



**HAL**  
open science

# Formulations par équations intégrales de surface pour la simulation numérique du contrôle non destructif par courants de Foucault

Audrey Vigneron

► **To cite this version:**

Audrey Vigneron. Formulations par équations intégrales de surface pour la simulation numérique du contrôle non destructif par courants de Foucault. Modélisation et simulation. Ecole Polytechnique, 2015. Français. <NNT : >. <tel-01114368>

**HAL Id: tel-01114368**

**<https://hal.science/tel-01114368v1>**

Submitted on 9 Feb 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

ÉCOLE DOCTORALE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE



## Thèse

présentée en vue de l'obtention du grade de  
Docteur de l'École Polytechnique

“Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES”

par

**Audrey Vigneron**

---

# Formulations par équations intégrales de surface pour la simulation numérique du contrôle non destructif par courants de Foucault

---

Thèse soutenue publiquement le 23 janvier 2015 devant le jury composé de :

Directeur de thèse : **M. Marc BONNET**, Directeur de recherche CNRS, Poems,  
Co-encadrant de thèse : **M. Édouard DEMALDENT**, Ingénieur chercheur, CEA LIST,

M. Toufic ABOUD,	Ingénieur de recherche, IMACS,	Examineur
M. François ALOUGES,	Professeur des Universités, CMAP,	Examineur
M. Olivier CHADEBEC,	Chargé de recherche CNRS, G2ELab,	Rapporteur
M. Christian DAVEAU,	Maître de conférences, Université de Cergy-Pontoise,	Examineur
M. Patrick DULAR,	Directeur de Recherche FNRS, Institut Montefiore,	Rapporteur
M. Dominique LESSELIER,	Directeur de Recherche CNRS, L2S,	Examineur

---

---

# Remerciements

Puisqu'une thèse n'est jamais le travail d'une seule personne, je souhaite remercier ceux qui ont contribué à l'aboutissement de cette aventure, tant professionnellement que personnellement.

En premier lieu, je souhaite remercier Mme Clarisse Poidevin de m'avoir permis d'effectuer ce travail de thèse au sein de son département, le DISC, où j'ai pu profiter d'un cadre de travail agréable et enrichissant que ce soit scientifiquement ou humainement.

D'autre part, je tiens à remercier M. Christophe Reboud pour m'avoir accueillie au sein de son laboratoire, le LSME. Son calme inébranlable et ses réactions toujours pondérées m'ont souvent aidée au cours de ces trois années.

Je voudrais maintenant remercier chaleureusement Marc Bonnet d'avoir accepté de diriger mes travaux. Ses remarques toujours avisées m'ont permis d'avoir le recul nécessaire à l'orientation de ma thèse. De plus, sa patience, sa disponibilité et sa pédagogie ont été pour moi des atouts précieux, en particulier pour décrypter les enjeux du développement asymptotique.

Je remercie très sincèrement M. Édouard Demaldent de m'avoir proposé ce sujet de thèse et de m'avoir encadrée tout au long de cette aventure. Il a su me faire partager ses connaissances avec pédagogie et m'a permis de découvrir les méandres des équations intégrales et de leur implémentation. Je le remercie pour les nombreuses heures passées à répondre à mes traditionnelles *questions cons.* Je voudrais aussi lui dire que là, *on est vraiment en pleine bulle de buse.*

Je remercie MM. Olivier Chadebec et Patrick Dular d'avoir accepté de juger mon travail en tant que rapporteurs ainsi que MM. Toufic Abboud, François Alouges et Christian Daveau d'avoir accepté de participer au jury en tant qu'examinateur. Je remercie de plus M. Dominique Lesselier pour les conseils qu'il m'a donnés lors de nos diverses rencontres et pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens à remercier tous les membres du LSME que je n'ai pas encore cités, vous avez tous contribué à rendre ces trois années agréables. En particulier, je remercie M.

---

Anastosios Skarlatos avec qui tout a commencé lors de mon stage et qui est toujours présent pour répondre aux questions. J'ai une pensée pour les thésards déjà docteurs et pour Kostas à qui il reste quelques mois de dur labeur.

Plus largement, je remercie tous les membres du DISC pour l'accueil que j'ai reçu en arrivant en stage puis tout au long de cette thèse. Je retiendrai entre autres les conseils de M. Pierre Calmon, surtout lorsqu'il s'agit de gestion du stress mais aussi les discussions animées que j'ai pu avoir avec beaucoup d'entre eux. Je ne pourrais rédiger ces remerciements sans un mot pour Mme Marie-Odile Bourdeau sans qui je chercherais sûrement encore à qui faire signer ma convention de stage, et M. Daniel Lobjois sans qui j'aurais dû rédiger ce manuscrit à la main.

Parmi tous ces collègues certains ont occupé une grande place mais dans un cadre moins professionnel. Je veux les remercier pour le soutien qu'ils ont pu m'apporter. Pour les sorties course à pied du midi je citerai Alex, Florian, Thibaud et Thomas et j'espère retrouver les trois derniers sur la ligne d'arrivée le 12 avril, ayons foi en nos genoux (et notre volonté aussi). Pour les discussions poney, le soutien moral, mais aussi pour tout le reste, je remercie *mes copines* Laura et Coralie.

Durant ces trois années j'ai régulièrement investi les locaux de l'ENSTA et je voudrais remercier tous ceux qui m'ont toujours bien accueillie, je pense particulièrement à Aliénor, Camille, Maxence, Simon et Valentin.

Et puis il y a ceux qui étaient là avant et qui sont restés présents alors que moi je ne l'étais pas toujours. Je souhaite tous les remercier mais je ne me risquerais pas à les nommer de peur d'en oublier. Il y a les bretons que j'ai délaissés cette dernière année mais qui ont été d'un soutien inébranlable, les copines du poney, les amis de la fac et même du lycée.

Mes derniers remerciements vont tout naturellement à ma famille. Je remercie tout particulièrement ma mère d'être toujours présente pour moi même quand il s'agit de relire un manuscrit écrit, selon elle, en chinois. De même je remercie ma sœur Leïla parce que c'est quand même beaucoup plus sympa maintenant que l'on ne se tire plus les cheveux. Bien entendu j'ai aussi une pensée pour Evren, mon neveu préféré (je ne prends pas de risques sur ce coup là) et je profite de ces lignes pour lui dire que *tata elle n'habite pas dans l'icône skype du téléphone!* Pour conclure, je remercie F@kir d'avoir été présent avant, pendant, et j'espère après cette aventure. Si l'on remontait sept ans en arrière je crois qu'on n'imaginerait pas que l'on en arriverait là. Je nous souhaite de rire encore longtemps car : « *L'humour est le plus court chemin d'un homme à un autre.* »

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>I Introduction aux équations intégrales de l'électromagnétisme</b>	<b>7</b>
<b>1 Le système de Maxwell pour un problème de transmission</b>	<b>9</b>
1.1 Système de Maxwell dans un milieu linéaire isotrope . . . . .	11
1.2 Problème de diffraction . . . . .	16
1.3 Les modèles traités . . . . .	19
1.4 Synthèse . . . . .	24
<b>2 Formulation intégrale des problèmes</b>	<b>27</b>
2.1 Espaces fonctionnels et traces . . . . .	28
2.2 Représentation intégrale . . . . .	36
2.3 Le problème intégral surfacique . . . . .	43
<b>3 Tour d'horizon des formulations intégrales existantes</b>	<b>49</b>
3.1 Les formulations pour le problème de Maxwell . . . . .	50
3.2 Les formulations pour le problème courants de Foucault . . . . .	56
<b>II Recherche d'une formulation intégrale adaptée aux applications de CND</b>	<b>63</b>
<b>4 Discrétisation</b>	<b>65</b>
4.1 Espaces d'approximation discrets . . . . .	66
4.2 Problème discret : description et implémentation . . . . .	76
<b>5 Décomposition de Helmholtz-Hodge et pondération des équations relatives à l'air et à la pièce</b>	<b>87</b>
5.1 Décomposition de Helmholtz-Hodge et basses fréquences . . . . .	89
5.2 Pondération des équations relatives à l'air et à la pièce . . . . .	100
5.3 Résultats sur un cas CND . . . . .	113
5.4 Conclusion . . . . .	120

<b>6 Schémas itératifs par blocs</b>	<b>121</b>
6.1 Méthode de surrelaxation successive . . . . .	122
6.2 Résolution par blocs de la formulation $LT(1,0,0,1)$ . . . . .	124
6.3 Résolution par blocs de la formulation $LT$ . . . . .	135
6.4 Conclusion . . . . .	152
<b>III Premiers éléments d'analyse asymptotique</b>	<b>153</b>
<b>7 Des équations intégrales du problème de Maxwell au problème courants de Foucault</b>	<b>155</b>
7.1 Réécriture du problème de Maxwell avec décomposition Loop-Tree . . . . .	156
7.2 Développement asymptotique du problème de Maxwell avec décomposition Loop-Tree . . . . .	159
7.3 Conclusion . . . . .	167
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>169</b>
<b>Annexes</b>	<b>175</b>
<b>A Les milieux parfaitement conducteurs</b>	<b>175</b>
A.1 Le modèle du conducteur parfait . . . . .	175
A.2 Formulations intégrales pour les milieux parfaitement conducteurs . . . . .	176
<b>B Discrétisation pour le maillage triangulaire</b>	<b>181</b>
B.1 Maillage paramétré de triangles . . . . .	181
B.2 Fonctions de base de l'espace d'approximation de $\mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ . . . . .	182
B.3 La décomposition de Helmholtz-Hodge . . . . .	183
<b>C Calcul des termes matriciels</b>	<b>185</b>
C.1 Notation des fonctions tests et bases . . . . .	185
C.2 L'opérateur matriciel $\mathbf{A}_{\times}$ . . . . .	187
C.3 L'opérateur matriciel $\mathbf{B}_{\times}$ . . . . .	187
C.4 L'opérateur matriciel $\mathbf{C}_{\times}$ . . . . .	188
C.5 L'opérateur matriciel $\mathbf{R}$ . . . . .	190
C.6 L'opérateur matriciel $\tilde{\mathbf{C}}_{\times}$ . . . . .	191
C.7 L'opérateur matriciel $\mathbf{A}_{\mathbf{n}}$ . . . . .	191
C.8 L'opérateur matriciel $\mathbf{B}_{\mathbf{n}}$ . . . . .	191
C.9 L'opérateur matriciel $\tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{n}}$ . . . . .	192
C.10 L'opérateur matriciel $\mathbf{I}$ . . . . .	192
C.11 Seconds membres . . . . .	192

<b>D Sorties</b>	<b>193</b>
D.1 Onde plane et section efficace radar (SER) . . . . .	193
D.2 Champs induits par une bobine et variation d'impédance . . . . .	194
<b>E Cas tests</b>	<b>195</b>
E.1 La sphère . . . . .	195
E.2 La plaque cylindrique . . . . .	196
E.3 La barre . . . . .	197
E.4 Le tube . . . . .	198
E.5 Le tube à section elliptique . . . . .	199
<b>F Termes du développement asymptotique</b>	<b>201</b>
F.1 Développement asymptotique des noyaux de Green . . . . .	201
F.2 Développement asymptotique de la formulation LT . . . . .	203
<b>G Communications</b>	<b>207</b>
G.1 Communications . . . . .	207
G.2 Publications . . . . .	207
<b>Bibliographie</b>	<b>213</b>

TABLE DES MATIÈRES

---

# Table des figures

1.1	Domaines $\Omega_0$ , $\Omega_1$ et $\Omega_{\text{inc}}$ .	16
2.1	Normales au bord des faces.	30
2.2	Voisinage tubulaire.	30
4.1	Sommets et arêtes sur l'élément de référence $\widehat{K}$ .	68
4.2	Arêtes locales et globales.	69
4.3	Fonctions <i>Rooftop</i> sur le carré de référence.	71
4.4	Fonction <i>Rooftop</i> globale associée à une arête.	71
4.5	Composantes d'une fonction Rooftop.	72
4.6	Fonctions <i>Loop</i> sur le carré de référence.	75
4.7	Fonctions <i>Tree</i> sur le carré de référence.	75
4.8	Fonctions <i>Loop</i> et <i>Tree</i> globales.	75
4.9	Découpe en triangle du carré de référence.	86
4.10	Points de quadrature polaire sur le triangle de référence.	86
5.1	SER : #1.1/EFIE	90
5.2	Conditionnement : #1.1/EFIE	91
5.3	SER : #1.2/PMCHWT	92
5.4	Conditionnement : #1.1/EFIE #1.2/PMCHWT	93
5.5	SER : #1.3/PMCHWT	94
5.6	SER : #1.2/LT	95
5.7	Conditionnement : #1.2/PMCHWT/LT/LTN #1.3/PMCHWT/LT	96
5.8	SER : #1.2/LTN	97
5.9	SER : #1.3/LT	98
5.10	SER : #1.2/Müller	100
5.11	Conditionnement : #1.2/PMCHWT/Müller	101
5.12	SER : #1.2/NxMüller(-)	102
5.13	Conditionnement : #1.2/PMCHWT/Müller/NxMüller(-)	103
5.14	SER : #1.2/Müller(-)/Müller	105
5.15	Conditionnement : #1.1/MFIE/NxMFIE #1.2/Müller/Müller(-)/ NxMüller(-)	106
5.16	SER : #1.1/MFIE/NxMFIE	107

TABLE DES FIGURES

---

5.17	SER : #1.3/Chu . . . . .	108
5.18	Conditionnement : #1.3/Chu . . . . .	109
5.19	SER : #1.3/P(1,0,0,1)/P(0,1,1,0) . . . . .	110
5.20	SER : #1.3/LT(1,0,0,1)/LT(0,1,1,0) . . . . .	111
5.21	SER : #1.3/P(1,0,0,1)/P(0,1,1,0)/LT(1,0,0,1)/LT(0,1,1,0) . . . . .	112
5.22	$\epsilon(\Delta Z)$ : #2.1/PMCHWT/LT/LT(1,0,0,1)/P(0,1,1,0)/Hiptmair/CF1/CF2 . . . . .	115
5.23	$\epsilon(\Delta Z)$ : #2.1/PMCHWT/LT/LT(1,0,0,1)/P(0,1,1,0)/Hiptmair/CF1/CF2 . . . . .	115
5.24	Conditionnement : #2.1/PMCHWT/.../Hiptmair/CF1/CF2 . . . . .	116
5.25	$\epsilon(\Delta Z)$ : #2.2/PMCHWT/LT/LT(1,0,0,1)/Hiptmair/CF1/CF2 . . . . .	118
5.26	$\epsilon(\Delta Z)$ : #2.2/PMCHWT/LT/LT(1,0,0,1)/Hiptmair/CF1/CF2 . . . . .	118
5.27	Conditionnement : #2.2/PMCHWT/LT/LT(1,0,0,1)/Hiptmair/CF1/CF2 . . . . .	119
6.1	Maillages primal et barycentrique . . . . .	125
6.2	Fonctions primale et duale globales . . . . .	126
6.3	Fonctions globales <i>Loop</i> et <i>Tree</i> primales et duales . . . . .	127
6.4	SER : #1.1/CMP-LT . . . . .	129
6.5	Conditionnement : #1.1/CMP-LT/EFIE(LTN) . . . . .	129
6.6	$\Delta Z$ : #3.1/LT/LT(1,0,0,1)-direct/LT(1,0,0,1)-SOR . . . . .	133
6.7	Conditionnement : #3.1/LT(1,0,0,1)-direct/LT(1,0,0,1)-SOR . . . . .	133
6.8	Itérations : #3.1/LT(1,0,0,1)-SOR . . . . .	134
6.9	Support des fonctions <i>Loop</i> supplémentaires pour le tube. . . . .	137
6.10	$\Delta Z$ : #3.1/LT-direct/LT-SOR . . . . .	139
6.11	$\Delta Z$ : #3.2/LT-direct/LT-SOR . . . . .	139
6.12	$\Delta Z$ : #4.1/LT-direct/LT-SOR . . . . .	140
6.13	$\Delta Z$ : #4.2/LT-direct/LT-SOR . . . . .	140
6.14	Conditionnement : #3.1/#3.2/LT-direct/LT-SOR . . . . .	141
6.15	Conditionnement : #4.1/#4.2/LT-direct/LT-SOR . . . . .	141
6.16	Itérations : #3.1/LT-SOR . . . . .	142
6.17	Itérations : #3.2/LT-SOR . . . . .	142
6.18	Itérations : #4.1/LT-SOR . . . . .	143
6.19	Itérations : #4.2/LT-SOR . . . . .	143
6.20	Représentation de la configuration du cas test #4 . . . . .	144
6.21	Champs air : #4.1/LT-SOR . . . . .	145
6.22	Champs pièce : #4.1/LT-SOR . . . . .	146
6.23	Champs air : #4.2/LT-SOR . . . . .	147
6.24	Champs pièce : #4.2/LT-SOR . . . . .	148
6.25	$\Delta Z$ : #5/LT-SOR . . . . .	150
6.26	Représentation de la configuration du cas test #5 . . . . .	150
6.27	Champs pièce : #5/LT-SOR . . . . .	151
7.1	Conditionnement : #3.1/#3.2/Hiptmair-N . . . . .	163
7.2	Conditionnement : #4.1/#4.2/Hiptmair-N . . . . .	164
7.3	$\Delta Z$ : #3.1/#3.2/Hiptmair-N . . . . .	165
7.4	$\Delta Z$ : #4.1/#4.2/Hiptmair-N . . . . .	166

B.1	Sommets et arêtes sur l'élément de référence $\widehat{K}$ . . . . .	182
E.1	Maillage quadrilatéral de la sphère. . . . .	196
E.2	Maillage quadrilatéral de la plaque . . . . .	197
E.3	Maillage quadrilatéral de la barre . . . . .	198
E.4	Maillage quadrilatéral du tube . . . . .	199
E.5	Section elliptique du tube. . . . .	200

## TABLE DES FIGURES

---

# Liste des tableaux

5.1	Résumé des formulations. . . . .	114
E.1	Paramètres physiques du cas test #1.2. . . . .	195
E.2	Paramètres physiques du cas test #1.3. . . . .	195
E.3	Paramètres physiques du cas test #2.1. . . . .	196
E.4	Paramètres physiques du cas test #2.2. . . . .	196
E.5	Paramètres physiques du cas test #3.1. . . . .	197
E.6	Paramètres physiques du cas test #3.2. . . . .	197
E.7	Paramètres physiques du cas test #4.1. . . . .	198
E.8	Paramètres physiques du cas test #4.2. . . . .	198
E.9	Paramètres physiques du cas test #5. . . . .	199

## LISTE DES TABLEAUX

---

# Introduction générale

Cette étude a été dirigée par Marc Bonnet de l'Unité Mixte de Recherche "Propagation des Ondes : Étude Mathématique et Simulation" (POems) dont les trois tutelles sont le CNRS, l'ENSTA et l'INRIA. Elle a été réalisée sous l'encadrement d'Édouard Demaldent au sein du Laboratoire de Simulation et Modélisation Électromagnétique (LSME) du Département Imagerie et Simulation pour le Contrôle (DISC).

## Contexte

Le DISC est le département du CEA LIST qui développe le logiciel CIVA, une plateforme d'expertise pour le contrôle non destructif (CND). Le contrôle non destructif est l'ensemble des techniques et procédés permettant d'évaluer la santé d'une pièce ou d'une structure sans altérer son utilisation ultérieure [26]. L'évaluation de la santé d'un produit consiste en la détection et la caractérisation de ses éventuels défauts. La détection du défaut s'effectue de manière indirecte par son excitation suivie de la réception de sa réponse. Le contrôle non destructif est un élément majeur au bon fonctionnement des industries qui fabriquent, mettent en œuvre ou utilisent des matériaux, des produits ou des structures de toute nature, critiques en termes de sûreté ou de performance. Le logiciel CIVA est composé de modules de simulation, d'imagerie et d'analyse, qui permettent de concevoir et d'optimiser les méthodes d'inspection et de prédire leurs performances dans des configurations de contrôle réalistes. Actuellement les contrôles par ultrasons, radiographie/gammagraphie/tomographie X, courants de Foucault et ondes guidées sont concernés.

Le LSME est le laboratoire développant le module dédié au contrôle par méthodes électromagnétiques et plus particulièrement par courants de Foucault (CF). Le CND par CF consiste à exciter une bobine d'injection constante, le plus souvent en régime sinusoïdal, pour induire un champ électromagnétique. Lorsqu'une pièce conductrice est placée dans ce champ des courants, appelés courants de Foucault, sont induits dans la pièce. Ces derniers vont exciter le défaut qui va à son tour induire un nouveau champ électromagnétique, dit diffracté. Un capteur récepteur permet alors de mesurer le nouveau champ électromagnétique à travers la variation d'impédance. La modélisation complète d'un procédé de contrôle par CF est décomposée en trois étapes dans CIVA [44, 8]. Dans un premier temps, le champ électromagnétique induit par un capteur émetteur est calculé dans une pièce saine. Puis ce champ, dit *champ primaire*, est considéré comme une

source pour le calcul de la réponse d'un défaut. Enfin, la réponse du capteur récepteur est calculée par le théorème de réciprocité [43, 4, 22]. Aujourd'hui les modèles intégrés dans CIVA sont restreints à des pièces de géométrie canonique (calcul modal) ou axi-symétriques [41, 62]. La demande de configurations plus diverses et complexes nécessite l'introduction de nouveaux outils numériques de modélisation [56]. C'est dans ce cadre que s'inscrit cette étude dont l'objet est le calcul des champs primaires. Les pièces considérées ont une conductivité de l'ordre du kS/m au MS/m et une perméabilité relative de l'ordre de 1 à 100. Dans le contexte du CND par CF l'épaisseur de peau doit-être de l'ordre du mm, ainsi les fréquences de travail sont de l'ordre du Hz au MHz, on parle alors de basse fréquence.

## Motivations

En pratique les capteurs peuvent être constitués d'éléments aux propriétés physiques et aux formes variées. L'exemple typique est celui d'une bobine (source imposée) avec un noyau de ferrite (milieu ferromagnétique) et un blindage (milieu conducteur). Quant aux pièces à contrôler, elles sont conductrices et peuvent contenir des éléments diélectriques (comme une couche d'époxy par exemple) et magnétiques (acier par exemple). Du fait des différents matériaux présents dans une même configuration, différents régimes de modélisation (statique, quasi-statique, voire dynamique) peuvent cohabiter. Sous l'hypothèse de travail en régime linéaire dans des milieux isotropes et homogènes par morceaux, l'approche par équations intégrales surfaciques (SIE) permet de ramener le problème volumique à un problème surfacique équivalent. Cependant, les formulations usuelles pour le problème général de Maxwell souffrent d'un problème de robustesse numérique pour les cas asymptotiques, en particulier à basse fréquence. Les formulations employées sont donc généralement spécifiques aux types de régime et de milieu rencontrés. L'originalité de mes travaux de thèse est de rechercher une formulation générique pour le problème de Maxwell harmonique, adaptable à chacun des milieux d'une configuration CND. Pour cela je me suis inspirée des travaux existant pour les milieux diélectriques à basse et haute fréquences.

## Résumé des travaux effectués

### Problème basse fréquence

La formulation intégrale PMCHWT [38, 33, 39] est généralement utilisée pour résoudre le problème de transmission de Maxwell, c'est-à-dire un champ électromagnétique incident dans l'air diffracté par une pièce diélectrique ou conductrice. Mes travaux ont donc débutés par l'étude de cette formulation pour des applications CND. Le système sous-jacent est un système à deux inconnues, les densités de courant surfaciques électrique et magnétique,  $\mathbf{J} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$  et  $\mathbf{M} = \mathbf{E} \times \mathbf{n}$  respectivement, qui font intervenir les potentiels simple et double couche de Maxwell de l'air et de la pièce. Il est bien connu que le potentiel simple couche associé à l'air (intervenant sur la diagonale de la matrice

---

d'impédance) souffre d'un bruit numérique à basse fréquence. En CND, les fréquences d'inspection sont relativement basses afin de maintenir une épaisseur de peau de quelques millimètres et il est donc nécessaire de contourner la difficulté liée aux basses fréquences.

## Décomposition de Helmholtz-Hodge

Pour les milieux diélectriques, il existe des travaux permettant d'éviter cette difficulté. Le premier objectif a donc été d'adapter ces travaux aux milieux conducteurs. Le potentiel simple couche de Maxwell est la somme de deux potentiels se comportant comme  $\mathcal{O}(f)$  et  $\mathcal{O}(f^{-1})$  avec  $f$  la fréquence, pour les milieux dont le nombre d'onde est réel (l'air ou les milieux diélectriques). Le terme en  $\mathcal{O}(f)$  passe dans le bruit numérique du terme en  $\mathcal{O}(f^{-1})$  en dessous d'une certaine fréquence. Appliquer une décomposition de Helmholtz-Hodge (via les fonctions de base *Loop*, à divergence surfacique nulle, et *Tree* [16]) au système intégral permet alors de dissocier les termes du potentiel simple couche. Pour les milieux conducteurs, le potentiel simple couche associé à l'air souffre du même bruit que l'on évite par la même décomposition de Helmholtz-Hodge, on note LT cette formulation dans la suite. En revanche, les termes de la matrice d'impédance sont eux aussi d'ordres de grandeur différents lorsque la fréquence diminue ce qui provoque son mauvais conditionnement. Pour les milieux diélectriques le système peut être normalisé via un développement asymptotique du noyau de Green selon la fréquence, valide uniquement pour un nombre d'onde réel, afin d'équilibrer le système et d'améliorer son conditionnement. Pour les conducteurs la même normalisation ne peut pas être appliquée. D'une part, parce que le nombre d'onde de la pièce est complexe, on ne peut plus appliquer le développement du noyau de Green selon la fréquence. D'autre part, la matrice d'impédance est la somme de deux matrices, de potentiels associés à l'air pour l'une et à la pièce pour l'autre, dont les ordres de grandeur diffèrent pour une pièce conductrice. Quand bien même on obtiendrait une normalisation adaptée aux termes liés à la pièce, elle serait alors différente de la normalisation adaptée aux termes liés à l'air. En conclusion, le fait de séparer les termes du potentiel simple couche permet d'obtenir des résultats précis avec un solveur direct, pour des cas tests impliquant une pièce conductrice, mais le problème reste mal conditionné. Le mauvais conditionnement pourrait impacter la précision dans certains cas et interdit l'utilisation de solveurs itératifs. C'est pourquoi il est nécessaire de stabiliser le conditionnement.

## Pondération des équations relatives à l'air et à la pièce

La matrice d'impédance associée à l'air étant d'un ordre de grandeur différent de celui de la matrice liée à la pièce, il nous semblait alors nécessaire de les remettre à niveau égal comme cela est fait dans la formulation de Müller [42] et ses variantes [55, 71, 72, 75, 37], qui consistent à pondérer les équations associées à l'air et à un milieu diélectrique. Afin d'éviter, dans un premier temps, l'étude du comportement des termes liés à la pièce (dépendant de la faible fréquence et de la conductivité élevée), la pondération est choisie de telle sorte que chaque ligne de la matrice d'impédance est liée uniquement à l'air ou à la pièce. Comme précédemment, nous obtenons des résultats précis pour nos cas tests

mais la matrice d'impédance reste mal conditionnée.

### Schéma itératif par blocs

Nous disposons donc toujours d'une formulation relativement précise mais mal conditionnée, ce qui peut être un obstacle (à l'utilisation de solveurs itératifs par exemple). À ce stade il apparaît que le mauvais conditionnement est lié au problème d'échelle entre les termes de la matrice d'impédance. Nous avons alors mis en œuvre deux schémas de résolution itérative par blocs via la méthode de surrelaxation successive (SOR). Le premier schéma testé consiste à considérer deux sous problèmes liés aux deux inconnues  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$  pour la formulation pondérée. Seule la matrice liée à l'air est mal conditionnée. Comme cette matrice correspond à la matrice de l'EFIE pour les milieux parfaitement conducteurs, on peut utiliser le préconditionneur multiplicatif de Calderon (CMP) basé sur les fonctions duales de Buffa-Christiansen (fonctions BC) [9, 3, 1, 58, 70]. Ces fonctions sont *Hdiv-conformes* mais de forme semblable aux fonctions *Hcurl-conformes* et permettent d'avoir une matrice de Gram bien conditionnée dans le CMP. La méthode converge en quelques itérations pour certaines configurations mais diverge aux fréquences testées les plus basses. En effet, nous avons constaté que la matrice préconditionnée par le CMP possède un conditionnement stable selon la fréquence jusqu'à une certaine fréquence seulement. Finalement, nous avons remarqué que le conditionnement des quatre sous blocs diagonaux de la formulation LT, liés aux inconnues  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$  décomposées selon les fonctions *Loop* et *Tree*, conserve un conditionnement stable selon la fréquence pour les configurations de CND testées. C'est pourquoi nous proposons un schéma à quatre sous blocs résolu via la méthode SOR. Les résultats obtenus sont satisfaisant puisqu'ils sont précis en quelques itérations et que le conditionnement des matrices associées aux sous problèmes reste stable. Nous disposons donc maintenant d'un modèle robuste et bien conditionné pour le calcul des champs primaires dans une gamme de paramètres physiques typique du CND.

### Formulations quasi-statiques

En parallèle plusieurs formulations quasi-statiques de la littérature dédiées au modèle des courants de Foucault ont été étudiées. L'approximation quasi-statique est l'approximation du modèle de Maxwell en régime basse fréquence pour les pièces de forte conductivité. Sous cette approximation, la permittivité diélectrique est considérée nulle dans la pièce et dans l'air. Il existe des formulations du modèle courants de Foucault [52] souvent rencontrées dans la littérature appliquée et pour lesquelles une ou deux inconnues supplémentaires (la composante normale des champs électrique et/ou magnétique) sont introduites. L'ajout de ces inconnues est lié au fait que, lorsque la permittivité diélectrique est nulle, il n'est plus permis d'effectuer certaines simplifications des formules de représentation intégrale. Ces formulations donnent des résultats précis pour un nombre plus restreint de configurations testées que la formulation LT. Une autre formulation pour le modèle courants de Foucault, proposée par Hiptmair [35, 34], revient à supprimer certains termes du système LT. Cette suppression traduit l'hypothèse de divergence

---

surfacique nulle de la densité de courant électrique  $\mathbf{J}$ . Nous obtenons des résultats similaires, en terme de précision et de conditionnement, aux résultats que nous avons pour la formulation LT dans des configurations CF.

## Développement asymptotique

Les derniers temps de la thèse ont été consacrés à débiter une étude asymptotique du problème intégral de Maxwell [6, 25, 14]. Les premiers résultats de cette étude permettent d'établir que la formulation courants de Foucault proposée par Hiptmair correspond au premier ordre du développement asymptotique de la formulation LT. Ces résultats m'ont permis de définir une normalisation adaptée de la matrice de la formulation Hiptmair et l'on dispose cette fois d'une formulation basée sur le problème courants de Foucault bien conditionnée.

## Plan du manuscrit

Le manuscrit contient trois parties et sept chapitres.

La première partie du manuscrit se décompose en trois chapitres dédiés à la présentation des équations intégrales de l'électromagnétisme. Le premier chapitre présente le problème de transmission de Maxwell et les différents modèles qui le décrivent. Le deuxième chapitre présente les éléments théoriques nécessaires pour poser les problèmes intégraux surfaciques associés aux modèles du premier chapitre. Ces problèmes, ainsi que le problème courants de Foucault, sont présentés dans le troisième chapitre.

La deuxième partie se décompose en trois chapitres, présentant la recherche d'un système intégral adapté aux applications du CND par CF. Le premier chapitre présente la discrétisation des différents problèmes intégraux surfaciques présentés dans la première partie. Le deuxième chapitre présente le problème lié aux basses fréquences, la décomposition de Helmholtz-Hodge qui permet de l'éviter ainsi que la formulation de Hiptmair qui peut se déduire de la décomposition présentée. Puis, il présente la pondération des interactions liées à l'air et à la pièce ainsi que les formulations classiquement dédiées au modèle courants de Foucault qui découpent ces interactions. Le troisième chapitre présente les schémas itératifs par blocs basés sur une décomposition liée à la physique du problème. Cette partie est étayée par des résultats numériques commentés.

La dernière partie contient un chapitre présentant les premiers résultats de l'analyse asymptotique des problèmes intégraux présentés. L'ensemble des travaux présentés dans le manuscrit a été implémenté dans une maquette Matlab, à l'exception des fonctions BC qui étaient déjà disponible dans le code SIE du LSME.



Première partie

Introduction aux équations  
intégrales de l'électromagnétisme



# Chapitre 1

## Le système de Maxwell pour un problème de transmission

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Système de Maxwell dans un milieu linéaire isotrope . . . . .</b>	<b>11</b>
1.1.1	Équations de Maxwell . . . . .	11
1.1.2	Relations de comportement . . . . .	11
1.1.3	Système de Maxwell harmonique . . . . .	12
1.1.4	Notation des paramètres physiques . . . . .	12
1.1.5	Unités des grandeurs du système de Maxwell . . . . .	14
1.1.6	Condition de rayonnement à l'infini . . . . .	14
1.1.7	Loi de Biot-Savart . . . . .	15
1.1.8	Onde plane . . . . .	15
<b>1.2</b>	<b>Problème de diffraction . . . . .</b>	<b>16</b>
1.2.1	Hypothèses . . . . .	16
1.2.2	Champs incidents, diffractés et totaux . . . . .	16
1.2.3	Conditions de transmission . . . . .	18
<b>1.3</b>	<b>Les modèles traités . . . . .</b>	<b>19</b>
1.3.1	Le problème de Maxwell . . . . .	19
1.3.2	L'approximation courants de Foucault . . . . .	21
<b>1.4</b>	<b>Synthèse . . . . .</b>	<b>24</b>

---

Ce chapitre présente le problème de diffraction électromagnétique. L'étude est restreinte aux milieux isotropes en régime linéaire et harmonique. Après un rappel des lois fondamentales de l'électromagnétisme que les équations de Maxwell synthétisent, le problème de diffraction d'un champ électromagnétique par une pièce homogène dont les paramètres physiques sont constants est présenté. Puis les modèles à traiter sont donnés. Ces modèles correspondent à des configurations rencontrées en CND par CF et sont de deux types. Le premier correspond au problème de Maxwell complet pour la diffraction par un milieu diélectrique ou conducteur, qui peut-être magnétique. Le second correspond à l'approximation quasi-statique valide sous certaines hypothèses pour les milieux

conducteurs contrôlés à basse fréquence. L'approximation quasi-statique est valable pour la plupart des applications visées tandis que le problème de Maxwell complet est plus général.

## 1.1 Système de Maxwell dans un milieu linéaire isotrope

### 1.1.1 Équations de Maxwell

Soient  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$  la variable d'espace et  $t \in \mathbb{R}_+$  la variable de temps. On se place dans un ouvert, borné ou non,  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Les équations de Maxwell pour tout  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$  sont données par

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{x}, t), \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) &= \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{J}(\mathbf{x}, t), \\ \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= \rho_e(\mathbf{x}, t), \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= 0, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

avec  $\mathbf{E}$  le champ électrique,  $\mathbf{H}$  le champ magnétique,  $\mathbf{D}$  le champ d'induction électrique,  $\mathbf{B}$  le champ d'induction magnétique,  $\mathbf{J}$  la densité de courant électrique et  $\rho_e$  la densité volumique de charges électriques. Ces équations traduisent le fait qu'en présence d'une densité de courant ou de charge électrique des champs électrique et magnétique sont induits.

### 1.1.2 Relations de comportement

Les champs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$ , les champs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  ainsi que la densité de courant  $\mathbf{J}$  et le champ  $\mathbf{E}$  sont liés par une relation de comportement. Dans un milieu linéaire et isotrope <sup>1</sup> ces relations sont, pour tout  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon^d(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \mu(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= \sigma(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{x}, t), \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{J}_{\text{inc}}$  la densité de courant électrique source imposée (par une bobine en général),  $\varepsilon^d$  la permittivité diélectrique,  $\mu$  la perméabilité magnétique et  $\sigma$  la conductivité électrique. Les paramètres physiques vérifient

$$\begin{aligned} 0 &< \varepsilon^d(\mathbf{x}) < \infty, \\ 0 &< \mu(\mathbf{x}) < \infty, \\ 0 &\leq \sigma(\mathbf{x}) < \infty. \end{aligned}$$

La densité de courant source imposée  $\mathbf{J}_{\text{inc}}$  est imposée à support compact dans  $\Omega_{\text{inc}} \subset \Omega$  et telle que, pour tout  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$ ,

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

---

1. Dans un milieu linéaire anisotrope,  $\mathbf{D} = \underline{\underline{\varepsilon}}\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \underline{\underline{\mu}}\mathbf{H}$  et  $\mathbf{J} = \underline{\underline{\sigma}}\mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{inc}}$  où  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  est le tenseur permittivité diélectrique,  $\underline{\underline{\mu}}$  est le tenseur perméabilité magnétique et  $\underline{\underline{\sigma}}$  est le tenseur conductivité électrique. Un tenseur  $\underline{\underline{T}}$  d'ordre 2 est défini par  $\underline{\underline{T}} = \Sigma_{ij} T^{ij} (a_i \otimes a_j)$ . La multiplication d'un tenseur  $\underline{\underline{T}}$  par un champ vectoriel  $\underline{u}$  est donnée par  $\underline{\underline{T}}\underline{u} = \Sigma_i (\Sigma_j T^{ij} u_j) a_i$  pour  $\underline{u} = \Sigma_j u_j a^j$  avec  $a_i \cdot a^j = \delta_{ij}$ . ( $\{a_i\}$  est la base des vecteurs covariants et  $\{a^j\}$  la base des vecteurs contravariants.)

On suppose de plus (cette condition n'est pas nécessaire en toute généralité) que, pour tout  $(\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_{\text{inc}} \times \mathbb{R}_+$ ,

$$\mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega_{\text{inc}}}(\mathbf{x}) = 0$$

où  $\mathbf{n}_{\partial\Omega_{\text{inc}}}$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega_{\text{inc}}$  sur  $\partial\Omega_{\text{inc}}$ .

### 1.1.3 Système de Maxwell harmonique

On impose que  $\mathbf{J}_{\text{inc}}$  soit harmonique, de pulsation  $\omega = 2\pi f$  fixée pour une fréquence  $f$  strictement positive. Sous la convention  $s := \pm 1$ , les champs s'écrivent  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \Re(\mathbf{U}(\mathbf{x}) \cdot \exp(s i \omega t))$ . La composante spatiale  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  de  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$  sera généralement notée  $\mathbf{U}$  par la suite. Le système de Maxwell (1.1.1) s'écrit alors sous forme harmonique, pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) + s i \omega \mu(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x}) = 0, \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}) - s i \omega \left( \varepsilon^d(\mathbf{x}) - s i \frac{\sigma(\mathbf{x})}{\omega} \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{x}), \\ \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \rho_e(\mathbf{x}), \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

On se donne, de plus, l'équation de conservation de la charge

$$s i \omega \rho_e(\mathbf{x}) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0. \quad (1.1.3)$$

### 1.1.4 Notation des paramètres physiques

Dans le vide, la perméabilité et la permittivité sont respectivement données par

$$\begin{aligned} \mu_0 &:= 4\pi \cdot 10^{-7}, \\ \varepsilon_0 &:= \frac{1}{\mu_0 c_0^2} \simeq \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}, \end{aligned}$$

où

$$c_0 := 299792458$$

est la célérité du vide. À partir de ces paramètres on définit deux nouvelles grandeurs qui sont le nombre d'onde du vide

$$\kappa_0 := \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$$

et l'impédance d'onde du vide

$$\eta_0 := \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}.$$

Dans un milieu quelconque, la perméabilité et la permittivité diélectrique sont respectivement définies par

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{x}) &:= \mu_0 \mu_r(\mathbf{x}), \quad \mu_r(\mathbf{x}) \geq 1, \\ \varepsilon^d(\mathbf{x}) &:= \varepsilon_0 \varepsilon_r^d(\mathbf{x}), \quad \varepsilon_r^d(\mathbf{x}) \geq 1, \end{aligned}$$

avec  $\mu_r$  la perméabilité relative et  $\varepsilon_r^d$  la permittivité diélectrique relative. On définit de plus la permittivité complexe par

$$\varepsilon(\mathbf{x}) := \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{x}) = \varepsilon^d(\mathbf{x}) - si \frac{\sigma(\mathbf{x})}{\omega},$$

avec  $\varepsilon_r$  la permittivité complexe relative. Finalement, le nombre et l'impédance d'onde sont respectivement définis par

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{x}) &:= \omega \sqrt{\mu(\mathbf{x}) \varepsilon(\mathbf{x})} = \kappa_0 \sqrt{\mu_r(\mathbf{x}) \varepsilon_r(\mathbf{x})}, \\ \eta(\mathbf{x}) &:= \sqrt{\frac{\mu(\mathbf{x})}{\varepsilon(\mathbf{x})}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r(\mathbf{x})}{\varepsilon_r(\mathbf{x})}}. \end{aligned}$$

**Remarque 1.1.1.** *Dans la littérature le terme permittivité peut désigner la permittivité diélectrique ou la permittivité complexe. On trouvera par exemple la notation  $\varepsilon$  pour la permittivité diélectrique.*

On distingue différents types de matériaux en fonction de la valeur de la conductivité et de la permittivité :

1. Lorsque  $\sigma(\mathbf{x}) = 0$  et  $\varepsilon^d(\mathbf{x}) > \varepsilon_0$ , on dit que le milieu est diélectrique et la permittivité complexe est réelle et égale à la permittivité diélectrique.
2. Lorsque  $\mu(\mathbf{x}) \gg \mu_0$ , on dit que le milieu est ferromagnétique.
3. Lorsque  $\sigma(\mathbf{x}) > 0$ , on dit que le milieu est conducteur.

Pour les milieux conducteurs, on définit alors l'épaisseur de peau

$$\delta(\mathbf{x}) := \sqrt{\frac{2}{\omega \mu(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{x})}}$$

qui détermine la distance à l'interface où se concentre le courant dans le conducteur. Plus la conductivité est élevée plus l'épaisseur de peau est faible et donc plus l'amplitude du champ électrique décroît rapidement dans le conducteur à partir de sa surface. On dit alors qu'il y a atténuation, par opposition aux milieux diélectriques où le courant n'est pas concentré dans une zone.

### 1.1.5 Unités des grandeurs du système de Maxwell

Nom	Notation	Unité	Expression en unité SI
Champ électrique	$\mathbf{E}$	$\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-3}$
Champ magnétique	$\mathbf{H}$	$\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$	$\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$
Champ d'induction électrique	$\mathbf{D}$	$\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$	$\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$
Champ d'induction magnétique	$\mathbf{B}$	T	$\text{kg} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Densité de courant électrique	$\mathbf{J}$	$\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$	$\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$
Densité volumique de charges électriques	$\rho_e$	$\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$	$\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$
Permittivité (diélectrique ou complexe)	$\varepsilon$	$\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Perméabilité magnétique	$\mu$	$\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Conductivité électrique	$\sigma$	$\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Pulsation	$\omega$	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	$\text{m}^0 \cdot \text{s}^{-1}$
Fréquence	$f$	Hz	$\text{s}^{-1}$
Nombre d'onde	$\kappa$	$\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$	$\text{m}^0 \cdot \text{m}^{-1}$
Impédance d'onde	$\eta$	$\Omega$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-3}$
Épaisseur de peau	$\delta$	m	m
Célérité	$c$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

### 1.1.6 Condition de rayonnement à l'infini

Lorsque  $\Omega$  est un milieu non borné, les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  satisfont la condition de rayonnement à l'infini [23, def. 6.5], dite de Silver-Müller, définie de manière équivalente par

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} (|\mathbf{x}|\mathbf{E}(\mathbf{x}) - \mathbf{H}(\mathbf{x}) \times \mathbf{x}) = 0 \quad (1.1.4)$$

ou

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} (|\mathbf{x}|\mathbf{H}(\mathbf{x}) + \mathbf{E}(\mathbf{x}) \times \mathbf{x}) = 0. \quad (1.1.5)$$

Les champs électromagnétiques respectant cette condition sont dits *rayonnants*, c'est-à-dire qu'ils sont à énergie finie. D'après [23, thm. 6.6], cela implique que les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  satisfont respectivement les conditions de décroissance

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \quad (1.1.6)$$

et

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty. \quad (1.1.7)$$

**Remarque 1.1.2.** *On introduira dans la suite des champs artificiels, les ondes planes, qui ne sont plus physiques dans le sens où ils ne sont pas rayonnants.*

### 1.1.7 Loi de Biot-Savart

Dans  $\Omega$ , si  $\mu$  et  $\varepsilon^d$  sont constants et si  $\sigma$  est nul alors les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  se calculent selon la loi de Biot-Savart à partir de la densité de courant  $\mathbf{J}_{\text{inc}}$  [18]. Sous les hypothèses  $\nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{inc}} = 0$  et  $\mathbf{J}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega_{\text{inc}}} = 0$ , les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont donnés par

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -si\omega\mu \int_{\Omega_{\text{inc}}} \mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{x}') \frac{\exp(-si\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}', \quad (1.1.8)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \nabla \times \int_{\Omega_{\text{inc}}} \mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{x}') \frac{\exp(-si\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'. \quad (1.1.9)$$

Par abus d'écriture, on notera  $\mathbf{E} = \mathcal{BS}(\mathbf{J}_{\text{inc}})$ ,  $\mathbf{H} = \mathcal{BS}(\mathbf{J}_{\text{inc}})$  ou encore  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \mathcal{BS}(\mathbf{J}_{\text{inc}})$ . Les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  ainsi définis vérifient le système harmonique homogène de Maxwell (1.1.2) et sont rayonnants.

### 1.1.8 Onde plane

Dans  $\Omega$ , si  $\mu$  et  $\varepsilon^d$  sont constants et si  $\sigma$  et  $\mathbf{J}_{\text{inc}}$  sont nuls, une solution particulière non rayonnante de (1.1.2) est l'onde plane caractérisée par :

- le nombre d'onde  $\kappa$  du milieu  $\Omega$  ;
- la direction de l'onde  $\hat{\kappa}(\phi, \theta)$  donnée par

$$\hat{\kappa}(\phi, \theta) = -(\hat{x} \cos \phi \sin \theta + \hat{y} \sin \phi \sin \theta + \hat{z} \cos \theta),$$

où  $\phi \in [0, 2\pi[$  et  $\theta \in [0, \pi]$  ;

- la polarisation de l'onde  $\hat{E}(E^\phi, E^\theta)$  donnée par

$$\begin{bmatrix} \hat{E}^x \\ \hat{E}^y \\ \hat{E}^z \end{bmatrix} = E^\theta \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{bmatrix} + E^\phi \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix},$$

où  $(E^\phi)^2 + (E^\theta)^2 = 1$  et  $-1 \leq E^\phi, E^\theta \leq 1$ , [67]. Si  $E^{\theta/\phi} = 1$  alors on parle de polarisation  $\theta/\phi$ .

Sous ces notations, l'onde plane s'exprime

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \hat{E} \exp(-si\kappa\hat{\kappa} \cdot \mathbf{x}), \quad (1.1.10)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \eta^{-1} \hat{\kappa} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}). \quad (1.1.11)$$

Par abus d'écriture, on notera  $\mathbf{E} = \mathcal{OP}(\hat{E}, \hat{\kappa})$ ,  $\mathbf{H} = \mathcal{OP}(\hat{E}, \hat{\kappa})$  ou encore  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \mathcal{OP}(\hat{E}, \hat{\kappa})$ . Les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  ainsi définis vérifient le système de Maxwell harmonique (1.1.2) avec  $\mathbf{J}_{\text{inc}} = 0$  mais ne sont pas rayonnants.

## 1.2 Problème de diffraction

Considérons maintenant les configurations de CND par CF devant être modélisées dans cette étude, une bobine simple contrôlant une pièce conductrice pouvant être magnétique. Il s'agit d'un problème de diffraction électromagnétique, la bobine excitée agit comme une source qui induit des champs électromagnétiques dans l'air qui sont diffractés par un milieu conducteur (la pièce). Dans cette partie nous donnons les équations de Maxwell associées à ce problème.

### 1.2.1 Hypothèses

Dans toute la section 1.2 on se place sous les hypothèses :

- (H0)** On considère  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^3$  un polyèdre lipschitzien ouvert et borné ainsi que son complémentaire  $\Omega_0 := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_1}$ . On suppose que la surface  $\Gamma := \partial\Omega_1$  est compacte et équipée de la normale unitaire extérieure  $\mathbf{n} \in \mathbf{L}^\infty(\Gamma)$ . La configuration est représentée sur la Figure 1.1.
- (H1)** On suppose que la permittivité diélectrique, la perméabilité magnétique et la conductivité électrique sont constantes, positives et non infinies dans  $\Omega_1$  ( $\varepsilon^d = \varepsilon_1^d$ ,  $\mu = \mu_1$  et  $\sigma = \sigma_1$ ) et on assimile  $\Omega_0$  au vide ( $\mu = \mu_0$ ,  $\varepsilon^d = \varepsilon_0$  et  $\sigma = 0$ ).

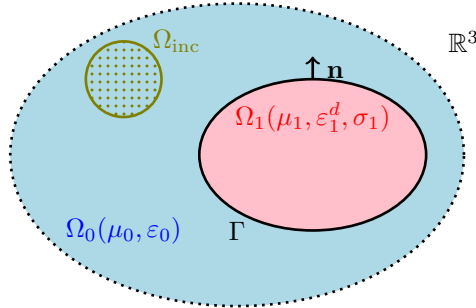


FIGURE 1.1 – Domaines  $\Omega_0$ ,  $\Omega_1$  et  $\Omega_{inc}$ .

### 1.2.2 Champs incidents, diffractés et totaux

Dans cette partie, on définit dans un premier temps les champs incidents, diffractés et totaux lorsque la source est physique, typiquement une bobine excitée. Ensuite, on se place dans le cas des ondes planes incidentes qui permettent le calcul de la section efficace radar qui est un outil classique de validation.

### Source physique

On se place sous l'hypothèse :

**(H2a)** On impose une densité de courant électrique source à support compact dans  $\Omega_{\text{inc}} \subset \Omega_0$  vérifiant  $\nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{inc}} = 0$  et  $\mathbf{J}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega_{\text{inc}}} = 0$  avec  $\Omega_{\text{inc}} \neq \emptyset$  et  $\partial\Omega_{\text{inc}} \cap \partial\Omega_1 = \emptyset$ .

Les champs incidents sont les champs induits par  $\mathbf{J}_{\text{inc}}$  lorsque tout  $\mathbb{R}^3$  est assimilé au vide. Ces champs sont définis par

$$(\mathbf{E}_{\text{inc}}, \mathbf{H}_{\text{inc}}) = \mathcal{BS}^0(\mathbf{J}_{\text{inc}}) \quad \text{dans } \mathbb{R}^3,$$

où l'exposant 0 signifie que les paramètres physiques  $\mu$  et  $\kappa$  utilisés dans (1.1.8) et (1.1.9) sont les paramètres associés au vide, et vérifient le système non homogène

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_{\text{inc}} + si\omega\mu_0\mathbf{H}_{\text{inc}} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H}_{\text{inc}} - si\omega\varepsilon_0\mathbf{E}_{\text{inc}} = \mathbf{J}_{\text{inc}} \end{cases} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad (1.2.1)$$

ainsi que la condition de Silver-Müller (1.1.4) ou (1.1.5). On note respectivement  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$  les champs totaux, électrique et magnétique, dans  $\mathbb{R}^3$  qui vérifient

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_{\text{tot}} + si\omega\mu\mathbf{H}_{\text{tot}} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H}_{\text{tot}} - si\omega\varepsilon\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{J}_{\text{inc}} \end{cases} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad (1.2.2)$$

ainsi que la condition de Silver-Müller (1.1.4) ou (1.1.5). Ce système est homogène dans  $\Omega_1$  (car  $\mathbf{J}_{\text{inc}}$  est à support dans  $\Omega_{\text{inc}} \subset \Omega_0$ ) mais non homogène dans  $\Omega_0$ . Notons que d'après l'hypothèse **(H1)**, les paramètres physiques  $\mu$  et  $\varepsilon$  ne sont pas constants dans tout  $\mathbb{R}^3$  mais le sont dans  $\Omega_0$  et dans  $\Omega_1$ . On appelle champs diffractés les champs  $\mathbf{E}_{\text{d}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{d}}$  définis par

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{\text{d}} = \mathbf{E}_{\text{tot}} - \mathbf{E}_{\text{inc}} \\ \mathbf{H}_{\text{d}} = \mathbf{H}_{\text{tot}} - \mathbf{H}_{\text{inc}} \end{cases} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3. \quad (1.2.3)$$

Ces champs vérifient

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_{\text{d}} + si\omega\mu_0\mathbf{H}_{\text{d}} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H}_{\text{d}} - si\omega\varepsilon_0\mathbf{E}_{\text{d}} = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_0 \quad (1.2.4)$$

et

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_{\text{d}} + si\omega\mu_1\mathbf{H}_{\text{d}} = si\omega(\mu_0 - \mu_1)\mathbf{H}_{\text{inc}} \\ \nabla \times \mathbf{H}_{\text{d}} - si\omega\varepsilon_1\mathbf{E}_{\text{d}} = -si\omega(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\mathbf{H}_{\text{inc}} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (1.2.5)$$

ainsi que la condition de Silver-Müller (1.1.4) ou (1.1.5).

Lorsque l'on souhaite travailler avec des systèmes homogènes, on choisit comme inconnues les champs  $\mathbf{E}_{\text{d}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{d}}$  dans  $\Omega_0$  et les champs  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$  dans  $\Omega_1$ .

### Onde plane incidente

On se place sous l'hypothèse :

**(H2b)** Les champs incidents sont des ondes planes, c'est-à-dire que les champs incidents sont obtenus via  $(\mathbf{E}_{\text{inc}}, \mathbf{H}_{\text{inc}}) = \mathcal{OP}^0(\hat{E}, \hat{k})$  où l'exposant 0 signifie que les paramètres physiques  $\eta$  et  $\kappa$  utilisés dans (1.1.10) et (1.1.11) sont les paramètres associés au vide. Dans ce cas on impose  $\mathbf{J}_{\text{inc}} = 0$ .

Ces champs incidents artificiels ne vérifient pas la condition de Silver-Müller (1.1.4) ou (1.1.5) mais vérifient le problème (1.2.1) qui est homogène puisque  $\mathbf{J}_{\text{inc}} = 0$ . Les champs totaux ne vérifient pas non plus la condition de radiation à l'infini mais vérifient le problème homogène (1.2.2). En revanche, les champs diffractés définis par (1.2.3) vérifient la condition de radiation à l'infini ainsi que les problèmes (1.2.4) et (1.2.5).

Lorsque les champs incidents sont des ondes planes il est nécessaire de choisir pour inconnues les champs  $\mathbf{E}_d$  et  $\mathbf{H}_d$  dans  $\Omega_0$  puisque la condition de Silver-Müller est nécessaire pour poser le problème des équations intégrales surfaciques. Pour avoir un problème homogène on choisit généralement comme inconnues dans  $\Omega_1$  les champs  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$ .

#### 1.2.3 Conditions de transmission

Les hypothèses **(H1)**, **(H2a)** et **(H2b)** impliquent qu'il n'y a pas de charge ou de courant électrique et magnétique à la surface  $\Gamma$ . Par conséquent [59, chap. I], les champs totaux  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$  vérifient les conditions de transmission, à la surface  $\Gamma$ ,

$$(\mathbf{E}_{\text{tot}}^0 - \mathbf{E}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = 0, \quad (1.2.6)$$

$$(\mathbf{H}_{\text{tot}}^0 - \mathbf{H}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = 0, \quad (1.2.7)$$

$$(\varepsilon_0 \mathbf{E}_{\text{tot}}^0 - \varepsilon_1 \mathbf{E}_{\text{tot}}^1) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (1.2.8)$$

$$(\mu_0 \mathbf{H}_{\text{tot}}^0 - \mu_1 \mathbf{H}_{\text{tot}}^1) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (1.2.9)$$

L'exposant 0 (respectivement 1) signifie que l'on considère le champ pris à la surface  $\Gamma$  du côté  $\Omega_0$  (respectivement  $\Omega_1$ ). De même, les champs incidents  $\mathbf{E}_{\text{inc}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{inc}}$  vérifient les conditions de transmission, à la surface  $\Gamma$ ,

$$(\mathbf{E}_{\text{inc}}^0 - \mathbf{E}_{\text{inc}}^1) \times \mathbf{n} = 0, \quad (1.2.10)$$

$$(\mathbf{H}_{\text{inc}}^0 - \mathbf{H}_{\text{inc}}^1) \times \mathbf{n} = 0, \quad (1.2.11)$$

$$(\varepsilon_0 \mathbf{E}_{\text{inc}}^0 - \varepsilon_1 \mathbf{E}_{\text{inc}}^1) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (1.2.12)$$

$$(\mu_0 \mathbf{H}_{\text{inc}}^0 - \mu_1 \mathbf{H}_{\text{inc}}^1) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (1.2.13)$$

ou plus simplement,  $\mathbf{E}_{\text{inc}}^0 = \mathbf{E}_{\text{inc}}^1$  et  $\mathbf{H}_{\text{inc}}^0 = \mathbf{H}_{\text{inc}}^1$  sur  $\Gamma$ . En effet les champs incidents correspondent aux champs solutions dans l'espace libre et sont donc continus à la surface  $\Gamma$ .

**Remarque 1.2.1.** La condition (1.2.7) n'est plus vérifiée si la conductivité  $\sigma$  est considérée comme infinie (voir annexe A). Tandis que la condition (1.2.8) est vraie puisque l'équation de conservation de la charge (1.1.3) implique que  $\rho_e(\mathbf{x}) = 0$  (car  $\nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{x}) = 0$  selon **(H2a)** et **(H2b)**).

### 1.3 Les modèles traités

À partir des systèmes d'équations de Maxwell, des conditions de transmission ainsi que de la condition de rayonnement à l'infini, il est possible de poser le modèle de la diffraction des ondes électromagnétiques par un milieu homogène, linéaire et isotrope. Ce modèle constitue le problème que l'on doit résoudre. Deux cas sont distingués. Le premier sera simplement appelé *problème de Maxwell* ; il s'agit du modèle classique pour les hypothèses **(H0)**, **(H1)** et **(H2a)** ou **(H2b)**. Le second correspond à l'approximation dite *courants de Foucault* qui constitue une simplification du problème de Maxwell sous certaines hypothèses que l'on précisera.

#### 1.3.1 Le problème de Maxwell

Le problème de Maxwell peut se poser en terme de champ électrique ou en terme de champ magnétique, sous la forme d'un problème homogène ou non. On obtient ainsi quatre problèmes équivalents.

##### Le problème non homogène

Plaçons-nous sous les hypothèses **(H0)**, **(H1)** et **(H2a)**, les champs totaux, électrique  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  et magnétique  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$ , vérifient (1.2.2). Multiplions la première ligne de (1.2.2) par  $\mu^{-1}$ , puis appliquons l'opérateur rotationnel et enfin substituons la deuxième ligne de (1.2.2). On obtient l'équation des ondes du second ordre en champ électrique

$$\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{\text{tot}} - \omega^2 \varepsilon \mathbf{E}_{\text{tot}} = -si\omega \mathbf{J}_{\text{inc}} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3$$

et comme  $\mu_\ell$  est constant dans  $\Omega_\ell$ ,  $\ell \in \{0,1\}$ , on peut écrire

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_{\text{tot}} - \kappa_\ell^2 \mathbf{E}_{\text{tot}} = -si\omega \mu_\ell \mathbf{J}_{\text{inc}} \quad \text{dans } \Omega_\ell. \quad (1.3.1)$$

De même, multiplions la deuxième ligne de (1.2.2) par  $\varepsilon^{-1}$ , appliquons l'opérateur rotationnel et substituons la première ligne de (1.2.2). On obtient l'équation des ondes du second ordre en champ magnétique

$$\nabla \times \varepsilon^{-1} \nabla \times \mathbf{H}_{\text{tot}} - \omega^2 \mu \mathbf{H}_{\text{tot}} = \nabla \times (\varepsilon^{-1} \mathbf{J}_{\text{inc}}) \quad \text{dans } \mathbb{R}^3$$

et comme  $\varepsilon_\ell$  est constant dans  $\Omega_\ell$ ,  $\ell \in \{0,1\}$ , on peut écrire

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_{\text{tot}} - \kappa_\ell^2 \mathbf{H}_{\text{tot}} = \nabla \times \mathbf{J}_{\text{inc}} \quad \text{dans } \Omega_\ell. \quad (1.3.2)$$

Les champs  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$  vérifient respectivement les conditions de transmission (1.2.6) et (1.2.7). Ces conditions peuvent s'écrire en terme de champ magnétique et électrique, respectivement, à partir de (1.2.2) :

$$(\mathbf{H}_{\text{tot}}^0 - \mathbf{H}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \Leftrightarrow (\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{\text{tot}}^0 - \mu_1^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad (1.3.3)$$

$$(\mathbf{E}_{\text{tot}}^0 - \mathbf{E}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \Leftrightarrow (\varepsilon_0^{-1} \nabla \times \mathbf{H}_{\text{tot}}^0 - \varepsilon_1^{-1} \nabla \times \mathbf{H}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (1.3.4)$$

Les équations des ondes du second ordre, les conditions de transmission ainsi que les conditions de radiations à l'infini (1.1.6) et (1.1.7) vérifiées par les champs totaux électriques et magnétiques nous permettent d'écrire le problème harmonique de Maxwell en champ électrique,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_{\text{tot}} - \kappa^2 \mathbf{E}_{\text{tot}} = -s i \omega \mu \mathbf{J}_{\text{inc}} & \text{dans } \Omega_0 \cup \Omega_1, \\ (\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{\text{tot}}^0 - \mu_1^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ (\mathbf{E}_{\text{tot}}^0 - \mathbf{E}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty, & \end{array} \right. \quad (1.3.5)$$

ou en champ magnétique,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_{\text{tot}} - \kappa^2 \mathbf{H}_{\text{tot}} = \nabla \times \mathbf{J}_{\text{inc}} & \text{dans } \Omega_0 \cup \Omega_1, \\ (\varepsilon_0^{-1} \nabla \times \mathbf{H}_{\text{tot}}^0 - \varepsilon_1^{-1} \nabla \times \mathbf{H}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ (\mathbf{H}_{\text{tot}}^0 - \mathbf{H}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{H}_{\text{tot}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty. & \end{array} \right. \quad (1.3.6)$$

Après la résolution du problème de Maxwell en champ électrique, respectivement magnétique, on peut obtenir le champ magnétique, respectivement électrique, via les relations (1.2.2). Ces deux problèmes ne sont plus vérifiés sous les hypothèses **(H0)**, **(H1)** et **(H2b)**, c'est-à-dire lorsque la source est une onde plane, puisque les champs  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$  ne vérifient plus les conditions de radiation à l'infini. On doit alors résoudre le problème de Maxwell homogène.

### Le problème homogène

On se place maintenant sous les hypothèses **(H0)**, **(H1)** et **(H2a)** ou **(H2b)**. Dans  $\Omega_1$ , on choisit les champs totaux comme inconnues et on obtient les mêmes résultats que pour le problème non homogène. Dans  $\Omega_0$  en revanche, on choisit les champs diffractés  $\mathbf{E}_d$  et  $\mathbf{H}_d$  comme inconnues. Les champs diffractés sont définis par (1.2.3) et vérifient (1.2.4). Par le même raisonnement que pour les champs totaux du problème non homogène on obtient l'équation des ondes du second ordre en champ électrique et en champ magnétique :

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_d - \kappa_0^2 \mathbf{H}_d &= 0 \quad \text{dans } \Omega_0, \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_d - \kappa_0^2 \mathbf{E}_d &= 0 \quad \text{dans } \Omega_0. \end{aligned}$$

Par définition des champs diffractés, les conditions de transmission (1.3.3) et (1.3.4) s'écrivent respectivement,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{H}_d^0 - \mathbf{H}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} &= -\mathbf{H}_{\text{inc}}^0 \times \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma \\
 &\Leftrightarrow (\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_d^0 - \mu_1^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = -(\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{\text{inc}}^0) \times \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma, \\
 (\mathbf{E}_d^0 - \mathbf{E}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} &= -\mathbf{E}_{\text{inc}}^0 \times \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma \\
 &\Leftrightarrow (\varepsilon_0^{-1} \nabla \times \mathbf{H}_d^0 - \varepsilon_1^{-1} \nabla \times \mathbf{H}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = -(\varepsilon_0^{-1} \nabla \times \mathbf{H}_{\text{inc}}^0) \times \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma.
 \end{aligned}$$

Finalement, les champs diffractés  $\mathbf{E}_d$  et  $\mathbf{H}_d$  vérifient respectivement les conditions de radiation à l'infini (1.1.6) et (1.1.7) et on peut poser le problème homogène harmonique de Maxwell en champ électrique,

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_d - \kappa_0^2 \mathbf{E}_d = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\
 \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_{\text{tot}} - \kappa_1^2 \mathbf{E}_{\text{tot}} = 0 & \text{dans } \Omega_1, \\
 (\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_d^0 - \mu_1^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = -(\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{\text{inc}}^0) \times \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma, \\
 (\mathbf{E}_d^0 - \mathbf{E}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = -\mathbf{E}_{\text{inc}}^0 \times \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma, \\
 \mathbf{E}_d = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty, &
 \end{array} \right. \quad (1.3.7)$$

ainsi que le problème homogène harmonique de Maxwell en champ magnétique,

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_d - \kappa_0^2 \mathbf{H}_d = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\
 \nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_{\text{tot}} - \kappa_1^2 \mathbf{H}_{\text{tot}} = 0 & \text{dans } \Omega_1, \\
 (\varepsilon_0^{-1} \nabla \times \mathbf{H}_d^0 - \varepsilon_1^{-1} \nabla \times \mathbf{H}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = -(\varepsilon_0^{-1} \nabla \times \mathbf{H}_{\text{inc}}^0) \times \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma, \\
 (\mathbf{H}_d^0 - \mathbf{H}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = -\mathbf{H}_{\text{inc}}^0 \times \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma, \\
 \mathbf{H}_d = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty. &
 \end{array} \right. \quad (1.3.8)$$

Comme pour le problème non homogène, après la résolution du problème de Maxwell en champ électrique, respectivement magnétique, on peut obtenir le champ magnétique, respectivement électrique, via (1.2.2) et (1.2.4).

### 1.3.2 L'approximation courants de Foucault

À basse fréquence, lorsque la conductivité du milieu est élevée, ce qui est le cas des conducteurs en général, et que la taille caractéristique de  $\Omega_1$ , notée  $L$ , est petite devant la longueur de l'onde dans le vide  $\lambda_0 = \frac{c_0}{f}$ , on peut négliger le courant de déplacement dans les équations de Maxwell et ainsi se ramener à l'approximation quasi-statique. On se place sous les hypothèses **(H0)**, **(H1)** et **(H2a)**, auxquelles on ajoute l'hypothèse :

(H3) Les paramètres adimensionnels  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  vérifient

$$\gamma_1 := \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma_1}} \ll 1 \quad (1.3.9)$$

et

$$\gamma_2 := L\sqrt{\sigma_1 \mu_0 \omega} = \mathcal{O}(1). \quad (1.3.10)$$

Sous ces hypothèses, on peut avoir recours au modèle quasi-statique dit par courants de Foucault pour lequel on assimile  $\varepsilon^d$  à 0, ce qui revient à négliger le champ d'induction électrique  $\mathbf{D}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 0 & \Rightarrow & \kappa_0 = 0, \\ \varepsilon_1 &= -\frac{si\sigma_1}{\omega} & \Rightarrow & \kappa_1 = (-si\omega\mu_1\sigma_1)^{1/2} \neq 0. \end{aligned}$$

**Remarque 1.3.1.** *L'approximation quasi-statique présentée ici peut ne plus être valable pour certaines géométries, par exemple en présence de fente ou de trou [7, Ch.8].*

Sous l'approximation courants de Foucault, les champs  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$  vérifient le système (1.2.2), les conditions de transmission (1.2.6) et (1.2.7) ainsi que les conditions de radiation à l'infini (1.1.6) et (1.1.7). Le problème courants de Foucault harmonique pour les champs  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$  s'exprime donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \mathbf{E}_{\text{tot}} + si\omega\mu\mathbf{H}_{\text{tot}} = 0 & \text{dans } \Omega_0 \cup \Omega_1, \\ \nabla \times \mathbf{H}_{\text{tot}} = \mathbf{J}_{\text{inc}} & \text{dans } \Omega_0, \\ \nabla \times \mathbf{H}_{\text{tot}} = \sigma_1 \mathbf{E}_{\text{tot}} & \text{dans } \Omega_1, \\ (\mathbf{E}_{\text{tot}}^0 - \mathbf{E}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ (\mathbf{H}_{\text{tot}}^0 - \mathbf{H}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} (|\mathbf{x}|\mathbf{E}_{\text{tot}} - \mathbf{H}_{\text{tot}} \times \mathbf{x}) = 0. & \end{array} \right. \quad (1.3.11)$$

Le champ  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  est défini à un gradient près, du fait de l'hypothèse (H3), et n'a donc plus de sens physique. Pour obtenir l'unicité de la solution  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  on impose une jauge, en particulier :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{tot}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_0, \\ \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{\text{tot}} \cdot \mathbf{n}) dS = 0. \end{array} \right. \quad (1.3.12)$$

Les champs incidents sont définis par  $(\mathbf{E}_{\text{inc}}, \mathbf{H}_{\text{inc}}) = \mathcal{BS}^0(\mathbf{J}_{\text{inc}})$  dans  $\mathbb{R}^3$  avec  $\kappa_0 = 0$ , il s'expriment donc comme suit,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{x}) &= -si\omega\mu_0 \int_{\Omega_{\text{inc}}} \frac{\mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{x}')}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}', \\ \mathbf{H}_{\text{inc}}(\mathbf{x}) &= \nabla \times \int_{\Omega_{\text{inc}}} \frac{\mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{x}')}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'. \end{aligned}$$

De plus, ils vérifient (1.2.1) qui s'écrit alors

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_{\text{inc}} + si\omega\mu_0\mathbf{H}_{\text{inc}} = 0 & \text{dans } \Omega_0 \cup \Omega_1, \\ \nabla \times \mathbf{H}_{\text{inc}} = \mathbf{J}_{\text{inc}} & \text{dans } \Omega_0 \cup \Omega_1. \end{cases}$$

Comme précédemment on peut poser le problème uniquement en terme de champ électrique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -si\omega\mu_0\mathbf{J}_{\text{inc}} & \text{dans } \Omega_0, \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \kappa_1^2\mathbf{E} = 0 & \text{dans } \Omega_1, \\ (\mu_0^{-1}\nabla \times \mathbf{E}_{\text{tot}}^0 - \mu_1^{-1}\nabla \times \mathbf{E}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ (\mathbf{E}_{\text{tot}}^0 - \mathbf{E}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{E} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty, & \end{array} \right. \quad (1.3.13)$$

avec la jauge (1.3.12). Le champ magnétique peut ensuite se calculer via

$$\mathbf{H}_{\text{tot}} = -(si\omega\mu)^{-1}\nabla \times \mathbf{E}_{\text{tot}} \quad \text{dans } \Omega_0 \cup \Omega_1.$$

On peut ici aussi poser le problème en terme de champ magnétique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J}_{\text{inc}} & \text{dans } \Omega_0, \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - \kappa_1^2\mathbf{H} = 0 & \text{dans } \Omega_1, \\ (\mu_0\mathbf{H}_{\text{tot}}^0 - \mu_1\mathbf{H}_{\text{tot}}^1) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ (\mathbf{H}_{\text{tot}}^0 - \mathbf{H}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{H} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty. & \end{array} \right. \quad (1.3.14)$$

Mais on ne dispose plus d'une relation permettant d'obtenir  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  dans  $\Omega_0$ . Par conséquent, l'équivalence (1.3.4) n'est plus valable et la relation de saut (1.2.9) doit être introduite.

**Remarque 1.3.2.** *Pour l'approximation courants de Foucault, on ne présente que le problème non homogène puisqu'on n'utilisera pas ce modèle avec pour source une onde plane. Cependant, le problème homogène peut facilement être posé par le même raisonnement que pour le problème de Maxwell.*

## 1.4 Synthèse

Dans ce chapitre les différents problèmes de Maxwell que l'on souhaite poser sous la forme d'un système d'équations intégrales de surface ont été énoncés. Les problèmes (1.3.5) et (1.3.6) peuvent se synthétiser sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \nabla \times \mathbf{U}_{\text{tot}} - \kappa_0^2 \mathbf{U}_{\text{tot}} = \mathbf{V} & \text{dans } \Omega_0, \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{U}_{\text{tot}} - \kappa_1^2 \mathbf{U}_{\text{tot}} = 0 & \text{dans } \Omega_1, \\ (\zeta_0^{-1} \nabla \times \mathbf{U}_{\text{tot}}^0 - \zeta_1^{-1} \nabla \times \mathbf{U}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ (\mathbf{U}_{\text{tot}}^0 - \mathbf{U}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{U}_{\text{tot}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty. & \end{array} \right. \quad (1.4.1)$$

On donne dans le tableau ci-dessous le lien entre le problème en  $\mathbf{U}$  et les problèmes qu'il synthétise :

Problème	$\mathbf{U}$	$\mathbf{V}$	$\zeta_\ell$
(1.3.5)	$\mathbf{E}$	$-si\omega\mathbf{J}_{\text{inc}}$	$\mu_\ell$
(1.3.6)	$\mathbf{H}$	$\nabla \times \mathbf{J}_{\text{inc}}$	$\varepsilon_\ell$

(1.4.2)

De même, les problèmes (1.3.7) et (1.3.8) peuvent se synthétiser sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \nabla \times \mathbf{U}_d - \kappa_0^2 \mathbf{U}_d = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{U}_{\text{tot}} - \kappa_1^2 \mathbf{U}_{\text{tot}} = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ (\zeta_0^{-1} \nabla \times \mathbf{U}_d^0 - \zeta_1^{-1} \nabla \times \mathbf{U}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = -(\zeta_0^{-1} \nabla \times \mathbf{U}_{\text{inc}}^0) \times \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma, \\ (\mathbf{U}_d^0 - \mathbf{U}_{\text{tot}}^1) \times \mathbf{n} = -\mathbf{U}_{\text{inc}}^0 \times \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{U}_d = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty. & \end{array} \right. \quad (1.4.3)$$

Avec les correspondances suivantes :

Problème	$\mathbf{U}$	$\mathbf{V}$	$\zeta_\ell$
(1.3.7)	$\mathbf{E}$	$-si\omega\mathbf{J}_{\text{inc}}$	$\mu_\ell$
(1.3.8)	$\mathbf{H}$	$\nabla \times \mathbf{J}_{\text{inc}}$	$\varepsilon_\ell$

(1.4.4)

On a dans ces deux cas la relation,

$$\mathbf{U}_{\text{inc}} := \int_{\Omega_{\text{inc}}} \mathbf{V}(\mathbf{x}') g_{\kappa_0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad \text{si } \mathbf{V} \neq 0.$$

Et  $\mathbf{U}_{\text{inc}}$  vérifie, d'après (1.2.1), (1.2.10) et (1.2.11),

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \nabla \times \mathbf{U}_{\text{inc}} - \kappa_0^2 \mathbf{U} = \mathbf{V} & \text{dans } \Omega_0 \cup \Omega_1, \\ (\nabla \times \mathbf{U}_{\text{inc}}^0 - \nabla \times \mathbf{U}_{\text{inc}}^1) \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ (\mathbf{U}_{\text{inc}}^0 - \mathbf{U}_{\text{inc}}^1) \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{U}_{\text{inc}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty & \text{si } \mathbf{V} \neq 0. \end{array} \right. \quad (1.4.5)$$

Le problème de Maxwell est synthétisé afin de présenter la méthode permettant de poser les problèmes surfaciques intégral et variationnel. C'est-à-dire la méthode des équations intégrales de surface.



## Chapitre 2

# Formulation intégrale des problèmes

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Espaces fonctionnels et traces . . . . .</b>	<b>28</b>
2.1.1	Espaces fonctionnels et traces pour le système de Maxwell . . .	28
2.1.2	Formules d'intégration par parties et relations de dualité . . .	32
2.1.3	Décomposition de Helmholtz-Hodge . . . . .	34
2.1.4	Espaces de Beppo-Levi . . . . .	34
<b>2.2</b>	<b>Représentation intégrale . . . . .</b>	<b>36</b>
2.2.1	Formules de représentation intégrale . . . . .	36
2.2.2	Traces et opérateurs intégraux surfaciques . . . . .	39
<b>2.3</b>	<b>Le problème intégral surfacique . . . . .</b>	<b>43</b>
2.3.1	Forme forte . . . . .	43
2.3.2	Forme faible . . . . .	46

---

Ce chapitre présente les outils mathématiques nécessaires pour poser le problème intégral surfacique des équations de Maxwell ainsi que sa version variationnelle. Dans la première section le cadre fonctionnel du problème intégral surfacique en électromagnétisme est posé. Dans la deuxième section, les formules de représentation intégrale sont présentées ainsi que leurs traces permettant d'obtenir des équations intégrales de surface. Dans la troisième section, le problème intégral surfacique est posé, à partir des équations intégrales de surface, sous forme forte et sous forme faible.

## 2.1 Espaces fonctionnels et traces

Dans cette section, on se place sous l'hypothèse **(H0)** et on pose  $\Omega = \Omega_0, \Omega_1$  ou  $\mathbb{R}^3$ . Sauf indication contraire et contrairement à l'hypothèse **(H0)**, on définit (uniquement dans cette section)  $\mathbf{n}$  comme la normale unitaire extérieure à  $\Omega$ . Les résultats présentés sont issus des articles [10] et [11] qui traitent le cas du polyèdre lipschitzien. L'article [12] présente ces mêmes résultats pour le cas plus général d'un domaine lipschitzien. En particulier ces articles traitent la décomposition de Helmholtz-Hodge. Le cours [20] permet une première approche des espaces fonctionnels pour le système de Maxwell. Enfin, les articles [35] et [34] présentent les résultats pour les espaces de Beppo-Levi introduits en section 2.1.4.

### 2.1.1 Espaces fonctionnels et traces pour le système de Maxwell

**Definition 2.1.1.** On définit les espaces de Sobolev standards sur  $\Omega$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ , par

$$H_{\text{loc}}^s(\Omega) = \{U \in L_{\text{loc}}^2(\Omega); \forall \alpha \text{ tel que } \alpha \leq s, D^\alpha U \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)\}$$

où l'espace  $L_{\text{loc}}^2(\Omega)$  est l'espace des fonctions de  $L^2$  localement intégrables sur  $\Omega$  et  $D^\alpha U$  une dérivée partielle de  $U$  au sens des distributions. On définit de plus les espaces de Sobolev standards sur  $\Gamma$ ,  $\forall t \in [-1, 1]$ , par

$$H^t(\Gamma) = \{U|_\Gamma; U \in H_{\text{loc}}^{t+1/2}(\Omega)\}.$$

À partir de ces espaces standards, on définit les espaces

$$\mathbf{H}_{\text{loc}}^s(\Omega) := (H_{\text{loc}}^s(\Omega))^3, \quad \mathbf{H}^t(\Gamma) := (H^t(\Gamma))^3, \quad \mathbf{H}^0(\Gamma) = \mathbf{L}^2(\Gamma) = (L^2(\Gamma))^3.$$

Soit  $\mathbf{d}$  un opérateur différentiel du premier ordre. On définit, pour tout  $s \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{loc}}^s(\mathbf{d}, \Omega) &:= \{\mathbf{U} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^s(\Omega); \mathbf{d}\mathbf{U} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^s(\Omega)\}, \\ \mathbf{H}_{\text{loc}}^s(\mathbf{d}0, \Omega) &:= \{\mathbf{U} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^s(\Omega); \mathbf{d}\mathbf{U} = 0\}, \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{d}\mathbf{U}$  défini au sens des distributions. On simplifie la notation  $\mathbf{H}^0$  par  $\mathbf{H}$  et le suffixe loc est systématiquement supprimé pour les cas où  $\Omega$  est nécessairement borné. On introduit également les espaces

$$\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega) := \{\mathbf{U} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega); \nabla \times \nabla \times \mathbf{U} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\Omega)\}$$

et

$$H_{\text{loc}}(\Delta, \Omega) := \{U \in H_{\text{loc}}(\Omega); \Delta U \in H_{\text{loc}}(\Omega)\}.$$

**Propriété 2.1.1.** Sous les hypothèses **(H1)** et **((H2a) ou (H2b))**, les champs définis dans la section précédente vérifient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{tot}} &\in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}(\varepsilon \mathbf{div}, \mathbb{R}^3), \\ \mathbf{H}_{\text{tot}} &\in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mu \mathbf{div}, \mathbb{R}^3), \\ \mathbf{E}_{\text{inc}} &\in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{div}, \mathbb{R}^3), \\ \mathbf{H}_{\text{inc}} &\in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{div}, \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

De plus, comme  $\mu_\ell$  et  $\varepsilon_\ell$  sont constants et non nuls dans  $\Omega_\ell$ ,  $\ell \in \{0,1\}$ , on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{tot}}|_{\Omega_\ell} &\in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_\ell) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{div}, \Omega_\ell), \\ \mathbf{H}_{\text{tot}}|_{\Omega_\ell} &\in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_\ell) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{div}, \Omega_\ell),\end{aligned}$$

et donc par définition des champs diffractés

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_d|_{\Omega_0} &\in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{div}, \Omega_0), \\ \mathbf{H}_d|_{\Omega_0} &\in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{div}, \Omega_0).\end{aligned}$$

### Preuve

Le champ électrique, le champ magnétique et la densité de courant électrique source imposée sont localement de carré intégrable. Les appartenances résultent des systèmes (1.2.1) et (1.2.2) et des équations (1.3.1) et (1.3.2).  $\square$

Soient  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in C^\infty(\bar{\Omega}) = (C^\infty(\bar{\Omega}))^3$  et  $U \in C^\infty(\bar{\Omega})$ , le théorème de flux-divergence donne les formules d'intégration par parties suivantes :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{U} - \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) \, dx &= \int_{\Gamma} (\mathbf{U} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V} \, dx \\ &= \int_{\Gamma} (\mathbf{U} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{n}) \, dx, \quad (2.1.1)\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{U})U + \mathbf{U} \cdot (\nabla U) \, dx = \int_{\Gamma} U(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \, dx. \quad (2.1.2)$$

**Remarque 2.1.1.** Soit  $\mathbf{u}_n := \mathbf{U} \times \mathbf{n}$ , alors  $\mathbf{u}_n = (\mathbf{n} \times \mathbf{u}_n) \times \mathbf{n}$ .

Ces formules suggèrent la définition des applications  $\gamma U := U|_{\Gamma}$ ,  $\boldsymbol{\gamma} \mathbf{U} := \mathbf{U}|_{\Gamma}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_\times \mathbf{U} := \mathbf{U}|_{\Gamma} \times \mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_t \mathbf{U} := \mathbf{n} \times (\mathbf{U}|_{\Gamma} \times \mathbf{n})$  et  $\boldsymbol{\gamma}_n \mathbf{U} := \mathbf{U}|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n}$ .

**Théorème 2.1.1.** On note  $\gamma U = U|_{\Gamma}$  la restriction sur  $\Gamma$  des fonctions  $U$  régulières définies dans  $\bar{\Omega}$ . Cette application, appelée trace standard, peut-être prolongée de façon unique en une application linéaire, continue et surjective de  $H_{\text{loc}}^1(\Omega)$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

**Corollaire 2.1.1.** On note  $\boldsymbol{\gamma} \mathbf{U} = \mathbf{U}|_{\Gamma}$  la restriction sur  $\Gamma$  des champs de vecteurs  $\mathbf{U}$  réguliers définis dans  $\bar{\Omega}$ . Cette application, appelée trace standard vectorielle, peut être prolongée de façon unique en une application linéaire, continue et surjective de  $\mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega)$  dans  $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

**Corollaire 2.1.2.** L'application, dite trace normale,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}_n &: \mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{div}, \Omega) \mapsto H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ &\quad \mathbf{U} \mapsto \boldsymbol{\gamma} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n},\end{aligned}$$

est linéaire, continue et surjective avec  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  l'espace dual associé à  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  par le produit de dualité dérivé du produit scalaire de  $L^2(\Gamma)$ .

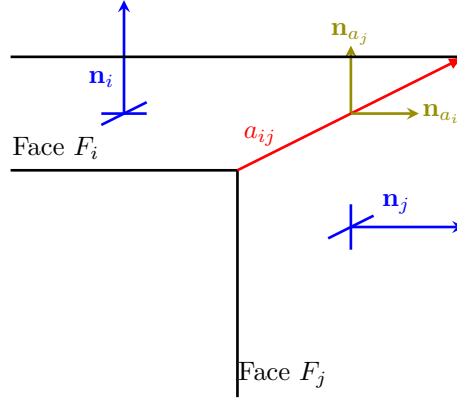


FIGURE 2.1 – Normales au bord des faces.

Pour la suite, on définit les espaces

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{\perp}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) &:= \gamma_{\times}(\mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega)), \\ \mathbf{H}_{\parallel}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) &:= \gamma_{\text{t}}(\mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega)).\end{aligned}$$

**Remarque 2.1.2.** On rappelle que la surface  $\Gamma$  est un polyèdre lipschitzien. Les champs  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\perp}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  sont les champs de vecteurs surfaciques tangentiels de  $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  vérifiant  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{a_i})|_{F_i} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{a_j})|_{F_j}$  sur toutes les arêtes  $a_{ij}$  de  $\Gamma$ , avec  $\mathbf{n}_{a_i}$  et  $\mathbf{n}_{a_j}$  les normales à l'arête  $a_{ij}$  prises respectivement dans les faces  $F_i$  et  $F_j$ , voir figure 2.1. De même, les champs  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\parallel}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  sont les champs de vecteurs surfaciques tangentiels de  $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  vérifiant  $(\mathbf{u} \times \mathbf{n}_{a_i})|_{F_i} = (\mathbf{u} \times \mathbf{n}_{a_j})|_{F_j}$  sur toutes les arêtes  $a_{ij}$  de  $\Gamma$ , voir figure 2.1.

**Théorème 2.1.2.** Les traces, dites tangentiels,  $\gamma_{\times}$  et  $\gamma_{\text{t}}$  sont des applications linéaires, continues et surjectives de  $\mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega)$  dans  $\mathbf{H}_{\perp}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et de  $\mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega)$  dans  $\mathbf{H}_{\parallel}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , respectivement.

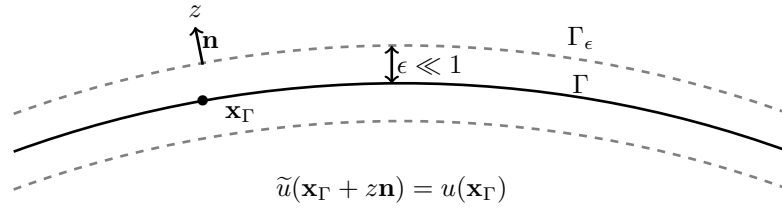


FIGURE 2.2 – Voisinage tubulaire.

**Définition 2.1.2.** Soit  $u$  une fonction régulière sur  $\Gamma$ , on note  $\tilde{u}$  la fonction définie dans le voisinage tubulaire  $\Gamma_{\epsilon}$  de  $\Gamma$  par prolongement constant suivant la normale, voir

figure 2.2. Soit  $\mathbf{u}$  un champ tangent défini sur  $\Gamma$ , on note  $\tilde{\mathbf{u}}$  son prolongement dans  $\Gamma_\epsilon$ . On définit alors les opérateurs surfaciques [46],

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}_\Gamma(u) &:= (\nabla \tilde{u})|_\Gamma, \\ \operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{u}) &:= (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}})|_\Gamma, \\ \operatorname{rot}_\Gamma(\mathbf{u}) &:= ((\nabla \times \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n})|_\Gamma, \\ \mathbf{rot}_\Gamma(u) &:= (\nabla \times (\tilde{u}\mathbf{n}))|_\Gamma, \\ \Delta_\Gamma(u) &:= \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{grad}_\Gamma u = -\operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma u.\end{aligned}$$

On définit maintenant les espaces

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_\Gamma, \Gamma) &:= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\Gamma); \operatorname{rot}_\Gamma(\mathbf{u}) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\}, \\ \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) &:= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\Gamma); \operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{u}) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\},\end{aligned}$$

où  $\mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  sont les espaces duaux associés à  $\mathbf{H}_\perp^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}_\parallel^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , respectivement, par le produit de dualité dérivé du produit scalaire de  $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ .

**Remarque 2.1.3.** L'espace  $\mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_\Gamma, \Gamma)$  contient les champs de vecteurs surfaciques tangentiels  $\mathbf{u}$  qui satisfont  $(\mathbf{u} \times \mathbf{n}_{a_i})|_{F_i} = (\mathbf{u} \times \mathbf{n}_{a_j})|_{F_j}$  sur toutes les arêtes  $a_{ij}$  de  $\Gamma$ , voir figure 2.1. L'espace  $\mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$  contient les champs de vecteurs surfaciques tangentiels  $\mathbf{u}$  qui satisfont  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{a_i})|_{F_i} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{a_j})|_{F_j}$  sur toutes les arêtes  $a_{ij}$  de  $\Gamma$ , voir figure 2.1.

**Théorème 2.1.3.** Les traces tangentielles  $\gamma_\times$  et  $\gamma_t$  se prolongent dans  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega)$  par les applications linéaires, continues et surjectives

$$\begin{aligned}\gamma_\times &: \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega) \mapsto \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) \\ &\quad \mathbf{U} \mapsto \gamma \mathbf{U} \times \mathbf{n}, \\ \gamma_t &: \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega) \mapsto \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_\Gamma, \Gamma) \\ &\quad \mathbf{U} \mapsto \mathbf{n} \times \gamma_\times \mathbf{U}.\end{aligned}$$

Soient  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbf{C}^\infty(\bar{\Omega})$ ,  $U \in C^\infty(\bar{\Omega})$  et  $V \in C^\infty(\bar{\Omega})$ , le théorème de flux-divergence donne les formules d'intégration par parties suivantes :

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) - \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{U}) \, dx &= \int_\Gamma ((\nabla \times \mathbf{U}) \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V} \, dx, \\ \int_\Omega (\Delta V)U + (\nabla V) \cdot (\nabla U) \, dx &= \int_\Gamma U((\nabla V) \cdot \mathbf{n}) \, dx.\end{aligned}$$

Ces formules suggèrent la définition des applications  $\partial_{\mathbf{n}}U := \gamma_{\mathbf{n}} \circ \nabla U$  et  $\gamma_N \mathbf{U} := \gamma_\times \circ \nabla \times \mathbf{U}$ .

**Théorème 2.1.4.** *Les applications*

$$\begin{aligned} \gamma_N &: \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega) &\mapsto & \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma) \\ & \mathbf{U} &\mapsto & \gamma_{\times} \circ (\nabla \times \mathbf{U}), \\ \\ \partial_{\mathbf{n}} &: H_{\text{loc}}(\Delta, \Omega) &\mapsto & H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ & U &\mapsto & \gamma_{\mathbf{n}} \circ (\nabla U). \end{aligned}$$

sont linéaires, continues et surjectives.

**Propriété 2.1.2.** *On peut montrer les relations entre les traces suivantes,*

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{n}} \circ \mathbf{rot} = \text{rot}_{\Gamma} \circ \gamma_{\mathbf{t}} = \text{div}_{\Gamma} \circ \gamma_{\times} & \quad \text{dans } \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega), \\ \mathbf{grad}_{\Gamma} \circ \gamma = \gamma_{\mathbf{t}} \circ \mathbf{grad} & \quad \text{dans } H_{\text{loc}}^1(\Omega). \end{aligned}$$

Soit  $\gamma_{\bullet}$  une trace quelconque, on notera  $\gamma_{\bullet}^{\ell}$  la trace relative au domaine  $\Omega_{\ell}$  où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à  $\Omega_1$ . De plus, on notera respectivement,

$$\begin{aligned} [\gamma_{\bullet}]_{\Gamma} &:= \gamma_{\bullet}^0 - \gamma_{\bullet}^1, \\ \{\gamma_{\bullet}\}_{\Gamma} &:= \frac{1}{2}(\gamma_{\bullet}^0 + \gamma_{\bullet}^1), \end{aligned}$$

le saut et la moyenne de  $\gamma_{\bullet}$  à travers la surface  $\Gamma$ .

### 2.1.2 Formules d'intégration par parties et relations de dualité

La formule d'intégration par parties (2.1.1) s'étend à  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega)$  :  
 $\forall (\mathbf{U}, \mathbf{V}) \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega) \times \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{V} \cdot \nabla \times \mathbf{U} \, dx = \int_{\Gamma} \gamma_{\times} \mathbf{U} \cdot \gamma_{\mathbf{t}} \mathbf{V} \, dx. \quad (2.1.3)$$

La formule d'intégration par parties (2.1.2) s'étend à  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{div}, \Omega)$  :  
 $\forall (\mathbf{U}, U) \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{div}, \Omega) \times H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{U})U + \mathbf{U} \cdot (\nabla U) \, dx = \int_{\Gamma} \gamma U \cdot \gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{U} \, dx. \quad (2.1.4)$$

On déduit de ces formules d'intégration par parties que

$$\mathbf{U} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \Rightarrow [\gamma_{\times} \mathbf{U}]_{\Gamma} = 0, \quad (2.1.5)$$

$$\mathbf{U} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{div}, \mathbb{R}^3) \Rightarrow [\gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{U}]_{\Gamma} = 0. \quad (2.1.6)$$

#### Preuve

Soient  $\mathbf{U} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$  et  $\mathbf{V} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$  à support compact dans  $\mathbb{R}^3$  et non nulle au

voisinage de  $\Gamma$  alors, d'après (2.1.3),

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{V} \cdot \nabla \times \mathbf{U} \, dx \\ &= \int_{\Omega_0} \nabla \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{V} \cdot \nabla \times \mathbf{U} \, dx + \int_{\Omega_1} \nabla \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{V} \cdot \nabla \times \mathbf{U} \, dx \\ &= - \int_{\Gamma} \gamma_{\times}^0 \mathbf{U} \cdot \gamma_t^0 \mathbf{V} \, dx + \int_{\Gamma} \gamma_{\times}^1 \mathbf{U} \cdot \gamma_t^1 \mathbf{V} \, dx \end{aligned}$$

et donc  $[\gamma_{\times} \mathbf{U}]_{\Gamma} = 0$ .

Soient  $\mathbf{U} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{div}, \mathbb{R}^3)$  et  $U \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$  à support compact dans  $\mathbb{R}^3$  et non nulle au voisinage de  $\Gamma$  alors, d'après (2.1.4),

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \cdot \mathbf{U})U + \mathbf{U} \cdot (\nabla U) \, dx \\ &= \int_{\Omega_0} (\nabla \cdot \mathbf{U})U + \mathbf{U} \cdot (\nabla U) \, dx + \int_{\Omega_1} (\nabla \cdot \mathbf{U})U + \mathbf{U} \cdot (\nabla U) \, dx \\ &= - \int_{\Gamma} \gamma^0 U \cdot \gamma_n^0 \mathbf{U} \, dx + \int_{\Gamma} \gamma^1 U \cdot \gamma_n^1 \mathbf{U} \, dx \end{aligned}$$

et donc  $[\gamma_n \mathbf{U}]_{\Gamma} = 0$ .  $\square$

**Remarque 2.1.4.** À partir de la propriété 2.1.1 et des relations (2.1.5) et (2.1.6) on retrouve les conditions de transmission (1.2.6)-(1.2.9) et (1.2.10)-(1.2.13).

Soient  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$  et  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\Gamma}, \Gamma)$ , il existe  $\mathbf{U} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega)$  et  $\mathbf{V} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega)$  tels que  $\mathbf{u} = \gamma_{\times} \mathbf{U}$  et  $\mathbf{v} = \gamma_t \mathbf{V}$ . On définit alors l'application duale sesquilinéaire

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{V} \cdot \nabla \times \mathbf{U} \, dx \quad (2.1.7)$$

pour laquelle  $\mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$  et  $\mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\Gamma}, \Gamma)$  sont des espaces duaux. De même, on définit l'application duale antisymétrique

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\times} := - \langle \mathbf{u}, \mathcal{R} \mathbf{v} \rangle \quad (2.1.8)$$

pour laquelle  $\mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$  est son propre dual. L'opérateur de rotation  $\mathcal{R}$  est défini par

$$\mathcal{R} \mathbf{u} := \mathbf{u} \times \mathbf{n} : \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma) \cup \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\Gamma}, \Gamma) \mapsto \mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\Gamma}, \Gamma) \cup \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma) \quad (2.1.9)$$

et forme une isométrie entre les espaces  $\mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$  et  $\mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\Gamma}, \Gamma)$ . Soient  $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , il existe  $U \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$  et  $\mathbf{V} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{div}, \Omega)$  tels que  $u = \gamma U$  et  $v = \gamma_n \mathbf{V}$ . On définit alors l'application duale sesquilinéaire

$$\langle u, v \rangle_{\frac{1}{2}} := \int_{\Gamma} uv \, dx = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{V})U + \mathbf{V} \cdot (\nabla U) \, dx$$

pour laquelle  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  sont des espaces duaux.

**Propriété 2.1.3.** *Les opérateurs surfaciques  $\operatorname{div}_\Gamma$  et  $\mathbf{grad}_\Gamma$  sont  $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ -adjoints. Soient  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$  et  $u \in H^{1/2}(\Gamma)$  on a alors*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{grad}_\Gamma u \rangle = - \langle \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}, u \rangle_{\frac{1}{2}}.$$

### 2.1.3 Décomposition de Helmholtz-Hodge

La décomposition de Helmholtz-Hodge permet de décomposer les champs selon leur composante à divergence surfacique nulle et son complémentaire. Soit l'espace

$$\mathcal{H}(\Gamma) := \left\{ u \in H^1(\Gamma)/\mathbb{R}; \Delta_\Gamma(u) \in H^{-1/2}(\Gamma) \right\}.$$

**Théorème 2.1.5.** *Les décompositions suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) &= \mathbf{rot}_\Gamma(H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{R}) + \mathbf{H}_\perp^{1/2}(\Gamma), \\ \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_\Gamma, \Gamma) &= \mathbf{grad}_\Gamma(H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{R}) + \mathbf{H}_\parallel^{1/2}(\Gamma). \end{aligned}$$

De plus, les décompositions suivantes sont directes :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) &= \mathbf{rot}_\Gamma(H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{R}) \oplus \mathbf{grad}_\Gamma(\mathcal{H}(\Gamma)), \\ \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_\Gamma, \Gamma) &= \mathbf{grad}_\Gamma(H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{R}) \oplus \mathbf{rot}_\Gamma(\mathcal{H}(\Gamma)). \end{aligned}$$

**Propriété 2.1.4.**

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}_\Gamma(\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) &= \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_\Gamma 0, \Gamma), \\ \mathbf{rot}_\Gamma(\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) &= \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma 0, \Gamma), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_\Gamma 0, \Gamma) &:= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\Gamma); \operatorname{rot}_\Gamma(\mathbf{u}) = 0 \right\}, \\ \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma 0, \Gamma) &:= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\Gamma); \operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{u}) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

### 2.1.4 Espaces de Beppo-Levi

On a vu précédemment que les champs, électrique et magnétique, dits physiques sont à énergie finie. Cependant, sous les hypothèses de l'approximation quasi-statique, l'énergie associée au champ électrique est seulement mesurée par son rotationnel et la

norme  $L^2$  du champ n'est plus nécessairement bornée. Dans ce cas les espaces à poids de type Beppo-Levi sont un choix approprié pour le champ électrique. On définit alors

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega) &:= \left\{ \frac{\mathbf{U}(\mathbf{x})}{\sqrt{1 + |\mathbf{x}|^2}} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\Omega), \nabla \times \mathbf{U} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\Omega) \right\}, \\ \mathbf{W}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega) &:= \{ \mathbf{U} \in \mathbf{W}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega), \nabla \times \nabla \times \mathbf{U} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\Omega) \}. \end{aligned}$$

Les définitions des traces ainsi que les formules d'intégration par parties (2.1.3) et (2.1.4) énoncées pour  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega)$  et  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega)$  restent vraies pour  $\mathbf{W}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega)$  et  $\mathbf{W}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega)$ .

## 2.2 Représentation intégrale

Maintenant que l'on a défini les espaces fonctionnels, les traces et les formules d'intégration par parties, les formules de représentation intégrale peuvent être présentées. On retrouvera ces formules dans [18],[35] et [34]. Dans cette partie, on se place sous l'hypothèse **(H0)** avec  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  homogènes et l'indice  $\ell \in \{0,1\}$  est associé au milieu  $\Omega_\ell$ .

### 2.2.1 Formules de représentation intégrale

Les formules de représentation intégrale permettent de calculer les champs, électrique et magnétique, dans des milieux homogènes à partir de leurs composantes tangentielles et normale sur  $\Gamma$ . Ces formules font intervenir le noyau de Green, solution élémentaire de l'opérateur différentiel  $(-\Delta - \kappa_\ell^2)$  en dimension trois, défini (pour la convention  $s = \pm 1$ ) par

$$g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') := \frac{\exp(-si\kappa_\ell|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \mathbf{x} - \mathbf{x}' \neq 0. \quad (2.2.1)$$

Les potentiels de simple couche scalaire  $\Psi_S^\ell$  et vectoriel  $\Psi_V^\ell$  sont définis à partir de ce noyau :

$$\begin{aligned} \Psi_S^\ell(u)(\mathbf{x}) &:= \int_\Gamma u(\mathbf{x}') g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}', & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \\ \Psi_V^\ell(\mathbf{u})(\mathbf{x}) &:= \int_\Gamma \mathbf{u}(\mathbf{x}') g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}', & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma. \end{aligned}$$

On définit de plus le potentiel double couche de Maxwell  $\Psi_{DC}^\ell$  par

$$\Psi_{DC}^\ell(\mathbf{u})(\mathbf{x}) := \nabla \times \Psi_V^\ell(\mathbf{u})(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$$

et, sous l'hypothèse  $\kappa_\ell \neq 0$ , le potentiel simple couche de Maxwell  $\Psi_{SC}^\ell$  par

$$\Psi_{SC}^\ell(\mathbf{u})(\mathbf{x}) := \Psi_V^\ell(\mathbf{u})(\mathbf{x}) + \frac{1}{\kappa_\ell^2} \nabla \Psi_S^\ell(\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u})(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma.$$

Les applications suivantes sont continues :

$$\begin{aligned} \Psi_S^\ell &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) &\mapsto H_{loc}^1(\mathbb{R}^3), \\ \Psi_V^\ell &: \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) &\mapsto \mathbf{H}_{loc}^1(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0 \cup \Omega_1), \\ \Psi_{DC}^\ell &: \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) &\mapsto \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0 \cup \Omega_1), \\ \Psi_{SC}^\ell &: \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) &\mapsto \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0 \cup \Omega_1). \end{aligned}$$

Les potentiels vérifient les relations suivantes, dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ ,

$$\begin{aligned} (-\Delta - \kappa_\ell^2) \Psi_S^\ell &= 0, & (-\Delta - \kappa_\ell^2) \Psi_V^\ell &= 0, \\ (\nabla \times \nabla \times - \kappa_\ell^2) \Psi_{DC}^\ell &= 0, & (\nabla \times \nabla \times - \kappa_\ell^2) \Psi_{SC}^\ell &= 0. \end{aligned}$$

De plus, si  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$  alors on a l'identité

$$\nabla \cdot \Psi_V^{\ell}(\mathbf{u}) = \Psi_S^{\ell}(\text{div}_{\Gamma} \mathbf{u}). \quad (2.2.2)$$

### Preuve

Par définition, on a

$$(-\Delta - \kappa_{\ell}^2) g_{\kappa_{\ell}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

avec  $\delta$  la distribution de Dirac. Par conséquent, dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ ,

$$\begin{aligned} (-\Delta - \kappa_{\ell}^2) \Psi_S^{\ell} &= 0, \\ (-\Delta - \kappa_{\ell}^2) \Psi_V^{\ell} &= 0. \end{aligned}$$

À partir de la définition de l'opérateur laplacien vectoriel  $(-\Delta = \nabla \times \nabla \times - \nabla \nabla \cdot)$ , on obtient pour le potentiel double couche de Maxwell, dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ ,

$$\nabla \times \nabla \times \Psi_{DC}^{\ell} = \nabla \times (\nabla \times \nabla \times \Psi_V^{\ell}) = \nabla \times (-\Delta \Psi_V^{\ell}) = \kappa_{\ell}^2 \Psi_{DC}^{\ell}.$$

Finalement, d'après (2.2.2), dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ ,

$$\nabla \times \nabla \times \Psi_{SC}^{\ell} = \nabla \times \nabla \times \Psi_V^{\ell} = \nabla \nabla \cdot \Psi_V^{\ell} + \kappa_{\ell}^2 \Psi_V^{\ell} = \kappa_{\ell}^2 \Psi_{SC}^{\ell}.$$

□

À partir de ces définitions on peut énoncer le théorème de représentation de Stratton-Chu :

**Théorème 2.2.1.** [60, 5, 15, 23, 61, 18, 35, 34]. *Sous l'hypothèse (H0), soit  $\kappa \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(\kappa) \geq 0$  et soit  $\mathbf{U} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega_0 \cup \Omega_1)$  satisfaisant  $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$  dans  $\Omega_0 \cup \Omega_1$ .*

a) *Soit  $\mathbf{V}$  tel que  $\text{supp}(\mathbf{V}) \subset \Omega_0$  et  $\mathbf{V} \equiv 0$  au voisinage de  $\Gamma$ . Si  $\mathbf{U}$  satisfait  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{U} - \kappa_{\ell}^2 \mathbf{U} = \mathbf{V}$  dans  $\Omega_0$  et vérifie la condition de décroissance  $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right)$  lorsque  $|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$  alors  $\mathbf{U}$  possède la représentation*

$$\mathbf{U}_{\text{inc}} - \Psi_{DC}^{\ell}(\gamma_{\times}^0 \mathbf{U}) - \Psi_V^{\ell}(\gamma_N^0 \mathbf{U}) - \nabla \Psi_S^{\ell}(\gamma_{\mathbf{n}}^0 \mathbf{U}) = \begin{cases} \mathbf{U} & \text{dans } \Omega_0, \\ 0 & \text{dans } \Omega_1, \end{cases} \quad (2.2.3)$$

$$\text{avec } \mathbf{U}_{\text{inc}} = \int_{\Omega_0} \mathbf{V}(\mathbf{x}') g_{\kappa_0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}'.$$

b) *Si  $\mathbf{U}$  satisfait  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{U} - \kappa_{\ell}^2 \mathbf{U} = 0$  dans  $\Omega_1$  alors  $\mathbf{U}$  possède la représentation*

$$\Psi_{DC}^{\ell}(\gamma_{\times}^1 \mathbf{U}) + \Psi_V^{\ell}(\gamma_N^1 \mathbf{U}) + \nabla \Psi_S^{\ell}(\gamma_{\mathbf{n}}^1 \mathbf{U}) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ \mathbf{U} & \text{dans } \Omega_1. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

**Remarque 2.2.1.** *L'indice  $\ell$  de  $\kappa_\ell$  n'est pas associé à l'indice du domaine auquel appartient le champ  $\mathbf{U}$  puisqu'il est possible de considérer  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{U} - \kappa_0^2 \mathbf{U} = 0$  dans  $\Omega_1$ . Cela arrive en particulier pour les champs incidents.*

D'après la propriété 2.1.2,

$$\operatorname{div}_\Gamma(\gamma_\times \mathbf{U}) = \gamma_{\mathbf{n}}(\nabla \times \mathbf{U}), \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega_\ell).$$

Par conséquent, si  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{U} - \kappa_\ell^2 \mathbf{U} = 0$  au voisinage de  $\Gamma$  avec  $\kappa_\ell \neq 0$  dans  $\Omega_\ell$ , alors

$$\gamma_{\mathbf{n}}^\ell \mathbf{U} = \frac{1}{\kappa_\ell^2} \gamma_{\mathbf{n}}^\ell (\nabla \times \nabla \times \mathbf{U}) = \frac{1}{\kappa_\ell^2} \operatorname{div}_\Gamma(\gamma_N^\ell \mathbf{U}). \quad (2.2.5)$$

À partir de cette relation on a le corollaire suivant :

**Corollaire 2.2.1.** *[18],[35],[34]. On reprend les hypothèses du théorème 2.2.1.*

a) *Si  $\kappa_\ell \neq 0$  dans  $\Omega_0$  alors la formule de représentation (2.2.3) se simplifie comme suit*

$$\mathbf{U}_{\text{inc}} - \Psi_{DC}^\ell(\gamma_\times^0 \mathbf{U}) - \Psi_{SC}^\ell(\gamma_N^0 \mathbf{U}) = \begin{cases} \mathbf{U} & \text{dans } \Omega_0, \\ 0 & \text{dans } \Omega_1, \end{cases}$$

$$\text{avec } \mathbf{U}_{\text{inc}} = \int_{\Omega_0} \mathbf{V}(\mathbf{x}') g_{\kappa_0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}'.$$

b) *Si  $\kappa_\ell \neq 0$  dans  $\Omega_1$  alors la formule de représentation (2.2.4) se simplifie comme suit*

$$\Psi_{DC}^\ell(\gamma_\times^1 \mathbf{U}) + \Psi_{SC}^\ell(\gamma_N^1 \mathbf{U}) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ \mathbf{U} & \text{dans } \Omega_1. \end{cases}$$

Afin de rendre plus compacte l'écriture de ces formules on introduit les notations

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{S}}^\ell(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, u_3) &:= \Psi_{DC}^\ell(\mathbf{u}_1) + \Psi_V^\ell(\mathbf{u}_2) + \nabla \Psi_S^\ell(u_3), \\ \mathcal{S}^\ell(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &:= \Psi_{DC}^\ell(\mathbf{u}_1) + \Psi_{SC}^\ell(\mathbf{u}_2). \end{aligned}$$

**Remarque 2.2.2.** *On a les relations :*

$$\begin{aligned} \nabla \times \Psi_{DC}^\ell &= \nabla \times \nabla \times \Psi_V^\ell = \kappa_\ell^2 \Psi_V^\ell + \nabla \nabla \cdot \Psi_V^\ell = \kappa_\ell^2 \Psi_{SC}^\ell, \\ \nabla \times \Psi_{SC}^\ell &= \nabla \times \Psi_V^\ell = \Psi_{DC}^\ell, \end{aligned}$$

donc, en utilisant (2.2.2) on a

$$\begin{aligned} \nabla \times \widetilde{\mathcal{S}}^\ell(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, u_3) &= \widetilde{\mathcal{S}}^\ell(\mathbf{u}_2, \kappa_\ell^2 \mathbf{u}_1, \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}_1), \\ \nabla \times \mathcal{S}^\ell(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &= \mathcal{S}^\ell(\mathbf{u}_2, \kappa_\ell^2 \mathbf{u}_1). \end{aligned}$$

### 2.2.2 Traces et opérateurs intégraux surfaciques

Afin de poser le problème variationnel des équations intégrales de surface il est nécessaire d'appliquer les traces tangentielle et normale aux formules de Stratton-Chu et donc aux différents potentiels qu'elles font intervenir.

**Théorème 2.2.2.** *Les opérateurs intégraux de surface*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\times^\ell &:= \{\gamma_\times \Psi_V^\ell\}_\Gamma &: \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) &\mapsto \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \\ \mathcal{B}_\times^\ell &:= \{\gamma_\times \Psi_{DC}^\ell\}_\Gamma &: \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) &\mapsto \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \\ \tilde{\mathcal{C}}_\times^\ell &:= \{\gamma_\times \circ \nabla \Psi_S^\ell\}_\Gamma &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) &\mapsto \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \\ \mathcal{C}_\times^\ell &:= \{\gamma_\times \circ \nabla \nabla \cdot \Psi_V^\ell\}_\Gamma &: \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) &\mapsto \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \end{aligned}$$

sont bien définis et continus [35],[34].

**Théorème 2.2.3.** *Les opérateurs intégraux de surface*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n^\ell &:= \{\gamma_n \Psi_V^\ell\}_\Gamma &: \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) &\mapsto H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \mathcal{B}_n^\ell &:= \{\gamma_n \Psi_{DC}^\ell\}_\Gamma &: \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) &\mapsto H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \tilde{\mathcal{C}}_n^\ell &:= \{\gamma_n \circ \nabla \Psi_S^\ell\}_\Gamma &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) &\mapsto H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \mathcal{C}_n^\ell &:= \{\gamma_n \circ \nabla \nabla \cdot \Psi_V^\ell\}_\Gamma &: \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) &\mapsto H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \end{aligned}$$

sont bien définis et continus [34].

Les potentiels satisfont les relations de saut

$$\begin{aligned} [\gamma_\times \Psi_V^\ell]_\Gamma = 0, \quad [\gamma_\times \Psi_{DC}^\ell]_\Gamma = -\text{Id}, \quad [\gamma_\times \circ \nabla \Psi_S^\ell]_\Gamma = 0, \quad [\gamma_\times \circ \nabla \nabla \cdot \Psi_V^\ell]_\Gamma = 0, \\ [\gamma_n \Psi_V^\ell]_\Gamma = 0, \quad [\gamma_n \Psi_{DC}^\ell]_\Gamma = 0, \quad [\gamma_n \circ \nabla \Psi_S^\ell]_\Gamma = -\text{Id}, \quad [\gamma_n \circ \nabla \nabla \cdot \Psi_V^\ell]_\Gamma = -\text{div}_\Gamma. \end{aligned}$$

Avec les notations,

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\bullet,k}^\ell := \gamma_\bullet^k(\tilde{\mathcal{S}}^\ell) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{\bullet,k}^\ell := \gamma_\bullet^k(\mathcal{S}^\ell),$$

les traces des potentiels  $\tilde{\mathcal{S}}^\ell$  et  $\mathcal{S}^\ell$  s'expriment, pour  $k \in \{0,1\}$ ,

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\times,k}^\ell(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, u_3) = \left( \frac{(-1)^{(k+1)}}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_\times^\ell \right) (\mathbf{u}_1) + \mathcal{A}_\times^\ell(\mathbf{u}_2) + \tilde{\mathcal{C}}_\times^\ell(u_3), \quad (2.2.6)$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_{N,k}^\ell(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, u_3) = \left( \kappa_\ell^2 \mathcal{A}_\times^\ell + \mathcal{C}_\times^\ell \right) (\mathbf{u}_1) + \left( \frac{(-1)^{(k+1)}}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_\times^\ell \right) (\mathbf{u}_2), \quad (2.2.7)$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_{n,k}^\ell(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, u_3) = \mathcal{B}_n^\ell(\mathbf{u}_1) + \mathcal{A}_n^\ell(\mathbf{u}_2) + \left( \frac{(-1)^{(k+1)}}{2} \text{Id} + \tilde{\mathcal{C}}_n^\ell \right) (u_3). \quad (2.2.8)$$

Et, sous la condition  $\kappa_\ell \neq 0$ ,

$$\mathcal{SC}_{\times,k}^\ell(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \left( \frac{(-1)^{(k+1)}}{2} \mathbf{Id} + \mathcal{B}_\times^\ell \right) (\mathbf{u}_1) + \left( \mathcal{A}_\times^\ell + \frac{1}{\kappa_\ell^2} \mathcal{C}_\times^\ell \right) (\mathbf{u}_2), \quad (2.2.9)$$

$$\mathcal{SC}_{N,k}^\ell(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \left( \kappa_\ell^2 \mathcal{A}_\times^\ell + \mathcal{C}_\times^\ell \right) (\mathbf{u}_1) + \left( \frac{(-1)^{(k+1)}}{2} \mathbf{Id} + \mathcal{B}_\times^\ell \right) (\mathbf{u}_2), \quad (2.2.10)$$

$$\mathcal{SC}_{n,k}^\ell(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathcal{B}_n^\ell(\mathbf{u}_1) + \left( \mathcal{A}_n^\ell + \frac{1}{\kappa_\ell^2} \mathcal{C}_n^\ell \right) (\mathbf{u}_2) + \frac{(-1)^{(k+1)}}{2\kappa_\ell^2} \operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{u}_2). \quad (2.2.11)$$

### Preuve

Le potentiel double couche de Maxwell peut s'écrire

$$\begin{aligned} \Psi_{DC}^\ell(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \nabla \times \Psi_V^\ell(\mathbf{u})(\mathbf{x}) &= \nabla \times \int_\Gamma \mathbf{u}(\mathbf{x}') g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= - \int_\Gamma \nabla' g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \times \mathbf{u}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \end{aligned}$$

Donc sa trace tangentielle peut s'écrire

$$\begin{aligned} \gamma_\times^k \Psi_{DC}^\ell(\mathbf{u})(\mathbf{x}) &= \left( \mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \int_\Gamma \nabla' g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \times \mathbf{u}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right) \\ &= \int_\Gamma (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}')) \nabla' g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' - \int_\Gamma (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla' g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \mathbf{u}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= 0 - \int_\Gamma (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla' g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \mathbf{u}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \end{aligned}$$

Sur  $\Gamma$  du côté  $\Omega_k$ ,  $k \in \{0,1\}$ , la deuxième intégrale que l'on note

$$\mathcal{I}^k(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \int_\Gamma (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla' g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \mathbf{u}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

ne converge pas. En revanche, sa valeur principale et son résidu existent et l'on a d'après [17, Ch.8], sur  $\Gamma$  du côté  $\Omega_k$ ,  $k \in \{0,1\}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^k(\mathbf{u})(\mathbf{x}) &= \int_\Gamma (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla' g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \mathbf{u}(\mathbf{x}') d\mathbf{x} \\ &= \operatorname{Res}(k) + P.V. \int_\Gamma (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla' g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \mathbf{u}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \end{aligned}$$

avec le résidu

$$\operatorname{Res}(k) = (-1)^k \frac{\phi}{4\pi} \mathbf{u}(\mathbf{x}).$$

L'angle  $\phi$  est l'angle solide sous-tendu par  $\Gamma$ . Ici, les bords sont lisses presque partout donc  $\phi = 2\pi$ . On retrouve donc la relation de saut du potentiel double couche

$$\left[ \gamma_\times \Psi_{DC}^\ell \right]_\Gamma = \gamma_\times^0 \Psi_{DC}^\ell - \gamma_\times^1 \Psi_{DC}^\ell = -\mathbf{Id}.$$

De même la trace  $\gamma_{\mathbf{n}}$  du gradient du potentiel scalaire peut s'écrire

$$\gamma_{\mathbf{n}}^k \circ \nabla \Psi_S^\ell(u)(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \int_{\Gamma} u(\mathbf{x}') g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = -\mathcal{I}^k(u)(\mathbf{x}),$$

et la trace  $\gamma_{\mathbf{n}}$  du gradient de la divergence du potentiel vectoriel peut s'écrire

$$\gamma_{\mathbf{n}}^k \circ \nabla \nabla \cdot \Psi_V^\ell(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \gamma_{\mathbf{n}}^k \circ \nabla \Psi_S^\ell(\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u})(\mathbf{x}) = -\mathcal{I}^k(\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u})(\mathbf{x}).$$

On retrouve donc les relations de saut

$$\left[ \gamma_{\mathbf{n}} \circ \nabla \Psi_S^\ell \right]_{\Gamma} = -\operatorname{Id}, \quad \left[ \gamma_{\mathbf{n}} \circ \nabla \nabla \cdot \Psi_V^\ell \right]_{\Gamma} = -\operatorname{div}_{\Gamma}.$$

Les traces des autres potentiels impliquent des intégrales convergentes sur  $\Gamma$  donc leur saut est nul.

Pour un potentiel quelconque  $\Psi$  et une trace quelconque  $\gamma_{\bullet}$ ,  $k \in \{0,1\}$ , on a les identités suivantes :

$$\text{Si } [\gamma_{\bullet} \Psi]_{\Gamma} = 0 \quad \text{alors} \quad \gamma_{\bullet}^k \Psi = \{\gamma_{\bullet} \Psi\}_{\Gamma}. \quad (2.2.12)$$

$$\text{Si } [\gamma_{\bullet} \Psi]_{\Gamma} = -\operatorname{Id} \quad \text{alors} \quad \gamma_{\bullet}^k \Psi = \frac{(-1)^{(k+1)}}{2} \operatorname{Id} + \{\gamma_{\bullet} \Psi\}_{\Gamma}. \quad (2.2.13)$$

$$\text{Si } [\gamma_{\bullet} \Psi]_{\Gamma} = -\operatorname{div}_{\Gamma} \quad \text{alors} \quad \gamma_{\bullet}^k \Psi = \frac{(-1)^{(k+1)}}{2} \operatorname{div}_{\Gamma} + \{\gamma_{\bullet} \Psi\}_{\Gamma}. \quad (2.2.14)$$

Le tableau ci-dessous associe les traces et les potentiels à ces relations :

	$\Psi_V$	$\Psi_{DC}$	$\nabla \Psi_S$	$\nabla \nabla \cdot \Psi_V$
$\gamma_{\times}$	(2.2.12)	(2.2.13)	(2.2.12)	(2.2.12)
$\gamma_{\mathbf{n}}$	(2.2.12)	(2.2.12)	(2.2.13)	(2.2.14)

Les traces  $\gamma_N$  des potentiels se retrouvent à partir des traces  $\gamma_{\times}$  :

$$\begin{aligned} \gamma_N^k \Psi_V^\ell &= \gamma_{\times}^k \circ \nabla \times \Psi_V^\ell = \gamma_{\times}^k \Psi_{DC}^\ell, \\ \gamma_N^k \Psi_{DC}^\ell &= \gamma_{\times}^k \circ \nabla \times \nabla \times \Psi_V^\ell = \kappa_\ell^2 \gamma_{\times}^k \Psi_V^\ell + \gamma_{\times}^k \circ \nabla \nabla \cdot \Psi_V^\ell, \\ \gamma_N^k \circ \nabla \Psi_S^\ell &= \gamma_{\times}^k \circ \nabla \times \nabla \Psi_S^\ell = 0, \\ \gamma_N^k \circ \nabla \nabla \cdot \Psi_V^\ell &= \gamma_{\times}^k \circ \nabla \times \nabla \nabla \cdot \Psi_V^\ell = 0. \end{aligned}$$

On en déduit les relations (2.2.6)-(2.2.11).  $\square$

**Propriété 2.2.1.** Si  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma} 0, \Gamma)$  alors

$$\mathcal{C}_{\times}^{\ell} \mathbf{u} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_n^{\ell} \mathbf{u} = 0.$$

**Preuve**

D'après (2.2.2), soit  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma} 0, \Gamma)$ ,

$$\mathcal{C}_{\bullet}^{\ell} \mathbf{u} := \{\gamma_{\bullet} \circ \nabla \nabla \cdot \Psi_V^\ell\}_{\Gamma}(\mathbf{u}) = \{\gamma_{\bullet} \circ \nabla \Psi_S^\ell\}_{\Gamma}(\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u}) = 0,$$

avec  $\bullet \in \{\times, n\}$ .  $\square$

**Propriété 2.2.2.** Soient  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$  et  $u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ , si  $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}0, \Gamma)$  alors

$$\left\langle \tilde{\mathbf{u}}, \mathcal{C}_{\times}^{\ell} \mathbf{u} \right\rangle_{\times} = 0 \quad \text{et} \quad \left\langle \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathcal{C}}_{\times}^{\ell} u \right\rangle_{\times} = 0.$$

**Preuve**

Ce résultat se retrouve par la définition (2.1.8) de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\times}$  et par la propriété 2.1.2.  $\square$

## 2.3 Le problème intégral surfacique

Cette section présente les éléments nécessaires pour poser le problème intégral sous ses formes forte et faible, à partir des problèmes synthétisés dans la conclusion 1.4. Le champ électromagnétique est exprimé en fonction de ses traces, d'après les formules de représentation intégrale. Pour obtenir un système d'équations intégrales surfaciques, les conditions de transmission sont appliquées aux traces de ces formules qui sont ensuite combinées linéairement.

### 2.3.1 Forme forte

#### À partir du problème non homogène

Sous les hypothèses **(H0)**, **(H1)** et **(H2a)**, soit  $\mathbf{U}_{\text{tot}}$  la solution du problème (1.4.1),  $\mathbf{U}_{\text{tot}} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0 \cup \Omega_1)$  et vérifie les hypothèses du corollaire 2.2.1, on a donc les formules de représentation intégrale

$$\mathbf{U}_{\text{inc}} - \mathcal{S}\mathcal{C}^0(\gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{tot}}, \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{tot}}) = \begin{cases} \mathbf{U}_{\text{tot}} & \text{dans } \Omega_0, \\ 0 & \text{dans } \Omega_1, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

et

$$\mathcal{S}\mathcal{C}^1(\gamma_{\times}^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}, \gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ \mathbf{U}_{\text{tot}} & \text{dans } \Omega_1. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

L'inconnue  $\mathbf{U}_{\text{tot}}$  ne dépend que de ses traces  $\gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{tot}}$ ,  $\gamma_{\times}^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}$ ,  $\gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{tot}}$  et  $\gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}$ . Pour obtenir des équations intégrales surfaciques, on applique maintenant la trace extérieure  $\gamma_{\times}^0$  à (2.3.1) et la trace intérieure  $\gamma_{\times}^1$  à (2.3.2) :

$$\begin{aligned} \gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{inc}} &= \gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{tot}} + \mathcal{S}\mathcal{C}_{\times,0}^0(\gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{tot}}, \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{tot}}) \\ &= \left( \frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^0 \right) \gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{tot}} + \left( \mathcal{A}_{\times}^0 + \frac{1}{\kappa_0^2} \mathcal{C}_{\times}^0 \right) \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{tot}}, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\gamma_{\times}^1 \mathbf{U}_{\text{tot}} + \mathcal{S}\mathcal{C}_{\times,1}^1(\gamma_{\times}^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}, \gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}) \\ &= \left( -\frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^1 \right) \gamma_{\times}^1 \mathbf{U}_{\text{tot}} + \left( \mathcal{A}_{\times}^1 + \frac{1}{\kappa_1^2} \mathcal{C}_{\times}^1 \right) \gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

De même, on applique la trace extérieure  $\gamma_N^0$  à (2.3.1) et la trace intérieure  $\gamma_N^1$  à (2.3.2) :

$$\begin{aligned} \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{inc}} &= \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{tot}} + \mathcal{S}\mathcal{C}_{N,0}^0(\gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{tot}}, \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{tot}}) \\ &= (\kappa_0^2 \mathcal{A}_{\times}^0 + \mathcal{C}_{\times}^0) \gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{tot}} + \left( \frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^0 \right) \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{tot}}, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{tot}} + \mathcal{S}\mathcal{C}_{N,1}^0(\gamma_{\times}^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}, \gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}) \\ &= (\kappa_1^2 \mathcal{A}_{\times}^1 + \mathcal{C}_{\times}^1) \gamma_{\times}^1 \mathbf{U}_{\text{tot}} + \left( -\frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^1 \right) \gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

On ne travaille maintenant plus qu'avec les inconnues surfaciques  $\gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{tot}}$ ,  $\gamma_{\times}^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}$ ,  $\gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{tot}}$  et  $\gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}$ . Les conditions de transmissions du problème (1.4.1) impliquent que

$$\gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{tot}} = \gamma_{\times}^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}, \quad \zeta_0^{-1} \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{tot}} = \zeta_1^{-1} \gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}.$$

On introduit alors deux nouvelles inconnues représentant les densités de courant surfaciques et définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\times} &:= \gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{tot}} = \gamma_{\times}^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}, \\ \mathcal{X}_N &:= \zeta_0^{-1} \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{tot}} = \zeta_1^{-1} \gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}. \end{aligned}$$

D'après les théorèmes 2.1.3 et 2.1.4, comme  $\mathbf{U}_{\text{tot}} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$  alors  $\mathcal{X}_{\times}$  et  $\mathcal{X}_N$  appartiennent à  $\mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ . On exprime maintenant  $\gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{tot}}$ ,  $\gamma_{\times}^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}$ ,  $\gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{tot}}$  et  $\gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}$  en fonction de  $\mathcal{X}_{\times}$  et  $\mathcal{X}_N$  :

$$\begin{aligned} \gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{tot}} &= \mathcal{X}_{\times}, & \gamma_{\times}^1 \mathbf{U}_{\text{tot}} &= \mathcal{X}_{\times}, \\ \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{tot}} &= \zeta_0 \mathcal{X}_N, & \gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{tot}} &= \zeta_1 \mathcal{X}_N. \end{aligned}$$

On remplace ces inconnues dans (2.3.3)-(2.3.6) puis on divise respectivement (2.3.5) et (2.3.6) par  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$ . Après ces opérations on obtient les quatre équations suivantes

$$\gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{inc}} = \left( \frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^0 \right) \mathcal{X}_{\times} + \zeta_0 \left( \mathcal{A}_{\times}^0 + \frac{1}{\kappa_0^2} \mathcal{C}_{\times}^0 \right) \mathcal{X}_N, \quad (2.3.7)$$

$$0 = \left( -\frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^1 \right) \mathcal{X}_{\times} + \zeta_1 \left( \mathcal{A}_{\times}^1 + \frac{1}{\kappa_1^2} \mathcal{C}_{\times}^1 \right) \mathcal{X}_N, \quad (2.3.8)$$

$$\zeta_0^{-1} \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{inc}} = \zeta_0^{-1} (\kappa_0^2 \mathcal{A}_{\times}^0 + \mathcal{C}_{\times}^0) \mathcal{X}_{\times} + \left( \frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^0 \right) \mathcal{X}_N, \quad (2.3.9)$$

$$0 = \zeta_1^{-1} (\kappa_1^2 \mathcal{A}_{\times}^1 + \mathcal{C}_{\times}^1) \mathcal{X}_{\times} + \left( -\frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^1 \right) \mathcal{X}_N. \quad (2.3.10)$$

On somme alors les équations (2.3.7) et (2.3.8) puis (2.3.9) et (2.3.10) afin de poser le problème intégral à deux inconnues :

$$\mathcal{Z} \mathcal{X} = \mathcal{Y} \quad (2.3.11)$$

avec

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} \zeta_0 \left( \mathcal{A}_{\times}^0 + \frac{1}{\kappa_0^2} \mathcal{C}_{\times}^0 \right) + \zeta_1 \left( \mathcal{A}_{\times}^1 + \frac{1}{\kappa_1^2} \mathcal{C}_{\times}^1 \right) & \mathcal{B}_{\times}^0 + \mathcal{B}_{\times}^1 \\ \mathcal{B}_{\times}^0 + \mathcal{B}_{\times}^1 & \zeta_0^{-1} (\kappa_0^2 \mathcal{A}_{\times}^0 + \mathcal{C}_{\times}^0) + \zeta_1^{-1} (\kappa_1^2 \mathcal{A}_{\times}^1 + \mathcal{C}_{\times}^1) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{X} = \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{X}_N \\ \mathcal{X}_{\times} \end{array} \right\}, \quad \mathcal{Y} = \left\{ \begin{array}{c} \gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{inc}} \\ \zeta_0^{-1} \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{inc}} \end{array} \right\}.$$

**Remarque 2.3.1.** *On a choisi d'appliquer les traces extérieures  $\gamma_{\times}^0$  et  $\gamma_N^0$  à (2.3.1) mais il est équivalent d'appliquer les traces intérieures  $\gamma_{\times}^1$  et  $\gamma_N^1$ . En effet dans ce cas on a*

$$\begin{aligned}\gamma_{\times}^1 \mathbf{U}_{\text{inc}} &= \mathcal{S}\mathcal{C}_{\times,1}^0(\gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{tot}}, \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{tot}}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^0\right) \gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{tot}} + \left(\mathcal{A}_{\times}^0 + \frac{1}{\kappa_0^2} \mathcal{C}_{\times}^0\right) \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{tot}}, \\ \gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{inc}} &= \mathcal{S}\mathcal{C}_{N,1}^0(\gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{tot}}, \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{tot}}) \\ &= (\kappa_0^2 \mathcal{A}_{\times}^0 + \mathcal{C}_{\times}^0) \gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{tot}} + \left(\frac{1}{2}\text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^0\right) \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{tot}}.\end{aligned}$$

D'après (1.4.5),  $\gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{inc}} = \gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{inc}}$  et  $\gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{inc}} = \gamma_{\times}^1 \mathbf{U}_{\text{inc}}$  donc on retrouve (2.3.3) et (2.3.5). De même, appliquer les traces intérieures  $\gamma_{\times}^1$  et  $\gamma_N^1$  à (2.3.2) est équivalent à appliquer les traces extérieures  $\gamma_{\times}^0$  et  $\gamma_N^0$ . En effet dans ce cas on a

$$\begin{aligned}0 &= \mathcal{S}\mathcal{C}_{\times,0}^1(\gamma_{\times}^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}, \gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^1\right) \gamma_{\times}^1 \mathbf{U}_{\text{tot}} + \left(\mathcal{A}_{\times}^1 + \frac{1}{\kappa_1^2} \mathcal{C}_{\times}^1\right) \gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}, \\ 0 &= \mathcal{S}\mathcal{C}_{N,0}^1(\gamma_{\times}^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}, \gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}) \\ &= (\kappa_1^2 \mathcal{A}_{\times}^1 + \mathcal{C}_{\times}^1) \gamma_{\times}^1 \mathbf{U}_{\text{tot}} + \left(-\frac{1}{2}\text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^1\right) \gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}.\end{aligned}$$

On retrouve bien (2.3.4) et (2.3.6).

### À partir du problème homogène

Sous les hypothèses **(H0)**, **(H1)** et **(H2a)** ou **(H2b)**, soit  $\mathbf{U}_d$  la solution du problème (1.4.3),  $\mathbf{U}_d \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0 \cup \Omega_1)$  et vérifie les hypothèses du corollaire 2.2.1, on a donc

$$-\mathcal{S}\mathcal{C}^0(\gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_d, \gamma_N^0 \mathbf{U}_d) = \begin{cases} \mathbf{U}_d & \text{dans } \Omega_0, \\ 0 & \text{dans } \Omega_1, \end{cases} \quad (2.3.12)$$

et

$$\mathcal{S}\mathcal{C}^1(\gamma_{\times}^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}, \gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ \mathbf{U}_{\text{tot}} & \text{dans } \Omega_1. \end{cases} \quad (2.3.13)$$

Comme la formule de représentation intégrale pour l'extérieur (2.3.13) est exactement (2.3.2), en appliquant les traces intérieures  $\gamma_{\times}^1$  et  $\gamma_N^1$  à (2.3.13) on retrouve exactement (2.3.4) et (2.3.6). On applique maintenant les traces extérieures  $\gamma_{\times}^0$  et  $\gamma_N^0$  à (2.3.12) :

$$0 = \left(\frac{1}{2}\text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^0\right) \gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_d + \left(\mathcal{A}_{\times}^0 + \frac{1}{\kappa_0^2} \mathcal{C}_{\times}^0\right) \gamma_N^0 \mathbf{U}_d, \quad (2.3.14)$$

$$0 = (\kappa_0^2 \mathcal{A}_{\times}^0 + \mathcal{C}_{\times}^0) \gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_d + \left(\frac{1}{2}\text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^0\right) \gamma_N^0 \mathbf{U}_d. \quad (2.3.15)$$

Ces deux équations sont respectivement équivalentes à (2.3.3) et (2.3.5). On peut donc en conclure que l'on obtient le même problème intégral pour le problème de Maxwell homogène ou non homogène.

### Preuve

Montrons que le problème (2.3.14)-(2.3.15) est équivalent au problème (2.3.3)-(2.3.5). Par définition du champ diffracté ( $\mathbf{U}_d = \mathbf{U}_{\text{tot}} - \mathbf{U}_{\text{inc}}$ ), les équations (2.3.14) et (2.3.15) s'écrivent respectivement,

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_\times^0 \right) (\gamma_\times^0 \mathbf{U}_{\text{tot}} - \gamma_\times^0 \mathbf{U}_{\text{inc}}) + \left( \mathcal{A}_\times^0 + \frac{1}{\kappa_0^2} \mathcal{C}_\times^0 \right) (\gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{tot}} - \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{inc}}), \\ 0 &= (\kappa_0^2 \mathcal{A}_\times^0 + \mathcal{C}_\times^0) (\gamma_\times^0 \mathbf{U}_{\text{tot}} - \gamma_\times^0 \mathbf{U}_{\text{inc}}) + \left( \frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_\times^0 \right) (\gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{tot}} - \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{inc}}). \end{aligned}$$

Les équations (2.3.3) et (2.3.5) impliquent alors les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \gamma_\times^0 \mathbf{U}_{\text{inc}} &= \left( \frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_\times^0 \right) \gamma_\times^0 \mathbf{U}_{\text{inc}} + \left( \mathcal{A}_\times^0 + \frac{1}{\kappa_0^2} \mathcal{C}_\times^0 \right) \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{inc}}, \\ \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{inc}} &= (\kappa_0^2 \mathcal{A}_\times^0 + \mathcal{C}_\times^0) \gamma_\times^0 \mathbf{U}_{\text{inc}} + \left( \frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_\times^0 \right) \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{inc}}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant prouver ces égalités. Le raisonnement est le même que les champs incidents soient des champs rayonnants (hypothèse **(H2a)**) ou des ondes planes (hypothèse **(H2b)**). Le champ  $\mathbf{U}_{\text{inc}}$  vérifie (1.4.5) et donc les hypothèses du corollaire 2.2.1. b, d'où

$$\mathcal{S}\mathcal{C}^0(\gamma_\times^1 \mathbf{U}_{\text{inc}}, \gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{inc}}) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ \mathbf{U}_{\text{inc}} & \text{dans } \Omega_1. \end{cases} \quad (2.3.16)$$

On applique alors les traces  $\gamma_\times^1$  et  $\gamma_N^1$  à (2.3.16) :

$$\begin{aligned} \gamma_\times^1 \mathbf{U}_{\text{inc}} &= \left( \frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_\times^0 \right) \gamma_\times^1 \mathbf{U}_{\text{inc}} + \left( \mathcal{A}_\times^0 + \frac{1}{\kappa_0^2} \mathcal{C}_\times^0 \right) \gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{inc}}, \\ \gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{inc}} &= (\kappa_0^2 \mathcal{A}_\times^0 + \mathcal{C}_\times^0) \gamma_\times^1 \mathbf{U}_{\text{inc}} + \left( \frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_\times^0 \right) \gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{inc}}, \end{aligned}$$

et en remplaçant, d'après (1.4.5),  $\gamma_\times^1 \mathbf{U}_{\text{inc}}$  par  $\gamma_\times^0 \mathbf{U}_{\text{inc}}$  et  $\gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{inc}}$  par  $\gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{inc}}$  on retrouve nos égalités.  $\square$

Sous l'hypothèse de l'approximation quasi-statique **(H3)**, on ne peut appliquer le corollaire 2.2.1 puisque  $\kappa_0$  est nul. Cependant, les hypothèses du théorème 2.2.1 sont vérifiées. Ce cas particulier est traité dans le chapitre suivant.

### 2.3.2 Forme faible

Les équations du problème (2.3.11) sont dans  $\mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  ce qui nous permet, par la relation de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\times$ , de les tester dans  $\mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ . On obtient ainsi le

problème variationnel :

$$\langle \mathcal{U}, \mathcal{Z}\mathcal{X} \rangle_{\times} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{Y} \rangle_{\times}, \forall \mathcal{U} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})^{\top} \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma) \times \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma). \quad (2.3.17)$$



## Chapitre 3

# Tour d'horizon des formulations intégrales existantes

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Les formulations pour le problème de Maxwell . . . . .</b>	<b>50</b>
3.1.1	Une première approche : la formulation PMCHWT . . . . .	50
3.1.2	Les formulations pondérées . . . . .	52
3.1.3	Décomposition de Helmholtz-Hodge . . . . .	53
<b>3.2</b>	<b>Les formulations pour le problème courants de Foucault . . .</b>	<b>56</b>
3.2.1	Formules de représentation intégrale . . . . .	56
3.2.2	La formulation Hiptmair . . . . .	59
3.2.3	Les formulations découplées . . . . .	60

---

Ce chapitre présente différents systèmes intégraux surfaciques pour résoudre le problème de transmission de Maxwell ainsi que son approximation quasi-statique. La première partie est consacrée aux formulations de Maxwell [13]. Dans un premier temps, les différentes étapes de la mise en place de la formulation la plus classique, communément appelée PMCHWT (Poggio-Miller-Chang-Harrington-Wu-Tsai [38, 33, 39]), sont développées. Puis deux formulations dérivées de cette formulation sont présentées. La première consiste à pondérer les contributions des milieux extérieur et intérieur avant de poser le problème intégral sous forme forte. La seconde consiste à appliquer une décomposition de Helmholtz-Hodge aux espaces d'approximation du problème intégral sous forme faible. La deuxième partie est consacrée à la présentation de trois formulations pour le problème quasi-statique courants de Foucault. La première peut être vue comme une simplification de la formulation PMCHWT. Les deux autres sont des formulations qui découpent les contributions des différents milieux mais impliquent la présence d'inconnues scalaires supplémentaires par rapport aux formulations précédentes.

### 3.1 Les formulations pour le problème de Maxwell

#### 3.1.1 Une première approche : la formulation PMCHWT

La formulation PMCHWT tient son nom des auteurs Poggio, Miller, Chang, Harrington, Wu et Tsai [38, 33, 39]. Il s'agit de la formulation généralement employée pour les milieux diélectriques ou conducteurs à haute fréquence.

**À partir du problème de Maxwell en champ électrique non homogène.** Sous les hypothèses **(H0)**, **(H1)** et **(H2a)**, le champ électrique  $\mathbf{E}_{\text{tot}} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{rot}^2, \Omega_0 \cup \Omega_1)$  et vérifie le problème de Maxwell non homogène (1.3.5). Ce problème peut s'écrire sous la forme du problème (1.4.1), en respectant les correspondances du tableau (1.4.2). Le chapitre précédent présente la procédure permettant d'écrire ce problème sous la forme du problème intégral (2.3.11) puis du problème variationnel (2.3.17). Cette formulation correspond à la formulation PMCHWT. Le problème PMCHWT est généralement exprimé en fonction des densités de courant surfaciques électrique et magnétique, respectivement définies par

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= -\gamma_{\times}^0 \mathbf{H} = -\gamma_{\times}^1 \mathbf{H} \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma), \\ \mathbf{M} &= \gamma_{\times}^0 \mathbf{E} = \gamma_{\times}^1 \mathbf{E} \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma). \end{aligned}$$

Reprenons le problème (2.3.11), les inconnues sont définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_N &:= \zeta_0^{-1} \gamma_N^0 \mathbf{U}_{\text{tot}} = \zeta_1^{-1} \gamma_N^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}, \\ \mathcal{X}_{\times} &:= \gamma_{\times}^0 \mathbf{U}_{\text{tot}} = \gamma_{\times}^1 \mathbf{U}_{\text{tot}}, \end{aligned}$$

or ici,  $\mathbf{U}_{\text{tot}} = \mathbf{E}_{\text{tot}}$  et  $\zeta_{\ell} = \mu_{\ell}$  (d'après le tableau (1.4.2)), on a donc pour  $\ell \in \{0,1\}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_N &= \mu_{\ell}^{-1} \gamma_N^{\ell} \mathbf{E}_{\text{tot}} = -si\omega \gamma_{\times}^{\ell} \mathbf{H}_{\text{tot}} = si\omega \mathbf{J}, \\ \mathcal{X}_{\times} &= \gamma_{\times}^{\ell} \mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{M}. \end{aligned}$$

On remplace ces inconnues dans (2.3.11) puis on divise la deuxième ligne par  $-si\omega$ . Comme  $\mathbf{H}_{\text{inc}} = (-si\omega\mu_0)^{-1}(\nabla \times \mathbf{E}_{\text{inc}})$ , on obtient le problème intégral

$$\mathcal{Z}\mathcal{X} = \mathcal{Y}, \tag{3.1.1}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 + \mathcal{Z}_1, \quad \mathcal{Z}_{\ell} &= \begin{bmatrix} si \left( \omega\mu_{\ell} \mathcal{A}_{\times}^{\ell} + \frac{1}{\omega\varepsilon_{\ell}} \mathcal{C}_{\times}^{\ell} \right) & \mathcal{B}_{\times}^{\ell} \\ -\mathcal{B}_{\times}^{\ell} & si \left( \omega\varepsilon_{\ell} \mathcal{A}_{\times}^{\ell} + \frac{1}{\omega\mu_{\ell}} \mathcal{C}_{\times}^{\ell} \right) \end{bmatrix}, \ell \in \{0,1\} \\ \mathcal{X} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix}, \quad \mathcal{Y} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} \\ \gamma_{\times}^1 \mathbf{H}_{\text{inc}} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

De même, en remplaçant dans (2.3.17) on obtient le problème variationnel :

$$\langle \mathcal{U}, \mathcal{Z}\mathcal{X} \rangle_{\times} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{Y} \rangle_{\times}, \forall \mathcal{U} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})^{\top} \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma) \times \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma). \tag{3.1.2}$$

Pour conclure, les champs  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$  se calculent via les formules de représentation intégrale

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{\text{tot}}|_{\Omega_0} &= \mathbf{E}_{\text{inc}}|_{\Omega_0} - \mathcal{SC}^0(\mathbf{M}, si\omega\mu_0\mathbf{J}) && \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0), \\
 \mathbf{E}_{\text{tot}}|_{\Omega_1} &= \mathcal{SC}^1(\mathbf{M}, si\omega\mu_1\mathbf{J}) && \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}^2, \Omega_1), \\
 \mathbf{H}_{\text{tot}}|_{\Omega_0} &= \mathbf{H}_{\text{inc}}|_{\Omega_0} - \mathcal{SC}^0(-\mathbf{J}, si\omega\varepsilon_0\mathbf{M}) && \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0), \\
 \mathbf{H}_{\text{tot}}|_{\Omega_1} &= \mathcal{SC}^1(-\mathbf{J}, si\omega\varepsilon_1\mathbf{M}) && \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}^2, \Omega_1).
 \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Ainsi on obtient que résoudre le problème de Maxwell non homogène en champ électrique (1.3.5) revient à résoudre le problème variationnel (3.1.2).

**À partir du problème de Maxwell en champ électrique homogène.** Sous les hypothèses **(H0)**, **(H1)** et **((H2a) ou (H2b))**, le champ électrique égal à  $\mathbf{E}_{\text{tot}} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}^2, \Omega_1)$  dans  $\Omega_1$  et à  $\mathbf{E}_{\text{d}} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0)$  dans  $\Omega_0$ , vérifie le problème de Maxwell homogène (1.3.7). Ce problème peut s'écrire sous la forme du problème (1.4.3), en respectant les correspondances du tableau (1.4.4). D'après le chapitre précédent, ce problème s'écrit lui aussi sous la forme du problème intégral (2.3.11) puis du problème variationnel (2.3.17). On obtient donc les mêmes problèmes intégral (3.1.1) et variationnel (3.1.2) que pour le problème de Maxwell en champ électrique non homogène.

**À partir du problème de Maxwell en champ magnétique homogène ou non.** Comme pour le problème en champ électrique, on obtient le problème variationnel associé à (1.3.6) et (1.3.8) en remplaçant dans (2.3.17) les correspondances des tableaux (1.4.2) et (1.4.4). On retrouve ainsi le même problème variationnel (3.1.2) que précédemment.

### Résumé

On cherche à calculer les champs, électrique  $\mathbf{E}_{\text{tot}} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0 \cup \Omega_1)$  et magnétique  $\mathbf{H}_{\text{tot}} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0 \cup \Omega_1)$ . On pose

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{\text{tot}} &= \mathbf{E} && \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0 \cup \Omega_1), \\
 \mathbf{H}_{\text{tot}} &= -(si\omega\mu)^{-1}\nabla \times \mathbf{E} && \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0 \cup \Omega_1).
 \end{aligned}$$

L'inconnue est alors le champ  $\mathbf{E}$  et on pose le problème de Maxwell :

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = -si\omega\mu\mathbf{J}_{\text{inc}} & \text{dans } \Omega_0 \cup \Omega_1, \\
 [\gamma_{\times} \mathbf{E}]_{\Gamma} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\
 [\mu^{-1}\gamma_N \mathbf{E}]_{\Gamma} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\
 \mathbf{E} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty.
 \end{array} \right.$$

À partir du problème de Maxwell on obtient, via les formules de représentation intégrale,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}|_{\Omega_0} &= \mathbf{E}_{\text{inc}}|_{\Omega_0} - \mathcal{SC}^0(\gamma_{\times}^0 \mathbf{E}, \gamma_N^0 \mathbf{E}), \\
 \mathbf{E}|_{\Omega_1} &= \mathcal{SC}^1(\gamma_{\times}^1 \mathbf{E}, \gamma_N^1 \mathbf{E}).
 \end{aligned}$$

En appliquant les traces  $\gamma_\times$  et  $\gamma_N$  à la représentation intégrale du champ  $\mathbf{E}$  et en posant

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= (si\omega\mu_0)^{-1}\gamma_N^0\mathbf{E} = (si\omega\mu_1)^{-1}\gamma_N^1\mathbf{E} \in \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \\ \mathbf{M} &= \gamma_\times^0\mathbf{E} = \gamma_\times^1\mathbf{E} \in \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma),\end{aligned}$$

les inconnues sont les densités de courants surfaciques  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$ . On pose alors le problème intégral (forme forte) :

$$\begin{cases} si \left( \omega\mu_0\mathcal{A}_\times^0 + \omega\mu_1\mathcal{A}_\times^1 + \frac{1}{\omega\varepsilon_0}\mathcal{C}_\times^0 + \frac{1}{\omega\varepsilon_1}\mathcal{C}_\times^1 \right) \mathbf{J} + (\mathcal{B}_\times^0 + \mathcal{B}_\times^1) \mathbf{M} = \gamma_\times^0\mathbf{E}_{\text{inc}}, \\ -(\mathcal{B}_\times^0 + \mathcal{B}_\times^1) \mathbf{J} + si \left( \omega\varepsilon_0\mathcal{A}_\times^0 + \omega\varepsilon_1\mathcal{A}_\times^1 + \frac{1}{\omega\mu_0}\mathcal{C}_\times^0 + \frac{1}{\omega\mu_1}\mathcal{C}_\times^1 \right) \mathbf{M} = \gamma_\times^0\mathbf{H}_{\text{inc}}. \end{cases}$$

Afin de résoudre numériquement le problème intégral, on le pose sous la forme d'un problème variationnel (forme faible) :

$$\begin{cases} \left\langle \mathbf{u}, si \left( \omega\mu_0\mathcal{A}_\times^0 + \omega\mu_1\mathcal{A}_\times^1 + \frac{1}{\omega\varepsilon_0}\mathcal{C}_\times^0 + \frac{1}{\omega\varepsilon_1}\mathcal{C}_\times^1 \right) \mathbf{J} \right\rangle_\times + \left\langle \mathbf{u}, (\mathcal{B}_\times^0 + \mathcal{B}_\times^1) \mathbf{M} \right\rangle_\times \\ \qquad \qquad \qquad = \left\langle \mathbf{u}, \gamma_\times^0\mathbf{E}_{\text{inc}} \right\rangle_\times, \\ -\left\langle \mathbf{v}, (\mathcal{B}_\times^0 + \mathcal{B}_\times^1) \mathbf{J} \right\rangle_\times + \left\langle \mathbf{v}, si \left( \omega\varepsilon_0\mathcal{A}_\times^0 + \omega\varepsilon_1\mathcal{A}_\times^1 + \frac{1}{\omega\mu_0}\mathcal{C}_\times^0 + \frac{1}{\omega\mu_1}\mathcal{C}_\times^1 \right) \mathbf{M} \right\rangle_\times \\ \qquad \qquad \qquad = \left\langle \mathbf{v}, \gamma_\times^0\mathbf{H}_{\text{inc}} \right\rangle_\times, \end{cases}$$

$$\forall \mathbf{u}_t \in \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma_h), \forall \mathbf{v}_t \in \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma_h).$$

### 3.1.2 Les formulations pondérées

Ces formulations consistent à pondérer, par des coefficients, les traces tangentielles  $\gamma_\times$  et  $\gamma_N$  des formules de représentation intégrale de l'extérieur ( $\Omega_0$ ) et de l'intérieur ( $\Omega_1$ ). La pondération intervient donc sur la formulation forte du problème intégral.

La formulation PMCHWT s'obtient en sommant (2.3.7) et (2.3.8) d'une part, (2.3.9) et (2.3.10) d'autre part. En pondérant cette somme on obtient une variante plus générale de la formulation PMCHWT. Pour cela, on va multiplier (2.3.7) par  $\alpha_0$ , (2.3.8) par  $\alpha_1$ , (2.3.9) par  $\beta_0$  et (2.3.10) par  $\beta_1$ , avec  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_0$  et  $\beta_1$  des coefficients scalaires constants. On obtient le problème intégral :

$$\mathcal{Z}(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1)\mathcal{X} = \mathcal{Y}(\alpha_0, \beta_0) \quad (3.1.4)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1) &= \sum_{\ell=0}^1 \begin{bmatrix} \alpha_\ell & 0 \\ 0 & \beta_\ell \end{bmatrix} \left( \mathcal{Z}_\ell + \begin{bmatrix} 0 & \frac{(-1)^\ell}{2}\text{Id} \\ \frac{(-1)^{\ell+1}}{2}\text{Id} & 0 \end{bmatrix} \right), \\ \mathcal{Y}(\alpha_0, \beta_0) &= \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \beta_0 \end{bmatrix} \mathcal{Y}.\end{aligned}$$

L'inconnue  $\mathcal{X}$  est la même que pour la formulation PMCHWT. Le problème variationnel est donné par

$$\langle \mathcal{U}, \mathcal{Z}(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1)\mathcal{X} \rangle_\times = \langle \mathcal{U}, \mathcal{Y}(\alpha_0, \beta_0) \rangle_\times, \quad (3.1.5)$$

$$\forall \mathcal{U} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})^\top \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma) \times \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma).$$

Comme pour la formulation PMCHWT, on peut calculer les champs  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$  via (3.1.3) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{tot}}|_{\Omega_0} &= \mathbf{E}_{\text{inc}}|_{\Omega_0} - \mathcal{S}\mathcal{C}^0(\mathbf{M}, si\omega\mu_0\mathbf{J}) && \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0), \\ \mathbf{E}_{\text{tot}}|_{\Omega_1} &= \mathcal{S}\mathcal{C}^1(\mathbf{M}, si\omega\mu_1\mathbf{J}) && \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}^2, \Omega_1), \\ \mathbf{H}_{\text{tot}}|_{\Omega_0} &= \mathbf{H}_{\text{inc}}|_{\Omega_0} - \mathcal{S}\mathcal{C}^0(-\mathbf{J}, si\omega\varepsilon_0\mathbf{M}) && \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0), \\ \mathbf{H}_{\text{tot}}|_{\Omega_1} &= \mathcal{S}\mathcal{C}^1(-\mathbf{J}, si\omega\varepsilon_1\mathbf{M}) && \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}^2, \Omega_1). \end{aligned}$$

On note l'apparition des termes de masse  $\frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}\text{Id}$  et  $\frac{\beta_1 - \beta_0}{2}\text{Id}$ . Si les coefficients vérifient

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \beta_0 = \beta_1 = 1$$

ces termes sont nuls et le problème intégral (3.1.4) est équivalent au problème intégral de la formulation PMCHWT (3.1.1), c'est-à-dire que l'on a  $\mathcal{Z}(1,1,1,1) = \mathcal{Z}$  et  $\mathcal{Y}(1,1) = \mathcal{Y}$ . Par conséquent, le problème variationnel (3.1.5) est équivalent au problème variationnel de la formulation PMCHWT (3.1.2).

### 3.1.3 Décomposition de Helmholtz-Hodge

D'après le théorème 2.1.5, un champ  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$  peut se décomposer selon

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^L + \mathbf{u}^T, \quad (3.1.6)$$

avec  $\mathbf{u}^L \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}0, \Gamma)$  et  $\mathbf{u}^T \in V^c(\Gamma)$ . L'ensemble  $V^c(\Gamma) \subset \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$  est le complémentaire de  $\mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}0, \Gamma)$  dans  $\mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$  tel que  $V^c(\Gamma) \cap \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}0, \Gamma) = \{0\}$ . L'application de la décomposition de Helmholtz-Hodge au problème variationnel (3.1.2) de la formulation PMCHWT, ou plus généralement au problème variationnel (3.1.5) de la formulation pondérée, permet de découpler les opérateurs  $\mathcal{A}_{\times}^{\ell}$  et  $\mathcal{C}_{\times}^{\ell}$ . Ce choix est nécessaire pour la résolution numérique du système discrétisé à basse fréquence. On détaillera cette affirmation dans la deuxième partie du manuscrit portant sur la mise en œuvre numérique.

D'après(3.1.6), on peut décomposer l'espace test ainsi que l'espace des inconnues du problème variationnel (3.1.5) selon

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}^L + \mathbf{u}^T \\ \mathbf{v}^L + \mathbf{v}^T \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{X} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{J}^L + \mathbf{J}^T \\ \mathbf{M}^L + \mathbf{M}^T \end{array} \right\}$$

où  $\mathbf{u}^L, \mathbf{v}^L, \mathbf{J}^L$  et  $\mathbf{M}^L$  appartiennent à  $\mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}0, \Gamma)$  et  $\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T, \mathbf{J}^T$  et  $\mathbf{M}^T$  appartiennent à  $V^c(\Gamma)$ . On utilise ici les exposants  $L$  et  $T$  en référence aux fonctions *Loop* et *Tree*

généralement utilisées pour les milieux diélectriques [16]. Le problème (3.1.2) décomposé s'écrit alors :

$$\langle \mathcal{U}_{LT}, \mathcal{Z}_{LT} \mathcal{X}_{LT} \rangle_{\times} = \langle \mathcal{U}_{LT}, \mathcal{Y}_{LT} \rangle_{\times}, \quad (3.1.7)$$

$$\forall \mathcal{U}_{LT} = (\mathbf{u}^L, \mathbf{u}^T, \mathbf{v}^L, \mathbf{v}^T)^{\top} \in (\mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma} 0, \Gamma) \times V^c(\Gamma))^2.$$

La matrice  $\mathcal{Z}_{LT}$  est donnée par  $\mathcal{Z}_{LT} = \mathcal{Z}_{0,LT} + \mathcal{Z}_{1,LT}$  avec

$$\mathcal{Z}_{\ell,LT} = \begin{bmatrix} si\omega\mu_{\ell}A_{\times}^{\ell} & si\omega\mu_{\ell}A_{\times}^{\ell} & \mathcal{B}_{\times}^{\ell} & \mathcal{B}_{\times}^{\ell} \\ si\omega\mu_{\ell}A_{\times}^{\ell} & si\omega\mu_{\ell}A_{\times}^{\ell} + \frac{si}{\omega\varepsilon_{\ell}}C_{\times}^{\ell} & \mathcal{B}_{\times}^{\ell} & \mathcal{B}_{\times}^{\ell} \\ -\mathcal{B}_{\times}^{\ell} & -\mathcal{B}_{\times}^{\ell} & si\omega\varepsilon_{\ell}A_{\times}^{\ell} & si\omega\varepsilon_{\ell}A_{\times}^{\ell} \\ -\mathcal{B}_{\times}^{\ell} & -\mathcal{B}_{\times}^{\ell} & si\omega\varepsilon_{\ell}A_{\times}^{\ell} & si\omega\varepsilon_{\ell}A_{\times}^{\ell} + \frac{si}{\omega\mu_{\ell}}C_{\times}^{\ell} \end{bmatrix}, \ell \in \{0,1\}.$$

L'inconnue  $\mathcal{X}_{LT}$  et le second membre  $\mathcal{Y}_{LT}$  sont donnés par

$$\mathcal{X}_{LT} = \begin{Bmatrix} \mathbf{J}^L \\ \mathbf{J}^T \\ \mathbf{M}^L \\ \mathbf{M}^T \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{Y}_{LT} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} \\ \gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} \\ \gamma_{\times}^0 \mathbf{H}_{\text{inc}} \\ \gamma_{\times}^0 \mathbf{H}_{\text{inc}} \end{Bmatrix}.$$

De même, le problème (3.1.5) décomposé s'écrit :

$$\langle \mathcal{U}_{LT}, \mathcal{Z}_{LT}(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1) \mathcal{X}_{LT} \rangle_{\times} = \langle \mathcal{U}_{LT}, \mathcal{Y}_{LT}(\alpha_0, \beta_0) \rangle_{\times} \quad (3.1.8)$$

$$\forall \mathcal{U}_{LT} = (\mathbf{u}^L, \mathbf{u}^T, \mathbf{v}^L, \mathbf{v}^T)^{\top} \in (\mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma} 0, \Gamma) \times V^c(\Gamma))^2,$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{LT}(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1) &= \sum_{\ell=0}^1 \begin{bmatrix} \alpha_{\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{\ell} \end{bmatrix} \\ &\quad \left( \mathcal{Z}_{\ell,LT} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{(-1)^{\ell}}{2} \operatorname{Id} & \frac{(-1)^{\ell}}{2} \operatorname{Id} \\ 0 & 0 & \frac{(-1)^{\ell}}{2} \operatorname{Id} & \frac{(-1)^{\ell}}{2} \operatorname{Id} \\ \frac{(-1)^{\ell+1}}{2} \operatorname{Id} & \frac{(-1)^{\ell+1}}{2} \operatorname{Id} & 0 & 0 \\ \frac{(-1)^{\ell+1}}{2} \operatorname{Id} & \frac{(-1)^{\ell+1}}{2} \operatorname{Id} & 0 & 0 \end{bmatrix} \right), \\ \mathcal{Y}_{LT}(\alpha_0, \beta_0) &= \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_0 \end{bmatrix} \mathcal{Y}_{LT}. \end{aligned}$$

Les champs  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$  se calculent via (3.1.3) :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{\text{tot}}|_{\Omega_0} &= \mathbf{E}_{\text{inc}}|_{\Omega_0} - \mathcal{S}\mathcal{C}^0(\mathbf{M}^L + \mathbf{M}^T, \text{si}\omega\mu_0(\mathbf{J}^L + \mathbf{J}^T)) && \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0), \\
 \mathbf{E}_{\text{tot}}|_{\Omega_1} &= \mathcal{S}\mathcal{C}^1(\mathbf{M}^L + \mathbf{M}^T, \text{si}\omega\mu_1(\mathbf{J}^L + \mathbf{J}^T)) && \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}^2, \Omega_1), \\
 \mathbf{H}_{\text{tot}}|_{\Omega_0} &= \mathbf{H}_{\text{inc}}|_{\Omega_0} - \mathcal{S}\mathcal{C}^0(-\mathbf{J}^L - \mathbf{J}^T, \text{si}\omega\varepsilon_0(\mathbf{M}^L + \mathbf{M}^T)) && \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0), \\
 \mathbf{H}_{\text{tot}}|_{\Omega_1} &= \mathcal{S}\mathcal{C}^1(-\mathbf{J}^L - \mathbf{J}^T, \text{si}\omega\varepsilon_1(\mathbf{M}^L + \mathbf{M}^T)) && \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}^2, \Omega_1).
 \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Lorsque

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \beta_0 = \beta_1 = 1$$

on a  $\mathcal{Z}_{LT}(1,1,1,1) = \mathcal{Z}_{LT}$  et  $\mathcal{Y}_{LT}(1,1) = \mathcal{Y}_{LT}$ . Par conséquent, le problème variationnel (3.1.8) est équivalent au problème variationnel (3.1.7).

### Preuve

Montrons les simplifications du problème (3.1.7). D'après les propriétés 2.2.1 et 2.2.2, comme  $\mathbf{u}^L, \mathbf{v}^L, \mathbf{J}^L$  et  $\mathbf{M}^L$  appartiennent à  $\mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}0, \Gamma_h)$ , on a, pour  $\ell \in \{0,1\}$ ,

$$\mathcal{C}_{\times}^{\ell}(\mathbf{J}^L) = \mathcal{C}_{\times}^{\ell}(\mathbf{M}^L) = \left\langle \mathbf{u}^L, \mathcal{C}_{\times}^{\ell}(\mathbf{J}^{L/T}) \right\rangle_{\times} = \left\langle \mathbf{v}^L, \mathcal{C}_{\times}^{\ell}(\mathbf{M}^{L/T}) \right\rangle_{\times} = 0.$$

□

## 3.2 Les formulations pour le problème courants de Foucault

Sous l'approximation courants de Foucault, les densités de courant surfaciques  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$  sont nécessaires mais ne sont plus suffisantes pour le calcul des champs électrique et magnétique. En effet, le calcul du champ électrique, respectivement magnétique, nécessite de connaître la trace normale du champ électrique, respectivement magnétique.

Nous présentons dans cette partie trois formulations de la littérature. La première est proposée par Hiptmair *et al.* dans [35, 34] et repose sur le découplage du problème variationnel en deux sous problèmes. Le premier, dont les inconnues sont  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$ , est proche du problème variationnel de la formulation obtenue via la décomposition de Helmholtz-Hodge dans la partie 2.1.3. Le second permet le calcul de la trace normale du champ électrique. Le champ magnétique est ensuite calculé à partir du champ électrique. Les deux autres formulations sont proposées par Rucker *et al.* dans [52] et l'une des deux est reprise par Ming dans sa thèse [40]. Elles consistent à poser un problème intégral dont chaque ligne fait intervenir soit des contributions extérieures, soit des contributions intérieures. C'est à ce titre que l'on parle ici de formulations découplées. Cependant les différentes lignes du système restent couplées par les inconnues surfaciques. Dans le premier cas, on obtient un problème de trois équations à trois inconnues à partir desquelles on peut résoudre une dernière équation pour obtenir la quatrième inconnue. Dans le second cas on pose et on résout un système à quatre équations et quatre inconnues.

### 3.2.1 Formules de représentation intégrale

On se place sous les hypothèses **(H0)**, **(H1)**, **(H2a)** ainsi que l'hypothèse *courants de Foucault* **(H3)**. On rappelle que sous ces hypothèses les nombres d'onde associés à l'air et à la pièce prennent les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}\kappa_0 &= 0, \\ \kappa_1 &= (-si\omega\mu_1\sigma_1)^{1/2} \neq 0.\end{aligned}$$

Sous les hypothèses **(H0)**, **(H1)** et **(H2a)** les champs  $(\mathbf{E}_{\text{tot}}, \mathbf{H}_{\text{tot}}) \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \times \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$  vérifient (1.3.5). Lorsque l'on impose de plus l'hypothèse **(H3)**, l'énergie associée au champ électrique est seulement mesurée par son rotationnel, ce qui impose  $\mathbf{E}_{\text{tot}} \in \mathbf{W}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$  (cf. partie 2.1.4). Le champ  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  appartient donc à  $\mathbf{W}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$  et on a vu qu'il vérifie (1.3.13) avec la jauge (1.3.12). La solution  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  du problème (1.3.13) vérifie les hypothèses du théorème 2.2.1, on a donc

$$\mathbf{E}_{\text{inc}} - \widetilde{\mathcal{S}}\mathcal{C}^0(\gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{tot}}, \gamma_N^0 \mathbf{E}_{\text{tot}}, \gamma_{\mathbf{n}}^0 \mathbf{E}_{\text{tot}}) = \begin{cases} \mathbf{E}_{\text{tot}} & \text{dans } \Omega_0, \\ 0 & \text{dans } \Omega_1, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

et

$$\widetilde{\mathcal{S}}\mathcal{C}^1(\gamma_{\times}^1 \mathbf{E}_{\text{tot}}, \gamma_N^1 \mathbf{E}_{\text{tot}}, \gamma_{\mathbf{n}}^1 \mathbf{E}_{\text{tot}}) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ \mathbf{E}_{\text{tot}} & \text{dans } \Omega_1. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

De même, la solution  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$  du problème (1.3.14) vérifie les hypothèses du théorème 2.2.1 donc

$$\mathbf{H}_{\text{inc}} - \widetilde{\mathcal{S}}\mathcal{C}^0(\gamma_{\times}^0 \mathbf{H}_{\text{tot}}, \gamma_N^0 \mathbf{H}_{\text{tot}}, \gamma_{\mathbf{n}}^0 \mathbf{H}_{\text{tot}}) = \begin{cases} \mathbf{H}_{\text{tot}} & \text{dans } \Omega_0, \\ 0 & \text{dans } \Omega_1, \end{cases} \quad (3.2.3)$$

et

$$\widetilde{\mathcal{S}}\mathcal{C}^1(\gamma_{\times}^1 \mathbf{H}_{\text{tot}}, \gamma_N^1 \mathbf{H}_{\text{tot}}, \gamma_{\mathbf{n}}^1 \mathbf{H}_{\text{tot}}) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ \mathbf{H}_{\text{tot}} & \text{dans } \Omega_1. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

**Remarque 3.2.1.** Comme  $\kappa_1 \neq 0$ ,  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$  vérifient l'hypothèse du corollaire 2.2.1.b on peut aussi utiliser les expressions simplifiées de (3.2.2) et (3.2.4) permettant d'exprimer la trace scalaire  $\gamma_{\mathbf{n}}$  à partir de la trace vectorielle  $\gamma_N$ . Cependant, cette version ne nous permet pas de poser toutes les formulations présentées ici. En revanche, on ne peut utiliser les versions simplifiées de (3.2.1) et (3.2.3) car  $\kappa_0 = 0$  sous l'approximation quasi-statique.

Comme pour le problème de Maxwell, on applique différentes traces aux formules de représentation intégrale. À partir des conditions de transmission, les traces tangentielles des champs sont remplacées par les densités de courant surfaciques  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$ . De même, la trace normale des champs électrique et magnétique est remplacée par les densités de charge surfaciques, électrique et magnétique, respectivement définies par

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{0n} &:= \gamma_{\mathbf{n}}^0 \mathbf{E}_{\text{tot}}, & \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \mathbf{H}_{0n} &:= \gamma_{\mathbf{n}}^0 \mathbf{H}_{\text{tot}}, & \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma). \end{aligned}$$

On rappelle que

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &:= -\gamma_{\times}^0 \mathbf{H}_{\text{tot}} = -\gamma_{\times}^1 \mathbf{H}_{\text{tot}}, & \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma), \\ \mathbf{M} &:= \gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{tot}} = \gamma_{\times}^1 \mathbf{E}_{\text{tot}}, & \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma), \end{aligned}$$

ce qui implique, d'après (1.3.11),

$$\gamma_N^0 \mathbf{E}_{\text{tot}} = \text{si}\omega\mu_0 \mathbf{J}, \quad \gamma_N^1 \mathbf{E}_{\text{tot}} = \text{si}\omega\mu_1 \mathbf{J}.$$

Comme,  $\mathbf{J}_{\text{inc}}$  est à support dans l'ouvert borné  $\Omega_{\text{inc}}$  et  $\partial\Omega_{\text{inc}} \cap \Gamma = \emptyset$  alors,  $\mathbf{J}_{\text{inc}} \equiv 0$  au voisinage de  $\Gamma$  et donc (1.3.11) implique que

$$\gamma_N^0 \mathbf{H}_{\text{tot}} = 0, \quad \gamma_N^1 \mathbf{H}_{\text{tot}} = \sigma_1 \mathbf{M}.$$

D'après (1.3.14),  $\mu_0 \gamma_{\mathbf{n}}^0 \mathbf{H} = \mu_1 \gamma_{\mathbf{n}}^1 \mathbf{H}$  donc

$$\gamma_{\mathbf{n}}^1 \mathbf{H} = \frac{\mu_0}{\mu_1} \mathbf{H}_{0n}.$$

Et enfin, comme  $\mathbf{J}_{\text{inc}} \equiv 0$  au voisinage de  $\Gamma$ , (1.3.13) implique que  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_{\text{tot}}|_{\Omega_0} = 0$  au voisinage de  $\Gamma$ , on en déduit, d'après la propriété 2.1.2 que  $\text{div}_{\Gamma}(\gamma_N^0 \mathbf{E}_{\text{tot}}) = 0$  et donc que  $\gamma_N^0 \mathbf{E}_{\text{tot}} \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma} 0, \Gamma)$ . L'expression de  $\mathbf{J}$  en fonction de  $\gamma_N^0 \mathbf{E}_{\text{tot}}$  et  $\gamma_N^1 \mathbf{E}_{\text{tot}}$ ,

$$\mathbf{J} = (\text{si}\omega\mu_0)^{-1} \gamma_N^0 \mathbf{E}_{\text{tot}} = (\text{si}\omega\mu_1)^{-1} \gamma_N^1 \mathbf{E}_{\text{tot}},$$

implique que  $\gamma_N^1 \mathbf{E}$  et  $\mathbf{J}$  appartiennent à  $\mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma} 0, \Gamma)$ , sous l'approximation quasi-statique. On notera  $\mathbf{J} = \mathbf{J}^L \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma} 0, \Gamma)$  ou le  $L$  reprend les notations de la décomposition en fonctions *Loop* et *Tree*. Finalement, comme  $\kappa_1 \neq 0$ , la propriété (2.2.5) implique que  $\gamma_{\mathbf{n}}^1 \mathbf{E} = \frac{1}{\kappa_1^2} \text{div}_{\Gamma}(\gamma_N^1 \mathbf{E}) = 0$ . On applique maintenant les traces extérieures  $\gamma_{\times}^0, \gamma_N^0$  et  $\gamma_{\mathbf{n}}^0$  à (3.2.1) et (3.2.3), les traces intérieures  $\gamma_{\times}^1, \gamma_N^1$  et  $\gamma_{\mathbf{n}}^1$  à (3.2.2) et (3.2.4). Ensuite on remplace les traces des champs  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$  par leur expression en fonction de  $\mathbf{J}^L, \mathbf{M}, \mathbf{E}_{0n}$  et  $\mathbf{H}_{0n}$ . On rappelle que d'après la propriété 2.2.1,  $\mathcal{C}_{\times}^{\ell} \mathbf{J}^L = 0$  et  $\mathcal{C}_n^{\ell} \mathbf{J}^L = 0$  pour  $\ell \in \{0,1\}$ .

– Les traces extérieures  $\gamma_{\times}^0, \gamma_N^0$  et  $\gamma_{\mathbf{n}}^0$  respectivement appliquées à (3.2.1) donnent

$$\gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} = \left( \frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^0 \right) \mathbf{M} + si\omega\mu_0 \mathcal{A}_{\times}^0(\mathbf{J}^L) + \tilde{\mathcal{C}}_{\times}^0(\mathbf{E}_{0n}), \quad (3.2.5)$$

$$\gamma_N^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} = \mathcal{C}_{\times}^0(\mathbf{M}) + si\omega\mu_0 \left( \frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^0 \right) \mathbf{J}^L, \quad (3.2.6)$$

$$\gamma_{\mathbf{n}}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} = \mathcal{B}_n^0(\mathbf{M}) + si\omega\mu_0 \mathcal{A}_n^0(\mathbf{J}^L) + \left( \frac{1}{2} \text{Id} + \tilde{\mathcal{C}}_n^0 \right) \mathbf{E}_{0n}. \quad (3.2.7)$$

– Les traces intérieures  $\gamma_{\times}^1, \gamma_N^1$  et  $\gamma_{\mathbf{n}}^1$  respectivement appliquées à (3.2.2) donnent

$$0 = \left( -\frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^1 \right) \mathbf{M} + si\omega\mu_1 \mathcal{A}_{\times}^1(\mathbf{J}^L), \quad (3.2.8)$$

$$0 = (-si\omega\mu_1 \sigma_1 \mathcal{A}_{\times}^1 + \mathcal{C}_{\times}^1) \mathbf{M} + si\omega\mu_1 \left( -\frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^1 \right) \mathbf{J}^L, \quad (3.2.9)$$

$$0 = \mathcal{B}_n^1(\mathbf{M}) + si\omega\mu_1 \mathcal{A}_n^1(\mathbf{J}^L). \quad (3.2.10)$$

– Les traces extérieures  $\gamma_{\times}^0, \gamma_N^0$  et  $\gamma_{\mathbf{n}}^0$  respectivement appliquées à (3.2.3) donnent

$$\gamma_{\times}^0 \mathbf{H}_{\text{inc}} = \left( -\frac{1}{2} \text{Id} - \mathcal{B}_{\times}^0 \right) \mathbf{J}^L + \tilde{\mathcal{C}}_{\times}^0(\mathbf{H}_{0n}), \quad (3.2.11)$$

$$\gamma_N^0 \mathbf{H}_{\text{inc}} = 0, \quad (3.2.12)$$

$$\gamma_{\mathbf{n}}^0 \mathbf{H}_{\text{inc}} = -\mathcal{B}_n^0(\mathbf{J}^L) + \left( \frac{1}{2} \text{Id} + \tilde{\mathcal{C}}_n^0 \right) \mathbf{H}_{0n}. \quad (3.2.13)$$

– Les traces intérieures  $\gamma_{\times}^1, \gamma_N^1$  et  $\gamma_{\mathbf{n}}^1$  respectivement appliquées à (3.2.4) donnent

$$0 = \left( \frac{1}{2} \text{Id} - \mathcal{B}_{\times}^1 \right) \mathbf{J}^L + \sigma_1 \mathcal{A}_{\times}^1(\mathbf{M}) + \frac{\mu_0}{\mu_1} \tilde{\mathcal{C}}_{\times}^1(\mathbf{H}_{0n}), \quad (3.2.14)$$

$$0 = si\omega\mu_1 \sigma_1 \mathcal{A}_{\times}^1(\mathbf{J}^L) + \sigma_1 \left( -\frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^1 \right) \mathbf{M}, \quad (3.2.15)$$

$$0 = -\mathcal{B}_n^1(\mathbf{J}^L) + \sigma_1 \mathcal{A}_n^1(\mathbf{M}) + \frac{\mu_0}{\mu_1} \left( -\frac{1}{2} \text{Id} + \tilde{\mathcal{C}}_n^1 \right) \mathbf{H}_{0n}. \quad (3.2.16)$$

Il est possible d'obtenir différentes formulations quasi-statiques en combinant ces équations intégrales de surface.

### 3.2.2 La formulation Hiptmair

La formulation proposée par Hiptmair *et al.* dans [35, 34] permet de résoudre un problème variationnel dont les inconnues sont  $\mathbf{J}^L$  et  $\mathbf{M}$ , puis de résoudre un deuxième problème permettant de calculer  $\mathbf{E}_{0n}$  à partir de  $\mathbf{J}^L$  et  $\mathbf{M}$ . Ces trois inconnues sont ici nécessaires et suffisantes pour calculer les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  dans  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$ . Le raisonnement pour poser le problème intégral est similaire à celui de la formulation PMCHWT. En effet, on applique les traces  $\gamma_\times$  et  $\gamma_N$  aux formules de représentation intégrale (3.2.1) et (3.2.2). La différence par rapport à la formulation PMCHWT réside dans le fait que la formule (3.2.1) ne peut être simplifiée puisque  $\kappa_0 = 0$ . Ainsi, on voit apparaître l'inconnue supplémentaire  $\mathbf{E}_{0n}$  et c'est pourquoi on applique la trace  $\gamma_n$  à (3.2.1).

Le problème intégral est posé à partir de la somme des équations (3.2.5) et (3.2.8), de la somme des équations (3.2.6) et (3.2.9), respectivement multipliées par  $(si\omega\mu_0)^{-1}$  et  $(si\omega\mu_1)^{-1}$ , et de l'équation (3.2.7). En rappelant que  $\gamma_\times^0 \mathbf{H}_{\text{inc}} = -(si\omega\mu_0)^{-1} \gamma_N^0 \mathbf{E}_{\text{inc}}$ , on obtient le problème intégral suivant :

$$\tilde{\mathcal{Z}}_H \tilde{\mathcal{X}}_H = \tilde{\mathcal{Y}}_H, \quad (3.2.17)$$

avec

$$\tilde{\mathcal{Z}}_H = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{Z}}_H^{VV} & \tilde{\mathcal{Z}}_H^{VS} \\ \tilde{\mathcal{Z}}_H^{SV} & \tilde{\mathcal{Z}}_H^{SS} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{X}}_H = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{X}}_H^V \\ \tilde{\mathcal{X}}_H^S \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{Y}}_H = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{Y}}_H^V \\ \tilde{\mathcal{Y}}_H^S \end{Bmatrix}$$

et plus précisément

$$\tilde{\mathcal{Z}}_H^{VV} = \begin{bmatrix} si\omega(\mu_0 \mathcal{A}_\times^0 + \mu_1 \mathcal{A}_\times^1) & \mathcal{B}_\times^0 + \mathcal{B}_\times^1 \\ -\mathcal{B}_\times^0 - \mathcal{B}_\times^1 & \sigma_1 \mathcal{A}_\times^1 + \frac{si}{\omega\mu_0} \mathcal{C}_\times^0 + \frac{si}{\omega\mu_1} \mathcal{C}_\times^1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{Z}}_H^{VS} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{C}}_\times^0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathcal{Z}}_H^{SV} = [ si\omega\mu_0 \mathcal{A}_n^0 \quad \mathcal{B}_n^0 ], \quad \tilde{\mathcal{Z}}_H^{SS} = \left[ \frac{1}{2} \text{Id} + \tilde{\mathcal{C}}_n^0 \right],$$

$$\tilde{\mathcal{X}}_H^V = \begin{Bmatrix} \mathbf{J}^L \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{X}}_H^S = \{ \mathbf{E}_{0n} \}, \quad \tilde{\mathcal{Y}}_H^V = \begin{Bmatrix} \gamma_\times^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} \\ \gamma_\times^0 \mathbf{H}_{\text{inc}} \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{Y}}_H^S = \{ \gamma_n^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} \}.$$

Les équations vectorielles  $(\tilde{\mathcal{Z}}_H^{VV} \tilde{\mathcal{X}}_H^V + \tilde{\mathcal{Z}}_H^{VS} \tilde{\mathcal{X}}_H^S = \tilde{\mathcal{Y}}_H^V)$  du problème intégral (3.2.17) étant dans  $\mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma 0, \Gamma)$  et  $\mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ , on peut choisir les espaces  $\mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma 0, \Gamma)$  et  $\mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  comme espace test par la relation de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\times$  ce qui nous donne le problème variationnel suivant

$$\left\langle \tilde{\mathcal{U}}_H^V, \tilde{\mathcal{Z}}_H^{VV} \tilde{\mathcal{X}}_H^V + \tilde{\mathcal{Z}}_H^{VS} \tilde{\mathcal{X}}_H^S \right\rangle_\times = \left\langle \tilde{\mathcal{U}}_H^V, \tilde{\mathcal{Y}}_H^V \right\rangle_\times, \quad (3.2.18)$$

$$\forall \tilde{\mathcal{U}}_H = (\mathbf{u}^L, \mathbf{v})^\top \in \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma 0, \Gamma) \times \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma).$$

Comme  $\mathbf{u}^L \in \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma 0, \Gamma)$ , la propriété 2.2.2 implique que

$$\left\langle \mathbf{u}^L, \tilde{\mathcal{C}}_\times^0(\mathbf{E}_{0n}) \right\rangle_\times = 0.$$

L'inconnue  $\mathbf{E}_{0n}$  est donc supprimée et le problème variationnel (3.2.18) devient

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathcal{U}}_H^V, \tilde{\mathcal{Z}}_H^{VV} \tilde{\mathcal{X}}_H^V \rangle_{\times} &= \langle \tilde{\mathcal{U}}_H^V, \tilde{\mathcal{Y}}_H^V \rangle_{\times}, \\ \forall \tilde{\mathcal{U}}_H &= (\mathbf{u}^L, \mathbf{v})^T \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma} 0, \Gamma) \times \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma). \end{aligned}$$

L'inconnue  $\mathbf{E}_{0n}$  est obtenue en un deuxième temps par la résolution de l'équation scalaire du problème (3.2.17) que l'on écrit sous forme variationnelle via le produit de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{1}{2}}$  :

$$\langle \tilde{\mathcal{U}}_H^S, \tilde{\mathcal{Z}}_H^{SV} \tilde{\mathcal{X}}_H^V + \tilde{\mathcal{Z}}_H^{SS} \tilde{\mathcal{X}}_H^S \rangle_{\frac{1}{2}} = \langle \tilde{\mathcal{U}}_H^S, \tilde{\mathcal{Y}}_H^S \rangle_{\frac{1}{2}}, \forall u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (3.2.19)$$

ou plus précisément

$$\left\langle u, \left( \frac{1}{2} \operatorname{Id} + \tilde{\mathcal{C}}_n^0 \right) \mathbf{E}_{0n} \right\rangle_{\frac{1}{2}} = \langle u, -\mathcal{B}_n^0(\mathbf{M}) - si\omega\mu_0 \mathcal{A}_n^0(\mathbf{J}^L) + \gamma_n^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} \rangle_{\frac{1}{2}}, \forall u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Finalement on peut calculer les champs  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$  via

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{tot}}|_{\Omega_0} &= \mathbf{E}_{\text{inc}}|_{\Omega_0} - \tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{C}}^0(\mathbf{M}, si\omega\mu_0 \mathbf{J}^L, \mathbf{E}_{0n}) && \in \mathbf{W}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0), \\ \mathbf{E}_{\text{tot}}|_{\Omega_1} &= \tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{C}}^1(\mathbf{M}, si\omega\mu_1 \mathbf{J}^L, 0) && \in \mathbf{W}(\mathbf{rot}^2, \Omega_1), \\ \mathbf{H}_{\text{tot}}|_{\Omega_0} &= \mathbf{H}_{\text{inc}}|_{\Omega_0} + \tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{C}}^0(\mathbf{J}^L, 0, (si\omega\mu_0)^{-1} \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{M}) && \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0), \\ \mathbf{H}_{\text{tot}}|_{\Omega_1} &= \tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{C}}^1(-\mathbf{J}^L, \sigma_1 \mathbf{M}, (-si\omega\mu_1)^{-1} \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{M}) && \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}^2, \Omega_1). \end{aligned}$$

### 3.2.3 Les formulations découplées

Les formulations que nous appelons découplées consistent à poser un problème intégral dont les inconnues sont  $\mathbf{J}^L$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{E}_{0n}$  et  $\mathbf{H}_{0n}$  qui est composé d'équations choisies parmi les traces des formules de représentation intégrale (3.2.5)-(3.2.16). Contrairement aux formulations précédentes, on ne somme pas ces équations ce qui permet de travailler avec un système dont chaque ligne fait intervenir soit des contributions extérieures ( $\Omega_0$ ), soit des contributions intérieures ( $\Omega_1$ ). On présente ici deux versions de ces formulations proposées par Rucker *et al.* [52]. La première consiste à poser un premier système dont les inconnues sont  $\mathbf{J}^L$ ,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{H}_{0n}$  ainsi qu'une équation d'inconnue  $\mathbf{E}_{0n}$  qui dépend des inconnues du premier système. La résolution s'effectue donc en deux temps, la résolution du système puis la résolution de l'équation. La seconde consiste à poser et résoudre le système dont les inconnues sont  $\mathbf{J}^L$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{E}_{0n}$  et  $\mathbf{H}_{0n}$ .

#### Une formulation à trois inconnues

Un premier système est posé à partir des équations (3.2.11), (3.2.8) et (3.2.16) qui font intervenir les inconnues  $\mathbf{J}^L$ ,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{H}_{0n}$ . Après la résolution de ce système on peut obtenir  $\mathbf{E}_{0n}$  à partir de l'équation (3.2.7). On pose alors le problème intégral suivant :

$$\tilde{\mathcal{Z}}_{d1} \tilde{\mathcal{X}}_{d1} = \tilde{\mathcal{Y}}_{d1}, \quad (3.2.20)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{d1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_{d1}^{VV} & \tilde{\mathbf{Z}}_{d1}^{VS} \\ \tilde{\mathbf{Z}}_{d1}^{SV} & \tilde{\mathbf{Z}}_{d1}^{SS} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{X}}_{d1} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{X}}_{d1}^V \\ \tilde{\mathcal{X}}_{d1}^S \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{Y}}_{d1} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{Y}}_{d1}^V \\ \tilde{\mathcal{Y}}_{d1}^S \end{Bmatrix}$$

et plus précisément

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Z}}_{d1}^{VV} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\text{Id} - \mathcal{B}_\times^0 & 0 \\ \text{si}\omega\mu_1\mathcal{A}_\times^1 & -\frac{1}{2}\text{Id} + \mathcal{B}_\times^1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Z}}_1^{VS} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{C}}_\times^0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{Z}}_{d1}^{SV} &= [ -\mathcal{B}_n^1 \quad \sigma_1\mathcal{A}_n^1 ], \quad \tilde{\mathbf{Z}}_1^{SS} = \left[ \frac{\mu_0}{\mu_1} \left( -\frac{1}{2}\text{Id} + \tilde{\mathcal{C}}_n^1 \right) \right], \\ \tilde{\mathcal{X}}_{d1}^V &= \begin{Bmatrix} \mathbf{J}^L \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{X}}_1^S = \{ \mathbf{H}_{0n} \}, \quad \tilde{\mathcal{Y}}_1^V = \begin{Bmatrix} \gamma_\times^0 \mathbf{H}_{\text{inc}} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{Y}}_{d1}^S = \{0\}. \end{aligned}$$

Ainsi que l'équation intégrale

$$\left( \frac{1}{2}\text{Id} + \tilde{\mathcal{C}}_n^0 \right) \mathbf{E}_{0n} = \gamma_n^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} - \text{si}\omega\mu_0\mathcal{A}_n^0 (\mathbf{J}^L) - \mathcal{B}_n^0 (\mathbf{M}). \quad (3.2.21)$$

Les équations vectorielles ( $\tilde{\mathbf{Z}}_1^{VV} \tilde{\mathcal{X}}_1^V + \tilde{\mathbf{Z}}_1^{VS} \tilde{\mathcal{X}}_1^S = \tilde{\mathcal{Y}}_1^V$ ) du problème intégral (3.2.20) étant dans  $\mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ , on peut choisir l'espace  $\mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  comme espace test par la relation de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\times$ . L'équation scalaire ( $\tilde{\mathbf{Z}}_1^{SV} \tilde{\mathcal{X}}_1^V + \tilde{\mathbf{Z}}_1^{SS} \tilde{\mathcal{X}}_1^S = \tilde{\mathcal{Y}}_1^S$ ) étant dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  on peut choisir l'espace  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  comme espace test par la relation de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{1}{2}}$ . Ainsi on obtient le problème variationnel

$$\begin{cases} \langle \mathcal{U}_1^V, \tilde{\mathbf{Z}}_1^{VV} \mathcal{X}_1^V + \tilde{\mathbf{Z}}_1^{VS} \mathcal{X}_1^S \rangle_\times = \langle \mathcal{U}_1^V, \mathcal{Y}_1^V \rangle_\times, \\ \langle \mathcal{U}_1^S, \tilde{\mathbf{Z}}_1^{SV} \mathcal{X}_1^V + \tilde{\mathbf{Z}}_1^{SS} \mathcal{X}_1^S \rangle_{\frac{1}{2}} = \langle \mathcal{U}_1^S, \mathcal{Y}_1^S \rangle_{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (3.2.22)$$

$$\forall \mathcal{U}_1^V = (\mathbf{u}, \mathbf{v})^\Gamma \in \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \forall \mathcal{U}_1^S = u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Puis (3.2.21) étant dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  on la teste dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  :

$$\left\langle v, \left( \frac{1}{2}\text{Id} + \tilde{\mathcal{C}}_n^0 \right) \mathbf{E}_{0n} \right\rangle_{\frac{1}{2}} = \langle v, \gamma_n^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} - \text{si}\omega\mu_0\mathcal{A}_n^0 (\mathbf{J}^L) - \mathcal{B}_n^0 (\mathbf{M}) \rangle_{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Finalement on peut calculer les champs  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$  via

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{tot}}|_{\Omega_0} &= \mathbf{E}_{\text{inc}}|_{\Omega_0} - \tilde{\mathcal{S}}\mathcal{C}^0(\mathbf{M}, \text{si}\omega\mu_0\mathbf{J}^L, \mathbf{E}_{0n}) \in \mathbf{W}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0), \\ \mathbf{E}_{\text{tot}}|_{\Omega_1} &= \tilde{\mathcal{S}}\mathcal{C}^1(\mathbf{M}, \text{si}\omega\mu_1\mathbf{J}, 0) \in \mathbf{W}(\mathbf{rot}^2, \Omega_1), \\ \mathbf{H}_{\text{tot}}|_{\Omega_0} &= \mathbf{H}_{\text{inc}}|_{\Omega_0} - \tilde{\mathcal{S}}\mathcal{C}^0(-\mathbf{J}, 0, \mathbf{H}_{0n}) \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0), \\ \mathbf{H}_{\text{tot}}|_{\Omega_1} &= \tilde{\mathcal{S}}\mathcal{C}^1(-\mathbf{J}, \sigma_1\mathbf{M}, \frac{\mu_0}{\mu_1}\mathbf{H}_{0n}) \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}^2, \Omega_1). \end{aligned}$$

**Une formulation à quatre inconnues**

À partir des équations (3.2.5), (3.2.14), (3.2.13) et (3.2.7), qui font intervenir les inconnues  $\mathbf{J}^L$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{E}_{0n}$  et  $\mathbf{H}_{0n}$ , on pose le problème intégral suivant :

$$\tilde{\mathcal{Z}}_2 \tilde{\mathcal{X}}_2 = \tilde{\mathcal{Y}}_2, \quad (3.2.23)$$

avec

$$\tilde{\mathcal{Z}}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{Z}}_2^{VV} & \tilde{\mathcal{Z}}_2^{VS} \\ \tilde{\mathcal{Z}}_2^{SV} & \tilde{\mathcal{Z}}_2^{SS} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{X}}_2 = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{X}}_2^V \\ \tilde{\mathcal{X}}_2^S \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{Y}}_2 = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{Y}}_2^V \\ \tilde{\mathcal{Y}}_2^S \end{Bmatrix}$$

et plus précisément

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{Z}}_2^{VV} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\text{Id} - \mathcal{B}_\times^1 & \sigma_1 \mathcal{A}_\times^1 \\ \text{si}\omega\mu_0 \mathcal{A}_\times^0 & \frac{1}{2}\text{Id} + \mathcal{B}_\times^0 \end{bmatrix}, & \tilde{\mathcal{Z}}_2^{VS} &= \begin{bmatrix} \frac{\mu_0}{\mu_1} \tilde{\mathcal{C}}_\times^1 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathcal{C}}_\times^0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathcal{Z}}_2^{SV} &= \begin{bmatrix} -\mathcal{B}_n^0 & 0 \\ \text{si}\omega\mu_0 \mathcal{A}_n^0 & \mathcal{B}_n^0 \end{bmatrix}, & \tilde{\mathcal{Z}}_2^{SS} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\text{Id} + \tilde{\mathcal{C}}_n^0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\text{Id} + \tilde{\mathcal{C}}_n^0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathcal{X}}_2^V &= \begin{Bmatrix} \mathbf{J}^L \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix}, & \tilde{\mathcal{X}}_2^S &= \begin{Bmatrix} \mathbf{H}_{0n} \\ \mathbf{E}_{0n} \end{Bmatrix}, & \tilde{\mathcal{Y}}_2^V &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma_\times^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} \end{Bmatrix}, & \tilde{\mathcal{Y}}_2^S &= \begin{Bmatrix} \gamma_n^0 \mathbf{H}_{\text{inc}} \\ \gamma_n^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Les équations vectorielles ( $\tilde{\mathcal{Z}}_2^{VV} \tilde{\mathcal{X}}_2^V + \tilde{\mathcal{Z}}_2^{VS} \tilde{\mathcal{X}}_2^S = \tilde{\mathcal{Y}}_2^V$ ) du problème intégral (3.2.23) étant dans  $\mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ , on peut choisir l'espace  $\mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  comme espace test par la relation de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\times$ . Les équations scalaires ( $\tilde{\mathcal{Z}}_2^{SV} \tilde{\mathcal{X}}_2^V + \tilde{\mathcal{Z}}_2^{SS} \tilde{\mathcal{X}}_2^S = \tilde{\mathcal{Y}}_2^S$ ) étant dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  on peut choisir l'espace  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  comme espace test par la relation de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{1}{2}}$ . Ainsi on obtient le problème variationnel

$$\begin{cases} \langle \mathcal{U}_2^V, \tilde{\mathcal{Z}}_2^{VV} \mathcal{X}_2^V + \tilde{\mathcal{Z}}_2^{VS} \mathcal{X}_2^S \rangle_\times = \langle \mathcal{U}_2^V, \mathcal{Y}_2^V \rangle_\times, \\ \langle \mathcal{U}_2^S, \tilde{\mathcal{Z}}_2^{SV} \mathcal{X}_2^V + \tilde{\mathcal{Z}}_2^{SS} \mathcal{X}_2^S \rangle_{\frac{1}{2}} = \langle \mathcal{U}_2^S, \mathcal{Y}_2^S \rangle_{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (3.2.24)$$

$$\forall \mathcal{U}_2^V = (\mathbf{u}, \mathbf{v})^\top \in \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \quad , \forall \mathcal{U}_2^S = (u, v)^\top \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Finalement on peut calculer les champs  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$  via

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{tot}}|_{\Omega_0} &= \mathbf{E}_{\text{inc}}|_{\Omega_0} - \tilde{\mathcal{S}}\mathcal{C}^0(\mathbf{M}, \text{si}\omega\mu_0 \mathbf{J}^L, \mathbf{E}_{0n}) && \in \mathbf{W}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0), \\ \mathbf{E}_{\text{tot}}|_{\Omega_1} &= \tilde{\mathcal{S}}\mathcal{C}^1(\mathbf{M}, \text{si}\omega\mu_1 \mathbf{J}, 0) && \in \mathbf{W}(\mathbf{rot}^2, \Omega_1), \\ \mathbf{H}_{\text{tot}}|_{\Omega_0} &= \mathbf{H}_{\text{inc}}|_{\Omega_0} - \tilde{\mathcal{S}}\mathcal{C}^0(-\mathbf{J}, 0, \mathbf{H}_{0n}) && \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0), \\ \mathbf{H}_{\text{tot}}|_{\Omega_1} &= \tilde{\mathcal{S}}\mathcal{C}^1(-\mathbf{J}, \sigma_1 \mathbf{M}, \frac{\mu_0}{\mu_1} \mathbf{H}_{0n}) && \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}^2, \Omega_1). \end{aligned}$$

## Deuxième partie

# Recherche d'une formulation intégrale adaptée aux applications de CND



# Chapitre 4

## Discrétisation

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Espaces d'approximation discrets . . . . .</b>	<b>66</b>
4.1.1	Maillage paramétré . . . . .	66
4.1.2	Fonctions de base et espaces d'approximation . . . . .	70
4.1.3	La décomposition de Helmholtz-Hodge . . . . .	73
<b>4.2</b>	<b>Problème discret : description et implémentation . . . . .</b>	<b>76</b>
4.2.1	Discrétisation d'un problème variationnel . . . . .	76
4.2.2	Problèmes discrets et opérateurs matriciels associés . . . . .	77
4.2.3	Calcul de la matrice d'impédance . . . . .	83

---

La résolution numérique des problèmes variationnels présentés au chapitre précédent nécessite leur discrétisation. C'est l'objet de ce chapitre. La première section présente la discrétisation de la surface  $\Gamma$ , c'est à dire son maillage, ainsi que les espaces d'approximation définis sur ce maillage et construits à partir de fonctions de bases. La deuxième section présente les problèmes discrets associés aux problèmes variationnels présentés au chapitre précédent.

## 4.1 Espaces d'approximation discrets

### 4.1.1 Maillage paramétré

Un maillage est une approximation  $\Gamma_h$  de la surface  $\Gamma$ . Pour notre étude nous travaillons avec des maillages conformes de surfaces fermées constitués d'éléments triangulaires ou quadrilatéraux (mais non nécessairement des parallélogrammes, c'est-à-dire non nécessairement affines) aux arêtes droites [29]. Sous l'hypothèse **(H0)**, la surface  $\Gamma$  est un polyèdre lipschitzien donc on peut imposer  $\Gamma_h = \Gamma$ . Un maillage fermé est dit *conforme* s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

- Les intérieurs de deux éléments distincts du maillage sont disjoints.
- Toute arête d'élément est une arête d'un unique autre élément distinct.

Dans cette partie nous détaillons le cas d'un maillage d'ordre quelconque de quadrilatères, ce choix étant généralement adapté à la discrétisation des configurations de CND. Le cas d'un maillage de triangles est cependant traité dans l'annexe B. Pour définir notre maillage on se donne une partition de la surface  $\Gamma_h$ , composée de  $N_e$  éléments notés  $K_\ell$ , et telle que

$$\Gamma_h := \bigcup_{\ell=1}^{N_e} K_\ell.$$

L'ensemble des éléments du maillage est appelé triangulation et noté

$$\mathcal{T}_h := \{K_\ell\}_{\ell=1, \dots, N_e}.$$

On note  $\widehat{K}$  l'élément unité dans  $\mathbb{R}^2$  défini par le carré unitaire  $[0,1]^2$  et  $\mathbf{F}_\ell$  le difféomorphisme de  $\widehat{K}$  dans  $\mathbb{R}^3$ , tel que

$$\forall \mathbf{x} \in K_\ell, \exists! \widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{K} \text{ tel que } \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}.$$

Le maillage  $\Gamma_h$  est donc généré à partir de l'élément unité  $\widehat{K}$ , appelé *élément de référence*, et des  $N_e$  transformations  $\mathbf{F}_\ell$ . En particulier, nos transformations  $\mathbf{F}_\ell$  sont des interpolations de Lagrange de points fixés sur chaque élément du maillage appelés *nœuds* du maillage. Afin de les exprimer explicitement, on introduit la définition d'un espace polynomial et des polynômes de Lagrange :

**Definition 4.1.1.** On définit  $\mathbb{Q}_k$  comme étant l'espace des polynômes définis sur  $[0,1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , de degré inférieur ou égal à  $k$ ,

$$\mathbb{Q}_k := \sum_{i=0}^k \alpha_i x^i.$$

La dimension de l'espace  $\mathbb{Q}_k$  est  $(k+1)$ .

**Definition 4.1.2.** Soient  $\xi_0^k, \dots, \xi_k^k$ ,  $k+1$  points définis sur  $[0,1]$ , distincts 2 à 2. Les polynômes de Lagrange associés à ces points sont les polynômes définis par

$$l_j^k(\xi) := \prod_{i=0, i \neq j}^k \frac{\xi - \xi_i^k}{\xi_j^k - \xi_i^k}, \quad 0 \leq j \leq k.$$

**Propriété 4.1.1.** *Les polynômes de Lagrange vérifient les propriétés suivantes :*

1.  $l_j^k$  est de degré  $k$  pour tout  $j = 0, \dots, k$  ;
2.  $l_j^k(\xi_i^k) = \delta_{i,j}$  pour tout  $i, j = 0, \dots, k$  ;
3. l'ensemble  $\{l_j^k\}_{j=0}^k$  forme une base de  $\mathbb{Q}_k$ .

Notons  $\mathbf{N}_{ij}^\ell$ ,  $0 \leq i, j \leq k$ , les  $(k+1)^2$  nœuds d'un élément quadrilatéral  $K_\ell$ , on impose à la transformation  $\mathbf{F}_\ell$  qui lui est associée,

$$\mathbf{F}_\ell(\xi_i^k, \xi_j^k) = \mathbf{N}_{ij}^\ell, \quad 0 \leq i, j \leq k.$$

On note  $\widehat{\mathbf{x}} := (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$  les coordonnées sur  $\widehat{K}$  dans la base canonique  $\{\widehat{\mathbf{e}}_1, \widehat{\mathbf{e}}_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$ . La transformation  $\mathbf{F}_\ell$  d'ordre  $k$ , qui a tout point  $\widehat{\mathbf{x}}$  sur  $\widehat{K}$  fait correspondre le point  $\mathbf{x} = \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}})$  sur  $K_\ell$ , s'exprime alors

$$\mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) = \sum_{i,j=0}^k l_i^k(\widehat{x}_1) l_j^k(\widehat{x}_2) \mathbf{N}_{ij}^\ell.$$

Pour la suite, nous devons définir certaines propriétés du difféomorphisme  $\mathbf{F}_\ell$ . On définit la base des vecteurs tangents à la surface décrite par  $K_\ell$  par

$$\left\{ \widehat{\partial}_i \mathbf{F}_\ell = \frac{\partial \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}})}{\partial \widehat{x}_i} \right\}_{i=1,2}.$$

On définit de plus la matrice jacobienne

$$\mathbf{D}\mathbf{F}_\ell := [\widehat{\partial}_1 \mathbf{F}_\ell, \widehat{\partial}_2 \mathbf{F}_\ell],$$

le jacobien, c'est-à-dire l'élément d'intégration surfacique sur  $K_\ell$ ,

$$\mathcal{J}_\ell := \|\widehat{\partial}_1 \mathbf{F}_\ell \times \widehat{\partial}_2 \mathbf{F}_\ell\|$$

et la normale unitaire sur  $K_\ell$ ,

$$\mathbf{n}_\ell := \frac{\widehat{\partial}_1 \mathbf{F}_\ell \times \widehat{\partial}_2 \mathbf{F}_\ell}{\mathcal{J}_\ell}.$$

Les sommets du carré unité sont donnés par

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{S}}_1 &= (0,0), & \widehat{\mathbf{S}}_2 &= (1,0), \\ \widehat{\mathbf{S}}_3 &= (1,1), & \widehat{\mathbf{S}}_4 &= (0,1). \end{aligned}$$

On note  $\widehat{a}_1$  l'arête sur laquelle  $\widehat{x}_2 = 0$ ,  $\widehat{a}_2$  l'arête sur laquelle  $\widehat{x}_1 = 1$ ,  $\widehat{a}_3$  l'arête sur laquelle  $\widehat{x}_2 = 1$  et finalement,  $\widehat{a}_4$  l'arête sur laquelle  $\widehat{x}_1 = 0$  et on oriente les arêtes dans le sens direct, on a donc

$$\begin{aligned} \widehat{a}_1 &= (\widehat{\mathbf{S}}_1, \widehat{\mathbf{S}}_2), & \widehat{a}_2 &= (\widehat{\mathbf{S}}_2, \widehat{\mathbf{S}}_3), \\ \widehat{a}_3 &= (\widehat{\mathbf{S}}_3, \widehat{\mathbf{S}}_4), & \widehat{a}_4 &= (\widehat{\mathbf{S}}_4, \widehat{\mathbf{S}}_1), \end{aligned}$$

où l'ordre d'apparition des sommets donne le sens de l'arête, voir figure 4.1. Sur un élément  $K_\ell$ , les arêtes correspondantes sont notées  $a_i^\ell$  avec  $a_i^\ell = \mathbf{F}_\ell(\hat{a}_i)$ ,  $i = 1 \leq i \leq 4$ . Les normales unitaires aux arêtes  $a_i^\ell$ , dirigées vers l'extérieur de l'élément, notées  $\mathbf{n}_{a_i}^\ell$  s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{a_1}^\ell &= -\frac{\mathbf{n}_\ell \times \hat{\partial}_1 \mathbf{F}_\ell}{|\hat{\partial}_1 \mathbf{F}_\ell|}, & \mathbf{n}_{a_2}^\ell &= \frac{\hat{\partial}_2 \mathbf{F}_\ell \times \mathbf{n}_\ell}{|\hat{\partial}_2 \mathbf{F}_\ell|}, \\ \mathbf{n}_{a_3}^\ell &= \frac{\mathbf{n}_\ell \times \hat{\partial}_1 \mathbf{F}_\ell}{|\hat{\partial}_1 \mathbf{F}_\ell|}, & \mathbf{n}_{a_4}^\ell &= -\frac{\hat{\partial}_2 \mathbf{F}_\ell \times \mathbf{n}_\ell}{|\hat{\partial}_2 \mathbf{F}_\ell|}. \end{aligned}$$

L'élément d'intégration linéique est  $|\hat{\partial}_1 \mathbf{F}_\ell|$  sur  $a_1^\ell$  et  $a_3^\ell$ ,  $|\hat{\partial}_2 \mathbf{F}_\ell|$  sur  $a_2^\ell$  et  $a_4^\ell$ .

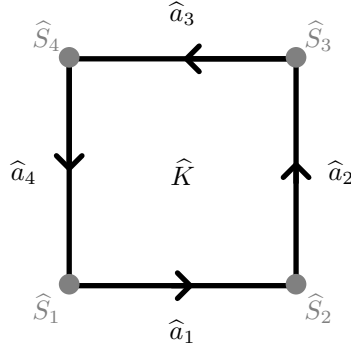


FIGURE 4.1 – Sommets et arêtes sur l'élément de référence  $\hat{K}$ .

La conformité du maillage est assurée par la propriété suivante :

**Propriété 4.1.2.** Soient deux éléments  $K_\ell$  et  $K_{\ell'}$  d'arête commune  $a_{\ell\ell'}$  et de transformations respectives  $\mathbf{F}_\ell$  et  $\mathbf{F}_{\ell'}$ . Si on choisit  $\xi_0^k = 0$ ,  $\xi_k^k = 1$  et si les  $k + 1$  nœuds de l'arête  $a_{\ell\ell'}$  sont identiques sur  $K_\ell$  et  $K_{\ell'}$  alors, en tout point  $\mathbf{x}$  de  $a_{\ell\ell'}$ , de coordonnées paramétriques  $\hat{\mathbf{x}}_\ell$  sur  $K_\ell$  et  $\hat{\mathbf{x}}_{\ell'}$  sur  $K_{\ell'}$ , on a

$$\mathbf{F}_\ell(\hat{\mathbf{x}}_\ell) = \mathbf{F}_{\ell'}(\hat{\mathbf{x}}_{\ell'}) = \mathbf{x}.$$

Autrement dit, on a coïncidence de l'arête entre deux éléments adjacents. Cela est dû au fait que la restriction de chaque transformation  $\mathbf{F}$  à une arête est un polynôme de  $\mathbb{Q}_k$ , entièrement déterminé par les  $k + 1$  nœuds placés sur l'arête. Par conséquent, si l'on note  $\hat{\partial}_t \mathbf{F}_\ell$  et  $\hat{\partial}_t \mathbf{F}_{\ell'}$  les vecteurs tangents (non normalisés) à l'arête  $a_{\ell\ell'}$  sur  $K_\ell$  et  $K_{\ell'}$ , respectivement, alors on a de plus l'égalité

$$\partial_t \mathbf{F}_\ell(\hat{\mathbf{x}}_\ell) = \pm \partial_t \mathbf{F}_{\ell'}(\hat{\mathbf{x}}_{\ell'}),$$

où le signe varie selon l'orientation locale de  $K_\ell$  et  $K_{\ell'}$ .

Pour notre étude nous nous restreignons aux transformations d'ordre  $k = 1$  pour lesquelles les nœuds sont les sommets des éléments du maillage. Cependant, les résultats présentés peuvent directement être étendus à une transformation d'ordre  $k > 1$ . On note  $\mathbf{S}_i^\ell = \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{S}}_i)$ ,  $i = 1 \leq i \leq 4$ , les sommets de l'élément  $K_\ell$  numérotés dans le sens de parcours direct et de telle sorte que  $(\overrightarrow{\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2} \times \overrightarrow{\mathbf{S}_1\mathbf{S}_4})$  soit dirigé vers l'extérieur de la surface fermée. La transformation d'ordre  $k = 1$  est obtenue en choisissant

$$\xi_0^1 = 0, \xi_1^1 = 1.$$

On a alors

$$\mathbf{N}_{00}^\ell = \mathbf{S}_1^\ell, \mathbf{N}_{10}^\ell = \mathbf{S}_2^\ell, \mathbf{N}_{11}^\ell = \mathbf{S}_3^\ell, \mathbf{N}_{01}^\ell = \mathbf{S}_4^\ell,$$

et

$$\mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) = (1 - \widehat{x}_1)(1 - \widehat{x}_2)\mathbf{S}_1^\ell + \widehat{x}_1(1 - \widehat{x}_2)\mathbf{S}_2^\ell + \widehat{x}_1\widehat{x}_2\mathbf{S}_3^\ell + \widehat{x}_2(1 - \widehat{x}_1)\mathbf{S}_4^\ell.$$

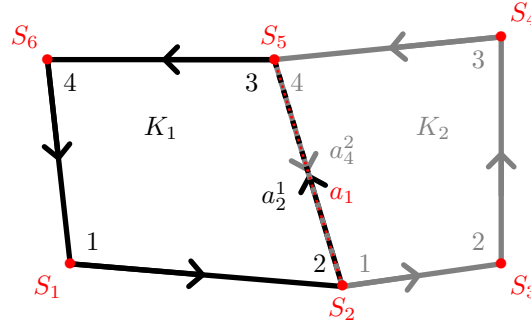


FIGURE 4.2 – L'arête globale  $a_1 = (S_2, S_5)$  correspond aux arêtes locales  $a_2^1 a_2^1 = \mathbf{F}_1(\widehat{a}_2)$  et  $a_4^2 a_4^2 = -\mathbf{F}_2(\widehat{a}_4)$ .

**Quelques notions de connectique.** Sur le maillage  $\Gamma_h$  on assigne à chaque sommet un numéro global et on donne la relation

$$i_g = \mathcal{S}(i_l, \ell)$$

qui à tout sommet global  $S_{i_g} \in \Gamma_h$ ,  $1 \leq i_g \leq N_S$  avec  $N_S$  le nombre de sommets de  $\Gamma_h$ , associe le sommet local  $\mathbf{S}_{i_l}^\ell = \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{S}}_{i_l})$ ,  $1 \leq i_l \leq 4$ , sur l'élément  $K_\ell$ . Les numéros des arêtes globales de  $\Gamma_h$  sont donnés par la relation

$$j_g = \mathcal{A}(j_l, \ell)$$

qui à toute arête globale  $a_{j_g} \in \Gamma_h$ ,  $1 \leq j_g \leq N_a$  avec  $N_a$  le nombre d'arêtes de  $\Gamma_h$ , associe l'arête locale  $a_{j_l}^\ell = \mathbf{F}_\ell(\widehat{a}_{j_l})$ ,  $1 \leq j_l \leq 4$ , sur l'élément  $K_\ell$ . Soit l'arête locale  $a_{i_l}^\ell$  sur l'élément  $K_\ell$ , associée à l'arête globale  $a_g$  et orientée du sommet local  $\mathbf{S}_{i_l}^\ell$  vers le

sommet local  $\mathbf{S}_{l_2}^\ell$ , respectivement associés aux sommets globaux  $\mathbf{S}_{g_1}$  et  $\mathbf{S}_{g_2}$ . On introduit le coefficient

$$\alpha_l^\ell = \begin{cases} +1 & \text{si } g_2 > g_1, \\ -1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.1.1)$$

traduisant la correction de l'orientation locale de l'arête  $a_l^\ell$  sur l'élément  $K_\ell$  qui ne coïncide pas nécessairement avec l'orientation de l'arête globale  $a_g$ , voir figure 4.2.

#### 4.1.2 Fonctions de base et espaces d'approximation

Pour discrétiser un problème variationnel, l'espace des inconnues ainsi que l'espace test doivent être approchés par un espace discret que l'on appelle *espace d'approximation*. Cet espace est un sous espace vectoriel de dimension finie engendré par une famille de fonctions que l'on appelle *fonctions de base*. Nous donnons ci-après les espaces d'approximations nécessaires pour résoudre les différents problèmes variationnels présentés au chapitre précédent. Comme précédemment, les fonctions de base présentées sont données pour un maillage de quadrilatères et les fonctions pour un maillage de triangles se trouvent en annexe B.

**L'espace d'approximation de  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$**  est l'espace défini par

$$\mathcal{V}_0^h := \left\{ \varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_h); \varphi|_K \in \widehat{\mathcal{V}}_0^h, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (4.1.2)$$

avec  $\widehat{\mathcal{V}}_0^h = \mathbb{Q}_0 \times \mathbb{Q}_0$ . Soit  $\mathbf{x} = \mathbf{F}(\widehat{\mathbf{x}}) \in K \subset \Gamma_h$ , on définit les fonctions de base de  $\mathcal{V}_0^h$  par

$$\varphi_\ell \circ \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \widehat{\varphi}(\widehat{\mathbf{x}}) & \text{si } \widehat{\mathbf{x}} \in K_\ell, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

où la fonction de base  $\widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{V}}_0^h$  est définie sur l'élément de référence par

$$\widehat{\varphi}(\widehat{\mathbf{x}}) = 1, \quad \widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{K}.$$

Le support d'une fonction  $\varphi_\ell$  associée à un élément  $K_\ell$  est l'élément  $K_\ell$  lui-même. On appellera ces fonctions, fonctions scalaires, dans la littérature on rencontre parfois le terme de *pulse functions* [40]. La famille  $\{\varphi_i\}_{i=1, \dots, N_e}$ , où  $N_e$  est le nombre d'élément  $K_\ell$  du maillage  $\Gamma_h$ , est alors une base de  $\mathcal{V}_0^h$ .

**L'espace d'approximation de  $\mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$**  est l'espace défini par

$$\mathcal{V}_{\text{div}}^h := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma_h); \mathcal{JDF}^{-1}\mathbf{u}|_K \in \widehat{\mathcal{V}}^h, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$$

avec

$$\widehat{\mathcal{V}}^h = (\mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_0) \widehat{\mathbf{e}}_1 \oplus (\mathbb{Q}_0 \times \mathbb{Q}_1) \widehat{\mathbf{e}}_2.$$

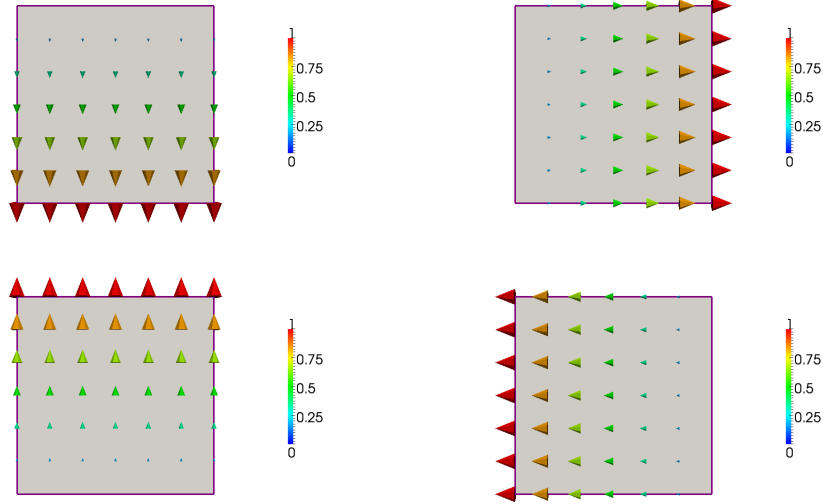


FIGURE 4.3 – Fonctions *Rooftop* sur le carré de référence, associées aux arêtes  $\hat{a}_1$  à  $\hat{a}_4$  de gauche à droite puis de haut en bas.

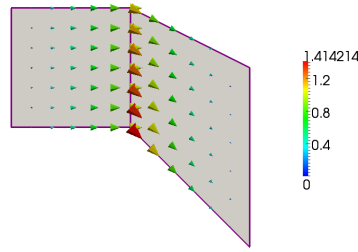


FIGURE 4.4 – Fonction *Rooftop* globale associée à une arête.

Les fonctions de base  $\hat{\mathbf{u}} \in \hat{\mathcal{V}}^h$  sont définies sur l'élément de référence par

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_1(\hat{\mathbf{x}}) &= (\hat{x}_2 - 1)\hat{\mathbf{e}}_2, \\ \hat{\mathbf{u}}_2(\hat{\mathbf{x}}) &= \hat{x}_1\hat{\mathbf{e}}_1, \\ \hat{\mathbf{u}}_3(\hat{\mathbf{x}}) &= \hat{x}_2\hat{\mathbf{e}}_2, \\ \hat{\mathbf{u}}_4(\hat{\mathbf{x}}) &= (\hat{x}_1 - 1)\hat{\mathbf{e}}_1.\end{aligned}$$

Au sens des moments, les degrés de liberté associés à ces fonctions de base sont définis uniquement sur les arêtes par Nédélec dans [45]. Par abus de langage, on associe la fonction  $\hat{\mathbf{u}}_i$  à l'arête  $\hat{a}_i$ , voir figure 4.3. De la même manière, les fonctions de base de  $\mathbf{u}_i \in \mathcal{V}_{\text{div}}^h$  associées aux arêtes globales  $a_i$  de  $\Gamma_h$  sont données par la combinaison

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}) = \sum_{\{(j,\ell); i=\mathcal{A}(j,\ell)\}} \alpha_j^\ell \left( \mathbf{u}_j^\ell \circ \mathbf{F}_\ell(\hat{\mathbf{x}}) \right) \quad (4.1.3)$$

avec  $j$  le numéro local sur l'élément  $K_\ell$  de l'arête globale  $a_i$  d'orientation locale  $\alpha_j^\ell$  (4.1.1) et

$$\mathbf{u}_j^\ell \circ \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{D}\mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}})}{\mathcal{J}_\ell(\widehat{\mathbf{x}})} \circ \widehat{\mathbf{u}}_j(\widehat{\mathbf{x}}) & \text{sur } K_\ell, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Le support d'une fonction globale  $\mathbf{u}_i$  associée à l'arête  $a_i$  est la paire d'éléments partageant cette arête, voir figure 4.4. Les fonctions locales  $\mathbf{u}_j^\ell$  sur  $K_\ell$  sont donc données explicitement par

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^\ell \circ \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{\mathcal{J}_\ell(\widehat{\mathbf{x}})} (\widehat{x}_2 - 1) \widehat{\partial}_2 \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}), \\ \mathbf{u}_2^\ell \circ \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{\mathcal{J}_\ell(\widehat{\mathbf{x}})} \widehat{x}_1 \widehat{\partial}_1 \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}), \\ \mathbf{u}_3^\ell \circ \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{\mathcal{J}_\ell(\widehat{\mathbf{x}})} \widehat{x}_2 \widehat{\partial}_2 \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}), \\ \mathbf{u}_4^\ell \circ \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{\mathcal{J}_\ell(\widehat{\mathbf{x}})} (\widehat{x}_1 - 1) \widehat{\partial}_1 \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}). \end{aligned}$$

Les fonctions  $\mathbf{u}_i$  ainsi définies imposent la continuité normale à travers les arêtes du maillage ( $[\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{a_i}]_{a_i} = 0$ ) et sont dites *Hdiv-conformes*, voir figure 4.5. La famille  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1,\dots,N_a}$ , où  $N_a$  est le nombre d'arêtes du maillage  $\Gamma_h$ , est alors une base de  $\mathcal{V}_{\text{div}}^h$ . Ces fonctions appartiennent à la première famille de Nédélec de classe *Hdiv* [45] et sont appelées fonctions *Rooftop* [31] ou fonctions de *Raviart-Thomas* [50]. L'article de Graglia [32] détaille la construction lagrangienne de ces fonctions.

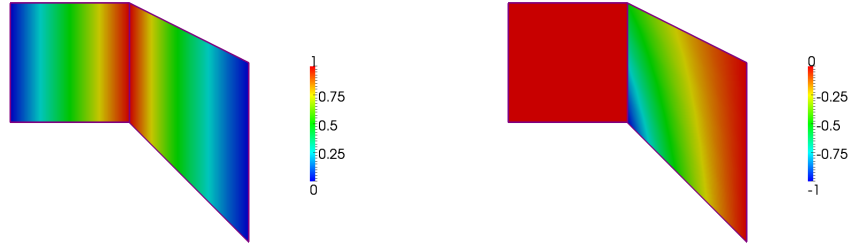


FIGURE 4.5 – Composantes selon  $\mathbf{x}_1$  (à gauche) et  $\mathbf{x}_2$  (à droite) d'une fonction *Rooftop* globale associée à une arête.

L'espace d'approximation de  $\mathbf{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$  est l'espace défini par

$$\mathcal{V}_{\text{rot}}^h := \mathcal{R}(\mathcal{V}_{\text{div}}^h)$$

ou  $\mathcal{R}$  est l'opérateur de rotation défini par (2.1.9). Les fonctions de base de  $\mathcal{V}_{\text{rot}}^h$  associées aux arêtes globales  $a_i$  de  $\Gamma_h$  sont données par la transformation

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{x}) = \sum_{\{(j,\ell); i=\mathcal{A}(j,\ell)\}} \alpha_j^\ell \left( \mathbf{v}_j^\ell \circ \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) \right) \quad (4.1.4)$$

où

$$\mathbf{v}_j^\ell \circ \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) = \mathbf{n}^\ell \times (\mathbf{u}_j^\ell \circ \mathbf{F}_\ell)(\widehat{\mathbf{x}}).$$

Les fonctions  $\mathbf{v}_j$  ainsi définies imposent la continuité tangentielle à travers les arêtes du maillage ( $[\mathbf{v}_j \times \mathbf{n}_{a_j}]_{a_j} = 0$ ) et sont dites *Hrot-conformes*. La famille  $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\dots,N_a}$ , où  $N_a$  est le nombre d'arêtes du maillage  $\Gamma_h$ , est alors une base de  $\mathcal{V}_{\text{rot}}^h$ .

### 4.1.3 La décomposition de Helmholtz-Hodge

La décomposition de Helmholtz-Hodge passe par l'introduction des fonctions dites *Loop* à divergence surfacique nulle et de leurs fonctions complémentaires dites *Tree*. Au niveau discret, cela se traduit par des combinaisons linéaires des fonctions de  $\widehat{\mathcal{V}}^h$  sur l'élément de référence  $\widehat{K}$  et des fonctions de  $\mathcal{V}_{\text{div}}^h$  sur  $\Gamma_h$ .

Les fonctions de base  $\widehat{\mathbf{u}}^L \in \widehat{\mathcal{V}}^h$  sont définies sur l'élément de référence par

$$\widehat{\mathbf{u}}_i^L(\widehat{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^4 \widehat{\mathbf{L}}_{ij} \widehat{\mathbf{u}}_j(\widehat{\mathbf{x}})$$

avec

$$\widehat{\mathbf{L}}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

et la fonction de base  $\widehat{\mathbf{u}}^T \in \widehat{\mathcal{V}}^h$  est définie sur l'élément de référence par

$$\widehat{\mathbf{u}}^T(\widehat{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^4 \widehat{\mathbf{T}}_j \widehat{\mathbf{u}}_j(\widehat{\mathbf{x}})$$

avec

$$\widehat{\mathbf{T}}_j = [ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 ].$$

Par abus de langage, on associe les fonctions  $\widehat{\mathbf{u}}_i^L$  aux sommets  $\widehat{\mathbf{S}}_i$  et la fonction  $\widehat{\mathbf{u}}^T$  à l'élément  $\widehat{K}$ , voir figures 4.6 et 4.7. Les fonctions de base *Loop* de  $\mathcal{V}_{\text{div}}^h$  associées aux sommets globaux  $\mathbf{S}_i$  de  $\Gamma_h$  sont données par la transformation

$$\mathbf{u}_s^L(\mathbf{x}) = \sum_{\{(j,\ell); s=\mathcal{S}(j,\ell)\}} \sum_{k=1}^4 \widehat{\mathbf{L}}_{jk} \mathbf{u}_k^\ell \circ \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) \quad (4.1.5)$$

avec  $j$  le numéro local sur l'élément  $K_\ell$  du sommet global  $\mathbf{S}_s$ . Le support d'une fonction *Loop*  $\mathbf{u}_s^L$  associée à un sommet  $s$  est donc l'ensemble des éléments dont  $s$  est un sommet, voir figure 4.8. Les fonctions *Loop* ainsi définies sont à divergence surfacique nulle. Les fonctions de base *Tree* de  $\mathcal{V}_{\text{div}}^h$  associées aux éléments  $K_\ell$  de  $\Gamma_h$  sont données par la transformation

$$\mathbf{u}_\ell^T(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^4 \widehat{\mathbf{T}}_k \frac{1}{\alpha_k^\ell} \mathbf{u}_{A(k,\ell)}(\mathbf{x}). \quad (4.1.6)$$

Le support d'une fonction *Tree*  $\mathbf{u}_\ell^T$  associée à un élément  $K_\ell$  est donc l'élément  $K_\ell$  ainsi que l'ensemble des éléments qui lui sont adjacents (éléments qui partagent une arête avec  $K_\ell$ ), voir figure 4.8.

Soit l'espace d'approximation de  $\mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma 0, \Gamma)$  défini par

$$\mathcal{V}_{\text{div}0}^h := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma 0, \Gamma_h); \mathcal{JDF}^{-1}\mathbf{u}|_K \in \widehat{\mathcal{V}}^h, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

La famille  $\{\mathbf{u}_i^L\}_{i=1,\dots,N_s}$ , avec  $N_s$  le nombre de sommets du maillage  $\Gamma_h$ , est génératrice de  $\mathcal{V}_{\text{div}0}^h$  mais non libre. Si la surface approchée  $\Gamma_h$  est simplement connexe, en supprimant une fonction  $\mathbf{u}^L$  (généralement la fonction associée au sommet  $\mathbf{S}_{N_s}$ ), la famille  $\{\mathbf{u}_i^L\}_{i=1,\dots,N_s-1}$  est une base de  $\mathcal{V}_{\text{div}0}^h$ . De même, la famille  $\{\mathbf{u}_i^L\}_{i=1,\dots,N_s} \cup \{\mathbf{u}_j^T\}_{j=1,\dots,N_e}$ , avec  $N_e$  le nombre d'élément du maillage  $\Gamma_h$ , est génératrice de  $\mathcal{V}_{\text{div}}^h$  mais non libre. On rappelle que pour une surface simplement connexe, la formule d'Euler nous donne que

$$N_e + N_s = N_a + 2.$$

En supprimant une fonction  $\mathbf{u}^L$  (généralement la fonction associée au sommet  $\mathbf{S}_{N_s}$ ) et une fonction  $\mathbf{u}_\ell^T$ , telle que le sommet  $\mathbf{S}_{N_s} \notin K_\ell$ , la famille obtenue est une base de  $\mathcal{V}_{\text{div}}^h$ . On notera  $\mathcal{V}_{\text{comp}}^h$  l'espace généré par les fonctions *Tree* c'est-à-dire

$$\text{span}(\mathbf{u}_1^T, \dots, \mathbf{u}_{N_e-1}^T) = \mathcal{V}_{\text{comp}}^h.$$

On peut ainsi définir les matrices  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{T}$  qui permettent d'exprimer les fonctions de base *Loop* et *Tree* comme des combinaisons linéaires des fonctions de base *Rooftop* :

$$\mathbf{u}_s^L(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^{N_a} \mathbf{L}_{s,a} \mathbf{u}_a, \quad s = 1, \dots, N_s - 1, \quad (4.1.7)$$

$$\mathbf{u}_\ell^T(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^{N_a} \mathbf{T}_{\ell,a} \mathbf{u}_a, \quad \ell = 1, \dots, N_e - 1. \quad (4.1.8)$$

**Remarque 4.1.1.** *L'espace  $\mathcal{V}_{\text{div}0}^h$  peut être construit à partir des fonctions de base de l'espace  $\mathcal{V}_1^h$ , défini par*

$$\mathcal{V}_1^h := \{ \psi \in H^1(\Gamma_h); \psi|_K \in \{\mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_1\}, \forall K \in \mathcal{T}_h \},$$

selon la relation

$$\mathcal{V}_{\text{div}0}^h = \mathbf{n} \times \mathbf{grad}_\Gamma \mathcal{V}_1^h.$$

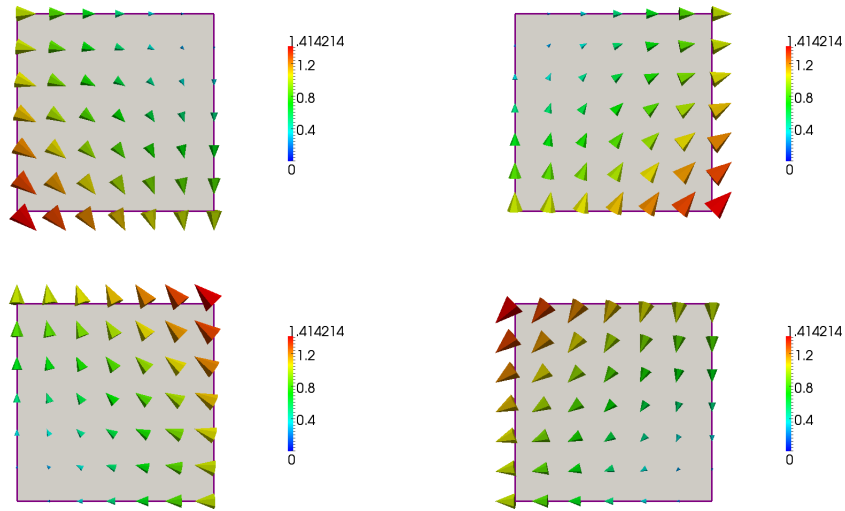


FIGURE 4.6 – Fonctions *Loop* sur le carré de référence, associées aux sommets  $\widehat{S}_1$  à  $\widehat{S}_4$  de gauche à droite puis de haut en bas.

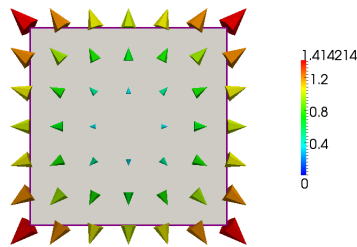


FIGURE 4.7 – Fonction *Tree* sur le carré de référence, associée à l'élément lui-même.

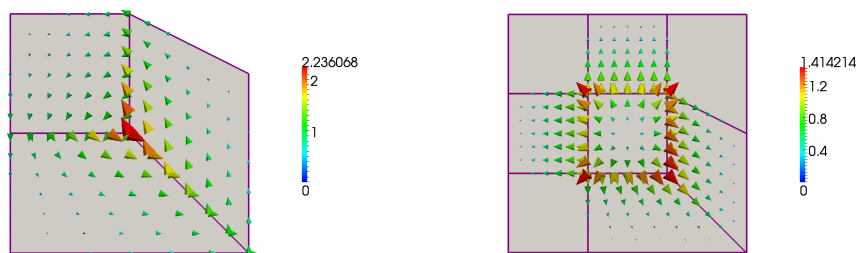


FIGURE 4.8 – Fonction *Loop* globale associée à un sommet (à gauche) et fonction *Tree* globale associée à un élément (à droite).

## 4.2 Problème discret : description et implémentation

### 4.2.1 Discrétisation d'un problème variationnel

Nous pouvons maintenant écrire la version discrétisée des formulations variationnelles présentées au chapitre 3. L'idée est de chercher à obtenir une approximation de l'inconnue, définie sur la surface  $\Gamma$ , sur le maillage  $\Gamma_h$ . Prenons le problème variationnel (2.3.17), l'inconnue

$$\mathcal{X} = \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{X}_N \\ \mathcal{X}_\times \end{array} \right\} \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$$

peut-être approchée par

$$\mathcal{X}^h = \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{X}_N^h \\ \mathcal{X}_\times^h \end{array} \right\} \in \mathcal{V}_{\text{div}}^h \times \mathcal{V}_{\text{div}}^h.$$

Les inconnues  $\mathcal{X}_N^h$  et  $\mathcal{X}_\times^h$  peuvent donc être exprimées comme des combinaisons linéaires des fonctions de base  $\{\mathbf{u}_b\}_{b=1,\dots,N}$  (4.1.3) :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_N^h(\mathbf{x}) &= \sum_{b=1}^N (X_N)_b \mathbf{u}_b(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_h, \\ \mathcal{X}_\times^h(\mathbf{x}) &= \sum_{b=1}^N (X_\times)_b \mathbf{u}_b(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_h. \end{aligned}$$

L'espace test du problème variationnel (2.3.17) est  $\mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  donc on peut choisir les fonctions de base  $\{\mathbf{u}_t\}_{t=1,\dots,N}$  (4.1.3) comme fonctions tests du problème discrétisé. Ici, les fonctions *bases* et *tests* sont donc les mêmes. Soient

$$\mathbf{T} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)^\top, \quad \mathbf{B} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)^\top,$$

le problème variationnel (2.3.17) discrétisé s'écrit

$$\mathbf{Z}\mathbf{X} = \mathbf{Y} \tag{4.2.1}$$

avec

$$\mathbf{Z} = \langle \mathbf{T}, \mathcal{Z}\mathbf{B} \rangle_\times, \quad \mathbf{X} = \left\{ \begin{array}{c} X_N \\ X_\times \end{array} \right\}, \quad \mathbf{Y} = \langle \mathbf{T}, \mathcal{Y} \rangle_\times.$$

Ainsi on a

$$\sum_{i_b=1}^{2N} \mathbf{Z}_{i_t i_b} \mathbf{X}_{i_b} = \mathbf{Y}_{i_t}, \quad i_t = 1, \dots, 2N.$$

**Remarque 4.2.1.** D'après la définition de la relation de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\times$ , le résidu

$$\text{res}_h = \mathcal{Y} - \mathcal{Z}\mathcal{X}^h$$

est orthogonal à l'espace  $\mathcal{V}_{\text{div}}^h$  engendré par les fonctions tests  $\{\mathbf{u}_t\}_{t=1,\dots,N}$ , c'est-à-dire

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{res}_h \rangle_{\times} = 0.$$

Ainsi le système discrétisé (4.2.1) correspond au système de la méthode des moments [39] et l'espace d'approximation étant le même pour les fonctions tests et les fonctions bases, on parle de variante de Galerkin.

#### 4.2.2 Problèmes discrets et opérateurs matriciels associés

Le calcul des opérateurs matriciels et des seconds membres définis dans cette section est détaillé dans l'annexe C.

##### Formulation PMCHWT

Le problème discret de la formulation PMCHWT (3.1.2) s'écrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{Z}\mathbf{X} = \mathbf{Y}. \quad (4.2.2)$$

La matrice  $\mathbf{Z}$  est décomposée selon

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_0^{JJ} & \mathbf{Z}_0^{JM} \\ \mathbf{Z}_0^{MJ} & \mathbf{Z}_0^{MM} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1^{JJ} & \mathbf{Z}_1^{JM} \\ \mathbf{Z}_1^{MJ} & \mathbf{Z}_1^{MM} \end{bmatrix}$$

avec, pour  $\ell \in \{0,1\}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_\ell^{JJ} &= si\omega\mu_\ell \mathbf{A}_\times^\ell + \frac{si}{\omega\varepsilon_\ell} \mathbf{C}_\times^\ell, & \mathbf{Z}_\ell^{JM} &= \mathbf{B}_\times^\ell, \\ \mathbf{Z}_\ell^{MJ} &= -\mathbf{B}_\times^\ell, & \mathbf{Z}_\ell^{MM} &= si\omega\varepsilon_\ell \mathbf{A}_\times^\ell + \frac{si}{\omega\mu_\ell} \mathbf{C}_\times^\ell. \end{aligned}$$

Soient  $\{\mathbf{u}_t\}_{t=1,\dots,N} \subset \mathcal{V}_{\text{div}}^h$  l'ensemble des fonctions tests et  $\{\mathbf{u}_b\}_{b=1,\dots,N} \subset \mathcal{V}_{\text{div}}^h$  l'ensemble des fonctions bases. Les opérateurs matriciels  $\mathbf{A}_\times$ ,  $\mathbf{B}_\times$  et  $\mathbf{C}_\times$  sont définis, pour  $\ell \in \{0,1\}$ , par

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{A}_\times^\ell\right)_{tb} &:= \left\langle \mathbf{u}_t, \mathcal{A}_\times^\ell(\mathbf{u}_b) \right\rangle_{\times}, \\ \left(\mathbf{B}_\times^\ell\right)_{tb} &:= \left\langle \mathbf{u}_t, \mathcal{B}_\times^\ell(\mathbf{u}_b) \right\rangle_{\times}, \\ \left(\mathbf{C}_\times^\ell\right)_{tb} &:= \left\langle \mathbf{u}_t, \mathcal{C}_\times^\ell(\mathbf{u}_b) \right\rangle_{\times} \end{aligned}$$

et sont explicités en annexe C. Le second membre  $\tilde{\mathbf{Y}}$  est décomposé selon

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^J \\ \mathbf{Y}^M \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} (\mathbf{Y}^J)_t &:= \langle \mathbf{u}_t, \gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} \rangle_{\times}, \\ (\mathbf{Y}^M)_t &:= \langle \mathbf{u}_t, \gamma_{\times}^0 \mathbf{H}_{\text{inc}} \rangle_{\times} \end{aligned}$$

qui sont explicités en annexe C. L'inconnue  $\mathbf{X}$  est décomposée selon

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^J \\ \mathbf{X}^M \end{bmatrix}$$

et les densités de courant surfaciques approchées  $\mathbf{J}^h$  et  $\mathbf{M}^h$  sont calculées via

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{b=1}^N (\mathbf{X}^J)_b \mathbf{u}_b(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_h, \\ \mathbf{M}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{b=1}^N (\mathbf{X}^M)_b \mathbf{u}_b(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_h. \end{aligned}$$

### Formulations pondérées

Le problème discret des formulations pondérées (3.1.5) s'écrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{Z}(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1) \mathbf{X} = \mathbf{Y}(\alpha_0, \beta_0). \quad (4.2.3)$$

La matrice  $\mathbf{Z}(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1)$  est donnée par

$$\mathbf{Z}(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1) = \mathbf{P}_0(\alpha_0, \beta_0) (\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_0^*) + \mathbf{P}_1(\alpha_1, \beta_1) (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_1^*)$$

où

$$\mathbf{P}_\ell(\alpha_\ell, \beta_\ell) = \text{diag}\{\alpha_\ell \mathbf{Id}_N, \beta_\ell \mathbf{Id}_N\}, \quad \ell \in \{0, 1\},$$

( $N$  étant le nombre d'arêtes du maillage de  $\Gamma_h$ ) est la matrice de pondération et

$$\mathbf{Z}_\ell^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(-1)^{\ell+1}}{2} \mathbf{R} \\ \frac{(-1)^\ell}{2} \mathbf{R} & 0 \end{bmatrix},$$

la matrice faisant apparaître les termes de masse. On définit la matrice diagonale par blocs  $\text{diag}\{\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2\}$  par

$$\text{diag}\{\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2\} := \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix}.$$

Le second membre  $\mathbf{Y}(\alpha_0, \beta_0)$  est donné par

$$\mathbf{Y}(\alpha_0, \beta_0) = \mathbf{P}_0(\alpha_0, \beta_0) \mathbf{Y}.$$

Les coefficients de  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  ont été détaillés pour le problème PMCHWT et l'opérateur matriciel  $\mathbf{R}$  est défini par

$$(\mathbf{R})_{tb} := \langle \mathbf{u}_t, \mathcal{R}(\mathbf{u}_b) \rangle$$

et est explicité en annexe C. On remarque que si  $\alpha_0 = \alpha_1 = \beta_0 = \beta_1 = 1$ , c'est-à-dire si les matrices de pondération sont les matrices identités, on retrouve le problème matriciel (4.2.2). On a donc  $\mathbf{Z}(1, 1, 1, 1) = \mathbf{Z}$  et  $\mathbf{Y}(1, 1) = \mathbf{Y}$ .

**Formulations avec décomposition Loop-Tree**

Le problème discret de la formulation décomposée (3.1.7) s'écrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{Z}_{LT}\mathbf{X}_{LT} = \mathbf{Y}_{LT}. \quad (4.2.4)$$

La matrice  $\mathbf{Z}_{LT}$  est donnée par

$$\mathbf{Z}_{LT} = (\text{diag}\{\mathbf{P}_{LT}, \mathbf{P}_{LT}\}) \mathbf{Z} (\text{diag}\{\mathbf{P}_{LT}, \mathbf{P}_{LT}\})^\top = \mathbf{Z}_{LT,0} + \mathbf{Z}_{LT,1}$$

où

$$\mathbf{P}_{LT} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (4.2.5)$$

est la matrice de passage de  $\mathcal{V}_{\text{div}}^h$  à  $\mathcal{V}_{\text{div}0}^h \cup \mathcal{V}_{\text{comp}}^h$  et les matrices  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{T}$  sont respectivement définies par (4.1.7) et (4.1.8). On obtient alors, pour  $\ell \in \{0,1\}$ ,

$$\mathbf{Z}_{LT,\ell} = \begin{bmatrix} si\omega\mu_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,LL} & si\omega\mu_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,LT} & \mathbf{B}_\times^{\ell,LL} & \mathbf{B}_\times^{\ell,LT} \\ si\omega\mu_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,TL} & si\omega\mu_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,TT} + \frac{si}{\omega\varepsilon_\ell} \mathbf{C}_\times^{\ell,TT} & \mathbf{B}_\times^{\ell,TL} & \mathbf{B}_\times^{\ell,TT} \\ -\mathbf{B}_\times^{\ell,LL} & -\mathbf{B}_\times^{\ell,LT} & si\omega\varepsilon_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,LL} & si\omega\varepsilon_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,LT} \\ -\mathbf{B}_\times^{\ell,TL} & -\mathbf{B}_\times^{\ell,TT} & si\omega\varepsilon_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,TL} & si\omega\varepsilon_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,TT} + \frac{si}{\omega\mu_\ell} \mathbf{C}_\times^{\ell,TT} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{Y}_{LT} = (\text{diag}\{\mathbf{P}_{LT}, \mathbf{P}_{LT}\}) \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^{J_L} \\ \mathbf{Y}^{J_T} \\ \mathbf{Y}^{M_L} \\ \mathbf{Y}^{M_T} \end{bmatrix}$$

où les opérateurs matriciels ainsi que les seconds membres décomposés sont détaillés en annexe C. L'inconnue  $\mathbf{X}_{LT}$  obtenue est donnée par

$$\mathbf{X}_{LT} = (\text{diag}\{\mathbf{P}_{LT}, \mathbf{P}_{LT}\})^{-\top} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{J_L} \\ \mathbf{X}^{J_T} \\ \mathbf{X}^{M_L} \\ \mathbf{X}^{M_T} \end{bmatrix}.$$

Le problème variationnel (3.1.8) de la formulation pondérée et décomposée s'écrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{Z}_{LT}(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1) \mathbf{X}_{LT} = \mathbf{Y}_{LT}(\alpha_0, \beta_0) \quad (4.2.6)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{LT}(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1) &= (\text{diag}\{\mathbf{P}_{LT}, \mathbf{P}_{LT}\}) \mathbf{Z}(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1) (\text{diag}\{\mathbf{P}_{LT}, \mathbf{P}_{LT}\})^\top \\ &= \mathbf{P}_0(\alpha_0, \beta_0) (\mathbf{Z}_{LT,0} + \mathbf{Z}_{LT,0}^*) + \mathbf{P}_1(\alpha_1, \beta_1) (\mathbf{Z}_{LT,1} + \mathbf{Z}_{LT,1}^*) \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{Y}_{LT}(\alpha_0, \beta_0) = (\text{diag}\{\mathbf{P}_{LT}, \mathbf{P}_{LT}\}) \mathbf{Y}(\alpha_0, \beta_0) = \mathbf{P}_0(\alpha_0, \beta_0) \mathbf{Y}_{LT}.$$

Les coefficients de  $\mathbf{Z}_{LT,0}$ ,  $\mathbf{Z}_{LT,1}$ ,  $\mathbf{X}_{LT}$  et  $\mathbf{Y}_{LT}$  ont été détaillés pour le problème précédent. La matrice  $\mathbf{Z}_{LT,\ell}^*$ ,  $\ell \in \{0,1\}$ , est décomposée selon

$$\mathbf{Z}_{LT,\ell}^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(-1)^{\ell+1}}{2} \mathbf{P}_{LT} \mathbf{R} \mathbf{P}_{LT}^\top \\ \frac{(-1)^\ell}{2} \mathbf{P}_{LT} \mathbf{R} \mathbf{P}_{LT}^\top & 0 \end{bmatrix}$$

et le terme  $\mathbf{P}_{LT} \mathbf{R} \mathbf{P}_{LT}^\top$  est explicité en annexe C.

### La formulation quasi-statique de Hiptmair

Le problème discret de la formulation de Hiptmair (3.2.18) s'écrit sous forme matricielle :

$$\tilde{\mathbf{Z}}_H \tilde{\mathbf{X}}_H = \tilde{\mathbf{Y}}_H. \quad (4.2.7)$$

La matrice  $\tilde{\mathbf{Z}}_H$  est donnée par

$$\tilde{\mathbf{Z}}_H = (\text{diag}\{\mathbf{L}, \mathbf{P}_{LT}\}) \tilde{\mathbf{Z}} (\text{diag}\{\mathbf{L}, \mathbf{P}_{LT}\})^{-\top}$$

avec  $\tilde{\mathbf{Z}}$  définie par

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} si\omega (\mu_0 \mathbf{A}_\times^0 + \mu_1 \mathbf{A}_\times^1) & \mathbf{B}_\times^0 + \mathbf{B}_\times^1 \\ -\mathbf{B}_\times^0 - \mathbf{B}_\times^1 & \sigma_1 \mathbf{A}_\times^1 + \frac{si}{\omega\mu_0} \mathbf{C}_\times^0 + \frac{si}{\omega\mu_1} \mathbf{C}_\times^1 \end{bmatrix}.$$

Finalement,

$$\tilde{\mathbf{Z}}_H = \begin{bmatrix} si\omega (\mu_0 \mathbf{A}_\times^{0,LL} + \mu_1 \mathbf{A}_\times^{1,LL}) & \mathbf{B}_\times^{0,LL} + \mathbf{B}_\times^{1,LL} & \mathbf{B}_\times^{0,LT} + \mathbf{B}_\times^{1,LT} \\ -\mathbf{B}_\times^{0,LL} - \mathbf{B}_\times^{1,LL} & \sigma_1 \mathbf{A}_\times^{1,LL} & \sigma_1 \mathbf{A}_\times^{1,LT} \\ -\mathbf{B}_\times^{0,TL} - \mathbf{B}_\times^{1,TL} & \sigma_1 \mathbf{A}_\times^{1,TL} & \sigma_1 \mathbf{A}_\times^{1,TT} + \frac{si}{\omega\mu_0} \mathbf{C}_\times^{0,TT} + \frac{si}{\omega\mu_1} \mathbf{C}_\times^{1,TT} \end{bmatrix}$$

où les opérateurs matriciels décomposés sont détaillés en annexe C. Le second membre  $\tilde{\mathbf{Y}}$  et l'inconnue  $\tilde{\mathbf{X}}$  sont donnés par

$$\tilde{\mathbf{Y}}_H = (\text{diag}\{\mathbf{L}, \mathbf{P}_{LT}\}) \tilde{\mathbf{Y}}, \quad \tilde{\mathbf{X}}_H = (\text{diag}\{\mathbf{L}, \mathbf{P}_{LT}\})^{-\top} \tilde{\mathbf{X}}$$

avec

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^J \\ \mathbf{Y}^M \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^J \\ \mathbf{X}^M \end{bmatrix}.$$

L'équation discrète de (3.2.19) s'écrit sous forme matricielle :

$$\left( \frac{1}{2} \mathbf{Id} + \tilde{\mathbf{C}}_n^0 \right) \mathbf{X}^{\mathbf{E}_{0n}} = -\mathbf{B}_n^0 \mathbf{X}^M - si\omega\mu_0 \mathbf{A}_n^0 \mathbf{X}^{J_L} + \mathbf{Y}^{\mathbf{E}_{0n}}.$$

On rappelle que l'on est ici sous l'approximation quasi-statique donc les opérateurs matriciels ainsi que les seconds membres prennent en compte les simplifications,  $\varepsilon_0 = 0$  et  $\varepsilon_1^d = 0$ , contrairement au problèmes discrets pour les formulations de Maxwell.

### Les formulations quasi-statiques avec inconnues scalaires

Le problème discret de la première formulation quasi-statique découplée (3.2.22) s'écrit sous forme matricielle :

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{d1} \tilde{\mathbf{X}}_{d1} = \tilde{\mathbf{Y}}_{d1}. \quad (4.2.8)$$

La matrice  $\widehat{\mathbf{Z}}_{d1}$  est décomposée selon

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{d1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{R} - \mathbf{B}_{\times}^0 & 0 & \tilde{\mathbf{C}}_{\times}^0 \\ si\omega\mu_1 \mathbf{A}_{\times}^1 & \frac{1}{2} \mathbf{R} + \mathbf{B}_{\times}^1 & 0 \\ -\mathbf{B}_{\mathbf{n}}^1 & \sigma_1 \mathbf{A}_{\mathbf{n}}^1 & \frac{\mu_0}{\mu_1} \left( -\frac{1}{2} \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{n}}^1 \right) \end{bmatrix}.$$

Les opérateurs matriciels  $\tilde{\mathbf{C}}_{\times}$ ,  $\mathbf{A}_{\mathbf{n}}$ ,  $\mathbf{B}_{\mathbf{n}}$  et  $\tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{n}}$  sont définis, pour  $\ell \in \{0,1\}$ , par

$$\begin{aligned} \left( \tilde{\mathbf{C}}_{\times}^{\ell} \right)_{t_v b_v} &:= \left\langle \mathbf{v}_{t_v}, \tilde{\mathbf{C}}_{\times}^{\ell}(\mathbf{u}_{b_v}) \right\rangle_{\times}, \\ \left( \mathbf{A}_{\mathbf{n}}^{\ell} \right)_{t_s b_s} &:= \left\langle \varphi_{t_s}, \mathbf{A}_{\mathbf{n}}^{\ell}(\varphi_{b_s}) \right\rangle_{\frac{1}{2}}, \\ \left( \mathbf{B}_{\mathbf{n}}^{\ell} \right)_{t_s b_s} &:= \left\langle \varphi_{t_s}, \mathbf{B}_{\mathbf{n}}^{\ell}(\varphi_{b_s}) \right\rangle_{\frac{1}{2}}, \\ \left( \tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{n}}^{\ell} \right)_{t_s b_s} &:= \left\langle \varphi_{t_s}, \tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{n}}^{\ell}(\varphi_{b_s}) \right\rangle_{\frac{1}{2}}, \\ \left( \mathbf{I} \right)_{t_s b_s} &:= \left\langle \varphi_{t_s}, \varphi_{b_s} \right\rangle_{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

et sont explicités en annexe C. Le second membre  $\tilde{\mathbf{Y}}_{d1}$  est décomposé selon

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{d1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$\left( \mathbf{Y}_{d1}^M \right)_{t_v} := \left\langle \mathbf{v}_{t_v}, \gamma_{\times}^0 \mathbf{H}_{\text{inc}} \right\rangle_{\times}$$

qui est explicité en annexe C et l'inconnue  $\widehat{\mathbf{X}}_{d1}$  est décomposée selon

$$\tilde{\mathbf{X}}_{d1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^J \\ \mathbf{X}^M \\ \mathbf{X}^{H_{0n}} \end{bmatrix}.$$

Les densités de courant surfaciques approchées  $\mathbf{J}^h$ ,  $\mathbf{M}^h$  et  $\mathbf{H}_{0n}^h$  sont calculées via

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{b_v=1}^{N_v} (\mathbf{X}^J)_{b_v} \mathbf{u}_{b_v}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_h, \\ \mathbf{M}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{b_v=1}^{N_v} (\mathbf{X}^M)_{b_v} \mathbf{u}_{b_v}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_h, \\ \mathbf{H}_{0n}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{b_s=1}^{N_s} (\mathbf{X}^{H_{0n}})_{b_s} \varphi_{b_s}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_h.\end{aligned}$$

Le problème discret de la deuxième formulation quasi-statique découplée (3.2.24) s'écrit sous forme matricielle :

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{d2} \tilde{\mathbf{X}}_{d2} = \tilde{\mathbf{Y}}_{d2}. \quad (4.2.9)$$

La matrice  $\tilde{\mathbf{Z}}_{d2}$  est décomposée selon

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{d2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\mathbf{R} - \mathbf{B}_{\times}^1 & \sigma_1 \mathbf{A}_{\times}^1 & \frac{\mu_0}{\mu_1} \tilde{\mathbf{C}}_{\times}^1 & 0 \\ si\omega\mu_0 \mathbf{A}_{\times}^0 & -\frac{1}{2}\mathbf{R} + \mathbf{B}_{\times}^0 & 0 & \tilde{\mathbf{C}}_{\times}^0 \\ -\mathbf{B}_{\mathbf{n}}^0 & 0 & \frac{1}{2}\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{n}}^0 & 0 \\ si\omega\mu_0 \mathbf{A}_{\mathbf{n}}^0 & \mathbf{B}_{\mathbf{n}}^0 & 0 & \frac{1}{2}\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{n}}^0 \end{bmatrix}.$$

Le second membre  $\tilde{\mathbf{Y}}_{d2}$  est décomposé selon

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{d2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{Y}^J \\ \mathbf{Y}^{H_{0n}} \\ \mathbf{Y}^{E_{0n}} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}(\mathbf{Y}^J)_{t_v} &:= \langle \mathbf{v}_{t_v}, \gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} \rangle_{\times}, \\ (\mathbf{Y}^{H_{0n}})_{t_s} &:= \langle \varphi_{t_s}, \gamma_{\mathbf{n}}^0 \mathbf{H}_{\text{inc}} \rangle_{\frac{1}{2}}, \\ (\mathbf{Y}^{E_{0n}})_{t_s} &:= \langle \varphi_{t_s}, \gamma_{\mathbf{n}}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} \rangle_{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

qui sont explicités en annexe C. L'inconnue  $\mathbf{X}_{d2}$  est décomposée selon

$$\mathbf{X}_{d2} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^J \\ \mathbf{X}^M \\ \mathbf{X}^{H_{0n}} \\ \mathbf{X}^{E_{0n}} \end{bmatrix}$$

et les densités de courant surfaciques approchées  $\mathbf{J}^h$ ,  $\mathbf{M}^h$ ,  $\mathbf{H}_{0n}^h$  et  $\mathbf{E}_{0n}^h$  sont calculées via

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{b_v=1}^{N_v} (\mathbf{X}^J)_{b_v} \mathbf{u}_{b_v}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_h, \\ \mathbf{M}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{b_v=1}^{N_v} (\mathbf{X}^M)_{b_v} \mathbf{u}_{b_v}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_h, \\ \mathbf{H}_{0n}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{b_s=1}^{N_s} (\mathbf{X}^{H_{0n}})_{b_s} \varphi_{b_s}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_h, \\ \mathbf{E}_{0n}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{b_s=1}^{N_s} (\mathbf{X}^{E_{0n}})_{b_s} \varphi_{b_s}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_h.\end{aligned}$$

On rappelle que l'on est ici sous l'approximation quasi-statique donc les opérateurs matriciels ainsi que les seconds membres font intervenir  $\varepsilon_0 = 0$  et  $\varepsilon_1^d = 0$  contrairement au problèmes discret pour les formulations de Maxwell.

### 4.2.3 Calcul de la matrice d'impédance

#### Quadrature

Les intégrales que nous devons évaluer (voir annexe C) sont de la forme

$$I_{tb} = \int_{K_t} \int_{K_b} H(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_b) d\mathbf{x}_b d\mathbf{x}_t$$

avec  $K_t$  et  $K_b$  les éléments test et base, respectivement. On a donc

$$I_{tb} = \int_{\hat{K}} \int_{\hat{K}} H(\mathbf{F}_t(\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{F}_b(\hat{\mathbf{x}})) \mathcal{J}_b(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \mathcal{J}_t(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}}.$$

Ainsi on se ramène à une intégrale double sur l'élément de référence que l'on peut approcher par une formule de quadrature [57]. Soit

$$\int_{\hat{K}} f(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \simeq \sum_{i_q=1}^{N_q} f(\hat{\boldsymbol{\xi}}_{i_q}) \hat{\omega}_{i_q},$$

avec  $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{i_q}$  et  $\hat{\omega}_{i_q}$  les points et poids de quadrature, respectivement. Ainsi on obtient l'approximation de  $I_{tb}$

$$I_{tb} \simeq \sum_{i_q=1}^{N_q^t} \sum_{j_q=1}^{N_q^b} H(\mathbf{F}_t(\hat{\boldsymbol{\xi}}_{i_q}^t), \mathbf{F}_b(\hat{\boldsymbol{\xi}}_{j_q}^b)) \mathcal{J}_b(\hat{\boldsymbol{\xi}}_{j_q}^b) \mathcal{J}_t(\hat{\boldsymbol{\xi}}_{i_q}^t) \hat{\omega}_{i_q}^t \hat{\omega}_{j_q}^b$$

où  $(\hat{\boldsymbol{\xi}}^t, \hat{\omega}^t)$  et  $(\hat{\boldsymbol{\xi}}^b, \hat{\omega}^b)$  sont les couples de points et poids de quadrature associés aux éléments test et base, respectivement.

La fonction  $H$  fait généralement intervenir le noyau de Green défini par (2.2.1) :

$$g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_b) := \frac{\exp(-s i \kappa_\ell |\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_b|)}{4\pi |\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_b|}.$$

Quand les éléments  $K_t$  et  $K_b$  ne sont pas disjoints, l'intégrale du noyau de Green ne peut être évaluée précisément par une formule de quadrature classique, du fait de sa singularité en  $\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_b\|^{-1}$  lorsque  $\mathbf{x}_t$  tend vers  $\mathbf{x}_b$ . Cette difficulté peut être surmontée en distinguant trois types d'interactions, définies par :

$$\begin{cases} K_t \cap K_b = \emptyset, & \text{interaction disjointe,} \\ K_t = K_b, & \text{interaction confondue,} \\ \text{Sinon} & \text{interaction adjacente (par sommet ou arête),} \end{cases}$$

avec  $K_t$  et  $K_b$  les éléments test et base, respectivement. Le type de quadrature sur les éléments test et base est défini en fonction du type d'interaction.

### Interactions disjointes

Par définition des interactions lointaines, l'intégrale  $I_{tb}$  est considérée suffisamment régulière pour être estimée à l'aide d'une formule de quadrature classique. On opte ici pour un produit cartésien de quadratures de Gauss-Legendre à  $p$  points, dont les points et les poids de quadrature permettent d'intégrer exactement un polynôme de degré au plus  $(2p - 1)$  par rapport à chacune de ses deux variables. Lorsque les éléments test et base sont disjoints, le noyau de Green varie peu et on utilise une formule de quadrature à  $(2 \times 2)$  points pour l'intégration sur l'élément test et l'élément base. Ce choix est raisonnable puisqu'il permet de prendre en compte correctement le degré des fonctions de base.

### Interactions adjacentes

Pour les interactions adjacentes par sommet ou par arête, on utilise une formule produit de quadratures de Gauss-Legendre à  $(2 \times 2)$  points pour l'intégration sur l'élément test. En revanche, pour l'intégration sur l'élément base, on considère une formule de quadrature à  $(4 \times 4)$  points.

### Interactions confondues

Les interactions confondues nécessitent d'utiliser une technique particulière pour intégrer la singularité en  $\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_b\|^{-1}$ . Notre choix s'est porté sur une formule de quadrature à  $(4 \times 4)$  points sur les éléments tests associée à une quadrature polaire [54] à 4 points selon  $\theta$  et  $\rho$  sur les éléments bases. Cette technique consiste à associer à chacun des points de quadrature  $\mathbf{x}_t$  sur l'élément test une formule de quadrature en coordonnées polaires sur l'élément base.

### Quadrature polaire

Prenons  $\mathbf{x}^q = \mathbf{F}_t(\widehat{x}_1^q, \widehat{x}_2^q)$ , l'un des points de quadrature sur l'élément test  $K_t$ . L'élément de référence  $\widehat{K}$  est découpé en quatre triangles  $T_i$  de sommet commun  $S^q$  de coordonnées  $(\widehat{x}_1^q, \widehat{x}_2^q)$ , avec  $i = 1, \dots, 4$ , voir figure 4.9.

Plaçons nous maintenant sur le triangle de référence  $\widehat{T}$  de sommets  $\widehat{S}_1 = (0,0)$ ,  $\widehat{S}_2 = (1,0)$  et  $\widehat{S}_3 = (0,1)$ . Soient  $(\xi_i^\theta, \omega_i^\theta)_{i=1, \dots, p_\theta}$  et  $(\xi_j^\rho, \omega_j^\rho)_{j=1, \dots, p_\rho}$  les points et poids de quadrature de Gauss-Legendre sur  $[0,1]$  selon  $\theta$  et  $\rho$ , respectivement. Les coordonnées polaires  $(\theta_i, \rho_j)$  avec  $i = 1, \dots, p_\theta$  et  $j = 1, \dots, p_\rho$  des  $(p_\theta \times p_\rho)$  points de quadrature  $\widehat{Q}_{ij}$  sur le triangle de référence  $\widehat{T}$  sont définis par

$$\begin{cases} \theta_i &= \frac{\pi}{2} \xi_i^\theta \\ \rho_j &= \rho_i^{\max} \xi_j^\rho \end{cases}$$

où la distance

$$\rho_i^{\max} = \sqrt{(\xi_i^\theta)^2 + (1 - \xi_i^\theta)^2}$$

est définie de telle sorte que les points de coordonnées  $(\theta_i, \rho_i^{\max})$  appartiennent au segment  $[\widehat{S}_2, \widehat{S}_3]$ . Les points de quadrature  $\widehat{Q}_{ij}$  sont ensuite reportés sur les quatre triangles  $T_k$  de l'élément de référence  $\widehat{K}$  dont les sommets sont numérotés dans le sens direct en commençant par leur sommet commun  $S^q$ . Soient  $(x_i^k, x_j^k)$  les coordonnées cartésiennes des points de quadrature  $Q_{ij}^k$  d'un triangle  $T_k$  de sommets  $S_1^k = S^q$ ,  $S_2^k$  et  $S_3^k$  sont données par

$$(x_i^k, x_j^k) = f_k(\rho_j \cos \theta_i, \rho_j \sin \theta_i)$$

avec

$$f_k(u, v) = (1 - u - v)S_1^k + uS_2^k + vS_3^k,$$

voir figure 4.10. Finalement, les poids  $\omega_{ij}^k$  associés aux points  $Q_{ij}^k$  sont définis par

$$\omega_{ij}^k = \frac{\pi}{2} \rho_i^{\max} \rho_j \omega_i^\theta \omega_j^\rho.$$

**Remarque 4.2.2.** *La méthode employée pour passer outre les problèmes de singularité est raisonnable pour les géométries présentées dans ce manuscrit. En revanche, pour des géométries plus complexes il serait nécessaire de distinguer les types d'interactions en fonction de la distance réelle entre les éléments.*

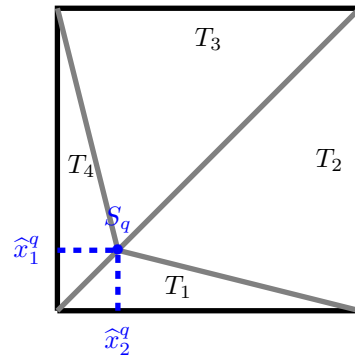


FIGURE 4.9 – Découpe en triangle du carré de référence.

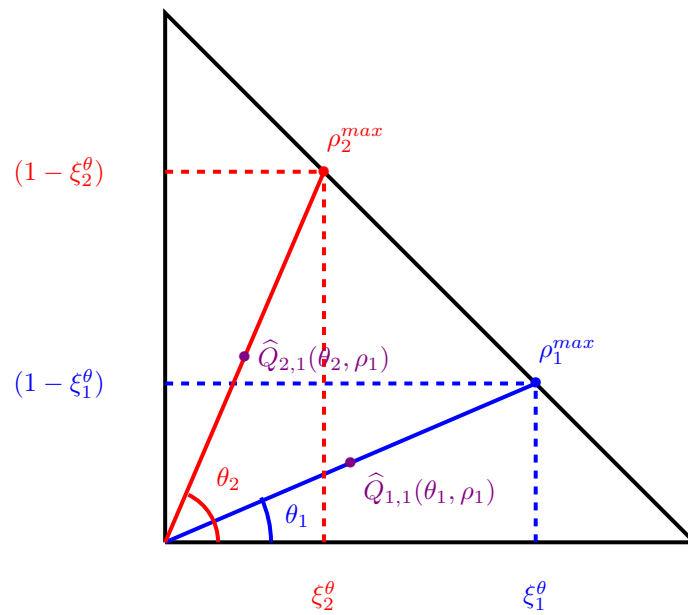


FIGURE 4.10 – Points de quadrature polaire sur le triangle de référence  $\hat{T}$  pour  $p_\rho = 1$  et  $p_\theta = 2$ .

## Chapitre 5

# Décomposition de Helmholtz-Hodge et pondération des équations relatives à l'air et à la pièce

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Décomposition de Helmholtz-Hodge et basses fréquences . . .</b>	<b>89</b>
5.1.1	Le bruit numérique à basse fréquence . . . . .	89
5.1.2	Décomposition Loop-Tree . . . . .	94
5.1.3	Lien entre formulation Loop-Tree et formulation de Hiptmair . . .	97
5.1.4	Bilan . . . . .	98
<b>5.2</b>	<b>Pondération des équations relatives à l'air et à la pièce . . .</b>	<b>100</b>
5.2.1	Formulations existantes pour les milieux diélectriques . . . . .	100
5.2.2	Formulations pour les milieux conducteurs . . . . .	107
<b>5.3</b>	<b>Résultats sur un cas CND . . . . .</b>	<b>113</b>
5.3.1	La plaque conductrice . . . . .	113
5.3.2	La plaque conductrice et magnétique . . . . .	117
<b>5.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>120</b>

---

Pour la majeure partie des configurations de CND par CF, la pièce est contrôlée à basse fréquence or, la formulation PMCHWT souffre d'un bruit numérique pour cette gamme de fréquences. Dans une première partie, ce phénomène est expliqué puis contourné par la décomposition Loop-Tree. Cette décomposition est traditionnellement employée pour les milieux diélectriques et nous étudions ici comment elle se comporte pour les milieux conducteurs. Puis nous présentons le lien entre le système discret de la formulation Loop-Tree pour les conducteurs et celui de la formulation de Hiptmair. Dans une deuxième partie, les formulations de la littérature qui pondèrent les équations relatives à l'air et à la pièce pour les milieux diélectriques sont présentées. Nous étudions

ensuite de manière empirique des formulations pondérées pour les milieux conducteurs. Enfin, une troisième partie présente les résultats obtenus pour les différentes formulations présentées dans ce chapitre sur un cas typique du CND par CF.

## 5.1 Décomposition de Helmholtz-Hodge et basses fréquences

### 5.1.1 Le bruit numérique à basse fréquence

La formulation PMCHWT est réputée pour être mise en échec lorsque la fréquence est trop basse, en anglais on parle de *low-frequency breakdown*. Ce phénomène est lié à la présence d'un bruit numérique dans l'équation intégrale en champ électrique (EFIE pour *Electric Field Intégral Equation* en anglais) qui apparaît lorsque la fréquence diminue [65, 74, 24, 27, 69, 47, 48]. L'EFIE est une formulation dédiée aux milieux parfaitement conducteurs (voir annexe A) qui intervient dans les termes diagonaux  $\mathbf{Z}^{JJ}$  et  $\mathbf{Z}^{MM}$  de la matrice d'impédance  $\mathbf{Z}$  du problème PMCHWT discrétisé (4.2.2). En effet,

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}^{JJ} &= \mathbf{Z}_0^{JJ} + \mathbf{Z}_1^{JJ}, \\ \mathbf{Z}^{MM} &= \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \mathbf{Z}_0^{JJ} + \frac{\varepsilon_1}{\mu_1} \mathbf{Z}_1^{JJ}\end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{Z}_0^{JJ} = \mathbf{Z}_{EFIE} = si\omega\mu_0\mathbf{A}_\times^0 + \frac{si}{\omega\varepsilon_0}\mathbf{C}_\times^0.$$

### Comportement de l'EFIE à basse fréquence

D'après l'annexe C, les opérateurs matriciels  $\mathbf{A}_\times$  et  $\mathbf{C}_\times$  sont donnés par les intégrales

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{A}_\times^\ell\right)_{tb} &= \int_{\Gamma_h} \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \cdot \int_{\Gamma_h} \mathbf{u}_b(\mathbf{x}') g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\mathbf{x}, \\ \left(\mathbf{C}_\times^\ell\right)_{tb} &= - \int_{\Gamma_h} \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \int_{\Gamma_h} \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}_b(\mathbf{x}') g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\mathbf{x}\end{aligned}$$

avec  $\mathbf{u}_t$  et  $\mathbf{u}_b$  les fonctions tests et bases définies par (4.1.3) et  $\ell \in \{0,1\}$ . Ces intégrales font intervenir le noyau de Green dont on rappelle la définition,

$$g_{\kappa_\ell}(R) := \frac{\exp(-si\kappa_\ell|R|)}{4\pi|R|}, \quad \ell \in \{0,1\}, \quad R = \mathbf{x} - \mathbf{x}'.$$

On parle de basse fréquence lorsque les paramètres adimensionnels  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , respectivement définis par (1.3.9) et (1.3.10), vérifient

$$\gamma_1\gamma_2 = L\kappa_0 = L\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \ll 1$$

où  $L$  est la taille caractéristique de  $\Omega_1$ . Ainsi on peut écrire le développement limité de  $g_{\kappa_0}$  au voisinage de 0 :

$$g_{\kappa_0}(R) := \frac{1}{4\pi|R|} \left( 1 - si\kappa_0|R| + \frac{(-si\kappa_0|R|)^2}{2!} + \frac{(-si\kappa_0|R|)^3}{3!} \right) + o((-si\kappa_0|R|)^3). \quad (5.1.1)$$

On en déduit que  $g_{\kappa_0}(R) = \mathcal{O}(1)$  ce qui implique que

$$si\omega\mu_0\mathbf{A}_\times^0 = \mathcal{O}(\omega) \quad \text{et} \quad \frac{si}{\omega\varepsilon_0}\mathbf{C}_\times^0 = \mathcal{O}(\omega^{-1}).$$

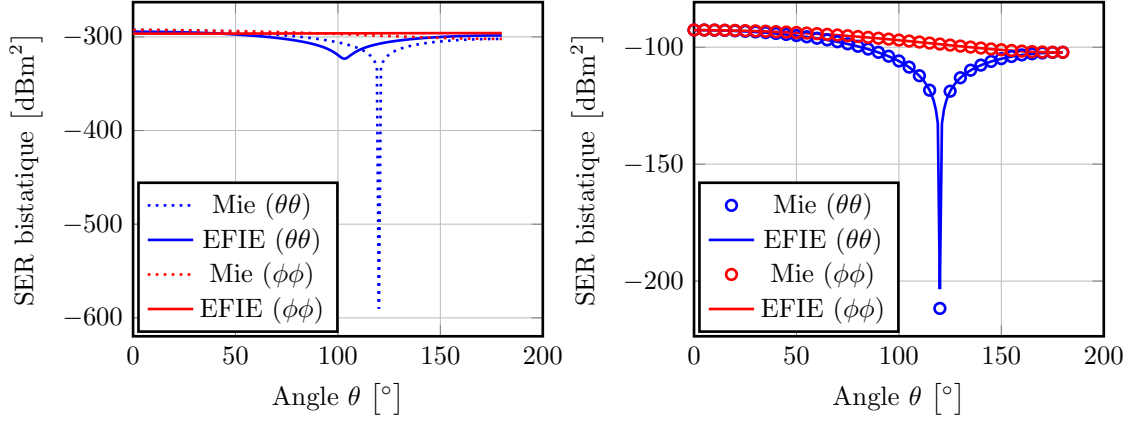


FIGURE 5.1 – SER bistatique pour une sphère PEC (cas test #1.1 avec  $N_{elem} = 864$ ) à une fréquence  $f = 1$  Hz (à gauche) et  $f = 100$  kHz (à droite).

Il est alors clair qu'à basse fréquence le terme en  $\mathbf{A}_\times^0$  de  $\mathbf{Z}_{EFIE}$  est dans le bruit numérique du terme en  $\mathbf{C}_\times^0$ , il n'est donc de fait pas pris en compte.

Pour le vérifier prenons une sphère parfaitement conductrice éclairée par une onde plane, qui correspond au cas test #1.1 de l'annexe E, discrétisée en 864 quadrilatères. La section efficace radar (SER), définie et explicitée en annexe D, est calculée par l'EFIE pour deux fréquences, l'une considérée comme basse (1 Hz) et l'autre plus élevée (100 kHz), et comparée au résultat analytique obtenu avec les séries de Mie <sup>1</sup>. La figure 5.1 présente les résultats obtenus. On observe qu'à basse fréquence le résultat ne correspond pas au résultat analytique, tandis qu'à 100 kHz on a un très bon accord. Ce premier résultat permet de mettre en avant le phénomène de *low-frequency breakdown* pour l'EFIE. D'autre part, la figure 5.2 présente le conditionnement de la matrice  $\mathbf{Z}_{EFIE}$  en fonction du paramètre  $h/\lambda_0$ , où  $h$  correspond à la taille moyenne des arêtes du maillage de  $\Gamma_h$  et est défini par

$$h = \sqrt{\frac{Aire(\Gamma_h)}{N_{elem}}}$$

où  $N_{elem}$  est le nombre d'éléments du maillage de  $\Gamma_h$ . On rappelle que  $\lambda_0 = c_0/f$  donc le paramètre  $h/\lambda_0$  est proportionnel à la fréquence et à la taille des arêtes du maillage. La figure 5.2 présente les résultats sur le conditionnement pour une fréquence  $f$  variant de 1 Hz à 100 MHz (pour faciliter la lecture l'axe des fréquences à été représenté en haut de la figure). On observe que le conditionnement de la matrice  $\mathbf{Z}_{EFIE}$  se dégrade lorsque la fréquence diminue ce qui peut aussi être un frein à la bonne précision du résultat.

1. Le code utilisé est un code Matlab disponible en ligne [30] et obtenu à partir de [51, Ch.3].

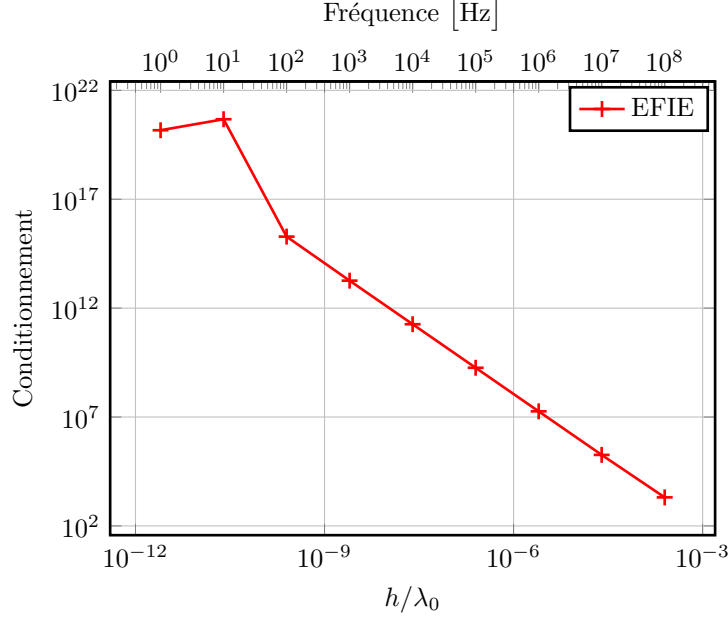


FIGURE 5.2 – Conditionnement de la matrice d’impédance pour une sphère PEC (cas test #1.1 avec  $N_{elem} = 864$ ).

### Comportement de PMCHWT à basse fréquence

**Milieux diélectriques.** Prenons dans un premier temps le cas des milieux diélectriques, c’est à dire les milieux pour lesquels  $\sigma_1 = 0$ . Dans ce cas on rappelle que l’on a  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^d$ . Ainsi, les blocs diagonaux de la matrice  $\mathbf{Z}$  sont donnés par

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}^{JJ} &= \mathbf{Z}_{EFIE} + si\omega\mu_1\mathbf{A}_\times^1 + \frac{si}{\omega\varepsilon_1^d}\mathbf{C}_\times^1, \\ \mathbf{Z}^{MM} &= \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\mathbf{Z}_{EFIE} + si\omega\varepsilon_1^d\mathbf{A}_\times^1 + \frac{si}{\omega\mu_1}\mathbf{C}_\times^1.\end{aligned}$$

De plus, le nombre d’onde associé au milieu diélectrique  $\Omega_1$  vérifie

$$\kappa_1 = \kappa_0\sqrt{\varepsilon_{r,1}^d\mu_{r,1}}$$

et est réel. À basse fréquence,  $L\kappa_1 = \gamma_1\gamma_2\sqrt{\varepsilon_{r,1}^d\mu_{r,1}} \ll 1$  et on peut écrire, comme précédemment, le développement limité de  $g_{\kappa_1}$  au voisinage de 0 :

$$g_{\kappa_1}(R) := \frac{1}{4\pi|R|} \left( 1 - si\kappa_1|R| + \frac{(-si\kappa_1|R|)^2}{2!} + \frac{(-si\kappa_1|R|)^3}{3!} \right) + o((-si\kappa_1|R|)^3). \quad (5.1.2)$$

On en déduit que  $g_{\kappa_1}(R) = \mathcal{O}(1)$  ce qui implique que

$$\begin{aligned}si\omega\mu_1\mathbf{A}_\times^1 &\sim si\omega\varepsilon_1^d\mathbf{A}_\times^1 = \mathcal{O}(\omega), \\ \frac{si}{\omega\varepsilon_1^d}\mathbf{C}_\times^1 &\sim \frac{si}{\omega\mu_1}\mathbf{C}_\times^1 = \mathcal{O}(\omega^{-1}).\end{aligned}$$

À basse fréquence, le comportement des termes diagonaux  $\mathbf{Z}^{JJ}$  et  $\mathbf{Z}^{MM}$  de la matrice  $\mathbf{Z}$  est donc similaire à celui de la matrice d'impédance de l'EFIE.

Pour le vérifier prenons une sphère diélectrique discrétisée en  $N_{elem} = 864$  quadrilatères, avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$ , éclairée par une onde plane, qui correspond au cas test #1.2 de l'annexe E. La SER est calculée par la formulation PMCHWT pour deux fréquences,  $f = 1$  Hz et  $f = 1$  MHz et comparée au résultat analytique obtenu avec les séries de Mie. La figure 5.3 présente les résultats obtenus. Comme pour la sphère PEC, on observe qu'à basse fréquence le résultat ne correspond pas au résultat analytique, tandis qu'à 1 MHz on a un très bon accord. Quant à la figure 5.4, elle montre que le conditionnement de la matrice d'impédance pour la sphère diélectrique se dégrade de manière similaire à celui de la sphère PEC quand la fréquence diminue.

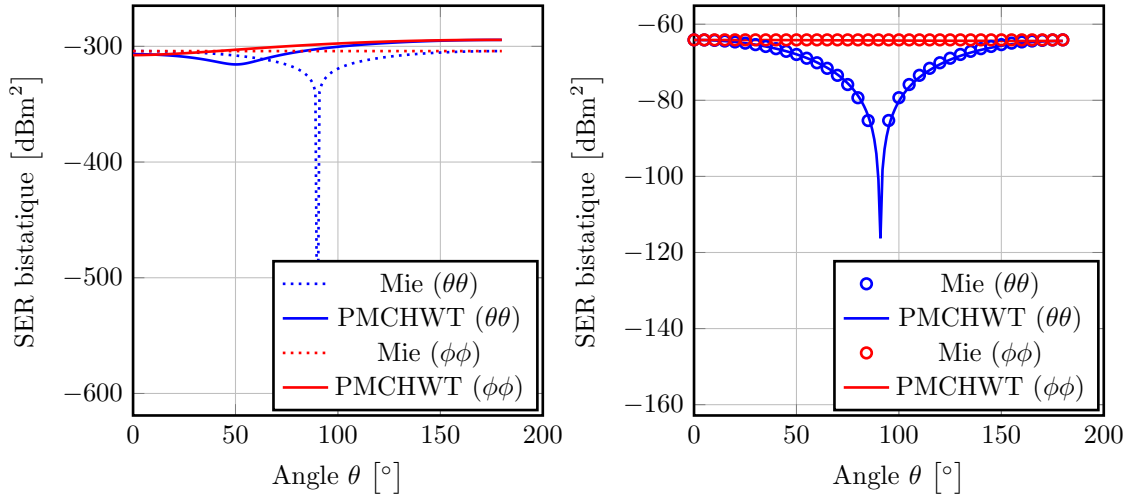


FIGURE 5.3 – SER bistatique pour une sphère diélectrique (cas test #1.2 avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$  et  $N_{elem} = 864$ ) à une fréquence  $f = 1$  Hz (à gauche) et  $f = 1$  MHz (à droite).

**Milieux conducteurs.** Si l'on se place sous l'hypothèse que  $\Omega_1$  est conducteur, c'est-à-dire que  $\sigma_1 > 0$  alors

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^d - \frac{si\sigma_1}{\omega}$$

et n'est plus réel. Ainsi, le nombre d'onde  $\kappa_1$  associé au milieu conducteur est complexe et vérifie

$$\kappa_1 = \omega\sqrt{\mu_1} \left( \varepsilon_1^d - \frac{si\sigma_1}{\omega} \right)^{1/2}.$$

On ne peut donc plus affirmer qu'il tend vers zéro quand la fréquence diminue et on ne peut plus établir le même développement limité du noyau de Green  $g_{\kappa_1}$  que pour les milieux diélectriques. Nous verrons au chapitre 7 comment obtenir un développement

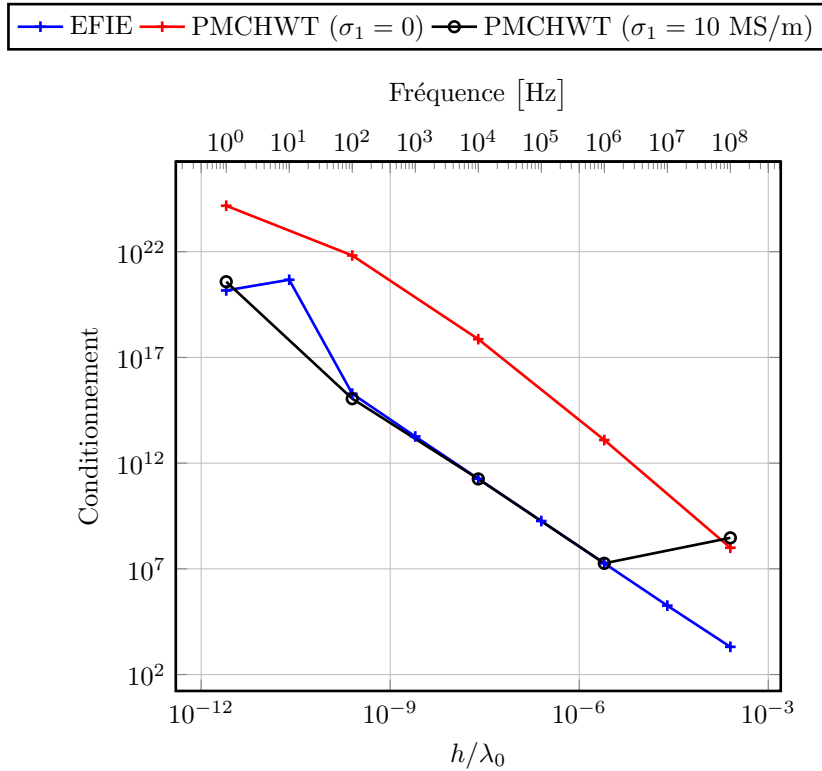


FIGURE 5.4 – Conditionnement de la matrice d’impédance pour une sphère PEC (cas test #1.1 avec  $N_{elem} = 864$ ), diélectrique (cas test #1.2 avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$ ) et conductrice (cas test #1.3 avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$ ,  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 864$ ).

adapté pour les milieux conducteurs.

Les résultats obtenus pour les milieux conducteurs prouvent toutefois que le *low-frequency breakdown* est toujours présent. Prenons la sphère conductrice avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$  et  $\sigma_1 = 10$  MS/m éclairée par une onde plane, qui correspond au cas test #1.3 de l’annexe E, discrétisée en 864 quadrilatères. La figure 5.5 montre en effet que la SER calculée par le problème PMCHWT à  $f = 1$  Hz n’est pas précise contrairement à la SER obtenue à  $f = 10$  kHz. De plus, la figure 5.4 montre que le conditionnement de la matrice d’impédance pour cette sphère conductrice se dégrade de manière similaire à celui de la sphère PEC quand la fréquence diminue.

**Remarque 5.1.1.** *Le manuscrit suit le déroulement chronologique de la thèse. À ce stade de la thèse nous ne connaissons pas encore le comportement de la matrice  $\mathbf{Z}$  pour les milieux conducteurs qui, à notre connaissance, n’est pas décrit dans la littérature. Cependant ce comportement a été obtenu plus tard via le développement asymptotique du système PMCHWT et est décrit dans le chapitre 7.*

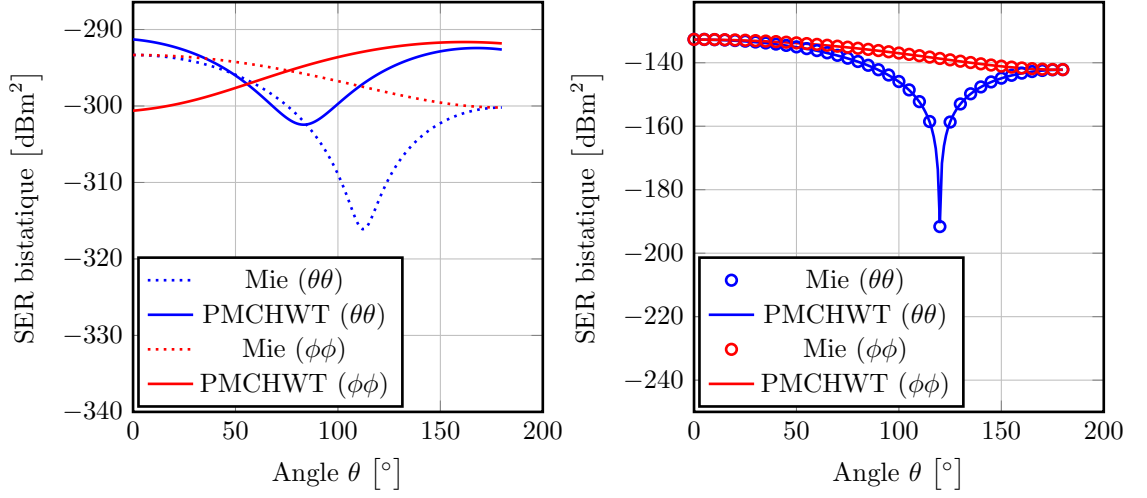


FIGURE 5.5 – SER bistatique pour une sphère conductrice (cas test #1.3 avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$ ,  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 864$ ) à une fréquence  $f = 1$  Hz (à gauche) et  $f = 10$  kHz (à droite).

### 5.1.2 Décomposition Loop-Tree

Considérons le problème PMCHWT avec décomposition Loop-Tree (4.2.4) que l'on notera LT, on rappelle que la matrice d'impédance  $\mathbf{Z}_{LT}$  est donnée par

$$\mathbf{Z}_{\ell,LT} = \sum_{\ell=0}^1 \begin{bmatrix} si\omega\mu_{\ell}\mathbf{A}_{\times}^{\ell,LL} & si\omega\mu_{\ell}\mathbf{A}_{\times}^{\ell,LT} & \mathbf{B}_{\times}^{\ell,LL} & \mathbf{B}_{\times}^{\ell,LT} \\ si\omega\mu_{\ell}\mathbf{A}_{\times}^{\ell,TL} & si\omega\mu_{\ell}\mathbf{A}_{\times}^{\ell,TT} + \frac{si}{\omega\varepsilon_{\ell}}\mathbf{C}_{\times}^{\ell,TT} & \mathbf{B}_{\times}^{\ell,TL} & \mathbf{B}_{\times}^{\ell,TT} \\ -\mathbf{B}_{\times}^{\ell,LL} & -\mathbf{B}_{\times}^{\ell,LT} & si\omega\varepsilon_{\ell}\mathbf{A}_{\times}^{\ell,LL} & si\omega\varepsilon_{\ell}\mathbf{A}_{\times}^{\ell,LT} \\ -\mathbf{B}_{\times}^{\ell,TL} & -\mathbf{B}_{\times}^{\ell,TT} & si\omega\varepsilon_{\ell}\mathbf{A}_{\times}^{\ell,TL} & si\omega\varepsilon_{\ell}\mathbf{A}_{\times}^{\ell,TT} + \frac{si}{\omega\mu_{\ell}}\mathbf{C}_{\times}^{\ell,TT} \end{bmatrix}.$$

Les termes associés aux opérateurs matriciels  $\mathbf{A}_{\times}$  et  $\mathbf{C}_{\times}$  sont découplés ce qui permet d'éviter le bruit numérique observé lorsque la fréquence est trop basse. Pour le vérifier reprenons les cas tests #1.2 et #1.3 traités précédemment.

#### Milieux diélectriques.

La SER de la sphère diélectrique est calculée par le problème LT pour deux fréquences,  $f = 1$  Hz et  $f = 1$  MHz et comparée au résultat analytique obtenu avec les séries de Mie. La figure 5.6 montre que l'on a un bon accord des résultats même à la faible fréquence  $f = 1$  Hz. En revanche la matrice  $\mathbf{Z}_{LT}$  reste mal conditionnée pour les milieux diélectriques comme le montre la figure 5.7. Cette figure montre de plus que, pour les milieux diélectriques, le conditionnement peut-être amélioré en normalisant le système LT [16], on note cette formulation normalisée LTN. Le système associé à cette

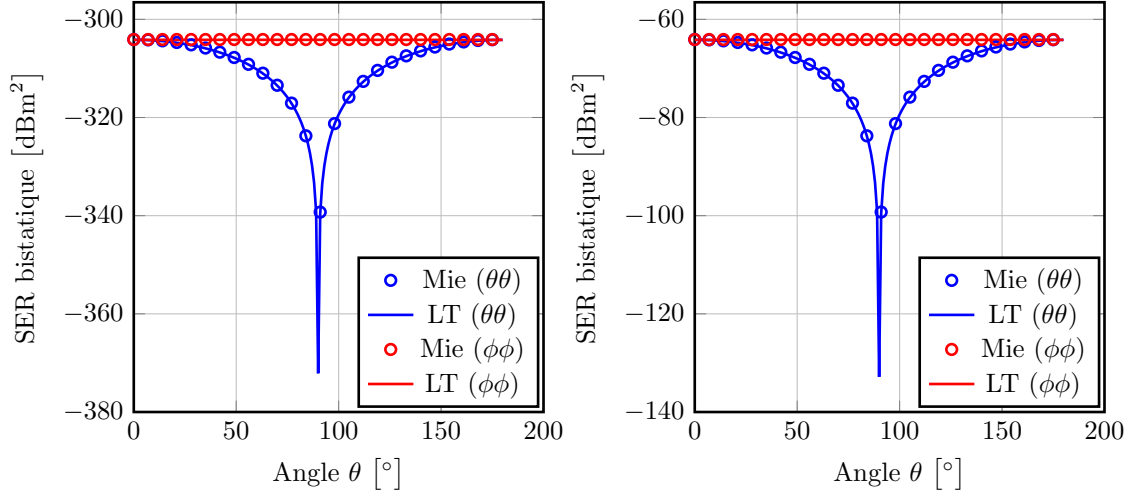


FIGURE 5.6 – SER bistatique pour une sphère diélectrique (cas test #1.2 avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$  et  $N_{elem} = 864$ ) à une fréquence  $f = 1$  Hz (à gauche) et  $f = 1$  MHz (à droite).

formulation est donné par

$$\mathbf{Z}_{LTN} \cdot \mathbf{X}_{LTN} = \mathbf{Y}_{LTN} \quad (5.1.3)$$

avec

$$\mathbf{Z}_{LTN} = \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{Z}_{LT} \cdot \mathbf{N}_2, \quad \mathbf{X}_{LTN} = \mathbf{N}_2^{-1} \cdot \mathbf{X}_{LT}, \quad \mathbf{Y}_{LTN} = \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{Y}_{LT}.$$

Les matrices  $\mathbf{N}_1$  et  $\mathbf{N}_2$  sont les matrices de normalisation définies par

$$\mathbf{N}_1 = \text{diag}\{\kappa_0^{-1} \mathbf{Id}_{N_L}, \mathbf{Id}_{N_T}, \eta_0 \kappa_0^{-1} \mathbf{Id}_{N_L}, \eta_0 \mathbf{Id}_{N_T}\} \quad (5.1.4)$$

et

$$\mathbf{N}_2 = \text{diag}\{\mathbf{Id}_{N_L}, i\kappa_0 \mathbf{Id}_{N_T}, \eta_0 \mathbf{Id}_{N_L}, i\eta_0 \kappa_0 \mathbf{Id}_{N_T}\} \quad (5.1.5)$$

où  $N_L$  et  $N_T$  sont respectivement le nombre de fonctions *Loop* (4.1.5) et *Tree* (4.1.6). Pour comprendre comment cette normalisation permet de stabiliser et d'améliorer le conditionnement de la matrice d'impédance  $\mathbf{Z}_{LT}$  pour les milieux diélectriques, il est nécessaire d'étudier le comportement de cette dernière. D'après la remarque C.3.1 de l'annexe C, on obtient que

$$\mathbf{B}_\times^{LL} = \mathcal{O}(\omega^2) \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_\times^{LT}, \mathbf{B}_\times^{TL}, \mathbf{B}_\times^{TT} = \mathcal{O}(1).$$

Le comportement des autres termes se déduit de leur développement en annexe C ainsi que du développement du noyau de Green dans  $\Omega_0$  (5.1.1) et dans  $\Omega_1$  (5.1.2). Ainsi on obtient, à basse fréquence ( $L\kappa_0 \ll 1$ ) :

$$\mathbf{Z}_{LT} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}(\omega) & \mathcal{O}(\omega) & \mathcal{O}(\omega^2) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(\omega) & \mathcal{O}(\omega^{-1}) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(\omega^2) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(\omega) & \mathcal{O}(\omega) \\ \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(\omega) & \mathcal{O}(\omega^{-1}) \end{bmatrix}.$$

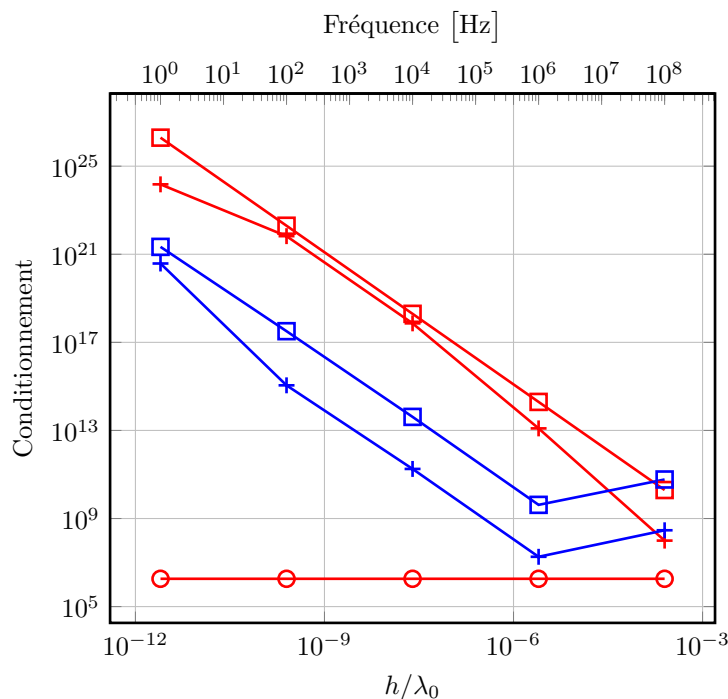
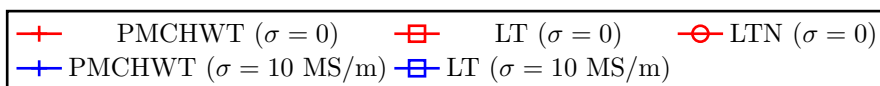


FIGURE 5.7 – Conditionnement de la matrice d'impédance pour une sphère diélectrique (cas test #1.2 avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$  et  $N_{elem} = 864$ ) et conductrice (cas test #1.3 avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$ ,  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 864$ ).

De même on obtient le comportement du second membre, lorsque la source est une onde plane :

$$\mathbf{Y}_{LT} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}(\omega) \\ \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(\omega) \\ \mathcal{O}(1) \end{bmatrix}.$$

On en déduit alors le comportement de l'inconnue :

$$\mathbf{X}_{LT} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(\omega) \\ \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(\omega) \end{bmatrix}.$$

Après normalisation, le système (5.1.3) a le comportement suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(\omega) & \mathcal{O}(\omega) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(\omega) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(\omega) \\ \mathcal{O}(\omega) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(\omega) \\ \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(\omega) & \mathcal{O}(\omega) & \mathcal{O}(1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(1) \end{bmatrix}. \quad (5.1.6)$$

Les blocs diagonaux de la matrice d'impédance est alors en  $\mathcal{O}(1)$  et les autres blocs sont en  $\mathcal{O}(1)$  ou  $\mathcal{O}(\omega)$ , ce qui permet d'améliorer son conditionnement. Le mauvais conditionnement est en effet lié aux problèmes d'échelles selon  $\omega$  entre les blocs de la matrice d'impédance. Le système normalisé a un conditionnement amélioré qui ne dépend plus de la fréquence, voir figure 5.7. La figure 5.8 montre de plus que le résultat reste précis après la normalisation.

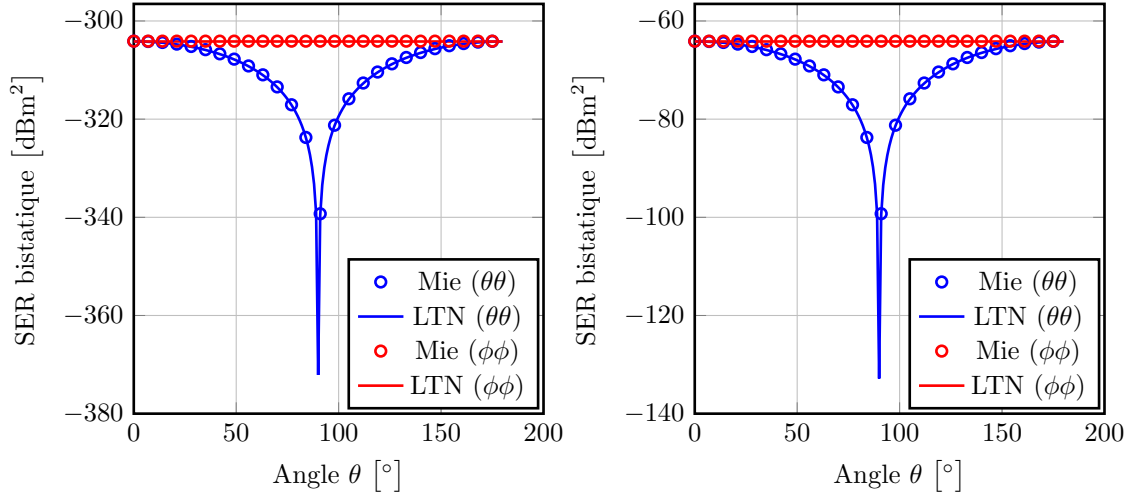


FIGURE 5.8 – SER bistatique pour une sphère diélectrique (cas test #1.2 avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$  et  $N_{elem} = 864$ ) à une fréquence  $f = 1$  Hz (à gauche) et  $f = 1$  MHz (à droite).

### Milieux conducteurs

La SER de la sphère conductrice est calculée par le problème LT pour deux fréquences,  $f = 1$  Hz et  $f = 10$  kHz et comparée au résultat analytique obtenu avec les séries de Mie. La figure 5.9 montre que l'on a un bon accord des résultats même à la faible fréquence  $f = 1$  Hz. En revanche la matrice  $\mathbf{Z}_{LT}$  reste mal conditionnée pour les milieux diélectriques et conducteurs comme le montre la figure 5.7.

### 5.1.3 Lien entre formulation Loop-Tree et formulation de Hiptmair

Le système discret associé à la formulation proposée par Hiptmair peut se retrouver à partir du problème discret de la formulation PMCHWT avec décomposition Loop-Tree.

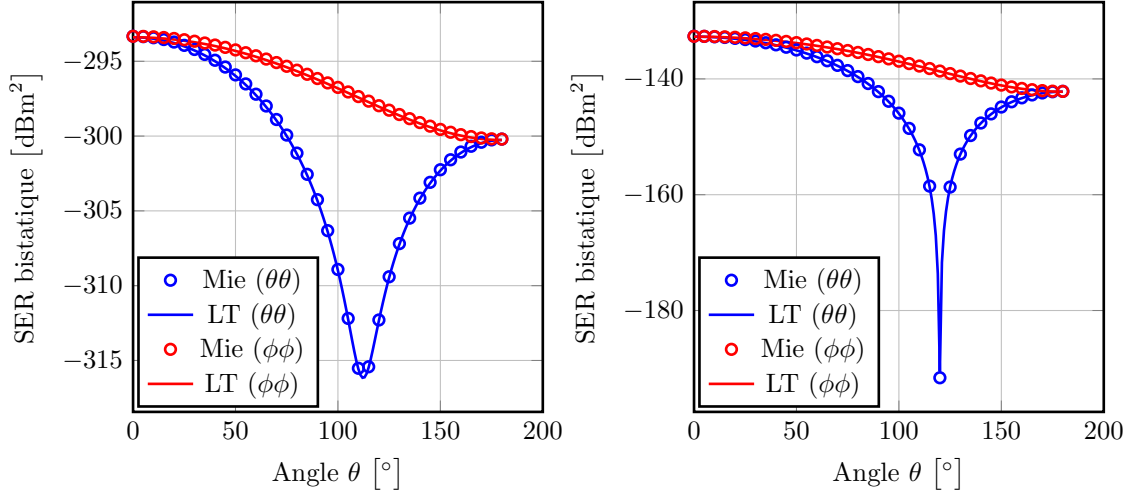


FIGURE 5.9 – SER bistatique pour une sphère conductrice (cas test #1.3 avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$ ,  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 864$ ) à une fréquence  $f = 1$  Hz (à gauche) et  $f = 10$  kHz (à droite).

Reprenons le système discret (4.2.4) de la formulation LT donné par

$$\mathbf{Z}_{LT}\mathbf{X}_{LT} = \mathbf{Y}_{LT}.$$

Pour un milieu conducteur, si on suppose que  $\mathbf{J}^T$  est nul comme sous l'approximation quasi-statique, on obtient

$$\sum_{\ell=0}^1 \begin{bmatrix} si\omega\mu_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,LL} & \mathbf{B}_\times^{\ell,LL} & \mathbf{B}_\times^{\ell,LT} \\ -\mathbf{B}_\times^{\ell,LL} & si\omega\varepsilon_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,LL} & si\omega\varepsilon_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,LT} \\ -\mathbf{B}_\times^{\ell,TL} & si\omega\varepsilon_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,TL} & si\omega\varepsilon_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,TT} + \frac{si}{\omega\mu_\ell} \mathbf{C}_\times^{\ell,TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{J_L} \\ \mathbf{X}^{M_L} \\ \mathbf{X}^{M_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^{J_L} \\ \mathbf{Y}^{M_L} \\ \mathbf{Y}^{M_T} \end{bmatrix}.$$

Finalement si on suppose de plus que  $\varepsilon_0 = 0$  et  $\varepsilon_1^d = 0$  alors on obtient exactement le système discret (4.2.7) de la formulation Hiptmair.

### 5.1.4 Bilan

Dans cette section nous avons vu que la formulation généralement utilisée pour traiter le problème de transmission d'un milieu conducteur par équations intégrales de surface souffre d'un bruit numérique à basse fréquence. Ici, les applications visées sont des applications de contrôle non destructif par courants de Foucault, c'est-à-dire des milieux conducteurs éventuellement magnétiques testés à basse fréquence. C'est pourquoi on s'intéresse à la décomposition Loop-Tree qui est utilisée dans la littérature pour éviter le bruit numérique à basse fréquence avec un milieu diélectrique. La matrice d'impédance obtenue dans ce cas est alors mal conditionnée du fait d'un problème d'échelle entre

les blocs matriciels. Une normalisation basée sur la dépendance selon la fréquence de ces blocs est mise en œuvre. Nous avons ici appliqué la décomposition Loop-Tree à la formulation PMCHWT lorsque le milieu  $\Omega_1$  est conducteur et nous avons pu supprimer le bruit numérique à basse fréquence. Comme pour les milieux diélectriques nous avons obtenu une matrice d'impédance mal conditionnée du fait de l'ordre de grandeur très différent entre les blocs matriciels. En revanche, il n'est pas possible de normaliser cette matrice sur le même principe que pour les milieux diélectriques. En effet, on ne dispose pas du comportement de la matrice d'impédance pour les milieux conducteurs. De plus, quand bien même ce comportement serait connu, il est vraisemblablement différent pour la matrice  $\mathbf{Z}_0$  associée à l'air et pour la matrice  $\mathbf{Z}_1$  associée au conducteur. Ainsi il semble nécessaire de pouvoir mettre à niveau ces deux matrices afin de normaliser leur somme. Ce choix est appuyé par l'article de Chu [19], qui est la seule référence dont nous avons connaissance traitant la décomposition LT pour un milieu conducteur, et qui propose une pondération des contributions  $\mathbf{Z}_{0,LT}$  et  $\mathbf{Z}_{1,LT}$ .

## 5.2 Pondération des équations relatives à l'air et à la pièce

Nous avons vu dans la section précédente que les matrices correspondant aux équations relatives à l'air et à la pièce ont un comportement différent. Dans cette partie nous étudions les formulations de la littérature qui pondèrent ces matrices pour les milieux diélectriques. Puis nous étudions expérimentalement des formulations pondérées pour les milieux conducteurs.

### 5.2.1 Formulations existantes pour les milieux diélectriques

#### Formulation de Müller

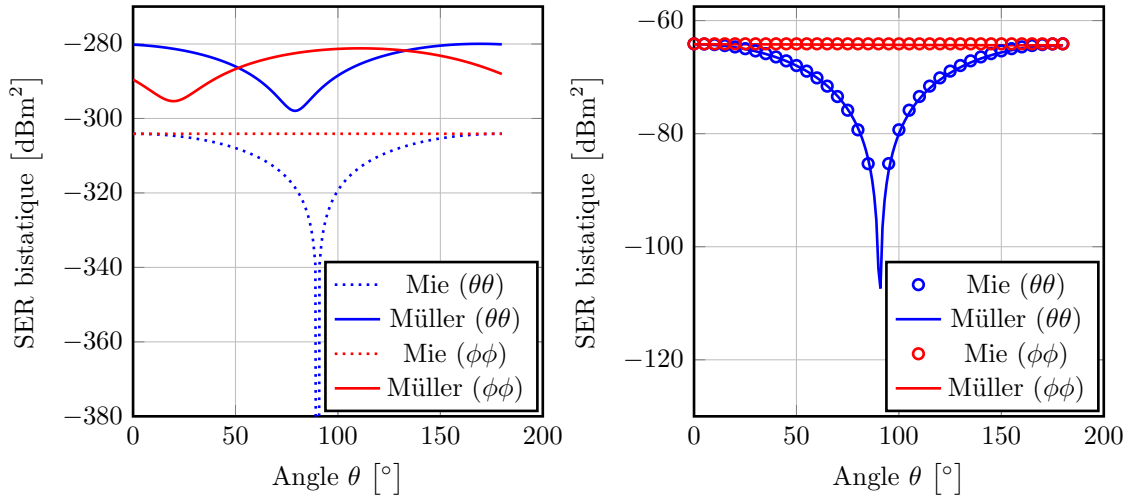


FIGURE 5.10 – SER bistatique pour une sphère diélectrique (cas test #1.2 avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$  et  $N_{elem} = 864$ ) à une fréquence  $f = 1$  Hz (à gauche) et  $f = 1$  MHz (à droite).

Pour les milieux diélectriques, la formulation dite de *Müller* permet de mettre à niveau les blocs diagonaux de la matrice d'impédance [42]. Cette formulation revient à prendre les matrices de pondération  $\mathbf{P}_0(\varepsilon_0, \mu_0)$  et  $\mathbf{P}_1(\varepsilon_1^d, \mu_1)$  dans le problème pondéré (4.2.3). Ainsi, la matrice d'impédance associée est donnée par

$$\mathbf{Z}(\varepsilon_0, \varepsilon_1^d, \mu_0, \mu_1) = \sum_{\ell=0}^1 \begin{bmatrix} si\omega\varepsilon_\ell\mu_\ell\mathbf{A}_\times^\ell + \frac{si}{\omega}\mathbf{C}_\times^\ell & \varepsilon_\ell\mathbf{B}_\times^\ell + \frac{(-1)^{\ell+1}}{2}\varepsilon_\ell\mathbf{R} \\ -\mu_\ell\mathbf{B}_\times^\ell + \mu_\ell\frac{(-1)^\ell}{2}\mathbf{R} & si\omega\mu_\ell\varepsilon_\ell\mathbf{A}_\times^\ell + \frac{si}{\omega}\mathbf{C}_\times^\ell \end{bmatrix}.$$

Ce choix de coefficients de pondération permet d'avoir des blocs diagonaux de la matrice d'impédance égaux. Tout comme la formulation PMCHWT, cette formulation souffre du *low-frequency breakdown*. En effet, les blocs diagonaux sont la somme de

$$si\omega\varepsilon_0\mu_0 \left( \mathbf{A}_\times^0 + \varepsilon_{r,1}^d\mu_1\mathbf{A}_\times^1 \right) = \mathcal{O}(\omega) \quad \text{et} \quad \frac{si}{\omega} (\mathbf{C}_\times^0 + \mathbf{C}_\times^1) = \mathcal{O}(\omega)^{-1}.$$

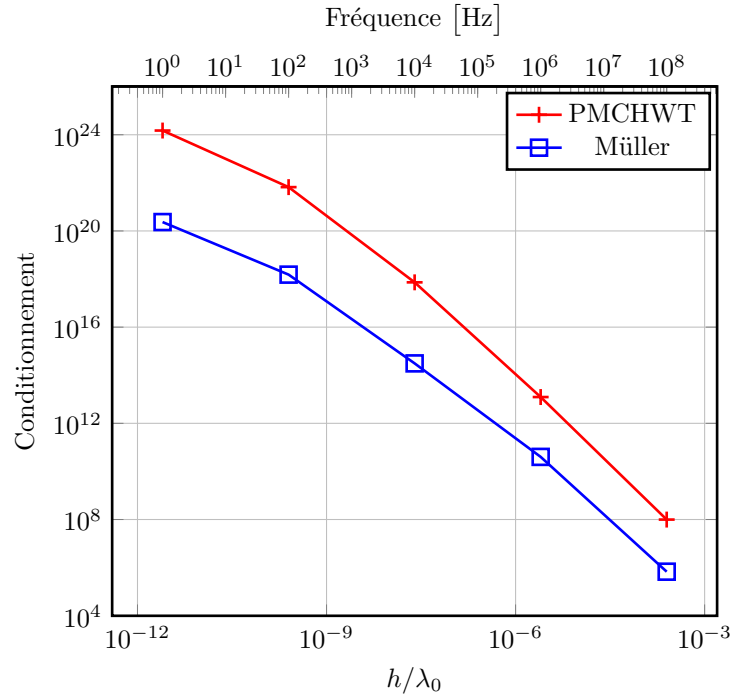


FIGURE 5.11 – Conditionnement de la matrice d'impédance pour une sphère diélectrique (cas test #1.2 avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$  et  $N_{elem} = 864$ ).

Soit le cas test #1.2 de l'annexe E, la sphère diélectrique avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$  éclairée par une onde plane et discrétisée en 864 quadrilatères. La figure 5.10 montre que la formulation de Müller permet d'obtenir la bonne SER à 1 MHz mais souffre du bruit numérique à 1 Hz, tout comme la formulation PMCHWT (voir figure 5.3). La figure 5.11 nous montre de plus que le conditionnement de la matrice de la formulation de Müller n'est que très peu amélioré par la pondération, si on le compare au conditionnement de la matrice de la formulation PMCHWT. Le conditionnement des deux formulations dépend fortement de la fréquence.

**Remarque 5.2.1.** *On rencontre parfois dans la littérature les matrices de pondérations  $\mathbf{P}_0(1,1)$  et  $\mathbf{P}_1(\varepsilon_{r,1}^d, \mu_{r,1})$  qui donnent un problème équivalent au problème présenté puisqu'il revient à diviser la première ligne du système par  $\varepsilon_0$  et la deuxième ligne par  $\mu_0$ .*

## Variantes

Il existe dans la littérature de nombreuses variantes à la formulation de Müller [55, 71, 72, 75, 37] pour les milieux diélectriques. Ces variantes consistent à choisir d'autres coefficients de pondération ou à choisir l'espace  $\mathcal{V}_{rot}^h$  comme espace test, c'est à dire que l'on fait une rotation selon l'opérateur  $\mathcal{R}$  sur l'espace test classique  $\mathcal{V}_{div}^h$ . En particulier,

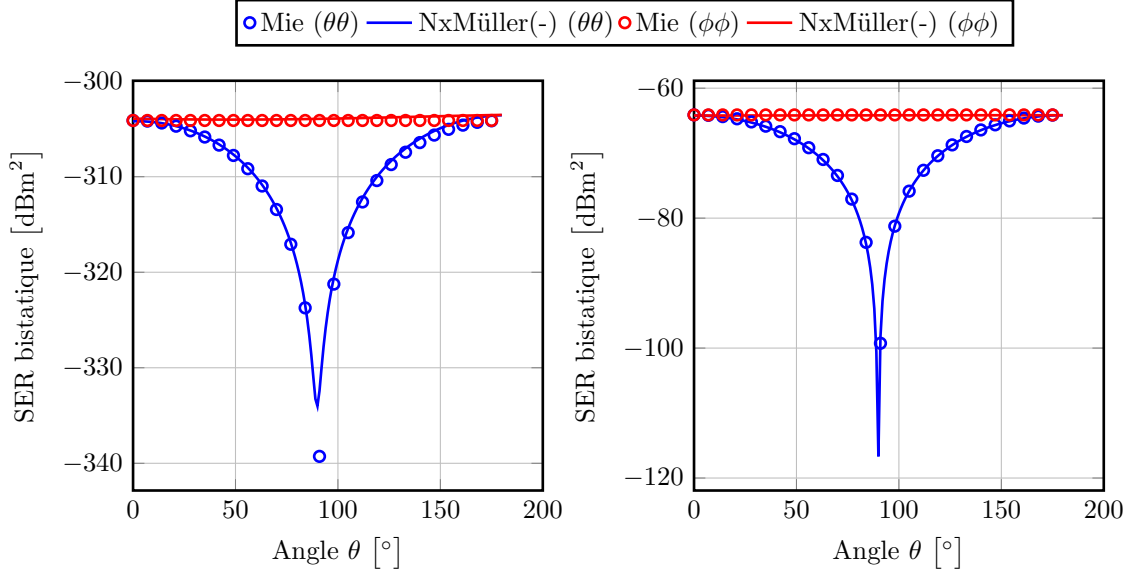


FIGURE 5.12 – SER bistatique pour une sphère diélectrique (cas test #1.2 avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$  et  $N_{elem} = 864$ ) à une fréquence  $f = 1$  Hz (à gauche) et  $f = 1$  MHz (à droite).

la formulation de Ylä-Oijala et Taskinen [72] que l'on appellera NxMüller(-) consiste à choisir les matrices de pondération  $\mathbf{P}_0(\varepsilon_0, \mu_0)$  et  $\mathbf{P}_1(-\varepsilon_1^d, -\mu_1)$  ainsi que l'espace test  $\mathcal{V}_{rot}^h$ . Cette formulation dédiée aux milieux diélectriques a un conditionnement stable en fonction de la fréquence et ne souffre pas du bruit numérique à basse fréquence.

La figure 5.12 montre que la formulation de NxMüller(-) permet d'obtenir une SER précise à 1 MHz comme à 1 Hz pour la sphère diélectrique. Il n'y a donc plus de bruit numérique à basse fréquence. La figure 5.13 met en avant que le conditionnement de la matrice de la formulation NxMüller(-) est bien plus faible et stable en fonction de la fréquence. On retrouve donc pour cette formulation les résultats obtenus avec la formulation LTN (décomposition LT et normalisation) pour les milieux diélectriques, voir figures 5.7 et 5.8. Ces résultats sont liés, d'une part, au choix des coefficients et, d'autre part, au choix de l'espace test. Le choix qui est fait pour les coefficients de pondération permet de contourner le bruit numérique à basse fréquence mais aussi d'équilibrer la matrice d'impédance. Le choix de l'espace test  $\mathcal{V}_{rot}^h$  va, quant à lui, permettre de bien conditionner les termes extra-diagonaux de la matrice d'impédance. En effet, la pondération entraîne l'apparition de l'opérateur de rotation  $\mathbf{R}$  dans les termes extra-diagonaux qui sont alors mal conditionnés lorsqu'ils sont testés dans  $\mathcal{V}_{div}^h$ .

**Le rôle des coefficients.** Pour observer l'effet du choix des coefficients indépendamment de l'effet du choix de l'espace test, nous introduisons une formulation pondérée

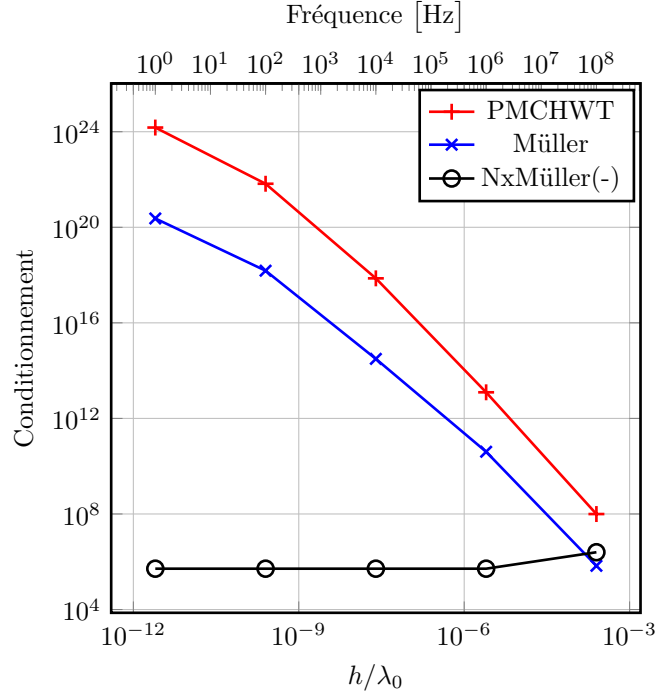


FIGURE 5.13 – Conditionnement de la matrice d'impédance pour une sphère diélectrique (cas test #1.2 avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$  et  $N_{elem} = 864$ ).

que l'on note Müller(-). Cette formulation a pour matrices de pondération les matrices de la formulation NxMüller(-),  $\mathbf{P}_0(\varepsilon_0, \mu_0)$  et  $\mathbf{P}_1(-\varepsilon_1^d, -\mu_1)$ , et pour espace test l'espace  $\mathcal{V}_{div}^h$ . La différence entre la formulation Müller(-) et la formulation Müller réside donc uniquement dans le signe des coefficients  $\alpha_1$  et  $\beta_1$ . Nous allons voir que ce signe permet d'éviter le bruit numérique à basse fréquence. Pour cela, reprenons la sphère diélectrique. La figure 5.14 montre que la formulation Müller(-) permet d'obtenir une SER précise dès 100 Hz, contrairement à la formulation Müller. On note toutefois que pour une fréquence de 1 Hz on observe un écart significatif entre la formulation Müller(-) et le résultat analytique pour la polarisation  $\phi\phi$ , ce qui nous indique que le choix de l'espace test  $\mathcal{V}_{div}^h$  n'est pas optimal. Cela est confirmé par la figure 5.15 qui montre, bien qu'il soit meilleur que celui de la formulation Müller, que le conditionnement de la formulation Müller(-) est instable selon la fréquence.

Nous allons montrer pourquoi le choix des coefficients de pondération permet d'éviter le bruit numérique. Pour cela nous étudions le comportement selon la fréquence des blocs diagonaux  $\mathbf{Z}^{JJ}(\varepsilon_0, \mu_0, -\varepsilon_1^d, -\mu_1)$  et  $\mathbf{Z}^{MM}(\varepsilon_0, \mu_0, -\varepsilon_1^d, -\mu_1)$  des formulations NxMüller(-)

et Müller(-). Ces blocs sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{JJ}(\varepsilon_0, \mu_0, -\varepsilon_1^d, -\mu_1) &= \mathbf{Z}^{MM}(\varepsilon_0, \mu_0, -\varepsilon_1^d, -\mu_1) \\ &= si\omega\varepsilon_0\mu_0 \left( \mathbf{A}_\times^0 - \varepsilon_{r,1}^d \mu_1 \mathbf{A}_\times^1 \right) + \frac{si}{\omega} (\mathbf{C}_\times^0 - \mathbf{C}_\times^1). \end{aligned}$$

Comme  $\Omega_1$  est un milieu diélectrique,  $\kappa_0$  et  $\kappa_1$  sont réels et le développement limité des noyaux de Green  $g_{\kappa_0}$  et  $g_{\kappa_1}$  est donné par (5.1.1) et (5.1.2). Ainsi, le comportement des opérateurs  $\mathbf{A}_\times^0$  et  $\mathbf{A}_\times^1$  est donné par

$$\mathbf{A}_\times^0 = \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_\times^1 = \mathcal{O}(1).$$

Regardons maintenant le comportement du terme  $\mathbf{C}_\times^0 - \mathbf{C}_\times^1$ . D'après l'annexe C,

$$(\mathbf{C}_\times^0)_{tb} - (\mathbf{C}_\times^1)_{tb} = \int_{\Gamma_h} \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \cdot \int_{\Gamma_h} \text{div}'_{\Gamma} \mathbf{u}_b(\mathbf{x}') (\nabla g_{\kappa_0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \nabla g_{\kappa_1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \, d\mathbf{x}' \, d\mathbf{x}$$

avec  $\mathbf{u}_b \in \mathcal{V}_{\text{div}}^h$  et  $\mathbf{u}_t \in \mathcal{V}_{\text{div}}^h$  pour la formulation Müller(-) ou  $\mathbf{u}_t \in \mathcal{V}_{\text{rot}}^h$  pour la formulation NxMüller(-). D'après le développement limité du gradient de  $g_{\kappa_0}$  et  $g_{\kappa_1}$  donné par (C.3.1),

$$\begin{aligned} (\nabla g_{\kappa_0}(R) - \nabla g_{\kappa_1}(R)) &= \frac{1}{4\pi} \frac{R}{|R|^3} \left( \frac{(-si\kappa_0|R|)^2}{2!} + \frac{(-si\kappa_0|R|)^3}{3!} + o((-si\kappa_0|R|)^3) \right) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \frac{R}{|R|^3} \left( \frac{(-si\kappa_1|R|)^2}{2!} + \frac{(-si\kappa_1|R|)^3}{3!} + o((-si\kappa_1|R|)^3) \right). \end{aligned}$$

Comme  $\kappa_\ell = \omega\sqrt{\varepsilon_\ell\mu_\ell}$ ,  $\ell \in \{0,1\}$ , alors

$$\mathbf{C}_\times^0 - \mathbf{C}_\times^1 = \mathcal{O}(\omega^2).$$

Finalement, on obtient

$$si\omega\varepsilon_0\mu_0 \left( \mathbf{A}_\times^0 - \varepsilon_{r,1}^d \mu_1 \mathbf{A}_\times^1 \right) = \mathcal{O}(\omega) \quad \text{et} \quad \frac{si}{\omega} (\mathbf{C}_\times^0 - \mathbf{C}_\times^1) = \mathcal{O}(\omega).$$

Les blocs diagonaux de la matrice d'impédance ne souffrent donc pas du bruit numérique à basse fréquence. Étudions maintenant le comportement des blocs extra-diagonaux  $\mathbf{Z}^{JM}(\varepsilon_0, \mu_0, -\varepsilon_1^d, -\mu_1)$  et  $\mathbf{Z}^{MJ}(\varepsilon_0, \mu_0, -\varepsilon_1^d, -\mu_1)$  donnés par

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{JM}(\varepsilon_0, \mu_0, -\varepsilon_1^d, -\mu_1) &= \varepsilon_0 \mathbf{B}_\times^0 + \varepsilon_1 \mathbf{B}_\times^1 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_0}{2} \mathbf{R}, \\ \mathbf{Z}^{MJ}(\varepsilon_0, \mu_0, -\varepsilon_1^d, -\mu_1) &= -\mu_0 \mathbf{B}_\times^0 - \mu_1 \mathbf{B}_\times^1 - \frac{\mu_1 + \mu_0}{2} \mathbf{R}. \end{aligned}$$

D'après le développement des opérateurs  $\mathbf{B}_\times$  et  $\mathbf{R}$  donné en annexe C ainsi que le développement limité du gradient de  $g_{\kappa_0}$  et  $g_{\kappa_1}$  donné par (C.3.1),

$$\mathbf{Z}^{JM}(\varepsilon_0, \mu_0, -\varepsilon_1^d, -\mu_1) = \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}^{MJ}(\varepsilon_0, \mu_0, -\varepsilon_1^d, -\mu_1) = \mathcal{O}(1).$$

Ainsi la matrice globale vérifie

$$\mathbf{Z}(\varepsilon_0, \mu_0, -\varepsilon_1^d, -\mu_1) = \begin{bmatrix} \mathcal{O}(\omega) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(\omega) \end{bmatrix}$$

et sa diagonale est donc bien équilibrée selon la fréquence.

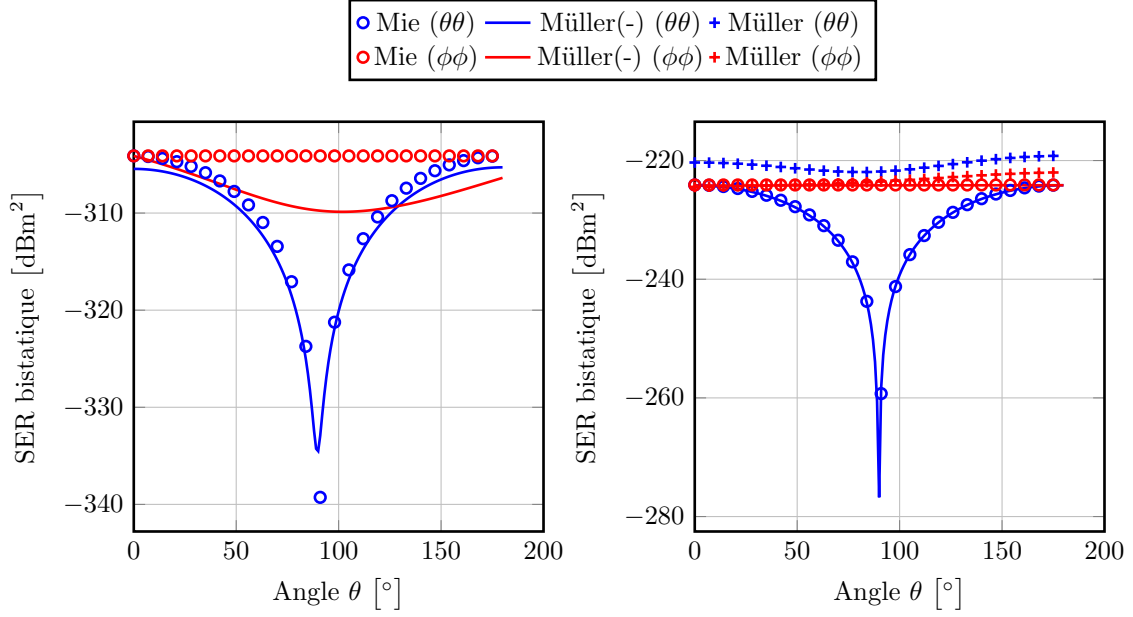


FIGURE 5.14 – SER bistatique pour une sphère diélectrique (cas test #1.2 avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$  et  $N_{elem} = 864$ ) à une fréquence  $f = 1$  Hz (à gauche) et  $f = 100$  Hz (à droite).

**Le rôle de l'espace test.** Le choix de l'espace test  $\mathcal{V}_{rot}^h$  plutôt que  $\mathcal{V}_{div}^h$  permet d'améliorer le conditionnement des termes extra-diagonaux. On peut remarquer que ces termes correspondent à la MFIE, c'est-à-dire à l'équation intégrale en champ magnétique ou *Magnetic Field Integral Equation* en anglais. La MFIE est une formulation dédiée aux milieux parfaitement conducteurs (voir annexe A) qui souffre d'un mauvais conditionnement lorsqu'elle est testée dans  $\mathcal{V}_{div}^h$ . La matrice d'impédance  $\mathbf{Z}_{MFIE}$  est donnée par

$$\mathbf{Z}_{MFIE} = \frac{1}{2}\mathbf{R} - \mathbf{B}_\times^0.$$

D'après le calcul de  $\mathbf{R}$  donné en annexe C, si les fonctions tests et les fonctions bases sont les fonctions *Rooftop* (4.1.3) de  $\mathcal{V}_{div}^h$  alors

$$(\mathbf{R})_{ii} = \langle \mathbf{u}_i, \mathcal{R}(\mathbf{u}_i) \rangle = \int_{\Gamma_h} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u}_i(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}) d\mathbf{x} = 0.$$

C'est-à-dire que la diagonale de l'opérateur  $\mathbf{R}$  est nulle. Si on choisit maintenant les fonctions de  $\mathcal{V}_{rot}^h$  (4.1.4) comme fonctions tests, c'est-à-dire les fonctions  $\mathbf{n} \times \mathbf{u}_i$ , on obtient que

$$\begin{aligned} (\mathbf{R})_{ii} &:= \langle \mathbf{n} \times \mathbf{u}_i, \mathcal{R}(\mathbf{u}_i) \rangle = \int_{\Gamma_h} (\mathbf{n} \times \mathbf{u}_i(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{u}_i(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\Gamma_h} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \neq 0 \end{aligned}$$

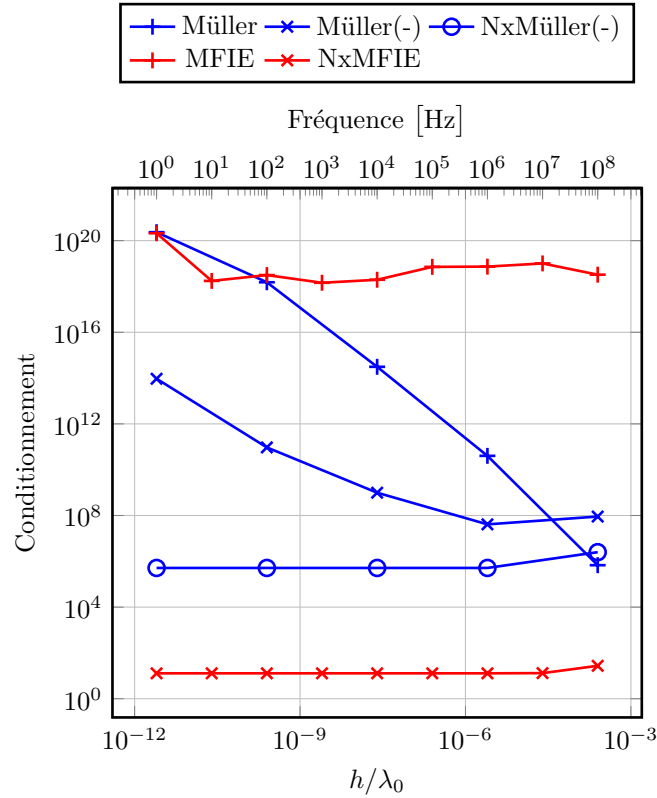


FIGURE 5.15 – Conditionnement de la matrice d'impédance pour une sphère PEC (cas test #1.1 avec  $N_{elem} = 864$ ) et une sphère diélectrique (cas test #1.2 avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$  et  $N_{elem} = 864$ ).

et donc que la diagonale de  $\mathbf{R}$  n'est plus nulle. Cette formulation que l'on note NxMFIE est introduite par Ergul et Gurel dans [28]. Pour le vérifier prenons une sphère parfaitement conductrice éclairée par une onde plane, qui correspond au cas test #1.1 de l'annexe E, et discrétisée en 864 quadrilatères. La figure 5.16 montre que la NxMFIE est précise, même à basse fréquence, alors que la MFIE ne parvient pas à calculer la SER, même à 10 kHz. La figure 5.15 confirme que la NxMFIE est bien mieux conditionnée que la MFIE.

**Bilan.** Finalement, on peut conclure que la formulation NxMüller(-), dédiée aux milieux diélectriques, permet d'éviter le bruit numérique à basse fréquence et d'équilibrer la matrice par un bon choix de coefficients de pondération. Cette pondération implique l'apparition des termes de masse représentés par l'opérateur  $\mathbf{R}$  qui induit un mauvais conditionnement des blocs extra-diagonaux mais aussi de la matrice globale pour l'espace test  $\mathcal{V}_{div}^h$ . Le choix de l'espace test  $\mathcal{V}_{rot}^h$  permet de stabiliser ce conditionnement.

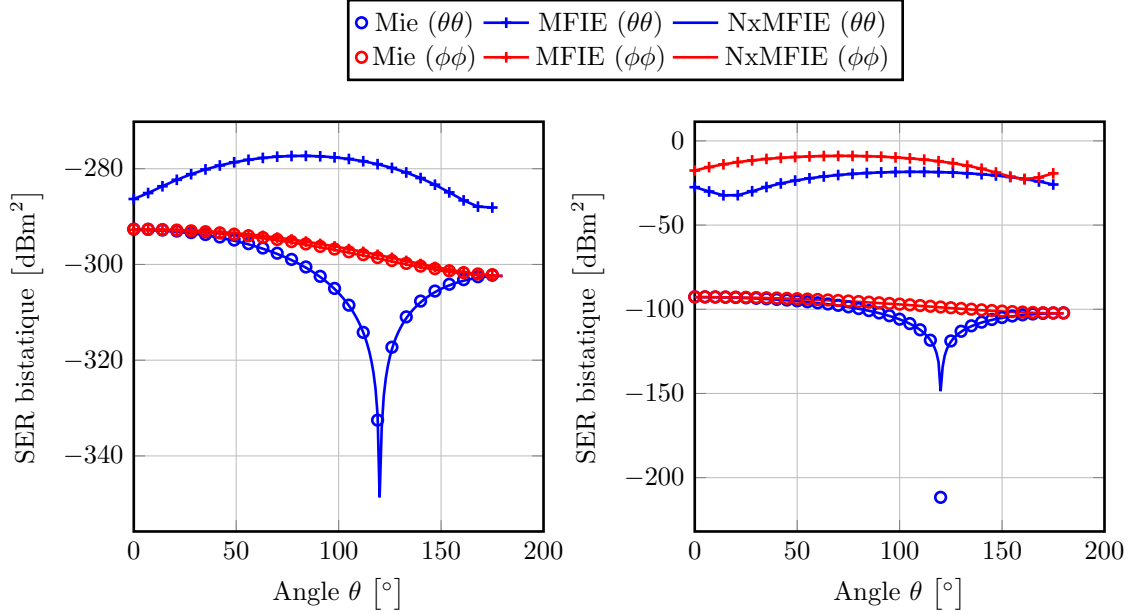


FIGURE 5.16 – SER bistatique pour une sphère PEC (cas test #1.1 avec  $N_{elem} = 864$ ) à une fréquence  $f = 1$  Hz (à gauche) et  $f = 10$  kHz (à droite).

## 5.2.2 Formulations pour les milieux conducteurs

### Une première formulation

À ce stade de la thèse nous ne maîtrisons pas le comportement du gradient du noyau de Green associé à un milieu conducteur (nous l'avons obtenu par la suite et il sera donné au chapitre 7). D'après le chapitre 7, le premier terme du développement du gradient du noyau de Green associé à un milieu conducteur n'est pas égal au premier terme du développement du gradient du noyau de Green associé à l'air. Cela ne nous permet donc pas d'obtenir une formulation équivalente à la formulation NxMüller(-) pour les milieux conducteurs. Dans la littérature, le seul article proposant une formulation pour le problème de Maxwell permettant de traiter le cas des conducteurs à basse fréquence est l'article de Chu et Chew [19]. La formulation proposée par Chu correspond au problème pondéré et décomposé (4.2.6) pour lequel on choisit des coefficients de pondération différents pour les équations selon qu'elles sont testées par des fonctions *Loop* ou *Tree*. Ainsi, la matrice de pondération  $\mathbf{P}_1$  des équations associées à la pièce du problème (4.2.6) est définie par

$$\mathbf{P}_1 = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r,1}}} \mathbf{Id}_{N_L}, \mathbf{Id}_{N_T}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r,1}}} \mathbf{Id}_{N_L}, \mathbf{Id}_{N_T} \right\}$$

tandis que la matrice de pondération  $\mathbf{P}_0$  des équations associées à l'air est l'identité.

Reprenons la sphère conductrice ( $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$  et  $\sigma_1 = 10$  MS/m) éclairée par une

onde plane et discrétisée en 864 quadrilatères. La SER de cette sphère, calculée par les séries de Mie et la formulation Chu pour deux fréquences,  $f = 1$  Hz et  $f = 10$  kHz, est représentée sur la figure 5.17. Les résultats obtenus sont aussi précis que les résultats pour la formulation LT sans pondération, voir figure 5.9. Quant au conditionnement de la matrice d'impédance, présenté sur la figure 5.18, il dépend fortement de la fréquence pour les formulations LT et Chu. On peut donc conclure que cette formulation nous donne des résultats similaires aux résultats obtenus avec la formulation LT.

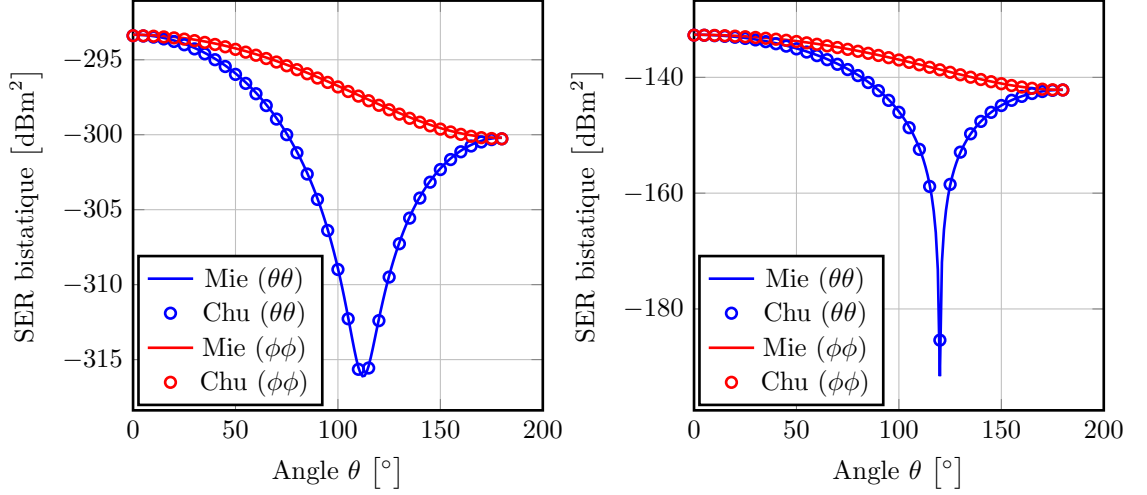


FIGURE 5.17 – SER bistatique pour une sphère conductrice (cas test #1.3 avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$ ,  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 864$ ) à une fréquence  $f = 1$  Hz (à gauche) et  $f = 10$  kHz (à droite).

### Les formulations découplées pour le problème de Maxwell

Nous proposons d'étudier de manière empirique le comportement de quatre formulations. Les coefficients de pondération de ces formulations sont choisis de telle sorte que les termes de la matrice d'impédance soient uniquement associés à l'air ou à la pièce. En ce sens nous les qualifions de formulations découplées (bien que les deux milieux restent couplés dans le système global). Les deux premières formulations, que l'on note respectivement  $P(1,0,0,1)$  et  $P(0,1,1,0)$ , correspondent au problème discret pondéré (4.2.3) dont les matrices d'impédances associées sont respectivement données par

$$\mathbf{Z}(1,0,0,1) = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_0^{JJ} & \mathbf{Z}_0^{JM} - \frac{1}{2}\mathbf{R} \\ \mathbf{Z}_1^{MJ} - \frac{1}{2}\mathbf{R} & \mathbf{Z}_1^{MM} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{Z}(0,1,1,0) = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1^{JJ} & \mathbf{Z}_1^{JM} + \frac{1}{2}\mathbf{R} \\ \mathbf{Z}_0^{MJ} + \frac{1}{2}\mathbf{R} & \mathbf{Z}_0^{MM} \end{bmatrix}$$

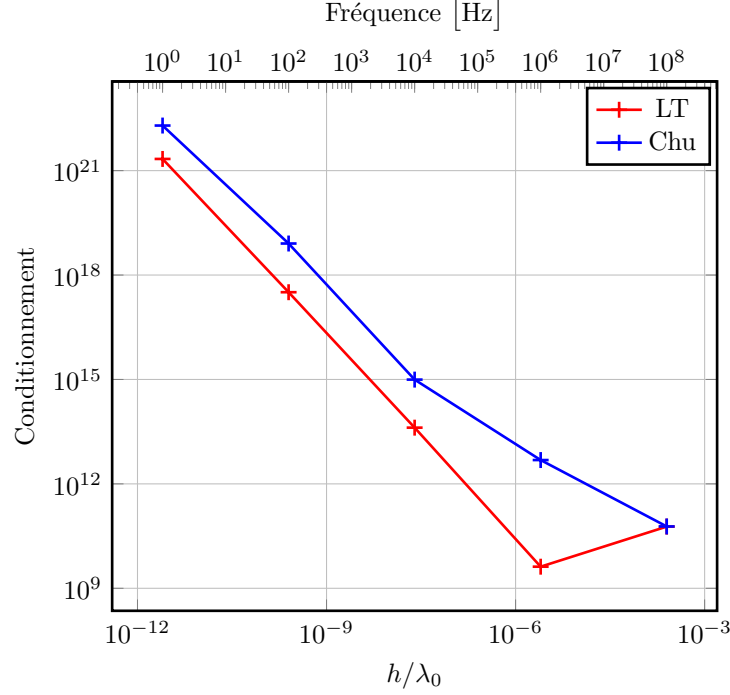


FIGURE 5.18 – Conditionnement de la matrice d'impédance pour une sphère conductrice (cas test #1.3 avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$ ,  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 864$ ).

avec, pour  $\ell \in \{0,1\}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_\ell^{JJ} &= si\omega\mu_\ell \mathbf{A}_\times^\ell + \frac{si}{\omega\varepsilon_\ell} \mathbf{C}_\times^\ell, & \mathbf{Z}_\ell^{JM} &= \mathbf{B}_\times^\ell, \\ \mathbf{Z}_\ell^{MJ} &= -\mathbf{B}_\times^\ell, & \mathbf{Z}_\ell^{MM} &= si\omega\varepsilon_\ell \mathbf{A}_\times^\ell + \frac{si}{\omega\mu_\ell} \mathbf{C}_\times^\ell, \end{aligned}$$

les termes du problème discret de la formulation PMCHWT (4.2.2). Les deux autres formulations, que l'on note respectivement LT(1,0,0,1) et LT(0,1,1,0), correspondent au problème discret décomposé et pondéré (4.2.6) dont les matrices d'impédance associées sont respectivement données par

$$\mathbf{Z}_{LT}(1,0,0,1) = \text{diag}\{\mathbf{P}_{LT}, \mathbf{P}_{LT}\} \mathbf{Z}(1,0,0,1) \text{diag}\{\mathbf{P}_{LT}, \mathbf{P}_{LT}\}^\top$$

et

$$\mathbf{Z}_{LT}(0,1,1,0) = (\text{diag}\{\mathbf{P}_{LT}, \mathbf{P}_{LT}\}) \mathbf{Z}(0,1,1,0) (\text{diag}\{\mathbf{P}_{LT}, \mathbf{P}_{LT}\}^\top)$$

avec  $\mathbf{P}_{LT}$  la matrice de passage définie par (4.2.5).

Comparons la précision de ces formulations sur la sphère conductrice. Les figures 5.19 et 5.20 montrent que seule la formulation P(1,0,0,1), à 1 Hz est mise en difficulté, elle

semble souffrir du *low-frequency breakdown*. En revanche, la figure 5.21 montre que toutes les formulations ont un conditionnement similaire au conditionnement de la formulation LT.

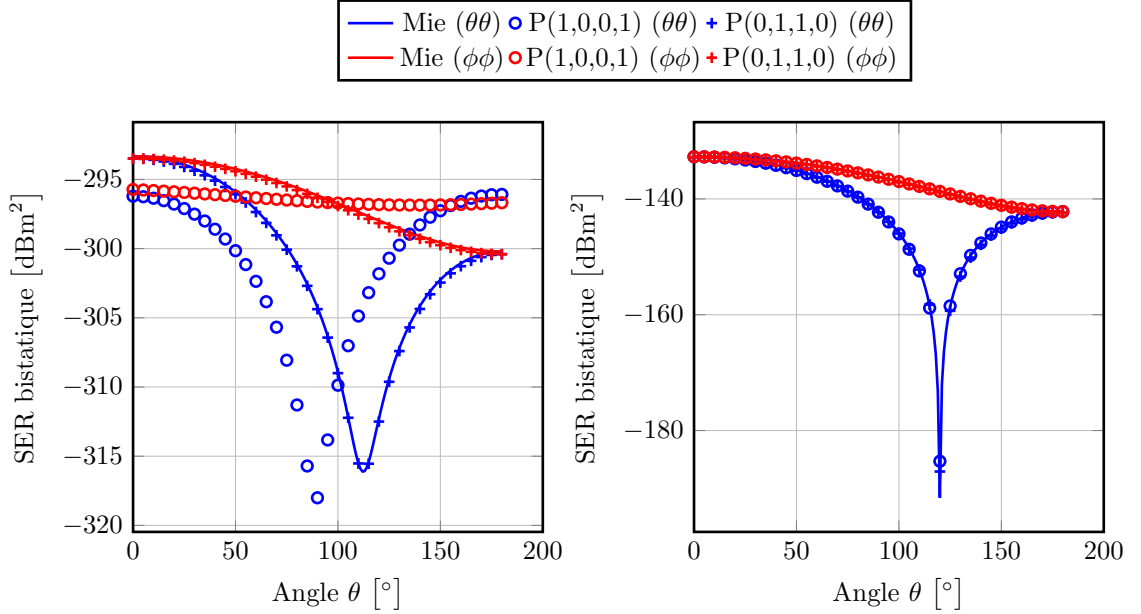


FIGURE 5.19 – SER bistatique pour une sphère conductrice (cas test #1.3 avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$ ,  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 864$ ) à une fréquence  $f = 1$  Hz (à gauche) et  $f = 10$  kHz (à droite).

### Les formulations découplées pour le problème courants de Foucault

Nous avons vu aux chapitres précédents qu'il existe dans la littérature des formulations découplées pour le problème courants de Foucault [52, 40]. Ces formulations correspondent aux problèmes discrets (4.2.8) et (4.2.9) et on les note respectivement CF1 et CF2. La formulation CF1, respectivement CF2, pour le problème courants de Foucault est une analogie de la formulation P(1,0,0,1), respectivement P(0,1,1,0), pour le problème de Maxwell. En revanche les formulations CF1 et CF2 font respectivement intervenir une et deux inconnues scalaires supplémentaires. Ces formulations sont testées dans  $\mathcal{V}_{rot}^h$  pour garantir le bon conditionnement des blocs de type MFIE qui interviennent ici sur la diagonale. Ainsi on ne peut pas leur appliquer de décomposition Loop-Tree.

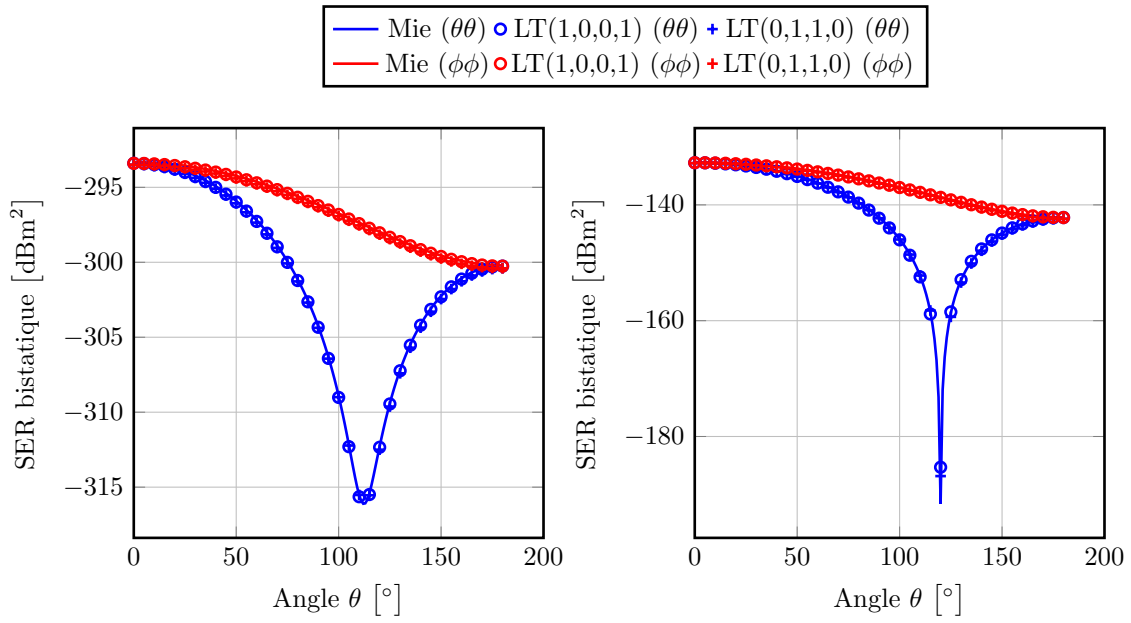


FIGURE 5.20 – SER bistatique pour une sphère conductrice (cas test #1.3 avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$ ,  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 864$ ) à une fréquence  $f = 1$  Hz (à gauche) et  $f = 10$  kHz (à droite).

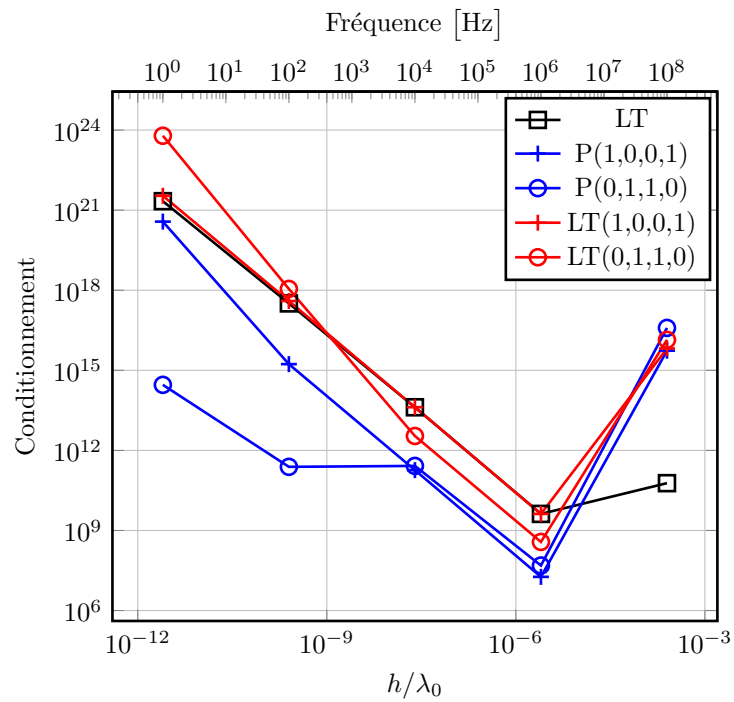


FIGURE 5.21 – Conditionnement de la matrice d'impédance pour une sphère conductrice (cas test #1.3 avec  $\varepsilon_{r,1}^d = 3,0$ ,  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 864$ ).

### 5.3 Résultats sur un cas CND

Soit une pièce conductrice pouvant être magnétique ou non et contrôlée par une bobine excitée à injection constante en régime sinusoïdal. Il s'agit d'une configuration de type CND pour laquelle il est possible de calculer la variation d'impédance, notée  $\Delta Z$ , définie et explicitée en annexe D. La variation d'impédance se calcule par le théorème de réciprocité, voir annexe D. Pour les configurations axisymétriques, nous pouvons calculer la variation d'impédance avec la méthode des intégrations finies (FIT pour *Finite Integration Technique* en anglais) dont le code (FIT2,5D) est disponible au laboratoire [68, 21, 53]. Ainsi, on peut comparer la variation d'impédance obtenue par une formulation SIE et notée  $\Delta Z_{SIE}$  à la variation d'impédance obtenue par le code FIT et notée  $\Delta Z_{FIT}$  en calculant l'erreur relative que l'on définit par

$$\epsilon(\Delta Z) := \epsilon(\Delta R) + i\epsilon(\Delta X) \quad (5.3.1)$$

avec

$$\epsilon(\Delta R) := \frac{|\Delta R_{SIE} - \Delta R_{FIT}|}{|\Delta R_{FIT}|}$$

et

$$\epsilon(\Delta X) := \frac{|\Delta X_{SIE} - \Delta X_{FIT}|}{|\Delta X_{FIT}|}.$$

Dans cette partie, nous comparons les résultats obtenus pour les formulations dédiées au problème de Maxwell et au problème courants de Foucault présentées précédemment. Ces formulations sont résumées dans le tableau 5.1. La configuration est choisie axisymétrique pour permettre une comparaison avec le code FIT2,5D et correspond au cas test #2 de l'annexe E. Il s'agit de la plaque cylindrique conductrice (cas test #2.1) ou conductrice et magnétique (cas test #2.2), contrôlée par une bobine et discrétisée en 3738 quadrilatères. Les résultats présentés dans cette section ont fait l'objet de la publication de l'article [66].

#### 5.3.1 La plaque conductrice

Soit la plaque cylindrique conductrice (non magnétique). La figure 5.22 présente l'erreur  $\epsilon(\Delta Z)$  obtenue à différentes fréquences pour une épaisseur de peau  $\delta$  fixée à 1,59 mm dont on rappelle la définition,

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_1 \sigma_1}}.$$

Ainsi pour une fréquence  $f = 100$  Hz, la conductivité  $\sigma_1$  est égale à 1 GS/m et pour une fréquence  $f = 100$  MHz, la conductivité  $\sigma_1$  est égale à 1 kS/m. Ce choix d'épaisseur de peau est réaliste puisque les épaisseurs de peau rencontrées en pratique sont de l'ordre du millimètre. On observe que seules les formulations PMCHWT et P(0,1,1,0) souffrent du bruit numérique à basse fréquence. On note de plus que, en dehors de ce bruit, l'erreur obtenue pour une formulation à une épaisseur de peau fixée ne dépend pas de la

TABLE 5.1 – Résumé des formulations.

Formulation	Système discret	Espace test	Espace base	Maxwell	CF
PMCHWT	(4.2.2)	$(\mathcal{V}_{\text{div}}^h)^2$	$(\mathcal{V}_{\text{div}}^h)^2$	×	
P(1,0,0,1)	(4.2.3)	$(\mathcal{V}_{\text{div}}^h)^2$	$(\mathcal{V}_{\text{div}}^h)^2$	×	
P(0,1,1,0)	(4.2.3)	$(\mathcal{V}_{\text{div}}^h)^2$	$(\mathcal{V}_{\text{div}}^h)^2$	×	
LT	(4.2.4)	$(\mathcal{V}_{\text{div}0}^h \times \mathcal{V}_{\text{comp}}^h)^2$	$(\mathcal{V}_{\text{div}0}^h \times \mathcal{V}_{\text{comp}}^h)^2$	×	
LT(1,0,0,1)	(4.2.6)	$(\mathcal{V}_{\text{div}0}^h \times \mathcal{V}_{\text{comp}}^h)^2$	$(\mathcal{V}_{\text{div}0}^h \times \mathcal{V}_{\text{comp}}^h)^2$	×	
LT(0,1,1,0)	(4.2.6)	$(\mathcal{V}_{\text{div}0}^h \times \mathcal{V}_{\text{comp}}^h)^2$	$(\mathcal{V}_{\text{div}0}^h \times \mathcal{V}_{\text{comp}}^h)^2$	×	
Hiptmair	(4.2.7)	$\mathcal{V}_{\text{div}0}^h \times (\mathcal{V}_{\text{comp}}^h)^2$	$\mathcal{V}_{\text{div}0}^h \times (\mathcal{V}_{\text{comp}}^h)^2$		×
CF1	(4.2.8)	$(\mathcal{V}_{\text{rot}}^h)^2 \times (\mathcal{V}_0^h)^2$	$(\mathcal{V}_{\text{rot}}^h)^2 \times (\mathcal{V}_0^h)^2$		×
CF2	(4.2.9)	$(\mathcal{V}_{\text{rot}}^h)^2 \times (\mathcal{V}_0^h)^2$	$(\mathcal{V}_{\text{rot}}^h)^2 \times (\mathcal{V}_0^h)^2$		×

fréquence. On obtient le même phénomène, non présenté ici, pour les autres valeurs de l'épaisseur de peau de la figure 5.23. Les formulations CF1 et CF2 sont quant à elles les moins précises. La figure 5.23 présente l'erreur  $\epsilon(\Delta Z)$  obtenue à différentes fréquences lorsque la conductivité  $\sigma_1$  est fixée à 1 MS/m. Ainsi pour la fréquence  $f = 100$  kHz, l'épaisseur de peau  $\delta$  est égale à 1,59 mm et pour la fréquence  $f = 100$  MHz, l'épaisseur de peau  $\delta$  est égale à 50,3  $\mu\text{m}$ . Enfin, la figure 5.24 montre que seules les formulations CF1 et Hiptmair présentent un conditionnement stable par rapport à la fréquence.

**Remarque 5.3.1.** *Les résultats pour les formulations P(1,0,0,1) et LT(0,1,1,0) ne sont pas représentés ici car ils sont beaucoup trop imprécis.*

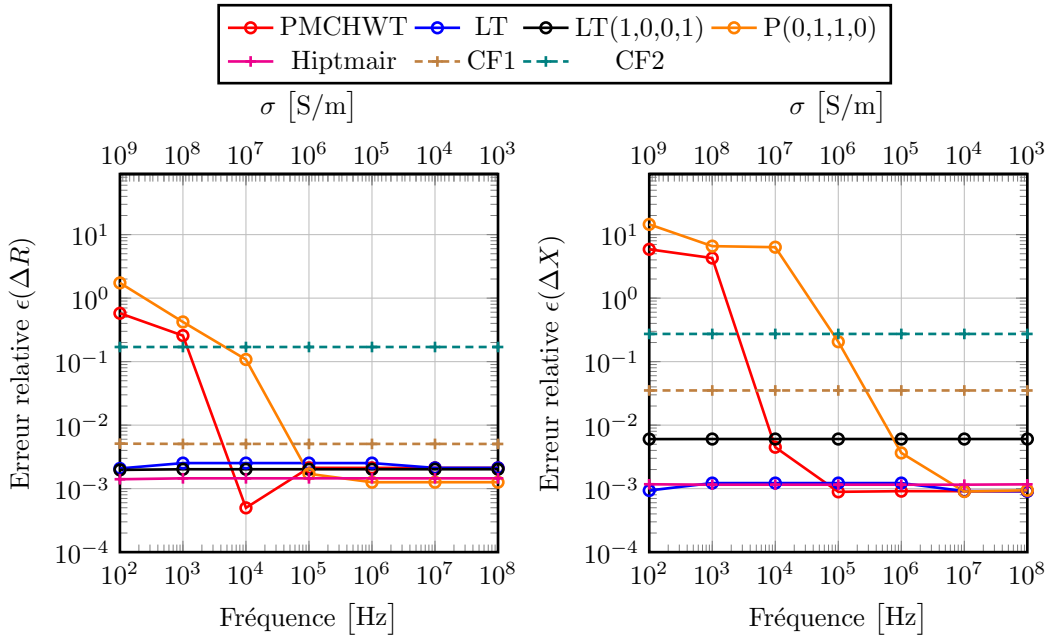


FIGURE 5.22 – Erreur relative de la variation d’impédance pour une plaque cylindrique conductrice (cas test #2.1 avec  $\delta = 1,59$  mm et  $N_{elem} = 3738$ ).

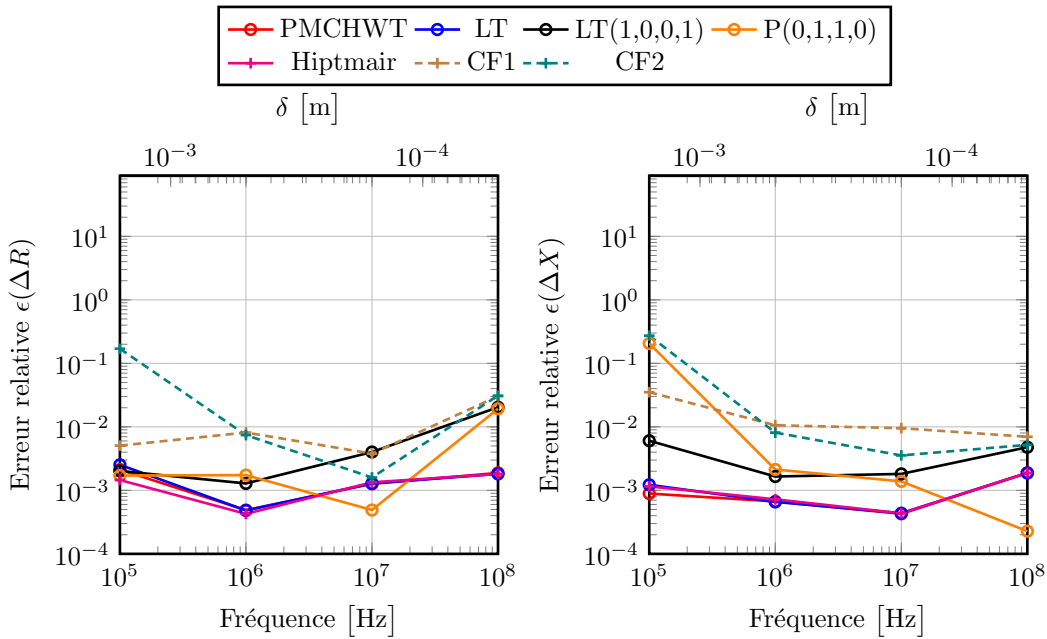


FIGURE 5.23 – Erreur relative de la variation d’impédance pour une plaque cylindrique conductrice (cas test #2.1 avec  $\sigma_1 = 1$  MS/m et  $N_{elem} = 3738$ ).

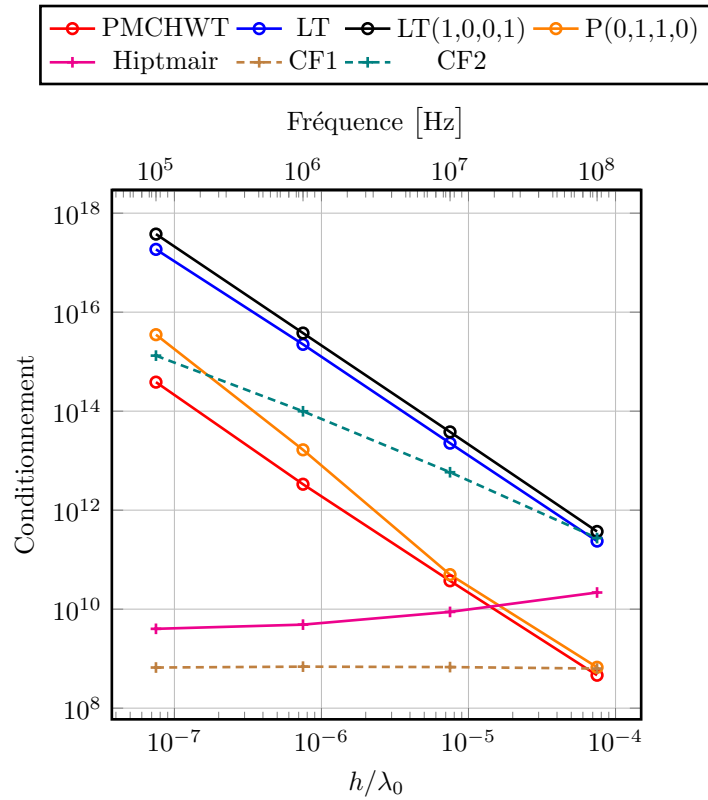


FIGURE 5.24 – Conditionnement de la matrice d'impédance pour une plaque cylindrique conductrice (cas test #2.1 avec  $\sigma_1 = 1$  MS/m et  $N_{elem} = 3738$ ).

### 5.3.2 La plaque conductrice et magnétique

Soit la plaque cylindrique conductrice et magnétique. La figure 5.25 présente l'erreur  $\epsilon(\Delta Z)$  obtenue à différentes fréquences pour une épaisseur de peau  $\delta$  fixée comme précédemment à 1,59 mm. Ainsi pour une fréquence  $f = 1$  Hz, la conductivité  $\sigma_1$  est égale à 1 GS/m et pour une fréquence  $f = 1$  MHz, la conductivité  $\sigma_1$  est égale à 1 kS/m. La figure 5.26 présente quant à elle l'erreur  $\epsilon(\Delta Z)$  obtenue à différentes fréquences pour une conductivité  $\sigma_1$  fixée à 1 MS/m. Ainsi pour la fréquence  $f = 10$  Hz, l'épaisseur de peau  $\delta = 15.9$  mm et pour la fréquence  $f = 100$  kHz, l'épaisseur de peau  $\delta = 159$   $\mu\text{m}$ . La formulation P(0,1,1,0) n'est pas présentée du fait de ses résultats trop imprécis pour la plaque conductrice et magnétique. En dehors du *low-frequency breakdown* de PMCHWT, l'erreur est stable pour une formulation et une épaisseur de peau fixées. On obtient le même phénomène, non présenté ici, pour les valeurs de l'épaisseur de peau de la figure 5.23 qui met en avant que seule la formulation LT(1,0,0,1) est précise lorsque l'épaisseur de peau augmente. Enfin, la figure 5.24 montre que seules les formulations CF1 et Hiptmair présente un conditionnement stable par rapport à la fréquence.

**Remarque 5.3.2.** *Dans l'article [66], les résultats présentés pour les formulations Hiptmair, CF1 et CF2 sont différents des résultats présentés ici. Ceci est dû au fait qu'il y avait une erreur dans le code pour les formulations courants de Foucault qui faussait les résultats. Cette erreur a été corrigée pour les résultats présentés dans ce manuscrit. Par ailleurs, à ce stade de la thèse la formulation LT(1,0,0,1) apparaissait comme la seule formulation précise pour toute la gamme de paramètres souhaitée. Nous avons pu constater par la suite que les mauvais résultats des formulations Hiptmair et LT observés sur la figure 5.26 sont liés à une discrétisation insuffisante du champ incident magnétique  $\mathbf{H}_{\text{inc}}$  à la surface de la plaque  $\Gamma_h$ . Ce champ intervient dans  $\mathbf{Y}^M$ , voir annexe C, donc il n'est pas présent dans la formulation LT(1,0,0,1) qui ne souffre ainsi pas de sa mauvaise discrétisation.*

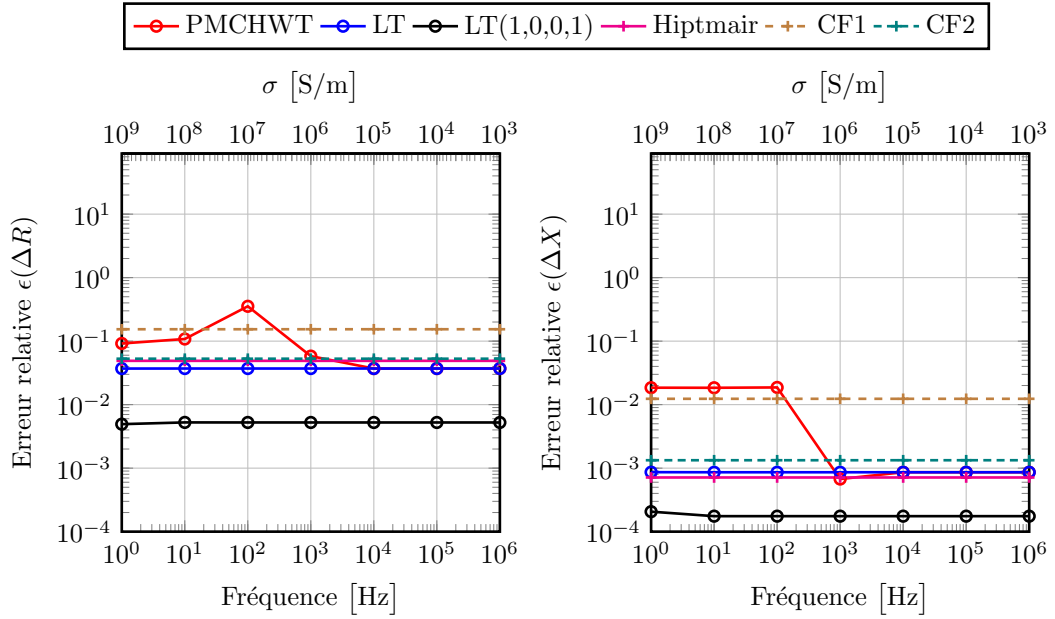


FIGURE 5.25 – Erreur relative de la variation d'impédance pour une plaque cylindrique conductrice et magnétique (cas test #2.2 avec  $\delta = 1,59$  mm,  $\mu_{r,1} = 100$  et  $N_{elem} = 3738$ ).

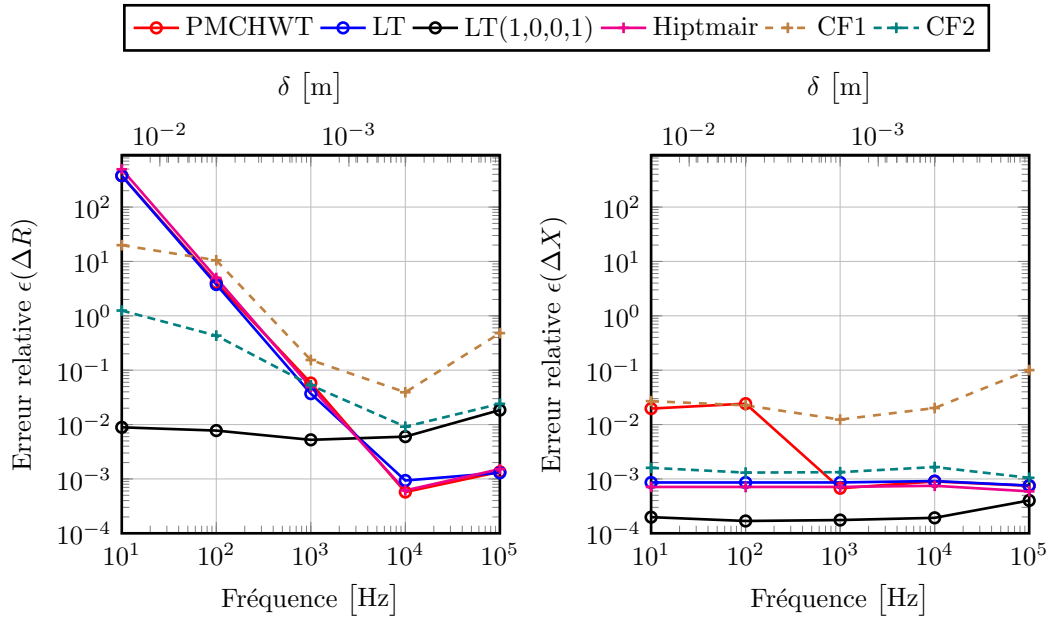


FIGURE 5.26 – Erreur relative de la variation d'impédance pour une plaque cylindrique conductrice et magnétique (cas test #2.2 avec  $\sigma_1 = 1$  MS/m,  $\mu_{r,1} = 100$  et  $N_{elem} = 3738$ ).

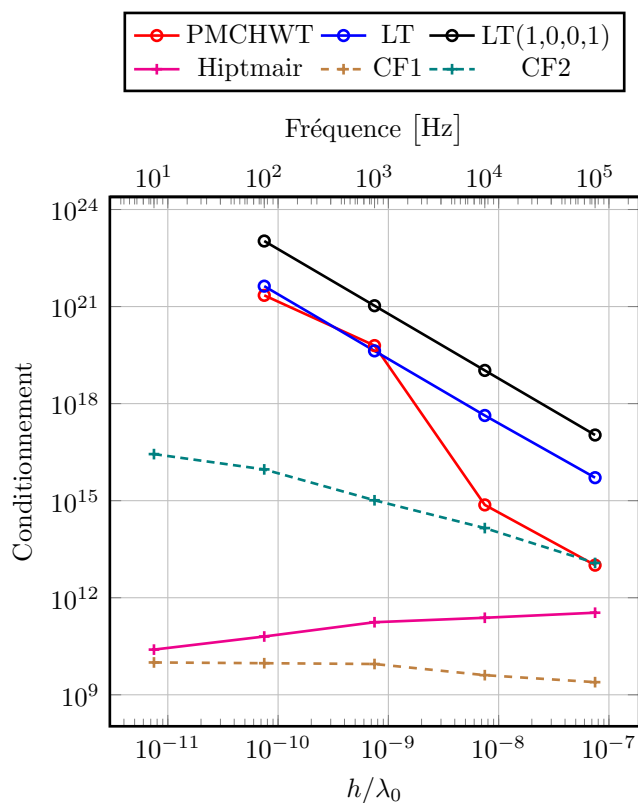


FIGURE 5.27 – Conditionnement de la matrice d'impédance en fonction de la fréquence pour une plaque cylindrique conductrice et magnétique (cas test #2.2 avec  $\sigma_1 = 1$  MS/m,  $\mu_{r,1} = 100$  et  $N_{elem} = 3738$ ).

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté des formulations permettant de traiter le problème de diffraction par un milieu diélectrique à basse fréquence et nous avons étudié leur capacité à traiter le cas d'un milieu conducteur.

Nous avons alors vu que la décomposition Loop-Tree permet d'éviter le bruit numérique à basse fréquence mais mène à l'inversion d'une matrice mal conditionnée. Pour les milieux diélectriques, une normalisation permet d'améliorer ce conditionnement. En revanche, il n'est pas possible de normaliser le problème avec décomposition Loop-Tree pour un milieu conducteur. D'une part, parce que la matrice d'impédance de ce problème est la somme de deux matrices de comportements asymptotiques différents, l'une associée à l'air et l'autre au conducteur. Il faudrait donc pouvoir les mettre à l'échelle pour normaliser leur somme. D'autre part, parce qu'il est nécessaire de connaître le comportement de la matrice associée au conducteur pour envisager d'obtenir une normalisation adaptée. Nous verrons au chapitre 7 qu'il n'y a pas de normalisation adaptée à ce cas. Cependant, les deux chapitres suivants proposent des formulations bien conditionnées via une approche par blocs au chapitre 6 et un développement asymptotique au chapitre 7.

Pour les milieux diélectriques, nous avons vu que la formulation pondérée NxMüller(-) permet aussi de travailler à basse fréquence mais qu'elle non plus ne peut pas être adaptée aux milieux conducteurs. En effet, elle se base sur le développement du noyau de Green associé à la pièce qui n'est pas le même pour une pièce diélectrique ou conductrice comme montré au chapitre 7.

Les résultats présentés dans ce chapitre nous montrent finalement que la formulation LT(1,0,0,1) est la seule formulation valide pour la gamme de paramètres physiques testée sur un cas CND, une plaque cylindrique. Cette gamme de paramètres a volontairement été choisie plus large que celle rencontrée pour des configurations réalistes de CND par CF. La remarque 5.3.2 nous précise cependant que des résultats acceptables n'ont pas pu être obtenus au moyen des formulations LT et Hiptmair appliquées à une plaque conductrice et magnétique, en raison d'une discrétisation insuffisante (constatée à posteriori) du champ magnétique incident. Les conditionnements des matrices d'impédance étant mauvais et fortement dépendants de la fréquence, il est nécessaire de chercher à travailler avec des matrices bien conditionnées.

# Chapitre 6

## Schémas itératifs par blocs

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Méthode de surrelaxation successive . . . . .</b>	<b>122</b>
<b>6.2</b>	<b>Résolution par blocs de la formulation <math>LT(1,0,0,1)</math> . . . . .</b>	<b>124</b>
6.2.1	Fonctions duales de Buffa-Christiansen . . . . .	124
6.2.2	Préconditionneur multiplicatif de Calderon pour l'EFIE . . . . .	125
6.2.3	Schéma itératif par blocs . . . . .	130
6.2.4	Résultats pour un cas CND . . . . .	131
<b>6.3</b>	<b>Résolution par blocs de la formulation <math>LT</math> . . . . .</b>	<b>135</b>
6.3.1	Schéma itératif par blocs . . . . .	135
6.3.2	Résultats pour des cas CND . . . . .	136
<b>6.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>152</b>

---

Dans ce chapitre deux schémas itératifs de résolution de systèmes linéaires par blocs basés sur la méthode de surrelaxation successive sont présentés. Ces schémas permettent de travailler avec des sous-problèmes bien conditionnés tandis que le problème global est mal conditionné. Après une présentation de la méthode de surrelaxation successive par blocs, l'algorithme d'un premier schéma itératif à deux blocs basé sur la formulation  $LT(1,0,0,1)$  est donné. La matrice de l'un des deux sous-problèmes obtenus est préconditionnée par un préconditionneur multiplicatif de Calderon construit à partir des fonctions duales de Buffa-Christiansen. Des résultats sur une configuration de CND par CF sont présentés. L'algorithme d'un deuxième schéma itératif à quatre blocs basé sur la formulation  $LT$  est ensuite donné. Ce schéma est validé sur des configurations de CND par CF pour lesquelles on obtient des résultats satisfaisants. Nous pouvons alors considérer ce dernier comme adapté pour les applications visées.

## 6.1 Méthode de surrelaxation successive

La méthode de surrelaxation successive (SOR pour *successive over-relaxation* en anglais) est une méthode itérative de résolution des systèmes linéaires de dimension finie [64, 73]. Considérons un système intégral discret de la forme

$$\mathbf{Z}\mathbf{X} = \mathbf{Y}, \quad (6.1.1)$$

toute matrice d'impédance  $\mathbf{Z}$  peut être décomposée en une matrice diagonale  $\mathbf{D}$ , une matrice triangulaire strictement inférieure  $\mathbf{T}_i$  et une matrice triangulaire strictement supérieure  $\mathbf{T}_s$  telles que

$$\mathbf{Z} = \mathbf{D} + \mathbf{T}_i + \mathbf{T}_s. \quad (6.1.2)$$

La décomposition peut s'effectuer selon les coefficients de la matrice ou selon ses blocs matriciels, on parle alors de méthode SOR *par blocs*. Le système (6.1.1) peut ainsi être résolu par la méthode SOR, basée sur la décomposition (6.1.2) de la matrice  $\mathbf{Z}$ , et l'inconnue  $\mathbf{X}$  est obtenue à l'itération  $(k+1)$  par la résolution de l'équation

$$(\mathbf{D} + \eta\mathbf{T}_i)\mathbf{X}^{(k+1)} = \eta(\mathbf{Y} - \mathbf{T}_s\mathbf{X}^{(k)}) - (\eta - 1)\mathbf{D}\mathbf{X}^{(k)} \quad (6.1.3)$$

où  $\eta$  est le paramètre de relaxation. Si la matrice  $\mathbf{Z}$  est définie positive alors on peut montrer qu'il existe  $\eta \in ]0,2[$  tel que la méthode SOR converge. D'autre part, et ce quelque soit la matrice  $\mathbf{Z}$ , la méthode SOR diverge pour tout  $\eta \notin [0,2]$ . Finalement, lorsque  $\eta = 1$  la méthode SOR se réduit à la méthode de Gauss-Seidel. Ici, nous allons utiliser la méthode SOR pour des matrices non définies positives, le choix du paramètre de relaxation se faisant de manière empirique. Notons maintenant  $\mathbf{Z}_{ij}$ , avec  $(i, j = 1, \dots, N)$ , les  $N^2$  coefficients ou blocs matriciels de la matrice  $\mathbf{Z}$  ainsi que  $\mathbf{X}_j$  et  $\mathbf{Y}_i$  les  $N$  coefficients ou blocs des vecteurs  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$ , respectivement. On a alors

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{Z}_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_{N1} & \cdots & \mathbf{Z}_{N(N-1)} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{Z}_{12} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{Z}_{(N-1)N} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice  $\mathbf{D} + \eta\mathbf{T}_i$  apparaissant dans (6.1.3) est triangulaire inférieure. Cela permet de résoudre (6.1.3) séquentiellement (calcul de  $\mathbf{X}_1^{(k+1)}, \dots, \mathbf{X}_N^{(k+1)}$ ) au moyen de l'algorithme 1.

---

**Algorithme 1** Schéma itératif avec méthode SOR.

---

$k \leftarrow 0$   
 $\mathbf{X}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{X}_N^{(0)} \leftarrow 0$   
**Tant que**  $\epsilon \geq tol$  **ou**  $k \leq N_{iter}$  **faire**  
  **pour**  $i \leftarrow 1, N$  **faire**  
     $\mathbf{V}_i \leftarrow \mathbf{0}$   
    **pour**  $j \leftarrow 1, i-1$  **faire**  
       $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_i + \mathbf{Z}_{ij} \mathbf{X}_j^{(k+1)}$   
    **Fin pour**  
    **pour**  $j \leftarrow i+1, N$  **faire**  
       $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_i + \mathbf{Z}_{ij} \mathbf{X}_j^{(k)}$   
    **Fin pour**  
  **Fin pour**  
   $\mathbf{Z}_{ii} \mathbf{X}_i^{(k+1)} = \eta (\mathbf{Y} - \mathbf{V}_i)$   
  
   $\mathbf{X}_i^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{X}_i^{(k+1)} + (1 - \eta) \mathbf{X}_i^{(k)}$   
  
   $\epsilon = \frac{\|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}\|_\infty}{\|\mathbf{X}^{(k)}\|_\infty}$   
  
   $k \leftarrow k + 1$   
**Fin Tant que**

---

## 6.2 Résolution par blocs de la formulation LT(1,0,0,1)

Nous avons vu au chapitre précédent que la formulation LT(1,0,0,1) permet d'obtenir des valeurs précises de la variation d'impédance, pour une plaque cylindrique (cas test #1), mais fait intervenir une matrice mal conditionnée. La résolution du système discret associé à la formulation LT(1,0,0,1) par la méthode SOR à deux blocs permet de se passer du bon conditionnement de la matrice d'impédance globale. Dans ce cas ce sont les deux blocs diagonaux qui doivent être bien conditionnés. Le premier bloc diagonal ( $\mathbf{Z}_{0,LT}^{JJ}$ ) correspond à la matrice d'impédance de l'EFIE qui peut être préconditionnée par un préconditionneur multiplicatif de Calderon basé sur les fonctions duales de Buffa-Christiansen [9]. Le deuxième bloc diagonal ( $\mathbf{Z}_{1,LT}^{MM}$ ) est a priori bien conditionné puisqu'il se décompose en quatre sous-blocs, selon les composantes *Loop* et *Tree* de  $\mathbf{X}_{LT}^M$  et  $\mathbf{Y}_{LT}^M$ , de comportement semblable.

### 6.2.1 Fonctions duales de Buffa-Christiansen

On appelle fonctions BC les fonctions *Hdiv-conformes* introduites par Buffa et Christiansen dans [9]. Ces fonctions sont décrites sur un maillage triangulaire et nous les adaptons ici directement aux quadrilatères. On distingue deux types de fonctions BC. D'une part, les fonctions primales *Hdiv-conformes* (et donc *Hrot-conformes* à une rotation près) qui sont exactement les fonctions *Rooftop*. D'autre part, les fonctions duales qui sont elles aussi *Hdiv-conformes* mais dont le comportement est similaire à celui des fonctions *Hrot-conformes*, on parlera alors de fonctions *quasi-Hrot-conformes*. Le caractère *quasi-Hrot-conformes* des fonctions duales de BC permet, au même titre que les fonctions *Hrot-conformes*, d'améliorer le conditionnement de la MFIE lorsqu'elles sont utilisées en tant que fonctions tests [63, 2]. Cependant les fonctions duales de BC permettent de préserver la dualité du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\times}$ . Ces fonctions sont également utilisées dans la construction de préconditionneurs multiplicatifs de Calderon dédiés à l'EFIE [1, 3, 58, 70]. Dans ce contexte, elles permettent, comme pour la MFIE, d'assurer le bon conditionnement de l'opérateur matriciel  $\mathbf{R}$ .

### Passage des fonctions *Rooftop* aux fonctions de Buffa-Christiansen

Soit un maillage de départ que l'on nomme maillage primal. On définit alors un second maillage par raffinement barycentrique, selon les médianes des éléments du maillage primal, voir figure 6.1. Les fonctions primales et duales sont des combinaisons linéaires des fonctions *Rooftop* définies sur le maillage barycentrique. Les fonctions primales correspondent exactement aux fonctions *Rooftop* définies sur le maillage primal. Les fonctions duales se comportent comme les fonctions (4.1.4) de  $\mathcal{V}_{\text{rot}}^h$  définies sur le maillage primal, c'est-à-dire qu'elles sont orientées comme les fonctions  $\mathbf{n} \times \text{Rooftop}$ , voir figure 6.2. Soit le vecteur

$$\mathbf{V}^b := (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N_a^b})^\top$$

des fonctions *Rooftop* (4.1.3) définies sur un maillage barycentrique avec  $N_a^b$  le nombre d'arêtes du maillage. Les vecteurs de fonctions primales et duales sont respectivement

définis par

$$V^p = \mathbf{D}^p V^b = (\mathbf{a}_1^p, \dots, \mathbf{a}_{N_a^p}^p)^\top, \quad V^d = \mathbf{D}^d V^b = (\mathbf{a}_1^d, \dots, \mathbf{a}_{N_a^p}^d)^\top$$

où  $N_a^p$  est le nombre d'arêtes du maillage primal. Les matrices  $\mathbf{D}^p$  et  $\mathbf{D}^d$  sont respectivement les matrices de passage des fonctions *Rooftop*  $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1, \dots, N_a^b}$  du maillage barycentrique aux fonctions primales  $\{\mathbf{a}_i^p\}_{i=1, \dots, N_a^p}$  (donc les fonctions *Rooftop* du maillage primal) et duales  $\{\mathbf{a}_i^d\}_{i=1, \dots, N_a^p}$  de BC.

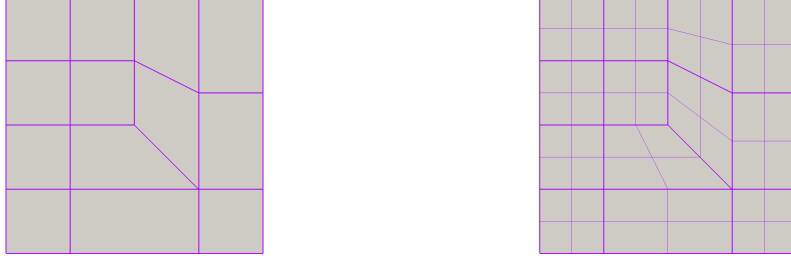


FIGURE 6.1 – Maillages primal (à gauche) et barycentrique (à droite).

**Remarque 6.2.1.** *Contrairement aux autres éléments présentés dans ce manuscrit, la construction des matrices  $\mathbf{D}^p$  et  $\mathbf{D}^d$  n'est pas détaillée puisque ces matrices étaient déjà disponible dans le code du laboratoire. Leur construction n'a donc pas été effectuée dans le cadre du travail de thèse.*

### Décomposition Loop-Tree

Les fonctions de BC appartiennent à  $\mathcal{V}_{\text{div}}^h$ , on peut donc les décomposer en fonctions *Loop* de  $\mathcal{V}_{\text{div}0}^h$  et *Tree* de  $\mathcal{V}_{\text{comp}}^h$ . Les fonctions *Loop* et *Tree* primales sont obtenues via

$$V^{p,L} = \mathbf{L}V^p = \mathbf{L}\mathbf{D}^p V^b, \quad V^{p,T} = \mathbf{T}V^p = \mathbf{T}\mathbf{D}^p V^b \quad (6.2.1)$$

avec les matrices  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{T}$  respectivement définies par (4.1.7) et (4.1.8) sur le maillage primal. Les fonctions *Loop* et *Tree* primales correspondent donc aux fonctions *Loop* et *Tree* définies sur le maillage primal, voir figure 6.3. Les fonctions *Loop* et *Tree* duales sont obtenues à partir des matrices  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{L}$ , respectivement (et non plus  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{T}$ ) via

$$V^{d,L} = \mathbf{T}V^d = \mathbf{T}\mathbf{D}^d V^b, \quad V^{d,T} = \mathbf{L}V^d = \mathbf{L}\mathbf{D}^d V^b, \quad (6.2.2)$$

voir figure 6.3.

### 6.2.2 Préconditionneur multiplicatif de Calderon pour l'EFIE

La formulation EFIE dédiée aux milieux parfaitement conducteurs, voir annexe A, peut être préconditionnée par un preconditionneur multiplicatif de Calderon (CMP pour *Calderon multiplicative preconditioner* en anglais). D'après l'identité de Calderon [36],

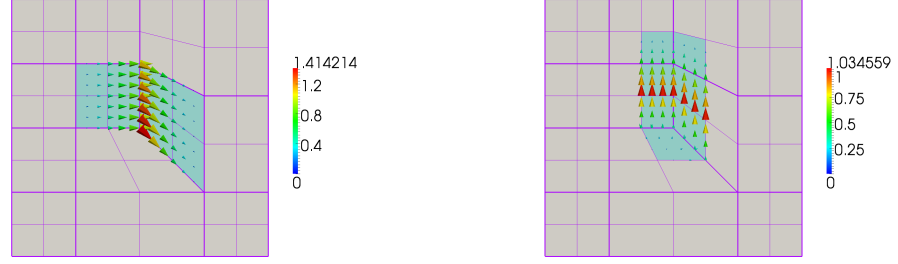


FIGURE 6.2 – Fonctions primale (à gauche) et duale (à droite) globales associées à une arête du maillage primal.

l'EFIE est préconditionnée en appliquant la matrice du problème intégral (A.2.6) au problème (A.2.6) lui-même, on obtient alors

$$(\mathcal{Z}_{EFIE} \circ \mathcal{Z}_{EFIE})\mathcal{X}_{EFIE} = \mathcal{Z}_{EFIE} \circ \mathcal{Y}_{EFIE}.$$

Le problème discret associé est alors donné par

$$(\mathbf{Z}_{EFIE} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{Z}_{EFIE}) \mathbf{X}_{EFIE} = \mathbf{Z}_{EFIE} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{Y}_{EFIE} \quad (6.2.3)$$

où la matrice  $\mathbf{G}$  est la matrice de Gram associée à l'espace  $\mathcal{V}_{\text{div}}^h$ . La matrice de Gram correspond à l'opérateur matriciel  $\mathbf{R}$ , explicité dans l'annexe C, et défini par

$$(\mathbf{R})_{tb} := \langle \mathbf{u}_t, \mathcal{R}\mathbf{u}_b \rangle$$

avec  $\mathbf{u}_t$  et  $\mathbf{u}_b$  les fonctions *Rooftop* tests et bases de  $\mathcal{V}_{\text{div}}^h$ , respectivement. Nous avons déjà vu que cet opérateur est mal conditionné lorsqu'il est testé dans  $\mathcal{V}_{\text{div}}^h$ . C'est pourquoi Andriulli *et al.* proposent dans [3] un CMP pour lequel la matrice de Gram est donnée par

$$\mathbf{R}^{pd} = \mathbf{D}^p \mathbf{R}^b (\mathbf{D}^d)^\top \text{ avec } (\mathbf{R}^{pd})_{tb} = \langle \mathbf{a}_t^p, \mathcal{R}\mathbf{a}_b^d \rangle$$

où les matrices  $\mathbf{D}^p$  et  $\mathbf{D}^d$  sont respectivement les matrices de passage des fonctions *Rooftop* aux fonctions de BC primales et duales. L'opérateur  $\mathbf{R}^b$  correspond à l'opérateur  $\mathbf{R}$  défini sur un maillage barycentrique. Les fonctions duales de BC se comportant comme des fonctions *Hrot-conformes*, l'opérateur  $\mathbf{R}^{pd}$  est bien conditionné. Finalement, soit le problème (6.2.3) défini sur un maillage barycentrique, le problème discret avec le CMP d'Andriulli *et al.* est donné par

$$\mathbf{P}_r \mathbf{Z}_{EFIE}^{pp} \mathbf{X}_{EFIE}^p = \mathbf{P}_r \mathbf{Y}_{EFIE}^p \quad (6.2.4)$$

avec  $\mathbf{P}_r$  la matrice de préconditionnement définie par

$$\mathbf{P}_r := \mathbf{Z}_{EFIE}^{dd} (\mathbf{R}^{pd})^{-1}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{EFIE}^{dd} &= \mathbf{D}^d \mathbf{Z}_{EFIE}^b (\mathbf{D}^d)^\top, & \mathbf{Z}_{EFIE}^{pp} &= \mathbf{D}^p \mathbf{Z}_{EFIE}^b (\mathbf{D}^p)^\top, & \mathbf{R}^{pd} &= \mathbf{D}^p \mathbf{R}^b (\mathbf{D}^d)^\top, \\ \mathbf{X}_{EFIE}^p &= (\mathbf{D}^p)^{-\top} \mathbf{X}_{EFIE}^b, & \mathbf{Y}_{EFIE}^p &= \mathbf{D}^p \mathbf{Y}_{EFIE}^b. \end{aligned}$$

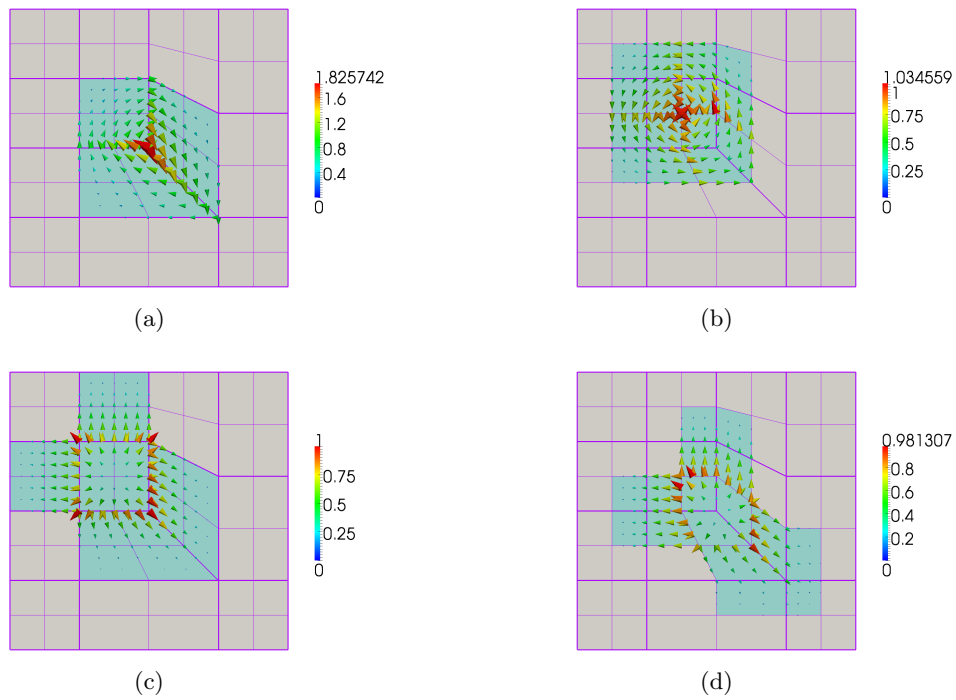


FIGURE 6.3 – Fonctions globales *Loop* et *Tree* primales, respectivement (a) et (c), et duales, respectivement (b) et (d), associées à un sommet et un élément du maillage primal.

Pour éviter le bruit numérique de l'EFIE à basse fréquence, il est possible d'appliquer une décomposition Loop-Tree au problème discret (6.2.4), on obtient alors le système

$$\mathbf{P}_{r,LT} \mathbf{Z}_{LT}^{pp} \mathbf{X}_{LT}^p = \mathbf{P}_{r,LT} \mathbf{Y}_{LT}^p$$

où l'indice *EFIE* a été supprimé pour simplifier l'écriture. La matrice de préconditionnement  $\mathbf{P}_{r,LT}$  est définie par

$$\mathbf{P}_{r,LT} := \mathbf{Z}_{LT}^{dd} (\mathbf{R}_{LT}^{pd})^{-1} \quad (6.2.5)$$

et d'après (6.2.1) et (6.2.2),

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{LT}^{dd} &= \mathbf{D}_{LT}^d \mathbf{Z}_{EFIE}^b (\mathbf{D}_{LT}^d)^\top, & \mathbf{Z}_{LT}^{pp} &= \mathbf{D}_{LT}^p \mathbf{Z}_{EFIE}^b (\mathbf{D}_{LT}^p)^\top, & \mathbf{R}_{LT}^{pd} &= \mathbf{D}_{LT}^p \mathbf{R}^b (\mathbf{D}_{LT}^d)^\top, \\ \mathbf{X}_{LT}^p &= (\mathbf{D}_{LT}^p)^{-\top} \mathbf{X}_{EFIE}^b, & \mathbf{Y}_{LT}^p &= \mathbf{D}_{LT}^p \mathbf{Y}_{EFIE}^b \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{D}_{LT}^p = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \mathbf{D}^p, \quad \mathbf{D}_{LT}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{L} \end{bmatrix} \mathbf{D}^d,$$

les matrices de passage des fonctions primales et duales aux fonctions *Loop* et *Tree* primales et duales, respectivement. On note ce problème CMP-LT.

### Résultats pour une sphère PEC

Prenons une sphère parfaitement conductrice éclairée par une onde plane, qui correspond au cas test #1.1 de l'annexe E, et discrétisée en 864 quadrilatères. Le problème CMP-LT ne souffre pas du bruit numérique à basse fréquence du fait de la décomposition Loop-Tree. En effet, la SER calculée via le problème CMP-LT est précise pour une fréquence de 1 Hz, voir figure 6.4. La figure 6.5 montre que le conditionnement de la matrice d'impédance du problème CMP-LT est bien meilleur que celui de l'EFIE classique. On note de plus que le conditionnement de la matrice CMP-LT ne dépend plus de la fréquence lorsque celle-ci est au dessus de 100 Hz. Ce résultat est comparé au conditionnement de l'EFIE avec décomposition Loop-Tree et normalisation, notée EFIE(LTN). La normalisation employée correspond à la normalisation de la formulation PMCHWT pour les milieux diélectriques, donnée par les matrices (5.1.4) et (5.1.5), restreinte à l'EFIE. La figure 6.5 montre alors que la matrice d'impédance obtenue est moins bien conditionnée que la matrice du problème CMP-LT tant que la fréquence est supérieure à 10 Hz.

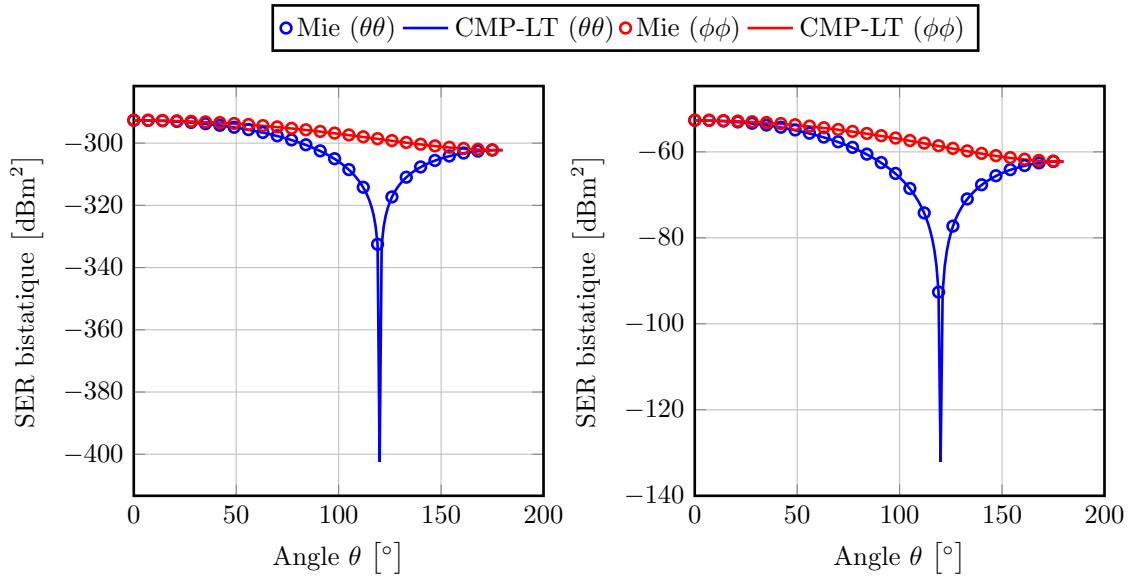


FIGURE 6.4 – SER bistatique pour une sphère PEC (cas test #1.1 avec  $N_{elem} = 864$ ) à une fréquence  $f = 1$  Hz (à gauche) et  $f = 1$  MHz (à droite).

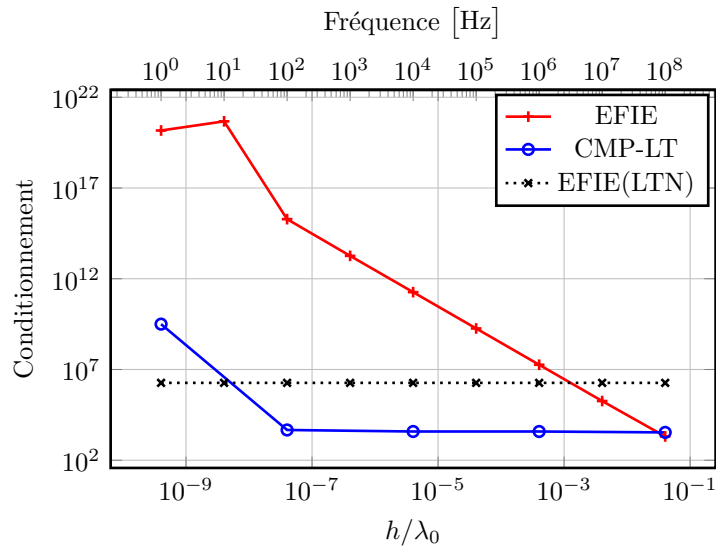


FIGURE 6.5 – Conditionnement de la matrice d'impédance pour une sphère PEC (cas test #1.1 avec  $N_{elem} = 864$ ).

### 6.2.3 Schéma itératif par blocs

Considérons la formulation pondérée avec décomposition Loop-Tree  $LT(1,0,0,1)$  dont on rappelle que le problème discret (4.2.6) est donné par

$$\mathbf{Z}_{LT}(1,0,0,1)\mathbf{X}_{LT} = \mathbf{Y}_{LT}(1,0)$$

avec en particulier,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{LT}(1,0,0,1) &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{LT} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_{LT} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_0^{JJ} & \mathbf{Z}_0^{JM} \\ \mathbf{Z}_1^{MJ} & \mathbf{Z}_1^{MM} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{R} \\ \mathbf{R} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{LT} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_{LT} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{0,LT}^{JJ} & \mathbf{Z}_{0,LT}^{JM} - \frac{1}{2}\mathbf{R}_{LT} \\ \mathbf{Z}_{1,LT}^{MJ} - \frac{1}{2}\mathbf{R}_{LT} & \mathbf{Z}_{1,LT}^{MM} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice d'impédance peut-être décomposée, selon les blocs matriciels induits par les inconnues ( $\mathbf{X}_{LT}^J, \mathbf{X}_{LT}^M$ ) et les seconds membres ( $\mathbf{Y}_{LT}^J, \mathbf{Y}_{LT}^M$ ), en une matrice diagonale par blocs et deux matrices triangulaires par blocs, respectivement strictement inférieure et supérieure :

$$\mathbf{Z}_{LT}(1,0,0,1) = \mathbf{D} + \mathbf{T}_i + \mathbf{T}_s.$$

La matrice diagonale est donnée par

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{0,LT}^{JJ} & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_{1,LT}^{MM} \end{bmatrix}$$

et les matrices triangulaires sont données par

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{Z}_{1,LT}^{MJ} - \frac{1}{2}\mathbf{R}_{LT} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{Z}_{0,LT}^{JM} - \frac{1}{2}\mathbf{R}_{LT} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut alors résoudre le problème discret  $LT(1,0,0,1)$  au moyen de l'algorithme 1 correspondant au schéma itératif avec méthode SOR. Ainsi, il n'est plus nécessaire d'avoir un bon conditionnement de la matrice d'impédance globale  $\mathbf{Z}_{LT}(1,0,0,1)$ , ce sont uniquement les deux blocs de la diagonale de  $\mathbf{D}$  qui doivent être bien conditionnés. Lorsque l'on contrôle un milieu conducteur à basse fréquence, le paramètre adimensionnel  $\gamma_1$  défini par (1.3.9) vérifie

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma_1}} \ll 1$$

et on a alors

$$\mathbf{Z}_{1,LT}^{MM} = \begin{bmatrix} si\omega\varepsilon_1 \mathbf{A}_\times^{1,LL} & si\omega\varepsilon_1 \mathbf{A}_\times^{1,LT} \\ si\omega\varepsilon_1 \mathbf{A}_\times^{1,TL} & si\omega\varepsilon_1 \mathbf{A}_\times^{1,TT} + \frac{si}{\omega\mu_1} \mathbf{C}_\times^{1,TT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}(\gamma_1^{-1}) & \mathcal{O}(\gamma_1^{-1}) \\ \mathcal{O}(\gamma_1^{-1}) & \mathcal{O}(\gamma_1^{-1}) \end{bmatrix},$$

ce comportement est détaillé au chapitre 7. Les sous-blocs issus de la décomposition Loop-Tree appliqués au bloc  $\mathbf{Z}_{1,LT}^{MM}$  ont le même comportement asymptotique pour  $\gamma_1$  proche de zéro, tandis que le bloc  $\mathbf{Z}_{0,LT}^{JJ}$  vérifie

$$\mathbf{Z}_{0,LT}^{JJ} = \begin{bmatrix} si\omega\mu_0\mathbf{A}_{\times}^{0,LL} & si\omega\mu_0\mathbf{A}_{\times}^{0,LT} \\ si\omega\mu_0\mathbf{A}_{\times}^{0,TL} & si\omega\mu_0\mathbf{A}_{\times}^{0,TT} + \frac{si}{\omega\varepsilon_0}\mathbf{C}_{\times}^{0,TT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}(\omega) & \mathcal{O}(\omega) \\ \mathcal{O}(\omega) & \mathcal{O}(\omega^{-1}) \end{bmatrix},$$

d'après (5.1.6). Il s'agit exactement de la matrice d'impédance de l'EFIE avec décomposition Loop-Tree, elle peut donc être préconditionnée par le CMP-LT. Pour cela, on multiplie la première ligne du problème discret LT(1,0,0,1) par la matrice de préconditionnement  $\mathbf{P}_{r,LT}$  définie par (6.2.5). Ainsi, le problème LT(1,0,0,1) avec le préconditionneur CMP-LT peut-être résolu par l'algorithme 2.

---

**Algorithme 2** Schéma itératif avec méthode SOR à deux blocs pour la formulation LT(1,0,0,1).

---

$k \leftarrow 0$

$(\mathbf{X}_{LT}^J)^{(0)}, (\mathbf{X}_{LT}^M)^{(0)} \leftarrow 0$

**Tant que**  $\epsilon \geq tol$  **ou**  $k \leq N_{iter}$  **faire**

$$\left[ \mathbf{P}_{r,LT} \mathbf{Z}_{0,LT}^{JJ} \right] (\mathbf{X}_{LT}^J)^{(k+1)} = \eta \mathbf{P}_{r,LT} \left( \mathbf{Y}_{LT}^J - \mathbf{Z}_{0,LT}^{JM} (\mathbf{X}_{LT}^M)^{(k)} \right)$$

$$\mathbf{Z}_{1,LT}^{MM} (\mathbf{X}_{LT}^M)^{(k+1)} = \eta \left( \mathbf{Y}_{LT}^M - \mathbf{Z}_{1,LT}^{MJ} (\mathbf{X}_{LT}^J)^{(k+1)} \right)$$

$$\mathbf{X}_{LT}^{(k+1)} \leftarrow \begin{bmatrix} (\mathbf{X}_{LT}^J)^{(k+1)} \\ (\mathbf{X}_{LT}^M)^{(k+1)} \end{bmatrix} + (1 - \eta) \begin{bmatrix} (\mathbf{X}_{LT}^J)^{(k)} \\ (\mathbf{X}_{LT}^M)^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon(\mathbf{X}) = \frac{\| \mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)} \|_{\infty}}{\| \mathbf{X}^{(k)} \|_{\infty}}$$

$k \leftarrow k + 1$

**Fin Tant que**

---

### 6.2.4 Résultats pour un cas CND

Dans cette section, nous étudions les résultats obtenus pour le schéma itératif à deux blocs pour la formulation LT(1,0,0,1) résolue par la méthode SOR. La configuration de test est choisie axisymétrique pour permettre une comparaison avec le code FIT2,5D et correspond au cas test #3 de l'annexe E. Il s'agit de la barre conductrice (cas test #3.1) ou conductrice et magnétique (cas test #3.2), contrôlée par une bobine et discrétisée en 1200 quadrilatères (nombre d'éléments du maillage primal, le maillage barycentrique comporte  $4 \times 1200$  éléments). Pour ces cas, le paramètre  $\gamma_1$  varie de l'ordre de  $10^{-6}$  à  $10^{-8}$ . On fait le choix de la barre et non plus de la plaque cylindrique pour éviter les problèmes rencontrés au chapitre précédent pour la discrétisation du second membre. Ce choix nous permet de nous concentrer sur les résultats liés à la formulation et non pas

aux données du problème.

La figure 6.6 présente, pour le cas test #3.1, une comparaison entre la variation d'impédance  $\Delta Z$  obtenue par le code FIT 2,5D, par le problème LT(1,0,0,1) résolu directement (LT(1,0,0,1)-direct) puis, par le schéma itératif de l'algorithme 2 (LT(1,0,0,1)-SOR). On fixe la conductivité de la barre à 10 MS/m et on fait varier la fréquence de 1 kHz à 100 kHz pour avoir une épaisseur de peau qui varie de 5 mm à 50,3  $\mu\text{m}$ . On obtient ainsi une gamme de fréquence plus large que les fréquences utilisées en pratique pour la pièce étudiée. Les résultats obtenus entre les différentes méthodes sont similaires. En effet, l'erreur  $\epsilon(\Delta Z)$  définie par (5.3.1) entre la résolution directe ou la résolution itérative du problème LT(1,0,0,1) et le code FIT2,5D est de l'ordre de  $10^{-2}$ . Notons de plus que l'écart entre la variation d'impédance obtenue après la résolution directe et la résolution itérative du problème LT(1,0,0,1) est de l'ordre de  $10^{-6}$ . Pour le cas test #3.2, la conductivité de la barre est toujours fixée à 10 MS/m, la perméabilité est fixée à  $\mu_{r,1} = 100$  et la fréquence varie de 1 kHz à 100 kHz pour conserver une épaisseur de peau qui varie de 5 mm à 50,3  $\mu\text{m}$ . Nous n'avons pas obtenu de coefficient de relaxation  $\eta$  compris entre 0 et 2 et tel que l'algorithme 2 converge, c'est pourquoi nous ne présentons pas les courbes de variation d'impédance pour la barre magnétique. Notons cependant que la résolution directe de la formulation LT(1,0,0,1) donne une erreur  $\epsilon(\Delta Z)$  avec le code FIT2,5D de l'ordre de  $10^{-2}$ .

La figure 6.7 présente le conditionnement des sous-blocs diagonaux de la matrice d'impédance  $\mathbf{Z}_{LT}(1,0,0,1)$ . Le bloc  $\mathbf{Z}_{1,LT}^{MM}$  est comme attendu bien conditionné pour la barre conductrice, qu'elle soit magnétique ou non. Le bloc  $\mathbf{Z}_{0,LT}^{JJ}$  souffre d'une forte dépendance du rapport  $h/\lambda_0$  et donc de la fréquence, il est mal conditionné. Finalement après le préconditionnement, le bloc  $\mathbf{P}_{r,LT}\mathbf{Z}_{0,LT}^{JJ}$  est mieux conditionné. Cependant, on observe que lorsque le rapport  $h/\lambda_0$  est inférieur à  $10^{-8}$ , le conditionnement dépend à nouveau de la fréquence, tout comme pour le problème CMP-LT pour la sphère PEC. Comme la fréquence est choisie plus faible pour la barre magnétique par rapport à la barre simplement conductrice, le rapport  $h/\lambda_0$  est lui aussi plus faible (puisque le maillage est fixé). On peut supposer que c'est le mauvais conditionnement, malgré le préconditionnement, du sous-bloc  $\mathbf{P}_{r,LT}\mathbf{Z}_{0,LT}^{JJ}$  qui ne permet pas à l'algorithme 2 de converger dans ce cas.

Le choix du paramètre de relaxation  $\eta$  est effectué de manière empirique, on présente sur la figure 6.8, le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir une erreur

$$\epsilon(\mathbf{X}) = \frac{\|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}\|_\infty}{\|\mathbf{X}^{(k)}\|_\infty} < 10^{-6}$$

pour  $\eta$  compris entre 0 et 2. On remarque que l'algorithme 2 converge de plus en plus rapidement lorsque  $\eta$  varie de 0 à 0.8 puis qu'il commence à diverger pour des valeurs de  $\eta$  se rapprochant de 1. On note de plus que les résultats obtenus sont semblables pour les différentes fréquences.

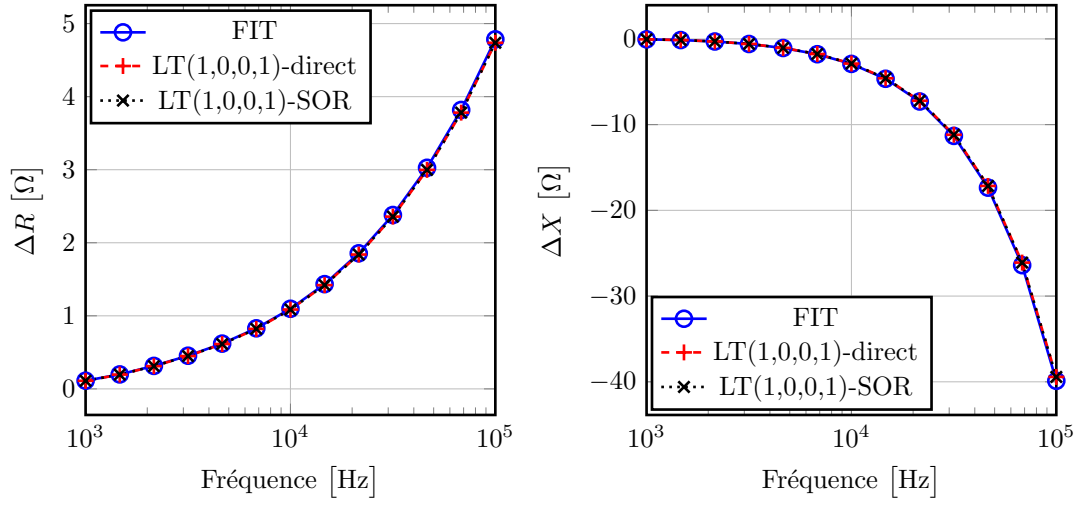


FIGURE 6.6 – Parties réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) de la variation d'impédance pour une barre conductrice (cas test #3.1 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 1200$ ).

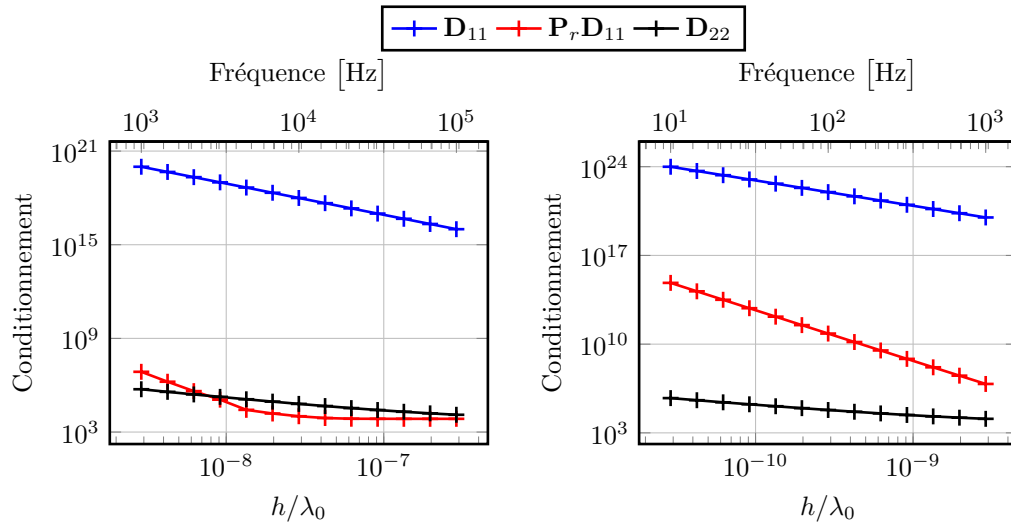


FIGURE 6.7 – Conditionnement des blocs matriciels pour une barre conductrice (cas test #3.1 avec  $\sigma_1 = 10$ MS/m et  $N_{elem} = 1200$ , à gauche) et pour une barre conductrice et magnétique (cas test #3.2 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m,  $\mu_{r,1} = 100$  et  $N_{elem} = 1200$ , à droite).

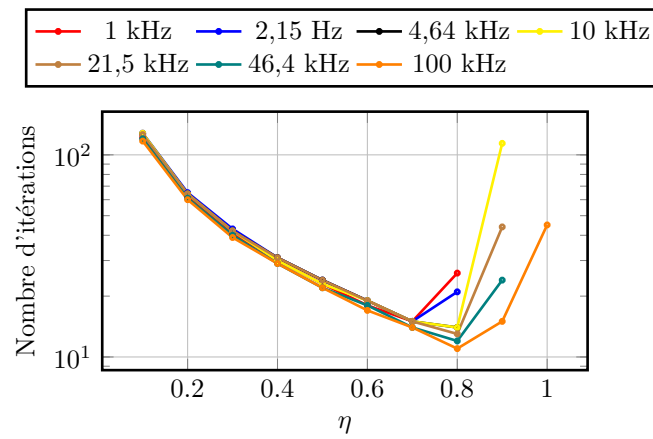


FIGURE 6.8 – Nombre d’itérations nécessaire pour obtenir une erreur  $\epsilon(\mathbf{X})$  inférieure à  $10^{-6}$  pour une barre conductrice (cas test #3.1 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 1200$ ) pour différentes valeurs du paramètre de relaxation  $\eta$ .

### 6.3 Résolution par blocs de la formulation LT

L'approche considérée dans cette partie est l'approche que l'on considère comme étant adaptée aux applications de CND par CF visées.

#### 6.3.1 Schéma itératif par blocs

Considérons la formulation avec décomposition Loop-Tree (LT) dont on rappelle que le problème discret (4.2.4) est donné par

$$\mathbf{Z}_{LT}\mathbf{X}_{LT} = \mathbf{Y}_{LT}.$$

La matrice d'impédance peut-être décomposée, selon les blocs matriciels induits par les partitions  $(\mathbf{X}^{JL}, \mathbf{X}^{JT}, \mathbf{X}^{ML}, \mathbf{X}^{MT})$  des inconnues et  $(\mathbf{Y}^{JL}, \mathbf{Y}^{JT}, \mathbf{Y}^{ML}, \mathbf{Y}^{MT})$  des seconds membres, en une matrice diagonale par blocs et deux matrices triangulaires par blocs, respectivement strictement inférieure et supérieure :

$$\mathbf{Z}_{LT} = \mathbf{D} + \mathbf{T}_i + \mathbf{T}_s.$$

La matrice diagonale est donnée par

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{LL}^{JJ} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_{TT}^{JJ} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathbf{Z}_{LL}^{MM} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{Z}_{TT}^{MM} \end{bmatrix}$$

et les matrices triangulaires sont données par

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mathbf{Z}_{TL}^{JM} & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{Z}_{LL}^{MJ} & \mathbf{Z}_{LT}^{MJ} & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_{TL}^{MJ} & \mathbf{Z}_{TT}^{MJ} & \mathbf{Z}_{LT}^{MM} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{Z}_{LT}^{JJ} & \mathbf{Z}_{LL}^{JM} & \mathbf{Z}_{LT}^{JM} \\ \vdots & \ddots & \mathbf{Z}_{TL}^{JM} & \mathbf{Z}_{TT}^{JM} \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{Z}_{LT}^{MM} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut alors résoudre le problème discret LT au moyen de l'algorithme 3 correspondant au schéma itératif avec méthode SOR à quatre blocs. Ainsi, il n'est plus nécessaire d'avoir un bon conditionnement de la matrice d'impédance globale  $\mathbf{Z}_{LT}$ , ce sont uniquement les quatre blocs de la diagonale de  $\mathbf{D}$  qui doivent être bien conditionnés.

**Algorithme 3** Schéma itératif avec méthode SOR à quatre blocs pour la formulation LT.

---

$k \leftarrow 0$

$(\mathbf{X}^{J_L})^{(0)}, (\mathbf{X}^{J_T})^{(0)}, (\mathbf{X}^{M_L})^{(0)}, (\mathbf{X}^{M_T})^{(0)} \leftarrow 0$

**Tant que**  $\epsilon \geq tol$  **ou**  $k \leq N_{iter}$  **faire**

$$\eta \mathbf{Z}_{LL}^{JJ}(\mathbf{X}^{J_L})^{(k+1)} = \left( \mathbf{Y}^{J_L} - \mathbf{Z}_{LT}^{JJ}(\mathbf{X}^{J_T})^{(k)} - \mathbf{Z}_{LL}^{JM}(\mathbf{X}^{M_L})^{(k)} - \mathbf{Z}_{LT}^{JM}(\mathbf{X}^{M_T})^{(k)} \right)$$

$$\eta \mathbf{Z}_{TT}^{JJ}(\mathbf{X}^{J_T})^{(k+1)} = \left( \mathbf{Y}^{J_T} - \mathbf{Z}_{TL}^{JJ}(\mathbf{X}^{J_L})^{(k+1)} - \mathbf{Z}_{TL}^{JM}(\mathbf{X}^{M_L})^{(k)} - \mathbf{Z}_{TT}^{JM}(\mathbf{X}^{M_T})^{(k)} \right)$$

$$\eta \mathbf{Z}_{LL}^{MM}(\mathbf{X}^{M_L})^{(k+1)} = \left( \mathbf{Y}^{M_L} - \mathbf{Z}_{LL}^{MJ}(\mathbf{X}^{J_L})^{(k+1)} - \mathbf{Z}_{LT}^{MJ}(\mathbf{X}^{J_T})^{(k+1)} - \mathbf{Z}_{LL}^{MM}(\mathbf{X}^{M_T})^{(k)} \right)$$

$$\eta \mathbf{Z}_{TT}^{MM}(\mathbf{X}^{M_T})^{(k+1)} = \left( \mathbf{Y}^{M_T} - \mathbf{Z}_{TL}^{MJ}(\mathbf{X}^{J_L})^{(k+1)} - \mathbf{Z}_{TT}^{MJ}(\mathbf{X}^{J_T})^{(k+1)} - \mathbf{Z}_{TL}^{MM}(\mathbf{X}^{M_L})^{(k+1)} \right)$$

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \leftarrow \begin{bmatrix} (\mathbf{X}^{J_L})^{(k+1)} \\ (\mathbf{X}^{J_T})^{(k+1)} \\ (\mathbf{X}^{M_L})^{(k+1)} \\ (\mathbf{X}^{M_T})^{(k+1)} \end{bmatrix} + (1 - \eta) \begin{bmatrix} (\mathbf{X}^{J_L})^{(k)} \\ (\mathbf{X}^{J_T})^{(k)} \\ (\mathbf{X}^{M_L})^{(k)} \\ (\mathbf{X}^{M_T})^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon(\mathbf{X}) = \frac{\|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}\|_\infty}{\|\mathbf{X}^{(k)}\|_\infty}$$

$k \leftarrow k + 1$

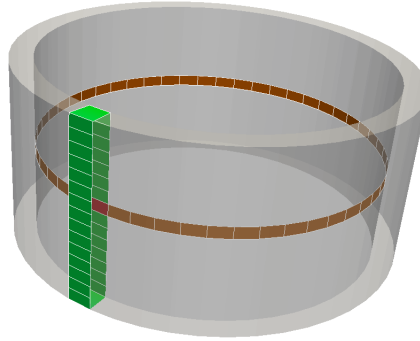
**Fin Tant que**

---

### 6.3.2 Résultats pour des cas CND

Dans cette section, nous étudions les résultats obtenus pour le schéma itératif avec méthode SOR à quatre blocs pour la formulation LT. Dans un premier temps, les configurations sont choisies axisymétriques pour permettre une comparaison avec le code FIT2,5D et correspondent aux cas tests #3 et #4 de l'annexe E. Il s'agit de la barre conductrice (cas test #3.1) ou conductrice et magnétique (cas test #3.2), contrôlée par une bobine et discrétisée en 2610 quadrilatères et du tube conducteur (cas test #4.1) ou conducteur et magnétique (cas test #4.2), contrôlé par une bobine et discrétisé en 2640 quadrilatères. Dans un second temps les résultats sont obtenus pour une configuration tridimensionnelle, le tube conducteur à section elliptique correspondant au cas test #5, contrôlé par une bobine et discrétisé en 2640 quadrilatères. Pour ces cas, le paramètre  $\gamma_1$  varie de l'ordre de  $10^{-6}$  à  $10^{-8}$ .

**Remarque 6.3.1.** *Le tube ayant une surface non simplement connexe, il faut ajouter deux fonctions Loop, voir figure 6.9, aux fonctions définies par (4.1.5).*

FIGURE 6.9 – Support des fonctions *Loop* supplémentaires pour le tube.

### Configurations axisymétriques

Les figures 6.10 et 6.11 présentent, pour la barre (cas tests #3.1 et #3.2, respectivement), une comparaison entre la variation d'impédance  $\Delta Z$  obtenue par le code FIT2,5D, par le problème LT résolu directement (LT-direct) puis, par le schéma itératif de l'algorithme 3 (LT-SOR). Comme pour l'algorithme précédent, on fait varier l'épaisseur de peau de 5 mm à  $50,3 \mu\text{m}$  et la conductivité de la barre est fixée à 10 MS/m. Pour le cas test #3.1 on fait donc varier la fréquence de 1 kHz à 100 kHz et pour le cas test #3.2, dont on fixe la perméabilité  $\mu_{r,1} = 100$ , on fait varier la fréquence de 10 Hz à 1 kHz. Les résultats obtenus entre les différentes méthodes sont similaires. En effet, l'erreur  $\epsilon(\Delta Z)$  définie par (5.3.1) entre la résolution directe ou la résolution itérative du problème LT et le code FIT2,5D est de l'ordre de  $10^{-2}$ . L'écart entre la variation d'impédance obtenue après la résolution directe et la résolution itérative du problème LT est de l'ordre de  $10^{-6}$ . De même, les figures 6.12 et 6.13 présentent les résultats obtenus pour le tube (cas tests #4.1 et #4.2, respectivement). On observe que l'algorithme SOR ne converge qu'à partir d'environ 1.4 kHz pour le tube simplement conducteur et qu'à partir d'environ 30 Hz pour le tube conducteur et magnétique. Pour les autres fréquences on a un bon accord des résultats : erreur  $\epsilon(\Delta Z)$  entre LT-direct ou LT-SOR et FIT2,5D de l'ordre de  $10^{-2}$  et entre LT-direct et LT-SOR de l'ordre de  $10^{-6}$ .

Les figures 6.14 et 6.15 présentent le conditionnement de la matrice d'impédance complète  $\mathbf{Z}_{LT}$  ainsi que le conditionnement des quatre blocs de la diagonale pour la barre et le tube, respectivement. On constate que les blocs de la diagonale possèdent effectivement un bon conditionnement et ne dépendent pas du rapport  $h/\lambda_0$ , contrairement à la matrice d'impédance globale.

Le choix du paramètre de relaxation  $\eta$  est effectué de manière empirique. On présente sur les figures 6.16 et 6.17, pour la barre (cas tests #3.1 et #3.2, respectivement) le

nombre d'itérations nécessaire pour obtenir une erreur

$$\epsilon(\mathbf{X}) = \frac{\|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}\|_\infty}{\|\mathbf{X}^{(k)}\|_\infty} < 10^{-6}$$

pour  $\eta$  compris entre 0 et 2. On remarque que l'algorithme 3 converge de plus en plus rapidement lorsque  $\eta$  varie de 0 à 1 puis qu'il commence à diverger pour des valeurs de  $\eta$  se rapprochant de 1. On note de plus que les résultats obtenus sont semblables pour les différentes fréquences. Pour le tube (cas tests #4.1 et #4.2), plus la fréquence est faible, plus la valeur de  $\eta$  à partir de laquelle l'algorithme 3 commence à diverger est faible, voir figures 6.18 et 6.19. L'erreur a volontairement été choisie très faible afin de mettre à l'épreuve l'algorithme. Nous pouvons noter par exemple que le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre une erreur  $\epsilon(\mathbf{X}) < 10^{-2}$  pour le tube conducteur et magnétique à une fréquence de 46,4 Hz est de 50 contre 163 pour  $\epsilon(\mathbf{X}) < 10^{-6}$ .

L'écart entre les résultats obtenus pour la barre et le tube peut s'expliquer par la topologie des géométries. D'une part, on peut supposer que les fonctions *Loop* ajoutées pour le tube dont la surface n'est pas simplement connexe peuvent dégrader les résultats. D'autre part, le tube ayant une épaisseur plus faible que la barre il est probable qu'il souffre plus de l'augmentation de l'épaisseur de peau. En effet l'algorithme diverge pour le tube de 1,27 mm d'épaisseur lorsque l'épaisseur de peau est supérieure à 3 mm c'est-à-dire deux fois l'épaisseur de la pièce. Notons que les cas pour lesquels l'algorithme diverge ne sont donc pas des cas réalistes de contrôle par CF. Enfin, nous pouvons penser que la discrétisation des champs primaires n'est pas optimale, comme pour le cas de la plaque cylindrique. À ce titre il serait intéressant de mener une étude sur le comportement de l'algorithme en fonction du maillage de la pièce.

Nous comparons maintenant les champs électrique et magnétique calculés à partir des formules de représentation intégrale (3.1.9). Les figures 6.21 et 6.22 présentent les champs magnétique et électrique pour le tube conducteur (cas test #4.1) avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m à la fréquence  $f = 100$  kHz et les figures 6.23 et 6.24 pour le tube conducteur et magnétique (cas test #4.2) avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $\mu_{r,1} = 100$  à la fréquence  $f = 10$  Hz. Pour les figures 6.22 et 6.24, les composantes  $\mathbf{B}_{\text{tot},\rho}$ ,  $\mathbf{B}_{\text{tot},z}$  et  $\mathbf{E}_{\text{tot},\phi}$  des champs totaux magnétique et électrique sont calculées dans le tube selon l'axe  $\phi = 0^\circ$ ,  $\rho = 10,5$  mm, voir figure 6.20. Pour les figures 6.21 et 6.23, les composantes  $\mathbf{B}_{\text{d},\rho}$ ,  $\mathbf{B}_{\text{d},z}$  et  $\mathbf{E}_{\text{d},\phi}$  des champs diffractés magnétique et électrique sont calculées dans l'air selon l'axe  $\phi = 0^\circ$ ,  $\rho = 9$  mm, voir figure 6.20. On observe un bon accord entre les champs calculés via les formules de représentation intégrale et les champs calculés par le code FIT2,5D. On note toutefois un écart pour la composante  $\mathbf{B}_{\text{tot},z}$  dans le tube conducteur et magnétique, pour lequel nous n'avons pas d'explication (mais nous soupçonnons un problème de réglage des paramètres numériques de l'un des solveurs). Les résultats pour le calcul des champs sont similaires aux résultats présentés pour la barre conductrice avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m et une fréquence variant de 1 kHz à 100 kHz, la barre conductrice et magnétique avec  $\sigma_1 = 10$ MS/m,  $\mu_{r,1} = 100$  et une fréquence variant de 10 Hz à 1 kHz, le tube conducteur avec  $\sigma_1 = 10$ MS/m et une fréquence variant de 1,46 kHz à 100 kHz et le tube conducteur et magnétique avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m,  $\mu_{r,1} = 100$  et une fréquence variant de 31,6 Hz à 1 kHz.

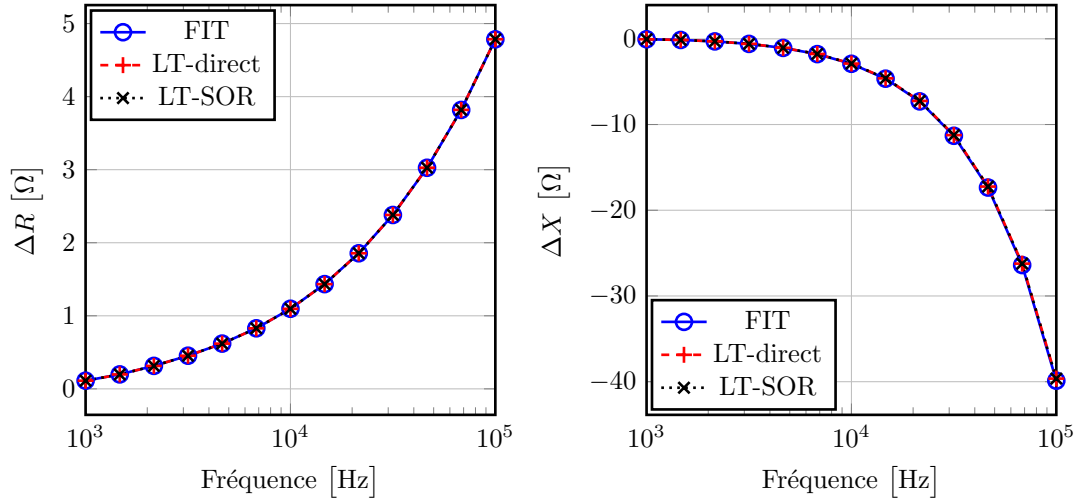


FIGURE 6.10 – Parties réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) de la variation d'impédance pour une barre conductrice (cas test #3.1 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 2610$ ).

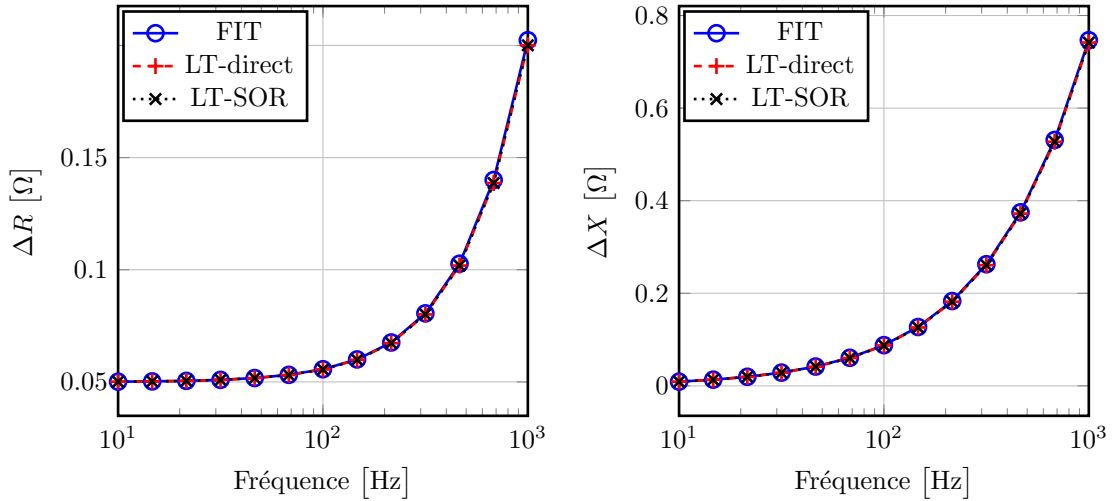


FIGURE 6.11 – Parties réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) de la variation d'impédance pour une barre conductrice et magnétique (cas test #3.2 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m,  $\mu_{r,1} = 100$  et  $N_{elem} = 2610$ ).

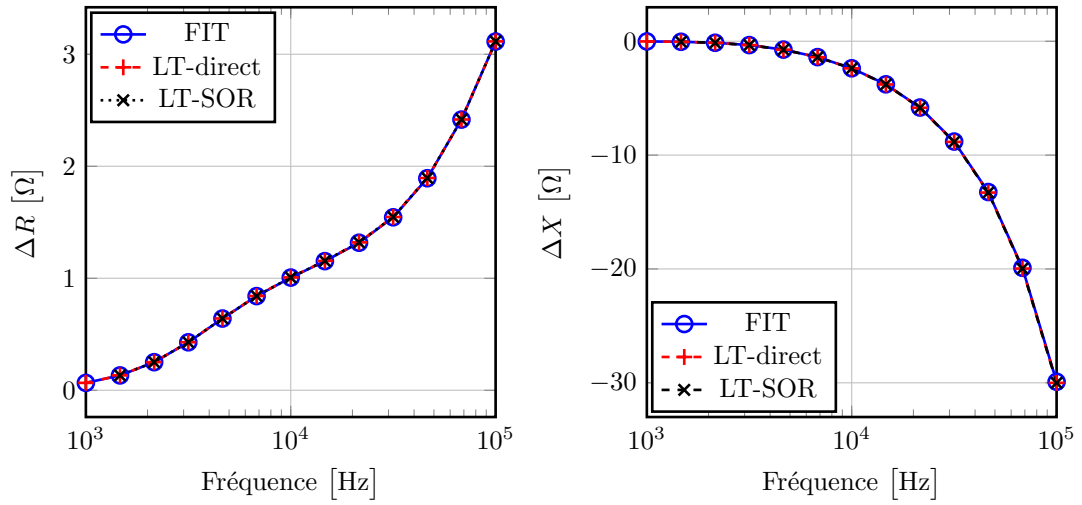


FIGURE 6.12 – Parties réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) de la variation d'impédance pour un tube conducteur (cas test #4.1 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 2640$ ).

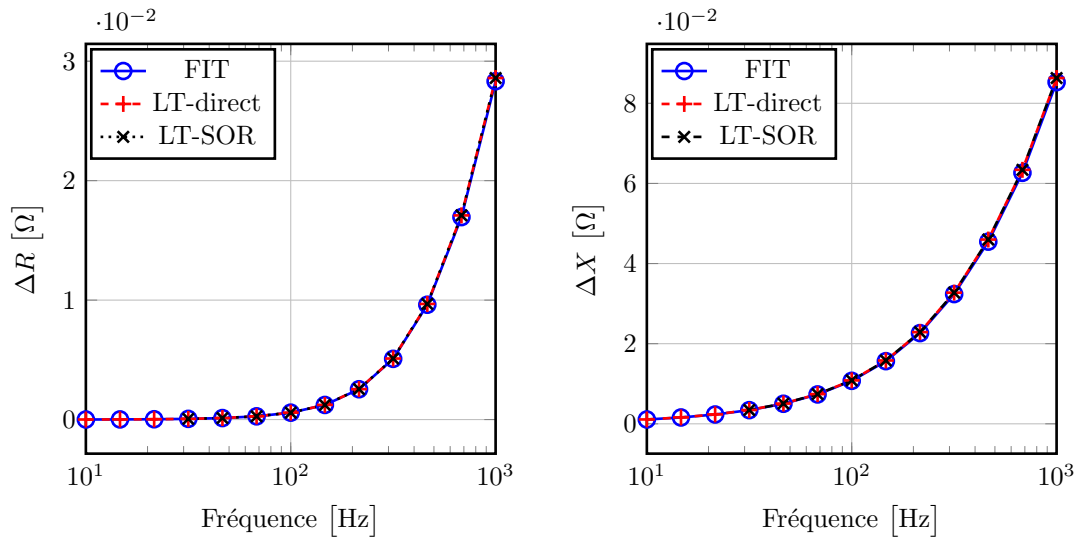


FIGURE 6.13 – Parties réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) de la variation d'impédance pour un tube conducteur et magnétique (cas test #4.2 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m,  $\mu_{r,1} = 100$  et  $N_{elem} = 2640$ ).

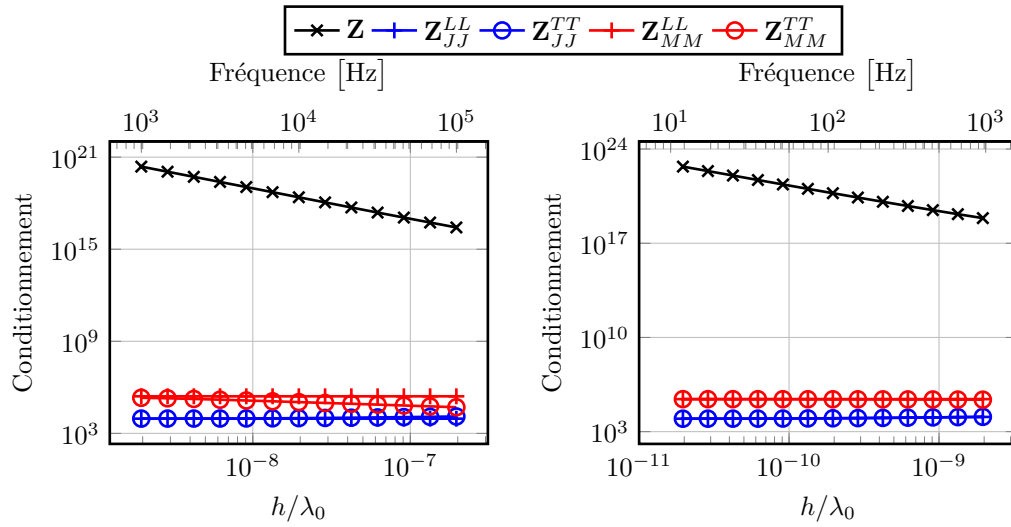


FIGURE 6.14 – Conditionnement des blocs matriciels pour une barre conductrice (cas test #3.1 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 2610$ , à gauche) et pour une barre conductrice et magnétique (cas test #3.2 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m,  $\mu_{r,1} = 100$  et  $N_{elem} = 2610$ , à droite).

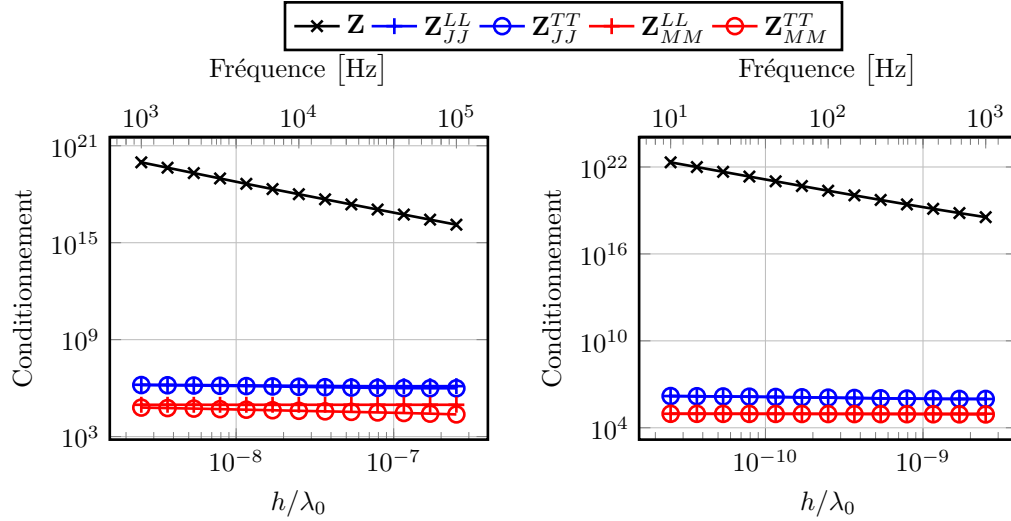


FIGURE 6.15 – Conditionnement des blocs matriciels pour un tube conducteur (cas test #4.1 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 2640$ , à gauche) et pour un tube conducteur et magnétique (cas test #4.2 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m,  $\mu_{r,1} = 100$  et  $N_{elem} = 2640$ , à droite).

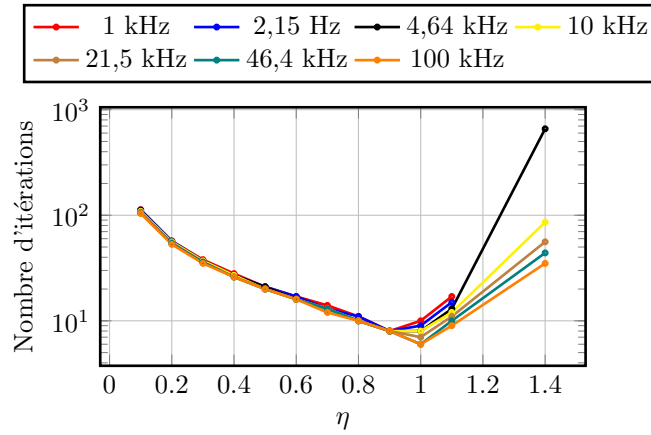


FIGURE 6.16 – Nombre d’itérations nécessaire pour obtenir une erreur  $\epsilon(\mathbf{X})$  inférieure à  $10^{-6}$  pour une barre conductrice (cas test #3.1 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 2610$ ) pour différentes valeurs du paramètre de relaxation  $\eta$ .

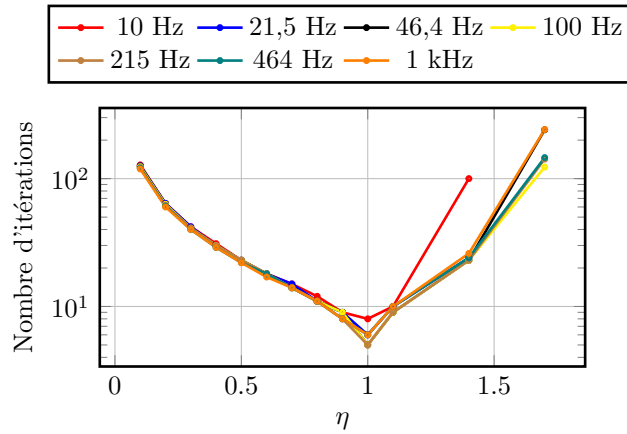


FIGURE 6.17 – Nombre d’itérations nécessaire pour obtenir une erreur  $\epsilon(\mathbf{X})$  inférieure à  $10^{-6}$  pour une barre conductrice et magnétique (cas test #3.2 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m,  $\mu_{r,1} = 100$  et  $N_{elem} = 2610$ ) pour différentes valeurs du paramètre de relaxation  $\eta$ .

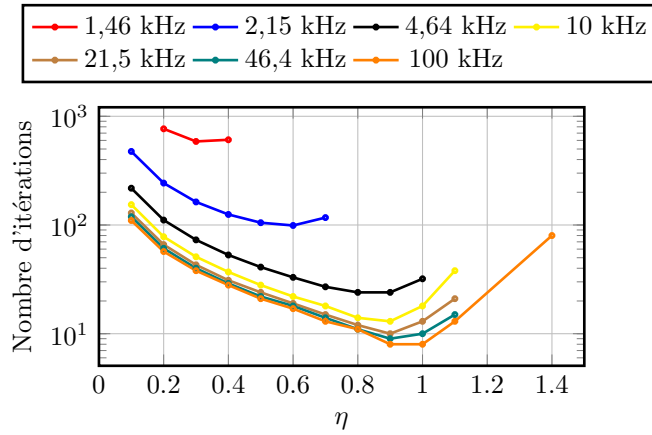


FIGURE 6.18 – Nombre d'itérations nécessaire pour obtenir une erreur  $\epsilon(\mathbf{X})$  inférieure à  $10^{-6}$  pour un tube conducteur (cas test #4.1 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 2640$ ) pour différentes valeurs du paramètre de relaxation  $\eta$ .

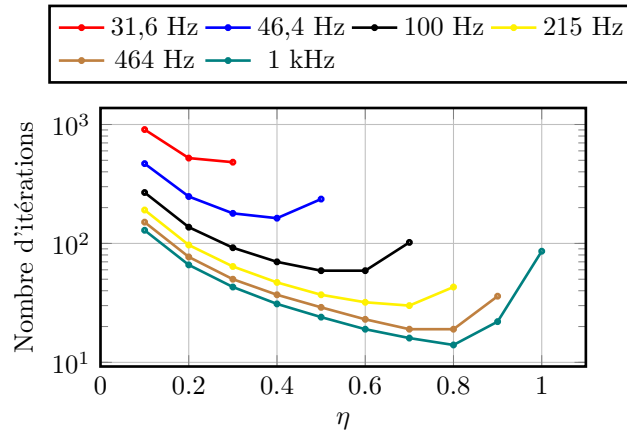


FIGURE 6.19 – Nombre d'itérations nécessaire pour obtenir une erreur  $\epsilon(\mathbf{X})$  inférieure à  $10^{-6}$  pour un tube conducteur et magnétique (cas test #4.2 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m,  $\mu_{r,1} = 100$  et  $N_{elem} = 2640$ ) pour différentes valeurs du paramètre de relaxation  $\eta$ .

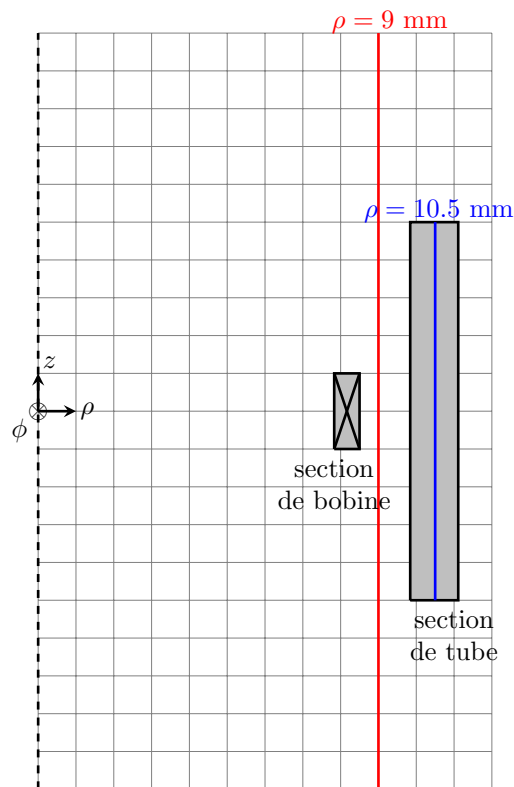


FIGURE 6.20 – Représentation de la configuration du cas test #4 dans le demi-plan  $\phi = 0^\circ$ ,  $\rho > 0$  mm.

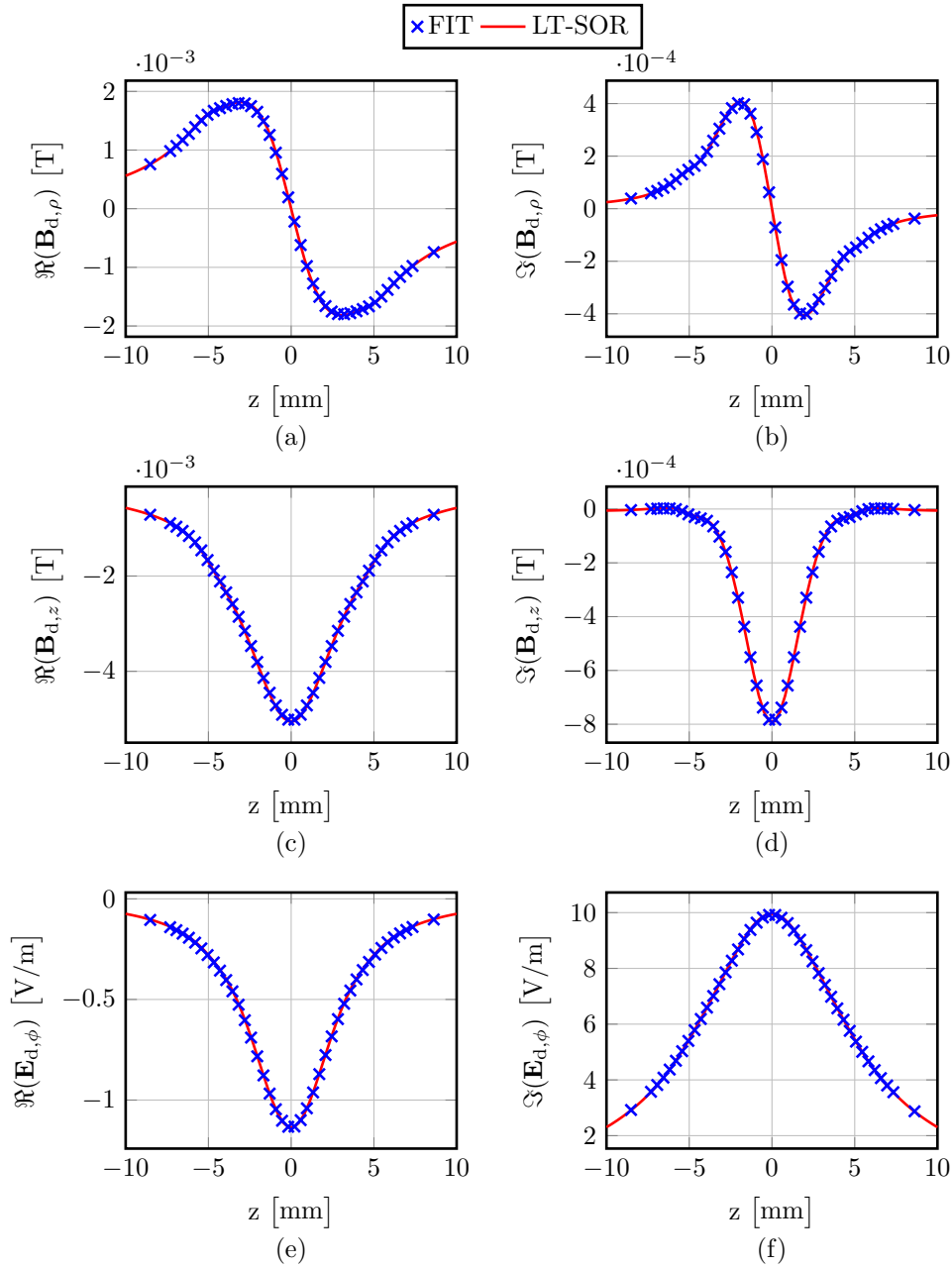


FIGURE 6.21 – Parties réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) des composantes des champs électromagnétiques en  $(\phi = 0^\circ, \rho = 9 \text{ mm})$  pour un tube conducteur (cas test #4.1 avec  $\sigma_1 = 10 \text{ MS/m}$  et  $N_{elem} = 2640$ ) à une fréquence  $f = 100 \text{ kHz}$ .

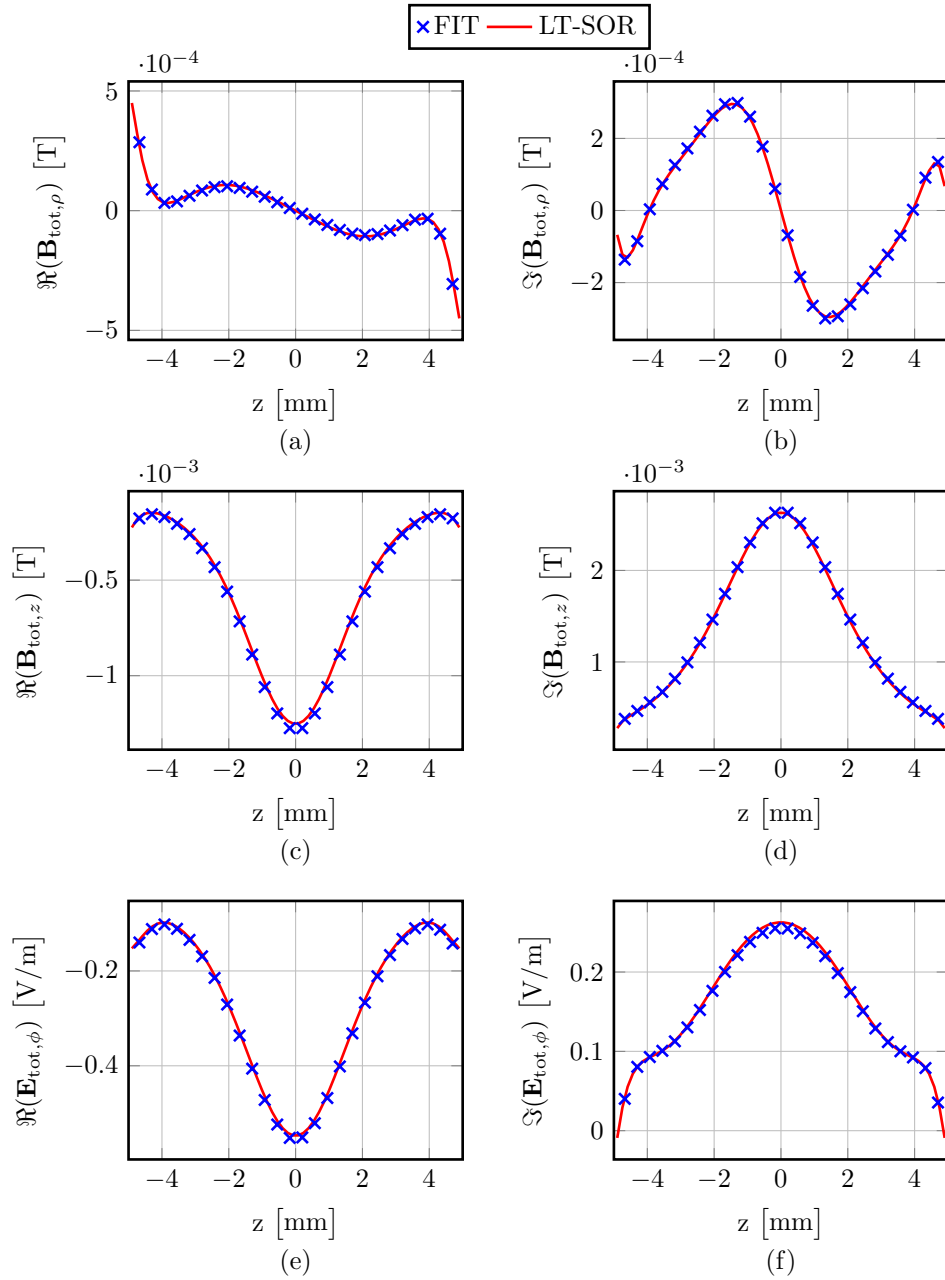


FIGURE 6.22 – Parties réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) des composantes des champs électromagnétiques en  $(\phi = 0^\circ, \rho = 10,5 \text{ mm})$  pour un tube conducteur (cas test #4.1 avec  $\sigma_1 = 10 \text{ MS/m}$  et  $N_{elem} = 2640$ ) à une fréquence  $f = 100 \text{ kHz}$ .

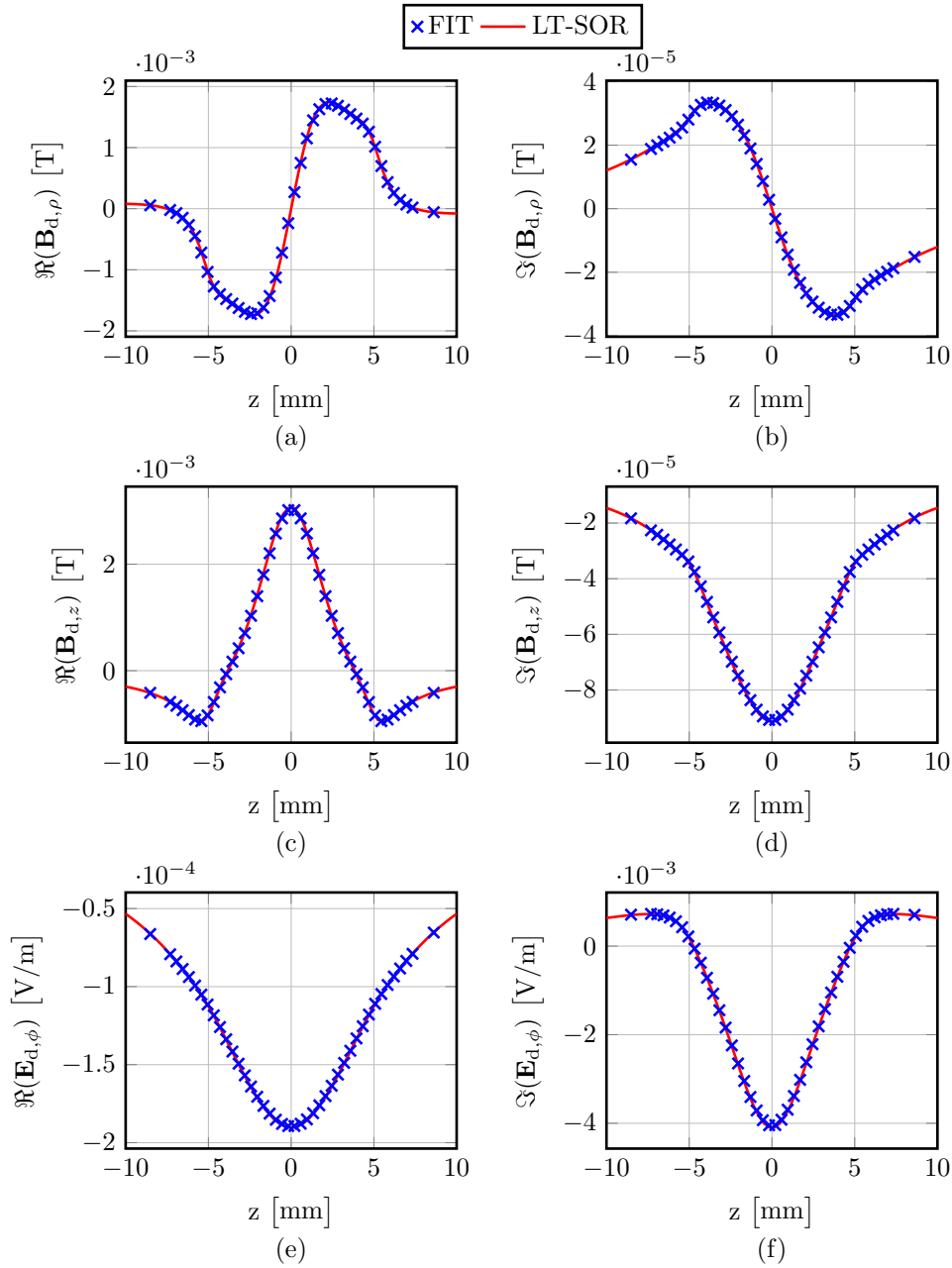


FIGURE 6.23 – Parties réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) des composantes des champs électromagnétiques en ( $\phi = 0^\circ, \rho = 9$  mm) pour un tube conducteur (cas test #4.2 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m,  $\mu_{r,1} = 100$  et  $N_{elem} = 2640$ ) à une fréquence  $f = 100$  Hz).

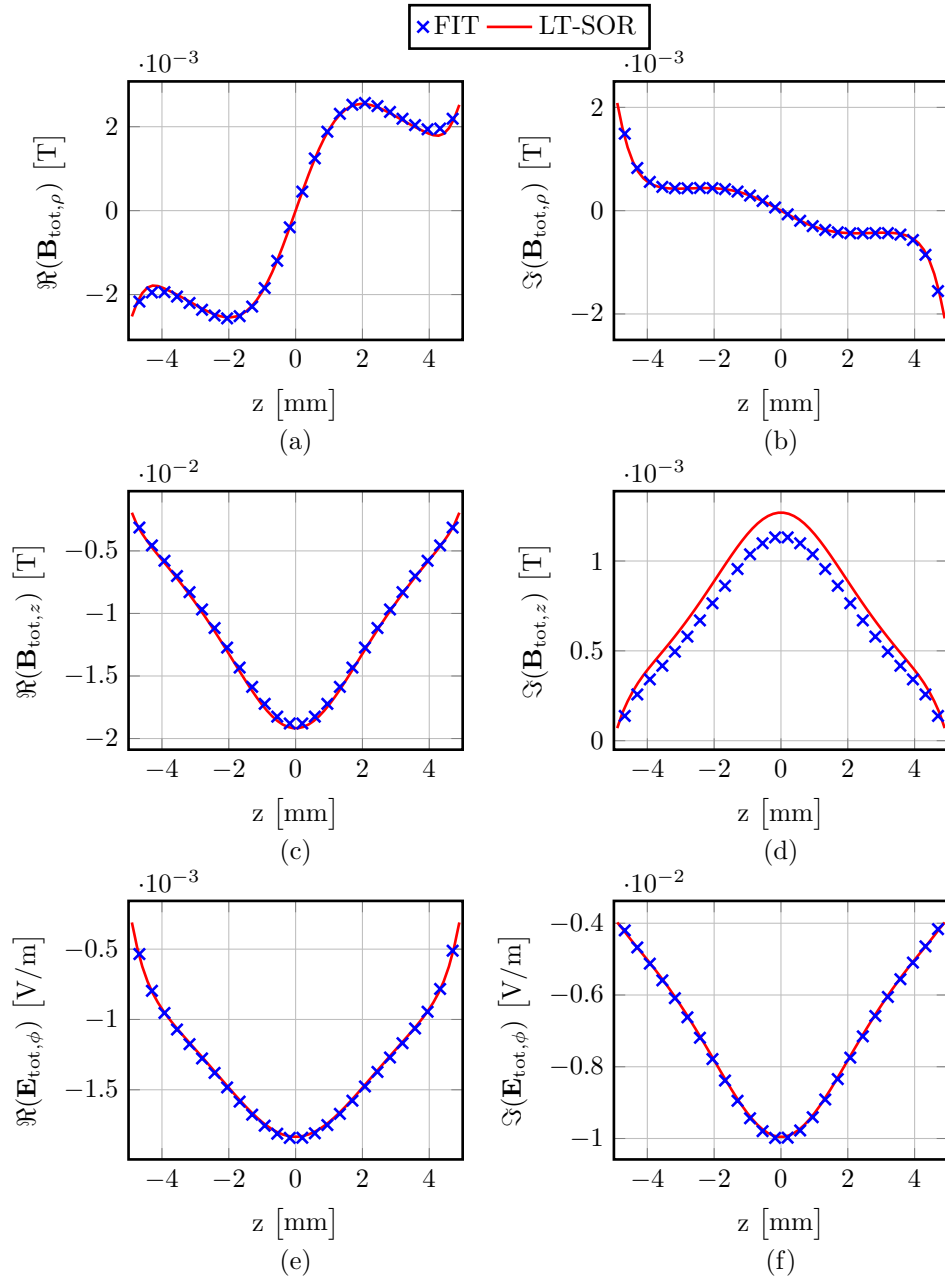


FIGURE 6.24 – Parties réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) des composantes des champs électromagnétiques en  $(\phi = 0^\circ, \rho = 10.5 \text{ mm})$  pour un tube conducteur (cas test #4.2 avec  $\sigma_1 = 10 \text{ MS/m}$ ,  $\mu_{r,1} = 100$  et  $N_{elem} = 2640$ ) à une fréquence  $f = 100 \text{ Hz}$ .

### Configuration tridimensionnelle

Nous étudions maintenant le comportement de la variation d'impédance et des champs électromagnétiques lorsque le tube est *aplati*, c'est-à-dire lorsque sa section est une ellipse dont l'un des rayons augmente. Il s'agit du cas test #5 de l'annexe E dont la conductivité est fixée à  $\sigma_1 = 1$  MS/m et qui est discrétisé en 2640 quadrilatères. Soit  $R_y = 9.84$  mm le petit rayon de la section du tube, on définit le grand rayon par

$$R_x = R_y \left( 1 + \frac{\alpha}{100} \right)$$

où  $\alpha$  est un coefficient variable en fonction de l'aplatissement du tube.

La figure 6.25 présente la variation d'impédance  $\Delta Z$  obtenue par le théorème de réciprocité (D.2.1) après la mise en œuvre du schéma itératif de l'algorithme 3 (LT-SOR) pour trois fréquences,  $f = 100$  kHz,  $f = 250$  kHz et  $f = 500$  kHz en fonction du coefficient  $\alpha$ . Pour  $\alpha = 0$  on obtient un tube à section circulaire et les résultats coïncident avec les résultats obtenus par le code FIT2,5D. On observe que plus la fréquence est élevée, plus la variation d'impédance varie avec le coefficient  $\alpha$ . Cependant on ne peut savoir si cette variation est due à l'éloignement de la pièce par rapport à la bobine ou à la déformation du tube. La figure 6.27 présente les champs électrique et magnétique calculés à partir des formules de représentation intégrale (3.1.9) pour une fréquence  $f = 100$  kHz. Les composantes  $\mathbf{B}_{\text{tot},\rho}$ ,  $\mathbf{B}_{\text{tot},z}$  et  $\mathbf{E}_{\text{tot},\phi}$  des champs totaux magnétique et électrique sont calculées dans le tube dans le plan  $\phi = 0^\circ$  selon l'axe  $\rho = R_x + 0.3$  mm et dans le plan  $\phi = 90^\circ$  selon l'axe  $\rho = R_y + 0.3$  mm, voir figure 6.26. Les champs calculés dans le plan  $\phi = 0^\circ$ , en bleu sur la figure 6.27, mettent en avant l'effet de l'éloignement de la bobine tandis que les champs calculés dans le plan  $\phi = 90^\circ$ , en rouge sur la figure 6.27 mettent en avant l'effet de la déformation de la pièce. On observe alors que toutes les composantes des champs présentées varient fortement avec l'éloignement de la bobine. En revanche, la déformation du tube ne se ressent presque pas sur la composante  $\mathbf{B}_{\text{tot},\rho}$  du champ d'induction magnétique.

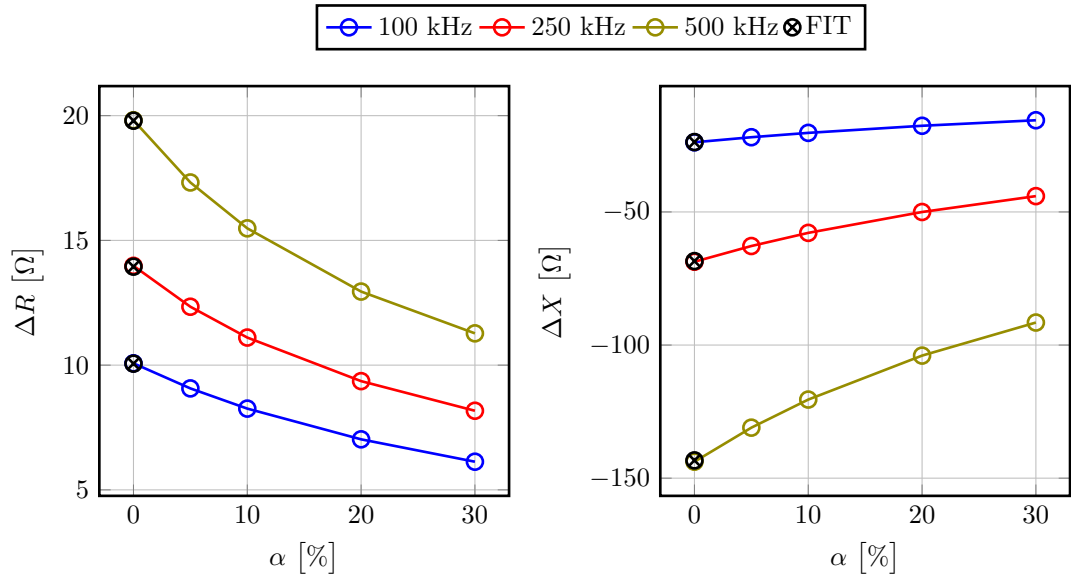


FIGURE 6.25 – Parties réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) de la variation d'impédance pour un tube conducteur à section elliptique (cas test #5 avec  $\sigma_1 = 1$  MS/m et  $N_{elem} = 2640$ ).

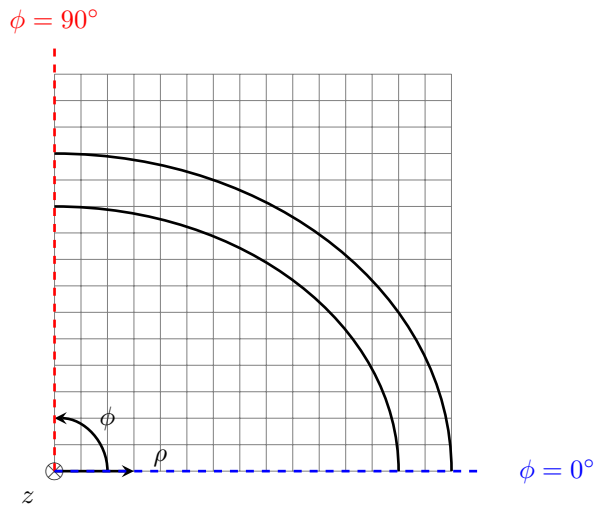


FIGURE 6.26 – Représentation de la configuration du cas test #5 dans le quart de plan  $z = 0$  mm,  $0^\circ < \phi < 90^\circ$ .

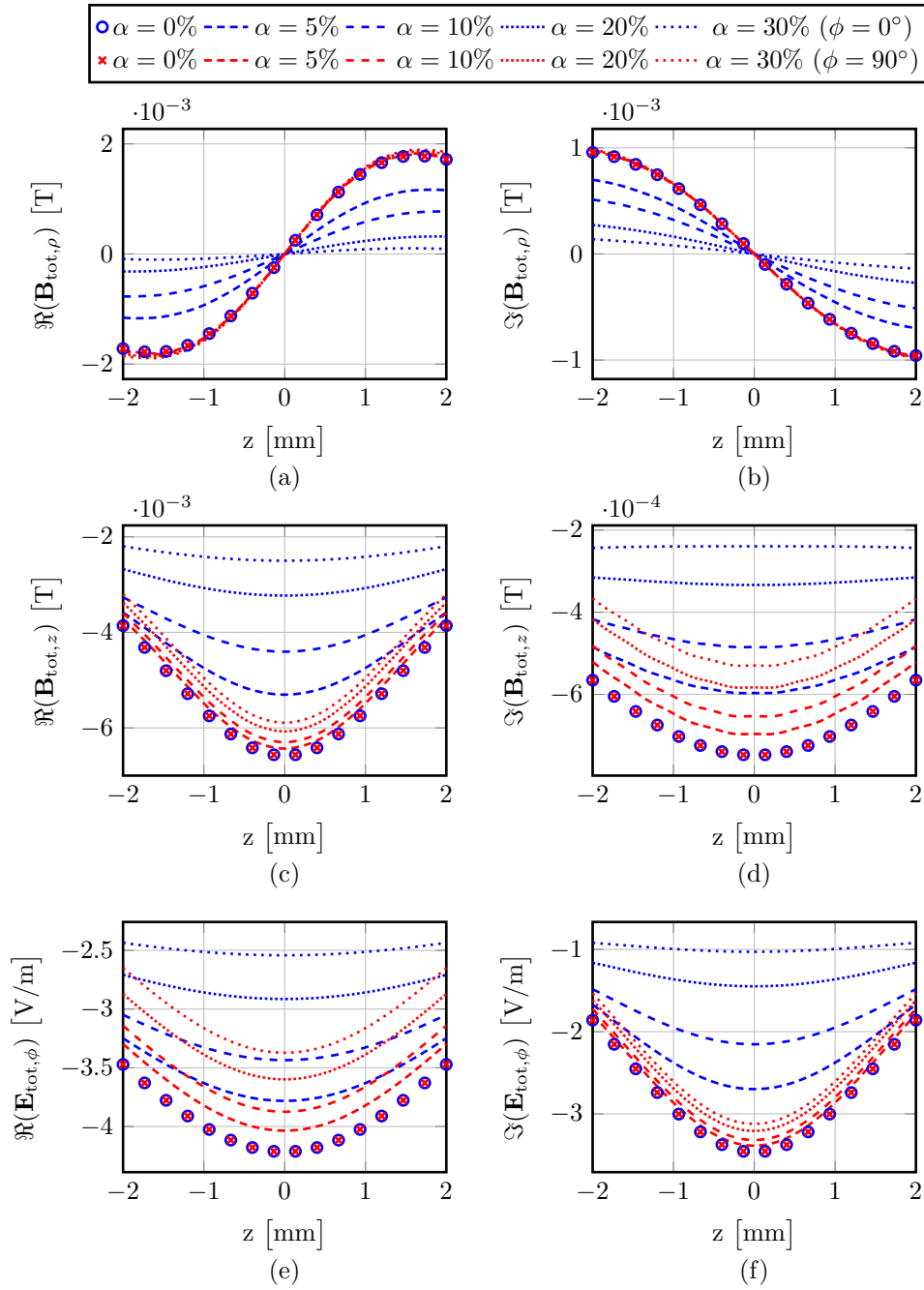


FIGURE 6.27 – Parties réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) des composantes des champs électromagnétiques en ( $\phi = 0^\circ, \rho = R_x + 0,3$  mm) et en ( $\phi = 90^\circ, \rho = R_y + 0,3$  mm) pour un tube à section elliptique (cas test #5 avec  $\sigma_1 = 1$  MS/m et  $N_{elem} = 2640$ ) à une fréquence  $f = 100$  kHz).

## 6.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons construit deux schémas itératifs par blocs qui peuvent être résolus par la méthode de surrelaxation successive. Ces schémas permettent de résoudre de manière itérative un problème global composé de sous problèmes bien conditionnés. Le premier est dédié à la formulation  $LT(1,0,0,1)$  et basé sur un préconditionneur multiplicatif de Calderon construit avec les fonctions duales de Buffa-Christiansen. Le second est dédié à la formulation  $LT$ .

Ce dernier schéma nous permet de disposer d'une formulation pour le problème de Maxwell, précise pour des pièces conductrices et éventuellement magnétiques, à des fréquences typiques du contrôle non destructif par courants de Foucault. Cette formulation est basée sur la décomposition Loop-Tree de la formulation PMCHWT et peut-être résolue par la méthode de surrelaxation successive appliquée à un algorithme itératif à quatre blocs. Les blocs sont déterminés par la physique des traces des champs incidents qui constituent la donnée du problème ainsi que par la physique des densités de courants surfaciques qui constituent l'inconnue du problème.

Troisième partie

Premiers éléments d'analyse  
asymptotique



## Chapitre 7

# Des équations intégrales du problème de Maxwell au problème courants de Foucault

### Sommaire

---

7.1	Réécriture du problème de Maxwell avec décomposition Loop-Tree . . . . .	156
7.2	Développement asymptotique du problème de Maxwell avec décomposition Loop-Tree . . . . .	159
7.2.1	Comportement asymptotique . . . . .	159
7.2.2	Développement asymptotique . . . . .	160
7.2.3	Lien avec la formulation Hiptmair . . . . .	162
7.3	Conclusion . . . . .	167

---

Dans ce chapitre, nous étudions le comportement asymptotique de la formulation LT sous l'hypothèse **(H3)**. Cette hypothèse est vérifiée pour les conducteurs testés à basse fréquence, en général, et correspond à l'hypothèse de l'approximation courants de Foucault. Dans une première partie nous réécrivons le problème discret de la formulation LT en fonction des paramètres adimensionnels  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de l'hypothèse **(H3)**. Ainsi, nous pouvons donner dans une deuxième partie le comportement puis le développement asymptotique du problème LT lorsque le paramètre  $\gamma_1$  est proche de zéro. Dans une troisième partie, nous établissons que la formulation courants de Foucault proposée par Hiptmair correspond au premier ordre du développement asymptotique de la formulation LT. Ce résultat nous permet de définir un problème équivalent au problème Hiptmair dont la matrice d'impédance est bien conditionnée.

## 7.1 Réécriture du problème de Maxwell avec décomposition Loop-Tree

Dans cette partie nous allons réécrire le problème discret de la formulation LT pour un milieu conducteur  $\Omega_1$  en fonction des paramètres adimensionnels  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  définis par (1.3.9) et (1.3.10) soit :

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma_1}}, \\ \gamma_2 &= L \sqrt{\sigma_1 \mu_0 \omega}\end{aligned}$$

où  $L$  est la taille caractéristique de  $\Omega_1$ .

**Remarque 7.1.1.** *Le même travail peut-être effectué de manière équivalente avec le problème continu.*

Le problème discret de la formulation LT (4.2.4) s'exprime comme

$$(\mathbf{Z}_{0,LT} + \mathbf{Z}_{1,LT})\mathbf{X}_{LT} = \mathbf{Y}_{LT} \quad (7.1.1)$$

avec, pour  $\ell \in \{0,1\}$ ,

$$\mathbf{Z}_{\ell,LT} = \begin{bmatrix} si\omega\mu_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,LL} & si\omega\mu_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,LT} & \mathbf{B}_\times^{\ell,LL} & \mathbf{B}_\times^{\ell,LT} \\ si\omega\mu_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,TL} & si\omega\mu_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,TT} + \frac{si}{\omega\varepsilon_\ell} \mathbf{C}_\times^{\ell,TT} & \mathbf{B}_\times^{\ell,TL} & \mathbf{B}_\times^{\ell,TT} \\ -\mathbf{B}_\times^{\ell,LL} & -\mathbf{B}_\times^{\ell,LT} & si\omega\varepsilon_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,LL} & si\omega\varepsilon_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,LT} \\ -\mathbf{B}_\times^{\ell,TL} & -\mathbf{B}_\times^{\ell,TT} & si\omega\varepsilon_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,TL} & si\omega\varepsilon_\ell \mathbf{A}_\times^{\ell,TT} + \frac{si}{\omega\mu_\ell} \mathbf{C}_\times^{\ell,TT} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_{LT} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{J_L} \\ \mathbf{X}^{J_T} \\ \mathbf{X}^{M_L} \\ \mathbf{X}^{M_T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_{LT} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^{J_L} \\ \mathbf{Y}^{J_T} \\ \mathbf{Y}^{M_L} \\ \mathbf{Y}^{M_T} \end{bmatrix}.$$

Les coefficients apparaissant devant les opérateurs matriciels dans la matrice d'impédance vérifient

$$\begin{aligned}\omega\varepsilon_0 &= \frac{\gamma_1\gamma_2}{L\eta_0}, & \omega\varepsilon_1 &= \frac{\gamma_1\gamma_2}{L\eta_0} \left( \varepsilon_{r,1}^d - \frac{si}{\gamma_1^2} \right), \\ \omega\mu_0 &= \frac{\gamma_1\gamma_2\eta_0}{L}, & \omega\mu_1 &= \frac{\gamma_1\gamma_2\eta_0\mu_{r,1}}{L}\end{aligned}$$

et on rappelle que  $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ . Il nous faut maintenant écrire les opérateurs matriciels  $\mathbf{A}_\times$ ,  $\mathbf{B}_\times$  et  $\mathbf{C}_\times$  en fonction de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . Pour cela, on commence par réécrire les nombres d'onde  $\kappa_0$  et  $\kappa_1$ , respectivement associés aux propriétés physiques de  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$ ,

$$\begin{aligned}\kappa_0 &= \omega\sqrt{(\varepsilon_0\mu_0)} = \frac{\gamma_1\gamma_2}{L}, \\ \kappa_1 &= \kappa_0\sqrt{\varepsilon_{r,1}\mu_{r,1}} = \frac{\gamma_2\sqrt{\mu_{r,1}}(\gamma_1^2\varepsilon_{r,1}^d - si)^{1/2}}{L}.\end{aligned}$$

On peut définir une version adimensionnée de ces nombres d'onde, que l'on note respectivement  $\bar{\kappa}_0$  et  $\bar{\kappa}_1$ ,

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}_0 &= \gamma_1 \gamma_2, \\ \bar{\kappa}_1 &= \gamma_2 \sqrt{\mu_{r,1}} (\gamma_1^2 \varepsilon_{r,1}^d - \mathbf{s}i)^{1/2}.\end{aligned}$$

La notation *barrée* sera utilisée dans la suite pour exprimer le caractère adimensionnel des grandeurs. La version adimensionnelle  $\bar{g}_{\kappa_\ell}$  du noyau de Green  $g_{\kappa_\ell}$  associé aux propriétés physiques de  $\Omega_\ell$ ,  $\ell \in \{0,1\}$  donné par (2.2.1), est ainsi définie par

$$\bar{g}_{\kappa_\ell}(R) = g_{\kappa_\ell}(R)L = \frac{\exp(-\mathbf{s}i\bar{\kappa}_\ell|\bar{R}|)}{4\pi|\bar{R}|}, \quad \bar{R} \neq 0,$$

avec

$$\bar{R} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{L} = \frac{R}{L}.$$

Les noyaux de Green  $\bar{g}_{\kappa_0}$  et  $\bar{g}_{\kappa_1}$  s'expriment donc, en fonction de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , comme

$$\begin{aligned}\bar{g}_{\kappa_0}(\bar{R}) &= \frac{\exp(-\mathbf{s}i\bar{\kappa}_0|\bar{R}|)}{4\pi|\bar{R}|} = \frac{\exp(-\mathbf{s}i\gamma_1\gamma_2|\bar{R}|)}{4\pi|\bar{R}|}, \\ \bar{g}_{\kappa_1}(\bar{R}) &= \frac{\exp(-\mathbf{s}i\bar{\kappa}_1|\bar{R}|)}{4\pi|\bar{R}|} = \frac{\exp(-\mathbf{s}i\gamma_2\sqrt{\mu_{r,1}}(\gamma_1^2\varepsilon_{r,1}^d - \mathbf{s}i)^{1/2}|\bar{R}|)}{4\pi|\bar{R}|}.\end{aligned}$$

Par conséquent, le gradient et le gradient double des noyaux de Green s'écrivent

$$\begin{aligned}\nabla g_{\kappa_\ell}(R) &= \frac{\nabla \bar{g}_{\kappa_\ell}(\bar{R})}{L^2} = \frac{\hat{R}}{L^2} \left( -\mathbf{s}i\bar{\kappa}_\ell - \frac{1}{|\bar{R}|} \right) \bar{g}_{\kappa_\ell}(\bar{R}), \\ \nabla \nabla g_{\kappa_\ell}(R) &= \frac{\nabla \nabla \bar{g}_{\kappa_\ell}(\bar{R})}{L^3} \\ &= \frac{\mathbf{Id}}{L^3|\bar{R}|} \left( -\mathbf{s}i\bar{\kappa}_\ell - \frac{1}{|\bar{R}|} \right) \bar{g}_{\kappa_\ell}(\bar{R}) \\ &\quad + \frac{\hat{R} \otimes \hat{R}}{L^3} \left( \frac{3\mathbf{s}i\bar{\kappa}_\ell}{|\bar{R}|} + \frac{3}{|\bar{R}|^2} - \bar{\kappa}_\ell^2 \right) \bar{g}_{\kappa_\ell}(\bar{R})\end{aligned}$$

avec  $\hat{R} = R/|R|$ . Les composantes des opérateurs matriciels  $\mathbf{A}_\times$ ,  $\mathbf{B}_\times$  et  $\mathbf{C}_\times$  sont ainsi données par

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{A}_\times^{\ell,ij}\right)_{tb} &= L \left(\bar{\mathbf{A}}_\times^{\ell,ij}\right)_{tb} &&= L \int_{\bar{\Gamma}_h} \bar{\mathbf{u}}_t^i(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \int_{\bar{\Gamma}_h} \bar{\mathbf{u}}_b^j(\bar{\mathbf{x}}') \bar{g}_{\kappa_\ell}(\bar{R}) d\bar{\mathbf{x}}' d\bar{\mathbf{x}}, \\ \left(\mathbf{B}_\times^{\ell,ij}\right)_{tb} &= \left(\bar{\mathbf{B}}_\times^{\ell,ij}\right)_{tb} &&= \int_{\bar{\Gamma}_h} \bar{\mathbf{u}}_t^i(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \int_{\bar{\Gamma}_h} \nabla \bar{g}_{\kappa_\ell}(\bar{R}) \times \bar{\mathbf{u}}_b^j(\bar{\mathbf{x}}') d\bar{\mathbf{x}}' d\bar{\mathbf{x}}, \\ \left(\mathbf{C}_\times^{\ell,TT}\right)_{tb} &= \frac{1}{L} \left(\bar{\mathbf{C}}_\times^{\ell,TT}\right)_{tb} &&= \frac{1}{L} \int_{\bar{\Gamma}_h} \bar{\mathbf{u}}_t^T(\bar{\mathbf{x}}) \int_{\bar{\Gamma}_h} \bar{\mathbf{u}}_b^T(\bar{\mathbf{x}}') \cdot \nabla \nabla \bar{g}_{\kappa_\ell}(\bar{R}) d\bar{\mathbf{x}}' d\bar{\mathbf{x}},\end{aligned}$$

avec  $(1 \leq t, b \leq N)$  où  $N$  est le nombre de fonctions tests ou bases,  $(i, j) = (L, T)$ ,

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \bar{\Gamma}_h = \frac{\Gamma_h}{L} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}) = L\mathbf{u}(\mathbf{x}).$$

Et finalement, les blocs de la matrice d'impédance s'écrivent en termes de sous-blocs adimensionnels comme

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{0,LT}^{JJ} &= \eta_0^2 \mathbf{Z}_{0,LT}^{MM} = si\eta_0 \begin{bmatrix} \gamma_1\gamma_2 \bar{\mathbf{A}}_{\times}^{0,LL} & \gamma_1\gamma_2 \bar{\mathbf{A}}_{\times}^{0,LT} \\ \gamma_1\gamma_2 \bar{\mathbf{A}}_{\times}^{0,TL} & \gamma_1\gamma_2 \bar{\mathbf{A}}_{\times}^{0,TT} + (\gamma_1\gamma_2)^{-1} \bar{\mathbf{C}}_{\times}^{0,TT} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Z}_{1,LT}^{JJ} &= si\eta_0 \begin{bmatrix} \gamma_1\gamma_2\mu_{r,1} \bar{\mathbf{A}}_{\times}^{1,LL} & \gamma_1\gamma_2\mu_{r,1} \bar{\mathbf{A}}_{\times}^{1,LT} \\ \gamma_1\gamma_2\mu_{r,1} \bar{\mathbf{A}}_{\times}^{1,TL} & \gamma_1\gamma_2\mu_{r,1} \bar{\mathbf{A}}_{\times}^{1,TT} + \left(\gamma_1\gamma_2 \left(\varepsilon_{r,1}^d - \frac{si}{\gamma_1^2}\right)\right)^{-1} \bar{\mathbf{C}}_{\times}^{1,TT} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Z}_{1,LT}^{MM} &= \frac{si}{\eta_0} \begin{bmatrix} \gamma_1\gamma_2 \left(\varepsilon_{r,1}^d - \frac{si}{\gamma_1^2}\right) \bar{\mathbf{A}}_{\times}^{1,LL} & \gamma_1\gamma_2 \left(\varepsilon_{r,1}^d - \frac{si}{\gamma_1^2}\right) \bar{\mathbf{A}}_{\times}^{1,LT} \\ \gamma_1\gamma_2 \left(\varepsilon_{r,1}^d - \frac{si}{\gamma_1^2}\right) \bar{\mathbf{A}}_{\times}^{1,TL} & \gamma_1\gamma_2 \left(\varepsilon_{r,1}^d - \frac{si}{\gamma_1^2}\right) \bar{\mathbf{A}}_{\times}^{1,TT} + (\gamma_1\gamma_2\mu_{r,1})^{-1} \bar{\mathbf{C}}_{\times}^{1,TT} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Z}_{0,LT}^{JM} &= -\mathbf{Z}_{0,LT}^{MJ} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{\times}^{0,LL} & \bar{\mathbf{B}}_{\times}^{0,LT} \\ \bar{\mathbf{B}}_{\times}^{0,TL} & \bar{\mathbf{B}}_{\times}^{0,TT} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Z}_{1,LT}^{JM} &= -\mathbf{Z}_{1,LT}^{MJ} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{\times}^{1,LL} & \bar{\mathbf{B}}_{\times}^{1,LT} \\ \bar{\mathbf{B}}_{\times}^{1,TL} & \bar{\mathbf{B}}_{\times}^{1,TT} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Les composantes du second membre s'écrivent quant à elles

$$\begin{aligned} (\mathbf{Y}^{J_i})_t &= \eta_0 LJ \left(\bar{\mathbf{Y}}^{J_i}\right)_t = -si\gamma_1\gamma_2\eta_0 LJ \int_{\bar{\Gamma}_h} \bar{\mathbf{u}}_t^i(\mathbf{x}) \cdot \bar{\gamma}^0 \int_{\bar{\Omega}_{\text{inc}}} \bar{\mathbf{J}}_{\text{inc}}(\bar{\mathbf{x}}') \bar{g}_{\kappa_0}(\bar{R}) d\bar{\mathbf{x}}' d\bar{\mathbf{x}}, \\ (\mathbf{Y}^{M_i})_t &= LJ \left(\bar{\mathbf{Y}}^{M_i}\right)_t = LJ \int_{\bar{\Gamma}_h} \bar{\mathbf{u}}_t^i(\mathbf{x}) \cdot \bar{\gamma}^0 \nabla \times \int_{\bar{\Omega}_{\text{inc}}} \bar{\mathbf{J}}_{\text{inc}}(\bar{\mathbf{x}}') \bar{g}_{\kappa_0}(\bar{R}) d\bar{\mathbf{x}}' d\bar{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

avec  $1 \geq t \geq N$ ,  $i = (L, T)$  et

$$\bar{\mathbf{J}}_{\text{inc}}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{x})}{J}$$

où  $J$  est la grandeur caractéristique de  $\mathbf{J}_s$ . Les fonctions de Green  $\bar{g}_{\kappa}$  dépendant de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , il en est donc de même pour les divers blocs adimensionnels apparaissant dans les expressions ci-dessus.

**Remarque 7.1.2.** *Les comportements obtenus pour les matrices  $\mathbf{Z}_{0,LT}$  et  $\mathbf{Z}_{1,LT}$  montrent qu'il n'existe pas de pondération permettant de mettre à niveau ces deux matrices.*

## 7.2 Développement asymptotique du problème de Maxwell avec décomposition Loop-Tree

### 7.2.1 Comportement asymptotique

On se place sous l'hypothèse **(H3)**, c'est à dire que l'on a  $\gamma_1 \ll 1$  et  $\gamma_2 = \mathcal{O}(1)$ , et l'on donne le comportement asymptotique selon le petit paramètre  $\gamma_1$  du problème discret (4.2.4). Pour cela, il est nécessaire de donner le développement asymptotique des noyaux de Green associés à l'air et à la pièce, de leur gradient et de leur gradient double.

Pour le noyau de Green associé à l'air, on obtient les développements suivants, dont les expressions détaillées des différents termes sont données en annexe F :

$$\begin{aligned}\bar{g}_{\kappa_0} &= \bar{g}_{\kappa_0}^{(0)} + \bar{g}_{\kappa_0}^{(1)}\gamma_1 + \bar{g}_{\kappa_0}^{(2)}\gamma_1^2 + \bar{g}_{\kappa_0}^{(3)}\gamma_1^3 + \bar{g}_{\kappa_0}^{(4)}\gamma_1^4 + o(\gamma_1^4), \\ \nabla\bar{g}_{\kappa_0} &= \nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(0)} + \nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(2)}\gamma_1^2 + \nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(3)}\gamma_1^3 + \nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(4)}\gamma_1^4 + o(\gamma_1^4), \\ \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_0} &= \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(0)} + \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(2)}\gamma_1^2 + \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(3)}\gamma_1^3 + \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(4)}\gamma_1^4 + o(\gamma_1^4).\end{aligned}$$

On en déduit le comportement asymptotique au voisinage de  $\gamma_1 = 0$  des opérateurs matriciels associés à l'air :

$$\mathbf{A}_{\times}^0 = \mathcal{O}(1), \quad \mathbf{B}_{\times}^0 = \mathcal{O}(1), \quad \mathbf{C}_{\times}^0 = \mathcal{O}(1),$$

puis le comportement de la matrice d'impédance associée à l'air

$$\mathbf{Z}_{0,LT} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}(\gamma_1) & \mathcal{O}(\gamma_1) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(\gamma_1) & \mathcal{O}(\gamma_1^{-1}) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(\gamma_1) & \mathcal{O}(\gamma_1) \\ \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(\gamma_1) & \mathcal{O}(\gamma_1^{-1}) \end{bmatrix}.$$

On peut aussi déduire du développement du noyau de Green  $\bar{g}_{\kappa_0}$ , le comportement asymptotique du second membre :

$$\mathbf{Y}_{LT} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}(\gamma_1) \\ \mathcal{O}(\gamma_1) \\ \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(1) \end{bmatrix}.$$

Pour le noyau de Green associé à la pièce, on trouve les développements suivants, dont les expressions détaillées des différents termes sont données en annexe F :

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \kappa_1^{(0)} + \kappa_1^{(2)}\gamma_1^2 + \kappa_1^{(4)}\gamma_1^4 + o(\gamma_1^4) \\ \bar{g}_{\kappa_1} &= \bar{g}_{\kappa_1}^{(0)} + \bar{g}_{\kappa_1}^{(2)}\gamma_1^2 + \bar{g}_{\kappa_1}^{(4)}\gamma_1^4 + o(\gamma_1^4) \\ \nabla\bar{g}_{\kappa_1} &= \nabla\bar{g}_{\kappa_1}^{(0)} + \nabla\bar{g}_{\kappa_1}^{(2)}\gamma_1^2 + \nabla\bar{g}_{\kappa_1}^{(4)}\gamma_1^4 + o(\gamma_1^4) \\ \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_1} &= \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_1}^{(0)} + \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_1}^{(2)}\gamma_1^2 + \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_1}^{(4)}\gamma_1^4 + o(\gamma_1^4).\end{aligned}$$

Le comportement asymptotique des opérateurs matriciels associés à la pièce est ainsi

$$\mathbf{A}_\times^1 = \mathcal{O}(1), \quad \mathbf{B}_\times^1 = \mathcal{O}(1), \quad \mathbf{C}_\times^1 = \mathcal{O}(1).$$

Pour obtenir le comportement de la matrice d'impédance associée à la pièce il nous faut de plus donner le développement suivant

$$\left( \gamma_1 \gamma_2 \left( \varepsilon_{r,1}^d - \frac{\mathbf{s}i}{\gamma_1^2} \right) \right)^{-1} = \frac{\mathbf{s}i \gamma_1}{\gamma_2} \left( \mathbf{s}i \varepsilon_{r,1}^d \gamma_1^2 + 1 \right)^{-1} = \frac{\mathbf{s}i}{\gamma_2} \left( \gamma_1 - \mathbf{s}i \varepsilon_{r,1}^d \gamma_1^3 - (\varepsilon_{r,1}^d)^2 \gamma_1^5 \right) + o(\gamma_1^5).$$

Finalement on obtient

$$\mathbf{Z}_{1,LT} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}(\gamma_1) & \mathcal{O}(\gamma_1) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(\gamma_1) & \mathcal{O}(\gamma_1) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(\gamma_1^{-1}) & \mathcal{O}(\gamma_1^{-1}) \\ \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(\gamma_1^{-1}) & \mathcal{O}(\gamma_1^{-1}) \end{bmatrix}$$

et donc

$$\mathbf{Z}_{LT} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}(\gamma_1) & \mathcal{O}(\gamma_1) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(\gamma_1) & \mathcal{O}(\gamma_1^{-1}) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(\gamma_1^{-1}) & \mathcal{O}(\gamma_1^{-1}) \\ \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(\gamma_1^{-1}) & \mathcal{O}(\gamma_1^{-1}) \end{bmatrix}.$$

## 7.2.2 Développement asymptotique

Soit le postulat que l'inconnue est décomposée selon

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{JL} &= (\mathbf{X}^{JL})^{(0)} + \gamma_1 (\mathbf{X}^{JL})^{(1)} + \gamma_1^2 (\mathbf{X}^{JL})^{(2)} + \dots, \\ \mathbf{X}^{JT} &= (\mathbf{X}^{JT})^{(0)} + \gamma_1 (\mathbf{X}^{JT})^{(1)} + \gamma_1^2 (\mathbf{X}^{JT})^{(2)} + \dots, \\ \mathbf{X}^{ML} &= (\mathbf{X}^{ML})^{(0)} + \gamma_1 (\mathbf{X}^{ML})^{(1)} + \gamma_1^2 (\mathbf{X}^{ML})^{(2)} + \dots, \\ \mathbf{X}^{MT} &= (\mathbf{X}^{MT})^{(0)} + \gamma_1 (\mathbf{X}^{MT})^{(1)} + \gamma_1^2 (\mathbf{X}^{MT})^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

La matrice  $\mathbf{Z}_{LT} = \mathbf{Z}_{0,LT} + \mathbf{Z}_{1,LT}$  se décompose selon

$$\mathbf{Z}_{LT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{Z}_{LT}^{(0)} + \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Z}_{LT}^{(1)} + \begin{bmatrix} \gamma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1 \end{bmatrix} \mathbf{Z}_{LT}^{(2)} + \dots$$

et le second membre  $\mathbf{Y}_{LT}$  selon

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^{JL} &= (\mathbf{Y}^{JL})^{(0)} + \gamma_1 (\mathbf{Y}^{JL})^{(1)} + \gamma_1^2 (\mathbf{Y}^{JL})^{(2)} + \dots, \\ \mathbf{Y}^{JT} &= \gamma_1^{-1} (\mathbf{Y}^{JT})^{(0)} + (\mathbf{Y}^{JT})^{(1)} + \gamma_1 (\mathbf{Y}^{JT})^{(2)} + \dots, \\ \mathbf{Y}^{ML} &= \gamma_1^{-1} (\mathbf{Y}^{ML})^{(0)} + (\mathbf{Y}^{ML})^{(1)} + \gamma_1 (\mathbf{Y}^{ML})^{(2)} + \dots, \\ \mathbf{Y}^{MT} &= \gamma_1^{-1} (\mathbf{Y}^{MT})^{(0)} + (\mathbf{Y}^{MT})^{(1)} + \gamma_1 (\mathbf{Y}^{MT})^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{Z}_{LT}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (\mathbf{Z}_{LL}^{JM})^{(0)} & (\mathbf{Z}_{LT}^{JM})^{(0)} \\ 0 & (\mathbf{Z}_{TT}^{JJ})^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{Z}_{LL}^{MM})^{(0)} & (\mathbf{Z}_{LT}^{MM})^{(0)} \\ 0 & 0 & (\mathbf{Z}_{TL}^{MM})^{(0)} & (\mathbf{Z}_{TT}^{MM})^{(0)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Z}_{LT}^{(1)} = \begin{bmatrix} (\mathbf{Z}_{LL}^{JJ})^{(1)} & (\mathbf{Z}_{LT}^{JJ})^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{Z}_{TL}^{JM})^{(1)} & (\mathbf{Z}_{TT}^{JM})^{(1)} \\ (\mathbf{Z}_{LL}^{MJ})^{(1)} & (\mathbf{Z}_{LT}^{MJ})^{(1)} & 0 & 0 \\ (\mathbf{Z}_{TL}^{MJ})^{(1)} & (\mathbf{Z}_{TT}^{MJ})^{(1)} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Z}_{LT}^{(2)} = \begin{bmatrix} (\mathbf{Z}_{LL}^{JJ})^{(2)} & (\mathbf{Z}_{LT}^{JJ})^{(2)} & (\mathbf{Z}_{LL}^{JM})^{(2)} & (\mathbf{Z}_{LT}^{JM})^{(2)} \\ (\mathbf{Z}_{TL}^{JJ})^{(2)} & (\mathbf{Z}_{TT}^{JJ})^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{Z}_{LL}^{MM})^{(2)} & (\mathbf{Z}_{LT}^{MM})^{(2)} \\ 0 & 0 & (\mathbf{Z}_{TL}^{MM})^{(2)} & (\mathbf{Z}_{TT}^{MM})^{(2)} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{Y}_{LT}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_{LT}^{(1)} = \begin{bmatrix} (\mathbf{Y}^{J_L})^{(1)} \\ 0 \\ (\mathbf{Y}^{M_L})^{(1)} \\ (\mathbf{Y}^{M_T})^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_{LT}^{(2)} = \begin{bmatrix} (\mathbf{Y}^{J_L})^{(2)} \\ (\mathbf{Y}^{J_T})^{(2)} \\ (\mathbf{Y}^{M_L})^{(2)} \\ (\mathbf{Y}^{M_T})^{(2)} \end{bmatrix}$$

dont les termes sont explicités en annexe F.

La contribution de l'ordre le plus bas au système (7.1.1) s'écrit

$$\mathbf{Z}_{LT}^{(0)} \mathbf{X}_{LT}^{(0)} = \mathbf{Y}_{LT}^{(0)}$$

et on en déduit que

$$\mathbf{X}_{LT}^{(0)} = \begin{bmatrix} (\mathbf{X}^{J_L})^{(0)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

où  $(\mathbf{X}^{J_L})^{(0)}$  est pour l'instant indéterminé. La contribution de l'ordre suivant au système (7.1.1) s'écrit

$$\mathbf{Z}_{LT}^{(0)} \mathbf{X}_{LT}^{(1)} + \mathbf{Z}_{LT}^{(1)} \mathbf{X}_{LT}^{(0)} = \mathbf{Y}_{LT}^{(1)}.$$

On peut en déduire que

$$\mathbf{X}_{LT}^{(1)} = \begin{bmatrix} (\mathbf{X}^{J_L})^{(1)} \\ 0 \\ (\mathbf{X}^{M_L})^{(1)} \\ (\mathbf{X}^{M_T})^{(1)} \end{bmatrix}$$

et que  $(\mathbf{X}^{J_L})^{(0)}$ ,  $(\mathbf{X}^{M_L})^{(1)}$  et  $(\mathbf{X}^{M_T})^{(1)}$  s'obtiennent par la résolution du système

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{Z}_{LL}^{JJ})^{(1)} & (\mathbf{Z}_{LL}^{JM})^{(0)} & (\mathbf{Z}_{LT}^{JM})^{(0)} \\ (\mathbf{Z}_{LL}^{MJ})^{(1)} & (\mathbf{Z}_{LL}^{MM})^{(0)} & (\mathbf{Z}_{LT}^{MM})^{(0)} \\ (\mathbf{Z}_{TL}^{MJ})^{(1)} & (\mathbf{Z}_{TL}^{MM})^{(0)} & (\mathbf{Z}_{TT}^{MM})^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{X}^{J_L})^{(0)} \\ (\mathbf{X}^{M_L})^{(1)} \\ (\mathbf{X}^{M_T})^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{Y}^{J_L})^{(1)} \\ (\mathbf{Y}^{M_L})^{(1)} \\ (\mathbf{Y}^{M_T})^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (7.2.1)$$

Tandis que  $(\mathbf{X}^{J_L})^{(1)}$  reste à ce stade indéterminé. La contribution de l'ordre suivant au système (7.1.1) s'écrit

$$\mathbf{Z}_{LT}^{(0)} \mathbf{X}_{LT}^{(2)} + \mathbf{Z}_{LT}^{(1)} \mathbf{X}_{LT}^{(1)} + \mathbf{Z}_{LT}^{(2)} \mathbf{X}_{LT}^{(0)} = \mathbf{Y}_{LT}^{(2)}.$$

On peut en déduire que

$$\mathbf{X}_{LT}^{(2)} = \begin{bmatrix} (\mathbf{X}^{J_L})^{(2)} \\ (\mathbf{X}^{J_T})^{(2)} \\ (\mathbf{X}^{M_L})^{(2)} \\ (\mathbf{X}^{M_T})^{(2)} \end{bmatrix}$$

et que  $(\mathbf{X}^{J_L})^{(1)}$ ,  $(\mathbf{X}^{J_T})^{(2)}$ ,  $(\mathbf{X}^{M_L})^{(2)}$  et  $(\mathbf{X}^{M_T})^{(2)}$  s'obtiennent par la résolution du système

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{Z}_{LL}^{JJ})^{(1)} & 0 & (\mathbf{Z}_{LL}^{JM})^{(0)} & (\mathbf{Z}_{LT}^{JM})^{(0)} \\ 0 & (\mathbf{Z}_{TT}^{JJ})^{(0)} & 0 & 0 \\ (\mathbf{Z}_{LL}^{MJ})^{(1)} & 0 & (\mathbf{Z}_{LL}^{MM})^{(0)} & (\mathbf{Z}_{LT}^{MM})^{(0)} \\ (\mathbf{Z}_{TL}^{MJ})^{(1)} & 0 & (\mathbf{Z}_{TL}^{MM})^{(0)} & (\mathbf{Z}_{TT}^{MM})^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{X}^{J_L})^{(1)} \\ (\mathbf{X}^{J_T})^{(2)} \\ (\mathbf{X}^{M_L})^{(2)} \\ (\mathbf{X}^{M_T})^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{Y}^{J_L})^{(2)} \\ (\mathbf{Y}^{J_T})^{(2)} \\ (\mathbf{Y}^{M_L})^{(2)} \\ (\mathbf{Y}^{M_T})^{(2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\mathbf{Z}_{LL}^{JJ})^{(2)} (\mathbf{X}^{J_L})^{(0)} \\ (\mathbf{Z}_{TL}^{JJ})^{(2)} (\mathbf{X}^{J_L})^{(0)} + (\mathbf{Z}_{TL}^{JM})^{(1)} (\mathbf{X}^{M_L})^{(1)} + (\mathbf{Z}_{TT}^{JM})^{(1)} (\mathbf{X}^{M_T})^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En conclusion, la forme asymptotique de la solution du système (7.1.1) quand  $\gamma_1 \rightarrow 0$  est

$$\mathbf{X}_{LT} = \begin{bmatrix} (\mathbf{X}^{J_L})^{(0)} + o(1) \\ \gamma_1^2 (\mathbf{X}^{J_T})^{(2)} + o(\gamma_1^2) \\ \gamma_1 (\mathbf{X}^{M_L})^{(1)} + o(\gamma_1) \\ \gamma_1 (\mathbf{X}^{M_T})^{(1)} + o(\gamma_1) \end{bmatrix}.$$

### 7.2.3 Lien avec la formulation Hiptmair

Soit le système (7.2.1), que l'on écrit

$$\mathbf{Z}\mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

pour simplifier. Soient les matrices

$$\mathbf{N}_1 := \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1^{-1} \end{bmatrix},$$

alors le système

$$(\mathbf{N}_1 \mathbf{Z} \mathbf{N}_2)(\mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{N}_1 \mathbf{Y}$$

est exactement le problème discret de la formulation Hiptmair (4.2.7) :

$$\tilde{\mathbf{Z}}_H \tilde{\mathbf{X}}_H = \tilde{\mathbf{Y}}_H.$$

Ainsi nous avons retrouvé le problème quasi-statique de Hiptmair par le développement asymptotique du problème de Maxwell LT. Nous avons vu au chapitre 3 que dans la littérature [35, 34] ce problème est obtenu en posant le problème intégral à partir de l'approximation quasi-statique courants de Foucault (1.3.11). Les termes du système (7.2.1) se comportent comme  $\mathcal{O}(1)$  par construction. À ce titre, le système (7.2.1) constitue une version normalisée du système Hiptmair (4.2.7).

Afin de confirmer ce résultat, prenons les cas tests #3 et #4 de l'annexe E. Il s'agit de la barre conductrice (cas test #3.1) ou conductrice et magnétique (cas test #3.2), contrôlée par une bobine et discrétisée en 2610 quadrilatères et du tube conducteur (cas test #4.1) ou conducteur et magnétique (cas test #4.2), contrôlé par une bobine et discrétisé en 2640 quadrilatères. Pour ces cas, le paramètre  $\gamma_1$  varie de l'ordre de  $10^{-6}$  à  $10^{-8}$ . Les figures 7.1 et 7.2 montrent que le conditionnement de la matrice d'impédance  $\mathbf{Z}$  est stable selon la fréquence contrairement au conditionnement de la matrice  $\tilde{\mathbf{Z}}_H$ . Les figures 7.3 et 7.4 présentent la variation d'impédance obtenue par le système (7.2.1) que l'on note Hiptmair-N et par le code FIT2,5D. On observe un bon accord des résultats.

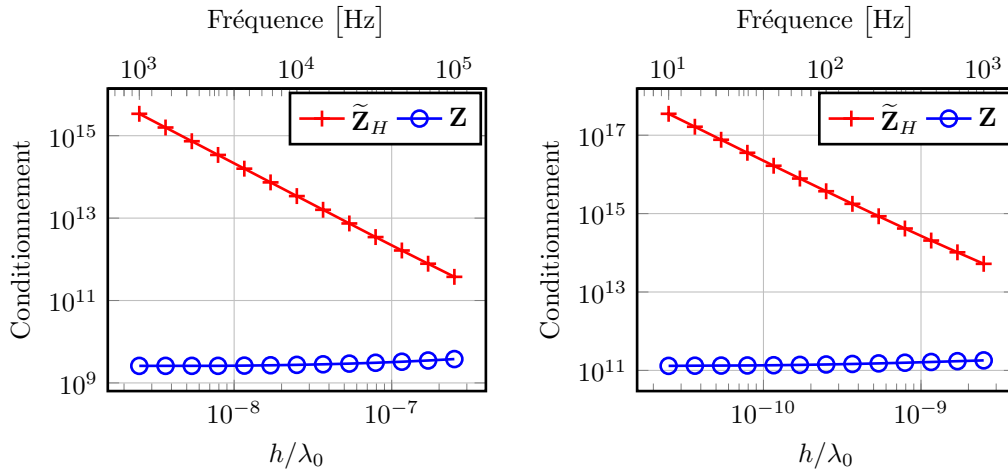


FIGURE 7.1 – Conditionnement de la matrice pour une barre conductrice (cas test #3.1 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 2610$ , à gauche) et pour une barre conductrice et magnétique (cas test #3.2 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m,  $\mu_{r,1} = 100$  et  $N_{elem} = 2610$ , à droite).

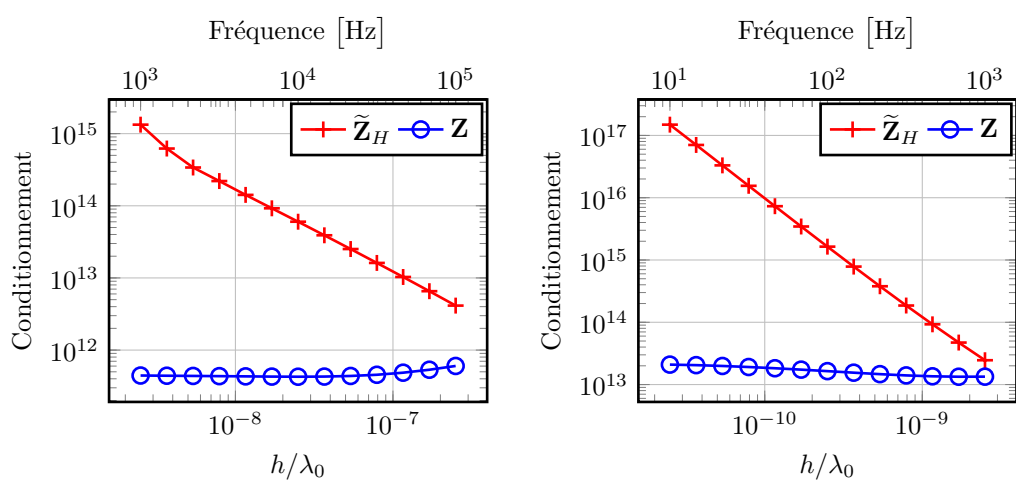


FIGURE 7.2 – Conditionnement de la matrice d'impédance normalisée ou non pour un tube conducteur (cas test #4.1 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 2640$ , à gauche) et pour un tube conducteur et magnétique (cas test #4.2 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m,  $\mu_{r,1} = 100$  et  $N_{elem} = 2640$ , à droite).

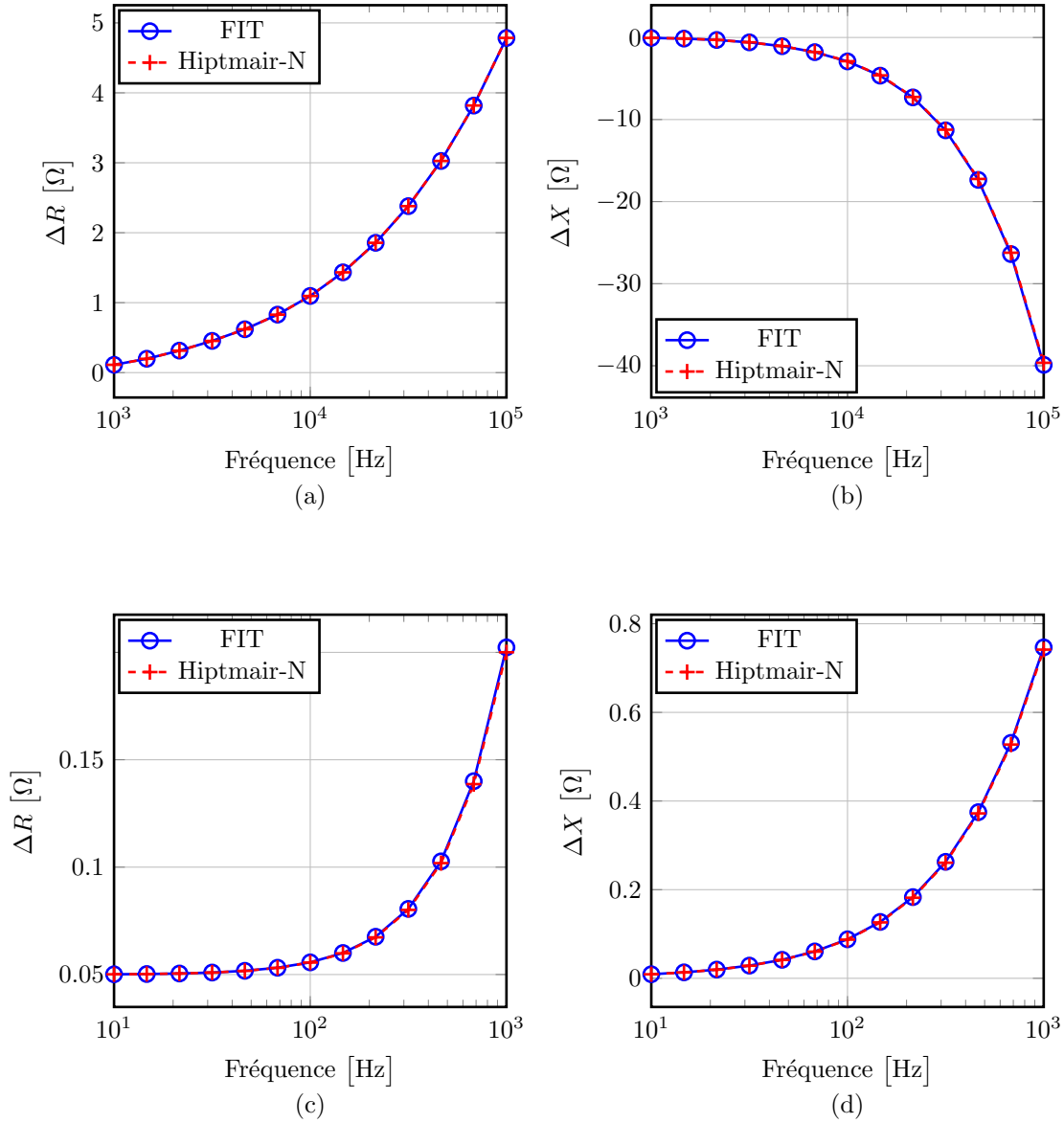


FIGURE 7.3 – Parties réelle et imaginaire de la variation d’impédance pour une barre conductrice (cas test #3.1 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 2610$ , respectivement (a) et (b)) et pour une barre conductrice et magnétique (cas test #3.2 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m,  $\mu_{r,1} = 100$  et  $N_{elem} = 2610$ , respectivement (c) et (d)).

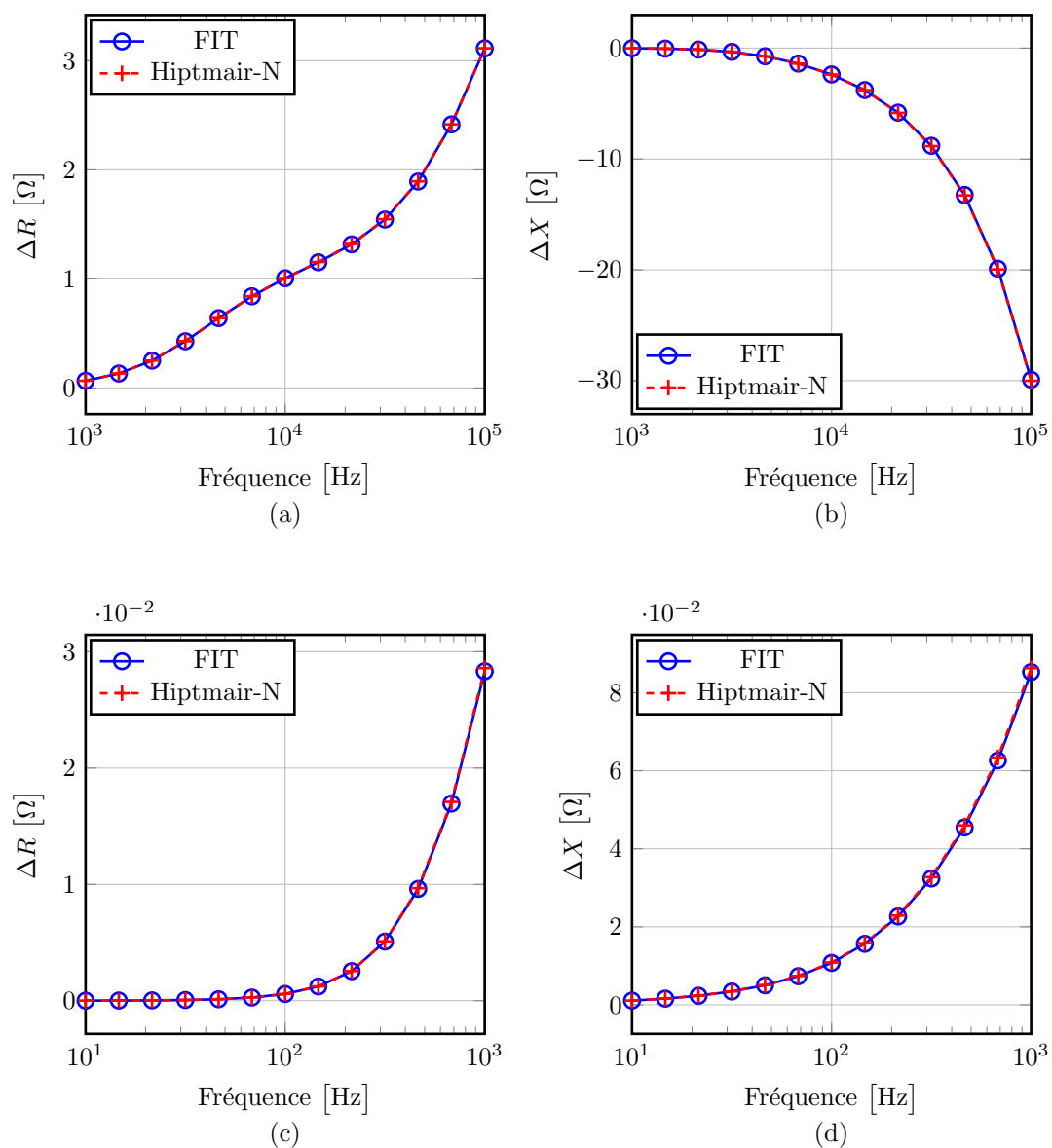


FIGURE 7.4 – Parties réelle et imaginaire de la variation d'impédance pour un tube conducteur (cas test #4.1 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m et  $N_{elem} = 2640$ , respectivement (a) et (b)) et pour un tube conducteur et magnétique (cas test #4.2 avec  $\sigma_1 = 10$  MS/m,  $\mu_{r,1} = 100$  et  $N_{elem} = 2640$ , respectivement (c) et (d)).

### 7.3 Conclusion

Nous avons obtenu le comportement et le développement asymptotique du problème LT lorsque le paramètre  $\gamma_1$  est proche de zéro. Ce développement nous a permis d'établir l'équivalence entre la formulation intégrale du problème courants de Foucault proposée par Hiptmair et le premier ordre du développement asymptotique de la formulation LT. En pratique, cela permet de définir une version bien conditionnée du problème courants de Foucault. Le développement asymptotique a été réalisé au-delà du premier ordre et l'ensemble des termes présentés offre la possibilité de résoudre le problème de Maxwell de manière itérative, ordre par ordre (du développement asymptotique), chaque étape nécessitant l'inversion d'une matrice bien conditionnée.



# Conclusion et perspectives

## Conclusion

L'objet de cette étude était de développer une formulation intégrale permettant de résoudre le problème de Maxwell harmonique dans des configurations typiques du contrôle non destructif par courants de Foucault et plus particulièrement pour le calcul des champs primaires dans des milieux conducteurs, potentiellement magnétiques, en régime basse fréquence. Un axe de recherche privilégié dans cette étude était de s'inspirer des travaux réalisés pour des diélectriques (hautes comme basses fréquences) pour adapter la formulation intégrale usuelle du problème de Maxwell aux configurations de CND par CF.

L'introduction des modèles physiques (chapitre 1), de leur représentation intégrale (chapitre 2) et des différents systèmes d'équations considérés (chapitre 3) ont été présentés dans la première partie de l'étude.

La discrétisation de ces systèmes (chapitre 4) ouvre la deuxième partie de l'étude, consacrée à la recherche d'une formulation de Maxwell adaptée aux applications de CND.

Il a notamment été montré (chapitre 5) que la technique de décomposition de Helmholtz, couramment utilisée pour les diélectriques, permet de bien contourner le bruit numérique à basse fréquence et donc d'obtenir un niveau de précision satisfaisant dans un contexte de CND. Pour autant, le problème reste mal conditionné car les techniques de normalisation utilisées pour les diélectriques (avec la décomposition de Helmholtz ou la pondération de type Müller) ne sont pas applicables au CND par CF. Ce phénomène a été développé et mis en évidence. Il est principalement lié au fait que ces techniques reposent sur un développement limité du noyau de Green selon la fréquence qui n'a plus de sens dans un milieu conducteur.

Le problème de conditionnement a pu être contourné par une résolution itérative par blocs du système linéaire (chapitre 6). Les blocs sont associés à une composante spécifique des densités de courant recherchées. Deux versions ont été proposées et la seconde, qui repose sur une décomposition selon les composantes *Loop* et *Tree* des densités  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$ , répond à nos besoins en terme de précision et de conditionnement (indépendant de

la fréquence pour la gamme des paramètres physiques typiques du CND).

Dans la troisième partie (chapitre 7), le développement asymptotique de la formulation intégrale de Maxwell (notée LT dans ce manuscrit) selon le paramètre adimensionnel a mis en lumière l'équivalence entre le terme dominant de ce développement et la formulation intégrale du problème courants de Foucault proposée par Hiptmair introduite au chapitre 5. En outre le système obtenu possède, lui, un conditionnement stable par construction.

Nous disposons donc au terme de notre étude de deux formulations originales et qui répondent à nos attentes : précises et de conditionnement stable dans la gamme de paramètres physiques typiques du CND. Ces formulations sont, d'une part, une formulation du problème résolue par blocs de manière itérative et, d'autre part, une formulation du problème courants de Foucault, donc moins générale, mais résolue d'un seul bloc.

Il a été nécessaire de développer les outils numériques adaptés (discrétisation, assemblage, résolution et post-traitement), réalisés dans une maquette Matlab. Ces développements ont permis d'accompagner l'étude et d'illustrer les performances des diverses approches dans les parties II et III.

## Perspectives

Dans le cadre de l'analyse du problème de Maxwell, et plus particulièrement de son développement limité au premier ordre (équivalent à l'approximation courants de Foucault, comme montré au chapitre 7), il serait maintenant intéressant de procéder à une estimation fine de l'erreur commise par cette approximation. D'autre part, au-delà du contexte applicatif du CND par CF, il serait intéressant d'augmenter de quelques ordres le développement asymptotique. Le choix de l'ordre d'arrêt pouvant être fait à posteriori, une fois la précision désirée atteinte, ou encore à priori, en fonction du régime de travail. L'intérêt de ce type d'approche reste à démontrer face à l'approche de Maxwell résolue par blocs mais peut être fondé sur le besoin de résoudre autrement que par blocs un système linéaire bien conditionné.

En ce qui concerne le calcul du champ primaire, qui constitue une étape majeure de la modélisation des processus de CND traités au CEA LIST, la formulation LT résolue par l'approche itérative par blocs introduite au chapitre 6 de ma thèse est en cours d'intégration dans le code du laboratoire. En particulier, elle sera prochainement utilisée dans le cadre d'une étude pour l'IRSN (Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire) afin de simuler le signal de géométrie obtenu dans la partie cintrée des tubes d'un générateur de vapeur, élément clé du processus de refroidissement du circuit primaire dans les centrales nucléaires à eau pressurisée. À cette occasion une discrétisation d'ordre élevé de la géométrie (présentée au chapitre 4) comme des fonctions de base sera employée afin de gagner en précision tout en réduisant le nombre d'inconnues.

---

Pour autant le nombre d'inconnues restera un facteur limitant de l'approche qui ne sera performante que si l'ensemble des blocs matriciels reste accessible en mémoire (autrement on fera face à un surcout des étapes de lecture-écriture des blocs sur le disque à chaque itération du solveur). À ce titre il faudrait se pencher vers une approche de compression qui autorise l'inversion directe de chaque bloc, à priori de type matrice hiérarchique et algorithme ACA (*Adaptive Cross Approximation*). La mise en œuvre du pilotage de cette approche dans le cadre du CND et l'emploi de méthodes d'ordre élevé devra être étudiée.

Enfin, le calcul du signal d'un défaut n'est pas traité dans cette thèse mais rendu accessible. En effet, la stabilisation du conditionnement en fonction de la fréquence, et donc du pas de maillage à fréquence fixe, rend possible la résolution du système malgré la présence d'un défaut dans la géométrie (qui implique généralement un pas de maille très petit au niveau du défaut). Par ailleurs, toujours dans une approche par blocs, mais modifiée, on pourrait maintenant introduire une décomposition de domaine entre la pièce (champ primaire) et le défaut en plus de la décomposition selon les composantes physiques. Dans ce cas, on trouverait éventuellement des configurations pour lesquelles un élargissement du travail d'analyse serait crucial. Par exemple, si la taille caractéristique d'un défaut de type entaille est liée à son ouverture, celle-ci serait de l'ordre de quelques dizaines de  $\mu\text{m}$  contre quelques dizaines de  $\text{mm}$  pour la pièce, et justifierait donc de considérer un nouveau paramètre adimensionnel pour le développement asymptotique.



# Annexes



## Annexe A

# Les milieux parfaitement conducteurs

Un conducteur parfait, *Perfect Electric Conductor (PEC)* en anglais, ou milieu parfaitement conducteur est un milieu pour lequel on suppose que la conductivité est infinie. Il s'agit d'une idéalisation mathématique des milieux très fortement conducteurs qui permet d'effectuer un certain nombre d'approximations sur les équations de Maxwell.

### A.1 Le modèle du conducteur parfait

On se place sous les hypothèses **(H0)**, **(H1)** et **(H2a)** ou **(H2b)** à une exception près, la conductivité  $\sigma_1$  est supposée infinie pour que  $\Omega_1$  soit un milieu parfaitement conducteur. Sous ces hypothèses, les champs électrique  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  et magnétiques  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$  vérifient (1.2.2) dans  $\Omega_0$ ,

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_{\text{tot}} + si\omega\mu\mathbf{H}_{\text{tot}} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H}_{\text{tot}} - si\omega\varepsilon\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{J}_{\text{inc}} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_0$$

et s'annulent dans le conducteur parfait  $\Omega_1$ ,

$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{H}_{\text{tot}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_1.$$

Ainsi, on peut dire que les champs incidents sont complètement réfléchis par la surface  $\Gamma$  ce qui se traduit par la condition (1.2.6) qui devient

$$\mathbf{E}_{\text{d}}^0 \times \mathbf{n} = -\mathbf{E}_{\text{inc}}^0 \times \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}_{\text{tot}}^0 \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Les champs incidents vérifient bien (1.2.1) et les champs diffractés sont définis par (1.2.3),

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{\text{d}} = \mathbf{E}_{\text{tot}} - \mathbf{E}_{\text{inc}} \\ \mathbf{H}_{\text{d}} = \mathbf{H}_{\text{tot}} - \mathbf{H}_{\text{inc}} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_0$$

et vérifient (1.2.4). Le problème de Maxwell s'exprime donc ici uniquement dans  $\Omega_0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_d - \kappa_0^2 \mathbf{E}_d = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ \mathbf{E}_d \times \mathbf{n} = -\mathbf{E}_{\text{inc}} \times \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{E}_d = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty. & \end{array} \right. \quad (\text{A.1.1})$$

Le champ magnétique  $\mathbf{H}_d$  s'obtient, d'après (1.2.4), via

$$\mathbf{H}_d = (si\omega\mu_0)^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_d.$$

En revanche, on ne peut pas poser le problème en terme de champ magnétique puisque la condition de transmission (1.2.7) du champ magnétique ( $\mathbf{H}_{\text{tot}}^0 \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_{\text{tot}}^1 \times \mathbf{n}$ ) n'est plus valable pour les milieux parfaitement conducteurs.

## A.2 Formulations intégrales pour les milieux parfaitement conducteurs

Pour les milieux parfaitement conducteurs, il existe trois formulations classiques dans la littérature, l'équation intégrale en champ électrique appelée EFIE de l'anglais *Electric Field Integral Equation*, l'équation intégrale en champ magnétique, ou *Magnetic Field Integral Equation (MFIE)* et enfin l'équation intégrale en champs combinés, ou *Combined Field Integral Equation (CFIE)*. On ne présente que l'EFIE et la MFIE ici puisqu'il s'agit des formulations que l'on utilise dans le manuscrit pour valider nos opérateurs et analyser certains phénomènes. De plus la CFIE est simplement une combinaison de l'EFIE et la MFIE.

### A.2.1 L'équation intégrale en champ électrique (EFIE)

Le champ  $\mathbf{E}_d$  appartient à  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0)$  et vérifie (A.1.1). Ce champ vérifie donc les hypothèses du corollaire 2.2.1 a) et on peut écrire sa représentation intégrale

$$-\mathcal{S}\mathcal{C}^0(\gamma_{\times}^0 \mathbf{E}, \gamma_N^0 \mathbf{E}_d) = \mathbf{E}_d \quad \text{dans } \Omega_0. \quad (\text{A.2.1})$$

On applique maintenant la trace extérieure  $\gamma_{\times}^0$  à cette représentation (A.2.1) ce qui nous donne l'équation intégrale surfacique :

$$\begin{aligned} \gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_d &= -\mathcal{S}\mathcal{C}_{\times,0}^0(\gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_d, \gamma_N^0 \mathbf{E}_d) \\ &= \left(\frac{1}{2}\text{Id} - \mathcal{B}_{\times}^0\right) \gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_d - \left(\mathcal{A}_{\times}^0 + \frac{1}{\kappa_0^2} \mathcal{C}_{\times}^0\right) \gamma_N^0 \mathbf{E}_d. \end{aligned} \quad (\text{A.2.2})$$

On rappelle que

$$\mathbf{J} = -\gamma_{\times}^0 \mathbf{H}_{\text{tot}} = -(si\omega\mu_0)^{-1} \gamma_N^0 \mathbf{E}_{\text{tot}} = -(si\omega\mu_0)^{-1} \gamma_N^0 (\mathbf{E}_d + \mathbf{E}_{\text{inc}}) \quad (\text{A.2.3})$$

donc

$$\gamma_N^0 \mathbf{E}_d = \gamma_N^0 \mathbf{E}_{\text{tot}} - \gamma_N^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} = si\omega\mu_0 \mathbf{J} - \gamma_N^0 \mathbf{E}_{\text{inc}}.$$

De plus, la condition de transmission du problème (A.1.1) s'écrit

$$\gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_d = -\gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}}. \quad (\text{A.2.4})$$

En remplaçant dans (A.2.2), on obtient finalement

$$\left(\frac{1}{2}\text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^0\right) \gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} + \left(\mathcal{A}_{\times}^0 + \frac{1}{\kappa_0^2} \mathcal{C}_{\times}^0\right) \gamma_N^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} = si \left(\omega\mu_0 \mathcal{A}_{\times}^0 + \frac{1}{\omega\varepsilon_0} \mathcal{C}_{\times}^0\right) \mathbf{J}.$$

Comme le champ  $\mathbf{E}_{\text{inc}}$  vérifie (1.4.5) avec  $\mathbf{U}_{\text{inc}} = \mathbf{E}_{\text{inc}}$ , il vérifie les hypothèses du corollaire 2.2.1. b, d'où

$$\mathcal{SC}^0(\gamma_{\times}^1 \mathbf{E}_{\text{inc}}, \gamma_N^1 \mathbf{E}_{\text{inc}}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_0. \quad (\text{A.2.5})$$

On applique alors la trace  $\gamma_{\times}^0$  et on remplace,  $\gamma_{\times}^1 \mathbf{E}_{\text{inc}}$  par  $\gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}}$  et,  $\gamma_N^1 \mathbf{E}_{\text{inc}}$  par  $\gamma_N^0 \mathbf{E}_{\text{inc}}$ , on obtient :

$$0 = \left(-\frac{1}{2}\text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^0\right) \gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} + \left(\mathcal{A}_{\times}^0 + \frac{1}{\kappa_0^2} \mathcal{C}_{\times}^0\right) \gamma_N^0 \mathbf{E}_{\text{inc}}.$$

Ainsi on obtient la forme intégrale de l'EFIE :

$$\mathcal{Z}_{EFIE} \mathcal{X}_{EFIE} = \mathcal{Y}_{EFIE} \quad (\text{A.2.6})$$

avec

$$\mathcal{Z}_{EFIE} = si \left(\omega\mu_0 \mathcal{A}_{\times}^0 + \frac{1}{\omega\varepsilon_0} \mathcal{C}_{\times}^0\right), \quad \mathcal{X}_{EFIE} = \mathbf{J}, \quad \mathcal{Y}_{EFIE} = \gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}}.$$

La résolution de cette équation permet de calculer les champs  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$  via

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{tot}}|_{\Omega_0} &= \mathbf{E}_{\text{inc}}|_{\Omega_0} - \mathcal{SC}^0(0, si\omega\mu_0 \mathbf{J}) \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0), \\ \mathbf{H}_{\text{tot}}|_{\Omega_0} &= \mathbf{H}_{\text{inc}}|_{\Omega_0} - \mathcal{SC}^0(-\mathbf{J}, 0) \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0). \end{aligned}$$

L'équation intégrale étant dans  $\mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ , on peut la tester dans ce même espace par la relation de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\times}$  et on obtient le problème variationnel :

$$\langle \mathbf{u}, \mathcal{Z}_{EFIE} \mathcal{X}_{EFIE} \rangle_{\times} = \langle \mathbf{u}, \mathcal{Y}_{EFIE} \rangle_{\times}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma).$$

Le problème discret est donné par

$$\mathbf{Z}_{EFIE} \mathbf{X}_{EFIE} = \mathbf{Y}_{EFIE}$$

avec

$$\mathbf{Z}_{EFIE} = si \left(\omega\mu_0 \mathbf{A}_{\times}^0 + \frac{1}{\omega\varepsilon_0} \mathbf{C}_{\times}^0\right), \quad \mathbf{X}_{EFIE} = \mathbf{X}^J, \quad \mathbf{Y}_{EFIE} = \mathbf{Y}^J.$$

Soient  $\{\mathbf{u}_t\}_{t=1,\dots,N} \subset \mathcal{V}_{\text{div}}^h$  l'ensemble des fonctions tests et  $\{\mathbf{u}_b\}_{b=1,\dots,N} \subset \mathcal{V}_{\text{div}}^h$  l'ensemble des fonctions bases. Les opérateurs matriciels  $\mathbf{A}_{\times}^0$  et  $\mathbf{C}_{\times}^0$  définis par

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{\times}^0)_{tb} &:= \langle \mathbf{u}_t, \mathcal{A}_{\times}^0(\mathbf{u}_b) \rangle_{\times}, \\ (\mathbf{C}_{\times}^0)_{tb} &:= \langle \mathbf{u}_t, \mathcal{C}_{\times}^0(\mathbf{u}_b) \rangle_{\times} \end{aligned}$$

ainsi que le second membre  $\mathbf{Y}^J$  donné par

$$(\mathbf{Y}^J)_t := \langle \mathbf{u}_t, \gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} \rangle_{\times}$$

sont explicités en annexe C. L'inconnue  $\mathbf{X}^J$  permet le calcul de la densité de courant surfacique électrique  $\mathbf{J}^h$  via

$$\mathbf{J}^h(\mathbf{x}) = \sum_{b=1}^N (\mathbf{X}^J)_b \mathbf{u}_b(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_h.$$

**Remarque A.2.1.** *L'EFIE se retrouve en posant  $\mathbf{M} = 0$  d'après la condition de transmission  $\gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{tot}} = 0$ , dans la première ligne de la formulation PMCHWT.*

## A.2.2 L'équation intégrale en champ magnétique (MFIE)

On applique la trace extérieure  $\gamma_N^0$  à (A.2.1) :

$$\begin{aligned} \gamma_N^0 \mathbf{E}_d &= -\mathcal{S}_{N,0}^{\mathcal{C}}(\gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_d, \gamma_N^0 \mathbf{E}_d) \\ &= -(\kappa_0^2 \mathcal{A}_{\times}^0 + \mathcal{C}_{\times}^0) \gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_d + \left( \frac{1}{2} \text{Id} - \mathcal{B}_{\times}^0 \right) \gamma_N^0 \mathbf{E}_d. \end{aligned}$$

Les relations (A.2.3) et (A.2.4), impliquent

$$(\kappa_0^2 \mathcal{A}_{\times}^0 + \mathcal{C}_{\times}^0) \gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} + \left( \frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^0 \right) \gamma_N^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} = si\omega\mu_0 \left( \frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^0 \right) \mathbf{J}.$$

On applique la trace  $\gamma_N^0$  à (A.2.5) et on remplace,  $\gamma_{\times}^1 \mathbf{E}_{\text{inc}}$  par  $\gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}}$  et,  $\gamma_N^1 \mathbf{E}_{\text{inc}}$  par  $\gamma_N^0 \mathbf{E}_{\text{inc}}$ , on obtient :

$$\gamma_N^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} = (\kappa_0^2 \mathcal{A}_{\times}^0 + \mathcal{C}_{\times}^0) \gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} + \left( \frac{1}{2} \text{Id} + \mathcal{B}_{\times}^0 \right) \gamma_N^0 \mathbf{E}_{\text{inc}}.$$

Ainsi on obtient la forme intégrale de la MFIE :

$$\mathcal{Z}_{MFIE} \mathcal{X}_{MFIE} = \mathcal{Y}_{MFIE}$$

avec

$$\mathcal{Z}_{MFIE} = -\frac{1}{2} \text{Id} - \mathcal{B}_{\times}^0, \quad \mathcal{X}_{MFIE} = \mathbf{J}, \quad \mathcal{Y}_{MFIE} = \gamma_{\times}^0 \mathbf{H}_{\text{inc}}.$$

La résolution de cette équation permet de calculer les champs  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  et  $\mathbf{H}_{\text{tot}}$  via

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{tot}}|_{\Omega_0} &= \mathbf{E}_{\text{inc}}|_{\Omega_0} - \mathcal{SC}^0(0, si\omega\mu_0\mathbf{J}) \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0), \\ \mathbf{H}_{\text{tot}}|_{\Omega_0} &= \mathbf{H}_{\text{inc}}|_{\Omega_0} - \mathcal{SC}^0(-\mathbf{J}, 0) \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}^2, \Omega_0).\end{aligned}$$

L'équation intégrale étant dans  $\mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ , on peut la tester dans ce même espace par la relation de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\times}$  et on obtient le problème variationnel :

$$\langle \mathbf{u}, \mathcal{Z}_{MFIE} \mathcal{X}_{MFIE} \rangle_{\times} = \langle \mathbf{u}, \mathcal{Y}_{MFIE} \rangle_{\times}, \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma).$$

Le problème discret est donné par

$$\mathbf{Z}_{MFIE} \mathbf{X}_{MFIE} = \mathbf{Y}_{MFIE}$$

avec

$$\mathbf{Z}_{MFIE} = \frac{1}{2} \mathbf{R} - \mathbf{B}_{\times}^0, \quad \mathbf{X}_{MFIE} = \mathbf{X}^J, \quad \mathbf{Y}_{MFIE} = \mathbf{Y}^M.$$

Soient  $\{\mathbf{u}_t\}_{t=1, \dots, N} \subset \mathcal{V}_{\text{div}}^h$  l'ensemble des fonctions tests et  $\{\mathbf{u}_b\}_{b=1, \dots, N} \subset \mathcal{V}_{\text{div}}^h$  l'ensemble des fonctions bases. Les opérateurs matriciels  $\mathbf{A}_{\times}^0$  et  $\mathbf{C}_{\times}^0$  définis par

$$\begin{aligned}(\mathbf{R})_{tb} &:= \langle \mathbf{u}_t, \mathcal{R}(\mathbf{u}_b) \rangle, \\ (\mathbf{B}_{\times}^0)_{tb} &:= \langle \mathbf{u}_t, \mathcal{B}_{\times}^0(\mathbf{u}_b) \rangle_{\times}\end{aligned}$$

ainsi que le second membre  $\mathbf{Y}^M$  donné par

$$(\mathbf{Y}^M)_t := \langle \mathbf{u}_t, \gamma_{\times}^0 \mathbf{H}_{\text{inc}} \rangle_{\times}$$

sont explicités en annexe C. L'inconnue  $\mathbf{X}^J$  permet le calcul de la densité de courant surfacique électrique  $\mathbf{J}^h$  via

$$\mathbf{J}^h(\mathbf{x}) = \sum_{b=1}^N (\mathbf{X}^J)_b \mathbf{u}_b(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_h.$$



## Annexe B

# Discrétisation pour le maillage triangulaire

Cette annexe présente les éléments de discrétisation qui sont différents lorsque le maillage est triangulaire et non plus quadrilatéral comme présenté dans la section 4.1.

### B.1 Maillage paramétré de triangles

Soit un maillage  $\Gamma_h$  composé de  $N_e$  triangles et de triangulation

$$\mathcal{T}_h := \{K_\ell\}_{\ell=1, \dots, N_e}.$$

L'élément unité  $\widehat{K}$  dans  $\mathbb{R}^2$  est défini par le triangle unitaire de sommets

$$\widehat{\mathbf{S}}_1 = (0,0), \quad \widehat{\mathbf{S}}_2 = (1,0), \quad \widehat{\mathbf{S}}_3 = (0,1).$$

On note  $\widehat{\mathbf{x}} := (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$  les coordonnées sur  $\widehat{K}$  dans la base canonique  $\{\widehat{\mathbf{e}}_1, \widehat{\mathbf{e}}_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$ . On note  $\mathbf{S}_i^\ell = \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{S}}_i)$ ,  $i = 1 \leq i \leq 3$ , les sommets de l'élément  $K_\ell$  numérotés dans le sens de parcours direct et de telle sorte que  $(\overrightarrow{\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2} \times \overrightarrow{\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_3})$  soit dirigé vers l'extérieur de la surface fermée. Soit  $\mathbf{F}_\ell$  le difféomorphisme de  $\widehat{K}$  dans  $\mathbb{R}^3$  défini par la propriété suivante :

$$\forall \mathbf{x} \in K_\ell, \exists! \widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{K} \text{ tel que } \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}.$$

Cette transformation est donnée à l'ordre 1 par

$$\mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) = (1 - \widehat{x}_1)\mathbf{S}_1^\ell + \widehat{x}_1\mathbf{S}_2^\ell + \widehat{x}_2\mathbf{S}_3^\ell.$$

Les arêtes du triangle de référence  $\widehat{K}$  sont orientées dans le sens direct et définies par

$$\begin{aligned} \widehat{a}_1 &= (\widehat{\mathbf{S}}_1, \widehat{\mathbf{S}}_2), & \widehat{a}_2 &= (\widehat{\mathbf{S}}_2, \widehat{\mathbf{S}}_3), \\ \widehat{a}_3 &= (\widehat{\mathbf{S}}_3, \widehat{\mathbf{S}}_1) \end{aligned}$$

où l'ordre d'apparition des sommets donne le sens de l'arête, voir figure B.1. Sur un élément  $K_\ell$ , les arêtes correspondantes sont notées  $a_i^\ell$  avec  $a_i^\ell = \mathbf{F}_\ell(\hat{a}_i)$ ,  $i = 1 \leq i \leq 3$ . Les normales unitaires aux arêtes  $a_i^\ell$ , dirigées vers l'extérieur de l'élément, notées  $\mathbf{n}_{a_i}^\ell$  s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{a_1}^\ell &= -\frac{\mathbf{n}_\ell \times \hat{\partial}_1 \mathbf{F}_\ell}{|\hat{\partial}_1 \mathbf{F}_\ell|}, & \mathbf{n}_{a_2}^\ell &= \frac{\mathbf{n}_\ell \times \hat{\partial}_1 \mathbf{F}_\ell}{|\hat{\partial}_1 \mathbf{F}_\ell|} + \frac{\hat{\partial}_2 \mathbf{F}_\ell \times \mathbf{n}_\ell}{|\hat{\partial}_2 \mathbf{F}_\ell|}, \\ \mathbf{n}_{a_3}^\ell &= -\frac{\hat{\partial}_2 \mathbf{F}_\ell \times \mathbf{n}_\ell}{|\hat{\partial}_2 \mathbf{F}_\ell|}. \end{aligned}$$

L'élément d'intégration linéique est  $|\partial_1 \mathbf{F}|$  sur  $a_1$ ,  $|\partial_2 \mathbf{F} - \partial_1 \mathbf{F}|$  sur  $a_2$ , et  $|\partial_2 \mathbf{F}|$  sur  $a_3$ .

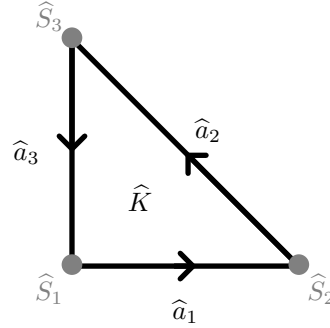


FIGURE B.1 – Sommets et arêtes sur l'élément de référence  $\hat{K}$ .

## B.2 Fonctions de base de l'espace d'approximation de $\mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$

L'espace  $\mathcal{V}_{\text{div}}^h$  est défini par

$$\mathcal{V}_{\text{div}}^h := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma_h); \mathcal{JDF}^{-1} \mathbf{u}|_K \in \hat{\mathcal{V}}^h, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (\text{B.2.1})$$

avec  $\hat{\mathcal{V}}^h = \{\hat{\mathbf{u}}_i\}_{i=1,2,3}$  et

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_1(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2} (\hat{x}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + (\hat{x}_2 - 1) \hat{\mathbf{e}}_2), \\ \hat{\mathbf{u}}_2(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2} (\hat{x}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{x}_2 \hat{\mathbf{e}}_2), \\ \hat{\mathbf{u}}_3(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2} (\hat{x}_1 - 1) \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{x}_2 \hat{\mathbf{e}}_2. \end{aligned}$$

Les fonctions locales  $\mathbf{u}_j^\ell$  sur  $K_\ell$  sont données explicitement par

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1^\ell \circ \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2\mathcal{J}_\ell(\widehat{\mathbf{x}})} \left( \widehat{x}_1 \widehat{\partial}_1 \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) + (\widehat{x}_2 - 1) \widehat{\partial}_2 \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) \right), \\ \mathbf{u}_2^\ell \circ \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2\mathcal{J}_\ell(\widehat{\mathbf{x}})} \left( \widehat{x}_1 \widehat{\partial}_1 \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) + \widehat{x}_2 \widehat{\partial}_2 \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) \right), \\ \mathbf{u}_3^\ell \circ \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2\mathcal{J}_\ell(\widehat{\mathbf{x}})} \left( \widehat{x}_1 - 1) \widehat{\partial}_1 \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) + \widehat{x}_2 \widehat{\partial}_2 \mathbf{F}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) \right).\end{aligned}$$

Les fonctions  $\mathbf{u}_i$  ainsi définies imposent la continuité normale à travers les arêtes du maillage ( $[\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{a_i}]_{a_i} = 0$ ) et sont dites *Hdiv-conformes*. La famille  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1,\dots,N_a}$ , où  $N_a$  est le nombre d'arêtes du maillage  $\Gamma_h$ , est alors une base de  $\mathcal{V}_{\text{div}}^h$ . Ces fonctions sont communément appelées fonctions *RWG* du nom des auteurs Rao, Wilton et Glisson [49].

### B.3 La décomposition de Helmholtz-Hodge

Les fonctions de base *Loop*  $\widehat{\mathbf{u}}^L \in \widehat{\mathcal{V}}^h$  sont définies sur le triangle de référence par

$$\widehat{\mathbf{u}}_i^L(\widehat{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^3 \widehat{\mathbf{L}}_{ij} \widehat{\mathbf{u}}_j(\widehat{\mathbf{x}})$$

avec

$$\widehat{\mathbf{L}}_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

et la fonction de base *Trace*  $\widehat{\mathbf{u}}^T \in \widehat{\mathcal{V}}^h$  est définies sur le triangle de référence par

$$\widehat{\mathbf{u}}^T(\widehat{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^3 \widehat{\mathbf{T}}_j \widehat{\mathbf{u}}_j(\widehat{\mathbf{x}})$$

avec

$$\widehat{\mathbf{T}}_j = [ 1 \quad 1 \quad 1 ].$$



## Annexe C

# Calcul des termes matriciels

On rappelle que les applications duales  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (2.1.7) et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\times}$  (2.1.8) sont définies par

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &:= \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma, \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\times} &:= \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \times \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \\ \langle \varphi, \psi \rangle_{\frac{1}{2}} &:= \int_{\Gamma} \varphi \psi \, d\Gamma\end{aligned}$$

et que  $\mathcal{R}$  est défini par

$$\mathcal{R}\mathbf{u} := \mathbf{u} \times \mathbf{n}.$$

Les opérateurs intégraux de surface  $\mathcal{A}_{\times}$ ,  $\mathcal{B}_{\times}$ ,  $\mathcal{C}_{\times}$  et  $\tilde{\mathcal{C}}_{\times}$  sont définis par le théorème 2.2.2 et les opérateurs  $\mathcal{A}_n$ ,  $\mathcal{B}_n$ ,  $\mathcal{C}_n$  et  $\tilde{\mathcal{C}}_n$  par le théorème 2.2.3.

### C.1 Notation des fonctions tests et bases

Les notations définies dans cette section sont les notations utilisées pour différencier les différents types de fonctions de base dans toute cette annexe.

#### C.1.1 Fonctions *Hdiv-conformes*

Soit  $\{\mathbf{u}_a\}_{a=1,\dots,N} \subset \mathcal{V}_{\text{div}}^h$  l'ensemble des fonctions de base (4.1.3) *Hdiv-conformes* de  $\mathcal{V}_{\text{div}}^h$  avec  $N$  le nombre d'arêtes du maillage sur  $\Gamma_h$ . On note

$$\{\mathbf{u}_t\}_{t=1,\dots,N} \subset \mathcal{V}_{\text{div}}^h$$

l'ensemble des fonctions tests et on note

$$\{\mathbf{u}_b\}_{b=1,\dots,N} \subset \mathcal{V}_{\text{div}}^h$$

l'ensemble des fonctions bases. Soit  $a_t$  l'arête de  $\Gamma_h$  associée à la fonction test  $\mathbf{u}_t$ , le support de cette fonction est l'ensemble des deux éléments tests  $K_t^1$  et  $K_t^2$  se partageant

cette arête. De même, le support de la fonction base  $\mathbf{u}_b$  associée à l'arête  $a_b$  de  $\Gamma_h$  est l'ensemble des deux éléments bases  $K_b^1$  et  $K_b^2$  se partageant l'arête  $a_b$ . Les coordonnées sur les éléments bases ainsi que les dérivées selon ces coordonnées seront annotées par le signe '.

### C.1.2 Fonctions *Loop* et *Tree*

On note

$$\{\mathbf{u}_t^L\}_{t=1,\dots,N_S-1} \subset \mathcal{V}_{\text{div}0}^h, \quad \{\mathbf{u}_t^T\}_{t=1,\dots,N_e-1} \subset \mathcal{V}_{\text{comp}}^h$$

l'ensemble des fonctions tests *Loop* (4.1.5) et *Tree* (4.1.6) et

$$\{\mathbf{u}_b^L\}_{t=1,\dots,N_S-1} \subset \mathcal{V}_{\text{div}0}^h, \quad \{\mathbf{u}_b^T\}_{t=1,\dots,N_e-1} \subset \mathcal{V}_{\text{comp}}^h$$

l'ensemble des fonctions bases *Loop* (4.1.5) et *Tree* (4.1.6) avec  $N_S$  et  $N_e$  le nombre de sommets et d'éléments du maillage  $\Gamma_h$ , respectivement. Soit  $S_t$ , respectivement  $S_b$ , le sommet de  $\Gamma_h$  associé à la fonction test  $\mathbf{u}_t^L$ , respectivement  $\mathbf{u}_b^L$ , le support de cette fonction est l'ensemble noté  $K_t^L$ , respectivement  $K_b^L$ , des éléments se partageant ce sommet. Soit  $K_t$ , respectivement  $K_b$ , l'élément de  $\Gamma_h$  associé à la fonction test  $\mathbf{u}_t^T$ , respectivement  $\mathbf{u}_b^T$ , le support de cette fonction est l'ensemble noté  $K_t^T$ , respectivement  $K_b^T$ , des éléments adjacents par au moins une arête à cet élément.

### C.1.3 Fonctions *Hrot-conformes*

Soit  $\{\mathbf{v}_a\}_{a=1,\dots,N} \subset \mathcal{V}_{\text{rot}}^h$  l'ensemble des fonctions de base (4.1.4) *Hrot-conformes* de  $\mathcal{V}_{\text{rot}}^h$  avec  $N$  le nombre d'arêtes du maillage sur  $\Gamma_h$ . On note

$$\{\mathbf{v}_t\}_{t=1,\dots,N} \subset \mathcal{V}_{\text{div}}^h$$

l'ensemble des fonctions tests et on note

$$\{\mathbf{v}_b\}_{b=1,\dots,N} \subset \mathcal{V}_{\text{div}}^h$$

l'ensemble des fonctions bases. Comme pour les fonctions *Hdiv-conformes*, soit  $a_t$ , respectivement  $a_b$ , l'arête de  $\Gamma_h$  associée à la fonction test  $\mathbf{v}_t$ , respectivement  $\mathbf{v}_b$ , le support de cette fonction est l'ensemble des deux éléments  $K_t^1$  et  $K_t^2$ , respectivement  $K_b^1$  et  $K_b^2$ , se partageant cette arête.

### C.1.4 Fonctions scalaires

Soit  $\{\varphi_\ell\}_{\ell=1,\dots,N_e} \subset \mathcal{V}_0^h$  l'ensemble des fonctions de base (4.1.2) de  $\mathcal{V}_0^h$  avec  $N_e$  le nombre d'éléments du maillage sur  $\Gamma_h$ . On note

$$\{\varphi_t\}_{t=1,\dots,N_e} \subset \mathcal{V}_0^h$$

l'ensemble des fonctions tests et on note

$$\{\varphi_b\}_{b=1,\dots,N_e} \subset \mathcal{V}_0^h$$

l'ensemble des fonctions bases. Le support d'une fonction  $\varphi_t$ , respectivement  $\varphi_b$ , est l'élément test  $K_t$ , respectivement l'élément base  $K_b$ .

## C.2 L'opérateur matriciel $\mathbf{A}_\times$

**Fonctions tests *Hdiv-conformes*.** Par définition de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\times$  et de l'opérateur intégral  $\mathcal{A}_\times$ ,

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{A}_\times^\ell\right)_{tb} &:= \left\langle \mathbf{u}_t, \mathcal{A}_\times^\ell(\mathbf{u}_b) \right\rangle_\times = - \int_{\Gamma_h} \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{R} \circ \mathcal{A}_\times^\ell(\mathbf{u}_b) d\mathbf{x}, \\ &= - \int_{\Gamma_h} \mathcal{R} \circ \mathcal{R} \circ \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \cdot \int_{\Gamma_h} \mathbf{u}_b(\mathbf{x}') g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\mathbf{x}, \\ &= \int_{K_t^1 \cup K_t^2} \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \cdot \int_{K_b^1 \cup K_b^2} \mathbf{u}_b(\mathbf{x}') g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

**Fonctions tests *Hrot-conformes*.** Il suffit de remplacer  $\mathbf{u}_t$  par  $\mathbf{v}_t$  dans l'expression précédente.

**Décomposition Loop-Tree.**

$$\mathbf{P}_{LT} \mathbf{A}_\times^\ell \mathbf{P}_{LT}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \mathbf{A}_\times^\ell \mathbf{L}^\top & \mathbf{L} \mathbf{A}_\times^\ell \mathbf{T}^\top \\ \mathbf{T} \mathbf{A}_\times^\ell \mathbf{L}^\top & \mathbf{T} \mathbf{A}_\times^\ell \mathbf{T}^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\times^{\ell,LL} & \mathbf{A}_\times^{\ell,LT} \\ \mathbf{A}_\times^{\ell,TL} & \mathbf{A}_\times^{\ell,TT} \end{bmatrix}$$

avec

$$\left(\mathbf{A}_\times^{\ell,ij}\right)_{tb} := \left\langle \mathbf{u}_t^i, \mathcal{A}_\times^\ell(\mathbf{u}_b^j) \right\rangle_\times$$

et  $(i,j) = (L,T)$ .

## C.3 L'opérateur matriciel $\mathbf{B}_\times$

**Fonctions tests *Hdiv-conformes*.** Par définition de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\times$  et de l'opérateur intégral  $\mathcal{B}_\times$ ,

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{B}_\times^\ell\right)_{tb} &:= \left\langle \mathbf{u}_t, \mathcal{B}_\times^\ell(\mathbf{u}_b) \right\rangle_\times = - \int_{\Gamma_h} \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{R} \circ \mathcal{B}_\times^\ell(\mathbf{u}_b) d\mathbf{x}, \\ &= \int_{K_t^1 \cup K_t^2} \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \cdot \nabla \times \left( \int_{K_b^1 \cup K_b^2} \mathbf{u}_b(\mathbf{x}') g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{K_t^1 \cup K_t^2} \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \cdot \int_{K_b^1 \cup K_b^2} \nabla' g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \times \mathbf{u}_b(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

**Fonctions tests *Hrot-conformes*.** Il suffit de remplacer  $\mathbf{u}_t$  par  $\mathbf{v}_t$  dans l'expression précédente.

**Décomposition Loop-Tree.**

$$\mathbf{P}_{LT}\mathbf{B}_\times^\ell\mathbf{P}_{LT}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{L}\mathbf{B}_\times^\ell\mathbf{L}^\top & \mathbf{L}\mathbf{B}_\times^\ell\mathbf{T}^\top \\ \mathbf{T}\mathbf{B}_\times^\ell\mathbf{L}^\top & \mathbf{T}\mathbf{B}_\times^\ell\mathbf{T}^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_\times^{\ell,LL} & \mathbf{B}_\times^{\ell,LT} \\ \mathbf{B}_\times^{\ell,TL} & \mathbf{B}_\times^{\ell,TT} \end{bmatrix}$$

avec

$$\left(\mathbf{B}_\times^{\ell,ij}\right)_{tb} := \left\langle \mathbf{u}_t^i, \mathcal{B}_\times^\ell(\mathbf{u}_b^j) \right\rangle_\times$$

et  $(i,j) = (L,T)$ . Pour  $i = L$  et  $j = L$ , on a

$$\left(\mathbf{B}_\times^{\ell,LL}\right)_{tb} = - \int_{K_t^L} \mathbf{u}_t^L(\mathbf{x}) \cdot \int_{K_b^L} \nabla' g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \times \mathbf{u}_b^L(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\mathbf{x}.$$

**Remarque C.3.1.** Si  $\omega \ll 1$  et si le nombre d'onde  $\kappa_\ell$  est réel alors  $\kappa_\ell \ll 1$  on peut écrire le développement limité de

$$\nabla g_{\kappa_\ell}(R) = \left( -si\kappa_\ell - \frac{1}{|R|} \right) \frac{R}{|R|} g_{\kappa_\ell}(R)$$

au voisinage de 0 :

$$4\pi\nabla g_{\kappa_\ell}(R) := -\frac{R}{|R|^3} + \frac{R}{|R|^3} \left( \frac{(-si\kappa_\ell|R|)^2}{2!} + \frac{(-si\kappa_\ell|R|)^3}{3!} + o((-si\kappa_\ell|R|)^3) \right) \quad (\text{C.3.1})$$

avec  $R = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ . Or, d'après [16],

$$\int_{\Gamma_h} \mathbf{u}_t^L(\mathbf{x}) \cdot \int_{\Gamma_h} \nabla \frac{1}{|R|} \times \mathbf{u}_b^L(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\mathbf{x} = 0$$

donc

$$\left(\mathbf{B}_\times^{\ell,LL}\right)_{tb} \simeq \int_{K_t^L} \mathbf{u}_t^L(\mathbf{x}) \cdot \int_{K_b^L} \frac{R}{4\pi|R|^3} \left( \frac{(-si\kappa_\ell|R|)^2}{2!} + \frac{(-si\kappa_\ell|R|)^3}{3!} \right) \times \mathbf{u}_b^L(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\mathbf{x}.$$

## C.4 L'opérateur matriciel $\mathbf{C}_\times$

**Fonctions tests *Hdiv-conformes*.** Par définition de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\times$  et de l'opérateur intégral  $\mathcal{C}_\times$ ,

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{C}_\times^\ell\right)_{tb} &:= \left\langle \mathbf{u}_t, \mathcal{C}_\times^\ell(\mathbf{u}_b) \right\rangle_\times = - \int_{\Gamma_h} \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{R} \circ \mathcal{C}_\times^\ell(\mathbf{u}_b) d\mathbf{x}, \\ &= \int_{K_{t_1} \cup K_{t_2}} \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \cdot \nabla \nabla \cdot \left( \int_{K_{b_1} \cup K_{b_2}} \mathbf{u}_b(\mathbf{x}') g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{K_{t_1} \cup K_{t_2}} \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \cdot \nabla \left( \int_{K_{b_1} \cup K_{b_2}} \mathbf{u}_b(\mathbf{x}') \cdot \nabla g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{u}_t = -\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \circ \mathbf{u}_t \in \mathcal{V}_{\text{div}}^h$ . Or, d'après la formule de Stokes et la relation

$$\nabla g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\nabla' g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

on a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{b_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \int_{K_{b_i}} \mathbf{u}_b(\mathbf{x}') \cdot \nabla g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \int_{K_{b_i}} \text{div}'_{\Gamma} \mathbf{u}_b(\mathbf{x}') g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &\quad - \int_{\partial K_{b_i}} (\mathbf{n}_{\partial K_{b_i}} \cdot \mathbf{u}_b(\mathbf{x}')) g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \end{aligned}$$

pour  $i = 1, 2$  et

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{t_j b_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \int_{K_{t_j}} \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \cdot \nabla (\mathcal{I}_{b_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) d\mathbf{x} = - \int_{K_{t_j}} \text{div}_{\Gamma} \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \mathcal{I}_{b_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\partial K_{t_j}} (\mathbf{n}_{\partial K_{t_j}} \cdot \mathbf{u}_t(\mathbf{x})) \mathcal{I}_{b_i}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x} \end{aligned}$$

pour  $j = 1, 2$ . On a donc

$$\left( \mathbf{C}_\times^\ell \right)_{tb} = \mathcal{I}_{t_1 b_1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \mathcal{I}_{t_1 b_2}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \mathcal{I}_{t_2 b_1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \mathcal{I}_{t_2 b_2}(\mathbf{x}, \mathbf{x}').$$

La normale  $\mathbf{n}_{\partial K_{b_i}}$ , respectivement  $\mathbf{n}_{\partial K_{t_j}}$ , est la normale unitaire à  $\partial K_{b_i}$ , respectivement  $\partial K_{t_j}$ , orientée vers l'extérieur de  $K_{b_i}$ , respectivement  $K_{t_j}$ . Autrement dit,  $\mathbf{n}_{\partial K_{b_i}}$  et  $\mathbf{n}_{\partial K_{t_j}}$  sont les ensembles de normales unitaires aux arêtes des éléments  $K_{b_i}$  et  $K_{t_j}$ , respectivement. Comme les fonctions tests et bases sont les fonctions (4.1.3) *Hdiv-conformes* de  $\mathcal{V}_{\text{div}}^h$ , la composante normale, selon la normale aux arêtes, de ces fonctions sur les bords des éléments qui les supportent est non nulle uniquement sur l'arête qui leur est associée. De plus cette composante est continue sur l'arête commune. C'est-à-dire, soit  $\mathbf{n}_{a_i}$  la normale extérieure à l'arête locale  $a_i$  de  $K_{b_i}$  associée à l'arête globale  $a_b$  alors

$$(\mathbf{n}_{a_1} \cdot \mathbf{u}_b(\mathbf{x}'))|_{a_1} = (\mathbf{n}_{a_2} \cdot \mathbf{u}_b(\mathbf{x}'))|_{a_2} \quad (\text{C.4.1})$$

et soit  $\mathbf{n}_{a_j}$  la normale à l'arête locale  $a_j$  de  $K_{t_j}$  associée à l'arête globale  $a_t$  alors

$$(\mathbf{n}_{a_1} \cdot \mathbf{u}_t(\mathbf{x}'))|_{a_1} = (\mathbf{n}_{a_2} \cdot \mathbf{u}_t(\mathbf{x}'))|_{a_2}. \quad (\text{C.4.2})$$

Finalement les termes de bord s'annulent et on obtient que

$$\left( \mathbf{C}_\times^\ell \right)_{tb} = - \int_{K_{t_1} \cup K_{t_2}} \text{div}_{\Gamma} \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \int_{K_b^1 \cup K_b^2} \text{div}'_{\Gamma} \mathbf{u}_b(\mathbf{x}') g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\mathbf{x}.$$

**Fonctions tests *Hrot-conformes*.** Lorsque les fonctions tests ne sont plus *Hdiv-conformes* la relation (C.4.2) n'est plus vérifiée (la relation (C.4.1) reste vérifiée puisque les fonctions bases sont *Hdiv-conformes*) et on a alors

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{C}_\times^\ell\right)_{tb} &= - \int_{K_{t_1} \cup K_{t_2}} \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}_t(\mathbf{x}) \int_{K_{b_1} \cup K_{b_2}} \operatorname{div}'_\Gamma \mathbf{u}_b(\mathbf{x}') g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\partial K_{t_1}} (\mathbf{n}_{\partial K_{t_1}} \cdot \mathbf{v}_t(\mathbf{x})) \int_{K_{b_1} \cup K_{b_2}} \operatorname{div}'_\Gamma \mathbf{u}_b(\mathbf{x}') g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\partial K_{t_2}} (\mathbf{n}_{\partial K_{t_2}} \cdot \mathbf{v}_t(\mathbf{x})) \int_{K_{b_1} \cup K_{b_2}} \operatorname{div}'_\Gamma \mathbf{u}_b(\mathbf{x}') g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{v}_t \in \mathcal{V}_{\text{rot}}^h$  (et donc l'écriture explicite de  $\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}_t$  n'est pas triviale).

**Décomposition Loop-Tree.**

$$\mathbf{P}_{LT} \mathbf{C}_\times^\ell \mathbf{P}_{LT}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \mathbf{C}_\times^\ell \mathbf{L}^\top & \mathbf{L} \mathbf{C}_\times^\ell \mathbf{T}^\top \\ \mathbf{T} \mathbf{C}_\times^\ell \mathbf{L}^\top & \mathbf{T} \mathbf{C}_\times^\ell \mathbf{T}^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_\times^{\ell, TT} \end{bmatrix}$$

avec

$$\left(\mathbf{C}_\times^{\ell, TT}\right)_{tb} := \left\langle \mathbf{u}_t^T, \mathcal{A}_\times^\ell(\mathbf{u}_b^T) \right\rangle_\times$$

puisque les fonctions *Loop* sont à divergence surfacique nulle.

## C.5 L'opérateur matriciel $\mathbf{R}$

**Fonctions tests *Hdiv-conformes*.** Par définition de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\times$  et de l'opérateur de rotation  $\mathcal{R}$ ,

$$(\mathbf{R})_{tb} := \langle \mathbf{u}_t, \mathcal{R}(\mathbf{u}_b) \rangle = - \langle \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_b \rangle_\times = \int_{K_{t_1} \cup K_{t_2}} \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u}_b(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}) d\mathbf{x}.$$

**Fonctions tests *Hrot-conformes*.** Il suffit de remplacer  $\mathbf{u}_t$  par  $\mathbf{v}_t$  dans l'expression précédente.

**Décomposition Loop-Tree.**

$$\mathbf{P}_{LT} \mathbf{R} \mathbf{P}_{LT}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \mathbf{R} \mathbf{L}^\top & \mathbf{L} \mathbf{R} \mathbf{T}^\top \\ \mathbf{T} \mathbf{R} \mathbf{L}^\top & \mathbf{T} \mathbf{R} \mathbf{T}^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{LL} & \mathbf{R}^{LT} \\ \mathbf{R}^{TL} & \mathbf{R}^{TT} \end{bmatrix}$$

avec

$$(\mathbf{R}^{ij})_{tb} := \left\langle \mathbf{u}_t^i, \mathcal{R}(\mathbf{u}_b^j) \right\rangle$$

et  $(i, j) = (L, T)$ .

## C.6 L'opérateur matriciel $\tilde{\mathbf{C}}_\times$

**Fonctions tests *Hdiv-conformes*.** Par définition de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\times$  et de l'opérateur intégral  $\tilde{\mathbf{C}}_\times$ ,

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{C}}_\times^\ell)_{tb} &:= \langle \mathbf{u}_t, \tilde{\mathbf{C}}_\times^\ell(\varphi_b) \rangle_\times = - \int_{\Gamma_h} \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{R} \circ \tilde{\mathbf{C}}_\times^\ell(\varphi_b) d\mathbf{x}, \\ &= \int_{K_{t_1} \cup K_{t_2}} \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \cdot \nabla \left( \int_{K_{b_1} \cup K_{b_2}} \varphi_b(\mathbf{x}') g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{K_{t_1} \cup K_{t_2}} \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \cdot \int_{K_{b_1} \cup K_{b_2}} \varphi_b(\mathbf{x}') \nabla' g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{u}_t = -\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \circ \mathbf{u}_t \in \mathcal{V}_{\text{div}}^h$ .

**Fonctions tests *Hrot-conformes*.** Il suffit de remplacer  $\mathbf{u}_t$  par  $\mathbf{v}_t$  et  $\mathbf{u}_t$  par  $\tilde{\mathbf{v}}_t = -\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \circ \mathbf{v}_t \in \mathcal{V}_{\text{rot}}^h$  dans l'expression précédente.

## C.7 L'opérateur matriciel $\mathbf{A}_n$

Par définition de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{1}{2}}$  et de l'opérateur intégral  $\mathcal{A}_n$ ,

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_n^\ell)_{tb} &:= \langle \varphi_t, \mathcal{A}_n^\ell(\mathbf{u}_b) \rangle_{\frac{1}{2}} = \int_{\Gamma_h} \varphi_t(\mathbf{x}) \left( \mathbf{n} \cdot \int_{\Gamma_h} \mathbf{u}_b(\mathbf{x}') g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right) d\mathbf{x}, \\ &= \int_{K_t} \varphi_t(\mathbf{x}) \left( \mathbf{n} \cdot \int_{K_{b_1} \cup K_{b_2}} \mathbf{u}_b(\mathbf{x}') g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

## C.8 L'opérateur matriciel $\mathbf{B}_n$

Par définition de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{1}{2}}$  et de l'opérateur intégral  $\mathcal{B}_n$ ,

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_n^\ell)_{tb} &:= \langle \varphi_t, \mathcal{B}_n^\ell(\mathbf{a}_b) \rangle_{\frac{1}{2}} = \int_{\Gamma_h} \varphi_t(\mathbf{x}) \left( \mathbf{n} \cdot \nabla \times \int_{\Gamma_h} \mathbf{u}_b(\mathbf{x}') g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{K_t} \varphi_t(\mathbf{x}) \left( \mathbf{n} \cdot \int_{K_{b_1} \cup K_{b_2}} \nabla' g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \times \mathbf{u}_b(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

### C.9 L'opérateur matriciel $\tilde{\mathbf{C}}_n$

Par définition de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{1}{2}}$  et de l'opérateur intégral  $\tilde{\mathcal{C}}_n$ ,

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{C}}_n^\ell)_{tb} &:= \langle \varphi_t, \tilde{\mathcal{C}}_n^\ell(\varphi_b) \rangle_{\frac{1}{2}} = \int_{\Gamma_h} \varphi_t(\mathbf{x}) \left( \mathbf{n} \cdot \nabla \int_{\Gamma_h} \varphi_b(\mathbf{x}') g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{K_t} \varphi_t(\mathbf{x}) \left( \mathbf{n} \cdot \int_{K_b} \varphi_b(\mathbf{x}') \nabla' g_{\kappa_\ell}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

### C.10 L'opérateur matriciel $\mathbf{I}$

Par définition de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{1}{2}}$ ,

$$(\mathbf{I})_{tb} := \langle \varphi_t, \varphi_b \rangle_{\frac{1}{2}} = \int_{K_t} \varphi_t(\mathbf{x}) \varphi_b(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

### C.11 Seconds membres

$$\begin{aligned} (\mathbf{Y}^J)_t &:= \langle \mathbf{a}_t, \gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} \rangle_{\times} = - \int_{\Gamma_h} \mathbf{a}_t(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{R} \circ \gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} d\mathbf{x} = \int_{K_{t_1} \cup K_{t_2}} \mathbf{a}_t(\mathbf{x}) \cdot \gamma^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} d\mathbf{x}, \\ (\mathbf{Y}^M)_t &:= \langle \mathbf{a}_t, \gamma_{\times}^0 \mathbf{H}_{\text{inc}} \rangle_{\times} = - \int_{\Gamma_h} \mathbf{a}_t(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{R} \circ \gamma_{\times}^0 \mathbf{H}_{\text{inc}} d\mathbf{x} = \int_{K_{t_1} \cup K_{t_2}} \mathbf{a}_t(\mathbf{x}) \cdot \gamma^0 \mathbf{H}_{\text{inc}} d\mathbf{x}, \\ (\mathbf{Y}^{\mathbf{E}^{0n}})_t &:= \langle \varphi_t, \gamma_{\mathbf{n}}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} \rangle_{\frac{1}{2}} = \int_{\Gamma_h} \varphi_t(\mathbf{x}) \gamma_{\mathbf{n}}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} d\mathbf{x} = \int_{K_t} \varphi_t(\mathbf{x}) \gamma_{\mathbf{n}}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} d\mathbf{x}, \\ (\mathbf{Y}^{\mathbf{H}^{0n}})_t &:= \langle \varphi_t, \gamma_{\mathbf{n}}^0 \mathbf{H}_{\text{inc}} \rangle_{\frac{1}{2}} = \int_{\Gamma_h} \varphi_t(\mathbf{x}) \gamma_{\mathbf{n}}^0 \mathbf{H}_{\text{inc}} d\mathbf{x} = \int_{K_t} \varphi_t(\mathbf{x}) \gamma_{\mathbf{n}}^0 \mathbf{H}_{\text{inc}} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{a}_t = \mathbf{u}_t$  ou  $\mathbf{a}_t = \mathbf{v}_t$ .

**Décomposition Loop-Tree.**

$$\mathbf{P}_{LT} \mathbf{Y}^J = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \mathbf{Y}^J \\ \mathbf{T} \mathbf{Y}^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^{J_L} \\ \mathbf{Y}^{J_T} \end{bmatrix}$$

avec

$$(\mathbf{Y}^{J_i})_t := \langle \mathbf{a}_t^i, \gamma_{\times}^0 \mathbf{E}_{\text{inc}} \rangle_{\times}$$

et  $i = (L, T)$ . De même,

$$\mathbf{P}_{LT} \mathbf{Y}^M = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \mathbf{Y}^M \\ \mathbf{T} \mathbf{Y}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^{M_L} \\ \mathbf{Y}^{M_T} \end{bmatrix}$$

avec

$$(\mathbf{Y}^{M_i})_t := \langle \mathbf{a}_t^i, \gamma_{\times}^0 \mathbf{H}_{\text{inc}} \rangle_{\times}$$

et  $i = (L, T)$ .

# Annexe D

## Sorties

Dans nos résultats nous distinguons les configurations dites académiques des configurations dites de CND. Ces configurations se distinguent principalement par leurs données d'entrée et de sortie. Pour les configurations académiques, nous considérons en entrée une onde plane et en sortie nous évaluons la section efficace radar. Pour les configurations de type CND, nous considérons en entrée la ou les excitation(s) d'une bobine, et en sortie la variation d'impédance.

### D.1 Onde plane et section efficace radar (SER)

La section efficace radar (SER), ou *Radar Cross Section (RCS)* en anglais, est une donnée de sortie fréquemment utilisée pour les problèmes de diffraction d'une onde plane. Elle se calcule en fonctions des champs dits lointains, c'est-à-dire les champs diffractés à l'infini, et s'exprime en  $\text{m}^2$  ou en  $\text{dBm}^2$  en lui appliquant un  $10 \log_{10}$ . Cette quantité est souvent utilisée dans les applications militaires puisqu'elle dénote la capacité d'un objet à être détecté par un radar. Ici nous l'utilisons dans un cadre académique, à savoir la validation de nos formulations sur une sphère éclairée par un onde plane.

La RCS est définie par

$$\sigma_{\text{RCS}}(\phi_{\text{diff}}, \theta_{\text{diff}}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow +\infty} 4\pi \mathbf{x}^2 \frac{|\mathbf{E}_{\text{d}}(\phi_{\text{diff}}, \theta_{\text{diff}})|^2}{|\mathbf{E}_{\text{inc}}|^2} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow +\infty} 4\pi \mathbf{x}^2 \frac{|\mathbf{H}_{\text{d}}(\phi_{\text{diff}}, \theta_{\text{diff}})|^2}{|\mathbf{H}_{\text{inc}}|^2}$$

avec  $(\mathbf{E}_{\text{inc}}, \mathbf{H}_{\text{inc}}) = \mathcal{OP}^0(\hat{E}_{\text{inc}}, \hat{\mathbf{k}}_{\text{inc}})$ . Soit  $\alpha$  la polarisation de l'onde diffractée  $(\mathbf{E}_{\text{d}}, \mathbf{H}_{\text{d}})$  et  $\beta$  la polarisation de l'onde incidente  $(\mathbf{E}_{\text{inc}}, \mathbf{H}_{\text{inc}})$ , la SER est dite de polarisation  $\alpha\beta$ . On s'intéresse ici à la SER de polarisation  $\phi_{\text{diff}}\phi_{\text{inc}}$  et  $\theta_{\text{diff}}\theta_{\text{inc}}$ , on parlera souvent simplement de polarisation  $\phi\phi$  et  $\theta\theta$ . Les champs diffractés  $(\mathbf{E}_{\text{d}}, \mathbf{H}_{\text{d}})$  sont donnés par

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{d}} &= -\eta_0 \Psi_{SL}^{CL}(\mathbf{J}) + \Psi_{DL}^{CL}(\mathbf{M}), \\ \mathbf{H}_{\text{d}} &= -\eta_0 \Psi_{DL}^{CL}(\mathbf{J}) - \Psi_{SL}^{CL}(\mathbf{M})\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\Psi_{DL}^{CL}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) &:= \frac{i\kappa_0 \exp(-i\kappa_0 \mathbf{x})}{4\pi \mathbf{x}} \hat{k}_{\text{diff}} \times \int_{\Gamma} \mathbf{u}(\mathbf{x}') \exp(i\kappa_0 \mathbf{x}' \cdot \hat{k}_{\text{diff}}) dS(\mathbf{x}'), \\ \Psi_{SL}^{CL}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) &:= -\frac{i\kappa_0 \exp(-i\kappa_0 \mathbf{x})}{4\pi \mathbf{x}} \hat{k}_{\text{diff}} \times \hat{k}_{\text{diff}} \times \int_{\Gamma} \mathbf{u}(\mathbf{x}') \exp(i\kappa_0 \mathbf{x}' \cdot \hat{k}_{\text{diff}}) dS(\mathbf{x}').\end{aligned}$$

Les SER présentées dans ce document seront les SER bistatiques pour les polarisation  $\phi\phi$  et  $\theta\theta$ .

## D.2 Champs induits par une bobine et variation d'impédance

Soit une bobine parcourue par un courant sinusoïdal d'intensité  $I = I_0 \exp(\omega t)$  avec  $I_0$  l'intensité du courant d'excitation. L'impédance  $Z_{\text{bobine}}$  de la bobine est définie par le rapport de la tension entre les bornes de la bobine  $U_{\text{bobine}}$  et l'intensité  $I$  c'est-à-dire

$$Z_{\text{bobine}} = \frac{U}{I} = \frac{L_0}{I} \frac{dI}{dt} = i\omega L_0$$

avec  $L_0$  l'inductance de la bobine. Soit maintenant  $Z_{\text{piece}}$  l'impédance de la bobine en présence d'une pièce, on définit la variation d'impédance comme étant la différence

$$\Delta Z = \Delta Z_{\text{piece}} - \Delta Z_{\text{bobine}}.$$

La variation d'impédance étant une grandeur mesurable, elle est très généralement utilisée comme grandeur de validation dans la simulation de procédés de contrôle non destructif.

La variation d'impédance peut être évaluée à partir des densités de courant surfaciques  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$  et des champs incidents  $(\mathbf{E}_{\text{inc}}, \mathbf{H}_{\text{inc}})$  via le théorème de réciprocité :

$$\Delta Z = -\frac{1}{I_0^2} \int_{\Gamma} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{H}_{\text{inc}}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \quad (\text{D.2.1})$$

avec  $(\mathbf{E}_{\text{inc}}, \mathbf{H}_{\text{inc}}) = \mathcal{BS}^0(\mathbf{J}_{\text{inc}})$ .

# Annexe E

## Cas tests

### E.1 La sphère

On considère une sphère de rayon  $R = 1$  m. On distingue trois cas selon les paramètres physiques de la sphère :

- Cas test #1.1 : La sphère parfaitement conductrice.
- Cas test #1.2 : La sphère diélectrique.
- Cas test #1.3 : La sphère conductrice.

Les tableaux E.1 et E.2 présentent respectivement les paramètres physiques de la sphère diélectrique et de la sphère conductrice. La figure E.1 présente une discrétisation de la surface de cette sphère en 864 quadrilatères.

permittivité diélectrique relative	$\varepsilon_{r,1}^d$	$> 1$
perméabilité magnétique relative	$\mu_{r,1}$	1
conductivité	$\sigma_1$	0

TABLE E.1 – Paramètres physiques du cas test #1.2.

permittivité diélectrique relative	$\varepsilon_{r,1}^d$	$\geq 1$
perméabilité magnétique relative	$\mu_{r,1}$	1
conductivité	$\sigma_1$	$> 0$

TABLE E.2 – Paramètres physiques du cas test #1.3.

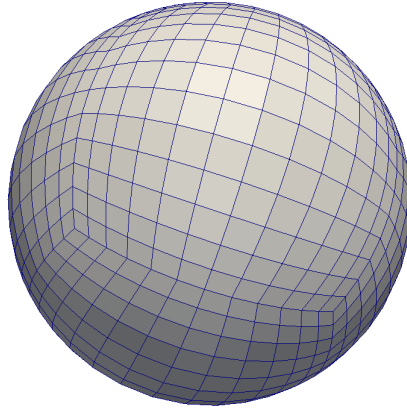


FIGURE E.1 – Maillage quadrilatéral de la sphère.

## E.2 La plaque cylindrique

On considère une plaque cylindrique de rayon  $R = 5$  mm et de hauteur  $H = 1$  mm contrôlée par une bobine simple de rayon interne  $r_{int} = 1$  mm, de rayon externe  $r_{ext} = 2$  mm, de hauteur  $H = 1$  mm, comprenant 1 spire et de courant d'injection  $I = 1$  A centrée et placée à 0.1 mm au dessus de la plaque. On distingue deux cas selon les paramètres physiques de la plaque :

- Cas test #2.1 : La plaque conductrice non magnétique.
- Cas test #2.2 : La plaque conductrice magnétique.

Les tableaux E.3 et E.4 présentent respectivement les paramètres physiques de la plaque conductrice non magnétique et de la plaque conductrice magnétique. La figure E.2 présente une discrétisation de la surface de cette plaque en 3738 quadrilatères.

permittivité diélectrique relative	$\varepsilon_{r,1}^d$	1
perméabilité magnétique relative	$\mu_{r,1}$	1
conductivité	$\sigma_1$	$> 0$

TABLE E.3 – Paramètres physiques du cas test #2.1.

permittivité diélectrique relative	$\varepsilon_{r,1}^d$	1
perméabilité magnétique relative	$\mu_{r,1}$	$> 1$
conductivité	$\sigma_1$	$> 0$

TABLE E.4 – Paramètres physiques du cas test #2.2.

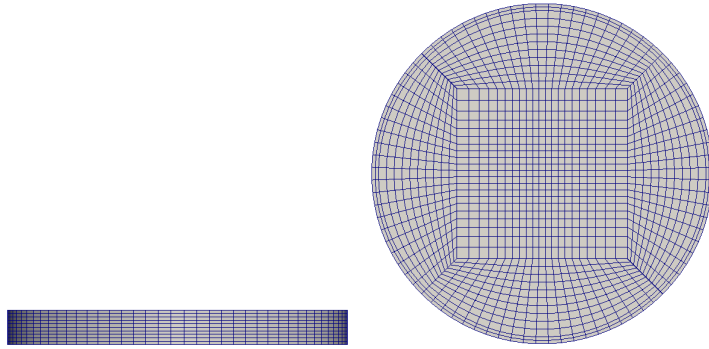


FIGURE E.2 – Maillage quadrilatéral de la plaque, vue de l'épaisseur à gauche et du haut à droite.

### E.3 La barre

On considère une barre de rayon  $R = 8$  mm et de hauteur  $H = 10$  mm contrôlée par une bobine simple de rayon interne  $r_{int} = 9$  mm, de rayon externe  $r_{ext} = 10$  mm, de hauteur  $H = 2$  mm, comprenant 70 spires et de courant d'injection  $I = 1$  A et placée à mi hauteur à l'extérieur de la barre. On distingue deux cas selon les paramètres physiques de la barre :

- Cas test #3.1 : La barre conductrice non magnétique.
- Cas test #3.2 : La barre conductrice magnétique.

Les tableaux E.5 et E.6 présentent respectivement les paramètres physiques de la barre conductrice non magnétique et de la barre conductrice magnétique. La figure E.3 présente une discrétisation de la surface de cette barre en 2610 quadrilatères.

permittivité diélectrique relative	$\varepsilon_{r,1}^d$	1
perméabilité magnétique relative	$\mu_{r,1}$	1
conductivité	$\sigma_1$	$> 0$

TABLE E.5 – Paramètres physiques du cas test #3.1.

permittivité diélectrique relative	$\varepsilon_{r,1}^d$	1
perméabilité magnétique relative	$\mu_{r,1}$	$> 1$
conductivité	$\sigma_1$	$> 0$

TABLE E.6 – Paramètres physiques du cas test #3.2.

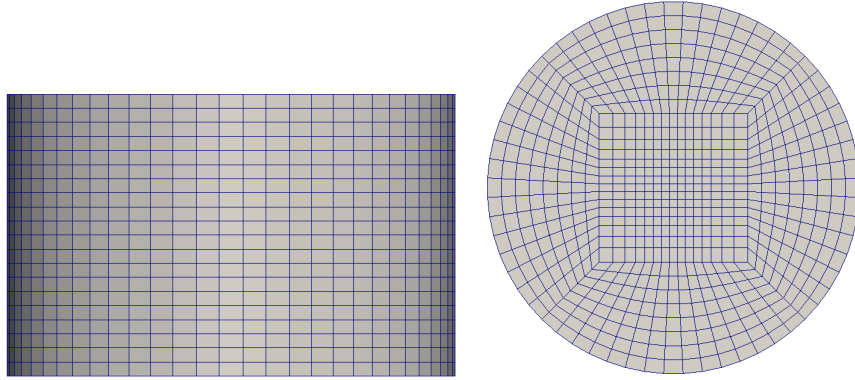


FIGURE E.3 – Maillage quadrilatéral de la barre, vue de la hauteur à gauche et du haut à droite.

## E.4 Le tube

On considère un tube de rayon  $R = 9.84$  mm, d'épaisseur  $e = 1.27$  mm et de hauteur  $H = 10$  mm contrôlée par une bobine simple de rayon interne  $r_{int} = 7.83$  mm, de rayon externe  $r_{ext} = 8.5$  mm, de hauteur  $H = 2$  mm, comprenant 70 spires et de courant d'injection  $I = 1$  A et placée à mi hauteur à l'intérieur du tube. On distingue deux cas selon les paramètres physiques du tube :

- Cas test #4.1 : Le tube conducteur non magnétique.
- Cas test #4.2 : Le tube conducteur magnétique.

Les tableaux E.7 et E.8 présentent respectivement les paramètres physiques du tube conducteur non magnétique et du tube conducteur magnétique. La figure E.3 présente une discrétisation de la surface de ce tube en 2640 quadrilatères.

permittivité diélectrique relative	$\varepsilon_{r,1}^d$	1
perméabilité magnétique relative	$\mu_{r,1}$	1
conductivité	$\sigma_1$	$> 0$

TABLE E.7 – Paramètres physiques du cas test #4.1.

permittivité diélectrique relative	$\varepsilon_{r,1}^d$	1
perméabilité magnétique relative	$\mu_{r,1}$	$> 1$
conductivité	$\sigma_1$	$> 0$

TABLE E.8 – Paramètres physiques du cas test #4.2.

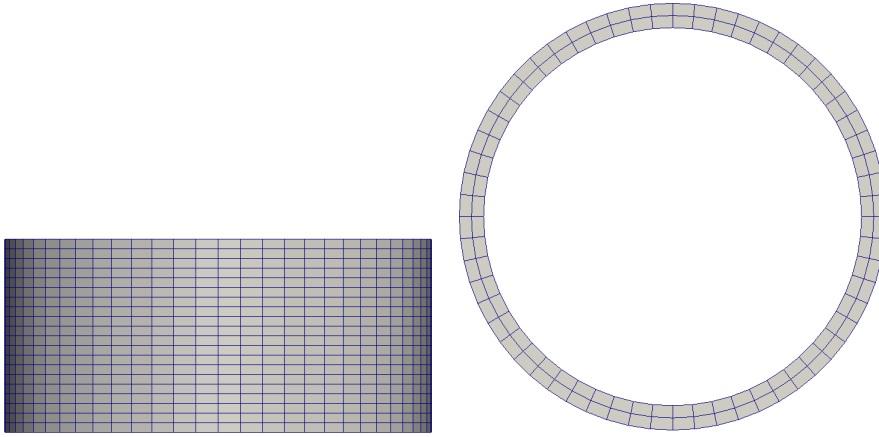


FIGURE E.4 – Maillage quadrilatéral du tube, vue de la hauteur à gauche et du haut à droite.

## E.5 Le tube à section elliptique

On considère le tube précédent dont la section est non plus un cercle mais une ellipse de petit rayon  $R_y = 9.84$  mm et de grand rayon  $R_x = R_y \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)$  où  $\alpha$  est le pourcentage *d'aplatissement* du tube, voir figure E.5. L'épaisseur 1.27 mm et la hauteur  $H = 10$  mm du tube sont fixées et ce dernier est contrôlée par une bobine simple de rayon interne  $r_{int} = 7.83$  mm, de rayon externe  $r_{ext} = 8.5$  mm, de hauteur  $H = 2$  mm, comprenant 70 spires et de courant d'injection  $I = 1$  A et placée à mi hauteur et centrée à l'intérieur du tube. On note ce cas, cas test #5, et le tableau E.9 présente les paramètres physiques de ce tube.

permittivité diélectrique relative	$\varepsilon_{r,1}^d$	1
perméabilité magnétique relative	$\mu_{r,1}$	1
conductivité	$\sigma_1$	$> 0$

TABLE E.9 – Paramètres physiques du cas test #5.

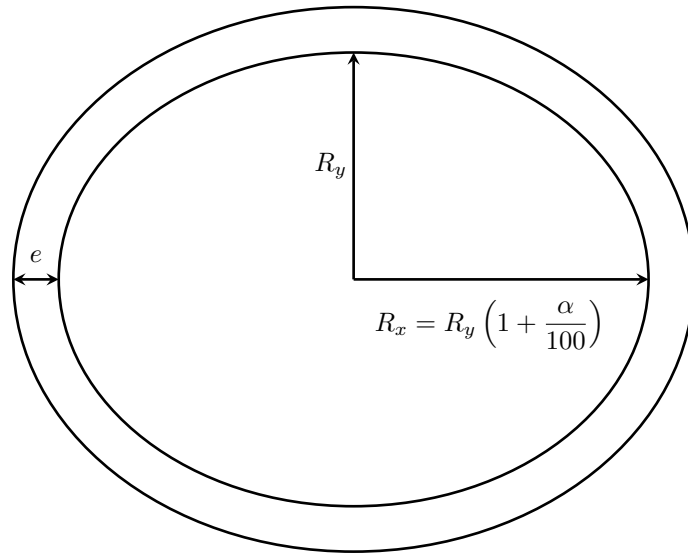


FIGURE E.5 – Section elliptique du tube.

## Annexe F

# Termes du développement asymptotique

### F.1 Développement asymptotique des noyaux de Green

Les développements limités au voisinage de  $\gamma_1$  du noyau de Green associé à  $\Omega_0$ , de son gradient et de son gradient double sont donnés par

$$\begin{aligned}\bar{g}_{\kappa_0} &= \bar{g}_{\kappa_0}^{(0)} + \bar{g}_{\kappa_0}^{(1)}\gamma_1 + \bar{g}_{\kappa_0}^{(2)}\gamma_1^2 + \bar{g}_{\kappa_0}^{(3)}\gamma_1^3 + \bar{g}_{\kappa_0}^{(4)}\gamma_1^4 + o(\gamma_1^4), \\ \nabla\bar{g}_{\kappa_0} &= \nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(0)} + \nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(2)}\gamma_1^2 + \nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(3)}\gamma_1^3 + \nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(4)}\gamma_1^4 + o(\gamma_1^4), \\ \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_0} &= \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(0)} + \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(2)}\gamma_1^2 + \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(3)}\gamma_1^3 + \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(4)}\gamma_1^4 + o(\gamma_1^4)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\bar{g}_{\kappa_0}^{(0)} &= \frac{1}{4\pi|\bar{R}|}, & \bar{g}_{\kappa_0}^{(1)} &= -\frac{si\gamma_2}{4\pi}, & \bar{g}_{\kappa_0}^{(2)} &= -\frac{\gamma_2^2|\bar{R}|}{8\pi}, \\ \bar{g}_{\kappa_0}^{(3)} &= \frac{si\gamma_2^3|\bar{R}|^2}{24\pi}, & \bar{g}_{\kappa_0}^{(4)} &= \frac{\gamma_2^4|\bar{R}|^3}{96\pi|\bar{R}|},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(0)} &= -\frac{\hat{R}}{4\pi|\bar{R}|^2}, & \nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(2)} &= -\frac{\gamma_2^2\hat{R}}{8\pi}, \\ \nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(3)} &= \frac{si\gamma_2^3|\bar{R}|\hat{R}}{12\pi}, & \nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(4)} &= \frac{\gamma_2^4|\bar{R}|^2\hat{R}}{32\pi},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(0)} &= \frac{1}{4\pi|\bar{R}|^3} \left( -\mathbf{Id} + 3\hat{R} \otimes \hat{R} \right), & \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(2)} &= \frac{\gamma_2^2}{8\pi|\bar{R}|} \left( -\mathbf{Id} + \hat{R} \otimes \hat{R} \right), \\ \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(3)} &= \frac{si\gamma_2^3\mathbf{Id}}{12\pi}, & \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_0}^{(4)} &= \frac{\gamma_2^4|\bar{R}|}{32\pi} \left( \mathbf{Id} + \hat{R} \otimes \hat{R} \right).\end{aligned}$$

Les développements limités au voisinage de  $\gamma_1$  du nombre d'onde associé à  $\Omega_1$ , du noyau de Green associé à  $\Omega_1$ , de son gradient et de son gradient double sont donnés par

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \kappa_1^{(0)} + \kappa_1^{(2)}\gamma_1^2 + \kappa_1^{(4)}\gamma_1^4 + o(\gamma_1^4), \\ \bar{g}_{\kappa_1} &= \bar{g}_{\kappa_1}^{(0)} + \bar{g}_{\kappa_1}^{(2)}\gamma_1^2 + \bar{g}_{\kappa_1}^{(4)}\gamma_1^4 + o(\gamma_1^4), \\ \nabla\bar{g}_{\kappa_1} &= \nabla\bar{g}_{\kappa_1}^{(0)} + \nabla\bar{g}_{\kappa_1}^{(2)}\gamma_1^2 + \nabla\bar{g}_{\kappa_1}^{(4)}\gamma_1^4 + o(\gamma_1^4), \\ \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_1} &= \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_1}^{(0)} + \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_1}^{(2)}\gamma_1^2 + \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_1}^{(4)}\gamma_1^4 + o(\gamma_1^4)\end{aligned}$$

avec

$$\bar{\kappa}_1^{(0)} = \gamma_2\sqrt{-\mathit{si}\mu_{r,1}}, \quad \bar{\kappa}_1^{(2)} = \frac{\varepsilon_{r,1}^d\gamma_2\sqrt{\mathit{si}\mu_{r,1}}}{2}, \quad \bar{\kappa}_1^{(4)} = \frac{(\varepsilon_{r,1}^d)^2\gamma_2\sqrt{-\mathit{si}\mu_{r,1}}}{8},$$

$$\begin{aligned}\bar{g}_{\kappa_1}^{(0)} &= \frac{\exp(\gamma_2\sqrt{\mathit{si}\mu_{r,1}}|\bar{R}|)}{4\pi|\bar{R}|}, \\ \bar{g}_{\kappa_1}^{(2)} &= \frac{\exp(\gamma_2\sqrt{\mathit{si}\mu_{r,1}}|\bar{R}|)\gamma_2\sqrt{-\mathit{si}\mu_{r,1}}\varepsilon_{r,1}^d}{8\pi}, \\ \bar{g}_{\kappa_1}^{(4)} &= -\frac{\exp(\gamma_2\sqrt{\mathit{si}\mu_{r,1}}|\bar{R}|)(\varepsilon_{r,1}^d)^2\gamma_2\sqrt{\mathit{si}\mu_{r,1}}}{32\pi}\left(\gamma_2\sqrt{\mathit{si}\mu_{r,1}}|\bar{R}| - 1\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\bar{g}_{\kappa_1}^{(0)} &= \frac{\hat{R}\exp(\gamma_2\sqrt{\mathit{si}\mu_{r,1}}|\bar{R}|)}{4\pi|\bar{R}|^2}\left(\gamma_2\sqrt{\mathit{si}\mu_{r,1}}|\bar{R}| - 1\right), \\ \nabla\bar{g}_{\kappa_1}^{(2)} &= -\frac{\hat{R}\exp(\gamma_2\sqrt{\mathit{si}\mu_{r,1}}|\bar{R}|)}{8\pi}\varepsilon_{r,1}^d\mu_{r,1}\gamma_2^2, \\ \nabla\bar{g}_{\kappa_1}^{(4)} &= -\frac{\hat{R}\exp(\gamma_2\sqrt{\mathit{si}\mu_{r,1}}|\bar{R}|)}{32\pi}(\varepsilon_{r,1}^d)^2(\gamma_2\sqrt{\mathit{si}\mu_{r,1}})^3|\bar{R}|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_1}^{(0)} &= \frac{\exp(\gamma_2\sqrt{\mathit{si}\mu_{r,1}}|\bar{R}|)}{4\pi|\bar{R}|^3} \\ &\quad \left(\mathbf{Id}\left[\gamma_2\sqrt{\mathit{si}\mu_{r,1}}|\bar{R}| - 1\right] + \hat{R} \otimes \hat{R}\left[\left(\gamma_2\sqrt{\mathit{si}\mu_{r,1}}|\bar{R}| - 1\right)^2 - 3\left(\gamma_2\sqrt{\mathit{si}\mu_{r,1}}|\bar{R}| - 1\right) + 3\right]\right), \\ \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_1}^{(2)} &= -\frac{\exp(\gamma_2\sqrt{\mathit{si}\mu_{r,1}}|\bar{R}|)}{8\pi|\bar{R}|^3} \\ &\quad \left(\mathbf{Id}\left[\varepsilon_{r,1}^d\mu_{r,1}(\gamma_2|\bar{R}|)^2\right] + \hat{R} \otimes \hat{R}\left[\left(\gamma_2\sqrt{\mathit{si}\mu_{r,1}}|\bar{R}| - 1\right)\varepsilon_{r,1}^d\mu_{r,1}(\gamma_2|\bar{R}|)^2\right]\right), \\ \nabla\nabla\bar{g}_{\kappa_1}^{(4)} &= \frac{\exp(\gamma_2\sqrt{\mathit{si}\mu_{r,1}}|\bar{R}|)(\varepsilon_{r,1}^d)^2}{32\pi|\bar{R}|^3}\left(\mathbf{Id}(\gamma_2\sqrt{\mathit{si}\mu_{r,1}}|\bar{R}|)^3 + \hat{R} \otimes \hat{R}(\mu_{r,1}^2(\gamma_2|\bar{R}|)^4)\right).\end{aligned}$$

## F.2 Développement asymptotique de la formulation LT

Les termes du développement asymptotique au voisinage de  $\gamma_1$  de  $\mathbf{Z}_{LT}$  sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{LT}^{(0)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & (\mathbf{Z}_{LL}^{JM})^{(0)} & (\mathbf{Z}_{LT}^{JM})^{(0)} \\ 0 & (\mathbf{Z}_{TT}^{JJ})^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{Z}_{LL}^{MM})^{(0)} & (\mathbf{Z}_{LT}^{MM})^{(0)} \\ 0 & 0 & (\mathbf{Z}_{TL}^{MM})^{(0)} & (\mathbf{Z}_{TT}^{MM})^{(0)} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Z}_{LT}^{(1)} &= \begin{bmatrix} (\mathbf{Z}_{LL}^{JJ})^{(1)} & (\mathbf{Z}_{LT}^{JJ})^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{Z}_{TL}^{JM})^{(1)} & (\mathbf{Z}_{TT}^{JM})^{(1)} \\ (\mathbf{Z}_{LL}^{MJ})^{(1)} & (\mathbf{Z}_{LT}^{MJ})^{(1)} & 0 & 0 \\ (\mathbf{Z}_{TL}^{MJ})^{(1)} & (\mathbf{Z}_{TT}^{MJ})^{(1)} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Z}_{LT}^{(2)} &= \begin{bmatrix} (\mathbf{Z}_{LL}^{JJ})^{(2)} & (\mathbf{Z}_{LT}^{JJ})^{(2)} & (\mathbf{Z}_{LL}^{JM})^{(2)} & (\mathbf{Z}_{LT}^{JM})^{(2)} \\ (\mathbf{Z}_{TL}^{JJ})^{(2)} & (\mathbf{Z}_{TT}^{JJ})^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{Z}_{LL}^{MM})^{(2)} & (\mathbf{Z}_{LT}^{MM})^{(2)} \\ 0 & 0 & (\mathbf{Z}_{TL}^{MM})^{(2)} & (\mathbf{Z}_{TT}^{MM})^{(2)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z}_{LL}^{JM})^{(0)} &= \left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{0,LL}\right)^{(0)} + \left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{1,LL}\right)^{(0)}, \\ (\mathbf{Z}_{LT}^{JM})^{(0)} &= \left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{0,LT}\right)^{(0)} + \left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{1,LT}\right)^{(0)}, \\ (\mathbf{Z}_{TT}^{JJ})^{(0)} &= \frac{si\eta_0}{\gamma_2} \left(\overline{\mathbf{C}}_{\times}^{0,TT}\right)^{(0)}, \\ (\mathbf{Z}_{LL}^{MM})^{(0)} &= \frac{\gamma_2}{\eta_0} \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{1,LL}\right)^{(0)}, \\ (\mathbf{Z}_{LT}^{MM})^{(0)} &= \frac{\gamma_2}{\eta_0} \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{1,LT}\right)^{(0)}, \\ (\mathbf{Z}_{TL}^{MM})^{(0)} &= \frac{\gamma_2}{\eta_0} \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{1,TL}\right)^{(0)}, \\ (\mathbf{Z}_{TT}^{MM})^{(0)} &= \frac{\gamma_2}{\eta_0} \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{1,TT}\right)^{(0)} + \frac{si}{\eta_0\gamma_2} \left( \left(\overline{\mathbf{C}}_{\times}^{0,TT}\right)^{(0)} + \frac{1}{\mu_{r,1}} \left(\overline{\mathbf{C}}_{\times}^{1,TT}\right)^{(0)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z}_{LL}^{JJ})^{(1)} &= si\eta_0\gamma_2 \left( \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{0,LL}\right)^{(0)} + \mu_{r,1} \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{1,LL}\right)^{(0)} \right), \\ (\mathbf{Z}_{LT}^{JJ})^{(1)} &= si\eta_0\gamma_2 \left( \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{0,LT}\right)^{(0)} + \mu_{r,1} \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{1,LT}\right)^{(0)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{Z}_{TL}^{JM})^{(1)} &= \left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{0,TL}\right)^{(0)} + \left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{1,TL}\right)^{(0)}, \\
 (\mathbf{Z}_{TT}^{JM})^{(1)} &= \left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{0,TT}\right)^{(0)} + \left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{1,TT}\right)^{(0)}, \\
 (\mathbf{Z}_{LL}^{MJ})^{(1)} &= -\left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{0,LL}\right)^{(0)} - \left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{1,LL}\right)^{(0)}, \\
 (\mathbf{Z}_{LT}^{MJ})^{(1)} &= -\left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{0,LT}\right)^{(0)} - \left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{1,LT}\right)^{(0)}, \\
 (\mathbf{Z}_{TL}^{MJ})^{(1)} &= -\left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{0,TL}\right)^{(0)} - \left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{1,TL}\right)^{(0)}, \\
 (\mathbf{Z}_{TT}^{MJ})^{(1)} &= -\left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{0,TT}\right)^{(0)} - \left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{1,TT}\right)^{(0)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{Z}_{LL}^{JJ})^{(2)} &= si\eta_0\gamma_2 \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{0,LL}\right)^{(1)}, \\
 (\mathbf{Z}_{LT}^{JJ})^{(2)} &= si\eta_0\gamma_2 \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{0,LT}\right)^{(1)}, \\
 (\mathbf{Z}_{LL}^{JM})^{(2)} &= \left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{0,LL}\right)^{(2)} + \left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{1,LL}\right)^{(2)}, \\
 (\mathbf{Z}_{LT}^{JM})^{(2)} &= \left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{0,LT}\right)^{(2)} + \left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{1,LT}\right)^{(2)}, \\
 (\mathbf{Z}_{TL}^{JJ})^{(2)} &= si\eta_0\gamma_2 \left( \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{0,TL}\right)^{(0)} + \mu_{r,1} \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{1,TL}\right)^{(0)} \right), \\
 (\mathbf{Z}_{TT}^{JJ})^{(2)} &= si\eta_0\gamma_2 \left( \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{0,TT}\right)^{(0)} + \mu_{r,1} \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{1,TT}\right)^{(0)} \right) \\
 &\quad + \frac{si\eta_0}{\gamma_2} \left(\overline{\mathbf{C}}_{\times}^{0,TT}\right)^{(2)} - \frac{1}{\eta_0\gamma_2} \left(\overline{\mathbf{C}}_{\times}^{1,TT}\right)^{(0)}, \\
 (\mathbf{Z}_{LL}^{MM})^{(2)} &= \frac{si\gamma_2}{\eta_0} \left( \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{0,LL}\right)^{(0)} + \varepsilon_{r,1}^d \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{1,LL}\right)^{(0)} \right) + \gamma_2 \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{0,LL}\right)^{(2)}, \\
 (\mathbf{Z}_{LT}^{MM})^{(2)} &= \frac{si\gamma_2}{\eta_0} \left( \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{0,LT}\right)^{(0)} + \varepsilon_{r,1}^d \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{1,LT}\right)^{(0)} \right) + \gamma_2 \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{0,LT}\right)^{(2)}, \\
 (\mathbf{Z}_{TL}^{MM})^{(2)} &= \frac{si\gamma_2}{\eta_0} \left( \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{0,TL}\right)^{(0)} + \varepsilon_{r,1}^d \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{1,TL}\right)^{(0)} \right) + \gamma_2 \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{0,TL}\right)^{(2)}, \\
 (\mathbf{Z}_{TT}^{MM})^{(2)} &= \frac{si\gamma_2}{\eta_0} \left( \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{0,TT}\right)^{(0)} + \varepsilon_{r,1}^d \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{1,TT}\right)^{(0)} \right) + \gamma_2 \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{0,TT}\right)^{(2)}, \\
 &\quad + \frac{si\eta_0}{\gamma_2} \left(\overline{\mathbf{C}}_{\times}^{0,TT}\right)^{(2)} + \frac{1}{\gamma_2\mu_{r,1}} \left(\overline{\mathbf{C}}_{\times}^{0,TT}\right)^{(2)}
 \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \left(\overline{\mathbf{A}}_{\times}^{\ell,ij}\right)_{tb}^{(k)} &= \int_{\overline{\Gamma}_h} \overline{\mathbf{u}}_t^i(\overline{\mathbf{x}}) \cdot \int_{\overline{\Gamma}_h} \overline{\mathbf{u}}_b^j(\overline{\mathbf{x}}') \overline{g}_{\kappa_\ell}^{(k)}(\overline{R}) d\overline{\mathbf{x}}' d\overline{\mathbf{x}}, \\ \left(\overline{\mathbf{B}}_{\times}^{\ell,ij}\right)_{tb}^{(k)} &= \int_{\overline{\Gamma}_h} \overline{\mathbf{u}}_t^i(\overline{\mathbf{x}}) \cdot \int_{\overline{\Gamma}_h} \nabla \overline{g}_{\kappa_\ell}^{(k)}(\overline{R}) \times \overline{\mathbf{u}}_b^j(\overline{\mathbf{x}}') d\overline{\mathbf{x}}' d\overline{\mathbf{x}}, \\ \left(\overline{\mathbf{C}}_{\times}^{\ell,TT}\right)_{tb}^{(k)} &= \int_{\overline{\Gamma}_h} \overline{\mathbf{u}}_t^T(\overline{\mathbf{x}}) \int_{\overline{\Gamma}_h} \overline{\mathbf{u}}_b^T(\overline{\mathbf{x}}') \cdot \nabla \nabla \overline{g}_{\kappa_\ell}^{(k)}(\overline{R}) d\overline{\mathbf{x}}' d\overline{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

pour  $0 \leq k \leq 2$ ,  $(i,j) = (L,T)$  et  $0 \leq \ell \leq 1$ . Les termes du développement asymptotique au voisinage de  $\gamma_1$  de  $\mathbf{Y}_{LT}$  sont donnés par

$$\mathbf{Y}_{LT}^{(1)} = \begin{bmatrix} (\mathbf{Y}^{J_L})^{(1)} \\ 0 \\ (\mathbf{Y}^{M_L})^{(1)} \\ (\mathbf{Y}^{M_T})^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_{LT}^{(2)} = \begin{bmatrix} (\mathbf{Y}^{J_L})^{(2)} \\ (\mathbf{Y}^{J_T})^{(2)} \\ (\mathbf{Y}^{M_L})^{(2)} \\ (\mathbf{Y}^{M_T})^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{Y}^{J_i})_t^{(k)} &= -si\gamma_1\gamma_2\eta_0LJ \int_{\overline{\Gamma}_h} \overline{\mathbf{u}}_t^i(\mathbf{x}) \cdot \overline{\gamma}^0 \int_{\overline{\Omega}_{\text{inc}}} \overline{\mathbf{J}}_{\text{inc}}(\overline{\mathbf{x}}') \overline{g}_{\kappa_0}^{(k)}(\overline{R}) d\overline{\mathbf{x}}' d\overline{\mathbf{x}}, \\ (\mathbf{Y}^{M_i})_t^{(k)} &= LJ \int_{\overline{\Gamma}_h} \overline{\mathbf{u}}_t^i(\mathbf{x}) \cdot \overline{\gamma}^0 \nabla \times \int_{\overline{\Omega}_{\text{inc}}} \overline{\mathbf{J}}_{\text{inc}}(\overline{\mathbf{x}}') \overline{g}_{\kappa_0}^{(k)}(\overline{R}) d\overline{\mathbf{x}}' d\overline{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

pour  $0 \leq k \leq 2$  et  $i = (L,T)$ .



# Annexe G

## Communications

### G.1 Communications

- A. Vigneron, E. Demaldent, M. Bonnet, *Surface integral equations for electromagnetic testing: the low-frequency and high-contrast case*. 19th International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (COMPUMAG), Budapest, 2013.
- A. Vigneron, E. Demaldent, M. Bonnet, *Étude des équations intégrales surfaciques de l'électromagnétisme appliquées au contrôle non destructif*. Assemblée Générale : Interférences d'ondes (AG-GDR Ondes), Dijon, 2013.
- A. Vigneron, E. Demaldent, M. Bonnet, *Équations intégrales surfaciques de l'électromagnétisme appliquées au contrôle non destructif : le calcul des champs primaires pour des configurations 3D*. Séminaire d'analyse appliquée  $A^3$  du Laboratoire Amiénois de Mathématique Fondamentale et Appliquée (LAMFA), Amiens, 2014.
- A. Vigneron, E. Demaldent, M. Bonnet, *Modélisation de sondes complexes 3D pour la simulation de contrôles non destructifs par méthodes électromagnétiques*. Les journées COFREND, Bordeaux, 2014.
- A. Vigneron, E. Demaldent, M. Bonnet, *Block Iterative Scheme for BEM Formulation Applied to Electromagnetic Testing*. 16th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC), Annecy, 2014.

### G.2 Publications

- A. Vigneron, E. Demaldent and M. Bonnet, *Surface integral equations for electromagnetic testing: the low-frequency and high-contrast case*. Magnetics, IEEE Transactions on, vol.50, pp.117-120.
- A. Vigneron, E. Demaldent and M. Bonnet, *Block iterative scheme for BEM formulation applied to electromagnetic testing*. Magnetics, IEEE Transactions on (à soumettre).



# Bibliographie

- [1] F. P. Andriulli. *Well-Posed Boundary Element Formulations in Electromagnetics*. PhD thesis, The University of Michigan, 2008.
- [2] F. P. Andriulli. Loop-star and loop-tree decompositions: Analysis and efficient algorithms. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 60(5):2347–2356, 2012.
- [3] F. P. Andriulli, K. Cools, H. Bağci, F. Olyslager, A. Buffa, S. Christiansen, and E. Michielssen. A multiplicative calderon preconditioner for the electric field integral equation. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 56(8):2398–2412, 2008.
- [4] B. Auld, F. Muennemann, and M. Riaziat. *Quantitative Modelling of Flaw Responses in Eddy Current Testing*, volume 7. R. S. Sharpe (ed.), Academic Press, 1984.
- [5] C. A. Balanis. *Advanced engineering electromagnetics*. Wiley, 1989.
- [6] G. I. Barenblatt. *Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics*. Cambridge University Press, 1996.
- [7] A. Bossavit. *Computational electromagnetism: variational formulations, complementarity, edge elements*. Academic Press, 1998.
- [8] J. R. Bowler, S. A. Jenkins, L. D. Sabbagh, and H. A. Sabbagh. Eddy-current probe impedance due to a volumetric flaw. *Journal of Applied Physics*, 70:1107–1114, 1991.
- [9] A. Buffa and S. H. Christiansen. A dual finite element complex on the barycentric refinement. *Mathematics of Computation*, 76(260):1743–1769, 2007.
- [10] A. Buffa and P. Ciarlet Jr. On traces for functional spaces related to Maxwell’s equations Part I: An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 24(1):9–30, 2001.
- [11] A. Buffa and P. Ciarlet Jr. On traces for functional spaces related to Maxwell’s equations Part II: Hodge decompositions on the boundary of Lipschitz polyhedra and applications. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 24(1):31–48, 2001.
- [12] A. Buffa, M. Costabel, and D. Sheen. On traces for  $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$  in Lipschitz domains. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 276(2):845–867, 2002.
- [13] A. Buffa, R. Hiptmair, T. V. Petersdorff, and C. Schwab. Boundary element methods for maxwell transmission problems in lipschitz domains. *Numerische Mathematik*, 95(3):459–485, 2003.

- [14] G. Caloz, M. Dauge, E. Faou, and V. Péron. On the influence of the geometry on skin effect in electromagnetism. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(9-12):1053–1068, 2011.
- [15] K.-M. Chen. A mathematical formulation of the equivalence principle. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 37(10):1576–1581, 1989.
- [16] S. Chen, W. C. Chew, J. Song, and J.-S. Zhao. Analysis of low frequency scattering from penetrable scatterers. *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, 39(4):726–735, 2001.
- [17] W. C. Chew. *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*. IEEE Press, 1995.
- [18] W. C. Chew, M. S. Tong, and B. Hu. *Integral Equation Methods for Electromagnetic and Elastic Waves*. Morgan and Claypool Publishers, 2007.
- [19] Y.-H. Chu and W. C. Chew. A robust surface-integral-equation formulation for conductive media. *Microwave and Optical Technology Letters*, 46(2):109–114, 2005.
- [20] P. Ciarlet Jr and F. Assous. Cours de DEA : Modèles et méthodes pour les équations de Maxwell. Université de Versailles - Saint-Quentin en Yvelines. 2003.
- [21] M. Clemens and T. Weiland. Discrete electromagnetism with the finite integration technique. *Progress In Electromagnetics Research*, 32:65–87, 2001.
- [22] R. E. Collin. *Field Theory of Guided Waves*. IEEE Press, second edition, 1990.
- [23] D. Colton and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*. Number 93 in Applied Mathematical sciences. Springer, second edition, 1998.
- [24] T. J. Cui and W. C. Chew. Accurate analysis of wire structures from very-low frequency to microwave frequency. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 50(3):301–307, 2002.
- [25] M. Dauge, E. Faou, and V. Péron. Comportement asymptotique à haute conductivité de l'épaisseur de peau en électromagnétisme. *Comptes Rendus Mathématique*, 348(7-8):385–390, 2010.
- [26] J. Dumont-Fillon. *Contrôle non destructif (CND)*, volume r1400. Techniques de l'ingénieur edition, 1996.
- [27] T. F. Eibert. Iterative-solver convergence for Loop-Star and Loop-Tree decompositions in Method-of-Moments solutions of the Electric-Field Integral Equation. *Antennas and Propagation Magazine, IEEE*, 46(3):80–85, 2004.
- [28] O. Ergül and L. Gurel. The use of curl-conforming basis functions for the Magnetic-Field Integral Equation. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 54(7):1917–1926, 2006.
- [29] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements*, volume 159 of *Applied Mathematical sciences*. Springer, 2004.
- [30] W. Gibson. Scattered field of a conducting and stratified spheres, 2008. Code disponible sur Matlab central : <http://www.mathworks.com/matlabcentral/>.

- 
- [31] A. W. Glisson and D. R. Wilton. Simple and efficient numerical methods for problems of electromagnetic radiation and scattering from surfaces. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 28(5):593–603, 1980.
- [32] R. D. Graglia, D. R. Wilton, and A. F. Peterson. Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 45(3):329–342, 1997.
- [33] R. F. Harrington. Boundary integral formulations for homogeneous material bodies. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 3(1):1–15, 1989.
- [34] R. Hiptmair. Boundary element methods for eddy current computation. In *Boundary Element Analysis*, volume 29 of *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, pages 213–248. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [35] R. Hiptmair and J. Ostrowski. Coupled boundary-element scheme for eddy-current computation. *Journal of Engineering Mathematics*, 51(3):231–250, 2005.
- [36] G. C. Hsiao and R. E. Kleinman. Mathematical foundations for error estimation in numerical solutions of integral equations in electromagnetics. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 45(3):316–328, 1997.
- [37] C.-H. Lee, J.-S. Cho, B.-H. Jung, and T. K. Sarkar. Müller formulation for analysis of scattering from 3-D dielectric objects with triangular patching model. *Journal of Electrical Engineering & Technology*, 2(1):129–135, 2007.
- [38] J. R. Mautz and R. F. Harrington. Electromagnetic scattering from a homogeneous material body of revolution. *Archiv fuer Elektronik und Uebertragungstechnik*, 33:71–80, 1979.
- [39] L. N. Medgyesi-Mitschang, J. M. Putnam, and M. B. Gedera. Generalized method of moments for three-dimensional penetrable scatterers. *Journal of the Optical Society of America A*, 11(4):1383–1398, 1994.
- [40] Y. Ming. *Efficient methods for solving boundary integral equation in diffusive scalar problem and eddy current nondestructive evaluation*. PhD thesis, Iowa State University, 2010.
- [41] R. Miorelli, C. Reboud, D. Lesselier, and T. Theodoulidis. Eddy current modeling of narrow cracks in planar-layered metal structures. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 48(10):2551–2559, 2012.
- [42] C. Müller. *Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves*, volume 155. Springer-Verlag, 1969.
- [43] G. D. Monteath. *Applications of the Electromagnetic Reciprocity Principle*. Pergamon Press, 1973.
- [44] S. M. Nair and J. H. Rose. Electromagnetic induction (eddy currents) in a conducting half-space in the absence and presence of inhomogeneities: A new formalism. *Journal of Applied Physics*, 68:5995–6009, 1990.
- [45] J.-C. Nédélec. Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . *Numerische Mathematik*, 35(3):315–341, 1980.

- [46] J.-C. Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations: integral representations for harmonic problems*, volume 144 of *Applied Mathematical sciences*. Springer, 2001.
- [47] Z.-G. Qian and W. C. Chew. A quantitative study on the low frequency breakdown of EFIE. *Microwave and Optical Technology Letters*, 50(5):1159–1162, 2008.
- [48] Z.-G. Qian and W. C. Chew. Enhanced A-EFIE with perturbation method. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 58(10):3256–3264, 2010.
- [49] S. Rao, D. Wilton, and A. Glisson. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 30(3):409–418, 1982.
- [50] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems. In *Mathematical aspects of finite element methods*, Lecture Notes in Mathematics, pages 292–315. Springer, 1977.
- [51] G. T. Ruck. *Radar cross section handbook*, volume 1. Plenum Press, 1970.
- [52] W. M. Rucker, R. Hoschek, and K. Richter. Various BEM formulations for calculating eddy currents in terms of field variables. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 31(3):1336–1341, 1995.
- [53] T. Schuhmann, R. Weiland. Conservation of discrete energy and related laws in the finite integration technique. *Progress In Electromagnetics Research*, 32:301–316, 2001.
- [54] C. Schwab and W. Wendland. On numerical cubatures of singular surface integrals in boundary element methods. *Numerische Mathematik*, 62(1):343–369, 1992.
- [55] X. Sheng, J.-M. Jin, J. Song, W. Chew, and C.-C. Lu. Solution of Combined-Field Integral Equation using multilevel fast multipole algorithm for scattering by homogeneous bodies. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 46(11):1718–1726, 1998.
- [56] A. Skarlatos, E. Demaldent, A. Vigneron, and C. Reboud. Modelling of specimen interaction with ferrite cored coils by coupling semi-analytical and numerical techniques. In *Electromagnetic Nondestructive Evaluation (XVII)*, volume 39 of *Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics*, pages 128–135. 2012.
- [57] P. Solin, I. Doležel, and P. Karban. *Integral Methods in Low-Frequency Electromagnetics*. Wiley, 2009.
- [58] M. B. Stephanson and J.-F. Lee. Preconditioned Electric Field Integral Equation using Calderon identities and dual Loop/Star basis functions. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 57(4):1274–1279, 2009.
- [59] J. A. Stratton. *Electromagnetic Theory*. Mcgraw Hill Book Company, 1941.
- [60] J. A. Stratton and L. J. Chu. Diffraction theory of electromagnetic waves. *Physical Review*, 56(1):99–107, 1939.
- [61] C. T. Tai. Direct integration of field equations. *Progress In Electromagnetics Research*, 28:339–359, 2000.

- 
- [62] T. Theodoulidis and A. Skarlatos. Eddy current interaction of an arbitrarily positioned probe coil with a conductive cylinder. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 48(8):2392–2394, 2012.
- [63] M. S. Tong, W. C. Chew, B. Rubin, J. Morsey, and L. Jiang. On the dual basis for solving electromagnetic surface integral equations. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 57(10):3136–3146, 2009.
- [64] R. S. Varga. *Matrix iterative analysis*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, second edition, 2000.
- [65] G. Vecchi. Loop-Star decomposition of basis functions in the discretization of the EFIE. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 47(2):339–346, 1999.
- [66] A. Vigneron, E. Demaldent, and M. Bonnet. Surface integral equations for electromagnetic testing: The low-frequency and high-contrast case. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 50(2):117–120, 2014.
- [67] J. L. Volakis, K. Sertel, and B. C. Usner. *Frequency domain hybrid finite element methods for electromagnetics*. Morgan & Claypool Publishers, 2006.
- [68] T. Weiland. A discretization model for the solution of maxwell’s equations for six-component fields. *AEÜ Archiv für Elektrotechnik und Übertragungstechnik, Band 31*, 31:116–120, 1977.
- [69] R. Wildman and D. Weile. An accurate broad-band Method of Moments using higher order basis functions and Tree-Loop decomposition. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 52(11):3005–3011, 2004.
- [70] S. Yan, J.-M. Jin, and Z. Nie. EFIE analysis of low-frequency problems with Loop-Star decomposition and Calderon Multiplicative Preconditioner. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 58(3):857–867, 2010.
- [71] P. Ylä-Oijala and M. Taskinen. Calculation of CFIE impedance matrix elements with RWG and nxRWG functions. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 51(8):1837–1846, 2003.
- [72] P. Ylä-Oijala and M. Taskinen. Well-conditioned Müller formulation for electromagnetic scattering by dielectric objects. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 53(10):3316–3323, 2005.
- [73] D. M. Young. *Iterative solution of large linear systems*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, second edition, 2003.
- [74] J.-S. Zhao and W. C. Chew. Integral equation solution of Maxwell’s equations from zero frequency to microwave frequencies. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 48(10):1635–1645, 2000.
- [75] A. Zhu, S. Gedney, and J. Visher. A study of combined field formulations for material scattering for a locally corrected nyström discretization. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 53(12):4111–4120, 2005.

**Titre :** Formulations par équations intégrales de surface pour la simulation numérique du contrôle non destructif par courants de Foucault.

**Résumé :** Cette thèse s'inscrit dans le contexte de la simulation numérique pour le contrôle non destructif (CND) par courants de Foucault et concerne le calcul des champs électromagnétiques induits par un capteur émetteur dans une pièce saine. Ce calcul constitue la première étape de la modélisation complète d'un procédé de contrôle dans la plateforme logicielle CIVA développée au CEA LIST. Aujourd'hui les modèles intégrés dans CIVA sont restreints à des pièces de géométrie canonique (calcul modal) ou axisymétriques. La demande de configurations plus diverses et complexes nécessite l'introduction de nouveaux outils numériques de modélisation. En pratique les capteurs peuvent être constitués d'éléments aux propriétés physiques et aux formes variées. Quant aux pièces à contrôler, elles sont conductrices et peuvent contenir des éléments diélectriques ou magnétiques. Du fait des différents matériaux présents dans une même configuration, différents régimes de modélisation (statique, quasi-statique, voire dynamique) peuvent cohabiter. Sous l'hypothèse de travail de milieux à propriétés linéaires, isotropes et homogènes par morceaux, l'approche par équations intégrales de surface (SIE) permet de ramener le problème volumique à un problème surfacique équivalent. Cependant les formulations SIE usuelles pour le problème de Maxwell souffrent en général d'un problème de robustesse numérique pour certains cas asymptotiques, en particulier à basse fréquence. L'objectif de cette étude est de déterminer une version stable pour une gamme de paramètres physique typique du CND. C'est dans ce cadre qu'un schéma itératif par blocs basé sur une décomposition liée à la physique du problème est proposé. Ce schéma est précis et bien conditionné pour le calcul des champs primaires. Une étude asymptotique du problème intégral de Maxwell est de plus effectuée. Celle-ci permet de formuler le problème intégral de l'approximation courants de Foucault comme une forme asymptotique de celui de Maxwell.

**Mots-clés :** Contrôle non destructif, courants de Foucault, équations intégrales de surface, modélisation

**Title:** Formulations by surface integral equations for numerical simulation of non-destructive testing by eddy currents.

**Abstract:** The thesis addresses the numerical simulation of non-destructive testing (NDT) using eddy currents, and more precisely the computation of induced electromagnetic fields by a transmitter sensor in a healthy part. This calculation is the first step of the modeling of a complete control process in the CIVA software platform developed at CEA LIST. Currently, models integrated in CIVA are restricted to canonical (modal computation) or axially-symmetric geometries. The need for more diverse and complex configurations requires the introduction of new numerical modeling tools. In practice the sensor may be composed of elements with different shapes and physical properties. The inspected parts are conductive and may contain dielectric or magnetic elements. Due to the cohabitation of different materials in one configuration, different regimes (static, quasi-static or dynamic) may coexist. Under the assumption of linear, isotropic and piecewise homogeneous material properties, the surface integral equation (SIE) approach allows to reduce a volume-based problem to an equivalent surface-based problem. However, the usual SIE formulations for the Maxwell's problem generally suffer from numerical noise in asymptotic situations, and especially at low frequencies. The objective of this study is to determine a version that is stable for a range of physical parameters typical of eddy-current NDT applications. In this context, a block-iterative scheme based on a physical decomposition is proposed for the computation of primary fields. This scheme is accurate and well-conditioned. An asymptotic study of the integral Maxwell's problem at low frequencies is also performed, allowing to establish the eddy-current integral problem as an asymptotic case of the corresponding Maxwell problem.

**Keywords:** Non destructive testing, eddy currents, surface integral equations, modeling

