



Modélisations et simulations numériques d'écoulements compressibles dans des micro-conduites planes.

Chahinez Tchekiken

► To cite this version:

Chahinez Tchekiken. Modélisations et simulations numériques d'écoulements compressibles dans des micro-conduites planes.. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. MSME, Université Paris-Est Marne La Vallée, 2014. Français. NNT: . tel-01128158

HAL Id: tel-01128158

<https://hal.science/tel-01128158>

Submitted on 9 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École doctorale : Sciences, Ingénierie et Environnement

THÈSE
pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université PARIS-EST

Spécialité : Génie des Procédés

par

Chahinez TCHEKIKEN

***Modélisations et simulations numériques d'écoulements
compressibles dans des micro-conduites planes.***

Soutenue le 19 décembre 2014 devant le jury composé de :

Éric CHÉNIER	M. de conférence	Univ. Paris-Est MLV	Examineur
Marie Christine DULUC	M. de conférence	CNAM Paris	Rapporteur
Dominique GOBIN	D.R. CNRS	Lab. EM2C, CNRS	Examineur
Guy LAURIAT	Professeur	Univ. Paris-Est MLV	Directeur de thèse
Patrick LE QUÉRÉ	D.R. CNRS	Ecole Polytechnique	Examineur
Denis MAILLET	Professeur	Univ. de Lorraine	Rapporteur
Xavier NICOLAS	M. de conférence	Univ. Paris-Est MLV	Co-encadrant

Remerciements

Tout d'abord, je remercie chaleureusement les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer mon travail de thèse, pour tout le temps qu'ils ont consacré à cet effet et de s'être déplacés, pour certains de loin, pour assister à ma soutenance. Je remercie Dominique GOBIN, Directeur de Recherche CNRS, d'avoir présidé le jury, Marie-Christine DULUC, Maître de Conférences, et le Professeur Denis MAILLET pour leur investissement en qualité de rapporteurs mais aussi Patrick LE QUÉRÉ, Directeur de Recherche CNRS, et Éric CHÉNIER, Maître de Conférences, pour avoir siégé à ma soutenance. Le débat qui a suivi la présentation de mon travail de thèse n'a fait qu'enrichir ce dernier grâce aux questions, remarques et critiques pertinentes relevées par le jury.

Toute ma gratitude va ensuite au Professeur Guy LAURIAT pour son excellent encadrement, son suivi quotidien, ses conseils précieux, la confiance qu'il m'a témoignée et de m'avoir poussée à donner le meilleur de moi-même, depuis le stage de Master. Il est certain que sans son appui, je n'aurais jamais atteint mon niveau actuel.

De même, ce travail de thèse n'aurait pas pu se faire sans l'encadrement de Xavier NICOLAS, Maître de Conférences, que je remercie énormément pour toute son implication, sa présence, le travail d'équipe que nous avons mené pour résoudre les problèmes rencontrés et pour tous les échanges que nous avons eus que ce soit dans le domaine scientifique mais aussi de la vie quotidienne.

Je remercie particulièrement notre chef d'équipe Éric CHÉNIER, Maître de Conférences, avec qui j'ai eu le plaisir de travailler durant ma dernière année de thèse. De par son sérieux, sa sympathie et sa gentillesse, le travail était à la fois fructueux mais aussi très agréable.

Je tiens à remercier également le reste des membres de l'équipe TCM, ils ont tous participé de près ou de loin à ce travail grâce aux différents échanges que nous avons partagés. Je remercie plus particulièrement Meryem OULD-ROUISS, Maître de Conférences, pour sa gentillesse et ses encouragements chaleureux.

Ce travail a été effectué au sein du laboratoire MSME et m'a permis de rencontrer des doctorants des quatre coins du monde. Ils m'ont apporté leur soutien, leurs conseils mais aussi leur amitié. Nous avons partagé d'agréables moments et nos discussions ont toujours été intéressantes et enrichissantes, en particulier le doctorant Paulin GNAMBODE à qui je souhaite un très bel avenir et, dans un futur proche, une excellente soutenance. Je remercie également le reste du laboratoire MSME pour son accueil, notamment l'informaticien Guillaume SAUVENAY pour les moyens qu'il a mis à ma disposition pour que mon travail se passe dans les meilleures conditions.

REMERCIEMENTS

Enfin, je ne pourrai conclure sans présenter toute ma gratitude à mes très chers parents Nacéra et Omar, mes frères Yazid et Fewzi et mes soeurs Fahima et Selma qui m'ont toujours soutenue dans tout ce que j'ai pu entreprendre, en plus de m'apporter leur amour. Je remercie plus particulièrement mon fiancé, Selmane BOUGHEZALA qui m'a poussée à faire la thèse, il a toujours su trouver les mots dans les moments les plus difficiles, grâce à lui, la distance était un peu plus supportable. Je remercie le reste de ma famille en France, notamment celle de mon oncle, qui m'a toujours bien accueillie chez elle, sans oublier mes nombreuses colocataires au fil de ces dernières années en France et qui sont devenues, par la suite, de véritables amies ...

Paris, le 24 janvier 2015

Résumé

En raison du développement croissant des MEMS (Micro Electro Mechanical Systems), l'étude des écoulements de liquide ou de gaz et des transferts thermiques dans des conduites, chauffées ou non, dont le diamètre hydraulique est de l'ordre de quelques microns, a suscité un nombre considérable de travaux au cours des vingt dernières années. À cette échelle, le nombre de Knudsen peut être important ($Kn > 0,01$), ce qui donne naissance à des phénomènes de glissement, de saut de température et de pompage thermique qui s'ajoutent aux effets de compressibilité, telles que la puissance due aux forces de pression et à la puissance des contraintes visqueuses et aux variations des propriétés du fluide avec la température. Dans les modélisations de la littérature, ces phénomènes sont rarement pris en compte simultanément et sont souvent partiellement négligés, sans justification. Notre démarche consiste à proposer une modélisation des micro-écoulements gazeux se rapprochant au mieux de la réalité en prenant en compte tous les phénomènes et à étudier les effets de chacun d'entre eux. L'étude est, en premier lieu, menée en utilisant un code commercial, résolvant les équations de conservation par la méthode des volumes finis et adapté par le biais de sous-programmes développés au cours de cette thèse. Des validations ont été effectuées pour des problèmes allant des plus simples (incompressibles, non glissants) aux plus complexes (compressibles, glissants). Cette étude a permis de mettre en évidence les problèmes liés à la modélisation quand les nombres de Péclet des écoulements sont inférieurs à l'unité ($Pe < 1$). Dans ce cas, les effets de diffusion inverse sont dominants et l'utilisation d'extensions à l'amont de la conduite devient incontournable. Les effets de compressibilité qui se traduisent par des détentes du gaz près de la sortie de la conduite (accélération + refroidissement) ont été analysés. Enfin, des comparaisons ont été effectuées avec des solutions analytiques d'écoulements compressibles et glissants, supposés isothermes en imposant de faibles variations de pression. Nous avons pu montrer que ces solutions restent valables, même lorsque les variations de pression sont importantes parce que les détentes ne sont localisées que près de la sortie de la conduite et n'influencent donc pas les propriétés globales de l'écoulement. La suite du travail a été réalisée à l'aide d'un code de calcul développé au laboratoire et validé pour les écoulements à grandes échelles. Des conditions aux limites de glissement ont été introduites afin de l'adapter à la problématique de ce travail de thèse. Compte-tenu de ses performances (précision et rapidité des calculs en particulier), ce code a permis de réaliser une étude paramétrique sur une large gamme de pressions d'entrée et de sortie, de telle sorte à balayer tous les types d'écoulements : de peu à très compressibles et de peu à très glissants. Les résultats sont d'abord présentés pour des écoulements quasi-isothermes puis comparés aux solutions analytiques afin de tester ces dernières sur une plus large gamme de pression. Enfin, de nouveaux résultats ont été obtenus pour des écoulements chauffés. Des corrélations, en fonction des paramètres adimensionnels caractéristiques de ces écoulements, ont été obtenues pour les modèles complets à l'aide d'un logiciel de statistiques et de plans d'expériences. Des comparaisons à des modèles simplifiés ont été effectuées pour évaluer les erreurs commises lorsque certains termes sont négligés.

RESUME

Mots clés : micro-conduite, glissement dynamique, saut de température, pompage thermique, compressible, raréfaction

Abstract

Due to the increasing development of MEMS (Micro Electro Mechanical Systems), the study of liquid or gas flows and associated heat transfer in channels, heated or not, whose the hydraulic diameter is about a few microns, has sparked a considerable amount of work over the past twenty years. At this scale, the Knudsen number may be important ($Kn > 0.01$), which gives rise to slipping phenomena, temperature jump and thermal creep in addition to the effects that already exist at large scales, such as pressure work, viscous dissipation and the variations of the fluid properties with temperature. These phenomena are rarely taken into account all at once, at least one of them is neglected and often without justification. Our approach is to get as close as possible to reality by taking into account all the phenomena together and then to study the effects of the most often overlooked phenomena.

First, the study is conducted using a commercial code for solving the conservation equations by the finite volume method. Validations were performed for problems ranging from the simplest (incompressible, non-slip flow) to the more complex ones (compressible, slip flow). This study highlighted the problems associated with simulations when the flows Peclet numbers are less than unity ($Pe < 1$). In this case, the inverse diffusion effects are dominant and the use of extensions at the upstream becomes unavoidable. In addition, compressibility effects were identified ; they have resulted in expansions of the gas near the exit of the pipe (acceleration + cooling). Finally, comparisons were made with analytical solutions of compressible slip flows assumed isothermal by imposing small variations of pressure. We showed that these solutions remain valid even if the pressure variations are important because the expansion is only located near the channel exit, and does not affect the flow properties.

Further works was carried out using an in-house computer code, previously developed and validated in the laboratory for large scale flows, in which slipping boundary conditions have been added in order to properly resolve slip flows. In view of its accuracy and performances in terms of CPU-time, this code allowed us to achieve a parametric study on a wide range of input and output pressures, so as to sweep all cases from little to very compressible and little to very slip flows. The results were first presented for quasi-isothermal flows and subsequently compared to analytical solutions to test these ones over a wider range of pressure. Finally, heated flows were simulated and analysed. Correlations have been obtained for a complete model using a statistics and design of experiments software. Comparisons to simplified models were performed to assess the inaccuracies linked to the omission of terms often overlooked in the literature.

Keywords : micro-channel, slip flow, thermal jump, thermal creep, compressible, rarefaction

Table des matières

Introduction	1
I Analyse bibliographique	7
1 Introduction et généralités sur la microfluidique gazeuse	9
1.1 Contexte et applications	9
1.2 Échelles caractéristiques des effets de raréfaction	11
1.2.1 Définitions des longueurs caractéristiques	11
1.2.2 Libre parcours moyen équivalent	11
1.2.3 Gaz dilué et gaz dense	13
1.2.4 Validité des équations de Navier-Stokes	13
1.2.5 Les différents régimes d'écoulement en fonction du nombre de Knudsen Kn	14
1.3 Couche de Knudsen et conditions de glissement	15
1.3.1 Modélisations de la couche de Knudsen	15
1.3.2 Conditions de glissement dynamique	16
1.3.3 Conditions de saut de température	20
1.4 Difficultés et enjeux de la modélisation	20
2 Modèle mathématique pour les micro-écoulements gazeux	23
2.1 Equations de conservation	23
2.1.1 Équations pour un écoulement compressible	23
2.1.2 Équations pour un écoulement incompressible	26
2.1.3 Quand considérer un écoulement compressible ou incompressible?	27
2.2 Conditions aux limites	30
2.2.1 Conditions de glissement et de saut de température et pompage thermique	30
2.2.2 Condition de flux imposé en présence de glissement pariétal	31
2.3 Formulation adimensionnelle du problème	33
3 Résultats de la littérature sur la convection forcée en micro-canaux	37
3.1 Évolution du nombre de Nusselt à la paroi	37
3.1.1 Hypothèses utilisées et définition de Nu	37
3.1.2 Cas du régime établi sans dissipation visqueuse	38
3.1.3 Cas du régime établi avec dissipation visqueuse	39
3.1.4 Discussion de la validité des nombres de Nusselt analytiques	41
3.2 Influence des effets de compressibilité	43
3.3 Influence de la variation des propriétés physiques avec la température	45
3.4 Influence des rugosités de surface	46

3.5	Influence de la conduction dans les parois	47
3.6	Conclusion	48
II	Simulations avec le code ANSYS/Fluent	51
4	Modèles et méthodes numériques	53
4.1	Méthode de résolution numérique	53
4.2	Équations modélisées par ANSYS/Fluent	54
4.2.1	Équations de transport	54
4.2.2	Glissement dynamique et saut de température	55
4.2.3	Modélisation des conditions aux limites	56
4.2.4	Bilan total des flux de chaleur	57
4.3	Introduction de modèles par les UDF	58
4.3.1	UDF visant à modifier la condition de flux nul à la sortie de la conduite	58
4.3.2	UDF définissant le glissement dynamique quand l'écoulement est in- compressible	61
4.3.3	UDF visant à corriger le flux total à la paroi en présence de glissement	64
4.4	Conclusion	68
5	Validations et résultats	69
5.1	Écoulements non-glissants : cas incompressible	69
5.1.1	Présentation du problème	69
5.1.2	Modélisation et maillage	70
5.1.3	Validation des résultats	71
5.2	Écoulements compressibles non glissants	83
5.2.1	Description du calcul itératif	83
5.2.2	Résultats des simulations numériques	85
5.3	Écoulements compressibles avec glissement dans des conduites planes à pa- rois isothermes ou adiabatiques	88
5.3.1	Brève présentation du calcul analytique [3]	89
5.3.2	Paramètres des simulations	91
5.3.3	Influence du glissement dynamique	92
5.3.4	Influence du saut de température	102
5.4	Conclusion	105
III	Étude paramétrique avec le code CFCR2	107
6	Validations des résultats obtenus avec le code CFCR2	109
6.1	Formulation mathématique	109
6.2	Schéma discret du code CFCR2 (Convection Forcée Compressible en Régime Raréfié)	111
6.3	Paramètres des simulations numériques	112
6.4	Validation pour des parois à température imposée	113
6.4.1	Comparaisons des résultats	113
6.4.2	Influence du maillage	115
6.4.3	Influence de la température imposée à la paroi	117
6.4.4	Influence du rapport de pression	119
6.4.5	Influence de la puissance des forces visqueuses à la paroi	121
6.5	Validation pour des parois à flux imposé	123

TABLE DES MATIÈRES

6.5.1	Influence de la puissance des forces visqueuses à la paroi	125
6.5.2	Influence du flux de chaleur imposé aux parois	126
6.5.3	Influence du rapport de pression PR	128
6.6	Conclusion	129
7	Résultats de l'étude paramétrique	131
7.1	Détermination du domaine des paramètres	131
7.2	Écoulements quasi-isothermes $T_p = T_e$	133
7.2.1	Résultats du modèle complet	133
7.2.2	Comparaison avec la solution analytique	137
7.3	Résultats pour des parois uniformément chauffées	139
7.3.1	Résultats du modèle complet et établissement des corrélations en fonction des paramètres	140
7.3.2	Comparaisons entre le modèle complet et des modèles simplifiés . . .	144
7.3.3	Étude approfondie de quelques cas du domaine paramétré	148
7.4	Conclusion	150
	Conclusion générale	153
	Bibliographie	IX

Nomenclature

a	diffusivité thermique, $\alpha = \frac{k}{\rho C_p} [m^2.s]$
Br	nombre de Brinkman, $Br = \frac{\mu u^2}{k \Delta T}$
C_p	chaleur massique à pression constante $[J.kg^{-1}.K^{-1}]$
C_v	chaleur massique à volume constant $[J.kg^{-1}.K^{-1}]$
d	diamètre moyen des molécules $[m]$
D_h	diamètre hydraulique $[m]$
e_c	énergie cinétique volumique $[J.m^{-3}]$
Ec	nombre d'Eckert, $Ec = \frac{u^2}{C_p \Delta T}$
$\vec{f}$	force volumique
$\vec{g}$	vecteur gravité
H	largeur ou demi-largeur de la conduite $[m]$
h	enthalpie massique $[J.kg^{-1}]$
k	conductivité thermique $[W.m^{-1}.K^{-1}]$
k_B	constante de Boltzmann, $k_B = 1,38066 \times 10^{23} [J.K^{-1}]$
Kn	nombre de Knudsen, $Kn = \frac{\lambda}{D_h}$
$\bar{\bar{I}}$	tenseur unité d'ordre 2
L	longueur de la conduite $[m]$
L'	longueur de l'extension $[m]$
L_c	longueur caractéristique $[m]$
L_g	longueur de glissement $[m]$
M	masse molaire $[kg.mol^{-1}]$
$\dot{m}$	débit massique $[kg.s^{-1}]$
Ma	nombre de Mach, $Ma = \frac{u}{\sqrt{\gamma r T}}$
n	direction normale $[m]$
$\vec{n}$	vecteur normal à une surface
N_A	nombre d'Avogadro, $N_A = 6,022 \times 10^{23} [mol^{-1}]$
N_x	nombre de mailles dans la direction longitudinale
N_y	nombre de mailles dans la direction transversale
Nu	nombre de Nusselt, $Nu = \frac{h D_h}{k}$
P	pression $[Pa]$
P_{th}	vitesse de glissement due au pompage thermique $[m.s^{-1}]$
Pe	nombre de Péclet, $Pe = Re Pr = \frac{u D_h}{a}$
PR	rapport entre la pression à l'entrée et à la sortie de la conduite
Pr	nombre de Prandtl, $Pr = \frac{\mu C_p}{k}$
PW	travail des forces de pression $[W.m^{-3}]$
q_p	densité de flux de chaleur à la paroi $[W.m^{-2}]$
R	constante des gaz parfaits, $R = N_A k_B = 8,31446 [J.mol^{-1}.K^{-1}]$
r	constante spécifique du gaz, $r = \frac{R}{M} [J.kg^{-1}.K^{-1}]$
Re	nombre de Reynolds, $Re = \frac{\rho u D_h}{\mu}$

NOMENCLATURE

$\mathcal{S}$	surface d'une section/surface fermée délimitant un domaine [m^2]
T	température [K]
t	temps [s] ou direction tangentielle [m]
T_g	température de glissement [K]
T_p	température à la paroi [K]
U	composante longitudinale adimensionnelle du vecteur vitesse
u	composante longitudinale du vecteur vitesse [$m.s^{-1}$]
u_g	vitesse longitudinale de glissement [$m.s^{-1}$]
u_p	vitesse longitudinale de paroi [$m.s^{-1}$]
V	composante transversale adimensionnelle du vecteur vitesse
v	composante transversale du vecteur vitesse [$m.s^{-1}$]
$\mathcal{V}$	volume d'un domaine [m^3]
$\vec{v}$	vecteur vitesse
v_m	vitesse moléculaire [$m.s^{-1}$]
VD	dissipation visqueuse [$W.m^{-3}$]
W	profondeur de la conduite [m]
X	variable adimensionnelle longitudinale d'espace
x	variable longitudinale d'espace [m]
Y	variable adimensionnelle transversale d'espace
y	variable transversale d'espace [m]
z	variable d'espace selon la profondeur de la conduite [m]

Symboles grecs

β	coefficient de dilatation thermique [K^{-1}]
γ	coefficient polytropique, $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$
δ	distance moyenne entre les molécules [m]
ϵ	rapport $\frac{H}{L}$ et rugosité
θ	température adimensionnelle
λ	libre parcours moyen [m]
μ	viscosité dynamique [$Pa.s$]
ν	viscosité cinématique [$m^2.s^{-1}$]
χ	coefficient de compressibilité isotherme [Pa^{-1}]
ρ	masse volumique [$kg.m^{-3}$]
σ	longueur caractéristique du potentiel de Lennard-Jones [m]
σ_μ	coefficient d'accommodation visqueux
σ_T	coefficient d'accommodation thermique
σ_u	coefficient d'accommodation dynamique
ξ_T	coefficient de saut de température
τ	temps adimensionnel
$\bar{\tau}$	tenseur des contraintes visqueuses
Φ	quantité scalaire
Φ_v	dissipation visqueuse adimensionnelle

Indices

$*$ ou $+$	grandeur adimensionnée
∞	grandeur loin du domaine
μ	visqueux
b, m, d	indice de la température moyenne débitante
c	centre de la maille

NOMENCLATURE

<i>conv</i>	convectif
<i>diff</i>	diffusif
<i>e</i>	entrée
<i>g</i>	glissement
<i>imp</i>	imposée
<i>inc</i>	incrémental
<i>m</i>	moyen
<i>max</i>	maximal
<i>norm</i>	normalisé
<i>p</i>	paroi
<i>pf</i>	particule fluide
<i>s</i>	sortie
<i>sg</i>	sans glissement
<i>stg</i>	stagnant
<i>T</i> ou <i>th</i>	thermique
<i>t</i>	transposée
<i>u</i>	dynamique
0, <i>ref</i>	quantité de référence

Introduction

Les techniques récentes de miniaturisation ont conduit au développement croissant des MEMS (Micro Electro Mechanical Systems) utilisés dans différents secteurs (médecine, biologie, industrie, ...). Les MEMS sont des systèmes mécaniques comportant au moins un composant de taille micrométrique. Ce composant peut être une conduite, siège d'un écoulement, dont le diamètre hydraulique, D_h , est de l'ordre de quelques microns.

Ce travail de thèse a pour objectif de simuler numériquement des écoulements de gaz dans des micro-conduites dont les parois sont ou non chauffées. Le diamètre hydraulique D_h peut conduire à des nombres de Knudsen tels que $0,001 < Kn = \lambda/D_h < 0,1$, où λ est le libre parcours moyen des molécules de gaz. Dans ce cas, des phénomènes de glissement dynamique et de saut de température apparaissent.

Notre approche consiste à résoudre numériquement les équations de Navier-Stokes et de l'énergie avec des conditions aux limites de glissement, soit à l'aide du code commercial ANSYS/Fluent, soit à l'aide du code CFCR2 (Convection Forcée Compressible en Régime Raréfié) développé au laboratoire par E. Chénier [9, 10, 11, 67]. Ces deux codes sont basés sur la méthode des volumes finis.

Régimes d'écoulements

Pour caractériser le régime de l'écoulement en terme de continuité spatiale, il est nécessaire d'évaluer le taux de raréfaction à l'aide du nombre de Knudsen, du nom du physicien et océanographe Martin Knudsen (1871 - 1949), dont la définition générale est :

$$Kn = \frac{\lambda}{L_c} \tag{1}$$

où L_c représente une dimension caractéristique du volume dans lequel sont contenues les molécules. Dans le cas d'une conduite, $L_c = D_h$. Plus L_c diminue, plus le taux de raréfaction augmente.

Le libre parcours moyen λ représente la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux chocs successifs. Il est donc lié au nombre de molécules dans un volume donné. Plusieurs définitions équivalentes ont été attribuées, en se basant soit sur des grandeurs microscopiques (diamètre apparent et vitesse des molécules, longueur caractéristique du potentiel de Lennard-Jones, ...) soit sur des grandeurs macroscopiques (masse volumique, viscosité, pression et température du fluide). Dans tous les cas, le taux de raréfaction augmente lorsque λ augmente.

Les différents régimes d'écoulements sont indiqués sur la figure 1 en fonction du nombre de Knudsen.

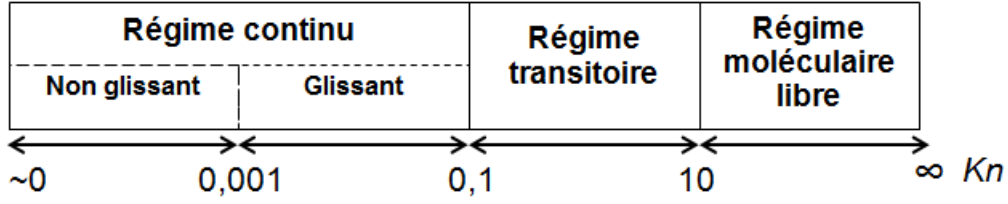


FIGURE 1 – Régimes d'écoulements en fonction du nombre de Knudsen

Méthodes de résolution en fonction du régime d'écoulement

Selon les régimes d'écoulements (Fig. 1), les méthodes numériques de résolution diffèrent :

- Quand $Kn \leq 0,001$, le régime est continu. Les équations de conservation de la mécanique des milieux continus avec leurs conditions aux limites classiques décrivent le problème ;
- Quand $0,001 \leq Kn \leq 0,1$, le régime reste continu et les équations de conservation restent applicables mais leurs conditions aux limites doivent être modifiées afin de prendre en compte des conditions de glissement dynamique et de saut de température au niveau des parois ;
- Quand le régime est transitoire ($0,1 \leq Kn \leq 10$) ou moléculaire libre ($Kn \geq 10$), l'hypothèse de continuité est mise à défaut. Dans ce cas, les modélisations basées sur les équations de Boltzmann ou les simulations directes par la méthode de Monte Carlo sont plus adaptées.

Equations décrivant les régimes glissants du premier ordre

Les molécules de gaz près d'une paroi, c'est à dire à une distance inférieure à λ , ne sont ni à la vitesse, ni à la température de cette paroi. L'épaisseur de cette zone, appelée couche de Knudsen, n'est pas négligeable en régime glissant ($0,001 \leq Kn \leq 0,1$). Pour la modéliser, on introduit le concept de glissement dynamique et de saut de température à la paroi. Diverses modélisations, agissant sur les conditions aux limites, ont été proposées. Nous avons retenu les suivantes :

Glissement dynamique

$$u_g = \left(\frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u} \right) Kn \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_p + \underbrace{\frac{3}{4} \left(\frac{\mu}{\rho T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_p}_{\text{Pompage thermique}} \quad (2)$$

Saut de température

$$T_p - T_g = 2 \left(\frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \right) \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} \right) \frac{\lambda}{P_r} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_p \quad (3)$$

où :

u_p et T_p sont la vitesse longitudinale et la température de la paroi ;

u_g et T_g sont les vitesses de glissement et la température du gaz à proximité de la paroi ;

σ_u et σ_T sont les coefficients d'accommodation dynamique et thermique entre le gaz et la paroi ;

n et t sont les directions normale et tangentielle à la paroi ;

$\gamma = C_p/C_v$, rapport des chaleurs spécifiques à pression constante, C_p , ou à volume constant, C_v , est le coefficient polytropique ;

$Pr = \nu/a$ est le nombre de Prandtl représentant le rapport entre la viscosité cinématique et la diffusivité thermique.

Le terme le plus à droite dans l'équation (2) représente le pompage thermique, appelé initialement transpiration thermique. Il représente la vitesse de déplacement du gaz des basses vers les hautes températures.

En présence du glissement dynamique, les molécules de gaz près de la paroi glissent en frottant sur la paroi. En conséquence, une source de chaleur apparaît et le flux de chaleur total à la paroi q_p est modifié. On l'écrit comme suit :

Densité de flux de chaleur à la paroi en présence de glissement

$$q_p = q_{cv} + q_{vis} = k \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_p + \mu u_g \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_p \quad (4)$$

où k est la conductivité thermique et μ la viscosité dynamique du gaz. Le premier terme, q_{cv} , représente la densité de flux de chaleur échangée par convection entre le fluide et la paroi et le second, q_{vis} , représente la densité de flux de chaleur dû aux frottements visqueux sur la paroi. Ce terme n'existe qu'en présence de glissement, c'est à dire si $u_g \neq 0$.

Dans certaines conditions, notamment lorsque la raréfaction est principalement due aux faibles valeurs de L_c ($10\lambda \leq L_c \leq 1000\lambda$) plutôt qu'à de faibles niveaux de pression (grandes valeurs de λ), de grandes différences de pression entre l'entrée et la sortie d'une conduite doivent être appliquées afin de générer un écoulement. Dans ces conditions, et même si les vitesses du gaz sont très faibles, il faut tenir compte des effets suivants :

- compressibilité du gaz ;
- travail des forces de pression ;
- dissipation visqueuse ;
- variation des propriétés du gaz avec la température.

Objectif et organisation du mémoire de thèse

La première partie du mémoire est une analyse bibliographique divisée en trois chapitres. Elle a pour objectifs d'introduire les problématiques liées à la modélisation des micro-écoulements de gaz (chap. 1), de présenter les modèles mathématiques qui seront utilisés dans la suite de la thèse (chap. 2) et de faire un état de l'art des principaux résultats concernant la convection forcée de gaz en micro-canaux (chap. 3). Plus précisément, le chapitre 1 présente le contexte de la thèse, les applications possibles et les échelles caractéristiques des micro-écoulements étudiés. On rappelle le domaine d'application des modèles continus "macroscopiques" et des modèles "microscopiques" tenant compte des phénomènes hors équilibre thermodynamique local présents dans la couche de Knudsen. Les modèles mathématiques utilisés sont présentés au chapitre 2 sous forme dimensionnelle puis adimensionnelle. Une analyse dimensionnelle permet de mettre en évidence les conditions dans lesquelles les effets de compressibilité doivent être pris en compte en microfluidique gazeuse (cf. §2.1.3). Une attention particulière est portée à l'écriture correcte des conditions aux

limites thermiques et à la conservation du flux de chaleur total transféré à la paroi en présence de glissement dynamique et d'une puissance non nulle des contraintes visqueuses (cf. §2.2.2). Le chapitre 3 présente les principaux résultats de la littérature sur la convection forcée de gaz en micro-canaux. La variation du nombre de Nusselt avec les paramètres de l'écoulement, l'influence de la variation des propriétés physiques avec la température, les effets liés à la compressibilité des gaz et l'influence des rugosités de surface sont discutés.

La seconde partie est consacrée aux méthodes de calcul utilisées avec ANSYS/Fluent et à l'analyse des résultats obtenus. Elle est divisée en deux chapitres. Le chapitre 4 présente les méthodes numériques utilisées avec ce code et les sous-programmes que nous avons dû intégrer afin de modifier ou de corriger certaines des conditions aux limites. Le chapitre 5 regroupe les résultats et leur validation pour des simulations allant des cas les plus simples (incompressible, non glissant) aux cas les plus complexes (compressible, glissant). Cette étude a permis de mettre en évidence des problèmes liés à la modélisation lorsque les nombres de Péclet sont inférieurs à l'unité ($Pe < 1$). Dans ces cas, les effets de diffusion inverse sont dominants et l'utilisation d'extension à l'amont de la conduite s'avère nécessaire. Ces calculs nous ont aussi permis de montrer que les effets de compressibilité se traduisent par des détentes du gaz localisées près de la sortie de la conduite : une partie de l'énergie interne du gaz se transforme en énergie cinétique : de ce fait, le gaz accélère mais se refroidit. Enfin, des comparaisons ont été effectuées avec des solutions analytiques d'écoulements compressibles et glissants mais supposés isothermes et soumis à de faibles variations de pression. Nous avons pu montrer que ces solutions restent valables même si les variations de pression sont importantes. Il faut cependant que les effets de détente ne soient importants que près de la sortie de la conduite afin de ne pas trop influencer les caractéristiques de la majeure partie de l'écoulement.

Dans les chapitres 6 et 7 qui constituent la troisième partie du mémoire, on présente les résultats obtenus avec le code développé par E. Chénier (CFCR2). Le chapitre 6 est consacré à la comparaison des solutions obtenues par CFCR2 et par ANSYS/Fluent pour des écoulements compressibles et glissants dans des conduites chauffées par une densité de flux de chaleur uniforme ou en imposant une température de paroi uniforme. Ces solutions sont aussi comparées à des résultats publiés récemment par Sun et Jaluria [65]. Il en ressort que les résultats des deux codes utilisés sont en bon accord à condition que le flux de chaleur dû aux contraintes visqueuses à la paroi (équation (4)) soit pris en compte dans ANSYS/Fluent par le biais d'un sous-programme que nous avons écrit. On note aussi des divergences entre ces résultats et ceux de [65] lorsque le glissement est important.

Une étude paramétrique ayant nécessité un grand nombre de simulations est présentée dans le chapitre 7. Cette étude a été réalisée avec le code CFCR2 car il s'est avéré être, environ, 60 fois plus rapide qu'ANSYS/Fluent. Cette étude a été menée pour deux types d'écoulements : un écoulement quasi-isotherme et un écoulement chauffé. Pour le premier, la paroi est maintenue à la température d'entrée du fluide : les variations de température du gaz ne sont dues qu'aux effets de la détente et de la dissipation visqueuse. Ces solutions sont ensuite comparées à une solution analytique approximative (isotherme) présentée par Arkilic et al. [3] en considérant deux longueurs de conduite. Il en ressort que cette solution est applicable avec une bonne précision dans une large gamme de différences de pression et pour les deux longueurs étudiées. Cependant, sa précision se dégrade pour de faibles longueurs de la conduite car les effets thermiques dus à la détente se propagent sur une longueur relativement plus importante.

Concernant les écoulements chauffés par des densités de flux de chaleur uniformes, les résultats obtenus ont permis d'établir, à l'aide d'un logiciel de statistiques, des corrélations

donnant : a) l'écart de température maximal et l'effet du pompage thermique en fonction du nombre de Reynolds à la sortie de la conduite : b) l'importance relative de la puissance des forces visqueuses aux parois et le nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Mach à la sortie.

Pour mieux comprendre la physique des écoulements dans des microconduites, nous avons traité les problèmes graduellement. Nous débutons par des écoulements non glissants, sous l'hypothèse d'incompressibilité puis dans des cas compressibles. Nous considérons ensuite des écoulements glissants qui, dans la littérature, sont le plus souvent supposés incompressibles. Parmi nos objectifs, il s'agit de comprendre si les simplifications utilisées dans la plupart des modèles retenus dans les publications récentes sont justifiées. A cette fin, nous avons considéré le modèle mathématique le plus complet possible, établi dans le cadre des hypothèses de la Mécanique des Milieux Continus. Cependant, ce travail est restreint aux phénomènes de glissement du premier ordre ($Kn \leq 0,1$) parce que les modèles du second ordre restent des sujets de controverse.

Des comparaisons entre les résultats fournis par des modèles simplifiés, c'est à dire dans lesquels l'un des phénomènes n'est pas intégré, sont ensuite discutées. Nous en avons déduit que, en dehors d'une gamme de pression peu étendue, il est impératif de prendre en compte le travail des forces de pression et la dissipation visqueuse, les flux de chaleur aux parois dus à la puissance des forces de viscosité et le pompage thermique.

Ce mémoire se termine par une conclusion dans laquelle nous présentons quelques perspectives pour de futures recherches.

Première partie

Analyse bibliographique

Chapitre 1

Introduction et généralités sur la microfluidique gazeuse

1.1 Contexte et applications

En raison du développement croissant des MEMS (Micro Electro Mechanical Systems), l'étude des écoulements de liquide ou de gaz et des transferts thermiques associés dans des conduites, chauffées ou non, dont le diamètre hydraulique, D_h , est de l'ordre de quelques microns, a suscité un nombre considérable de travaux au cours des vingt dernières années. Une revue bibliographique très récente de Kandlikar et al. [38] leur est consacrée. Il en ressort que les écoulements monophasiques *liquides* dans ces micro-canaux ont un comportement similaire à celui observé à l'échelle macroscopique et que la mécanique des milieux continus classique peut être utilisée pour les modéliser (équations de Navier-Stokes avec conditions aux limites d'adhérence). Les études sur les micro-écoulements liquides portent essentiellement sur l'amélioration des performances globales des systèmes où ils interviennent et également sur l'analyse du changement de phase liquide/vapeur lorsqu'il est présent.

En revanche, pour les écoulements *gazeux* à l'échelle microscopique, des phénomènes spécifiques, nécessitant des modélisations particulières, sont observés [22, 39]. Lorsque le nombre de Knudsen est tel que $0,001 < Kn = \lambda/D_h < 0,1$, où λ est le libre parcours moyen des molécules de gaz, on observe un régime faiblement raréfié, caractérisé par des phénomènes complexes à proximité de la paroi. Plus précisément, dans une couche appelée la "couche de Knudsen", dont l'épaisseur varie entre λ et 3λ depuis la paroi, les interactions intermoléculaires sont moins fréquentes qu'au cœur de l'écoulement et toutes les molécules de gaz n'ont pas la même amplitude de vitesse à une distance fixée de la paroi. Autrement dit, le gaz est dans un état de non équilibre thermodynamique local. Il en résulte un profil de vitesse moyen et une relation entre contrainte et taux de déformation qui sont non linéaires dans cette couche. A l'échelle du micro-canal, cela se traduit par des phénomènes de glissement dynamique (saut de vitesse), de saut de température et de "pompage thermique" (entraînement du fluide sous l'effet d'un gradient longitudinal de température ; cf. §1.3.2) dont les conséquences sur les grandeurs macroscopiques telles que le débit massique, la température moyenne débitante ou le flux de chaleur pariétal peuvent être non négligeables [44]. Ces phénomènes, liés aux effets de raréfaction du gaz près de la paroi, sont similaires à ceux qui peuvent être observés pour les écoulements dans les couches limites autour d'engins spatiaux en haute atmosphère. Ils doivent être pris en compte lorsqu'on s'intéresse à la modélisation des transferts convectifs dans des micro-systèmes gazeux car ils peuvent avoir, comme nous le verrons, des effets antagonistes sur les transferts de chaleur.

En pratique, on rencontre des micro-écoulements gazeux avec, éventuellement, des transferts thermiques, dans les applications suivantes [22, 38] :

- dans les micro-échangeurs thermiques pour le refroidissement des composants électroniques ou pour des applications en chimie (cf. Fig. 1.1 et [70]),
- les micro-sondes de pression, de température et les micro-débitmètres,
- les micro-pompes et turbines, notamment les pompes à vide de type Knudsen basées sur l'utilisation de l'effet du pompage thermique,
- les micro-systèmes de séparation d'espèce ou de mélange de gaz multiconstituant et les micro-analyseurs de gaz (micro-chromatographes et spectromètres de masse),
- les micro-buses pour le contrôle de la position de nano-satellites ou le contrôle actif des couches limites en aérodynamique,
- les poumons artificiels, ...

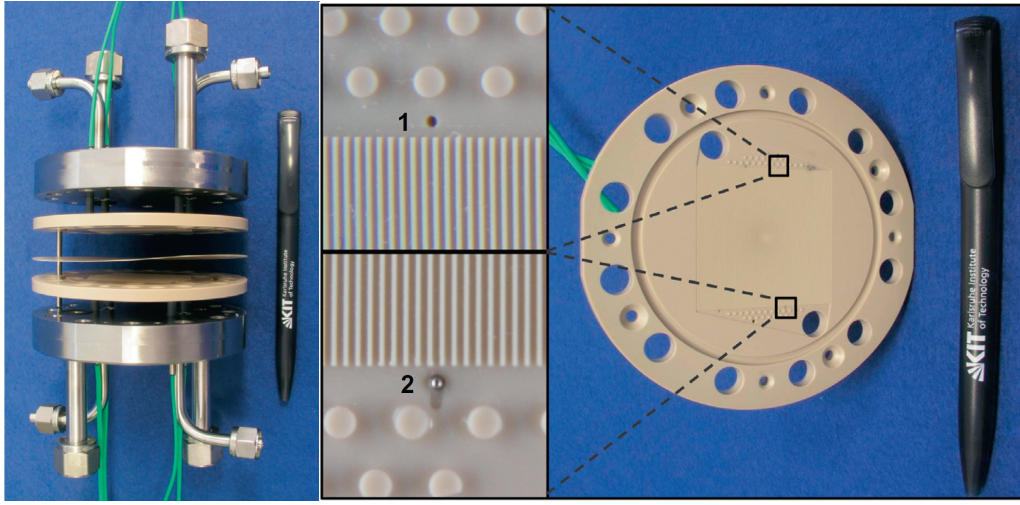


FIGURE 1.1 – Micro-échangeur thermique (tiré de [70]).

La figure 1.2, sur laquelle nous reviendrons plus largement au §1.2.5, fournit la taille caractéristique, L , de certains de ces micro-systèmes et les différents régimes d'écoulement associés en fonction du nombre de Knudsen.

Les micro-écoulements gazeux avec des transferts thermiques ont été analysés essentiellement par modélisation et simulation numérique. En effet, à cause des difficultés métrologiques, il existe très peu de travaux expérimentaux qui viennent supporter ces analyses théoriques et qui réalisent des mesures précises de température à ces échelles. La revue bibliographique de Kandlikar et al. [38] signale toutefois l'apparition d'une technique prometteuse, la micro-thermométrie par marquage moléculaire (micro molecular tagging thermometry, μ MTT), qui pourrait permettre de remonter à la distribution de température dans des micro-écoulements en suivant l'évolution de molécules rendues phosphorescentes.

1.2 Échelles caractéristiques des effets de raréfaction

1.2.1 Définitions des longueurs caractéristiques

L'analyse des effets d'échelle dans les micro-écoulements gazeux que nous présentons maintenant a été introduite par Bird (1994) [5] puis reprise entre autres par Gad-El-Hak (1999, 2003) [22, 24], Colin (2005) [12] et Zhang et al. (2012) [74]. La figure 1.3 introduit les longueurs caractéristiques nécessaires à cette analyse. Le diamètre moyen des molécules est noté d et la distance intermoléculaire moyenne est notée δ . Le libre parcours moyen entre

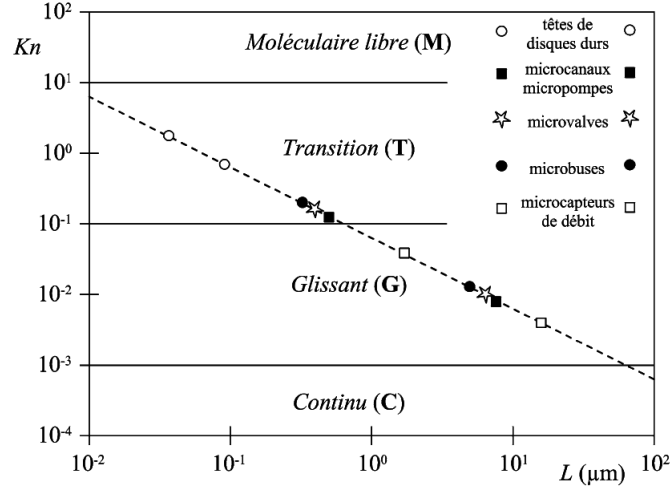


FIGURE 1.2 – Dimensions caractéristiques de certains micro-systèmes à fluide, plages de nombre de Knudsen et régimes d'écoulements correspondants à un fonctionnement en conditions standards (tiré de [14] d'après [39]).

deux chocs intermoléculaires est noté λ . Son évaluation est basée sur des modèles simplifiés présentés au §1.2.2. L_c est la longueur caractéristique de l'écoulement de gaz considéré. L_c peut être la hauteur ou le diamètre hydraulique de la conduite, la hauteur de l'obstacle ou le rapport de sa section sur son périmètre pour un écoulement autour d'un obstacle, etc. Dans un cadre général, on peut aussi évaluer L_c comme le rapport d'une grandeur macroscopique caractéristique de l'écoulement sur la valeur absolue de son gradient : par exemple $L_c = \rho / \left| \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|$ où ρ est la masse volumique du gaz. Enfin, on note L_{pf} la longueur caractéristique de la particule fluide, c'est à dire le volume élémentaire représentatif (VER) d'un écoulement en mécanique des milieux continus.

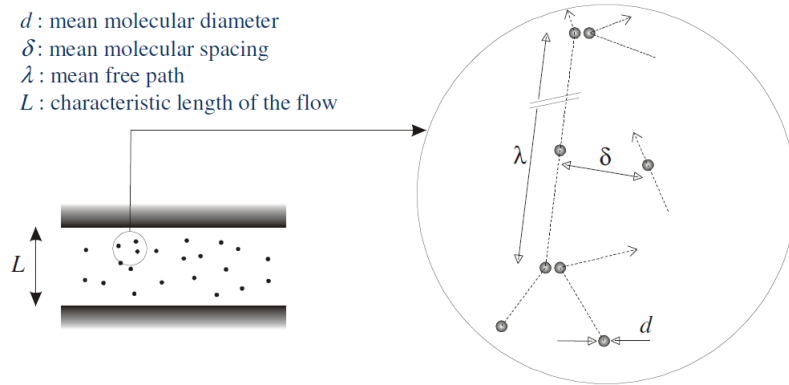


FIGURE 1.3 – Échelles caractéristiques liées aux effets de raréfaction dans les gaz (tiré du séminaire de S. Colin (MSME, avril 2014)).

1.2.2 Libre parcours moyen équivalent

Le libre parcours moyen est une grandeur importante qui permettra dans la suite d'évaluer le taux de raréfaction du gaz. Cependant, il n'est pas mesurable directement et il dépend de grandeurs (le diamètre et la vitesse des molécules) qui ne sont pas non plus mesurables. λ est donc déterminé à partir de modèles de collision qui dépendent de la

manière avec laquelle on modélise la distribution des vitesses des molécules et leurs forces ou potentiels d'interaction : modèles de sphères rigides impénétrables, de sphères variables, de Sutherland, de Lennard-Jones, etc [55]. En conséquence, il existe de nombreuses expressions de λ dans la littérature que Sharipov (2011) [59] conseille de plutôt nommer “libre parcours moyen équivalent”. De plus λ peut être exprimé en fonction de la viscosité, de la conductivité thermique, de la section moléculaire, de la surface de collision, etc [60]. Une des définitions les plus utilisées, établie à partir de la théorie cinétique, valable pour des gaz parfaits modélisés comme des sphères dures et ayant une distribution de vitesse de Maxwell (ou distribution de Maxwell-Boltzmann), est :

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi d^2 P} \quad (1.1)$$

où $k_B = \frac{R}{N_A} = 1,38066 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ est la constante de Boltzmann ($R = 8,31446 \text{ J/mol.K}$ est la constante des gaz parfaits et $N_A = 6,02214 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ le nombre d'Avogadro), P la pression, T la température. D'autres, comme dans le code ANSYS/Fluent, préfèrent définir λ en utilisant, à la place du diamètre d des molécules, la longueur caractéristique du potentiel de Lennard-Jones σ :

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 P} \quad (1.2)$$

Sharipov (2011) [59] conseille plutôt de choisir une expression de λ construite sur une grandeur macroscopique telle que la viscosité car elle peut être mesurée facilement. Dans ce cas, l'expression de λ s'écrit sous la forme :

$$\lambda \propto \frac{\mu}{P} v_m \quad (1.3)$$

$$\lambda \propto \frac{\mu}{P} \sqrt{2rT} \quad (1.4)$$

où μ est la viscosité dynamique, $r = \frac{R}{M}$ la constante spécifique et M la masse molaire du gaz parfait considéré. La vitesse des molécules, v_m , est en général évaluée à partir de la distribution des vitesses de Maxwell. Alors $v_m = \sqrt{2rT}$ si on considère la vitesse la plus probable de cette distribution, $v_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2rT}$ si on prend la vitesse moyenne et $v_m = \sqrt{3rT}$ si on considère la valeur efficace qui représente la racine carrée du carré moyen des vitesses moléculaires (RMS). Dans l'équation (1.4), la valeur de la constante de proportionnalité peut varier entre 0,89 et 1,33 : elle est en effet égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0,89$ dans [62, 60, 22, 44, 21], 1 dans [59] et $\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \approx 1,33$ dans [6]. Dans le cadre de cette thèse, nous avons retenu la première expression qui semble la plus utilisée :

$$\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\mu}{P} \sqrt{2rT} = \frac{\mu}{P} \sqrt{\frac{\pi r T}{2}} \quad (1.5)$$

ou

$$\lambda = \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{\pi}{2rT}} \quad (1.6)$$

L'équivalence entre les expressions de λ (1.1) et (1.5)-(1.6) est expliquée, par exemple, dans [60].

1.2.3 Gaz dilué et gaz dense

On considère que le gaz est *dilué*, c'est à dire que les interactions moléculaires sont négligeables, lorsque $\delta/d \gg 1$ ou, plus précisément, lorsque $\delta/d > 7$. Dans ce cas, les molécules passent la plupart du temps en vol libre avec, occasionnellement, une brève collision entre deux molécules seulement. Toutes les simplifications de la théorie cinétique des gaz et les équations de Boltzmann sont alors applicables. Dans le cas contraire, on dit que le gaz est *dense*.

Pour les conditions ambiantes ($P = 1 \text{ atm}$ et $T = 15^\circ \text{C}$), on considère que l'air est un gaz dilué car le rapport $\delta/d \approx 9$. En effet, le diamètre moyen des molécules d'air, considéré comme des sphères rigides, est $d \approx 4 \times 10^{-10} \text{ m}$ et un cube de $1 \mu\text{m}$ de côté contient $2,54 \times 10^7$ molécules d'air séparées par une distance moyenne $\delta = 0,0034 \mu\text{m}$ ($0,34 \text{ nm}$). On peut alors calculer, à partir de la relation (1.1), que le libre parcours moyen équivalent des molécules d'air est $\lambda = 0,065 \mu\text{m}$ (65 nm).

1.2.4 Validité des équations de Navier-Stokes

Pour que le modèle des équations de Navier-Stokes puisse être appliqué, les lois de Newton et l'approximation de milieu continu doivent être satisfaites. Les lois de la mécanique générale de Newton s'appliquent si la mécanique relativiste n'a pas besoin d'être mise en jeu, c'est à dire si les vitesses des particules sont bien inférieures à la vitesse de la lumière et si les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie peuvent être appliquées séparément. Cette hypothèse est systématiquement vérifiée pour les problèmes et les applications envisagées.

L'approximation de milieu continu est vérifiée si les variables dépendantes caractérisant l'écoulement (masse volumique, vitesse, température, contrainte, flux, etc) sont définies par des moyennes sur des particules fluides dont la dimension caractéristique, L_{pf} , est suffisamment grande pour contenir assez de molécules afin d'intégrer complètement le chaos moléculaire et être insensible à la microstructure du fluide. De plus, ces particules fluides doivent être suffisamment petites par rapport aux plus petites échelles de l'écoulement macroscopique afin de pouvoir utiliser le calcul différentiel pour les décrire. Il est aussi nécessaire que la particule fluide soit à l'équilibre thermodynamique local. Ces conditions sont traduites quantitativement ci-dessous.

Il a été montré que si les moyennes réalisées lors du calcul des grandeurs macroscopiques sont effectuées sur des particules fluides de volume V_{pf} contenant 10^4 (respectivement 10^6) molécules, le rapport de l'écart-type des fluctuations sur la moyenne est de 1% (resp. 0,1%) [22, 12]. Cela signifie donc que la longueur caractéristique de la particule fluide, $L_{pf} = V_{pf}^{1/3}$, doit contenir 22 (respectivement 100) molécules pour atteindre ces précisions. Par conséquent, pour qu'un micro-écoulement soit décrit par une approche continue et que les grandeurs macroscopiques soient insensibles à la microstructure du gaz, le rapport $\frac{L_c}{\delta}$ de la longueur caractéristique du domaine sur la distance intermoléculaire doit être plus grand que $\frac{L_{pf}}{\delta} = 22$ (respectivement 100). On retiendra donc que l'approche continue est valable si $\frac{L_c}{\delta} \geq 100$.

L'écoulement doit être à l'équilibre thermodynamique local ou au moins ne pas en être trop éloigné. Cela implique que, dans une particule fluide, la fréquence des collisions moléculaires, $f \approx \frac{v_m}{\lambda}$, doit être assez élevée pour que les molécules acquièrent localement à peu près la même vitesse et la même énergie. Il est donc nécessaire que λ soit plus petit que la longueur caractéristique de la particule fluide, L_{pf} , et donc bien plus petite que L_c . On considère en général qu'il est nécessaire que $Kn = \frac{\lambda}{L_c} < 0,1$ pour que l'équilibre thermodynamique local soit vérifié. Les différentes limites introduites ci-dessus sont représentées

dans la Fig. 1.4 où les échelles sont adaptées pour des écoulements d'air dans les conditions ambiantes.

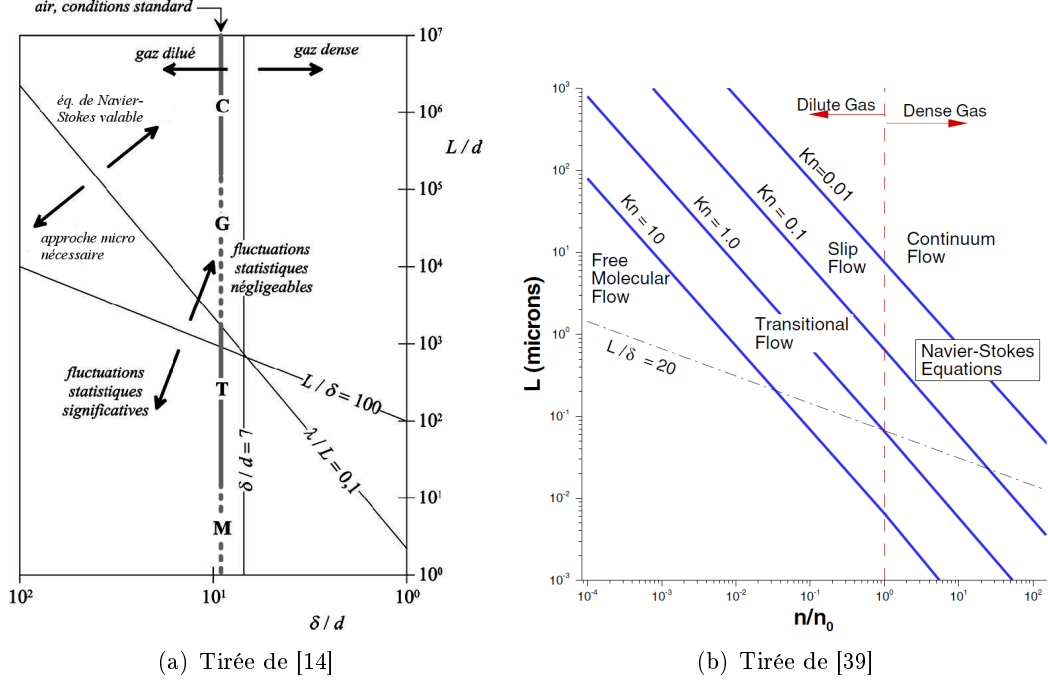


FIGURE 1.4 – Limites des principales approximations pour la modélisation des micro-écoulements gazeux d'après [5]. n/n_0 est le rapport des densités numériques des molécules pour les conditions courantes et ambiantes (L est ici la longueur caractéristique).

1.2.5 Les différents régimes d'écoulement en fonction du nombre de Knudsen Kn

Dans les faits, pour $0,001 < Kn < 0,1$, l'équilibre thermodynamique n'est effectivement vérifié qu'au cœur de l'écoulement et ne l'est pas toujours à proximité de la paroi, dans la mince couche de Knudsen. Cette couche ayant une épaisseur de l'ordre de $O(\lambda)$, elle n'est pas négligeable par rapport à la dimension caractéristique, L_c , de l'écoulement dans cette gamme de nombres de Knudsen. L'équilibre thermodynamique local n'est pas satisfait car les molécules de gaz de la couche de Knudsen ne "voient" qu'un demi espace, leur interaction avec la paroi est beaucoup plus fréquente qu'avec les autres molécules de gaz et la nature des chocs avec la paroi est différente des chocs intermoléculaires. Les conséquences sont doubles : la condition habituelle d'adhérence du gaz à la paroi n'est plus vérifiée et, dans la couche de Knudsen, il se peut qu'il n'y ait plus de relations linéaires entre contrainte et déformation et entre flux de chaleur et gradient de température. Ainsi, lorsque $0,001 < Kn < 0,1$, on considère que le régime d'écoulement est continu avec glissement, c'est à dire que l'approche continue peut être utilisée pour modéliser l'écoulement (les équations de Navier-Stokes sont valables) mais qu'il faut introduire des conditions aux limites spécifiques (conditions de glissement dynamique et de saut de température) pour approcher ce qui se passe dans la couche de Knudsen et modéliser correctement l'écoulement en dehors de cette couche. Ceci est détaillé au §1.3 suivant.

Si le nombre de Knudsen continue d'augmenter, tout l'écoulement se retrouve progressivement hors de l'équilibre thermodynamique. Ainsi, en partant du régime d'écoulement classique de la mécanique des milieux continus, si le nombre de Knudsen augmente et que

les effets de raréfaction s'intensifient, on passe par les différents régimes qui sont décrits ci-dessous et représentées dans les Figs. 1.2, 1.4 et 1.5 :

- pour $Kn < 10^{-3}$, c'est le régime continu avec adhérence au paroi (noté C dans les Figs. 1.2 et 1.4) : les équations de Navier-Stokes et les conditions aux limites classiques peuvent être utilisées ;
- pour $0,001 < Kn < 0,1$, c'est le régime continu avec glissement pariétal (noté G dans les Figs. 1.2 et 1.4) : les équations de Navier-Stokes restent valables mais des conditions aux limites spécifiques doivent être utilisées (cf. §1.3) ;
- pour $0,1 < Kn < 10$, c'est le régime de transition (noté T dans les Figs. 1.2 et 1.4) : c'est un régime hors équilibre thermodynamique, dans lequel les collisions intermoléculaires et avec la paroi doivent être prises en compte ; les équations de Navier-Stokes ne sont plus valables.
- pour $Kn > 10$: c'est le régime moléculaire libre (noté M dans les Figs. 1.2 et 1.4) où les interactions entre les molécules de gaz sont négligeables par rapport aux collisions sur les parois.

Bien sûr, dans cette classification, les bornes en Kn sont approximatives et elles vont dépendre du type de micro-système étudié.

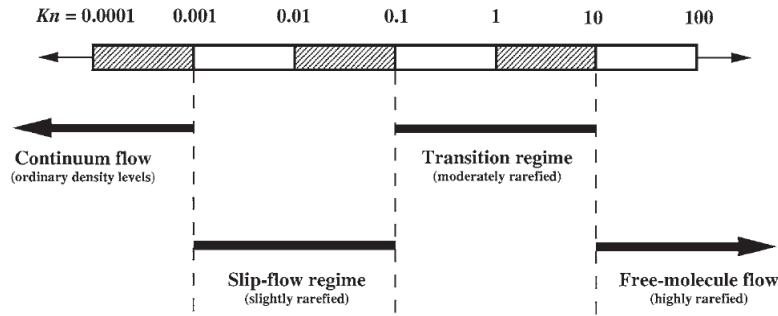


FIGURE 1.5 – Gammes de nombres de Knudsen correspondant aux différents régimes raréfiés (tiré de [22]).

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la modélisation par une approche continue de la convection forcée de gaz dilués dans des micro-canaux. Nous nous limitons donc à des nombres de Knudsen $Kn \leq 0,1$, mais nous nous concentrerons plus particulièrement sur le régime continu avec glissement pour $0,001 < Kn < 0,1$. Nous introduisons dans la section suivante la modélisation de la couche de Knudsen par l'utilisation de conditions aux limites de glissement et de saut de température.

1.3 Couche de Knudsen et conditions de glissement

1.3.1 Modélisations de la couche de Knudsen

Nous venons de voir que la couche de Knudsen est la région de non équilibre thermodynamique local qui est présente à proximité de la paroi dans n'importe quel écoulement gazeux. Cette couche peut être étudiée et simulée à partir d'une approche microscopique telle que la théorie cinétique des gaz, la dynamique moléculaire ou les simulations directes Monte Carlo (DSMC, [5]) des équations de Boltzmann. Selon l'approche microscopique utilisée, on trouve que l'épaisseur de la couche de Knudsen varie entre $0,9\lambda$ et $4,9\lambda$, la plupart des résultats donnant des valeurs comprises entre λ et 3λ [44, 74]. La description précise de cette couche est cruciale pour les applications pratiques en microfluidique mais, également, pour les écoulements hypersoniques puisque c'est à travers cette couche que

sont transférés les flux de quantité de mouvement et d'énergie entre le gaz et la paroi. Cependant, la mise en œuvre des approches microscopiques est très coûteuse en ressources de calcul et on préfère, lorsque les effets de raréfaction sont faibles, utiliser une approche continue, nettement moins coûteuse, pour modéliser l'écoulement et la couche de Knudsen. Malheureusement, la résolution des équations de Navier-Stokes ne permet pas de modéliser la relation non-linéaire entre contraintes et taux de déformation dans cette couche car les lois de comportement utilisées sont en général linéaires. Les conséquences peuvent être importantes. Par exemple, Lockerby et al. (2005) [44] présentent un écoulement de Poiseuille à un taux de raréfaction $Kn = 0,025$ dans lequel ils montrent que le débit massique croît de 15% par rapport au cas équivalent non raréfié, que 70% de cette augmentation sont dus au glissement pariétal mais que 30% restent dus aux effets "non-newtoniens" et au profil non-linéaire de la vitesse dans la couche de Knudsen.

Lockerby, Reese et al. [44, 43, 41, 52, 53] ont beaucoup travaillé sur les méthodes alternatives basées sur des modèles continus permettant une modélisation améliorée de la couche de Knudsen. Zhang et al. (2012) [74] propose une revue bibliographique sur ce sujet. La première de ces alternatives consiste à utiliser une loi de paroi algébrique, établie à partir de simulations microscopiques ou de résultats expérimentaux. Cette approche est tout à fait similaire à ce qui se fait en turbulence pour modéliser les sous-couches visqueuse, tampon et logarithmique. Cependant, les inconvénients sont les mêmes : il est nécessaire d'adapter les coefficients intervenant dans la loi de paroi à chaque type de configuration d'écoulement étudiée. L'autre alternative est la résolution des équations continues d'ordre élevé telles que les équations de Burnett ou super-Burnett. Cependant il apparaît que cette alternative n'est que partielle car elle ne permet pas de totalement rendre compte du comportement de l'écoulement dans la couche de Knudsen. De plus, elle n'est pas aisée à mettre en œuvre car elle nécessite d'utiliser des conditions aux limites d'ordre élevé et de connaître des coefficients difficilement identifiables expérimentalement. Toutefois, ces méthodes alternatives ne se justifient réellement que si l'on souhaite modéliser des écoulements tendant vers le régime transitionnel ($Kn > 0,1$).

1.3.2 Conditions de glissement dynamique

Lorsque $Kn \leq 0,1$, les modélisations basées sur les équations de Navier-Stokes restent les plus efficaces mais, pour qu'elles soient assez précises, il est nécessaire de pouvoir capturer l'essentiel des phénomènes physiques présents dans la couche de Knudsen. L'utilisation des conditions aux limites macroscopiques de glissement, introduites par Navier puis reprises par Maxwell en 1879 [47], est une approche phénoménologique qui répond à cette nécessité : elle permet de tenir compte de la couche de Knudsen, sans la modéliser complètement. Ces conditions aux limites de glissement et les profils de vitesse dans la couche de Knudsen sont illustrés dans les figures 1.6 et 1.7. Le profil de vitesse "vrai" du gaz est fortement non linéaire et il présente une vitesse de glissement à la paroi notée $u_{gaz,p}$. Si cette vitesse est imposée comme condition à la limite des équations de Navier-Stokes, on obtient le profil de vitesse en pointillés verts de la Fig. 1.7. De manière évidente, ce profil sous-estime la vitesse au cœur de l'écoulement et ne permet pas de retrouver le débit massique réel. Pour remédier à cela, le modèle de Navier et Maxwell consiste à imposer à la frontière une vitesse de glissement, u_g , plus grande que la vitesse réelle et proportionnelle au gradient normal de vitesse au bord de la couche de Knudsen. La condition à la limite de glissement, u_g , ne permet pas de modéliser le profil de vitesse dans la couche de Knudsen car la résolution des équations de Navier-Stokes y génère un profil de vitesse quasi linéaire (il est en fait parabolique pour un écoulement de Poiseuille en conduite ou en canal) ; en revanche, elle permet d'obtenir un profil de vitesse précis en dehors de la

Maxwell [47] s'écrit :

$$u_g - u_p = L_g \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_p \quad (1.7)$$

où u est la composante de vitesse du gaz tangente à la paroi, u_g la vitesse de glissement du gaz sur la paroi, u_p la vitesse de la paroi et n la normale à la paroi (cf. Fig. 1.6). Ici et dans la suite, l'indice g désigne une grandeur liée au glissement, c'est à dire une grandeur associée à une molécule de gaz située au contact de la paroi, alors que l'indice p désigne une grandeur attachée à la paroi.

L_g est la longueur de glissement représentée dans les Figs 1.6 et 1.7. C'est une grandeur empirique, proportionnelle à λ , qui dépend de la rugosité de surface, de la nature du gaz, de celle de la paroi et de l'interaction gaz/paroi (interaction spéculaire, diffuse, etc). Cette longueur doit être évaluée de manière précise pour que u_g fournisse une approximation correcte du profil de vitesse en dehors de la couche de Knudsen. Il existe de nombreuses formulations de L_g dans la littérature et son évaluation est soumise à de nombreuses controverses. Certaines formulations sont fonction d'un coefficient de glissement visqueux, σ_μ , d'autres fonction d'un coefficient d'accommodation, σ_u (Tangential Momentum Accommodation Coefficient : TMAC) et d'autres sont encore différentes. Il semble toutefois que, depuis peu, une formulation standard s'installe [59, 74, 38]. Nous la présentons ci-dessous dans les équations (1.8) et (1.9).

En fait, la condition de glissement donnée par l'équation (1.7) est très simplifiée. La forme générale proposée par Maxwell [47] peut être écrite [59, 74, 38] :

$$u_g - u_p = \sigma_\mu \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) \Big|_p + \sigma_T \frac{\mu r}{P} \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_p \quad (1.8)$$

où u et v sont les composantes tangentielle et normale du vecteur vitesse, projetées sur les directions tangente, t , et normale, n , à la paroi (n est ici dirigée de la paroi vers le gaz) et T est la température du gaz. σ_μ est le coefficient de glissement visqueux, σ_T le coefficient de glissement thermique. $\sigma_\mu = (2 - \sigma_u)/\sigma_u$ où σ_u est le coefficient d'accommodation dynamique ou TMAC. σ_u représente la fraction de quantité de mouvement tangentielle à la paroi que les molécules de gaz incidentes ont transféré en moyenne à la paroi suite aux chocs : $\sigma_u = 1$ dans le cas d'une paroi à réflexion diffuse et $\sigma_u \rightarrow 0$ dans le cas de paroi à réflexion spéculaire. L'expression de σ_T est discutée dans la suite.

On constate que la différence entre la vitesse de glissement et la vitesse de la paroi donnée par (1.8) dépend à la fois des gradients de vitesse et du gradient de température à la paroi. C'est en fait la contrainte de cisaillement pariétale, liée au taux de déformation, et le flux de chaleur par conduction dans le gaz, relié au gradient de température, qui se cachent derrière ces termes [42, 39]. Le terme $\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_p$ est nul si la paroi est lisse et horizontale. En revanche, il doit être pris en compte en cas de forte rugosité ou de forte courbure de la paroi, lorsque le rayon de courbure est de l'ordre ou plus petit que le libre parcours moyen, λ , des molécules de gaz [42, 13]. Le dernier terme de l'équation (1.8) traduit la transpiration ou pompage thermique (*thermal creep* en anglais), c'est à dire la présence d'un écoulement axial généré par un gradient longitudinal de température, l'écoulement allant des températures basses vers les températures élevées. Ce phénomène peut s'expliquer à l'échelle moléculaire de la manière suivante. On considère un élément de surface dS sur la paroi diffuse d'une conduite soumise à un gradient longitudinal de température. Les molécules de gaz en provenance du côté chaud qui impactent dS ont une quantité de mouvement supérieure à celle en provenance du côté froid. Par conséquent, en moyenne, les

molécules de la paroi appartenant à dS reçoivent une impulsion dirigée vers le côté froid. La paroi étant diffuse, par réaction, les molécules du gaz qui sont réfléchies reçoivent en moyenne une impulsion dirigée vers le côté chaud. Le pompage thermique est donc bien dirigé des températures basses vers les températures élevées. Nous verrons que ce phénomène n'est influent qu'à très petits nombres de Reynolds. De plus, l'analyse dimensionnelle au §2 montrera que ce terme est du second ordre en nombre de Knudsen ($O(Kn^2)$). Il sera donc négligeable, la plupart du temps, devant le premier terme du membre de droite de l'équation (1.8) car ce dernier est proportionnel à λ et du premier ordre en nombre de Knudsen (en $O(Kn)$).

Dans la plupart des applications pratiques, l'interaction du gaz avec la paroi est diffuse et le coefficient de glissement visqueux, σ_μ , est environ égal à 1. De son côté, le coefficient de glissement thermique, σ_T , est environ égal à $3/4$ dans le cas où la réflexion des molécules de gaz sur la paroi est spéculaire et environ égal à 1 dans le cas de réflexion diffuse. Une synthèse bibliographique et une discussion approfondie des valeurs de ces coefficients de glissement est proposée dans [59].

Lorsque le pompage thermique est négligeable, la condition à la limite (1.8) sur une paroi plane et lisse devient simplement :

$$u_g - u_p = \sigma_\mu \lambda \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_p \quad (1.9)$$

On obtient donc une condition à la limite de type Fourier ou Robin, du premier ordre en nombre de Knudsen, qui génère un saut de vitesse à la paroi. La longueur de glissement associée à cette condition à la limite s'écrit en fonction du coefficient de glissement visqueux :

$$L_g = \sigma_\mu \lambda \quad (1.10)$$

D'après les revues bibliographiques de Colin (2005, 2012) [12, 13], les conditions de glissement dynamique (1.8)-(1.10) se trouvent aussi souvent écrites, au premier ordre en Kn , sous la forme :

$$u_g - u_p = \frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u} \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) \Big|_p + \frac{3}{4} \frac{\mu r}{P} \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_p \quad (1.11)$$

$$u_g - u_p = \frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u} \lambda \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_p \quad (1.12)$$

$$L_g = \frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u} \lambda \quad (1.13)$$

La formulation (1.11) et (1.12) de la condition de glissement dynamique est compatible avec la formulation (1.8) et (1.9), excepté le terme de pompage thermique dont le facteur $3/4$ est constant dans (1.11) quel que soit le type d'accommodation à la paroi. Ceci n'est pas en accord avec l'analyse de Sharipov (2011) [59] qui montre que ce facteur ne convient que pour les parois spéculaires et qu'il vaut 1 environ pour les parois diffuses.

Pour étendre le domaine de validité des modèles continus à $Kn > 0,1$ (jusqu'à $Kn \approx 0,5$), de nombreux auteurs ont proposé des formulations des conditions de glissement

construites à partir de développements limités d'ordre 2 ou plus en nombre de Knudsen [39, 4, 20, 7, 13]. À l'ordre 2, la forme générale de ces conditions de glissement s'écrit :

$$u_g - u_p = \beta_{u1} \lambda \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_p + \beta_{u2} \lambda^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right|_p \quad (1.14)$$

où β_{u1} et β_{u2} sont des fonctions de σ_u . Dans le cadre de cette étude, nous nous limiterons à $Kn < 0,1$ et ces conditions aux limites d'ordre élevé ne seront pas mises en œuvre.

1.3.3 Conditions de saut de température

De la même manière que Maxwell (1879) [47] a introduit les conditions de glissement dynamique et de saut de vitesse à la paroi lorsque $10^{-3} \leq Kn \leq 10^{-1}$, Smoluchowski (1898) [69] a introduit les conditions équivalentes pour caractériser le saut de température à la paroi. Les conditions équivalentes à (1.9) et (1.12) s'écrivent pour la température, au premier ordre en Kn [59, 74, 38] :

$$T_g - T_p = \xi_T \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_p \quad (1.15)$$

$$T_g - T_p = \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{\lambda}{Pr} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_p \quad (1.16)$$

où T_g est la température du gaz à la paroi et T_p la température de la paroi. ξ_T est le coefficient de saut de température, σ_T est le coefficient d'accommodation thermique, $\gamma = C_p/C_v$ le coefficient isentropique représentant le rapport entre la chaleur massique à pression constante, C_p , et la chaleur massique à volume constant, C_v , et Pr le nombre de Prandtl. D'après l'étude de Sharipov (2011) [59], ξ_T est environ égal à 2 pour des parois diffuses et des gaz monoatomiques (He , Ar , Ne , Xe) et leur mélanges binaires. Or, dans le cas de gaz parfaits monoatomiques, $\gamma = \frac{5}{3} = 1,67$ et $Pr \approx 0,7$. Donc, comme $\sigma_T = 1$ pour une paroi diffuse, on trouve que le facteur $\frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{1}{Pr} = 1,79$ dans l'équation (1.16) est légèrement inférieur à ξ_T .

On notera que les conditions de saut de température traduisent la présence de la couche de Knudsen et sont a priori valables quel que soit le type de condition à la limite thermique imposée à la paroi. Nous insistons sur ce point car certains auteurs n'introduisent pas les conditions de saut de température lorsqu'un flux de chaleur est imposé sur une paroi.

1.4 Difficultés et enjeux de la modélisation

Dans cette thèse, on s'intéresse à des écoulements de gaz à $Kn < 0,1$, dans des micro-conduites de grand rapport de forme longitudinal L/D_h , soumis à un chauffage modéré des parois et à des différences de pression entre l'entrée et la sortie compris entre quelques centibars et quelques bars. On considérera, par exemple, des conduites de diamètres hydrauliques et de longueurs tels que $1 \mu m \leq D_h \leq 10 \mu m$ et $100 \mu m \leq L \leq 2 mm$. Pour cette classe d'écoulements, la conversion du travail mécanique en énergie interne, donc sous forme de chaleur, est importante. On peut montrer que les nombres de Mach, $Ma = \frac{u}{\sqrt{\gamma r T}}$, et de Brinkman, $Br = \frac{\mu u^2}{k \Delta T}$, peuvent atteindre, voire dépasser, l'unité et les nombres de Reynolds, $Re = \frac{u D_h}{\nu}$, et de Péclet, $Pe = \frac{u D_h}{a}$, peuvent varier entre 10^{-2} et 10^2 . Notons

que k représente la conductivité thermique du gaz, ν sa densité cinétique et a sa diffusivité thermique. En conséquence, la modélisation de ce type d'écoulement nécessite de prendre en compte les effets :

- de non-équilibre thermodynamique local près de la paroi tels qu'ils ont été décrits aux §1.2.5 et 1.3 (glissement dynamique, saut de température et pompage thermique),
- de compressibilité des gaz (détente et refroidissement volumique du gaz liés au travail des forces de pression) [40, 32, 65],
- de la dissipation visqueuse (source de chaleur volumique) [32, 65],
- du travail des forces de viscosité à la paroi en présence de glissement dynamique [62, 31],
- de la variation des propriétés physiques avec la température [56],
- de la diffusion axiale dominante lorsque Re et Pe sont inférieurs à l'unité,
- de la conduction dans les parois (transferts thermiques conjugués) car elles sont en général plus épaisses et conductrices que le gaz circulant dans la conduite [64].
- de la rugosité des parois, qui peut être très importante à ces petites échelles.

Une étude bibliographique des nombreux travaux sur le sujet a montré que l'ensemble de ces effets n'est jamais pris en compte simultanément dans les modèles numériques employés. Cela peut se justifier dans certains cas lorsque l'effet du ou des termes omis dans le modèle est négligeable sur le comportement dynamique et thermique de l'écoulement considéré. Cependant, la justification de l'utilisation d'hypothèses simplificatrices dans le modèle n'est souvent pas apportée. Un des objectifs de cette thèse est donc d'étudier l'influence des différents phénomènes décrits ci-dessus dans le cas d'écoulements de gaz dans des micro-canaux 2D plans, chauffés ou non. L'analyse portera plus particulièrement sur les aspects thermiques : nous analyserons l'influence des différents termes de l'équation de l'énergie et des conditions aux limites thermiques sur l'évolution du champ de température, du nombre de Nusselt pariétal et aussi des débits massiques.

Pour cela, nous présentons au chapitre 2 un modèle mathématique que nous considérons comme complet et des modèles simplifiés permettant de modéliser les micro-écoulements gazeux dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Nous rappellerons également les principaux résultats qui peuvent être déduits d'une analyse dimensionnelle de ces micro-écoulements. Au chapitre 3, nous présentons les principaux résultats de la littérature concernant la convection forcée de gaz en micro-conduites et les différents phénomènes physiques énumérés ci-dessus, pour les classes d'écoulements envisagées.

Chapitre 2

Modèle mathématique pour les micro-écoulements gazeux

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que pour modéliser des écoulements de gaz dans des réseaux de micro-conduites, dans les micro-pores d'un milieu poreux ou autour d'obstacles de taille micrométrique, dont les parois sont chauffées ou non, il est possible d'appliquer les équations de la mécanique des milieux continus tant que le nombre de Knudsen est suffisamment petit ($Kn \leq 0,1$). Cependant, les conditions aux limites près des parois solides doivent tenir compte du non équilibre thermodynamique local et des premiers effets de raréfaction lorsque $0,001 \leq Kn \leq 0,1$. D'autre part, selon les niveaux de pression imposés en entrée et en sortie des micro-canaux, les écoulements peuvent être incompressibles ou compressibles, avec des effets thermiques liés à la dissipation visqueuse ou au travail des forces de pression (détente du gaz) plus ou moins prononcés.

Dans le cadre de cette thèse, nous n'étudierons que des micro-écoulements stationnaires dans des micro-canaux 2D plan. Nous rappelons donc les équations de conservation au §2.1 et les conditions aux limites au §2.2 qui permettent de modéliser ces micro-écoulements gazeux stationnaires. Les équations pour les écoulements compressibles sont présentées au §2.1.1 et celles des écoulements incompressibles au §2.1.2. Une discussion sur les critères permettant de choisir un modèle incompressible plutôt que compressible est proposée au §2.1.3. Les conditions aux limites spécifiques que nous utiliserons pour tenir compte des effets de raréfaction à la paroi sont rappelées au §2.2.1. Les conditions de flux thermique imposé à la paroi sont détaillées dans une section spécifique, au §2.2.2, car leur écriture nécessite une attention particulière en cas de glissement dynamique. L'analyse dimensionnelle de ce modèle, appliquée à des écoulements en micro-conduites de grand rapport de forme longitudinal, est proposée au §2.3. Elle permet de simplifier les équations et d'établir une solution analytique valable lorsque les différences de pression entre l'entrée et la sortie du canal sont modérées. Les solutions obtenues avec le modèle complet et avec les modèles simplifiés les plus utilisés dans la littérature seront comparées dans le cadre de cette thèse.

2.1 Equations de conservation

2.1.1 Équations pour un écoulement compressible

Pour un écoulement stationnaire de gaz parfait de Newton-Stokes, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement s'écrivent :

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \vec{f} - \nabla P + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} \quad (2.2)$$

où le tenseur des contraintes visqueuses est défini par :

$$\bar{\bar{\tau}} = \mu(\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^t) - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{v} \bar{\bar{I}} \quad (2.3)$$

Dans l'équation (2.2), $\vec{f}$ représente les forces volumiques. Dans le cadre de cette étude, nous les négligerons. En effet, en microfluidique gazeuse, les effets de surface sont prépondérants devant les effets de volume et les forces de gravité sont négligeables devant les forces de viscosité.

L'équation de l'énergie peut prendre plusieurs formes. En notant h l'enthalpie massique sensible du gaz et $e_c = \rho v^2/2$ son énergie cinétique volumique et en négligeant la puissance des forces extérieures de volume, l'équation de conservation stationnaire de l'énergie totale s'écrit :

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v} h - k \nabla T + e_c \vec{v} - \bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{v}) = 0 \quad (2.4)$$

De plus, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\nabla \cdot (e_c \vec{v} - \bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{v}) = -\vec{v} \cdot \nabla P - \bar{\bar{\tau}} : \nabla \vec{v} \quad (2.5)$$

En soustrayant le théorème de l'énergie cinétique (2.5) de l'équation de l'énergie totale (2.4), on obtient l'équation de l'énergie sous forme enthalpique :

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v} h - k \nabla T) = \vec{v} \cdot \nabla P + \bar{\bar{\tau}} : \nabla \vec{v} \quad (2.6)$$

Le terme $\bar{\bar{\tau}} : \nabla \vec{v} = \mu \phi_v > 0$ représente la dissipation visqueuse, c'est à dire la dissipation de l'énergie mécanique sous forme de chaleur due aux effets visqueux. C'est un terme de source de chaleur, positif, dans l'équation de l'énergie mais un terme de puits, négatif, dans le théorème de l'énergie cinétique. L'intégration sur le volume de l'écoulement du terme de dissipation visqueuse dans l'équation (2.5) représente les pertes de charge. Il ne faut pas confondre $\bar{\bar{\tau}} : \nabla \vec{v}$ dans l'équation (2.4) avec le terme $\nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{v})$ dans l'équation (2.5) qui représente, une fois intégré, la puissance extérieure des contraintes visqueuses. Le terme $\vec{v} \cdot \nabla P$ est le travail des forces de pression (il est issu du terme en DP/Dt lorsque l'écoulement est instationnaire). Ce terme est négatif dans l'équation de l'énergie pour des écoulements en conduite car le vecteur vitesse et le gradient de pression ont des directions opposées. Il traduit le puits de chaleur lié à la détente du gaz, autrement dit, la transformation de l'énergie interne en énergie cinétique.

Dans (2.4) et (2.6), l'enthalpie sensible du gaz est définie par :

$$h(T) = \int_{T_{ref}}^T C_p(T) dT = C_p(T - T_{ref}) \quad (2.7)$$

où T_{ref} est une température de référence et où la chaleur spécifique, C_p , est considérée constante dans la deuxième égalité. En effet, pour les gaz et les gammes de température considérés dans cette thèse, la dépendance de C_p en fonction de la température est en

général très faible et il sera possible de la négliger. La masse volumique est donnée par la loi des gaz parfaits :

$$\rho(P, T) = \frac{P}{rT} \quad (2.8)$$

La conductivité thermique, $k(T)$, et la viscosité dynamique, $\mu(T)$, varient en fonction de la température. On considèrera qu'elles suivent des lois en puissance de la forme :

$$k(T) = k_e \left(\frac{T}{T_e} \right)^{n_k} \quad (2.9)$$

$$\mu(T) = \mu_e \left(\frac{T}{T_e} \right)^{n_\mu} \quad (2.10)$$

où l'indice "e" fait référence aux conditions d'entrée et n_k et n_μ sont des nombres réels connus.

Dans la suite de ce chapitre, on considèrera des écoulements 2D permanents, s'écoulant dans la direction x , entre deux plaques planes parallèles distantes d'une hauteur H dans la direction y , c'est à dire ayant un diamètre hydraulique $D_h = 2H$ (cf. Fig. 2.1). En notant (u, v) les composantes dans les directions (x, y) du vecteur vitesse $\vec{v}$, en supposant **que** C_p , μ et k **sont constantes** et que les forces de gravité sont négligeables ($\vec{f} = \rho\vec{g} = \vec{0}$), les équations (2.1)-(2.2)-(2.6) pour cette configuration se réécrivent sous forme non conservative :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (2.11)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] \quad (2.12)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] \quad (2.13)$$

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \left(u \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \bar{\tau} : \nabla \vec{v} \quad (2.14)$$

où la dissipation visqueuse s'écrit :

$$\bar{\tau} : \nabla \vec{v} = \mu \phi_v = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^2 - \frac{2}{3} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right]^2 \right\} \quad (2.15)$$

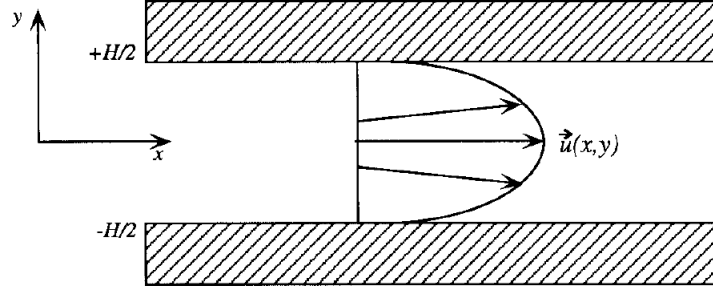


FIGURE 2.1 – géométrie et profil de vitesse dans un micro-canal entre deux plans parallèles (tiré de [3])

2.1.2 Équations pour un écoulement incompressible

Dans le cas d'un micro-écoulement de gaz à très basse vitesse, généré par une très faible différence de pression, on peut faire l'hypothèse que l'écoulement est incompressible. Dans ce cas, la loi d'état devient $\rho = cste$ si le problème est isotherme ou $\rho = \rho(T)$ s'il est anisotherme. La différentielle de l'enthalpie massique s'écrit [6] :

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp = C_p dT + \left[\frac{1}{\rho} - T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{\rho} \right) \Big|_p \right] dp \quad (2.16)$$

En intégrant l'équation (2.16) entre un état de référence (T_{ref}, p_{ref}) où l'enthalpie massique est h_{ref} et l'état (T, p) , on obtient

$$h - h_{ref} = \int_{T_{ref}}^T C_p dT + \int_{p_{ref}}^p \left[\frac{1}{\rho} - T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{\rho} \right) \Big|_p \right] dp \quad (2.17)$$

Pour un écoulement isovolume, ρ est constante et l'équation (2.17) devient

$$h - h_{ref} = \int_{T_{ref}}^T C_p dT + \frac{p - p_{ref}}{\rho} \quad (2.18)$$

et si de plus C_p est supposée constante :

$$h - h_{ref} = C_p(T - T_{ref}) + \frac{p - p_{ref}}{\rho} \quad (2.19)$$

Les deux formes compressible et incompressible de l'enthalpie sensible (éqs. (2.7) et (2.19)) sont justifiées par exemple page 286, éq. (9.8-8) de [6].

Pour des écoulements incompressibles, les équations stationnaires de conservation de la masse (2.1) et de la quantité de mouvement (2.2) deviennent :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.20)$$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \vec{f} - \nabla P + \nabla \cdot \vec{\tau} \quad (2.21)$$

où le tenseur des contraintes visqueuses se réduit à :

$$\bar{\tau} = \mu(\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^t) \quad (2.22)$$

En combinant l'équation de l'énergie sous forme enthalpique (2.6) et l'équation (2.16) et en tenant compte du fait qu'en incompressible on a :

$$\nabla \cdot (P \vec{v}) - \vec{v} \cdot \nabla P = P \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.23)$$

on obtient l'équation de l'énergie suivante pour un écoulement incompressible :

$$\nabla \cdot (\rho C_p (T - T_{ref}) \vec{v} - k \nabla T) = \bar{\tau} : \nabla \vec{v} \quad (2.24)$$

Dans le cas d'écoulements incompressibles 2D, s'écoulant dans la direction x , entre deux plaques planes parallèles distantes d'une hauteur H dans la direction y et en supposant que C_p , μ et k sont constantes et que les forces de gravité sont négligeables ($\vec{f} = \rho \vec{g} = \vec{0}$), les équations (2.20)-(2.21)-(2.24) se réécrivent sous forme non conservative :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.25)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (2.26)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (2.27)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho C_p} \bar{\tau} : \nabla \vec{v} \quad (2.28)$$

où $\nu = \frac{\mu}{\rho} = cste$ est la viscosité cinématique et $\alpha = \frac{k}{\rho C_p} = cste$ est la diffusivité thermique et où la dissipation visqueuse s'écrit :

$$\bar{\tau} : \nabla \vec{v} = \mu \phi_v = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^2 \right\} \quad (2.29)$$

2.1.3 Quand considérer un écoulement compressible ou incompressible ?

Traditionnellement, on considère qu'un écoulement est incompressible lorsque le nombre de Mach local, Ma , reste inférieur à 0,2 ou 0,3 dans tout le domaine de l'écoulement. Cette condition est nécessaire mais elle n'est pas suffisante lorsqu'on considère des écoulements en micro-canaux dans lesquels les effets visqueux dominent les effets inertiels. C'est ce dont nous allons discuter maintenant. Cette discussion est adaptée de Panton (1996) [54] et Gad-el-Hak (2000) [23].

Quand considère-t-on qu'un écoulement est incompressible ? Lorsque, quand on suit une particule fluide dans son mouvement, celle-ci conserve son volume (ou sa densité).

C'est à dire qu'un écoulement qu'on appelle couramment "incompressible" est en fait un écoulement "isovolume" (ou "isodensité"). On parlera donc d'écoulement isovolume plutôt qu'incompressible dans la suite de cette section. La traduction mathématique de cette définition est obtenue à partir de l'équation de continuité que l'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\text{div } \vec{v} \quad (2.30)$$

où $\frac{D\rho}{Dt}$ est la dérivée particulaire de la masse volumique, c'est à dire la variation de ρ lorsqu'on suit la particule fluide dans son mouvement. Autrement dit, un écoulement est isovolume lorsque $\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \rightarrow 0$.¹ Or, dans un fluide monoconstituant, la masse volumique est une fonction de la pression et de la température : $\rho = \rho(P, T)$. La dérivée particulaire peut donc s'écrire :

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \chi \frac{Dp}{Dt} - \beta \frac{DT}{Dt} \quad (2.31)$$

avec χ le coefficient de compressibilité isotherme et β le coefficient de dilation thermique isobare définis par :

$$\chi(P, T) = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_T \quad (2.32)$$

$$\beta(P, T) = -\frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_P \quad (2.33)$$

Ainsi, un écoulement doit être considéré comme compressible (non isovolume) lorsque les dérivées particulières de la pression et/ou de la température sont suffisantes. Pour en juger, il est nécessaire de rendre adimensionnelle l'équation (2.31) de manière appropriée, c'est à dire en choisissant bien les grandeurs de référence. Nous allons effectuer ce travail dans le cas d'écoulements en conduite de longueur L et de hauteur H ayant, à l'entrée, une température moyenne $\bar{T}_e$, une masse volumique moyenne $\bar{\rho}_e$ et une vitesse caractéristique $\bar{u}_e = \frac{\dot{m}}{\bar{\rho}_e H}$, où $\dot{m}$ est le débit massique. On prend L , $\bar{\rho}_e$, $\bar{u}_e$, $L/\bar{u}_e$, χ_e et β_e pour grandeurs de référence des coordonnées spatiales, x et y , de la masse volumique, ρ , de la vitesse, $\vec{v}$, du temps, t , du coefficient de compression isotherme, χ , et du coefficient de dilatation thermique, β , respectivement. Enfin, on note $\bar{P}_0$ et ΔT_0 les grandeurs de référence pour la pression, P , et la différence de température, $T - \bar{T}_e$.

Considérons tout d'abord le cas d'un écoulement dans une conduite adiabatique de taille normale (non micrométrique). Dans ce cas, les effets inertiels dominent les effets visqueux. On peut donc prendre pour $\bar{P}_0$ l'échelle de pression inertielle :

$$\bar{P}_0 = \bar{\rho}_e \bar{u}_e^2 \quad (2.34)$$

Cette échelle est deux fois la pression dynamique à l'entrée de la conduite c'est à dire, d'après le théorème de Bernoulli, la différence de pression que subirait un fluide parfait qui

1. Notez que cette condition n'empêche pas que la masse volumique change d'une particule fluide à une autre. En particulier, dans les écoulements atmosphériques ou océaniques, stratifiés en masse volumique sous les effets de la pression, de la température ou de la salinité, la densité varie avec l'altitude mais l'écoulement peut être traité comme isovolume.

passerait de la vitesse $\bar{u} = \bar{u}_e$ à la vitesse $\bar{u} = 0$ (repos). Du point de vue thermique, si la paroi est adiabatique, les variations de température ne sont dues qu'à la conversion irréversible du travail mécanique en énergie interne à travers la dissipation visqueuse. L'intensité de cette variation (augmentation de température) dépend du rapport entre la dissipation visqueuse et la diffusion thermique. On peut donc prendre comme échelle :

$$\Delta T_0 = \frac{\mu_e \bar{u}_e^2}{k_e} = Pr_e \frac{\bar{u}_e^2}{C_{pe}} \quad (2.35)$$

où μ_e , k_e , C_{pe} et Pr_e sont respectivement la viscosité dynamique, la conductivité thermique, la chaleur spécifique à pression constante et le nombre de Prandtl à l'entrée de la conduite. Ainsi, en utilisant les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} - X &= x/L, \\ - Y &= y/L, \\ - \tau &= t\bar{u}_e/L, \\ - U &= u/\bar{u}_e, \\ - V &= v/\bar{u}_e, \\ - \rho^* &= \rho/\bar{\rho}_e, \\ - \chi^* &= \chi/\chi_e, \\ - \beta^* &= \beta/\beta_e, \\ - P^* &= P/\bar{P}_0 = P/\bar{\rho}_e \bar{u}_e^2, \\ - \theta &= \frac{T - \bar{T}_e}{\Delta T_0} = \frac{T - \bar{T}_e}{\frac{\mu_e \bar{u}_e^2}{k_e}} = \frac{T - \bar{T}_e}{Pr_e \frac{\bar{u}_e^2}{C_{pe}}} \end{aligned}$$

L'équation (2.31) se réécrit sous forme adimensionnelle :

$$\frac{1}{\rho^*} \frac{D\rho^*}{D\tau} = \gamma Ma_e^2 \left(\chi^* \frac{DP^*}{D\tau} - Pr_e \frac{\beta_e}{\chi_e \rho_e C_{pe}} \beta^* \frac{D\theta}{D\tau} \right) \quad (2.36)$$

Dans cette équation, si les grandeurs de référence sont bien choisies, les grandeurs sans dimension sont de l'ordre de l'unité et l'importance relative de chaque terme est donnée par la valeur des nombres sans dimension : le nombre de Mach à l'entrée, $Ma_e = \sqrt{\frac{\bar{\rho}_e \chi_e}{\gamma}} \bar{u}_e$, le nombre de Prandtl à l'entrée, $Pr_e = \frac{\mu_e C_{pe}}{k_e}$, et le rapport des propriétés physiques, $\frac{\beta_e}{\chi_e \rho_e C_{pe}}$. En conclusion, dans le cas d'une conduite normale adiabatique, on retrouve que l'écoulement est isovolume si le nombre de Mach est très petit et le nombre de Prandtl modéré. En revanche, si le nombre de Prandtl est très grand (cas des fluides très visqueux), l'écoulement peut ne pas être isovolume sous les effets thermiques liés à la dissipation visqueuse.

Considérons maintenant le cas d'une micro-conduite adiabatique. Ici, les effets inertiels sont négligeables et les effets visqueux sont dominants. Autrement dit, les nombres de Reynolds, en particulier celui à l'entrée $Re_e = \frac{\bar{u}_e H}{\nu_e}$, sont très petits. L'échelle de pression inertielle précédente n'étant pas correcte, on la remplace par une échelle visqueuse construite en considérant que $\frac{\partial P}{\partial x} \sim \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ dans l'équation de Navier-Stokes. Autrement dit, on prend pour échelle de référence de la pression :

$$\bar{P}_0 = \frac{\mu_e \bar{u}_e}{\epsilon H} \quad (2.37)$$

où $\epsilon = \frac{H}{L}$ est ici un petit paramètre. L'expression de la pression adimensionnelle devient :

$$P^* = P/\bar{P}_0 = P\epsilon H/\mu_e \bar{u}_e \quad (2.38)$$

et l'équation (2.31) devient sous forme adimensionnelle :

$$\frac{1}{\rho^*} \frac{D\rho^*}{D\tau} = \gamma Ma_e^2 \left(\frac{1}{\epsilon Re_e} \chi^* \frac{DP^*}{D\tau} - Pr_e \frac{\beta_e}{\chi_e \rho_e C_{pe}} \beta^* \frac{D\theta}{D\tau} \right) \quad (2.39)$$

Ainsi, dans le cas des micro-conduites, comme ϵ et Re_e sont très petits, le rapport $Ma_e^2/\epsilon Re_e$ peut être grand et les effets de compressibilité peuvent être importants même lorsque Ma_e est petit. Cela a été observé expérimentalement en micro-conduites. En particulier, des gradients de pression axiaux non constants, caractéristiques de ces effets ont pu être mesurés [29, 3].

Enfin, considérons le cas d'une micro-conduite chauffée à température constante.² Dans ce cas, l'écart de température de référence devient simplement l'écart entre la température de la paroi, T_p , et la température d'entrée, $\bar{T}_e$:

$$\Delta T_0 = T_p - \bar{T}_e \quad (2.40)$$

L'expression de la température adimensionnelle devient :

$$\theta = \frac{T - \bar{T}_e}{\Delta T_0} = \frac{T - \bar{T}_e}{T_p - \bar{T}_e} \quad (2.41)$$

et l'équation (2.31) s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$\frac{1}{\rho^*} \frac{D\rho^*}{D\tau} = \gamma \frac{Ma_e^2}{\epsilon Re_e} \chi^* \frac{DP^*}{D\tau} - \beta_e \bar{T}_e \left(\frac{T_p - \bar{T}_e}{\bar{T}_e} \right) \beta^* \frac{D\theta}{D\tau} \quad (2.42)$$

Ainsi, dans le cas des micro-conduites chauffées à température constante, indépendamment de la valeur des nombres de Mach et de Reynolds, des fortes variations de densité peuvent être observées si le rapport $\frac{T_p - \bar{T}_e}{\bar{T}_e}$ est élevé. Un modèle compressible est donc nécessaire dans ce cas.

2.2 Conditions aux limites

2.2.1 Conditions de glissement et de saut de température et pompage thermique

Nous avons introduit au §1.3 les conditions de saut de vitesse et de température qui doivent être imposées comme conditions à la paroi pour tenir compte des effets de raréfaction dans la couche de Knudsen lorsque $0,001 < Kn \leq 0,1$. Dans le cadre de cette thèse, sauf mention contraire, nous avons effectué les calculs en utilisant les conditions aux limites dynamiques de la forme de l'équation (1.11) et les conditions aux limites thermiques de la forme de l'équation (1.16).

Pour les écoulements 2D de gaz circulant entre deux plaques planes parallèles envisagés aux §2.1.1 et 2.1.2, les conditions aux limites employées sont les suivantes. Du point de vue thermique, on considère que le gaz entre à la température T_e entre les deux plaques et que celles-ci sont chauffées à la température T_p ou avec une densité de flux q_p . Ainsi, en tenant compte de la symétrie par rapport au plan horizontal médian, les conditions aux limites s'écrivent, au premier ordre en Kn , sous la forme :

2. Le raisonnement serait le même pour une conduite de taille normale chauffée à température constante.

- à l'entrée : en $x = 0, \forall y \in [0, H/2], P = P_e, v = 0$ et $T = T_e$;
- à la sortie : en $x = L, \forall y \in [0, H/2], P = P_s, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$;
- sur le plan de symétrie : en $y = 0, \forall x \in [0, L], \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$;
- sur la paroi : en $y = H/2, \forall x \in [0, L]$, d'après l'éq. (1.11), la condition de glissement avec transpiration thermique s'écrit :

$$u_g = \frac{\sigma_u - 2}{\sigma_u} \lambda \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_g + \frac{3\mu r}{4P} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_g, \quad v_g = 0 \quad (2.43)$$

et, d'après l'éq. (1.16), si la température est imposée :

$$T_g = T_p + \frac{\sigma_T - 2}{\sigma_T} \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{\lambda}{Pr} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_g \quad (2.44)$$

ou, si une densité de flux est imposée :

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_g = q_p - \mu u_g \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_g \quad (2.45)$$

Cette dernière condition traduit la continuité du flux de chaleur à la paroi. Le dernier terme de cette expression représente la puissance des contraintes visqueuses à la paroi. Ce terme est donc non nul lorsqu'il y a du glissement. L'établissement de cette condition est détaillé ci-dessous.

2.2.2 Condition de flux imposé en présence de glissement pariétal

Lorsqu'une condition de flux ou d'échange convectif et/ou radiatif est imposée sur une paroi mince (respectivement à l'interface entre une paroi solide épaisse et le fluide adjacent), les conditions aux limites thermiques pour la résolution de l'équation de l'énergie doivent traduire la continuité du flux de chaleur total échangé à la frontière (respectivement à l'interface). Or, dans le cas où il y a du glissement dynamique à la paroi, la vitesse du gaz à la paroi, $\vec{v}_g$, et la puissance des contraintes visqueuses projetée sur la normale à la paroi, $(-\bar{\tau} \cdot \vec{v})_g \cdot \vec{n}$, sont non nulles. Nous expliquons ci-dessous comment cela doit être pris en compte dans le bilan de flux et comment s'écrit la condition à la limite associée. Cette condition est établie et justifiée dans [31].

Pour un domaine d'étude de surface fermée S , contenant un volume V de gaz, l'intégration de l'équation de conservation de l'énergie totale (2.4) et sa transformation en intégrale de surface par le théorème de la divergence donne :

$$\int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v} h - k \nabla T + e_c \vec{v} - \bar{\tau} \cdot \vec{v}) dV = \oint_S (\rho \vec{v} h - k \nabla T + e_c \vec{v} - \bar{\tau} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (2.46)$$

Soit S_p une partie de la surface fermée S correspondant à une paroi où il y a du glissement dynamique, $\vec{n}_p = -\vec{n}$ le vecteur normal unitaire extérieur à S_p dirigé de la paroi vers le gaz en écoulement et $\vec{q}_p$ la densité de flux de chaleur imposée ou échangée sur S_p du côté de la paroi solide : par exemple, $\vec{q}_p = \vec{q}_{imp}$ pour un flux imposé sur une paroi mince, $\vec{q}_p = \vec{q}_{conv} = h(T_p - T_\infty) \vec{n}$ pour un échange convectif imposé sur une paroi mince ou $\vec{q}_p = -k_s \nabla T|_s$ pour le flux de conduction du côté solide à l'interface d'une paroi épaisse. Sur S_p , la composante de vitesse normale est nulle ($\vec{v} \cdot \vec{n}_p = 0$) alors que la vitesse tangentielle est non nulle ($\vec{v} \cdot \vec{t}_p \neq 0$). Ainsi, la deuxième égalité de l'équation (2.46), intégrée sur S_p , se réduit à deux termes :

$$\oint_{S_p} (\rho \vec{v} h - k \nabla T + e_c \vec{v} - \bar{\tau} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n}_p dS_p = \oint_{S_p} (-k \nabla T - \bar{\tau} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n}_p dS_p \quad (2.47)$$

et la forme intégrale de la continuité du flux de chaleur total à l'interface solide/fluide s'écrit :

$$\oint_{S_p} (-k\nabla T - \bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n}_p dS_p = \oint_{S_p} \vec{q}_p \cdot \vec{n}_p dS_p \quad (2.48)$$

Autrement dit, en notant avec un indice g les grandeurs du côté du gaz, la forme locale de la condition de continuité du flux de chaleur total à l'interface entre le gaz et la paroi s'écrit en cas de glissement dynamique :

$$(-k\nabla T - \bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{v})_g = \vec{q}_p \quad (2.49)$$

La puissance des contraintes visqueuses a pour expression :

$$\bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{xx}u + \tau_{xy}v \\ \tau_{yx}u + \tau_{yy}v \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

avec les composantes de $\bar{\bar{\tau}}$ qui s'écrivent en 2D pour un fluide de Newton-Stokes :

$$\begin{cases} \tau_{xx} = \frac{2\mu}{3} \left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \tau_{yy} = \frac{2\mu}{3} \left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (2.51)$$

Ainsi, en posant $\vec{q}_p = q_p \vec{n}_p$ (avec $q_p > 0$ si le fluide reçoit de la chaleur), la condition à la limite (2.49) s'écrit sur une paroi S_p de normale $\vec{n}_p = -\vec{e}_y$:

$$k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_g + \tau_{yx,g} u_g = q_p \quad (2.52)$$

Dans le cas d'un écoulement quasi 1D en micro-canal, tel que $\vec{v} \approx u(y)\vec{e}_x$, $\tau_{xx} \approx 0$ et $\tau_{yy} \approx 0$, on a donc :

$$\bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{v} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx}u \end{pmatrix} \approx \mu u \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_y \quad (2.53)$$

et la condition à la limite (2.49) peut être approchée par :

$$k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_g + \mu u_g \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_g = q_p \quad (2.54)$$

ou

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_g = \frac{1}{k} \left[q_p - \mu u_g \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_g \right] \quad (2.55)$$

L'expression (2.54) de la densité de flux pariétale a vraisemblablement été introduite pour la première fois par Maslen en 1958 [46] puis reprise par Sparrow et Lin en 1962 [62]. Depuis lors, seuls quelques auteurs ont tenu compte de la puissance des contraintes visqueuses à la paroi dans leur analyse des transferts de chaleur [61, 48, 28]. La plupart n'en tenant pas compte, cette contribution au flux total a fini par être oubliée. Hong et Asako [31] ont rappelé son importance dans un article récent, en 2010.

Ainsi, nous venons de voir que, pour que le modèle macroscopique soit consistant avec la continuité du flux de chaleur total, il est nécessaire de prendre en compte la puissance des contraintes visqueuses lorsque le glissement dynamique est non nul. L'équation (2.49) est donc la conséquence de la présence d'un glissement dynamique à la paroi et c'est une condition qui est indépendante de la condition de saut de température (cf. éqs. (1.15), (1.16), (2.44)). Donc, en cas de glissement dynamique, les conditions de saut de température et de continuité du flux de chaleur doivent être simultanément satisfaites par le modèle macroscopique. De nombreux travaux de la littérature ne prennent en compte qu'une seule de ces deux conditions. Il serait intéressant de vérifier si cette modélisation macroscopique est bien en accord avec les solutions microscopiques obtenues par la dynamique moléculaire ou par la résolution des équations de Boltzmann. À notre connaissance cela n'a jamais été réalisé.

2.3 Formulation adimensionnelle du problème

On introduit les grandeurs adimensionnelles suivantes :

- $X = x/L$,
- $Y = y/H$,
- $U = u/\bar{u}_i$,
- $V = v/\bar{u}_i$,
- $\rho^* = \rho/\bar{\rho}_i$,
- $P^* = P/\bar{P}_i$,
- $\theta = (T - \bar{T}_i)/\Delta T$,

où $\bar{u}_i = \frac{\dot{m}}{\bar{\rho}_i H}$, $\bar{\rho}_i$, $\bar{P}_i$ et $\bar{T}_i$ sont la vitesse, la masse volumique, la pression et la température moyennes dans les sections $i = e$ ou s , c'est à dire à l'entrée, e , ou à la sortie, s , de la conduite. Selon si une température, T_p , ou une densité de flux, q_p , est imposée sur la paroi, $\Delta T = T_p - \bar{T}_i$ ou $\Delta T = \frac{q_p H}{k}$. Dans le cas où la paroi est adiabatique ou lorsque le flux imposé est faible par rapport à la dissipation visqueuse, l'échelle de référence sera plutôt $\Delta T = \frac{\mu \bar{u}_i^2}{k}$ comme cela a été introduit à l'équation (2.35) du §2.1.3.

On montre alors que les Eqs. (2.11-2.15) s'écrivent sous forme adimensionnelle :

$$\epsilon \frac{\partial \rho^* U}{\partial X} + \frac{\partial \rho^* V}{\partial Y} = 0 \quad (2.56)$$

$$Re_{Hi} \rho^* \left(\epsilon U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = - \frac{\epsilon Re_{Hi}}{\gamma Ma_i^2} \frac{\partial P^*}{\partial X} + \left[\frac{4}{3} \epsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{1}{3} \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} \right] \quad (2.57)$$

$$Re_{Hi} \rho^* \left(\epsilon U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = - \frac{Re_{Hi}}{\gamma Ma_i^2} \frac{\partial P^*}{\partial Y} + \left[\epsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{1}{3} \epsilon \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} \right] \quad (2.58)$$

$$Pe_{Hi}\rho^* \left(\epsilon U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \frac{Re_{Hi}Br_i}{\gamma Ma_i^2} \left(\epsilon U \frac{\partial P^*}{\partial X} + V \frac{\partial P^*}{\partial Y} \right) + \left(\epsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + Br_i \Phi_v \quad (2.59)$$

où la dissipation visqueuse adimensionnelle s'écrit :

$$\Phi_v = \left\{ 2 \left[\left(\epsilon \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right] + \left[\frac{\partial U}{\partial Y} + \epsilon \frac{\partial V}{\partial X} \right]^2 - \frac{2}{3} \left[\epsilon \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right]^2 \right\} \quad (2.60)$$

Dans ces équations, les paramètres sans dimension sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} - \epsilon &= \frac{H}{L} \\ - Pr &= \frac{\mu C_p}{k} = \frac{\nu}{\bar{\rho}_i \bar{u}_i H} \\ - Re_{Hi} &= \frac{\mu}{\bar{\rho}_i \bar{C}_p \bar{u}_i H} \\ - Pe_{Hi} &= \frac{\mu \bar{u}_i^2}{k} \\ - Br_i &= \frac{\mu \bar{u}_i^2}{k \Delta T} \\ - Ec_i &= \frac{\bar{u}_i^2}{C_p \Delta T} \\ - Ma_i^2 &= \frac{\bar{\rho}_i \bar{u}_i^2}{\gamma \bar{P}_i} = \frac{u_i^2}{\gamma r \bar{T}_i} \\ - Kn_i &= \frac{\lambda_i}{2H} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu}{2H} \frac{\sqrt{r \bar{T}_i}}{\bar{P}_i} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu}{2H} \frac{1}{\sqrt{\bar{\rho}_i \bar{P}_i}} \quad (\text{cf. éq. (1.5)}) \end{aligned}$$

ou

$$- Kn_i = \frac{k_B}{2\sqrt{2}\pi\sigma^2 H} \frac{\bar{T}_i}{\bar{P}_i} = \frac{k_B}{2\sqrt{2}\pi\sigma^2 H r} \frac{1}{\bar{\rho}_i} \quad (\text{cf. éq. (1.2)})$$

Comme la première définition de Kn_i donnée ci-dessus permet d'écrire $Kn_i = \sqrt{\frac{\pi\gamma}{8}} \frac{Ma_i}{Re_{Hi}}$, on peut montrer que tous ces nombres sans dimension s'écrivent en fonction de Pr , Re_{Hi} , Kn_i et $\frac{\bar{T}_i}{\Delta T}$ uniquement :

$$\begin{aligned} - Pe_{Hi} &= Re_{Hi} Pr \\ - Ma_i &= \sqrt{\frac{\pi\gamma}{8}} Re_{Hi} Kn_i \\ - Ec_i &= (\gamma - 1) \frac{\bar{T}_i}{\Delta T} Ma_i^2 = \frac{8}{\pi} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\bar{T}_i}{\Delta T} Re_{Hi}^2 Kn_i^2 \\ - Br_i &= Ec_i Pr = (\gamma - 1) \frac{\bar{T}_i}{\Delta T} Ma_i^2 Pr = \frac{8}{\pi} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\bar{T}_i}{\Delta T} Re_{Hi}^2 Kn_i^2 Pr \end{aligned}$$

Les conditions aux limites du problème sans dimension deviennent :

$$\begin{aligned} - \text{à l'entrée : en } X = 0, \forall Y \in [0, \frac{1}{2}], P^* &= \frac{P_e}{\bar{P}_i}, V = 0 \text{ et } \theta = \theta_e = \frac{(T_e - \bar{T}_i)}{\Delta T}; \\ - \text{à la sortie : en } X = 1, \forall Y \in [0, \frac{1}{2}], P^* &= \frac{P_s}{\bar{P}_i}, \frac{\partial V}{\partial X} = 0 \text{ et } \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0; \\ - \text{sur le plan de symétrie : en } Y = 0, \forall X \in [0, 1], \frac{\partial U}{\partial Y} &= 0, \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \text{ et } \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0; \\ - \text{sur la paroi : en } Y = \frac{1}{2}, \forall X \in [0, 1], \text{ la condition de glissement avec transpiration} & \\ \text{thermique s'écrit :} & \end{aligned}$$

$$U = U_g = \frac{2(\sigma_u - 2)}{\sigma_u} Kn_i \frac{1}{\sqrt{\rho^* P^*}} \frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_g + \frac{6(\gamma - 1)}{\pi\gamma} \frac{Kn_i^2 Re_{Hi}}{Ec_i} \frac{\epsilon}{P^*} \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_g, \quad V = 0$$

$$(2.61)$$

et, si la densité de flux est imposée :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_g = 1 - Br_i U_g \left. \frac{\partial U}{\partial Y} \right|_g \quad (2.62)$$

ou, si la température est imposée :

$$\theta = \theta_g = \theta_p + \frac{\sigma_T - 2}{\sigma_T} \frac{4\gamma}{\gamma + 1} \frac{Kn_i}{Pr} \frac{1}{\sqrt{\rho^* P^*}} \left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_g \quad (2.63)$$

Remarque 1 : λ et Kn sont des fonctions de T et p ; par conséquent, l'adimensionnalisation de Kn à partir de la définition de λ donnée par l'équation (1.5) s'écrit :

$$Kn = \frac{\lambda}{2H} = \frac{Kn_i}{\sqrt{\rho^* P^*}} \quad (2.64)$$

Remarque 2 : on peut montrer les deux relations ci-dessous :

$$Re_{Hi} Br_i = Pe_{Hi} Ec_i = \frac{\bar{\rho}_i H \bar{u}_i^3}{k \Delta T} \quad (2.65)$$

$$\frac{Re_{Hi} Br_i}{\gamma Ma_i^2} = \frac{Ec_i Pe_{Hi}}{\gamma Ma_i^2} = \sqrt{\frac{\pi}{8\gamma}} \frac{Br_i}{Kn_i Ma_i} \quad (2.66)$$

On en déduit que le rapport du travail des forces de pression (PW) sur la dissipation visqueuse (VD), qui sont le premier et le troisième terme du membre de droite de l'équation (2.59), est de l'ordre de :

$$PW/VD \sim \frac{Re_{Hi}}{\gamma Ma_i^2} \approx \frac{0,71 Re_{Hi}}{Ma_i^2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{8\gamma}} \frac{1}{Kn_i Ma_i} \approx \frac{0,53}{Kn_i Ma_i} \quad (2.67)$$

Remarque 3 : si, à l'instar de ce qui a été présenté au §2.1.3 (cf. éq. (2.37)), on choisit l'échelle visqueuse $\frac{\mu \bar{u}_i}{\epsilon H}$ pour échelle de référence de la pression, à la place de $\bar{P}_i$, alors le système d'équations (2.56)-(2.59) se réécrit :

$$\epsilon \frac{\partial \rho^* U}{\partial X} + \frac{\partial \rho^* V}{\partial Y} = 0 \quad (2.68)$$

$$Re_{Hi} \rho^* \left(\epsilon U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial P^*}{\partial X} + \left[\frac{4}{3} \epsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{1}{3} \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} \right] \quad (2.69)$$

$$Re_{Hi} \rho^* \left(\epsilon U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial P^*}{\partial Y} + \left[\epsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{1}{3} \epsilon \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} \right] \quad (2.70)$$

$$Pe_{Hi} \rho^* \left(\epsilon U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = Br_i \left(U \frac{\partial P^*}{\partial X} + \frac{V}{\epsilon} \frac{\partial P^*}{\partial Y} \right) + \left(\epsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + Br_i \Phi_v \quad (2.71)$$

avec Φ_v donné par l'équation (2.60). D'après l'équation (2.70), $\frac{\partial P^*}{\partial Y}$ est de l'ordre ϵ . Par conséquent, d'après les équations (2.71) et (2.60), le rapport $PW/VD \sim 1$: le travail des forces de pression et la dissipation visqueuse sont du même ordre de grandeur. Nous vérifierons effectivement ce résultat par la suite.

Chapitre 3

Résultats de la littérature sur la convection forcée en micro-canaux

Ces dernières années, un grand nombre d'articles de la littérature se sont intéressés à la convection forcée de gaz dans des micro-canaux de section constante et de différentes formes, essentiellement rectangulaires et circulaires mais également triangulaires et trapézoïdales, en se concentrant plus particulièrement sur le calcul du nombre de Nusselt à la paroi. Il a ainsi pu être montré que le glissement dynamique favorise les transferts convectifs en réduisant la contrainte de cisaillement pariétale alors que le saut de température à la paroi agit comme une résistance thermique et limite ces transferts [13, 72]. D'autre part, comme nous avons pu le voir au §2.2.2, le travail des forces de viscosité à la paroi est non nul en cas de glissement. Il agit comme un terme de source de chaleur surfacique qui vient amplifier l'effet de la dissipation visqueuse au sein de l'écoulement et modifier le bilan de flux de chaleur à la paroi [62, 31]. Une synthèse de ces phénomènes et des transferts thermiques associés aux micro-écoulements gazeux dans différentes géométries sont décrits dans les revues bibliographiques de S. Colin et ses collaborateurs [12, 13, 38]. Quatre principales catégories d'écoulements sont considérées : ceux qui sont chauffés à flux ou à température constante et ceux qui, thermiquement, sont pleinement développés ou en cours de développement. Nous allons analyser, au §3.1, la distribution du nombre de Nusselt dans ces différents cas pour des micro-écoulements entre deux plans parallèles. Les études qui ont porté plus spécifiquement sur les effets de compressibilité seront présentées au §3.2. L'influence de la variation des propriétés physiques avec la température, le long des micro-canaux, est présentée au §3.3. Les études qui ont analysé l'effet des rugosités de surface sont décrites au §3.4 et celles qui ont étudié l'influence de la conduction dans les parois sont présentées au §3.5. Les principaux résultats de cette analyse bibliographique sont résumés dans la conclusion, au §3.6. Nous dégageons également les principales lacunes de ces travaux que nous chercherons à combler au cours de ce mémoire de thèse.

3.1 Évolution du nombre de Nusselt à la paroi

3.1.1 Hypothèses utilisées et définition de Nu

De nombreuses solutions analytiques pour le nombre de Nusselt à la paroi dans des micro-conduites sont publiées dans la littérature (voir la synthèse [13]). Cependant, celles-ci sont établies, pour la plupart, sous les hypothèses d'écoulement laminaire, incompressible, à propriétés physiques constantes, en régime établi et sans tenir compte de la dissipation visqueuse et de la transpiration thermique (thermal creep). Autant dire que leur domaine d'application, s'il existe, est très réduit. De plus, dans la définition et le calcul du nombre de

Nusselt, seul le flux diffusif à la paroi est pris en compte alors que, comme nous l'avons vu au §2.2.2, le flux total fait intervenir la puissance des forces de viscosité en cas de glissement (cf. éqs. (2.49) et (2.54)). Autrement dit, le nombre de Nusselt en microfluidique ne doit pas simplement être défini par :

$$Nu = \frac{q_p D_h}{k (T_p - \bar{T})} = \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_g D_h}{T_p - \bar{T}} \quad (3.1)$$

mais par :

$$Nu = \frac{q_p D_h}{k (T_p - \bar{T})} = \frac{\left(k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_g + \mu u_g \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_g \right) D_h}{k (T_p - \bar{T})} \quad (3.2)$$

où, ici, q_p est la densité de flux totale à la paroi projetée sur la normale entrante dans la conduite (elle est de signe positif pour un apport de chaleur dans la conduite), où D_h est le diamètre hydraulique, k est la conductivité thermique du fluide et $\bar{T}$ est la température moyenne débitante du micro-écoulement.

En dépit de ces critiques sur le domaine de validité des solutions analytiques, leur intérêt est tout de même de mettre en évidence le comportement du nombre de Nusselt en fonction des paramètres principaux caractérisant les effets de raréfaction. Par exemple, dans un excellent article précurseur et très complet, Sparrow et Lin (1962) [62] ont établi la forme analytique de Nu pour des écoulements laminares, incompressibles et établis en conduite circulaire chauffés à flux constant et ont calculé des solutions numériques dans le cas d'un chauffage à température constante. Ils montrent que le Nu augmente avec l'accroissement de la vitesse de glissement et diminue avec le saut de température. Mais comme, dans la plupart des applications pratiques, c'est la résistance thermique liée au saut de température qui domine, ils en déduisent que Nu diminue quand les effets de raréfaction augmentent. Cette analyse a été reprise et complétée par de nombreux auteurs. Nous présentons ici les principaux résultats obtenus pour des micro-écoulements entre deux plans parallèles, dans le cas où la dissipation visqueuse est négligée puis prise en compte.

3.1.2 Cas du régime établi sans dissipation visqueuse

Dans le cas de micro-écoulements laminares et incompressibles entre deux plans parallèles chauffés symétriquement à flux imposé, en considérant des conditions de glissement et de saut de température du premier ordre et en négligeant le pompage thermique, la dissipation visqueuse et le travail des forces de pression, le nombre de Nusselt du régime établi a pour expression [35, 13, 38] :

$$Nu_{\infty, q_p} = \left(Kn \xi_T + \frac{17 + 336 Kn \sigma_p + 1680 (Kn \sigma_p)^2}{140 (1 + 12 Kn \sigma_p)^2} \right)^{-1} \quad (3.3)$$

où $Kn = \frac{\lambda}{D_h} = \frac{\lambda}{2H}$ et où σ_p et ξ_T ont été introduits, pages 19 et 20, dans les conditions de glissement (1.9) et de saut de température (1.15). D'après les équations (1.12) et (1.16), σ_p peut aussi être remplacé par $\frac{2-\sigma_u}{\sigma_u}$ et ξ_T par $\frac{2-\sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{1}{Pr}$ dans l'expression (3.3). La solution sans glissement est retrouvée lorsque $Kn = 0$; elle est égale à $Nu_{\infty, q_p} = \frac{140}{17} = 8,235$. On observe que plus la raréfaction augmente (i. e. plus Kn est grand) et plus le saut de

température croît (i.e. plus ξ_T est grand), plus le nombre de Nusselt décroît. Cela est illustré dans la Fig. 3.1.

Yu et Ameer (2001) [72] ont calculé numériquement, par une méthode de transformée d'intégrales généralisées, les nombres de Nusselt en régimes thermiques établis et non établis, dans des micro-canaux de section rectangulaire, avec les mêmes hypothèses que ci-dessus mais pour un chauffage uniforme à température imposée. Ils montrent que, plus le saut de température est élevé ou plus le rapport ξ_T/σ_p est grand, plus Nu_{∞, T_p} et la longueur d'établissement thermique décroissent.

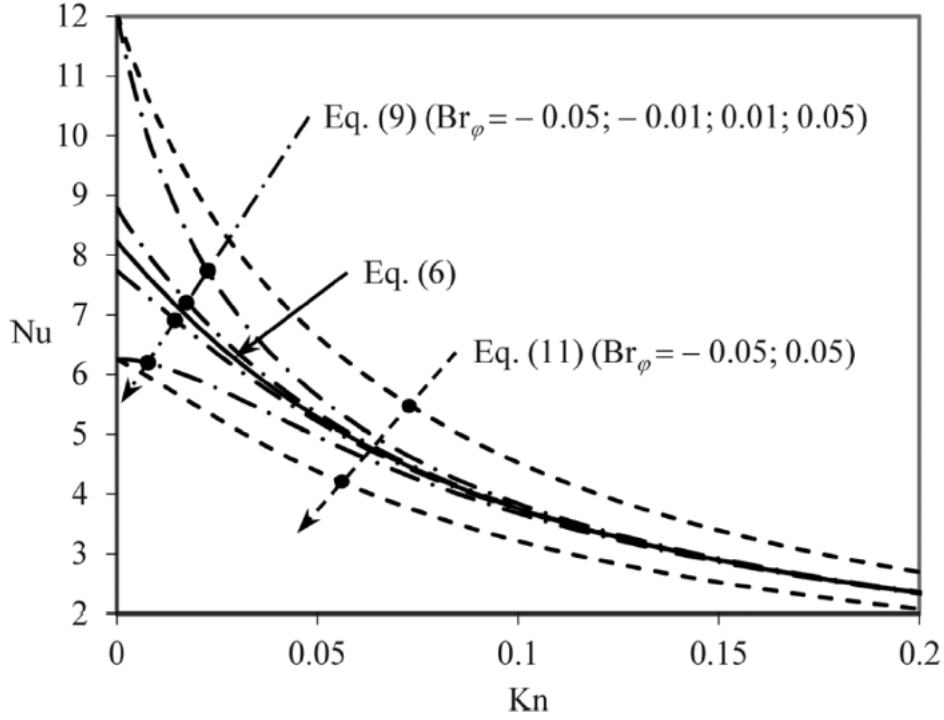


FIGURE 3.1 – Nombre de Nusselt en régime établi pour un micro-écoulement entre deux plans parallèles chauffés à flux constant en fonction des nombres de Knudsen et de Brinkman, pour $\sigma_\mu = 1$ et $\xi_T = 1,67$. Eq.(6) = éq. (3.3) ; Eq.(9) = éq. (3.4) ; Eq.(11) = éq. (3.8) (tiré de [38]).

3.1.3 Cas du régime établi avec dissipation visqueuse

Jeong et Jeong (2006) [36] ont analysé le problème de Graetz en micro-canal rectangulaire en introduisant des conditions de glissement et de saut de température du premier ordre et en prenant en compte à la fois la conduction axiale et la dissipation visqueuse, dans les cas où les parois sont chauffées uniformément à flux et à température constante. L'équation de l'énergie est résolue par une méthode de séparation des variables en recherchant la distribution de température sous la forme d'un développement en série entière sur des bases de fonctions orthogonales. Les profils du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Péclet ($Pe = \bar{u}D_h/\alpha$), du nombre de Knudsen ($Kn = \lambda/D_h$) et du nombre de Brinkman ($Br = 2\mu\bar{u}^2/q_p H$ à flux imposé ; $Br = 2\mu\bar{u}^2/k(T_e - T_p)$ à température imposée) sont déduits, ainsi que l'expression du nombre de Nusselt du régime établi. Dans le cas d'un flux imposé, cette expression est :

$$Nu_{\infty, q_p, Br \neq 0} = \frac{420 C_1^4}{C_1^2 (35 C_1^2 + 14 C_1 + 2 + 420 C_1^2 C_2) + Br (42 C_1^2 + 33 C_1 + 6)} \quad (3.4)$$

et dans le cas d'une température imposée, elle s'écrit :

$$Nu_{\infty, T_p, Br \neq 0} = \frac{140 C_1}{C_1^2 (1 + 7 C_1 + 140 C_1 C_2)} \quad (3.5)$$

avec

$$C_1 = 1 + 12\sigma_p Kn \quad (3.6)$$

$$C_2 = \xi_T Kn \quad (3.7)$$

La variation du nombre de Nusselt donné par l'équation (3.4) est tracée en fonction de Kn , pour différentes valeurs de Br , sur la Fig. 3.1. Lorsque $Kn = 0$, on a $C_1 = 1$ et $C_2 = 0$; alors, si $Br = 0$, on retrouve bien que $Nu_{\infty, q_p} = 8,235$. On constate que, lorsque le fluide est chauffé à la paroi, c'est à dire lorsque $Br < 0$, la dissipation visqueuse augmente la température interne du fluide et $Nu_{\infty, q_p, Br \neq 0}$ diminue lorsque Br devient de plus en plus négatif. Au contraire, lorsque le fluide est refroidi à la paroi, c'est à dire lorsque $Br > 0$, plus la dissipation visqueuse croît, plus elle permet d'augmenter $Nu_{\infty, q_p, Br \neq 0}$. Cet effet est d'autant plus important que les effets de raréfaction sont faibles (pour Kn petit). Cela vient du fait qu'à grand nombre de Knudsen, le saut de température, $T_p - T_{g,p}$, entre la température de la paroi et la température du gaz au contact de la paroi (à la limite de la couche de Knudsen) devient plus important que la différence, $T_{g,p} - \bar{T}$, entre la température du gaz à la paroi et la température moyenne débitante. Autrement dit, l'écart $T_p - \bar{T}$ qui intervient au dénominateur du nombre de Nusselt (cf. éq. (3.2)) est contrôlé par $T_p - T_{g,p}$. Or Jeong et Jeong (2006) [36] montrent que cet écart est proportionnel à Kn mais est indépendant de Pe et Br .

Les résultats sur le nombre de Nusselt qui viennent d'être présentés sont critiquables à plusieurs points de vue. Tout d'abord, dans les équations (3.3) à (3.5), Nu est calculé par la relation (3.1) et non par (3.2) : la puissance des contraintes visqueuses à la paroi n'est pas prise en compte. Hadjiconstantinou (2003) [28] et Miyamoto et al. (2003) [48] comptent parmi les rares auteurs à avoir tenu compte de ce terme et de la dissipation visqueuse pour le calcul de Nu dans le cas de micro-écoulements incompressibles entre deux plans parallèles chauffés à flux constant. L'expression du nombre de Nusselt, en régime établi, déterminée dans [48] est la suivante :

$$Nu_{\infty, q_p, Br \neq 0, PFV \neq 0} = \left(\frac{9Br}{C_1^2} \left[\frac{3 + 84Kn\sigma_p + 560(Kn\sigma_p)^2}{35C_1} + 16\sigma_p\xi_T Kn^2 \right] + \frac{17 + 336Kn\sigma_p + 1680(Kn\sigma_p)^2}{140C_1^2} + \xi_T Kn \right)^{-1} \quad (3.8)$$

On peut montrer que cette équation fournit exactement les mêmes valeurs de Nu que celles calculées par l'équation (3.4) dans le cas où $Kn = 0$ et dans le cas où $Br = 0$ car la puissance des contraintes visqueuses à la paroi s'annule dans ces deux cas (la condition à la limite adimensionnelle (2.62) indique en effet que ce terme est de l'ordre de Br). En revanche, la Fig. 3.1 indique que, lorsque $Kn \neq 0$ et $Br \neq 0$, la puissance des contraintes visqueuses à la paroi fait décroître Nu lorsque le micro-canal est chauffé ($Br < 0$) et le fait croître lorsqu'il est refroidi ($Br > 0$) et cela même pour une forte raréfaction ($Kn > 0,07$).

3.1.4 Discussion de la validité des nombres de Nusselt analytiques

D'un point de vue physique, la pertinence des expressions de Nu qui viennent d'être présentées est très critiquable. En effet, les modèles employés pour établir ces expressions considèrent les écoulements gazeux comme incompressibles et seule la dissipation visqueuse est prise en compte et l'effet du travail des forces de pression est oublié. Dans la suite, on note le travail des forces de pression PW (pour "pressure work") et la dissipation visqueuse VD (pour "viscous dissipation"). Le terme PW est un terme de puits de chaleur, négatif, dans l'équation de l'énergie pour un écoulement de gaz en conduite alors que VD est un terme de source de chaleur, positif. Il est aisé de montrer (voir le §6.4.1) que, pour des écoulements compressibles non glissants (pour $Kn = 0$), l'intégrale du travail des forces de pression sur le domaine de l'écoulement est l'opposé de l'intégrale de la dissipation visqueuse. En revanche, lorsque Kn est grand et qu'il y a un fort glissement (pour $Kn > 0,05$ par exemple), Sun et Jaluria (2012) [65] montrent que $|PW| > VD > 0$. Autrement dit, pour des écoulements de gaz raréfié, le travail des forces de pression est plus grand, en amplitude, que la dissipation visqueuse. Ainsi, ne tenir compte que de la dissipation visqueuse est erroné. Par exemple, Hong et al. (2007, 2008) [32, 30] montrent, lors de la simulation numérique de micro-écoulements compressibles, qu'il est préférable de négliger simultanément PW et VD dans l'équation de l'énergie, plutôt qu'un seul de ces deux termes. Cela permet de reproduire correctement le comportement thermique de l'écoulement obtenu avec un modèle complet, intégrant à la fois PW et VD . Ceci est illustré dans la Fig. 3.2 qui présente l'évolution axiale de profils de la température pariétale le long d'un micro-canal d'air chauffé à flux constant, pour des modèles prenant en compte ou pas les termes VD et PW . La figure illustre bien que les erreurs commises sur la répartition de température peuvent être très importantes si un seul de ces termes est négligé. On peut donc légitimement s'interroger sur la validité des expressions (3.3) à (3.8) sur les nombres de Nusselt en régime établi lorsque la dissipation visqueuse et le travail des forces de pression ne sont plus négligeables.

Pour répondre à ce type d'interrogation, il serait nécessaire de disposer de résultats expérimentaux sur les transferts thermiques dans les micro-écoulements gazeux. Cependant ceux-ci sont rares et souvent pas assez précis pour permettre une validation des modèles (voir la discussion dans [49]). En ce qui concerne les écoulements entre deux plans parallèles, seule les expériences de l'équipe de Miyamoto [61, 48] pour des écoulements raréfiés, à basse pression, dans un canal de 1 mm de hauteur, semblent fiables. Pour des parois chauffées à flux constant [48], le nombre de Knudsen $Kn_s = 6 \times 10^{-2}$ est atteint en sortie de canal, ce qui correspond au régime glissant. Les auteurs montrent que les modèles théoriques permettent de retrouver la répartition expérimentale de la température et du nombre de Nusselt à la paroi à condition d'introduire la puissance des contraintes visqueuses dans les conditions aux limites. Ils valident ainsi l'équation (3.8) pour l'évaluation du nombre de Nusselt pariétal.

Une étude expérimentale de Demsis et al. [18, 19], portant sur la détermination du nombre de Nusselt dans des écoulements gazeux raréfiés en conduite cylindrique, chauffée à température imposée, doit être mentionnée ici. En effet, cette étude, bien que réalisée dans une conduite macroscopique de diamètre interne $D = 24,8 \text{ mm}$ et de longueur $L = 0,96 \text{ m}$, porte sur des écoulements dont les gammes de nombres de Knudsen, de Reynolds et de Brinkman sont $0,0022 \leq Kn \leq 0,032$, $0,13 \leq Re \leq 14,7$ et $0,13 \leq Br = \frac{\mu \bar{u}^2}{k \Delta T} \leq 14,7$. Le nombre de Nusselt est déterminé à partir de la mesure du coefficient d'échange global d'un échangeur à tubes coaxiaux et à courants croisés, dont le tube intérieur contient le gaz raréfié et l'espace annulaire extérieur de l'eau chaude. La configuration étudiée est proche de celle d'un écoulement de gaz chauffé à température imposée car les résistances

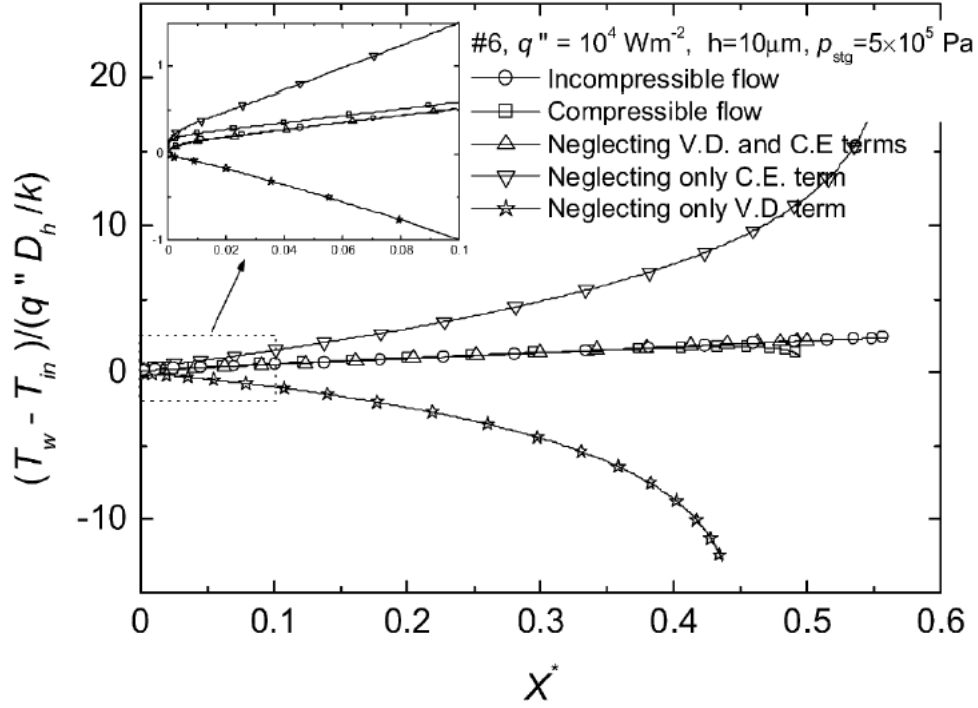


FIGURE 3.2 – Profils de la température pariétale adimensionnelle le long d'un micro-canal chauffé à flux constant dans lequel circule de l'azote, pour des modèles prenant en compte ou pas les termes VD et PW (noté C. E. pour Compressible Effect) dans l'équation de l'énergie (tiré de [32]).

thermiques par conduction dans la paroi de l'échangeur et par convection dans l'eau sont négligeables par rapport à la résistance thermique par convection dans le gaz. Quatre gaz différents sont utilisés : azote, oxygène, argon et hélium.

Ce qui est remarquable dans cette expérience (cf. Fig. 3.3), c'est que les nombres de Nusselt mesurés sont très faibles en régime raréfié : ils sont de 2 à 5 ordres de grandeur plus faibles qu'en régime continu où, rappelons-le, $Nu = 3,66$ en conduite cylindrique, en régime établi et à grand nombre de Péclet. La corrélation qui est établie pour l'ensemble des mesures de la figure 3.3, sur la gamme de paramètres Kn , Re et Br donnée ci-dessus, est :

$$\bar{Nu}_{T_p, Br \neq 0} = 0,001837 Re^{0,5} Kn^{-0,72} Br^{0,47} \quad (3.9)$$

$\bar{Nu}_{T_p, Br \neq 0}$ varie donc entre 3×10^{-4} et 2×10^{-2} sur la gamme de paramètres balayée. De telles valeurs du nombre de Nusselt n'ont jamais été mises en évidence auparavant et les auteurs ne réussissent pas à partir des données théoriques ou numériques de la littérature à l'expliquer. Morini et al. (2011) [49] critiquent ce travail en laissant supposer qu'il pourrait y avoir des fuites thermiques à l'entrée et à la sortie de l'échangeur, au niveau des prises de mesures de température et de pression. Pourtant, la conduite n'étant pas microscopique, ces fuites thermiques ne semblent pas pouvoir être prépondérantes. De plus, les auteurs de l'étude expérimentale [18, 19], étonnés par leur propre résultat, semblent avoir apporté un grand soin à la validation de leurs mesures et à la détermination des incertitudes. Au chapitre 6, nous montrerons que ce résultat peut effectivement être expliqué à condition de bien prendre en compte la puissance des forces de viscosité à la paroi dans le modèle.

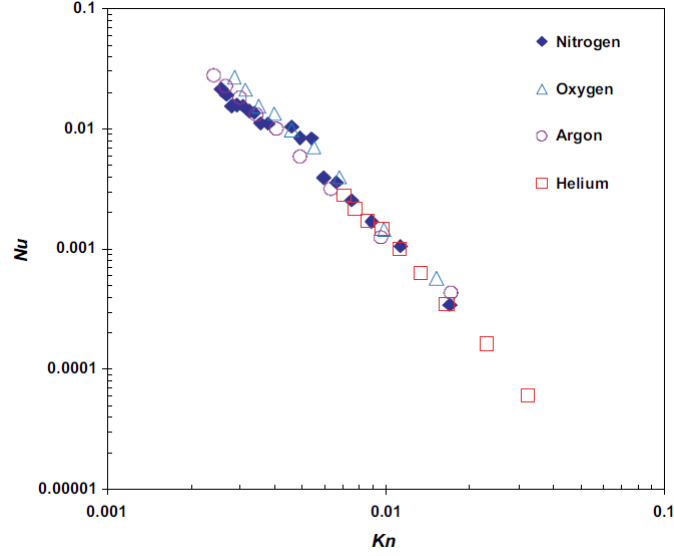


FIGURE 3.3 – Variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Knudsen, pour quatre gaz, dans les expériences de Demsis et al. (2010) (tiré de [19]).

3.2 Influence des effets de compressibilité

Nous avons vu dans l'analyse dimensionnelle du §2.1.3, qu'en microfluidique, du fait de la valeur élevée du rapport surface des parois sur volume du fluide, les effets visqueux sont prépondérants et les effets de compressibilité peuvent apparaître même à faible nombre de Mach si le nombre de Reynolds est assez faible. Ces effets de compressibilité se traduisent, dans le cas de micro-écoulements gazeux adiabatiques, générés par des différences de pression de l'ordre du bar à quelques bars, avec une pression faible en sortie de canal (inférieure au bar), par une modification complète du régime d'écoulement le long du canal. On passe d'un régime dense et continu, sans glissement, à l'entrée à un régime raréfié et glissant en sortie, voire transitionnel si les pressions sont très basses en sortie. L'énergie mécanique qui génère l'écoulement se transforme en énergie interne et en chaleur sous l'effet de la dissipation visqueuse. Mais vers la sortie, le gaz se détend, sa masse volumique diminue et il accélère fortement. L'énergie interne se transforme en énergie cinétique et le gaz refroidit. Dans le cas de conduites chauffées ou refroidies, l'analyse des transferts de chaleur entre le cœur de l'écoulement et la paroi peut devenir très complexe car il peut apparaître des inversions de flux de chaleur échangé le long du canal sous les effets de la dissipation visqueuse et de la détente. Enfin, pour des différences de pression importantes entre l'entrée et la sortie du canal, même pour des conduites de quelques microns, des écoulements supersoniques peuvent apparaître.

De nombreux travaux ont porté sur l'analyse des écoulements compressibles et des transferts de chaleur complexes qui apparaissent dans les micro-conduites. Nous ne présenterons ici que ceux qui ont servi de référence pour ce travail de thèse. Yao et al. (2004) [71] réalisent une expérience pour des écoulements d'air dans un canal rectangulaire de hauteur $H = 7 \mu m$ et de longueur $L = 39,9 mm$: le rapport de forme est donc très grand ($L/H = 5700$!). Le nombre de Knudsen en sortie peut atteindre $Kn = 0,04$. Ils montrent qu'à pression d'entrée, p_e , fixée, lorsque le rapport de la pression d'entrée sur la pression de sortie dépasse une valeur $p_e/p_s \approx 5,3$, le débit massique n'augmente quasiment plus : c'est comme si un seuil était atteint. Or les expériences de Tison (1993) [66] montrent qu'en régime transitionnel ou moléculaire libre, pour $Kn > 0,1$, le débit massique décroît

avec l'accroissement de p_e/p_s . Yao et al. [71] en déduisent qu'autour de $Kn = 0,1$, le débit massique atteint un maximum.

Une des expériences présentant des effets de compressibilité importants est celle de l'équipe de Miyamoto [61, 48]. Elle porte sur l'analyse d'écoulements d'air dans des micro-conduites de section rectangulaire, de hauteur 1,2 ou 3 μm , dont les parois sont adiabatiques ou chauffées à flux constant. Le nombre de Mach maximal à l'entrée est $Ma = 0,4$ et les écoulements peuvent être supersoniques en sortie. Ce travail est une référence car les mesures thermiques sont assez précises et ont pu être corroborées par des modèles théoriques complets, en particulier en ce qui concerne le nombre de Nusselt (cf. §3.1.3).

Les premières simulations numériques 2D d'écoulements modérément compressibles en micro-conduites, tenant compte des effets de raréfaction, sont vraisemblablement celles de Kavehpour et al. (1997) [40]. Un modèle complet tenant compte du travail des forces de pression, de la dissipation visqueuse et des conditions aux limites de glissement et de saut de température du premier ordre, sans pompage thermique, est résolu en volumes finis, dans un canal 2D plan chauffé à flux ou à température constante. Le code est validé par des comparaisons avec plusieurs expériences de microfluidique et un très bon accord est montré. Il est montré que les effets de raréfaction (glissement dynamique) et de compressibilité (accélération et détente du gaz) sont des fonctions du nombre de Reynolds. Pour les cas simulés, aux plus grands nombres de Reynolds ($1 < Re < 10$), les caractéristiques des écoulements telles que la variation axiale du nombre de Nusselt ou du coefficient de frottement dépendent essentiellement du nombre de Mach, Ma , et peu du nombre de Knudsen, Kn , alors qu'à petit nombre de Reynolds ($0,01 < Re < 1$) elles dépendent fortement de Kn .

Hong et al. [32, 30] ont réalisé des études numériques 2D approfondies des transferts thermiques dans des écoulements d'air dans des micro-conduites planes et axisymétriques, de hauteur ou de diamètre variant entre 10 et 100 μm , chauffées à flux constant. Les nombres de Mach en sortie peuvent atteindre $Ma_s = 0,7$. Pour les canaux les plus fins, les effets de raréfaction deviennent non négligeables ($Kn = 0,005$) et ils sont pris en compte par un modèle complet tenant compte de tous les effets connus : conditions aux limites de glissement et de saut de température du premier ordre, conservation du flux total avec prise en compte de la puissance des forces visqueuses à la paroi, etc. Les résultats numériques s'accordent très bien avec les expériences de Miyamoto et al. [48]. Les effets de compressibilité (en particulier les détentes en sortie) sont très importants mais, pour les gammes de Kn balayées, les effets de raréfaction restent négligeables.

Un des articles qui nous sera le plus utile dans la suite est celui de Sun et Jaluria (2012) [65]. Les auteurs étudient précisément comment le travail des forces de pression et la dissipation visqueuse se compensent dans des écoulements d'azote en régime glissants et compressibles. Ils réalisent des simulations numériques basées là aussi sur des modèles complets, tenant compte de la compressibilité, de la raréfaction, avec des conditions aux limites de glissement du premier ordre en Kn , et de la variation des propriétés physiques avec la température. Mais, malheureusement, le modèle ne tient pas compte de la puissance des forces visqueuses dans le calcul du flux total et du nombre de Nusselt à la paroi. Là encore les expériences de l'équipe de Miyamoto [61, 48] servent de base de comparaison pour les simulations et des micro-conduites de hauteur 1,2 ou 3 μm , dont les parois sont chauffées à flux ou à température constants sont utilisées. Cet article sera largement utilisé dans le dernier chapitre de la thèse.

3.3 Influence de la variation des propriétés physiques avec la température

L'influence de la variation avec la température des propriétés physiques telles que la viscosité dynamique, $\mu(T)$, et la conductivité thermique, $k(T)$, a été analysée par de nombreux auteurs dans le cas des micro-écoulements de liquides mais seulement par quelques-uns dans le cas des gaz [56]. Gulhane et Mahulikar (2009, 2010) [25, 26] ont étudié l'influence de la variation de toutes les propriétés physiques pour des écoulements de gaz dans des conduites cylindriques qu'ils annoncent de taille micrométrique. Cependant les effets de raréfaction (glissement dynamique et de saut de température), les effets de compressibilité et le travail des forces de pression ne sont pas pris en compte dans leur modèle. On peut donc s'interroger sur la pertinence de leurs résultats.

Hooman et al. (2009) [33] se sont intéressés à la variation de $\mu(T)$ et $k(T)$ par une approche théorique 2D basée sur des développements en petites perturbations. Le modèle utilisé considère des écoulements en conduite cylindrique et entre deux plans parallèles, tenant compte des effets de raréfaction au premier ordre en Kn dans les conditions aux limites. La compressibilité des gaz est négligée mais pas la dissipation visqueuse. Comme des parois isothermes sont imposées, le gaz ne peut que chauffer au cours de l'écoulement. Dans cette configuration, comme la viscosité des gaz augmente avec la température, le coefficient de frottement augmente légèrement le long de l'écoulement. Malgré cela, les auteurs montrent que la variation des propriétés physiques avec T a un effet négligeable sur la chute de pression globale, les profils de vitesse et les profils longitudinaux du nombre de Nusselt pariétal.

Les études les plus abouties pour l'analyse de l'influence de la variation des propriétés physiques avec la température dans des micro-écoulements gazeux semblent être celles de Sun et Jaluria (2009) [63] et Quasi Zade et al. (2011) [56]. Les deux études effectuent des simulations numériques en volumes finis, dans un canal de section rectangulaire, en utilisant un modèle complet tenant compte des effets de compressibilité (travail des forces de pression), de la dissipation visqueuse et des conditions aux limites de glissement et de saut de température du premier ordre (sans pompage thermique dans le cas de [56]). De plus, toutes les propriétés physiques varient avec la température, le gaz est de l'air ou de l'azote considéré comme un gaz parfait et le nombre de Nusselt est calculé par l'équation (3.1). En revanche, alors que Sun et Jaluria (2009) [63] considèrent un canal 2D chauffé à flux constant, Quasi Zade et al. (2011) [56] considèrent un canal 3D à parois isothermes.

Dans [56], différents nombres de Knudsen, rapports de forme transverses et différences de température, ΔT_{ep} , entre l'entrée et la paroi sont considérés. Cette étude montre qu'entre les simulations à propriétés physiques constantes et variables, des différences de 15% à 20% sur le nombre de Nusselt et de 12% à 15% sur le coefficient de frottement peuvent être observées lorsque $Re = 0,1$, $\Delta T_{ep} = 50\text{ K}$ et $Kn = 0$ (pas de glissement). Ces différences apparaissent dans la zone d'entrée mais elles diminuent légèrement quand la raréfaction augmente et que Kn se rapproche de 0,1. A propriétés physiques variables, dans la zone d'entrée du canal, le nombre de Nusselt est plus élevé qu'à propriétés physiques constantes alors que le coefficient de frottement peut être plus élevé ou plus faible selon l'influence relative de la variation de densité et de la viscosité. Dans la zone "établie", le nombre de Nusselt et le coefficient de frottement sont tous les deux plus grands qu'à propriétés constantes.

Dans [63], pour la valeur maximale du flux imposée à la paroi, les différences entre les modèles à propriétés physiques constantes et variables restent faibles (inférieures à 5%) pour le nombre de Nusselt, mais elles sont un peu plus grandes que 10% pour la température moyenne débitante et la valeur de la contrainte pariétale. L'erreur la plus élevée est sur

le débit massique : pour une différence de pression imposée entre l'entrée et la sortie du canal, le débit est 14% plus grand dans le cas à propriétés constantes.

En conclusion, peu d'études ont analysé l'influence de la variation des propriétés physiques sur la simulation des écoulements de convection forcée de gaz avec des effets de raréfaction. Les quelques études réalisées montrent des effets relativement peu importants qui induisent des variations maximales de l'ordre de 10% à 15% sur les températures moyennes débitantes, les nombres de Nusselt, les coefficients de frottements et les débits massiques. Cependant, ces résultats correspondent à l'heure actuelle à des cas particuliers et ne peuvent être généralisés à des situations où les variations de température pourraient être beaucoup plus grandes.

3.4 Influence des rugosités de surface

En partant du constat qu'il est très difficile de contrôler l'état de surface des micro-conduites et micro-canaux lors du processus de fabrication, de nombreux articles se sont intéressés, depuis 2003, à l'influence des rugosités de surface en microfluidique (voir par exemple la revue bibliographique dans [15]). A priori, si on se réfère au diagramme de Moody, en régime laminaire, les rugosités ne doivent pas influencer les pertes de charge en régime continu. Une des questions posée est de savoir si ces rugosités peuvent influencer le coefficient de frottement en régime laminaire raréfié, ainsi que le nombre de Nusselt pariétal.

La plupart des articles traitant ce sujet concerne des écoulements incompressibles de liquides. Il en ressort que l'état de surface des micro-canaux peut influencer à la fois les pertes de charge et les transferts thermiques. Malheureusement, de tels effets sont très difficiles à identifier expérimentalement car ils coexistent avec d'autres phénomènes dont les incertitudes sur chacun d'entre eux empêchent d'établir des corrélations : l'effet des rugosités peut être du même ordre de grandeur que la précision des mesures expérimentales [49]. Ceci est particulièrement vrai pour les écoulements de gaz où le couplage avec les effets de raréfaction et de compressibilité, ainsi que le couplage des champs de vitesse et de température a un impact important. Une des seules expériences à avoir été réalisée pour étudier spécifiquement l'effet des rugosités de surface en microfluidique gazeuse est celle de Turner et al. (2004) [68]. Des écoulements d'azote et d'hélium dans des canaux rectangulaires de hauteur $H = 5$ à $96 \mu m$ et de rugosité relative moyenne $0.001 < \epsilon/H < 0.06$ ont été étudiés. Il en ressort qu'aucun effet des rugosités sur le coefficient de frottement n'est observable en régime laminaire raréfié (pour $Kn < 0,15$ dans cette étude), par rapport à l'effet du nombre de Mach et de la compressibilité des gaz et aux incertitudes associées. Par conséquent, pour les micro-écoulements gazeux, les approches numériques ont été privilégiées pour étudier l'influence des rugosités de surface.

Par exemple, Ji et al. (2006) [37] ont analysé, par des simulations numériques 2D en volumes finis, l'influence de rugosités rectangulaires, dans un canal plan chauffé à température constante, dans lequel circulent des écoulements de gaz compressibles en régime glissant. Des conditions aux limites du second ordre en Kn sont utilisées. Pour des écoulements raréfiés où le nombre de Knudsen à l'entrée est $Kn_e = 0,033$ ou $0,0083$, l'augmentation de l'épaisseur des rugosités ou de leur densité linéique entraîne l'augmentation du coefficient de frottement. Cette augmentation est plus marquée pour les petites valeurs de Kn . En revanche, en régime raréfié, plus ϵ/H augmente, plus le flux échangé à la paroi et le nombre de Nusselt diminuent. Cela est d'autant plus marqué que Kn est grand. Pour $\epsilon/H = 6\%$ et $Kn_e = 0,033$, $\bar{Nu}$ est environ égal à 80% de la valeur du cas lisse.

Plus récemment, Hossainpour et Hakak Khadem (2010) [34] ont utilisé un code en volumes finis 2D non structurés pour étudier l'influence de différentes formes de rugosi-

tés (rectangulaires, trapézoïdales, triangulaires et aléatoires) dans la même configuration que l'article précédent : écoulements de gaz raréfié, compressible entre deux plan parallèles chauffés à température constante mais avec des conditions de saut du premier ordre. Les résultats de Ji et al. (2006) [37] sont confirmés pour tous les types de rugosité. L'augmentation du coefficient de frottement et la diminution du nombre de Nusselt avec l'augmentation de l'épaisseur des rugosités est expliquée par la présence de recirculation stationnaire à l'aval des rugosités.

Croce et al. se sont beaucoup intéressés à l'influence des rugosités, de la raréfaction et de la compressibilité sur l'évolution des coefficients de frottement et des nombres de Nusselt pour les micro-écoulements gazeux. Ils ont réalisé des analyses numériques en utilisant des codes en éléments finis 2D [16, 15, 58] et 3D [17], avec des conditions de saut du premier ordre en Kn , puis dernièrement, en couplant des codes cinétiques et Navier-Stokes 2D [58]. Les rugosités sont de forme triangulaire ou conique sur les parois d'un canal plan. Il est montré que les effets de compressibilité à nombre de Mach élevé dominent largement les effets dus à la rugosité et que ces derniers sont influents surtout en cas de raréfaction. La raréfaction réduit le coefficient de frottement et le nombre de Nusselt, mais la présence des rugosités atténue fortement cet impact en faisant tendre la solution vers celle du cas sans glissement. En particulier, des rugosités de 2 à 3% entraîne une augmentation de 20% de la chute de pression globale pour les cas étudiés.

On retiendra donc que l'influence des rugosités sur le coefficient de frottement, f , ou le nombre de Nusselt, Nu , est bien plus faible que l'influence de la compressibilité (du nombre de Mach). L'influence des rugosités est d'autant plus importante que Kn est grand. L'augmentation de l'épaisseur moyenne des rugosités, ϵ , a tendance à faire tendre la solution vers le cas non raréfié (sans glissement) : f augmente avec ϵ . L'influence de ϵ sur Nu est moins claire car certains auteurs montrent que Nu augmente avec ϵ alors que d'autres montrent le contraire. Une revue bibliographique des études ayant analysé l'influence de différents types de rugosités pour des micro-écoulements gazeux en régime glissant, dans des composants de différentes géométries, est présentée dans [74].

3.5 Influence de la conduction dans les parois

Les transferts de chaleur conjugués entre le fluide et la paroi ont été essentiellement étudiés en minifluidique ou, en microfluidique, mais pour des écoulements de liquides, c'est à dire sans tenir compte des effets de la raréfaction (glissement, saut de température, ...). Dans ce contexte, on peut consulter, par exemple, les articles de Maillet et al. [45, 57] ou [73] et les références qui y sont citées. Pour des écoulements de gaz raréfiés en micro-canal, il semble que la seule étude (en tous cas, la plus aboutie) soit celle de Sun et Jaluria (2011) [64]. C'est une étude numérique 2D d'écoulements d'azote entre deux parois planes et parallèles dont l'épaisseur varie entre une et dix fois la hauteur du canal. Quatre matériaux de conductivités thermiques différentes (verre, céramique, silicium et bronze) sont analysés pour la paroi. Un modèle complet, tenant compte des effets de raréfaction (glissement dynamique, saut de température et pompage thermique), de la variation des propriétés physiques avec la température, de la compressibilité et de la dissipation visqueuse est résolu. Seule la puissance des contraintes visqueuses à la paroi n'est pas prise en compte dans les conditions aux limites thermiques et le calcul du nombre de Nusselt. Les influences de la conductivité thermique, de l'épaisseur de la paroi, du flux de chaleur imposé et du rapport des pressions entrée/sortie sur les profils de la température moyenne débitante et du nombre de Nusselt sont analysées.

Il est montré que l'augmentation de la conduction axiale dans la paroi redistribue vers l'amont du canal le flux de chaleur imposé uniformément sur la paroi externe. Cela tend à

uniformiser la température moyenne débitante, à faire décroître la température maximale du gaz et à faire diminuer le nombre de Nusselt le long de la paroi, par rapport au cas où un flux est imposé sur une paroi mince ou peu conductrice. L'effet de l'augmentation de l'épaisseur de la paroi est similaire à celui de l'augmentation de sa conductivité thermique car, dans les deux cas, la résistance thermique axiale de la paroi varie de la même manière. Dans le cas d'une paroi très conductrice (en bronze), dont l'épaisseur est égale à dix fois la hauteur du canal, il est montré qu'imposer un flux de chaleur sur la paroi externe revient en fait à imposer une température uniforme sur la paroi interne du canal. Enfin, il est montré que la prise en compte de la variation des propriétés physiques du gaz et de la paroi avec la température a un effet négligeable sur les variations de températures du gaz.

3.6 Conclusion

Il ressort de cette analyse bibliographique les points principaux suivants. De nombreuses études théoriques ont cherché à établir des lois de variation du nombre de Nusselt établi d'écoulements gazeux en micro-canal, en fonction des paramètres de l'écoulement (Kn , Re et Br). Cependant ces relations sont établies à partir de modèles simplifiés qui ne prennent pas en compte la compressibilité et/ou la dissipation visqueuse. De plus, aucune étude numérique ne semble avoir calculé le nombre de Nusselt à partir d'un modèle complet tenant compte de la puissance des contraintes visqueuses à la paroi. Nous tacherons donc de combler ce manque. Nous chercherons également à vérifier le résultat expérimental de Demsis et al. [18, 19] qui montre que le nombre de Nusselt tend à s'annuler dans une micro-conduite à température imposée lorsque la raréfaction augmente (lorsque $Kn \rightarrow 0, 1$).

Les effets de la compressibilité (détente et refroidissement du gaz) ont été largement étudiés dans la littérature. Ils peuvent être très importants mais dans des régimes qui dépendent peu du nombre de Knudsen (à grands nombres de Mach et de Reynolds). Nous avons présenté les principales études expérimentales et numériques à ce sujet. L'article de Sun et Jaluria (2012) [65], dans lequel est résolu un modèle numérique presque complet (seule la puissance des contraintes visqueuses à la paroi n'est pas prise en compte), servira de base de comparaison dans les deux derniers chapitres de la thèse.

Peu d'études ont analysé l'influence de la variation des propriétés physiques sur la convection forcée de gaz avec des effets de raréfaction. Les quelques études réalisées montrent des effets relativement peu importants. Cependant, ces résultats ne peuvent être généralisés à des situations où les variations de température pourraient être beaucoup plus grandes. Dans la suite de cette thèse, nous introduirons dans nos modèles des lois de variation des propriétés physiques des gaz avec T , mais nous ne chercherons pas à analyser leur influence sur les résultats.

L'analyse bibliographique a montré que l'augmentation de l'épaisseur relative des rugosités a tendance à faire tendre la solution d'un écoulement raréfié vers le cas sans glissement (au moins en ce qui concerne le coefficient de frottement car des contradictions apparaissent sur le nombre de Nusselt selon les auteurs). L'influence des rugosités sur le coefficient de frottement et le nombre de Nusselt est d'autant plus importante que Kn est grand mais elle reste bien plus faible que l'influence de la compressibilité (du nombre de Mach). Dans le cadre de cette thèse, nous n'étudierons pas l'influence des rugosités.

Une seule étude a porté sur l'analyse des transferts thermiques conjugués dans des écoulements de gaz dans des micro-conduites à parois épaisses : celle de Sun et Jaluria (2011) [64]. L'influence de l'épaisseur des parois et de leur conductivité thermique est très importante. Cependant, il apparaît clairement que les cas à flux imposé et à température imposée dans des micro-conduites à parois minces encadrent les solutions obtenues pour des conduites à parois épaisses conductrices. Dans cette thèse, nous n'analyserons pas l'in-

fluence de la conduction dans les parois. Cela fait partie des perspectives de notre travail. Nous nous limiterons ici à des conduites à parois minces.

Deuxième partie

Simulations avec le code
ANSYS/Fluent

Chapitre 4

Modèles et méthodes numériques

Les systèmes d'équations de conservation décrites au chapitre 2 doivent être, en raison de leur complexité mathématique, résolus numériquement. Il existe une grande variété de méthodes numériques mais les plus employées pour la classe de problème que nous avons à résoudre sont :

- les méthodes spectrales,
- les méthodes de différences finies,
- les méthodes de volumes finis,
- les méthodes d'éléments finis.

Avant de passer aux validations du code ANSYS/Fluent, discutées dans le chapitre suivant, nous présentons succinctement la méthode de résolution numérique utilisée puis les différents modèles que nous avons introduits par le biais des UDF (détaillées dans §4.3) afin de traiter correctement les écoulements étudiés.

4.1 Méthode de résolution numérique

ANSYS/Fluent utilise la méthode des volumes finis qui conduit à intégrer les termes différentiels des équations de transport sur des volumes entourant chaque point du maillage. Cette méthode permet de traiter des équations comportant des termes sources complexes et non-linéaires. De plus, elle satisfait la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sur chaque volume de contrôle. Enfin, elle peut être utilisée avec des maillages relativement grossiers et des coûts de calculs raisonnables, ce qui explique son utilisation dans un grand nombre de codes commercialisés.

La forme générale d'une équation de transport pour une quantité scalaire Φ intégrée dans un volume $\mathcal{V}$ de surface $\mathcal{A}$ s'écrit [1] :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}} \rho \Phi \vec{v} \cdot d\vec{A} = \oint_{\mathcal{A}} \Gamma_{\Phi} \nabla \Phi \cdot d\vec{A} + \int_{\mathcal{V}} S_{\Phi} d\mathcal{V} \quad (4.1)$$

où :

$\vec{A}$ est le vecteur surfacique de l'aire $\mathcal{A}$,

Γ_{Φ} est le coefficient de diffusion pour Φ ,

S_{Φ} est la source de la quantité Φ par unité de volume.

La méthode des volumes finis consiste à écrire l'équation (4.1) sous la forme :

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} \mathcal{V} + \sum_f^{N_{faces}} \rho_f \Phi_f \vec{v}_f \cdot d\vec{A}_f = \sum_f^{N_{faces}} \Gamma_{\Phi_f} \nabla \Phi_f \cdot d\vec{A}_f + S_{\Phi} \mathcal{V} \quad (4.2)$$

où :

$\mathcal{V}$ représente le volume de la maille.

f est une des faces de la maille,

N_{faces} est le nombre de faces de la maille.

Dans notre cas, toutes les simulations ont été effectuées avec un maillage cartésien et rectangulaire. Selon les cas, ce maillage peut être régulier ou irrégulier. Le type de solveur choisi pour la discrétisation des équations de transport utilise un algorithme de résolution basé sur la pression. Les équations sont résolues de manière séquentielle. Le découplage pression/vitesse se fait par l'algorithme SIMPLE. Les termes convectifs sont résolus par un schéma décentré amont du second ordre et les termes diffusifs sont résolus par un schéma centré.

4.2 Équations modélisées par ANSYS/Fluent

Dans le chapitre 2 (§2.1), nous avons présenté les équations de transport des écoulements stationnaires compressibles et incompressibles avec les conditions aux limites de glissement. Cependant, il est important de comprendre ce qu'ANSYS/Fluent utilise afin de vérifier s'il prend en compte tous les phénomènes qui entrent en jeu dans un écoulement glissant ou non glissant, compressible ou incompressible. Nous présentons ci-dessous brièvement les équations et conditions limites utilisées dans ANSYS/Fluent, tirées du *Theory Guide* [1] et du *User's Guide* [2].

4.2.1 Équations de transport

Équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = S_m \quad (4.3)$$

S_m représente une source de masse.

Équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \nabla P + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} + \vec{F} \quad (4.4)$$

où :

$\vec{F}$ représente les forces extérieures qui s'exercent sur l'écoulement,

$\bar{\bar{\tau}}$ est le tenseur des contraintes visqueuses défini dans §2.1.1 par l'équation (2.3).

Équation de l'énergie

Elle s'écrit en fonction de l'énergie totale e :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot [\vec{v}(\rho e + P)] = \nabla \cdot \left[k \nabla T - \sum_j h_j \vec{J}_j + (\bar{\tau} \cdot \vec{v}) \right] + S_h \quad (4.5)$$

$\vec{J}_j$ est le flux diffusif de l'espèce j et S_h représente une source de chaleur.

L'énergie totale e s'exprime comme suit :

$$e = h - \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} \quad (4.6)$$

h est l'enthalpie massique sensible décrite dans §2.1.1 par l'équation (2.7) pour des écoulements compressibles et dans §2.1.2 par l'équation (2.16) pour des écoulements incompressibles. La température de référence utilisée dans ANSYS/Fluent pour le calcul de h est $T_{\text{ref}} = 298,15K$.

4.2.2 Glissement dynamique et saut de température

Quand l'écoulement est modérément raréfié, les phénomènes de glissement et de saut de température ne sont pas modélisés systématiquement par ANSYS/Fluent. Pour qu'ils soient pris en compte, il faut activer l'option "*Low-pressure Boundary Slip*" dans le menu des modèles visqueux. Cette option n'apparaît que si l'équation de l'énergie est résolue car le glissement dynamique y est traité simultanément avec le saut de température.

Glissement dynamique

Le glissement dynamique s'écrit de la manière suivante [1] :

$$u_p - u_g = \frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u} K n \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_p \quad (4.7)$$

où :

u_p est la vitesse de la paroi ;

u_g est la vitesse de glissement ;

σ_u est le coefficient d'accommodation dynamique ;

n est la variable normale adimensionnelle à la paroi.

Cette équation est approximée de la sorte :

$$u_p - u_g \approx \frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u} \frac{\lambda}{\delta} (u_g - u_c) \quad (4.8)$$

où :

u_c est la vitesse au centre de la cellule adjacente à la paroi ;

δ est la distance entre la paroi et le centre de la cellule adjacente à la paroi ;

λ est le libre parcours moyen, exprimé dans ANSYS/Fluent par [1] :

$$\lambda = \frac{k_B}{\sqrt{2}\pi\sigma^2} \left(\frac{T}{P} \right) \quad (4.9)$$

avec :

k_B la constante de Boltzmann ($1.38066 \cdot 10^{-23} J/K$) ;

σ la distance caractéristique du potentiel de Lennard-Jones.

Saut de température

Par analogie avec le glissement dynamique, le saut de température à la paroi s'exprime dans ANSYS/Fluent comme suit [1] :

$$T_p - T_g = 2 \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} Kn \frac{\partial T}{\partial n} \quad (4.10)$$

avec :

T_p la température de la paroi ;

T_g la température du gaz à la paroi ;

σ_T le coefficient d'accommodation thermique.

L'équation (4.10) est modélisée de la sorte :

$$T_p - T_g \approx 2 \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{\lambda}{\delta} (T_g - T_c) \quad (4.11)$$

où T_c est la température au centre de la cellule adjacente à la paroi.

Cette équation n'est pas tout à fait identique à celle présentée dans §1.3.3. En effet, le produit $\frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{1}{Pr}$ est omis dans l'équation (4.11). Selon le gaz étudié, nous le calculerons afin de déterminer son importance et agir en fonction.

4.2.3 Modélisation des conditions aux limites

Conditions à la sortie de la conduite

À la sortie de la conduite, nous utilisons deux types de conditions aux limites :

Outflow : Cette condition est utilisée si une vitesse ou un débit sont imposés à l'entrée de la conduite. Elle ne peut pas être utilisée quand le gaz est parfait, nous ne l'utilisons que pour des écoulements incompressibles. La valeur de sortie de la vitesse longitudinale u est obtenue par extrapolation des données à l'intérieur du domaine¹. Concernant la vitesse transversale v et la pression p , elles sont obtenues par l'extrapolation à l'ordre 0² et ceci est valable aussi pour la température [1]³ Les conditions de sortie sont donc :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (4.12)$$

Pressure Outlet : Cette condition est utilisée si une pression est imposée à l'entrée de la conduite et elle est utilisable quel que soit le type d'écoulement. Les valeurs en sortie des composantes du vecteur vitesse et de la température sont obtenues de la même manière que pour la condition *Outflow*

1. Nous n'avons pas trouvé d'informations plus précises dans la documentation de ANSYS/Fluent quant au calcul de u sur la section de sortie de la conduite. Nous avons quand même pu vérifier que l'interpolation n'est ni d'ordre 0 ni d'ordre 1.

2. De même que pour u , aucune précision sur l'interpolation faite sur v et p n'a été donnée, par contre nous avons pu vérifier qu'elle est d'ordre 0 grâce aux UDF (voir §4.3 pour la définition des UDF).

3. Contrairement à u , v et p , l'information sur le calcul de T sur la section de sortie de la conduite a bien été donnée dans le *Theory Guide* de ANSYS/Fluent.

Conditions à la paroi

Flux imposé :

Quand un flux de chaleur q_p est imposé à la paroi de la conduite, ANSYS/Fluent le traduit par la loi de Fourier [2] :

$$q_p = k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (4.13)$$

où n est la coordonnée normale à la paroi.

Notons que cette condition est appliquée même en présence de glissement dynamique au niveau de la paroi alors que, dans ce cas, on devrait plutôt traiter l'équation (2.54) détaillée dans §2.2.2.

Température imposée :

En présence d'un saut de température, une température de glissement différente de la température de la paroi et de celle de la cellule adjacente à la paroi apparaît. Cela engendre une nouvelle donnée à stocker. Comme il n'est pas possible de le faire, ANSYS/Fluent impose directement la température de glissement, T_g , à la place de celle de la paroi. T_g est construite à partir de l'équation (4.11) [1] :

$$T_g = \frac{T_p + \beta T_c}{1 + \beta} \quad (4.14)$$

Avec :

$$\beta = 2 \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T \delta}$$

4.2.4 Bilan total des flux de chaleur

Théoriquement, le bilan des flux de chaleur se fait en calculant l'intégrale de l'équation de l'énergie (4.5) sur le volume $\mathcal{V}$. En ôtant tous les termes inexistantes ou négligeables dans le cadre de cette étude, elle s'écrit de la même manière que l'équation (2.4) vue dans §2.1.1. Le théorème de Green-Ostrogradski nous permet de projeter les termes de cette équation sur la surface $\mathcal{S}$ bordant le volume $\mathcal{V}$ de la conduite. C'est ce qui est fait par ANSYS/Fluent mais en ne prenant en compte que les termes convectifs et diffusifs. En effet, l'intégrale suivante est calculée :

$$\oint_{\mathcal{S}} (\rho \vec{v} h - k \nabla T) \cdot \vec{n}_S d\mathcal{S} = 0 \quad (4.15)$$

au lieu de :

$$\oint_{\mathcal{S}} (\rho \vec{v} h - k \nabla T + e_c \vec{v} - \bar{\tau} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n}_S d\mathcal{S} = 0 \quad (4.16)$$

L'équation (4.15) est correcte quand l'écoulement est non glissant car le terme $e_c \vec{v}$ est négligeable et le terme $\bar{\tau} \cdot \vec{v}$ est nul sur toute la surface $\mathcal{S}$. Par contre, quand l'écoulement est glissant, ce terme est non nul au niveau de la paroi puisque la vitesse ne l'est pas (voir §2.2.2). L'équation (4.15) n'est donc pas suffisante quand l'écoulement est glissant.

4.3 Introduction de modèles par les UDF

Nous venons de voir que les équations utilisées par ANSYS/Fluent décrivent bien les écoulements que nous allons étudier. Cependant, les conditions aux limites et en particulier celles de glissement ne sont pas toujours correctes par rapport à ce que nous avons vu dans la première partie de cette thèse. Nous aurons besoin de modifier certaines grandeurs, voire même certaines équations. Pour ce faire, nous passons par ce qui est appelée une UDF.

Une UDF veut dire *User Define Function*. C'est un sous-programme écrit en langage C qui fait appel à des macros développées par ANSYS/Fluent et qu'on peut implémenter dans un calcul pour diverses raisons :

- Imposer un profil variable plutôt que constant comme condition limite (vitesse à l'entrée, température ou flux de chaleur à la paroi ...) ;
- Définir une propriété variable lorsque les fonctions ne sont pas disponibles dans ANSYS/Fluent (conductivité thermique en fonction de la température ...) ;
- Introduire des équations de transport de scalaires passifs non traitées par le code ;
- Corriger un problème ou ce qui nous semble être une erreur dans notre cas ;
- ...

Nous avons écrit une dizaine d'UDF pour, entre autres, les raisons citées ci-dessus. Les plus importantes sont détaillées dans ce qui suit.

4.3.1 UDF visant à modifier la condition de flux nul à la sortie de la conduite

Quand on simule numériquement l'écoulement d'un fluide dans une conduite ouverte, on utilise par défaut, comme condition de sortie, $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ avec $n = x, y, z, r, \dots$

Cette condition est largement utilisée dans la littérature et ne pose généralement pas de problème. Cependant, elle a de l'influence lorsque le nombre de Péclet est inférieur à l'unité. Dans ces cas, le champ de température est modifié, pas seulement en sortie. La figure 4.1 montre des profils de la température moyenne débitante T_b rapportée à la température d'entrée du fluide T_e pour des écoulements incompressibles chauffés à flux constant et pour différents nombres de Reynolds dans une conduite plane de rapport de forme longitudinal $L/H = 200$. Nous constatons que plus ce dernier est faible, plus le profil de température s'aplatit près de la sortie de la conduite. L'influence de cette condition de sortie remonte jusqu'à l'entrée de la conduite lorsque $Re = 0,001$ (figure 4.1(d)).

L'une des solutions est de simuler des conduites plus longues et ne prendre en compte que la partie qui nous intéresse. Cette solution ne fonctionne pas toujours. En effet, le fait de doubler la longueur de la conduite, par exemple, ne suffit pas dans tous les cas comme nous pouvons le voir sur les figures 4.2(a) et 4.2(b). Cette dernière montre l'évolution du nombre de Nusselt local le long de la conduite pour des écoulements incompressibles où le nombre de Nusselt local devrait tendre vers la valeur théorique $Nu = 8,235$ lorsque les parois sont à flux imposé et en négligeant la diffusion axiale de chaleur ($\partial^2 T / \partial x^2 \ll \partial^2 T / \partial y^2$). Sur la figure 4.2(b), nous constatons que non seulement le nombre de Nusselt n'atteint jamais cette valeur mais que, de plus, la solution à l'entrée dépend de la longueur de la conduite.

Ceci prouve que ce phénomène n'est pas physique mais dû à la condition $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ imposée à la sortie de la conduite. Cette condition implique, en volumes finis, que la température sur les faces de la section de sortie est égale à la température des cellules adjacentes. Ce qui correspond sur la figure 4.3 à $T_{f1} = T_c$.

Pour corriger ce problème, nous avons écrit une UDF qui, à chaque itération, impose que la température sur les faces de la sortie de la conduite soit l'extrapolation linéaire des températures des mailles adjacentes par le biais d'un terme de source de chaleur dans

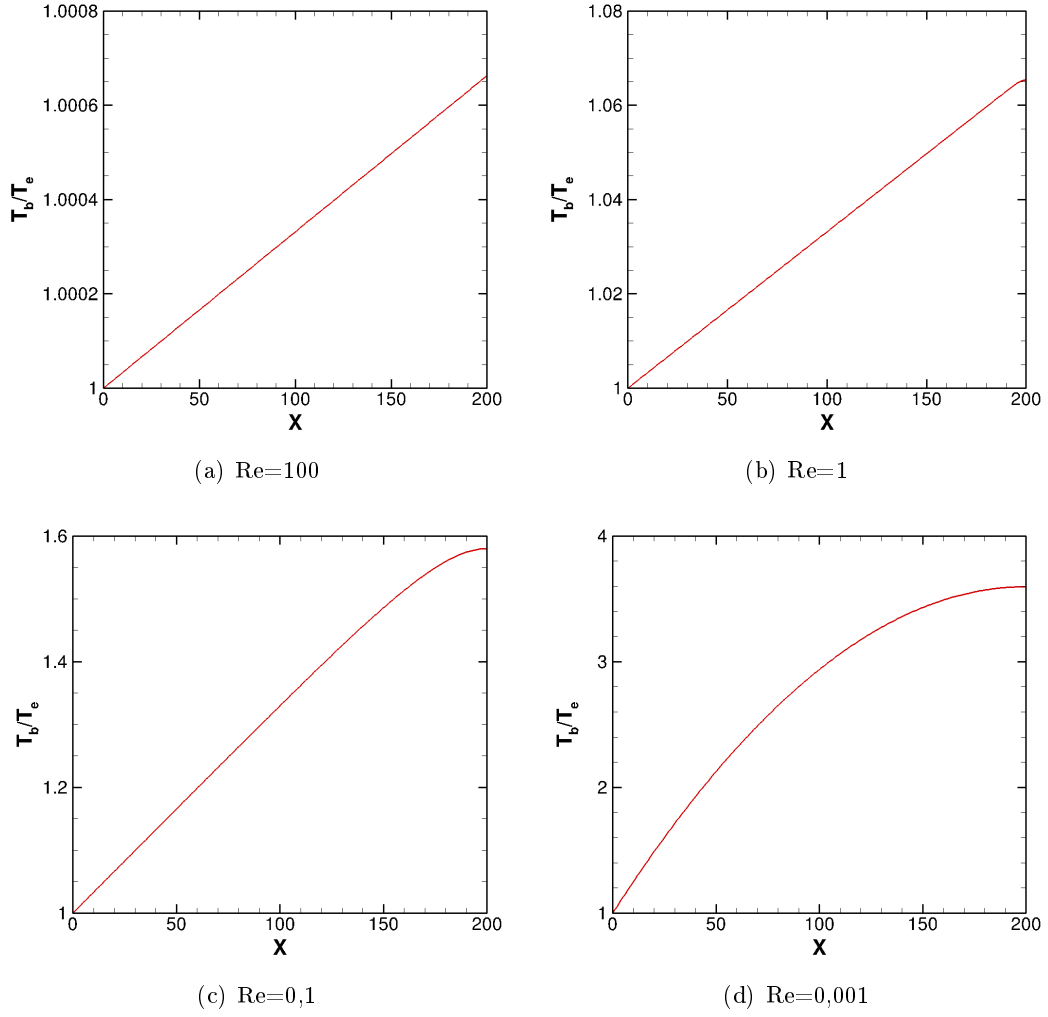


FIGURE 4.1 – Profil de température pour des écoulements incompressibles pour : (a) $Re=100$, (b) $Re=1$, (c) $Re=0,1$ et (d) $Re=0,001$ ($Pr = 0,7$)

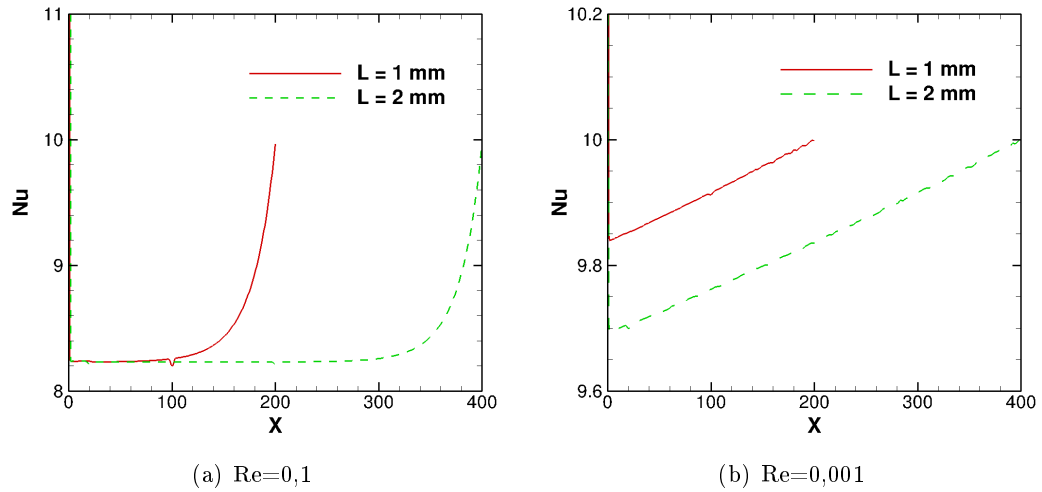


FIGURE 4.2 – Profil du nombre de Nusselt pour des écoulements incompressibles quand la longueur de la conduite L est égale à 1 ou 2 mm pour : (a) $Re=0,1$ et (b) $Re=0,001$

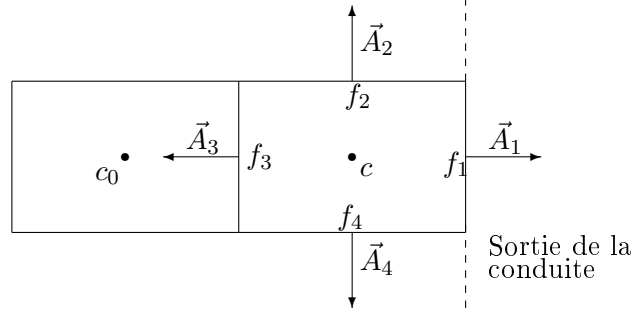


FIGURE 4.3 – Schéma représentatif d'une cellule adjacente à la sortie de la conduite

l'équation de l'énergie. La condition $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ devient alors :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial n^2} = 0 \quad , \quad x = L \quad (4.17)$$

Pour ce faire, nous partons de l'équation de l'énergie (4.5) décrite dans §4.2.1. Tous nos calculs étant stationnaires pour des écoulements monophasiques et homogènes, cette équation devient :

$$\nabla \cdot [\vec{v}(\rho e + P)] = \nabla \cdot [k \nabla T + (\bar{\tau} \cdot \vec{v})] + S_h \quad (4.18)$$

à l'aide de la définition de l'énergie totale (4.6) et celle de l'enthalpie des écoulements incompressibles (2.16) et en considérant la chaleur massique C_p constante en fonction de la température, nous pouvons écrire :

$$h = C_p(T - T_{ref}) + \frac{P}{\rho} \quad (4.19)$$

L'application du théorème de Green-Ostrogradski sur la maille présentée sur la figure 4.3 donne :

$$\sum_{i=1}^4 \left[\vec{v} \left(\rho C_p(T - T_{ref}) + \rho \frac{v^2}{2} + P \right) \right] \cdot \vec{A}_i = \sum_{i=1}^4 [k \nabla T + (\bar{\tau} \cdot \vec{v})] \cdot \vec{A}_i + S_h \mathcal{V}_c \quad (4.20)$$

$$\sum_{i=1}^4 [\vec{v}(\rho C_p(T - T_{ref}))] \cdot \vec{A}_i + B = \sum_{i=1}^4 k \nabla T \cdot \vec{A}_i + D + S_h \mathcal{V}_c \quad (4.21)$$

avec :

$$B = \sum_{i=1}^4 \left[\vec{v} \left(\rho \frac{v^2}{2} + P \right) \right] \cdot \vec{A}_i$$

$$D = \sum_{i=1}^4 (\bar{\tau} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{A}_i$$

Sachant que :

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} \Delta y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta x \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} -\Delta y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Delta x \end{pmatrix}$$

et en décomposant les sommes dans l'équation discrétisée (4.21), nous obtenons :

$$\rho u_1 C_p (T_1 - T_{ref}) \Delta y + B' = k \frac{dT}{dx} \Big|_1 \Delta y + D' + S_h \mathcal{V}_c \quad (4.22)$$

avec :

$$\begin{aligned} B' &= B + \rho v_2 C_p (T_2 - T_{ref}) \Delta x - \rho u_3 C_p (T_3 - T_{ref}) \Delta y - \rho v_4 C_p (T_4 - T_{ref}) \Delta x \\ D' &= D + k \frac{dT}{dy} \Big|_2 \Delta x - k \frac{dT}{dx} \Big|_3 \Delta y - k \frac{dT}{dy} \Big|_4 \Delta x \end{aligned}$$

Comme ANSYS/Fluent impose la condition limite :

$$\frac{dT}{dx} \Big|_1 = 0$$

qu'il remplace par

$$T_1 = T_c$$

l'équation (4.22) devient alors :

$$\rho u_1 C_p (T_c - T_{ref}) \Delta y + B' = D' + S_h \mathcal{V}_c \quad (4.23)$$

Nous cherchons en revanche à imposer la condition (4.17) que nous discrétisons sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} \Big|_1 &= \frac{dT}{dx} \Big|_3 \\ \frac{T_1 - T_c}{x_1 - x_c} &= \frac{T_c - T_{c0}}{x_c - x_{c0}} \\ T_1 &= T_c + \frac{T_c - T_{c0}}{x_c - x_{c0}} (x_1 - x_c) \end{aligned}$$

L'équation (4.22) devient alors :

$$\rho u_1 C_p \left[\left(T_c + \frac{T_c - T_{c0}}{x_c - x_{c0}} (x_1 - x_c) \right) - T_{ref} \right] \Delta y + B' = k \frac{T_c - T_{c0}}{x_c - x_{c0}} \Delta y + D' + S_h \mathcal{V}_c \quad (4.24)$$

Notre UDF doit transformer l'équation (4.23) en (4.24). Pour ce faire, nous passons par le terme source S_h que nous imposons égal à la différence de ces deux équations :

$$S_h = \frac{1}{\mathcal{V}_c} \left(k \frac{T_c - T_{c0}}{x_c - x_{c0}} \Delta y - \rho_1 C_{p,f} u_1 \frac{T_c - T_{c0}}{x_c - x_{c0}} (x_1 - x_c) \right) \quad (4.25)$$

Les résultats obtenus avec cette UDF sont montrés sur la figure 4.4. Nous constatons que le profil de température devient linéaire et le nombre de Nusselt local décroît rapidement pour atteindre la valeur asymptotique $Nu = 8,235$.

4.3.2 UDF définissant le glissement dynamique quand l'écoulement est incompressible

Rappelons que le logiciel ANSYS/Fluent modélise le glissement dynamique en se basant sur un libre parcours moyen défini comme suit :

$$\lambda = \frac{k_B}{\sqrt{2} \pi \sigma^2} \left(\frac{T}{P} \right) \quad (4.26)$$

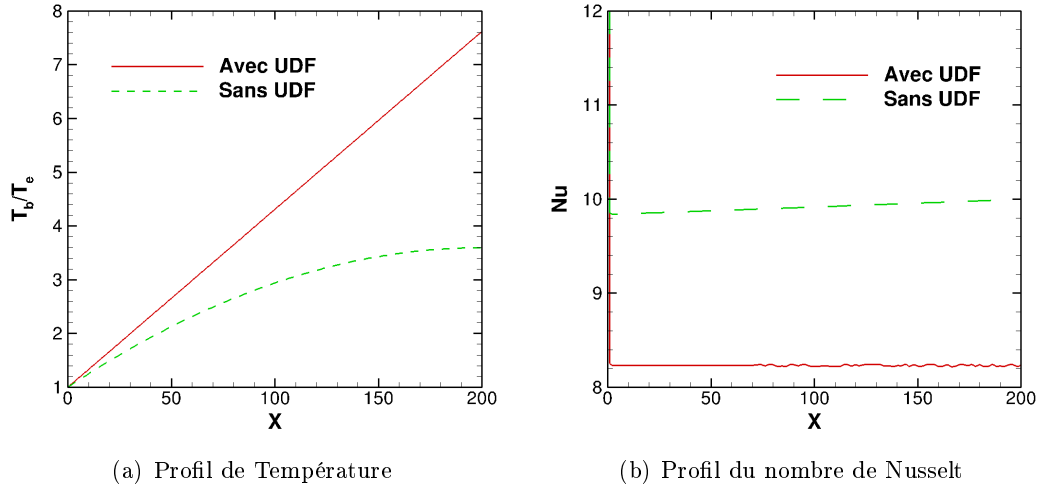


FIGURE 4.4 – Profil de température moyenne débitante (a) et du nombre de Nusselt local (b) pour un écoulement incompressible et un flux imposé aux parois avec $Re=0,001$ avec et sans UDF corrigeant la condition de sortie

Cette écriture du libre parcours moyen ne pose pas de problème quand il s'agit d'un écoulement de gaz parfait puisqu'elle représente la combinaison des deux équations suivantes :

$$\lambda = \frac{k_B}{\sqrt{2}\pi\sigma^2} \left(\frac{1}{\rho r} \right) \quad (4.27)$$

$$P = \rho r T \quad (4.28)$$

En se basant sur l'équation (4.27), le libre parcours moyen d'un écoulement incompressible devrait être constant car la masse volumique ρ est constante. Ce qui donne une vitesse de glissement constante lorsque l'écoulement est établi.

Cependant, ANSYS/Fluent utilise l'équation (4.26) dans laquelle tous les termes sont constants sauf la pression et la température. En prenant, par exemple, un écoulement incompressible isotherme, le libre parcours moyen ne sera fonction, dans l'équation (4.26), que de la pression du fluide qui diminue, ce qui a pour conséquence l'augmentation de λ tout au long du canal. De ce fait, la vitesse de glissement augmente à son tour, ce qui modifie complètement le champ de vitesse. En effet, quand l'écoulement est incompressible, la conservation du débit massique s'obtient par la conservation de la vitesse moyenne sur toutes les sections de la conduite. Si la vitesse est modifiée au niveau de la paroi dans une section donnée, les vitesses dans la section seront modifiées pour conserver le débit massique. Dans notre cas, la vitesse de glissement qui est près de la paroi augmente le long de la conduite. La vitesse au centre de la conduite diminue afin de conserver le débit et le profil de vitesse est donc de plus en plus aplati. La solution donnée par ANSYS/Fluent pour un écoulement incompressible glissant et isotherme est donc erronée. Cela est valable aussi pour les écoulements incompressibles non isothermes. La solution doit être corrigée par le biais d'une UDF.

Comme nous n'avons pas accès au libre parcours moyen que le code calcule pour chaque maille à l'aide de l'équation (4.26), nous avons dû procéder autrement. Nous sommes passés par le tenseur des contraintes de cisaillement au niveau de la paroi. En effet, ANSYS/Fluent permet de définir le taux de cisaillement entre la paroi et le fluide (ou à l'interface solide/fluide quand la paroi est épaisse). Quand l'écoulement est non glissant, les particules

fluides adhèrent à la paroi et le taux de cisaillement est maximal. Dans notre cas, les particules fluides glissent au niveau de la paroi ce qui génère un taux de cisaillement en fonction de la viscosité du fluide et du gradient normal de vitesse à la paroi. Dans le *User's Guide*, nous trouvons la définition suivante [2] :

$$\vec{\tau}_p = \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} \Big|_p \quad (4.29)$$

Dans notre cas, nous avons d'une part :

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_p &= -\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &\approx -\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \tau_{x_p} &= -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.30)$$

D'autre part, la vitesse de glissement définie par l'équation (4.7) :

$$u_p - u_g = \frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u} Kn \frac{\partial u}{\partial n}, \quad v_p = 0 \quad (4.31)$$

$$-u_g \approx \underbrace{\frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u} \lambda}_{L_g} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.32)$$

$$u_g = -L_g \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.33)$$

$$u_g = -L_g \left(\frac{u_c - u_g}{y_c - y_g} \right) \quad (4.34)$$

$$u_g = \frac{L_g}{\delta + L_g} u_c \quad (4.35)$$

où $L_g = \frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u} \lambda$ est la longueur de glissement et $\delta = y_g - y_c = y_p - y_c$ la distance entre la paroi et le centre de la cellule adjacente notée par l'indice c .

En combinant les équations (4.30) et (4.33), et en remplaçant τ_{x_p} par τ_p pour simplifier la notation nous obtenons :

$$\tau_p = \frac{\mu}{L_g} u_g \quad (4.36)$$

Ce qui permet d'écrire grâce à l'équation (4.35) :

$$\tau_p = \frac{\mu}{\delta + L_g} u_c \quad (4.37)$$

L'équation (4.37) s'écrit facilement dans une UDF en calculant la longueur de glissement L_g à partir du libre parcours moyen λ de l'équation (4.27). Pour vérifier si l'UDF donne de bons résultats, nous avons effectué des calculs d'écoulements de gaz parfaits dans lesquels nous imposons le glissement dynamique de deux manières différentes :

- 1/ en utilisant notre UDF ;
- 2/ en utilisant le glissement défini par défaut dans le logiciel. Nous savons que cette solution est correcte pour les écoulements de gaz parfaits comme expliqué précédemment. Elle nous servira de validation de l'UDF que nous avons écrite.

Les deux solutions obtenues étant identiques, nous en concluons que notre UDF est validée.

4.3.3 UDF visant à corriger le flux total à la paroi en présence de glissement

Nous avons montré dans §2.2.2 qu'en présence de glissement dynamique, le flux total à la paroi q_p , quel que soit le type de condition de chauffage imposé à celle-ci, s'exprime par l'équation 2.54 qui s'écrit :

$$k \frac{\partial T}{\partial y} = -\mu u \frac{\partial u}{\partial y} + q_p \quad (4.38)$$

Plusieurs tests ont été effectués avec ANSYS/Fluent afin de comprendre comment est traité le flux total à la paroi quand elle est à flux ou à température imposée. En d'autres termes, nous avons cherché à savoir si la condition (4.38) est respectée. Pour ce faire, nous avons effectué le calcul du bilan total des flux de chaleur échangés au sein de la conduite d'un cas donné en passant par les commandes de ANSYS/Fluent qui le calculent directement. Par précaution, nous avons, également, écrit des UDF qui permettent de calculer ce bilan. Avant de passer aux résultats, nous présentons les différentes équations utilisées dans le calcul du bilan total des flux de chaleur.

Différentes manières de calculer le bilan de chaleur

Nous avons vu dans §2.1.1 qu'il existe plusieurs façons pour exprimer l'équation de l'énergie. Nous intégrons l'équation de l'énergie totale (2.4) sur le volume $\mathcal{V}$ de la conduite comme suit :

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho C_p (T - T_{ref}) \vec{v} - k \nabla T + e_c \vec{v} - \bar{\tau} \cdot \vec{v}) d\mathcal{V} = 0 \quad (4.39)$$

Par précaution, nous intégrons aussi l'équation de l'énergie sous forme enthalpique (2.6) sur ce même volume $\mathcal{V}$. Ceci permet de vérifier les résultats obtenus et de bien interpréter les équations modélisées par ANSYS/Fluent. L'intégrale est la suivante :

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho C_p (T - T_{ref}) \vec{v} - k \nabla T) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \vec{v} \cdot \nabla P d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \bar{\tau} : \nabla \vec{v} d\mathcal{V} \quad (4.40)$$

Sachant que ce volume est délimité par les bords de la conduite, nous pouvons intégrer les termes en divergence sur la frontière de la conduite, notée $\mathcal{S}$, grâce au théorème de Green-Ostrogradski. Les équations (4.39) et (4.40) deviennent respectivement :

$$\oint_{\mathcal{S}} \left(\rho C_p (T - T_{ref}) \vec{v} - k \nabla T + e_c \vec{S} - \bar{\tau} \cdot \vec{v} \right) \cdot \vec{n}_S d\mathcal{S} = 0 \quad (4.41)$$

$$\oint_{\mathcal{S}} (\rho C_p (T - T_{ref}) \vec{v} - k \nabla T) \cdot \vec{n}_S d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{V}} \vec{v} \cdot \nabla P d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \mu \phi_v d\mathcal{V} \quad (4.42)$$

L'équation (4.41) est écrite dans une UDF notée UDF1 et l'équation (4.42) dans une autre UDF notée UDF2. De plus, ANSYS/Fluent nous permet de faire le bilan total sur chaque bord de la conduite à l'aide de la commande *total heat flux* qui fait le calcul de l'équation (4.15).

Pour résumer, nous calculons le bilan thermique total de trois façons :

Par ANSYS/Fluent

$$\oint_{\mathcal{S}} (\rho \vec{v} h - k \nabla T) \cdot \vec{n}_S d\mathcal{S} = 0 \quad (4.43)$$

Par l'équation de l'énergie totale : UDF 1

$$\oint_{\mathcal{S}} \left(\rho C_p (T - T_{ref}) \vec{v} - k \nabla T - \bar{\tau} \cdot \vec{v} + e_c \vec{S} \right) \cdot \vec{n}_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} = 0 \quad (4.44)$$

Par l'équation de l'énergie sous forme enthalpique : UDF 2

$$\oint_{\mathcal{S}} (\rho C_p (T - T_{ref}) \vec{v} - k \nabla T) \cdot \vec{n}_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{V}} (\vec{v} \cdot \nabla P + \mu \phi_v) d\mathcal{V} = 0 \quad (4.45)$$

Notons que ANSYS/Fluent projette sur la normale INTÉRIEURE $\vec{n}_{\mathcal{S}}$ de chaque face $\mathcal{S}$ alors que nos équations sont écrites en faisant les projections sur les normales EXTÉRIEURES des faces. Pour être conforme avec ANSYS/Fluent, nous allons projeter les termes en divergence des équations (4.44) et (4.45) de la même façon. Ceci ne change pas l'équation (4.44). Par contre, comme nous appliquons le théorème de Green-Ostrogradski dans l'équation (4.45) et que ce théorème impose que les projections se fassent sur les normales intérieures, nous devons réadapter cette équation en inversant les signes des termes volumiques.

La surface $\mathcal{S}$ se décompose en quatre faces : la section à l'entrée de la conduite, celle à la sortie, la paroi et la symétrie (la moitié de la conduite seulement est simulée pour réduire le temps de calcul), soit $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{entrée} + \mathcal{S}_{sortie} + \mathcal{S}_{paroi} + \mathcal{S}_{symétrie}$.

Il n'est pas nécessaire de faire les calculs sur le plan de symétrie car tous les termes en $\frac{\partial}{\partial y}$ sont nuls et les termes en $\frac{\partial}{\partial x}$ sont multipliés par 0.

Résultats sur le bilan total des flux de chaleur

Les tests ont été effectués pour un écoulement glissant et compressible en prenant en compte le travail des forces de pression et la dissipation visqueuse. La paroi est soumise à un flux de chaleur constant et égal à $Q_p = 0,5 W$ (densité de flux $q_p = 5000 W/m^2$ pour une longueur de conduite $L = 100 \mu m$). Les paramètres de simulation sont résumés dans le tableau 4.1.

Gaz	L (μm)	H (μm)	T_e (K)	P_e (kPa)	P_s (kPa)	q_p (W/m^2)
Argon	100	1	300	400	100	5000

TABLE 4.1 – Paramètres de la simulation du cas testé pour le calcul du bilan thermique.

Les résultats des différents calculs sont résumés dans le tableau 4.2 où toutes les valeurs sont des flux de chaleur, ce qui nous mène aux remarques suivantes :

- Nous remarquons d'abord que le bilan total calculé par ANSYS/Fluent n'est pas nul. On s'attendait à ce résultat puisque le logiciel ne prend pas en compte tous les termes de l'équation de l'énergie (4.5) dans le calcul du bilan. Par contre, il utilise cette équation pour la résolution du problème thermique. Ceci implique que le calcul du bilan total, en présence de glissement, doit être fait sans utiliser les fonctionnalités du code qui induisent des erreurs.
- À la paroi, on s'attendait à obtenir une valeur du flux différente de celle donnée par ANSYS/Fluent. D'après l'équation (4.15) et les résultats de la première ligne du tableau 4.2, au niveau de la paroi le flux total suivant est calculé par ANSYS/Fluent :

$$\int_{\mathcal{S}_p} (\rho \vec{v} h - k \nabla T) \cdot \vec{n}_{\mathcal{S}_p} d\mathcal{S}_p = Q_p = \int_0^L q_p dx = 0,5 W \quad (4.46)$$

Or :

$$\int_{\mathcal{S}_p} (\rho \vec{v} h - k \nabla T) \cdot \vec{n}_{\mathcal{S}_p} d\mathcal{S}_p = \int_0^L \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx \quad (4.47)$$

Donc :

$$\int_0^L \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx = \int_0^L q_p dx \quad (4.48)$$

Ou encore :

$$q_p = k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (4.49)$$

Cette dernière équation démontre que ANSYS/Fluent interprète le flux total au niveau de la paroi de la manière classique, sans tenir compte de la puissance des forces visqueuses, à savoir le terme $\mu u \frac{\partial u}{\partial y}$ (voir équation 2.54 dans la section §2.2.2 pour plus de détails).

- Les deux expressions intégrales de l'équation de l'énergie, en terme d'énergie totale (4.44) ou en terme d'enthalpie (4.45), conduisent quasiment au même bilan total ; la différence (de 10 %) doit être due aux erreurs numériques dans les différents calculs de post-traitement des flux. En effet, ANSYS/Fluent stocke les valeurs exactes des différentes variables au centre des mailles. Cependant, les 2/3 de nos calculs se font sur les faces du domaine par extrapolation des valeurs stockées dans les mailles adjacentes. Nous pouvons donc supposer que l'écart entre les deux méthodes de calcul s'explique par les erreurs de discrétisation des flux pariétaux.
- Le calcul du flux diffusif total à la paroi par le biais des UDFs confirme bien ce que nous avons présenté auparavant :

$$\int_0^L \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx = 0,505 \Rightarrow \int_0^L \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx \approx q_p L$$

- Le calcul de l'intégrale des contraintes visqueuses à la paroi par l'UDF 1 donne la même valeur que celle du bilan total calculé par ANSYS/Fluent et qui correspond à la valeur 0,588W montrée par l'étoile (*) dans le tableau 4.2. Ceci n'a qu'une seule explication : ANSYS/Fluent intègre bien le terme de puissance des contraintes visqueuses lorsque l'équation de l'énergie (4.5) est résolue. Mais ce terme est récupéré directement dans le volume, sans que les conditions limites thermiques ne soient modifiées. Ainsi, le gradient de température au niveau de la paroi est mal calculé.

En conclusion, la puissance des contraintes visqueuses dans le volume est bien modélisée dans ANSYS/Fluent. En revanche, comme la condition à la limite sur la paroi est écrite sans tenir compte de cette puissance (Eq.(4.49)), la solution du problème est fautive. ANSYS/Fluent résout finalement un autre problème que celui qu'il faudrait. Pour l'exemple du tableau 4.2, le cas traité par ANSYS/Fluent correspond en fait à un écoulement où le flux total à la paroi est $q_p L = -0,083W$, comme on peut le lire dans le bilan à la paroi calculé par l'UDF 1.

Correction du flux total à la paroi

Pour simuler correctement un écoulement glissant quand la paroi est adiabatique ou soumise à un flux de chaleur uniforme, nous avons utilisé des UDF. Nous en avons écrit trois, chacune procédant différemment mais donnant les mêmes résultats. Elles sont détaillées dans ce qui suit :

$\mathcal{S}_i$	Entrée	Sortie	Paroi	<i>BilanTotal</i>
Fluent (éq. (4.5))	-0,03	-0,115	0,5	0,588*
UDF 1 (éq.(4.44))	$\rho h \vec{v} \cdot \vec{n}_{\mathcal{S}_i}$	0,025	0,13	0
	$k \nabla T \cdot \vec{n}_{\mathcal{S}_i}$	0,04	$3 \cdot 10^{-4}$	-0,505
	$(\bar{\tau} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n}_{\mathcal{S}_i}$	0	0	0,588*
	$e_c \vec{v} \cdot \vec{n}_{\mathcal{S}_i}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	-0,02	0
	Bilan par surface	-0,014	0,115	-0,083
UDF 2 (éq.(4.45))	$\rho h \vec{v} \cdot \vec{n}_{\mathcal{S}_i}$	0,025	0,13	0
	$k \nabla T \cdot \vec{n}_{\mathcal{S}_i}$	0,04	3^{-4}	-0,505
	$\vec{v} \cdot \nabla P$	-2,35		
	$\bar{\tau} : \bar{D}$	1,75		

TABLE 4.2 – Calculs des différentes composantes du flux de chaleur total pour les différentes surfaces de la conduite ou sur le volume (W). Le *bilan total* est égal à la somme des flux sur toutes les frontières du domaine.

UDF 1 : Nous passons par une condition de Dirichlet. Pour cela, nous partons de l'équation du flux total à la paroi :

$$k \frac{\partial T}{\partial y} = -\mu u \frac{\partial u}{\partial y} + q_p$$

La discrétisation de cette équation au niveau de la cellule adjacente à la paroi permet d'écrire T_p comme suit :

$$T_p = T_c + \frac{\mu}{k}(u_c - u_g) + q_p \frac{y_p - y_c}{k} \quad (4.50)$$

c indique le centre de la cellule adjacente à la paroi.

Dans la simulation, au lieu d'imposer un flux de chaleur à la paroi, nous imposons plutôt une température écrite sous la forme précédente en passant par les UDF. Cette façon de faire est simple et les simulations sont assez rapides. Par contre, si la paroi était épaisse, il serait impossible de l'intégrer au niveau de l'interface solide/gaz. De plus, elle n'est valable que quand on ne tient pas compte du saut de température à la paroi. En effet, l'introduction de ce dernier rajoute une autre variable : la température de glissement, notée T_g . Cela complique l'écriture de T_p en fonction des autres variables. Nous avons donc laissé tomber cette UDF car elle est très limitée d'utilisation mais nous a tout de même servi de comparaison avec les deux autres pour effectuer leur validation.

UDF 2 : Cette UDF nous a été envoyée par le support utilisateur de ANSYS/Fluent quand nous l'avons contacté pour signaler le problème⁴. Cette UDF consiste à imposer un terme de source S de chaleur dans les mailles adjacentes à la paroi du côté du fluide :

$$S = \mu u \frac{u_g - u_c}{y_p - y_c} \frac{1}{V_c} \quad (4.51)$$

Cette UDF a l'avantage d'être utilisable non seulement en présence de saut de température, mais aussi quand la paroi est épaisse. Nous avons comparé la solution qu'elle

4. Nous travaillions à l'époque avec la version 14.5 de ANSYS/Fluent. Entre temps, d'autres versions sont sorties et elles traitent correctement le flux de chaleur à la paroi en présence de glissement. Par contre, le bilan de chaleur est toujours mal post-traité.

donne avec celle de la première UDF. Nous avons constaté que les deux solutions sont identiques, ce qui nous a permis de les valider mutuellement. Par contre, et bien que la solution globale soit correcte, le gradient de température à la paroi n'est pas modifié par cette UDF. Ceci nous gêne dans le calcul de certaines grandeurs comme le nombre de Nusselt. Par conséquent, nous avons cherché un autre moyen pour résoudre le problème.

UDF 3 : Puisque nous ne pouvions ni passer par une condition de Dirichlet, ni par un terme de source de chaleur, nous nous sommes tournés vers le seul moyen qui nous restait, à savoir : le flux de chaleur à la paroi. Le problème est que quand on impose un flux de chaleur à la paroi, on doit l'imposer à travers le flux diffusif. Pour avoir la bonne condition à la limite, il faut plutôt imposer le flux noté F égal à :

$$F = -\mu u_g \frac{u_g - u_c}{y_p - y_c} + q_p \quad (4.52)$$

Ce flux F est traduit par ANSYS/Fluent comme étant égal au flux diffusif à la paroi, de telle sorte à avoir :

$$k \frac{\partial T}{\partial y} = -\mu u \frac{\partial u}{\partial y} + q_p$$

Cette UDF a été comparée avec les deux autres : elle donne exactement les mêmes résultats et elle est plus rapide que l'UDF 2. De plus, elle nous permet de traiter les cas avec glissement thermique contrairement à l'UDF 1. Par contre, il n'est pas possible de l'utiliser quand la paroi de la conduite est épaisse. Comme notre étude ne porte que sur les conduites à paroi mince, nous avons utilisé cette UDF pour la résolution des écoulements glissants chauffés par un flux de chaleur uniforme.

4.4 Conclusion

À l'issu de cette étude, nous parvenons aux conclusions suivantes :

- Quand le nombre de Péclet est inférieur à l'unité, la condition limite à la sortie de la conduite $\partial T / \partial x = 0$ influence significativement le champ de température. Nous avons tenté de corriger cette condition en imposant $\partial^2 T / \partial x^2$ à la sortie de la conduite, de telle sorte que le profil de la température moyenne débitante soit linéaire. La procédure s'est avérée efficace mais seules des expériences pourraient indiquer la condition de sortie appropriée à adopter pour de très faibles Pe .
- Le code ANSYS/Fluent résout correctement l'équation de l'énergie et, plus généralement, les équations de transport. De plus, il permet de traiter tout type d'écoulement (compressible ou incompressible, avec ou sans condition de glissement). Cependant, en régime glissant, les conditions aux limites thermiques aux parois sont mal représentées quand les parois sont adiabatiques ou chauffées uniformément. De plus, le post-traitement des flux pariétaux en cas de glissement est incorrect. Nous avons la possibilité de corriger ces problèmes à l'aide d'UDF mais elles peuvent conduire à de fortes augmentations des temps de calcul. Avec la version 15 d'ANSYS/Fluent (2014), il est plus simple de simuler des écoulements glissants (les problèmes ont été corrigés) mais le bilan total des flux de chaleur reste toujours mal post-traité.

Chapitre 5

Validations et résultats

Si les résultats obtenus avec ANSYS/Fluent sont bien validés en convection forcée, ils le sont moins lorsque les conditions aux limites des équations de conservation doivent être modifiées, notamment pour les micro-écoulements avec glissement. C'est la raison pour laquelle nous avons comparé nos résultats avec des résultats publiés récemment.

Pour mieux comprendre la physique des écoulements dans des microconduites, nous avons traité les problèmes graduellement. Nous débutons par des écoulements non glissants, dans des cas compressibles ou incompressibles. Nous considérons ensuite des écoulements glissants qui sont, dans la littérature, le plus souvent supposés incompressibles.

5.1 Écoulements non-glissants : cas incompressible

5.1.1 Présentation du problème

Dans cette partie, l'écoulement est supposé incompressible, laminaire et non glissant. Afin de valider nos résultats, nous considérons une conduite similaire à celle étudiée par Nguyen [50, 51]. Dans ces articles, l'objectif est d'établir des corrélations utilisables à de faibles nombres de Reynolds et de Péclet pour lesquels les diffusions axiales de quantité de mouvement de chaleur ne sont pas négligeables. Soulignons ici, que les corrélations reportées dans la littérature courante sont basées sur de grands nombres de Reynolds et de Péclet : pour tout type de section de conduite, on trouve que la longueur d'établissement dynamique est $x_d = a_d Re D_h$, que le coefficient de perte de charge (ou de Darcy) en régime dynamique établi est inversement proportionnel à Re , $f_D = b_d / Re$, que la longueur d'établissement thermique est $x_T = a_T Pe D_h$ et que le nombre de Nusselt en régime thermique établi est une constante si les propriétés thermophysiques sont indépendantes de la température.

La conduite est composée de deux parties : la première, de longueur L' , n'est pas chauffée et est considérée comme une extension amont de la partie chauffée, de longueur L , avec une densité de flux uniforme, comme montré sur la figure 5.1. Aux faibles nombres de Reynolds que nous considérerons, le régime dynamique s'établit dans l'extension de longueur L' bien supérieure à la longueur x_d d'établissement du régime dynamique. Le régime thermique s'établit dans la partie chauffée mais la solution obtenue est dépendante de la longueur de l'extension. Dans [50], la longueur totale $L' + L$ est supposée suffisamment grande pour ne pas influencer la solution, ce qui est loin d'être évident. Dans [51], seul le problème thermique est étudié : le régime dynamique est supposé établi dès l'entrée de l'extension (profil de Poiseuille en $x = -L'$, Fig.5.1) et deux types d'extension ont été

considérées : à parois adiabatiques ou à parois isothermes maintenues à la température du fluide à l'entrée. Pour un nombre de Péclet fixé, la longueur d'établissement thermique et les nombres de Nusselt locaux dépendent du type de conditions aux limites appliquées aux parois de l'extension. On peut penser que la réalité se situe entre ces deux cas.

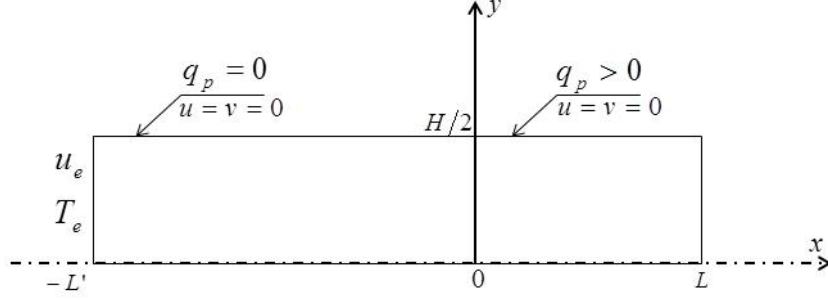


FIGURE 5.1 – Domaine de la conduite simulée.

5.1.2 Modélisation et maillage

Les équations de conservation sont données au §2.1.2 et les propriétés du fluide sont supposées constantes.

La présence de l'extension nécessite de modifier les conditions aux limites présentées au §2.2.1. Pour ce problème, elles s'écrivent :

$$x = -L', \quad \forall y \in [0, H/2], \quad u = u_e, \quad v = 0, \quad T = T_e \quad (5.1)$$

$$x = L, \quad \forall y \in [0, H/2], \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (1) \quad (5.2)$$

$$y = 0, \quad \forall x \in [-L', L], \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (5.3)$$

$$y = H/2, \quad \forall x \in [-L', 0], \quad u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (5.4)$$

$$y = H/2, \quad \forall x \in [0, L], \quad u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{q_p}{k} \quad (5.5)$$

Leur écriture adimensionnelle est la suivante :

$$X = -\frac{L'}{H}, \quad \forall Y \in [0, 1/2], \quad U = 1, \quad V = 0, \quad \theta = 0 \quad (5.6)$$

$$X = \frac{L}{H}, \quad \forall Y \in [0, 1/2], \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = 0 \quad (5.7)$$

1. Cette condition est détaillée dans la partie 4.3.1

$$Y = 0, \quad \forall X \in \left[-\frac{L'}{H}, \frac{L}{H}\right], \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (5.8)$$

$$Y = 1/2, \quad \forall X \in \left[-\frac{L'}{H}, 0\right], \quad U = V = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (5.9)$$

$$Y = 1/2, \quad \forall X \in \left[0, \frac{L}{H}\right], \quad U = V = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 1 \quad (5.10)$$

Avec :

$$\theta = \frac{T - T_e}{H \frac{q_p}{k}} \quad (5.11)$$

Une étude de maillage a été menée et le maillage choisi est rectangulaire et raffiné près de la paroi et à la jonction "zone adiabatique/zone chauffée". Le nombre de mailles dépend de la géométrie ou, plus précisément, de la longueur L' de l'extension. En effet, cette dernière a été ajoutée dans le but de prendre en compte les effets de diffusion arrière de chaleur à faibles nombres de Péclet. De ce fait, plus le nombre de Péclet est faible, plus l'extension devrait être grande. Comme il est difficile de prévoir la longueur de l'extension avant de faire les calculs, une longueur arbitraire a été choisie au préalable (extension 5,5 fois plus longue que la zone chauffée). Cette longueur est suffisante pour certains cas mais insuffisante lorsque le nombre de Péclet est très faible. Une extension 55 fois plus longue que la zone chauffée ($L' = 1000H$) a donc été simulée pour $Pe \leq 0,05$. Les maillages employés sont indiqués dans le tableau 5.1.

L'étude a été menée avec l'air mais elle reste valable pour d'autres gaz car les résultats sont adimensionnalisés. Les paramètres de simulation sont résumés dans le tableau 5.2. La conduite est chauffée par un flux $Q_p = 2q_p L = 0,036W/m$.

Pe	L' (mm)	N'_x	L (μm)	N_x	H (μm)	N_y
> 0.05	1	1000	180	1260	10	80
≤ 0.05	10	10000				

TABLE 5.1 – Dimensions des conduites et maillages selon le nombre de Péclet

T_e (K)	q_p (W/m ²)	ρ (kg/m ³)	μ (kg/m.s)	C_p (J/kg.K)	k_f (W/m.K)
300	100	1,225	$1,7894.10^{-5}$	1006,43	0,0242

TABLE 5.2 – Paramètres fixés pour les simulations.

5.1.3 Validation des résultats

Partie dynamique

La longueur d'établissement dynamique est la distance à laquelle la vitesse maximale (sur l'axe) atteint 99% de sa valeur en régime dynamique établi, soit pour une conduite plane $u_{max}/u_m = 0,99 \times 1,5$. La position adimensionnelle suivante est conventionnellement utilisée dans la littérature :

$$X^+ = \frac{x/D_h}{Re} \quad \text{avec} \quad Re = \frac{u_e D_h}{\nu} \quad \text{et} \quad D_h = 2H \quad (5.12)$$

Pour $1 \leq Re_{D_h} \leq 20$, la corrélation donnée par Nguyen [50] s'écrit :

$$X_d^+ = \frac{x_d/D_h}{Re} = 0,004004 + 0,1765/Re \quad \Rightarrow \quad x_d = (0,004004Re + 0,1765)D_h \quad (5.13)$$

Cette corrélation montre que la longueur d'établissement dynamique est inférieure à un dixième de la largeur H de la conduite lorsque $Re = 1$.

Lorsque $Re \gg 20$ (en pratique $Re \approx 100$), X^+ devient quasiment constante et $x_d/D_h \approx 0,011Re$. La corrélation donnant le coefficient de perte de charge reportée dans [50] est :

$$f_D = \frac{96}{Re} + \left(\frac{6,6567}{Re} + 0,6090 \right) \quad \text{pour} \quad 1 \leq Re \leq 20 \quad (5.14)$$

Le terme entre parenthèses représente l'augmentation de f_D due à l'effet de la diffusion axiale de quantité de mouvement, importante à faibles Re . En supposant le gradient de pression linéaire depuis l'entrée d'une conduite ($\partial p/\partial x = \Delta P/L$), ΔP peut toujours s'écrire en fonction de Re :

$$\Delta P = f_D \left(\frac{L}{D_h} \right) \left(\frac{\rho u_m^2}{2} \right) = \left(\frac{\mu}{D_h} \right)^2 \times \frac{1}{\rho} \times \frac{L}{D_h} \left(\frac{f_D}{2} \right) Re^2 \quad (5.15)$$

Soit pour une conduite plane et en utilisant une corrélation du type (5.14) :

$$\Delta P = \left(\frac{\mu}{D_h} \right)^2 \times \frac{1}{\rho} \times \frac{L}{D_h} \left[48 + \frac{1}{2}(a + bRe) \right] Re \quad (5.16)$$

avec $a = 6,6567$ et $b = 0,6090$ dans l'équation (5.14).

Pour la conduite étudiée ($H = 10^{-5} m$, $L = 1,8 \cdot 10^{-4} m$) et de l'air à $T_e = 300 K$ et $P = 1 atm$ ($\rho = 1,225 kg/m^3$, $\mu = 1,7894 \cdot 10^{-5} Pa.s$), l'équation (5.16) conduit à :

$$\Delta P = 5,881 [48 + (3,238 + 0,3045Re)] Re \quad (5.17)$$

Soit $\Delta P = 303,1 Pa$ pour $Re = 1$, nombre de Reynolds correspondant à une vitesse débitante $u_m = (\frac{\mu}{2\rho H}) = 0,73 m/s$. En appliquant les critères donnés dans Morini et al. [Exp.Therm. Fluid Sci., 2011]

$$\text{valeur moyenne du nombre de Mach : } \overline{Ma} < 0,3 \quad \text{et} \quad \frac{P_s - P_e}{P_e} < 0,05 \quad (5.18)$$

on remarque que l'approximation d'incompressibilité est justifiée lorsque la pression d'entrée est de l'ordre de $1 atm$.

En régime glissant, le coefficient de perte de charge (f_D) est réduit d'environ 10% pour $Kn = 0,1$ comme montré dans Morini et al. (2011) [49] et la vitesse débitante est donc augmentée. Cependant, l'approximation d'incompressibilité devrait rester applicable pour des ΔP inférieures à $\approx P_{entree}/20$.

Le tableau 5.3 donne le rapport entre la vitesse maximale U_{max} et la vitesse débitante U_m à différentes positions adimensionnelles X^+ . Ces positions sont toutes à l'entrée de la conduite, avant l'établissement dynamique de l'écoulement, à partir duquel $U_{max}/U_m = 1,5$. La dernière colonne de ce tableau donne la différence relative entre le rapport de vitesse calculé et celui de [50]. Ces différences étant toujours inférieures à 2%, nous pouvons en déduire que la dynamique des écoulements incompressibles à faibles nombres de Reynolds est validée.

X^+	$\frac{U_{max}(X^+)}{U_m(X^+)}$ présent	$\frac{U_{max}(X^+)}{U_m(X^+)}$ [50]	Différence %
0,0063	1,3258	1,3431	1,2897
0,0128	1,3337	1,3522	1,3714
0,0195	1,3430	1,3614	1,3513
0,0558	1,3889	1,4058	1,1994
0,0719	1,4063	1,4224	1,1313
0,1077	1,4375	1,4379	0,0252
∞	1,5000	-	-

TABLE 5.3 – Établissement dynamique pour $Re = 1(u_m = 0,73 \text{ m/s})$

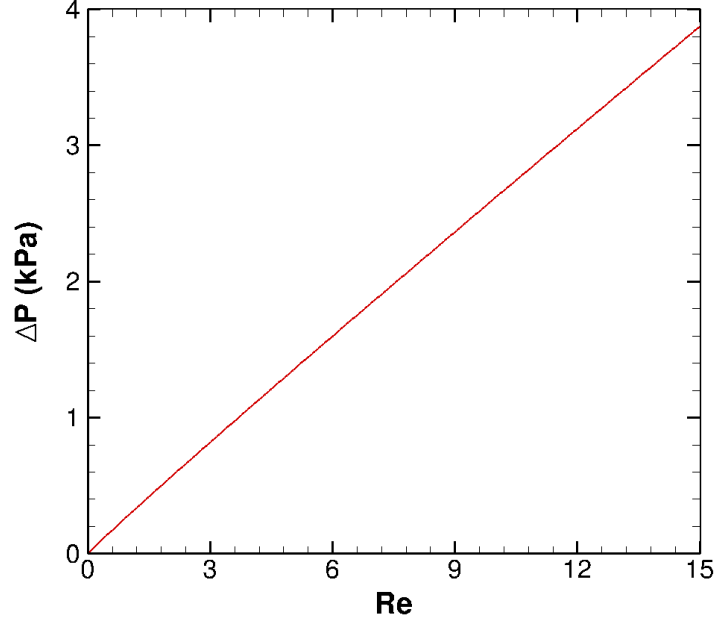
A partir de nos calculs de chute de pression (sans extension) nous obtenons une relation étendue à de plus faibles nombres de Reynolds. Soit :

$$f_D = \frac{96}{Re} + \left(\frac{5,824}{Re} + 0,06616 \right) \quad \text{pour } 0,01 \leq Re \leq 25 \quad (5.19)$$

et donc

$$\Delta P = \left(\frac{\mu}{D_h} \right)^2 \times \frac{1}{\rho} \times \frac{L}{D_h} [48 + (2,912 + 0,0331Re)] Re \quad \text{pour } 0,01 \leq Re \leq 25 \quad (5.20)$$

La différence maximale (à $Re = 1$) entre la partie due à la diffusion axiale (termes entre parenthèses) de notre corrélation (Eq. (5.19)) et celle de Nguyen [50] (Eq. (5.14)) est de 18%.


 FIGURE 5.2 – Chute de pression en fonction de Re ($H = 10 \mu m$, $L = 180 \mu m$)

Partie thermique

Compte-tenu des longueurs d'extension retenues (tableau 5.1), l'écoulement est toujours dynamiquement établi à l'entrée de la partie chauffée.

Champ de température

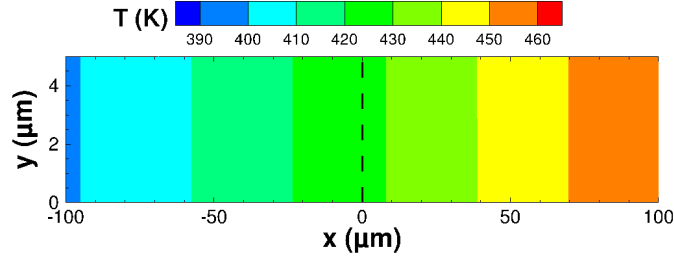
La figure 5.3 représente le champ de température pour $Pe = 0,5$. On observe que le gaz commence à chauffer avant d'atteindre la zone chauffée du fait de la diffusion inverse, en d'autres termes $T(0) > T_e$. Avec la condition de sortie $\partial^2 T / \partial x^2 = 0$ (UDF décrite au § 4.3.1 4.3.1), le gaz sort à une température $T_s = T(0) + (2q_p L / \dot{m} C_p)$. Sans extension, la température de sortie serait $T_s = T_e + (2q_p L / \dot{m} C_p)$: le gaz sortirait donc plus froid. Comme la diffusion inverse est importante à faibles nombres de Péclet, il est important de simuler le plus correctement possible les conditions thermiques à l'entrée de la conduite. Cela peut être fait :

- 1/ en imposant à l'entrée une température mesurée expérimentalement,
- 2/ en ajoutant une extension géométrique en amont de la conduite permettant de reproduire des conditions thermiques plus proches des conditions réelles.

Comme nous ne disposons pas de résultats expérimentaux, nous avons retenu la seconde solution.

Nous avons étudié l'importance de la diffusion en calculant son étendue dans la zone adiabatique amont. Nous nous sommes fixés un critère qui correspond à une position à partir de laquelle le fluide commence à chauffer. Cette position représente la coordonnée adimensionnelle $X_1 = x_1 / H$ qui vérifie :

$$\theta_f(X_1) = \theta_e + 0,01(\theta_f(0) - \theta_e) \quad \text{ou} \quad T_m(x_1) - T_e = 0,01(T_m(0) - T_e) \quad (5.21)$$


 FIGURE 5.3 – Champ de température à l'entrée de la conduite pour $Pe = 0.5$

ou bien à la coordonnée $X_2 = x_2/H$ plus éloignée de l'entrée de l'extension pour laquelle :

$$\theta_f(X_2) = \theta_e + 0.05(\theta_f(0) - \theta_e) \quad (5.22)$$

Ces longueurs sont reportées dans le tableau 5.4.

Pe	$-X_1$	$-X_2$
0.05	181	118
0.1	80,8	56,6
0.5	18,0	11,8
1	9,05	5,8
5	2,0	1,2
10	0,4	0,63

 TABLE 5.4 – Longueurs $X_1 = x_1/H$ et $X_2 = x_2/H$ pour $0.05 \leq Pe \leq 10$

À partir du tableau 5.4, on constate qu'à grand nombre de Péclet ($Pe \geq 1$), le flux diffusif est négligeable dans l'extension, ce qui se traduit par $T(0) \approx T_e$. Dans ce cas, on peut se contenter d'une extension de longueur $L' = 5H$.

Par contre, plus le nombre de Péclet diminue, plus cette longueur devient importante. Par exemple, pour $Pe = 0.05$, la zone de conduction remonte dans l'extension à une longueur de l'ordre de $45H$. Ceci a un impact direct sur la température du fluide. En effet, $T(0)$ peut être largement supérieur à T_e , ce qui modifie complètement la solution.

Le tableau 5.5 montre la différence relative sur l'augmentation de température du fluide en appliquant ou non l'extension pour différents nombres de Péclet. On définit deux écarts de température, un écart total et un autre partiel comme suit :

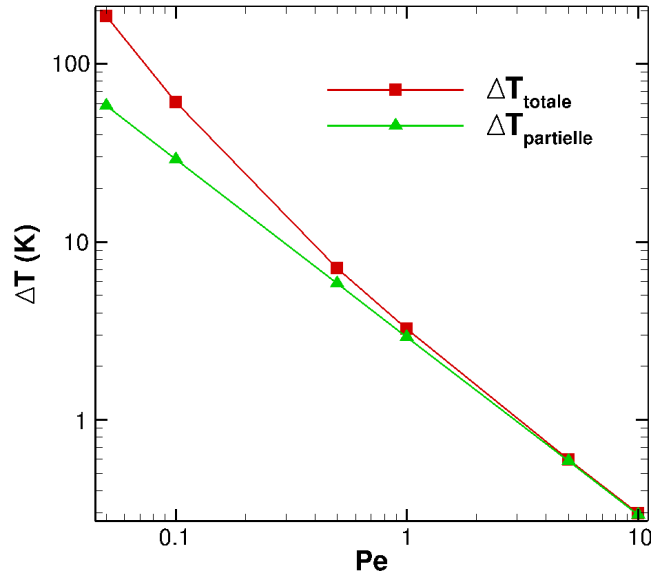
$$\Delta T_{totale} = T(L) - T_e \quad (5.23)$$

$$\Delta T_{partielle} = T(L) - T(0) \quad (5.24)$$

$$Diff = \frac{\Delta T_{totale} - \Delta T_{partielle}}{\Delta T_{totale}} \times 100 = \frac{T(0) - T_e}{T(L) - T_e} \times 100 \quad (5.25)$$

Le tableau 5.5 confirme la nécessité de prendre une extension à faible nombre de Péclet, sinon le champ de température simulé peut être très différent (figure 5.4). Par exemple, la figure 5.4 montre que $T(0) - T_e = \Delta T_{totale} - \Delta T_{partielle} \approx 31K$ pour $Pe = 0,1$ et que $T(0) - T_e \approx 127K$ pour $Pe = 0,05$.

Pe	Diff (%)
0.05	68.6
0.1	52.0
0.5	18.0
1	9.9
5	2.4
10	1.5

 TABLE 5.5 – Différence sur le gain de température du fluide pour $0.05 \leq Pe \leq 10$

 FIGURE 5.4 – Variations de ΔT_{totale} et de $\Delta T_{partielle}$ en fonction du nombre de Péclet ($H = 10 \mu m$, $L = 180 \mu m$, $T_e = 300 K$, $q_p = 100 W/m^2$).

Longueur d'établissement du régime thermique

Des corrélations donnant la longueur d'établissement thermique en régime dynamique établi et le nombre de Nusselt pour une conduite chauffée uniformément ont été proposées dans [51]. Elles s'écrivent :

$$L_{th} = (0,1438 + 0,006977 Pe) D_h + \quad \text{et} \quad Nu_{inc}(\infty) = 0,01604 + 0,2681/Pe \quad 1 \leq Pe \leq 5 \quad (5.26)$$

$$L_{th} = (0,1386 + 0,00854 Pe) D_h + \quad \text{et} \quad Nu_{inc}(\infty) = 0,02706 + 0,2261/Pe \quad 5 \leq Pe \leq 20 \quad (5.27)$$

Dans cet article, l'abscisse adimensionnelle pour le problème thermique est définie par :

$$X^* = \frac{x/D_h}{RePr} = \frac{X/2}{Pe} = Gz^{-1} \quad (5.28)$$

où $Gz = \frac{RePr}{x/D_h}$ est le nombre de Graetz. On définit aussi un nombre de Nusselt dit "incrémental" par :

$$Nu_{inc}(X^*) = (Nu_m(X^*) - Nu(X^*)) \quad (5.29)$$

où les nombres de Nusselt locaux et moyens sont définis par :

$$Nu(X^*) = \frac{hD_h}{k_f} = \frac{4}{\theta_p(X^*) - \theta_{m,d}(X^*)} \quad \text{avec} \quad \theta_{m,d}(X^*) = \frac{\int_0^{1/2} U(X^*)\theta(X^*)dY}{\int_0^{1/2} U(X^*)dY} \quad (5.30)$$

et

$$Nu_m(X^*) = \frac{1}{X^*} \int_0^{X^*} Nu(X^*)dX^* \quad (5.31)$$

On définit la longueur d'établissement thermique adimensionnelle L_{th}^* basée sur la coordonnée X^* par :

$$Nu(L_{th}^*) = 1.05Nu(\infty) \quad \text{avec} \quad L_{th}^* = \frac{L_{th}/D_h}{Pe} \quad \text{et} \quad Nu(\infty) = 8,2353 \quad (5.32)$$

Le tableau 5.6 permet de comparer nos résultats avec ceux du tableau 11 de [51] où sont reportés Nu_{inc} et L_{th}^* pour $Pe \geq 1$. Les différences entre ces résultats sont toujours inférieures à 3%.

Pe	$Nu_{inc}(\infty)$			L_{th}^*		
	Simulation	[51]	Différence (%)	Simulation	[51]	Différence (%)
1	0,2795	0,2861	2,3	0,1474	0,1511	2,4
5	0,07391	0,07296	1,3	0,03634	0,03631	0,1
10	0,04918	0,04850	1,4	0,02209	0,02229	0,9

TABLE 5.6 – Établissement thermique pour $Pe = 1, 5, 10$ et comparaisons avec [51].

Cette comparaison nous permet de valider la partie thermique de nos simulations et d'étendre les calculs à $Pe < 1$. Les corrélations obtenues à partir de nos calculs s'écrivent pour $1 \leq Pe \leq 20$:

$$Nu_{inc}(\infty) = 0,26383\left(\frac{1}{Pe}\right) + 0,019868 \quad (5.33)$$

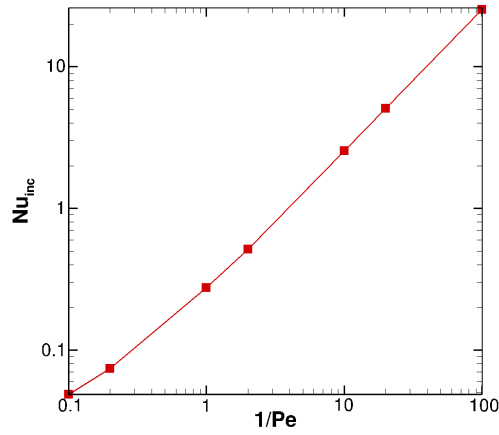
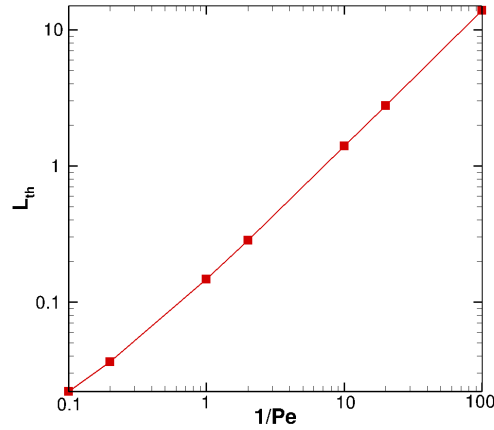
$$L_{th}^* = 0,145131\left(\frac{1}{Pe}\right) + 0,004983 \quad \implies \quad L_{th} = (0,145131 + 0,004983 Pe)D_h \quad (5.34)$$

Les écarts sont de l'ordre de 5% avec la corrélation (5.26) pour L_{th} et inférieurs à 5% avec la corrélation (5.26) pour $Nu_{inc}(\infty)$.

Extension des calculs au domaine $0,01 \leq Pe \leq 1$

Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 5.7. Les courbes $Nu_{inc}(\infty) = f_1(1/Pe)$ (figure 5.5) et $L_{th}^* = f_2(1/Pe)$ (figure 5.6) montrent que Nu_{inc} et L_{th}^* sont, approximativement, inversement proportionnels au nombre de Péclet.

Pe	$Nu_{inc}(\infty)$	L_{th}^*
0,01	25,2945	13,9100
0,05	5,0765	2,7750
0,1	2,5482	1,3986
0,5	0,5163	0,2853
1	0,2795	0,1474

 TABLE 5.7 – Établissement thermique de l'écoulement pour Pe compris entre 0,01 et 1.

 FIGURE 5.5 – Variation du nombre de Nusselt incrémental en fonction de $1/Pe$

 FIGURE 5.6 – Variation de la longueur d'établissement thermique en fonction de $1/Pe$

Nos résultats conduisent aux corrélations suivantes qui représentent les variations de $Nu_{inc}(\infty)$ et de L_{th}^* pour $0,01 \leq Pe \leq 1$:

$$Nu_{inc}(\infty) = 0,26383 \left(\frac{1}{Pe} \right) + 0,019868 \quad (5.35)$$

$$L_{th}^* = 0,145131 \left(\frac{1}{Pe} \right) + 0,004983 \quad \Rightarrow \quad L_{th} = (0,145131 + 0,004983 Pe) D_h \quad (5.36)$$

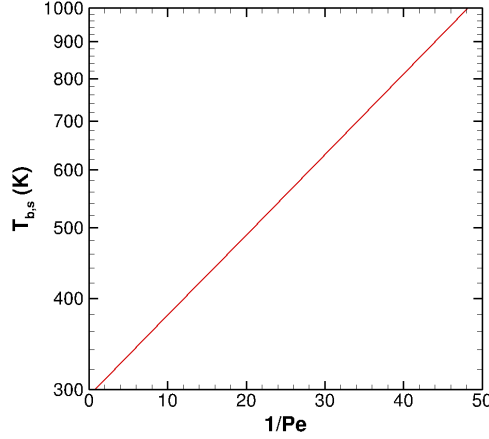


FIGURE 5.7 – Variation de la température moyenne débitante de sortie de l’air en fonction de $1/Pe$ ($L = 180 \mu m$, $q_p = 100 W/m^2$ et $T_e = 300 K$).

La longueur d’établissement thermique dimensionnelle augmente donc avec le nombre de Péclet (résultat bien connu à grands Pe) mais on peut la considérer comme constante lorsque $Pe < 1$ ($L_{th} \approx 0,29 H$). En général, $L \gg H$ pour les microconduites et donc ce résultat montre que la longueur d’établissement du régime thermique est négligeable sous l’approximation d’incompressibilité.¹

La figure 5.7 représente la variation de la température moyenne débitante de sortie, $T_m(L)$, en fonction de $1/Pe$ lorsque $L = 180 \mu m$, $q_p = 100 W/m^2$ et $T_e = 300 K$. On remarque que $T_m(L)$ croît très rapidement lorsque le nombre de Péclet diminue. Dans ce cas, $T_m(L)$ peut être corrélée en fonction de Pe par la relation

$$T_m(L) = 294,22 e^{(0,0254/Pe)} \quad (K) \quad (5.37)$$

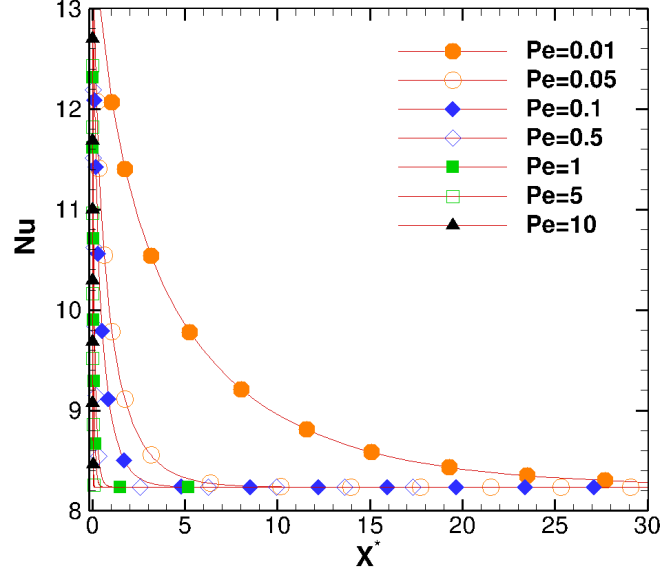
Nombre de Nusselt

Pour un écoulement incompressible entre deux plans parallèles à flux imposé avec ou sans extension adiabatique amont, le nombre de Nusselt à l’entrée de la conduite tend vers une valeur infiniment grande. En effet, la température moyenne du fluide à l’entrée de la conduite et les températures des parois étant quasiment égales, le nombre de Nusselt, défini par $Nu = \frac{q_p D_h}{k(T_p - T_b)}$, atteint une très grande valeur mais ce résultat n’a pas de sens physique. Plus le fluide progresse dans la conduite, plus l’écart de température ($T_p - T_b$) augmente (dans une conduite chauffée uniformément) jusqu’à ce que cet écart se stabilise. Le régime thermique est alors établi et le nombre de Nusselt local est constant.

Ce résultat reste valable pour des écoulement glissants mais la constante dépend du nombre de Knudsen, comme démontré analytiquement dans Sparrow et Lin (1962) [62].

C’est ce que montre la figure 5.8 qui représente l’évolution de Nu le long de la conduite en fonction de la coordonnée adimensionnelle X^* . Cette représentation usuelle, de type

1. Pour les gaz ($Pr \approx 1$), les longueurs d’établissement dynamique et thermique ont des valeurs proches. Donc la longueur d’établissement dynamique est très faible devant celle de la conduite. Compte-tenu des faibles nombres de Reynolds, les écoulements incompressibles sont de type Poiseuille : il est donc inutile de résoudre les équations de Navier-Stokes complètes, sauf si les propriétés physiques varient fortement avec la température, et la résolution de l’équation de l’énergie est numériquement triviale.


 FIGURE 5.8 – Variation du nombre de Nusselt local en fonction de $X^* = Gz^{-1}$

$Nu(x) = f(Gz^{-1})$, masque cependant la physique car on pourrait penser que L_{th} augmente lorsque Pe diminue. En fait, comme $x = X^*PeH$ la question est de savoir si X^* augmente plus ou moins vite que $1/Pe$. La réponse apportée par la figure 5.8 est claire : $L_{th}^* \approx 30$ pour $Pe = 0,01$ et $L_{th}^* \approx 5$ pour $Pe = 1$, donc la longueur physique, L_{th} , est diminuée de $100/6 \approx 16$ quand Pe passe de 1 à 0,01.

Ces résultats ont été obtenus avec des extensions de longueurs $L' = 500 D_h$ pour $Pe < 1$ et $L' = 50 D_h$ pour $Pe \geq 1$. Afin de réduire les temps de calcul, la longueur de l'extension pourrait être adaptée à la valeur de Pe . Les figures 5.9 et 5.10 montrent que le profil du nombre de Nusselt ne dépend plus de L' au delà d'une certaine valeur, dépendante de Pe . Pour $Pe = 1$ (Fig. 5.9), une extension de longueur $L' = 1 D_h$ suffit mais il faut augmenter sa longueur jusqu'à $L' = 50 D_h$ pour $Pe = 0,05$ (Fig. 5.9). Au plus faible nombre de Péclet considéré ($Pe = 0,01$), une extension de longueur $L' = 500 D_h$ est nécessaire car la longueur de la zone de diffusion amont est considérable.

Flux thermiques échangés

Les flux de chaleur sont calculés avec ANSYS/Fluent comme expliqué dans §4.2.4. Le bilan (4.15) est décomposé en trois flux : à l'entrée, à la sortie de la conduite et aux parois. Ces flux s'écrivent :

- Flux thermique à l'entrée de la zone chauffée de la conduite (S_0 en $x = 0$) :

$$Q_0 = \iint_{S_0} (-k \nabla T_f + \rho C_p \vec{u} T_f) \cdot \vec{n} \, dS_0 \quad (5.38)$$

- Flux thermique à la sortie de la conduite :

$$Q_s = \iint_{S_s} (-k \nabla T_f + \rho C_p \vec{u} T_f) \cdot \vec{n} \, dS_s \quad (5.39)$$

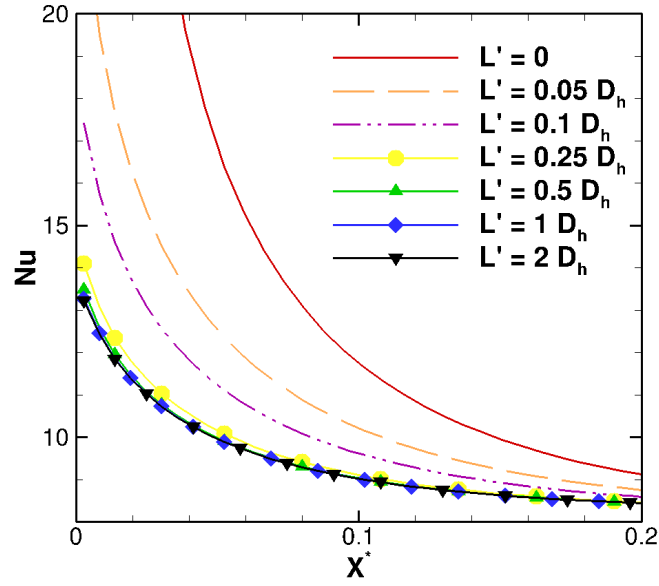


FIGURE 5.9 – Influence de la longueur de l'extension sur les variation du nombre de Nusselt local ($Pe = 1$).

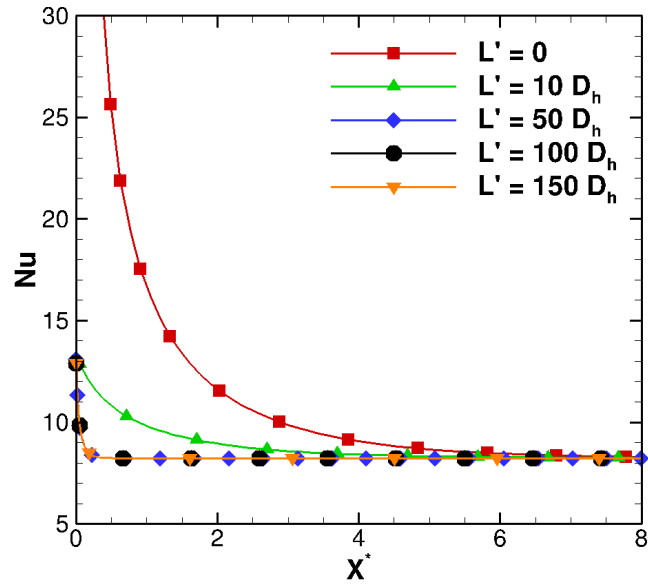


FIGURE 5.10 – Influence de la longueur de l'extension sur les variation du nombre de Nusselt local ($Pe = 0,05$).

– Flux thermique à la paroi :

$$Q_p = \iint_{S_p} -k \nabla T_f \cdot \vec{n} dS_p \quad (5.40)$$

Dans ces équations, $\vec{n}$ correspond à la normale entrante.

Le flux total est aussi :

$$Q_p = 2q_p L \quad (5.41)$$

De plus, nous calculons le flux net convecté par le fluide :

$$Q_{conv} = \dot{m} C_p (T_s - T(0)) \quad (5.42)$$

Les flux sont représentées en fonction de Pe sur la figure 5.11 pour $Pe > 1$ et sur la figure 5.12 pour $Pe < 1$.

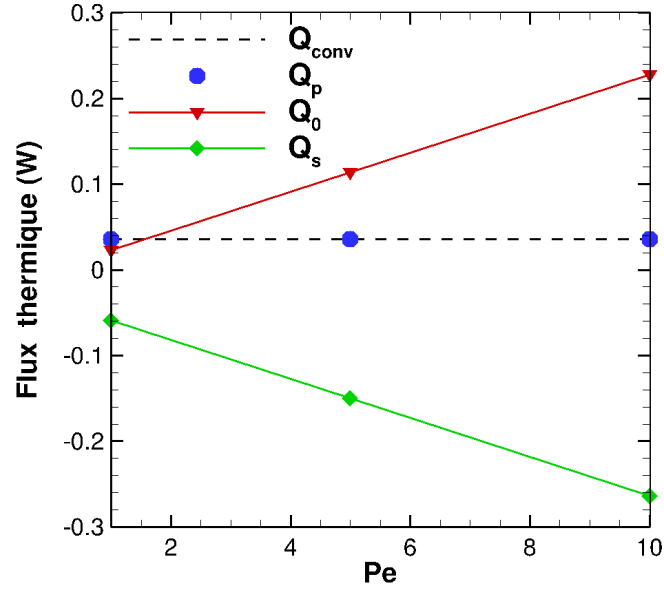


FIGURE 5.11 – Flux échangés au sein de la conduite pour $Pe \geq 1$

Quel que soit Pe , on vérifie la conservation du flux total². Soit :

$$Q_0 + Q_s + Q_p = 0 \quad (5.43)$$

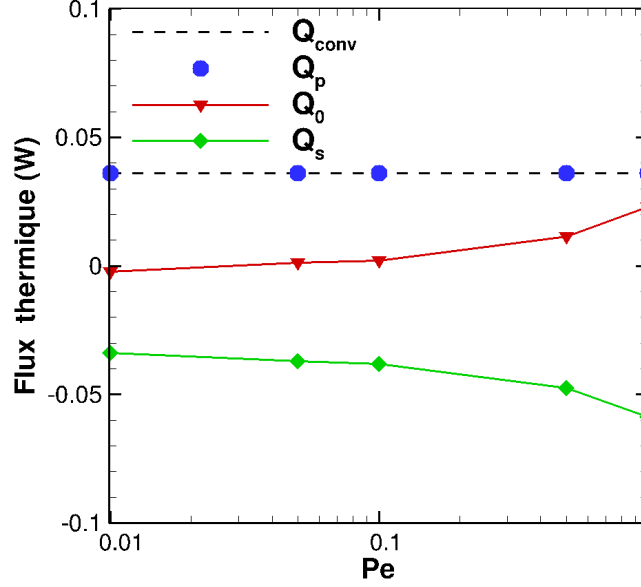
D'autre part, nous remarquons que :

$$Q_{conv} \approx 2q_p L \quad \forall Pe \quad (5.44)$$

En conclusion, pratiquement tout le flux imposé à la paroi de la conduite est convecté par le fluide.

Nous constatons aussi que pour $Pe \approx 0.01$, le flux total à l'entrée Q_0 est négatif. Comme les flux sont projetés sur les normales entrantes, cela traduit qu'à très faibles nombres de Péclet, la diffusion inverse se propage sur une longueur amont aussi grande que $1000 H$. En d'autres termes, une petite quantité de chaleur s'échappe par l'entrée de la conduite, d'où l'utilité de placer une extension pour limiter son importance.

2. Le bilan de flux est effectué en excluant les dernières mailles du domaine, près de la sortie, dans lesquelles un terme de source correctif de la condition de sortie est imposé

FIGURE 5.12 – Flux échangés pour $Pe \leq 1$

5.2 Écoulements compressibles non glissants

Les effets de compressibilité peuvent être importants en microfluidique gazeuse. Dans ce mémoire de thèse, on considère des écoulements de gaz mono ou diatomique (Ar, N₂, air) que l'on assimile à des gaz parfaits. Cette hypothèse implique que la pression du gaz à l'entrée de la conduite ne dépasse pas 5 bars.

Dans cette partie, il n'est pas nécessaire de placer une extension à l'entrée de la conduite. En effet, nous voulons faire apparaître les effets de compressibilité ce qui nécessite d'imposer de fortes différences de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite. Par conséquent, les nombres de Péclet sont supérieurs à l'unité dans ce qui suit. De plus, la condition $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ que nous appliquons en sortie de conduite n'a pas une grande influence pour ces nombres de Péclet (nous n'avons donc pas à la corriger en la remplaçant par la condition $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$). Les équations de transport décrivant ce type de problèmes sont détaillées au §2.1.1 et les conditions aux limites au §2.2.1.

Nous partons d'une étude réalisée par Hong et al. [32] pour la validation des résultats. Le schéma de la conduite est représenté sur la figure 5.13. Le gaz (de l'air) se trouve initialement dans un réservoir pressurisé dont la pression P_{stg} et la température T_{stg} sont connues (l'indice *stg* fait référence au terme "stagnant"). Ce réservoir est relié à une conduite ouverte sur l'atmosphère ($P_s = 1 \text{ atm}$). Cependant, comme il est difficile de simuler le réservoir, seule la conduite est simulée. Cela implique de calculer la pression P_e et la température T_e à l'entrée de la conduite, qui sont différentes de P_{stg} et T_{stg} . Le calcul se fait itérativement et il est détaillé dans la section suivante.

5.2.1 Description du calcul itératif

La pression à l'entrée de la conduite est calculée à l'aide de l'équation (5.46). Mais la masse volumique ρ_e à l'entrée de la conduite n'est pas connue. Nous utilisons donc l'équation (5.45) qui fait apparaître une nouvelle inconnue : la vitesse u_e à l'entrée de la

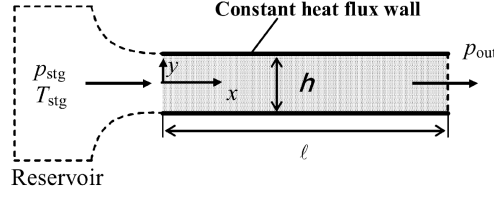


FIGURE 5.13 – Schéma de la conduite pour l'écoulement compressible [32]

conduite. Nous avons donc 2 équations et 3 inconnues. Comme troisième équation, nous utilisons l'expression du débit massique, Eq. (5.47). Mais cette équation comporte le débit massique $\dot{m}$ qui est inconnu. Nous nous retrouvons maintenant avec 3 équations et 4 inconnues et nous ne disposons pas d'autre équation.

La solution consiste à imposer initialement $T_e = T_{stg}$ et $P_e = P_{stg}$ dans la simulation. Après une itération avec ANSYS/Fluent, un débit massique $\dot{m}$ est généré. Nous nous retrouvons donc avec 3 équations et 3 inconnues. Le calcul devient possible mais seulement itérativement. Pour ce faire, nous utilisons une UDF qui fait ce calcul itératif. Comme pour tout calcul itératif, nous devons initialiser une inconnue. Notre choix a porté sur la vitesse u_e dont la valeur initiale doit être strictement supérieure à 0. Nous avons choisi $u_e = 1 \text{ m/s}$. Le calcul itératif s'effectue selon les étapes suivantes :

1. Comme u_e est initialisé (ou recalculé), nous pouvons calculer la pression P_e à l'aide du théorème de Saint-Venant [8] :

$$P_e = P_{stg} = \left[1 - \frac{u_e^2}{2\gamma i_{stg}} \right]^{\gamma/\gamma-1} \quad (5.45)$$

$$\text{où } i = \frac{1}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = \frac{r}{\gamma-1} T^3$$

2. Cette nouvelle pression nous permet de calculer une nouvelle masse volumique ρ_e à l'aide de l'équation suivante qui décrit les transformations isentropiques :

$$\frac{P_{stg}}{\rho_{stg}^\gamma} = \frac{P_e}{\rho_e^\gamma} \implies \rho_e = \rho_{stg} \left[\frac{P_e}{P_{stg}} \right]^{1/\gamma} \quad (5.46)$$

3. Enfin, cette masse volumique nous permet de recalculer une nouvelle vitesse u_e à l'aide du débit massique généré :

$$\dot{m} = \rho_e u_e h \implies u_e = \frac{\dot{m}}{\rho_e h} \quad (5.47)$$

Cette vitesse est réinjectée dans la première étape, ce qui génère une nouvelle pression P_e réinjectée dans la deuxième étape pour calculer une nouvelle masse volumique ρ_e , réinjectée dans la troisième étape pour donner une nouvelle vitesse u_e et ainsi de suite jusqu'à la convergence du calcul itératif.

Quand la convergence du calcul itératif est atteinte, l'UDF a calculé la pression P_e et la masse volumique ρ_e qui permettent de calculer directement la nouvelle température T_e par la loi des gaz parfaits :

$$T_e = \frac{P_e}{r\rho_e} \quad (5.48)$$

3. Dans [32], cette équation est mal écrite mais sûrement bien utilisée puisque nous obtenons les mêmes résultats

Cette même UDF impose les nouvelles valeurs de P_e et T_e à l'entrée de la conduite et ANSYS/Fluent effectue sa deuxième itération. À la fin de cette itération, un nouveau débit massique est généré, ce qui donne naissance à de nouvelles pression et température à l'entrée de la conduite calculées par l'UDF et ainsi de suite jusqu'à la convergence de la simulation du code.

Il faut noter que les simulations sont très lentes et mettent beaucoup de temps à converger. En effet, l'UDF que nous avons écrite effectue un calcul itératif : la pression et la température à l'entrée sont recalculées à chaque itération, ce qui correspond à deux calculs itératifs emboîtés l'un (celui de l'UDF) dans l'autre (celui de ANSYS/Fluent). Sans UDF, le temps de convergence est vingt fois moindre.

5.2.2 Résultats des simulations numériques

Les simulations ont été effectuées en utilisant les mêmes paramètres que dans Hong et al. [32] qui sont reportés dans le tableau 5.8. Les propriétés thermophysiques sont celles de l'air à $T_{stg} = 300\text{ K}$ et sont supposées indépendantes de la température. La largeur de la conduite est $H = 10\text{ }\mu\text{m}$ et sa longueur est $L = 2000\text{ }\mu\text{m}$. La comparaison porte sur quatre simulations : deux valeurs de densité de flux, $q_p = 10^3\text{ W/m}^2$ et $q_p = 10^4\text{ W/m}^2$, et deux valeurs de pression stagnante, $P_{stg} = 150\text{ kPa}$ et $P_{stg} = 500\text{ kPa}$. Notons que, pour un flux de chaleur donné, le nombre de Reynolds, $Re = 2\dot{m}/\mu$, ne dépend que de P_{stg} alors que le nombre de Mach dépend de P_{stg} mais varie aussi dans la direction de l'écoulement.

$r\text{ (J/kg.K)}$	γ	$\mu\text{ (kg/m.s)}$	$C_p\text{ (J/kg.K)}$	$k_f\text{ (W/m.K)}$
287	1,4	$1,862.10^{-5}$	1006,43	0,0261

TABLE 5.8 – Propriétés thermophysiques de l'air à 300 K utilisées pour les comparaisons avec Hong et al. [32].

Le nombre de Mach local est calculé par :

$$Ma(x) = \frac{u_m(x)}{\sqrt{\gamma \frac{P_m(x)}{\rho_m(x)}}} \quad (5.49)$$

Les différences relatives entre les simulations de [32] et les nôtres sur les nombres de Rey-

P_{stg} (kPa)	q_p (W/m ²)	Re			Ma_s		
		Simulation	[32]	Différence (%)	Simulation	[32]	Différence (%)
150	10^3	17	17	0	0,040	0,040	0
	10^4	10	10	0	0,037	0,036	2,8
500	10^3	280	287	2,4	0,614	0,631	2,7
	10^4	273	281	2,8	0,614	0,630	2,5

TABLE 5.9 – Nombres de Reynolds et de Mach à la sortie de la conduite pour $P_{stg} = 150\text{ kPa}$ et 500 kPa et pour $q_p = 10^3\text{ W/m}^2$ et $q_p = 10^4\text{ W/m}^2$ ($H = 10\text{ }\mu\text{m}$, $L = 2000\text{ }\mu\text{m}$).

nolds et de Mach sont reportées dans le tableau 5.9. Ces différences sont inférieures à 3%, ce qui nous permet de valider nos résultats.

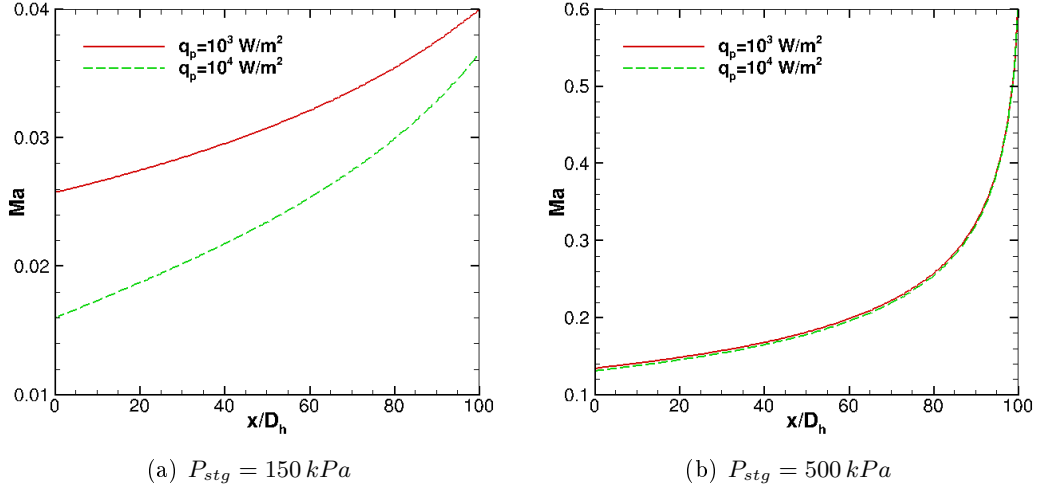


FIGURE 5.14 – Variation longitudinale du nombre de Mach Ma pour : (a) $P_{stg} = 150 \text{ kPa}$, (b) $P_{stg} = 500 \text{ kPa}$ ($D_h = 20 \mu\text{m}$).

La figure 5.14 montre l'évolution du nombre de Mach le long de la conduite en fonction de la coordonnée axiale adimensionnelle définie conventionnellement par $X^* = \frac{x/D_h}{Pe} = Gz^{-1}$. Nous constatons qu'à faible pression stagnante (faible nombre de Mach), le flux imposé à la paroi influence non seulement sur la thermique mais aussi sur la dynamique. En effet, les effets de compressibilité étant faibles, il n'y a que le flux de chaleur imposé à la paroi qui agit sur le champ de température, relié à la masse volumique par la loi des gaz parfaits. De ce fait, la dynamique est aussi modifiée. Si on augmente le flux de chaleur, la température sera plus importante mais le nombre de Mach, inversement proportionnel à la température, sera plus faible. C'est ce que nous pouvons observer sur la figure 5.14(a).

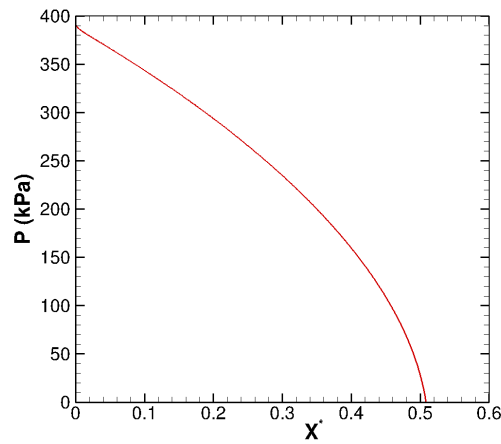


FIGURE 5.15 – Chute de pression le long de l'axe de la conduite pour $P_{stg} = 500 \text{ kPa}$ et $q_p = 10^4 \text{ W/m}^2$ ($Pe = 196$, $D_h = 20 \mu\text{m}$).

À plus grande pression stagnante ($P_{stg} = 500 \text{ kPa}$), l'influence du flux de chaleur sur le nombre de Mach devient négligeable (Fig. 5.14(b)). Les effets de compressibilité étant dominants dans ce cas, le fluide subit une détente, ce qui entraîne son refroidissement. Nous remarquons que la détente se situe à proximité de la sortie de la conduite. Ceci s'explique

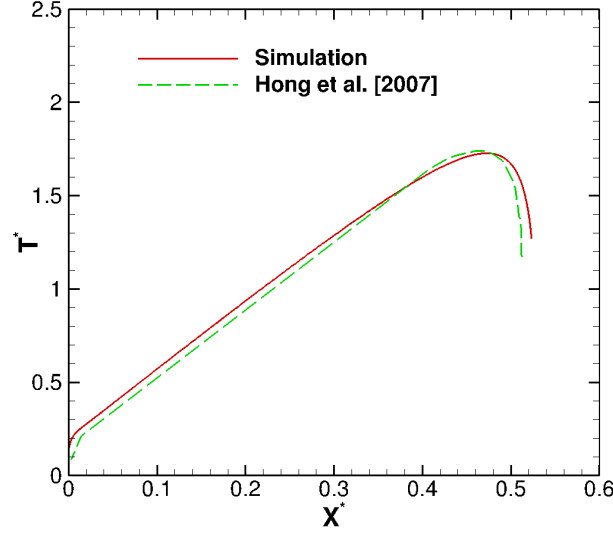


FIGURE 5.16 – Température adimensionnelle de la paroi le long de la conduite pour $P_{stg} = 500 \text{ kPa}$ et $q_p = 10^4 \text{ W/m}^2$ ($Pe = 196$, $D_h = 20 \mu\text{m}$) : $T_p^*(0) = 0,1355$, $T_{p,max}^*(0,472) = 1,728$, $T_{p,s}^*(0,510) = 1,271$.

à l'aide de la figure 5.15 qui représente la chute de pression le long de la conduite. Nous constatons que la pression varie quasi-linéairement, sauf à la sortie de la conduite où elle chute brutalement. Cette chute de pression se traduit par une détente qui transforme une partie de l'énergie interne en énergie cinétique. De ce fait, le gaz accélère en refroidissant.

La figure (5.16) représente l'évolution de la température adimensionnelle le long de la conduite, présentée avec celle reportée dans Hong et al. [32], avec :

$$T^* = \frac{T_p - T_e}{q_p D_h / k} \quad (5.50)$$

Pour les données de la figure 5.16, la température de la paroi (en K) s'obtient en fonction de T^* par la relation :

$$T_p(x) = T_e + \left(\frac{q_p D_h}{k}\right) T^* = T_e + 7,663 T^* \quad \text{avec} \quad T_e = 297,15 \text{ K} \quad (5.51)$$

La figure 5.16 montre que la variation maximale de T_p est $T_{p,max} - T_e = 11,2 \text{ K}$ en $x_{max} = D_h Pe X_{max}^* = 1810 \mu\text{m}$ et que la chute de température due à la détente est $T_{max} - T_s = 3,5 \text{ K}$. Ces faibles variations de température justifient l'hypothèse de propriétés physiques constantes.

5.3 Écoulements compressibles avec glissement dans des conduites planes à parois isothermes ou adiabatiques

Une étude expérimentale réalisée au laboratoire IUSTI (université d'Aix Marseille) [27] nous a permis de disposer de quelques résultats expérimentaux d'écoulements microfluidiques glissants. Toutes les expériences ont été effectuées sans chauffage et avec de faibles différences de pression pour éviter les variations de température dues aux effets de compressibilité. Nous pouvons donc supposer les écoulements isothermes, ce qui se traduit numériquement par une paroi adiabatique ou bien isotherme en imposant une température constante et égale à celle du gaz à l'entrée. Le but de ces expériences est de remonter aux propriétés du glissement dynamique à l'aide de calculs analytiques développés par Arkilic [3]. Parmi ces propriétés, le coefficient d'accommodation dynamique est évalué. Dans ces expériences, la conduite est rectangulaire de dimensions :

$$H = 27,91\mu m \quad W = 504,00\mu m \quad L = 15,06mm$$

dans les directions y , z et x , respectivement.

Cette conduite est reliée à deux réservoirs contenant de l'argon, comme montré sur la figure 5.17. La différence de pression entre les deux réservoirs génère un écoulement dans la microconduite et le débit est mesuré à l'aide de capteurs de pression. La température ambiante et celles des réservoirs sont aussi mesurées.

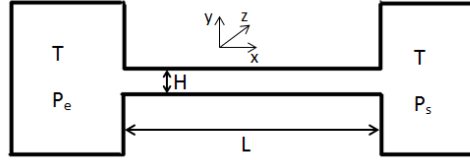


FIGURE 5.17 – Schéma du dispositif expérimental [27]

Nous avons simulé quelques unes de ces expériences en 2D. En effet, la profondeur W étant très supérieure à la largeur H de la conduite, on peut supposer que l'écoulement s'effectue entre deux plans parallèles. Cette approximation, justifiée dans [27], a été utilisée pour interpréter les mesures. Compte tenu des conditions de symétrie, seule la moitié de la conduite est simulée. Notons que le coefficient d'accommodation dynamique évalué dans [27] est utilisé dans la simulation comme paramètre d'entrée pour modéliser le glissement dynamique.

L'allongement de la conduite est $L/H = 540$. Pour compléter notre étude, nous allons aussi étudier une conduite plus courte dont l'allongement est $L/H = 100$ ($H = 27,91\mu m$, $L = 2,79mm$). Pour cette conduite, nous nous limiterons à comparer les résultats numériques et analytiques. Les conduites longue et courte sont notées C_1 et C_2 , respectivement. Nous allons aussi étudier des différences de pression plus importantes que celles utilisées dans [27]. Le but est de simuler des variations de température plus importantes afin d'étudier la validité du calcul analytique [3] purement isotherme. Toutes ces études ont été menées avec une paroi isotherme. Les résultats sont discutés au §5.3.3. Comme nous avons rajouté des cas très compressibles, donc non isothermes, nous les avons étudiés en tenant compte d'un saut de température au niveau de la paroi (isotherme ou adiabatique). Les

résultats liés à cette dernière étude sont présentés au §5.3.4.

Avant de passer aux différents résultats, nous présentons brièvement le calcul analytique au §5.3.1 et les paramètres de simulation au §5.3.2. Les équations de transport sont celles décrites au §2.1.1 et les conditions aux limites au §2.2.

5.3.1 Brève présentation du calcul analytique [3]

Plusieurs conditions et hypothèses simplificatrices ont permis d'obtenir la solution analytique d'un écoulement glissant. Nous citons les plus importantes :

- écoulement unidirectionnel ($u(x, y), v = 0$) ;
- écoulement stationnaire ;
- forces d'inertie et de gravité négligées ;
- gaz parfait ;
- glissement dynamique du premier ordre ;
- écoulement isotherme ;
- $P = P(x)$;
- conduite de grand allongement L/H .

Avec ces hypothèses, l'équation de conservation de la quantité de mouvement se réduit à :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \quad (5.52)$$

Cette équation se résout à l'aide des conditions aux limites suivantes :

- en $y = 0, \forall x \in [0, L] : \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
- à la paroi, en $y = H/2, \forall x \in [0, L] : u_g = \frac{\sigma_u - 2}{\sigma_u} \lambda \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_g$

La solution s'écrit :

$$u(x, y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} \left(y^2 - \frac{H^2}{4} - \left[\frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u} \right] \lambda H \right) \quad (5.53)$$

Le terme $\frac{dP}{dx}$ est inconnu. En effet, quand l'écoulement est compressible, la pression ne varie pas linéairement. Pour calculer ce terme, nous devons passer par le calcul du débit massique puis du profil de pression afin de déterminer le gradient de la pression. Ces étapes sont décrites ci-dessous.

Calcul du débit massique

Le débit massique a pour expression :

$$\dot{m}(x) = \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \rho u dy dz \quad (5.54)$$

En remplaçant u par son expression (Eq. (5.53)) et ρ par la loi des gaz parfaits, nous obtenons :

$$\dot{m}(x) = \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \frac{P}{rT} \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} \left(y^2 - \frac{H^2}{4} - \left[\frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u} \right] \lambda H \right) dy dz \quad (5.55)$$

Ce qui donne :

$$\dot{m}(x) = -\frac{H^3WP}{12\mu rT} \frac{dP}{dx} \left(1 + 6 \left[\frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u} \right] \frac{\lambda}{H} \right) \quad (5.56)$$

En notant :

$$\phi(P) = -\frac{H^3WP}{12\mu rT} \left(1 + 6 \left[\frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u} \right] \frac{\lambda(P)}{H} \right) \quad (5.57)$$

l'équation (5.56) s'écrit :

$$\dot{m}(x) = \phi(P) \frac{dP}{dx} \quad (5.58)$$

En effectuant le changement de variable :

$$\int_0^L \dot{m}(x) dx = \int_{P(0)}^{P(L)} \phi(P) dP \quad (5.59)$$

$$\dot{m}L = \int_{P_e}^{P_s} \phi(P) dP \quad (5.60)$$

on obtient :

$$\dot{m} = \frac{H^3W\Delta PP_m}{12\mu rTL} \left(1 + 6 \left[\frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u} \right] K_{n_m} \right) \quad (5.61)$$

avec :

$$\Delta P = P_e - P_s \quad , \quad P_m = \frac{P_e + P_s}{2} \quad , \quad K_{n_m} = \frac{\lambda(P_m)}{D_h} \quad , \quad D_h = \frac{2HW}{H + W} = 52.89\mu m \quad (5.62)$$

Notons que, dans le calcul analytique, le libre parcours moyen est construit sur la viscosité (équation (1.5) dans §1.2.2). Si le fluide adhérerait à la paroi ($K_{n_m} = 0$), l'expression du débit (5.61) s'écrit sous la forme (écoulement de Poiseuille plan) :

$$\dot{m}_{sg} = \frac{H^3W\Delta PP_m}{12\mu rTL} \quad (5.63)$$

Le calcul de $(\dot{m}_g - \dot{m}_{sg})/\dot{m}_g$ à partir des équations (5.61) et (5.63) permet de quantifier l'effet du glissement (indice g = glissement, indice sg = sans glissement).

Calcul du profil de pression

À l'aide du changement de variable établi dans l'équation (5.58), nous pouvons écrire :

$$\int_0^x \dot{m}(x) dx = \int_{P(0)}^{P(x)} \phi(P) \frac{dP}{dx} dx \quad (5.64)$$

$$\dot{m}x = \int_{P_e}^P \phi(P) dP \quad (5.65)$$

Après calculs, nous parvenons à la solution suivante :

$$\frac{P}{P_s} = \sqrt{-G \frac{x}{L} + \left(\frac{P_e}{P_s} + 6AKn_s \right)^2} - (12AKn_s) \quad (5.66)$$

avec :

$$G = \left(\frac{P_e}{P_s} \right)^2 + 12AKn_s \left(\frac{P_e}{P_s} - 1 \right) - 1 \quad (5.67)$$

$$A = \frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u} \quad (5.68)$$

Calcul de la dérivée de la pression

À partir de l'équation (5.66), nous pouvons calculer la dérivée de la pression dans chaque section par :

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\frac{P_s}{L} G}{2 \sqrt{-G \frac{x}{L} + \left(\frac{P_e}{P_s} + 6AKn_s \right)^2}} \quad (5.69)$$

En résumé, l'expression de la vitesse s'écrit :

$$u(x, y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} \left(y^2 - \frac{H^2}{4} - \left[\frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u} \right] \lambda H \right) \quad (5.70)$$

avec :

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\frac{P_s}{L} G}{2 \sqrt{-G \frac{x}{L} + \left(\frac{P_e}{P_s} + 6AKn_s \right)^2}} \quad (5.71)$$

$$G = \left(\frac{P_e}{P_s} \right)^2 + 12AKn_s \left(\frac{P_e}{P_s} - 1 \right) - 1 \quad \text{et} \quad A = \frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u} \quad (5.72)$$

5.3.2 Paramètres des simulations

Nos simulations n'étant pas isothermes, nous avons considéré la viscosité dynamique et la conductivité thermique de l'argon variables avec la température comme suit :

$$\mu = \mu_{ref} \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^\omega \quad (5.73)$$

$$k = -7.10^4 + 7,19.10^{-5}T - 2,63.10^{-8}T^2 - 3,61.10^{-11}T^3 + 4,17.10^{-14}T^4 \quad (5.74)$$

où ω est un coefficient de viscosité caractérisant le gaz. Les autres propriétés sont reportées dans le tableau 5.10.

Le dernier paramètre du tableau 5.10 est la longueur caractéristique du potentiel de Lennard-Jones. Cette propriété est utilisée dans ANSYS/Fluent pour calculer le libre parcours moyen par l'équation (1.2) (§1.2.2). Quand le saut de température sera modélisé (§5.3.4), nous prendrons le coefficient d'accommodation thermique σ_T égal au coefficient

Type de fluide	C_p ($J/kg.K$)	r ($J/kg.K$)	$\mu_{ref}.10^5$ ($Pa.s$)	T_{ref} (K)	ω [27]	σ_u	σ_T ($\dot{A}$)	σ
Argon	520,64	208,15	2,117	273,14	0,81	0,938	0,938	3,542

TABLE 5.10 – Propriétés thermophysiques de l'argon

d'accommodation dynamique σ_u .

Concernant les paramètres de simulation, le tableau 5.11 présente les conditions aux limites et les caractéristiques à l'entrée de la conduite des écoulements étudiés. Ces paramètres sont utilisés pour les deux conduites C_1 et C_2 . Les deux cas notés par (*) sont des cas expérimentaux extraits de [27] : le cas (a) est peu glissant car la pression moyenne est de l'ordre de la pression atmosphérique et le cas (c) est très glissant car la pression moyenne est très basse et le nombre de Knudsen en sortie est de l'ordre de 0,1. Comme nous voulons étudier des écoulements glissants, les autres cas reprennent le cas expérimental (c) en maintenant la température d'entrée et la pression de sortie mais en faisant varier la pression d'entrée de telle sorte que la différence de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite, notée ΔP , varie de 0,3 à 50 kPa entre les cas (b) et (f). Dans l'expérience, la paroi est très conductrice car les canaux sont gravés dans du silicium (conductivité thermique $k_s = 148 W/mK$) et recouverts d'une couche d'or.

Cas	P_e (kPa)	P_s (kPa)	ΔP (kPa)	T_e (K)	M_{a_e}	K_{n_e} $\times 10^2$
(a)*	125,1	97,2	27,9	295,5	0,015	0,11
(b)	1,74	1,44	0,30	297,4	0,0003	8,00
(c)*	2,61	1,44	1,17	297,4	0,001	5,33
(d)	7,844	1,44	6,40	297,4	0,003	1,78
(e)	26,44	1,44	25,0	297,4	0,009	0,53
(f)	51,44	1,44	50,0	297,4	0,016	0,28

TABLE 5.11 – Conditions aux limites et caractéristiques des écoulements étudiés à l'entrée de la conduite (* : cas extraits des expériences [27])

5.3.3 Influence du glissement dynamique

Dans cette partie, la paroi est maintenue à la température d'entrée du gaz $T_p = T_e$. Les seules variations de température sont dues aux effets de compressibilité. Le saut de température n'est pas pris en compte : seul le glissement dynamique est étudié sans prendre en compte le pompage thermique. Les résultats des simulations sont reportés dans les tableaux 5.12 et 5.13 pour les conduites C_1 et C_2 , respectivement.

Nous avons exclu les résultats du cas (f) pour la conduite C_2 car il conduit à des nombres de Mach supérieurs à 1.

Débits massiques obtenus par la solution numérique et comparaisons aux calculs analytiques et aux expériences

Dans un premier temps, nous allons comparer les débits calculés numériquement avec ceux donnés par la solution analytique et, si possible, mesurés [27]. Les résultats sont

Cas	ΔP (kPa)	$\Delta T^{\max}$ (K)	Re_s	Ma_s	Kn_s $\times 10^2$
(a)	27,9	-0,04	22,9	0,0290	0,14
(b)	0,30	0,00	0,007	0,0005	9,70
(c)	1,17	0,00	0,032	0,0023	9,70
(d)	6,40	-0,002	0,296	0,021	9,70
(e)	25,0	-2,39	2,82	0,196	9,65
(f)	50,0	-27,08	10,6	0,641	9,17

 TABLE 5.12 – Résultats des simulations numériques pour la conduite C_1 à $T_p = T_e$ avec glissement dynamique : caractéristiques principales

Cas	ΔP (kPa)	$\Delta T^{\max}$ (K)	Re_s	Ma_s	Kn_s $\times 10^2$
(a)	27,9	-0,04	117,02	0,146	0,14
(b)	0,30	0,00	0,04	0,003	9,70
(c)	1,17	0,0	0,17	0,0012	9,70
(d)	6,40	-0,75	1,58	0,111	9,68
(e)	25,0	-50,01	16,4	0,88	8,64

 TABLE 5.13 – Résultats des simulations numériques pour la conduite C_2 à $T_p = T_e$ avec glissement dynamique : caractéristiques principales

résumés dans le tableau 5.14 pour la conduite C_1 et dans le tableau 5.15 pour la conduite C_2 .

Simul. num. avec glissement			Calculs anal. Eq. (5.61)	Sans gliss. [27]	Sans gliss. Eq. (5.63)	Influence du glissement
Cas	ΔP (kPa)	$\dot{m} \times 10^{10}$ (kg/s)	$\dot{m} \times 10^{10}$ (kg/s)	$\dot{m} \times 10^{10}$ (kg/s)	$\dot{m} \times 10^{10}$ (kg/s)	$(\dot{m}_g - \dot{m}_{sg})/\dot{m}_g$ $\times 100$ (%)
(a)	27,9	1380	1382	1350	1360	1,6
(b)	0,30	0,448	0,448	-	0,211	56,3
(c)	1,17	1,949	1,947	2,00	1,03	47,0
(d)	6,40	17,85	17,84	-	12,9	27,9
(e)	25,0	170,4	170,5	-	151,1	11,4
(f)	50,0	609,6	611,9	-	573,1	6,3

 TABLE 5.14 – Débits massiques issus des simulations numériques, du calcul analytique et de l'expérience pour la conduite longue (C_1) à $T_p = T_e$ avec et sans glissement dynamique : débits massiques

Les tableaux 5.14 et 5.15 indiquent l'influence du glissement *via* l'écart en pourcentage calculé entre le débit d'un écoulement glissant et celui d'un écoulement non-glissant dans les mêmes conditions de pression et de température. Nous constatons que cet écart est directement lié au nombre de Knudsen moyen. En effet, le cas (a) étant très peu glissant de l'entrée à la sortie de la conduite, l'écart n'est seulement que de l'ordre de 2%.

C'est le cas aussi pour le cas (e) de la conduite C_2 même si, en sortie de la conduite, le nombre de Knudsen atteint la valeur $Kn = 0,1$. Cela s'explique par le fait que la pression d'entrée est tellement grande que le nombre de Knudsen est très faible (de l'ordre de

Simul. num. avec glissement			Calculs analytique	Sans gliss. Eq. (5.63)	Influence du glissement
Cas	ΔP (kPa)	$\dot{m} \times 10^{10}$ (kg/s)	$\dot{m} \times 10^{10}$ (kg/s)	$\dot{m} \times 10^{10}$ (kg/s)	$(\dot{m}_g - \dot{m}_{sg})/\dot{m}_g$ $\times 100$ (%)
(a)	27,9	7001	7404	7288	1,6
(b)	0,30	2,402	2,40	1,13	53,0
(c)	1,17	10,43	10,43	5,53	47,0
(d)	6,40	95,46	95,59	68,89	27,9
(e)	25,0	888,9	913,3	809,2	11,4

TABLE 5.15 – Résultats des simulations numériques pour la conduite courte (C_2) à $T_p = T_e$ avec glissement dynamique : débits massiques

10^{-3}) et conserve une très faible valeur le long de la conduite, sauf en sortie où la pression chute brutalement : le nombre de Knudsen augmente mais sans que cela ait une influence importante. Par contre, les autres cas étant glissants sur la majeure partie de la conduite puisque les pressions d'entrée sont faibles, les écarts sont importants et les valeurs du débit massique sont deux fois plus grandes pour les cas (b) et (c) des deux conduites.

Nous pouvons aussi remarquer que les débits massiques des écoulements glissants calculés numériquement et analytiquement et mesurés pour les cas (a) et (c) pour la conduite C_1 concordent de manière satisfaisante. Ceci est valable même pour des cas anisothermes, tels que les cas (e) et (f) pour la conduite C_1 et le cas (e) pour la conduite C_2 . Ce qui est assez surprenant car le modèle analytique est complètement isotherme alors que, dans la simulation, nous rencontrons des chutes de température qui peuvent atteindre $50K$ (voir tableau 5.13), ce qui est loin d'être négligeable. Pour comprendre ces résultats, nous nous aidons des figures 5.18 et 5.19 qui présentent les champs de température et de vitesse du cas (f) de la conduite C_1 et du cas (e) de la conduite C_2 . Bien que ces cas soient très compressibles et présentent le maximum de variation de température pour chacune des conduites C_1 et C_2 , nous constatons que les effets de compressibilité sont concentrés près de la sortie. Ces effets se traduisent par un refroidissement du fluide et l'augmentation de sa vitesse près de la sortie de la conduite.

Comparaison entre les résultats des simulations et les calculs analytiques.

Dans la section précédente, nous n'avons comparé que les résultats sur le débit massique car il représente la seule donnée de l'expérience. Dans ce qui suit, nous avons tracé les profils de pression (figure 5.20), de vitesses axiale et de glissement (figure 5.21), de température (figure 5.22) et de masse volumique (figure 5.23) pour la conduite C_1 . Ces profils sont issus de la simulation (notés Simul.) et du calcul numérique (notés Analyt.).

Les différences entre ces grandeurs peuvent être importantes, bien que peu visibles sur les figures. C'est pourquoi nous avons calculé l'écart relatif entre les deux solutions, noté e_f pour une grandeur f . Cet écart est calculé comme suit :

$$e_f = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_x} (f_{num}(i) - f_{ana}(i))^2 \Delta x(i)}{\sum_{i=1}^{N_x} f_{num}(i)^2 \Delta x(i)}} \times 100 \quad (5.75)$$

Les écarts e_f (avec $f=P, T, \rho, u_g$ et u_{axe}) sont reportés dans les tableaux 5.16 et 5.17 pour les conduites C_1 et C_2 . Hormis le dernier cas de chacun des tableaux, les écarts e_f

sont faibles pour les deux conduites considérées : les modèles compressibles numérique et analytique sont donc, approximativement, en accord.

Cas	ΔP (kPa)	e_p %	e_T %	e_ρ %	$e_{u,g}$ %	$e_{u,axe}$ %
(a)	125,1	0,00	0,03	0,02	0,95	0,34
(b)	1,74	0,00	0,00	0,02	0,02	0,01
(c)	2,61	0,00	0,00	0,02	0,06	0,08
(d)	7,844	0,00	0,00	0,02	0,04	0,02
(e)	26,44	0,00	0,14	0,08	1,40	0,75
(f)	51,44	0,00	0,76	0,32	14,2	7,08

TABLE 5.16 – Écarts entre les solutions numérique et analytique pour la conduite C_1

Cas	ΔP (kPa)	e_p %	e_T %	e_ρ %	$e_{u,g}$ %	$e_{u,axe}$ %
(a)	125,1	2,80	2,80	2,90	8,90	7,30
(b)	1,74	0,00	0,00	0,02	0,02	0,01
(c)	2,61	0,00	0,00	0,02	0,04	0,02
(d)	7,844	0,05	0,06	0,09	0,58	0,43
(e)	26,44	1,6	1,4	1,5	31,3	16,4

TABLE 5.17 – Écarts entre les solutions numérique et analytique pour la conduite C_2

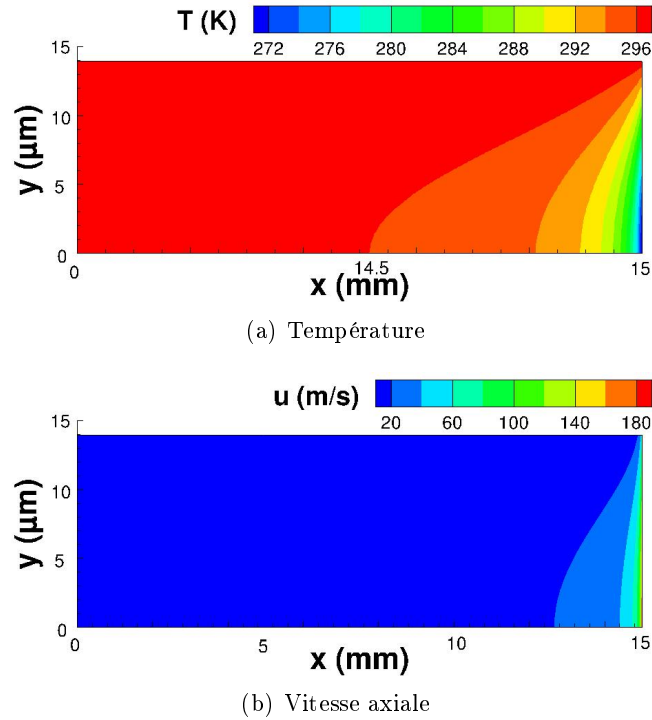


FIGURE 5.18 – Champs de température et de vitesse du cas (f) du tableau 5.11 pour la conduite C_1

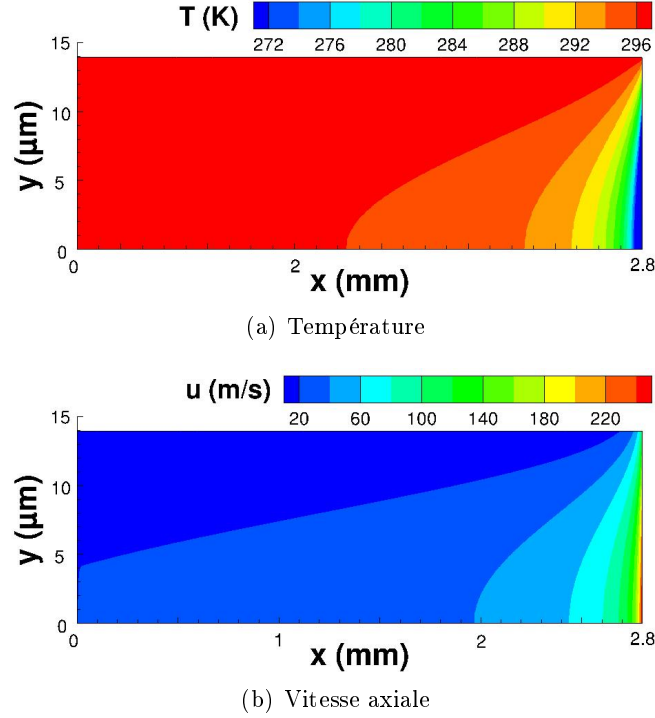


FIGURE 5.19 – Champs de température et de vitesse du cas (e) du tableau 5.11 pour la conduite C_2

En revanche, lorsque la différence de pression ΔP atteint 0,5 bar pour la conduite C_1 (cas (f) du tableau 5.16) et 0,25 bar pour la conduite C_2 (cas (e) du tableau 5.17), la compressibilité est très importante : $\Delta P/P_m$ (où $P_m = (P_e + P_s)/2$) atteint 180% et $Ma_s > 0,6$. Pour ces cas, la pression chute rapidement et de manière non linéaire à la sortie de la conduite comme le montre la figure 5.20(f). Cela s'accompagne d'une détente et d'un fort refroidissement du gaz au cœur de l'écoulement ($-27K$ pour le cas (f) du tableau 5.12). On pourrait donc s'attendre à ce que le modèle analytique isotherme soit mis en défaut dans ce cas. Ce n'est pas tout à fait le cas car les variations relatives des températures absolues restent faibles et localisées à la sortie de la conduite comme le montre la figure 5.22.

Les tableaux 5.16 et 5.17 montrent que les écarts entre les modèles analytiques et numériques sur les profils de pression et de masse volumique sont très faibles dans tous les cas étudiés ($< 3\%$). En revanche les écarts sur les vitesses u_g et u_{axe} sont plus élevés et peuvent même dépasser 30% lorsque le nombre de Mach atteint 0,9 dans le cas (e) pour la conduite C_2 . Cependant, ces écarts sur les vitesses restent localisés en sortie de conduite comme le montre le zoom du cas (f) sur la figure 5.21(d). Cette augmentation de vitesse en sortie de la conduite est due à l'effet de détente observé sur la figure 5.22 : la masse volumique diminue fortement comme le montre la figure 5.23, ce qui entraîne l'accélération du fluide pour que la conservation du débit massique soit satisfaite.

Pour les cas (b) à (f) des tableaux 5.11 et 5.12, la température d'entrée et la pression de sortie sont les mêmes. Par contre, la pression d'entrée augmente du cas (b) au cas (f). Dans chacun de ces cas, le nombre de Knudsen augmente de l'entrée vers la sortie pour atteindre des valeurs supérieures à 0,086. Ainsi, le glissement est toujours très important à la sortie de la conduite mais il est faible, voire nul, à l'entrée pour les cas (d), (e) et (f) puisque $K_{ne} < 0,02$. Ceci est mis en évidence dans les courbes de la figure 5.21 qui montrent clairement

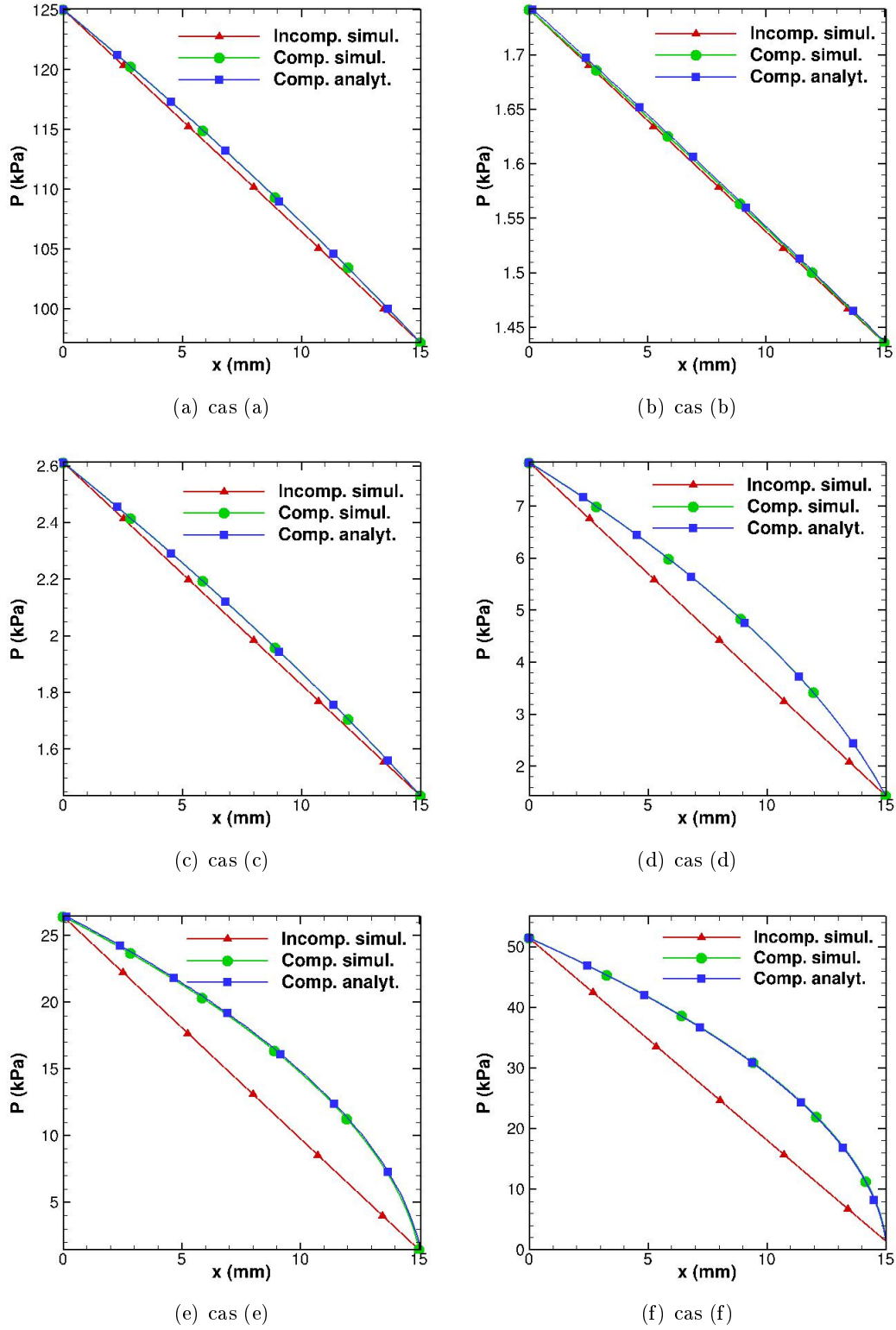
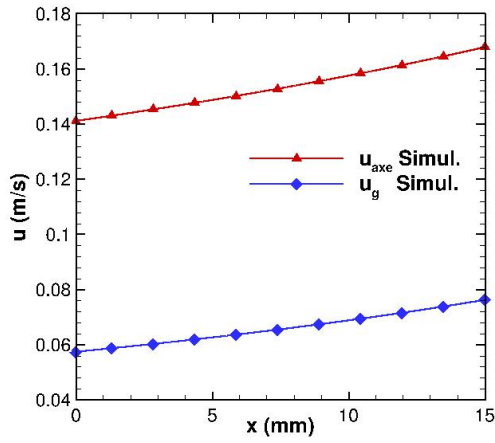
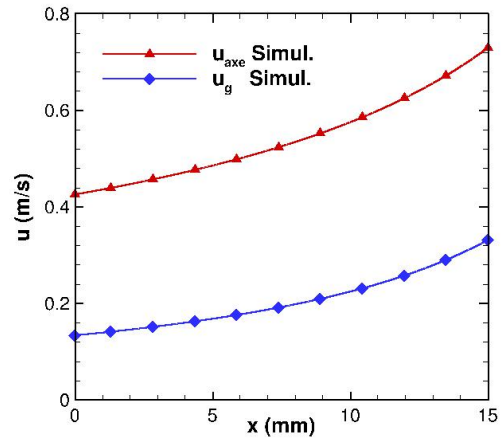


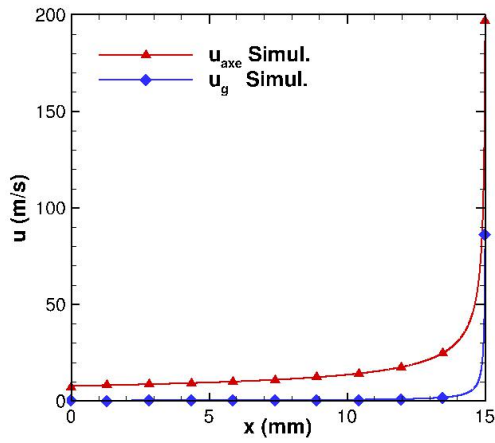
FIGURE 5.20 – Profils de pression issus de la simulation et du calcul analytique des cas (a) à (f) du tableau 5.11 avec glissement quand l'écoulement est compressible ou incompressible pour la conduite C_1



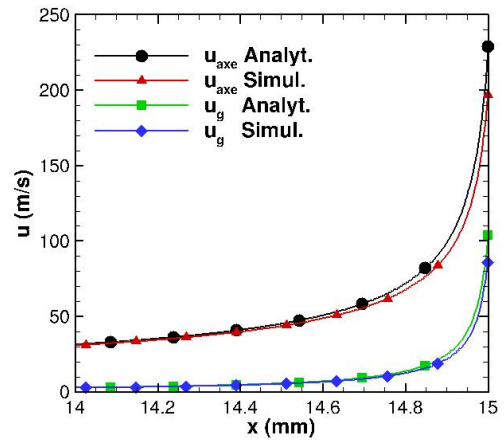
(a) cas (b)



(b) cas (d)



(c) cas (f)



(d) cas (f) - zoom sur la sortie de la conduite

 FIGURE 5.21 – Profils des vitesses de glissement u_g et sur l'axe de la conduite u_{axe} issus de la simulation et du calcul analytique pour quelques cas du tableau 5.11 avec glissement pour la conduite C_1

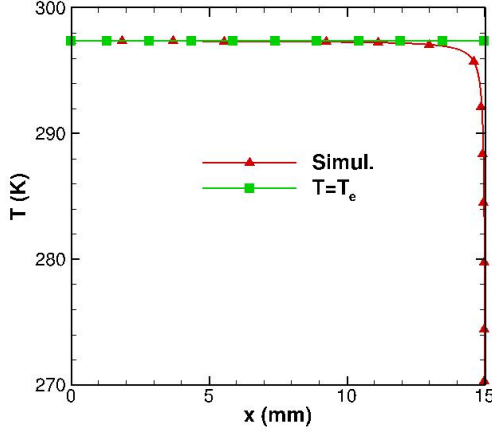


FIGURE 5.22 – Profils de température pour le cas (f) du tableau 5.11 issus de la simulation et température fixée dans le calcul analytique ($T = T_e$) avec glissement pour la conduite C_1

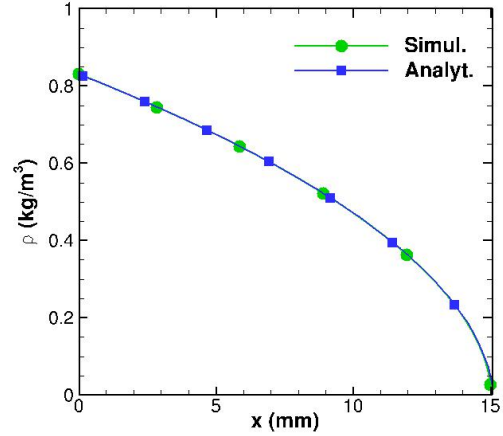


FIGURE 5.23 – Profils de la masse volumique pour le cas (f) du tableau 5.11 issus de la simulation et du calcul analytique avec glissement pour la conduite C_1

l'augmentation de la vitesse de glissement u_g le long de la conduite. Pour le cas (b), le glissement est très important dans toute la conduite car $Kn > 0,08$ sur toute sa longueur. Pour ce cas, ainsi que pour le cas (c), nous avons vérifié que les solutions numériques des modèles incompressible et compressible concordent et permettent de retrouver le débit massique mesuré expérimentalement (voir tableau 5.14). Cela s'explique parce que l'effet de la compressibilité est négligeable : $Ma < 0,01$, $\Delta P/P_m < 50\%$. Le profil axial de pression est quasi linéaire, comme nous pouvons le constater sur la figure 5.20(b).

Influence du glissement dynamique pour des écoulements incompressibles

Nous reprenons les cas (a) et (c) du tableau 5.11 en supposant les écoulements incompressibles avec le glissement dynamique pris en compte. Pour ce faire, nous avons utilisé l'UDF développée dans §4.3.2 pour modéliser correctement le libre parcours moyen par l'équation (4.27). Les résultats des simulations sont montrés sur la figure 5.24 qui donne les profils de vitesse de glissement pour la conduite C_1 . Les résultats en compressible y sont présentés pour comparer les deux solutions. Nous constatons que, contrairement au cas compressible, la vitesse de glissement est constante jusqu'à la sortie de la conduite dès que l'écoulement s'établit. Ceci s'explique par le fait que le libre parcours moyen calculé par l'équation (4.27) est constant car la masse volumique est constante.

Pour mieux montrer le comportement du gaz en présence du glissement dynamique, nous avons tracé sur la figure 5.25 les profils de vitesse dans différentes sections : à $x=0$, $L/4$, $L/2$, $3L/4$ et L pour la conduite C_1 . Différents cas ont été choisis : de peu à très glissants et de peu à très compressibles. De plus, chaque cas est simulé avec un modèle compressible et avec un modèle incompressible.

Nous pouvons tirer les remarques suivantes :

- Pour tous les cas traités, les courbes montrent que les profils de vitesse des écoulements incompressibles sont identiques de l'entrée à la sortie de la conduite car les nombres de Reynolds sont faibles et les longueurs d'établissement sont très courtes.

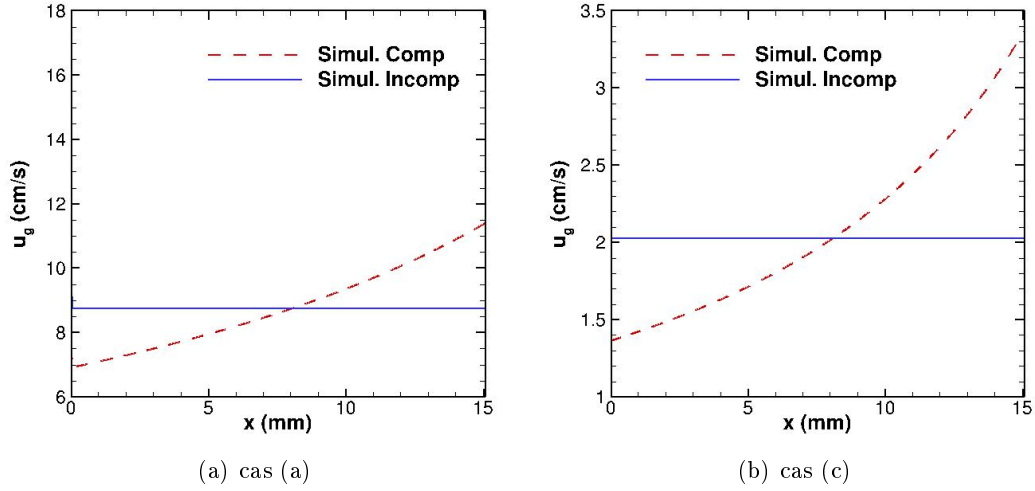


FIGURE 5.24 – Profils de la vitesse de glissement des cas (a) et (c) pour la conduite C_1 quand l'écoulement est compressible ou incompressible. λ défini selon l'équation (4.27)

- Les profils de vitesses des écoulements compressibles montrent une augmentation de la vitesse de l'entrée à la sortie de la conduite, beaucoup plus importante pour les cas (d) et (e) que pour les cas (b) et (c) :
 - Le cas (b) est quasi incompressible (figure 5.25(a)) car le nombre de Mach est inférieur à 10^{-3} , même à la sortie de la conduite où les vitesses sont maximales. Les profils de vitesses se superposent presque avec ceux du cas incompressible ;
 - Dans le cas (c) (figure 5.25(b)), $Ma_s \approx 0,002$. La vitesse à la sortie de la conduite est presque deux fois plus grande qu'en incompressible. Les effets compressibilité sont très inférieurs à ceux du cas (d) pour lequel $Ma_s \approx 0,02$, donc 10 fois supérieur au cas (c). La détente la plus la importante est observée à la sortie (figure 5.25(c)) ;
 - Le cas (e) est très compressible avec $Ma_s \approx 0,2$. Nous voyons clairement l'augmentation brutale de la vitesse localisée à la sortie de la conduite (les vitesses sont 10 fois supérieures en sortie que dans le reste de la conduite).
- Tous les cas étudiés présentent des vitesses de glissement importantes à la sortie de la conduite puisque les nombres de Knudsen sont toujours supérieurs à 0,08. Dans les deux cas (b) et (c), les vitesses de glissement sont importantes dès l'entrée de la conduite. Cela est dû aux faibles pressions à l'entrée pour lesquelles $Kn > 0,05$ dès l'entrée.
- Contrairement aux cas incompressibles (vitesses de glissement constantes), les vitesses de glissement des cas compressibles augmentent tout le long de la conduite car elle dépend du nombre de Knudsen qui augmente lorsque la pression diminue.

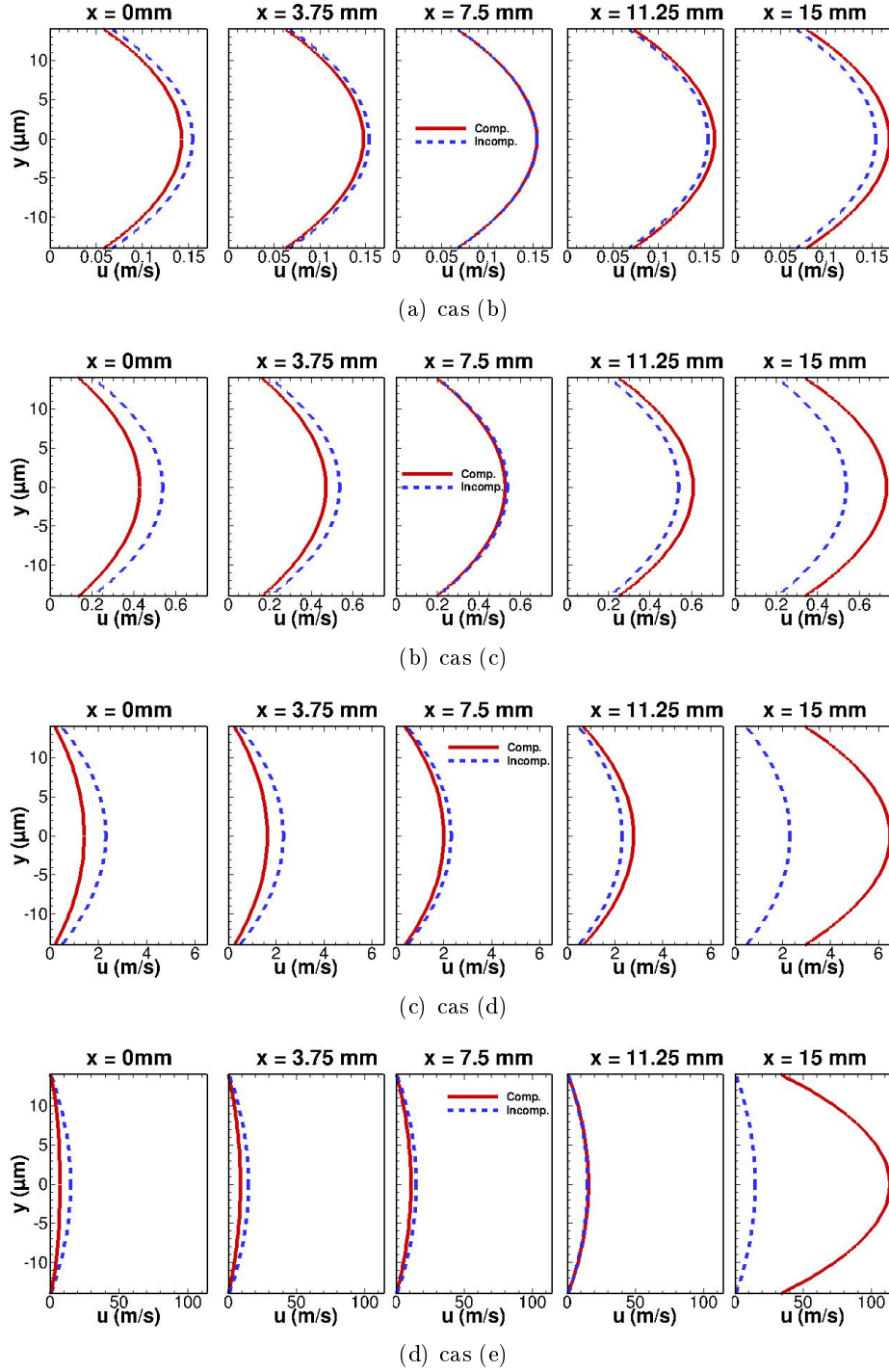


FIGURE 5.25 – Profils de vitesse sur différentes sections de la conduite C_1 pour les cas (b) à (e) du tableau 5.11 quand l'écoulement est glissant et compressible ou incompressible

5.3.4 Influence du saut de température

Pour étudier l'effet du saut de température quand la paroi est à la température d'entrée du fluide ou adiabatique, nous avons testé un cas pour chacune des conduites C_1 et C_2 . Pour la conduite C_1 , nous avons repris le cas (f) du tableau 5.11 et pour la conduite C_2 , nous avons repris le cas (e) du tableau 5.11. Quatre simulations ont été réalisées pour les deux cas. Elles sont notées comme suit :

$T_p = T_e$ **GD** : La paroi est à la température d'entrée du fluide et le glissement dynamique est traité seul ;

$T_p = T_e$ **GDT** : La paroi est à la température d'entrée du fluide et les glissements dynamique et thermique sont tous deux traités ;

$q_p = 0$ **GD** : La paroi est adiabatique et le glissement dynamique est traité seul ;

$q_p = 0$ **GDT** : La paroi est adiabatique et les glissements dynamique et thermique sont tous deux traités ;

Nous avons vu dans §4.2.2 que le terme $\frac{\gamma}{1+\gamma} \frac{1}{Pr}$ de l'équation (1.16) (§1.3.3) est négligé dans ANSYS/Fluent quand le saut de température à la paroi est modélisé. Pour l'argon, nous obtenons :

$$\frac{\gamma}{1+\gamma} \frac{1}{Pr} = \frac{1,67}{1+1,67} \cdot \frac{1}{0,66} = 0,95 \quad (5.76)$$

Cette valeur étant très proche de 1, nous pouvons supposer qu'il n'est pas nécessaire de modéliser l'équation (1.16) (§1.3.3) pour exprimer le saut de température. Nous pouvons donc utiliser les équations écrites par défaut dans AnsysFluent.

Quand les parois sont adiabatiques, nous utilisons l'UDF développée dans §4.3.3 pour exprimer les flux aux parois :

$$\text{en } y = \frac{H}{2}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\mu u}{k} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.77)$$

Conduite	C_1	C_2
cas	(f)	(e)
$T_p = T_e$ GD	609.6	889,1
$T_p = T_e$ GDT	609.8	890,3
$q_p = 0$ GD	610.1	891,8
$q_p = 0$ GDT	610.1	891,8

TABLE 5.18 – Débits massiques ($\dot{m} \times 10^{10}$ en kg/m^3) du cas (f) de la conduite C_1 et du cas (e) de la conduite C_2 quand l'écoulement est glissant et la paroi est à température imposée ou à flux imposé, saut de température pris ou non en compte.

Les débits massiques et les chutes de température entre l'entrée et la sortie sont reportés dans les tableaux 5.18 et 5.19. D'après le tableau 5.18, nous constatons que le débit massique du fluide est quasiment le même pour chaque conduite. En d'autres termes, le saut de température et le type de condition à la paroi n'influent pas sur la dynamique. Pourtant, le gaz étant compressible, la dynamique et la thermique devraient être directement reliées par l'équation des gaz parfaits. De plus, le tableau 5.19 montre que les chutes de température ne sont pas les mêmes quand on tient compte du saut de température ou quand on change de condition limite, ce qui devrait avoir un impact sur le débit.

Pour expliquer ce résultat, nous traçons, sur les figures 5.26 à 5.29, les différents profils de pression, vitesse, masse volumique et température du cas (e) pour la conduite C_2 . Pour une meilleure compréhension, chaque variable a été tracée le long de la conduite de deux façons : l'une pour la conduite complète et l'autre seulement près de la sortie. Nous remarquons sur la figure 5.27 que la chute de température n'est localisée qu'en sortie de la conduite à cause de la chute brutale de la pression (figure 5.26). Cette détente est suivie par une forte diminution de la masse volumique (figure 5.28), ce qui accélère le gaz (figure 5.29). Comme tout est localisé en sortie de la conduite, l'influence sur le débit massique est faible.

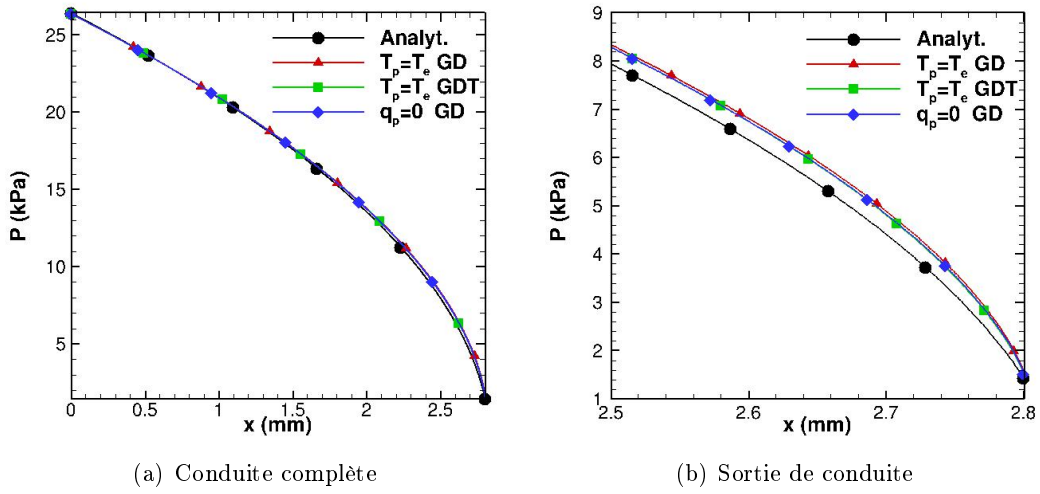


FIGURE 5.26 – Profils de la pression du cas (e) issus de la simulation et du calcul analytique quand l'écoulement est glissant et la paroi à température ou à flux imposés et quand le saut de température est pris ou pas en compte pour la conduite C_2

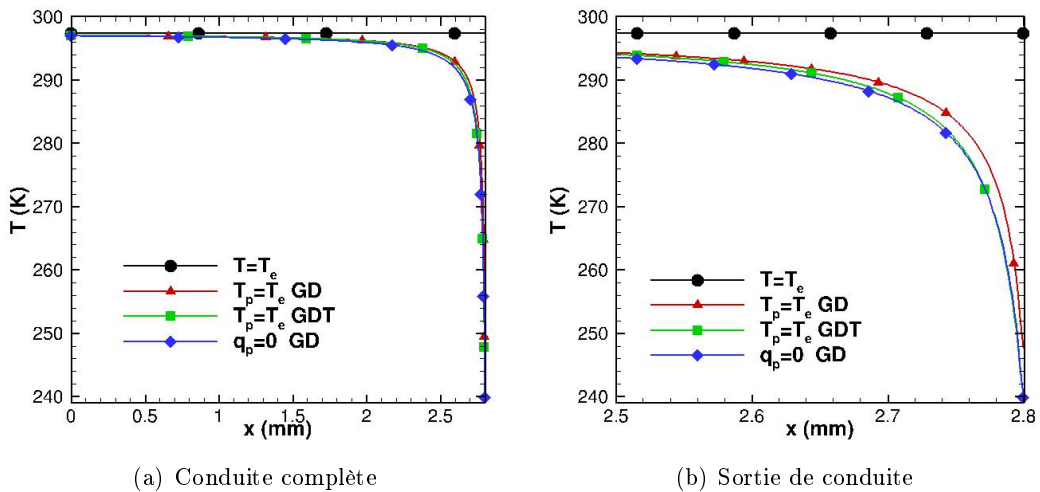


FIGURE 5.27 – Profils de la température du cas (e) issus de la simulation et du calcul analytique quand l'écoulement est glissant et la paroi à température ou à flux imposés et quand le saut de température est pris ou pas en compte pour la conduite C_2

Le tableau 5.19 montre que le gaz sort plus froid en présence du saut de température quand la paroi est à température imposée. Nous pouvons aussi remarquer sur la figure

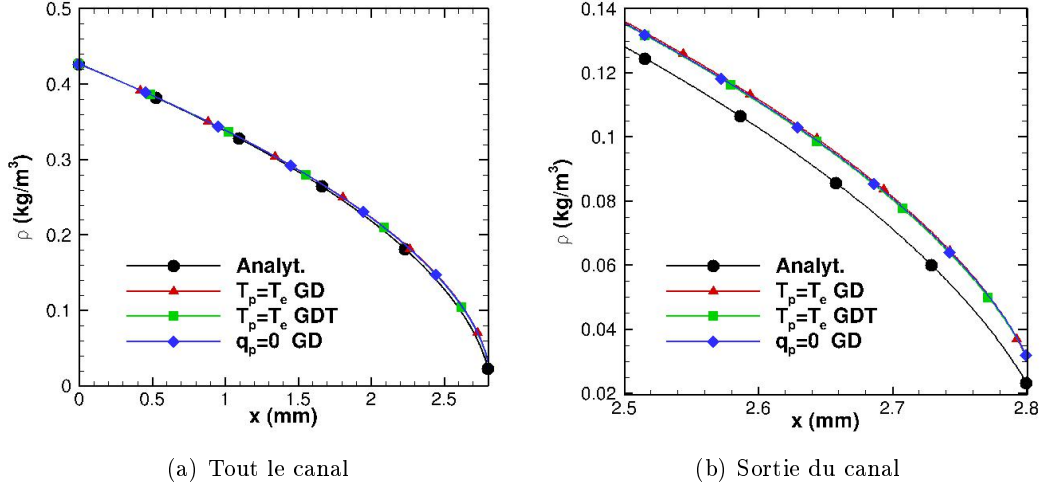


FIGURE 5.28 – Profils de la masse volumique du cas (e) issus de la simulation et du calcul analytique quand l'écoulement est glissant et la paroi à température ou à flux imposés et quand le saut de température est pris ou pas en compte pour la conduite C_2

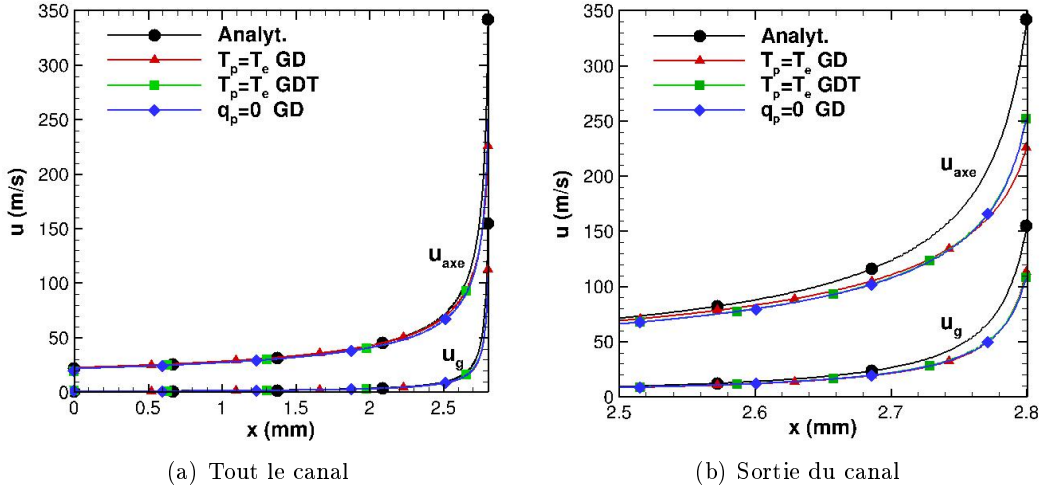


FIGURE 5.29 – Profils des vitesses de glissement u_g et à l'axe u_c du cas (e) issus de la simulation et du calcul numérique quand l'écoulement est glissant et la paroi à température ou à flux imposés et quand le saut de température est pris ou pas en compte pour la conduite C_2

5.27(b) qu'il se comporte de la même manière que lorsque la paroi est adiabatique. La raison est la suivante : le cas (e) est compressible et une détente existe. Quand la paroi est à la température d'entrée du gaz, elle est plus chaude que ce dernier puisqu'il se refroidit. Quand il n'y a pas de saut de température au niveau de la paroi, le gaz au contact de la paroi est à sa température tout le long de la conduite, même à la sortie où il est très froid au centre. La paroi chauffant le gaz, la détente est plus ou moins freinée. En revanche, en présence du saut de température, les molécules de gaz près de la paroi sont peu influencées par la température de la paroi. Le gaz se détend sans grand apport de chaleur de la paroi, comme si cette dernière était adiabatique. Nous pouvons conclure que le saut de température agit comme une résistance thermique entre le gaz et la paroi.

Conduite	C_1	C_2
cas	(f)	(e)
$T_p = T_e$ GD	-25,48	-50,01
$T_p = T_e$ GDT	-33,60	-57,78
$q_p = 0$ GD	-33,80	-57,48
$q_p = 0$ GDT	-33,80	-57,48

TABLE 5.19 – Chutes de température maximale ($\Delta T^{\max}$ en K) du cas (f) de la conduite C_1 et du cas (e) de la conduite C_2 quand l'écoulement est glissant et la paroi est à température imposée ou à flux imposé, saut de température pris ou non en compte.

5.4 Conclusion

L'étude réalisée avec ANSYS/Fluent nous conduit à dégager les conclusions suivantes :

Cas des écoulements incompressibles non glissants :

- Le nombre de Nusselt en régime thermique établi entre deux plans parallèles à flux imposés et sans diffusion axiale importante tend bien vers la valeur donnée dans la littérature ;
- Quand le diamètre de la conduite est de l'ordre de quelques micro-mètres, le nombre de Péclet peut être inférieur à l'unité. Dans ce cas, les effets de la diffusion axiale ne sont plus négligeables. Imposer une température constante à l'entrée de la conduite n'est pas réaliste : il est nécessaire de considérer des extensions à l'entrée de la conduite ou d'imposer une température d'entrée mesurée. Les dimensions des extensions doivent être d'autant plus grandes que le nombre de Péclet est faible.

Cas des écoulements incompressibles glissants : Le libre parcours moyen des écoulements incompressibles est constant parce qu'il ne dépend que de la masse volumique du fluide. Il s'ensuit que la vitesse de glissement est constante jusqu'à la sortie de la conduite lorsque l'écoulement est établi.

Cas des écoulements compressibles non glissants :

- Aux faibles nombres de Mach ($< 0,1$), le gaz peut être supposé incompressible : les variations longitudinales de pression sont quasi-linéaires et le profil de vitesse sur une section se conserve, en première approximation, de l'entrée à la sortie de la conduite ;
- Quand $Ma > 0,1$, les effets de compressibilité commencent à se manifester et le profil de pression n'est plus linéaire car la détente est importante à proximité de la sortie. Elle se traduit par une accélération du gaz et par son refroidissement.

Cas des écoulements compressibles glissants :

- Le débit massique d'un écoulement glissant non chauffé peut être calculé analytiquement, quelles que soient les différences de pression entrée/sortie parce que les effets de compressibilité sont toujours localisés près de la sortie. Ils influent donc très peu sur la dynamique de l'écoulement.
- Le glissement dynamique accélère le fluide : le débit massique d'un écoulement glissant est donc toujours plus important que celui d'un écoulement non glissant.
- Le saut de température agit comme une résistance thermique entre la paroi et le gaz. Ne pas le prendre en compte conduit à une sur-estimation de la température de sortie.

Troisième partie

Étude paramétrique avec le code CFCR2

Chapitre 6

Validations des résultats obtenus avec le code CFCR2

6.1 Formulation mathématique

Le code utilisé dans cette partie a été développé au laboratoire afin de résoudre les équations de Navier-Stokes et de l'énergie pour des écoulements de fluides faiblement compressibles (approximation faible Mach) [9, 10, 11, 67]. Dans le cadre de cette thèse, il a été adapté pour traiter des écoulements gazeux compressibles subsoniques dans des micro-conduites rectilignes, avec prise en compte des phénomènes de raréfaction au voisinage des parois (glissements thermique et dynamique du premier ordre et pompage thermique) et utilisation de la loi d'état des gaz parfaits. Les équations de conservation de la masse (2.1), de la quantité de mouvement (2.2) et de l'énergie (2.4) données à partir de la page 23 sont ré-exprimées avec les variables $\vec{v}$ (vitesse), T (température) et P (pression).

Comme seul le régime permanent est étudié, les équations de conservation sont écrites sous forme stationnaire et en tenant compte des variations avec la température de toutes les propriétés thermophysiques. Elles s'écrivent en géométries 2D cartésiennes :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2\mu}{3} \left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \rho v u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{2\mu}{3} \left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (6.3)$$

$$C_p \left(\frac{\partial \rho u T}{\partial x} + \frac{\partial \rho v T}{\partial y} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] = \left(u \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \bar{\tau} : \nabla \vec{v} \quad (6.4)$$

Avec :

$$\rho = \frac{P}{rT} \quad (6.5)$$

Conditions aux limites

L'écoulement n'étant simulé numériquement que dans une demi-conduite, des conditions de symétrie sont employées sur l'axe $y = 0$ de la conduite :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (6.6)$$

Les conditions aux limites de glissement s'écrivent sur la paroi $y = H/2$ comme suit :

Pour la composante tangentielle de la vitesse, les effets de raréfaction sont modélisés en introduisant une vitesse de glissement du premier ordre et le pompage thermique. La composante normale est nulle (paroi imperméable).

$$u(x, H/2) = - \left(\frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u} \right) \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x, H/2)} + \underbrace{\frac{3}{4} \frac{\mu}{\rho T} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{(x, H/2)}}_{\text{Pompage thermique}}, \quad v = 0 \quad (6.7)$$

où le libre parcours moyen λ est basé sur la viscosité du gaz :

$$\lambda = \frac{\mu}{P} \sqrt{\frac{\pi r T}{2}} \quad (6.8)$$

Dans le cas d'une paroi à température uniforme T_p

$$T_p - T(x, H/2) = \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{\lambda}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{(x, H/2)} \quad (6.9)$$

Dans le cas d'un flux uniforme imposé q_p sur la paroi

$$k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{(x, H/2)} = q_p - \mu u_s \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x, H/2)} \quad (6.10)$$

La température $T_p(x)$ de la paroi est ensuite calculée en utilisant l'équation (6.9).

Dans la section d'entrée de la conduite, la température et la pression sont supposées uniformes :

$$\text{At } x = 0 \quad T = T_{in}, \quad P = P_{in}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v = 0 \quad (6.11)$$

La pression est fixée dans la section de sortie :

$$\text{At } x = L \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad P = P_{out}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v = 0 \quad (6.12)$$

Les propriétés du gaz (azote) dépendent de la température selon les lois suivantes :

$$\mu = \mu_e \left(\frac{T}{T_e} \right)^{0,68} \quad (6.13)$$

$$k = k_e \left(\frac{T}{T_e} \right)^{0,77} \quad (6.14)$$

$$C_p = C_{p,e} \left(\frac{T}{T_e} \right)^{0,078} \quad (6.15)$$

6.2 Schéma discret du code CFCR2 (Convection Forcée Compressible en Régime Raréfié)

Les équations de transport (6.1) à (6.4) sont discrétisées par une méthode de volumes finis sur des maillages non-structurés. Les variables sont exprimées dans chaque maille en un point appelé le *centre* de la maille. Pour que le schéma soit consistant, il faut que le maillage vérifie la relation d'admissibilité suivante : soient x_K et x_L les coordonnées des centres de deux mailles adjacentes K et L , et x_σ les coordonnées du centre géométrique de la face commune entre K et L , alors $\overrightarrow{x_L x_K} \wedge \overrightarrow{x_\sigma x_K} = \vec{0}$ (les trois points sont alignés) et $\overrightarrow{x_L x_K} \cdot \overrightarrow{x_\sigma x_K} > 0$ (l'ordre d'apparition des centres doit être conforme à celui des mailles). Dans ce travail, un maillage rectangulaire est utilisé pour discrétiser le canal. Dans le cas où une extension est ajoutée à l'aval de la conduite pour tenir compte de l'environnement extérieur, cette extension de forme circulaire sera maillée par des triangles de Delaunay qui ont l'avantage de respecter la condition de compatibilité énoncée ci-dessus.

Le principe de la discrétisation des équations est détaillé dans les références [9, 10, 11, 67]. Ce paragraphe ne rappelle donc que brièvement quelques éléments fondamentaux de la conception du schéma numérique.

Comme mentionné précédemment, les variables utilisées sont la vitesse $\vec{v}$, la température T et la pression P . La masse volumique est déterminée par la loi d'état des gaz parfaits $\rho = P/rT$. Les expressions discrètes des différents opérateurs sont construites à partir d'une forme affaiblie des équations de Navier-Stokes et de l'énergie. Ce choix assure que les variables discrètes vérifient des bilans d'énergie similaires aux variables continues.

Les résultats obtenus dans ce chapitre indiquent que les nombres de Reynolds sont faibles ($\max(Re_{D_h}) < 30$) même lorsque la vitesse du fluide devient voisine de celle du son. Compte tenu du maillage utilisé, le nombre de Reynolds de maille reste toujours inférieur à l'unité ce qui nous permet d'adopter une expression centrée des termes de transport dans les équations de Navier-Stokes et de l'énergie.

Le couplage discret des champs de vitesse et de pression exprimés aux mêmes points du maillage est susceptible d'engendrer des instabilités parasites non physiques. Comme dans le cas incompressible, la stabilisation de la pression est alors assurée par une méthode de pénalisation de l'équation de conservation de la masse sur un maillage grossier constitué de regroupements de mailles [9, 10, 11, 67].

Le système algébrique issu de la discrétisation des équations non-linéaires de Navier-Stokes et de l'énergie est résolu par une méthode de Newton-Raphson. Les solutions du système linéaire obtenu à chaque itération de l'algorithme de Newton-Raphson sont calculées par une décomposition de Gauss qui tire partie de la structure creuse du système linéaire.

Pour valider le code CFCR2, nous partons de l'étude numérique de Sun et Jaluria [65] qui porte sur un écoulement d'azote dans une conduite 2D plane avec des conditions de glissement et un chauffage du gaz aux parois. Deux modes de chauffage ont été considérés :

- Soit une température T_p uniforme supérieure à la température d'entrée du gaz T_e est imposée ;
- Soit une densité de flux de chaleur uniforme est imposée.

Notons que les conditions aux limites de glissement (Eq. (6.7) et Eq. (6.9)) ainsi que l'expression du libre parcours moyen (Eq. (6.8)) sont traitées de la même manière dans [65] et dans CFCR2. Par contre, la composante visqueuse du flux de chaleur à la paroi (Eq. (6.10)) n'est pas prise en compte dans [65].

Dans un premier temps, nous utiliserons la même expression du flux afin de comparer les solutions de CFCR2 avec [65]. Pour vérifier les résultats, nous avons effectué également des autres comparaisons avec les résultats d'ANSYS/Fluent.

6.3 Paramètres des simulations numériques

Selon que la paroi est chauffée à flux imposé ou à température constante, les dimensions de la conduite et les conditions d'entrée en pression et en température sont différentes. Elles sont présentées dans les paragraphes correspondants. Les paramètres fixés pour toutes les simulations, et quel que soit le type de chauffage, sont donnés dans le tableau 6.1.

L'équation (6.13) est facilement programmée avec ANSYS/Fluent, en choisissant simplement μ_e , T_e et l'exposant 0,68. Par contre, la conductivité et la chaleur massique (équation (6.14) et (6.15)) doivent être calculées par des UDF. L'intégrale de l'enthalpie doit aussi être calculée et intégrée dans l'UDF de définition de la chaleur massique.

Gaz	r $J/kg.K$	γ	$\sigma_u = \sigma_T$	P_s (kPa)	C_{pe} $(J/kg.K)$
Azote	296,8	1,4	1	100	1041

TABLE 6.1 – Paramètres fixés dans toutes les simulations.

L'expression du glissement thermique programmée dans ANSYS/Fluent ne prend pas en compte le terme $\gamma/(\gamma + 1)P_r$ (Eq. (6.9)). Nous l'avons calculé pour l'azote et l'avons trouvé égal à 0,8. Dans ce cas, nous avons corrigé ce problème sans passer par les UDF car il est difficile de réécrire le saut de température dans ANSYS/Fluent. Nous avons donc modifié le coefficient d'accommodation thermique, que nous notons $\sigma_{T,A}$, en l'écrivant :

$$\frac{2 - \sigma_{T,A}}{\sigma_{T,A}} = \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{1}{P_r} \quad (6.16)$$

Nous avons trouvé $\sigma_{T,A} = 1,1$.

Dans cette étude, nous considérons trois grandeurs adimensionnelles que nous définissons comme dans [65] :

Le nombre de Knudsen :

$$K_n = \frac{\lambda}{H} \quad (6.17)$$

Le nombre de Nusselt :

– Quand la paroi est à flux imposé q_p :

$$Nu = \frac{q_p H}{k(T_p - T_b)} \quad (6.18)$$

– Quand la paroi est à température imposée T_p :

$$Nu = \frac{k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_p}{k(T_p - T_b)/H} + \frac{\mu u \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_p}{k(T_p - T_b)/H} = Nu_{cv} + Nu_{vis} \quad (6.19)$$

Cependant, pour comparer Nu avec [65], nous le calculerons aussi en négligeant la puissance des forces visqueuses à la paroi ($Nu_{vis} = 0$). Soit :

$$Nu = \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_p H}{T_p - T_b} \quad (6.20)$$

où T_b est la température moyenne débitante.

Rapport entre travail des forces de pression et dissipation visqueuse :

$$PW/VD = \frac{\int_0^{H/2} [\vec{v} \cdot \nabla P] dy}{\int_0^{H/2} [\bar{\tau} : \vec{v}] dy} \quad (6.21)$$

Les notations PW et VD représentent le travail des forces de pression (pressure work) et la dissipation visqueuse (viscous dissipation) respectivement.

6.4 Validation pour des parois à température imposée

En plus des paramètres reportés dans le tableau 6.1, les autres paramètres fixés quand les parois sont à température imposée sont reportés dans le tableau 6.2.

L (μm)	H (μm)	Maillage $N_x \times N_y$	T_e (K)	μ_e ($kg/m.s$)	k_e ($W/m.K$)
3000	1,2	6000×23	314	$1,843.10^{-5}$	$2,68.10^{-2}$

TABLE 6.2 – Paramètres fixés dans les simulations à température imposée.

6.4.1 Comparaisons des résultats

Pour effectuer les comparaisons entre les solutions de CFCR2, de ANSYS/Fluent et de [65], nous étudions un seul cas : un rapport de pression entrée/sortie $PR = P_e/P_s = 2,701$ et un rapport de température paroi/entrée du gaz $T_p/T_e = 1,2$. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 6.1 sous la forme de profils axiaux de grandeurs caractéristiques avec le même maillage que celui du tableau 6.2 (celui employé dans [65]). Nous constatons que le nombre de Knudsen $Kn = \lambda/H$ (figure 6.1(a)) augmente le long de la conduite parce que la pression diminue et la température augmente. Les résultats de CFCR2 et d'ANSYS/Fluent concordent bien, un peu moins bien avec [65], bien que le libre parcours moyen λ soit calculé par CFCR2 et par [65] de la même manière (Eq. (6.8)) alors que ANSYS/Fluent le calcul comme suit :

$$\lambda = \frac{k_B}{\sqrt{2}\pi\sigma^2} \frac{T}{P} \quad (6.22)$$

Quand le glissement est négligé, la figure 6.1(b) montre que le rapport PW/VD est constant et égal à -1 : le travail des forces de pression et la dissipation visqueuse se compensent. En présence de glissement, ce rapport diminue entre l'entrée et la sortie de la conduite. PW/VD est très inférieur à -1 , ce qui signifie que le travail des forces de pression est plus important (en amplitude) que la dissipation visqueuse. Ceci peut s'expliquer mathématiquement à l'aide du théorème de l'énergie cinétique vu dans §2.1.1. Pour rappel, ce théorème s'écrit :

$$\vec{v} \cdot \nabla P + \bar{\tau} : \nabla \vec{v} = \nabla \cdot (\bar{\tau} \cdot \vec{v} - e_c \vec{v}) \quad (6.23)$$

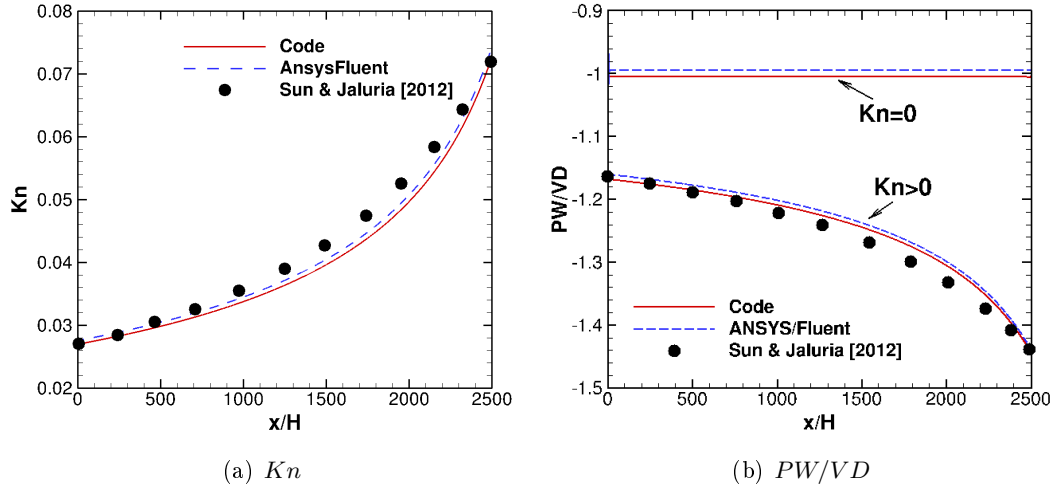


FIGURE 6.1 – Comparaisons des profils de Kn et de PW/VD avec et sans glissement obtenus avec le code CFCR2, ANSYS/Fluent et par [65] pour $PR = 2,701$ et $T_p/T_e = 1,2$.

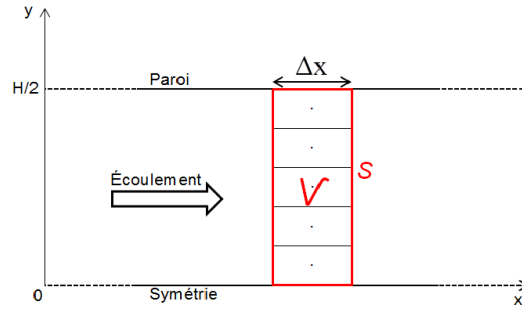


FIGURE 6.2 – Schéma représentatif d'une section de la conduite

En appliquant le théorème de Green-Ostrogradski sur les termes en divergence, l'intégrale du théorème de l'énergie cinétique sur le volume $\mathcal{V}$ délimité par la surface $\mathcal{S}$ (figure 6.2) donne :

$$\int_{\mathcal{V}} (\vec{v} \cdot \nabla P + \bar{\tau} : \nabla \vec{v}) d\mathcal{V} = \oint_{\mathcal{S}} (\bar{\tau} \cdot \vec{v} - e_c \vec{v}) \cdot \vec{n}_S dS \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{H/2} \int_x^{x+\Delta x} (\vec{v} \cdot \nabla P + \bar{\tau} : \nabla \vec{v}) dx dy &= \underbrace{\int_0^{H/2} (\bar{\tau} \cdot \vec{v} - e_c u)_{x+\Delta x} dy - \int_0^{H/2} (\bar{\tau} \cdot \vec{v} - e_c u)_x dy}_{\approx 0} \\ &+ \int_x^{x+\Delta x} (\bar{\tau} \cdot \vec{v} - e_c v)_{H/2} dx - \int_x^{x+\Delta x} (\bar{\tau} \cdot \vec{v} - e_c v)_0 dx \quad (6.25) \end{aligned}$$

$$\left[\underbrace{\int_0^{H/2} \vec{v} \cdot \nabla P dy}_{PW < 0} + \underbrace{\int_0^{H/2} \bar{\tau} : \nabla \vec{v} dy}_{VD > 0} \right] \Delta x \approx \left(\mu u_g \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_g \right) \Delta x \quad (6.26)$$

L'équation (6.26) devient :

– Pour $Kn = 0$:

$$u_g = 0 \implies PW + VD \approx 0 \implies PW/VD \approx -1 \quad (6.27)$$

– Pour $Kn > 0$

$$PW + VD \approx \mu u_g \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_p \quad (6.28)$$

Dans l'équation (6.28), le terme $\mu u_g \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_p$ est négatif ($\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_p < 0$). Quand le nombre de Knudsen augmente à l'aval de la conduite, ce terme augmente car on peut montrer que la vitesse de glissement u_g augmente plus vite que le terme $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_p$ varie (cf Fig. 5.25 dans le cas d'écoulements compressibles). Par conséquent, $|PW + VD|$ augmente avec Kn . Comme $PW < 0$ et $VD > 0$, $|PW + VD|$ ne peut augmenter que si $|PW|$ augmente et/ou VD diminue. Le rapport $|PW/VD|$ augmente donc avec Kn .

Une autre manière d'expliquer ce résultat est la suivante : d'une part, lorsque Kn augmente, la vitesse de glissement augmente pour un gradient de pression donné, donc $|PW|$ augmente ; d'autre part, le taux de cisaillement diminue, donc VD diminue. Par conséquent, $|PW/VD|$ augmente bien avec Kn .

Les variations de Nu sont représentées sur la figure 6.3. Quand l'écoulement est glissant, Nu augmente avec x/H . Cette variation est due à la raréfaction puisque le nombre de Nusselt est constant après l'établissement thermique lorsque le glissement est négligé. Lorsque Kn augmente, le saut de température à la paroi est plus important. Comme Nu est calculé par l'équation (6.20), il augmente aussi. Concernant les comparaisons entre les trois solutions, elles ont toutes la même tendance mais sont très éloignées les unes des autres. C'est pourquoi une étude de maillage a été menée.

6.4.2 Influence du maillage

Le maillage utilisé dans [65] est uniforme (6000×23 mailles). Avec CFCR2, deux autres maillages ont été utilisés :

- 12000×46 mailles uniformes ;
- 24000×92 mailles uniformes.

Avec ANSYS/Fluent, nous avons testé deux autres maillages :

- 12000×46 mailles uniformes ;
- 12000×46 mailles raffinées à l'entrée de la conduite et près de la paroi.

Les valeurs obtenues de Nu pour les différents maillages sont présentées sur la figure 6.4 quand l'écoulement est glissant ou adhérent à la paroi.

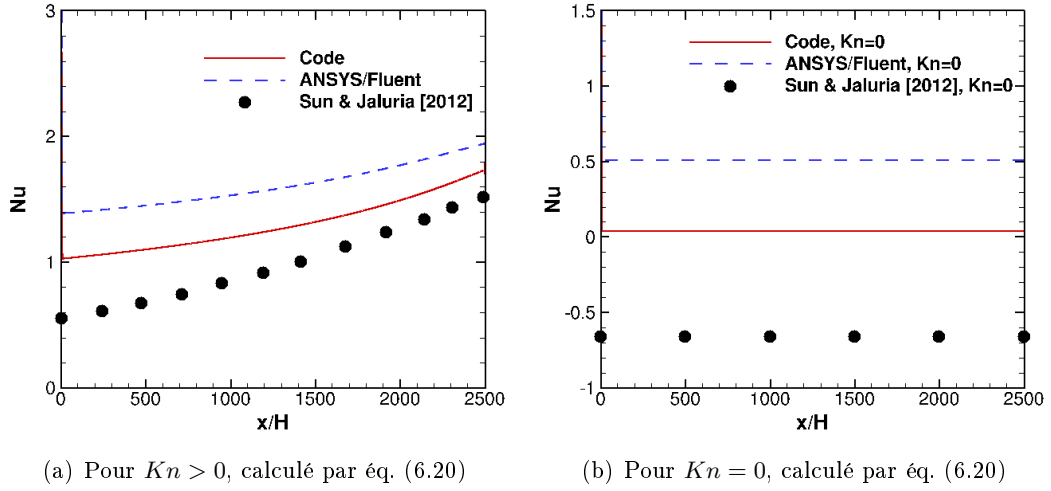


FIGURE 6.3 – Comparaison des profils de Nu obtenus par le code du laboratoire pour $PR = 2, 701$ et $T_p/T_e = 1, 2$, avec ceux de ANSYS/Fluent et de [65] avec et sans glissement

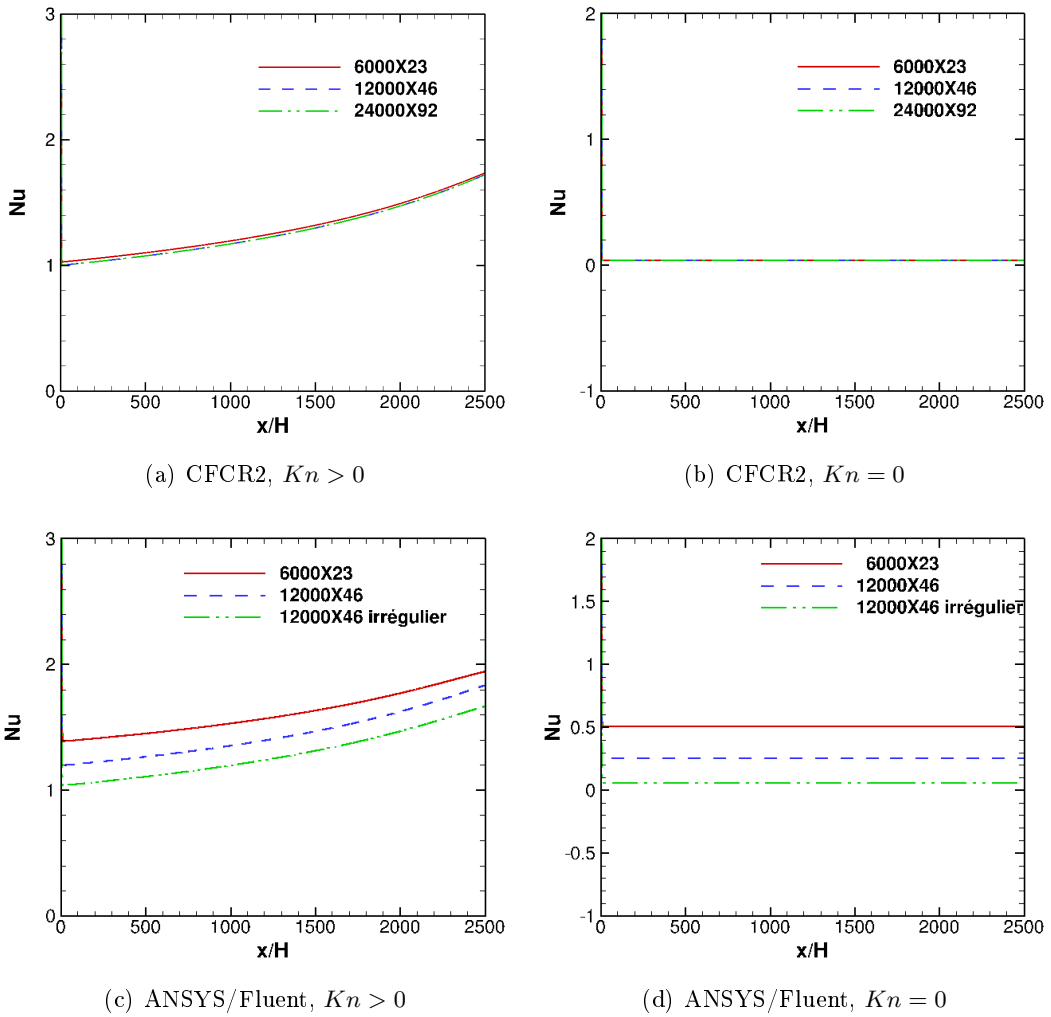


FIGURE 6.4 – Profils du nombre de Nusselt calculé par l'équation (6.20), obtenus par le code CFCR2 et ANSYS/Fluent pour différents maillages avec et sans glissement ($PR = 2, 701$ et $T_p/T_e = 1, 2$).

Nous constatons que le maillage a très peu d'influence sur les résultats de CFCR2, quel que soit le régime d'écoulement. Par contre, la solution d' ANSYS/Fluent converge mal avec le maillage de [65]. En effet, les profils du nombre de Nusselt reportés sur les figures 6.4(c) et 6.4(d) dépendent fortement du maillage. Nous avons testé un maillage uniforme 18000×69 : le calcul n'a pas convergé dans un temps de calcul raisonnable, vraisemblablement à cause de la difficulté à faire diminuer les résidus sur une grille comportant un grand nombre de mailles et de l'utilisation d'une méthode multi-grille comme solveur itératif.

La suite des résultats est présentée sur la figure 6.5 pour un maillage 6000×23 uniforme avec CFCR2 et 12000×46 mailles irrégulières avec ANSYS/Fluent. Les profils du nombre de Nusselt sont représentés avec ces maillages sur la figure 6.5. Nous constatons que les solutions obtenues par CFCR2 et ANSYS/Fluent sont en très bon accord, quel que soit le régime d'écoulement. Par contre, ces solutions sont très éloignées des celles de [65] : les différences sont estimées à 11% à la sortie de la conduite et à plus de 45% à l'entrée quand l'écoulement est glissant. Cet écart peut être expliqué par le maillage utilisé dans [65]. Le code ANSYS/Fluent et CFCR2 se valident mutuellement puisque des maillages et des méthodes de résolution différents sont utilisés et que les résultats sont en accord.

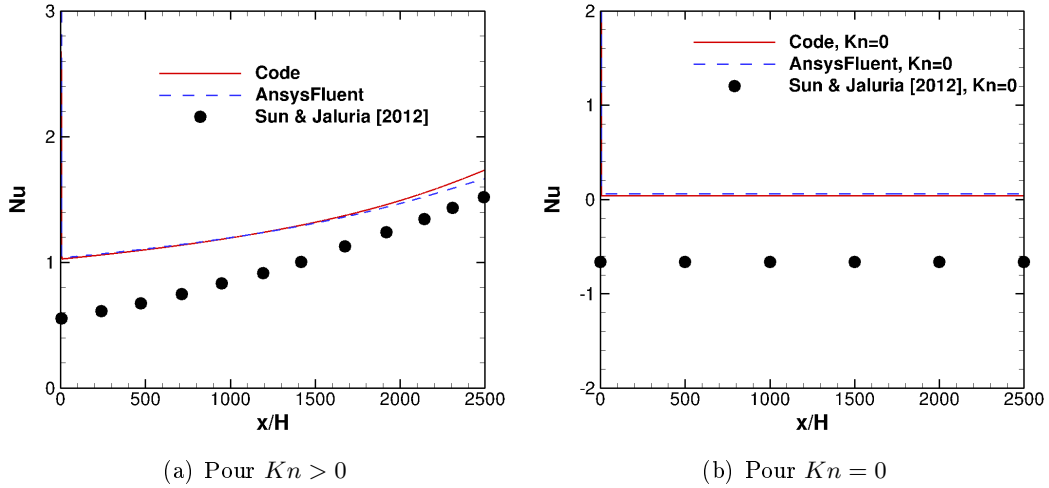


FIGURE 6.5 – Comparaison des profils du nombre de Nusselt calculés par l'équation (6.20) obtenus par le code CFCR2 pour $PR = 2,701$ et $T_p/T_e = 1,2$ avec ceux de ANSYS/Fluent et de [65] avec et sans glissement

6.4.3 Influence de la température imposée à la paroi

Nous considérons d'abord les rapports de température suivants : $T_p/T_e = 1,1$; $1,2$; $1,3$; $1,4$ en gardant le même rapport de pression $PR = 2,701$ ($\Delta P = 1,701 \text{ bars}$). Les résultats obtenus avec le code CFCR2 montrent que plus le rapport T_p/T_e est important, plus le nombre de Knudsen, en moyenne, l'est aussi (figure 6.6(a)) puisque Kn est fonction du libre parcours moyen qui augmente avec la température (voir équation (6.8)). En conséquence, le rapport $|PW/VD|$ augmente aussi (figure 6.6(b)) puisqu'il dépend du taux de raréfaction.

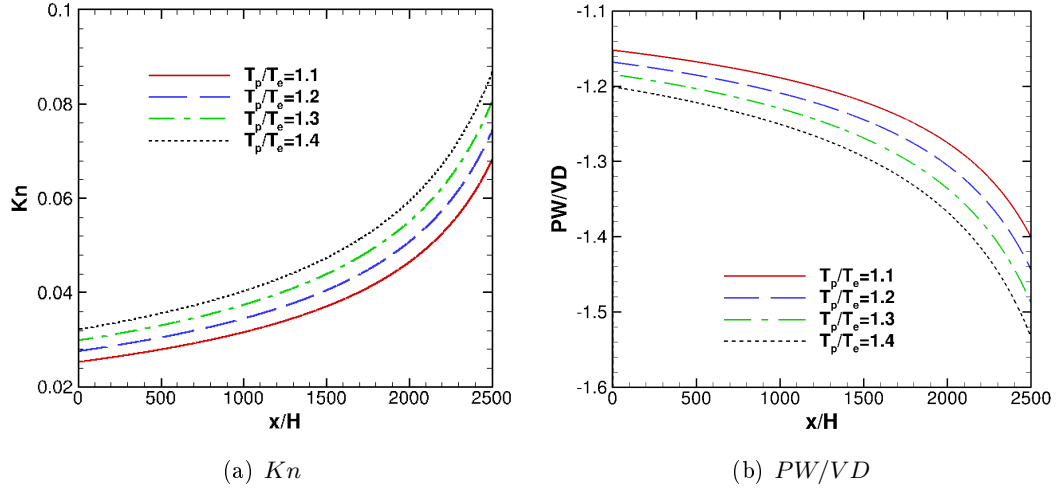


FIGURE 6.6 – Profils de (a) Kn et (b) PW/VD obtenus par CFCR2 pour $PR = 2,701$ avec glissement pour différentes températures de paroi.

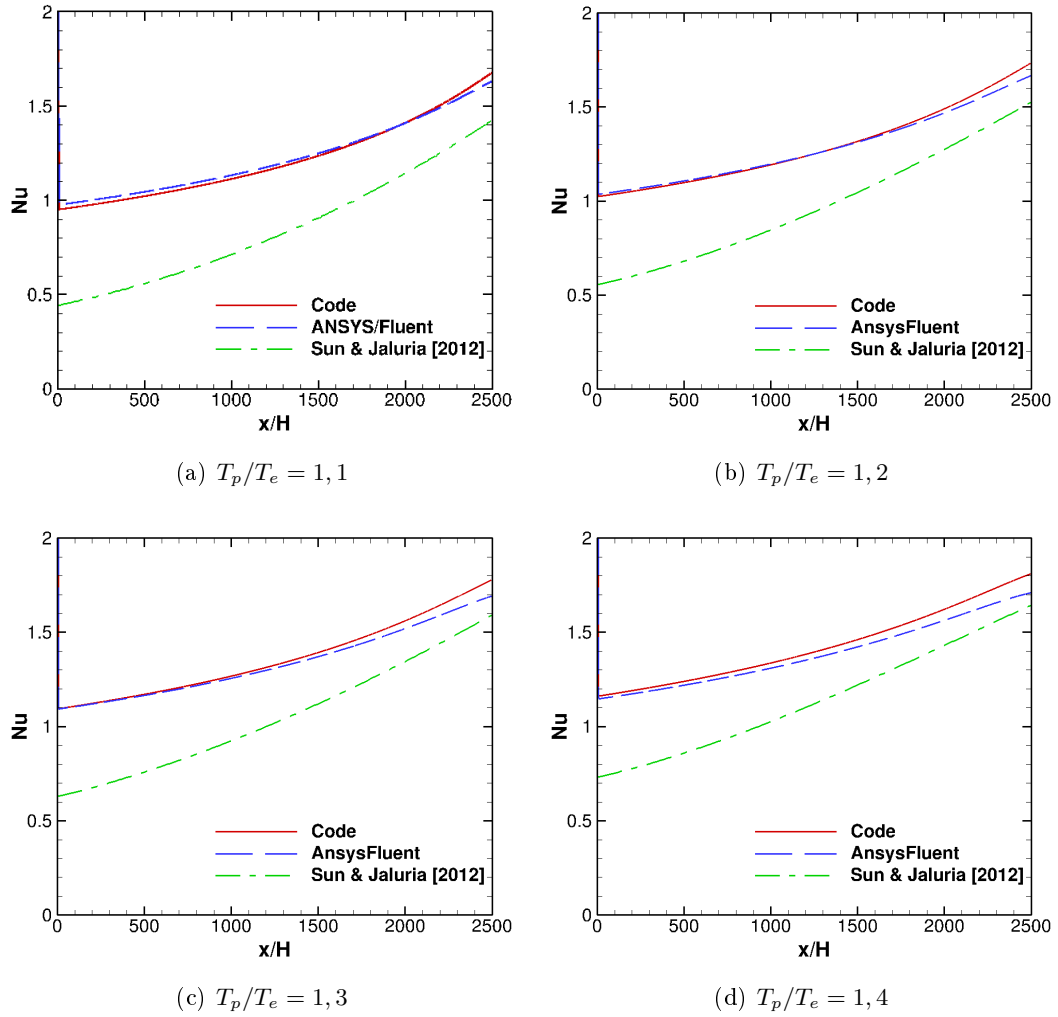


FIGURE 6.7 – Comparaisons des profils de Nu calculé par l'équation (6.20) obtenu par le code CFCR2 ($PR = 2,701$ avec glissement) avec ceux de ANSYS/Fluent et de [65] pour différentes températures de paroi

Sur la figure 6.7, nous avons tracé les profils du nombre de Nusselt Nu issus du code CFCR2, d'ANSYS/Fluent et de [65] calculés par l'équation (6.20). Nous constatons que plus la température de paroi est importante, plus le nombre de Nusselt l'est. Cela est dû à l'augmentation du gradient normal de T au numérateur de Nu , malgré l'augmentation de Kn et donc du saut de T qui fait croître l'écart $T_p - T_b$ au dénominateur de Nu . La comparaison des trois solutions montre que, quelle que soit la valeur de T_p/T_e , les solutions données par CFCR2 et par ANSYS/Fluent sont en très bon accord mais sont très éloignées de celles présentées dans [65], notamment à l'entrée de la conduite où l'écart est au moins de l'ordre de 50%. Cela est peut être dû au maillage relativement grossier employé dans [65].

6.4.4 Influence du rapport de pression

Dans cette partie, nous étudions l'effet du rapport de pression pour $PR=1,34$; $1,68$; $2,02$; $2,361$; $2,701$ et une même température de paroi, $T_p/T_e = 1,2$.

Nous présentons d'abord l'effet du rapport de pression sur le profil de Kn (figure 6.8(a)) et de PW/VD (figure 6.8(b)). Nous constatons qu'à l'entrée de la conduite, le taux de raréfaction est plus important aux faibles PR mais qu'il a la même valeur à la sortie de la conduite parce que la pression de sortie est fixée à 1 bar et parce que la température de la paroi est la même pour toutes les simulations. Le libre parcours moyen, qui dépend de ces deux grandeurs, est donc le même à la sortie de la conduite. Concernant le rapport $|PW/VD|$, il est d'autant plus important que Kn est grand, comme nous l'avons vu précédemment.

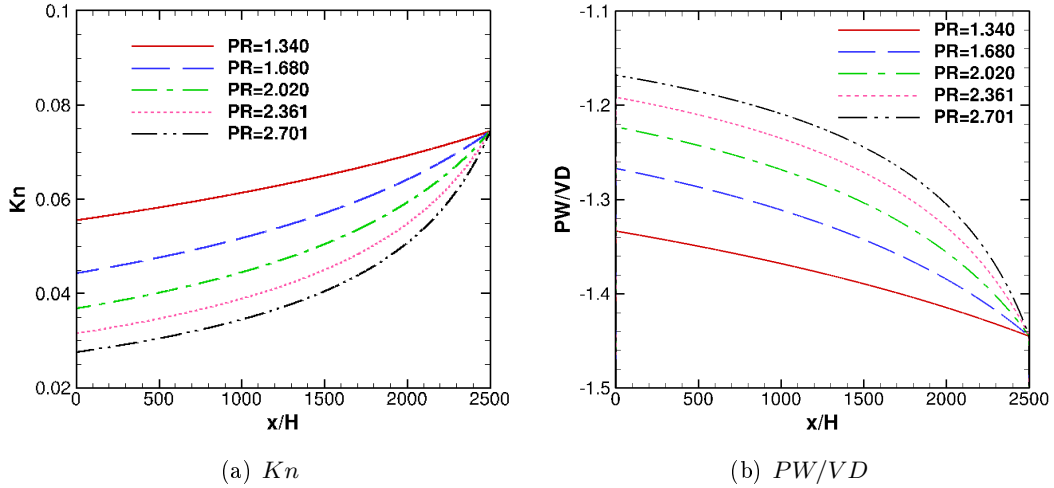


FIGURE 6.8 – Profils de (a) Kn et (b) PW/VD obtenus par le code CFCR2 pour $T_p/T_e = 1,2$ avec glissement pour différents rapports de pression PR

Sur la figure 6.9, nous constatons que plus le rapport PR est élevé, plus le nombre de Nusselt est petit. Ceci est dû aux effets de compressibilité liés au travail des forces de pression. Plus la différence de pression est importante, plus le gaz se refroidit au cœur de la conduite (T_b diminue donc). Comme la température de la paroi est fixée dans toutes ces simulations, l'écart $T_p - T_b$ devient important quand PR l'est aussi et, de ce fait, Nu diminue (voir l'équation (6.20)). On remarque sur cette figure que la solution de [65] est toujours éloignée des solutions de CFCR2 et d'ANSYS/Fluent. Ces dernières sont très proches, sauf pour $PR = 1,34$ et à la sortie de la conduite pour les autres valeurs de PR . Cela est dû au nombre de Knudsen qui est calculé différemment dans les deux codes.

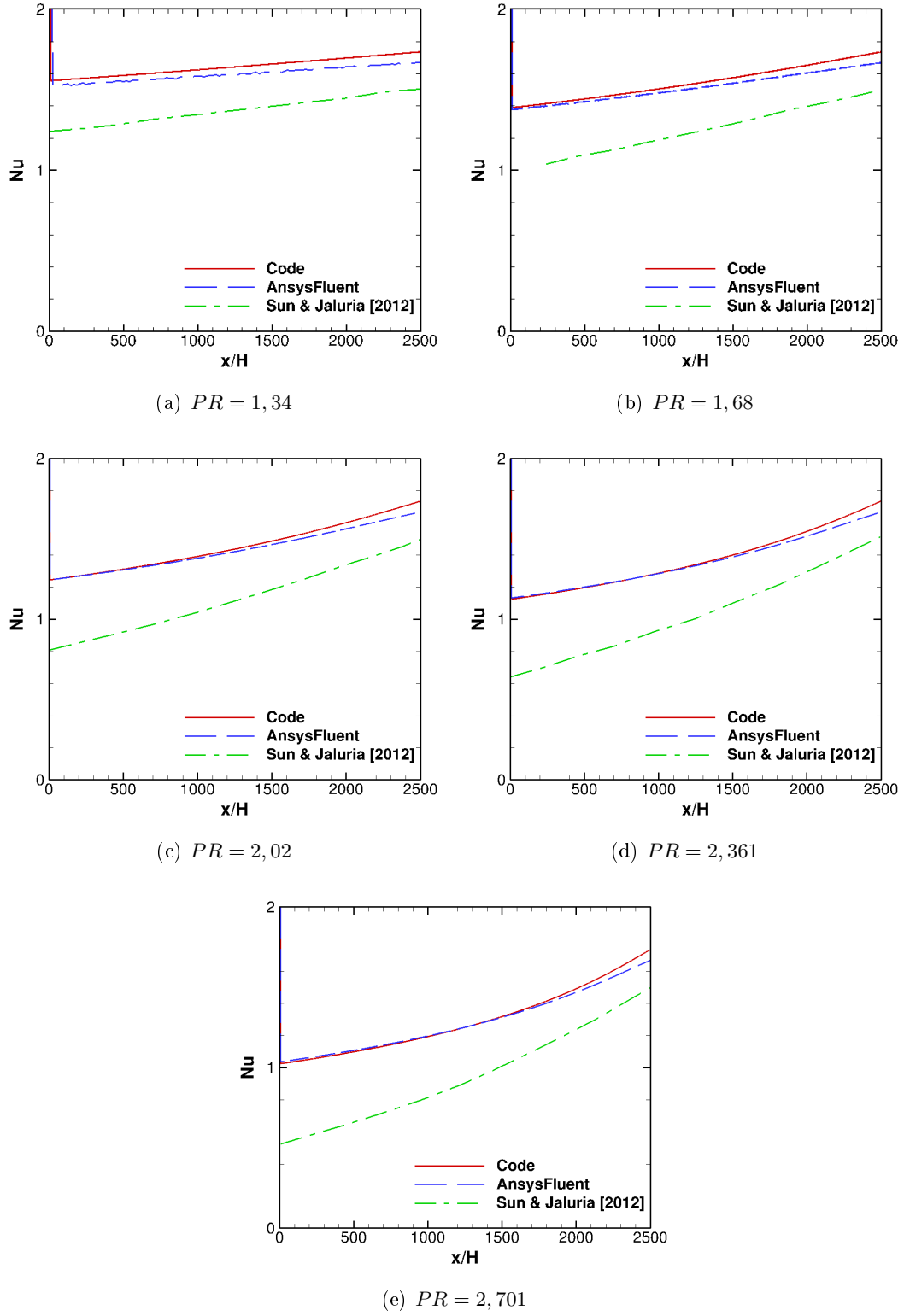


FIGURE 6.9 – Comparaisons des profils de Nu calculé par l'équation (6.20) et obtenus par le code CFCR2 avec glissement pour $T_p/T_e = 1, 2$, avec ceux d'ANSYS/Fluent et de [65] pour différents rapports de pression.

6.4.5 Influence de la puissance des forces visqueuses à la paroi

Les résultats présentés précédemment ne prennent pas en compte le flux de chaleur dû à la puissance des forces visqueuses dans le calcul du nombre de Nusselt. Nu est ici calculé en utilisant l'équation (6.19) et les résultats obtenus sont présentés sur la figure 6.10. Quelles que soient la pression ou la température à la paroi, le nombre de Nusselt est toujours très faible : $Nu < 0,1$. En effet, le terme $\mu u_g(\partial u/\partial y)_p$ est négatif. Quand il est pris en compte, il réduit la valeur du numérateur dans l'équation (6.19) et la valeur de Nu devient faible. Les résultats issus du code CFCR2 ne sont pas tout à fait en accord avec ANSYS/Fluent. Néanmoins, les tendances sont les mêmes :

- Quand PR est fixée et que la température à la paroi T_p est augmentée, le nombre de Nusselt diminue. Cela s'explique parce que le taux de raréfaction est augmenté : le terme $|\mu u_g(\partial u/\partial y)_p|$ devient important et le nombre de Nusselt diminue. Ce comportement est contraire à celui observé quand la puissance des forces visqueuses n'est pas prise en compte. Il semble cohérent avec la physique : lorsque Kn augmente, le saut de température à la paroi augmente. Il s'agit d'une résistance thermique qui limite les transferts convectifs.
- Quand T_p est fixée et que le rapport de pression PR est augmenté, le nombre de Nusselt augmente aussi contrairement à ce qu'on vu quand la puissance des forces visqueuses n'est pas prise en compte. En effet, quand PR est important, Kn diminue et le terme $|\mu u_g(\partial u/\partial y)_p|$ diminue à son tour. De ce fait, Nu augmente.

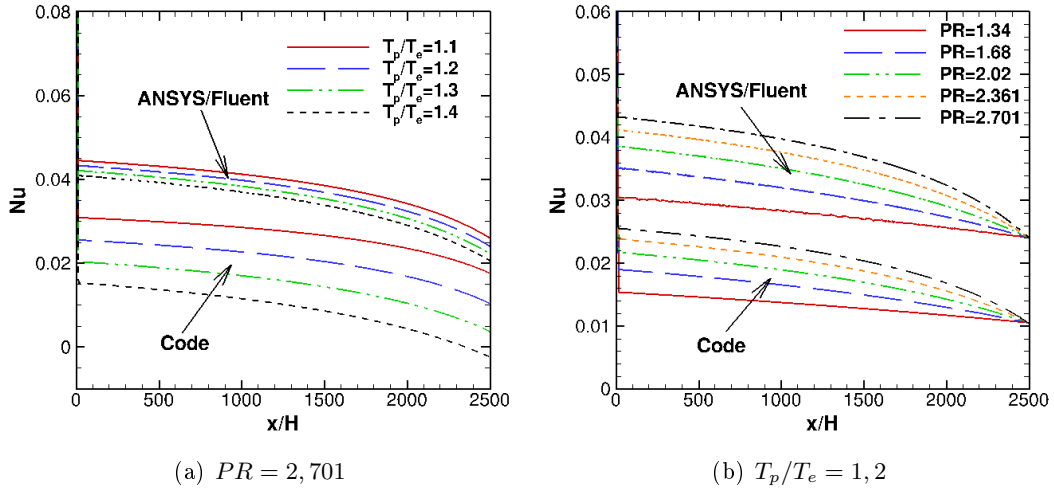


FIGURE 6.10 – Profils de Nu calculé par l'équation (6.19) obtenus par le code CFCR2 par ANSYS/Fluent quand : (a) $PR = 2,701$ et T_p variable (b) $T_p/T_e = 1,2$ et PR variable.

Les très importants écarts entre les nombres de Nusselt calculés par Fluent et par CFCR2 montrés sur la figure 6.10 doivent être cependant relativisés : les valeurs de Nu sont proches de zéro (ce qui n'a pas beaucoup de sens physique si l'on considère que Nu est un indicateur de l'importance relative de la convection) et résultent d'un post-traitement des variables calculées. Les figures 6.11(a) et 6.12(a) montrent que la somme des densités de flux $k(x)(\partial T/\partial y)_g$ et $\mu(x)u_g(\partial u/\partial y)_g$ est proche de zéro et que les écarts entre les nombres de Nusselt sont dus à des différences entre les flux totaux. Les figures 6.11(b) et 6.12(b) montrent, d'une part, que les températures de paroi et moyennes débitantes sont très proches (de l'ordre de $10^{-4} K$) et, d'autre part, que les flux de conduction sont en bon accord. On en déduit que les grandes différences entre des nombres de Nusselt locaux

(Fig. 6.10) sont principalement dues aux calculs des numérateurs (flux total).

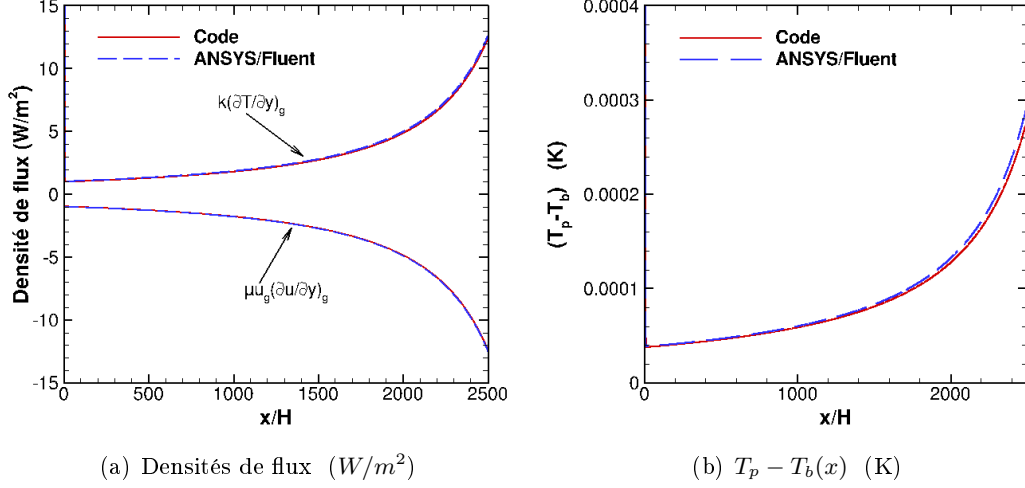


FIGURE 6.11 – Comparaisons des variations axiales des densités de flux aux parois et de l'écart entre la température des parois et la température moyenne débitante dans le cas $PR = 2,701$ et $T_p/T_e = 1,2$ ($H = 1,2 \mu m$, $k_e = 0,0268 W/m K$, $\mu_e = 1,843 \cdot 10^{-5} Pa.s$).

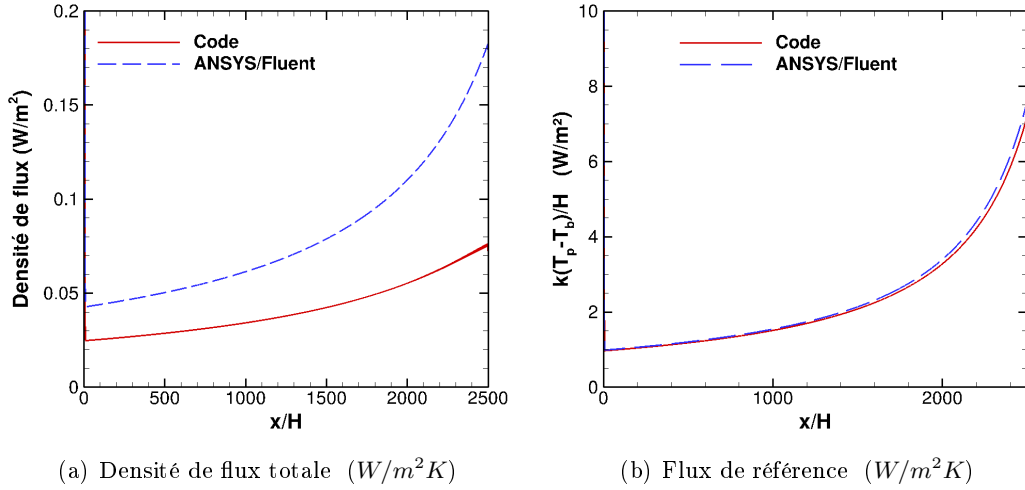


FIGURE 6.12 – Comparaisons entre les variations axiales des densités de flux total aux parois et du flux de conduction de référence dans le cas $PR = 2,701$ et $T_p/T_e = 1,2$ ($H = 1,2 \mu m$, $k_e = 0,0268 W/m K$, $\mu_e = 1,843 \cdot 10^{-5} Pa.s$).

La figure 6.13 permet de comparer le profil du nombre de Nusselt quand la puissance des forces visqueuses (PFV) est prise ou non en compte. Nous constatons que PFV a une très grande influence sur la valeur de Nu et qu'il génère des valeurs de Nu très faibles. Ce résultat est conforme au résultat expérimental de Demsis et al. (2009, 2010) [18, 19], discuté à fin du § 3.1.4.

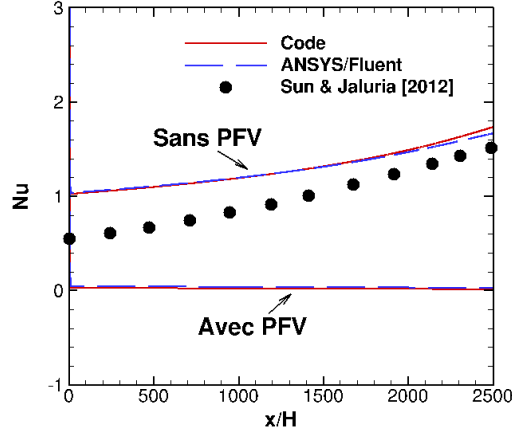


FIGURE 6.13 – Comparaison des profils de Nu calculés par les équations (6.20) et (6.19) obtenus pour $PR = 2,701$ et $T_p/T_e = 1,2$ avec glissement.

6.5 Validation pour des parois à flux imposé

L (μm)	H (μm)	T_e (K)	μ_e ($kg/m.s$)	k_e ($W/m.K$)
1500	3	300	$1,782.10^{-5}$	$2,59.10^{-2}$

TABLE 6.3 – Paramètres des simulations avec le code du laboratoire quand la paroi est à flux imposé (compléments au tableau 6.1).

Avec le code CFCR2, nous avons la possibilité de prendre ou de ne pas prendre en compte la puissance des forces visqueuses à la paroi. Sans ce terme, les comparaisons sont possibles avec les résultats de [65]. Dans le cas contraire, les résultats sont comparés à ceux d'ANSYS/Fluent puisque ce terme est modélisé en utilisant l'UDF adaptée, présentée au §4.3.3.

Plusieurs rapports de pression PR ainsi que plusieurs flux à la paroi notés q_{norm} sont testés. q_{norm} désigne le flux normalisé à la paroi défini par :

$$q_{\text{norm}} = \frac{q_p H}{k_e T_e} \quad (6.29)$$

Une étude de maillage a été faite sur le profil du nombre de Nusselt par CFCR2 quand la puissance des forces visqueuses est ou n'est pas considérée et par ANSYS/Fluent quand l'écoulement est glissant ou non glissant. L'étude est présentée sur les figures 6.14.

Les maillages utilisés avec CFCR2 sont tous réguliers et sont les suivants :

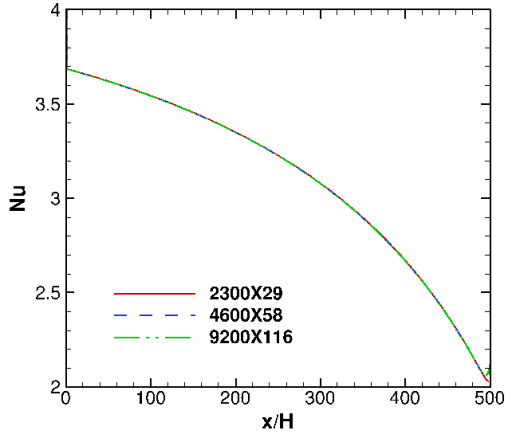
- 2300×29 mailles (celui de [65]) ;
- 4600×58 mailles (son double) ;
- 9200×116 mailles (son quadruple).

Les maillages utilisés avec ANSYS/Fluent sont les suivants :

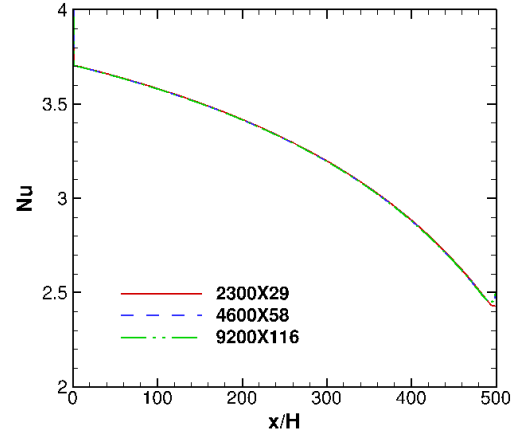
- 2300×29 mailles régulières (celui de [65]) ;
- 4600×58 mailles régulières (son double) ;
- 4600×60 mailles irrégulières (raffinées à l'entrée et près de la paroi).

Nous constatons que, quel que soient le code utilisé et le régime d'écoulement, le maillage régulier employé dans [65] conduit à une solution convergente et n'a donc pas besoin d'être raffiné. Tous les résultats qui suivent sont présentés avec ce maillage (2300×29).

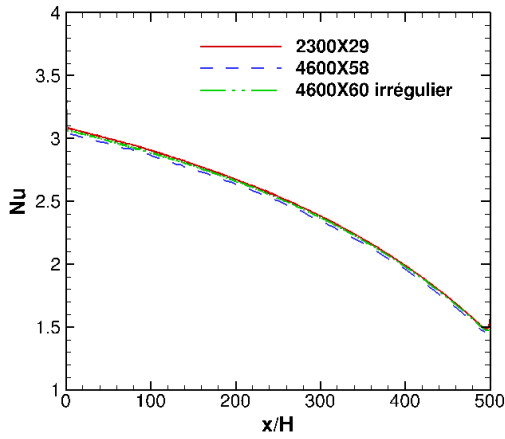
Les figures 6.14(c) et 6.14(d) montrent que le nombre de Nusselt d'un écoulement glissant chauffé à flux constant est toujours inférieur à celui d'un écoulement non glissant dans les mêmes conditions : quand l'écoulement est glissant, les vitesses sont augmentées, ce qui augmente les échanges convectifs. En revanche, le saut de température agit comme une résistance thermique qui diminue les échanges aux parois. La combinaison de ces deux phénomènes antagonistes conduit à une diminution des échanges parce que le second l'emporte sur le premier. En conséquence, le nombre de Nusselt diminue.



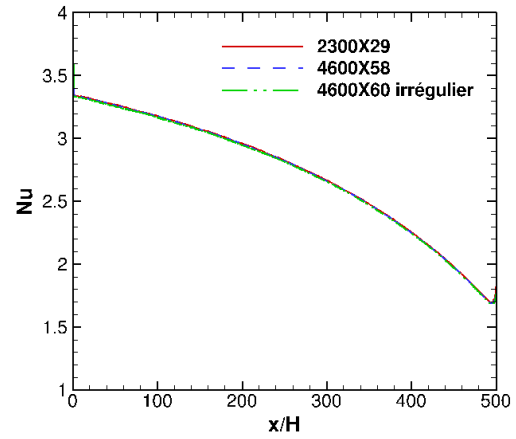
(a) CFCR2 avec le terme PFV



(b) CFCR2 sans le terme PFV



(c) ANSYS/Fluent, $Kn > 0$



(d) ANSYS/Fluent, $Kn = 0$

FIGURE 6.14 – Profils de Nu obtenus avec CFCR2 : (a) avec et (b) sans le terme PFV pour $PR = 2$ et $q_{\text{norm}} = 2,5 \cdot 10^{-4}$ et avec ANSYS/Fluent : (c) avec et (d) sans glissement pour $PR = 2$ et $q_{\text{norm}} = 10^{-4}$ pour différents maillages.

6.5.1 Influence de la puissance des forces visqueuses à la paroi

Pour étudier l'influence de la puissance des forces visqueuses à la paroi, nous avons choisi un seul cas tiré de [65] : $PR = 2$ et $q_{\text{norm}} = 10^{-4}$ correspondant à un flux de chaleur $q_p = 259 \text{ W/m}^2$. Les résultats sont présentés sur la figure 6.15 sous forme de profils longitudinaux pour différentes grandeurs caractéristiques. La figure 6.15(a) montre clairement que la puissance des forces visqueuses est une source de chaleur supplémentaire. Le gaz sort donc plus chaud. La solution de [65] est proche de celle de CFCR2 sans ce terme. La solution obtenue par ANSYS/Fluent est confondue avec celle de CFCR2 avec ce terme.

La figure 6.15(b) montre une légère différence entre les nombres de Knudsen calculés par CFCR2 avec et sans la puissance des forces visqueuses : Kn est un peu plus important avec ce terme parce que le gaz est plus chaud et, de ce fait, le taux de raréfaction augmente. Par contre, ces solutions sont un peu différentes de celles de [65] et d'ANSYS/Fluent. L'écart avec ANSYS/Fluent s'explique car λ n'est pas calculé de la même façon. Notons que ces différences sont toujours inférieures à 5%.

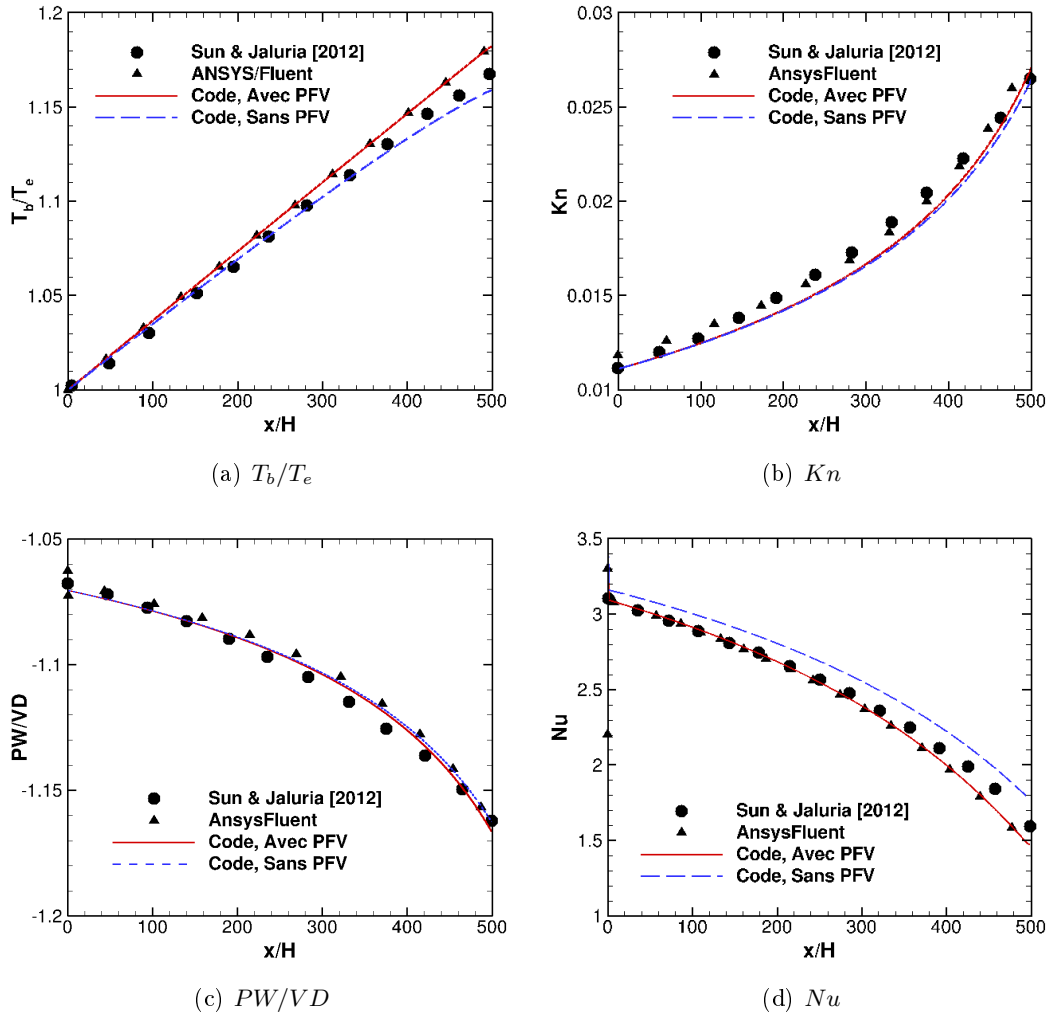


FIGURE 6.15 – Influence du terme PFV sur quelques grandeurs issues de différentes solutions, obtenues pour $PR = 2$ et $q_{\text{norm}} = 10^{-4}$ avec glissement

Concernant le rapport entre le travail des forces de pression et la dissipation visqueuse,

la figure 6.15(c) montre que CFCR2 donne une solution qui se situe entre celles de [65] et d'ANSYS/Fluent. La puissance des forces visqueuses à la paroi a donc peu d'influence sur le rapport PW/VD . Par contre, la figure 6.15(d) montre que ce terme a une grande influence sur les valeurs du nombre de Nusselt local. En effet, l'écart entre les solutions avec et sans ce terme croît de 2% à l'entrée de la conduite jusqu'à 20% à la sortie. L'augmentation de cet écart s'explique par le fait que la puissance des contraintes visqueuses est fonction de la vitesse de glissement qui augmente et de la dérivée normale de la vitesse à la paroi qui augmente aussi (en valeur absolue). Nous remarquons que le nombre de Nusselt est plus faible avec ce terme qui, comme nous l'avons expliqué précédemment, représente une source de chaleur pariétale. L'écart $T_p - T_b$ est donc plus important et le nombre de Nusselt local, inversement proportionnel à $T_p(x) - T_b(x)$, est plus faible. On note aussi que la solution obtenue avec ANSYS/Fluent se confond avec celle de CFCR2 en présence de la puissance des forces visqueuses à la paroi.

6.5.2 Influence du flux de chaleur imposé aux parois

Dans cette partie, nous étudions l'influence du flux de chaleur imposé aux parois. Des simulations ont été effectuées avec $q_{\text{norm}} = 5,0 \cdot 10^{-5}$; 10^{-4} ; $1,5 \cdot 10^{-4}$; $2 \cdot 10^{-4}$; $2,5 \cdot 10^{-4}$ et en conservant le rapport de pression à $PR = 2$. Les solutions pour le nombre de Knudsen et le rapport PW/VD sont présentées sur la figure 6.16. A l'entrée de la conduite, Kn est identique dans toutes les simulations puisque la pression et la température sont les mêmes. En augmentant q_{norm} , la température du fluide augmente et donc Kn est plus élevé pour les grands q_{norm} . C'est pourquoi le rapport $|PW/VD|$ est d'autant plus important que q_{norm} l'est puisqu'il est lié à Kn (cf § 6.4.1).

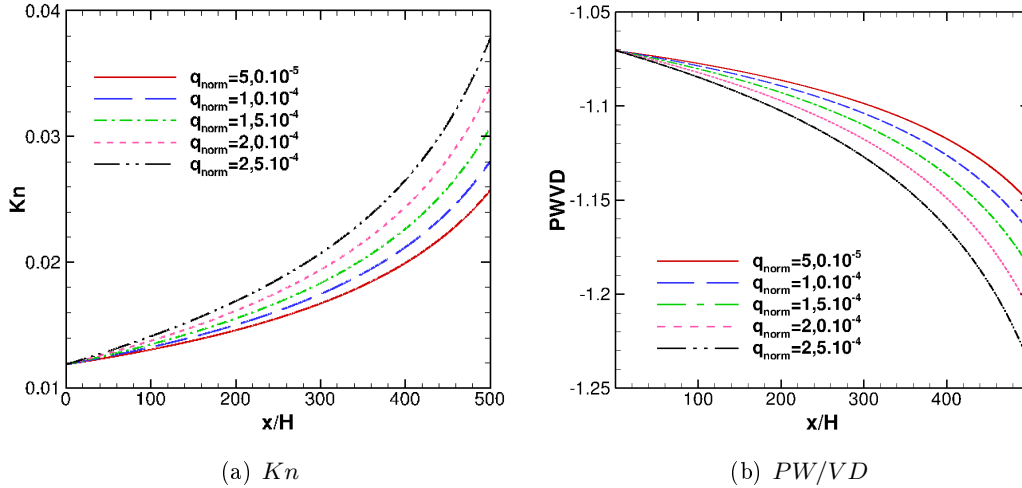


FIGURE 6.16 – Profils de : (a) Kn et (b) PW/VD obtenus par CFCR2 pour $PR = 2$ avec glissement pour différents flux de chaleur aux parois q_p

Les profils des nombres de Nusselt locaux sont présentés pour CFCR2 quand la puissance des forces visqueuses à la paroi est considérée ou non. Les solutions sont toutes comparées à celles de [65] et celles d'ANSYS/Fluent sur la figure 6.17. Nous constatons que le nombre de Nusselt est d'autant plus important que le flux de chaleur l'est pour une même différence de pression entrée/sortie puisque $Nu = q_p H / (k(T_p - T_b))$. De plus, le nombre de Nusselt en présence de la puissance des forces visqueuses à la paroi est toujours plus faible que sans ce terme, pour les raisons expliquées précédemment. Enfin, à faible

flux de chaleur, les trois solutions concordent bien entre elles. Par contre, plus on augmente le flux de chaleur à la paroi, plus les valeurs de $Nu(x)$ obtenues par CFCR2 et par ANSYS/Fluent, qui sont superposés, s'éloignent de celles de [65], notamment à la sortie de la conduite. En effet, quand les températures sont importantes (grands flux de chaleur) ou que les pressions sont faibles, le nombre de Knudsen est grand. De ce fait, l'effet de la puissance des forces visqueuses, qui dépend de la vitesse de glissement et donc de Kn , est important, ce qui explique les écarts entre les solutions.

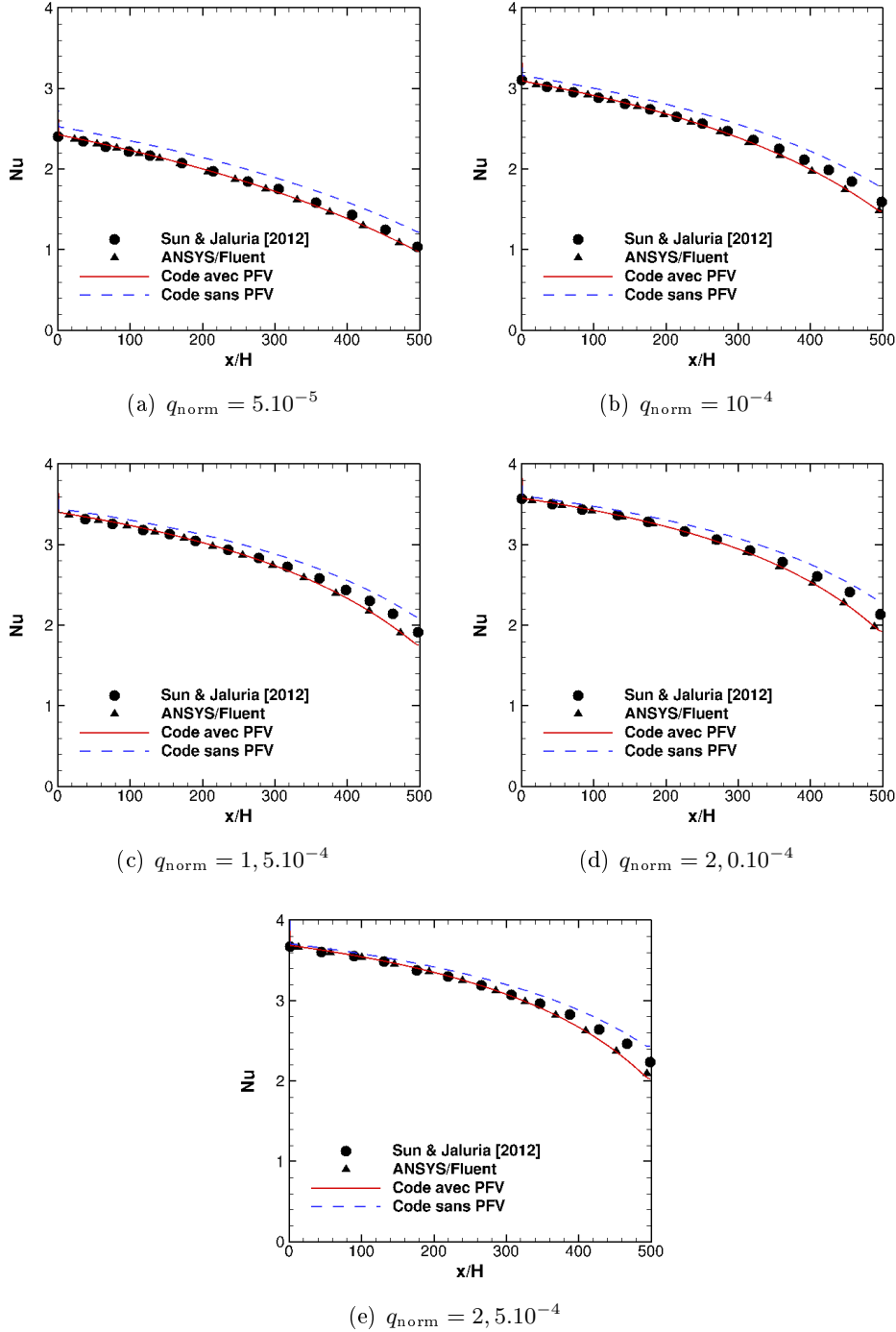


FIGURE 6.17 – Comparaisons des profils de Nu obtenus avec CFCR2 pour $PR = 2$ avec ceux d'ANSYS/Fluent et de [65] avec glissement pour différentes valeurs de q_{norm}

6.5.3 Influence du rapport de pression PR

Dans cette partie, nous étudions l'influence du rapport de pression pour $PR=1,5$; 2 ; $2,5$ avec $q_{\text{norm}} = 10^{-4}$. Les nombres de Knudsen et les rapports PW/VD sont présentés sur la figure 6.18. Nous remarquons que plus PR est faible, plus Kn est élevé pour un même flux de chaleur à la paroi. L'explication est la suivante :

- Comme la pression à la sortie est fixée à 1 bar, la pression à l'entrée diminue et Kn augmente lorsque PR diminue pour une même température d'entrée ;
- Un faible PR correspond à un débit plus faible et donc à un plus grand chauffage du gaz. De ce fait, Kn est plus important quand PR est diminué.

La combinaison de ces deux conditions fait que le nombre de Knudsen local est toujours plus important quand PR est faible, c'est pourquoi $|PW/VD|$ est aussi plus important.

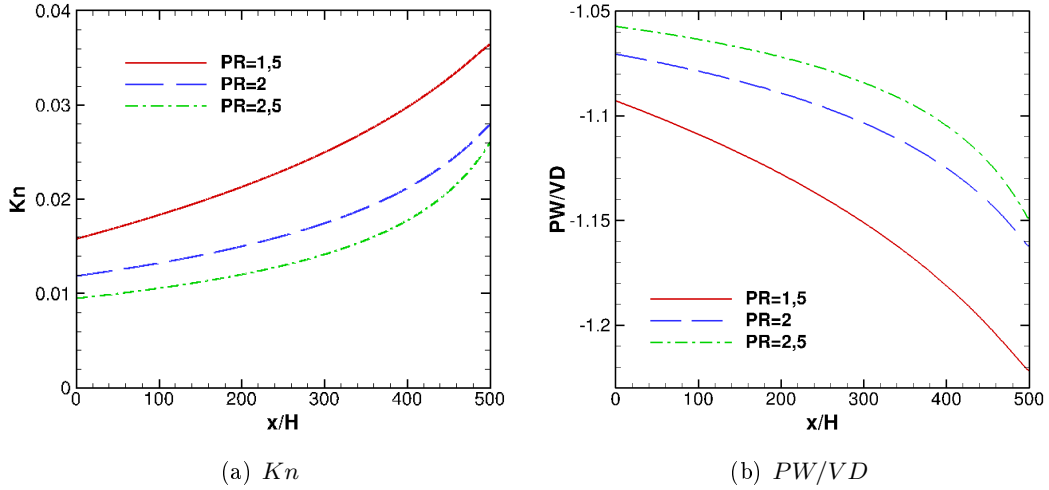


FIGURE 6.18 – Profils de : (a) Kn et (b) PW/VD obtenus avec CFCR2 pour $q_{\text{norm}} = 10^{-4}$ avec glissement pour différents rapports de pression PR

Les profils de $Nu(x)$ pour les trois solutions sont tracés sur la figure 6.19. En diminuant PR , les effets de compressibilité deviennent moins importants et l'écart $T_p - T_b$ diminue à son tour, d'où l'augmentation du nombre de Nusselt local. Concernant l'influence de la puissance des contraintes visqueuses à la paroi, sa présence diminue le nombre de Nusselt en augmentant l'écart $T_p - T_b$ pour un cas traité dans les mêmes conditions. Enfin, les comparaisons entre les résultats donnés par CFCR2, ANSYS/Fluent et [65] conduisent aux mêmes conclusions que pour l'étude précédente : un parfait accord entre les deux codes quand la puissance des contraintes visqueuses à la paroi est considérée et des écarts plus importants avec les résultats de [65] quand le glissement augmente.

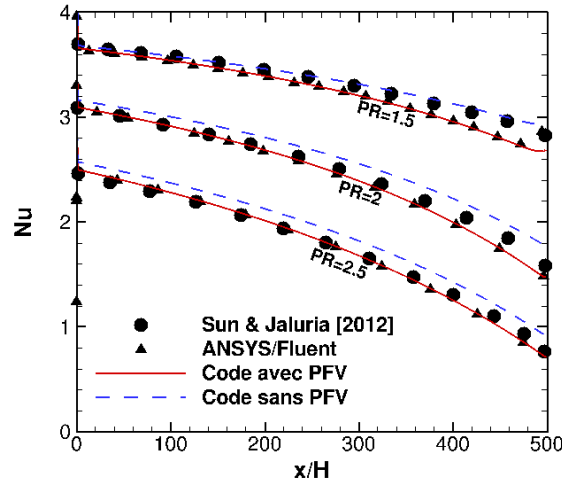


FIGURE 6.19 – Comparaisons des profils $Nu(x)$ obtenus avec CFCR2 pour $q_{\text{norm}} = 10^{-4}$, avec ANSYS/Fluent et par [65] avec glissement. pour différents rapports de pression PR

6.6 Conclusion

À l'issue de cette étude, nous arrivons aux conclusions suivantes :

- Le travail des forces de pression et la dissipation visqueuse dépendent du taux de raréfaction de l'écoulement : plus le nombre de Knudsen est important, plus le travail des forces de pressions domine la dissipation visqueuse.
- Le nombre de Nusselt d'un écoulement glissant chauffé à flux constant est toujours inférieur à celui d'un écoulement non glissant dans les mêmes conditions : quand l'écoulement est glissant, les échanges convectifs sont augmentés mais le saut de température agit comme une résistance thermique qui diminue les échanges aux parois.
- Quand l'écoulement est glissant, le frottement du gaz sur les parois crée une source de chaleur supplémentaire. Ce phénomène est rarement pris en compte dans la littérature alors que ses effets sont loin d'être négligeables. En effet, le flux de chaleur total à la paroi est modifié. L'une des conséquences porte sur le nombre de Nusselt : si une densité de flux uniforme est imposée sur les parois, le nombre de Nusselt est plus faible en présence de ce terme. Si les parois sont à température imposée, le nombre de Nusselt tend vers des valeurs très faibles ($Nu < 0,1$). Ce résultat confirme les mesures de Nu effectuées dans les expériences de Demsis et al. (2009, 2010) [18, 19].
- Les résultats obtenus avec CFCR2 et avec ANSYS/Fluent sont en bon accord.

Étant donné que CFCR2 est beaucoup plus rapide qu'ANSYS/Fluent (5 min/cas contre 3 h/cas), l'étude paramétrique présentée dans le chapitre suivant a été effectuée avec CFCR2.

Chapitre 7

Résultats de l'étude paramétrique

Dans le chapitre précédent, nous avons validé les résultats obtenus avec le code CFCR2 [9, 10, 11, 67] quand les parois de la conduite sont chauffées, soit à une température supérieure à celle du fluide à l'entrée, soit par un flux de chaleur uniforme. Ce code est extrêmement rapide (pour un maillage 9200×30 , 5 min/cas en partant d'une solution proche), ce qui nous a permis d'effectuer une étude paramétrique détaillée dont les deux paramètres sont les pressions à l'entrée et à la sortie de la conduite. Les raisons de ce choix sont que les effets de glissement augmentent en diminuant la pression de sortie pour une même différence de pression ΔP .

Les phénomènes suivants sont étudiés :

- Compressibilité du gaz ;
- Glissement dynamique ;
- Saut de température à la paroi ;
- Dissipation visqueuse et travail des forces de pression ;
- Puissance des contraintes visqueuses à la paroi ;
- Variation des propriétés du gaz avec la température ;
- Pompage thermique.

Le modèle est dit *complet* quand tous ces phénomènes sont simultanément pris en compte. On dira qu'il est *simplifié* quand l'un des phénomènes n'est pas intégré dans les calculs. Le but d'étudier des modèles simplifiés est de les comparer au modèle complet afin de quantifier l'importance du phénomène non pris en compte.

Cette étude est effectuée pour deux types d'écoulements :

Un écoulement quasi-isotherme obtenu lorsque la température de la paroi est celle du gaz à l'entrée ($T_p = T_e$). Les variations de température (si elles existent) seront dues aux effets de la dissipation visqueuses ou aux effets de détente.

Un écoulement chauffé obtenu en imposant un flux de chaleur à la paroi.

Les dimensions de la conduite sont (sauf mention contraire) $L = 1,5 \text{ mm}$ et $H = 3 \mu\text{m}$. La moitié de la conduite est simulée en utilisant la symétrie afin de réduire le temps de calcul. Le maillage utilisé est 9200×30 (figure 7.1).

7.1 Détermination du domaine des paramètres

Dans l'étude de Sun et Jaluria [65], la pression de sortie P_s est fixée à 1 bar et le rapport de pression PR varie de 1,37 à 2,701, c'est à dire que la pression à l'entrée varie de 1,37 bar à 2,701 bar. Nous avons complété ces résultats en étendant considérablement

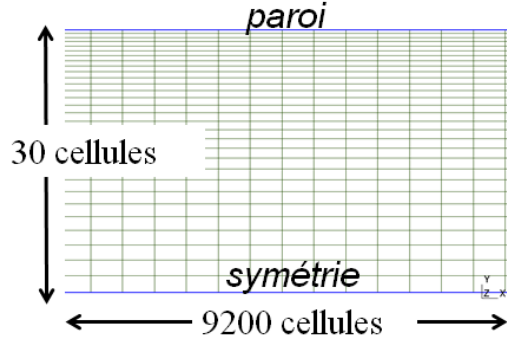


FIGURE 7.1 – Maillage de la conduite utilisée pour l'étude paramétrique

le rapport de pression ($1,01 \leq PR \leq 51,1$) et en variant la pression de sortie P_s de 0,0562 à 5bar. De ce fait, la pression à l'entrée de la conduite P_e varie de 0,0568 bar à 255,5 bar ! Les simulations sont lancées à l'aide d'un script. Ceci peut conduire à des écoulements qui ne respectent pas les hypothèses introduites dans l'écriture des équations de conservation. L'exploitation des résultats est donc limitée comme suit :

- Lorsque les différences de pression sont très faibles, la température moyenne débitante du gaz peut atteindre des valeurs considérables en sortie de conduite du fait de la condition thermique appliquée à la paroi. La première limite que nous imposons est donc $T_{b,\max} \leq 2000K$;
- Le gaz est supposé parfait ; sa pression absolue ne doit donc pas dépasser 5 bar. La deuxième limite que nous imposons est donc $P_e < 5$ bar.
- Les équations de Navier-Stokes associées aux conditions limites de glissement de 1^{er} ordre décrivent correctement les écoulements continus pour $Kn \leq 0,1$. Lorsque le nombre de Knudsen est tel que $0,1 \leq Kn \leq 0,4$, des conditions de glissement du second ordre doivent être introduites [14]. Pour un écoulement donné, le maximum du nombre de Knudsen se trouvant à la sortie de la conduite, la troisième limite est donc $Kn_s < 0,1$.
- Les schémas numériques de résolution des équations de Navier-Stokes utilisés ne sont plus applicables si des ondes de chocs apparaissent. La quatrième limite est donc $Ma_s \leq 1$ puisque le nombre de Mach est maximum à la sortie de la conduite.
- La combinaison des pressions P_e et P_s peut conduire à des écoulements pour lesquels $P_s > P_e$. La cinquième et dernière limite est donc $P_e \geq P_s$

En résumé, les pressions d'entrée et de sortie sont limitées par les conditions suivantes :

- $T_{b,\max} \leq 2000K$;
- $P_e \leq 5$ bar ;
- $Kn \leq 0,1$;
- $Ma \leq 1$;
- $P_e \geq P_s$.

Pour exploiter les résultats obtenus, le script enregistre dans un fichier de données la pression d'entrée, la pression de sortie et différentes grandeurs scalaires caractérisant chaque écoulement calculé. Ces grandeurs qui vont être représentées par des champs en fonction des pressions d'entrée et de sortie, sont :

À la sortie de la conduite : le nombre de Knudsen Kn_s , le nombre de Reynolds Re_s , le nombre de Mach Ma_s et la température moyenne débitante $T_{b,s}$.

Valeurs maximales du profil longitudinal de la température moyenne débitante $T_{b,\max}$ et du rapport entre la vitesse due au pompage thermique et la vitesse de glissement $\left(\frac{P_{th}}{u_g}\right)_{\max}$ (équation (7.1))

Moyennes du profil longitudinal du nombre de Nusselt Nu_m (équation (7.2)), du nombre de Knudsen $\bar{Kn}$ (équation (7.3)) et de la puissance des forces visqueuses rapportée au flux à la paroi $\frac{PFV_m}{q_p L}$ (équation (7.4)).

Moyenne volumique du travail des forces de pression rapporté à la dissipation visqueuse $\frac{PW_m}{VD_m}$ (équation (7.5)).

$$u_g = \left(\frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u}\right) \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_p + \overbrace{\frac{3}{4} \frac{\mu r}{\rho} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_p}^{P_{th}} \Rightarrow \left(\frac{P_{th}}{u_g}\right)_{\max} = \max \left(\frac{\frac{3}{4} \frac{\mu r}{\rho} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_p}{u_g} \right) \quad (7.1)$$

$$Nu_m = \frac{q_p H L}{\int_0^L k (T_p - T_b) dx} \quad (7.2)$$

$$\bar{Kn} = \frac{1}{L} \int_0^L Kn dx \quad (7.3)$$

$$\frac{PFV_m}{q_p} = \frac{\int_0^L \mu u_g \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_p dx}{q_p L} \quad (7.4)$$

$$\frac{PW_m}{VD_m} = \frac{\int_V \vec{v} \cdot \nabla P dV}{\int_V \bar{\tau} : \nabla \vec{v} dV} \quad (7.5)$$

7.2 Écoulements quasi-isothermes $T_p = T_e$

Dans cette partie, la paroi est maintenue à la température d'entrée du fluide. Autrement dit $T_p = T_e = 300 K$. La combinaison des pressions d'entrée P_e et de sortie P_s a produit 6461 écoulements (71×91). Ces points de calculs sont représentés sur la figure 7.3(a). En imposant les limites décrites précédemment, le domaine de l'étude paramétrique est réduit à moins de 2500 points de calculs (points rouges sur la figure 7.3(b)). Comme il n'existe pas de chauffage, la température du fluide ne risque pas de dépasser $2000 K$, c'est pourquoi cette limite n'existe pas sur la figure 7.3(b). Il n'y a pas d'extension à l'entrée car l'écoulement est quasi isotherme et donc pas sujet à de la diffusion thermique vers l'amont.

En revanche une extension adiabatique est placée à la sortie de la conduite (figure 7.2) dans le but de s'affranchir des conditions de sortie, en particulier lorsque la détente du gaz est forte. La figure 7.2(a) représente la microconduite (traî fin à gauche) avec l'extension en sortie (quart de disque maillé par des triangles). Les frontières de l'extension sont toutes adiabatiques ; la frontière rectilignes verticale est imperméable ; la frontière en arc de cercle est une frontière ouverte où seule la composante normale de la vitesse est non nulle (entrante ou sortante) et conserve le débit sortant de la microconduite ; la frontière horizontale est un axe de symétrie. La figure 7.2(b) est un zoom sur le maillage au niveau de la jonction entre la sortie de la microconduite et l'extension.

7.2.1 Résultats du modèle complet

En traçant les champs, nous avons constaté des similitudes des isovaleurs entre certaines grandeurs. Dans la suite, nous représentons les résultats par groupe pour mieux visualiser

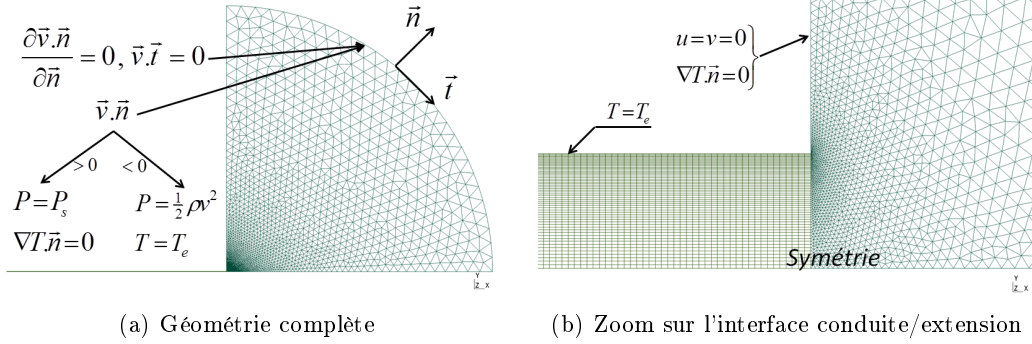


FIGURE 7.2 – Géométrie des écoulements non chauffés avec paroi isotherme $T_p = T_e = 300\text{ K}$

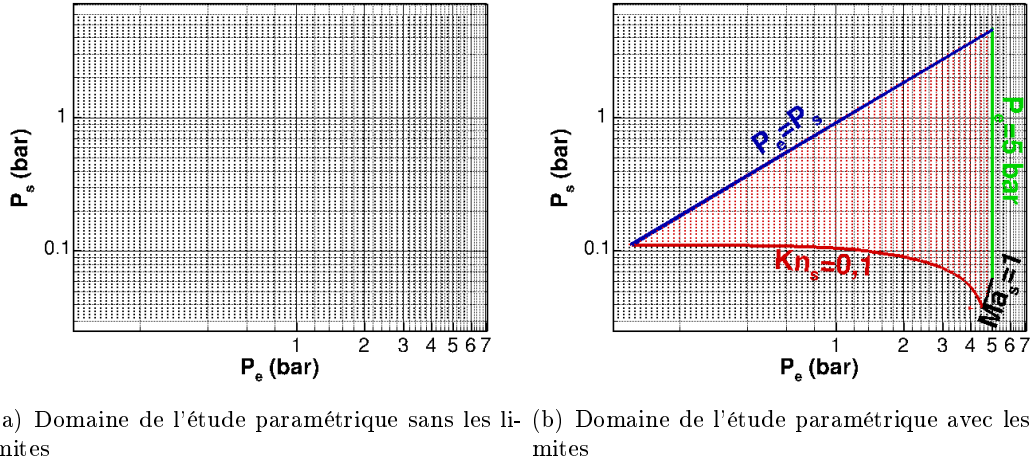


FIGURE 7.3 – Domaine de calcul de l'étude paramétrique avant (a) et après (b) avoir imposé les limites pour des écoulements non chauffés avec paroi isotherme $T_p = T_e = 300\text{ K}$

ces similitudes. Mais avant, nous présentons seul le champ du nombre de Knudsen à la sortie de la conduite, Kn_s , car il n'a pas de similitudes avec les autres grandeurs. Cependant il est important car il nous servira comme référence dans certaines explications. Sur cette figure, le nombre de Knudsen à la sortie de la conduite Kn_s augmente quand la pression à la sortie de la conduite P_s diminue. Ce qui est trivial vu que $Kn = \lambda/D_h = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\mu}{P} \sqrt{2rT}\right)/D_h$. Près de la limite inférieure droite à $Ma_s = 1$, les isovalues de Kn_s sont déformées car les effets de compressibilité sont importants en sortie de canal (détente et refroidissement du gaz) : Kn_s diminue à P_s fixée car la masse volumique du gaz augmente.

Le premier groupe de figures à présenter des similitudes est le débit massique $\dot{m}$ (figure 7.5(a)) et le nombre de Reynolds à la sortie de la conduite Re_s (figure 7.5(b)). Comme l'écoulement est quasi-isotherme, la viscosité peut être supposée constante. De ce fait, le débit massique est corrélé au nombre de Reynolds puisqu'ils sont liés entre eux par la relation suivante :

$$\left. \begin{aligned} Re &= \frac{\rho u_m D_h}{\mu} \\ &= \frac{\rho u_m 2H}{\mu} \\ \dot{m} &= \rho u_m H \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{m} = \frac{\mu}{2} Re$$

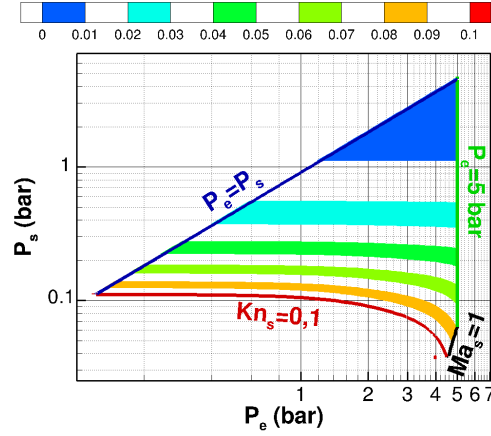


FIGURE 7.4 – Isovaleurs du nombre de Knudsen à la sortie de la conduite Kn_s en fonction de P_e et P_s à température imposée $T_p = T_e = 300K$ pour le modèle complet

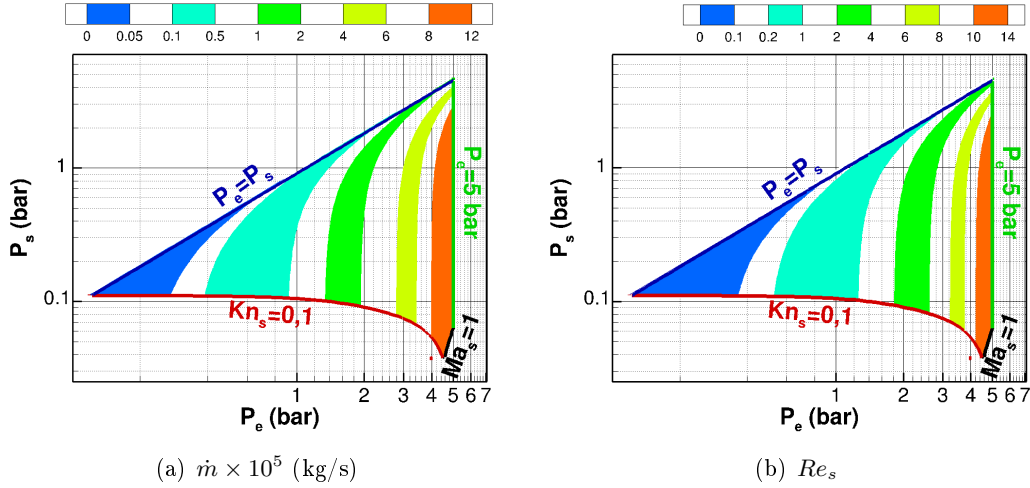


FIGURE 7.5 – Isovaleurs de (a) $\dot{m} \times 10^5$ (kg/s) et (b) Re_s en fonction de P_e et P_s à température imposée $T_p = T_e = 300K$ pour le modèle complet

Le deuxième groupe de figures représente la moyenne du profil longitudinal du nombre de Knudsen Kn_m (figure 7.6(a)) et la moyenne du travail des forces de pression rapportée à la moyenne de la dissipation visqueuse sur tout le volume de la conduite PW_m/VD_m (figure 7.6(b)) en fonction de P_e et de P_s .

Nous constatons que l'amplitude du rapport PW_m/VD_m est plus ou moins corrélée à Kn_m de telle sorte que plus le taux de raréfaction augmente, plus l'amplitude de $|PW_m/VD_m|$ le suit. Ce résultat est en accord avec ce que nous avons présenté précédemment : quand l'écoulement est très peu glissant ($Kn < 0,01$), la puissance des forces de pressions se compense avec la dissipation visqueuse ; PW_m/VD_m est voisin de -1 et la somme de ces deux termes peut être négligée dans le modèle. Par contre, à partir de $Kn = 0,02$ (voir figures 7.2.1 et 7.6(a)), $|PW_m/VD_m|$ devient supérieur à 1,1 et on ne peut plus négliger les termes PW et VD . En effet, quand le nombre de Knudsen est proche de $Kn = 0,1$, l'écoulement est très glissant et le travail des forces de pressions peut atteindre deux fois la dissipation visqueuse ($|PW_m/VD_m| \approx 2$).

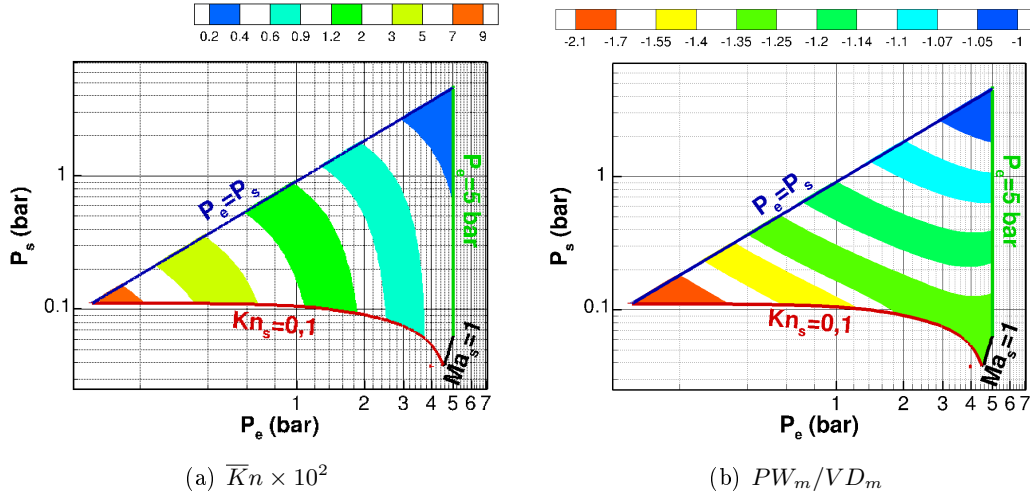


FIGURE 7.6 – Isovaleurs de (a) $\overline{Kn} \times 10^2$ et (b) PW_m/VD_m en fonction de P_e et P_s à température imposée $T_p = T_e = 300K$ pour le modèle complet

Le troisième et dernier groupe de figures représente la température moyenne débitante à la sortie de la conduite $T_{b,s}$ (figure 7.7(a)), le maximum du rapport entre le pompage thermique et la vitesse de glissement $(P_{th}/u_g)_{\max}$ (figure 7.7(b)), la moyenne du nombre de Nusselt Nu_m (figure 7.7(c)) et le nombre de Mach à la sortie de la conduite Ma_s (figure 7.7(d)).

Nous constatons que la température de sortie est corrélée au nombre de Mach de telle sorte que plus Ma_s est élevé, plus le fluide se refroidit (figures 7.7(a) et 7.7(d)). En effet, un grand nombre de Mach correspond à une forte détente du gaz, traduite par son refroidissement.

Le rapport $(P_{th}/u_g)_{\max}$ dépend fortement du gradient longitudinal de température. Comme le gaz se refroidit à grands nombres de Mach, le gradient $\partial T/\partial x$ favorise le pompage thermique en sens inverse de l'écoulement moyen car le pompage se fait des températures les plus basses vers les températures les plus élevées. C'est pourquoi P_{th} est corrélé au nombre de Mach : il augmente en fonction de Ma_s (figures 7.7(b) et 7.7(d)). Cependant, son effet reste négligeable quelque soit l'écoulement étudié car au maximum, il représente 5% de la vitesse de glissement quand $Ma \approx 1$.

La moyenne du profil longitudinal du nombre de Nusselt Nu_m est corrélée au nombre de Mach sur une petite partie du domaine. En effet, à partir de $Ma_s = 0,1$, le gaz subit une détente et se refroidit au centre de la conduite. La paroi, maintenue à T_e et donc plus chaude, devient une source de chaleur et $\partial T/\partial y$ augmente. Par conséquent, le nombre de Nusselt augmente.

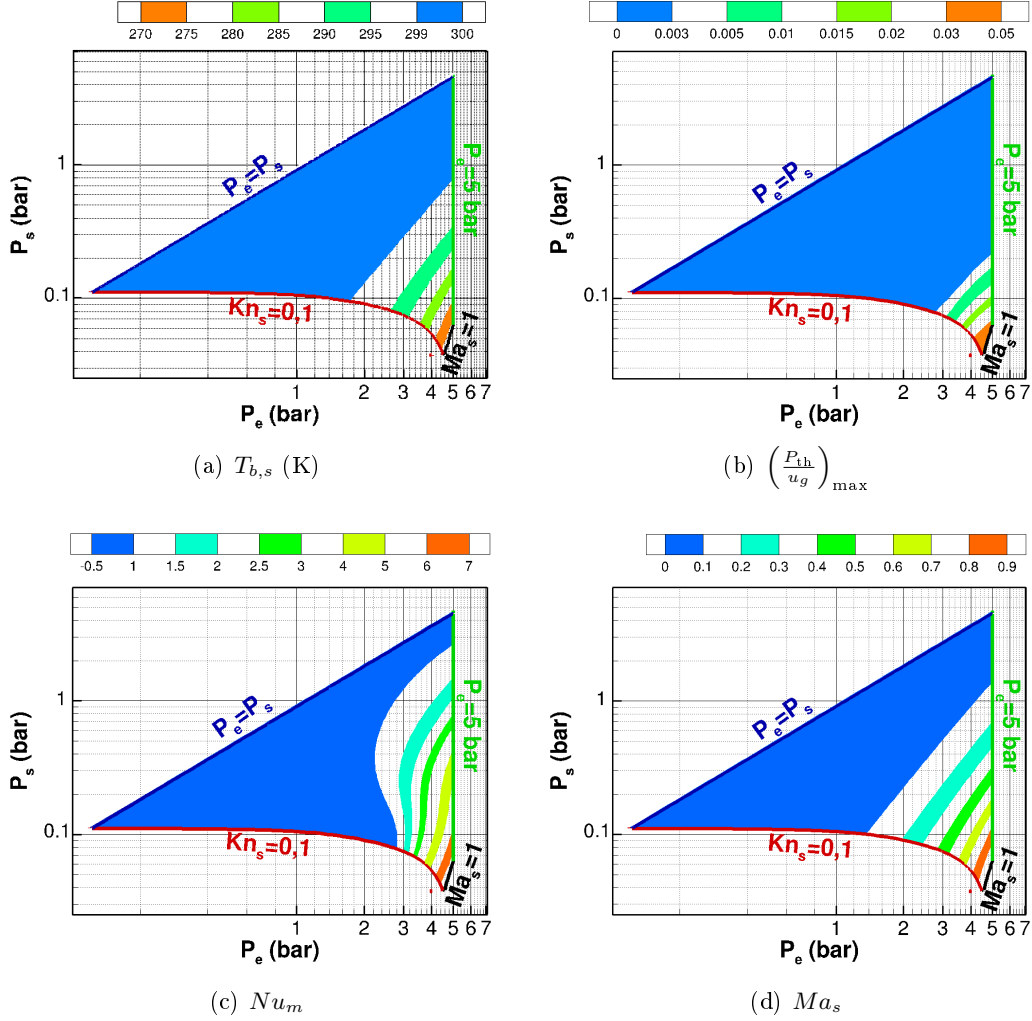


FIGURE 7.7 – Isovaleurs de (a) $T_{b,s}$ (K), (b) $(P_{th}/u_g)_{max}$, (c) Nu_m et (d) Ma_s en fonction de P_e et P_s à température imposée $T_p = T_e = 300K$ pour le modèle complet

7.2.2 Comparaison avec la solution analytique

La solution analytique [3], détaillée au §5.3.1, a comme hypothèse principale que l'écoulement est isotherme. Cette solution est restée valable pour une conduite de longueur $L = 2,79 \text{ mm}$ (voir §5.3.3) même pour de grandes différences de pression. En effet, la détente est toujours localisée près de la sortie de la conduite ; les effets thermiques ne représentaient que 2% de la longueur totale de la conduite. Dans ce qui suit, nous avons calculé les débits analytiques par [3] et numériques par le code du laboratoire pour une plus large gamme de pressions et pour des longueurs de conduite plus courtes : $L = 1,5 \text{ mm}$ et $L = 1 \text{ mm}$. Le but est d'avoir des effets thermiques (dus aux détentes) sur une longueur relative plus importante pour tester les limites de la méthode analytique. Le gaz étant quasi-isotherme, la solution analytique [3] devrait rester valable dans le domaine de pression considéré. La seule grandeur comparable étant le débit massique, nous l'avons calculé pour toutes les simulations en utilisant pour rappel, l'équation suivante [3] :

$$\dot{m} = \frac{H^3 \Delta P P_m}{12 \mu r T L} \left[1 + 6 \left(\frac{2 - \sigma_u}{\sigma_u} \right) Kn_m \right] \quad (7.6)$$

avec :

$$\Delta P = P_e - P_s \quad , \quad P_m = \frac{P_e + P_s}{2} \quad , \quad Kn_m = \frac{\lambda(P_m)}{D_h} \quad , \quad D_h = 2H \quad (7.7)$$

La comparaison entre les solutions analytique et numérique se calcule pour le débit massique comme suit :

$$\dot{m}(\%) = \frac{\dot{m}_{\text{numérique}} - \dot{m}_{\text{analytique}}}{\dot{m}_{\text{numérique}}} \times 100 \quad (7.8)$$

et pour la température en calculant la différence des températures moyennes débitantes en sortie des deux modèles : $T_{b,s_{\text{numérique}}} - T_{b,s_{\text{analytique}}} = T_{b,s_{\text{numérique}}} - 300$.

Conduite de longueur $L = 1,5 \text{ mm}$

Les résultats obtenus pour cette longueur de conduite sont représentés pour le débit massique sur la figure 7.8(a) et pour la température sur la figure 7.8(b). On observe qu'il y a très peu de différence sur les débits massiques et que cette différence augmente avec le refroidissement dû à la détente du gaz. Quand la chute de température du gaz est de plusieurs dizaines de degrés (figure 7.7(a)), l'écart reste localisé à la sortie de la conduite et influence peu le débit massique. Notons que l'écart relatif sur le débit massique est négatif : le débit massique analytique est toujours supérieur au débit numérique. Ceci s'explique par le fait que le pompage thermique ralentit le gaz. En effet, la détente du gaz conduit à un gradient longitudinal de température négatif, ce qui diminue la vitesse de glissement jusqu'à l'annuler puis à la rendre négative.

Avec une erreur maximale de 0,8% sur le débit massique, on peut admettre que la solution d'Arkilic [3] est suffisamment précise pour calculer le débit sur toutes les gammes de pression inférieures à 5 bar, à condition toutefois que la température de la paroi soit maintenue à celle de l'entrée du gaz.

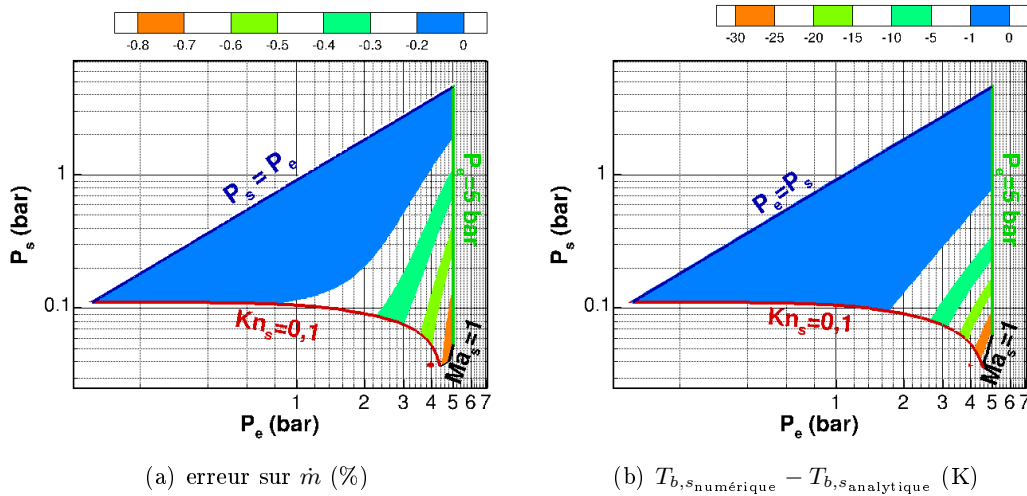


FIGURE 7.8 – Isovaleurs des différences obtenues entre les solutions analytique [3] et numérique (code CFCR2) en fonction de P_e et P_s à température imposée $T_p = T_e = 300 \text{ K}$ pour une conduite de longueur $L = 1,5 \text{ mm}$: (a) différence sur $\dot{m}$ (%) - (b) $T_{b,s_{\text{numérique}}} - T_{b,s_{\text{analytique}}}$ (K).

Conduite de longueur $L = 1 \text{ mm}$

Le même maillage a été conservé pour cette longueur de conduite, ce qui donne (6133×30) cellules. Les résultats pour cette longueur de conduite sont présentés sous la forme de différences relatives pour le débit massique (figure 7.9(a)) et sous forme de différences pour la température $T_{b,s}$ (figure 7.8(b)). Nous constatons que ces différences sont plus importantes que dans le cas d'une conduite plus longue, pour le débit massique comme pour la température moyenne débitante. Si ces différences restent inférieures à 2% pour le débit massique, nous pouvons supposer que la solution analytique ne serait plus applicable en dessous d'une certaine longueur de conduite.

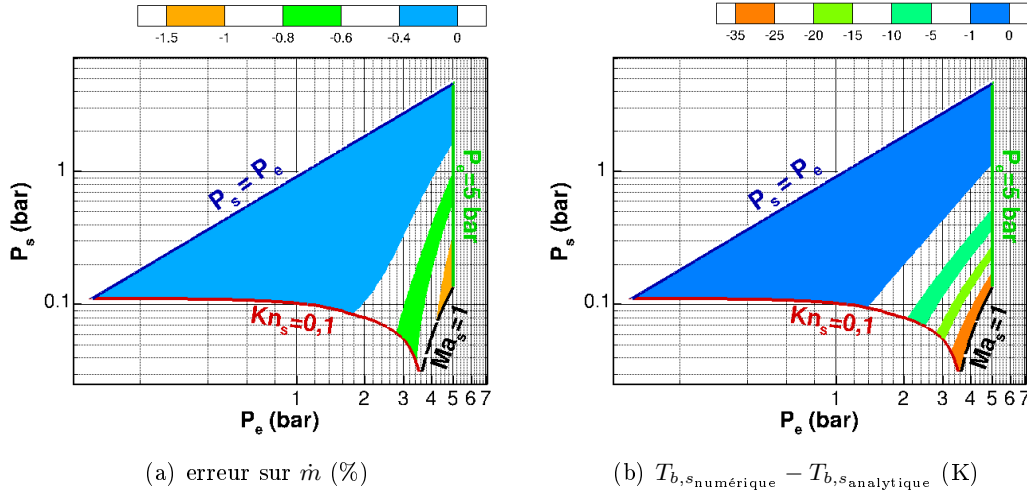


FIGURE 7.9 – Isovaleurs des différences obtenues entre les solutions analytique [3] et numérique (code CFCR2) en fonction de P_e et P_s à température imposée $T_p = T_e = 300 \text{ K}$ pour une conduite de longueur $L = 1 \text{ mm}$: (a) différence sur $\dot{m}$ (%) - (b) $T_{b,s,\text{numérique}} - T_{b,s,\text{analytique}}$ (K).

7.3 Résultats pour des parois uniformément chauffées

Dans cette partie, une densité de flux uniforme $q_p = 259 \text{ W/m}^2$ est imposée sur les parois. Concernant le domaine de l'étude paramétrique, la combinaison des différentes valeurs de P_e et de P_s produit 2340 écoulements (36×65) représentés en partie sur la figure 7.10(a). En imposant les limites précédentes, moins de 600 points sont exploitables (points rouges sur la figure 7.10(b)).

En plus des limites, nous avons ajouté une courbe, notée " $\max(P_{th}/u_g) = 0.1$ " sur la figure 7.10(b), délimitant le domaine dans lequel la vitesse due au pompage thermique devient une composante importante de la vitesse de glissement. Nous supposons que le pompage thermique devient non négligeable quand il induit une variation d'au moins 10% de la vitesse de glissement, autrement dit, quand :

$$\max \left(\frac{P_{th}}{u_g} \right) \geq 0,1 \quad (7.9)$$

Les points de la figure 7.10(b) pour lesquels le pompage thermique n'est pas négligeable se situent au dessus de la courbe " $\max(P_{th}/u_g) = 0.1$ ".

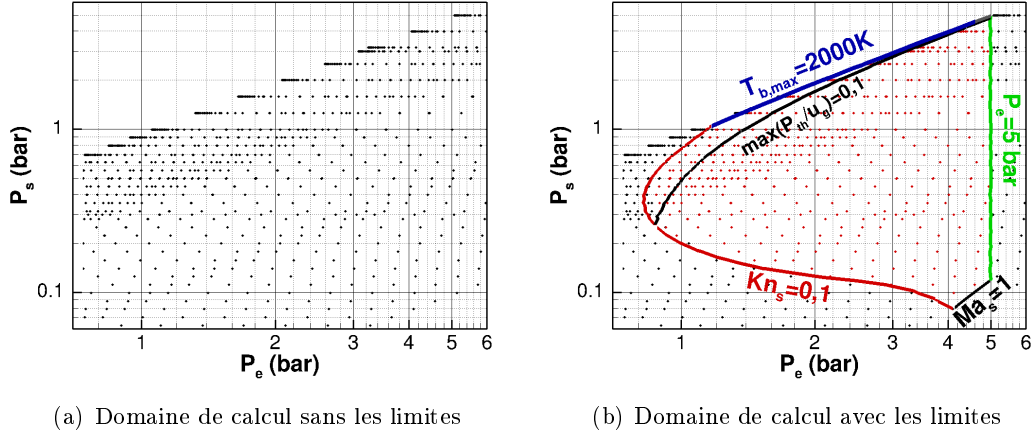


FIGURE 7.10 – Domaine de calcul de l'étude paramétrique avant (a) et après (b) avoir imposé les limites pour des écoulements chauffés avec une densité de flux $q_p = 259 \text{ W/m}^2$

7.3.1 Résultats du modèle complet et établissement des corrélations en fonction des paramètres

Comme précédemment, nous avons regroupé les figures qui présentent des similitudes. Nous avons aussi établi des corrélations avec le logiciel de statistiques JMP (John's Macintosh Project) [[http : //fr.wikipedia.org/wiki/JMP – \(logiciel\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/JMP_(logiciel))]¹.

Les isovaleurs de Kn_s et de PW_m/VD_m en fonction des pressions d'entrée P_e et de sortie P_s sont présentés sur les figures 7.11(a) et 7.11(b). On observe que la valeur de PW_m/VD_m est corrélée au taux de raréfaction et donc à Kn_s . Aux faibles valeurs de Kn_s , ce rapport est proche de -1 : il n'est donc pas nécessaire de prendre en compte la dissipation visqueuse et le travail des forces de pression. Plus le nombre de Knudsen augmente, plus ce rapport devient important et atteint -2 lorsque Kn_s est proche de $0,1$. Dans ce cas, $PW_m/VD_m \approx -2$. Si on suppose que ces termes sont importants lorsque PW_m/VD_m est inférieur à $-1,1$, cela implique qu'il faut les prendre en compte dans le modèle pour $Kn_s \geq 10^{-2}$.

Le débit massique $\dot{m}$ (figure 7.12(a)), la température moyenne débitante maximale $T_{b,max}$ (figure 7.12(b)), le maximum du rapport entre la vitesse due au pompage thermique et la vitesse de glissement $(P_{th}/u_g)_{max}$ (figure 7.12(c)) et le nombre de Reynolds à la sortie de la conduite Re_s (figure 7.12(d)) sont reportés sur le même groupe de figures. On constate que toutes ces grandeurs sont corrélées au nombre de Reynolds en sortie, Re_s . La meilleure corrélation est celle du débit massique puisqu'il est proportionnel au nombre de Reynolds ($\dot{m} = (\mu/2)Re$) : bien que la viscosité dépende de la température, la différence de température est au maximum de 50 K dans la moitié des cas simulés, ce qui correspond à une variation maximale de viscosité de 10% . Nous pouvons donc supposer que $\dot{m}$ n'est fonction que de Re_s .

Nous remarquons que plus le nombre de Reynolds est élevé, moins le fluide s'échauffe (figures 7.12(b) et 7.12(d)). Aux grands débits massiques correspondent aussi de grands nombres de Mach (voir figure 7.13(c)). Les effets de détente refroidissent le gaz qui, dans

1. JMP est un logiciel de statistiques mis au point par l'institut SAS. C'est un outil très avancé permettant l'étude approfondie des données : analyse, exploration, visualisation, prévision . . .

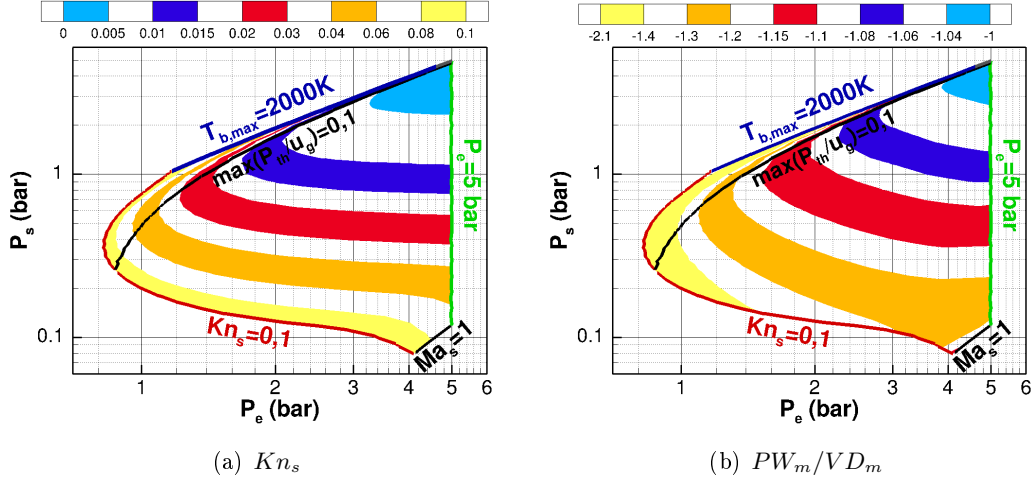


FIGURE 7.11 – Isovaleurs du modèle complet en fonction de P_e et P_s à flux imposé $q_p = 259 \text{ W/m}^2$: (a) Kn_s et (b) PW/VD

certains cas, peut sortir à une température moyenne débitante inférieure à celle de l'entrée.

En utilisant JMP, une corrélation donnant l'écart de température $T_{b,\max} - T_e$ en fonction du nombre de Reynolds a été établie. Elle est donnée par l'équation suivante :

$$T_{b,\max} - T_e = \frac{1}{0,00172 + 0,0122 Re_s^{1,006}} \quad (7.10)$$

En ce qui concerne le rapport $(P_{th}/u_g)_{\max}$, il est corrélé principalement aux faibles nombres de Reynolds $Re < 4$ (figures 7.12(c) et 7.12(d)) pour les valeurs de $Ma_s < 0,4$ (cf. figure 7.13(c)). Plus le nombre de Reynolds est faible, plus les vitesses de glissement sont faibles et plus le gradient longitudinal de température est important. Le pompage thermique P_{th} augmente donc à faibles Re et le rapport $(P_{th}/u_g)_{\max}$ devient grand. Nous avons corrélé le rapport $(P_{th}/u_g)_{\max}$ avec le nombre de Reynolds pour $Ma_s < 0,4$ sous la forme :

$$\left(\frac{P_{th}}{u_g} \right)_{\max} = \frac{1}{0,86 + 96,56 Re_s^{1,469}} \quad (7.11)$$

Cependant, et dans une moindre mesure, $(P_{th}/u_g)_{\max}$ est aussi corrélé aux grands nombres de Mach (figures 7.12(c) et 7.13(c)). En effet, dans cette zone, $Re > 4$ et les vitesses de glissement sont importantes mais les fortes détente induisent d'importants gradients négatifs longitudinaux de température. Quand $(P_{th}/u_g)_{\max}$ est corrélé au nombre de Mach, $(P_{th}/u_g)_{\max}$ croît avec Ma . Il reste cependant inférieur aux valeurs de la zone où il est corrélé au nombre de Reynolds et son influence est négligeable ; il représente au maximum 3% de la vitesse de glissement.

Le troisième groupe de figures représente la moyenne du profil longitudinal de la puissance des forces visqueuses à la paroi rapportée au flux total à la paroi (noté PFV_m/q_p , figure 7.13(a)), du nombre de Nusselt Nu_m (figure 7.13(b)) et le nombre de Mach à la sortie de la conduite Ma_s (figure 7.13(c)). Nous remarquons sur les figures 7.13(a) et 7.13(c) que le rapport PFV_m/q_p augmente avec le nombre de Mach. Cela s'explique comme suit :

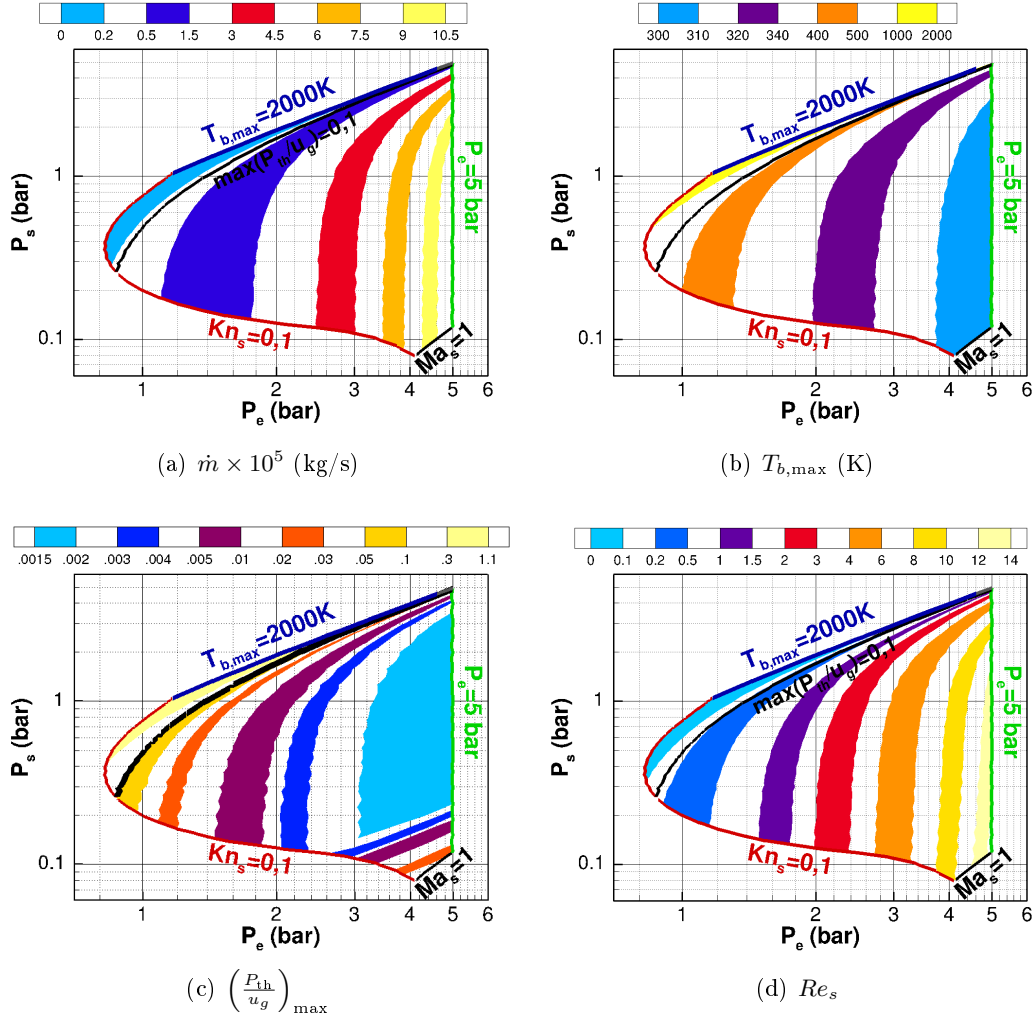


FIGURE 7.12 – Isovaleurs du modèle complet en fonction de P_e et P_s à flux imposé $q_p = 259 \text{ W/m}^2$ pour : (a) $\dot{m} \times 10^5$ (kg/s), (b) $T_{b,max}$ (K), (c) $(P_{th}/u_g)_{max}$ et (d) Re_s

- Quand le nombre de Mach est élevé, les vitesses de l'écoulement le sont aussi. De ce fait, u_g est grand ;
- Nous avons vu au §5.3.3 (figure 5.25) que, quand les écoulements sont compressibles, le gaz accélère fortement au centre du canal et que les profils de vitesses dans une section de la conduite sont de plus en plus courbés. Le gradient transversal de la vitesse aux parois $(\partial u / \partial y)_p$ augmente donc avec le nombre de Mach ;
- Pour la conduite chauffée, quand le nombre de Mach augmente, le gradient transversal de la température $(\partial T / \partial y)_p$ augmente sous l'effet de la détente.

Comme la puissance des contraintes visqueuses à la paroi s'écrit $PFV = \mu u_g (\partial u / \partial y)_p$, la combinaison de ces trois phénomènes explique que le rapport PFV_m / q_p augmente lorsque le nombre de Mach augmente.

À l'aide de JMP, nous avons obtenu la corrélation polynomiale de troisième ordre suivante :

$$\frac{PFV}{q_p} = -0,0653 + 10,79 Ma_s - 3,582 Ma_s^3 \quad (7.12)$$

Notons qu'à partir de $Ma_s = 0,2$, la puissance des contraintes visqueuses à la paroi représente au moins 50% du flux total à la paroi et peut être 8 fois plus grande lorsque $Ma \approx 1$. Ce terme ne doit donc pas être négligé dans les bilans de flux de chaleur.

Le nombre de Nusselt moyen Nu_m est corrélé au nombre de Mach quand $Ma \geq 10^{-2}$ et Nu_m diminue lorsque Ma augmente. En effet, nous avons vu précédemment que le terme PFV , qui représente un terme de production de chaleur aux parois, croît avec Ma . Cela induit un grand écart entre la température des parois et la température au centre de la conduite qui diminue à cause de la détente. Comme l'écart $T_p - T_b$ croît avec Ma et que le nombre de Nusselt est inversement proportionnel à $T_p - T_b$, Nu_m décroît puisque $q_p L$ reste constant. La corrélation entre Nu_m et Ma_s s'écrit :

$$Nu_m \approx \frac{1}{0,218 + 12,9 Ma_s^{1,01}} \quad (7.13)$$

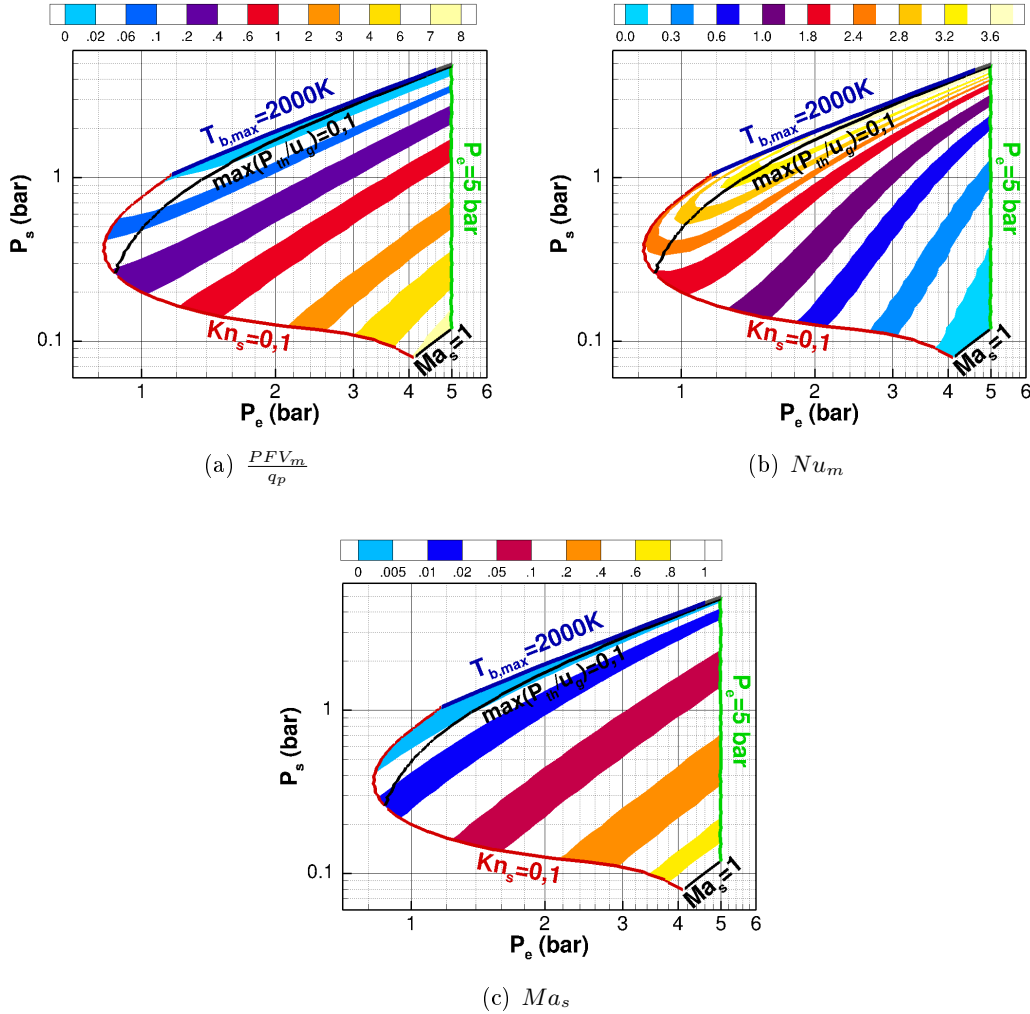


FIGURE 7.13 – Isovaleurs du modèle complet en fonction de P_e et P_s à flux imposé $q_p = 259 \text{ W/m}^2$ pour : (a) PFV_m/q_p , (b) Nu_m et (c) Ma_s

7.3.2 Comparaisons entre le modèle complet et des modèles simplifiés

La comparaison entre les résultats obtenus par le modèle complet et les résultats obtenus par un modèle simplifié s'effectue pour une grandeur f par le calcul suivant :

$$f(\%) = \frac{f_{\text{complet}} - f_{\text{simplifié}}}{f_{\text{complet}}} \times 100 \quad , \quad \text{avec} \quad f = \dot{m}, Nu_m \quad (7.14)$$

Pour la température, c'est l'écart $T_{b,s_{\text{complet}}} - T_{b,s_{\text{simplifié}}}$ qui est calculé.

Pompage thermique négligé

Dans ce paragraphe, l'influence du pompage thermique est étudiée. Les isovalues du rapport $(P_{th}/u_g)_{\text{max}}$ représentées sur la figure 7.14(d) sont à la base des explications. Les erreurs relatives commises sur le débit massique $\dot{m}$ et sur le nombre de Nusselt moyen Nu_m sont représentées sur les figures 7.14(a) et 7.14(c). L'erreur absolue sur la température moyenne débitante à la sortie de la conduite $T_{b,s}$ est représentée sur la figure 7.14(b).

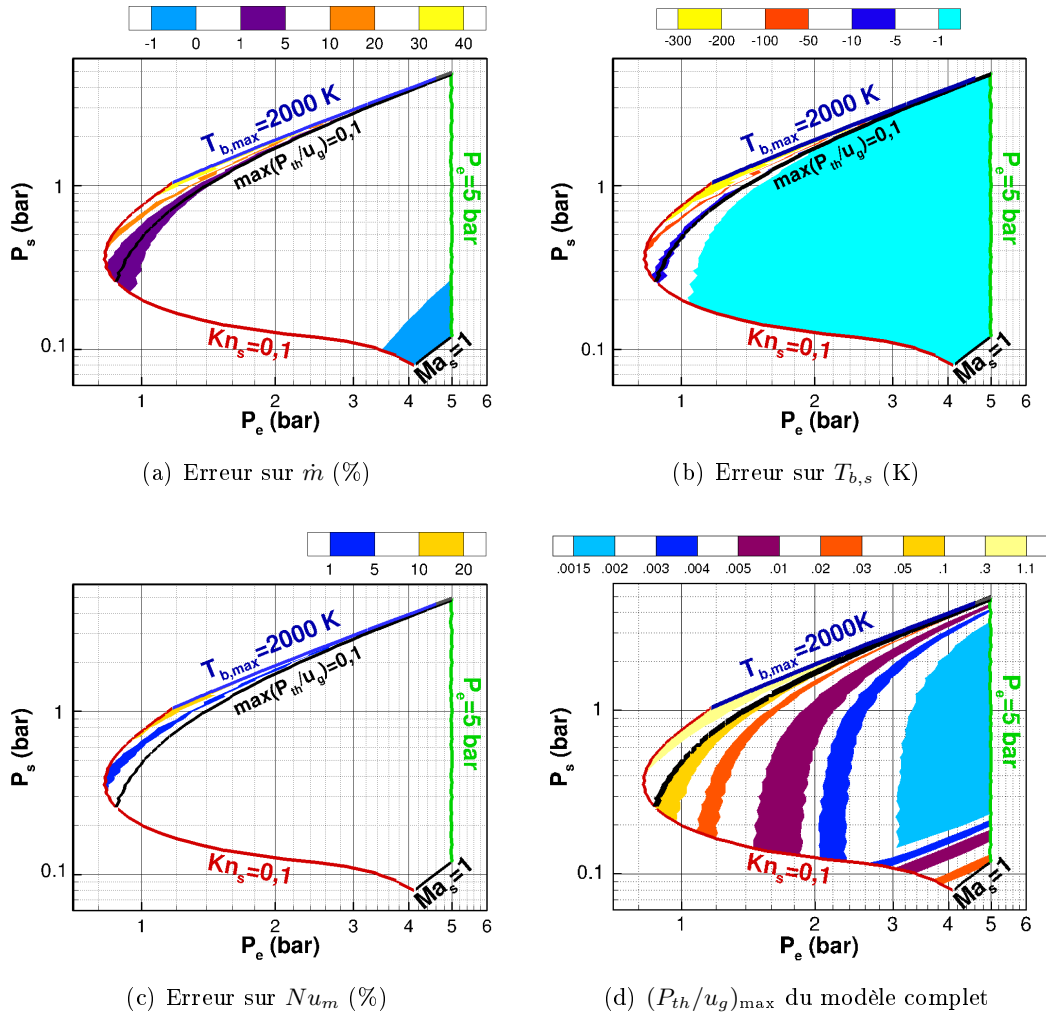


FIGURE 7.14 – Erreurs commises dans un calcul sans le pompage thermique P_{th} par rapport à un modèle complet en fonction de P_e et P_s à flux imposé $q_p = 259 \text{ W/m}^2$ pour : (a) $\dot{m}$ (%), (b) $T_{b,s}$ (K) et (c) Nu_m (%)

À première vue, le pompage thermique a très peu d'influence sur les résultats, il n'est à prendre en compte que si les conditions le favorisent : faibles vitesses et gradients de température importants. En d'autres termes, la modélisation du pompage thermique est nécessaire seulement pour les écoulements chauffés et quand le nombre de Reynolds $Re_s < 0,5$ (cf. figure 7.12(d)).

Puissance des forces visqueuses aux parois négligée

La puissance des forces visqueuses due au glissement est rarement prise en compte dans la littérature. Nous étudions dans ce paragraphe l'importance de ce terme en le comparant au flux de chaleur imposé sur les parois, soit le rapport PFV/q_p , représenté sur la figure 7.15(d). Quand ce terme est négligé, les erreurs relatives commises sur le débit massique $\dot{m}$ et sur le nombre de Nusselt moyen Nu_m sont représentées sur les figures 7.15(a) et 7.15(c). L'erreur absolue sur la température moyenne débitante à la sortie de la conduite $T_{b,s}$ est représentée sur la figure 7.15(b).

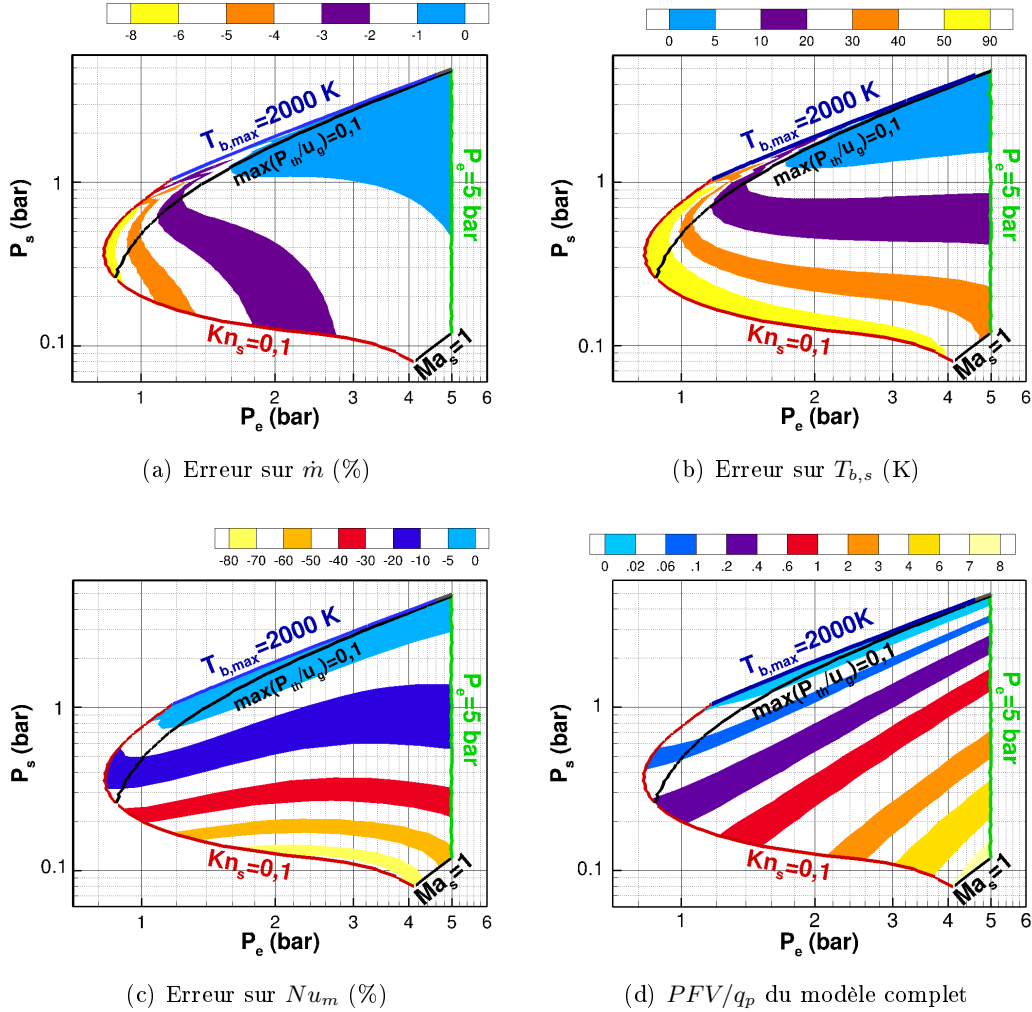


FIGURE 7.15 – Erreurs commises dans un calcul sans le terme PFV par rapport à un modèle complet en fonction de P_e et P_s à flux imposé $q_p = 259 \text{ W/m}^2$ pour : (a) $\dot{m}$ (%), (b) $T_{b,s}$ (K) et (c) Nu_m (%)

Nous constatons que les trois grandeurs suivent plutôt le champ du Knudsen 7.11(a)

que celui du rapport PFV/q_p . Plus le taux de raréfaction augmente, plus les erreurs commises sur ces trois grandeurs croissent. L'erreur sur le débit est négative car la puissance des contraintes visqueuses à la paroi est une source de chaleur qui réchauffe le fluide, par conséquent sa viscosité augmente ce qui diminue le débit du fluide.

Le nombre de Nusselt est supérieur à celui calculé avec le modèle complet car la puissance des contraintes visqueuses a pour effet d'augmenter la température à la paroi ; l'écart $T_p - T_b$ augmente et donc le nombre de Nusselt diminue.

Au vu des écarts importants entre le modèle complet et le modèle sans terme PFV , nous arrivons à la conclusion qu'il ne faut pas négliger ce terme lorsque $Kn > 10^{-2}$.

Travail des forces de pression et dissipation visqueuse négligées

Le travail des forces de pression et la dissipation visqueuses sont le plus souvent supposés négligeables. Cette hypothèse est examinée dans ce paragraphe. Quand ces termes ne sont pas pris en compte, les erreurs relatives sur le débit massique $\dot{m}$ et sur le nombre de Nusselt moyen Nu_m sont représentés sur les figures 7.16(a) et 7.16(c). L'erreur absolue sur la température moyenne débitante à la sortie de la conduite $T_{b,s}$ est donnée sur la figure 7.16(b). Le champ du rapport PW/VD représenté sur la figure 7.16(d) est à la base des explications.

Nous constatons que plus le rapport PW/VD augmente, plus l'erreur relative commise sur le débit massique augmente jusqu'à atteindre 8% quand $PW/VD \approx -2$. Le débit du modèle complet est toujours supérieur à celui du modèle sans les termes PW et VD . La raison est que le travail des forces de pression domine toujours. La détente refroidit le gaz, augmente sa densité, diminue sa viscosité et donc diminue les frottements.

L'erreur sur $T_{b,s}$ est négative : l'écoulement sort toujours plus froid à cause du terme PW . L'erreur peut être très importante (plus de 100K) quand le rapport PW/VD est grand.

L'erreur relative sur le nombre de Nusselt est importante dans plus de 70% des cas étudiés et elle est, en général, négative à cause du travail des forces de pression qui a pour effet d'accroître l'écart de température $T_p - T_b$. Comme Nu_m est inversement proportionnel à $T_p - T_b$, Nu_m est donc plus faible en présence de PW , c'est pourquoi l'erreur relative est négative (figure 7.16(c)).

Ces résultats montrent qu'il est nécessaire de prendre en compte le travail des forces de pression et la dissipation visqueuse dans la modélisation quelles que soient les pressions à l'entrée et à la sortie de la conduite sauf quand elles sont simultanément supérieures à 3 bar.

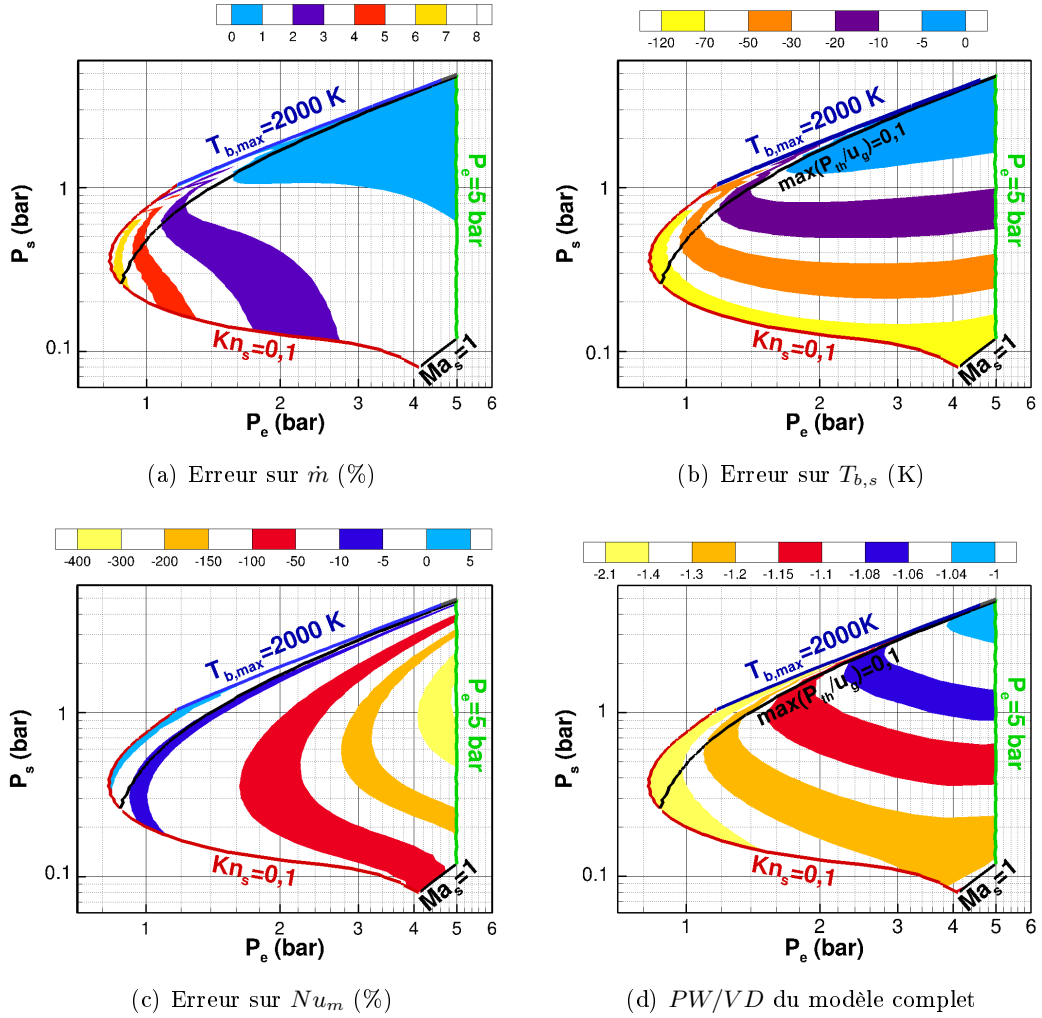


FIGURE 7.16 – Erreurs commises sans les termes PW et VD par rapport à un modèle complet en fonction de P_e et P_s à flux imposé $q_p = 259 \text{ W/m}^2$ pour : (a) $\dot{m}$ (%), (b) $T_{b,s}$ (K) et (c) Nu_m (%)

7.3.3 Étude approfondie de quelques cas du domaine paramétré

L'étude paramétrique précédente a permis d'avoir une perception générale sur les écoulements microfluidiques en fonction des pressions imposées à l'entrée et à la sortie. Pour compléter cette étude, nous avons sélectionné quelques points du domaine de simulations que nous analysons en montrant les profils de vitesse et les champs de température dans la moitié de la conduite. Les points choisis, montrés sur la figure 7.17, représentent des cas où au moins l'un des phénomènes est à son maximum. Leurs caractéristiques les plus importantes sont reportées dans le tableau 7.1.

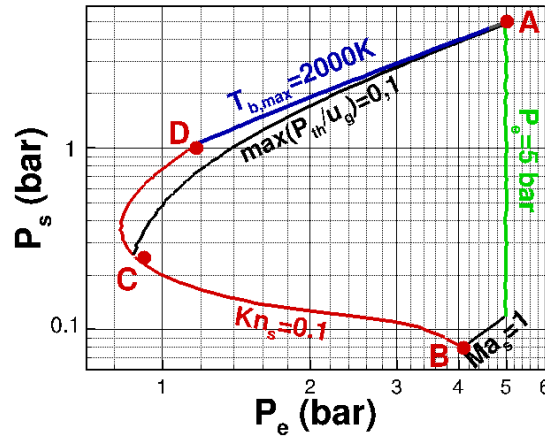


FIGURE 7.17 – Points sélectionnés pour l'étude approfondie des écoulements à flux imposé $q_p = 259 \text{ W/m}^2$

Point (Fig. 7.17)	P_e (bar)	P_s (bar)	ΔP (bar)	$\dot{m}$ ($\text{kg/s} \times 10^5$)	Re_s	Kn_s	Ma_s	$T_{b,s}$ (K)
A	5,00	4,85	0,15	0,49	0,42	0,004	0,0015	457,2
B	4,00	0,08	3,92	8,27	9,86	0,1	1	308,2
C	0,90	0,25	0,65	0,28	0,2	0,1	0,016	570,4
D	1,13	1,00	0,13	0,03	0,008	0,1	$6,6 \cdot 10^{-4}$	1957

TABLE 7.1 – Caractéristiques des écoulements sélectionnés sur la figure 7.17

Cas A : écoulement peu compressible, non glissant

D'après la position du point **A** sur la figure 7.17 et compte tenu des valeurs des nombres de Knudsen et de Mach (figures 7.11(a) et 7.13(c) respectivement), cet écoulement est très peu glissant ($Kn_s = 0,004$) et très peu compressible ($\Delta P = 0,15 \text{ bar}$).

La figure 7.18 montre le champ de température dans la conduite et le profil de vitesse dans quelques sections de la conduite. Nous constatons que la vitesse est presque nulle près de la paroi (peu de glissement) et que l'augmentation de vitesse sur une même ligne de courant est très faible. Il s'agit donc d'un écoulement proche d'un écoulement de Poiseuille.

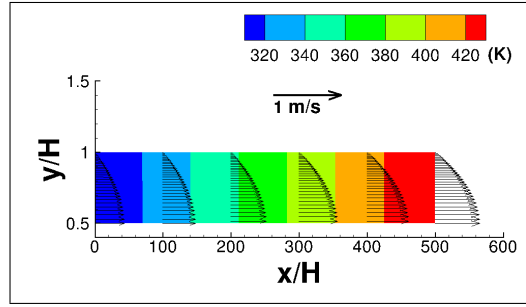


FIGURE 7.18 – Champ de température et profils de vitesse du cas **A** 7.17 avec $P_e = 5 \text{ bar}$, $P_s = 4,85 \text{ bar}$ et $q_p = 259 \text{ W/m}^2$

Cas B : écoulement très compressible, glissant à la sortie de la conduite

Le point **B** de la figure 7.17 représente la jonction entre les nombres de Mach et de Knudsen en sortie de conduite ayant les valeurs maximales possibles. La figure 7.19 montre le champ de température et les profils de vitesse. Nous constatons que l'écoulement sort plus froid qu'à l'entrée : la température diminue d'environ 5 K alors que les parois sont chauffées uniformément ($q_p = 259 \text{ W/m}^2$). Sur la majeure partie de la conduite, l'écoulement ressemble à un écoulement de Poiseuille chauffé sans glissement. La détente est localisée à proximité de la sortie de la conduite : les vitesses en sortie sont, approximativement, 10 fois plus grandes que celles à l'entrée. La pression diminuant de 4 bar à $0,08 \text{ bar}$, le nombre de Knudsen est très important et le glissement n'est visible que sur le dernier profil de vitesse (figure 7.19).

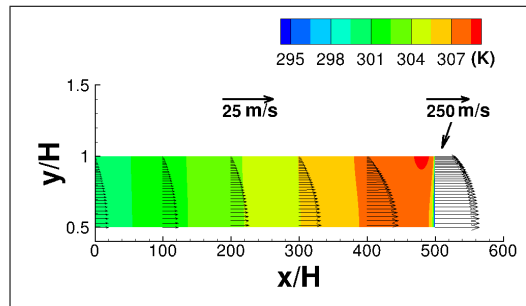


FIGURE 7.19 – Champ de température et profils de vitesse du cas **B** 7.17 avec $P_e = 4 \text{ bar}$, $P_s = 0,08 \text{ bar}$ et $q_p = 259 \text{ W/m}^2$

Cas C : écoulement glissant, peu compressible, sans pompage thermique

Au point **C** de la figure 7.17, le nombre de Knudsen en sortie a pour valeur $Kn_s = 0,1$. Cet écoulement est donc très glissant. La figure 7.20 montre que l'écoulement, du fait des faibles pressions ($< 1 \text{ bar}$), est glissant sur quasiment toute la longueur de la conduite. Comme le gaz est chauffé, la vitesse débitante augmente beaucoup malgré la faible différence de pression entrée-sortie. Aucun effet de détente n'est observé en sortie : cet écoulement est très peu compressible.

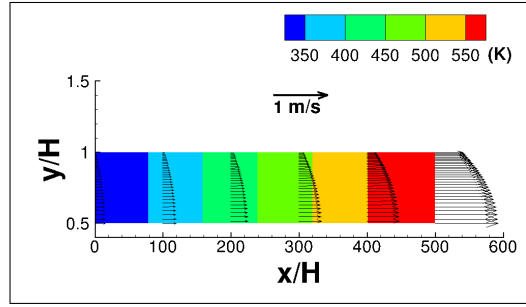


FIGURE 7.20 – Champ de température et profils de vitesse du cas **C** 7.17 avec $P_e = 0,9 \text{ bar}$, $P_s = 0,25 \text{ bar}$ et $q_p = 259 \text{ W/m}^2$

Cas D : écoulement glissant, très peu compressible, avec pompage thermique

Au point **D** de la figure 7.17, l'importance relative du pompage thermique est significative. Les pressions d'entrée et de sortie sont de l'ordre de la pression atmosphérique et ne diffèrent que de $\Delta P = 0,13 \text{ bar}$. L'écoulement est donc modérément glissant et les vitesses sont faibles. En conséquence, l'augmentation de température du gaz est très importante, de 300 à 1800 K (figure 7.21). Compte tenu de la longueur de la conduite, l'important gradient longitudinal de température favorise le pompage thermique. Nous constatons sur le profil de vitesse proche de l'entrée (figure 7.21) que les vitesses sont maximales à proximité des parois et beaucoup plus grandes que sur l'axe. Cette augmentation de vitesse aux parois n'est pas uniforme le long de la conduite et son importance, relativement à la vitesse axiale, tend à diminuer. Le profil longitudinal de la vitesse de glissement (figure 7.22(a)) montre qu'à l'entrée de la conduite, le pompage thermique est dominant et tend à diminuer jusqu'à la sortie de la conduite où il s'annule. En effet, comme il dépend essentiellement du gradient longitudinal de la température, il suit l'évolution de ce dernier (figure 7.22(b)).

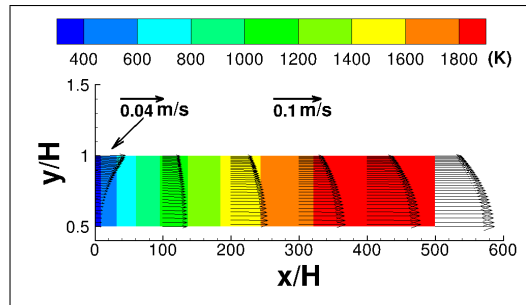


FIGURE 7.21 – Champ de température et profils de vitesse du cas **D** 7.17 avec $P_e = 1,13 \text{ bar}$, $P_s = 1 \text{ bar}$ et $q_p = 259 \text{ W/m}^2$

7.4 Conclusion

À l'issue de ces études paramétriques effectuées avec le code CFCR2, nous parvenons aux conclusions suivantes :

- Le débit massique est lié au nombre de Reynolds par la viscosité du gaz qui varie très peu, même lorsque l'écoulement est chauffé avec la densité de flux considérée ;
- Le rapport entre la moyenne du travail des forces de pression et la moyenne de la dissipation visqueuse sur le volume de la conduite est lié au nombre de Knudsen moyen. Quand la paroi est chauffée uniformément ($q_p = \text{cste}$), la corrélation est très

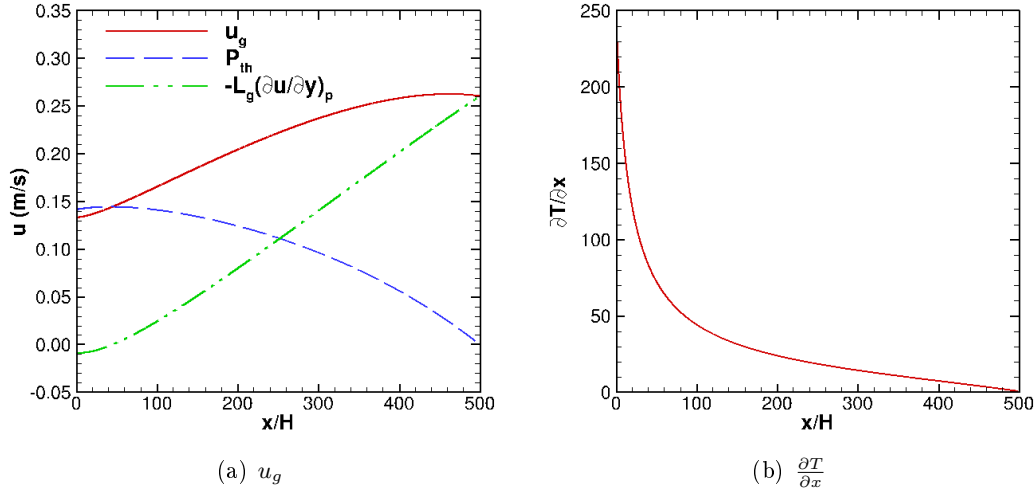


FIGURE 7.22 – Profils longitudinaux de : (a) u_g et (b) $\frac{\partial T}{\partial x}$ du cas **D** 7.17 avec $P_e = 1, 13 \text{ bar}$, $P_s = 1 \text{ bar}$ et $q_p = 259 \text{ W/m}^2$

bonne (Fig.7.11(b)). Par contre, la corrélation n'est pas très bonne lorsque la paroi est isotherme (Fig.7.6(b)).

Selon le type d'écoulement étudié, nous arrivons aux conclusions suivantes :

Écoulements quasi-isothermes en maintenant la température des parois à la température d'entrée du fluide :

- Pour les longueurs de conduites considérées, les débits massiques obtenus pour toutes les différences de pressions balayées s'obtiennent avec une très bonne approximation par la solution analytique proposée par Arkilic et al. [3] ;
- Le nombre de Nusselt moyen est très faible partout ($Nu_m < 0,1$) et est légèrement lié au nombre de Mach lorsque Ma est suffisamment grand ;
- Le pompage thermique n'apparaît qu'en sortie de conduite en cas de fortes détente ($Ma_s > 0,5$). Cependant, les vitesses de glissement induites sont très faibles.

Écoulements chauffés en imposant aux parois une densité de flux de chaleur uniforme :

- La puissance des forces visqueuses à la paroi est corrélée au nombre de Mach sur tout le domaine de pressions étudié. Le nombre de Nusselt est aussi corrélé à Ma sur la majeure partie de ce domaine. Des corrélations ont pu être établies grâce au logiciel de statistiques JMP ;
- La puissance des forces visqueuses à la paroi, la dissipation visqueuse et le travail des forces de pression ne sont pas négligeables ; les omettre conduit à des erreurs très importantes sur le champ de température, sur le nombre de Nusselt et, dans certains cas, sur le débit massique ;
- Dans la partie du domaine de pression où $Ma_s > 0,5$, le pompage thermique est lié à Ma mais son influence sur la vitesse de glissement est faible ;
- Sur l'autre partie du domaine de pression, une corrélation entre le pompage thermique, lié au nombre de Reynolds, a été établie. L'influence du pompage thermique devient significative quand $Re_s < 0,2$. Dans ce cas, il est nécessaire d'en tenir compte afin d'éviter des erreurs très importantes sur le débit massique et le champ de température.

Conclusion générale

Ce travail de thèse porte sur les écoulements de gaz parfaits dans des conduites planes dont les parois sont chauffées à flux uniformes ou maintenues isothermes, ayant des diamètres hydrauliques D_h de quelques microns ou dizaines de microns de telle sorte que le nombre de Knudsen, $Kn = \lambda/D_h$, soit assez important pour que les phénomènes de glissement dynamique et de saut de température soient significatifs. Cependant, ce travail est limité à $Kn \leq 0,1$ afin de rester dans l'hypothèse de glissement du premier ordre. Les phénomènes ont été étudiés numériquement, d'abord à l'aide du code commercial ANSYS/Fluent puis à l'aide du code CFCR2 développé au laboratoire MSME (équipe TCM) par E. Chénier [9, 10, 11, 67]. Ce code s'est relevé être le plus performant, tant en termes de coûts de calcul que de la parfaite maîtrise de la discrétisation des équations du modèle mathématique employé.

Dans la première partie de cette thèse, une revue bibliographique détaillée portant sur les modélisations des phénomènes de glissement est présentée dans le chapitre 1. Les équations de conservations, les conditions aux limites de l'écoulement ainsi que leurs écritures adimensionnelles sont exposées dans le chapitre 2. Les principaux résultats concernant la convection forcée de gaz en micro-canaux ainsi que des études portant sur la variation du nombre de Nusselt avec les paramètres de l'écoulement, l'influence de la variation des propriétés physiques avec la température, les effets liés à la compressibilité des gaz et l'influence des rugosités de surface ont été présentés au chapitre 3.

Les méthodes numérique utilisées avec le code ANSYS/Fluent ainsi que notre apport, sous la forme de sous-programmes intégrés dans les calculs, sont présentés dans le chapitre 4 de la deuxième partie de la thèse. Les conditions aux limites de glissement sont déjà simulées dans ce code mais ne correspondent pas toujours aux équations que nous avons retenues. Par exemple, la vitesse de glissement ne prend pas en compte le pompage thermique (écoulement du fluide dû à une différence de température, du froid vers le chaud) : elle n'est écrite qu'en fonction du glissement dynamique de 1^{er} ordre et ne convient pas aux écoulements incompressibles glissants. La modélisation du saut de température à la paroi ne tient compte ni du rapport des chaleurs spécifiques à pression et à volume constant $\gamma = C_p/C_v$, ni du nombre de Prandlt $Pr = \nu/a$. De plus, quand les parois sont adiabatiques ou soumises à une densité de flux uniforme, le flux total est mal exprimé et n'intègre pas la contribution, aux flux de chaleur, de la puissance due aux forces visqueuses aux parois.

Tous ces aspects ayant été corrigés, les résultats obtenus sont présentés dans le chapitre 5. Des écoulements incompressibles non glissants dont le nombre de Péclet varie entre 10^{-2} et 10 sont d'abord considérés dans ce chapitre. Il en ressort que les corrélations portant sur le nombre de Nusselt données dans la littérature restent valable en microfluidique. Une corrélation donnant la longueur d'établissement thermique, L_{th} , à faibles nombres de Péclet a été établie : elle montre que L_{th} est très faible (bien inférieure au diamètre hy-

draulique) et quasiment indépendante de Pe lorsque $Pe < 1$. Des problèmes numériques ont été observés pour les écoulements dont le nombre de Péclet est inférieur à l'unité parce que les effets de diffusion inverse remontent jusqu'à l'entrée de la conduite. Il est alors nécessaire de placer des extensions en amont de la conduite. Nous avons retenu des extensions à parois solides, imperméables et adiabatiques. Comme la solution dépend de la géométrie de l'extension, il serait intéressant, dans de futures études, d'étudier d'autres géométries et de déterminer la distance à laquelle remontent les effets de la diffusion inverse vers l'amont de la conduite. Par ailleurs, un problème mathématique a été rencontré aux faibles nombres de Péclet : celui du choix de la condition limite sur la température dans la section de sortie de la conduite. Cette dernière influence tout l'écoulement et doit être corrigée. Seules des mesures expérimentales de la température de sortie pourraient apporter la condition appropriée à imposer en sortie de domaine de calcul.

La suite du chapitre 5 porte sur une étude menée sur les écoulements compressibles, sans glissement. Nous avons constaté que les effets de compressibilité ne sont localisés que près de la sortie : quand l'écoulement est compressible, le profil de pression ne varie plus linéairement et la pression chute brutalement au voisinage de la sortie. Cela est accompagné par une détente du gaz qui provoque refroidissement et accélération (conversion d'une partie de son énergie interne en énergie cinétique). À la fin de ce chapitre, on présente une étude portant sur des écoulements glissants dans des conduites à parois isothermes à la température d'entrée du gaz ou lorsqu'elles sont adiabatiques. Tous les résultats ont été comparés à un modèle analytique basé sur l'hypothèse forte d'écoulement isotherme. Nous avons montré, à l'issue de cette étude, que ce modèle reste quand même valable si les variations de température dues aux détentes sont relativement importantes. Ces détentes sont, en effet, toujours localisées près de la sortie de la conduite qui, pour les grands rapports de forme considérés, peut être supposée isotherme sur presque toute sa longueur.

Dans la troisième partie de ce mémoire, nous présentons des écoulements compressibles et glissants, étudiés au chapitre 6, afin de valider le code CFCR2. La validation est effectuée en comparant les solutions avec celles données par ANSYS/Fluent complété par des sous-programmes adaptés : pour les deux codes, tous les phénomènes ont été pris en compte simultanément et les résultats obtenus sont en bon accord. Nous n'avons pas pris l'article récent (2012) de Sun et Jaluria [65] comme référence car les auteurs n'ont pas tenu compte de la puissance des forces visqueuses aux parois. Avec ce terme et quand les parois sont à température uniforme, le nombre de Nusselt devient très faible ($Nu < 1$) et tend à diminuer lorsque la température augmente ou lorsque le rapport de pression entrée/sortie diminue. Quand les parois sont chauffées avec une densité de flux uniforme, le nombre de Nusselt diminue de l'ordre de 10% par rapport au cas où la puissance des contraintes visqueuses est négligée.

Les résultats de deux études paramétriques portant sur de larges gammes de pression à l'entrée et à la sortie sont discutés dans le chapitre 7. La première concerne des écoulements compressibles dans des conduites avec les températures des parois maintenues à la température de l'entrée du gaz (écoulements quasi-isothermes). Elle a permis de montrer que le débit massique est corrélé au nombre de Reynolds ($\dot{m}$ et Re sont liés par la viscosité) et que le rapport entre la moyenne volumique du travail des forces de pression et la moyenne volumique de la dissipation visqueuse (calculées sur le volume total de la conduite) est corrélé au nombre de Knudsen moyen (car liés par le théorème de l'énergie cinétique). De plus, la température moyenne débitante à la sortie de la conduite, le maximum du rapport entre la vitesse de pompage thermique et la vitesse de glissement et le nombre de

Nusselt sont liés au nombre de Mach car ces trois grandeurs dépendent des variations de température du gaz, qui n'apparaissent que pour de fortes détente et donc à relativement grands Ma . Une comparaison entre tous les résultats et la solution analytique, présentée au chapitre 5, a montré que cette solution permet de calculer les débits massiques avec une bonne précision. Cependant, les écarts augmentent en réduisant la longueur de la conduite.

La deuxième étude paramétrique porte sur des écoulements dans des conduites chauffées en imposant des densités de flux de chaleur uniformes. Elle a conduit aux mêmes corrélations que dans l'étude précédente (quasi-isotherme). Une partie de ces corrélations a été établie à l'aide du logiciel de statistiques JMP. La suite de cette étude a consisté à étudier séparément les effets de la dissipation visqueuse et du travail des forces de pression, du pompage thermique et de la puissance des contraintes visqueuses aux parois en comparant les résultats obtenus sans ces termes à ceux donnés par le modèle complet (dans lequel tous les phénomènes sont pris en compte). Nous avons pu montrer que ces termes ne peuvent pas être négligés sur la majeure partie du domaine de paramètres correspondant à des écoulements laminaires et compressibles (sans onde de choc) de gaz parfaits en micro-conduites. Nous avons également montré que le pompage thermique n'est significatif qu'à de très petits nombres de Reynolds et lorsque les parois sont chauffées.

Perspectives

Bien que se référant à quelques travaux expérimentaux, cette étude académique devrait être complétée par des simulations se rapportant à des géométries plus réalistes (i.e. potentiellement applicables) afin que de nombreux paramètres soient fixés ou que leurs domaines de variation soient plus restreints. Compte tenu du nombre de paramètres sans dimension mis en jeu dans la modélisation, il semble en effet difficile d'établir des résultats de portée générale.

Les quelques pistes suggérées pour de nouvelles études sur les écoulements de gaz dans des microconduites ($D_h < 100 \lambda$) sont :

- approfondir les effets des extensions (géométries, conditions aux limites...), tant en ce qui concerne la formulation mathématique que la simulation numérique,
- considérer des conduites circulaires (2D axisymétrique) ou des conduites à section rectangulaire (3D),
- analyser la très forte influence de la conduction thermique dans les parois,
- aborder les conditions de glissement du second ordre ($0,1 \leq Kn \leq 0,3$ et équations de la MMC supposées applicables), ce qui peut être important dans les applications à basse pression.
- considérer des faisceaux de microconduites (filtres à particules par exemple) afin de proposer, via des approches "macroscopiques" du type de celles employées pour modéliser les transferts en milieux poreux, des alternatives permettant une description à une échelle bien supérieure à celle du diamètre hydraulique et lorsque les écoulements sont faiblement compressibles.

Table des figures

1	Régimes d'écoulements en fonction du nombre de Knudsen	2
1.1	Micro-échangeur thermique (tiré de [70]).	10
1.2	Dimensions caractéristiques de certains micro-systèmes à fluide, plages de nombre de Knudsen et régimes d'écoulements correspondants à un fonctionnement en conditions standards (tiré de [14] d'après [39]).	10
1.3	Échelles caractéristiques liées aux effets de raréfaction dans les gaz (tiré du séminaire de S. Colin (MSME, avril 2014)).	11
1.4	Limites des principales approximations pour la modélisation des micro-écoulements gazeux d'après [5]. n/n_o est le rapport des densités numériques des molécules pour les conditions courantes et ambiantes (L est ici la longueur caractéristique).	14
1.5	Gammes de nombres de Knudsen correspondant aux différents régimes raréfiés (tiré de [22]).	15
1.6	Profil de vitesse vrai (noté $u_{gaz} - u_p$) et profil approché par des conditions aux limites de glissement (noté $u_g - u_p$) dans la couche de Knudsen. u_p est la vitesse de la paroi, $u_{gaz,p}$ est la vitesse de glissement vraie, u_g est la vitesse de glissement artificielle et L_g est la longueur de glissement (tiré du séminaire de S. Colin (MSME, avril 2014)).	17
1.7	(a) : profils de vitesse vrai (courbe bleue BD) et approché par des conditions aux limites de glissement (courbe rouge BC) dans la couche de Knudsen. Le profil vert AD correspond au profil non satisfaisant qui serait obtenu en résolvant les équations de Navier-Stokes avec la condition de glissement vraie. (b) : illustration de profils de vitesse sans et avec glissement et de la longueur de glissement L_g (tiré de [74]).	17
2.1	géométrie et profil de vitesse dans un micro-canal entre deux plans parallèles (tiré de [3])	26
3.1	Nombre de Nusselt en régime établi pour un micro-écoulement entre deux plans parallèle chauffés à flux constant en fonction des nombres de Knudsen et de Brinkman, pour $\sigma_\mu = 1$ et $\xi_T = 1,67$. Eq.(6) = éq. (3.3); Eq.(9) = éq. (3.4); Eq.(11) = éq. (3.8) (tiré de [38]).	39
3.2	Profils de la température pariétale adimensionnelle le long d'un micro-canal chauffé à flux constant dans lequel circule de l'azote, pour des modèles prenant en compte ou pas les termes VD et PW (noté C. E. pour Compressible Effect) dans l'équation de l'énergie (tiré de [32]).	42
3.3	Variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Knudsen, pour quatre gaz, dans les expériences de Demsis et al. (2010) (tiré de [19]).	43

TABLE DES FIGURES

4.1	Profil de température pour des écoulements incompressibles pour : (a) $Re=100$, (b) $Re=1$, (c) $Re=0,1$ et (d) $Re=0,001$ ($Pr = 0,7$)	59
4.2	Profil du nombre de Nusselt pour des écoulements incompressibles quand la longueur de la conduite L est égale à 1 ou 2 mm pour : (a) $Re=0,1$ et (b) $Re=0,001$	59
4.3	Schéma représentatif d'une cellule adjacente à la sortie de la conduite	60
4.4	Profil de température moyenne débitante (a) et du nombre de Nusselt local (b) pour un écoulement incompressible et un flux imposé aux parois avec $Re=0,001$ avec et sans UDF corrigeant la condition de sortie	62
5.1	Domaine de la conduite simulée.	70
5.2	Chute de pression en fonction de Re ($H = 10 \mu m$, $L = 180 \mu m$)	74
5.3	Champ de température à l'entrée de la conduite pour $Pe = 0.5$	75
5.4	Variations de ΔT_{totale} et de $\Delta T_{partielle}$ en fonction du nombre de Péclet ($H = 10 \mu m$, $L = 180 \mu m$, $T_e = 300 K$, $q_p = 100 W/m^2$).	76
5.5	Variation du nombre de Nusselt incrémental en fonction de $1/Pe$	78
5.6	Variation de la longueur d'établissement thermique en fonction de $1/Pe$	78
5.7	Variation de la température moyenne débitante de sortie de l'air en fonction de $1/Pe$ ($L = 180 \mu m$, $q_p = 100 W/m^2$ et $T_e = 300 K$).	79
5.8	Variation du nombre de Nusselt local en fonction de $X^* = Gz^{-1}$	80
5.9	Influence de la longueur de l'extension sur les variation du nombre de Nusselt local ($Pe = 1$).	81
5.10	Influence de la longueur de l'extension sur les variation du nombre de Nusselt local ($Pe = 0,05$).	81
5.11	Flux échangés au sein de la conduite pour $Pe \geq 1$	82
5.12	Flux échangés pour $Pe \leq 1$	83
5.13	Schéma de la conduite pour l'écoulement compressible [32]	84
5.14	Variation longitudinale du nombre de Mach Ma pour : (a) $P_{stg} = 150 kPa$, (b) $P_{stg} = 500 kPa$ ($D_h = 20 \mu m$).	86
5.15	Chute de pression le long de l'axe de la conduite pour $P_{stg} = 500 kPa$ et $q_p = 10^4 W/m^2$ ($Pe = 196$, $D_h = 20 \mu m$).	86
5.16	Température adimensionnelle de la paroi le long de la conduite pour $P_{stg} = 500 kPa$ et $q_p = 10^4 W/m^2$ ($Pe = 196$, $D_h = 20 \mu m$) : $T_p^*(0) = 0,1355$, $T_{p,max}^*(0,472) = 1,728$, $T_{p,s}^*(0,510) = 1,271$	87
5.17	Schéma du dispositif expérimental [27]	88
5.18	Champs de température et de vitesse du cas (f) du tableau 5.11 pour la conduite C_1	95
5.19	Champs de température et de vitesse du cas (e) du tableau 5.11 pour la conduite C_2	96
5.20	Profils de pression issus de la simulation et du calcul analytique des cas (a) à (f) du tableau 5.11 avec glissement quand l'écoulement est compressible ou incompressible pour la conduite C_1	97
5.21	Profils des vitesses de glissement u_g et sur l'axe de la conduite u_{axe} issus de la simulation et du calcul analytique pour quelques cas du tableau 5.11 avec glissement pour la conduite C_1	98
5.22	Profils de température pour le cas (f) du tableau 5.11 issus de la simulation et température fixée dans le calcul analytique ($T = T_e$) avec glissement pour la conduite C_1	99
5.23	Profils de la masse volumique pour le cas (f) du tableau 5.11 issus de la simulation et du calcul analytique avec glissement pour la conduite C_1	99

TABLE DES FIGURES

5.24	Profils de la vitesse de glissement des cas (a) et (c) pour la conduite C_1 quand l'écoulement est compressible ou incompressible. λ défini selon l'équation (4.27)	100
5.25	Profils de vitesse sur différentes sections de la conduite C_1 pour les cas (b) à (e) du tableau 5.11 quand l'écoulement est glissant et compressible ou incompressible	101
5.26	Profils de la pression du cas (e) issus de la simulation et du calcul analytique quand l'écoulement est glissant et la paroi à température ou à flux imposés et quand le saut de température est pris ou pas en compte pour la conduite C_2	103
5.27	Profils de la température du cas (e) issus de la simulation et du calcul analytique quand l'écoulement est glissant et la paroi à température ou à flux imposés et quand le saut de température est pris ou pas en compte pour la conduite C_2	103
5.28	Profils de la masse volumique du cas (e) issus de la simulation et du calcul analytique quand l'écoulement est glissant et la paroi à température ou à flux imposés et quand le saut de température est pris ou pas en compte pour la conduite C_2	104
5.29	Profils des vitesses de glissement u_g et à l'axe u_c du cas (e) issus de la simulation et du calcul numérique quand l'écoulement est glissant et la paroi à température ou à flux imposés et quand le saut de température est pris ou pas en compte pour la conduite C_2	104
6.1	Comparaisons des profils de Kn et de PW/VD avec et sans glissement obtenus avec le code CFCR2, ANSYS/Fluent et par [65] pour $PR = 2,701$ et $T_p/T_e = 1,2$	114
6.2	Schéma représentatif d'une section de la conduite	114
6.3	Comparaison des profils de Nu obtenus par le code du laboratoire pour $PR = 2,701$ et $T_p/T_e = 1,2$, avec ceux de ANSYS/Fluent et de [65] avec et sans glissement	116
6.4	Profils du nombre de Nusselt calculé par l'équation (6.20), obtenus par le code CFCR2 et ANSYS/Fluent pour différents maillages avec et sans glissement ($PR = 2,701$ et $T_p/T_e = 1,2$).	116
6.5	Comparaison des profils du nombre de Nusselt calculés par l'équation (6.20) obtenus par le code CFCR2 pour $PR = 2,701$ et $T_p/T_e = 1,2$ avec ceux de ANSYS/Fluent et de [65] avec et sans glissement	117
6.6	Profils de (a) Kn et (b) PW/VD obtenus par CFCR2 pour $PR = 2,701$ avec glissement pour différentes températures de paroi.	118
6.7	Comparaisons des profils de Nu calculé par l'équation (6.20) obtenu par le code CFCR2 ($PR = 2,701$ avec glissement) avec ceux de ANSYS/Fluent et de [65] pour différentes températures de paroi	118
6.8	Profils de (a) Kn et (b) PW/VD obtenus par le code CFCR2 pour $T_p/T_e = 1,2$ avec glissement pour différents rapports de pression PR	119
6.9	Comparaisons des profils de Nu calculé par l'équation (6.20) et obtenus par le code CFCR2 avec glissement pour $T_p/T_e = 1,2$, avec ceux d'ANSYS/Fluent et de [65] pour différents rapports de pression.	120
6.10	Profils de Nu calculé par l'équation (6.19) obtenus par le code CFCR2 par ANSYS/Fluent quand : (a) $PR = 2,701$ et T_p variable (b) $T_p/T_e = 1,2$ et PR variable.	121

TABLE DES FIGURES

6.11	Comparaisons des variations axiales des densités de flux aux parois et de l'écart entre la température des parois et la température moyenne débitante dans le cas $PR = 2,701$ et $T_p/T_e = 1,2$ ($H = 1,2 \mu m$, $k_e = 0,0268 W/m K$, $\mu_e = 1,843 \cdot 10^{-5} Pa.s$).	122
6.12	Comparaisons entre les variations axiales des densités de flux total aux parois et du flux de conduction de référence dans le cas $PR = 2,701$ et $T_p/T_e = 1,2$ ($H = 1,2 \mu m$, $k_e = 0,0268 W/m K$, $\mu_e = 1,843 \cdot 10^{-5} Pa.s$).	122
6.13	Comparaison des profils de Nu calculés par les équations (6.20) et (6.19) obtenus pour $PR = 2,701$ et $T_p/T_e = 1,2$ avec glissement.	123
6.14	Profils de Nu obtenus avec CFCR2 : (a) avec et (b) sans le terme PFV pour $PR = 2$ et $q_{norm} = 2,5 \cdot 10^{-4}$ et avec ANSYS/Fluent : (c) avec et (d) sans glissement pour $PR = 2$ et $q_{norm} = 10^{-4}$ pour différents maillages.	124
6.15	Influence du terme PFV sur quelques grandeurs issues de différentes solutions, obtenues pour $PR = 2$ et $q_{norm} = 10^{-4}$ avec glissement	125
6.16	Profils de : (a) Kn et (b) PW/VD obtenus par CFCR2 pour $PR = 2$ avec glissement pour différents flux de chaleur aux parois q_p	126
6.17	Comparaisons des profils de Nu obtenus avec CFCR2 pour $PR = 2$ avec ceux d'ANSYS/Fluent et de [65] avec glissement pour différentes valeurs de q_{norm}	127
6.18	Profils de : (a) Kn et (b) PW/VD obtenus avec CFCR2 pour $q_{norm} = 10^{-4}$ avec glissement pour différents rapports de pression PR	128
6.19	Comparaisons des profils $Nu(x)$ obtenus avec CFCR2 pour $q_{norm} = 10^{-4}$, avec ANSYS/Fluent et par [65] avec glissement. pour différents rapports de pression PR	129
7.1	Maillage de la conduite utilisée pour l'étude paramétrique	132
7.2	Géométrie des écoulements non chauffés avec paroi isotherme $T_p = T_e = 300 K$	134
7.3	Domaine de calcul de l'étude paramétrique avant (a) et après (b) avoir imposé les limites pour des écoulements non chauffés avec paroi isotherme $T_p = T_e = 300 K$	134
7.4	Isovaleurs du nombre de Knudsen à la sortie de la conduite Kn_s en fonction de P_e et P_s à température imposée $T_p = T_e = 300 K$ pour le modèle complet	135
7.5	Isovaleurs de (a) $\dot{m} \times 10^5$ (kg/s) et (b) Re_s en fonction de P_e et P_s à température imposée $T_p = T_e = 300 K$ pour le modèle complet	135
7.6	Isovaleurs de (a) $\overline{Kn} \times 10^2$ et (b) PW_m/VD_m en fonction de P_e et P_s à température imposée $T_p = T_e = 300 K$ pour le modèle complet	136
7.7	Isovaleurs de (a) $T_{b,s}$ (K), (b) $(P_{th}/u_g)_{max}$, (c) Nu_m et (d) Ma_s en fonction de P_e et P_s à température imposée $T_p = T_e = 300 K$ pour le modèle complet	137
7.8	Isovaleurs des différences obtenues entre les solutions analytique [3] et numérique (code CFCR2) en fonction de P_e et P_s à température imposée $T_p = T_e = 300 K$ pour une conduite de longueur $L = 1,5 mm$: (a) différence sur $\dot{m}$ (%) - (b) $T_{b,s,numérique} - T_{b,s,analytique}$ (K).	138
7.9	Isovaleurs des différences obtenues entre les solutions analytique [3] et numérique (code CFCR2) en fonction de P_e et P_s à température imposée $T_p = T_e = 300 K$ pour une conduite de longueur $L = 1 mm$: (a) différence sur $\dot{m}$ (%) - (b) $T_{b,s,numérique} - T_{b,s,analytique}$ (K).	139
7.10	Domaine de calcul de l'étude paramétrique avant (a) et après (b) avoir imposé les limites pour des écoulements chauffés avec une densité de flux $q_p = 259 W/m^2$	140

TABLE DES FIGURES

7.11 Isovaleurs du modèle complet en fonction de P_e et P_s à flux imposé $q_p = 259 \text{ W/m}^2$: (a) Kn_s et (b) PW/VD	141
7.12 Isovaleurs du modèle complet en fonction de P_e et P_s à flux imposé $q_p = 259 \text{ W/m}^2$ pour : (a) $\dot{m} \times 10^5 \text{ (kg/s)}$, (b) $T_{b,\max} \text{ (K)}$, (c) $(P_{th}/u_g)_{\max}$ et (d) Re_s	142
7.13 Isovaleurs du modèle complet en fonction de P_e et P_s à flux imposé $q_p = 259 \text{ W/m}^2$ pour : (a) PFV_m/q_p , (b) Nu_m et (c) Ma_s	143
7.14 Erreurs commises dans un calcul sans le pompage thermique P_{th} par rapport à un modèle complet en fonction de P_e et P_s à flux imposé $q_p = 259 \text{ W/m}^2$ pour : (a) $\dot{m} \text{ (%)}$, (b) $T_{b,s} \text{ (K)}$ et (c) $Nu_m \text{ (%)}$	144
7.15 Erreurs commises dans un calcul sans le terme PFV par rapport à un modèle complet en fonction de P_e et P_s à flux imposé $q_p = 259 \text{ W/m}^2$ pour : (a) $\dot{m} \text{ (%)}$, (b) $T_{b,s} \text{ (K)}$ et (c) $Nu_m \text{ (%)}$	145
7.16 Erreurs commises sans les termes PW et VD par rapport à un modèle complet en fonction de P_e et P_s à flux imposé $q_p = 259 \text{ W/m}^2$ pour : (a) $\dot{m} \text{ (%)}$, (b) $T_{b,s} \text{ (K)}$ et (c) $Nu_m \text{ (%)}$	147
7.17 Points sélectionnés pour l'étude approfondie des écoulements à flux imposé $q_p = 259 \text{ W/m}^2$	148
7.18 Champ de température et profils de vitesse du cas A 7.17 avec $P_e = 5 \text{ bar}$, $P_s = 4,85 \text{ bar}$ et $q_p = 259 \text{ W/m}^2$	149
7.19 Champ de température et profils de vitesse du cas B 7.17 avec $P_e = 4 \text{ bar}$, $P_s = 0,08 \text{ bar}$ et $q_p = 259 \text{ W/m}^2$	149
7.20 Champ de température et profils de vitesse du cas C 7.17 avec $P_e = 0,9 \text{ bar}$, $P_s = 0,25 \text{ bar}$ et $q_p = 259 \text{ W/m}^2$	150
7.21 Champ de température et profils de vitesse du cas D 7.17 avec $P_e = 1,13 \text{ bar}$, $P_s = 1 \text{ bar}$ et $q_p = 259 \text{ W/m}^2$	150
7.22 Profils longitudinaux de : (a) u_g et (b) $\frac{\partial T}{\partial x}$ du cas D 7.17 avec $P_e = 1,13 \text{ bar}$, $P_s = 1 \text{ bar}$ et $q_p = 259 \text{ W/m}^2$	151

Liste des tableaux

4.1	Paramètres de la simulation du cas testé pour le calcul du bilan thermique.	65
4.2	Calculs des différentes composantes du flux de chaleur total pour les différentes surfaces de la conduite ou sur le volume (W). Le <i>bilan total</i> est égal à la somme des flux sur toutes les frontières du domaine.	67
5.1	Dimensions des conduites et maillages selon le nombre de Péclet	71
5.2	Paramètres fixés pour les simulations.	71
5.3	Établissement dynamique pour $Re = 1 (u_m = 0,73 m/s)$	73
5.4	Longueurs $X_1 = x_1/H$ et $X_2 = x_2/H$ pour $0.05 \leq Pe \leq 10$	75
5.5	Différence sur le gain de température du fluide pour $0.05 \leq Pe \leq 10$	76
5.6	Établissement thermique pour $Pe = 1, 5, 10$ et comparaisons avec [51].	77
5.7	Établissement thermique de l'écoulement pour Pe compris entre 0,01 et 1.	78
5.8	Propriétés thermophysiques de l'air à 300 K utilisées pour les comparaisons avec Hong et al. [32].	85
5.9	Nombres de Reynolds et de Mach à la sortie de la conduite pour $P_{stg} = 150 kPa$ et $500 kPa$ et pour $q_p = 10^3 W/m^2$ et $q_p = 10^4 W/m^2$ ($H = 10 \mu m$, $L = 2000 \mu m$).	85
5.10	Propriétés thermophysiques de l'argon	92
5.11	Conditions aux limites et caractéristiques des écoulements étudiés à l'entrée de la conduite (* : cas extraits des expériences [27])	92
5.12	Résultats des simulations numériques pour la conduite C_1 à $T_p = T_e$ avec glissement dynamique : caractéristiques principales	93
5.13	Résultats des simulations numériques pour la conduite C_2 à $T_p = T_e$ avec glissement dynamique : caractéristiques principales	93
5.14	Débits massiques issus des simulations numériques, du calcul analytique et de l'expérience pour la conduite longue (C_1) à $T_p = T_e$ avec et sans glissement dynamique : débits massiques	93
5.15	Résultats des simulations numériques pour la conduite courte (C_2) à $T_p = T_e$ avec glissement dynamique : débits massiques	94
5.16	Écarts entre les solutions numérique et analytique pour la conduite C_1	95
5.17	Écarts entre les solutions numérique et analytique pour la conduite C_2	96
5.18	Débits massiques ($\dot{m} \times 10^{10}$ en kg/m^3) du cas (f) de la conduite C_1 et du cas (e) de la conduite C_2 quand l'écoulement est glissant et la paroi est à température imposée ou à flux imposé, saut de température pris ou non en compte.	102
5.19	Chutes de température maximale ($\Delta T^{\max}$ en K) du cas (f) de la conduite C_1 et du cas (e) de la conduite C_2 quand l'écoulement est glissant et la paroi est à température imposée ou à flux imposé, saut de température pris ou non en compte.	105

LISTE DES TABLEAUX

6.1	Paramètres fixés dans toutes les simulations.	112
6.2	Paramètres fixés dans les simulations à température imposée.	113
6.3	Paramètres des simulations avec le code du laboratoire quand la paroi est à flux imposé (compléments au tableau 6.1).	123
7.1	Caractéristiques des écoulements sélectionnés sur la figure 7.17	148

Bibliographie

- [1] ANSYS, Inc. *ANSYS/Fluent Theory Guide*, November 2011.
- [2] ANSYS, Inc. *ANSYS/Fluent User's Guide*, November 2011.
- [3] E.B. Arkilic, M.A. Schmidt, and K.S. Breuer. Gaseous slip flow in long microchannels. *J. Microelectromechanical Systems*, 6(2) :167–178, 1997.
- [4] R. W. Barber and D. R. Emerson. Challenges in modeling gas-phase flow in microchannels : from slip to transition. *Heat Transf. Engin.*, 27 :3–12, 2006.
- [5] G. A. Bird. *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*. Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [6] R. B. Bird, W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot. *Transport Phenomena*. John Wiley & Sons, 2nd edition, 2002.
- [7] C. Cercignani and S. Lorenzani. Variational derivation of second-order slip coefficients on the basis of the Boltzmann equation for hard-sphere molecules. *Phys. Fluids*, 22(6) :002006PHF, 2010.
- [8] P. Chassaing. *Mécanique des fluides - éléments d'un premier parcours*. CÉPADUÈS-ÉDITIONS, 2000. 2^e édition.
- [9] E. Chénier, R. Eymard, R. Herbin, and O. Touazi. Collocated finite volume schemes for the simulation of natural convective flows on unstructured meshes. *Int. J. Num. Methods Fluids*, 56(11) :2045–2068, 2008.
- [10] E. Chénier, R. Eymard, and X. Nicolas. A finite volume scheme for the transport of radionuclides in porous media. *Computational Geosciences*, 8(2) :163–172, 2004.
- [11] E. Chénier, R. Eymard, and O. Touazi. Numerical results using a colocated finite volume scheme on unstructured grids for incompressible fluid flows. *Num. Heat Transf. B*, 49(3) :259–276, 2006.
- [12] S. Colin. Rarefaction and compressibility effects on steady and transient gas flows in microchannels. *Microfluidics and Nanofluidics*, 1(3) :268–279, 2005.
- [13] S. Colin. Gas microflows in the slip flow regime : A critical review on convective heat transfer. *J. Heat Transf.*, 134(2) :020908, 2012.
- [14] S. Colin and L. Baldas. Rarefaction effects in gaseous microflows [effets de raréfaction dans les micro-écoulements gazeux]. *Comptes Rendus Physique*, 5(5) :521–530, 2004.
- [15] G. Croce and P. D'Agaro. Compressibility and rarefaction effect on heat transfer in rough microchannels. *Int. J. Thermal Sciences*, 48 :252–260, 2009.
- [16] G. Croce, P. D'Agaro, and A. Filippo. Compressibility and rarefaction effect on pressure drop in rough microchannels. *Heat Transf. Engin.*, 28(8-9) :688–695, 2007.
- [17] G. Croce, P. D'Agaro, and C. Nonino. Three-dimensional roughness effect on micro-channel heat transfer and pressure drop. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 50 :5249–5259, 2007.

- [18] A. Demsis, B. Verma, S. V. Prabhu, and A. Agrawal. Experimental determination of heat transfer coefficient in the slip regime and its anomalously low value. *Phys. Review E*, 80 :016311, 2009.
- [19] A. Demsis, B. Verma, S. V. Prabhu, and A. Agrawal. Heat transfer coefficient of gas flowing in a circular tube under rarefied condition. *Int. J. Thermal Sciences*, 49 :1994–1999, 2010.
- [20] N. Dongari, A. Agrawal, and A. Agrawal. Analytical solution of gaseous slip flow in long microchannels. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 50 :3411–3421, 2007.
- [21] T. Ewart, P. Perrier, I.A. Graur, and J.G. Méolans. Mass flow rate measurements in a microchannel, from hydrodynamic to near free molecular regimes. *J. Fluid Mech.*, 584 :337–356, 2007.
- [22] M. Gad-el Hak. Fluid mechanics of microdevices - The Freeman scholar lecture. *J. Fluids Engin.*, 121(1) :5–33, 1999.
- [23] M. Gad-el Hak. *Flow control - Passive, Active, and Reactive Flow Management*. Cambridge University Press, 2000.
- [24] M. Gad-el Hak. Comments on "critical view on new results in micro-fluid mechanics". *Int. J. Heat Mass Transf.*, 46(20) :3941–3945, 2003.
- [25] N. P. Gulhane and S. P. Mahulikar. Variations in gas properties in laminar micro-convection with entrance effect. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 52 :1980–1990, 2009.
- [26] N. P. Gulhane and S. P. Mahulikar. Numerical study of compressible convective heat transfer with variations in all fluid properties. *Int. J. Thermal Sciences*, 49 :786–796, 2010.
- [27] M. Hadj Nacer. *Tangential Momentum Accommodation Coefficient in Microchannels with Different Surface Materials (measurements and simulations)*. PhD thesis, Université d'Aix Marseille, laboratoire IUSTI, UMR CNRS 7343, 2012.
- [28] N. G. Hadjiconstantinou. Dissipation in small gaseous flows. *Heat Mass Transf.*, 125 :944–947, 2003.
- [29] J.C. Harley, Y. Huang, H.H. Bau, and J.N. Zemel. Gas flow in micro-channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 284 :257–274, 1995.
- [30] C. Hong and Y. Asako. Heat transfer characteristics of gaseous flows in microtube with constant heat flux. *ATE*, 28(11-12) :1375–1385, 2008.
- [31] C. Hong and Y. Asako. Some considerations on thermal boundary condition of slip flow. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 53(15-16) :3075–3079, 2010.
- [32] C. Hong, Y. Asako, and J.-H. Lee. Heat transfer characteristics of gaseous flows in micro-channel with constant heat flux. *Int. J. Thermal Sciences*, 46(11) :1153–1162, 2007.
- [33] K. Hooman, F. Hooman, and M. Famouri. Scaling effects for flow in micro-channels : Variable property, viscous heating, velocity slip, and temperature jump. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 36 :192–196, 2009.
- [34] S. Hossainpour and M. Hakak Khadem. Investigation of fluid flow and heat transfer characteristics of gases in microchannels with consideration of different roughness shapes at slip flow regime. *Nanoscale Microscale Thermophysical Engineering*, 14 :137–151, 2010.
- [35] R. M. Inman. Laminar slip flow heat transfer in a parallel plate channel or a round tube with uniform wall heating. Rapport TN D-2393, NASA, 1964.

- [36] H.-E. Jeong and J.-T. Jeong. Extended Graetz problem including streamwise conduction and viscous dissipation in microchannel. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 49 :2151–2157, 2006.
- [37] Y. Ji, K. Yuan, and J. N. Chung. Numerical simulation of wall roughness on gaseous flow and heat transfer in a microchannel. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 49 :1329–1339, 2006.
- [38] S.G. Kandlikar, S. Colin, Y. Peles, S. Garimella, R.F. Pease, J.J. Brandner, and D.B. Tuckerman. Heat transfer in microchannels - 2012 status and research needs. *J. Heat Transf.*, 135(9), 2013.
- [39] G.E. Karniadakis, A. Beskok, and N.R. Aluru. *Microflows and Nanoflows - Fundamentals and Simulation*, volume 29 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer New York, 2005.
- [40] H.P. Kavehpour, M. Faghri, and Y. Asako. Effects of compressibility and rarefaction on gaseous flows in microchannels. *Num. Heat Transf. A*, 32(7) :677–696, 1997.
- [41] D.A. Lockerby and J.M. Reese. On the modelling of isothermal gas flows at the microscale. *J. Fluid Mech.*, 604 :235–261, 2008.
- [42] D.A. Lockerby, J.M. Reese, D.R. Emerson, and R.W. Barber. Velocity boundary condition at solid walls in rarefied gas calculations. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 70(1 2) :017303–1–017303–4, 2004.
- [43] D.A. Lockerby, J.M. Reese, and M.A. Gallis. Capturing the Knudsen layer in continuum-fluid models of nonequilibrium gas flows. *AIAA Journal*, 43(6) :1391–1393, 2005.
- [44] D.A. Lockerby, J.M. Reese, and M.A. Gallis. The usefulness of higher-order constitutive relations for describing the Knudsen layer. *Phys. Fluids*, 17(10), 2005.
- [45] G. Maranzana, I. Perry, and D. Maillet. Mini- and micro-channels : influence of axial conduction in the walls. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 47 :3993–4004, 2004.
- [46] S. H. Maslen. On heat transfer in slip flow. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 25 :400–401, 1958.
- [47] J. C. Maxwell. On stresses in rarified gases arising from inequalities of temperature. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 170(6) :231–256, 1879.
- [48] M. Miyamoto, W. Shi, Y. Katoh, and J. Kurima. Chocked flow and heat transfer of low density gas in a narrow parallel-plate channel with uniformly heating walls. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 46 :2685–2693, 2003.
- [49] G.L. Morini, Y. Yang, H. Chalabi, and M. Lorenzini. A critical review of the measurement techniques for the analysis of gas microflows through microchannels. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 35(6) :849–865, 2011.
- [50] T.V. Nguyen. Low Reynolds number simultaneously developing flows in the entrance region of parallel plates. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 34(4-5) :1219–1225, 1991.
- [51] T.V. Nguyen. Laminar heat transfer for thermally developing flow in ducts. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 35(7) :1733–1741, 1992.
- [52] L. O’Hare, D.A. Lockerby, J.M. Reese, and D.R. Emerson. Near-wall effects in rarefied gas micro-flows : some modern hydrodynamic approaches. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 28(1 SPEC. ISS.) :37–43, 2007.
- [53] L. O’Hare, T.J. Scanlon, D.R. Emerson, and J.M. Reese. Evaluating constitutive scaling models for application to compressible microflows. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 51(5-6) :1281–1292, 2008.

- [54] R. L. Panton. *Incompressible Flow*. Wiley-Interscience, New-York, 2nd edition, 1996.
- [55] J. Pitakarnnop. *Analyse expérimentale et simulation numérique d'écoulements raréfiés de gaz simples et de mélanges gazeux dans les microcanaux*. PhD thesis, Université de Toulouse, Institut National des Sciences Appliquées, mai 2009.
- [56] A. Quasi Zade, M. Renksizbulut, and J. Friedman. Heat transfer characteristics of developing gaseous slip-flow in rectangular microchannels with variable physical properties. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 32(1) :117–127, 2011.
- [57] Y. Rouizi, D. Maillet, and Jannot Y. Fluid temperature distribution inside a flat mini-channel : Semi-analytical wall transfer functions and estimation from temperatures of external faces. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 64 :331–342, 2013.
- [58] O. Rovenskaya and G Croce. Numerical investigation of microflow over rough surfaces : coupling approach. *J. Heat Transf.*, 135(1001005) :1–8, 2013.
- [59] F. Sharipov. Data on the velocity slip and temperature jump on a gas-solid interface. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, 40(2), 2011.
- [60] F. Sharipov and V. Seleznev. Data on internal rarefied gas flows. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, 27(3) :657–706, 1998.
- [61] W. Shi, M. Miyamoto, Y. Katoh, and J. Kurima. Chocked flow of low density gas in a narrow parallel-plate channel with adiabatic walls. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 44 :2555–2565, 2001.
- [62] E. M. Sparrow and S. H. Lin. Laminar heat transfer in tubes under slip-flow conditions. *J. Heat Transf.*, 84(4) :363–369, 1962.
- [63] Z. Sun and Y. Jaluria. Numerical modeling of pressure-driven nitrogen slip flow in long rectangular microchannels. *Num. Heat Transf. A*, 56(7) :541–562, 2009.
- [64] Z. Sun and Y. Jaluria. Conjugate thermal transport in gas flow in long rectangular microchannel. *Journal of Electronic Packaging, Transactions of the ASME*, 133(2) :021008, 2011.
- [65] Z. Sun and Y. Jaluria. Convective heat transfer in pressure-driven nitrogen slip flows in long microchannels : The effects of pressure work and viscous dissipation. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 55(13-14) :3488–3497, 2012.
- [66] S. Tison. Experimental data and theoretical modeling of gas flows through metal capillary leaks. *Vacuum*, 44 :1171–1175, 1993.
- [67] O Touazi, E. Chénier, and R. Eymard. Simulation of natural convection with the collocated clustered finite volume scheme. *Computers & Fluids*, 37 :1138–1147, 2008.
- [68] S. E. Turner, L. C. Lam, Faghri M., and O. J. Gregory. Experimental investigation of gas flow in microchannel. *J. Heat Transf.*, 126 :753–763, 2004.
- [69] M. von Smoluchowski. Ueber wärmeleitung in verdünnten gasen. *Annalen der Physik*, 300(1) :101–130, 1898.
- [70] Y. Yang, G.L. Morini, and J.J. Brandner. Experimental analysis of the influence of wall axial conduction on gas-to-gas micro heat exchanger effectiveness. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 69 :17–25, 2014.
- [71] Z.-H. Yao, F. He, Y.-T. Ding, M.-Y. Shen, and X.-F. Wang. Low-speed gas flow subchoking phenomenon in a long constant area microchannel. *AIAA Journal*, 42(8) :1517–1521, 2004.
- [72] S. Yu and T.A. Ameel. Slip-flow heat transfer in rectangular microchannels. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 44(22) :4225–4234, 2001.

- [73] S.-X. Zhang, Y.-L. He, G. Lauriat, and W.-Q. Tao. Numerical studies of simultaneously developing laminar flow and heat transfer in microtubes with thick wall and constant outside wall temperature. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 53 :3977–3989, 2010.
- [74] W.-M. Zhang, G. Meng, and X. Wei. A review on slip models for gas microflows. *Microfluidics and Nanofluidics*, 13(6) :845–882, 2012.