



**HAL**  
open science

# Diffusion d'une onde électromagnétique par un objet au-dessus d'une surface rugueuse - Problème vectoriel 3D

Mohammad Kouali

► **To cite this version:**

Mohammad Kouali. Diffusion d'une onde électromagnétique par un objet au-dessus d'une surface rugueuse - Problème vectoriel 3D. Electronique. UNIVERSITE DE NANTES, 2012. Français. NNT : ED503-168 . tel-01104970

**HAL Id: tel-01104970**

**<https://hal.science/tel-01104970v1>**

Submitted on 19 Jan 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# Thèse de Doctorat

## Mohammad KOUALI

*Mémoire présenté en vue de l'obtention  
du grade de Docteur de l'Université de Nantes  
Sous le label de l'Université Nantes Angers Le Mans*

**Discipline : Electronique**  
**Spécialité : Electromagnétisme**  
**Laboratoire : IETR UMR 6164**

Soutenance le 28 septembre 2012

École doctorale Sciences et Technologies de l'Information et Mathématiques (STIM)  
Thèse N° ED503-168

## Diffusion d'une onde électromagnétique par un objet au-dessus d'une surface rugueuse *Problème vectoriel 3D*

### JURY

Président :	<b>Mme Elodie RICHALOT</b> , Professeur, ESYCOM, Université Marne la Vallée
Rapporteurs :	<b>Mme Hélène ROUSSEL</b> , Professeur, L2E, Université Pierre et Marie Curie, Jussieu <b>M. Lionel PICHON</b> , DR CNRS, LGEP, SUPELEC, Gif sur Yvette
Examineurs :	<b>M. Philippe POULIGUEN</b> , HDR, Responsable scientifique, DGA DS/MRIS, Bagneux
Directeur de Thèse :	<b>M. Christophe BOURLIER</b> , CR CNRS/HDR, IETR, Ecole polytechnique de l'université de Nantes
Co-encadrant :	<b>M. Gildas KUBICKE</b> , Docteur, Responsable du laboratoire EMC, DGA MI, Bruz
Invité :	<b>M. Gabriel SORIANO</b> , Maître de Conférences, Institut Fresnel, Université Aix Marseille



# Remerciements

Je tiens, tout d'abord, à remercier Monsieur le Professeur Joseph Saillard, l'ancien directeur du laboratoire IREENA de m'avoir accueilli au sein du laboratoire.

Les plus vifs remerciements et toutes mes sincères reconnaissances s'adressent à mes encadrants de thèse, Monsieur Christophe Bourlier et Gildas Kubické. Merci pour vos conseils avisés, votre pragmatisme, votre intégrité. Merci à vous deux de m'avoir permis de travailler ma thèse dans les meilleures conditions possibles.

Je tiens également à remercier Monsieur le professeur Lionel Pichon, et Mme la professeur Hélène Roussel, pour avoir accepté de rapporter cette thèse.

Je remercie aussi très vivement Monsieur Philippe Pouliguen, Responsable scientifique à la DGA, Mme la professeur Elodie Richalot, et Monsieur Gabriel Soriano, Maître de Conférences à l'institut Fresnel, pour avoir accepté d'examiner ce travail de thèse.

Je tiens à remercier aussi l'ensemble du personnel du laboratoire IETR pour leur gentillesse et leur aide qui fût précieuse et qui m'a permis de résoudre les difficultés administratives et logistiques que j'ai pu rencontrer durant cette thèse.

J'exprime mes sincères reconnaissances à mes amis (Abu Elnasser, Ahmad, Amjad, Mohammad Aboudeh, Ali, Amro, Zinedine, Abobakr, Mohammad Laid ...) qui ont été toujours présents lorsque j'en ai eu besoin.

Mes derniers remerciements sont bien sûr destinés au Consulat Générale de France à Jerusalem et l'Universtié d'Al-Quds pour financer cette thèse de doctorat.

---

*A mes parents*

*A ma femme*

*A mes enfants*

*A la grande famille*

*Et à tous mes amis*

# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>3</b>
<b>Liste des acronymes</b>	<b>11</b>
<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>1 Ondes électromagnétiques, méthodes de résolution</b>	<b>17</b>
1.1 Équations de Maxwell . . . . .	18
1.2 Équations de propagation, onde plane et équation de Helmholtz . . . . .	19
1.3 Conditions aux limites . . . . .	21
1.4 Fonction et théorème de Green . . . . .	22
1.5 Principe de Huygens et théorème d'extinction . . . . .	23
1.6 Approximation champ lointain . . . . .	25
1.7 Définition de la base d'onde sphérique . . . . .	26
1.8 Matrice de diffraction . . . . .	28
1.9 Puissances incidente, diffusée et Surface Equivalente Radar (SER) . . . . .	29
1.9.1 Puissances incidente, diffusée et transmise . . . . .	29
1.9.2 Surface Equivalente Radar (SER) . . . . .	30
1.10 Surface rugueuse aléatoire . . . . .	31
1.10.1 Rappels statistiques . . . . .	32
1.10.2 Génération d'une surface rugueuse . . . . .	34
1.11 Onde incidente atténuée sur les bords . . . . .	35
1.12 Méthodes de résolution du problème de la diffraction . . . . .	37
1.12.1 Modèles rigoureux . . . . .	37
1.12.2 Modèles asymptotiques hautes fréquences . . . . .	39
1.13 Etat de l'art : le choix des méthodes . . . . .	40
1.14 Conclusion . . . . .	43
<b>2 Diffusion par un diffuseur placé en espace libre</b>	<b>45</b>
2.1 La méthode de l'Optique Physique (OP) . . . . .	46

2.1.1	Application à une surface parfaitement conductrice (PC) en champ lointain . . . . .	47
2.1.2	Validation de l’OP pour le cas d’une plaque PC . . . . .	50
2.1.3	Validation de l’OP pour le cas d’une surface rugueuse PC . . . . .	52
2.2	Diffraction par une surface lisse PC avec l’équation intégrale EFIE . . . . .	58
2.2.1	Discrétisation de l’EFIE par la Méthode des Moments . . . . .	59
2.2.2	Validation du modèle “Mdm-EFIE” pour le cas d’une plaque lisse PC . . . . .	62
2.3	Diffusion par une surface rugueuse avec l’équation intégrale MFIE . . . . .	66
2.3.1	Discrétisation de la MFIE par la Méthode des Moments . . . . .	67
2.3.2	Validation du modèle “Mdm-MFIE” pour le cas d’une surface rugueuse . . . . .	69
2.4	Forward-Backward : FB . . . . .	75
2.4.1	Convergence de la méthode FB pour une surface rugueuse . . . . .	78
2.4.1.1	Effet de l’état de polarisation de l’onde incidente . . . . .	78
2.4.1.2	Effet de l’angle d’incidence $\theta_i$ . . . . .	79
2.4.1.3	Effet de l’écart-type des hauteurs $\sigma_z$ . . . . .	80
2.5	Forward-Backward- Spectral Acceleration (FB-SA) . . . . .	81
2.6	Conclusion . . . . .	88
<b>3</b>	<b>Diffusion d’une onde électromagnétique par deux diffuseurs</b> . . . . .	<b>91</b>
3.1	Positionnement du problème . . . . .	91
3.2	Diffusion de la scène par la méthode des moments . . . . .	92
3.2.1	Equations intégrales - cas de deux diffuseurs PC . . . . .	92
3.2.2	Discrétisation par la Méthode des Moments . . . . .	93
3.3	Méthode E-PILE étendue au cas 3D . . . . .	95
3.3.1	Intérêt de la méthode E-PILE classique . . . . .	95
3.3.1.1	Formulation mathématique . . . . .	95
3.3.1.2	Interprétation physique . . . . .	97
3.3.1.3	Convergence de E-PILE . . . . .	98
3.3.2	Validation de E-PILE pour le cas de deux plaques lisses superposées . . . . .	99
3.3.3	Validation de E-PILE pour le cas d’une plaque au-dessus d’une surface rugueuse . . . . .	101
3.3.4	Effet des paramètres de la scène sur la convergence de E-PILE . . . . .	103

---

3.3.4.1	Effet de l'angle d'incidence . . . . .	103
3.3.4.2	Effet de l'état de polarisation de l'onde incidente . . . . .	104
3.3.4.3	Effet de la taille du problème . . . . .	107
3.3.4.4	Effet de la distance entre les deux diffuseurs . . . . .	107
3.3.4.5	Effet de l'écart-type des hauteurs $\sigma_z$ . . . . .	108
3.4	Intégration de la FB dans la méthode E-PILE . . . . .	109
3.4.1	Convergence de la méthode E-PILE+FB . . . . .	109
3.4.2	Validation de E-PILE+FB pour le cas d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse . . . . .	110
3.5	Hybridation de E-PILE par intégration de l'Optique Physique . . . . .	112
3.5.1	Formulation mathématique de l'intégration de l'OP . . . . .	112
3.5.2	Validation de E-PILE+OP1+OP2 pour le cas de deux plaques lisses superposées . . . . .	116
3.5.3	Validation de E-PILE+OP1+OP2 pour le cas d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse . . . . .	116
3.5.4	Complexité de la méthode hybride . . . . .	122
3.6	Conclusion . . . . .	123
 <b>Conclusion</b>		 <b>125</b>
 <b>A Représentation intégrale des champs en 3D</b>		 <b>129</b>
 <b>Bibliographie</b>		 <b>133</b>



# Table des figures

1.1	Représentation des champs électromagnétiques au niveau de l'interface délimitant deux milieux LHI semi-infinis. . . . .	22
1.2	Le problème de la diffraction : un objet de contour $S$ occupant un volume $V$ placé dans un volume $V_0$ en présence d'une source $\mathbf{J}$ . . . . .	24
1.3	Illustration de l'approximation en champ lointain pour un problème 3D. . .	26
1.4	Illustration des bases de polarisations utilisées en émission et en réception.	27
1.5	Illustration de la densité probabilité des hauteurs pour une surface 1D rugueuse. . . . .	33
1.6	Effet du paramètre $g$ sur le module du champ incident. Cas d'une surface de dimensions $S = 10\lambda_0 \times 10\lambda_0$ . . . . .	36
2.1	Géométrie du problème : illustration de la plaque lisse. . . . .	51
2.2	Comparaison de la SER bistatique et de la phase du champ diffracté de la plaque (Fig. 2.1) obtenues avec la MLFMM et la méthode asymptotique OP, polarisation VV. $L_x = L_y = 10\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ et $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ . . . . .	52
2.3	Comparaison de la SER bistatique et de la phase du champ diffracté de la plaque (Fig. 2.1) obtenues avec la MLFMM et la méthode asymptotique OP, polarisation HH. $L_x = L_y = 10\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ et $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ . . . . .	53
2.4	Illustration du phénomène de réflexions multiples et du phénomène d'ombrage pour une surface rugueuse. . . . .	54
2.5	Géométrie du problème : illustration de la surface rugueuse. . . . .	55
2.6	Comparaison de la SER bistatique obtenue avec l'OP de FEKO et l'OP proposée pour les deux co-polarisations, cas d'une surface rugueuse de dimensions $10\lambda_0 \times 10\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ , $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ . Les longueurs de corrélations $L_{cx} = L_{cy} = 1.2\lambda_0$ et $\sigma_z = 0.2\lambda_0$ . . . . .	56
2.7	Comparaison de la SER bistatique obtenue avec une onde plane et une onde tapered pour les deux co-polarisations, cas d'une surface rugueuse de dimensions $20\lambda_0 \times 20\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ , $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ . . . . .	57

2.8	Comparaison de la SER bistatique et de la phase du champ diffracté d'une plaque lisse (voir Fig. 2.1) obtenues avec FEKO et le modèle MdM-EFIE, polarisation VV. $L_x = L_y = 8\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ et $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ . . . . .	63
2.9	Comparaison de la SER bistatique et de la phase du champ diffracté d'une plaque lisse (voir Fig. 2.1) obtenues avec FEKO et le modèle MdM-EFIE, polarisation HH. $L_x = L_y = 8\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ et $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ . . . . .	64
2.10	Comparaison de la SER bistatique et de la phase du champ diffracté d'une plaque lisse (voir Fig. 2.1) obtenues avec FEKO et le modèle MdM-EFIE. $L_x = L_y = 8\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ et $\theta_i = 45^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ . . . . .	65
2.11	Comparaison de la SER bistatique obtenue avec FEKO et le modèle MdM-MFIE proposé pour les deux co-polarisations, cas d'une surface rugueuse de dimensions $8\lambda_0 \times 8\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ , $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ . Les longueurs de corrélation $L_{cx} = L_{cy} = 1.2\lambda_0$ et $\sigma_z = 0.2\lambda_0$ . . . . .	70
2.12	Comparaison de la SER bistatique obtenue avec FEKO et le modèle MdM-MFIE proposé pour les deux co-polarisations, cas d'une surface rugueuse de dimensions $14\lambda_0 \times 14\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ , $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ . Les longueurs de corrélation $L_{cx} = L_{cy} = 1.2\lambda_0$ et $\sigma_z = 0.2\lambda_0$ . . . . .	71
2.13	Comparaison de la SER bistatique obtenue avec FEKO et le modèle MdM-MFIE proposé pour les polarisations croisées, cas d'une surface rugueuse de dimensions $14\lambda_0 \times 14\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ , $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ . Les longueurs de corrélation $L_{cx} = L_{cy} = 1.2\lambda_0$ et $\sigma_z = 0.2\lambda_0$ . . . . .	72
2.14	Comparaison de la SER bistatique pour le cas d'une plaque lisse de dimensions $8\lambda_0 \times 8\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ , $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ . . . . .	73
2.15	Comparaison de la phase du champ diffracté pour le cas d'une plaque lisse de dimensions $8\lambda_0 \times 8\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ , $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ . . . . .	74
2.16	Contributions Forward et Backward. . . . .	75
2.17	Illustration du calcul du produit matrice-vecteur $\bar{\mathbf{Z}}^d \mathbf{X}^f = \mathbf{b} - \bar{\mathbf{Z}}^f \mathbf{X}^f$ de la méthode Forward-Backward pour la détermination de $\mathbf{X}^f$ . Les points blancs correspondent à la diagonale d'éléments <i>nuls</i> . . . . .	76

---

2.18	Illustration du calcul du produit matrice-vecteur $\bar{\mathbf{Z}}^d \mathbf{X}^b = -\bar{\mathbf{Z}}^b (\mathbf{X}^b + \mathbf{X}^f) = -\bar{\mathbf{Z}}^b \mathbf{X}^{bf}$ de la méthode Forward-Backward pour la détermination de $\mathbf{X}^b$ . Les points blancs correspondent à la diagonale d'éléments <i>nuls</i> . . . . .	77
2.19	Comparaisons de la SER bistatique. Cas d'une surface rugueuse de dimensions $7\lambda_0 \times 7\lambda_0$ , $L_{cx} = L_{cy} = 1\lambda_0$ , $\sigma_z = 0.2$ , $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ : effet de la polarisation de l'onde incidente sur la convergence de la FB. . . . .	79
2.20	Comparaisons de la SER bistatique, cas d'une surface rugueuse de dimensions $7\lambda_0 \times 7\lambda_0$ , $L_{cx} = L_{cy} = 1\lambda_0$ , $\sigma_z = 0.2$ , $\theta_i = 45^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ : effet de $\theta_i$ sur la convergence de la FB. . . . .	80
2.21	Comparaisons de la SER bistatique. Cas d'une surface rugueuse de dimensions $7\lambda_0 \times 7\lambda_0$ , $L_{cx} = L_{cy} = 1\lambda_0$ , $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ , $\sigma_z = 0.5\lambda_0$ : Effet de $\sigma_z$ sur la convergence de la FB. . . . .	81
2.22	Zones des interactions fortes (strong) et faibles (weak). . . . .	82
2.23	Discrétisation d'une surface de dimensions $D_x \times D_y$ . . . . .	84
2.24	Contour d'intégration dans le plan complexe $k_z$ pour une surface plane. . .	84
2.25	Contour d'intégration dans le plan complexe $k_z$ pour une surface rugueuse. . . . .	85
2.26	Contour d'intégration dans le plan complexe $k_y$ pour une surface rugueuse. . . . .	85
2.27	Comparaison de la SER bistatique obtenue avec Mdm-LU et le modèle FB-SA proposé pour la polarisation VV. Cas d'une surface lisse de dimensions $D_x = 20\lambda_0$ et $D_y = 8\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ , $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ . . . . .	87
2.28	Comparaison de la SER bistatique obtenue avec Mdm-LU et le modèle FB-SA proposé pour la polarisation VV. Cas d'une surface rugueuse de dimensions $D_x = 20\lambda_0$ et $D_y = 8\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ , $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ . . . . .	88
3.1	Illustration de la scène étudiée : un objet situé au-dessus d'une surface rugueuse. . . . .	92
3.2	Le problème de la diffusion par deux diffuseurs placés dans le milieu incident. . . . .	93
3.3	Interprétation physique du développement en série (3.17). . . . .	98
3.4	Géométrie du problème de deux plaques lisses superposées. . . . .	99

---

3.5	Convergence de E-PILE par rapport à l'ordre de la méthode pour le cas de deux plaques lisses, $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ , $S_2 = 6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ , la distance entre les deux plaques est de $5\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ avec $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ et $\phi_s = 0^\circ$ .	100
3.6	Convergence de E-PILE par rapport à l'ordre de la méthode pour le cas de deux plaques lisses, $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ , $S_2 = 6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ , la distance entre les deux plaques est de $5\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ avec $\theta_i = 45^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ et $\phi_s = 0^\circ$ .	100
3.7	Géométrie du problème d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse. . .	101
3.8	Convergence de E-PILE par rapport à l'ordre de la méthode pour le cas d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse, $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ , $S_2 = 6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ , la distance entre les deux diffuseurs est de $5\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ avec $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ et $\phi_s = 0^\circ$ . . . . .	102
3.9	Convergence de E-PILE par rapport à l'ordre de la méthode pour le cas d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse, $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ , $S_2 = 6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ , la distance entre les deux plaques est de $5\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ avec $\theta_i = 45^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ et $\phi_s = 0^\circ$ . . . . .	102
3.10	Convergence de E-PILE par rapport à l'ordre de la méthode pour le cas d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse, $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ , $S_2 = 10\lambda_0 \times 10\lambda_0$ , la distance entre les deux diffuseurs est de $5\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ avec $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ et $\phi_s = 0^\circ$ . . . . .	103
3.11	Taux de la convergence de la méthode E-PILE. . . . .	104
3.12	Comparaisons de la SER bistatique. Cas de deux plaques lisses, $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ , $S_2 = 6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ , la distance entre les deux plaques est de $5\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ avec $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ : effet de la polarisation de l'onde incidente sur la convergence de E-PILE. . . . .	105
3.13	Comparaisons de la SER bistatique. Cas d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse, $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ , $S_2 = 6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ , la distance entre les deux plaques est de $5\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ avec $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ : effet de la polarisation de l'onde incidente sur la convergence de E-PILE. . . . .	106
3.14	Géométrie du problème d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse. . .	110

---

3.15	Convergence de E-PILE+FB par rapport à l'ordre de la méthode FB pour le cas d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse, $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ , $S_2 = 6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ , la distance entre les deux diffuseurs est de $5\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ avec $\theta_i = 0^\circ$ et $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ . . . . .	111
3.16	Comparaison du temps de calcul. Cas d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse, $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ , $S_2$ n'est pas constante, la distance entre les deux diffuseurs est de $5\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ avec $\theta_i = 0^\circ$ et $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ . . . . .	112
3.17	Illustration des chemins de propagation pour l'application de l'OP sur le diffuseur 1. . . . .	114
3.18	Illustration des chemins de propagation pour l'application de l'OP sur le diffuseur 2. . . . .	115
3.19	Comparaison de la SER bistatique obtenue avec l'EPiLE+OP1+OP2 et la MdM-LU pour les deux co-polarisations. Cas de deux plaques lisses parallèles de dimensions $S_1 = 1\lambda_0 \times 1\lambda_0$ , $S_2 = 8\lambda_0 \times 8\lambda_0$ , $D = 5\lambda_0$ , $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ , $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ . . . . .	117
3.20	Distribution de courant (en $A/m^2$ ) sur les deux plaques. En haut : courant sur le dessus de la plaque supérieure ( $S_{1 \text{ top}}$ ). Au milieu : courant sur le dessous de la plaque supérieure ( $S_{1 \text{ bottom}}$ ). En bas : courant sur le dessus de la plaque inférieure. . . . .	118
3.21	Comparaison de la SER bistatique obtenue avec l'EPiLE+OP1+OP2 et la MdM-LU pour les deux co-polarisations. Cas d'une plaque de dimensions $1\lambda_0 \times 1\lambda_0$ au-dessus d'une surface rugueuse de dimensions $14\lambda_0 \times 14\lambda_0$ , $L_{cx} = L_{cy} = 1\lambda_0$ , $\sigma_z = 0.2\lambda_0$ , les pas d'échantillonnage $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ , $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ . . . . .	119
3.22	Comparaison de la SER bistatique obtenue avec l'EPiLE+OP1+OP2 et la MdM-LU pour la polarisation VV. Cas d'une plaque de dimensions $1\lambda_0 \times 1\lambda_0$ au-dessus d'une surface rugueuse de dimensions $14\lambda_0 \times 14\lambda_0$ , $L_{cx} = L_{cy} = 1\lambda_0$ , $\sigma_z = 0.6\lambda_0$ , les pas d'échantillonnage $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ , $\theta_i = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ . . . . .	120

---

3.23 Comparaison de la SER bistatique obtenue avec l'EPiLE+OP1+FB et la MDM-LU pour la polarisation VV. Cas d'une plaque de dimensions  $1\lambda_0 \times 1\lambda_0$  au-dessus d'une surface rugueuse de dimensions  $14\lambda_0 \times 14\lambda_0$ ,  $L_{cx} = L_{cy} = 1\lambda_0$ ,  $\sigma_z = 0.6\lambda_0$ , les pas d'échantillonnage  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ ,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ . . . . . 121

3.24 Comparaison du temps de calcul entre la méthode hybride E-PILE+OP1+OP2 et la méthode rigoureuse MDM-LU pour le cas de deux plaques parallèles  $S_1$  au dessus de  $S_2$ .  $S_2 = 7\lambda_0 \times 7\lambda_0$ , la longueur de  $S_1$  n'est pas constante, la distance entre les deux plaques est  $5\lambda_0$ ,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ . . . . . 123

## Liste des acronymes

**EFIE** Electric Field Integral Equation

**E-PILE** Extended Propagation-Inside-Layer Expansion

**FB** Forward-Backward

**FB-SA** Forward-Backward with Spectral Acceleration

**FDTD** Finite Difference Time-Domain

**FSA** Forward Scattering Alignment

**FEM** Finite Element Method

**LHI** Linéaire Homogène Isotrope

**LU** Low-Up

**MdM** Méthode des Moments

**MCE** Méthode des Courants Equivalents

**MFIE** Magnetic Field Integral Equation

**MLFMM** Multi-Level Fast Multipole Method

**OG** Optique Géométrique

**OP** Optique Physique

**PC** Parfaitement Conducteur(-trice)

**PILE** Propagation-Inside-Layer Expansion

**RWG** Rao-Wilton-Glisson

**SER** Surface Equivalente Radar

**SMCG** Sparse Matrix Canonical Grid

**TE** polarisation Transverse Electrique (polarisation H)

**TM** polarisation Transverse Magnétique (polarisation V)



# Introduction

La diffusion d'une onde électromagnétique par un objet au-dessus d'une surface rugueuse concerne de nombreuses applications telles que la télédétection et la surveillance radar. Les applications sont variées, tant dans le domaine militaire que civil. Le radar (radio detection and ranging) permet initialement de détecter la présence d'un objet et de déterminer sa distance (avion, bateau, réflecteur, pluie...). De nos jours, la reconnaissance et l'identification de l'objet faisant obstacle à l'onde électromagnétique sont également des enjeux majeurs. Cependant, ceci est difficilement réalisable lorsque la cible recherchée est noyée dans un environnement dit hostile, tout particulièrement en présence d'une surface rugueuse : par exemple détecter un objet situé au-dessus de la mer peut relever d'un challenge.

Ce travail se place dans le contexte de l'étude de la diffusion d'une onde électromagnétique par un objet au-dessus d'une surface rugueuse. Afin de mener cette étude, plusieurs travaux ont été menés sur la modélisation et la simulation pour réduire le volume de mesures qui sont coûteuses et difficiles à mettre en oeuvre. Pour étudier théoriquement de tels problèmes, deux types d'approches existent : d'une part, des modèles asymptotiques qui reposent sur des hypothèses simplificatrices, d'autre part, des modèles dits *rigoureux*.

Des recherches ont été menées pour modéliser rigoureusement la diffusion par un obstacle au-dessus d'une surface de mer pour une scène bidimensionnelle. Une telle modélisation semble délicate pour une scène tridimensionnelle du fait du nombre d'inconnues impliquées. En effet, bien que les modèles *rigoureux* produisent une grande précision du résultat, ils nécessitent d'importantes ressources informatiques. De ce fait, pour une scène complexe où le nombre d'inconnues est très important, cette approche est très difficilement applicable. Dans ce cas, un moyen de résoudre le problème est d'appliquer des méthodes asymptotiques.

L'objectif de cette thèse est de poursuivre les recherches qui ont été effectuées au laboratoire IETR sur la modélisation électromagnétique et la simulation du champ diffracté par des scènes complexes et plus particulièrement dans un contexte maritime, pour

lesquelles la surface est supposée **monodimensionnelle** (problème électromagnétique 2D). Dans cette étude la formulation est généralisée à une surface **bidimensionnelle** (problème électromagnétique 3D).

Ce manuscrit est organisé en trois chapitres. Le premier chapitre a pour objectif de situer le contexte en rappelant les notions et les outils nécessaires pour modéliser la diffusion par un objet au-dessus d'une surface rugueuse. Pour cela, la propagation des ondes électromagnétiques ainsi que la représentation intégrale des champs sont rappelées. La Surface Equivalente Radar (SER) et la signature polarimétrique sont définies. Ces outils, caractérisant le pouvoir réflecteur d'un obstacle, nécessitent la connaissance du champ diffracté ou diffusé. Celui-ci est modélisable à l'aide de diverses méthodes de calcul dont un large éventail est présenté dans ce chapitre. Les domaines de validité et les contraintes d'utilisation de ces méthodes seront également analysés. L'analyse de la scène est exposée dans ce premier chapitre. La description des surfaces rugueuses aléatoires ainsi qu'une méthode permettant de générer un profil rugueux sont également présentées.

Le chapitre 2 détaille la modélisation de la diffusion par une simple interface rugueuse ; les points développés dans ce chapitre nous serviront dans le troisième. Nous commençons par étudier le cas d'un diffuseur placé en espace libre en utilisant l'approximation de l'Optique Physique (OP). Ensuite, le cas d'une plaque lisse est étudié en utilisant l'équation intégrale EFIE (Electric Field Integral Equation). Le cas d'une surface rugueuse est étudié en utilisant l'équation intégrale MFIE (Magnetic Field Integral Equation). Les deux équations EFIE et MFIE sont discrétisées par la Méthode des Moments (Mdm) pour donner les expressions des matrices impédances. Cette étude introduit des méthodes rigoureuses dites "exactes" et rapides telles que la "Forward-Backward" (FB) et la "Forward-Backward with Spectral Acceleration" (FB-SA).

Dans le chapitre 3, le calcul de la diffusion par une scène 3D constituée d'un objet au-dessus d'une surface rugueuse est entrepris. Les phénomènes de couplage sont tout d'abord mis en exergue en étudiant les équations intégrales de la scène. En utilisant l'étude menée au chapitre 2, la Mdm est appliquée et sert de méthode de référence. La méthode Extended Propagation-Inside-Layer Expansion (E-PILE) développée dans la thèse de G. Kubické [1], est ensuite rappelée puis étendue au cas 3D. A l'aide de la méthode E-PILE la méthode FB est intégrée dans le schéma itératif pour aboutir à un modèle "hybride exact"

## Introduction

---

(E-PILE+FB : hybridation entre deux méthodes rigoureuses). La dernière partie de ce chapitre détaille l'hybridation entre l'approximation de l'Optique Physique et la méthode E-PILE pour aboutir à un modèle "hybride asymptotique" (E-PILE+OP : hybridation entre une méthode rigoureuse E-PILE avec une méthode asymptotique OP).



# Ondes électromagnétiques, méthodes de résolution

---

Cette thèse se place dans le contexte de la modélisation de la diffusion d'onde électromagnétique par des obstacles au-dessus d'une surface rugueuse. Il y a une cinquantaine d'années, l'analyse et la conception de dispositifs électromagnétiques étaient menées principalement de manière expérimentale. Depuis, l'évolution des calculateurs a permis de résoudre les problèmes électromagnétiques qui ne pouvaient pas être résolus de manière analytique. Les techniques utilisées pour la résolution d'un tel problème sont variées et dépendent en particulier de la scène étudiée. Elles s'appuient toutes sur un formalisme commun découlant des équations de Maxwell. Ainsi nous rappellerons brièvement, dans ce premier chapitre, quelques notions d'électromagnétisme afin de pouvoir mieux justifier notre choix dans les méthodes à retenir par la suite. Notre démarche nous conduira à définir des indicateurs permettant de caractériser le pouvoir réflecteur d'obstacles et de surfaces. Enfin nous présenterons une description de la scène, et plus particulièrement une caractérisation d'une surface aléatoire. La dernière partie de ce premier chapitre sera dédiée à la présentation des méthodes générales utilisées pour résoudre des problèmes de diffusion d'onde.

## 1.1 Équations de Maxwell

James Clerk Maxwell publie en 1864 un traité où est relié l'ensemble des phénomènes électriques et magnétiques, tout comme l'avait fait auparavant Isaac Newton en mécanique classique. A l'origine, les équations formulées par Maxwell formaient un système de 20 équations à 20 inconnues. Réécrites sous forme vectorielle par Oliver Heaviside et Josiah W. Gibbs en 1884, les équations entre les différents champs sont données par [2] :

$$\text{(Equation de Maxwell-Gauss magnétique)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.1)$$

$$\text{(Equation de Maxwell-Faraday)} \quad \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\text{(Equation de Maxwell-Gauss électrique)} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.3)$$

$$\text{(Equation de Maxwell-Ampère)} \quad \nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Les vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  désignent ici les vecteurs champs électrique et magnétique, exprimés en  $V/m$  et en  $A/m$ . Ils forment ensemble le champ électromagnétique. Le symbole  $\nabla$  est l'opérateur "nabla" défini dans le système de coordonnées curvilignes orthogonales (coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques ...) associé au repère dans lequel les équations de Maxwell sont appliquées. Précisons dès à présent que dans ce manuscrit les vecteurs seront notés en gras, les vecteurs unitaires en gras et surmontés d'un chapeau et les matrices seront notées en gras et surmontées d'une barre.  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  désignent respectivement les vecteurs induction électrique et magnétique, exprimés en  $C/m^2$  et en *Tesla*. Les équations (1.1) et (1.2) expriment la loi de l'induction. Les équations (1.3) et (1.4), quant à elles, relient le champ électromagnétique ( $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ ) aux sources ( $\rho, \mathbf{j}$ ), qui représentent respectivement les densités de charge (en  $C/m^3$ ) et de courant (en  $A/m^2$ ), en tenant compte du milieu matériel. En effet,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  sont liés aux champs électrique et magnétique par des relations constitutives tenant compte du milieu (vide, matériau diélectrique...). Si le milieu est considéré linéaire homogène et isotrope (LHI), ces relations s'expriment

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{j} = \sigma_c \mathbf{E}, \quad (1.7)$$

où  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$  sont respectivement la permittivité et la perméabilité du vide ( $\varepsilon_0 \simeq 8.854 \times 10^{-12}$  F/m,  $\mu_0 \simeq 1.256 \times 10^{-6}$  H/m et  $\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 1/c$  où  $c \simeq 3 \times 10^8$  m/s est la vitesse

de la lumière dans le vide),  $\varepsilon_r$ ,  $\mu_r$  et  $\sigma_c$  sont, respectivement, la permittivité relative, la perméabilité relative et la conductivité du milieu. Précisons dès à présent que dans ce manuscrit les milieux considérés seront toujours des milieux LHI et non magnétiques ( $\mu_r = 1$ ).

A partir de ces équations, nous pouvons d'ores et déjà évoquer le problème de la diffusion d'une onde électromagnétique par un ou plusieurs objets. Ce problème fait intervenir deux phénomènes : la propagation d'une onde dans un milieu LHI (dans le milieu où est placé l'objet et dans le milieu constituant l'objet) ainsi que le comportement de l'onde à l'interface entre le milieu de l'objet et le milieu dans lequel il est placé.

## 1.2 Équations de propagation, onde plane et équation de Helmholtz

La propagation des ondes électromagnétiques est décrite à partir des équations de Maxwell. En considérant un milieu LHI en présence de charges et de courant ( $\rho \neq 0$  et  $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ ), à partir des quatre équations de Maxwell, des relations constitutives (1.5) et (1.6) et de quelques relations vectorielles, on démontre que les champs électrique et magnétique vérifient les équations de propagation suivantes [2] :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad (1.8)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \wedge \mathbf{j}, \quad (1.9)$$

où (1.8) représente l'équation d'onde électrique et (1.9) représente l'équation d'onde magnétique.

Dans le cas où il y a absence de charges dans le milieu de propagation ( $\rho = 0$  et  $\mathbf{j} \neq \mathbf{0} = \sigma_c \mathbf{E}$ ) et en utilisant l'équation (1.7), les équations de propagation deviennent

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma_c \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad (1.10)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma_c \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0}. \quad (1.11)$$

Physiquement, ce cas correspond à la propagation d'une onde électromagnétique dans un matériau bon conducteur.

Enfin, dans le cas d'un milieu diélectrique parfait ( $\rho = 0$  et  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ ), les équations se

réduisent à

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \square \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (1.12)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \square \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad (1.13)$$

où le symbole  $\square$  désigne l'opérateur d'Alembertien. Puisque les champs électrique et magnétique sont liés par les équations de Maxwell, l'onde peut être représentée par un seul de ces champs, en général le champ électrique. Une solution particulière de l'équation de propagation (1.12) est l'onde plane progressive monochromatique qui a pour expression :

$$\Psi(\mathbf{R}, t) = \Re(\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)) = \Re(\mathbf{E}_0 e^{\pm i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \Phi)}) = \Re(\mathbf{E}(\mathbf{R}) e^{\pm i\omega t}), \quad (1.14)$$

$$\text{avec } \mathbf{k} = \sqrt{\varepsilon\mu\omega} \hat{\mathbf{u}} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{u}}, \quad (1.15)$$

où  $\mathbf{y} = \Re(\mathbf{x})$  signifie que les composantes du vecteur  $\mathbf{y}$  sont les parties réelles des composantes du vecteur  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_0 e^{\mp i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} \mp i\Phi}$ ,  $\Phi$  un terme de phase constant,  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde dans le milieu,  $\lambda$  la longueur d'onde dans le milieu,  $\omega$  la pulsation,  $\hat{\mathbf{u}}$  un vecteur unitaire orienté dans le sens de la propagation de l'onde plane et  $\mathbf{E}_0$  un vecteur complexe qui donne la polarisation de l'onde. Par la suite, nous utiliserons l'onde plane progressive monochromatique d'expression complexe  $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$ , elle aussi solution de l'équation de propagation, plus simple à manipuler. Le choix du signe dans  $e^{\pm i\omega t}$  est arbitraire, conduisant à deux conventions. Dans ce manuscrit la convention  $e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R})}$  est retenue. Par la suite le facteur  $e^{-i\omega t}$  sera sous-entendu et supprimé des équations. En appliquant l'expression de l'onde plane progressive monochromatique à l'équation de propagation, la dérivée par rapport au temps se ramène à la multiplication par le terme  $-i\omega$ . L'équation de propagation devient alors l'équation dite de Helmholtz. Elle s'exprime en présence d'une source ( $\rho = 0$  et  $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ ) :

$$-(\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E}) = (\nabla^2 + k^2) \mathbf{E} = -i\omega\mu \mathbf{j}, \quad (1.16)$$

et en l'absence de source ( $\rho = 0$  et  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ ) :

$$-(\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E}) = (\nabla^2 + k^2) \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (1.17)$$

Précisons que si nous notons  $\psi$  une des trois composantes du champ  $\mathbf{E}$ , alors elle vérifie l'équation de Helmholtz scalaire :

$$(\Delta + k^2)\psi = 0, \quad (1.18)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur "laplacien" défini dans le système de coordonnées curvilignes orthogonales (coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques ...) associé au repère dans lequel le calcul est effectué.

De plus, il est possible de montrer que les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont orthogonaux à la direction de propagation portée par le vecteur  $\mathbf{k}$  et forment ainsi le trièdre direct  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k})$ . Il est ensuite possible d'écrire, pour la propagation dans un milieu LHI assimilé au vide, que

$$\|\mathbf{H}\| \|\mathbf{k}_0\| = \omega \varepsilon_0 \|\mathbf{E}\|, \quad (1.19)$$

soit finalement

$$\eta_0 = \frac{\|\mathbf{E}\|}{\|\mathbf{H}\|} = \frac{E}{H} = \frac{\|\mathbf{k}_0\|}{\omega \varepsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}, \quad (1.20)$$

où  $\eta_0$  est l'impédance d'onde qui est réelle et positive dans le vide ( $\approx 120\pi \Omega$ ) ; les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont donc en phase.

Les équations établies dans cette partie, permettent de décrire la propagation de l'onde dans un milieu LHI infini. Cependant, un problème de diffraction fait intervenir au moins deux milieux différents. Il est alors nécessaire de décrire le comportement de l'onde à l'interface entre deux milieux.

### 1.3 Conditions aux limites

Tout milieu est par nature fini, borné par au moins un milieu différent. Il est donc important de caractériser le comportement des ondes à la frontière des deux milieux. Pour cela, de nouvelles équations valides au niveau de l'interface avec un autre milieu doivent être établies. Ces équations, obtenues à partir des équations de Maxwell, sont les conditions aux limites. Considérons la scène présentée sur la figure 1.1. Une surface  $S$  sépare un milieu (0) d'un milieu (1) et  $\hat{\mathbf{n}}$ , la normale à  $S$ , est orientée de (1) vers (0). Les conditions aux limites (appelées aussi relations de continuité) s'expriment [2] :

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (1.21)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_0 - \mathbf{D}_1) = \rho_s, \quad (1.22)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}, \quad (1.23)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s, \quad (1.24)$$

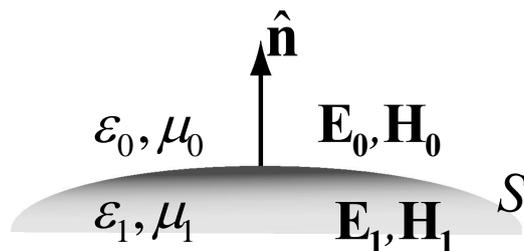


FIGURE 1.1 – Représentation des champs électromagnétiques au niveau de l'interface délimitant deux milieux LHI semi-infinis.

où  $\mathbf{J}_s$  est la densité surfacique de courant électrique et  $\rho_s$  la densité surfacique de charge électrique. Ces équations imposent la *continuité* de la composante tangentielle du champ électrique  $\mathbf{E}$  et de la composante normale de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$ . Elles imposent également la *discontinuité* de la composante normale de l'induction électrique  $\mathbf{D}$  (mesurée par  $\rho_s$ ) et de la composante tangentielle du champ magnétique  $\mathbf{H}$  (mesurée par  $\mathbf{J}_s$ ). Si les milieux 0 et 1 sont des diélectriques parfaits alors  $\mathbf{J}_s = \mathbf{0}$  et  $\rho_s = 0$ .

Si le milieu inférieur est parfaitement conducteur, les conditions aux limites deviennent :

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_0 = 0, \quad (1.25)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_0 = \rho/\varepsilon_1, \quad (1.26)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}, \quad (1.27)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_0 = \mathbf{J}_s. \quad (1.28)$$

A l'aide des conditions aux limites et de l'équation de propagation, le problème de la diffraction peut être résolu. De plus, puisque les équations de Maxwell sont linéaires, le courant surfacique peut être assimilé comme une superposition de sources ponctuelles distribuées dans un volume. Par conséquent, si nous connaissons la réponse d'une source ponctuelle nous pouvons résoudre le problème en intégrant cette réponse dans le volume contenant l'ensemble des sources. Cette représentation intégrale des champs est obtenue à l'aide de la fonction et du théorème de Green.

## 1.4 Fonction et théorème de Green

On appelle fonction de Green la solution élémentaire d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, ou d'une équation aux dérivées partielles linéaire à co-

efficients constants. Chaque composante du champ  $\mathbf{E}$  vérifie l'équation de propagation scalaire où l'opérateur intégral-différentiel est  $(\Delta + k^2)\bullet$ . La fonction de Green associée à cet opérateur vérifie par conséquent [2, 3] :

$$(\Delta + k^2)G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = -\delta(\mathbf{R}, \mathbf{R}'). \quad (1.29)$$

Pouvant être vue comme un propagateur, la fonction de Green dépend toujours de deux vecteurs positions  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}'$  : désignant respectivement le point source et le point d'observation. Elle correspond physiquement au rayonnement d'une source ponctuelle. Finalement, la solution de l'équation (1.29) est [2, 4, 5] :

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{e^{ik\|\mathbf{R}-\mathbf{R}'\|}}{4\pi\|\mathbf{R}-\mathbf{R}'\|}. \quad (1.30)$$

Pour obtenir les représentations intégrales, il est nécessaire de transformer une intégrale de volume en une intégrale de surface. Ceci est réalisé avec l'analogie vectoriel du second théorème de Green, basé sur le théorème d'Ostrogradski [6]. Il s'écrit dans le cas vectoriel

$$\begin{aligned} \iiint_V [\mathbf{Q} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{P}) - \mathbf{P} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q})] dv = \\ \iint_S [\mathbf{P} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{Q}) - \mathbf{Q} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{P})] \cdot \hat{\mathbf{n}} ds, \end{aligned} \quad (1.31)$$

où  $S$  est une surface délimitant un volume  $V$  et  $\hat{\mathbf{n}}$  est la normale à la surface  $S$  dirigée vers l'extérieur du volume  $V$ .  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  sont deux fonctions vectorielles du point (aussi appelées champ de vecteurs ou encore champ vectoriel) quelconques, continues et de dérivées premières et secondes continues en tout point appartenant au volume  $V$  ou à la surface  $S$ .

## 1.5 Principe de Huygens et théorème d'extinction

Le principe de Huygens repose sur le fait que chaque point d'un front d'onde est lui-même une source de rayonnement d'une onde. Par ce principe, une source de rayonnement peut être remplacée par un ensemble de sources. Ces courants sont placés sur une surface fermée arbitraire englobant la source originale. Ce théorème nous permet de décrire de manière générale le rayonnement d'une distribution de courants sur une surface, ou d'obtenir une équation intégrale surfacique des courants induits sur un objet excité par un champ incident.

Considérons la scène présentée sur la figure 1.2. Une source  $\mathbf{J}$  est placée dans un milieu  $\Omega_0$  de permittivité  $\varepsilon_0$  et de perméabilité  $\mu_0$  contenant un objet de milieu  $\Omega_1$  de permittivité  $\varepsilon_1$  et de perméabilité  $\mu_1$ .  $S$  est la surface délimitant le volume  $V$  et sa normale,  $\hat{\mathbf{n}}$ , est dirigée vers l'extérieur de  $V$  (donc dirigée vers l'intérieur de  $V_0$ ).  $S_\infty$  est la surface délimitant le volume  $V_0$  à l'infini et sa normale pointe vers l'extérieur de  $V_0$ .

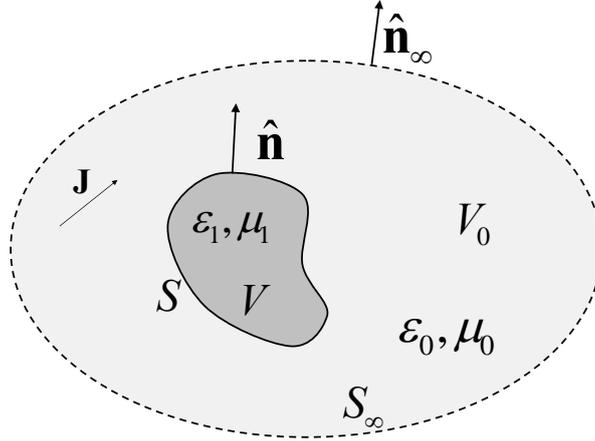


FIGURE 1.2 – Le problème de la diffraction : un objet de contour  $S$  occupant un volume  $V$  placé dans un volume  $V_0$  en présence d'une source  $\mathbf{J}$ .

Le calcul détaillé dans l'annexe A montre qu'à partir de la relation (1.31), appliquée au volume  $V_0$ , et des équations de Maxwell, l'équation suivante est obtenue :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{R}') & \text{si } \mathbf{R}' \in V_0 \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{R}' \notin V_0 \end{cases} = \mathbf{E}_i(\mathbf{R}') + \iint_S [G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') i\omega\mu(\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R})) + (\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})) \wedge \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') + (\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R})) \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] ds. \quad (1.32)$$

Pour  $\mathbf{R}' \notin V_0$ , l'équation (1.32) devient

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{R}') = - \iint_S [G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') i\omega\mu(\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R})) + (\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})) \wedge \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') + (\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R})) \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] ds. \quad (1.33)$$

Cette équation est connue sous le nom de théorème vectoriel d'extinction d'Ewald-Oseen [7] et impose l'annulation du champ total à l'intérieur de l'objet de volume  $V$  ; le champ incident étant compensé par la contribution des champs surfaciques. En définissant le champ total  $\mathbf{E}$  comme la somme de  $\mathbf{E}_i$ , le champ incident et de  $\mathbf{E}_s$  le champ diffracté

(scattered field), l'équation (1.32) devient dans le volume  $V_0$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s(\mathbf{R}') = & \iint_S [G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') i\omega\mu(\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R})) + (\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})) \wedge \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \\ & + (\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R})) \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] ds. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Cette équation est connue sous le nom de principe de Huygens et permet de propager les champs surfaciques à l'extérieur du volume  $V$ , formant le champ total après sommation avec le champ incident.

Si l'objet de volume  $V$  est diélectrique, le champ n'est pas forcément nul pour  $\mathbf{R}' \notin V_0$ , à partir de la relation (1.31), appliquée cette fois-ci au volume  $V$  on obtient une nouvelle équation :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{R}') & \text{si } \mathbf{R}' \in V \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{R}' \notin V \end{cases} = \\ - \iint_S [G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}') i\omega\mu_1(\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R})) + (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})) \wedge \nabla G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \\ + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R})) \nabla G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] ds, \end{aligned} \quad (1.35)$$

où  $G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  est la fonction de Green dans le milieu  $\Omega_1$ . Pour  $\mathbf{R}' \in V$ , l'équation (1.35) fait apparaître le principe de Huygens appliqué dans le volume  $V$ ; pour  $\mathbf{R}' \notin V$ , on reconnaît l'expression du théorème d'extinction. Ainsi, l'équation (1.35) impose l'annulation du champ rayonné vers l'extérieur de l'objet et permet de calculer le champ total dans l'objet. Alors, le problème a été décomposé en deux parties, l'une recherchant les sources équivalentes créant le champ total dans le volume  $V_0$  (équation (1.32)) et l'autre recherchant les sources équivalentes créant le champ total dans le volume  $V$  (équation (1.35)).

## 1.6 Approximation champ lointain

Comme présenté sur la figure 1.3, lorsque le récepteur est situé à grande distance de l'objet diffractant (dont la plus grande dimension caractéristique est très inférieure à la distance le séparant du système de réception), l'hypothèse de champ lointain permet de simplifier les équations intégrales. Cette hypothèse, parfois nommée *condition de Fraunhofer*, consiste à supposer les vecteurs  $\mathbf{R}'$  et  $(\mathbf{R}-\mathbf{R}')$  parallèles lorsque  $\|\mathbf{R}'\| = R' \gg \|\mathbf{R}\| = R$ ; le champ diffracté se comportant localement au niveau du récepteur comme une onde

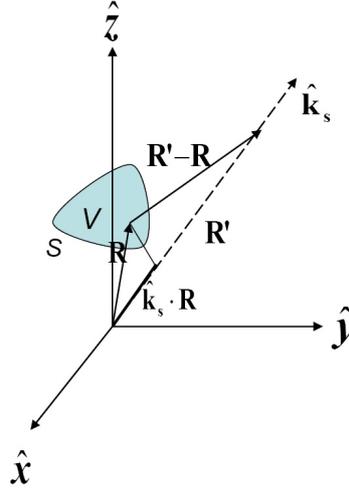


FIGURE 1.3 – Illustration de l'approximation en champ lointain pour un problème 3D.

plane. Ainsi, la fonction de Green peut être simplifiée

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{e^{ik\|\mathbf{R}-\mathbf{R}'\|}}{4\pi\|\mathbf{R}-\mathbf{R}'\|} \approx \frac{e^{ikR'}}{4\pi R'} e^{-ik\hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{R}}. \quad (1.36)$$

## 1.7 Définition de la base d'onde sphérique

Pour une onde plane progressive monochromatique, le champ électrique peut être exprimé dans le repère cartésien par :

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}. \quad (1.37)$$

Le champ électrique dans le cas de l'onde plane, est orthogonal à la direction de propagation  $\hat{\mathbf{k}}$ . Le vecteur  $\mathbf{E}_0$ , qui est complexe, est appelé vecteur de Jones [8] et peut être exprimé dans une base sphérique  $(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$  comme représenté sur la figure 1.4. Le champ électrique incident est exprimé dans la base  $(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i, \hat{\boldsymbol{\phi}}_i)$  et le champ électrique diffracté est exprimé dans la base  $(\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\boldsymbol{\theta}}_s, \hat{\boldsymbol{\phi}}_s)$ . Puisque les champs électriques sont orthogonaux aux directions de propagation, nous obtenons :

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_{0i} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{0i}^\theta \\ E_{0i}^\phi \end{bmatrix} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{R}}, \quad (1.38)$$

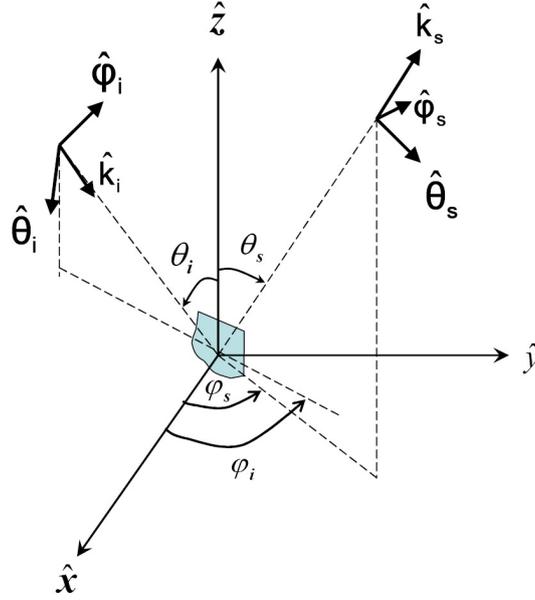


FIGURE 1.4 – Illustration des bases de polarisations utilisées en émission et en réception.

et

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{R}') = \mathbf{E}_{0s} e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{R}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{0s}^\theta \\ E_{0s}^\phi \end{bmatrix} e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{R}'}. \quad (1.39)$$

Dans notre application il est nécessaire parfois de faire la conversion entre les repères sphérique et cartésien. La transformation entre les deux repères est réalisée à l'aide de matrices de rotation sphérique  $\bar{\mathbf{R}}_i$  et  $\bar{\mathbf{R}}_s$ .

$$\bar{\mathbf{R}}_i(\theta_i, \phi_i) = \begin{bmatrix} \sin \theta_i \cos \phi_i & -\cos \theta_i \cos \phi_i & -\sin \phi_i \\ \sin \theta_i \sin \phi_i & -\cos \theta_i \sin \phi_i & \cos \phi_i \\ -\cos \theta_i & -\sin(\theta_i) & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_s(\theta_s, \phi_s) = \begin{bmatrix} \sin \theta_s \cos \phi_s & \cos \theta_s \cos \phi_s & -\sin \phi_s \\ \sin \theta_s \sin \phi_s & \cos \theta_s \sin \phi_s & \cos \phi_s \\ \cos \theta_s & -\sin(\theta_s) & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

Les vecteurs des bases sphériques sont définis par :

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}}_i \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_i \\ \hat{\boldsymbol{\phi}}_i \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{R}}_i(\theta_i, \phi_i)^T \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix}, \quad (1.42)$$

et

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}}_s \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_s \\ \hat{\boldsymbol{\phi}}_s \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{R}}_s(\theta_s, \phi_s)^T \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix}, \quad (1.43)$$

où l'indice exposant  $T$  symbolise la transposée.

## 1.8 Matrice de diffraction

On peut relier le champ électrique diffracté par l'obstacle  $\mathbf{E}_s$ , au champ incident  $\mathbf{E}_i$  par l'intermédiaire de la matrice de diffraction ou matrice de diffusion de l'obstacle. Les champs  $\mathbf{E}_s$  et  $\mathbf{E}_i$  sont décomposés en deux composantes orthogonales, suivant l'état de polarisation,  $(E_s^\theta, E_s^\phi)$  et  $(E_i^\theta, E_i^\phi)$ . Ainsi, on obtient la relation :

$$\begin{bmatrix} E_s^\theta \\ E_s^\phi \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} E_i^\theta \\ E_i^\phi \end{bmatrix}, \quad (1.44)$$

où  $\bar{\mathbf{S}}$  est la matrice de diffraction appelée *matrice de sinclair* [9] définie par :

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} S_{\theta\theta} & S_{\theta\phi} \\ S_{\phi\theta} & S_{\phi\phi} \end{bmatrix}. \quad (1.45)$$

La matrice de diffraction est donc définie dans une base de polarisation suivant les bases dans lesquelles les vecteurs de Jones sont exprimés. A noter que la relation (1.45) est exprimée en convention FSA (Forward Scattering Alignment : le vecteur  $\hat{\mathbf{k}}_i$  est orienté vers l'obstacle) car les vecteurs de Jones sont exprimés dans cette convention. Précisons d'autres notations employées : si le champ électrique est polarisé linéairement selon  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ , on dit que la polarisation est TE (Transverse Electrique) ou H (Horizontale). Si le champ électrique est polarisé linéairement selon  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , on dit que la polarisation est TM (Transverse Magnétique) ou V (Verticale).

L'objet peut ainsi être assimilé à un modificateur de polarisation [9], et la connaissance des quatre termes de la matrice de diffraction suffit à définir la réponse d'un objet soumis à une onde d'état de polarisation complètement arbitraire.

## 1.9 Puissances incidente, diffusée et Surface Equivalente Radar (SER)

Dans la section 1.5 nous avons vu comment le champ diffracté est relié à l'obstacle diffractant (forme de la surface, matériau, dimensions) par le biais de relations d'intégrales de surface. Mais le champ diffracté seul, ne suffit pas à caractériser le pouvoir réflecteur de l'obstacle diffractant puisque la dépendance par rapport au champ incident est encore présente. En effet, les relations intégrales permettent de relier le champ diffracté au champ total sur l'objet ; le champ total étant la somme du champ diffracté et du champ incident.

### 1.9.1 Puissances incidente, diffusée et transmise

Pour s'affranchir de cette dépendance, il convient alors de connaître la puissance incidente sur la surface de l'obstacle, ainsi que la puissance qui est diffusée par cette même surface et captée par le récepteur. Alors le rapport de ces deux densités de puissance ne dépend plus que de l'obstacle diffractant.

La puissance reçue par une surface  $S$  est donnée par le flux du vecteur de Poynting moyen à travers cette surface :

$$P_i = \iint_S \langle \mathbf{\Pi}_i \rangle_t \cdot \mathbf{ds} = \iint_S \langle \mathbf{\Pi}_i \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds, \quad (1.46)$$

où  $\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle_t$  est la moyenne temporelle du vecteur de Poynting du champ incident  $\mathbf{\Pi}_i$  donné par :

$$\mathbf{\Pi}_i = \mathbf{E}_i \wedge \mathbf{H}_i^*. \quad (1.47)$$

$\mathbf{H}_i^*$  étant le conjugué de  $\mathbf{H}_i$ . Le vecteur de Poynting d'une onde plane progressive est donc colinéaire à la direction de propagation  $\hat{\mathbf{k}}_i$  et sa norme correspond à la densité de puissance véhiculée par l'onde. En régime harmonique, on peut montrer que la moyenne temporelle du vecteur de Poynting est :

$$\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle_t = \frac{1}{2} \Re (\mathbf{E}_i \wedge \mathbf{H}_i^*). \quad (1.48)$$

Si l'obstacle est une surface rugueuse aléatoire, la puissance incidente sur la surface est prise comme la puissance reçue par le plan moyen correspondant à une surface plane [10]. La puissance diffusée  $P_s$  sur une surface (de réception) est obtenue par l'intégrale des puissances élémentaires  $dP_s$  sur cette surface. Or l'élément de puissance  $dP_s$  n'est autre

que le flux du vecteur de Poynting moyen du champ diffusé à travers un élément de surface orienté. L'onde diffusée étant sphérique, dans le repère sphérique  $(R', \theta_s, \phi_s)$ , l'élément de surface est exprimé dans l'hypothèse où l'onde diffusée est en champ lointain de la surface par

$$d\mathbf{s} = R'^2 \sin \theta_s d\theta_s d\phi_s \hat{\mathbf{n}}', \quad (1.49)$$

où les angles  $\theta_s$  et  $\phi_s$  balayent tous les angles possibles pour la diffusion de l'onde.

A noter que cet élément de surface orienté est porté par  $\hat{\mathbf{n}}'$  colinéaire à la direction de propagation  $\hat{\mathbf{k}}_s$ . De manière générale,  $\theta_s$  va de 0 à  $\pi$  et  $\phi_s$  de 0 à  $2\pi$ . En considérant que l'onde diffusée est en champ lointain de l'obstacle, la puissance diffusée s'écrit alors

$$P_s = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\langle \mathbf{\Pi}_s \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{n}}') R'^2 \sin \theta_s d\theta_s d\phi_s = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \|\langle \mathbf{\Pi}_s \rangle_t\| R'^2 \sin \theta_s d\theta_s d\phi_s. \quad (1.50)$$

Si l'obstacle n'est pas parfaitement conducteur, une puissance sera transmise dans l'objet. Cette puissance transmise peut être exprimée de la même manière que la puissance diffusée. Connaissant ces puissances, la conservation d'énergie peut être étudiée. Il suffit pour cela de vérifier que la somme des puissances diffusée et transmise est égale à la puissance reçue par l'obstacle (la puissance incidente sur la surface réfléchissante) :

$$P_s + P_t = P_i. \quad (1.51)$$

Aucune énergie ne doit être perdue ou créée, et l'étude de cet axiome est un indicateur pour étudier la validité d'un modèle.

### 1.9.2 Surface Equivalente Radar (SER)

Une grandeur couramment employée pour caractériser la réflectivité électromagnétique d'un obstacle est la *Surface Equivalente Radar* (SER) que nous noterons  $\sigma$ . La SER est proportionnelle au rapport de la densité de puissance diffusée sur la densité de puissance incidente au niveau de l'obstacle. La SER caractérise la capacité d'un obstacle, à re-rayonner l'énergie électromagnétique reçue, vers le récepteur radar. La SER est une fonction intrinsèque de l'objet diffractant qui dépend :

- de la fréquence porteuse de l'onde émise par le radar.
- des états de polarisation à l'émission et à la réception.
- des caractéristiques géométriques de l'obstacle.
- des propriétés électromagnétiques de l'obstacle  $(\varepsilon, \mu, \sigma_c)$

– de l’aspect angulaire que présente l’objet vis à vis du radar.

Si l’onde incidente et l’onde diffractée sont des ondes planes se propageant dans un milieu assimilé au vide, les densités de puissance moyennes sont :

$$\|\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle_t\| = \frac{\|\mathbf{E}_i\|^2}{2\eta_0}, \quad (1.52)$$

$$\|\langle \mathbf{\Pi}_s \rangle_t\| = \frac{\|\mathbf{E}_s\|^2}{2\eta_0}, \quad (1.53)$$

où  $\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle_t$  et  $\langle \mathbf{\Pi}_s \rangle_t$  sont respectivement la moyenne temporelle du vecteur de Poynting du champ incident et diffracté. En considérant les relations (1.52) et (1.53) la SER d’un obstacle situé en champ lointain peut être exprimée :

$$\sigma(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) = 4\pi R'^2 \frac{\|\langle \mathbf{\Pi}_s \rangle_t\|}{\|\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle_t\|} = 4\pi R'^2 \frac{\|\mathbf{E}_s\|^2}{\|\mathbf{E}_i\|^2}. \quad (1.54)$$

Nous avons défini la SER sans tenir compte de l’état de polarisation des ondes incidente et diffractée puisque nous ne considérons que le calcul direct de la densité de puissance. En tenant compte de la projection de l’état de polarisation de l’onde dans la base sphérique associée, la matrice de SER se déduit de la matrice de diffraction par la relation suivante :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\phi} \\ \sigma_{\phi\theta} & \sigma_{\phi\phi} \end{bmatrix} = \lim_{R' \rightarrow \infty} 4\pi R'^2 \begin{bmatrix} |S_{\theta\theta}|^2 & |S_{\theta\phi}|^2 \\ |S_{\phi\theta}|^2 & |S_{\phi\phi}|^2 \end{bmatrix}. \quad (1.55)$$

La matrice de diffraction est évoquée sous le nom de *signature polarimétrique*, nom que porte parfois également la matrice de SER. Ce nom rappelle que la connaissance des quatre termes de la matrice de diffraction suffit à définir la réponse (en terme de réflectivité et de dépolarisation) d’un objet soumis à une onde d’état de polarisation complètement arbitraire.

Afin de pouvoir modéliser la SER d’une surface rugueuse ou une scène excitée par une onde incidente, il convient à présent de réaliser une analyse plus fine de la scène étudiée.

## 1.10 Surface rugueuse aléatoire

Le sujet de cette thèse concerne la modélisation de la diffusion d’une onde électromagnétique par un objet situé au-dessus d’une surface rugueuse. La surface rugueuse est une surface dont le comportement (hauteurs de la surface) temporel ou/et spatial n’est pas connu pour tout  $t$  ou/et  $(x, y)$ . Le profil est alors non déterministe, contrairement

par exemple au mouvement oscillant d'un pendule qui est connu à tout instant  $t$ . A l'aide d'une description statistique, nous montrerons que cette surface peut être décrite à l'aide de grandeurs statistiques déterministes, comme la distribution et la corrélation des hauteurs de la surface.

### 1.10.1 Rappels statistiques

Nous supposons que le profil est défini de façon univoque, c'est-à-dire que nous pourrions le décrire à l'aide d'une fonction  $(x, y) \rightarrow z(x, y)$ ; pour être précis, nous supposons que le profil est une réalisation, à un instant  $t_0$ , d'un processus aléatoire et stationnaire à valeurs réelles.

Notons  $p_z(z)$  la densité de probabilité des hauteurs de ce profil;  $p_z(z)dz$  représente la probabilité, pour un point de la surface, d'être compris entre les hauteurs  $z$  et  $z + dz$ . Les surfaces de mer font partie des surfaces rugueuses pouvant être représentées par une distribution gaussienne des hauteurs [11]. La densité de probabilité des profils considérés sera choisie gaussienne, centrée (valeur moyenne nulle) et d'écart type  $\sigma_z$ ;  $p_z(z)$  est alors donnée par :

$$p_z(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right), \quad (1.56)$$

et vérifie

$$\langle 1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p_z(z) dz = 1 \quad \langle z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} z p_z(z) dz = 0. \quad (1.57)$$

Ce moyennage des hauteurs est le *moment statistique d'ordre un* (valeur moyenne). Le *moment centré statistique d'ordre deux*,  $\langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle = \langle z^2 \rangle$ , encore appelé variance, correspond ici au moyennage sur le carré des hauteurs. Il s'écrit

$$\langle z^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 p_z(z) dz = \sigma_z^2,$$

où  $\sigma_z = \sqrt{\langle z^2 \rangle}$  désigne l'écart-type des hauteurs du profil.

La fonction d'*autocorrélation des hauteurs* (moment statistique d'ordre deux), est définie comme la moyenne statistique du produit des hauteurs,  $z(\mathbf{r}_1)$  et  $z(\mathbf{r}_2) = z(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r})$ , de deux points de la surface. Elle s'écrit donc

$$\langle z(\mathbf{r}_1) z^*(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) \rangle = \langle z(\mathbf{r}_1) z(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) \rangle = C_z(\mathbf{r}) \quad \text{car } z \in \mathbb{R}, \quad (1.58)$$

où  $\mathbf{r} = (x, y)$ .

Finalement, les données de la densité de probabilité des hauteurs et de la fonction d'autocorrélation des hauteurs définissent complètement le profil; en effet, les profils de distribution gaussienne des hauteurs possèdent la propriété intéressante d'avoir tous leurs moments statistiques reliés aux deux seuls premiers. On peut noter que  $C_z(\mathbf{0}) = \langle z(\mathbf{r}_1)z(\mathbf{r}_1) \rangle = \sigma_z^2$ .

Il est intéressant, par ailleurs, d'introduire la *densité spectrale de puissance* de la surface (aussi appelée spectre des hauteurs de la surface), qui est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation

$$S_z(\mathbf{k}) = \text{TF}[C_z(\mathbf{r})] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_z(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (1.59)$$

où  $\mathbf{k}$  représente le vecteur fréquence spatiale par cycle et est homogène à des  $\text{rad}\cdot\text{m}^{-1}$ .

En connaissant la distribution des hauteurs ainsi que la fonction d'autocorrélation des hauteurs (ou le spectre des hauteurs), le profil de la surface est complètement défini [12, 13].

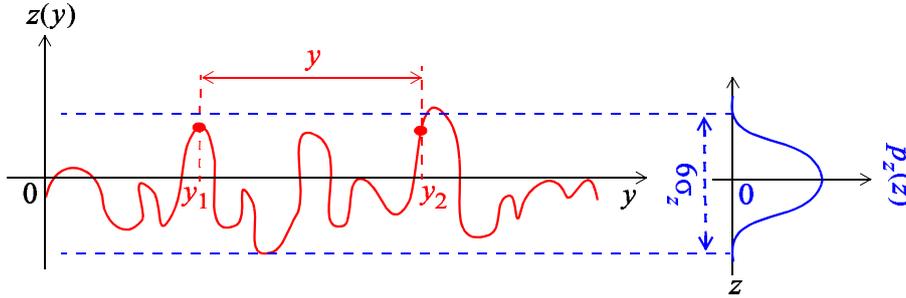


FIGURE 1.5 – Illustration de la densité probabilité des hauteurs pour une surface 1D rugueuse.

On utilise généralement une fonction d'autocorrélation des hauteurs de la surface gaussienne (on trouve parfois l'utilisation de fonctions lorentzienne et exponentielle) qui s'exprime

$$C_z(x, y) = \sigma_z^2 e^{-\left(\frac{x^2}{L_{cx}^2} + \frac{y^2}{L_{cy}^2}\right)}, \quad (1.60)$$

où  $L_{cx}$  et  $L_{cy}$  sont les longueurs de corrélation selon les directions  $x$  et  $y$  respectivement.

Nous avons vu que le profil de la surface peut être défini par la distribution des hauteurs et la fonction d'autocorrélation des hauteurs. D'autres paramètres peuvent également servir à définir le profil de la surface, tels l'écart-type des pentes de la surface  $\sigma_s$ , le rayon

de courbure moyen de la surface  $R_c$ , et la distance moyenne  $D_m$  entre deux pics consécutifs de la surface [12, 13].

### 1.10.2 Génération d'une surface rugueuse

A partir de  $p_z(z)$  et  $C_z(z)$ , un profil rugueux peut être généré.

Soit  $e(i)$ , un signal d'entrée échantillonné *connu*, et  $s(i)$  la réponse du signal d'entrée d'un système linéaire de réponse impulsionnelle  $g(i)$ . Le but est de calculer  $g(i)$  connaissant le signal de sortie  $s(i)$ .

Si  $e(i)$  est un processus aléatoire stationnaire, de densité spectrale de puissance  $S_e(k)$ , alors  $s(i)$  est un processus aléatoire stationnaire, dont la densité spectrale de puissance  $S_s(k)$  vérifie :

$$S_s(k) = |S_g(k)|^2 S_e(k), \quad (1.61)$$

où  $S_g(k)$  est la densité spectrale de puissance de  $g(i)$ . Si  $S_g(k)$  est réelle, alors l'équation ci-dessus conduit à

$$S_g(k) = \sqrt{\frac{S_s(k)}{S_e(k)}}, \quad (1.62)$$

Puisque le système est supposé *linéaire*, nous pouvons écrire que

$$s(i) = g(i) * e(i) \quad \text{avec} \quad g(i) = \text{TF}^{-1} \left[ \sqrt{\frac{S_s(k)}{S_e(k)}} \right].$$

Le symbole  $*$  désigne le produit de convolution. En appliquant en entrée du système linéaire un bruit blanc (contient toutes les fréquences) gaussien  $b(i) = e(i)$  de densité de spectrale de puissance  $S_b(k) = 1$ , nous obtenons

$$g(i) = \text{TF}^{-1}[\sqrt{S_s(k)}] = \text{TF}^{-1}\{\sqrt{\text{TF}[C_s(i)]}\}, \quad (1.63)$$

En connaissant les coefficients du filtre  $g(i)$ , le signal de sortie est déterminé en appliquant la convolution. Cette méthode repose donc sur la détermination de la transformée de Fourier inverse de la racine carrée de la densité spectrale de puissance  $S_s(k)$ . Ce résultat est appliqué sur la génération d'un profil rugueux  $z$  ( $s(i) = z(i)$ ). En effet, connaissant la fonction d'autocorrélation  $C_z(i)$  des hauteurs des échantillons en sortie du filtre, la densité spectrale de puissance associée  $S_z(k)$  peut être calculée et donc les coefficients du filtre sont déterminés.

A noter que le calcul analytique des coefficients du filtre n'est pas toujours possible. Ils sont alors calculés numériquement à l'aide d'une FFT (Fast Fourier Transform). De plus, le produit de convolution est calculé numériquement dans le domaine de Fourier. Ainsi, nous avons

$$z(i) = \text{TF}^{-1}\{\text{TF}[b(i)]\sqrt{\text{TF}[C_z(i)]}\}, \quad (1.64)$$

où  $b(i)$  est un bruit blanc Gaussien centré de variance unitaire.

## 1.11 Onde incidente atténuée sur les bords

Comme nous l'avons indiqué au paragraphe 1.10.2, la surface générée est d'étendue finie. Si cette surface est excitée par une onde plane, les extrémités de la surface seront également excitées ce qui induira un effet dit de "bord". Si l'on souhaite simuler la diffusion d'un obstacle au-dessus d'une surface rugueuse infinie, il convient de s'affranchir de ce problème. Pour cela, une solution est de faire en sorte que le faisceau incident éclaire principalement la région centrale de la surface et que les champs surfaciques aux extrémités soient nuls. Ce type d'onde incidente est appelé l'onde "Tapered" (Tapered Wave en anglais).

Considérons une onde "tapered" illuminant une surface de dimensions  $L_x \times L_y$ . Les champs incidents peuvent être exprimés comme [14, 15]

$$\mathbf{H}_i(x, y, z) = -\frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{(ik_x x + ik_y y - ik_z z)} E_{TE}(k_x, k_y), \quad (1.65)$$

$$\mathbf{E}_i(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{(ik_x x + ik_y y - ik_z z)} E_{TE}(k_x, k_y), \quad (1.66)$$

où  $E_{TE}(k_x, k_y)$  est le spectre du champ incident défini par

$$E_{TE}(k_x, k_y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-ik_x x - ik_y y} \cdot e^{i(k_{ix} x + k_{iy} y)(1+w)} e^{-t}, \quad (1.67)$$

avec

$$t = t_x + t_y = (x^2 + y^2)/g^2, \quad (1.68)$$

$$t_x = \frac{(\cos \phi_i x + \sin \phi_i y)^2}{g^2}, \quad (1.69)$$

$$t_y = \frac{(-\sin \phi_i x + \cos \phi_i y)^2}{g^2}, \quad (1.70)$$

$$w = \frac{1}{k_0^2} \left[ \frac{2t_x - 1}{g^2 \cos^2 \theta_i} + \frac{2t_y - 1}{g^2} \right]. \quad (1.71)$$

Où,  $g$  est un paramètre qui contrôle l'atténuation de l'onde incidente. Si celui-ci est trop grand, l'onde "tapered" tend vers une onde plane. La figure 1.6 montre l'effet du paramètre  $g$  sur le module du champ incident sur la surface. On remarque que plus  $g$  est petit plus le champ incident éclaire une zone étroite sur la surface.

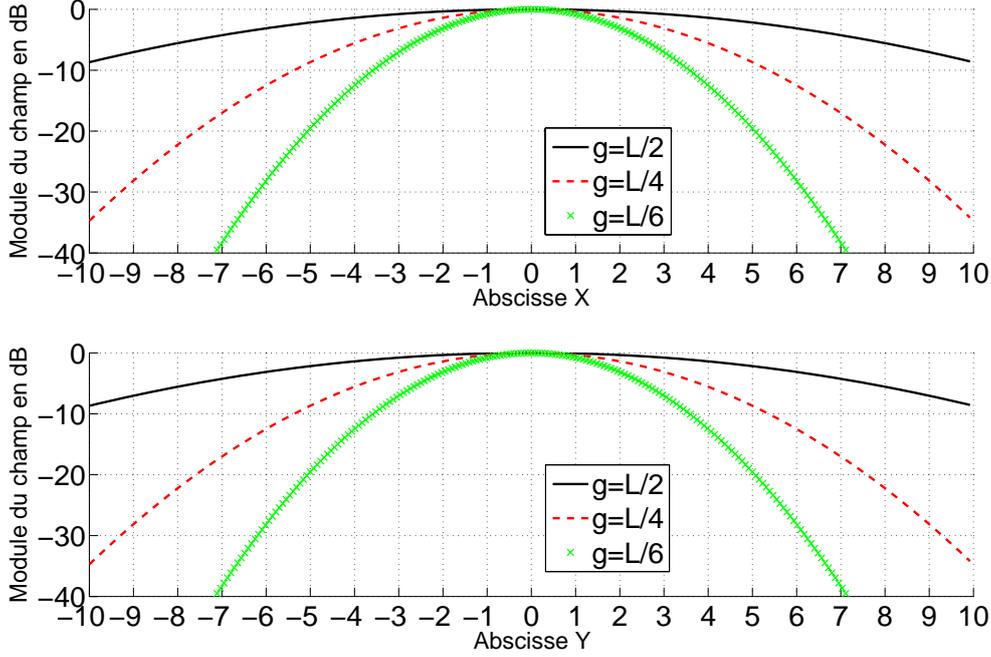


FIGURE 1.6 – Effet du paramètre  $g$  sur le module du champ incident. Cas d'une surface de dimensions  $S = 10\lambda_0 \times 10\lambda_0$ .

Pour les calculs de la SER, il est important d'évaluer la puissance de l'onde incidente sur la surface. L'obtention de son expression est donnée dans [14] :

$$P_i = \frac{2\pi^2}{\eta} \int_{k_\rho < k} dk_x dk_y \|E_{TE}(k_x, k_y)\|^2 (kz/k), \quad (1.72)$$

avec  $k_\rho = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  et la SER normalisée (SERN) peut être calculée comme suit

$$SERN = 4\pi R^2 \frac{\|(\mathbf{\Pi}_s)_t\|}{P_i} = 4\pi R^2 \frac{\|\mathbf{E}_s\|^2}{2\eta P_i}. \quad (1.73)$$

Les sections précédentes ont défini les bases permettant de poser convenablement le problème de la diffraction et de décrire la génération de la surface rugueuse. A présent, il convient d'évoquer les méthodes permettant de modéliser la SER et la matrice de diffraction d'un obstacle situé au-dessus d'une surface rugueuse.

## 1.12 Méthodes de résolution du problème de la diffraction

Toute la difficulté réside dans le fait que dans les équations intégrales établies à la section 1.5, le champ diffracté ou total se trouve être relié à lui même. Pour résoudre un tel problème, deux familles de modèles peuvent être utilisées :

- Les modèles asymptotiques (approchés) : Dans ces modèles l'équation à résoudre est simplifiée à l'aide d'approximations adaptées au problème à étudier.
- Les modèles rigoureux (“exacts”) : Ces méthodes sont généralement employées pour cerner le domaine de validité des méthodes approchées. Elles sont généralement appliquées pour des cas simples où les objets ne sont pas de grandes dimensions devant la longueur d'onde.

### 1.12.1 Modèles rigoureux

Dans la famille des modèles rigoureux, nous trouvons des méthodes analytiques et des méthodes numériques. Tandis que les premières permettent d'obtenir une solution rigoureusement exacte du problème mais ne peuvent être appliquées qu'à quelques cas canoniques (sphère, cylindre infini....), les méthodes numériques se basent sur une discrétisation du problème et permettent ainsi de résoudre tout problème de diffraction en théorie. Ainsi, dès que le problème fait intervenir des objets de forme ou de nature plus complexes que les quelques cas canoniques connus, les méthodes numériques sont les seules à conclure à une résolution “exacte” du problème [16, 17] ; la seule approximation venant de la discrétisation du problème. L'évolution rapide des calculateurs depuis une cinquantaine d'années a permis l'utilisation de telles méthodes et la résolution de problèmes complexes de la diffraction. L'inconvénient majeur de ces méthodes est que le nombre d'inconnues peut devenir très important lorsque les objets sont de grandes dimensions devant la longueur d'onde. Outre l'aspect problématique du stockage en mémoire des inconnues, le temps de calcul peut vite devenir prohibitif et rendre ces méthodes inutilisables. Ces méthodes sont donc généralement employées pour cerner le domaine de validité des méthodes approchées.

Les trois plus célèbres sont la méthode des éléments finis, la méthode des différences

finies, et la méthode des moments.

### Méthode des éléments finis FEM

La **FEM** (Finite Element Method), [18] est une méthode différentielle, qui repose sur une discrétisation du domaine de calcul grâce à des éléments géométriques adaptés : les éléments finis. Ces éléments peuvent être de diverses formes mais doivent former un pavage de l'espace considéré. Usuellement les éléments finis sont des tétraèdres. A l'intérieur de chaque élément, la fonction cherchée subit une approximation polynomiale dont les coefficients sont inconnus. Par un choix judicieux des coefficients, la FEM impose automatiquement les conditions de continuité de la fonction d'un élément à l'autre. La FEM permet donc de résoudre de manière discrète une équation aux dérivées partielles dont on cherche une solution approchée suffisamment fiable.

### Méthode des différences finies FDTD

La **FDTD** (Finite Difference Time-Domain) [19, 20, 21] est une méthode différentielle, qui repose sur une discrétisation des opérateurs de dérivation et fait également intervenir un maillage de l'espace. Il s'agit donc d'une double discrétisation spatiale et temporelle. Son avantage par rapport à la FEM est qu'elle peut traiter des problèmes non linéaires et/ou non stationnaires.

### Méthode des moments Mdm

La **Mdm** (MoM : Method of Moments) [22] est une méthode intégrale, qui repose sur le développement en série de fonctions de base, pondérées par des coefficients inconnus, des courants sur la surface de l'obstacle. Les équations intégrales sont exprimées à l'aide de ces séries et sont ensuite projetées sur une série de fonctions de test, choisies selon un critère de minimisation de l'erreur. Cette procédure permet de discrétiser les équations intégrales du domaine fréquentiel et de poser ensuite le problème sous la forme d'un système matriciel du type :

$$\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{X} = \mathbf{b}, \quad (1.74)$$

où  $\bar{\mathbf{Z}}$  est la matrice impédance,  $\mathbf{X}$  contient les inconnues du problème,  $\mathbf{b}$  est la donnée du problème : le terme de sources. L'inversion de  $\bar{\mathbf{Z}}$  pour résoudre l'équation précédente peut

être obtenue par une méthode directe (décomposition LU). D'autres méthodes numériques exactes et rapides sont utilisées pour diminuer la complexité de l'inversion matricielle et s'affranchir de la décomposition LU en résolvant le système matriciel  $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{X} = \mathbf{b}$  par une procédure itérative. Les plus célèbres de ces méthodes sont : La FMM (Fast Multipole Method) [23], La MLFMM (Multi-Level Fast Multipole Method) [24], la BMIA (Banded Matrix Iterative Approach) [25], la FB (Forward Backward) [26], et la FB-SA (Forward Backward with Spectral Acceleration) [27, 28]. Notons que les matrices obtenues sont beaucoup plus petites que celles calculées avec les méthodes FEM, FDTD, mais cependant elles sont pleines. La taille des matrices augmente avec la fréquence (pour un pas de discrétisation fixe par rapport à la longueur d'onde) et les matrices peuvent alors devenir très difficiles à stocker et/ou à inverser.

### 1.12.2 Modèles asymptotiques hautes fréquences

Dans la famille des modèles asymptotiques hautes fréquences, nous retrouvons également des méthodes analytiques et des méthodes numériques. Parmi celles-ci certaines établissent un développement asymptotique du champ rayonné à grande distance, d'autres se basent sur un développement asymptotique du courant induit sur la surface de la cible. Dans les deux cas, ces méthodes ont un domaine de validité restreint au domaine des hautes fréquences. Ceci signifie que les dimensions de l'obstacle sont grandes devant la longueur d'onde.

#### Méthodes orientées *rayon*

Les méthodes orientées *rayon* sont des méthodes qui se basent sur un développement asymptotique du champ rayonné sous l'hypothèse que l'obstacle est de très grande taille par rapport à la longueur d'onde. La méthode la plus connue est l'Optique Géométrique (OG) [29]. Les autres méthodes, telles la Théorie Géométrique de la Diffraction (TGD) [30, 31] ou la Théorie Uniforme de la Diffraction (TUD) [32] par exemple, peuvent être vues comme des généralisations de l'OG et prennent en compte les contributions des discontinuités de surface (comme des arêtes par exemple).

### Méthodes orientées *courant*

Les méthodes orientées *courant* sont des méthodes qui se basent sur un développement asymptotique du courant induit sur la surface de la cible sous l'hypothèse que l'obstacle est de très grande taille par rapport à la longueur d'onde. La méthode la plus connue et la plus utilisée est la méthode de l'Optique Physique (**OP**) [33] détaillée au chapitre deux. D'autres méthodes asymptotiques orientées *courant* permettent de corriger l'OP en tenant compte de la diffraction par des discontinuités de surface, telles la Méthode des Courants Equivalents (**MCE**) [34] ou la Théorie Physique de la Diffraction (**TPD**).

### Modèles asymptotiques pour la diffusion par des surfaces rugueuses

Dans le cas d'une surface rugueuse, la surface est supposée infinie mais des hypothèses simplificatrices peuvent être faites : par exemple les irrégularités de la surface peuvent être considérées comme grandes ou petites devant la longueur d'onde. De ce fait, nous retrouvons des méthodes asymptotiques hautes fréquences vues précédemment comme l'OG, l'OP plus souvent appelée *méthode du plan tangent* lorsqu'elle est appliquée à une surface rugueuse. Notons aussi que l'OP est parfois aussi nommée Approximation de Kirchhoff (**AK**). Le domaine de validité de ces méthodes *hautes fréquences* dépend du rayon de courbure de la surface qui doit être grand devant la longueur d'onde pour que la surface puisse être considérée comme localement plane.

## 1.13 Etat de l'art : le choix des méthodes

Le choix de la méthode pour un modèle dépend en premier lieu de la scène étudiée. Les modèles rigoureux peuvent difficilement être appliqués lorsque l'objet est grand devant la longueur d'onde puisqu'ils se basent sur une discrétisation du problème. De plus, les méthodes rigoureuses FEM et FDTD, nécessitent un maillage en volume de la scène et donc le temps de calcul et l'espace mémoire sont généralement plus importants que ceux de la MoM. Les modèles asymptotiques utilisent des hypothèses simplificatrices, les méthodes orientées "courants" imposent l'utilisation du principe de Huygens, soit, un calcul rigoureux du rayonnement. L'intégrale surfacique des courants permet également de tenir compte de la "finitude" des surfaces dans le cas d'obstacles de dimensions limitées. De ce fait, l'OP est souvent favorisée dans les calculs de diffraction par des objets puisque

plus précise dans les résultats. Cependant, lorsque les scènes font intervenir de multiples réflexions entre des objets disposés arbitrairement, les méthodes de rayons sont les plus rapides pour fournir numériquement un résultat.

L'étude de la diffusion par un objet situé près d'une interface est un sujet de grand intérêt. L'origine de cette question vient du problème initialement étudié par Sommerfeld [35] concernant un dipôle situé en face d'un demi-espace parfaitement conducteur. Mais, les applications en télédétection et surveillance radar maritime ont également encouragé des recherches très récentes sur ce sujet. Ainsi, des méthodes asymptotiques et des modèles numériques "exacts" ont été proposés pour un problème électromagnétique 2D durant ces dernières années [36, 37, 38, 39, 40, 41, 42].

Toutefois, pour des applications pratiques il est important d'étudier le cas 3D, qui est le cas le plus général. Pourtant, les scènes constituées d'un objet 3D au-dessus d'une surface rugueuse 2D (problème 3D) ne constituent qu'un nombre restreint d'études [15, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49]. Pour ces problèmes, le nombre d'inconnues devient trop important pour que l'étude soit menée avec une méthode rigoureuse classique de type Méthode des Moments. Ainsi Johnson *et al.* utilisent la Coupled CAnonical Grid/Discrete Dipole Approach (CCAG/DDA) [44] permettant de calculer les interactions sur la surface inférieure avec une complexité  $\mathcal{O}(N_- \log(N_-))$  et sur l'objet  $\mathcal{O}(N_+ \log(N_+))$  (où  $N_-$  est le nombre d'inconnues sur la surface inférieure et  $N_+$  le nombre d'inconnues sur l'objet). Les couplages entre l'objet et la surface sont par contre calculés sans aucune accélération. Ils ont réussi à évaluer la diffusion par un objet décrit par 13824 inconnues au-dessus d'une surface plane de  $256 \times 256$  inconnues (65536 inconnues) à l'aide du cluster de PC du Maui High Performance Computing Center [50] avec un temps de calcul de 1 à 8 heures selon la configuration des tests. Dans [43], la même méthode est appliquée sur des scènes comportant plus d'inconnues (276 000 inconnues) et où l'objet est placé au-dessus d'une surface rugueuse. Le même cluster de PC est utilisé afin d'appliquer ces méthodes avec un temps de calcul de 6 à 14 heures selon la configuration des tests (avec un total de 20 réalisations de profils rugueux pour la méthode de Monte-Carlo). Il est important de noter, que les surfaces mises en jeu dans ces simulations, sont de très petites tailles :  $1,28 \times 1,28$  m soit  $8,5\lambda \times 8,5\lambda$  à  $21,35\lambda \times 21,35\lambda$  avec les fréquences utilisées (de 2 à 5 GHz).

Çolak *et al.* utilisent quant à eux la Multiple Sweep Method of Moments (MSMM) pour une scène où l'objet est localisé sur la surface [45]. La surface de l'objet et la surface

rugueuse ne forment qu'une seule surface continue. Les temps de calcul et les machines informatiques utilisées pour réaliser ce calcul ne sont pas mentionnés dans l'article mais la complexité de la méthode est de  $\mathcal{O}(N^2)$  (où  $N$  est le nombre d'inconnues total de la scène).

Kuang *et al.* [46] utilisent l'algorithme de FDTD pour étudier la diffraction d'un objet au-dessus d'une surface rugueuse périodique sur une partie de cette surface. Alors l'étude de la diffraction par une surface de longueur infinie est ramenée à l'étude de la diffraction par une portion de la surface de longueur déterminée. Cette méthode permet de réduire le nombre d'inconnues et la capacité de mémoire, car elle utilise une seule période illuminée par une onde incidente plane dans le domaine de calcul de FDTD. Guo *et al.* ont utilisé la *Parallel FDTD Approach* avec un calcul parallèle au lieu d'un calcul séquentiel pour réduire le temps de calcul [48].

Ye *et al.* [47] ont proposé une méthode hybride pour calculer le champ diffracté par un objet PC au-dessus d'une surface rugueuse diélectrique. Dans cette étude l'approximation de Kirchhoff (AK) est utilisée pour calculer les interactions locales sur la surface rugueuse, et la méthode des moments (MmM) pour calculer les interactions locales sur l'objet. Guan *et al.* [49] ont proposé une approche pour analyser la diffraction d'un objet au-dessus d'une surface rugueuse parfaitement conductrice. Ils ont utilisé l'approximation de Kirchhoff pour dériver la fonction de Green du demi-espace pour une surface rugueuse. Ensuite la méthode des moments est appliquée pour analyser la diffraction d'onde par l'objet qui est au-dessus de la surface.

Très récemment en 2011, W.-J. Ji *et al.* ont utilisé l'algorithme (E-PILE+SMCG) pour étudier le cas d'un objet enfoui dans le sol [15]. Ils ont appliqué la méthode SMCG sur la surface rugueuse (le sol), et la MmM sur l'objet. Cette étude est limitée aux surfaces rugueuses de faible écart type des hauteurs (typiquement  $\sigma_z = 0.02\lambda$ ).

Dans notre travail, les scènes étudiées sont 3D, le nombre d'inconnues peut très rapidement atteindre des valeurs qui rendent le problème insoluble par une méthode rigoureuse, il est donc proposé d'appliquer des méthodes hybrides (rigoureux+asymptotiques) pour trouver un bon compromis entre les ressources informatiques et la précision. Afin d'envisager l'accélération du calcul et améliorer le stockage mémoire, la méthode E-PILE (Extended Propagation-Inside-Layer Expansion) développée dans la thèse de G. Kubické [1] sera utilisée, et l'extension de cette méthode au cas d'une surface 3D doit être

envisagée. La méthode E-PILE permettra d'envisager l'emploi des méthodes précédemment présentées. De plus, E-PILE sera hybridée avec une méthode asymptotique et une méthode rigoureuse pour accélérer le calcul et diminuer la complexité.

### 1.14 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons brièvement rappelé quelques éléments d'électromagnétisme nécessaires à la résolution de notre problème. Des notions et des définitions permettant de caractériser le pouvoir réflecteur d'obstacles et de surfaces ont été évoquées, telles celles de la SER et de la signature polarimétrique. Les méthodes les plus populaires pour résoudre les problèmes ont été présentées et classifiées. La génération d'une surface rugueuse et l'état de l'art dans le problème plus particulier de la diffusion par un obstacle au-dessus d'une surface rugueuse ont également été détaillés.



# Diffusion par un diffuseur placé en espace libre

---

*L*e premier chapitre a présenté les principaux outils nécessaires pour modéliser la diffraction par un objet de forme quelconque. Dans ce chapitre, ces outils sont appliqués pour caractériser la diffusion par une surface rugueuse seule parfaitement conductrice (PC). L'objectif principal du problème de la diffraction d'une onde par une surface PC, est de déterminer le courant surfacique. Ce courant est la solution de deux équations intégrales : MFIE (Magnetic Field Integral Equation) et EFIE (Electric Field Integral Equation). Le formalisme intégral permet de résoudre un problème de diffraction. Une fois le courant électrique connu sur la surface, le champ diffracté en tout point de l'espace hors de la surface peut être facilement calculé. Nous allons exposer dans ce chapitre la méthode de l'Optique Physique (OP) et la méthode des moments (Mm), ces deux méthodes serviront de briques élémentaires pour étudier une scène plus complexe composée d'un objet placé au-dessus d'une surface rugueuse. Les résultats obtenus seront comparés avec des méthodes de référence à l'aide du logiciel FEKO.

## 2.1 La méthode de l'Optique Physique (OP)

L'optique physique (également appelée approximation du plan tangent) est une méthode asymptotique basée sur la simplification des équations intégrales de Stratton-Chu dans lesquelles les courants sur la surface sont approximés par le champ tangentiel de l'optique géométrique. L'OP ne prend pas en compte les ondes rampantes, ni les discontinuités de surface. Ceci limite le domaine de validité de l'OP aux régions proches des directions spéculaires et de forward scattering [51]. L'OP est malgré cela très intéressante car elle réside en une simple intégration, qui peut être effectuée analytiquement sans grande difficulté sur des surfaces planes (mailles carrées ou triangulaires par exemple); tout objet peut donc être traité par la méthode via un maillage en surfaces planes élémentaires.

L'équation (1.34) peut être écrite en fonction des courants [6]

$$\mathbf{E}_s = \int_S \left[ G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') i\omega\mu \mathbf{J}_s(\mathbf{R}) - \mathbf{M}_s(\mathbf{R}) \wedge \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') + \frac{i}{\omega\varepsilon} [\mathbf{J}_s(\mathbf{R}) \cdot \nabla] \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \right] ds, \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{J}_s(\mathbf{R}) = \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R})$  est le courant électrique surfacique et  $\mathbf{M}_s(\mathbf{R}) = -\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})$  est le courant magnétique surfacique.

Après quelques développements [52, 53], on obtient une nouvelle expression du champ électrique diffusé par un obstacle

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s(\mathbf{R}) = & \frac{i}{\omega\varepsilon} \iint_S \left[ (1 + ikr - k^2r^2) \mathbf{J}_s(\mathbf{R}) + \frac{(-k^2r^2 + ikr)}{\eta} \mathbf{M}_s(\mathbf{R}) \wedge \hat{\mathbf{r}} \right. \\ & \left. + (-3 - 3ikr + k^2r^2) (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{R})) \hat{\mathbf{r}} \right] \frac{G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{r^2} ds, \end{aligned} \quad (2.2)$$

où  $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$  avec  $r = \|\mathbf{R} - \mathbf{R}'\|$ , représente la fonction de Green en espace libre;  $\eta$  et  $k$  désignent l'impédance et le nombre d'onde du milieu de propagation.

L'équation (2.2) est une équation générale qui peut être utilisée en zones de champ proche et de champ lointain.

Le but de la méthode de l'OP est de permettre de résoudre les équations intégrales en utilisant des hypothèses simplificatrices :

- *Hypothèse hautes fréquences : les dimensions de l'objet sont très supérieures à la longueur d'onde.*

Les densités de courant sur la surface de l'objet décroissent très rapidement et peuvent être considérées nulles dans la zone d'ombre. La méthode de l'OP ne prend donc pas en compte les ondes rampantes, ni les discontinuités.

• *Les rayons de courbure de la surface illuminée sont très supérieurs à la longueur d'onde.*

L'approximation de l'OP, est nommée également approximation du plan tangent : pour laquelle la surface peut être assimilée à un plan infini en chacun de ses points. Ce plan infini correspond au plan tangent à la surface au point considéré. La surface est alors qualifiée de localement plane. Sous cette hypothèse, le champ réfléchi par la surface peut s'exprimer très simplement à partir du champ incident sur la surface à l'aide des lois de Snell-Descartes et des coefficients de Fresnel. Le coefficient de réflexion de Fresnel permet de connaître son amplitude, et la loi de Snell-Descartes sa direction.

Dans le cas d'une surface parfaitement conductrice on peut écrire :  $\mathbf{H}_r(\mathbf{R}) = \mathbf{H}_i(\mathbf{R})$  et  $\mathbf{E}_r(\mathbf{R}) = -\mathbf{E}_i(\mathbf{R})$ , où :  $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$  et  $(\mathbf{E}_r, \mathbf{H}_r)$  sont respectivement les champs EM incidents et réfléchis.

On peut alors exprimer les densités de courants surfaciques en fonction du champ incident :

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{R}) = \hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{H}_i(\mathbf{R}) + \mathbf{H}_r(\mathbf{R})) = 2(\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_i(\mathbf{R})), \quad (2.3)$$

et

$$\mathbf{M}_s(\mathbf{R}) = -\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{E}_i(\mathbf{R}) + \mathbf{E}_r(\mathbf{R})) = \mathbf{0}, \quad (2.4)$$

alors l'équation (2.2) pour le cas PC s'écrit

$$\mathbf{E}_s = \frac{2i}{\omega\varepsilon} \int_S [(1 + ikr - k^2r^2)(\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_i(\mathbf{R})) + (-3 - i3kr + k^2r^2)(\hat{\mathbf{r}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_i(\mathbf{R}))\hat{\mathbf{r}})] \frac{G}{r^2} ds. \quad (2.5)$$

### 2.1.1 Application à une surface parfaitement conductrice (PC) en champ lointain

Dans le problème de la diffraction électromagnétique par un objet au dessus d'une surface rugueuse, il est nécessaire de commencer par étudier la diffraction par la surface rugueuse seule. Le problème peut alors être simplifié en appliquant la condition de champ lointain.

Si l'élément de surface  $ds$  est éloigné du point d'observation tel que  $k_0r \gg 1$  alors les termes en  $\frac{1}{r}$  et en  $\frac{1}{r^2}$  dans l'équation (2.2) peuvent être considérés comme nuls. De plus on considère que la surface est placée dans un milieu assimilé au vide, on obtient alors

une expression simplifiée de l'équation (2.5) :

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{R}') = \frac{i\omega\mu}{4\pi R'} e^{ik_0 R'} \int_S [\mathbf{J}_s(\mathbf{R}) + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{R}))\hat{\mathbf{r}}] e^{-ik_0 \hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{R}} dS. \quad (2.6)$$

Sous la condition d'un éclairage en onde plane dans la direction  $\hat{\mathbf{k}}_i$ , le champ électrique incident peut être décrit en coordonnées sphériques :

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_i e^{ik_0 \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{R}} = (E_i^\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}_i + E_i^\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}_i) e^{ik_0 \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{R}}, \quad (2.7)$$

et le champ magnétique est relié au champ électrique par :

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{R}) = \frac{1}{\eta_0} \hat{\mathbf{k}}_i \wedge \mathbf{E}_i(\mathbf{R}). \quad (2.8)$$

En exprimant les différents vecteurs (voir figure 1.4 au chapitre 1) dans le repère cartésien on a

$$\hat{\mathbf{k}}_i = \begin{bmatrix} \sin \theta_i \cos \phi_i \\ \sin \theta_i \sin \phi_i \\ -\cos \theta_i \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_s = \begin{bmatrix} \sin \theta_s \cos \phi_s \\ \sin \theta_s \sin \phi_s \\ \cos \theta_s \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Les composantes du vecteur  $\mathbf{H}_i$  dans la base  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$  s'expriment en fonction des composantes sphériques  $E_i^\theta$  et  $E_i^\phi$  par la relation suivante

$$\begin{bmatrix} H_{ix} \\ H_{iy} \\ H_{iz} \end{bmatrix} = \frac{1}{\eta_0} \begin{bmatrix} E_i^\phi \cos(\theta_i) \cos(\phi_i) - E_i^\theta \sin(\phi_i) \\ E_i^\phi \cos \theta_i \sin(\phi_i) + E_i^\theta \cos(\phi_i) \\ E_i^\phi \sin(\theta_i) \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

La normale à la surface  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R})$  s'exprime par [11] :

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) = n_x \hat{\mathbf{x}} + n_y \hat{\mathbf{y}} + n_z \hat{\mathbf{z}} = \frac{-z_x \hat{\mathbf{x}} - z_y \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \quad (2.12)$$

où  $z_x = \frac{dz}{dx}$  est la pente selon l'axe  $x$ , et  $z_y = \frac{dz}{dy}$  est la pente selon l'axe  $y$ .

En utilisant l'approximation de l'OP,  $\mathbf{J}_s(\mathbf{R}) = 2\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \wedge \mathbf{H}_i(\mathbf{R})$ , les composantes du courant surfacique sont données à partir des équations (2.3), (2.8) et (2.11)

$$\mathbf{J}_s = \frac{2}{\eta_0} \begin{bmatrix} E_i^\phi (n_y \sin \theta_i - n_z \cos \theta_i \sin \phi_i) - E_i^\theta (n_z \cos \phi_i) \\ -E_i^\phi (n_z \cos \theta_i \cos \phi_i + n_x \sin \theta_i) + E_i^\theta (n_z \sin \phi_i) \\ E_i^\phi (n_x \cos \theta_i \sin \phi_i - n_y \cos \theta_i \cos \phi_i) + E_i^\theta (n_x \cos \phi_i + n_y \sin \phi_i) \end{bmatrix} e^{ik_0 \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{R}}. \quad (2.13)$$

On peut écrire  $\mathbf{J}_s$  sous la forme :

$$\mathbf{J}_s = \bar{\mathbf{J}}_s \begin{bmatrix} E_i^\theta \\ E_i^\phi \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

où

$$\bar{\mathbf{J}}_s = \frac{2}{\eta_0} \begin{bmatrix} J_x^\theta & J_x^\phi \\ J_y^\theta & J_y^\phi \\ J_z^\theta & J_z^\phi \end{bmatrix} e^{ik_0 \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{R}}, \quad (2.15)$$

à partir de l'équation (2.13) on a :

$$\bar{\mathbf{J}}_s = \frac{2}{\eta_0} \begin{bmatrix} -n_z \cos \phi_i & n_y \sin \theta_i - n_z \cos \theta_i \sin \phi_i \\ n_z \sin \phi_i & -(n_z \cos \theta_i \cos \phi_i + n_x \sin \theta_i) \\ n_x \cos \phi_i + n_y \sin \phi_i & n_x \cos \theta_i \sin \phi_i - n_y \cos \theta_i \cos \phi_i \end{bmatrix} e^{ik_0 \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{R}}. \quad (2.16)$$

A partir de (2.6) et (2.15) on peut écrire :

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{R}') = \frac{i\omega\mu}{2\pi R' \eta_0} e^{ik_0 R'} \bar{\mathbf{D}}_s \begin{bmatrix} E_i^\theta \\ E_i^\phi \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

où la matrice  $\bar{\mathbf{D}}_s$  est donnée par :

$$\bar{\mathbf{D}}_s = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \\ I_{31} & I_{32} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

avec

$$I_{11} = \int_S J_x^\theta \cdot e^{ik_0(\hat{\mathbf{k}}_i - \hat{\mathbf{k}}_s) \cdot \mathbf{R}} dS, \quad (2.19)$$

$$I_{12} = \int_S J_x^\phi \cdot e^{ik_0(\hat{\mathbf{k}}_i - \hat{\mathbf{k}}_s) \cdot \mathbf{R}} dS, \quad (2.20)$$

$$I_{21} = \int_S J_y^\theta \cdot e^{ik_0(\hat{\mathbf{k}}_i - \hat{\mathbf{k}}_s) \cdot \mathbf{R}} dS, \quad (2.21)$$

$$I_{22} = \int_S J_y^\phi \cdot e^{ik_0(\hat{\mathbf{k}}_i - \hat{\mathbf{k}}_s) \cdot \mathbf{R}} dS, \quad (2.22)$$

$$I_{31} = \int_S J_z^\theta \cdot e^{ik_0(\hat{\mathbf{k}}_i - \hat{\mathbf{k}}_s) \cdot \mathbf{R}} dS, \quad (2.23)$$

$$I_{32} = \int_S J_z^\phi \cdot e^{ik_0(\hat{\mathbf{k}}_i - \hat{\mathbf{k}}_s) \cdot \mathbf{R}} dS, \quad (2.24)$$

et

$$\begin{cases} S_{11} = -\sin^2 \theta_s \sin^2 \phi_s - \cos^2 \theta_s, \\ S_{12} = \sin^2 \theta_s \sin \phi_s \cos \phi_s, \\ S_{13} = \sin \theta_s \cos \theta_s \cos \phi_s, \\ S_{22} = -\sin^2 \theta_s \cos^2 \phi_s - \cos^2 \theta_s, \\ S_{23} = \sin \theta_s \cos \theta_s \sin \phi_s, \\ S_{33} = -\sin^2 \theta_s, \end{cases} \quad (2.25)$$

On obtient ainsi les composantes du champ diffusé dans la base  $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$  :

$$\begin{bmatrix} E_s^x \\ E_s^y \\ E_s^z \end{bmatrix} = P \bar{\boldsymbol{D}}_s \begin{bmatrix} E_i^\theta \\ E_i^\phi \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

où  $P = \frac{i\omega\mu}{2\pi R' \eta_0} e^{ik_0 R'}$  est un scalaire qui dépend de la distance d'observation, de la fréquence, des propriétés électromagnétiques du milieu incident.

Les composantes du champ diffusé dans le repère cartésien s'expriment en fonction des composantes sphériques en utilisant la matrice de rotation sphérique vue à la section 1.7 comme suit :

$$\begin{bmatrix} E_s^\theta \\ E_s^\phi \end{bmatrix} = P \bar{\boldsymbol{R}}_s^T \bar{\boldsymbol{D}}_s \begin{bmatrix} E_i^\theta \\ E_i^\phi \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Finalement les composantes du champ incident et diffracté sont liées par l'expression suivante :

$$\boldsymbol{E}_s = \bar{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{E}_i \quad (2.28)$$

où  $\bar{\boldsymbol{S}} = P \bar{\boldsymbol{R}}^T \bar{\boldsymbol{D}}_s$  est la matrice de diffraction.

On obtient finalement la matrice de SER suivante :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = 4\pi R'^2 \begin{bmatrix} |S_{\theta\theta}|^2 & |S_{\theta\phi}|^2 \\ |S_{\phi\theta}|^2 & |S_{\phi\phi}|^2 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

### 2.1.2 Validation de l'OP pour le cas d'une plaque PC

Il est toujours nécessaire de valider les modèles asymptotiques par des modèles de référence. Mais pour le cas d'une surface rugueuse, cette validation est plus difficilement réalisable car la rugosité peut engendrer des écarts plus difficiles à analyser. Il est de ce

fait nécessaire de s'intéresser dans un premier temps au cas d'une surface lisse. La plaque est un cas particulier d'une surface rugueuse, elle peut être considérée comme une surface rugueuse avec des hauteurs nulles, il est donc utile d'appliquer le travail de la section précédente (cas général) au cas d'une plaque lisse pour la validation.

Considérons une plaque de surface  $S = L_x \times L_y$  contenue dans le plan  $(\hat{x}, O, \hat{y})$ , comme représenté sur la figure 2.1, la normale à la surface est dirigée selon l'axe  $\hat{z}$ . La méthode de l'OP est comparée à la méthode de référence MLFMM (logiciel FEKO [54]) sur les figures 2.2 et 2.3, sur lesquelles la SER et la phase du champ diffracté en champ lointain sont tracées en fonction de l'angle d'observation  $\theta_s$  pour les deux co-polarisations. La plaque est de longueur  $L_x = L_y = 10\lambda_0$ ,  $\lambda_0 = 1$  m, les pas d'échantillonnage de la surface sont  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$  et  $\theta_i = 0^\circ$  (incidence normale).

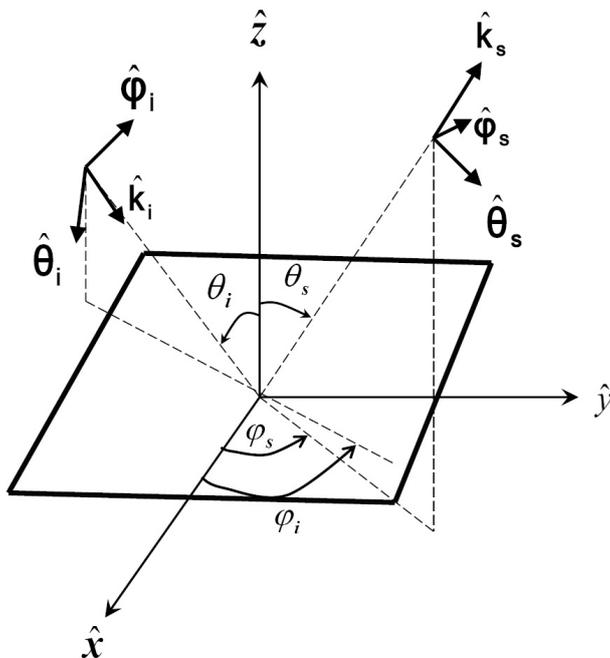


FIGURE 2.1 – Géométrie du problème : illustration de la plaque lisse.

A partir des figures 2.2 et 2.3 on en déduit que le maximum est obtenu pour  $\theta_s = 0^\circ$  (direction spéculaire). La méthode de l'OP est en accord avec la MLFMM autour de la direction spéculaire  $\theta_s = 0^\circ$ . D'autres valeurs de  $\theta_i$ , entre  $-90^\circ$  et  $90^\circ$  ont produit les mêmes phénomènes avec notamment un maximum de puissance pour  $\theta_i = \theta_s$  : la direction spéculaire. Nous observons aussi que la méthode de l'OP ne permet pas d'évaluer correctement la SER pour des angles d'observation rasants, ceci étant principalement dû à la concentration des courants sur les bords créant des diffractions d'arêtes qui ne sont

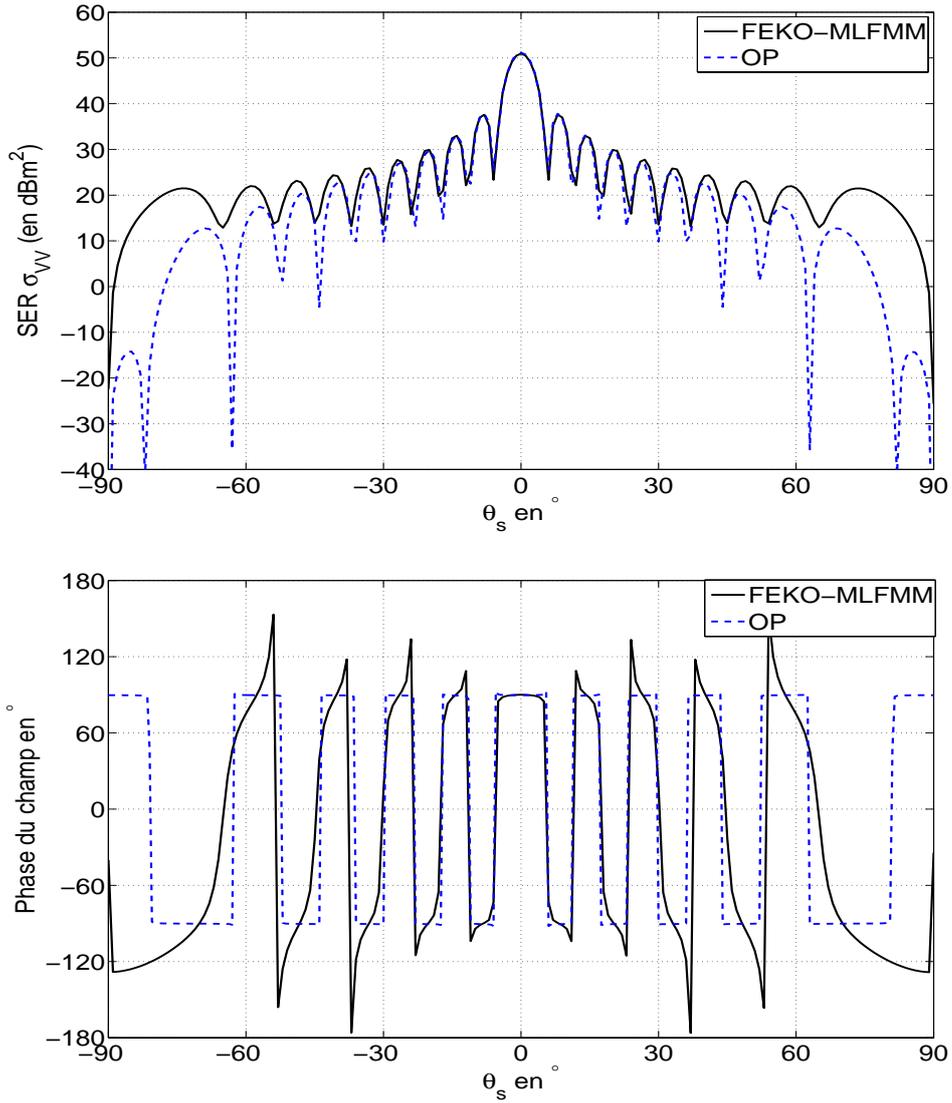


FIGURE 2.2 – Comparaison de la SER bistatique et de la phase du champ diffracté de la plaque (Fig. 2.1) obtenues avec la MLFMM et la méthode asymptotique OP, polarisation VV.  $L_x = L_y = 10\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$  et  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ .

pas prises en compte dans l'OP.

### 2.1.3 Validation de l'OP pour le cas d'une surface rugueuse PC

L'approximation de l'optique physique suppose que localement la surface peut être représentée par son plan tangent. En d'autres termes, elle suppose que le rayon de courbure,  $\rho_c$  en tout point de la surface doit être supérieur à la longueur d'onde incidente  $\lambda$  [12, 33]. En fait, il est montré à l'aide de la méthode de la phase stationnaire [13] que cette approche s'applique pour des surfaces rugueuses telles que  $(\lambda > \sigma_z)$  et  $\rho_c > \lambda$ . Par

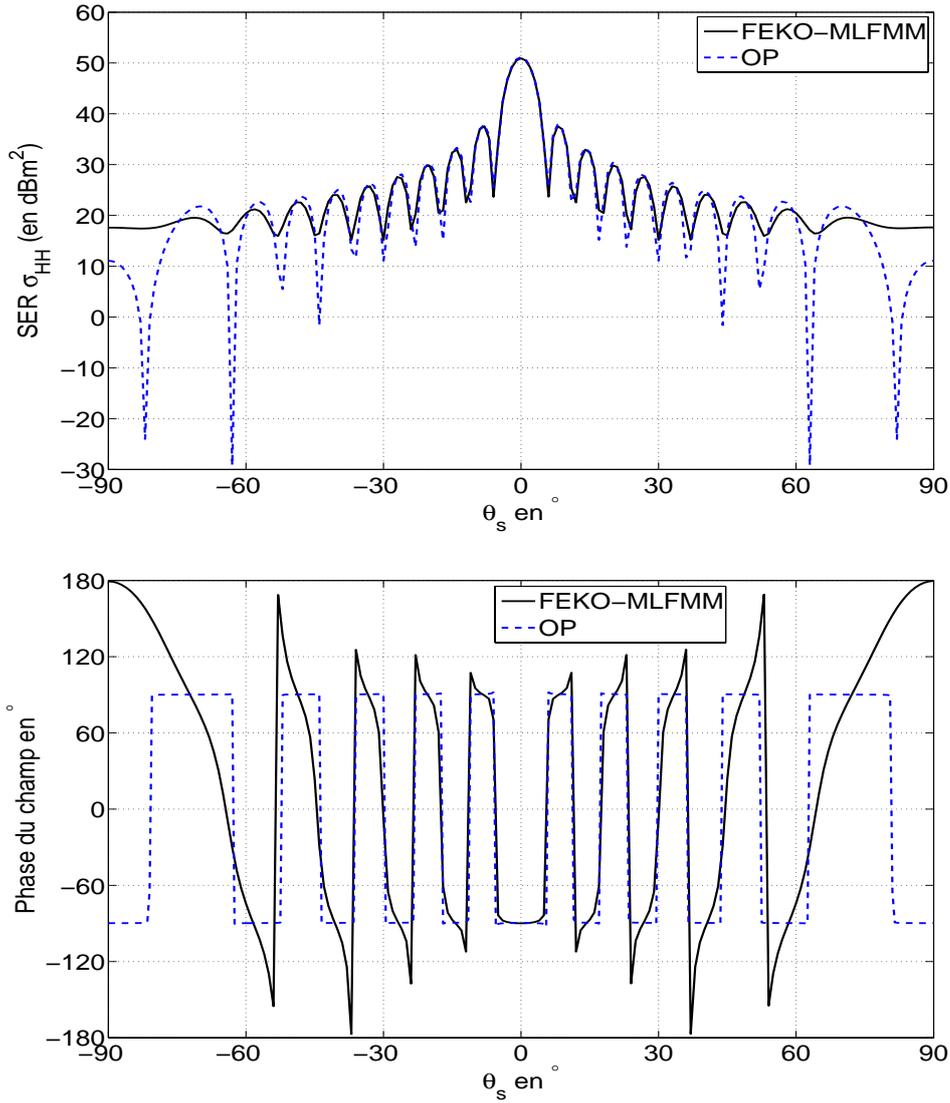


FIGURE 2.3 – Comparaison de la SER bistatique et de la phase du champ diffracté de la plaque (Fig. 2.1) obtenues avec la MLFMM et la méthode asymptotique OP, polarisation HH.  $L_x = L_y = 10\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$  et  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ .

conséquent, l'approximation de l'OP est valide si

$$0.3 \frac{L_c^2}{\lambda \sigma_z} = 0.3 \left( \frac{L_c}{\lambda} \right)^2 \left( \frac{\sigma_z}{\lambda} \right)^{-1} > 1, \quad (2.30)$$

où  $L_c$  est la longueur de corrélation et  $\sigma_z$  est l'écart-type des hauteurs.

En outre, l'OP néglige les réflexions multiples (voir figure 2.4) qui peuvent se produire sur la surface, ce qui implique que l'écart type des pentes  $\sigma_s$  soit inférieur à 0.35 [10, 55]. De plus dans l'approximation de l'OP, le phénomène d'ombrage de la surface (voir figure 2.4) doit être pris en compte, pour les angles d'incidences rasants. Un critère simple permet

de dire si l'ombrage doit être pris en compte ou pas, est donné par  $\theta_i < \text{arccot}(2\sqrt{2}\sigma_s)$ , où  $\theta_i$  est l'angle d'incidence au-dessous duquel l'ombre peut être négligée [56].

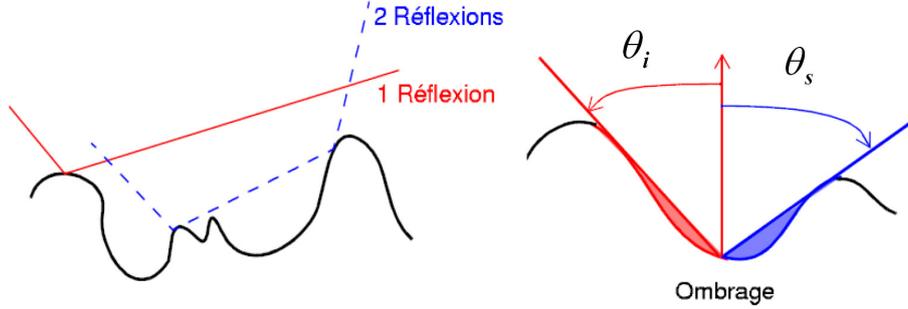


FIGURE 2.4 – Illustration du phénomène de réflexions multiples et du phénomène d'ombrage pour une surface rugueuse.

Considérons une surface rugueuse de dimensions  $S = 10\lambda_0 \times 10\lambda_0$  comme représenté sur la figure 2.5, générée par un processus aléatoire gaussien (un seul profil généré), dont la fonction d'autocorrélation des hauteurs est donnée par  $C_z(x, y) = \sigma_z^2 \exp(-x^2/L_{cx}^2 - y^2/L_{cy}^2)$ , les longueurs de corrélation  $L_{cx} = L_{cy} = 1.2\lambda_0$ , et l'écart-type des hauteurs  $\sigma_z = 0.2\lambda_0$  ( $\sigma_s = \sqrt{2} \times \sigma_z/L_c \approx 0.24\lambda_0$ ). La surface est illuminée par une onde plane en incidence normale,  $\theta_i = 0^\circ, \phi_i = 0^\circ, \phi_s = 0^\circ$ , les pas d'échantillonnage de la surface sont  $\Delta_x = \Delta_y = \lambda_0/8$ . L'OP est comparé à FEKO sur la figure 2.6, sur laquelle la SER est tracée en fonction de l'angle d'observation  $\theta_s$  pour les deux co-polarisations.

Sur la figure 2.6 nous observons que les résultats obtenus par l'OP proposée sont en bon accord avec ceux issus de FEKO. Le maximum est obtenu autour de la direction spéculaire  $\theta_s = 0^\circ$ . Puisque la surface est rugueuse, la contribution de la composante spéculaire diminue alors que la puissance diffusée dans les autres directions augmente. La composante spéculaire est appelée composante *cohérente* du champ diffusé, tandis que l'autre composante est appelée composante *incohérente* du champ diffusé.

Maintenant on considère le cas d'une surface rugueuse de dimensions  $S = 20\lambda_0 \times 20\lambda_0$ , générée par un processus aléatoire gaussien dont la fonction d'autocorrélation des hauteurs est donnée par  $C_z(x, y) = \sigma_z^2 \exp(-x^2/L_{cx}^2 - y^2/L_{cy}^2)$ , les longueurs de corrélation  $L_{cx} = L_{cy} = 1.2\lambda_0$ , et l'écart-type des hauteurs  $\sigma_z = 0.2\lambda_0$ . La surface est cette fois illuminée par une onde "tapered". Des comparaisons de la SER sont illustrées sur la figure 2.7, sur

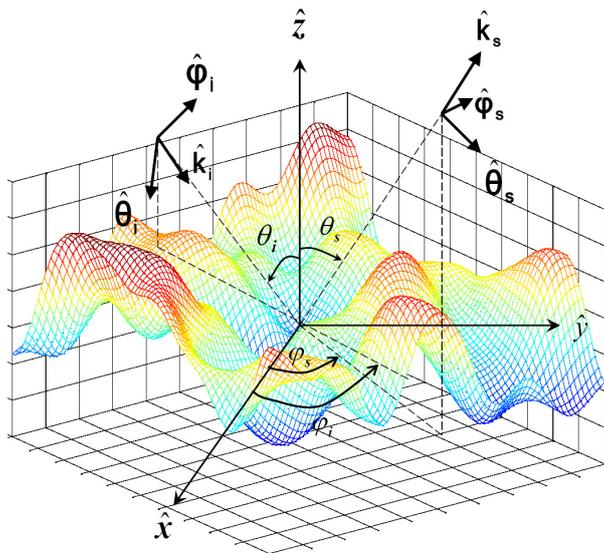


FIGURE 2.5 – Géométrie du problème : illustration de la surface rugueuse.

laquelle les résultats sont obtenus avec une onde incidente plane et des ondes tapered pour différentes valeurs de  $g$ . L'angle d'incidence est  $\theta_i = 0^\circ$  et  $\phi_i = 0^\circ$ .

Sur la figure 2.7 nous observons que plus la valeur de  $g$  augmente, plus la SER tend vers celle obtenue par une onde plane. En effet, le paramètre  $g$  contrôle l'atténuation de l'onde "tapered" (comme nous l'avons indiqué au paragraphe 1.11). Si celui-ci est trop petit cela correspond à un faisceau trop étroit. Dans la suite, l'onde tapered ne sera pas utilisée car elle a peu d'effet sur le couplage électromagnétique entre l'objet et la surface et également sur la précision de la méthode E-PILE.

L'OP est une méthode asymptotique, elle se base sur un développement asymptotique du courant induit sur la surface, elle a donc un domaine de validité restreint au domaine des hautes fréquences. Ceci signifie que les dimensions de l'obstacle sont grandes devant la longueur d'onde. Pour traiter le problème rigoureusement, la méthode des moments sera utilisée. Le formalisme intégral permet de traiter le problème de la diffraction (problème 3D) en résolvant une équation intégrale surfacique (EFIE : Electric Field Integral Equation ou MFIE : Magnetic Field Integral Equation). La résolution de l'équation intégrale est réalisée par une discrétisation du problème à l'aide de la Méthode des Moments.

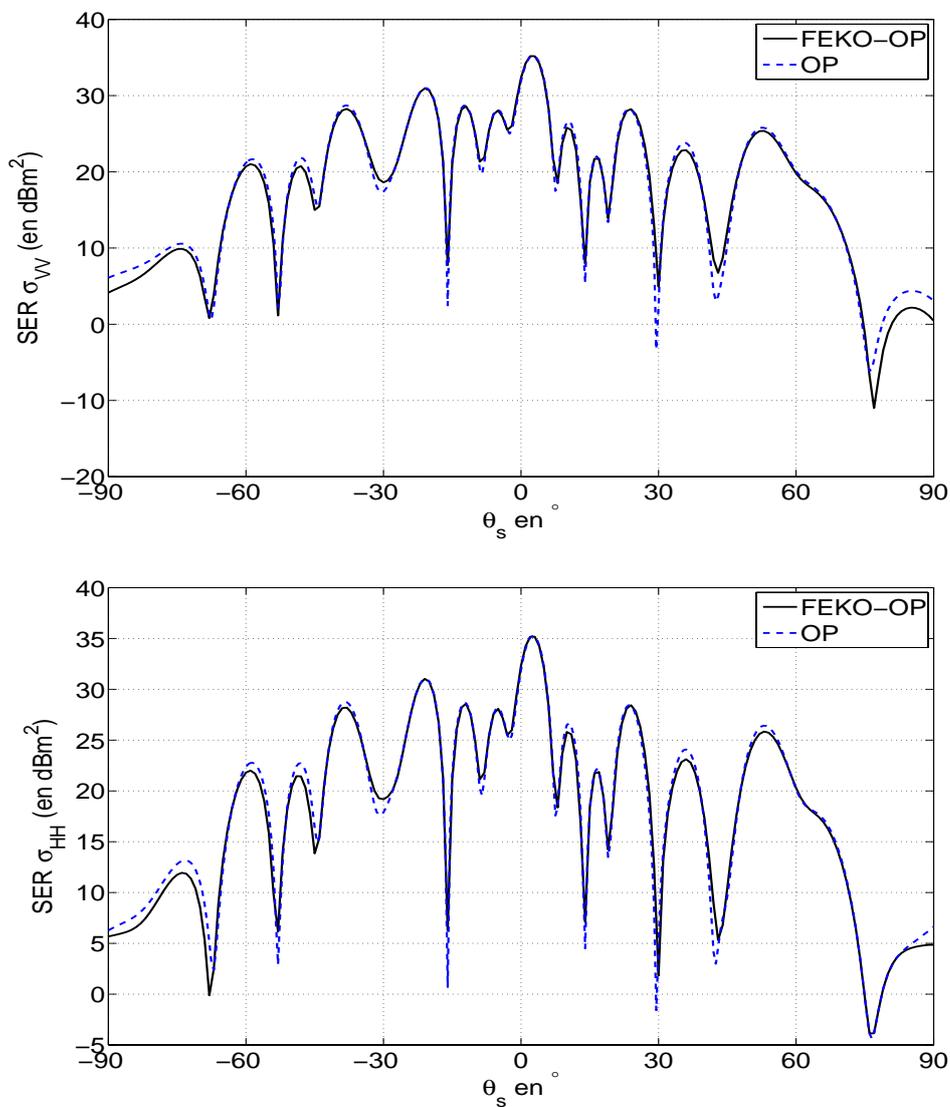


FIGURE 2.6 – Comparaison de la SER bistatique obtenue avec l’OP de FEKO et l’OP proposée pour les deux co-polarisations, cas d’une surface rugueuse de dimensions  $10\lambda_0 \times 10\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ ,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ . Les longueurs de corrélations  $L_{cx} = L_{cy} = 1.2\lambda_0$  et  $\sigma_z = 0.2\lambda_0$ .

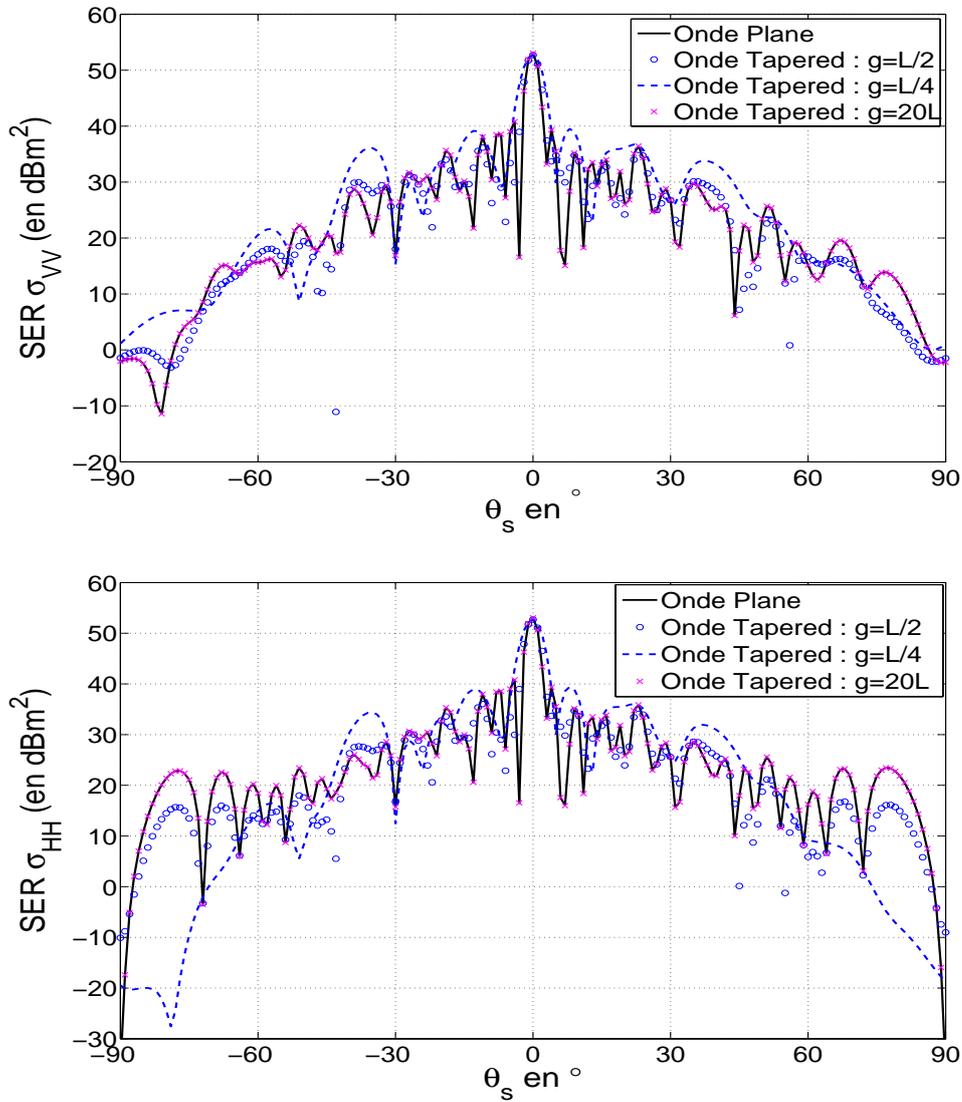


FIGURE 2.7 – Comparaison de la SER bistatique obtenue avec une onde plane et une onde tapered pour les deux co-polarisations, cas d’une surface rugueuse de dimensions  $20\lambda_0 \times 20\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ ,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ .

## 2.2 Diffraction par une surface lisse PC avec l'équation intégrale EFIE

Plusieurs travaux ont été effectués sur la diffraction d'onde par une plaque lisse PC [57, 58, 59, 60].

Considérons une plaque parfaitement conductrice de surface  $S$  dans le plan  $(\hat{x}, O, \hat{y})$ . Le courant  $\mathbf{J}$  à la surface est donné par

$$\mathbf{J}(\mathbf{R}) = J_x \hat{x} + J_y \hat{y}. \quad (2.31)$$

Le champ diffracté par la surface d'une plaque parfaitement conductrice s'écrit

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{R}') = \iint_S ik_0 \eta_0 \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{R}) dS, \quad (2.32)$$

où  $k_0$  est le nombre d'onde dans le vide,  $\eta_0$  est l'impédance d'onde du vide, et  $\bar{\mathbf{G}}$  est la dyade de Green.

Et les conditions aux limites imposent :

$$\hat{n} \wedge (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s) = \mathbf{0}. \quad (2.33)$$

En appliquant cette condition sur la surface avec  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}' \in S$ , on obtient

$$\hat{n}(\mathbf{R}') \wedge \mathbf{E}_i(\mathbf{R}') = -\hat{n}(\mathbf{R}') \wedge \iint_S ik_0 \eta_0 \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{R}) dS. \quad (2.34)$$

En projetant l'équation (2.34) sur la base  $(\hat{x}, \hat{y})$  [59], on obtient :

$$\begin{cases} \frac{-ik_0 \eta_0}{4\pi} \int_S [L_{11}(GJ_x) + L_{12}(GJ_y)] dS' = E_i^x \\ \frac{-ik_0 \eta_0}{4\pi} \int_S [L_{12}(GJ_x) + L_{22}(GJ_y)] dS' = E_i^y \end{cases}, \quad (2.35)$$

où  $L_{11}$ ,  $L_{22}$ , et  $L_{12}$  sont des opérateurs exprimés par

$$\begin{aligned} L_{11}(\bullet) &= \left(1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\bullet) \\ L_{12}(\bullet) &= \left(\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right)(\bullet) \\ L_{22}(\bullet) &= \left(1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\bullet) \end{aligned} \quad (2.36)$$

$G$  est la fonction de Green en 3D dans le plan  $(\hat{\mathbf{x}}, O, \hat{\mathbf{y}})$

$$G = \frac{e^{ik_0 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}. \quad (2.37)$$

### 2.2.1 Discrétisation de l'EFIE par la Méthode des Moments

Dans cette section l'équation intégrale EFIE (2.35) est discrétisée par la méthode des moments (Mdm) pour obtenir le modèle (EFIE-Mdm).

La Méthode des Moments (Mdm) permet de résoudre un problème linéaire de la forme  $\mathcal{L}f = g$  où  $\mathcal{L}$  est un opérateur intégral ou intégral-différentiel linéaire,  $f$  est l'inconnue et  $g$  une fonction donnée. Dans notre cas l'inconnue est le courant  $\mathbf{J}(\mathbf{R})$  et  $g$  est le champ incident  $\mathbf{E}_i$  pour l'équation (2.34). La fonction recherchée  $f$  est projetée sur une base de fonctions  $\{f_n\}$  (les fonctions de projection ou fonctions de base).  $f$  est donc approchée par une somme de fonctions de base pondérées par des coefficients  $a_n$  à déterminer :

$$f \simeq \tilde{f} = \sum_{n=1}^N a_n f_n. \quad (2.38)$$

Une nouvelle équation est obtenue en remplaçant cette approximation dans  $\mathcal{L}f = g$ . Cette nouvelle équation est ensuite projetée sur une base de fonctions  $\{w_m\}_{m=1..M}$  (fonctions test) pour minimiser l'erreur de discrétisation. On obtient finalement une équation matricielle  $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{X} = \mathbf{b}$  où  $\bar{\mathbf{Z}}$  est la *matrice impédance*,  $\mathbf{X}$  est le vecteur d'inconnues sur la surface,  $\mathbf{b}$  est la donnée du problème.

Nous discrétisons la plaque en  $N$  rectangles (patch), chaque rectangle  $D_i$ , de centre  $r_i = (x_i, y_i, 0)$  est le domaine défini par  $\{x \in [x_i - \Delta_x; x_i + \Delta_x]; y \in [y_i - \Delta_y; y_i + \Delta_y]\}$ .

Pour le calcul des intégrales de surface des différents opérateurs intégraux, on considère que les fonctions  $J_x$  et  $J_y$  sont constantes sur chaque maille. Ceci revient à représenter les inconnues du problème sur la famille des fonctions caractéristiques des mailles. Ces fonctions sont les fonctions de base de la discrétisation.

Pour la résolution numérique, on projette les équations intégrales sur la famille des distributions de Dirac centrées sur chacun des centres des mailles. Ces distributions de Dirac sont les fonctions test de notre discrétisation. En effet, pour les fonctions test et fonctions de base plusieurs options sont possibles [17, 61], le choix optimal résulte d'un compromis entre un gain de temps (le nombre d'inconnues peut augmenter si les fonctions de projection ne sont pas bien adaptées au problème), une précision suffisante et une

simplicité de mise en œuvre. C'est pourquoi nous retenons dans ce manuscrit la méthode des moments par *collocation* où les fonctions test  $w_m$  sont des fonctions de Dirac et les fonctions de base  $f_n$  sont des fonctions rectangles (aussi nommées *pulse basis functions* en anglais).

La discrétisation de l'équation (2.35) par la MdM donne :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{Z}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{J}_x \\ \bar{J}_y \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\frac{4\pi}{ik_0\eta_0} \begin{bmatrix} \bar{E}_i^x \\ \bar{E}_i^y \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}. \quad (2.39)$$

Pour calculer le courant (le vecteur  $\mathbf{X}$ ), nous déterminons tout d'abord les éléments ( $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{22}$ ) de la matrice d'impédance  $\bar{\mathbf{Z}}$ .

Les éléments de la sous-matrice  $A_{12}$  sont calculés comme suit :

$$A_{12} = \frac{1}{k_0^2} \int_{y'_i - \Delta y}^{y'_i + \Delta y} \int_{x'_i - \Delta x}^{x'_i + \Delta x} \frac{\partial^2 G}{\partial x' \partial y'} dx' dy', \quad (2.40)$$

en calculant cette double intégrale, on obtient

$$A_{12} = \frac{1}{k_0^2} \left[ \frac{e^{ik_0 R_{x+y^+}}}{R_{x+y^+}} - \frac{e^{ik_0 R_{x-y^+}}}{R_{x-y^+}} - \frac{e^{ik_0 R_{x+y^-}}}{R_{x+y^-}} + \frac{e^{ik_0 R_{x-y^-}}}{R_{x-y^-}} \right], \quad (2.41)$$

où

$$R_{x\pm y\pm} = \left[ (\delta_{x_i} \pm \Delta x)^2 + (\delta_{y_i} \pm \Delta y)^2 \right]^{1/2},$$

$$\delta x_i = x_i - x'_i \quad \delta y_i = y_i - y'_i, \quad (2.42)$$

alors

$$A_{12} = \frac{1}{k_0^2} \left( \begin{aligned} &G(x_i - x'_i + \Delta x_i, y_i - y'_i + \Delta y_i) \\ &- G(x_i - x'_i - \Delta x_i, y_i - y'_i + \Delta y_i) \\ &- G(x_i - x'_i + \Delta x_i, y_i - y'_i - \Delta y_i) \\ &- G(x_i - x'_i - \Delta x_i, y_i - y'_i - \Delta y_i) \end{aligned} \right). \quad (2.43)$$

Les soustractions  $(x_i - x'_i, y_i - y'_i)$  dans les équations (2.42) et (2.43) représentent les distances entre un point source  $(x'_i, y'_i)$  et un point d'observation  $(x_i, y_i)$ .

Les éléments de la sous-matrice  $A_{11}$  sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \int_{s_j} L_{11} G(x_i, y_i) ds' \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (2.44)$$

où

$$I_1 = \int_{s_j} G(x_i, y_i) ds', \quad (2.45)$$

$$I_2 = \frac{1}{k_0^2} \int_{s_j} \frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} ds'. \quad (2.46)$$

On peut utiliser les développements limités à l'ordre 1 aux voisinages de  $x_j, y_j$

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{s_j} G(x_i, y_i) ds' &= \int_{y_j - \Delta y_j}^{y_j + \Delta y_j} \int_{x_j - \Delta x_i}^{x_j + \Delta x_i} \frac{e^{ik_0 \sqrt{(x' - x_i)^2 + (y' - y_i)^2}}}{\sqrt{(x' - x_i)^2 + (y' - y_i)^2}} dx' dy' \\ &= 4\Delta x \Delta y \frac{e^{ik_0 \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad i \neq j \end{aligned} \quad (2.47)$$

En coordonnées polaires, la fonction de Green s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{s_i} G(x_i, y_i) ds' &= \int_{-\Delta y_i}^{\Delta y_i} dy' \int_{-\Delta x_i}^{\Delta x_i} \frac{e^{ik_0 \sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx' \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r^*} \frac{e^{ik_0 r}}{r} r dr \\ &= 2\pi \frac{1 - e^{ik_0 r^*}}{ik_0}, \quad r^* = 2\sqrt{\frac{|\Delta x_i \Delta y_i|}{\pi}}, \quad i = j. \end{aligned} \quad (2.48)$$

L'intégrale  $I_2$  peut être calculée comme suit :

$$\begin{aligned} I_2 = \frac{1}{k_0^2} \int_{s_j} \frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} ds' &= \frac{1}{k_0^2} \int_{y_j - \Delta y_j}^{y_j + \Delta y_j} \left[ \frac{\partial G}{\partial x'} \right]_{x_i - \Delta x_i}^{x_i + \Delta x_i} dy' \quad i \neq j \\ &= \frac{1}{k_0^2} \int_{y_j - \Delta y_j}^{y_j + \Delta y_j} \left[ \frac{x_i - x'}{R^3} (1 + ik_0 R) e^{ik_0 R} \right]_{x' = x_j - \Delta x_j}^{x' = x_j + \Delta x_j} dy' \\ &= \frac{1}{k_0^2} \left( \frac{2\Delta y (x_i - x_j - \Delta x) (1 + ik_0 R_{x+}) e^{R_{x+}}}{R_{x+}^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\Delta y (x_i - x_j + \Delta x) (1 + ik_0 R_{x-}) e^{R_{x-}}}{R_{x-}^3} \right), \end{aligned} \quad (2.49)$$

où

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(x' - x_i)^2 + (y' - y_i)^2}, \\ R_{x+} &= \sqrt{(x_j - x_i + \Delta x)^2 + (y_j - y_i)^2}, \end{aligned}$$

$$R_{x^-} = \sqrt{(x_j - x_i - \Delta x)^2 + (y_j - y_i)^2},$$

sinon si ( $i = j$ ) le calcul se fait comme suit

$$\begin{aligned} \int_{s_i} \frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} ds' &= \int_{y_i - \Delta y_i}^{y_i + \Delta y_i} \left[ \frac{x_i - x'}{R^3} (1 + ik_0 R) e^{ik_0 R} \right]_{x'=x_i - \Delta x_i}^{x'=x_i + \Delta x_i} dy' \\ &\cong -4 \int_0^{\Delta y_i} \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i^2 + y^2} \left( \frac{1}{\sqrt{\Delta x_i^2 + y^2}} + ik_0 \right) \times e^{-ik_0 \sqrt{\Delta x_i^2 + y^2}} dy \\ &\cong \frac{-4\Delta y (1 + ik_0 \Delta x) e^{-ik_0 \Delta x}}{(\Delta x)^2}, \quad i = j. \end{aligned} \quad (2.50)$$

De la même façon on peut calculer les éléments de  $A_{22}$

$$\begin{aligned} A_{22} &= \int_{s_j} L_{22} G(x_i, y_i) ds' \\ &= I_1 + I_3, \end{aligned} \quad (2.51)$$

où

$$I_1 = \int_{s_j} G(x_i, y_i) ds', \quad (2.52)$$

$$I_3 = \frac{1}{k_0^2} \int_{s_j} \frac{\partial^2 G}{\partial y'^2} ds'. \quad (2.53)$$

$I_3$  peut être calculée en appliquant un calcul similaire à l'équations (2.49) et (2.50).

On peut alors déterminer le courant surfacique par inversion de la matrice impédance

$$\begin{bmatrix} \bar{J}_x \\ \bar{J}_y \end{bmatrix} = \frac{4\pi}{ik_0 \eta_0} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{E}_i^x \\ \bar{E}_i^y \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

La méthode classique pour réaliser l'inversion est la décomposition LU.

En remplaçant les valeurs du courant surfacique dans l'équation (2.32) on peut calculer le champ diffracté puis la surface équivalente radar (SER) d'un diffuseur.

## 2.2.2 Validation du modèle "MdM-EFIE" pour le cas d'une plaque lisse PC

Considérons une plaque de surface  $S = L_x \times L_y$  contenue dans le plan  $(\hat{x}, O, \hat{y})$ , comme représenté sur la figure 2.1, la normale à la surface est dirigée selon l'axe  $\hat{z}$ . La MdM proposée est comparée aux résultats issus de la MLFMM de FEKO sur les figures 2.8 et 2.9, sur lesquelles la SER et la phase du champ diffracté en champ lointain sont tracées en fonction de l'angle d'observation  $\theta_s$  pour les deux co-polarisations. La plaque

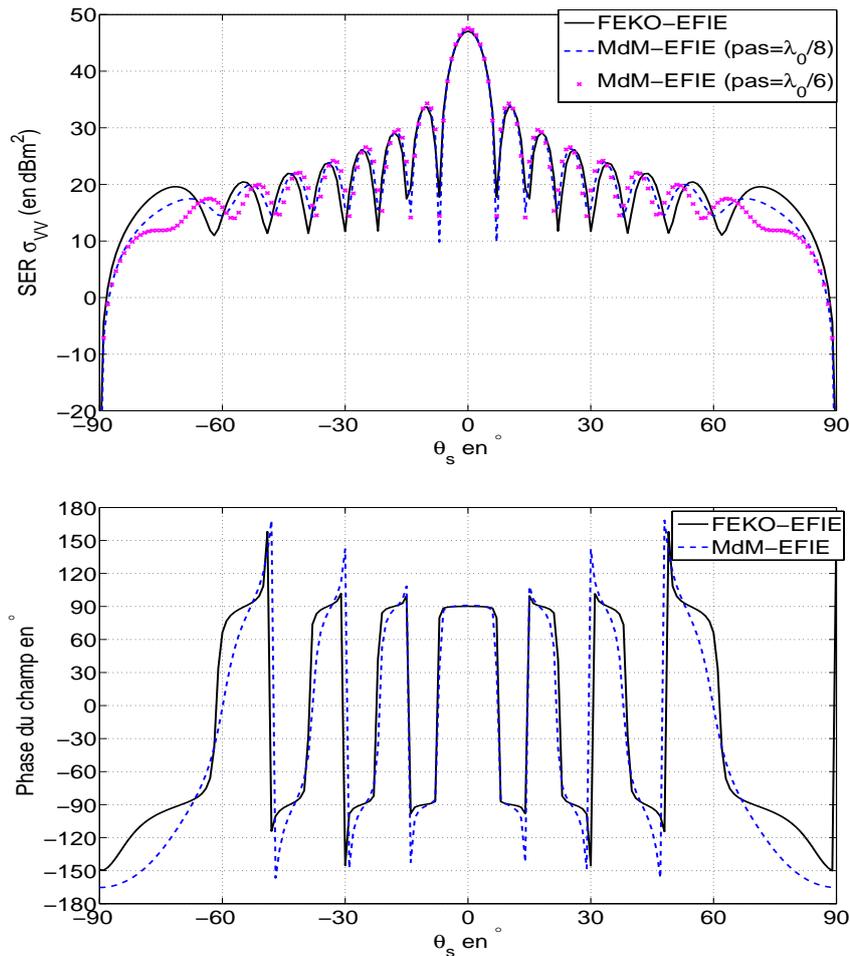


FIGURE 2.8 – Comparaison de la SER bistatique et de la phase du champ diffracté d’une plaque lisse (voir Fig. 2.1) obtenues avec FEKO et le modèle MdM-EFIE, polarisation VV.  $L_x = L_y = 8\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$  et  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ .

est de longueur  $L_x = L_y = 8\lambda_0$ ,  $\lambda_0 = 1$  m, les pas d’échantillonnage de la surface sont  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$  et  $\theta_i = 0^\circ$  (incidence normale).

Sur les figures 2.8 et 2.9, nous observons que les résultats obtenus par le modèle MdM-EFIE proposé sont en accord avec ceux issus de FEKO. Néanmoins, il reste une petite différence due au choix de la fonction de base. FEKO utilise les fonctions de base RWG (Rao-Wilton-Glisson), tandis que nous utilisons des fonctions de base porte. La figure 2.8 montre aussi que la diminution du pas d’échantillonnage permet de minimiser cette différence.

Les comparaisons de la SER bistatique avec un angle d’incidence  $\theta_i = 45^\circ$  sont illustrées sur la figure 2.10. On peut remarquer le bon accord entre les deux méthodes pour cet angle d’incidence.

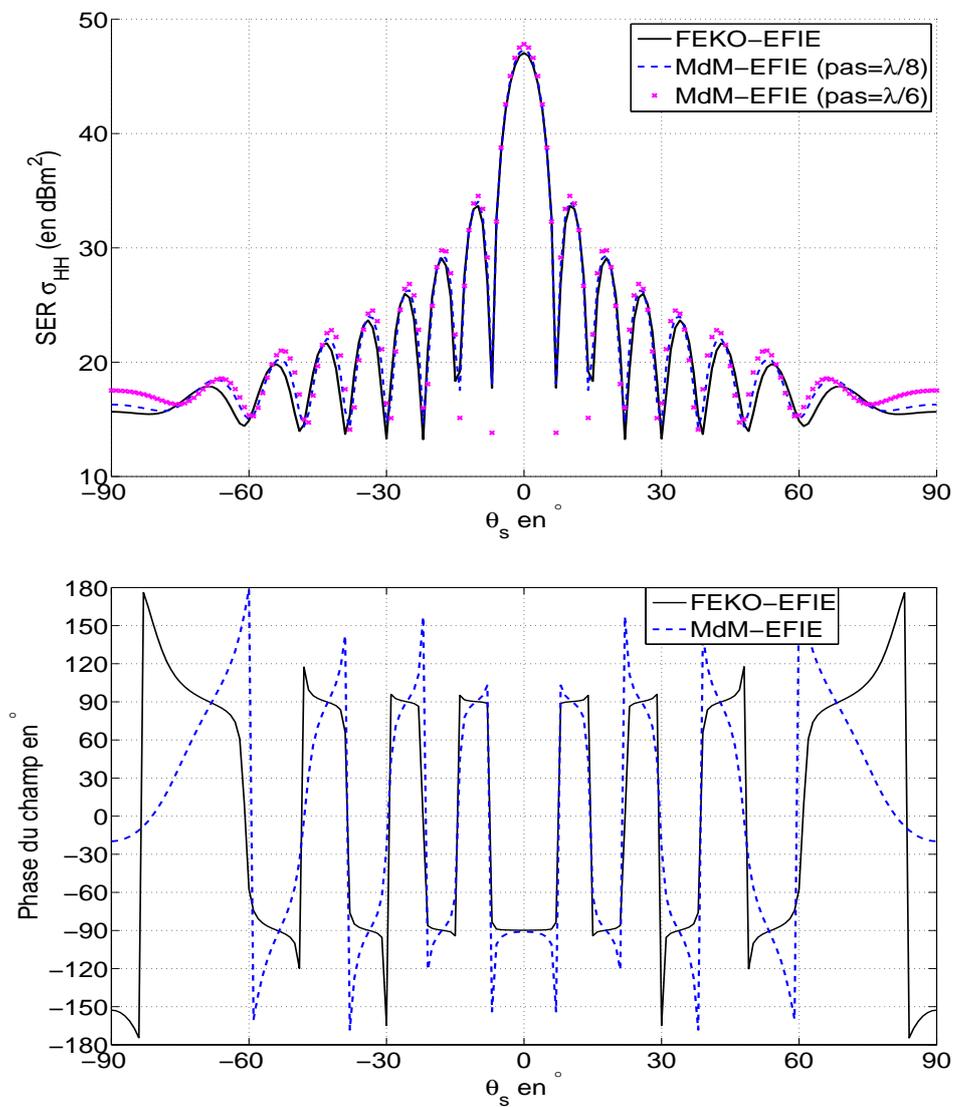


FIGURE 2.9 – Comparaison de la SER bistatique et de la phase du champ diffracté d’une plaque lisse (voir Fig. 2.1) obtenues avec FEKO et le modèle MdM-EFIE, polarisation HH.  $L_x = L_y = 8\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$  et  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ .

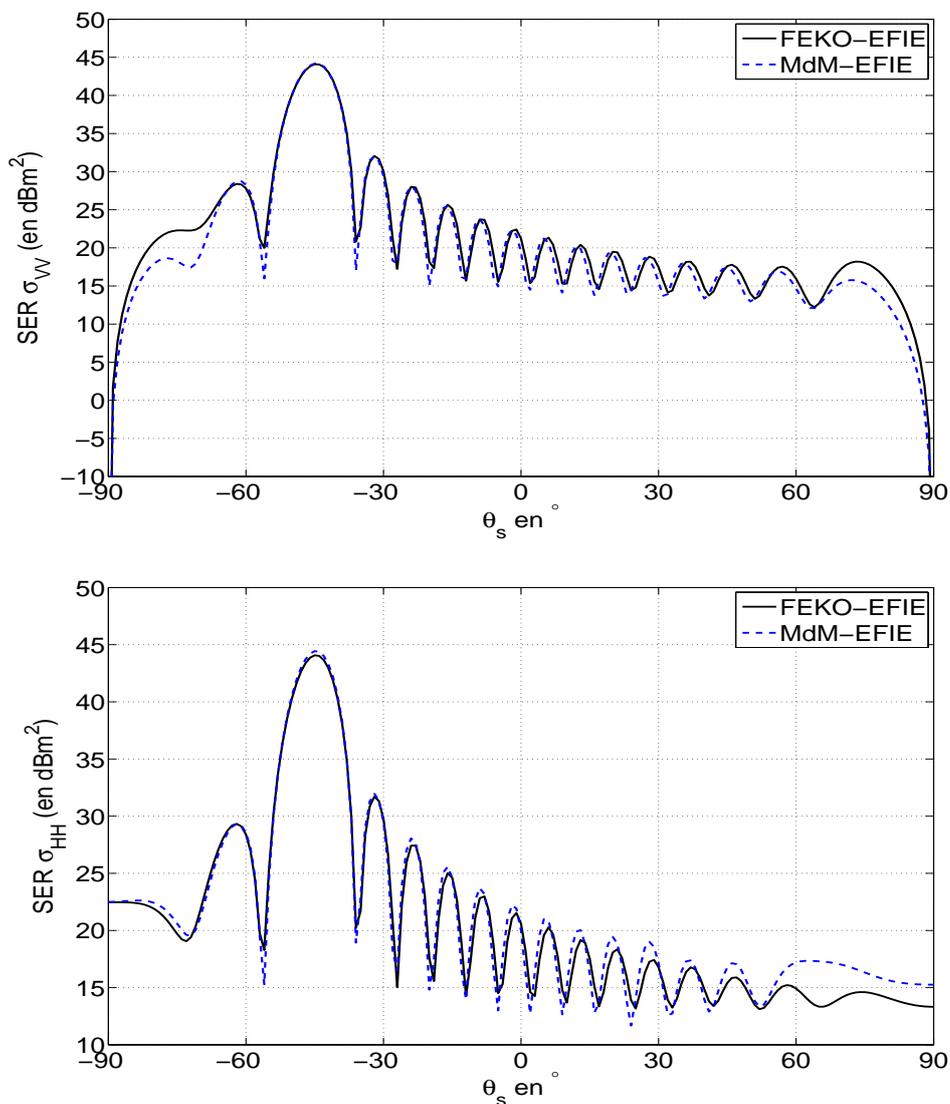


FIGURE 2.10 – Comparaison de la SER bistatique et de la phase du champ diffracté d’une plaque lisse (voir Fig. 2.1) obtenues avec FEKO et le modèle MdM-EFIE.  $L_x = L_y = 8\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$  et  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ .

## 2.3 Diffusion par une surface rugueuse avec l'équation intégrale MFIE

Le champ diffracté par une surface plane en utilisant la MdM a été calculé dans la section précédente. Le problème abordé dans cette section est de calculer le champ diffusé lorsque la surface devient rugueuse.

Pour traiter le cas d'une surface rugueuse en utilisant la MdM, il est plus simple d'utiliser la MFIE que l'EFIE car l'opérateur intégral de l'EFIE est très singulier [62, 63, 64].

La MFIE pour une surface parfaitement conductrice (PC) s'écrit

$$\left(\frac{1}{2} + \bar{\mathbf{M}}\right) \mathbf{J} = \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_i, \quad (2.55)$$

où  $\bar{\mathbf{M}}$  est l'opérateur intégro-différentiel : soit  $\mathbf{c}$  une densité surfacique, et  $\mathbf{R}, \mathbf{R}'$  deux points sur  $S$ , et  $\hat{\mathbf{n}}$  la normale à la surface,

$$\bar{\mathbf{M}}\mathbf{c}(\mathbf{R}) = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \wedge \nabla_{\mathbf{R}} \int_S G(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \mathbf{c}(\mathbf{R}') dS, \quad (2.56)$$

$\nabla_{\mathbf{R}}$  est constitué des dérivées partielles par rapport à  $\mathbf{R}$ , l'équation ci-dessus peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}\mathbf{c}(\mathbf{R}) &= \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \wedge \int_S G'(\mathbf{R}) \mathbf{u} \wedge \mathbf{c}(\mathbf{R}') dS \\ &= \int_S G'(\mathbf{R}) \hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{c}(\mathbf{R}')) \Gamma' dx' dy', \end{aligned} \quad (2.57)$$

où les grandeurs non primées se rapportent au point d'observation  $\mathbf{R}$  et les grandeurs notées avec un prime se rapportent au point d'intégration  $\mathbf{R}'$ , sauf pour  $G'$  qui est la dérivée première de la fonction de green  $G$ . De plus,  $R = \|\mathbf{R} - \mathbf{R}'\|$  et  $\mathbf{u} = (\mathbf{R} - \mathbf{R}')/R$ . La surface  $S$  vérifie en chacun de ses points  $\mathbf{R}$  de coordonnées  $(x, y, z)$  l'équation cartésienne  $z = f(x, y)$ . Par la suite, on utilise les notations suivantes :  $z = f(x, y)$ ,  $z_x = (\partial f / \partial x)$  et  $z_y = (\partial f / \partial y)$  et  $\Gamma = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$ . La normale  $\hat{\mathbf{n}}$  à la surface, dirigée vers les  $z$  croissants vaut  $\hat{\mathbf{n}} = (-z_x \hat{\mathbf{x}} - z_y \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}) / \Gamma$ .

En supposant que la densité surfacique  $\mathbf{c}$  est tangente à la surface  $S$ ; elle vérifie donc  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} = 0$ , soit

$$c_z = z_x c_x + z_y c_y. \quad (2.58)$$

Cette relation est vérifiée par les composantes cartésiennes du vecteur  $\mathbf{c}$ , et donc par leurs produits par  $\Gamma$ . On note  $c_x = \Gamma \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{x}}$ ,  $c_y = \Gamma \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{y}}$ ,  $c_z = \Gamma \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ . L'utilisation de ces produits plutôt que les composantes cartésiennes est habituelle pour ce genre de problème, et permet de simplifier les différentes expressions rencontrées. Seules deux de ces trois fonctions ( $c_x, c_y, c_z$ ) sont indépendantes, la densité surfacique  $\mathbf{c}$  peut donc être représentée par les deux fonctions  $c_x$  et  $c_y$ .

La singularité à l'origine de la dérivée première de la fonction de Green est en  $1/R^2$ . L'intégrale dans l'équation (2.57) est donc à prendre au sens de la valeur principale de Cauchy. On associe à l'opérateur tensoriel  $\bar{\mathbf{M}}$ , quatre opérateurs scalaires  $M_{xx}, M_{xy}, M_{yx}, M_{yy}$ .

$$\begin{bmatrix} \Gamma M \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \\ \Gamma M \mathbf{c} \cdot \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Le calcul du double produit vectoriel de l'équation (2.57) donne

$$\begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \end{bmatrix} = \int_S G'(R) \begin{bmatrix} z'_x u_x + z_y u_y - u_z & (z'_y - z_y) u_x \\ (z'_x - z_x) u_y & z_x u_x + z'_y u_y - u_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \end{bmatrix} dx' dy'. \quad (2.60)$$

### 2.3.1 Discrétisation de la MFIE par la Méthode des Moments

Afin de résoudre numériquement le problème, il convient de discrétiser le système d'équations, pour obtenir le modèle "MdM-MFIE".

La surface vérifie l'équation cartésienne  $z = f(x, y)$ . Cette équation permet d'associer bijectivement le point  $\mathbf{r} = (x, y, 0)$  du plan moyen ( $\hat{\mathbf{x}}, O, \hat{\mathbf{y}}$ ) et le point  $\mathbf{R} = (x, y, f(x, y))$ . On opère un pavage rectangulaire du plan moyen, qui correspond à un maillage de la surface. Le plan moyen est divisé en sous-domaines rectangulaires identiques. Le rectangle  $D_i$ , de centre  $r_i = (x_i, y_i, 0)$  est le domaine défini par  $x \in [x_i + \Delta_x/2; x_i - \Delta_x/2]$  et  $y \in [y_i + \Delta_y/2; y_i - \Delta_y/2]$ .

Pour le calcul des intégrales de surface des différents opérateurs intégraux, on considère que les fonctions  $c_x$  et  $c_y$  sont constantes sur chaque maille. Ceci revient à représenter les inconnues du problème sur la famille des fonctions caractéristiques des mailles. Ces fonctions sont les fonctions de base de notre discrétisation.

Comme pour l'EFIE à la section 2.2.1, on projette les équations intégrales sur la famille des distributions de Dirac centrées sur chacun des centres des mailles. Ces distributions de Dirac sont les fonctions test de notre discrétisation.

Les valeurs constantes sur les  $N$  mailles des deux fonctions  $c_x$  et  $c_y$  associées au courant  $\mathbf{c}$  constituent deux vecteurs à  $N$  éléments complexes. On note  $\bar{\mathbf{c}}_x$  le vecteur de composante  $c_{x_j}$  égale à  $c_x$  sur  $S_j$  et  $\bar{\mathbf{c}}_y$  le vecteur de composante  $c_{y_j}$  égale à  $c_y$  sur  $S_j$ . Nous considérons les inconnues  $\bar{J}_x$  et  $\bar{J}_y$  pour le courant électrique de surface, et  $\bar{J}_i^x$  et  $\bar{J}_i^y$  le champ électrique incident tangent à la surface,

$$J_{x_j} = \Gamma_j \hat{\mathbf{x}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}_j)), \quad J_i^{x_j} = \Gamma_j \hat{\mathbf{x}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_i(\mathbf{R}_j)), \quad (2.61)$$

$$J_{y_j} = \Gamma_j \hat{\mathbf{y}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}_j)), \quad J_i^{y_j} = \Gamma_j \hat{\mathbf{y}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_i(\mathbf{R}_j)). \quad (2.62)$$

Pour représenter la surface rugueuse, une maille  $S_j$  de la surface est approchée par son plan tangent au point  $\mathbf{R}_j$ . La normale en tout point de  $S_j$  est la normale  $\mathbf{n}_j$  au point  $\mathbf{R}_j$ . Les dérivées secondes de  $f$  sont donc négligées, les dérivées première  $z'_x$  et  $z'_y$  sont constantes et valent  $z_{x_j}$  et  $z_{y_j}$ .

La valeur au point  $R_i$  de  $M_{xx}c_x$  s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} M_{xx}c_x(\mathbf{R}_i) &= \sum_{j=0}^{N-1} \left( \iint_{D_j} G'(R_i)(z'_x u_{x_i} + z_{y_i} u_{y_i} - u_{z_i}) dx' dy' \right) c_{x_j} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} M_{xx_{ij}} c_{x_j}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

De la même manière, on définit à partir de l'équation (2.63) les trois autres matrices associées à  $\bar{\mathbf{M}}$ , soit  $\bar{M}_{xy}$ ,  $\bar{M}_{yx}$ ,  $\bar{M}_{yy}$

Si on décrit la surface rugueuse comme une superposition de petites surfaces planes, les éléments diagonaux sont faibles comparés au terme 1/2 de l'équation MFIE, puisqu'ils dépendent de la courbure de la surface.

Les éléments non diagonaux sont calculés à partir de (2.60)

$$\begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{G'(R_{ij})}{R_{ij}} \begin{bmatrix} z_{x_j} x_{ij} + z_{y_i} y_{ij} - z_{ij} & (z_{y_j} - z_{y_i}) x_{ij} \\ (z_{x_j} - z_{x_i}) y_{ij} & z_{x_i} x_{ij} + z_{y_j} y_{ij} - z_{ij} \end{bmatrix} \Delta_x \Delta_y. \quad (2.64)$$

Le système linéaire obtenu à partir de la MFIE pour le problème de la diffraction électromagnétique par une surface rugueuse parfaitement conductrice est

$$\begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{J}_x \\ \bar{J}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_i^x \\ \bar{J}_i^y \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

On peut alors déterminer le courant surfacique par inversion de la matrice impédance

$$\begin{bmatrix} \bar{J}_x \\ \bar{J}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{J}_i^x \\ \bar{J}_i^y \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

La méthode classique pour réaliser l'inversion est la décomposition LU.

### 2.3.2 Validation du modèle “Mdm-MFIE” pour le cas d’une surface rugueuse

Considérons une surface rugueuse (voir Fig. 2.5) de dimensions  $8\lambda_0 \times 8\lambda_0$ , générée par un processus aléatoire gaussien (un seul profil généré), dont la fonction d'autocorrélation des hauteurs est donnée par  $C_z(x, y) = \sigma_z^2 \exp(-x^2/L_{cx}^2 - y^2/L_{cy}^2)$ , les longueurs de corrélation  $L_{cx} = L_{cy} = 1.2\lambda_0$ , et l'écart-type des hauteurs  $\sigma_z = 0.2\lambda_0$ . La surface est illuminée par une onde plane en incidence normale  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ . Le modèle de la Mdm-MFIE proposé est comparé à la MLFMM de FEKO sur la figure 2.11, sur laquelle la SER est tracée en fonction de l'angle d'observation  $\theta_s$  pour les deux co-polarisations.

Sur la figure 2.11, nous observons que les résultats obtenus par le modèle Mdm-MFIE proposé sont en accord avec ceux de FEKO autour de la direction spéculaire. Toutefois il reste des différences vers des angles  $\theta_s$  élevés (effets de bords) dus à la méthode de résolution des équations intégrales utilisées pour décrire le modèle. FEKO utilise l'équation intégrale EFIE ou CFIE avec des fonctions de base et fonctions de test triangulaires pour résoudre ce type de problème électromagnétique. Dans notre modèle, l'équation intégrale MFIE est utilisée avec des fonctions de base portes et fonctions de test Dirac.

Une autre simulation est effectuée dans le même cas précédent, en augmentant les dimensions de la surface à  $14\lambda_0 \times 14\lambda_0$ , les comparaisons de la SER sont illustrées sur la figure 2.12. On remarque que la différence entre la Mdm-MFIE et FEKO est diminuée. Cette différence peut être encore diminuée en utilisant une onde incidente atténuée sur les bords (Tapered Wave en anglais) pour éliminer les effets de diffraction de bords que l'on rencontre quand on étudie la diffraction par des surfaces d'aire finie.

Des comparaisons de la SER bistatique pour les polarisations croisées sont montrées sur la figure 2.13. On constate que les différences entre la Mdm-MFIE et FEKO sont plus importantes pour les polarisations croisées.

La plaque est un cas particulier de la surface rugueuse, elle peut être considérée comme

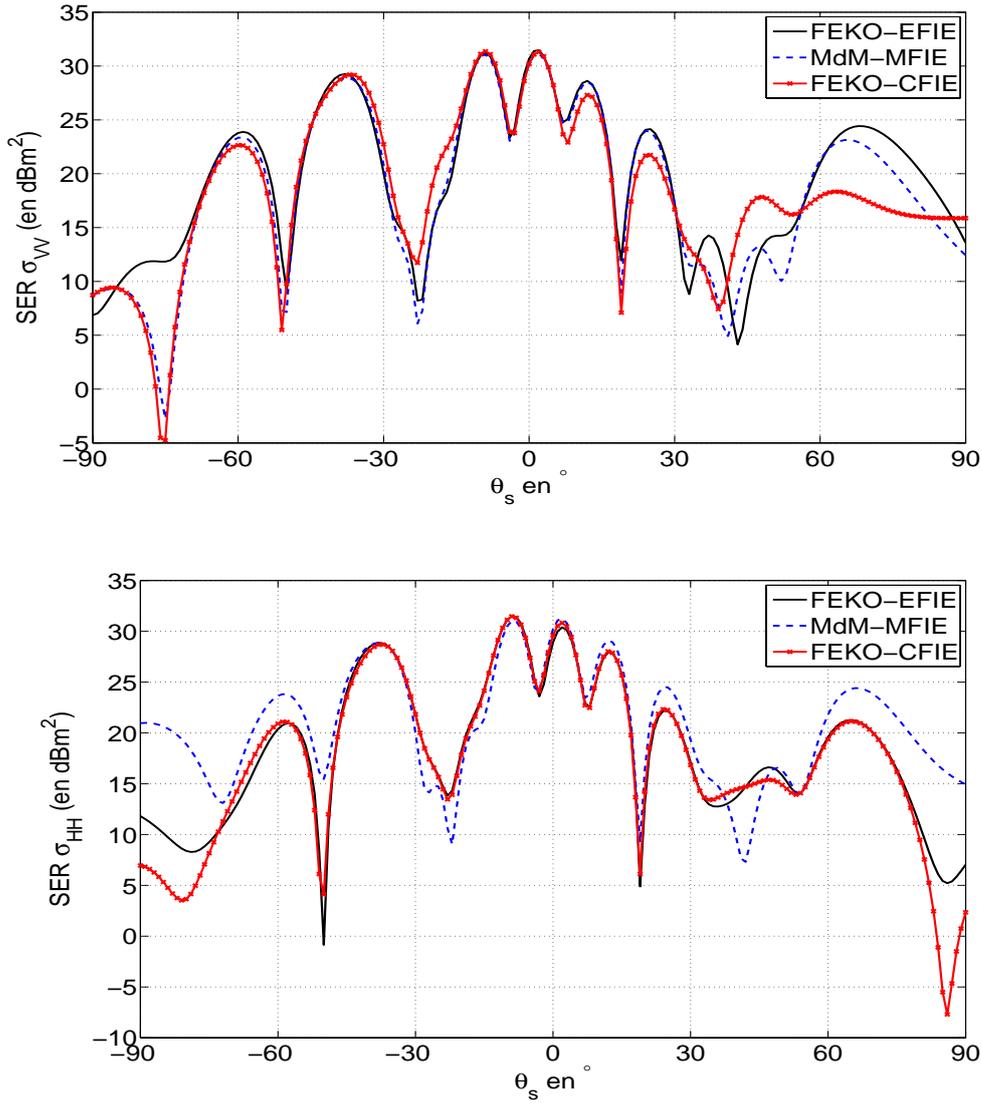


FIGURE 2.11 – Comparaison de la SER bistatique obtenue avec FEKO et le modèle MdM-MFIE proposé pour les deux co-polarisations, cas d’une surface rugueuse de dimensions  $8\lambda_0 \times 8\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ ,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ . Les longueurs de corrélation  $L_{cx} = L_{cy} = 1.2\lambda_0$  et  $\sigma_z = 0.2\lambda_0$ .

une surface rugueuse avec des hauteurs nulles ( $\sigma_z = 0$ ). Il est donc utile d’appliquer la technique précédente au cas d’une plaque lisse pour la validation.

Considérons une plaque de surface  $S$  contenue dans le plan  $(\hat{x}, O, \hat{y})$ , la normale à la surface est dirigée selon l’axe  $\hat{z}$ . La méthode MdM-MFIE proposée est comparée à la MLFMM de FEKO sur la figure 2.14 pour les deux co-polarisations, sur laquelle la SER est tracée en fonction de l’angle d’observation. La plaque est de longueur  $L_x = L_y = 8\lambda_0$ . La surface est illuminée par une onde plane avec un angle d’incidence ( $\theta_i = 0^\circ$ ).

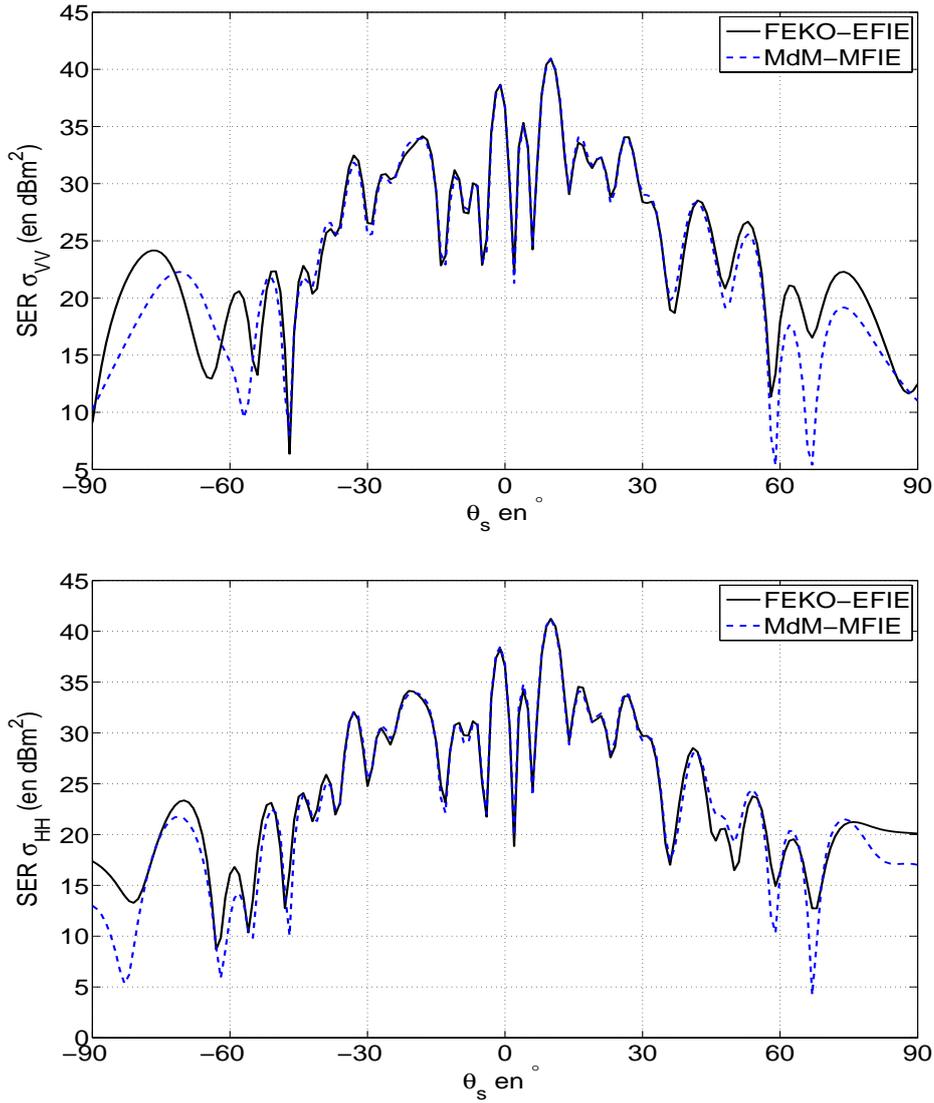


FIGURE 2.12 – Comparaison de la SER bistatique obtenue avec FEKO et le modèle MdM-MFIE proposé pour les deux co-polarisations, cas d’une surface rugueuse de dimensions  $14\lambda_0 \times 14\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ ,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ . Les longueurs de corrélation  $L_{cx} = L_{cy} = 1.2\lambda_0$  et  $\sigma_z = 0.2\lambda_0$ .

A partir de la figure 2.14 nous observons que les résultats obtenus par la MdM-MFIE et FEKO sont en accord autour de la direction spéculaire. D’autres simulations montrent que la MdM-MFIE proposée est en accord avec l’OP vers des angles  $\theta_s$  rasants. En effet ce modèle de MdM-MFIE dépend de l’équation intégrale MFIE ( $\mathbf{J}_{OP} = (1 + 2\bar{\mathbf{M}})\mathbf{J}$ ), et dans le cas d’une plaque lisse, les éléments de  $\bar{\mathbf{M}}$  s’annulent (voir equation. (2.64) avec  $z_{x_j} = z_{y_i} = z_{x_i} = z_{y_j} = 0$ ), et par conséquent  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{OP}$ . En conclusion, la MdM-MFIE proposée tend vers le modèle OP pour le cas d’une surface lisse.

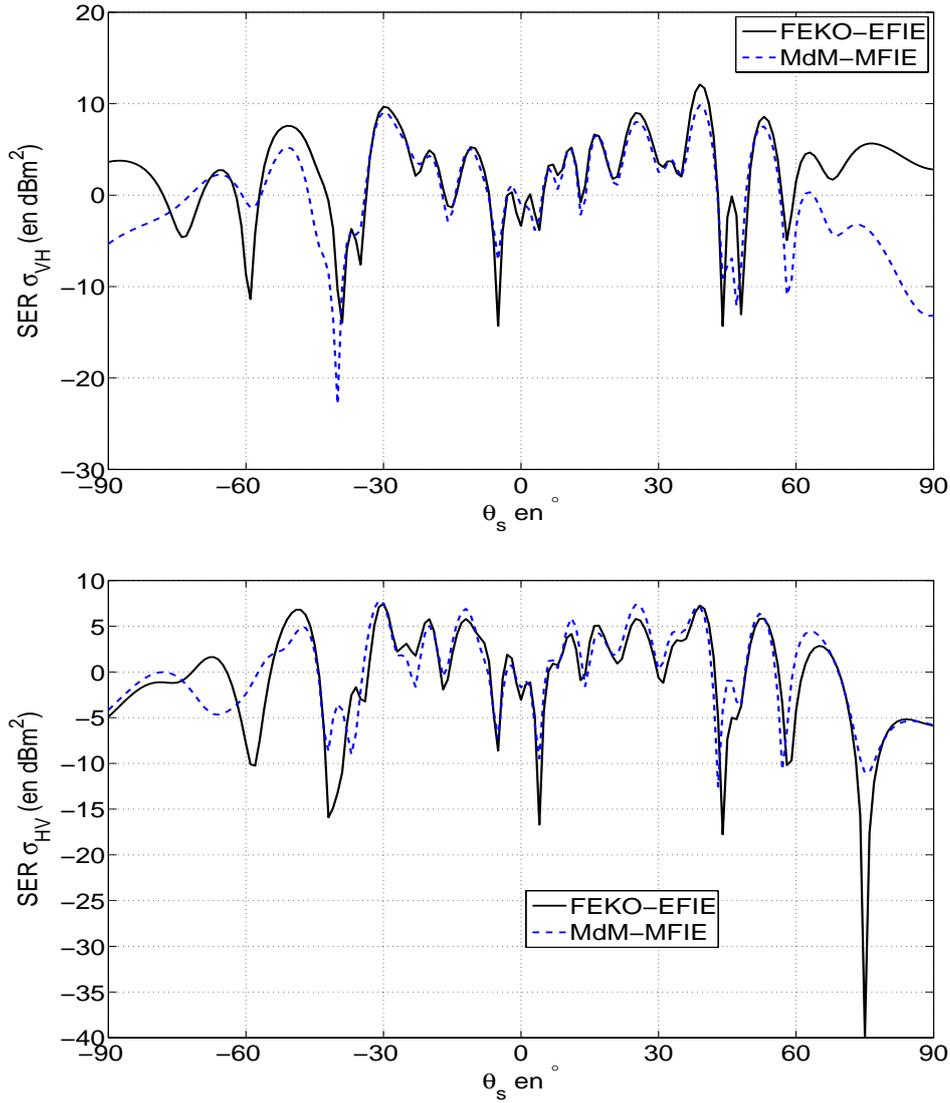


FIGURE 2.13 – Comparaison de la SER bistatique obtenue avec FEKO et le modèle MdM-MFIE proposé pour les polarisations croisées, cas d’une surface rugueuse de dimensions  $14\lambda_0 \times 14\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ ,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ . Les longueurs de corrélation  $L_{cx} = L_{cy} = 1.2\lambda_0$  et  $\sigma_z = 0.2\lambda_0$ .

Des comparaisons de la phase du champ diffracté pour le cas de la plaque lisse (celle définie pour les résultats de la figure 2.14) sont illustrées sur la figure 2.15.

Pour un problème 3D, la surface est très grande devant la longueur d’onde, le nombre d’inconnues peut très rapidement atteindre des valeurs qui rendent le problème insoluble par la méthode de moments avec une inversion matricielle de type LU. Il est donc nécessaire d’accélérer le calcul par l’utilisation de méthodes numériques exactes et rapides comme par exemple la méthode Forward Backward (FB).

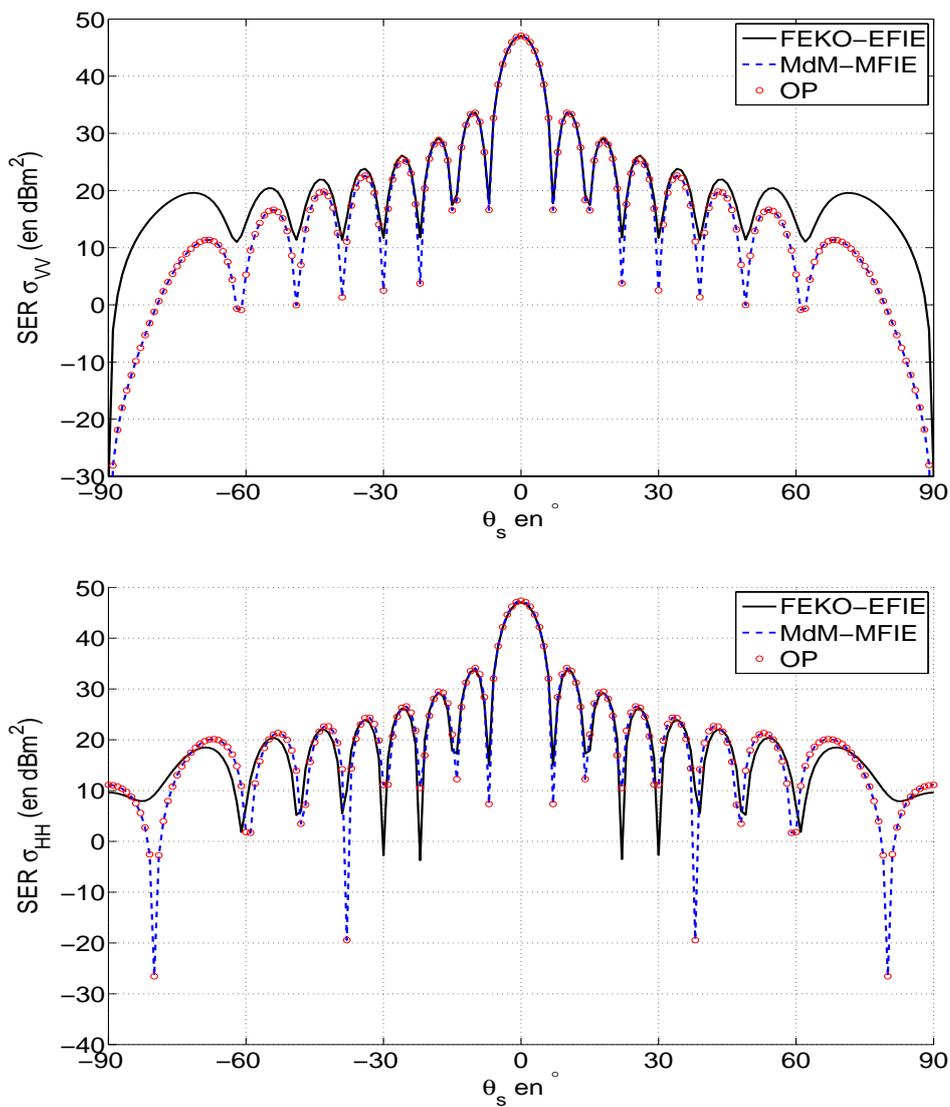


FIGURE 2.14 – Comparaison de la SER bistatique pour le cas d’une plaque lisse de dimensions  $8\lambda_0 \times 8\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ ,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ .

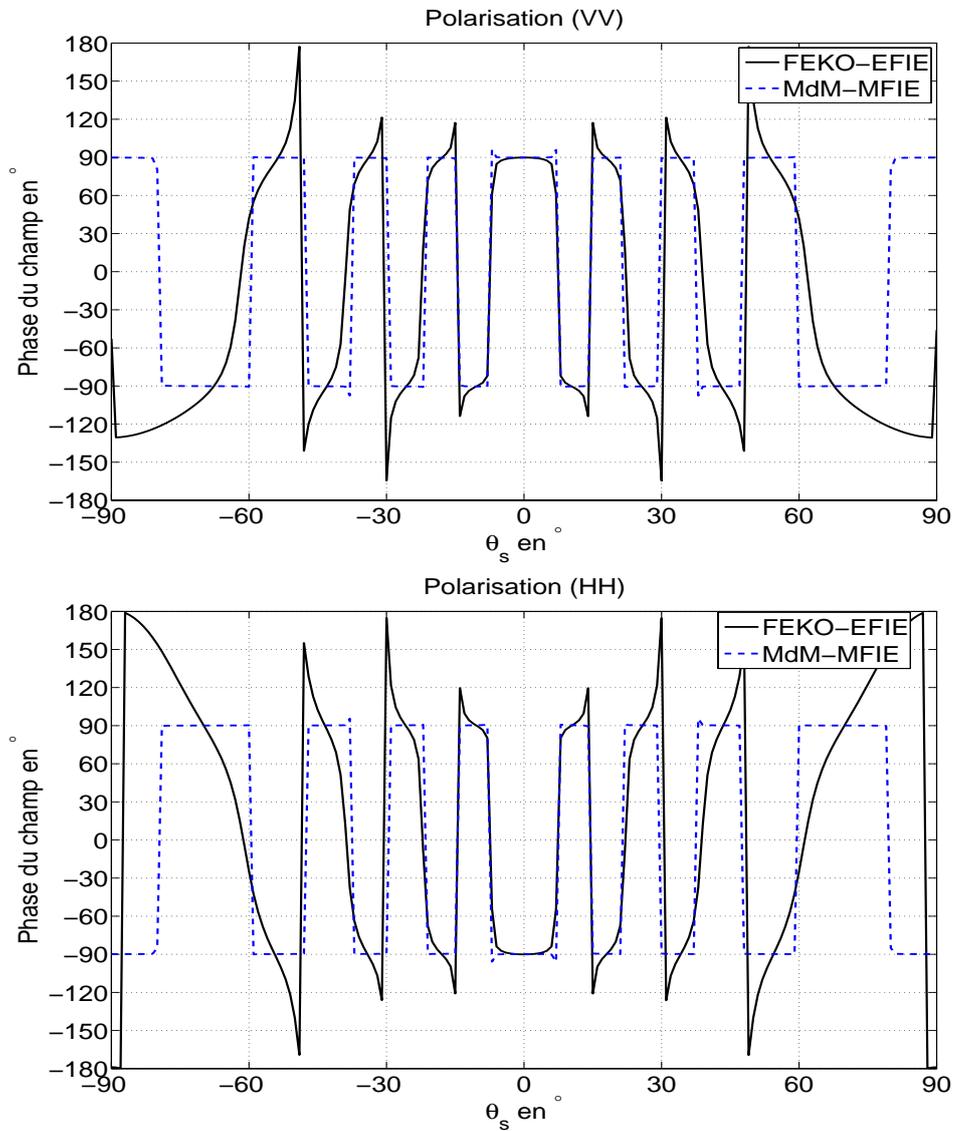


FIGURE 2.15 – Comparaison de la phase du champ diffracté pour le cas d’une plaque lisse de dimensions  $8\lambda_0 \times 8\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ ,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ .

## 2.4 Forward-Backward : FB

La méthode Forward-Backward (FB), développée par Holliday [65], [66] et [67], distingue, en un point de la surface, les contributions des éléments de surface situés à gauche et à droite de ce point. A noter que la méthode FB a été adaptée à des surfaces non univoques en utilisant un système de coordonnées curvilignes.

- La matrice impédance  $\bar{\mathbf{Z}}$  est décomposée comme  $\bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{Z}}^f + \bar{\mathbf{Z}}^d + \bar{\mathbf{Z}}^b$ , dans laquelle
- $\bar{\mathbf{Z}}^f$  est une matrice *triangulaire inférieure* sensible aux contributions provenant de la gauche vers la droite et du haut vers le bas jusqu’au point d’observation  $(n, m)$  (*forward contribution* voir figure 2.16).
  - $\bar{\mathbf{Z}}^d$  est une matrice *diagonale* : interaction du point sur lui-même.
  - $\bar{\mathbf{Z}}^b$  est une matrice *triangulaire supérieure* sensible aux contributions provenant de la droite vers la gauche et du bas vers le haut (*backward contribution* voir figure 2.16).

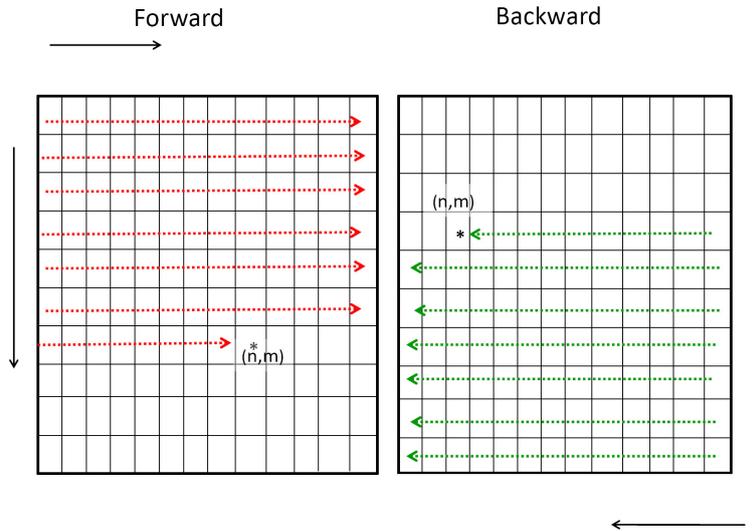


FIGURE 2.16 – Contributions Forward et Backward.

De plus, le vecteur inconnu  $\mathbf{X}$  défini sur la surface est décomposé comme  $\mathbf{X}^b + \mathbf{X}^f$ , où

- $\mathbf{X}^f$  correspond à la contribution du champ diffracté se propageant vers l’avant (*forward contribution*).
- $\mathbf{X}^b$  correspond à la contribution du champ diffracté se propageant vers l’arrière (*backward contribution*).

Le système linéaire  $(\bar{\mathbf{Z}}^f + \bar{\mathbf{Z}}^d + \bar{\mathbf{Z}}^b)(\mathbf{X}^b + \mathbf{X}^f) = \mathbf{b}$  peut alors s'écrire [65]

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{Z}}^d \mathbf{X}^f = \mathbf{b} - \bar{\mathbf{Z}}^f (\mathbf{X}^b + \mathbf{X}^f) \\ \bar{\mathbf{Z}}^d \mathbf{X}^b = -\bar{\mathbf{Z}}^b (\mathbf{X}^b + \mathbf{X}^f) \end{cases} \quad (2.67)$$

Ce système d'équations est résolu par substitution itérative des contributions forward puis backward. Tout d'abord le vecteur  $\mathbf{X}^b$  est posé égal à zéro, conduisant d'après la première ligne de l'équation (2.67) à  $\bar{\mathbf{Z}}^d \mathbf{X}^f = \mathbf{b} - \bar{\mathbf{Z}}^f \mathbf{X}^f$ ,

$$\begin{bmatrix} Z_{11}^d X_1^f \\ Z_{22}^d X_2^f \\ Z_{33}^d X_3^f \\ \vdots \\ Z_{NN}^d X_N^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ Z_{21}^f X_1^f \\ Z_{31}^f X_1^f + Z_{32}^f X_2^f \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^{n=N-1} Z_{N,n}^f X_n^f \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$X_n$  est la composante  $n$  du vecteur  $\mathbf{X}$  et  $Z_{mn}$  l'élément de la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}$  (parfois  $Z_{mn}$  est noté  $Z_{m,n}$  pour plus de clarté). Ainsi la première ligne conduit à  $X_1^f = b_1/Z_{11}^d$ , puis d'après la deuxième ligne,  $X_2^f = (b_2 - Z_{21}^f X_1^f)/Z_{22}^d$ , et ainsi de suite. Le processus récursif débute alors en  $n = 1$  (voir illustration figure 2.17).

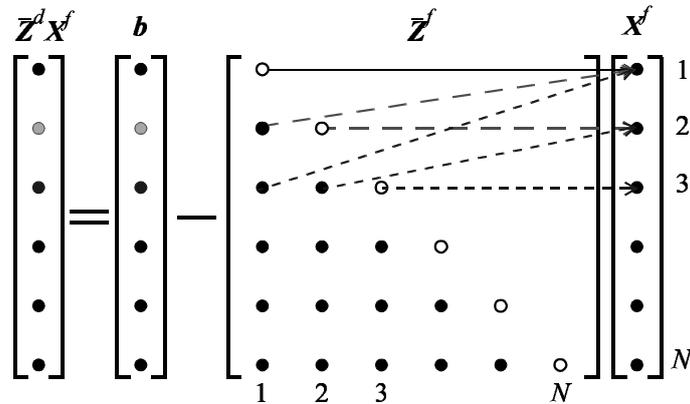


FIGURE 2.17 – Illustration du calcul du produit matrice-vecteur  $\bar{\mathbf{Z}}^d \mathbf{X}^f = \mathbf{b} - \bar{\mathbf{Z}}^f \mathbf{X}^f$  de la méthode Forward-Backward pour la détermination de  $\mathbf{X}^f$ . Les points blancs correspondent à la diagonale d'éléments *nuls*.

La contribution backward est alors calculée en utilisant la deuxième ligne de (2.67) conduisant alors à  $\bar{\mathbf{Z}}^d \mathbf{X}^b = -\bar{\mathbf{Z}}^b (\mathbf{X}^b + \mathbf{X}^f) = -\bar{\mathbf{Z}}^b \mathbf{X}^{bf}$

$$\begin{bmatrix} Z_{11}^d X_1^b \\ \vdots \\ Z_{N-2,N-2}^d X_{N-2}^b \\ Z_{N-1,N-1}^d X_{N-1}^b \\ Z_{NN}^d X_N^b \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sum_{n=2}^{n=N} Z_{1,n}^b X_n^{bf} \\ \vdots \\ Z_{N-2,N-1}^b X_{N-1}^{bf} + Z_{N-2,N}^b X_N^{bf} \\ Z_{N-1,N}^b X_N^{bf} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.69)$$

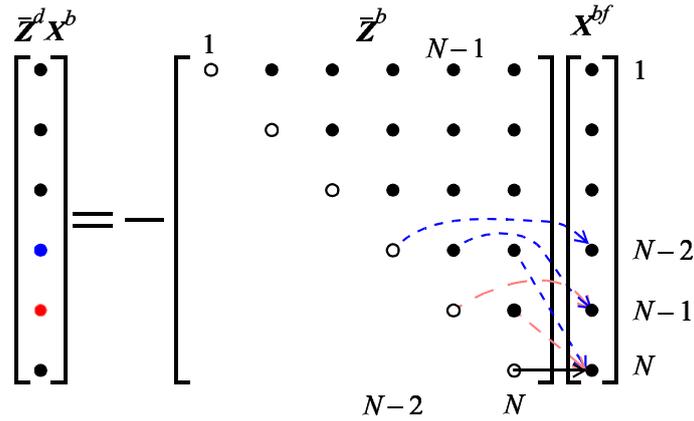


FIGURE 2.18 – Illustration du calcul du produit matrice-vecteur  $\bar{\mathbf{Z}}^d \mathbf{X}^b = -\bar{\mathbf{Z}}^b (\mathbf{X}^b + \mathbf{X}^f) = -\bar{\mathbf{Z}}^b \mathbf{X}^{bf}$  de la méthode Forward-Backward pour la détermination de  $\mathbf{X}^b$ . Les points blancs correspondent à la diagonale d'éléments *nuls*.

Ainsi la *dernière* ligne conduit à  $X_N^b = 0 \Rightarrow X_N^b = X_N^f$ , puis d'après l'avant dernière ligne,  $X_{N-1}^b = X_N^b Z_{N-1,N}^{bf} / Z_{N-1,N-1}^d$ , et ainsi de suite. Le processus récursif débute alors en  $n = N$ . Le processus itératif est illustré sur la figure 2.18.

En substituant alors  $\mathbf{X}^b$  et  $\mathbf{X}^f$  d'ordre un dans la première ligne de (2.67), le système matriciel (2.68) est obtenu avec la substitution  $\mathbf{X}^f \rightarrow \mathbf{X}^f + \mathbf{X}^b$  pour le second vecteur à droite de l'égalité. Ainsi l'ordre  $\mathbf{X}^f$  suivant est déterminé. En utilisant (2.69), on procède alors de la même manière pour  $\mathbf{X}^b$ . Le processus itératif s'arrête à l'ordre  $P_{FB}$  pour une précision voulue.

La complexité de la méthode pour chaque itération et pour les calculs de  $\mathbf{X}^f$  et  $\mathbf{X}^b$  est  $2 \sum_{n=1}^{N-1} n = N(N-1)$  soit  $\mathcal{O}(N^2)$  pour  $N$  grand. De plus, le coût de stockage de la matrice impédance  $\mathbf{Z}$  est de  $\mathcal{O}(N^2)$ . Au détriment du temps de calcul, ce coût peut être réduit en calculant uniquement une ligne de la matrice impédance demandant alors le calcul de la matrice impédance pour chaque itération.

### 2.4.1 Convergence de la méthode FB pour une surface rugueuse

Afin de tester la convergence de la méthode FB, l'erreur relative sur les inconnues sur la surface, notée  $r_e$ , est introduite :

$$r_e = \frac{\|\mathbf{X}_{\text{FB}}^{(P_{\text{FB}})} - \mathbf{X}_{\text{LU}}\|}{\|\mathbf{X}_{\text{LU}}\|}, \quad (2.70)$$

où  $\mathbf{X}_{\text{FB}}^{(P_{\text{FB}})}$  est le vecteur contenant les inconnues sur la surface obtenu par la méthode FB à l'ordre  $P_{\text{FB}}$  (nombre d'itérations dans la procédure de la FB).  $\mathbf{X}_{\text{LU}}$  est le vecteur contenant les inconnues sur la surface obtenu par la MdM avec inversion directe LU (modèle MdM-MFIE avec inversion par décomposition LU) qui est la méthode de référence. Pour une surface PC,  $\mathbf{X}$  représente le courant surfacique  $\mathbf{J}$ . L'ordre  $P_{\text{FB}}$  est l'ordre pour lequel un critère indique l'obtention de la convergence de la méthode. Ce critère est d'avoir une erreur relative sur le courant surfacique inférieure à 0.01 ou 0.001 par exemple.

Les simulations dans les sections suivantes présentent l'ordre  $P_{\text{FB}}$  avec le critère de convergence  $r_e < 10^{-3}$ , pour une réalisation (un seul profil généré) de surface rugueuse gaussienne. La longueur de corrélation de la surface est  $L_{cx} = L_{cy} = 1\lambda_0$ , ses longueurs sont  $L_x = 7\lambda_0, L_y = 7\lambda_0$ , et les pas d'échantillonnage valent  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ .

Pour étudier la convergence de la méthode FB, les effets des différents paramètres de la scène sont présentés, les résultats sont comparés avec la méthode de moments avec inversion directe par décomposition LU (MdM-LU : modèle MdM-MFIE avec inversion par décomposition LU).

#### 2.4.1.1 Effet de l'état de polarisation de l'onde incidente

Considérons une surface rugueuse illuminée par une onde plane en incidence normale  $\theta_i = 0^\circ, \phi_i = 0^\circ$  et  $\phi_s = 0^\circ$ . La méthode FB est comparée à la méthode MdM-LU pour les deux co-polarisations sur la figure 2.19. Nous observons que plus l'ordre de la méthode

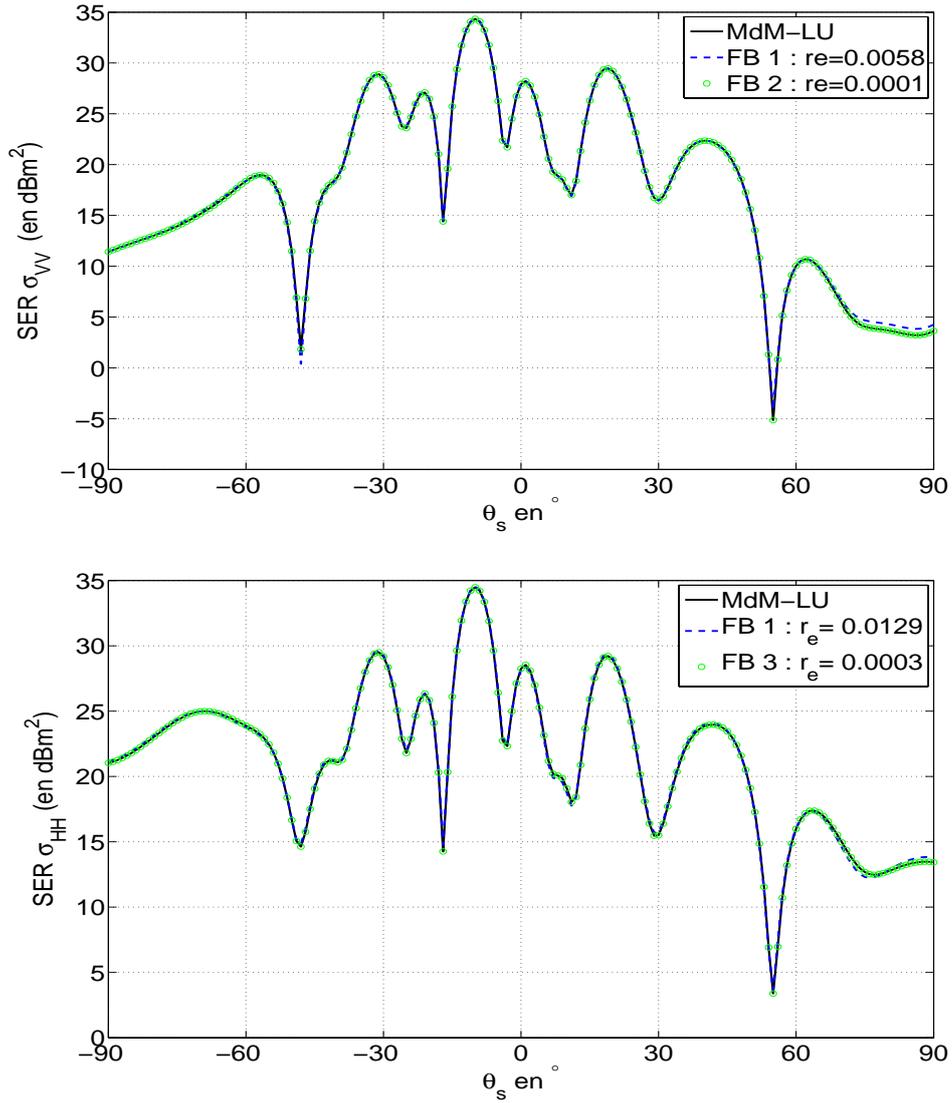


FIGURE 2.19 – Comparaisons de la SER bistatique. Cas d’une surface rugueuse de dimensions  $7\lambda_0 \times 7\lambda_0$ ,  $L_{cx} = L_{cy} = 1\lambda_0$ ,  $\sigma_z = 0.2$ ,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$  : effet de la polarisation de l’onde incidente sur la convergence de la FB.

FB augmente, plus elle converge vers MdM-LU. Pour la polarisation VV, la méthode FB converge après 2 itérations ( $P_{\text{FB}} = 2$ ), par contre pour la polarisation HH elle converge après 3 itérations ( $P_{\text{FB}} = 3$ ). Elle est donc sensible à l’état de polarisation de l’onde incidente.

#### 2.4.1.2 Effet de l’angle d’incidence $\theta_i$

Pour montrer l’effet de  $\theta_i$  sur la convergence de la FB, le scénario précédent est utilisé mais avec cette fois un angle d’incidence  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$  et  $\phi_s = 0^\circ$ . Les résultats

sont illustrés sur la figure 2.20 pour une polarisation verticale. A partir de la figure 2.20,

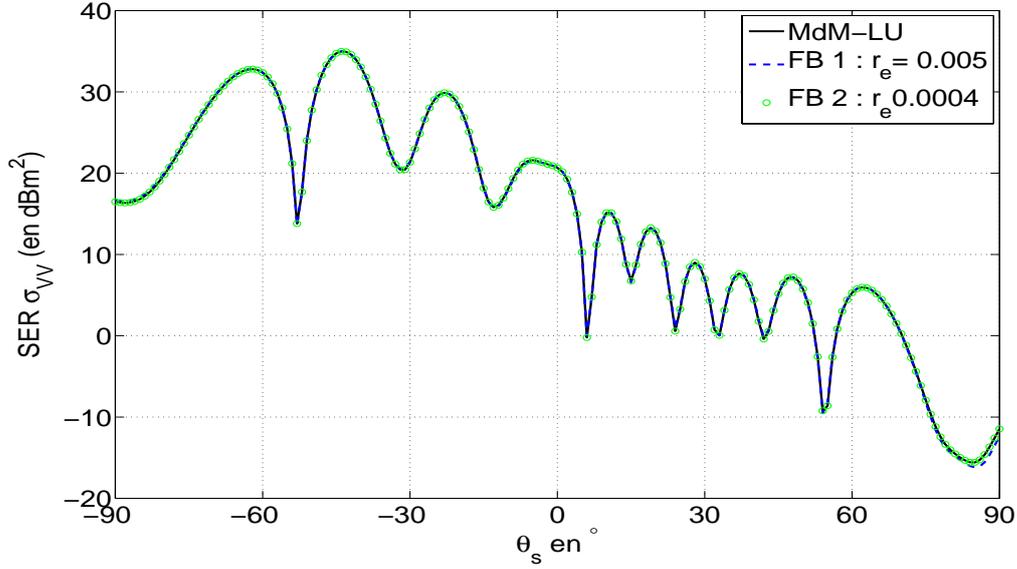


FIGURE 2.20 – Comparaisons de la SER bistatique, cas d’une surface rugueuse de dimensions  $7\lambda_0 \times 7\lambda_0$ ,  $L_{cx} = L_{cy} = 1\lambda_0$ ,  $\sigma_z = 0.2$ ,  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$  : effet de  $\theta_i$  sur la convergence de la FB.

on remarque que la méthode FB n’est pas sensible à l’angle d’incidence  $\theta_i$  dans ce cas, ( $P_{FB} = 2$ ) pour  $\theta_i = 0^\circ$  et  $\theta_i = 45^\circ$ .

#### 2.4.1.3 Effet de l’écart-type des hauteurs $\sigma_z$

Pour illustrer l’effet de  $\sigma_z$  sur la convergence de la FB, le même surface rugueuse précédente est générée, mais avec  $\sigma_z = 0.5\lambda_0$  au lieu de  $0.2\lambda_0$ . Les résultats sont illustrés sur la figure 2.21 pour une polarisation verticale. Sur la figure 2.21, on observe que la méthode FB est fortement sensible à l’écart-type des hauteurs. Lorsque l’ordre  $P_{FB}$  augmente l’erreur relative diminue. Pour  $\sigma_z = 0.5\lambda_0$  la méthode FB converge vers MdM-LU après 6 itérations ( $P_{FB} = 6$ ).

Pour conclure, suivant les différents paramètres de la scène, à partir des figures 2.19, 2.20 et 2.21, il est possible de dégager quelques caractéristiques de la convergence de la méthode FB :

- l’ordre  $P_{FB}$  est peu sensible à la polarisation de l’onde incidente et à l’angle d’incidence.
- l’ordre  $P_{FB}$  est très sensible à l’écart-type des hauteurs.

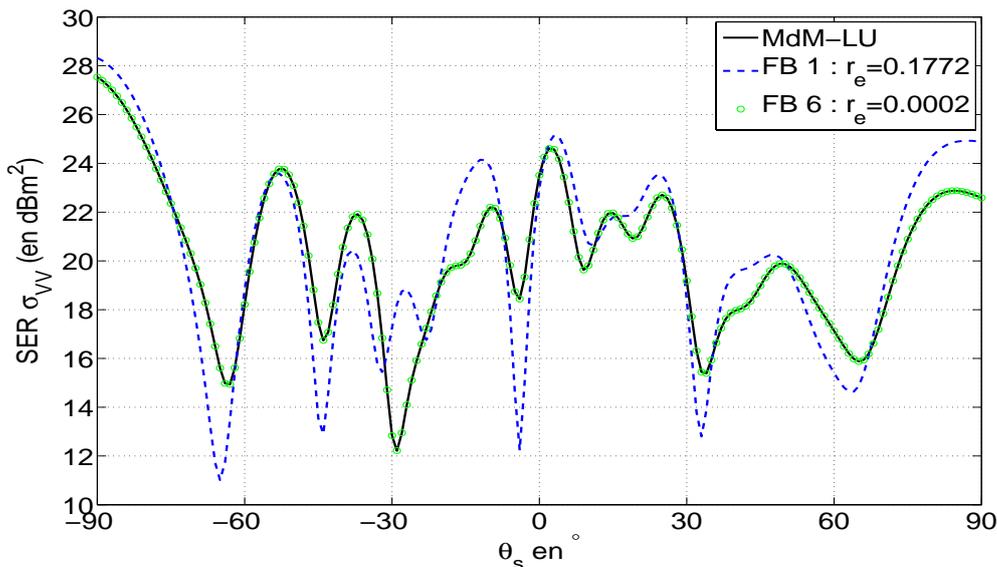


FIGURE 2.21 – Comparaisons de la SER bistatique. Cas d’une surface rugueuse de dimensions  $7\lambda_0 \times 7\lambda_0$ ,  $L_{cx} = L_{cy} = 1\lambda_0$ ,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ ,  $\sigma_z = 0.5\lambda_0$  : Effet de  $\sigma_z$  sur la convergence de la FB.

- En général, la méthode FB converge rapidement (après 5 ou 6 itérations).

## 2.5 Forward-Backward- Spectral Acceleration (FB-SA)

Afin d’accélérer le produit matrice-vecteur, la procédure SA (Spectral Acceleration) combinée à la méthode FB a été proposée par Chou, Johnson et Torrungrueng [26, 28]. Pour mettre en oeuvre cette méthode, j’ai passé un séjour d’un mois au sein du laboratoire “Electro science Laboratory of the Ohio State University” avec le Professeur Joel T. Johnson le fondateur de la méthode.

Le principe de la FB-SA repose sur la décomposition spectrale de la fonction de Green scalaire pour calculer les interactions lointaines entre deux points de la surface. Pour mieux comprendre la FB-SA, seul le calcul du processus Forward est présenté, le processus Backward est très similaire. La première étape de l’approche SA consiste à définir une distance  $L_x$  pour laquelle les interactions entre les points sont considérées comme des interactions fortes. Par contre, les interactions entre deux points dont la distance les séparant est supérieure à  $L_x$  sont considérées comme des interactions faibles, comme illustré sur la figure 2.22.

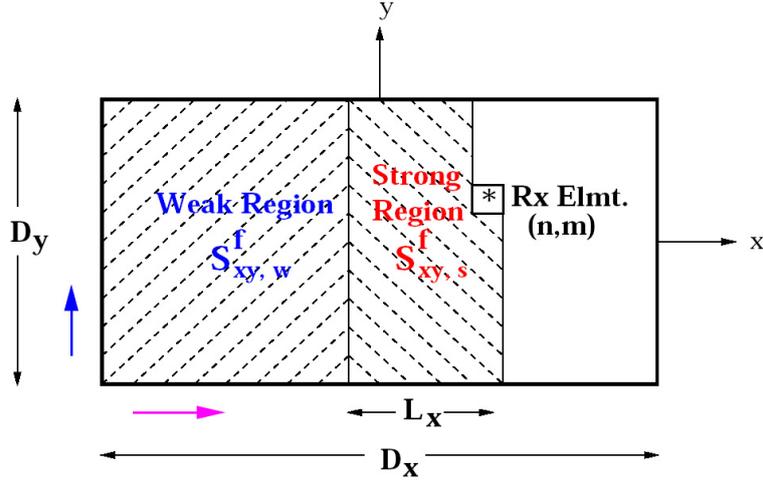


FIGURE 2.22 – Zones des interactions fortes (strong) et faibles (weak).

L'équation intégrale MFIE est donnée par

$$\mathbf{J}(\mathbf{R}) = \mathbf{J}_{OP}(\mathbf{R}) + 2\hat{\mathbf{n}} \times \iint_{S_{xy}} dx' dy' \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \times \mathbf{J}(\mathbf{R}'). \quad (2.71)$$

Le courant dans le processus Forward peut être exprimé comme

$$\mathbf{J}^f(\mathbf{R}) = \mathbf{J}_{OP}(\mathbf{R}) + \mathbf{J}_s^f(\mathbf{R}) + \mathbf{J}_w^f(\mathbf{R}), \quad (2.72)$$

où

$$\mathbf{J}_s^f(\mathbf{R}) = 2\hat{\mathbf{n}} \times \iint_{S_{xy,s}^f} dx' dy' \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \times [\mathbf{J}^f(\mathbf{R}') + \mathbf{J}^b(\mathbf{R}')], \quad (2.73)$$

$$\mathbf{J}_w^f(\mathbf{R}) = 2\hat{\mathbf{n}} \times \iint_{S_{xy,w}^f} dx' dy' \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \times [\mathbf{J}^f(\mathbf{R}') + \mathbf{J}^b(\mathbf{R}')], \quad (2.74)$$

Les termes  $\mathbf{J}_s^f(\mathbf{R})$  et  $\mathbf{J}_w^f(\mathbf{R})$  représentent les contributions fortes (strong en anglais) et faibles (weak en anglais) respectivement, et  $\mathbf{J}_{OP} = 2\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_i(\mathbf{R})$  est le courant de l'optique physique.  $\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{R}'$  et  $r = \|\mathbf{r}\|$ .

L'approche SA repose sur la représentation spectrale de la fonction de Green  $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  pour  $x - x' > 0$

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{i}{8\pi^2} \int_{C_{k_z}} \int_{C_{k_y}} dk_z dk_y \frac{e^{ik \cdot \mathbf{r}}}{k_x}, \quad (2.75)$$

où

$$k = \hat{x}k_x + \hat{y}k_y + \hat{z}k_z, \quad k_x = (k^2 - k_y^2 - k_z^2)^{1/2},$$

et  $x, x'$  sont respectivement les coordonnées du point d'observation et point source.

En appliquant le gradient

$$\nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{C_{k_z}} \int_{C_{k_y}} dk_z dk_y \frac{\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k_x}. \quad (2.76)$$

En substituant l'équation (2.76) dans (2.74), on obtient

$$\mathbf{J}_w^f(\mathbf{R}) = -\frac{1}{4\pi^2} \hat{\mathbf{n}} \times \int_{C_{k_z}} \int_{C_{k_y}} dk_z dk_y \frac{\mathbf{F}(\mathbf{R}, k_z, k_y)}{k_x}. \quad (2.77)$$

$\mathbf{F}(\mathbf{R}, k_z, k_y)$  est le vecteur complexe de rayonnement défini comme

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}, k_z, k_y) = \iint_{S_{x,y,w}^f} dx' dy' \mathbf{V}(\mathbf{R}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.78)$$

où

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}') = \mathbf{k} \times [\mathbf{J}^f(\mathbf{R}') + \mathbf{J}^b(\mathbf{R}')]. \quad (2.79)$$

$\mathbf{F}(\mathbf{R}, k_z, k_y)$  possède une propriété récursive. Pour illustrer ceci, on considère un vecteur de position allant du point d'origine jusqu'à l'élément  $(n, m)$  sur la surface  $S$  comme illustré sur la figure 2.23. Après la discrétisation de l'équation (2.78), le vecteur complexe de rayonnement  $\mathbf{F}(\mathbf{R}, k_z, k_y)$  peut être calculé récursivement comme suit [26]

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}_{(n,m)}, k_z, k_y) = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{R}_{(n-1,M)}, k_z, k_y) e^{i\Psi_1} + \Delta S_{xy} \sum_{i=1}^M \mathbf{V}(\mathbf{R}_{n-N_{Lx},i}) e^{i\Psi_2}, & m = 1 \\ \mathbf{F}(\mathbf{R}_{(n,m-1)}, k_z, k_y) e^{i\Psi_3}, & m \neq 1 \end{cases} \quad (2.80)$$

avec

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= k \cdot [\mathbf{R}_{(n,1)} - \mathbf{R}_{(n-1,M)}], \\ \Psi_2 &= k \cdot [\mathbf{R}_{(n,1)} - \mathbf{R}_{(n-N_{Lx},i)}], \\ \Psi_3 &= k \cdot [\mathbf{R}_{(n,m)} - \mathbf{R}_{(n,m-1)}], \\ N_{Lx} &= (L_x / \Delta x), \\ \Delta S_{xy} &= \Delta x \Delta y. \end{aligned} \quad (2.81)$$

L'équation (2.80) montre que la fonction  $\mathbf{F}(\mathbf{R}, k_z, k_y)$  est calculée en multipliant la valeur précédente par un déphasage.

Pour obtenir une convergence de la méthode, une déformation des contours d'intégration  $C_{k_z}$  et  $C_{k_y}$  est réalisée en utilisant les chemins  $\delta_{k_z}$  et  $\delta_{k_y}$  respectivement

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{i}{8\pi^2} \int_{C_{\delta_{k_z}}} dk_z e^{ik_z(z-z')} \int_{C_{\delta_{k_y}}} dk_y \times \frac{e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y')]}{k_x}. \quad (2.82)$$

Les figures 2.24 et 2.26 montrent différents contours dans les plans complexes  $k_z$  et  $k_y$ . Par exemple pour une surface plane ( $\Delta z = 0$ ), le chemin correspondant est illustré sur

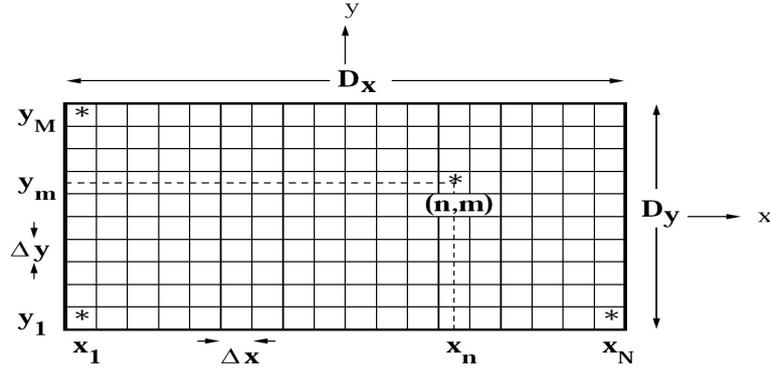


FIGURE 2.23 – Discrétisation d'une surface de dimensions  $D_x \times D_y$ .

la figure 2.24, pour lequel l'angle  $\delta_{k_z} = \pi/4$ . La contribution de l'intégrande de (2.82) est alors significative au voisinage du point selle  $k_{z,s}$  défini par  $k_{z,s} = \frac{k(z-z')}{\sqrt{|\rho-\rho'|^2+(z-z')^2}}$  le long du chemin  $C_{\delta_{k_z}}$ . En s'écartant du point selle, l'angle devient complexe produisant alors une décroissance exponentielle de l'intégrande. Numériquement, ce chemin est très intéressant car la région pour laquelle l'intégrande contribue est plus petite que celle définie par  $C_{k_z}$ . Sur la figure 2.25, le contour déformé  $C_{\delta_{k_z}}$  passant par  $k_{z,s}$  est alors caractérisé par l'angle  $\delta_{k_z}$  (au voisinage de  $k_{z,s}$ , le contour étant approximé par un segment de droite de pente  $\tan \delta$ ),  $k_{z,max}$  et le pas d'intégration  $\Delta_{k_z}$  sur l'intervalle  $[-k_{z,max}; k_{z,max}]$ . Sur la figure 2.26, le point selle est défini par  $k_{y,s} = \frac{\kappa(y-y')}{|\rho-\rho'|}$ , où  $\kappa = (k^2 - k_z^2)^{1/2}$  est la constante de propagation dans le plan  $k_y$ .

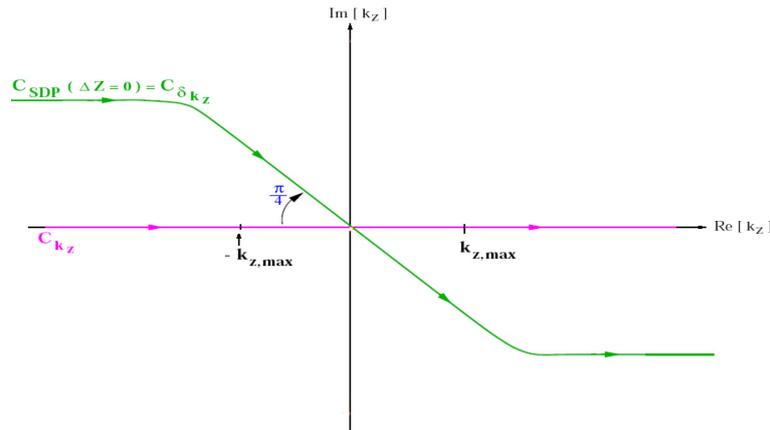
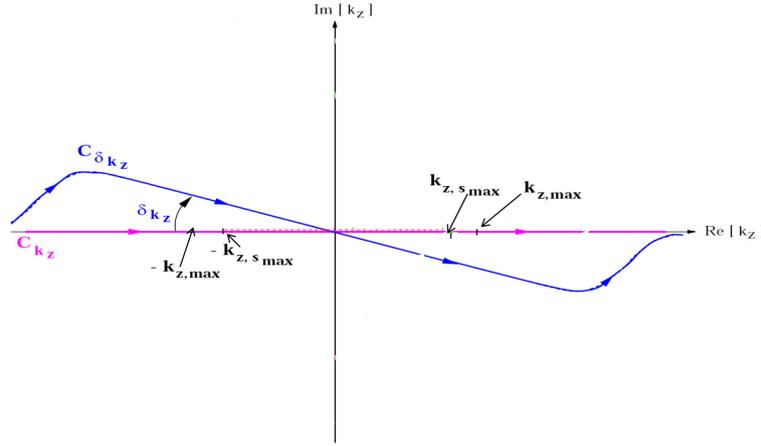
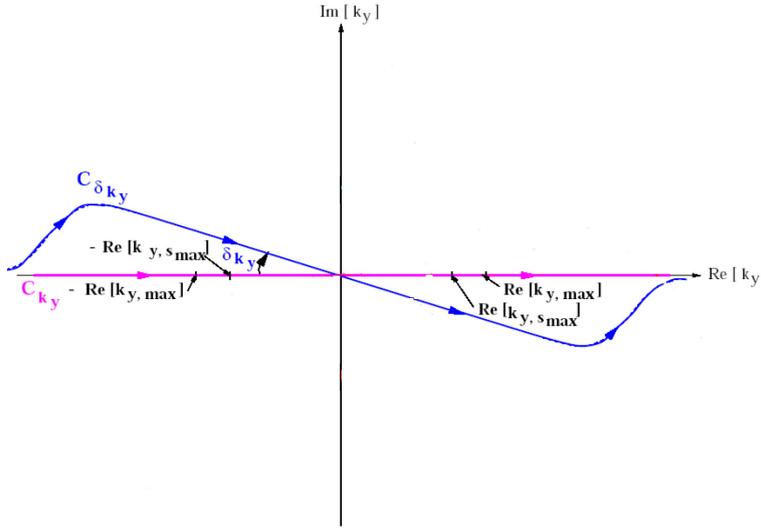


FIGURE 2.24 – Contour d'intégration dans le plan complexe  $k_z$  pour une surface plane.

Une fois les contours déformés connus, l'équation (2.77) peut être écrite comme

$$\mathbf{J}_w^f(\mathbf{R}) = -\frac{1}{4\pi^2} \hat{\mathbf{n}} \times \int_{C_{\delta_{k_z}}} \int_{C_{\delta_{k_y}}} dk_z dk_y \frac{\mathbf{F}(\mathbf{R}, k_z, k_y)}{k_x} \quad (2.83)$$


 FIGURE 2.25 – Contour d'intégration dans le plan complexe  $k_z$  pour une surface rugueuse.

 FIGURE 2.26 – Contour d'intégration dans le plan complexe  $k_y$  pour une surface rugueuse.

En échantillonnant l'intégrale (2.83)

$$\mathbf{J}_w^f(\mathbf{R}) = -\frac{1}{4\pi^2} \Delta\Omega \sum_{p=-P}^P \sum_{q=-Q_p}^{Q_p} \times \frac{W(k_{z_p}, k_{y_p}) [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F}(\mathbf{R}, k_{z_p}, k_{y_p})]}{k_{x_{p,q}}} \times e^{-i\delta k_z} e^{-i\delta k_y} \quad (2.84)$$

où

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= \Delta k_y \Delta k_z \\ P &= (\text{Re}[k_{z,max}]/\Delta k_z) + 1 \\ Q_p &= (\text{Re}[k_{y,max}]/\Delta k_y) + 1 \\ k_{z_p} &= p\Delta k_z e^{-i\delta k_z}, \quad \text{pour } p = -P, \dots, P \\ k_{y_q} &= q\Delta k_y e^{-i\delta k_y}, \quad \text{pour } q = -Q_p, \dots, Q_p \\ k_{x_{p,q}} &= (k^2 - k_{y_q} - k_{z_p})^{1/2} \end{aligned} \quad (2.85)$$

$2P + 1$  est le nombre total d'ondes planes dans le plan  $k_z$ , et  $2Q_p + 1$  est le nombre

total d'ondes planes dans le plan  $k_y$ , le nombre total d'ondes planes dans les deux plans est donné par

$$Q_{\text{TOT}} = \sum_{p=-P}^P (2Q_p + 1), \quad (2.86)$$

donc la complexité de la méthode peut être estimée comme

$$\text{Complexité} \approx N_s N_{\text{TOT}} + Q_{\text{TOT}}(N_{\text{TOT}} - N_s), \quad (2.87)$$

où  $N_{\text{TOT}}$  est el nombre total d'éléments et  $N_s$  est le nombre d'éléments dans la region des interactions fortes.

Pour calculer l'intégrale dans les plans  $k_z$  et  $k_y$ , on utilise les paramètres suivants [28]

$$k_{z,max} = \begin{cases} \sqrt{\frac{20k}{L_x}}, & \tan^{-1}\left(\frac{\Delta z_{max}}{L_x}\right) \leq 0.1 \\ k_{z,smax} + k_{z,tail}, & \tan^{-1}\left(\frac{\Delta z_{max}}{L_x}\right) > 0.1 \end{cases} \quad (2.88)$$

$$k_{y,max} = \begin{cases} \sqrt{\frac{20k}{L_x}}, & \tan^{-1}\left(\frac{D_y}{L_x}\right) \leq 0.1 \\ k_{y,smax} + k_{y,tail}, & \tan^{-1}\left(\frac{D_y}{L_x}\right) > 0.1 \end{cases} \quad (2.89)$$

avec

$$\begin{aligned} k_{z,smax} &= (k\Delta z_{max}/R_{xz}) \\ \Delta k_z &= (1/22)\sqrt{(C_z k/L_x)} \\ k_{y,smax} &= (\kappa D_y/R_{xy}) \\ \Delta k_y &= (1/22)\sqrt{(C_y k/R_{xy})} \\ R_{xz} &= \sqrt{L_x^2 + (\Delta z_{max})^2} \\ R_{xy} &= \sqrt{L_x^2 + D_y^2}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Les constantes  $k_{z,tail}$ ,  $k_{y,tail}$ ,  $C_z$ ,  $C_y$  sont déterminées empiriquement.

Pour valider le modèle FB-SA, on considère en premier le cas d'une plaque lisse de dimensions  $D_x = 20\lambda_0$  et  $D_y = 8\lambda_0$ ,  $L_x = 3\lambda_0$  (la distance au delà de laquelle les interactions peuvent être considérées comme faibles). La méthode FB-SA est comparée à la MdM-LU sur la figure 2.27, sur laquelle la SER bistatique est tracée en fonction de l'angle d'observavtion  $\theta_s$  pour la polarisation VV. La surface est illuminée par une onde plane en incidence normale  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$  et  $\phi_s = 0^\circ$ . Les pas d'échantillonnage sont  $\Delta_x = \Delta_y = \lambda_0/8$ . On remarque un accord parfait entre les deux méthodes.

Ensuite, l'algorithme FB-SA est testé pour une surface rugueuse de dimensions  $D_x = 20\lambda_0$  et  $D_y = 8\lambda_0$  générée par un processus aléatoire gaussien (un seul profil généré), dont la fonction d'autocorrélation des hauteurs est donnée par  $C_z(x, y) = \sigma_z^2 \exp(-x^2/L_{cx}^2 -$

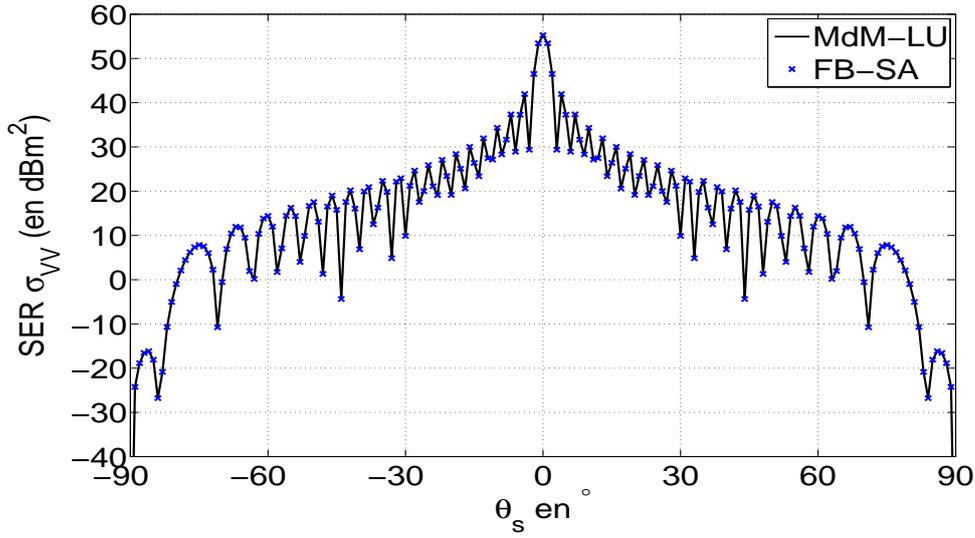


FIGURE 2.27 – Comparaison de la SER bistatique obtenue avec MdM-LU et le modèle FB-SA proposé pour la polarisation VV. Cas d’une surface lisse de dimensions  $D_x = 20\lambda_0$  et  $D_y = 8\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ ,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ .

$y^2/L_{cy}^2$ ), les longueurs de corrélation  $L_{cx} = L_{cy} = 1\lambda_0$ , et l’écart-type des hauteurs  $\sigma_z = 0.2\lambda_0$ . La surface est illuminée par une onde plane en incidence normale,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$  et  $\phi_s = 0^\circ$ . Le modèle FB-SA proposé est comparé à MdM-LU sur la figure 2.28, sur laquelle la SER est tracée en fonction de l’angle d’observation  $\theta_s$  pour la polarisation VV,  $L_x = 3\lambda_0$  (la distance au delà de laquelle les interactions peuvent être considérées comme faibles).

Sur la figure 2.28, on remarque que l’accord entre les deux méthodes est bon. Toutefois, il reste des différences dues à des difficultés dans le code de programmation de la FB-SA. On n’a pas pu résoudre ce problème pendant la durée limitée de mon séjour aux USA, donc on laisse l’amélioration de ce code comme une perspective pour un futur travail.

L’algorithme FB-SA qui utilise le développement selon la direction  $x$  est bien adapté pour des surfaces rectangulaires de longueur  $D_y$  petite par rapport à la longueur  $D_x$  [68]. Ainsi, pour les surfaces rugueuses avec  $D_y$  grand, il sera plus efficace d’employer l’algorithme FB-SA en utilisant les développements dans les deux directions  $x$  et  $y$ .

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{i}{8\pi^2} \int_{C_{k_z}} \int_{C_{k_y}} dk_z dk_y \frac{e^{ik \cdot \mathbf{r}}}{k_x} \quad \text{pour } x - x' > 0 \quad (2.91)$$

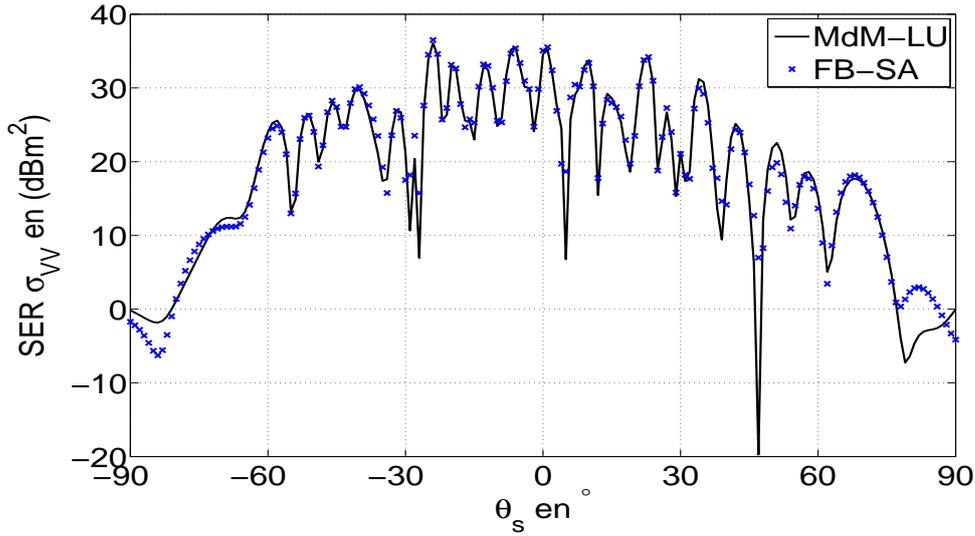


FIGURE 2.28 – Comparaison de la SER bistatique obtenue avec MdM-LU et le modèle FB-SA proposé pour la polarisation VV. Cas d’une surface rugueuse de dimensions  $D_x = 20\lambda_0$  et  $D_y = 8\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ ,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ .

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{i}{8\pi^2} \int_{C_{k_z}} \int_{C_{k_x}} dk_z dk_x \frac{e^{ik \cdot \mathbf{r}}}{k_y} \quad \text{pour } y - y' > 0 \quad (2.92)$$

La FB-SA avec les développements selon  $x$  et  $y$  nécessite un stockage en mémoire plus important, car le calcul n’est pas seulement établi en  $x$ , mais dans les deux directions  $x$  et  $y$ . Ainsi, la FB-SA étendue à un problème 3D n’est pas aussi efficace que celle d’un problème 2D [1, 56].

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, la diffraction d’onde électromagnétique par une surface PC quelconque est étudiée en utilisant la méthode des moments (MdM) et la méthode de l’optique physique (OP). Les équations intégrales EFIE et MFIE ont été établies et résolues par la MdM. Des comparaisons entre nos modèles et celui de FEKO pour le cas d’une surface lisse et rugueuse ont été étudiées. Du point de vue de la résolution numérique, nous avons montré que les résultats sont fortement liés au choix de l’équation intégrale utilisée (EFIE ou MFIE) et des fonctions de base et de test. Afin d’accélérer la MdM, la méthode Forward Backward est appliquée. Par la suite, le cas de deux diffuseurs en 3D sera étudié. Vu le nombre très élevé d’inconnues à traiter, une inversion LU du problème

complet (objet+surface) est très coûteuse sur un PC standard de bureau, il est donc nécessaire de réaliser une hybridation entre la MDM et l'OP, par l'utilisation de l'équation intégrale MFIE qui est mieux adaptée à notre problème.



# Diffusion d'une onde électromagnétique par deux diffuseurs

---

**D**ans ce chapitre nous allons présenter comment modéliser la diffraction par une scène 3D où un objet est situé au-dessus d'une surface rugueuse. Les phénomènes de couplage seront tout d'abord mis en exergue en étudiant les équations intégrales de la scène. En utilisant l'étude menée au chapitre 2, la méthode des moments sera appliquée et servira de méthode de référence. Après avoir proposé une méthode rigoureuse "exacte" facilitant le calcul de la diffusion par un objet au-dessus d'une surface rugueuse, sa validité et sa convergence seront étudiées. Cette méthode permettra notamment d'accélérer le calcul en utilisant les travaux vus au chapitre 2. Des modèles rigoureux et hybrides seront construits à partir de cette méthode.

## 3.1 Positionnement du problème

Lorsqu'un objet est situé à proximité d'une autre surface, et que cet ensemble de diffuseurs est excité par une onde électromagnétique, le champ diffusé par cette scène n'est pas égal à la somme des champs diffusés par chacun des diffuseurs considérés indépendamment (en espace libre). En effet, les deux surfaces vont se coupler, ou autrement dit : les courants sur la surface d'un objet dépendent des courants sur la surface de l'autre diffuseur. Comme nous l'avons déjà évoqué, ce sujet d'étude est de grand intérêt puisque dans la nature un diffuseur est rarement à la fois isolé de son environnement et isolé d'autres diffuseurs proches. Une modélisation réaliste de la diffusion par ces scènes complexes doit prendre en compte ces phénomènes de couplage. Toujours dans le souci d'obtenir une méthode

“exacte”, la méthode des moments est utilisée. La scène considérée, illustrée sur la figure 3.1, est composée d'un obstacle placé au-dessus d'une surface rugueuse bidimensionnelle.

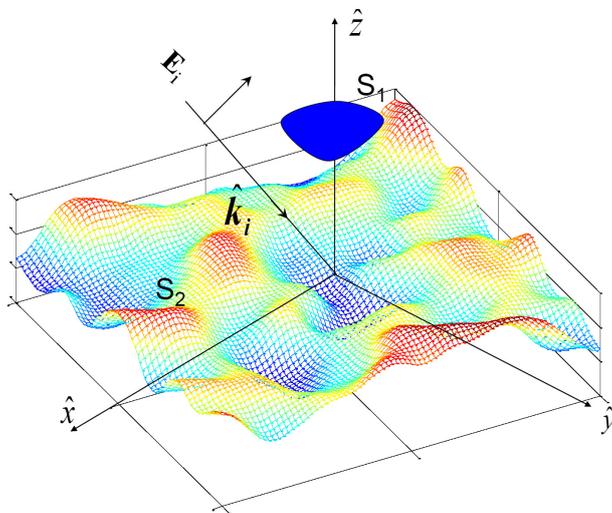


FIGURE 3.1 – Illustration de la scène étudiée : un objet situé au-dessus d'une surface rugueuse.

## 3.2 Diffusion de la scène par la méthode des moments

Dans cette partie, le problème de deux diffuseurs quelconques est étudié. Ils sont considérés, tous deux, parfaitement conducteurs (PC). Pour poser rigoureusement le problème de la diffusion électromagnétique par cette scène “complexe”, il convient d'établir les équations intégrales de cette nouvelle scène.

### 3.2.1 Equations intégrales - cas de deux diffuseurs PC

Le problème considéré est illustré sur la figure 3.2. Une source est placée dans un milieu  $\Omega_0$  de permittivité  $\varepsilon_0$  et de volume  $V_0$ . Ce milieu incident contient deux diffuseurs : le diffuseur 1 de milieu  $\Omega_1$  de permittivité  $\varepsilon_1$  et de volume  $V_1$  et le diffuseur 2 de milieu  $\Omega_2$  de permittivité  $\varepsilon_2$  et de volume  $V_2$ .  $S_1$  est la surface délimitant le volume  $V_1$  ; sa normale,  $\hat{\mathbf{n}}_1$ , est dirigée vers l'extérieur de  $V_1$  (donc dirigée vers le milieu incident). De même,  $S_2$  est la surface délimitant le volume  $V_2$  ; sa normale,  $\hat{\mathbf{n}}_2$ , est dirigée vers l'extérieur de  $V_2$ .  $S_\infty$  est la surface délimitant le volume  $V_0$  à l'infini ; sa normale pointe vers l'extérieur de  $V_0$ . En se positionnant sur la surface du diffuseur 1, et en appliquant les conditions aux

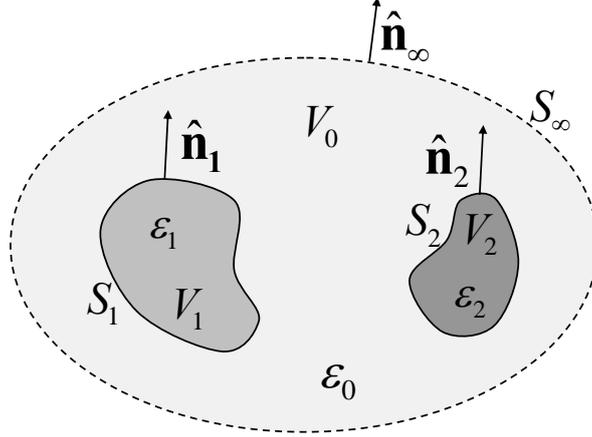


FIGURE 3.2 – Le problème de la diffusion par deux diffuseurs placés dans le milieu incident.

limites on obtient une première équation intégrale,  $\forall \mathbf{R}_1, \mathbf{R}' \in S_1$  et  $\forall \mathbf{R}_2 \in S_2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{J}_1(\mathbf{R}') &= \hat{\mathbf{n}}_1(\mathbf{R}') \times \mathbf{H}_i(\mathbf{R}') + \underbrace{\hat{\mathbf{n}}_1(\mathbf{R}') \times \int_{S_1} \mathbf{J}_1(\mathbf{R}_1) \times \nabla_{\mathbf{R}_1} G(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}') dS}_{\text{Interactions locales}} \\ &+ \underbrace{\hat{\mathbf{n}}_1(\mathbf{R}') \times \int_{S_2} \mathbf{J}_2(\mathbf{R}_2) \times \nabla_{\mathbf{R}_2} G(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}') dS}_{\text{Couplage}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

En se positionnant sur la surface du diffuseur 2, on obtient une deuxième équation intégrale,  $\forall \mathbf{R}_2, \mathbf{R}' \in S_2$  et  $\forall \mathbf{R}_1 \in S_1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{J}_2(\mathbf{R}') &= \hat{\mathbf{n}}_2(\mathbf{R}') \times \mathbf{H}_i(\mathbf{R}') + \underbrace{\hat{\mathbf{n}}_2(\mathbf{R}') \times \int_{S_2} \mathbf{J}_2(\mathbf{R}_2) \times \nabla_{\mathbf{R}_2} G(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}') dS}_{\text{Interactions locales}} \\ &+ \underbrace{\hat{\mathbf{n}}_2(\mathbf{R}') \times \int_{S_1} \mathbf{J}_1(\mathbf{R}_1) \times \nabla_{\mathbf{R}_1} G(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}') dS}_{\text{Couplage}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Avec deux diffuseurs, le problème possède deux inconnues : le courant sur la surface du diffuseur 1 ( $\mathbf{J}_1$ ), et le courant sur la surface du diffuseur 2 ( $\mathbf{J}_2$ ).

### 3.2.2 Discrétisation par la Méthode des Moments

Les équations (3.1) et (3.2) forment un système couplé. En appliquant la MdM avec des fonctions de base portes et des fonctions de test de Dirac, les équations sont discrétisées et le système couplé s'écrit sous la forme matricielle  $\bar{\mathbf{Z}} \mathbf{X} = \mathbf{b}$ . Le vecteur inconnu  $\mathbf{X}$  se décompose en :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

où  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$  contiennent les inconnues surfaciques des courants  $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$  des équations (3.1) et (3.2), respectivement. Ils sont donnés par

$$\mathbf{X}_1 = [\mathbf{J}_1(\mathbf{R}_1^1) \dots \mathbf{J}_1(\mathbf{R}_1^{N_1})]^T, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{X}_2 = [\mathbf{J}_2(\mathbf{R}_2^1) \dots \mathbf{J}_2(\mathbf{R}_2^{N_2})]^T, \quad (3.5)$$

où l'exposant  $T$  désigne la transposée et  $N_1$  et  $N_2$  sont les nombres d'inconnues des surfaces des diffuseurs 1 et 2, respectivement. Ainsi,  $\mathbf{X}_1$  est de taille  $N_1$  et  $\mathbf{X}_2$  est de taille  $N_2$ .  $\mathbf{J}_1(\mathbf{R}_1) = J_{x1}\hat{\mathbf{x}} + J_{y1}\hat{\mathbf{y}} + J_{z1}\hat{\mathbf{z}}$ .  $\mathbf{J}_2(\mathbf{R}_2) = J_{x2}\hat{\mathbf{x}} + J_{y2}\hat{\mathbf{y}} + J_{z2}\hat{\mathbf{z}}$ . Le terme  $\mathbf{b}$  ( $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_i$ ), de taille  $(N_1 + N_2)$ , contient l'information sur le champ incident

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

La matrice impédance  $\bar{\mathbf{Z}}$  est une matrice carrée de taille  $(N_1 + N_2) \times (N_1 + N_2)$  et peut se mettre sous la forme

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_1 & \bar{\mathbf{Z}}_{21} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{12} & \bar{\mathbf{Z}}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Les matrices  $\bar{\mathbf{Z}}_1$  et  $\bar{\mathbf{Z}}_2$  correspondent à la matrice impédance de chaque diffuseur comme s'ils étaient en espace libre.  $\bar{\mathbf{Z}}_{12}$  et  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}$  peuvent être interprétées comme des matrices de couplage entre les deux diffuseurs. En résumé, le système matriciel  $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{X} = \mathbf{b}$  peut être mis sous la forme

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_1 & \bar{\mathbf{Z}}_{21} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{12} & \bar{\mathbf{Z}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

On peut alors déterminer le courant surfacique par inversion de la matrice impédance  $\mathbf{X} = \bar{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{b}$ . La méthode classique pour inverser un système linéaire tel que (3.8) est la décomposition LU.

## 3.3 Méthode E-PILE étendue au cas 3D

### 3.3.1 Intérêt de la méthode E-PILE classique

Nicolas Déchamps a proposé durant sa thèse [11] un algorithme pour calculer la diffusion par deux interfaces rugueuses superposées. Dans ce problème de diffusion, deux surfaces sont considérées mais seule l'interface supérieure est illuminée par l'onde incidente. La démarche proposée par N. Déchamps s'appuie sur la décomposition par blocs de la matrice impédance [69, 70, 71]. L'inverse par bloc de cette matrice fait apparaître une matrice caractéristique du système formé par les deux interfaces. Outre une complexité en stockage mémoire améliorée, un des avantages de cette méthode, nommée PILE (Propagation-Inside-Layer Expansion), est de pouvoir appliquer des méthodes "exactes" rapides qui existent déjà pour le cas d'une surface rugueuse seule. La complexité de la méthode (concernant le temps de calcul et l'espace mémoire) peut alors être nettement améliorée.

Gildas Kubické a étendu la méthode PILE classique au cas plus général où les deux diffuseurs sont dans le milieu incident. Il a appliqué la méthode PILE étendue (E-PILE : Extended PILE) pour le cas d'un objet situé au-dessus d'une surface rugueuse. La méthode E-PILE a été comparée à des résultats de la littérature, ce qui a conduit à une très bonne concordance pour toutes les configurations rencontrées [1]. Afin d'accélérer les calculs de la méthode E-PILE, il a appliqué la FB-SA pour le calcul des interactions locales sur la surface rugueuse [40, 41, 72]. Ces travaux réalisés au laboratoire IETR concernent uniquement la cas d'un problème électromagnétique 2D.

L'objectif est d'étendre la méthode E-PILE pour le cas 3D. Pour accélérer le calcul et diminuer la complexité de la méthode dans le cas 3D, une hybridation de l'E-PILE avec l'OP et E-PILE avec FB est proposée.

#### 3.3.1.1 Formulation mathématique

En considérant des diffuseurs quelconques, qu'ils soient PC ou diélectriques, l'application de la MdM sur les équations intégrales aboutit à l'écriture matricielle de l'équation (3.8). On note  $N_1$  le nombre d'inconnues sur le diffuseur 1 ( $= N$  pour un objet PC et  $= 2N$  s'il est diélectrique) et  $N_2$  le nombre d'inconnues sur le diffuseur 2 ( $= M$  pour un objet PC et  $= 2M$  s'il est diélectrique). La résolution de (3.8) nécessite le calcul de

l'inversion de la matrice impédance  $\bar{\mathbf{Z}}$  de taille  $(N_1 + N_2) \times (N_1 + N_2)$ . Afin d'éviter l'inversion directe par décomposition LU (MdM classique), de complexité  $\mathcal{O}((N_1 + N_2)^3)$ , une décomposition par blocs de la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}^{-1}$  à déterminer, est proposée :

$$\bar{\mathbf{Z}}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}} & \bar{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{V}} & \bar{\mathbf{W}} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

où les blocs  $\bar{\mathbf{T}}$ ,  $\bar{\mathbf{U}}$ ,  $\bar{\mathbf{V}}$  et  $\bar{\mathbf{W}}$  de la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}^{-1}$  sont à déterminer séparément. Ceci s'avère possible à partir de relations matricielles données dans [73] qui expriment  $\bar{\mathbf{Z}}^{-1}$  à partir des quatre sous-matrices ( $\bar{\mathbf{Z}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}$ ,  $\bar{\mathbf{Z}}_{12}$  et  $\bar{\mathbf{Z}}_2$ ) composant  $\bar{\mathbf{Z}}$  par

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{T}} = \left( \bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \right)^{-1}, \\ \bar{\mathbf{U}} = - \left( \bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \right)^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}, \\ \bar{\mathbf{V}} = - \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \left( \bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \right)^{-1}, \\ \bar{\mathbf{W}} = \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} + \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \left( \bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \right)^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}. \end{cases} \quad (3.10)$$

En procédant ainsi, il est possible d'obtenir la matrice impédance inverse en n'inversant que des matrices de plus petites dimensions. Si par exemple  $N_2 = N_1 = N$  toutes les matrices à inverser sont de tailles  $N \times N$  au lieu de  $2N \times 2N$  pour l'inversion directe de  $\bar{\mathbf{Z}}$ . Pour améliorer le temps de calcul, les propriétés du problème à résoudre sont utilisées. Supposons que l'inversion soit effectuée et que les matrices  $\bar{\mathbf{T}}$ ,  $\bar{\mathbf{U}}$ ,  $\bar{\mathbf{V}}$  et  $\bar{\mathbf{W}}$  soient connues. Alors, le vecteur inconnu  $\mathbf{X}$  est obtenu par

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{Z}}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}\mathbf{b}_1 + \bar{\mathbf{U}}\mathbf{b}_2 \\ \bar{\mathbf{V}}\mathbf{b}_1 + \bar{\mathbf{W}}\mathbf{b}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Développons le calcul de  $\mathbf{X}_1 = \bar{\mathbf{T}}\mathbf{b}_1 + \bar{\mathbf{U}}\mathbf{b}_2$  en utilisant les relations de l'équation (3.10) :

$$\mathbf{X}_1 = \left( \bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \right)^{-1} \mathbf{b}_1 - \left( \bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \right)^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \mathbf{b}_2, \quad (3.12)$$

qui peut également s'écrire :

$$\mathbf{X}_1 = \left( \bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \right)^{-1} \left( \mathbf{b}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \mathbf{b}_2 \right). \quad (3.13)$$

La matrice  $\bar{\mathbf{Z}}_1$  peut être mise en facteur, on obtient

$$\mathbf{X}_1 = \left( \bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{M}}_{c,1} \right)^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_1^{-1} \left( \mathbf{b}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \mathbf{b}_2 \right), \quad (3.14)$$

où

$$\bar{\mathbf{M}}_{c,1} = \bar{\mathbf{Z}}_1^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12}. \quad (3.15)$$

$\bar{\mathbf{I}}$  est la matrice identité et  $\bar{\mathbf{M}}_{c,1}$  est appelée “Matrice caractéristique” de la surface 1. Par analogie à la série de Taylor, la matrice  $(\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{M}}_{c,1})^{-1}$  peut être développée comme

$$(\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{M}}_{c,1})^{-1} = \left[ \sum_{p=0}^{p=\infty} \bar{\mathbf{M}}_{c,1}^p \right], \quad (3.16)$$

à condition que  $\|\bar{\mathbf{M}}_{c,1}\| < 1$ , où  $\|\bar{\mathbf{M}}_{c,1}\|$  est le rayon spectral (ou norme) de la matrice  $\bar{\mathbf{M}}_{c,1}$  (égal au maximum du module de ses valeurs propres). Pour calculer numériquement la somme définie en (3.16), une troncature à la valeur  $p = P_{\text{E-PILE}}$  est réalisée, et on obtient finalement

$$\mathbf{X}_1 = \left[ \sum_{p=0}^{p=P_{\text{E-PILE}}} \bar{\mathbf{M}}_{c,1}^p \right] \bar{\mathbf{Z}}_1^{-1} (\mathbf{b}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \mathbf{b}_2) = \sum_{p=0}^{p=P_{\text{E-PILE}}} \mathbf{Y}_1^{(p)}, \quad (3.17)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_1^{(0)} = \bar{\mathbf{Z}}_1^{-1} (\mathbf{b}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \mathbf{b}_2) & \text{pour } p = 0 \\ \mathbf{Y}_1^{(p)} = \bar{\mathbf{M}}_{c,1} \mathbf{Y}_1^{(p-1)} & \text{pour } p > 0 \end{cases}. \quad (3.18)$$

Les inconnues surfaciques sur la surface du diffuseur 2, contenues dans le vecteur  $\mathbf{X}_2$ , sont obtenues en substituant les indices  $\{1, 2, 12, 21\}$  par, respectivement,  $\{2, 1, 21, 12\}$  dans les équations (3.17), (3.18), (3.16) et (3.15). La substitution dans cette dernière équation fait apparaître la matrice caractéristique de la surface 2 :

$$\bar{\mathbf{M}}_{c,2} = \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{12} \bar{\mathbf{Z}}_1^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{21}. \quad (3.19)$$

### 3.3.1.2 Interprétation physique

La méthode E-PILE est appliquée au cas d'un objet (diffuseur 1) situé au-dessus d'une surface rugueuse (diffuseur 2). La matrice  $\bar{\mathbf{Z}}_1$  est donc la matrice impédance de l'objet considéré en espace libre. La matrice  $\bar{\mathbf{Z}}_2$  est la matrice impédance de la surface rugueuse considérée seule. Enfin, les matrices  $\bar{\mathbf{Z}}_{12}$  et  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}$  correspondent, respectivement aux matrices de couplage (objet  $\rightsquigarrow$  surface) et (surface  $\rightsquigarrow$  objet).

Le calcul des inconnues surfaciques par la méthode E-PILE admet une interprétation physique simple illustrée sur la figure 3.3.

Pour  $p = 0$ , la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}_1^{-1}$  multipliée par le vecteur  $(\mathbf{b}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \mathbf{b}_2)$ , prend en compte les interactions locales sur la surface  $S_1$ .  $\mathbf{Y}_1^{(0)}$  correspond donc aux courants surfaciques sur l'objet quand il est excité par le champ direct incident  $\mathbf{b}_1$  et le champ diffusé par la surface de mer  $S_2$  :  $\bar{\mathbf{Z}}_{21} \bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \mathbf{b}_2$ . En effet,  $\bar{\mathbf{Z}}_1^{-1}$  prend en compte les interactions

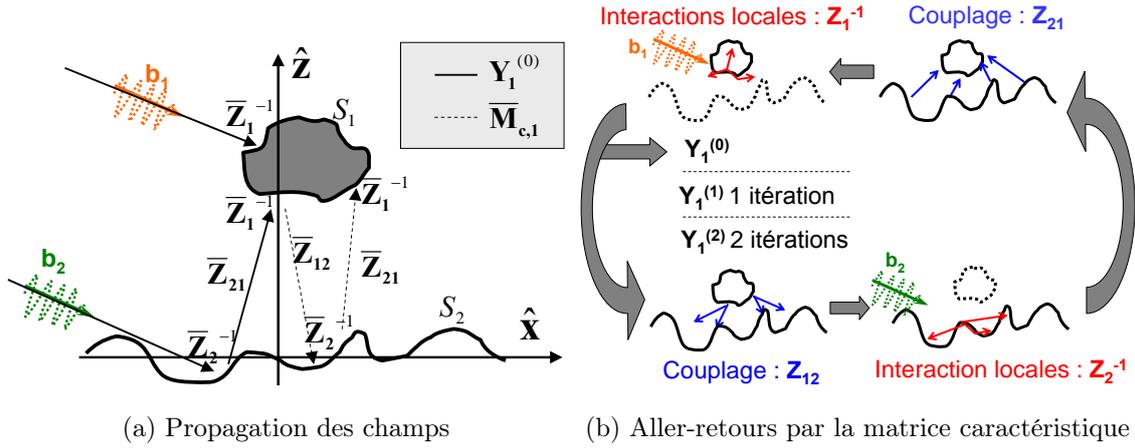


FIGURE 3.3 – Interprétation physique du développement en série (3.17).

locales sur la surface inférieure et  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}$  propage les courants surfaciques sur  $S_2$  vers la surface de l'objet. A l'ordre 1 ( $p = 1$ ),  $\mathbf{Y}_1^{(1)} = \bar{\mathbf{M}}_{c,1} \mathbf{Y}_1^{(0)}$ , où  $\bar{\mathbf{Z}}_{12}$  propage l'information des courants surfaciques sur  $S_1$ ,  $\mathbf{Y}_1^{(0)}$ , vers  $S_2$ ,  $\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}$  prend en compte les interactions locales sur  $S_2$  et  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}$  propage les courants surfaciques résultants sur  $S_2$ , vers la surface de l'objet ; finalement  $\bar{\mathbf{Z}}_1^{-1}$  actualise les courants surfaciques sur la surface de l'objet. Ainsi, la matrice caractéristique  $\bar{\mathbf{M}}_{c,1}$  réalise un aller-retour entre la surface de l'objet et la surface rugueuse. En conclusion, l'ordre de la méthode PILE étendue  $P_{E\text{-PILE}}$ , correspond au nombre d'aller-retour entre l'objet et la surface de mer. De la même manière,  $\bar{\mathbf{M}}_{c,2}$  réalise un aller retour entre la surface rugueuse et l'objet.

### 3.3.1.3 Convergence de E-PILE

Afin de tester la convergence de la méthode E-PILE, l'erreur relative sur les inconnues sur les surfaces, notée  $r_e$  est calculée, comme pour l'étude de la convergence de la FB pour le cas d'une surface seule (voir équation (2.70)). On rappelle ici son expression dans le cadre de la méthode E-PILE :

$$r_e = \frac{\left\| \mathbf{X}_{E\text{-PILE}}^{(P_{E\text{-PILE}})} - \mathbf{X}_{LU} \right\|}{\left\| \mathbf{X}_{LU} \right\|}, \quad (3.20)$$

où  $\mathbf{X}_{E\text{-PILE}}^{(P_{E\text{-PILE}})}$  est le vecteur contenant les inconnues sur les surfaces obtenu par la méthode E-PILE à l'ordre  $P_{E\text{-PILE}}$  (nombre d'itérations dans la procédure de la méthode E-PILE).  $\mathbf{X}_{LU}$  est le vecteur contenant les inconnues sur les surfaces obtenu par la MdM avec inversion directe par décomposition LU qui est la méthode de référence. Pour une surface

PC,  $\mathbf{X}$  représente les courants surfaciques  $\mathbf{J}_1$  et  $\mathbf{J}_2$  sur les deux diffuseurs. L'ordre  $P_{\text{E-PILE}}$  est l'ordre pour lequel un critère indique l'obtention de la convergence de la méthode. Ce critère est d'avoir une erreur relative sur les courants surfaciques inférieure à 0.01 ou 0.001 par exemple.

### 3.3.2 Validation de E-PILE pour le cas de deux plaques lisses superposées

Pour tester la convergence de la méthode E-PILE, le scénario de deux plaques lisses est étudié, et des comparaisons avec la méthode MdM-LU (méthode de référence) sont présentées.

Considérons le cas de deux plaques parallèles comme illustré sur la figure 3.4. La plaque supérieure est de dimensions  $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ , et la plaque inférieure est de dimensions  $S_2 = 6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ , la distance entre les deux plaques est de  $5\lambda_0$ , le pas d'échantillonnage est  $\Delta_x = \Delta_y = \lambda_0/8$ . Les deux plaques sont illuminées par une onde incidente avec un angle  $\theta_i = 0^\circ$  pour les résultats sur la figure 3.5 et  $\theta_i = 45^\circ$  pour les résultats sur la figure 3.6, sur lesquelles la SER bistatique en polarisation VV est tracée en fonction de l'angle d'observation, et l'erreur relative est donnée dans la légende.

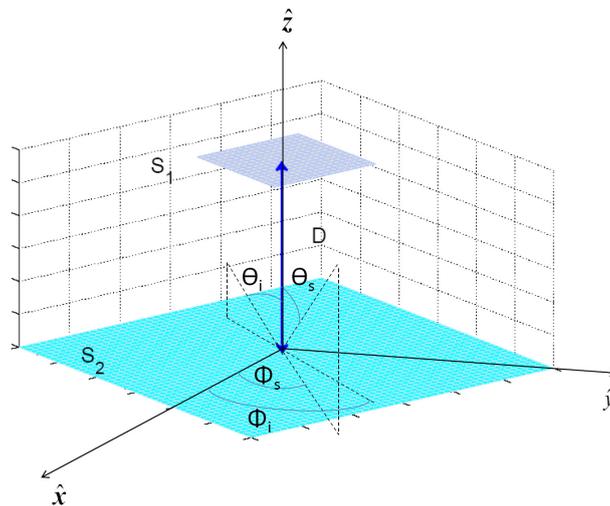


FIGURE 3.4 – Géométrie du problème de deux plaques lisses superposées.

A partir des figures 3.5 et 3.6, on remarque que plus l'ordre de la méthode E-PILE augmente, plus elle converge vers la méthode MdM-LU. En effet, lorsque l'ordre augmente, le nombre de réflexions prises en compte entre les deux plaques augmente, et les

phénomènes de couplage sont donc évalués de plus en plus finement.

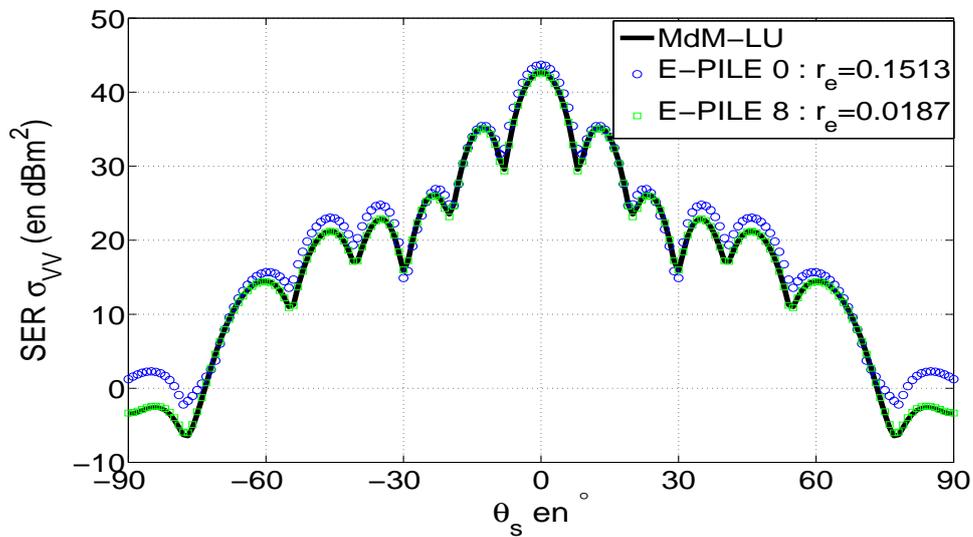


FIGURE 3.5 – Convergence de E-PILE par rapport à l'ordre de la méthode pour le cas de deux plaques lisses,  $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ ,  $S_2 = 6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ , la distance entre les deux plaques est de  $5\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$  avec  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$  et  $\phi_s = 0^\circ$ .

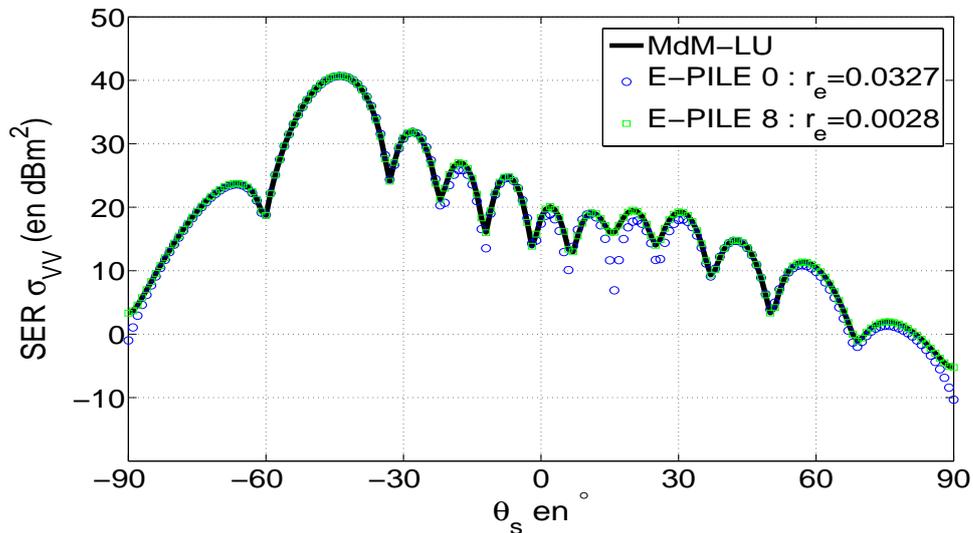


FIGURE 3.6 – Convergence de E-PILE par rapport à l'ordre de la méthode pour le cas de deux plaques lisses,  $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ ,  $S_2 = 6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ , la distance entre les deux plaques est de  $5\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$  avec  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$  et  $\phi_s = 0^\circ$ .

### 3.3.3 Validation de E-PILE pour le cas d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse

La méthode E-PILE est maintenant testée pour le cas d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse. La surface rugueuse est générée par la méthode spectrale présentée au paragraphe (1.10.2) du chapitre 1, dont la fonction d'auto-corrélation des hauteurs est donnée par  $C_z(x, y) = \sigma_z^2 \exp(-x^2/L_{cx}^2 - y^2/L_{cy}^2)$ , avec  $L_{cx} = L_{cy} = 1\lambda_0$ ,  $\sigma_z = 0.2\lambda_0$ .

Considérons une plaque de dimensions  $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$  au-dessus d'une surface rugueuse de dimensions  $6\lambda_0 \times 6\lambda_0$  comme illustré sur la figure 3.7. La distance entre les deux diffuseurs est de  $5\lambda_0$ , le pas d'échantillonnage est  $\Delta_x = \Delta_y = \lambda_0/8$ . Ce groupe de deux diffuseurs est illuminé par une onde incidente plane avec un angle  $\theta_i = 0^\circ$  pour les résultats sur la figure 3.8 et  $\theta_i = 45^\circ$  pour les résultats sur la figure 3.9, sur lesquelles la SER bistatique en polarisation VV est tracée en fonction de l'angle d'observation, et l'erreur relative est donnée dans la légende.

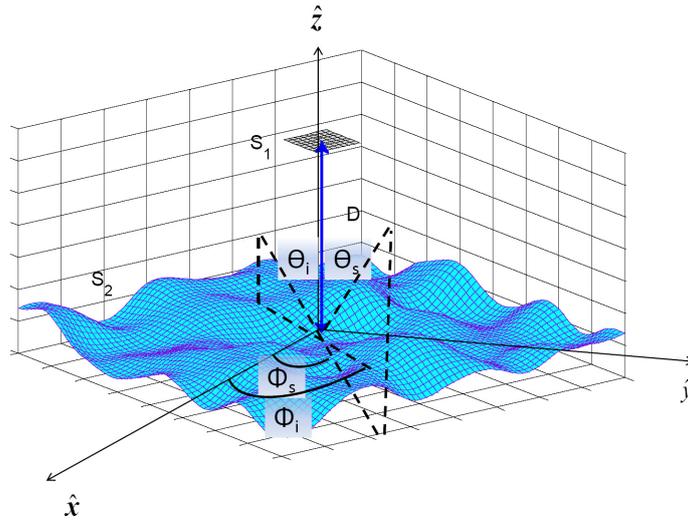


FIGURE 3.7 – Géométrie du problème d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse.

A partir des figures 3.8 et 3.9, on remarque que plus l'ordre de la méthode E-PILE augmente, plus elle converge vers la méthode LU, elle est donc valide pour ce scénario aussi.

Une autre simulation est effectuée pour un problème de plus grande taille : une plaque de dimensions  $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$  au-dessus d'une surface rugueuse de dimensions  $10\lambda_0 \times 10\lambda_0$ . La distance entre les deux diffuseurs est de  $5\lambda_0$ , le pas d'échantillonnage est  $\Delta_x = \Delta_y = \lambda_0/8$ . Les angles d'incidences sont  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ , et  $\phi_s = 0^\circ$ . Les résultats sont

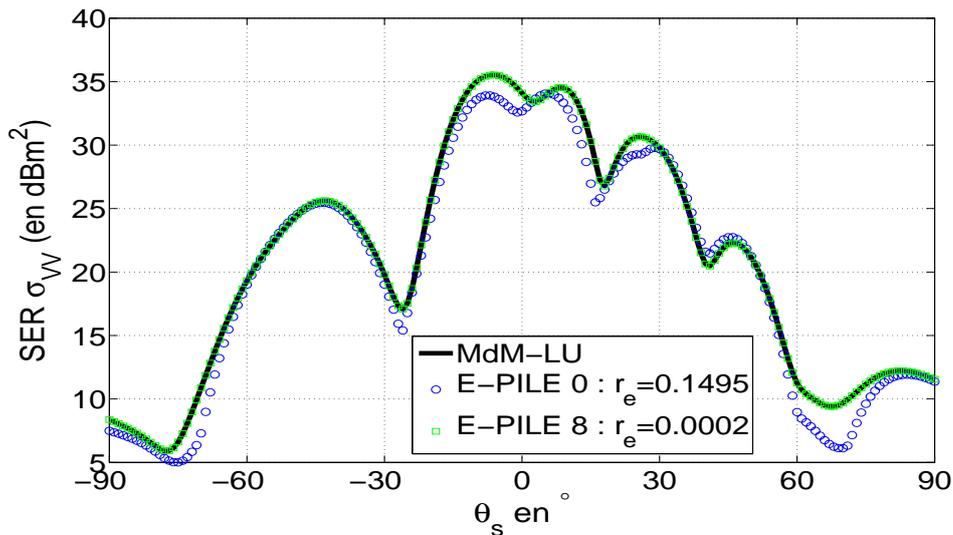


FIGURE 3.8 – Convergence de E-PILE par rapport à l'ordre de la méthode pour le cas d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse,  $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ ,  $S_2 = 6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ , la distance entre les deux diffuseurs est de  $5\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$  avec  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$  et  $\phi_s = 0^\circ$ .

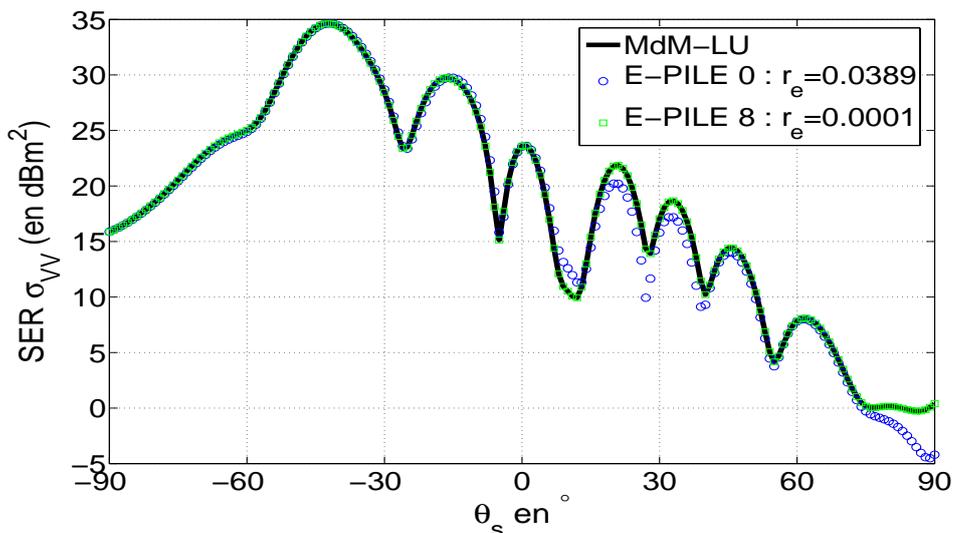


FIGURE 3.9 – Convergence de E-PILE par rapport à l'ordre de la méthode pour le cas d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse,  $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ ,  $S_2 = 6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ , la distance entre les deux plaques est de  $5\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$  avec  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$  et  $\phi_s = 0^\circ$ .

illustrés sur la figure 3.10 sur laquelle la SER bistatique est tracée en fonction de l'angle d'observation, et l'erreur relative est donnée dans la légende.

A partir de la figure 3.10, on remarque que plus l'ordre de la méthode E-PILE augmente, plus elle converge vers la méthode LU pour les deux co-polarisations ( $\sigma_{VV}$ ,  $\sigma_{HH}$ )

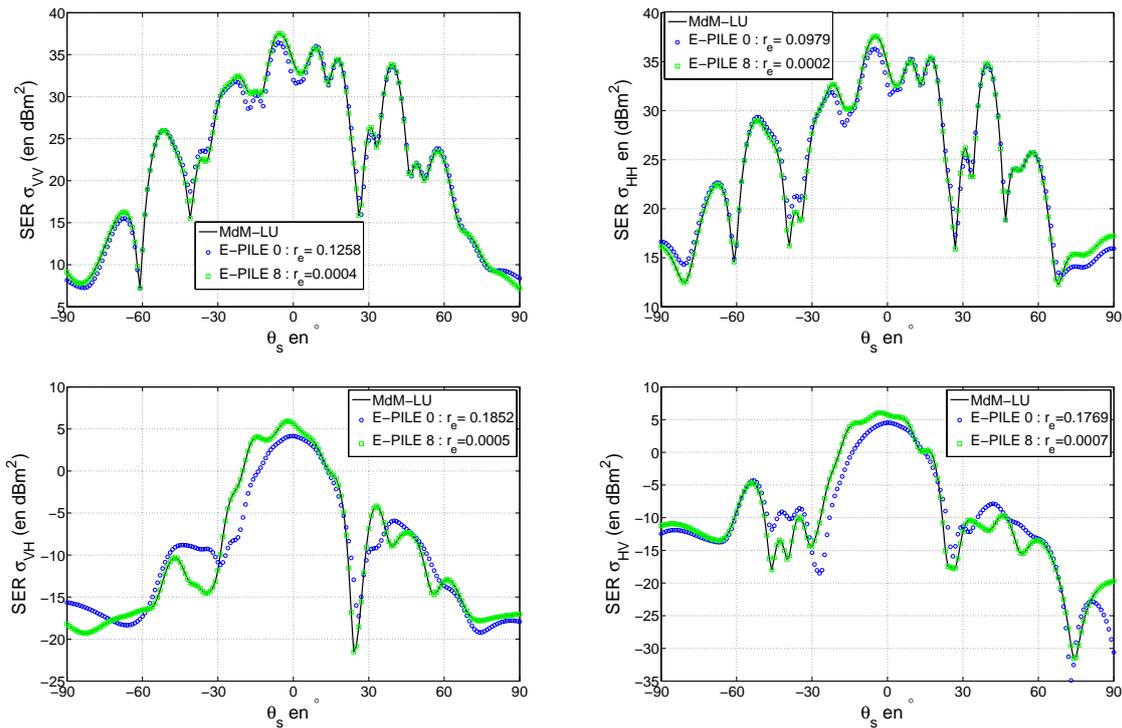


FIGURE 3.10 – Convergence de E-PILE par rapport à l'ordre de la méthode pour le cas d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse,  $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ ,  $S_2 = 10\lambda_0 \times 10\lambda_0$ , la distance entre les deux diffuseurs est de  $5\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$  avec  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$  et  $\phi_s = 0^\circ$ .

et les deux polarisations croisées ( $\sigma_{VH}, \sigma_{HV}$ ).

### 3.3.4 Effet des paramètres de la scène sur la convergence de E-PILE

#### 3.3.4.1 Effet de l'angle d'incidence

Concentrons nous maintenant sur le taux de convergence de la méthode E-PILE pour les quatre scénarios précédents :

- (1) Scénario de la figure 3.5 : plaques lisses et  $\theta_i = 0^\circ$ .
- (2) Scénario de la figure 3.6 : plaques lisses et  $\theta_i = 45^\circ$ .
- (3) Scénario de la figure 3.8 : plaque sur surface rugueuse et  $\theta_i = 0^\circ$ .
- (4) Scénario de la figure 3.9 : plaque sur surface rugueuse et  $\theta_i = 45^\circ$ .

Sur la figure 3.11, des comparaisons sont montrées sur l'erreur relative  $r_e$  pour chaque scénario en fonction de l'ordre de la méthode E-PILE. D'une manière générale, on observe

que E-PILE converge plus lentement pour le cas du scénario (1). Cela est dû à la valeur de l'angle d'incidence  $\theta_i = 0^\circ$ . En effet, pour ce cas, un nombre plus important d'itérations est nécessaire pour décrire précisément les courants sur la plaque inférieure : l'ombrage de la plaque supérieure crée une zone à faible valeur de champ. En outre, si la valeur  $r_e = 0.02$  est choisie comme valeur de seuil, alors on remarque sur la figure 3.11 que E-PILE converge plus rapidement pour les scénarios (2) et (4) où  $\theta_i = 45^\circ$  que pour les scénarios (1) et (3) où  $\theta_i = 0^\circ$ . La méthode E-PILE est sensible à l'angle d'incidence.

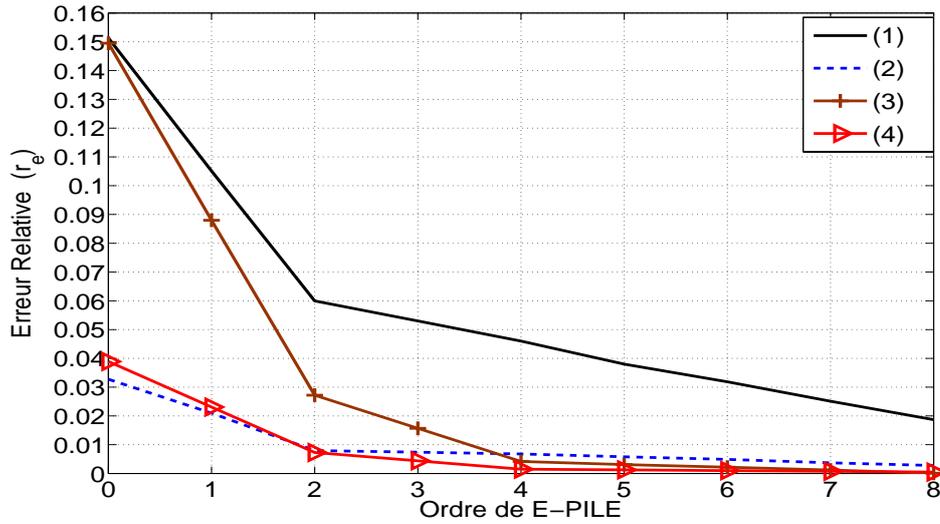


FIGURE 3.11 – Taux de la convergence de la méthode E-PILE.

### 3.3.4.2 Effet de l'état de polarisation de l'onde incidente

Pour montrer l'effet de l'état de polarisation, les scénarios des figures 3.5 et 3.8 sont utilisés. Les résultats sont illustrés sur les figures 3.12 et 3.13 sur lesquelles la SER bistatique est tracée en fonction de l'angle d'observation, et l'erreur relative est donnée dans la légende.

Sur la figure 3.12, si le critère de convergence est  $r_e < 2 \times 10^{-2}$ , on remarque que la méthode E-PILE converge après 8 itérations ( $P_{\text{E-PILE}} = 8$ ) pour les deux co-polarisations VV et HH. Elle est donc peu sensible à l'état de polarisation pour ce scénario. Sur la figure 3.13, si le critère de convergence est  $r_e < 1 \times 10^{-3}$ , on remarque que la méthode E-PILE converge après 8 itérations ( $P_{\text{E-PILE}} = 8$ ) pour les deux co-polarisations VV et HH. Elle est aussi peu sensible à l'état de polarisation pour ce scénario.

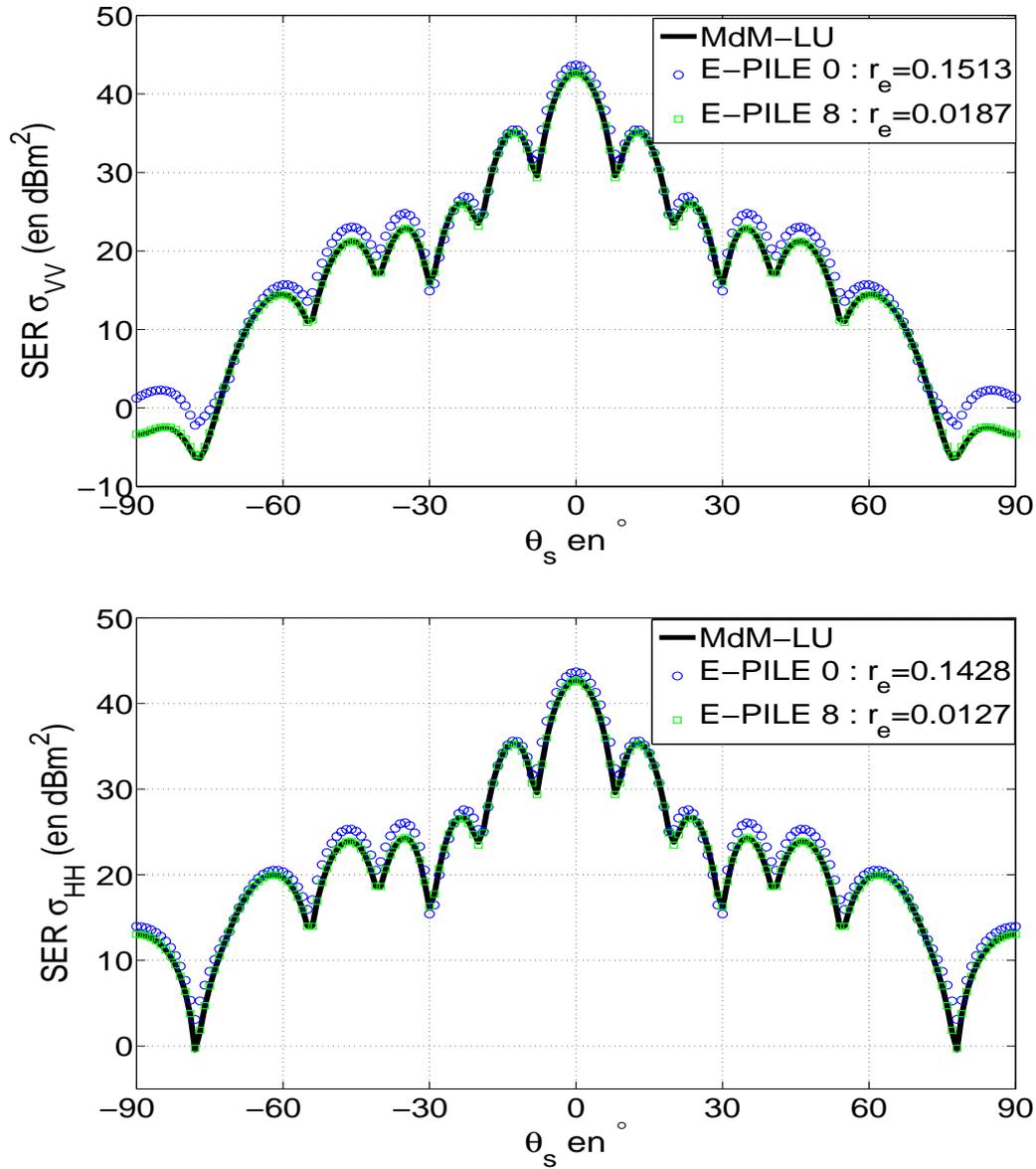


FIGURE 3.12 – Comparaisons de la SER bistatique. Cas de deux plaques lisses,  $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ ,  $S_2 = 6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ , la distance entre les deux plaques est de  $5\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$  avec  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$  : effet de la polarisation de l'onde incidente sur la convergence de E-PILE.

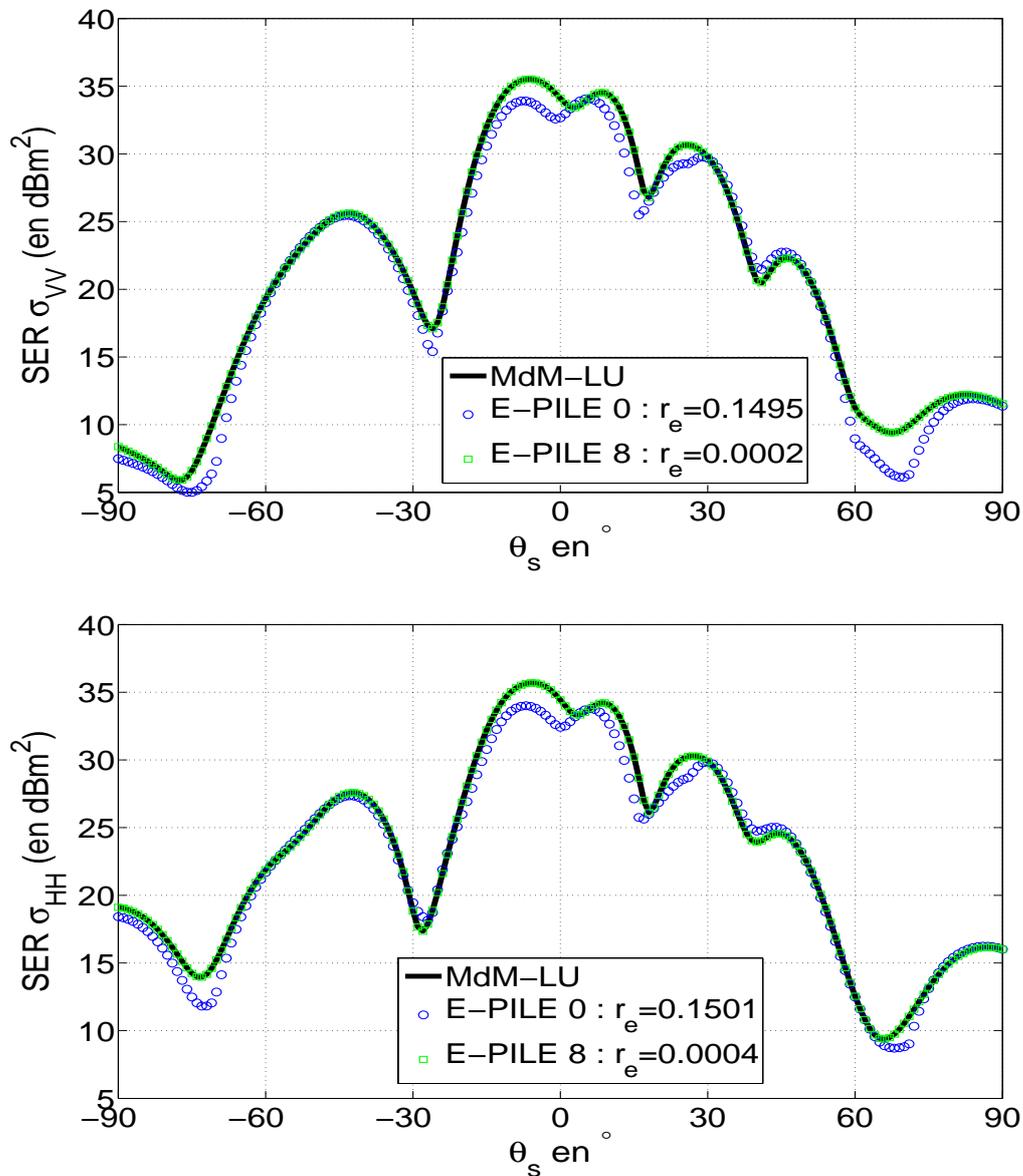


FIGURE 3.13 – Comparaisons de la SER bistatique. Cas d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse,  $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ ,  $S_2 = 6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ , la distance entre les deux plaques est de  $5\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$  avec  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$  : effet de la polarisation de l'onde incidente sur la convergence de E-PILE.

### 3.3.4.3 Effet de la taille du problème

Considérons le cas de deux plaques lisses superposées comme illustré sur la figure 3.4. La plaque inférieure est de dimensions  $S_2 = 6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ , mais cette fois la longueur de la plaque supérieure n'est pas constante. L'onde incidente est polarisée verticalement avec un angle de  $\theta_i = 30^\circ$ , et la distance  $D$  entre les deux plaques est  $10\lambda_0$ . Le tableau 3.1 présente l'ordre  $P_{E\text{-PILE}}$  pour chaque dimensions de la plaque supérieure. L'ordre est obtenu avec le critère de convergence ( $r_e < 0.01$ ).

TABLE 3.1 – Ordre  $P_{E\text{-PILE}}$  en fonction des dimensions de la plaque supérieure  $S_1$ . Les paramètres sont  $S_2 = 6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ ,  $\theta_i = 30^\circ$ ,  $D = 10\lambda_0$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ , polarisation VV.

Dimensions de $S_1$	$P_{E\text{-PILE}}$
$S_1 = 1\lambda_0 \times 1\lambda_0$	1
$S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$	3
$S_1 = 4\lambda_0 \times 4\lambda_0$	10

A partir du tableau 3.1, on remarque que plus la longueur de la plaque supérieure augmente, plus l'ordre  $P_{E\text{-PILE}}$  augmente, ce qui signifie que le nombre d'interactions entre les deux plaques (aller-retour du champ) augmentent aussi. En effet, lorsque les dimensions de la plaque supérieure deviennent plus proches des dimensions de la plaque inférieure, la région entre les deux plaques peut être décrit comme un guide d'ondes ouvert, de sorte que l'onde est guidée entre les deux plaques et induit de nombreuses réflexions.

### 3.3.4.4 Effet de la distance entre les deux diffuseurs

La même configuration des deux plaques lisses superposées est considérée ici,  $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ ,  $S_2 = 6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ , mais cette fois la distance  $D$  entre les deux plaques n'est pas constante. L'onde incidente est polarisée verticalement avec un angle de  $\theta_i = 30^\circ$ . Le tableau 3.2 présente l'ordre  $P_{E\text{-PILE}}$  pour chaque distance entre les deux plaques.

Le tableau 3.2 montre que plus la distance entre les deux plaques diminue, plus l'ordre  $P_{E\text{-PILE}}$  augmente. Lorsque la distance entre les deux plaques est petite, le couplage entre les deux plaques devient plus fort, la distance  $D$  impacte fortement le nombre de réflexions entre les deux diffuseurs.

TABLE 3.2 – Ordre  $P_{\text{E-PILE}}$  en fonction de la distance  $D$  entre les deux plaques. Les paramètres sont  $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ ,  $S_2 = 6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ ,  $\theta_i = 30^\circ$ ,  $\phi_i = 0$ , polarisation VV.

Distance $D$	$P_{\text{E-PILE}}$
$D = 3\lambda_0$	8
$D = 10\lambda_0$	3
$D = 15\lambda_0$	1

### 3.3.4.5 Effet de l'écart-type des hauteurs $\sigma_z$

Considérons une plaque de dimensions  $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$  au-dessus d'une surface rugueuse de dimensions  $6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ . Cette fois l'écart-type des hauteurs  $\sigma_z$  de la plaque inférieure n'est pas constant. La distance entre les deux diffuseurs est de  $5\lambda_0$ , le pas d'échantillonnage est  $\lambda_0/8$ . Ce groupe de deux diffuseurs est illuminé par une onde plane avec un angle d'incidence  $\theta_i = 30^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ . Le tableau 3.3 présente l'ordre  $P_{\text{E-PILE}}$  pour chaque  $\sigma_z$  de la plaque inférieure.

TABLE 3.3 – Ordre  $P_{\text{E-PILE}}$  en fonction de l'écart-type des hauteurs  $\sigma_z$  de la plaque inférieure  $S_2$ . Les paramètres sont  $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ ,  $S_2 = 6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ ,  $\theta_i = 30^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ , polarisation VV.

$\sigma_z$	$P_{\text{E-PILE}}$
$\sigma_z = 0\lambda_0$	4
$\sigma_z = 0.2\lambda_0$	5
$\sigma_z = 0.5\lambda_0$	7

Le tableau 3.3 montre que plus l'écart-type des hauteurs de la surface inférieure augmente, plus le nombre de réflexions (le couplage) prises en compte entre les deux diffuseurs augmente, donc l'ordre  $P_{\text{E-PILE}}$  augmente aussi pour évaluer de plus en plus finement le phénomène de couplage.

Il est important de noter que dans le calcul de E-PILE, l'étape la plus coûteuse reste l'inversion de la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}_2$ . Si le problème électromagnétique contient une surface rugueuse de plus grande dimensions, ceci implique que le nombre d'inconnues sur la surface inférieure augmente et la méthode E-PILE seule utilisant des inversions directes par décomposition LU peut s'avérer inutilisable. Il convient alors de pouvoir accélérer le calcul,

particulièrement sur la surface rugueuse puisqu'elle possède le plus grand nombre d'inconnues.

### 3.4 Intégration de la FB dans la méthode E-PILE

Afin d'accélérer le calcul de la diffusion par un objet situé au-dessus d'une surface rugueuse, la méthode FB est appliquée pour le calcul des interactions locales sur la surface rugueuse. Sans l'utilisation de la méthode E-PILE, cela ne peut être réalisé puisque cette méthode devrait alors être appliquée pour l'inversion de la matrice impédance totale de la scène. Or, les considérations physiques validant l'utilisation de l'algorithme FB ne sont valables que pour la surface rugueuse. Il convient donc d'appliquer cette méthode uniquement sur la surface rugueuse. Ceci est possible avec la méthode E-PILE grâce à la décomposition par blocs de la matrice impédance. Concrètement, lors du calcul des inconnues surfaciques (les courants surfaciques), l'inversion de la matrice impédance de la surface rugueuse suivie du produit matrice vecteur  $\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1} \mathbf{u}$  (où  $\mathbf{u}$  est homogène à un champ et correspond au champ incident ou au champ provenant de l'objet) est réalisée à l'aide de la méthode FB (section 2.4), qui implique une complexité de  $\mathcal{O}(N_2^2)$  sur la surface rugueuse au lieu de  $\mathcal{O}(N_2^3)$  avec une inversion matricielle de type LU.

#### 3.4.1 Convergence de la méthode E-PILE+FB

Afin de tester la convergence de la méthode E-PILE+FB, l'erreur relative sur les inconnues sur la surface notée  $r_e$  est introduite :

$$r_e = \frac{\left\| \mathbf{X}_{E-PILE+FB}^{(P_{E-PILE+FB})} - \mathbf{X}_{E-PILE}^{(6)} \right\|}{\left\| \mathbf{X}_{E-PILE}^{(6)} \right\|}, \quad (3.21)$$

où  $\mathbf{X}_{E-PILE+FB}^{(P_{E-PILE+FB})}$  est le vecteur contenant les inconnues sur la surface obtenu par la méthode E-PILE+FB à l'ordre  $P_{FB}$  (nombre d'itérations dans la procédure de la FB).  $\mathbf{X}_{E-PILE}^{(6)}$  est le vecteur contenant les inconnues sur la surface obtenu par la méthode E-PILE à l'ordre 6 qui est la méthode de référence ici.

### 3.4.2 Validation de E-PILE+FB pour le cas d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse

La méthode E-PILE+FB sera testée pour le cas d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse. La surface rugueuse est générée par un processus aléatoire gaussien, dont la fonction d'auto-corrélation des hauteurs est donnée par  $C_z(x, y) = \sigma_z^2 \exp(-x^2/L_{cx}^2 - y^2/L_{cy}^2)$ , avec  $L_{cx} = L_{cy} = 1\lambda_0$  et  $\sigma_z = 0.2\lambda_0$ .

Considérons une plaque de dimensions  $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$  au-dessus d'une surface rugueuse de dimensions  $6\lambda_0 \times 6\lambda_0$  comme illustré sur la figure 3.14. La distance entre les deux diffuseurs est de  $5\lambda_0$ , le pas d'échantillonnage est  $\lambda_0/8$ . Ce groupe de deux diffuseurs est illuminé par une onde incidente plane avec un angle  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$  et  $\phi_s = 0^\circ$ .

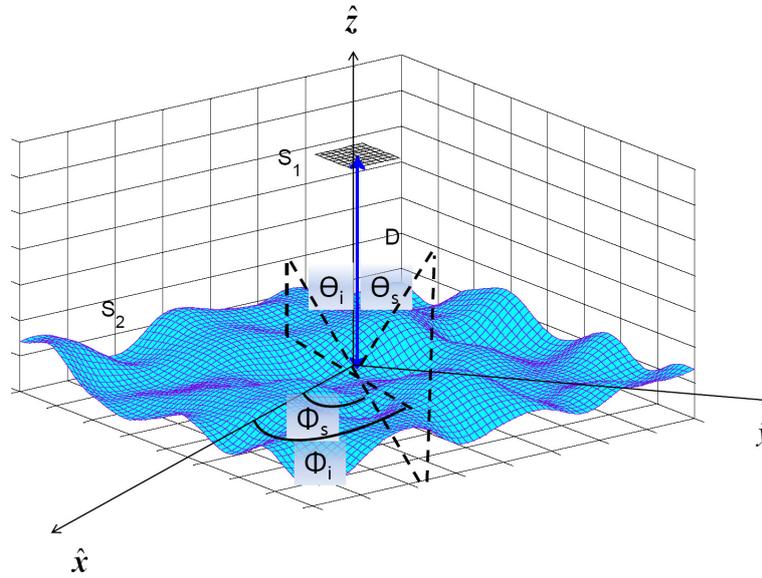


FIGURE 3.14 – Géométrie du problème d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse.

A partir de la figure 3.15 sur laquelle la SER bistatique est tracée en fonction de l'angle d'observation  $\theta_s$ , on remarque que plus l'ordre de la méthode E-PILE+FB augmente, plus elle converge vers la méthode de référence.

La figure 3.16 montre une comparaison des temps de calcul entre les deux algorithmes (MdM-LU) et (EPILE+FB) en fonction de la taille de la surface rugueuse pour le cas d'une plaque de dimensions  $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$  au-dessus de la surface rugueuse. On observe que la méthode E-PILE+FB est plus rapide que la MdM-LU.

Rappelons finalement que grâce à la méthode E-PILE la FB peut être appliquée uniquement sur la surface rugueuse et la résolution de problèmes impliquant de très grandes

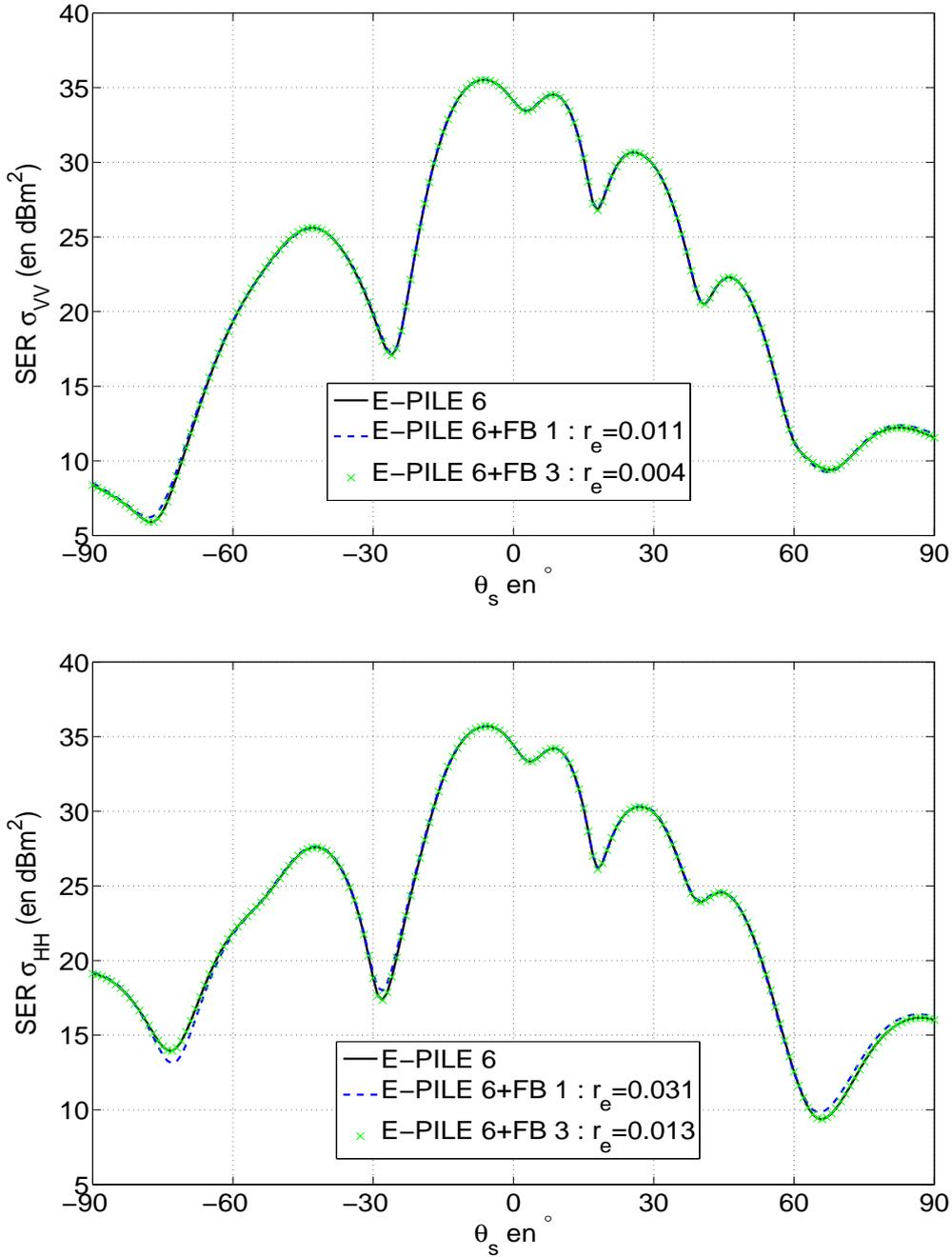


FIGURE 3.15 – Convergence de E-PILE+FB par rapport à l'ordre de la méthode FB pour le cas d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse,  $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ ,  $S_2 = 6\lambda_0 \times 6\lambda_0$ , la distance entre les deux diffuseurs est de  $5\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$  avec  $\theta_i = 0^\circ$  et  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ .

surfaces peut alors envisagée. Le paramétrage de la méthode FB intégrée dans la méthode E-PILE ne dépend que du problème surface seule vue dans la section 2.4.1. La méthode E-PILE+FB est de complexité  $\mathcal{O}(N_1^3)$  sur l'objet et de  $\mathcal{O}(N_2^2)$  sur la surface rugueuse.

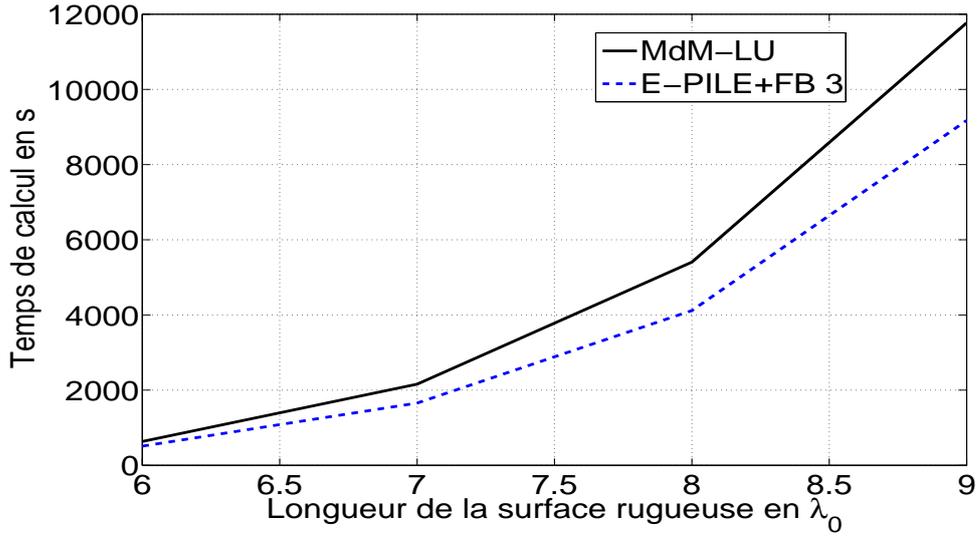


FIGURE 3.16 – Comparaison du temps de calcul. Cas d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse,  $S_1 = 2\lambda_0 \times 2\lambda_0$ ,  $S_2$  n'est pas constante, la distance entre les deux diffuseurs est de  $5\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$  avec  $\theta_i = 0^\circ$  et  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ .

Cette complexité reste importante pour un problème 3D. Une solution est alors d'utiliser une méthode asymptotique (OP) pour accélérer le calcul des interactions locales sur les deux diffuseurs.

### 3.5 Hybridation de E-PILE par intégration de l'Optique Physique

Pour le cas d'un objet de grandes dimensions au-dessus d'une grande surface rugueuse (une scène 3D), l'étape la plus coûteuse dans le calcul de E-PILE reste l'inversion des matrices  $\bar{\mathbf{Z}}_1$  et  $\bar{\mathbf{Z}}_2$ . Une solution est alors d'hybrider la méthode E-PILE avec la méthode asymptotique OP pour accélérer cette étape. La méthode OP est alors appliquée pour les interactions locales sur chaque diffuseur.

#### 3.5.1 Formulation mathématique de l'intégration de l'OP

Rappelons que pour une surface PC, le courant électrique sur la surface est donné à partir de l'OP par

$$\mathbf{J}_{OP} = 2\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_i. \quad (3.22)$$

Une analogie peut directement être faite en considérant l'ordre 0 de E-PILE qui peut s'écrire :

$$\mathbf{Y}_1^{(0)} = \bar{\mathbf{Z}}_1^{-1}(\mathbf{b}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}\mathbf{b}_2), \quad (3.23)$$

où  $\mathbf{u} = \mathbf{b}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}\mathbf{b}_2$ , est un champ tangentiel excitant le premier diffuseur correspondant à  $\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_i$  dans l'équation (3.22). Les inconnues surfaciques  $\mathbf{Y}_1$  sont représentées dans l'équation (3.22) par le courant surfacique  $\mathbf{J}_{OP}$ .

Dans l'équation (3.23) le terme  $\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}\mathbf{b}_2$  correspond au courant surfacique sur le second diffuseur en espace libre,  $\mathbf{b}_2$  est le champ tangentiel excitant le second diffuseur correspondant à  $\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_i$  dans l'équation (3.22). Ainsi par l'application de la méthode OP, les éléments diagonaux de l'inverse de la matrice impédance  $\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}$  valent 2 sur la surface éclairée du deuxième diffuseur et 0 sinon. Le terme  $\bar{\mathbf{Z}}_1^{-1}\mathbf{b}_1$  correspond au courant surfacique sur le premier diffuseur comme si il était en espace libre. De ce fait, par l'application de la méthode OP, les éléments de l'inverse de la matrice impédance  $\bar{\mathbf{Z}}_1^{-1}$  valent 2 sur la surface éclairée du premier diffuseur et 0 sinon. Comme on étudie la scène en appliquant la méthode OP, il est nécessaire de pouvoir différencier les côtés excités et les côtés à l'ombre (front ou top en anglais et back ou bottom en anglais). Le champ incident  $\mathbf{b}_1$  illumine le côté front du premier diffuseur, et le côté back est illuminé par une source secondaire qui est le champ diffusé du deuxième diffuseur ( $\bar{\mathbf{Z}}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}\mathbf{b}_2$ ). Il est donc nécessaire de modifier les éléments de  $\mathbf{b}_1$  et de  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}$  afin de tenir compte des parties éclairées et à l'ombre des différentes sources de champ. L'application numérique de l'OP sur les deux diffuseurs se résume comme suit :

**L'OP sur le diffuseur 1 (OP1)** : deux types d'excitation, celle provenant de l'émetteur ( $\mathbf{b}'_1$ ) et celle provenant du deuxième diffuseur ( $\bar{\mathbf{Z}}'_{21}\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}\mathbf{b}_2$ ) comme montré sur la figure 3.17.  $\mathbf{b}_1$  est donc modifié en  $\mathbf{b}'_1$  pour tenir compte de la partie à l'ombre du champ incident :

$$\mathbf{b}'_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1\text{top}} \\ \mathbf{b}_{1\text{bottom}} \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

où

$$\mathbf{b}_{1\text{top}} = \left. \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_i(\mathbf{R}_{1_1}) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_i(\mathbf{R}_{1_{N_{\text{top}}}}) \end{bmatrix} \right\} \text{Champ incident sur le côté Front}, \quad (3.25)$$

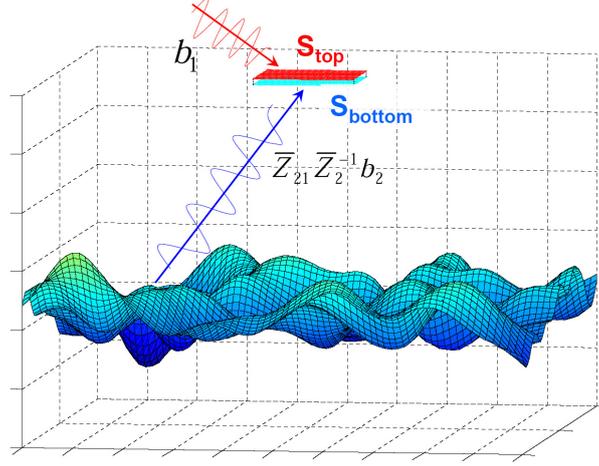


FIGURE 3.17 – Illustration des chemins de propagation pour l'application de l'OP sur le diffuseur 1.

et

$$\mathbf{b}_{1\text{bottom}} = \left. \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{Champ incident sur le côté Back.} \quad (3.26)$$

La matrice  $\bar{\mathbf{Z}}'_{21}$  est modifiée pour tenir compte de la partie à l'ombre du champ diffusé par la surface rugueuse :

$$\bar{\mathbf{Z}}'_{21} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{21}^{\text{top}} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{21}^{\text{bottom}} \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

où  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}^{\text{top}}$  est la matrice de couplage entre la surface rugueuse et le dessus de la plaque. Puisque l'OP est utilisée, la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}^{\text{top}}$  est une matrice de zéros car le champ diffusé par la surface rugueuse n'illumine que le dessus de la plaque. La matrice  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}^{\text{bottom}}$  est la matrice de couplage entre la surface rugueuse et le côté back de la plaque.

Par conséquent, l'équation (3.18) dans l'algorithme E-PILE est simplifié comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_1^{(0)} = 2(\mathbf{b}'_1 - \bar{\mathbf{Z}}'_{21} 2\mathbf{b}_2) & \text{pour } p = 0 \\ \mathbf{Y}_1^{(p)} = \bar{\mathbf{M}}'_{c,1} \bar{\mathbf{Y}}_1^{(p-1)} & \text{pour } p > 0 \end{cases}. \quad (3.28)$$

où  $\bar{\mathbf{M}}'_{c,1} = 2\bar{\mathbf{Z}}'_{21} 2\bar{\mathbf{Z}}_{12}$ .

**l'OP sur le diffuseur 2 (OP2) :** deux types d'excitation, celle provenant de l'émetteur ( $\mathbf{b}_2$ ) et celle provenant du premier diffuseur ( $\bar{\mathbf{Z}}_{12} \bar{\mathbf{Z}}_1^{-1} \mathbf{b}_1$ ) comme montré sur la figure 3.18.

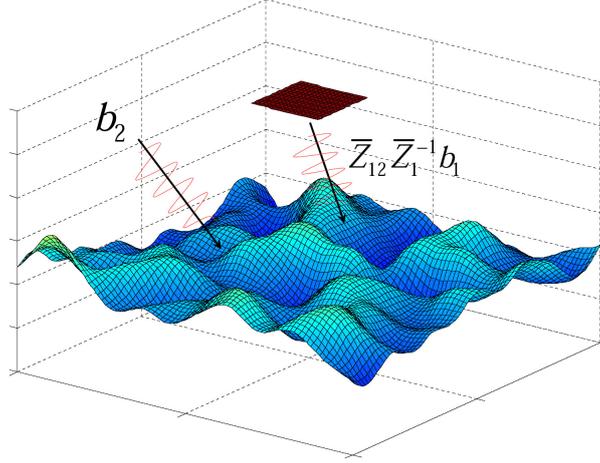


FIGURE 3.18 – Illustration des chemins de propagation pour l'application de l'OP sur le diffuseur 2.

Les courants surfaciques sur la surface rugueuse peuvent être calculés comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_2^{(0)} = 2(\mathbf{b}_2 - \bar{\mathbf{Z}}_{12} 2\mathbf{b}'_1) & \text{pour } p = 0 \\ \mathbf{Y}_2^{(p)} = \bar{\mathbf{M}}'_{c,2} \bar{\mathbf{Y}}_2^{(p-1)} & \text{pour } p > 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

avec  $\bar{\mathbf{M}}'_{c,2} = 2\bar{\mathbf{Z}}_{12} 2\bar{\mathbf{Z}}'_{21}$ .

$\bar{\mathbf{Z}}_{12}$  et  $\mathbf{b}_2$  ne sont pas modifiés car on ne tient pas compte de la fonction d'ombre sur la surface rugueuse (ceci reste valide pour une incidence modérée et une faible rugosité comme illustré dans la section (2.1.3)). L'OP néglige les réflexions multiples qui peuvent se produire sur la surface, ce qui implique que l'écart type des pentes  $\sigma_s$  soit inférieur à 0.35 [55]. De plus dans l'approximation de l'OP, le phénomène d'ombrage de la surface (voir figure 2.4) doit être pris en compte, pour les angles d'incidences rasantes. Un critère simple permet de dire si l'ombrage doit être pris en compte ou non, il est donné par  $\theta_i < \text{arccot}(2\sqrt{2}\sigma_s)$ , où  $\theta_i$  l'angle d'incidence au-dessous duquel l'ombre peut être négligée [56].

En conclusion, la complexité de la méthode hybride est largement réduite, car les inversions matricielles  $\bar{\mathbf{Z}}_1^{-1}$  et  $\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}$  ne sont pas calculées. Ainsi, la complexité de l'inversion  $\mathcal{O}(N_1^3)$  devient 1 et  $\mathcal{O}(N_2^3)$  devient 1. Il est possible de noter que la méthode E-PILE avec l'OP appliquée sur chaque diffuseur est similaire à l'IPO (Iterative Physical Optics) [52].

### 3.5.2 Validation de E-PILE+OP1+OP2 pour le cas de deux plaques lisses superposées

Pour la validation de la méthode hybride E-PILE+OP1+OP2, considérons le cas de deux plaques lisses parallèles. La plaque supérieure est de dimensions  $S_1 = 1\lambda_0 \times 1\lambda_0$ , et la plaque inférieure est de dimensions  $S_2 = 8\lambda_0 \times 8\lambda_0$ , la distance entre les deux plaques est de  $5\lambda_0$ . Les deux plaques sont illuminées par une onde plane en incidence normale ( $\theta_i = 0^\circ$  et  $\phi_i = 0^\circ$ ). Le modèle de E-PILE hybridé (E-PILE+OP1+OP2) est comparé au modèle MdM-LU sur la figure 3.19, sur laquelle la SER bistatique est tracée en fonction de l'angle d'observation  $\theta_s$  pour  $\phi_s = 0^\circ$ . On remarque que de très bons résultats sont obtenus pour les deux polarisations VV et HH.

La figure 3.20 montre la distribution de courant (la norme du vecteur  $\mathbf{J}$ ) obtenue par E-PILE+PO1+PO2 sur les deux plaques pour la configuration précédente en polarisation VV.

Sur la figure 3.20 le champ diffusé de  $S_2$  illumine le dessous de  $S_1$ , par contre le champ incident illumine le dessus de  $S_1$ . Par conséquent, les courants sont constants sur  $S_{1 \text{ top}}$  et l'effet de couplage entre  $S_1$  et  $S_2$  donne un courant non nul sur  $S_{1 \text{ bottom}}$ . Nous pouvons également remarquer que la présence de  $S_1$  au-dessus de  $S_2$ , crée une zone d'ombre (zone où les valeurs de courant sont faibles) sur la surface inférieure  $S_2$ . Ainsi, notre méthode décrit bien les phénomènes physiques.

### 3.5.3 Validation de E-PILE+OP1+OP2 pour le cas d'une plaque au-dessus d'une surface rugueuse

Considérons une plaque de dimensions  $S_1 = 1\lambda_0 \times 1\lambda_0$  au-dessus d'une surface rugueuse de dimensions  $14\lambda_0 \times 14\lambda_0$ . La distance entre les deux diffuseurs est de  $5\lambda_0$ . La surface rugueuse générée par un processus aléatoire gaussien, dont la fonction d'auto-corrélation des hauteurs est donnée par  $C_z(x, y) = \sigma_z^2 \exp(-x^2/L_{cx}^2 - y^2/L_{cy}^2)$ , avec  $L_{cx} = L_{cy} = 1\lambda_0$ ,  $\sigma_z = 0.2\lambda_0$ . Une onde plane illumine la surface en incidence normale ( $\theta_i = 0^\circ, \phi_i = 0^\circ$ ). La SER bistatique est tracée en fonction de l'angle d'observation  $\theta_s$  sur la figure 3.21. Les résultats présentés montrent un très bon accord entre le modèle hybride et le modèle MdM-LU pour les deux co-polarisations.

Une autre simulation est effectuée similaire au cas précédent mais cette fois avec une

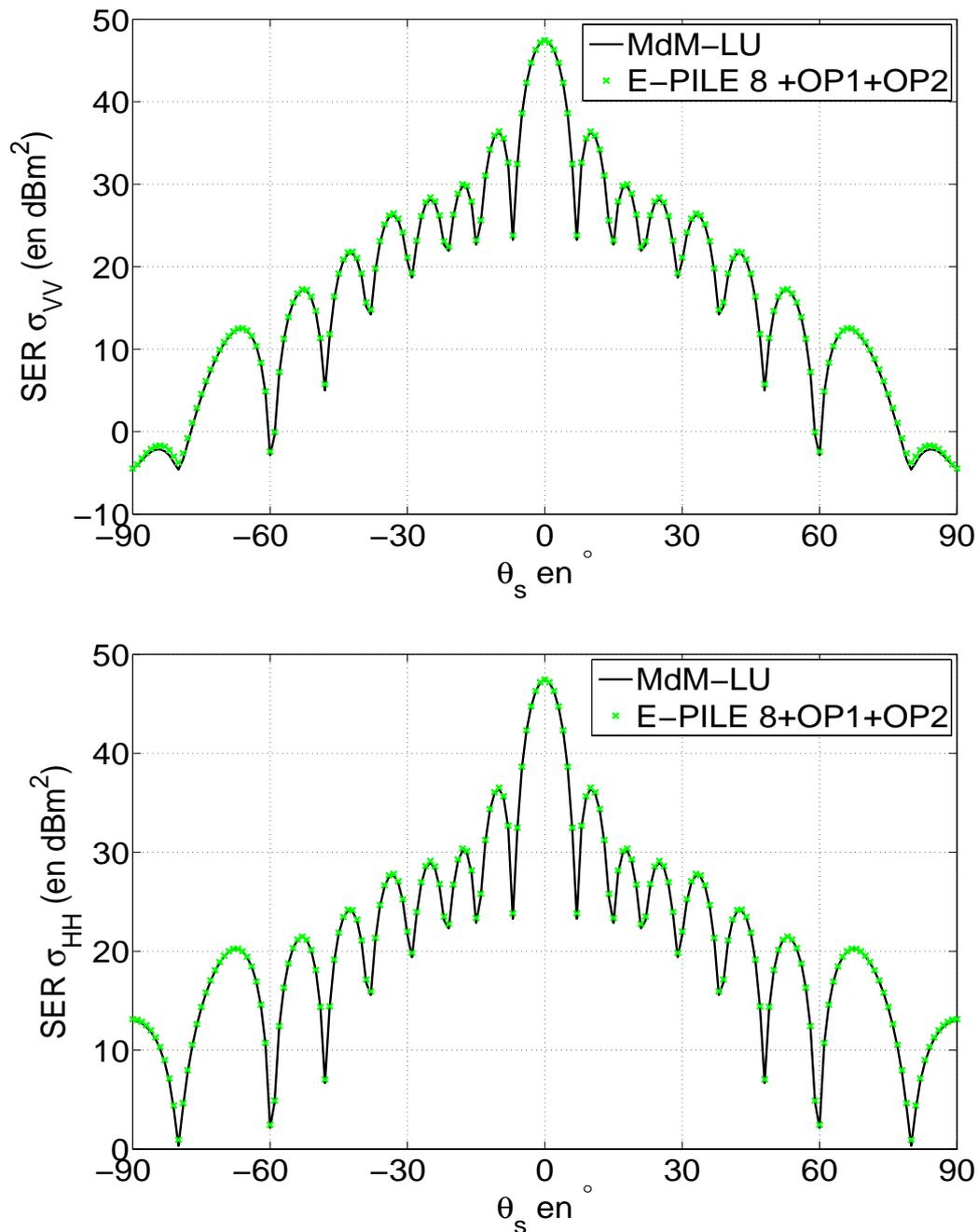


FIGURE 3.19 – Comparaison de la SER bistatique obtenue avec l’EPILE+OP1+OP2 et la MdM-LU pour les deux co-polarisations. Cas de deux plaques lisses parallèles de dimensions  $S_1 = 1\lambda_0 \times 1\lambda_0$ ,  $S_2 = 8\lambda_0 \times 8\lambda_0$ ,  $D = 5\lambda_0$ ,  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ ,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ .

surface rugueuse de rugosité plus forte ( $\sigma_z = 0.6\lambda_0$ ). La SER bistatique est tracée en fonction de l’angle d’observation  $\theta_s$  sur la figure 3.22 pour la polarisation VV et  $\phi_s = 0^\circ$ .

A partir de la figure 3.22, on remarque une différence entre les deux méthodes. Cette

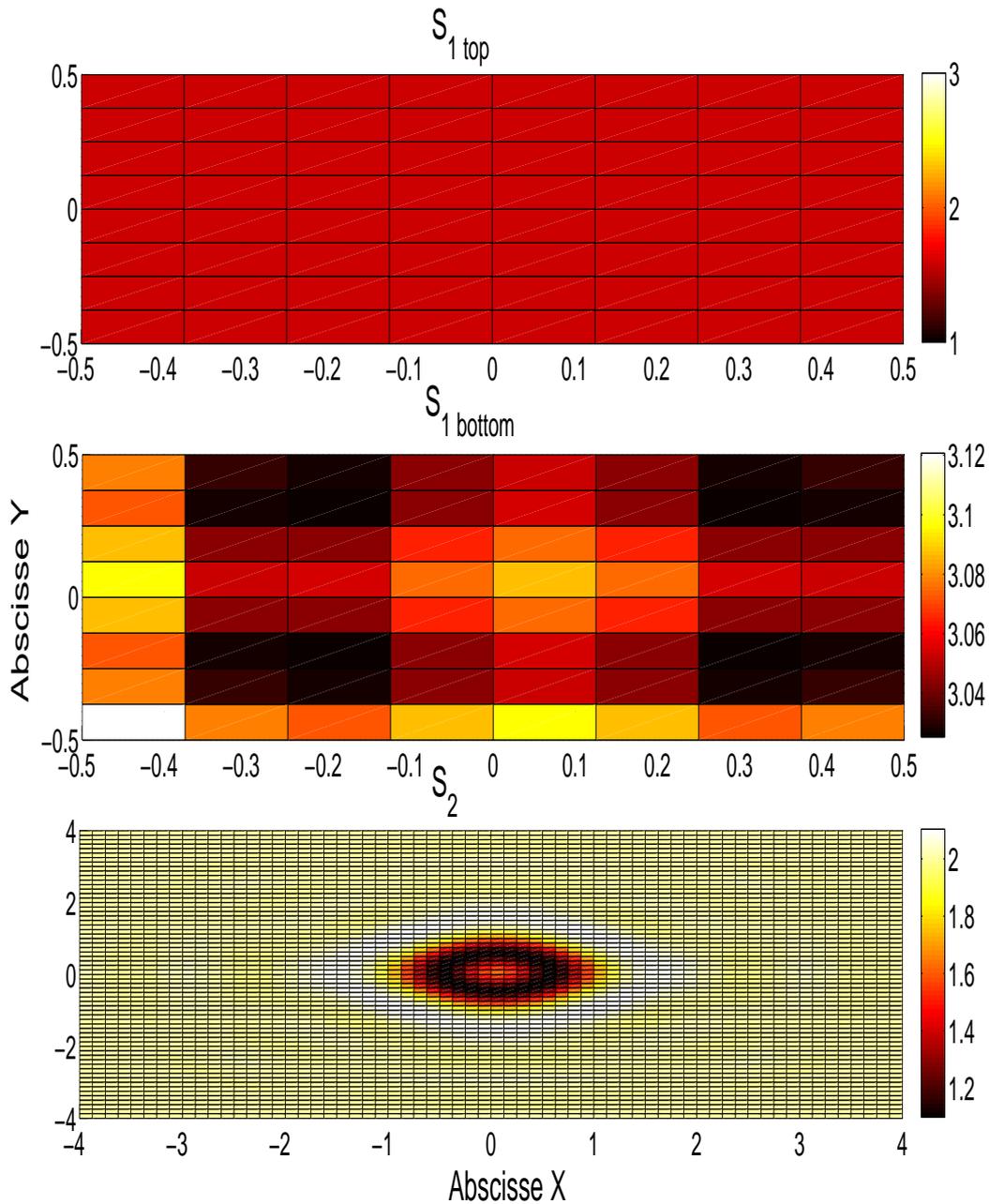


FIGURE 3.20 – Distribution de courant (en  $A/m^2$ ) sur les deux plaques. En haut : courant sur le dessus de la plaque supérieure ( $S_{1 \text{ top}}$ ). Au milieu : courant sur le dessous de la plaque supérieure ( $S_{1 \text{ bottom}}$ ). En bas : courant sur le dessus de la plaque inférieure.

différence vient du faite que la condition pour négliger les réflexions multiples n'est pas respectée. En effet, pour ce scénario l'écart type des pentes de la surface  $\sigma_s = \sqrt{2}\sigma_z/L_c \approx 0.84$  (réflexions multiples négligeables si  $\sigma_s$  est inférieur à 0.35 [10, 55]). l'OP néglige les réflexions multiples qui peuvent se produire sur la surface rugueuse. Une solution pour

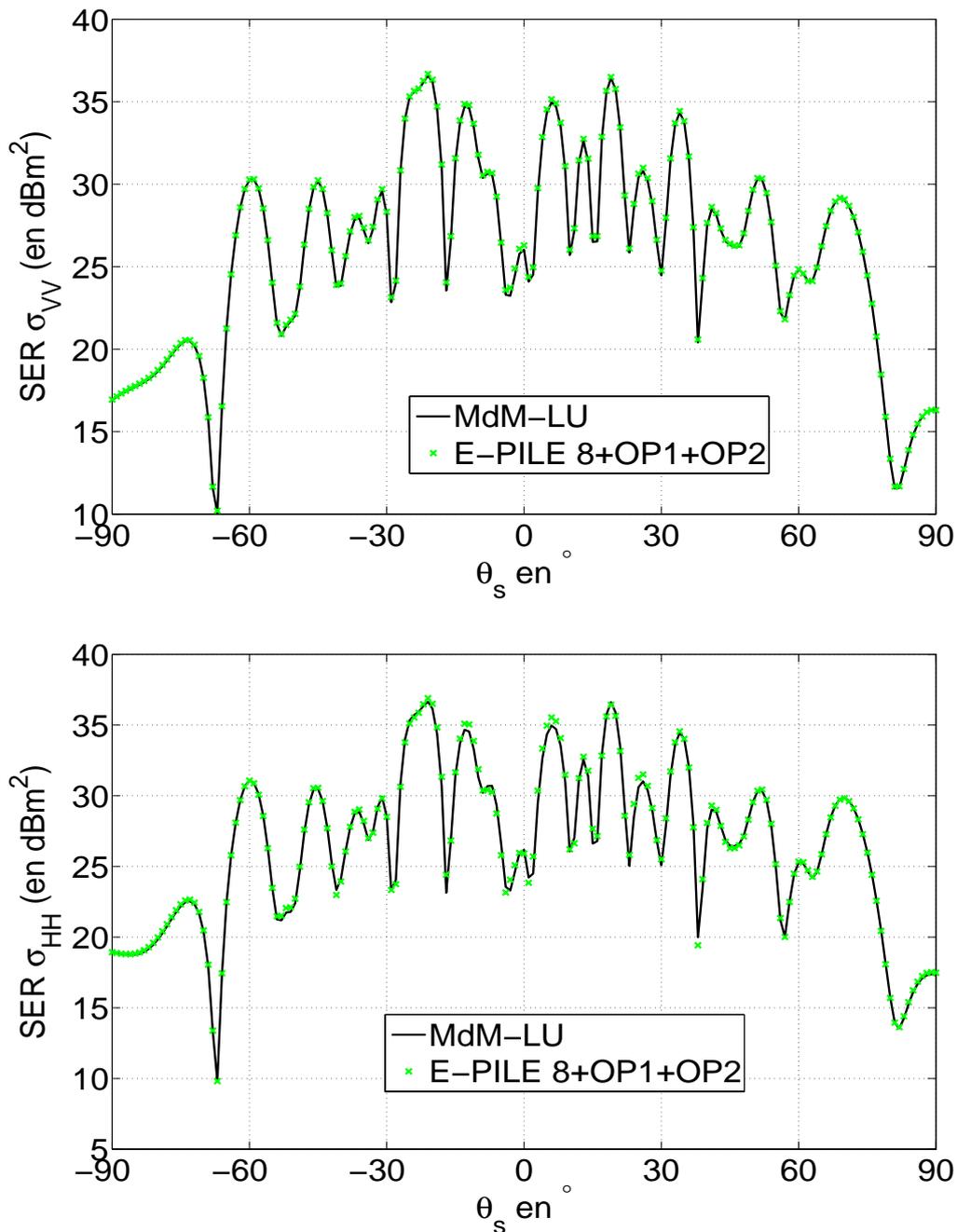


FIGURE 3.21 – Comparaison de la SER bistatique obtenue avec l'EPILE+OP1+OP2 et la MdM-LU pour les deux co-polarisations. Cas d'une plaque de dimensions  $1\lambda_0 \times 1\lambda_0$  au-dessus d'une surface rugueuse de dimensions  $14\lambda_0 \times 14\lambda_0$ ,  $L_{cx} = L_{cy} = 1\lambda_0$ ,  $\sigma_z = 0.2\lambda_0$ , les pas d'échantillonnage  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ ,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ .

éliminer la différence est d'appliquer la méthode rigoureuse FB qui n'a pas les restrictions de faible rugosité sur la surface rugueuse comme illustré sur la figure 3.23.

Pour conclure, lorsqu' on étudie le problème de la diffusion d'une onde électromagné-

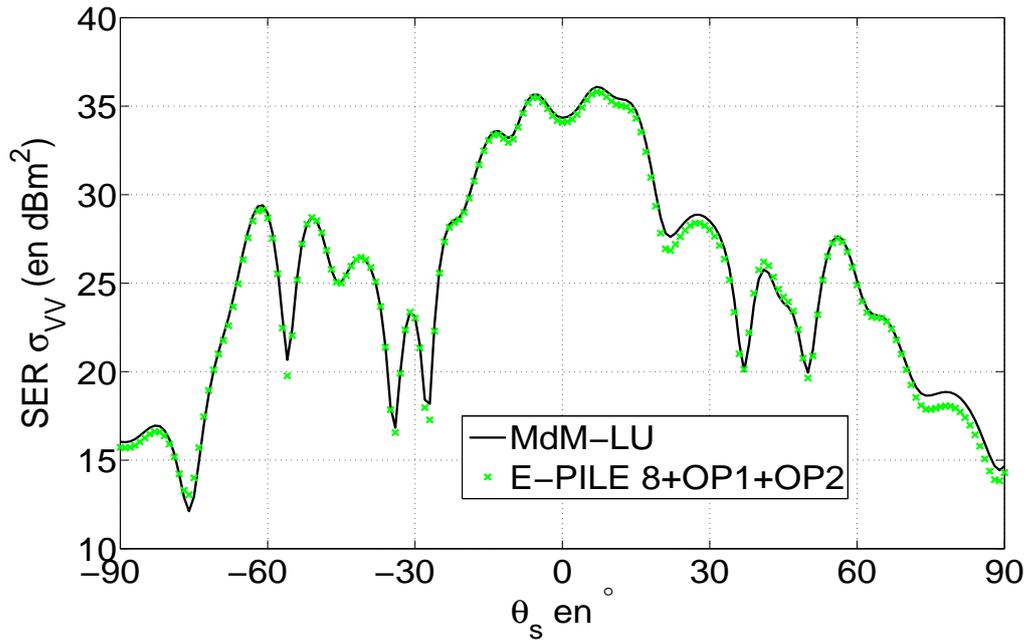


FIGURE 3.22 – Comparaison de la SER bistatique obtenue avec l'E-PILE+OP1+OP2 et la MdM-LU pour la polarisation VV. Cas d'une plaque de dimensions  $1\lambda_0 \times 1\lambda_0$  au-dessus d'une surface rugueuse de dimensions  $14\lambda_0 \times 14\lambda_0$ ,  $L_{cx} = L_{cy} = 1\lambda_0$ ,  $\sigma_z = 0.6\lambda_0$ , les pas d'échantillonnage  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ ,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ .

tique par un objet au-dessus d'une surface rugueuse, si la surface rugueuse est de faible rugosité on utilise l'OP pour calculer les interactions locales sur la surface rugueuse afin d'aboutir à un modèle rapide "hybride asymptotique" (E-PILE+OP). Mais si la surface est de fortes pentes on applique la FB sur la surface rugueuse pour aboutir à un modèle "hybride exacte" (E-PILE+FB).

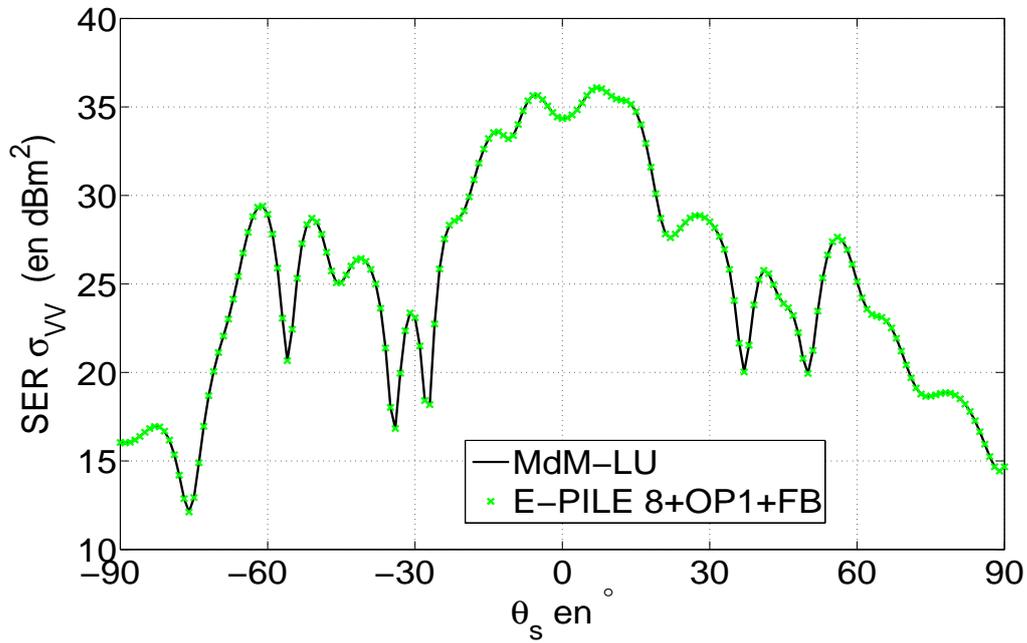


FIGURE 3.23 – Comparaison de la SER bistatique obtenue avec l’EPILE+OP1+FB et la MdM-LU pour la polarisation VV. Cas d’une plaque de dimensions  $1\lambda_0 \times 1\lambda_0$  au-dessus d’une surface rugueuse de dimensions  $14\lambda_0 \times 14\lambda_0$ ,  $L_{cx} = L_{cy} = 1\lambda_0$ ,  $\sigma_z = 0.6\lambda_0$ , les pas d’échantillonnage  $\Delta x = \Delta y = \lambda_0/8$ ,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ .

### 3.5.4 Complexité de la méthode hybride

La complexité de la méthode (E-PILE) est comparée à celles de (E-PILE+OP1+OP2) et (E-PILE+OP1+FB) dans le tableau 3.4 avec

- $T_1$  est la complexité de l'inversion matricielle pour les interactions locales sur le diffuseur 1. (calcul de  $\bar{\mathbf{Z}}_1^{-1}$ ).
- $T_2$  est la complexité de l'inversion matricielle pour les interactions locales sur le diffuseur 2. (calcul de  $\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}$ ).
- $T_{11}$  est la complexité du produit matrice-vecteur pour les interactions locales sur le diffuseur 1. (calcul de  $\bar{\mathbf{Z}}_1^{-1}\mathbf{u}$ ,  $\bar{\mathbf{Z}}_1^{-1}$  déjà calculé).
- $T_{22}$  est la complexité du produit matrice-vecteur pour les interactions locales sur le diffuseur 2. (calcul de  $\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}\mathbf{u}$ ,  $\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}$  déjà calculé).
- $T_{12}$  est la complexité du produit matrice-vecteur pour le couplage (objet vers surface). (calcul de  $\bar{\mathbf{Z}}_{12}\mathbf{u}$ ).
- $T_{21}$  est la complexité du produit matrice-vecteur pour le couplage (surface vers objet). (calcul de  $\bar{\mathbf{Z}}_{21}\mathbf{u}$ ).

TABLE 3.4 – Complexité de E-PILE, E-PILE+OP1+OP2 et E-PILE+OP1+FB

Algorithm	$T_1$	$T_{11}$	$T_2$	$T_{22}$	$T_{12}$	$T_{21}$
E-PILE	$N_1^3$	$N_1^2$	$N_2^3$	$N_2^2$	$N_1N_2$	$N_1N_2$
E-PILE+OP1+OP2	0	1	0	1	$N_1N_2$	$N_1N_2/2$
E-PILE+OP1+FB	0	1	$N_2^2$	$N_2^2$	$N_1N_2$	$N_1N_2/2$

A partir du tableau 3.4, on remarque que la complexité de la méthode E-PILE est largement réduite par l'hybridation avec l'OP, car les inversions matricielles ne sont pas calculées pour les interactions locales sur les deux diffuseurs. Dans l'étape de couplage (objet vers surface) la complexité  $T_{12}$  ne change pas pour les deux méthodes, par contre  $T_{21}$  (surface vers objet) diminue parce que dans ce cas le couplage se fait juste entre la surface rugueuse et le dessous de l'objet (moitié des éléments de  $S_1$ ).

Pour comparer le temps de calcul (fortement lié à la complexité) des deux algorithmes (MdM-LU) et (E-PILE+OP1+OP2), le cas de deux plaques lisses parallèles  $S_1$  au-dessus de  $S_2$  est considéré,  $S_2$  est de dimensions  $7\lambda_0 \times 7\lambda_0$ , la longueur de  $S_1$  n'est pas constante. Des comparaisons du temps de calcul en fonction de la longueur de  $S_1$  sont illustrées sur

la figure 3.24.

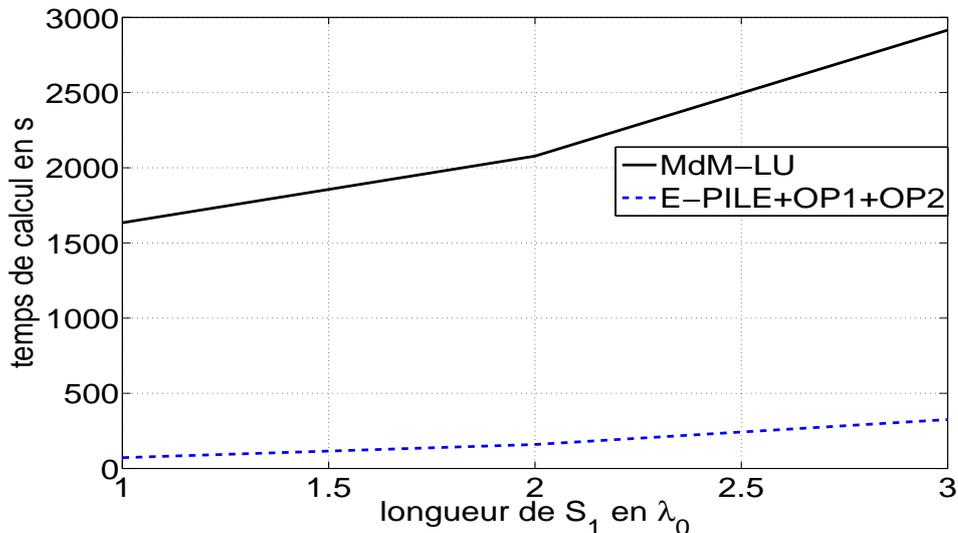


FIGURE 3.24 – Comparaison du temps de calcul entre la méthode hybride E-PILE+OP1+OP2 et la méthode rigoureuse MdM-LU pour le cas de deux plaques parallèles  $S_1$  au dessus de  $S_2$ .  $S_2 = 7\lambda_0 \times 7\lambda_0$ , la longueur de  $S_1$  n'est pas constante, la distance entre les deux plaques est  $5\lambda_0$ ,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ .

Sur la figure 3.24, on remarque que la méthode hybride nous permet de réduire fortement le temps de calcul.

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, les équations intégrales pour le cas de deux diffuseurs (objet+surface rugueuse) PC placés dans le milieu incident ont été établies. Afin d'accélérer le calcul et améliorer le stockage mémoire, la méthode E-PILE développée au laboratoire IETR est étendue au cas 3D. Cette méthode numérique rigoureuse, qui exploite la décomposition par blocs de la matrice impédance, admet une interprétation physique simple. Un des avantages de la méthode E-PILE, est de pouvoir appliquer des méthodes qui existent déjà pour le cas d'un seul diffuseur.

La FB a ensuite été appliquée pour le calcul des interactions locales sur la surface rugueuse à l'aide de la décomposition par blocs de la méthode E-PILE. Des comparaisons avec la MdM ont démontré la convergence et la validité de la méthode E-PILE+FB. Ce travail a fait l'objet d'une publication en revue [74] et une publication en conférence

internationale [75].

Toujours dans le souci d'accélérer le calcul et de diminuer la complexité de la méthode, une hybridation de l'E-PILE avec l'OP a été proposée. Des comparaisons avec la MDM ont montré la pertinence d'une telle méthode vus les résultats satisfaisants obtenus. Ce travail a fait l'objet d'une publication en revue [76] et une publication en conférence internationale [77].

# Conclusion et perspectives

Cette thèse a consisté en l'étude de la diffusion d'une onde électromagnétique par un objet situé au-dessus d'une surface rugueuse pour un problème 3D. Les couplages de l'objet avec la surface rugueuse peuvent altérer fortement l'écho théoriquement attendu lorsque l'objet est considéré en espace libre. Le principal objectif de ce manuscrit a été d'étudier ces phénomènes de couplage pour une scène tridimensionnelle et de proposer des méthodes "exactes" et "hybrides" pour résoudre ce problème.

Dans le premier chapitre, les notions et moyens nécessaires pour modéliser la diffusion par un objet au-dessus d'une surface rugueuse ont été définis. Dans le cadre d'une résolution numérique du problème de diffusion, un large éventail de méthodes a été présenté. Enfin, une analyse de la scène est venue clore ce premier chapitre, et la description des surfaces rugueuses aléatoires ainsi qu'une méthode permettant de générer un profil rugueux ont été détaillées.

Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes focalisés sur les méthodes de résolution du problème de diffusion par un seul diffuseur 3D en espace libre. La méthode des moments et l'approximation de l'optique physique ont été appliquées sur une surface lisse puis sur une surface rugueuse bidimensionnelle (cas 3D). Afin d'obtenir un modèle rigoureux de complexité plus faible, la méthode FB a été exposée et appliquée au cas d'une surface rugueuse. Les résultats issus de la méthode FB ont été comparés à ceux obtenus à partir de la MdM-LU (inversion directe par décomposition LU). Plusieurs conclusions ont pu être tirées :

- la méthode FB, de complexité de  $\mathcal{O}(N^2)$ , converge très efficacement vers la MdM-LU.
- l'ordre  $P_{\text{FB}}$  est très sensible à l'écart-type des hauteurs, par contre il est peu sensible à la polarisation de l'onde incidente.
- En général, la méthode FB converge rapidement (après 5 ou 6 itérations).

Dans la dernière partie de ce chapitre, la méthode FB-SA est expliquée et étendue au cas 3D.

Dans le troisième chapitre, le cas d'un objet au-dessus d'une surface rugueuse a été

étudié. Les phénomènes de couplage ont tout d’abord été mis en exergue en étudiant les équations intégrales de la scène. En utilisant l’étude menée au chapitre 2, la MDM a été appliquée pour servir de méthode de référence. Afin d’accélérer le calcul et améliorer le stockage mémoire, la méthode E-PILE développée dans les thèses de N. Déchamps [11] et G. Kubické [1] a été utilisée et étendue au cas 3D. Elle a été appliquée pour le cas de deux surfaces lisses superposées et une plaque lisse au-dessus d’une surface rugueuse. Un premier avantage de cette méthode est qu’elle admet une interprétation physique simple. Un deuxième avantage est qu’elle permet d’utiliser des méthodes efficaces qui existent déjà pour le cas d’un simple diffuseur en espace libre. Par conséquent, nous avons intégré la méthode FB à l’E-PILE pour accélérer le calcul des interactions locales sur la surface rugueuse pour obtenir le modèle “exact” (E-PILE+FB). Une conclusion importante de ce modèle, est qu’il possède un grand domaine de validité : il est capable de gérer la plupart des configurations étudiées dans la littérature sans les restrictions de faible rugosité. Toujours dans le souci d’accélérer le calcul et de diminuer la complexité de la méthode E-PILE, une hybridation de l’E-PILE avec l’OP a été proposée pour obtenir un modèle “hybride” (E-PILE+OP). Des comparaisons avec la MDM ont montré la pertinence d’une telle méthode vus les résultats satisfaisants obtenus. L’avantage principal de ce modèle hybride est qu’il est très rapide car les inversions matricielles  $\bar{\mathbf{Z}}_1^{-1}$  et  $\bar{\mathbf{Z}}_2^{-1}$  ne sont pas calculées. Ainsi, la complexité de l’inversion  $\mathcal{O}(N_1^3)$  devient 1 et  $\mathcal{O}(N_2^3)$  devient 1.

En conclusion, ce travail de thèse a conduit à la publication d’une lettre [74] et à la soumission d’un article en cours de revision après un premier retour des relecteurs [76], et deux publications en conférence internationale [75, 77], ainsi qu’à une participation au GDR ondes [78].

La perspective de ce travail est d’accélérer les interactions locales sur la surface rugueuse en utilisant la méthode FB-SA, pour continuer le travail qu’on a commencé aux USA, afin d’intégrer la FB-SA dans le schéma algorithmique de la méthode E-PILE pour obtenir un modèle “exact” et rapide (E-PILE+FB-SA). Une autre piste serait d’étendre la méthode E-PILE au cas de plusieurs objets au-dessus ou au-dessous d’une surface rugueuse. Enfin, une autre perspective est d’appliquer cette méthode pour calculer la diffusion d’une onde électromagnétique par une couche rugueuse (couche de pétrole). Pour faire cela, il est nécessaire d’étudier la cas où le milieu est diélectrique au lieu d’une surface

rugueuse PC.



# Représentation intégrale des champs en 3D

Utilisons la relation (1.31)

$$\int_V [\mathbf{Q} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{P}) - \mathbf{P} \cdot (\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q})] dv = \int_S [\mathbf{P} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{Q}) - \mathbf{Q} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{P})] \cdot \hat{\mathbf{n}} ds, \quad (\text{A.1})$$

et posons  $\mathbf{P} = \mathbf{E}(\mathbf{R})$  et  $\mathbf{Q} = G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')\hat{\mathbf{u}}$  où  $\hat{\mathbf{u}}$  est un vecteur unitaire constant et de direction arbitraire [5, 6, 7] et  $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  est la fonction de Green définie par l'équation (1.36).  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}'$  sont des vecteurs positions, respectivement point source et point d'observation, tous deux placés dans le volume  $V_0$ . Sachant que le champ  $\mathbf{E}(\mathbf{R})$  vérifie l'équation de propagation (1.16) et avec quelques relations vectorielles, les éléments de l'équation (A.1) peuvent être calculés séparément :

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{P} = k^2 \mathbf{E}(\mathbf{R}) + i\omega\mu \mathbf{J}(\mathbf{R}), \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{Q} = k^2 G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')\hat{\mathbf{u}} + \nabla (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')) + \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')\hat{\mathbf{u}}, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \wedge \mathbf{Q} = \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \wedge \hat{\mathbf{u}}. \quad (\text{A.4})$$

En remplaçant dans l'équation (A.1), le terme de gauche s'écrit alors

$$\int_{V_0} \{ G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')\hat{\mathbf{u}} \cdot (k^2 \mathbf{E}(\mathbf{R}) + i\omega\mu \mathbf{J}(\mathbf{R})) - \mathbf{E}(\mathbf{R}) \cdot [k^2 G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')\hat{\mathbf{u}} + \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')\hat{\mathbf{u}} + \nabla (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}'))] \} dv. \quad (\text{A.5})$$

Le dernier terme de cette expression peut être simplifié. En effet  $\mathbf{A} \cdot \nabla B = \nabla \cdot (B\mathbf{A}) - B\nabla \cdot \mathbf{A}$ , soit :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{R}) \cdot \nabla (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')) &= \nabla \cdot [(\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')) \mathbf{E}(\mathbf{R})] \\ &- (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')) (\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R})) \end{aligned}, \quad (\text{A.6})$$

et en tenant compte qu'il y a absence de charges et que par conséquent  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  :

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) \cdot \nabla (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')) = \nabla \cdot [(\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')) \mathbf{E}(\mathbf{R})]. \quad (\text{A.7})$$

Utilisons le théorème d'Ostrogradski [5], qui stipule que le flux d'un vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur sur le volume délimité par cette surface :

$$\int_{V_0} \nabla \cdot [(\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')) \mathbf{E}(\mathbf{R})] dv = \int_{S_0} (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')) (\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R})) ds. \quad (\text{A.8})$$

Le terme de gauche de l'équation (A.1) peut donc s'écrire :

$$\int_{V_0} \hat{\mathbf{u}} \cdot (i\omega\mu G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \mathbf{J}(\mathbf{R}) - \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \mathbf{E}(\mathbf{R})) dv - \int_{S_0} (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')) (\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R})) ds. \quad (\text{A.9})$$

En considérant l'équation (A.4), le terme de droite de l'équation (A.1) s'écrit quant à lui

$$\int_{S_0} [\mathbf{E}(\mathbf{R}) \wedge (\nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \wedge \hat{\mathbf{u}}) - G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \hat{\mathbf{u}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R}))] \cdot \hat{\mathbf{n}}_0 ds, \quad (\text{A.10})$$

et en utilisant les égalités du double produit vectoriel on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{S_0} [(\mathbf{E}(\mathbf{R}) \cdot \hat{\mathbf{u}}) \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') - (\mathbf{E}(\mathbf{R}) \cdot \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')) \hat{\mathbf{u}} - (G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R})) \nabla \\ & + (G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{R})] \cdot \hat{\mathbf{n}}_0 ds, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

qui peut également s'écrire

$$\begin{aligned} & \int_{S_0} (\mathbf{E}(\mathbf{R}) \cdot \hat{\mathbf{u}}) (\nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot \hat{\mathbf{n}}_0) - (\mathbf{E}(\mathbf{R}) \cdot \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')) (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0) \\ & - (G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R})) (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}_0) + (G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) (\mathbf{E}(\mathbf{R}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_0) ds. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Une factorisation par  $\hat{\mathbf{u}}$  est ensuite réalisée, et le terme (A.12) peut être s'écrire

$$\begin{aligned} & \int_{S_0} [(\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')) \mathbf{E}(\mathbf{R}) - (\mathbf{E}(\mathbf{R}) \cdot \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')) \hat{\mathbf{n}}_0 + G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') (\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R})) \nabla \\ & - G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') (\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{R})] \cdot \hat{\mathbf{u}} ds, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

et on reconnaît dans ce terme deux égalités du double produit vectoriel, on obtient donc

$$\int_{S_0} [(\hat{\mathbf{n}}_0 \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})) \wedge \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') + G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \hat{\mathbf{n}}_0 \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R}))] \cdot \hat{\mathbf{u}} ds, \quad (\text{A.14})$$

et en utilisant les équations (1.2) et (1.6), le terme de droite de l'équation (A.1) se simplifie finalement en

$$\int_{S_0} \hat{\mathbf{u}} \cdot [G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') i\omega\mu (\hat{\mathbf{n}}_0 \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R})) + (\hat{\mathbf{n}}_0 \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R})) \wedge \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] ds. \quad (\text{A.15})$$

A partir des équations (A.9) et (A.15), l'équation (A.1) s'écrit

$$\begin{aligned} & \int_{V_0} \hat{\mathbf{u}} \cdot (i\omega\mu G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \mathbf{J}(\mathbf{R}) - \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \mathbf{E}(\mathbf{R})) \, dv = \\ & + \int_{S_0} \hat{\mathbf{u}} \cdot [G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') i\omega\mu (\hat{\mathbf{n}}_0 \wedge \mathbf{H}) + (\hat{\mathbf{n}}_0 \wedge \mathbf{E}) \wedge \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') + (\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \mathbf{E}) \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] \, ds. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Comme la surface  $S_0$  est la réunion de  $S$  et  $S_\infty$ , nous pouvons décomposer l'intégrale sur  $S_0$  en deux intégrales de surface en tenant compte du sens des normales (d'après le théorème de Green, les normales doivent être tournées vers l'extérieur de  $V_0$ ). L'équation (A.16) devient alors :

$$\begin{aligned} & \int_{V_0} \hat{\mathbf{u}} \cdot (i\omega\mu G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \mathbf{J}(\mathbf{R}) - \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \mathbf{E}(\mathbf{R})) \, dv = \\ & + \int_{S_\infty} \hat{\mathbf{u}} \cdot \left( G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') i\omega\mu (\hat{\mathbf{n}}_\infty \wedge \mathbf{H}) + (\hat{\mathbf{n}}_\infty \wedge \mathbf{E}) \wedge \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + (\hat{\mathbf{n}}_\infty \cdot \mathbf{E}) \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \right) \, ds \\ & - \int_S \hat{\mathbf{u}} \cdot (G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') i\omega\mu (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}) + (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}) \wedge \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}) \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')) \, ds. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Le vecteur  $\hat{\mathbf{u}}$  peut être supprimé de l'équation puisqu'il est constant et arbitraire. L'intégrale sur la surface  $S_\infty$  est nulle du fait de la condition de rayonnement à l'infini. La fonction de Dirac contribuera seulement si le point d'observation, défini par le vecteur position  $\mathbf{R}'$ , se situe dans la région 0 et nous obtenons

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{R}') & \text{si } \mathbf{R}' \in V_0 \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{R}' \in V_1 \end{cases} = \int_{V_0} i\omega\mu G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \mathbf{J}(\mathbf{R}) \, dv \\ & + \int_S (G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') i\omega\mu (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}) + (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}) \wedge \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}) \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')) \, ds. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

La première intégrale dans le terme de droite de l'équation est le champ généré par la source de courant propagé au point  $\mathbf{R}'$  et correspond au champ incident  $\mathbf{E}_i(\mathbf{R}')$ . L'équation suivante est finalement obtenue :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{R}') & \text{si } \mathbf{R}' \in V_0 \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{R}' \in V \end{cases} = \mathbf{E}_i(\mathbf{R}') \\ & + \int_S (G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') i\omega\mu (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}) + (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}) \wedge \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}) \nabla G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')) \, ds. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Dans le cas d'un objet diélectrique, une deuxième équation intégrale est nécessaire. Celle-ci est obtenue en appliquant le même raisonnement dans le même volume  $V$  (les vecteurs  $\mathbf{R}'$  et  $\mathbf{R}$  sont positionnés dans le volume  $V$ ) et on obtient finalement

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{R}') & \text{si } \mathbf{R}' \in V \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases} = - \int_S (G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}') i\omega\mu_1 (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H} + (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E} \wedge \nabla G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}') + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} \nabla G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}')) ds, \quad (\text{A.20})$$

où le signe  $-$  vient du fait que la normale à la surface du volume  $V$  ( $\hat{\mathbf{n}}$ ) est dirigée vers le volume  $V_0$ .  $G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  et  $\mu_1$  sont respectivement la fonction de Green et la perméabilité dans le milieu  $\Omega_1$ .

# Bibliographie

- [1] G. Kubické, *Contribution au calcul de la diffusion d'une onde électromagnétique par des réflecteurs polyédriques au-dessus d'une surface rugueuse*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2008. (Cité en pages 14, 42, 88, 95 et 126.)
- [2] J. A. Kong, *Electromagnetic wave theory*. EMW Publishing, Massachusetts, USA, 2005. (Cité en pages 18, 19, 21 et 23.)
- [3] K. L. Tsang, J. A. Kong and C. Ao, *Scattering of electromagnetic waves, Numerical simulations*. John Wiley & Sons, New York, 2004. (Cité en page 23.)
- [4] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical methods for physicists 6th ed*. Academic Press, New York, 2005. (Cité en page 23.)
- [5] A. Ishimaru, *Electromagnetic wave propagation, Radiation, and Scattering*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991. (Cité en pages 23, 129 et 130.)
- [6] J. A. Stratton, *Electromagnetic theory*. Mac Graw Hill Book, New York, 1949. (Cité en pages 23, 46 et 129.)
- [7] M. Born and E. Wolf, *Principles of optics*. Pergamon, New York, 1959. (Cité en pages 24 et 129.)
- [8] E. Pottier, *Contribution de la polarimétrie dans la discrimination de cibles radar. Application à l'imagerie électromagnétique haute résolution*. Thèse de doctorat, Université de Rennes, 1990. (Cité en page 26.)
- [9] G. Sinclair, "The transmission and reception of elliptically polarized waves," *Proc. IRE*, vol. 38, pp. 148–151, 1950. (Cité en page 28.)
- [10] N. Pinel, *Etude de modèles asymptotiques de la diffusion des ondes électromagnétiques par des interfaces naturelles - Application à une mer recouverte de pétrole -*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2006. (Cité en pages 29, 53 et 118.)
- [11] N. Déchamps, *Méthodes numériques appliquées au calcul de la diffusion d'une onde électromagnétique par des interfaces rugueuses monodimensionnelles*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2004. (Cité en pages 32, 48, 95 et 126.)
- [12] J. A. Ogilvy, *Theory of wave scattering from random rough surfaces*. Institute of Physics, Bristol, 1991. (Cité en pages 33, 34 et 52.)

- [13] C. Bourlier, *Diffraction électromagnétique par des obstacles*. Université de Nantes, Cours de Master 2R SEGE, 2008. (Cité en pages 33, 34 et 52.)
- [14] K. Pak, L. Tsang, and C. Chan, “Backscattering enhancement of electromagnetic waves from two-dimensional perfectly conducting random rough surfaces based on monte carlo simulations,” *Journal of the Optical Society of America*, vol. 12, pp. 2491–2499, 1995. (Cité en pages 35 et 36.)
- [15] W.-J. Ji and C.-M. Tong, “The E-PILE+SMCG for scattering from an object below 2D soil rough surface,” *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 33, pp. 317–337, 2011. (Cité en pages 35, 41 et 42.)
- [16] D. B. Davidson, *Computational electromagnetics for RF and microwave engineering*. University of Stellenbosch, South Africa, 2005. (Cité en page 37.)
- [17] W. C. Gibson, *The method of moments in electromagnetics*. Taylor and Francis group, Boca raton, 2008. (Cité en pages 37 et 59.)
- [18] O. Zienkiewicz, *The finite element method in engineering science*. McGraw-Hill, New York, 1971. (Cité en page 38.)
- [19] K. Yee, “Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell’s equations in isotropic media,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 14, pp. 302–307, May 1966. (Cité en page 38.)
- [20] A. Taflove and M. Brodwin, “Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependant maxwell’s equations,” *IEEE Transactions on Microwave Theory Technology*, vol. 23, pp. 623–630, 1975. (Cité en page 38.)
- [21] A. Taflove and K. Umashankar, “Radar cross section of general three-dimensional scatterers,” *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 25, no. 4, pp. 433–440, 1983. (Cité en page 38.)
- [22] R. F. Harrington, *Field computation by moment methods*. Mac Millan, New York, 1968. (Cité en page 38.)
- [23] L. Hamilton, “3D method of moments scattering computations using the fast multipole method,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 1, pp. 435–438, June 1994. (Cité en page 39.)

- [24] J. Song and W. Chew, "Multilevel fast multipole algorithm for solving combined field integral equations of electromagnetic scattering," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 10, pp. 14–19, September 1995. (Cité en page 39.)
- [25] L. Tsang and H. Sangani, "A banded matrix iterative approach to monte carlo simulations of large scale random rough surface scattering : TE case," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 29, pp. 1185–1200, 1993. (Cité en page 39.)
- [26] D. Torrungrueng, H. Chou, and J. T. Johnson, "A novel acceleration algorithm for the computation of scattering from two-dimensional large scale perfectly conducting random rough surfaces with the Foward-Backward method," *IEEE Transactions On Geoscience and Remote Sensing*, vol. 38, pp. 1656–1668, 2000. (Cité en pages 39, 81 et 83.)
- [27] D. Torrungrueng and J. T. Johnson, "Numerical studies of backscattering enhancement of electromagnetic waves from two-dimensional random rough surfaces with the forward-backward/novel spectral acceleration method," *Journal of Optical Society of America*, vol. 18, pp. 2518–2526, 2001. (Cité en page 39.)
- [28] D. Torrungrueng and J. T. Johnson, "An improved FB/NSA algorithm for the computation of scattering from two-dimensional large scale rough surfaces waves from two-dimensional random rough surfaces with the forward-backward/novel spectral acceleration method," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 15, pp. 1337–1362, 2001. (Cité en pages 39, 81 et 86.)
- [29] W. R. Hamilton, *The collected papers of W.R. Hamilton*. 1, Geometrical optics, Cambridge University Press, 1931. (Cité en page 39.)
- [30] F. Mollinet, "Geometrical theory of diffraction : Foundation of the theory," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation Society Newsletter*, August 1987. (Cité en page 39.)
- [31] J. Keller, "Geometrical theory of diffraction," *Journal of the Optical Society of America*, vol. 52, pp. 116–130, 1962. (Cité en page 39.)
- [32] R. Kouyoumjian and P. Pathak, "A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface," *Proceedings of the IEEE*, vol. 62, pp. 1448–1461, November 1974. (Cité en page 39.)

- [33] J. Asvestas, “The physical optics method in electromagnetic scattering,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 21, pp. 290–299, February 1980. (Cité en pages 40 et 52.)
- [34] E. Knott, “The relationship between Mitzner’s ILDC and Michaeli’s equivalent currents,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 33, pp. 112–114, January 1985. (Cité en page 40.)
- [35] A. Sommerfeld, *Lectures on theoretical physics*, vol. 6. 1964. (Cité en page 41.)
- [36] X. Wang, C.-F. Wang, Y.-B. Gan, and L.-W. Li, “Electromagnetic scattering from a circular target above or below rough surface,” *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 40, pp. 207–227, 2003. (Cité en page 41.)
- [37] P. Liu and Y. Q. Jin, “The finite-element method with domain decomposition for electromagnetic bistatic scattering from the comprehensive model of a ship on and a target above a large scale rough sea surface,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 42, pp. 950–956, May 2004. (Cité en page 41.)
- [38] H. Ye and Y. Jin, “Fast iterative approach to difference electromagnetic scattering from the target above a rough surface,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 44, pp. 108–115, Jan. 2006. (Cité en page 41.)
- [39] C. Dong, C. Wang, X. Wei, and H. Yin, “EM scattering from complex targets above a slightly rough surface,” *PIERS online*, vol. 3, no. 5, pp. 685–688, 2007. (Cité en page 41.)
- [40] G. Kubické, C. Bourlier, and J. Saillard, “Scattering by an object above a randomly rough surface from a fast numerical method : extended PILE method combined with FB-SA,” *Waves in Random and Complex Media*, vol. 18, pp. 495–519, Aug. 2008. (Cité en pages 41 et 95.)
- [41] G. Kubické and C. Bourlier, “A fast hybrid method for scattering from a large object with dihedral effects above a large rough surface,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 59, pp. 189–198, 2011. (Cité en pages 41 et 95.)
- [42] L.-X. G. Y. Liang and Z. Wu, “The fast EPILE combined with FBM for electromagnetic scattering from dielectric targets above and below the dielectric rough surface,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 49, pp. 3892–3905, October 2011. (Cité en page 41.)

- [43] J. T. Johnson, “A numerical study of scattering from an object above a rough surface,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 50, no. 10, pp. 1361–1367, 2002. (Cité en page 41.)
- [44] J. T. Johnson and R. J. Burkholder, “Coupled Canonical Grid/Discrete Dipole Approach for computing scattering from objects above or below a rough interface,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 39, pp. 1214–1220, June 2001. (Cité en page 41.)
- [45] D. Çolak, R. J. Burkholder, and E. H. Newman, “Multiple Sweep Method of Moments analysis of electromagnetic scattering from 3D targets on ocean-like rough surfaces,” *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 49, pp. 241–247, Jan. 2007. (Cité en page 41.)
- [46] L. Kuang and Y. Jin, “Bistatic scattering from a three-dimensional object over a randomly rough surface using the FDTD algorithm,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, pp. 2302–2312, August 2007. (Cité en pages 41 et 42.)
- [47] H. Ye and Y. Jin, “A hybrid KA-MOM algorithm for computation of scattering from a 3-D PEC target above a dielectric rough surface,” *Radio Science*, vol. 43, pp. 1–15, 2008. (Cité en pages 41 et 42.)
- [48] L.-X. Guo, J. Li, and H. Zeng, “Bistatic scattering from a three-dimensional object above a two-dimensional randomly rough surface modeled with the parallel FDTD approach,” *Journal of the Optical Society of America*, vol. 26, pp. 2383–2391, November 2009. (Cité en pages 41 et 42.)
- [49] X. Z. B. Guan, J. F. Zhang and T. Cui, “Electromagnetic scattering from objects above a rough surface using the method of moments with half-space green’s function,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 47, pp. 3399–3405, October 2009. (Cité en pages 41 et 42.)
- [50] June 2012. “<http://www.mhpcc.edu/>”. (Cité en page 41.)
- [51] G. Kubické, Y. Yahia, C. Bourlier, N. Pinel, and P. Pouliguen, “Bridging the gap between the babinet principle and the physical optics approximation : Scalar problem,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 59, pp. 4725–4732, 2011. (Cité en page 46.)

- [52] R. Hemon, *Calcul de la diffraction électromagnétique par une cavité de type manche à air*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2009. (Cité en pages 46 et 115.)
- [53] P. Pouliguen, *Méthode asymptotique de calcul de SER en configuration de fort bistatisme*. DGA, Rapport technique, Juin 2002. (Cité en page 46.)
- [54] June 2012. FEKO-EM Software and systems, “www.feko.info”, Technopark- Stellenbosch, South Africa. (Cité en page 51.)
- [55] E. I. Thorsos, “The validity of the Kirchhoff approximation for rough surface scattering using a gaussian roughness spectrum,” *Journal of the Acoustical Society of America*, no. 83, pp. 78–92, 1988. (Cité en pages 53, 115 et 118.)
- [56] C. Bourlier, *Diffusion électromagnétique par des interfaces rugueuses séparées par des milieux homogène : Application à la télédétection océanique microondes et infrarouge*. Habilitation à diriger des recherches, Université de Nantes, 2007. (Cité en pages 54, 88 et 115.)
- [57] Y. Rahmat-Samii and R. Mittra, “Integral equation solution and RCS computation of a thin rectangular plate,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 22, pp. 608–610, July 1974. (Cité en page 58.)
- [58] K. Barkeshli and L. Volakis, “On the implementation of the conjugate gradient fourier transform method for scattering by planar plates,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 32, pp. 20–26, April 1990. (Cité en page 58.)
- [59] T. V. Tran and A. McCowen, “An improved pulse-basis conjugate gradient FFT method for the thin conducting plate problem,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 41, pp. 185–190, February 1993. (Cité en page 58.)
- [60] C. Su and T. K. Sarkar, “Analysis of scattering from perfectly conducting plates by the use of AMMM,” *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 21, pp. 71–89, 1999. (Cité en page 58.)
- [61] N. Morita, N. Kumagai, and J. R. Mautz, *Integral equation methods for electromagnetics*. Artech house, 1990. (Cité en page 59.)
- [62] G. Soriano, *Etude de la diffraction électromagnétique par des surfaces rugueuses bidimensionnelles*. Thèse de doctorat, Aix-Marseille III, 2000. (Cité en page 66.)

- [63] G. Soriano and M. Saillard, “Scattering of electromagnetic waves from two-dimensional rough surfaces with an impedance approximation,” *Journal of the Optical Society of America*, vol. 18, pp. 124–133, 2001. (Cité en page 66.)
- [64] J. T. Johnson, “Backscattering enhancement of electromagnetic waves from two-dimensional perfectly conducting random rough surfaces : A comparison of Monte Carlo simulations with experimental data,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 44, pp. 748–756, May 1996. (Cité en page 66.)
- [65] D. Holliday, L. L. DeRaad Jr., and G. J. St-Cyr, “Forward-Backward : a new method for computing low-grazing angle scattering,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 44, no. 5, pp. 722–729, 1996. (Cité en pages 75 et 76.)
- [66] D. Holliday, L. L. DeRaad Jr., and G. J. St-Cyr, “Forward-Backward for scattering from imperfect conductor,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 46, no. 1, pp. 101–107, 1998. (Cité en page 75.)
- [67] A. Iodice, “Forward-Backward method for scattering from dielectric rough surfaces,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 50, no. 7, pp. 901–911, 2002. (Cité en page 75.)
- [68] D. Torrungrueng, *Applications of the Novel Spectral Acceleration (NSA) Algorithm for the Computation of Scattering from Rough Surfaces*. Dissertation, Ohio State University, 2000. (Cité en page 87.)
- [69] N. Déchamps, N. Beaucoudrey, C. Bourlier, and S. Toutain, “Fast numerical method for electromagnetic scattering by rough layered interfaces : Propagation-inside-layer expansion method,” *Journal of the Optical Society of America*, vol. 23, pp. 359–369, 2006. (Cité en page 95.)
- [70] N. Déchamps and C. Bourlier, “Electromagnetic scattering from a rough layer : Propagation-inside-layer expansion method combined to the forward-backward novel spectral acceleration,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, pp. 3576–3586, 2007. (Cité en page 95.)
- [71] N. Déchamps and C. Bourlier, “Electromagnetic scattering from a rough layer : Propagation-inside-layer expansion method combined to an updated BMIA/CAG approach,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, pp. 2790–2802, 2007. (Cité en page 95.)

- [72] C. Bourlier, G. Kubické, and N. Déchamps, “Fast method to compute scattering by a buried object under a randomly rough surface : PILE combined with FB-SA,” *Journal of the Optical Society of America*, vol. 25, pp. 891–902, 2008. (Cité en page 95.)
- [73] W. H. Press, S. A. Teutolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 2nd edition ed., 1992. (Cité en page 96.)
- [74] M. Kouali, G. Kubické, and C. Bourlier, “E-PILE method combined with the FB method to study the scattering from an object above a rough surface for 3-D problems,” *Optics Letters*, vol. 37, 2012. (Cité en pages 123 et 126.)
- [75] M. Kouali, G. Kubické, and C. Bourlier, “Electromagnetic scattering from two-scatterers using the extended propagation-inside-layer expansion method,” in *General Assembly and Scientific Symposium of the International Union of Radio Science (Union Radio Scientifique Internationale-URSI)*, Turkey 2011. (Cité en pages 124 et 126.)
- [76] M. Kouali, G. Kubické, and C. Bourlier, “Electromagnetic scattering from two 3-D scatterers using the extended PILE method combined with the PO approximation,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Submitted 2012. (Cité en pages 124 et 126.)
- [77] M. Kouali, G. Kubické, and C. Bourlier, “Scattering from an object above a rough surface using the extended PILE method hybridized with PO approximation,” in *2012 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC-URSI National Radio Science Meeting (APS-URSI)*, Chicago 2012. (Cité en pages 124 et 126.)
- [78] M. Kouali, G. Kubické, and C. Bourlier, “Diffusion d’une onde électromagnétique par un objet au-dessus d’une surface rugueuse,” *GDR Ondes*, Paris 2011. (Cité en page 126.)



# Thèse de Doctorat

Mohammad KOUALI

Diffusion d'une onde électromagnétique par un objet au-dessus d'une surface rugueuse - Problème vectoriel 3D

Electromagnetic scattering from an object above a rough surface - 3D vectorial problem

## Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la modélisation électromagnétique et à la simulation du champ diffracté par des scènes complexes et plus particulièrement dans un contexte maritime. Les applications de tels modèles sont diverses : observation de surfaces naturelles par télédétection, connaissance de l'environnement (état de mer, salinité, détection de pollutions, ...), détection d'obstacles dans son environnement naturel (bateaux, objets dérivants, avions...).

Pour quantifier l'interaction électromagnétique onde surface, deux types d'approches existent: d'une part, des modèles asymptotiques qui reposent sur des hypothèses simplificatrices, d'autre part, des modèles dits «rigoureux». Des recherches ont été menées dans l'équipe pour modéliser rigoureusement la diffusion par un obstacle au-dessus d'une surface de mer pour une scène bidimensionnelle. Ainsi, la méthode E-PILE (Extended-Propagation Inside Layer Expansion) a été développée et il a été montré que cette méthode est très efficace pour résoudre des scènes composées de beaucoup d'inconnues.

Le but de la thèse est d'étendre ces travaux de recherche à un problème tridimensionnel. Ainsi, développer un nouveau modèle du champ diffracté par une scène complexe tridimensionnelle constituée d'un objet au-dessus d'une surface rugueuse, à l'aide d'une méthode numérique rigoureuse et/ou asymptotique. Afin de trouver un bon compromis entre ressource informatique et précision, des hybridations seront également envisagées comme intégrer l'optique physique et/ou la Forward Backward dans le schéma algorithmique de la méthode E-PILE.

## Mots clés

Diffusion électromagnétique, Surface rugueuse, Equations intégrales, Méthode des moments, Optique Physique, Surface Equivalente Radar.

## Abstract

In this work, we study the electromagnetic scattering from complex scenes, especially in the maritime context. Applications of this domain of research are different such as: Remote sensing of natural surfaces, knowledge of the environment (sea state, salinity, pollution detection,...), detection of obstacles in its natural environment (water, drifting objects, planes, ...).

To quantify the electromagnetic interaction between the electromagnetic wave and the rough surface, two families of approaches exist: asymptotic models based on simplifying assumptions, and other models called "rigorous". Our research team started to model rigorously the scattering by an object over a sea surface for a two-dimensional scene. Thus, the E-PILE method (Propagation-Inside Extended Layer Expansion) was developed and it was shown that this method is very efficient to solve scenes composed of many unknowns.

The aim of this thesis is to extend the E-PILE method to a three-dimensional problem, to compute the field scattered by a complex three-dimensional scene composed from an object above a rough surface. In addition, to reduce computing resources required to numerically solve the problem, hybridizations are also considered by combining the Physical Optics and the Forward Backward to the algorithmic scheme of the E-PILE method.

## Key Words

Electromagnetic scattering, Rough surface, Integral equations, Method of Moments, Physical Optics, Radar cross section.