



HAL
open science

Contribution a l' économétrie financière et à l'analyse de sensibilités

Christophe Chorro

► **To cite this version:**

Christophe Chorro. Contribution a l' économétrie financière et à l'analyse de sensibilités. Probabilités [math.PR]. Université Paris 1, 2013. tel-01096644

HAL Id: tel-01096644

<https://hal.science/tel-01096644v1>

Submitted on 1 Apr 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 1 Panthéon-Sorbonne.
U.F.R. de MATHÉMATIQUES

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques Appliquées.

CHRISTOPHE CHORRO

Contributions à l'économétrie financière et à
l'analyse de sensibilités

Rapporteurs

Giovanni Barone Adesi, Professeur, Swiss Finance Institute
Monica Billio, Professeur, Université de Ca' Foscari di Venezia

Soutenance le 4 Septembre 2013 devant le jury composé de :

Giovanni Barone Adesi, Professeur, Swiss Finance Institute
Monica Billio, Professeur, Université de Ca' Foscari di Venezia
Jean-Marc Bonnisseau, Professeur, Université Paris 1
Gael Giraud, Directeur de Recherche, CNRS
Dominique Guégan, Professeur, Université Paris 1
Yuri Kabanov, Professeur, Université de Franche-Comté
Vêlayoudom Marimoutou, Professeur, Aix Marseille Université
Juan-Pablo Ortega, Chargé de recherche, CNRS

Table des matières

1	Liste des publications	2
1.1	Publications durant les années de thèse	2
1.2	Publications après la thèse	2
2	Curriculum vitae, activité de recherche, responsabilités administratives et enseignements	4
2.1	Curriculum vitae	4
2.2	Activité de Recherche	5
2.3	Responsabilités administratives et pédagogiques	5
2.4	Enseignements et encadrement pédagogique	6
3	Présentation synthétique des travaux de recherche	8
3.1	Économétrie financière	8
3.2	Analyse de sensibilités	10
	Bibliographie de la Section 3	14
4	Présentation détaillée des travaux de recherche I : Économétrie financière	16
4.1	Introduction	16
4.2	Évaluation des produits dérivés pour les modèles de type GARCH dont les résidus suivent une loi hyperbolique généralisée [CGI12]	18
4.3	Une alternative à la transformée de Esscher : La simulation par martingales empiriques [CGI10a]	29
4.4	Une nouvelle méthode d'estimation : REC [CGI10b]	32
4.5	Présentation de l'ouvrage [CGI13]	38
4.6	Quelques mots sur les travaux en cours	39
4.6.1	Testing for leverage effect in non linear financial time series [CGIL13]	39
4.6.2	Global sensitivity analysis of discrete time financial models [CK13]	41
4.6.3	A simple variance reduction method for discrete time financial models [CL13]	42
	Bibliographie de la Section 4	43

5	Présentation détaillée des travaux de recherche II : Analyse de sensibilités	48
5.1	Introduction	48
5.1.1	De Gauss aux formes de Dirichlet	48
5.1.2	Phénomènes de propagation dans les structures d'erreur	55
5.1.3	Images et produits de structures d'erreur	56
5.2	Structure d'erreur et estimation paramétrique [BC04]	61
5.2.1	Identification fondamentale	62
5.2.2	Stabilité par images	64
5.2.3	Stabilité par produits	66
5.2.4	Choix de la probabilité <i>a priori</i> ρ	67
5.3	Notions de convergence et d'indépendance pour les structures d'erreur	68
5.3.1	Convergence et indépendance en dimension finie	68
5.3.2	Domaine vectoriel d'une structure d'erreur	70
5.3.3	Convergence et indépendance en dimension infinie	75
5.4	Extension du théorème de la limite centrale Hilbertien [C08]	76
5.5	Extensions du théorème de Donsker [C05]	77
5.5.1	Le cas des intégrales de Wiener	78
5.5.2	Le cas des processus gaussiens généraux	82
5.5.3	Convergence des intégrales multiples où l'intégrand est une multi-mesure	83
	Bibliographie de la Section 5	87

1 Liste des publications

1.1 Publications durant les années de thèse

REVUES À COMITÉ DE LECTURE

2005 C. Chorro : *Convergence in Dirichlet law of certain stochastic integrals*, Electron. J. Probab 10, 1005-1025.

2004 N. Bouleau, C. Chorro : *Error structures and parameter estimation*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338, 305-310. (Une version étendue de ce travail est présentée en annexe)

1.2 Publications après la thèse

REVUES À COMITÉ DE LECTURE

2012 C. Chorro, D. Guégan, F. Ielpo : *Option pricing in GARCH-type models with generalized hyperbolic innovations*, Quantitative Finance, 12(7), 1079-1094.

2010 C. Chorro, D. Guégan, F. Ielpo : *Martingalized Historical approach for Option Pricing*, Finance Research Letters, 7(1), 24-28.

2008 C. Chorro : *On an extension of the hilbertian central limit theorem to Dirichlet forms*, Osaka. J. of Mathematics 45(2), 457-470.

LIVRES

2013 C. Chorro, D. Guégan, F. Ielpo : *A Time Series Analysis Approach to Option Pricing : Models, methods and empirical performances*, Livre à paraître chez Springer-Verlag courant 2013. (La table des matières du livre est présentée en annexe)

DOCUMENTS DE TRAVAIL

2010 C. Chorro, D. Guégan, F. Ielpo : *Likelihood-Related Estimation Methods and Non-Gaussian GARCH Processes*, Cahiers du CES.

ARTICLES EN PRÉPARATION

2013 C. Chorro, D. Guégan, F. Ielpo, H. Lalaharison : *Testing for leverage effect in non linear financial time series.*

2013 C. Chorro, H. Lalaharison : *A simple variance reduction method for discrete time financial models.*

2013 C. Chorro, A. Kannur : *Global sensitivity analysis of discrete time financial models.*

2 Curriculum vitae, activité de recherche, responsabilités administratives et enseignements

2.1 Curriculum vitae

CES CNRS-UMR 8174
Université Paris 1
Maison des Sciences Économiques
106-112 Bd de l'Hôpital,
75647 Paris Cedex 13
christophe.chorro@univ-paris1.fr
<http://christophe.chorro.fr>

Né le 3 Mai 1977
Nationalité Française
65 Fbg Saint Denis
75010 Paris

SITUATION :

- 2012-...** Membre du LABEX REFI.
- 2006-...** Maître de conférence (section 26), membre du Centre d'Économie de la Sorbonne, Université Paris 1.
- 2005-2006** Attaché Temporaire d'Enseignement et de recherche à l'Université Paris 1.
- 2002-2005** Allocataire-Moniteur. Thèse intitulée *Structures d'erreur et information de Fisher* sous la direction du Professeur Nicolas Bouleau, Université Paris 1.
- 2001-2002** DEA MMME (Modélisation et Modèles Mathématiques en Économie) à l'Université Paris 1 (Mention T.Bien)
- 2001** Admis à l'Agrégation de Mathématiques (Rang 150).
- 1998-2002** Magistère de Mathématiques pures à l'Université Paris Sud d'Orsay.

2.2 Activité de Recherche

J'ai été membre du comité scientifique du *Symposium sur l'Ingénierie Financière et Economique* organisé les 20 et 21 Juin 2008 par L'ENSA D'Agadir au Maroc. Je serai en Décembre 2013 co-organisateur (avec D. Guégan) de la session invitée *Time series approach for risk management* à la 7ème conférence *Computational and Financial Econometrics* à l'Université de Londres.

J'ai également participé, en tant qu'examineur, au jury de thèse de Guillaume Poly à l'École Nationale des Ponts et Chaussées. Thèse intitulée : *Formes de Dirichlet et applications en théorie ergodique des chaînes de Markov* soutenue le 7 Décembre 2011 devant le jury composé de Francis Hirsch, Eva Löcherbach (rapporteurs), Damien Lambertson, Vlad Bally (examineurs) et Nicolas Bouleau (directeur).

Je suis membre du LabEx ReFi (laboratoire d'excellence pour la régulation financière) au sein duquel je m'intéresse au risque lié à l'évaluation des produits dérivés en marché incomplet et à l'ingénierie des modèles associés.

Je suis membre associé du projet ANR MODCOMP (Une Plateforme pour la Comparaison des Modèles Multi-Agents) porté par Napoletano Mauro de l'OFCE et soumis début 2013. Je me consacrerai dans ce cadre à l'utilisation des méthodes de Global Sensitivity Analysis appliquées à la réduction de modèles.

Enfin, j'ai effectué depuis 2008 une dizaine de referee pour des journaux tels que : Quantitative Finance, RAIRO, Mathematical Social Sciences, Journal of Operator Theory, International Journal of Theoretical and Applied Finance.

2.3 Responsabilités administratives et pédagogiques

Je suis depuis septembre 2009 membre de la commission de spécialistes section 26/27 de l'Université Paris 1.

Je suis responsable depuis septembre 2011 de la filière FINANCE QUANTITATIVE du Master 2 Recherche *Modélisation et Méthodes Mathématiques en Économie et Finance* (MMMEF) de l'Université Paris 1 qui est cohabi-

lité avec L'École Nationale Supérieure des Techniques Avancées.

2.4 Enseignements et encadrement pédagogique

Je réalise à l'heure actuelle un service d'environ 280 HETD à l'Université Paris 1 dont les trois quarts sont des cours en anglais. Ces cours s'inscrivent principalement dans le cadre du Master Erasmus Mundus Models and Methods of Quantitative Economics (QEM) et des Masters 2 Modélisation et Méthodes Mathématiques en Économie et Finance (MMMEF) et Ingénierie du Risque, Finance et Assurance (IRFA) de l'Université Paris 1. D'un point de vue thématique, ils recouvrent un large spectre de la modélisation stochastique en finance et des méthodes numériques associées. Le détail de mes enseignements ainsi que les différents documents pédagogiques produits (polycopiés de cours, transparents, feuilles de TD,...) sont disponibles sur ma page web à l'adresse <http://christophe.chorro.fr/enseignements.html>. Plusieurs de ces enseignements (Econométrie des Modèles d'Évaluation d'Actifs, Méthodes de Monte Carlo, Sensibilités et calcul de Malliavin, Applications des Méthodes de Monte Carlo en Finance) sont évalués à l'aide de projets numériques réalisés à l'aide du logiciel R.

ENSEIGNEMENTS EN TANT QUE MAÎTRE DE CONFÉRENCES :

- 2012-... Chargé du cours *Introduction à la théorie de l'arbitrage* (en anglais), Master 2 Recherche MMMEF de l'Université Paris 1.
- 2012-... Chargé du cours (avec F. Ielpo) *Econométrie des Modèles d'Évaluation d'Actifs* (en anglais), Master 2 Recherche MMMEF de l'Université Paris 1.
- 2009-... Chargé du cours *Applications des Méthodes de Monte Carlo en Finance*, Master 2 d'Actuariat de l'Université Libanaise de Beyrouth.
- 2008-... Chargé du cours *Méthodes de Monte Carlo, sensibilités et calcul de Malliavin* (en anglais), Master 2 Recherche MMMEF de l'Université Paris 1.
- 2008-... Chargé de TD du cours *Probability* (en anglais), 1ère année du Master Erasmus Mundus QEM de l'Université Paris 1.

- 2006-...** Chargé du cours *Intermediate probability* (en anglais), 1ère année du Master Erasmus Mundus QEM de l'Université Paris 1.
- 2006-...** Chargé du cours *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance* (en anglais), Master 2 Pro IRFA de l'Université Paris 1.
- 2005-...** Chargé du cours *Introduction à la théorie des options financières*, Master 2 Ingéfi de l'Université Paris 1 (UFR06).
- 2009-2012** Chargé du cours *Options financières*, Reims Management School.
- 2006-2008** Chargé du cours (avec N. Bouleau) *Calcul d'erreurs et sensibilités* (en anglais), Master 2 Recherche MMMEF de l'Université Paris 1.

Mes enseignements m'ont conduit à encadrer régulièrement des étudiants de Master 2 pour leurs mémoires de fin d'études.

ENCADREMENT PÉDAGOGIQUE

- 2009-...** Co-encadrement (avec D. Guégan) de la thèse d'Hanjarivo Lalaharison au centre d'économie de la sorbonne. Sujet : Option pricing with Lévy processes.
- 2013-2014** Encadrement du Diplôme de Hautes Etudes et Recherches Spécialisées (DHERS) d'Habishek Kannur. Sujet : Global sensitivity analysis and option pricing.
- 2013** Encadrement du mémoire de M2 de Matthieu Hanet. Sujet : Garch option pricing models.
- 2010** Co-Encadrement (avec D. Guégan) du mémoire de M2 de Maheshwari Divya Sarthi. Sujet : Conditional Volatility and Distribution of Stock.
- 2009** Encadrement du mémoire de M2 d'Élisabeth Smadja. Sujet : Performance des investissements responsables en France.
- 2007** Encadrement du mémoire de M2 de Laurent Achfain. Sujet : Volatilité et Comportements Trend Follower.

3 Présentation synthétique des travaux de recherche

3.1 Économétrie financière

Depuis fin 2008 mes travaux de recherche se sont peu à peu orientés vers des problématiques liées à l'économétrie financière. Il s'agissait plus précisément d'incorporer dans les modélisations GARCH classiques des lois de probabilités capables de tenir compte des phénomènes d'asymétrie et de leptokurticité observables dans la plupart des séries financières. La prise en charge, dans le cadre des modélisations de type GARCH, de ces deux faits stylisés est fondamentale aussi bien pour améliorer le pouvoir prédictif des modèles (forecast) que pour l'évaluation des produits dérivés (pricing). L'abandon de l'hypothèse Gaussienne n'est cependant pas sans conséquences : l'introduction d'un nouveau jeu de paramètres lié à la distribution des résidus nous oblige à repenser d'un point de vue pratique l'ingénierie de ses modèles (incomplétude, estimation,...). Les résultats théoriques et numériques présentés dans cette section ont fait l'objet de deux publications ([CGI10a] et [CGI12]) et d'un Working paper ([CGI10b]). Ils ont été regroupés dans un livre à paraître courant 2013 ([CGI13]) qui propose à la fois une introduction à la théorie de l'évaluation des produits dérivés dans le cadre des séries temporelles, la mise en oeuvre pratique de ces modèles via le logiciel R et une nouvelle étude empirique intensive qui s'appuie sur un jeu de données incluant la récente crise financière.

Nous proposons dans [CGI12] un nouveau modèle discret d'évaluation des produits dérivés européens et discutons sa capacité à produire hors échantillon des erreurs intéressantes pour des options d'achat et de vente sur indices. Cette étude repose sur un schéma classique en trois temps :

1. Choix et estimation historique d'un modèle pertinent pour les rendements logarithmiques.
2. Choix d'une mesure martingale équivalente en environnement incomplet.
3. Étude empirique pour déterminer la taille des erreurs de pricing.

Duan a été le premier à fournir dans [D95] une réponse théorique rigoureuse au problème du pricing des actifs contingents, dans le cadre de modélisations de type GARCH avec résidus Gaussiens. Il est cependant bien connu, depuis les travaux de Mandelbrot [M63], que l'hypothèse Gaussienne s'avère empiriquement injustifiée ne permettant pas, en particulier, de rendre compte des phénomènes d'asymétrie et de queues épaisses. Notre

choix s'est alors porté sur la loi hyperbolique généralisée introduite par Barndorff-Nielsen [B77] et connue notamment, en finance en temps continu, pour servir de base à la construction de processus exponentiels de Lévy [EP02]. L'association d'une loi hyperbolique généralisée pour les résidus et de modèles GARCH de volatilité pose alors la question, classique en marché incomplet, du choix d'une mesure martingale équivalente pertinente. Le cadre de Duan devenu inopérant, l'approche proposée par [BDES96] nous a paru ici totalement pertinente dans sa capacité à reproduire certains faits stylisés caractéristiques des dynamiques risques neutres (accroissement de la variance et diminution de la skewness conditionnelles par rapport à la dynamique historique). Cette approche, équivalente à la paramétrisation exponentielle affine du facteur d'escompte stochastique, s'avère particulièrement bien adaptée au choix de la loi hyperbolique généralisée : la dynamique risque neutre est connue de manière explicite et permet d'obtenir par méthode de Monte Carlo les prix d'options. Une étude empirique a été conduite sur les indices CAC40 et SP500 démontrant la capacité de la loi hyperbolique généralisée à produire des erreurs de pricing compétitives.

Nous avons testé dans [CGI10a] une procédure de neutralisation du risque plus élémentaire (la simulation par martingales empiriques) inspirée de la technique de réduction de variance proposée dans [DS98]. Moins coûteuse numériquement que la transformée de Esscher conditionnelle, une étude empirique des erreurs de pricing obtenues pour un modèle EGARCH avec résidus non Gaussiens a cependant montré que les erreurs sont quasi identiques (pour un jeu d'options basé sur l'indice CAC40 entre le 2 Janvier 2006 et le 26 Octobre 2007). Le choix et l'estimation de la dynamique historique jouent dans ce cas un rôle fondamental qui peut parfois sembler être reléguer au second plan lorsque de purs exercices de calibration sont mis en oeuvre.

L'utilisation de dynamiques de type GARCH pour la volatilité, couplée à l'emploi de distributions non Gaussiennes pour les résidus, a pour conséquence l'augmentation du nombre de paramètres à estimer. De manière plus fondamentale, l'introduction de paramètres de nuisance modifie l'expression de la skewness et du kurtosis inconditionnels : la structure de volatilité et la loi des résidus ont un impact commun sur ces grandeurs. Nous avons proposé dans [CGI10b] une méthode d'estimation récursive qui prend en charge de manière séparée ces deux familles de paramètres. Ces performances (consistance, pouvoir prédictif via un test de rapport de vraisemblance) ont été comparées, via une étude empirique sur données réelles

et simulées, aux deux méthodes classiques d'estimation en environnement GARCH que sont le maximum et le quasi maximum de vraisemblance. Nous avons mis en évidence une propriété de stabilité très importante de la méthode récursive. En effet, lorsque différents modèles sont estimés, les fonctions de réponse de la volatilité et les distributions conditionnelles associées sont quasi-identiques et semblent ainsi être intrinsèquement liées aux données considérées. Cette homogénéité remarquable est à mettre en contraste avec les résultats hétérogènes obtenus notamment pour le maximum de vraisemblance où l'estimation directe des deux familles de paramètres semble induire des profils très sensibles au modèle choisi.

3.2 Analyse de sensibilités

Considérons un modèle physique, économique ou financier dépendant de plusieurs paramètres observables (volatilité dans le modèle financier de Black-Scholes, débit d'un fleuve, nature du sol et topographie des berges dans un modèle de crue). Contrairement aux grandeurs entières, les paramètres continus sont inévitablement entachés d'une erreur due à l'imprécision de l'appareil de mesure, aux techniques d'arrondis ou tout simplement à l'entrée de l'expérimentateur dans le champ de l'expérience. Ces modèles sont, de plus, utilisés pour calculer des quantités significatives qui serviront comme aide à la prise de décision. Par exemple, dans le cadre du modèle de Black-Scholes, on peut calculer la composition d'un portefeuille assurant la couverture d'une option et se positionner ensuite sur le marché. L'erreur associée à l'observation d'un paramètre va alors se propager à travers les calculs.

Le choix d'un langage pertinent pour traiter des erreurs et de leur propagation est un sujet ancien qui a mobilisé de nombreux mathématiciens dès le début du 19ème siècle. La difficulté du problème est qu'il est soumis à une double contrainte. Un tel langage doit être suffisamment précis et rigoureux pour être significatif et suffisamment souple pour s'adapter aux nombreuses situations. En effet, l'étude d'un phénomène physique donne souvent lieu à de multiples approches basées sur des partis pris et des outils mathématiques très différents. Il est alors très important qu'un langage commun puisse confronter et critiquer les différents points de vue.

Récemment, Nicolas Bouleau a proposé une approche originale basée sur la puissante théorie mathématique des formes de Dirichlet [B01]. En effet, les principaux opérateurs utilisés en théorie du potentiel (opérateur carré du champ, générateur infinitésimal) vérifient un calcul fonctionnel qui s'interprète en termes de propagation d'erreurs. Cette approche, qui est notre

cadre théorique, reprend plusieurs idées essentielles présentes dans les travaux pionniers de Gauss et s'adapte parfaitement aux situations rencontrées en modélisation physique et financière [B03]. Cependant, le choix des hypothèses sur les erreurs est effectué *a priori* en tenant compte essentiellement de la nécessité de mener les calculs à bien.

L'objectif principal de notre travail de recherche a été de relier solidement le calcul d'erreur par les formes de Dirichlet à l'expérience : de la même manière que le calcul des probabilités s'est naturellement vu enrichi de la théorie des statistiques pour modéliser des situations concrètes à travers des méthodologies rigoureuses (techniques d'échantillonnage, estimation paramétrique et fonctionnelle, théorie des tests), le but est ici d'amorcer une démarche analogue. Deux voies complémentaires ont été abordées. Nous avons, dans un premier temps, exploré la connexion avec les statistiques paramétriques via la notion d'information de Fisher mettant ainsi en évidence une forte compatibilité entre les propriétés analytiques bien connues de la matrice d'information de Fisher et les opérations algébriques élémentaires (image, produit) liées au calcul d'erreur. Cette étude a été complétée par l'extension en termes de forme de Dirichlet de certains théorèmes limites fonctionnels de la théorie des probabilités (théorème de la limite centrale hilbertien, théorème de Donsker). De la même manière que l'utilisation de la loi normale en statistique s'explique en partie par le théorème de la limite centrale, nous avons mis en évidence l'importance d'une famille de structures d'erreur par des arguments asymptotiques. En particulier, sur l'espace de Wiener, les résultats obtenus donnent une interprétation originale du calcul de Malliavin comme objet limite.

Une structure d'erreur étant un espace de probabilité muni d'un opérateur Γ prenant en compte les erreurs, il nous a semblé naturel dans [BC04] de chercher à étendre l'identification statistique des lois de probabilité au cas des structures d'erreur. Ainsi, si θ est un paramètre inconnu à valeurs dans un ouvert Θ de \mathbb{R}^d , nous voulons mettre en place expérimentalement une structure d'erreur dans laquelle l'opérateur Γ exprime la précision de la connaissance que l'on a sur θ avec les moyens statistiques employés. Lorsque l'on estime θ à l'aide d'un modèle paramétrique régulier $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$, l'inégalité de Cramer-Rao nous conduit à poser l'identification fondamentale suivante : $\Gamma[Id] = J^{-1}$ où J est la matrice d'information de Fisher associée à $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$. Cela est bien naturel, Fisher lui-même présentait J comme une précision (intrinsic accuracy) sur le paramètre [F25]. Le but de cet article est de tester la robustesse de cette identification. En ce qui concerne les changements

de variables injectifs réguliers, on peut voir que la reparamétrisation induite sur le modèle se traduit par la notion de structure d'erreur image grâce aux propriétés analytiques de la matrice J . Dans le problème de l'estimation directe de la grandeur $\psi(\theta)$ lorsque ψ n'est pas injective, nous obtenons des résultats asymptotiques commodes pour les applications. Enfin, lorsque l'on s'intéresse à l'estimation de grandeurs produit, où les composantes sont estimées à l'aide d'expériences indépendantes, le phénomène naturel de sommation des erreurs s'exprime dans la notion de structure d'erreur produit et ouvre la voie à une généralisation aux grandeurs infini-dimensionnelles.

De la même manière que l'emploi de la loi normale en statistiques peut s'expliquer en partie par le théorème de la limite centrale, le but de [C08] est de souligner l'importance d'une famille de structures d'erreur par des arguments asymptotiques. La principale difficulté est ici de démontrer la fermabilité de la forme bilinéaire limite à l'aide de méthodes hilbertiennes et d'une intégration par parties en dimension infinie.

Enfin, dans [B05], Nicolas Bouleau étudie l'approximation polygonale de Donsker sur $[0, 1]$

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{[nt]} U_k + (nt - [nt])U_{[nt]+1} \right)$$

lorsque les variables aléatoires $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont supposées erronées, les erreurs étant modélisées par des structures d'erreur. Il montre sous des hypothèses d'indépendance et de stationnarité sur les erreurs, que le processus continu X_n converge en loi de Dirichlet vers la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener. L'article [C05] est consacré à l'extension de ce résultat à certaines familles d'intégrales stochastiques du processus X_n . Trois cas seront envisagés. Lorsque $h \in L^2([0, 1])$, la convergence en loi de Dirichlet de $Y_n^h = \int_0^1 h(s) dX_n(s)$ est obtenue sans hypothèses de régularité sur h . Ce résultat est complété par l'étude d'approximations continues de processus gaussiens réguliers (au sens de Delgado et Jolis dans [DJ00]) incluant le mouvement Brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in]0, 1[$. Enfin, on s'intéresse à la convergence de l'intégrale multiple

$$\int_{[0,t]^p} h(x_1, \dots, x_p) dX_n(x_1) \dots dX_n(x_p)$$

où h est donnée par une multi-mesure. Dans ce cas, une simple intégration par parties montre que l'intégrale multiple est donnée par un opérateur

continu du processus X_n dont la régularité est compatible avec le calcul d'erreur. Notons enfin que d'un point de vue purement probabiliste, les résultats obtenus sortent du cadre généralement employé dans la littérature.

Références

Econométrie financière

- [B77] Barndorff-Nielsen, OE., (1977). Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 353, 401-419.
- [BDES96] Bühlmann, H., Delbaen, F., Embrechts, P. and Shiryaev, AN., (1996). No-Arbitrage Change of Measure and Conditional Esscher Transforms. *CWI Quarterly*, 9, 291-317.
- [CGI10a] Chorro, C., Guégan, D. and Ielpo, F., (2010). Martingalized historical approach for option pricing. *Finance Research Letters*, 7(1), 24-28.
- [CGI10b] Chorro, C., Guégan, D. and Ielpo, F., (2010). Likelihood-Related Estimation Methods and Non-Gaussian GARCH Processes. *Cahiers du CES*.
- [CGI12] Chorro, C., Guégan, D. and Ielpo, F., (2012). Option pricing for GARCH type models with generalized Hyperbolic Innovations. *Quantitative Finance*, 12(7), 1079-1094.
- [CGI13] Chorro, C., Guégan, D. and Ielpo, F., (2013). *A Time Series Analysis Approach to Option Pricing : Models, methods and empirical performances*. Livre à paraître chez Springer-Verlag courant 2013.
- [D95] Duan, J.C., (1995). The GARCH Option Pricing Model. *Mathematical Finance*, 5, 13-32.
- [EP02] Eberlein, E. and Prause, K., (2002). The generalized hyperbolic model : financial derivatives and risk measures. In : Geman H, Madan D, Pliska S, Vorst T (Eds), *Mathematical Finance-Bachelier Congress 2000*, Springer Verlag, 245-267.
- [M63] Mandelbrot, B., (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36, 394-419.

Analyse de sensibilité

- [B01] Bouleau, N., (2001). Calcul d'erreur complet lipschitzien et formes de Dirichlet. *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 80(9), 961-976.
- [B03] Bouleau, N., (2003). *Error calculus for finance and physics : the language of Dirichlet forms*. De Gruyter.

- [B05] Bouleau, N., (2005). Théorème de Donsker et formes de Dirichlet. Bulletin des Sciences Mathématiques, 129(5), 369-380.
- [BC04] Bouleau, N. and Chorro, C., (2004). Error structures and parameter estimation. Comptes Rendus de l' Académie des sciences Série I, 338, 305-310.
- [C05] Chorro, C., (2005). Convergence in Dirichlet law of certain stochastic integrals. Electronic Journal of Probability, 10, 1005-1025.
- [C08] Chorro, C., (2008). On an extension of the hilbertian central limit theorem to Dirichlet forms. Osaka Journal of Mathematics, 45(2), 457-470.
- [DJ00] Delgado, R. and Jolis, M., (2000). Weak approximation for a class of Gaussian processes. Journal of Applied Probability, 37(2), 400-407.
- [F25] Fisher, R.A., (1925). Theory of statistical information. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 22.

4 Présentation détaillée des travaux de recherche I : Économétrie financière

4.1 Introduction

Dans l'univers Black et Scholes ([BS73]), la dynamique de l'actif risqué est donnée par l'équation différentielle stochastique classique suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (1)$$

où (W_t) est un mouvement Brownien standard. Dans ce cadre, il n'y a aucune ambiguïté à définir le "juste" prix d'un actif contingent via la notion d'absence d'opportunités d'arbitrage. En effet, dans ce marché complet, cette valeur n'est autre que la valeur de tout portefeuille de réplcation. De plus, les prix peuvent être représentés sous la forme d'une espérance conditionnelle sous une unique mesure martingale équivalente dont la densité par rapport à la probabilité historique est donnée par le théorème de Girsanov :

$$e^{\frac{\mu-r}{\sigma} W_T + \left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 \frac{T}{2}}. \quad (2)$$

Cependant, en dépit de sa redoutable efficacité calculatoire, l'hypothèse d'une marche aléatoire Gaussienne pour les rendements logarithmiques a été très tôt contestée. Depuis les travaux de Mandelbrot ([M63]) et Fama ([F65]), différentes propriétés statistiques des rendements financiers ont été mises en lumière. L'explosion récente des outils informatiques a ouvert la voie à de nombreux travaux empiriques tachant de mettre en évidence des régularités communes aux séries financières, en dépit de leur grande hétérogénéité. Il est maintenant communément admis (voir par exemple [T86], [C01] et [P05]) que les séries de rendements journaliers logarithmiques sont caractérisées par

- l'absence d'autocorrélations, l'autocorrélation des carrés ;
- une volatilité non constante présentant des agrégats (volatility clustering) et des asymétries (effet levier) ;
- des distributions à queues épaisses.

La prise en compte de ces faits stylisés dans le cadre de la modélisation stochastique en finance est un sujet majeur qui a mobilisé les chercheurs depuis une trentaine d'années (voir [JYC09] pour une revue récente sur les méthodes en temps continu). En temps discret, un apport majeur a été fourni par Engle [E82] et Bollerslev [B86] via la modélisation ARCH/GARCH qui, à travers une mécanique relativement simple à implémenter, reproduit dans

ses grandes lignes les dynamiques de volatilités. Les modèles de rendements financiers utilisés dans cette section seront issus de cette famille et des nombreuses extensions qu'elle a suscité pour prendre notamment en compte les phénomènes de levier (voir [N91], [DGE93] et [GJR93]) :

On considère donc une économie en temps discret d'horizon $T \in \mathbb{N}^*$ constituée d'un actif sans risque et d'un actif risqué. Soit $(z_t)_{t \in \{1, \dots, T\}}$ une famille de variables aléatoires, indépendantes et identiquement distribuées, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On définit la filtration d'information associée $(\mathcal{F}_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$ où $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $(\mathcal{F}_t = \sigma(z_u; 1 \leq u \leq t))_{t \in \{1, \dots, T\}}$. On suppose que sous la probabilité historique \mathbb{P} , la dynamique de l'actif sans risque $(B_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$ et celle de l'actif risqué $(S_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$ sont données par

$$B_t = B_{t-1}e^r, \quad B_0 = 1, \quad (3)$$

où r est le taux sans risque journalier supposé constant et

$$Y_t = \log \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) = r + m_t + \underbrace{\sqrt{h_t} z_t}_{\varepsilon_t}, \quad S_0 = s \in \mathbb{R}_+, \quad (4)$$

où z_t suit une loi arbitraire $D(0, 1)$ centrée et réduite. Dans l'équation (4), on suppose que m_t est \mathcal{F}_{t-1} mesurable et dépend implicitement d'une prime de risque λ_0 .

Pour la variance conditionnelle des rendements logarithmiques nous prenons

$$h_t = F(z_{t-1}, h_{t-1}) \quad (5)$$

où la fonction $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ est arbitraire mais compatible avec une modélisation de type GARCH(1,1). On supposera de plus que h_0 est constante de sorte que la tribu d'information soit aussi générée par les rendements logarithmiques.

Le choix d'une famille de probabilités réalistes pour les résidus z_t (capables de prendre en compte les phénomènes d'asymétrie et de queues épaisses) soulève plusieurs questions théoriques et empiriques auxquelles nous apportons des éléments de réponses dans les sections suivantes.

4.2 Évaluation des produits dérivés pour les modèles de type GARCH dont les résidus suivent une loi hyperbolique généralisée [CGI12]

Nous présentons dans ce paragraphe un nouveau modèle d'évaluation de produits dérivés en temps discret. Ce modèle s'appuie sur des spécifications de type GARCH pour la dynamique de volatilité de l'actif risqué et sur le choix d'une distribution pertinente pour les résidus : la loi hyperbolique généralisée. Nous sélectionnons dans ce cadre une mesure martingale équivalente via la transformée de Esscher conditionnelle, connue pour être compatible avec la prime de skewness. Après avoir explicité la dynamique risque neutre (qui permet d'obtenir comme corollaire plusieurs modèles de pricing classiques), nous réalisons une étude empirique intensive pour démontrer la capacité de la loi hyperbolique généralisée à produire des erreurs de pricing compétitives.

Dans les modèles en temps discret l'absence d'opportunités d'arbitrage (AOA) est équivalente à l'existence d'une mesure martingale équivalente (MME) pour un nombre fini de dates et d'actifs. Ce résultat connu sous le nom de 'Fundamental Theorem of Asset Pricing' a été démontré dans [DMW90] sans hypothèse sur Ω et dans [HP81] dans le cas où Ω est fini avec des approches très différentes ([BP91] et [S92] fournissent des contre-exemples à l'implication AAO \Rightarrow MME pour un nombre de dates ou d'actifs infini). Néanmoins, lorsque des lois de probabilités continues sont utilisées, le marché devient en général incomplet (voir [JS98]) : il est ainsi impossible de répliquer les actifs contingents européens à l'aide de portefeuilles autofinancés. La notion de prix en absence d'arbitrage au sens de [K81] n'est donc pas unique et se pose alors la question du choix d'une MME économiquement et empiriquement consistante.

Lorsque \mathbb{Q} est une MME, le processus de prix $(C_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$ d'un actif contingent européen d'échéance T , caractérisé par un payoff \mathcal{F}_T mesurable noté C_T , peut s'écrire sous la forme

$$C_t = E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{B_t C_T}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right] = E_{\mathbb{P}} \left[\frac{B_t C_T}{B_T} \frac{L_T}{L_t} \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (6)$$

où

$$L_t = E_{\mathbb{P}} \left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (7)$$

est une martingale sous \mathbb{P} .

La possibilité d'écrire le prix d'un actif contingent sous la forme de l'espérance conditionnelle sous \mathbb{P} du payoff actualisé multiplié par un poids stochastique, nous permet de relier la notion de MME à la notion de facteur d'escompte stochastique introduite dans [HK79] et [HR87] :

Définition 4.1 *Soit $(M_t)_{t \in \{1, \dots, T\}}$ un processus adapté et positif. Ce processus est un facteur d'escompte stochastique si les relations suivantes sont vérifiées $\forall t \in \{0, \dots, T-1\}$:*

$$E_{\mathbb{P}} \left[\frac{B_{t+1} M_{t+1}}{B_t} \mid \mathcal{F}_t \right] = 1 \quad (8)$$

$$E_{\mathbb{P}} \left[\frac{S_{t+1}}{S_t} M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \right] = 1. \quad (9)$$

On déduit de la loi des espérances conditionnelles itérées que

$$E_{\mathbb{P}} \left[\frac{S_T}{S_t} M_{t,T} \mid \mathcal{F}_t \right] = 1 \quad (10)$$

où

$$M_{t,T} = \prod_{k=t+1}^T M_k. \quad (11)$$

Notons que dans la littérature le processus $(e^r M_t)_{t \in \{1, \dots, T\}}$ est connu sous le nom de noyau de prix.

En comparant les équations (8)-(9) et (6)-(7) le lien biunivoque entre la notion de MME et celle de facteur d'escompte stochastique est obtenu grâce aux relations suivantes

$$e^{-r} \frac{L_{t+1}}{L_t} = M_{t+1} \quad (12)$$

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{rT} \prod_{k=1}^T M_k. \quad (13)$$

Ainsi la construction d'une MME et équivalente à la spécification d'un facteur d'escompte stochastique. Ce second point de vue étant souvent privilégié dans la modélisation en temps discret.

Remarque 4.1 *Dans le cas du modèle de Black et Scholes, l'unique MME donnée par le théorème de Girsanov est associée à l'unique facteur d'es-compte stochastique*

$$M_{t+1} = e^{-r - (\frac{\mu-r}{\sigma^2})\log(\frac{S_{t+1}}{S_t}) + (\frac{\mu-r}{2\sigma^2})(\mu+r-\sigma^2)} \quad (14)$$

qui est une fonction exponentielle affine des rendements logarithmiques.

Depuis l'article de Rubinstein [R76], il est connu que la relation (14) peut être justifiée par des arguments d'équilibre économique lorsque les préférences sont données par une fonction d'utilité de type puissance. Reprenant cette idée, Duan [D95] a été le premier à fournir un cadre rigoureux au pricing des actifs contingents pour les modèles GARCH avec résidus Gaussiens en introduisant la notion de 'Local Risk Neutral Valuation Relationship' (LRNVR) :

Définition 4.2 [D95] *Lorsque le résidus sont Gaussiens, une MME \mathbb{Q} satisfait la relation LRNVR si*

- 1) Sachant \mathcal{F}_{t-1} , Y_t suit une loi normale sous \mathbb{Q} ,
- 2) $Var_{\mathbb{Q}}[Y_t | \mathcal{F}_{t-1}] = Var_{\mathbb{P}}[Y_t | \mathcal{F}_{t-1}]$.

La dynamique sous \mathbb{Q} des rendements logarithmiques est alors parfaitement spécifiée :

Proposition 4.1 [D95] *Lorsque \mathbb{Q} satisfait la relation LRNVR, la dynamique sous \mathbb{Q} des rendements logarithmiques est donnée par*

$$Y_t = r - \frac{h_t}{2} + \sqrt{h_t}\xi_t, \quad S_0 = s. \quad (15)$$

$$h_t = F(\xi_{t-1} - \frac{m_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} - \frac{\sqrt{h_t}}{2}, h_{t-1}) \quad (16)$$

où les ξ_t sont des variables aléatoires i.i.d suivant une $\mathcal{N}(0, 1)$ sous \mathbb{Q} .

Duan fournit de plus dans son article, un ensemble de conditions sur les préférences et les dynamiques de consommation permettant de justifier l'existence d'une telle mesure. Il est important de noter que dans la proposition précédente la moyenne conditionnelle m_t et la structure GARCH

F sont tout à fait générales. Elles peuvent être choisies pour des raisons techniques (obtention de formules semi-fermées pour le prix des options de vente ou d'achat de manière à calibrer le modèle grâce à des prix d'options comme dans [HN00]) ou simplement pour reproduire certains faits stylisés. En particulier dans [D95]

$$\begin{cases} m_t = \lambda_0 \sqrt{h_t} - \frac{h_t}{2} \\ F(z_{t-1}, h_{t-1}) = a_0 + a_1 (\varepsilon_{t-1})^2 + b_1 h_{t-1} \end{cases} \quad (17)$$

alors que dans [HN00] un effet levier est introduit

$$\begin{cases} m_t = \lambda_0 h_t \\ F(z_{t-1}, h_{t-1}) = a_0 + a_1 (z_{t-1} - \gamma \sqrt{h_{t-1}})^2 + b_1 h_{t-1}. \end{cases} \quad (18)$$

Dans les deux cas, la proposition 4.1 assure que la dynamique sous \mathbb{Q} est compatible avec l'observation empirique assurant que la distribution risque neutre des rendements présente une asymétrie négative plus importante que la distribution historique. Cependant, alors que les paramètres de levier créent dans les modèles précédents une asymétrie pour les horizons lointains, les innovations journalières sont symétriques (caractère Gaussien). Ceci induit en général des erreurs de prix pour les options proches de l'échéance. Les phénomènes d'asymétrie et de queues épaisses ne peuvent donc être pris en charge dans le cadre de [D95] restreint aux résidus Gaussiens.

Dans un article important [GS94a], Gerber et Shiu proposent une manière élégante de sélectionner une MME dans un cadre Markovien en temps continu en utilisant la transformée de Esscher. Cet outil fut introduit par Esscher [E32] en lien avec des problématiques actuarielles. Contrairement à l'approche de Duan, il permet un large choix pour les distributions des résidus. Cette méthode a été adaptée dans [BDES96] pour le pricing de produits dérivés dans les modèles en temps discret et utilisée par Siu et al. [STY04] (voir aussi [CEFJ10]) dans le cadre de spécifications GARCH. Une formulation équivalente consiste en l'utilisation d'une paramétrisation exponentielle affine pour le facteur d'escompte stochastique (voir [GM07]).

Nous présentons succinctement cette méthodologie : On suppose la forme suivante pour le facteur d'escompte stochastique : $\forall t \in \{1, \dots, T\}$

$$M_t = e^{\theta_t Y_t + \xi_t} \quad (19)$$

avec $Y_t = \log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$ et où θ_t et ξ_t sont des variables aléatoires \mathcal{F}_{t-1} mesurables.

Remarque 4.2 Dans le cadre d'un modèle de Black et Scholes en temps discret, le facteur d'escompte stochastique est de la forme précédente avec $\theta_t = \frac{r-\mu}{\sigma^2}$ et $\xi_t = \frac{(r+\mu-\sigma^2)(\mu-r)}{2\sigma^2} - r$ indépendants de t . Ici la spécification (19) permet de considérer un coefficient d'aversion au risque non constant au cours du temps.

Reste à calculer explicitement le couple $(\theta_{t+1}, \xi_{t+1})$. En considérant les deux actifs présents sur le marché, les relations de pricing (8) et (9) nous donnent les relations suivantes pour les paramètres :

$$\begin{cases} E_{\mathbb{P}}[e^r M_{t+1} | \mathcal{F}_t] = 1 \\ E_{\mathbb{P}}[e^{Y_{t+1}} M_{t+1} | \mathcal{F}_t] = 1. \end{cases} \quad (20)$$

Pour tout $t \in \{0, \dots, T-1\}$, on note $\mathbb{G}_{Y_{t+1}|\mathcal{F}_t}^{\mathbb{P}}$ la fonction génératrice des moments conditionnelle de Y_{t+1} sachant \mathcal{F}_t , sous \mathbb{P} , qui est définie sur un ensemble convexe $\mathcal{D}_{\mathbb{G}_{Y_{t+1}|\mathcal{F}_t}^{\mathbb{P}}}$ non réduit à $\{0\}$. On introduit la fonction $\Phi_t : \Theta_t \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\Phi_t(\theta) = \log\left(\frac{\mathbb{G}_{Y_{t+1}|\mathcal{F}_t}^{\mathbb{P}}(1+\theta)}{\mathbb{G}_{Y_{t+1}|\mathcal{F}_t}^{\mathbb{P}}(\theta)}\right)$$

où Θ_t est l'ensemble $\{\theta \in \mathbb{R}; \theta \text{ et } 1+\theta \in \mathcal{D}_{\mathbb{G}_{Y_{t+1}|\mathcal{F}_t}^{\mathbb{P}}}\}$.

Ainsi le système précédent se réécrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} \mathbb{G}_{Y_{t+1}|\mathcal{F}_t}^{\mathbb{P}}(\theta_{t+1}) = e^{-(r+\xi_{t+1})} \\ \mathbb{G}_{Y_{t+1}|\mathcal{F}_t}^{\mathbb{P}}(\theta_{t+1} + 1) = e^{-\xi_{t+1}} \end{cases} \quad (21)$$

nous avons donc à résoudre

$$\begin{cases} \Phi_t(\theta_{t+1}) = r \\ \mathbb{G}_{Y_{t+1}|\mathcal{F}_t}^{\mathbb{P}}(\theta_{t+1} + 1) = e^{-\xi_{t+1}}. \end{cases} \quad (22)$$

La proposition suivante montre que, sous les contraintes (20), il n'y a aucune ambiguïté quant au choix du facteur d'escompte (19) .

Proposition 4.2 [GS94b] Lorsque $\mathbb{G}_{Y_{t+1}|\mathcal{F}_t}^{\mathbb{P}}$ est deux fois dérivable, l'équation $\Phi_t(\theta) = r$ admet au plus une solution.

Dorénavant, on supposera pour tout $t \in \{0, \dots, T-1\}$ que le système (22) admet une unique solution $(\theta_{t+1}^q, \xi_{t+1}^q)$ (des conditions suffisantes d'existence peuvent être trouvées dans [CEFJ10]). On déduit de la relation (13) la forme de la MME associée \mathbb{Q}^{ess}

$$\frac{d\mathbb{Q}^{ess}}{d\mathbb{P}} = e^{rT} \prod_{k=1}^T M_k = \prod_{k=1}^T \frac{e^{\theta_k^q Y_k}}{\mathbb{G}_{Y_k | \mathcal{F}_{k-1}}^{\mathbb{P}}(\theta_k^q)} \quad (23)$$

qui n'est autre que la transformée de Esscher conditionnelle (de paramètres θ_k^q) de la probabilité historique. La proposition suivante décrit la dynamique de l'actif risqué sous \mathbb{Q}^{ess} :

Proposition 4.3 *Sous la probabilité \mathbb{Q}^{ess} , la fonction génératrice des moments conditionnelle de Y_t , sachant \mathcal{F}_{t-1} , est donnée par*

$$\mathbb{G}_{Y_t | \mathcal{F}_{t-1}}^{\mathbb{Q}^{ess}}(u) = E_{\mathbb{P}} \left[e^{uY_t} \frac{e^{\theta_t^q Y_t}}{\mathbb{G}_{Y_t | \mathcal{F}_{t-1}}^{\mathbb{P}}(\theta_t^q)} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = \frac{\mathbb{G}_{Y_t | \mathcal{F}_{t-1}}^{\mathbb{P}}(\theta_t^q + u)}{\mathbb{G}_{Y_t | \mathcal{F}_{t-1}}^{\mathbb{P}}(\theta_t^q)}. \quad (24)$$

En suivant [CEFJ10] nous sommes capables de caractériser la variance et la skewness risques neutres à l'aide de la proposition précédente. On note $\Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{P}}$ (resp. $\Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{Q}^{ess}}$) le logarithme de la fonction génératrice des moments conditionnelle (supposée régulière) de l'innovation ε_t , sachant \mathcal{F}_{t-1} , sous \mathbb{P} (resp. \mathbb{Q}^{ess}). D'après l'équation (24)

$$\Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{Q}^{ess}}(u) = \Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{P}}(u + \theta_t^q) - \Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{P}}(\theta_t^q),$$

ainsi,

$$E_{\mathbb{Q}^{ess}}[\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = \left(\Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{Q}^{ess}} \right)'(0) = \left(\Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{P}} \right)'(\theta_t^q)$$

et on définit l'innovation risque neutre par $\varepsilon_t^* = \varepsilon_t - \left(\Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{P}} \right)'(\theta_t^q)$. Nous avons en particulier

$$\Psi_{\varepsilon_t^*}^{\mathbb{Q}^{ess}}(u) = \Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{Q}^{ess}}(u) - u \left(\Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{P}} \right)'(\theta_t^q)$$

et la variance (h_t^*) et skewness (s_t^*) conditionnelles de ε_t^* sous \mathbb{Q}^{ess} sont égales à

$$h_t^* = \left(\Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{P}} \right)''(\theta_t^q) = h_t \frac{\left(\Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{P}} \right)''(\theta_t^q)}{\left(\Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{P}} \right)''(0)}$$

$$s_t^* = \frac{(\Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{P}})'''(\theta_t^q)}{(h_t^*)^{\frac{3}{2}}} = s_t \frac{(\Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{P}})'''(\theta_t^q)}{(\Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{P}})'''(0)} \left(\frac{h_t}{h_t^*} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

En supposant l'approximation suivante

$$\begin{cases} (\Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{P}})''(\theta_t^q) \approx (\Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{P}})''(0) + (\Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{P}})'''(0)\theta_t^q + (\Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{P}})''''(0)\frac{(\theta_t^q)^2}{2} \\ (\Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{P}})'''(\theta_t^q) \approx (\Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{P}})'''(0) + (\Psi_{\varepsilon_t}^{\mathbb{P}})''''(0)\theta_t^q \end{cases}$$

on obtient finalement

$$\begin{cases} h_t^* \approx h_t + s_t(h_t)^{\frac{3}{2}}\theta_t^q + \frac{(\theta_t^q)^2}{2}h_t^2k_t \\ s_t^* \approx s_t \left(\frac{h_t}{h_t^*} \right)^{\frac{3}{2}} + k_t \frac{h_t^2}{(h_t^*)^{\frac{3}{2}}}\theta_t^q \end{cases}$$

où k_t est le kurtosis conditionnel de ε_t sous \mathbb{P} . Il est intéressant de constater que dans le cas empiriquement avéré où $s_t \leq 0$ et $k_t \geq 0$, on a $h_t^* \geq h_t$ car θ_t^q est en général strictement négatif. Ainsi, lorsque $s_t \leq 0$ et $k_t \geq 0$ alors $s_t^* \leq s_t$.

Ces inégalités sont fondamentales et sont compatibles avec des faits stylisés classiques. Elles sont une justification théorique forte du choix de la transformée de Esscher vis à vis de ses concurrents naturels (voir par exemple [EM98] où une extension discrète du théorème de Girsanov permet d'obtenir, en toute généralité, une MME cependant incapable de reproduire ces caractéristiques). De plus, lorsque $s_t = k_t = 0$, alors $h_t = h_t^*$. Dans l'exemple suivant on retrouve ce dernier point dans un cadre Gaussien :

Exemple 4.1 *Dans le cas de résidus Gaussiens, on déduit de (22) que $\theta_t^q = -(\frac{1}{2} + \frac{m_t}{h_t})$. Ainsi,*

$$\mathbb{G}_{Y_t|\mathcal{F}_{t-1}}^{\mathbb{Q}^{ess}}(u) = e^{u(r - \frac{h_t}{2}) + \frac{u^2 h_t}{2}}$$

et on retrouve ici la même dynamique que celle observée dans la proposition 4.1.

D'un point de vue pratique, il est important de caractériser précisément la dynamique sous \mathbb{Q}^{ess} de manière à calculer explicitement ou par méthode de Monte-Carlo les prix d'options. Nous avons démontré dans [CGI12] que sous des hypothèses très générales, la transformée de Esscher permet une remarquable stabilité entre les dynamique sous \mathbb{P} et sous \mathbb{Q}^{ess} :

Proposition 4.4 1) Pour tout $t \in \{1, \dots, T\}$, si la distribution conditionnelle de Y_t sachant \mathcal{F}_{t-1} est infiniment divisible sous \mathbb{P} et si $G_{Y_t|\mathcal{F}_{t-1}}^{\mathbb{P}}$ est deux fois dérivable, alors, la distribution conditionnelle de Y_t sachant \mathcal{F}_{t-1} est aussi infiniment divisible sous \mathbb{Q}^{ess} et admet un moment d'ordre 2.

2) Pour tout $t \in \{1, \dots, T\}$, si la distribution conditionnelle de Y_t sachant \mathcal{F}_{t-1} est une mixture finie sous \mathbb{P} elle l'est aussi sous \mathbb{Q}^{ess} .

Nous précisons maintenant le résultat précédent lorsque la loi des résidus est une loi hyperbolique généralisée.

Pour reproduire les faits stylisés caractérisant les lois conditionnelles de la plupart des séries financières, il semble raisonnable (voir [C01]) de porter son choix sur une famille de probabilités possédant au moins quatre paramètres : un paramètre de position, un paramètre d'échelle (ou de volatilité), un paramètre d'asymétrie (skewness) et un paramètre prenant en charge l'épaisseur des queues de distribution (kurtosis). À ces quatre paramètres est souvent ajouté un paramètre de forme permettant de décrire certaines sous-familles possédant des propriétés analytiques particulières. La loi hyperbolique généralisée (GH) introduite par Barndorff-Nielsen [B77] est connue pour être remarquablement adaptée à l'étude des séries de données observées en finance. Elle a souvent été utilisée avec succès aussi bien en temps discret ([GZ09]) qu'en temps continu, où elle sert de base à la construction de processus exponentiels de Lévy ([EP02]). Pour $(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) \in \mathbb{R}^5$ vérifiant $\delta > 0$ et $\alpha > |\beta| > 0$, on définit la distribution hyperbolique généralisée $GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$ par sa densité

$$d_{GH}(x, \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}/\delta)^\lambda}{\sqrt{2\pi}K_\lambda(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} e^{\beta(x-\mu)} \frac{K_{\lambda-1/2}(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2})}{(\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}/\alpha)^{1/2-\lambda}} \quad (25)$$

où K_λ est la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce. Lorsque le paramètre de forme λ appartient à $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, les propriétés élémentaires de la fonction de Bessel permettent une expression simplifiée de cette densité et la définition de sous-familles intéressantes. En particulier pour $\lambda = 1$, on obtient la distribution hyperbolique (HYP) dont la log-densité est une hyperbole. Pour $\lambda = -\frac{1}{2}$, on retrouve la loi normale inverse Gaussienne (NIG) qui est stable par convolutions.

La fonction génératrice des moments associée est donnée par

$$\mathbb{G}_{GH}(u) = e^{\mu u} \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + u)^2} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{K_{\lambda}(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2})}{K_{\lambda}(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}, \quad |\beta + u| < \alpha. \quad (26)$$

En particulier, cette loi possède des moments de tout ordre ce qui la rend compatible avec le caractère Gaussien des rendements logarithmiques observés à horizon lointain, tout en possédant des queues de distribution plus épaisses que dans le cas Gaussien :

$$d_{GH}(x, \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) \approx |x|^{\lambda-1} e^{(\mp\alpha+\beta)x}$$

lorsque $x \rightarrow \pm\infty$.

Remarque 4.3 *De manière à standardiser cette distribution on suppose implicitement que $(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$ vérifient les relations suivantes*

$$\begin{cases} E_{\mathbb{P}}[z_t] = \mu + \frac{\delta\beta}{\gamma} \frac{K_{\lambda+1}(\delta\gamma)}{K_{\lambda}(\delta\gamma)} = 0 \\ Var_{\mathbb{P}}[z_t] = \frac{\delta}{\gamma} \frac{K_{\lambda+1}(\delta\gamma)}{K_{\lambda}(\delta\gamma)} + \frac{\beta^2\delta^2}{\gamma^2} \left(\frac{K_{\lambda+2}(\delta\gamma)K_{\lambda}(\delta\gamma) - K_{\lambda+1}^2(\delta\gamma)}{K_{\lambda}^2(\delta\gamma)} \right) = 1. \end{cases} \quad (27)$$

où $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

De plus, cette famille est stable par transformation affine ([BB81]) ce qui permet de déduire la loi conditionnelle des rendements logarithmiques de celle des résidus : lorsque les z_t suivent sous \mathbb{P} une $GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$ la loi conditionnelle sous \mathbb{P} de Y_t sachant \mathcal{F}_{t-1} est une

$$GH \left(\lambda, \frac{\alpha}{\sqrt{h_t}}, \frac{\beta}{\sqrt{h_t}}, \delta\sqrt{h_t}, r + m_t + \mu\sqrt{h_t} \right)$$

et donc pour $|\beta + u\sqrt{h_t}| < \alpha$,

$$\mathbb{G}_{Y_t|\mathcal{F}_{t-1}}^{\mathbb{P}}(u) = e^{u(\mu\sqrt{h_t} + r + m_t)} \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + u\sqrt{h_t})^2} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{K_{\lambda}(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + u\sqrt{h_t})^2})}{K_{\lambda}(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}. \quad (28)$$

Le résultat suivant assure en général l'existence d'une solution à l'équation (22). Sauf cas particuliers, cette solution n'est pas explicite et doit être approchée numériquement.

Proposition 4.5 [CGI12] Pour une loi $GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$ avec $\alpha > \frac{1}{2}$, on a :

- 1) Si $\lambda \geq 0$, $\log\left(\frac{\mathbb{G}_{GH}(1+\theta)}{\mathbb{G}_{GH}(\theta)}\right) = r$ admet une unique solution,
- 2) Si $\lambda < 0$, $\log\left(\frac{\mathbb{G}_{GH}(1+\theta)}{\mathbb{G}_{GH}(\theta)}\right) = r$ admet une unique solution si et seulement si $\mu - C < r < \mu + C$ où

$$C = \log\left(\frac{\Gamma[-\lambda]}{2^{\lambda+1}}\right) - \log\left(\frac{K_\lambda(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\alpha - 1)^2})}{[\delta\sqrt{\alpha^2 - (\alpha - 1)^2}]^\lambda}\right).$$

La constante C est strictement positive car $\frac{d}{dx} \frac{K_\lambda(x)}{x^\lambda} = -\frac{K_{\lambda+1}(x)}{x^\lambda} < 0$.

La dynamique de l'actif risqué sous la MME \mathbb{Q}^{ess} est donnée par la proposition suivante qui est une conséquence de la proposition 4.3 :

Proposition 4.6 [CGI12] Sous \mathbb{Q}^{ess} , la loi conditionnelle de Y_t sachant \mathcal{F}_{t-1} est une

$$GH\left(\lambda, \frac{\alpha}{\sqrt{h_t}}, \frac{\beta}{\sqrt{h_t}} + \theta_t^q, \delta\sqrt{h_t}, r + m_t + \mu\sqrt{h_t}\right). \quad (29)$$

Ainsi, sous \mathbb{Q}^{ess} ,

$$Y_t = r + m_t + \underbrace{\sqrt{h_t}\xi_t}_{\varepsilon_t^*}, \quad S_0 = s, \quad (30)$$

où les ξ_t sont des variables aléatoires \mathcal{F}_t mesurables telles que sachant \mathcal{F}_{t-1} ,

$$\xi_t \hookrightarrow GH(\lambda, \alpha, \beta + \sqrt{h_t}\theta_t^q, \delta, \mu). \quad (31)$$

La loi GH est en particulier stable sous ce changement de probabilité.

Remarque 4.4 Il est possible de retrouver le résultat précédent en utilisant la proposition 4.4 et le fait que pour la loi infiniment divisible (GH) la représentation de Kolmogorov est connue explicitement (voir par exemple [GIL13] qui utilise cette approche pour $\lambda = -\frac{1}{2}$).

Il est bien connu ([EH03]) que la loi hyperbolique généralisée permet d'obtenir, comme sous famille ou en passant à la limite, de nombreuses lois classiques. En utilisant la proposition 4.6, on retrouve la dynamique risque neutre de plusieurs modèles de pricing classiques dont le modèle Gaussien ([D95] et [HN00]), le modèle Gamma ([STY04] où les auteurs supposent dans (4) que $z_t = \frac{x_t - \frac{a}{b}}{\sqrt{\frac{a}{b^2}}}$ où x_t suit une loi $G_a(a, b)$) ou le modèle NIG. Dans ces trois cas le paramètre θ_t^q est explicite.

Proposition 4.7 1) Lorsque $\mu = \beta = 0$ et $\alpha, \delta \rightarrow +\infty$ avec $\frac{\alpha}{\delta} \rightarrow 1$, en passant à la limite dans (29), on obtient la même dynamique risque neutre Gaussienne que dans [D95].

2) Lorsque $\mu = 0$, $\lambda = a > 0$, $\alpha, \beta \rightarrow +\infty$, $\alpha\delta^2 \rightarrow 0$ et $\alpha - \beta = b > 0$, le modèle de pricing GARCH avec résidus GH converge sous \mathbb{Q}^{ess} vers la dynamique risque neutre obtenue dans [STY04].

3) Lorsque $\lambda = -\frac{1}{2}$, la loi conditionnelle sous \mathbb{Q}^{ess} de Y_t sachant \mathcal{F}_{t-1} est une

$$NIG\left(\frac{\alpha}{\sqrt{h_t}}, \frac{\beta}{\sqrt{h_t}} + \theta_t^q, \delta\sqrt{h_t}, r + m_t + \mu\sqrt{h_t}\right) \quad (32)$$

où

$$\theta_t^q = -\frac{1}{2} - \frac{\alpha\beta\sqrt{\delta}}{\sqrt{h_t}\gamma^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\alpha m_t + \sqrt{\delta h_t}\beta\gamma)^2}{h_t\delta\gamma^3} \left(\frac{4\alpha^4\delta^2}{h_t\delta\gamma^3 + (\alpha m_t + \sqrt{\delta h_t}\beta\gamma)^2} - 1\right)} \quad (33)$$

avec $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

Nous avons réalisé dans [CGI12] une étude empirique intensive pour comparer les performances de pricing des modèles de type GARCH lorsque les résidus sont modélisés par des lois GH. Nous avons pour cela testé les spécifications GARCH suivantes, connues pour leur prise en compte du phénomène de levier :

- Modèle EGARCH ([N91])

$$\log(h_t) = a_0 + a_1 (|z_{t-1}| - \gamma z_{t-1}) + b_1 \log(h_{t-1}) \quad (34)$$

qui assure la positivité de la volatilité sans hypothèse sur les coefficients,

- Modèle APARCH ([DGE93])

$$h_t^{\frac{\Delta}{2}} = a_0 + a_1 (|\varepsilon_{t-1}| - \gamma \varepsilon_{t-1})^{\Delta} + b_1 h_{t-1}^{\frac{\Delta}{2}} \quad (35)$$

où $\Delta > 0$ et $(a_0, a_1, b_1) \in \mathbb{R}_+$ pour assurer la positivité,

- Modèle GJR model ([GJR93]) qui est un cas particulier ($\Delta = 2$) du modèle APARCH fréquemment utilisé.

La distribution hyperbolique généralisée a été comparée à une mixture de deux Gaussiennes, notamment car ces deux familles de lois possèdent le même nombre de paramètres. Les erreurs de pricing ont été calculées en utilisant une technique de fenêtre glissante sur deux jeux d'options européennes consécutifs basés sur les indices CAC40 et SP500 entre le 2 Janvier 2006 et le 26 Octobre 2007. Pour chaque jour ouvré compris entre ces deux dates, les modèles sont estimés par quasi-maximum de vraisemblance (en présence de paramètres de nuisance) à l'aide d'un historique de 4000 rendements logarithmiques et les prix d'options calculés par méthode de Monte Carlo. Il est important de garder en tête (cf section suivante) que le pricing d'options européennes, dans ce cadre, dépend de toute la trajectoire du sous-jacent car la connaissance de la dynamique sous \mathbb{Q}^{ess} nécessite le calcul (numérique) de θ_t^q à chaque instant jusqu'à l'échéance du contrat. La capacité de la loi hyperbolique généralisée à produire des erreurs de pricing compétitives est sans équivoque, notamment pour le cas de l'indice CAC40 où la taille des erreurs est comparable à ce que l'on obtient en général à l'aide d'un exercice de calibration (voir table 1).

Nous évoquons dans les sections suivantes deux problématiques empiriques (neutralisation du risque et estimation) liées au modèle de pricing précédent.

4.3 Une alternative à la transformée de Esscher : La simulation par martingales empiriques [CGI10a]

L'utilisation de la loi hyperbolique généralisée pour les résidus d'un modèle de type GARCH ne permet pas, en général, d'obtenir une formule semi-fermée pour le prix des actifs contingents européens. L'emploi d'approximations de type Monte Carlo peut parfois s'avérer couteux en temps de calcul. Nous présentons, dans ce paragraphe, une procédure de neutralisation du risque alternative qui malgré sa simplicité permet d'obtenir des performances de pricing tout à fait comparables à celles obtenues en utilisant la transformée de Esscher conditionnelle.

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, la transformée de Esscher fournit un outil de travail très souple pour le pricing des produits dérivés en temps discret lorsque des résidus non Gaussiens sont considérés. Néanmoins, le pricing d'options européennes dans ce cadre dépend de toute la trajectoire du sous-jacent car la connaissance de la dynamique sous \mathbb{Q}^{ess}

.25<Maturité<.5						
Moneyiness	<.8	[.8-.9]	[.9-1]	[1-1.1]	[1.1-1.2]	>1.2
BS	0.049	0.073	0.234	1.694	20.504	56.189
HN	0.043	0.069	0.219	1.560	25.422	73.120
EGARCH-MN	0.055	0.077	0.174	0.656	6.604	55.893
EGARCH-GH	0.046	0.058	0.118	0.294	0.989	1.492
APARCH-MN	0.053	0.084	0.189	1.234	21.655	57.764
APARCH-GH	0.046	0.063	0.126	0.553	3.243	4.895
.5<Maturité<1						
Moneyiness	<.8	[.8-.9]	[.9-1]	[1-1.1]	[1.1-1.2]	>1.2
BS	0.067	0.122	0.252	0.749	2.818	9.852
HN	0.057	0.120	0.248	0.766	3.143	9.615
EGARCH-MN	0.069	0.101	0.152	0.384	1.245	4.542
EGARCH-GH	0.055	0.071	0.080	0.181	0.343	0.699
APARCH-MN	0.073	0.123	0.139	0.557	2.127	7.542
APARCH-GH	0.058	0.081	0.100	0.278	0.743	3.802
Maturité>1						
Moneyiness	<.8	[.8-.9]	[.9-1]	[1-1.1]	[1.1-1.2]	>1.2
BS	0.132	0.215	0.361	0.664	1.379	3.064
HN	0.139	0.220	0.387	0.727	1.525	3.549
EGARCH-MN	0.125	0.150	0.177	0.272	0.534	1.287
EGARCH-GH	0.106	0.111	0.088	0.104	0.169	0.307
APARCH-MN	0.119	0.168	0.194	0.459	1.282	2.876
APARCH-GH	0.104	0.124	0.137	0.221	0.454	1.124

TABLE 1 – Erreur absolue relative de pricing pour les options européennes sur le CAC 40.

nécessite le calcul (numérique) de θ_t^q à chaque instant jusqu'à l'échéance du contrat. Nous avons testé dans [CGI10a] une procédure de neutralisation du risque plus élémentaire (la simulation par martingales empiriques) inspirée de la technique de réduction de variance proposée dans [DS98]. L'idée sous-jacente est basée sur le fait que, lorsque aucune formule semi-fermée n'est disponible, le prix (en l'absence d'opportunités d'arbitrage) d'un actif contingent doit être approché par méthodes de Monte Carlo. Cette approximation peut parfois conduire à la violation de certaines inégalités d'arbitrage. Duan et Simonato ont démontré dans [DS98] l'intérêt de travailler

avec une version modifiée de la dynamique sous-jacente de manière à forcer la propriété de martingalité. Cette approche, associée à un exercice de calibration, est utilisée dans un esprit comparable au notre dans [BAEM08]. On considère N réalisations indépendantes $(S_{T,i})_{i \in \{1, \dots, N\}}$ de la valeur finale de l'actif risqué (4) sous \mathbb{P} . L'approche par martingales empiriques revient à remplacer l'échantillon précédent par

$$\tilde{S}_{T,i} = \frac{S_{T,i}}{1/N \sum_{i=1}^N S_{T,i}} S_t e^{r(T-t)}. \quad (36)$$

Ainsi, la moyenne empirique des $\tilde{S}_{T,i}$ est égale à $S_t e^{r(T-t)}$ qui est la valeur de l'espérance conditionnelle de S_T sachant \mathcal{F}_t sous toute MME. Dans ce cas, le prix à l'instant t d'une option d'achat européenne de strike K et de maturité T est approché par

$$e^{-r(T-t)} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{S}_{T,i} - K)_+.$$

Nous avons effectué dans [CGI10a] une étude empirique des erreurs de pricing obtenues pour un modèle EGARCH avec résidus GH lorsque la simulation par martingales empiriques est utilisée. Ces erreurs ont été comparées à celles obtenues par la méthodologie développée dans la section précédente. Les résultats pour un jeu d'options basé sur l'indice CAC40 entre le 2 Janvier 2006 et le 26 Octobre 2007 ont montré que les erreurs sont quasi-identiques :

		.5 < Maturité < 1				
		[.8-.9]	 [.9-1]	[1-1.1]	[1.1-1.2]	> 1.2
ESS	EGARCH GH	0.0725	0.034	0.089	0.211	0.473
SME	EGARCH GH	0.0703	0.032	0.112	0.225	0.400
		Maturité > 1				
		[.8-.9]	 [.9-1]	[1-1.1]	[1.1-1.2]	> 1.2
ESS	EGARCH GH	0.120	0.088	0.069	0.118	0.261
SME	EGARCH GH	0.119	0.087	0.067	0.119	0.266

TABLE 2 – Erreur absolue relative de pricing pour les options européennes sur le CAC 40 obtenues à partir d'un modèle EGARCH GH lorsque la neutralisation du risque est obtenue par transformée de Esscher (ESS) ou simulation par martingales empiriques (SME).

Le facteur prépondérant semble dans ce cas être la capacité de la loi GH à reproduire les caractéristiques empiriques des résidus.

4.4 Une nouvelle méthode d'estimation : REC [CGI10b]

La prise en compte des phénomènes d'asymétrie est un facteur fondamental de la modélisation des séries financières. Dans les modèles de type GARCH, cette prise en charge s'effectue à la fois via le paramètre de levier présent dans la structure de volatilité mais aussi via l'utilisation de lois de probabilités alternatives pour les résidus. Ainsi, deux jeux de paramètres très différents ont un impact commun sur la skewness inconditionnelle. Nous présentons dans ce paragraphe une nouvelle méthode d'estimation récursive où chacune de ces familles de paramètres est estimée séparément. Cette méthode permet notamment d'obtenir des profils de densités conditionnelles et de fonctions de réponse de volatilité intrinsèquement liés aux données considérées : ils sont remarquablement stables pour les différents modèles étudiés.

Le passage de la loi normale à une loi hyperbolique généralisée pour modéliser la distribution des résidus d'une spécification GARCH se traduit inévitablement par une augmentation du nombre de paramètres à évaluer. Du point de vue du pricing des produits dérivés, cette augmentation est, comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, nécessaire pour obtenir des erreurs raisonnables. Elle pose cependant des questions concernant l'estimation des modèles. En effet, dans un modèle de type GARCH où les résidus sont non Gaussiens, les paramètres de volatilité et les paramètres de distribution ont un impact commun sur l'asymétrie et les queues de distribution (voir par exemple [BRT03] où l'expression exacte du kurtosis inconditionnel pour le modèle GARCH classique permet de comprendre l'effet joint des deux familles de paramètres).

Nous avons considéré dans [CGI10b], un modèle non Gaussien et centré de type GARCH(1,1) : $\forall t \in \{1, \dots, T\}$,

$$Y_t = \sqrt{h_t} z_t, \quad z_0 = x \in \mathbb{R}, \quad (37)$$

$$h_t = F_{\theta^V}(z_{t-1}, h_{t-1}) \quad (38)$$

où les $(z_t)_{t \in \{1, \dots, T\}}$ sont des variables aléatoires i.i.d centrées et réduites dont la loi appartient à une famille de densités (d_{θ^D}) paramétrée par le vecteur θ^D et où $F_{\theta^V} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ est indexée par le vecteur θ^V .

Partant d'observations (y_1, \dots, y_T) , nous avons étudié trois méthodes d'estimation différentes du vecteur $\theta = (\theta^V, \theta^D)$. Nous avons distingué une

méthode directe (estimant les deux familles de paramètres à la fois) qui n'est autre que le maximum de vraisemblance (MV), une méthode en deux étapes (estimant de manière séparée les deux familles de paramètres) basée sur le quasi-maximum de vraisemblance (QMV) et une méthode récursive (REC) partant de l'estimation (QMV) et maximisant alternativement la log-vraisemblance pour les paramètres de volatilité et de distribution. Les détails méthodologiques sont rappelés ci-dessous :

Lorsque (y_1, \dots, y_T) est une réalisation du modèle précédent il est possible d'estimer le paramètre $\theta = (\theta^V, \theta^D)$ en utilisant une version conditionnelle du classique maximum de vraisemblance. En effet, la log-vraisemblance conditionnelle basée sur les observations (y_1, \dots, y_T) est donnée par

$$L_T(y_1, \dots, y_T | \theta) = \sum_{t=1}^T l_t(y_t | y_1, \dots, y_{t-1}, \theta) \quad (39)$$

où

$$l_t(y_t | y_1, \dots, y_{t-1}, \theta) = -\frac{\log(h_t)}{2} + \log \left[d_{\theta^D} \left(\frac{y_t}{\sqrt{h_t}} \right) \right]. \quad (40)$$

L'estimateur (MV) est alors défini par $\hat{\theta}_T = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} L_T(y_1, \dots, y_T | \theta)$. On peut trouver dans [S05] Chap.6 des conditions très générales de consistance et de normalité asymptotique pour cet estimateur. Il est cependant bon de remarquer, qu'en dépit de son efficacité, cette méthode est très sensible à de mauvaises spécifications de la densité conditionnelle ([NS97]). L'ensemble (d_{θ^D}) doit être suffisamment riche pour prévenir les problèmes d'inconsistance. D'un point de vue numérique cela conduit à des exercices d'estimation pouvant faire intervenir un nombre conséquent de paramètres.

Permettant de passer outre les problèmes de spécifications des lois conditionnelles, l'estimateur (QMV) est probablement la technique d'estimation des séries temporelles hétéroscédastiques la plus populaire. La log-vraisemblance (39) est considérée comme si les z_t suivaient une loi $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$L_T(y_1, \dots, y_T | \theta^V) = \sum_{t=1}^T -\frac{1}{2} \left(\log(2\pi) + \log(h_t) + \frac{(y_t)^2}{h_t} \right) \quad (41)$$

et l'estimateur (QMV) $\widetilde{\theta}_T^V$ est l'argument maximal de (41). Une propriété remarquable est le fait que l'hypothèse Gaussienne ne soit pas nécessaire

pour assurer un bon comportement asymptotique : dans le cas du modèle GARCH classique des conditions très faibles peuvent être trouvées dans [FZ10] Chap. 7, cependant, pour des spécifications GARCH plus générales seuls des résultats récents et partiels sont disponibles (voir [S05] pour le modèle AGARCH, [W12] pour le EGARCH(1,1) et [FWZ12] pour le log-GARCH). Dans un second temps le paramètre de nuisance θ^D est estimé à partir des résidus obtenus précédemment $\left(\frac{y_1}{\sqrt{h_1(\theta_T^V)}}, \dots, \frac{y_T}{\sqrt{h_T(\theta_T^V)}} \right)$ en maximisant

$$\sum_{t=1}^T \log \left[d_{\theta^D} \left(\frac{y_t}{\sqrt{h_t(\theta_T^V)}} \right) \right].$$

Un des intérêts de cette approche est de considérer séparément les deux familles de paramètres réduisant en particulier la dimension des problèmes d'optimisation sous-jacents même si les estimateurs peuvent perdre en efficacité (voir [FZ10] Chap.9).

Enfin, pour prévenir l'estimateur (QMV) de sa possible inefficacité tout en conservant deux procédures d'estimation pour chaque famille de paramètres nous avons proposé une méthode empirique récursive (REC) :

1. On part de l'estimateur (QMV) $\hat{\theta}_T^1 = (\hat{\theta}_T^D, \hat{\theta}_T^V)$.
2. On réestime le paramètre de volatilité θ^V en maximisant

$$\sum_{t=1}^T -\frac{\log(h_t)}{2} + \log \left[d_{\hat{\theta}_T^D} \left(\frac{y_t}{\sqrt{h_t}} \right) \right]$$

et on obtient $\hat{\theta}_T^{2,V}$.

3. On réestime le paramètre de distribution θ^D en maximisant

$$\sum_{t=1}^T \log \left[d_{\theta^D} \left(\frac{y_t}{\sqrt{h_t(\hat{\theta}_T^{2,V})}} \right) \right].$$

On obtient $\hat{\theta}_T^{2,D}$ et $\hat{\theta}_T^2 = (\hat{\theta}_T^{2,D}, \hat{\theta}_T^{2,V})$.

4. On reprend l'étape 2.

Une étude empirique de ces trois méthodes d'estimation a été conduite dans [CGI10b]. Nous avons dans un premier temps étudié la consistance

des méthodes pour quatre jeux de données simulés à partir du modèle (37)-(38). Notre choix s'est porté pour la structure de volatilité sur les modèles EGARCH et APARCH (incluant un paramètre de levier) combinés aux lois hyperbolique généralisée et mixture de deux Gaussiennes pour les innovations. Le critère retenu pour comparer la qualité d'estimation est l'erreur quadratique relative. Nous avons également mis en évidence les pourcentages de convergence et les temps de calcul associés. La procédure REC s'avère très compétitive d'un point de vue de la consistance, même si son caractère récursif peut allonger substantiellement le temps de calcul et réduire le pourcentage de convergence. En pratique, un compromis acceptable est obtenu au bout de dix itérations de (REC). Nous avons également testé les différentes méthodes sur des données réelles issues de l'indice SP500 pris entre 1998 et 2003 appliquant pour cela une version in sample du test de vraisemblance d'Amisano et Giacomini ([AG07]) : les modèles estimés par (REC) possèdent sans équivoque un pouvoir prédictif supérieur aux autres méthodes notamment (QMV). Enfin nous avons mis en évidence (voir figures ci-dessous) une propriété de stabilité très importante de la méthode récursive. En effet, lorsque les quatre différents modèles sont estimés par (REC), les fonctions de réponse de la volatilité (au sens de [EN93]) et les distributions conditionnelles associées sont quasi-identiques et semblent ainsi être intrinsèquement liées aux données considérées. Cette homogénéité remarquable est à mettre en contraste avec les résultats hétérogènes obtenus par (MV) où l'estimation directe des deux familles de paramètres semble induire des profils très sensibles au modèle choisi.

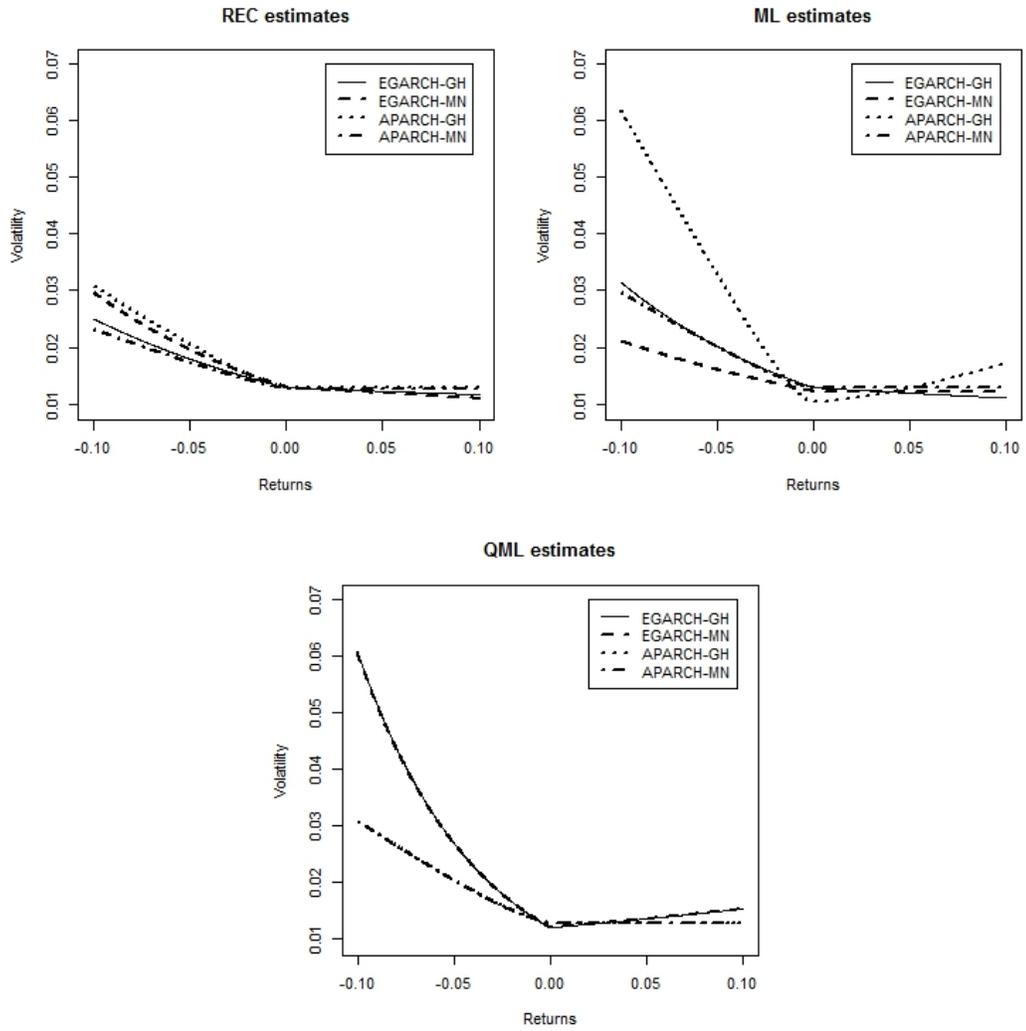


FIGURE 1 – Fonctions de réponse de la volatilité

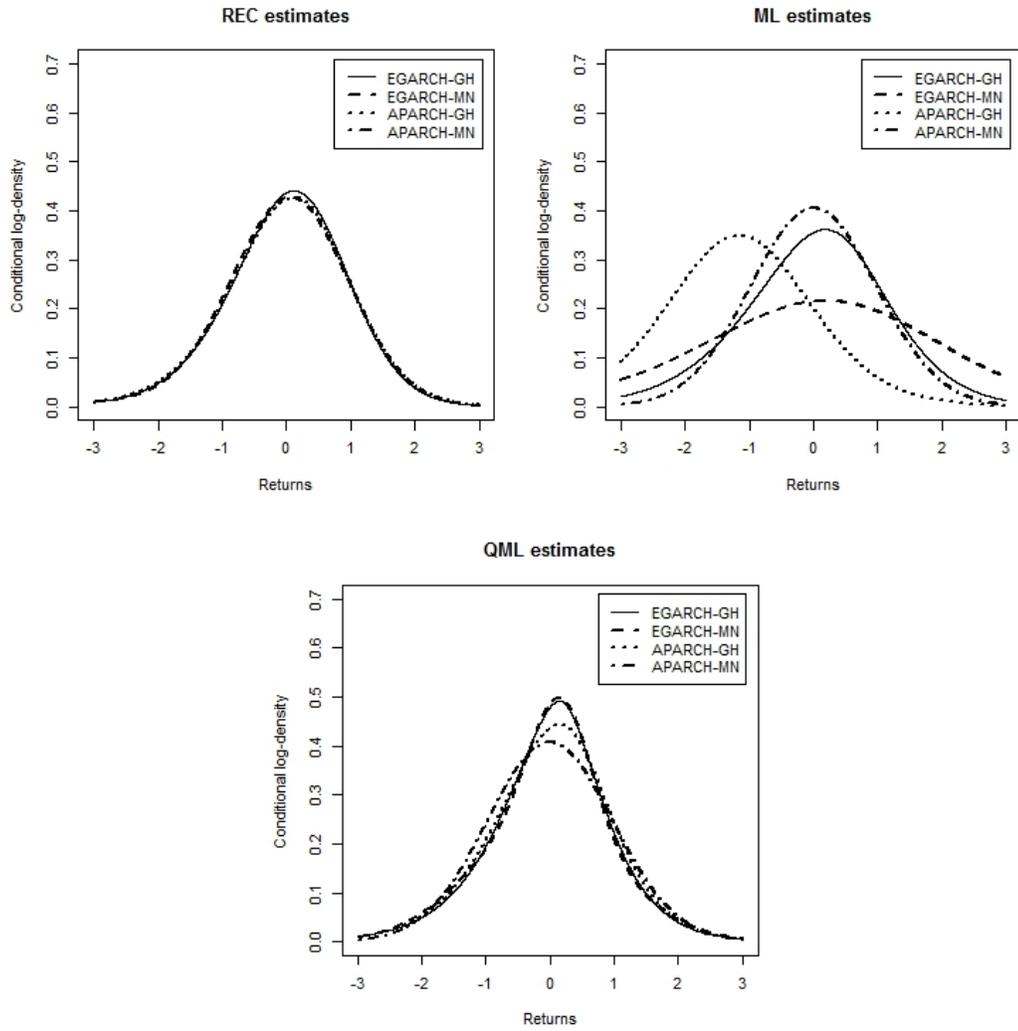


FIGURE 2 – Densités conditionnelles

4.5 Présentation de l'ouvrage [CGI13]

Nous présentons dans ce paragraphe l'ouvrage *A Time Series Analysis Approach to Option Pricing : Models, methods and empirical performances* qui paraîtra chez Springer courant 2013 et dont la table des matières est disponible en annexe.

Ce livre est né de la volonté de proposer, aux doctorants en finance quantitative ainsi qu'aux praticiens, une approche pédagogique et pratique des récentes avancées concernant l'évaluation des produits dérivés en environnement GARCH. Cette thématique est souvent peu présente (voir totalement absente) de la plupart des excellents ouvrages de référence traitant de la modélisation de type GARCH en finance qui se concentrent, en général, sur les problématiques liées à l'identification, l'estimation ou aux tests associés (voir par exemple [S05] ou [FZ10]). Lorsqu'elle est évoquée, la problématique du pricing des actifs contingents dans ce cadre, se résume généralement à une présentation des résultats obtenus par Duan [D95] ou Heston et Nandi [HN00] en environnement Gaussien. Un des objectifs premiers de cet ouvrage est de présenter les procédures de neutralisation du risque qui permettent de travailler en environnement non Gaussien, de montrer leur souplesse et de tester leurs performances empiriques. Il s'est nourri des thématiques de recherche développées avec Dominique Guégan et Florian Ielpo depuis fin 2008 et du cours d'économétrie financière, dispensé à l'ENSTA dans le cadre du Master 2 recherche MMMEF de l'université Paris 1, dont nous avons la charge.

Depuis une petite dizaine d'années, l'utilisation de lois de probabilité réalistes (prenant en charge les faits stylisés classiques) pour améliorer les performances de pricing des modèles de type GARCH est devenue un sujet de recherche très actif. Le livre présente, dans un premier temps, les grandes lignes de la modélisation GARCH en finance, propose plusieurs alternatives à la loi normale pour les résidus (loi hyperbolique généralisée, mixture de Gaussiennes ou inclusion de sauts) et se penche sur la question de l'estimation de ces modèles. L'idée est de souligner qu'une approche de la modélisation des données financières via les séries temporelles permet, à travers une mécanique relativement simple à manipuler et mathématiquement peu coûteuse, de rendre compte de plusieurs caractéristiques empiriques fondamentales.

Nous étudions ensuite différentes manières de sélectionner une mesure martingale équivalente dans ce cadre : le principe de Girsanov étendu d'El-

liott et Madan [EM98], la transformée de Esscher conditionnelle de Bühlmann et al. [BDES96], la simulation par martingales empiriques [CGI10a] et la transformée de Esscher quadratique récemment proposée par Montfort et Pégoraro [MP12]. Chacune de ces approches est présentée à travers un formalisme rigoureux qui souligne néanmoins les intuitions économiques et financières sous jacentes. Nous montrons également comment déduire explicitement dans chaque cas les dynamiques risque neutre associées.

Enfin, un soin tout particulier a été apporté à la mise en oeuvre pratique des méthodes précédemment décrites. L'ouvrage accompagne pas à pas le lecteur dans la construction d'un pricer en langage R ce qui constitue une de ses grandes originalités. Ainsi, des parties commentées de code sont mises à disposition pour

- la simulation des trajectoires des modèles
- l'estimation
- le calcul des dynamiques risque neutre
- le calcul des prix d'options européennes par méthodes de Monte Carlo.

Les performances de ce pricer sont ensuite testées via une étude empirique intensive basée sur l'indice SP500 entre Janvier 2009 et Décembre 2011.

4.6 Quelques mots sur les travaux en cours

4.6.1 Testing for leverage effect in non linear financial time series [CGIL13]

Compte tenu des propriétés de la méthode (REC) présentée dans la section 4.4 nous avons utilisé dans [CGIL13] cette technique d'estimation pour questionner l'importance des paramètres de levier dans les spécifications de type GARCH. Plus précisément, l'idée est de savoir si l'asymétrie présente dans les résidus (grâce à l'utilisation de la loi GH) permet de se passer des paramètres de levier dans la dynamique de volatilité et donc de travailler avec des modèles plus parcimonieux. Pour ce faire nous avons appliqué aux rendements logarithmiques de l'indice SP500, pris entre janvier 1987 et juillet 2011, deux tests asymptotiques de vraisemblance permettant de quantifier le pouvoir prédictif des modèles avec ou sans levier dans la volatilité. Le premier, dû à Amisano et Giacomini [AG07] (voir également [MMC11]), permet de tester par une technique de fenêtre glissante les performances comparatives hors échantillon et à différents horizons d'un modèle et d'un de ses sous modèles (ce qui est le cas ici). Il autorise, de plus, une grande flexibilité quant au choix de la méthode d'estimation (dont REC) et permet de concentrer l'analyse sur différentes partie des distributions (dont les queues).

Le second, dû à Hansen [H92] permet de tester in sample la nullité d'un paramètre (ici le levier) du point de vue de la prédiction. Son intérêt pour nous est qu'il s'applique à toute méthode d'estimation pourvu qu'elle soit consistante. Les résultats obtenus sont sans appel et en cours de rédaction : lorsque les modèles sont évalués avec la procédure (REC) l'apport du paramètre de levier n'est pas statistiquement prouvé hors échantillon, l'asymétrie présente dans les résidus semble suffisante.

S&P 500 index							
EGARCH-GH							
Forecast Horizon	1	10	20	30	40	50	60
Unweighted ω_0	-2.200	-2.245	-2.229	-2.319	-2.262	-2.264	-2.244
Center ω_1	-1.306	-1.328	-1.293	-1.364	-1.318	-1.324	-1.292
Tails ω_2	-2.594	-2.656	-2.647	-2.739	-2.678	-2.677	-2.670
Right Tail ω_3	-1.829	-1.780	-1.806	-1.864	-1.831	-1.804	-1.854
Left Tail ω_4	-1.725	-1.787	-1.776	-1.839	-1.804	-1.821	-1.768
APARCH-GH							
Forecast Horizon	1	10	20	30	40	50	60
Unweighted ω_0	-0.133	0.097	-0.241	-0.051	0.099	0.284	-0.264
Center ω_1	-1.146	-1.097	-1.492	-1.339	-1.110	-1.139	-1.317
Tails ω_2	0.348	0.621	0.426	0.585	0.669	0.892	0.271
Right Tail ω_3	-0.417	-0.190	-0.370	-0.440	-0.030	0.269	-0.643
Left Tail ω_4	0.131	0.287	-0.044	0.251	0.162	0.172	0.111
EGARCH-MN							
Forecast Horizon	1	10	20	30	40	50	60
Unweighted ω_0	-1.276	-1.421	-1.257	-1.356	-1.436	-1.425	-1.561
Center ω_1	-1.365	-1.466	-1.237	-1.461	-1.546	-1.427	-1.710
Tails ω_2	-0.786	-0.931	-0.879	-0.814	-0.879	-0.958	-0.932
Right Tail ω_3	1.326	1.283	1.414	1.251	1.051	1.274	0.973
Left Tail ω_4	-2.029	-2.125	-2.018	-2.129	-2.067	-2.192	-2.179
APARCH-MN							
Forecast Horizon	1	10	20	30	40	50	60
Unweighted ω_0	0.493	1.289	0.786	1.330	1.047	1.070	0.778
Center ω_1	0.514	0.856	0.447	0.828	1.032	1.308	0.482
Tails ω_2	0.272	1.542	1.122	1.672	0.634	0.036	1.174
Right Tail ω_3	0.277	1.691	0.834	1.309	0.649	1.478	0.902
Left Tail ω_4	0.562	0.533	0.551	0.993	1.223	0.476	0.445

TABLE 3 – Test d'Amisano et Giacomini effectué sur l'indice S&P 500 entre le 2 Janvier 1987 et le 20 Juillet 2011.

La table 3 présente les résultats du test d'Amisano et Giacomini (voir [AG07] ou [MMC11] pour plus de détails) comparant les performances prédictives hors échantillon des modèles considérés avec ou sans paramètre de levier dans la volatilité. Les résultats sont présentés pour chaque modèle à différents horizons (de 1 à 60 jours) et en se concentrant sur différentes

parties de la distribution (centre, queues, etc..). Le calcul de la statistique d'Amisano et Giacomini (qui est asymptotiquement Gaussienne, centrée et réduite) montre qu'il n'est pas possible en général de prouver statistiquement l'intérêt du paramètre de levier pour le jeu de données considéré.

4.6.2 Global sensitivity analysis of discrete time financial models [CK13]

Partant du constat précédent, nous avons décidé d'étudier dans [CK13] l'impact du paramètre de levier dans les problématiques de pricing de produits dérivés. Une approche préliminaire intéressante nous a semblé être l'utilisation des techniques de l'analyse globale de sensibilités (voir [SR08]) qui permettent de quantifier en termes de variance l'impact d'un ou plusieurs paramètres sur une fonction objectif donnée (ici le prix d'une option d'achat ou de vente européenne). On considère la fonction objectif

$$Y = f(\Theta_1, \dots, \Theta_N)$$

qui dépend de N paramètres $(\Theta_1, \dots, \Theta_N)$ mal connus donc supposés aléatoires. L'idée est de quantifier la part de la variance de Y qui provient du paramètre Θ_i . Un choix naturel ([SR08], chap.1) est donné par

$$S_i = \frac{Var_{\Theta_i} [E_{\Theta_{\neq i}}[Y]]}{Var(Y)}$$

où $E_{\Theta_{\neq i}}[Y](\theta_i)$ est l'espérance de Y calculée en supposant $\Theta_i = \theta_i$ fixé.

Comme $\sum_{i=1}^N S_i < 1$, la quantité $1 - \sum_{i=1}^N S_i$ permet de quantifier la part de la variance de Y qui provient d'effets joints pouvant eux même être décrits précisément. Pour limiter le coût numérique d'une telle étude nous nous restreignons dans [CK13] aux modélisations GARCH permettant d'obtenir une formule semi-fermée pour les prix avec ([HN00]) ou sans ([CHJ06]) présence d'asymétrie dans les résidus (c'est le cas où f n'a pas à être évaluée par méthodes de Monte Carlo). L'objectif est de démontrer que, lorsqu'une loi de probabilité permettant de prendre en compte le phénomène d'asymétrie est utilisée pour les résidus, le paramètre de levier n'est pas nécessaire dans la structure de volatilité (au moins pour certaines maturités). D'un point de vue méthodologique cette étude est à rapprocher de [SR08], Chap. 6.2, où l'impact de l'amplitude des sauts dans le modèle d'Heston généralisé est questionné.

4.6.3 A simple variance reduction method for discrete time financial models [CL13]

Nous menons dans [CL13], une étude empirique dans le but d'améliorer l'efficacité des méthodes de Monte Carlo pour le pricing de produits dérivés lorsque la dynamique du sous-jacent est modélisée à l'aide d'une série temporelle. En effet, en reprenant les notations de la section 4.2, pour toute MME \mathbb{Q} , le prix à l'instant t d'un actif contingent C_T peut s'écrire à la fois sous la forme d'une espérance sous \mathbb{Q}

$$C_t = E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{B_t C_T}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (42)$$

ou d'une espérance sous la probabilité historique \mathbb{P}

$$C_t = E_{\mathbb{P}} \left[\frac{B_t C_T L_T}{B_T L_t} \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (43)$$

avec

$$L_t = E_{\mathbb{P}} \left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (44)$$

Nous voulons confirmer, pour un large choix de modèles et de MME, que la seconde formulation donne lieu à un estimateur Monte Carlo de variance inférieure comme il est affirmé dans [BK08].

Références

- [AG07] Amisano, G., Giacomini, R., 2007. Comparing Density Forecasts via Weighted Likelihood Ratio Tests. *Journal of Business & Economic Statistics*, American Statistical Association 25, 177-190.
- [BP91] Back, K., and Pliska, S.R., (1991). On the fundamental theorem of asset pricing with an infinite state space, *Journal of Mathematical Economics*, 20 (1), 1-18.
- [BK08] Badescu, A.M. and Kulperger, R.J., (2008). GARCH option pricing : A semiparametric approach. *Insurance : Mathematics and Economics* 43 (1), 69-84.
- [BRT03] Bai, X., Russell, J.R. and Tiao, G.C., (2003). Kurtosis of garch and stochastic volatility models with non-normal innovations. *Journal of Econometrics*, 114, 349-360.
- [B77] Barndorff-Nielsen, O.E., (1977). Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 353, 401-419.
- [BB81] Barndorff-Nielsen, O.E. and Blaesild, P., (1981). Hyperbolic Distributions and Ramifications : Contributions to Theory and Applications. In : Taillie C, Patil GP, Baldessari BA (Eds), *Statistical distributions in scientific work*, vol.4. Reidel, Dordrecht, 19-44.
- [BAEM08] Barone-Adesi, G., Engle, R.F. and Mancini L.A., (2008). GARCH Option Pricing Model in Incomplete Markets. *Review of Financial Studies*, 21(3), 1223-1258.
- [BS73] Black, F. and Scholes, M., (1973). The pricing of Options and corporate liabilities. *Journal of political Economy*, 81, 637-659.
- [B86] Bollerslev, T., (1986). Generalized Autoregressive Conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- [BDES96] Bühlmann, H., Delbaen, F., Embrechts, P. and Shiryaev, AN., (1996). No-Arbitrage Change of Measure and Conditional Esscher Transforms. *CWI Quarterly*, 9, 291-317.
- [CGI10a] Chorro, C., Guégan, D. and Ielpo, F., (2010). Martingalized historical approach for option pricing. *Finance Research Letters*, 7(1), 24-28.
- [CGI10b] Chorro, C., Guégan, D. and Ielpo, F., (2010). Likelihood-Related Estimation Methods and Non-Gaussian GARCH Processes. *Cahiers du CES*.

- [CGI12] Chorro, C., Guégan, D. and Ielpo, F., (2012). Option pricing for GARCH type models with generalized Hyperbolic Innovations. *Quantitative Finance*, 12(7), 1079-1094.
- [CGI13] Chorro, C., Guégan, D. and Ielpo, F., (2013). *Time Series Analysis Approach to Option Pricing : Models, methods and empirical performances*. Livre à paraître chez Springer-Verlag courant 2013.
- [CGIL13] Chorro, C., Guégan, D. and Ielpo, F. and Lalaharison, H., (2013). Testing for leverage effect in non linear financial time series. En préparation.
- [CL13] Chorro, C. and Lalaharison, H., (2013). A simple variance reduction method for discrete time financial models. En préparation.
- [CK13] Chorro, C. and Kannur, A., (2013). Global sensitivity analysis of discrete time financial models. En préparation.
- [CHJ06] Christoffersen, P., Heston, S.L. and Jacobs, K., (2006). Option valuation with conditional skewness. *Journal of Econometrics*, 131, 253-284.
- [CEFJ10] Christoffersen, P., Elkamhi, R., Feunou, B. and Jacobs, K., (2010). Option Valuation with Conditional Heteroskedasticity and Non-Normality. *Review of Financial studies*, 23(5). 2139-2183.
- [C01] Cont, R., (2001). Empirical properties of asset returns : stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1, 223-236.
- [DGE93] Ding Z., Granger, C.W.J., Engle, R.F., 1993. A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model. *Journal of Empirical Finance* 1, 83-106.
- [DMW90] Dalang R. C., Morton A. and Willinger W., (1990). Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models. *Stochastics and Stochastics Reports*, 29 (2) , 185-201.
- [D95] Duan, J.C., (1995). The GARCH Option Pricing Model. *Mathematical Finance*, 5, 13-32.
- [DS98] Duan J.C and Simonato, J.G., (1998). Empirical Martingale Simulation for Asset Prices. *Management Science*, 44, 1218.1233.
- [EH03] Eberlein, E. and Hammerstein, E. A. V., (2003). Generalized hyperbolic and inverse Gaussian distributions : Limiting cases and approximation of processes. *Proceedings of the 4th Ascona Conference*. Birkhauser Verlag.

- [EP02] Eberlein, E. and Prause, K., (2002). The generalized hyperbolic model : financial derivatives and risk measures. In : Geman H, Madan D, Pliska S, Vorst T (Eds), *Mathematical Finance-Bachelier Congress 2000*, Springer Verlag, 245-267.
- [EM98] Elliott, R. and Madan, D., (1998). A Discrete Time Equivalent Martingale Measure. *Mathematical Finance*, 2(8), 127-152.
- [E82] Engle, R.F., (1982). Autoregressive conditional heterostedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50, 987-1007.
- [EN93] Engle, R. F., Ng, S., (1993). Measuring and Testing the Impact of News on Volatility. *Journal of Finance*, American Finance Association 48 (5), 1749-1778.
- [E32] Esscher, F., (1932). On the probability function in the collective theory of risk. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 15, 175 -195.
- [F65] Fama, E., (1965). The behavior of stock markets prices. *Journal of Business*, 38, 34-105.
- [FZ10] Francq, C. and Zakoian, J.M., (2010). *GARCH Models : Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. John Wiley and Sons, Ltd.
- [FWZ12] Francq, C., Wintenberger, O. and Zakoian, J.M., (2012). GARCH models without positivity constraints : Exponential or Log GARCH ?. Working paper.
- [GZ09] Guégan, D. and Zhang, J., (2009). Pricing Bivariate Option under GARCH-GH Model with Dynamic Copula : Application for Chinese Market. *The European Journal of finance*, 15 (7-8), 777-795.
- [GIL13] Guégan, D., Ielpo, F. and Lalaharison, H., (2013). Option Pricing with Discrete Time Jump Processes. A paraître dans *Journal of Economic Dynamics and Control*.
- [GS94a] Gerber, H.U. and Shiu, S.W., (1994). Option Pricing by Esscher Transforms. *Transaction of Society of Actuaries*, 46, 99-191.
- [GS94b] Gerber, H.U. and Shiu, S.W., (1994). Martingale Approach to Pricing Perpetual American Options. In : *Proceedings of the 4th AFIR International Colloquium*, Transaction of Society of Actuaries : Orlando, 659-689.
- [GM07] Gouriéroux, C. and Monfort, A., (2007). Econometric specification of stochastic discount factor models. *Journal of Econometrics*, 136 (2), 509-530.

- [GJR93] Glosten, L.R., Jagannathan, R. and Runkle, D.E., (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*, 48(5), 1779-1801.
- [HR87] Hansen, L. P. and Richard, S.F., (1987). The Role of Conditioning Information in Deducing Testable Restrictions Implied by Dynamic Asset Pricing Models. *Econometrica*, 55 (3), 587-613.
- [H92] Hansen, B.E., (1992). The Likelihood Ratio Test under Nonstandard Conditions : Testing the Markov Switching Model of GNP. *Journal of Applied Econometrics*, 7(1), 61-82.
- [HK79] Harrison, J.M. and Kreps, D.M., (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, 20 (3), 381-408.
- [HP81] Harrison, J.M. and Pliska S.R., (1981). Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11, 215-260.
- [HN00] Heston, S.L. and Nandi, S., (2000). A Closed-Form GARCH Option Valuation. *The Review of Financial Studies*, 13, 585-625.
- [JS98] Jacod, J. and Shiryaev, A., (1998). Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case. *Finance and Stochastics*, 2, 259-273.
- [JYC09] Jeanblanc, M., Yor, M. and Chesney M.,(2009). *Mathematical Methods for Financial Markets*. Springer-Verlag.
- [K81] Kreps, D.M., (1981). Arbitrage and Equilibrium in Economics with infinitely many Commodities. *Journal of Mathematical Economics*, 8, 15-35.
- [MMC11] Maheu, J.M. and McCurdy, T.H., (2011). Do high-frequency measures of volatility improve forecasts of return distributions?. *Journal of Econometrics*, 160, 69-76.
- [M63] Mandelbrot, B., (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36, 394-419.
- [MP12] Monfort, A., Pegoraro, F., (2012). Asset pricing with Second-Order Esscher Transforms. *Journal of Banking and Finance*, 36(6), 1678-1687.
- [N91] Nelson, D.B., (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns. *Econometrica* 59, 347-370.
- [NS97] Newey, W. and Steigerwald, D., (1997). Asymptotic bias for quasi-maximum likelihood estimators in conditional heteroscedasticity models. *Econometrica*, 65, 587-599.

- [P05] Poon, S.H., (2005). A Practical Guide to Forecasting Financial Market Volatility. Wiley.
- [R76] Rubinstein, M., (1976). The valuation of uncertain income streams and the pricing of options. *Bell Journal of Economics*, 7, 407-425.
- [SR08] Saltelli, A., Ratto, M., Andres, T., Campolongo, F., Cariboni, J., Gatelli, D., Saisana, M. and Tarantola, S., (2008). *Global Sensitivity Analysis : The Primer*. Wiley
- [S92] Schachermayer, W., (1992). A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time. *Insurance : Mathematics and Economics*, 11 (4), 249-257.
- [STY04] Siu, T.K., Tong, H. and Yang, H., (2004). On Pricing Derivatives under GARCH models : A Dynamic Gerber-Shiu Approach. *North American Actuarial Journal*, 8, 17-31.
- [S05] Straumann, D., (2005). *Estimation in Conditionally Heteroscedastic Time Series Models*. Lecture Notes in Statistics 181. Berlin : Springer.
- [T86] Taylor, S., (1986). *Modelling Financial Time Series*. Wiley.
- [W12] Wintenberger, O., (2012). Continuous Invertibility and Stable QML Estimation of EGARCH(1,1) Model. Working Paper.

5 Présentation détaillée des travaux de recherche II : Analyse de sensibilités

5.1 Introduction

5.1.1 De Gauss aux formes de Dirichlet

Considérons une grandeur réelle c (par exemple la concentration d'un polluant dans une rivière) qui peut être connue grâce à des mesures. Le résultat de cette mesure est entaché d'une erreur que l'on notera dc . Lorsque $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière, on s'intéresse à l'erreur $d[f(c)]$ sur $f(c)$. Deux approches classiques sont alors possibles.

Approche probabiliste : Nous supposons que le couple (c, dc) est la réalisation de la variable aléatoire $(C, \Delta C)$. La description complète de cette situation nécessite la connaissance de la loi du couple $(C, \Delta C)$ à l'aide de moyens statistiques. Dans cette approche les erreurs possèdent donc un biais et une variance ce qui permet de rendre compte des phénomènes fréquents de corrélations entre plusieurs grandeurs et leurs erreurs respectives (par exemple, plus le taux de pollution est élevé plus la mesure est difficile donc plus l'erreur est grande). Cependant, l'information contenue dans la loi du couple $(C, \Delta C)$ est beaucoup trop riche pour être atteignable expérimentalement. De plus, le phénomène de propagation des erreurs, i.e l'erreur sur $f(C)$, se traduit dans ce cas par un calcul de lois image qui est souvent difficile. Lorsque qu'ils utilisent cette méthode, les praticiens font souvent l'hypothèse que la loi conditionnelle des erreurs est gaussienne. L'information est alors concentrée dans les quantités $\mathbb{E}[\Delta C | C]$ et $var[\Delta C | C] = \mathbb{E}[(\Delta C - \mathbb{E}[\Delta C | C])^2 | C]$. Cependant cette hypothèse est incompatible avec les changements de variables non linéaires et ne permet donc pas de traiter le problème de la propagation des erreurs.

Approche différentielle : Considérons simplement que l'erreur dc est petite ce qui rend le phénomène de propagation compatible avec les techniques du calcul différentiel classique. On obtient en effet la formule approchée suivante : $d[f(c)] = f'(c)dc$. Un des avantages de cette méthode est de se transposer facilement en dimension infinie par l'utilisation de la dérivation au sens de Fréchet ou de Gâteaux. En revanche, le caractère déterministe des quantités considérées ne peut prendre en compte la corrélation.

Pour combler le manque inhérent à chacune des formulations précédentes, Gauss a été le premier à adopter une approche intermédiaire. Il suppose que les quantités sont aléatoires, que l'erreur est petite et montre que, dans ce cas, la variance conditionnelle de l'erreur vérifie une formule de propagation obtenue très simplement par développement limité. Nous adoptons ici la même démarche en supposant de plus que l'erreur est décrite de manière satisfaisante par sa variance et son biais conditionnels. Nous faisons donc les hypothèses suivantes :

H₁ : La loi de la variable C et la quantité $var[\Delta C | C]$ sont connues et on suppose que $\mathbb{E}[\Delta C | C] = 0$ (cette dernière hypothèse signifiant qu'il n'y a pas d'erreur systématique sur C peut être omise par la suite en supposant que $var[\Delta C | C]$ et $\mathbb{E}[\Delta C | C]$ sont du même ordre de grandeur).

H₂ : On considère les erreurs petites ce qui nous permettra d'utiliser les règles de simplification d'usage. Ainsi $\Delta C = \varepsilon Y$ où Y est une variable aléatoire que nous supposerons, pour simplifier les choses, bornée et où ε est un paramètre de calibration des erreurs.

On s'intéresse alors à la propagation des biais et des variances.

Si f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^3 dont les dérivées sont bornées, de la formule de Taylor

$$\Delta(f(C)) = f(C + \Delta C) - f(C) = f'(C) \Delta C + \frac{1}{2} f''(C) (\Delta C)^2 + \varepsilon^3 o(1)$$

il résulte que

$$var[\Delta f(C) | C] = f'^2(C) var[\Delta C | C] + \varepsilon^3 o(1)$$

$$\mathbb{E}[\Delta f(C) | C] = \frac{1}{2} f''(C) var[\Delta C | C] + \varepsilon^3 o(1).$$

Ainsi, partant d'une situation où l'erreur est centrée, l'application d'une fonction non linéaire fait apparaître un biais. La variance, quant à elle, se propage en première approximation proportionnellement au carré de la pente. Ce phénomène est mis en évidence dans la figure ci-dessous où les erreurs ont été supposées gaussiennes par commodité graphique.

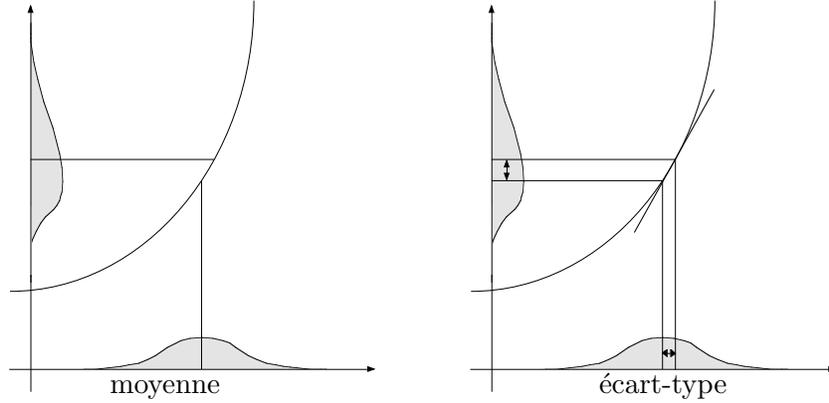


FIGURE 3 – Transport des biais et des écarts type par une application non linéaire

Par d'autres applications non linéaires ce phénomène va se perpétuer. En effet si h a la même régularité que f on obtient de manière analogue les formules de propagation suivantes :

$$\text{var}[\Delta(h \circ f(C)) | C] = h'^2(f(C))\text{var}[\Delta f(C) | C] + \varepsilon^3 o(1) \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Delta(h \circ f(C)) | C] &= h'(f(C))\mathbb{E}[\Delta f(C) | C] \\ &+ \frac{1}{2}h''(f(C))\text{var}[\Delta f(C) | C] + \varepsilon^3 o(1). \end{aligned} \quad (46)$$

Il est bon de voir que la formulation précédente de propagation des biais et des variances conditionnels est très significative. Le calcul de variances est un calcul différentiel du premier ordre ne faisant intervenir que les variances alors que le calcul de biais est du second ordre et fait intervenir biais et variances. Ainsi, de manière assez surprenante, le calcul de variance est la première étape d'un calcul d'erreur basé sur des méthodes différentielles, ceci expliquera son importance dans la suite.

En se plaçant sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \text{loi de } C)$, on peut alors introduire l'opérateur Γ^C , appelé opérateur d'erreur quadratique, qui nous donne pour chaque fonction f la variance conditionnelle renormalisée de l'erreur sur $f(C)$:

$$\Gamma^C[f](x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{var}[\Delta f(C) \mid C = x]}{\varepsilon^2}.$$

Notons qu'au même titre que la variance en théorie des probabilités, Γ^C se polarise de la manière suivante

$$\Gamma^C[f, g](x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{covar}[\Delta f(C), \Delta g(C) \mid C = x]}{\varepsilon^2}$$

et si F est une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} de classe C^2 dont les dérivées partielles sont bornées on a

$$\Gamma^C[F(f, g)] = F_1'^2(f, g)\Gamma^C[f] + F_2'^2(f, g)\Gamma^C[g] + 2F_1'(f, g)F_2'(f, g)\Gamma^C[f, g]. \quad (47)$$

Cette dernière relation fut découverte par Gauss en 1821 ([G21]) et possède une propriété de cohérence (due aux propriétés de transport de l'opérateur différentiel sous-jacent) qui la rend supérieure aux formules présentes dans les manuels de l'époque. Elle donne, en effet, à la notion d'erreur une signification physique forte ([B03], p.15) et permet de prendre en compte d'éventuelles corrélations par la présence de termes rectangles.

Nous pouvons alors proposer la définition (heuristique) suivante d'une structure d'erreur :

Une structure d'erreur est un espace de probabilité (W, \mathcal{W}, m) enrichi d'un opérateur Γ^C prenant en compte les erreurs. Cet opérateur agit sur les variables aléatoires et satisfait les propriétés suivantes :

a) Symétrie

$$\Gamma^C[f, g] = \Gamma^C[g, f],$$

b) Bilinéarité

$$\Gamma^C \left[\sum_i \lambda_i f_i, \sum_j \mu_j g_j \right] = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j \Gamma^C[f_i, g_j],$$

c) Positivité

$$\Gamma^C[f, f] \geq 0,$$

d) Calcul fonctionnel du premier ordre sur les fonctions régulières (loi de propagation de Gauss)

$$\Gamma^C[F(f_1, \dots, f_n)] = \sum_{i,j} F'_i(f_1, \dots, f_n) F'_j(f_1, \dots, f_n) \Gamma^C[f_i, f_j].$$

Cette formulation possède l'avantage d'être très souple techniquement, elle se transporte simplement par les fonctions. Si on se donne une application $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ régulière, on dispose, sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, loi de $\phi(C)$, de l'opérateur $\Gamma^{\phi(C)}$ qui est l'opérateur d'erreur quadratique associé à l'observation de $\phi(C)$. Un petit calcul montre qu'il vérifie l'importante propriété suivante :

$$\Gamma^{\phi(C)}[f](x) = \mathbb{E}[\Gamma^C[f(\phi)](C) \mid \phi(C) = x]. \quad (48)$$

De plus, dans le cadre de l'observation de grandeurs multidimensionnelles, ce langage est bien adapté. Par exemple, si C_1 et C_2 sont deux quantités munies de leurs structures d'erreur respectives $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, loi de C_1, Γ^{C_1} et $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, loi de C_2, Γ^{C_2} , dans le cas où $(C_1, \Delta C_1)$ est indépendant de $(C_2, \Delta C_2)$, nous sommes capables de définir une structure d'erreur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, loi de $C_1 \otimes$ loi de $C_2, \Gamma^{C_1 \otimes C_2}$ qui soit telle que $\Gamma^{C_1 \otimes C_2}$ est un opérateur d'erreur quadratique traduisant un phénomène de sommation des erreurs composante par composante. En effet, si $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est régulière, l'hypothèse d'indépendance nous assure que

$$\begin{aligned} \text{var}[\Delta(F(C_1, C_2)) \mid (C_1, C_2)] &= F_1'^2(C_1, C_2) \text{var}[\Delta C_1 \mid C_1] \\ &+ F_2'^2(C_1, C_2) \text{var}[\Delta C_2 \mid C_2] + \varepsilon^3 0(1) \end{aligned}$$

ce qui se traduit par

$$\Gamma^{C_1 \otimes C_2}[F](x, y) = \Gamma^{C_1}[F(., y)](x) + \Gamma^{C_2}[F(x, .)](y) \quad (49)$$

Notons qu'il est aussi possible à l'aide de ce formalisme de relaxer les hypothèses d'indépendance sur les couples $(C_1, \Delta C_1)$ et $(C_2, \Delta C_2)$ afin de prendre en compte les phénomènes de corrélation. Ceci se traduit par l'apparition de termes rectangles dans (49).

Le formalisme de Gauss est efficace lorsque l'on s'intéresse au calcul de l'erreur d'une fonction régulière des paramètres initiaux. Cependant, il arrive très souvent qu'une telle formulation soit impossible. C'est le cas notamment des quantités définies implicitement comme les solutions d'équations différentielles ordinaires ou stochastiques ou les intégrales. Dans ce cas fréquemment rencontré, un raffinement des idées de Gauss est nécessaire. De

plus, si on considère une suite de grandeurs erronées $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si on connaît les erreurs sur les fonctions régulières de type $F(C_{i_1}, \dots, C_{i_n})$, on aimerait pouvoir en déduire l'erreur sur une fonction régulière d'un nombre infini de variables. Ceci est rendu possible grâce à l'axiomatique suivante, introduite par Nicolas Bouleau ([B01]), qui reprend l'apport essentiel de Gauss en l'inscrivant dans le cadre rigoureux et puissant de la théorie des formes de Dirichlet ([BH91],[FOT94],[MR92]).

Par la suite $C^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^q) \cap Lip$ (resp. $C_K^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^q)$) désignera l'espace des fonctions de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^q de classe C^p et lipschitziennes (resp. à support compact).

Définition 5.1 *Dorénavant une structure d'erreur sera un terme*

$$S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$$

où (W, \mathcal{W}, P) est un espace de probabilité et Γ un opérateur bilinéaire, symétrique, positif, de domaine \mathbb{D} dense dans $L^2(P)$, à valeurs dans $L^1(P)$ et vérifiant :

- 1) le calcul fonctionnel de classe $C^1 \cap Lip$: si $U \in \mathbb{D}^n$, $V \in \mathbb{D}^p$, pour tout $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip$ et $G \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \cap Lip$ alors $(F(U), G(V)) \in \mathbb{D}^2$ et

$$\Gamma[F(U), G(V)] = \sum_{i,j} F'_i(U) G'_j(V) \Gamma[U_i, V_j] \quad P\text{-p.p.},$$

- 2) $1 \in \mathbb{D}$,
- 3) la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ par $\mathcal{E}[F, G] = \frac{1}{2} \int \Gamma[F, G] dP$ est fermée au sens où \mathbb{D} muni de la norme du graphe notée

$$\|\cdot\|_{\mathbb{D}} = (\|\cdot\|_{L^2(P)}^2 + \mathcal{E}[\cdot])^{\frac{1}{2}}$$

est complet.

On notera toujours $\Gamma[F]$ pour $\Gamma[F, F]$ et $\mathcal{E}[F]$ pour $\mathcal{E}[F, F]$.

Avec la définition ci-dessus, \mathcal{E} est une forme de Dirichlet locale au sens où $\forall U \in \mathbb{D}, \forall F, G \in C_K^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$\text{Support}(F) \cap \text{Support}(G) = \emptyset \Rightarrow \mathcal{E}[F(U), G(U)] = 0, \quad (50)$$

admettant Γ pour opérateur carré du champ ([BH91], p.16). Cette théorie a été initiée par Beurling et Deny ([BD58]) comme outil de la théorie du potentiel et a reçue une interprétation probabiliste en terme de processus de Markov symétriques grâce, notamment, aux travaux de Fukushima ([FOT94],

chap.4), Silverstein ([S74]), Le Jan ([LJ82]) et Ma et Röckner ([MR92]) créant ainsi un pont unique entre l'analyse et les probabilités. Elle permet de plus d'introduire un calcul fonctionnel de classe $C^1 \cap Lip$ pour des fonctions du processus de Markov associé qui ne sont pas des semi-martingales, on sort alors du cadre classique du calcul d'Itô ([FOT94]). Sur l'espace de Wiener, cette théorie est intimement liée au calcul de Malliavin ([N95]) qui, au delà de la preuve probabiliste du théorème d'Hormander ([M78]), a fourni un cadre puissant pour l'étude et la compréhension des équations différentielles stochastiques et des fonctionnelles de Wiener ([BH91],[W79]) en étendant le raisonnement d'intégration par parties en dimension infinie. Enfin, sous des hypothèses topologiques reliant l'espace W et la tribu \mathcal{W} , une structure d'erreur définit naturellement une capacité sur W ([BH91], p.52) permettant le raffinement quasi-sûr des énoncés probabilistes classiques ([BH91], chap.7).

La propriété 1) reprend la formulation historique de Gauss sur la propagation des petites erreurs par les fonctions régulières et est à rapprocher de (47). Ainsi lorsque $U = (U_1, \dots, U_n) \in \mathbb{D}^n$ la matrice $\underline{\Gamma}[U] = [\Gamma[U_i, U_j]]_{1 \leq i, j \leq n}$ doit être comprise comme la matrice de variance-covariance des erreurs sur U conditionnellement à U . En utilisant (50), on peut voir ([BH91], p.31) que $1 \in \mathbb{D}$ implique $\Gamma[1] = 0$, il n'y a donc pas d'erreur sur les constantes ce qui est intuitivement satisfaisant. La propriété 3) est la pierre angulaire de cette définition, elle constitue l'amélioration principale de l'approche heuristique. Elle joue le même rôle que la notion de sigma-additivité en théorie des probabilités ([B04]) en permettant le calcul des erreurs sur des quantités définies par des limites : Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X sont dans \mathbb{D} et vérifient $X_n \rightarrow X$ dans $L^2(P)$, si le couple $(X_n, \text{erreur sur } X_n)$ converge en un sens convenable, il converge forcément vers le couple $(X, \text{erreur sur } X)$. Cette propriété s'avérera notamment indispensable dans le cadre de l'étude de la sensibilité des modèles financiers, le cours des actifs étant modélisé par la solution d'une équation différentielle stochastique.

Notons également que ce formalisme fournit, sans hypothèses supplémentaires, un calcul de biais dont nous avons déjà précisé qu'il était du second ordre et faisait intervenir variances et biais. À la forme de Dirichlet \mathcal{E} on peut associer de manière unique un opérateur auto-adjoint A ([BH91], chap.1, [FOT94], chap.1), appelé générateur infinitésimal, de domaine $D(A) \subset \mathbb{D}$ et à valeurs dans $L^1(P)$ qui satisfait

$$A[F(U)] = F'(U)A[U] + \frac{1}{2}F''(U)\Gamma[U]$$

lorsque $U \in D(A)$, $\Gamma[U] \in L^2(P)$ et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 avec des dérivées bornées. Nous voyons que cette formule traduit la propagation des biais à la manière de (46).

Exemple 5.1 On prend $W = \mathbb{R}$, $\mathcal{W} =$ la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P = \mathcal{N}(0,1)$ la loi normale centrée réduite, $\mathbb{D} = H^1(P) = \{u \in L^2(P), u' \text{ au sens des distributions appartient à } L^2(P)\}$, $\Gamma[u] = u'^2$. Le terme $(W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$ est une structure d'erreur appelée structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur \mathbb{R} . La terminologie provient du fait que le générateur infinitésimal associé n'est autre que celui du processus de diffusion d'Ornstein-Uhlenbeck sur \mathbb{R} .

5.1.2 Phénomènes de propagation dans les structures d'erreur

Soit $(U_1, \dots, U_d) \in \mathbb{D}^d$. Nous allons voir que contrairement au calcul d'erreur à la Gauss, le calcul d'erreur par les formes de Dirichlet permet de calculer l'erreur sur $F(U_1, \dots, U_d)$ pour une fonction F peu régulière. Dans le cas $d = 1$ on a la proposition suivante ([B03], p.42) :

Proposition 5.1 Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne et $U \in \mathbb{D}$. Nous avons $F(U) \in \mathbb{D}$ avec

$$\Gamma[F(U)] = F'^2(U)\Gamma[U] \quad (51)$$

où F' est la dérivée de F (définie presque partout pour la mesure de Lebesgue).

Remarque 5.1 La formule (51) est valide sans ambiguïtés car la propriété de fermeture de la forme \mathcal{E} assure le résultat général suivant appelé densité de l'énergie image : Si $U \in \mathbb{D}$, l'image par U de la mesure $\Gamma[U].P$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

La propriété de fermeture nous assure également, sous une hypothèse additionnelle, un calcul fonctionnel lipschitzien multidimensionnel ([B03], p.43) :

Proposition 5.2 Soit $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne et $U \in \mathbb{D}^d$. On montre alors que $F(U) \in \mathbb{D}$ avec lorsque F est une contraction au sens

où $|F(x) - F(y)| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$,

$$\Gamma[F(U_1, \dots, U_n)]^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^n \Gamma[U_i]^{\frac{1}{2}}. \quad (52)$$

Si on suppose de plus que la loi de U est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue on a

$$\Gamma[F(U_1, \dots, U_n)] = \sum_{i,j=1}^n F'_i(U)F'_j(U)\Gamma[U_i, U_j]. \quad (53)$$

Remarque 5.2 *D'un point de vue intuitif la relation (52) est très satisfaisante car il est naturel que l'application d'une fonction contractante réduise les erreurs.*

Dans le paragraphe suivant nous allons introduire deux opérations sur les structures d'erreur qui permettent d'accompagner la construction des espaces de probabilités tout en conservant la propriété de fermeture. Cette grande stabilité algébrique est nécessaire à l'étude des modèles aléatoires.

5.1.3 Images et produits de structures d'erreur

Nous présentons tout d'abord la notion de fermabilité d'un opérateur qui permet le passage du calcul d'erreur à la Gauss à celui utilisant les formes de Dirichlet. Il arrive souvent que le domaine \mathbb{D} de l'opérateur Γ ne puisse être connu entièrement. Il est alors important de pouvoir exprimer la fermeture de la forme \mathcal{E} en utilisant seulement un sous espace de \mathbb{D} : c'est la notion de fermabilité.

Définition 5.2 *Soit \mathcal{D} un sous espace vectoriel de $L^2(P)$. Une forme bilinéaire Q , symétrique, positive, définie sur $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$ est dite fermable si pour toute suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathcal{D} telle que $U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ dans $L^2(P)$ et $Q[U_n - U_m] \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0$ alors $Q[U_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.*

Si la forme bilinéaire Q est fermable, un argument classique ([FOT94], p.4) entraîne l'existence d'une forme bilinéaire, symétrique, positive et fermée \mathcal{E} définie sur un domaine \mathbb{D} telle que $\mathcal{D} \subset \mathbb{D}$, $\mathcal{E} = Q$ sur \mathcal{D} où \mathbb{D} est minimal pour l'inclusion. La forme \mathcal{E} est alors appelée la plus petite extension fermée de Q .

La définition suivante reprend, en un sens, la notion heuristique de structure d'erreur avec un formalisme rigoureux.

Définition 5.3 *Un terme $(W, \mathcal{W}, P, \mathcal{D}, \Gamma)$ est appelé une pré-structure d'erreur si \mathcal{D} est un sous espace vectoriel dense de $L^2(P)$ contenant les constantes et si Γ est un opérateur bilinéaire, symétrique, positif de $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$ dans $L^1(P)$*

qui satisfait le calcul fonctionnel de classe $C^\infty \cap Lip$: si $U \in \mathcal{D}^n$, $V \in \mathcal{D}^p$, pour tout $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip$ et $G \in C^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \cap Lip$ alors $(F(U), G(V)) \in \mathcal{D}^2$ et

$$\Gamma[F(U), G(V)] = \sum_{i,j} F'_i(U) G'_j(V) \Gamma[U_i, V_j] \quad P\text{-p.p.}$$

On a alors le résultat suivant qui nous sera très utile par la suite : une pré-structure d'erreur équipée d'une forme fermable s'étend en une structure d'erreur ([B03], p.45).

Proposition 5.3 *Soit $S = (W, \mathcal{W}, P, \mathcal{D}, \Gamma)$ une pré-structure d'erreur telle que la forme associée $\mathcal{E}[\cdot, \cdot] = \frac{1}{2} \mathbb{E}_P[\Gamma[\cdot, \cdot]]$ définie sur $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$ soit fermable (on dira par abus de langage que S est fermable). Si on note \mathbb{D} le domaine de la plus petite extension fermée de \mathcal{E} alors $(W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$ est une structure d'erreur appelée plus petite extension fermée de S .*

Soit $S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$ une structure d'erreur et $U \in \mathbb{D}^d$. Nous allons définir l'image de S par U . Cette structure sera définie sur l'espace $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), U_*P)$ image de (W, \mathcal{W}, P) par U où U_*P est la loi de U c'est à dire la mesure telle que $\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $U_*P(E) = P(U^{-1}(E))$. En suivant (48), on pose naturellement $\forall F \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip$

$$\Gamma_U[F](x) = \mathbb{E}_P[\Gamma[F(U)] \mid U = x]$$

cette définition étant légitime car la stabilité du domaine entraîne $F(U) \in \mathbb{D}$.

Par les propriétés de l'espérance conditionnelle, l'opérateur Γ_U est bilinéaire, symétrique et positif et vérifie le calcul fonctionnel de classe $C^\infty \cap Lip$. Le terme

$$(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), U_*P, C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip, \Gamma_U)$$

est donc une pré-structure d'erreur. De plus, il est facile de voir que la forme $\mathcal{E}_U[F] = \frac{1}{2} \mathbb{E}_{U_*P}[\Gamma_U[F]] = \mathcal{E}[F(U)]$ est fermable. En effet, si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip$ telle que

$$\|F_n\|_{L^2(U_*P)}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ et } \mathcal{E}_U[F_n - F_m] \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0,$$

alors $F_n(U)$ est de cauchy pour $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$ et donc par fermeture $\|F_n(U)\|_{\mathbb{D}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $\mathcal{E}_U[F_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

En vertu de la proposition 5.3 on a la définition suivante

Définition 5.4 *Soit $U_*S = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), U_*P, \mathbb{D}_U, \Gamma_U)$ la plus petite extension fermée de la pré-structure $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), U_*P, C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip, \Gamma_U)$, cette structure d'erreur est appelée l'image de S par U ou la \mathbb{D} -loi de U .*

Notons que dans ce cas les images ne sont pas limitées à des applications injectives.

Exemple 5.2 On considère la structure d'Ornstein-Uhlenbeck sur \mathbb{R} définie dans l'exemple 5.1,

$$S = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P, H^1(P), \Gamma[u] = u'^2)$$

où $P = \mathcal{N}(0, 1)$. On note F_P la fonction de répartition de P qui vérifie $F_P \in H^1(P)$. L'image de S par F_P est alors une structure d'erreur

$$([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), dx, \mathbb{D}_{F_P}, \Gamma_{F_P})$$

telle que $\forall u \in \mathbb{D}_{F_P}$, $\Gamma_{F_P}[u] = \frac{1}{2\pi} e^{-(F_P^{-1})^2} u'^2$. Elle est appelée structure d'erreur pseudo-gaussienne sur $[0, 1]$.

Il est possible, en généralisant la procédure précédente, d'étendre la définition 5.4 pour des variables à valeurs dans un espace mesurable quelconque.

Définition 5.5 Soit $S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$ une structure d'erreur, (E, \mathcal{G}) un espace mesurable et U une variable aléatoire de W dans E . On considère \mathcal{A} un sous espace vectoriel dense de $L^2(U_*P)$ telle que

- i) Si $G \in C_K^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F \in \mathcal{A}$ alors $G(F) \in \mathcal{A}$,
- ii) $\forall F \in \mathcal{A}$, $F(U) \in \mathbb{D}$.

Ainsi, la pré-structure $(E, \mathcal{G}, U_*P, \mathcal{A}, \Gamma_{\mathcal{A}, U}[F] = \mathbb{E}_P[\Gamma[F(U)] | U])$ est fermable et possède une plus petite extension fermée

$$U_*^{\mathcal{A}}S = (E, \mathcal{G}, U_*P, \mathbb{D}_{\mathcal{A}, U}, \Gamma_{\mathcal{A}, U})$$

appelée image de S par U par rapport à \mathcal{A} ou \mathbb{D} -loi de U par rapport à \mathcal{A} .

Remarque 5.3 La définition précédente dépend de \mathcal{A} en général ([BH91], p.200) et lorsque $U \in \mathbb{D}^d$ et $\mathcal{A} = C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip$, on retrouve la définition 5.4. Cependant, nous verrons que lorsque E est un espace de Banach séparable, une hypothèse naturelle permet de rendre ce choix canonique.

Les structures d'erreur ont également la propriété d'être stables par produits infinis dénombrables. Ceci permet notamment d'équiper les principaux espaces de dimension infinie rencontrés en modélisation stochastique (espace

de Monte-Carlo, espace de Wiener, espace de Poisson) de structures d'erreur à partir des briques élémentaires que sont les structures d'erreur sur \mathbb{R} ([B03], chap.6). Cette propriété est d'autant plus intéressante que le domaine de la structure produit obtenue est connu explicitement. C'est ce que nous voyons dans la définition suivante ([BH91], p.203) :

Définition 5.6 Soit $S_n = (W_n, \mathcal{W}_n, P_n, \mathbb{D}_n, \Gamma_n)$, $n \geq 1$ une famille de structures d'erreur. La structure d'erreur produit

$$S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma) = \prod_{n=1}^{\infty} S_n$$

est définie par $(W, \mathcal{W}, m) = (\prod_{n=1}^{\infty} W_n, \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n, \otimes_{n=1}^{\infty} P_n)$,

$$\mathbb{D} = \{F \in L^2(P) | \forall n, \text{ pour } \otimes_{j \neq n} P_j \text{ presque tout } w_1, \dots, w_{n-1}, w_{n+1}, \dots \\ x \rightarrow F(w_1, \dots, w_{n-1}, x, w_{n+1}, \dots) \in \mathbb{D}_n \text{ et } \int \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n[F] dP < \infty\}$$

et $\forall F \in \mathbb{D}$,

$$\Gamma[F] = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n[F]$$

où l'opérateur Γ_n agit sur la n -ième variable de F .

Remarque 5.4 Lorsque $n = 2$, on note $S_1 \otimes S_2$ la structure produit. On obtient alors la relation $\Gamma[F](x, y) = \Gamma_1[F(\cdot, y)](x) + \Gamma_2[F(x, \cdot)](y)$ qui traduit une sommation des erreurs composante par composante à la manière de (49). Ainsi, la notion de structure produit exprime le fait que les applications coordonnées et leurs erreurs sont indépendantes.

Exemple 5.3 On considère la structure d'erreur sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ suivante, chaque facteur étant donné par la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur \mathbb{R} :

$$S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{N}(0, 1), H^1(\mathcal{N}(0, 1)), \gamma[u] = u'^2)^{\mathbb{N}},$$

S est appelée la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Elle est intimement liée à la construction du mouvement Brownien par randomisation d'un espace de Hilbert et est compatible avec l'intégrale de Wiener. En effet, si on note par $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les applications coordonnées de S , on obtient une

famille de variables aléatoires *i.i.d* suivant la loi normale centrée réduite. On considère l'espace de Hilbert $H = L^2([0, 1], dx)$ et on note $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée de H . Il est bien connu que le processus $(B_t)_{t \in [0, 1]}$ défini par

$$B_t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \chi_n(s) ds g_n$$

est un mouvement Brownien standard continu. Lorsque $f \in H$ on définit de même l'intégrale de Wiener de f en posant

$$\int_0^1 f(s) dB_s = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f(s) \chi_n(s) ds g_n.$$

D'après la définition 5.6 il est facile de voir que

$$\int_0^1 f(s) dB_s \in \mathbb{D} \quad \text{et} \quad \Gamma \left[\int_0^1 f(s) dB_s \right] = \int_0^1 f^2(s) ds.$$

On déduit alors du calcul fonctionnel que si $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip$, si $(f_1, \dots, f_n) \in H^n$,

$$F \left(\int_0^1 f_1(s) dB_s, \dots, \int_0^1 f_n(s) dB_s \right) \in \mathbb{D} \quad (54)$$

$$\Gamma \left[F \left(\int_0^1 f_1(s) dB_s, \dots, \int_0^1 f_n(s) dB_s \right) \right] = \sum_{i,j} F'_i F'_j \int_0^1 f_i(s) f_j(s) ds. \quad (55)$$

On peut voir de plus que les propriétés précédentes caractérisent S parmi les structures d'erreur sur (W, \mathcal{W}, P) agissant à la manière de (55) sur les fonctions cylindriques régulières.

S'inspirant de l'exemple précédent, on définit une famille de structures d'erreur qui jouera un rôle fondamental en apparaissant comme objet limite dans les résultats asymptotiques établis ci-après. Soit B un espace de Banach, $\mathcal{B}(B)$ sa tribu borélienne et B' sont dual topologique.

Définition 5.7 Une structure d'erreur $(B, \mathcal{B}(B), P, \mathbb{D}, \Gamma)$ sera dite de type Ornstein-Uhlenbeck si la mesure associée P est gaussienne et si l'opérateur Γ est un opérateur différentiel du premier ordre à coefficients constants sur les fonctions cylindriques régulières i.e $\forall n \geq 1, \forall F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (B')^n$,

$$\Gamma [F(\lambda_1, \dots, \lambda_n)] = \sum_{i,j} F'_i F'_j (\lambda_1, \dots, \lambda_n) a_{i,j} \quad (56)$$

où les coefficients réels $a_{i,j}$ dépendent uniquement du couple (λ_i, λ_j) .

Remarque 5.5 *La définition précédente est stable par produit dénombrable et par image linéaire.*

Dans [B03], Bouleau a montré que le calcul d'erreur par les formes de Dirichlet possède une grande souplesse technique et est particulièrement bien adapté pour rendre compte des phénomènes de propagation d'erreur dans les modèles utilisés en finance stochastique et en physique. Cependant, le choix des hypothèses est effectué *a priori* en tenant compte essentiellement de la nécessité de mener les calculs à bien. De la même manière que le calcul des probabilités s'est naturellement vu enrichi de la théorie des statistiques pour modéliser des situations concrètes à travers des méthodologies rigoureuses (techniques d'échantillonnage, estimation paramétrique et fonctionnelle, théorie des tests), le but des sections suivantes est d'amorcer une démarche analogue pour les structures d'erreur. Bien évidemment, les résultats obtenus ne fournissent pas une réponse exhaustive à ce problème complexe mais peuvent néanmoins conforter le praticien dans ses choix.

5.2 Structure d'erreur et estimation paramétrique [BC04]

Classiquement, la loi de probabilité ρ d'un phénomène physique peut être connue concrètement grâce à des expériences statistiques. Notons que dans ce cas, la propriété de σ -additivité de ρ ne saurait résulter de l'observation mais est une hypothèse mathématique de modélisation d'une grande fécondité ([B04]). Une structure d'erreur $(W, \mathcal{W}, \rho, \mathbb{D}, \Gamma)$ étant un espace de probabilité muni d'un opérateur gérant les erreurs, nous nous posons, dans ce chapitre, la question bien naturelle de la détermination empirique d'une structure d'erreur. L'opérateur Γ associé devra vérifier, a priori, la propriété de fermeture (qui ne saurait résulter de l'expérience), condition très importante pour les déductions que l'on peut faire grâce au calcul d'erreur.

Donnons nous une grandeur θ à valeurs dans un ouvert Θ de \mathbb{R}^d . Nous considérons θ comme la réalisation d'une variable aléatoire $V : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \Theta$ dont la loi de probabilité ρ est choisie par des considérations à la fois expérimentales et pratiques ([L99], p.225). Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace mesurable (E, \mathcal{F}) . On note P_θ la loi conditionnelle de X sachant $V = \theta$. De manière classique, on peut utiliser pour estimer θ le modèle $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ associé à l'observation de X . Nous voulons alors munir l'espace des paramètres Θ d'une structure d'erreur

$$S^V = (\Theta, \mathcal{B}(\Theta), \rho, \mathbb{D}^V, \Gamma^V)$$

qui soit telle que l'opérateur Γ^V exprime la précision de la connaissance que l'on a sur θ avec les moyens statistiques employés.

Notre approche consiste, dans des conditions précisées par la suite, à identifier Γ^V à l'inverse de la matrice d'information de Fisher qui, pour les modèles statistiques paramétriques réguliers, est une mesure de la connaissance disponible. Ceci est bien naturel, Fisher lui-même présentait cette matrice comme une précision (intrinsic accuracy) sur le paramètre ([F25]).

5.2.1 Identification fondamentale

Nous rappelons, dans un premier temps, les conditions techniques à imposer sur le modèle $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ pour obtenir un contrôle des procédures d'estimation. Dans la suite $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignera le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^d et $\| \cdot \|$ la norme correspondante. Nous allons supposer dorénavant que le modèle paramétrique $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ vérifie les hypothèses du modèle régulier :

- a) Θ est un ouvert de \mathbb{R}^d .
- b) Il existe une mesure σ -finie μ sur (E, \mathcal{F}) telle que, $\forall \theta \in \Theta$, P_θ soit absolument continue par rapport à μ de densité $f(\cdot, \theta)$ strictement positive.
- c) La fonction $\theta \mapsto f(x, \theta)$ est continue en tout point et ce pour μ presque tout x .
- d) On note $g(x, \theta) = \sqrt{f(x, \theta)}$. On suppose l'existence d'une fonction $\phi : E \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que $\forall \theta \in \Theta$,

$$\int_E \|\phi(x, \theta)\|^2 d\mu(x) < \infty$$

et

$$\int_E \|g(x, \theta + h) - g(x, \theta) - \langle \phi(x, \theta), h \rangle\|^2 d\mu(x) = o(\|h\|^2).$$

En notant $\phi(x, \theta)^t$ la transposée de $\phi(x, \theta)$, on peut alors définir

$$J(\theta) = 4 \int \phi(x, \theta) \phi(x, \theta)^t d\mu(x) \quad (57)$$

qui est la matrice d'information de Fisher de notre modèle.

- e) $\theta \mapsto \phi(\cdot, \theta)$ est continue dans $L^2(\mu)$.
- f) Le modèle est identifiable : $\theta \mapsto P_\theta$ est injective.

Nous avons alors le résultat classique suivant (Inégalité de Cramer-Rao) :

Théorème 5.1 ([IH81], p.73) Soient $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable et $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ un modèle régulier tel que, $\forall \theta \in \Theta$, $J(\theta)$ est inversible. Si $T(X)$ est un estimateur sans biais de $\psi(\theta)$ (i.e $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[T(X)|V = \theta] = \psi(\theta)$) tel que la fonction $\theta \mapsto \int T^2(x)f(x, \theta)d\mu(x)$ est localement bornée alors, $\forall \theta \in \Theta$,

$$\int_E [(T(x) - \psi(\theta))(T(x) - \psi(\theta))^t] f(x, \theta) d\mu(x) \geq \psi'(\theta) J^{-1}(\theta) \psi'(\theta)^t \quad (58)$$

où \geq est la relation d'ordre entre matrices symétriques définie par le cône des matrices symétriques positives.

Ainsi, en supposant dorénavant la matrice d'information de Fisher inversible, l'inégalité de Cramer-Rao nous fournit une borne d'estimation minorant le risque quadratique. Revenons alors à la structure d'erreur $S^V = (\Theta, \mathcal{B}(\Theta), \rho, \mathbb{D}^V, \Gamma^V)$ que nous voulons identifier. Comme Γ^V vérifie un calcul fonctionnel de classe $C^1 \cap Lip$, lorsque les composantes de l'application identité $Id : \Theta \rightarrow \Theta$ sont dans \mathbb{D}^V , on a, $\forall F \in Lip^1(\Theta) = \{F : \Theta \rightarrow \mathbb{R} \text{ avec } F \in C^1(\Theta, \mathbb{R}) \text{ et } F \text{ lipschitzienne}\}$, $\forall \theta \in \Theta$,

$$\Gamma^V[F](\theta) = (\nabla_\theta F)^t \underline{\underline{\Gamma}}^V[Id](\nabla_\theta F)$$

où la matrice $\underline{\underline{\Gamma}}^V[Id](\theta)$ représente la variance conditionnelle de l'erreur commise sur V sachant $V = \theta$. C'est cette dernière qu'il faut connaître et l'inégalité de Cramer-Rao, qui peut se reformuler lorsque $\psi = Id : \Theta \rightarrow \Theta$ de la manière suivante :

$$Var(T(X) - \theta | V = \theta) \geq J^{-1}(\theta),$$

nous conduit à poser l'identification fondamentale

$$\underline{\underline{\Gamma}}^V[Id] = J^{-1}. \quad (59)$$

La notion d'erreur sur le paramètre θ est donc ici à comprendre en termes d'approchabilité par des estimateurs réguliers.

On obtient donc une pré-structure d'erreur $(\Theta, \mathcal{B}(\Theta), \rho, Lip^1(\Theta), \Gamma^V)$ au sens de la définition 5.3. De même qu'en statistiques on cherche à identifier un espace de probabilité dont la mesure est supposée, *a priori*, σ -additive, on cherche ici à déterminer à partir de données statistiques une structure d'erreur dans laquelle la forme quadratique a la propriété d'être fermée. En accord avec l'identification fondamentale nous supposons désormais l'hypothèse **(E)** vérifiée :

Hypothèse (E) : On suppose que $Lip^1(\Theta) \subset L^2(\rho)$ et que la forme bilinéaire suivante

$$\mathcal{E}^V[F, G] = \frac{1}{2} \mathbb{E}_\rho[(\nabla_\theta F)^t J^{-1}(\nabla_\theta G)]$$

est bien définie sur $Lip^1(\Theta)$ et est fermable (définition 5.2). On note \mathbb{D}^V le domaine de sa plus petite extension fermée.

Remarque 5.6 *Nous donnons dans [BC04] des conditions assez souples sur ρ et sur J^{-1} pour que l'hypothèse précédente soit vérifiée.*

Nous allons voir maintenant que les propriétés analytiques bien connues de la matrice d'information de Fisher permettent de déduire certaines propriétés algébriques de l'identification fondamentale.

5.2.2 Stabilité par images

Définition 5.8 *Supposons $\psi \in \mathcal{C}^1(\Theta, \mathbb{R}^d) \cap Lip$ injective. On dit que ce changement de variables est régulier si, $\forall \theta \in \Theta$, $\psi'(\theta)$ est inversible. En vertu du théorème d'inversion locale, ψ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme sur son image et $\psi(\Theta)$ est un ouvert de \mathbb{R}^d .*

Il existe alors deux façons naturelles d'équiper $\psi(\Theta)$ d'une structure d'erreur.

Du point de vue de l'estimation :

Dans le cas injectif, le changement de variables réalise en fait une simple reparamétrisation du modèle. On procède par estimation pour connaître $\psi(\theta)$ à partir du modèle dominé ($P_{\psi^{-1}(a)}$, $a \in \psi(\Theta)$). Comme $dP_{\psi^{-1}(a)}(x) = f(x, \psi^{-1}(a))d\mu(x)$, on peut voir facilement que ce modèle vérifie les hypothèses du modèle régulier. Nous examinons alors la structure d'erreur obtenue en faisant l'identification fondamentale. Ainsi, $\Gamma^{\psi(V)}$ est défini sur $Lip^1(\psi(\Theta))$ et vérifie, $\forall a \in \psi(\Theta)$,

$$\Gamma^{\psi(V)}[F](a) = (\nabla_a F)^t (J^{\psi(V)}(a))^{-1} (\nabla_a F)$$

où $J^{\psi(V)}$ est la matrice d'information du modèle régulier ($P_{\psi^{-1}(a)}$, $a \in \psi(\Theta)$). Comme $\forall a \in \psi(\Theta)$,

$$J^{\psi(V)}(a) = [\psi'(\psi^{-1}(a))^{-1}]^t [J(\psi^{-1}(a))] [\psi'(\psi^{-1}(a))^{-1}]$$

on a, $\forall F \in Lip^1(\psi(\Theta))$,

$$\Gamma^{\psi(V)}[F](a) = (\nabla_a F)^t [\psi'(\psi^{-1}(a))] [J(\psi^{-1}(a))]^{-1} [\psi'(\psi^{-1}(a))]^t (\nabla_a F). \quad (60)$$

La fonction ψ étant injective de classe $C^1 \cap Lip$, on déduit aisément de l'hypothèse **(E)** que $\mathcal{E}^{\psi(V)}$ définie sur $Lip^1(\psi(\Theta))$ par

$$\mathcal{E}^{\psi(V)}[F] = \frac{1}{2} \int_{\psi(\Theta)} \Gamma^{\psi(V)}[F] d\psi_*\rho$$

est fermable et nous définissons $\mathbb{D}^{\psi(V)}$ le domaine de sa plus petite extension fermée. Nous obtenons alors la structure d'erreur associée à l'estimation de $\psi(\theta)$ en posant

$$S^{\psi(V)} = (\psi(\Theta), \mathcal{B}(\psi(\Theta)), \psi_*\rho, \mathbb{D}^{\psi(V)}, \Gamma^{\psi(V)}).$$

Du côté du calcul d'erreur

Nous avons vu en introduction que l'un des principaux avantages du calcul d'erreur est qu'il hérite de toute la souplesse algébrique du calcul des probabilités. Comme $\psi \in \mathbb{D}^V$, on est en droit de considérer la structure image de S^V par ψ (définition 5.4) qui fournit naturellement une structure d'erreur sur $\psi(\Theta)$ notée $\psi_*S^V = (\psi(\Theta), \mathcal{B}(\psi(\Theta)), \psi_*\rho, \mathbb{D}_\psi^V, \Gamma_\psi^V)$.

On a alors le résultat suivant qui ôte toute ambiguïté quant au choix éventuel d'une structure d'erreur :

Proposition 5.4 *L'identification fondamentale est stable par la transformation ψ . En d'autres termes,*

$$\psi_*S^V = S^{\psi(V)}.$$

Remarque 5.7 *Lorsque l'on étudie la sensibilité d'un modèle physique ou financier à une perturbation d'un paramètre θ , la proposition précédente nous assure que la précision associée à la structure d'erreur obtenue par l'identification fondamentale possède une signification physique forte car elle est indépendante du paramétrage choisi.*

Dans [BC04], l'identification fondamentale est étendue au cas injectif non régulier.

5.2.3 Stabilité par produits

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. Plaçons nous dans la situation où nous devons estimer un paramètre $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, à valeurs dans un produit d'ouverts $\Theta_1 \times \Theta_2$. On suppose que ce paramètre est la réalisation de la variable aléatoire $V = (V_1, V_2) : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \Theta_1 \times \Theta_2$. Nous supposons que les variables aléatoires V_1 et V_2 sont indépendantes. La loi de V , notée ρ , vérifie donc la relation suivante :

$$d\rho(\theta_1, \theta_2) = d\rho_1(\theta_1)d\rho_2(\theta_2)$$

où ρ^1 (resp. ρ^2) est la loi de V_1 (resp. V_2). Pour estimer θ_1 (resp. θ_2) on dispose du modèle paramétrique régulier suivant :

$$dP_{\theta_1} = f(x, \theta_1) d\mu(x) \quad (\text{resp. } dQ_{\theta_2} = g(y, \theta_2) d\nu(y))$$

de matrice d'information de Fisher $J_1(\theta_1)$ (resp. $J_2(\theta_2)$) régulière. Nous supposons de plus que l'hypothèse **(E)** est vérifiée dans les deux cas. On considère X (resp. Z), une variable aléatoire ayant pour loi conditionnelle sachant V_1 (resp. V_2) la loi de densité $f(x, \theta_1) d\mu(x)$ (resp. $g(y, \theta_2) d\nu(y)$). Les variables aléatoires X et Z sont donc les observations qui vont nous permettre d'estimer θ .

On se place ici sous l'hypothèse suivante : (X, V_1) indépendant de (Z, V_2) . Pour évaluer θ il est naturel de regarder la loi conditionnelle de (X, Z) sachant $V = (\theta_1, \theta_2)$ notée $R_{(\theta_1, \theta_2)}$. Compte tenu des hypothèses, nous avons

$$dR_{(\theta_1, \theta_2)}(x, y) = f(x, \theta_1) g(y, \theta_2) d\mu(x) d\nu(y).$$

La matrice d'information de Fisher du modèle $(R_{(\theta_1, \theta_2)})_{(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2}$ est donc la matrice carrée (de taille $p + q$) régulière suivante :

$$\begin{bmatrix} J_1(\theta_1) & 0 \\ 0 & J_2(\theta_2) \end{bmatrix}. \quad (61)$$

D'après l'identification fondamentale, $\forall F \in Lip^1(\Theta_1 \times \Theta_2)$

$$\begin{aligned} \Gamma^V[F](\theta_1, \theta_2) &= [\nabla_{\theta_1} F(\theta_1, \theta_2)]^t [J_1(\theta_1)]^{-1} [\nabla_{\theta_1} F(\theta_1, \theta_2)] \\ &+ [\nabla_{\theta_2} F(\theta_1, \theta_2)]^t [J_2(\theta_2)]^{-1} [\nabla_{\theta_2} F(\theta_1, \theta_2)]. \end{aligned} \quad (62)$$

On est dans le cas où les couples (variables à estimer, observations) sont indépendants. En termes d'erreurs, ceci va naturellement se traduire par la notion de structure d'erreur produit sur l'espace $(\Theta_1 \times \Theta_2)$:

Proposition 5.5 1) Le modèle $(R_{(\theta_1, \theta_2)})_{(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2}$ vérifie l'hypothèse **(E)** et on a

$$S^V = S^{V_1} \otimes S^{V_2}.$$

2) Soient $r, s \in \mathbb{N}^*$, si $\psi_1 : \Theta_1 \rightarrow \mathbb{R}^r$ et $\psi_2 : \Theta_1 \rightarrow \mathbb{R}^s$ sont deux changements de variables réguliers alors

$$(\psi_1, \psi_2)_* S^V = \psi_1_* S^{V_1} \otimes \psi_2_* S^{V_2}.$$

Remarque 5.8 i) Les résultats de cette section se généralisent à un nombre fini de paramètres. De plus, sachant que l'on peut envisager des produits infinis dénombrables de structures d'erreur, on est en mesure d'obtenir par des voies statistiques un calcul d'erreur pour des grandeurs de type $\theta = (\theta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en raisonnant comme ci-dessus composante par composante.

ii) Le fait que l'estimation de grandeurs indépendantes par des observations indépendantes se traduit par une sommation des erreurs est à rapprocher intuitivement des propriétés d'additivité de l'information de Fisher dans le cas d'expériences indépendantes.

5.2.4 Choix de la probabilité *a priori* ρ

Dans les sections précédentes, le choix de la loi *a priori* sur l'espace des paramètres Θ est laissé au praticien comme en analyse bayésienne. La détermination de la structure d'erreur S^V peut donc apparaître, en un certain sens, incomplète. De plus, dans l'identification fondamentale, la loi *a priori* n'intervient pas, si ce n'est dans la condition technique **(E)**. On peut donc choisir ρ parmi une grande variété de probabilités, soit obtenue par les statistiques, soit provenant de raisons physiques.

Lorsque l'on n'a pas d'idées précises, nous allons montrer que, lorsque un modèle paramétrique régulier est choisi, un candidat se dégage naturellement : la loi *a priori* de Jeffreys ([L99], p.490). Cette probabilité bien connue en analyse bayésienne possède une remarquable stabilité concernant le calcul d'erreur : elle est compatible avec la notion d'image et de produit.

Soit $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ un modèle régulier tel que

$$K = \int_{\Theta} \sqrt{\det(J(\theta))} d\theta < \infty.$$

On peut définir sur Θ la mesure de probabilité suivante

$$\rho^V(d\theta) = \frac{I_{\Theta} \sqrt{\det(J(\theta))} d\theta}{K}$$

appelée la loi *a priori* de Jeffreys induite par le modèle $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$. Cette mesure est souvent utilisée en analyse bayésienne pour sa propriété d'invariance aux changements de variables réguliers (voir proposition ci-dessous). De plus, elle est la mesure *a priori* qui possède la plus faible influence sur le loi *a posteriori* au sens de l'information asymptotique de Shannon (voir [LC98]). En termes de calcul d'erreur, ses propriétés sont résumées dans la proposition suivante qui se déduit aisément des propriétés classiques de l'information de Fisher :

Proposition 5.6 a) Si $\psi : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un changement de variable régulier, $\psi_*\rho^V = \rho^{\psi(V)}$.
b) Dans le cadre de la section précédente, on a $\rho^V = \rho^{V_1} \otimes \rho^{V_2}$.

5.3 Notions de convergence et d'indépendance pour les structures d'erreur

Dans un premier temps, nous introduisons sur le domaine d'une structure d'erreur une notion d'indépendance et de convergence qui étend l'indépendance et la convergence en loi des variables aléatoires en prenant en compte la forme de Dirichlet sous-jacente. Ces deux notions (et leurs généralisations en dimension infinie) nous permettrons dans les sections suivantes d'étendre certains résultats probabilistes classiques.

5.3.1 Convergence et indépendance en dimension finie

Les définitions introduites ici sont tirées de ([BH91], chap.5). On se donne une structure d'erreur $S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$ qui sera fixée dans cette partie.

Définition 5.9 Deux variables $U \in \mathbb{D}^p$, $V \in \mathbb{D}^q$ sont Dirichlet indépendantes si

$$U_*S \otimes V_*S = (U, V)_*S.$$

En d'autres termes, la \mathbb{D} -loi du couple (U, V) est égale au produit des \mathbb{D} -lois de U et V .

On a alors le résultat de caractérisation suivant ([BH91], p.218) :

Théorème 5.2 Les variables aléatoires $U \in \mathbb{D}^p$ et $V \in \mathbb{D}^q$ sont Dirichlet indépendantes si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

- a) U et V sont indépendantes sur l'espace de probabilité (W, \mathcal{W}, P) .
- b) $\forall i, 1 \leq i \leq p, \forall j, 1 \leq j \leq q, \mathbb{E}_P[\Gamma[U_i, V_j]|U, V] = 0$ *P-p.p.*
- c) $\forall i, 1 \leq i \leq p, \mathbb{E}_P[\Gamma[U_i]|U, V] = \mathbb{E}_P[\Gamma[U_i]|U]$ *P-p.p.*
- d) $\forall j, 1 \leq j \leq q, \mathbb{E}_P[\Gamma[V_j]|U, V] = \mathbb{E}_P[\Gamma[V_j]|V]$ *P-p.p.*

Remarque 5.9 Par les propriétés de l'espérance conditionnelle, les conditions a), b), c), d) sont vérifiées si on suppose a), b'), c'), d') où

$$b') \forall i, 1 \leq i \leq p, \forall j, 1 \leq j \leq q, \Gamma[U_i, V_j] = 0.$$

c') $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq p$, le couple $(U, \Gamma[U_i, U_j])$ est indépendant de V .

d') $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq q$, le couple $(V, \Gamma[V_i, V_j])$ est indépendant de U .

On déduit immédiatement de cette remarque que les applications coordonnées d'une structure d'erreur produit sont Dirichlet indépendantes.

La notion de convergence introduite dans la définition ci-dessous est une extension de la convergence en loi classique des vecteurs aléatoires. Dans le cas unidimensionnel ($d = 1$) cette notion est plus faible que la convergence au sens de la norme $\| \cdot \|_{\mathbb{D}} = (\| \cdot \|_{L^2(P)}^2 + \mathcal{E}[\cdot])^{\frac{1}{2}}$ (voir [A76]).

Définition 5.10 On dit qu'une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{D}^d converge en loi de Dirichlet s'il existe une structure d'erreur $\widehat{S} = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \nu, \widehat{\mathbb{D}}, \widehat{\Gamma})$ telle que :

$$i) (U_n)_* P \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \nu \text{ en loi i.e } \forall F \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), \mathbb{E}_P[F(U_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{\mathbb{R}^d} F(x) d\nu(x)$$

$$ii) C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip \subset \widehat{\mathbb{D}} \text{ et } \forall F \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip, \mathcal{E}[F(U_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \widehat{\mathcal{E}}[F].$$

Par commodité nous dirons alors que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi de Dirichlet vers \widehat{S} .

Pour démontrer la convergence en loi de Dirichlet trois points sont donc à vérifier. Le point i), la convergence de la suite $(\mathcal{E}[F(U_n)])_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall F \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip$, vers une limite notée $\widehat{\mathcal{E}}[F]$ et le fait que la forme bilinéaire, symétrique, positive définie sur $C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip$ par $\widehat{\mathcal{E}}$ soit fermable et que sa plus petite extension fermée possède un opérateur carré du champ. La dernière condition peut ne pas être vérifiée alors que les deux premières le sont. Ainsi, la notion de convergence introduite est robuste au sens où elle conserve la propriété fondamentale de fermeture.

Utilisant cette notion de convergence, Bouleau et Hirsch ont proposé l'extension suivante du théorème de la limite centrale ([BH91], p.220). D'un point de vue pratique, ce résultat peut expliquer en partie l'importance des structures d'erreur de type Ornstein-Uhlenbeck en dimension finie.

Théorème 5.3 Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires dans \mathbb{D}^p , Dirichlet indépendantes et de même \mathbb{D} -loi. Si on suppose que le vecteur $U_1 = (U_1^1, \dots, U_1^p)$ est centré, de matrice de covariance notée Σ alors, $V_n = \frac{U_1 + \dots + U_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi de Dirichlet vers $\widehat{S} = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \nu, \widehat{\mathbb{D}}, \widehat{\Gamma})$ où

- a) ν est une loi gaussienne sur \mathbb{R}^d , centrée, de matrice de covariance Σ ,
b) $\forall F \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \cap Lip$, $\widehat{\Gamma}[F] = \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} a_{i,j}$ où $a_{i,j} = \mathbb{E}_P[\Gamma[U_1^i, U_1^j]]$.

L'objectif de la section 5.4 sera d'étendre le résultat précédent en dimension infinie. Nous devons néanmoins introduire pour cela les outils techniques nécessaires à la prise en compte, par le calcul d'erreur, de grandeurs à valeurs dans des espaces de dimensions infinies.

5.3.2 Domaine vectoriel d'une structure d'erreur

Considérons une structure d'erreur $S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$. Une des caractéristiques de l'opérateur Γ est d'être bilinéaire, ainsi, les calculs peuvent parfois s'avérer fastidieux. Il est souvent possible et commode d'introduire un opérateur linéaire, appelé le gradient, dont dérive Γ . Adoptons les notations suivantes : soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et (Ω, \mathcal{A}, m) un espace de probabilité, $L^2(m; E)$ désignera l'ensemble des fonctions mesurables $F : \Omega \rightarrow E$ telles que $\mathbb{E}_m[\|F\|_E^2] < \infty$.

Définition 5.11 *La structure d'erreur S possède un gradient si la propriété suivante (notée (G)) est vérifiée : Il existe un espace de Hilbert séparable $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ et un opérateur ∇ de \mathbb{D} dans $L^2(P; \mathcal{H})$, appelé le gradient, tel que*

$$\forall U \in \mathbb{D}, \quad \|\nabla U\|_{\mathcal{H}}^2 = \Gamma[U].$$

Le résultat suivant ([BH91], p.242) dû à Mokobowski assure que la propriété (G) n'est pas trop restrictive. Elle est notamment vérifiée par toutes les structures d'erreur considérées dans [B03]. Notons qu'en pratique, un candidat naturel se dégage toujours, ainsi, la preuve de l'existence d'un gradient sera plus souvent constructive que théorique.

Proposition 5.7 *Un gradient existe dès que l'espace $(\mathbb{D}, \|\cdot\|_{\mathbb{D}})$ est séparable.*

En vertu du calcul fonctionnel vérifié par Γ , il est facile de voir qu'un opérateur gradient suit la règle de dérivation des fonctions composées.

Proposition 5.8 *Si ∇ est un gradient associé à S , $\forall U \in \mathbb{D}^d$, $\forall F \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap Lip$,*

$$\nabla[F(U)] = \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i}(U) \nabla[U_i]. \quad (63)$$

Enfin, la propriété (G) est compatible avec la notion de produit de structures d'erreur : si chaque terme d'un produit de structures d'erreur possède un gradient, il est possible de construire explicitement un gradient pour la structure produit ([B03], p.79). En revanche, le comportement du gradient vis à vis de l'image d'une structure d'erreur n'est pas bon en général. Récemment ([B05b]), Bouleau a démontré qu'il était cependant possible, lorsque la propriété (G) est vérifiée, de construire un gradient particulier, à valeurs dans un espace de mesures, compatible avec le passage à l'image.

L'opérateur de dérivation est un gradient particulier qui est construit avec une copie $(\widehat{W}, \widehat{\mathcal{W}}, \widehat{P})$ de l'espace de probabilité initial. Il interviendra dans la définition du domaine vectoriel et nous verrons que dans le cas gaussien il permet, grâce à sa compatibilité avec le calcul d'Itô, de calculer aisément les erreurs sur les solutions d'équations différentielles stochastiques.

Définition 5.12 Soit J une isométrie entre \mathcal{H} et $L^2(\widehat{P})$. Pour $U \in \mathbb{D}$, nous notons $U^\#$ la "dérivée" de U définie par

$$U^\# = J(\nabla U) \in L^2(P \otimes \widehat{P}).$$

De plus, nous pouvons toujours supposer (ce que nous ferons) que $\forall h \in \mathcal{H}$, $\mathbb{E}_{\widehat{P}}[J(h)] = 0$, la variable aléatoire $U^\#$ sera donc centrée.

Remarque 5.10 La terminologie précédente est issue du cas classique sur l'espace de Wiener où $\#$ est l'opérateur de dérivation au sens de Fréchet et où ∇ peut s'interpréter en terme de gradient directionnel (dans la direction de l'espace de Cameron-Martin) ([BH91], chap.2).

Soit B un espace de Banach séparable et B' son dual topologique. Nous pouvons alors définir le domaine vectoriel de S vérifiant (G), le symbole \langle, \rangle désignant la dualité entre B et B' .

Définition 5.13 On note \mathbb{D}_B l'espace vectoriel des variables aléatoires U dans $L^2(P; B)$ telles qu'il existe g dans $L^2(P \otimes \widehat{P}; B)$ telle que

$$\forall \lambda \in B', \langle \lambda, U \rangle \in \mathbb{D} \text{ et } \langle \lambda, U \rangle^\# = \langle \lambda, g \rangle.$$

On pose alors $g = U^\#$ et on équipe \mathbb{D}_B de la norme

$$\| U \|_{\mathbb{D}_B} = \left(\| U \|_{L^2(P; B)}^2 + \frac{1}{2} \| U^\# \|_{L^2(P \otimes \widehat{P}; B)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(Ainsi $\mathbb{D}_{\mathbb{R}^d} = \mathbb{D}^d$).

Cette définition dépend en général du choix de l'opérateur de dérivation. Cependant, lorsque B est un espace de Hilbert séparable, on a la proposition suivante qui est une conséquence immédiate de la définition précédente et de la propriété de fermeture de la forme \mathcal{E} :

Proposition 5.9 *Soit B un espace de Hilbert séparable. Si $U \in L^2(m; B)$ les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $U \in \mathbb{D}_B$.

ii) *Il existe une base orthonormée $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de B telle que $\forall i \in \mathbb{N}, \langle e_i, U \rangle \in \mathbb{D}$ et $\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{E}[\langle e_i, U \rangle] < \infty$.*

iii) *Pour toute base orthonormée $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de B , $\forall i \in \mathbb{N}$, nous avons $\langle e_i, U \rangle \in \mathbb{D}$ et $\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{E}[\langle e_i, U \rangle] < \infty$.*

Dans ce cas, \mathbb{D}_B n'est autre que le produit tensoriel hilbertien entre \mathbb{D} et B .

Nous supposons jusqu'à la fin que l'espace de Banach séparable B vérifie la propriété d'approximation suivante :

(A) : *Il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs linéaires de B dans B , continus et de rangs finis telle que $\forall x \in B, \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = x$.*

En particulier, cette hypothèse est vérifiée dans le cas d'un espace de Hilbert, de l'espace de Wiener sur $[0, 1]$ ou, plus généralement, lorsque B possède une base de Schauder. On a alors le résultat suivant qui est une extension de la proposition 5.1.

Proposition 5.10 *Soit F une contraction de B dans \mathbb{R} . Si $U \in \mathbb{D}_B$ alors $F(U) \in \mathbb{D}$ et $\Gamma[F(U)] \leq \mathbb{E}_{\hat{P}}[\|U^\# \|^2_B]$. De plus, si nous supposons que F est de classe C^1 ,*

$$F(U)^\# = \langle F'(U), U^\# \rangle. \quad (64)$$

La proposition 5.10 nous permet, en utilisant la définition 5.5 avec $\mathcal{A} = C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip$, de généraliser la définition 5.4 lorsque $U \in \mathbb{D}_B$.

Définition 5.14 *Soit $U \in \mathbb{D}_B$, le quintuplet $(B, \mathcal{B}(B), U_*P, C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip, \Gamma_U)$ où $\forall F \in C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip, \Gamma_U[F] = \mathbb{E}_P[\Gamma[F(U)]|U]$, est une pré-structure d'erreur fermable. On note U_*S sa plus petite extension fermée qui est une structure d'erreur appelée l'image de S par U ou la \mathbb{D} -loi de U .*

Remarque 5.11 *Choisissons $U \in \mathbb{D}_B$ et supposons que B possède une base de Schauder. Pour toute base de Schauder $\beta = (e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de B , l'ensemble de*

fonctions cylindriques

$$\mathcal{A}_\beta = \{F(\langle e_{i_1}, \cdot \rangle, \dots, \langle e_{i_n}, \cdot \rangle); n \in \mathbb{N}, (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n, F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip\}$$

satisfait les hypothèses de la définition 5.5. On peut donc définir $U_*^{A_\beta} S$. Comme $U \in \mathbb{D}_B$, on peut montrer que $\forall \beta$

$$U_* S = U_*^{A_\beta} S.$$

La définition de l'image est alors canonique au sens où elle ne dépend pas du choix d'une base.

Exemple 5.4 Structure d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener

Plaçons nous dans le cadre de l'exemple 5.3. Soit

$$S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{N}(0, 1), H^1(\mathcal{N}(0, 1)), \gamma[u] = u'^2)^\mathbb{N},$$

la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les applications coordonnées de S . Chaque facteur possédant un gradient $D : f \in H^1(\mathcal{N}(0, 1)) \rightarrow f' \in L^2(\mathcal{N}(0, 1))$, en vertu de [B03], p.79, nous en déduisons un gradient ∇ pour S , à valeurs dans $L^2(P; L^2([0, 1], dx))$, en posant $\forall F \in \mathbb{D}$, $\forall t \in [0, 1]$,

$$\nabla[F](t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial g_n} \chi_n(t) \quad (65)$$

où $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $L^2([0, 1], dx)$ (d'après la définition 5.6, la série (66) est convergente P -p.p.).

En notant $(\widehat{W}, \widehat{\mathcal{W}}, \widehat{P})$ une copie de (W, \mathcal{W}, P) et $(\widehat{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les applications coordonnées correspondantes, nous construisons, de manière naturelle, un opérateur de dérivation $\#$ pour S défini, $\forall F \in \mathbb{D}$, par

$$F^\# = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial g_n} \widehat{g}_n \quad (66)$$

(l'isométrie J sous-jacente étant définie par la relation $J(\chi_n) = \widehat{g}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

Soit $\mathcal{C} = C_0([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} nulles en zéro. Cet espace vérifie la propriété (A), et on note $\mathbb{D}_{\mathcal{C}}$ le domaine vectoriel associé. Il est alors facile de voir que le processus continu défini sur $[0, 1]$ par

$$B_t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \chi_n(s) ds g_n$$

appartient à $\mathbb{D}_{\mathcal{C}}$ et que

$$B_t^\# = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \chi_n(s) ds \widehat{g}_n.$$

La structure image de S par $(B_t)_{t \in [0,1]}$ (au sens de la définition 5.14) sera notée dorénavant

$$S_{OU} = (\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}), \mu, \mathbb{D}_{OU}, \Gamma_{OU})$$

(où μ est la mesure de Wiener sur \mathcal{C}) et est appelée la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener. Elle possède un opérateur gradient ∇_{OU} qui n'est autre que le gradient au sens de Malliavin dont l'adjoint étend l'intégrale d'Itô ([N95]) et auquel on associe un opérateur de dérivation $\#_{OU}$. Par abus de notations, nous noterons $(B_t)_{t \in [0,1]}$ le processus défini sur \mathcal{C} par $B_t : f \in \mathcal{C} \rightarrow f(t)$ et qui est sous μ un mouvement Brownien. Lorsque $F \in C^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}) \cap Lip$ on a, d'après la définition 5.14,

$$\Gamma_{OU}[F](x) = \int_{\mathcal{C}} \langle F'(x), y \rangle^2 d\mu(y),$$

ainsi, si $F = f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathcal{C}')^n$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap Lip$, est une fonction cylindrique régulière

$$\Gamma_{OU}[F] = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \langle \lambda_i, \lambda_j \rangle_{L^2([0,1], dx)}. \quad (67)$$

La structure S_{OU} est bien, en accord avec la définition 5.7, de type Ornstein-Uhlenbeck.

Cette structure a été étudiée par de nombreux auteurs ([BH91], [FL89], [N95], [W79]). En particulier ([BH91], chap.4), lorsque $\sigma : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifient des conditions de régularité de type lipschitzien, la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \sigma(t, X_t) dB_t + b(t, X_t) dt, \quad X_0 = x,$$

appartient à $(\mathbb{D}_{OU})_{\mathcal{C}}$. En renforçant les hypothèses de dérivabilité sur σ et b , on peut voir de plus que $X_t^{\#OU}$ vérifie l'équation suivante

$$dX_t^{\#OU} = \sigma'_2(t, X_t) X_t^{\#OU} dB_t + \sigma(t, X_t) d\widehat{B}_t + b'_2(t, X_t) X_t^{\#OU} dt$$

où $(\widehat{B}_t)_{t \in [0,1]}$ est le mouvement Brownien associé à une copie $(\widehat{\mathcal{C}}, \widehat{\mathcal{B}}(\widehat{\mathcal{C}}), \widehat{\mu})$ de l'espace de Wiener initial. Ainsi le calcul de $\Gamma_{OU}[X_t] = \mathbb{E}_{\widehat{\mu}}[(X_t^{\#OU})^2]$ peut

être mené de manière simple et explicite en utilisant le calcul d'Itô pour développer $(X_t^{\#OU})^2$. Ceci permet l'étude de la sensibilité dans des modèles financiers Markoviens plus raffinés que le modèle de Black-Scholes, en dépit de l'absence de formules fermées ([B03], p.165).

5.3.3 Convergence et indépendance en dimension infinie

La définition 5.14 nous permet d'étendre la notion de Dirichlet indépendance (définition 5.9) aux éléments du domaine vectoriel :

Définition 5.15 Soient $(U, V) \in (\mathbb{D}_B)^2$, U et V sont Dirichlet indépendantes si

$$U_*S \otimes V_*S = (U, V)_*S.$$

De plus, le théorème 5.2 de caractérisation reste valide dans notre contexte.

Proposition 5.11 Deux variables aléatoires U et V dans \mathbb{D}_B sont Dirichlet indépendantes si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

- a) U et V sont indépendantes sur l'espace (W, \mathcal{W}, P) .
- b) $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in B'^2$, $\mathbb{E}_P[\Gamma[\lambda_1(U), \lambda_2(V)]|U, V] = 0$ P -p.p.
- c) $\forall \lambda \in B'$, $\mathbb{E}_P[\Gamma[\lambda(U)]|U, V] = \mathbb{E}_P[\Gamma[\lambda(U)]|U]$ P -p.p.
- d) $\forall \lambda \in B'$, $\mathbb{E}_P[\Gamma[\lambda(V)]|U, V] = \mathbb{E}_P[\Gamma[\lambda(V)]|V]$ P -p.p.

Nous étendons également la notion de convergence en loi de Dirichlet (définition 5.10) aux éléments du domaine vectoriel.

Définition 5.16 On dit qu'une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{D}_B converge en loi de Dirichlet s'il existe une structure d'erreur $\hat{S} = (B, \mathcal{B}(B), \nu, \hat{\mathbb{D}}, \hat{\Gamma})$ telle que :

- i) $(U_n)_*P \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \nu$ en loi i.e $\forall F \in C_b(B, \mathbb{R})$, $\mathbb{E}_P[F(U_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_B F(x) d\nu(x)$
- ii) $C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip \subset \hat{\mathbb{D}}$ et $\forall F \in C^1(B, \mathbb{R}) \cap Lip$, $\mathcal{E}[F(U_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \hat{\mathcal{E}}[F]$.

Par commodité, nous dirons alors que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi de Dirichlet vers \hat{S} .

Ayant supposé que S vérifie la propriété (G) (et a priori uniquement dans ce cas), nous obtenons le lien suivant entre la convergence en loi de Dirichlet et la convergence au sens de la norme du graphe :

Proposition 5.12 Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers U dans \mathbb{D}_B alors $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi de Dirichlet vers U_*S .

La démonstration utilise le résultat probabiliste suivant :

Lemme 5.1 Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et U des variables aléatoires dans $L^2(P; B)$, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers U et $\mathbb{E}_P[\|U_n\|_B^2] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_P[\|U\|_B^2]$.

ii) Pour toute fonction $F \in C(B, \mathbb{R})$ vérifiant $\lim_{\|x\|_B \rightarrow \infty} \frac{|F(x)|}{\|x\|_B^2} \leq K$, où K est une constante positive, $\mathbb{E}_P[F(U_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_P[F(U)]$.

5.4 Extension du théorème de la limite centrale Hilbertien [C08]

Supposons que la structure d'erreur $S = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}, \Gamma)$ possède un gradient $\nabla : \mathbb{D} \rightarrow L^2(m; \mathcal{H})$ (définition 5.11). Nous notons $\# : \mathbb{D} \rightarrow L^2(m \otimes \hat{m})$ un opérateur de dérivation associé (définition 5.12). Bien qu'il ne soit pas canonique, le choix de l'isométrie J n'est pas spécifié car, lorsque H est un espace de Hilbert séparable, la définition de \mathbb{D}_H (définition 5.13) est indépendante d'un tel choix (proposition 5.9).

Nous considérons, alors, une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires dans \mathbb{D}_H , Dirichlet indépendantes (définition 5.15) et de même \mathbb{D} -loi (définition 5.14) et nous étudions la convergence en loi de Dirichlet (définition 5.16) de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $V_n = \frac{U_1 + \dots + U_n}{\sqrt{n}}$.

Théorème 5.4 Soient $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert séparable et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires centrées de \mathbb{D}_H , Dirichlet indépendantes et de même \mathbb{D} -loi. En notant Σ l'opérateur de covariance de U_1 , alors, la suite $V_n = \frac{U_1 + \dots + U_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi de Dirichlet vers $\hat{S} = (H, \mathcal{B}(H), \nu, \hat{\mathbb{D}}, \hat{\Gamma})$ où

i) ν est une mesure gaussienne sur H , centrée, d'opérateur de covariance Σ ,

ii) $\forall F \in C^1(H, \mathbb{R}) \cap Lip$, $F \in \hat{\mathbb{D}}$ et

$$\hat{\mathcal{E}}[F] = \frac{1}{2} \int_{H^2} \langle F'(x), y \rangle^2 d\mu(x, y) \quad (68)$$

où μ est une mesure gaussienne sur H^2 , centrée, d'opérateur de covariance K défini pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ dans H^2 par

$$\langle Kx, y \rangle_{H^2} = \langle \Sigma x_1, y_1 \rangle + 2\mathcal{E}[\langle U_1, x_2 \rangle, \langle U_1, y_2 \rangle],$$

iii) la forme $(C^1(H, \mathbb{R}) \cap Lip, \widehat{\mathcal{E}})$ est fermable, sa plus petite extension fermée est notée $(\widehat{\mathbb{D}}, \widehat{\mathcal{E}})$ et admet un opérateur carré du champ $\widehat{\Gamma}$.

Ainsi, la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi de Dirichlet vers une structure d'erreur de type Ornstein-Uhlenbeck (définition 5.7) car nous avons pour toute fonction cylindrique $F = f(\langle x_1, \cdot \rangle, \dots, \langle x_p, \cdot \rangle)$ de classe $C^1 \cap Lip$,

$$\widehat{\Gamma}[F] = 2 \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} (\langle x_1, \cdot \rangle, \dots, \langle x_p, \cdot \rangle) \mathcal{E}[\langle U_1, x_i \rangle, \langle U_1, x_j \rangle].$$

De la même manière que l'utilisation de mesures gaussiennes en statistiques est, en partie, justifiée par le théorème de la limite centrale probabiliste, ce résultat met en lumière l'importance de cette famille de structures d'erreur pour les applications.

La preuve complète de ce résultat est disponible dans [C08] où nous montrons que l'hypothèse de Dirichlet indépendance sur les U_n permet de se ramener au cas où ces variables sont définies sur une structure produit et qu'alors, les couples $(U_n, U_n^\#)$ sont indépendants et de même loi. L'étude de la convergence de la suite $(\mathcal{E}[F(V_n)])_{n \in \mathbb{N}^*}$, lorsque $F \in C^1(H, \mathbb{R}) \cap Lip$, est alors une simple conséquence du théorème de la limite centrale probabiliste dans les espaces de Hilbert (en effet, dans le cas hilbertien, la relation intrinsèque entre indépendance et orthogonalité permet d'étendre aisément la convergence en loi du couple $(V_n, V_n^\#)$ aux fonctionnelles continues sous quadratiques). Le point délicat reste l'existence de la structure limite qui se ramène au problème de la fermabilité d'un opérateur gradient directionnel au sens de [GG03]. Cette fermabilité est obtenue en utilisant une technique d'intégration par partie en dimension infinie. Enfin, le résultat est interprété comme limite projective de l'étude en dimension finie.

5.5 Extensions du théorème de Donsker [C05]

Nous adoptons les notations introduites dans l'exemple 5.4. Ainsi, $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$ est l'espace de Wiener équipé de la norme uniforme sur $[0, 1]$ et μ la mesure de Wiener sur \mathcal{C} . Le processus $(B_t)_{t \in [0, 1]}$ défini par $B_t : f \in \mathcal{C} \mapsto f(t)$ est, sous μ , un mouvement Brownien continu et nous notons $S_{OU} = (\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}), \mu, \mathbb{D}_{OU}, \Gamma_{OU})$ la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur \mathcal{C} .

Nous allons poursuivre ici l'étude effectuée dans [B05a] sur le raffinement, en termes de formes de Dirichlet, du théorème de Donsker concernant la convergence d'une promenade aléatoire. Rappelons, dans un premier

temps, ce résultat probabiliste classique ([D51]) : Soit $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d, centrées et réduites. On interpole la promenade aléatoire $\sum_{k=1}^n U_k$ par le processus affine par morceaux $(X_n(t))_{t \in [0,1]}$ défini par

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{[nt]} U_k + (nt - [nt])U_{[nt]+1} \right) \quad (69)$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x . Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 5.5 *Le processus $(X_n(t))_{t \in [0,1]}$ converge en loi dans \mathcal{C} vers μ .*

Dans [B05a], Bouleau s'intéresse à la convergence en loi de Dirichlet du processus $(X_n(t))_{t \in [0,1]}$ lorsque les U_k sont supposées erronées, les erreurs étant modélisées par des structures d'erreur. Il montre, sous des hypothèses d'indépendance et de stationnarité sur les erreurs, le résultat naturel suivant :

Théorème 5.6 *Le processus $(X_n(t))_{t \in [0,1]}$ converge en loi de Dirichlet vers S_{OU} .*

Notons qu'à la différence de la preuve du théorème 5.4, la principale difficulté est ici de démontrer la convergence de la suite $(\mathcal{E}[F(X_n)])_{n \in \mathbb{N}^*}$, pour $F \in C^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}) \cap Lip$. Ceci nécessite une extension purement probabiliste du théorème 5.5 pour les fonctions continues sous quadratiques.

Le but est ici de généraliser le théorème 5.6 pour certaines intégrales stochastiques du processus X_n

5.5.1 Le cas des intégrales de Wiener

Soit $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d définies sur un espace (W, \mathcal{W}, P) , centrées et réduites. Soit $h \in L^2([0, 1], dx)$, on s'intéresse dans cette partie à la convergence en loi de Dirichlet du processus continu Y_n^h , défini sur $[0, 1]$ de la manière suivante :

$$Y_n^h(t) = \int_0^t h(s) dX_n(s) = \sqrt{n} \sum_{k=1}^n U_k \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(s) I_{[0,t]}(s) ds.$$

Nous étudions, en premier lieu, la convergence en loi dans \mathcal{C} du processus Y_n^h vers l'intégrale Brownienne correspondante. Comme le processus X_n est une semi-martingale continue, des conditions très générales, dépendant de la

régularité de h , existent dans la littérature. Lorsque h est cad-lag (continue à droite avec limite à gauche), une condition suffisante pour X_n est de vérifier la célèbre condition $U.T$ due à Jakubowski, Mémin et Pagès ([JMP89] ou [KP91] pour une formulation équivalente). Comme les X_n ont des trajectoires à variations bornées, d'après la proposition 6.12, p.378, de [JS87], cette condition $U.T$ est équivalente à la tension de la suite $(Var(X_n)_t)_{n \in \mathbb{N}^*}$, pour tout $t \in [0, 1]$, $var(X_n)$ étant le processus de variations défini par

$$Var(X_n)_t = \sup \sum |X(t_{k+1}) - X(t_k)|$$

(le sup étant pris sur toutes les partitions de l'intervalle $[0, t]$). Comme

$$Var(X_n)_t = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{[nt]} |U_k| + (nt - [nt]) |U_{[nt]+1}| \right),$$

cela n'est manifestement pas le cas. On peut aussi trouver dans [JS87], chap.9, un critère imposant la convergence en variation des composantes de la caractéristique de la semi-martingale X_n vers celles du mouvement Brownien qui n'est pas vérifié ici. Nous allons donc procéder à une étude directe, en supposant dans un premier temps h continue puis en raisonnant par approximation.

Proposition 5.13 *Lorsque $h \in C([0, 1], \mathbb{R})$, la suite $(Y_n^h)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi dans \mathcal{C} vers $Y^h = \int_0^1 h(s) dB_s$.*

Lorsque h est continue cette étude est réalisée grâce à l'introduction d'un processus auxiliaire : on définit

$$\widetilde{Y}_n^h(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{[nt]} h(x_{k,n}) U_k + (nt - [nt]) h(x_{[nt]+1,n}) U_{[nt]+1} \right)$$

où $x_{k,n} = \frac{k}{n}$. D'après une version fonctionnelle du principe d'invariance de Lindeberg-Feller ([DD93], p.226), \widetilde{Y}_n^h converge en loi dans \mathcal{C} vers Y^h . Pour conclure il suffit de démontrer que les processus Y_n^h et \widetilde{Y}_n^h sont contigus au sens où, $\forall \varepsilon > 0$,

$$P(\|\widetilde{Y}_n^h - Y_n^h\|_\infty > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ceci est rendu possible par l'uniforme continuité de h . Notons que l'argument de la preuve précédente ne peut être adapté pour $h \in L^2([0, 1], dx)$ quelconque. En effet, si l'on prend $h = I_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ on a $\widetilde{Y}_n^h = 0$ et $Y_n^h = X_n$.

On a cependant le résultat suivant obtenu par approximation de h par des fonctions continues. L'argument clé de la démonstration est la monotonie par morceaux de (Y_n^h) lorsque h est positive.

Proposition 5.14 *Lorsque $h \in L^2([0, 1], dx)$, la suite $(Y_n^h)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi dans \mathcal{C} vers le processus Y^h .*

Nous supposons maintenant que les U_k sont erronées (les erreurs étant modélisées par des structures d'erreur) en imposant une condition d'indépendance et d'équi-distribution pour les erreurs. En d'autres termes, les U_k sont les coordonnées de la structure produit

$$S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda, d, \gamma)^{\mathbb{N}^*},$$

la structure $s = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda, d, \gamma)$ étant telle que l'application identité de \mathbb{R} notée i soit dans d et que $\mathbb{E}_\lambda[i] = 0$ et $\mathbb{E}_\lambda[i^2] = 1$. On suppose de plus, sans perte de généralités, que $e[i] = 1$ où e est la forme de Dirichlet associée à s . Ainsi, les U_k sont des variables i.i.d sur W , de loi λ , telles que $U_k \in \mathbb{D}$ avec

$$\Gamma[U_n, U_m] = \delta_n^m \gamma[i](U_n) \quad (70)$$

où $\delta_n^m = 1$ si $n = m$ et $\delta_n^m = 0$ sinon.

Remarque 5.12 *En adaptant l'argument développé dans [C08], nous pourrions supposer uniquement que les U_k sont Dirichlet indépendantes, de même \mathbb{D} -loi et nous ramener à la situation décrite ci-dessus.*

On a alors la proposition suivante qui montre la convergence en loi de Dirichlet au sens des marginales fini-dimensionnelles du processus Y_n^h .

Proposition 5.15 $\forall (t_1, \dots, t_p) \in [0, 1]^p$, la suite $(Y_n^h(t_1), \dots, Y_n^h(t_p))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi de Dirichlet vers $(Y^h(t_1), \dots, Y^h(t_p))_* S_{OU}$.

Nous donnons maintenant une extension fonctionnelle de la proposition précédente en montrant, sous une hypothèse peu restrictive, la convergence en loi de Dirichlet (définition 5.16) de la suite de processus continus $(Y_n^h)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers la structure $(Y^h)_* S_{OU}$ (notée dorénavant S_{OU}^h).

Remarque 5.13 *Il est facile de voir que $Y^h \in (\mathbb{D}_{OU})_{\mathcal{C}}$ et donc que la structure S_{OU}^h est bien définie (définition 5.14). Si on note \mathcal{E}_{OU}^h la forme de Dirichlet associée, nous avons, en vertu de la proposition 5.10, $\forall F \in C^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}) \cap Lip$,*

$$\mathcal{E}_{OU}^h[F] = \mathcal{E}_{OU}[F(Y^h)] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} \int_{\widehat{\mathcal{C}}} \left\langle F' \left(\int_0^\cdot h(s) dB_s \right), \int_0^\cdot h(s) d\widehat{B}_s \right\rangle^2 d\mu d\widehat{\mu}$$

où \widehat{B} est le mouvement Brownien associé à une copie $(\widehat{\mathcal{C}}, \widehat{\mathcal{B}}(\widehat{\mathcal{C}}), \widehat{\mu})$ de l'espace de Wiener $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}), \mu)$.

On dit que la structure $s = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda, d, \gamma)$ possède un gradient et on note $'$ un opérateur de dérivation associé (le choix de l'isométrie sous-jacente n'étant pas précisé) construit à l'aide d'une copie $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\mathcal{B}}(\widehat{\mathbb{R}}), \widehat{\lambda})$ de l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On note $\#$ l'opérateur de dérivation sur la structure produit $S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$ que l'on déduit de $'$ (définition 5.12). En notant \widehat{U}_n les applications coordonnées de l'espace $(\widehat{W}, \widehat{\mathcal{W}}, \widehat{P})$, nous avons, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $F \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \cap Lip$,

$$F(U_1, \dots, U_p)^\# = \sum_{k=1}^p F'_k(U_1, \dots, U_p) i'(U_k, \widehat{U}_k).$$

On montre, ainsi, que le processus Y_n^h est dans $\mathbb{D}_{\mathcal{C}}$ et que

$$(Y_n^h)^\#(t) = \sqrt{n} \sum_{k=1}^n U_k^\# \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(s) I_{[0,t]}(s) ds.$$

En vertu du calcul fonctionnel généralisé (proposition 5.10), si $F \in C^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}) \cap Lip$, on a

$$\mathcal{E}[F(Y_n^h)] = \frac{1}{2} \int_W \int_{\widehat{W}} \langle F'(Y_n^h), (Y_n^h)^\# \rangle^2 d\widehat{P} dP. \quad (71)$$

Les (U_k, \widehat{U}_k) étant par construction i.i.d, centrées et de matrice de covariance égale à la matrice identité, l'extension multidimensionnelle de la proposition 5.14 (qui est immédiate) nous assure la convergence en loi dans \mathcal{C}^2 du processus $(Y_n^h, (Y_n^h)^\#)$ vers $(\int_0^\cdot h(s) dB_s, \int_0^\cdot h(s) d\widehat{B}_s)$. On pose

$$\phi : (x, y) \in \mathcal{C}^2 \mapsto \langle F'(x), y \rangle^2$$

et on remarque que ϕ est une fonction continue et sous quadratique. Pour conclure il nous suffit de prouver l'extension suivante de la proposition 5.14 qui a été démontrée dans le cadre du théorème de Donsker dans [B05a] et que nous généralisons à notre cadre :

Proposition 5.16 Soit $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in \mathcal{C}$, $|\phi(x)| \leq C(1 + \|x\|_\infty^2)$, alors,

$$\mathbb{E}_P[\phi(Y_n^h)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\mu[\phi(Y^h)].$$

En appliquant la proposition précédente à (71), on a

$$2\mathcal{E}[F(Y_n^h)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}} \int_{\mathcal{C}} \left\langle F' \left(\int_0^\cdot h(s) dB_s \right), \int_0^\cdot h(s) d\hat{B}_s \right\rangle^2 d\mu d\hat{\mu}.$$

D'après la remarque 5.13 nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 5.17 La suite de processus continus $(Y_n^h)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi de Dirichlet vers S_{OU}^h .

5.5.2 Le cas des processus gaussiens généraux

Nous voulons, dans cette partie, étendre le résultat précédent en étudiant la convergence en loi de Dirichlet d'approximations de processus gaussiens généraux construites à l'aide du processus X_n . Soit $(Y^K(t))_{t \in [0,1]}$ un processus gaussien continu de la forme $Y^K(t) = \int_0^1 K(t, s) dB_s$, on s'intéresse, ici, à la convergence du processus continu $Y_n^K = \int_0^1 K(\cdot, s) dX_n(s)$.

Nous supposons dorénavant que K vérifie les deux hypothèses suivantes :

i) K est mesurable et $K(0, r) = 0$, $r \in [0, 1]$.

ii) Il existe une fonction $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continue et croissante et un réel $\alpha > 0$ tels que, pour tout $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$,

$$\int_0^1 (K(t_2, r) - K(t_1, r))^2 dr \leq (G(t_2) - G(t_1))^\alpha.$$

Remarque 5.14 Les conditions ci-dessus sont issues de [DJ00]. Dans cet article, les auteurs étudient la convergence en loi de l'approximation du processus Y^K construite à l'aide du noyau de Strook (les restrictions sur K permettant de démontrer la tension de l'approximation). De plus, plusieurs exemples de processus vérifiant i) et ii) sont donnés : c'est le cas, en particulier, du mouvement Brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $0 < H < 1$ ou du processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Lorsque $K(t, s) = I_{[0,t]}(s)h(s)$ avec $h \in L^2([0, 1], dx)$, on a $Y_n^K = Y_n^h$. Cependant, les trajectoires de Y_n^K ne sont plus, en général, monotones par morceaux (argument qui est crucial dans l'étude du cas de l'intégrale de Wiener). En renforçant les conditions d'intégrabilité sur les U_k on obtient néanmoins le résultat suivant :

Proposition 5.18 *Supposons que $U_1 \in L^p(W)$ avec $p > \frac{2}{\alpha} \vee 2$. Alors, le processus Y_n^K converge en loi dans \mathcal{C} vers le processus Y^K et les variables $\|Y_n^K\|_\infty^2$ sont équi-intégrables.*

Par un raisonnement analogue à celui de la section précédente, on a alors le résultat suivant :

Proposition 5.19 *Si le noyau K vérifie les hypothèses i) et ii) et si $(U_1, U_1^\#) \in L^p(W) \times L^p(W \otimes \hat{W})$ avec $p > \frac{2}{\alpha} \vee 2$, alors, le processus Y_n^K converge en loi de Dirichlet vers $(Y^K)_*S_{OU}$.*

5.5.3 Convergence des intégrales multiples où l'intégrant est une multi-mesure

Lorsque la fonction h est suffisamment régulière, la proposition 5.17 se déduit immédiatement de la convergence en loi de Dirichlet de X_n vers S_{OU} démontrée dans [B05a]. En effet, soit h une fonction à variations bornées, continue à droite, on note ν la mesure signée associée telle que $\nu([t, 1]) = h(t)$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on note $\bar{\nu}_t$ la mesure vérifiant, $\forall A \in \mathcal{B}([0, 1])$, $\bar{\nu}_t(A) = \nu(A(t))$ où $A(t) = A \cap [0, t]$ si $t \notin A$ et $A(t) = A \cup [t, 1]$ si $t \in A$. En intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^t h(s) dX_n(s) = \int_0^t X_n(s) d\bar{\nu}_t(s) = \phi_h(X_n) \quad (72)$$

où $\phi_h : B \rightarrow B$ est une fonctionnelle de classe C^1 et lipschitzienne. Ainsi, comme X_n converge en loi de Dirichlet vers S_{OU} , $\phi_h(X_n)$ converge en loi de Dirichlet vers $\phi_h *_S S_{OU}$. Or, d'après la formule d'Itô,

$$\int_0^t h(s) dB_s = \int_0^t B_s d\bar{\nu}_t(s),$$

donc

$$\phi_h *_S S_{OU} = \left(\int_0^\cdot h(s) dB_s \right) *_S S_{OU}.$$

Nous allons généraliser l'exemple ci-dessus au cas des intégrales multiples données par une multi-mesure. Soit $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction symétrique, on s'intéresse à la convergence en loi de Dirichlet d'intégrales de la forme

$$\int_{[0, \cdot]^p} h(x_1, \dots, x_p) dX_n(x_1) \dots dX_n(x_p). \quad (73)$$

Le problème de la convergence en loi de (73) est traité dans [BJ00] en étudiant la question du prolongement continu, à l'espace de Wiener, de la fonctionnelle

$$\phi_h : \eta \in \mathcal{H} \mapsto \int_{[0, \cdot]^p} h(x_1, \dots, x_p) d\eta(x_1) \dots d\eta(x_p) \in \mathcal{C}, \quad (74)$$

\mathcal{H} étant l'espace de Cameron-Martin. Pour cela, nous avons besoin de la notion de multi-mesure (au sens de Nualart-Zakai [NZ90]) qui permet une généralisation de la notion de fonctions à variations bornées pour les fonctions à plusieurs variables.

Définition 5.17 Une application $\nu : (\mathcal{B}([0, 1]))^p \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée une multi-mesure si $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $\forall (A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_p) \in (\mathcal{B}([0, 1]))^{p-1}$, l'application

$$A \in \mathcal{B}([0, 1]) \mapsto \mu(A_1, \dots, A_{i-1}, A, A_{i+1}, \dots, A_p)$$

est une mesure signée. On dit, de plus, que h est donnée par la multi-mesure ν si

$$h(x_1, \dots, x_p) = \nu([x_1, 1], \dots, [x_p, 1]).$$

La réponse est alors la suivante [BJ00] :

Théorème 5.7 Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- a) ϕ_h possède une extension continue sur \mathcal{C} .
- b) La fonction h est donnée par une multi-mesure symétrique ν .

De plus, l'extension de ϕ_h est telle que, $\forall \eta \in \mathcal{C}$,

$$\phi_h(\eta) = \int_{[0, \cdot]^p} \eta(x_1) \dots \eta(x_p) d\bar{\nu}(x_1, \dots, x_p)$$

où $(\bar{\nu}_t)_{t \in [0, 1]}$ est une famille de multi-mesures satisfaisant

$$\|\bar{\nu}_t\|_{FV} \leq \|\nu\|_{FV} \quad (\|\cdot\|_{FV} \text{ étant la variation de Fréchet}).$$

Ainsi, dans le cadre du théorème précédent, l'application ϕ_h est continue. Comme X_n est un processus qui converge en loi dans \mathcal{C} vers le mouvement Brownien, $\phi_h(X_n)$ converge en loi dans \mathcal{C} vers $\phi_h(B)$ qui n'est autre que l'intégrale multiple de Stratonovich de h . Cependant, pour déduire aisément la convergence en loi de Dirichlet de $\phi_h(X_n)$ de celle de X_n , il nous faudrait le caractère $C^1 \cap Lip$ de ϕ_h . Ceci n'est pas le cas (sauf si $p = 1$), ϕ_h est seulement de classe C^1 et vérifie les inégalités suivantes

$$|\phi_h(x)| \leq \|\nu\|_{FV} \|x\|_\infty^p, \quad (75)$$

$$|\phi'_h(x)[\tilde{x}]| \leq p \|\nu\|_{FV} \|\tilde{x}\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1}. \quad (76)$$

Nous pallions ce problème en imposant des conditions d'intégrabilité sur le couple $(U_k, U_k^\#)$.

On énonce tout d'abord le résultat technique suivant qui d'une certaine manière généralise [BH91], p.39.

Proposition 5.20 *Soient $S = (W, \mathcal{W}, P, \mathbb{D}, \Gamma)$ une structure d'erreur qui possède un gradient et B un espace de Banach qui vérifie la propriété d'approximation (A) (section 5.3.2). Soit $X \in \mathbb{D}_B$ telle que $\|X\|_B \in L^{2p}(W)$ et $\|X^\#\|_B \in L^{2p}(W \otimes \hat{W})$. Lorsque $F \in C^1(B, \mathbb{R})$ vérifie $|F(x)| \leq C\|x\|_B^p$ et $\|F'(x)\| \leq C\|x\|_B^{p-1}$, on a*

$$F(X) \in \mathbb{D} \quad \text{et} \quad F(X)^\# = F'(X)[X^\#].$$

Nous pouvons déduire de la proposition précédente un calcul fonctionnel vérifié par X_n .

Proposition 5.21 *On suppose que $(U_k, U_k^\#) \in L^{2p}(W) \times L^{2p}(W \otimes \hat{W})$, alors, $\forall F \in C^1(\mathcal{C}, \mathbb{R})$ telle que $|F(x)| \leq C\|x\|_\infty^p$ et $\|F'(x)\| \leq C\|x\|_\infty^{p-1}$,*

$$F(X_n) \in \mathbb{D} \quad \text{et} \quad F(X_n)^\# = F'(X_n)[X_n^\#].$$

Corollaire 5.1 *a) Si $(U_k, U_k^\#) \in L^{2p}(W) \times L^{2p}(W \otimes \hat{W})$, $\phi_h(X_n) \in \mathbb{D}_\mathcal{C}$ et $\phi_h(X_n)^\# = \phi'_h(X_n)[X_n^\#]$.*

b) $\phi_h(B) \in (\mathbb{D}_{OU})_\mathcal{C}$ et $\phi_h(B)^\# = \phi'_h(B)[\hat{B}]$.

On est alors en droit d'étudier la convergence en loi de Dirichlet de $\phi_h(X_n)$ vers $\phi_h * S_{OU}$. Soit $F \in C^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}) \cap Lip$. En notant $G = F(\phi_h)$, on a, d'après les inégalités (75) et (76) et le corollaire 5.1,

$$2\mathcal{E}[F(\phi_h(X_n))] = \int_W \int_{\hat{W}} \left(G'(X_n)[X_n^\#] \right)^2 dP d\hat{P} = \int_W \int_{\hat{W}} \Phi(X_n, X_n^\#) dP d\hat{P} \quad (77)$$

où $\Phi : \mathcal{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant

$$|\Phi(x, y)| \leq C \|x\|_\infty^{2(p-1)} \|y\|_\infty^2 \leq C \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)^{2p}.$$

Nous concluons en utilisant l'extension suivante du théorème de Donsker qui a été prouvée dans le cas $q = 2$ dans [B05a].

Proposition 5.22 *Soit $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in \mathcal{C}$, $|\Phi(x)| \leq C(1 + \|x\|_\infty^q)$. Lorsque $U_1 \in L^q(W)$,*

$$\mathbb{E}_P[\Phi(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\mu[\Phi].$$

Nous déduisons alors

Proposition 5.23 *Si $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par une multi-mesure et si le couple $(U_1, U_1^\#) \in L^{2p}(W) \times L^{2p}(W \otimes \hat{W})$, alors, $\phi_h(X_n)$ converge en loi de Dirichlet vers $\phi_h * S_{OU}$.*

Références

- [A76] A. ANCONA : *Continuité des contractions dans les espaces de Dirichlet*, in : Séminaire de Théorie du Potentiel, Paris, Lecture N. in Math, Vol. 563, 1-26, Springer-Verlag, 1976.
- [BJ00] X. BARDINA, M. JOLIS : *Weak convergence to the multiple Stratonovich integral*, Stochastic Process. Appl. 90, no. 2, 277-300, 2000.
- [BD58] A. BEURLING, J. DENY : *Espaces de Dirichlet, I. Le cas élémentaire*, Acta Math. 99, 203-224, 1958.
- [BH91] N. BOULEAU, F. HIRSCH : *Dirichlet forms and analysis on Wiener space*, de Gruyter studies in mathematics 14, 1991.
- [B01] N. BOULEAU : *Calcul d'erreur complet Lipschitzien et formes de Dirichlet*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 80.9, 961-976, 2001.
- [B03] N. BOULEAU : *Error calculus for finance and physics : The language of Dirichlet forms*, de Gruyter, 2003.
- [B04] N. BOULEAU : *Some thoughts upon axiomatized languages, a focus on probability theory and error calculus with Dirichlet forms*, Butlleti de la societat catalana de matemàtiques, Vol. 18, no. 2, 25-36, 2004.
- [B05a] N. BOULEAU : *Théorème de Donsker et formes de Dirichlet*, Bull. Sci. Math. 129, no. 5, 369-380, 2005.
- [B05b] N. BOULEAU : *Differential calculus for Dirichlet forms : The measure-valued gradient preserved by image*, J. Funct. Anal. 225, no.1, 63-73, 2005.
- [BC04] N. BOULEAU, C. CHORRO : *Error structures and parameter estimation*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338, 305-310, 2004.
- [C05] C. CHORRO : *Convergence in Dirichlet law of certain stochastic integrals*, Electron. J. Probab. 10, 1005-1025, 2005.
- [C08] C. CHORRO : *On an extension of the hilbertian central limit theorem to Dirichlet forms*, Osaka. J. of Mathematics 45(2), 2008.
- [DD93] D. DACUNHA-CASTELLE, M. DUFLO : *Probabilités et statistiques 2*, Masson, 1993.
- [DJ00] R. DELGADO, M. JOLIS : *Weak approximation for a class of Gaussian processes*, J. Appl. Probab. 37, no. 2, 400-407, 2000.
- [FL89] D.FEYEL, A. DE LA PRADELLE : *Espaces de Sobolev Gaussiens*, Ann. Institut Fourier 39, no. 4, 875-908, 1989.

- [D51] M. DONSKER : *An invariance principle for certain probability theorems*, Mem. Amer. Math. Soc. 6, 1951.
- [F25] R.A. FISHER : *Theory of statistical information*, Proc. Cambridge Philo. Soc. Vol XXII, Pt5, 1925.
- [FOT94] M. FUKUSHIMA, Y. OSHIMA, M. TAKEDA : *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, de Gruyter Studies in Mathematics, Berlin, 1994.
- [G21] F. GAUSS : *Theoria combinationis*, 1821.
- [GG03] B. GOLDYS, F. GOZZI : *On Closability of Directional Gradients*, Potential Analysis 18, 289-310, 2003.
- [IH81] I.A. IBRAGIMOV, R.Z. HAS'MINSKII : *Statistical Estimation*, Springer-Verlag, 1981.
- [JS87] J. JACOD, A.N. SHIRYAEV : *Limit theorems for stochastic processes*, Springer-Verlag, 1987.
- [LJ82] Y. LE JAN : *Dual Markovian semigroups and processes*, in Functional Analysis in Markov processes, ed. M. Fukushima, Lecture N. in Math., Vol. 923, 47-75, Springer-Verlag, 1982.
- [JMP89] A. JAKUBOWSKI, J. MÉMIN, G. PAGÈS : *Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace D^1 de Skorokhod*, Probab. Theory Related Fields 81, 111-137, 1989.
- [KP91] T.G. KURTZ, P. PROTTER : *Weak limit theorems for stochastic integrals and stochastic differential equations*, Ann. Probab. 19, no. 3, 1035-1070, 1991.
- [L99] E.L. LEHMANN : *Element of Large Sample Theory*, Springer Texts In Statistics, Springer-Verlag, 1999.
- [LC98] E.L. LEHMANN, G. CASELLA : *Theory of Point Estimation*, Springer Texts In Statistics, Springer-Verlag, 1998.
- [MR92] Z. MA, M. RÖCKNER : *Introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms*, Springer-Verlag, 1992.
- [M78] P. MALLIAVIN : *Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators*, in : Intern. Symp. SDE Kyoto 1976, 195-253, Kinokuniya, Tokyo, 1978. Editions Jacques Gabay, 1993.
- [N75] J. NEVEU : *Discrete-parameter martingales*, North-Holland, 1975.
- [NZ90] D. NUALART, M. ZAKAI : *Multiple Wiener-Ito integrals possessing a continuous extension*, Probab. Theory Related Fields 85, no. 1, 131-145, 1990.

- [N95] D. NUALART : *Malliavin calculus and related topics*, Springer-Verlag, 1995.
- [S74] M.L SILVERSTEIN : *Symmetric Markov process*, Lecture N. in Math, Vol. 426, Springer-Verlag, 1974.
- [W79] S. WATANABE : *On stochastic differential equations and Malliavin calculus*, Tata Institute of Fundamental Research, Vol. 73, Springer-Verlag, 1979.