HAL
open science

Contribution à la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires sous contraintes de communication

Cheikh A.B. Hann

To cite this version:

Cheikh A.B. Hann. Contribution à la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires sous contraintes de communication. Automatique / Robotique. Université de Caen, 2014. Français. NNT : . tel-01113761

HAL Id: tel-01113761

https://hal.science/tel-01113761v1

Submitted on 6 Feb 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Caen Basse-Normandie
École doctorale SIMEM

Thèse de doctorat

présentée et soutenue le : 11 février 2014

par

Cheikh Ahmadou Bamba Hann

pour obtenir le

Doctorat de l'Université de Caen Basse-Normandie

Spécialité : *Automatique, productique*

Contribution à la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires sous contraintes de communication

Jury

Nicolai Christov	P.U.	Université de Lille 1	(Rapporteur)
Nicolas Seube	E.C. H.D.R.	ENSTA-Bretagne Brest	(Rapporteur)
Luc Jaulin	P.U.	Université de Brest	
Fouad Giri	P.U.	Université de Caen	
Vincent Van Assche	M.C.	Université de Caen	
Françoise Lamnabhi-Lagarrigue	D.R. CNRS	SUPELEC Gif sur Yvette	
Jean Françis Massieu	M.C.	Université de Caen	(Invité)
Tarek Ahmed-Ali	P.U.	ENSICAEN	(Directeur)

Publications

Articles acceptés dans une revue internationale

- Cheikh A. B. Hann and Tarek Ahmed-Ali Continuous adaptive observer for state affine sampled-data systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* http://dx.doi.org/10.1002/rnc.2912

Articles de conférences

- Vincent Van Assche, Tarek Ahmed-Ali, Cheikh A. B. Hann, and Françoise Lamnabhi-Lagarrigue High gain observer design for nonlinear systems with time varying delayed measurements. In *18th IFAC World Congress, Milan 2011*.

- Cheikh A. B. Hann, Vincent Van Assche, Naveena Crasta and Françoise Lamnabhi-Lagarrigue Dynamical continuous high gain observer for sampled measurements systems. In *IEEE 51st Annual Conference on Decision and Control, Maui 2012*.

Articles soumis à une revue internationale

- Cheikh A. B. Hann and Tarek Ahmed-Ali Global Exponential Observer for Nonlinear Networked Control Systems with Periodic Protocols *International Journal of Control*

Table des matières

Publications iii

Table des matières v

Liste des figures ix

Liste des tableaux xi

Notations xiv

1 Introduction Générale 1

1.1 État de l'art 4

1.1.1 Contrainte d'échantillonnage 4

1.1.2 Contrainte de retard 6

1.1.3 Contrainte d'ordonnancement 7

1.1.3.1 Approche continue 8

1.1.3.2 Approche discrète 11

1.1.3.3 Prise en compte dans la synthèse d'observateurs . . . 14

1.2 Contributions de la thèse 15

1.2.1 Observateur pour les systèmes commandés en réseau avec un protocole périodique 15

1.2.2 Observateurs à gain variable pour une classe de systèmes non linéaires 16

1.2.3 Observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes affines en l'état 17

2 Observateur pour les systèmes commandés en réseau avec un protocole périodique 19
2.1 Introduction 19
2.2 Système étudié 21
2.3 Notions préliminaires de stabilité 23
2.3.1 Stabilité entrée-état 23
2.3.2 Observateur robuste global exponentiel 23
2.3.3 Prédicteur d'état robuste 24
2.4 Synthèse de l'observateur 24
2.4.1 Structure de l'observateur 24
2.4.2 Analyse de la convergence 27
2.4.3 Convergence de l'observateur du système retardé 28
2.4.4 Prédicteur d'état 34
2.4.5 Chaîne de prédicteurs 36
2.5 Exemple 37
2.6 Conclusion 46

3 Observateurs à gain variable pour une classe de systèmes non linéaires 47
3.1 Introduction 47
3.2 Système étudié 48
3.3 Observateur grand-gain avec gain d'observation variable 50
3.3.1 Structure de l'observateur 50
3.3.2 Résultats techniques 53
3.3.3 Analyse de la stabilité 55
3.4 Observateur avec un gain adaptatif 62
3.4.1 Système étudié 62
3.4.2 Synthèse de l'observateur 62
3.5 Exemple 68
3.6 Conclusion 74

4 Observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes affines en l'état 75
4.1 Introduction 75
4.2 Systèmes non linéaires affines en l'état avec paramètres inconnus constants 77

4.3 Synthèse de l'observateur avec un *inter-sample predictor* 79
4.3.1 Structure de l'observateur 79
4.3.2 Analyse de la convergence 83
4.3.2.1 Calcul de la dérivée de U 87
4.3.2.2 Calcul de la dérivée de Q 87
4.3.2.3 Calcul de la dérivée de W 89
4.3.2.4 Détermination de la période d'échantillonnage maximale admissible τ_{MASP} 90
4.4 Exemple 92
4.5 Observateur en mode bloqueur d'ordre zéro 96
4.6 Conclusion 101

5 Conclusion générale et perspectives **103**

Bibliographie **105**

Liste des figures

1.1 Schéma d'un système contrôlé en réseau 1
1.2 Représentation d'un système soumis à un protocole selon la modélisation discrète 11

2.1 Schéma de l'observation du système à travers le réseau 26
2.2 Schéma général du système commandé en réseau avec une structure observateur-prédicteur 26
2.3 Évolution de l'état du système et de son estimée pour $T_e = 0.1s$ et $\tau = 0.15s$ 40
2.4 Évolution de l'erreur d'observation $\tilde{z}$ et de l'erreur de prédiction $\tilde{\xi}$ du système, avec $T_e = 0.1s$ et $\tau = 0.15s$ en présence de bruit de mesure de variance var = 0.2 42
2.5 Évolution de l'erreur de prédiction $\tilde{\xi}$ en fonction du retard pour $T_e = 0.1s$ en présence de bruit de mesure de variance égale à 0.2 45

3.1 Évolution de l'état du système et de son estimée pour $a = 0.5$ et $T_e = 0.7s$ 69
3.2 Évolution de l'erreur d'observation $\tilde{x}$ pour un observateur à gain constant et un observateur à gain variable avec différentes valeurs du paramètre a de la dynamique du gain d'observation avec $T_e = 0.15s$ 71
3.3 Évolution de l'erreur d'observation $\tilde{x}$ pour un observateur avec un gain constant et un observateur avec un gain variable et $a = 0.5$ pour $T_e = 0.15s$ en présence de bruit de mesure de variance égale à 0.1 73

4.1 Évolution de l'état du système et de son estimée fournie par un observateur avec un inter-sample predictor pour une période d'échantillonnage $T_e = 0.1s$ 93
4.2 Évolution de l'estimée des paramètres inconnus fournie par un observateur avec un intersample predictor pour une période d'échantillonnage $T_e = 0.1s$ 94
4.3 Évolution de l'état du système et de son estimée fournie par un observateur avec un intersample predictor pour une période d'échantillonnage $T_e = 0.5s$ (supérieure à la borne τ_{MASP} pratique) 95
4.4 Évolution de l'état du système et de son estimée fournie par un observateur en mode bloqueur d'ordre zéro pour une période d'échantillonnage $T_e = 0.09s$ 99
4.5 Évolution de l'estimée des paramètres inconnus fournie par un observateur en mode bloqueur d'ordre zéro pour une période d'échantillonnage $T_e = 0.09s$ 100

Liste des tableaux

2.1 Variance de l'erreur d'observation $\tilde{z}$ de l'observateur du système retardé en fonction de la période d'échantillonnage pour un bruit de mesure de variance égale à 0.2. 41
2.2 Amplification de la variance de l'erreur de prédiction $\tilde{\xi}$ par rapport à l'erreur d'observation $\tilde{z}$ en fonction du retard τ pour différentes valeurs de la période d'échantillonnage 44

3.1 Valeurs de la période d'échantillonnage maximale admissible τ_{MASP} pratique pour un observateur avec gain constant et pour l'observateur avec un gain variable pour différentes valeurs du paramètre a 70
3.2 Variance de l'erreur d'observation $\tilde{x}$ de l'observateur avec un gain constant et de l'observateur avec un gain variable pour différentes valeurs du paramètre a en présence de bruit de mesure de variance égale à 0.1. 72

Notations

0_n Matrice nulle de dimension n

$C^0(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ Ensemble des fonctions continues de $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n\times m}$ vers $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{p\times q}$

$C^\infty(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ Ensemble des fonctions de $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n\times m}$ vers $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ dont les dérivées partielles d'ordre n sont définies et continues pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\mathbf{I}_n$ Matrice identité de dimension n

$\lambda_{\min}(P)(resp.\ \lambda_{\max}(P))$ Valeur propre minimale (*resp.* maximale) de la matrice P

$L^\infty_{loc}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ Ensemble des fonctions $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ mesurables au sens de Lebesgue et localement essentiellement bornées sur $\mathcal{X}$, avec $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ et $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$

$L^\infty(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ Ensemble des fonctions $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ mesurables au sens de Lebesgue et essentiellement bornées sur $\mathcal{X}$, avec $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ et $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$

sign Fonction signe définie par : $\text{sign}(s) = \begin{cases} 1, \text{ si } s > 0 \\ -1, \text{ si } s < 0 \end{cases}$

$\mathbb{N}$ Ensemble des entiers naturels

$|\cdot|_1$ Norme 1 du vecteur (somme des modules des éléments du vecteur) et sa norme induite dans le cas des matrices

$|\cdot|$ Norme euclidienne du vecteur ou de la matrice

$\mathbb{N}_+$ Ensemble des entiers naturels strictement positifs

$\mathbb{R}_+$ Ensemble des nombres réels strictement positifs

$\mathbb{R}_+^0$ Ensemble des nombres réels positifs ou nuls

$\mathbb{R}^{p\times q}$ Ensemble des matrices réelles de dimensions $p \times q$

$\{t_k\}_{k\geq 0}$ Séquence de valeurs strictement croissantes, représentant les instants d'échantillonnage, avec $t_0 \geq 0$

$P > 0$ Matrice P définie positive

P^T Transposée de la matrice P

t_k^- Limite lorsque t tend vers t_k par valeur inférieure et pour toute fonction $f(t)$, nous écrivons : $f(t_k^-) = \lim\limits_{\substack{t\to t_k \\ t<t_k}} f(t)$.

$\mathcal{K}$ Une fonction $\gamma : \mathbb{R}_+^0 \to \mathbb{R}_+^0$ est de classe $\mathcal{K}$ si elle est continue et strictement croissante, avec $\gamma(0) = 0$. Si de plus, elle est non bornée alors on dit que la fonction est de classe $\mathcal{K}_\infty$

$\mathcal{KL}$ Une fonction $\beta : \mathbb{R}_+^0 \times \mathbb{R}_+^0 \to \mathbb{R}_+^0$ est de classe $\mathcal{KL}$ si pour tout $s \geq 0$ fixé, la fonction $\beta(s,t)$ est décroissante et tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini et pour tout t fixé, la fonction $\beta(s,t)$ est de classe $\mathcal{K}$

Chapitre 1

Introduction Générale

Les systèmes de commande en réseau ou NCS (Networked Control Systmes) sont des systèmes dans lesquels les contrôleurs, les actionneurs et les capteurs sont reliés à travers un réseau qui peut être partagé avec d'autres systèmes.

La figure 1.1 montre le schéma général d'un système contrôlé en réseau (d'après [Postoyan 09]) où les capteurs et les actionneurs sont répartis sur différents nœuds et communiquent avec le contrôleur et l'observateur par l'intermédiaire du réseau. Les différents nœuds ne peuvent pas transmettre leurs données simultanément.

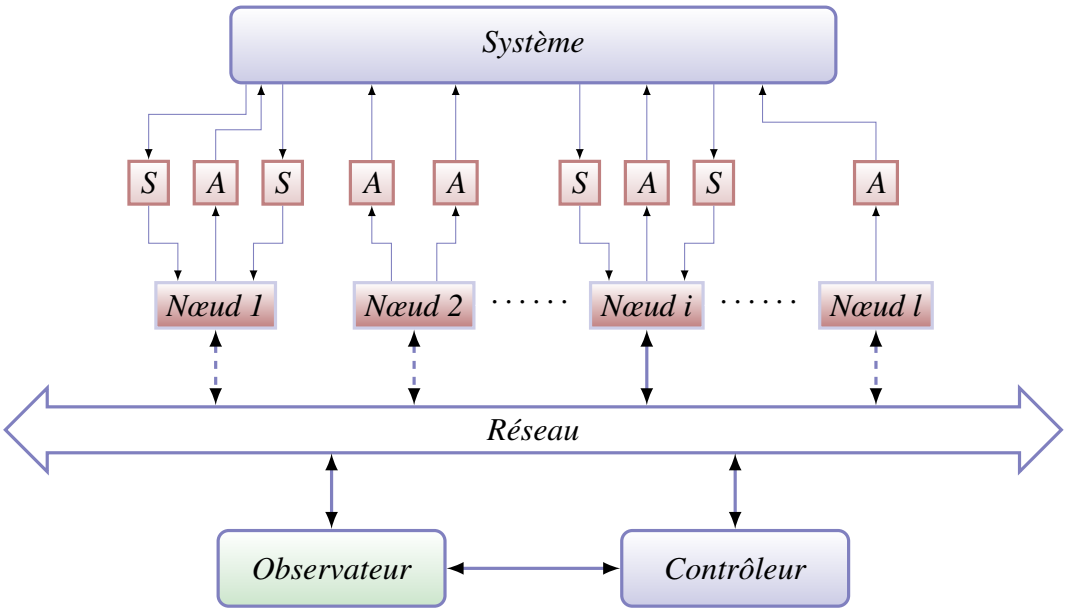


FIGURE 1.1: Schéma d'un système contrôlé en réseau

Les avantages de ce type de structure sont nombreux. Le principal avantage est le fait que les différents éléments du système à commander peuvent être distribués dans l'espace. Ils permettent par ailleurs de diminuer les coûts de câblage, et donnent la possibilité de rajouter des contrôleurs, des actionneurs et des capteurs sans modifier considérablement la structure globale du système et par conséquent de réaliser des systèmes de commande de plus grande envergure et plus complexes. Avec le développement des outils de communication, la réalisation de ce type de système est grandement facilitée. Ainsi, les systèmes de commande en réseau trouvent un très large domaine d'applications notamment dans les systèmes de contrôle industriels, l'automobile et l'aéronautique, les robots domestiques, *etc* ... Les références suivantes donnent une vue d'ensemble des différents avantages et des domaines d'application des systèmes commandés en réseau [Gupta 08, Zhang 01b, Hespanha 07].

L'étude des systèmes commandés en réseau permet de fusionner la théorie de la commande des systèmes dynamiques qui étudie généralement les systèmes dynamiques connectés à travers des canaux supposés idéaux et l'étude des systèmes de communication qui traite la transmission de l'information à travers des canaux réels. Dans cette thèse, nous étudions les NCS du point de vue de la commande et de l'estimation des systèmes dynamiques sous les contraintes de communication induites par la présence du réseau dans la boucle de commande. Nous n'étudions pas les moyens d'améliorer la transmission de l'information à travers le réseau.

Dans les systèmes de contrôle classiques, les moyens de communication sont considérés comme idéaux de telle sorte que toutes les données nécessaires à l'estimation ou la commande du système sont accessibles avec la précision requise. Cette hypothèse simplifie considérablement l'analyse et la synthèse des systèmes de contrôle et permet de traiter la commande et l'observation des systèmes indépendamment des composants de communication.

L'introduction du réseau dans la boucle de commande du système entraîne la nécessité de prendre en compte un certain nombre de phénomènes qui n'existent pas ou qu'il est possible de négliger dans les systèmes classiques. Les plus importants sont énumérés ci-dessous.

L'échantillonnage

L'implémentation numérique et la transmission sous forme de paquets, à travers le ré-

seau, des données du système entraînent nécessairement l'échantillonnage du signal. L'un des principaux enjeux des systèmes commandés en réseau est d'améliorer l'intervalle entre les transmissions des données (la période d'échantillonnage) tout en préservant les propriétés requises en terme de stabilité et de performance du système.

La quantification

Une autre contrainte liée à l'implémentation numérique des données du système est la quantification. En effet, les données continues issues des capteurs du système sont codées sous forme de bits de données et puisque la quantité d'information qui peut être transmise à travers le réseau par unité de temps est très limitée, il est nécessaire de coder les données avec un nombre de bits limité, ce qui entraîne une précision limitée des données ainsi codées et transmises à travers le réseau. Dans l'étude des systèmes contrôlés en réseau, il est nécessaire de prendre en compte la quantification. Les erreurs de quantification entraînent la détérioration des performances du système et entraînent la perte des propriétés de stabilité asymptotique du système [Liberzon 03].

Le retard et la perte de données

Dans les systèmes de commande classiques, on fait souvent la supposition que la transmission des données et le traitement de celles-ci par l'algorithme de contrôle ou l'observateur sont instantanés. Cependant, dans les systèmes de commande en réseau, la transmission des mesures des capteurs et l'envoi du signal de commande aux actionneurs dépendent des caractéristiques du réseau utilisé. Les données envoyées à travers le réseau arrivent en général avec un retard non négligeable et peuvent parfois être perdues à cause, par exemple, des problèmes de congestion dans le réseau. La perte de données peut être assimilée à un retard supplémentaire. Les problèmes de la qualité du réseau sont étudiés dans la théorie de la communication [Chen 06, Tanenbaum 02]. Nous nous contentons d'étudier la stabilité du système sous la contrainte d'un retard induit par le réseau. La présence de retard induit par le réseau dégrade les performances du système et peut entraîner l'instabilité de celui-ci.

L'allocation de la bande-passante

L'utilisation d'un réseau de communication pour la transmission des données du système de commande implique de tenir compte de la bande passante disponible. En effet, la bande passante est généralement un enjeu prioritaire dans l'utilisation des réseaux de

communication. En plus des limitations technologiques, elle peut induire une augmentation considérable des coûts de réalisations du système. Il est ainsi nécessaire de l'utiliser de manière efficace et par conséquent, il faut inclure dans l'analyse la stratégie à adopter pour l'allocation de la bande passante aux différents éléments utilisant le réseau. De plus, dans le cas des systèmes avec plusieurs actionneurs et plusieurs capteurs qui peuvent être situés à différents endroits et par conséquent à différents nœuds d'un réseau en série, seule une partie des données du système est disponible. À chaque instant de transmission, un seul nœud qui peut contenir un ou plusieurs capteurs et actionneurs est autorisé à transmettre ses données à travers le réseau. La règle qui permet de déterminer le nœud autorisé à transmettre est dénommé *protocole d'ordonnancement*. À cet effet, plusieurs méthodologies sont formulées pour définir la stratégie d'ordonnancement dans les systèmes de commande en réseau.

1.1 État de l'art

Il existe une large littérature concernant l'étude des systèmes commandés en réseau qui tente de traiter les différentes imperfections introduites par le réseau. Cependant, à notre connaissance, la plupart des résultats se concentre sur l'une ou l'autre de ces imperfections présentées ci-dessus.

Les travaux de [Liberzon 03, Nešić 09, Heemels 09] se concentrent sur les effets de la quantifications sur la stabilité du système.

Dans ce travail de thèse, nous nous intéressons à la synthèse d'observateurs pour les systèmes commandés en réseau soumis aux contraintes suivantes : l'échantillonnage des données du système, le retard induit par le réseau et l'ordonnancement des données qui est dû au fait que toutes les sorties ne sont pas disponibles aux instants de transmission.

Dans ce qui suit, nous présentons différentes approches utilisées dans la littérature pour étudier les systèmes soumis aux contraintes que nous avons présentées ci-dessus et qui sont étudiées dans cette thèse.

1.1.1 Contrainte d'échantillonnage

L'étude des observateurs pour les systèmes continus avec sorties échantillonnées a été très active durant ces dernières décennies. Pour les systèmes linéaires invariants dans

le temps, il est facile d'utiliser le modèle discret du système continu et de synthétiser un observateur discret pour le système [Astrom 90]. Pour les autres types de systèmes, le problème nécessite une approche différente puisqu'il est pratiquement impossible de trouver le modèle discrétisé exact du système à partir du modèle continu. Une approche souvent utilisée pour contourner ce problème est de recourir à une approximation du modèle discret comme par exemple une approximation d'Euler [Assoudi 02, Laila 06]. Cependant, cette méthode n'assure qu'une stabilité semi-globale et, de plus, ne permet pas une estimation de l'état du système continu entre les instants d'échantillonnage.

Une autre solution consiste à recourir à un observateur hybride ou continu-discret [Deza 92, Hammouri 02, Nadri 03, Nadri 04, Goffaux 09, Goffaux 13]. Cette méthode permet de se passer du modèle discrétisé exact. La grande majorité de ces types d'observateurs est basée sur les techniques du filtre de Kalman étendu. Le principe est de diviser l'observation en deux étapes : une étape de prédiction qui consiste à "copier" la dynamique du système continu, sans terme de correction, entre les instants d'échantillonnage et une étape de mise à jour aux instants d'échantillonnage où l'erreur entre la sortie du système et celle de l'observateur est utilisée pour corriger la trajectoire de l'état estimé. L'erreur d'observation converge, sous certaines conditions satisfaites par la période d'échantillonnage maximale admissible.

Récemment, dans [Karafyllis 09], les auteurs proposent un nouvel observateur hybride associé à un prédicteur de la sortie du système entre les instants d'échantillonnage. Cette approche a été appliquée aux systèmes linéaires détectables et aux systèmes non linéaires triangulaires globalement Lipschitz. Dans cette structure, seul le prédicteur de sortie est mis à jour aux instants d'échantillonnage tandis que les états de l'observateur demeurent continus. La convergence exponentielle de cet observateur est démontrée au moyen d'une approche petit-gain. L'avantage de cette méthode est la simplicité d'implémentation comparée aux observateurs continu-discrets où tout le vecteur d'état est actualisé à chaque instant d'échantillonnage.

Une autre solution est proposée dans [Raff 08] où l'état estimé est continu mais le terme de correction de l'observateur est maintenu constant entre les deux instants d'échantillonnage successifs et ne change que lorsque les mesures de la sortie sont disponibles. Les auteurs de [Raff 08] démontrent la convergence exponentielle de l'observateur en utilisant une approche de Lyapunov pour les systèmes impulsifs [Naghshtabrizi 08].

1.1.2 Contrainte de retard

L'effet du retard sur les systèmes dynamiques a fait l'objet de nombreuses études notamment pour la commande des systèmes linéaires [Gu 03, Fridman 02, Gao 08]. Les travaux de [Richard 03] donnent une vue d'ensemble des différentes approches utilisées pour traiter le problème du retard dans les systèmes dynamiques.

Pour les systèmes commandés en réseau, les auteurs de [Cloosterman 07] proposent un modèle qui permet de traiter les retards induits par le réseau et les pertes de données pour les systèmes linéaires échantillonnés. Une méthode analogue est utilisée dans [Naghshtabrizi 05] où les auteurs font la synthèse simultanée d'un observateur et d'un contrôleur pour les systèmes linéaires commandés en réseau. Ils utilisent un prédicteur d'état afin de compenser le retard. Dans [Naghshtabrizi 06], les auteurs introduisent une nouvelle méthode utilisant une approche de Lyapunov pour les systèmes impulsifs et démontrent la stabilité exponentielle du système en présence d'intervalle de transmission variable et de retard variable.

Concernant les systèmes non linéaires, dans [Van Assche 11], les auteurs synthétisent un observateur grand-gain pour une classe de systèmes non linéaires à sorties retardées. Ils utilisent une approche de Lyapunov-Krasovskii [Fridman 10] pour déterminer une borne sur le retard maximal admis afin d'assurer la convergence asymptotique de l'observateur. Nous pouvons noter aussi qu'ils utilisent également cet observateur pour traiter les systèmes à sorties échantillonnées en considérant l'intervalle entre les instants d'échantillonnage comme un retard variant dans le temps.

Une autre approche pour traiter le retard pour les systèmes non linéaires est proposé dans [Germani 02] où est présenté un observateur constitué d'une cascade de prédicteurs qui permettent de compenser les effets du retard. Lorsque le retard est très important, de sorte qu'un seul observateur ne permet pas de prédire l'état du système, l'algorithme proposé permet d'utiliser une cascade de prédicteurs où chaque prédicteur estime l'état du système retardé d'une fraction du retard total sur la mesure. Ainsi, il est possible d'estimer l'état actuel du système à partir des mesures retardées si suffisamment de prédicteurs sont mis en cascade. Les auteurs utilisent le lemme de Gronwall [Khalil 02, Lemme A.1,p.651] pour déterminer une condition suffisante pour la convergence exponentielle de cet observateur et une relation entre le retard et le nombre de prédicteurs dans la cascade. Cette approche est également utilisée dans [Ahmed-Ali 09a] pour

les observateurs grand-gain. Une structure analogue est synthétisée dans [Kazantzis 05] mais les auteurs utilisent une approche basée sur les équations aux dérivées partielles (PDE) pour obtenir des conditions de convergence moins restrictives.

1.1.3 Contrainte d'ordonnancement

Dans le cas des systèmes avec plusieurs entrées et sorties, il peut arriver que toutes les entrées et sorties ne puissent pas envoyer leurs données en même temps sur le réseau. Cela peut être dû à une limitation de la bande passante ou au fait que les différents capteurs et actionneurs sont situés à différents nœuds du réseau. La principale contrainte de cette structure est qu'un seul nœud peut transmettre ses données à chaque transmission. La transmission simultanée de plusieurs nœuds entraîne des collisions dans le réseau et il en résulte des pertes de données. Il est alors nécessaire d'arbitrer la transmission des données des différents éléments du système à travers le réseau. On définit le protocole comme l'algorithme qui détermine quel nœud est autorisé à transmettre ses données à travers le réseau à un instant de transmission donné. Il existe de très nombreux protocoles pour arbitrer la transmission des données dans un réseau. Nous pouvons nous référer aux travaux de [Tanenbaum 02] pour une description exhaustive des protocoles utilisés en industrie.

Les protocoles peuvent être classés en deux catégories :

- Les protocoles statiques où l'ordre d'accès au réseau est prédéfini. Le protocole Round-Robin (RR) est un exemple de protocole statique où les différents nœuds obtiennent l'accès au réseau alternativement.

- Les protocoles dynamiques où l'accès au réseau est déterminé par les besoins du système. Le protocole try-once-discard (TOD) introduit par [Walsh 99] est un protocole dynamique où l'accès au réseau est accordé au nœud dont l'erreur par rapport à la dernière mesure obtenue de ce nœud est la plus grande.

Les contraintes d'ordonnancement avec les intervalles de transmission variables sont étudiées dans [Walsh 99, Walsh 01, Walsh 02] qui traitent la stabilité des systèmes aussi bien linéaires que non linéaires avec un intervalle entre les transmissions variable et soumis à des contraintes d'ordonnancement du réseau. Dans ces travaux, les auteurs

analysent la stabilité des systèmes pour deux protocoles d'ordonnancement (le *Round-Robin* et le *try-once-discard*) et déterminent pour chaque protocole le τ_{MATI} qui est l'intervalle maximal entre deux transmissions successives garantissant la stabilité du système.

Dans [Nešić 04a, Nešić 04b], les auteurs généralisent la notion de protocole et introduisent un formalisme décrivant le système combiné au protocole comme un système impulsif. Ils définissent les classes de protocole *uniformément globalement exponentiellement (respectivement asymptotiquement) stable : UGES (respectivement UGAS)* qui englobent les protocoles précédemment étudiés *Round-Robin* et *TOD* et déterminent le τ_{MATI} permettant de conserver les propriétés de stabilité entrée-état du système en utilisant une approche *small-gain*.

Dans ce qui suit, nous présentons deux des méthodes utilisées dans la littérature pour modéliser les contraintes de communication de façon plus globale : l'approche continue [Nešić 04a] et l'approche discrète [Donkers 11]. Dans cette thèse, nous ne nous intéressons qu'à la synthèse d'observateurs pour les systèmes commandés en réseau, nous restreignons par conséquent la présentation de ces méthodes au cas où seules les sorties sont soumises aux contraintes de communication du réseau. Nous pouvons nous référer à [Heemels 10b] pour une présentation des deux méthodes dans un cadre de la commande où on considère que les entrées de commande du système sont également transmises à travers le réseau et les actionneurs sont situés sur différents nœuds.

1.1.3.1 Approche continue

Dans leurs travaux [Nešić 04a, Nešić 04b], les auteurs proposent une modélisation des systèmes commandés en réseau tenant compte des différentes contraintes de communication exposées ci-dessus et ils introduisent notamment, dans le modèle du système, une équation qui décrit le protocole utilisé. Ils montrent que ce modèle englobe plusieurs types de protocoles, notamment le Round-Robin et le protocole TOD. Ceci permet d'étudier les NCS avec les contraintes d'ordonnancement de manière plus globale en énonçant des propriétés générales qui permettent de classifier les protocoles.

Nous présentons dans ce qui suit, le modèle de systèmes commandés en réseau introduit dans [Nešić 04a]. Cette modélisation a également été adoptée dans les travaux [Heemels 10a] en y incluant le retard induit par le réseau et dans [Ahmed-Ali 12]

et [Postoyan 12] pour la synthèse d'observateurs pour les NCS.

On considère le système continu suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ y(t) = g(x(t)) \end{cases} \tag{1.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ désigne le vecteur d'état du système et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ représente le vecteur des sorties du système.

La notation $\{t_k\}_{k\geq 0}$ désigne une séquence de valeurs strictement croissantes représentant les instants de transmission telle que $\epsilon < t_{k+1} - t_k \leq \tau_{\text{MATI}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour des réels $\epsilon, \tau_{\text{MATI}} > 0$. Nous notons τ_{MATI} l'intervalle maximal admissible entre deux instants de transmission successifs.

On considère que les capteurs délivrant les mesures des sorties du système sont répartis en l nœuds. À chaque instant de transmission $t_k \in \{t_k\}_{k\geq 0}$, le protocole accorde l'accès à un nœud donné $i \in \{1, 2, \cdots, l\}$.

On définit la variable $\hat{y}$ qui représente le vecteur des plus récentes mesures de la sortie du système transmises à travers le réseau. On définit également l'erreur induite par le réseau par :

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t) \tag{1.2}$$

Nous pouvons partitionner l'erreur induite par le réseau en fonction de la répartition des nœuds, on écrit alors :

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_l \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad e_i \in \mathbb{R}^{p_i} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{l} p_i = p \tag{1.3}$$

On introduit la fonction de mise à jour h_y qui dépend du protocole d'ordonnancement et décrit la mise à jour effectuée en fonction des mesures disponibles à l'instant de transmission. À l'instant de transmission t_k, le vecteur des mesures disponibles est mis à jour :

$$\hat{y}(t_k) = y(t_k) + h_y(k, e(t_k)) \tag{1.4}$$

Ainsi, lorsque à l'instant t_k, c'est le nœud i qui est autorisé à transmettre ses données,

nous avons une mise à jour de la valeur de $\hat{y}_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ et les autres composants de $\hat{y}(t)$ ne subissent pas de mise à jour. Nous avons alors $h_y^i(k, e(t_k)) = 0$, par exemple dans le cas du protocole Round-Robin. Il faut noter que ce formalisme introduit par les auteurs de [Nešić 04a] autorise d'autres types de mise à jour qui n'impliquent pas nécessairement une remise à zéro de h_y^i lorsque le nœud i est autorisé à transmettre.

Le protocole précédemment cité, Round-Robin, peut être représenté avec ce formalisme. La fonction de mise à jour du protocole s'écrit alors :

$$h_y(k, e(t_k)) = (\mathbf{I}_p - \Delta(k))e \tag{1.5}$$

où

$$\Delta(k) = \mathrm{diag}\{\Delta_1(k), \Delta_2(k), \cdots, \Delta_l(k)\} \tag{1.6}$$

et les matrices Δ_i sont des matrices carrées de dimensions p_i correspondant au nombre de capteurs situés sur le nœud i et nous avons $\Delta_i = \delta_i(k)\mathbf{I}_{p_i}$ avec :

$$\delta_i(k) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad k = i + nl,\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.7}$$

On peut noter que le protocole TOD peut également être représenté avec ce formalisme comme cela est également fait dans [Nešić 04a].

Cette approche est utilisée dans [Nešić 04a, Nešić 04b], où les auteurs définissent les classes de protocole *uniformément globalement exponentiellement (respectivement asymptotiquement) stable : UGES (respectivement UGAS)* qui englobent les protocoles précédemment étudiés *Round-Robin* et *TOD* et déterminent le τ_{MATI} permettant de conserver les propriétés de stabilité entrée-état du système en utilisant une approche *small-gain*. Une approche de Lyapunov est utilisée dans [Carnevale 07] pour déterminer l'intervalle maximal admissible entre les transmissions.

Cette modélisation a été étendue dans [Heemels 10a] pour tenir compte du retard. Cependant, les auteurs introduisent une hypothèse qui suppose que le retard est à chaque fois inférieur à l'intervalle entre deux transmissions. Cette modélisation est utilisée dans [Heemels 09] pour la commande des NCS en tenant compte de la quantification.

1.1.3.2 Approche discrète

Dans [Donkers 09, Donkers 11], les auteurs introduisent une autre méthode pour modéliser les contraintes de communication. Cette méthode contrairement à la précédente peut être utilisée pour les systèmes discrets. On introduit, pour chaque nœud

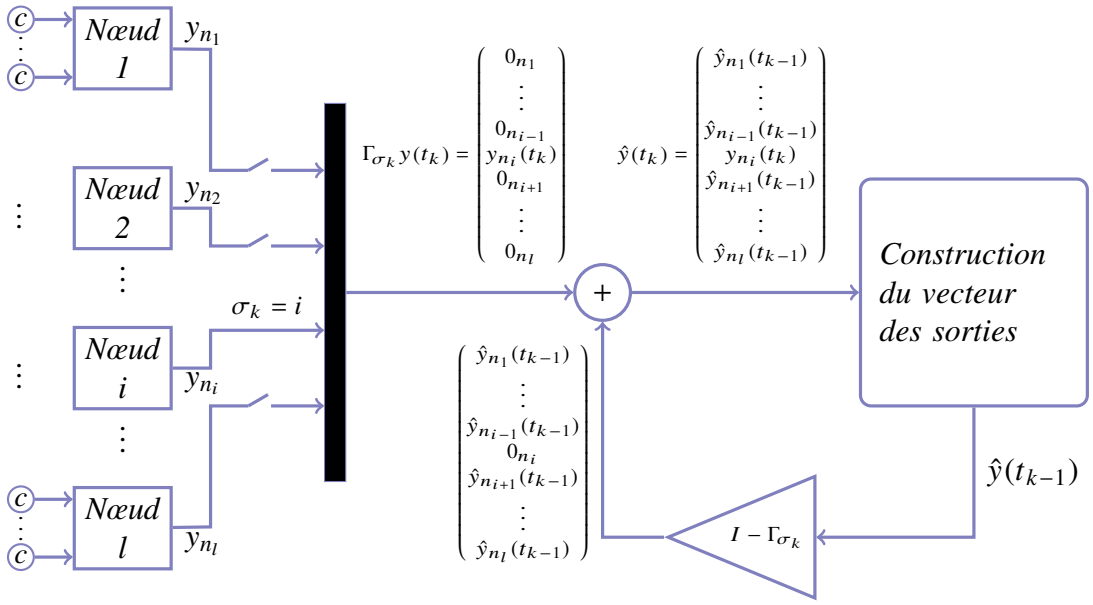


FIGURE 1.2: Représentation d'un système soumis à un protocole selon la modélisation discrète

$i \in \{1, 2, \cdots, l\}$, la matrice diagonale Γ_i définie comme suit :

$$\Gamma_i = \mathrm{diag}\left\{\gamma_{i,1}\mathbf{I}_{p_1}, \gamma_{i,2}\mathbf{I}_{p_2}, \cdots, \gamma_{i,l}\mathbf{I}_{p_l}\right\} \tag{1.8}$$

où p_i correspond au nombre de sorties situées sur le nœud i et pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, l\}$:

$$\gamma_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.9}$$

La matrice diagonale Γ_i ainsi introduite permet d'identifier les sorties qui doivent être mises à jour à la transmission. En effet, la matrice Γ_i est composée de "1" pour les éléments correspondants au nœud i et de "0" pour les autres éléments.

La variable de mise à jour $\hat{y}(t_k)$ qui représente le vecteur des mesures les plus ré-

centes du système peut s'écrire :

$$\hat{y}(t_k) = \Gamma_{\sigma_k} y(t_k) + \left(\mathbf{I}_p - \Gamma_{\sigma_k}\right) \hat{y}(t_{k-1}) \tag{1.10}$$

où $\sigma_k \in \{1, 2, \cdots, l\}$ indique le nœud qui est autorisé à transmettre à l'instant t_k. Ainsi, si le nœud i est autorisé à transmettre à l'instant t_k, nous avons $\sigma_k = i$ et l'équation (1.10) nous montre que les éléments du vecteur $\hat{y}(t_k)$ correspondant au nœud i sont mis à jour avec les mesures transmises et les autres éléments de $\hat{y}(t_k)$ gardent leur valeur de la précédente transmission t_{k-1}.

L'algorithme du protocole consiste alors à déterminer la valeur de σ_k à chaque instant de transmission t_k parmi l'ensemble des nœuds $\{1, 2, \cdots, l\}$.

La figure 1.2 illustre la représentation du protocole selon la modélisation discrète utilisée ci-dessus.

Exemple 1.1:

Nous illustrons dans cet exemple comment ce formalisme permet de modéliser un système soumis à un protocole Round-Robin.

Nous prenons l'exemple simple d'un système ayant $p = 5$ sorties réparties sur 2 nœuds avec 3 sorties sur le nœud 1 et 2 sorties sur le nœud 2 de telle sorte que nous avons :

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5, \qquad y_{n_1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{et} \qquad y_{n_2} = \begin{pmatrix} y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{1.11}$$

où y_{n_i} représente le vecteur des sorties situées sur le nœud i. Nous avons fait le choix, pour simplifier l'exemple, de placer les sorties sur les nœuds de manière ordonnée cependant il n'y a aucune contrainte sur le placement des sorties sur les nœuds du réseau. Les matrices Γ_i peuvent alors s'écrire :

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

Nous supposons que le protocole utilisé est un protocole Round-Robin. Le protocole

peut s'écrire très simplement :

$$\sigma_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k \text{ est pair} \\ 2, & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.13}$$

Ainsi, si à l'instant t_k le nœud 1 est autorisé à transmettre ses données à travers le réseau, nous avons $\sigma_k = 1$, la variable $\hat{y}(t_k)$ s'écrit alors :

$$\hat{y}(t_k) = \Gamma_1 y(t_k) + (\mathbf{I}_5 - \Gamma_1)\, \hat{y}(t_{k-1}) \tag{1.14}$$

Nous obtenons alors en utilisant (1.12) :

$$\hat{y}(t_k) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n_1}(t_k) \\ y_{n_2}(t_k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}_{n_1}(t_{k-1}) \\ \hat{y}_{n_2}(t_{k-1}) \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Le vecteur $\hat{y}(t_k)$ est mis à jour de sorte à prendre en compte les nouvelles mesures transmises par le nœud 1 et les éléments correspondants dans le vecteur $\hat{y}(t_k)$ prennent les valeurs des sorties situées sur le nœud 1 et ceux correspondant aux sorties du nœud 2 gardent leur valeur de la précédente transmission.

$$\hat{y}(t_k) = \begin{pmatrix} y_{n_1}(t_k) \\ \hat{y}_{n_2}(t_{k-1}) \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

À l'instant t_{k+1}, le nœud 2 transmet ses données et nous avons $\sigma_k = 2$. En suivant la démarche précédente, nous obtenons :

$$\hat{y}(t_{k+1}) = \begin{pmatrix} \hat{y}_{n_1}(t_k) \\ y_{n_2}(t_{k+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{n_1}(t_k) \\ y_{n_2}(t_{k+1}) \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

Nous pouvons bien noter que le vecteur des mesures disponibles représente effectivement les sorties du système transmises alternativement à travers le réseau.

Dans [Donkers 11], les auteurs se basent sur cette modélisation pour définir deux classes de protocole : les protocoles quadratiques et les protocoles périodiques qui incluent respectivement les protocoles TOD et Round-Robin présentés précédemment.

Protocole quadratique

Le protocole quadratique permet de représenter les protocoles dynamiques. Il s'écrit sous la forme d'une fonction minimisant un critère :

$$\sigma_k = \arg\left(\min_{i\in\{1,2,\cdots,l\}} \left(\bar{x}_k^T P_i \bar{x}_k\right)\right) \tag{1.18}$$

où P_i est une matrice donnée qui est définie avec le protocole et $\bar{x}_k$ est le critère à minimiser. $\bar{x}_k$ peut éventuellement être l'état du système ou l'erreur induite par le réseau comme dans le cas du protocole TOD qui appartient à cette classe. Nous pouvons nous référer à [Donkers 11] pour une description du protocole TOD sous forme de protocole quadratique.

Protocole périodique

Un protocole périodique est un protocole pour lequel il existe un entier N tel que l'algorithme qui détermine σ_k s'écrit :

$$\sigma_{k+N} = \sigma_k \tag{1.19}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. L'entier N est alors la période du protocole.

Le protocole Round-Robin appartient à cette classe de protocole. On peut le représenter en considérant que la période du protocole est égale au nombre de nœuds et :

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_l\} = \{1, 2, \cdots, l\} \tag{1.20}$$

Cette modélisation est également utilisée dans [Bauer 10, Bauer 13] pour la synthèse de commande par retour de sortie des systèmes linéaires soumis à des protocoles périodiques.

1.1.3.3 Prise en compte dans la synthèse d'observateurs

Dans la littérature, l'étude des observateurs pour les systèmes commandés en réseau en tenant compte des contraintes de communication est très peu développée. Les rares études à notre connaissance concernent les travaux de [Dačić 08] qui font la co-synthèse d'un observateur avec un protocole de type TOD pour les systèmes linéaires.

Dans le cas des systèmes non linéaires, les travaux de [Postoyan 10] ont adapté la modélisation de [Nešić 04a] à la synthèse d'observateurs pour les systèmes commandés en réseau. Cette modélisation a notamment été utilisée dans [Ahmed-Ali 12] pour la synthèse d'un observateur grand-gain pour une classe de systèmes non linéaires soumis à un protocole UGES.

1.2 Contributions de la thèse

Dans ce travail de thèse, nous étudions la synthèse d'observateurs en tenant compte des contraintes de communication qui peuvent être liées à la commande et l'estimation des systèmes dynamiques contrôlés à travers un réseau. Nous nous intéressons particulièrement aux effets de l'échantillonnage et proposons différents observateurs pour les systèmes non linéaires à sorties échantillonnées.

Nous traitons également le problème du retard que peut induire le réseau sur les mesures des sorties du système. Nous étudions aussi l'effet des contraintes d'ordonnancement sur l'observation des systèmes non linéaires commandés en réseau.

1.2.1 Observateur pour les systèmes commandés en réseau avec un protocole périodique

Cette contribution consiste en la synthèse d'un observateur pour une classe de systèmes non linéaires globalement Lipschitz où les mesures des sorties sont transmises avec un retard à travers un réseau régit par un protocole périodique. L'observateur proposé est constitué d'un observateur pour le système retardé et d'un prédicteur d'état.

L'observateur retardé est un observateur robuste qui reconstruit l'état retardé du système. Nous utilisons la modélisation de [Donkers 11] pour modéliser l'influence du protocole périodique. Nous utilisons un prédicteur de la sortie du système comme développé dans [Karafyllis 08] pour avoir un estimation continue de la sortie du système. L'association du prédicteur de sortie de [Karafyllis 07] à la modélisation de [Donkers 11] permet ainsi d'utiliser cette modélisation des contraintes pour les systèmes non linéaires et synthétiser ainsi un observateur continu.

Le prédicteur d 'état est une extension du prédicteur de [Germani 02]. Nous utilisons des propriétés des modes glissants [Levant 98] afin de prédire l'état du système en temps

fini. Ceci permet ainsi de reconstruire l'état courant en fonction de l'estimation fournie par l'observateur retardé.

Nous nous sommes basés sur une approche petit gain pour déterminer des conditions suffisantes sur l'intervalle maximal admissible entre deux transmissions successives (τ_{MATI}) et le retard maximal admissible (τ_{MAD}) permettant d'assurer une stabilité de type ISS (input-to-state stability) de l'erreur d'observation par rapport au bruit de mesures sur les sorties du système. Nous fournissons également une estimation explicite du gain entre l'erreur d'observation et le bruit de mesure sur la sortie. Le principal avantage de notre résultat est dans le fait qu'aucun compromis n'est nécessaire entre la période et le retard des transmissions. Les résultats obtenus dans cette partie étendent ceux de [Ahmed-Ali 13] au cas des systèmes commandés en réseau avec un protocole périodique et représentent surtout une alternative aux résultats de [Heemels 10a] puisque ces derniers ont besoin d'un compromis entre la période et le retard de transmission des données pour assurer la convergence de l'erreur d'observation.

L' inconvénient de cette structure est qu'elle ne s'applique qu'au cas des retards constants. Une façon de contourner cette entrave est d'utiliser un buffer qui va retenir les données du réseau afin d'égaliser les retards. Mais, ceci entraîne nécessairement d'avoir un retard qui sera plus grand, c'est à dire égal au retard le plus long introduit par le réseau.

1.2.2 Observateurs à gain variable pour une classe de systèmes non linéaires

Il est bien connu que la majorité des observateurs continus avec des données discrètes, qui existent dans la littérature, amplifient l'effet du bruit de mesure, comparés aux observateurs qui utilisent des mesures continues.

Nous avons adapté l'observateur de [Praly 03] pour le cas des systèmes avec des données échantillonnées. Nous utilisons aussi un prédicteur de sortie pour compenser l'absence de mesures entre les instants d'échantillonnages. Nous utilisons une approche de Lyapunov-Krasovskii pour déterminer des conditions sur la loi d'adaptation du paramètre de l'observateur et la période d'échantillonnage maximale admise τ_{MASP} afin de garantir la convergence asymptotique de cet observateur.

Nous avons également proposé dans cette partie, un nouvel observateur pour une

classe de systèmes non linéaires avec des données discrètes. L'intérêt de notre algorithme est qu'il contient un gain variant dans le temps et décroissant entre deux instants d'échantillonnage. Cette propriété permet d'atténuer considérablement l'effet des bruits de mesure sur l'erreur d'observation. Notre algorithme tend aussi à augmenter la période d'échantillonnage maximale admissible comparé à l'observateur de [Van Assche 11, Raff 08]. Par ailleurs ce résultat représente aussi une généralisation du travail de [Cacace 12] en considérant une gamme de gain variant dans le temps beaucoup plus large que celle qui est utilisée dans [Cacace 12].

Il est à noter que ce résultat pourra s'étendre au cas des systèmes commandés en réseau en incluant les contraintes d'ordonnancement [Ahmed-Ali 12] et le retard.

1.2.3 Observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes affines en l'état

Cette partie constitue la dernière contribution de notre travail. Nous présentons deux observateurs adaptatifs qui fournissent une estimation conjointe et continue du vecteur d'état et des paramètres inconnus, mais supposés constants, du système avec des mesures discrètes. Le résultat de cette contribution réside dans le fait que les algorithmes d'observateurs obtenus exhibent une structure beaucoup plus simple que ceux qui existent actuellement dans la littérature [Ahmed-Ali 09b]. Ceci facilite l'implémentation de ces observateurs. La nature continue de la loi d'estimation paramétrique permet également de construire plus facilement une loi de commande adaptative à partir de ces observateurs.

Le premier observateur que nous proposons utilise un prédicteur de sortie de [Karafyllis 08] qui est mis à jour aux instants d'échantillonnage et qui permet d'estimer la sortie entre ces instants d'échantillonnage. Ceci nous permet d'avoir des estimées, des états et des paramètres inconnus, qui sont continues. Nous utilisons une approche de Lyapunov pour les systèmes hybrides [Naghshtabrizi 08] pour démontrer la convergence exponentielle des estimées des états et des paramètres inconnus du système.

Le deuxième observateur proposé dans cette contribution a un terme de correction qui est maintenu constant et subit une mise à jour aux instants d'échantillonnage, où une nouvelle mesure de la sortie est disponible, comme cela est fait dans [Raff 08]. Ainsi, bien que les états et les paramètres inconnus estimés aient une dyna-

mique hybride, ils restent continus entre les instants d'échantillonnage. Nous considérons ainsi l'intervalle entre les instants d'échantillonnage comme un retard variant [Fridman 10, Van Assche 11] et proposons une fonction de Lyapunov-Krasovskii qui permet de prouver la convergence exponentielle de l'observateur.

Chapitre 2

Observateur pour les systèmes commandés en réseau avec un protocole périodique

2.1 Introduction

Les observateurs pour les systèmes commandés en réseau ont fait jusqu'à présent l'objet de très peu d'études qui prennent en compte plusieurs des contraintes que peuvent entraîner l'utilisation du réseau. Par contre, il existe une très large littérature qui traite les observateurs pour les systèmes à sorties échantillonnées [Deza 92, Nadri 03, Karafyllis 07, Raff 08]. Le problème du retard est aussi abordé dans les travaux sur les observateurs non linéaires de [Van Assche 11, Germani 02, Cacace 10, Kazantzis 05]. Les contraintes d'ordonnancement sont quant à elles très peu étudiées pour l'observation des systèmes dynamiques. Nous avons à notre connaissance les travaux de [Dačić 08] pour les systèmes linéaires et ceux de [Ahmed-Ali 12, Postoyan 12] pour les systèmes non linéaires.

D'autre part, il existe très peu d'études sur les systèmes commandés en réseau qui tiennent compte simultanément de l'influence des différentes contraintes de communications sur la stabilité et les performances du système. Récemment, dans [Heemels 10a], les auteurs ont considéré le cas où le système est soumis à un retard variable et un protocole d'ordonnancement UGES, en restreignant toutefois l'étude au cas où le retard est

inférieur à l'intervalle entre deux transmissions successives de telle sorte que chaque paquet de données est reçu avant que le prochain ne soit envoyé. Ils déterminent ainsi un retard maximal τ_{MAD} et un intervalle maximal entre les transmissions τ_{MATI} afin de garantir les propriétés de stabilité entrée-état du système bouclé à travers un réseau. Nous pouvons noter que ces conditions assurant la stabilité du système impliquent un compromis entre τ_{MAD} et τ_{MATI}.

Les auteurs de [Ahmed-Ali 13] traitent le problème de la synthèse d'un observateur pour les systèmes non linéaires avec sortie échantillonnée et retardée. Ils combinent un observateur, pour le système retardé, à un prédicteur d'état dynamique de telle sorte que la borne sur le retard ne dépende pas de celle sur l'intervalle entre les transmissions. Nous pouvons considérer que les systèmes avec sortie échantillonnée sont un cas particulier des systèmes soumis aux contraintes d'ordonnancement en considérant toutes les sorties situées sur le même nœud.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la synthèse d'un observateur pour une classe de systèmes non linéaires globalement Lipschitz où les mesures des sorties sont transmises avec un retard constant à travers un réseau régi par un protocole périodique. Les travaux exposés dans ce chapitre étendent les résultats de [Ahmed-Ali 13] au cas des systèmes contrôlés en réseau en incluant les protocoles d'ordonnancement périodiques. Nous nous basons sur une approche *small-gain* pour déterminer un intervalle maximal admissible entre deux transmissions successives (τ_{MATI}) et un retard maximal admissible (τ_{MAD}) permettant d'assurer une stabilité de type *ISS* de l'erreur d'observation par rapport au bruit de mesure sur les sorties du système. Nous obtenons aussi une convergence globale exponentielle de notre observateur en l'absence de bruit de mesure sur les sorties du système.

Nous pouvons noter que dans ces travaux, il n'y a pas de compromis entre l'intervalle entre les transmissions et le retard contrairement aux travaux de [Heemels 10a] où le retard est supposé plus faible que la période d'échantillonnage. Toutefois, les auteurs de [Heemels 10a] s'intéressent à la classe plus large des protocoles d'ordonnancement uniformément globalement exponentiellement stable (*UGES*).

Dans la suite de ce chapitre, nous présentons, dans la section 2.2 une description générale du système étudié et introduisons les différentes hypothèses que nous adoptons pour le système. Nous définissons ensuite quelques notions de stabilité qui seront nécessaires pour la suite du chapitre (section 2.3). Un observateur pour les systèmes en réseau

combiné à un prédicteur est proposé dans la section 2.4 et la preuve de la convergence exponentielle y est apportée. Enfin, nous illustrons les performances de cet observateur sur un exemple dans la section 2.5.

2.2 Système étudié

Nous considérons la forme générale des systèmes non linéaires continus suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{2.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système et $u \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée du système.

La sortie du système est décrit par l'équation suivante :

$$y(t) = Hx(t) + v(t) \tag{2.2}$$

où $y \in \mathbb{R}^p$ est la sortie du système et $v(t) \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^p)$ modélise l'effet de l'erreur sur la mesure.

Nous supposons que les transmissions à travers le réseau se déroulent aux instants t_k, $k \in \mathbb{N}$, suivant une séquence $\{t_k\}_{k\geq 0}$ de $\mathbb{R}^0_+$. À chaque instant de transmission $t_k \in \{t_k\}_{k\geq 0}$, les mesures des sorties du système sont échantillonnées et transmises à travers le réseau. Nous désignons par τ_{MATI} l'intervalle maximal entre deux transmissions successives. Nous avons ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intervalle entre les instants de transmissions qui satisfait la relation suivante : $t_{k+1} - t_k \leq \tau_{\text{MATI}}$.

Nous considérons que les capteurs qui mesurent les p sorties du système sont situés à différents endroits et par conséquent sont localisés à différents nœuds d'un réseau. Le réseau étant en série, un seul nœud est autorisé à transmettre ses données à chaque instant de transmission ainsi nous avons une information limitée sur le vecteur des sorties du système. Nous supposons que les sorties du système sont réparties sur les l nœuds du réseau. À chaque instant de transmission, le protocole détermine le nœud $\sigma_k \in \{1, 2, \cdots, l\}$ autorisé à transmettre ses données.

Nous adoptons la formulation de [Donkers 11] pour modéliser les contraintes d'ordonnancement du protocole. Nous pouvons considérer que le vecteur des mesures dis-

ponibles à travers le réseau peut s'écrire :

$$\hat{y}(t_k) = \Gamma_{\sigma_k} y(t_k) + \left(\mathbf{I}_p - \Gamma_{\sigma_k}\right) \hat{y}(t_{k-1}) \tag{2.3}$$

où Γ_{σ_k} est une matrice diagonale, qui se met sous la forme suivante lorsque le nœud $i \in \{1, 2, \cdots, l\}$ est autorisé à transmettre ($\sigma_k = i$) :

$$\Gamma_i = \mathrm{diag}\left\{\gamma_{i,1}\mathbf{I}_{p_1}, \gamma_{i,2}\mathbf{I}_{p_2}, \cdots, \gamma_{i,l}\mathbf{I}_{p_l}\right\} \tag{2.4}$$

où p_i correspond au nombre de sorties situées sur le nœud i et les éléments $\gamma_{i,j}$ pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, l\}$ sont de la forme :

$$\gamma_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.5}$$

Par ailleurs, le réseau induit un retard τ, que nous supposons constant, de telle sorte que les données envoyées à l'instant t_k sont reçues au niveau de l'observateur à l'instant $t_k + \tau$.

En considérant le système comme défini ci-dessus, nous introduisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 2.1:
Le système défini par l'équation (2.1) est globalement Lipschitz.
Il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$|f(x,u) - f(z,u)| \leq L\,|x - z|\,, \forall x, z \in \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathbb{R}^m \tag{2.6}$$

Hypothèse 2.2:
Le protocole qui régit la transmission des données à travers le réseau est supposé périodique. Nous désignons par $N \in \mathbb{N}$ la période du protocole de telle sorte que nous avons :

$$\sigma_{k+N} = \sigma_k \tag{2.7}$$

où σ_k désigne l'indice du nœud autorisé à transmettre à l'instant t_k.

2.3 Notions préliminaires de stabilité

2.3.1 Stabilité entrée-état

Nous définissons ici la notion de stabilité entrée-état (input-to-state stability : ISS) introduite par [Sontag 89].

Définition 2.1:
Le système (2.1) est dit stable entrée-état si il existe une fonction β de classe $\mathcal{KL}$ et une fonction γ de classe $\mathcal{K}$ telles que pour toute condition initiale $x(t_0)$ et pour toute entrée bornée $v(t)$, la solution $x(t)$ de (2.1) satisfait la relation suivante :

$$|x(t)| \leq \beta(|x_0|, t - t_0) + \gamma(|v(t)|) \qquad \forall t \in [t_0, t_0 + T) \tag{2.8}$$

où $[t_0, t_0 + T)$ est l'intervalle de définition de $x(t)$.

2.3.2 Observateur robuste global exponentiel

Définition 2.2 ([Ahmed-Ali 13]):
On considère le système défini par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= F(z(t), y + v, u) \\ \hat{x}(t) &= \Psi(z(t)) \end{aligned} \tag{2.9}$$

$z(t) \in \mathbb{R}^l, y \in \mathbb{R}^k, u \in \mathbb{R}^m, \hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$
où $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ et $\Psi : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$.
On dit que le système (2.9) est un *observateur robuste global exponentiel* pour le système (2.1) si il existe une fonction non décroissante $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et des constantes $\sigma > 0, \gamma \geq 0$ telles que pour tout $(x_0, z_0, u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^m) \times L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^k\right)$, la solution $(x(t), z(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ de (2.1), (2.2) et (2.9) avec les conditions initiales $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0)$ et correspondant aux entrées $(u, v) \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^m) \times L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^k\right)$ existe pour tout $t \geq 0$ et satisfait l'inégalité suivante pour tout $t \geq 0$:

$$|\hat{x}(t) - x(t)| \leq \exp^{-\sigma t} M(|z(0)|, |x_\tau(0)|) + \gamma \sup_{0 \leq s \leq t} \left(\exp^{-\sigma(t-s)|v(s)|}\right) \tag{2.10}$$

2.3.3 Prédicteur d'état robuste

Définition 2.3 (Robuste r-prédicteur [Ahmed-Ali 13]):
Soit $A(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)$ l'ensemble non vide des fonctions localement bornées $z : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$. On considère les systèmes qui se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = F_p(\xi_t, u_t, z(t), \dot{z}(t)) \\ \bar{x}(t) = G(\xi_t, u_t, z(t)) \end{cases} \tag{2.11}$$

avec $\xi(t) \in \mathbb{R}^q, \bar{x}(t) \in \mathbb{R}^m, u(t) \in \mathbb{R}^m, z(t) \in \mathbb{R}^n$.
où $(\xi_t)(\tau) = \xi(t+\tau)$, $(u_t)(\tau) = u(t+\tau)$ pour $\tau \in [-r,0]$, $G : C^0([-r,0];\mathbb{R}^q) \times L^\infty([-r,0];\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue et r est une constante positive. Nous supposons que la fonction $F_p : C^0([-r,0];\mathbb{R}^q) \times L^\infty([-r,0];\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ est continue et telle que pour tout $(x(0), \xi(0), u, z) \in C^0([-r,0];\mathbb{R}^n) \times C^0([-r,0];\mathbb{R}^q) \times L^\infty([-r,\infty];\mathbb{R}^m) \times A(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)$, la solution $(x(t), \xi(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ de (2.1) et (2.11) avec les conditions initiales $\xi(\tau) = (\xi_0)(\tau)$, $x(\tau) = (x_0)(\tau)$, $\tau \in [-r,0]$ et correspondant aux entrées $(u,z) \in L^\infty([-r,\infty];\mathbb{R}^m) \times A(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)$ est unique, définie pour tout $t \geq 0$ et satisfait :

$$\begin{aligned} |\bar{x}(t) - x(t)| \leq \exp^{-\sigma t} a\Big(|x(0)| + |\xi(0)| + |u| + \sup_{0\leq s\leq r} |z(s)|\Big) \\ + P \sup_{0\leq s\leq t} \Big(\exp^{-\sigma(t-s)} |z(s) - x(s-r)|\Big) \end{aligned} \quad \forall t \geq 0 \tag{2.12}$$

pour une fonction non décroissante $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et des constantes $P > 0$ et $\sigma > 0$, le système (2.11) est alors un prédicteur robuste global exponentiel pour le système (2.1).

2.4 Synthèse de l'observateur

2.4.1 Structure de l'observateur

Nous introduisons l'hypothèse sur l'existence d'un observateur continu pour le système (2.1).

Hypothèse 2.3:
Il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, une matrice $K \in \mathbb{R}^{n\times k}$ et une constante $\mu > 0$ telles que l'inégalité suivante est satisfaite

$$(z-x)^T P\,(f(z,u) - f(x,u)) + (z-x)^T PKH(z-x) \leq -\mu\,|z-x|^2\,, \forall x,z \in \mathbb{R}^n, \forall u \in U \subset \mathbb{R}^m \tag{2.13}$$

où l'ensemble U est un compact de $\mathbb{R}^m$.

Remarque 2.1:
L'hypothèse 2.3 implique que le système continu suivant :

$$\dot{z}(t) = f(z(t)\,,u(t)) + K(Hz(t) - y(t)) \tag{2.14}$$

est un observateur robuste et globalement exponentiel pour le système défini par les équations (2.1) et (2.2) si l'on considère que les erreurs de mesure sont nulles ($v(t) = 0$). Ceci revient à dire qu'il existe une fonction non décroissante $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et des constantes $\gamma > 0$ et $\sigma > 0$ telles que :

$$|z(t) - x(t)| \leq \exp^{-\sigma t} M(|z(0)|\,,|x(0)|) + \gamma \sup_{0\leq s\leq t}\left(\exp^{-\sigma(t-s)}\,|v(s)|\right) \tag{2.15}$$

Nous proposons ici un observateur couplé à un prédicteur d'état. Cette structure permet d'estimer l'état retardé du système grâce à l'observateur exponentiel et le prédicteur utilise cette estimée de l'état retardé pour prédire l'état actuel du système.

$$\begin{cases}
\dot{z}(t) = f(z(t)\,,u(t-\tau)) + K(Hz(t) - w(t)) & \text{(2.16a)}\\
\dot{w}(t) = Hf(z(t)\,,u(t-\tau)) \qquad t \in [t_k, t_{k+1}) & \text{(2.16b)}\\
w(t_{k+1}) = \Gamma_{\sigma_k} y(t_{k+1} - \tau) + (I - \Gamma_{\sigma_k})\, w(t_{k+1}^-) & \text{(2.16c)}\\
\dot{\xi}_i(t) = \dot{z}_i(t) + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{t-\tau}^{t} f_i(\xi(s)\,,u(s))\,\mathrm{d}s & \\
\qquad - \left|\xi_i(t) - z_i(t) - \displaystyle\int_{t-\tau}^{t} f_i(\xi(s)\,,u(s))\,\mathrm{d}s\right|^{\frac{1}{2}} & \text{(2.16d)}\\
\qquad \times \operatorname{sign}\left(\xi_i(t) - z_i(t) - \displaystyle\int_{t-\tau}^{t} f_i(\xi(s)\,,u(s))\,\mathrm{d}s\right) & \\
\qquad \text{pour}\, i = 1, \cdots, n &
\end{cases}$$

Les figures 2.1 et 2.2 représentent le système (2.1) dont les états sont reconstruits par une structure composée d'un observateur et d'un prédicteur d'état en cascade où :

- $w(t) \in \mathbb{R}^p$ est un prédicteur de la sortie du système (intersample predictor). Il permet d'estimer la sortie retardée du système $y(t-\tau)$ entre les instants de transmissions $t \in [t_k, t_{k+1})$.
- $z(t) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état de l'observateur du système retardé (observateur retardé). Il permet d'estimer $x(t_k - \tau)$.
- $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ estime les états $x(t)$ du système. C'est la sortie du prédicteur d'état.

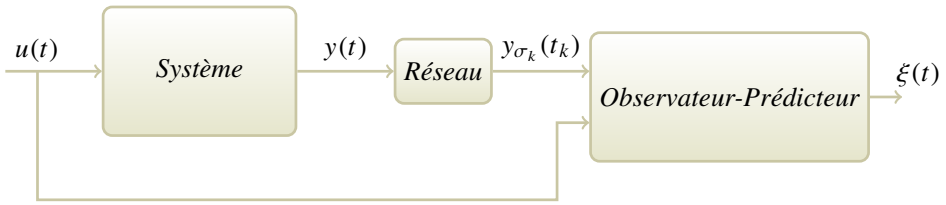


FIGURE 2.1: Schéma de l'observation du système à travers le réseau

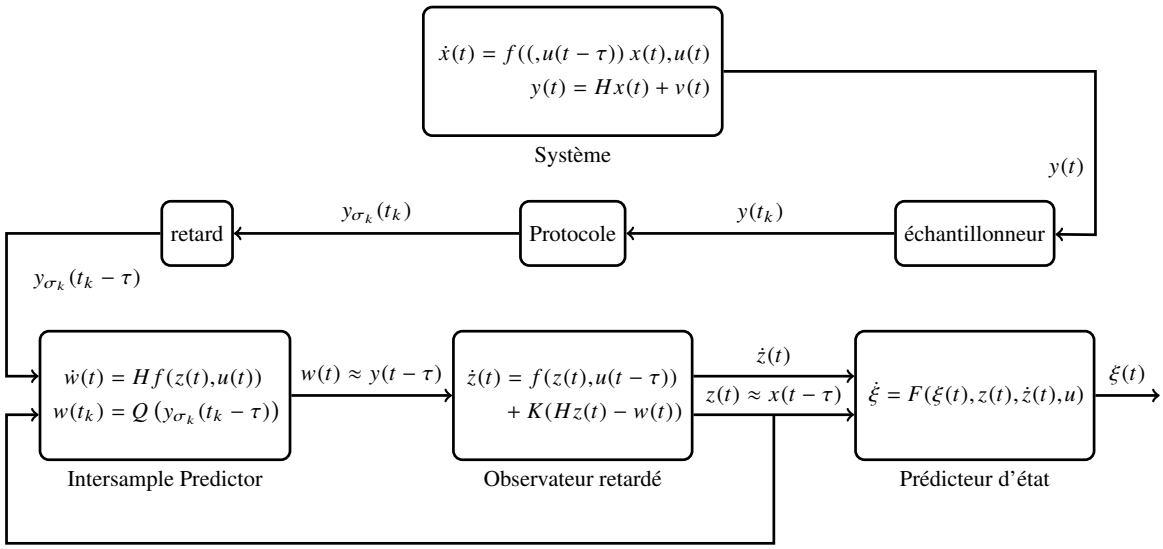


FIGURE 2.2: Schéma général du système commandé en réseau avec une structure observateur-prédicteur

THÉORÈME 2.1:
On considère le système (2.1) *sous les hypothèses* (2.1), (2.3) *et* (2.2). *On définit* $N \in \mathbb{N}$ *la période du protocole qui régit la transmission des données à travers le réseau. Soit* τ_{MATI} *l'intervalle maximal admissible entre deux transmissions successives et* τ_{MAD} *le retard maximal admissible tels que les relations suivantes soient satisfaites :*

$$\tau_{\text{MATI}} < \frac{1}{\gamma\,|H|\,NL} \qquad \textit{et} \qquad \frac{L}{\sigma}\left(\exp^{\sigma\tau_{\text{MAD}}} - 1\right) < 1. \tag{2.17}$$

alors, pour tout $(z_0, w_0, u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times L^\infty\left([-\tau_{\text{MAD}}, +\infty), \mathbb{R}^m\right) \times L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^p\right)$ *et* $(\xi_0, x_0) \in C^0([-\tau_{\text{MAD}}, 0], \mathbb{R}^n) \times C^0([-\tau_{\text{MAD}}, 0], \mathbb{R}^n)$, *il existe une fonction croissante* $Q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *telle que la solution* $(\xi(t), x(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *des équations différentielles* (2.1), (2.2) *et* (2.16) *avec les conditions initiales* $z(0) = z_0$, $w(0) = w_0$, $\xi(\tau) = \xi_0(\tau)$ *et* $x(\tau) = x_0(\tau)$, $\tau \in [-\tau_{\text{MAD}}, 0]$ *correspondant aux entrées* $(u, v) \in L^\infty\left([-\tau_{\text{MAD}}, +\infty), \mathbb{R}^m\right) \times L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^p\right)$ *satisfasse*

$$\begin{aligned} |\xi(t) - x(t)| \leq{}& \exp^{-\sigma t} Q\left(\|x_0\| + \|\xi_0\| + \left\|\prod_{i=0}^{k-1}\left(I - \Gamma_{\sigma_i}\right) e(t_0)\right\|\right) \\ &+ \frac{2\gamma(N-1)}{1 - 2\gamma\,|H|\,NL\tau_{\text{MATI}}} \cdot \frac{\sigma}{\sigma - L\left(\exp^{\sigma\tau} - 1\right)} \sup_{0 \leq s \leq t}\left(\exp^{-\sigma(t-s)}\,|v(s)|\right) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Remarque 2.2:
Le théorème précédent nous donne une convergence de l'observateur de type *ISS*. En l'absence d'erreur sur la mesure, c'est-à-dire, $v(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$, l'observateur (2.16) devient un observateur global exponentiel pour le système défini par les équations (2.1) et (2.2).

2.4.2 Analyse de la convergence

L'analyse de la convergence de cet observateur va se faire en deux étapes.

Dans un premier temps, nous allons prouver que le vecteur d'état de l'observateur $z(t)$ permet d'estimer l'état retardé $x(t - \tau)$ dans le cas où les mesures de la sortie du

système sont transmis selon une séquence $\{t_k\}_{k\geq 0}$ de $\mathbb{R}_+$ à travers un réseau soumis à un protocole périodique. Nous allons alors déterminer l'intervalle maximal de transmissions τ_{MATI} tel que l'observateur défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = f(z(t), u(t-\tau)) + K(Hz(t) - w(t)) & \text{(2.19a)} \\ \dot{w}(t) = Hf(z(t), u(t-\tau)) \qquad t \in [t_k, t_{k+1}) & \text{(2.19b)} \\ w(t_{k+1}) = \Gamma_{\sigma_k} y_\tau(t_{k+1}) + (I - \Gamma_{\sigma_k})\, w(t_{k+1}^-) & \text{(2.19c)} \end{cases}$$

soit un observateur robuste global exponentiel pour le système retardé :

$$\begin{cases} x_\tau(t) = f(x_\tau(t), u(t-\tau)) \\ y_\tau(t) = Hx_\tau(t) + v_\tau(t) \end{cases} \tag{2.20}$$

où $x_\tau(t)$ est le vecteur des états retardés du système (2.1), c'est-à-dire $x_\tau(t) = x(t-\tau)$. Ceci revient à montrer qu'il existe une fonction croissante $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et des constantes $\gamma > 0$ et $\sigma > 0$ telles que :

$$|z(t) - x_\tau(t)| \leq \exp^{-\sigma t} M(|z(0)|, |x_\tau(0)|) + \gamma \sup_{0\leq s\leq t} \left(\exp^{-\sigma(t-s)} |v_\tau(s)|\right) \tag{2.21}$$

Dans la deuxième partie de la preuve, nous introduisons le prédicteur d'état (2.16d) afin de compenser le retard sur la mesure. Ce type de prédicteur apparaît dans la littérature dans [Ahmed-Ali 13]. Nous montrons que ce prédicteur est un r-prédicteur (avec ici $r = \tau_{\text{MAD}}$) pour le système (2.1). Nous déterminons alors le retard maximal admissible τ_{MAD} pour garantir que $\xi(t)$ estime $x(t)$ l'état actuel du système.

2.4.3 Convergence de l'observateur du système retardé

Nous définissons d'abord l'erreur de sortie $e_\tau(t)$ entre le prédicteur de sortie et la sortie du système retardé (2.20) :

$$e_\tau(t) = y_\tau(t) - w(t) \tag{2.22}$$

On peut exprimer l'erreur de sortie aux instants de transmission. En utilisant l'équation du prédicteur aux instants de transmission (2.19c), nous avons pour tout entier $k \geq 0$:

$$e_\tau(t_{k+1}) = y_\tau(t_{k+1}) - \Gamma_{\sigma_k} y_\tau(t_{k+1}) - (I - \Gamma_{\sigma_k})\, w(t_{k+1}^-) \tag{2.23}$$

En utilisant l'équation (2.16b) de la dérivée du prédicteur de sortie entre t_k et t_{k+1}, nous pouvons écrire :

$$w(t_{k+1}^-) = w(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} Hf(z(s)\,, u(s-\tau))\,\mathrm{d}s \tag{2.24}$$

Nous avons alors d'après les deux équations précédentes et (2.20) :

$$\begin{aligned} e_\tau(t_{k+1}) &= (I - \Gamma_{\sigma_k})\,(Hx_\tau(t_{k+1}) + v_\tau(t_{k+1})) \\ &\quad - (I - \Gamma_{\sigma_k})\left(w(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} Hf(z(s)\,, u(s-\tau))\,ds\right) \end{aligned} \tag{2.25}$$

En considérant, l'équation (2.22), nous avons $w(t_k) = e_\tau(t_k) - Hx_\tau(t_{k+1}) + v_\tau(t_{k+1})$. Ceci nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} e_\tau(t_{k+1}) &= (I - \Gamma_{\sigma_k})\,(Hx_\tau(t_{k+1}) + v_\tau(t_{k+1})) \\ &\quad - (I - \Gamma_{\sigma_k})\left(-e_\tau(t_k) + Hx_\tau(t_k) + v_\tau(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} Hf(z(s)\,, u(s-\tau))\,ds\right) \end{aligned} \tag{2.26}$$

De plus, étant donné que le vecteur d'état du système retardé $x_\tau(t)$ est continu pour tout $t \in \mathbb{R}_+^0$, a fortiori entre les instants t_k et t_{k+1}, nous avons :

$$x_\tau(t_k) = x_\tau(t_{k+1}) - H\int_{t_k}^{t_{k+1}} Hf(x_\tau(s)\,, u(s-\tau))\,\mathrm{d}s \tag{2.27}$$

Nous pouvons ainsi écrire l'erreur de prédiction de la sortie retardée à l'instant t_{k+1} en fonction de l'erreur à l'instant t_k :

$$\begin{aligned} e_\tau(t_{k+1}) &= (I - \Gamma_{\sigma_k})\, e_\tau(t_k) + (I - \Gamma_{\sigma_k})\,(v_\tau(t_{k+1}) - v_\tau(t_k)) \\ &\quad - (I - \Gamma_{\sigma_k})\, H\int_{t_k}^{t_{k+1}} (f(z(s)\,, u(s-\tau)) - f(x_\tau(s)\,, u(s-\tau)))\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{2.28}$$

Par conséquent, en utilisant le fait que le système est globalement Lipschitz d'après l'hypothèse 2.1, nous avons :

$$|e_\tau(t_{k+1})| \leq (I - \Gamma_{\sigma_k}) \left[|e_\tau(t_k)| + 2 \sup_{t_k \leq s \leq t_{k+1}} |v_\tau(s)| + |H| \, L\tau_{\text{MATI}} \sup_{t_k \leq s < t_{k+1}} |x_\tau(s) - z(s)| \right] \tag{2.29}$$

Ainsi, en procédant par récurrence, nous pouvons en déduire l'erreur de prédiction à l'instant de transmission t_k en fonction de l'erreur de prédiction à l'instant t_0 :

$$\begin{aligned} |e_\tau(t_k)| \leq & \prod_{i=0}^{k-1} (I - \Gamma_{\sigma_i}) \, |e_\tau(t_0)| + 2 \sum_{i=0}^{k-1} \prod_{j=0}^{k-i-1} \left(I - \Gamma_{\sigma_{k-1-j}} \right) \sup_{t_i \leq s \leq t_{i+1}} |v_\tau(s)| \\ & + HL\tau_{\text{MATI}} \sum_{i=0}^{k-1} \prod_{j=0}^{k-i-1} \left(I - \Gamma_{\sigma_{k-1-j}} \right) \sup_{t_i \leq s \leq t_{i+1}} |x_\tau(t) - z(s)| \end{aligned} \tag{2.30}$$

La propriété de périodicité du protocole qui régit la transmission des données à travers le réseau (hypothèse 2.2), nous permet d'énoncer les deux propriétés suivantes de la matrice Γ_{σ_k} :

soit N la période du protocole utilisé, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left| \prod_{i=k}^{k+j-1} (I - \Gamma_{\sigma_i}) \right| = 1 \qquad \text{pour tout} \quad j \in \{1, \cdots, N-1\} \tag{2.31}$$

et

$$\prod_{i=k}^{k+N-1} (I - \Gamma_{\sigma_i}) = 0 \tag{2.32}$$

Remarque 2.3:
La première propriété (2.31) exprime le fait que l'erreur due à l'ordonnancement dans le réseau ne s'amplifie pas d'une transmission à l'autre. En effet, à chaque transmission, nous récoltons des données sur les nœuds, ce qui annule l'erreur sur ces sorties et par conséquent entraîne une diminution du module du vecteur d'erreur.

Remarque 2.4:
La seconde propriété traduit le fait que l'erreur due à l'ordonnancement s'annule au bout d'une période du protocole. En effet, après une période du protocole, tous les nœuds

auront transmis leur données et ainsi, l'erreur de l'ordonnancement liée à chaque sortie se sera annulée successivement.

Ainsi, nous pouvons déduire de ces deux propriétés de la matrice Γ_{σ_k} que l'erreur de prédiction est :

$$\begin{aligned} |e_\tau(t_k)| \leq \prod_{i=0}^{k-1} (I - \Gamma_{\sigma_i})\, e_\tau(t_0) + 2\,(N-1) \sup_{t_0 \leq s \leq t} |v_\tau(s)| \\ + HL\,(N-1)\,\tau_{\text{MATI}} \sup_{t_0 \leq s \leq t} |x_\tau(s) - z(s)| \end{aligned} \tag{2.33}$$

Grâce à la deuxième propriété de la matrice Γ_{σ_k} (2.32), nous pouvons remarquer que le terme impliquant l'erreur due à l'ordonnancement s'annule au bout d'une période du protocole. Ainsi, pour tout $k \geq N$, nous avons :

$$|e_\tau(t_k)| \leq 2\,(N-1) \sup_{t_0 \leq s \leq t} |v_\tau(s)| + |H|\,(N-1)\,L\tau_{\text{MATI}} \sup_{t_0 \leq s \leq t} |x_\tau(s) - z(s)| \tag{2.34}$$

D'un autre côté, en utilisant les équations (2.20) et (2.16b), nous pouvons calculer la dérivée de l'erreur de prédiction entre les instants d'échantillonnage :

$$\dot{e}_\tau(t) = Hf(x_\tau(t)\,, u(t-\tau)) - Hf(z(t)\,, u(t-\tau)) \tag{2.35}$$

Nous intégrons alors cette équation entre t_k et t_{k+1} et en utilisant l'hypothèse (2.1) et le fait que $t_{k+1} - t_k \leq \tau_{\text{MATI}}$ pour $k \in \mathbb{N}$, nous en déduisons que pour tout $t \in [t_k, t_{k+1})$, on a :

$$|e_\tau(t)| \leq |e_\tau(t_k)| + |H|\,L\tau_{\text{MATI}} \sup_{t_k \leq s \leq t} |x_\tau(s) - z(s)| \tag{2.36}$$

En combinant les équations (2.33) et (2.36), nous avons alors pour tout $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} |e_\tau(t)| \leq \prod_{i=0}^{k-1} (I - \Gamma_{\sigma_i})\, e_\tau(t_0) + 2\,(N-1) \sup_{t_0 \leq s \leq t} |v_\tau(s)| \\ + HNL\tau_{\text{MATI}} \sup_{t_0 \leq s \leq t} |x_\tau(s) - z(s)| \end{aligned} \tag{2.37}$$

Par ailleurs, les équations (2.20) et (2.22), nous permettent d'écrire :

$$w(t) = Hx_\tau(t) + v_\tau(t) - e_\tau(t) \tag{2.38}$$

Ainsi, à partir de l'hypothèse 2.3 et de l'équation (2.19a), nous pouvons en déduire que :

$$\begin{aligned} |z(t) - x_\tau(t)| \leq \exp^{-\sigma t} M(|z(0)|, |x_\tau(0)|) + \gamma \sup_{0 \leq s \leq t} \left(\exp^{-\sigma(t-s)} |v_\tau(s)|\right) \\ + \gamma \sup_{0 \leq s \leq t} \left(\exp^{-\sigma(t-s)} |e_\tau(s)|\right) \end{aligned} \tag{2.39}$$

Nous pouvons combiner (2.37) et (2.39) pour obtenir :

$$\begin{aligned} |z(t) - x_\tau(t)| \leq \exp^{-\sigma t} M(|z(0)|, |x_\tau(0)|) + \gamma \prod_{i=0}^{k-1} (I - \Gamma_{\sigma_i})\, e_\tau(t_0) \\ + \gamma\,(2N-1) \sup_{t_0 \leq s \leq t} \exp^{-\sigma(t-s)} |v_\tau(s)| \\ + \gamma\,|H|\, NL\tau_{\text{MATI}} \sup_{t_0 \leq s \leq t} \exp^{-\sigma(t-s)} |z(s) - x_\tau(s)| \end{aligned} \tag{2.40}$$

Ainsi, en multipliant les termes de l'inégalité par $\exp^{\sigma t}$, nous obtenons, pour tout $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} \exp^{\sigma t} |z(t) - x_\tau(t)| \leq M(|z(0)|, |x_\tau(0)|) + \gamma \prod_{i=0}^{k-1} (I - \Gamma_{\sigma_i}) \exp^{\sigma t} e_\tau(t_0) \\ + \gamma\,(2N-1) \sup_{t_0 \leq s \leq t} \exp^{\sigma s} |v_\tau(s)| \\ + \gamma\,|H|\, NL\tau_{\text{MATI}} \sup_{t_0 \leq s \leq t} \exp^{\sigma s} |z(s) - x_\tau(s)| \end{aligned} \tag{2.41}$$

Si la période d'échantillonnage maximale admise satisfait : $\tau_{\text{MATI}} < \dfrac{1}{\gamma\,|H|\, NL}$, nous pou-

vons alors en déduire que pour tout $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned}\sup_{t_0 \leq s \leq t} \exp^{\sigma s} |z(s) - x_\tau(s)| \leq & \frac{1}{1 - \gamma |H| NL\tau_{\text{MATI}}} M(|z(0)|, |x_\tau(0)|) \\ & + \frac{\gamma}{1 - \gamma |H| NL\tau_{\text{MATI}}} \prod_{i=0}^{k-1} (I - \Gamma_{\sigma_i}) \exp^{\sigma t} e_\tau(t_0) \\ & + \frac{\gamma (2N - 1)}{1 - \gamma |H| NL\tau_{\text{MATI}}} \sup_{t_0 \leq s \leq t} \exp^{\sigma s} |v_\tau(s)|\end{aligned} \tag{2.42}$$

Ceci termine la première partie de la preuve. En effet, l'équation (2.42) montre que l'observateur (2.19) conserve les propriétés de l'observateur continu si l'intervalle maximal admissible entre les transmissions τ_{MATI} respecte la borne supérieure indiquée à (2.17). Ainsi, l'observateur (2.19) est un observateur robuste exponentiel pour le système retardé (2.20) dans le cas où les mesures du système sont transmises selon un protocole périodique. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}|z(t) - x_\tau(t)| \leq & \frac{1}{1 - \gamma |H| NL\tau_{\text{MATI}}} \exp^{-t} M(|z(0)|, |x_\tau(0)|) \\ & + \frac{\gamma}{1 - \gamma |H| NL\tau_{\text{MATI}}} \prod_{i=0}^{k-1} (I - \Gamma_{\sigma_i}) e_\tau(t_0) \\ & + \frac{\gamma (2N - 1)}{1 - \gamma |H| NL\tau_{\text{MATI}}} \sup_{t_0 \leq s \leq t} \exp^{\sigma(s-t)} |v_\tau(s)|\end{aligned} \tag{2.43}$$

Nous pouvons aussi remarquer que pour tout $t \geq t_N$, c'est-à-dire, après une période du protocole, l'erreur induite par le protocole s'annule :

$$\frac{\gamma}{1 - \gamma |H| NL\tau_{\text{MATI}}} \prod_{i=k_0}^{k-1} (I - \Gamma_{\sigma_i}) e_\tau(t_{k_0}) = 0. \tag{2.44}$$

Nous pouvons alors écrire pour tout $t \geq t_N$:

$$\begin{aligned}|z(t) - x_\tau(t)| \leq & \frac{1}{1 - \gamma |H| NL\tau_{\text{MATI}}} \exp^{-t} M(|z(0)|, |x_\tau(0)|) \\ & + \frac{\gamma (2N - 1)}{1 - \gamma |H| NL\tau_{\text{MATI}}} \sup_{t_0 \leq s \leq t} \exp^{\sigma(s-t)} |v_\tau(s)|\end{aligned} \tag{2.45}$$

Nous notons que, bien que l'erreur induite par le réseau n'influence pas la convergence

de l'observateur, le choix du protocole est très important dans les caractéristiques de l'observateur. En effet, la période du protocole est inversement proportionnelle à l'intervalle maximal admissible entre les transmissions τ_{MATI}. Ainsi, pour un nombre de nœuds donné, le célèbre protocole *Round Robin* aura la période d'échantillonnage la plus grande, étant donné que la période du protocole est alors minimale et égale au nombre de nœuds du réseau. Par ailleurs, nous pouvons noter, à partir de l'équation (2.45), qu'une augmentation de la période du protocole entraîne une amplification du bruit de mesure.

2.4.4 Prédicteur d'état

Nous présentons un prédicteur d'état qui permet d'estimer la valeur actuelle de l'état à partir de l'estimée de l'état retardé. Ce prédicteur peut être vu comme une extension de celui de [Germani 02] à une classe de systèmes (2.1) qui vérifie l'hypothèse 2.1.

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_i(t) &= \dot{z}_i(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t-\tau}^{t} f_i(\xi(s), u(s))\,\mathrm{d}s \\ &\quad - \left|\xi_i(t) - z_i(t) - \int_{t-\tau}^{t} f_i(\xi(s), u(s))\,\mathrm{d}s\right|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}\left(\xi_i(t) - z_i(t) - \int_{t-\tau}^{t} f_i(\xi(s), u(s))\,\mathrm{d}s\right)\end{aligned} \tag{2.46}$$

En utilisant la même méthodologie que l'algorithme du *super twisting* développé dans [Levant 98], il est possible de montrer qu'il existe une constante T telle que pour tout $t \geq T$, nous avons le prédicteur d'état qui satisfait l'équation suivante :

$$\xi(t) = z(t) + \int_{t-\tau}^{t} f(\xi(s), u(s))\,\mathrm{d}s \tag{2.47}$$

En intégrant, l'équation différentielle (2.1) entre $t - \tau$ et t, nous obtenons :

$$x(t) = x_\tau(t) + \int_{t-\tau}^{t} f(x(s), u(s))\,ds \tag{2.48}$$

En s'appuyant sur les deux équations précédentes, et en tenant compte du fait que le système est globalement Lipschitz (hypothèse 2.1), nous pouvons écrire :

$$|\xi(t) - x(t)| \leq |z(t) - x_\tau(t)| + \int_{t-\tau}^{t} L\,|\xi(s) - x(s)|\,ds \tag{2.49}$$

Nous pouvons réécrire l'inégalité précédente de la manière suivante pour tout réel $\sigma > 0$:

$$|\xi(t) - x(t)| \leq |z(t) - x_\tau(t)| + L \int_{t-\tau}^{t} \exp^{-\sigma s} \exp^{\sigma s} |\xi(s) - x(s)| \, ds \tag{2.50}$$

Ainsi, en majorant l'expression $\exp^{\sigma s} |\xi(s) - x(s)|$, nous pouvons en déduire :

$$|\xi(t) - x(t)| \leq |z(t) - x_\tau(t)| + L \sup_{t-\tau \leq s \leq t} \left(\exp^{\sigma s} |\xi(s) - x(s)|\right) \left[\frac{1}{\sigma} \left(\exp^{\sigma \tau} - 1\right)\right] \tag{2.51}$$

Puisque $\max\{a, b\} \leq a + b$ pour tout $a, b \geq 0$, l'inégalité suivante est vérifiée pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\sup_{t-\tau \leq s \leq t} \left(\exp^{\sigma s} |\xi(s) - x(s)|\right) \leq \sup_{t_0 \leq s \leq t} \left(\exp^{\sigma s} |\xi(s) - x(s)|\right) + \sup_{t_0-\tau \leq s \leq t_0} \left(\exp^{\sigma s} |\xi(s) - x(s)|\right), \tag{2.52}$$

nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \exp^{\sigma t} |\xi(t) - x(t)| \leq{}& \exp^{\sigma t} |z(t) - x_\tau(t)| \\ &+ L \exp^{\sigma t} \left[\frac{1}{\sigma} \left(\exp^{\sigma \tau} - 1\right)\right] \\ &\times \left(\sup_{t_0 \leq s \leq t} \left(\exp^{\sigma s} |\xi(s) - x(s)|\right) + \sup_{t_0-\tau \leq s \leq t_0} \left(\exp^{\sigma s} |\xi(s) - x(s)|\right)\right) \end{aligned} \tag{2.53}$$

Par conséquent, en majorant l'expression précédente entre t_0 et t, nous pouvons affirmer que l'inégalité suivante est vérifiée si le retard τ est tel que nous avons $\frac{L}{\sigma} \left(\exp^{\sigma \tau} - 1\right) < 1$:

$$\begin{aligned} \sup_{t_0 \leq s \leq t} \left(\exp^{\sigma s} |\xi(s) - x(s)|\right) \leq{}& \frac{\sigma}{\sigma - L \left(\exp^{\sigma \tau} - 1\right)} \sup_{t_0 \leq s \leq t} \left(\exp^{\sigma s} |z(s) - x_\tau(t)|\right) \\ &+ \frac{L \left(\exp^{\sigma \tau} - 1\right)}{\sigma - L \left(\exp^{\sigma \tau} - 1\right)} \sup_{t_0-\tau \leq s \leq t_0} \left(\exp^{\sigma s} |\xi(s) - x(s)|\right) \end{aligned} \tag{2.54}$$

Ainsi, nous pouvons combiner les inégalités (2.45) et (2.54) pour obtenir :

$$\begin{aligned}\sup_{t_0\leq s\leq t}\left(\exp^{\sigma s}|\xi(s)-x(s)|\right) \leq & \frac{\sigma}{\sigma - L\left(\exp^{\sigma\tau}-1\right)}\cdot\frac{1}{1-\gamma\,|H|\,NL\tau_{\text{MATI}}}M(|z(0)|\,,|x_\tau(0)|)\\ &+\frac{\sigma}{\sigma - L\left(\exp^{\sigma\tau}-1\right)}\cdot\frac{\gamma\,(2N-1)}{1-\gamma\,|H|\,NL\tau_{\text{MATI}}}\sup_{t_0\leq s\leq t}\left(\exp^{\sigma s}|v(s)|\right)\\ &+\frac{\sigma}{\sigma - L\left(\exp^{\sigma\tau}-1\right)}\sup_{t_0-\tau\leq s\leq t_0}\left(\exp^{\sigma s}|\xi(s)-x(s)|\right)\end{aligned} \tag{2.55}$$

Nous pouvons alors en déduire que :

$$\begin{aligned}|\xi(t)-x(t)| \leq & \frac{\sigma}{\sigma - L\left(\exp^{\sigma\tau}-1\right)}\cdot\frac{1}{1-\gamma\,|H|\,NL\tau_{\text{MATI}}}\exp^{-\sigma t}M(|z(0)|\,,|x_\tau(0)|)\\ &+\frac{\sigma}{\sigma - L\left(\exp^{\sigma\tau}-1\right)}\cdot\frac{\gamma\,(2N-1)}{1-\gamma\,|H|\,NL\tau_{\text{MATI}}}\sup_{t_0\leq s\leq t}\left(\exp^{-\sigma(t-s)}|v(s)|\right)\\ &+\frac{\sigma}{\sigma - L\left(\exp^{\sigma\tau}-1\right)}\sup_{t_0-\tau\leq s\leq t_0}\left(\exp^{-\sigma(t-s)}|\xi(s)-x(s)|\right)\end{aligned} \tag{2.56}$$

puisqu'il est évident que pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, nous avons :

$$\exp^{\sigma t}|\xi(t)-x(t)| \leq \sup_{t_0\leq s\leq t}\left(\exp^{\sigma s}|\xi(s)-x(s)|\right).$$

2.4.5 Chaîne de prédicteurs

Dans le cas où le retard est "grand", mais toujours constant, la condition de convergence du prédicteur d'état de la relation (2.17) risque de ne plus être satisfaite. Il est toutefois possible de compenser ce retard en mettant en œuvre une cascade de prédic-

teurs qui peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \xi^0(t) = z(t) & (2.57) \\ \dot{\xi}_i^j(t) = \dot{\xi}_i^{j-1}(t) + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{t-\frac{\tau}{m}}^{t} f_i\Big(\xi_i^j(s), u\Big(s-\tau+j\frac{\tau}{m}\Big)\Big)\,\mathrm{d}s & \\ \qquad - \left|\xi_i^j(t) - \xi_i^{j-1}(t) - \displaystyle\int_{t-\frac{\tau}{m}}^{t} f_i\Big(\xi_i^j(s), u\Big(s-\tau+j\frac{\tau}{m}\Big)\Big)\,\mathrm{d}s\right|^{\frac{1}{2}} & (2.58) \\ \qquad \times \operatorname{sign}\Big(\xi_i^j(t) - \xi_i^{j-1}(t) - \displaystyle\int_{t-\tau}^{t} f_i\Big(\xi_i^j(s), u\Big(s-\tau+j\frac{\tau}{m}\Big)\Big)\,\mathrm{d}s\Big) & \end{cases}$$

pour tout $j \in \{1, \cdots, m\}$ où m est le nombre de prédicteurs mis en cascade et est choisi de manière à satisfaire la condition :

$$\frac{L}{\sigma}\left(\exp^{\sigma\frac{\tau_{\mathrm{MAD}}}{m}} - 1\right) < 1. \tag{2.59}$$

2.5 Exemple

Cette partie est dédiée à l'illustration de l'observateur proposé au travers d'un exemple. Il s'agit d'un bras flexible de robot qui peut être modélisé comme un système non linéaire appartenant à la classe des systèmes globalement Lipschitz étudiée ci-dessus.

Nous montrons la convergence exponentielle de cet observateur en l'absence de bruit de mesure (voir figure 2.3). Nous montrons aussi l'influence du bruit de mesure sur l'erreur de prédiction . Nous mettons particulièrement en évidence le fait que le prédicteur d'état amplifie l'erreur d'observation de l'état retardé. Ceci est le principal inconvénient de ce type de structure car bien que le prédicteur d'état nous permette de compenser un retard plus grand, il contribue aussi à amplifier le bruit de mesure (voir figure 2.4). Enfin, nous montrons l'influence de la grandeur du retard sur l'erreur de prédiction en présence de bruit de mesure (figure 2.5).

Considérons donc le système suivant qui modélise un bras flexible de robot :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) = -48.6x_1(t) + 48.6x_2(t) - 1.25x_3(t) + 21.6u(t) \\ \dot{x}_4(t) = 19.5x_1(t) - 19.5x_2(t) - 3.3\sin(x_3(t)) \\ y_1(t) = x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \end{cases} \tag{2.60}$$

Ce système se met sous la forme du système (2.1) étudié en posant :

$$f(x(t),u(t)) = \begin{pmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \\ -48.6x_1(t) + 48.6x_2(t) - 1.25x_3(t) + 21.6u(t) \\ 19.5x_1(t) - 19.5x_2(t) - 3.3\sin(x_3(t)) \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

et

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.62}$$

Le système (2.60) a donc deux sorties, y_1 et y_2. Nous considérons que les sorties sont localisées à différents endroits et que, par conséquent, les capteurs qui mesurent ces sorties se trouvent à deux nœuds différents du réseau ($l = 2$). Ceux-ci ne peuvent pas transmettre leurs données en même temps. On va considérer que le réseau utilise un protocole *Round Robin* pour l'ordonnancement, par conséquent les deux sorties transmettent leurs données alternativement. La période du protocole est alors égale à $N = l = 2$.

Les simulations ont été réalisées avec l'entrée $u = 0.1\sin(t)$ et les conditions initiales ont été fixées à $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [0,0,0,0]^T$.

Pour illustrer nos travaux, nous utilisons l'observateur grand gain suivant couplé au prédicteur d'état que nous avons étudié précédemment. Notre système observateur-

prédicteur d'état peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = f(z(t), u(t-\tau)) - K\,(Hz(t) - w(t)) \\ \dot{w}_1(t) = z_3 \\ \dot{w}_2(t) = z_4 \\ w_1(t_k) = y_1(t_k) \\ w_2(t_k) = y_2(t_k) \\ \dot{\xi}(t) = \dot{z}(t) + f(\xi(t), u(t)) - f(\xi(t-\tau), u(t-\tau)) + \Delta(\xi(t), z(t)) \end{cases} \tag{2.63}$$

où $w(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}$,

et

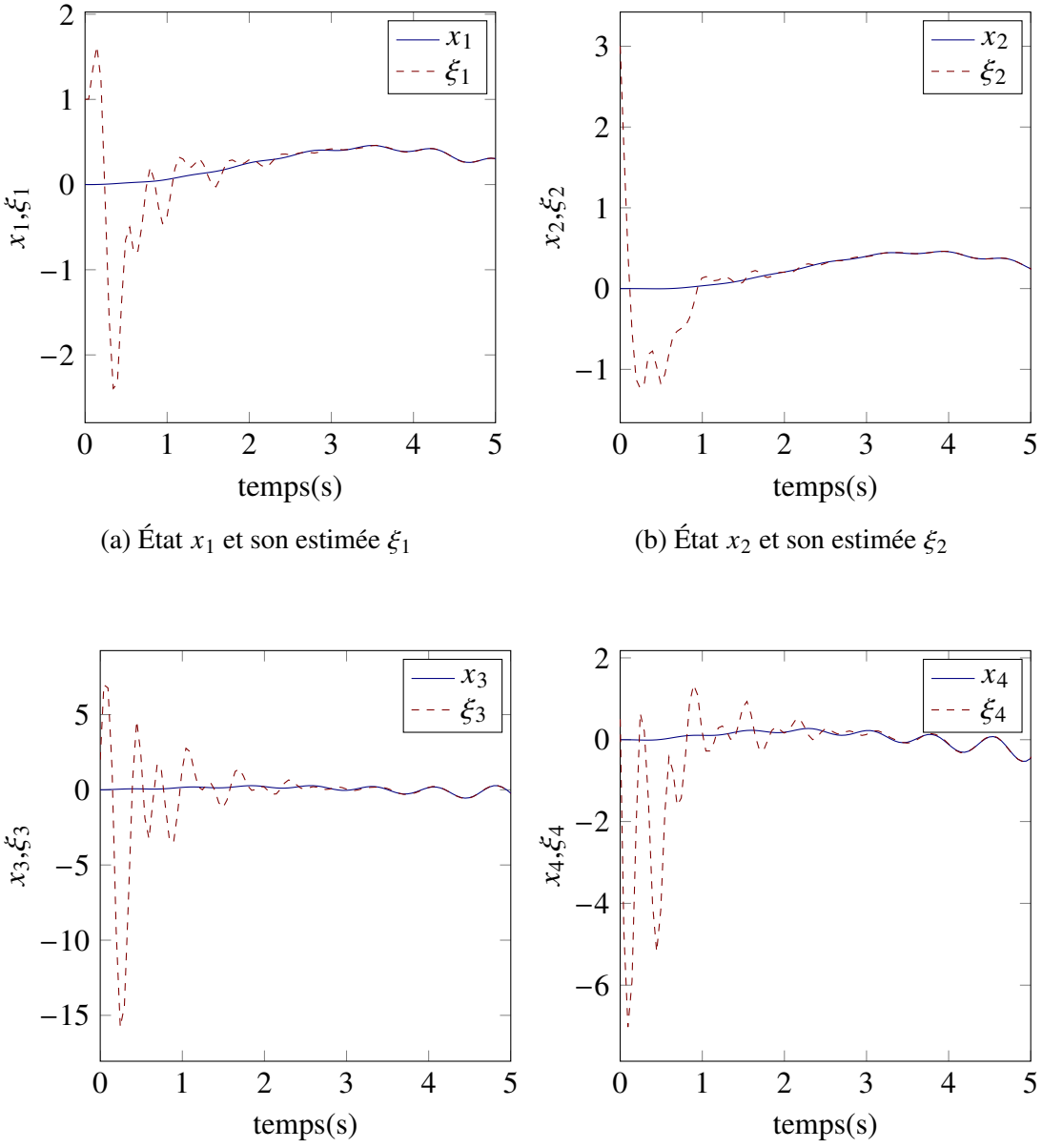
$$\Delta(\xi(t), z(t)) = -\begin{pmatrix} \left|\xi_1(t) - z_1(t) - \int_{t-\tau}^{t} f_1(\xi(s), u(s))\mathrm{d}s\right|^{\frac{1}{2}} \\ \qquad \times \operatorname{sign}\left(\xi_1(t) - z_1(t) - \int_{t-\tau}^{t} f_1(\xi(s), u(s))\mathrm{d}s\right) \\ \qquad \vdots \\ \left|\xi_4(t) - z_4(t) - \int_{t-\tau}^{t} f_4(\xi(s), u(s))\mathrm{d}s\right|^{\frac{1}{2}} \\ \qquad \times \operatorname{sign}\left(\xi_4(t) - z_4(t) - \int_{t-\tau}^{t} f_4(\xi(s), u(s))\mathrm{d}s\right) \end{pmatrix}$$

Les résultats présentés ici ont été obtenus en fixant le gain K de l'observateur (2.63) de la façon suivante :

$$K = \begin{bmatrix} 2\theta, & 0, & \theta^2, & 0 \\ 0 & 2\theta, & 0, & \theta^2 \end{bmatrix}^T \tag{2.64}$$

où le paramètre de synthèse θ est choisi égal à 1. Les conditions initiales du prédicteur d'état sont fixés à $[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4]^T = [1, 3, 2, 0.5]^T$.

La figure 2.3 illustre la reconstruction des états du système par la structure d'observation que nous avons proposée pour une période d'échantillonnage $T_e = 0.1s$ et un retard $\tau = 0.15s$. Nous constatons que nous avons une convergence pour un retard τ supérieur à la période d'échantillonnage T_e.



(a) État x_1 et son estimée ξ_1

(b) État x_2 et son estimée ξ_2

(c) État x_1 et son estimée ξ_3

(d) État x_4 et son estimée ξ_4

FIGURE 2.3: Évolution de l'état du système et de son estimée pour $T_e = 0.1s$ et $\tau = 0.15s$

Nous illustrons également les performances de cet observateur en présence de bruit sur la mesure des sorties.

T_e \ $\tilde{z}$	$\tilde{z}_1$	$\tilde{z}_2$	$\tilde{z}_3$	$\tilde{z}_4$
0.01	0.0227	0.0214	0.8862	0.2741
0.05	0.1281	0.1088	5.0303	0.9668
0.10	0.2569	0.1381	10.9189	1.5173
0.15	0.4063	0.3418	10.9061	2.4638

Tableau 2.1: Variance de l'erreur d'observation $\tilde{z}$ de l'observateur du système retardé en fonction de la période d'échantillonnage pour un bruit de mesure de variance égale à 0.2.

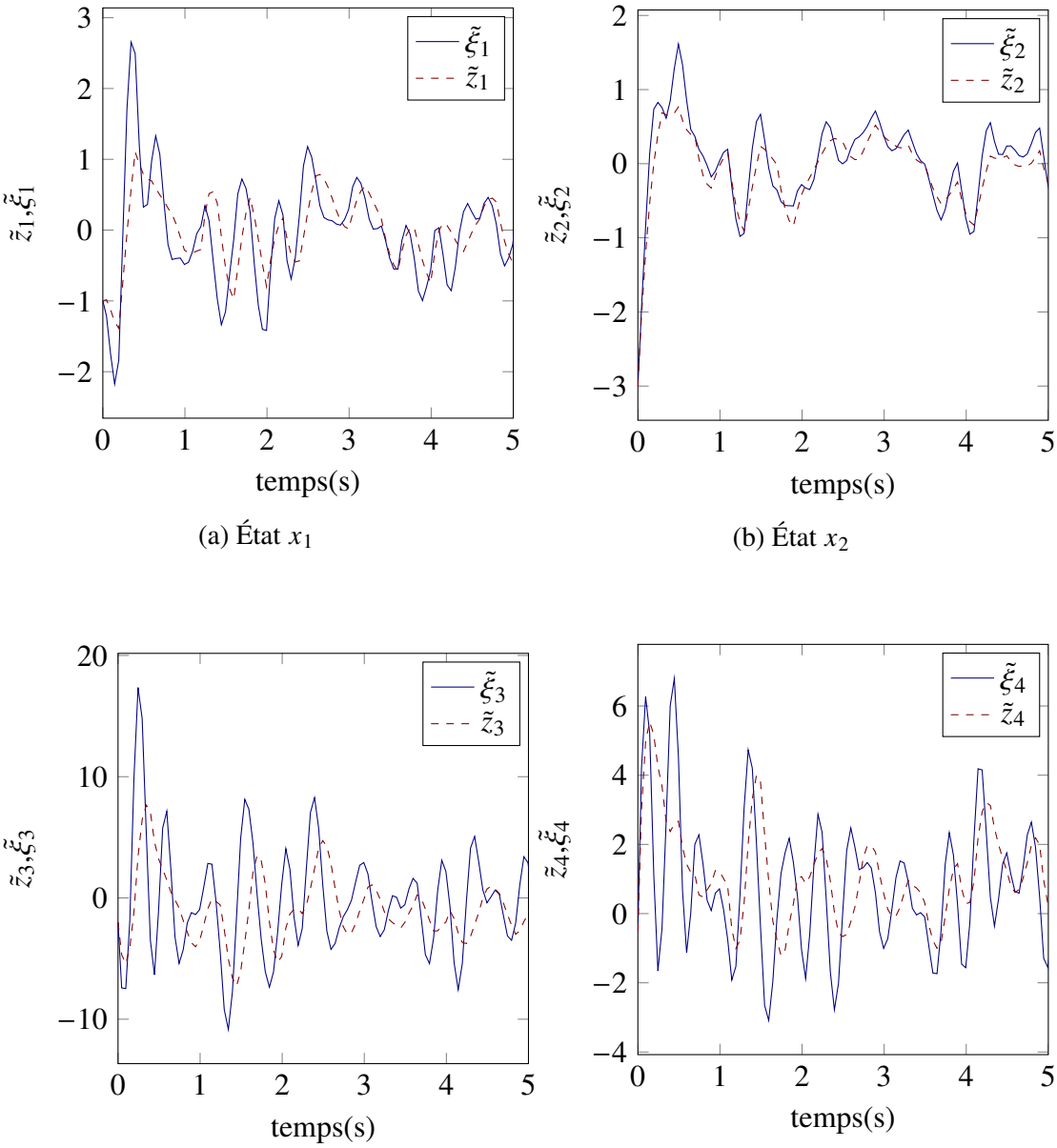
Le tableau 2.1 récapitule l'évolution de la variance de l'erreur d'observation de l'état retardé $\tilde{z} = z(t) - x(t-\tau)$ pour différentes valeurs de la période d'échantillonnage T_e dans le cas où les sorties sont perturbées par du bruit modélisé par des nombres aléatoires de variance var $= 0.2$. Nous remarquons que l'augmentation de la période d'échantillonnage entraîne une amplification du bruit de mesure. Ce phénomène est prévisible d'autant plus que le terme $\gamma_1 = \frac{2\gamma(N-1)}{1-\gamma|H|NL\tau_{\text{MATI}}}$ qui quantifie l'amplification du bruit de mesure sur les états estimés de l'observateur du système retardé est une fonction croissante de la période d'échantillonnage.

La figure 2.4 met en évidence l'amplification par le prédicteur d'état de l'erreur d'observation du système retardé. Nous choisissons de montrer les performances de la structure observateur-prédicteur d'état pour une période d'échantillonnage constante $T_e = 0.1s$ et pour un retard $\tau = 0.15s$. L' erreur d'observation de l'état retardé $\tilde{z}(t) = z(t) - x(t-\tau)$ et l'erreur de prédiction d'état $\tilde{\xi} = \xi(t) - x(t)$ sont représentées pour un bruit de mesure de variance égale à 0.2.

Cette amplification est une fonction croissante du retard induit par le réseau. Afin de quantifier cette amplification, nous comparons la variance de l'erreur d'observation $\tilde{z}$ à celle de l'erreur de prédiction $\tilde{\xi}$ pour différentes valeurs du retard. Nous introduisons la variable A_{var_i} qui désigne l'amplification de la variance de l'erreur d'observation du système retardé par le prédicteur. Nous définissons A_{var_i} comme suit :

$$A_{\text{var}_i} \frac{\text{Var}(\tilde{\xi}_\text{i})}{\text{Var}(\tilde{\text{z}}_\text{i})} \tag{2.65}$$

où la fonction Var(X) désigne la variance de l'erreur X après la phase transitoire et $\tilde{\xi}_i$ et $\tilde{z}_i$ représentent respectivement la i^{ème} composante de l'erreur de prédiction et celle de



(a) État x_1

(b) État x_2

(c) État x_3

(d) État x_4

FIGURE 2.4: Évolution de l'erreur d'observation $\tilde{z}$ et de l'erreur de prédiction $\tilde{\xi}$ du système, avec $T_e = 0.1s$ et $\tau = 0.15s$ en présence de bruit de mesure de variance var = 0.2

l'erreur d'observation de l'état retardé.

Nous choisissons de calculer la variance des différentes erreurs à partir d'un temps, $T_{\text{var}} = 10s$, à partir duquel l'observateur a convergé.

Le tableau 2.2 récapitule les valeurs de l'amplification A_{var_i} par le prédicteur de la variance de l'erreur d'observation. Hormis le cas particulier où $T_e = 0.05s$ et $\tau = 0.18s$, nous pouvons remarquer que la variance de l'erreur de prédiction augmente lorsque le rapport retard sur période d'échantillonnage augmente.

τ \ T_e	0.01	0.05	0.10	0.15
0.01	1.0317	1.0355	1.0381	1.0338
0.05	1.1973	1.2014	1.2011	1.1697
0.10	1.7472	1.6615	1.4924	1.3884
0.15	3.4062	2.8634	2.1579	1.7683
0.18	4.6948	6.8212	4.1168	2.6622

(a) État x_1

τ \ T_e	0.01	0.05	0.10	0.15
0.01	1.0298	1.0124	1.0211	1.0248
0.05	1.1332	1.0431	1.0986	1.1305
0.10	1.3234	1.1033	1.2091	1.3005
0.15	1.8383	1.2611	1.4204	1.5502
0.18	2.2163	2.1344	1.9685	1.8260

(b) État x_2

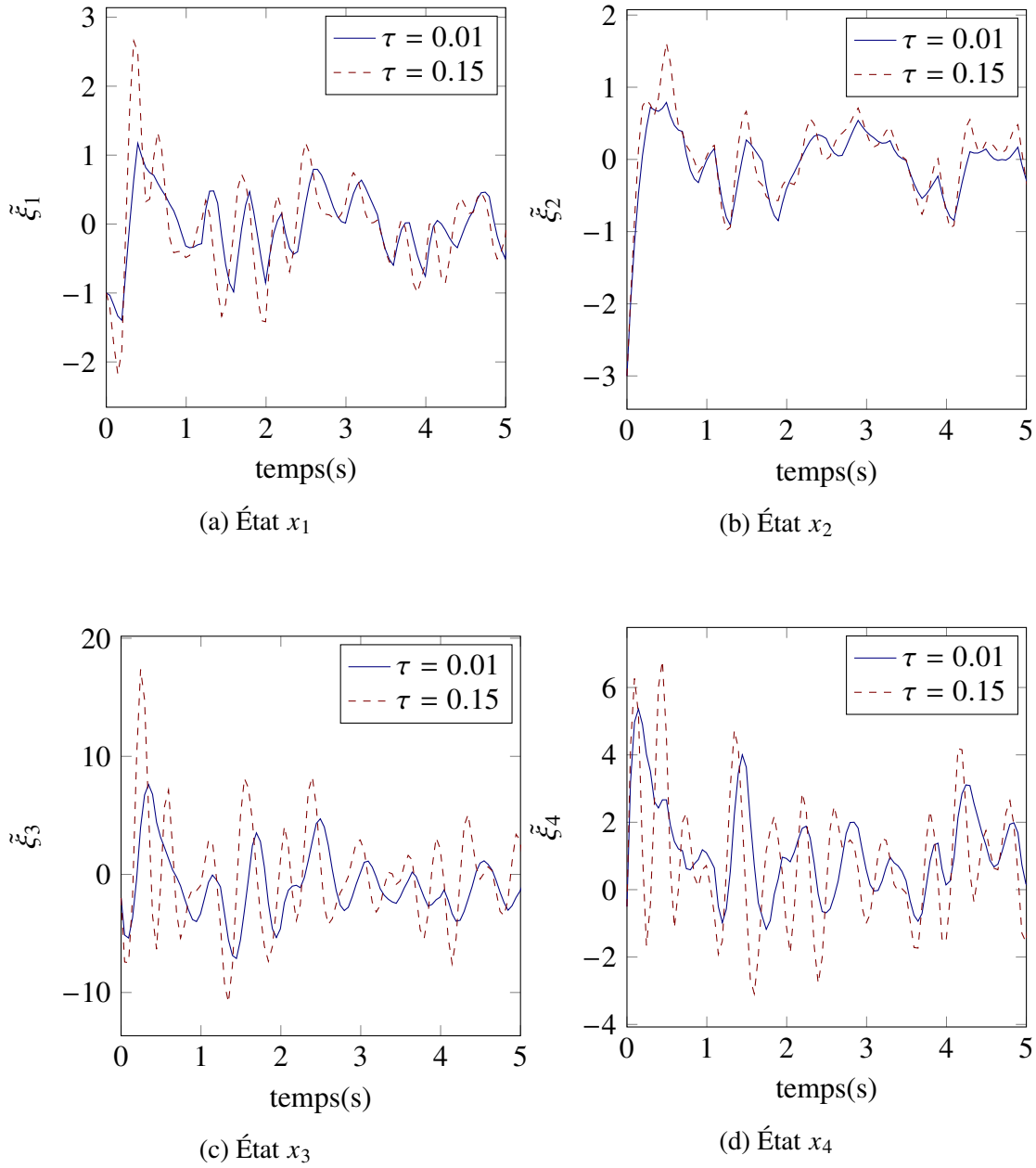
τ \ T_e	0.01	0.05	0.10	0.15
0.01	0.9979	0.9933	0.9973	0.9859
0.05	1.1478	1.0796	1.0547	1.0098
0.10	1.7164	1.4460	1.2535	1.1743
0.15	4.2668	2.6474	2.1863	1.6735
0.18	6.7148	7.9288	5.6207	3.8942

(c) État x_3

τ \ T_e	0.01	0.05	0.10	0.15
0.01	0.9822	0.9535	0.9574	0.9841
0.05	1.0096	0.9105	0.9180	0.9994
0.10	1.2770	1.1315	1.1587	1.2003
0.15	2.7814	1.9275	2.1017	1.6642
0.18	5.5136	6.2039	5.5138	3.2798

(d) État x_4

Tableau 2.2: Amplification de la variance de l'erreur de prédiction $\tilde{\xi}$ par rapport à l'erreur d'observation $\tilde{z}$ en fonction du retard τ pour différentes valeurs de la période d'échantillonnage



(a) État x_1

(b) État x_2

(c) État x_3

(d) État x_4

FIGURE 2.5: Évolution de l'erreur de prédiction $\tilde{\xi}$ en fonction du retard pour $T_e = 0.1s$ en présence de bruit de mesure de variance égale à 0.2

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de la synthèse d'un observateur pour une classe de systèmes contrôlés en réseau avec un retard de transmission et un protocole périodique. Plus précisément, nous avons présenté un algorithme qui combine à la fois un observateur et un prédicteur d'état et qui a des propriétés de robustesse. L'avantage de notre approche est que nous pouvons considérer des systèmes avec des retards importants sans avoir à faire de compromis avec la période de transmission de données. Néanmoins, les prédicteurs que nous proposons ont une tendance à amplifier l'effet du bruit de mesure. Ceci a obligatoirement une influence sur la qualité de l'estimation.

L'extension de ces travaux à des classes de protocoles plus larges comme les protocoles UGES pourra faire l'objet de futurs travaux.

Chapitre 3

Observateurs à gain variable pour une classe de systèmes non linéaires

3.1 Introduction

Il existe dans la littérature un très grand nombre de travaux qui traitent de la synthèse d'observateurs grand-gain pour les systèmes non linéaires [Gauthier 92, Busawon 98, Gauthier 01]. Dans les travaux de [Andrieu 09], un observateur grand-gain avec un gain d'observation dynamique a été synthétisé pour les systèmes non linéaires continus. Ces auteurs introduisent un gain d'observation dynamique dans la structure de l'observateur afin de traiter le problème de la sensibilité aux bruits de mesure inhérente aux observateurs grand-gain.

Dans ce chapitre, nous présentons deux observateurs grand-gain à gain variable pour une classe de systèmes non linéaires triangulaires avec des mesures discrètes de la sortie. Ces deux contributions, dans le même sens que les travaux de [Andrieu 09], ont pour but de réduire la sensibilité aux bruits de mesures de l'observateur grand-gain. Nous proposons ainsi un premier observateur qui est une extension aux systèmes non linéaires à sorties échantillonnées de l'observateur de [Praly 03]. Cet observateur utilise un prédicteur de sortie qui est mis à jour aux instants d'échantillonnage. Nous prouvons la convergence asymptotique de l'observateur en utilisant comme dans [Van Assche 11] une fonction de Lyapunov-Krasovskii. Nous en déduisons ainsi une borne explicite de la période d'échantillonnage maximale admissible τ_{MASP} et une loi d'adaptation du gain

d'observation permettant de garantir cette convergence.

Le deuxième observateur présenté dans ce chapitre peut être vu comme une généralisation de l'observateur de [Cacace 12] en proposant une classe plus large de gain variable. L'intérêt de notre algorithme est qu'il contient un gain variant dans le temps et décroissant entre deux instants d'échantillonnage. Cette propriété permet d'atténuer considérablement l'effet des bruits de mesure sur l'erreur d'observation. Notre algorithme tend aussi à augmenter la période d'échantillonnage maximale admissible en comparaison avec l'observateur de [Van Assche 11, Raff 08].

Dans ce qui suit, nous présentons, dans la section 3.2, la classe de systèmes non linéaires triangulaires étudiée puis, dans la section 3.3, un observateur qui utilise un paramètre d'observation dynamique basé sur les travaux de [Praly 03]. Nous prouvons la convergence asymptotique de celui-ci. Nous proposons ensuite (section 3.4) un observateur exponentiel avec un gain variant qui étend les travaux de [Cacace 12]. Enfin, nous illustrons ensuite les performances de cet observateur sur un exemple académique dans la section 3.5.

3.2 Système étudié

Nous considérons la classe de systèmes non linéaires décrite par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \psi(x(t), u(t)) & (3.1a) \\ y(t) = Cx(t) & (3.1b) \end{cases}$$

où :

- le vecteur $x(t) \in \mathbb{R}^n$ désigne l'état du système
- $u(t) \in \Omega$ est l'entrée du système, avec Ω est un compact de $\mathbb{R}^m$
- $y(t) \in \mathbb{R}$ est la sortie du système.
- $\psi(x(t), u(t))$ est une fonction triangulaire qui peut être mise sous la forme suivante :

$$\psi(x(t),u(t)) = \begin{bmatrix} \psi_1(x_1,u(t)) \\ \psi_2(x_1,x_2,u(t)) \\ \vdots \\ \psi_n(x_1,\ldots,x_n,u(t)) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2}$$

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la matrice d'état du système et est une matrice anti-décalage supérieure :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

- la matrice d'observation C s'écrit : $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

Nous émettons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.1:
La fonction triangulaire $\psi(x(t),u(t))$ est globalement Lipschitz avec une constante de Lipschitz $L \geq 0$. Pour tout $x, z \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \Omega$, nous avons :

$$|\psi(x,u(t)) - \psi(z,u(t))| \leq L\,|x - z|\,. \tag{3.4}$$

3.3 Observateur grand-gain avec gain d'observation variable

3.3.1 Structure de l'observateur

Nous proposons l'observateur grand-gain suivant qui utilise un prédicteur de la sortie entre les instants d'échantillonnage t_k, $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \psi(\hat{x}(t), u(t)) - \theta\Delta_\theta^{-1}K(C\hat{x}(t) - w(t)) & \text{(3.5a)} \\ \dot{w}(t) = CA\hat{x}(t) + C\psi(\hat{x}(t), u(t)) & \text{(3.5b)} \\ w(t_{k+1}) = y(t_{k+1}) \qquad \forall k \in \mathbb{N} & \text{(3.5c)} \\ \dot{\theta} = l(\theta) \qquad \theta(t_0) > 1 & \text{(3.5d)} \end{cases}$$

où :

- $\hat{x}(t)$ représente l'estimée continue de l'état du système.
- w est le prédicteur de la sortie du système. Il permet d'estimer la sortie du système en l'absence de mesure entre les instants d'échantillonnage. Il est mis à jour aux instants d'échantillonnage.
- La matrice K du gain d'observation est choisie telle qu'il existe une matrice P définie positive et un réel $\mu > 0$ satisfaisant la relation suivante :

$$(A - KC)^{\mathrm{T}}P + P(A - KC) \leq -\mu\mathbf{I}_n \tag{3.6}$$

- Le paramètre de synthèse θ est variable et doit être supérieure à 1 pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- Δ_θ est matrice diagonale définnie par : $\Delta_\theta = \mathrm{diag}\left\{1, \theta^{-1}, \ldots, \theta^{-(n-1)}\right\}$.
- $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction qui décrit la dynamique du paramètre de synthèse θ. Elle est choisie telle sorte que $\theta(t)$ soit supérieure à 1 pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

THÉORÈME 3.1:
On considère le système décrit par les équations (3.1), sous l'hypothèse 3.1, soit la dynamique d'évolution du paramètre d'observation θ choisie telle que :

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{b}\theta\left[\frac{\mu}{6}(\theta - 1) - \frac{2\sqrt{n}\lambda_{\max}(P)L + 1}{\lambda_{\min}(P)}\right]. \tag{3.7}$$

Soit τ_{MASP} la période d'échantillonnage maximale admissible telle que pour toute valeur de μ suffisamment grande, la relation suivante est satisfaite :

$$\tau_{MASP} \leq \frac{\sqrt{\mu\lambda_{\min}(P)}}{\sqrt{2\theta_{\max}}\lambda_{\max}(P)\,|K|\left(\theta_{\max} + \sqrt{n}L\right)}, \tag{3.8}$$

alors l'observateur (3.5) est un observateur global asymptotique pour le système (3.1).

Nous définissons l'erreur d'observation :

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t) \tag{3.9}$$

Nous définissons également l'erreur de prédiction qui représente l'erreur entre la sortie réelle du système et le prédicteur de sortie utilisé par notre observateur :

$$e_w(t) = w(t) - y(t) \tag{3.10}$$

Nous pouvons écrire la dérivée de l'erreur d'observation comme suit :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \left(A - \theta\Delta_\theta^{-1}KC\right)\tilde{x}(t) + \psi(\hat{x}(t), u(t)) - \psi(x(t), u(t)) + \theta\Delta_\theta^{-1}Ke_w(t) \tag{3.11}$$

Par souci d'alléger les équations dans la suite du chapitre, nous définissons la fonction $\tilde{\psi}(x(t), \hat{x}(t), u(t))$ telle que :

$$\tilde{\psi}(x(t), \hat{x}(t), u(t)) = \psi(\hat{x}(t), u(t)) - \psi(x(t), u(t)) \tag{3.12}$$

Nous introduisons aussi le changement de variable suivant :

$$z(t) = \frac{1}{\theta^b}\Delta_\theta\tilde{x}(t) \tag{3.13}$$

où $b > 1$ est une constante que nous définirons dans la suite.
Nous avons donc la dérivée de $z(t)$ qui s'écrit :

$$\dot{z}(t) = \left(\frac{1}{\theta^b}\Delta_\theta\right)\dot{\tilde{x}}(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{\theta^b}\Delta_\theta\right)\tilde{x}(t) \tag{3.14}$$

En utilisant l'équation (3.11), nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{\theta^b}\Delta_\theta\dot{\tilde{x}}(t) = \Delta_\theta\left(A - \theta\Delta_\theta^{-1}KC\right)\Delta_\theta^{-1}z(t) + \frac{1}{\theta^b}\Delta_\theta\tilde{\psi}(x(t)\,,\hat{x}(t)\,,u(t)) + \frac{1}{\theta^{b-1}}Ke_w(t) \tag{3.15}$$

Nous rappelons ici les inégalités remarquables satisfaites par les matrices A et C :

$$\Delta_\theta A\Delta_\theta^{-1} = \theta A \qquad \text{et} \qquad C\Delta_\theta = C\Delta_\theta^{-1} = C \tag{3.16}$$

Ainsi, à l'aide de ces inégalités, nous obtenons :

$$\frac{1}{\theta^b}\Delta_\theta\dot{\tilde{x}}(t) = \theta(A - KC)\,z(t) + \frac{1}{\theta^b}\Delta_\theta\tilde{\psi}(x(t)\,,\hat{x}(t)\,,u(t)) + \frac{1}{\theta^{b-1}}Ke_w(t) \tag{3.17}$$

Nous avons aussi :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{\theta^b}\Delta_\theta\right)\tilde{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{diag}\left\{\theta^{-b},\theta^{-b-1},\cdots,\theta^{-b-n+1}\right\} \tag{3.18}$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{\theta^b}\Delta_\theta\right)\tilde{x}(t) = -\frac{\dot{\theta}}{\theta^{b+1}}\mathrm{diag}\{b, b-1, \cdots, b-n+1\}\,\Delta_\theta\tilde{x}(t) \tag{3.19}$$

Nous pouvons réécrire l'équation précédente plus simplement :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{\theta^b}\Delta_\theta\right)\tilde{x}(t) = -\frac{\dot{\theta}}{\theta}D\left(\frac{1}{\theta^b}\Delta_\theta\tilde{x}(t)\right) \tag{3.20}$$

où D est une matrice de dimension n diagonale : $D = \mathrm{diag}\{b, b+1, \ldots, b+n-1\}$.
Nous pouvons noter que la matrice D peut s'écrire :

$$D = b\mathbf{I}_n + E \tag{3.21}$$

où $E = \mathrm{diag}\{0, 1, \ldots, n-1\}$.
Nous pouvons ainsi déduire, à partir des équations (3.13) et (3.20) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{\theta^b}\Delta_\theta\right)\tilde{x}(t) = -\frac{\dot{\theta}}{\theta}Dz(t) \tag{3.22}$$

La dérivée de $z(t)$ s'écrit alors :

$$\dot{z}(t) = \theta(A - KC)\,z(t) + \frac{1}{\theta^b}\Delta_\theta\tilde{\psi}(x(t)\,,\hat{x}(t)\,,u(t)) + \frac{1}{\theta^{b-1}}Ke_w(t) - \frac{\dot{\theta}}{\theta}Dz(t) \tag{3.23}$$

3.3.2 Résultats techniques

Nous présentons dans cette partie quelques résultats préliminaires qui seront nécessaires dans la suite du chapitre.

Nous rappelons ici l'inégalité de Jensen que l'on peut retrouver dans [Gu 03, Prop B.8, pg. 316] ainsi que la preuve du résultat.

Proposition 3.2:
Pour toute matrice constante symétrique défini positive $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $M = M^T > 0$, une constante $\gamma > 0$ et une fonction $\omega\colon [0,\gamma] \to \mathbb{R}^m$ telles que les intégrations concernées sont définies, nous avons :

$$\left(\int_0^\gamma \omega(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{T}} M\left(\int_0^\gamma \omega(s)\mathrm{d}s\right) \leq \gamma\int_0^\gamma \omega(s)^{\mathrm{T}}M\omega(s)\mathrm{d}s \tag{3.24}$$

Lemme 3.3:
On considère la sortie du système et le prédicteur de la sortie tels que définis par les équations (3.1b) et (3.5b), l'erreur de prédiction $e_w(t)$ satisfait la relation suivante pour tout $t \in [t_k, t_{k+1})$ et $k \in \mathbb{N}$. :

$$|e_w(t)|^2 \leq \theta^{2b}\left(\theta + \sqrt{n}L\right)^2 \tau_{MASP}\int_{t-\tau_{MASP}}^{t} |z(s)|^2\,ds \tag{3.25}$$

Preuve:
Pour apporter la preuve de ce lemme, nous pouvons tout d'abord obtenir la dérivée de l'erreur de prédiction à partir des équations (3.1b) et (3.5b). Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout

$t \in [t_k, t_{k+1})$, nous avons :

$$\dot{e}_w(t) = CA\tilde{x}(t) + C\tilde{\psi}(\hat{x}(t), x(t), u(t)) \tag{3.26}$$

En intégrant l'équation précédente entre t_k et t, nous obtenons :

$$e_w(t) = \int_{t_k}^{t} CA\tilde{x}(s) + C\tilde{\psi}(\hat{x}(s), x(s), u(s))\, ds \tag{3.27}$$

et, avec le changement de variable (3.13), nous avons :

$$|e_w(t)| \leq \int_{t_k}^{t} \left|\theta^b C\Delta_\theta A\Delta_\theta^{-1} z(s) + C\Delta_\theta\tilde{\psi}(\hat{x}(s), x(s), u(s))\right| ds \tag{3.28}$$

Ainsi, puisque la fonction $\psi(x(t), u(t))$ est Lipschitz (hypothèse 3.1), nous pouvons écrire en utilisant les identités (3.16) :

$$|e_w(t)| \leq \int_{t_k}^{t} \left|\theta^{b+1} CAz(s)\right| + \left|\sqrt{n}L\theta^b z(s)\right| ds \tag{3.29}$$

Par conséquent, nous en déduisons :

$$|e_w(t)| \leq \theta^b\left(\theta + \sqrt{n}L\right) \int_{t_k}^{t} |z(s)|\, ds \tag{3.30}$$

Étant donné que $\tau_{MASP} \geq t_{k+1} - t_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous pouvons affirmer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$|e_w(t)| \leq \theta^b\left(\theta + \sqrt{n}L\right) \int_{t-\tau_{MASP}}^{t} |z(s)|\, ds \tag{3.31}$$

L'inégalité de Jensen que nous avons rappelée dans la proposition 3.2, nous permet d'affirmer la relation suivante :

$$\left(\int_{t-\tau_{MASP}}^{t} |z(s)|\, ds\right)^2 \leq \tau_{MASP} \int_{t-\tau_{MASP}}^{t} |z(s)|^2\, ds \tag{3.32}$$

Ainsi, en utilisant les équations (3.31) et (3.32), nous pouvons conclure que :

$$|e_w(t)|^2 \leq \theta^{2b}\left(\theta + \sqrt{n}L\right)^2 \tau_{MASP} \int_{t-\tau_{MASP}}^{t} |z(s)|^2 \, ds \tag{3.33}$$

■

3.3.3 Analyse de la stabilité

En s'inspirant des travaux de [Fridman 10], nous proposons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(z(t)) = z(t)^T P z(t) + \frac{1}{\tau_{MASP}} \int_{t-\tau_{MASP}}^{t} \int_{s}^{t} |z(\xi)|^2 \, d\xi ds \tag{3.34}$$

où P est une matrice symétrique définie positive telle qu'il existe une constante $q \in (0, 1]$ pour laquelle nous avons :

$$q\mathbf{I}_n \leq P \leq \mathbf{I}_n \tag{3.35}$$

De plus, il existe une constante $\mu > 0$ telle que P satisfait l'inégalité suivante :

$$(A - KC)^{\mathrm{T}} P + P(A - KC) \leq -\mu \mathbf{I}_n \tag{3.36}$$

Il est facile de remarquer que

$$V(0) = 0 \tag{3.37}$$

et que

$$V(z(t)) > 0 \tag{3.38}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. De plus, puisque $z(t)$ est continu, nous avons $V(z(t))$ qui est une fonction continue du temps et par conséquent, nous avons :

$$V(z(t_k)) = V\left(z\left(t_k^-\right)\right), \tag{3.39}$$

Pour prouver la convergence de $z(t)$ vers zéro et par conséquent la convergence asymptotique de l'observateur (3.5), il suffit maintenant de montrer qu'il existe une fonction

continue et positive $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [t_k, t_{k+1})$, nous avons :

$$\dot{V}(z(t)) \leq -W(z(t)) \tag{3.40}$$

Par commodité et dans un souci d'alléger les calculs, nous décomposons V en deux fonctions V_1 et V_2, avec :

$$V_1(z(t)) = z(t)^T P z(t) \tag{3.41}$$

et

$$V_2(z(t)) = \frac{1}{\tau_{MASP}} \int_{t-\tau_{MASP}}^{t} \int_{s}^{t} |z(\xi)|^2 \, d\xi ds \tag{3.42}$$

Nous calculons la dérivée de V_1 :

$$\dot{V}_1(z(t)) = z(t)^T P \dot{z}(t) + \dot{z}(t)^T P z(t) \tag{3.43}$$

En utilisant l'équation (3.23), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = {} & z(t)^T P \left[\theta(A - KC) z(t) + \frac{1}{\theta^b} \Delta_\theta \tilde{\psi}(x(t), \hat{x}(t), u(t)) + \frac{1}{\theta^{b-1}} K e_w(t) - \frac{\dot{\theta}}{\theta} D z(t) \right] \\ & + \left[\theta(A - KC) z(t) + \frac{1}{\theta^b} \Delta_\theta \tilde{\psi}(x(t), \hat{x}(t), u(t)) + \frac{1}{\theta^{b-1}} K e_w(t) - \frac{\dot{\theta}}{\theta} D z(t) \right]^T P z(t) \end{aligned} \tag{3.44}$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = {} & \theta z(t)^T \left[P(A - KC) + (A - KC)^T P \right] z(t) + \frac{2}{\theta^b} z(t)^T P \Delta_\theta \tilde{\psi}(x(t), \hat{x}(t), u(t)) \\ & + \frac{2}{\theta^{b-1}} z(t)^T P K e_w(t) - 2 \frac{\dot{\theta}}{\theta} z(t)^T P D z(t) \end{aligned} \tag{3.45}$$

Ainsi, en utilisant l'équation (3.73), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq {} & -\left(\theta \mu + 2b \frac{\dot{\theta}}{\theta} \right) z(t)^T P z(t) + \frac{2}{\theta^b} z(t)^T P \Delta_\theta \tilde{\psi}(x(t), \hat{x}(t), u(t)) \\ & + \frac{2}{\theta^{b-1}} z(t)^T P K e_w(t) - 2 \frac{\dot{\theta}}{\theta} z(t)^T P E z(t) \end{aligned} \tag{3.46}$$

Nous choisissons le paramètre $b > 1$ tel que la relation suivante est satisfaite :

$$-bP \leq PE + EP \leq bP \tag{3.47}$$

Il en découle que :

$$-2\frac{\dot{\theta}}{\theta} z(t)^T PEz(t) \leq b\frac{\left|\dot{\theta}\right|}{\theta} z(t)^T Pz(t) \tag{3.48}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\left(\theta\mu + 2b\frac{\dot{\theta}}{\theta} - b\frac{\left|\dot{\theta}\right|}{\theta}\right) z(t)^T Pz(t) + \frac{2}{\theta^b} z(t)^T P\Delta_\theta \tilde{\psi}(x(t), \hat{x}(t), u(t)) \\ & + \frac{2}{\theta^{b-1}} z(t)^T PKe_w(t) \end{aligned} \tag{3.49}$$

Ainsi, à partir de (3.13) et de l'hypothèse 3.1, nous pouvons en déduire que :

$$\dot{V}_1 \leq -\left(\mu\theta + 2b\frac{\dot{\theta}}{\theta} - b\frac{\left|\dot{\theta}\right|}{\theta} - 2\sqrt{n}L\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\right) V_1 + \frac{2}{\theta^{b-1}} z(t)^T PKe_w(t) \tag{3.50}$$

Et, en utilisant l'inégalité de Young, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\left(\mu\theta + 2b\frac{\dot{\theta}}{\theta} - b\frac{\left|\dot{\theta}\right|}{\theta} - 2\sqrt{n}L\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\right) V_1 + \frac{\mu\theta\lambda_{\min}(P)}{2} |z(t)|^2 \\ & + \frac{2}{\mu\theta\lambda_{\min}(P)} \frac{\lambda_{\max}(P)^2}{\theta^{2b-2}} |K|^2 |e_w(t)|^2 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Nous en déduisons que :

$$\dot{V}_1 \leq -\left(\mu\frac{\theta}{2} + 2b\frac{\dot{\theta}}{\theta} - b\frac{\left|\dot{\theta}\right|}{\theta} - 2\sqrt{n}L\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\right) V_1 + \frac{2}{\mu\theta^{2b-1}} \frac{\lambda_{\max}(P)^2}{\lambda_{\min}(P)} |K|^2 |e_w(t)|^2 \tag{3.52}$$

Ce qui, en utilisant le lemme 3.3, nous amène à la relation suivante :

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 \leq & -\left(\mu\frac{\theta}{2} + 2b\frac{\dot{\theta}}{\theta} - b\frac{\left|\dot{\theta}\right|}{\theta} - 2\sqrt{n}L\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\right)V_1 \\ & + \tau_{MASP}\frac{2\theta}{\mu}\frac{\lambda_{\max}(P)^2}{\lambda_{\min}(P)}|K|^2\left(\theta + \sqrt{n}L\right)^2\int_{t-\tau_{MASP}}^{t}|z(s)|^2\,ds\end{aligned} \tag{3.53}$$

Nous introduisons maintenant la variable $t_0 \in \mathbb{R}$ dans l'intégrale dans l'équation de V_2, (3.42) et nous pouvons décomposer V_2 comme suit :

$$V_2 = \frac{1}{\tau_{MASP}}\int_{t-\tau_{MASP}}^{t}\left[\int_{t_0}^{t}|z(\xi)|^2\,d\xi - \int_{t_0}^{s}|z(\xi)|^2\,d\xi\right]ds \tag{3.54}$$

En intégrant la première opérande de l'équation de V_2 entre $t-\tau_{MASP}$ et t, nous obtenons :

$$V_2 = \int_{t_0}^{t}|z(\xi)|^2\,d\xi - \frac{1}{\tau_{MASP}}\int_{t-\tau_{MASP}}^{t}\int_{t_0}^{s}|z(\xi)|^2\,d\xi ds \tag{3.55}$$

La dérivée de V_2 par rapport à t peut donc s'écrire :

$$\dot{V}_2 = |z(t)|^2 - \frac{1}{\tau_{MASP}}\left(\int_{t_0}^{t}|z(\xi)|^2\,d\xi + \int_{t_0}^{t-\tau_{MASP}}|z(\xi)|^2\,d\xi\right) \tag{3.56}$$

Nous avons alors :

$$\dot{V}_2 = |z(t)|^2 - \frac{1}{\tau_{MASP}}\int_{t-\tau_{MASP}}^{t}|z(s)|^2\,ds \tag{3.57}$$

À partir des équations (3.53) et (3.57), en considérant le fait que $|z(t)|^2 \leq \dfrac{V_1}{\lambda_{\min}(P)}$, nous pouvons déduire que :

$$\begin{aligned}\dot{V} \leq & -\left(\mu\frac{\theta}{2} + 2b\frac{\dot{\theta}}{\theta} - b\frac{\left|\dot{\theta}\right|}{\theta} - \frac{2\sqrt{n}L\lambda_{\max}(P) + 1}{\lambda_{\min}(P)}\right)V_1 \\ & -\left(\frac{1}{\tau_{MASP}} - \tau_{MASP}\frac{2\theta}{\mu}\frac{\lambda_{\max}(P)^2}{\lambda_{\min}(P)}|K|^2\left(\theta + \sqrt{n}L\right)^2\right)\int_{t-\tau_{MASP}}^{t}|z(s)|^2\,ds\end{aligned} \tag{3.58}$$

Une condition suffisante pour assurer la convergence asymptotique de l'observateur

(3.5) est de choisir τ_{MASP} telle que :

$$\tau_{MASP} \leq \frac{\sqrt{\mu\lambda_{\min}(P)}}{\sqrt{2\theta_{\max}}\lambda_{\max}(P)\,|K|\left(\theta_{\max}+\sqrt{n}L\right)} \tag{3.59}$$

où $\theta_{\max}$ est la valeur maximale de $\theta(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
Et aussi, en s'inspirant des travaux de [Praly 03], de choisir la dynamique de $\theta(t)$ telle que :

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{b}\theta\left[\frac{\mu}{6}(\theta-1) - \frac{2\sqrt{n}\lambda_{\max}(P)L+1}{\lambda_{\min}(P)}\right]. \tag{3.60}$$

En effet, en choisissant τ_{MASP} telle que la relation (3.59) est satisfaite, nous avons alors :

$$\dot{V} \leq -\left(\mu\frac{\theta}{2} + 2b\frac{\dot{\theta}}{\theta} - b\frac{\left|\dot{\theta}\right|}{\theta} - \frac{2\sqrt{n}L\lambda_{\max}(P)+1}{\lambda_{\min}(P)}\right)V_1 \tag{3.61}$$

En choisissant, la dynamique de θ telle que indiquée dans l'équation (3.60), nous pouvons remarquer que quelle que soit la condition initiale $\theta(t_0) > 1$, le paramètre θ de l'observateur converge vers une valeur finale $\theta_\infty := 1 + \dfrac{12\sqrt{n}\lambda_{\max}(P)L+6}{\mu\lambda_{\min}(P)}$.
Pour prouver que la dérivée de la fonction de Lyapunov V est négative, nous pouvons considérer deux cas de figure :

Premièrement, considérons le cas où la condition initiale de θ est telle que :

$$\theta(t_0) \leq \theta_\infty \tag{3.62}$$

Nous avons alors $\dot{\theta} > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et nous pouvons ainsi réécrire l'équation (3.61) :

$$\dot{V} \leq -\left(\mu\frac{\theta}{2} + b\frac{\dot{\theta}}{\theta} - \frac{2\sqrt{n}L\lambda_{\max}(P)+1}{\lambda_{\min}(P)}\right)V_1 \tag{3.63}$$

Ainsi, en combinant l'équation précédente à (3.60), nous obtenons :

$$\dot{V} \leq -\frac{\mu}{6}(2\theta+1)\,V_1 \tag{3.64}$$

et puisque nous avons $\theta(t) > 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, étant donné que $\theta(t_0) > 1$ et que $\theta(t)$

est une fonction croissante, nous pouvons en conclure que :

$$\dot{V} \leq -\frac{\mu}{2} V_1 \tag{3.65}$$

Maintenant, considérons le cas où nous avons :

$$\theta(t_0) \geq \theta_\infty \tag{3.66}$$

Dans ce cas, nous avons $\theta(t)$ qui devient décroissante, ce qui nous permet de réécrire (3.61) :

$$\dot{V} \leq -\left(\mu\frac{\theta}{2} + 3b\frac{\dot{\theta}}{\theta} - \frac{2\sqrt{n}L\lambda_{\max}(P) + 1}{\lambda_{\min}(P)}\right) V_1 \tag{3.67}$$

En utilisant l'équation (3.60), nous pouvons en déduire que :

$$\dot{V} \leq -\left(\frac{\mu}{2} - \frac{4\sqrt{n}L\lambda_{\max}(P) + 2}{\lambda_{\min}(P)}\right) V_1 \tag{3.68}$$

Nous en arrivons donc à la même conclusion, soit :

$$\dot{V} \leq -\frac{\mu}{2} V_1 \tag{3.69}$$

Ainsi, si nous choisissons la période d'échantillonnage telle que la relation (3.59) est satisfaite et que la dynamique du paramètre de l'observateur est déterminée par l'équation (3.60), pour toute condition initiale $\theta(t_0)$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, nous avons :

$$\dot{V} \leq -\frac{\mu}{2} V_1 \tag{3.70}$$

Les équations (3.37), (3.38), (3.39) et (3.70) nous permettent de conclure que sous l'hypothèse 3.1 et les conditions (3.59) et (3.60), l'observateur (3.5) est un observateur globalement asymptotiquement stable pour le système (3.71).

Remarque 3.1:
Nous pouvons noter que les deux conditions (3.59) et (3.60) que nous avons données pour garantir la convergence asymptotique de l'observateur sont toutes les deux des conditions suffisantes. En effet, il est possible de trouver une autre fonction $\dot{\theta} = l(\theta)$ permettant d'assurer la convergence de l'observateur. Nous nous sommes inspiré des

travaux de [Praly 03] pour choisir cette fonction.

Il en va de même de la période d'échantillonnage maximale admissible. En effet, la période d'échantillonnage que nous tirons de la relation (3.59) n'est pas optimale et il est possible en simulation d'obtenir une convergence de l'observateur pour des valeurs supérieures à cette borne théorique. Nous ne donnons qu'une condition suffisante de convergence de l'observateur et laissons ouvert le problème de la détermination de la valeur optimale de la période d'échantillonnage.

3.4 Observateur avec un gain adaptatif

3.4.1 Système étudié

Nous considérons toujours le système présenté dans la section 3.2 en tenant compte cette fois-ci du bruit de mesure sur la sortie. Le système s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \psi(x(t), u(t)) & (3.71a) \\ y(t) = Cx(t) + v(t) & (3.71b) \end{cases}$$

où $v(t) \in \mathbb{R}^p$ représente le bruit de mesure et est considéré borné sur $\mathbb{R}$.

3.4.2 Synthèse de l'observateur

Nous proposons l'observateur grand-gain suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \psi(\hat{x}(t), u(t)) - \theta\Delta_\theta^{-1}K\phi(t)(C\hat{x}(t_k) - y(t_k)) & (3.72a) \\ \dot{\phi}(t) = -\eta\phi(t)^a & (3.72b) \\ \phi(t_k) = 1 & (3.72c) \end{cases}$$

où :

- $\hat{x}(t)$ représente l'estimée continue de l'état du système.
- La matrice $K \in \mathbb{R}^{n\times p}$ du gain d'observation est choisie telle qu'il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie positive et satisfaisant la relation suivante :

$$(A - KC)^{\mathrm{T}}P + P(A - KC) \leq -\mu\mathbf{I}_n \tag{3.73}$$

- Le paramètre de synthèse θ est une constante qui doit être choisie supérieure à 1.
- Δ_θ est matrice diagonale définnie par : $\Delta_\theta = \mathrm{diag}\left\{\mathbf{I}_p, \theta^{-1}\mathbf{I}_p, \ldots, \theta^{-(n-1)}\mathbf{I}_p\right\}$.
- $\phi(t)$ est une fonction décroissante entre les instants d'échantillonnage et $\phi(t_k) = 1$.

THÉORÈME 3.4:
On considère la classe de systèmes décrite par l'équation (3.71) *et on suppose que l'hypothèse 3.1 est satisfaite. Il existe alors deux réels positifs* θ_0 *et* τ_{MASP}*, tels que pour tout paramètre d'observation* $\theta > \max\{1, \theta_0\}$*, si la période d'échantillonnage* τ *est choisie telle que* $\tau \leq \tau_{MASP}$*, alors l'observateur* (3.72) *est un observateur global exponentiel pour le système* (3.71).

Preuve:
Nous définissons l'erreur d'observation :

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t) \tag{3.74}$$

En utilisant les équations (3.71a) et (3.72a), la dérivée de l'erreur d'observation peut s'écrire, pour tout $t \in [t_k, t_{k+1})$:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + \psi(\hat{x}(t), u(t)) - \psi(x(t), u(t)) - \theta\Delta_\theta^{-1} K\phi(t)\,(C\hat{x}(t_k) - y(t_k)) \tag{3.75}$$

Nous introduisons le changement de variable suivant :

$$\bar{x}(t) = \Delta_\theta \tilde{x}(t) \tag{3.76}$$

Nous pouvons déduire de (3.75) et des identités remarquables (3.16), l'équation suivante :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \theta A\bar{x}(t) + \Delta_\theta(\psi(\hat{x}(t), u(t)) - \psi(x(t), u(t))) - \theta K\phi(t)\,(C\hat{x}(t_k) - y(t_k)) \tag{3.77}$$

Nous définissons aussi l'erreur de sortie $\tilde{y}(t)$ entre la sortie de l'observateur et la sortie réelle du système (non perturbée par le bruit de mesure) :

$$\tilde{y}(t) = C\hat{x}(t) - Cx(t) \tag{3.78}$$

Nous avons alors :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \theta A\bar{x}(t) + \Delta_\theta(\psi(\hat{x}(t), u(t)) - \psi(x(t), u(t))) - \theta K\phi(t)(\tilde{y}(t_k) - v(t_k)) \tag{3.79}$$

Nous introduisons la variable $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon(t) = \tilde{y}(t) - \phi(t)\,\tilde{y}(t_k) \tag{3.80}$$

En remplaçant les équations (3.78) et (3.80) dans l'équation (3.79), nous pouvons écrire :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \theta(A - KC)\,\bar{x}(t) + \Delta_\theta(\psi(\hat{x}(t)\,,u(t)) - \psi(x(t)\,,u(t))) + \theta K(\varepsilon(t) + \phi(t)\,v(t_k)) \tag{3.81}$$

Considérons maintenant la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \bar{x}(t)^T P\bar{x}(t) \tag{3.82}$$

La dérivée de cette fonction de Lyapunov vérifie l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\dot{V} \leq & -\mu\theta\,|\bar{x}(t)|^2 + 2\bar{x}(t)^T P\Delta\,(\psi(\hat{x}(t)\,,u(t)) - \psi(x(t)\,,u(t))) \\ & + 2\theta\bar{x}(t)^T PK\varepsilon(t)\end{aligned} \tag{3.83}$$

En tenant compte de l'hypothèse 3.1 et du fait que la fonction $\psi(x(t)\,,u(t))$ est triangulaire, nous en déduisons :

$$\dot{V} \leq -\mu\theta\,|\bar{x}(t)|^2 + 2\sqrt{n}L\,|P|\,|\bar{x}(t)|^2 + 2\theta\,|\bar{x}(t)|\,|PK|\,|\varepsilon(t)| \tag{3.84}$$

Considérons maintenant la fonction de Lyapunov : $W = \sqrt{V}$. Nous avons alors :

$$\dot{W} = \frac{\dot{V}}{2\sqrt{V}} \tag{3.85}$$

Ainsi, en utilisant (3.84), on peut écrire :

$$\dot{W} \leq -\frac{\mu\theta}{2}\frac{|\bar{x}(t)|^2}{\sqrt{V}} + \sqrt{n}L\,|P|\,\frac{|\bar{x}(t)|^2}{\sqrt{V}} + \theta\,|PK|\,\frac{|\bar{x}(t)|}{\sqrt{V}}\,|\varepsilon(t)| \tag{3.86}$$

Étant donné que :

$$\lambda_{\min}(P)\,|\bar{x}(t)|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(P)\,|\bar{x}(t)|^2 \tag{3.87}$$

Nous avons alors :

$$\dot{W} \leq -\frac{\mu\theta}{2}\frac{W}{\lambda_{\max}(P)} + \sqrt{n}L\,|P|\,\frac{W}{\lambda_{\min}(P)} + \frac{\theta\,|PK|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}\,|\varepsilon(t)| \tag{3.88}$$

Puisque nous avons $\theta > \theta_0 = \sup\left\{1, \frac{4\sqrt{n}L\,|P|}{\mu}\right\}$, nous pouvons déduire de ce qui précéde que :

$$\dot{W} \leq -\frac{\mu\theta}{4}\frac{W}{\lambda_{\max}(P)} + \frac{\theta\,|PK|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}\,|\varepsilon(t)| \tag{3.89}$$

Dans la suite, nous définissons deux réels α et β tels que :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\mu\theta}{4\lambda_{\max}(P)} \\ \beta = \dfrac{\theta\,|PK|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \end{cases} \tag{3.90}$$

En intégrant l'équation (3.89), nous obtenons :

$$W(t) = \exp^{-\alpha(t-t_0)}\,W(t_0) + \beta\exp^{-\alpha t}\int_{t_0}^{t}\exp^{\alpha s}\,|\varepsilon(s)|\,\mathrm{d}s \tag{3.91}$$

Ainsi, pour tout réel σ tel que : $0 < \sigma < \frac{\alpha}{2}$, nous pouvons écrire :

$$W(t) \leq \exp^{-\sigma t}\,W(t_0) + 2\frac{\beta}{\alpha}\sup_{t_0\leq s\leq t}\left(\exp^{-\sigma(t-s)}\,|\varepsilon(s)|\right) \tag{3.92}$$

Ce qui nous donne :

$$|\bar{x}(t)| \leq \exp^{-\sigma t}\,\frac{W(t_0)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} + \frac{2\beta}{\alpha\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}\sup_{t_0\leq s\leq t}\left(\exp^{-\sigma(t-s)}\,|\varepsilon(s)|\right) \tag{3.93}$$

Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\sup_{t_0\leq s\leq t}\left(\exp^{\sigma s}\,|\bar{x}(s)|\right) \leq \frac{W(t_0)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} + \frac{2\beta}{\alpha\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}\sup_{t_0\leq s\leq t}\left(\exp^{\sigma s}\,|\varepsilon(s)|\right) \tag{3.94}$$

À partir de l'équation (3.80), nous pouvons déduire :

$$\dot{\varepsilon}(t) = C\dot{\bar{x}}(t) - \dot{\phi}(t)\,\tilde{y}(t_k) \tag{3.95}$$

Ainsi, en utilisant l'équation (3.77), nous obtenons :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \theta CA\bar{x}(t) + C(\psi(\hat{x}(t)\,,u(t)) - \psi(x(t)\,,u(t))) - \theta CK\phi(t)\,\tilde{y}(t_k) - \dot{\phi}(t)\,\tilde{y}(t_k) \tag{3.96}$$

Il en découle que :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \theta\bar{x}_2(t) + \psi_1(\hat{x}(t)\,,u(t)) - \psi_1(x(t)\,,u(t)) - \left(\theta CK\phi(t) + \dot{\phi}(t)\right)\tilde{y}(t_k) \tag{3.97}$$

Et, en combinant l'équation précédente et (3.72b), nous avons :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \theta\bar{x}_2(t) + \psi_1(\hat{x}(t)\,,u(t)) - \psi_1(x(t)\,,u(t)) - \left(\theta CK\phi(t) - \eta\phi(t)^a\right)\tilde{y}(t_k) \tag{3.98}$$

En intégrant cette équation entre t_k et t, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) = \int_{t_k}^{t} &\theta\bar{x}_2(s) + \psi_1(\hat{x}(s)\,,u(t)) - \psi_1(x(s)\,,u(t)) \\ &- \left(\theta CK\phi(s) - \eta\phi(s)^a\right)\tilde{y}(t_k)\,\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{3.99}$$

Et puisque, nous avons $\phi(t) < 1$ pour tout $t \in [t_k, t)$, nous pouvons majorer la norme de l'erreur $\varepsilon(t)$ comme suit :

$$\begin{aligned}|\varepsilon(t)| \leq &\int_{t_k}^{t} \theta\,|\bar{x}_2(s)| + |\psi_1(\hat{x}(s)\,,u(t)) - \psi_1(x(s)\,,u(t))|\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_{t_k}^{t} \left(\theta\,|CK| + \eta\,|\phi(t)|^a\right)|\tilde{y}(t_k)|\,\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{3.100}$$

Étant donné que $\phi(s) \leq 1$ pour tout $s \in [t_k, t)$, à l'aide de l'hypothèse (3.1), nous pouvons déduire de l'équation précédente que :

$$\exp^{\sigma t}|\varepsilon(t)| \leq T\exp^{\sigma T}(\theta + L + \theta\,|K| + \eta)\sup_{t_k \leq s \leq t}\left(\exp^{\sigma s}|\bar{x}(s)|\right) \tag{3.101}$$

Puisque nous avons $\sup_{t_k \leq s \leq t} (\exp^{\sigma s} |\bar{x}(s)|) \leq \sup_{t_0 \leq s \leq t} (\exp^{\sigma s} |\bar{x}(s)|)$, nous pouvons écrire :

$$\sup_{t_k \leq s \leq t} (\exp^{\sigma s} |\varepsilon(t)|) \leq T \exp^{\sigma T} (\theta + L + \theta |K| + \eta) \sup_{t_0 \leq s \leq t} (\exp^{\sigma s} |\bar{x}(s)|) \tag{3.102}$$

De plus, on a pour tout entier $j \leq k : t \geq t_j$, nous obtenons donc à partir de l'équation précédente :

$$\sup_{t_0 \leq s \leq t} (\exp^{\sigma s} |\varepsilon(t)|) \leq T \exp^{\sigma T} (\theta + L + \theta |K| + \eta) \sup_{t_0 \leq s \leq t} (\exp^{\sigma s} |\bar{x}(s)|) \tag{3.103}$$

En combinant les équations (3.94) et (3.103), nous obtenons :

$$\sup_{t_0 \leq s \leq t} (\exp^{\sigma s} |\bar{x}(s)|) \leq \frac{W(t_0)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} + \gamma_0 \sup_{t_0 \leq s \leq t} (\exp^{\sigma s} |\bar{x}(s)|) \tag{3.104}$$

avec :

$$\gamma_0 = T \exp^{\sigma T} (\theta + L + \theta |K| + \eta) \frac{2\beta}{\alpha \sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \tag{3.105}$$

Ainsi, si la condition $\gamma_0 < 1$ est satisfaite, nous pouvons alors écrire :

$$\sup_{t_0 \leq s \leq t} (\exp^{\sigma s} |\bar{x}(s)|) \leq \frac{1}{(1 - \gamma_0) \lambda_{\min}(P)} W(t_0) \tag{3.106}$$

En utilisant le fait que $\exp^{\sigma t} |\bar{x}(t)| \leq \sup_{t_0 \leq s \leq t} (\exp^{\sigma s} |\bar{x}(s)|)$, nous pouvons déduire de ce qui précéde que :

$$\exp^{\sigma t} |\bar{x}(t)| \leq \frac{1}{(1 - \gamma_0) \lambda_{\min}(P)} W(t_0) \tag{3.107}$$

et par conséquent, nous en concluons que :

$$|\bar{x}(t)| \leq \frac{1}{(1 - \gamma_0) \lambda_{\min}(P)} W(t_0) \exp^{-\sigma t} \tag{3.108}$$

Pour déterminer la période d'échantillonnage maximale admissible, on considère la condition small-gain $\gamma_0 < 1$ et en faisant tendre σ vers 0, nous obtenons :

$$\tau_{MASP} = \frac{\alpha \sqrt{\lambda_{\min}(P)}}{2\beta (\theta + L + \theta |K| + \eta)} \tag{3.109}$$

■

3.5 Exemple

Afin d'illustrer les performances de l'observateur, on considère le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -0.1x_1(t) + \tanh(x_1(t).x_2(t)) \\ y(t) = Cx(t) = x_1(t) \end{cases} \tag{3.110}$$

Les conditions initiales du système ont été fixées à $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

L'observateur proposé dans cette partie a la forme suivante :

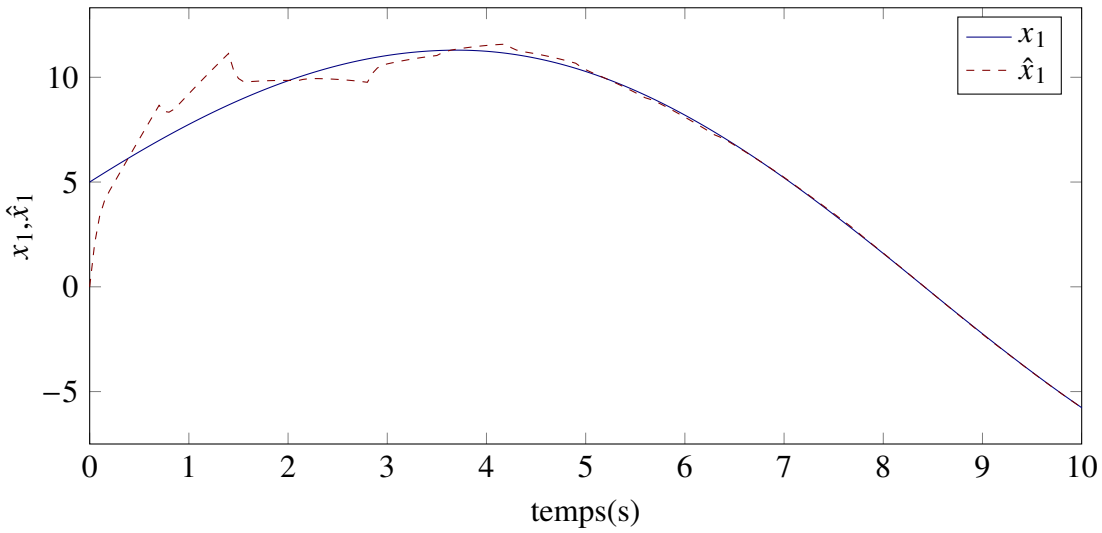
$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) - \theta k_1 \phi(t)(\hat{x}_1(t_k) - y(t_k)) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = -0.1\hat{x}_1(t) + \tanh(\hat{x}_1(t).\hat{x}_2(t)) - \theta^2 k_2 \phi(t)(\hat{x}_1(t_k) - y(t_k)) \\ \dot{\phi}(t) = -\eta\phi(t)^a \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \\ \phi(t_k) = 1 \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) = \hat{x}_1(t) \end{cases} \tag{3.111}$$

Les conditions initiales de l'observateur sont choisies : $\begin{bmatrix} \hat{x}_1(0) \\ \hat{x}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Les simulations sont réalisées en fixant : $\theta = 10$ et $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

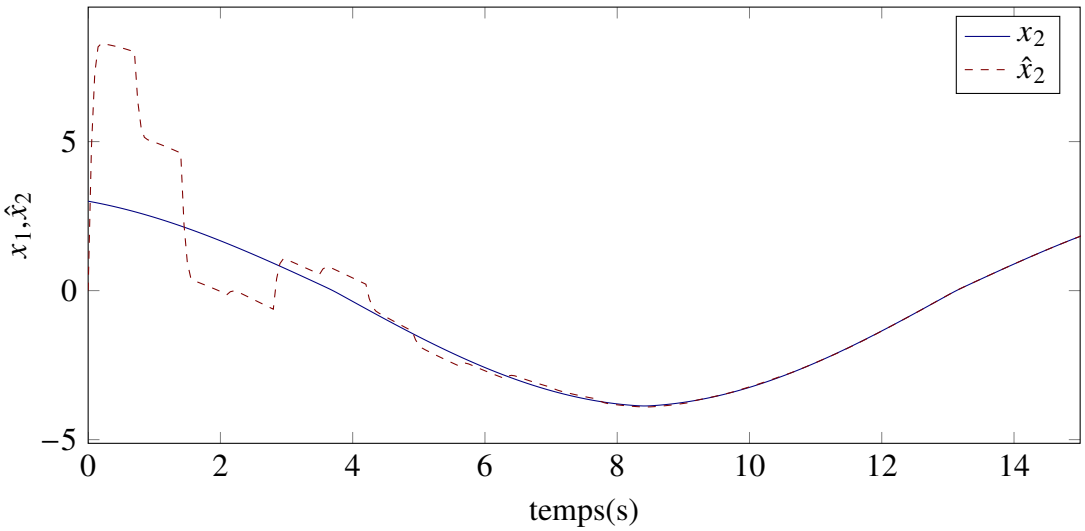
La figure 3.1 montre la convergence des états de l'observateur vers ceux du système pour une dynamique du gain d'observation choisie telle que $\eta = 10$ et $a = 0.5$.

Nous comparons également les performances de l'observateur avec gain variable à celles d'un observateur avec un gain constant. L'observateur avec un gain constant peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) - \theta k_1(\hat{x}_1(t_k) - y(t_k)) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = -0.1\hat{x}_1(t) + \tanh(\hat{x}_1(t).\hat{x}_2(t)) - \theta^2 k_2(\hat{x}_1(t_k) - y(t_k)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) = \hat{x}_1(t) \end{cases} \tag{3.112}$$



(a) État x_1



(b) État x_2

FIGURE 3.1: Évolution de l'état du système et de son estimée pour $a = 0.5$ et $T_e = 0.7s$

L'observateur avec un gain constant consiste, en fait, à considérer que $\phi(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Nous comparons les deux observateurs en choisissant différentes dynamiques pour le gain d'observation de l'observateur avec gain variable (3.111). À cet effet, nous avons fixé la valeur du paramètre η de notre observateur à $\eta = 10$. Pour la valeur du paramètre a, nous avons considéré trois cas : $a = 1$, $a = 0.5$ et $a = 0.25$.

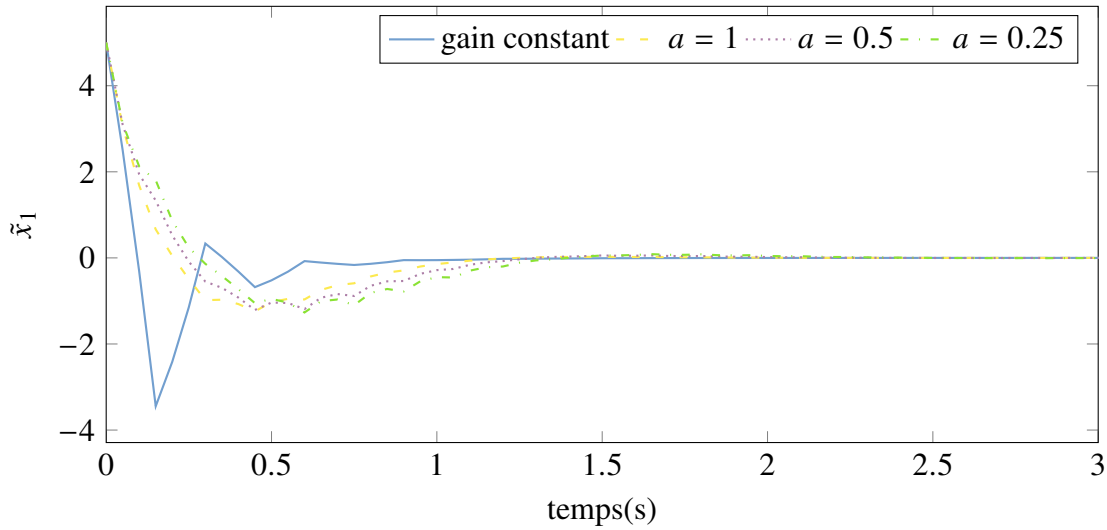
Nous pouvons constater que la période d'échantillonnage maximale τ_{MASP} assurant une convergence de l'observateur augmente quand le paramètre a diminue, c'est-à-dire lorsque la dynamique de $\phi(t)$ est plus rapide. Dans tous ces cas considérés, nous obtenons une meilleure période d'échantillonnage que pour le cas du gain constant. Le tableau (3.1) donne la valeur de τ_{MASP} obtenue en simulation pour l'observateur avec un gain constant et pour l'observateur avec un gain dynamique (3.111) en fixant $\eta = 10$ et pour différentes valeurs de a.

	constant gain	$a = 1$	$a = 0.5$	$a = 0.25$
τ_{MASP}	0.19	0.9	1.5	1.8

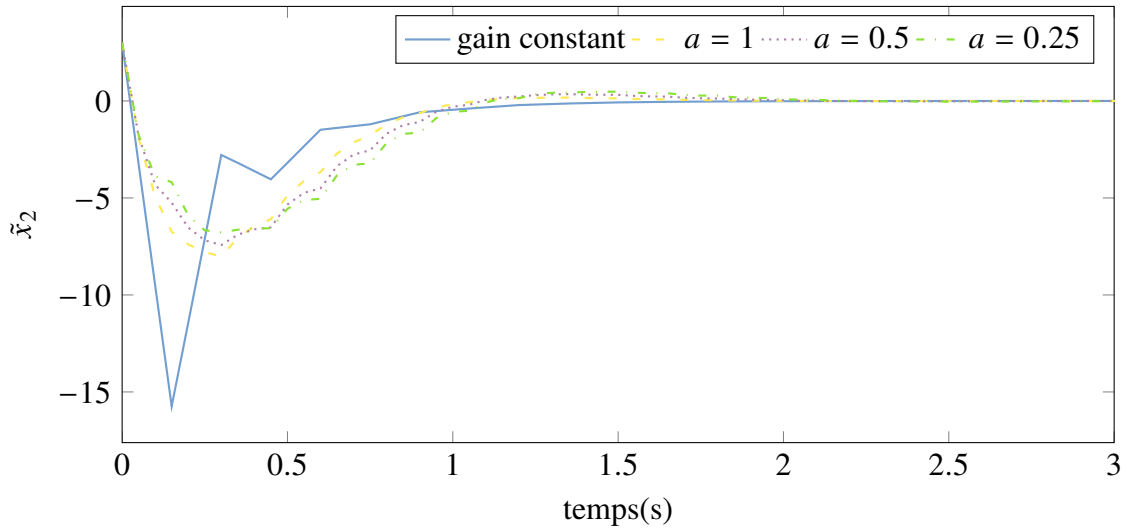
Tableau 3.1: Valeurs de la période d'échantillonnage maximale admissible τ_{MASP} pratique pour un observateur avec gain constant et pour l'observateur avec un gain variable pour différentes valeurs du paramètre a

Cependant, l'inconvénient de cet observateur est que la vitesse de convergence diminue comparée au cas où le gain est constant. La figure 3.2 représente l'erreur d'observation pour l'observation avec un gain constant et l'observateur (3.111) avec différentes valeurs de a. Elle met en évidence le fait que l'observateur avec un gain constant converge plus rapidement. Ceci est prévisible d'autant plus que le gain d'observation de celui-ci est toujours supérieure ou égale à celui de l'observateur avec un gain variable quelle que soit la valeur du paramètre a. La fonction $\phi(t)$ est toujours inférieure à 1 et par conséquent diminue l'amplitude de la correction faite sur l'erreur d'observation.

Nous mettons aussi en évidence l'effet du bruit de mesure sur ces observateurs. La figure 3.3 illustre l'effet d'un bruit de mesure de variance égale à 0.1 sur l'erreur d'observation pour un observateur avec un gain constant et pour l'observateur avec gain dynamique et le paramètre $a = 0.5$. Nous avons fixé la période d'échantillonnage $T_e = 0.09s$. Nous pouvons constater que notre observateur est beaucoup moins sensible à l'effet du bruit de mesure. Le tableau 3.2 récapitule la variance de l'erreur d'observation



(a) État x_1



(b) État x_2

FIGURE 3.2: Évolution de l'erreur d'observation $\tilde{x}$ pour un observateur à gain constant et un observateur à gain variable avec différentes valeurs du paramètre a de la dynamique du gain d'observation avec $T_e = 0.15s$

pour les observateurs (3.111) avec différentes valeurs de a et (3.112) en présence de bruit de mesure de variance égale à 0.1 pour des périodes d'échantillonnage $T_e = 0.15s$ et $T_e = 0.7s$. Nous précisons que l'observateur avec un gain constant ne converge pas pour $T_e = 0.7s$.

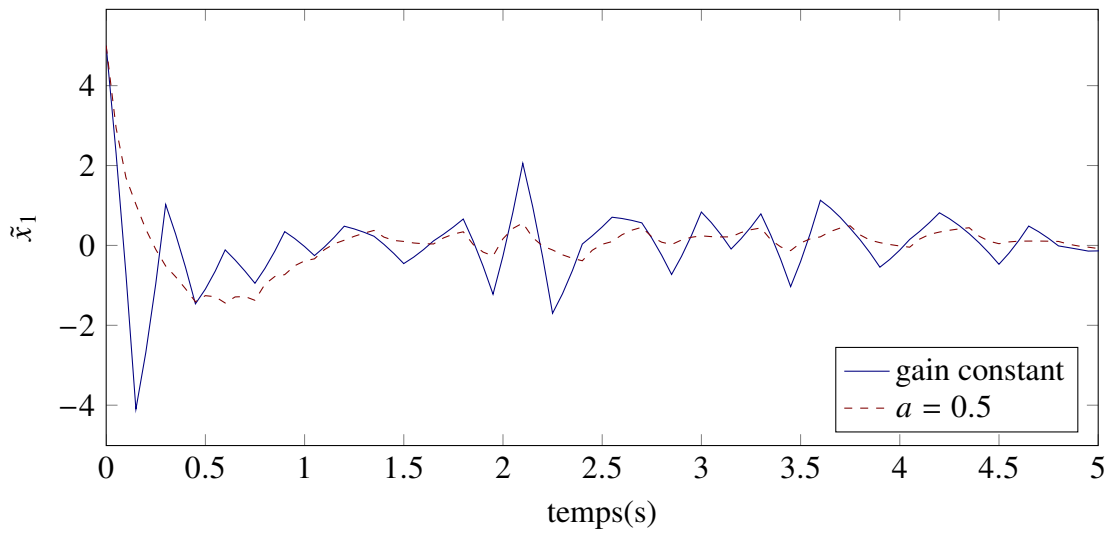
observateur / T_e	gain constant	$a = 1$	$a = 0.5$	$a = 0.25$
0.15	0.23	0.08	0.06	0.06
0.7	x	0.63	0.27	0.20

(a) État x_1

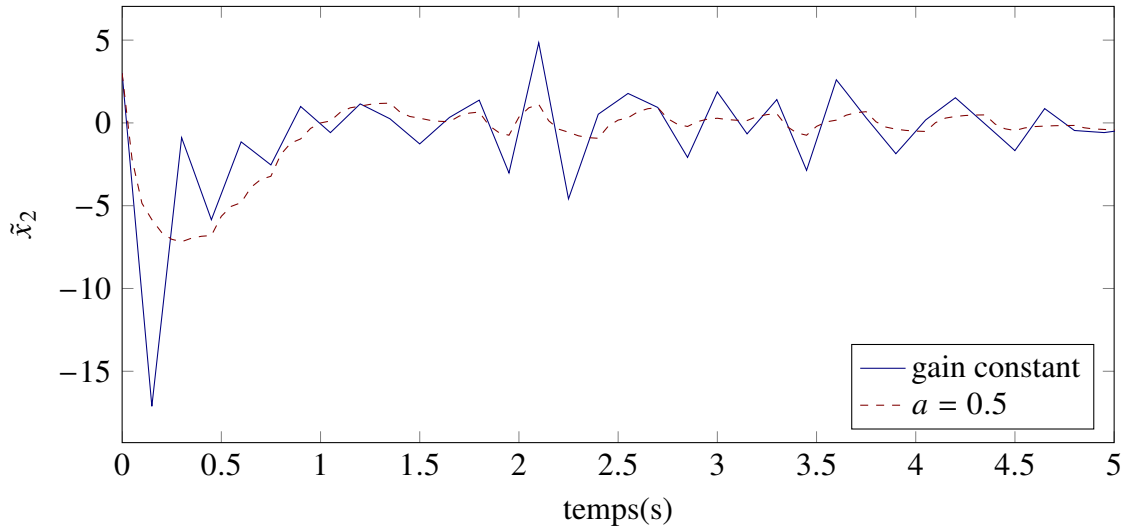
observateur / T_e	gain constant	$a = 1$	$a = 0.5$	$a = 0.25$
0.15	1.28	0.36	0.29	0.24
0.7	x	2.33	0.79	0.52

(b) État x_2

Tableau 3.2: Variance de l'erreur d'observation $\tilde{x}$ de l'observateur avec un gain constant et de l'observateur avec un gain variable pour différentes valeurs du paramètre a en présence de bruit de mesure de variance égale à 0.1.



(a) État x_1



(b) État x_2

FIGURE 3.3: Évolution de l'erreur d'observation $\tilde{x}$ pour un observateur avec un gain constant et un observateur avec un gain variable et $a = 0.5$ pour $T_e = 0.15s$ en présence de bruit de mesure de variance égale à 0.1

3.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre deux observateurs grand-gain avec des gains dynamiques pour une classe de systèmes non linéaires triangulaires avec sorties échantillonnées. Le premier observateur que nous avons présenté est une extension aux systèmes à sorties échantillonnées des travaux de [Praly 03]. Cet observateur utilise un prédicteur de la sortie du système pour palier à l'absence d'information sur la mesure entre les instants d'échantillonnage.

Le deuxième observateur présenté est une généralisation des travaux de [Cacace 12]. Il permet ainsi de diminuer la sensibilité aux bruits de mesure inhérent aux observateurs grand-gain. Un autre avantage de cet observateur est l'amélioration de la période d'échantillonnage maximale admissible. Nous avons utilisé une approche small gain pour déterminer une condition suffisante sur la période d'échantillonnage qui garantit la convergence exponentielle de l'observateur.

Chapitre 4

Observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes affines en l'état

4.1 Introduction

Le problème de l'estimation conjointe de l'état du système et des paramètres inconnus aussi connu sous le nom de synthèse d'observateurs adaptatifs occupe une place importante dans la recherche sur les systèmes de contrôle. Les observateurs adaptatifs sont notamment utilisés pour permettre d'ajuster les performances du contrôleur en temps réel. Ils ont aussi un intérêt prépondérant dans la détection et le diagnostic de panne pour les systèmes pour lesquels la sécurité est primordiale (réacteurs nucléaires, procédés chimiques, avions). Les observateurs adaptatifs ont été largement étudiés dans la littérature [Kreisselmeier 77, Bastin 88, Marino 95, Besancon 00, Zhang 02, Farza 09]. Ces observateurs adaptatifs ont été synthétisés en continu mais il y a relativement peu de résultats pour les systèmes discrets. Dans les travaux [Guyader 03], un observateur adaptatif est proposé pour l'estimation de l'état et des paramètres pour une classe de systèmes stochastiques discrets linéaires variant dans le temps multi-entrées multi-sorties. Cet observateur peut être vu comme une extension de l'observateur continu développé dans [Zhang 02] pour les systèmes linéaires variant dans le temps. Dans [Ahmed-Ali 09b], le travail de [Nadri 03] a été étendu aux observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes affines en l'état.

Dans ce chapitre, nous proposons deux observateurs adaptatifs continus pour une

classe de systèmes affines en l'état avec la sortie échantillonnée et des paramètres inconnus mais constants. Grâce à une approche de Lyapunov, nous déterminons explicitement des conditions suffisantes sur la borne maximale de la période d'échantillonnage τ_{MASP} afin de conserver les propriétés de convergence globale exponentielle.

Dans le premier observateur, nous introduisons un prédicteur de la sortie du système, comme dans les travaux de [Karafyllis 09], qui nous permet d'estimer la sortie entre les instants d'échantillonnage. Ce prédicteur est en fait une copie du modèle continu du système sans terme de correction. Dans cette structure, seul le prédicteur est réinitialisé aux instants d'échantillonnage. Les estimées du vecteur d'état et celles des paramètres inconnus restent alors continues même aux instants d'échantillonnage.

Dans le deuxième observateur, le prédicteur est maintenu constant (en mode bloqueur d'ordre zéro) entre les instants d'échantillonnage [Raff 08]. Afin de garantir la convergence exponentielle de l'observateur en l'absence de mesure entre les instants d'échantillonnage, nous modélisons l'observateur sous la forme d'un système avec sortie retardée comme dans les travaux de [Fridman 04, Van Assche 11]. Ainsi, trouver la période d'échantillonnage maximale admissibleτ_{MASP} revient à déterminer le retard maximal permettant de conserver la convergence exponentielle de l'observateur pour le système dans le cas où la sortie est retardée.

Dans la suite du chapitre, nous présentons dans la section 4.2 la classe des systèmes affines en l'état que nous étudions. Nous proposons ensuite un observateur utilisant un prédicteur de sortie et nous démontrons la convergence exponentielle de cet observateur dans la section 4.3. Nous illustrons les performances de cet observateur dans la section 4.4 et enfin (section 4.5), nous proposons un observateur utilisant un bloqueur d'ordre zéro entre les instants d'échantillonnage et donnons une ébauche de preuve de la convergence exponentielle de cet observateur.

4.2 Systèmes non linéaires affines en l'état avec paramètres inconnus constants

Nous considérons la classe suivante des systèmes non linéaires affines en l'état avec paramètres inconnus :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t))\,x(t) + B(u(t)) + \phi(t)\rho & (4.1a) \\ y(t_k) = Cx(t_k) & (4.1b) \end{cases}$$

avec

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système ; $y \in \mathbb{R}$ désigne la sortie du système et les paramètres inconnus considérés constants sont représentés par le vecteur $\rho \in \mathbb{R}^m$. $\phi(t)$ est une fonction continue de $\mathbb{R}_0^+$ vers $\mathbb{R}^{n\times m}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, τ_{MASP} représente la période d'échantillonnage maximale admissible : $\tau_{MASP} = \max\limits_{t_k \in \{t_k\}_{k\geq 0}} t_{k+1} - t_k$. Nous déterminerons, dans la suite du chapitre, τ_{MASP} de manière explicite.

Nous introduisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 4.1:
L'entrée du système $u(t)$ est bornée. La matrice d'état $A(u(t))$ est aussi supposée bornée et nous noterons σ la valeur maximale de $A(u(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}_0^+$.

$$\sigma = \sup_{t\in\mathbb{R}_0^+} |A(u(t))| \tag{4.3}$$

Hypothèse 4.2:
$\phi(t)$ est une fonction bornée pour tout $t \in \mathbb{R}_0^+$. Dans toute la suite de ce chapitre, nous noterons M, la norme infinie de $\phi(t)$:

$$M = |\phi(t)|_\infty \tag{4.4}$$

Matrice de transition d'état

Nous rappelons ici quelques propriétés de la matrice de transition d'état.

Soit $\Phi_u(\tau,t)$ la matrice de transition du système (4.1), elle satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}\Phi_u(\tau,t) = A(u(t))\,\Phi_u(\tau,t) & \text{(4.5a)} \\ \Phi_u(t,t) = \mathbf{I}_n & \text{(4.5b)} \end{cases}$$

Nous émettons l'hypothèse suivante sur l'entrée du système.

Hypothèse 4.3:
L'entrée $u(t)$ du système est une entrée régulièrement persistante. Ceci revient à dire qu'existent $T_1 > 0$, $\alpha_1 > 0$ et $t_0 > 0$ tels que la matrice de transition satisfait la relation suivante :

$$\int_t^{t+T_1} \Phi_u(\tau,t)^T C^T C \Phi_u(\tau,t) d\tau > \alpha_1 \mathbf{I}_n, \qquad \forall t > t_0. \tag{4.6}$$

Cette hypothèse permet de garantir l'observabilité du système pour les entrées pour lesquelles l'hypothèse est satisfaite. Elle est nécessaire pour la reconstruction du vecteur d'état du système. Nous pouvons noter que cette condition dépend du temps T_1 qui doit être suffisamment grand afin que l'on ait assez d'informations sur le système [Besançon 07a].

4.3 Synthèse de l'observateur avec un *inter-sample predictor*

4.3.1 Structure de l'observateur

Nous proposons l'observateur suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(u(t))\,\hat{x}(t) + B(u(t)) + \phi(t)\hat{\rho}(t) \\ \qquad - S^{-1}(t)C^T(C\hat{x}(t) - w(t)) + \lambda(t)\dot{\hat{\rho}}(t) & \text{(4.7a)} \\ \dot{w}(t) = CA(u(t))\,\hat{x}(t) + C\phi(t)\hat{\rho}(t) \qquad t \in [t_k, t_{k+1}) \\ w(t_k) = y(t_k) & \text{(4.7b)} \\ \dot{\hat{\rho}}(t) = -R\lambda(t)^T C^T(C\hat{x}(t) - w(t)) & \text{(4.7c)} \\ \dot{R} = -R\lambda(t)^T C^T C\lambda(t)R + R & \text{(4.7d)} \\ \dot{\lambda}(t) = \left(A(u(t)) - S^{-1}(t)C^T C\right)\lambda(t) + \phi(t) & \text{(4.7e)} \\ \dot{S}(t) = -\mu S(t) - S(t)A(u(t)) - A(u(t))^T S(t) + C^T C & \text{(4.7f)} \end{cases}$$

où

- $\hat{x}(t)$ et $\hat{\rho}(t)$ représentent respectivement l'estimée continue de l'état du système et celle des paramètres inconnus.
- w est le prédicteur de la sortie du système. Il permet d'estimer la sortie du système en l'absence de mesure entre les instants d'échantillonnage. Il est mis à jour aux instants d'échantillonnage.
- Le gain d'observation $S(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice symétrique définie positive.
- Le paramètre de synthèse est une constante qui doit être choisie supérieure à 1.
- $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ est une matrice définie positive.

Afin de prouver la convergence de l'observateur, nous supposons que l'hypothèse suivante est satisfaite :

Hypothèse 4.4:
Soit $\lambda(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ la solution de l'équation différentielle (4.7e), nous supposons qu'il existe deux constantes connues T et α_0 telles que pour tout $t_0 > 0$, nous avons :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \lambda(t)^T C^T C \lambda(t) dt > \alpha_0 \mathbf{I}_m \tag{4.8}$$

Cette hypothèse est une condition d'excitation persistante sur la matrice $\lambda(t)$. Elle est nécessaire pour estimer les paramètres inconnus du système. Elle est régulièrement admise pour les problèmes d'estimation conjointe de l'état du système et des paramètres inconnus [Zhang 02, Besançon 07b].

Théorème 4.1:
Supposons que les hypothèses 4.1 à 4.4 sont satisfaites, pour toute valeur suffisamment large de μ, il existe une borne supérieure de l'intervalle entre les instants d'échantillonnage τ_{MASP} (période d'échantillonnage maximale admissible) telle que pour toute période d'échantillonnage $\tau \in (0, \tau_{MASP})$, l'observateur (4.7) est un observateur global exponentiel pour le système (4.1).

Pour prouver ce théorème, nous introduisons tout d'abord ces quelques résultats préliminaires.

Lemme 4.2:
Supposons que l'entrée u du système est régulièrement persistante (hypothèse 4.3) pour le système 4.1 et considérons l'équation différentielle définie par (4.7f), alors :
$\exists \mu_0 > 0$ tels que pour toute matrice symétrique définie positive $S(0)$, $\forall \mu > \mu_0$, $\exists \bar{\alpha} > 0, \bar{\beta} > 0, t_0 > 0$ tel que $\forall t \geq t_0$, $\bar{\alpha}\mathbf{I}_n \leq S(t) \leq \bar{\beta}\mathbf{I}_n$
De plus, en choisissant $\mu_0 > 2\sigma$, nous avons $\bar{\alpha} \leq \alpha_1 \exp^{-2\mu T_1}$ avec α_1 et T_1 tels que définis dans l'hypothèse 4.3

Ce résultat est présenté dans [Besançon 96].

Lemme 4.3:
Sous l'hypothèse 4.4, la matrice R définie par l'équation différentielle (4.7d) est définie positive et uniformément bornée pour tout $t > t_0$ et toute condition initiale $R(t_0)$ définie positive.

De plus, la borne inférieure de R^{-1} est donnée par :

$$\lambda_{\min}(R^{-1}) \geq \frac{1-\exp^{-T}}{\exp^{T}-1}\exp^{-T}\alpha_0 \tag{4.9}$$

La preuve de ce lemme est faite dans [Zhang 01a].

Lemme 4.4:
Considérons l'équation différentielle (4.7e) : sous l'hypothèse 4.2, $\lambda(t)$ est bornée. Si, de plus, nous choisissons la condition initiale $\lambda(0) = 0$, alors $\lambda(t)$ satisfait la relation suivante :

$$|\lambda(t)|_1 = \frac{4M\bar{\beta}}{\mu\bar{\alpha}} \tag{4.10}$$

Pour simplifier l'écriture, nous adoptons dans la suite du chapitre la notation suivante :

$$c_\lambda = \frac{4M\bar{\beta}}{\mu\bar{\alpha}} \tag{4.11}$$

Preuve:
Nous décomposons la matrice $\lambda(t)$ suivant ses colonnes. Nous définissons alors $\lambda_i(t)$ la i^{ème} colonne de la matrice $\lambda(t)$ telle que $\lambda(t) = (\lambda_1(t)\cdots\lambda_i(t)\cdots\lambda_m(t))$.
D'après (4.7e), le vecteur $\lambda_i(t)$ satisfait la relation suivante :

$$\dot{\lambda}_i(t) = \left(A(u(t)) - S^{-1}(t)C^TC\right)\lambda_i(t) + \phi_i(t) \tag{4.12}$$

Nous considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$H(t) = \lambda_i(t)^T S(t)\lambda_i(t) \tag{4.13}$$

Si nous calculons la dérivée de $H(t)$ en s'aidant de l'équation (4.12), on obtient alors :

$$\dot{H}(t) = \lambda_i(t)^T\left[A(u(t))^T S(t) + S(t)A - 2C^TC + \dot{S}(t)\right]\lambda_i(t) + 2\phi_i(t)^T S(t)\lambda_i(t) \tag{4.14}$$

En remplaçant $\dot{S}(t)$ par sa valeur dans l'équation (4.7f), on a :

$$\dot{H}(t) \leq -\mu H(t) + 2M_i\bar{\beta}\,|\lambda_i(t)| \tag{4.15}$$

où $M_i = \sup_{t \in \mathbb{R}_0^+} |\phi_i(t)|$.
En utilisant alors l'inégalité de Young sur cette inégalité, nous obtenons :

$$\dot{H}(t) \leq -\mu H(t) + \frac{8}{\mu\bar{\alpha}} M_i^2 \bar{\beta}^2 + \frac{\mu\bar{\alpha}}{2} |\lambda_i(t)|^2 \tag{4.16}$$

Ce qui nous donne, à l'aide du lemme 4.2 :

$$\dot{H}(t) \leq -\frac{\mu}{2} H(t) + \frac{8}{\mu\bar{\alpha}} M_i^2 \bar{\beta}^2 \tag{4.17}$$

Ainsi, en intégrant la dérivée de $H(t)$, on trouve que $H(t)$ est majorée par une fonction strictement décroissante :

$$H(t) \leq \exp^{-\frac{\mu}{2}t} H(0) + \int_0^t \frac{8}{\mu\bar{\alpha}} M_i^2 \bar{\beta}^2 \exp^{-\frac{\mu}{2}(t-s)} ds \tag{4.18}$$

De plus, si la condition initiale $\lambda(0)$ est choisie nulle, nous avons alors :

$$|H(t)| \leq \frac{16 M_i^2 \bar{\beta}^2}{\mu^2 \bar{\alpha}} \tag{4.19}$$

$$|\lambda_i(t)|^2 \leq \frac{16 M_i^2 \bar{\beta}^2}{\mu^2 \bar{\alpha}^2} \tag{4.20}$$

Ainsi, en utilisant le lemme 4.2, nous en déduisons la borne suivante pour $|\lambda_i(t)|$:

$$|\lambda_i(t)| \leq \frac{4 M_i \bar{\beta}}{\mu\bar{\alpha}} \tag{4.21}$$

Par conséquent, nous en concluons que $\lambda(t)$ est bornée et nous avons :

$$|\lambda(t)|_1 = \frac{4 M \bar{\beta}}{\mu\bar{\alpha}} \tag{4.22}$$

Ce qui termine la preuve du lemme 4.4. ■

4.3.2 Analyse de la convergence

Nous rappelons dans cette partie la notion de stabilité exponentielle des systèmes non linéaires impulsifs et présentons le théorème énoncé dans [Naghshtabrizi 08] qui donne une condition suffisante de la stabilité exponentielle des systèmes impulsifs.

Les systèmes impulsifs sont les systèmes qui se mettent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x(t) = f(x(t),t) & (4.23a) \\ x(t_k) = g(x(t_k^-),t_k) & (4.23b) \end{cases}$$

où f et g sont des fonctions localement Lipschitz de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^n$ tels que $f(0,t) = 0$ et $g(0,t) = 0$ pour tout $t \geq 0$.

Définition 4.1:
Pour une séquence $\{t_k\}_{k\geq 0}$ donnée, on dit que le système est *globalement exponentiellement stable* si il existe des constantes c et γ telles que

$$x(t) = cx(t_0)\exp^{-\gamma(t-t_0)}, \qquad t \geq t_0 \tag{4.24}$$

Si cette condition est satisfaite pour les mêmes constantes c et γ, pour toute séquence $\{t_k\}_{k\geq 0} \in \mathcal{S}$, le système est alors dit *uniformément globalement exponentiellement stable* sur la classe d'instants d'échantillonnage $\mathcal{S}$.

Le théorème suivant, basé sur l'approche de Lyapunov, donne une condition suffisante pour garantir la stabilité exponentielle des systèmes impulsifs.

Théorème 4.5:
On suppose qu'il existe des réels positifs c_1, c_2, c_3 et b et une fonction de Lyapunov $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que pour toute séquence $\{t_k\}_{k\geq 0} \in \mathcal{S}$ et pour tout $t \geq t_0$, la solution correspondante $x(\cdot)$ du système (4.23) satisfait les inégalités suivantes :

$$c_1 |x|^b \leq V(x,\rho) \leq c_2 |x|^b, \qquad \forall x, \forall \tau \in [0, \tau_{MASP}], \tag{4.25}$$

$$\frac{\mathrm{d}V(x(t),\rho(t))}{\mathrm{dt}} \leq -c_3 V(x(t),\rho(t)), \qquad \forall t \neq t_k, \forall k \in \mathbb{N}_+, \tag{4.26}$$

$$V(x(t_k),0) \leq V(x(t_k^-),\rho(t_k^-)), \qquad \forall k \in \mathbb{N}_+ \tag{4.27}$$

le système (4.23) *est alors* uniformément globalement exponentiellement stable *pour la classe d'instants d'échantillonnage* $\mathcal{S}$ *avec :*

$$c = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{b}}, \qquad \gamma = \frac{c_3}{b} \tag{4.28}$$

La preuve de ce théorème peut être trouvée dans [Naghshtabrizi 07].

Notre but dans ce chapitre étant de déterminer explicitement une condition suffisante sur la période d'échantillonnage maximale admissible afin de garantir que l'observateur (4.7) est un observateur global exponentiel pour le système (4.1).

Afin de prouver la convergence exponentielle de l'observateur (4.1), nous allons le mettre sous la forme d'un système non linéaire impulsif (4.23).

Nous définissons ainsi les variables suivantes :

- l'erreur d'observation $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$,
- l'erreur d'estimation des paramètres inconnus $\tilde{\rho}(t) = \hat{\rho}(t) - \rho$,
- l'erreur de prédiction $e_w(t) = w(t) - y(t)$ qui désigne l'erreur entre la sortie réelle du système et le prédicteur qui estime la sortie entre les instants d'échantillonnage.

D'après les équations (4.1a) et (4.7a), la dérivée de l'erreur d'observation peut s'écrire :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \left(A(u(t)) - S^{-1}(t)C^TC\right)\tilde{x}(t) + \phi(t)\tilde{\rho}(t) + S^{-1}(t)C^Te_w(t) + \lambda(t)\dot{\tilde{\rho}}(t) \tag{4.29}$$

Nous introduisons alors le changement de variable suivant :

$$z(t) = \tilde{x}(t) - \lambda(t)\tilde{\rho}(t) \tag{4.30}$$

Nous pouvons alors écrire la dérivée de $z(t)$:

$$\dot{z}(t) = \left(A(u(t)) - S^{-1}(t)C^TC\right)\tilde{x}(t) + \phi(t)\tilde{\rho}(t) + S^{-1}(t)C^Te_w(t) - \dot{\lambda}(t)\tilde{\rho}(t) \tag{4.31}$$

Et, en utilisant (4.7e), nous en déduisons que :

$$\dot{z}(t) = \left(A(u(t)) - S^{-1}(t)C^T C\right) z(t) + S^{-1}(t)C^T e_w(t) \tag{4.32}$$

Les erreurs d'observation $z(t)$, d'identification des paramètres inconnus $\tilde{\rho}(t)$ et de prédiction de la sortie $e_w(t)$ du système (4.1) par rapport à l'observateur (4.7) peuvent se mettre sous la forme du système non linéaire impulsif suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \left(A(u(t)) - S^{-1}(t)C^T C\right) z(t) + S^{-1}(t)C^T e_w(t) & (4.33a) \\ \dot{\tilde{\rho}}(t) = -R\lambda(t)^T C^T \left(C\hat{x}(t) - w(t)\right) & (4.33b) \\ \dot{e}_w(t) = CA(u(t))\, z(t) + C\left(A(u(t))\,\lambda(t) + \phi(t)\right)\tilde{\rho}(t) & (4.33c) \\ z(t_k) = z\left(t_k^-\right) & (4.33d) \\ \tilde{\rho}(t_k) = \tilde{\rho}\left(t_k^-\right) & (4.33e) \\ e_w(t_k) = 0 & (4.33f) \end{cases}$$

Nous pouvons ainsi transformer l'analyse de la convergence de l'observateur (4.7) à l'étude de la stabilité du système (4.33). En effet, pour prouver que le système (4.7) est un observateur global exponentiel pour le système (4.1), il est nécessaire et suffisant de prouver que le système (4.33) est globalement exponentiellement stable. Nous utiliserons le théorème 4.5 énoncé ci-dessus pour déterminer une valeur de τ_{MASP}garantissant la stabilité exponentielle du système (4.33) et par conséquent la convergence exponentielle de l'observateur (4.7).

En s'inspirant de [Naghshtabrizi 08], nous considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(t) = U(z(t)) + W(\tilde{\rho}(t)) + Q(e_w(t)) \tag{4.34}$$

avec :

$$U(t) = z(t)^T\, Sz(t) \tag{4.35}$$

$$Q(t) = \frac{1}{\bar{\alpha}} f(t)\, |e_w(t)|^2 \tag{4.36}$$

$$W(t) = \frac{1}{\bar{\alpha}} \tilde{\rho}(t)^T\, R^{-1} \tilde{\rho}(t) \tag{4.37}$$

- Les matrices S et R ont été définies précédemment comme solutions des équations

différentielles (4.7f) et (4.7d).

- La fonction $f(t)$ est positive et bornée pour tout $t > 0$. Elle est décroissante entre les instants d'échantillonnage et satisfait les conditions suivantes : $f(t_k) = 1$ et $f(t_k + \tau_{MASP}) \to 0$. Elle permet de corriger l'influence de l'erreur de prédiction dans la fonction de Lyapunov et ainsi nous la définirons de sorte à assurer que $\dot{V}(t) \leq -\epsilon V(t)(\epsilon > 0)$ entre les instants d'échantillonnage. Elle apparaît aussi dans la littérature dans [Ahmed-Ali 12].

Nous appliquons le théorème 4.5 pour démontrer la convergence exponentielle de l'observateur. Le choix de la fonction de Lyapunov nous permet de satisfaire la première condition.

Il suffit de trouver une borne τ_{MASP} de la période d'échantillonnage telle que les inégalités suivantes soient vérifiées.

$$\begin{cases} \dot{V}(t) \leq -\epsilon V(t) & t \in [t_k, t_{k+1}) \quad \text{et} \quad \forall \tau \in (0, \tau_{MASP}) \quad (4.38a) \\ V(t_k) \leq V(t_k^-) & \forall k \in \mathbb{N}_+ \quad (4.38b) \end{cases}$$

où $\epsilon > 0$. Il est facile de démontrer l'inégalité (4.38b) puisque, dans le cas spécifique de notre observateur, les états estimés de l'observateur et les estimés des paramètres inconnus sont continus. Il en résulte qu'aux instants $t = t_k$, nous avons $z(t_k) = z\left(t_k^-\right)$ et $\tilde{\rho}(t_k) = \tilde{\rho}\left(t_k^-\right)$ et par conséquent nous avons aussi $U(t_k) = U(t_k^-)$ et $W(t_k) = W(t_k^-)$. De plus, le prédicteur de la sortie est mis à jour à chaque instant d'échantillonnage avec la mesure disponible de la sortie, nous avons alors une erreur de prédiction nulle $e_w(t_k) = 0$ et nous obtenons donc $Q(t_k) = 0$. Nous en déduisons ainsi que :

$$V(t_k) \leq V(t_k^-) \qquad \forall k \in \mathbb{N}_+ \tag{4.39}$$

Pour terminer la preuve du théorème, il suffit donc de satisfaire l'inégalité (4.38a). Pour cela, nous allons déterminer une valeur maximale de la période d'échantillonnage (τ_{MASP}) afin que (4.38a) soit satisfaite pour toute période d'échantillonnage τ inférieure à celle-ci. Tout d'abord, nous calculons la dérivée de la fonction de Lyapunov V. Pour alléger le calcul, nous séparons V en ses trois composantes U, Q et W dont nous calculons chaque dérivée.

4.3.2.1 Calcul de la dérivée de U

Tout d'abord, en utilisant (4.32), nous pouvons écrire la dérivée de U :

$$\begin{aligned}\dot{U}(t) = {} & z(t)^T \left(-\mu S(t) - S(t)A - A^T S(t) + C^T C\right) z(t) \\ & + z(t)^T \left(A(u(t)) - S^{-1}(t)C^T C\right) S(t)z(t) + e_w(t)^T Cz(t) \\ & + z(t)^T S(t) \left(A(u(t)) - S^{-1}(t)C^T C\right) z(t) + z(t)^T C^T e_w(t)\end{aligned} \tag{4.40}$$

En combinant cette équation avec (4.7f), nous pouvons simplifier l'expression de $\dot{U}(t)$.

$$\dot{U}(t) = -\mu z(t)^T S(t)z(t) - z(t)^T C^T Cz(t) + 2z(t)^T C^T e_w(t) \tag{4.41}$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Young, nous en déduisons que :

$$\dot{U}(t) \leq -\mu U(t) + |e_w(t)|^2 \tag{4.42}$$

4.3.2.2 Calcul de la dérivée de Q

Nous calculons la dérivée de l'erreur de prédiction. Des équations (4.1) et (4.7b), nous pouvons tirer :

$$\dot{e}_w(t) = CA(u(t))\,\tilde{x}(t) + C\phi(t)\tilde{\rho}(t) \tag{4.43}$$

Il en découle que la norme 1 de l'erreur de prédiction satisfait :

$$|e_w(t)|_1 \leq \sigma_{1c}\,|\tilde{x}(t)|_1 + M_c\,|\tilde{\rho}(t)|_1\,. \tag{4.44}$$

où $\sigma_{1c} = \sup_{t\in\mathbb{R}_0^+} |CA(u(t))|_1$ et $M_c = \sup_{t\in\mathbb{R}_0^+} |C\phi(t)|_1$.
En utilisant le changement de variable (4.30) dans l'équation précédente, nous obtenons :

$$|e_w(t)|_1 \leq \sigma_{1c}\,|z(t)|_1 + (\sigma_{1c}c_\lambda + M_c)\,|\tilde{\rho}(t)|_1 \tag{4.45}$$

Ainsi, en utilisant l'équivalence entre la norme euclidienne et la norme 1, nous avons :

$$|e_w(t)| \leq \sqrt{n}\sigma_{1c}\,|z(t)| + \sqrt{m}\,(\sigma_{1c}c_\lambda + M_c)\,|\tilde{\rho}(t)| \tag{4.46}$$

La dérivée $\dot{Q}(t)$ satisfait alors la relation :

$$\dot{Q}(t) \leq \frac{2}{\bar{\alpha}} f(t)\,|e_w(t)|\,|\dot{e}_w(t)| + \frac{1}{\bar{\alpha}} \dot{f}(t)\,|e_w(t)|^2 \tag{4.47}$$

Nous pouvons déduire de l'équation (4.37) que $\tilde{\rho}(t) \leq \frac{\sqrt{\bar{\alpha} W(t)}}{\sqrt{\lambda_{\min}(R^{-1})}}$. Ainsi, avec (4.46), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) \leq\ & \frac{2}{\bar{\alpha}} f(t)\,|e_w(t)|\,\sqrt{n}\sigma_{1c}\,|z(t)| + \frac{1}{\bar{\alpha}} \dot{f}(t)\,|e_w(t)|^2 \\ & + \frac{2}{\bar{\alpha}} f(t)\,\frac{\sqrt{m}\,(c_\lambda \sigma_{1c} + M_c)}{\sqrt{(1-\epsilon)\lambda_{\min}(R^{-1})}}\,|e_w(t)|\,\sqrt{(1-\epsilon)\bar{\alpha}}\sqrt{W(t)} \end{aligned} \tag{4.48}$$

En utilisant l'inégalité de Young, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) \leq\ & \frac{1}{\bar{\alpha}} f(t)^2\,|e_w(t)|^2 + n\sigma_{1c}^2 U(t) + \frac{1}{\bar{\alpha}} \dot{f}(t)\,|e_w(t)|^2 \\ & + \frac{1}{\bar{\alpha}} f(t)^2\,\frac{m\left[c_\lambda \sigma_{1c} + M_c\right]^2}{\lambda_{\min}(R^{-1})(1-\epsilon)}\,|e_w(t)|^2 + (1-\epsilon)\,W(t) \end{aligned} \tag{4.49}$$

Ce qui nous donne donc :

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) \leq\ & \frac{1}{\bar{\alpha}} \left[\dot{f}(t) + f(t)^2 \left(1 + \frac{m\left[c_\lambda \sigma_{1c} + M_c\right]^2}{\lambda_{\min}(R^{-1})(1-\epsilon)} \right) \right] |e_w(t)|^2 \\ & + n\sigma_{1c}^2 U(t) + (1-\epsilon) W(t) \end{aligned} \tag{4.50}$$

En considérant le fait que $f(t) \leq 1$ pour tout $t \geq 0$ et en utilisant les lemmes 4.2 et 4.3, nous pouvons en déduire que :

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) \leq\ & \frac{1}{\alpha_1 \exp^{-2\mu T_1}} \left[\dot{f}(t) + 1 + \frac{m\left[c_\lambda \sigma_{1c} + M_c\right]^2 \left(\exp^T - 1\right)}{\alpha_0 \exp^{-T}\,(1 - \exp^{-T})\,(1-\epsilon)} \right] |e_w(t)|^2 \\ & + n\sigma_{1c}^2 U(t) + (1-\epsilon) W(t) \end{aligned} \tag{4.51}$$

4.3.2.3 Calcul de la dérivée de W

La dérivée de $W(t)$ peut s'écrire :

$$\dot{W}(t) = -\frac{1}{\bar{\alpha}}\left(\tilde{\rho}(t)^T R^{-1}\dot{R}R^{-1}\tilde{\rho}(t) - 2\tilde{\rho}(t)^T R^{-1}\dot{\tilde{\rho}}(t)\right) \tag{4.52}$$

Avec les équations (4.7d) et (4.7c), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\dot{W}(t) = &-\frac{1}{\bar{\alpha}}\tilde{\rho}(t)^T R^{-1}\left(-R\lambda(t)^T C^T C\lambda(t)R + R\right)R^{-1}\tilde{\rho}(t)\\ &-\frac{2}{\bar{\alpha}}\tilde{\rho}(t)^T \lambda(t)^T C^T\left(C\hat{x}(t) - w(t)\right)\end{aligned} \tag{4.53}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\dot{W}(t) = &-\frac{1}{\bar{\alpha}}\tilde{\rho}(t)^T R^{-1}\tilde{\rho}(t) - \frac{1}{\bar{\alpha}}\tilde{\rho}(t)^T \lambda(t)^T C^T C\lambda(t)\tilde{\rho}(t)\\ &-\frac{2}{\bar{\alpha}}\tilde{\rho}(t)^T \lambda(t)^T C^T\left(Cz(t) + e_w(t)\right)\end{aligned} \tag{4.54}$$

En utilisant la propriété remarquable suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(t)^T \lambda(t)^T C^T C\lambda(t)\tilde{\rho}(t) + \tilde{\rho}(t)^T \lambda(t)^T C^T\left(Cz(t) + e_w(t)\right)\\ + \left(Cz(t) + e_w(t)\right)^T\left(Cz(t) + e_w(t)\right) \geq 0\end{aligned} \tag{4.55}$$

nous obtenons :

$$\dot{W}(t) \leq -W(t) + \frac{2}{\bar{\alpha}}|z(t)|^2 + \frac{2}{\bar{\alpha}}|e_w(t)|^2 \tag{4.56}$$

Ainsi, en utilisant (4.35) et le lemme 4.2, nous en déduisons :

$$\dot{W}(t) \leq -W(t) + 2U(t) + \frac{2}{\alpha_1 \exp^{-2\mu T_1}}|e_w(t)|^2 \tag{4.57}$$

4.3.2.4 Détermination de la période d'échantillonnage maximale admissible τ_{MASP}

La dérivée de la fonction de Lyapunov $V(t)$ peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) \leq & -\left(\mu - n\sigma_{1c}^2 - 2\right) U(t) \\ & + \left[1 + \frac{1}{\alpha_1 \exp^{-2\mu T_1}} \left(\dot{f}(t) + 1 + \frac{m\left[c_\lambda \sigma_{1c} + M_c\right]^2 \left(\exp^T - 1\right)}{\alpha_0 \exp^{-T} \left(1 - \exp^{-T}\right)(1-\epsilon)}\right) \right. \\ & \left. + \frac{2}{\alpha_1 \exp^{-2\mu T_1}}\right] |e_w(t)|^2 \\ & - \epsilon W(t)\end{aligned} \tag{4.58}$$

Ainsi, afin de prouver la convergence de notre observateur, nous choisissons la fonction $f(t)$ de telle sorte qu'elle satisfasse l'équation différentielle suivante :

$$\dot{f}(t) = -\frac{m\left(\exp^T - 1\right)\left(c_\lambda \sigma_{1c} + M_c\right)^2}{\alpha_0 e^{-T}\left(1 - \exp^{-T}\right)(1-\epsilon)} - \alpha_1 \exp^{-2\mu T_1} - 3 - \epsilon \tag{4.59}$$

pour $t \in [t_k, t_{k+1})$.
Nous obtenons alors :

$$\dot{V}(t) \leq -\left(\mu - n\sigma_{1c}^2 - 2\right) U(t) - \epsilon W(t) - \epsilon Q(t) \tag{4.60}$$

Ainsi, en choisissant μ suffisamment grand tel que :

$$\mu \geq n\sigma_{1c}^2 + 2 + \epsilon \tag{4.61}$$

nous satisfaisons l'inégalité (4.38a) et par conséquent nous pouvons affirmer que notre observateur est un observateur exponentiel pour le système (4.1) sous la condition que la fonction $f(t)$ satisfasse les conditions précédemment mentionnées.

Afin d'obtenir la stabilité exponentielle, nous allons déterminer la valeur maximale de la période d'échantillonnage qui permet de satisfaire les conditions sur la fonction $f(t)$. Pour ce faire, nous allons calculer la fonction $f(t)$ en intégrant l'équation (4.59) entre t_k et $t_k + \tau$. En considérant les conditions aux limites $f(t_k) = 1$ et $f(t_k + \tau) \to 0$, nous pouvons en déduire la valeur maximale de la période d'échantillonnage pour une

vitesse de convergence ϵ donnée :

$$\tau = \frac{\alpha_0 \exp^{-T}\left(1 - \exp^{-T}\right)(1-\epsilon)}{m\left(\exp^{T} - 1\right)\left[c_\lambda \sigma_{1c} + M_c\right]^2 + \alpha_0 \exp^{-T}\left(1 - \exp^{-T}\right)\left(\alpha_1 \exp^{-2\mu T_1} + 3 + \epsilon\right)(1-\epsilon)} \tag{4.62}$$

Et nous pouvons remarquer que cette valeur de la période d'échantillonnage est maximale pour $\epsilon \to 0^+$. Nous pouvons alors en déduire l'expression de la période d'échantillonnage maximale admissible τ_{MASP} :

$$\tau_{MASP} = \frac{\alpha_0 \exp^{-T}\left(1 - \exp^{-T}\right)}{m\left(\exp^{T} - 1\right)\left[c_\lambda \sigma_{1c} + M_c\right]^2 + \alpha_0 \exp^{-T}\left(1 - \exp^{-T}\right)\left(\alpha_1 \exp^{-2\mu T_1} + 3\right)} \tag{4.63}$$

Ceci termine la démonstration.

Remarque 4.1:
Les constantes T, α_0, T_1 et α_1 sont prépondérantes pour déterminer la valeur maximale de la période d'échantillonnage. Cependant, il est difficile de les déterminer du fait de la difficulté à vérifier la condition sur le grammien d'observabilité. Toutefois, dans la pratique, certains outils numériques comme la somme de Riemann nous permettent de retrouver ces constantes numériquement. En effet, puisque $\phi(t)$ ne dépend pas des états du système, les constantes qui satisfont la condition peuvent être déterminées préalablement.

Remarque 4.2:
Il est évident que la période d'échantillonnage maximale admissible que nous avons déterminée dans ce chapitre est une condition suffisante pour la convergence de l'observateur mais elle n'est pas nécessaire. Il est possible d'avoir, dans les simulations, une convergence de l'observateur pour certaines valeurs supérieures à la borne τ_{MASP} que nous avons déterminée dans ce chapitre. Le problème de la détermination de la valeur optimale de τ_{MASP} reste ouvert.

4.4 Exemple

Nous présentons les performances de l'observateur proposé (4.7) à travers un exemple académique de système du second ordre appartenant à la classe de système considéré (4.1).

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + \sin(\mathrm{w}_1 t)\rho_1 & (4.64a) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + \dfrac{\cos(\mathrm{w}_1 t)}{1+t^2}\rho_2 + (2+\tanh(t))\,u(t) & (4.64b) \end{cases}$$

où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}$ sont respectivement le vecteur des états du système et le vecteur des paramètres inconnus.

Nous pouvons remarquer que le système considéré dans cet exemple appartient bien à la classe de systèmes étudiée. En effet, le système peut se réécrire sous la forme (4.1) en posant :

$$A(u(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B(u(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ (2+\tanh(t))\,u \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \phi(t) = \begin{bmatrix} \sin(\mathrm{w}_1 t) & 0 \\ 0 & \dfrac{\cos(\mathrm{w}_1 t)}{1+t^2} \end{bmatrix}$$

Les simulations ont été réalisées avec $\mathrm{w}_1 = 20\mathrm{rad/s}$ et l'entrée $u(t) = 10\sin(t)$. Les conditions initiales et les paramètres inconnus du système sont choisis comme suit :

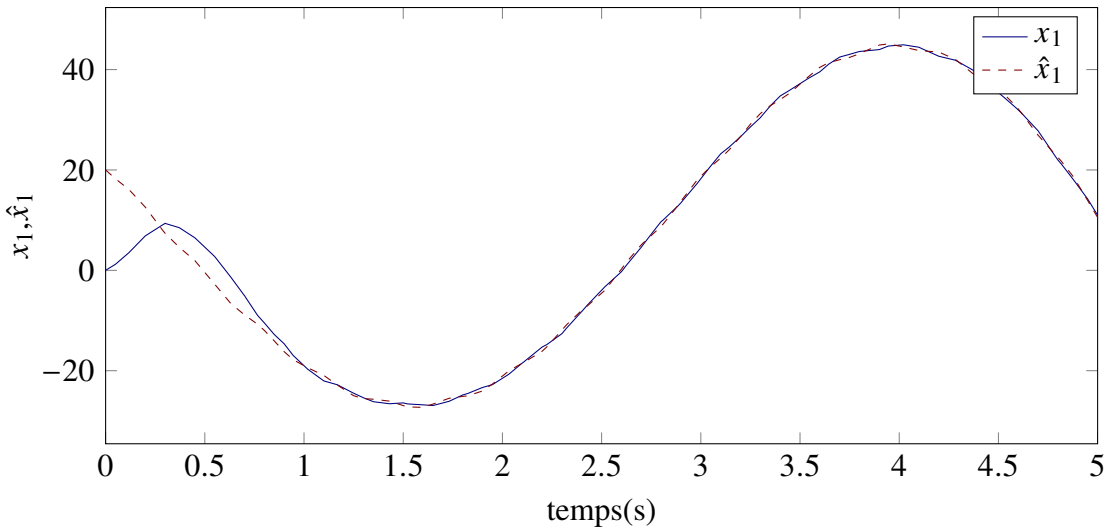
$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -40 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Nous choisissons le paramètre de synthèse de l'observateur $\mu = 10$. Nous fixons les conditions des matrices S et R respectivement à $S(0) = \mathbf{I}_2$ et $R(0) = \mathbf{I}_2$ et celles des estimées des états du système sont choisies nulles $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = 0$. De même, les estimées des paramètres inconnus sont fixées initialement nulles $\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_2 = 0$. Nous fixons également $\lambda(0) = O_2$.

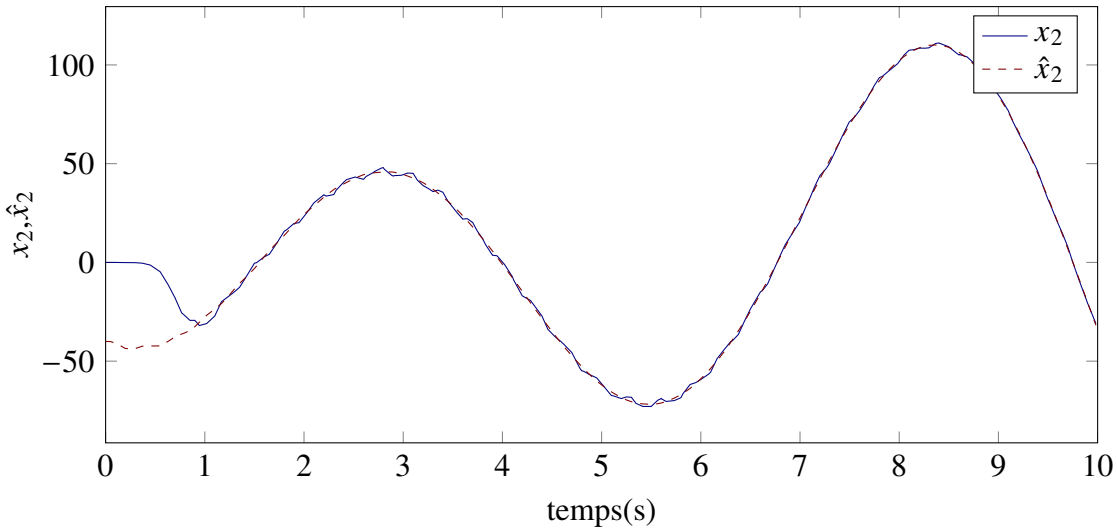
Afin de mettre en évidence l'influence de la période d'échantillonnage sur la convergence de l'observateur (4.7), nous allons montrer deux séries de résultats de simulation

qui correspondent à deux périodes d'échantillonnage différentes.

Les figures 4.1 et 4.2 montrent respectivement la convergence des états estimés et des estimées des paramètres inconnus pour une période d'échantillonnage choisie constante et égale à $T_e = 0.1s$.

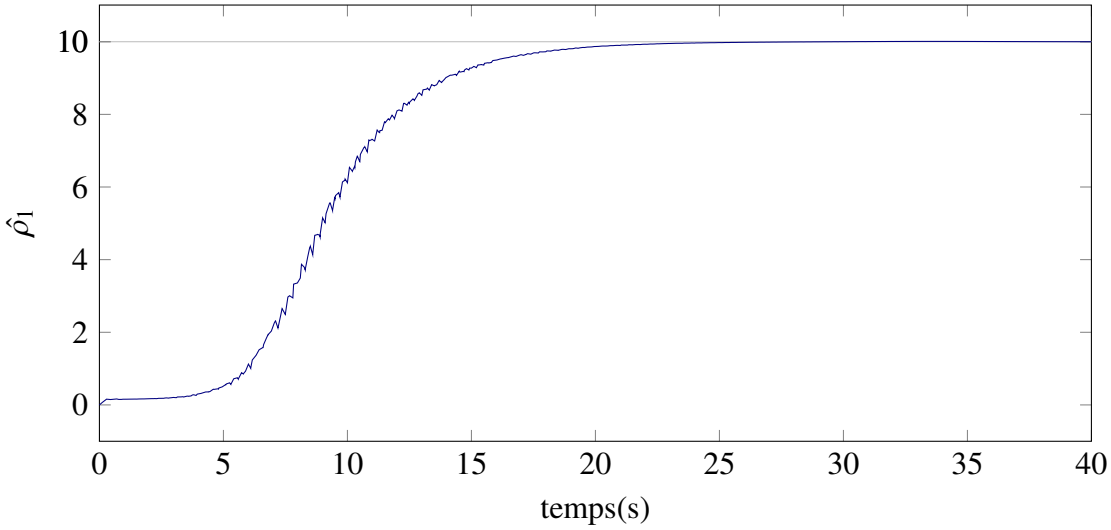


(a) Évolution de l'état x_1 et de son estimée

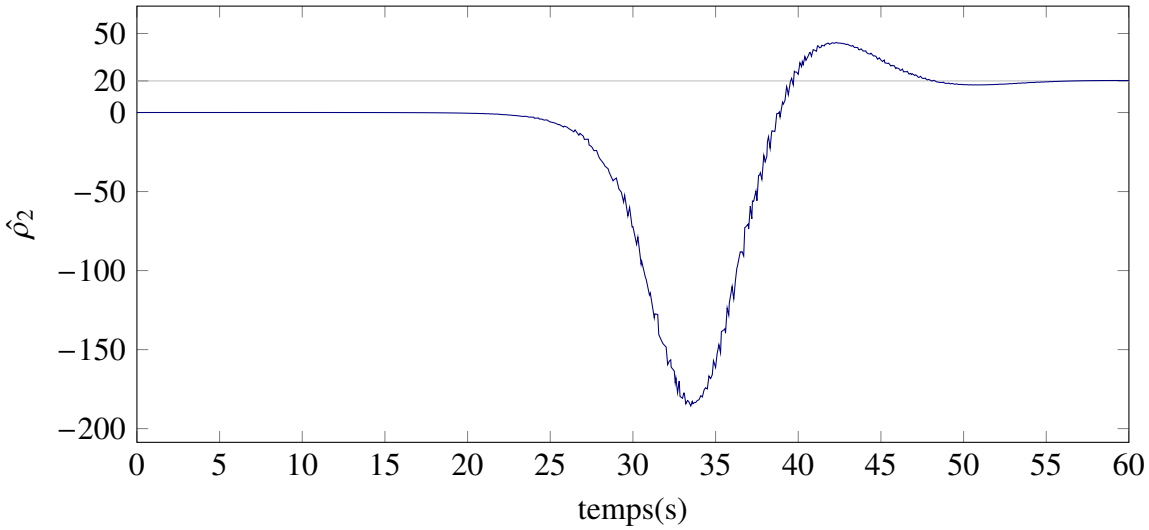


(b) Évolution de l'état x_2 et de son estimée

FIGURE 4.1: Évolution de l'état du système et de son estimée fournie par un observateur avec un inter-sample predictor pour une période d'échantillonnage $T_e = 0.1s$



(a) Évolution de l'estimée du paramètre inconnu $\hat{\rho}_1$ ($\rho_1 = 10$)

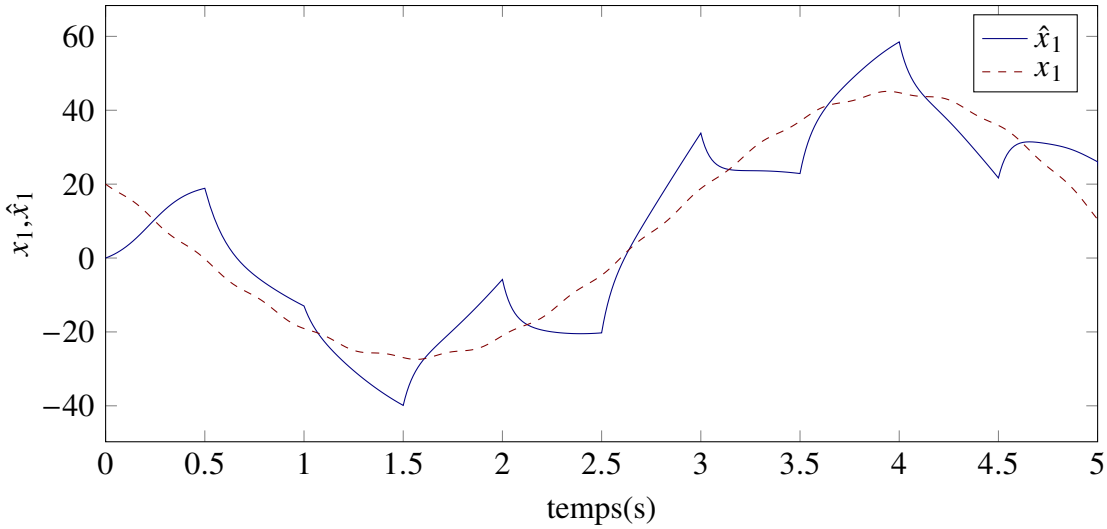


(b) Évolution de l'estimée du paramètre inconnu $\hat{\rho}_2$ ($\rho_1 = 10$)

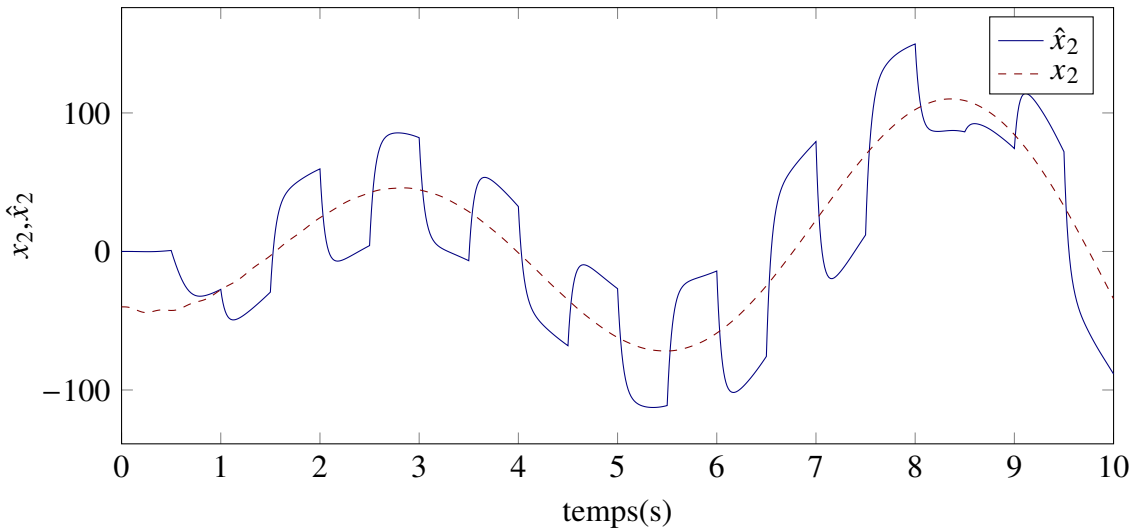
FIGURE 4.2: Évolution de l'estimée des paramètres inconnus fournie par un observateur avec un intersample predictor pour une période d'échantillonnage $T_e = 0.1s$

Nous conservons les valeurs des paramètres du système et de l'observateur et nous augmentons la valeur de la période d'échantillonnage $T_e = 0.5s$. Nous constatons, comme nous pouvions nous y attendre, que pour de grandes valeurs de la période d'échantillonnage l'erreur d'observation diverge. Les figures 4.3 et **??** illustrent ce phé-

nomène.



(a) Évolution de l'état x_1 et de son estimée



(b) Évolution de l'état x_2 et de son estimée

FIGURE 4.3: Évolution de l'état du système et de son estimée fournie par un observateur avec un intersample predictor pour une période d'échantillonnage $T_e = 0.5s$ (supérieure à la borne τ_{MASP} pratique)

4.5 Observateur en mode bloqueur d'ordre zéro

Dans l'observateur ci-dessous, le prédicteur est remplacé par un bloqueur d'ordre zéro. Cet observateur est une extension aux systèmes affines en l'état avec paramètres inconnus des travaux de [Raff 08] qui traite les systèmes non linéaires globalement Lipschitz. Le terme de correction est maintenu constant entre les instants d'échantillonnage et est mis à jour aux instants d'échantillonnage. Nous avons comme pour l'observateur précédent, un observateur continu mais, ici, la dynamique de l'erreur d'observation est impulsive.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(u(t))\,\hat{x}(t) + B(u(t)) + \phi(t)\hat{\rho}(t) \\ \qquad - S^{-1}(t)C^T(C\hat{x}(t_k) - w(t)) & (4.65a) \\ \dot{w}(t) = 0 & (4.65b) \\ w(t_k) = y(t_k) & (4.65c) \\ \dot{\hat{\rho}}(t) = -R\lambda(t)^T C^T(C\hat{x}(t_k) - w(t)) & (4.65d) \\ \dot{R} = -R\lambda(t)^T C^T C\lambda(t)R + R & (4.65e) \\ \dot{\lambda}(t) = \left(A(u(t)) - S^{-1}(t)C^T C\right)\lambda(t) + \phi(t) & (4.65f) \\ \dot{S}(t) = -\mu S(t) - S(t)A(u(t)) - A(u(t))^T S(t) + C^T C & (4.65g) \end{cases}$$

Dans ce cas, nous pouvons utiliser une fonction de Lyapunov-Krasovskii pour prouver la convergence exponentielle de cet observateur. En effet, nous assimilons l'intervalle entre l'instant actuel et l'instant d'échantillonnage à un retard variant comme dans [Van Assche 11]. Ainsi, en introduisant la variable $\tau(t) = t - t_k$ où t_k est l'instant d' échantillonnage, l'intervalle entre l'instant actuel et l'instant d'échantillonnage est alors définie telle que :

$$\begin{cases} \dot{\tau}(t) = 1 \qquad \text{pour } t \in [t_k, t_{k+1}) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \\ \tau(t_k) = 0 \end{cases} \tag{4.66}$$

Les équations de l'estimée du vecteur et de l'estimée des paramètres inconnus (4.65a) et (4.65d) peuvent se réécrire en remplaçant t_k par $t - \tau(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(u(t))\,\hat{x}(t) + B(u(t)) + \phi(t)\hat{\rho}(t) - S^{-1}(t)C^T(C\hat{x}(t-\tau(t)) - w(t)) \\ \qquad + \lambda(t)\dot{\hat{\rho}}(t) \\ \dot{\hat{\rho}}(t) = -R\lambda(t)^T C^T(C\hat{x}(t-\tau(t)) - w(t)) \end{cases}$$

Nous énonçons le théorème suivant qui stipule la convergence exponentielle de l'observateur en mode bloqueur d'ordre zéro (4.65).

Théorème 4.6:
Sous les hypothèses 4.1 à 4.4, pour toute valeur suffisamment large de μ, il existe une borne supérieure de l'intervalle entre les instants d'échantillonnage, τ_{MASP}, telle que pour toute période d'échantillonnage $\tau \in (0, \tau_{MASP})$, l'observateur en mode bloqueur d'ordre zéro décrit par les équations (4.65) est un observateur global exponentiel pour le système (4.1).

En considérant, l'observateur décrit ci-dessus, nous pouvons réécrire l'équation de la dérivée de l'erreur d'observation $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) = &\left(A(u(t)) - S^{-1}(t)C^TC\right)\tilde{x}(t) + \phi(t)\tilde{\rho}(t) + S^{-1}(t)C^TC\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot{\tilde{x}}(s)\,\mathrm{ds} \\ &+ \lambda(t)\dot{\tilde{\rho}}(t) \end{aligned} \tag{4.67}$$

De même, nous avons l'erreur d'estimation des paramètres inconnus qui s'écrit :

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = -R\tilde{\rho}(t)^T\,\lambda(t)^TC^T\,(Cz(t) + \lambda(t)\tilde{\rho}(t)) + R\tilde{\rho}(t)^T\,\lambda(t)^TC^TC\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot{\tilde{x}}(s)\,\mathrm{ds} \tag{4.68}$$

Ainsi, en introduisant le même changement de variable, nous pouvons trouver une relation similaire pour la dérivée de $z(t) = \tilde{x}(t) - \lambda(t)\tilde{\rho}(t)$:

$$\dot{z}(t) = \left(A(u(t)) - S^{-1}(t)C^TC\right)z(t) + S^{-1}(t)C^TC\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot{\tilde{x}}(s)\,\mathrm{ds} \tag{4.69}$$

Nous nous contenterons ici de proposer une fonction de Lyapunov qui nous permet de déterminer une valeur maximale du retard $\tau(t)$ telle que la convergence exponentielle

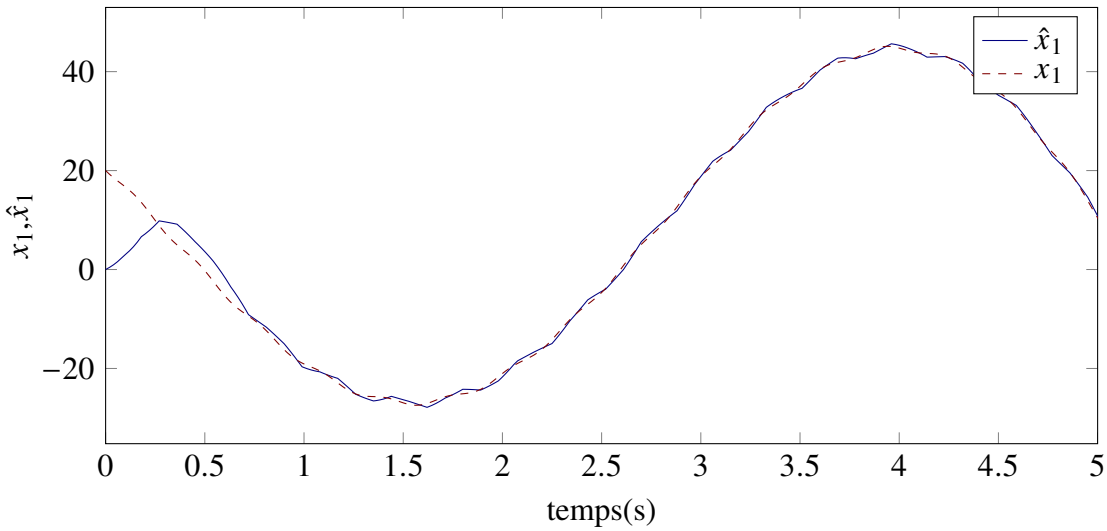
de l'observateur soit assurée. Il est évident que la valeur maximale du retard $\tau(t)$ est la période d'échantillonnage maximale admissible τ_{MASP} telle que définie précédemment. Nous proposons donc la fonction de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V = U(z(t)) + W(\tilde{\rho}(t)) + \int_{t-\tau_{MASP}}^{t} \int_{s}^{t} |\dot{\tilde{x}}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}s \tag{4.70}$$

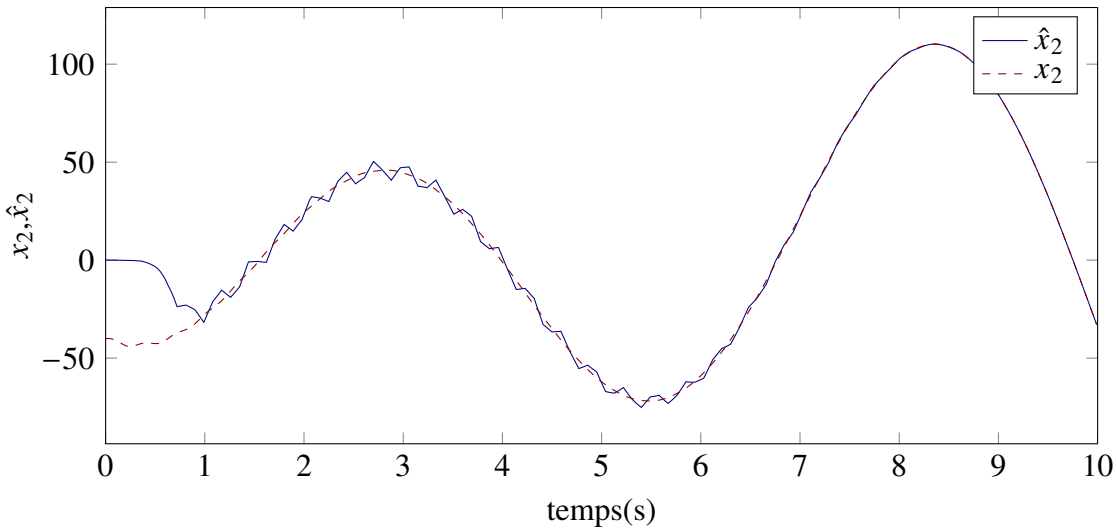
En suivant une démarche similaire aux travaux de [Van Assche 11], il est possible de déterminer une borne τ_{MASP} de la période d'échantillonnage.

Les figures suivantes mettent en évidence les performances de cet observateur pour le même système que dans la section 4.4. Nous avons gardé les mêmes conditions de simulation (tous les paramètres sont inchangés). La période d'échantillonnage a été choisie constante et égale à $\tau = 0.09s$.

Nous rappelons ici que les conditions sur la borne τ_{MASP} de la période d'échantillonnage sont des conditions suffisantes. Il est possible d'avoir en simulation une convergence pour des valeurs supérieures à la borne *théorique*. Si nous comparons les performances des deux observateurs proposés dans ce chapitre sur l'exemple du système (4.64), nous obtenons une borne *pratique* plus grande pour le premier observateur. Ce résultat est prévisible étant donné que l'observateur (4.7) dispose d'une estimation de la sortie entre les instants d'échantillonnage tandis que l'observateur (4.65) bien que continu, ne tient pas compte de la dynamique du système entre les instants d'échantillonnage. Toutefois, dans l'état actuel de nos travaux, il n'est pas possible d'affirmer que nous avons une borne de la période d'échantillonnage τ_{MASP} supérieure pour l'observateur (4.7) vu que nous n'avons pas déterminé leur valeur optimale.

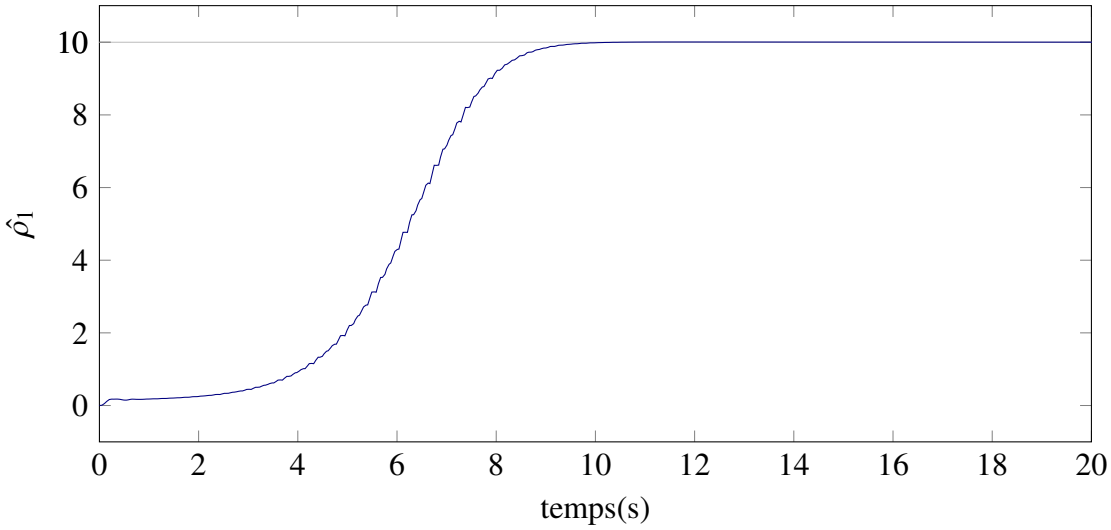


(a) Évolution de l'état estimé $\hat{x}_1$

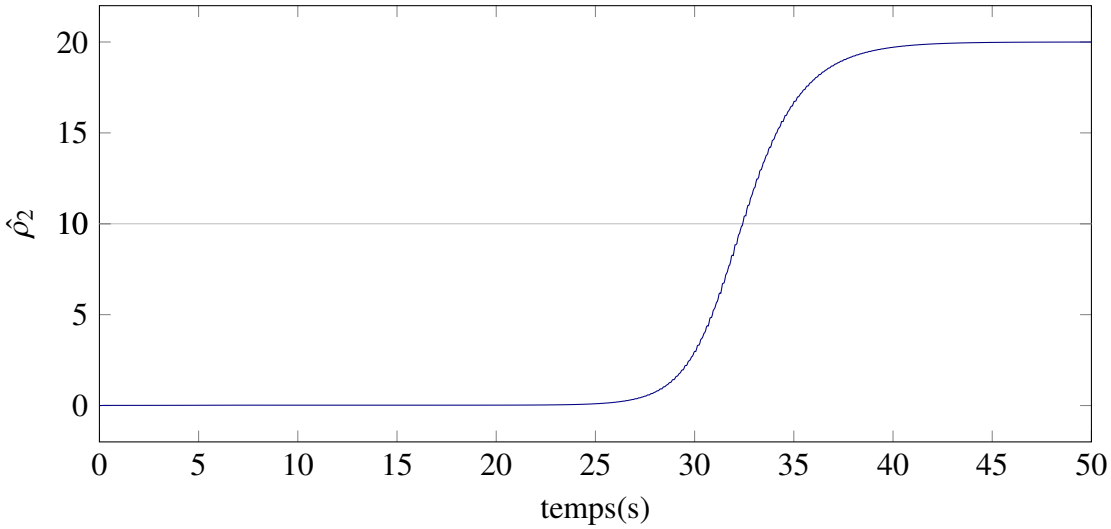


(b) Évolution de l'état estimé $\hat{x}_2$

FIGURE 4.4: Évolution de l'état du système et de son estimée fournie par un observateur en mode bloqueur d'ordre zéro pour une période d'échantillonnage $T_e = 0.09s$



(a) Évolution de l'estimée du paramètre inconnu $\hat{\rho}_1$



(b) Évolution de l'estimée du paramètre inconnu $\hat{\rho}_2$

FIGURE 4.5: Évolution de l'estimée des paramètres inconnus fournie par un observateur en mode bloqueur d'ordre zéro pour une période d'échantillonnage $T_e = 0.09s$

4.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre deux observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes non linéaires continus contenant des paramètres inconnus, mais constants, et avec une sortie échantillonnée. Dans le premier, nous avons utilisé un prédicteur *(inter-sample predictor)* de la sortie du système, comme dans les travaux de [Karafyllis 09], afin d'avoir une estimée de cette sortie entre deux instants d'échantillonnage qui nous permet de construire un observateur adaptatif exponentiellement convergeant. Dans le deuxième, nous avons maintenu le terme correcteur constant entre deux instants d'échantillonnage et nous avons également obtenu le même type de convergence que pour le premier observateur. L'avantage de ces deux structures réside, d'une part, dans leur simplicité de mise en œuvre comparée à l'observateur continu-discret développé dans [Ahmed-Ali 09b] et, d'autre part, dans le fait qu'ils nous fournissent, tous les deux, des estimées continues que ce soit pour l'état ou pour les paramètres inconnus. Nous avons aussi déterminé, en utilisant une approche de Lyapunov, une condition suffisante sur la borne supérieure de la période d'échantillonnage de la sortie du système garantissant une convergence exponentielle des deux observateurs proposés.

Chapitre 5

Conclusion générale et perspectives

Nous avons présenté dans cette thèse plusieurs observateurs pour des systèmes non linéaires soumis à des contraintes de communication. Nous avons étudié différents types de contraintes liés notamment aux systèmes commandés à travers un réseau. Nous nous sommes essentiellement intéressés à trois types de contraintes que l'on rencontre dans les systèmes commandés en réseau : l'échantillonnage, le retard et l'ordonnancement. Nos travaux peuvent ainsi être répartis en trois principales contributions.

Notre première contribution concerne la synthèse d'observateurs pour les systèmes contrôlés en réseau (*Networked Control Systems : NCS*). Nous traitons en particulier trois des principales problématiques posées pour les NCS : les périodes de transmission variables, les retards de transmission et l'ordonnancement des données (qui entraîne le fait qu'à chaque instant de transmission seule une partie des sorties du système est disponible). Nous avons ainsi proposé un couple observateur-prédicteur d'état pour les systèmes non linéaires globalement Lipschitz avec sorties retardées et régis par un protocole périodique. Cette structure nous permet d'avoir des retards qui peuvent être supérieurs à l'intervalle entre deux transmissions successives. Nous nous basons sur une approche small-gain pour déterminer des conditions sur l'intervalle de transmission maximal admissible et le retard maximal admissible permettant de conserver les propriétés de convergence de l'observateur. Ces travaux pourront être étendus à d'autres classes de protocole notamment les protocoles *UGES*(uniformément globalement exponentiellement stable).

Nous avons également présenté une contribution sur les observateurs pour les sys-

tèmes non linéaires globalement Lipschitz avec sorties échantillonnées. Nous proposons deux observateurs qui utilisent un gain dynamique (contrairement aux observateurs de type grand gain classique) afin d'améliorer la période d'échantillonnage maximale admissible. Nous utilisons une approche de Lyapunov et une approche small-gain pour déterminer les conditions de convergence de ces observateurs. Nous avons montré par ailleurs que l'observateur proposé permet de diminuer la sensibilité aux bruits de mesure qui est un des problèmes majeurs de l'observateur grand-gain.

Enfin, nous avons proposé deux observateurs adaptatifs pour les systèmes affines en l'état comportant des paramètres inconnus constants avec la sortie échantillonnée. Nous introduisons un prédicteur de la sortie afin de remédier à l'absence de mesure entre les instants d'échantillonnage. L'avantage de la structure proposée est que les états estimés et les estimées des paramètres inconnus sont continus et ne sont pas mis à jour aux instants d'échantillonnage. Ceci permet une plus grande simplicité de mise en œuvre. Nous utilisons une approche de Lyapunov pour déterminer explicitement une période d'échantillonnage maximale admissible afin de garantir la convergence exponentielle des états et des paramètres estimés.

Les futures directions qui peuvent faire l'objet d'autres recherches sont nombreuses :

- Les résultats obtenus au chapitre 2 peuvent être étendus à d'autres classes de protocoles telles que celle des protocoles UGES ou la classe des protocoles quadratiques en utilisant la classification introduite dans [Donkers 11].

- La commande par retour de sortie des systèmes non linéaires commandés par réseau est la continuité évidente de nos travaux. En effet, il est possible de combiner l'observateur que nous avons synthétisé dans le premier chapitre avec une commande.

Bibliographie

[Ahmed-Ali 09a] T. Ahmed-Ali, E. Cherrier & M. M'Saad. *Cascade high gain observers for nonlinear systems with delayed output measurement*. In Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009, pages 8226–8231, dec. 2009. 6

[Ahmed-Ali 09b] Tarek Ahmed-Ali, Romain Postoyan & Françoise Lamnabhi-Lagarrigue. *Continuous-discrete adaptive observers for state affine systems*. Automatica, vol. 45, no. 12, pages 2986–2990, 2009. 17, 75, 101

[Ahmed-Ali 12] T. Ahmed-Ali & F. Lamnabhi-Lagarrigue. *High Gain Observer Design for Some Networked Control Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 57, no. 4, pages 995–1000, april 2012. 8, 15, 17, 19, 86

[Ahmed-Ali 13] Tarek Ahmed-Ali, Iasson Karafyllis & Françoise Lamnabhi-Lagarrigue. *Global exponential sampled-data observers for nonlinear systems with delayed measurements*. Systems & Control Letters, vol. 62, no. 7, pages 539 – 549, 2013. 16, 20, 23, 24, 28

[Andrieu 09] V. Andrieu, L. Praly & A. Astolfi. *High gain observers with updated gain and homogeneous correction terms*. Automatica, vol. 45, no. 2, pages 422 – 428, 2009. 47

[Assoudi 02] A. Assoudi, E. Yaagoubi & H. Hammouri. *Non-linear observer based on the Euler discretization*. International Journal of Control, vol. 75, pages 784–791, 2002. 5

[Astrom 90] Karl J. Astrom & Bjorn Wittenmark. Computer-controlled systems : theory and design (2nd ed.). Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1990. 5

[Bastin 88] G. Bastin & M. R. Gevers. *Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 33, pages 650–658, 1988. 75

[Bauer 10] N.W. Bauer, M. C F Donkers, W. P M H Heemels & N. Van de Wouw. *An approach to observer-based decentralized control under periodic protocols*. In American Control Conference (ACC), 2010, pages 2125–2131, 2010. 14

[Bauer 13] N.W. Bauer, M.C.F. Donkers, N. van de Wouw & W.P.M.H. Heemels. *Decentralized observer-based control via networked communication*. Automatica, vol. 49, no. 7, pages 2074 – 2086, 2013. 14

[Besançon 96] Gildas Besançon, Guy Bornard & Hassan Hammouri. *Observer Synthesis for a class of nonlinear control systems*. European Journal of Control, pages 176–192, 1996. 80

[Besancon 00] Gildas Besancon. *Remarks on nonlinear adaptive observer design*. Systems & Control Letters, vol. 41, no. 4, pages 271–280, 2000. 75

[Besançon 07a] Gildas Besançon. *An Overview on Observer Tools for Nonlinear Systems*. In Nonlinear Observers and Applications, volume 363 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 1–33. Springer Berlin Heidelberg, 2007. 78

[Besançon 07b] Gildas Besançon. *Parameter/Fault Estimation in Nonlinear Systems and Adaptive Observers*. In Nonlinear Observers and Applications, volume 363 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 211–222. Springer Berlin Heidelberg, 2007. 80

[Busawon 98] K. Busawon, M. Farza & H. Hammouri. *A simple observer for a class of nonlinear systems*. Applied Mathematics Letters, vol. 11, no. 3, pages 27 – 31, 1998. 47

[Cacace 10] F. Cacace, A. Germani & C. Manes. *An observer for a class of nonlinear systems with time varying observation delay*. Systems & Control Letters, vol. 59, no. 5, pages 305 – 312, 2010. 19

[Cacace 12] F. Cacace, A. Germani & C. Manes. *An exponential observer with delay-dependent gain for a class of nonlinear systems with time-varying measurement delay*. In IEEE 51st Annual Conference on Decision and Control (CDC), 2012, pages 2364–2369, 2012. 17, 48, 74

[Carnevale 07] D. Carnevale, A. R. Teel & D. Nešić. *A Lyapunov Proof of an Improved Maximum Allowable Transfer Interval for Networked Control Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 52, no. 5, pages 892–897, may 2007. 10

[Chen 06] Chih-Chung Chen, S. Hirche & M. Buss. *Towards Quality-of-Service control of networked control systems : A switched time delay systems approach*. In 2006 IEEE Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control, pages 1325–1330, 2006. 3

[Cloosterman 07] M.B.G. Cloosterman, N. van de Wouw, W.P.M. Heemels & H. Nijmeijer. *Stability of networked control systems with large delays*. In 46th IEEE Conference on Decision and Control, 2007, pages 5017–5022, dec. 2007. 6

[Dačić 08] Dragan Dačić & Dragan Nešić. *Observer design for wired linear networked control systems using matrix inequalities*. Automatica, vol. 44, no. 11, pages 2840–2848, 2008. 14, 19

[Deza 92] F. Deza, E. Busvelle, J. P. Gauthier & D. Rakotopara. *High gain estimation for nonlinear systems*. Systems & Control Letters, vol. 18, no. 4, pages 295–299, 1992. 5, 19

[Donkers 09] M.C.F. Donkers, L. Hetel, W.P.M.H. Heemels, N. Wouw & M. Steinbuch. *Stability Analysis of Networked Control Systems Using a Switched Linear Systems Approach*. In Rupak Majumdar & Paulo Tabuada, editeurs, Hybrid Systems : Computation and Control, volume 5469 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 150–164. Springer Berlin Heidelberg, 2009. 11

[Donkers 11] M. C F Donkers, W. P M H Heemels, N. van de Wouw & L. Hetel. *Stability Analysis of Networked Control Systems Using a Switched Linear Systems Approach*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 56, no. 9, pages 2101–2115, 2011. 8, 11, 13, 14, 15, 21, 104

[Farza 09] M. Farza, M. M'Saad, T. Maatoug & M. Kamoun. *Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems*. Automatica, vol. 45, no. 10, pages 2292 – 2299, 2009. 75

[Fridman 02] Emilia Fridman. *Stability of linear descriptor systems with delay : a Lyapunov-based approach*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 273, no. 1, pages 24 – 44, 2002. 6

[Fridman 04] Emilia Fridman, Alexandre Seuret & Jean-Pierre Richard. *Robust sampled-data stabilization of linear systems : an input delay approach*. Automatica, vol. 40, no. 8, pages 1441 – 1446, 2004. 76

[Fridman 10] Emilia Fridman. *A refined input delay approach to sampled-data control*. Automatica, vol. 46, no. 2, pages 421 – 427, 2010. 6, 18, 55

[Gao 08] Huijun Gao, Tongwen Chen & James Lam. *A new delay system approach to network-based control*. Automatica, vol. 44, no. 1, pages 39 – 52, 2008. 6

[Gauthier 92] J.P. Gauthier, H. Hammouri & S. Othman. *A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 37, no. 6, pages 875–880, jun 1992. 47

[Gauthier 01] Jean-Paul Gauthier & Ivan Kupka. Deterministic observation theory and applications. Cambridge University Press, 2001. 47

[Germani 02] A. Germani, C. Manes & P. Pepe. *A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, no. 1, pages 96 –101, jan 2002. 6, 15, 19, 34

[Goffaux 09] G. Goffaux, A. Vande Wouwer & O. Bernard. *Improving continuous-discrete interval observers with application to microalgae-based bioprocesses*. Journal of Process Control, vol. 19, no. 7, pages 1182 – 1190, 2009. 5

[Goffaux 13] G. Goffaux, M. Remy & A. Vande Wouwer. *Continuous-discrete confidence interval observer—Application to vehicle positioning*. Information Fusion, vol. 14, no. 4, pages 541 – 550, 2013. 5

[Gu 03] K. Gu, V. Kharitonov & J. Chen. Stability of time-delay systems. Birkhauser, 2003. 6, 53

[Gupta 08] Rachana A. Gupta & Mo-Yuen Chow. *Overview of Networked Control Systems*. In Fei-Yue Wang & Derong Liu, editeurs, Networked Control Systems, pages 1–23. Springer London, 2008. 2

[Guyader 03] Arnaud Guyader & Qinghua Zhang. *Adaptive observer for discrete time linear time varying systems*. In 3th IFAC/IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation - SYSID'2003, Rotterdam, 2003. 75

[Hammouri 02] H. Hammouri, P. Kabore, S. Othman & J. Biston. *Failure diagnosis and nonlinear observer. Application to a hydraulic process*. Journal of the Franklin Institute, vol. 339, no. 4-5, pages 455–478, 2002. 5

[Heemels 09] W.P.M.H. Heemels, D. Nešić, A.R. Teel & N. van de Wouw. *Networked and quantized control systems with communication delays*. In Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009., pages 7929 –7935, dec. 2009. 4, 10

[Heemels 10a] W.P.M.H. Heemels, A.R. Teel, N. van de Wouw & D. Nešić. *Networked Control Systems With Communication Constraints : Tradeoffs Between Transmission Intervals, Delays and Performance*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 55, no. 8, pages 1781 –1796, aug. 2010. 8, 10, 16, 19, 20

[Heemels 10b] W.P.M.H. Heemels & N. Wouw. *Stability and Stabilization of Networked Control Systems*. In Alberto Bemporad, Maurice Heemels & Mikael Johansson, editeurs, Networked Control Systems, volume 406 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 203–253. Springer London, 2010. 8

[Hespanha 07] J.P. Hespanha, P. Naghshtabrizi & Yonggang Xu. *A Survey of Recent Results in Networked Control Systems*. Proceedings of the IEEE, vol. 95, no. 1, pages 138–162, jan. 2007. 2

[Karafyllis 07] Iasson Karafyllis & Costas Kravaris. *On the Observer Problem for Discrete-Time Control Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 52, no. 1, pages 12–25, 2007. 15, 19

[Karafyllis 08] Iasson Karafyllis & Costas Kravaris. *From Continuous-Time Design to Sampled-Data Design of Nonlinear Observers*. In 47th IEEE Conference on Decision and Control, 2008. CDC 2008., pages 15408 – 5413, 2008. 15, 17

[Karafyllis 09] I. Karafyllis & C. Kravaris. *From Continuous-Time Design to Sampled-Data Design of Observers*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 54, no. 9, pages 2169–2174, sept. 2009. 5, 76, 101

[Kazantzis 05] Nikolaos Kazantzis & Raymond A. Wright. *Nonlinear observer design in the presence of delayed output measurements*. Systems & Control Letters, vol. 54, no. 9, pages 877 – 886, 2005. 7, 19

[Khalil 02] Hassan K. Khalil. Nonlinear systems. Prentice Hall, Upper Saddle River (New Jersey), 2002. 6

[Kreisselmeier 77] G. Kreisselmeier. *Adaptive observers with exponential rate of convergence*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 22, no. 1, pages 2–8, feb 1977. 75

[Laila 06] Dina Shona Laila & Alessandro Astolfi. *Sampled-data observer design for a class of nonlinear systems with applications*. In 17th International Symposium on Mathematical theory of Networks and Systems, pages 715–722, Kyoto, Japan, 2006. 5

[Levant 98] Arie Levant. *Robust exact differentiation via sliding mode technique*. Automatica, vol. 34, no. 3, pages 379 – 384, 1998. 15, 34

[Liberzon 03] Daniel Liberzon. *Hybrid feedback stabilization of systems with quantized signals*. Automatica, vol. 39, no. 9, pages 1543–1554, 2003. 3, 4

[Marino 95] R. Marino & P. Tomei. *Adaptive observers with arbitrary exponential rate of convergence for nonlinear systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 40, no. 7, pages 1300–1304, jul 1995. 75

[Nadri 03] M. Nadri & H. Hammouri. *Design of a continuous-discrete observer for state affine systems*. Applied Mathematics Letters, vol. 16, no. 6, pages 967–974, 2003. 5, 19, 75

[Nadri 04] M. Nadri, H. Hammouri & C.M. Astorga. *Observer design for continuous-discrete time state affine systems up to ouput injection*. European Journal of Control, vol. 10, pages 252–263, 2004. 5

[Naghshtabrizi 05] P. Naghshtabrizi & J.P. Hespanha. *Designing an observer-based controller for a network control system*. In 44th IEEE Conference on Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05., pages 848 – 853, dec. 2005. 6

[Naghshtabrizi 06] Payam Naghshtabrizi & Joao P. Hespanha. *Stability of network control systems with variable sampling and delays*. In Proc. of the Forty-Fourth Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing, 2006. 6

[Naghshtabrizi 07] Payam Naghshtabrizi. *Delay Impulsive Systems : A Framework For Modeling Networked Control Systems*. PhD thesis, UNIVERSITY of CALIFORNIA Santa Barbara, USA, Septembre 2007. 84

[Naghshtabrizi 08] Payam Naghshtabrizi, João Pedro Hespanha & Andrew R. Teel. *Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems*. Systems & Control Letters, vol. 57, no. 5, pages 378–385, May 2008. 5, 17, 83, 85

[Nešić 04a] D. Nešić & A.R. Teel. *Input-output stability properties of networked control systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 49, no. 10, pages 1650–1667, oct. 2004. 8, 10, 15

[Nešić 04b] D. Nešić & A.R. Teel. *Input-to-state stability of networked control systems*. Automatica, vol. 40, no. 12, pages 2121 – 2128, 2004. 8, 10

[Nešić 09] D. Nešić & D. Liberzon. *A Unified Framework for Design and Analysis of Networked and Quantized Control Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 54, no. 4, pages 732 –747, april 2009. 4

[Postoyan 09] R. Postoyan. *Commande et construction d'observateurs pour les systèmes non linéaires incertains à données échantillonnées et en réseau*. PhD thesis, Paris Sud University-LSS-SUPELEC, France, 2009. 1

[Postoyan 10] R. Postoyan & D. Nešič. *A framework for the observer design for networked control systems*. In American Control Conference (ACC), 2010, pages 3678 –3683, 30 2010-july 2 2010. 15

[Postoyan 12] R. Postoyan & D. Nešić. *A Framework for the Observer Design for Networked Control Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 57, no. 5, pages 1309 –1314, may 2012. 9, 19

[Praly 03] Laurent Praly. *Asymptotic stabilization via output feedback for lower triangular systems with output dependent incremental rate*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 48, no. 6, pages 1103–1108, 2003. 16, 47, 48, 59, 61, 74

[Raff 08] Tobias Raff, Markus Kogel & F. Allgower. *Observer with sample-and-hold updating for Lipschitz nonlinear systems with nonuniformly sampled measurements*. In American Control Conference, 2008, pages 5254–5257, 2008. 5, 17, 19, 48, 76, 96

[Richard 03] Jean-Pierre Richard. *Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems*. Automatica, vol. 39, no. 10, pages 1667 – 1694, 2003. 6

[Sontag 89] E.D. Sontag. *Smooth stabilization implies coprime factorization*. Automatic Control, IEEE Transactions on, vol. 34, no. 4, pages 435–443, 1989. 23

[Tanenbaum 02] Andrew Tanenbaum. Computer networks. Prentice Hall Professional Technical Reference, 4th edition, 2002. 3, 7

[Van Assche 11] V. Van Assche, T. Ahmed-Ali, C. A. B. Hann & F. Lamnabhi-Lagarrigue. *High gain observer design for nonlinear systems with time varying delayed measurements*. In 18th IFAC World Congress, 2011. 6, 17, 18, 19, 47, 48, 76, 96, 98

[Walsh 99] G.C. Walsh, O. Beldiman & L. Bushnell. *Asymptotic behavior of networked control systems*. In Proceedings of the 1999 IEEE In-

ternational Conference on Control Applications, volume 2, pages 1448 –1453 vol. 2, 1999. 7

[Walsh 01] G.C. Walsh & Hong Ye. *Scheduling of networked control systems*. IEEE Control Systems, vol. 21, no. 1, pages 57–65, 2001. 7

[Walsh 02] G.C. Walsh, Hong Ye & L.G. Bushnell. *Stability analysis of networked control systems*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 10, no. 3, pages 438–446, may 2002. 7

[Zhang 01a] Qinghua Zhang & A. Clavel. *Adaptive observer with exponential forgetting factor for linear time varying systems*. In Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, 2001., volume 4, pages 3886–3891, 2001. 81

[Zhang 01b] Wei Zhang, M.S. Branicky & S.M. Phillips. *Stability of networked control systems*. Control Systems, IEEE, vol. 21, no. 1, pages 84–99, feb 2001. 2

[Zhang 02] Q. Zhang. *Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (MIMO) linear time-varying systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, no. 3, pages 525–529, mar 2002. 75, 80