ordre 3 est introduit comme un tenseur de comportement, tandis que dans la deuxième, il est introduit comme un nouveau tenseur d'état.

#### Extension du comportement : Piézoélectricité

L'archétype du comportement décrit par un tenseur d'ordre 3 est la piézoélectricité. Ce phénomène apparaît dans certains cristaux, quand on étudie des comportements de type électro-mécanique. Il traduit la propriété qu'ont certains corps de se polariser électriquement sous l'action d'une déformation, et réciproquement. Il s'agit d'un comportement assez bien étudié pour des raisons :

- pratiques : les couplages électromécaniques sont à la base de la technologie des capteurs, actionneurs et autres matériaux intelligents [Wel04 ; Yan09] ;
- historiques : les premiers travaux sur la symétrie des phénomènes physiques de Pierre Curie concernaient la piézoélectricité [Cur94].

Dans sa modélisation linéaire, on considère comme variables cinématiques généralisées :

- le tenseur des petites déformations  $\varepsilon$  ;
- le tenseur du champ électrique  $\mathbf{E}$  (d'ordre 1).

et comme variables sthéniques généralisées :

- le tenseur des contraintes  $\sigma$  ;
- le tenseur du déplacement électrique  $\mathbf{D}$  (d'ordre 1).

Le couplage entre les processus mécaniques et électriques s'exprime, dans sa version linéaire, à l'aide du tenseur d'élasticité  $\mathbf{C}$ , du tenseur de permittivité  $\epsilon$  (d'ordre 2) et du tenseur piézoélectrique  $\mathbf{P}$  (d'ordre 3) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{C}^T \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{P}\mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma} + \epsilon\mathbf{E} \end{cases}$$

Dans cette formulation, La transposition est définie par la permutation des  $p$  premiers indices avec les  $q$  derniers, avec  $p$  l'ordre du tenseur image d'un tenseur d'ordre  $q$ .

Ceci nous amène à définir le deuxième espace de tenseurs que nous étudierons de manière explicite au cours de cette thèse :

**Définition 1.1.3.** L'espace vectoriel des tenseurs piézoélectriques, noté  $\text{Piez}$ , est le sous-espace vectoriel des tenseurs  $\mathbf{P}$  d'ordre 3 sur  $\mathbb{R}^3$  possédant la symétrie  $\mathbf{P}_{(ij)k}$ . Cet espace, de dimension 18, est

$$\text{Piez} = \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{R}^3$$

### Extension de l'état : Élasticité à gradient de déformation

L'élasticité à gradient est une généralisation non-classique de la mécanique des milieux continus. En effet, ici, ce n'est pas tant la loi de comportement qui est changée que la description de la cinématique élémentaire, et donc la description des efforts associés [Min64 ; For06 ; Auf+13]. Ainsi on quitte le cadre du modèle standard pour rentrer dans celui de la *mécanique des milieux continus généralisés*. La raison d'être de ce genre de modèle est à la fois d'introduire des longueurs internes en mécanique des milieux continus et de doter les surfaces d'une énergie élastique propre. Cette approche permet de modéliser des phénomènes comme, entre autres, la capillarité et la tension superficielle des liquides [Min65 ; Sou91 ; Sep96]

Dans sa modélisation linéaire, on considère comme variables cinématiques généralisées :

- le tenseur des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ;
- le tenseur du gradient de la déformation, noté  $\boldsymbol{\eta}$ , d'ordre 3, symétrique sur ses deux premiers indices et défini en coordonnées par<sup>j</sup>

$$\boldsymbol{\eta}_{(ij)k} = \partial_k \boldsymbol{\varepsilon}_{(ij)}$$

Ensuite, pour modéliser les contraintes, nous définissons :

- le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  ;
- le tenseur d'hyper-contraintes  $\boldsymbol{\tau}$ , qui possède les mêmes symétries indicelles que  $\boldsymbol{\eta}$ .

La loi de comportement s'exprime, dans sa version linéaire, à l'aide du tenseur d'élasticité  $\mathbf{C}$ , du tenseur de couplage élastique  $\mathbf{M}$  (d'ordre 5) et du tenseur d'élasticité du second ordre  $\mathbf{A}$  (d'ordre 6). Elle est donnée par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{M} : \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}^T : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{A} : \boldsymbol{\eta} \end{cases}$$

---

j. L'opérateur  $\partial_k$  est la dérivée spatiale  $\frac{\partial}{\partial x_k}$ .

Dans ces relations,  $\cdot$  désigne le produit contracté triple. Les tenseurs de comportement  $\mathbf{C}^{(4)}$ ,  $\mathbf{M}^{(5)}$ ,  $\mathbf{A}^{(6)}$  sont caractérisés par les symétries indicelles suivantes :

$$\mathbf{C}_{(ij)(lm)}, \quad \mathbf{M}_{(ij)(lm)n}, \quad \mathbf{A}_{(ij)k(lm)n}$$

Dans ce modèle, l'espace des tenseurs *gradient de la déformation*  $\eta$  est identique à celui des tenseurs piézoélectriques.

#### 1.1.4. De manière générale

Revenons au cas général des tenseurs de comportement et des tenseurs d'état. Fixons un espace de tenseurs d'état *cinématiques*  $\mathbb{E}_1$  ainsi qu'un espace de tenseurs d'état *sthéniques*  $\mathbb{E}_2$ . Une loi de comportement linéaire est postulée via une application linéaire  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)$ . Or, un tel espace est isomorphe au produit tensoriel  $\mathbb{E}_1^* \otimes \mathbb{E}_2$ , qui est donc identifié, via la métrique canonique de  $\mathbb{R}^3$ , au produit tensoriel  $\mathbb{E} := \mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$ . Dans le cas où les espaces  $\mathbb{E}_1$  et  $\mathbb{E}_2$  sont en dualité, l'application  $L$  est auto-adjointe, et le tenseur associé est donc un élément de  $\mathbb{E}_1 \otimes^s \mathbb{E}_2$  (produit tensoriel symétrisé). La table 1.1 donne quelques exemples qui illustrent cette construction.

Propriété	$\mathbb{E}_1$	$\mathbb{E}_2$	Produit tensoriel
Elasticité linéaire	$\mathbb{T}_{(ij)}$ (déformation)	$\mathbb{T}_{(ij)}$ (contrainte)	Symétrique
Piézoélectricité	$\mathbb{T}_{(ij)}$ (déformation)	$\mathbb{T}_i$ (déplacement électrique)	Standard
Elasticité du premier gradient	$\mathbb{T}_{(ij)k}$ (gradient de la déformation)	$\mathbb{T}_{(ij)k}$ (hyper contrainte)	Symétrique
Flexoélectricité	$\mathbb{T}_{(ij)k}$ (gradient de la déformation)	$\mathbb{T}_i$ (déplacement électrique)	Standard

Table 1.1. – Lois de comportement et tenseurs d'état

Cette construction sera utilisée en [section 4.4](#), pour établir des résultats généraux sur la stratification de lois de comportement quelconques.

#### 1.1.5. Une donnée supplémentaire, l'anisotropie

Une fois spécifié un type de comportement linéaire, on arrive au niveau où l'on peut prendre en compte dans la modélisation la nature des différents matériaux. Il se pose alors la question du nombre de paramètres minimal nécessaires à la description d'un matériau donné. Cette question est d'importance pratique car elle déterminera le nombre d'essais mécaniques qu'il faudra réaliser pour identifier l'ensemble de ces paramètres.

La réponse à cette question n'est pas automatique. Elle nécessite d'identifier les symétries microscopiques que possède le matériau (on parlera de symétrie matérielles)<sup>k</sup>

k. Il ne faut jamais oublier que la mécanique des milieux continus propose une description phénomé-

ainsi que leurs conséquences vis-à-vis du comportement physique considéré. Pour une propriété donnée, on parle ainsi d'*isotropie* lorsqu'elle ne dépend pas de l'orientation du matériau, et d'*anisotropie* dans le cas contraire.

De fait, une question naturelle survient, sur laquelle nous reviendrons dans la suite de cette thèse, qui est de savoir, pour un comportement donné, quelles sont ces différents types d'anisotropie. En plus de cette connaissance, on doit prendre en compte le fait que certains phénomènes, comme l'effet piézoélectrique, ne se produisent que pour certaines symétries matérielles [Cur94 ; Wel04].

Le cadre mathématique concernant la notion de classe d'anisotropie va être précisé dès la section suivante. A partir de maintenant, nous quittons le cadre général des lois de comportement linéaires pour nous concentrer plus spécifiquement sur l'élasticité linéaire, et la caractérisation des matériaux élastiques<sup>1</sup>.

## 1.2. Caractérisation des matériaux élastiques

Le cas de l'*élasticité linéaire* offre, à nos yeux, un cadre privilégié pour comprendre les questions soulevées par les modélisations tensorielles associées à des lois de comportement linéaires. L'observation initiale est que, dans ce modèle, nous associons à un matériau donné un certain tenseur d'élasticité  $C$ . Concrètement, ce sont les *coordonnées* de ce tenseur qui sont mesurées dans un référentiel donné<sup>m</sup>. Du point de vue physique, ces données nous renseignent donc sur le comportement du matériau *dans une orientation donnée*. Or les *caractéristiques* physiques du matériau ne doivent pas dépendre de l'observateur. Il est donc important de pouvoir caractériser le comportement d'un matériau, indépendamment de son orientation dans l'espace. De même, nous devons être assuré qu'un même matériau, étudié dans deux laboratoires différents, sera identifié comme le *même* matériau. Notons que, si cette question est transparente pour un matériau isotrope, son importance croît lorsque les symétries du matériau diminue, et devient capitale pour un matériau triclinique (sans symétrie). Au final, nous retiendrons ces trois questions :

1. Quelles sont les différents types d'anisotropies possibles pour un matériau élastique ?
2. Un matériau élastique étant donné, comment connaître son type d'anisotropie éventuelle ?
3. Une fois connu le tenseur d'élasticité  $C$  d'un matériau, par quelle(s) méthode(s) pouvons nous *identifier* ce matériau élastique ?

---

nologique (et donc macroscopique) des phénomènes physiques à l'œuvre au niveau microscopique. De fait, ces symétries matérielles traduisent une organisation de la matière à une échelle inférieure à celle de la description macroscopique. Ces symétries peuvent être liées à la structure cristalline du matériau, à l'arrangement périodique de phases différentes, etc...

1. Tout ce qui va être dit par la suite pourra, bien évidemment, se transposer peu ou prou à la piézoélectricité ainsi qu'à tout autre comportement linéaire.

m. On pourra se reporter à l'article [FGB98] pour avoir un exemple de détermination expérimentale de ces coordonnées. Notons que la détermination expérimentale de l'ensemble des composantes d'un tenseur d'élasticité est un tour de force. Il existe peu de résultats dans la littérature donnant ces résultats pour des matériaux divers.

### 1.2.1. Changement d'orientation

Ces questions, essentielles du point de vue physique, se traduisent naturellement dans le cadre mathématique sous-jacent. Ainsi lorsque l'orientation d'un matériau est modifiée dans l'espace, cela se traduit par l'action d'un *groupe*. Dans le cas qui nous occupe, ce groupe est le groupe<sup>n</sup>  $SO(3)$ . Ce groupe va donc agir, non pas en tant que changement de référentiel mais sur le matériau lui-même. En notant  $\mathbf{C}$  le tenseur d'élasticité du matériau (avant changement d'orientation), et  $\bar{\mathbf{C}}$  le tenseur d'élasticité du même matériau mais obtenu après une transformation  $g \in SO(3)$ , nous avons en fait la relation

$$\bar{\mathbf{C}}_{ijkl} := g_{im}g_{jn}g_{kp}g_{lq}\mathbf{C}_{mnpq}. \quad (1.2.1)$$

Nous définissons ainsi, pour tout  $g \in SO(3)$ , une *représentation*

$$\rho(g) : \mathbf{C} \mapsto \rho(g)(\mathbf{C}) := \bar{\mathbf{C}}, \quad \mathbb{E}a \longrightarrow \mathbb{E}a$$

*Remarque 1.2.1.* Il y a ici une subtilité importante à comprendre. Un tenseur covariant  $\mathbf{T}$  d'ordre  $n$  sur  $\mathbb{R}^3$  n'est rien d'autre qu'une forme multilinéaire

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \mapsto \mathbf{T}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \in \mathbb{R}.$$

Un tel objet ne dépend donc pas du choix d'un repère. Bien sûr, si on veut obtenir les coordonnées d'un tenseur dans deux repères donnés, nous pouvons établir des formules (classiques) de changements de coordonnées. Ces formules ne font que traduire le caractère *covariant* d'un tenseur. Si, par contre, on fixe un tenseur  $\mathbf{T}$  et une rotation  $g \in SO(3)$ , on peut définir un *nouveau tenseur* par

$$(g \cdot \mathbf{T})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) := \mathbf{T}(g^T \mathbf{v}_1, \dots, g^T \mathbf{v}_n),$$

et dans ce cas, dans un même repère de l'espace, les tenseurs  $\mathbf{T}$  et  $g \cdot \mathbf{T}$  n'auront pas les mêmes coordonnées. En quelque sorte, on peut dire que, dans le premier cas, on fixe un tenseur puis on fait « tourner » le repère. Dans le deuxième cas, on fixe un repère puis on fait « tourner » un tenseur.

### 1.2.2. Classes d'isotropie

Nous avons conclu la section précédente sur la notion d'anisotropie. Il nous faut comprendre comment traduire mathématiquement cette problématique liée à l'identification des types d'anisotropies éventuelles d'un matériau. Ces questions concernent les *symétries*<sup>o</sup> [Cur94] caractéristiques du matériau. Mathématiquement, on cherche les éléments  $g$  du groupe  $SO(3)$  tels que  $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}$ , ce qui revient à considérer le *sous-groupe d'isotropie* du tenseur  $\mathbf{C}$  :

$$H_{\mathbf{C}} := \{g \in SO(3) \mid g \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C}\}.$$

n. Notons qu'on ne considère pas de symétries *planes* du fait de la parité de l'ordre d'un tenseur d'élasticité.

o. C'est dans le domaine de la cristallographie que cette notion a été le plus développée [Ste94]. La recherche, dans ce domaine, reste d'ailleurs encore très active, à voir notamment les questions liées aux *quasi-cristaux* [Sen95].

En fait, un tel sous-groupe d'isotropie est nécessairement un *sous-groupe fermé* de  $SO(3)$  [ZB94]. Ainsi, les symétries d'un matériau proviennent nécessairement de l'un de ces sous-groupes. Néanmoins, il est naturel de se demander si tout sous-groupe fermé de  $SO(3)$  est le groupe de symétrie d'un matériau élastique. En fait, la question ne va pas porter sur un sous-groupe fermé en particulier mais sur la *classe de conjugaison* de ce sous groupe

$$[H] := \{gHg^{-1}, \quad g \in SO(3)\}.$$

Pour déterminer les symétries possibles d'un matériau élastique, il faut donc être capable de déterminer les *classes d'isotropie* de l'espace  $\mathbb{E}la$ , c'est-à-dire les classes des sous-groupes fermés  $H$  qui peuvent être réalisées en tant que sous-groupe d'isotropie.

*Exemple 1.2.2.* Prenons l'exemple évident de l'action naturelle du groupe  $SO(3)$  sur l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Dans ce cas, les seules classes d'isotropie possibles sont : la classe  $[SO(3)]$  qui est la classe d'isotropie du vecteur nul ou bien la classe  $[O(2)]$  qui est celle de n'importe quel vecteur non nul.

La question des classes d'isotropie du tenseur d'élasticité a été résolue par Forte et Vianello [FV96]. Ils ont en effet établi l'existence de huit classes de symétries<sup>p</sup>, à savoir la classe *isotrope*  $[SO(3)]$ , la classe *cubique*  $[O]$ , la classe *isotrope transverse*  $[O(2)]$ , la classe *tétraogonale*  $[D_4]$ , la classe *trigonale*  $[D_3]$ , la classe *orthotropique*  $[D_2]$ , la classe *monoclinique*  $[Z_2]$  et enfin la classe *triclinique*  $[1]$ .

*Remarque 1.2.3.* Il a fallu un certain temps pour que la communauté mécanique définisse de façon univoque cette notion de symétrie d'un matériau élastique. Du fait de ce manque de définition, le nombre de « symétries » possible n'avait de cesse de changer. Il a fallu attendre l'article de Forte–Vianello [FV96] pour que cette notion de symétrie soit définie en tant que classe d'isotropie et que le nombre de classes soit le même pour tous.

### 1.2.3. Identification

Si l'on revient à l'équation (1.2.1) le constat est que pour un *même* matériau, il n'y aura non pas un unique tenseur d'élasticité  $\mathbf{C}$  qui lui sera associé mais plutôt tous les tenseurs  $\bar{\mathbf{C}}$  obtenus par changement d'orientation, ce qui revient à considérer l'*orbite* de ce tenseur sous l'action (1.2.1) :

$$\text{Orb}(\mathbf{C}) := \{g \cdot \mathbf{C} \mid g \in SO(3)\}.$$

On observe donc que, du point de vue mathématique, un matériau élastique est un tenseur d'élasticité modulo le groupe  $SO(3)$ . Décrire les matériaux élastiques revient donc à décrire l'*espace des orbites*  $\mathbb{E}la/SO(3)$ .

Pour décrire un tel espace, les approches considérées dans la littérature sont de deux types :

1. Approche spectrale ;
2. Approche par invariants polynomiaux.

---

p. Le détail sur les sous-groupes fermés de  $SO(3)$  peut être obtenu en [sous-section 3.2.1](#).

## Approche spectrale

Cette approche est à la base de la majorité des travaux actuels [Ryc84 ; MC91 ; Fra95 ; BBS04a ; BBS04b ; BBS07 ; BBS08]. L'idée consiste à remarquer que l'espace  $\mathbb{E}a$  est constitué d'endomorphismes auto-adjoints de  $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$ , lequel est un espace de dimension 6. On peut alors vérifier que l'action de  $SO(3)$  sur  $\mathbb{E}a$  peut être vue comme une restriction de l'action par conjugaison de  $O(6)$  sur  $\mathbb{E}a$ . Nous avons ainsi [Ryc84] :

**Théorème 1.2.4** (Rychlewski–1984). *Etant donné un tenseur d'élasticité  $\mathbf{C} \in \mathbb{E}a$  et  $V_\lambda \subset \mathbb{S}^2\mathcal{E}^3$  un espace propre de  $\mathbf{C}$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . Alors,  $g \in SO(3)$  est dans la classe de symétrie de  $\mathbf{C}$  si et seulement si il préserve tous les espaces propres  $V_\lambda$  de  $\mathbf{C}$ .*

Il est ensuite possible d'établir des conditions spécifiques sur ces espaces propres pour identifier les classes de symétrie. Citons par exemple le cas de la classe cubique [O] [BBS07] :

**Proposition 1.2.5.** *Etant donné un tenseur d'élasticité  $\mathbf{C}$  tel que*

1.  $\mathbf{C}$  possède trois valeurs propres distinctes  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  de multiplicité respective  $m_1 = 1, m_2 = 2$  et  $m_3 = 3$  ;
2. Les sous-espaces propres  $V_{\lambda_1}$  et  $V_{\lambda_2}$  sont tels que
  - a) tout vecteur propre  $\varepsilon \in V_{\lambda_1}$  a une valeur propre de multiplicité trois ;
  - b) tous les vecteurs propres  $\varepsilon \in V_{\lambda_2}$  possèdent trois vecteurs propres en commun ;Alors le tenseur  $\mathbf{C}$  a pour classe de symétrie la classe cubique.

A notre connaissance et dans une perspective expérimentale dans laquelle les données sont nécessairement bruitées, le fait d'avoir à calculer deux fois de suite des valeurs propres (qui sont des invariants algébriques) et des vecteurs propres rend cette approche difficile à mettre en œuvre.

De plus, si cette approche permet de reconnaître la classe de symétrie d'un tenseur donné (question 2), sa capacité à distinguer les matériaux (et donc à répondre à la question 3) n'est pas évidente. En fait nous verrons au paragraphe suivant qu'il n'en est rien.

## Approche par les invariants polynômiaux

Considérons le cas de l'action du groupe  $SO(3)$  sur l'espace  $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$  des tenseurs d'ordre 2 symétriques. Dans ce cas, les trois invariants  $\text{tr } \mathbf{A}$ ,  $\text{tr } \mathbf{A}^2$  et  $\text{tr } \mathbf{A}^3$  permettent de séparer les orbites : deux tenseurs sont dans la même orbite si et seulement si ces trois invariants sont égaux<sup>q</sup>. Cette situation n'est pas spécifique à l'action du groupe  $SO(3)$  sur l'espace des tenseurs d'ordre 2 symétriques. En effet, dans le cas d'une représentation réelle d'un groupe compact, les invariants polynômiaux vont toujours séparer les orbites<sup>r</sup>.

L'espace des orbites  $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)/SO(3)$  est donc facilement décrit à l'aide d'invariants polynômiaux. Cette observation motive les questions relatives aux invariants d'une représentation tensorielle quelconque. De nombreux articles [Wan69 ; Smi71 ; Liu82 ; Boe87 ;

q. Il reviendrait bien sûr au même ici de considérer comme invariants les valeurs propres de la matrice mais ces invariants sont algébriques et leur détermination est moins directe.

r. Toutes ces questions seront reprises et détaillées au sous-section 2.3.4.



[Zhe93] de mécanique des milieux continus ont abordé ces questions dans le cas d'espaces de tenseurs d'ordre inférieur ou égal à 2. L'article [Zhe94] offre à ce propos une synthèse de ces questions qui seront détaillées en [sous-section 2.4.3](#).

L'extension au cas de l'espace des orbites  $\mathbb{E}la/SO(3)$  est un enjeu important en mécanique des milieux continus et répondrait à notre question 3. Une famille d'invariants polynomiaux a été proposée par Betten [Bet82] en 1982. L'idée consiste simplement à considérer le tenseur d'élasticité totalement isotrope  $\mathbf{C}_{\lambda,\mu}$  (remarque 1.1.2) puis à construire le polynôme

$$\mathcal{B}_{\mathbf{C}}(\lambda, \mu) = \det(\mathbf{C} - \mathbf{C}_{\lambda,\mu}).$$

Les coefficients de ce polynôme forment ainsi une famille de polynômes  $SO(3)$  invariants mais cette famille ne permet pas de séparer les orbites de l'espace  $\mathbb{E}la/SO(3)$  [AKP14].

Par un procédé de complexification, Boehler et al. [BKO94] ont pu reformuler ce problème de recherche d'invariants polynomiaux à l'aide de la *théorie classique des invariants*, c'est-à-dire en termes d'action du groupe  $SL(2, \mathbb{C})$  sur l'espace  $S_8$  des formes binaires<sup>s</sup> de degré 8. En exploitant des résultats de Shioda [Shi67], ils ont ainsi pu obtenir un système d'invariants qui séparent certains tenseurs génériques [AKP14, Théorème 2]. Ce résultat, essentiel, figure ci-dessous.

**Proposition 1.2.6.** *Les 9 invariants fondamentaux de la partie déviatorique<sup>t</sup> d'ordre 4 de l'espace  $\mathbb{E}la$  sont donnés par*

$$J_k := \text{tr}(\mathbf{d}_k), \quad k = 2, \dots, 10.$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2 &= \text{tr}_{13}(\mathbf{D}^2) & \mathbf{d}_3 &= \text{tr}_{13}(\mathbf{D}^3) & \mathbf{d}_4 &= \mathbf{d}_2^2 \\ \mathbf{d}_5 &= \mathbf{d}_2 \mathbf{D} \mathbf{d}_2 & \mathbf{d}_6 &= \mathbf{d}_2^3 & \mathbf{d}_7 &= \mathbf{d}_2^2 \mathbf{D} \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_8 &= \mathbf{d}_2^2 \mathbf{D}^2 \mathbf{d}_2 & \mathbf{d}_9 &= \mathbf{d}_2^2 \mathbf{D} \mathbf{d}_2^2 & \mathbf{d}_{10} &= \mathbf{d}_2^2 \mathbf{D}^2 \mathbf{d}_2^2 \end{aligned}$$

Dans ce résultat, le produit de deux tenseurs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{C}$  d'ordre 4 sera un tenseur d'ordre 4 donné par

$$(\mathbf{DC})_{ijkl} := \mathbf{D}_{ijpq} \mathbf{C}_{pqkl}.$$

On aura donc, par exemple

$$(\mathbf{d}_2)_{ij} := \mathbf{D}_{kipq} \mathbf{D}_{kj pq}$$

On peut donner une forme graphique à ces invariants. Le principe est de représenter un tenseur d'ordre 4 par un atome de valence 4. Chaque arête représente une opération de trace sur ce tenseur. La figure 1.2 donne les invariants  $J_2, \dots, J_{10}$  sous forme graphique.

s. Espace de polynômes homogènes de degré 8 en  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ . Se reporter au [chapitre 5](#) pour plus de détails.

t. Il s'agit de la partie sans trace. La définition rigoureuse de cette notion sera donnée dans la [section 3.1](#) quand il sera question de décomposition harmonique.

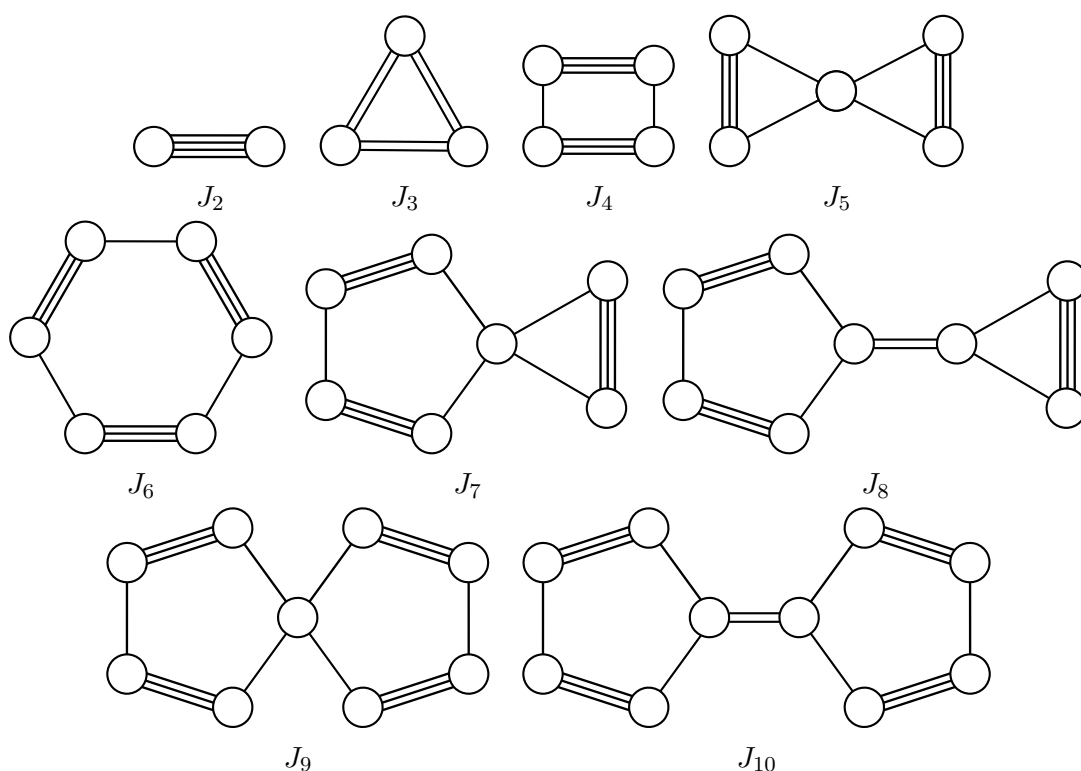


Figure 1.2. – Invariants moléculaires d'un déviateur d'ordre 4 de  $\mathbb{E}1a$

Cette famille d'invariants étant connue, elle permet d'obtenir des relations définissant les classes d'isotropie de l'espace des déviateurs d'ordre 4 de  $\mathbb{E}1a$ . Ces questions seront reprises et détaillées dans la [sous-section 2.3.4](#).

On propose ici de donner le *schéma de bifurcation* (figure 1.3) obtenu par Auffray et al. [AKP14]. Nous expliquons, sur un exemple, la signification de ce schéma : une fois donné un déviateur d'ordre 4 de  $\mathbb{E}1a$  ayant au moins la classe de symétrie trigonale  $[D_3]$ , il possède la classe cubique lorsque

$$3J_4 - J_2^2 = 0, \quad J_2 \neq 0$$

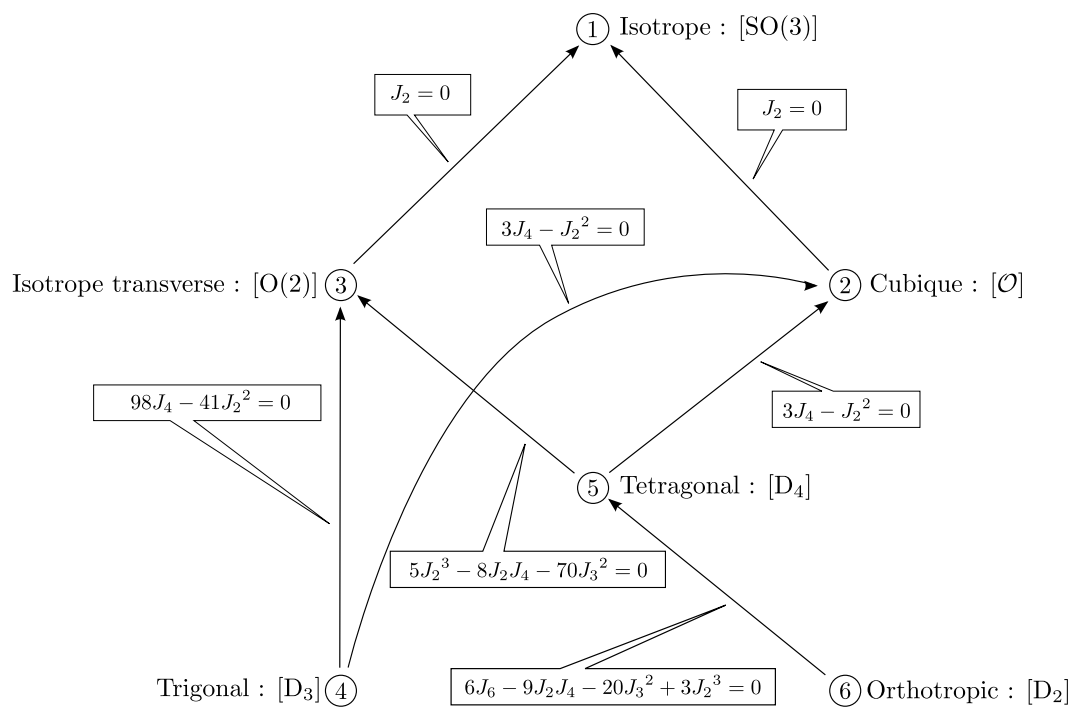


Figure 1.3. – Chemins de bifurcation pour les classes d'isotropie du déviateur d'ordre 4 d'un tenseur d'élasticité

## 2. Représentation linéaire d'un groupe compact

Nous allons introduire ici tous les concepts fondamentaux qui interviennent pour décrire l'espace des orbites d'une représentation linéaire d'un groupe compact. Aucun des résultats de ce chapitre n'est original et la plupart sont issus de [Bre72 ; Ste94].

### 2.1. Préambule

Du chapitre précédent, nous avons fait émerger plusieurs questions essentielles liées à l'étude des *lois de comportement tensorielles*, à savoir celles concernant l'identification et la classification des matériaux, puis celles concernant les *symétries* liées à ces matériaux. Ces questions se traduisent mathématiquement par la nécessité de décrire un *espace d'orbites*.

Or, l'une des difficultés principales concernant ces espaces d'orbites est qu'ils ne sont pas munis, en général, d'une structure de variété différentiable. Pour s'en rendre compte, prenons l'action du groupe  $SO(3)$  sur l'espace  $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$ . Dans l'orbite de tout tenseur  $\mathbf{S} \in \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$ , il existe une unique matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

où  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ . On peut donc identifier l'espace des orbites  $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)/SO(3)$  avec

$$\hat{\Sigma} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3\} \subset \mathbb{R}^3$$

Un tel espace, dont la géométrie est donnée par la figure 2.1, se décompose en réunion disjointe de quatre sous-espaces  $\hat{\Sigma}_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), de dimensions respectives 0, 2, 2 et 3.

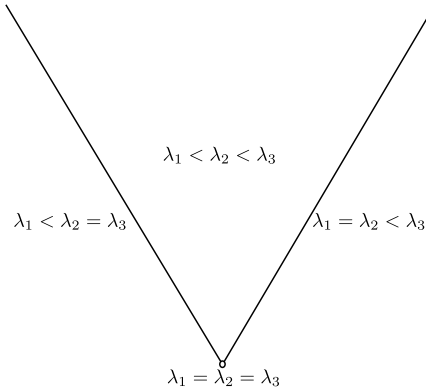


Figure 2.1. – Géométrie de l'espace  $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)/\text{SO}(3)$

Chaque sous-espace  $\hat{\Sigma}_i$  est caractérisé par des *équations* ou des *inéquations polynômiales*. On dit ainsi que  $\hat{\Sigma}$  peut être munie d'une structure de *variété semi-algébrique* [Cos02].

En fait, cette situation est générale à toute représentation réelle  $V$  (de dimension finie) d'un groupe de Lie compact  $G$ . Il existe en effet dans ce cas un nombre fini de classes d'isotropie, et la *stratification isotropique* de  $V$  est donnée par la réunion disjointe

$$V = \Sigma_0 \sqcup \cdots \sqcup \Sigma_n,$$

où chaque strate  $\Sigma_i$  est une sous-variété différentiable de  $V$  caractérisée par une certaine classe d'isotropie  $[H_i]$ . L'article d'Abud–Sartori [AS83], complété et généralisé par Procesi–Schwarz [PS85], montre que cette stratification fait de l'espace des orbites  $V/G$  une variété semi-algébrique donc définie à partir de certaines inégalités sur les *polynômes invariants*, ce qui nous amène donc, tout naturellement, à nous intéresser à l'*algèbre des polynômes invariants*.

Etant dans le cas d'une représentation linéaire  $(V, \rho)$  d'un groupe compact, nous savons par le théorème de Hilbert [Hil78] que l'algèbre des polynômes invariants possède *toujours* une famille génératrice finie. Nous savons aussi que de telles algèbres possèdent la propriété d'être de *Cohen–Macaulay*, ce qui se traduit par le fait d'être un *module libre* de type fini. Théoriquement, il existe donc pour ces algèbres d'invariants un système d'invariants *primaires* (qui un *système de paramètres*) ainsi qu'un système d'invariants secondaires. Enfin, les *séries de Hilbert* de ces algèbres, qui codent les dimensions des espaces homogènes, sont toujours des *fonctions rationnelles* qui peuvent, la plupart du temps, se calculer *a priori*.

Néanmoins, d'un point de vue effectif, nous devons trouver un moyen d'exhiber une telle famille génératrice. Ce problème est classique en *théorie des invariants*. Précisons à ce sujet que le théorème de Hilbert est essentiellement un théorème d'*existence*, qui s'applique dans le cas général des groupes *linéaires réductifs* [Hil78]. La détermination effective d'une famille génératrice finie reste un problème difficile en pratique, qui a donné lieu jusqu'à présent à de multiples publications [Wey97 ; DC70 ; VP89 ; MFK94 ; KP00 ; Pro07 ; Stu08].

Plusieurs travaux de mécanique des milieux continus [RE55 ; SR62] ont abordé la recherche d'une famille génératrice finie dans les cas des espaces de tenseurs d'ordre inférieur ou égal à 2. Une telle famille est désignée dans ces textes par le terme de *base*

d'intégrité. Dans un premier temps, l'enjeu s'est porté sur le cas des espaces composés de  $n$  tenseurs symétriques, de  $p$  tenseurs antisymétriques (tous d'ordre 2), ainsi que de  $q$  vecteurs. En s'appuyant sur le premier théorème fondamental de Weyl sur les vecteurs [Wey97], il fut établi que ces algèbres sont engendrées par des familles (infinies) de polynômes invariants, construits à partir d'opérations de *trace*. En utilisant des procédés algébriques [SR59a ; SR62], il fut alors possible d'extraire, de ces familles, des familles finies, non nécessairement minimales. Par des procédés essentiellement géométriques, des travaux plus récents [Wan70 ; Smi71 ; Zhe94] obtinrent des familles de *séparants*<sup>a</sup>, appelées *bases fonctionnelles*.

Nous proposons de récapituler ici l'ensemble de ces idées.

## 2.2. Notions de base

Dans cette partie,  $G$  désigne un groupe compact et  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie. Une *représentation linéaire*  $(V, \rho)$  du groupe  $G$  sur  $V$  est un morphisme continu

$$\rho: G \longrightarrow \mathrm{GL}(V).$$

Pour simplifier, on notera cette action  $g \cdot \mathbf{v} := \rho(g)(\mathbf{v})$ .

### 2.2.1. Stratification isotropique

L'orbite d'un vecteur  $\mathbf{v} \in V$  est notée

$$\mathrm{Orb}(\mathbf{v}) := \{g \cdot \mathbf{v}, \quad g \in G\} \subset V,$$

et le *sous-groupe d'isotropie* d'un vecteur  $\mathbf{v}$ , encore appelé *stabilisateur*, est noté

$$G_{\mathbf{v}} := \{g \in G, \quad g \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}\} \subset G.$$

Le lemme suivant est immédiat.

**Lemme 2.2.1.** *Pour tout vecteur  $\mathbf{v} \in V$ , le sous-groupe d'isotropie  $G_{\mathbf{v}}$  est un sous-groupe fermé du groupe  $G$ . En particulier, lorsque  $G$  est un groupe de Lie, il est naturellement muni d'une structure de groupe de Lie.*

La classe de conjugaison  $[H]$  d'un sous-groupe  $H$  de  $G$  est définie par :

$$[H] := \{gHg^{-1}, \quad g \in G\}.$$

Il existe un ordre partiel sur les classes de conjugaison des sous-groupes d'un groupe compact :

$$[H_1] \preceq [H_2] \text{ si } H_1 \text{ est conjugué à un sous-groupe de } H_2. \quad (2.2.1)$$

Une telle relation d'ordre est clairement *réflexive* et *transitive*. L'*antisymétrie* est plus délicate à obtenir et n'est démontrée, *a priori*, que dans le cas d'un groupe fini ou compact [Bre72].

---

a. Il s'agit d'une famille finie de polynômes invariants qui permet de séparer les orbites autant que les invariants. Dans la plupart des cas, le cardinal d'une telle famille minimale est strictement plus petit que celui d'une famille génératrice minimale.

**Définition 2.2.2.** La *classe d'isotropie* d'un vecteur  $\mathbf{v} \in V$  est la classe de conjugaison  $[G_{\mathbf{v}}]$  de son stabilisateur. Une classe de conjugaison  $[H]$  d'un sous-groupe fermé  $H$  de  $G$  est une classe d'isotropie ssi  $H$  est le sous-groupe d'isotropie d'un vecteur  $\mathbf{v}$  de  $V$ .

*Remarque 2.2.3.* Il est clair que, pour tout vecteur  $\mathbf{w} \in V$ ,

$$\mathbf{w} \in \text{Orb}(\mathbf{v}) \Rightarrow G_{\mathbf{w}} \in [G_{\mathbf{v}}].$$

Mais la réciproque de ce résultat est fausse. Pour s'en rendre compte, il suffit de considérer l'action naturelle du groupe  $\text{SO}(3)$  sur  $\mathbb{R}^3$ . Dans ce cas, la classe d'isotropie de tout vecteur non nul est  $[\text{O}(2)]$ . Or deux vecteurs non nuls ne sont pas nécessairement dans la même orbite.

**Définition 2.2.4.** Pour toute classe d'isotropie  $[H]$ , la *strate*<sup>b</sup>  $\Sigma_{[H]} \subset V$  associée à  $[H]$  est l'ensemble de tous les vecteurs  $\mathbf{v} \in V$  ayant  $[H]$  pour classe d'isotropie :

$$\Sigma_{[H]} := \{\mathbf{v} \in V, \quad G_{\mathbf{v}} \in [H]\}.$$

Selon la remarque 2.2.3, il est clair que  $\Sigma_{[H]}$  est une partie stable par  $G$ . Notons aussi que la relation d'ordre (2.2.1) induit un ordre partiel (inversé) sur les strates

$$\Sigma_{[H_2]} \preceq \Sigma_{[H_1]} \iff [H_1] \preceq [H_2].$$

Nous avons alors le théorème suivant [Bre72] :

**Théorème 2.2.5.** Soit  $(V, \rho)$  une représentation linéaire de dimension finie d'un groupe de Lie compact  $G$ . Alors

1. Chaque strate  $\Sigma_{[H]}$  est une sous-variété lisse de  $V$  ;
2. Le bord topologique de  $\Sigma_{[H]}$  contient les strates inférieures à  $\Sigma_{[H]}$  ;
3. Il existe une strate maximale  $\Sigma_{[H_0]}$  qui est un ouvert dense de  $V$  ;
4. Il existe un nombre fini<sup>c</sup>  $[H_0], [H_1], \dots, [H_n]$  de classes d'isotropie telles que

$$V = \bigsqcup_{i=0}^n \Sigma_{[H_i]}.$$

Une orbite  $\text{Orb}(\mathbf{v})$  appartenant à la strate maximale  $\Sigma_{[H_0]}$  est une *orbite générique* et la strate maximale  $\Sigma_{[H_0]}$  est appelée *strate générique*. La décomposition de  $V$  en réunion disjointe de strates est appelée *stratification isotropique*.

*Exemple 2.2.6.* Si nous reprenons l'exemple de l'espace  $(\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3), \text{SO}(3))$ , on peut préciser les isotropies d'un tenseur  $\mathbf{S}$  en fonction de la multiplicité des valeurs propres :

- pour trois valeurs propres identiques, on obtient la classe  $[\text{SO}(3)]$  ;
- pour deux, et deux seulement, valeurs propres identiques, on obtient la classe  $[\text{O}(2)]$  ;

b. Dans le cas général on parle plutôt de *structures d'orbites* [Bre72].

c. Dans le cas de l'action du groupe  $\text{O}(3)$  sur les espaces de tenseurs, un tel résultat est connu en mécanique des milieux continus en tant que conséquence du théorème d'Herman [Her45 ; Auf08a].

- enfin, pour trois valeurs propres distinctes, on obtient la classe d'isotropie du groupe diédral  $[D_2]$ , où le sous-groupe  $D_2$  est engendré par les retournements

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_y := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi la stratification isotropique

$$\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3) = \Sigma_{[D_2]} \sqcup \Sigma_{[O(2)]} \sqcup \Sigma_{[SO(3)]}$$

où  $\Sigma_{[D_2]}$  est la strate générique.

### 2.2.2. Espace de points fixes et tranches linéaires

Pour tout sous-groupe  $H$ , on note :

$$V^H := \{\mathbf{v} \in V, \quad h \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}, \quad \forall h \in H\}$$

son espace des points fixes et

$$N(H) := \{g \in G, \quad gHg^{-1} = H\}$$

son normalisateur.

*Remarque 2.2.7.* Pour tout sous-groupe  $H$ , l'espace des points fixes  $V^H$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ . De plus

$$\mathbf{v} \in V^H \Rightarrow H \subseteq G_{\mathbf{v}}.$$

On peut aussi remarquer que, pour tout vecteur  $\mathbf{v}$ ,  $H \subseteq G_{\mathbf{v}}$  si et seulement si l'orbite de  $\mathbf{v}$  rencontre  $V^H$ . Enfin, par définition même d'une strate, lorsque  $H$  est un sous-groupe d'isotropie,

$$\mathbf{v} \in V^H \cap \Sigma_{[H]} \Rightarrow G_{\mathbf{v}} = H.$$

Du point de vue géométrique, nous avons le lemme suivant :

**Lemme 2.2.8.** *Pour tout sous-groupe fermé  $H$ , l'espace  $V^H$  est  $N(H)$ -invariant. De plus, si  $H$  est un sous-groupe d'isotropie, alors  $N(H)$  est le plus grand sous-groupe de  $G$  laissant  $V^H$  invariant.*

*Démonstration.* Pour tout  $g \in N(H)$  et pour tout  $h \in H$  on sait que  $hg = gh'$  pour un certain  $h' \in H$ ; mais alors, pour tout vecteur  $\mathbf{v} \in V^H$  on a

$$h \cdot (g \cdot \mathbf{v}) = (hg) \cdot \mathbf{v} = (gh') \cdot \mathbf{v} = g \cdot \mathbf{v}$$

et donc  $V^H$  est bien  $N(H)$  invariant. Supposons maintenant que  $H = G_{\mathbf{v}}$  est un sous-groupe d'isotropie. Si un sous-groupe  $K$  laisse  $V^H$  invariant, on veut montrer que  $K \subseteq N(H)$ . Soit donc  $k \in K$ . Par hypothèse  $\mathbf{v} \in V^H$  donc  $k \cdot \mathbf{v} \in V^H$  et  $k^{-1} \cdot \mathbf{v} \in V^H$ . Ainsi, pour tout  $h \in H$ ,

$$k \cdot (h \cdot (k^{-1} \cdot \mathbf{v})) = k \cdot (k^{-1} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v},$$



ce qui montre que  $khk^{-1} \in G_{\mathbf{v}} = H$  et donc  $k \in N(H)$ . Remarquons que si on ne fait pas l'hypothèse que  $H$  est un sous-groupe d'isotropie, on pourrait seulement écrire  $khk^{-1} \in G_{\mathbf{v}} \supset H$ .  $\square$

*Remarque 2.2.9.* Lorsqu'un sous-groupe  $H = G_{\mathbf{v}}$  est le sous-groupe d'isotropie d'un vecteur non nul, le sous-espace vectoriel  $V^H$  n'est pas trivial puisqu'il contient au moins la droite engendrée par  $\mathbf{v}$ . A l'opposé, si on suppose que le sous-espace vectoriel  $V^H$  n'est pas trivial, on ne peut pas en déduire que  $H$  est effectivement un sous-groupe d'isotropie. Reprenons en effet l'exemple 2.2.6 de l'espace  $(\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3), \text{SO}(3))$ . Soit le sous-groupe  $H = Z_2$  engendré par le retournement

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'espace des points fixes  $V^{Z_2}$  est de dimension trois mais nous avons vu en 2.2.6 que  $[Z_2]$  n'était pas une classe d'isotropie. Ainsi, pour détecter les isotropies d'une représentation donnée, il ne suffit pas de détecter les ensembles de points fixes non triviaux.

Grâce au lemme 2.2.8, nous pouvons restreindre l'action de  $G$  sur  $V^H$  en une action du normalisateur  $N(H)$ . Dans le cas où  $H$  est un sous-groupe d'isotropie, l'action de  $N(H)/H$  sur  $V^H$  est *fidèle*<sup>d</sup>. De plus, comme souligné dans la remarque 2.2.7, l'isotropie de chaque vecteur de l'intersection  $\Sigma_{[H]} \cap V^H$  est exactement le sous-groupe  $H$ .

Ces observations permettent de réduire (localement sur chaque strate  $\Sigma_{[H]}$ ) l'action du groupe  $G$  sur  $V$  en l'action du groupe  $\Gamma(H) := N(H)/H$  sur  $V^H$ . Lorsque  $\Gamma(H)$  est trivial, chaque orbite rencontre  $V^H$  en au plus un point, et  $V^H$  est donc une tranche linéaire pour la strate  $\Sigma_{[H]}$ . Dans le cas où  $\Gamma(H)$  est fini, on parlera encore de tranche et on désignera  $\Gamma(H)$  par le terme de *groupe de monodromie* de la tranche.

Détaillons maintenant cette idée de réduction. Pour cela, notons

$$\rho|_{N(H)} : N(H) \longrightarrow \text{GL}(V^H)$$

l'action induite par  $\rho$  sur  $V^H$ . Lorsque  $H$  est un sous-groupe d'isotropie, nous avons la représentation fidèle

$$\rho_{\Gamma(H)} : \Gamma(H) \longrightarrow \text{GL}(V^H) \text{ où } \Gamma(H) = N(H)/H.$$

**Lemme 2.2.10.** *Etant donné un sous-groupe d'isotropie  $H$ , et deux vecteurs*

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V^H \cap \Sigma_{[H]},$$

$\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  sont sur la même orbite sous l'action de  $(V, \rho)$  si et seulement si ils sont sur la même orbite sous l'action de  $(V^H, \rho_{\Gamma(H)})$ .

*Démonstration.* Par hypothèse, on en déduit directement (remarque 2.2.7) que  $G_{\mathbf{v}_i} = H$  ( $i = 1, 2$ ). Si maintenant on suppose qu'il existe  $g \in G$  tel que  $\mathbf{v}_2 = g \cdot \mathbf{v}_1$ , on sait alors que pour tout  $h \in H$  on aura  $(ghg^{-1}) \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2$  et donc  $ghg^{-1} \in G_{\mathbf{v}_2} = H$ , ce qui montre que  $g \in N(H)$ . La réciproque est évidente.  $\square$

d. Une représentation  $(V, \rho)$  est dite fidèle si le noyau de  $\rho$  est réduit à l'identité.

Grâce à ce lemme 2.2.10, on vient donc de réduire la description de l'espace des orbites

$$(\Sigma_{[H]} \cap V^H)/G$$

à celui de l'espace des orbites  $(\Sigma_{[H]} \cap V^H)/\Gamma(H)$ , pour chaque strate  $\Sigma_{[H]}$ .

*Exemple 2.2.11.* Reprenons ici l'action adjointe de  $\mathrm{SO}(3)$  sur l'espace  $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$  traité dans l'exemple 2.2.6. Les classes d'isotropie sont :

$$[\mathrm{D}_2], \quad [\mathrm{O}(2)], \quad [\mathrm{SO}(3)].$$

La strate générique correspond à la classe d'isotropie du groupe  $\mathrm{D}_2$ . D'après la section 4.C, on a

$$N(\mathrm{D}_2) = \mathcal{O}, \quad N(\mathrm{D}_2)/\mathrm{D}_2 = \mathfrak{S}_3$$

où  $\mathcal{O}$  désigne le groupe des symétries du cube et  $\mathfrak{S}_3$  le groupe des permutations à trois éléments.

L'espace  $V^{\mathrm{D}_2}$  est exactement l'espace des matrices diagonales, et il s'agit dans ce cas d'une tranche linéaire globale (ce qui est très rare en général). L'intersection

$$V^{\mathrm{D}_2} \cap \Sigma_{[\mathrm{D}_2]}$$

correspond aux matrices diagonales ayant trois valeurs propres distinctes, et l'action du groupe de monodromie est simplement l'action de  $\mathfrak{S}_3$  par permutation sur ces valeurs propres.

Lorsque  $G$  est un *groupe de Lie compact*, la dimension d'une strate  $\Sigma_{[H]}$  est directement liée à celle du normalisateur  $N(H)$  :

**Lemme 2.2.12.** *Pour tout sous-groupe d'isotropie  $H$  on a*

$$\dim(\Sigma_{[H]}) = \dim(V^H) + \dim(G) - \dim(N(H))$$

*Démonstration.* La restriction de la projection

$$\pi : V \longrightarrow V/G$$

à une strate

$$\hat{\pi} : \Sigma_{[H]} \longrightarrow \Sigma_{[H]}/G$$

est un fibré de fibre type  $G/H$ . Localement, une strate est donc du type  $\Sigma_{[H]}/G \times G/H$ . On a ainsi

$$\dim(\Sigma_{[H]}) = \dim(G/H) + \dim(\Sigma_{[H]}/G)$$

où  $\dim(G/H) = \dim(G) - \dim(H)$ .

L'intersection  $V^H \cap \Sigma_{[H]}$  est un ouvert dense de  $V^H$  constitué de vecteurs de  $V^H$  ayant tous pour classe d'isotropie  $[H]$ . Par le lemme 2.2.10, on en déduit que la base  $\Sigma_{[H]}/G$  du fibré  $\Sigma_{[H]}$  est diffeomorphe (on peut se référer à [Bre72] sur ce point) à  $(V^H \cap \Sigma_{[H]})/\Gamma^H$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \dim(\Sigma_{[H]}/G) &= \dim((V^H \cap \Sigma_{[H]})/\Gamma^H) = \dim(V^H) - \dim(\Gamma^H) \\ \dim(\Sigma_{[H]}) &= \dim(V^H) + \dim(G) - \dim(N(H)) \end{aligned}$$

□

*Remarque 2.2.13.* La dimension de  $V^H$  se calcule à l'aide d'une *formule de trace* sur l'opérateur de Reynolds [GSS88]. En notant  $\chi_\rho$  le caractère de la représentation  $(V, \rho)$ , on a ainsi

$$\dim(V^H) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi_\rho(h)$$

dans le cas d'un groupe fini. Dans le cas d'un groupe compact, il suffit d'utiliser une formule équivalente à l'aide d'une intégrale de Haar. La [section A](#) explicite ces dimensions dans le cas des représentations des groupes  $O(3)$  et  $SO(3)$ .

## 2.3. Algèbre d'invariants

Dans cette section, nous rappelons quelques notions générales sur les algèbres d'invariants. Pour une présentation plus générale et plus complète, nous renvoyons le lecteur à [VP89; KP00].

On désigne par  $\mathbb{k}$  le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On fixe une représentation linéaire  $(V, \rho)$  d'un groupe  $G$ . Un sous-espace  $W \subset V$  est dit *stable* si  $\rho(g)(W) \subset W$  pour tout  $g \in G$ . On dit ensuite que la représentation est irréductible si les seuls sous-espaces stables sont  $\emptyset$  et  $V$  lui-même. Enfin, la représentation est dite complètement réductible si  $V$  se décompose en somme directe de sous-espaces irréductibles.

Le groupe  $G$  est dit *linéaire algébrique* sur  $\mathbb{k}$  si  $G \subset GL(n, \mathbb{k})$  pour un certain entier  $n \geq 1$  et si  $G$  est défini par des équations polynomiales en les coordonnées  $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ .

**Définition 2.3.1.** Un groupe linéaire algébrique  $G$  est dit *réductif* si toute représentation *rationnelle*<sup>e</sup> de dimension finie de  $G$  est complètement réductible.

*Exemple 2.3.2.* Les groupes compacts classiques  $O(n)$  et  $SO(n)$  sont linéaires réductifs (notamment par le théorème de Peter–Weyl [Ste94]). Il en est de même des groupes  $SU(2)$  et  $SL(n, \mathbb{C})$  ( $n \geq 1$ ).

Pour toute la suite, on fixe donc une représentation linéaire  $(V, \rho)$  de dimension finie d'un groupe linéaire algébrique réductif  $G$ .

### 2.3.1. Théorème de finitude

Nous pouvons identifier l'espace  $V$  à  $\mathbb{k}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). L'algèbre des polynômes sur  $V$ , notée  $\mathbb{k}[V]$ , s'identifie à

$$\mathbb{k}[V] \simeq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$$

où  $(x_1, \dots, x_n)$  désignent des indéterminées. Pour tout vecteur  $\mathbf{v} \in V$ , on note

$$\mathbf{p}(\mathbf{v}) = \mathbf{p}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{k}[V]$$

un polynôme sur  $V$ . L'algèbre  $\mathbb{k}[V]$  est *graduée* par le degré en  $x_1, \dots, x_n$ . On note  $(\mathbb{k}[V])_d$  le sous-espace vectoriel des polynômes homogènes de degré  $d$ .

---

e.  $(V, \rho)$  est une représentation rationnelle si  $G \rightarrow GL(V)$  est un morphisme de groupes qui est aussi un morphisme de variétés.

L'action  $\rho$  de  $G$  sur  $V$  induit une action naturelle (à gauche) de  $G$  sur l'algèbre  $\mathbb{k}[V]$  par

$$(g \cdot \mathbf{p})(\mathbf{v}) := \mathbf{p}(g^{-1} \cdot \mathbf{v})$$

où  $\mathbf{p} \in \mathbb{k}[V]$  et  $g \in G$ .

**Définition 2.3.3.** L'algèbre des polynômes invariants associée à la représentation  $(V, \rho)$  est donnée par

$$\mathbb{k}[V]^G := \{\mathbf{p} \in \mathbb{k}[V], \quad g \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p}, \quad \forall g \in G\}$$

**Définition 2.3.4.** Une famille  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$  est une *famille génératrice finie*<sup>f</sup> de l'algèbre  $\mathbb{k}[V]^G$  si

$$\mathbb{k}[V]^G = \mathbb{k}[\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N].$$

Une telle famille est *minimale* si toute sous-famille stricte n'est plus génératrice.

**Théorème 2.3.5** (Hilbert - 1890). *Pour tout groupe linéaire algébrique réductif  $G$ , l'algèbre des invariants  $\mathbb{k}[V]^G$  possède une famille génératrice finie.*

On peut trouver plusieurs démonstrations de ce théorème, initialement établi dans [Hil90]. Une version moderne se trouve par exemple dans [Der99].

*Exemple 2.3.6.* Considérons l'action naturelle de  $\mathrm{SO}(3)$  sur  $\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$ . Les polynômes

$$\mathbf{p}_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := \|\mathbf{v}_1\|^2, \quad \mathbf{p}_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := \|\mathbf{v}_2\|^2 \text{ et } \mathbf{p}_3(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$$

forment une famille génératrice finie [Wey39; AS83] de l'algèbre  $\mathbb{R}[\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3]^{\mathrm{SO}(3)}$ . On montre directement qu'une telle famille est minimale. Une autre famille génératrice minimale est par exemple donnée par

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2; \quad \|\mathbf{v}_1\|^2 - \|\mathbf{v}_2\|^2; \quad \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle.$$

*Exemple 2.3.7.* Notons  $\mathfrak{S}_n$  le groupe des permutations de  $n$  éléments, et l'action de  $\mathfrak{S}_n$  sur  $V = \mathbb{k}^n$  définie par

$$\sigma \cdot (x_1, \dots, x_n) := (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Une famille génératrice minimale [Stu08] de l'algèbre  $\mathbb{k}[V]^{\mathfrak{S}_n}$  est donnée par les  $n$  fonctions symétriques élémentaires

$$\sigma_k(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Une autre famille génératrice minimale s'obtient aussi à partir des sommes de Newton

$$p_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

---

f. Certains textes utilisent aussi la notion de *base de Hilbert* ou encore celle de *base d'intégrité*. Nous avons choisi de bien faire la distinction entre une *base* (pour un espace vectoriel) et une famille génératrice finie (pour une algèbre).

### 2.3.2. Structure de Cohen-Macaulay

Pour mieux comprendre les propriétés d'une algèbre d'invariants, nous allons tout d'abord rappeler certaines propriétés générales concernant les algèbres graduées de type fini. Nous mettrons ainsi l'accent sur la notion de *système de paramètres*, puis nous préciserons la propriété de *Cohen–Macaulay* des algèbres d'invariants de groupes linéaires algébriques réductifs. Enfin, nous introduirons la *série de Hilbert* d'une algèbre graduée, qui est une fonction *rationnelle* pouvant dans la plupart des cas se calculer *a priori*.

Notons  $\mathcal{A}$  une  $\mathbb{k}$  algèbre graduée de *type fini*,

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{A}_i$$

où  $\mathcal{A}_0 = \mathbb{k}$ , et chaque  $\mathcal{A}_i$  est un  $\mathbb{k}$  espace vectoriel de dimension finie tel que

$$\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}.$$

Un élément  $a \in \mathcal{A}_i$  est appelé élément *homogène de degré  $i$* .

Notons  $\mathcal{A}_+ := \bigoplus_{i > 0} \mathcal{A}_i$ , l'idéal gradué de  $\mathcal{A}$  engendré par les éléments non constants. Le lemme suivant est une conséquence immédiate du caractère fini de l'algèbre  $\mathcal{A}$  :

**Lemme 2.3.8.** *L'algèbre*

$$\mathcal{B} := \mathcal{A}/(\mathcal{A}_+)^2 = \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{A}_i/(\mathcal{A}_+)_i^2 \text{ où } (\mathcal{A}_+)_i^2 := (\mathcal{A}_+)^2 \cap \mathcal{A}_i$$

*est une algèbre graduée de dimension finie sur  $\mathbb{k}$ .*

**Lemme 2.3.9.** *Si  $a_1, \dots, a_N$  est une famille génératrice de l'algèbre  $\mathcal{A}$ , alors*

$$N \geq \dim \mathcal{B} - 1$$

*De plus, il existe une famille génératrice finie de l'algèbre  $\mathcal{A}$  de cardinal exactement  $\dim \mathcal{B} - 1$ .*

*Démonstration.* Il est d'abord clair que les projetés  $\bar{a}_i$  de  $a_i$  dans  $\mathcal{B}$  forment une famille génératrice de  $\mathcal{B}$ , ce qui montre la première partie du lemme. Ensuite, pour déterminer effectivement une famille génératrice de l'algèbre  $\mathcal{A}$  de cardinal  $\dim \mathcal{B} - 1$ , il suffit de considérer dans chaque espace  $\mathcal{A}_i$  une base d'un supplémentaire de  $(\mathcal{A}_+^2)_i$ .  $\square$

*Remarque 2.3.10.* Pour tout algèbre d'invariants  $\mathbb{k}[V]^G$ , le nombre  $n(V) := \dim \mathcal{B} - 1$  est le cardinal minimal d'une famille génératrice finie. Le lemme 2.3.9 montre qu'une telle famille génératrice minimale existe mais aussi que son cardinal ne dépend pas du choix d'un système de générateurs minimal. Dans la pratique, nous ne connaissons pas de méthode effective pour calculer cet invariant. Dans les cas que nous avons étudiés, seule une détermination effective d'une famille génératrice finie minimale nous a permis de l'obtenir.

Nous allons maintenant introduire la notion de *système de paramètres* d'une algèbre de type fini. Pour cela, nous rappelons dans un premier temps les notions de famille libre, de famille liée, et enfin celle d'*extension entière*.

**Définition 2.3.11.** Une famille  $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathcal{A}$  est dite *algébriquement liée* s'il existe un polynôme non nul  $\mathbf{p} \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  tel que  $\mathbf{p}(a_1, \dots, a_n) = 0$ . Dans le cas contraire, on dit que la famille est *algébriquement libre*.

Le cardinal d'une famille algébriquement libre de  $\mathcal{A}$  est majoré par la *dimension de Krull*<sup>g</sup> de l'algèbre  $\mathcal{A}$ , notée  $\dim_K(\mathcal{A})$ . En notant  $F(\mathcal{A})$  le corps des fractions de  $\mathcal{A}$ , on peut vérifier que  $\dim_K(\mathcal{A})$  est en fait le *degré de transcendance* de  $F(\mathcal{A})$  sur  $\mathbb{k}$  [Kna07].

*Exemple 2.3.12.* Nous avons déjà vu que pour  $V = \mathbb{k}^n$ , l'algèbre  $\mathcal{A} = \mathbb{k}[V]^{\mathfrak{S}_n}$  est engendrée par les  $n$  *fonctions symétriques élémentaires*  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  (exemple 2.3.7). Une telle famille est *algébriquement libre* [Stu08]. De plus, nous savons que  $\dim_K(\mathcal{A}) = n$ .

L'algèbre  $\mathcal{B} = \mathbb{k}[V]^{\mathfrak{A}_n}$  où  $\mathfrak{A}_n$  est le *groupe alterné*, est engendrée par les fonctions symétriques élémentaires ainsi que par le discriminant :

$$\Delta(\mathbf{x}) := \prod_{i < j} (x_j - x_i), \quad \mathcal{B} = \mathbb{k}[\Delta, \sigma_1, \dots, \sigma_n].$$

La dimension de Krull de  $\mathcal{B}$  est encore  $n$ , et la famille  $\{\Delta, \sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  est algébriquement liée. En effet  $\Delta^2 \in \mathbb{k}[V]^{\mathfrak{S}_n}$  et donc

$$\Delta^2 \in \mathbb{k}[\sigma_1, \dots, \sigma_n].$$

**Définition 2.3.13.** Pour toute sous-algèbre  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$ , un élément  $a \in \mathcal{A}$  est dit *entier* sur  $\mathcal{B}$  s'il existe un polynôme *unitaire*  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}[x]$  tel que

$$\mathbf{p}(a) = 0.$$

On dit que  $\mathcal{A}$  est entier sur  $\mathcal{B}$  si tout élément de  $\mathcal{A}$  est entier sur  $\mathcal{B}$ .

**Définition 2.3.14.** Etant donné une algèbre  $\mathcal{A}$  graduée de type fini, la famille *algébriquement libre*  $\theta_1, \dots, \theta_s$  est un *système de paramètres* si l'une des deux conditions équivalentes est vérifiée :

1.  $\mathcal{A}$  est entière sur la sous-algèbre  $\mathbb{k}[\theta_1, \dots, \theta_s]$  ;
2.  $\mathcal{A}$  est un  $\mathbb{k}[\theta_1, \dots, \theta_s]$ -module de type fini.

Dans ce cas, le nombre  $s$  est la *dimension de Krull* de  $\mathcal{A}$ .

*Exemple 2.3.15.* On considère l'algèbre

$$\mathcal{A} = \mathbb{k}[x, y, z] / \langle x^2 - yz \rangle = \mathbb{k}[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]$$

où  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  désignent les projections respectives de  $x, y, z$ . Par construction même, la famille  $\{\bar{y}, \bar{z}\}$  est algébriquement libre et  $\bar{x}$  est entier sur  $\mathbb{k}[\bar{y}, \bar{z}]$ . On remarque aussi que

$$\mathcal{A} = \mathbb{k}[\bar{y}, \bar{z}] + \bar{x}\mathbb{k}[\bar{y}, \bar{z}].$$

Ainsi, la famille  $\{\bar{y}, \bar{z}\}$  est un système de paramètres de  $\mathcal{A}$ .

---

g. Il s'agit du nombre maximal d'idéaux dans une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers inclus dans l'algèbre.

*Exemple 2.3.16.* Soit l'algèbre  $\mathcal{A} = \mathbb{k}[a^2, a^3, b, ab]$ . La famille  $\{a^2, b\}$  est algébriquement libre, et on remarque que

$$(a^3)^2 = (a^2)^3, \quad (ab)^2 = a^2(b)^2$$

et donc  $\{a^2, b\}$  est un système de paramètres. On peut aussi remarquer que

$$\mathcal{A} = a^3\mathbb{k}[a^2, b] + ab\mathbb{k}[a^2, b].$$

Par le *lemme de normalisation de Noether* [Lan02], une algèbre de type fini possède toujours un système de paramètres. Dans le cas d'une algèbre graduée, on peut toujours faire en sorte que tous les éléments du système de paramètres soient *homogènes*. On parle dans ce cas de *système homogène de paramètres*.

*Remarque 2.3.17.* Un système de paramètres forme nécessairement une famille algébriquement libre maximale. Mais la réciproque est fautive. Si nous considérons en effet l'algèbre

$$\mathbb{k}[x, y, z]/\langle xy - z \rangle$$

on peut vérifier que la dimension de Krull de cet algèbre est 2, et que les projections  $\bar{x}, \bar{z}$  de  $x, z$  forment une famille algébriquement libre maximale. Mais la projection  $\bar{y}$  de  $y$  ne peut pas être entière sur  $\mathbb{k}[\bar{x}, \bar{z}]$ . Ainsi la famille  $\{\bar{x}, \bar{z}\}$  ne forme pas un système de paramètres.

Comme nous l'avons précisé, le lemme de normalisation de Noether nous assure que toute algèbre de type fini possède toujours un système de paramètres, ce qui montre qu'on peut toujours réaliser une telle algèbre comme un certain module de type fini (sur une sous-algèbre). Nous pouvons maintenant exiger une propriété plus forte : celle d'être un module *libre* de type fini.

**Définition 2.3.18.** Une  $\mathbb{k}$  algèbre graduée  $\mathcal{A}$  de type fini est dite de *Cohen-Macaulay* si l'une des deux conditions équivalentes est vérifiée :

1. Il existe un système de paramètres  $\theta_1, \dots, \theta_s$  tel que  $\mathcal{A}$  soit un  $\mathbb{k}[\theta_1, \dots, \theta_s]$ -module *libre* ;
2. Pour tout système de paramètres  $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_s$  l'algèbre  $\mathcal{A}$  est un  $\mathbb{k}[\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_s]$ -module *libre*.

Tout algèbre de Cohen–Macaulay peut ainsi s'écrire :

$$\mathcal{A} = \eta_1\mathbb{k}[\theta_1, \dots, \theta_s] \oplus \dots \oplus \eta_r\mathbb{k}[\theta_1, \dots, \theta_s]. \quad (2.3.1)$$

Cette décomposition étant appelée *décomposition de Hironaka*.

*Exemple 2.3.19.* En reprenant l'exemple 2.3.15, on a

$$\mathbb{k}[x, y, z]/\langle x^2 - yz \rangle = \mathbb{k}[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] = \mathbb{k}[\bar{y}, \bar{z}] \oplus \bar{x}\mathbb{k}[\bar{y}, \bar{z}].$$

Par contre, dans le cas de l'exemple 2.3.16, nous avons la relation

$$a^3(b) - ab(a^2) = 0$$

et donc  $\mathbb{k}[a^2, a^3, b, ab]$  n'est pas un  $\mathbb{k}[a^2, b]$  module libre.

*Exemple 2.3.20.* Dans l'algèbre  $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ , notons<sup>h</sup>

$$I_2 := x_1^2 + x_2^2, \quad I_4 := x_1^2 x_2^2, \quad J_4 := x_1 x_2^3 - x_1^3 x_2$$

En utilisant des bases de Gröbner [Stu08 ; CLO07 ; GS], on peut vérifier que la famille  $\{I_2, I_4\} \subset \mathbb{C}[I_2, I_4, J_4]$  est algébriquement libre et que  $J_4$  est entier sur  $\mathbb{C}[I_2, I_4]$ . Plus précisément :

$$J_4^2 - I_4 I_2 + 4I_4^2 = 0$$

Finalement, on peut directement montrer que l'algèbre  $\mathbb{C}[I_2, I_4, J_4]$  est de Cohen–Macaulay. Une décomposition de Hironaka de cette algèbre est par exemple donnée par

$$\mathbb{C}[I_2, I_4, J_4] = \mathbb{C}[I_2, I_4] \oplus J_4 \mathbb{C}[I_2, I_4]$$

Nous avons alors le résultat suivant [HR74] :

**Théorème 2.3.21** (Hochster–Roberts - 1974). *Pour toute représentation linéaire  $(V, \rho)$  de dimension finie d'un groupe linéaire algébrique réductif  $G$ , l'algèbre des invariants est Cohen–Macaulay.*

### 2.3.3. Série de Hilbert

Pour toute algèbre graduée de type fini, chaque espace homogène est de dimension finie. La série de Hilbert consiste à coder ces dimensions à l'aide d'une série formelle. Lorsque l'algèbre est engendrée par une famille algébriquement libre, cette série s'obtient directement. Dans le cas général, une telle série est *rationnelle* et peut très souvent se calculer *a priori*.

**Définition 2.3.22.** La *série de Hilbert*<sup>i</sup> d'une algèbre graduée  $\mathcal{A}$ , de type fini, est la série formelle définie par

$$H_{\mathcal{A}}(z) := \sum_{i \geq 0} \dim(\mathcal{A}_i) z^i.$$

*Remarque 2.3.23.* Dans le cas d'une algèbre *multigradée*, il est possible de définir une série de Hilbert associée à cette multigraduation. Si nous avons par exemple une double graduation

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{d_1, d_2 \geq 0} \mathcal{A}_{d_1, d_2}$$

on peut définir

$$H(z_1, z_2) := \sum_{d_1, d_2 \geq 0} (\dim \mathcal{A}_{d_1, d_2}) z_1^{d_1} z_2^{d_2}.$$

Nous savons alors facilement déterminer les séries de Hilbert pour les sommes directes et les produits tensoriels :

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}}(z) &= H_{\mathcal{A}}(z) + H_{\mathcal{B}}(z) \\ H_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}(z) &= H_{\mathcal{A}}(z) \times H_{\mathcal{B}}(z) \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

h. Il s'agit en fait de trois polynômes invariants sous l'action du groupe  $Z_4$  sur  $\mathbb{C}^2$ .

i. Une telle série est aussi appelée quelques fois *série de Poincaré*.



Le résultat suivant est une conséquence directe de la formule (2.3.2) sur le produit tensoriel :

**Lemme 2.3.24.** *Si  $\mathcal{A} = \mathbb{k}[\theta_1, \dots, \theta_s]$  est engendrée par la famille algébriquement libre  $\{\theta_1, \dots, \theta_s\}$ , composée de polynômes homogènes  $\theta_i$  de degrés respectifs  $d_i$ , alors*

$$H_{\mathcal{A}}(z) = \frac{1}{(1 - z^{d_1}) \cdots (1 - z^{d_s})}.$$

Nous avons ensuite, comme conséquence directe du théorème des syzygies de Hilbert [AM69], le résultat suivant :

**Théorème 2.3.25** (Hilbert–Serre). *La série de Hilbert de toute algèbre graduée  $\mathcal{A}$  de type fini est de la forme*

$$H_{\mathcal{A}}(z) = \frac{f(z)}{(1 - z^{d_1}) \cdots (1 - z^{d_s})}$$

où  $f \in \mathbb{Z}[z]$ .

Dans le cas particulier d’une algèbre de Cohen-Macaulay, le résultat suivant est une simple conséquence du lemme 2.3.24 et des formules (2.3.2) appliquées à la décomposition de Hironaka (2.3.1) :

**Corollaire 2.3.26.** *Etant donné une algèbre de Cohen-Macaulay dont la décomposition de Hironaka est donnée par*

$$\mathcal{A} = \eta_1 \mathbb{k}[\theta_1, \dots, \theta_s] \oplus \cdots \oplus \eta_r \mathbb{k}[\theta_1, \dots, \theta_s],$$

en notant  $d_i = \deg \theta_i$  et  $e_i = \deg \eta_i$ , alors

$$H_{\mathcal{A}}(z) = \frac{z^{e_1} + \cdots + z^{e_r}}{(1 - z^{d_1}) \cdots (1 - z^{d_s})}.$$

*Exemple 2.3.27.* Reprenons l’exemple 2.3.20 où nous considérons l’algèbre

$$\mathcal{A} := \mathbb{C}[I_2, I_4, J_4] = \mathbb{C}[I_2, I_4] \oplus J_4 \mathbb{C}[I_2, I_4].$$

On a directement

$$H_{\mathcal{A}}(z) = \frac{1 + z^4}{(1 - z^2)(1 - z^4)}.$$

Comme nous l’avons précisé, les séries de Hilbert d’une algèbre d’invariants peuvent souvent se calculer *a priori*. Dans le cas d’un groupe *compact*, nous avons :

**Théorème 2.3.28** (Formule de Molien–Weyl [Wey68]). *La série de Hilbert de la représentation  $(V, \rho)$  d’un groupe compact  $G$  sur un espace vectoriel de dimension finie s’écrit*

$$H(z) = \int_G \frac{1}{\det(\text{Id} - \rho(g)z)} d\mu(g)$$

où  $\text{Id}$  est l’identité de  $\text{GL}(V)$  et  $d\mu$  est la mesure de Haar [Ste94] sur  $G$ .

*Remarque 2.3.29.* Ce théorème s'applique en particulier aux représentations du groupe  $O(3)$  ou  $SO(3)$  sur les espaces de tenseurs. De plus, dans cette situation, il existe un package développé sous Maple par Bedratyuk [Bed11b], qui permet d'obtenir directement ces séries de Hilbert.

*Remarque 2.3.30.* Si nous considérons le cas des algèbres d'invariants, qui sont de Cohen–Macaulay (théorème 2.3.21), nous savons que leurs séries de Hilbert associées peuvent toujours s'écrire sous la forme

$$H(z) = \frac{z^{e_1} + \dots + z^{e_r}}{(1 - z^{d_1}) \dots (1 - z^{d_s})} \quad (2.3.3)$$

Mais dans le cas général, une telle écriture n'est pas nécessairement unique :

$$\frac{1 + z + z^2 + z^3 + z^4}{(1 - z^2)(1 - z^3)} = \frac{1 + z^2 + z^3 + z^4 + z^6}{(1 - z)(1 - z^6)}.$$

Cependant, on peut définir une forme *minimale* de  $H$  comme étant une forme rationnelle 2.3.3 pour laquelle  $r$  est minimal [Dix82]. Une telle forme minimale n'est pas nécessairement unique, et Dixmier énonce alors deux problèmes [Dix82] :

1. Ce phénomène de non-unicité peut-il se produire pour une série de Hilbert associée à une algèbre d'invariants ? La réponse est positive<sup>j</sup>.
2. Une fois donnée une écriture minimale d'une série de Hilbert d'une algèbre d'invariants, cette écriture provient-elle d'un système de paramètres ? La réponse, négative, est apportée par [Sta78, ex 3.8] dans le cas d'un groupe fini.

### 2.3.4. Structure semi-algébrique sur l'espace des orbites

Pour toute représentation réelle de dimension finie d'un groupe compact, les polynômes invariants *séparent* les orbites. La propriété suivante est attribuée à Weyl [Wey39] :

**Proposition 2.3.31.** *Soit  $(V, \rho)$  une représentation linéaire réelle de dimension finie d'un groupe compact  $G$ . Alors*

$$\text{Orb}(\mathbf{v}_1) \neq \text{Orb}(\mathbf{v}_2) \Rightarrow \exists \mathbf{p} \in \mathbb{R}[V]^G, \mathbf{p}(\mathbf{v}_1) \neq \mathbf{p}(\mathbf{v}_2)$$

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{v} \in V$  et  $K$  un sous-ensemble compact de  $V$ . Ayant fixé une norme  $\|\cdot\|$  sur  $V$ , on définit la distance de  $\mathbf{v}$  à  $K$  par

$$d(\mathbf{v}, K) = \min_{\mathbf{w} \in K} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|.$$

Posons maintenant  $K_1$  et  $K_2$  deux  $G$ -orbites distinctes dans  $V$ . La fonction

$$f(\mathbf{v}) = \frac{d(\mathbf{v}, K_1) - d(\mathbf{v}, K_2)}{d(\mathbf{v}, K_1) + d(\mathbf{v}, K_2)}$$

est continue sur  $V$ , avec  $f(\mathbf{v}) = -1$ , pour  $\mathbf{v} \in K_1$  et  $f(\mathbf{v}) = +1$ , pour  $\mathbf{v} \in K_2$ .

---

j. Elle est apportée par l'algèbre des invariants  $\mathbb{C}[S_7]^{\text{SL}(2, \mathbb{C})}$  où  $S_7$  est l'espace des formes binaires de degré 7.

Comme le groupe  $G$  est compact, les orbites sont compactes et il est donc possible de déterminer une boule fermée  $B$  dans  $V$  qui contienne les deux orbites  $K_1$  et  $K_2$ . On peut maintenant appliquer le *théorème de Stone-Weierstrass* qui nous assure que l'espace des fonctions polynômiales *réelles* forme un sous-espace dense dans l'espace des fonctions continues définies sur  $B$  (avec la norme sup). Ainsi, il existe une fonction polynômiale  $\mathbf{p}$  sur  $V$  telle que

$$\mathbf{p}(\mathbf{v}) \leq -\frac{1}{2}, \forall \mathbf{v} \in K_1, \quad \mathbf{p}(\mathbf{v}) \geq \frac{1}{2}, \forall \mathbf{v} \in K_2.$$

Et il en est de même pour la fonction polynômiale invariante

$$\bar{\mathbf{p}} = \int_G g \cdot \mathbf{p} \, d\mu$$

où  $\mu$  est la mesure de Haar sur  $G$ . Un tel polynôme sépare les orbites  $K_1$  et  $K_2$ .  $\square$

*Remarque 2.3.32.* Ce résultat est spécifique au cas de la représentation réelle d'un groupe compact. Dans le cas complexe, il suffit en effet de considérer la représentation du groupe  $G = \mathbb{C}^*$  sur  $\mathbb{C}^2$  donnée par simple multiplication :

$$t \cdot (z_1, z_2) := (tz_1, tz_2).$$

Dans ce cas, l'algèbre des polynômes invariants est exactement l'algèbre des polynômes constants.

Dans le cas d'une représentation réelle  $(V, \rho)$  d'un groupe compact, on va maintenant décrire comment une famille génératrice d'invariants permet d'obtenir la structure de variété semi-algébrique de l'espace des orbites. Après avoir présenté un résultat théorique dû à Procesi–Schwarz [PS85], nous proposons de détailler l'approche originale adoptée par Auffray et al. [AKP14] dans le cas de l'élasticité.

### Structure semi-algébrique par la matrice de Gram

On fixe ici une représentation réelle  $(V, \rho)$  d'un groupe compact  $G$ . D'après le théorème de Hilbert 2.3.5, l'algèbre  $\mathbb{R}[V]^G$  est engendrée par une famille finie de polynômes  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\}$ . L'application

$$\mathbf{v} \mapsto \theta(\mathbf{v}) := (\theta_1(\mathbf{v}), \theta_2(\mathbf{v}), \dots, \theta_N(\mathbf{v})), \quad V \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

induit un homéomorphisme entre l'espace des orbites  $V/G$  et  $\theta(V) \subset \mathbb{R}^N$ . Un tel ensemble est muni d'une structure de variété *semi-algébrique* [Cos02] de  $\mathbb{R}^N$ , c'est-à-dire définie par des inégalités polynômiales. Plus précisément [AS83 ; PS85], considérons la *matrice de Gram* (ou Bezoutiant)

$$\gamma := (\langle d\theta_i, d\theta_j \rangle_G)_{1 \leq i, j \leq N}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$  désigne un produit scalaire  $G$  invariant<sup>k</sup> sur  $V$ . Les coordonnées de  $\gamma$  étant des polynômes  $G$  invariants, on en déduit que  $\gamma$  est fonction de  $X := (\theta_1, \dots, \theta_N) \in \mathbb{R}^N$ .

k. Il est toujours possible de construire un tel produit scalaire en considérant  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle_G := \int_G \langle g \cdot \mathbf{v}_1, g \cdot \mathbf{v}_2 \rangle \, d\mu$  où  $\mu$  est la mesure de Haar sur  $G$ .

**Théorème 2.3.33** (Procesi–Schwarz – 1985). *Pour toute représentation réelle  $V$  d'un groupe de Lie compact  $G$ ,*

$$V/G \simeq \left\{ X \in \mathbb{R}^N; \gamma(X) \text{ est semi définie positive} \right\}$$

*Remarque 2.3.34.* Ce résultat est en fait une généralisation d'un résultat dû à Sylvester [Pro78] sur les racines réelles d'un polynôme à coefficients réels. Notons en effet

$$\mathbf{p}(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n$$

Alors le nombre de racines réelles distinctes de  $\mathbf{p}$  est égal à la *signature* de la matrice de Frankel<sup>1</sup>

$$B(\mathbf{p}) := (S_{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n}$$

où  $S_k := \sum_{i=1}^n (\lambda_i)^k$  et les  $\lambda_i$  sont les racines de  $\mathbf{p}$ . En particulier, les racines de  $\mathbf{p}$  sont toutes réelles si et seulement si  $B(\mathbf{p})$  est semi définie positive.

Le théorème 2.3.33 peut être complété par certains résultats obtenus par Abud-Sartori [AS83]. Avant cela, rappelons que la *décomposition isotropique* (sous-section 2.2.1) de  $V$  permet d'écrire

$$V = \bigsqcup_{i=0}^n \Sigma_{[H_i]}$$

où on suppose que  $\Sigma_{[H_0]}$  est la *strate maximale* de  $V$ .

On considère ensuite l'ensemble  $\Sigma^{(k)} \subset \mathbb{R}^N$  défini par les matrices de Gram  $\gamma$  (semi-définie positive) de rang exactement  $k$  :

$$\Sigma^{(k)} := \left\{ X \in \mathbb{R}^N; \gamma(X) \text{ est semi définie positive, } \text{rang}(\gamma(X)) = k \right\}.$$

Dans ce cas

**Lemme 2.3.35.** *Pour tout entier  $0 \leq k \leq \dim(\Sigma_{[H_0]})$ , les composantes connexes de  $\Sigma^{(k)}$  sont en correspondance bi-univoque avec les strates de dimension  $k$ .*

Dans la pratique, cependant, il est difficile de déterminer des inéquations explicites lorsqu'il existe plusieurs composantes connexes, notamment du fait de la taille de la matrice de Gram (reliée à une famille génératrice minimale de l'algèbre des invariants). Dans l'exemple qui suit, seule une étude géométrique spécifique a permis de lever cette ambiguïté.

*Exemple 2.3.36.* Nous reprenons ici un exemple directement issu de [AS83]. On considère l'action du groupe  $O(3)$  sur  $\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$  donnée par

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (g \cdot \mathbf{x}, (\det(g))g \cdot \mathbf{y})$$

Une famille génératrice minimale est donnée par

$$\theta_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x}\|^2, \quad \theta_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{y}\|^2, \quad \theta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2$$

---

1. Schwarz–Porcesi parlent ici du « Bezoutiant ».

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^3$ . La matrice de Gram est donnée par

$$\gamma(X) = 4 \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & \theta_3 \\ 0 & \theta_2 & \theta_3 \\ \theta_3 & \theta_3 & (\theta_1 + \theta_2)\theta_3 \end{pmatrix}$$

et on a

$$\det(\gamma) = 64(\theta_1 + \theta_2)\theta_3(\theta_1\theta_2 - \theta_3)$$

La stratégie adoptée par [AS83] consiste ensuite à étudier la stratification en fonction du rang de la matrice<sup>m</sup>  $\gamma$  :

- le rang de  $\gamma$  est 3, ce qui correspond à la classe d'isotropie<sup>n</sup> minimale [1] ; les inéquations associées étant

$$\theta_1\theta_2 > \theta_3 > 0$$

- le rang de  $\gamma$  est 2. Il y a ici deux classes d'isotropie possibles :
  - la classe d'isotropie [SO(2)], dont les inéquations sont données par

$$\begin{cases} \theta_1\theta_2 = \theta_3 \\ \theta_1, \theta_2 > 0 \end{cases}$$

- la classe d'isotropie [Z<sub>2</sub>], dont les inéquations sont données par

$$\begin{cases} \theta_3 = 0 \\ \theta_1, \theta_2 > 0 \end{cases}$$

- le rang de  $\gamma$  est 1. Il y a ici encore deux classes d'isotropie possibles :
  - la classe d'isotropie [O(2)], dont les inéquations sont données par

$$\begin{cases} \theta_2 = \theta_3 = 0 \\ \theta_1 > 0 \end{cases}$$

- la classe d'isotropie [Z<sub>2</sub> ⊕ SO(2)], dont les inéquations sont données par

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_3 = 0 \\ \theta_2 > 0 \end{cases}$$

## Equations par les invariants polynomiaux

Pour obtenir explicitement les inéquations des strates, Auffray et al. [AKP14] ont proposé une approche originale que nous proposons ici d'expliciter. Leur objectif était de pouvoir établir les *équations de bifurcation* associées à la stratification d'un certain sous-espace  $\mathbb{V} \subset \mathbb{E}^4$  (espace de tenseurs d'ordre 4 totalement symétriques et de trace nulle, voir [section 3.1](#) pour plus de détails). De telles équations ont déjà été présentées dans la [figure 1.3](#).

On se situe donc à nouveau dans le cas d'une représentation réelle  $(V, \rho)$  d'un groupe

m. Rappelons que, dans tout les cas, cette matrice doit être semi-définie positive.

n. La [sous-section 3.2.1](#) donne la classification des sous-groupes fermés de O(3).

compact  $G$ . La question est de pouvoir déterminer les inéquations qui caractérisent la strate  $\Sigma_{[H]} \subset V$  d'un certain sous-groupe d'isotropie  $H$ . A cette fin, on établit en fait les relations qui définissent la strate fermée <sup>o</sup>  $\bar{\Sigma}_{[H]}$  à l'aide d'une famille génératrice finie  $\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$  de l'algèbre  $\mathbb{R}[V]^G$ . La stratégie proposée est la suivante :

1. On fixe un sous-groupe  $H \in [H]$  ainsi que des coordonnées linéaires  $(x_i)_{1 \leq i \leq q}$  sur  $V^H$ . On évalue ensuite les polynômes  $\theta_i$  sur ces coordonnées  $x_j$  puis on cherche à résoudre les équations implicites du système

$$\theta_k = P_k(x_1, \dots, x_q), \quad k = 1, \dots, N, \quad P_k \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_q], \quad (2.3.4)$$

satisfait par la restriction des polynômes  $\theta_i$  sur  $V^H$ .

Dans le cas général, il s'agit d'une étape difficile [CLO07]. De plus, il est possible que la variété algébrique  $V_I$  définie par un tel système d'équations implicites soit plus grosse que la variété  $V_P$  définie par le système (2.3.4). En plus de cela, nous travaillons sur le corps des nombres réels, qui n'est pas algébriquement clos.

2. Pour contourner ces difficultés, Auffray et al. [AKP14] ont utilisé le fait que la restriction des polynômes  $\theta_i$  sur  $V^H$  est  $\Gamma(H)$  invariante (lemme 2.2.10). On peut ainsi en déduire que ces polynômes s'expriment en fonction d'une famille génératrice finie  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  de l'algèbre des polynômes  $\Gamma(H)$  invariants sur  $V^H$ . On a donc ramené le problème à la détermination des équations implicites du système

$$\theta_k = p_k(\sigma_1, \dots, \sigma_r), \quad k = 1, \dots, N, \quad p_k \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_r]. \quad (2.3.5)$$

Pour cela, on peut utiliser des bases de Gröbner [CLO07] ou une chaîne régulière [Bou+09].

3. Dans chacune des situations étudiées, le système (2.3.5) permet d'obtenir un système de relations qui caractérise la strate fermée  $\bar{\Sigma}_{[H]}$

$$S_j(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) = 0, \quad j = 1, \dots, l \quad S_j \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N], \quad (2.3.6)$$

ainsi qu'un système

$$\sigma_i = R_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N), \quad i = 1, \dots, r \quad R_i \in \mathbb{R}(X_1, \dots, X_N), \quad (2.3.7)$$

qui exprime les  $\sigma_i$  rationnellement<sup>p</sup> en fonction de  $\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$ . Dans la plupart des cas, de telles expressions rationnelles ne sont pas uniques. Cependant, si on peut exprimer un certain  $\sigma_i$  en fonction de  $P_1/Q_1$  ainsi que de  $P_2/Q_2$ , alors  $P_1Q_2 - P_2Q_1$  appartient à l'idéal engendré par les  $S_j$ .

4. Sachant que les solutions sont rationnelles, on peut alors exploiter le fait que le corps de base est le corps des réels et non celui des complexes. En effet, chaque solution réelle  $\theta_1, \dots, \theta_N$  de (2.3.6) correspond à une unique solution réelle  $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$  donnée par (2.3.7). Néanmoins, une solution réelle  $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$  de (2.3.7) ne correspond pas nécessairement à un point réel  $(x_1, \dots, x_q)$  de  $V^H$ . Pour nous assurer

o. On obtient ainsi l'ensemble des vecteurs dont la classe d'isotropie est inférieure ou égale à  $[H]$ , selon la relation d'ordre (2.2.1).

p. Soulignons ici que le fait d'avoir une expression rationnelle n'est pas issu d'une propriété générale : elle a simplement été observée dans le cas étudié par [AKP14].

de cela, il faut calculer un nouveau système d'inégalités sur les  $\sigma_i$  ou, ce qui est équivalent, sur les  $\theta_j$ , permettant d'exclure les solutions complexes de

$$\sigma_i = Q_i(x_1, \dots, x_q), \quad i = 1, \dots, r, \quad Q_i \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_q].$$

5. Dans les cas étudiés par [AKP14], les seuls groupes de monodromie  $\Gamma(H) = \mathbb{1}, \mathfrak{S}_2$  ou  $\mathfrak{S}_3$  intervenaient. Mais alors, dans le cas où le groupe de monodromie est le groupe des permutations  $\mathfrak{S}_n$  avec pour action l'action standard, les invariants  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  sont algébriquement indépendants et, dans un système de coordonnées bien choisi,  $x_1, \dots, x_n$  sont les racines du polynôme

$$\mathbf{p}(z) = z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n.$$

Ainsi, dans ce cas, le problème consiste à obtenir les conditions sur  $\sigma_i$  pour que les racines de  $\mathbf{p}$  soient réelles, ce qui peut se faire à partir de la matrice de Frankel (2.3.34).

## 2.4. Polarisation et séparants

### 2.4.1. Théorèmes fondamentaux

Nous allons maintenant présenter quelques résultats généraux sur les familles génératrices d'une algèbre d'invariants. Les énoncés sont essentiellement dus à Weyl [Wey97]. L'idée consiste à étudier des familles génératrices de  $p$  copies d'un espace  $V$  et d'exhiber des méthodes de construction de ces familles. Le premier cas que nous présentons concerne les invariants de *vecteurs*.

Notons pour cela  $O(n)$  le groupe des transformations orthogonales sur  $V = \mathbb{k}^n$  (muni d'une forme quadratique non dégénérée) et considérons son action naturelle. On vérifie immédiatement que l'algèbre des invariants  $\mathbb{k}[V]^{O(n)}$  est engendrée par le carré de la norme.

Considérons ensuite l'espace  $V^{\oplus p} := \bigoplus_{i=1}^p V$  muni de l'action diagonale de  $O(n)$ . Le résultat suivant est connu en tant que *premier théorème fondamental sur les vecteurs* [Wey97 ; KP00] :

**Théorème 2.4.1** (Weyl - 1939). *Pour tout entiers naturels  $n$  et  $p$  non nuls :*

1. *L'algèbre des invariants  $\mathbb{k}[V^{\oplus p}]^{O(n)}$  est engendrée par les produits scalaires*

$$\langle i, j \rangle : (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) \mapsto \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j, \quad 1 \leq i \leq j \leq p.$$

2. *L'algèbre des invariants  $\mathbb{k}[V^{\oplus p}]^{SO(n)}$  est engendrée par les produits scalaires  $\langle i, j \rangle$  et, lorsque  $p \geq n$ , par les déterminants*

$$[i_1, \dots, i_n](\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) := \det(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_n}).$$

Ce *premier théorème fondamental*<sup>q</sup> signifie en quelque sorte qu'il n'y a « qu'une seule

---

q. Il existe un *deuxième théorème fondamental* sur les vecteurs, qui concerne les *relations* entre les invariants. Nous ne détaillerons pas ce point qui se trouve dans [Wey97].

façon » d'obtenir des polynômes  $O(n)$  (ou  $SO(n)$ ) invariants de  $p$  copies de vecteurs. Notons que la famille génératrice donnée par le théorème de Weyl est une famille *finie*.

*Remarque 2.4.2.* Une conséquence importante de ce théorème est que, pour caractériser l'orbite de  $p \geq 3$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  sous l'action naturelle de  $O(n)$ , il suffit de caractériser l'orbite de toute sous-famille de 2 vecteurs. Plus précisément, notons  $\mathbf{v} := (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$  et  $\bar{\mathbf{v}} := (\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_p)$  deux  $p$ -uplets de vecteurs. Le théorème 2.4.1 et la propriété 2.3.31 entraînent que<sup>r</sup>

$$\text{Orb}_{O(n)}(\mathbf{v}) = \text{Orb}_{O(n)}(\bar{\mathbf{v}}) \iff \text{Orb}_{O(n)}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \text{Orb}_{O(n)}(\bar{\mathbf{v}}_i, \bar{\mathbf{v}}_j), \quad \forall i, j$$

Si on considère maintenant l'action de  $SO(n)$  sur  $p \geq n$  copies de  $\mathbb{R}^n$ , un même argument montre qu'il suffit de considérer les sous-familles composées de  $n$  vecteurs :

$$\text{Orb}_{SO(n)}(\mathbf{v}) = \text{Orb}_{SO(n)}(\bar{\mathbf{v}}) \iff \text{Orb}_{SO(n)}(\mathbf{v}_I) = \text{Orb}_{SO(n)}(\bar{\mathbf{v}}_I), \quad \forall I = (i_1, \dots, i_n)$$

où on a noté  $\mathbf{v}_I = (\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_n})$ .

Nous avons des résultats équivalents sur les *matrices* [Pro07]. Notons  $M_n(\mathbb{k})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$ . On peut définir l'action par *conjugaison* du groupe  $O(n)$  sur  $M_n(\mathbb{k})$  par :

$$g \cdot M := gMg^{-1}$$

On en déduit ainsi une action diagonale de  $O(n)$  sur  $(M_n(\mathbb{k}))^p$ . Nous avons alors [Pro07] :

**Théorème 2.4.3.** *L'algèbre des invariants de  $(M_n(\mathbb{k}))^p$  ( $p \geq 1$ ), sous l'action diagonale de  $O(n)$ , est engendrée par les polynômes*

$$\text{tr}(N_{i_1} N_{i_2} \cdots N_{i_k}), \quad N_{i_h} = M \text{ ou } N_{i_h} = M^T$$

où  $k$  désigne un entier naturel non nul quelconque.

*Remarque 2.4.4.* Contrairement au cas du premier théorème fondamental sur les vecteurs, un tel théorème ne donne qu'une famille génératrice *infinie* de l'algèbre des invariants. Dans les cas de l'espace  $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$ , muni de l'action du groupe  $SO(3)$  par conjugaison, Young [You99] a obtenu une famille génératrice minimale de chaque espace  $((\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3))^p, SO(3))$  ( $p \geq 1$ ). Dans tous les cas, on remarque que le degré maximal d'un polynôme invariant est de 6.

En prenant par exemple  $p = 3$ , une famille génératrice minimale est ainsi composée de 28 invariants, donnés par<sup>s</sup>

r. On note  $\text{Orb}_G(\mathbf{v})$  l'orbite d'un vecteur  $\mathbf{v}$  sous l'action du groupe  $G$ .

s. Ces résultats ont été vérifiés, notamment à l'aide des résultats figurant dans [BP11] obtenus dans le cadre des *formes binaires*.



Degré	Expression	#	Cum
1	$\text{tr}(\mathbf{A}_i)$	3	3
2	$\text{tr}(\mathbf{A}_i^2)$	3	6
	$\text{tr}(\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j), i < j$	3	9
3	$\text{tr}(\mathbf{A}_i^3)$	3	12
	$\text{tr}(\mathbf{A}_i^2 \mathbf{A}_j), i \neq j$	6	18
	$\text{tr}(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3)$	1	19
4	$\text{tr}(\mathbf{A}_i^2 \mathbf{A}_j^2), i < j$	3	22
	$\text{tr}(\mathbf{A}_i^2 \mathbf{A}_j \mathbf{A}_k), i \neq j, i \neq k, j < k$	3	25
5	$\text{tr}((\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j)^2 \mathbf{A}_k), k \neq i, k \neq j, i < j$	3	28

On peut ensuite remarquer que le nombre d'invariants augmente considérablement :

Degré des invariants	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
1	3	4	5
2	6	10	15
3	10	20	35
4	6	20	50
5	3	20	76
6	-	10	70
Cardinal d'une famille génératrice minimale	28	84	251

## 2.4.2. Famille de séparants et polarisation

Une fois fixée une algèbre d'invariants  $\mathbb{k}[V]^G$ , nous avons toujours l'implication

$$\text{Orb}(\mathbf{v}_1) = \text{Orb}(\mathbf{v}_2) \Rightarrow \mathbf{p}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{p}(\mathbf{v}_2), \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{k}[V]^G$$

Nous avons aussi vu (exemple 2.4.6) que la réciproque est fautive dans le cas général. Dans le cas d'une représentation réelle  $(V, \rho)$  d'un groupe compact  $G$ , cependant, la réciproque est vraie (propriété 2.3.31). Une famille génératrice finie de  $\mathbb{R}[V]^G$  permet donc de séparer les orbites. Mais dans la pratique (voir par exemple la remarque 2.4.4), le cardinal d'une telle famille génératrice peut s'avérer très important. On peut donc se demander si, parmi ces générateurs, certains ne sont pas superflus, voire même s'il n'est pas pertinent de chercher des invariants non-polynomiaux rationnels. Nous proposons donc dans cette section de définir la notion d'*ensemble séparant* [DK02 ; Kem03]. Dans le cas des *espaces de tenseurs d'ordre inférieur ou égal à 2*, plusieurs articles [Wan70 ; Smi71 ; Zhe93 ; Boe77] de *mécanique des milieux continus* ont pu obtenir des familles de séparants particulièrement réduites : en reprenant l'exemple de  $(\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3))^4$ , on obtient ainsi une famille de 39 séparants, alors que la famille génératrice minimale de l'algèbre compte, elle, 84 invariants.

**Définition 2.4.5.** On se fixe une représentation linéaire  $(V, \rho)$  d'un groupe linéaire algébrique  $G$ . Une famille  $S$  de polynômes invariants est un *ensemble séparant* si, pour tout vecteur  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  de  $V$

$$\exists \mathbf{p} \in \mathbb{k}[V]^G, \mathbf{p}(\mathbf{v}_1) \neq \mathbf{p}(\mathbf{v}_2) \Rightarrow \exists \mathbf{h} \in S, \mathbf{h}(\mathbf{v}_1) \neq \mathbf{h}(\mathbf{v}_2)$$

Une sous-algèbre  $\mathcal{A} \subset \mathbb{k}[V]^G$  qui vérifie cette condition est appelée *algèbre de séparants*.

Une sous-algèbre engendrée par un ensemble séparant est nécessairement une algèbre de séparants. Notons qu'en mécanique des milieux continus le terme employé est plutôt celui de base fonctionnelle<sup>t</sup>.

*Exemple 2.4.6.* La notion d'ensemble séparant est distincte de celle de famille génératrice finie. On peut citer, comme premier exemple, celui donné par Boehler et al. [BKO94]. Une famille génératrice finie (minimale) de  $(\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3), \text{SO}(3))$  est donnée par

$$I_1(\mathbf{A}) := \text{tr}(\mathbf{A}), \quad I_2(\mathbf{A}) := \text{tr}(\mathbf{A}^2) \quad \text{et} \quad I_3(\mathbf{A}) := \text{tr}(\mathbf{A}^3)$$

En remarquant que  $I_2(\mathbf{A}) \geq 0$ , on en déduit que la famille

$$\{I_1; (I_2)^2; I_3\}$$

est un ensemble séparant qui n'est pas une famille génératrice.

Le deuxième exemple est donné par Dufresne [Duf08]. Notons pour  $G$  le groupe cyclique d'ordre 3, engendré par une racine cubique  $\zeta$  de l'unité. Ce groupe agit sur  $V = \mathbb{C}^2$  par le morphisme

$$\zeta \mapsto \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$$

En notant  $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[z_1, z_2]$ , on vérifie directement que

$$\mathbb{C}[V]^{\mathbb{Z}_3} = \mathbb{C}[z_1^3, z_1^2 z_2, z_1 z_2^2, z_2^3]$$

Or, pour  $z_1$  non nul, on a

$$z_1 z_2^2 = \frac{(z_1^2 z_2)^2}{z_1^3}$$

et dans le cas où  $z_1 = 0$  on aussi  $z_1 z_2^2 = 0$ ; au final l'ensemble  $\{z_1^3, z_1^2 z_2, z_2^3\}$  est donc un ensemble séparant.

## Processus de polarisation

Nous partons ici d'une représentation linéaire  $(V, \rho)$  de dimension  $n$  d'un groupe<sup>u</sup>  $G$ . L'idée est de généraliser le théorème de Weyl 2.4.1 sur les vecteurs en construisant des familles génératrices par un processus de polarisation.

Illustrons tout d'abord ce procédé sur l'exemple simple de l'espace  $(\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3), \text{SO}(3))$ . On souhaite construire, par polarisation, des polynômes invariants sur  $(\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3))^{\oplus 2}$  à partir de polynômes invariants sur  $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$ . Pour cela, on se donne l'application linéaire

$$(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) \in (\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3))^{\oplus 2} \mapsto a_1 \mathbf{A}_1 + a_2 \mathbf{A}_2 \in \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3).$$

t. L'idée est en effet de déterminer de familles de fonctions invariantes, même si en pratique les invariants sont essentiellement polynomiaux [Boe77].

u. Dans cette situation, il n'est pas nécessaire de supposer que le groupe est linéaire réductif. Mais nous restons néanmoins dans le cadre fixé par notre travail.

En considérant le polynôme  $\mathbf{p}(\mathbf{A}) = \text{tr } \mathbf{A}^2$ , on obtient ainsi le polynôme

$$\Phi(\mathbf{p})(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \text{tr}(a_1 \mathbf{A}_1 + a_2 \mathbf{A}_2)^2.$$

Les coefficients de ce polynômes sont des invariants qui déterminent les *polarisés*

$$\text{Pol}_1^2(\mathbf{p}) := \left\{ \text{tr } \mathbf{A}_1^2, \text{tr } \mathbf{A}_2^2, 2 \text{tr } \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \right\}.$$

Dans le cas général, notons

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq p} : \mathbb{k}^p \rightarrow \mathbb{k}^q$$

une application linéaire quelconque. Ensuite, notons

$$\mathbf{v} := (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) \mapsto \hat{A}(\mathbf{v}) := \left( \sum_{j=1}^p a_{1j} \mathbf{v}_j, \dots, \sum_{j=1}^p a_{qj} \mathbf{v}_j \right), \quad V^{\oplus p} \longrightarrow V^{\oplus q}.$$

On définit enfin le morphisme  $\Phi$ , de  $\mathbb{k}[V^{\oplus q}]$  sur  $\mathbb{k}[V^{\oplus p}]$ , par

$$\mathbf{p} \mapsto \Phi(\mathbf{p})(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p) := \mathbf{p}(\hat{A}(\mathbf{v})), \quad \mathbb{k}[V^{\oplus q}] \longrightarrow \mathbb{k}[V^{\oplus p}].$$

**Définition 2.4.7.** Pour tout polynôme  $\mathbf{p} \in \mathbb{k}[V^{\oplus q}]$ , on note  $\text{Pol}_q^p(\mathbf{p})$  l'ensemble des coefficients de  $\Phi(\mathbf{p})$ , vu en tant que polynôme en  $a_{ij}$ . Si  $S$  désigne un ensemble de polynômes, alors  $\text{Pol}_q^p(S)$  est la réunion des  $\text{Pol}_q^p(\mathbf{p})$ , pour  $\mathbf{p} \in S$ .

Notons quelques résultats immédiats :

- Si  $\mathbf{p}$  est un polynôme homogène de degré  $d$ , alors tout élément de  $\text{Pol}_q^p(\mathbf{p})$  est encore homogène de degré  $d$ ;
- Si  $S \subset \mathbb{k}[V^{\oplus q}]^G$ , alors  $\text{Pol}_q^p(S) \subset \mathbb{k}[V^{\oplus p}]^G$ .

L'énoncé qui nous intéresse, directement déduit de [DKW08], est le suivant :

**Théorème 2.4.8** (Draisma–Kemper–Welhau (2008)). *Pour tout entier  $p \geq n = \dim(V)$ , si  $S$  est un ensemble séparent de l'algèbre  $\mathbb{k}[V^{\oplus n}]$ , alors  $\text{Pol}_n^p(S)$  est un ensemble séparent de  $\mathbb{k}[V^{\oplus p}]$ .*

*Remarque 2.4.9.* Ce résultat nous intéresse car il concerne les familles de séparants. En effet, comme nous le verrons dans la cas des espaces de tenseurs d'ordre inférieur ou égal à 2 (proposition 2.4.12), il peut être plus intéressant de considérer une telle famille plutôt qu'une famille génératrice minimale de polynômes invariants. Notons cependant que le théorème 2.4.8 possède une version similaire dans ce cas. On parle alors de *théorème de Weyl* [KP00, Théorème 2.5A].

Le théorème 2.4.8 signifie donc que, pour construire une famille de séparants de  $p$  copies d'un espace  $V$  de dimension  $n$ , il suffit de construire une famille de séparants pour seulement  $n$  copies. Une conséquence de ce résultat concerne l'espace  $(\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3), \text{SO}(3))$ . Pour un tel espace, le théorème 2.4.8 montre qu'une famille de séparants de  $p \geq 6$  copies de  $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$  s'obtient par polarisation d'une famille de séparants de 6 copies. Nous allons maintenant voir que, par certains arguments géométriques [Wan70 ; Smi71 ; Zhe94], il est possible de ramener ce nombre à 3 (par la proposition 2.4.11).

### 2.4.3. Séparants d'espaces de tenseurs d'ordre inférieur ou égal à 2

Nous reprenons ici des résultats issus de la communauté mécanique. Ils trouvent leur source dans des articles de Rivlin, Spencer et Pipkin [SR59a ; SR59b ; SR62 ; PR59] et concernent des familles génératrices finies de

$$(\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3))^{\oplus n} \oplus (\mathbb{W}(\mathbb{R}^3))^{\oplus p} \oplus (\mathbb{R}^3)^{\oplus q},$$

sous l'action du groupe  $O(3)$ . Dans cette somme,  $\mathbb{W}(\mathbb{R}^3)$  désigne l'espace des tenseurs antisymétriques d'ordre 2 et l'action de  $O(3)$  est donnée par

$$g \cdot (\mathbf{S}, \mathbf{W}, \mathbf{v}) := (g\mathbf{S}g^T, g\mathbf{W}g^T, g\mathbf{v}), \quad \forall g \in O(3).$$

Sur les espaces  $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$  et  $\mathbb{W}(\mathbb{R}^3)$ , l'action se réduit donc à l'action du groupe  $SO(3)$ .

Après avoir obtenu des familles génératrices (non nécessairement minimales) des invariants de ces espaces [SR62 ; PR59], les travaux se sont portés sur la recherche d'une famille de séparants [Wan70 ; Smi71 ; Zhe94]. Nous proposons ici de décrire la démarche adoptée par Wang [Wan70] en nous limitant aux cas des espaces

$$(\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3))^{\oplus n} \oplus (\mathbb{W}(\mathbb{R}^3))^{\oplus p}.$$

L'idée consiste en fait à construire une application  $SO(3)$  équivariante de cet espace sur  $(\mathbb{R}^3)^{\oplus(3n+p)}$ , ce qui permet ainsi d'exploiter le théorème de Weyl 2.4.1 sur les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  et donc de réduire le problème à des familles de 3 vecteurs, comme souligné dans la remarque 2.4.2.

Considérons donc dans un premier temps l'application

$$\Psi : \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow (\mathbb{R}^3)^{\oplus 3}$$

qui, à un tenseur  $\mathbf{S} \in \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$ , associe, selon :

- Les trois vecteurs propres  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  de  $\mathbf{S}$ , de norme 1, respectivement associés aux valeurs propres *distinctes*  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$  ;
- les trois vecteurs  $(\mathbf{e}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$  où  $\mathbf{e}$  est le vecteur propre, de norme 1, associé à la valeur propre  $\mu$  de multiplicité 2 ;
- les trois vecteurs nuls  $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ , si  $\mathbf{S}$  ne possède qu'une seule valeur propre de multiplicité 3.

On vérifie immédiatement que  $\Psi$  est une application  $SO(3)$  équivariante :

$$\Psi(g \cdot \mathbf{S}) = g \cdot \Psi(\mathbf{S}), \quad \forall g \in SO(3).$$

De la même façon, on peut définir une application  $SO(3)$  équivariante sur  $\mathbb{W}(\mathbb{R}^3)$  qui, à tout tenseur antisymétrique  $\mathbf{W} \in \mathbb{W}(\mathbb{R}^3)$ , associe un vecteur  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ .

Nous pouvons alors naturellement construire une application  $SO(3)$  équivariante

$$\mathbf{A} := (\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_n, \mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_p) \mapsto \hat{\Psi}(\mathbf{A}) \in (\mathbb{R}^3)^{\oplus(3n+p)}.$$

Maintenant, pour toute famille d'indices  $I = (i_1, \dots, i_k)$  et pour tout vecteur

$$\mathbf{v} \in (\mathbb{R}^3)^{\oplus(3n+p)}, \quad \mathbf{A} \in (\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3))^{\oplus n} \oplus (\mathbb{W}(\mathbb{R}^3))^{\oplus p},$$

on note

$$\mathbf{v}_I := (\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_k}), \quad \mathbf{A}_I := (\mathbf{A}_{i_1}, \dots, \mathbf{A}_{i_k}).$$

Pour toute la suite, on suppose que  $n + p \geq 3$ . Une conséquence immédiate du théorème de Weyl 2.4.1 et de la propriété de séparation 2.3.31 est que

$$\text{Orb}(\mathbf{v}) = \text{Orb}(\bar{\mathbf{v}}) \iff \text{Orb}(\mathbf{v}_I) = \text{Orb}(\bar{\mathbf{v}}_I), \quad \forall I, \quad \#I = 3$$

**Lemme 2.4.10.** *Si pour toute famille d'indice  $I$  de cardinal 3 on a  $\text{Orb}(\mathbf{S}_I) = \text{Orb}(\bar{\mathbf{S}}_I)$ , alors  $\text{Orb}(\mathbf{A}) = \text{Orb}(\bar{\mathbf{A}})$ .*

*Démonstration.* On considère les vecteur  $\mathbf{v} = \hat{\Psi}(\mathbf{A})$  et  $\bar{\mathbf{v}} = \hat{\Psi}(\bar{\mathbf{A}})$ . Si on prend une famille d'indice  $I$  de cardinal 3, on remarque que chaque famille de trois vecteurs  $\mathbf{v}_I$  (resp.  $\bar{\mathbf{v}}_I$ ) va nécessairement provenir d'une famille composée de maximum trois tenseurs  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$  issus de  $\mathbf{A}$  (resp.  $\bar{\mathbf{A}}$ ). On en déduit donc que

$$\text{Orb}(\mathbf{v}_I) = \text{Orb}(\bar{\mathbf{v}}_I), \quad \forall I, \quad \#I \leq 3,$$

ce qui montre que  $\text{Orb}(\mathbf{v}) = \text{Orb}(\bar{\mathbf{v}})$ , autrement dit, qu'il existe  $g \in \text{SO}(3)$  tel que

$$g \cdot \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}. \tag{2.4.1}$$

En écrivant

$$\mathbf{A} = (\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_n, \mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_p), \quad \bar{\mathbf{A}} = (\bar{\mathbf{S}}_1, \dots, \bar{\mathbf{S}}_n, \bar{\mathbf{W}}_1, \dots, \bar{\mathbf{W}}_p),$$

l'hypothèse entraîne que  $g \cdot \mathbf{A}_i$  et  $\bar{\mathbf{A}}_i$  ont les mêmes valeurs propres, ce qui montre finalement que par la même rotation  $g$  issue de 2.4.1, on a

$$g \cdot \mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}},$$

ce qui conclut la preuve. □

Une fois ce lemme 2.4.10 établi, on peut donc ramener la recherche d'une famille de séparants de l'espace  $(\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3))^{\oplus n} \oplus (\mathbb{W}(\mathbb{R}^3))^{\oplus p}$  aux cas  $n + p = 3$ , ce qui a été effectué par Wang [Wan70].

**Proposition 2.4.11** (Wang - 1971). *Pour tout entiers naturels  $n, p$  tels que  $n + p \geq 3$ , une famille de séparants de  $((\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3))^{\oplus n} \oplus (\mathbb{W}(\mathbb{R}^3))^{\oplus p}, \text{SO}(3))$  est obtenu en faisant la réunion des invariants donnés par la table 2.1 où on a considéré une famille  $\mathbf{A}_I$  de tenseurs quelconques, avec  $\mathbf{A} = (\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_n, \mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_p)$  et  $\#I \leq 3$ .*

Famille de tenseurs	Invariants	
$\mathbf{S}_i$	$\text{tr } \mathbf{S}_i, \text{tr } \mathbf{S}_i^2, \text{tr } \mathbf{S}_i^3$	
$\mathbf{W}_j$	$\text{tr } \mathbf{W}_j^2$	
$\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j$	$\text{tr } \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j, \text{tr } \mathbf{S}_i^2 \mathbf{S}_j, \text{tr } \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j^2, \text{tr } \mathbf{S}_i^2 \mathbf{S}_j^2$	$i < j$
$\mathbf{S}_i, \mathbf{W}_j$	$\text{tr } \mathbf{S}_i \mathbf{W}_j^2, \text{tr } \mathbf{S}_i^2 \mathbf{W}_j^2, \text{tr } \mathbf{S}_i^2 \mathbf{W}_j^2 \mathbf{S}_i \mathbf{W}_j$	
$\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j$	$\text{tr } \mathbf{W}_i \mathbf{W}_j$	$i < j$
$\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j, \mathbf{S}_k$	$\text{tr } \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j \mathbf{S}_k$	$i < j < k$
$\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j, \mathbf{W}_k$	$\text{tr } \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j \mathbf{W}_k, \text{tr } \mathbf{S}_i^2 \mathbf{S}_j \mathbf{W}_k, \text{tr } \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j^2 \mathbf{W}_k, \text{tr } \mathbf{S}_i \mathbf{W}_k^2 \mathbf{S}_j \mathbf{W}_k$	$i < j$
$\mathbf{S}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{W}_k$	$\text{tr } \mathbf{S}_i \mathbf{W}_j \mathbf{W}_k, \text{tr } \mathbf{S}_i \mathbf{W}_j^2 \mathbf{W}_k, \text{tr } \mathbf{S}_i \mathbf{W}_j \mathbf{W}_k^2$	$j < k$
$\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{W}_k$	$\text{tr } \mathbf{W}_i \mathbf{W}_j \mathbf{W}_k$	$i < j < k$

Table 2.1. – Ensemble de séparants pour les familles  $\mathbf{S}_I$

Le cas de l'espace

$$(\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3))^{\oplus n} \oplus (\mathbb{W}(\mathbb{R}^3))^{\oplus p} \oplus (\mathbb{R}^3)^{\oplus q},$$

a été étudié par Boehler [Boe77], faisant suite aux travaux de Smith [Smi71] et de Wang [Wan70].

**Proposition 2.4.12** (Boehler - 1977). *Etant donné trois entiers naturels  $n, p, q$ , une famille de séparants de*

$$((\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3))^{\oplus n} \oplus (\mathbb{W}(\mathbb{R}^3))^{\oplus p} \oplus (\mathbb{R}^3)^{\oplus q}, \mathbf{O}(3))$$

est obtenue en faisant la réunion des familles d'invariants données, pour tout famille  $\mathbf{A}_I$ , par la table 2.2, avec

$$\mathbf{A} = (\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_n, \mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_p, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q), \quad \#I \leq 4$$

Tenseurs	Famille d'invariants	
$\mathbf{S}_i$	$\text{tr } \mathbf{S}_i, \text{tr } \mathbf{S}_i^2, \text{tr } \mathbf{S}_i^3$	
$\mathbf{W}_i$	$\text{tr } \mathbf{W}_i^2$	
$\mathbf{v}_i$	$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$	
$\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j$	$\text{tr } \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j, \text{tr } \mathbf{S}_i^2 \mathbf{S}_j, \text{tr } \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j^2, \text{tr } \mathbf{S}_i^2 \mathbf{S}_j^2$	$i < j$
$\mathbf{S}_i, \mathbf{W}_j$	$\text{tr } \mathbf{S}_i \mathbf{W}_j^2, \text{tr } \mathbf{S}_i^2 \mathbf{W}_j^2, \text{tr } \mathbf{S}_i^2 \mathbf{W}_j^2 \mathbf{S}_i \mathbf{W}_j$	.
$\mathbf{S}_i, \mathbf{v}_j$	$\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{S}_i \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{S}_i^2 \mathbf{v}_j$	.
$\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j$	$\text{tr } \mathbf{W}_i \mathbf{W}_j$	$i < j$
$\mathbf{W}_i, \mathbf{v}_j$	$\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{W}_i^2 \mathbf{v}_j$	.
$\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$	$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$	.
$\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j, \mathbf{S}_k$	$\text{tr } \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j \mathbf{S}_k$	$i < j < k$
$\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j, \mathbf{W}_k$	$\text{tr } \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j \mathbf{W}_k, \text{tr } \mathbf{S}_i^2 \mathbf{S}_j \mathbf{W}_k, \text{tr } \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j^2 \mathbf{W}_k, \text{tr } \mathbf{S}_i \mathbf{W}_k^2 \mathbf{S}_j \mathbf{W}_k$	$i < j$
$\mathbf{S}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{W}_k$	$\text{tr } \mathbf{S}_i \mathbf{W}_j \mathbf{W}_k, \text{tr } \mathbf{S}_i \mathbf{W}_j^2 \mathbf{W}_k, \text{tr } \mathbf{S}_i \mathbf{W}_j \mathbf{W}_k^2$	$j < k$
$\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{W}_k$	$\text{tr } \mathbf{W}_i \mathbf{W}_j \mathbf{W}_k$	$i < j < k$
$\mathbf{S}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k$	$\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{S}_k \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{S}_k^2 \mathbf{v}_k$	$j < k$
$\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{v}_k$	$\mathbf{W}_i \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{W}_j \mathbf{v}_k, \mathbf{W}_i^2 \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{W}_j \mathbf{v}_k, \mathbf{W}_i \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{W}_j^2 \mathbf{v}_k$	$i < j$
$\mathbf{W}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k$	$\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{W}_i \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{W}_i^2 \mathbf{v}_k$	$j < k$
$\mathbf{S}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{v}_k$	$\mathbf{S}_i \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{W}_j \mathbf{v}_k, \mathbf{S}_i^2 \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{W}_j \mathbf{v}_k, \mathbf{S}_i \mathbf{W}_j \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{W}_j^2 \mathbf{v}_k$	.
$\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l$	$\mathbf{S}_i \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{S}_j \mathbf{v}_l - \mathbf{S}_i \mathbf{v}_l \cdot \mathbf{S}_j \mathbf{v}_k$	$i < j, k < l$
$\mathbf{S}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l$	$\mathbf{S}_i \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{W}_j \mathbf{v}_l - \mathbf{S}_i \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{W}_j \mathbf{v}_l$	$k < l$
$\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l$	$\mathbf{W}_i \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{W}_j \mathbf{v}_l - \mathbf{W}_i \mathbf{v}_l \cdot \mathbf{W}_j \mathbf{v}_k$	$i < j, k < l$

Table 2.2. – Ensemble de séparants pour  $\mathbf{S}_I$

*Exemple 2.4.13.* Dans la remarque 2.4.4, nous avons donné une *famille génératrice finie* de l'espace  $((\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3))^3, \text{SO}(3))$ , composée de 28 invariants. En appliquant la proposition 2.4.12, nous obtenons 22 séparants :

Degré	Expression	#	Cum
1	$\text{tr } (\mathbf{S}_i)$	3	3
2	$\text{tr } (\mathbf{S}_i^2)$	3	6
	$\text{tr } (\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j), i < j$	3	9
3	$\text{tr } (\mathbf{S}_i^3)$	3	12
	$\text{tr } (\mathbf{S}_i^2 \mathbf{S}_j), i \neq j$	6	18
	$\text{tr } (\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3)$	1	19
4	$\text{tr } (\mathbf{S}_i^2 \mathbf{S}_j^2), i < j$	3	22

## 3. Représentation linéaire des groupes

### $O(3)$ et $SO(3)$

Nous donnons dans ce chapitre des résultats concernant les représentations linéaires des groupes  $O(3)$  et  $SO(3)$ . Pour aborder ces questions, nous commençons tout d'abord par rappeler certains résultats sur la *décomposition harmonique* des espaces de tenseurs. Dans ce cas, en effet, les représentations irréductibles sont données par les espaces de *tenseurs harmoniques*. Des résultats d'Irhiġ-Golubistky [IG84] nous permettent ensuite de donner les *classes d'isotropie* de ces représentations irréductibles. Avant cela, nous précisons les caractéristiques géométriques des sous-groupes fermés de  $O(3)$  et  $SO(3)$ .

Ensuite, pour aborder les questions relatives aux invariants des espaces de tenseur, nous montrons qu'un procédé de complexification permet de traduire le problème tensorielle en termes de *théorie classique des invariants*, qui concerne les invariants des espaces de formes binaires sous l'action du groupe  $SL(2, \mathbb{C})$ .

### 3.1. La décomposition harmonique

#### 3.1.1. Représentations irréductibles de $O(3)$ et $SO(3)$

Les groupes  $O(3)$  et  $SO(3)$  étant *compacts*, on sait que toute représentation de dimension finie de l'un de ces groupes est *complètement réductible* [Bre72 ; Ste94], c'est-à-dire qu'elle se décompose en une somme directe de sous-espaces irréductibles. Nous allons préciser ici les deux modèles d'espaces  $O(3)$  ou  $SO(3)$  irréductibles, à savoir les espaces de polynômes harmoniques ou de tenseurs harmoniques (sur  $\mathbb{R}^3$ ). La *décomposition harmonique* d'un espace de tenseurs est alors sa décomposition en espaces irréductibles.

Notons  $S_n(\mathbb{R}^3)$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes homogènes de degré  $n$  sur  $\mathbb{R}^3$ . Il existe sur  $S_n(\mathbb{R}^3)$  une action naturelle de  $O(3)$  (et donc de  $SO(3)$ ), notée  $\rho_n$ , donnée par

$$(\rho_n(g)(\mathbf{p}))(\mathbf{v}) := \mathbf{p}(g^{-1} \cdot \mathbf{v}) \text{ pour } \mathbf{p} \in S_n(\mathbb{R}^3) \quad (3.1.1)$$

Il existe aussi sur  $S_n(\mathbb{R}^3)$  une autre représentation de  $O(3)$ , notée  $\rho_n^*$ , donnée par

$$\rho_n^*(g) := \det(g)\rho_n(g) \quad (3.1.2)$$

On note ensuite  $H_n(\mathbb{R}^3) \subset S_n(\mathbb{R}^3)$  le sous-espace des polynômes *harmoniques* de degré  $n$  sur  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire des polynômes dont le laplacien est nul. Un tel espace est de dimension  $2n + 1$ . Nous avons alors [GSS88] :

**Théorème 3.1.1.** *La représentation  $(H_n(\mathbb{R}^3), \rho_n)$  de  $SO(3)$  est irréductible. De plus, toute représentation irréductible de  $SO(3)$  est équivalente à une représentation  $(H_n(\mathbb{R}^3), \rho_n)$  pour un certain entier  $n$ .*



**Corollaire 3.1.2.** *Les représentations  $(\mathbb{H}_n(\mathbb{R}^3), \rho_n)$  et  $(\mathbb{H}_n(\mathbb{R}^3), \rho_n^*)$  de  $O(3)$  sont irréductibles. De plus, toute représentation irréductible de  $O(3)$  est équivalente à une représentation  $(\mathbb{H}_n(\mathbb{R}^3), \rho_n)$  ou bien à une représentation  $(\mathbb{H}_n(\mathbb{R}^3), \rho_n^*)$  pour un certain entier  $n$ .*

*Démonstration.* Remarquons avant tout que, pour toute représentation linéaire  $(V, \rho)$  de  $O(3)$ , les sous-espaces  $SO(3)$ -stables et  $O(3)$ -stables sont les mêmes étant donné que

$$\rho(g)(W) = \rho(\det(g)g)(W)$$

Si on se donne maintenant une représentation irréductible  $(V, \rho)$  de  $O(3)$ , il suffit de considérer l'action de  $-\text{Id} \in O(3)$  où  $\text{Id}$  désigne l'identité de  $O(3)$ . En effet, si  $\rho(-\text{Id}) = \text{Id}_V$  est l'identité de  $GL(V)$ , la représentation irréductible de  $O(3)$  sur  $V$  se restreint en une représentation de  $SO(3)$ . Mais, par la remarque initiale sur les sous-espaces stables, cette représentation reste irréductible. On sait donc qu'il existe un isomorphisme

$$\varphi : V \longrightarrow \mathbb{H}_n(\mathbb{R}^3)$$

$SO(3)$  équivariant où la propriété d'équivariance signifie que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{H}_n(\mathbb{R}^3) \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ V & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{H}_n(\mathbb{R}^3) \end{array}$$

Un tel isomorphisme s'étend naturellement en un isomorphisme  $O(3)$  équivariant et donc

$$(V, \rho) \sim (\mathbb{H}_n(\mathbb{R}^3), \rho_n)$$

Lorsque  $\rho(-\text{Id}) = -\text{Id}_V$  il suffit de considérer la représentation

$$\rho^*(g) := \det(g)\rho(g)$$

qui reste elle-aussi irréductible et qui nous ramène au cas précédent.  $\square$

*Remarque 3.1.3.* Pour tout espace de polynômes harmoniques  $\mathbb{H}_{2p}(\mathbb{R}^3)$  de degré pair, la représentation  $\rho_{2p}$  de  $O(3)$  se réduit en fait en une représentation de  $SO(3)$ . Seules interviennent donc sur ces espaces les représentations  $\rho_{2p}^*$  du groupe  $O(3)$ .

Un autre modèle pour les représentations irréductibles des groupes  $O(3)$  et  $SO(3)$  est donné par l'espace des *tenseurs harmoniques*. Notons dans un premier temps  $\mathbb{T}^n$  l'espace des tenseurs d'ordre  $n$  sur  $\mathbb{R}^3$  :

$$\mathbb{T}^n := \otimes^n \mathbb{R}^3.$$

L'action naturelle de  $O(3)$  sur  $\mathbb{T}^n$ , notée  $\tilde{\rho}_n$ , est donnée par

$$(\tilde{\rho}_n(\mathbf{T}))(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) := \mathbf{T}(g^{-1}\mathbf{v}_1, \dots, g^{-1}\mathbf{v}_n), \quad \forall g \in O(3) \quad (3.1.3)$$

L'action  $\tilde{\rho}_n^*$  est quant à elle donnée par

$$\tilde{\rho}_n^*(g) := \det(g)\tilde{\rho}_n \quad (3.1.4)$$

On note ensuite  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{T}^n$  l'espace des tenseurs totalement symétriques<sup>a</sup> sur  $\mathbb{R}^3$ , isomorphes à  $S_n(\mathbb{R}^3)$ . Il n'existe sur  $\mathbb{S}^n$  qu'une seule trace, comme par exemple

$$\text{tr}_{12}(\mathbf{T})(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-2}) := \sum_{i=1}^n \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-2}).$$

où  $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ . Notons qu'une telle formule ne dépend pas du choix d'une telle base.

**Définition 3.1.4.** L'ensemble des tenseurs *harmoniques*, noté  $\mathbb{H}^n$ , est l'ensemble des tenseurs d'ordre  $n$  totalement symétriques et de trace nulle.

En fait, les espaces  $H_n(\mathbb{R}^3)$  et  $\mathbb{H}^n$  sont  $O(3)$  équivariants. Du théorème 3.1.1 et de son corollaire 3.1.2 on en déduit alors :

**Corollaire 3.1.5.** *Toute représentation irréductible de  $O(3)$  est équivalente à  $(\mathbb{H}^n, \tilde{\rho}_n)$  ou bien à  $(\mathbb{H}^n, \tilde{\rho}_n^*)$  pour un certain entier  $n$ , de dimension  $2n + 1$ . De même, toute représentation irréductible de  $SO(3)$  est équivalente à  $(\mathbb{H}^n, \tilde{\rho}_n)$  pour un certain entier  $n$ .*

Nous obtenons alors :

**Proposition 3.1.6** (Décomposition harmonique sous  $SO(3)$ ). *Pour toute représentation linéaire  $(V, \rho)$  de dimension finie de  $SO(3)$ , il existe un isomorphisme  $SO(3)$  équivariant entre  $V$  et*

$$\bigoplus_{i=0}^l (\mathbb{H}^{n_i})^{\oplus \alpha_i}$$

avec pour chaque  $i$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ .

**Proposition 3.1.7** (Décomposition harmonique sous  $O(3)$ ). *Pour toute représentation linéaire  $(V, \rho)$  de dimension finie de  $O(3)$ , il existe un isomorphisme  $O(3)$  équivariant entre  $V$  et*

$$\bigoplus_{i=0}^l (\mathbb{H}^{n_i})^{\oplus \alpha_i}$$

avec pour chaque  $i$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$  et sur chaque  $\mathbb{H}^n$  la représentation  $\tilde{\rho}_n$  ou bien la représentation  $\tilde{\rho}_n^*$ .

**Remarque 3.1.8.** En notant  $(V, \rho)$  une représentation linéaire d'un groupe linéaire réductif, on peut écrire

$$V = V_1^{\oplus n_1} \oplus \dots \oplus V_r^{\oplus n_r}$$

où chaque  $V_i$  est une représentation irréductible de  $G$ . Dans cette décomposition, on dit que

$$V_i^{\oplus n_i}$$

---

a. Dans le cas des tenseurs d'ordre 2, nous avons désigné cet espace par  $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$ .

est la *composante isotypique* de  $V_i$ . La décomposition harmonique est donc une application particulière de ce résultat, et les composantes isotypiques sont déterminées par les espaces de tenseurs harmoniques.

*Remarque 3.1.9.* Reprenons les espaces  $\mathbb{H}_n(\mathbb{R}^3)$  et  $\mathbb{S}^n(\mathbb{R}^3)$  et notons  $\mathbf{q} := x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$ . On sait alors que [Ste94]

$$\mathbb{S}^n(\mathbb{R}^3) = \mathbb{H}_n(\mathbb{R}^3) \oplus \mathbf{q}\mathbb{H}_{n-2}(\mathbb{R}^3) \oplus \dots,$$

cette décomposition étant  $\text{SO}(3)$  équivariante. Ainsi, pour tout entier  $n$ , on connaît la décomposition harmonique des espaces de tenseurs  $\mathbb{S}^n$  :

$$\mathbb{S}^n = \mathbb{H}^n \oplus \mathbb{H}^{n-2} \oplus \dots$$

On remarque dans ce cas que chaque composante isotypique se réduit à un seul espace de tenseurs harmoniques. Dans un pareil cas, une telle décomposition est alors unique (à une homothétie près) par le lemme de Schur.

*Exemple 3.1.10.* Reprenons l'exemple 2.2.6 où intervient l'action naturelle de  $\text{SO}(3)$  sur  $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$ . Dans une base orthonormée, on a

$$\mathbf{q}_{ij} := \delta_{ij},$$

où  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker. Pour tout tenseur  $\mathbf{S} \in \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$ , on a

$$\mathbf{S} = \mathbf{D} + \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{S})\mathbf{q}$$

où

$$\mathbf{D} := \mathbf{S} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{S})\mathbf{q} \in \mathbb{H}^2.$$

Cette décomposition, qui est unique et  $\text{SO}(3)$  équivariante, donne explicitement l'isomorphisme  $\text{SO}(3)$  équivariant

$$\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3) \simeq \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^0$$

Remarquons que le terme

$$\frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{S})\mathbf{q}$$

correspond à ce que la littérature mécanique appelle la *partie sphérique* (également appelée hydrostatique en mécanique) alors que l'autre partie correspond à la *partie déviatorique* du tenseur  $\mathbf{S}$ .

### 3.1.2. Décomposition harmonique de l'espace $\mathbb{P}^{\text{iez}}$

L'espace  $\mathbb{P}^{\text{iez}}$  des tenseurs piézoélectriques [Yan09] est un espace de tenseurs  $\mathbf{P}$ , d'ordre 3, sur  $\mathbb{R}^3$ . Il est caractérisé par les symétries indicelles

$$\mathbf{P}_{ijk} = \mathbf{P}_{jik}.$$

Il s'agit donc d'un espace de dimension 18. On considère sur  $\mathbb{P}ie_z$  l'action  $\tilde{\rho}_3$  de  $O(3)$ , définie par 3.1.3, notée

$$(g \cdot \mathbf{P})_{ijk} := g_{ir}g_{js}g_{kl}\mathbf{P}_{rsl}.$$

Par application du corollaire 3.1.2, on sait que cette action se décompose en espaces de tenseurs harmoniques  $O(3)$  irréductibles. Pour obtenir effectivement une telle décomposition, nous considérons dans un premier temps la décomposition de  $\mathbb{P}ie_z$  en espaces  $GL_3(\mathbb{R})$  irréductibles et nous décomposons ensuite chacune de ces composantes en espaces  $O(3)$  irréductibles.

Les espaces de tenseurs  $GL_3(\mathbb{R})$  irréductibles<sup>b</sup> sont donnés par des *modules de Weyl* [Wey97 ; Stu08]. Ces derniers sont caractérisés par certaines *symétries indicelles* caractérisées par des *tableaux de Young* [Ful97]. Du fait des symétries déjà présentes dans l'espace  $\mathbb{P}ie_z$  et de sa dimension, on a

$$\mathbb{P}ie_z = \mathbb{S}^3 \oplus \mathbb{S}_{(2,1)}^a,$$

où  $\mathbb{S}_{(2,1)}^a$  est l'espace des tenseurs caractérisés par le tableau de Young standard<sup>c</sup>

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

On distingue cet espace  $\mathbb{S}_{(2,1)}^a$  de l'espace  $\mathbb{S}_{(2,1)}^b$  caractérisé par le tableau de Young standard

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

L'espace  $\mathbb{S}_{(2,1)}^a$  est obtenu à l'aide du projecteur  $\pi : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{S}_{(2,1)}^a$  défini par

$$\pi(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k) := \frac{1}{3}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k + \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^k - \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^i - \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^i),$$

où  $\mathbf{e}^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) est la base canonique du dual de  $\mathbb{R}^3$ .

**Lemme 3.1.11.** *La décomposition de l'espace  $\mathbb{P}ie_z$  en composantes irréductibles sous l'action de  $GL_3(\mathbb{R})$  est donnée par*

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} \oplus \mathbf{L},$$

où  $\mathbf{S} \in \mathbb{S}^3$  et  $\mathbf{L} \in \mathbb{S}_{(2,1)}^a$  sont définis par

$$\mathbf{S}_{ijk} := \frac{1}{3}(\mathbf{P}_{ijk} + \mathbf{P}_{ikj} + \mathbf{P}_{kji}), \quad \mathbf{L}_{ijk} := \frac{1}{3}(2\mathbf{P}_{ijk} - \mathbf{P}_{kji} - \mathbf{P}_{kij})$$

*Remarque 3.1.12.* Chaque tenseur  $\mathbf{L} \in \mathbb{S}_{(2,1)}^a$  vérifie l'identité

$$\mathbf{L}_{ijk} + \mathbf{L}_{kji} + \mathbf{L}_{ikj} = 0 \tag{3.1.5}$$

b. C'est par la dualité de Schur–Weyl qu'on peut déterminer les représentations irréductibles du groupe spécial linéaire [KP00].

c. Un tableau de Young est standard si les cases sont numérotées par des entiers strictement croissants sur chaque ligne et sur chaque colonne.

Une fois établie la décomposition de  $\mathbb{P}^2$  en espaces  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$  irréductibles, on construit sa décomposition harmonique en utilisant des opérations de traces sur  $\mathbb{S}^3$  puis sur  $\mathbb{S}_{(2,1)}^a$ .

**Lemme 3.1.13.** *Pour tout  $\mathbf{S} \in \mathbb{S}^3$ , il existe  $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^1$  et  $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^3$  tels que*

$$\mathbf{S}_{ijk} = \mathbf{D}_{ijk} + \frac{1}{3}(\delta_{ij}\mathbf{u}_k + \delta_{ik}\mathbf{u}_j + \delta_{kj}\mathbf{u}_i), \quad (3.1.6)$$

cette décomposition est  $\mathrm{O}(3)$  équivariante.

*Démonstration.* On reprend la métrique euclidienne canonique  $\mathbf{q}$  de  $\mathbb{R}^3$ . On considère ensuite le morphisme  $\mathrm{O}(3)$  équivariant

$$\mathbf{v} \in \mathbb{H}^1 \mapsto \mathbf{q} \odot \mathbf{v} \in \mathbb{S}^3,$$

où  $\odot$  désigne le produit tensoriel complètement symétrisé :

$$(\mathbf{q} \odot \mathbf{v})_{ijk} := \frac{1}{3}(\delta_{ij}\mathbf{v}_k + \delta_{ik}\mathbf{v}_j + \delta_{kj}\mathbf{v}_i).$$

En notant, pour  $\mathbf{S} \in \mathbb{S}^3$

$$(\mathrm{tr}_{12}(\mathbf{S}))_k := \mathbf{S}_{ik} \in \mathbb{H}^1.$$

On vérifie directement que

$$\mathrm{tr}_{12}(\mathbf{q} \odot \mathbf{v}) = \frac{3}{5}\mathbf{v}.$$

Il suffit donc de considérer

$$\mathbf{u} := \frac{5}{3}\mathrm{tr}_{12}(\mathbf{S}) \in \mathbb{H}^1 \text{ et } \mathbf{D} := \mathbf{S} - \mathbf{q} \odot \mathbf{u} \in \mathbb{H}^3$$

pour obtenir la formule (3.1.6). □

Pour obtenir la décomposition harmonique de  $\mathbb{S}_{(2,1)}^a$ , nous utilisons le tenseur de Levi-Civita, noté  $\epsilon$ .

**Lemme 3.1.14.** *Pour tout tenseur  $\mathbf{L} \in \mathbb{S}_{(2,1)}^a$  il existe  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^2$  et  $\mathbf{v} \in \mathbb{H}^1$  tels que<sup>d</sup>*

$$\mathbf{L}_{ijk} = \frac{2}{3}\mathbf{A}_{mi}\epsilon_{mjk} + \frac{1}{4}(2\delta_{ij}\mathbf{v}_k - \delta_{kj}\mathbf{v}_i - \delta_{ki}\mathbf{v}_j), \quad (3.1.7)$$

cette décomposition étant  $\mathrm{O}(3)$  équivariante et l'action de  $\mathrm{O}(3)$  sur  $\mathbb{H}^2$  étant donnée par  $\tilde{\rho}_2^*$ .

*Démonstration.* Pour tout tenseur  $\mathbf{L} \in \mathbb{S}_{(2,1)}^a$ , notons

$$(\mathrm{tr}_{12}(\mathbf{L}))_k := \mathbf{L}_{ik} \in \mathbb{H}^1,$$

et pour tout vecteur  $\mathbf{w} \in \mathbb{H}^1$ , notons

$$(\mathbf{q} \otimes_{(2,1)} \mathbf{w})_{ijk} := 2\delta_{ij}\mathbf{w}_k - \delta_{kj}\mathbf{w}_i - \delta_{ki}\mathbf{w}_j = 3\pi \circ (\mathbf{q} \otimes \mathbf{w})$$

---

d. Rappelons que nous adoptons ici la convention d'Einstein sur les indices répétés.

En remarquant que  $\text{tr}_{12}(\mathbf{q} \otimes \mathbf{w}) = 4\mathbf{w}$ , on en déduit que le morphisme  $\text{tr}_{12}$  est surjectif. Comme l'espace  $\mathbb{S}_{(2,1)}^a$  est de dimension 8, le noyau

$$\{\mathbf{L}_0 \in \mathbb{S}_{(2,1)}^a, \quad \text{tr}_{12}(\mathbf{L}_0) = \mathbf{0}\} \quad (3.1.8)$$

est de dimension 5.

Soit maintenant un tenseur  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^2$  et

$$(\text{tr}_{13}(\mathbf{A} \otimes \boldsymbol{\epsilon}))_{ijk} := \mathbf{A}_{pi} \boldsymbol{\epsilon}_{pjk} \in \mathbb{T}^3.$$

Le morphisme

$$\varphi : \mathbf{A} \in \mathbb{H}^2 \mapsto \pi \circ \text{tr}_{13}(\mathbf{A} \otimes \boldsymbol{\epsilon}) \in \mathbb{S}_{(2,1)}^a$$

est injectif et son image est dans le noyau 3.1.8. Comme  $\mathbb{H}^2$  est de dimension 5, on en déduit que son image est exactement ce noyau. On va maintenant montrer que, pour tout  $g \in \text{O}(3)$ ,

$$\varphi \circ \tilde{\rho}_2^*(g) = \tilde{\rho}_3(g) \circ \varphi.$$

Pour cela, on remarque que  $\tilde{\rho}_3(-\text{Id}) \circ \varphi = -\varphi$  et que

$$\tilde{\rho}_2^*(-\text{Id})(\mathbf{A}) = -\mathbf{A}$$

Au final on en déduit que  $\varphi$  réalise un isomorphisme  $\text{O}(3)$  équivariant de  $(\mathbb{H}^2, \tilde{\rho}_2^*)$  sur le noyau 3.1.8. Ainsi, pour tout tenseur  $\mathbf{L} \in \mathbb{S}_{(2,1)}^a$ , il suffit de prendre

$$\mathbf{v} := \text{tr}_{12}(\mathbf{L})$$

et  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^2$  tels que

$$\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{L} - \frac{1}{4} \mathbf{q} \otimes_{(2,1)} \mathbf{v}$$

ce qui donne la décomposition 3.1.7. □

Au final :

**Corollaire 3.1.15.** *La décomposition harmonique de l'espace des tenseurs piézoélectriques  $\mathbb{P}\text{iez}$  est donnée par*

$$\mathbb{H}^3 \oplus \mathbb{H}^1 \oplus \mathbb{H}^{2*} \oplus \mathbb{H}^1$$

où  $\mathbb{H}^{2*}$  désigne l'espace  $(\mathbb{H}^2, \tilde{\rho}_2^*)$ .

*Remarque 3.1.16.* Nous avons ici donné une démarche et un isomorphisme explicite pour la décomposition harmonique de l'espace  $\mathbb{P}\text{iez}$ . Une telle décomposition est essentielle en mécanique des milieux continus et la présence de la composante isotypique  $\mathbb{H}^1 \oplus \mathbb{H}^1$  fait que cet isomorphisme n'est pas unique. Ainsi, le *choix* que nous avons fait de commencer par une première décomposition en composantes  $\text{GL}_3(\mathbb{R})$  irréductibles est arbitraire. Il est cependant important de construire des procédés de décomposition qui ont un sens *physique*.

Comme illustré dans [Auf13], à travers l'espace des tenseurs *gradients de la déformation*  $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{H}^1$  (isomorphe à l'espace  $\mathbb{P}\text{iez}$ ) :

1. Le choix de décomposer en passant par les composantes  $GL_3(\mathbb{R})$  irréductibles permet d'interpréter (voir lemme 3.1.11) le tenseur totalement symétrique  $\mathbf{S}$  en tant que *gradient de l'élongation* et le tenseur  $\mathbf{L} \in \mathbb{S}_{(2,1)}^a$  en tant que *gradient de la rotation*. Il est intéressant de noter que, en se basant sur des raisonnements physiques, cette décomposition avait déjà été proposée par Mindlin [Min64]. On retrouve ici ce même résultat à partir d'une analyse basée sur les représentations irréductibles de  $GL_3(\mathbb{R})$ . En un sens, ce résultat a un sens « physique » pour tout tenseur d'ordre 3.
2. Le choix de commencer par décomposer  $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3) = \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^0$  en sa partie déviatorique et sa partie sphérique est classique en physique. On obtient alors

$$\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{H}^1 = (\mathbb{H}^2 \otimes \mathbb{H}^1) \oplus (\mathbb{H}^0 \otimes \mathbb{H}^1)$$

Dans ce cas, le premier espace s'interprète en tant que *gradient de la distortion* et le deuxième en tant que *gradient de la dilatation*. Il est à noter que cette interprétation n'a de sens « physique » que lorsque le tenseur d'ordre trois est construit en tant que gradient d'un tenseur d'ordre 2.

### 3.1.3. Décomposition harmonique de l'espace $\mathbb{E}la$

Rappelons ici que l'espace  $\mathbb{E}la$  des tenseurs d'élasticité est un espace de tenseurs d'ordre 4. Du fait de la parité de l'ordre, l'action de  $O(3)$  se restreint en fait en une action de  $SO(3)$ . La décomposition harmonique<sup>e</sup> de l'espace  $\mathbb{E}la$  a été effectuée par Bäckus [Bac70] :

**Lemme 3.1.17.** *Il existe un isomorphisme  $SO(3)$  équivariant entre  $\mathbb{E}la$  et*

$$\mathbb{H}^4 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^0$$

Pour obtenir une telle décomposition, la procédure est la même que celle adoptée dans le cas de l'espace  $\mathbb{P}iez$ . Cette procédure est d'ailleurs générale pour tout espace de tenseurs. Notons  $\mathbb{S}_{(2,2)}^a$  (resp.  $\mathbb{S}_{(2,2)}^b$ ) l'espace des tenseurs d'ordre 4 caractérisés par le tableau de Young

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \quad \text{resp.} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

**Lemme 3.1.18.** *La décomposition de l'espace  $\mathbb{E}la$  en composantes irréductibles sous l'action de  $GL_3(\mathbb{R})$  est donnée par*

$$\mathbf{C} = \mathbf{S} \oplus \mathbf{E}$$

où  $\mathbf{S} \in \mathbb{S}^4$  et  $\mathbf{C} \in \mathbb{S}_{(2,2)}^a$  sont définis par

$$\mathbf{S}_{ijkl} = \frac{1}{3}(\mathbf{C}_{ijkl} + \mathbf{C}_{kjil} + \mathbf{C}_{ljki}) \quad (3.1.9)$$

$$\mathbf{E}_{ijkl} = \frac{1}{3}(2\mathbf{C}_{ijkl} - \mathbf{C}_{kjil} - \mathbf{C}_{ljki}) \quad (3.1.10)$$

---

e. Il s'agit de la première décomposition harmonique effectuée en mécanique des milieux continus.

Une fois cette première décomposition effectuée, il faut effectuer une décomposition des espaces  $\mathbf{S} \in \mathbb{S}^4$  et  $\mathbf{E} \in \mathbb{S}_{(2,2)}^a$  par le moyen d'opérateurs de traces, tout comme dans le cas de la piézoélectricité. Sans détailler cette étape, on obtient pour tout tenseur  $\mathbf{C} \in \mathbb{E}$  la les composantes

$$(\mathbf{D}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \lambda, \mu) \in \mathbb{H}^4 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^0$$

où on aura

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{ijkl} = & \mathbf{D}_{ijkl} + (\delta_{ij}\mathbf{A}_{kl} + \delta_{kl}\mathbf{A}_{ij}) + \delta_{ik}\mathbf{B}_{jl} + \delta_{jl}\mathbf{B}_{ik} + \delta_{il}\mathbf{B}_{jk} + \delta_{jk}\mathbf{B}_{il} \\ & + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \end{aligned}$$

en notant

$$\begin{aligned} \alpha &:= -\frac{1}{2}\mathbf{E}_{ijij} \in \mathbb{H}^0, & \mathbf{c}_{ij} &:= -6\mathbf{E}_{ikjk} - 4\alpha\delta_{ij} \in \mathbb{H}^2 \\ \beta &:= \frac{1}{5}\mathbf{S}_{ijij} \in \mathbb{H}^0, & 7\mathbf{s}_{ij} &:= 6\mathbf{S}_{ijkk} - \frac{5}{3}\beta\delta_{ij} \in \mathbb{H}^2 \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{ijkl} &:= \mathbf{S}_{ijkl} - \frac{\beta}{3}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{lj}\delta_{ik} + \delta_{kj}\delta_{il}) \\ &\quad - \frac{1}{6}(\mathbf{s}_{ij}\delta_{kl} + \mathbf{s}_{kl}\delta_{ij} + \mathbf{s}_{lj}\delta_{ik} + \mathbf{s}_{ik}\delta_{jl} + \mathbf{s}_{kj}\delta_{il} + \mathbf{s}_{il}\delta_{kj}) \\ 6\mathbf{A} &:= 2\mathbf{c} + \mathbf{s}, & 6\mathbf{B} &:= \mathbf{s} - \mathbf{c} \\ 3\lambda &:= 2\alpha + \beta, & 3\mu &:= \beta - \alpha \end{aligned}$$

*Remarque 3.1.19.* Les quantités  $(\lambda, \mu)$  sont appelés *coefficients de Lamé*. Remarquons cependant qu'il n'y a pas de décomposition canonique sur l'espace  $\mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^0$  ainsi que sur l'espace  $\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2$ . A la place des coefficients  $(\lambda, \mu)$ , on peut utiliser le couple  $(E, \nu)$  composé du *module d'Young* et du *coefficient de Poisson* ou tout autre couple de coefficients ayant un sens physique (module de cisaillement, module d'élasticité isostatique, module d'onde de compression, etc). Ce fait est bien connu en mécanique des milieux continus, bien qu'il ne soit pas exprimé en termes de composantes isotypiques.

## 3.2. Isotropie des représentations irréductibles

### 3.2.1. Sous-groupes fermés de $O(3)$ et $SO(3)$

Pour toute la suite, on note  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  et  $(x, y, z)$  les coordonnées d'un vecteur dans ce repère. Pour tout vecteur  $\mathbf{v}$ , on note  $\mathbf{Q}(\mathbf{v}; \theta)$  la rotation d'angle  $\theta$  autour de  $\mathbf{v}$ .

#### Classification des sous-groupes

Rappelons ici que les sous-groupes fermés de  $SO(3)$  se composent :

- Des sous-groupes cycliques d'ordre  $n$ , notés  $Z_n$  ;
- Des sous-groupes diédraux d'ordre  $2n$ , notés  $D_n$  ;



- Des sous-groupes exceptionnels  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{I}$  correspondant respectivement aux groupes de symétrie d'un tétraèdre régulier, d'un cube et d'un dodécaèdre ;
- Des sous-groupes maximaux  $SO(2)$  et  $O(2)$ .

Notons ensuite  $Z_2^c$  le centre de  $O(3)$ , lequel sous-groupe est isomorphe à  $Z_2$  (sans lui être conjugué).

Pour les sous-groupes fermés  $\Gamma$  de  $O(3)$ , on distingue trois situations :

- lorsque  $\Gamma \subset SO(3)$ , on dit que  $\Gamma$  est un sous-groupe de type I ;
- lorsque  $-1 \in \Gamma$ , il existe nécessairement un isomorphisme entre  $\Gamma$  et un groupe  $K \oplus Z_2^c$  où  $K$  est un sous-groupe fermé de  $SO(3)$ . On dit alors que  $\Gamma$  est de type II.
- lorsque  $\Gamma$  ne contient pas  $-1$  mais n'est pas un sous-groupe de  $SO(3)$ , on dit que  $\Gamma$  est de type III.

Nous allons maintenant détailler les sous-groupes de type III. Tous ces sous-groupes sont associés à un couple  $L \subset H$  de sous-groupes de  $SO(3)$  où  $L$  est un sous-groupe d'indice 2 dans  $H$  [IG84]. La table 3.1 donne tous les couples possibles.

$\Gamma$	$H$	$L$
$Z_2^-$	$Z_2$	$\mathbb{1}$
$Z_{2n}^-$	$Z_{2n}$	$Z_n$
$D_n^v$	$D_n$	$Z_n$
$D_{2n}^h$	$D_{2n}$	$D_n$
$\mathcal{O}^-$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{T}$
$O(2)^-$	$O(2)$	$SO(2)$

Table 3.1. – Couples définissant les sous-groupes de type III

Le détail de ces sous-groupes de type III sera donné dans la [section 3.2.1](#)

### Structure des sous-groupes de type I

Avant tout, nous précisons la convention d'écriture suivante [GSS88]

**Définition 3.2.1.** Etant donné des sous-groupes  $K_1, K_2, \dots, K_s$  d'un groupe  $\Sigma$ . Alors  $\Sigma$  est la *réunion directe* des  $K_i$  si

$$\text{a) } \Sigma = \bigcup_{i=1}^s K_i \quad ; \quad \text{b) } K_i \cap K_j = \{e\} \quad \forall i \neq j.$$

Une telle union est notée  $K = \biguplus_{i=1}^s K_i$ .

Ensuite, nous spécifions les sous-groupes fermés suivants :

- on note  $Z_n^0$  le sous-groupe cyclique d'axe  $Oz$ . Pour tout rotation  $g \in SO(3)$ , on note  $a$  l'axe engendré par  $ge_3$  et  $Z_n^a := gZ_n^0g^{-1}$ .
- il existe  $n$  axes  $b_1, \dots, b_n$ , déduit les uns des autres par une rotation d'angle  $\frac{2\pi}{n}$  autour de l'axe  $Oz$ , appelés *axes secondaires* et tel que  $b_1 = Ox$  ; on note alors

$$D_n^0 = Z_n^0 \biguplus_{l=1}^n Z_2^{b_l} \tag{3.2.1}$$

Pour chaque rotation  $g \in \text{SO}(3)$ , on désigne par  $a$  l'axe engendré par  $ge_3$  et par  $b$  l'axe engendré par  $ge_1$ . On note enfin

$$D_n^{a,b} = gD_n^0g^{-1}$$

le groupe diédral qui a pour axe principal l'axe  $a$  et dont l'un des axes secondaire est l'axe  $b$ .

- on note  $\mathcal{T}^0$  le groupe de symétrie du tétraèdre  $\mathcal{T}_0 := A_1A_3A_7A_5$  de la figure 3.2. Ce sous-groupe se décompose en [IG84] :

$$\mathcal{T}^0 = \biguplus_{i=1}^4 Z_3^{vt_i} \biguplus_{j=1}^3 Z_2^{et_j} \quad (3.2.2)$$

Dans cette écriture, les axes de sommet du tétraèdre sont notés  $vt_i$  et les axes des arêtes sont notés  $et_j$  (voir figure 3.2). Chaque sous-groupe  $g\mathcal{T}^0g^{-1}$  est caractérisé par l'ensemble de ses axes  $(gvt_i, get_i)$ ,  $g \in \text{SO}(3)$ .

- on note  $\mathcal{O}^0$  le groupe de symétrie du cube  $\mathcal{C}_0$  de la figure 3.2 où

$$\{A_i\}_{i=1\dots 8} = (\pm 1; \pm 1 \pm 1)$$

désigne l'ensemble de ses sommets. Ce sous-groupe se décompose en

$$\mathcal{O}^0 = \biguplus_{i=1}^3 Z_4^{fc_i} \biguplus_{j=1}^4 Z_3^{vc_j} \biguplus_{l=1}^6 Z_2^{ec_l} \quad (3.2.3)$$

où les axes de sommet, d'arête et de face sont respectivement notés :  $vc_i$ ,  $ec_j$  et  $fc_j$  (voir figure 3.1). Pour chaque rotation  $g \in \text{SO}(3)$ , le sous-groupe  $\mathcal{O}^g := g\mathcal{O}^0g^{-1}$

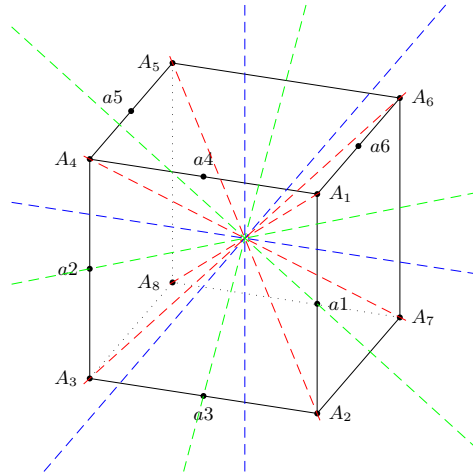


Figure 3.1. – Axes de symétrie  $\mathcal{C}_0$

est caractérisé par les axes  $(gfc_i, gec_j, gvc_l)$ .

- on note  $\mathcal{I}^0$  le groupe de symétrie du dodécaèdre  $\mathcal{D}_0$  de la figure 3.3. Sur cette figure, les sommets sont définis par<sup>f</sup> :

f.  $\phi$  désigne ici le nombre d'or.

- douze sommets du type  $(\pm\frac{a}{2}, \pm\phi^2\frac{a}{2}, 0)$ , obtenus par permutation circulaire ;
- huit sommets d'un cube de coordonnées  $(\pm\phi\frac{a}{2}, \pm\phi\frac{a}{2}, \pm\phi\frac{a}{2})$ .

Ce sous-groupe se décompose en

$$\mathcal{I}^0 = \biguplus_{i=1}^6 Z_5^{fd_i} \biguplus_{j=1}^{10} Z_3^{vd_j} \biguplus_{l=1}^{15} Z_2^{ed_l} \quad (3.2.4)$$

où les axes de sommet, d'arête et de face sont respectivement notés :  $vd_i$ ,  $ed_j$  et  $fd_j$  (voir figure 3.3). Notons que les axes de sommet  $vd_j$  sont caractérisés par les sommets  $D_j$ , pour  $j = 1 \cdots 10$ .

- on note  $SO(2)^0$  le groupe des rotations autour de l'axe  $Oz$  et  $O(2)^0 \supset O(2)^0$  ayant pour axe principal l'axe  $Oz$ .

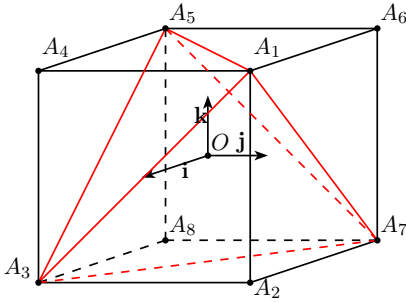


Figure 3.2. – Cube  $\mathcal{C}_0$

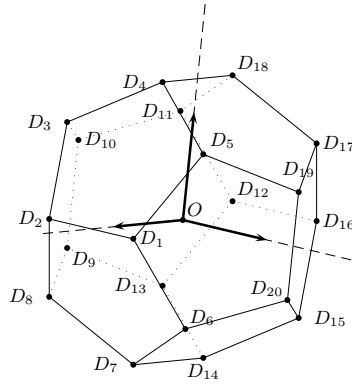


Figure 3.3. – Dodécaèdre  $\mathcal{D}_0$

### Structures des sous-groupes de type III

Nous détaillons ici la structure géométrique des sous-groupes fermés de  $O(3)$  de type III. Notons tout d'abord  $\sigma_z$  la réflexion selon le plan normal à l'axe  $Oz$ . De même, on définit  $\sigma_b$  comme étant la réflexion selon le plan normal à l'axe  $b$ . On note ensuite  $Z_2^-$  le sous-groupe engendré par  $\sigma_z$ . Ce sous-groupe est isomorphe à  $Z_2$  et à  $Z_2^c$  mais il ne lui est pas conjugué. Les sous-groupes conjugués à  $Z_2^-$  sont notés  $Z_2^{\sigma_b}$  et définis par

$$Z_2^{\sigma_b} := \{\mathbb{1}, \sigma_b\} \quad (3.2.5)$$

Puis :

- étant donné  $Z_{2n}^0 \supset Z_n^0$  ( $n > 1$ ) où  $Z_{2n}^0$  est le groupe des rotations

$$\mathbb{1}, \mathbf{Q}\left(\mathbf{e}_3; \frac{\pi}{n}\right), \mathbf{Q}\left(\mathbf{e}_3; \frac{2\pi}{n}\right), \dots,$$

en prenant  $\mathbf{r}_{2n} := \mathbf{Q}\left(\mathbf{e}_3; \frac{\pi}{n}\right) \in Z_{2n}^0 - Z_n^0$  on a alors

$$Z_{2n}^- := Z_n^0 \cup (-\mathbf{r}_{2n}Z_n^0)$$

Notons que chaque élément de  $-\mathbf{r}_{2n}Z_n^0$  est une rotation multipliée par une ré-

flexion selon le plan  $xy$ .  $Z_{2n}^-$  a pour axe principal  $Oz$ . Pour toute rotation  $g$ , on note  $Z_{2n}^-(a) := gZ_{2n}^-g^{-1}$  où l'axe  $a$  est l'image par  $g$  de l'axe  $Oz$ .

- étant donné  $D_n^0 \supset Z_n^0$ , on sait que  $D_n^0$  contient  $Z_n^0$  ainsi que les rotations d'ordre 2 autour des axes  $b_j$  (3.2.1). On note alors

$$D_n^v := Z_n \biguplus_{j=0}^{n-1} Z_2^{\sigma_{b_j}} \quad (3.2.6)$$

L'exposant  $v$  signifie ici que nous avons des réflexions selon des plans verticaux. On note ensuite  $D_n^v(a, b) := gD_n^v g^{-1}$  où  $a$  est l'axe engendré par  $ge_3$  et  $b$  l'axe engendré par  $ge_1$ .

- étant donné  $D_{2n}^0 \supset D_n^0$ , on commence par définir les axes  $p_j$  et  $q_j$  ( $j = 0 \dots n-1$ ) respectivement engendrés par :

$$\mathbf{v}_j := \mathbf{Q} \left( \mathbf{e}_3; \frac{2j\pi}{n} \right) \cdot \mathbf{e}_1 \quad \text{pour } p_j; \quad \mathbf{w}_j := \mathbf{Q} \left( \mathbf{e}_3; \frac{(2j+1)\pi}{2n} \right) \cdot \mathbf{e}_1 \quad \text{pour } q_j \quad (3.2.7)$$

On reprend  $\mathbf{r}_{2n} = \mathbf{Q} \left( \mathbf{e}_3; \frac{\pi}{n} \right)$ . On sait alors que

$$D_n^0 = \left\{ \mathbb{1}, \mathbf{Q} \left( \mathbf{e}_3; \frac{2\pi}{n} \right), \mathbf{Q} \left( \mathbf{e}_3; \frac{4\pi}{n} \right), \dots, \mathbf{Q}(\mathbf{v}_0; \pi), \mathbf{Q}(\mathbf{v}_1; \pi), \dots \right\},$$

puis on note

$$-\mathbf{r}_{2n}D_n^0 = \left\{ -\mathbf{Q} \left( \mathbf{e}_3; \frac{\pi}{n} \right), -\mathbf{Q} \left( \mathbf{e}_3; \frac{3\pi}{n} \right), \dots, -\mathbf{Q}(\mathbf{w}_0; \pi), -\mathbf{Q}(\mathbf{w}_1; \pi), \dots \right\},$$

dont les éléments ne sont pas dans  $D_n^0$ . On définit alors

$$D_{2n}^h := D_n^0 \cup (-\mathbf{r}_{2n}D_n^0),$$

qui peut se décomposer en

$$D_{2n}^h = Z_{2n}^- \biguplus_{j=0}^{n-1} Z_2^{p_j} \biguplus_{j=0}^{n-1} Z_2^{\sigma_{q_j}}. \quad (3.2.8)$$

Dans cette décomposition, remarquons qu'il y a  $n$  copies de sous-groupes conjugués à  $Z_2$  et  $n$  copies de sous-groupes conjugués à  $Z_2^-$ . L'exposant  $h$  signifie que nous avons des réflexions selon des plans horizontaux. On note ensuite  $D_{2n}^h(a, b) := gD_{2n}^h g^{-1}$  où  $a$  est l'axe engendré par  $ge_3$  et  $b$  l'axe engendré par  $ge_1$ .

- étant donné  $\mathcal{O}^0 \supset \mathcal{T}^0$ , on utilise la décomposition suivante :

$$\mathcal{O}^0 = \biguplus_{i=1}^3 Z_4^{fc_i} \biguplus_{j=1}^4 Z_3^{vc_j} \biguplus_{l=1}^6 Z_2^{ec_l} = \mathcal{T}^0 \cup (\mathcal{O}^0 - \mathcal{T}^0)$$

avec

$$\mathcal{T}^0 = \biguplus_{j=1}^4 Z_3^{vt_j} \uplus Z_2^{et_1} \uplus Z_2^{et_2} \uplus Z_2^{et_3}$$

Remarquons que nous avons  $Z_2^{et_i} \subset Z_4^{fc_i}$ . Ainsi, en multipliant chaque élément de  $\mathcal{O}^0 - \mathcal{T}^0$  par  $-\mathbb{1}$ , on en déduit le sous-groupe  $\mathcal{O}^-$  :

$$\mathcal{O}^- := \bigoplus_{i=1}^3 Z_4^-(f_i) \bigoplus_{j=1}^4 Z_3^{vc_j} \bigoplus_{l=1}^6 Z_2^{\sigma_{e_l}} \quad (3.2.9)$$

Dans cette décomposition, on obtient six réflexions planes, lesquels plans sont perpendiculaires aux axes d'arêtes. On rappelle aussi que  $Z_4^-(f_i)$  est le sous-groupe  $Z_4^-$  d'axe principal  $f_i$ .

- enfin, étant donné  $O(2) \supset SO(2)$ , on remarque que chaque rotation  $\mathbf{Q}(\mathbf{x}; \pi)$  d'ordre 2 où  $\mathbf{x}$  est dans le plan horizontal  $xy$ , n'est pas un élément de  $SO(2)$ . En notant,  $\sigma_{\mathbf{x}} := -\mathbf{Q}(\mathbf{x}; \pi)$ , on définit

$$O(2)^- := SO(2) \bigcup_{\mathbf{x} \in xy} Z_2^{\sigma_{\mathbf{x}}}$$

Une fois définis tous ces sous-groupes, on donne dans la figure 3.4 les relations d'ordre partiel entre les classes de sous-groupes de  $\mathcal{O}^-$  et dans la figure 3.5 celles entre les autres classes de sous-groupes fermés de  $O(3)$ .

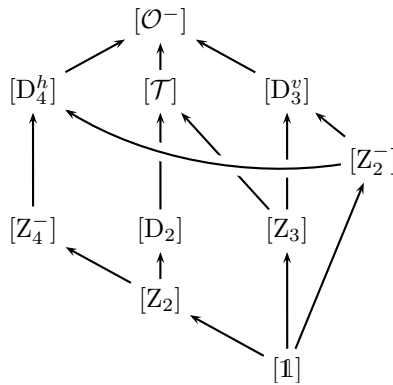


Figure 3.4. – Relations d'ordre partiel entre les classes de sous-groupes de  $\mathcal{O}^-$

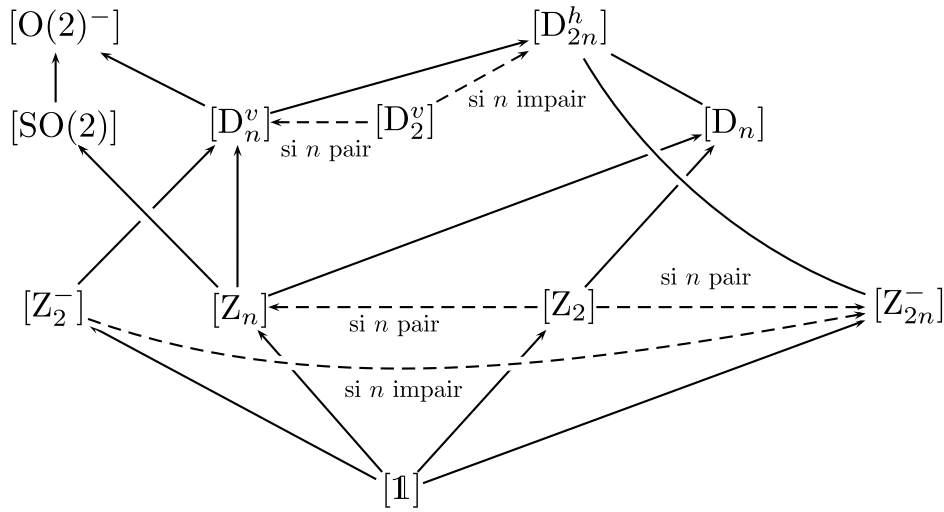


Figure 3.5. – Relations d'ordre partiel entre les classes de sous-groupes de  $O(3)$

### 3.2.2. Isotropies des représentations irréductibles

Nous présentons dans un premier temps des résultats établis par Golubitsky–Ihrig [IG84].

Le premier résultat établi dans [IG84] concerne les sous-groupes d'isotropie des représentations irréductibles  $(\mathbb{H}^n, \tilde{\rho}_n)$  (3.1.3) de  $SO(3)$  :

**Théorème 3.2.2.** *Les classes d'isotropie associées à la représentation irréductible  $(\mathbb{H}^n, \tilde{\rho}_n)$  ( $n > 0$ ) de  $SO(3)$  sont données par :*

- (a)  $\mathbb{1}$  pour  $n \geq 3$  ;
- (b)  $Z_k$  ( $k \geq 2$ ) pour  $\begin{cases} k \leq n \text{ lorsque } n \text{ est impair} \\ k \leq \frac{n}{2} \text{ lorsque } n \text{ est pair} \end{cases}$
- (c)  $D_k$  ( $k \geq 2$ ) pour  $k \leq n$  ;
- (d)  $\mathcal{T}$  pour  $n = 3, 6, 7$  ou  $k \geq 9$  ;
- (e)  $\mathcal{O}$  pour  $n \neq 1, 2, 3, 5, 7, 11$  ;
- (f)  $\mathcal{I}$  pour  $n = 6, 10, 12, 15, 18$  ou  $k \geq 20$  et  $n \neq 23, 29$  ;
- (g)  $SO(2)$  pour  $n$  impair ;
- (f)  $O(2)$  pour  $n$  pair.

Pour les représentations irréductibles de  $O(3)$  rappelons que la représentation  $\tilde{\rho}_n^*$  est donnée par 3.1.4.

**Théorème 3.2.3.** *Les classes d'isotropies associées à la représentation irréductible  $(\mathbb{H}^n, \tilde{\rho}_n)$  ( $n$  impair) ou à la représentation irréductible  $(\mathbb{H}^n, \tilde{\rho}_n^*)$  ( $n$  pair non nul) de  $O(3)$  sont données par :*

- (a)  $\mathbb{1}$  pour  $n \geq 3$  ;
- (b)  $Z_k$  pour  $2 \leq k \leq \frac{n}{2}$  ;
- (c)  $Z_{2k}^-$  pour  $k \leq \frac{n}{3}$  ;
- (d)  $D_k$  pour  $\begin{cases} 1 < k \leq \frac{n}{2} \text{ lorsque } n \text{ est impair} \\ 1 < k \leq n \text{ lorsque } n \text{ est pair} \end{cases}$

- (e)  $D_k^v$  pour  $\begin{cases} 1 < k \leq n \text{ lorsque } n \text{ est impair} \\ 1 < k \leq \frac{n}{2} \text{ lorsque } n \text{ est pair} \end{cases}$
- (f)  $D_{2k}^h$  pour  $1 < k \leq n$ , excepté  $D_4^h$  pour  $n = 3$  ;
- (g)  $\mathcal{T}$  pour  $n \neq 1, 2, 3, 5, 7, 8, 11$  ;
- (h)  $\mathcal{O}$  pour  $n \neq 1, 2, 3, 5, 7, 11$  ;
- (i)  $\mathcal{O}^-$  pour  $n \neq 1, 2, 4, 5, 8$  ;
- (j)  $\mathcal{I}$  pour  $n = 6, 10, 12, 15, 16, 18$  ou  $n \geq 20$  et  $n \neq 23, 29$  ;
- (k)  $O(2)$  lorsque  $n$  est pair ;
- (l)  $O(2)^-$  lorsque  $n$  est impair.

### 3.3. Invariants de tenseurs et espaces de formes binaires

Le groupe  $SU(2)$  est le revêtement universel du groupe  $SO(3)$  et le revêtement universel du groupe  $SO(3, \mathbb{C})$  (qui est le complexifié du groupe  $SO(3)$ ) est le groupe  $SL(2, \mathbb{C})$ . Il existe donc un lien naturel entre les groupes  $SO(3)$  et  $SL(2, \mathbb{C})$ , établi par un processus de complexification. Dans cette section, nous précisons comment ce processus permet de passer d'un espace de tenseurs harmoniques à un espace de *formes binaires*. Un tel processus est très important au niveau des *algèbres d'invariants* car il permet de traduire le problème en termes de *théorie classique des invariants*.

#### 3.3.1. Complexification d'une représentation réelle

Le contenu de cette section n'a rien d'original. Les références utilisées sont [Vin94 ; DK00].

Pour tout espace vectoriel réel  $V$ , on définit son complexifié par

$$V^{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq V \oplus iV$$

Nous définissons le complexifié d'un groupe de Lie compact en passant par son algèbre de Lie. Si  $\mathfrak{g}$  désigne une algèbre de Lie réelle, on définit son algèbre complexifiée par  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ , munie du crochet de Lie

$$[\eta_1 \otimes \lambda_1, \eta_2 \otimes \lambda_2] := [\eta_1, \eta_2] \otimes (\lambda_1 \lambda_2)$$

On vérifie alors directement le lemme suivant :

**Lemme 3.3.1.** *Etant donné  $\mathfrak{g} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$  une sous algèbre de Lie totalement réelle, c'est-à-dire vérifiant  $\mathfrak{g} \cap i\mathfrak{g} = \{0\}$ . Alors  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  est isomorphe à la sous-algèbre de Lie complexe  $\mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$ .*

Soit maintenant un groupe de Lie compact  $G$ . On sait qu'il existe un plongement de  $G$  dans un groupe linéaire  $GL(N, \mathbb{R})$ . On peut donc réaliser son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  comme une sous-algèbre totalement réelle de  $\mathbb{C}^{N \times N}$ . Notons  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$  la complexification de  $\mathfrak{g}$ , puis  $\hat{G}$  l'unique groupe de Lie connexe dans  $GL(N, \mathbb{C})$  dont l'algèbre de Lie est  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ . On définit enfin  $G^{\mathbb{C}} := G\hat{G}$  comme étant la complexification du groupe  $G$ .

Comme exemple classique de complexification, nous avons

$$SO(n, \mathbb{R})^{\mathbb{C}} = SO(n, \mathbb{C}), \quad SU(n)^{\mathbb{C}} = SL(n, \mathbb{C})$$

Soit maintenant  $(V, \rho)$  une représentation linéaire *réelle* de dimension finie d'un groupe de Lie compact  $G$ . On peut alors montrer qu'il existe une unique représentation linéaire complexe  $(V^{\mathbb{C}}, \rho^{\mathbb{C}})$  du complexifié  $G^{\mathbb{C}}$  qui étend la représentation  $(V, \rho)$ . Un polynôme de l'algèbre  $\mathbb{C}[V^{\mathbb{C}}]$  peut être vu, par restriction, en tant que polynôme dans l'algèbre  $\mathbb{C}[V]$  (il s'agit d'une identification formelle).

**Lemme 3.3.2.** *La restriction induit un isomorphisme  $\mathbb{C}[V^{\mathbb{C}}]^G \simeq \mathbb{C}[V]^G$*

*Démonstration.* On doit montrer que la restriction est en fait surjective. Notons  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}[V]^G$  et  $\tilde{\mathbf{p}} \in \mathbb{C}[V^{\mathbb{C}}]$  son unique extension. Pour tout  $g \in G$  on aura

$$(\mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{p}})|_V = g \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}}|_V$$

et donc  $\tilde{\mathbf{p}} \in \mathbb{C}[V^{\mathbb{C}}]^G$ . □

**Lemme 3.3.3.** *On a  $\mathbb{C}[V^{\mathbb{C}}]^G = \mathbb{C}[V^{\mathbb{C}}]^{G^{\mathbb{C}}}$ .*

*Démonstration.* On fixe  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}[V^{\mathbb{C}}]^G$ . Pour tout vecteur  $\mathbf{v} \in V^{\mathbb{C}}$  on considère l'application

$$\psi_{\mathbf{v}} : g \mapsto \psi_{\mathbf{v}}(g) := \mathbf{p}(g^{-1} \cdot \mathbf{v}), \quad G^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

L'application  $\psi_{\mathbf{v}}$  est une application holomorphe sur  $G^{\mathbb{C}}$  qui est constante sur  $G$ . Localement, on a donc une fonction holomorphe qui est constante sur  $\mathbb{R}^N \subset \mathbb{C}^N$ . En appliquant les équations de Cauchy-Riemann, on en déduit que  $\psi_{\mathbf{v}}$  doit être constante et donc  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}[V^{\mathbb{C}}]^{G^{\mathbb{C}}}$ . L'autre inclusion est immédiate. □

Au final :

**Corollaire 3.3.4.** *Les algèbres  $\mathbb{C}[V]^G$  et  $\mathbb{C}[V^{\mathbb{C}}]^{G^{\mathbb{C}}}$  sont isomorphes.*

### 3.3.2. Isomorphisme $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ équivariant

Soit  $S_n(\mathbb{C}^d)$  l'espace des formes  $d$ -aires de degré  $n$  sur  $\mathbb{C}$ . Un tel espace est constitué de polynômes homogènes de degré  $n$  donnés par :

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) := \sum_I a_I \mathbf{x}^I, \quad a_I \in \mathbb{C}$$

où  $I := (i_1, \dots, i_d)$  est un multi-indice tel que  $i_1 + \dots + i_d = n$  et

$$\mathbf{x}^I := x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_d^{i_d}.$$

Notons que  $S_n(\mathbb{C}^d)$  est le complexifié de l'espace  $S_n(\mathbb{R}^d)$  des formes  $d$ -aires de degré  $n$  sur  $\mathbb{R}$ . Dans ce cas, les coefficients  $a_I$  définissant  $\mathbf{p}$  sont simplement réels.

On peut définir sur  $S_n(\mathbb{R}^d)$  l'opérateur *laplacien*

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}.$$

Le sous-espace  $H_n(\mathbb{R}^d)$  de  $S_n(\mathbb{R}^d)$  des polynômes dont le laplacien est nul est alors appelé espace des polynômes harmoniques réels. Il a pour complexifié le sous-espace  $H_n(\mathbb{C}^d)$  de  $S_n(\mathbb{C}^d)$  des polynômes harmoniques complexes.



Les représentations irréductibles réelles de  $SO(3)$  sont données par les espaces de polynômes harmoniques  $H_n := H_n(\mathbb{R}^3)$  (théorème 3.1.1). Le complexifié  $H_n(\mathbb{C}^3)$  reste alors une représentation irréductible [Ste94] de  $SO(3)$  et donc du complexifié  $SO(3, \mathbb{C})$ .

Notons ensuite  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  l'algèbre de Lie du groupe  $SL(2, \mathbb{C})$ . L'action adjointe de  $SL(2, \mathbb{C})$  sur son algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  est donnée par

$$\text{Ad}_g : \mathbf{M} \mapsto g\mathbf{M}g^{-1}, \quad \mathbf{M} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \quad g \in SL(2, \mathbb{C}).$$

Cette action préserve la forme quadratique  $\det M$  sur  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  et on peut vérifier que

$$\det \text{Ad}_g = 1, \quad \forall g \in SL(2, \mathbb{C}).$$

Comme dans le paramétrage

$$(x, y, z) \mapsto \mathbf{M} = \begin{pmatrix} iz & x + iy \\ -x + iy & -iz \end{pmatrix} \quad (3.3.1)$$

de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , on a

$$\det \mathbf{M} = x^2 + y^2 + z^2.$$

on en déduit un morphisme de groupe

$$\pi : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO(3, \mathbb{C}), \quad g \mapsto \text{Ad}_g$$

et on peut montrer que c'est un revêtement à deux feuillets de  $SO(3, \mathbb{C})$ . Comme  $SL(2, \mathbb{C})$  est *simplement connexe*, c'est le revêtement universel de  $SO(3, \mathbb{C})$ .

*Remarque 3.3.5.* Si on se donne une représentation linéaire  $(V, \rho)$  de  $SO(3, \mathbb{C})$ , elle s'étend naturellement en une représentation linéaire de  $SL(2, \mathbb{C})$  en posant

$$g \cdot \mathbf{v} := \pi(g) \cdot \mathbf{v}, \quad g \in SL(2, \mathbb{C}), \quad \mathbf{v} \in V.$$

En appliquant cette remarque au cas de l'espace  $H_n(\mathbb{C}^3)$ , on a donc naturellement une représentation induite de  $SL(2, \mathbb{C})$  sur  $H_n(\mathbb{C}^3)$ .

Le groupe  $SL(2, \mathbb{C})$  agit naturellement sur l'espace des *formes binaires*  $S_k := S_k(\mathbb{C}^2)$  de degré  $k$  sur  $\mathbb{C}$ . En notant  $\mathbf{x} := (x, y) \in \mathbb{C}^2$  et

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \sum_{i=0}^k a_i x^i y^{k-i} \in S_k$$

une telle action est donnée par

$$(\gamma \cdot \mathbf{f})(\mathbf{x}) := \mathbf{f}(\gamma^{-1}\mathbf{x}), \quad \forall \gamma \in SL(2, \mathbb{C}).$$

Cette représentation  $(S_k, \rho_k)$  est *irréductible* [Ste94]. Elle ne descend sur  $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$  que si  $\rho_k(-\text{Id}) = \text{Id}$ . Comme cette représentation induite reste irréductible, on en déduit par le lemme de Schur :

**Lemme 3.3.6.** *Il existe un isomorphisme  $SL(2, \mathbb{C})$ -équivariant entre  $H_n(\mathbb{C}^3)$  et  $S_{2n}$ .*

Nous allons maintenant construire explicitement cet isomorphisme. Cette construction

nous permettra de passer d'un polynôme harmonique sur  $\mathbb{C}^3$  à une forme binaire, de façon équivariante et réciproquement.

### 3.3.2.1. Application de Cartan

Notons  $\omega$  la forme volume (ou symplectique) canonique sur  $\mathbb{C}^2$  ainsi que l'*isomorphisme musical*

$$X \mapsto X^\omega, \quad \mathbb{C}^2 \rightarrow (\mathbb{C}^2)^*,$$

où

$$X^\omega(Y) := \omega(X, Y), \quad \forall Y \in \mathbb{C}^2.$$

Dans la base canonique de  $\mathbb{C}^2$  et sa base duale, on en déduit les représentations

$$X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad X^\omega = \begin{pmatrix} -v & u \end{pmatrix}.$$

L'*application de Cartan* (qui a été introduite lors de ses études sur la théorie des spineurs, voir [Hob55]) est alors donnée par

$$X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto XX^\omega = \begin{pmatrix} -uv & u^2 \\ -v^2 & uv \end{pmatrix}.$$

On remarque immédiatement que  $\text{tr } XX^\omega = 0$  et  $\det XX^\omega = 0$ . Autrement dit, nous avons une application

$$\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}),$$

dont l'image est exactement le cône isotrope

$$C := \{\mathbf{M} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}); \det \mathbf{M} = 0\}.$$

En notant  $(x, y, z)$  les coordonnées de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  définies par (3.3.1), ce cône a exactement pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

et l'application de Cartan est donnée, implicitement, par les équations

$$iz = -uv, \quad x + iy = u^2, \quad -x + iy = -v^2.$$

**Lemme 3.3.7.** *L'application de Cartan*

$$\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}),$$

est  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ -équivariante. Autrement dit,

$$\phi(g \cdot X) = \text{Ad}_g \phi(X), \quad X \in \mathbb{C}^2, \quad g \in \text{SL}(2, \mathbb{C}).$$

*Démonstration.* On a

$$\phi(g \cdot X) = (gX)(gX)^\omega$$

mais

$$(gX)^\omega = X^\omega g^{-1},$$

d'où

$$\phi(g \cdot X) = (gX)(X^\omega g^{-1}) = \text{Ad}_g X X^\omega = \text{Ad}_g \phi(X).$$

□

### 3.3.2.2. Isomorphisme explicite entre $H_n(\mathbb{C}^3)$ et $S_{2n}$

L'application de Cartan permet d'envoyer  $\mathbb{C}^2$  sur le cône isotrope de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^3$ , de façon équivariante. On peut alors se servir de cette application de Cartan pour construire un isomorphisme  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  équivariant entre  $H_n(\mathbb{C}^3)$  et  $S_{2n}(\mathbb{C}^2)$ . Rappelons que, d'après le lemme de Schur, un tel isomorphisme est unique à une constante multiplicative près.

L'application  $\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^3$  induit naturellement une application linéaire

$$\phi^* : S_n(\mathbb{C}^3) \rightarrow S_{2n}(\mathbb{C}^2)$$

définie, pour tout  $\mathbf{p} \in S_n(\mathbb{C}^3)$ , par

$$(\phi^* \mathbf{p})(u, v) := \mathbf{p}(\phi(u, v)).$$

C'est par la restriction de  $\phi^*$  à  $H_n(\mathbb{C}^3)$  que nous pouvons maintenant exhiber l'isomorphisme attendu :

**Théorème 3.3.8.** *L'application*

$$\phi^* : H_n(\mathbb{C}^3) \rightarrow S_{2n}(\mathbb{C}^2)$$

*est un isomorphisme  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ -équivariant.*

Avant d'entamer la preuve du théorème, considérons sur  $\mathbb{C}[x, y, z]$  le produit hermitien suivant

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle := \sum_{\alpha} \alpha! p_1^\alpha \overline{p_2^\alpha}$$

où  $\alpha := (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ ,  $\alpha! := \alpha_x! \alpha_y! \alpha_z!$ ,  $\overline{p_2^\alpha}$  désigne le conjugué et

$$\mathbf{p}_j = \sum_{\alpha} p_j^\alpha x^{\alpha_x} y^{\alpha_y} z^{\alpha_z}, \quad j = 1, 2.$$

On peut vérifier [MT86] que, relativement à ce produit hermitien, l'adjoint du laplacien  $\Delta$  n'est autre que la multiplication par la forme quadratique

$$\mathbf{q} := x^2 + y^2 + z^2.$$

Autrement dit, on a

$$\langle \mathbf{p}_1, \Delta \mathbf{p}_2 \rangle = \langle \mathbf{q} \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle, \quad \forall \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{C}[x, y, z].$$

*Preuve du théorème 3.3.8.* Dans un premier temps, on remarque que l'équivariance de  $\phi^*$  résulte immédiatement de l'équivariance de  $\phi$ . Ensuite, il suffit de montrer que  $\phi^*$  est

injective, étant donné que les deux espaces  $H_n(\mathbb{C}^3)$  et  $S_{2n}(\mathbb{C}^2)$  ont même dimension. On fixe donc un polynôme  $\mathbf{p} \in S_n(\mathbb{C}^3)$  vérifiant les équations

$$\Delta \mathbf{p} = 0, \quad \text{et} \quad \phi^* \mathbf{p} = 0,$$

et on doit montrer que  $\mathbf{p} = 0$ . Déjà, la condition  $\phi^* \mathbf{p} = 0$  signifie que  $\mathbf{p}$  s'annule sur le cône  $C$  définie par l'équation  $\mathbf{q} = 0$ . Comme  $\mathbf{q}$  est un polynôme irréductible, l'idéal  $\langle \mathbf{q} \rangle$  est premier donc radical. Autrement dit, la condition  $\phi^* \mathbf{p} = 0$  entraîne  $\mathbf{p} = \mathbf{q}\mathbf{R}$  où  $\mathbf{R} \in S_{n-2}(\mathbb{C}^3)$ .

On a donc

$$\|\mathbf{p}\|^2 = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{q}\mathbf{R}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{R}, \Delta \mathbf{p} \rangle = 0,$$

ce qui implique que  $\mathbf{p} = 0$  et termine la preuve.  $\square$

### 3.3.3. Calculs explicites

Nous expliquons ici comment passer d'un polynôme harmonique de degré  $n$  à une forme binaire de degré  $2n$  et inversement.

#### D'un polynôme harmonique à une forme binaire

Ce calcul est simple, il s'agit seulement d'une substitution. Étant donné un polynôme harmonique  $\mathbf{p} \in H_n(\mathbb{C}^3)$ , la forme binaire associée  $\mathbf{f} \in S_{2n}(\mathbb{C}^2)$  est donnée par

$$\mathbf{f}(u, v) := \mathbf{p} \left( \frac{u^2 + v^2}{2}, \frac{u^2 - v^2}{2i}, iuv \right).$$

#### D'une forme binaire à un polynôme harmonique

Le calcul inverse est un peu plus compliqué. Il s'agit de résoudre dans  $S_n(\mathbb{C}^3)$  les équations

$$\Delta \mathbf{p} = 0, \quad \text{et} \quad \phi^* \mathbf{p} = \mathbf{f},$$

où  $\mathbf{f} \in S_{2n}(\mathbb{C}^2)$  est donnée.

On va utiliser la *décomposition harmonique* (unique) d'un polynôme homogène  $\mathbf{p}$  de degré  $n$  (remarque 3.1.9).

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{q}\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{q}^r \mathbf{p}_r,$$

où chaque  $\mathbf{p}_k$  est un polynôme harmonique et  $r = [n/2]$ .

Connaissant  $\mathbf{f}$ , on peut construire un polynôme homogène  $\mathbf{p}$  de degré  $n$  tel que  $\phi^* \mathbf{p} = \mathbf{f}$ . Il suffit, par exemple, d'opérer la substitution

$$u^p v^q \rightarrow \begin{cases} (-iz)^q (x + iy)^{(n-q)}, & \text{si } p \geq q \\ (-iz)^p (x - iy)^{(n-p)}, & \text{si } q > p \end{cases}$$

pour chaque monôme  $u^p v^q$  de  $\mathbf{f}$ . Un autre processus de substitution conduirait à un polynôme  $\mathbf{p}'$  différent mais qui coïncide avec  $\mathbf{p}$  sur le cône isotrope. La projection orthogonale  $\mathbf{p}_0$  de  $\mathbf{p}$  sur  $H_n(\mathbb{C}^3)$  est la solution du problème. En effet, sur le cône isotrope, on

a  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$  et donc

$$\phi^* \mathbf{p}_0 = \phi^* \mathbf{p} = \mathbf{f}.$$

Le calcul explicite de  $\mathbf{p}_0$  s'effectue récursivement en calculant d'abord  $\mathbf{p}_r$ , puis  $\mathbf{p}_{r-1}$ , ...  $\mathbf{p}_0$ , à l'aide du lemme suivant.

**Lemme 3.3.9.** *Soit  $\mathbf{p} \in \mathbb{H}_n(\mathbb{C}^3)$  et  $k \geq 1$ . Alors*

$$\Delta^k(\mathbf{q}^k \mathbf{p}) = \lambda_k(n) \mathbf{p}$$

où

$$\lambda_k(n) = \frac{(2(n+k)+1)! k! n!}{(2n+1)! (n+k)!}.$$

## 4. Isotropie des espaces de tenseurs

Nous proposons dans cette partie de détailler les outils permettant d'établir les classes d'isotropies de tout type de représentation tensorielle des groupes  $O(3)$  et  $SO(3)$ , ce qui nous permet de clore définitivement cette question. Notons que les résultats que nous présentons ici ont fait l'objet de deux publications [OA13 ; OA14]. Les [section 4.2](#) et [4.4](#) donnent les énoncés des résultats présentés dans ces publications. Les démonstrations se situent dans les [section 4.A](#) et [4.B](#).

### 4.1. Préambule

Jusqu'à présent, les classes d'isotropie d'un espace de tenseurs étaient établies à partir de la méthode introduite par Forte et Vianello [FV96]. Dans cette méthode, la première étape consiste à effectuer la décomposition harmonique de l'espace étudié<sup>a</sup>. Une fois cette décomposition effectuée, il faut ensuite déterminer la *décomposition de Cartan* des espaces irréductibles<sup>b</sup>. À partir de ces décompositions, on doit finalement étudier quel sous-groupe fermé peut effectivement être un sous-groupe d'isotropie, en testant pour cela l'ensemble des sous-groupes. Cette approche consiste donc à reprendre chacune de ces étapes et ceci pour chaque nouvel espace de tenseurs étudié. À notre connaissance, une telle approche a permis d'établir les classes d'isotropie des espaces donnés dans le [tableau 4.1](#). Enfin, il ne semble pas que cette méthode ait donné lieu à un algorithme de calcul général sur les espaces de tenseurs.

Propriété	Tenseurs	# classes	Ref
Elasticité	$\mathbb{T}_{(ij)(kl)}$	8	[FV96]
Photoelasticité	$\mathbb{T}_{(ij)(kl)}$	12	[FV97]
Piezoélectricité	$\mathbb{T}_{(ij)k}$	15	[GW02]
Flexoélectricité	$\mathbb{T}_{(ij)kl}$	12	[LH11]
Elasticité d'ordre 2	$\mathbb{T}_{(ij)k(lm)n}$	17	[Auf08b]

Table 4.1. – Nombre de classes de symétrie pour différentes lois de comportement

Pour notre part, nous avons préféré construire un algorithme général en nous appuyant sur les classes d'isotropie des espaces irréductibles, établies par Ihrig-Golubitsky [IG84]. L'idée a été de trouver un moyen de déterminer les classes d'isotropie

a. Dans la pratique, cette décomposition était effectuée en exhibant explicitement un isomorphisme équivariant, même si un tel isomorphisme n'était pas nécessaire par la suite.

b. Ce qui revient à effectuer une deuxième décomposition irréductible mais cette fois-ci sous le groupe  $O(2)$ .

d'un espace  $V_1 \oplus V_2$  une fois connues les classes associées à chaque espace  $V_i$ . La difficulté est que l'intersection de deux *classes* de sous-groupe n'a pas de sens. Nous avons donc défini un *opérateur de clips* sur les classes de sous-groupes, généralisant cette notion d'intersection. A l'aide de cet opérateur, il est alors possible de déterminer les classes d'isotropie d'une somme directe  $V_1 \oplus V_2$  à partir de celles de chaque espace  $V_1$  et  $V_2$ .

Dans le cas des sous-groupes fermés de  $O(3)$  (ou  $SO(3)$ ), nous avons ensuite déterminé explicitement toutes ces opérations de clips, dont les résultats figurent dans les tables 4.2 et 4.3.

A partir de là, il est alors très facile de trouver les classes d'isotropie d'un espace de tenseurs une fois connu la structure isotypique de sa décomposition harmonique. Nous illustrons d'ailleurs dans les sous-section 4.3.1 et 4.3.2 la simplicité de notre approche, sur le cas des espaces  $\mathbb{P}ie_2$  et  $\mathbb{E}la_2$ , déjà obtenus par la méthode Forte–Vianello [FV96 ; GW02].

Mais nous avons aussi pu établir des théorèmes généraux (théorèmes 4.4.3 et 4.4.7) sur les classes d'isotropie des espaces de tenseurs associées à des *lois de comportement*. De tels théorèmes permettent ainsi d'éviter la décomposition harmonique. Nous avons ainsi pu obtenir pour la première fois les classes d'isotropie d'espaces de tenseurs intervenant dans la théorie du premier gradient (sous-section 1.1.3), ainsi que dans la théorie du second gradient de la déformation [OA13 ; OA14].

## 4.2. Opérations de clips et isotropies d'espaces de tenseurs

Pour toute représentation linéaire de dimension finie  $(V, \rho)$  d'un groupe de Lie compact, nous savons (théorème 2.2.5) qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isotropie. Notons

$$\mathfrak{I}(V) := \{[H_0]; \dots; [H_r]\}$$

l'ensemble des classes d'isotropie associées à la représentation linéaire  $(V, \rho)$ .

**Lemme 4.2.1.** *Etant donné une représentation linéaire  $(V, \rho)$  d'un groupe de Lie compact  $G$  qui se décompose en deux sous-espaces stables*

$$V = V_1 \oplus V_2 \text{ avec } g \cdot V_1 \subset V_1 \text{ et } g \cdot V_2 \subset V_2, \quad \forall g \in G,$$

alors  $[H] \in \mathfrak{I}(V)$  si et seulement si il existe  $[H_1] \in \mathfrak{I}(V_1)$  et  $[H_2] \in \mathfrak{I}(V_2)$  tels que  $H = H_1 \cap H_2$ .

*Démonstration.* Si nous fixons  $[H_1] \in \mathfrak{I}(V_1)$  et  $[H_2] \in \mathfrak{I}(V_2)$ , alors on sait qu'il existe deux vecteurs  $\mathbf{v}_1 \in V_1$  et  $\mathbf{v}_2 \in V_2$  tels que  $H_i = H_{\mathbf{v}_i}$  ( $i = 1, 2$ ). En posant  $\mathbf{v} := \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ , on a pour tout  $g \in H_1 \cap H_2$

$$g \cdot \mathbf{v}_1 + g \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v} \text{ et donc } H_1 \cap H_2 \subset H_{\mathbf{v}}.$$

Inversement, pour tout  $g \in H_{\mathbf{v}}$

$$g \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} = g \cdot \mathbf{v}_1 + g \cdot \mathbf{v}_2.$$

Or, chaque espace  $V_i$  étant  $G$ -stable et en somme directe, nous avons nécessairement  $g \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$  ( $i = 1, 2$ ). Au total on a bien  $H_1 \cap H_2 = H_{\mathbf{v}}$ .

La réciproque s'obtient de la même façon : en considérant  $[H] \in \mathfrak{I}(V)$  on peut écrire  $H = H_{\mathbf{v}}$  pour un certain vecteur  $\mathbf{v} \in V$ . Alors  $\mathbf{v}$  se décompose en  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ . On montre, comme précédemment, que  $H = H_{\mathbf{v}_1} \cap H_{\mathbf{v}_2}$ .  $\square$

Le lemme 4.2.1 montre comment les classes d'isotropie d'une somme directe sont liées aux classes d'isotropies de chaque composante de la somme. Bien sûr, on ne peut pas définir l'intersection de deux classes d'isotropie mais nous pouvons néanmoins envisager de construire l'ensemble des intersections engendrées par tous les sous-groupes de deux classes. C'est cette remarque qui nous a amené à construire l'opérateur de clips.

Avant cela :

**Lemme 4.2.2.** *Etant donné deux classes d'isotropie  $[H_i]$  ( $i = 1, 2$ ) associée au groupe  $G$ , pour tout élément  $g_1$  et  $g_2$  de  $G$ , il existe  $g \in G$  tel que*

$$[g_1 H_1 g_1^{-1} \cap g_2 H_2 g_2^{-1}] = [H_1 \cap g H_2 g^{-1}].$$

*Démonstration.* Posons  $g = g_1^{-1} g_2$  ; il suffit alors d'observer que

$$g_1 H_1 g_1^{-1} \cap g_2 H_2 g_2^{-1} = g_1 (H_1 \cap g H_2 g^{-1}) g_1^{-1}$$

ce qui donne directement le résultat du lemme.  $\square$

**Définition 4.2.3** (Opérateur de clips). Pour toute classe d'isotropie  $[H_1]$  et  $[H_2]$  associées à un groupe  $G$ , l'opérateur de clips de  $[H_1]$  et  $[H_2]$ , noté  $[H_1] \odot [H_2]$ , est défini par

$$[H_1] \odot [H_2] := \{[H_1 \cap g H_2 g^{-1}], \quad \forall g \in G\}.$$

En notant  $\mathbb{1}$  le sous-groupe de  $G$  réduit à l'identité, on a immédiatement :

**Lemme 4.2.4.** *Pour toute classe d'isotropie  $[H]$ ,*

$$[\mathbb{1}] \odot [H] = \{[\mathbb{1}]\} \quad \text{et} \quad [G] \odot [H] = \{[H]\}.$$

Si nous notons  $V_1$  et  $V_2$  deux représentations linéaires du groupe  $G$ , on peut étendre l'opération de clips aux ensembles  $\mathfrak{I}(V_i)$  ( $i = 1, 2$ ), en notant

$$\mathfrak{I}(V_1) \odot \mathfrak{I}(V_2) := \bigcup_{[H_1] \in \mathfrak{I}(V_1), [H_2] \in \mathfrak{I}(V_2)} [H_1] \odot [H_2].$$

*Remarque 4.2.5.* L'opération de Clips définie sur les ensemble de classes est clairement une opération commutative et associative. De plus, dans le cas d'un groupe compact, l'opération de clips donne toujours un nombre fini de classes.

Ainsi, du lemme 4.2.1, nous en déduisons directement le corollaire suivant :

**Corollaire 4.2.6.** *Etant donné deux représentations linéaires  $V_1$  et  $V_2$  du groupe  $G$ , on a*

$$\mathfrak{I}(V_1 \oplus V_2) = \mathfrak{I}(V_1) \odot \mathfrak{I}(V_2).$$

Dans le cas des représentations linéaires des groupes  $O(3)$  et  $SO(3)$ , il nous a fallu établir explicitement toutes les opérations de clips des sous-groupes fermés pour rendre effectif le corollaire 4.2.6.



**Théorème 4.2.7.** *Etant donné deux sous-groupes fermés  $H_1$  et  $H_2$  strictement inclus  $\text{SO}(3)$ , on a toujours  $\mathbf{1} \in [H_1] \odot [H_2]$ . Les autres classes de l'opération de clips  $[H_1] \odot [H_2]$  sont données par la table 4.2*

*Esquisse de démonstration.* L'ensemble des démonstrations figurent en section 4.A de ce chapitre. Nous proposons de donner ici les idées essentielles.

Le principe est en fait d'argumenter selon les axes caractéristiques des sous-groupes fermés de  $\text{SO}(3)$  (sous-section 3.2.1). On sait en effet que l'opération de clips  $[H_1] \odot [H_2]$  est obtenue en considérant toutes les intersections

$$H_1 \cap (gH_2g^{-1}), \quad g \in \text{SO}(3).$$

Le cas le plus simple est bien sûr le cas des sous-groupes cycliques. Si on veut étudier les intersections (voir sous-section 3.2.1 pour les notations)

$$Z_m^0 \cap (gZ_n^0g^{-1})$$

on remarque directement que seul le cas où les deux axes  $\mathbf{e}_3$  et  $g\mathbf{e}_3$  coïncident doit être étudié. Dans ce cas, on est en effet amené à étudier l'intersection

$$Z_m^0 \cap Z_n^0$$

ce qui se fait directement et dans le cas contraire, une telle intersection est nécessairement réduite à l'identité.

A partir de toutes les caractéristiques géométriques des sous-groupes fermés de  $\text{SO}(3)$  données à la sous-section 3.2.1, les démonstrations figurant dans la section 4.A permettent alors de conclure.  $\square$

$\odot$	$[Z_n]$	$[D_n]$	$[\mathcal{T}]$	$[\mathcal{O}]$	$[\mathcal{I}]$	$[\text{SO}(2)]$	$[\text{O}(2)]$
$[Z_m]$	$[Z_d]$						
$[D_m]$	$[Z_{d_2}]$ $[Z_d]$	$[Z_{d_2}]$ $[Z_{d'_2}], [Z_{dz}]$ $[Z_d], [D_d]$					
$[\mathcal{T}]$	$[Z_{d_2}]$ $[Z_{d_3}]$	$[Z_2]$ $[Z_{d_3}], [D_{d_2}]$	$[Z_2]$ $[Z_3]$ $[\mathcal{T}]$				
$[\mathcal{O}]$	$[Z_{d_2}]$ $[Z_{d_3}]$ $[Z_{d_4}]$	$[Z_2]$ $[Z_{d_3}], [Z_{d_4}]$ $[D_{d_2}], [D_{d_3}]$ $[D_{d_4}]$	$[Z_2]$ $[Z_3]$ $[\mathcal{T}]$	$[Z_2]$ $[D_2], [Z_3]$ $[D_3], [Z_4]$ $[D_4], [\mathcal{O}]$			
$[\mathcal{I}]$	$[Z_{d_2}]$ $[Z_{d_3}]$ $[Z_{d_5}]$	$[Z_2]$ $[Z_{d_3}], [Z_{d_5}]$ $[D_{d_2}]$ $[D_{d_3}], [D_{d_5}]$	$[Z_2]$ $[Z_3]$ $[\mathcal{T}]$	$[Z_2]$ $[Z_3], [D_3]$ $[\mathcal{T}]$	$[Z_2]$ $[Z_3], [D_3]$ $[Z_5], [D_5]$ $[\mathcal{I}]$		
$[\text{SO}(2)]$	$[Z_n]$	$[Z_2]$ $[Z_n]$	$[Z_2]$ $[Z_3]$	$[Z_2]$ $[Z_3], [Z_4]$	$[Z_2]$ $[Z_3], [Z_5]$	$[\text{SO}(2)]$	
$[\text{O}(2)]$	$[Z_{d_2}]$ $[Z_n]$	$[Z_2]$ $[D_n]$	$[D_2]$ $[Z_3]$	$[D_2]$ $[D_3], [D_4]$	$[D_2]$ $[D_3], [D_5]$	$[Z_2]$ $[\text{SO}(2)]$	$[Z_2]$ $[\text{O}(2)]$

#### Notations

$$\begin{aligned}
Z_1 &:= D_1 := \mathbb{1} & d_2 &:= \gcd(n, 2) & d_3 &:= \gcd(n, 3) & d_5 &:= \gcd(n, 5) \\
d'_2 &:= \gcd(m, 2) & dz &:= \begin{cases} 2 & \text{si } d = 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\
d_4 &:= \begin{cases} 4 & \text{si } 4 \mid n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Table 4.2. – Opérations de clips sur les sous-groupe fermés de  $\text{SO}(3)$

Pour les sous-groupes fermés de  $\text{O}(3)$ , les démonstrations sont très proches (voir [section 4.B](#)). Le résultat est alors :

**Théorème 4.2.8.** *Etant donné deux sous-groupes fermés  $H_1$  et  $H_2$  de  $\text{O}(3)$ . Lorsque  $[H_1]$  ou  $[H_2]$  est distinct de  $[\text{O}(2)^-]$ , on a toujours  $\mathbb{1} \in [H_1] \odot [H_2]$ . De plus, pour tout*

sous-groupe fermé  $H$  de  $\text{SO}(3)$  :

$$\begin{aligned} [\mathbb{Z}_2^-] \odot [H] &= [\mathbf{1}] & [\mathbb{Z}_{2n}^-] \odot [H] &= [\mathbb{Z}_n] \odot [H] \\ [\mathbb{D}_n^v] \odot [H] &= [\mathbb{Z}_n] \odot [H] & [\mathbb{D}_{2n}^h] \odot [H] &= [\mathbb{D}_n] \odot [H] \\ [\mathcal{O}^-] \odot [H] &= [\mathcal{T}] \odot [H] & [\text{O}(2)^-] \odot [H] &= [\text{SO}(2)] \odot [H] \end{aligned}$$

Finalement, les opérations de clips  $[H_1] \odot [H_2]$  des sous-groupes fermés de type III sont données par la table 4.3.

$\odot$	$[\mathbb{Z}_2^-]$	$[\mathbb{Z}_{2m}^-]$	$[\mathbb{D}_m^v]$	$[\mathbb{D}_{2m}^h]$	$[\mathcal{O}^-]$	$[\text{O}(2)^-]$
$[\mathbb{Z}_2^-]$	$[\mathbb{Z}_2^-]$					
$[\mathbb{Z}_{2n}^-]$	$[\mathbb{Z}_{i(n)}^-]$	Figure 4.1				
$[\mathbb{D}_n^v]$	$[\mathbb{Z}_2^-]$	Figure 4.1	$[\mathbb{Z}_2^-], [\mathbb{D}_d^v]$ $[\mathbb{Z}_d]$			
$[\mathbb{D}_{2n}^h]$	$[\mathbb{Z}_2^-]$	Figure 4.2	Figure 4.2	Figure 4.3		
$[\mathcal{O}^-]$	$[\mathbb{Z}_2^-]$	Figure 4.4	$[\mathbb{Z}_2^-]$ $[\mathbb{Z}_{d_3(m)}]$ $[\mathbb{D}_{d_3(m)}^v]$ $[\mathbb{Z}_{d_2(m)}]$ $[\mathbb{Z}_{d_2(m)}^v]$	Figure 4.5	$[\mathbb{Z}_2^-], [\mathbb{Z}_4^-]$ $[\mathbb{Z}_3]$	
$[\text{O}(2)^-]$	$[\mathbb{Z}_2^-]$	$[\mathbb{Z}_{i(m)}^-]$ $[\mathbb{Z}_m]$	$[\mathbb{Z}_2^-], [\mathbb{D}_m^v]$	$[\mathbb{Z}_{i(m)}], [\mathbb{Z}_2^-]$ $[\mathbb{D}_{i(m)}^v], [\mathbb{D}_m^v]$	$[\mathbb{Z}_2^-], [\mathbb{D}_3^v]$ $[\mathbb{D}_2^v]$	$[\mathbb{Z}_2^-], [\text{O}(2)^-]$

Notations pour la table 4.3 :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_1^- &:= \mathbb{D}_1^v := \mathbf{1} & d &= \text{gcd}(n, m) & d_2(n) &= \text{gcd}(n, 2) \\ i(n) &:= 3 - \text{gcd}(2, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} & d_3(n) &= \text{gcd}(n, 3) \end{aligned}$$

Table 4.3. – Opérations de clips sur les sous-groupes de  $\text{O}(3)$  de type III

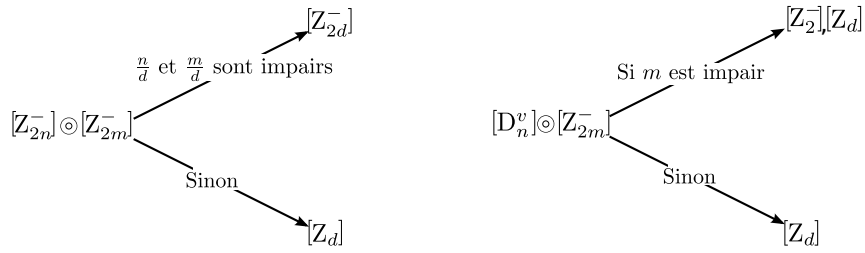


Figure 4.1.

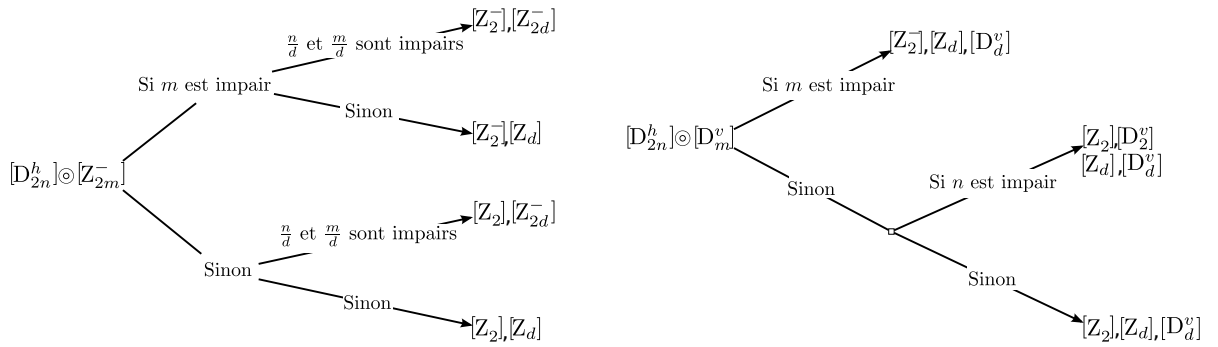


Figure 4.2.

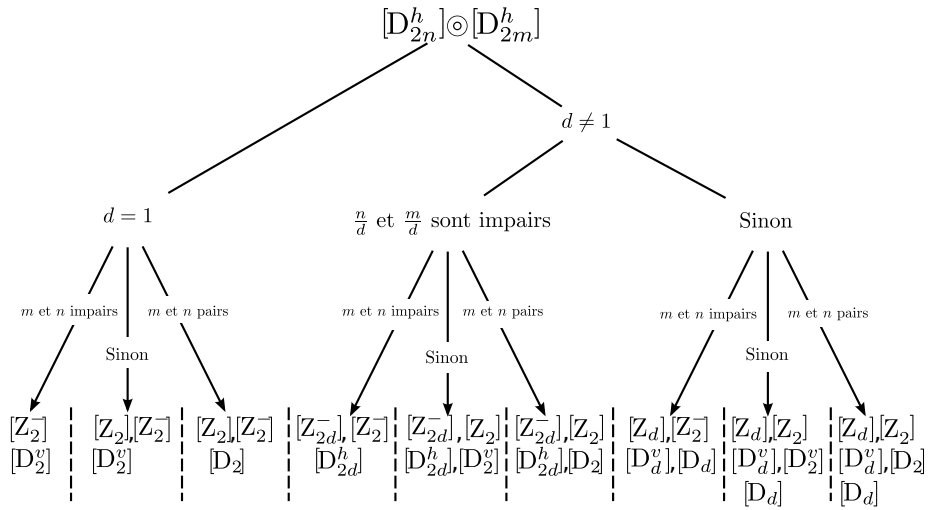


Figure 4.3.

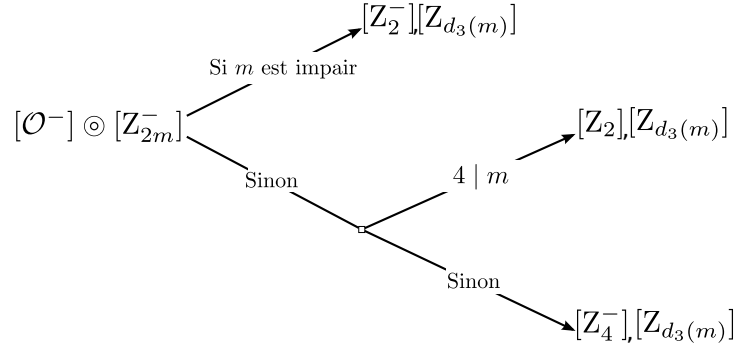


Figure 4.4.

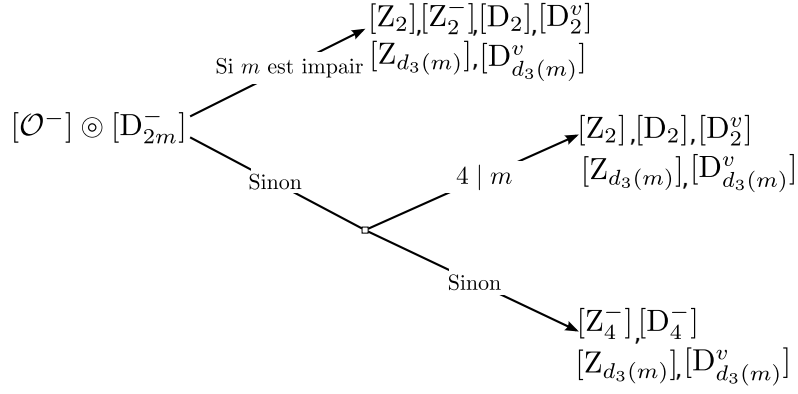


Figure 4.5.

### 4.3. Application à la mécanique des milieux continus

#### 4.3.1. Géométrie de l'espace des tenseurs piézoélectriques

Nous proposons ici d'illustrer l'utilisation des opérations de clips dans le cas de l'espace Piez. Rappelons ici que la décomposition harmonique de l'espace Piez est donnée par

$$\text{Piez} \simeq \mathbb{H}^3 \oplus \mathbb{H}^1 \oplus \mathbb{H}^{2*} \oplus \mathbb{H}^1 = \mathbb{H}^3 \oplus \mathbb{H}^{2*} \oplus (\mathbb{H}^1)^{\oplus 2}.d$$

Ensuite, par le théorème 3.2.3 nous savons que

$$\mathfrak{J}(\mathbb{H}^1) = \{[O(2)^-], [O(3)]\}$$

$$\mathfrak{J}(\mathbb{H}^{2*}) = \{[D_2], [D_4^h], [O(2)], [O(3)]\}$$

$$\mathfrak{J}(\mathbb{H}^3) = \{[1], [Z_2^-], [D_2^v], [D_3^v], [D_6^h], [O^-], [O(2)^-], [O(3)]\}$$

Par la table 4.3, on a directement

$$\mathfrak{J}((\mathbb{H}^1)^{\oplus 2}) = \{[Z_2^-], [O(2)^-], [O(3)]\}$$

Puis  $\mathfrak{I}(\mathbb{H}^{2*} \oplus (\mathbb{H}^1)^{\oplus 2})$  s'obtient à l'aide des clips suivants :

$\odot$	$[Z_2^-]$	$[O(2)^-]$	$[O(3)]$
$[D_2]$	$[1]$	$[1], [Z_2]$	$[D_2]$
$[D_4^h]$	$[1], [Z_2^-]$	$[1], [Z_2^-], [D_2^g]$	$[D_4^h]$
$[O(2)]$	$[1]$	$[1], [Z_2], [SO(2)]$	$[O(2)]$
$[O(3)]$	$[Z_2^-]$	$[O(2)^-]$	$[O(3)]$

Ce qui donne

$$\mathfrak{I}(\mathbb{H}^{2*} \oplus \mathbb{H}^1 \oplus \mathbb{H}^1) = \{[1], [Z_2], [D_2], [Z_2^-], [D_2^g], [D_4^h], [SO(2)], [O(2)], [O(2)^-], [O(3)]\}.$$

Pour établir le résultat final, on doit considérer  $\mathfrak{I}(\mathbb{H}^3) \odot \mathfrak{I}(\mathbb{H}^{2*} \oplus \mathbb{H}^1 \oplus \mathbb{H}^1)$ , ce qui donne

**Lemme 4.3.1.** *Les classes d'isotropie de l'espace  $(\text{Piez}, O(3))$  sont données par*

$$\mathfrak{I}(\text{Piez}) = \{[1], [Z_2], [Z_3], [D_2^g], [D_3^g], [Z_2^-], [D_2], [D_3], [Z_4^-], [D_4^h], [D_6^h], [SO(2)], [O(2)], [O(2)^-], [O^-], [O(3)]\}$$

*Remarque 4.3.2.* Dans [GW02], la classe  $[O(3)]$  n'est pas comptabilisée comme classe de symétrie. Il ne figure donc dans cet article que 15 classes de symétrie et non 16 comme établi ci-dessus.

Nous donnons dans la figure 4.6 l'ensemble partiellement ordonné de ces classes d'isotropie. Une flèche allant de la classe  $[H_1]$  à la classe  $[H_2]$  signifie que  $[H_1] \preceq [H_2]$  (définition (2.2.1)).

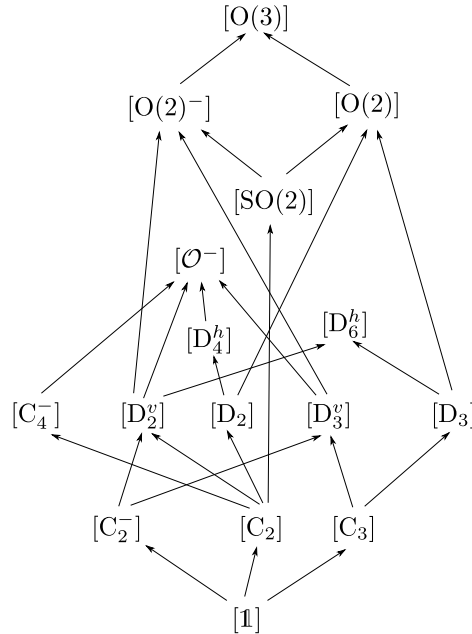


Figure 4.6. – Ensemble partiellement ordonné des classes d'isotropie de l'espace  $(\text{Piez}, O(3))$

La géométrie de l'espace  $\mathbb{P}ie2/O(3)$  est détaillée<sup>c</sup> dans la table 4.4.

$H$	$N_O(H)$	$\Gamma^H$	card $\Gamma^H$	dim $V^H$	dim $\Sigma_{[H]}/G$	dim $\Sigma_{[H]}$
$\mathbb{1}$	$O(3)$	$O(3)$	$\infty$	18	15	18
$Z_2^-$	$O(2) \oplus Z_2$	$O(2) \oplus Z_2$	$\infty$	10	9	12
$Z_2$	$O(2) \oplus Z_2$	$O(2) \oplus Z_2$	$\infty$	8	7	10
$Z_3$	$O(2) \oplus Z_2$	$O(2) \oplus Z_2$	$\infty$	6	5	8
$D_2^v$	$D_4 \oplus Z_2$	$Z_2 \oplus Z_2$	4	5	5	8
$D_3^v$	$D_6 \oplus Z_2$	$Z_2 \oplus Z_2$	4	4	4	7
$Z_4^-$	$O(2) \oplus Z_2$	$O(2) \oplus Z_2$	$\infty$	4	3	6
$D_2$	$\mathcal{O} \oplus Z_2$	$\mathfrak{S}_3 \oplus Z_2$	6	3	3	6
$SO(2)$	$O(2) \oplus Z_2$	$Z_2 \oplus Z_2$	4	4	3	6
$O(2)^-$	$O(2) \oplus Z_2$	$Z_2$	2	3	2	5
$D_3$	$D_6 \oplus Z_2$	$Z_2 \oplus Z_2$	4	2	2	5
$D_4^h$	$D_4 \oplus Z_2$	$Z_2 \oplus Z_2$	4	2	2	5
$D_6^h$	$D_6 \oplus Z_2$	$Z_2 \oplus Z_2$	2	1	1	4
$\mathcal{O}^-$	$\mathcal{O} \oplus Z_2$	$Z_2$	2	1	1	4
$O(2)$	$O(2) \oplus Z_2$	$Z_2 \oplus Z_2$	4	1	0	3
$O(3)$	$O(3)$	$\mathbb{1}$	1	0	0	0

Table 4.4. – Géométrie de l'espace  $(\mathbb{P}ie2, O(3))$

### 4.3.2. Géométrie de l'espace des tenseurs d'élasticité

Nous partons de la décomposition harmonique (lemme 3.1.17)

$$\mathbb{E}la \simeq \mathbb{H}^4 \oplus (\mathbb{H}^2)^{\oplus 2} \oplus (\mathbb{H}^0)^{\oplus 2}.$$

A partir de cette décomposition, les opérateurs de clips permettent d'obtenir directement les classes d'isotropie de l'espace  $\mathbb{E}la$ , ce qui donne

**Corollaire 4.3.3.** *Les classes d'isotropie de l'espace  $(\mathbb{E}la, SO(3))$  sont données par*

$$\mathfrak{I}(\mathbb{E}la) = \{[\mathbb{1}], [Z_2], [D_2], [D_3], [D_4], [\mathcal{O}], [O(2)], [SO(3)]\}.$$

La géométrie de l'espace  $\mathbb{E}la/SO(3)$  est détaillée dans la table 4.5.

c. Le calcul des normalisateurs et des dimensions ont été effectués à l'aide du lemme 2.2.12 et des formules figurant en section A.

$H$	$N(H)$	$\Gamma^H$	card $\Gamma^H$	dim $V^H$	dim $\Sigma_{[H]}/G$	dim $\Sigma_{[H]}$
$\mathbf{1}$	SO(3)	SO(3)	$\infty$	21	18	21
$Z_2$	O(2)	O(2)	$\infty$	13	12	15
$D_2$	$\mathcal{O}$	$\mathfrak{S}_3$	6	9	9	12
$D_3$	$D_6$	$\mathfrak{S}_2$	2	6	6	9
$D_4$	$D_8$	$\mathfrak{S}_2$	2	6	6	9
O(2)	O(2)	$\mathbf{1}$	1	5	5	7
$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$	$\mathbf{1}$	1	3	3	6
SO(3)	SO(3)	$\mathbf{1}$	1	2	2	2

Table 4.5. – Géométrie de l'espace  $(\mathbb{E}1a, \text{SO}(3))$ .

*Remarque 4.3.4.* Cette table 4.5 est à rapprocher d'une table établie par Norris [Nor89] en mécanique des milieux continus. Le principe est de savoir, pour une classe d'isotropie donnée, s'il existe une base *canonique* dans laquelle le nombre de coordonnées non nulles d'un tenseur est minimal.

Pour les classes  $[\mathbf{1}]$ ,  $[Z_2]$ , on sait depuis longtemps qu'il n'existe pas de telle base. Dans ce cas, en effet, le choix de la base est arbitraire car le groupe de monodromie  $\Gamma(H)$  est continu :

- pour la classe d'isotropie triviale  $[\mathbf{1}]$ ,  $V^H \simeq V$  et il n'y a pas de moyen canonique d'obtenir une forme normale. Le groupe de monodromie  $\Gamma(H) \simeq \text{SO}(3)$  et il y a donc trois degrés de liberté pour choisir une « bonne base ».
- pour l'autre cas,  $\dim V^H$  est strictement plus petit que  $\dim V$  et le nombre de coordonnées non nulles d'un tenseur de  $V^H$  peut être réduit. Le groupe de monodromie  $\Gamma(H) \simeq \text{O}(2)$  et il y a donc un degré de liberté pour réduire le nombre de coordonnées non nulles.

Dans chacun des cas étudié, on remarque ainsi qu'il est possible de choisir une base dans laquelle ces paramètres angulaires sont nuls. Une telle base n'est pas nécessairement unique et permet d'obtenir le *nombre minimum de constantes élastiques*, comme précisé par Norris [Nor89]. Notons que ce nombre minimum est la dimension de l'orbite.

## 4.4. Théorèmes généraux sur les lois de comportement tensorielles

Nous venons d'illustrer, sur le cas des espaces  $\mathbb{P}ie$  et  $\mathbb{E}1a$ , comment exploiter les opérateurs de clips pour établir directement leurs classes d'isotropie. Nous pouvons cependant aller plus loin en ce qui concerne les espaces de tenseurs associés à des lois de comportement.

Comme précisé à la sous-section 1.1.4, une loi de comportement tensorielle est en fait établie à partir d'un processus général. Le principe est de partir de deux espaces de tenseurs  $\mathbb{E}_1$  et  $\mathbb{E}_2$ , puis de construire une loi de comportement à partir de l'espace  $\mathbb{E} := \mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$  ou bien  $\mathbb{E}_1 \otimes^s \mathbb{E}_2$ , selon l'existence ou non d'une énergie libre. Notons aussi que, par construction même, les espaces  $\mathbb{E}_1$  et  $\mathbb{E}_2$  contiennent nécessairement les tenseurs totalement symétriques.



On va alors voir que, quelque soit les espaces considérés, le problème est en fait génériquement ramené à l'étude des classes d'isotropie de l'espace  $\mathbb{S}^k$  des tenseurs totalement symétriques ou bien à l'étude de l'espace  $\mathbb{T}^k = \otimes^k \mathbb{R}^3$  (il y a cependant une nuance dans le cas des tenseurs d'ordre impair, nuance que nous précisons à cette occasion).

#### 4.4.1. Isotropie des espaces de tenseurs d'ordre pair

On suppose ici que la loi de comportement étudiée est associée à un espace de tenseurs  $\mathbb{E}^{2n}$  d'ordre pair. Comme  $\mathbb{E}_1$  et  $\mathbb{E}_2$  contiennent les tenseurs totalement symétriques, on a nécessairement

$$\mathbb{S}^{2n} \subseteq \mathbb{E}^{2n} \subseteq \mathbb{T}^{2n}.$$

Pour toute la suite, on note  $\mathcal{P}(\mathcal{J}(\mathbb{E}))$  (resp.  $\mathcal{S}(\mathcal{J}(\mathbb{E}))$ ) les classes d'isotropie correspondant à des sous-groupes planaires (resp. spatiaux) d'un espace de tenseurs  $\mathbb{E}$ .

Par application des opérations de clips, nous avons (voir [OA13] pour plus de détails) :

**Lemme 4.4.1.** *Les classes d'isotropie planaires de  $\mathbb{S}^{2n}$  sous l'action de  $\text{SO}(3)$  sont :*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{J}(\mathbb{S}^2)) &= \{[\text{D}_2], [\text{O}(2)], [\text{SO}(3)]\} \\ \mathcal{P}(\mathcal{J}(\mathbb{S}^4)) &= \{[\mathbf{1}], [\text{Z}_2], [\text{D}_2], [\text{D}_3], [\text{D}_4], [\text{O}(2)], [\text{SO}(3)]\} \\ n \geq 3, \mathcal{P}(\mathcal{J}(\mathbb{S}^{2n})) &= \{[\mathbf{1}], [\text{Z}_2], \dots, [\text{Z}_{2(n-1)}], [\text{D}_2], \dots, [\text{D}_{2n}], [\text{O}(2)], [\text{SO}(3)]\} \end{aligned}$$

Les classes d'isotropie spatiales de  $\mathbb{S}^{2n}$  sous l'action de  $\text{SO}(3)$  sont :

$n$	2	$\geq 3$
$\mathcal{S}(\mathcal{J}(\mathbb{S}^{2n}))$	$\{[\mathcal{O}]\}$	$\{[\mathcal{T}], [\mathcal{O}], [\mathcal{I}]\}$

**Lemme 4.4.2.** *Les classes d'isotropie planaires de  $\mathbb{T}^{2n}$  sous l'action de  $\text{SO}(3)$  sont :*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{J}(\mathbb{T}^2)) &= \{[\mathbf{1}], [\text{Z}_2], [\text{D}_2], [\text{SO}(2)], [\text{O}(2)], [\text{SO}(3)]\} \\ \mathcal{P}(\mathcal{J}(\mathbb{T}^4)) &= \{[\mathbf{1}], [\text{Z}_2], [\text{Z}_3], [\text{Z}_4], [\text{D}_2], [\text{D}_3], [\text{D}_4], [\text{SO}(2)], [\text{O}(2)], [\text{SO}(3)]\} \\ n \geq 3, \mathcal{P}(\mathcal{J}(\mathbb{T}^{2n})) &= \{[\mathbf{1}], [\text{Z}_2], \dots, [\text{Z}_{2n}], [\text{D}_2], \dots, [\text{D}_{2n}], [\text{SO}(2)], [\text{O}(2)], [\text{SO}(3)]\} \end{aligned}$$

Les classes d'isotropie spatiales de  $\mathbb{T}^{2n}$  sous l'action de  $\text{SO}(3)$  sont :

$n$	2	$\geq 3$
$\mathcal{S}(\mathcal{J}(\mathbb{T}^{2n}))$	$\{[\mathcal{T}], [\mathcal{O}]\}$	$\{[\mathcal{T}], [\mathcal{O}], [\mathcal{I}]\}$

On peut résumer ces résultats dans la table suivante :

$n$	1	2	$\geq 3$
$\#\mathcal{J}(\mathbb{S}^{2n})$	3	8	$2(2n+1)$
$\#\mathcal{J}(\mathbb{T}^{2n})$	6	12	$4n+5$

On a ensuite

**Théorème 4.4.3.** *Etant donné deux entiers naturels  $p, q$  tels que  $p+q=2n$  et deux espaces de tenseurs  $\mathbb{E}_1$  et  $\mathbb{E}_2$  tels que*

$$\mathbb{S}^p \subset \mathbb{E}_1, \quad \mathbb{S}^q \subset \mathbb{E}_2.$$

Alors les classes d'isotropies de l'espace  $\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$ , sous l'action du groupe  $\text{SO}(3)$ , sont les mêmes que les classes d'isotropie de l'espace  $\mathbb{T}^{2n}$  :

$$\mathfrak{I}(\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2) = \mathfrak{I}(\mathbb{T}^{2n}).$$

Lorsque  $p \geq 3$ , les classes d'isotropies de l'espace  $\mathbb{E}_1 \otimes^s \mathbb{E}_1$  sous l'action du groupe  $\text{SO}(3)$  sont les mêmes que les classes d'isotropies de l'espace  $\mathbb{T}^{2p}$  :

$$p \geq 3 \Rightarrow \mathfrak{I}(\mathbb{E}_1 \otimes^s \mathbb{E}_1) = \mathfrak{I}(\mathbb{T}^{2p}).$$

*Remarque 4.4.4.* Le théorème ne traite pas des cas  $\mathbb{E}_1 \otimes^s \mathbb{E}_1$ , avec  $p = 1, 2$ . En fait :

- Le cas  $p = 1$  correspond simplement à l'espace  $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$ .
- Le cas  $p = 2$  correspond au cas de l'espace des tenseurs d'élasticité, étudié à la [sous-section 4.3.2](#).

### Application à la théorie du premier gradient de la déformation

Dans ce cadre, la loi de comportement fait intervenir 3 tenseurs, dont 2 sont d'ordre pair : le tenseur d'élasticité  $\mathbf{C}$  ainsi que le tenseur d'élasticité du second ordre  $\mathbf{A}$  (d'ordre 6). En notant  $\text{Soe}$  l'espace associé aux tenseurs  $\mathbf{A}$ , nous avons

$$\text{Soe} = \mathbb{T}_{(ij)k} \otimes^s \mathbb{T}_{(ij)k}$$

Par le théorème 4.4.3, nous avons donc directement

$$\mathfrak{I}(\text{Soe}) = \mathfrak{I}(\mathbb{T}^6)$$

et donc

$$\mathfrak{I}(\text{Soe}) = \{[\mathbf{1}], [\mathbf{Z}_2], \dots, [\mathbf{Z}_6], [\mathbf{D}_2], \dots, [\mathbf{D}_6], [\text{SO}(2)], [\text{O}(2)], [\mathcal{T}], [\mathcal{O}], [\mathcal{I}], [\text{SO}(3)]\}$$

qui possède 17 classes d'isotropie.

#### 4.4.2. Isotropie des espaces de tenseurs d'ordre impair

On se place ici dans le cas où la loi de comportement étudiée est associée à un espace de tenseurs  $\mathbb{E}^{2n+1}$  d'ordre impair. Le groupe qui agit ici est le groupe  $\text{O}(3)$ . Notons aussi qu'une telle situation ne peut intervenir que dans le cas d'une loi de comportement associé à un produit  $\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$  non symétrique.

Tout comme dans le cas pair, on a [\[OA14\]](#)

$$\mathbb{S}^{2n+1} \subseteq \mathbb{E}^{2n+1} \subseteq \mathbb{T}^{2n+1}$$

Ensuite, nous avons [\[OA14\]](#) :

**Lemme 4.4.5.** *Les classes d'isotropie planaires de  $\mathbb{T}^{2n+1}$ , sous l'action du groupe  $\text{O}(3)$ ,*

sont :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathfrak{J}(\mathbb{T}^1)) &= \{[\mathcal{O}(2)^-]\} \\ n \geq 1, \mathcal{P}(\mathfrak{J}(\mathbb{T}^{2n+1})) &= \{[\mathbb{1}], [Z_2], \dots, [Z_{2n+1}], [D_2^v], \dots, [D_{2n+1}^v], [Z_2^-], \dots, [Z_{4n}^-], \\ & [D_2], \dots, [D_{2n+1}], [D_4^h], \dots, [D_{2(2n+1)}^h], \\ & \text{SO}(2), [\mathcal{O}(2)], [\mathcal{O}(2)^-], [\text{SO}(3)], [\mathcal{O}(3)]\} \end{aligned}$$

avec :

$$\forall n \geq 2, \#\mathcal{P}(\mathfrak{J}(\mathbb{T}^{2n+1})) = 10n + 6 \quad (4.4.1)$$

**Lemme 4.4.6.** Les classes d'isotropie spatiales de  $\mathbb{T}^{2n+1}$  sous l'action du groupe  $\mathcal{O}(3)$  sont :

$n$	1	2	$\geq 3$	
$\mathcal{S}(\mathfrak{J}(\mathbb{T}^{2n+1}))$	{ $[\mathcal{O}^-]$ }	{ $[\mathcal{T}], [\mathcal{O}^-], [\mathcal{O}]$ }	{ $[\mathcal{T}], [\mathcal{O}^-], [\mathcal{O}], [\mathcal{I}]$ }	(4.4.2)

On peut résumer ces résultats dans la table suivante :

$n$	1	2	$\geq 3$	
$\#\mathfrak{J}(\mathbb{T}^{2n+1})$	17	29	$10(n+1)$	(4.4.3)

Notons  $\mathbb{T}_\star^{2n+1}$  le supplémentaire de la composante isotypique de  $\mathbb{H}^0$  dans  $\mathbb{T}^{2n+1}$ . On peut montrer [OA14] qu'un tel espace possède les mêmes classes d'isotropie que l'espace  $\mathbb{T}^{2n+1}$ , à l'exception de la classe  $[\text{SO}(3)]$  :

$n$	1	2	$\geq 3$	
$\#\mathfrak{J}(\mathbb{T}_\star^{2n+1})$	16	28	$10n+9$	

**Théorème 4.4.7.** Etant donné deux entiers naturels  $p, q$  tels que  $p+q = 2n+1$  et deux espaces de tenseurs  $\mathbb{E}_1$  et  $\mathbb{E}_2$  tels que

$$\mathbb{S}^p \subset \mathbb{E}_1, \quad \mathbb{S}^q \subset \mathbb{E}_2.$$

Alors les classes d'isotropies de l'espace  $\mathbb{E}^{2n+1} := \mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$ , sous l'action du groupe  $\mathcal{O}(3)$ , sont données par

- Les classes d'isotropie de  $\mathbb{T}_\star^{2n+1}$  lorsque  $\mathbb{E}_1 = \mathbb{A}^{2k+1}$  (resp.  $\mathbb{E}_2 = \mathbb{A}^{2k+1}$ ) est un espace de tenseurs d'ordre impair dont la décomposition harmonique ne contient que des espaces d'ordre impair et  $\mathbb{E}_2 = \mathbb{B}^{2l}$  (resp.  $\mathbb{E}_1 = \mathbb{B}^{2l}$ ) est un espace de tenseurs d'ordre pair dont la décomposition harmonique ne contient que des tenseurs d'ordre pair ;
- Les classes d'isotropie de  $\mathbb{T}^{2n+1}$  dans tous les autres cas.

*Remarque 4.4.8.* La première situation intervient dès lors que  $\mathbb{E}^{2n+1}$  est obtenu à partir de deux espaces de tenseurs complètement symétriques. Il s'agit par exemple du cas de la piézoélectricité, pour lequel  $\mathbb{E}_1 = \mathbb{S}^2$  et  $\mathbb{E}_2 = \mathbb{S}^1$ . On a donc  $\mathfrak{J}(\text{Piez}) = \mathfrak{J}(\mathbb{T}_\star^3)$  :

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(\text{Piez}) &= \{[\mathbb{1}], [Z_2], [Z_3], [D_2^v], [D_3^v], [Z_2^-], [Z_{4n}^-], [D_2], [D_3], \\ & D_4^h, [D_6^h], [\text{SO}(2)], [\mathcal{O}(2)], [\mathcal{O}(2)^-], [\mathcal{O}^-], [\mathcal{O}(3)]\} \end{aligned}$$

## Application à la théorie du premier gradient de la déformation

Nous reprenons à nouveau la théorie du premier gradient de la déformation (section 1.1.3). Il reste à établir les classes d'isotropie de l'espace  $\mathbb{C}ef$  de tenseurs de couplage élastique  $\mathbf{M}$  (d'ordre 5). On sait en fait qu'un tel espace est obtenu à partir du produit  $\mathbb{S}^2 \otimes \mathbb{T}_{(kl)m}$ , produit dans lequel  $\mathbb{T}_{(kl)m}$  est isomorphe à l'espace  $\mathbb{P}iez$ , dont la décomposition harmonique (voir sous-section 3.1.2) est donnée par  $\mathbb{H}^3 \oplus \mathbb{H}^{2*} \oplus 2\mathbb{H}^1$ . Il contient donc un espace de tenseur d'ordre pair. Le théorème 4.4.7 montre donc que l'espace  $\mathbb{C}ef$  possède 29 classes d'isotropie :

$$\mathfrak{I}(\mathbb{C}ef) = \mathfrak{I}(\mathbb{T}^5) = \left\{ [\mathbf{1}], [Z_2], \dots, [Z_5], [D_2^v], \dots, [D_5^v], [Z_2^-], \dots, [Z_8^-], [D_2], \dots, [D_5], \right. \\ \left. D_4^h], \dots, [D_{10}^h], [SO(2)], [O(2)], [O(2)^-], [\mathcal{T}], [\mathcal{O}^-], [\mathcal{O}], [SO(3)], [O(3)] \right\}$$

## 4.A. Opérations de clips sur les sous-groupes fermés de $SO(3)$

Nous donnons ici les preuves concernant les opérations de clips des sous-groupes fermés de  $SO(3)$ . L'idée centrale est de raisonner sur les axes caractéristiques de ces sous-groupes (sous-section 3.2.1).

### 4.A.1. Sous-groupes planaires

#### Sous-groupes cycliques

**Lemme 4.A.1.** *Etant donné deux entiers naturels  $m$  et  $n$  plus grands que 2 et deux axes  $a$  et  $b$  :*

- Si  $a \neq b$  alors  $Z_n^a \cap Z_m^b = \mathbf{1}$ .
- Si  $a = b$  alors, en notant  $d := \gcd(m, n)$ , on a  $Z_n^a \cap Z_m^b = Z_d^a$ .

*Démonstration.* Notons  $g \in Z_n^a \cap Z_m^b$ , avec  $a \neq b$ . Les axes  $a$  et  $b$  sont engendrés par deux vecteurs propres non colinéaires de  $g$  associés à la valeur propre 1. Comme  $\det g = 1$ , la troisième valeur propre est aussi 1 et donc  $g = \text{Id}$ , ce qui montre la première partie du lemme. Si nous prenons maintenant une rotation appartenant à  $Z_n^a \cap Z_m^a$ , alors l'angle de cette rotation est de la forme  $\theta = \frac{2l\pi}{n} = \frac{2r\pi}{m}$  où  $r$  et  $l$  sont des entiers. Ainsi  $lm = rn$  et, en notant  $m = dm_1$  et  $n = dn_1$ , on a nécessairement  $lm_1 = rn_1$ . Comme  $m_1$  et  $n_1$  sont premiers entre eux, on en déduit que

$$l = \alpha n_1 \text{ et donc } \theta = \frac{2l\pi}{n} = \frac{2\alpha\pi}{d} \in Z_d^0.$$

L'inclusion réciproque est évidente, ce qui permet d'en déduire le lemme.  $\square$

Une application directe du lemme 4.A.1 à l'intersection  $Z_n^0 \cap (gZ_m^0g^{-1})$  entraîne :

**Lemme 4.A.2.** *Etant donné deux entiers naturels  $n$  et  $m$ , on note  $d = \gcd(n, m)$ , alors  $[Z_n] \odot [Z_m] = \{[\mathbf{1}], [Z_d]\}$*

## Sous-groupes diédraux

**Lemme 4.A.3.** *Etant donné deux entiers naturels  $n$  et  $m$ , on note  $d := \gcd(n, m)$  et  $d_2(m) := \gcd(m, 2)$ , alors*

$$[D_n] \odot [Z_m] = \{[\mathbb{1}], [Z_{d_2(m)}], [Z_d]\}.$$

*Démonstration.* Considérons dans un premier temps l'intersection  $\Gamma = D_n^0 \cap Z_m^a$ . Comme  $D_n^0 = Z_n^0 \uplus_{l=1}^n Z_2^{b_l}$  :

- lorsque  $Oz = a$ , on a  $\Gamma = Z_n^0 \cap Z_m^0$  et il suffit donc d'appliquer le lemme 4.A.1 ;
- lorsque, pour un certain entier  $l$ ,  $a = b_l$ , alors  $Z_n^0 \cap Z_m^a = \mathbb{1}$  et il suffit donc de considérer l'intersection  $Z_2^b \cap Z_m^a$ , qui se réduit à l'identité dès que  $m$  est impair.  $\square$

**Lemme 4.A.4.** *Etant donné deux entiers naturels  $n$  et  $m$ , on note  $d := \gcd(n, m)$  et*

$$d_2(m) := \gcd(m, 2) ; d_2(n) := \gcd(n, 2) ; dz := \begin{cases} 2 & \text{si } d = 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors  $[D_n] \odot [D_m] = \{[\mathbb{1}], [Z_{d_2(n)}], [Z_{d_2(m)}], [Z_{dz}], [Z_d], [D_d]\}$ .

*Démonstration.* On doit ici étudier les intersections

$$\Gamma = D_n^0 \cap (gD_m^0g^{-1}),$$

où

$$D_n^0 = Z_n^0 \uplus_{l=1}^n Z_2^{b_l}, \quad gD_m^0g^{-1} = Z_m^a \uplus_{l=1}^m Z_2^{gb_l}.$$

On doit donc étudier les cas suivants :

- lorsque  $Oz = a$  et  $Ox = gb_l$  pour un certain entier  $l$  : si  $d = 1$  alors  $\Gamma = Z_2^{b_0}$  ;
- lorsque  $Oz = a$  et  $Ox \neq gb_l$ , alors  $\Gamma = Z_d^0$  ;
- lorsque  $Oz = gb_l$  pour un certain entier  $l$  : si  $n$  est pair alors  $\Gamma = Z_2$ , sinon  $\Gamma = \mathbb{1}$ .  
On obtient le même résultat lorsque l'axe principal de  $gD_m^0g^{-1}$  coïncide avec un axe secondaire de  $D_n^0$ .  $\square$

## 4.A.2. Opérations de clips sur les sous-groupes maximaux et exceptionnels

Nous considérons ici les sous-groupes  $\mathcal{T}^0$ ,  $\mathcal{O}^0$ ,  $\mathcal{I}^0$ ,  $\text{SO}(2)^0$  et  $\text{O}(2)^0$ . Dans chacun de ces cas, nous allons utiliser des résultats concernant leur sous-groupes propres [IG84]. Nous résumons ces résultats par le diagramme ci-dessous<sup>d</sup> [AKP14] :

d. Les flèches de la figure 4.7 traduisent une relation d'ordre partiel en termes de classes de conjugaison.

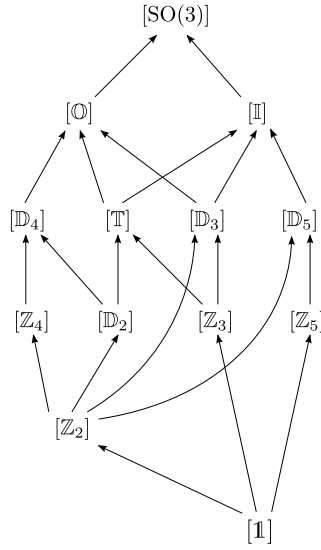


Figure 4.7. – Relation d'ordre partiel sur des classes de sous-groupes de  $SO(3)$

### Sous-groupe du tétraèdre

On reprend ici la décomposition 3.2.2 :

$$\mathcal{T}^0 = Z_3^{vt_1} \uplus Z_3^{vt_2} \uplus Z_3^{vt_3} \uplus Z_3^{vt_4} \uplus Z_2^{et_1} \uplus Z_2^{et_2} \uplus Z_2^{et_3}.$$

**Lemme 4.A.5.** *Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $d_2(n) := \gcd(n, 2)$  et  $d_3(n) := \gcd(3, n)$  ; nous avons alors  $[Z_n] \odot [\mathcal{T}] = \{[\mathbf{1}], [Z_{d_2(n)}], [Z_{d_3(n)}]\}$ .*

*Démonstration.* On doit étudier l'intersection  $\mathcal{T}^0 \cap Z_n^a$ . Selon le lemme 4.A.1, pour que l'intersection ne se réduise pas à l'identité, l'axe principal de  $Z_n^a$  doit nécessairement être un axe de sommet ou d'arête du tétraèdre. On utilise ce même lemme pour conclure.  $\square$

**Lemme 4.A.6.** *Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $d_2(n) := \gcd(2, n)$  et  $d_3(n) := \gcd(3, n)$ . Alors  $[D_n] \odot [\mathcal{T}] = \{[\mathbf{1}], [Z_2], [Z_{d_3(n)}], [D_{d_2(n)}]\}$ .*

*Démonstration.* Notons  $\Gamma = \mathcal{T}^0 \cap (gD_n^0g^{-1})$ . Nous utilisons ici les axes principaux et secondaires du sous-groupe diédral :

$$gD_n^0g^{-1} = Z_n^a \uplus_{l=1}^n Z_2^{b_l}.$$

Rappelons aussi que les axes de sommet du tétraèdre sont notés  $vt_i$  et que les axes de ses arêtes sont notés  $et_j$ .  $\Gamma$  est nécessairement un sous-groupe de  $\mathcal{T}^0$ . De plus :

- lorsque  $3 \mid n$  et  $a = vt_i$ , alors  $\Gamma = Z_3$  est maximal ;
- lorsque  $2 \mid n$ , il existe une rotation  $g$  telle que  $a = et_j$  et dans ce cas, si  $b = et_j$ , alors  $\Gamma = D_2$ , sinon  $\Gamma = Z_2$ .
- dans tous les autres cas, si nous avons  $b = et_j$ , alors  $\Gamma = Z_2$ .

$\square$

**Lemme 4.A.7.** On a  $[\mathcal{T}] \odot [\mathcal{T}] = \{[\mathbb{1}], [Z_2], [Z_3], [\mathcal{T}]\}$ .

*Démonstration.* On doit ici étudier l'intersection  $\Gamma = \mathcal{T}^0 \cap (g\mathcal{T}^0g^{-1})$ . Pour cela, nous utilisons des arguments exploitant à la fois les sous-groupes de  $\mathcal{T}^0$  et les axes caractéristiques du tétraèdre.

- Dans un premier temps, on peut trouver une rotation  $g$  telle qu'aucun axe ne coïncide et donc  $\Gamma = \mathbb{1}$  ;
- Sinon on peut trouver une rotation autour d'un axe de face ou d'arête telle que seul cet axe est laissé invariant. Dans ce cas  $\Gamma = Z_2$  ou bien  $\Gamma = Z_3$ , selon l'axe laissé invariant.
- Si maintenant on a  $\Gamma \supset D_2$ , alors on en déduit que  $g$  transforme deux axes d'arête en deux axes d'arête. On peut alors permuter ces deux axes (tout en laissant  $\mathcal{T}^0$  fixe) et supposer que  $g$  laisse les axes  $vt_1$  and  $vt_2$  fixes. On en déduit ainsi que  $g$  fixe nécessairement l'axe  $vt_3$  et donc que  $g\mathcal{T}^0g^{-1} = \mathcal{T}^0$ . Dans ce cas on a alors  $\Gamma = \mathcal{T}^0$ .

□

### Sous-groupe du cube

On reprend ici la décomposition (3.2.3)

$$\mathcal{O}^0 = \bigoplus_{i=1}^3 Z_4^{fc_i} \bigoplus_{j=1}^4 Z_3^{vc_j} \bigoplus_{l=1}^6 Z_2^{ec_l}.$$

En reprenant la démonstration exploitée dans le cas du tétraèdre, on a directement :

**Lemme 4.A.8.** Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note

$$d_2(n) = \gcd(n, 2) ; d_3(n) = \gcd(n, 3) ; d_4(n) = \begin{cases} 4 & \text{si } 4 \mid n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors on a  $[Z_n] \odot [\mathcal{O}] = \{[\mathbb{1}], [Z_{d_2(n)}], [Z_{d_3(n)}], [Z_{d_4(n)}]\}$ .

**Lemme 4.A.9.** Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note

$$d_2(n) := \gcd(n, 2) ; d_3(n) := \gcd(n, 3) ; d_4(n) := \begin{cases} 4 & \text{si } 4 \mid n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors  $[D_n] \odot [\mathcal{O}] = \{[\mathbb{1}], [Z_2], [Z_{d_3(n)}], [Z_{d_4(n)}], [D_{d_2(n)}], [D_{d_3(n)}], [D_{d_4(n)}]\}$ .

*Démonstration.* On suit ici la même démarche que dans le cas du tétraèdre. L'objectif dans ce cas est d'étudier les axes du cube et du sous-groupe diédral. Les arguments sont toujours les mêmes. Nous ne détaillons que le cas où  $4 \nmid n$ ,  $3 \mid n$  et  $n$  est impair :

- lorsque  $a = vc_j$ , alors  $b = fc_j$  implique  $\Gamma = D_3$  et sinon on obtient  $\Gamma = Z_3$ .
- lorsque  $a = fc_j = 0$ , alors  $b = fc_j$  implique  $\Gamma = Z_2$  et sinon on obtient  $\Gamma = \mathbb{1}$ .
- enfin, lorsque  $a = ec_j$ , alors  $b = ec_j$  ou  $b = fc_j$  implique  $\Gamma = Z_2$ .

□

**Lemme 4.A.10.** On a  $[\mathcal{T}] \odot [\mathcal{O}] = \{[\mathbb{1}], [Z_2], [Z_3], [\mathcal{T}]\}$ .

*Démonstration.* On note  $\Gamma = \mathcal{O}^0 \cap (g\mathcal{T}^0g^{-1})$ . Dans ce cas,  $\Gamma$  est nécessairement un sous-groupe commun à  $\mathcal{O}^0$  et à  $g\mathcal{T}^0g^{-1}$ . Il est donc conjugué à l'un des sous-groupes  $\mathbb{1}$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$ ,  $D_2$  ou  $\mathcal{T}$ . Ensuite :

- soit on considère une rotation  $g$  autour d'un axe d'arête de  $\mathcal{T}^0$  (qui est un axe commun avec le cube) qui ne fixe que cet axe et dans ce cas  $\Gamma = Z_2$ ;
- soit on considère une rotation  $g$  autour d'un axe de sommet de  $\mathcal{T}^0$  (qui est un axe commun avec le cube) qui ne fixe que cet axe et dans ce cas  $\Gamma = Z_3$ ;
- dès que  $\Gamma \supset D_2$ , nous avons nécessairement  $\Gamma = \mathcal{T}^0$ .

□

**Lemme 4.A.11.** On a  $[\mathcal{O}] \odot [\mathcal{O}] = \{[\mathbb{1}], [Z_2], [D_2], [Z_3], [D_3], [Z_4], [D_4], [\mathcal{O}]\}$ .

*Démonstration.* Pour l'étude de l'intersection  $\Gamma = \mathcal{O}^0 \cap (g\mathcal{O}^0g^{-1})$ , nous utilisons aussi des arguments basés sur les sous-groupes. Certaines situations sont néanmoins plus subtiles :

- soit on considère une rotation  $g$  qui ne fixe qu'un axe d'arête, on a  $\Gamma = Z_2$ ;
- soit on considère une rotation qui ne fixe qu'un seul axe d'arête, on a  $\Gamma = Z_3$ ;
- soit on considère une rotation qui ne fixe qu'un et un seul axe de face (voir figure 4.8(a)) ; dans ce cas  $\Gamma = Z_4$ ;
- soit on considère une rotation qui fixe un axe de face et qui transforme une axe d'arête en un axe de face. Il suffit pour cela de considérer la rotation  $g = \mathbf{Q}(\mathbf{e}_1; \frac{\pi}{4})$  et dans ce cas  $\Gamma = Z_4^{\mathbf{e}_1} \uplus Z_2^{\mathbf{e}_3} = D_4$  (c.f. figure 4.8(b)) ;
- si nous prenons  $g = \mathbf{Q}(\mathbf{e}_3; \frac{\pi}{4}) \circ \mathbf{Q}(\mathbf{e}_1; \frac{\pi}{4})$ , on obtient directement  $\Gamma = D_2$ . On remarque en effet dans ce cas que seuls  $gfc_3 = ec_6$ ,  $gac_1 = fc_1$  et  $gac_2 = ec_5$  (c.f. figure 4.8(c)).
- si nous prenons  $g = \mathbf{Q}(vc_1, \pi)$ , on a  $\Gamma = D_3$  où  $vc_1$  est un axe principal et  $ec_5$  un axe secondaire.
- enfin si  $\Gamma \supset \mathcal{T}^0$  alors  $g$  fixe nécessairement les trois axes d'arête du tétraèdre et donc  $g$  fixe le cube  $\mathcal{C}_0$  donc  $\Gamma = \mathcal{O}^0$ .

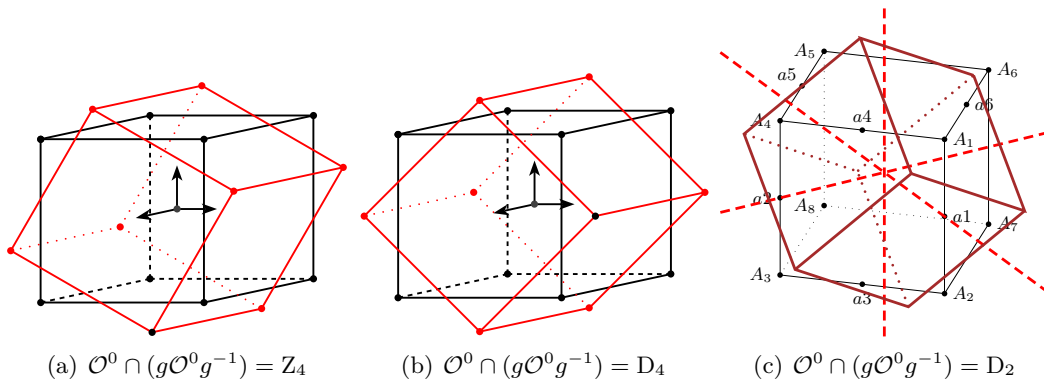


Figure 4.8. – Etude de l'intersection  $\mathcal{O}^0 \cap (g\mathcal{O}^0g^{-1})$

□



## Sous-groupe du dodécaèdre

On reprend la décomposition (3.2.4)

$$\mathcal{I}^0 = \bigoplus_{i=1}^6 Z_5^{fd_i} \bigoplus_{j=1}^{10} Z_3^{vd_j} \bigoplus_{l=1}^{15} Z_2^{ed_l}.$$

Par les mêmes arguments que ceux développés dans le cas du cube et du tétraèdre, on a directement :

**Lemme 4.A.12.** *Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note*

$$d_2 := \gcd(n, 2) ; d_3 := \gcd(n, 3) ; d_5 := \gcd(n, 5).$$

*Alors on a  $[Z_n] \odot [\mathcal{I}] = \{[\mathbf{1}], [Z_{d_2}], [Z_{d_3}], [Z_{d_5}]\}$ .*

Ensuite :

**Lemme 4.A.13.** *Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note*

$$d_2 := \gcd(n, 2) ; d_3 := \gcd(n, 3) ; d_5 := \gcd(n, 5).$$

*Alors on a  $[D_n] \odot [\mathcal{I}] = \{[\mathbf{1}], [Z_2], [Z_{d_3}], [Z_{d_5}], [D_{d_2}], [D_{d_3}], [D_{d_5}]\}$ .*

*Démonstration.* Pour l'étude de l'intersection  $\mathcal{I}^0 \cap (gD_n^0 g^{-1})$ , on utilise encore des arguments sur les axes :

- si  $a = ft_j$  ou  $a = vt_j$ , alors  $\Gamma \in \{Z_{d_3}, Z_{d_5}, D_{d_3}D_{d_5}\}$  ;
- si  $a = et_j$ , alors  $\Gamma \in \{Z_{d_2}, D_{d_2}\}$ .

Par des arguments sur les axes secondaires de  $gD_n^0 g^{-1}$ , on peut toujours avoir  $Z_2$  comme intersection.  $\square$

**Lemme 4.A.14.** *On a  $[\mathcal{T}] \odot [\mathcal{I}] = \{[\mathbf{1}], [Z_2], [Z_3], [\mathcal{T}]\}$ .*

*Démonstration.* On doit étudier l'intersection  $\mathcal{I}^0 \cap (g\mathcal{T}^0 g^{-1})$ . Il est clair que, par l'inclusion  $\mathcal{T}^0 \subset \mathcal{I}^0$ , ce cas se réduit aux classes de l'opération  $[\mathcal{T}] \odot [\mathcal{I}]$ . Si cette intersection contient un sous-groupe de  $D_2$ , on exploite le fait que

$$D_2 = Z_2^{get_1} \uplus Z_2^{get_3} \uplus Z_2^{get_3}$$

où  $get_i$  sont les trois axes d'arête du tétraèdre  $g\mathcal{T}_0$ . Ces trois axes peuvent correspondre à trois axes perpendiculaires du dodécaèdre. Après permutation de ces axes, qui laisse fixe le dodécaèdre, on peut supposer que ces trois axes sont en fait engendrés par les trois vecteurs  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Mais alors, dans ce cas, les sommets du tétraèdre correspondent aux sommets du cube imbriqué dans le dodécaèdre. Et donc, dans ce cas, l'intersection est le sous-groupe  $\mathcal{T}$  lui-même.  $\square$

**Lemme 4.A.15.** *On a  $[\mathcal{O}] \odot [\mathcal{I}] = \{[\mathbf{1}], [Z_2], [Z_3], [D_3], [\mathcal{T}]\}$ .*

*Démonstration.* Nous devons étudier l'intersection  $\Gamma = \mathcal{I}^0 \cap (g\mathcal{O}^0 g^{-1})$ . On considère pour cela les classes de sous-groupes communes à  $[\mathcal{O}]$  et à  $[\mathcal{I}]$ . De telles classes sont données par la figure 4.7. Dans un premier temps, il est clair que, si le cube associé

au sous-groupe  $(g\mathcal{O}^0g^{-1})$  est imbriqué dans le dodécaèdre, alors  $\Gamma = \mathcal{T}$ . Sinon, nous pouvons trouver une rotation  $g$  telle que  $\Gamma$  contienne  $D_3$ . En effet, il suffit pour cela que  $g$  transforme un axe de sommet  $vc_1$  du cube sur un axe de sommet  $vd_5$  du dodécaèdre et un axe d'arête  $ec_5$  du cube sur un axe d'arête  $ed_7$  du dodécaèdre. Par des arguments de maximalité, on en déduit que  $\Gamma = D_3$ . On doit ensuite examiner le cas des sous-groupes  $D_2$ ,  $Z_3$  et  $Z_2$  :

- lorsque  $\Gamma \supset D_2$ , alors, après permutation des axes du dodécaèdre, on peut supposer que  $g$  laisse fixe les trois axes correspondants aux vecteurs de base. Or, ces axes correspondent à des rotations d'ordre deux du dodécaèdre. Ainsi, dans ce cas,  $g$  fixe le cube  $\mathcal{C}_0$  et donc  $g\mathcal{O}^0g^{-1} = \mathcal{O}^0$ , auquel cas  $\Gamma = \mathcal{T}$ .
- on peut trouver une rotation  $g$  autour d'un axe de sommet, par exemple  $vd_5$ , telle que  $\Gamma = Z_3$  ;
- enfin, comme ci-dessus, on peut trouver une rotation autour d'un axe d'arête telle que  $\Gamma = Z_2$ .

□

**Lemme 4.A.16.** *On a  $[\mathcal{I}] \odot [\mathcal{I}] = \{[\mathbf{1}], [Z_2], [Z_3], [Z_5], [D_3], [D_5], [\mathcal{I}]\}$ .*

*Démonstration.* On note  $\Gamma = \mathcal{I}^0 \cap (g\mathcal{I}^0g^{-1})$ . On doit étudier les classes  $[\mathcal{T}]$ ,  $[D_3]$ ,  $[D_5]$ ,  $[D_2]$ ,  $[Z_3]$ ,  $[Z_5]$  et  $[Z_2]$  :

- lorsque  $\Gamma \supset \mathcal{T}$  ou  $\Gamma \supset D_2$ , alors  $\Gamma$  contient les trois rotations d'ordre deux autour des axes des coordonnées, qui sont trois axes d'arête du dodécaèdre. Après permutation de ces axes, on en déduit que  $g$  laisse fixe trois axes perpendiculaires et donc  $g$  laisse fixe  $\mathcal{I}^0$ , ainsi  $\Gamma = \mathcal{I}$  ;
- on peut trouver une rotation  $g$  autour d'un axe d'arête telle que  $\Gamma = Z_2$ . Un même argument permet d'obtenir  $Z_3$  et  $Z_5$ .
- si on prend une rotation  $g$  d'ordre deux autour de l'axe  $vd_3$ , on vérifie que cette rotation ne fixe que les axes  $vd_3$ ,  $ed_6$ ,  $ed_8$  et  $ed_{15}$  et donc  $\Gamma = D_3$ .
- si on prend une rotation  $g$  d'ordre deux autour de l'axe de face  $fd_1$ , on vérifie directement que cette rotation ne fixe que les axes  $fd_1$ ,  $ed_7$ ,  $ed_{11}$ ,  $ed_{12}$  et  $ed_{14}$  et donc  $\Gamma = D_5$ .

□

## 4.B. Opérations de clips sur les sous-groupes fermés de $O(3)$

Remarquons dans un premier temps que  $-1 \in O(3)$  agit sur un espace vectoriel  $V$  soit en tant que  $-\text{Id}_V$ , soit en tant que  $\text{Id}_V$ . Le second cas se ramène à une action du groupe  $SO(3)$  que nous avons étudié précédemment. Dans le premier cas, on remarque que, pour tout vecteur  $\mathbf{v}$ ,

$$(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}.$$

Ainsi, aucun sous-groupe d'isotropie ne peut contenir  $-1$  et donc on exclu de notre étude les sous-groupes de type II. Ensuite, le lemme suivant se démontre directement :

**Lemme 4.B.1.** *Pour tout sous-groupe  $H_1$  de type III et pour tout sous-groupe  $H_2$  de type I, on a*

$$H_1 \cap \Sigma_2 = (H_1 \cap SO(3)) \cap H_2.$$

A l'aide de ce lemme et des résultats de la [section 4.A](#), on peut en déduire toutes les opérations de clips entre les sous-groupes de type I et ceux de type III. Nous devons ensuite étudier le cas de chacun des sous-groupes de type III. Notons avant cela

$$Z_1^\sigma := \mathbf{1} ; Z_1^- := \mathbf{1} ; D_1^v := \mathbf{1}.$$

Les preuves, que nous ne détaillerons pas entièrement, exploitent les mêmes idées géométriques que dans la [section 4.A](#).

**Lemme 4.B.2.** *Pour tout entier  $n \geq 2$ , on a*

$$[D_n^v] \odot [Z_2^-] = [D_{2n}^h] \odot [Z_2^-] = [\mathcal{O}^-] \odot [Z_2^-] = [O(2)^-] \odot [Z_2^-] = \{\mathbf{1}, [Z_2^-]\}.$$

Et en notant

$$i(n) := 3 - \gcd(2, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

on a

$$[Z_{2n}^-] \odot [Z_2^-] = \{\mathbf{1}, [Z_{i(n)}^-]\}.$$

*Démonstration.* Les deux premières opérations de clips sont immédiates. Pour la dernière opération, il suffit de remarquer que  $\sigma = -\mathbf{Q}(\mathbf{e}_3; \pi) \in Z_{2n}^-$  uniquement lorsque  $n$  est impair.  $\square$

En utilisant des arguments basés sur les axes et les décompositions des sous-groupes, on a le lemme suivant :

**Lemme 4.B.3.** *Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on définit  $i(n)$  comme dans le lemme [4.B.2](#). Nous avons alors :*

$$\begin{aligned} [O(2)^-] \odot [Z_{2n}^-] &= \{\mathbf{1}, [Z_{i(n)}^-], [Z_n]\} & ; & \quad [O(2)^-] \odot [D_n^v] = \{\mathbf{1}, [Z_2^-], [D_n^v]\} \\ [O(2)^-] \odot [D_{2n}^h] &= \{\mathbf{1}, [Z_{i(n)}], [Z_2^-], [D_{i(n)}^v], [D_n^v]\} & ; & \quad [O(2)^-] \odot [\mathcal{O}^-] = \{\mathbf{1}, [Z_2^-], [D_3^v], [D_2^v]\} \\ [O(2)^-] \odot [O(2)^-] &= \{[Z_2^-], [O(2)^-]\}. \end{aligned}$$

### Cas des sous-groupes $Z_{2n}^-$

Pour toute la suite, on note

$$\gamma = \mathbf{Q}\left(\mathbf{e}_3; \frac{\pi}{n}\right). \tag{4.B.1}$$

**Lemme 4.B.4.** *Pour tout entier  $m$  et  $n$ , on note  $d = \gcd(n, m)$ . Alors*

1. *ou bien  $d = 1$ ,  $n$  et  $m$  sont impairs, auquel cas*

$$(-\gamma Z_n^0) \cap (-\gamma Z_m^0) = \{-\mathbf{Q}(\mathbf{e}_3; \pi)\};$$

2. *ou bien  $d \neq 1$ ,  $\frac{n}{d}$  et  $\frac{m}{d}$  sont impairs, auquel cas*

$$(-\gamma Z_n^0) \cap (-\gamma Z_m^0) = -\gamma Z_d;$$

$$3. \text{ sinon } (-\gamma Z_n^0) \cap (-\gamma Z_m^0) = \emptyset.$$

*Démonstration.* Prenons  $m_1$  et  $n_1$  tels que  $m = dm_1$  et  $n = dn_1$ . Notons que l'intersection des sous-groupes est non vide si et seulement si il existe  $j$  et  $l$  tels que

$$(2j+1)\frac{\pi}{dn_1} = (2l+1)\frac{\pi}{dm_1} \text{ et alors } (2j+1)m_1 = (2l+1)n_1.$$

Or cette égalité montre que ni  $n_1$  ni  $m_1$  ne peut être pair.  $\square$

Ensuite, le lemme suivant est une conséquence directe du lemme 4.B.4 :

**Lemme 4.B.5.** *Pour tout entier naturel  $n$  et  $m$  non nuls, on note  $d = \gcd(n, m)$  et*

$$i_1(m, n) := \begin{cases} 2d & \text{si } \frac{n}{d} \text{ et } \frac{m}{d} \text{ sont impairs} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} ; i_2(m, n) := \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{n}{d} \text{ et } \frac{m}{d} \text{ sont impairs} \\ d & \text{sinon} \end{cases} .$$

Alors

$$[Z_{2n}^-] \odot [Z_{2m}^-] = \left\{ \mathbf{1}, [Z_{i_1(m,n)}^-], [Z_{i_2(m,n)}^-] \right\}.$$

*Esquisse de la démonstration.* L'idée est ici simplement de considérer le *pgcd* de  $m$  et  $n$ , puis d'étudier la parité des entiers  $\frac{n}{d}$  et  $\frac{m}{d}$  : lorsqu'ils sont tous les deux impairs, on sait que  $Z_{2d}^- \subset Z_{2n}^-$  et  $Z_{2d}^- \subset Z_{2m}^-$ . Mais alors, lorsque ces deux sous-groupes ont le même axe principal, on en déduit que  $Z_{2n}^- \cap Z_{2m}^- = Z_{2d}^-$  ; et dans ce cas l'opération de clips donne  $\left\{ \mathbf{1}, [Z_{2d}^-] \right\}$ . Mais nous pouvons aussi obtenir le sous-groupe  $Z_2^-$  lorsque  $d = 1$  et les deux entiers  $m$  et  $n$  sont impairs. Dans les autres cas, nous ne pouvons avoir que  $\left\{ \mathbf{1}, [Z_d] \right\}$ .  $\square$

### Cas des sous-groupes $D_n^v$

On rappelle ici la décomposition (3.2.6) :

$$D_n^v := Z_n^0 \bigoplus_{j=1}^n Z_2^{\sigma_{b_j}}.$$

Rappelons aussi que le sous-groupe  $Z_n^0$  a pour axe principal l'axe  $Oz$  et notons  $b_1$  l'axe secondaire engendré par  $e_1$ . Pour toute rotation  $g \in \text{SO}(3)$ , on note  $a$  l'axe engendré par  $ge_3$ . On rappelle aussi qu'on note

$$Z_{2m}^-(a) := gZ_{2m}^-g^{-1}.$$

**Lemme 4.B.6.** *Pour tout entier  $n \geq 2$  et  $m \geq 2$ , on note*

$$i(m) := 3 - \gcd(2, m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases} \text{ et } d = \gcd(n, m).$$

Alors

$$[D_n^v] \odot [Z_{2m}^-] = \left\{ \mathbf{1}, [Z_{i(m)}^-], [Z_d] \right\}.$$

*Démonstration.* Il faut étudier l'intersection

$$\Gamma = D_n^v \cap Z_{2m}^-(a).$$

Par construction même de  $Z_{2m}^-(a)$ , on a :

$$Z_{2m}^-(a) = Z_m^a \cup (-\gamma Z_m^a).$$

Et donc, seuls deux cas sont à étudier :

- ou bien  $a \neq Oz$ , auquel cas le seul cas non trivial intervient lorsque  $-\gamma Z_m^a$  contient une réflexion  $-\mathbf{Q}(\mathbf{x}; \pi)$  où  $\mathbf{x}$  engendre l'un des axes  $b_j$ . Cette situation ne peut intervenir que lorsque  $g\mathbf{e}_3 = \mathbf{x}$  et  $m$  est impair (ceci afin que  $\mathbf{Q}(\mathbf{e}_3; \pi)$  soit une rotation de  $Z_{2m}$ ). Ainsi, dès que  $m$  est impair,  $Z_{2m}^-$  est un conjugué de  $\Gamma$ .
- ou bien  $a = Oz$ , auquel cas  $\Gamma$  se réduit à l'intersection  $Z_n^0 \cap Z_m^0$ , ce qui donne directement  $Z_d^0$  où  $d = \gcd(m, n)$ .

□

Un argument basé sur les axes principaux et secondaires donne directement le lemme suivant :

**Lemme 4.B.7.** *Pour tout entier  $n \geq 2$  et  $m \geq 2$ , on note  $d = \gcd(n, m)$ . On a alors*

$$[D_n^v] \odot [D_m^v] = \left\{ \mathbf{1}, [Z_2^-], [D_d^v], [Z_d] \right\}.$$

### Cas des sous-groupes $D_{2n}^h$

Nous utilisons essentiellement le lemme suivant qui se démontre par un calcul direct :

**Lemme 4.B.8.** *Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note*

$$D_{2n}^h = Z_{2n}^- \bigoplus_{j=0}^{n-1} Z_2^{p_j} \bigoplus_{j=0}^{n-1} Z_2^{\sigma_{q_j}}$$

avec

$$q_j = \mathbf{Q}\left(\mathbf{e}_3; \frac{(2j+1)\pi}{2n}\right), p_j = \mathbf{Q}\left(\mathbf{e}_3; \frac{j\pi}{n}\right), j = 0 \cdots (n-1)$$

Alors

- si  $n$  est pair, il existe deux couples d'axes  $p_k, p_l$ , puis  $q_r, q_s$ , tels que

$$p_k \perp p_l, \quad q_r \perp q_s, \quad p_i \not\perp q_j, \quad \forall i, j.$$

- Si  $n$  est impair il existe un couple  $p_i, q_j$  d'axes perpendiculaires, sachant de plus que

$$p_k \not\perp p_l, \quad \forall k \neq l, \quad q_r \not\perp q_l, \quad \forall r, l.$$

A l'aide d'arguments sur les axes et du lemme 4.B.4, on aboutit à :

**Lemme 4.B.9.** *Pour tout entier  $n \geq 2$  et  $m \geq 2$ , on note  $d_2(m) = \gcd(m, 2)$ ,*

$$i(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ est pair} \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

et  $d = \gcd(n, m)$ . Alors

- Si  $\frac{n}{d}$  ou  $\frac{m}{d}$  est pair,

$$[D_{2n}^h] \odot [Z_{2m}^-] = \{ \mathbf{1}, [Z_{d_2(m)}], [Z_{i(m)}^-], [Z_d] \}.$$

- Si  $\frac{n}{d}$  et  $\frac{m}{d}$  sont impairs,

$$[D_{2n}^h] \odot [Z_{2m}^-] = \{ \mathbf{1}, [Z_{d_2(m)}], [Z_{i(m)}^-], [Z_{2d}^-] \}.$$

Par des arguments sur les axes, la parité et le lemme 4.B.8, on obtient :

**Lemme 4.B.10.** Pour tout entier  $n \geq 2$  et  $m \geq 2$ , on note

$$i(m, n) := \begin{cases} 2 & \text{si } m \text{ est pair et } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} ; d_2(m) := \gcd(m, 2)$$

Alors on a

$$[D_{2n}^h] \odot [D_m^v] = \{ [\mathbf{1}], [Z_{i(m)}^\sigma], [Z_{d_2(m)}], [D_{i(m, n)}^v], [Z_d], [D_d^v] \}.$$

Des arguments du même type permettent aussi d'obtenir le lemme suivant :

**Lemme 4.B.11.** Pour tout entier naturel  $m$  et  $n$  non nuls, on note  $d = \gcd(n, m)$  et

$$\Delta = [D_{2n}^h] \odot [D_{2m}^h].$$

Alors :

- Pour toute valeur de  $d$  :
  - Si  $m$  et  $n$  sont pairs, on a  $\Delta \supset \{ [Z_2], [D_2] \}$  ;
  - Si  $m$  et  $n$  sont impairs, on a  $\Delta \supset \{ [Z_2^-] \}$  ;
  - Sinon  $\Delta \supset \{ [Z_2], [D_2^v] \}$  ;
- Si  $d = 1$ , alors
  - Si  $m$  et  $n$  sont impairs, on a  $\Delta \supset \{ [D_2^v] \}$  ;
  - sinon  $m$  ou  $n$  est pair et  $\Delta \supset \{ [Z_2], [Z_2^-] \}$  ;
- Si  $d \neq 1$ , alors
  - Si  $\frac{m}{d}$  et  $\frac{n}{d}$  sont impairs, on a  $\Delta \supset \{ [Z_{2d}^-], [D_{2d}^h] \}$  ;
  - Sinon  $\frac{m}{d}$  ou  $\frac{n}{d}$  est pair et  $\Delta \supset \{ [Z_d], [D_d], [D_d^v] \}$  ;

### Cas du sous-groupe $\mathcal{O}^-$

Par de simples arguments sur les axes, nous avons :

**Lemme 4.B.12.** Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $d_3(n) = \gcd(3, n)$ . Alors

- Si  $n$  est impair

$$[\mathcal{O}^-] \odot [Z_{2n}^-] = \{ [\mathbf{1}], [Z_2^-], [Z_{d_3(n)}] \}.$$

- Si  $n = 2 + 4k$ ,  $k \in \mathbb{N}$

$$[\mathcal{O}^-] \odot [\mathbb{Z}_{2n}^-] = \{[\mathbf{1}], [\mathbb{Z}_4^-], [\mathbb{Z}_{d_3(n)}]\}.$$

- Si  $n$  est pair et  $4 \nmid n$

$$[\mathcal{O}^-] \odot [\mathbb{Z}_{2n}^-] = \{[\mathbf{1}], [\mathbb{Z}_2], [\mathbb{Z}_{d_3(n)}]\}.$$

**Lemme 4.B.13.** Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $d_2(n) = \gcd(n, 2)$  et  $d_3(n) = \gcd(n, 3)$ . Alors nous avons

$$[\mathcal{O}^-] \odot [\mathbb{D}_n^v] = \{[\mathbf{1}], [\mathbb{Z}_2^-], [\mathbb{Z}_{d_3(n)}], [\mathbb{D}_{d_3(n)}^v], [\mathbb{Z}_{d_2(n)}], [\mathbb{D}_{d_2(n)}^v]\}.$$

Ensuite, à l'aide du lemme 4.B.4 et d'arguments sur les axes :

**Lemme 4.B.14.** Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $d_3(n) := \gcd(n, 3)$

- Si  $n$  est pair et  $n = 2 + 4k$ ,  $k \in \mathbb{N}$

$$[\mathcal{O}^-] \odot [\mathbb{D}_{2n}^h] = \{[\mathbf{1}], [\mathbb{Z}_4^-], [\mathbb{D}_4^h], [\mathbb{Z}_{d_3(n)}], [\mathbb{D}_{d_3(n)}^v]\}.$$

- Si  $n$  est pair et  $4 \mid n$  alors

$$[\mathcal{O}^-] \odot [\mathbb{D}_{2n}^h] = \{[\mathbf{1}], [\mathbb{Z}_2], [\mathbb{D}_2], [\mathbb{D}_2^v], [\mathbb{Z}_{d_3(n)}], [\mathbb{D}_{d_3(n)}^v]\}.$$

- Si  $n$  est impair alors

$$[\mathcal{O}^-] \odot [\mathbb{D}_{2n}^h] = \{[\mathbf{1}], [\mathbb{Z}_2], [\mathbb{Z}_2^-], [\mathbb{D}_2], [\mathbb{D}_2^v], [\mathbb{Z}_{d_3(n)}], [\mathbb{D}_{d_3(n)}^v]\}.$$

**Lemme 4.B.15.** On a

$$[\mathcal{O}^-] \odot [\mathcal{O}^-] = \{[\mathbf{1}], [\mathbb{Z}_2^-], [\mathbb{Z}_4^-], [\mathbb{Z}_3]\}.$$

## 4.C. Normalisateurs des sous-groupes fermés de $O(3)$

Pour tout sous-groupe fermé  $H$  de  $SO(3)$ , son *normalisateur* dans  $SO(3)$  est défini par

$$N(H) := \{g \in SO(3), \quad gHg^{-1} = H\}.$$

Nous avons [AKP14] :

**Lemme 4.C.1.** Les normalisateurs des sous-groupes fermés de  $SO(3)$  sont donnés par

$$\begin{aligned} N(SO(3)) &= SO(3), & N(O(2)) &= O(2), & N(SO(2)) &= O(2), \\ N(\mathcal{O}) &= \mathcal{O}, & N(\mathcal{I}) &= \mathcal{I}, & N(\mathcal{T}) &= \mathcal{O}, \\ N(\mathbf{1}) &= SO(3), & N(\mathbb{Z}_n) &= O(2) \text{ for } n \geq 2, \\ N(\mathbb{D}_n) &= \mathbb{D}_{2n} \text{ for } n \geq 3, \end{aligned}$$

et  $N(D_2) = \mathcal{O}$ . De plus, les groupes quotients associés sont donnés par

$$\begin{aligned} N(\mathrm{SO}(3))/\mathrm{SO}(3) &= \mathbf{1}, & N(\mathrm{O}(2))/\mathrm{O}(2) &= \mathbf{1}, & N(\mathrm{SO}(2))/\mathrm{SO}(2) &= \mathbb{Z}_2, \\ N(\mathcal{O})/\mathcal{O} &= \mathbf{1}, & N(\mathcal{I})/\mathcal{I} &= \mathbf{1}, & N(\mathcal{T})/\mathcal{T} &= \mathbb{Z}_2, \\ N(\mathbf{1})/\mathbf{1} &= \mathrm{SO}(3), & N(\mathbb{Z}_n)/\mathbb{Z}_n &= \mathrm{O}(2) \text{ for } n \geq 2, \\ N(D_n)/D_n &= \mathbb{Z}_2 \text{ for } n \geq 3, \end{aligned}$$

et  $N(D_2)/D_2 = \mathfrak{S}_3$ , est le groupe symétrique à 3 éléments.

Si on se donne maintenant un sous-groupe fermé  $H$  de  $\mathrm{O}(3)$ , on note  $N_O(H)$  son normalisateur dans  $\mathrm{O}(3)$  :

$$N_O(H) := \left\{ g \in \mathrm{O}(3), \quad gHg^{-1} = H \right\}$$

On note  $\pi$  le projecteur naturel de  $\mathrm{O}(3)$  sur  $\mathrm{SO}(3)$ . On a alors le lemme suivant [CLM90] :

**Lemme 4.C.2.** *Pour tout sous-groupe fermé  $H$  de  $\mathrm{O}(3)$*

$$N_O(H) = N(\pi(H)) \cap N(H \cap \mathrm{SO}(3)) \oplus \mathbb{Z}_2$$

**Lemme 4.C.3.** *Les normalisateurs des sous-groupes de  $\mathrm{O}(3)$  de type III sont donnés par*

$$\begin{aligned} N_O(\mathbb{Z}_2^-) &= \mathrm{O}(2) \oplus \mathbb{Z}_2, & N_O(\mathbb{Z}_{2n}^-) &= \mathrm{O}(2) \oplus \mathbb{Z}_2, & N_O(D_2^v) &= D_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \\ N_O(D_n^v) &= D_{2n} \oplus \mathbb{Z}_2 (n \geq 3), & N_O(D_{2n}^h) &= D_{2n} \oplus \mathbb{Z}_2 (n \geq 2), & N_O(\mathcal{O}^-) &= \mathcal{O} \oplus \mathbb{Z}_2, \\ N_O(\mathrm{O}(2)^-) &= \mathrm{O}(2) \oplus \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

De plus, les groupes quotients sont donnés par

$$\begin{aligned} N_O(\mathbb{Z}_2^-)/\mathbb{Z}_2^- &= \mathrm{O}(2) \oplus \mathbb{Z}_2 & N_O(\mathbb{Z}_{2n}^-)/\mathbb{Z}_{2n}^- &= \mathrm{O}(2) \oplus \mathbb{Z}_2 & N_O(D_2^v)/D_2^v &= \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \\ N_O(D_n^v)/D_n^v &= \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 (n \geq 3) & N_O(D_{2n}^h)/D_{2n}^h &= \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 (n \geq 2) & N_O(\mathcal{O}^-)/\mathcal{O}^- &= \mathbb{Z}_2 \\ N_O(\mathrm{O}(2)^-)/\mathrm{O}(2)^- &= \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

*Démonstration.* Par le lemme 4.C.2 et les résultats de [AKP14; IG84], on en déduit la première partie du lemme. Ensuite, pour le groupe quotient  $N_O(\mathbb{Z}_2^-)/\mathbb{Z}_2^-$ , on exploite le fait que  $\mathbb{Z}_2 = \{1, -\sigma\}$ . De plus, nous savons que

$$\mathrm{O}(2) = \mathrm{SO}(2) \cup \sigma\mathrm{SO}(2).$$

Ensuite, pour  $(g, \varepsilon) \in N_O(\mathbb{Z}_2^-) = \mathrm{O}(2) \oplus \mathbb{Z}_2$ , on définit

$$\psi_1(g, \varepsilon) = (\varphi_1(g), \kappa_1(g)\varepsilon)$$

où  $\varphi_1$  est le projecteur  $\mathrm{O}(2) = N(\mathbb{Z}_2) \longrightarrow N(\mathbb{Z}_2)/\mathbb{Z}_2$ . On définit ensuite

$$\kappa_1(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in \mathrm{SO}(2) \\ -1 & \text{si } g \in \sigma\mathrm{SO}(2) \end{cases} .$$



On vérifie alors que  $\psi_1$  est un morphisme surjectif dont le noyau est exactement  $O(2)$ . Cela permet d'obtenir le premier groupe quotient.

Ensuite, pour le quotient  $N_O(D_{2n}^h)/D_{2n}^h$ , on exploite la rotation  $\mathbf{r}_{2n}$  d'angle  $\frac{\pi}{n}$  autour de l'axe des  $z$ . Ainsi, on a

$$D_{2n} = D_n \cup (\mathbf{r}_{2n}D_n) \text{ et } D_{2n}^h = D_n \cup (-\mathbf{r}_{2n}D_n)$$

et donc on peut exploiter le même type de morphismes que précédemment. On démontre tous les autres cas de la même façon, excepté le cas du sous-groupe  $D_2^g$ . Pour ce dernier cas, on trouve une preuve dans [CLM90].  $\square$

## 5. Invariants et covariants des formes binaires

D’après le théorème de Hilbert 2.3.5, les algèbres d’invariants d’espaces de tenseurs sont de type fini. Un tel résultat est en fait la généralisation d’un résultat précédemment établi par Gordan [Gor68] au sujet des algèbres de *covariants* des formes binaires, dont la preuve est constructive.

Au cœur de cette preuve figure la *méthode symbolique* qui s’interprète naturellement en termes de *morphismes équivariants* définis sur des produits tensoriels de formes binaires. On établit alors que certaines familles de projecteurs de Clebsch–Gordan, encore appelé *transvectants*, forment des bases (vectorielles) naturelles de ces morphismes équivariants. Un covariant étant un morphisme équivariant défini sur des tenseurs *symétriques*, on en déduit ainsi une famille génératrice *infinie* de l’algèbre des covariants.

La preuve de finitude de Gordan consiste à réduire cette famille génératrice, ce qui se fait par l’intermédiaire des *covariants moléculaires*. Il s’agit d’une représentation graphique de certains covariants obtenus à partir de morphismes équivariants représentés par des *molécules*.

Nous proposons ensuite de redémontrer, par des approches élémentaires d’algèbre linéaire, des relations importantes sur les covariants : les séries de Gordan ainsi que les relations quadratiques d’Abdesselam–Chipalkatti.

### 5.1. Théorie classique des invariants

La théorie classique des invariants a pour origine des travaux de Gauss [Gau86] ou encore de Boole [Boo41], au XIX<sup>e</sup> siècle. La problématique<sup>a</sup> était initialement portée sur le caractère fini de l’algèbre des invariants (ou des covariants) des *formes binaires*, mais aussi sur la détermination *explicite* d’une famille génératrice éventuelle. Nous reprenons donc cette approche *effective* au vu des objectifs fixés par notre travail, qui consiste notamment à déterminer une famille génératrice finie des invariants de l’élasticité.

Cette section présente les notions et résultats de base de cette théorie classique des invariants. Le lecteur peut se reporter à [GY10 ; Olv99 ; Stu08] pour plus de détails.

Nous avons déjà défini dans la [sous-section 3.3.2](#) les espaces vectoriels complexes de formes *d*-aires. Nous allons maintenant nous placer dans le cas spécifique des formes binaires.

**Définition 5.1.1.** L’espace vectoriel complexe des formes binaires de degré  $n$ , noté  $S_n$ ,

---

a. De nombreux articles et travaux abordent à la fois l’aspect historique de cette théorie [Par89 ; Cri86 ; Cri88], mais aussi son aspect sociologique [Fis66] ou encore épistémologique [Bon04].

est l'espace des polynômes homogènes de degré  $n$  sur  $\mathbb{C}^2$ . On écrit <sup>b</sup> :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \sum_{i=0}^n \binom{k}{k-i} a_i x^{k-i} y^i, \quad (x, y) \in \mathbb{C}^2.$$

Il s'agit d'un espace vectoriel de dimension  $n + 1$ .

Nous avons sur  $S_n$  une action naturelle des groupes  $GL(2, \mathbb{C})$ ,  $SL(2, \mathbb{C})$  et  $SU(2)$ . Pour tout élément  $g$  de l'un de ces groupes, cette action est donnée par

$$(g \cdot \mathbf{f})(\mathbf{x}) := \mathbf{f}(g^{-1} \cdot \mathbf{x}). \quad (5.1.1)$$

Un résultat classique de la théorie des représentations des groupes [FH91 ; Olv99 ; Ste94] nous assure que la représentation de chacun de ces groupes sur  $S_n$  est *irréductible*.

Nous pouvons maintenant introduire la notion d'invariants et de covariants de formes binaires. Déjà, l'action de  $SL(2, \mathbb{C})$  sur  $S_n$  entraîne une action naturelle de  $SL(2, \mathbb{C})$  sur l'algèbre  $\mathbb{C}[S_n]$ . Pour tout polynôme  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}[S_n]$  on note :

$$(g \cdot \mathbf{p})(\mathbf{f}) := \mathbf{p}(g^{-1} \cdot \mathbf{f}).$$

**Définition 5.1.2.** Pour tout espace  $V := S_{n_1} \oplus \cdots \oplus S_{n_s}$  de formes binaires, l'algèbre des polynômes  $SL(2, \mathbb{C})$ -invariants est définie par

$$\mathbf{Inv}(V) := \mathbb{C}[V]^{SL(2, \mathbb{C})} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{C}[V], \quad g \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p}, \quad \forall g \in SL(2, \mathbb{C})\}.$$

On peut ensuite considérer l'action naturelle de  $SL(2, \mathbb{C})$  sur l'espace  $V \oplus \mathbb{C}^2$  et l'algèbre des covariants :

**Définition 5.1.3.** Pour tout espace  $V := S_{n_1} \oplus \cdots \oplus S_{n_s}$  de formes binaires, l'algèbre des *covariants* de  $V$  est définie par :

$$\mathbf{Cov}(V) := \mathbb{C}[V \oplus \mathbb{C}^2]^{SL(2, \mathbb{C})}.$$

L'algèbre  $\mathbf{Cov}(V)$  possède une bigraduation naturelle, l'une en les coefficients de la forme  $\mathbf{f} \in V$ , appelée *degré* du covariant, et l'autre en les variables  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ , appelée *ordre* du covariant. Pour deux entiers naturels  $d$  et  $k$  quelconques, on notera  $\mathbf{Cov}_{d,k}(V)$  le sous-espace vectoriel formé des covariants de degré  $d$  et d'ordre  $k$ . En particulier,  $\mathbf{Inv}(V)$  correspond aux covariants d'ordre 0. On peut ainsi écrire

$$\mathbf{Cov}(V) = \bigoplus_{d \geq 0, k \geq 0} \mathbf{Cov}_{d,k}(V).$$

Remarquons aussi que, lorsque  $V = S_{n_1} \oplus \cdots \oplus S_{n_s}$  ( $s \geq 2$ ), les algèbres  $\mathbf{Inv}(V)$  et  $\mathbf{Cov}(V)$  possèdent une multigraduation en chaque  $\mathbf{f}_i \in S_{n_i}$ .

*Remarque 5.1.4.* Le déterminant sur  $\mathbb{C}^2$ , préservé par  $SL(2, \mathbb{C})$ , fournit un isomorphisme entre  $\mathbb{C}^2$  et son dual  $S_1 = (\mathbb{C}^2)^*$ . Ainsi

$$\mathbb{C}[V \oplus \mathbb{C}^2]^{SL(2, \mathbb{C})} \simeq \mathbb{C}[V \oplus S_1]^{SL(2, \mathbb{C})} = \mathbf{Inv}(V \oplus S_1).$$

---

b. La présence des coefficients binomiaux a pour seul objectif de simplifier les calculs.

*Exemple 5.1.5.* Soit une forme quadratique  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$ . Alors, pour tout élément

$$g := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}),$$

on a

$$(g \cdot \mathbf{f})(\mathbf{x}) = (\delta^2 a_0 - 2\delta\gamma a_1 + \gamma^2 a_2)x^2 + 2[(\alpha\delta + \beta\gamma)a_1 - \alpha\gamma a_2 - \beta\delta a_0]xy + (\beta^2 a_0 - 2\alpha\beta a_1 + \alpha^2 a_2)y^2.$$

Par un calcul direct, on vérifie que le *discriminant*

$$\Delta(\mathbf{f}) = 4(a_1^2 - a_0 a_2)$$

est un invariant. Pour un élément  $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ , notons que

$$\Delta(g \cdot \mathbf{f}) = (\det(g))^{-2} \Delta(\mathbf{f}).$$

Remarquons alors que, dans l'approche classique [Olv99], on étudie en fait l'action du groupe  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  sur l'espace  $S_n$ . Dans ce cas, un invariant  $I$  est caractérisé par la relation  $I(g \cdot \mathbf{f}) = (\det(g))^{-w} I(\mathbf{f})$ , pour un certain *poids*  $w$ .

Il est clair que, pour tout entier naturel  $n$ , la forme  $\mathbf{f} \in S_n$  est un covariant de degré 1 et d'ordre  $n$ . Ensuite, le lemme suivant est une conséquence direct du lemme 5.2.1

**Lemme 5.1.6.** *Pour tout entier  $n \geq 2$ , le Hessien d'une forme  $\mathbf{f}$ , défini par*

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x \partial y} \right)^2,$$

*est un covariant de degré 2 et d'ordre  $2n - 4$ .*

*Remarque 5.1.7.* La notion de *covariant* peut être définie dans un cadre bien plus général [KP00]. Si on se donne, en effet, deux représentations linéaires  $V$  et  $W$  d'un même groupe  $G$ , on peut définir un *covariant* de  $V$  de type  $W$  comme une application  $G$  équivariante  $V \rightarrow W$ ; c'est-à-dire une application telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ V & \longrightarrow & W \end{array}$$

Dans le cas des formes binaires, tout covariant d'ordre  $k$  est associé à un morphisme  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  équivariant

$$\mathbf{h} : V \rightarrow S_k.$$

En fixant une base  $x^i y^{k-i}$  ( $i = 0, \dots, k$ ) de  $S_k$ , un tel covariant est de degré  $d$  si on peut écrire

$$\mathbf{h}(\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^k \mathbf{h}_i(\mathbf{f}) x^i y^{k-i},$$

où chaque  $\mathbf{h}_i(\mathbf{f})$  est un polynôme de degré  $d$  en les coordonnées de  $\mathbf{f} \in V$ .

Par cette remarque, on peut donc voir un covariant de degré  $d$  comme un *morphisme équivariant* de l'espace  $S^d(V)$  (produit tensoriel symétrique) dans  $S_k$ . On note

$$\text{Mor}_{\text{SL}(2,\mathbb{C})}(S^d(V), S_k) \sim \mathbf{Cov}_{d,k}(V)$$

l'espace vectoriel associé à ces morphismes.

Rappelons alors la *décomposition de Clebsch–Gordan* sur les espaces de formes binaires :

**Théorème 5.1.8** (Clebsch–Gordan). *Pour tout entier naturel  $n$  et  $p$ , il existe un isomorphisme  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  équivariant entre  $S_n \otimes S_p$  et*

$$\bigoplus_{r=0}^{\min(n,p)} S_{n+p-2r}$$

Par ce théorème, on en déduit que, pour  $0 \leq r \leq \min(n, p)$ , l'espace

$$\text{Mor}_{\text{SL}(2,\mathbb{C})}(S_n \otimes S_p, S_{n+p-2r})$$

est de dimension 1. Il existe donc un unique projecteur (modulo un facteur près)

$$\pi_r : S_n \otimes S_p \longrightarrow S_{n+p-2r}$$

qui correspond à l'opération de *transvection*.

Ces observations sont au cœur de la *méthode symbolique*, qui consiste donc à travailler sur des morphismes équivariants *définis sur des produits tensoriels* (non symétriques). La difficulté majeure consiste ensuite à quotienter par le groupe symétrique. Nous reviendrons sur ces questions dans les [sous-section 5.2.2](#) et [5.3.2](#).

Notons qu'il existe aussi la notion de *semi-invariants*, qui concerne des invariants du groupe de Borel  $B_+ \subset \text{GL}(2, \mathbb{C})$  défini par :

$$B_+ := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C} \right\}.$$

**Définition 5.1.9.** L'algèbre des polynômes *semi-invariants* est l'algèbre  $\mathbb{C}[V]^{B_+}$  des polynômes  $B_+$  invariants sur  $V$ .

En fait, cette algèbre s'identifie à l'algèbre des covariants [\[Bri96\]](#) :

**Proposition 5.1.10.** *Pour tout espace  $V$  de formes binaires, l'algèbre des covariants  $\mathbf{Cov}(V)$  est isomorphe à l'algèbre  $\mathbb{C}[V]^{B_+}$  des polynômes semi-invariants.*

*Remarque 5.1.11.* On peut exhiber un tel isomorphisme à l'aide du *monôme de tête* d'un covariant :

$$\mathbf{h}(\mathbf{f}, \mathbf{x}) \mapsto \varphi(\mathbf{h})(\mathbf{f}) := \mathbf{h}(\mathbf{f}, (1, 0)), \quad \mathbf{Cov}(V) \longrightarrow \mathbb{C}[V]^{B_+}.$$

On définit ensuite la réciproque sur chaque composante  $S_n \subset V$ . Pour cela, on note  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  les coordonnées d'une forme binaire  $\mathbf{f} \in S_n$ , et on définit l'opérateur

différentiel <sup>c</sup>

$$\Delta := na_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + (n-1)a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + (n-2)a_3 \frac{\partial}{\partial a_2} + \dots$$

Pour tout  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}[S_n]^{B+}$ , on note  $(\alpha_1, \alpha_2)$  (où  $\alpha_1 \geq \alpha_2$ ) le poids de  $\mathbf{p}$  par rapport au groupe des matrices diagonales. On définit alors

$$\mathbf{h} := \sum_{i=0}^k \mathbf{p}_i x^{k-i} y^i, \quad \mathbf{p}_i := \frac{1}{i!} \Delta^i \mathbf{p}, \quad k := \alpha_1 - \alpha_2,$$

et on peut vérifier directement que  $\varphi(\mathbf{h}) = \mathbf{p}$ . Notons que, dans ce cas,  $\alpha_2$  est appelé le *poids* du covariant  $\mathbf{h}$ . Un autre approche [Bri96] consiste à écrire directement

$$\mathbf{h}(\mathbf{f}, \mathbf{x}) := \frac{1}{x^{\alpha_2}} \mathbf{p}(g(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}), \quad g(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y & x \end{pmatrix}, \quad x \neq 0,$$

sachant que cette quantité définie pour  $x \neq 0$  s'étend naturellement en  $x = 0$ .

## 5.2. Covariants et morphismes $SL_2(\mathbb{C})$ équivariants

Nous détaillons ici comment réinterpréter le *calcul symbolique* des anciens en termes de *morphismes*  $SL(2, \mathbb{C})$  équivariants. Comme nous l'avons déjà souligné dans la section précédente, nous avons l'identification

$$\mathbf{Cov}(V) \simeq \bigoplus_{d \geq 0, k \geq 0} \text{Mor}_{SL(2, \mathbb{C})}(S^d(V), S_k).$$

Mais par l'inclusion évidente

$$\text{Mor}_{SL(2, \mathbb{C})}(S^d(V), S_k) \subset \text{Mor}_{SL(2, \mathbb{C})}(\otimes^d(V), S_k),$$

nous pouvons considérer des morphismes définis sur des produits tensoriels non nécessairement symétriques. Pour *construire* de tels morphismes, les anciens utilisaient à la fois des *formes symboliques* ainsi que des *transvectants*. Dans notre approche, nous allons définir certains morphismes à l'aide de *molécules* <sup>d</sup>, qui donnent ainsi des représentations graphiques des formes symboliques, ce qui nous permet ensuite de définir des *covariants moléculaires*. La *sous-section 5.2.3* précise le lien entre ces covariants moléculaires et les transvectants.

En travaillant donc sur des morphismes, définis sur des produits tensoriels quelconque, nous pouvons exploiter la *décomposition de Clebsch–Gordan*. Dans le cas d'un produit tensoriel  $S_n \otimes S_p$ , les *composantes isotypiques* (remarque 3.1.8) de la décomposition en irréductibles ne contiennent qu'un seul espace. Dans le cas d'un produit tensoriel à plus de trois brins, nous voyons apparaître des réécritures dans certaines composantes isotypiques, qui sont nécessairement à la base des *relations* (les fameuses *syzygies*) sur les covariants.

c. Cet opérateur correspond à l'action d'un élément de l'algèbre de Lie de  $SL(2, \mathbb{C})$  sur  $\mathbb{C}[S_n]$ .

d. Notons que les molécules définies par Olver [Olv99] définissent des *opérateurs différentiels* et non des morphismes équivariants. Ce point sera repris et détaillé dans la remarque 5.2.23.

Mais en travaillant sur les espaces de morphismes, nous avons pu déterminer des *bases vectorielles* (théorème 5.3.7) sur chacune de ces composantes isotypiques. Par passage au quotient par le groupe symétrique, nous avons pu retrouver les séries de Gordan (proposition 5.3.11) et les relations quadratiques d'Abdesselam–Chipalkatti (théorème 5.3.14). Notons que l'une des difficultés de cette théorie, du moins dans son aspect effectif, est justement ce passage au quotient : que ce soit par le calcul symbolique ou par le calcul *umbral* [KR84], la symétrisation des relations reste le passage le plus délicat.

### 5.2.1. Opérateurs bi-différentiels et transvectants

Dans un premier temps, nous définissons l'*opérateur de Cayley*, qui est un opérateur bi-différentiel agissant sur le produit tensoriel de deux formes binaires<sup>e</sup> :

$$\Omega_{\alpha\beta} := \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} & \frac{\partial}{\partial x_\beta} \\ \frac{\partial}{\partial y_\alpha} & \frac{\partial}{\partial y_\beta} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial y_\beta} - \frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial x_\beta} \quad (5.2.1)$$

Nous avons directement [Olv99] :

**Lemme 5.2.1.** *Pour tout entier  $n$  et  $p$  plus grands que 1, l'opérateur de Cayley*

$$\Omega_{\alpha\beta} : \mathbb{S}_n \otimes \mathbb{S}_p \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1} \otimes \mathbb{S}_{p-1}$$

*est un opérateur  $SL(2, \mathbb{C})$  équivariant.*

**Définition 5.2.2.** Etant donné deux couples de variables  $\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta$ , on définit l'*opérateur de polarisation*  $\sigma_{\alpha\beta}$  par

$$\sigma_{\alpha\beta} := x_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} + y_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\beta} \quad (5.2.2)$$

On note aussi

$$\sigma_\alpha := x_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + y_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \quad \tilde{\sigma}_\alpha := x_\alpha \frac{\partial}{\partial x} + y_\alpha \frac{\partial}{\partial y}$$

Nous avons directement [Olv99] :

**Lemme 5.2.3.** *Pour tout symbole  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varepsilon$ , les opérateurs de Cayley  $\Omega_{\alpha\beta}, \Omega_{\alpha\gamma}, \dots$  et les opérateurs de polarisation  $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \dots$  commutent. De plus, pour tout symbole  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ , on a*

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\varepsilon} - \sigma_{\gamma\varepsilon} \sigma_{\alpha\beta} &= \delta_{\gamma\beta} \sigma_{\alpha\varepsilon} - \delta_{\alpha\varepsilon} \sigma_{\gamma\beta} \\ \Omega_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\varepsilon} - \sigma_{\gamma\varepsilon} \Omega_{\alpha\beta} &= \delta_{\gamma\beta} \Omega_{\alpha\varepsilon} - \delta_{\alpha\gamma} \Omega_{\beta\varepsilon} \end{aligned}$$

Enfin, on définit un opérateur de *trace* :

$$\mu : \mathbf{h}(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta) \mapsto \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \mathbb{S}_n \otimes \mathbb{S}_p \longrightarrow \mathbb{S}_{n+p}.$$

e. Bien évidemment, un tel opérateur est défini sur l'espace des fonctions analytiques complexes mais nous nous limitons au cas des formes binaires.

En l'absence d'ambiguïté, on désigne par la même lettre  $\mu$  cet opérateur de trace, quelque soit les symboles qui interviennent. Dans le cas contraire, nous noterons

$$\mu_\lambda(\mathbf{f}(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta)) := [\mathbf{f}(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta)]_{|\mathbf{x}_\alpha=\mathbf{x}_\beta=\mathbf{x}_\lambda}.$$

Notons que, lorsque  $r > \min(n, p)$ , l'opérateur  $\Omega_{\alpha\beta}^r$  est nul sur  $S_n \otimes S_p$ .

**Définition 5.2.4.** Un triplet  $(n, p, r)$  d'entiers naturels est dit *admissible* si  $r \leq \min(n, p)$ .

**Définition 5.2.5** (Transvectants). Etant donné deux formes binaires  $\mathbf{f} \in S_n$  et  $\mathbf{g} \in S_p$  ainsi qu'un entier naturel  $r$  quelconque, on définit le *transvectant* d'index  $r$  des formes  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  comme étant la forme binaire

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_r := \frac{(n-r)! (p-r)!}{n! p!} \mu \circ \Omega_{\alpha\beta}^r(\mathbf{f}(\mathbf{x}_\alpha)\mathbf{g}(\mathbf{x}_\beta)) \in S_{n+p-2r}.$$

Si le triplet  $(n, p, r)$  est admissible, le morphisme associé à cette opération est appelé *projecteur de Clebsch–Gordan*

$$\begin{aligned} \pi_r : S_n \otimes S_p &\longrightarrow S_{n+p-2r} \\ \mathbf{f} \otimes \mathbf{g} &\longmapsto \pi_r(\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}) := (\mathbf{f}, \mathbf{g})_r \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

*Remarque 5.2.6.* La définition des transvectants que nous adoptons est celle donnée dans les textes classiques [GY10]. Sans découpler les variables du produit de deux formes binaires  $\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})$ , on a la formule directe

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_r = \frac{(n-r)! (p-r)!}{n! p!} \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \frac{\partial^r \mathbf{f}}{\partial^{r-i} x \partial^i y} \frac{\partial^r \mathbf{g}}{\partial^{r-i} y \partial^i x}.$$

Comme souligné plus haut, l'espace vectoriel associé à ces morphismes étant de dimension 1, ils se déduisent les uns des autres par un facteur multiplicatif. On trouve ainsi dans [Olv99] une autre définition des transvectants, à savoir la forme binaire

$$\mu \circ \Omega_{\alpha\beta}^r(\mathbf{f}(\mathbf{x}_\alpha)\mathbf{g}(\mathbf{x}_\beta)) \quad (5.2.4)$$

*Remarque 5.2.7.* Par l'isomorphisme

$$\mathbf{Cov}(S_n) \simeq \bigoplus_{d \geq 0, k \geq 0} \text{Mor}_{\text{SL}(2, \mathbb{C})}(S^d(S_n), S_k)$$

on peut obtenir tous les covariants de degré 2 d'une forme binaire, provenant des morphismes  $\text{Mor}_{\text{SL}(2, \mathbb{C})}(\otimes^2(S_n), S_k)$ , ce qui donne exactement comme covariants les transvectants

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f})_2, \quad (\mathbf{f}, \mathbf{f})_4, \dots$$

Les transvectants d'indices impairs étant clairement nul, du fait de l'antisymétrie de l'opérateur de Cayley.

Un des enjeux consiste à étudier comment on peut *effectivement* décomposer un produit tensoriel  $S_n \otimes S_p$ . C'est en fait à partir des transvectants qu'on peut obtenir un tel isomorphisme *explicite* entre  $S_n \otimes S_p$  et  $\bigoplus_{r=0}^{\min(n,p)} S_{n+p-2r}$ . Avant cela, il nous faut définir



certaines notations, puis donner quelques résultats techniques. A l'aide de ces notations et de ces résultats, on peut alors exhiber des *sections* des projecteurs de Clebsch–Gordan (proposition 5.2.13).

**Définition 5.2.8.** Pour deux couples de variables  $\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta$  on désigne par  $(\mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\beta)$  la quantité

$$(\mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\beta) := x_\alpha y_\beta - y_\alpha x_\beta.$$

De même, en notant  $a = (a_0, a_1) \in \mathbb{C}^2$  et  $b = (b_0, b_1) \in \mathbb{C}^2$ , on désigne par  $(ab)$  le déterminant

$$(ab) := a_0 b_1 - a_1 b_0.$$

*Remarque 5.2.9.* Si nous donnons pour  $\mathbf{f} \in \mathbb{S}_n$  et  $\mathbf{g} \in \mathbb{S}_p$  des *puissances de formes linéaires*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_\alpha) = (a\mathbf{x}_\alpha)^n := (a_0 x_\alpha + a_1 y_\alpha)^n, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}_\beta) = (b\mathbf{x}_\beta)^n := (b_0 x_\beta + b_1 y_\beta)^p$$

on a directement, pour tout  $r \leq \min(n, p)$

$$((a\mathbf{x}_\alpha)^n, (b\mathbf{x}_\beta)^n)_r = (ab)^r (a\mathbf{x})^{n-r} (b\mathbf{x})^{n-r}. \quad (5.2.5)$$

La *méthode symbolique* consiste à ne considérer que des puissances de formes linéaires, le transvectant de deux formes étant défini dans [GY10] par (5.2.5).

Notons d'ailleurs que les puissances de formes linéaires jouent un rôle particulier pour l'espace des formes binaires :

**Lemme 5.2.10.** *Les puissances des formes linéaires engendrent l'espace vectoriel  $\mathbb{S}_n$ .*

*Démonstration.* L'idée est d'exprimer chaque forme  $x^{n-i}y^i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) en fonction de puissances de formes linéaires. Pour cela, notons  $\zeta$  une racine  $n$ -ième de l'unité et  $i_0$  un entier compris entre 1 et  $n-1$ . On peut alors directement établir que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{k(n-i_0)} (x + \zeta^k y)^n = \sum_{i=0}^n \left( \sum_{k=0}^{n-1} (\zeta^{i+n-i_0})^k \right) \binom{n}{i} x^{n-i} y^i.$$

Or, comme la somme des puissances de  $\zeta^{i+n-i_0}$  est nulle sauf pour  $i = i_0$ , on en déduit le lemme.  $\square$

## Décomposition de Clebsch–Gordan explicite

Le lemme suivant s'obtient par un simple calcul :

**Lemme 5.2.11.** *Pour tout triplet  $(n, p, r)$  d'entiers naturels admissibles et pour tout élément  $\mathbf{h} \in \mathbb{S}_n \otimes \mathbb{S}_p$  homogène de degré  $n-r$  en  $\mathbf{x}_\alpha$  et homogène de degré  $p-r$  en  $\mathbf{x}_\beta$ , on a*

$$\Omega_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\beta)^r \mathbf{h} = r(n+p-r+1)(\mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\beta)^{r-1} \mathbf{h} + (\mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\beta)^r \Omega_{\alpha\beta} \mathbf{h}$$

D'où, par une récurrence directe :

**Corollaire 5.2.12.** *Pour tout triplet d'entiers  $(n, p, r)$  admissibles et pour tout élément  $\mathbf{h} \in \mathbb{S}_n \otimes \mathbb{S}_p$  homogène de degré  $n - r$  en  $\mathbf{x}_\alpha$  et homogène de degré  $p - r$  en  $\mathbf{x}_\beta$ , on a*

$$\begin{aligned}\mu \circ \Omega_{\alpha\beta}^j [(\mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\beta)^r \mathbf{h}] &= 0, \quad j < r \\ \mu \circ \Omega_{\alpha\beta}^r [(\mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\beta)^r \mathbf{h}] &= \frac{r!(n+p-r+1)!}{(n+p-2r+1)!} \mathbf{h}\end{aligned}$$

**Proposition 5.2.13.** *Pour tout triplet d'entiers  $(n, p, r)$  admissibles, le morphisme*

$$\iota_r := \frac{n!}{(n-r)!} \frac{p}{(p-r)!} \frac{n+p-2r+1}{r!(n+p-r+1)!} (\mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\beta)^r \tilde{\sigma}_\alpha^{n-r} \tilde{\sigma}_\beta^{p-r}, \quad \mathbb{S}_{n+p-2r} \longrightarrow \mathbb{S}_n \otimes \mathbb{S}_p$$

*est une section de  $\pi_r$ ,  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  équivariante.*

*Démonstration.* Il est clair que  $\iota_r$  est  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  équivariant. On sait alors par le lemme de Schur que

$$\pi_r \circ \iota_r : \mathbb{S}_{n+p-2r} \longrightarrow \mathbb{S}_{n+p-2r}$$

est soit nul soit une homothétie. En utilisant le corollaire 5.2.12, il suffit alors de vérifier sur  $\mathbf{h} := x^{n+p-2r}$  que  $\pi_r \circ \iota_r$  est bien l'identité.  $\square$

**Corollaire 5.2.14.** *Pour toute forme binaire  $\mathbf{h} \in \mathbb{S}_n \otimes \mathbb{S}_p$  on a*

$$\mathbf{h} = \sum_{r=0}^{\min(n,p)} \iota_r \circ \pi_r(\mathbf{h}).$$

*Ce qui donne, pour toute forme binaire  $\mathbf{f} \in \mathbb{S}_n$  et  $\mathbf{g} \in \mathbb{S}_p$*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_\alpha) \mathbf{g}(\mathbf{x}_\beta) = \sum_{r=0}^{\min(n,p)} \lambda(n, p, r) (\mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\beta)^r \tilde{\sigma}_\alpha^{n-r} \tilde{\sigma}_\beta^{p-r}(\mathbf{f}, \mathbf{g})_r$$

*avec*

$$\lambda(n, p, r) := \frac{n!}{(n-r)!} \frac{p}{(p-r)!} \frac{n+p-2r+1}{r!(n+p-r+1)!}$$

*Démonstration.* Il s'agit d'une conséquence directe de la proposition 5.2.13, en remarquant de plus que pour  $r \neq k$  on a  $\pi_r \circ \iota_k = 0$ .  $\square$

*Remarque 5.2.15.* Ce résultat fournit une expression explicite de la décomposition de Clebsch-Gordan. On pourra trouver des résultats similaires dans [Abd12; AC09] et [Fla83; Kir76]. Une telle décomposition figure aussi dans [GY10].

## 5.2.2. Covariants moléculaires

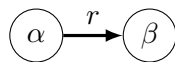
Les transvectants, l'opérateur de Cayley et les opérateurs de polarisation (5.2.5, 5.2.1 et 5.2.2) permettent de construire de façon naturelle des morphismes  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  équivariants. Pour ne plus faire apparaître l'opérateur de trace et pour obtenir des relations simples sur les opérateurs, nous travaillerons désormais avec le projecteur de Clebsch-Gordan

$$\hat{\pi}_r := n!p!\pi_r : \mathbb{S}_n \otimes \mathbb{S}_p \longrightarrow \mathbb{S}_{n+p-2r},$$

qui peut aussi s'écrire

$$\hat{\pi}_r = \Omega_{\alpha\beta}^r \sigma_\alpha^{n-r} \sigma_\beta^{p-r}$$

Un tel monôme sera représenté par un graphe orienté et coloré (digraphe coloré)



où l'atome  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) est coloré par  $S_n$  (resp.  $S_p$ ).

Plus généralement, pour un espace  $V = S_{n_1} \oplus \dots \oplus S_{n_s}$  de formes binaires, nous allons définir des applications équivariantes, multilinéaires, de  $V$  sur un certain espace  $S_k$  à partir de monômes en  $\Omega_{\alpha\beta}, \sigma_\gamma, \dots$  et étiquetées par des *molécules* (digraphes colorés).

Notons ainsi  $\mathcal{V}(D) = \{\alpha, \beta, \dots, \varepsilon\}$  l'ensemble des sommets d'un digraphe coloré  $D$  et  $\mathcal{E}(D)$  l'ensemble de ses arêtes. Chaque sommet  $\alpha$  de  $D$ , aussi désigné par le terme d'*atome*, est coloré par un facteur  $S(\alpha) := S_n$  de  $V$ . Dans ce cas, la *valence* de  $\alpha$  est  $\text{val}(\alpha) := n$ . Notons ensuite respectivement  $o(e)$ ,  $t(e)$  et  $w(e)$  l'origine, l'extrémité et le poids d'une arête  $e \in \mathcal{E}(D)$ . Finalement, la valence de  $\alpha$  dans le digraphe  $D$  est la *valence libre* de l'atome  $\alpha \in \mathcal{V}(D)$  :

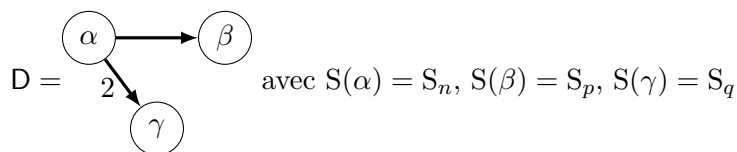
$$\text{val}_D(\alpha) := \text{val}(\alpha) - \sum_{\alpha=o(e) \text{ or } \alpha=t(e)} w(e).$$

**Définition 5.2.16.** Le morphisme  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ -equivariant  $\phi_D$ , défini par la molécule  $D$  est donné par

$$\phi_D := \begin{cases} \prod_{e \in \mathcal{E}(D)} \Omega_{o(e)t(e)}^{w(e)} \prod_{\alpha \in \mathcal{V}(D)} \sigma_\alpha^{\text{val}_D(\alpha)} & \text{si } \text{val}_D(\alpha) \geq 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{V}(D) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Lorsque  $\phi_D \neq 0$ , il s'agit d'un morphisme de  $S(\alpha) \otimes \dots \otimes S(\varepsilon)$  vers  $S_k$  où  $k = \text{val}_D(\alpha) + \dots + \text{val}_D(\varepsilon)$ .

*Exemple 5.2.17.* Soit  $V = S_n \oplus S_p \oplus S_q$  ( $n, p, q \geq 4$ ) et



Dans ce cas, on a  $\text{val}_D(\alpha) = n - 3$ ,  $\text{val}_D(\beta) = p - 1$ ,  $\text{val}_D(\gamma) = q - 2$  et la molécule  $D$  représente le morphisme  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  equivariant :

$$\Omega_{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\gamma}^2 \sigma_\alpha^{n-3} \sigma_\beta^{p-1} \sigma_\gamma^{q-2} : S_n \otimes S_p \otimes S_q \longrightarrow S_r \text{ avec } r = n + p + q - 6$$

Il existe des relations sur les morphismes  $\phi_D$ , qui proviennent de certaines relations fondamentales sur les opérateurs. Notons  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  quatre atomes de valence respective  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  et  $n_4$ .

1. La première relation provient de l'égalité

$$\Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha}.$$

Ce qui donne la relation graphique :

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \circ \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \beta \\ \circ \end{array} = - \begin{array}{c} \alpha \\ \circ \end{array} \longleftarrow \begin{array}{c} \beta \\ \circ \end{array} \quad (5.2.6)$$

2. La deuxième provient de la relation de Plücker [Olv99] :

$$\Omega_{\alpha\beta\sigma\gamma} = \Omega_{\alpha\gamma\sigma\beta} + \Omega_{\gamma\beta\sigma\alpha}. \quad (5.2.7)$$

Ce qui donne la relation graphique :

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \circ \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \beta \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} \gamma \\ \circ \end{array} = \begin{array}{c} \alpha \\ \circ \end{array} \searrow \begin{array}{c} \gamma \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} \beta \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} \alpha \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \gamma \\ \circ \end{array} \nearrow \begin{array}{c} \beta \\ \circ \end{array} \quad (5.2.8)$$

3. La troisième provient aussi d'une relation de Plücker, à savoir

$$\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\gamma\delta} = \Omega_{\alpha\delta}\Omega_{\beta\gamma} + \Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\delta\beta}.$$

Ce qui donne la relation graphique :

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \circ \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \beta \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} \delta \\ \circ \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \gamma \\ \circ \end{array} = \begin{array}{c} \alpha \\ \circ \end{array} \downarrow \begin{array}{c} \delta \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} \beta \\ \circ \end{array} \downarrow \begin{array}{c} \gamma \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \alpha \\ \circ \end{array} \nearrow \begin{array}{c} \beta \\ \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} \delta \\ \circ \end{array} \searrow \begin{array}{c} \gamma \\ \circ \end{array} \quad (5.2.9)$$

Remarque 5.2.18. Du fait de la première syzygie (5.2.6), on remarque que

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \circ \end{array} \xrightarrow{2k} \begin{array}{c} \beta \\ \circ \end{array} = \begin{array}{c} \alpha \\ \circ \end{array} \xleftarrow{2k} \begin{array}{c} \beta \\ \circ \end{array}, \quad k \geq 1$$

Pour toute la suite, on ne distinguera donc plus le sens des arêtes dans le cas d'un poids pair et on notera :

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \circ \end{array} \xrightarrow{2k} \begin{array}{c} \beta \\ \circ \end{array} := \begin{array}{c} \alpha \\ \circ \end{array} \xrightarrow{2k} \begin{array}{c} \beta \\ \circ \end{array}$$

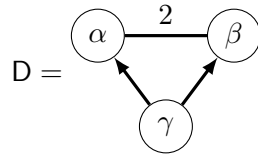
Pour chaque atome  $\alpha \in \mathcal{V}(\mathbf{D})$ , notons  $\mathbf{f}_\alpha \in S(\alpha)$ . On peut alors évaluer  $\phi_{\mathbf{D}}$  en  $\mathbf{f}_\alpha \otimes \dots \otimes \mathbf{f}_\varepsilon$ , ce qui donne par construction même un covariant

$$\phi_{\mathbf{D}} \left( \bigotimes_{\alpha \in \mathcal{V}(\mathbf{D})} \mathbf{f}_\alpha \right) \in \mathbf{Cov}(V). \quad (5.2.10)$$

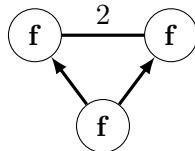
On a ainsi une application de l'ensemble des molécules vers  $\mathbf{Cov}(V)$ .

**Définition 5.2.19.** Un *covariant moléculaire*  $\mathbf{D}$  est l'image d'une molécule par cette application. Une forme binaire  $\mathbf{f}_\alpha \in S(\alpha) = S_n$  associée à une couleur  $S(\alpha)$  de  $\mathbf{D}$  est appelée un *atome* de valence  $n$  dans le covariant moléculaire  $\mathbf{D}$ .

Exemple 5.2.20. On fixe un espace  $V = S_n$  et on considère la molécule



qui a donc pour image le covariant moléculaire



Par les relations 5.2.8 et 5.2.6, nous avons

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{array}{c} \alpha \longrightarrow \beta \\ \swarrow \quad \nearrow \\ \gamma \end{array} + \begin{array}{c} \alpha \longrightarrow \beta \\ \swarrow \quad \nearrow \\ \gamma \end{array} \\
 &= - \begin{array}{c} \alpha \longrightarrow \beta \\ \swarrow \quad \nearrow \\ \gamma \end{array} + \begin{array}{c} \alpha \longrightarrow \beta \\ \swarrow \quad \nearrow \\ \gamma \end{array} = - \begin{array}{c} \alpha \longrightarrow \beta \\ \swarrow \quad \nearrow \\ \gamma \end{array} - \begin{array}{c} \alpha \longrightarrow \beta \\ \swarrow \quad \nearrow \\ \gamma \end{array}
 \end{aligned}$$

En se plaçant dans  $S^3(V)$  (ce qui revient à faire agir le groupe des permutations à trois élément), tous les symboles seront équivalents et donc toutes les molécules sont équivalentes à  $D$ , ce qui donne

$$\begin{aligned}
 D &= -D - D \\
 3D &= 0
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{array}{c} \mathbf{f} \longrightarrow \mathbf{f} \\ \swarrow \quad \nearrow \\ \mathbf{f} \end{array} = 0, \quad \mathbf{f} \in S_n$$

Remarque 5.2.21. La méthode symbolique consiste à travailler sur des covariants de puissances de formes linéaires. Si on se donne par exemple trois formes  $(ax)^n$ ,  $(bx)^p$  et  $(cx)^q$ , on peut considérer le covariant

$$(ab)(ac)^2(ax)^{n-3}(bx)^{p-1}(cx)^{q-2}.$$

En fait, un tel covariant s'interprète comme un covariant moléculaire obtenu à partir du morphisme

$$\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\gamma}^2\sigma_{\alpha}^{n-3}\sigma_{\beta}^{p-1}\sigma_{\gamma}^{q-2}.$$

*Remarque 5.2.22.* L'opérateur de polarisation

$$\sigma_\alpha = x \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + y \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$$

agit en tant qu'homothétie sur une forme binaire  $\mathbf{f} \in S_n$ . Ainsi, toute forme binaire  $\mathbf{f}$  correspond au covariant moléculaire

$$\frac{1}{n!} \textcircled{\mathbf{f}} \rightsquigarrow \mathbf{f}.$$

*Remarque 5.2.23* (Molécules et transvectants partiels). Etant donné des symboles  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$ , on peut définir l'opérateur différentiel

$$\mathcal{D} := \prod_i \Omega_{\alpha_i \beta_i}.$$

Un tel opérateur permet de définir le *transvectant partiel* [Olv99]

$$\mu \circ \mathcal{D}(\mathbf{f}_\alpha \otimes \dots \otimes \mathbf{f}_\varepsilon).$$

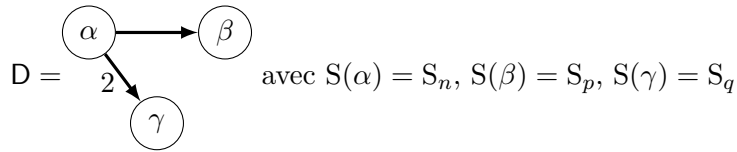
Il y a alors une correspondance entre les molécules et les transvectants partiels. En effet, à toute molécule  $D$ , on peut associer l'opérateur différentiel

$$\mathcal{D} = \prod_{e \in \mathcal{E}(D)} \Omega_{o(e) t(e)}^{w(e)}.$$

On peut alors directement montrer que

$$\phi_D = \left( \prod_{\alpha \in \mathcal{V}(D)} (\text{val}_D(\alpha))! \right) \mu \circ \mathcal{D} \quad (5.2.11)$$

Si nous prenons par exemple la molécule



On a

$$\phi_D = (n-3)!(p-1)!(q-2)! \mu \circ \mathcal{D}.$$

Ecrit en termes d'opérateurs, cela donne

$$\Omega_{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\gamma}^2 \sigma_\alpha^{n-3} \sigma_\beta^{p-1} \sigma_\gamma^{q-2} = (n-3)!(p-1)!(q-2)! \mu \circ \Omega_{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\gamma}^2$$

Le théorème suivant est connu en tant que *premier théorème fondamental* [KR84; Olv99] sur les forme binaires. Il a été démontré de multiples façon. On en trouve ainsi une preuve dans Weyl [Wey97], dans Kraft–Procesi [KP00] ou encore dans Olver [Olv99]. Chacune de ces preuves utilisent une combinatoire assez complexe s'appuyant sur l'*identité de Capelli*. On trouve aussi dans Kung–Rota [KR84] une preuve

qui s'appuie sur le calcul Umbral. Dans notre approche, on peut le déduire du théorème 5.3.10, démontré dans la sous-section 5.3.1 à partir de simples arguments d'algèbre linéaire.

**Théorème 5.2.24.** *Pour tout espace  $V$  de formes binaires, l'algèbre des covariants  $\mathbf{Cov}(V)$  est engendrée par la famille (infinie) des covariants moléculaires.*

*Démonstration.* Par le théorème 5.3.10, l'algèbre  $\mathbf{Cov}(V)$  est engendrée par la famille composée des formes  $\mathbf{f}_i$  et des transvectants

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{r_1}, ((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{r_1}, \mathbf{f}_3)_{r_2}, \dots \quad \mathbf{f}_i \in V, \quad r_i \in \mathbb{N}.$$

Chaque forme  $\mathbf{f}_i$  est associée à une molécule (remarque 5.2.22) et on remarque qu'un transvectant  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_r$  est exactement le covariant moléculaire

$$\mathbf{M} = \frac{1}{n!p!} \textcircled{\mathbf{f}_1} \xrightarrow{r} \textcircled{\mathbf{f}_2}$$

De plus, par la propriété 5.2.27, tout transvectant  $((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{r_1}, \mathbf{f}_3)_{r_2}$  se décompose en somme de covariants moléculaires. On montre ainsi que le théorème 5.3.10 implique le théorème 5.2.24.  $\square$

### 5.2.3. Transvectants et covariants moléculaires

Rappelons qu'un transvectant est représenté par un simple covariant moléculaire :

$$(\mathbf{f}_\alpha, \mathbf{f}_\beta)_r \rightsquigarrow \frac{1}{n!} \frac{1}{p!} \textcircled{\mathbf{f}_\alpha} \xrightarrow{r} \textcircled{\mathbf{f}_\beta}, \quad \mathbf{f}_\alpha \in S_n, \quad \mathbf{f}_\beta \in S_p$$

Pour établir des relations plus générales entre les transvectants et les covariants moléculaires, nous devons définir certaines opérations spécifiques sur les covariants moléculaires.

**Définition 5.2.25.** Etant donné deux covariants moléculaires  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$ ,  $r \geq 0$  un entier et  $\nu(r)$  un symbole, on définit le covariant moléculaire  $\mathbf{M}^{\nu(r)}$ , noté graphiquement

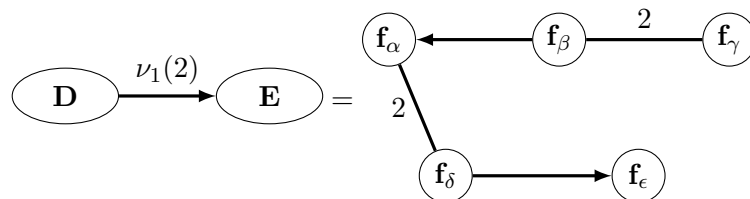
$$\textcircled{\mathbf{D}} \xrightarrow{\nu(r)} \textcircled{\mathbf{E}}$$

comme étant un nouveau covariant moléculaire obtenu en attachant  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  avec  $r$  arêtes d'une certaine façon  $\nu(r)$ .

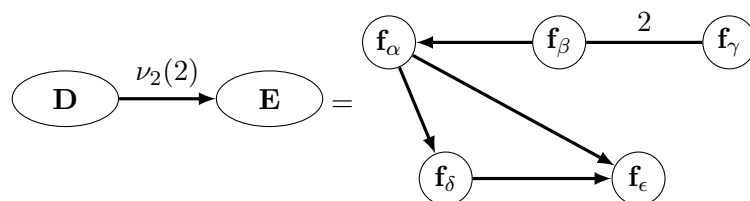
*Exemple 5.2.26.* Soit des atomes  $\mathbf{f}_\alpha, \dots, \mathbf{f}_\epsilon$  de valence plus grande que 4. Notons

$$\mathbf{D} = \textcircled{\mathbf{f}_\alpha} \leftarrow \textcircled{\mathbf{f}_\beta} \xrightarrow{2} \textcircled{\mathbf{f}_\gamma} \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = \textcircled{\mathbf{f}_\delta} \longrightarrow \textcircled{\mathbf{f}_\epsilon}$$

On peut définir



ou encore



Par une application directe de la formule de Leibniz, on a [Olv99] :

**Proposition 5.2.27.** *Etant donné un entier  $r \geq 0$  et deux covariants moléculaires  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$ , le transvectant  $(\mathbf{D}, \mathbf{E})_r$  est une combinaison linéaire de covariants moléculaires<sup>f</sup>  $\mathbf{M}^{\nu(r)}$ , avec des coefficients rationnels positifs, pour chaque attache possible  $\nu(r)$  entre  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  :*

$$(\mathbf{D}, \mathbf{E})_r = \sum_{\nu(r)} a_{\nu(r)} \mathbf{M}^{\nu(r)} \quad (5.2.12)$$

où  $a_{\nu(r)} \in \mathbb{Q}^+$ .

*Remarque 5.2.28.* Pour établir les expressions exactes des coefficients  $a_{\nu}$ , il faut exploiter le lien entre les covariants moléculaires et les *transvectants partiels* (5.2.11) de la remarque 5.2.23. Illustrons ce principe à travers un exemple simple.

Fixons trois atomes  $\mathbf{f}_\alpha, \mathbf{f}_\beta, \mathbf{f}_\gamma$  de valence respective  $n, p, q \geq 4$  et notons

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \textcircled{\mathbf{f}_\alpha} \\ \text{---} 2 \text{---} \\ \textcircled{\mathbf{f}_\beta} \end{array} \text{ et } \mathbf{E} = \textcircled{\mathbf{f}_\gamma}$$

Par la formule (5.2.11), on peut écrire

$$\mathbf{D} = (n-2)!(p-2)! \mu \circ \Omega_{\alpha\beta}^2(\mathbf{f}_\alpha \otimes \mathbf{f}_\beta), \quad \mathbf{E} = q! \mathbf{f}_\gamma$$

où  $\mathbf{D}$  est d'ordre  $n+p-2$  et  $\mathbf{E}$  est d'ordre  $q$ ; ainsi

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}, \mathbf{E})_2 &= \frac{(n+p-4-2)! (q-2)!}{(n+p-4)! q!} \mu \circ \Omega_{\kappa\gamma}^2(\mathbf{D}_\kappa \otimes \mathbf{E}_\gamma) \\ &= \frac{(n+p-6)! (q-2)!}{(n+p-4)! q!} (n-2)!(p-2)! q! \mu \circ \Omega_{\kappa\gamma}^2 \left[ \mu_\kappa \circ \Omega_{\alpha\beta}^2(\mathbf{f}_\alpha \otimes \mathbf{f}_\beta) \otimes \mathbf{f}_\gamma \right] \end{aligned}$$

f. Le covariant  $\mathbf{M}^{\nu(r)}$  est appelée un *terme* dans [GY10].



Mais alors [Olv99], on a

$$(\mathbf{D}, \mathbf{E})_2 = \lambda \times \mu \circ [\Omega_{\alpha\gamma} + \Omega_{\beta\gamma}]^2 \Omega_{\alpha\beta}^2(\mathbf{f}_\alpha \otimes \mathbf{f}_\beta \otimes \mathbf{f}_\delta), \quad \lambda := \frac{(n+p-6)!}{(n+p-4)!} (q-2)!(n-2)!(p-2)!$$

En développant on fait entre autre apparaître

$$\mu \circ \Omega_{\alpha\gamma}^2 \Omega_{\alpha\beta}^2(\mathbf{f}_\alpha \otimes \mathbf{f}_\beta \otimes \mathbf{f}_\gamma) = \frac{1}{(n-4)!(p-2)!(q-2)!} \begin{array}{c} \textcircled{\mathbf{f}_\alpha} \text{---} 2 \text{---} \textcircled{\mathbf{f}_\beta} \\ | \quad 2 \\ \textcircled{\mathbf{f}_\gamma} \end{array}$$

Et au final

$$(\mathbf{D}, \mathbf{E})_2 = a_{\nu(1)} \begin{array}{c} \textcircled{\mathbf{f}_\alpha} \text{---} 2 \text{---} \textcircled{\mathbf{f}_\beta} \\ | \quad 2 \\ \textcircled{\mathbf{f}_\gamma} \end{array} + a_{\nu(2)} \begin{array}{c} \textcircled{\mathbf{f}_\alpha} \text{---} 2 \text{---} \textcircled{\mathbf{f}_\beta} \\ \downarrow \quad \swarrow \\ \textcircled{\mathbf{f}_\gamma} \end{array} + a_{\nu(3)} \begin{array}{c} \textcircled{\mathbf{f}_\alpha} \text{---} 2 \text{---} \textcircled{\mathbf{f}_\beta} \\ \swarrow \quad \downarrow \\ \textcircled{\mathbf{f}_\gamma} \end{array}$$

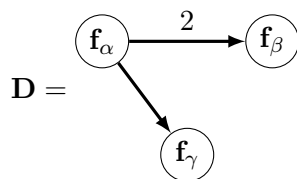
avec

$$a_{\nu_1} = \frac{\lambda}{(n-4)!(p-2)!(q-2)!}, \quad a_{\nu_2} = \frac{2\lambda}{(n-3)!(p-3)!(q-2)!}$$

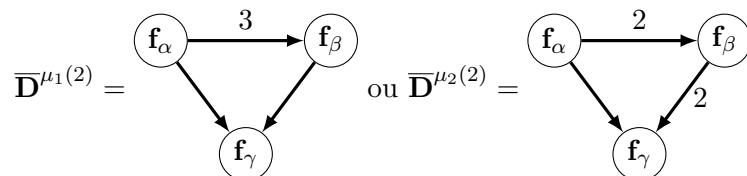
$$a_{\nu_3} = \frac{\lambda}{(n-2)!(p-4)!(q-2)!}$$

**Définition 5.2.29.** Etant donné un covariant moléculaire  $\mathbf{D}$  et un entier  $k \geq 0$ , on définit  ${}^g \bar{\mathbf{D}}^{\mu(k)}$  comme étant le covariant moléculaire obtenu en ajoutant  $k$  arêtes sur  $\mathbf{D}$  d'une certaine façon  $\mu(k)$ .

*Exemple 5.2.30.* Etant donné des atomes  $\mathbf{f}_\alpha, \mathbf{f}_\beta, \mathbf{f}_\gamma$  de valence plus grande que 4, notons



On peut alors considérer



**Proposition 5.2.31.** Etant donné un entier  $r \geq 0$  et deux covariants moléculaires  $\mathbf{D}$  et

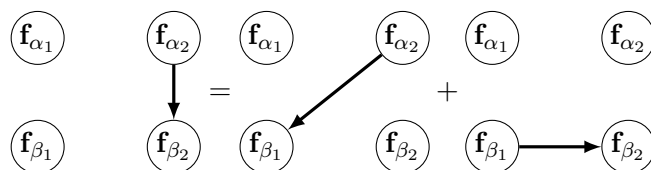
g. Cette opération est appelée *convolution* dans [GY10].

$\mathbf{E}$ , tout covariant moléculaire  $\mathbf{M}^{\nu(r)}$  appartenant à la décomposition 5.2.12 de  $(\mathbf{D}, \mathbf{E})_r$ , alors

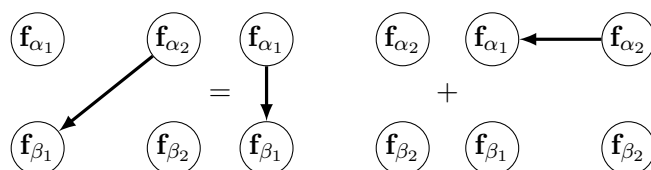
$$\mathbf{M}^{\nu(r)} = a(\mathbf{D}, \mathbf{E})_r + \sum_{r', k_1, k_2} a_{r', k_1, k_2} (\overline{\mathbf{D}}^{\mu_1(k_1)}, \overline{\mathbf{E}}^{\mu_2(k_2)})_{r'},$$

avec  $a \neq 0$ ,  $k_1 + k_2 + r' = r$  étant constant et  $r' < r$ .

*Esquisse de preuve.* On le démontre par récurrence sur  $r$ . Prenons par exemple le cas  $r = 1$  et un covariant moléculaire  $\mathbf{M}^{\nu(1)}$  dans  $(\mathbf{D}, \mathbf{E})_1$ . Dans ce covariant moléculaire, il existe une attache entre un atome  $\mathbf{f}_{\alpha_1}$  de  $\mathbf{D}$  et un atome  $\mathbf{f}_{\beta_1}$  dans  $\mathbf{E}$ . Notons  $\mathbf{M}^{\mu(1)}$  un autre covariant moléculaire dans la décomposition de  $(\mathbf{D}, \mathbf{E})_1$ , avec une attache entre  $\mathbf{f}_{\alpha_2} \neq \mathbf{f}_{\alpha_1}$  dans  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{f}_{\beta_1} \neq \mathbf{f}_{\beta_2}$  dans  $\mathbf{E}$ . Par la relation 5.2.8 nous avons



où le dernier covariant moléculaire est un transvectant  $(\mathbf{D}, \overline{\mathbf{E}}^1)_0$ . Par la même relation 5.2.8 nous avons :

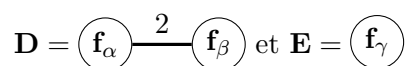


où le dernier covariant moléculaire est un transvectant  $(\overline{\mathbf{D}}^1, \mathbf{E})_0$ . Ainsi, tout covariant moléculaire de la décomposition du transvectant  $(\mathbf{D}, \mathbf{E})_1$  peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de  $\mathbf{M}^{\nu(1)}$  et de transvectants  $(\overline{\mathbf{D}}^{a_1}, \overline{\mathbf{E}}^{a_2})_0$ . Par la proposition 5.2.27 on peut donc écrire

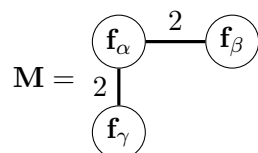
$$(\mathbf{D}, \mathbf{E})_1 = \lambda_1 \mathbf{M}^{\nu(1)} + \sum \lambda_{a_1, a_2} (\overline{\mathbf{D}}^{a_1}, \overline{\mathbf{E}}^{a_2})_0, \quad \lambda_1 > 0$$

On a donc démontré le cas  $r = 1$ . □

*Exemple 5.2.32.* Notons  $V = S_n$  ( $n \geq 4$ ) et les covariants moléculaires :



Soit le transvectant  $(\mathbf{D}, \mathbf{E})_2$  et le covariant moléculaire :



Par la proposition 5.2.31 :

$$\mathbf{M} = a_1 \left( \begin{array}{c} \textcircled{\mathbf{f}_\alpha} \text{---}^2 \textcircled{\mathbf{f}_\beta}, \textcircled{\mathbf{f}_\gamma} \end{array} \right)_2 + a_2 \left( \begin{array}{c} \textcircled{\mathbf{f}_\alpha} \text{---}^3 \textcircled{\mathbf{f}_\beta}, \textcircled{\mathbf{f}_\beta} \end{array} \right)_1 \\ + a_3 \left( \begin{array}{c} \textcircled{\mathbf{f}_\alpha} \text{---}^4 \textcircled{\mathbf{f}_\beta}, \textcircled{\mathbf{f}_\gamma} \end{array} \right)_0$$

### 5.3. Bases vectorielles de morphismes $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ équivariants

Nous exhibons dans cette section des bases vectorielles de morphismes sur les espaces

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})}(\mathbb{S}_{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{S}_{n_s}, \mathbb{S}_k).$$

De telles bases vectorielles sont issues de morphismes définis à partir de *transvectants itérés*. Une fois ce résultat établi, on en déduit que les *covariants* d'un espace de formes binaires sont *algébriquement engendrés* par les transvectants itérés (vus en tant que covariants). La difficulté, rappelons-le, est qu'une telle famille est *infinie* et nous devons établir des *relations algébriques* pour réduire cette famille génératrice.

Dans la [sous-section 5.3.1](#), nous obtenons donc une série de résultats d'*algèbre linéaire* et dans la [sous-section 5.3.2](#), nous montrons comment, à partir de ces résultats, on en déduit certaines *relations algébriques* sur les covariants, à savoir les séries de Gordan et les relations quadratiques d'Abdesselam–Chipalkatti. Notons aussi que dans la [sous-section 5.2.3](#), nous montrons directement le *premier théorème fondamental* sur les formes binaires, sans passer par l'identité de Capelli [Ol99 ; KP00].

#### 5.3.1. Bases vectorielles de transvectants

Nous allons exhiber ici des bases vectorielles de projecteurs construits à partir de *transvectants itérés*, définis à l'aide d'arbres binaires.

Pour un entier naturel  $s \geq 1$ , notons ainsi  $Y_s$  l'ensemble des arbres binaires possédant  $s + 1$  feuilles.

$$Y_0 = \{ \mid \}; Y_1 = \left\{ \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \mid \end{array} \right\}$$

$$Y_2 = \left\{ \begin{array}{c} \diagdown \quad \bullet \quad \diagup \\ \diagdown \quad \bullet \quad \diagup \\ \mid \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \quad \bullet \quad \diagup \\ \diagdown \quad \bullet \quad \diagup \\ \mid \end{array} \right\}$$

Pour un triplet  $(n, p, r)$  d'entiers admissibles, nous représentons le projecteur de Clebsch–Gordan

$$\begin{array}{ccc} \pi_r: \mathbb{S}_n \otimes \mathbb{S}_p & \longrightarrow & \mathbb{S}_{n+p-2r} \\ \mathbf{f} \otimes \mathbf{g} & \longmapsto & \pi_r(\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}) := (\mathbf{f}, \mathbf{g})_r \end{array} \quad (5.3.1)$$

à l'aide de l'arbre pondéré

$$\mathbb{T}(n, p, r) := \begin{array}{c} n \quad p \\ \diagdown \quad / \\ r \\ | \\ \cdot \end{array}$$

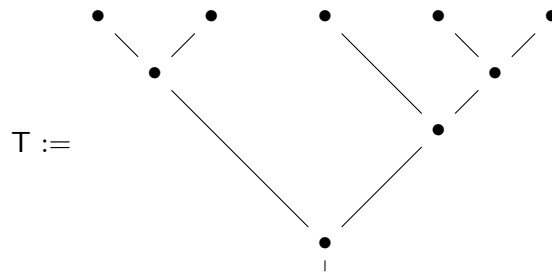
Plus généralement, fixons un entier  $s \geq 3$ , un arbre  $\mathbb{T} \in Y_s$  et un produit tensoriel  $W = S_{n_1} \otimes \cdots \otimes S_{n_s}$ . L'objectif va être de définir un projecteur

$$\pi : W \longrightarrow S_k$$

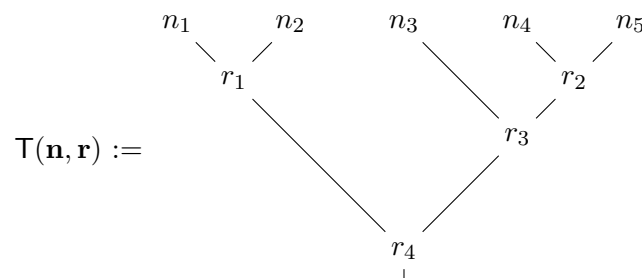
où  $S_k$  est une composante irréductible (non nécessairement unique) de  $W$ .

Pour cela, on fixe un *parenthésage* sur le produit tensoriel  $S_{n_1} \otimes \cdots \otimes S_{n_s}$  à l'aide d'un arbre binaire  $\mathbb{T} \in Y_s$ . Ensuite, pour utiliser des *transvectants*, nous fixons des *indices* à l'aide d'un  $s - 1$  uplet  $\mathbf{r} := (r_1, r_2, \dots, r_{s-1}) \in \mathbb{N}^{s-1}$ . Pour éviter toute ambiguïté, on décide de pondérer les feuilles de  $\mathbb{T}$  par le  $s$  uplet  $\mathbf{n} := (n_1, \dots, n_s)$  en suivant l'ordre gauche-droite et on décide de pondérer les nœuds de  $\mathbb{T}$  par  $\mathbf{r}$ , en suivant l'ordre gauche-droite puis haut-bas. Cet arbre pondéré est noté  $\mathbb{T}(\mathbf{n}, \mathbf{r})$ .

*Exemple 5.3.1.* On considère l'arbre binaire



ainsi que les uplets  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ ,  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ . On définit alors



**Définition 5.3.2.** Pour tout l'arbre  $\mathbb{T}$  à deux feuilles, un triplet  $(n, p, r)$  est dit  $\mathbb{T}$ -admissible s'il est admissible au sens classique (définition 5.2.4). Si

$$\mathbb{T}(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = \begin{array}{c} \mathbb{T}_1(\mathbf{n}_1, \mathbf{r}_1) \quad \mathbb{T}_2(\mathbf{n}_2, \mathbf{r}_2) \\ \diagdown \quad / \\ r \\ | \\ \cdot \end{array}$$

on dit que  $(\mathbf{n}, \mathbf{r})$  est  $\mathbb{T}$ -admissible si

$$\begin{cases} (\mathbf{n}_1, \mathbf{r}_1) \text{ est } \mathbb{T}_1\text{-admissible} \\ (\mathbf{n}_2, \mathbf{r}_2) \text{ est } \mathbb{T}_2\text{-admissible} \\ 0 \leq r \leq \min(|\mathbf{n}_1| - 2|\mathbf{r}_1|, |\mathbf{n}_2| - 2|\mathbf{r}_2|) \end{cases}$$

Enfin, si

$$\mathbb{T}(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = \begin{array}{ccc} & n_1 & \mathbb{T}_2(\mathbf{n}_2, \mathbf{r}_2) \\ & \searrow & / \\ \mathbb{T}(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = & & r \\ & \swarrow & \searrow \\ & & \end{array}$$

on dit que  $(\mathbf{n}, \mathbf{r})$  est  $\mathbb{T}$ -admissible si

$$\begin{cases} (\mathbf{n}_2, \mathbf{r}_2) \text{ est } \mathbb{T}_2\text{-admissible} \\ 0 \leq r \leq \min(n_1, |\mathbf{n}_2| - 2|\mathbf{r}_2|) \end{cases}$$

**Définition 5.3.3.** Etant donné un arbre  $\mathbb{T}$  et un uplet  $(\mathbf{n}, \mathbf{r})$   $\mathbb{T}$ -admissible, le projecteur  $\pi_{\mathbf{n}, \mathbf{r}}$  associé à l'arbre pondéré  $\mathbb{T}(\mathbf{n}, \mathbf{r})$  est le projecteur  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  équivariant, défini à partir du parenthésage fixé par  $\mathbb{T}$  sur  $S_{n_1} \otimes \cdots \otimes S_{n_s}$  et où chaque nœud de poids  $r_i$  définit un transvectant d'index  $r_i$ .

$$\pi_{\mathbf{n}, \mathbf{r}} : S_{n_1} \otimes \cdots \otimes S_{n_s} \longrightarrow S_k, \quad k = |\mathbf{n}| - 2|\mathbf{r}|$$

*Exemple 5.3.4.* L'arbre pondéré de l'exemple 5.3.1 est associé au projecteur

$$\pi_{(\mathbf{n}, \mathbf{r})}(\mathbf{f}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{f}_5) = ((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{r_1}, (\mathbf{f}_3, (\mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5)_{r_2})_{r_3})_{r_4}$$

L'uplet  $(\mathbf{n}, \mathbf{r})$  est  $\mathbb{T}$ -admissible si et seulement si

$$\begin{cases} 0 \leq r_1 \leq \min(n_1, n_2) \\ 0 \leq r_2 \leq \min(n_4, n_5) \\ 0 \leq r_3 \leq \min(n_3, n_4 + n_5 - 2r_2) \\ 0 \leq r_4 \leq \min(n_1 + n_2 - 2r_1, n_3 + n_4 + n_5 - 2(r_2 + r_3)) \end{cases}$$

Dorénavant, on fixe un arbre binaire quelconque  $\mathbb{T} \in Y_s$  et un entier  $s \geq 2$ .

**Lemme 5.3.5.** Pour tout  $s$  uplet  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{N}^s$ , on a

$$S_{n_1} \otimes \cdots \otimes S_{n_s} \simeq \bigoplus_{(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \text{ } \mathbb{T}\text{-admissible}} S_{|\mathbf{n}| - 2|\mathbf{r}|}$$

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que pour  $s = 2$ , on a directement

$$S_{n_1} \otimes S_{n_2} \simeq \bigoplus_{(n_1, n_2, r) \text{ admissible}} S_{n_1 + n_2 - 2r}$$

En remarquant que tout arbre  $\mathbb{T} \in Y_s$  ( $s \geq 3$ ) peut s'écrire

$$\mathbb{T} = \begin{array}{ccc} & \mathbb{T}_1 & \mathbb{T}_2 \\ & \diagdown & \diagup \\ & r & \\ & | & \end{array}$$

une récurrence immédiate sur  $s$  permet de conclure.  $\square$

**Corollaire 5.3.6.** *Etant donné un entier naturel  $k$ , le nombre de composantes isotypiques de  $S_k$  dans  $S_{n_1} \otimes \cdots \otimes S_{n_s}$  est donné par*

$$\dim \text{Mor}_{\text{SL}(2, \mathbb{C})}(S_{n_1} \otimes \cdots \otimes S_{n_s}, S_k) = \#\{\mathbf{r} \in \mathbb{N}^{s-1}, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{r}) \text{ est } \mathbb{T}\text{-admissible}, \quad 2|\mathbf{r}| = |\mathbf{n}| - k\}$$

*Démonstration.* Nous savons que, dans la décomposition du produit tensoriel  $S_{n_1} \otimes \cdots \otimes S_{n_s}$  en espaces  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  irréductibles, le nombre de composantes isotypiques de la représentation  $S_k$  est un invariant donné par

$$\dim \text{Mor}_{\text{SL}(2, \mathbb{C})}(S_{n_1} \otimes \cdots \otimes S_{n_s}, S_k).$$

Notons ensuite

$$\mathbf{R} := \{\mathbf{r} \in \mathbb{N}^{s-1}, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{r}) \text{ est } \mathbb{T}\text{-admissible}, \quad 2|\mathbf{r}| = |\mathbf{n}| - k\}.$$

Maintenant, par le lemme 5.3.5, nous avons

$$\begin{aligned} S_{n_1} \otimes \cdots \otimes S_{n_s} &\simeq \bigoplus_{(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \text{ } \mathbb{T}\text{-admissible}} S_{|\mathbf{n}| - 2|\mathbf{r}|} \\ &= \bigoplus_k \bigoplus_{\mathbf{r} \in \mathbf{R}} S_k \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.  $\square$

**Théorème 5.3.7.** *La famille des projecteurs de Clebsch–Gordan  $\pi_{\mathbf{n}, \mathbf{r}}$  tels que  $(\mathbf{n}, \mathbf{r})$  soit  $\mathbb{T}$ -admissible et  $2|\mathbf{r}| = |\mathbf{n}| - k$  correspond à une base de*

$$\text{Mor}_{\text{SL}(2, \mathbb{C})}(S_{n_1} \otimes \cdots \otimes S_{n_s}, S_k)$$

*Démonstration.* Par le corollaire 5.3.6, nous pouvons écrire

$$S_{n_1} \otimes \cdots \otimes S_{n_s} = \bigoplus_{k=|\mathbf{n}|-2i, 0 \leq 2i \leq |\mathbf{n}|} S_k^{\oplus \alpha(k)}$$

où

$$\alpha(k) = \#\{\mathbf{r} \in \mathbb{N}^{s-1}, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{r}) \text{ est } \mathbb{T}\text{-admissible}, \quad |\mathbf{r}| = i\}.$$

En remarquant que pour des représentations linéaires de dimension finie de  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ ,

$$\text{Mor}_{\text{SL}(2, \mathbb{C})}(E_1 \oplus E_2, F) \simeq \text{Mor}_{\text{SL}(2, \mathbb{C})}(E_1, F) \oplus \text{Mor}_{\text{SL}(2, \mathbb{C})}(E_2, F)$$

on en déduit par le lemme 5.3.5 que

$$\text{Mor}_{\text{SL}(2,\mathbb{C})}(\mathbb{S}_{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{S}_{n_s}, \mathbb{S}_k)$$

se décompose en somme directe d'espaces de dimension 1, chacun de ces espaces étant engendré par un projecteur de Clebsch–Gordan  $\pi_{\mathbf{n},\mathbf{r}}$  où  $(\mathbf{n}, \mathbf{r})$  est  $\mathbb{T}$ -admissible et  $|\mathbf{r}| = i$ .  $\square$

*Remarque 5.3.8.* Une telle preuve est directement adaptée d'une preuve figurant dans [CFS95, Lemme 2.6.1] où les transvectants sont définis de manière duale.

*Remarque 5.3.9.* Nous pouvons bien sûr pondérer les feuilles de l'arbre  $\mathbb{T} \in Y_s$  par une permutation quelconque  $\sigma \cdot \mathbf{n} := (n_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, n_{\sigma^{-1}(s)})$  du  $s$  uplet  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_s)$ , ce qui donnerait une autre base de l'espace

$$\text{Mor}_{\text{SL}(2,\mathbb{C})}(\mathbb{S}_{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{S}_{n_s}, \mathbb{S}_k)$$

Le théorème 5.3.7 permet d'obtenir directement un résultat central en théorie classique des invariants :

**Théorème 5.3.10.** *Pour tout espace  $V = \mathbb{S}_{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{S}_{n_s}$  de formes binaires, l'algèbre des covariants  $\text{Cov}(V)$  est engendrée par la famille composée des formes binaires  $\mathbf{f}_i \in \mathbb{S}_{n_i}$  et fermée par opération de transvectants*

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{r_1}, \quad ((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{r_1}, \mathbf{f}_3)_{r_2}, \quad (((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{r_1}, (\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4)_{r_2})_{r_3}) \dots \quad \mathbf{f}_i \in V, \quad r_i \in \mathbb{N}.$$

Un tel théorème fournit une famille génératrice *infinie* pour l'algèbre  $\text{Cov}(V)$ . Tout l'enjeu consiste donc à pouvoir réduire une telle famille. Avant de décrire l'algorithme de Gordan qui donne un moyen effectif d'en extraire une famille génératrice finie, nous allons donner quelques relations essentielles qui ont été au cœur des calculs effectifs des bases de covariants du XIX<sup>e</sup> siècle ainsi que des relations quadratiques obtenues récemment [AC09].

### 5.3.2. Séries de Gordan et relations quadratiques

Nous allons ici exploiter les résultats d'algèbre linéaire établis précédemment pour en déduire des relations sur les *transvectants* de formes binaires. Les preuves qui figurent dans cette sous-section étant très techniques, nous proposons dans un premier temps d'en donner les idées essentielles.

Que ce soit pour établir les séries de Gordan sur les covariants ou les relations quadratiques d'Abdesselam–Chipalkatti, l'idée est d'exprimer un certain morphisme équivariant dans deux bases vectorielles différentes de morphismes équivariants. Ensuite, il faut obtenir les *coordonnées* de ce morphisme dans chacune de ces bases. Pour cela on *évalue* ces relations vectorielles sur certaines formes binaires qui permettent d'obtenir un système de Gauss sur les coefficients. Dans le cas des relations quadratiques d'Abdesselam–Chipalkatti, il est aussi nécessaire de *symétriser* la relation vectorielle obtenue, puis de vérifier que la relation ainsi obtenue n'est pas triviale.

## Séries de Gordan

Les séries de Gordan ont été particulièrement utilisées pour réduire les familles génératrices d'invariants ou de covariants [Gal80 ; Shi67]. La forme exacte de ces séries est donnée dans le lemme 5.3.13 mais nous commençons par en donner une forme généralisée.

**Proposition 5.3.11.** *Etant donné trois entiers positifs non nuls  $n_1, n_2$  et  $n_3$ , on fixe trois entiers  $e_1, e_2$  et  $e_3$  tels que  $e_i + e_j \leq n_k$ , ( $i, j, k$  tous trois distincts). Il existe alors des coefficients  $\lambda_i$  et  $\mu_j$  tels que, pour toute forme binaire  $\mathbf{f}_i \in S_{n_i}$ ,*

$$\sum_i \lambda_i ((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{e_3+i}, \mathbf{f}_3)_{e_1+e_2-i} = \sum_j \mu_j ((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3)_{e_2+j}, \mathbf{f}_2)_{e_1+e_3-j}.$$

Les coefficients  $\lambda_i$  et  $\mu_j$  s'obtiennent par un processus de récurrence de la manière suivante. On définit les morphismes

$$\begin{aligned} \varphi &:= \frac{(n_1 - e_2 - e_3)!(n_3 - e_1 - e_2)!(n_2 - e_1 - e_3)!}{n_1!e_3!n_3!(n_2 - e_3)!} \mu \circ \Omega_{\alpha\beta}^{e_3} \Omega_{\alpha\gamma}^{e_2} \Omega_{\beta\gamma}^{e_1} & (5.3.2) \\ \psi_i &:= \mathbf{f}_1 \otimes \mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{f}_3 \mapsto ((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{e_3+i}, \mathbf{f}_3)_{e_1+e_2-i} \\ \nu_i &:= \mathbf{f}_1 \otimes \mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{f}_3 \mapsto ((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3)_{e_2+i}, \mathbf{f}_2)_{e_1+e_3-i}, \end{aligned}$$

puis les tenseurs

$$\mathbf{h}_i := x_\alpha^{n_1} x_\beta^{n_2-e_3-i} y_\beta^{e_3+i} y_\gamma^{n_3}, \quad \mathbf{g}_i := x_\alpha^{n_1} y_\beta^{n_2} x_\gamma^{n_3-e_2-i} y_\gamma^{e_2+i}.$$

Ce qui donne alors

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{\varphi(\mathbf{h}_0)}{\psi_0(\mathbf{h}_0)}, & \mu_0 &= \frac{\varphi(\mathbf{g}_0)}{\nu_0(\mathbf{g}_0)} \\ \lambda_i &= \frac{\varphi(\mathbf{h}_i) - \sum_{k=0}^{i-1} \lambda_k \psi_k(\mathbf{h}_i)}{\psi_i(\mathbf{h}_i)}, & \mu_i &= \frac{\varphi(\mathbf{g}_i) - \sum_{k=0}^{i-1} \mu_k \nu_k(\mathbf{g}_i)}{\nu_i(\mathbf{g}_i)} \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que, par le théorème 5.3.7, la famille des projecteurs

$$\mathbf{f}_1 \otimes \mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{f}_3 \mapsto ((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_i, \mathbf{f}_3)_{|e|-i}$$

forme une base de  $\text{Mor}_{\text{SL}(2, \mathbb{C})}(S_{n_1} \otimes S_{n_2} \otimes S_{n_3}, S_{|n|-2|e|})$ . Comme le morphisme  $\varphi$  défini par (5.3.2) appartient à

$$\text{Mor}_{\text{SL}(2, \mathbb{C})}(S_{n_1} \otimes S_{n_2} \otimes S_{n_3}, S_{|n|-2|e|}),$$

on en déduit qu'il existe une famille de coefficients  $\alpha_i$  tels que

$$\varphi(\mathbf{f}_1 \otimes \mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{f}_3) = \sum_i \alpha_i ((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_i, \mathbf{f}_3)_{|e|-i}$$

Si on considère ensuite les formes  $\mathbf{f}_1 := x_\alpha^{n_1}$  et  $\mathbf{f}_{2,i} := x_\beta^{n_2-i} y_\beta^i$  on remarque que

$$\Omega_{\alpha\beta}(\mathbf{f}_1 \otimes \mathbf{f}_{2,i}) = 0, \quad \forall i \leq e_3$$



On peut donc en déduire, par récurrence, que  $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{e_3-1} = 0$ . Cela montre donc que

$$\varphi(\mathbf{f}_1 \otimes \mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{f}_3) = \sum_i \lambda_i ((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{e_3+i}, \mathbf{f}_3)_{e_1+e_2-i} = \sum_i \lambda_i \psi_i$$

Si on évalue alors cette relation sur

$$\mathbf{h}_0 := x_\alpha^{n_1} x_\beta^{n_2-e_3} y_\beta^{e_3} y_\gamma^{n_3}$$

on remarque que

$$\psi_0(\mathbf{h}_0) \neq 0, \quad \psi_i(\mathbf{h}_0) = 0, \quad \forall i > 0$$

On en déduit alors que

$$\lambda_0 = \frac{\varphi(\mathbf{h}_0)}{\psi_0(\mathbf{h}_0)}$$

Puis, en évaluant sur

$$\mathbf{h}_1 := x_\alpha^{n_1} x_\beta^{n_2-e_3-1} y_\beta^{e_3+1} y_\gamma^{n_3}$$

on a

$$\psi_1(\mathbf{h}_1) \neq 0, \quad \psi_i(\mathbf{h}_1) = 0, \quad \forall i > 1$$

ce qui permet d'obtenir le coefficient  $\lambda_1$ ; les autres coefficients s'obtiennent par les formules de récurrences données par (5.3.3). On utilise la même preuve pour l'autre partie du lemme.  $\square$

*Exemple 5.3.12.* Si nous prenons

$$(n_1, n_2, n_3) = (9, 8, 7), \quad (e_1, e_2, e_3) = (2, 3, 4)$$

on obtient

$$\begin{aligned} 35((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_4, \mathbf{f}_3)_5 + \frac{70}{9}((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_5, \mathbf{f}_3)_4 - 10((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_6, \mathbf{f}_3)_3 - 2((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_7, \mathbf{f}_3)_2 \\ + \frac{7}{6}((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_8, \mathbf{f}_3)_1 = \\ 35((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3)_3, \mathbf{f}_2)_6 + 14((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3)_4, \mathbf{f}_2)_5 - \frac{35}{4}((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3)_5, \mathbf{f}_2)_4 \\ - \frac{10}{3}((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3)_6, \mathbf{f}_2)_3 + ((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3)_7, \mathbf{f}_2)_2 \end{aligned}$$

Les séries de Gordan [GY10] sont un cas particulier des relations obtenues par la proposition 5.3.11. Dans ce dernier cas, cependant, les coefficients peuvent être obtenus explicitement.

**Lemme 5.3.13** (Séries de Gordan). *Etant donné trois entiers positifs non nuls  $n_1, n_2$  et  $n_3$ , on fixe trois entiers  $e_1, e_2$  et  $e_3$  tels que  $e_i + e_j \leq n_k$ , ( $i, j, k$  tous trois distincts).*

Lorsque  $e_1 = 0$  ou  $e_2 + e_3 = n_1$ , on a

$$\sum_i \frac{\binom{e_2}{i} \binom{n_2 - e_1 - e_3}{i}}{\binom{n_1 + n_2 + 1 - 2e_3 - i}{i}} ((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{e_3+i}, \mathbf{f}_3)_{e_1+e_2-i} =$$

$$(-1)^{e_1} \sum_i \frac{\binom{e_3}{i} \binom{n_3 - e_1 - e_2}{i}}{\binom{n_1 + n_3 + 1 - 2e_2 - i}{i}} ((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3)_{e_2+i}, \mathbf{f}_3)_{e_1+e_3-i}$$

*Démonstration.* Nous n'aborderons ce calcul que pour le cas où  $e_1 = 0$ . On considère à nouveau le morphisme

$$\varphi := \frac{(n_1 - e_2 - e_3)!(n_3 - e_2)!(n_2 - e_3)!}{n_1!n_2!n_3!} \mu \circ \Omega_{\alpha\beta}^{e_3} \Omega_{\alpha\gamma}^{e_2}$$

qui, par le théorème 5.3.7 se décompose déjà en

$$\varphi(\mathbf{f}_1 \otimes \mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{f}_3) = \sum_i \lambda_i ((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{e_3+i}, \mathbf{f}_3)_{e_2-i} \quad (5.3.4)$$

En prenant des puissances de formes linéaires

$$\mathbf{f}_1 := (a\mathbf{x}_\alpha)^{n_1}, \quad \mathbf{f}_2 := (b\mathbf{x}_\beta)^{n_2}, \quad \mathbf{f}_3 := (c\mathbf{x}_\gamma)^{n_3},$$

on remarque que

$$\varphi(\mathbf{f}_1 \otimes \mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{f}_3) = (ab)^{e_3} (ac)^{e_2} (a\mathbf{x})^{n_1 - e_2 - e_3} (b\mathbf{x})^{n_2 - e_3} (c\mathbf{x})^{n_3 - e_2}$$

$$((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{e_3+i}, \mathbf{f}_3)_{e_2-i} = (ab)^{e_3+i} \left( (a\mathbf{x}_\nu)^{n_1 - e_3 - i} (b\mathbf{x}_\nu)^{n_2 - e_3 - i}, (c\mathbf{x}_\gamma)^{n_3} \right)_{e_2-i}$$

et la relation (5.3.4) devient donc

$$(ac)^{e_2} (a\mathbf{x})^{n_1 - e_2 - e_3} (b\mathbf{x})^{n_2 - e_3} (c\mathbf{x})^{n_3 - e_2} = \sum_i (ab)^i \left( (a\mathbf{x}_\nu)^{n_1 - e_3 - i} (b\mathbf{x}_\nu)^{n_2 - e_3 - i}, (c\mathbf{x}_\gamma)^{n_3} \right)_{e_2-i} \quad (5.3.5)$$

Soit ensuite l'opérateur

$$\Omega_{ab} := \frac{\partial}{\partial a_1} \frac{\partial}{\partial b_2} - \frac{\partial}{\partial a_2} \frac{\partial}{\partial b_1}$$

En notant  $\kappa_i := \left( (a\mathbf{x}_\nu)^{n_1 - e_3 - i} (b\mathbf{x}_\nu)^{n_2 - e_3 - i}, (c\mathbf{x}_\gamma)^{n_3} \right)_{e_2-i}$  on vérifie directement que

$$\Omega_{ab} \kappa_i = 0, \quad \Omega_{ab} \left[ (ab)^i \kappa_i \right] = i(n_1 + n_2 - 2e_3 - i + 1) (ab)^{i-1} \kappa_i$$

ce qui montre que

$$\Omega_{ab}^i \left[ (ab)^i \kappa_i \right] = \frac{i!(n_1 + n_2 - 2e_3 - i + 1)!}{(n_1 + n_2 - 2e_3 - 2i + 1)!} \kappa_i \quad (5.3.6)$$

D'un autre côté, on a directement

$$\Omega_{ab}^i [(ac)^{e_2} (a\mathbf{x})^{n_1-e_2-e_3} (b\mathbf{x})^{n_2-e_3} (c\mathbf{x})^{n_3-e_2}] = \frac{e_2!(n_2-e_3)!}{(e_2-i)!(n_2-e_3-i)!} (ac)^{e_2-i} (a\mathbf{x})^{n_1-e_2-e_3} (b\mathbf{x})^{n_2-e_3-i} (c\mathbf{x})^{n_3-e_2+i}$$

cela permet, après avoir posé  $a = b$ , d'en déduire que

$$\lambda_i = \frac{\binom{e_2}{i} \binom{n_2 - e_1 - e_3}{i}}{\binom{n_1 + n_2 + 1 - 2e_3 - i}{i}}$$

Pour obtenir le coefficient  $\mu_i$ , on fait de même en appliquant l'opérateur  $\Omega_{ac}$ .  $\square$

### Relations quadratique d'Abdesselam–Chipalkatti

Nous allons maintenant retrouver le [AC09, théorème 1.2]. On fixe pour cela deux entiers  $m$  et  $n$  plus grand que 2 ainsi que deux formes binaires  $\mathbf{f}_1 \in S_m$  et  $\mathbf{f}_2 \in S_n$ . On note enfin

$$\mathbf{u}_k := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_k.$$

**Théorème 5.3.14** (Abdesselam–Chipalkatti - 2009). *Pour tout triplet  $(m, n, r)$  d'entiers admissibles plus grands que 2, il existe des coefficients  $k_{i,j} \in \mathbb{Q}$  tels que*

$$\mathbf{u}_r = \frac{1}{\mathbf{u}_0} \sum_{0 \leq i \leq j < r} k_{i,j} (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)_{r-i-j}$$

Dans ce résultat, les coefficients  $k_{i,j}$  sont obtenus à partir de formules qui sont, selon les termes mêmes des auteurs, très compliquées. Nous allons pour notre part établir ce résultat en nous appuyant sur les résultats d'algèbre linéaire établis à la [sous-section 5.3.1](#) et nos coefficients seront obtenus par de simples processus de récurrence.

**Théorème 5.3.15.** *Pour tout triplet  $(m, n, r)$  d'entiers admissibles plus grands que 2, il existe des coefficients  $c_{i,j} \in \mathbb{Q}$  tels que*

$$\mathbf{u}_r = \frac{1}{\mathbf{u}_0} \sum_{0 \leq i \leq j < r} c_{i,j} (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)_{r-i-j}$$

En notant

$$c_0 := 1 - (-1)^r \left( \frac{\binom{n}{r} + \binom{m}{r}}{\binom{m+n-r+1}{r}} \right)$$

les coefficients  $c_{i,j}$  s'obtiennent directement à partir des coefficients  $\lambda_{i,j}$  obtenus par les

lemmes 5.3.17 et 5.3.18, selon les formules

$$c_{i,j} = \frac{\lambda_{i,j} + (-1)^{r-i-j} \lambda_{j,i}}{c_0}, \quad i \neq j$$

$$c_{i,i} = \lambda_{i,i}$$

*Exemple 5.3.16.* Nous reprenons ici des exemples déjà traités dans [AC09]. En prenant  $(m, n, r) = (5, 3, 2)$ , les lemmes 5.3.17, 5.3.18 et le théorème 5.3.14 nous donnent la relation

$$\frac{8}{21} \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)_2 - \frac{1}{2} (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)_1 - \frac{15}{32} \mathbf{u}_1^2 = 0$$

qui est exactement la même relation que celle obtenue dans [AC09].

Lorsque  $(m, n, r) = (7, 5, 4)$  on obtient ici

$$-\frac{43}{63} \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_4 + (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)_4 + \frac{186}{55} (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_2)_2 + \frac{5}{6} (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_3)_1 + \frac{35}{12} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)_2 + \frac{7}{11} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_1 +$$

$$\frac{49}{72} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_3 + \frac{252}{605} \mathbf{u}_2^2$$

Dans ce cas, nos coefficients sont différents de ceux obtenus par [AC09]. Comme souligné dans cet article, cette situation n'est pas étonnante étant donné qu'il existe plusieurs relations possibles obtenues à partir des mêmes transvectants  $\mathbf{u}_i$ .

Afin d'obtenir la preuve du théorème 5.3.14, nous devons préciser de nouvelles notations. Notons  $\phi$  et  $\psi_{i,j}$  des morphismes équivariants du produit tensoriel  $S_n \otimes S_m \otimes S_n \otimes S_m$  dans l'espace  $S_{2m+2n-2r}$  définis par

$$\phi(\mathbf{f}_1 \otimes \mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{f}_3 \otimes \mathbf{f}_4) := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_0 (\mathbf{f}_4, \mathbf{f}_3)_r \quad (5.3.7)$$

et

$$\psi_{i,j}(\mathbf{f}_1 \otimes \mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{f}_3 \otimes \mathbf{f}_4) := ((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_4)_i, (\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_2)_j)_{r-i-j} \quad (5.3.8)$$

D'après le théorème 5.3.7, la famille  $\psi_{i,j}$  forme une base de l'espace

$$\text{Mor}_{\text{SL}(2, \mathbb{C})}(S_n \otimes S_m \otimes S_n \otimes S_m, S_{2m+2n-2r})$$

et donc il existe des coefficients  $\lambda_{i,j}$  tels que

$$\phi = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} \psi_{i,j} \quad (5.3.9)$$

**Lemme 5.3.17.** *Pour tout triplet  $(m, n, r)$  d'entiers admissibles plus grands que 2 on a*

$$\lambda_{0,j} = (-1)^j \frac{n!}{(n-j)!} \frac{r!}{(r-j)!} \frac{(m+n-2j+1)!}{j!(m+n-j+1)!} \quad (5.3.10)$$

$$\lambda_{i,0} = (-1)^i \frac{m!}{(m-i)!} \frac{r!}{(r-i)!} \frac{(m+n-2i+1)!}{i!(m+n-i+1)!} \quad (5.3.11)$$

où  $0 \leq i \leq r$  et  $0 \leq j \leq r$ .

*Démonstration.* On écrit la relation (5.3.9) pour

$$\mathbf{f}_1 := (a\mathbf{x}_\alpha)^m, \quad \mathbf{f}_2 := (b\mathbf{x}_\beta)^n, \quad \mathbf{f}_3 := (c\mathbf{x}_\gamma)^n, \quad \mathbf{f}_4 := (a\mathbf{x}_\delta)^m$$

ce qui donne

$$(ac)^r (a\mathbf{x})^{m+n-r} (b\mathbf{x})^n (c\mathbf{x})^{m-r} = \sum_{j=0}^r \lambda_{0,j} (cb)^j \left( (a\mathbf{x}_\alpha)^{m+n}, (c\mathbf{x}_\nu)^{m-i} (b\mathbf{x}_\nu)^{n-i} \right)_{r-j} \quad (5.3.12)$$

En appliquant l'opérateur  $\Omega_{bc}$ , on réexploite la relation (5.3.6) pour le membre de droite. On remarque ensuite que

$$\begin{aligned} \Omega_{bc}^j \left[ (ac)^r (a\mathbf{x})^{m+n-r} (b\mathbf{x})^n (c\mathbf{x})^{m-r} \right] &= (a\mathbf{x})^{m+n-r} (c\mathbf{x})^{m-r} \Omega_{bc}^i \left[ (b\mathbf{x})^n (ac)^r \right] \\ &= \frac{n!i!}{(n-i)!} (a\mathbf{x})^{m+n-r+i} (c\mathbf{x})^{m-r} (b\mathbf{x})^{n-i} (ac)^{r-i} \end{aligned}$$

En évaluant ensuite sur  $b = c$ , on obtient les coefficients  $\lambda_{0,j}$ ; on fait de même pour les autres coefficients en considérant cette fois les formes

$$\mathbf{f}_1 := (a\mathbf{x}_\alpha)^m, \quad \mathbf{f}_2 := (b\mathbf{x}_\beta)^n, \quad \mathbf{f}_3 := (b\mathbf{x}_\gamma)^n, \quad \mathbf{f}_4 := (d\mathbf{x}_\delta)^m$$

et en appliquant ensuite successivement les opérateurs  $\Omega_{ad}^i$ . □

Soit maintenant la famille  $\mathbf{u}_{i,j} \in S_n \otimes S_m \otimes S_n \otimes S_m$  définie par :

$$\mathbf{u}_{i,j} := x_\alpha^m y_\beta^n x_\gamma^j y_\gamma^{m-j} x_\delta^{n-i} y_\delta^i$$

On observe que  $\psi_{i_1, j_1}(\mathbf{u}_{i,j}) = 0$  dès que  $i_1 > i$  ou  $j_1 > j$ , puis :

**Lemme 5.3.18.** *Pour tout entier  $j \geq 1$  et  $i \geq 1$  on a*

$$\lambda_{i,j} = \frac{\phi(\mathbf{u}_{i,j}) - \sum_{i_1=1}^{i-1} \sum_{j_1=0}^{r-i_1} \lambda_{i_1, j_1} \psi_{i_1, j_1}(\mathbf{u}_{i,j}) + \sum_{j_1=0}^{j-1} \lambda_{i, j_1} \psi_{i, j_1}(\mathbf{u}_{i,j})}{\psi_{i,j}(\mathbf{u}_{i,j})}$$

Nous aurons ensuite besoin d'un simple résultat sur les coefficients binomiaux avant de donner une preuve du théorème 5.3.14

**Lemme 5.3.19.** *Pour tout triplet  $(m, n, r)$  d'entiers admissibles plus grands que 2 on a*

$$\binom{n}{r} + \binom{m}{r} < \binom{m+n-r+1}{r}$$

*Démonstration.* Dans le cas où  $m = n$  remarque que

$$\begin{aligned} \binom{2n-r+1}{r} &= (2n-r+1)(2n-r) \dots (2n-r+1-r+2)2(n-r+1) \\ 2 \binom{n}{r} &= n(n-1) \dots (n-r+2)2(n-r+1) \end{aligned}$$

Mais alors, pour tout entier  $k = 0 \dots r - 2$ , on a  $2n - r + 1 - k > n - k$ , ce qui permet de conclure dans le cas  $m = n$ . Dans le cas où  $m > n$  on remarque que

$$\begin{aligned} \binom{m+n-r+1}{r} &= \frac{1}{r!} (m+n-r+1)(m-1+n-r+1) \\ &\quad (m-2+n-r+1) \cdots (m-r+1+n-r+1) \\ &= \binom{m}{r} + \frac{1}{r!} (m-1)(m-2) \cdots (m-r+1)(n-r+1) + \alpha, \quad \alpha > 0 \end{aligned}$$

Mais comme  $m \geq n + 1$  on a

$$\frac{1}{r!} (m-1)(m-2) \cdots (m-r+1)(n-r+1) \geq \frac{1}{r!} n(n-1) \cdots (n-r+2)(n-r+1)$$

ce qui conclut la preuve. □

*Preuve du théorème 5.3.15.* Il suffit de considérer la relation (5.3.9) et de l'appliquer pour  $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1$  et  $\mathbf{f}_4 = \mathbf{f}_2$ . On remarque ensuite que le coefficient de  $u_0 u_r$  est donné par

$$1 - \lambda_{0,r} - \lambda_{r,0} = 1 - (-1)^r \left( \frac{\binom{n}{r} + \binom{m}{r}}{\binom{m+n-r+1}{r}} \right)$$

mais par le lemme 5.3.19 on en déduit que ce coefficient est non nul, ce qui permet de conclure la preuve. □

## 6. Méthodes effectives

Nous détaillons ici les différentes méthodes que nous avons utilisées pour déterminer effectivement des familles génératrices *finies* d'algèbres d'invariants. Certaines d'entre elles sont très générales car valables dans le cas de n'importe quel groupe linéaire réductif mais à notre connaissance, seuls des exemples très simples ont été traités à l'aide de celles-ci [Stu08 ; Kem03].

Pour aborder le cas des espaces de tenseurs  $\mathbb{P}^2$  et  $\mathbb{E}^3$ , il s'est avéré que l'algorithme de Gordan a été le plus efficace. Précisons aussi que, grâce à cet algorithme, nous avons pu, pour la première fois, établir une famille génératrice minimale de covariants de l'espace  $S_6 \oplus S_4 \oplus S_2$ , qui comporte 494 éléments. Notons également que, dans un travail en collaboration avec Reynald Lercier [OL14], nous avons pu obtenir de cette façon et pour la première fois des familles génératrices minimales des algèbres  $\text{Cov}(S_9)$  et  $\text{Cov}(S_{10})$ , ce qui ne restait à ce jour qu'une conjecture.

### 6.1. Préambule

Nous retiendrons essentiellement deux approches pour les calculs effectifs de familles génératrices d'invariants : l'algorithme de Gordan et celle que nous appelons la méthode de Hilbert. Il existe bien sûr d'autres approches. Celle développée par Bedrattyuk [Bed08 ; Bed09] utilise des méthodes infinitésimales sur les semi-invariants. Par cette approche, les familles génératrices de covariants de  $S_7$  et  $S_8$  ont été retrouvées mais à notre connaissance, les algorithmes utilisés ne possèdent pas de bornes effectives [Bed11a]. On peut aussi trouver chez Olver [Olv99] une méthode appelée *méthode de Gordan* mais qui ne doit pas être confondue avec l'algorithme original de Gordan. Cette méthode, qui a été complétée et corrigée par Brini et al. [BRT06], ne possède pas de temps d'arrêt effectif et ne peut s'appliquer qu'à la détermination d'une famille génératrice de *covariants* d'une forme binaire simple. En dernier lieu, nous pouvons évoquer le travail de Kung–Rota [KR84], qui reformulent la méthode symbolique en termes de *calcul Umbral*. Mais l'algorithme de calcul proposé dans cet article ne traite que des cas les plus simples.

Ainsi, en faisant l'état des lieux sur les résultats effectifs obtenus pour les familles génératrices de covariants de formes binaires, il semble que l'algorithme de Gordan et la méthode de Hilbert soient les approches les plus efficaces.

La méthode de Hilbert est directement issue de la deuxième démonstration de finitude de Hilbert [Hil90 ; Hil78]<sup>a</sup>. L'idée de cette preuve, qu'on peut trouver dans certains traités classiques [Stu08], tient en quelques lignes, et s'appuie sur la noetheriannité de

---

a. Sa première démonstration fut sérieusement critiquée par ses contemporains pour son manque d'effectivité. Ainsi, lorsque Gordan prit connaissance de cette preuve, il se serait écrié « Ce n'est pas de la mathématique mais de la théologie ! » [Fis66]

l'anneau  $\mathbb{C}[V]$ . Dans cette méthode, la première étape consiste à construire le lieu des points où tous les invariants s'annulent, qui est une sous-variété affine de  $V$  appelée le *nilcône*, notée  $\mathcal{N}_V$ . On considère alors l'idéal  $\mathcal{I}(\mathcal{N}_V) \subset \mathbb{C}[V]$  défini par ce nilcône. Par noetheriannité, on sait que cet idéal est engendré par une famille finie  $I_1, \dots, I_m$  d'invariants. On montre alors que l'algèbre des invariants  $\mathbb{C}[V]^G$  n'est rien d'autre que la clôture intégrale du sous module  $\mathbb{C}[I_1, \dots, I_m]$  dans le corps des fractions  $\mathbb{C}(V)$  [Stu08]. Derksen [Der99] et Sturmfels [Stu08] proposent un algorithme directement issu de cette approche mais il ne nous semble pas que cet algorithme ait conduit à des résultats nouveaux<sup>b</sup>.

Sans passer par le processus de clôture intégrale, il est néanmoins possible d'exploiter, lorsque c'est possible, un *système de paramètres* de l'algèbre des invariants. En effet, une fois obtenu un tel système de paramètres, la connaissance de la *série de Hilbert* et de la structure de Cohen–Macaulay [HR74] de l'algèbre des invariants, permet d'en déduire une borne sur les degrés des générateurs. C'est d'ailleurs par une telle stratégie que Brouwer–Popoviciu [BP10a ; BP10b] ont obtenu de nouveaux résultats, notamment sur les *invariants* des formes binaires de degré 9 et de degré 10. Mais la difficulté principale réside dans la détermination d'un système de paramètres, étape pour laquelle nous ne connaissons pas d'algorithme véritablement effectif [Log89 ; Has08]. De plus, dans le cas des familles génératrices d'invariants joints, un résultat de Brion [Bri82] montre qu'il n'existe pas, en général, de système de paramètres qui respecte la multigraduation. Face à toutes ces difficultés, il nous a donc paru essentiel de comprendre l'approche dite des « anciens » qui, malgré tout, avaient obtenu de nombreux résultats sans recourir à un ordinateur.

L'algorithme de Gordan s'appuie lui aussi sur quelques idées simples. L'idée de départ est que l'algèbre des covariants d'un espace de formes binaires est engendrée par une famille (infinie) de *transvectants* ou ce qui est équivalent (théorème 5.2.24), par une famille (infinie) de *covariants moléculaires*. Ensuite, on observe que le poids maximal des arêtes d'une molécule (son *grade*), qui est un *ordre de dérivation*, est nécessairement borné par les *degrés* des formes binaires. On définit alors la famille des *idéaux de Gordan*  $I_r$ ,  $r = 1, \dots, n$ , engendré par tous les covariants moléculaires issus de molécules de grade  $r$ . Une telle famille est nécessairement finie, et décroissante par construction, avec  $I_n = \{0\}$ . Au final, Gordan trouva le moyen de construire, par récurrence, une famille génératrice de l'algèbre des covariants modulo chaque idéal  $I_r$ . La dernière étape du processus fournit alors la famille génératrice finie cherchée.

Cet algorithme, tel qu'il est par exemple présenté par Grace–Young [GY10] à travers la *méthode symbolique*, est bien sûr accessible « en l'état ». Mais, comme a pu le souligner Weyl [Wey97], il s'avère que la *théorie de la représentation* offre un cadre très fécond pour reprendre et réinterpréter cette méthode symbolique, et donc en particulier cet algorithme de Gordan. Weyman [Wey93] propose d'ailleurs une reformulation algébrique de cette preuve mais cette reformulation ne semble pas, à notre connaissance, avoir débloqué la situation. De notre côté, nous avons préféré insister sur les morphismes  $SL(2, \mathbb{C})$  équivariants et donc sur la théorie de la représentation des groupes. Comme nous l'avons déjà précisé, une telle approche figure également au cœur même de la théorie dite du re-couplage [CFS95 ; AC07 ; AC09 ; AC12], qui traite notamment des

---

b. Derksen [Der99] traite le cas des invariants de  $S_1 \oplus S_1 \oplus S_2$  et Sturmfels [Stu08] traite le cas des invariants d'une cubique.



questions relatives aux  $6j$ -symbols et aux  $9j$ -symbols.

Précisons enfin que l'algorithme original de Gordan a très vite permis d'obtenir des résultats surprenant pour l'époque <sup>c</sup>, à savoir les familles génératrices de covariants des formes binaires allant du degré cinq au degré huit [Gor68 ; Gal80 ; Gal88]. Elle nous a permis d'obtenir les familles génératrices de covariants des espaces  $S_6 \oplus S_4$ ,  $S_6 \oplus S_4 \oplus S_2$ , ainsi que les familles génératrices d'invariants de l'espace des tenseurs piézoélectriques et de l'espace des tenseurs d'élasticité.

## 6.2. Méthode de Hilbert

### 6.2.1. Nilcône d'un espace de formes binaires

On fixe une représentation complexe  $(V, \rho)$  d'un groupe linéaire réductif. On note  $\mathbb{C}[V]^G$  son algèbre des invariants et  $I^+ \subset \mathbb{C}[V]$  l'idéal engendré par tous les polynômes homogènes invariants de degré strictement positif.

**Définition 6.2.1** (nilcône). Le *nilcône*  $\mathcal{N}_V \subset V$  est la variété affine définie par l'idéal  $I^+$

$$\mathcal{N}_V := \left\{ \mathbf{v} \in V, \quad \mathbf{p}(\mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{p} \in I^+ \right\}.$$

Notons cette caractérisation du nilcône [DK02] :

**Lemme 6.2.2.** *Le nilcône  $\mathcal{N}_V$  est l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{v} \in V$  pour lesquels la fermeture de l'orbite contient 0.*

Dans le cas des groupes  $SL_n(\mathbb{C})$ , Hilbert a démontré le théorème suivant qui fut ensuite généralisé par Mumford et al. [MFK94].

**Théorème 6.2.3** (Hilbert–Mumford). *Etant donné un tore maximal  $T \subset G$ , notons  $\mathcal{N}_{T,V}, \mathcal{N}_{G,V} \subset V$  les nilcônes respectifs de  $T$  et de  $G$  dans  $V$ . Alors  $\mathcal{N}_{G,V} = G \cdot \mathcal{N}_{T,V}$ .*

**Corollaire 6.2.4.** *Etant donné l'action du groupe  $SL(2, \mathbb{C})$  sur l'espace  $S_n$  des formes binaires, une forme  $\mathbf{f} \in S_n$  est dans le nilcône si et seulement si  $\mathbf{f}$  possède une racine de multiplicité  $\mu > \frac{n}{2}$ .*

*Démonstration.* On applique le théorème 6.2.3 avec pour tore maximal

$$T = \left\{ \gamma_t := \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}^* \right\}. \quad (6.2.1)$$

Pour  $\mathbf{f} = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \dots + a_ny^n \in S_n$  on a alors

$$\gamma_t \cdot \mathbf{f} = a_0x^nt^{-n} + a_1x^{n-1}yt^{-n+2} + \dots + a_ny^nt^n$$

---

c. Cayley avait conjecturé que l'algèbre des invariants de  $S_5$  n'était pas de type fini. Il rechigna d'ailleurs à utiliser ou comprendre la preuve de finitude de Gordan, preuve pour laquelle Sylvester précisa qu'elle était « so long and complicated and so artificial a structure that it requires a very long study to master and there is not one person in Great Britain who has mastered it » [Cri88].

Ainsi, par le lemme 6.2.2,  $\mathbf{f}$  est dans le nilcône de  $T$  si et seulement si  $\mathbf{f}$  est divisible par  $x^r$  ou  $y^r$  avec

$$r = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$$

Et donc,  $\mathbf{f}$  est dans le nilcône de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  si et seulement si  $\mathbf{f}$  est divisible par l'un des scalaires  $(\gamma \cdot x)^r$  ou  $(\gamma \cdot y)^r$  pour un certain  $\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

On peut adapter cette preuve au cas des espaces quelconques de formes binaires :

**Corollaire 6.2.5.** *Etant donné l'action diagonale de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  sur l'espace  $V = S_{n_1} \oplus \dots \oplus S_{n_s}$ , une forme binaire*

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_s)$$

*est dans le nilcône si et seulement si les formes  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_s$  possèdent une racine commune de multiplicité  $\mu_i > \frac{n_i}{2}$  en  $\mathbf{f}_i$ .*

## 6.2.2. Nilcône et famille génératrice d'invariants

Le nilcône est une variété affine définie par l'idéal  $I^+$ . Par noetheriannité<sup>d</sup>, l'idéal  $\mathcal{I}_V$  associé au nilcône, qui est le radical de l'idéal  $I^+$ , est nécessairement de type fini. On note  $\{I_1, \dots, I_m\}$  la famille d'invariants qui engendrent  $\mathcal{I}_V$ . Dans le cas d'une représentation complexe du groupe spécial linéaire  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$  [Stu08] :

**Théorème 6.2.6** (Hilbert–1893). *L'algèbre des invariants  $\mathbb{C}[V]^{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})}$  est entière sur  $\mathbb{C}[I_1, \dots, I_m]$ .*

**Corollaire 6.2.7.** *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 6.2.6, l'algèbre des invariants  $\mathbb{C}[V]^{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})}$  est la clôture intégrale de  $\mathbb{C}[I_1, \dots, I_m]$  dans le corps  $\mathbb{C}(V)$  des fonctions rationnelles sur  $V$ .*

Ces résultats sont au cœur des méthodes développées par Derksen [Der99] ou Sturmfels [Stu08]. Néanmoins, comme nous l'avons déjà précisé, seuls quelques exemples simples ont été traités par cette approche.

Remarquons cependant que le nilcône peut également être utilisé pour déterminer un système de paramètres (définition 2.3.14). En effet, si le nombre d'invariants  $I_1, \dots, I_m$  qui engendrent  $\mathcal{I}_V$  est égal à la dimension de Krull de  $\mathbb{C}[V]^G$ , alors ils forment nécessairement un système de paramètres. Dans le cas particulier des formes binaires, cela donne le résultat suivant :

**Proposition 6.2.8.** *Soit  $n$  un entier plus grand que 3, et  $\theta_1, \dots, \theta_{n-2} \in \mathbb{C}[S_n]^{\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})}$  une famille de  $n - 2$  invariants homogènes. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\mathcal{N}_{S_n} = \mathcal{V}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2})$ .
2.  $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$  est un système de paramètres homogène de  $\mathbb{C}[S_n]^{\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})}$ .

---

d. L'anneau  $\mathbb{C}[V]$  est noethérien car  $V$  est de dimension finie.

Dans tous les cas, une fois exhibé un système de paramètres  $\theta_1, \dots, \theta_r$  d'une algèbre d'invariants  $\mathbb{C}[V]^G$ , on sait par la propriété de Cohen–Macaulay (définition 2.3.18) qu'il existe une famille  $\eta_1, \dots, \eta_s$  telle que

$$\mathbb{C}[V]^G = \eta_1 \mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_r] \oplus \dots \oplus \eta_s \mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_r]$$

Il est alors clair que la famille  $\theta_i, \eta_j$  est une famille génératrice de l'algèbre des invariants. Or, par le corollaire 2.3.26, la *série de Hilbert* de  $\mathbb{C}[V]^G$  est de la forme

$$H(z) = \frac{z^{e_1} + \dots + z^{e_r}}{(1 - z^{d_1}) \dots (1 - z^{d_s})}$$

où  $e_i \in \mathbb{N}$  et  $d_j = \deg(\theta_j)$ . Si on connaît un système de paramètres et la série de Hilbert de l'algèbre des invariants, on peut donc en déduire une borne sur les invariants secondaires. Par cette approche, on cherche donc à déterminer un système de paramètres, on calcule ensuite la série de Hilbert et on en déduit une borne sur les degrés des générateurs qui restent à déterminer.

*Exemple 6.2.9.* Les cas  $n = 2, 3, 4$  sont simples

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - z^2}, \quad H_3(z) = \frac{1}{1 - z^4}, \quad H_4(z) = \frac{1}{(1 - z^2)(1 - z^3)}$$

et on sait que dans chacun de ces cas les algèbres respectives sont libres.

Pour une forme quadratique  $\mathbf{u} \in S_2$  ou pour une forme cubique  $\mathbf{v} \in S_3$ , l'algèbre des invariants est respectivement engendrée par

$$\Delta_2 := (\mathbf{u}, \mathbf{u})_2, \quad \Delta_3 = ((\mathbf{v}, \mathbf{v})_2, (\mathbf{v}, \mathbf{v})_2)_2$$

Pour une forme  $\mathbf{f} \in S_4$ , l'algèbre est libre et engendrée par les invariants

$$i := (\mathbf{f}, \mathbf{f})_4, \quad j := (\mathbf{f}, (\mathbf{f}, \mathbf{f})_2)_4$$

Pour une forme  $\mathbf{g} \in S_6$ , on peut exhiber [BP10a] un système de paramètres de degrés respectifs 2, 4, 6 et 10. La série de Hilbert est alors donnée par

$$H_5(z) = \frac{1 + z^{15}}{(1 - z^2)(1 - z^4)(1 - z^6)(1 - z^{10})}$$

ce qui montre l'existence d'un générateur de degré 15.

*Remarque 6.2.10.* Il se peut bien sûr que la famille génératrice  $\theta_i, \eta_j$  ne soit pas minimale. En effet, on peut avoir des décompositions de Hironaka du type

$$\mathbb{C}[V]^G = J_1 \mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_s] \oplus J_2 \mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_s] \oplus J_1 J_2 \mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_s]$$

auquel cas une famille génératrice est donnée par  $J_1, J_2, \theta_1, \dots, \theta_s$ . Une telle situation [Shi67] intervient d'ailleurs dans le cas des formes binaires de degré 8.

Cette méthode, qui consiste à exhiber un système de paramètres pour en déduire, via la série de Hilbert, une borne sur les degrés des générateurs, est celle qui a été utilisée par Brouwer–Popoviciu [BP10a; BP10b] dans le calcul des invariants des formes binaires de

degré 9 et 10. Dans ces cas, on obtient une borne sur les degrés des invariants secondaires qui vaut 66 pour les générateurs  $\mathbb{C}[S_9]^{\text{SL}(2,\mathbb{C})}$  et 48 pour les générateurs de  $\mathbb{C}[S_9]^{\text{SL}(2,\mathbb{C})}$ .

La difficulté d'une telle approche réside dans la détermination d'un système de paramètres. Bien sûr, le *lemme de normalisation de Noether* nous assure l'existence d'un tel système pour les algèbres de type fini mais les seuls algorithmes dont nous avons pu prendre connaissance [Log89 ; Has08] ne traitent là aussi que de situations assez simples.

Une autre difficulté résulte d'un théorème de Brion [Bri82, Théorème 3]. Notons  $V = S_{n_1} \oplus \dots \oplus S_{n_l}$  ( $s \geq 2$ ) un espace de formes binaires,  $\theta_1, \dots, \theta_s$  un système de paramètres de  $\mathbb{C}[V]^{\text{SL}(2,\mathbb{C})}$  et

$$\mathbb{C}[V]^G = \eta_1 \mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_s] \oplus \dots \oplus \eta_r \mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_s]$$

sa décomposition de Hironaka.

**Théorème 6.2.11** (Brion–1982). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. On peut choisir  $\theta_1, \dots, \theta_s, \eta_1, \dots, \eta_r$  homogènes par rapport à chaque  $S_{n_i}$  ( $i = 1, \dots, l$ ).
2.  $\mathbb{C}[V]^G$  possède un système de paramètres homogène par rapport à chaque  $S_{n_i}$ .
3. La série de Hilbert  $H(z)$  de  $\mathbb{C}[V]^G$  (à  $l$  variables) admet pour dénominateur un produit de  $s$  termes de la forme  $1 - z^e$ ,  $e \in \mathbb{N}^l$ .
4.  $(n_1, \dots, n_l)$  fait partie de la liste suivante :

$$\begin{aligned} (l = 2) \quad & (1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 3); (4, 4) \\ (l = 3) \quad & (1, 1, 1); (1, 1, 2); (1, 2, 2); (2, 2, 2). \end{aligned}$$

*Exemple 6.2.12.* L'article [BP11] donne de nombreux exemples d'algèbre d'invariants et de covariants en petite dimension homologique (qui est la différence entre le nombre minimal de générateurs et la dimension de Krull). Ainsi, on peut considérer le cas de l'espace

$$V = S_1 \oplus S_2 \oplus S_4$$

pour lequel l'algèbre des invariants  $\mathbb{C}[V]^{\text{SL}(2,\mathbb{C})}$  n'est rien d'autre que l'algèbre des covariants de  $S_2 \oplus S_4$ . En notant  $(\mathbf{l}, \mathbf{q}, \mathbf{f}) \in V$ , il existe un système de paramètres [BP11] de degrés respectifs 2,2,3,3,4,5,6, et donné par

$$\begin{aligned} & (\mathbf{q}, \mathbf{q})_2, \quad (\mathbf{f}, \mathbf{f})_4 \\ & (\mathbf{f}, (\mathbf{f}, \mathbf{f})_2)_4 + (\mathbf{f}, \mathbf{q}^2)_4, \quad (\mathbf{q}, \mathbf{l}^2)_2 - (\mathbf{f}, (\mathbf{f}, \mathbf{f})_2)_4 \\ & ((\mathbf{f}, \mathbf{f})_2, \mathbf{q}^2)_4, \quad (\mathbf{f}, \mathbf{l}^4)_4, \quad ((\mathbf{f}, \mathbf{f})_2, \mathbf{q}^4)_4 \end{aligned}$$

Du fait de la difficulté de trouver un système de paramètres dans le cas général, nous avons donc choisi d'étudier l'algorithme de Gordan pour traiter le cas des espaces  $\mathbb{P}^{ie}$  et  $\mathbb{E}^{la}$ , lesquels sont, rappelons-le, des espaces de dimensions respectives 18 et 21, et respectivement isomorphes à

$$S_6 \oplus S_2 \oplus S_4 \oplus S_2, \text{ et } S_8 \oplus S_4 \oplus S_4 \oplus S_0 \oplus S_0$$

## 6.3. Algorithme de Gordan

### 6.3.1. Algorithme de Gordan pour les covariants joints

L'algorithme de Gordan pour les covariants joints permet d'obtenir une famille génératrice finie de  $\mathbf{Cov}(V_1 \oplus V_2)$ , une fois connue une famille génératrice finie de  $\mathbf{Cov}(V_1)$  et  $\mathbf{Cov}(V_2)$ .

#### Familles complètes

**Définition 6.3.1.** On fixe une famille  $A = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots\} \subset \mathbf{Cov}(V)$  de **covariants** d'un espace  $V$  de formes binaires. Alors  $\mathbf{Cov}(A)$  est l'algèbre engendrée par tous les covariants  $\mathbf{f}_i$  ainsi que par les transvectants itérés<sup>e</sup>

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{r_1}, \quad ((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{r_1}, \mathbf{f}_3)_{r_2}, \dots, \quad \mathbf{f}_i \in A, \quad r_i \in \mathbb{N}.$$

Pour toute famille  $A$  et  $B$ , on a directement  $\mathbf{Cov}(\mathbf{Cov}(A)) = \mathbf{Cov}(A)$  et

$$A \subset B \Rightarrow \mathbf{Cov}(A) \subset \mathbf{Cov}(B). \quad (6.3.1)$$

Par le théorème 5.2.24 :

**Lemme 6.3.2.** Si  $V = S_n$  et la famille  $A$  contient le covariant  $\mathbf{f} \in V$ , alors  $\mathbf{Cov}(A) = \mathbf{Cov}(V)$ .

De plus, par (6.3.1) :

**Lemme 6.3.3.** Etant donné  $A_1$  et  $A_2$  deux familles de  $\mathbf{Cov}(V)$ . Si

$$A_1 \subset A_2 \subset \mathbf{Cov}(A_1)$$

alors  $\mathbf{Cov}(A_1) = \mathbf{Cov}(A_2)$

**Définition 6.3.4.** Une famille de covariants  $A$  de  $V$  est dite *complète* si  $\mathbf{Cov}(A) = \mathbb{C}[A]$ , c'est-à-dire que tout élément de  $\mathbf{Cov}(A)$  s'écrit comme un polynôme en  $A$ .

*Remarque 6.3.5.* La notion de famille complète est plus faible que celle de famille génératrice. Notons en effet  $\mathbf{f} \in S_3$  et

$$\mathbf{H} := (\mathbf{f}, \mathbf{f})_2, \quad \mathbf{T} := (\mathbf{f}, \mathbf{H})_1 \text{ et } \Delta := (\mathbf{H}, \mathbf{H})_2.$$

On sait que la famille  $A_1 = \{\mathbf{f}, \mathbf{H}, \mathbf{T}, \Delta\}$  est une famille génératrice de covariants [GY10; Olv99] de  $\mathbf{Cov}(A_1) = \mathbf{Cov}(S_3)$  et donc une famille complète. Considérons maintenant la famille

$$A_2 := \{\mathbf{H}, \Delta\}.$$

On sait que  $\mathbf{Cov}(A_2) \subsetneq \mathbf{Cov}(V)$  et on remarque que  $A_2$  est exactement la famille génératrice de covariants [GY10] de la forme quadratique  $\mathbf{H} \in S_2$ , ainsi  $A_2$  est une famille complète mais n'est pas une famille génératrice de  $\mathbf{Cov}(V)$ .

---

e. Ou, se qui revient au même, par tous les covariants moléculaires composés d'atomes issus de  $A$ .

## Transvectants et systèmes linéaires diophantiens

A partir de maintenant, notons  $V_1$  et  $V_2$  deux espaces de formes binaires, puis

$$A := \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\} \subset \mathbf{Cov}(V_1), \quad B := \{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_q\} \subset \mathbf{Cov}(V_2),$$

deux familles *finies et complètes* de covariants. Notons  $a_i = \text{Ord}(\mathbf{f}_i)$  (resp.  $b_j = \text{Ord}(\mathbf{g}_j)$ ) l'ordre de  $\mathbf{f}_i$  (resp.  $\mathbf{g}_j$ ). Soit ensuite  $\mathbf{U}$  (resp.  $\mathbf{V}$ ) un monôme de  $\mathbb{C}[A]$  (resp.  $\mathbb{C}[B]$ ) :

$$\mathbf{U} := \mathbf{f}_1^{\alpha_1} \dots \mathbf{f}_p^{\alpha_p}, \quad \mathbf{V} := \mathbf{g}_1^{\beta_1} \dots \mathbf{g}_q^{\beta_q}.$$

On observe alors que si le transvectant

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r,$$

est non nul alors  $\kappa := (\alpha, \beta, u, v, r)$  est solution entière du système linéaire

$$S(A, B) : \begin{cases} a_1\alpha_1 + \dots + a_p\alpha_p = u + r, \\ b_1\beta_1 + \dots + b_q\beta_q = v + r, \end{cases} \quad (6.3.2)$$

Inversement, à chaque solution entière  $\kappa$  de  $S(A, B)$  on peut associer un transvectant  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r$  bien défini.

**Lemme 6.3.6.** *Si  $\kappa$  est une solution réductible de  $(S)$ , alors il existe un covariant moléculaire non connexe<sup>f</sup> dans la décomposition 5.2.27 du transvectant  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r$ .*

*Démonstration.* Fixons une solution entière réductible  $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$ , avec

$$\kappa_i = (\alpha^i, \beta^i, u^i, v^i, r^i) \text{ solution de (6.3.2).}$$

Ainsi  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1\mathbf{U}_2$  et  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1\mathbf{V}_2$ , et il existe donc  $\nu(r), \nu_1(r^1)$  et  $\nu_2(r^2)$  tels que

$$\begin{array}{ccccccc} \textcircled{\mathbf{U}} & \xrightarrow{\nu(r)} & \textcircled{\mathbf{V}} & = & \textcircled{\mathbf{U}_1} & \xrightarrow{\nu_1(r^1)} & \textcircled{\mathbf{V}_1} & \textcircled{\mathbf{U}_2} & \xrightarrow{\nu_2(r^2)} & \textcircled{\mathbf{V}_2} \end{array}$$

qui est un covariant moléculaire non connexe dans la décomposition 5.2.27 du transvectant  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r$ .  $\square$

*Remarque 6.3.7.* Si une solution entière associée au transvectant  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r$  est réductible, cela ne signifie pas que ce transvectant soit réductible. Ainsi, prenons par exemple  $\mathbf{f} \in \mathbf{S}_6$ ,  $A = B := \{\mathbf{f}\}$  et les transvectants

$$(\mathbf{f}^{\alpha_1}\mathbf{f}^{\alpha_2}, \mathbf{f}^{\beta_1})_5.$$

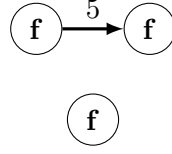
Alors la solution  $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, u, v, 5) = (1, 1, 1, 7, 1, 5)$  est réductible, et le transvectant

$$(\mathbf{f}^2, \mathbf{f})_5 \quad (6.3.3)$$

contient le covariant moléculaire

---

f. C'est-à-dire image d'une molécule non connexe.



qui est un covariant nul. Mais alors la proposition 5.2.31 entraîne que le transvectant (6.3.3) est une combinaison linéaire des transvectants

$$((\mathbf{f}, \mathbf{f})_4, \mathbf{f})_1, \quad ((\mathbf{f}, \mathbf{f})_3, \mathbf{f})_2 = 0, \quad ((\mathbf{f}, \mathbf{f})_2, \mathbf{f})_3, \quad ((\mathbf{f}, \mathbf{f})_1, \mathbf{f})_4 = 0,$$

et on peut même montrer par un calcul direct que

$$(\mathbf{f}^2, \mathbf{f})_5 = \frac{65}{66}((\mathbf{f}, \mathbf{f})_4, \mathbf{f})_1,$$

où  $((\mathbf{f}, \mathbf{f})_4, \mathbf{f})_1$  est un covariant irréductible car il fait partie de la famille génératrice de  $\text{Cov}(S_6)$  (voir table 6.2).

Nous avons néanmoins le résultat suivant :

**Lemme 6.3.8.** Notons  $\mathbf{a} := \max(a_i)$ ,  $\mathbf{b} := \max(b_j)$  et

$$\mathbf{U} := \mathbf{f}_1^{\alpha_1} \dots \mathbf{f}_p^{\alpha_p}, \quad \mathbf{V} := \mathbf{g}_1^{\beta_1} \dots \mathbf{g}_q^{\beta_q}.$$

Soit ensuite  $u = \text{Ord}(\mathbf{U}) - r$  et  $v = \text{Ord}(\mathbf{V}) - r$ . Si

$$u + v \geq \mathbf{a} + \mathbf{b}, \tag{6.3.4}$$

alors le transvectant  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r$  est réductible.

*Démonstration.* De la condition (6.3.4) on en déduit que  $u \geq \mathbf{a}$  ou  $v \geq \mathbf{b}$  et donc le transvectant  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r$  contient un covariant moléculaire non connexe  $\mathbf{T}$  (la solution entière  $\kappa$  associée n'est pas minimiale). Par la proposition 5.2.31, le transvectant est donc une combinaison linéaire de  $\mathbf{T}$  et des transvectants

$$(\overline{\mathbf{U}}^{\mu(k_1)}, \overline{\mathbf{U}}^{\mu(k_2)})_{r'},$$

où  $r' < r$  et  $k_1 + k_2 = r - r'$ . Or, comme les familles A et B sont complètes, nous avons

$$\overline{\mathbf{U}}^{\mu(k_1)} = \mathbf{f}_1^{\alpha'_1} \dots \mathbf{f}_p^{\alpha'_p}, \quad \overline{\mathbf{V}}^{\mu(k_2)} = \mathbf{g}_1^{\beta'_1} \dots \mathbf{g}_q^{\beta'_q},$$

où l'ordre du transvectant  $(\overline{\mathbf{U}}^{\mu(k_1)}, \overline{\mathbf{V}}^{\mu(k_2)})_{r'}$  est  $u' + v' = u + v$ . Ayant supposé que  $u + v \geq \mathbf{a} + \mathbf{b}$ , on en déduit que  $u' + v' \geq \mathbf{a} + \mathbf{b}$  et donc on peut conclure le preuve par récurrence sur  $r$ .  $\square$

*Remarque 6.3.9.* L'hypothèse  $u + v \geq \mathbf{a} + \mathbf{b}$  ne peut pas être remplacée par l'hypothèse plus faible  $u \geq \mathbf{a}$  ou  $v \geq \mathbf{b}$ . En reprenant l'exemple de la remarque 6.3.7, pour  $\mathbf{f} \in S_6$  et  $\mathbf{h} := (\mathbf{f}^2, \mathbf{f})_5$ , on a  $u = v = 7 \geq 6$  mais  $\mathbf{h}$  n'est pas réductible.

Le lemme 6.3.8 conduit directement à :

**Corollaire 6.3.10.** Notons  $\mathbf{F} \in \mathbf{Cov}(V)$  un covariant d'ordre  $s$  et  $\{\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_k\} \subset \mathbf{Cov}(V)$  une famille de covariants homogènes. Notons  $t_i$  l'ordre de  $\mathbf{F}_i$  et  $\mathbf{t} = \max(t_i)$ . Pour tout entier  $r$ , si

$$\sum_{i=1}^k t_i \geq \mathbf{a} + 2r,$$

alors le transvectant  $(\mathbf{F}_1 \dots \mathbf{F}_k, \mathbf{F})_r$  est réductible.

*Démonstration.* Notons  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p$  une famille génératrice de covariants de  $\mathbf{Cov}(V)$  où chaque  $\mathbf{f}_i$  est un covariant homogène d'ordre  $a_i$ . Alors, chaque covariant  $\mathbf{F}_j$  est une combinaison linéaire des monômes  $\mathbf{f}_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots \mathbf{f}_{i_l}^{\alpha_{i_l}}$  avec  $a_i \leq t_j \leq \mathbf{t}$ . On en déduit que le covariant  $\mathbf{F}_1 \dots \mathbf{F}_k$  se décompose en monômes  $\mathbf{U}$  des  $\mathbf{f}_i$ , avec

$$\text{Ord}(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^k t_i \text{ et } \max(a_i) \leq \mathbf{t}.$$

Or on peut aussi écrire  $\mathbf{F} = \mathbf{f}_{j_1}^{\beta_{j_1}} \dots \mathbf{f}_{j_m}^{\beta_{j_m}}$  avec  $\max(a_j) \leq s$ . Par le lemme 6.3.8, on en déduit que chaque transvectant  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r$  est un covariant réductible.  $\square$

### Algorithme de Gordan pour les covariants joints

Le système entier  $S(A, B)$  (6.3.2) possède un nombre fini de solutions entières irréductibles<sup>g</sup> (voir par exemple [Sta12 ; Sta83 ; Stu08] pour les détails). Notons  $C := \{\tau^1, \dots, \tau^l\}$  l'ensemble des transvectants associé à ces solutions irréductibles.

**Théorème 6.3.11.** L'algèbre  $\mathbf{Cov}(A \cup B)$  est engendrée par la famille finie et complète  $C = \{\tau^1, \dots, \tau^l\}$ .

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que chaque  $\mathbf{f}_i$  (resp. chaque  $\mathbf{g}_j$ ) correspond à une solution irréductible de  $S(A, B)$  donc  $A \subset C$  et  $B \subset C$ .

En utilisant la définition 5.2.25, tout covariant moléculaire  $\mathbf{M}$  peut s'écrire

$$\mathbf{M} = \left( \mathbf{D} \xrightarrow{\nu(r)} \mathbf{E} \right)$$

où  $\mathbf{D} \in \mathbf{Cov}(A)$  et  $\mathbf{E} \in \mathbf{Cov}(B)$  sont deux covariants moléculaires, et  $r$  est un certain entier. Mais alors, par la proposition 5.2.31, tout covariant de  $\mathbf{Cov}(A \cup B)$  est une combinaison linéaire des transvectants

$$(\mathbf{D}, \mathbf{E})_r, \quad (\overline{\mathbf{D}}^{\mu_1}, \overline{\mathbf{E}}^{\mu_2})_r$$

Sachant que la famille  $A$  est complète, on peut supposer que tous les covariants  $\mathbf{D}, \overline{\mathbf{D}}^{\mu_1}$  sont des monômes en les  $\mathbf{f}_i$ . On peut supposer de même que tous les covariants  $\mathbf{E}, \overline{\mathbf{E}}^{\mu_2}$  sont des monômes  $\mathbf{V}$  en les  $\mathbf{g}_j$ . Au final, on doit donc considérer des covariants issus de la famille des transvectants  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r$ .

On raisonne maintenant par récurrence sur  $r$ . Pour  $r = 0$ , nous avons déjà observé que  $A \subset C$  et  $B \subset C$  donc la propriété est vérifiée.

g. Il existe des algorithmes effectifs de résolutions de tels systèmes [CD91 ; CF90 ; CD94 ; PV04].



Soit maintenant  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r$  un transvectant associé à une solution entière réductible  $\kappa$ . Par la proposition 5.2.31,  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r$  est une combinaison linéaire de produits de  $\tau^i$  et des transvectants

$$(\overline{\mathbf{U}}^{\mu_1(k_1)}, \overline{\mathbf{V}}^{\mu_2(k_2)})_{r'}, \quad r' < r \quad (6.3.5)$$

Mais  $\overline{\mathbf{U}}^{\mu_1(k_1)} \in \mathbf{Cov}(A)$  (resp.  $\mathbf{V}$  et  $B$ ), et comme  $A$  (resp.  $B$ ) est une famille complète, on sait que que les transvectants (6.3.5) sont des combinaisons linéaires de

$$(\mathbf{U}', \mathbf{V}')_{r'}, \quad r' < r,$$

où  $\mathbf{U}'$  (resp.  $\mathbf{V}'$ ) est un monôme en les  $\mathbf{f}_i$ 's (resp.  $\mathbf{g}_j$ ). Ainsi, par récurrence sur  $r$ , l'algèbre  $\mathbf{Cov}(A \cup B)$  est engendrée par la famille finie  $C$ .

Il reste à montrer que la famille  $C$  est complète. Pour cela, on remarque que

$$A \cup B \subset C \subset \mathbf{Cov}(A \cup B),$$

et donc

$$\mathbf{Cov}(C) = \mathbf{Cov}(A \cup B) = \mathbb{C}[C],$$

□

Une application directe du théorème 6.3.11 concerne les covariants joints. En effet, ce théorème donne un procédé constructif pour obtenir une famille génératrice de covariants de  $V_1 \oplus V_2$ , une fois connue une famille génératrice de chaque espace  $V_1$  et  $V_2$ .

Notons aussi que le lemme 6.3.8 donne une borne sur les ordres de chaque élément d'une famille génératrice de covariants joints :

**Corollaire 6.3.12.** *Notons  $V = S_{n_1} \oplus \dots \oplus S_{n_s}$ . Si  $\mu_i$  est l'ordre maximal d'une famille génératrice minimale de  $S_{n_i}$ , alors, pour chaque élément  $\mathbf{h}$  d'une famille génératrice minimal de  $V$ , on a*

$$\text{ord}(\mathbf{h}) \leq \sum_{i=1}^s \mu_i.$$

*Exemple 6.3.13.* On peut directement appliquer le théorème 6.3.11 au cas de  $\mathbf{Cov}(S_3 \oplus S_4)$ . Ce résultat avait déjà été obtenu par Popoviciu–Brouwer [BP12], avec bien plus de calculs. Notons  $\mathbf{u} \in S_3$  et  $\mathbf{v} \in S_4$ . Rappelons aussi que [GY10 ; Olv99] :

- l'algèbre  $\mathbf{Cov}(S_3)$  est engendrée par les trois covariants

$$\mathbf{u} \in S_3 \quad \mathbf{h}_{2,2} := (\mathbf{u}, \mathbf{u})_2 \in S_2, \quad \mathbf{h}_{3,3} := (\mathbf{u}, \mathbf{h}_{2,2})_1 \in S_3$$

et l'invariant  $\Delta := (\mathbf{u}, \mathbf{t})_3$  ;

- l'algèbre  $\mathbf{Cov}(S_4)$  est engendrée par les trois covariants

$$\mathbf{v} \in S_4, \quad \mathbf{k}_{2,4} := (\mathbf{v}, \mathbf{v})_2 \in S_4, \quad \mathbf{k}_{3,6} := (\mathbf{v}, \mathbf{k}_{2,4})_1 \in S_6$$

et les deux invariants  $i := (\mathbf{v}, \mathbf{v})_4$ ,  $j := (\mathbf{v}, \mathbf{k}_{2,4})_4$  ;

Nous devons ensuite résoudre le système diophantien

$$(S) : \begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = u + r \\ 4\beta_1 + 4\beta_2 + 6\beta_3 = v + r \end{cases} \quad (6.3.6)$$

En utilisant le package Normaliz de Macaulay 2 [BI10], on en déduit 104 solutions. La famille des covariants associés a pour degré total maximal 18 (le degré total d'un covariant est la somme de son degré et de son ordre), sachant qu'une solution entière

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, u, v, r)$$

est associé à un covariant de degré

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3.$$

Ensuite, la série de Hilbert de  $\mathbf{Cov}(S_4 \oplus S_3)$  est donnée par

$$\begin{aligned} H(z) = & 1 + z^2 + 2z^3 + 5z^4 + 10z^5 + 18z^6 + 31z^7 + 55z^8 + 92z^9 \\ & + 144z^{10} + 223z^{11} + 341z^{12} + 499z^{13} + 725z^{14} + 1031z^{15} \\ & + 1436z^{16} + 1978z^{17} + 2685z^{18} + \dots \end{aligned}$$

En utilisant des scripts écrits en Macaulay 2 [GS], nous avons réduit cette famille de 104 générateurs en un ensemble minimal de 63 générateurs. Les résultats sont fournis dans la table 6.1, déjà obtenus par Popoviciu–Brouwer [BP12].

$d/o$	0	1	2	3	4	5	6	#	Cum
1	—	—	—	1	1	—	—	2	2
2	1	1	1	1	1	1	—	6	8
3	1	1	2	2	1	1	1	9	17
4	1	2	2	2	1	—	—	8	25
5	2	3	3	1	1	—	—	10	35
6	2	3	2	1	—	—	—	8	43
7	3	3	1	—	—	—	—	7	50
8	3	2	—	—	—	—	—	5	55
9	4	1	—	—	—	—	—	5	60
10	2	—	—	—	—	—	—	2	62
11	1	—	—	—	—	—	—	1	63
<i>Tot</i>	20	16	11	8	5	2	1		63

Table 6.1. – Famille génératrice minimale de  $\mathbf{Cov}(S_3 \oplus S_4)$

### Optimisation de l'algorithme de Gordan

Une fois obtenues les solutions *irréductibles* du système diophantien  $S(A, B)$ , nous obtenons une famille génératrice de covariants exprimés sous forme de transvectants. Or, une telle famille n'a aucune raison d'être minimale (exemple 6.3.13). Nous proposons ici une méthode qui permet, sous certaines hypothèses, de procéder à une première

réduction de cette famille, sans la rendre forcément minimale.

Nous commençons par illustrer cette méthode dans le cas de l'algèbre  $\mathbf{Cov}(S_3 \oplus S_4)$ . Nous avons déjà vu dans l'exemple 6.3.13 que le système diophantien associé possède 104 solutions. Or, en reprenant les notations de cet exemple, on connaît dans  $\mathbf{Cov}(S_4)$  la relation

$$12\mathbf{k}_{3,6}^2 = -6\mathbf{k}_{2,4}^3 - 2j\mathbf{v}^3 + 3i\mathbf{v}^2\mathbf{k}_{2,4}, \quad (6.3.7)$$

Par cette relation, on peut se limiter aux solutions minimales

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, u, v, r), \quad \beta_3 \leq 1$$

Dans le cas général, on se fixe deux familles  $A = \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$  et  $B = \{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_q\}$ , et on suppose qu'il existe une sous-famille

$$A_0 := \{\mathbf{f}_{l+1}, \dots, \mathbf{f}_p\} \subset A$$

telle que  $\mathbb{C}[A]$  soit un  $\mathbb{C}[A_0]$ -module de type fini, engendré par des monômes appartenant à l'algèbre  $\mathbb{C}[\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_l]$ . On note  $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}^{p+q+3}$  la famille finie des solutions entières irréductibles du système entier  $S(A, B)$ . Sous l'hypothèse de finitude du module  $\mathbb{C}[A]$ , on en déduit une sous-famille  $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$  de solutions entières irréductibles.

**Théorème 6.3.14.** *Sous les hypothèses ci-dessus, en notant  $C_* = \{\tau_*^1, \dots, \tau_*^n\}$  la famille des transvectants correspondants à a sous-famille  $\mathcal{S}^*$  de solutions entières irréductibles du système  $S(A, B)$ , l'algèbre  $\mathbf{Cov}(A \cup B)$  est engendrée par la famille finie et complète  $C^*$ .*

*Démonstration.* Il suffit en fait de reprendre la démonstration du théorème 6.3.11. On commence par remarquer que chaque  $\mathbf{f}_i$  correspond à un élément de  $\mathcal{S}^*$ . On sait donc que  $A \subset C$  et  $B \subset C$ . Ensuite, on remplace chaque covariant  $\mathbf{D} \in \mathbf{Cov}(A)$  ou chaque monôme  $\mathbf{U}$  de l'algèbre  $\mathbb{C}[A]$  par une somme

$$\sum_i \eta_i \mathbf{F}_i, \quad (6.3.8)$$

où  $\mathbf{F}_i \in \mathbb{C}[A_0]$  et  $\eta_i$  est un monôme de l'algèbre  $\mathbb{C}[\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_l]$ . Dans la preuve, on doit donc considérer des covariants du type  $(\eta_i \mathbf{F}_i, \mathbf{V})_r$ .

Mais alors, dans la récurrence, lorsque ce transvectant correspond à une solution entière  $\kappa$  minimale de  $S(A, B)$ , il est nécessairement un élément de la famille  $C_*$ . Dans le cas contraire, on peut écrire  $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$ , et comme  $\kappa_i \leq \kappa$ , toute solution entière minimale intervenant dans cette décomposition est nécessairement dans la famille  $\mathcal{S}^*$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

*Remarque 6.3.15.* On a bien sûr un résultat similaire dans le cas où l'algèbre  $\mathbb{C}[B]$  est elle aussi un  $\mathbb{C}[B_0]$ -module de type fini, avec

$$B_0 := \{\mathbf{g}_{s+1}, \dots, \mathbf{g}_q\} \subset B$$

Dans ce cas, on peut alors réduire le nombre de solutions entières minimales en obtenant à la fois des bornes sur les  $\alpha_i$  et des bornes sur les  $\beta_j$ . Une telle situation a par exemple été appliquée au cas de l'algèbre  $\mathbf{Cov}(S_4 \oplus S_4)$ , intervenant dans un calcul intermédiaire des invariants de l'élasticité (section 7.3).

### 6.3.2. Algorithme de Gordan pour des covariants simples

Cette autre version de l'algorithme de Gordan permet d'obtenir une famille génératrice finie de covariants de  $S_n$ , une fois connue une famille génératrice de covariants de  $S_k$ , ( $k < n$ ).

**Définition 6.3.16.** Etant donné un idéal homogène  $I \subset \mathbf{Cov}(V)$ , une famille  $A = \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\} \subset \mathbf{Cov}(V)$  de covariants homogènes est *relativement complète modulo  $I$*  si chaque covariant homogène  $\mathbf{h} \in \mathbf{Cov}(A)$  de degré  $d$  peut s'écrire

$$\mathbf{h} = p(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p) + \mathbf{h}_I \text{ avec } \mathbf{h}_I \in I,$$

où  $p(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p)$  et  $\mathbf{h}_I$  sont nuls ou bien des covariants homogènes de degré  $d$ .

Pour toute molécule  $D$  (définition 5.2.16), définie à partir d'un espace  $V$  de formes binaires, le *grade* de  $D$ , noté  $\text{gr}(D)$  est le poids maximal des arêtes de  $D$  :

$$\text{gr}(D) := \max_{e \in \mathcal{E}(D)} w(e).$$

**Définition 6.3.17.** Soit  $r$  un entier naturel ; on désigne par  $\mathcal{G}_r(V)$  l'ensemble de tous les covariants moléculaires (définition 5.2.19) provenant d'une molécule de grade supérieur ou égal à  $r$ .

Remarquons tout de suite que, pour  $V = S_n$ , on a  $\mathcal{G}_r(S_n) = \{0\}$  dès que  $r > n$ . De plus

$$\mathcal{G}_{i+1}(V) \subset \mathcal{G}_i(V) \text{ pour tout } i. \quad (6.3.9)$$

**Définition 6.3.18** (Idéal de Gordan). Soit  $r$  un entier naturel. l'*idéal de Gordan*  $I_r(V)$  est l'idéal homogène<sup>h</sup> engendré par  $\mathcal{G}_r(V)$ . On note

$$I_r(V) := \langle \mathcal{G}_r(V) \rangle.$$

On remarque directement que

- $I_r(S_n) = \{0\}$  pour tout  $r > n$  ;
- Par 6.3.9, on a  $I_{r+1}(V) \subset I_r(V)$  pour tout entier  $r$ .

Par la proposition 5.2.27 :

**Lemme 6.3.19.** Si  $\mathbf{h}_r \in I_r(V)$ , alors pour tout covariant  $\mathbf{h} \in \mathbf{Cov}(V)$  et pour tout entier  $j \geq 0$ ,

$$\{\mathbf{h}_r, \mathbf{h}\}_j \in I_r(V).$$

*Remarque 6.3.20.* Ce lemme signifie que les idéaux de Gordan sont stables par transvection. On peut observer que les idéaux de  $\mathbf{Cov}(V)$  engendré par des invariants sont eux aussi stables par transvections. En effet, en notant  $\Delta \in \mathbf{Inv}(S_n)$ , on a

$$(\mathbf{h}, \Delta \mathbf{k})_r = \Delta(\mathbf{h}, \mathbf{k})_r.$$

pour tout covariant  $\mathbf{h}, \mathbf{k}$  et pour tout entier  $r \geq 0$ .

---

h. Un tel idéal est engendré par des éléments homogènes

Dorénavant, on fixe un espace  $V = S_n$  de forme binaire. Pour  $\mathbf{f} \in S_n$ , on note

$$\mathbf{H}_{2k} := (\mathbf{f}, \mathbf{f})_{2k}$$

**Lemme 6.3.21.** *Pour tout entier  $k \geq 1$ , l'idéal  $I_{2k}$  est engendré par les transvectants du type*

$$(\mathbf{M}, \mathbf{H}_{2j})_r, \quad r \geq 0, \quad j \geq k$$

où  $\mathbf{M}$  est un covariant quelconque.

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que les générateurs de  $I_{2k}$  sont des covariants moléculaires de la forme

$$\begin{array}{c} \text{D} \longrightarrow \text{H}_m \\ \text{---} \nu(r) \text{---} \end{array}, \quad m \geq 2k$$

Mais alors, par la proposition 5.2.31, un tel covariant est combinaison linéaire de transvectants

$$(\mathbf{D}, \mathbf{H}_m)_{r_1}, \quad (\overline{\mathbf{D}}^{\mu_1}, \overline{\mathbf{H}}_m^{\mu_2})_{r_2}$$

où  $\overline{\mathbf{H}}_m^{\mu_2} = \mathbf{H}_{j'}$  avec  $j' \geq j$ . On remarque alors que pour  $j'$  impair ce covariant est nul et on en déduit le lemme.  $\square$

Notons A et B deux familles de covariants,  $\kappa^1, \dots, \kappa^l$  les solutions irréductibles du système  $S(A, B)$  (6.3.2) et  $\tau^i$  les transvectants associés. Notons

$$\mathbf{f} \in S_n, \quad \Delta \in \mathbf{Cov}(V),$$

un invariant et  $k \geq 0$ . Finalement, notons  $J_{2k+2} = I_{2k+2}$  ou  $J_{2k+2} = I_{2k+2} + \langle \Delta \rangle$ .

**Théorème 6.3.22.** *Supposons que la famille A soit relativement complète modulo  $I_{2k}$  et contienne la forme binaire  $\mathbf{f}$ . Supposons aussi que B soit relativement complète modulo  $J_{2k+2}$  et contienne le covariant  $\mathbf{H}_{2k}$ . Alors la famille finie  $C := \{\tau^1, \dots, \tau^l\}$  associée aux solutions entières irréductibles de  $S(A, B)$  est relativement complète modulo  $J_{2k+2}$  et*

$$\mathbf{Cov}(C) = \mathbf{Cov}(A \cup B) = \mathbf{Cov}(S_n).$$

Avant de donner la preuve de ce théorème, nous avons besoin de deux lemmes.

**Lemme 6.3.23.** *Sous les mêmes hypothèses du théorème 6.3.22, soit  $\mathbf{h}_{2k} \in I_{2k}$  un covariant de degré  $d$  en  $\mathbf{f}$ , et soit  $\mathbf{V}$  un monôme de  $\mathbb{C}[B]$ . Pour tout entier  $r \geq 0$ , le transvectant*

$$(\mathbf{h}_{2k}, \mathbf{V})_r, \tag{6.3.10}$$

est combinaison linéaire de

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V}')_{r'} \text{ et } \mathbf{h}_J \in J_{2k+2},$$

où  $\mathbf{U}$  est un monôme de  $\mathbb{C}[A]$ , de degré strictement inférieur à  $d$ ,  $\mathbf{V}'$  est un monôme de  $\mathbb{C}[B]$   $r' \geq 0$  un entier quelconque.

*Démonstration.* Par le lemme 6.3.21, tout covariant  $\mathbf{h}_{2k} \in I_{2k}$  degré  $d$  est combinaison linéaire de transvectants

$$(\mathbf{M}, \mathbf{H}_{2j})_{r_1}, \quad r \geq 0, \quad j \geq k$$

où  $\mathbf{M}$  est nécessairement un covariant de degré strictement plus petit que  $d$ .

Parmi ces transvectants, on distingue :

- les transvectants  $(\mathbf{M}, \mathbf{H}_{2j})_{r_1}$  où  $j > k$ , qui appartiennent à  $J_{2k+2}$  ;
- les transvectants  $(\mathbf{M}, \mathbf{H}_{2k})_{r_1}$ . Pour cette situation, on exploite le théorème 5.3.7 sur les bases vectorielles de transvectants qui permet d'effectuer un reparenthésage :

$$((\mathbf{M}, \mathbf{H}_{2k})_{r_1}, \mathbf{V})_r = \sum_i \lambda_i (\mathbf{M}, (\mathbf{H}_{2k}, \mathbf{V})_i)_{r_1+r-i},$$

pour des coefficients  $\lambda_i$  fixés. Mais alors

$$\mathbf{H}_{2k} \in \mathbf{B} \text{ et } (\mathbf{H}_{2k}, \mathbf{V})_i \in \mathbf{Cov}(\mathbf{B})$$

La famille  $\mathbf{B}$  étant relativement complète modulo  $J_{2k+2}$ ,  $(\mathbf{H}_{2k}, \mathbf{V})_i$  est combinaison linéaire de monômes  $\mathbf{V}'$  de  $\mathbb{C}[\mathbf{B}]$ , et de  $\mathbf{h}_J \in J_{2k+2}$ . On obtient finalement une combinaison linéaire de transvectants

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M}, \mathbf{V}')_{r_1+r-i} \\ & (\mathbf{M}, \mathbf{h}_J)_{r_1+r-i} \in J_{2k+2} \text{ par le lemme 6.3.21} \end{aligned}$$

Comme  $\mathbf{M}$  est un covariant de degré strictement plus petit que  $d$ , on en déduit le lemme. □

**Lemme 6.3.24.** *Sous les mêmes hypothèses du théorème 6.3.22, notons  $\mathbf{U}$  (resp.  $\mathbf{V}$ ) un monôme de l'algèbre  $\mathbb{C}[\mathbf{A}]$  (resp.  $\mathbb{C}[\mathbf{B}]$ ). Alors pour tout entier  $r \geq 0$ , il existe un polynôme  $\mathbf{p}$  tel que*

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r = \mathbf{p}(\boldsymbol{\tau}^1, \dots, \boldsymbol{\tau}^l) + \mathbf{h}_{2k+2}, \quad \mathbf{h}_{2k+2} \in J_{2k+2},$$

*Démonstration.* On remarque dans un premier temps que le lemme est valable pour des monômes  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  de degré 1 car chaque  $\mathbf{f}_i$  et  $\mathbf{g}_j$  correspond à une solution minimale du système  $S(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ .

Nous raisonnons par récurrence sur le degré  $d$  de  $\mathbf{U}$  en  $\mathbf{f} \in \mathbf{Cov}(V)$  et sur  $r$ .

- Pour  $d = 1$ , on a nécessairement  $\mathbf{U} = \mathbf{f}$  ; ensuite
  - Pour  $r = 0$ , il suffit de considérer un produit  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}$ , qui est un produit des  $\boldsymbol{\tau}^i$  ;
  - Pour un entier  $r > 0$  fixé, si  $(\mathbf{f}, \mathbf{V})_r$  correspond à une solution réductible de  $S(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , par la proposition 5.2.31, on a

$$(\mathbf{f}, \mathbf{V})_r = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 + \sum (\bar{\mathbf{f}}^{\mu_1}, \bar{\mathbf{V}}^{\mu_2})_{r' < r}$$

Mais nécessairement  $\bar{\mathbf{f}}^{\mu_1} = \mathbf{f}$ , et donc par récurrence sur  $r$  le lemme est vrai pour  $\mathbf{U} = \mathbf{f}$ .

- Pour le cas  $d = 2$ 
  - Lorsque  $r = 0$ , il suffit de considérer un produit  $\mathbf{UV}$ , qui est un produit des  $\boldsymbol{\tau}^i$  ;
  - Pour un entier  $r > 0$  fixé, si  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r$  correspond à une solution réductible de

$S(A, B)$ , par la proposition 5.2.31 on a

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 + \sum (\bar{\mathbf{U}}^{\mu_1}, \bar{\mathbf{V}}^{\mu_2})_{r' < r}, \quad (6.3.11)$$

où chaque  $\bar{\mathbf{U}}^{\mu_1}$  est de degré 2. Comme A est relativement complète modulo  $I_{2k}$ , on en déduit que

$$\bar{\mathbf{U}}^{\mu_1} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{h}_{2k},$$

où chaque covariant est de degré 2 en  $\mathbf{f}$ . On peut donc en déduire que  $\mathbf{h}_2 = \mathbf{H}_{2k} \in \mathbf{B}$ . De même on a

$$\bar{\mathbf{V}}^{\mu_2} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{h}_{2k+2} + \Delta \mathbf{h}.$$

Mais alors, dans (6.3.13), on doit considérer les transvectants

$$\begin{aligned} & (\mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1)_{r' < r}, \\ & (\mathbf{U}_1, \mathbf{h}_{2k+2})_{r' < r} \in J_{2k+2}, \\ & (\mathbf{U}_1, \Delta \mathbf{h})_{r' < r} = \Delta (\mathbf{U}_1, \mathbf{h})_{r' < r} \in J_{2k+2}, \\ & (\mathbf{H}_{2k}, \mathbf{V}_1)_{r' < r} \in \mathbf{Cov}(\mathbf{B}), \\ & (\mathbf{H}_{2k}, \mathbf{h}_{2k+2} + \Delta \mathbf{h})_{r' < r} \in J_{2k+2}, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{U}_1$ , qui est de degré 2, intervient dans un transvectant d'index strictement inférieur à  $r$ . On en déduit par récurrence le cas  $d = 2$ .

- Pour un entier  $d > 2$  fixé, on utilise les mêmes idées que dans le cas  $d = 2$ .
  - Lorsque  $r = 0$ , il suffit de considérer un produit  $\mathbf{UV}$ , qui est un produit des  $\tau^i$ ;
  - Pour un entier  $r > 0$  fixé, si  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r$  correspond à une solution réductible de  $S(A, B)$ , par la proposition 5.2.31 on a

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 + \sum (\bar{\mathbf{U}}^{\mu_1}, \bar{\mathbf{V}}^{\mu_2})_{r' < r} \quad (6.3.12)$$

où chaque  $\bar{\mathbf{U}}^{\mu_1}$  est de degré  $d$  en  $\mathbf{f}$ . Comme A est relativement complète modulo  $I_{2k}$  on en déduit que

$$\bar{\mathbf{U}}^{\mu_1} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{h}_{2k}, \quad \mathbf{h}_{2k} \in I_{2k}$$

où chaque covariant est de degré  $d$  en  $\mathbf{f}$ . On peut aussi écrire

$$\bar{\mathbf{V}}^{\mu_2} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{h}_{2k+2} + \Delta \mathbf{h}.$$

On doit donc considérer les transvectants

$$(\mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1)_{r' < r}, \quad (6.3.13)$$

$$(\mathbf{U}_1, \mathbf{h}_{2k+2} + \Delta \mathbf{h})_{r' < r} \in J_{2k+2},$$

$$(\mathbf{h}_{2k}, \mathbf{V}_1)_{r' < r}, \quad (6.3.14)$$

$$(\mathbf{h}_{2k}, \mathbf{h}_{2k+2} + \Delta \mathbf{h})_{r' < r} \in J_{2k+2}.$$

Le transvectant 6.3.13 est construit avec un monôme  $\mathbf{U}_1$  de degré  $d$  et un index

$r' < r$  ; donc la récurrence sur  $r$  permet de conclure sur ce transvectant. Ensuite, par le lemme 6.3.23, le transvectant (6.3.14) s'écrit comme combinaison linéaire de

$$(\mathbf{U}', \mathbf{V}')_{r'}, \quad \mathbf{h} \in J$$

où  $\mathbf{U}'$  est un monôme en  $A$  de degré strictement inférieur à  $d$ . On peut donc conclure ici par récurrence sur  $d$ . □

*Preuve du théorème 6.3.22.* Etant donné que  $A \subset C$  et  $\mathbf{f} \in A$ , on en déduit que

$$\mathbf{Cov}(S_n) = \mathbf{Cov}(A) = \mathbf{Cov}(A \cup B) = \mathbf{Cov}(C).$$

Nous savons ensuite que  $\mathbf{Cov}(C)$  est engendré par les transvectants

$$(\mathbf{D}, \mathbf{E})_r.$$

où  $\mathbf{D} \in \mathbf{Cov}(A)$  et  $\mathbf{E} \in \mathbf{Cov}(B)$ . Par hypothèse, on peut alors supposer que

$$\mathbf{D} = \mathbf{U} + \mathbf{h}_{2k}, \quad \mathbf{h}_{2k} \in I_{2k} \quad \mathbf{E} = \mathbf{U} + \mathbf{h}_J, \quad \mathbf{h}_J \in J_{2k+2}.$$

On doit ainsi considérer les transvectants

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r, \tag{6.3.15}$$

$(\mathbf{U}, \mathbf{h}_J)_r \in J_{2k+2}$  par le lemme 6.3.19 et la remarque 6.3.20,

$$(\mathbf{h}_{2k}, \mathbf{V})_r, \tag{6.3.16}$$

$$(\mathbf{h}_{2k}, \mathbf{h}_J)_r \in J_{2k+2}. \tag{6.3.17}$$

Les lemmes 6.3.23 et 6.3.24 nous permettent ensuite de conclure. □

### L'algorithme

Notons  $V = S_n$  ( $n > 2$ ) et  $\mathbf{f} \in S_n$ . Par le corollaire C.2, la famille  $A_0 := \{\mathbf{f}\}$  est relativement complète modulo  $I_2$ . Cela signifie que tout covariant  $\mathbf{h} \in \mathbf{Cov}(S_n)$  peut s'écrire

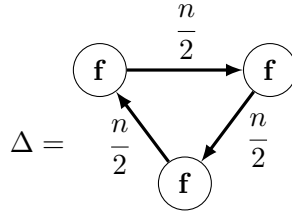
$$\mathbf{h} = p(\mathbf{f}) + \mathbf{h}_2 \text{ avec } \mathbf{h}_2 \in I_2$$

Soit maintenant le covariant  $\mathbf{H}_2 = (\mathbf{f}, \mathbf{f})_2$ , d'ordre  $2n - 4$ .

- Si  $2n - 4 > n$ , on prend  $B_1 := \{\mathbf{H}_2\}$  qui est, par le lemme C.4, relativement complet modulo  $I_4$  ; on applique alors le théorème 6.3.22, et on obtient une famille  $A_1 := C$  relativement complète modulo  $I_4$ .
- Si  $2n - 4 = n$ , on prend  $B_1 := \{\mathbf{H}_2, \Delta\}$  qui est, par le lemme C.5, relativement



complet modulo  $I_4 + \langle \Delta \rangle$ ; où  $\Delta$  est l'invariant

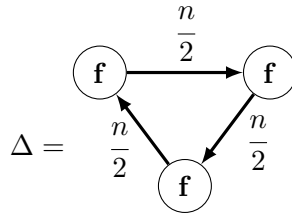


Dans ce cas, on applique le théorème 6.3.22 et on pose  $A_1 = C \cup \{\Delta\}$ . Une récurrence immédiate sur le degré montre que  $A_1$  est relativement complète modulo  $I_4$ .

- Si  $2n - 4 < n$ , on suppose déjà connu une famille génératrice de  $S_{2n-4}$ ; on prend alors  $B_1$  comme étant cette famille génératrice, qui est finie est complète donc finie et relativement complète modulo  $I_4$ ; on applique directement le théorème 6.3.22 et on pose  $A_1 := C$ .

Si maintenant on suppose donné, par récurrence, une famille  $A_k$ , qui contient  $\mathbf{f}$ , et qui est finie et relativement complète modulo  $I_{2k}$ . On se donne alors le covariant  $\mathbf{H}_{2k} = (\mathbf{f}, \mathbf{f})_{2k}$ .

- Si  $\mathbf{H}_{2k}$  est d'ordre  $p > n$ , on pose  $B_k := \{\mathbf{H}_{2k}\}$  qui est, par le lemme C.4, relativement complet modulo  $I_{2k+2}$ . En appliquant le théorème 6.3.22 on prend  $A_{k+1} := C$ .
- Si  $\mathbf{H}_{2k}$  est d'ordre  $p = n$ , on prend  $B_k := \{\mathbf{H}_{2k}, \Delta\}$  qui est, par le lemme C.5, relativement complet modulo  $I_{2k+2} + \langle \Delta \rangle$ ; où  $\Delta$  est l'invariant



Dans ce cas, on applique le théorème 6.3.22 et on pose  $A_{k+1} = C \cup \{\Delta\}$ . Une récurrence immédiate sur le degré montre que  $A_{k+1}$  est relativement complète modulo  $I_{2k+2}$ .

- Si  $\mathbf{H}_{2k}$  est d'ordre  $p < n$ , on suppose déjà connu une famille génératrice de  $S_p$ ; on prend alors  $B_k$  comme étant cette famille génératrice, qui est finie est complète donc finie et relativement complète modulo  $I_{2k+2}$ ; on applique directement le théorème 6.3.22 et on pose  $A_{k+1} := C$ .

Ainsi, dans tous les cas, on peut construire une famille  $A_{k+1}$ .

Maintenant, selon la parité de  $n$ :

- Si  $n = 2q$  est pair, on sait que la famille  $A_{q-1}$  est relativement complète modulo  $I_{2q}$ ; de plus la famille  $B_{q-1}$  ne contient que l'invariant  $\Delta_q := \{\mathbf{f}, \mathbf{f}\}_{2q}$ . Au final la famille  $A_p$  est donnée par

$$A_p := A_{p-1} \cup \{\Delta_q\}$$

qui est relativement complète modulo  $I_{2q+2} = \{0\}$ , et donc est la famille généra-

trice finie cherchée.

- Si  $n = 2q + 1$  est impair, la famille  $B_{q-1}$  contient la forme quadratique  $\mathbf{H}_{2q} := \{\mathbf{f}, \mathbf{f}\}_{2q}$ ; on sait alors que la famille  $B_{q-1}$  est composée du covariant  $\mathbf{H}_{2q}$  et de l'invariant  $\delta_q := \{\mathbf{H}_{2q}, \mathbf{H}_{2q}\}_2$ . Par le théorème 6.3.22, la famille  $A_q := C$  est relativement complète modulo  $I_{2q+2} = \{0\}$ . Il s'agit donc de la famille génératrice finie cherchée.

*Remarque 6.3.25.* On peut aussi optimiser cet algorithme comme dans le cas des covariants joints où il existe un théorème similaire au théorème 6.3.14, ce qui permet de travailler sur une sous-famille  $\mathcal{S}^*$  de solutions entières irréductibles à chaque étape. Un tel procédé a été exploité dans le cas des covariants de  $S_9$  et  $S_{10}$  [OL14].

### 6.3.3. Exemples et applications

#### 6.3.3.1. famille génératrice de covariants de $S_6 \oplus S_2$

Il existe une procédure très simple pour déterminer une famille génératrice de covariants de l'espace  $V \oplus S_2$  une fois connue une famille génératrice de covariants de  $V$ . Une telle procédure est donnée par le théorème suivant [GY10].

**Théorème 6.3.26.** *Notons  $\{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_s\}$  une famille génératrice de covariants de  $\mathbf{Cov}(V)$ , et notons  $\mathbf{u} \in S_2$ . Alors les covariants irréductibles de  $\mathbf{Cov}(V \oplus S_2)$  sont issus de la famille :*

- $\{\mathbf{h}_i, \mathbf{u}^r\}_{2r-1}$  pour  $i = 1 \dots s$ ;
- $\{\mathbf{h}_i, \mathbf{u}^r\}_{2r}$  pour  $i = 1 \dots s$ ;
- $\{\mathbf{h}_i \mathbf{h}_j, \mathbf{u}^r\}_{2r}$  où  $\mathbf{h}_i$  est d'ordre  $2p + 1$  et  $\mathbf{h}_j$  est d'ordre  $2r - 2p - 1$ .

On note  $\mathbf{h}_{d,o}$  un covariant de degré  $d$  et d'ordre  $o$ , issu de la famille génératrice de covariants de  $S_6$  donnée par la table 6.2 (voir Grace–Young [GY10]), et on note  $\mathbf{u} \in S_2$ . Par le théorème 6.3.26, il suffit de considérer les transvectants

$$\{\mathbf{h}, \mathbf{u}^r\}_{2r-1} \text{ ou } \{\mathbf{h}, \mathbf{u}^r\}_{2r}.$$

Rappelons ici que l'algèbre  $\mathbf{Cov}(V) := \mathbf{Cov}(S_6 \oplus S_2)$  est multi-graduée :

$$\mathbf{Cov}(V) = \bigoplus_{d_1 \geq 0, d_2 \geq 0, o \geq 0} \mathbf{Cov}(V)_{d_1, d_2, o}.$$

où  $d_1$  est le degré en la forme binaire  $\mathbf{f} \in S_6$ ,  $d_2$  est le degré en la forme binaire  $\mathbf{u} \in S_2$  et  $o$  le degré en la variable  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^2$ . On peut donc considérer la série de Hilbert associée :

$$\mathcal{H}_{6,2}(z_1, z_2, t) := \sum_{d_1, d_2, o} \dim(\mathbf{Cov}(V)_{d_1, d_2, o}) z_1^{d_1} z_2^{d_2} t^o,$$

Une telle série a été calculée à l'aide du package Maple de Bedratyuk [Bed11b]. Le théorème 6.3.26 fournit une famille génératrice finie (non nécessairement minimale). A l'aide de la série de Hilbert multigradée, on a pu vérifier le degré de chaque espace homogène et rendre cette famille génératrice minimale (par des scripts écrits en Macaulay 2 [GS], ce qui donne au final 99 covariants. Notons que, par cette procédure, nous avons pu nous limiter à des espaces homogènes de degré 15 au maximum. Les résultats figurent dans la table 6.3.

D/O	0	2	4	6
1				<b>f</b>
2	$(\mathbf{f}, \mathbf{f})_6$		$\mathbf{h}_{2,4} := (\mathbf{f}, \mathbf{f})_4$	
3		$\mathbf{h}_{3,2} := (\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{f})_4$		$\mathbf{h}_{3,6} := (\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{f})_2$
4	$(\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{h}_{2,4})_4$		$(\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{f})_2$	$\mathbf{h}_{4,6} := (\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{f})_1$
5		$(\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{h}_{3,2})_2$	$(\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{h}_{3,2})_1$	
6	$(\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{h}_{3,2})_2$			$\mathbf{h}_{6,61} := (\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{h}_{3,2})_2$ $\mathbf{h}_{6,62} := (\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{h}_{3,2})_1$
7		$(\mathbf{f}, \mathbf{h}_{3,2}^2)_4$	$(\mathbf{f}, \mathbf{h}_{3,2}^2)_3$	
8		$(\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{h}_{3,2}^2)_3$		
9			$(\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{h}_{3,2}^2)_4$	
10	$(\mathbf{h}_{3,2}^3, \mathbf{f})_6$	$(\mathbf{h}_{3,2}^3, \mathbf{f})_5$		
12		$(\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{h}_{3,2}^3)_6$		
15	$(\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{h}_{3,2}^4)_8$			

D/0	8	10	12
2	$\mathbf{h}_{2,8} := (\mathbf{f}, \mathbf{f})_2$		
3	$\mathbf{h}_{3,8} := (\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{f})_1$		$(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{f})_1$
4		$(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{h}_{2,4})_1$	
5	$\mathbf{h}_{5,8} := (\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{h}_{3,2})_1$		

Table 6.2. – famille génératrice finie de covariants de  $S_6$

<i>d/o</i>	0	2	4	6	8	10	12	#	<i>Cum</i>
1	–	1	–	1	–	–	–	2	2
2	2	–	2	1	1	–	–	6	8
3	–	3	2	2	2	–	1	10	18
4	4	3	3	4	–	2	–	16	34
5	–	4	6	–	3	–	–	13	47
6	5	7	–	5	–	–	–	17	64
7	3	1	6	–	–	–	–	10	74
8	1	8	–	–	–	–	–	9	83
9	7	–	1	–	–	–	–	8	91
10	1	2	–	–	–	–	–	3	94
11	2	–	–	–	–	–	–	2	96
12	–	1	–	–	–	–	–	1	97
13	1	–	–	–	–	–	–	1	98
14	–	–	–	–	–	–	–	–	98
15	1	–	–	–	–	–	–	1	99
<i>Tot</i>	27	30	20	13	6	2	1		99

Table 6.3. – famille génératrice minimale de covariants de  $S_6 \oplus S_2$

27 invariants	
5 invariants issus de $S_6$ , 1 invariant de $S_2$ et 21 invariants joints.	
Degré 4	$(\mathbf{h}_{1,6}, \mathbf{u}^3)_6$ $(\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{u}^2)_4$ $(\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{u})_2$
Degré 6	$(\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{u}^3)_6$ $(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{u}^4)_8$ $(\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{u}^2)_4$ $(\mathbf{h}_{5,2}, \mathbf{u})_2$
Degré 7	$(\mathbf{h}_{5,4}, \mathbf{u}^2)_4$ $(\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{u}^4)_8$ $(\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{u}^3)_6$
Degré 8	$(\mathbf{h}_{7,2}, \mathbf{u})_2$
Degré 9	$(\mathbf{h}_{7,4}, \mathbf{u}^2)_4$ $(\mathbf{h}_{6,61}, \mathbf{u}^3)_6$ $(\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{u}^5)_{10}$
	$(\mathbf{h}_{5,8}, \mathbf{u}^4)_8$ $(\mathbf{h}_{8,2}, \mathbf{u})_2$ $(\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{u}^6)_{12}$ $(\mathbf{h}_{6,62}, \mathbf{u}^3)_6$
Degré 11	$(\mathbf{h}_{10,2}, \mathbf{u})_2$ $(\mathbf{h}_{9,4}, \mathbf{u}^2)_4$
Degré 13	$(\mathbf{h}_{12,2}, \mathbf{u})_2$
30 covariants d'ordre 2	
1 issu de $S_2$ , 6 de $S_6$ et 23 covariants joints.	
Degré 3	$(\mathbf{f}, \mathbf{u}^2)_4$ $(\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{u})_2$
Degré 4	$(\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{u}^2)_3$ $(\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{u})_1$ $(\mathbf{f}, \mathbf{u}^3)_5$
Degré 5	$(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{u}^3)_6$ $(\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{u})_2$ $(\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{u}^2)_4$
Degré 6	$(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{u}^4)_7$ $(\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{u}^2)_3$ $(\mathbf{h}_{5,2}, \mathbf{u})_1$ $(\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{u}^3)_5$
	$(\mathbf{h}_{5,4}, \mathbf{u})_2$ $(\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{u}^3)_6$ $(\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{u}^2)_4$
Degré 8	$(\mathbf{h}_{7,2}, \mathbf{u})_1$ $(\mathbf{h}_{7,4}, \mathbf{u})_2$ $(\mathbf{h}_{6,6b}, \mathbf{u}^2)_4$
	$(\mathbf{h}_{5,8}, \mathbf{u}^3)_6$ $(\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{u}^5)_{10}$ $(\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{u}^4)_8$ $(\mathbf{h}_{6,6a}, \mathbf{u}^2)_4$
Degré 10	$(\mathbf{h}_{9,4}, \mathbf{u})_2$
20 covariants d'ordre 4	
5 covariants issus de $S_6$ et 15 covariants joints.	
Degré 2	$(\mathbf{f}, \mathbf{u})_2$
Degré 3	$(\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{u})_1$ $(\mathbf{f}, \mathbf{u}^2)_3$
Degré 4	$(\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{u})_2$ $(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{u}^2)_4$
Degré 5	$(\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{u}^2)_4$ $(\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{u}^2)_3$ $(\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{u})_1$ $(\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{u})_2$ $(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{u}^3)_5$
Degré 7	$(\mathbf{h}_{6,61}, \mathbf{u})_2$ $(\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{u}^4)_8$ $(\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{u}^3)_6$ $(\mathbf{h}_{6,62}, \mathbf{u})_2$ $(\mathbf{h}_{5,8}, \mathbf{u}^2)_4$
13 covariants d'ordre 6 :	
5 covariants issus de $S_6$ et 8 covariants joints.	
Degré 2	$(\mathbf{f}, \mathbf{u})_1$
Degré 3	$(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{u})_2$
Degré 4	$(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{u}^2)_3$ $(\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{u})_1$ $(\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{u})_2$
Degré 7	$(\mathbf{h}_{5,8}, \mathbf{u})_2$ $(\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{u}^2)_4$ $(\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{u}^3)_6$

suite à la page suivante

suite de la page précédente

6 covariants d'ordre 8 :	
3 covariants issus de $S_6$ et 3 covariants joints.	
Degré 3	$(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{u})_1$
Degré 5	$(\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{u})_2 \quad (\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{u}^2)_4$
2 covariants d'ordre 10 :	
1 covariant issu de $S_6$ et 1 covariant joint.	
Degré 3	$(\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{u})_2$
1 covariant d'ordre 12 issu de $S_6$ .	

### 6.3.3.2. famille génératrice de covariants de $S_6 \oplus S_4$

Notons  $\mathbf{f} \in S_6$  et  $\mathbf{v} \in S_4$ . Une famille génératrice minimale de  $\mathbf{Cov}(S_6)$  est donnée par la table 6.2, et une famille génératrice minimale de  $\mathbf{Cov}(S_4)$  est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in S_4 \quad \mathbf{k}_{2,4} &:= (\mathbf{v}, \mathbf{v})_2 \quad \mathbf{k}_{3,6} := (\mathbf{v}, \mathbf{k}_{2,4})_1 \\ i &:= (\mathbf{v}, \mathbf{v})_4 \quad j := (\mathbf{v}, \mathbf{k}_{2,4})_4 \end{aligned}$$

Par la relation (6.3.7), nous avons :

**Lemme 6.3.27.**  $\mathbf{Cov}(S_4)$  est un  $\mathbb{C}[i, j, \mathbf{v}, \mathbf{k}_{2,4}]$ -module de type fini :

$$\mathbf{Cov}(S_4) = \mathbb{C}[i, j, \mathbf{v}, \mathbf{k}_{2,4}] + \mathbf{k}_{3,6}\mathbb{C}[i, j, \mathbf{v}, \mathbf{k}_{2,4}].$$

Nous pouvons aussi exploiter des relations dans  $\mathbf{Cov}(S_6)$ , du type :

$$\begin{aligned} 36\mathbf{h}_{4,10}^2 &= -\mathbf{h}_{2,0}\mathbf{h}_{2,4}^2\mathbf{f}^2 + 6\mathbf{h}_{2,4}^2\mathbf{f}\mathbf{h}_{3,6} - 3\mathbf{h}_{2,4}^3\mathbf{h}_{2,8} - 6\mathbf{h}_{3,2}\mathbf{h}_{2,4}\mathbf{f}\mathbf{h}_{2,8} \\ &+ 3\mathbf{h}_{2,0}\mathbf{h}_{2,4}\mathbf{h}_{2,8}^2 - 9\mathbf{h}_{4,4}\mathbf{h}_{2,8}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons :

**Lemme 6.3.28.** Notons  $\mathbf{h}_{d,k}$  le covariant de  $\mathbf{Cov}(S_6)$  de degré  $d$  et d'ordre  $k$ , donné par la table 6.2. Posons

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &:= \{\mathbf{h}_{2,0}, \mathbf{h}_{4,0}, \mathbf{h}_{6,0}, \mathbf{h}_{10,0}, \mathbf{h}_{15,0}, \mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{h}_{5,2}, \mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{f}, \\ &\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{h}_{3,8}\} \end{aligned}$$

Alors  $\mathbf{Cov}(S_6)$  est un  $\mathbb{C}[\mathbf{A}_0]$ -module de type fini, engendré par les monômes

$$\mathbf{h}_{7,2}^{u_1}\mathbf{h}_{8,2}^{u_2}\mathbf{h}_{10,2}^{u_3}\mathbf{h}_{12,2}^{u_4}\mathbf{h}_{5,4}^{u_5}\mathbf{h}_{7,4}^{u_6}\mathbf{h}_{9,4}^{u_7}\mathbf{h}_{6,6}^{u_8}\mathbf{h}_{6,6}^{u_9}\mathbf{h}_{5,8}^{u_{10}}\mathbf{h}_{4,10}^{u_{11}}\mathbf{h}_{3,12}^{u_{12}}$$

avec

$$u_i \leq 1, \quad \forall i, \quad \text{et } u_3 + u_4 \leq 1$$

A partir des lemmes 6.3.27 et 6.3.28, le théorème 6.3.14 nous permet d'obtenir 1072 générateurs. Remarquons aussi que nous savons exactement dans quel espace homogène  $\mathbf{Cov}(S_6 \oplus S_4)_{d_1, d_2, o}$  chacun de ces générateurs appartient où  $d_1$  désigne le degré en  $S_6$ ,

$d_2$  le degré en  $S_4$  et  $o$  l'ordre du covariant. La série de Hilbert de  $\mathbf{Cov}(S_6 \oplus S_4)$  a été calculée à l'aide du package Maple de Bedratyuk [Bed11b].

$d/o$	0	2	4	6	8	10	12	#	$Cum$
1	—	—	1	1	—	—	—	2	2
2	2	1	3	1	2	—	—	9	11
3	2	4	4	5	3	1	1	20	31
4	4	6	9	5	2	1	—	27	58
5	4	12	11	3	1	—	—	31	89
6	9	14	6	2	—	—	—	31	120
7	9	17	2	—	—	—	—	28	148
8	9	7	1	—	—	—	—	17	165
9	8	3	1	—	—	—	—	12	177
10	5	2	—	—	—	—	—	7	184
11	3	1	—	—	—	—	—	4	188
12	2	1	—	—	—	—	—	3	191
13	1	—	—	—	—	—	—	1	192
14	1	—	—	—	—	—	—	1	193
15	1	—	—	—	—	—	—	1	194
<i>Tot</i>	60	68	38	17	8	2	1		194

Table 6.4. – famille génératrice minimale de covariants de  $S_6 \oplus S_4$

Ensuite, il y a exactement 339 invariants parmi ces 1072 générateurs initiaux. Le degré total maximal  $d_1 + d_2$  de ces invariants est de 24 et, pour ce degré, un seul invariant intervient, avec  $d_1 = 21$  et  $d_2 = 3$ . D'après la série de Hilbert, il a donc fallu vérifier un espace homogène de dimension

$$\dim(\mathbf{Cov}(S_6 \oplus S_4))_{21,3,0} = 324.$$

La table 6.5 donne d'autres exemples de degrés et de dimensions d'espaces homogènes associés.

Degré	$d_1$	$d_2$	dim	Degré	$d_1$	$d_2$	dim
23	20	3	335	21	18	3	258
22	19	3	248		17	4	354
	18	4	498		16	5	621
	17	5	650		15	6	747
	16	6	1005				
	15	7	1142				

Table 6.5. – Dimensions d'espaces homogènes de l'algèbre  $\mathbf{Cov}(S_6 \oplus S_4)$

Après réduction, il ne reste plus que 53 invariants joints.

A l'ordre 2, on trouve 433 covariants issus de la famille initiale. Le degré total maximal  $d_1 + d_2$  est de 24. Pour ce degré, il ne reste qu'un seul covariant, avec  $d_1 = 21$  et  $d_2 = 3$ . Au vu de la série de Hilbert, il suffit ensuite de vérifier un espace homogène de dimension 1063. Les résultats sont résumés dans la table 6.4.

60 invariants	
5 invariants issus de $S_6$ , 2 invariants de $S_4$ et 53 invariants joints.	
Degré 3	$(\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{v})_4$
Degré 4	$(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v}^2)_8$ $(\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{k}_{2,4})_4$ $(\mathbf{f}, \mathbf{k}_{3,6})_6$
Degré 5	$(\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v}^2)_8$ $(\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{v})_4$ $(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_8$ $(\mathbf{f}^2, \mathbf{v}^3)_{12}$
Degré 6	$(\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_8$ $(\mathbf{f}^2, \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{k}_{2,4})_{12}$ $(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{2,4}^2)_8$ $(\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{k}_{3,6})_6$
	$(\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v}^3)_{12}$ $(\mathbf{h}_{5,4}, \mathbf{v})_4$
	$(\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{k}_{2,4})_4$ $(\mathbf{h}_{3,2} \cdot \mathbf{f}, \mathbf{v}^2)_8$
Degré 7	$(\mathbf{h}_{3,2}^2, \mathbf{v})_4$ $(\mathbf{h}_{5,4}, \mathbf{k}_{2,4})_4$ $(\mathbf{h}_{5,8}, \mathbf{v}^2)_8$ $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v}^3)_{12}$
	$(\mathbf{f}^2, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4}^2)_{12}$ $(\mathbf{h}_{3,2} \cdot \mathbf{f}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_8$
	$(\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{k}_{3,6})_6$ $(\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{k}_{2,4})_{12}$ $(\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{k}_{2,4}^2)_8$
Degré 8	$(\mathbf{h}_{3,2} \mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{k}_{3,6})_6$ $(\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4}^2)_{12}$ $(\mathbf{h}_{3,2} \mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v}^2)_8$ $(\mathbf{h}_{3,2}^2, \mathbf{k}_{2,4})_4$
	$(\mathbf{h}_{7,4}, \mathbf{v})_4$ $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v}^3)_{12}$
	$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{k}_{2,4})_{12}$ $(\mathbf{h}_{3,2} \cdot \mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4}^2)_8$ $(\mathbf{h}_{5,8}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_8$
Degré 9	$(\mathbf{h}_{7,4}, \mathbf{k}_{2,4})_4$ $(\mathbf{h}_{3,2} \cdot \mathbf{h}_{5,2}, \mathbf{v})_4$ $(\mathbf{h}_{5,2} \cdot \mathbf{f}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_8$
	$(\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{k}_{2,4}^3)_{12}$ $(\mathbf{h}_{3,2} \cdot \mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{3,6})_{10}$
	$(\mathbf{f} \mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{k}_{2,4})_{12}$ $(\mathbf{h}_{3,6}^2, \mathbf{v}^3)_{12}$ $(\mathbf{h}_{3,2} \cdot \mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v}^2)_8$
Degré 10	$(\mathbf{h}_{9,4}, \mathbf{v})_4$ $(\mathbf{h}_{3,2} \cdot \mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{2,4} \mathbf{k}_{3,6})_{10}$ $(\mathbf{h}_{5,2} \cdot \mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v}^2)_8$ $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{h}_{6,61}, \mathbf{v}^3)_{12}$
Degré 11	$(\mathbf{h}_{5,2}^2, \mathbf{v})_4$ $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{h}_{6,62}, \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{k}_{2,4})_{12}$ $(\mathbf{h}_{3,2} \cdot \mathbf{h}_{6,61}, \mathbf{v}^2)_8$
Degré 12	$(\mathbf{h}_{3,2} \cdot \mathbf{h}_{8,2}, \mathbf{v})_4$ $(\mathbf{h}_{3,2} \cdot \mathbf{h}_{6,62}, \mathbf{v} \mathbf{k}_{2,4})_8$

*suite à la prochaine page*

suite de la page précédente

Degré 13	$(\mathbf{h}_{8,2} \cdot \mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v}^2)_8$
Degré 14	$(\mathbf{h}_{3,2} \cdot \mathbf{h}_{10,2}, \mathbf{v})_4$
68 covariants d'ordre 2	
6 covariants issus de $S_6$ , et 62 covariants joints.	
Degré 2	$(\mathbf{f}, \mathbf{v})_4$
Degré 3	$(\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{v})_3 \quad (\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_4 \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v}^2)_6$
Degré 4	$(\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{k}_{2,4})_3 \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_6 \quad (\mathbf{f}, \mathbf{k}_{3,6})_5 \quad (\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v}^2)_7 \quad (\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{v})_2 \quad (\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v})_4$
Degré 5	$(\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{k}_{2,4})_4 \quad (\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{v})_3 \quad (\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v}^2)_6$
	$(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_7 \quad (\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4}^2)_6 \quad (\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{k}_{2,4})_2$
	$(\mathbf{f}^2, \mathbf{v}^3)_{11} \quad (\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v})_4 \quad (\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{3,6})_6 \quad (\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{k}_{3,6})_4 \quad (\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v}^2)_7$
Degré 6	$(\mathbf{f}^2, \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{k}_{2,4})_{11} \quad (\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{3,6})_8 \quad (\mathbf{h}_{3,2} \cdot \mathbf{f}, \mathbf{v}^2)_7 \quad (\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{2,4}^2)_7$
	$(\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{k}_{2,4})_3 \quad (\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{v}^2)_8 \quad (\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v}^3)_{11} \quad (\mathbf{h}_{5,2}, \mathbf{v})_2$
	$(\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v}^2)_6 \quad (\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_6 \quad (\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{k}_{2,4})_4 \quad (\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_7$
	$(\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{k}_{3,6})_6 \quad (\mathbf{h}_{5,4}, \mathbf{v})_3$
Degré 7	$(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{2,4} \cdot \mathbf{k}_{3,6})_8 \quad (\mathbf{h}_{6,62}, \mathbf{v})_4 \quad (\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{k}_{2,4})_{11} \quad (\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{v}^3)_{10} \quad (\mathbf{h}_{6,61}, \mathbf{v})_4$
	$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v}^3)_{11} \quad (\mathbf{h}_{3,2}^2, \mathbf{v})_3 \quad (\mathbf{h}_{5,2}, \mathbf{k}_{2,4})_2 \quad (\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{3,6})_8 \quad (\mathbf{h}_{2,4}^2, \mathbf{k}_{3,6})_6 \quad (\mathbf{h}_{5,8}, \mathbf{v}^2)_7$
	$(\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_6 \quad (\mathbf{f}^2, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4}^2)_{11} \quad (\mathbf{h}_{5,4}, \mathbf{k}_{2,4})_3 \quad (\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_8 \quad (\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{k}_{3,6})_5$
Degré 8	$(\mathbf{h}_{3,2} \cdot \mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v}^2)_7 \quad (\mathbf{h}_{7,2}, \mathbf{v})_2 \quad (\mathbf{h}_{3,2}^2, \mathbf{k}_{2,4})_3$
	$(\mathbf{h}_{6,61}, \mathbf{k}_{2,4})_4 \quad (\mathbf{h}_{6,62}, \mathbf{v}^2)_6 \quad (\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{k}_{2,4}^2)_8$
Degré 9	$(\mathbf{h}_{8,2}, \mathbf{v})_2 \quad (\mathbf{h}_{3,2}^2, \mathbf{k}_{3,6})_4 \quad (\mathbf{h}_{3,2} \cdot \mathbf{h}_{5,2}, \mathbf{v})_3$
Degré 10	$(\mathbf{h}_{5,2} \cdot \mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v}^2)_7$
Degré 11	$(\mathbf{h}_{5,2}^2, \mathbf{v})_3$
38 covariants d'ordre 4 :	
2 covariants issus de $S_4$ , 5 covariants de $S_6$ et 31 covariants joints.	
Degré 2	$(\mathbf{f}, \mathbf{v})_3$
Degré 3	$(\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{v})_2 \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v}^2)_5 \quad (\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_4 \quad (\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_3$
Degré 4	$(\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v})_4 \quad (\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{v})_1 \quad (\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{2,4})_4$
	$(\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{k}_{2,4})_2 \quad (\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v}^2)_6$
	$(\mathbf{f}, \mathbf{k}_{3,6})_4 \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_5 \quad (\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v})_3$
Degré 5	$(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_6 \quad (\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v}^2)_8 \quad (\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v})_3 \quad (\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{k}_{2,4})_1$
	$(\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{k}_{2,4})_3 \quad (\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{v})_2 \quad (\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{k}_{2,4})_4 \quad (\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{3,6})_5 \quad (\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4}^2)_5 \quad (\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v}^2)_5$
Degré 6	$(\mathbf{h}_{5,2}, \mathbf{v})_1 \quad (\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_8 \quad (\mathbf{h}_{5,8}, \mathbf{v})_4 \quad (\mathbf{h}_{5,4}, \mathbf{v})_2 \quad (\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{k}_{2,4})_3 \quad (\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{k}_{3,6})_4$
Degré 7	$(\mathbf{h}_{5,8}, \mathbf{k}_{2,4})_4$
Degré 8	$(\mathbf{h}_{7,4}, \mathbf{v})_2$

suite à la prochaine page



suite de la page précédente

17 covariants d'ordre 6 :	
1 covariant issu de $S_4$ , 5 covariants de $S_6$ et 11 covariants joints.	
Degré 2	$(\mathbf{f}, \mathbf{v})_2$
Degré 3	$(\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_2$ $(\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{v})_1$ $(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_3$
Degré 4	$(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{2,4})_3$ $(\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v})_3$ $(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v}^2)_5$ $(\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{k}_{2,4})_1$
Degré 5	$(\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{v})_4$ $(\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{v})_1$ $(\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v})_2$
8 covariants d'ordre 8 :	
3 covariant issus de $S_6$ , 5 covariants joints.	
Degré 2	$(\mathbf{f}, \mathbf{v})_1$
Degré 3	$(\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_1$ $(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_2$
Degré 4	$(\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v})_2$ $(\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v})_4$
2 covariants d'ordre 10 :	
1 covariant issu de $S_6$ and 1 covariant joint.	
Degré 3	$(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{1,4})_1$
1 covariant d'ordre 12 issu de $S_6$ .	

### 6.3.3.3. famille génératrice de covariants de $S_6 \oplus S_4 \oplus S_2$

On utilise directement le théorème 6.3.11 avec  $V = S_6 \oplus S_4$ . Les résultats sont résumés dans la table 6.6

$d/o$	0	2	4	6	8	10	12	#	$Cum$
1	—	1	1	1	—	—	—	3	3
2	3	2	5	2	2	—	—	14	17
3	4	10	9	8	4	1	1	37	54
4	12	19	20	10	3	2	—	66	120
5	15	38	24	6	3	—	—	86	206
6	37	46	12	5	—	—	—	100	306
7	42	31	7	—	—	—	—	80	386
8	38	15	1	—	—	—	—	54	440
9	22	4	1	—	—	—	—	27	467
10	9	3	—	—	—	—	—	12	479
11	6	1	—	—	—	—	—	7	486
12	3	1	—	—	—	—	—	4	490
13	2	—	—	—	—	—	—	2	492
14	1	—	—	—	—	—	—	1	493
15	1	—	—	—	—	—	—	1	494
$Tot$	195	171	80	32	12	3	1		494

Table 6.6. – Famille génératrice minimale de  $S_6 \oplus S_4 \oplus S_2$

195 invariants : 5 issus de $S_6$ , 2 de $S_4$ , 1 de $S_2$ , 21 invariants joints de $S_6 \oplus S_2$ donnés par 6.3.3.1, 53 invariants joints de $S_6 \oplus S_4$ donnés dans 6.3.3.2. Reste ensuite 113 invariants.	
Degré 3	$(\mathbf{v}, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{f}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u})_2$
Degré 4	$(\mathbf{k}_{2,4}, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{f}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{f}, \mathbf{v}^2)_6, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_4, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u})_2$
Degré 5	$((\mathbf{f}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}^3)_6$ $((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{f}, \mathbf{v}^2)_5, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{3,6})_5, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{f}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_6, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v}^2)_7, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u})_2$
Degré 6	$(\mathbf{k}_{3,6}, \mathbf{u}^3)_6$ $((\mathbf{f}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}^4)_8$ $((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_2, \mathbf{u}^3)_6$ $((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{3,6})_4, \mathbf{u}^2)_4$
	$((\mathbf{f}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_5, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4}^2)_6, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}^3)_6$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}^3)_6$
	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v}^2)_6, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{2,4})_4, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{k}_{2,4})_2, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_7, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{3,6})_6, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{f}^2, \mathbf{v}^3)_{11}, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{k}_{3,6})_4, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}^2)_4$
	$((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{k}_{2,4})_4, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v}^2)_6, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{k}_{2,4})_2, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v}^2)_7, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u})_2$
Degré 7	$((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_1, \mathbf{u}^4)_8$ $((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4}^2)_5, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}^4)_8$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v}^2)_5, \mathbf{u}^3)_6$

suite à la prochaine page

suite de la page précédente

	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u}^3)_6$	$((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{k}_{2,4})_1, \mathbf{u}^3)_6$	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_6, \mathbf{u}^2)_4$	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{3,6})_5, \mathbf{u}^2)_4$
	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{2,4}^2)_7, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{f}^2, \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{k}_{2,4})_{11}, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{3,6})_8, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}^3)_6$
	$((\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{k}_{2,4})_1, \mathbf{u}^2)_4$	$((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{k}_{2,4})_4, \mathbf{u}^2)_4$	$((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v}^2)_5, \mathbf{u}^2)_4$	$((\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v}^2)_8, \mathbf{u}^2)_4$
	$((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u}^2)_4$	$((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_6, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v}^3)_{11}, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_7, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{k}_{3,6})_6, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}^2)_4$	$((\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}^2)_4$	$((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{k}_{2,4})_4, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v}^2)_6, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{v}^2)_8, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{3,2} \cdot \mathbf{f}, \mathbf{v}^2)_7, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{h}_{5,4}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{5,2}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u})_2$		
Degré 8	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}^5)_{10}$	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{2,4} \cdot \mathbf{k}_{3,6})_8, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{f}^2, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4}^2)_{11}, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}^4)_8$
	$((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}^4)_8$	$((\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_8, \mathbf{u}^2)_4$	$((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{k}_{3,6})_4, \mathbf{u}^2)_4$	$((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{3,6})_8, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{k}_{2,4})_{11}, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}^3)_6$	$((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}^3)_6$	$((\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}^3)_6$
	$((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u}^2)_4$	$((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_6, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{v}^3)_{10}, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{f} \cdot \mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v}^3)_{11}, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_8, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{k}_{3,6})_5, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{2,4}^2, \mathbf{k}_{3,6})_6, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{5,8}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}^2)_4$
	$((\mathbf{h}_{5,2}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}^2)_4$	$((\mathbf{h}_{5,4}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}^2)_4$	$((\mathbf{h}_{5,2}, \mathbf{k}_{2,4})_2, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{5,8}, \mathbf{v}^2)_7, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{h}_{5,4}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{6,62}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{3,2}^2, \mathbf{v})_3, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{6,61}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u})_2$
Degré 9	$((\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{k}_{2,4}^2)_8, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{5,8}, \mathbf{k}_{2,4})_4, \mathbf{u}^2)_4$	$((\mathbf{h}_{3,2} \cdot \mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v}^2)_7, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{6,61}, \mathbf{k}_{2,4})_4, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{h}_{3,2}^2, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{6,62}, \mathbf{v}^2)_6, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{7,2}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u})_2$	
Degré 10	$((\mathbf{h}_{3,2}^2, \mathbf{k}_{3,6})_4, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{7,4}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}^2)_4$	$((\mathbf{h}_{8,2}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{3,2} \cdot \mathbf{h}_{5,2}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u})_2$
Degré 11	$((\mathbf{h}_{5,2} \cdot \mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v}^2)_7, \mathbf{u})_2$			
Degré 12	$((\mathbf{h}_{5,2}^2, \mathbf{v})_3, \mathbf{u})_2$			
171 covariants d'ordre 2 : 6 issus de $S_6$ , 1 de $S_2$ , 23 covariants joints issus de $S_6 \oplus S_2$ et donnés dans 6.3.3.1, 62 covariants joints de $S_6 \oplus S_4$ donnés dans 6.3.3.2. Reste 79 covariants donnés ci-dessous :				
Degré 2	$(\mathbf{v}, \mathbf{u})_2$			
Degré 3	$(\mathbf{v}, \mathbf{u}^2)_3$	$(\mathbf{k}_{2,4}, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{f}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u})_1$	$((\mathbf{f}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u})_2$
Degré 4	$((1, \mathbf{k}_{2,4})_0, \mathbf{u}^2)_3$	$((\mathbf{f}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}^2)_4$	$((\mathbf{f}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}^2)_3$	$((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{f}, \mathbf{v}^2)_5, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_4, \mathbf{u})_1$	$((\mathbf{f}, \mathbf{v}^2)_6, \mathbf{u})_1$	$((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u})_1$		
Degré 5	$(\mathbf{k}_{3,6}, \mathbf{u}^2)_4$	$((\mathbf{f}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}^3)_5$	$((\mathbf{f}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}^3)_6$	$((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_2, \mathbf{u}^2)_4$
	$((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u}^2)_3$	$((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{3,6})_5, \mathbf{u})_1$	$((\mathbf{f}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_5, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{f}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_6, \mathbf{u})_1$
	$((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{3,6})_4, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}^2)_3$	$((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}^2)_4$	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}^2)_4$
	$((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}^2)_3$	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v}^2)_7, \mathbf{u})_1$	$((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u})_1$	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{2,4})_4, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v}^2)_6, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{k}_{2,4})_2, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u})_1$
	$((\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u})_1$	$((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u})_2$	
Degré 6	$((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_1, \mathbf{u}^3)_6$	$((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4}^2)_5, \mathbf{u})_2$	$((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4}^2)_6, \mathbf{u})_1$	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}^3)_6$

suite à la prochaine page

*suite de la page précédente*

	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v}^2)_5, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{2,4})_4, \mathbf{u}^2)_3$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{k}_{2,4})_1, \mathbf{u}^2)_4$
	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_7, \mathbf{u})_1$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{3,6})_5, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{3,6})_6, \mathbf{u})_1$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_6, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}^2)_3$ $((\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{k}_{2,4})_1, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{k}_{2,4})_4, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v}^2)_5, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v}^2)_6, \mathbf{u})_1$ $((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{k}_{2,4})_2, \mathbf{u})_1$
	$((\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v}^2)_8, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v}^2)_7, \mathbf{u})_1$ $((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u})_1$
	$((\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u})_2$
Degré 7	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}^4)_8$ $((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}^3)_6$ $((\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}^3)_6$ $((\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_8, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{k}_{3,6})_4, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}^2)_4$
	$((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v}^2)_6, \mathbf{u})_1$ $((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{5,4}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{5,8}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{h}_{5,4}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u})_1$ $((\mathbf{h}_{5,2}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u})_2$
Degré 8	$((\mathbf{h}_{5,8}, \mathbf{k}_{2,4})_4, \mathbf{u})_2$
Degré 9	$((\mathbf{h}_{7,4}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u})_2$
80 covariants d'ordre 4 : 5 issus de $S_6$ , 2 de $S_4$ , 15 covariants joints issus de $S_6 \oplus S_2$ et donnés dans 6.3.3.1, 31 covariants joints issus de $S_6 \oplus S_4$ et donnés dans 6.3.3.2. Reste 27 covariants donnés ci-dessous :	
Degré 2	$(\mathbf{v}, \mathbf{u})_1$
Degré 3	$(\mathbf{k}_{2,4}, \mathbf{u})_1$ $((\mathbf{f}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{f}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u})_1$
Degré 4	$(\mathbf{k}_{3,6}, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{f}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}^2)_3$ $((\mathbf{f}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u})_1$
	$((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_2, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u})_1$ $((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u})_1$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u})_2$
Degré 5	$((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_1, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{2,4})_4, \mathbf{u})_1$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v}^2)_5, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{k}_{2,4})_1, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u})_1$ $((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u})_2$
Degré 6	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}^3)_6$ $((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u})_2$
	$((\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u})_2$
32 covariants d'ordre 6 : 5 issus de $S_6$ , 1 de $S_4$ , 8 covariants joints issus de $S_6 \oplus S_2$ et donnés dans 6.3.3.1, 11 covariants joints issus de $S_6 \oplus S_4$ et donnés dans 6.3.3.2. Reste 7 covariants donnés ci-dessous :	
Degré 3	$((\mathbf{f}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u})_1$ $((\mathbf{f}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u})_2$
Degré 4	$((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_1, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u})_2$
Degré 5	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}^2)_4$ $((\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u})_2$ $((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u})_2$
12 covariants d'ordre 8 : 3 issus de $S_6$ , 3 covariants joints issus de $S_6 \oplus S_2$ et donnés dans 6.3.3.1, 5 covariants joints issus de $S_6 \oplus S_4$ et donnés dans 6.3.3.2. Reste 1 covariant donné ci-dessous :	
Degré 4	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u})_2$

Il reste ensuite 3 covariants d'ordre 10 : 1 issu de  $S_6$ , 1 covariant joint issu de  $S_6 \oplus S_2$  et donné par 6.3.3.1, puis 1 covariant joint issu de  $S_6 \oplus S_4$  et donné par 6.3.3.2. Au final, il reste 1 covariant d'ordre 12 issu de  $S_6$ .

### 6.3.3.4. famille génératrice de covariants de $S_8$

On applique ici l'algorithme de Gordan pour les formes binaires simples.

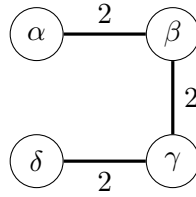
Pour la première étape, on a  $A_0 = \{\mathbf{f}\}$ , avec  $\mathbf{f} \in S_8$ . La famille  $B_0$  ne contient que

$$\mathbf{h}_{2,12} := (\mathbf{f}, \mathbf{f})_2 \in S_{12}.$$

Pour obtenir la famille  $A_1$ , il faut considérer les transvectants

$$(\mathbf{f}^a, \mathbf{h}_{2,12}^b)_r,$$

sachant qu'on travaille modulo  $I_4$ . Par le lemme C.1, on a nécessairement  $r \leq 2$ . Fixons ensuite la molécule



En appliquant le lemme B.4 avec  $e_0 = 2$  et  $e_1 = 2$ , une telle molécule est de grade 3 et donc par le lemme C.1, elle est de grade 4.

De tout cela, on en déduit que la famille  $A_1$  est composée des 4 covariants

$$\mathbf{f}, \quad \mathbf{h}_{2,12}, \quad \mathbf{h}_{3,18} := (\mathbf{f}, \mathbf{h}_{2,12})_1.$$

La famille  $B_1$  est constituée de l'unique forme

$$\mathbf{h}_{2,8} := (\mathbf{f}, \mathbf{f})_4 \in S_8.$$

Pour obtenir la famille  $A_2$ , on doit alors considérer les transvectants

$$(\mathbf{f}^{a_1} \mathbf{h}_{2,12}^{a_2} \mathbf{h}_{3,18}^{a_3}, \mathbf{h}_{2,8}^b)_r.$$

En utilisant le même genre d'arguments que ci-dessus, et donc à l'aide de lemme du type B.4, on en déduit [GY10; Gor75] que :

**Lemme 6.3.29.** *La famille  $A_2$  est constituée des sept covariants*

$$\mathbf{f}, \quad \mathbf{h}_{2,8} = (\mathbf{f}, \mathbf{f})_4, \quad \mathbf{h}_{2,12} = (\mathbf{f}, \mathbf{f})_2, \quad \mathbf{h}_{3,12} := (\mathbf{f}, \mathbf{h}_{2,8})_2, \quad \mathbf{h}_{3,14} := (\mathbf{f}, \mathbf{h}_{2,8})_1$$

$$\mathbf{h}_{3,18} := (\mathbf{f}, \mathbf{h}_{2,12})_1, \quad \mathbf{h}_{4,18} := (\mathbf{h}_{2,12}, \mathbf{h}_{2,8})_1$$

Rappelons aussi qu'il faut considérer l'invariant

$$(\mathbf{f}, \mathbf{h}_{2,8})_8.$$

Enfin, la famille  $B_2$  est donnée par la famille génératrice du covariant

$$\mathbf{h}_{2,4} := (\mathbf{f}, \mathbf{f})_6 \in S_4.$$

Comme nous l'avons vu dans la [sous-sous-section 6.3.3.2](#), une telle famille génératrice de covariant est par exemple donnée par

$$\mathbf{h}_{2,4}, \quad \mathbf{h}_{4,4} := (\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{h}_{2,4})_2, \quad \mathbf{h}_{6,6} := (\mathbf{h}_{2,4}, (\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{h}_{2,4})_2)_1$$

et les deux invariants

$$\mathbf{h}_{4,0} := (\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{h}_{2,4})_4, \quad \mathbf{h}_{6,0} := (\mathbf{h}_{2,4}, (\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{h}_{2,4})_2)_4$$

Pour obtenir la famille  $A_3$ , on doit considérer les transvectants

$$(\mathbf{f}^{a_1} \mathbf{h}_{2,8}^{a_2} \mathbf{h}_{2,12}^{a_3} \mathbf{h}_{3,12}^{a_4} \mathbf{h}_{3,14}^{a_5} \mathbf{h}_{3,18}^{a_6} \mathbf{h}_{4,18}^{a_7}, \mathbf{h}_{2,4}^{b_1} \mathbf{h}_{4,4}^{b_2} \mathbf{h}_{6,6}^{b_3})_r$$

et donc le système

$$\begin{cases} 8a_1 + 8a_2 + 12a_3 + 12a_4 + 14a_5 + 18a_6 + 18a_7 & = u + r \\ 4b_1 + 4b_2 + 6b_3 & = v + r \end{cases} \quad (6.3.18)$$

On peut ensuite exploiter la relation connue dans  $\mathbf{Cov}(S_4)$  :

$$12\mathbf{h}_{6,6}^2 + 6\mathbf{h}_{4,4}^3 + 2\mathbf{h}_{6,0}\mathbf{h}_{2,4}^3 - 3\mathbf{h}_{2,4}^2\mathbf{h}_{4,4}\mathbf{h}_{4,0} = 0.$$

A l'aide de scripts écrits en Macaulay 2 [GS], on obtient finalement une famille génératrice de covariant de  $S_8$ , donnée ci-dessous.

8 invariants	
Degré 2	$\mathbf{h}_{2,0} := (\mathbf{f}, \mathbf{f})_8$
Degré 3	$(\mathbf{f}, \mathbf{h}_{2,8})_8$
Degré 4	$(\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{h}_{2,4})_4$
Degré 5	$(\mathbf{f}, \mathbf{h}_{2,4}^2)_8$
Degré 6	$(\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{h}_{2,4})_4$
Degré 7	$(\mathbf{f}, \mathbf{h}_{2,4}\mathbf{h}_{4,4})_8$
Degré 8	$(\mathbf{h}_{2,12}, \mathbf{h}_{2,4}^3)_{12}$
Degré 9	$(\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{h}_{2,4}^3)_{12}$
Degré 10	$(\mathbf{h}_{2,12}, \mathbf{h}_{2,4}^2\mathbf{h}_{4,4})_{12}$
14 covariants d'ordre 2.	
Degré 5	$(\mathbf{f}, \mathbf{h}_{2,4}^2)_7$
Degré 6	$(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{h}_{2,4}^2)_7$
Degré 7	$(\mathbf{f}, \mathbf{h}_{6,6})_6 \quad (\mathbf{f}, \mathbf{h}_{2,4}\mathbf{h}_{4,4})_7$
Degré 8	$(\mathbf{h}_{2,12}, \mathbf{h}_{2,4}^3)_{11} \quad (\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{h}_{6,6})_6$
Degré 9	$(\mathbf{h}_{3,14}, \mathbf{h}_{2,4}^3)_{12} \quad (\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{h}_{2,4}^3)_{11} \quad (\mathbf{f}, \mathbf{h}_{4,4}^2)_7$

*suite à la prochaine page*

suite de la page précédente

Degré 10	$(\mathbf{h}_{2,12}, \mathbf{h}_{2,4}\mathbf{h}_{6,6})_{10} \quad (\mathbf{h}_{2,12}, \mathbf{h}_{2,4}^2\mathbf{h}_{4,4})_{11}$
Degré 11	$(\mathbf{h}_{3,18}, \mathbf{h}_{2,4}^4)_{16} \quad (\mathbf{h}_{3,14}, \mathbf{h}_{2,4}^2\mathbf{h}_{4,4})_{12}$
Degré 12	$(\mathbf{h}_{4,18}, \mathbf{h}_{2,4}^4)_{16}$
13 covariants d'ordre 4.	
Degré 2	$\mathbf{h}_{2,4} := (\mathbf{f}, \mathbf{f})_6$
Degré 3	$(\mathbf{f}, \mathbf{h}_{2,4})_4$
Degré 4	$\mathbf{h}_{4,4} := (\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{h}_{2,4})_2$
	$(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{h}_{2,4})_4$
Degré 5	$(\mathbf{f}, \mathbf{h}_{4,4})_4 \quad (\mathbf{f}, \mathbf{h}_{2,4}^2)_6$
Degré 6	$(\mathbf{h}_{2,12}, \mathbf{h}_{2,4}^2)_8 \quad (\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{h}_{4,4})_4$
Degré 7	$(\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{h}_{2,4}^2)_8 \quad (\mathbf{f}, \mathbf{h}_{6,6})_5$
Degré 8	$(\mathbf{h}_{2,12}, \mathbf{h}_{2,4}\mathbf{h}_{4,4})_8 \quad (\mathbf{h}_{2,12}, \mathbf{h}_{2,4}^3)_{10}$
Degré 9	$(\mathbf{h}_{3,14}, \mathbf{h}_{2,4}^3)_{11}$
12 covariants d'ordre 6.	
Degré 3	$(\mathbf{f}, \mathbf{h}_{2,4})_3$
Degré 4	$(\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{h}_{2,4})_3$
Degré 5	$(\mathbf{f}, \mathbf{h}_{4,4})_3 \quad (\mathbf{f}, \mathbf{h}_{2,4}^2)_5$
Degré 6	$\mathbf{h}_{6,6} := (\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{h}_{2,4})_1 \quad (\mathbf{h}_{2,12}, \mathbf{h}_{2,4}^2)_7 \quad (\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{h}_{4,4})_3$
Degré 7	$(\mathbf{h}_{3,14}, \mathbf{h}_{2,4}^2)_8 \quad (\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{h}_{2,4}^2)_7 \quad (\mathbf{f}, \mathbf{h}_{6,6})_4$
Degré 8	$(\mathbf{h}_{2,12}, \mathbf{h}_{6,6})_6 \quad (\mathbf{h}_{2,12}, \mathbf{h}_{2,4}\mathbf{h}_{4,4})_7$
6 covariants d'ordre 8.	
Degré 1	$\mathbf{f}$
Degré 2	$\mathbf{h}_{2,8}$
Degré 3	$(\mathbf{f}, \mathbf{h}_{2,4})_2$
Degré 4	$(\mathbf{h}_{2,12}, \mathbf{h}_{2,4})_4$
Degré 5	$(\mathbf{f}, \mathbf{h}_{4,4})_2$
Degré 6	$(\mathbf{h}_{2,12}, \mathbf{h}_{4,4})_4$
7 covariants d'ordre 10.	
Degré 3	$(\mathbf{f}, \mathbf{h}_{2,4})_1$
Degré 4	$(\mathbf{h}_{2,12}, \mathbf{h}_{2,4})_3 \quad (\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{h}_{2,4})_1$
Degré 5	$(\mathbf{h}_{3,14}, \mathbf{h}_{2,4})_4 \quad (\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{h}_{2,4})_3$
	$(\mathbf{f}, \mathbf{h}_{4,4})_1$
Degré 6	$(\mathbf{h}_{2,12}, \mathbf{h}_{4,4})_3$
3 covariants d'ordre 12.	

suite à la prochaine page

*suite de la page précédente*

Degré 2	$\mathbf{h}_{2,12}$
Degré 3	$\mathbf{h}_{3,12} := (\mathbf{f}, \mathbf{h}_{2,8})_2$
Degré 4	$(\mathbf{h}_{2,12}, \mathbf{h}_{2,4})_2$
3 covariants d'ordre 14.	
Degré 3	$\mathbf{h}_{3,14} := (\mathbf{f}, \mathbf{h}_{2,8})_1$
Degré 4	$(\mathbf{h}_{2,12}, \mathbf{h}_{2,4})_1$
Degré 5	$(\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{h}_{2,4})_1$
2 covariants d'ordre 18.	
Degré 3	$\mathbf{h}_{3,18} := (\mathbf{f}, \mathbf{h}_{2,12})_1$
Degré 4	$(\mathbf{h}_{2,12}, \mathbf{h}_{2,8})_1$



## 7. Applications à la mécanique des milieux continus

Ce chapitre concerne les résultats que nous avons pu établir concernant les familles génératrices finies des algèbres d'invariants des espaces  $\mathbb{P}ie_z$  et  $\mathbb{E}l_a$ . Il s'agit, rappelons-le, d'un objectif essentiel de notre travail, motivé par des questions mécaniques.

Comme souligné dans la [section 3.3](#), ces questions se traduisent en termes d'espaces de formes binaires, ce qui revient à étudier les algèbres d'invariants de l'espace

$$S_6 \oplus S_2 \oplus S_4 \oplus S_2,$$

pour l'espace  $\mathbb{P}ie_z$  ainsi que de l'espace

$$S_8 \oplus S_4 \oplus S_4 \oplus S_0 \oplus S_0$$

pour l'espace  $\mathbb{E}l_a$ .

Dans ce chapitre, nous montrons aussi comment passer des invariants des formes binaires aux invariants des tenseurs, en exploitant des opérateurs  $SO(3)$  invariants et en définissant ainsi des *transvectants* de tenseurs.

Au final, nous avons pu obtenir pour la première fois une famille génératrice minimale de 299 invariants de l'algèbre des invariants de l'élasticité. Par ce résultat, on ferme une question vieille de plus de 30 ans. Concernant l'algèbre des polynômes  $SO(3)$  invariants de l'espace  $\mathbb{P}ie_z$ , nous avons obtenu une famille génératrice minimale de 495 invariants. De cette famille de polynômes  $SO(3)$  invariants, on en déduit une famille génératrice finie de polynômes  $O(3)$  invariants sur  $\mathbb{P}ie_z$  mais qui n'est pas encore minimale à ce jour. La réduction de cette famille fera l'objet d'une publication ultérieure.

### 7.1. Opérateurs invariants

Rappelons ici qu'il existe deux modèles pour les espaces  $SO(3)$  ou  $O(3)$  irréductibles ([sous-section 3.1.1](#)) : les espaces  $H_n(\mathbb{R}^3)$  de polynômes harmoniques ou les espaces  $\mathbb{H}^n$  de tenseurs harmoniques sur  $\mathbb{R}^3$ . Nous allons proposer ici de définir des *transvectants* sur les tenseurs. Pour les formes binaires, une telle opération est en fait un projecteur associé à la décomposition de Clebsch–Gordan de l'espace  $S_n \otimes S_p$ . Dans le cadre des tenseurs, nous avons

**Proposition 7.1.1.** *Pour tout entier naturel  $n$  et  $p$*

$$H_n(\mathbb{R}^3) \otimes H_p(\mathbb{R}^3) \simeq \bigoplus_{r=0}^{\min(n,p)} H_{n+p-r}(\mathbb{R}^3).$$

### 7.1.1. Transvectants de tenseurs

Pour définir explicitement des projecteurs associés à cette décomposition de Clebsch–Gordan, nous commençons par définir des opérateurs  $SO(3)$  invariants, qui jouent un rôle similaire aux opérateurs définis dans le cadre des formes binaires (sous-section 5.2.1).

Rappelons avant tout que  $S_n(\mathbb{R}^3)$  désigne l'espace des polynômes homogènes de degré  $n$  sur  $\mathbb{R}^3$  et notons  $\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta, \mathbf{x}_\gamma$  des variables de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit maintenant

$$\Omega_{\alpha\beta\gamma} := \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} & \frac{\partial}{\partial x_\beta} & \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \\ \frac{\partial}{\partial y_\alpha} & \frac{\partial}{\partial y_\beta} & \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \\ \frac{\partial}{\partial z_\alpha} & \frac{\partial}{\partial z_\beta} & \frac{\partial}{\partial z_\gamma} \end{vmatrix}$$

qui est un clairement un opérateur  $SO(3)$  invariant. Ensuite, on définit le polarisé du laplacien :

$$\Delta_{\alpha\beta} := \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} + \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \frac{\partial}{\partial y_\beta} + \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \frac{\partial}{\partial z_\beta}$$

qui est  $O(3)$  invariant. On désigne par

$$\mu : \mathbf{F}(\mathbf{x}_\alpha)\mathbf{G}(\mathbf{x}_\beta) \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{G}(\mathbf{x}), \quad S^n(\mathbb{R}^3) \otimes S^p(\mathbb{R}^3) \longrightarrow S^{n+p}(\mathbb{R}^3)$$

un opérateur de trace. Enfin, pour tout polynôme  $\mathbf{F} \in S^n(\mathbb{R}^3)$ , on désigne par  $[[\mathbf{F}]]$  sa projection orthogonale sur  $H_n(\mathbb{R}^3)$  (voir sous-section 3.3.2).

**Définition 7.1.2.** Pour tout triplet  $(n, p, r)$  d'entiers naturels

- si  $r = 2k$  est un entier pair, on note

$$(\mathbf{F}, \mathbf{G})_r := [[\mu \circ \Delta_{\alpha\beta}^k(\mathbf{F}(\mathbf{x}_\alpha)\mathbf{G}(\mathbf{x}_\beta))]] \in H_{n+p-r}(\mathbb{R}^3).$$

- si  $r = 2k + 1$  est un entier impair, on note

$$(\mathbf{F}, \mathbf{G})_r := [[\mu \circ \Omega_{\alpha\beta\gamma} \Delta_{\alpha\beta}^k(\mathbf{F}(\mathbf{x}_\alpha)\mathbf{G}(\mathbf{x}_\beta)\mathbf{Q}(\mathbf{x}_\gamma))]] \in H_{n+p-r}(\mathbb{R}^3).$$

Si le triplet est admissible, on note  $\tilde{\pi}_r : H_n(\mathbb{R}^3) \otimes H_p(\mathbb{R}^3) \longrightarrow H_{n+p-r}(\mathbb{R}^3)$  la projection de Clebsch–Gordan associée.

### 7.1.2. Covariants généralisés d'un tenseur

L'algèbre des *covariants* d'un espace  $V = S_n$  est défini comme l'algèbre des invariants de  $S_n \oplus S_1$ . On sait aussi que tout covariant d'une forme binaire est associé à un morphisme  $SL(2, \mathbb{C})$  équivariant

$$S_n \longrightarrow S_k$$

et s'obtient naturellement à partir de transvectants (théorème 5.3.10).

Dans le même esprit, nous pouvons définir un *covariant* de tenseur comme un morphisme  $SO(3)$  équivariant

$$H_n(\mathbb{R}^3) \longrightarrow H_k(\mathbb{R}^3)$$

ce qui revient en fait à considérer l'algèbre des invariants<sup>a</sup>  $H_n(\mathbb{R}^3) \oplus H_1(\mathbb{R}^3)$ .

Les transvectants définis par 7.1.2 permettent de définir naturellement de tels covariants. Ainsi, en notant  $\mathbf{F} \in H_n(\mathbb{R}^3)$  ( $n \geq 4$ ), on a

$$(\mathbf{F}, \mathbf{F})_2 \in H_{2n-2}(\mathbb{R}^3), \quad ((\mathbf{F}, \mathbf{F})_4, \mathbf{F})_2 \in H_{2n-8}(\mathbb{R}^3), \quad \dots$$

Cependant, dans la pratique, de tels covariants ne sont pas très faciles à manier (car il faut prendre la partie harmonique). On propose donc de définir des *covariants de type*  $S^k(\mathbb{R}^3)$ , adoptant par là même la notion générale de covariant précisée dans la remarque 5.1.7.

**Définition 7.1.3.** Pour tout tenseur  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$  et pour tout entier  $k \geq 0$ , on note

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}_{2k} &:= \mu \circ \Delta_{\alpha\beta}^k(\mathbf{F}(\mathbf{x}_\alpha)\mathbf{G}(\mathbf{x}_\beta)) \in S_{n+p-2k}(\mathbb{R}^3) \\ \{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}_{2k+1} &:= \mu \circ \Delta_{\alpha\beta}^k \Omega_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{F}(\mathbf{x}_\alpha)\mathbf{G}(\mathbf{x}_\beta)\mathbf{Q}(\mathbf{x}_\gamma)) \in S_{n+p-2k-2}(\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

*Remarque 7.1.4.* On peut aussi définir des opérateurs équivalents en termes tensoriels. Rappelons que  $\epsilon$  désigne le tenseur (d'ordre 3) de Levi-Civita. Notons

$$\mu_\epsilon : \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \mapsto \mathbf{T}, \quad \mathbb{H}^n \otimes \mathbb{H}^p \longrightarrow \mathbb{T}^{n+p-1}$$

où on a écrit

$$\mathbf{T}_{i_1 j_1 \dots j_{n-1} k_1 \dots k_{p-1}} := \epsilon_{i_1 j k} \mathbf{A}_{j j_1 \dots j_{n-1}} \mathbf{B}_{k k_1 \dots k_{p-1}}.$$

En prenant la partie totalement symétrique de  $\mu_\epsilon(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$ , cela correspond alors à l'opérateur  $\mu \circ \Omega_{\alpha\beta\gamma}$ .

On peut ensuite définir un deuxième opérateur de trace, noté

$$\mu_k : \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \mapsto \mathbf{T}', \quad \mathbb{H}^n \otimes \mathbb{H}^p \longrightarrow \mathbb{T}^{n+p-2k}$$

qui correspond à une contraction sur les  $k$  premiers indices :

$$\mathbf{T}'_{i_1 \dots i_{n-k} j_1 \dots j_{p-k}} := \mathbf{A}_{l_1 \dots l_k i_1 \dots i_{n-k}} \mathbf{B}_{l_1 \dots l_k j_1 \dots j_{p-k}}.$$

Pour tout tenseur  $\mathbf{T} \in \mathbb{T}^m$ , on note  $[[\mathbf{T}]]$  sa partie harmonique.

Au final, pour  $r = 2k$ , on définit

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B})_r := [[\mu_k(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})]]$$

puis, pour  $r = 2k + 1$ , on définit

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B})_r := [[\mu_\epsilon \circ \mu_k(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})]]$$

qui donnent les équivalents tensoriels des transvectants.

---

a. Une fois complexifié, cela correspond à l'algèbre des invariants de  $S_{2n} \oplus S_2$ .

## 7.2. Invariants du tenseur piézoélectrique

Nous cherchons ici à établir une famille génératrice des invariants de l'espace  $\mathbb{P}ie_z$ . Un tel espace, qui est isomorphe à l'espace des tenseurs gradient de la déformation, a pour décomposition harmonique<sup>b</sup> (voir [sous-section 3.1.2](#))

$$\mathbb{H}^3 \oplus \mathbb{H}^1 \oplus \mathbb{H}^{2*} \oplus \mathbb{H}^1$$

Si nous nous limitons aux cas des polynômes  $SO(3)$  invariants, le problème revient à chercher une famille génératrice de l'espace

$$S_6 \oplus S_2 \oplus S_4 \oplus S_2.$$

### 7.2.1. Famille génératrice minimale de l'algèbre $\text{Inv}(S_6 \oplus S_2 \oplus S_4 \oplus S_2)$

Nous exploitons ici une famille génératrice de l'algèbre  $\text{Cov}(S_6 \oplus S_2 \oplus S_4)$ , obtenue dans la [sous-sous-section 6.3.3.3](#), puis nous appliquons l'algorithme de Gordan sur les covariants joints (théorème [6.3.26](#)) des espaces du type  $V \oplus S_2$ .

La famille génératrice ainsi obtenue n'étant pas nécessairement minimale, nous avons utilisé des scripts écrits en Macaulay 2 [[GS](#)] pour réduire cette famille.

Au final, nous avons

**Théorème 7.2.1.** *L'algèbre  $\text{Inv}(S_6 \oplus S_2 \oplus S_4 \oplus S_2)$  possède une famille génératrice minimale de 495 invariants, résumée dans la table [7.2](#).*

Les tables en [7.1](#) donne un résumé plus détaillé de ces résultats. Dans ces tables, la notation  $\text{Inv}_j(V_1 \oplus V_2)$  signifie que nous ne considérons que des invariants joints de degré non nuls en  $V_1$  et en  $V_2$ . On note enfin  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in S_2 \oplus S_2$ .

---

b. Rappelons ici que  $\mathbb{H}^{2*}$  signifie que l'action de  $-\text{Id}$  est donnée sur  $\mathbb{H}^2$  par l'opposé de l'identité.

degré	$\mathbf{Inv}(S_6)$	$\mathbf{Inv}(S_4)$	$\mathbf{Inv}(S_2)$	$\mathbf{Inv}_j(S_2 \oplus S_2)$	$\mathbf{Inv}_j(S_6 \oplus S_4)$	$\mathbf{Inv}_j(S_6 \oplus S_2)$	$\mathbf{Inv}_j(S_4 \oplus S_2)$
1	—	—	—	—	—	—	—
2	1	1	1	1	—	—	—
3	—	1	—	—	1	—	1
4	1	—	—	—	3	3	1
5	—	—	—	—	4	—	—
6	1	—	—	—	8	4	1
7	—	—	—	—	9	3	—
8	—	—	—	—	9	1	—
9	—	—	—	—	8	7	—
10	1	—	—	—	4	—	—
11	—	—	—	—	3	2	—
12	—	—	—	—	2	1	—
13	—	—	—	—	1	—	—
14	—	—	—	—	1	—	—
15	1	—	—	—	—	—	—
<i>Tot</i>	5	2	1	1	53	21	3

degré	$\mathbf{Inv}_j(S_4 \oplus S_2 \oplus S_2)$	$\mathbf{Inv}_j(S_6 \oplus S_2 \oplus S_2)$	$\mathbf{Inv}_j(S_6 \oplus S_4 \oplus S_2)$	$\mathbf{Inv}_j(S_6 \oplus S_4 \oplus S_2 \oplus S_2)$
1	—	—	—	—
2	—	—	—	—
3	1	—	1	—
4	3	3	4	2
5	2	6	11	11
6	2	6	23	32
7	—	16	30	35
8	—	—	28	24
9	—	18	7	1
10	—	—	4	—
11	—	1	1	—
12	—	—	1	—
13	—	—	—	—
14	—	—	—	—
15	—	—	—	—
<i>Tot</i>	8	50	110	106

Table 7.1. – Invariants joints de  $S_6 \oplus S_4 \oplus S_2 \oplus S_2$

On résume ensuite ces résultats dans la table 7.2.

degré	$\mathbf{Inv}(S_6 \oplus S_4 \oplus S_2 \oplus S_2)$
1	—
2	5
3	7
4	28
5	45
6	105
7	126
8	91
9	55
10	14
11	10
12	6
13	1
14	1
15	1
<i>Tot</i>	495

Table 7.2. – Famille génératrice minimale de  $\mathbf{Inv}(S_6 \oplus S_4 \oplus S_2 \oplus S_2)$

On propose au lecteur de se reporter à la [sous-section 6.3.3](#) pour la liste des invariants déjà calculés. Finalement, les invariants de  $\mathbf{Inv}_j(S_4 \oplus S_2 \oplus S_2)$  sont donnés par

8 invariants	
Degré 3	$((\mathbf{v}, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$
Degré 4	$((\mathbf{v}, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{v}, \mathbf{u}_1^2)_3, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{k}_{2,4}, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$
Degré 5	$((\mathbf{k}_{2,4}, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{k}_{2,4}, \mathbf{u}_1^2)_3, \mathbf{u}_2)_2$
Degré 6	$((\mathbf{k}_{3,6}, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{k}_{3,6}, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2)_2$

Ensuite, les invariants de  $\mathbf{Inv}_j(S_6 \oplus S_2 \oplus S_2)$  sont donnés par

50 invariants	
Degré 4	$((\mathbf{f}, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{f}, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$
Degré 5	$((\mathbf{f}, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2^3)_6$ $((\mathbf{f}, \mathbf{u}_1^2)_3, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{f}, \mathbf{u}_1^3)_5, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{u}_1^2)_3, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$
Degré 6	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^3)_6$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{u}_1^3)_6, \mathbf{u}_2)_2$

*suite à la page suivante*

suite de la page précédente

	$((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^2)_4$	$((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2)_2$	$((\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$
Degré 7	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2^4)_8$	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{u}_1^2)_3, \mathbf{u}_2^3)_6$	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{u}_1^3)_5, \mathbf{u}_2^2)_4$
	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{u}_1^4)_7, \mathbf{u}_2)_2$	$((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^3)_6$	$((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2^3)_6$
	$((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{u}_1^2)_3, \mathbf{u}_2^2)_4$	$((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2)_4$	$((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{u}_1^3)_6, \mathbf{u}_2)_2$
	$((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{u}_1^3)_5, \mathbf{u}_2)_2$	$((\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2^2)_4$	$((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^2)_4$
	$((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2)_2$	$((\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{u}_1^2)_3, \mathbf{u}_2)_2$	
	$((\mathbf{h}_{5,2}, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$	$((\mathbf{h}_{5,4}, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$	
Degré 9	$((\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^5)_{10}$	$((\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2^4)_8$	$((\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{u}_1^3)_6, \mathbf{u}_2^3)_6$
	$((\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{u}_1^4)_8, \mathbf{u}_2^2)_4$	$((\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{u}_1^5)_{10}, \mathbf{u}_2)_2$	$((\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^4)_8$
	$((\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2^3)_6$	$((\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{u}_1^3)_6, \mathbf{u}_2^2)_4$	$((\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{u}_1^4)_8, \mathbf{u}_2)_2$
	$((\mathbf{h}_{5,8}, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^3)_6$	$((\mathbf{h}_{5,8}, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2)_4$	$((\mathbf{h}_{5,8}, \mathbf{u}_1^3)_6, \mathbf{u}_2)_2$
	$((\mathbf{h}_{6,62}, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^2)_4$	$((\mathbf{h}_{6,61}, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^2)_4$	$((\mathbf{h}_{6,61}, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2)_2$
	$((\mathbf{h}_{6,62}, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2)_2$	$((\mathbf{h}_{7,4}, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$	$((\mathbf{h}_{7,2}, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$
Degré 11	$((\mathbf{h}_{9,4}, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$		

Finalement, les invariants de  $\text{Inv}_j(S_6 \oplus S_4 \oplus S_2 \oplus S_2)$  sont donnés par

106 invariants	
Degré 4	$((\mathbf{f}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{f}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$
Degré 5	$((\mathbf{f}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{f}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{f}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2)_2$
	$((\mathbf{f}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}_1^2)_3, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{f}, \mathbf{v}^2)_6, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$
	$((\mathbf{f}, \mathbf{v}^2)_5, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_4, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$
	$((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$
Degré 6	$((\mathbf{f}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^3)_6$ $((\mathbf{f}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2^3)_6$ $((\mathbf{f}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}_1^2)_3, \mathbf{u}_2^2)_4$
	$((\mathbf{f}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{f}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}_1^3)_5, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{f}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}_1^3)_6, \mathbf{u}_2)_2$
	$((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_2, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u}_1^2)_3, \mathbf{u}_2)_2$
	$((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_2, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{3,6})_4, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{f}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_5, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$
	$((\mathbf{f}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_6, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{3,6})_5, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2^2)_4$
	$((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^2)_4$
	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}_1^2)_3, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2)_2$
	$((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}_1^2)_3, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v}^2)_7, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$
	$((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{k}_{2,4})_2, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{2,4})_4, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v}^2)_6, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$
	$((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$
	$((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$
Degré 7	$((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_1, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^3)_6$ $((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_1, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4})_1, \mathbf{u}_1^3)_6, \mathbf{u}_2)_2$

suite à la page suivante

suite de la page précédente

	$((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4}^2)_5, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{f}, \mathbf{k}_{2,4}^2)_6, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^3)_6$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}_1^3)_6, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v}^2)_5, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{k}_{2,4})_1, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{2,4})_4, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{h}_{2,4}, \mathbf{k}_{2,4})_1, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v}^2)_5, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{2,4})_4, \mathbf{u}_1^2)_3, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{3,6})_6, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{k}_{3,6})_5, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_6, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_7, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}_1^2)_3, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v}^2)_6, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{k}_{2,4})_4, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v}^2)_8, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{k}_{2,4})_1, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{3,2}, \mathbf{k}_{2,4})_2, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{v}^2)_5, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v}^2)_7, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$
Degré 8	$((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^4)_8$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2^3)_6$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}_1^3)_6, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{h}_{2,8}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}_1^4)_8, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^3)_6$ $((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^3)_6$ $((\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{h}_{3,8}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}_1^3)_6, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}_1^3)_6, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{3,12}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_8, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{3,6}, \mathbf{k}_{3,6})_4, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2^2)_4$ $((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{4,10}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{4,4}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}_1^2)_4, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{k}_{2,4})_3, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{4,6}, \mathbf{v}^2)_6, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{5,4}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{5,4}, \mathbf{v})_3, \mathbf{u}_1)_1, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{5,2}, \mathbf{v})_1, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$ $((\mathbf{h}_{5,8}, \mathbf{v})_4, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$
Degré 9	$((\mathbf{h}_{5,8}, \mathbf{k}_{2,4})_4, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$
Degré 10	$((\mathbf{h}_{7,4}, \mathbf{v})_2, \mathbf{u}_1)_2, \mathbf{u}_2)_2$

## 7.2.2. Famille génératrice des polynômes $SO(3)$ invariants

Les polynômes  $SL(2, \mathbb{C})$  invariants de l'espace  $S_6 \oplus S_2 \oplus S_4 \oplus S_2$  sont associés aux polynômes  $SO(3)$  invariants de l'espace  $\mathbb{P}ie_z$ .

L'objectif est donc d'établir une famille génératrice minimale pour l'algèbre des polynômes  $SO(3)$  invariants de l'espace  $\mathbb{P}ie_z$ . Pour déterminer une telle famille, nous définissons sur  $H_3(\mathbb{R}^3)$  des *covariants de type*  $S^k(\mathbb{R}^3)$  (définition 7.1.3), directement issus de la famille génératrice des covariants de  $S_6$ , donnés par la table 7.3. Les opérateurs différentiels utilisés ont été définis en section 7.1. *A priori*, nous ne savons pas si une telle famille est une famille génératrice de l'algèbre des covariants de type  $S^k(\mathbb{R}^3)$  de  $H_3(\mathbb{R}^3)$ . Elle n'est utilisée que pour construire des invariants de  $\mathbb{P}ie_z$ .

Précisons aussi que ces covariants ne donnent que des polynômes symétriques, non nécessairement harmoniques. Ainsi, le covariant  $\mathbf{H}_{2,4}$  est un polynôme symétrique de degré 2 en  $\mathbf{F} \in H_3(\mathbb{R}^3)$ . Ensuite, pour un polynôme  $\mathbf{V} \in H_2(\mathbb{R}^3)$ , on note

$$\mathbf{K}_{2,4} := \{\mathbf{V}, \mathbf{V}\}_2 \quad \mathbf{K}_{3,6} := \{\mathbf{V}, \mathbf{K}_{2,4}\}_1.$$

Si nous reprenons la famille génératrice de l'algèbre  $\text{Inv}(S_6 \oplus S_4 \oplus S_2 \oplus S_2)$ , en rem-



D/O	0	2	4	6
1				$\mathbf{F}$
2	$\{\mathbf{F}, \mathbf{F}\}_6$		$\mathbf{H}_{2,4} := \{\mathbf{F}, \mathbf{F}\}_4$	
3		$\mathbf{H}_{3,2} := \{\mathbf{H}_{2,4}, \mathbf{F}\}_4$		$\mathbf{H}_{3,6} := \{\mathbf{H}_{2,4}, \mathbf{F}\}_2$
4	$\{\mathbf{H}_{2,4}, \mathbf{H}_{2,4}\}_4$		$\{\mathbf{H}_{3,2}, \mathbf{F}\}_2$	$\mathbf{H}_{4,6} := \{\mathbf{H}_{3,2}, \mathbf{F}\}_1$
5		$\{\mathbf{H}_{2,4}, \mathbf{H}_{3,2}\}_2$	$\{\mathbf{H}_{2,4}, \mathbf{H}_{3,2}\}_1$	
6	$\{\mathbf{H}_{3,2}, \mathbf{H}_{3,2}\}_2$			$\mathbf{H}_{6,61} := \{\mathbf{H}_{3,8}, \mathbf{H}_{3,2}\}_2$ $\mathbf{H}_{6,62} := \{\mathbf{H}_{3,6}, \mathbf{H}_{3,2}\}_1$
7		$\{\mathbf{F}, \mathbf{H}_{3,2}^2\}_4$	$\{\mathbf{F}, \mathbf{H}_{3,2}^2\}_3$	
8		$\{\mathbf{H}_{2,4}, \mathbf{H}_{3,2}^2\}_3$		
9			$\{\mathbf{H}_{3,8}, \mathbf{H}_{3,2}^2\}_4$	
10	$\{\mathbf{H}_{3,2}^3, \mathbf{F}\}_6$	$\{\mathbf{H}_{3,2}^3, \mathbf{F}\}_5$		
12		$\{\mathbf{H}_{3,8}, \mathbf{H}_{3,2}^3\}_6$		
15	$\{\mathbf{H}_{3,8}, \mathbf{H}_{3,2}^4\}_8$			

Table 7.3. – Covariants de type  $S^k(\mathbb{R}^3)$  de  $H_3(\mathbb{R}^3)$

plaçant chaque forme  $(\mathbf{f}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$  par les tenseurs

$$(\mathbf{F}, \mathbf{V}, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) \in H_3(\mathbb{R}^3) \oplus H_2(\mathbb{R}^3) \oplus H_1(\mathbb{R}^3) \oplus H_1(\mathbb{R}^3)$$

on obtient une famille  $\mathcal{F}_p$  d'invariants définis à partir des opérateurs 7.1.3, ce qui donne par exemple les invariants

$$\{\mathbf{H}_{1,6}, \mathbf{U}_1^3\}_6, \quad \{\mathbf{H}_{2,4}, \mathbf{V}\}_4, \quad \dots$$

Ensuite, nous savons que les algèbres  $\text{Inv}(S_6 \oplus S_4 \oplus S_2 \oplus S_2)$  et  $\mathbb{C}[\text{Piez}]^{\text{SO}(3)}$  sont isomorphes (corollaire 3.3.4). Du théorème 7.2.1, on en déduit donc :

**Lemme 7.2.2.** *L'algèbre  $\mathbb{C}[\text{Piez}]^{\text{SO}(3)}$  possède une famille génératrice minimale de 495 invariants, dont les degrés sont donnés par la table 7.2.*

La famille  $\mathcal{F}_p$  est composée de 495 invariants dont les degrés correspondent exactement à ceux de la table 7.2. Nous avons alors vérifié par le calcul, pour chaque espace homogène associé à ces degrés, qu'il s'agit bien d'une famille génératrice, tous les calculs ayant été effectués à l'aide de scripts écrits en Macaulay 2 [GS]. Sachant de plus que tous ces invariants sont à coefficients réels, on en déduit le théorème suivant :

**Théorème 7.2.3.** *La famille  $\mathcal{F}_p$ , composée de 495 invariants, est une famille génératrice minimale de l'algèbre  $\mathbb{R}[\text{Piez}]^{\text{SO}(3)}$ .*

### 7.2.3. Famille génératrice des polynômes $O(3)$ invariants

Pour obtenir l'algèbre des polynômes  $O(3)$  invariants, nous ne devons conserver que les polynômes  $SO(3)$  invariants de degré pair. Plus précisément, notons

$$\mathcal{A} := \mathbb{C}[\text{Piez}]^{O(3)}, \quad \mathcal{A}^s := \mathbb{C}[\text{Piez}]^{SO(3)}.$$

Il est clair que

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^s. \quad (7.2.1)$$

Ensuite, en tant qu'algèbre graduée, on a :

$$\mathcal{A}^s = \mathcal{A}_0^s \oplus \mathcal{A}_1^s \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_i^s \cdots$$

**Lemme 7.2.4.** *On a exactement*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0^s \oplus \mathcal{A}_2^s \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_{2i}^s \cdots$$

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que, pour un polynôme  $\mathbf{p} \in \mathcal{A}$  homogène de degré  $j$ , alors

$$p(-g \cdot \mathbf{T}) = p(\mathbf{T}) = (-1)^j p(g \cdot \mathbf{T}) = (-1)^j p(\mathbf{T})$$

pour tout  $g \in SO(3)$  et  $\mathbf{T} \in \text{Piez}$ . □

Notons maintenant  $\{I_1, \dots, I_{250}\}$  la famille des générateurs homogènes de degrés pairs de  $\mathbb{R}[\text{Piez}]^{SO(3)}$  et  $\{J_1, \dots, J_{245}\}$  la famille des générateurs homogènes de degrés impairs. Le lemme suivant est immédiat :

**Lemme 7.2.5.** *L'algèbre  $\mathbb{R}[\text{Piez}]^{O(3)}$  est engendrée par la famille composée des invariants  $I_1, \dots, I_{250}$  et des produits  $J_k J_l$ ,  $1 \leq k \leq l \leq 245$ .*

*Remarque 7.2.6.* Bien sûr, une telle famille n'a aucune raison d'être minimale (elle contient  $250 + 30628 = 30878$  générateurs). Nous proposerons dans un travail ultérieur une famille minimale de cette algèbre.

## 7.3. Invariants du tenseur d'élasticité

L'objectif ici est d'obtenir une famille génératrice minimale de l'espace des tenseurs d'élasticité, dont la décomposition harmonique est donnée par

$$\mathbb{H}^4 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^0$$

Pour déterminer une telle famille génératrice, on exploite une famille génératrice minimale des algèbres  $\text{Cov}(S_8)$  et  $\text{Cov}(S_4 \oplus S_4)$ . Remarquons que pour nos calculs, nous avons utilisé une famille génératrice minimale<sup>c</sup> de  $\text{Cov}(S_8)$  différente de celle obtenue dans la [sous-sous-section 6.3.3.4](#).

---

c. Une telle famille a été exploitée pour déterminer une famille génératrice minimale de  $\text{Cov}(S_{10})$  [OL14].

Ces familles génératrices minimales sont données dans les tables 7.4 et 7.5. Dans ces tables,  $\mathbf{h}_n$  (resp.  $\mathbf{f}_n$ ) désigne le covariant de  $S_4 \oplus S_4$  (resp.  $S_8$ ) qui est défini par la ligne  $n$ .

d/o	0	2	4	6	#	Cum
1	-	-	2	-	2	2
2	3	1	3	1	8	10
3	4	2	2	4	12	22
4	1	3	-	-	4	26
5	-	2	-	-	2	28
Tot	8	8	7	5		28

Numéro	Covariant	$(d_1, d_2, o)$	Numéro	Covariant	$(d_1, d_2, o)$
1	$\mathbf{v}_1$	(1, 0, 4)	15	$(\mathbf{v}_1, \mathbf{h}_8)_3$	(1, 2, 2)
2	$\mathbf{v}_2$	(0, 1, 4)	16	$(\mathbf{v}_2, \mathbf{h}_7)_3$	(2, 1, 2)
3	$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)_4$	(2, 0, 0)	17	$(\mathbf{v}_1, \mathbf{h}_8)_2$	(1, 2, 4)
4	$(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2)_4$	(0, 2, 0)	18	$(\mathbf{v}_2, \mathbf{h}_7)_2$	(2, 1, 4)
5	$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)_4$	(1, 1, 0)	19	$(\mathbf{v}_1, \mathbf{h}_7)_1$	(3, 0, 6)
6	$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)_3$	(1, 1, 2)	20	$(\mathbf{v}_2, \mathbf{h}_8)_1$	(0, 3, 6)
7	$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)_2$	(2, 0, 4)	21	$(\mathbf{v}_1, \mathbf{h}_8)_1$	(1, 2, 6)
8	$(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2)_2$	(0, 2, 4)	22	$(\mathbf{v}_2, \mathbf{h}_7)_1$	(2, 1, 6)
9	$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)_2$	(1, 1, 4)	23	$(\mathbf{h}_7, \mathbf{h}_8)_4$	(2, 2, 0)
10	$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)_1$	(1, 1, 6)	24	$(\mathbf{h}_7, \mathbf{h}_8)_3$	(2, 2, 2)
11	$(\mathbf{v}_1, \mathbf{h}_7)_4$	(3, 0, 0)	25	$(\mathbf{h}_{19}, \mathbf{v}_2)_4$	(3, 1, 2)
12	$(\mathbf{v}_2, \mathbf{h}_8)_4$	(0, 3, 0)	26	$(\mathbf{v}_1, \mathbf{h}_{20})_4$	(1, 3, 2)
13	$(\mathbf{v}_1, \mathbf{h}_8)_4$	(1, 2, 0)	27	$(\mathbf{v}_1^2, \mathbf{h}_{20})_6$	(2, 3, 2)
14	$(\mathbf{v}_2, \mathbf{h}_7)_4$	(2, 1, 0)	28	$(\mathbf{h}_{19}, \mathbf{v}_2^2)_6$	(3, 2, 2)

Table 7.4. – Famille génératrice minimale de  $\mathbf{Cov}(S_4 \oplus S_4)$

Numéro	Covariant	(d,o)	Numéro	Covariant	(d,o)	Numéro	Covariant	(d,o)
1	$\mathbf{f}$	(1, 8)	26	$(\mathbf{f}_{21}, \mathbf{f})_8$	(5, 4)	51	$(\mathbf{f}_{41}, \mathbf{f})_4$	(7, 6)
2	$(\mathbf{f}, \mathbf{f})_8$	(2, 0)	27	$(\mathbf{f}_{20}, \mathbf{f})_7$	(5, 4)	52	$(\mathbf{f}_7\mathbf{f}_{16}, \mathbf{f})_8$	(8, 0)
3	$(\mathbf{f}, \mathbf{f})_6$	(2, 4)	28	$(\mathbf{f}_{22}, \mathbf{f})_8$	(5, 6)	53	$(\mathbf{f}_{51}, \mathbf{f})_6$	(8, 2)
4	$(\mathbf{f}, \mathbf{f})_4$	(2, 8)	29	$(\mathbf{f}_{21}, \mathbf{f})_7$	(5, 6)	54	$(\mathbf{f}_{50}, \mathbf{f})_6$	(8, 2)
5	$(\mathbf{f}, \mathbf{f})_2$	(2, 12)	30	$(\mathbf{f}_{22}, \mathbf{f})_7$	(5, 8)	55	$(\mathbf{f}_{51}, \mathbf{f})_5$	(8, 4)
6	$(\mathbf{f}_4, \mathbf{f})_8$	(3, 0)	31	$(\mathbf{f}_{23}, \mathbf{f})_8$	(5, 10)	56	$(\mathbf{f}_{50}, \mathbf{f})_5$	(8, 4)
7	$(\mathbf{f}_5, \mathbf{f})_8$	(3, 4)	32	$(\mathbf{f}_{22}, \mathbf{f})_6$	(5, 10)	57	$(\mathbf{f}_{51}, \mathbf{f})_4$	(8, 6)
8	$(\mathbf{f}_5, \mathbf{f})_7$	(3, 6)	33	$(\mathbf{f}_{21}, \mathbf{f})_5$	(5, 10)	58	$(\mathbf{f}_{50}, \mathbf{f})_4$	(8, 6)
9	$(\mathbf{f}_5, \mathbf{f})_6$	(3, 8)	34	$(\mathbf{f}_{23}, \mathbf{f})_6$	(5, 14)	59	$(\mathbf{f}_{15}\mathbf{f}_{16}, \mathbf{f})_8$	(9, 0)
10	$(\mathbf{f}_5, \mathbf{f})_5$	(3, 10)	35	$(\mathbf{f}_3\mathbf{f}_7, \mathbf{f})_8$	(6, 0)	60	$(\mathbf{f}_{58}, \mathbf{f})_6$	(9, 2)
11	$(\mathbf{f}_5, \mathbf{f})_4$	(3, 12)	36	$(\mathbf{f}_{33}, \mathbf{f})_8$	(6, 2)	61	$(\mathbf{f}_{57}, \mathbf{f})_6$	(9, 2)
12	$(\mathbf{f}_5, \mathbf{f})_3$	(3, 14)	37	$(\mathbf{f}_{33}, \mathbf{f})_7$	(6, 4)	62	$(\mathbf{f}_{16}\mathbf{f}_{17}, \mathbf{f})_8$	(9, 2)
13	$(\mathbf{f}_5, \mathbf{f})_1$	(3, 18)	38	$(\mathbf{f}_{32}, \mathbf{f})_7$	(6, 4)	63	$(\mathbf{f}_{58}, \mathbf{f})_5$	(9, 4)
14	$(\mathbf{f}_9, \mathbf{f})_8$	(4, 0)	39	$(\mathbf{f}_{34}, \mathbf{f})_8$	(6, 6)	64	$(\mathbf{f}_{17}\mathbf{f}_{25}, \mathbf{f})_8$	(10, 0)
15	$(\mathbf{f}_{11}, \mathbf{f})_8$	(4, 4)	40	$(\mathbf{f}_{33}, \mathbf{f})_6$	(6, 6)	65	$(\mathbf{f}_{17}\mathbf{f}_{27}, \mathbf{f})_8$	(10, 2)
16	$(\mathbf{f}_{10}, \mathbf{f})_7$	(4, 4)	41	$(\mathbf{f}_{32}, \mathbf{f})_6$	(6, 6)	66	$(\mathbf{f}_{17}\mathbf{f}_{26}, \mathbf{f})_8$	(10, 2)
17	$(\mathbf{f}_{12}, \mathbf{f})_8$	(4, 6)	42	$(\mathbf{f}_{34}, \mathbf{f})_7$	(6, 8)	67	$(\mathbf{f}_{27}\mathbf{f}_{29}, \mathbf{f})_8$	(11, 2)
18	$(\mathbf{f}_{12}, \mathbf{f})_7$	(4, 8)	43	$(\mathbf{f}_{34}, \mathbf{f})_6$	(6, 10)	68	$(\mathbf{f}_{27}\mathbf{f}_{28}, \mathbf{f})_8$	(11, 2)
19	$(\mathbf{f}_{13}, \mathbf{f})_8$	(4, 10)	44	$(\mathbf{f}_7^2, \mathbf{f})_8$	(7, 0)	69	$(\mathbf{f}_{29}\mathbf{f}_{38}, \mathbf{f})_8$	(12, 2)
20	$(\mathbf{f}_{12}, \mathbf{f})_6$	(4, 10)	45	$(\mathbf{f}_{43}, \mathbf{f})_8$	(7, 2)			
21	$(\mathbf{f}_{13}, \mathbf{f})_7$	(4, 12)	46	$(\mathbf{f}_{42}, \mathbf{f})_7$	(7, 2)			
22	$(\mathbf{f}_{13}, \mathbf{f})_6$	(4, 14)	47	$(\mathbf{f}_{43}, \mathbf{f})_7$	(7, 4)			
23	$(\mathbf{f}_{13}, \mathbf{f})_4$	(4, 18)	48	$(\mathbf{f}_{42}, \mathbf{f})_6$	(7, 4)			
24	$(\mathbf{f}_3^2, \mathbf{f})_8$	(5, 0)	49	$(\mathbf{f}_{43}, \mathbf{f})_6$	(7, 6)			
25	$(\mathbf{f}_{20}, \mathbf{f})_8$	(5, 2)	50	$(\mathbf{f}_{42}, \mathbf{f})_5$	(7, 6)			

Table 7.5. – Famille génératrice minimale de  $\mathbf{Cov}(S_8)$

### Résolution du système diophantien

Pour appliquer l'algorithme de Gordan, nous devons résoudre un système diophantien associé aux ordres des covariants donnés par les tables 7.4 et 7.5.

Il s'agit donc du système diophantien à 81 inconnues

$$(S_e) : \begin{cases} 2x_{1,1} + \dots + 2x_{14,1} + 4x_{1,2} + \dots + 4x_{13,2} + 6x_{1,3} + \dots + 6x_{12,3} + 8x_{1,4} + \dots + 8x_{6,4} + \\ \quad 10x_{1,5} + \dots + 10x_{7,5} + 12x_{1,6} + \dots + 12x_{3,6} + 14x_{1,7} + \dots + 14x_{3,7} + 18x_{1,8} + 18x_{2,8} & = r \\ 2y_{1,1} + \dots + 2y_{8,1} + 4y_{1,2} + \dots + 4y_{7,2} + 6y_{1,3} + \dots + 6y_{5,3} & = r \end{cases}$$

Pour résoudre un tel système, on utilise un résultat de Clausen–Fortenbacher [CF90].

Le principe est de considérer dans un premier temps le système

$$(S') : \begin{cases} 2X_1 + 4X_2 + 6X_3 + 8X_4 + 10X_5 + 12X_6 + 14X_7 + 18X_8 & = r \\ 2Y_1 + 4Y_2 + 6Y_3 & = r \end{cases}$$

Les solutions minimales du système ( $S_e$ ) sont alors obtenues à partir des solutions minimales  $(a_1, a_2, \dots, a_8, b_1, b_2, b_3)$  du système ( $S'$ ) en résolvant

$$\begin{cases} x_{1,1} + \dots + x_{14,1} & = a_1 \\ \dots & \\ x_{1,8} + x_{2,8} & = a_8 \\ y_{1,1} + \dots + y_{8,1} & = b_1 \\ y_{1,2} + \dots + y_{7,2} & = b_2 \\ y_{1,3} + \dots + y_{5,3} & = b_3 \end{cases}$$

Le système ( $S'$ ) a finalement été résolu à l'aide du package Normaliz [BI10] de Macaulay 2 [GS]. Après déploiement, on obtient 695 754 solutions entières irréductibles pour le système ( $S_e$ ), correspondant à des invariants allant du degré 3 au degré 49.

### Premier processus de réduction

Il était bien sûr particulièrement délicat de minimaliser la famille initiale de 695 754 invariants associés aux solutions entières irréductibles initiales. Nous avons donc cherché à exploiter des *relations* sur les algèbres  $\mathbf{Cov}(S_8)$  et  $\mathbf{Cov}(S_4 \oplus S_4)$ . Pour le premier processus de réduction, nous avons des relations dans l'algèbre  $\mathbf{Cov}(S_8)$  permettant d'utiliser le théorème de réduction 6.3.14.

Pour obtenir ces relations, nous avons fixé un ordre sur la famille génératrice minimale de  $\mathbf{Cov}(S_8)$  (table 7.5), à savoir :

$$\begin{aligned} & \mathbf{h}_{69} > \mathbf{h}_{67} > \mathbf{h}_{68} > \mathbf{h}_{66} > \mathbf{h}_{65} > \mathbf{h}_{64} > \mathbf{h}_{63} > \mathbf{h}_{62} > \mathbf{h}_{61} > \mathbf{h}_{60} > \mathbf{h}_{59} > \mathbf{h}_{58} > \\ & \mathbf{h}_{57} > \mathbf{h}_{55} > \mathbf{h}_{56} > \mathbf{h}_{53} > \mathbf{h}_{54} > \mathbf{h}_{52} > \mathbf{h}_{49} > \mathbf{h}_{50} > \mathbf{h}_{51} > \mathbf{h}_{48} > \mathbf{h}_{47} > \mathbf{h}_{45} > \\ & \mathbf{h}_{46} > \mathbf{h}_{43} > \mathbf{h}_{42} > \mathbf{h}_{40} > \mathbf{h}_{41} > \mathbf{h}_{39} > \mathbf{h}_{37} > \mathbf{h}_{38} > \mathbf{h}_{36} > \mathbf{h}_{34} > \mathbf{h}_{32} > \mathbf{h}_{33} > \\ & \mathbf{h}_{31} > \mathbf{h}_{30} > \mathbf{h}_{28} > \mathbf{h}_{29} > \mathbf{h}_{27} > \mathbf{h}_{26} > \mathbf{h}_{25} > \mathbf{h}_{23} > \mathbf{h}_{22} > \mathbf{h}_{21} > \mathbf{h}_{19} > \mathbf{h}_{20} > \\ & \mathbf{h}_{18} > \mathbf{h}_{17} > \mathbf{h}_{15} > \mathbf{h}_{16} > \mathbf{h}_{13} > \mathbf{h}_{12} > \mathbf{h}_{11} > \mathbf{h}_{10} > \mathbf{h}_9 > \mathbf{h}_8 > \mathbf{h}_7 > \mathbf{h}_5 > \\ & \mathbf{h}_4 > \mathbf{h}_3 > \mathbf{h}_1 \end{aligned}$$

Une fois cet ordre fixé, un algorithme développé par Lercier [OL14] a permis d'établir l'existence de 1723 relations. Le principe de cet algorithme est le suivant :

1. On se donne un monôme du type  $\mathbf{h}_i^2$ ,  $\mathbf{h}_i \mathbf{h}_j$ , qui appartient à un certain espace homogène

$$\mathbf{Cov}_{d,k}(S_8);$$

2. On détermine tous les autres monômes de  $\mathbf{Cov}(S_8)$  qui appartiennent à ce même espace homogène  $\mathbf{Cov}_{d,k}(S_8)$  et qui ne contiennent que des facteurs plus légers ;

3. On vérifie s'il existe une relation linéaire entre le monôme de départ et ces autres monômes par un calcul de rang.

Néanmoins, ce processus de réduction n'a été appliqué que pour les 437 984 solutions entières irréductibles correspondants aux invariants allant du degré 22 au degré 49, ce qui réduit ce nombre à 250 251. Après ce premier processus de réduction, il reste ainsi

$$257\,770 + 250\,251 = 508\,021$$

solutions entières irréductibles.

### Deuxième processus de réduction

A ce stade, rappelons que chaque solution entière irréductible correspond à des invariants<sup>d</sup> définis par des transvectants du type

$$(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)_r$$

où  $\mathbf{M}_1$  (resp.  $\mathbf{M}_2$ ) est un monôme de l'algèbre  $\mathbf{Cov}(S_8)$  (resp.  $\mathbf{Cov}(S_4 \oplus S_4)$ ).

Notons ici  $\mathcal{I}_8 \subset \mathbf{Cov}(S_8)$  (resp.  $\mathcal{I}_{44} \subset \mathbf{Cov}(S_4 \oplus S_4)$ ) l'idéal engendré par les invariants de  $S_8$  (resp.  $S_4 \oplus S_4$ ).

**Lemme 7.3.1.** *Si  $\mathbf{M}_1 \in \mathcal{I}_8$  ou  $\mathbf{M}_2 \in \mathcal{I}_{44}$ , alors*

$$(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)_r$$

*est réductible.*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que, pour tout invariant  $I$  de  $S_8$  (par exemple), on a

$$(I\mathbf{M}'_1, \mathbf{M}_2)_r = I(\mathbf{M}'_1, \mathbf{M}_2)_r$$

□

Ensuite :

**Lemme 7.3.2.** *Etant donné un monôme  $\mathbf{M}_2$  qui se décompose en  $\mathbf{M}_2 = \mathbf{m}_{11} + \mathbf{m}_{12}$ , si*

$$(\mathbf{M}_1, \mathbf{m}_{11})_r \text{ et } (\mathbf{M}_1, \mathbf{m}_{12})_r$$

*correspondent à des solutions entières réductibles, alors le transvectant*

$$(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)_r$$

*est réductible modulo des transvectants d'index  $r'$  strictement plus petits que  $r$ .*

Pour appliquer ce lemme, on se donne un monôme  $\mathbf{M}_1$  (resp.  $\mathbf{M}_2$ ) appartenant à un certain espace homogène de degré/ordre  $(d, k)$ , puis on le décompose en somme de monômes  $\mathbf{m}_i$  appartenant au même espace homogène. On teste alors pour chaque monôme

---

d. Dans l'algorithme général, on a ici des covariants. Nous nous sommes limités dans ce cas aux solutions entières qui correspondent à des invariants.

$\mathbf{m}_i$  si la solution entière associée au transvectant

$$(\mathbf{M}_1, \mathbf{m}_i)_r$$

est réductible ou non.

Au final, nous avons pu établir :

- 179 relations pour lesquels le monôme de  $\mathbf{Cov}(S_4 \oplus S_4)$  est dans l'idéal engendré par les invariants ;
- 98 relations permettant d'utiliser le lemme 7.3.2.

*Exemple 7.3.3.* Nous considérons les solutions entières correspondants au degré 26. Il reste à ce degré 20 392 solutions entières. A l'aide des relations faisant intervenir l'idéal des invariants, il ne reste plus que 1822 solutions à étudier, correspondants aux index 24, 30 et 36. Parmi les transvectants associés, on a par exemple le transvectant

$$(\mathbf{f}_{18}\mathbf{f}_{12}\mathbf{f}_{22}, \mathbf{h}_{10}^3\mathbf{h}_{19}^3)_{36}.$$

Par un calcul direct effectué sous Macaulay 2, on vérifie que

$$12\mathbf{h}_{19}^2 + 6\mathbf{h}_7^3 + 2\mathbf{h}_{11}\mathbf{h}_1^3 - 3\mathbf{h}_3\mathbf{h}_1^2\mathbf{h}_7 = 0.$$

On est donc amené à étudier les transvectants

$$(\mathbf{f}_{18}\mathbf{f}_{12}\mathbf{f}_{22}, \mathbf{h}_{10}^3\mathbf{h}_{19}\mathbf{h}_7)_{36}, \quad (\mathbf{f}_{18}\mathbf{f}_{12}\mathbf{f}_{22}, \mathbf{h}_{10}^3\mathbf{h}_{19}\mathbf{h}_{11}\mathbf{h}_1^3)_{36}, \quad (\mathbf{f}_{18}\mathbf{f}_{12}\mathbf{f}_{22}, \mathbf{h}_{10}^3\mathbf{h}_{19}\mathbf{h}_3\mathbf{h}_1^2\mathbf{h}_7)_{36}$$

où  $\mathbf{h}_{11}$  et  $\mathbf{h}_3$  sont des invariants. Or, on remarque directement que

$$(\mathbf{f}_{18}\mathbf{f}_{12}\mathbf{f}_{22}, \mathbf{h}_{10}^3\mathbf{h}_{19}\mathbf{h}_7)_{36}$$

contient un terme réductible. On peut donc exprimer ce transvectant à l'aide de ce terme réductible et des invariants de même degré mais correspondants à des transvectants d'index  $r' < 36$ . On fait alors de même pour les deux autres index.

En conséquence de toutes ces relations, il ne reste plus de solutions à étudier pour les invariants allant du degré 22 au degré 49.

### Troisième processus de réduction

A ce stade, il reste donc à étudier les 257 770 solutions entières correspondant aux invariants allant du degré 3 au degré 21. La stratégie est très proche de celle adoptée au cours du deuxième processus de réduction. Mais cette fois ci, nous avons établi

- 4085 relations pour lesquels le monôme de  $\mathbf{Cov}(S_8)$  est dans l'idéal  $\mathcal{I}_8 \subset \mathbf{Cov}(S_8)$  engendré par les invariants ;
- 964 relations permettant d'utiliser le lemme 7.3.2.

Bien sûr, pour les degrés 3 à 21, il reste toujours des solutions entières irréductibles. Pour finir de minimaliser la famille d'invariants qui correspond à l'ensemble de ces solutions entières obtenues après réduction, on utilise la série de Hilbert multigradée de l'espace  $S_8 \oplus S_4 \oplus S_4$ , calculée à l'aide d'un package Maple développé par Bedratyuk [Bed11b].

En notant  $d_1$  le degré d'un invariant en  $S_8$ ,  $d_2$  le degré en le premier  $S_4$  et  $d_3$  le degré en l'autre  $S_4$ , on a ainsi

$$\mathbf{Inv}(S_8 \oplus S_4 \oplus S_4) = \bigoplus_{d_1, d_2, d_3 \geq 0} \mathbf{Inv}_{d_1, d_2, d_3}(V_e)$$

Détaillons par exemple ce troisième processus de réduction pour le degré 12. Il reste à ce stade 740 solutions entières, correspondants à des invariants multigradués donnés par la table 7.6.

$d_1, d_2, d_3$	Dimension	$d_1, d_2, d_3$	Dimension	$d_1, d_2, d_3$	Dimension
4, 4, 4	1004	3, 9, 0	44	8, 4, 0	176
6, 3, 3	1003	5, 7, 0	126	6, 5, 1	494
8, 2, 2	544	5, 6, 1	414	6, 4, 2	871
10, 1, 1	135	4, 6, 2	611	7, 4, 1	488
4, 8, 0	91	4, 5, 3	872	9, 3, 0	131
3, 4, 5	695	4, 7, 1	290	10, 2, 0	95
3, 8, 1	157	5, 5, 2	788	7, 2, 3	747
3, 7, 2	350	5, 3, 4	1046	8, 3, 1	404
3, 6, 3	558	7, 5, 0	176	9, 1, 2	271

Table 7.6. – Espaces homogènes restants au degré 12

Nous avons donc vérifié les dimensions des espaces homogènes engendrés par les invariants précédemment obtenus (du degré 3 au degré 11), pour comparer ce résultat aux dimensions de la table 7.6. En cas d'inégalité, on complète alors par des invariants issus des solutions entières. Notons qu'à ce degré, aucun nouvel invariant ne doit être ajouté à la famille génératrice.

#### Famille génératrice minimale de $\mathbf{Inv}(S_8 \oplus S_4 \oplus S_4 \oplus S_0 \oplus S_0)$

A l'aide de scripts écrits en Macaulay 2 [GS], on a

**Théorème 7.3.4.** *L'algèbre des invariants  $\mathbf{Inv}(S_8 \oplus S_4 \oplus S_4 \oplus S_0 \oplus S_0)$  est engendré par une famille génératrice minimale de 299 invariants résumés dans la table 7.7.*



degré	$\mathbf{Inv}(S_8)$	$\mathbf{Inv}(S_4)$	$\mathbf{Inv}(S_0)$	$\mathbf{Inv}_j(S_4 \oplus S_4)$	$\mathbf{Inv}_j(S_8 \oplus S_4)$	$\mathbf{Inv}_j(S_8 \oplus S_4 \oplus S_4)$
1	—	—	1	—	—	—
2	1	1	—	1	—	—
3	1	1	—	2	2	1
4	1	—	—	1	4	6
5	1	—	—	—	7	18
6	1	—	—	—	10	36
7	1	—	—	—	11	53
8	1	—	—	—	10	45
9	1	—	—	—	5	10
10	1	—	—	—	2	2
11	—	—	—	—	2	3
<i>Tot</i>	9	2	1	4	53	174

Table 7.7. – Famille génératrice minimale de  $\mathbf{Inv}(S_8 \oplus S_4 \oplus S_4 \oplus S_0 \oplus S_0)$

Nous donnons ensuite les invariants joints de  $S_8 \oplus S_4$ . On note pour cela  $\mathbf{v} \in S_4$  puis

$$\mathbf{k}_{2,4} := (\mathbf{v}, \mathbf{v})_2, \quad \mathbf{k}_{3,6} := (\mathbf{v}, \mathbf{k}_{2,4})_1$$

53 invariants joints de $\mathbf{Inv}_j(S_8 \oplus S_4)$ .	
Degré 3	$(\mathbf{f}_3, \mathbf{v})_4 \quad (\mathbf{f}_1, \mathbf{v}^2)_8$
Degré 4	$(\mathbf{f}_1, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_8 \quad (\mathbf{f}_4, \mathbf{v}^2)_8 \quad (\mathbf{f}_3, \mathbf{k}_{2,4})_4 \quad (\mathbf{f}_7, \mathbf{v})_4$
Degré 5	$(\mathbf{f}_1, \mathbf{k}_{2,4}^2)_8 \quad (\mathbf{f}_4, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_8 \quad (\mathbf{f}_5, \mathbf{v}^3)_{12} \quad (\mathbf{f}_7, \mathbf{k}_{2,4})_4$ $(\mathbf{f}_9, \mathbf{v}^2)_8 \quad (\mathbf{f}_{15}, \mathbf{v})_4 \quad (\mathbf{f}_{16}, \mathbf{v})_4$
Degré 6	$(\mathbf{f}_4, \mathbf{k}_{2,4}^2)_8 \quad (\mathbf{f}_5, \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{k}_{2,4})_{12} \quad (\mathbf{f}_{11}, \mathbf{v}^3)_{12} \quad (\mathbf{f}_9, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_8$ $(\mathbf{f}_8, \mathbf{k}_{3,6})_6 \quad (\mathbf{f}_{15}, \mathbf{k}_{2,4})_4 \quad (\mathbf{f}_{18}, \mathbf{v}^2)_8 \quad (\mathbf{f}_{16}, \mathbf{k}_{2,4})_4$ $(\mathbf{f}_{26}, \mathbf{v})_4 \quad (\mathbf{f}_{27}, \mathbf{v})_4$
Degré 7	$(\mathbf{f}_5, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4}^2)_{12} \quad (\mathbf{f}_{10}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{3,6})_{10} \quad (\mathbf{f}_{11}, \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{k}_{2,4})_{12} \quad (\mathbf{f}_{18}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_8$ $(\mathbf{f}_{17}, \mathbf{k}_{3,6})_6 \quad (\mathbf{f}_{21}, \mathbf{v}^3)_{12} \quad (\mathbf{f}_{30}, \mathbf{v}^2)_8 \quad (\mathbf{f}_{27}, \mathbf{k}_{2,4})_4$ $(\mathbf{f}_{26}, \mathbf{k}_{2,4})_4 \quad (\mathbf{f}_{37}, \mathbf{v})_4 \quad (\mathbf{f}_{38}, \mathbf{v})_4$
Degré 8	$(\mathbf{f}_{47}, \mathbf{v})_4 \quad (\mathbf{f}_{48}, \mathbf{v})_4 \quad (\mathbf{f}_{37}, \mathbf{k}_{2,4})_4 \quad (\mathbf{f}_{38}, \mathbf{k}_{2,4})_4$ $(\mathbf{f}_{42}, \mathbf{v}^2)_8 \quad (\mathbf{f}_{29}, \mathbf{k}_{3,6})_6 \quad (\mathbf{f}_{30}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4})_8 \quad (\mathbf{f}_{20}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{3,6})_{10}$ $(\mathbf{f}_{21}, \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{k}_{2,4})_{12} \quad (\mathbf{f}_{11}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{2,4}^2)_{12}$
Degré 9	$(\mathbf{f}_8^2, \mathbf{v}^3)_{12} \quad (\mathbf{f}_{48}, \mathbf{k}_{2,4})_4 \quad (\mathbf{f}_{47}, \mathbf{k}_{2,4})_4 \quad (\mathbf{f}_{55}, \mathbf{v})_4 \quad (\mathbf{f}_{56}, \mathbf{v})_4$

*suite à la prochaine page*

suite de la page précédente

Degré 10	$(\mathbf{f}_{56}, \mathbf{k}_{2,4})_4$	$(\mathbf{f}_{63}, \mathbf{v})_4$
Degré 11	$(\mathbf{f}_{63}, \mathbf{k}_{2,4})_4$	$(\mathbf{f}_{25}^2, \mathbf{v})_4$

Ensuite, nous donnons les invariants joints de  $S_8 \oplus S_4 \oplus S_4$ . On note  $\mathbf{h}_i$  le covariant numéro  $i$  de la base de  $\text{Cov}(S_4 \oplus S_4)$ , donné par la table 7.4.

174 invariants joints de $\text{Inv}_j(S_8 \oplus S_4 \oplus S_4)$ .	
Degré 3	$(\mathbf{f}_1, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2)_8$
Degré 4	$(\mathbf{f}_1, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_8)_8$ $(\mathbf{f}_1, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_9)_8$ $(\mathbf{f}_1, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_7)_8$ $(\mathbf{f}_1, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_9)_8$ $(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_9)_4$ $(\mathbf{f}_4, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2)_8$
Degré 5	$(\mathbf{f}_1, \mathbf{h}_8 \cdot \mathbf{h}_9)_8$ $(\mathbf{f}_1, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{17})_8$ $(\mathbf{f}_1, \mathbf{h}_7 \cdot \mathbf{h}_8)_8$ $(\mathbf{f}_1, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{18})_8$ $(\mathbf{f}_1, \mathbf{h}_9^2)_8$ $(\mathbf{f}_1, \mathbf{h}_7 \cdot \mathbf{h}_9)_8$ $(\mathbf{f}_1, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_{18})_8$ $(\mathbf{f}_4, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_8)_8$ $(\mathbf{f}_4, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_9)_8$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2^2)_{12}$ $(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_{17})_4$ $(\mathbf{f}_4, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_7)_8$ $(\mathbf{f}_3, \mathbf{h}_{18})_4$ $(\mathbf{f}_4, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_9)_8$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_1^2 \cdot \mathbf{h}_2)_{12}$ $(\mathbf{f}_9, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2)_8$ $(\mathbf{f}_7, \mathbf{h}_9)_4$ $(\mathbf{f}_8, \mathbf{h}_{10})_6$
Degré 6	$(\mathbf{f}_1, \mathbf{h}_8 \cdot \mathbf{h}_{17})_8$ $(\mathbf{f}_1, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_6^2)_8$ $(\mathbf{f}_1, \mathbf{h}_9 \cdot \mathbf{h}_{17})_8$ $(\mathbf{f}_1, \mathbf{h}_9 \cdot \mathbf{h}_{18})_8$ $(\mathbf{f}_1, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_6^2)_8$ $(\mathbf{f}_1, \mathbf{h}_7 \cdot \mathbf{h}_{18})_8$ $(\mathbf{f}_4, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{17})_8$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_8)_{12}$ $(\mathbf{f}_4, \mathbf{h}_8 \cdot \mathbf{h}_9)_8$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_2^2 \cdot \mathbf{h}_9)_{12}$ $(\mathbf{f}_4, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{18})_8$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_9)_{12}$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_1^2 \cdot \mathbf{h}_8)_{12}$ $(\mathbf{f}_4, \mathbf{h}_9^2)_8$ $(\mathbf{f}_4, \mathbf{h}_7 \cdot \mathbf{h}_8)_8$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_2^2 \cdot \mathbf{h}_7)_{12}$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_1^2 \cdot \mathbf{h}_9)_{12}$ $(\mathbf{f}_4, \mathbf{h}_7 \cdot \mathbf{h}_9)_8$ $(\mathbf{f}_4, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_{18})_8$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_7)_{12}$ $(\mathbf{f}_9, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_8)_8$ $(\mathbf{f}_8, \mathbf{h}_{21})_6$ $(\mathbf{f}_{10}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{10})_{10}$ $(\mathbf{f}_8, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_6)_6$ $(\mathbf{f}_9, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_9)_8$ $(\mathbf{f}_{11}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2^2)_{12}$ $(\mathbf{f}_{11}, \mathbf{h}_1^2 \cdot \mathbf{h}_2)_{12}$ $(\mathbf{f}_{10}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_{10})_{10}$ $(\mathbf{f}_9, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_7)_8$ $(\mathbf{f}_9, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_9)_8$ $(\mathbf{f}_8, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_6)_6$ $(\mathbf{f}_8, \mathbf{h}_{22})_6$ $(\mathbf{f}_{16}, \mathbf{h}_9)_4$ $(\mathbf{f}_{17}, \mathbf{h}_{10})_6$ $(\mathbf{f}_{18}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2)_8$ $(\mathbf{f}_{15}, \mathbf{h}_9)_4$
Degré 7	$(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_2^2 \cdot \mathbf{h}_{17})_{12}$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_8^2)_{12}$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_8 \cdot \mathbf{h}_9)_{12}$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_2^2 \cdot \mathbf{h}_{18})_{12}$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_8 \cdot \mathbf{h}_9)_{12}$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_7 \cdot \mathbf{h}_8)_{12}$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_9^2)_{12}$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_9^2)_{12}$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_7 \cdot \mathbf{h}_9)_{12}$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{18})_{12}$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_7 \cdot \mathbf{h}_8)_{12}$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_7 \cdot \mathbf{h}_9)_{12}$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_1^2 \cdot \mathbf{h}_{18})_{12}$ $(\mathbf{f}_5, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_7^2)_{12}$ $(\mathbf{f}_{10}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{21})_{10}$ $(\mathbf{f}_{10}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_{20})_{10}$ $(\mathbf{f}_{11}, \mathbf{h}_2^2 \cdot \mathbf{h}_9)_{12}$ $(\mathbf{f}_{11}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_8)_{12}$ $(\mathbf{f}_{10}, \mathbf{h}_2^2 \cdot \mathbf{h}_6)_{10}$ $(\mathbf{f}_{12}, \mathbf{h}_2^2 \cdot \mathbf{h}_{10})_{14}$ $(\mathbf{f}_{10}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_6)_{10}$ $(\mathbf{f}_{11}, \mathbf{h}_1^2 \cdot \mathbf{h}_8)_{12}$ $(\mathbf{f}_{10}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_{21})_{10}$ $(\mathbf{f}_{10}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{22})_{10}$ $(\mathbf{f}_{12}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{10})_{14}$ $(\mathbf{f}_{11}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_9)_{12}$ $(\mathbf{f}_{11}, \mathbf{h}_2^2 \cdot \mathbf{h}_7)_{12}$ $(\mathbf{f}_9, \mathbf{h}_9^2)_8$

suite à la prochaine page

suite de la page précédente

	$(\mathbf{f}_{10}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_{22})_{10}$ $(\mathbf{f}_{11}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_7)_{12}$ $(\mathbf{f}_{11}, \mathbf{h}_1^2 \cdot \mathbf{h}_9)_{12}$ $(\mathbf{f}_{10}, \mathbf{h}_1^2 \cdot \mathbf{h}_6)_{10}$ $(\mathbf{f}_{10}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{19})_{10}$ $(\mathbf{f}_{12}, \mathbf{h}_1^2 \cdot \mathbf{h}_{10})_{14}$ $(\mathbf{f}_{21}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2^2)_{12}$ $(\mathbf{f}_{18}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_9)_{8}$ $(\mathbf{f}_{17}, \mathbf{h}_{21})_6$ $(\mathbf{f}_{17}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_6)_6$ $(\mathbf{f}_{20}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{10})_{10}$ $(\mathbf{f}_{19}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{10})_{10}$ $(\mathbf{f}_{18}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_8)_8$ $(\mathbf{f}_{17}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_6)_6$ $(\mathbf{f}_{18}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_9)_8$ $(\mathbf{f}_{17}, \mathbf{h}_{22})_6$ $(\mathbf{f}_{20}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_{10})_{10}$ $(\mathbf{f}_{21}, \mathbf{h}_1^2 \cdot \mathbf{h}_2)_{12}$ $(\mathbf{f}_{19}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_{10})_{10}$ $(\mathbf{f}_{18}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_7)_8$ $(\mathbf{f}_{29}, \mathbf{h}_{10})_6$ $(\mathbf{f}_{30}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2)_8$ $(\mathbf{f}_{26}, \mathbf{h}_9)_4$ $(\mathbf{f}_{27}, \mathbf{h}_9)_4$ $(\mathbf{f}_{28}, \mathbf{h}_{10})_6$
Degré 8	$(\mathbf{f}_{37}, \mathbf{h}_9)_4$ $(\mathbf{f}_{38}, \mathbf{h}_9)_4$ $(\mathbf{f}_{40}, \mathbf{h}_{10})_6$ $(\mathbf{f}_{41}, \mathbf{h}_{10})_6$ $(\mathbf{f}_{42}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2)_8$ $(\mathbf{f}_{29}, \mathbf{h}_{21})_6$ $(\mathbf{f}_{30}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_8)_8$ $(\mathbf{f}_{30}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_9)_8$ $(\mathbf{f}_{31}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{10})_{10}$ $(\mathbf{f}_{32}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{10})_{10}$ $(\mathbf{f}_{33}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{10})_{10}$ $(\mathbf{f}_{29}, \mathbf{h}_{22})_6$ $(\mathbf{f}_{30}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_9)_8$ $(\mathbf{f}_{30}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_7)_8$ $(\mathbf{f}_{31}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_{10})_{10}$ $(\mathbf{f}_{32}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_{10})_{10}$ $(\mathbf{f}_{33}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_{10})_{10}$ $(\mathbf{f}_{20}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{22})_{10}$ $(\mathbf{f}_{20}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_6)_{10}$ $(\mathbf{f}_{21}, \mathbf{h}_1^2 \cdot \mathbf{h}_8)_{12}$ $(\mathbf{f}_{21}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_9)_{12}$ $(\mathbf{f}_{21}, \mathbf{h}_2^2 \cdot \mathbf{h}_7)_{12}$ $(\mathbf{f}_{22}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{10})_{14}$ $(\mathbf{f}_{20}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_{22})_{10}$ $(\mathbf{f}_{20}, \mathbf{h}_1^2 \cdot \mathbf{h}_6)_{10}$ $(\mathbf{f}_{21}, \mathbf{h}_1^2 \cdot \mathbf{h}_9)_{12}$ $(\mathbf{f}_{21}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_7)_{12}$ $(\mathbf{f}_{22}, \mathbf{h}_1^2 \cdot \mathbf{h}_{10})_{14}$ $(\mathbf{f}_{11}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_7 \cdot \mathbf{h}_9)_{12}$ $(\mathbf{f}_{12}, \mathbf{h}_1^2 \cdot \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_6)_{14}$ $(\mathbf{f}_{13}, \mathbf{h}_1^2 \cdot \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{10})_{18}$ $(\mathbf{f}_{11}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_7^2)_{12}$ $(\mathbf{f}_{12}, \mathbf{h}_{13} \cdot \mathbf{h}_6)_{14}$ $(\mathbf{f}_{13}, \mathbf{h}_{13} \cdot \mathbf{h}_{10})_{18}$ $(\mathbf{f}_{11}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_9^2)_{12}$ $(\mathbf{f}_{12}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2^2 \cdot \mathbf{h}_6)_{14}$ $(\mathbf{f}_{13}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2^2 \cdot \mathbf{h}_{10})_{18}$ $(\mathbf{f}_{20}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{21})_{10}$ $(\mathbf{f}_{20}, \mathbf{h}_2^2 \cdot \mathbf{h}_6)_{10}$ $(\mathbf{f}_{21}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_8)_{12}$ $(\mathbf{f}_{21}, \mathbf{h}_2^2 \cdot \mathbf{h}_9)_{12}$ $(\mathbf{f}_{22}, \mathbf{h}_2^2 \cdot \mathbf{h}_{10})_{14}$ $(\mathbf{f}_{11}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_8 \cdot \mathbf{h}_9)_{12}$ $(\mathbf{f}_{12}, \mathbf{h}_2^3 \cdot \mathbf{h}_6)_{14}$ $(\mathbf{f}_{13}, \mathbf{h}_{23} \cdot \mathbf{h}_{10})_{18}$
Degré 9	$(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_{25}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{10})_{10}$ $(\mathbf{f}_{43}, \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{10})_{10}$ $(\mathbf{f}_8^2, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2^2)_{12}$ $(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_{25}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_{10})_{10}$ $(\mathbf{f}_8^2, \mathbf{h}_1^2 \cdot \mathbf{h}_2)_{12}$ $(\mathbf{f}_{43}, \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_{10})_{10}$ $(\mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{f}_{25}, \mathbf{h}_{10})_6$ $(\mathbf{f}_{51}, \mathbf{h}_{10})_6$ $(\mathbf{f}_{48}, \mathbf{h}_9)_4$ $(\mathbf{f}_{47}, \mathbf{h}_9)_4$
Degré 10	$(\mathbf{f}_{54}, \mathbf{h}_6)_2$ $(\mathbf{f}_{56}, \mathbf{h}_9)_4$
Degré 11	$(\mathbf{f}_{61}, \mathbf{h}_6)_2$ $(\mathbf{f}_{62}, \mathbf{h}_6)_2$ $(\mathbf{f}_{63}, \mathbf{h}_9)_4$

### Invariants du tenseur d'élasticité

Nous procédons ici de la même manière que dans le cas des polynômes  $SO(3)$  invariants du tenseur piézoélectrique :

1. il existe un isomorphisme (corollaire 3.3.4) entre les algèbres  $\text{Inv}(S_8 \oplus S_4 \oplus S_4 \oplus S_0 \oplus S_0)$  et

$$\mathbb{C}[\text{Ela}]^{SO(3)}$$

2. par le théorème 7.3.4 on sait donc qu'il existe une famille génératrice minimale de 299 invariants de  $\mathbb{C}[\text{Ela}]^{SO(3)}$  dont les degrés sont donnés par la table 7.7.
3. on note  $\mathbf{D} \in H_4(\mathbb{R}^3)$ ,  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  dans  $H_2(\mathbb{R}^3)$ , puis on construit les covariants de type  $S^k(\mathbb{R}^3)$  de ces tenseurs à l'aide des tables 7.4 et 7.5, utilisant pour cela l'opérateur donné par la définition 7.1.2. On a par exemple

$$\mathbf{D}_4 := \{\mathbf{D}, \mathbf{D}\}_4 \in S^4(\mathbb{R}^3), \quad \mathbf{D}_7 := \{\mathbf{D}_5, \mathbf{D}\}_8 \in S^2(\mathbb{R}^3)$$

On traduit ensuite tous les invariants de la famille génératrice minimale de  $\mathbf{Inv}(S_8 \oplus S_4 \oplus S_4 \oplus S_0 \oplus S_0)$  en termes de tenseurs à l'aide de cet opérateur et on obtient ainsi une famille  $\mathcal{F}_e$  d'invariants à coefficients réels dont les degrés correspondent à ceux donnés par la table 7.7.

Par des scripts écrits en Macaulay 2 [GS], on a finalement pu vérifier le théorème :

**Théorème 7.3.5.** *La famille  $\mathcal{F}_e$ , composée de 299 invariants, est une famille génératrice minimale de l'algèbre  $\mathbb{R}[\mathbb{E}a]^{SO(3)}$ .*

Un tel résultat nécessite bien sûr d'être détaillé pour que les résultats soient exploitables. En effet, les calculs s'effectuent sur des polynômes harmoniques, à l'aide d'opérations de *transvectants*. La traduction de ces résultats en termes d'opérations de *traces* sur des tenseurs harmoniques se fera dans un travail ultérieur.

# Conclusion et perspectives de recherche

Ce travail de thèse a initialement été motivé par des questions issues de la formulation tensorielle des *lois de comportement* en mécanique des milieux continus. Mathématiquement, il nous a fallu comprendre et développer des méthodes *effectives* pour

1. calculer des *classes d'isotropies* ;
2. calculer des *familles génératrices finies d'algèbres d'invariants*.

Par les *opérations de Clips*, nous avons pu développer un algorithme général pour répondre à la première question dans le cas des espaces de tenseurs. C'est ensuite par une reformulation de l'*algorithme de Gordan* que nous avons pu obtenir de nouveaux résultats sur les algèbres d'invariants et de covariants de formes binaires, ce qui se traduit ensuite directement en termes d'invariants d'espaces de tenseurs.

Mais les résultats montrent que le travail initié dans cette thèse ne peut s'arrêter en l'état. Dans le cas de l'élasticité, en effet, nous avons pu déterminer une famille génératrice minimale de 299 invariants. A partir d'une telle famille, on pourrait tenter d'en extraire une famille de *séparants* plus petite, si elle existe. Une autre piste consiste à rechercher un système générateur du corps des invariants rationnels, en cherchant par exemple des invariants *rationnels*. L'une des applications possible de ces recherches est de finir le travail initié par Aufray et al. [AKP14] sur la stratification de l'espace  $(\mathbb{E}1a, \text{SO}(3))$ .

Indépendamment de ces résultats obtenus sur les tenseurs piézoélectriques et élastiques, la reformulation de l'algorithme de Gordan ouvre aussi des pistes sur les algèbres de covariants de formes binaires de degré plus grand que 8. Par un travail commun avec Lercier, nous avons déjà pu obtenir des bases de covariants de formes binaires de degré 9 et 10, démontrant ainsi les conjectures sur ces degrés. Les covariants de formes binaires de degré 12 semblent eux aussi accessibles, ce qui permettrait notamment d'étudier une conjecture de Dixmier sur les *systèmes de paramètres* des invariants de formes binaires :

**Conjecture 7.3.6.** *Pour tout entier  $n \geq 1$ , l'algèbre  $\mathbb{C}[S_{4n}]^{\text{SL}(2, \mathbb{C})}$  possède un système de paramètres de degré  $2, 3, \dots, 4n - 1$ .*

Un telle conjecture n'a été montrée que pour  $n = 1$  et  $n = 2$ . Un nouveau résultat sur  $S_{12}$  permettrait ainsi de progresser sur ce point.

Enfin, précisons que les questions d'effectivité interviennent aussi en *informatique quantique*, ce qui fait intervenir des *formes ternaires* [Luq07]. Dans ce cadre, certains travaux avaient tenté, par les anciens, pour adapter l'algorithme de Gordan mais le sujet demeure globalement encore assez vierge.

# Bibliographie

- [AC07] A. ABDESSELAM et J. CHIPALKATTI. « Brill-Gordan loci, transvectants and an analogue of the Foulkes conjecture ». In : *Adv. Math.* 208.2 (2007), p. 491–520. ISSN : 0001-8708. DOI : [10.1016/j.aim.2006.03.003](https://doi.org/10.1016/j.aim.2006.03.003). URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2006.03.003> (cf. p. 143).
- [Abd12] A. ABDESSELAM. « On the volume conjecture for classical spin networks ». In : *J. Knot Theory Ramifications* 21.3 (2012), p. 1250022, 62. ISSN : 0218-2165. DOI : [10.1142/S0218216511009522](https://doi.org/10.1142/S0218216511009522). URL : <http://dx.doi.org/10.1142/S0218216511009522> (cf. p. 121).
- [AC09] A. ABDESSELAM et J. CHIPALKATTI. « The higher transvectants are redundant ». In : *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 59.5 (2009), p. 1671–1713. ISSN : 0373-0956. URL : [http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2009\\_\\_59\\_5\\_1671\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2009__59_5_1671_0) (cf. p. 15, 121, 134, 138, 139, 143).
- [AC12] A. ABDESSELAM et J. CHIPALKATTI. « Quadratic involutions on binary forms ». In : *Michigan Math. J.* 61.2 (2012), p. 279–296. ISSN : 0026-2285. DOI : [10.1307/mmj/1339011528](https://doi.org/10.1307/mmj/1339011528). URL : <http://dx.doi.org/10.1307/mmj/1339011528> (cf. p. 143).
- [AS83] M. ABUD et G. SARTORI. « The geometry of spontaneous symmetry breaking ». In : *Ann. Physics* 150.2 (1983), p. 307–372. ISSN : 0003-4916 (cf. p. 13, 36, 43, 50–52).
- [AM69] M. F. ATIYAH et I. G. MACDONALD. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969, p. ix+128 (cf. p. 48).
- [Auf08a] N. AUFFRAY. « Démonstration du théorème d’Hermann à partir de la méthode Forte-Vianello ». In : *Comptes Rendus Mécanique* (2008) (cf. p. 38).
- [Auf13] N. AUFFRAY. « Geometrical Picture of Third-Order Tensors ». In : *Generalized Continua as Models for Materials* (2013), p. 17–40 (cf. p. 69).
- [Auf+13] N. AUFFRAY, F. DELL’ISOLA, V. A. EREMEYEV et al. « Analytical continuum mechanics à la Hamilton–Piola least action principle for second gradient continua and capillary fluids ». In : *Math. & Mech. of Solids* (2013) (cf. p. 26).
- [Auf08b] N. AUFFRAY. « Comportement des matériaux cellulaires : élaboration, caractérisation et modélisation prédictive des propriétés ». Thèse de doct. Grenoble : Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2008 (cf. p. 85).

- [AKP14] N. AUFRAY, B. KOLEV et M. PETITOT. « On Anisotropic Polynomial Relations for the Elasticity Tensor ». English. In : *Journal of Elasticity* 115.1 (juin 2014). Online first, p. 77–103. ISSN : 0374-3535. DOI : [10.1007/s10659-013-9448-z](https://doi.org/10.1007/s10659-013-9448-z). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s10659-013-9448-z> (cf. p. 13, 32, 33, 50, 52–54, 100, 110, 111, 196).
- [Bac70] G. BACKUS. « A geometrical picture of anisotropic elastic tensors ». In : *Rev. Geophys.* 8.3 (1970), p. 633–671. DOI : [110.1029/RG008i003p00633](https://doi.org/10.1029/RG008i003p00633). (cf. p. 70).
- [Bed08] L. BEDRATYUK. « On complete system of covariants for the binary form of degree 8 ». In : *Mat. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka* 5 (2008), p. 11–22 (cf. p. 142).
- [Bed11a] L. BEDRATYUK. « The MAPLE package for SL<sub>2</sub>-invariants and kernel of Weitzenböck derivations ». In : *arXiv :1101.0622* (2011) (cf. p. 142).
- [Bed09] L. BEDRATYUK. « A complete minimal system of covariants for the binary form of degree 7 ». In : *J. Symbolic Comput.* 44.2 (2009), p. 211–220. ISSN : 0747-7171. DOI : [10.1016/j.jsc.2008.10.001](https://doi.org/10.1016/j.jsc.2008.10.001). URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsc.2008.10.001> (cf. p. 142).
- [Bed11b] L. BEDRATYUK. « The MAPLE package for calculating Poincaré series ». In : 2 (2011). ISSN : 0747-7171. DOI : [10.1016/j.jsc.2008.10.001](https://doi.org/10.1016/j.jsc.2008.10.001). URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsc.2008.10.001> (cf. p. 49, 161, 165, 190).
- [Bet87] J. BETTEN. « Irreducible invariants of fourth-order tensors ». In : *Math. Modelling* 8 (1987). Mathematical modelling in science and technology (Berkeley, Calif., 1985), p. 29–33. ISSN : 0270-0255. DOI : [10.1016/0270-0255\(87\)90535-5](https://doi.org/10.1016/0270-0255(87)90535-5). URL : [http://dx.doi.org/10.1016/0270-0255\(87\)90535-5](http://dx.doi.org/10.1016/0270-0255(87)90535-5) (cf. p. 14).
- [Bet82] J. BETTEN. « Integrity basis for a second-order and a fourth-order tensor ». In : *Internat. J. Math. Math. Sci.* 5.1 (1982), p. 87–96. ISSN : 0161-1712. DOI : [10.1155/S0161171282000088](https://doi.org/10.1155/S0161171282000088). URL : <http://dx.doi.org/10.1155/S0161171282000088> (cf. p. 32).
- [Boe77] J.-P. BOEHLER. « On irreducible representations for isotropic scalar functions ». In : *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 57 (1977), p. 323–327 (cf. p. 56, 57, 61).
- [Boe87] J.-P. BOEHLER. *Application of tensor functions in solid mechanics*. Sous la dir. de J.-P. B. (EDITOR). CISM Courses and Lectures. Springer-Verlag, Wien, 1987 (cf. p. 31).
- [BKO94] J.-P. BOEHLER, A. A. KIRILLOV Jr. et E. T. ONAT. « On the polynomial invariants of the elasticity tensor ». In : *J. Elasticity* 34.2 (1994), p. 97–110. ISSN : 0374-3535 (cf. p. 14, 16, 32, 57).
- [BBS04a] A. BONA, I. BUCATARU et M. SLAWINSKI. « Characterization of Elasticity-Tensor Symmetries Using SU(2) ». In : *J. Elasticity* 75.3 (2004), p. 267–289 (cf. p. 31).

- [BBS07] A. BÓNA, I. BUCATARU et M. SLAWINSKI. « Coordinate-free Characterization of the Symmetry Classes of Elasticity Tensors ». In : *Journal of Elasticity* 87.2 (2007), p. 109–132 (cf. p. 31).
- [BBS08] A. BÓNA, I. BUCATARU et M. SLAWINSKI. « Space of  $SO(3)$ -orbits of elasticity tensors. » English. In : *Arch. Mech.* 60.2 (2008), p. 123–138 (cf. p. 31).
- [BBS04b] A. BÓNA, I. BUCATARU et M. A. SLAWINSKI. « Material symmetries of elasticity tensors ». In : *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 57.4 (2004), p. 583–598. DOI : [10.1093/qjmam/57.4.583](https://doi.org/10.1093/qjmam/57.4.583). eprint : <http://qjmam.oxfordjournals.org/content/57/4/583.full.pdf+html>. URL : <http://qjmam.oxfordjournals.org/content/57/4/583.abstract> (cf. p. 31).
- [Bon04] J. BONIFACE. *Hilbert et la notion d'existence en mathématiques*. Mathesis. Dissertation, Université de Paris 1, Paris, 1999. Paris : Librairie Philosophique J. Vrin, 2004, p. 303. ISBN : 2-7116-1606-1 (cf. p. 14, 113).
- [Boo41] G. BOOLE. « Exposition of a general theory of linear transformation ». In : *Camb. Math.* 3 (1841), p. 1–20 (cf. p. 113).
- [Bou+09] F. BOULIER, F. OLLIVIER, D. LAZARD et al. « Computing representations for radicals of finitely generated differential ideals ». In : *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.* 20.1 (2009), p. 73–121. ISSN : 0938-1279. DOI : [10.1007/s00200-009-0091-7](https://doi.org/10.1007/s00200-009-0091-7). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00200-009-0091-7> (cf. p. 53).
- [Bre72] G. E. BREDON. *Introduction to compact transformation groups*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 46. New York : Academic Press, 1972, p. xiii+459 (cf. p. 35, 37, 38, 41, 63).
- [BRT06] A. BRINI, F. REGONATI et A. TEOLIS. « Combinatorics, transvectants and superalgebras. An elementary constructive approach to Hilbert's finiteness theorem ». In : *Adv. in Appl. Math.* 37.3 (2006), p. 287–308. ISSN : 0196-8858. DOI : [10.1016/j.aam.2005.06.008](https://doi.org/10.1016/j.aam.2005.06.008). URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.aam.2005.06.008> (cf. p. 16, 142).
- [Bri96] BRION. *Invariants et covariants des groupes algébriques réductifs*. Juillet 1996 (cf. p. 116, 117).
- [Bri82] M. BRION. « Invariants de plusieurs formes binaires ». In : *Bull. Soc. Math. France* 110.4 (1982), p. 429–445. ISSN : 0037-9484. URL : [http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1982\\_\\_110\\_\\_429\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__429_0) (cf. p. 14, 143, 147).
- [BP10a] A. E. BROUWER et M. POPOVICIU. « The invariants of the binary decimic ». In : *J. Symbolic Comput.* 45.8 (2010), p. 837–843. ISSN : 0747-7171. DOI : [10.1016/j.jsc.2010.03.002](https://doi.org/10.1016/j.jsc.2010.03.002). URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsc.2010.03.002> (cf. p. 14, 18, 143, 146).
- [BP10b] A. E. BROUWER et M. POPOVICIU. « The invariants of the binary nonic ». In : *J. Symbolic Comput.* 45.6 (2010), p. 709–720. ISSN : 0747-7171. DOI : [10.1016/j.jsc.2010.03.003](https://doi.org/10.1016/j.jsc.2010.03.003). URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsc.2010.03.003> (cf. p. 14, 143, 146).



- [BP11] A. E. BROUWER et M. POPOVICIU. «  $SL_2$ -modules of small homological dimension ». In : *Transform. Groups* 16.3 (2011), p. 599–617. ISSN : 1083-4362. DOI : [10.1007/s00031-011-9138-5](https://doi.org/10.1007/s00031-011-9138-5). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00031-011-9138-5> (cf. p. 55, 147).
- [BP12] A. E. BROUWER et M. POPOVICIU. « Sylvester versus Gundelfinger ». In : *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* 8 (2012), Paper 075, 7 (cf. p. 152, 153).
- [BI10] W. BRUNS et B. ICHIM. « Normaliz : algorithms for affine monoids and rational cones ». In : *J. Algebra* 324.5 (2010), p. 1098–1113. ISSN : 0021-8693. DOI : [10.1016/j.jalgebra.2010.01.031](https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2010.01.031). URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2010.01.031> (cf. p. 153, 188).
- [CFS95] J. S. CARTER, D. E. FLATH et M. SAITO. *The classical and quantum 6j-symbols*. T. 43. Mathematical Notes. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995, p. x+164. ISBN : 0-691-02730-7 (cf. p. 15, 134, 143).
- [CLM90] P. CHOSSAT, R. LAUTERBACH et I. MELBOURNE. « Steady-state bifurcation with  $O(3)$ -symmetry ». In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 113.4 (1990), p. 313–376. ISSN : 0003-9527. DOI : [10.1007/BF00374697](https://doi.org/10.1007/BF00374697). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/BF00374697> (cf. p. 111, 112).
- [Cia05] P. G. CIARLET. *An introduction to differential geometry with applications to elasticity*. Reprinted from *J. Elasticity* 78/79 (2005), no. 1-3 [MR2196098]. Dordrecht : Springer, 2005, p. iv+209. ISBN : 978-1-4020-4247-8 ; 1-4020-4247-7 (cf. p. 19).
- [CF90] M. CLAUSEN et A. FORTENBACHER. « Efficient solution of linear Diophantine equations [ MR1014196 (90i:11151) ] ». In : *Unification*. Academic Press, London, 1990, p. 377–392 (cf. p. 151, 187).
- [CD91] E. CONTEJEAN et H. DEVIE. « Résolution de systèmes linéaires d'équations diophantiennes ». In : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 313.2 (1991), p. 115–120. ISSN : 0764-4442 (cf. p. 151).
- [CD94] E. CONTEJEAN et H. DEVIE. « An efficient incremental algorithm for solving systems of linear Diophantine equations ». In : *Inform. and Comput.* 113.1 (1994), p. 143–172. ISSN : 0890-5401. DOI : [10.1006/inco.1994.1067](https://doi.org/10.1006/inco.1994.1067). URL : <http://dx.doi.org/10.1006/inco.1994.1067> (cf. p. 151).
- [Cos02] M. COSTE. « An Introduction to Semialgebraic Geometry ». Université de Rennes. 2002 (cf. p. 36, 50).
- [CLO07] D. COX, J. LITTLE et D. O'SHEA. *Ideals, varieties, and algorithms*. Third. Undergraduate Texts in Mathematics. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. New York : Springer, 2007, p. xvi+551. ISBN : 978-0-387-35650-1 ; 0-387-35650-9. DOI : [10.1007/978-0-387-35651-8](https://doi.org/10.1007/978-0-387-35651-8). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-35651-8> (cf. p. 47, 53).
- [Cri86] T. CRILLY. « The rise of Cayley's invariant theory (1841–1862) ». In : *Historia Math.* 13.3 (1986), p. 241–254. ISSN : 0315-0860. DOI : [10.1016/0315-0860\(86\)90091-1](https://doi.org/10.1016/0315-0860(86)90091-1). URL : [http://dx.doi.org/10.1016/0315-0860\(86\)90091-1](http://dx.doi.org/10.1016/0315-0860(86)90091-1) (cf. p. 15, 113).

- [Cri88] T. CRILLY. « The decline of Cayley’s invariant theory (1863–1895) ». In : *Historia Math.* 15.4 (1988), p. 332–347. ISSN : 0315-0860. DOI : [10.1016/0315-0860\(88\)90025-0](https://doi.org/10.1016/0315-0860(88)90025-0). URL : [http://dx.doi.org/10.1016/0315-0860\(88\)90025-0](http://dx.doi.org/10.1016/0315-0860(88)90025-0) (cf. p. 14, 15, 113, 144).
- [Cro02] H. L. CRÖNI. « Zur Berechnung von Kovarianten von Quantiken ». Thèse de doct. 2002 (cf. p. 16).
- [Cur94] M. P. CURIE. « Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d’un Champ électrique et d’un champ magnétique. » In : *J. de Phys.* (1894) (cf. p. 12, 25, 28, 29).
- [DS95] F. DELL’ISOLA et P. SEPPECHER. « The relationship between edge contact forces, double forces and interstitial working allowed by the principle of virtual power. » In : *C.R. Acad. Sci. Paris IIb* 321 (1995), p. 303–308 (cf. p. 22).
- [Der99] H. DERKSEN. « Computation of invariants for reductive groups ». In : *Adv. Math.* 141.2 (1999), p. 366–384. ISSN : 0001-8708. DOI : [10.1006/aima.1998.1787](https://doi.org/10.1006/aima.1998.1787). URL : <http://dx.doi.org/10.1006/aima.1998.1787> (cf. p. 14, 43, 143, 145).
- [DK02] H. DERKSEN et G. KEMPER. *Computational invariant theory*. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, I. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 130. Berlin : Springer-Verlag, 2002, p. x+268. ISBN : 3-540-43476-3 (cf. p. 56, 144).
- [DC70] J. A. DIEUDONNÉ et J. B. CARRELL. « Invariant theory, old and new ». In : *Advances in Math.* 4 (1970), 1–80 (1970). ISSN : 0001-8708 (cf. p. 36).
- [Dix81] J. DIXMIER. « Sur les invariants des formes binaires ». In : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 292.23 (1981), p. 987–990. ISSN : 0249-6321 (cf. p. 14).
- [Dix82] J. DIXMIER. « Série de Poincaré et systèmes de paramètres pour les invariants des formes binaires de degré 7 ». In : *Bull. Soc. Math. France* 110.3 (1982), p. 303–318. ISSN : 0037-9484. URL : [http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1982\\_\\_110\\_\\_303\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__303_0) (cf. p. 14, 49).
- [DL88] J. DIXMIER et D. LAZARD. « Minimum number of fundamental invariants for the binary form of degree 7 ». In : *J. Symbolic Comput.* 6.1 (1988), p. 113–115. ISSN : 0747-7171. DOI : [10.1016/S0747-7171\(88\)80026-9](https://doi.org/10.1016/S0747-7171(88)80026-9). URL : [http://dx.doi.org/10.1016/S0747-7171\(88\)80026-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0747-7171(88)80026-9) (cf. p. 14).
- [DKW08] J. DRAISMA, G. KEMPER et D. WEHLAU. « Polarization of separating invariants ». In : *Canad. J. Math.* 60.3 (2008), p. 556–571. ISSN : 0008-414X. DOI : [10.4153/CJM-2008-027-2](https://doi.org/10.4153/CJM-2008-027-2). URL : <http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2008-027-2> (cf. p. 58).
- [Duf08] E. DUFRESNE. « Separating invariants ». Thèse de doct. 2008 (cf. p. 57).
- [Dug88] R. DUGAS. *A history of mechanics*. With a foreword by Louis de Broglie, Translated from the French by J. R. Maddox, Reprint of the 1957 translation. Dover Publications, Inc., New York, 1988, p. 662. ISBN : 0-486-65632-2 (cf. p. 19).

- [DK00] J. J. DUISTERMAAT et J. A. C. KOLK. *Lie groups*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2000, p. viii+344. ISBN : 3-540-15293-8. DOI : [10.1007/978-3-642-56936-4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-56936-4). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-56936-4> (cf. p. 78).
- [Fis66] C. S. FISHER. « The death of a mathematical theory. A study in the sociology of knowledge ». In : *Arch. History Exact Sci.* 3 (1966), 137–159 (1966). ISSN : 0003-9519 (cf. p. 14, 113, 142).
- [Fla83] D. FLATH. « The Clebsch-Gordan formulas ». In : *Enseign. Math. (2)* 29.3-4 (1983), p. 339–346. ISSN : 0013-8584 (cf. p. 121).
- [For06] S. FOREST. *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*. Sous la dir. de P. des MINES. 2006 (cf. p. 26).
- [For+09] S. FOREST, M. AMMESTOY, G. DAMMAME et al. *Mécanique des milieux continus - Cours de l'école de Mines de Paris*. 2009 (cf. p. 19, 22).
- [FV96] S. FORTE et M. VIANELLO. « Symmetry classes for elasticity tensors ». In : *J. Elasticity* 43.2 (1996), p. 81–108. ISSN : 0374-3535. DOI : [10.1007/BF00042505](https://doi.org/10.1007/BF00042505). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/BF00042505> (cf. p. 13, 30, 85, 86).
- [FV97] S. FORTE et M. VIANELLO. « Symmetry classes and harmonic decomposition for photoelasticity tensors ». In : *International Journal of Engineering Science* 35.14 (1997), p. 1317–1326. ISSN : 0020-7225. DOI : [DOI:10.1016/S0020-7225\(97\)00036-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(97)00036-0) (cf. p. 13, 85).
- [Fra95] M. FRANCOIS. « Identification des symétries matérielles des matériaux anisotropes ». Thèse de doct. 1995 (cf. p. 31).
- [FGB98] M. FRANCOIS, G. GEYMONAT et Y. BERTHAUD. « Determination of the symmetries of an experimentally determined stiffness tensor : application to acoustic measurements. » In : *Int Jal of Solids & Structures*. Vol 35. (1998), pages (cf. p. 28).
- [Ful97] W. FULTON. *Young tableaux. With applications to representation theory and geometry*. T. 35. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, 1997 (cf. p. 67).
- [FH91] W. FULTON et J. HARRIS. *Representation theory*. T. 129. Graduate Texts in Mathematics. A first course, Readings in Mathematics. New York : Springer-Verlag, 1991, p. xvi+551. ISBN : 0-387-97527-6 ; 0-387-97495-4 (cf. p. 114).
- [Gal80] F. von GALL. « Ueber das vollständige System einer binären Form achter Ordnung ». In : *Math. Ann.* 17.1 (1880), p. 139–152. ISSN : 0025-5831. DOI : [10.1007/BF01444131](https://doi.org/10.1007/BF01444131). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/BF01444131> (cf. p. 15, 135, 144).
- [Gal88] F. von GALL. « Das vollständige formensystem der binären form 7ter ordnung. » In : *Math. Ann.* (31) (1888.), p. 318–336. (Cf. p. 144).
- [Gau86] C. F. GAUSS. *Disquisitiones arithmeticae*. Translated and with a preface by Arthur A. Clarke, Revised by William C. Waterhouse, Cornelius Greither and A. W. Grootendorst and with a preface by Waterhouse. Springer-Verlag, New York, 1986, p. xx+472. ISBN : 0-387-96254-9 (cf. p. 113).

- [Ger73] P. GERMAIN. « La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus. I. Théorie du second gradient ». In : *J. Mécanique* 12 (1973), p. 235–274. ISSN : 0750-7240 (cf. p. 22).
- [GM80] P. GERMAIN et P. MULLER. *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Paris : Masson, 1980, p. viii+344. ISBN : 2-225-65197-3 (cf. p. 19, 22).
- [GW02] G. GEYMONAT et T. WELLER. « Symmetry classes of piezoelectric solids ». In : 335.10 (2002), p. 847–852 (cf. p. 13, 85, 86, 93).
- [Gle15] O. GLENN. *A treatise on the theory of invariants*. <http://www.gutenberg.org/ebooks/9933>, 1915 (cf. p. 15).
- [GSS88] M. GOLUBITSKY, I. STEWART et D. G. SCHAEFFER. *Singularities and groups in bifurcation theory. Vol. II*. T. 69. Applied Mathematical Sciences. New York : Springer-Verlag, 1988, p. xvi+533. ISBN : 0-387-96652-8 (cf. p. 42, 63, 72).
- [Gor68] P. GORDAN. « Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer Binären Form eine ganze Function mit numerischen Coefficienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist ». In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (69 1868) (cf. p. 15, 113, 144).
- [Gor75] P. GORDAN. *Über das Formensystem Binärer Formen*. 1875 (cf. p. 172).
- [GY10] J. H. GRACE et A. YOUNG. *The algebra of invariants*. Cambridge Library Collection. Reprint of the 1903 original. Cambridge : Cambridge University Press, 2010, p. ii+viii+384. ISBN : 978-1-108-01309-3. DOI : 10.1017/CB09780511708534. URL : <http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511708534> (cf. p. 15, 113, 119–121, 127, 128, 136, 143, 148, 152, 161, 172, 212, 213).
- [GS] D. R. GRAYSON et M. E. STILLMAN. *Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry* (cf. p. 47, 153, 161, 173, 179, 184, 188, 191, 195).
- [Gur81] M. E. GURTIN. *An introduction to continuum mechanics*. T. 158. Mathematics in Science and Engineering. New York : Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 1981, p. xi+265. ISBN : 0-12-309750-9 (cf. p. 19).
- [Has08] A. HASHEMI. « Efficient Algorithms for Computing Noether Normalization ». In : *Lecture Notes in Computer Science* 5081 (2008), p. 97–107 (cf. p. 143, 147).
- [Her45] B. HERMAN. « Some theorems of the theory of anisotropic media ». In : *Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sci. URSS* 48.2 (1945), p. 89–92 (cf. p. 38).
- [Hil90] D. HILBERT. « Ueber die Theorie der algebraischen Formen ». In : *Math. Ann.* 36.4 (1890), p. 473–534. ISSN : 0025-5831. DOI : 10.1007/BF01208503. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/BF01208503> (cf. p. 14, 43, 142).
- [Hil93] D. HILBERT. « Ueber die vollen Invariantensysteme ». In : *Math. Ann.* 42.3 (1893), p. 313–373. ISSN : 0025-5831. DOI : 10.1007/BF01444162. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/BF01444162> (cf. p. 14).
- [Hil78] D. HILBERT. *Hilbert's invariant theory papers*. Lie Groups : History, Frontiers and Applications, VIII. Translated from the German by Michael Ackerman, With comments by Robert Hermann. Math Sci Press, Brookline, Mass., 1978, p. ix+336. ISBN : 0-915692-26-0 (cf. p. 36, 142).

- [Hob55] E. W. HOBSON. *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*. Chelsea Publishing Company, New York, 1955, p. xi+500 (cf. p. 81).
- [HR74] M. HOCHSTER et J. L. ROBERTS. « Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay ». In : *Advances in Math.* 13 (1974), p. 115–175. ISSN : 0001-8708 (cf. p. 47, 143).
- [IG84] E. IHRIG et M. GOLUBITSKY. « Pattern selection with  $O(3)$  symmetry ». In : *Phys. D* 13.1-2 (1984), p. 1–33. ISSN : 0167-2789. DOI : [10.1016/0167-2789\(84\)90268-9](https://doi.org/10.1016/0167-2789(84)90268-9). URL : [http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789\(84\)90268-9](http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789(84)90268-9) (cf. p. 13, 63, 72, 73, 77, 85, 100, 111, 211).
- [KL94] L. H. KAUFFMAN et S. L. LINS. *Temperley-Lieb recoupling theory and invariants of 3-manifolds*. T. 134. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994, p. x+296. ISBN : 0-691-03640-3 (cf. p. 15).
- [Kem03] G. KEMPER. « Computing invariants of reductive groups in positive characteristic ». In : *Transform. Groups* 8.2 (2003), p. 159–176. ISSN : 1083-4362. DOI : [10.1007/s00031-003-0305-1](https://doi.org/10.1007/s00031-003-0305-1). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00031-003-0305-1> (cf. p. 56, 142).
- [Kir76] A. A. KIRILLOV. *Elements of the theory of representations*. Translated from the Russian by Edwin Hewitt, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 220. Berlin : Springer-Verlag, 1976, p. xi+315 (cf. p. 121).
- [Kna07] A. W. KNAPP. *Advanced algebra. Cornerstones. Along with a companion volume it Basic algebra*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007, p. xxiv+730. ISBN : 978-0-8176-4522-9 (cf. p. 45).
- [Kol04] B. KOLEV. *Physique et géométrie*. 2004 (cf. p. 22).
- [KP00] H. KRAFT et C. PROCESI. *Classical Invariant Theory, a Primer*. Basel : <http://www.math.unibas.ch> 2000 (cf. p. 36, 42, 54, 58, 67, 115, 125, 130).
- [KR84] J. P. S. KUNG et G.-C. ROTA. « The invariant theory of binary forms ». In : *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 10.1 (1984), p. 27–85. ISSN : 0273-0979. DOI : [10.1090/S0273-0979-1984-15188-7](https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1984-15188-7). URL : <http://dx.doi.org/10.1090/S0273-0979-1984-15188-7> (cf. p. 15, 118, 125, 142).
- [Lan02] S. LANG. *Algebra*. third. T. 211. Graduate Texts in Mathematics. New York : Springer-Verlag, 2002, p. xvi+914. ISBN : 0-387-95385-X. DOI : [10.1007/978-1-4613-0041-0](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0041-0). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4613-0041-0> (cf. p. 46).
- [LH11] H. LE QUANG et Q.-C. HE. « The number and types of all possible rotational symmetries for flexoelectric tensors ». In : *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Science* 467.2132 (2011), p. 2369–2386. DOI : [10.1098/rspa.2010.0521](https://doi.org/10.1098/rspa.2010.0521). eprint : <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/467/2132/2369.full.pdf+html>. URL : <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/467/2132/2369.abstract> (cf. p. 13, 85).
- [Liu82] I. LIU. « On representations of anisotropic invariants ». In : *Int. J. Eng. Sci.* 20 (1982), p. 1099–1109 (cf. p. 31).

- [Log89] A. LOGAR. « A computational proof of the Noether normalization lemma ». In : *Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes (Rome, 1988)*. T. 357. Lecture Notes in Comput. Sci. Berlin : Springer, 1989, p. 259–273. DOI : [10.1007/3-540-51083-4\\_65](https://doi.org/10.1007/3-540-51083-4_65). URL : [http://dx.doi.org/10.1007/3-540-51083-4\\_65](http://dx.doi.org/10.1007/3-540-51083-4_65) (cf. p. 143, 147).
- [Luq07] J.-G. LUQUE. *Invariants des hypermatrices*. 2007 (cf. p. 196).
- [MH94] J. E. MARSDEN et T. J. R. HUGHES. *Mathematical foundations of elasticity*. Corrected reprint of the 1983 original. New York : Dover Publications Inc., 1994, p. xviii+556. ISBN : 0-486-67865-2 (cf. p. 19, 22).
- [Mau13] G. A. MAUGIN. *Continuum mechanics through the twentieth century*. T. 196. Solid Mechanics and its Applications. A concise historical perspective. Springer, Dordrecht, 2013, p. xvi+314. ISBN : 978-94-007-6352-4 ; 978-94-007-6353-1. DOI : [10.1007/978-94-007-6353-1](https://doi.org/10.1007/978-94-007-6353-1). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-6353-1> (cf. p. 19).
- [MC91] M. M. MEHRABADI et S. C. COWIN. « Corrigendum : “Eigentensors of linear anisotropic elastic materials” [Quart. J. Mech. Appl. Math. 43 (1990), no. 1, 15–41 ; MR1044761 (91c :73014)] ». In : *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 44.2 (1991), p. 333. ISSN : 0033-5614. DOI : [10.1093/qjmam/44.2.331](https://doi.org/10.1093/qjmam/44.2.331). URL : <http://dx.doi.org/10.1093/qjmam/44.2.331> (cf. p. 31).
- [Min64] R. D. MINDLIN. « Micro-structure in Linear Elasticity ». In : *Arch. Ration. Mech. An.* 16 (1964), p. 51–78 (cf. p. 13, 26, 70).
- [Min65] R. D. MINDLIN. « Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity ». In : *Int. J. Solids Struct.* 1.4 (1965), p. 417–438 (cf. p. 26).
- [MT86] R. MNEIMNÉ et F. TESTARD. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Collection Méthodes. [Methods Collection]. Paris : Hermann, 1986, p. vi+346. ISBN : 2-7056-6040-2 (cf. p. 82).
- [MFK94] D. MUMFORD, J. FOGARTY et F. KIRWAN. *Geometric invariant theory*. Third. T. 34. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)]. Berlin : Springer-Verlag, 1994, p. xiv+292. ISBN : 3-540-56963-4. DOI : [10.1007/978-3-642-57916-5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-57916-5). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-57916-5> (cf. p. 36, 144).
- [Nol59] W. NOLL. « The foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continuum mechanics ». In : *The axiomatic method. With special reference to geometry and physics. Proceedings of an International Symposium held at the Univ. of Calif., Berkeley, Dec. 26, 1957-Jan. 4, 1958 (edited by L. Henkin, P. Suppes and A. Tarski)*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1959, p. 266–281 (cf. p. 22).
- [Nor89] A. N. NORRIS. « On the acoustic determination of the elastic moduli of anisotropic solids and acoustic conditions for the existence of symmetry planes ». In : *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 42 (1989), p. 413–426 (cf. p. 95).
- [Oli14] M. OLIVE. « About Gordan’s algorithm for binary forms ». In : *ArXiv e-prints* (mar. 2014). arXiv : [1403.2283](https://arxiv.org/abs/1403.2283) [math.RT] (cf. p. 16).



- [OA13] M. OLIVE et N. AUFRAY. « Symmetry classes for even-order tensors ». In : *Mathematics and Mechanics of Complex Systems* 1.2 (2013), p. 177–210 (cf. p. 13, 85, 86, 96).
- [OA14] M. OLIVE et N. AUFRAY. « Symmetry classes for odd-order tensors ». In : *ZAMM-Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 94.5 (2014), p. 421–447 (cf. p. 13, 85, 86, 97, 98).
- [OL14] M. OLIVE et R. LERCIER. « A minimal covariant basis for the binary nonics and the binary decimics ». In preparation. 2014 (cf. p. 16, 142, 161, 185, 188).
- [Olv99] P. J. OLIVER. *Classical invariant theory*. T. 44. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge : Cambridge University Press, 1999, p. xxii+280. ISBN : 0-521-55821-2. DOI : 10.1017/CB09780511623660. URL : <http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511623660> (cf. p. 14, 16, 113–115, 117–119, 123, 125, 127, 128, 130, 142, 148, 152).
- [Par89] K. H. PARSHALL. « Toward a history of nineteenth-century invariant theory ». In : *The history of modern mathematics, Vol. I (Poughkeepsie, NY, 1989)*. Boston, MA : Academic Press, 1989, p. 157–206 (cf. p. 15, 113).
- [Pas96] D. V. PASECHNIK. « Computing covariants of binary forms and related topics ». In : *preprint* (1996) (cf. p. 16).
- [PR59] A. C. PIPKIN et R. S. RIVLIN. « The formulation of constitutive equations in continuum physics. I ». In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 4 (1959), 129–144 (1959). ISSN : 0003-9527 (cf. p. 59).
- [PV04] P. PISÓN-CASARES et A. VIGNERON-TENORIO. «  $\mathbb{N}$ -solutions to linear systems over  $\mathbb{Z}$  ». In : *Linear Algebra Appl.* 384 (2004), p. 135–154. ISSN : 0024-3795. DOI : 10.1016/j.laa.2004.01.003. URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2004.01.003> (cf. p. 151).
- [Pro78] C. PROCESI. « Positive symmetric functions ». In : *Adv. in Math.* 29.2 (1978), p. 219–225. ISSN : 0001-8708. DOI : 10.1016/0001-8708(78)90011-7. URL : [http://dx.doi.org/10.1016/0001-8708\(78\)90011-7](http://dx.doi.org/10.1016/0001-8708(78)90011-7) (cf. p. 51).
- [PS85] C. PROCESI et G. SCHWARZ. « Inequalities defining orbit spaces ». In : *Invent. Math.* 81.3 (1985), p. 539–554 (cf. p. 13, 36, 50).
- [Pro07] C. PROCESI. *Lie groups, an approach through invariants and representations*. Universitext. An approach through invariants and representations. New York : Springer, 2007, p. xxiv+596. ISBN : 978-0-387-26040-2 ; 0-387-26040-4 (cf. p. 36, 55).
- [RE55] R. RIVLIN et J. ERICKSEN. « Stress-deformation relations for isotropic materials ». In : *J. Rational Mech. Anal.* 4 (1955), p. 323–425 (cf. p. 14, 36).
- [Ryc84] J. RYCHLEWSKI. « On Hooke's law ». In : *Prikl. Mat. Mekh.* 48.3 (1984), p. 420–435. ISSN : 0032-8235. DOI : 10.1016/0021-8928(84)90137-0. URL : [http://dx.doi.org/10.1016/0021-8928\(84\)90137-0](http://dx.doi.org/10.1016/0021-8928(84)90137-0) (cf. p. 31).
- [Sen95] M. SENECHAL. *Quasicrystals and geometry*. Cambridge : Cambridge University Press, 1995, p. xvi+286. ISBN : 0-521-37259-3 (cf. p. 29).

- [Sep96] P. SEPPECHER. « Les Fluides de Cahn-Hilliard ». Thèse de doct. Université du Sud Toulon Var, 1996 (cf. p. 26).
- [Shi67] T. SHIODA. « On the graded ring of invariants of binary octavics ». In : *Amer. J. Math.* 89 (1967), p. 1022–1046. ISSN : 0002-9327 (cf. p. 15, 16, 32, 135, 146).
- [Sid80] F. SIDOROFF. *Mécanique des milieux continus*. 1980 (cf. p. 19).
- [SB97] G. F. SMITH et G. BAO. « Isotropic invariants of traceless symmetric tensors of orders three and four ». In : *Int. J. Eng. Sci.* 35.15 (1997), p. 1457–1462. ISSN : 0020-7225. DOI : [10.1016/S0020-7225\(97\)00048-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(97)00048-7). URL : [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7225\(97\)00048-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7225(97)00048-7) (cf. p. 14).
- [Smi71] G. SMITH. « On isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors ». In : *Int. J. Eng. Sci.* 9 (1971), p. 899–916 (cf. p. 14, 31, 37, 56, 58, 59, 61).
- [Sou91] J.-M. SOURIAU. *Milieux continus de dimension 1, 2 ou 3 : Statique et Dynamique*. 1991. URL : <http://www.jmsouriau.com/Publications/JMSouriau-MilContDim1991.pdf> (cf. p. 22, 26).
- [SR59a] A. J. M. SPENCER et R. S. RIVLIN. « Finite integrity bases for five or fewer symmetric  $3 \times 3$  matrices ». In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 2 (1958/1959), p. 435–446. ISSN : 0003-9527 (cf. p. 37, 59).
- [SR59b] A. J. M. SPENCER et R. S. RIVLIN. « The theory of matrix polynomials and its application to the mechanics of isotropic continua ». In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 2 (1958/1959), p. 309–336. ISSN : 0003-9527 (cf. p. 59).
- [SR62] A. J. M. SPENCER et R. S. RIVLIN. « Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors. I ». In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 9 (1962), p. 45–63. ISSN : 0003-9527 (cf. p. 36, 37, 59).
- [Sta78] R. P. STANLEY. « Hilbert functions of graded algebras ». In : *Advances in Math.* 28.1 (1978), p. 57–83. ISSN : 0001-8708 (cf. p. 49).
- [Sta83] R. P. STANLEY. *Combinatorics and commutative algebra*. T. 41. Progress in Mathematics. Boston, MA : Birkhäuser Boston Inc., 1983, p. viii+88. ISBN : 0-8176-3112-7 (cf. p. 151).
- [Sta12] R. P. STANLEY. *Enumerative combinatorics. Volume 1*. Second. T. 49. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge : Cambridge University Press, 2012, p. xiv+626. ISBN : 978-1-107-60262-5 (cf. p. 151).
- [Ste94] S. STERNBERG. *Group theory and physics*. Cambridge : Cambridge University Press, 1994, p. xiv+429. ISBN : 0-521-24870-1 (cf. p. 29, 35, 42, 48, 63, 66, 80, 114).
- [Str88] E. STROH. « Ueber die aszygetischen Covarianten dritten Grades einer binären Form ». In : *Math. Ann.* 31.3 (1888), p. 444–454. ISSN : 0025-5831. DOI : [10.1007/BF01206227](https://doi.org/10.1007/BF01206227). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/BF01206227> (cf. p. 212).



- [Stu08] B. STURMFELS. *Algorithms in invariant theory*. Second. Texts and Monographs in Symbolic Computation. SpringerWienNewYork, Vienna, 2008, p. vi+197. ISBN : 978-3-211-77416-8 (cf. p. 14, 36, 43, 45, 47, 67, 113, 142, 143, 145, 151).
- [Tim53] S. P. TIMOSHENKO. *History of strength of materials. With a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953, p. x+452 (cf. p. 19).
- [Tru66] C. TRUESDELL. *The elements of continuum mechanics*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966, p. iv+279 (cf. p. 19).
- [Tru03] C. TRUESDELL. *Essays on the history of mechanics*. Sous la dir. d'A. BECCHI, M. CORRADI, F. FOCE et al. Between Mechanics and Architecture. In memory of Clifford Ambrose Truesdell and Edoardo Benvenuto, Papers from the International Symposium "Between Architecture and Mathematics : The Work of Clifford Ambrose Truesdell and Edoardo Benvenuto" held in Genoa, November 30–December 1, 2001. Basel : Birkhäuser Verlag, 2003, p. 256. ISBN : 3-7643-1476-1. DOI : 10.1007/978-3-0348-8091-6. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-8091-6> (cf. p. 19).
- [TN04] C. TRUESDELL et W. NOLL. *The non-linear field theories of mechanics*. Third. Edited and with a preface by Stuart S. Antman. Berlin : Springer-Verlag, 2004, p. xxx+602. ISBN : 3-540-02779-3 (cf. p. 22).
- [Vin94] È. B. VINBERG. *Lie groups and Lie algebras, III*. T. 41. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Structure of Lie groups and Lie algebras, A translation of it Current problems in mathematics. Fundamental directions. Vol. 41 (Russian), Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1990 [ MR1056485 (91b :22001)], Translation by V. Minachin [V. V. Minakhin], Translation edited by A. L. Onishchik and È. B. Vinberg. Springer-Verlag, Berlin, 1994, p. iv+248. ISBN : 3-540-54683-9. DOI : 10.1007/978-3-662-03066-0. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-03066-0> (cf. p. 78).
- [VP89] È. B. VINBERG et V. L. POPOV. *Invariant theory*. Itogi Nauki i Tekhniki. Moscow : Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., 1989, p. 137–314, 315 (cf. p. 36, 42).
- [Wan69] C.-C. WANG. « On representations for isotropic functions, part I ». In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 33 (1969), p. 249–267 (cf. p. 31).
- [Wan70] C.-C. WANG. « A new representation theorem for isotropic functions : An answer to Professor G.F. Smith's criticism of my papers on representations for isotropic functions, part I ». In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 36 (1970), p. 166–197 (cf. p. 14, 37, 56, 58–61).
- [Wel04] T. WELLER. « Etude des symétries et modèles de plaques en piézoélectricité linéarisée ». Thèse de doct. Université Montpellier II, 2004 (cf. p. 25, 28).
- [Wey68] H. WEYL. *Gesammelte Abhandlungen. Bände I, II, III, IV*. Herausgegeben von K. Chandrasekharan. Berlin : Springer-Verlag, 1968, Band I : vi+698 pp. (1 plate), Band II : iv+647 pp. (loose errata), Band III : iv+791 pp., Band IV : ix+694 (cf. p. 48).

- [Wey39] H. WEYL. *The Classical Groups. Their Invariants and Representations*. Princeton, N.J. : Princeton University Press, 1939, p. xii+302 (cf. p. 43, 49).
- [Wey97] H. WEYL. *The classical groups*. Princeton Landmarks in Mathematics. Their invariants and representations, Fifteenth printing, Princeton Paperbacks. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1997, p. xiv+320. ISBN : 0-691-05756-7 (cf. p. 15, 36, 37, 54, 67, 125, 143).
- [Wey93] J. WEYMAN. « Gordan ideals in the theory of binary forms ». In : *J. Algebra* 161.2 (1993), p. 370–391. ISSN : 0021-8693. DOI : [10.1006/jabr.1993.1225](https://doi.org/10.1006/jabr.1993.1225). URL : <http://dx.doi.org/10.1006/jabr.1993.1225> (cf. p. 15, 143).
- [Yan09] J. YANG. *Special topics in the theory of piezoelectricity*. Springer, New York, 2009, p. xii+329. ISBN : 978-0-387-89497-3. DOI : [10.1007/978-0-387-89498-0](https://doi.org/10.1007/978-0-387-89498-0). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-89498-0> (cf. p. 25, 66).
- [You99] A. YOUNG. « The Irreducible Concomitants of any Number of Binary Quartics ». In : *Proc. London Math. Soc.* S1-30.1 (1899), p. 290. ISSN : 0024-6115. DOI : [10.1112/plms/s1-30.1.290](https://doi.org/10.1112/plms/s1-30.1.290). URL : <http://dx.doi.org/10.1112/plms/s1-30.1.290> (cf. p. 55).
- [Zhe93] Q.-S. ZHENG. « On the representations for isotropic vector-valued, symmetric tensor-valued and skew-symmetric tensor-valued functions ». In : *Internat. J. Engrg. Sci.* 31.7 (1993), p. 1013–1024. ISSN : 0020-7225. DOI : [10.1016/0020-7225\(93\)90109-8](https://doi.org/10.1016/0020-7225(93)90109-8). URL : [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7225\(93\)90109-8](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7225(93)90109-8) (cf. p. 32, 56).
- [Zhe94] Q.-S. ZHENG. « Theory of representations for tensor functions - A unified invariant approach to constitutive equations ». In : *Arch. Appl. Mech.* 47 (1994), p. 545–587 (cf. p. 32, 37, 58, 59).
- [ZB94] Q.-S. ZHENG et J.-P. BOEHLER. « The description, classification, and reality of material and physical symmetries ». In : *Acta Mech.* 102 (1994), p. 73–89 (cf. p. 30).

# Index

- Algèbre de Cohen-Macaulay, [41](#)
  - Décomposition de Hironaka, [41](#)
- Algèbre des invariants, [38](#)
- Algèbre des polynômes, [37](#)
- Base de transvectants, [127](#)
- Complexification
  - d'un espace vectoriel, [73](#)
- Covariant
  - moléculaire, [118](#)
- Dimension de Krull, [40](#)
- Décomposition de Clebsch–Gordan, [111](#)
  - Décomposition explicite, [116](#)
- Elasticité
  - Hyper elasticité, [19](#)
- Espace
  - des points fixes, [34](#)
  - des tenseurs d'élasticité, [19](#)
- Extension entière, [40](#)
- Famille algébriquement libre, [40](#)
- Famille algébriquement liée, [40](#)
- Forme binaire
  - covariants de, [109](#)
  - Invariants de, [109](#)
  - Semi-invariant d'une, [111](#)
- Groupe linéaire algébrique réductif, [37](#)
- Isotropie
  - Classe d'isotropie, [33](#)
  - Sous-groupe d', [32](#), [35](#)
- Isotypique
  - Composante, [61](#)
- Loi de Hooke généralisée, [18](#)
- Normalisateur, [34](#)
- Opérateurs
  - de Cayley, [113](#)
  - de polarisation, [113](#)
- Orbite, [32](#)
- Piézoélectricité, [20](#)
- Premier théorème sur les matrices, [50](#)
- Premier théorème sur les vecteurs, [49](#)
- Strate
  - Strate générique, [33](#)
- Stratification
  - Strate, [33](#)
  - Stratification isotropique, [33](#)
- Système de paramètres, [40](#)
- Szygies
  - Relations d'Abdesselam–Chipalkatti, [132](#)
  - Séries de Gordan, [130](#)
  - Séries de Gordan généralisées, [129](#)
- Séparants
  - Algèbre de, [52](#)
  - Ensemble de, [51](#)
- Série de Hilbert, [42](#)
- Tenseur d'état, [20](#)
  - cinématique, [20](#)
  - sthénique, [20](#)
- Théorème de Hilbert, [38](#)
- Transvectant, [114](#)
  - Projecteur de Clebsch–Gordan, [114](#)

# ANNEXES

## A. Dimensions des espaces de points fixes

Nous avons des formules directes du calcul des dimensions de  $V^H$  [IG84] : en notant  $(V, \rho)$  une représentation linéaire de  $O(3)$ , qui a pour décomposition harmonique :

$$V \cong \bigoplus_{k=0}^n (\mathbb{H}^k)^{\oplus \alpha_k}$$

où  $\alpha_k$  est la multiplicité de  $\mathbb{H}^k$  dans la décomposition ; alors, pour les sous-groupes de type III on a

$$\dim V^{Z_{2p}^-} = 2 \sum_{k=0}^n \alpha_k \left[ \frac{k+p}{2p} \right] \quad (\text{A.1})$$

$$\dim V^{D_p^v} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \alpha_{2i} \left[ \frac{2i}{p} \right] + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \alpha_{2i+1} \left( \left[ \frac{2i+1}{p} \right] + 1 \right)$$

$$\dim V^{D_{2p}^h} = \sum_{k=0}^n \alpha_k \left[ \frac{k+p}{2p} \right] \quad (\text{A.2})$$

$$\dim V^{\mathcal{O}^-} = \sum_{k=0}^n \alpha_k \left( \left[ \frac{k+2}{4} \right] + \left[ \frac{k}{3} \right] + \left[ \frac{k+1}{2} \right] - k \right)$$

Par ailleurs, pour les sous-groupes de  $SO(3)$  on a

$$\dim V^{Z_p} = 2 \sum_{k=0}^n \alpha_k \left[ \frac{k}{p} \right] + \sum_{k=0}^n \alpha_k$$

$$\dim V^{D_p} = \sum_{k=0}^n \alpha_k \left[ \frac{k}{p} \right] + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \alpha_{2k}$$

$$\dim V^{\mathcal{T}} = \sum_{k=0}^n \alpha_k \left( 2 \left[ \frac{k}{3} \right] + \left[ \frac{k}{2} \right] - k + 1 \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\dim V^{\mathcal{O}} = \sum_{k=0}^n \alpha_k \left( \left[ \frac{k}{4} \right] + \left[ \frac{k}{3} \right] + \left[ \frac{k}{2} \right] - k + 1 \right)$$

$$\dim V^{\mathcal{I}} = \sum_{k=0}^n \alpha_k \left( \left[ \frac{k}{5} \right] + \left[ \frac{k}{3} \right] + \left[ \frac{k}{2} \right] - k + 1 \right)$$

Précisons aussi que

$$\begin{aligned} \dim V^{\text{SO}(2)} &= \sum_{k=0}^n \alpha_k & \dim V^{\text{O}(2)} &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \alpha_{2k} \\ \dim V^{\text{O}(2)^-} &= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \alpha_{2k+1} \end{aligned}$$

## B. Relations de Stroh et relations de degré 3

La relation algébrique suivante a été obtenue par Stroh [Str88] (voir aussi [GY10]).

**Lemme B.1.** Notons  $u_1, u_2$  et  $u_3$  trois variables commutatives telles que

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0.$$

Alors nous avons

$$\begin{aligned} (-1)^{k_2} \sum_{i=0}^{k_1} \binom{g}{i} \binom{k_1 + k_3 - i}{k_3} u_3^{g-i} u_1^i + (-1)^{k_3} \sum_{i=0}^{k_2} \binom{g}{i} \binom{k_2 + k_1 - i}{k_1} u_1^{g-i} u_2^i + \\ (-1)^{k_1} \sum_{i=0}^{k_3} \binom{g}{i} \binom{k_3 + k_2 - i}{k_2} u_2^{g-i} u_3^i = 0, \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

avec  $k_1 + k_2 + k_3 = g - 1$ .

De cette formule on en déduit des relations sur des molécules de degré 3. Notons  $V = S_n$  et  $(e_0, e_1, e_2)$  trois entiers naturels tels que  $e_i + e_j \leq n$  ( $i \neq j$ ). On note ensuite

$$D(e_0, e_1, e_2) := \begin{array}{ccc} \alpha & \xrightarrow{e_0} & \beta \\ & \swarrow e_2 & \searrow e_1 \\ & \gamma & \end{array} \quad \text{with weight } w = e_0 + e_1 + e_2, \quad (\text{B.2})$$

Remarquons qu'on a  $D(e_0, e_1, e_2) \in \text{Mor}_{\text{SL}(2, \mathbb{C})}(S_n \otimes S_n \otimes S_n, S_{3n-2w})$ .

**Lemme B.2.** Etant donné  $w \leq n$  et  $m_1, m_2, m_3 \geq 1$  des entiers naturels tels que  $m_1 + m_2 + m_3 = w + 1$ , alors la molécule  $D(e_0, e_1, e_2)$  est combinaison linéaire de

$$D(w - i_1, i_1, 0), \quad D(0, w - i_2, i_2), \quad D(i_3, 0, w - i_3),$$

with  $i_s = 0 \dots m_s - 1$ ,

*Sketch of proof.* En utilisant la décomposition de Clebsch–Gordan, on remarque dans un premier temps que

$$\dim \text{Mor}_{\text{SL}(2, \mathbb{C})}(S_n \otimes S_n \otimes S_n, S_{3n-2w}) = w + 1$$

Si maintenant on suppose qu'on a la relation

$$\sum_{i=0}^w \lambda_i D(w-i, i, 0) = 0.$$

En prenant  $\mathbf{f}_\alpha = x_\alpha^n$ ,  $\mathbf{f}_\beta = y_\beta^n$  et  $\mathbf{f}_\gamma = y_\gamma^n$  on en déduit que  $\lambda_0 = 0$ ; et donc par récurrence on a  $\lambda_i = 0$  pour tout  $i$ . Ainsi  $\mathcal{F}_1 := \{D(w-i, i, 0), i = 0 \dots w\}$  est une base de  $\text{Mor}_{\text{SL}(2, \mathbb{C})}(\mathbb{S}_n \otimes \mathbb{S}_n \otimes \mathbb{S}_n, \mathbb{S}_{3n-2w})$ . On fait de même pour  $\mathcal{F}_2 := \{D(0, w-i, i), i = 0 \dots w\}$  et  $\mathcal{F}_3 := \{D(i, 0, w-i), i = 0 \dots w\}$ .

Notons alors

$$u_1 = \Omega_{\alpha\beta}\sigma_\gamma, \quad u_2 = \Omega_{\beta\gamma}\sigma_\alpha, \quad u_3 = \Omega_{\gamma\alpha}\sigma_\beta$$

Il s'agit de variables commutatives vérifiant  $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ . Si on se donne alors la famille

$$\mathcal{F} := \{D(w-i_1, i_1, 0), D(0, w-i_2, i_2), D(i_3, 0, w-i_3), \quad i_s = 0 \dots m_s - 1\}$$

le lemme B.1, avec  $k_1 = m_1, k_2 = m_2, k_3 = m_3 + 1$  (pour  $m_3 < w$ ) et  $g = w + 3$  montre que  $D(m_3 + 1, 0, w - m_3 - 1) \in \mathcal{F}_3$  est engendrée par la famille  $\mathcal{F}$ . Par récurrence,  $\mathcal{F}_3$  et donc toutes les molécules sont engendrées par  $\mathcal{F}$ .  $\square$

**Lemme B.3.** Notons  $D(e_0, e_1, e_2)$  une molécule donnée par B.2.

1. Si  $w \leq n$  alors

$$D(e_0, e_1, e_2) \text{ est de grade } r \geq \frac{2}{3}w.$$

2. Si  $w > n$  alors

$$D(e_0, e_1, e_2) \text{ est de grade } r \geq n - \frac{w}{3}.$$

*Sketch of proof.* La preuve détaillée se trouve dans [GY10]. On se limite ici au cas où  $w \leq n$  avec  $w = 3k - 1$ . En prenant  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  dans le lemme B.2, on en déduit une famille  $\mathcal{F}$  dont les molécules sont de grade au moins  $2k$ . On utilise le même genre d'argument pour traiter les cas  $w = 3k + 2$  et  $w = 3k$ .  $\square$

Un cas particulier du lemme B.3 est :

**Lemme B.4.** Notons  $D(e_0, e_1, e_2)$  une molécule donnée par B.2 avec  $e_i + e_j \leq n$  ( $i \neq j$ ). Si on suppose que

$$e_0 \leq \frac{n}{2} \text{ et } e_1 + e_2 > \frac{e_0}{2},$$

alors

$$D(e_0, e_1, e_2) \text{ est de grade } e_0 + 1,$$

à moins que  $e_0 = e_1 = e_2 = \frac{n}{2}$ .

## C. Familles relativement complètes d'une forme binaire simple

Nous donnons ici quelques résultats sur la réduction de certaines familles de covariants, modulo un idéal. On fixe un espace  $S_n$  de formes binaires. Dans un premier temps :

**Lemme C.1.** *Etant donné un entier  $k$  tel que  $2k \leq n$ , alors*

$$I_{2k-1} = I_{2k}.$$

*Démonstration.* Il faut considérer des covariants moléculaires issus de molécules de grade  $2k - 1$ , qui contiennent donc

$$\mathbf{E} := \begin{array}{c} \textcircled{\mathbf{f}_\alpha} \text{---} \textcircled{\mathbf{f}_\beta} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \quad 2k-1$$

Un tel covariant moléculaire est un terme du transvectant  $\{\mathbf{E}, \mathbf{E}'\}_r$  pour un certain entier  $r$  et un certain covariant moléculaire  $\mathbf{E}'$ . Par la propriété 5.2.31,  $\mathbf{D}$  est combinaison linéaire de

$$\{\mathbf{E}, \mathbf{E}'\}_r \text{ et } \{\overline{\mathbf{E}}^{\mu_1}, \overline{\mathbf{E}'}^{\mu_1}\}_r.$$

Or tous les symboles sont équivalents donc  $\mathbf{E} = 0$  et chaque transvectant  $\{\overline{\mathbf{E}}^{\mu_1}, \overline{\mathbf{E}'}^{\mu_1}\}_r$  est dans l'idéal  $I_{2k}$  par le lemme 6.3.19.  $\square$

Tout covariant moléculaire issu d'une molécule de grade 1 est donc dans  $I_2$ . Ainsi

**Corollaire C.2.** *La famille  $A_0 := \{\mathbf{f}\}$  est relativement complète modulo  $I_2$*

Le lemme suivant concerne les covariants moléculaires de degré 3.

**Lemme C.3.** *Notons  $V$  un espace de formes binaires,  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  trois atomes de valence respective  $n, p, q$ . Soit un entier  $r$  tel que  $r \leq \min(n, p, q)$ , alors*

$$\begin{array}{c} \textcircled{\alpha} \xrightarrow{r} \textcircled{\beta} \\ \textcircled{\gamma} \end{array} = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \begin{array}{c} \textcircled{\alpha} \xrightarrow{i} \textcircled{\beta} \\ \textcircled{\gamma} \xrightarrow{r-i} \end{array} \quad (\text{C.1})$$

*Démonstration.* On part de la relation (5.2.7) :

$$\Omega_{\alpha\beta}\sigma_\gamma = \Omega_{\alpha\gamma}\sigma_\beta + \Omega_{\gamma\beta}\sigma_\alpha,$$

ce qui donne

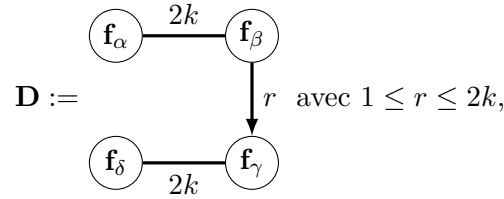
$$\Omega_{\alpha\beta}^r \sigma_\gamma^r = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \Omega_{\alpha\gamma}^i \Omega_{\gamma\beta}^{r-i} \sigma_\beta^i \sigma_\alpha^{r-i},$$

et il suffit de multiplier chaque membre de l'équation par  $\sigma_\alpha^{n-r} \sigma_\beta^{p-r} \sigma_\gamma^{q-r}$ .  $\square$

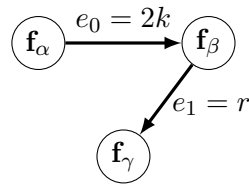
Rappelons ici que pour  $\mathbf{f} \in S_n$  et pour un entier  $k \geq 0$  donné, on définit  $\mathbf{H}_{2k} := \{\mathbf{f}, \mathbf{f}\}_{2k}$ .

**Lemme C.4.** Si  $2n - 4k > n$  alors la famille  $B = \{\mathbf{H}_{2k}\}$  est relativement complète modulo  $I_{2k+2}$

*Démonstration.* On considère des covariants moléculaires contenant

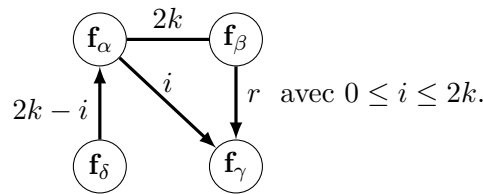


tous les symboles étant équivalents. Pour  $r > k$ , le covariant moléculaire



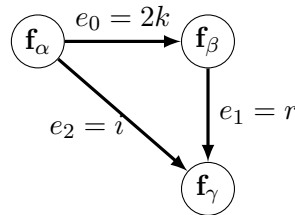
est de grade  $2k+1$  par le lemme B.4. Donc  $\mathbf{D}$  est dans l'idéal  $I_{2k+1} = I_{2k+2}$  (lemme C.1).

Lorsque  $r < k$ , by ,  $\mathbf{D}$  est combinaison linéaire de (relation (C.1))



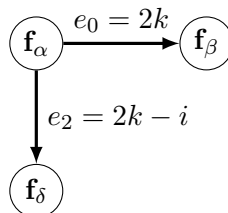
Mais alors :

- si  $i \geq k$ , on considère le covariant moléculaire



de poids  $w = 2k + r + i \geq 3k + r > 3k$ . Comme  $2k + r + i \leq n$ , ce covariant moléculaire est issu d'une molécule de grade  $r \geq \frac{2}{3}w > 2k$ , par le lemme B.3 ;

- si  $i < k$ , on considère le covariant moléculaire





et le lemme B.4 permet de conclure.

□

De la même façon :

**Lemme C.5.** *Si  $n = 4k$ , alors  $\mathbf{H}_{2k}$  est d'ordre  $n$  et la famille  $\mathbf{B} = \{\mathbf{H}_{2k}\}$  est relativement complète modulo  $I_{2k+2} + \langle \Delta \rangle$ , où  $\Delta$  est l'invariant*

