



HAL
open science

L'enseignement de l'intégrale en classe terminale de l'enseignement tunisien.

Sassi Haddad

► **To cite this version:**

Sassi Haddad. L'enseignement de l'intégrale en classe terminale de l'enseignement tunisien.. Astrophysique galactique [astro-ph.GA]. Paris 7; ISEFC de Tunis, 2012. Français. NNT: . tel-01087840

HAL Id: tel-01087840

<https://hal.science/tel-01087840>

Submitted on 26 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse en co-tutelle

Pour l'obtention du titre de
Docteur de l'Université Paris-Diderot Paris 7
Docteur de l'Université Virtuelle de Tunis

Présenté par

SASSI HADDAD

Spécialité : Didactique des Mathématiques

***L'ENSEIGNEMENT DE L'INTÉGRALE EN CLASSE
TERMINALE DE L'ENSEIGNEMENT TUNISIEN***

Thèse co-dirigée par

Faouzi Chaabane & Jean Baptiste LAGRANGE

Thèse soutenue le 25 Septembre 2012 devant le jury :

Directeurs de thèse

Faouzi CHAABANE

Jean- Baptiste LAGRANGE

Professeur, Université de Carthage, Tunis

Professeur, Université de Reims Champagne Ardenne

Rapporteurs

Isabelle BLOCH

Karim BOULABIAR

Professeur émérite, Université Bordeaux 4

Professeur, Université Tunis El Manar, Tunis

Examineurs

Belhassen DAHMEN

Marc ROGALSKI

Fabrice VANDEBROUCK

Professeur, Université Tunis El Manar, Tunis

Professeur émérite, Université de Lille

Maître de Conférence HDR, Université Paris-Diderot

Invité

Jean- Baptiste LAGRANGE

Professeur, Université de Reims Champagne Ardenne

*Une pensée très particulière
à la mémoire de feu mon
PÈRE*

Remerciements

Je voudrais en premier lieu exprimer ma gratitude et ma reconnaissance à Messieurs Faouzi CHAABANE et Jean- Baptiste LAGRANGE qui ont accepté de diriger ce travail de recherche. Je voudrais en second lieu les remercier pour leur compréhension, leur disponibilité et pour la pertinence de leurs remarques et de leurs conseils.

Je voudrais remercier vivement Madame Isabelle Bloch et Monsieur Karim Boulabiar pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je ne peux manquer ici d'exprimer ma gratitude à Isabelle Bloch qui m'a beaucoup aidé.

Je remercie cordialement Messieurs Belhassen Dahman, Marc ROGALSKI et Fabrice VANDEBROUCK d'avoir accepté de se rendre disponibles et faire partie du jury de cette thèse.

Je remercie toute l'équipe de l'unité de recherche Abderrahmane TOUATI de la Faculté des Sciences de Bizerte, tous les membres du bureau de l'ATDM et toute l'équipe du Laboratoire de Didactique André Revuz pour toutes les formes d'aide qu'ils m'ont apportée.

Enfin, je remercie tous les membres de ma famille, et particulièrement mes deux enfants Lara et Farès, ainsi que tous mes amis pour leur soutien, leur compréhension et leur patience.

Résumé de la thèse

La thèse part d'un constat empirique sur les difficultés éprouvées par des élèves tunisiens en classe terminale et des étudiants en première année d'université en rapport avec la notion d'intégrale. Elle vise à étudier ces difficultés, à proposer un enseignement différent en terminale et à le valider par une ingénierie didactique.

La première partie est une étude épistémologique et historique des articulations entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive. A partir de ces repères épistémologiques, et pour affiner le constat des difficultés soulignées dans l'introduction, la seconde partie questionne le programme et le manuel officiel. Les objectifs généraux du programme accordent une place importante à la démarche expérimentale mais ceci est en contradiction avec les objectifs spécifiques à l'intégrale, que la thèse analyse comme privilégiant l'aspect calculatoire de l'intégrale. Cependant il semble qu'une approche problématisant la notion d'intégrale en partant d'une définition provisoire de la notion d'aire reste compatible avec le programme et conforme aux objectifs généraux. Ce n'est pas la démarche choisie par le manuel officiel qui ne rend pas suffisamment compte des liens entre aire, intégrale et primitive et sous-utilise les registres graphique et géométrique. L'analyse de la thèse est que le manuel vise surtout à faire acquérir des habitudes d'action en rapport avec le calcul de primitives.

De façon à préparer l'ingénierie, la seconde partie mène aussi trois enquêtes. L'une porte sur les connaissances d'élèves de terminale sur la notion d'aire avant qu'ils n'abordent la notion d'intégrale. La seconde interroge des enseignants de la même classe sur leurs approches pour enseigner la notion d'intégrale. La troisième menée auprès d'étudiants en première année d'université renseigne sur les connaissances que gardent les nouveaux bacheliers des notions d'aire, d'intégrale et de primitive.

L'ingénierie analysée dans la troisième partie s'articule autour de trois questions : *Comment calculer l'aire d'une surface polygonale ? Comment calculer l'aire d'une surface non polygonale ? Comment calculer l'intégrale d'une fonction continue ?* Les trois situations proposées se centrent chacune autour d'une des questions en les articulant. L'analyse a priori se base sur une étude de la structuration du milieu dans les tâches proposées et sur les opérations sémiotiques en jeu. L'analyse a posteriori étudie les contenus travaillés, ainsi que la logistique didactique déployée, notamment la répartition des rôles entre enseignants et

élèves analysée en termes de contrats à différents niveaux et les incidents critiques. Elle permet notamment d'apprécier le potentiel didactique de chacune des situations et le fait qu'elles sont adaptées à la majorité des élèves. L'ingénierie constitue ainsi un projet alternatif à celui que propose le manuel, et valide la possibilité de mettre en œuvre un enseignement rendant compte des liens entre aire, intégrale et primitive, et s'appuyant sur les registres graphique et géométrique pour compléter les registres analytiques et formels. Les cadres théoriques principaux sont la théorie des situations avec les notions de milieux, de contrats et d'ingénierie didactique, et les registres sémiotiques. L'approche anthropologique est mobilisée pour l'étude des contenus et certains concepts liés à la double approche trouvent leur utilité dans l'analyse a posteriori de l'activité de la classe.

Mots clés : Ingénierie - démarche expérimentale- contenus travaillés- logistique didactique.

Table des matières

<i>INTRODUCTION GÉNÉRALE ET PROBLÉMATIQUE</i>	10
1. <i>Introduction</i>	10
2. <i>Problématique</i>	12
3. <i>Méthodologie et Cadre théorique</i>	17
3.1. <i>La notion d'ingénierie didactique</i>	17
3.2. <i>L'approche anthropologique</i>	24
3.3. <i>Les représentations sémiotiques</i>	27
3.4. <i>Les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances</i>	31
3.5. <i>Les différents types d'adaptations</i>	32
4. <i>Questions de recherche</i>	33
5. <i>Revue de la littérature</i>	34
6. <i>Plan de travail et méthodologie</i>	34
 <i>PREMIÈRE PARTIE : ÉTUDE ÉPISTÉMOLOGIQUE</i>	 37
 <i>Introduction</i>	 37
 <i>CHAPITRE PREMIER</i>	 40
1.1. <i>Quelques remarques sur le calcul d'intégrales</i>	40
1.2. <i>Quelques remarques sur le calcul d'aire</i>	46
1.2.1. <i>La méthode d'exhaustion</i>	46
1.2.2. <i>La contribution arabe</i>	48
1.2.3. <i>La méthode des indivisibles</i>	50
 <i>CHAPITRE DEUXIÈME :le problème de la définition de l'aire d'une surface</i>	 56
II. 1. <i>La notion de mesure</i>	57
II. 2. <i>Comment mesurer l'aire d'une surface plane ?</i>	64
II. 3. <i>Comment mesurer la longueur d'une courbe ?</i>	66
II. 4. <i>Le problème de la définition de l'aire d'une surface gauche</i>	69
II. 4.1. <i>La définition de Serret</i>	71
II.4.2. <i>Le contre-exemple de Schwarz</i>	73

II.4.3. La contribution d'Hermite.....	75
II.4.4. La contribution de Peano.....	76
II.4.5. La contribution de Lebesgue.....	89
II.4.6. Comparaison des démarches de Peano et de Lebesgue.....	96
II.4.7. Solution du problème de Jordan.....	98
II. 5. Conclusion de la première partie.....	102
DEUXIÈME PARTIE : Analyse institutionnelle.....	105
Introduction.....	105
CHAPITRE TROISIÈME : Analyse des textes officiels.....	106
I. Analyse du programme officiel de la classe terminale.....	106
I.1. Objectifs généraux de l'enseignement des mathématiques.....	106
I. 2. Analyse du contenu spécifique.....	112
CHAPITRE QUATRIÈME : Analyse du manuel scolaire.....	117
I. Présentation du manuel.....	117
II. Analyse du manuel.....	118
II.1. Analyse du chapitre « Primitives ».....	119
II.2. Analyse du chapitre « Intégrales ».....	123
II.2.1. Étude de la partie « Cours ».....	123
II.2.2. Conclusion de l'étude de la partie « Cours ».....	151
II.2.3. Étude de la partie « Exercices ».....	155
II.2.4. Conclusion de l'analyse du manuel.....	178
CHAPITRE CINQUIÈME : Épreuves du baccalauréat.....	183
I. Analyse des épreuves du baccalauréat.....	183
I.1. Juin 2008 (Session Principale).....	185
I.2. Juin 2008 (Session de Contrôle).....	191
I.3. Juin 2009 (Session Principale).....	193
I.4. Juin 2009 (Session de Contrôle).....	196
I.5. Juin 2010 (Session principale).....	199
II. Conclusion de l'analyse des épreuves du baccalauréat.....	201
CHAPITRE SIXIÈME : Investigations didactiques.....	203
I. Test d'évaluation sur la notion d'aire.....	203

I.3. Conclusion de l'analyse du test d'évaluation	219
II. Enquête auprès des enseignants de classes terminales	220
II.1. Introduction	220
II.2. Analyse a priori de l'enquête.....	221
II.3. Analyse a posteriori de l'enquête	229
II.4. Conclusion de l'enquête	242
III. Questionnaire soumis à des étudiants en première année d'université.....	244
III.1. Le contexte.....	244
III.2. Les objectifs du questionnaire.....	245
III.3. Élaboration d'un outil d'analyse	245
III.4. Méthodologie.....	249
III.5. Le questionnaire.....	250
III.6. Analyse a priori du questionnaire.....	251
III.7. Analyse a posteriori du questionnaire	262
III.8. Conclusion du questionnaire.....	282
TROISIÈME PARTIE : INGÉNIERIE DIDACTIQUE.....	285
1. Introduction.....	285
2. Pourquoi cette ingénierie ?	285
3. Les difficultés liées à l'élaboration de l'ingénierie.....	288
4. Présentation de l'ingénierie.....	289
5. Les références théoriques utilisées dans l'élaboration de l'ingénierie.....	290
6. Éléments théoriques pour les analyses.....	292
7. Méthodologie.....	300
CHAPITRE SEPTIÈME : Analyse a priori	301
I. Les observables choisis.....	301
II. Déroulement prévu de l'ingénierie.....	303
II.1. Situation 0.....	303
II.2. Situation 1	305
II.3. Situation 2.....	308
II.3. Situation 3.....	318
III. Conclusion de l'analyse a priori.....	322
CHAPITRE HUITIÈME : Analyse a posteriori	325
I. Les difficultés rencontrées dans la réalisation de l'ingénierie.....	326

<i>II. Supports utilisés dans l'analyse a posteriori et méthodologie</i>	327
<i>III. Les observables retenus pour l'analyse a posteriori</i>	329
<i>IV. Analyse des différentes phases du déroulement de l'ingénierie</i>	331
<i>IV.1. Analyse a posteriori de la situation 0</i>	331
<i>IV.2. Conclusion de la situation 0</i>	335
<i>IV.3. Analyse a posteriori de la situation 1</i>	335
<i>IV.4. Conclusion de la situation 1</i>	343
<i>IV.5. Analyse a posteriori de la situation 2</i>	344
<i>IV.6. Conclusion de la situation 2</i>	360
<i>IV.7. Analyse a posteriori de la situation 3</i>	361
<i>IV.8. Conclusion de la situation 3</i>	365
<i>V. Conclusion de l'analyse a posteriori</i>	366
 CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES	 373
<i>I. Les analyses préalables</i>	373
<i>I.1. Analyses épistémologique et historique</i>	373
<i>I.2. Le projet institutionnel</i>	374
<i>I.2.1. Le programme officiel</i>	374
<i>I.2.2. Le manuel scolaire</i>	375
<i>II. Les effets de l'enseignement actuel</i>	378
<i>III. Conception et analyse a priori de la séquence d'enseignement</i>	380
<i>IV. Expérimentation, analyse a posteriori et évaluation</i>	381
<i>V. Pertinence de l'ingénierie</i>	383
<i>VI. Limites de la recherche et perspectives futures</i>	385
 Bibliographie de la partie sur l'étude épistémologique	 387
Bibliographie de la partie didactique	389
 <i>Annexes</i>	 391
<i>1. Test d'évaluation</i>	391
<i>2. Enquête auprès des enseignants</i>	394
<i>3. Le questionnaire</i>	397
<i>4. Transcriptions</i>	398

INTRODUCTION GÉNÉRALE ET PROBLÉMATIQUE

1. Introduction

En Tunisie, l'enseignement des mathématiques au lycée a connu, depuis 1957, six réformes importantes¹ dont les résultats se sont souvent révélés mitigés et peu satisfaisants. En particulier, tout semble indiquer que l'institution peine à trouver une approche raisonnable et cohérente pour l'enseignement des concepts d'analyse dans le secondaire. Comme le souligne Ghdamsi (2008) dans sa thèse, les concepts d'analyse au lycée semblent en effet marqués d'une incertitude quant à leur statut théorique. Cette incertitude, reconnue des enseignants et visée par les différentes réformes, n'est pas toutefois propre au système scolaire tunisien. Des chercheurs comme Trouche (1996) et Artigue (1993, 1996, 1998) ont pointé les variations dans les contenus d'analyse au lycée. Ce point a été également souligné par Bloch (2000) dont voici les propres termes :

L'analyse dans le secondaire paraît donc marquée d'une première spécificité : l'incertitude de la détermination des objets de savoir correspondants, à enseigner. En effet, il est possible, en analyse, apparemment, de décider que l'on va enseigner, ou non, la définition d'une limite ; que l'on va déterminer des limites par encadrement ou que ce sera par des théorèmes de l'algèbre des limites ; qu'une intégrale de f entre a et b est égale à la différence des valeurs d'une primitive F de f entre a et b , ou à la limite d'une somme de Riemann. (Bloch, 2000, p.17).

La fréquence des réformes des programmes et l'instabilité des approches pour les enseigner n'est sans doute pas sans incidences sur l'enseignement des mathématiques en général, et sur l'enseignement de l'intégrale en particulier. C'est qu'elles pourraient en effet occasionner des perturbations sérieuses au niveau des pratiques enseignantes, ce qui pourrait avoir, d'une manière ou d'une autre, un impact sur les apprentissages des élèves :

Pour que les enseignants construisent une transposition vivable des concepts, avec les activités qui y sont associés, une certaine stabilité est nécessaire : c'est un travail qui s'effectue sur plusieurs années. (Bloch, 2000, p.32).

¹ 1959 – 1970 – 1978 – 1993 – 1998 – 2004

Notre projet est de nous intéresser à l'un des concepts de l'analyse, en l'occurrence le concept d'intégrale, qui nous paraît problématique et particulièrement caractéristique du malaise institutionnel. Les différentes réformes ont en effet maintenu l'enseignement de l'intégrale, mais à chaque fois l'accent a été mis prioritairement sur certains aspects et certaines tâches spécifiques de ce concept : *Calcul sur les primitives et les aires* (1959 et 1970). *Intégrale de Riemann* (1978). *Intégrale de Newton-Leibniz* avec comme applications la méthode des rectangles, la méthode des trapèzes et le calcul de volumes de solides de révolution (1993). *Intégrale de Newton-Leibniz stricto sensu*, en supprimant les méthodes des rectangles et des trapèzes ainsi que le calcul de volumes (1998). Le nouveau programme, en vigueur depuis Septembre 2007, préconise de nouveau l'enseignement de l'intégrale de Newton-Leibniz avec comme applications le calcul d'aires de surfaces planes et le calcul de volumes de solides de révolution.

Sans doute le maintien de l'intégrale dans les différentes réformes traduit-il l'attachement de l'institution à l'enseignement de cette notion en lycée qui tiendrait à son importance du point de vue théorique et du point de vue pratique ainsi qu'à sa dimension épistémologique. Paradoxalement, toutes ces réformes ne semblent pas avoir permis de développer une approche satisfaisante et stable pour enseigner l'intégrale en classe terminale. En effet, d'après notre expérience professionnelle² et d'après des discussions avec des enseignants du secondaire et du supérieur, nous avons pu faire le constat empirique que des erreurs d'identification et de confusion sont assez fréquentes chez les élèves en classe terminale et en première année d'université. Selon certains enseignants d'université, il semble qu'à la sortie du secondaire les élèves ne gardent sur la notion d'intégrale que des connaissances de surface, approximatives et lacunaires. Pour ces enseignants, ces difficultés sont en partie imputables à l'approche méthodologique actuellement utilisée dans l'enseignement secondaire. Qui plus est, l'étude que nous avons conduite dans notre mémoire de maîtrise met en évidence que la tendance prévalant dans ce programme consiste à habituer les élèves à un travail sur les aspects calculatoires de l'intégrale à travers certains types de tâches de façon répétitive et exclusive. Certes, il est juste de considérer que faire acquérir aux élèves des compétences calculatoires peut-être important, mais que cela ne nous fasse pas abandonner la question du sens mathématique de la notion d'intégrale, ses attributs et ses fonctions. Privilégier un point de vue calculatoire n'est pas seulement restreindre le sens mathématique de la notion d'intégrale mais c'est surtout instaurer une pratique institutionnelle. Nous considérons que

² 28 ans d'enseignement de classes terminales.

toute approche, quand elle risque de se réduire seulement à un travail sur des procédures calculatoires isolé d'un questionnement sur les véritables attributs de l'intégrale peut ne pas faire émerger son sens mathématique. Encore de notre point de vue, l'élève ne peut comprendre le sens mathématique de l'intégrale qu'en l'intégrant à sa structure cognitive en tant qu'*objet de conscience* : « *l'apprentissage scolaire est le processus de transformation active des objets culturels en objets de conscience* » (Radford, 2004, p. 12). Il faudra bien convenir ici que comprendre la notion d'intégrale est tout autre chose que savoir calculer une intégrale. Insistons encore sur le fait que centrer l'activité mathématique de l'élève essentiellement sur des tâches calculatoires va bien plus loin que la restriction du sens mathématique de la notion d'intégrale, cela pourrait être source d'erreurs de confusion, d'erreurs d'imprécision et d'erreurs d'interprétation. Soulignons cependant que cette centration sur le calcul d'intégrales n'est pas propre au système d'enseignement tunisien. Dans le résumé en français de sa thèse³ soutenue en 2005, Gonzalez-Martin remarque que « *face aux difficultés rencontrées, l'enseignement traditionnel (plus particulièrement universitaire) tend à se centrer sur des pratiques algorithmiques et algébriques et à évaluer essentiellement les compétences acquises dans ces activités. Ces pratiques sont la source de certaines difficultés dont notre étude montre la persistance* » (Gonzalez, 2005, p. 443). Artigue (1995) constate que les nouveaux bacheliers arrivent à l'université avec une conception de l'intégrale comme opération inverse de la dérivation et comme la mesure d'une aire, deux conceptions assez statiques.

2. Problématique

L'analyse des organisations mathématiques et didactique du chapitre *Intégrale* dans l'ancien manuel scolaire tunisien que nous avons réalisée dans notre mémoire de mastère donne à voir qu'il y a, dans ces organisations quelque chose de peu satisfaisant à la fois sur le plan mathématique et sur le plan didactique. Ce qui n'est pas satisfaisant c'est une sorte de *négligence didactique* saisie, pour l'essentiel, à travers l'absence d'une problématisation claire de la notion d'intégrale, l'absence d'une mise en avant du sens mathématique de cette notion, l'absence d'une mise en rapport précise entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive, la faiblesse de la *logistique didactique* déployée. Par logistique didactique, nous entendons l'ensemble des moyens envisagés et mis à contribution par l'institution scolaire pour ouvrir à l'élève l'accès à divers aspects de cette notion et l'aider à construire une

³ Rédigée en espagnol et soutenue en France.

représentation mentale claire et précise de l'objet mathématique *Intégrale* qui est ainsi compris, appréhendé, connu comme le résultat d'un processus de réflexion et d'action. Dans cette logistique didactique, la richesse et la variation des applications, la multiplication des prismes d'interprétation, les exemples et les contre-exemples sont autant d'éléments qui doivent permettre à l'élève la construction et le contrôle d'un point de vue pertinent et productif sur la notion d'intégrale. Nous considérons que la notion de logistique didactique est la base de tout effort didactique ; elle constitue l'*a priori* de tout projet d'enseignement. Elle suppose que pour une notion donnée, pour un niveau scolaire donné, il existe des possibilités spécifiques pour faire accéder les élèves à la compréhension de la notion en jeu.

La même analyse révèle que la plupart des exercices proposés dans le manuel scolaire visent pour l'essentiel la routinisation de tâches calculatoires suivant quelques schémas d'actions interchangeable. Si l'on nous accorde que l'aspect calculatoire de la notion d'intégrale se situe au niveau de sa couche externe, on en arrive à voir que notre analyse fait bien apparaître le problème : la notion d'intégrale se restreint à une représentation de formules, d'opérations et d'habitudes d'action particulières. Il faut rapprocher cette forme d'enseignement de ce qu'on appelle *opérationnalisme*⁴ en physique. Réexprimons l'idée en d'autres termes : au sens de l'opérationnalisme, nous connaissons ce qu'il faut entendre par l'objet mathématique *Intégrale* si nous pouvons calculer des intégrales. Pour calculer une intégrale, nous devons connaître certaines formules et savoir faire certaines opérations algébriques. L'objet *Intégrale* n'est pas alors autre chose que l'ensemble des formules et des opérations qui permettent de calculer une intégrale.

Quand cet opérationnalisme est placé au cœur de l'enseignement de l'intégrale, les savoirs enseignés sont appelés à fonctionner en tant qu'outils, les apprentissages des élèves sont réduits à des habitudes d'action et sont évalués comme de simples gestes de traitement. Cette forme d'enseignement tend à instaurer un standard d'activités qui fonctionne comme un système fermé de tâches calculatoires qui détermine *a priori* ce que l'élève doit apprendre ainsi que les moyens de contrôler son action et sa pensée. Nous venons de suggérer, et cela ne semble pas exiger davantage de développements, qu'adopter un point de vue opérationnaliste va beaucoup plus loin qu'une simple restriction du sens de l'objet « *Intégrale* », cela signifie un conditionnement du rapport de l'élève à la notion d'intégrale.

⁴ Forme du pragmatisme selon laquelle les concepts se définissent en termes d'opérations physiques.

À force d'insister sur le fait que l'approche qui sous-tend l'enseignement de l'intégrale en classe terminale n'est pas satisfaisante, on pourrait nous objecter une certaine prise de position par rapport à cette forme d'opérationnalisme scolaire. L'objection n'est pas valable. Nous l'avons déjà dit, faire acquérir aux élèves des compétences calculatoires a certes des bénéfices tangibles, mais ces bénéfices ne sont productifs que lorsque l'élève aura développé sa capacité de les réinvestir de façon consciente et d'en contrôler l'usage: pourquoi, quand et comment s'en servir ?

En résumé : Quoi de moins satisfaisant que de priver la notion d'intégrale de sa véritable problématique; que d'escamoter les articulations épistémologiques entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive ; que de restreindre l'activité de l'élève à une mécanisation de techniques calculatoires ; que de concentrer les apprentissages des élèves dans des canevas d'exercices stéréotypés ?

Notre analyse est centrée sur une approche pour enseigner l'intégrale en classe terminale où le contenu à enseigner n'est pas un ensemble de savoirs que l'on peut isoler de leurs supports épistémologiques ni de leurs implications à la fois mathématiques et didactiques. Il ne semble pas qu'on ait besoin d'une explication très poussée pour convaincre de l'importance de l'approche adoptée pour enseigner l'intégrale en ce sens qu'elle détermine, en même temps que les activités, les comportements et les aptitudes qu'implique l'enseignement, les apprentissages et la formation de pensée de chaque élève. La manière dont les auteurs de la nouvelle réforme organisent l'enseignement de l'intégrale suppose un choix initial entre des possibilités épistémologiques et des possibilités didactiques déterminées par le niveau atteint de culture, sur le plan mathématique et sur le plan didactique. Pour cela, les auteurs disposent, quantitativement, d'un certain nombre de ressources matérielles et intellectuelles. Mais alors :

1. Comment ces ressources sont-elles utilisées ?
2. Quels sont les critères qui agissent pour les choix mathématique et didactique dans le nouveau programme ?
3. Quelles sont ses principales tendances ?
4. Quels sont les aspects de la notion d'intégrales présents dans le nouveau programme ?
5. Sur quel fondement ces aspects sont-ils retenus de préférences à d'autres ?
6. Quelle est la logistique didactique envisagée pour organiser l'enseignement de l'intégrale ?

7. Quels sont les différents prismes d'interprétation de l'intégrale présents dans le nouveau programme?
8. Parmi les divers choix actuels et possibles en termes de contenu mathématique et de logistique didactique, le choix du nouveau programme est-il susceptible d'une réalisation satisfaisante ?
9. Comment évaluer sa pertinence ?
10. Existe-t-il un autre choix plus pertinent ?

Les sept premières questions peuvent recevoir des réponses assez précises à l'aide d'outils d'analyse issus de la didactique des mathématiques. En revanche, pour répondre aux trois dernières questions, nous procéderons à une *analyse critique*. Une analyse critique du nouveau programme doit rechercher ses faiblesses et leurs causes et examiner ensuite d'autres alternatives possibles. Il lui faut analyser la manière dont l'institution utilise (ou n'utilise pas) les ressources dont elle dispose pour améliorer l'enseignement de l'intégrale au lycée et pour faciliter les apprentissages des élèves. Mais quels sont les critères pour une telle analyse ?

Il nous faut donc définir quelques critères pour évaluer la pertinence du projet institutionnel et servir à le confronter au projet qui fera l'objet de l'ingénierie didactique que nous proposerons en tant que projet alternatif au projet institutionnel. Nous utilisons le terme *projet* parce qu'il nous semble être le terme le mieux adapté au caractère spécifique de l'enseignement.

Ces critères doivent se référer à la manière dont un projet d'enseignement concrétise des choix fixés et réalise des éventualités données (non pas les éventualités formelles, mais celles qui agissent sur les modes d'apprentissage de l'élève). Mais un tel projet peut être mis en cause par d'autres projets qui prennent forme et, parmi eux, il y a ceux qui le changeraient entièrement. C'est en fonction d'un projet de ce type, qu'on peut formuler les critères d'une alternative plus adéquate, en tant que critères de sa pertinence :

1. Le projet envisagé doit être en accord avec les éventualités qui pourraient se réaliser au niveau qu'a atteint la *culture mathématique et didactique*⁵ de l'institution.
2. Le projet envisagé, pour mettre en cause le projet institutionnel, doit faire la preuve que sa propre pertinence est supérieure en ce sens :

⁵ Supports utilisés: tableau noir, blanc, interactif, calculatrices programmables ou non, environnement informatique, environnement papier/crayon, etc. Thèmes mathématiques étudiés, démarches mathématiques enseignées et/ ou pratiquées, etc..

- a) qu'il offre la perspective de préserver et d'améliorer les réalisations productives actuelles du projet institutionnel ;
- b) qu'il respecte le texte officiel du programme à la fois dans sa *structure véritable*⁶, dans ses *tendances fondamentales*⁷ et dans ses *relations*⁸ ;
- c) que sa réalisation offre une plus grande chance de réussite pour les apprentissages attendus à l'intérieur du cadre institutionnel, qu'elle favorise mieux la compréhension et le développement des compétences des élèves⁹.

Cette notion de pertinence est, à l'évidence, assez relative : la pertinence du projet envisagé dépend de celle du projet institutionnel et ce dernier est mis en cause à partir de ses propres réalisations. L'examen de ces réalisations doit tenir compte de leurs conditions et les communiquer au projet envisagé. Sont déterminées par exemple :

1. Les contradictions spécifiques qui se développent à l'intérieur du projet institutionnel.
2. Les ressources matérielles et intellectuelles dont peut disposer l'institution.
3. L'étendue de l'espace de liberté susceptible d'être investi¹⁰.

Ici, il faudra convenir que ces conditions restent ouvertes aux différentes formes que peuvent prendre le développement et l'utilisation des ressources disponibles, aux différentes approches qui peuvent être choisies pour organiser la mise en œuvre du projet envisagé.

Les remarques que nous venons de faire sur la question de pertinence d'un projet d'enseignement déterminent une méthode de direction, d'analyse et d'évaluation. Le projet que nous proposerons se définit par rapport au manuel scolaire selon la dimension particulière de l'activité de l'élève que nous posons comme le point de départ de la construction de ses connaissances et l'élément de référence fondamental.

⁶ Contenu mathématique et la manière d'organiser son enseignement.

⁷ L'esprit du programme : approche, les aspects mathématiques à mettre en avant, les compétences des élèves à développer, etc..

⁸ Connexions et mise en rapport du contenu à enseigner avec d'autres savoirs et savoir-faire déjà enseignés.

⁹ La compréhension et le développement des compétences des élèves sont définis empiriquement en termes de capacités à résoudre une tâche mathématique, à proposer et discuter une idée, à utiliser correctement le langage mathématique, etc..

¹⁰ Ce qui peut être laissé à l'initiative de l'enseignant et/ou de l'élève.

3. Méthodologie et cadre théorique

Pour examiner les questions formulées dans le paragraphe précédent, nous utilisons des outils méthodologiques et théoriques issus de la didactique des mathématiques. Comme notre projet est de présenter une ingénierie didactique pour l'enseignement de l'intégrale en classe terminale, il nous semble nécessaire de commencer par rappeler cette notion.

3.1. La notion d'ingénierie didactique

La notion d'ingénierie didactique est une méthodologie de recherche développée en didactique des mathématiques (Artigue, 1990). Dans un sens strict, une ingénierie didactique consiste en la conception et en la réalisation d'une ou de plusieurs séquences de classe faisant l'objet d'un projet d'enseignement/apprentissage pour un certain groupe d'élèves. La conception de ce projet doit explorer et étudier différentes *possibilités* entre lesquelles il est fait un choix. Pour décrire la méthodologie d'ingénierie didactique, Artigue (1996) distingue quatre phases :

1. La phase des analyses préalables.
2. La phase de la conception et de l'analyse a priori des situations didactiques de l'ingénierie.
3. La phase de l'expérimentation.
4. La phase de l'analyse a posteriori et de l'évaluation.

Pour préciser les caractéristiques et le rôle de chacune de ces phases, nous référons de nouveau aux descriptions de l'auteur (Artigue, 1996) :

1- Les analyses préalables

Ces analyses sont destinées à faire émerger les connaissances liées au domaine étudié, afin de préparer la phase de conception qui suivra, et prennent en compte les objectifs spécifiques de la recherche. Ces analyses préalables concernent :

- L'analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement.
- L'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets.
- L'analyse du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation didactique effective.
- L'analyse des conceptions des élèves, des difficultés et obstacles rencontrés.

2- La conception et l'analyse a priori de situations didactiques

Dans cette seconde phase, le chercheur prend la décision d'agir sur un certain nombre de variables du système non fixées par les contraintes : variables de commande dont il suppose qu'elles sont des variables pertinentes par rapport au problème étudié. Il nous semble utile, pour faciliter l'analyse d'une ingénierie, de distinguer deux types de variables de commande :

- les variables macro-didactiques ou globales qui concernent l'organisation globale de l'ingénierie,
- les variables micro-didactiques ou locales qui concernent l'organisation locale de l'ingénierie, c'est à dire l'organisation d'une séance ou d'une phase, les unes et les autres pouvant être elles-mêmes des variables d'ordre général ou des variables dépendantes du contenu didactique dont l'enseignement est visé. Au niveau micro-didactique, cette seconde distinction est classique puisqu'on distingue les variables dites de situation reliées à l'organisation et à la gestion du milieu.

Une des originalités de la méthode d'ingénierie didactique réside dans son mode de validation, essentiellement interne. C'est dès cette phase de conception, via l'analyse a priori des situations didactiques de l'ingénierie, étroitement liée à la conception locale de cette dernière, que ce processus de validation va s'engager. Cette analyse a priori est à concevoir comme une analyse du contrôle du sens : très schématiquement, si la théorie constructiviste pose le principe de l'engagement de l'élève dans la construction de ses connaissances par l'intermédiaire d'interaction avec un certain milieu, la théorie des situations didactiques, qui sert de référence à la méthodologie d'ingénierie, a eu, dès son origine, l'ambition de se constituer comme une théorie du contrôle des rapports entre sens¹¹ et situations.

L'objectif de l'analyse a priori est donc de déterminer en quoi les choix effectués permettent de contrôler les comportements des élèves et leur sens. Pour ce faire, elle va se fonder sur des hypothèses dont la validation sera, en principe, indirectement en jeu dans la confrontation opérée dans la quatrième phase entre analyse a priori et analyse a posteriori.

3 - L'expérimentation

C'est une phase classique, qui doit permettre un recueil de données diverses, éclairant l'objet de la recherche.

¹¹ Entendre des objets mathématiques en jeu et de l'activité mathématique de l'élève.

4 - L'analyse a posteriori et l'évaluation

Cette analyse s'appuie sur l'ensemble des données recueillies lors de l'expérimentation : observations réalisées des séances d'enseignement, mais aussi productions des élèves en classe et hors classe. Ces données sont souvent complétées par des données obtenues par l'utilisation de méthodologies externes, questionnaires, entretiens individuels ou en petits groupes, réalisés à divers moments de l'enseignement ou à son issue. C'est sur la confrontation des deux analyses : analyse a priori et analyse a posteriori que se fonde essentiellement la validation des hypothèses engagées dans la recherche.

Les hypothèses mêmes engagées explicitement dans le travail d'ingénierie sont souvent des hypothèses relativement globales, mettant en jeu des processus d'apprentissage à long terme, que l'ampleur de l'ingénierie ne permet pas nécessairement de faire entrer réellement dans une démarche de validation. L'ingénierie se situe donc dans le registre des études de cas, dont la validation est essentiellement interne, fondée sur la confrontation entre analyse a priori et analyse a posteriori.

La notion d'ingénierie didactique nous fournit une méthodologie de recherche et nous suggère des outils d'analyse. Pour rendre compte du projet institutionnel sur l'enseignement de l'objet de savoir *Intégrale*, nous avons choisi de faire appel à des outils issus de *la théorie anthropologique du didactique* développée par Chevallard (1998). Nous ferons aussi appel, lorsque cela nous semblera utile, à la notion de niveaux de mise en fonctionnement des connaissances de Robert (1998) et à celle de registre de représentation sémiotique de Duval (1993). Soulignons ici qu'il nous a semblé, par endroits, utile de nous autoriser quelques développements à propos de certains des éléments théoriques que nous utiliserons sans toutefois prétendre les enrichir. Ajoutons enfin que nous développerons une analyse critique à chaque fois que le contexte l'exige. Ces outils sont utilisés dans les analyses préalables, notamment dans les analyses du point de vue du contenu mathématique et du point de vue de la logistique didactique. Dans la mesure où cette logistique détermine, pour une part importante, la nature des apprentissages potentiels des élèves en rapport avec la notion d'intégrale, nous la plaçons au centre de notre analyse. Précisons ici qu'en termes d'apprentissage nous référons aux hypothèses générales de Piaget ainsi qu'à celles de Vygotski que nous développerons juste après ainsi que les outils évoqués ci-dessus.

Pour l'étude de la réalisation effective de l'ingénierie en classe, nous ferons appel à des outils issus de la théorie des situations et de la double approche que nous précisons dans la troisième partie de ce travail. Ce choix est dicté par des raisons de commodité et de lisibilité.

3.2. Le constructivisme piagétien et le socioconstructivisme vigotskien

Comment l'élève apprend-il les mathématiques ? Cette question, qui constitue le fondement même de la psychologie cognitive, sous-tend nos choix didactiques et les guide. Bien entendu, il ne saurait être question, pour nous de tenter une réponse à cette question. D'ailleurs, nous sommes conscient qu'une telle quête pourrait très vite s'avérer intenable tellement les théories qui en traitent sont multiples et diverses. Qui plus est, aucune approche ne peut prétendre éclairer définitivement cette question et revendiquer, par là, une quelconque hégémonie. Par rapport à notre projet, nous nous en tiendrons aux idées de Piaget et de Vygotski, que nous considérons comme celles qui sont à même de mieux éclairer la question du comment apprendre dans une optique constructiviste. Dans la mesure où ces idées sont largement diffusées, nous nous contenterons d'évoquer de manière succincte et rapide le constructivisme piagétien et le sociocognitivism vigotskien.

3.2.a. Le constructivisme piagétien

Le constructivisme piagétien se fonde sur l'idée que c'est le sujet apprenant qui construit ses connaissances. Dans le dernier chapitre de *La construction du réel chez l'enfant* de Jean Piaget (1896-1980), nous lisons :

L'intelligence ne débute ainsi ni par la connaissance du moi, ni par celle des choses comme telles, mais par celle de leur interaction, et c'est en s'orientant simultanément vers les deux pôles de cette interaction qu'elle organise le monde en s'organisant elle-même. (Piaget, 1937, p.311).

Ainsi, selon les vues de Piaget, on ne peut séparer l'acte de connaître (l'intelligence au sens d'opérations mentales) un objet de celui de se connaître soi-même. Dès lors connaître un objet c'est se l'assimiler, se l'approprier, se l'intérioriser, et ainsi se le rendre présent. De plus, l'interaction cognitive entre l'objet à connaître et le sujet connaissant traduit à la fois la connaissance de l'objet (elle organise le monde) et le processus de formation de la connaissance (en s'organisant elle-même).

La connaissance s'entend donc à la fois par le processus qui la forme et le produit de ce processus. L'acte de connaître est ainsi un processus actif et perpétuel. La structure cognitive

du sujet connaissant s'organise par l'activation d'un processus interactif et producteur qui relève de ce que Piaget appelle l'*assimilation* et l'*accommodation*. Ces deux notions d'assimilation et d'accommodation procèdent de schèmes, où, en substance :

Toute action, manifeste ou intériorisée, comprend une structure, c'est-à-dire une organisation qui s'actualise chaque fois que cette action est appliquée à des situations semblables : le concept de schème désigne ces structures que l'on retrouve lors de la répétition d'une même action. Autrement dit, une habitude est un système d'ensemble qui fonctionne en tant que totalité et c'est précisément ce fonctionnement d'ensemble qui en assure la conservation en tant que système. Ce système est en outre refermé sur lui-même et constitue ainsi un schème. (Piaget, 1968)

Ainsi, un schème¹² se donne à voir comme une organisation séquentielle qui intègre dans une même totalité des opérations mentales élémentaires reproductibles dans un ensemble de situations semblables. Il nous faut insister, bien entendu, sur le fait que la notion de schème n'est pas seulement l'élément fondamental de la conception piagétienne de la psychologie cognitive, elle en est l'essence.

L'assimilation

L'assimilation est le processus par lequel le sujet cognitif intègre l'objet à connaître à ses connaissances antérieures par l'activation d'un schème déjà existant. L'assimilation suppose donc la présence d'une copie de l'objet à connaître déjà transcrite dans les structures cognitives propres du sujet. Il importe de souligner cependant que chaque état du système cognitif est une nouvelle organisation de sa structure. Car une nouvelle situation n'est jamais la même que la précédente. Il s'y est toujours intercalé du nouveau et, pour la reconnaître comme déjà vécue, la pensée anticipe sur les différences en les négligeant.

L'assimilation traduit l'action du sujet sur l'objet, uniquement à l'aide des structures cognitives déjà élaborées. Il s'agit donc d'intégrer des éléments nouveaux à des connaissances anciennes sans modifier le système cognitif du sujet.

L'accommodation

L'accommodation est le processus par lequel le sujet cognitif différencie ou réorganise ses connaissances antérieures. Elle est sollicitée sous l'effet d'un élément de connaissance mal

¹² Vergnaud (2007) en donne la définition suivante : *le schème est une forme invariante d'organisation de l'activité et de la conduite pour une classe de situation déterminée.*

assimilé ou nouveau. Lorsqu'une situation nouvelle se présente au sujet, on peut s'attendre à ce qu'il ne réussisse pas à l'assimiler immédiatement. La situation lui résiste et occasionne un déséquilibre à son système cognitif. Cette perturbation pourrait alors conduire le sujet à revisiter la situation. Il se peut qu'il s'aperçoive d'un élément négligé par l'assimilation et dont la prise en compte rend la situation reconnaissable et donc assimilable (on parle alors d'un schème accommodé). Il se pourrait aussi qu'il puisse, à l'aune d'une reconsidération de la situation, construire un nouveau schème capable d'assimiler la nouvelle situation et de reconnaître ultérieurement toute sa classe (modulo la relation « être la même que »).

L'accommodation est provoquée par l'action d'un objet de connaissance sur le sujet cognitif qui va chercher à s'adapter à la nouvelle situation par le réajustement de schèmes déjà existants ou par la construction de nouveaux schèmes. Il s'agit donc d'un véritable progrès cognitif entraînant l'élargissement du champ des connaissances du sujet. À l'issue du processus d'accommodation les connaissances antérieures ne sont pas supprimées, mais elles sont réorganisées et intégrées à une structure cognitive plus évoluée et plus performante.

La dialectique entre assimilation et accommodation est à la base du progrès cognitif, à tous les niveaux. Dans son article dans *Encyclopædia Universalis* 2004 (V.10), Émile Jalley écrit :

Les niveaux élémentaires du développement cognitif sont marqués par le « déséquilibre de départ » provoqué par le « constant conflit » entre l'assimilation et l'accommodation. Au lieu de collaborer, ces « deux tendances antagonistes [...] tiraillent la pensée en sens contraires ». Le déséquilibre entre elles se manifeste aussi bien par « le primat de l'assimilation sur l'accommodation » en général que par « le primat alternatif de l'une sur l'autre ». L'état initial d'« indifférenciation chaotique » de l'assimilation et de l'accommodation évolue progressivement vers leur différenciation complémentaire, caractéristique de l'adaptation intelligente. Cette évolution s'oriente dans la « direction d'un meilleur équilibre [...] de plus en plus stable [...] plus large », jusqu'à un « état d'achèvement », défini comme « équilibre à la fois stable et mobile », « synthèse équilibrée » entre l'assimilation et l'accommodation. Cet « équilibre total » entre les formes de processus caractérise « l'adaptation mentale la plus poussée », qui définit précisément l'intelligence opératoire.

La capacité d'apprendre s'identifie donc à celle de régler les tensions entre le sujet cognitif et les objets à connaître. Cette capacité caractérise l'intelligence entendue comme adaptation

exprimée en termes de recherche du meilleur équilibre possible. L'état ultime de cet équilibre est une équilibration majorante. Piaget parle ici d'autorégulation.

Nous venons de comprendre que la conception centrale de l'apprentissage dans l'approche constructiviste est fondée sur la notion d'équilibration, provoquée à la suite d'un conflit cognitif, confrontation du sujet apprenant à une situation problème. Mais derrière l'idée d'équilibration se profile un enjeu psychologique autrement plus important. Le développement intellectuel du sujet apprenant est une entreprise solitaire hautement risquée. Il est en effet un risque que l'apprenant ne réussisse pas à surmonter le conflit cognitif que provoquerait une situation problème qui ne se laisserait pas appréhender par les outils cognitifs de l'apprenant. Nous verrons que ce risque peut être atténué, mais dans une perspective socio-cognitiviste.

3.2.b. Le socio-cognitivisme vigotskien

Nous venons de voir que l'approche constructiviste présente l'acte d'apprendre comme une relation privée entre le sujet cognitif et l'objet à connaître. Dans l'approche socio-cognitiviste, en revanche, l'accent est d'emblée déplacé de l'individuel sur le social. C'est une approche fondamentalement socio-constructiviste, en ce sens où l'apprenant construit ses connaissances par son activité cognitive propre mais aussi à travers ses interactions et ses échanges avec les autres. Apprendre n'est plus, comme c'est le cas dans l'approche constructiviste, un acte solitaire mais une entreprise collective. Selon Vygotski (1935-1985), cette dynamique sociale permet à l'apprenant de construire des fonctions psychiques supérieures et de les doubler :

D'abord comme activité collective, sociale et donc comme fonction inter-psychique, puis la deuxième fois comme activité individuelle, comme propriété intérieure de la pensée, comme fonction intra-psychique. (Vygotski, 1972, p.111).

Dans la perspective socio-constructiviste, les conditions de mise en activité de l'apprenant revêtent une importance de très haut degré. Ces conditions sont déterminées par l'idée d'une *zone de développement proximal (ZDP)*, que l'on doit à Lev Vygotski. La ZDP doit s'entendre comme la différence entre le développement actuel de l'apprenant, et donc ce qu'il peut faire seul sans aucune forme d'aide, et son développement potentiel, c'est-à-dire le niveau qu'il pourra atteindre avec l'aide d'un alter plus compétent. Il va sans dire que le niveau atteint par l'apprenant avec l'aide des autres doit lui permettre de réussir par lui-même ce qu'il ne pouvait faire tout seul. Les conditions de mise en activité de l'élève, lorsqu'elles

sont bien pensées et réalisées, doivent lui permettre, sinon d'accomplir totalement une tâche qui lui est inaccessible actuellement, du moins d'en comprendre la nature, ce qui l'aidera à la résoudre plus tard. Selon Vygotski, l'aide bien structurée du professeur ou d'un pair plus avancé permet à l'élève de résoudre davantage de tâches plus difficiles qu'il ne peut réaliser tout seul. Dès lors, le véritable apprentissage est celui qui précède le développement intellectuel, si bien que l'enseignement doit se situer un peu en avance sur les capacités actuelles de l'élève. C'est là l'essence même de l'idée de la zone de développement proximal.

3.3. L'approche anthropologique

Si dans l'approche classique, l'entrée de la didactique se faisait du côté du sujet (apprenant et/ou enseignant), avec l'approche anthropologique nous entrons du côté du savoir.

Ce qui fonde et caractérise la didactique en tant que science n'est pas le fait de proposer un projet d'étude scientifique des problèmes d'enseignement des mathématiques. Sa singularité originare consiste à prendre comme objet premier à étudier (et donc à questionner, à modéliser et à problématiser selon les règles de l'activité scientifique), non pas le sujet apprenant ou le sujet enseignant, mais le savoir mathématique qu'ils sont sensés étudier ensemble, ainsi que l'activité mathématique que leur projet commun d'étude les portera à réaliser. (Bosch et Chevallard, 1999, p.79).

La théorie anthropologique du didactique rompt donc avec l'approche classique de la didactique fondée sur l'étude de la transmission et d'acquisition des notions mathématiques supposées données. En plaçant la didactique dans le champ de l'anthropologie des savoirs, Chevallard atteint l'étude de l'Homme « *aux prises avec les mathématiques* » (Chevallard, 1991 et 1992) et déborde le cadre de l'École.

Le postulat de base de la *TAD* est que « *tout est objet* ». Chevallard distingue néanmoins des types d'objets particuliers :

Les institutions, les individus et les positions qu'occupent les individus dans les institutions. En venant occuper ces positions, les individus deviennent les sujets des institutions- sujets actifs qui contribuent à faire vivre les institutions par le fait même de leur être assujettis. (Bosch et Chevallard, 1999, p.83).

Entre l'individu et l'institution, il est une tension sans cesse évanouissante et renaissante à propos d'un autre objet, le savoir. Le savoir comme une certaine forme d'organisation des connaissances est omniprésent par la notion de rapport :

Un objet existe s'il existe un rapport à cet objet, c'est-à-dire si un sujet ou une institution le « (re)connait » en tant qu'objet. Étant donné un objet (par exemple un objet de savoir) et une institution, la notion de rapport renvoie aux pratiques sociales qui se réalisent dans l'institution et qui mettent en jeu l'objet en question, soit donc à « ce qui se fait dans l'institution avec cet objet ». connaître un objet c'est avoir à faire avec - et souvent avoir affaire à - cet objet. (Bosch et Chevallard, 1999, p.83).

Mais de quelle nature sont les objets en question ? Comment saisir le rapport institutionnel à ces objets ? Comment et par quels moyens peut-on décrire et analyser les pratiques institutionnelles ? Quelles sont les conditions et les contraintes qui façonnent ces pratiques ?

La notion de praxéologie

Chevallard va apporter à la *TAD* des élargissements progressifs jusqu'à situer « *l'activité mathématique, et donc l'activité d'étude en mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales*¹³. » (Chevallard 1998, p.91).

Pour rendre compte de ces activités, il était nécessaire de doter la *TAD* d'instruments opératoires capables de permettre l'analyse des pratiques institutionnelles en les décrivant et en étudiant les conditions de leur réalisation. La notion fondamentale que Chevallard développa pour modéliser les pratiques institutionnelles en général et l'activité mathématique en particulier est celle d'*organisation praxéologique* ou *praxéologie*, fondée sur le modèle des « quatre T » : *Tâche, Technique, Technologie, Théorie*. Ici, Chevallard parle aussi d'*organisation mathématique* dans le sens où il s'agit de *la réalité mathématique* qui peut se construire dans une classe de mathématique où l'on étudie un thème donné.

La théorie anthropologique du didactique considère que, en dernière instance, toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T au moyen d'une certaine technique τ , justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui est à son tour justifiable par une théorie Θ . (Chevallard, 2001, p.3).

¹³ C'est nous qui soulignons.

Tâche et type de tâches

Une tâche est un travail que l'on doit accomplir, que l'on doit exécuter. Généralement, une tâche s'exprime par un verbe : calculer une intégrale définie, tracer la courbe représentative d'une fonction, ... etc. Pour analyser une praxéologie on regroupe des tâches t d'un même type appelé type de tâches.

Tâches, type de tâches, genre de tâches ne sont pas des données de la nature ; ce sont des « artefacts », des « œuvres », des construits institutionnels, dont la reconstruction en telle institution, par exemple en telle classe, est un problème à part entière, qui est l'objet même de la didactique. (Chevallard 1998, p.92).

Technique

Une technique est une manière d'accomplir ou de réaliser les tâches t relevant d'un certain type de tâches T , c'est-à-dire une manière de faire relative au type de tâches T .

Une technique τ se donne aussi à voir comme un système formé d'un dispositif (ensemble structuré de moyens et d'instruments, tant matériels qu'immatériels) et d'un ensemble réglé de gestes accomplis dans le cadre de ce dispositif.

Technologie

Une technologie, qu'on note généralement θ , est un discours rationnel sur la technique τ . La technologie θ a pour fonction première d'expliquer, de rendre intelligible et d'éclairer la technique τ . Cette fonction peut s'étendre, de façon exceptionnelle, à la production d'une technique.

A côté de la production de techniques, la création et la mise en forme de technologies appropriées à une ou des techniques données constitue une deuxième composante fondamentale de l'activité mathématique. (Chevallard 1996).

Théorie

Une technologie θ d'une technique τ relative à un type de tâches T demande elle aussi à être produite, justifiée et intelligible. Ce rôle est assumé par une autre technologie Θ , que l'on appelle théorie.

Savoir-faire et Savoirs

Ce qu'on appelle usuellement un *savoir-faire* peut être identifié au bloc *pratico-technique* ou bloc *praxique* $[T/\tau]$, alors qu'un *savoir* s'identifie généralement au bloc *technologico-théorique* $[\theta/\Theta]$.

Le modèle des « quatre T » s'appuie sur un postulat de base selon lequel toute activité humaine, et en particulier toute pratique institutionnelle, se laisse décomposer en un certain nombre de tâches et que la réalisation de toute tâche appelle la mise en œuvre d'une technique, compréhensible et justifiable par un discours technologique lui-même compréhensible et justifiable par un discours théorique. Les praxéologies, et plus précisément les tâches requises par une institution relativement à un objet, permettent d'éclairer le rapport institutionnel à cet objet. C'est donc par ce biais que nous pourrions saisir le rapport de l'institution scolaire à l'objet de savoir *Intégrale*.

Dans le cadre de notre travail, l'analyse est particulièrement centrée sur le bloc praxique $P = [T/\tau]$. En effet, dans l'enseignement, et notamment l'enseignement secondaire, l'élève peut acquérir une technique par une mise en œuvre procédurale ou algorithmique, sans la mobilisation d'une technologie qui la justifie. Concrètement, à ce niveau, l'activité mathématique de l'élève vise particulièrement la maîtrise de P , en ce sens que l'élève doit apprendre à reconnaître le type de tâches qu'on lui propose et, ensuite, identifier et appliquer une technique appropriée. Il nous paraît cependant indispensable que l'élève s'engage dans l'explication voire la justification de P .

3.4. Les représentations sémiotiques

En mathématique, la compréhension pose un problème spécifique. Les objets mathématiques ont un caractère idéal et, à ce titre, procèdent des concepts. Étant de la nature d'une forme, un concept pose un problème plus caché, plus indirect et plus abstrait. Il n'est pas accessible directement et sans média, il ne peut être qu'évoqué. Mais alors, comment y accède-t-on ?

Du point de vue de Duval (1995), « *il n'y a pas de noésis **sans**¹⁴ sémiosis, c'est la sémiosis qui détermine les conditions de possibilité d'exercice de la noésis* ». Il faut entendre la sémiosis comme l'appréhension ou la production d'une représentation sémiotique (nous reviendrons ci-après sur cette notion) et la noésis comme l'appréhension des actes cognitifs sous-jacents à l'appréhension conceptuelle d'un objet. L'idée qui s'en dégage c'est que nous

¹⁴ En caractères gras dans le texte.

n'accédons aux concepts qu'indirectement, par l'intermédiaire de représentations. Quelles représentations ? Quelle discrimination de différence entre concept et représentation ?

Prenons la question de plus haut. La distinction entre concept et représentation a été introduite par Frege (1848-1925) dans son effort de fonder les mathématiques sur des règles logiques universelles (logicisme) et indépendantes de l'homme, effort poursuivi notamment par Hilbert (1862-1943), s'opposant radicalement en cela au point de vue de Riemann (1826-1866) et de Henri Poincaré (1854-1912) en passant par Hermann Weyl (1885-1955) qui considèrent que la construction des concepts mathématiques se fait par l'homme.

Sans prétendre, bien sûr, une quelconque originalité, nous pouvons essayer de fixer les deux notions de concept et de représentation et de préciser leurs corrélats. Le *concept* est une entité de pensée abstraite et objective; son critère est d'être constitué d'une intention et d'une extension. Les intentions de concept délimitent son extension et assurent son unité substantielle. Elles déterminent à l'aune de propriétés essentielles et équivalentes les caractéristiques communes aux objets qui, selon l'expression de Frege, tombent sous le concept. Dire qu'un objet tombe sous un concept c'est dire qu'il possède des propriétés caractéristiques qui permettent de le rattacher à ce concept. La *représentation*, image mentale subjective, est intériorité ou conscience de l'expérience vécue; son critère est d'être par essence singulièrement personnelle.

Dans une perspective cognitiviste et didactique, Duval (2004) considère que les objets mathématiques sont des objets de connaissance et qu'il n'y a pas de connaissance sans représentation. Ces objets n'étant jamais directement accessibles, leur appréhension ne peut se faire qu'à l'aide de leurs représentations sémiotiques (Duval 2004). Ici, il faudrait sans doute préciser que, pour Duval, un objet mathématique est une réalité idéale accessible uniquement par la pensée à travers la mobilisation de signes. D'autre part, Duval insiste sur la nécessité de distinguer les objets mathématiques de leurs représentations sémiotiques :

Les objets mathématiques ne doivent jamais être confondus avec la représentation qui en est faite. En effet, toute confusion entraîne, à plus ou moins long terme, une perte de compréhension, et les connaissances acquises deviennent vite inutilisables hors de leur contexte d'apprentissage [...]. La distinction entre un objet et sa représentation est donc un point stratégique pour la compréhension des mathématiques (Duval, 1993, p.37).

Il s'agit ici d'une exigence épistémologique fondamentale. Outre cette distinction, il faudrait aussi distinguer les représentations sémiotiques des représentations mentales. Ces dernières n'étant pas sans soulever un problème épistémologique : à proprement parler, nous ne connaissons que nos propres représentations mentales. Une représentation mentale serait en quelque sorte un modèle abstrait élaboré principalement au travers d'une activité mentale d'évocation. Elle se construit à partir de situations vécues, d'expériences personnelles, grâce auxquelles on constate des invariances et des différences, des propriétés intrinsèques et des attributs auxiliaires. La dualité des représentations mentale et sémiotique, recoupée et justifiée par la dualité de la subjectivité et de l'objectivité, nous semble singulièrement irréductible. En fait, la connaissance mathématique a ses sources dans la concomitance des représentations mentales et sémiotiques. Elles participent simultanément dans l'acte de connaître. Il nous semble, en effet, que les représentations mentales trouvent un répondant dans les signes et bénéficient donc d'une certaine objectivité et que, dans le même temps, les représentations sémiotiques s'imprègnent à leur tour des idées subjectives et se chargent de sens. Nous en arrivons donc à constater, sans prétendre à l'expliquer, une affinité certaine entre les représentations mentales et les représentations sémiotiques. Cette affinité attesterait que les représentations sémiotiques participent à l'élaboration d'images mentales et qu'en retour, ces dernières, même si elles ne peuvent s'exprimer dans le langage sémiotique, y acquièrent une signification objective. En un sens, toutes les représentations, aussi bien mentales que sémiotiques, sont nécessaires pour exprimer le tout des contenus d'un concept mathématique dont la connaissance et la compréhension requièrent la saisie de toutes ses représentations : l'idée d'intégrale par exemple n'est plus un outil de méthode, mais une qualité essentielle de l'objet singulier. La connaissance et la compréhension de l'intégrale procèdent de la saisie et la coordination des représentations de ce concept.

En partant de problèmes récurrents de compréhension, rencontrés par les élèves, Duval a été amené, dans le but d'affiner sur l'analyse de l'activité mathématique des élèves, à envisager les systèmes sémiotiques qu'il appelle registres de représentation sémiotique. Nous reprenons à notre compte certaines hypothèses de Duval (1995) :

Ces registres constituent le degré de liberté dont un sujet peut disposer pour s'objectiver à lui-même une idée encore confuse, un sentiment latent, pour exploiter des informations ou simplement pour les communiquer à un interlocuteur. (Duval, 1995, p.21).

Ces registres sont des systèmes de représentations différents les uns des autres mais complémentaires. Chacun de ces registres a un contenu objectif dans la mesure où il se réfère à des savoirs objectifs. La difficulté que pose la notion de registres de représentation sémiotique, est leur multiplicité. Pour un même objet mathématique, il y a des registres de représentation sémiotique, et non un registre. Dès lors, il y a quelque chose de plus que la connaissance des représentations sémiotiques de l'objet ; la coordination des registres de représentation sémiotique n'est pas seulement la connaissance des représentations, mais aussi un savoir et un savoir-faire à la fois. Elle révèle une aptitude. En effet, les passages entre les registres de représentation sémiotique ne sont ni transparents ni neutres. Chaque registre offre des potentialités de traitement interne et des possibilités de passage vers d'autres registres dont certaines peuvent se révéler, selon la tâche mathématique en jeu, plus pertinentes et plus efficaces que les autres pour des raisons heuristiques, pour des raisons de coût, pour des raisons de contrôle, etc. Dans l'activité mathématique, l'esprit est en face de systèmes de représentation complexes et dynamiques qu'il pense et qui sont le médium par lequel il se forme. Les rapports de l'esprit aux objets mathématiques sont d'autant plus difficiles à cerner qu'il est nécessaire de distinguer ces objets de leurs représentations. C'est que les objets mathématiques présentent une forte spécificité. Les mathématiques ont très largement recours aux représentations sémiotiques. D'ailleurs Duval n'hésite pas à souligner que « *les mathématiques sont le domaine de connaissances où l'on utilise le spectre le plus étendu et le plus hétérogène de représentations sémiotiques* » (Duval, 2006, p.63). Quelles sont les fonctions assignées à ces représentations ? Comment pouvons-nous avoir une saisie des liens sous-jacents aux différentes représentations d'un même objet mathématique ?

Il s'agit pour nous d'analyser le rôle des représentations sémiotiques et d'examiner les modalités d'articulation, de congruence et de non congruence et des opérations cognitives qu'elles autorisent. Pour ce faire, nous référons encore à Duval qui décrit les activités cognitives à trois niveaux distincts : le niveau de formation de la représentation dans un registre sémiotique particulier, les deux autres opérations, de traitement et de conversion, sont étroitement liées à « *la propriété fondamentale des représentations sémiotiques : leur transformabilité en d'autres représentations qui conservent soit tout le contenu de la représentation initiale soit une partie seulement de ce contenu.* » (Duval, 1995, p.36).

Prenons, par exemple, le concept d'intégrale. Dans sa version la plus élémentaire, il s'agit d'un procédé de sommation. Pour une fonction continue, une représentation mentale de

l'intégration pourrait être l'opération inverse de la dérivation alors qu'une représentation sémiotique serait : $\forall f \in C^1([a, b]), \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

Ce serait cependant une erreur que de penser que, chez l'élève, des représentations mentales s'élaboreraient de manière spontanée ou contingente. Elles doivent faire l'objet d'une action spécifique de l'enseignant par la multiplication et la diversification des exemples ainsi que l'utilisation de contre-exemples. La multiplication des exemples et leur diversité est d'autant plus importante que peu d'exemples ou des exemples pris dans un même répertoire, outre qu'ils n'atteignent jamais au cœur d'un concept mathématique, ne peuvent embrasser tous les aspects qu'il met en jeu. Davantage, en jouant sur les différents aspects du concept, on met à l'épreuve les représentations mentales qu'on en a faites. Et il arrive parfois qu'une représentation mal faite achoppe à une incohérence de principe en obtenant par exemple un résultat inverse de celui attendu. Les contre-exemples luttent contre les représentations erronées et sont les seuls à oser les affronter pour mettre au jour leur incohérence et tenter de les rectifier.

3.5. Les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances

Pour rendre compte du mode de fonctionnement des connaissances nécessaires dans la résolution des tâches proposées aux élèves, Robert (1998) distingue trois niveaux :

- Le niveau technique : ce niveau correspond à des mises en fonctionnement indiquées, isolées, mettant en jeu des applications immédiates de théorèmes, propriétés, définitions, formules, etc. [...]. Cela concerne plutôt le fonctionnement des outils (y compris des définitions).
- Le niveau mobilisable : ce niveau correspond à des mises en fonctionnement plus larges : encore indiquées, mais dépassant l'application simple d'une propriété à la fois [...] ce niveau teste une mise en fonctionnement où existe un début de juxtaposition de savoirs dans un domaine donné, voire d'organisation [...]. Un savoir est dit mobilisable si, lorsqu'il est bien identifié, il est bien utilisé par l'élève ...
- Le niveau disponible: ce niveau correspond au fait de savoir résoudre ce qui est proposé sans indication, d'aller rechercher soi-même dans ses connaissances ce qui peut intervenir. Par exemple, pouvoir donner des contre-exemples [...] changer de cadres sans suggestion [...] appliquer des méthodes non prévues ... (pp. 165-167).

3.6. Les différents types d'adaptations

Robert (2005) distingue, à côté des applications simples et isolées, six grands types d'adaptations. Dans le texte de référence, l'auteur précise :

Si le travail consiste à appliquer une propriété sans calcul supplémentaire ni reconnaissance (remplacer les données générales par des données particulières) on parle d'application simple et isolée ou immédiate : est mise en jeu une seule fois une application immédiate d'une propriété donnée en cours, et d'une seule.

Dans le cas contraire, six types se dégagent, qui peuvent intervenir simultanément et qui ont chacun un spectre assez large (et encore une fois relatif) :

A₁. Les reconnaissances¹⁵ (partielles) des modalités d'application des notions, théorèmes, méthodes, formules. Cela peut aller de reconnaissances de variables, de notations à des reconnaissances de formules, de configurations géométriques ou de conditions d'applications de théorèmes.

A₂. L'introduction d'intermédiaires – notations, points, expressions, ... : typiquement en géométrie introduire une parallèle, ou nommer un point pour pouvoir utiliser le théorème de Thalès.

A₃. L'intervention conjointe de plusieurs cadres ou notions, ..., les changements de points de vue, les changements ou jeux de cadres ou de registres(7) (modes d'écriture), les mises en relation ou interprétations, ...

A₄. L'introduction d'étapes, l'organisation des calculs ou des raisonnements, l'utilisation répétée d'un même théorème. Les étapes peuvent être classiques (étude d'une fonction) ou à imaginer.

A₅. L'utilisation de questions précédentes dans un problème.

A₆. L'existence de choix – forcés (un seul convient finalement) ou non.

L'analyse des tâches selon cette typographie complète et éclaire les analyses suivant le modèle des « quatre T » et les opérations sémiotiques. D'autre part, ces notions théoriques vont nous permettre d'analyser les organisations mathématiques (contenus) autour de l'objet *Intégrale* et de préciser l'idée de logistique didactique que nous avons avancée dans l'introduction.

¹⁵ Souligné par l'auteur.

4. Questions de recherche

Nous venons de suggérer que notre recherche s'attache particulièrement à étudier les aspects de la notion d'intégrale présents dans le projet institutionnel, et de façon concomitante, le sens mathématique qui s'y rattache. Dans cette perspective, le programme officiel de la classe terminale, le manuel scolaire, et à travers lui, les tâches proposées aux élèves, les techniques requises, le niveau de leur justification constituent des éléments importants pour renseigner notre enquête sur le projet institutionnel qui sera pilotée par la question :

Q₁ : Quels sont les contenus mathématiques et la logistique didactique qui sous-tendent le projet institutionnel sur la notion d'intégrale en classe terminale dans l'enseignement tunisien ? Quels sont les aspects de l'intégrale mis en avant dans ce projet ? Quel est, dans ce projet, le sens mathématique attaché à la notion d'intégrale ?

Parallèlement à l'étude écologique du programme officiel et du manuel, nous développerons par endroits, à chaque fois que cela nous semble approprié, une analyse critique. L'analyse critique doit chercher des éléments de réponse à la question :

Q₂ : En termes de contenus mathématiques et de logistique didactique, le projet institutionnel est-il susceptible d'une réalisation satisfaisante ?

L'analyse critique doit prouver l'objectivité de ses conclusions. Elle doit permettre d'isoler les éléments non satisfaisants et/ou les éléments qui font défaut dans le projet institutionnel. Cette analyse doit donc rendre compte des faiblesses du projet institutionnel et n'envisager sa transformation que si elle correspond à une amélioration réelle de l'enseignement de l'intégrale en classe terminale susceptible d'offrir à l'élève une plus grande chance pour apprendre et comprendre. Plus précisément, elle doit formuler des éléments de réponse à la question :

Q₃ : Est-il possible d'élaborer une alternative au projet institutionnel qui proposerait une approche essentiellement différente de celle du manuel scolaire, une logistique didactique qualitativement plus pertinente, une nouvelle orientation pour l'activité mathématique de l'élève plus riche et plus productive ?

5. Revue de la littérature

En didactique, les travaux en rapport avec l'enseignement de l'intégrale sont, à notre connaissance, très peu nombreux. Les travaux dont nous avons pu prendre connaissance sont ceux de Legrand (1997), Gonzalez-Martin (2005), Henriques (2006) et Khanh (2006).

Le travail de Legrand s'inscrit dans une problématique de recherche de situations fondamentales, dont la situation du barreau, pour l'enseignement de l'intégrale à l'université. Les trois autres sont des travaux de thèse. La thèse de Gonzalez-Martin intitulée *La généralisation de l'intégrale définie depuis les perspectives numérique, graphique et symbolique en utilisant des environnements informatique* est rédigée en espagnol et le seul document dont nous disposons est un résumé de 30 pages en français. Il s'agit d'expérimenter une séquence d'enseignement/apprentissage sur les intégrales impropres mettant en avant l'utilisation des différents registres de représentation sémiotique, le travail avec des exemples et des contre-exemples et le recours à un environnement informatique. La thèse de Enrique est intitulée *L'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples : analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple*. Ce travail propose une étude comparative du travail des étudiants dans un environnement papier/crayon et dans un environnement informatique. Enfin, la thèse de Khanh est intitulée *La notion d'intégrale dans l'enseignement des mathématiques au lycée : une étude comparative entre la France et le Vietnam*. Dans cette thèse, Khanh développe une étude comparative de l'enseignement de l'intégrale au Vietnam et en France. Cette étude se fonde sur une analyse institutionnelle, écologique et praxéologique à la faveur d'éléments théoriques issus de la théorie de l'anthropologie du didactique (Chevallard, 1985, 1989, 1992, 1998). Cette analyse à la fois synchronique et diachronique¹⁶ est enrichie par un questionnaire adressé à des enseignants vietnamiens et français, un entretien avec deux enseignants vietnamiens, un questionnaire soumis à des élèves vietnamiens, l'observation de deux classes ordinaires au Vietnam en période de révision, une analyse des copies du baccalauréat vietnamien et une enquête épistémologique sur l'objet *Intégrale*.

6. Plan de travail et méthodologie

Ce travail est composé de trois parties. La première partie a pour but de jeter quelques lumières sur la genèse historique et les premiers développements de la notion d'intégrale et

¹⁶ Trois périodes : 1975-199, 1990-2000 et 2000-2006.

particulièrement sur le problème de la définition de l'aire d'une surface. La deuxième partie est une étude détaillée de l'état des lieux dans l'enseignement secondaire tunisien enrichie d'un test d'évaluation sur la notion d'aire passé par un groupe d'élèves en classe terminale, d'une enquête auprès d'un groupe d'enseignants de classes terminales et d'un questionnaire soumis à un groupe d'étudiants en première année d'université. La troisième partie est une réalisation effective d'une ingénierie que nous proposons en tant qu'elle est une alternative à celle du manuel scolaire pour introduire des élèves en classe terminale à la notion d'intégrale.

La première partie est composée de trois chapitres inégalement développés. Dans le premier chapitre nous reprenons la genèse historique de l'intégrale avant le développement de la notion de mesure. Il a pour but de présenter une articulation des notions de primitive et d'intégrale et leur mise en rapport avec le calcul d'aire de surfaces planes. Ce chapitre cherche à éclairer certains aspects épistémologiques de ces notions, dans le même temps qu'il tente d'expliquer la forme prise par l'enseignement actuel de l'intégrale en classe terminale et en première année d'université. Dans le deuxième chapitre dont l'essentiel est tiré de notre mémoire de maîtrise, il s'agit de revisiter les méthodes utilisées par les anciens et leurs continuateurs dans les problèmes de calcul d'aire de surfaces planes. Le but de ce chapitre est de rendre compte de l'origine et de l'évolution de l'idée de découpage d'une surface plane qui est à la base de la procédure intégrale. Le troisième chapitre est une étude très détaillée du problème central de cette partie, celui de la définition de l'aire d'une surface. Au terme de quelques développements des notions de mesure et de rectification des courbes, nous nous pencherons sur la définition de l'aire d'une surface plane et la question de sa mesure et nous aborderons enfin le problème de la définition de l'aire d'une surface gauche. Ce dernier chapitre est composé de quatre sections et de plusieurs sous-sections qu'il ne nous semble pas nécessaire d'exposer ici.

La deuxième partie, composée de trois chapitres, est une étude détaillée de l'état des lieux autour de l'enseignement de l'intégrale en classe terminale. Dans le premier chapitre de cette partie, constituée de trois sections, nous proposons une analyse approfondie des textes du programme officiel en termes d'objectifs généraux et d'objectifs spécifiques et en termes de contenus spécifiques (section Mathématiques). Le deuxième chapitre est une étude exhaustive du chapitre consacré par le manuel scolaire à la notion d'intégrale avec ses deux parties *Cours* et *Exercices*. Cette étude est complétée par une analyse des exercices sur la notion d'intégrale proposés dans les quatre derniers sujets du baccalauréat. Enfin, le troisième chapitre est une investigation didactique qui regroupe un test d'évaluation sur la notion d'aire proposé à des

élèves d'une classe terminale, un questionnaire sur la notion d'intégrale proposé à des étudiants en première année d'université et une enquête menée auprès d'un groupe d'enseignants de classe terminale.

La troisième partie, constituée de deux chapitres, est consacrée à la réalisation effective d'une ingénierie que nous présentons en tant que projet alternatif à celui du manuel scolaire. Il s'agit d'une séquence d'enseignement dans une classe ordinaire dont l'objet est une approche pour introduire des élèves en classe terminale (section Mathématiques) à la notion d'intégrale, de construire avec eux une définition de l'intégrale définie d'une fonction continue et de mettre en rapport les notions d'aire, d'intégrale et de primitive. L'ingénierie est analysée a priori, elle est analysée a posteriori, elle est évaluée et comparée à la partie correspondante du manuel scolaire.

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE ÉPISTÉMOLOGIQUE

Introduction

Le but de cette première partie est de comprendre, ou au moins de discuter quelques questions que soulèvent les notions d'aire et d'intégrale et d'éclairer autant que faire se peut leurs articulations épistémologiques. Plus précisément, dans cette partie nous cherchons à examiner dans quelle mesure l'intégrale répond à la question du calcul de l'aire d'une surface, dans le même temps que nous cherchons à rendre compte des difficultés que pose la définition de l'aire d'une surface. Il nous faut insister ici sur deux points. D'abord, il s'agit surtout de situer ces questions et d'en préciser les difficultés inhérentes. Ensuite, la motivation principale de ce travail reste didactique. Considérer l'épistémologie mathématique externe à la dimension didactique, c'est supposer distincts deux domaines et deux pratiques qui se rencontrent, en l'occurrence :

1. Le savoir savant avec ses concepts internes et ses difficultés internes.
2. L'utilisation et l'application de ces concepts dans l'enseignement.

L'exploration de la dimension épistémologique est la première étape des analyses préalables dans la méthodologie d'ingénierie didactique. Cette exploration jette un pont entre le savoir savant (théorie, méthode, difficulté, etc.) tel qu'il existe avant toute utilisation et toute application, et un projet d'enseignement spécifique. Ce dernier a toujours un rapport avec la forme interne des notions mathématiques à enseigner. L'exploration épistémologique rend compte de la formation et du développement de ces notions, et dans le même temps, des instruments qui les ont favorisé et/ou des écueils qui les ont freiné. On peut objecter qu'il s'agit ici d'une analyse *externe* à l'objet de ce travail, mais nous considérons qu'une telle objection peut être écartée parce qu'en fait cette analyse n'est pas réellement externe, elle représente le développement *interne* du sens de la notion d'aire et de la notion d'intégrale. Par ailleurs, nous considérons que cette étude épistémologique est d'une grande importance, car l'épistémologie participe déjà de la didactique et de l'intention d'enseigner. En effet, l'épistémologie mathématique a pour but de réfléchir sur ce qu'on fait vraiment quand on fait des mathématiques et d'étudier le rapport entre différentes manières de faire des

mathématiques. Cette incursion épistémologique serait donc une sorte d'instruction et d'enrichissement que nous espérons acquérir pour mieux aborder notre projet. Ici, nous rejoignons Dorier (2000) qui écrit :

Cette étude est une phase fondamentale pour que le chercheur puisse prendre ses distances par rapport aux enjeux didactiques. Le sens des concepts, les problèmes qui s'y attachent, la position relative d'un élément de savoir dans un champ de savoir plus large qui l'englobe, sont autant de questions qui aident à mieux comprendre le fonctionnement d'un système didactique » (Dorier, 2000, p.9).

Ceci précisé, nous allons commencer par expliquer notre motivation pour le thème choisi et par présenter l'organisation de cette partie. Dans notre mémoire de mastère, nous avons entrepris une étude de la genèse historique et des différentes étapes de l'élaboration de la notion d'intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Nous avons notamment rendu compte de l'importance du rôle joué par les problèmes liés à la notion d'aire dans l'émergence et le développement de la notion d'intégrale. Cependant, nous n'avons pas abordé les difficultés inhérentes à la notion d'aire et plus particulièrement celles liées à sa définition. Compte tenu de sa centralité dans la construction de la notion d'intégrale, compte tenu également de son intérêt didactique, il nous a semblé nécessaire de consacrer l'essentiel de cette partie au problème de la définition de l'aire d'une surface.

Cette partie est divisée en deux chapitres. Le premier chapitre, dont la finalité est strictement didactique, est une brève synthèse de l'étude épistémologique que nous avons réalisée dans notre mémoire de mastère. Ce chapitre est constitué de quatre sections que nous consacrons à quelques remarques sur la notion d'intégrale et aux différentes méthodes utilisées dans les problèmes de calcul d'aire. Il s'agit surtout de revisiter la méthode d'exhaustion, la méthode des indivisibles et les intégrales au sens de Newton, Leibniz, Cauchy, Riemann et Darboux. Outre leur intérêt propre, ces développements rendent compte de l'évolution de l'idée de découpage d'une surface qui nous servira de fil conducteur. Il importe ici d'avertir que nous avons fait le choix d'utiliser le langage et les notations modernes dans le souci de rendre plus accessibles les idées et les techniques en œuvre dans ces méthodes.

Dans le deuxième chapitre, nous entreprendrons une étude, que nous voulons la plus riche possible, du problème de la définition de l'aire d'une surface. Pour cerner la nature de ce problème et les différentes solutions qui ont été proposées, nous avons

dû commencer par quelques considérations sur les notions de mesure. En premier lieu (section 1), nous essayerons d'expliquer la motivation de la notion de mesure et nous rappellerons le minimum nécessaire sur les mesures de Peano, Jordan, Borel et Lebesgue. Nous procéderons ensuite (section 2) à l'examen de la question de la mesure des surfaces planes avant de nous pencher sur la définition de la longueur d'une courbe (section 3). Les éléments développés dans cette dernière section nous serviront de mise en perspective des difficultés que soulève le problème de la définition de l'aire d'une surface gauche (section 4) qui constitue l'objet central de ce chapitre. Cette dernière section est divisée en plusieurs sous-sections. En premier lieu, nous exposerons la définition de Serret et l'objection adressée à son encontre par Peano et Schwarz. Nous proposerons un développement détaillé et précis du contre-exemple de Schwarz. En second lieu, nous présentons et commentons trois solutions différentes proposées par Hermite, Peano, Lebesgue et enfin la réponse de Tonelli au problème de Jordan. Précisons ici que nous avons dû consacrer une place particulièrement importante à la contribution de Peano car il nous semble que des considérations sur le calcul géométrique de Peano, et notamment sur la notion de bivecteur, sont nécessaires pour la compréhension de la solution du mathématicien italien, d'autant que les travaux de ce dernier sont peu diffusés, du moins en Tunisie. Nous consacrons également une sous-section à la comparaison des démarches de Peano et de Lebesgue dans la construction de leurs solutions respectives.

CHAPITRE PREMIER

I.1. Quelques remarques sur le calcul d'intégrales

L'histoire de la notion d'intégrale est à la fois longue et riche. On peut se référer à ce propos à l'étude que nous lui avons consacré dans notre mémoire de mastère ou consulter le livre de Hawkins (1970). Ici, nous nous limitons à quelques remarques afin de situer notre sujet. Les idées qui fondent la notion d'intégrale remontent à l'époque des Grecs et sont attribuées à Archimède. Mais les véritables fondements du calcul intégral commencent avec la création du calcul infinitésimal par Newton et Leibniz. Le premier est l'artisan d'une démarche globale qui consiste à privilégier l'intégrale indéfinie et donc le calcul sur les primitives, le second engage une démarche locale fondée sur la notion d'intégrale définie. Pour saisir les problématiques à l'origine de ces démarches, nous référons à Desanti (1962) qui cite Euler :

De même que dans le calcul différentiel on cherche la différentielle d'une quantité donnée, de même on établit un nouveau calcul pour la recherche de la quantité dont on connaît la différentielle. Ce calcul se nomme calcul intégral.

L'origine et la nature des intégrales peuvent s'expliquer aussi clairement que celle des différentielles par la doctrine des différences finies. Après avoir montré, en effet, comment on pouvait trouver la différence d'une quantité quelconque, nous avons posé la question inverse, et montré comment la différence étant donnée, on peut trouver la quantité dont elle est la différence. Et cette quantité, eu égard à sa différence, nous l'avons appelée somme. Or, en devenant infiniment petites les différences finissent par être des différentielles. De même alors les quantités qu'on appelait des sommes prennent le nom d'intégrales.

Dans son traité de la quadrature des courbes, cité par Taton (2004), Newton « ne considère pas les grandeurs mathématiques comme formées de parties, si petites soient-elles, mais comme décrites d'un mouvement continu. Les lignes sont décrites et engendrées, non pas par la juxtaposition de leurs parties, mais par le mouvement continu de points ». Cette conception, qui s'inscrit dans le cadre de la mécanique et plus précisément dans celui de la cinématique du point, rompt avec la tradition géométrique. Newton place la dérivée au centre

de sa démarche. Dans cette approche, l'intégration est l'opération réciproque de la dérivation. Tentons ici une explication plus intuitive que rigoureuse de la démarche de Newton :

Si $y = f(x)$ est une fonction de la variable x , alors, en donnant à x un accroissement Δx , y subit un accroissement $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. La question consiste alors à évaluer Δy à l'aide de Δx , ce qui revient à estimer le taux d'accroissement $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Plus précisément, si la fonction f est dérivable alors en donnant à x un accroissement infiniment petit dx , la variable y subit un accroissement infiniment petit dy de sorte que le taux d'accroissement $\frac{dy}{dx}$ (figure infra)¹⁷ ne dépende plus de la taille de dx . Le rapport $\frac{dy}{dx}$ représente donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x qui n'est pas autre chose que le nombre dérivé $f'(x)$ de la fonction f au point x .

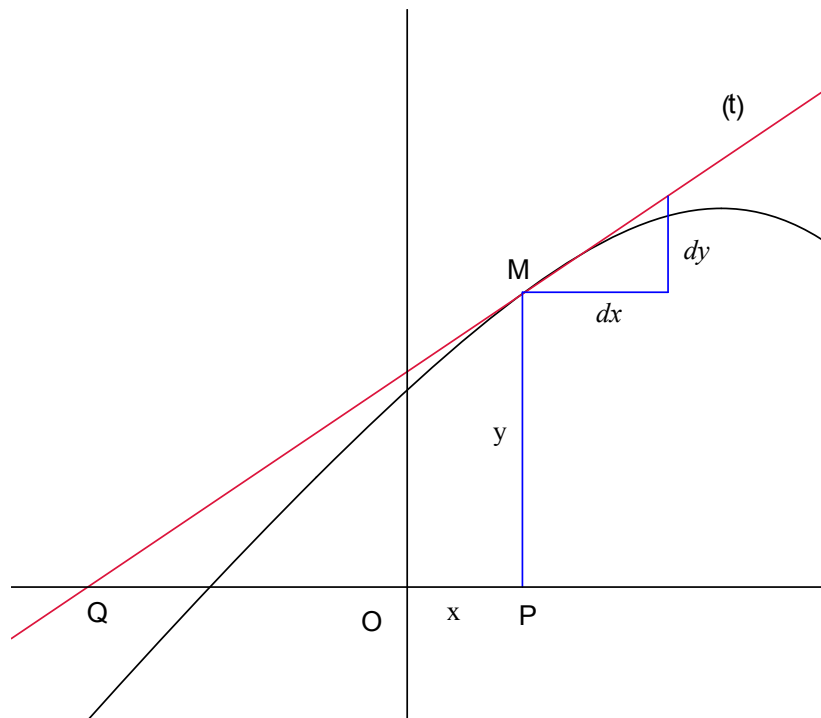


Fig. 1 : le triangle de Pascal

Comme l'écrivait Euler, le calcul intégral a pour objet de retrouver, à partir de la relation $dy = f'(x)dx$, l'accroissement fini Δy . Lorsque x varie de a à b , c'est-à-dire $\Delta x = b - a$, l'accroissement de y est donné par $\Delta y = \int_a^b dy = \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

¹⁷ Dans le triangle caractéristique de Pascal, lorsque dx devient infiniment petit, le taux d'accroissement $\frac{dy}{dx}$ garde un sens et vaut la valeur du rapport $\frac{PM}{PQ}$ qui est un nombre fini.

Aujourd'hui encore, si $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable telle que $F'(x) = f(x)$, pour tout $x \in [a, b]$, nous disons que $F(b) - F(a)$ est l'intégrale définie de Newton de la fonction f de a à b . On note $F(b) - F(a) = \mathcal{N} \int_a^b f$ ou plus simplement, si aucun risque de confusion n'est à craindre, $F(b) - F(a) = \int_a^b f$. Pour certains auteurs la fonction F ¹⁸ est l'intégrale indéfinie, au sens de Newton, de la fonction f : « *We also refer to the function F as the Newton indefinite integral of f .* » (Yee, Vyborny, 2000, p. 1).

Contrairement à Newton, Leibniz développe la notion d'intégrale définie à partir de la sommation d'infiniment petits comme dans les procédés antérieurs. Habitué à la réflexion philosophique, Leibniz, bien avant de s'intéresser aux mathématiques avait émis l'hypothèse philosophique de l'existence de composants infiniment petits de l'Univers (monades). Au sens de Leibniz, tout ce que nous percevons n'est que la somme de ces éléments. Dans cette conception, l'intégrale, ou plus précisément la somme intégrale, doit se comprendre comme la somme (et c'est le sens de l'ostensif \int ¹⁹) de contributions élémentaires infiniment petites dont le nombre augmente indéfiniment. De ce point de vue, le calcul intégral étudie le passage de la partie au tout, ou, plus concrètement, le passage du discret au continu. C'est précisément dans ce passage que l'on attrape un aspect du sens mathématique de la notion d'intégrale.

Cauchy est le premier à donner, dans son *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823), une définition précise de l'intégrale. Tout en adhérant à la conception de l'intégrale définie de Leibniz, Cauchy définit l'intégration en dehors de toute intuition géométrique et de la notion de primitive: f étant une fonction réelle continue dans un intervalle $[a, b]$, il divise l'intervalle en n sous-intervalles à l'aide des nombres $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$, puis il forme la somme : $S = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1})$. Cauchy montre que, de quelque manière qu'on subdivise l'intervalle $[a, b]$ de sorte que les différences $x_i - x_{i-1}$ tendent toutes vers zéro, la somme S possède une limite qui ne dépend que de la fonction f et des bornes de l'intervalle $[a, b]$. Cette limite est par définition l'intégrale définie, au sens de Cauchy, de la fonction f dans l'intervalle $[a, b]$. Cauchy montre ensuite que si f est une fonction continue dans un intervalle $[a, b]$ alors la fonction $F: x \mapsto \int_a^x f(x)dx$ est dérivable sur $[a, b]$ et vérifie, pour tout x de $[a, b]$, $F'(x) = f(x)$, établissant ainsi le lien entre l'intégration et la dérivation

¹⁸ C'est l'Hospital qui utilisa, le premier, le terme d'intégrale d'une fonction f pour désigner la fonction F dont la différentielle est $f(x)dx$ qui, depuis Lagrange, s'appelle fonction primitive.

¹⁹ Leibniz parlait de « *calcul sommatoire* » et utilisait un ancien \int long, noté \int , initiale du mot latin « *summa* », Jacques Bernouilli introduisit l'expression « *calcul intégral* » pour signifier que l'on cherche le tout à partir de la différence, et utilisa le symbole \int que la postérité conservera.

et, du coup, la première démonstration du théorème fondamental du calcul intégral. Ainsi donc Cauchy définit d'abord l'intégrale d'une fonction continue indépendamment de l'existence d'une primitive et prouve ensuite que l'intégrale ainsi définie coïncide avec celle de Newton.

L'intégrale de Cauchy s'applique aux fonctions continues, mais elle peut être étendue sans difficultés aux cas des fonctions bornées ayant un nombre fini de discontinuités sur l'intervalle d'intégration (fonctions continues par morceaux). En effet, si f est une fonction bornée sur un intervalle $[a, b]$ et discontinue en un point c de cet intervalle, il écrit alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right],$$

à condition que chacune des intégrales figurant dans le second membre tende vers une limite déterminée lorsque ε tend vers zéro.

Malgré son extension aux fonctions continues par morceaux, l'intégrale de Cauchy reste d'une portée très limitée. Une grande classe de fonctions lui échappe. Cependant, c'est grâce à elle que le calcul intégral a pris son élan et que son histoire va, dès lors, être jalonnée d'importantes étapes avec des contributions majeures de Dirichlet, Riemann, Fatou, Darboux, Stieljes, Lebesgue et de bien d'autres.

En fait, c'est la théorie de Riemann qui est considérée comme la première théorie de l'intégration. Cette théorie est encore enseignée dans nos universités et il y a, chez les non spécialistes, une identification presque universelle de l'intégrale avec l'intégrale de Riemann. La méthode de Riemann consiste à assimiler l'arc de la courbe (C) sur l'intervalle $[a_{i-1}, a_i]$ à un segment de droite parallèle à l'axe des abscisses, ce qui revient à approcher la fonction f par une fonction en escalier φ constante sur chacun des intervalles $]a_{i-1}, a_i[$ ($1 \leq i \leq n$), de valeur $\lambda_i = f(a_{i-1} + \varepsilon_i \delta_i)$, où $\delta_i = a_i - a_{i-1}$ et $0 < \varepsilon_i < 1$. La somme de Riemann est alors l'intégrale $\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \times \lambda_i$ de la fonction en escalier φ . Si la fonction f est suffisamment régulière ; c'est-à-dire lorsque ses variations sont localement assez faibles, alors en prenant des subdivisions de plus en plus fines, la somme de Riemann converge vers une valeur ultime qui est l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

Il importe ici de souligner que la somme de Riemann ne tient pas compte des valeurs de f aux points de la subdivision. Si l'on veut bien se placer à un point de vue géométrique, on ne peut

manquer de voir que si l'on considère une courbe (C) discontinue en un nombre fini de points, l'aire sous celle-ci ne dépend pas de ses points de discontinuité, puisque l'aire d'un segment est nulle. L'on voit ainsi que la méthode de Riemann s'applique à toute fonction bornée sur un intervalle compact ayant un nombre fini de discontinuités. D'ailleurs nous savons, depuis les travaux de Lebesgue, que la méthode de Riemann s'étend aux fonctions bornées dont l'ensemble des discontinuités est de mesure de Lebesgue nulle.

La méthode de Riemann a l'avantage de suivre une intuition géométrique suggestive. Elle permet de montrer de façon élémentaire que toute fonction continue par morceaux sur un intervalle borné de \mathbb{R} est intégrable, d'établir toutes les propriétés de l'intégrale définie et, surtout, de prouver que toute fonction continue sur un intervalle de \mathbb{R} est primitivable.

Une définition de l'intégrale définie équivalente à celle de Riemann est due à Darboux. Reprenant le mode de subdivision de Riemann, mais aussi de Cauchy avant lui, Darboux forme les sommes $\Sigma = \sum \delta_i f(a_{i-1} + \varepsilon_i \delta_i)$, $S = \sum M_i \delta_i$ et $s = \sum m_i \delta_i$, où M_i et m_i sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur de la fonction dans chacun des intervalles $[a_{i-1}, a_i]$ de la subdivision. Lorsque le nombre de ces intervalles augmente indéfiniment, la longueur de chacun d'eux tend vers zéro et les deux sommes S et s tendent respectivement vers les limites déterminées :

$$L = \overline{\int_a^b f(x) dx} \text{ (intégrale par excès) et } l = \underline{\int_a^b f(x) dx} \text{ (intégrale par défaut)}$$

Si ces deux limites sont égales, on dira, par définition, que la fonction f est intégrable au sens de Darboux sur l'intervalle $[a, b]$ et on a : $\lim \Sigma = \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ ²⁰.

C'est sans doute dans cette vision que l'on prend toute la mesure de l'idée technique de l'approche de l'intégrale par les aires. L'idée en œuvre dans cette méthode est à la base de la méthode actuellement d'usage à la fois courant et légitime dans l'enseignement supérieur, celle de fonctions en escalier : Une fonction f bornée sur un intervalle compact $[a, b]$ et dont l'ensemble des discontinuités est au plus dénombrable peut-être encadrée par deux fonctions en escalier. À l'aide de subdivisions de $[a, b]$, de plus en plus fines, on en arrive à construire deux suites de fonctions en escalier $(g_i)_{i \in I}$ et $(h_i)_{i \in I}$ telles que pour tout $i \in I$, $g_i \leq f \leq h_i$ sur

²⁰ Le résultat est donné sous cette forme par Darboux.

$[a, b]$ et à partir d'un certain rang l'aire entre les courbes de g_i et h_i , et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ peut être rendue aussi petite que l'on voudra.

L'idée commune en œuvre dans toutes ces vues repose sur l'idée, simple et pratique, qui consiste à approcher l'aire d'une surface plane par celle d'une réunion de rectangles. Aussi, dans la suite de ce travail, parlerions-nous simplement de méthode des rectangles. La question est maintenant de voir comment nous inspirer de ces idées pour organiser à l'intention de l'élève une approche de l'intégrale cohérente et chargée de sens. Cette organisation doit être envisagée de trois points de vue, du point de vue du savoir lui-même, du point de vue des exigences et des contraintes institutionnelles et du point de vue de l'élève. Pour répondre à cette question, nous montrerons une utilisation de ces idées en l'endroit de la situation 2 de l'ingénierie didactique que nous proposons dans la troisième partie de ce travail.

Les deux points de vue sur l'intégrale exposés plus haut, qui semblent différents, doivent être compris l'un par l'autre, en dépit de la différence fondamentale de leurs intuitions centrales. En effet, l'une privilégie une démarche globale qui se fonde sur la notion d'intégrale indéfinie et donc sur le calcul de primitives, l'autre emprunte une démarche locale qui met en avant la notion d'intégrale définie. Plus précisément, la première cherche à obtenir d'un seul coup ce que la deuxième cherche à obtenir par la sommation d'un nombre infini de contributions élémentaires. Mais, prises ensemble et éclairées l'une par l'autre, ces deux démarches se communiquent leurs outils et se fertilisent mutuellement.

L'intégrale de Newton est simple, intuitive et accessible à des élèves de terminale. Elle présente cependant plus d'inconvénients que d'avantages. Son avantage le plus considérable est qu'elle permet d'établir à moindre coût les propriétés algébriques de l'intégrale définie d'une fonction continue. En revanche, ses inconvénients sont multiples. D'abord, elle ne s'applique qu'aux seules fonctions primitivables, ce qui réduit considérablement sa portée. Ensuite, et c'est essentiel, elle ne montre que l'aspect procédural de l'intégrale. Bien sûr, cet aspect est important mais il ne dit rien sur la dimension géométrique de la notion d'intégrale ni sur l'interprétation de ses propriétés. Et cela ne peut pas être sans conséquence sur le rapport de l'élève à la notion d'intégrale. On comprend sans peine, pour la majorité des élèves, qu'aussitôt énoncée la définition devienne immédiatement une « représentation » qui ne sera plus réinterrogée. À l'idée que la notion d'intégrale se réduise à la primitivation est lié le risque potentiel d'une confusion effective entre ces deux notions. La formule de Newton est

à la fois efficace et pratique quand elle s'exerce sur des fonctions dont on sait expliciter des primitives. Mais en fait, elle est inopérante dans des cas sans nombre.

I.2. Quelques remarques sur le calcul d'aire

I.2.1. La méthode d'exhaustion

Les premières préoccupations d'ordre infinitésimal furent rencontrées par les Grecs dès le V^e siècle avant J-C. À cette époque ces préoccupations se réduisaient à des calculs de longueurs, d'aires et de volumes. Comme ces calculs se heurtaient à la question de divisibilité des grandeurs, les mathématiciens grecs se sont trouvés face à un obstacle posé par le problème de la divisibilité à l'infini et l'apparition de *grandeurs incommensurables*²¹. Il semble que c'est précisément Eudoxe (400, 355 Av.) qui a donné, le premier, un statut aux grandeurs incommensurables, en élaborant la théorie générale des rapports, dite aussi *théorie des proportions*. Cette théorie est à la base de la méthode, dénommée *méthode d'exhaustion*²² par Grégoire de Saint-Vincent en 1647.

La méthode d'exhaustion a permis aux Grecs la vérification et la validation des solutions à des problèmes de rectification, de quadrature et de cubature. Archimède (287, 212. Av.), mais déjà Eudoxe et Euclide avant lui, utilisait cette méthode de manière systématique et rigoureuse, pour établir des résultats sur les aires et les volumes. Cette méthode, qui se fonde sur *l'axiome d'Archimède*²³ et sur une double réduction à l'absurde, permet de comparer l'aire d'une surface S que l'on cherche à celle d'une surface A que l'on connaît en montrant que l'on ne peut avoir ni $A > S$ ni $A < S$, ce qui conduit à la conclusion $S = A$.

Il convient de préciser ici que la méthode d'exhaustion n'est pas une méthode de découverte, mais qu'elle permettait aux Grecs non seulement, comme nous l'avons déjà dit, de valider des résultats déjà connus, ou tout au moins pressentis préalablement, mais aussi, de contourner les difficultés d'ordre infinitésimal. Cette méthode a permis à Archimède d'obtenir de nombreux

²¹ Grandeurs qui ne peuvent être évaluées ou comparées par le moyen d'une mesure commune.

²² La méthode d'exhaustion est une manière de prouver, au moyen d'une double réduction à l'absurde, l'égalité de deux grandeurs en montrant que leur différence est plus petite que toute grandeur assignable

²³ D'après le Livre X des éléments d'Euclide, l'énoncé de l'axiome d'Archimède est le suivant : « *En soustrayant de la plus grande de deux grandeurs données plus de sa moitié, du reste plus de sa moitié, etc., on peut arriver à une grandeur moindre que la plus petite grandeur.* »

En termes modernes, cet axiome se traduit ainsi :

« *Si a et b sont des nombres réels positifs tels que $a > b$, alors il existe un entier naturel n tel que $nb > a$.* »

résultats, qui relèveront plus tard du *calcul infinitésimal*, telles que certaines quadratures (disque, segment de parabole, la spirale d'Archimède, cylindre, cône, sphère) et certaines cubatures (pyramide, cône, sphère, segment de quadriques de révolution). Se pose ici la question de savoir comment Archimède a-t-il pu conjecturer ces résultats.

Pour Archimède, et peut-être aussi pour d'autres mathématiciens grecs, mesurer une grandeur n'est pas trouver un nombre, mais trouver une autre grandeur connue à laquelle on rapporte la mesure de la grandeur cherchée. Dans une lettre (rapportée dans *Une Histoire des Mathématiques- Routes et dédales*) adressée à Ératosthène et découverte en 1906, Archimède révèle partiellement sa démarche heuristique dans ses découvertes :

« Un segment quelconque compris par une droite et par une section de cône rectangle est égal à quatre fois le tiers du triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment. J'ai découvert ce théorème d'abord par des considérations de mécanique, et ensuite par des raisonnements géométriques. » (p-172).

Ainsi la méthode d'Archimède repose sur des considérations mécanique et géométrique. Elle est *« fondée sur l'idée qu'une surface est composée de lignes, elle permet de comparer à l'aide de considérations mécaniques la valeur de l'aire du segment parabolique à celle de l'aire d'un triangle, par exemple en « pesant » les segments de droites composant le segment parabolique, d'une part, et le triangle de l'autre. Elle utilise le principe du levier : les poids sont inversement proportionnels à leurs distances du point fixe du levier en équilibre. Ces dernières distances permettront d'établir le rapport des surfaces, qu'on démontrera alors géométriquement par la méthode d'exhaustion » (ibid. p-174).*

L'idée repose ainsi sur le découpage de la surface du segment parabolique et celle d'un triangle par des droites parallèles en sections d'épaisseur infiniment petite et consiste à comparer la somme des aires des sections formant le segment parabolique à celle des aires des sections formant la surface du triangle. L'idée en œuvre dans cette démarche sera, comme nous le verrons plus loin, à la base de la méthode des indivisibles utilisée par Cavalieri. Mais pour Archimède, il ne s'agit en fait que d'une démarche heuristique et le résultat qui en est issu fait l'objet d'une véritable démonstration par la méthode d'exhaustion. Compte tenu de sa large diffusion, nous estimons qu'il n'est pas nécessaire d'exposer ici une illustration de la méthode d'exhaustion.

1.2.2. La contribution arabe

Dès le IX^e siècle, grâce à une grande assimilation de l'héritage grec et à la constitution de l'algèbre en discipline théorique avec son objet et ses méthodes propres, certains savants de langue arabe commencèrent à s'intéresser aux procédés infinitésimaux. À cette époque, parallèlement à des débats de nature essentiellement philosophique sur le concept de nombre, celui de l'infini et sur les fondements même des mathématiques on trouve des réflexions purement mathématiques sur les outils de la démonstration et sur la nature des problèmes étudiés. On assiste alors à l'émergence de nouvelles méthodes fondées sur l'application des disciplines mathématiques les unes aux autres.

C'est ainsi que l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie se sont mutuellement enrichies, favorisant le développement d'outils plus diversifiés et plus efficaces dans de nombreux domaines dont, notamment, la théorie des coniques et les méthodes archimédiennes pour les problèmes de quadrature et de cubature. Ces domaines deviennent objet d'étude pour les plus grands mathématiciens de langue arabe. Aussi Roshdi Rashed consacre-t-il le premier chapitre de son ouvrage *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle* au traité des frères Banu-Mussa intitulé *Livre pour connaître l'aire des figures planes et sphériques*. Le deuxième chapitre de l'ouvrage de Roshdi Rashed est consacré à Thabit-ibn-Qurra (836-901) qui traduit en langue arabe plusieurs ouvrages grecs dont notamment *De la sphère et du cylindre d'Archimède* et trois livres d'Apollonius sur les coniques. Roshdi Rashed souligne qu'Ibn-Qurra a fait usage d'idées et de méthodes d'approximation d'ordre infinitésimal qui sont entièrement nouvelles. L'exemple de la quadrature de la parabole par Ibn-Qurra révèle clairement à la fois l'originalité de ces méthodes et la nature des idées mathématiques qui les gouvernent. La démarche d'Ibn-Qurra, consiste à approcher la surface du segment parabolique par une surface polygonale formée de (n-1) trapèzes et d'un triangle. L'énoncé suivant traduit par Roshdi (2002) illustre assez bien la pensée mathématique en œuvre chez Ibn-Qurra dans la quadrature de la parabole : « pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polygone P_n d'aire S_n inscrit dans la portion de la parabole et tel que $\frac{2}{3}S - S_n < \varepsilon$ ». Comme on le constate, l'auteur utilise de façon implicite une propriété qui contient, sans équivoque, l'idée de la borne supérieure.

La quadrature de la parabole par Thabit Ibn Qurra

Fort d'une parfaite maîtrise de la méthode d'exhaustion et de résultats assez élaborés sur les sommes de suites numériques, Ibn-Qurra aborde la quadrature de la parabole en commençant par établir vingt et un lemmes dont quinze d'arithmétique²⁴. Il découpe ensuite la surface du segment parabolique par des cordes perpendiculaires à l'axe de la parabole et non équidistantes.

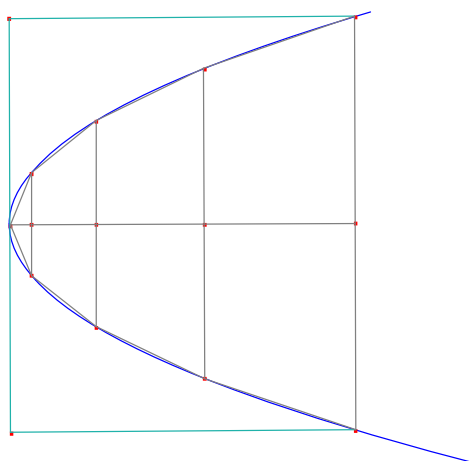


Fig. 2 : la quadrature d'Ibn Qurra

Plus précisément, la parabole étant définie par l'équation $y^2 = px$, Ibn Qurra divise l'axe du segment parabolique, de longueur a , en n segments de longueurs respectives $\frac{a}{n^2}, \frac{4a}{n^2}, \dots, \frac{n^2a}{n^2}$ et démontre que les cordes passant par les points de la subdivision ont pour longueurs respectives $\frac{2}{n}\sqrt{pa}, \frac{4}{n}\sqrt{pa}, \dots, \frac{2n}{n}\sqrt{pa}$. L'aire du polygone, composé d'un triangle et de $(n - 1)$ trapèzes inscrits dans le segment parabolique est alors :

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{n^2} \cdot \frac{2}{n} \sqrt{pa} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{n^2} \left(\frac{2}{n} \sqrt{pa} + \frac{4}{n} \sqrt{pa} \right) + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n-1)a}{n^2} \left(\frac{2n-2}{n} \sqrt{pa} + \frac{2n}{n} \sqrt{pa} \right),$$

$$S_n = \frac{a}{n^3} \sqrt{pa} + \frac{9a}{n^3} \sqrt{pa} + \dots + \frac{(2n-1)^2 a}{n^3} \sqrt{pa} = [1^2 + 2^2 + \dots + (2n-1)^2] \frac{a\sqrt{pa}}{n^3},$$

Grâce au résultat $\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$, préalablement établi, Ibn-Qurra conclut que :

$$S_n = \frac{4n^2 - 1}{3n^2} a\sqrt{pa} = \frac{4}{3} a\sqrt{pa} - \frac{1}{3n^2} a\sqrt{pa}.$$

Il démontre ensuite, à l'aide des sommes calculées au début de son exposé, que, si n est suffisamment grand, $\frac{1}{n^2}$ peut être rendu plus petit que toute grandeur donnée de sorte que, A étant l'aire du rectangle circonscrit au segment de parabole, $\frac{2}{3}A - S_n = \frac{a\sqrt{pa}}{3n^2}$ est inférieur à toute aire donnée.

²⁴ D'après Une histoire de mathématiques : Routes et dédales.

D'un autre côté, il utilise l'axiome d'Archimède pour établir que lorsque n est suffisamment grand et S désigne l'aire du segment de parabole, alors la différence $S - S_n$ peut être rendue plus petite que toute aire donnée. Pour finir, Ibn-Qurra démontre par l'absurde que les deux hypothèses $S < \frac{2}{3}A$ et $S > \frac{2}{3}A$ sont impossibles et conclut alors que $S = \frac{2}{3}A$.

Toutefois, en dépit de la richesse de leurs démarches intellectuelles et la rigueur de leurs méthodes mathématiques, les Grecs et les Arabes n'ont pas réussi à élucider, explicitement, les questions du continu, d'infini et de limite. Dans l'application concrète de la méthode d'exhaustion, par exemple à une surface, il s'agit d'approcher cette surface par un polygone en augmentant le nombre de ses côtés jusqu'à ce que la différence entre l'aire de la surface et celle du polygone soit aussi petite que l'on voudra, mais sans jamais épuiser exhaustivement la surface cherchée. Ainsi, la méthode d'exhaustion évite toute considération infinitésimale, mais la démarche intellectuelle sous-jacente porte, implicitement, une idée de limite et d'infini. Comme nous le savons, les mathématiciens mettront longtemps à dégager ces notions de leurs supports concrets et de s'affranchir des difficultés qui leur sont inhérentes.

1.2.3. La méthode des indivisibles

En Europe, ce n'est qu'à partir du XVI^e siècle que la méthode d'exhaustion commença à être l'objet d'études et de réflexions approfondies. On chercha surtout un substitut à cette méthode alors jugée trop lourde. C'est l'ingénieur Simon Stevin (1548-1620) qui, le premier, tenta d'alléger la méthode d'exhaustion en abandonnant la lourde rigueur de la démonstration par l'absurde en faveur d'une méthode plus intuitive. Selon Taton (2004) « *cette initiative audacieuse prélude à un renouveau des mathématiques infinitésimales* » et constitue une rupture épistémologique importante dans l'histoire du calcul infinitésimal. L'initiative de Stevin, inaugurant un esprit concret et audacieux, est un soubassement au concept de limite et au détachement des méthodes infinitésimales de leur support géométrique.

A la même époque, Luca Valerio (1552-1618) converge dans la même voie en traitant des problèmes de quadrature par des méthodes plus directes et plus intuitives. Dans les problèmes de quadrature, Valerio encadre la surface cherchée par des figures « *en escalier* » composées d'un nombre suffisamment grand de rectangles et cherche ensuite à éliminer la différence entre ces figures et la surface cherchée.

Les travaux de Valerio, mais aussi ceux d'Archimède et de Stevin, semblent avoir beaucoup inspiré le mathématicien italien Bonaventura Cavalieri (1598-1647) qui était surtout au fait des discussions scolastiques sur l'infini et le continu. Afin d'accélérer les démonstrations de

la méthode d'exhaustion, Cavalieri développe, dans son ouvrage *La géométrie par les indivisibles* (Geometria Indivisibilibus) publié en 1635, ce qu'il appelle *la méthode des indivisibles*. Cette méthode pourrait trouver ses origines dans la démarche heuristique d'Archimède comme elle pourrait être rapportée à une conception de la matière et du continu développée par certains philosophes scolastiques. Dans cette conception, la matière est composée de particules insécables (atomes) dont la nature diffère de celle de la matière. Ici, une surface est un agrégat de lignes. Plus exactement, une surface plane est la juxtaposition de lignes parallèles, en ce sens qu'« *une règle découpe dans une figure plane une ligne, qui en est un indivisible ; en faisant varier la règle parallèlement à elle-même, il peut parler de toute les lignes de la figure.*» (B. I, 2003, p. 6). Dans ce découpage, les indivisibles ont une dimension de moins que le continu dans lequel ils sont découpés et ces indivisibles sont, de fait, hétérogènes à la grandeur qui les produit. Conscient de ces difficultés, Cavalieri s'est efforcé de les contourner, suivant en cela Eudoxe et Archimède, en déterminant plutôt le rapport des aires de figures dont les indivisibles sont dans un rapport constant. Il justifie sa démarche en énonçant que « *les continus suivent les proportions de leurs indivisibles* » (ibid.) et en faisant appel à *la méthode des proportions*²⁵. Mais en dépit de son manque de rigueur et des risques attachés à son utilisation, la méthode des indivisibles a permis à Cavalieri d'obtenir certains résultats justes bien plus rapidement que la méthode traditionnelle. En témoigne les deux exemples suivants²⁶ :

Aire du disque :

Dans la figure ci-dessous, nous avons un disque de rayon R et un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont R et le périmètre $2\pi R$ du disque. Le disque et le triangle ayant les mêmes indivisibles, on conclut que le disque a même aire que le triangle, c'est-à-dire : $\frac{1}{2} \times R \times 2\pi R = \pi R^2$.

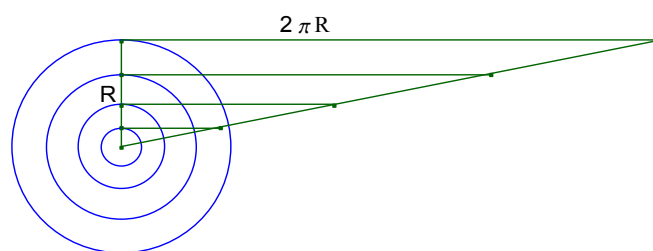


Fig. 3 : l'aire du disque

que le triangle,

²⁵ Si $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ alors $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{b_1+b_2+\dots+b_n} = \frac{a_1}{b_1}$, où a_i et b_i ($1 \leq i \leq n$) sont les indivisibles des deux grandeurs que l'on cherche à comparer.

²⁶ Les deux exemples sont tirés de (Rogalski, 2001).

Aire de l'ellipse :

Dans la figure suivante, nous avons une ellipse de grand axe $2b$ et de petit axe $2a$ et un cercle de diamètre $2a$, de sorte que les surfaces délimitées par l'ellipse et le cercle soient comprises entre deux droites parallèles (IJ) et (KL) et tangentes à elles. La droite menée par le centre du cercle et celui de l'ellipse parallèlement aux droites (IJ) et (KL) déterminent deux segments $[AB]$ et $[CD]$ dont les longueurs sont dans le rapport $\frac{CD}{AB} = \frac{b}{a}$. De même, toute droite parallèle à

(IJ) et située entre (IJ) et (KL) détermine avec le cercle et l'ellipse deux segments $[MN]$ et $[PQ]$ dont les longueurs sont aussi dans le rapport

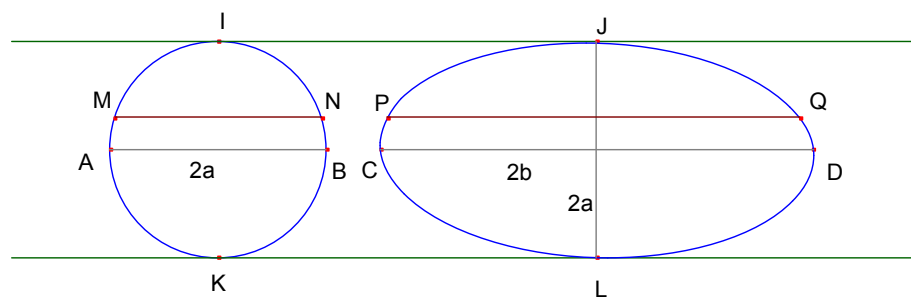


Fig. 4: l'aire de l'ellipse

$\frac{CD}{AB} = \frac{b}{a}$. Ce rapport étant constant alors les aires des surfaces délimitées par le cercle et l'ellipse sont dans le même rapport $\frac{b}{a}$. Comme l'aire du disque est πa^2 alors l'aire de l'ellipse est $A = \frac{b}{a} \times \pi a^2 = \pi ab$.

La méthode des indivisibles n'est pas sans soulever certaines difficultés. Les indivisibles ne sont pas définis de façon claire et leur utilisation requiert beaucoup de précautions. Cavalieri lui-même était conscient du fait que sa méthode est faillible et peut conduire à des résultats erronés. Voici, par exemple, un paradoxe produit par Evangelista Toricelli (1608-1647):

Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un rectangle qui n'est pas un carré. Des coupes horizontales comme (IJ) et verticales comme (JK) déterminent respectivement dans les triangles ACD et ABC des segments indivisibles dont le rapport des

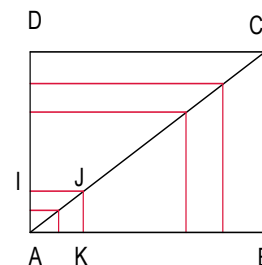


Fig. 5 : le paradoxe de Toricelli

longueurs $\frac{JI}{JK} = \frac{CD}{CB} = \alpha$ est une constante différente de 1. Par suite $aire(ACD) = \alpha \times aire(ABC)$, ce qui est faux puisque les deux triangles ont même aire.

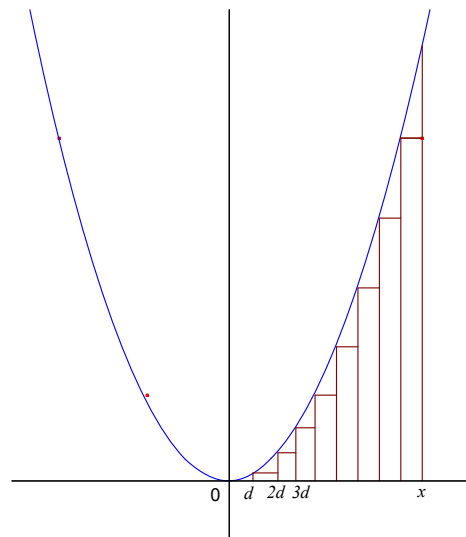
L'examen de ce qui vient d'être exposé ici donne à voir que les différentes approches utilisées jusque là, qui admettent comme intuitifs le concept d'aire et ses propriétés élémentaires, fournissent des techniques *ad hoc*, qui permettent de carrer des surfaces planes particulières. Ces méthodes présentent le défaut de ne pas permettre de donner directement une valeur à une aire, mais seulement de comparer deux aires entre elles. Comme nous l'avons déjà souligné, la méthode d'exhaustion n'est pas une technique de calcul, mais plutôt un procédé de validation. Il s'agit d'établir de façon rigoureuse des résultats obtenus par une méthode heuristique. L'exemple de la quadrature de la parabole par Archimède est intéressant à double titre. C'est d'abord le premier exemple à propos duquel Archimède révèle l'aspect expérimental de sa démarche qu'il nomme méthode mécanique. Ensuite, la méthode géométrique utilisée par Archimède, et plus tard par Thabit-Ibn-Qurra, a livré à la géométrie une idée dont la fécondité va s'avérer grande, nous entendons celle d'approcher une surface plane par des surfaces polygonales.

La méthode des indivisibles, quant à elle, a inspiré Toricelli soucieux de dégager une conception plus concrète des indivisibles en cherchant à évacuer le problème de l'hétérogénéité des indivisibles aux continus « *Ce sont les indivisibles, nantis d'une épaisseur, qui suivent les proportions des continus dans lesquels ils sont découpés* » (B.I, p.10). Grâce à cette épaisseur, les indivisibles sont alors des rectangles de largeur « infinitésimale » et deviennent du coup homogènes au continu qui les compose. Mais, c'est chez Pascal que cette idée va être clairement illustrée.

Blaise Pascal (1623-1662) connaissant parfaitement les travaux de Stevin, Descartes, Grégoire de Saint-Vincent, Fermat, Cavalieri et Toricelli, a essayé d'améliorer la méthode des indivisibles qu'il trouvait encore assez incertaine et obscure par endroits. Bien que s'inscrivant dans la tradition géométrique, Pascal s'oppose aux arguments intuitifs de Cavalieri et appuie sa méthode par des raisonnements arithmétiques sur les séries numériques. Mais, en dépit de cette opposition, Pascal considère que toute démonstration par les indivisibles équivaut, au prix de quelques changements, à celle d'Archimède, comme en témoigne cet extrait du **Traité de la Roulette** : « *tout ce qui est démontré par les véritables*

règles des indivisibles se démontrera aussi à la rigueur et à la manière des Anciens ; et qu'ainsi l'une de ces méthodes ne diffère de l'autre qu'en la manière de parler[...]. Et c'est pourquoi je ne ferai aucune difficulté, dans la suite, d'user de ce langage des indivisibles : la somme des lignes, ou la somme des plans ; et ainsi, quand je considérerai, par exemple, le diamètre d'un demi-cercle divisé en un nombre indéfini de parties égales aux points Z, d'où soient menées les ordonnées ZM, je ne ferai aucune difficulté d'user de cette expression, la somme des ordonnées, qui semble n'être pas géométrique à ceux qui n'entendent pas la doctrine des indivisibles, et qui s'imaginent que c'est pécher contre la géométrie que d'exprimer un plan par un nombre indéfini de lignes ; ce qui ne vient que de leur manque d'intelligence, puisqu'on n'entend par là, sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme est certainement un plan, qui ne diffère de l'espace du demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée. »

Pascal applique sa méthode à de nombreux problèmes tels que la quadrature de la cycloïde, la longueur de son arche, le centre de gravité de la surface sous l'arche ainsi que la quadrature de la parabole. Pour calculer, par exemple, l'aire de la surface comprise entre la parabole et l'axe des abscisses entre 0 et x , Pascal construit des rectangles de même largeur d , calcule la somme de leurs aires et, lorsque le nombre de ces rectangles augmente indéfiniment, il s'autorise à négliger certains termes.



Nous décrivons ci-après la méthode de Pascal sur l'exemple de la parabole $y = x^2$.

Pascal choisit sur l'axe (Ox) des points d'abscisses $d, 2d, 3d, \dots, nd$; où $d = \frac{x}{n}$, élève en ces points les ordonnées et construit ses rectangles. La somme des aires de ces rectangles vaut :

$$S = d \times d^2 + d \times (2d)^2 + \dots + d \times (nd)^2.$$

$$S = d^3 + 2^2d^3 + \dots + n^2d^3.$$

Fig. 6 : la quadrature de Pascal.

$$S = \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) \times d^3.$$

Pascal explique que lorsque le nombre de rectangles augmente indéfiniment, il est possible de négliger les termes $\frac{n^2 d^3}{2}$ et $\frac{n d^3}{6}$ par rapport à $\frac{n^3 d^3}{3}$ de sorte que $S = \frac{(nd)^3}{3} = \frac{x^3}{3}$.

La liberté que se donne Pascal pourrait trouver sa légitimité dans le parallèle entre le point de vue géométrique et le point de vue arithmétique selon lequel il identifie l'indivisible géométrique au zéro arithmétique ; parallèle qui, depuis, fait école dans les méthodes infinitésimales. Il importe de souligner ici que la méthode de Pascal, considérée par Émile Picard comme le premier traité du calcul intégral, marquait l'état ultime du développement des indivisibles avant d'être supplantés par les méthodes, plus puissantes, du nouveau calcul infinitésimal élaboré par Newton et Leibniz.

Bien entendu, il convient de souligner ici qu'à l'époque de Pascal, on voit se multiplier les travaux sur les problèmes de calcul d'aire et donc de calcul intégral ayant une orientation géométrique comme chez Pascal ou algébrique comme chez Fermat. Ne pouvant ici rappeler tous ces travaux, nous allons essayer d'orienter la suite de ce chapitre vers la question de la définition de l'aire d'une surface et les difficultés rencontrées dans ce domaine.

Mais avant de continuer, insistons encore une fois que jusque là l'aire d'une surface plane est une grandeur géométrique considérée comme intuitivement évidente et dont on admettait l'existence. Une définition rigoureuse de la notion d'aire et la preuve de son existence ne pouvait d'ailleurs être élucidées avant qu'on ne dispose de bonnes définitions de la notion de limite et des nombres réels.

CHAPITRE DEUXIÈME

LE PROBLÈME DE LA DÉFINITION DE L'AIRES D'UNE SURFACE

Les mathématiciens des siècles passés ont consacré beaucoup d'efforts pour mettre au point et améliorer des outils propres à calculer les aires de certaines surfaces planes. Mais ces outils procèdent tous de la même méthode dite de « décomposition ». Il s'agit de juxtaposer des figures élémentaires²⁷ pour approcher d'autres plus complexes avec ce qui peut s'apparenter avec un passage à la limite. Il nous semble cependant que, dans ces travaux, le problème de la définition de l'aire d'une surface n'est pas posé. À ce premier problème s'en ajoutent d'autres comme par exemple celui de savoir s'il est possible d'attacher une aire à n'importe quelle surface ou, le cas échéant, de chercher quelles sont celles dont on peut calculer l'aire. D'autres questions plus pointues seront formulées plus loin en leurs endroits.

En fait ce n'est que dans un passé relativement récent, grâce au développement de bonnes théories à propos de la notion de limite, des nombres réels et des ensembles (Cantor 1872, Dedekind et Meray 1872) que les questions évoquées plus haut ont fait l'objet de réflexions profondes pour donner naissance à la théorie de la mesure (Peano 1887, Jordan 1892, Borel 1898, Lebesgue 1902). Pour une analyse détaillée et très accessible de la conception de la mesure chez Peano, Jordan et Borel nous renvoyons à l'article de Villeneuve (2009) intitulé *Le processus d'abstraction dans le développement des premières théories de la mesure*. Mais la théorie de la mesure ne concentre pas toutes les idées et toutes les méthodes mises en œuvre dans l'étude des problèmes de rectification, de quadrature et de cubature. Une autre approche, utilisant aussi la méthode de décomposition, s'appuie sur la constitution, par exemple pour les polygones et les polyèdres, de classe d'équivalence de figures élémentaires « d'aire égale » ou de « volume égal », par exemple à partir de la relation « être composé du même nombre de figures deux à deux congruentes²⁸ ». Contrairement à la première approche où aire et volume dépendent de l'unité choisie, la seconde approche est indépendante de l'unité puisqu'on n'assigne pas un nombre réel positif à une figure. Elle fait intervenir plutôt les groupes des isométries. David Hilbert (1862-1943) introduit dans ses *Fondement de la*

²⁷ Triangles, trapèzes, rectangles, voire des lignes comme c'est le cas pour les indivisibles.

²⁸ Si E et F sont deux parties d'un ensemble X , alors on dit que E et F sont congruents (dans X) relativement à G , ou sous l'action de G , s'il existe $g \in G$ tel que $F = gE$.

géométrie le concept d'équidécomposabilité²⁹ sur lequel il fonde sa théorie des aires et pose le problème d'une théorie analogue pour les volumes³⁰. Pour des raisons qui tiennent pour l'essentiel à notre sujet de thèse, nous n'aborderons pas cette deuxième approche dont un exposé est développé par Perrin (2005) dans son texte intitulé *Aires et Volumes : découpage et recollement*.

II. 1. La notion de mesure

II.1.1 Motivation de la notion de mesure

Il nous faut préciser d'abord qu'en mathématique le terme « mesure³¹ » a un sens précis. Il s'agit de construire à partir des mesures usuelles³² (longueur, aire, taille, poids, température, probabilité, évolution démographique, etc.) une axiomatique unifiant celles qui ont des propriétés communes. Notre intérêt pour la notion de mesure réside surtout dans le fait qu'elle fournit une traduction mathématique rigoureuse de l'idée intuitive de grandeur d'un ensemble³³ que l'on obtient par un procédé de décomposition et de passage à la limite. On trouve dans le chapitre *Théorie de la mesure et de l'intégration* de Bourbaki (1984) une description méthodique et concise de la construction d'une axiomatique de la mesure. On peut également se rapporter à propos du même sujet à l'article *Intégration et mesure* d'André Revuz (2004) dans Encyclopædia Universalis. Compte tenu de la richesse et la complexité de la théorie de la mesure, compte tenu de l'objet de notre travail, il ne peut être question ici d'en aborder les assez redoutables aspects théoriques. Le but de ce chapitre étant l'étude de quelques aspects de la notion d'aire, qui est précisément la mesure des surfaces, nous nous limitons à une esquisse sommaire des premiers développements de la théorie de la mesure. Notre intérêt est de rendre compte des difficultés liées à la mesure de l'aire d'une surface.

Le problème général de l'aire est celui du prolongement de la définition de l'aire des surfaces polyédrales aux surfaces les plus générales. Plus précisément, on cherche à attribuer à toute surface, du moins à tout élément d'une classe Q la plus large possible, un nombre qu'on appellera l'aire de la surface, et qui soit en accord avec la notion intuitive d'aire utilisée dans la géométrie élémentaire. En particulier, Q doit contenir la classe P des surfaces polyédrales.

²⁹ L'équidécomposabilité correspond au concept de G -équivalence pour un groupe G contenant les translations.

³⁰ C'est le troisième problème de Hilbert.

³¹ Le concept de mesure a été introduit par Borel en 1895.

³² Une mesure usuelle n'est pas nécessairement une mesure au sens mathématique. Exemple : la température.

³³ Grandeur au sens de contenu ou d'étendue.

Cela exige naturellement que toute définition de l'aire d'une surface de cette classe coïncide avec la définition classique de l'aire élémentaire d'une surface polyédrale.

L'idée la plus ambitieuse sous-jacente à la notion de mesure serait donc de chercher à élaborer un outil qui permettrait d'estimer la grandeur³⁴ de toutes les parties de l'espace E qui sera, au besoin, assimilé à \mathbb{R}^3 , et de construire une fonction vérifiant certaines propriétés. Plus précisément, on souhaite définir une fonction m qui, à toute partie A de E , associe un nombre réel positif $m(A)$ qui permet de mesurer la grandeur (en un sens à préciser) de cette partie. C'est bien le minimum d'imposer qu'une telle fonction possède les propriétés communes aux mesures usuelles, c'est-à-dire que la mesure d'un ensemble formé de deux parties disjointes soit égale à la somme des mesures de chacune des deux parties, la mesure d'une partie donnée ne change pas sous l'action d'un déplacement de cette partie³⁵ et la mesure d'un ensemble soit supérieure ou égale à celle de chacune de ses parties. Formellement, la fonction m doit satisfaire aux conditions suivantes :

Additivité : si A et B sont deux parties disjointes de E alors $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

*Croissance*³⁶ : si $A \subset B$ alors $m(A) \leq m(B)$.

Invariance par isométrie : pour toute isométrie σ et pour toute partie $A \subset E$:

$$m[\sigma(A)] = m(A)$$

II. 1.2 Mesure de Peano et de Jordan

Le problème des aires, mais aussi des longueurs et des volumes, se trouve justement avec la théorie des fonctions à l'origine des travaux sur la mesure et l'intégration. Selon Villeneuve (2009), le lien entre mesure et intégration est établi pour la première fois, mais indépendamment l'un de l'autre, par Peano (1858-1923) et Jordan (1838-1922). Dans un chapitre intitulé *Grandeurs géométriques* de son livre *Les applications géométriques du calcul infinitésimal* publié en 1887, Peano définit la mesure d'un ensemble dont voici une traduction proposée par Villeneuve:

³⁴ À entendre au sens naïf.

³⁵ L'aire d'un carré, par exemple, doit être inchangée quelle que soit sa position dans l'espace.

³⁶ La croissance de l'aire est une conséquence immédiate de son additivité.

Définition : Soit E un ensemble de points de \mathbb{R}^2 .

Alors l'ensemble E est P -mesurable si les deux aires suivantes sont égales :

1. L'aire intérieure est la borne supérieure des aires des polygones qui sont intérieurs à E .
2. L'aire extérieure est la borne inférieure des aires des polygones qui contiennent E dans leur intérieur.

Dans la même optique, Jordan propose dans son article *Remarques sur les intégrales définies* publié en 1892, l'énoncé suivant :

À un champ³⁷ E correspondent deux nombres déterminés E' et E'' qu'on peut appeler son étendue³⁸ intérieure et son étendue extérieure. Si ces deux nombres coïncident, nous dirons que E est mesurable et a pour étendue le nombre $E' = E''$.
(Jordan, 1892, p.70).

Plus précisément, pour carrer une surface plane bornée E , Jordan utilise un quadrillage du plan en carrés de côté r , désigne par S la somme des aires des carrés dont tous les points sont intérieurs à E et par $S + S'$ la somme des aires des carrés dont les points sont intérieurs à E ou qui contiennent un point de sa frontière. Jordan montre alors qu'en faisant varier cette décomposition en carrés de telle sorte que r tende vers zéro, les aires S et $S + S'$ tendent vers des limites fixes A et a ³⁹.

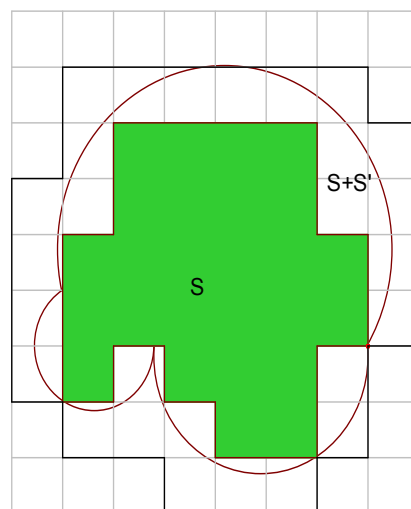


Fig. 7 : la mesure de Jordan

À l'issue de sa démonstration, Jordan énonce ce qui suit :

³⁷ Il faut entendre un segment, une surface plane bornée ou un solide de l'espace.

³⁸ Jordan précise que « cette étendue sera une longueur, une aire, un volume, etc. » (Jordan, 1892, p.76).

³⁹ Dans [Lebesgue 1904, p.37], l'auteur considère que l'existence de ces limites est évidente, car A et a sont des valeurs approchées des intégrales par défaut et par excès de la fonction caractéristique 1_E de E et dans une note de bas de page, il précise que de la Vallée-Poussin définit les étendues intérieure et extérieure de E à l'aide de la fonction 1_E .

Nous appellerons A l'aire intérieure de E , a son aire extérieure. Si S' a pour limite zéro, nous dirons que E est quarrable, et a pour aire la quantité $A = a$. (ibid. p.78).

Il convient ici de faire deux remarques à propos de l'énoncé de Jordan :

1. Dans ses *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* de 1904 données au collège de France, Henri Lebesgue, à la page 38, reformule et précise l'énoncé de Jordan comme suit : « *pour qu'un ensemble soit mesurable J , il faut et il suffit que sa frontière forme un groupe intégrable⁴⁰* ».
2. Le résultat n'est pas sans rappeler les intégrales par défaut et par excès de Darboux, et à travers elles la méthode archimédienne d'inscription et de circonscription. En effet, si E est la partie du plan délimitée par la courbe d'une fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, les étendues intérieure et extérieure de E sont définies comme les bornes supérieure et inférieure des aires des polygones inscrits et circonscrits et constituent donc l'équivalent géométrique des sommes de Darboux inférieure et supérieure de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$. Par suite, les étendues en question peuvent être identifiées aux intégrales inférieure et supérieure de Darboux :

$$\int_a^b f(x)dx = m_i(E) = m_e(E) = \int_a^b f(x)dx.$$

Dès lors, une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit intégrable au sens de Riemann est que E soit mesurable au sens de Jordan. Ainsi l'énoncé de la première remarque est rigoureusement justifié et le lien entre mesure et intégration est clairement établi.

Sans doute l'approche géométrique en œuvre chez Peano comme chez Jordan n'est pas nouvelle. L'idée d'approcher une surface plane par des surfaces polygonales inscrites et circonscrites était déjà largement diffusée et utilisée. Toutefois, les travaux de Peano et de Jordan marquent une étape décisive dans l'émergence de la théorie de la mesure. En introduisant les notions de mesures intérieure et extérieure, ils ont dans le même temps franchi un pas important dans la généralisation de la procédure de découpage à des surfaces géométriques planes bornées et réussi à définir rigoureusement la mesure de l'aire de ces surfaces. Chez Jordan, par exemple, cet effort de recherche de la plus grande généralité possible apparaît à deux reprises et à deux titres. La première fois dans la définition des

⁴⁰ Aujourd'hui, nous dirons que sa frontière est un ensemble de mesure nulle (au sens de Lebesgue).

ensembles J -mesurables⁴¹; la seconde fois, dans la démonstration des propriétés de croissance et d'additivité de sa mesure :

Croissance : Si E est mesurable et $E' \subset E$ alors $A_{ext}(E') \leq A_{int}(E)$.

Additivité : Dans [Jordan 1892, p. 78], on lit :

Supposons E formé par la réunion de plusieurs ensembles partiels E_1, E_2, \dots , et considérons une décomposition quelconque du plan en carrés. Soient respectivement S, S_1, S_2, \dots , les sommes des carrés intérieurs à E, E_1, E_2, \dots , S', S'_1, S'_2, \dots celles des carrés qui rencontrent leurs frontières. Tout carré intérieur à l'un des ensembles E_1, E_2, \dots , l'est à E , et, d'autre part, tout carré non extérieur à E est non extérieur à l'un au moins des ensembles E_1, E_2, \dots ; on aura donc :

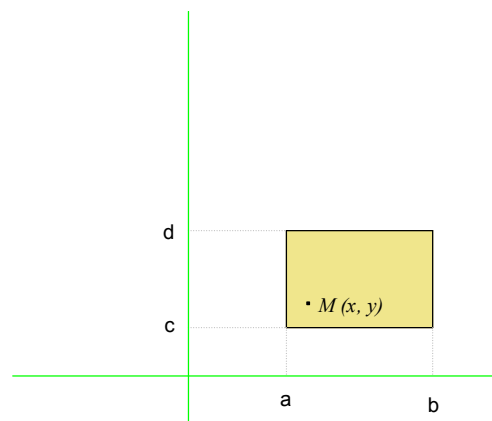
$$S \geq S_1 + S_2 + \dots, \quad S + S' < S_1 + S'_1 + S_2 + S'_2 + \dots;$$

et à la limite : $A \geq A_1 + A_2 + \dots, \quad a < a_1 + a_2 + \dots$;

A, A_1, A_2, \dots et a, a_1, a_2, \dots représentant les aires intérieures et extérieures des ensembles E, E_1, E_2, \dots . Ces inégalités se changent, d'ailleurs, en égalités, si les ensembles sont quarrables.

La propriété d'additivité en question ici est celle de l'additivité finie. Par ailleurs, il convient de souligner que Jordan établit la preuve que sa mesure est croissante et fait remarquer que la procédure utilisée dans le cas d'une surface plane s'applique sans difficulté à ce qui doit être, dans le langage actuel, les parties bornées de \mathbb{R}^n . Cependant, la mesure de Jordan va vite s'avérer insuffisante dans bien de cas. Son défaut est son instabilité par passage aux réunions dénombrables : une réunion dénombrable d'ensembles J -mesurables n'est pas nécessairement J -mesurable.

Considérons par exemple dans \mathbb{R}^2 , l'ensemble E des points $M(x, y)$ contenus dans le rectangle $P = [a, b] \times [c, d]$ et à coordonnées rationnelles. Il est immédiat que la mesure extérieure de E est égale à celle de P : $J_{ext}(E) = (b - a) \times (d - c)$. Et comme les nombres rationnels sont dénombrables, il en est de même de E



⁴¹ Ensembles mesurables au sens de Jordan.

et l'on a donc $J_{int}(E) = 0$. Ainsi l'ensemble E n'est pas J -mesurable.

La mesure de Jordan, comme celle de Peano, vont inspirer Lebesgue dans la construction de sa mesure via l'idée de mesure extérieure et de mesure intérieure. Nous reviendrons sur ce point un peu plus loin.

II.1.3. La mesure de Borel

Contrairement à Peano et Jordan, Borel (1871-1956) n'est pas motivé par des considérations d'aire et de volume, mais plutôt par la théorie des fonctions. Il « *part d'une question de la théorie des fonctions et il est conduit à comparer un ensemble E à un ensemble d'intervalle recouvrant E* » (Lebesgue, 1918, p. 226). Plus concrètement, Borel cherche à construire une mesure totalement additive sur le segment $[0, 1]$ qui doit jouer un rôle très important dans la théorie des fonctions. Partant de la mesure d'un segment $[a, b]$ qui est sa longueur, Borel attache à toute partie A , qu'il qualifie de *bien définie*, une mesure $m(A)$ grâce aux deux opérations de passage aux réunions dénombrables et aux complémentaires. Les parties *bien définies* aujourd'hui appelées *boréliens* sont alors les parties du segment $[0, 1]$ que l'on peut former à partir des segments $I_k \subset [0, 1]$ par une itération éventuellement infinie des deux opérations ci-dessus. L'ensemble \mathcal{B} de ces parties, alors stable par ces opérations ainsi que par intersection, est ce que nous appelons la *tribu borélienne*. Elle est engendrée par les segments de $[0, 1]$. Dès lors, connaissant la mesure des segments, il devient possible de définir la mesure de tous les boréliens du segment $[0, 1]$. En effet, toute partie $A \subset [0, 1]$ mesurable au sens de Borel ($A \in \mathcal{B}$) est une réunion dénombrable de boréliens B_n ($n \geq 1$) deux à deux disjoints dont on sait déterminer la mesure $m(B_n)$, puisque chaque B_n est lui-même réunion dénombrable de segments $I_{k,n} \subset [0, 1]$, ($k \geq 1$), deux à deux disjoints. Ce procédé de construction des boréliens n'est pas simple⁴² et Borel n'a pas véritablement établi que la mesure d'un borélien ne dépend pas de la façon dont on le construit⁴³. C'est précisément, ce qui a manqué à Borel pour solutionner en toute rigueur le problème de l'existence et de l'unicité de sa mesure. Cette question sera élucidée par Lebesgue en 1901 lorsqu'il apporte une preuve rigoureuse du fait que la mesure d'un borélien est indépendante de sa décomposition.

⁴² Aujourd'hui, nous savons que, dans un espace topologique, tout borélien, pour compliqué qu'il soit, peut être approché au sens de la mesure, de l'intérieur par des ensembles « topologiquement petits » (des compacts), et de l'extérieur par des ensembles « topologiquement gros » (des ouverts).

⁴³ En fait un borélien peut s'obtenir de plusieurs façons.

II.1. 4. La mesure de Lebesgue

Les motivations qui président à la construction de la mesure de Lebesgue sont les longueurs, les aires et les intégrales. Dans son article intitulé *Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration*, Lebesgue précise qu'il a été conduit à généraliser la notion d'intégrale pour la solution d'un problème de *détermination de l'aire de certaines surfaces applicables sur le plan*. Alors, ayant en vue un certain nombre de propriétés que doit avoir l'intégrale à définir, d'une part, et l'*identité*⁴⁴ entre la mesure d'un ensemble et l'intégrale de Riemann de sa fonction caractéristique, d'autre part, il a été amené à passer de l'intégration à la mesure via la fonction considérée. Il importe de bien insister ici sur l'intérêt de cette identité : la mesure de Jordan et de Peano, doit avoir les mêmes défauts que l'intégrale de Riemann. Dès lors, pour pouvoir intégrer une classe de fonctions plus large que celle des fonctions intégrables au sens de Riemann, Lebesgue a besoin « *d'une définition déterminant la mesure d'une classe plus étendue d'ensembles* » (Lebesgue 1918, p.222).

Partant de la définition *descriptive* de Borel⁴⁵, Lebesgue observe qu'elle convient à la mesure de Jordan qu'il peut alors étendre de façon naturelle à une infinité dénombrable d'ensembles. Plus précisément, il emprunte à Jordan⁴⁶ la notion d'étendue extérieure et apporte une modification dans la définition de l'étendue intérieure. Considérons par exemple une partie E de l'intervalle $[0, 1]$. Lebesgue procède comme Jordan en enfermant E dans la réunion d'une infinité dénombrable d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres à laquelle il associe la somme des longueurs des intervalles utilisés. La borne inférieure de ces sommes de tous les recouvrements possibles de E est la mesure extérieure de E : $m_e(E)$. En opérant de même sur le complémentaire de E , il définit la mesure extérieure de E^c : $m_e(E^c)$. Lebesgue appelle alors mesure intérieure de E la différence $e_i(E) = 1 - m_e(E^c)$. Si la mesure intérieure et la mesure extérieure sont égales, l'ensemble E est dit mesurable (au sens de Lebesgue) et sa mesure de Lebesgue est $m(E) = m_i(E) = m_e(E)$. L'ensemble \mathcal{L} des parties mesurables au

⁴⁴ Le terme est de Lebesgue (Lebesgue 1918, p.247).

⁴⁵ 1. Pour toute partie A mesurable (au sens de Borel), $m(A) \geq 0$. 2. Deux parties mesurables et égales ont même mesure. 3. Si $(E_n)_{n \geq 1}$ est une famille dénombrable d'ensembles mesurables deux à deux disjoints alors :

$$m\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} m(A_n)$$

⁴⁶ La mesure de Jordan conduit à l'intégrale de Riemann, en ce sens que si un ensemble E est mesurable selon le procédé de Jordan alors sa fonction caractéristique est intégrable au sens de Riemann et son intégrale est $m(E)$.

sens de Lebesgue est une tribu⁴⁷ qui contient la tribu borélienne \mathcal{B} et la mesure de Lebesgue⁴⁸ coïncide avec celle de Borel sur cette dernière tribu.

II. 2. Comment mesurer l'aire d'une surface plane ?

Dans la deuxième édition de son *Cours d'Analyse*, Jordan établit en toute rigueur qu'une courbe fermée et simple sépare le plan en deux régions. La région intérieure limitée par la courbe est ce que l'on appelle un domaine de Jordan⁴⁹. Au sens de ce dernier, les surfaces planes mesurables sont exactement les domaines de Jordan quarrables ainsi que les réunions dénombrables de tels domaines. Sur les domaines plans quarrables, qui sont des boréliens pour lesquels nous avons une notion intuitive de l'aire, la mesure de Lebesgue coïncide avec celle de Jordan. Fixons cette mesure⁵⁰ en lui imposant de prendre la valeur 1 sur le carré $C = [0, 1] \times [0, 1]$ ce qui est légitime puisqu'on ne peut avoir $m(C) = 0$ ⁵¹. Connaissant l'aire de C , on peut calculer l'aire d'un rectangle ayant des côtés rationnels et donc celle d'un rectangle ayant des côtés quelconques puisqu'il est toujours possible de le coincer entre deux rectangles ayant des côtés rationnels et dont la différence des aires est aussi petite que l'on veut⁵². Pour plus de détails sur le sujet, nous renvoyons au livre de Marc Rogalski (2001) *Carrefour entre Analyse Algèbre Géométrie*. L'aire d'un polygone s'obtient alors en le décomposant en un nombre fini de triangles n'empiétant pas les uns sur les autres. Cette aire a bien un sens. En effet, Hadamard montre en 1928 dans *leçons de géométrie élémentaire*⁵³ que l'aire d'un polygone ne dépend pas de sa décomposition en triangles, prouvant ainsi l'existence et l'unicité de l'aire d'un polygone. Il montre d'abord que, ABC étant un triangle donné, pour tout point O du plan: $\text{aire}(ABC) = \pm \text{aire}(OAB) \pm \text{aire}(OBC) \pm \text{aire}(OCA)$, où le signe est + si le point O et le triangle ABC sont du même côté par rapport au côté utilisé, et – dans le cas contraire.

⁴⁷ \mathcal{L} contient les segments et elle est stable par réunion dénombrable, par passage au complémentaire et donc par intersection dénombrable.

⁴⁸ Nous savons maintenant que, dans un cadre euclidien, la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n est la mesure de référence naturelle, en ce sens qu'elle correspond aux notions habituelles de longueur ($n = 1$), d'aire ($n = 2$) et de volume ($n = 3$). La preuve de son existence et sa construction n'est cependant ni évidente ni simple.

⁴⁹ Nous rappelons qu'un tel domaine est quarrable si, et seulement si, sa frontière est d'étendue extérieure nulle.

⁵⁰ Si m est une mesure de Jordan alors pour tout réel $\alpha > 0$, αm est aussi une mesure de Jordan.

⁵¹ Sinon, toute surface compacte E pouvant être recouverte par des copies de C en nombre fini, on aurait $m(E) = 0$

⁵² Pour une démonstration rigoureuse et détaillée de ce résultat, nous renvoyons à l'article *Aires et Volumes : découpage et recollement* de Daniel Perrin.

⁵³ Voir l'annexe de la dixième édition de ces leçons.

En fait, il y a deux cas possibles selon que le point O est intérieur⁵⁴ ou extérieur au domaine fermé délimité par le triangle ABC . Dans le premier cas, le point O et le triangle ABC sont toujours du même côté par rapport au côté utilisé et par suite l'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des trois triangles OAB, OBC et OCA . Dans le second cas, le point O peut être du même côté que le triangle ABC par rapport à un côté seulement ou par rapport à deux côtés. Ce cas peut également s'envisager de façon équivalente suivant que le triangle ABC n'est contenu dans aucun des triangles OAB, OBC et OCA ou qu'il est contenu dans l'un d'entre eux. Un calcul simple permet d'établir immédiatement le résultat de Hadamard. Ce dernier étend ensuite le résultat précédent au cas d'un polygone convexe. L'aire d'un polygone convexe est ainsi indépendante de la décomposition de la surface polygonale en triangles⁵⁵.

Le même résultat⁵⁶ a été également obtenu par Lebesgue qui établit que si $A_1A_2 \dots A_n$ est un polygone convexe et O un point arbitraire du plan du polygone alors :

$aire(A_1A_2 \dots A_n) = \frac{1}{2} [\pm A_1A_2 \times d(O; (A_1A_2)) \pm \dots \pm A_nA_1 \times d(O; (A_nA_1))]$, où le signe est $+$ si le point O et le polygone sont d'un même côté de la droite utilisée, et $-$ dans le cas contraire. Connaissant l'aire d'un polygone on obtient alors l'aire d'une surface non polygonale par encadrement et passage à la limite.

Perrin-Glorian (1990) souligne que le résultat précédent reste vrai dans le cas d'un polygone qui n'est pas nécessairement convexe. Le signe affecté à l'aire de chaque triangle OA_pA_{p+1} est déterminé par les positions relatives du point O et du polygone au voisinage du segment $[A_pA_{p+1}]$ ce qui, à notre sens, demande à être précisé.

En fait, il existe une réponse qui évite ces considérations de convexité du polygone. On l'obtient en appliquant aux polygones la notion de bivecteur introduite par Peano dans son *Calcolo geometrico*. Nous préciserons dans la suite la notion de bivecteur et nous montrerons comment elle permet de répondre de manière très simple à la question de l'indépendance de l'aire d'un polygone plan de sa décomposition en triangles.

⁵⁴ Il faut convenir que si O est un point du triangle alors l'un au moins des triangles dont O est un sommet est aplati et son aire est nulle.

⁵⁵ La justification est citée dans Perrin-Glorian (1990, p.9).

⁵⁶ il suffit de voir que : $\frac{1}{2}A_pA_{p+1} \times d(O; (A_pA_{p+1})) = aire(OA_pA_{p+1})$.

L'aire d'un polygone étant ainsi définie, on obtient alors l'aire d'une surface plane non polygonale comme *la plus petite des limites des aires des surfaces polygonales tendant vers la surface visée*. Cette définition n'est pas autre chose, on va le voir, que la particularisation de la définition de Lebesgue de l'aire d'une surface gauche. Mais avant d'aborder le problème de la définition de l'aire d'une surface gauche, il nous paraît nécessaire d'en préciser l'origine ainsi que les difficultés inhérentes. Pour cela, nous aurons besoin de quelques développements sur le problème de rectification des courbes. Comme ce problème n'est pas l'objet principal de notre travail, nous nous efforcerons d'en dire le minimum nécessaire pour la bonne compréhension de la nature des difficultés que soulève le problème de quadrature, et en particulier celui de la caractérisation de l'aire.

II. 3. Comment mesurer la longueur d'une courbe ?

Dans les développements qui vont suivre, nous nous appuyons pour l'essentiel sur trois références : la Note de Maurice Fréchet intitulée *Sur une définition intrinsèque de l'aire d'une surface courbe comme limite d'aires polyédrales inscrites*, l'article de Sébastien Gandon intitulé *Le problème de la définition de l'aire d'une surface gauche : Peano et Lebesgue* et la monographie de Stanislaw Saks intitulée *Théorie de l'intégrale*.

La notion de longueur d'une courbe est, avec celle de l'aire d'une surface, l'une des mesures principales des figures géométriques et peut sembler intuitivement simple. Mais, la situation véritable n'est pas du tout celle-là. Pour engager l'examen de cette situation, nous partons d'une remarque de Maurice Fréchet. Dans sa Note cité plus haut, Maurice Fréchet précise que :

Une courbe continue \widehat{AB} n'est pas seulement un lieu de points, mais aussi la suite ordonnée de points M_t obtenue par une transformation continue d'un segment J ($a \leq t \leq b$). (Fréchet 1939, p.285).

Cette remarque fournit à la fois la courbe et une manière de la décrire par un point, ou plus précisément la courbe géométrique et un paramétrage de cette courbe⁵⁷.

⁵⁷ Une courbe géométrique est une classe de courbes paramétrées : deux courbes paramétrées (I, f) et (J, g) à valeurs dans un espace euclidien de dimension n sont équivalentes s'il existe un difféomorphisme φ de I sur J tel que $f = g \circ \varphi$.

Dans l'approche géométrique, la stratégie utilisée consiste à approcher aussi précisément que souhaité la longueur de l'arc \widehat{AB} d'une courbe par celle d'une ligne polygonale. La mise en œuvre de cette stratégie consiste à placer dans l'ordre une suite de points A_1, A_2, \dots, A_n , avec $A_1 = A$ et $A_n = B$, sur l'arc \widehat{AB} et de joindre ces points par des segments pour obtenir une ligne polygone inscrite dans l'arc \widehat{AB} . En augmentant de plus en plus le nombre des points A_i , on en arrive à rapprocher la ligne polygonale $A_1A_2 \dots A_n$ de plus en plus précisément de l'arc \widehat{AB} . On définit alors la longueur de l'arc \widehat{AB} comme la borne supérieure des longueurs de toutes les lignes polygonales possibles $A_1A_2 \dots A_n$ inscrites dans l'arc \widehat{AB} . Dans une perspective strictement géométrique, la notion de longueur se définit alors comme suit : *La longueur de l'arc \widehat{AB} d'une courbe est la borne supérieure de l'ensemble des longueurs des lignes polygonales inscrites dans l'arc \widehat{AB} .* Il importe de faire remarquer ici que cette définition n'impose pas à l'arc \widehat{AB} d'être lisse ni à la longueur d'être finie ce qui lui donne une portée théorique particulièrement importante. En revanche, sa mise en fonctionnement dans le calcul effectif de longueurs est sévèrement limitée.

L'autre approche évoquée par Fréchet, s'inscrit dans une perspective plutôt calculatoire, ou si l'on préfère analytique, en ce sens qu'elle fournit un procédé de calcul de la longueur de l'arc \widehat{AB} à partir d'un paramétrage de cet arc. Ici encore, on fait appel à la stratégie d'inscription. Mais au lieu de partir de l'arc \widehat{AB} pour former un polygone $A_0A_1 \dots A_n$ inscrit, on part d'un intervalle $I = [a, b]$ que l'on divise à l'aide d'une suite de points $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ auxquels on fait correspondre les points $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$ de l'arc \widehat{AB} . Ce dernier s'interprète alors comme l'image de l'intervalle $I = [a, b]$ par une fonction continue f à valeurs dans un espace euclidien.

Insistons particulièrement sur le fait que représenter paramétriquement un arc de courbe n'est souvent ni simple ni évident. Pour s'en rendre compte, il suffit d'assimiler l'arc \widehat{AB} à la trajectoire d'un *point mobile* et interpréter le paramétrage (I, f) comme une manière dont ce point parcourt l'arc \widehat{AB} . On peut évidemment envisager une infinité de manières de parcourir cet arc : rapidement, lentement, avec une vitesse variable, de A vers B ou dans le sens contraire, avec ou sans arrêt, avec ou sans changement du sens de parcours, etc.. Il ne nous semble pas difficile d'imaginer les problèmes que pourrait soulever la stratégie de paramétrisation. Il s'agit, entre autres, de savoir trouver une paramétrisation de l'arc géométrique \widehat{AB} , savoir résoudre le problème des points singuliers et examiner le rapport de la longueur de l'arc géométrique au paramétrage choisi.

Le premier problème peut se révéler extrêmement difficile et complexe⁵⁸. Pour se donner une idée des problèmes particulièrement vertigineux que l'on peut rencontrer, on peut s'interroger sur la manière de paramétrer la trajectoire d'une particule suivant un mouvement brownien ou celle d'une boule de billard à l'issue d'un grand nombre de rebonds sachant qu'à chaque fois qu'elle heurte la bande, elle rebondit de façon aléatoire.

Pour comprendre le problème lié aux points singuliers, il faut distinguer entre les singularités intrinsèques à la courbe géométrique et celles qui ne le sont pas⁵⁹. Pour donner des exemples, les notions de tangente et de point de rebroussement sont intrinsèques, indépendantes du paramétrage choisi. En revanche, les notions de point stationnaire et de point multiple ne sont pas liées à la courbe géométrique seulement, elles peuvent dépendre du paramétrage choisi. En effet, si nous reprenons le modèle de la trajectoire d'un point mobile, la présence d'un point stationnaire, par exemple, renvoie à deux raisons possibles :

- Le point mobile s'arrête sur sa trajectoire, mais d'autres paramétrages n'ont pas ce défaut. Ici la présence du point stationnaire n'est due qu'au paramétrage choisi. On rencontre cette situation quand le point mobile fait demi-tour sur la courbe, ou s'arrête et repart.
- La courbe présente une particularité géométrique, qui oblige le point à toujours s'arrêter pour faire demi-tour et l'on a un point de rebroussement.

Enfin, s'assurer que le paramétrage de l'arc \widehat{AB} est défini de telle sorte que la courbe soit parcourue une seule fois⁶⁰. Il ne peut être question par exemple de choisir un paramétrage qui impose de parcourir deux fois une partie ou la totalité de l'arc. Faute de quoi, la longueur parcourue serait différente de la longueur de l'arc \widehat{AB} qui est une grandeur intrinsèque, indépendante du paramétrage choisi.

Dans la pratique, pour échapper à ces inconvénients, on se limite en général, quitte à découper l'arc \widehat{AB} ⁶¹, à des arcs paramétrés simples, lisses, réguliers et injectifs. Ces conditions garantissent à la fois que, au moins localement, deux valeurs différentes du paramètre correspondent à deux points distincts de l'arc considéré et l'absence de points singuliers.

⁵⁸ La définition rigoureuse d'une courbe du plan ou de l'espace passe par la notion mathématique plus complexe de « variété » que nous n'aborderons pas ici.

⁵⁹ Celles qui sont liées, par exemple, au paramétrage de la courbe.

⁶⁰ Pour s'en assurer, on impose au paramétrage d'être injectif.

⁶¹ Des singularités pourront être considérées en étudiant des chainages d'arcs paramétrés reliés par des points anguleux.

Ceci convenu, on démontre que si la plus grande des différences $t_{i+1} - t_i$ tend vers 0, la longueur du polygone P ayant pour sommets $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$ tend vers l'intégrale

$$\text{classique : } L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

La longueur ainsi définie a bien un sens. En effet, dans les termes mêmes de Fréchet :

Ce raisonnement ne prouve pas que cette limite soit indépendante de la représentation paramétrique, qu'elle représente une quantité bien définie par la suite ordonnée de points constituant \widehat{AB} . Mais quand $\delta \rightarrow 0$, $\Omega[P]$ ⁶² tend aussi vers zéro et d'après le théorème de SCHEEFFER, L est égal à la borne supérieure des longueurs des polygones inscrits. Donc cette intégrale a une signification géométrique intrinsèque, et, grâce à ce complément indispensable, on a le droit de l'appeler longueur de \widehat{AB} . (Fréchet 1939, p. 287).

Le cas de la courbe de Von Koch est un exemple de courbe continue qui n'est dérivable en aucun point. Ce cas est à l'évidence hors de portée de l'approche analytique alors qu'il est facile de montrer par la géométrie élémentaire que, bien que bornée et sans point asymptote, elle est de longueur infinie. Cet exemple, et bien d'autres, met en évidence le décalage entre l'approche géométrique et l'approche analytique et pose le problème de la caractérisation des courbes rectifiables. La solution de ce problème est due à Jordan et s'énonce comme il suit⁶³ : « Pour qu'une courbe C définie dans l'intervalle $I = [a, b]$ par les fonctions $x = x(t)$ et $y = y(t)$ soit rectifiable dans cet intervalle, il faut et il suffit que ces deux fonctions soient à variation bornée dans I ». Nous allons voir maintenant que le problème de la définition de l'aire d'une surface gauche ainsi que celui de la caractérisation des surfaces quarrables se présentent de façon beaucoup plus compliquée que ceux de la définition de la longueur d'une courbe et de la caractérisation des courbes rectifiables.

II. 4. Le problème de la définition de l'aire d'une surface gauche

Dans [Fréchet 1939, p.289], l'auteur expose les diverses définitions de l'aire et résume assez bien le problème de la définition d'une surface courbe :

⁶² $\delta = \max_i(t_{i+1} - t_i)$ et $\Omega[P] = \max_i A_i A_{i+1} = \max_i |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$.

⁶³ In [Saks 1933, p. 58].

Une généralisation naturelle⁶⁴ de la définition de la longueur consisterait à définir l'aire d'une surface s comme la borne supérieure des aires des polyèdres inscrits dans s ou comme la limite d'une suite de polyèdres inscrits tendant vers s .

Or il résulte d'une remarque, attribuée généralement à H. SCHWARZ, mais présentée à peu près en même temps par PEANO, que, même pour des surfaces aussi simples qu'un cylindre de révolution, aucune de ces définitions ne peut être retenue. [...].

On a donc dû donner d'autres définitions de l'aire. Il y en a un grand nombre. L'une d'elle, la plus connue, due à M. LEBESGUE, définit l'aire de s comme la plus petite des limites des aires des polyèdres tendant vers s . (Fréchet 1939, p.289).

Pour bien saisir le fond du débat sur le problème de la définition de l'aire et comprendre sa véritable nature, il nous semble qu'il est d'abord utile de savoir à quoi renvoie la remarque de Schwarz. Ensuite, et c'est le point le plus considérable, assimiler ce que l'on peut entendre par une *bonne définition* de l'aire. L'exigence formelle imposée à une telle définition est qu'elle, comme le souligne Fréchet, se présente comme une *généralisation naturelle de la définition de la longueur*. L'une des questions posée aux mathématiciens de l'époque, on l'a dit, est celle de l'analogie entre la définition de la longueur d'une courbe et celle de l'aire d'une surface. Cette question a été d'ailleurs posée par Jordan à Lebesgue et rapportée par ce dernier dans *Quelques remarques sur la définition de l'aire d'une surface* :

Je ne suis pas satisfait par ce que vous avez dit de l'aire des surfaces. Vous dites que vous édifiez, pour la mesure des aires des surfaces, une théorie entièrement analogue à celle de la mesure des longueurs des courbes mais, pourtant, vous laissez sans réponses des problèmes essentiels alors que ces problèmes sont résolus dans le cas des courbes. Une courbe $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ étant donnée, nous savons quelle suite d'opérations il nous faut effectuer sur f , g , h pour reconnaître si la courbe est rectifiable et pour calculer sa longueur finie ou infinie ; vous ne dites rien du problème analogue pour les surfaces données par

⁶⁴ Il est difficile de dire dans quel sens une généralisation peut être considérée comme étant *naturelle* ou *artificielle*. Mais à considérer le positionnement de Fréchet, il y a lieu de penser que la naturalité dont il est question ici renvoie au caractère strictement géométrique de la définition de l'aire. En effet, dans une remarque à propos de la définition de W. H. Young, il souligne qu'« *un concept géométrique comme l'est la notion d'aire doit pouvoir se définir de façon géométrique.*» (Gandon 2008, p.15). Ne peut-on pas cependant considérer que la définition de l'aire d'une nappe paramétrée peut être vue comme une généralisation naturelle de la longueur d'un arc de courbe paramétré ?

trois équations $x = f(u, v)$; $y = g(u, v)$; $z = h(u, v)$, de là résulte aussi tandis que l'on sait construire les formes les plus générales des fonctions $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ relatives aux courbes rectifiables, vous ne nous apprenez pas à former les fonctions $f(u, v)$, $g(u, v)$, $h(u, v)$. (Lebesgue 1925, p.163-164).

Le problème de Jordan revient précisément à chercher une caractérisation des fonctions f , g , h pour lesquelles la surface S est quarrable. Ce problème s'inscrit dans une question plus générale, celle du problème du prolongement des surfaces polyédrale aux surfaces les plus générales qui peut se formuler comme suit : y a-t-il une caractérisation simple des surfaces d'aire finie ?

L'étude de la question de l'analogie entre rectification et quadrature exige que l'on se penche de près sur différentes définitions de l'aire d'une surface qui ont été proposées. Dans une première étape nous rappellerons la définition proposée par Serret, nous commenterons son défaut et nous développerons le contre-exemple construit par H. Schwarz à son encontre. Dans une seconde étape nous présenterons l'approche de Peano et nous montrerons qu'en la particularisant au cas d'une surface plane, on retrouve exactement le résultat démontré par Hadamard et Lebesgue cité plus haut dans le paragraphe *comment mesurer les surfaces planes* ? Nous exposerons, dans une troisième et dernière étape, la définition de Lebesgue que nous ferons suivre d'une étude comparative avec celle de Peano. Il convient de souligner ici que nous nous sommes beaucoup inspirés du travail de Gandon (2008) tout en tâchant de consulter ses références, d'approfondir certains points et d'enrichir ses analyses par quelques commentaires et démonstrations. C'est le cas, entre autres, du contre-exemple de Schwarz.

II. 4.1. La définition de Serret

Dans son *Cours de calcul différentiel et intégral*, Joseph Alfred Serret (1819-1885) définit l'aire d'une surface gauche comme suit :

Soit une portion de surface courbe terminée par un contour C ; nous nommerons aire de cette surface la limite S vers laquelle tend l'aire d'une surface polyédrale inscrite formée de faces triangulaires et terminée par un contour polygonal Γ ayant pour limite le contour C . (Serret 1886, p.296).

Pour donner sens à cette définition, Serret précise qu'il faut démontrer que la limite S existe et qu'elle est indépendante de la loi suivant laquelle décroissent les faces de la surface polyédrale inscrite. La démarche de Serret semble répondre aux exigences dominantes à

l'époque : une définition intrinsèquement géométrique qui généralise naturellement celle de la longueur d'une courbe.

Pour justifier sa définition, Serret commence par rapporter la surface à un système de trois axes rectangulaires de sorte que, en tout point M situé à l'intérieur ou sur le contour C , le plan xy ne soit pas perpendiculaire au plan tangent T_M mené à la surface en M ⁶⁵. Ici, Serret fait remarquer que ce choix est toujours possible quitte

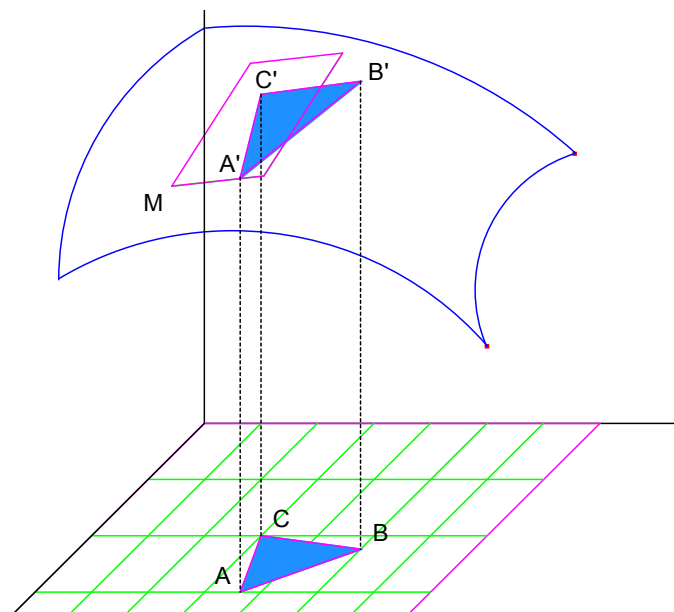


Fig.8 : l'aire de serret

à décomposer la surface considérée en plusieurs parties et d'utiliser la propriété d'additivité des aires. Ceci convenu, il appelle C' la projection de C sur le plan xy , inscrit dans C' un polygone Γ' qu'il décompose arbitrairement en éléments triangulaires ABC tous de côtés infiniment petits. Les parallèles à l'axe des z menées de A, B, C rencontrent la surface respectivement en A', B', C' qui déterminent l'une des faces d'une surface polyédrale inscrite. En désignant par θ l'angle que forme le plan du triangle $A'B'C'$ avec le plan xy , α l'aire du triangle ABC et α' celle du triangle $A'B'C'$, Serret affirme, sans l'expliquer, que $\alpha' = \frac{\alpha}{\cos\theta}$, et par là que l'aire totale de la surface polyédrale inscrite est $P = \sum \frac{\alpha}{\cos\theta}$. Il enchaîne ensuite par une seconde affirmation : si l'on nomme ζ l'angle que forme, avec le plan xy , le plan tangent menée à la surface par l'un des sommets du triangle inscrit dont l'aire est α' , il est évident que l'on aura $\frac{\alpha}{\cos\theta} = \frac{\alpha}{\cos\zeta} (1 + \varepsilon)$, où ε désigne un infiniment petit.

Pour comprendre ce dernier résultat, il suffit de voir qu'il conduit à l'égalité $\cos\theta = \frac{\cos\zeta}{1+\varepsilon}$ et donc, à la limite, on obtient $\theta = \zeta$ ce qui exprime que lorsque le diamètre du triangle $A'B'C'$ tend vers zéro, le plan de ce triangle tend vers le plan tangent $T_{A'}$. Mais ce résultat n'est pas toujours vrai. La situation est que si les faces du polyèdre inscrit approchent la surface visée

⁶⁵ Si l'on note Σ et Σ' les surfaces fermées de bords respectifs C et C' , le choix du plan xy est fait de manière que les deux surfaces correspondent point à point de façon biunivoque et continue.

en position, elles ne l'approchent pas toujours en direction. C'est précisément cette remarque qui fonde le contre-exemple de Schwarz que nous développerons dans la section suivante. L'erreur passée, Serret écrit $P = \sum \frac{\alpha}{\cos\zeta} + \sum \varepsilon \frac{\alpha}{\cos\zeta}$ et remarque que, compte tenu du fait que l'ordonnée z de la surface est une fonction déterminée de x et y (i.e : $z = f(x, y)$), $\cos\zeta$ est aussi une fonction des deux variables x et y (i.e : $\cos\zeta = \varphi(x, y)$). Notant V le volume limité par la surface définie par $Z = \frac{1}{\cos\zeta}$ et par le plan xy dans le cylindre ayant pour base C' et parallèle à l'axe des z , Serret écrit $V = \lim \sum Z\alpha = \lim \sum \frac{\alpha}{\cos\zeta}$, en déduit que $\lim \sum \varepsilon \frac{\alpha}{\cos\zeta} = 0$ et conclut que $S = \lim P = V$. Il souligne ensuite qu'en raison de l'arbitraire sur la décomposition de la surface ayant pour bord le contour C' , sa définition de l'aire est indépendante de la décomposition de cette surface et rajoute, en le justifiant, que le résultat $S = \lim \sum \frac{\alpha}{\cos\zeta}$ « subsiste lors même que le plan tangent de la surface proposée serait, en quelques points du contour C , perpendiculaire au plan xy . » (Serret 1886, p.299).

Dans le cas où la surface est définie par une équation du type $z = f(x, y)$, Serret part de la relation $dz = p dx + q dy$ ⁶⁶, où p et q sont des fonctions données de x et y , pour aboutir à l'égalité $\frac{1}{\cos\zeta} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ et, de là, à la formule $S = \int_{x_0}^X dx \int_{y_0}^Y \sqrt{1 + p^2 + q^2} dy$ ⁶⁷ et remarque que l'on peut aussi écrire $S = \int_{y_0}^Y dy \int_{x_0}^X \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx$.

II.4.2. Le contre-exemple de Schwarz

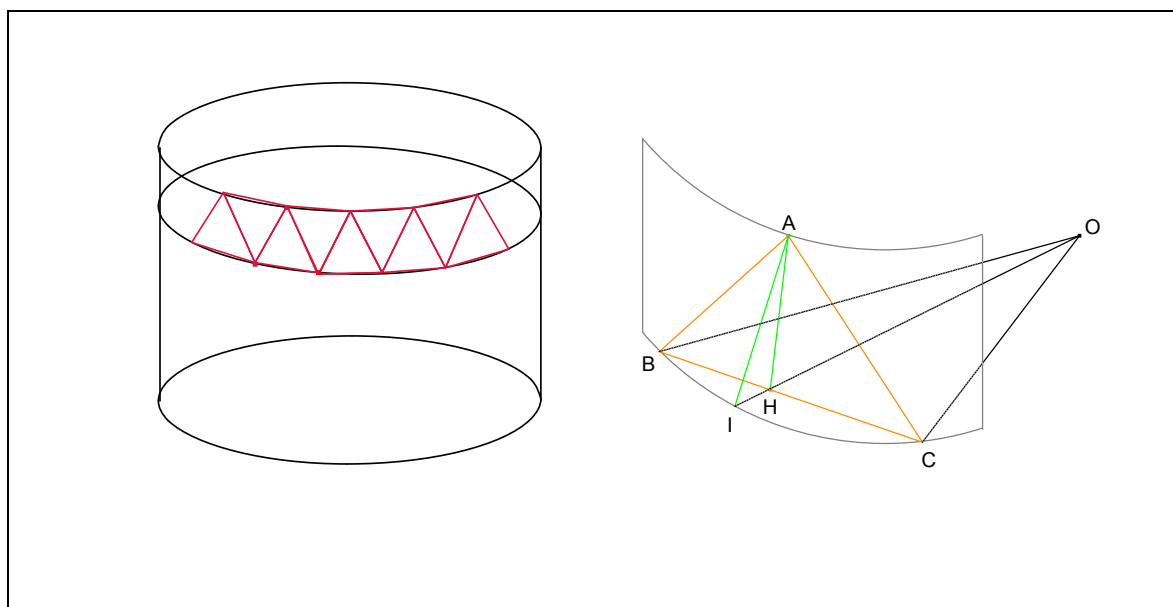
Le contre-exemple, ou si l'on préfère le paradoxe, d'Hermann Schwarz (1843-1921), en mettant à mal la définition de l'aire d'une surface gauche comme limite d'une surface polyédrale inscrite formée de faces triangulaires dont le maximum tend vers zéro, a, non seulement rendu compte du *paralogisme*⁶⁸ de Serret, mais il a surtout conduit à la recherche d'une définition plus satisfaisante. Il convient de noter que « la même observation a été faite par Mr. Peano, dans ses leçons de l'Université de Turin en 1881-82, avant la publication de la lettre de Schwarz dans le cours professé à la Faculté des Sciences pendant le second semestre 1882 par Ch. Hermite ». (Lebesgue 1902, p.270).

⁶⁶ Dans les notations actuelles, on a $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial f}{\partial y}$.

⁶⁷ Cette formule intégrale s'écrit sous la forme classique $S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$.

⁶⁸ Faux raisonnement involontaire.

La lettre dont il est question ici est celle envoyée par Schwarz à Genocchi et dans laquelle le premier montre que les aires des surfaces polyédrales inscrites dans un tronç d'un cylindre de révolution n'ont aucune limite. Pour expliquer la remarque de Schwarz, considérons un cylindre de révolution de rayon R et de hauteur h . Divisons ensuite ce cylindre en m morceaux cylindriques de même hauteur $\frac{h}{m}$, inscrivons dans les deux cercles section deux polygones réguliers convexes de n côtés chacun, de même axe et tourné de $\frac{\pi}{n}$ l'un par rapport à l'autre et joignons enfin chaque sommet de l'un des deux polygones aux deux sommets les plus proches de l'autre polygone. Ainsi, dans chacun des m morceaux cylindriques se trouvent inscrite une surface polyédrale formée de $2n$ triangles isocèles tels que ABC de la figure suivante :



Dans cette figure $OI = R$, $AI = \frac{h}{m}$ et $\widehat{BOC} = \frac{2\pi}{n}$. Les triangles HOB et IHA étant rectangles respectivement en H et I , on a : $HB = OB \times \sin \frac{\pi}{n}$, $OH = OB \times \cos \frac{\pi}{n}$ et $AH = \sqrt{AI^2 + IH^2}$.

Par suite: $BC = 2R \times \sin \frac{\pi}{n}$ et $AH = \sqrt{\frac{h^2}{m^2} + \left(R - R \times \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}$, l'aire du triangle ABC est égale à $R \times \sin \frac{\pi}{n} \times \sqrt{\frac{h^2}{m^2} + \left(R - R \times \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}$ et celle de la surface polyédrale inscrite dans

le cylindre de départ est $S_{m,n} = 2nR \times \sin \frac{\pi}{n} \times \sqrt{h^2 + m^2 R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}$. Or pour les grandes valeurs de n , $\sin \frac{\pi}{n}$ se comporte comme $\frac{\pi}{n}$ et $1 - \cos \frac{\pi}{n}$ se comporte comme $\frac{\pi^2}{n^2}$.

Alors, quand m et n tendent vers l'infini, $S_{m,n}$ a même limite que $2\pi R \sqrt{h^2 + \frac{\pi^4 R^2}{4} \times \frac{m^2}{n^4}}$ qui

dépend de celle de $\frac{m}{n^2}$. Comme il est possible que cette dernière prenne une valeur ou une autre, on conclut que la limite de $S_{m,n}$ n'existe pas.

L'idée de circonscription des surfaces polyédrales généralisant celle des lignes polygonales peut ainsi conduire à attribuer à l'aire latérale d'un cylindre de révolution une valeur qui n'est pas nécessairement celle $2\pi Rh$ de son aire élémentaire. Comment expliquer ce paradoxe ?

Intuitivement, si l'on fixe n et l'on fait tendre m vers l'infini la direction du plan du triangle ABC tend vers celle du plan de la base du cylindre. En revanche, si l'on fixe m et l'on fait tendre n vers l'infini la direction du plan du triangle ABC tend vers celle d'un plan tangent au cylindre mené de l'un des sommets du triangle. Ainsi, comme nous l'avons souligné plus haut, les faces du polyèdre inscrit dans une surface ne l'approchent pas toujours en direction. Ce paradoxe met, *in fine*, au clair les difficultés que soulève la question de l'analogie entre la définition de la longueur d'une courbe et celle de l'aire d'une surface. Qui plus est, il rend compte des dangers qui bordent le recours à la méthode d'inscription. Enfin, les calculs développés plus haut montrent clairement, comme l'a souligné Fréchet, que l'aire d'une surface s ne peut être définie comme la borne supérieure des aires des polyèdres inscrits dans s ni comme la limite d'une suite de polyèdres inscrits tendant vers s . En effet, la première définition attribuerait à l'aire du cylindre de révolution une valeur infinie et la seconde lui attribuerait une valeur indéterminée supérieure ou égale à $2\pi Rh$.

À la difficulté que pose la stratégie de l'inscription, les solutions possibles étaient alors : corriger l'erreur de Serret sans renoncer à l'analogie entre rectification et quadrature, ou bien renoncer à l'analogie entre rectification et quadrature, ou bien encore renoncer à donner une définition géométriquement intrinsèque. Parmi ceux qui ont adressé à la définition de Serret les mêmes critiques que celles de Schwarz, il y a Peano, Hermite et Lebesgue. Les deux premiers ont proposé des définitions nouvelles, fondées sur des idées différentes utilisant des surfaces polyédrales discontinues. Lebesgue, quant à lui, fait appel à des surfaces polyédrales continues mais non nécessairement inscrites.

II.4.3. La contribution d'Hermite

Hermite définit l'aire comme « *la limite d'un système de polygones non contigus tangents à la surface* » (Peano 1890, p. 56). Pour comprendre la démarche d'Hermite, considérons une surface S continue et régulière donnée sous la forme $z = f(x, y)$ et un domaine D du plan xy dans lequel la fonction f est continue. Divisons D en domaines Δ_i limités par des courbes fermées et simples γ_i , prenons à l'intérieur de chacun de ces domaines un point m_i et

désignons par M_i le point d'intersection de la surface S et la parallèle à l'axe des z menée de m_i et par T_{M_i} le plan tangent à S mené du point M_i . Soit Γ_i et Γ'_i les courbes fermées respectivement dans S et T_{M_i} qui se projettent sur γ_i , c'est-à-dire les traces sur S et T_{M_i} du cylindre droit ayant pour directrice la courbe γ_i . À la portion de S délimitée par Γ_i , Hermite associe l'aire σ_i du domaine plan intérieur à Γ'_i et forme la somme $\sigma = \sum \sigma_i$. Il définit ensuite l'aire de S comme la limite des nombres σ lorsque le nombre des domaines Δ_i augmente indéfiniment de sorte que le maximum des diamètres des domaines Δ_i tende vers zéro. Hermite montre que sa définition permet de retrouver la formule intégrale classique déjà établie par Lagrange et Cauchy.

L'on constate ainsi qu'Hermite se démarque de la stratégie d'inscription en approchant la surface visée par des surfaces polyédrales circonscrites discontinues dont les faces sont tangentes à la surface en question. Mais, plus intéressant pour notre analyse, le véritable reproche adressé par Peano et Lebesgue à la méthode d'Hermite est le fait de faire appel à un plan extérieur à la surface, en l'occurrence le plan xy . Le découpage de la surface par les courbes Γ_i est obtenu à partir de celui de D par les courbes γ_i . D'où le rôle fondamental du plan xy et par suite le caractère extrinsèque de la définition d'Hermite.

II.4.4. La contribution de Peano

En fait, Peano ne critique pas seulement la définition de Serret, mais également celle d'Hermite. Selon lui, Serret présuppose que « *le plan passant par trois points de la surface a pour limite le plan tangent à cette surface* » (Peano 1890, p. 55). Pour saisir le défaut de ce résultat, il suffit de remarquer que si l'angle en l'un des sommets du triangle formé par les trois points décroît plus rapidement que les côtés, alors le plan du triangle n'a pas de limite déterminée. En ce qui concerne la définition proposée par Hermite, elle est qualifiée par Peano, et par Lebesgue aussi, d'extrinsèque, en ce sens qu'elle fait intervenir de façon fondamentale un plan extérieur à la surface.

La solution de Peano

Sébastien Gandon donne la traduction suivante du passage suivant tiré de [Peano 1890, p. 55]:

La rigueur et l'analogie entre les définitions reliant arc et aire peuvent être toutes les deux préservés en faisant usage non seulement du concept de segment linéaire considéré comme ayant une longueur et une direction (vecteur), mais également du concept dual de région planaire considérée comme ayant une taille et une

orientation. Ces entités ont été introduites en géométrie par les travaux de Chelini, Möbius, Bellavitis, Grassmann et Hamilton. Une région planaire ainsi considérée, ou plutôt sa limite, peut être définie comme un bivecteur, c'est-à-dire comme étant le produit, au sens de Grassmann, de deux vecteurs. (Gandon 2008, p.16).

Ainsi, Peano préconise que le calcul géométrique est à même de permettre de conserver l'analogie géométrique entre la définition de la longueur et celle de l'aire sans renoncer à la rigueur. Pour comprendre la solution de Peano, il nous paraît nécessaire de commencer par expliquer sa conception du calcul géométrique. Dans la préface de son *Calcolo geometrico* publié en 1888, le mathématicien italien précise que « *le calcul géométrique présente une analogie avec la géométrie analytique ; mais il en diffère en ce que, alors que dans la géométrie analytique, les calculs sont faits sur des nombres qui déterminent des entités géométriques, dans cette nouvelle science les calculs sont faits sur les entités géométriques elles-mêmes*⁶⁹ ». En fait, Peano repose son calcul géométrique sur des outils issus de l'algèbre grassmannienne, parmi lesquels figurent notamment les concepts de vecteur et de bivecteur⁷⁰. Il accorde d'ailleurs à ces deux derniers concepts un rôle fondamental dans les définitions de la longueur et de l'aire qu'il formule comme suit :

- *La longueur de l'arc d'une courbe est la limite supérieure de la somme des longueurs des vecteurs qui constituent ses parties.*
- *L'aire d'une portion de surface est la limite supérieure de la somme des tailles des bivecteurs qui constituent ses parties.* (Peano 1890, p.56)⁷¹.

Ici, l'analogie entre les deux définitions est manifeste. Le concept de bivecteur généralise celui de vecteur par le fait même qu'une portion de surface généralise celle d'arc de courbe. Mais qu'est-ce qu'un bivecteur ? Et en quoi le concept de bivecteur permet-il d'apporter une solution au problème de la définition de l'aire d'une surface ?

La notion de bivecteur

Le terme bivecteur est dû à Peano et désigne ce que Grassmann appelle le produit de deux vecteurs⁷² : *il prodotto di due vittori dicesi bivettore* (Peano 1888, p. 55). Un bivecteur est

⁶⁹ Voir [Gandon 2008, p.4].

⁷⁰ C'est Peano qui a inventé ce terme pour désigner ce que Grassmann appelle le produit de deux vecteurs : *il prodotto di due vittori dicesi bivettore* (Peano 1888, p. 55).

⁷¹ In [Gandon 2008, p.16].

⁷² En 1892, Carvallo publia une Note intitulée *la méthode de Grassmann* dans laquelle il appelle *couple*, plutôt que *bivecteur*, le produit de deux vecteurs: *Un pareil produit de deux vecteurs, je l'appelle couple, parce que*

caractérisé par sa direction, son sens et sa grandeur: I et J étant deux vecteurs non colinéaires de l'espace et O un point arbitraire, si A et B sont les points définis par $\overrightarrow{OA} = I$ et $\overrightarrow{OB} = J$, alors le bivecteur IJ est caractérisé par la direction, le sens et l'aire du triangle OAB ⁷³.

Selon la conception de Peano, la caractérisation de l'objet mathématique *bivecteur* est analogue à celle de l'objet mathématique *vecteur* : un bivecteur peut être représenté par un *bivecteur unité* multiplié non plus par une longueur comme dans le cas du vecteur mais par l'aire d'une surface triangulaire. Mais cette caractérisation de l'objet *bivecteur* ne semble pas remporter l'adhésion de tous les mathématiciens de l'époque, du moins de ceux qui se sont intéressés à cet objet. À la caractérisation d'un bivecteur par Peano, et Carvallo aussi, on peut opposer celle de Burali-Forti qui définit la grandeur du bivecteur IJ comme l'aire du parallélogramme, et non celle du triangle, construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA} = I$ et $\overrightarrow{OB} = J$.

Dans son livre *Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann*, publié en 1897, Cesare Burali-Forti (1831-1961) reprend et précise les règles de calcul sur les formes géométriques⁷⁴ et consacre deux pages à la notion de bivecteur. Les développements de Burali-Forti sur le sujet sont plus explicites que ceux de Peano et présentent un aspect particulièrement instructif et éclairant :

Nous disons que les bivecteurs non nuls IJ , KU sont parallèles ou coplanaires⁷⁵, lorsque, quel que soit le point O , les triangles OIJ , OKU sont sur un même plan. Appelons orientation du bivecteur IJ , un élément géométrique abstrait, fonction de IJ et que IJ a en commun avec tous les bivecteurs parallèles à IJ . Il en résulte que des bivecteurs égaux ont la même orientation.

cette forme représente le couple de forces qu'on rencontre en Mécanique. Elle comporte une direction de plan, un sens et une aire, ceux du triangle PAB . Elle peut être regardée comme le produit de cette aire par un couple unité ou direction de plan. (Carvallo 1892, p. 20).

⁷³ Il faut entendre un élément géométrique abstrait, fonction du plan des points O, A, B de l'aire du triangle dont les sommets sont O, A, B et du sens de la forme OAB .

⁷⁴ Prenant pour point de départ l'idée commune de tétraèdre, il [Peano] définit le produit de deux et de trois points; il définit ensuite les produits de ces éléments par des nombres, et, enfin, il définit les sommes de ces produits. La théorie des formes du premier ordre donne le calcul barycentrique et celui des vecteurs (ou directions); les formes du deuxième ordre représentent les droites, les orientations et les systèmes des forces appliquées à un corps rigide ; les formes du troisième ordre représentent les plans et le plan à l'infini. Parmi les opérations, les *produits progressifs* et *régressifs* donnent les opérations géométriques projeter, couper; le *produit interne* donne les projections orthogonales et les quantités qu'on désigne, en Mécanique, par les mots *ouvrage*, *moment*... (Burali-Forti 1897, p. VI-VII).

⁷⁵ C'est bien ce qui est écrit dans le texte de l'auteur.

Si les bivecteurs non nuls IJ , KU sont parallèles, nous dirons qu'ils ont ou n'ont pas le même sens, suivant que les triangles OIJ , OKU ont ou n'ont pas le même sens, quel que soit le point O . Le sens d'un bivecteur non nul IJ est donc un élément géométrique abstrait qui possède IJ en commun avec d'autres bivecteurs parallèles à IJ . Des bivecteurs égaux ont le même sens.

Si IJ est un bivecteur, posons, quel que soit le point O , $\text{mod}IJ = 2 \text{mod}OIJ$. Le module d'un bivecteur IJ est donc le nombre positif ou nul qui mesure l'aire du parallélogramme, dont trois sommets sont les points O , $O + I$, $O + J$. Il en résulte encore que des bivecteurs égaux ont le même module.

[...] pour que deux bivecteurs soient égaux il faut et il suffit qu'ils aient même orientation, même sens et même module. Ainsi donc, un bivecteur est un élément géométrique abstrait fonction de son orientation, de son sens et de sa grandeur. (Burali-Forti 1897, p. 14-15).

Les lecteurs de *Calcolo Geometrico* de Peano ne manqueront pas d'apprécier la clarté et la précision de l'exposé de Burali-Forti par rapport à celui de son professeur. Mais le disciple de Peano n'explique pas les motivations de son choix ni en quoi le fait d'attacher la notion bivecteur à celle de parallélogramme est plus avantageux. Toutefois, à croire Carvallo, les deux caractérisations en présence ne différant que sur la grandeur du bivecteur, la question serait sans importance :

On pourra faire abstraction de la forme triangulaire qu'on a jusqu'ici supposé à l'aire dont est affecté chaque plan : la seule chose qui importe, c'est son étendue et son sens ; c'est-à-dire le sens dans lequel un mobile parcourt le contour de cette surface. (Carvallo 1897, p. 28).

Il nous semble cependant que la véritable raison en est que Peano et Burali-Forti poursuivent des objectifs différents dans le détail desquels il est impossible d'entrer ici. Mais nous ne manquerons pas de souligner la pertinence du choix de Peano dans la recherche d'une solution au problème de la définition de l'aire d'une surface gauche.

Quoiqu'il en soit, ce qu'il faut retenir pour l'essentiel c'est que la notion de bivecteur peut être étendue à des domaines plans orientés qui ne sont pas nécessairement triangulaires. C'est précisément ce que fait Peano dans *calcolo geometrico*. Nous exposerons de manière détaillée les développements de Peano à ce propos un peu plus loin. Pour l'instant, nous allons nous

attacher à rendre compte de l'analogie entre vecteur et bivecteur au sens de Peano et chercher à dégager une interprétation moderne de la notion de bivecteur.

Pour mettre en évidence l'analogie entre vecteur et bivecteur nous ferons appel aux langage et notations mathématiques actuels. Commençons d'abord par rappeler que dans le cadre de la *géométrie plane* (sous-entendue *euclidienne*), un *vecteur lié* ou *segment orienté* \overrightarrow{OA} non nul est caractérisé par :

- *Une origine* : le point O .
- *Une direction ou support* : la droite passant par les points O et A notée (OA) .
- *Un sens ou orientation* : celui allant de O vers A .
- *Une grandeur*: la longueur du segment $[OA]$ notée OA et égale à $\|\overrightarrow{OA}\|$.

Ceci convenu, on dit que deux vecteurs liés sont *équipollents* s'ils ont la *même direction*, le *même sens* et la *même grandeur*. L'équipollence est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont des vecteurs dont l'origine n'est pas fixe qu'on appelle *vecteurs libres* par opposition aux *vecteurs liés* (dont l'origine est fixe).

En convenant d'appeler *bivecteur lié* le produit des deux vecteurs $\overrightarrow{OA} = I$ et $\overrightarrow{OB} = J$, on en arrive à voir que, s'il est non nul, le bivecteur lié OIJ est caractérisé par :

- *Une origine* : le point O .
- *Une direction ou support* : le plan passant par les points O, A et B et noté (OAB) .
- *Un sens ou orientation* : en suivant le chemin $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow O$.
- *Une grandeur* : l'aire géométrique du triangle appuyé sur \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} .

À la suite de ce qui vient d'être dit, il est facile de constater l'analogie entre les deux notions de vecteur et de bivecteur liés. Cette analogie est clairement saisie dans le tableau suivant :

Caractérisation	Vecteur lié	Bivecteur lié
Origine	O	O
Direction	Droite (OA)	Plan (OAB)
Sens	$O \rightarrow A$	$O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow O$
Grandeur	Longueur du segment	Aire du triangle appuyé sur \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} .

Il s'agit maintenant de poursuivre l'adaptation du modèle vectoriel à la notion de bivecteur. De même que l'on définit un vecteur libre comme une classe d'équipollence, nous dirons que

deux bivecteurs sont équipollents s'ils ont la même direction, le même sens et la même grandeur. On définit ainsi une relation d'équivalence dont les classes peuvent être présentées comme des bivecteurs dont l'origine n'est pas fixe et que nous appellerons *bivecteurs libres*.

À la différence de la notion de bivecteur lié qui est une notion de géométrie euclidienne et n'a donc de sens que dans un espace affine euclidien, celle de bivecteur libre est une notion de géométrie vectorielle et prend donc son sens dans un espace vectoriel euclidien.

Pour caractériser un bivecteur libre, nous utiliserons la définition de Peano. Commençons, pour nous fixer les idées, par nous donner deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} et notons $P(\vec{u}, \vec{v})$ leur produit. Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires alors le bivecteur $P(\vec{u}, \vec{v})$ défini par ces deux vecteurs est nul⁷⁶. Sinon, le bivecteur $P(\vec{u}, \vec{v})$ admet pour direction le plan vectoriel engendré par \vec{u} et \vec{v} , que l'on peut munir naturellement d'une base orthonormée directe (\vec{i}, \vec{j}) . Le sens du bivecteur $P(\vec{u}, \vec{v})$ est alors celui de la base (\vec{u}, \vec{v}) et sa grandeur est la moitié de la valeur absolue du déterminant des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} dans la base (\vec{i}, \vec{j}) qui est précisément l'aire géométrique du triangle construit sur les vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

En fait, le déterminant du couple de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) dans la base (\vec{i}, \vec{j}) n'est autre que l'aire algébrique du parallélogramme orienté⁷⁷ appuyé sur les vecteurs \vec{u} et \vec{v} dont le signe et la valeur absolue renseignent respectivement le sens et la grandeur du bivecteur $P(\vec{u}, \vec{v})$. En résumé, selon la définition de Peano⁷⁸, le bivecteur $P(\vec{u}, \vec{v})$ est le triangle engendré par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} , c'est-à-dire l'élément vectoriel :

$$P(\vec{u}, \vec{v}) = \{a\vec{u} + b\vec{v}; 0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1, 0 \leq a + b \leq 1\}.$$

Se pose maintenant la question la plus considérable qui consiste à savoir en quoi la notion de bivecteur permet-elle de résoudre le problème posé par la définition de l'aire et comment la rendre opérationnelle. Peano était à l'évidence conscient des difficultés que poserait un recours direct à la notion de bivecteur, et c'est pourquoi il choisit vite de substituer à la notion de bivecteur celle de vecteur en associant à tout bivecteur u un vecteur U qu'il appelle *index de u* et qu'il note $|u$:

⁷⁶ Un bivecteur est nul lorsque sa grandeur est nulle. La direction et le sens du bivecteur nul ne sont pas déterminés.

⁷⁷ Pour les dessins, il est d'usage de choisir une orientation telle que l'on tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. À titre d'exemple, un parallélogramme $ABCD$ est orienté dans le sens positif si l'on passe de A à B puis à C et enfin à D en tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

⁷⁸ Selon la caractérisation de Burali-Forti, on aura : $P(\vec{u}, \vec{v}) = \{a\vec{u} + b\vec{v}; 0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1\}$.

Diremoil vettore U è l'indice del bivettori u , ovvero che il bivettore u è l'indice del vettori U e scriveremo : $|u = U$, $|U = u$, quando la direzione di U et la giacitura di u sono normali fra loro , le grandezze di U e di u sono eguali, ed i loro sensi sono tali che il trivettore $Uu = uU$ risulato positivo. (Peano 1888, p.100).

Ainsi donc, l'index de u est le vecteur orthogonal au bivecteur u , de même grandeur que u et tel que le trivecteur $u(|u)$ est de sens direct. Le vecteur $|u$ est ainsi bien déterminé. De plus la convention $|0 = 0$ permet d'étendre cette opération à tous les vecteurs et bivecteurs. En résumé, ce que Peano appelle index du bivecteur défini par deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} n'est autre que le demi-produit vectoriel de \vec{u} et \vec{v} . Cette correspondance entre bivecteur et vecteur tient chez Peano une place centrale dans la construction de la définition de l'aire d'une surface dont le concept clé est celui de bivecteur d'une ligne polygonale fermée⁷⁹. Compte tenu de la puissance et de la fécondité de ce concept, compte tenu du fait que la contribution de Peano sur le sujet est peu diffusée, voire même peu connue, en Tunisie, il nous a paru important de lui consacrer une assez large place dans ce travail.

Bivecteur d'une ligne polygonale fermée.

Dans son *Calcolo geometrico*, Peano établit que si $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_1$ est une ligne polygonale fermée contenue dans un plan donné alors, pour tout point P de ce plan, la somme $PA_1A_2 + PA_2A_3 + \dots + PA_{n-1}A_1$ ⁸⁰ a une valeur constante qu'il appelle l'aire de la ligne polygonale. Peano précise ensuite, mais sans le justifier, que ce résultat s'applique encore si l'on remplace la ligne polygonale par une courbe . Le même résultat est exposé sous une forme légèrement modifiée, mais plus riche, par Burali-Forti dans *Introduction à la géométrie différentielle* :

Soit A_1, A_2, \dots, A_n des points d'un même plan: la forme $s = A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1$ a un vecteur⁸¹ nul; elle est donc réductible à un bivecteur⁸².

Quel que soit le point P du plan, le triangle Ps a la même valeur et l'on peut appeler aire limitée de la ligne polygonale fermée $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_1$, l'aire du triangle Ps . Si la

⁷⁹ Le bivecteur u d'une ligne polygonale $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_1$ est la somme des bivecteurs u_i ($1 \leq i \leq n - 1$) définis par les vecteurs $\overrightarrow{OA_i}$ et $\overrightarrow{OA_{i+1}}$, où O est un point arbitraire.

⁸⁰ Par PA_iA_{i+1} , il faut entendre l'aire algébrique du triangle de sommets P, A_i, A_{i+1} soit $\pm \text{aire}(PA_iA_{i+1})$ suivant que le triangle est orienté dans le sens positif ou négatif.

⁸¹ On appelle vecteur d'une forme du deuxième ordre la somme des vecteurs des segments dont elle est composée.

⁸² En général, O étant un point quelconque, on a $s = OI + u$, où I est le vecteur de s , et u un bivecteur qui dépend de s et de O .

ligne est convexe, l'aire ainsi définie est celle que l'on considère en Géométrie élémentaire. (Burali-Forti 1897, p. 37).

Burali-Forti reprend ici un résultat dû à Peano : une ligne polygonale fermée dont les sommets sont coplanaires est réductible à un triangle. C'est laisser entendre que toute surface polygonale plane et fermée peut être convertie en une surface triangulaire ayant même aire. Dès lors, le calcul géométrique au sens de Peano permet de retrouver beaucoup de résultats de géométrie élémentaire, dont un cas particulier important pour notre propos sera celui sur l'indépendance de l'aire d'une surface polygonale convexe de sa triangulation établi plus tard par Hadamard. Nous donnerons plus loin une démonstration de ce résultat utilisant la notion de bivecteur plus simple et plus élégante que celle de Hadamard.

Il convient peut être de souligner ici que la lecture de [Peano 1888], [Carvallo 1892] et [Burali-Forti 1897], montre qu'il y a une sorte d'unanimité que le calcul géométrique prend pour point de départ l'idée commune de tétraèdre. Aussi nous semble-t-il plus approprié et plus naturel de baser la notion de bivecteur sur celle de triangle, plutôt que sur celle de parallélogramme. En effet, partant du fait qu'une surface polygonale se décompose en un nombre fini de surfaces triangulaires et que la somme de deux bivecteurs est un bivecteur, on peut étendre naturellement la notion de bivecteur à une surface polygonale. En revanche, décomposer une surface polygonale en des surfaces délimitées par des parallélogrammes n'est pas toujours simple⁸³. Nous aurons encore l'occasion de saisir l'avantage qu'il y a à fonder la notion de bivecteur sur celle de triangle.

Laissons pour l'instant de côté cette question et expliquons la mise en œuvre effective de la notion de bivecteur et cherchons ce qui peut justifier sa généralisation à une ligne polygonale fermée. Considérons une ligne polygonale fermée $A_1A_2 \dots A_nA_1$ non nécessairement plane et un point arbitraire O . Un calcul élémentaire permet d'établir successivement:

$$\overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_2} \wedge \overrightarrow{OA_3} + \dots + \overrightarrow{OA_n} \wedge \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{OA_2} \wedge \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{OA_n} \wedge \overrightarrow{A_nA_1}.$$

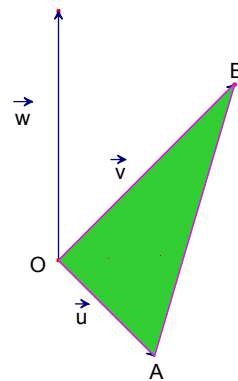
$$\overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} \wedge \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_1} \wedge (\overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \overrightarrow{A_nA_1}) + \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_1A_{n-1}} \wedge \overrightarrow{A_{n-1}A_n}.$$

$$\text{Par suite : } \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} \wedge \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_1A_{n-1}} \wedge \overrightarrow{A_{n-1}A_n}.$$

⁸³ C'est toujours possible quitte à recourir au procédé de découpage et recollement.

On voit ainsi que le vecteur $\overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} \wedge \overrightarrow{OA_1}$ dépend uniquement de la ligne polygonale $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_1$ et nullement du point O . Dès lors, il devient légitime de parler de bivecteur d'une ligne polygonale fermée. Le bivecteur de la ligne polygonale fermée $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_1$ sera par définition l'index du vecteur $\vec{w} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} \wedge \overrightarrow{OA_1})$. Un tel bivecteur, lorsqu'il n'est pas nul, peut être vu comme le produit, au sens de Peano, de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthogonale de sens direct.

Graphiquement, on peut représenter le bivecteur associé au vecteur \vec{w} par le triangle OAB , où O est un point arbitraire, A et B les points définis par $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.



Ceci convenu, nous avons, entre autres, les résultats de géométrie élémentaire suivant :

1. Le bivecteur u d'un triangle ABC ⁸⁴, index du vecteur $\vec{w} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, a pour grandeur l'aire géométrique du triangle. D'où le résultat : $aire(ABC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.
2. Comme $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}$, pour tout point O du plan du triangle, les vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}$ sont tous normaux à ce plan et sont donc colinéaires. Par suite si \vec{k} est un vecteur unitaire normal à ce plan alors : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \pm\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|.\vec{k}$, $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \pm\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\|.\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} = \pm\|\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}\|.\vec{k}$ et $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA} = \pm\|\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}\|.\vec{k}$. En reportant ces résultats dans la première relation, il vient : $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|.\vec{k} = \pm\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\|.\vec{k} \pm \|\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}\|.\vec{k} \pm \|\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}\|.\vec{k}$.
D'où l'égalité : $aire(ABC) = \pm aire(OAB) \pm aire(OBC) \pm aire(OCA)$.

On retrouve ainsi le résultat établi par Hadamard dans ses *leçons de géométrie élémentaire*.

⁸⁴ On convient qu'un triangle ABC n'est autre que la ligne polygonale fermée $ABCA$.

3. Plus généralement, si $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_1$ est une ligne polygonale contenu dans un plan donné et \vec{k} est un vecteur unitaire normal à ce plan alors, pour tout point O de ce plan, les vecteurs $\vec{w} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_2} \wedge \overrightarrow{OA_3} + \dots + \overrightarrow{OA_n} \wedge \overrightarrow{OA_1})$, $\overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_2}, \dots, \overrightarrow{OA_n} \wedge \overrightarrow{OA_1}$ sont tous colinéaires au vecteur \vec{k} et l'on a :

$$\vec{w} = \pm \|\vec{w}\| \cdot \vec{k}, \quad \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_2} = \pm \|\overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_2}\| \cdot \vec{k}, \dots, \\ \overrightarrow{OA_n} \wedge \overrightarrow{OA_1} = \pm \|\overrightarrow{OA_n} \wedge \overrightarrow{OA_1}\| \cdot \vec{k}$$

Donc $\|\vec{w}\| = \frac{1}{2}(\pm \|\overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_2}\| \pm \dots \pm \|\overrightarrow{OA_n} \wedge \overrightarrow{OA_1}\|)$. D'où : $aire(A_1A_2 \dots A_{n-1}A_1) = \|\vec{w}\|$.

En effet \vec{w} est l'index du bivecteur de la ligne polygonale fermée $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_1$ dont la grandeur est l'aire de la surface délimitée par cette ligne. On se ramène ainsi à l'égalité $aire(A_1A_2 \dots A_{n-1}A_1) = \frac{1}{2}(\pm aire(OA_1A_2) \pm \dots \pm aire(OA_nA_1))$ qui n'est autre que le résultat obtenu par Hadamard et Lebesgue.

4. Si $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_1$ est une ligne polygonale qui n'est pas nécessairement plane alors son bivecteur est réductible au bivecteur d'une ligne triangulaire. En effet, le bivecteur u en question est défini par son index $\vec{w} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_1A_{n-1}} \wedge \overrightarrow{A_{n-1}A_n})$ et \vec{w} est bien déterminé : pour définir u il suffit de prendre un couple (\vec{u}, \vec{v}) de vecteurs tels que, par exemple, $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = \frac{1}{2} \|\vec{w}\|$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthogonale directe.

5. Pour aller plus loin, citons Peano :

Data una linea poligonale chiusa qualunque (non piana) si può sempre determinare un triangolo ABC in guisa che, proiettando su d'un piano arbitrario con proiezioni parallele di direzione arbitrarria e la linea poligonale data, e il triangolo ABC, l'area limitata dalla proiezione della polygonale chiusa risulta eguale alla proiezione del triangolo ABC. (Peano 1888, p. 62).

L'auteur énonce ainsi que si l'on se donne une ligne polygone fermée $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_1$ non nécessairement plane, il est toujours possible de déterminer un triangle ABC de sorte qu'en projetant à la fois la ligne polygonale et le triangle sur un plan arbitraire parallèlement à une droite de direction arbitraire, les projections de $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_1$ et de ABC ont la même aire. Un intérêt certain de ce résultat peut être saisi dans le fait qu'il permet à Peano d'éviter le défaut de la définition d'Hermite et, par là, de justifier la critique qu'il lui adresse. Pour cela,

Peano doit montrer qu'il peut obtenir le même résultat qu'Hermitte en procédant à des découpages en éléments de surface délimités par des courbes fermées directement sur la surface visée sans passer par un plan extérieur à la surface et s'affranchir ainsi du recours à un quelconque système de coordonnées. L'outil décisif dont Peano doit disposer ne peut pas donc être le bivecteur d'une ligne polygone mais plutôt celui d'une courbe fermée. Aussi, Peano eut-il à généraliser encore une fois la notion de bivecteur à une courbe fermée.

Bivecteur d'une courbe fermée

La notion de bivecteur d'une courbe fermée apparaît donc comme l'ultime outil que Peano doit concevoir pour répondre au problème de la définition de l'aire d'une surface. Partant du fait qu'une courbe simple et fermée peut être approchée au sens géométrique par des lignes polygonales fermées inscrites et qu'à chacune de ces dernières on peut associer un bivecteur, Peano définit, naturellement, le bivecteur d'une courbe fermée comme la limite⁸⁵ supérieure des bivecteurs des lignes polygonales inscrites lorsque la plus grande des longueurs de ses côtés tend vers zéro. Il étend ensuite cette définition à une surface S délimitée par une courbe fermée Γ et appelle, abusivement, bivecteur de la surface S celui de la courbe Γ . Pour mieux comprendre cette notion, citons Peano :

L' $\int AA' dt = \int A dA$ rappresenta una formazione di seconda specie. Essa è il limite verso cui tende la somma $A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$, in cui $A_0 A_1 \dots A_n$ siano punti consecutivi della curva, A_0 e A_n le posizioni di A corrispondenti di t , il limite essendo ottenuto col far crescere indefinitamente il numero dei punti, in modo che la distanza di due punti consecutivi qualunque tenda a zero [...]..Se invece gli estremi dell'arco considerato coincidono, l' $\int AA' dt$ è bivettore, e l'area $X \int AA' dt$, che è indipendente dalla posizione del punto X , diseci l'area limitata da quella curva chiusa. (Peano 18888, p. 137).

Avant de commenter ce passage, il nous faut préciser que l'arc considéré est supposé simple et régulier et que A est une fonction d'une variable t décrivant un intervalle $[a, b]$, ayant une dérivée A' continue et ne s'annulant en aucun point de $[a, b]$.

⁸⁵ Dans le chapitre 8 (*Derivate*) de calcolo geometrico consacré à l'étude des formes variables, Peano définit la notion de limite pour les formes géométriques et en précise les propriétés. Mais on ne trouve rien, dans ce livre, à propos de la limite d'une suite de bivecteurs. Cependant, dans [Gandon 2008, p. 18], l'auteur précise qu'une suite de bivecteurs $(u_n)_{n \geq 0}$ a pour limite u si la suite de vecteurs $(|u_n|)_{n \geq 0}$ a pour limite $|u|$, c'est-à-dire si la longueur des vecteurs $(|u - |u_n|)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Ceci convenu, considérons, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, une courbe fermée Γ simple et régulière et un paramétrage (I, f) de Γ , où $I = [a, b]$ et f une fonction ayant une dérivée continue sur I . Selon le passage cité plus haut, le bivecteur de Γ est défini par l'intégrale $B_\Gamma = \int_a^b f(t) \wedge f'(t) dt$ ⁸⁶. Il y a lieu de souligner ici que l'auteur ne justifie pas, du moins dans *Calcolo geometrico*, le résultat énoncé. Pour démontrer ce dernier, considérons une subdivision $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de l'intervalle $I = [a, b]$ et formons la ligne polygonale P_n fermée inscrite dans Γ ayant pour sommets les points $A_i = f(t_i)$, $0 \leq i \leq n$.

Le bivecteur de la ligne polygonale P_n , on l'a vu plus haut, est par définition l'index du vecteur $\vec{w} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$, ce que l'on traduit par $B_{P_n} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \wedge (f(t_{i+1}) - f(t_i))$.

En posant $t_{i+1} - t_i = h_i$ et en utilisant la formule d'approximation linéaire, on obtient :

$$f(t_i + h_i) - f(t_i) = h_i f'(t_i) + h_i \varepsilon(h_i), \text{ où } \varepsilon(h_i) \text{ est un vecteur tel que } \lim_{h_i \rightarrow 0} \|\varepsilon(h_i)\| = 0.$$

Dès lors le bivecteur B_{P_n} s'écrit : $B_{P_n} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(t_i) \wedge f'(t_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(t_i) \wedge \varepsilon(h_i)$.

En observant que, lorsque n tend vers l'infini⁸⁷, la somme $\sum_{i=0}^{n-1} h_i f(t_i) \wedge f'(t_i)$ converge vers l'intégrale $\int_a^b f(t) \wedge f'(t) dt$ ⁸⁸ et la somme $\sum_{i=0}^{n-1} h_i f(t_i) \wedge \varepsilon(h_i)$ converge vers zéro⁸⁹, on obtient, par passage à la limite : $B_\Gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} B_{P_n} = \frac{1}{2} \int_a^b f(t) \wedge f'(t) dt$.

La solution de Peano

Peano, on l'a dit, cherche une définition de l'aire analogue de celle de la longueur qui, tout en sous-tendant la formule intégrale classique, n'hypothèque pas le caractère intrinsèquement géométrique de la notion d'aire comme chez Hermite et évite l'erreur de Serret. La solution à laquelle il parvient est contenue dans le passage suivant tiré du chapitre 8 de *calcolo geometrico* intitulé *derivate* :

Variando u fra i valori fissi u_0 e u_1 , e v fra i valori v_0 e $v_1 > v_0$, funzioni di u, il punto semplice A, funzione di u e v, descrive una superficie limitata σ ; con $\int \Psi du dv$, ove Ψ è una funzione di u e v, intenderemo l' $\int_{u_0}^{u_1} (\int_{v_0}^{v_1} \Psi dv) du$. Allora

⁸⁶ En fait B_Γ est l'index du bivecteur de la courbe Γ et doit être défini par $B_\Gamma = \frac{1}{2} \int_a^b f(t) \wedge f'(t) dt$. Mais Peano ne fait aucune allusion à ces précisions.

⁸⁷ Lorsque n tend vers l'infini, les différences successives $t_{i+1} - t_i = h_i$ tendent vers zéro de manière uniforme.

⁸⁸ C'est une somme de Riemann sur le segment $[a, b]$ de la fonction continue $f: t \mapsto f(t) \wedge f'(t)$.

⁸⁹ Il suffit de voir que $\|\sum_{i=0}^{n-1} h_i f(t_i) \wedge \varepsilon(h_i)\| \leq (b-a) \|f\| \|\varepsilon\|$, $\|f\|$ est majoré et $\|\varepsilon\| \rightarrow 0$.

$2 \iint \frac{dA}{du} \frac{dA}{dv} dudv$ representa un bivettore eguale al contorno di σ . Se si scompone la superficie σ in parti $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$, detti $i_1 i_2 \dots i_n$ i loro bivettori, il limite superiore della quantità $gr_{i_1} + gr_{i_2} + \dots + gr_{i_n}$ dicesi l'area della superficie data. L'area risulta misurata da $2 \iint gr \left(\frac{dA}{du} \frac{dA}{dv} \right) du dv$. (Peano 1888, p. 140).

Ainsi, en mettant au point le concept de bivecteur, Peano répond au problème de la définition de l'aire d'une surface et fournit dans le même temps une méthode pour la calculer. Il convient sans doute de faire remarquer que Peano n'établit aucun lien entre la formule qu'il propose et la formule intégrale classique. Pour un exposé complet sur le sujet nous renvoyons à Gandon (2008). Expliquons maintenant la solution de Peano.

Pour déterminer l'aire d'une surface fermée σ , Peano la décompose en un nombre fini de parties σ_i , ($1 \leq i \leq n$) délimitée chacune par une courbe fermée⁹⁰ Γ_i . Par passage à la limite, chaque portion de surface σ_i est convertie en une surface triangulaire T_i ayant le même bivecteur u_i . La réunion $P_n = \bigcup_{1 \leq i \leq n} T_i$ est une surface polyédrale (non nécessairement continue) dont l'aire totale a_n est la somme des aires des surfaces triangulaires T_i :

$$a_n = \sum_{i=1}^n \text{aire}(T_i).$$

La partition P_n de σ en portions de surfaces n'empiétant pas les unes sur les autres est une approximation polyédrale de la surface σ au sens de Peano. Ce dernier définit alors l'aire de la surface σ comme la limite supérieure des aires a_n des approximations polyédrales P_n .

En résumé, Peano réussit à poser une définition géométrique de l'aire analogue à celle de la longueur. Cette définition se démarque de celle d'Hermite et évite l'erreur de Serret. La définition d'Hermite, on l'a vu, est extrinsèque en ce sens qu'elle fait appel, de manière explicite, à un plan de projection (le plan xy) extérieur à la surface visée alors que celle de Peano est intrinsèque et ne privilégie aucun plan ni aucune direction de projection. D'autre part, le recours à la notion de bivecteur permet à Peano d'éviter l'erreur de Serret car, compte tenu de la caractérisation du bivecteur d'une portion de surface, les approximations polyédrales au sens de Peano tendent à la fois en position, en direction et en grandeur vers la

⁹⁰ Les contours des portions de surface σ_i sont implicitement des courbes fermées par définition même de leurs bivecteurs : un bivecteur est toujours bivecteur d'une courbe fermée.

surface visée⁹¹. Pour aller plus loin, il convient de souligner que la solution de Peano s'inscrit dans un projet plus vaste qui consiste à reconfigurer les concepts de la géométrie élémentaires, ou plus exactement à substituer aux concepts de la géométrie élémentaires des entités géométriques abstraites⁹². Il n'y a absolument rien à objecter contre la pertinence de la notion de bivecteur et, par là, contre la justesse de la définition de Peano si l'on considère uniquement l'aspect théorique de la construction de cette dernière. Cependant, elle est difficile à mettre en œuvre, voire inutilisable, lorsqu'il s'agit de calculer de manière effective l'aire d'une surface. En effet, la clé de voûte de la définition donnée par Peano est la notion de bivecteur d'une courbe fermée qui, on l'a vu, n'est exploitable de manière effective que lorsque la courbe admet en chacun de ses points une tangente variant de façon continue avec le point contact. Il faut donc exiger de la courbe d'être lisse et régulière⁹³. Comme la définition de l'aire d'une surface est indépendante de la manière dont elle peut être décomposée en portions de surface fermées, alors la notion de bivecteur doit en principe s'appliquer à toute courbe fermée contenue dans la surface visée. Pour qu'il en soit ainsi, il devient naturel, peut être au prix de découpages adéquats, d'exiger de la surface d'avoir en tout point un plan tangent variant de façon continue avec le point de contact. En conséquence, seules les surfaces suffisamment régulières⁹⁴ tombent sous la définition de Peano. La solution de Peano est ainsi affectée de limitations tout à fait comparables à celles que l'on impose dans la solution analytique. Elle échoue à s'appliquer à des surfaces continues présentant d'innombrables aspérités comme peut l'être une feuille de papier froissée⁹⁵. Les difficultés soulevées par le recours à la notion de bivecteur dans la construction de la solution de Peano n'ont pas échappé à Lebesgue qui va, comme nous le verrons, adresser quelques remarques contre la définition de Peano.

II.4.5. La contribution de Lebesgue

Nous allons commencer par exposer le point de vue de Lebesgue sur les différentes définitions de l'aire proposées jusque là. Le problème de la définition de l'aire, bien qu'assez

⁹¹ Sébastien Gandon citant [Peano 1890, p. 57] : « *l'orientation du bivecteur d'une portion infinitésimale de surface est celle du plan tangent ; et le rapport de sa grandeur à l'aire de cette portion est l'unité* ». (Gandon 2008, p.20).

⁹² Nous renvoyons à ce propos à [Peano 1888] ou [Burali-Forti 1897].

⁹³ Il s'agit bien de propriétés géométriques intrinsèques à la courbe.

⁹⁴ Il faut entendre des surfaces que l'on peut décomposer, à une partie négligeable près, en morceaux au plus dénombrables de surface ayant en tout point un plan tangent variant de façon continue avec le point de contact.

⁹⁵ L'image est due à Lebesgue.

travaillé, n'a pas, selon Lebesgue, reçu une solution satisfaisante. En effet, ainsi qu'il le souligne dans sa note *Sur la définition de l'aire des surfaces* :

On définissait autrefois l'aire d'une surface S comme étant la limite des aires d'une suite de surfaces polyédrales inscrites dans la surface S et tendant vers elle. M. Schwarz⁹⁶ a montré que cette définition est inacceptable. Depuis cette remarque de M. Schwarz, bien des définitions ont été proposées.

Celle de M. Minkowski mise à part, toutes ces définitions font dériver la notion d'aire d'une surface S de la considération de surfaces polyédrales voisines de S . Quelques auteurs ont employé des surfaces polyédrales discontinues, voir par exemple les définitions proposées par Hermite et M. Peano⁹⁷, ce qui a l'inconvénient de ne pas faire ressortir l'analogie des sens mathématique et vulgaire du mot aire. La plupart des auteurs ont considéré des suites de surfaces polyédrales inscrites dans la surface à mesurer mais, pour que les aires de ces surfaces aient une limite, ils les assujettissaient à des conditions supplémentaires que les angles des faces ne tendent pas vers zéro, que les angles des plans des faces avec les plans tangents tendent vers zéro, etc.⁹⁸. Ces définitions sont très artificielles, les restrictions qu'on s'impose ne se justifient que parce qu'elles conduisent bien à un nombre limite; de plus il n'est nullement évident que d'autres restrictions ne conduiraient pas à un autre nombre limite tout aussi intéressant. Mais en réalité, tant qu'on se limite aux surfaces définies par des fonctions à dérivées partielles continues, ce que l'on fait toujours, on sait à l'avance la valeur de l'aire, car on n'accepterait pas comme valable une définition qui ne fournirait pas pour aire l'intégrale double classique. Aussi, si l'on n'a pas de définition naturelle à proposer, serait-il plus franc de prendre l'intégrale pour définition de l'aire et de chercher ensuite une propriété géométrique de cette intégrale en reprenant en sens inverse l'un des raisonnements qui permet d'arriver à cette intégrale en partant d'une des définitions géométriques précédemment indiquées. (Lebesgue 1908, p.212).

⁹⁶ Voir une lettre de Schwarz à Genocchi reproduite dans le cours d'Analyse lithographié d'Hermite, 1882. Une observation identique a été faite par Peano (Atti dei Lincei, 1890).

⁹⁷ Voir la note citée de Peano. En réalité la définition de Peano ne fait pas intervenir des surfaces polyédrales voisines de la surface à mesurer, mais des surfaces formées d'aires planes.

⁹⁸ Au sujet de ces définitions, voir la note de M. Peano. Tout récemment M. Cartan vient de proposer une définition du même genre (Comptes Rendus, 1907).

Ainsi donc, du point de vue de Lebesgue, aucune des définitions qui ont été proposées après l'erreur de Serret, échappant pourtant à l'objection de Schwarz, ne répond de façon satisfaisante au problème posé. Selon Lebesgue, ces définitions présenteraient l'inconvénient de ne pas faire ressortir l'analogie des sens mathématique et usuel du mot aire, pour les unes, et d'être assujetties à des conditions supplémentaires que rien ne particularise, pour les autres. Pour avoir plus de détails sur les conditions que certains auteurs imposent aux surfaces polyédrales inscrites, nous renvoyons à [Fréchet 1939, p. 289]. Pour notre part, nous allons essayer de dégager ce que le mathématicien français reproche à la définition de Peano.

Dans [Lebesgue 1902, p. 272-273], on lit:

1. *[La définition due à M. Peano] n'est vraiment intéressante que si l'on peut sur la surface tracer assez de ces contours C pour qu'il soit possible de diviser la surface en morceaux de diamètres aussi petits que l'on veut et dont les frontières sont des courbes C ; dans ce cas seulement l'aire dépend de la forme de toutes les parties de la surface. Cette condition est remplie par exemple si la surface a des tangentes variant de façon continue.*
2. *Les courbe C forment un ensemble dont la puissance est celle du continu, alors que l'aire est définie comme limite supérieure d'un ensemble de nombres dont la puissance est celle du continu. Pour calculer l'aire, il faut, dans cet ensemble, isoler une infinité dénombrable de nombre tendant vers la limite supérieure [...]. Mais il n'est pas toujours évident que l'on puisse toujours atteindre par une infinité dénombrable d'opérations le nombre que définit M. Peano ; aujourd'hui qu'on ne connaît rien d'autre sur ce nombre que son existence.*

La première remarque de Lebesgue est tout à fait comparable à celle que nous avons déjà faite dans notre analyse de la solution de Peano à propos de la classe des surfaces qui tombent sous la définition de l'auteur de *Calcolo geometrico*. Quant à la deuxième remarque, elle est plus compliquée. Dans le même temps qu'elle pourrait laisser entendre une sorte de refus de ce qui n'est pas dénombrable, elle exprime que la définition de Peano n'est pas effective, voire inutilisable. Pour autant, Lebesgue reconnaît que la solution de Peano ne fait pas appel à des restrictions artificielles et qu'elle ne fait pas intervenir de plan extérieur à la surface visée. C'est dire qu'il reconnaît que la définition de son collègue italien est géométriquement intrinsèque. Mais, nous l'avons dit, les deux mathématiciens ont des approches géométriques

différentes. Nous avons pu constater, et Gandon le souligne aussi⁹⁹, que, par exemple, Lebesgue ne fait aucune référence au calcul géométrique de Peano. À cette remarque, on peut ajouter qu'il ne fait aussi aucun usage du langage employé par ce dernier. Lorsqu'il présente l'approche de Peano, Lebesgue n'utilise que des concepts de géométrie élémentaire : « *Soit une courbe gauche fermée C , on démontre, au moins dans des cas simples, qu'il existe une courbe plane fermée c telle que sur tout plan les projections orthogonales de C et de c limitent des aires égales ; à chaque courbe C on attache le nombre qui représente l'aire du domaine plan limité par c* ». (Lebesgue 1902, p.272). Il ne fait pas de doute que le domaine plan limité par c dont il est question dans le texte de Lebesgue n'est pas autre chose que le bivecteur de la courbe C .

Lebesgue était à l'évidence tout à fait conscient à la fois des difficultés rencontrées par tous ceux qui se sont penché sur le problème de la définition de l'aire et de la portée de ses remarques contre les définitions qu'ils ont donné, et particulièrement contre celle de Peano. La tâche qui se présente dès lors à Lebesgue consiste à proposer une solution au problème de la définition de l'aire échappant à ses propres objections contre les définitions données jusque là, sans s'exposer à d'autres remarques.

La solution de Lebesgue

La première préoccupation de Lebesgue était de conserver l'analogie entre rectification et quadrature. Aussi, pour mettre en avant l'analogie en question eut-il soin, dans sa *Thèse*, soutenue en 1902, de commencer par modifier la définition de la longueur d'une courbe utilisée jusque là¹⁰⁰. Le tableau suivant montre les efforts de Lebesgue pour mettre en évidence l'analogie entre rectification et quadrature tels qu'on les saisit dans [Lebesgue 1902, p. 258]:

⁹⁹ Voir [Gandon 2008, p.26].

¹⁰⁰ La longueur d'une courbe est la limite des longueurs des lignes polygonales inscrites dont la plus grande des longueurs des côtés tend vers 0.

<ol style="list-style-type: none"> 1. Il existe des courbes planes ayant des longueurs finies. 2. Deux courbes égales ont même longueur. 3. Une courbe somme de plusieurs autres a pour longueur la somme des longueurs des courbes composantes. 4. La longueur d'une courbe C est la plus petite limite des longueurs des courbes polygonales dont C est la limite. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Il existe des surfaces planes ayant des aires finies. 2. Deux surfaces égales ont même aire. 3. Une surface somme de plusieurs autres a pour aire la somme des aires des surfaces composantes. 4. L'aire d'une surface S est la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales dont S est la limite.
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Ici, l'auteur insiste sur le fait que l'analogie entre rectification et quadrature est ainsi établie. Les propriétés attribuées à la longueur d'une courbe possèdent leur exacte contrepartie dans la définition de l'aire d'une surface. Les deux colonnes du tableau s'obtiennent l'une de l'autre en échangeant *courbe* et *surface*, *longueur* et *aire*, *polygonale* et *polyédrale*.

Maintenant, il s'agit de savoir comment Lebesgue parvient à sa définition. Compte tenu de la large diffusion de la *Thèse* de Lebesgue et des rectifications apportées par l'auteur à propos d'inexactitudes¹⁰¹ sur le problème des aires présentes dans sa Thèse, compte tenu du recul certain de l'auteur par rapport à sa propre réflexion et à celle des autres sur le sujet, nous nous référerons pour l'essentiel à [Lebesgue 1908] et [Lebesgue 1934].

L'explication que le mathématicien français avance pour son propre compte dans [Lebesgue 1938, p. 285] consiste à remarquer qu'il était en quelque sorte obligé d'adopter les définitions de la longueur et de l'aire énoncées dans le tableau supra. Selon l'auteur, l'ensemble formé par les limites des aires (longueurs) des surfaces polyédrales (lignes polygonales) tendant vers une surface S (courbe C) admet un plus petit élément a_0 (l_0) et c'est le seul nombre qui se distingue des autres, du moins, parmi toutes les limites de surfaces (longueurs). Dès lors, il suffit de déterminer l'ensemble des limites de surfaces (longueurs), qui est le compte rendu complet des résultats de la recherche de ces limites.

La deuxième obligation à laquelle Lebesgue doit soumettre sa définition est son caractère géométriquement intrinsèque. Pour ce faire, il fait appel à des surfaces polyédrales,

¹⁰¹ Voir, par exemple, les Notes de 1903 (tome 31, pp. 197-203) et 1905 (tome 33, pp. 273-274) publiées dans le Bulletin de la SMF.

approchant à volonté la surface visée, continues mais non nécessairement inscrites. Lebesgue établit, en toute rigueur, aux paragraphes 59 à 62 de sa *Thèse* qu'étant donné une surface quarrable S , il est toujours possible de construire une suite dénombrable de surfaces polyédrales qui tendent vers S et dont les aires tendent vers celle de S . Lebesgue répond ainsi à la deuxième objection adressée contre la définition de Peano. D'autre part, Lebesgue démontre que toute surface quarrable peut être partagée en deux parties par une courbe quarrable et, en conséquence, en un nombre fini de parties par des courbes quarrables d'aires minima¹⁰². Chaque partie ayant un diamètre aussi petit que l'on veut. Il répond ainsi à la première objection adressée à Peano.

Dans sa *Thèse*, Lebesgue, on l'a vu, définit l'aire d'une surface S comme *la plus petite des limites des aires d'une suite de surfaces polyédrales qui tendent vers S* , c'est-à-dire :

$aire(S) = \inf_{P_n \in P} [\lim_{n \rightarrow \infty} \inf aire(P_n)]$, où P est l'ensemble des suites des surfaces polyédrales tendant vers S et $aire(P_n)$ est l'aire élémentaire de P_n .

L'argument intuitif sous-jacent à la justification de cette définition, d'usage naturel et constant chez Lebesgue, s'exprime par l'idée que pour mesurer l'aire d'une surface, on mesure l'aire d'une surface plus simple, en l'occurrence une surface polyédrale voisine. L'auteur insiste ici sur le fait que cette définition présente l'avantage de pouvoir être utilisée en géométrie élémentaire et en analyse. Pour justifier sa définition, Lebesgue considère, dans [Lebesgue 1908, p.214], *une suite de surfaces polyédrales S_1, S_2, \dots , correspondant point à point d'une façon continue et biunivoque à S , et tendant vers S* ¹⁰³. Les surfaces S_1, S_2, \dots , sont choisies de manière que leurs aires A_i tendent vers une limite A . Chacune des surfaces S_i est divisée en triangles T_i de côté plus petit que $\frac{1}{i}$. L'idée ingénieuse de Lebesgue, saisie en cet endroit de son exposé, consiste à se donner un nombre quelconque B plus grand que A et de remplacer chaque triangle T_i par la surface latérale d'un tétraèdre à dièdres aigus ayant le triangle T_i pour base et tel que le rapport de l'aire de la surface latérale à celle de la base soit égal à $\frac{B}{A}$. En remarquant¹⁰⁴ que la hauteur du tétraèdre est inférieure à $\frac{B}{A} \times \frac{1}{i}$, l'auteur conclut que la surface Σ_i , formée par les surfaces latérales des tétraèdres construits sur les triangles T_i

¹⁰² L'aire minima d'une courbe fermée est la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales dont les frontières tendent vers la courbe considérée.

¹⁰³ Entendre que les surfaces S_i et S sont homéomorphes.

¹⁰⁴ Lebesgue ne justifie pas l'inégalité énoncée. Nous faisons remarquer cependant que, h étant la hauteur du tétraèdre, l'aire de chacune des faces latérales est supérieure à $\frac{h}{3 \times i}$ alors que celle de la base est inférieure à $\frac{i^2}{2}$. Il s'ensuit que $\frac{B}{A} \geq 3 \times h \times i$ et donc $h \leq \frac{B}{A} \times \frac{1}{i}$.

, tend vers S en même temps que S_i . Lebesgue fait remarquer au passage que Σ_i correspond point à point à S_i et donc à S . Il conclut alors que B est, au même titre que A , une limite d'aires de surfaces polyédrales tendant vers S . Enfin, dans les termes mêmes de Lebesgue :

L'ensemble de ces nombres limites d'aire est donc formé de tous les nombres égaux ou supérieurs à un certain nombre a qui définit l'ensemble et qui est le seul qui soit attaché simplement et naturellement à cet ensemble. C'est donc a qu'on doit prendre pour aire.

Ainsi, on appellera aire d'une surface S la plus petite des limites des aires des surfaces polyédrales tendant vers S . (Lebesgue 1908, p. 215).

La solution à laquelle Lebesgue parvient répond de manière adéquate au besoin de généralité et aux exigences des Géomètres et évite, dans le même temps, l'erreur de Serret. D'abord, la définition de Lebesgue est géométriquement intrinsèque et se justifie totalement par la géométrie élémentaire. Ensuite, l'idée de tétraèdre¹⁰⁵ s'est avérée d'une grande efficacité dans la construction de la solution de Lebesgue. Contrairement à Serret, en augmentant le nombre de faces des surfaces polyédrale S_i et en définissant celles Σ_i formées par les surfaces latérales des tétraèdres basés sur les triangulations des surfaces S_i , Lebesgue obtient des polyèdres à faces triangulaires qui approchent, à la fois, en position et en direction la surface S . Enfin, le fait d'imposer aux tétraèdres d'avoir des angles dièdres aigus n'est pas du tout restrictif ; mais assure l'homéomorphie des surfaces Σ_i et S_i . C'est précisément le sens de la correspondance point à point de façon biunivoque et continue entre les surfaces polyédrales en question.

Par ailleurs, il ne fait pas de doute que Lebesgue avait en vue de résoudre le problème posé par Jordan à propos de l'analogie entre définition de la longueur et celle de l'aire. En fait, la situation véritable était la suivante : on savait qu'une courbe C représentée paramétriquement par $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ est rectifiable si, et seulement si, les trois fonctions $x(t)$; $y(t)$; $z(t)$ sont à variation bornée et que si, de plus, ces fonctions sont dérivables et leur dérivées ne s'annulent pas à la fois sur l'intervalle $[a, b]$ du paramètre t , alors la longueur de la courbe C est donnée par l'intégrale classique $\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$. Réciproquement, si cette dernière intégrale existe, la courbe est rectifiable et l'intégrale mesure sa longueur. Le problème de Jordan sur les surfaces peut être formulé comme suit:

¹⁰⁵ L'idée de tétraèdre est la pierre angulaire du calcul géométrique de Peano. Ce dernier a, en effet, fondé son calcul sur le volume du tétraèdre. Lebesgue en faisait un usage radicalement différent.

étant donné une surface S définie par $x = x(u, v)$; $y = y(u, v)$; $z = z(u, v)$, comment caractériser les fonctions $x; y; z$ pour que la surface S soit quarrable ? Et ensuite, à quelles conditions l'intégrale $\iint \sqrt{\left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right]^2} du dv$ existe ? Et quand elle existe, représente-t-elle l'aire de la surface S ?

En fait, le problème de Jordan va vite se révéler riche et difficile à tous ceux qui se sont penchés sur la question. Pour sa part, Lebesgue reconnaît dans sa *Thèse* ne pas savoir le résoudre laissant ainsi le problème ouvert. Toutefois, le mathématicien français insiste sur le fait que la définition de l'aire qu'il propose est entièrement analogue à celle proposée pour la longueur d'une courbe et montre, par exemple dans [Lebesgue 1908, pp.216-217], comment on peut l'utiliser en géométrie élémentaire pour la mesure des surfaces classiques convexes, et en analyse pour la mesure de surfaces définies analytiquement soumises, comme on le sait, à des restrictions assez fortes. Citons Lebesgue :

1. Soit $z = f(x, y)$ une surface S , f est définie pour un domaine quarrable D du plan des (x, y) et y admet des dérivées partielles du premier ordre finies et continues. On a : aire (S) = $\iint \sqrt{1 + f'_x{}^2 + f'_y{}^2} dx dy$ (Lebesgue 1908, p.218).
2. Soit une surface Γ donnée en coordonnées rectangulaires par trois fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Nous supposons x, y, z fonctions continues de u et v ainsi que leurs dérivées partielles premières et de plus nous admettrons que la représentation paramétrique n'est singulière en aucun point. Dans ces conditions Γ a en tout point un plan tangent variant de façon continue avec le point de contact. Nous supposons le domaine Δ ¹⁰⁶ obtenu en faisant varier le point de coordonnées rectangulaires u, v dans un domaine δ appartenant à la famille de ceux auxquels nous avons appris à attacher une aire :

$$\text{aire} (\Delta) = \iint \sqrt{\left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right]^2} du dv. \text{ (Lebesgue 1934, p. 204).}$$

II.4.6. Comparaison des démarches de Peano et de Lebesgue

Quand on étudie *Calcolo geometrico* de Peano et *Sur la mesure des grandeurs* de Lebesgue, on saisit aussitôt, du moins de notre point de vue, deux différences fondamentales. La première et la plus considérable, qui concerne leur approche géométrique, est d'ordre

¹⁰⁶ Δ est une portion de la surface Γ .

philosophique: les deux mathématiciens ont des conceptions totalement différentes de la géométrie. Peano, on l'a vu, en développant les éléments du calcul géométrique suivant la méthode de Grassmann, cherchait à reconfigurer les concepts de la géométrie élémentaire via la notion de formes géométriques et en substituant au concept de figure des entités géométriques abstraites, notamment les vecteurs et les bivecteurs. Peano cherchait surtout à utiliser le calcul géométrique pour tenter de construire un système abstrait des grandeurs géométriques. En revanche, en écrivant dans [Lebesgue 1934, p. 188] : « *pour nous qui regardons les mathématiques comme une science appliquée* », Lebesgue se présente ouvertement comme un mathématicien appliqué. Se passionnant pour la géométrie élémentaire, le mathématicien français est très attaché à la dimension intuitive et pratique de la géométrie. Il n'hésite pas à se référer à des modèles de surface réalisés avec du papier, à l'art du cartonnier et aux techniques d'arpentage. L'insistance sur la dimension intuitive et pratique de la géométrie est omniprésente chez Lebesgue, c'est une composante fondamentale de sa pensée. Pour autant, le recours à l'intuition mathématique et la référence à des modèles empiriques n'affecte pas la dimension théorique et le caractère rigoureux de la démarche du mathématicien français. L'intérêt des modèles empiriques tient pour l'essentiel au fait qu'ils rendent compte de la dimension concrète des mathématiques. Marc Troyanov¹⁰⁷ rapporte que suite à un cours de Darboux où il montre que toute surface développable dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3 est une surface réglée, Lebesgue posa sur la table un mouchoir froissé : *ce mouchoir est une surface développable ; elle n'est pas réglée*. C'est que Lebesgue observait que dans la nature les surfaces sont rarement lisses. Il serait peut être intéressant d'étudier plus avant le concept de surface et nous interroger à la suite de Marc Troyanov s'il est possible de concilier la géométrie différentielle lisse de Darboux et la géométrie froissée de Lebesgue. Existe-t-il une théorie non triviale englobant toutes les surfaces envisageables ? Troyanov donne dans [Troyanov 2009] une esquisse de la solution qu'Alexandrov a donnée dans ses travaux sur les surfaces entre les années 1940 et 1970. Mais il s'agit là d'une question qui déborde le cadre de ce chapitre. En effet, cette question n'est pas celle du problème de la définition de l'aire, mais celle de la caractérisation des surfaces applicables sur un plan.

La deuxième différence entre les deux mathématiciens, non moins considérable que la première, est d'ordre didactique. Lebesgue accorde une place assez large aux problèmes pratiques. Il procède du concret à l'abstrait en multipliant les explications et les justifications.

¹⁰⁷ <http://arxiv.org/abs/0906.3407v1>[Math DG]. 18 Juin 2009.

Il s'astreint à ne rien admettre sans démonstration et à expliciter les idées sous-jacentes à sa démarche. Tout au contraire, Peano procède de l'abstrait au concret. Il propose à la fin de chaque chapitre des applications en mécanique et en géométrie. Son exposé est souvent formel et manque à la fois d'explications et de justifications. À ces différences, il s'en ajoute une autre plus considérable. Contrairement à Peano, qui semble ne pas attacher une importance particulière à la dimension didactique dans son exposé, Lebesgue prend sérieusement à tâche cette dimension. Il déploie des efforts considérables pour préciser ce qui peut être fait, mais aussi ce qui ne doit pas l'être, dans chaque niveau de l'enseignement élémentaire à l'enseignement supérieur.

II.4.7. Solution du problème de Jordan

Commençons d'abord par rappeler le problème de Jordan : étant donné une surface S définie par les équations $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$, on cherche une caractérisation des fonctions f , g , h pour lesquelles la surface S est quarrable.

Lebesgue, on l'a dit, n'est pas parvenu à solutionner le problème de Jordan et sa définition de l'aire ne permet pas une caractérisation des fonctions f , g , h . Dans un Mémoire publié en 1925 et intitulé *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie*, le mathématicien polonais Stefan Banach (1892-1945) construit une notion d'aire¹⁰⁸ à partir des fonctions à variation bornée en introduisant ce qu'on appelle actuellement la *fonction banachienne de multiplicité* $N(t)$ (Banach multiplicity function), appelée aussi *indicatrice de Banach*¹⁰⁹. Dans [Banach 1925, p. 151], l'auteur établit le théorème suivant :

Théorème.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue $f(x)$ soit à variation bornée est que $N(t)$ soit intégrable au sens de Lebesgue. Si f est à variation bornée, la variation totale de $f(x)$ est égale à $\int_{-\infty}^{+\infty} N(t)dt$.

¹⁰⁸ Banach définit la fonction d'ensemble $F_1(E)$ comme suit : si E est un ensemble mesurable (B), on désigne par E_{xy} (resp. E_{yz} ; E_{xz}) l'ensemble dans le plan xy (resp. yz ; xz) en lequel est transformé l'ensemble E par les fonctions $x = f(u, v)$ et $y = g(u, v)$ (resp. $y = g(u, v)$ et $z = h(u, v)$; $x = f(u, v)$ et $z = h(u, v)$), et l'on pose alors $F_1(E) = \sqrt{|E_{xy}|^2 + |E_{yz}|^2 + |E_{xz}|^2}$. Si $F_1(E)$ est à variation bornée, l'aire de Banach d'une portion de surface S définie par les équations $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$ ($0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$) est la variation totale de la fonction $F_1(E)$.

¹⁰⁹ f étant une fonction donnée, l'indicatrice de Banach notée $N(f, t)$, ou plus simplement $N(t)$, désigne le nombre de solutions de racines x de l'équation $f(x) = t$, s'il est fini, et $+\infty$, sinon.

Banach consacre ensuite deux paragraphes au transfert des résultats sur les fonctions d'une variable et sur la *rectifiabilité* des courbes dans le domaine des transformations continues d'ensembles plans et dans celui de la *planification des surfaces*. À l'issue de ce travail, Banach énonce sa solution au problème de la caractérisation des courbes rectifiables et des surfaces quarrables:

1. Soit l un arc simple défini par les fonctions continues $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ ($0 \leq t \leq 1$). En désignant par $N_x(l, t)$ et $N_y(l, t)$ le nombre de points en lesquels l'arc l est intersecté respectivement par la droite $x = t$ et la droite $y = t$ et en faisant remarquer les égalités $N_x(l, t) = N(t, f)$ et $N_y(l, t) = N(t, \varphi)$, Banach énonce le théorème suivant :

Une condition nécessaire et suffisante pour que l soit rectifiable est que les fonctions f et φ soient à variation bornée, ou de façon équivalente que les fonctions $N(t, f)$ et $N(t, \varphi)$ soient intégrables au sens de Lebesgue. (Banach 1925, p.157).

2. Soit S une portion de surface dans l'espace à trois dimensions (vue comme image biunivoque et continue d'un carré), définie par les fonctions continues supposées injectives : $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$ ($0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$).

En désignant par $N_{xy}(s, t, S)$ le nombre de points en lesquels la droite $x = s$, $y = t$ et parallèle à l'axe oz rencontre la surface S , et en définissant de façon analogue les fonctions $N_{yz}(s, t, S)$ et $N_{xz}(s, t, S)$, Banach énonce le théorème suivant :

Une condition nécessaire et suffisante pour que la portion de surface S ait une aire finie est que les fonctions $f(u, v)$, $g(u, v)$, $h(u, v)$ soient à variation bornée, ou de façon équivalente que les fonctions $N_{xy}(s, t, S)$, $N_{yz}(s, t, S)$ et $N_{xz}(s, t, S)$ soient intégrables au sens de Lebesgue. (Banach 1925, p. 158).

Laurent Gruson (1963) précise notamment que Lamberto Cesari démontre dans *Sulle trasformazioni continue*¹¹⁰ que la notion d'aire construite par Banach ne coïncide pas avec la définition de Lebesgue. Quoi qu'il en soit, au sens de l'aire de Banach, l'analogie entre rectifiabilité des courbes et planification des surfaces est rigoureusement respectée.

Dans son article *Comment mesurer les surfaces* [Mayer, 2006, p. 23] publié à la suite de sa conférence¹¹¹ intitulée « *Pourquoi Lebesgue essayait de mesurer les surfaces, et n'y arrivait pas ?* », l'auteur présente Leonida Tonelli comme celui qui répondit en 1926 au problème

¹¹⁰ Annali di math. Pura ed appl., série 4, t. 21, 1942, p. 157- 188.

¹¹¹ Conférence donnée le 11 janvier 2006 à la BNF. Cette conférence est la première des quatre du cycle « Un texte, un mathématicien » organisé par la BNF, la SMF et la revue Tangente pour l'année 2006.

posé par Jordan. Mais avant de présenter la solution de Tonelli, commençons par rappeler quelques notions utiles pour la bonne compréhension des résultats qui vont suivre. Dans [Gandon 2008, p. 31], l'auteur cite dans les termes mêmes de Tonelli :

On a proposé plusieurs définitions pour l'aire d'une surface. La plus générale ... est la définition donnée par M. Lebesgue : L'aire d'une surface S est la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales dont S est la limite. Je me bornerai ici aux surfaces $z = f(x, y)$ où $f(x, y)$ est une fonction continue donnée dans le carré $Q = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Je dirai qu'une fonction $f(x, y)$ est à variation bornée si :

1. *Pour presque toutes les valeurs de \bar{x} et \bar{y} dans $(0, 1)$, $f(\bar{x}, y)$ et $f(x, \bar{y})$ sont des fonctions de y et de x , respectivement à variation bornée dans $(0, 1)$.*
2. *Les variations totales de $f(\bar{x}, y)$ et $f(x, \bar{y})$ dans $(0, 1)$ sont des fonctions intégrables (au sens de M. Lebesgue) de \bar{x} et \bar{y} dans $(0, 1)$.*

Je dirai que la fonction $f(x, y)$ est absolument continue dans Q si :

1. *Pour presque toutes les valeurs de \bar{x} et de \bar{y} dans $(0, 1)$, $f(\bar{x}, y)$ et $f(x, \bar{y})$ sont respectivement des fonctions de y et de x absolument continues¹¹² dans $(0, 1)$.*
2. *Les variations totales de $f(\bar{x}, y)$ et $f(x, \bar{y})$ dans $(0, 1)$ sont des fonctions intégrables de \bar{x} et de \bar{y} dans $(0, 1)$.*

Ainsi, Tonelli introduit une nouvelle définition des fonctions à variation bornée¹¹³. Avant cette définition, une fonction à variation bornée était caractérisée comme étant la différence de deux fonctions croissantes et la généralisation de cette propriété aux fonctions de deux variables ne permet pas de caractériser les surfaces quarrables. En revanche, en considérant les variations totales $V_y(x)$ et $V_x(y)$ des fonctions $f(\bar{x}, y)$ et $f(x, \bar{y})$ dans $(0, 1)$, Tonelli

¹¹² Soit f une fonction partout définie sur un intervalle $[a, b]$ et $[a_n, b_n]$ une suite arbitraire de sous-intervalles disjoints de $[a, b]$. On dira que f est absolument continue sur $[a, b]$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\sum_n (b_n - a_n) < \delta \Rightarrow \sum_n |f(b_n) - f(a_n)| < \varepsilon$.

¹¹³ Concrètement, considérons une fonction $f(x, y)$ définie et continue dans Q et dont le graphe $\Gamma = \{z = f(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ admet une aire finie au sens de Lebesgue. Supposons que la fonction f soit définie sur tout le plan et notons Γ' le translaté de Γ parallèlement à l'axe des x suivant un vecteur u et $V(u)$ le volume compris entre les deux graphes Γ et Γ' . Alors une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit à variation bornée est qu'il existe une constante C telle que $V(u) \leq C|u|$, pour tout vecteur u de direction celle de l'axe des x .

ramène le problème des fonctions à variation bornée en deux variables à celui des fonctions à variation bornée en une seule variable.

D'autre part, la notion de fonctions absolument continues renvoie à la théorie de l'intégration. On sait que dans le cadre général de l'intégrale de Lebesgue, une fonction L^1 est égale presque partout à la dérivée de son intégrale. En revanche, une fonction F presque partout dérivable n'est pas toujours égale à l'intégrale de sa dérivée. C'est ce que nous enseignons, par exemple, l'escalier de Cantor. La notion de continuité absolue permet d'avoir des résultats satisfaisants sur cette question. En effet, se placer dans l'espace des fonctions absolument continues assure que les fonctions utilisées coïncident avec l'intégrale de leur dérivée¹¹⁴. Après la présentation des outils ayant servi dans la solution de Tonelli, nous donnons le résultat principal du mathématicien italien tel qu'il est énoncé dans [Saks, 1933]:

Théorème de Tonelli

- a) *Pour qu'une surface continue $z = \omega(x, y)$ définie dans un rectangle I_0 ait une aire finie il faut et il suffit que la fonction $\omega(x, y)$ soit à variation bornée dans I_0 .*
- b) *Si elle l'est, on a :*

La condition nécessaire et suffisante pour que la surface $z = f(x, y)$ ait une aire finie est que la fonction $f(x, y)$ soit à variation bornée. De plus, si elle l'est alors

$$L(f, I_0) \geq \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy^{115} \text{ et l'égalité a lieu si et seulement si}$$

la fonction $f(x, y)$ est absolument continue dans le rectangle I_0 .

Il est notamment important de souligner que les travaux de Tonelli sur l'aire des surfaces gauches ont donné des résultats particulièrement remarquables et à plusieurs égards définitifs. Pour autant, ils n'ont pas mis un point final aux travaux sur la notion d'aire qui continue de soulever d'autres problèmes qui pourront faire l'objet d'un autre travail.

¹¹⁴ Une fonction F est absolument continue sur $[a, b]$ si, et seulement si, il existe une fonction f intégrable sur $[a, b]$ (au sens de Lebesgue) telle que pour tout $x \in [a, b]$, $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$. De plus, une fonction absolument continue est à variation bornée (donc dérivable presque partout) et vérifie la propriété N de Lusin (l'image de tout ensemble de mesure nulle (pour la mesure de Lebesgue) est de mesure nulle). Réciproquement, si F est continue, à variation bornée et vérifie la propriété N de Lusin, alors elle est absolument continue.

¹¹⁵ Par $L(f, I_0)$, il faut entendre la limite inférieure des aires élémentaires des polyèdres tendant uniformément vers la surface $z = f(x, y)$.

II. 5. Conclusion de la première partie

En conclusion on aura donc vu que la notion moderne d'aire ne s'est dégagée de la géométrie élémentaire que suite au développement des théories des nombres réels et des ensembles. Nous avons vu, dans la première partie, que pour calculer l'aire de certaines surfaces, les mathématiciens utilisaient des techniques construites *ad hoc* qui s'appuient principalement sur la stratégie d'inscription et de circonscription. En fait, l'étude permet de constater que, jusqu'à la création du calcul infinitésimal par Newton et Leibniz, ces techniques sont motivées par les besoins du calcul plutôt que par un questionnement sur le sens mathématique des notions utilisées. Si l'on nous accorde que le sens mathématique est étroitement lié à la conception que l'on a des objets mathématiques et de leurs définitions, on en arrive à déceler des causes possibles de lenteur dans l'élaboration théorique de la notion d'aire. En effet, jusqu'alors les mathématiciens ne prenaient pas vraiment (ou très peu) position sur la nature exacte des objets mathématiques qu'ils manipulaient dont notamment les courbes, les surfaces, les solides et les grandeurs correspondantes. Concrètement, ces objets sont matérialisés par des figures et leurs définitions ressemblent plus à des descriptions qu'à des outils utiles au développement théorique. Ajoutons ici que le long de cette première période, ces objets sont toujours lisses, compacts et connexes. Mais quoi qu'il en soit, ces méthodes calculatoires ont fortement inspiré beaucoup de travaux, notamment sur la notion d'intégrale et sur la *mesure des ensembles*.

Les premiers développements de la notion de mesure, initiés par Peano et Jordan et continués par Borel et Lebesgue tirent leurs outils de base de la méthode archimédienne en utilisant toutefois l'idée d'inscription et de circonscription de manière à ce qu'elle s'applique à une classe d'ensembles la plus large possible, le critère de mesurabilité étant l'identité entre mesure extérieure et mesure intérieure. La notion de mesure ainsi construite se comporte de façon satisfaisante lorsqu'on passe de la longueur des lignes polygonales aux courbes ou de l'aire des surfaces polygonales aux surfaces planes. En fait, dans la définition de la longueur d'une courbe et dans celle de l'aire d'une surface plane, on n'a plus considéré que les lignes et les surfaces polygonales inscrites. En revanche, dans le cas des surfaces gauches, le passage de l'aire des surfaces polyédrales à des surfaces plus générales se révèle plus compliqué. L'erreur de Serret et le problème de Jordan sont très riches d'enseignement. Lorsque Schwarz a fait connaître son objection contre la définition

de Serret, en donnant l'exemple du lampion qui porte son nom, on a dû proposer diverses définitions échappant à cette objection. Mais ces définitions ne répondent pas pleinement au besoin de généralité des géomètres de l'époque. Selon Lebesgue, on cherchait une définition de l'aire ayant une étendue d'application comparable à celle de la définition de la longueur obtenue par Jordan. La définition d'Hermite n'est pas satisfaisante à cause de son caractère extrinsèque, en ce sens qu'elle fait appel, de manière fondamentale, à un plan extérieur à la surface étudiée. D'autres définitions comme celles proposées plus tard par Young, Rademacher et Kempisty sont considérées comme artificielles à causes des restrictions imposées au choix des surfaces polyédrales inscrites. Ce fut Peano, le premier, à obtenir une définition rigoureuse et géométriquement intrinsèque analogue en tout point à celle de la longueur. Mais cette définition de Peano n'a pas échappé aux critiques de Lebesgue. Comme bien souvent en mathématique, il est ici difficile, voire malaisé, de séparer les divergences sur l'interprétation des concepts : les formes géométriques, et notamment la notion de bivecteur, qui sont d'un usage constant chez Peano ne sont pas tout à fait les figures de la géométrie élémentaire auxquelles Lebesgue se réfère. De son côté, Lebesgue s'attache particulièrement à l'emploi de procédés au plus dénombrables et critique le recours au procédé transfini utilisé par Peano dans la construction du bivecteur d'une courbe fermée. C'est précisément l'emploi à la fois d'éléments de la géométrie élémentaire et de procédés au plus dénombrable qui a donné à la définition de Lebesgue l'avantage d'être plus accessible et plus naturelle. Mais ces mêmes outils ne lui ont pas permis de solutionner le problème de Jordan et de donner une caractérisation des surfaces d'aire finie. On a dû faire appel à d'autres outils, notamment les notions de fonctions à variation bornée et d'absolue continuité, pour obtenir une solution au problème de Jordan: *« c'est à M. Tonelli que l'on doit les plus beaux et les plus complets résultats concernant ces surface »* (Saks, 1933, p. 10).

En poussant plus avant l'examen des différentes définitions proposées, on identifie, pour l'essentiel, deux tendances dominantes. La première consiste à traiter l'aire comme une fonctionnelle semi-continue inférieurement¹¹⁶, comme chez Lebesgue, ou supérieurement comme chez Peano et Geöcze, qui coïncide avec l'aire attachée dans la géométrie élémentaire aux surfaces polyédrales. Il convient de souligner ici

¹¹⁶ Pour toute surface continue S et pour toute suite de surfaces continues S_n tendant vers S : $A(S) \leq \liminf_n [A(S_n)]$, où A est l'aire de Lebesgue.

que ce dernier résultat, répondant à une attente naturelle vis-à-vis de l'aire d'une surface, est démontré dans [Cesari, 1956]. La seconde tendance, celle qui est en œuvre dans les travaux d'Hermite, de Banach et de Tonelli, entre autres, fait appel à la méthode projective qui consiste à passer par des relations entre l'aire de la surface et celles de ses projections sur les plans du système des coordonnées cartésiennes.

Ainsi donc, dans les différents travaux cités ici, on constate que la réussite et l'échec sont fortement liés au sens mathématique et aux définitions attachés par les uns et les autres aux objets mathématiques utilisés. Plus précisément, les échecs des uns ont conduit d'autres à accorder une attention extrême à la précision du sens et des définitions dont ils font usage. Ces exigences et ce souci de rigueur permettent de voir à quel point la modification d'une définition pourrait être fondamentale quand il s'agit d'élaborer un résultat mathématique. La définition d'un ensemble mesurable, de l'aire d'une surface par Lebesgue, et la définition des fonctions à variation bornée par Tonelli sont à ce propos des exemples très instructifs.

Enfin, il importe de souligner que les travaux de Peano, Lebesgue, Banach, Tonelli, et bien d'autres ont permis à leurs auteurs d'obtenir des résultats d'un très grand intérêt dont certains sont définitifs. Pour autant, ils n'ont pas totalement élucidé les problèmes que soulève la notion d'aire. On peut, par exemple, nous interroger après Marc Troyanov : toute surface lisse est-elle limite d'une suite de surfaces polyédrales ? Toute surface polyédrale est-elle limite d'une suite de surfaces lisses ? Au sens de quelles convergences ? Quels sont les invariants géométriques qui passent à la limite pour ces convergences ? Cette dernière question est d'une importance fondamentale, quand on veut passer d'un type de surface à un autre : de la géométrie lisse de Darboux à la géométrie froissée de Lebesgue. Mais il s'agit là d'un problème difficile et ces questions débordent l'objet du présent chapitre.

Nous venons de suggérer à quel point la précision de la définition de l'aire et le sens mathématique qui lui est attaché sont importants. La réussite dans la production d'une définition générale et précise de l'aire d'une surface plane, en l'occurrence celle de Lebesgue, est le résultat de la maîtrise de l'articulation dans le cadre géométrique des registres analytique et formel. Du point de vue épistémologique, la présentation qui est donnée de l'aire d'une surface plane en classe terminale est très éloignée de la définition que Lebesgue propose. Dans l'enseignement secondaire la notion d'aire est considérée comme intuitive et facilement accessible aux élèves.

Mais, on vient de le constater, cette notion présente des difficultés redoutables dès qu'on cherche à la cerner de près. Si donc, ces difficultés ne doivent pas être révélées aux élèves, il est en même temps souhaitable qu'elles soient connues par les enseignants et encore plus par le chercheur en didactique des mathématiques.

DEUXIÈME PARTIE

ANALYSE INSTITUTIONNELLE

Introduction

Tout projet d'enseignement qui veut s'imposer comme digne d'être enseigné doit reposer sur des hypothèses quant à la nature, la structure et l'histoire du savoir à enseigner, c'est-à-dire sur une dimension épistémologique, et sur des hypothèses quant aux processus impliqués dans la construction des connaissances liées à ce savoir, c'est-à-dire sur une méthodologie d'enseignement/apprentissage. Ces hypothèses sous-tendent et orientent notre travail.

Dans ce premier chapitre, nous allons essayer de rendre compte des finalités assignées à l'enseignement de l'intégrale en classe terminale et de la démarche préconisée par l'institution scolaire tunisienne pour faire fréquenter cette nouvelle notion par les élèves. Afin de cerner ces finalités et comprendre la démarche mise en œuvre pour les atteindre, nous avons retenu d'étudier les deux dimensions suivantes :

1. Les objectifs généraux de l'enseignement des mathématiques en classe terminale,
2. Les objectifs spécifiques à l'enseignement de l'intégrale dans cette classe et le contenu disciplinaire correspondant.

L'analyse du contenu et des objectifs spécifiques de l'enseignement de l'intégrale en classe terminale doit nous dévoiler les choix de l'institution, du point de vue mathématique et du point de vue méthodologique, par rapport à l'enseignement de l'intégrale. Plus précisément, elle doit nous permettre d'identifier le contenu mathématique à enseigner, la stratégie que l'institution préconise pour l'enseigner, les compétences à faire acquérir aux élèves.

Les analyses que nous mènerons dans cette partie de notre travail s'inscrivent, avec celles menées dans la première partie de la thèse, dans la phase des analyses préalables de

l'ingénierie didactique. Elles doivent nous permettre de rendre compte de l'enseignement actuel de l'intégrale en terminale dans le système scolaire tunisien et de dégager certains de ces effets. Dans le même temps, ces analyses doivent nous permettre de répondre à nos deux premières questions de recherche.

CHAPITRE TROISIÈME

ANALYSE DES TEXTES OFFICIELS

I. Analyse du programme officiel de la classe terminale

I.1. Objectifs généraux de l'enseignement des mathématiques

Dans son préambule le texte officiel du programme actuel¹¹⁷ de la classe terminale (section Mathématiques) propose après une introduction de deux pages et avant le texte qui fixe le contenu mathématique de chaque chapitre, deux parties (d'une page chacune) intitulées :

- *Démarche et raisonnement mathématique.*
- *Communication à l'aide du langage mathématique.*

Pour rester dans le cadre de notre objet, nous nous limitons aux objectifs et finalités liés aux objectifs spécifiques à l'enseignement de l'intégrale. Dans un souci de clarté et de précision, nous reproduisons en italique les passages du texte officiel qui renvoient aux objectifs et finalités que nous allons examiner.

Introduction

Les mathématiques contribuent à former les esprits des élèves dans la mesure où elles leur permettent de développer leurs capacités de raisonnement, d'analyse et d'abstraction. Elles favorisent la créativité et développent l'imagination et l'intuition. C'est une discipline qui, quand elle est bien enseignée, peut procurer de la joie et de la satisfaction.

En interagissant avec les autres disciplines et l'environnement, les mathématiques contribuent à leur développement. Elles permettent de comprendre les phénomènes et favorisent les prises de décisions.

¹¹⁷ En application depuis Septembre 2007.

Dans la mesure où elles contribuent au développement intellectuel, social et culturel de chacun, les mathématiques préparent à relever les défis et à satisfaire les exigences de la société. C'est pourquoi, les mathématiques sont utiles et nécessaires à tous. (P.O, 2006 ; p.3)

En plaçant d'emblée les mathématiques sous la double rubrique de l'intellect et du social, les auteurs du programme cherchent sans doute un consensus acceptable par tous ceux (autorités politiques, citoyens, responsables de l'enseignement et enseignants) que l'enseignement des mathématiques intéresse d'une manière ou d'une autre. Consensus acceptable tant qu'on ne précise pas avec soin, au moins, les deux questions fondamentales suivantes:

1. Pourquoi enseigner les mathématiques ?
2. Comment les apprend-t-on et comment les enseigner ?

C'est sans doute pour tenter de répondre à la première question que les auteurs du programme mettent en avant le caractère intellectuel, social et culturel des mathématiques, en ce sens qu'« *elles contribuent au développement intellectuel, social et culturel de chacun* ». Il nous semble qu'il y a dans cette phrase, outre la recherche d'une légitimation de l'enseignement des mathématiques, une demande forte de reconnaissance de leur utilité : « *les mathématiques sont utiles et nécessaires à tous*¹¹⁸ ». Cette phrase aussi demande probablement à être précisée encore que les auteurs du texte du programme n'ont pas jugé utile de le faire. Qui aujourd'hui a besoin de mathématiques et notamment de la notion d'intégrale ? Pourquoi ? Et comment sont-elles utilisées ?

En résumé, nous pouvons classer les objectifs et les finalités formulés dans l'introduction du texte du programme en quatre catégories :

1. Développement des capacités cognitives.
2. Développement du sens de l'initiative et de la curiosité.
3. Ouverture sur les autres disciplines.
4. Inculcation de valeurs sociales et culturelles.

Mais il nous semble que ces catégories d'objectifs ne sont pas spécifiques à la classe terminale de mathématiques et peuvent être assignés à tout l'enseignement secondaire et, peut être, recouvrir la plupart des disciplines scolaires.

¹¹⁸ C'est nous qui soulignons.

Pour chercher des objectifs et des finalités plus précis et spécifiques à l'enseignement des mathématiques en classe terminale, il faut se reporter à la partie suivante de l'introduction du programme officiel : *Démarche et raisonnement mathématique*.

Démarche et raisonnement mathématique

1. Les élèves développent leur aptitude à chercher et cultivent leur persévérance :

Les élèves utilisent les instruments de dessin, la calculatrice ou un logiciel en vue de faire des essais ou une expérimentation sur des cas simples ou particuliers.

2. Les élèves développent des raisonnements :

- ✓ *Ils émettent des conjectures en utilisant un raisonnement inductif, un raisonnement déductif ou un raisonnement par l'absurde ou un raisonnement par récurrence.*
- ✓ *Ils produisent un argument pour valider une affirmation en utilisant des inférences et des déductions.*
- ✓ *Ils développent des chaînes de raisonnements déductifs pour prouver une conjecture ou un résultat.*
- ✓ *Ils produisent un contre-exemple pour montrer qu'une assertion est fausse.*
- ✓ *Ils vérifient des résultats et jugent s'ils sont raisonnables.*
- ✓ *Ils distinguent entre une conjecture et un résultat démontré.*
- ✓ *Ils distinguent entre une implication et une équivalence, entre une condition nécessaire et une condition suffisante.*

3. Les élèves développent une méthodologie de résolution de problème.

- ✓ *Ils élaborent des stratégies pour résoudre un problème en :*
 - *Établissant des connexions entre le problème et des situations déjà rencontrées.*
 - *Utilisant leur pensée intuitive.*
 - *Se représentant des stratégies de résolution.*
- ✓ *Ils élaborent une solution au problème en :*
 - *Faisant appel à un répertoire de connaissances, de techniques, de procédures appropriées.*
 - *Développant des raisonnements appropriés.*
 - *Validant la solution du problème.*
- ✓ *Ils procèdent à une vérification en :*
 - *Confrontant leur solution avec les données du problème.*
 - *Exerçant leur esprit critique pour juger si les résultats sont raisonnables.*

Il apparaît ainsi que la démarche que préconise le programme officiel s'appuie pour l'essentiel sur trois activités fondamentales : *découvrir, concevoir, appliquer*. Dans la mesure où ces activités recouvrent le triptyque *observer, conjecturer, vérifier*, nous inscrivons cette démarche dans une *approche expérimentale*. La première activité dans cette démarche est la

découverte; elle est sous-tendue et impulsée par l'observation. Ce point nous paraît un des traits distinctifs de l'esprit du nouveau programme qui est différent à cet égard de tous ceux qui l'ont précédé. Explorer, expérimenter et découvrir sont ici un choix institutionnel explicitement déclaré : « *les élèves utilisent les instruments de dessin, la calculatrice ou un logiciel en vue de faire des essais ou une expérimentation sur des cas simples ou particuliers* ». Dans cette phase expérimentale l'élève observe, constate, analyse et, à la conclusion, émet une conjecture qu'il aura à prouver : « *ils émettent des conjectures [...], développent des chaînes de raisonnement pour prouver une conjecture* ».

Ces phases de recherche, à travers lesquelles doit être construit le savoir visé, correspondent en fait à des activités qui doivent offrir à l'élève des occasions pour développer sa capacité d'observation, cultiver sa faculté de jugement et exercer son esprit à l'analyse et à la critique. Ces activités constituent aussi des opportunités où l'élève pourrait mettre à contribution ses acquis antérieurs, les consolider et combler ses lacunes. Dans la mesure où ces activités pourraient servir de vecteur à l'échange entre l'élève, ses pairs et le professeur, elles constituent pour l'élève un espace adéquat pour apprendre à observer, à interpréter ses observations et à les discuter, mais aussi et surtout à mettre à l'épreuve sa propre pensée.

Un autre objectif important du programme consiste à développer chez l'élève sa capacité à concevoir une stratégie pour justifier ou réfuter un résultat, pour résoudre un problème ou produire un contre-exemple en utilisant les différents modes de raisonnement mathématique. Ici, il nous faut souligner une évolution importante du nouveau programme par rapport à l'ancien à propos de la production et l'utilisation de contre-exemples : « *ils produisent un contre-exemple pour montrer qu'une assertion est fausse* ». Comme nous l'avons déjà pointé dans notre mémoire de mastère cette activité faisait défaut dans l'ancien programme. Nous considérons que « *c'est dans les contre-exemples que l'élève peut affronter obstacles et contradictions et saisir la portée et les limites des énoncés mathématiques* » (Haddad, 2006). Dans une optique assez proche, Ben Bachir et Zaki (2001) remarquent que la production d'exemples et de contre-exemples est une tâche non routinière. Gonzalez-Martin (2006) souligne de son côté que « *la création d'exemples et de contre-exemples est une activité non algorithmique qui exige une pensée plus flexible* ». Produire un contre-exemple requiert non seulement que l'élève comprenne les notions mathématiques en jeu mais aussi, et surtout, qu'il connaisse les limites de leur portée. C'est dans cette activité que l'élève comprend le mieux le sens et la raison d'être des hypothèses qui fondent un énoncé mathématique (définition, propriété, théorème, etc.). C'est dans cette activité que l'élève pourrait distinguer

le mieux entre une condition nécessaire et une condition suffisante, et donc entre une implication et une équivalence ; un autre objectif du nouveau programme.

Le raisonnement mathématique tient une place centrale parmi les objectifs de l'institution scolaire. Aussi l'élève doit-il non seulement utiliser et maîtriser les modes de raisonnement déductif, inductif, par l'absurde et par récurrence mais aussi savoir, suivant les situations, mobiliser le mode de raisonnement le plus approprié. Développer un raisonnement mathématique n'est pas seulement mettre des idées en ordre, mais les dynamiser et les mettre en rapport. Des idées que l'élève doit savoir organiser en système et leur donner la cohérence nécessaire pour convaincre. C'est par le truchement de la fonction psychologique (convaincre) et de la fonction logique (organiser des idées, structurer des connaissances) que l'élève peut socialiser sa pensée et communiquer ses idées, si bien qu'il doive justifier son raisonnement et le rendre acceptable à la fois mathématiquement et socialement.

Par ailleurs, le programme accorde une grande importance à la résolution de problèmes. Cette importance nous semble être fondée sur une hypothèse psychologique extrêmement forte : c'est l'élève qui construit ses propres connaissances et les problèmes constituent des situations propices pour apprendre. L'institution scolaire attend de l'élève qu'il développe sa capacité à élaborer des stratégies lui permettant d'appréhender correctement la nature d'un problème posé et de proposer, sinon une réponse, du moins des pistes susceptibles de conduire à la solution, en mobilisant les connaissances nécessaires et en élaborant les stratégies adéquates. L'élève pouvant s'inspirer de situations déjà rencontrées et des problèmes déjà résolus.

Le terme *problème* est polysémique et couvre une large classe d'activités mathématiques. C'est pourquoi il est nécessaire, nous semble-t-il, de préciser le sens dans lequel le terme problème doit être entendu dans le cadre de l'apprentissage scolaire. Nous nous référons à Brun¹¹⁹(1999) qui appelle problème « *une situation initiale, avec un but à atteindre, demandant au sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème, dans un rapport sujet/situation, que si la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire*¹²⁰ »

Un problème est ainsi caractérisé par trois niveaux d'interprétation : une situation initiale donnée, un but à atteindre et une suite d'actions possibles pour y arriver. Mais si les

¹¹⁹ Cité par Houdement (2004).

¹²⁰ C'est nous qui soulignons.

problèmes obéissent généralement à ce triptyque d'invariants, ils ne visent pas tous le même but. Aussi distinguons-nous au moins quatre type de problèmes :

- Problèmes qui visent la construction d'une nouvelle connaissance.
- Problèmes d'entraînement qui visent l'application et/ou le réinvestissement de connaissances déjà construites, du moins supposées l'être.
- Problèmes de synthèse qui visent l'utilisation conjointe de plusieurs connaissances dans des situations plus complexes.
- Problèmes de recherche pour lesquels l'élève ne dispose pas d'une stratégie de résolution déjà utilisée et qui visent donc à placer l'élève en situation de recherche¹²¹.

La troisième partie de l'introduction est consacrée à la *communication à l'aide du langage mathématique*. Il s'agit en fait d'une mise en avant des différents modes de communication : *oral, écrit, instrumenté*. Tout en insistant sur l'utilisation du vocabulaire mathématique, le programme préconise la participation orale de l'élève dans l'activité mathématique sous toutes ses formes « *les élèves expliquent oralement, en utilisant un vocabulaire mathématique, une procédure, un algorithme de calcul, un raisonnement ou le choix d'une stratégie* ». L'activité orale de l'élève fait à l'évidence partie des objectifs avoués du programme. Cette activité pourrait d'ailleurs se révéler très importante, voire décisive, dans l'acte d'apprendre. Aussi le nouveau programme recommande-t-il que « *les élèves discutent avec les autres une démarche, un raisonnement ou une stratégie* ». Le deuxième outil de la communication est l'écrit : « *les élèves rédigent une démonstration ou la solution d'un problème* ». En mathématiques, la rédaction est un véritable exercice de mathématiques. C'est une activité qui, pour être bien menée, doit allier la précision du raisonnement, la rigueur du langage et la clarté de l'exposition. Enfin, le nouveau dans ce programme est l'intégration des TIC (technologies de l'information et de la communication). Dans la mesure où ils insistent, en plusieurs endroits de l'introduction, sur l'utilisation des TIC, les auteurs du programme affichent une volonté forte d'investir les nouvelles technologies d'un rôle important dans l'apprentissage des mathématiques.

L'ambition implicite du nouveau programme pourrait être de donner plus d'espace à la démarche expérimentale. Il ne place pas les mathématiques seulement du côté du formalisme et de l'abstraction. Il préconise le recours à des situations dans lesquelles est posé pensable et effectuable une complémentarité entre l'observation concrète et la pensée abstraite. Il apparaît

¹²¹ Les problèmes de recherche peuvent servir dans l'exploration et la construction de nouvelles connaissances.

ainsi que les auteurs du programme cherchent à donner aux mathématiques à enseigner une certaine épaisseur sémantique.

I. 2. Analyse du contenu spécifique

Le programme d'analyse de la classe terminale de mathématiques est constitué de dix chapitres dont l'un est consacré à l'intégrale. Mais avant de nous intéresser à ce chapitre, une remarque préliminaire s'impose. Dans le chapitre 2 dédié à la dérivation, que nous ne reproduisons pas ici, on introduit la notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle, les propriétés des primitives ainsi que les opérations sur ces fonctions. La notion d'intégrale fait l'objet du chapitre 9 intitulé *Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle* $[a, b]$ ¹²², que nous reproduisons ci-après:

- *Propriétés : linéarité, relation de Chasles, positivité, comparaison d'intégrales.*
- *Intégration par parties.*
- *Formule de la moyenne et inégalité de la moyenne.*
- *Calcul d'aires planes et des volumes de solides de révolution.*
- *Étude sur des exemples de fonctions définies sur un intervalle I par $x \mapsto \int_a^{v(x)} f(t)dt$ où f est continue sur I et v est dérivable sur I et à valeurs dans I ¹²³.*

Ici, il nous faut souligner que contrairement aux programmes précédents, le nouveau programme n'est accompagné d'aucun document qui permettrait de préciser certains de ses points et d'éclairer son esprit, sauf la précision suivante à la page 46 :

L'intégrale sur $[a, b]$ d'une fonction f continue sur un intervalle I contenant $[a, b]$ sera définie comme étant le réel, noté $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)dx$, et égal à $F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f .

La recommandation ci-dessus fixe d'emblée à la fois l'intégrale à enseigner et une approche pour l'enseigner. L'intégrale enseignée à ce niveau est celle de Newton dont la formule fournit l'outil essentiel dans les démonstrations des propriétés de l'intégrale définie d'une fonction continue ainsi qu'un moyen pratique pour le calcul d'intégrales.

¹²² L'intégrale servira dans le chapitre suivant pour définir la fonction logarithme népérien ($\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$).

¹²³ Le fait d'imposer à la fonction v d'être définie sur I réduit considérablement la classe des fonctions dans laquelle seront choisis les exemples à étudier. Une telle restriction nous semble inadéquate, voire absurde. Ce qui compte est que $v: J \rightarrow I$ soit dérivable sur J .

Le programme fixe les propriétés élémentaires de l'intégrale à enseigner (linéarité, relation de Chasles et positivité, intégrale et ordre, formule de la moyenne et inégalité de la moyenne) ainsi que les méthodes de calcul d'intégrales à utiliser (formule de Newton et intégration par parties). Enfin, le programme préconise l'étude sur des exemples de fonctions définies par une intégrale du type $x \mapsto \int_a^{v(x)} f(t)dt$, où v est une fonction dérivable et a une constante réelle. En insistant sur le fait que l'étude de ces fonctions ne doit porter que sur des exemples, le programme officiel proscrit toute généralisation formelle.

Pour saisir ce qui est considéré par l'institution comme étant l'essentiel de l'enseignement de l'intégrale en classe de terminale, nous allons examiner les objectifs spécifiques visés par le programme. Dans un souci de commodité et de lisibilité, nous avons rassemblé le contenu à enseigner et les compétences à développer dans le même tableau suivant :

Contenu spécifique	Compétences à développer
<ul style="list-style-type: none"> • <i>Propriétés : linéarité, relation de Chasles, positivité, comparaison d'intégrales.</i> • <i>Intégration par parties.</i> • <i>Formule de la moyenne et inégalité de la moyenne.</i> • <i>Calcul d'aires planes et des volumes de solides de révolution.</i> • <i>Étude sur des exemples de fonctions définies sur un intervalle I par : $x \mapsto \int_a^{v(x)} f(t)dt$ où f est continue sur I et v est dérivable sur I et à valeurs dans I.</i> 	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Calculer une intégrale en utilisant une primitive.</i> • <i>Calculer une intégrale à l'aide d'intégration par parties.</i> • <i>Calculer une aire plane.</i> • <i>Comparer des fonctions en utilisant des intégrales.</i> • <i>Donner une valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles.</i> • <i>Étudier une fonction définie par une intégrale.</i>

En premier lieu, il semble que l'interprétation du texte du programme est laissée à la charge des auteurs du manuel scolaire et des enseignants. Il leur faut surtout trouver des réponses satisfaisantes aux questions suivantes :

- Faut-il envisager au moins une définition intuitive et provisoire de la notion d'aire et énoncer ses propriétés élémentaires ?
- Dans quels sens doit-on mettre en rapport les notions de primitive, d'intégrale et d'aire ?

En second lieu, certains points méritent d'être précisés comme la phrase « *comparer des fonctions en utilisant des intégrales* » ainsi que le statut du calcul approché, notamment la méthode des rectangles, dans le cours.

Analyse critique

Sitôt que nous voulons saisir l'esprit du programme et procéder au recensement de ses formes, nous nous heurtons à une équivoque. On éprouve en effet un certain malaise en lisant ce programme. On ne sait pas s'il faut être sensible aux idées exprimées dans l'introduction qui présentent les mathématiques comme une école de pensée rationnelle, d'exploration du réel et d'interrogation sur le vrai, ou se laisser décevoir par la préférence à peine dissimulée des auteurs du programme qui semble pencher particulièrement vers l'aspect calculatoire. Pour s'en convaincre, il suffit de constater le fait que la notion d'intégrale est enseignée juste après la notion de primitive, d'une part, et, d'autre part, la prédominance des tâches (calculer, comparer, résoudre) placées en avant dans les compétences à développer.

D'ailleurs, cette tendance se donne à voir plus clairement à travers le choix même de la définition de l'intégrale par la formule de Newton que le programme recommande. Comme nous l'avons déjà souligné dans notre mémoire de maîtrise, cette « définition » ne dit pas ce qu'est une intégrale. Elle dit seulement comment calculer certaines intégrales. Si l'on veut signifier par là qu'il s'agit de réduire la notion d'intégrale à un outil qui serait indifférent à l'activité qu'il permet de réaliser et d'en faire un ensemble de propriétés algébriques que l'on subordonne à des techniques calculatoires alors on tire la notion d'intégrale vers une forme d'opérationnalisme qui contredit l'esprit même du programme.

Cependant, loin de nier l'intérêt de la formule de Newton, nous reconnaissons que ce choix a des avantages certains. Dans cette approche, la notion d'intégrale prend un premier sens par sa relation à celle de primitive et donne dans le même temps du sens à cette dernière en s'en

servant comme outil. Ensuite, la formule de Newton est suffisamment opératoire dans le sens qu'elle permet d'établir, à moindre coût, les propriétés de l'intégrale définie et d'envisager les types de tâches auxquels on va entraîner les élèves. Enfin, l'intégrale prend un sens plus large par son caractère outil utilisé dans le calcul d'aires et de volumes ainsi que dans l'étude sur des exemples de fonctions définies par une intégrale.

Au plan didactique, l'organisation de l'enseignement de l'intégrale sous-jacente au texte du programme consiste à mettre en œuvre la notion de primitive comme outil explicite, à la fois, pour définir la notion d'intégrale et pour le calcul d'intégrales. On mobilise ainsi de « l'ancien » pour définir et pratiquer du « nouveau ». Et ce nouveau est ensuite investi comme outil dans les calculs d'aire de surfaces planes et de volume de solides de révolution. Il nous semble que cette organisation s'attache pour l'essentiel à développer le schéma :

Primitive → Intégrale → Aire.

Cette organisation schématique permet d'envisager le type d'exercices et d'activités sur lesquels les élèves seront entraînés: *étude de fonction – calcul d'aire/de volume*. Ce type d'exercices s'appuie sur des tâches dont l'assimilation est facile et la standardisation est peu coûteuse. Il s'agit surtout de faire acquérir aux élèves des compétences calculatoires et des habitudes d'action. L'idée sous-jacente à cette conception est qu'à force de mettre en pratique l'organisation schématique en question et de manipuler des expressions algébriques l'élève pourra développer des habitudes d'action et des compétences calculatoires qu'il sera capable de réinvestir dans d'autres situations.

Il nous semble toutefois que cela ne suffit pas à satisfaire aux hypothèses sous-jacentes à l'orientation du nouveau programme, du moins dans son esprit, que traduisent les objectifs généraux formulés en introduction. Est-on vraiment sûr que développer des habitudes d'action et des compétences calculatoires assure les apprentissages attendus tels qu'ils sont exprimés dans la rubrique *démarche et raisonnement mathématique* ? Les habitudes d'action et les compétences calculatoires suffisent-elles à atteindre à une bonne compréhension de la notion d'intégrale et préparer sa mise en œuvre sur des contenus différents ?

D'après Gonzalez-Martin:

Les recherches développées jusqu'à présent montrent bien que, même s'il est relativement facile d'apprendre aux élèves des techniques pour calculer des dérivées et des intégrales, il y a de grandes difficultés à faire véritablement entrer

les étudiants dans le champs de l'analyse et à leur faire atteindre une compréhension satisfaisante des concepts et méthodes de pensée qui sont le centre de ce champs. (Gonzalez, 2006, p.443)

Aussi, considérons-nous que l'organisation de l'enseignement de l'intégrale envisagée ici est susceptible de réduire le sens mathématique de la notion d'intégrale à une représentation d'opérations et de comportements particuliers. Peut-être même que cela aille plus loin qu'une simple restriction du sens mathématique de la notion d'intégrale et conduire à des confusions entre primitive et intégrale et/ou intégrale et aire, voire l'identification de ces notions. Nous nous attacherons, dans la suite à travers l'analyse du manuel scolaire, à mettre en lumière cette tendance et vérifier par là les hypothèses que nous avançons.

CHAPITRE QUATRIÈME

ANALYSE DU MANUEL SCOLAIRE

I. Présentation du manuel

Dans l'enseignement secondaire tunisien, professeurs et élèves utilisent un manuel unique élaboré par un groupe formé d'un professeur universitaire, deux inspecteurs dont un inspecteur principal et quatre professeurs (un professeur hors classe et trois professeurs principaux) de l'enseignement secondaire. Le ministère se réserve un droit de regard sur la production de ce manuel et sur la conformité de son contenu aux textes officiels. Le manuel est constitué de deux tomes : le tome 1 consacré aux chapitres d'analyse et le tome 2 aux chapitres de géométrie, arithmétique, probabilités et statistiques. Nous donnons ci-dessous le sommaire du tome 1.

Chapitre 1 : Continuité et limites.
Chapitre 2 : Suites réelles.
Chapitre 3 : Dérivabilité.
Chapitre 4 : Fonctions réciproques.
Chapitre 5 : Primitives.
Chapitre 6 : Intégrales.
Chapitre 7 : Fonction logarithme népérien.
Chapitre 8 : Fonction exponentielle.
Chapitre 9 : Équations différentielles.

D'après la préface du manuel :

Chaque chapitre comprend trois rubriques : Cours, QCM- Vrai ou Faux, Exercices et Problèmes. La rubrique Cours comprend :

- *Des activités visant à permettre aux élèves de développer leur capacité à chercher, à expérimenter, à modéliser, à conjecturer et à démontrer.*
- *Les résultats du cours à retenir.*
- *Des exercices et problèmes résolus.*

La rubrique QCM- Vrai ou Faux vise à permettre à l'élève de faire sa propre évaluation.

La rubrique Vrai ou Faux vise à l'apprentissage progressif des règles logiques.

La rubrique Exercices et Problèmes comprend des exercices et problèmes visant à permettre aux élèves de mobiliser leurs compétences de façon autonome.

Commentaires

Il semble a priori que les objectifs visés par les auteurs du manuel sont plus modestes que ceux que préconise le programme officiel. Contrairement aux textes officiels, le manuel ne semble pas favoriser la démarche critique, notamment la production de contre-exemples et la pratique de l'argumentation. Nous essayerons de vérifier le degré d'adéquation des contenus mathématiques et de la logistique didactique que propose le manuel avec le projet que préconise le programme officiel.

II. Analyse du manuel

Le manuel scolaire constitue non seulement une interprétation concrète et effective du programme officiel, mais aussi l'illustration d'une approche des objectifs spécifiques fixés par l'institution pour enseigner la notion d'intégrale. L'analyse du manuel scolaire doit donc nous permettre d'examiner le mode de mise en fonctionnement des textes officiels selon les auteurs du manuel. Nous souhaitons explorer particulièrement la démarche utilisée pour introduire la notion d'intégrale, les aspects de l'intégrale présents dans le manuel et la logistique didactique utilisée pour atteindre aux objectifs visés. Pour ce faire, nous étudierons d'abord la partie *Cours* en conduisant une analyse détaillée de toutes ses composantes : activités, définitions, propriétés, théorèmes, démonstrations, exemples et exercices résolus. Nous étudierons ensuite la partie *Exercices* en menant pour l'essentiel une analyse praxéologique (Chevallard, 1998). Nous recourrons, lorsque cela nous semblera utile, à la notion de *niveau de mise en fonctionnement des connaissances* (Robert, 1998) et à la notion de *registre de représentation sémiotique* (Duval, 1993).

Mais avant d'aborder l'analyse du chapitre 6 intitulé *Intégrales*, il nous semble qu'une étude en amont du chapitre 5 consacré aux fonctions primitives s'impose. La notion de primitive prépare et structure le chapitre sur la notion d'intégrale.

II.1. Analyse du chapitre « Primitives »

Dans ce chapitre, et à l'issue d'une activité simple dans laquelle l'élève doit vérifier qu'une fonction donnée est la dérivée d'une autre fonction donnée, le manuel donne la définition d'une fonction primitive, qu'il fait suivre d'un exercice d'application, de l'énoncé (admis) du théorème d'existence des primitives d'une fonction continue, la relation entre deux primitives d'une même fonction et l'unicité de la primitive prenant une valeur donnée en un point donné. Le manuel propose ensuite un tableau des primitives usuelles. On énonce enfin la propriété de linéarité des fonctions primitives et on donne un deuxième tableau mettant en relation les formules de dérivation et d'anti-dérivation.

La partie *Cours* se termine par un exercice résolu et propose en fin de chapitre un *QCM*, un exercice du type *VRAI – FAUX* et 22 exercices. Les exercices traitent pour l'essentiel de calcul de primitives de fonctions polynômes, de fonctions rationnelles, de fonctions irrationnelles et de fonctions trigonométriques.

Il y a lieu de souligner ici l'absence d'éléments technologiques justifiant certaines des techniques utilisées dans ce chapitre, notamment les techniques de décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simples et la technique de changement de variable. Officiellement, ces techniques ne font pas l'objet d'un enseignement spécifique dans le secondaire et leur mise en œuvre relève plutôt de règles implicites du contrat institutionnel, en ce sens que le recours à ces techniques n'est jamais à la charge de l'élève mais il est indiqué explicitement ou suggéré par une série de questions. Pour préciser notre propos, nous allons examiner et commenter, à titre d'exemple, l'exercice suivant du manuel. Nous proposerons à la suite de notre commentaire trois autres solutions qui nous semblent mieux adaptées à ce niveau de l'enseignement.

Exercice 7 page 106

Soit f la fonction définie sur $] - 1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^4}$.

On se propose de déterminer des réels a, b, c et d tels que pour tout x de $] - 1, +\infty[$:

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3} + \frac{d}{(x+1)^4}.$$

1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1)^4 f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) f(x)$.

b) En déduire que $d = 1$ et $a = 0$.

2. a) Vérifier que pour tout x de $] - 1, +\infty[$: $\frac{1-c}{(x+1)^3} = \frac{b}{(x+1)^2}$.

b) En déduire les valeurs des réels b et c .

3. Déterminer la primitive de f sur $] - 1, +\infty[$ égale à 2 en 0.

Solution attendue

1. a. Supposons qu'il existe des réels a, b, c et d tels que pour tout x de $] - 1, +\infty[$:

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3} + \frac{d}{(x+1)^4}.$$

i) Pour tout x de $] - 1, +\infty[$, on a :

D'une part, $(x+1)^4 f(x) = x+2$. Donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1)^4 f(x) = 1$.

D'autre part, $(x+1)^4 f(x) = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$.

Donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1)^4 f(x) = d$.

ii) Pour tout x de $] - 1, +\infty[$, on a :

D'une part, $(x+1) f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^3}$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) f(x) = 0$.

D'autre part, $(x+1) f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} + \frac{d}{(x+1)^3}$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) f(x) = a$.

b) De 1. a. i) et 1. a. ii) et de l'unicité de la limite, on déduit que $d = 1$ et $a = 0$.

2. a) Compte tenu des deux expressions de f et des valeurs de a et d , on obtient :

pour tout x de $] - 1, +\infty[$, $\frac{x+2}{(x+1)^4} = \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}$.

Donc $\frac{b}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{(x+1)^4} - \frac{1}{(x+1)^4} - \frac{c}{(x+1)^3} = \frac{1-c}{(x+1)^3}$.

b) Pour tout x de $] - 1, +\infty[$, l'égalité $\frac{b}{(x+1)^2} = \frac{1-c}{(x+1)^3}$ implique $b(x+1) = 1-c$ et par suite, $bx + b + c - 1 = 0$. On en déduit alors que $b = 0$ et $c = 1$.

3. Pour tout x de $] - 1, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}$. Une primitive sur $] - 1, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^n}$; ($n \geq 2$) étant la fonction $x \mapsto \frac{-1}{n-1} \times \frac{1}{(x+1)^{n-1}}$, alors les primitives de f sur $] - 1, +\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{(x+1)^3} + k$, où k est une constante réelle.

Si F est la primitive de f sur $] - 1, +\infty[$ telle que $F(0) = 2$ alors $-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + k = 2$ et donc $k = \frac{17}{6}$. D'où, pour tout $x \in] - 1, +\infty[$, $F(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{17}{6}$.

Commentaires

Le but de cet exercice est de déterminer la primitive de f sur $] - 1, +\infty[$ qui prend la valeur 2 en 0. Comme f est une fonction rationnelle et que son expression n'est pas, à une constante près, de la forme $\frac{u}{u^n}$, ($n \geq 2$); alors la solution n'est pas immédiatement disponible. Sa construction nécessite la décomposition de la fonction f en éléments simples. Les deux premières questions de l'exercice traduisent la règle du contrat institutionnel évoquée plus haut; la méthode est indiquée dans l'énoncé. Le calcul des coefficients de la décomposition en éléments simples fait généralement appel à des méthodes diverses comme celle des limites, des valeurs particulières ou de l'identification (égalité de deux fonctions polynômes). Les élèves ne sont pas supposés connaître ces méthodes.

L'exercice proposé ci-dessus utilise la méthode des limites dans la première question et celle de l'identification dans la deuxième. Il est important d'observer ici que les élèves ont l'habitude d'utiliser la méthode de l'identification mais qu'ils ne connaissent pas la méthode des limites. C'est ce qui expliquerait que les valeurs de a et d soient fournies dans l'exercice, mais pas celles de b et c . La démarche envisagée dans cet exercice n'étant ni la plus simple ni la plus économique, l'enjeu pourrait être l'initiation des élèves à la méthode des limites. Ce choix nous paraît toutefois discutable.

Voici quelques alternatives à la méthode envisagée dans cet exercice. Il s'agit de méthodes souvent utilisées en classe et donc connues des élèves.

La méthode de l'identification¹²⁴

Supposons qu'il existe des réels a, b, c et d tels que pour tout x de $] - 1, +\infty[$:

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3} + \frac{d}{(x+1)^4}$$

Pour tout x de $] - 1, +\infty[$, $f(x) = \frac{a(x+1)^3 + b(x+1)^2c(x+1) + d}{(x+1)^4}$

Et donc $\frac{x+2}{(x+1)^4} = \frac{ax^3 + (3a+b)x^2 + (3a+2b+c)x + a+b+c+d}{(x+1)^4}$, pour tout réel $x > -1$. D'où par identification des coefficients des numérateurs :

$$\begin{cases} a = 0 \\ 3a + b = 0 \\ 3a + 2b + c = 1 \\ a + b + c + d = 2 \end{cases} \quad \text{et par suite} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases}$$

La méthode de changement de variable

En posant $u = x + 1$, il vient $x = u - 1$. Pour tout réel $x > -1$, $u > 0$ et donc :

$$f(x) = f(u - 1) = \frac{u+1}{u^4} = \frac{1}{u^3} + \frac{1}{u^4} = \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}.$$

On en déduit que $a = b = 0$ et $c = d = 1$.

La méthode directe

Pour tout réel $x > -1$, on peut écrire $f(x) = \frac{(x+1)+1}{(x+1)^4} = \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}$.

D'où $a = b = 0$ et $c = d = 1$.

Conclusion

L'étude de ce chapitre nous a permis de vérifier que son contenu est conforme au contenu spécifique fixé par le programme officiel. Dans la mesure où les ambitions du programme sont assez modestes et sont particulièrement centrées sur les techniques calculatoires, nous

¹²⁴ La méthode par identification tire sa validité de l'unicité des coefficients d'un polynôme et cette propriété d'unicité est admise en lycée.

considérons que les tâches prévues dans le manuel sont appropriées. Ce chapitre doit fournir quelques outils nécessaires dans les développements du chapitre qui va suivre sur la notion d'intégrale.

II.2. Analyse du chapitre « Intégrales »

II.2.1. Étude de la partie « Cours »

Intégrale d'une fonction continue

L'objectif de cette première partie du cours est d'énoncer la définition de l'intégrale d'une fonction continue. L'analyse de son contenu dévoile les intentions des auteurs du manuel. La démarche en œuvre dans le manuel consiste à construire d'abord un milieu pour fonder empiriquement une définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive et d'énoncer ensuite une définition de l'intégrale d'une fonction continue.

Intégrale d'une fonction continue et positive

Cette sous-section est constituée de quatre activités, une propriété et une définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle fermé borné de \mathbb{R} .

Compte tenu de l'importance de cette partie pour notre recherche nous avons choisi de l'étudier dans sa totalité. En particulier, nous développerons les solutions attendues dans les trois premières activités qui précèdent la définition proposée dans le manuel que nous énoncerons et commenterons.

Le manuel commence par préciser que l'unité d'aire est définie comme suit : le plan étant muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'unité d'aire, notée par u.a, est l'aire du rectangle de dimension $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$.

Activité 1 page 110

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -2 \\ 1 & \text{si } -2 \leq x \leq 1. \\ 3x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de g .
2. Hachurer la partie P du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de g et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 3,5$.
3. Calculer l'aire de P .

Dans cette activité la fonction g est une fonction affine par intervalles continue sur \mathbb{R} . Dans la mesure où les fonctions affines par intervalles sont familières aux élèves depuis la classe de 2^e année secondaire¹²⁵ la représentation graphique de g et l'identification de la partie P à hachurer sont considérées comme des tâches routinières et ne doivent pas leur poser de problème. La partie P du plan étant contenue dans une surface polygonale, elle

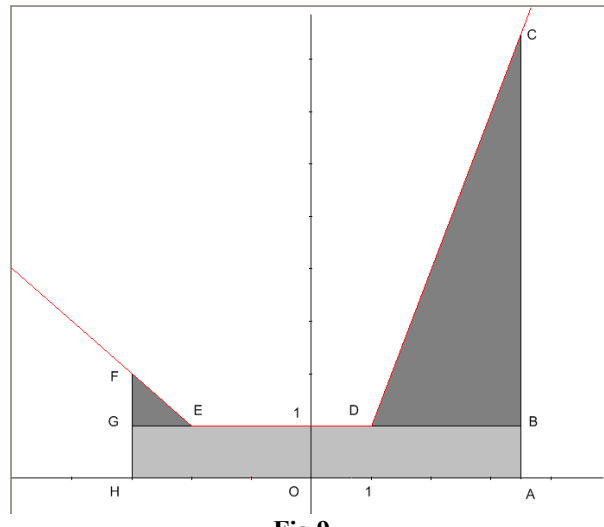


Fig.9

peut être décomposée en triangles deux à deux d'intérieurs disjoints. L'aire de P s'obtient alors comme la somme des aires des triangles de la décomposition utilisée. Une solution possible est la suivante :

On découpe P comme sur la figure (Fig. 9) en deux triangles rectangles BCD et EFG et un rectangle $ABGH$ (réunion de deux triangles). Pour calculer l'aire \mathcal{A} de P , les élèves auront à déterminer d'abord les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H ce qu'ils sont supposés savoir faire sans problème.

Les triangles BCD et EFG étant rectangles respectivement en B et G , alors :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}BC \times BD + \frac{1}{2}GE \times GH + AB \times AH.$$

Le calcul numérique donne $\mathcal{A} = 16,375$ (*u. a.*).

Comme nous le suggérons plus haut, d'autres découpages sont possibles et l'activité peut être une occasion pour vérifier avec la classe que des décompositions différentes donnent le même résultat¹²⁶ $\mathcal{A} = 16,375$ (*u. a.*).

En l'absence, dans l'enseignement secondaire, d'éléments technologiques sur la notion d'aire, l'activité s'appuie pour l'essentiel sur des connaissances intuitives sur la notion d'aire.

¹²⁵ Classe de seconde en France.

¹²⁶ Dans sa Géométrie élémentaire, Hadamard montre en effet que ce nombre est indépendant de la décomposition du polygone en triangles d'intérieurs disjoints.

Cette activité contient potentiellement la possibilité de permettre à l'élève de mobiliser ses connaissances géométriques et intuitives sur la notion d'aire, d'imaginer une stratégie pour calculer l'aire cherchée et possiblement de vérifier la validité de sa stratégie en confrontant le résultat de ses calculs à ceux des autres élèves de la classe. Ainsi, il y a dans cette activité de quoi permettre aux élèves de s'initier à la démarche mathématique et de la pratiquer, mais que les énoncés de l'activité ne font pas ressortir.

Activité 2 page 110

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

On désigne par \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C_f de f et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

1. Représenter la courbe C_f .
2. Calculer \mathcal{A} .

Dans cette activité, les élèves auront à reconnaître que la courbe C_f est le demi-cercle unité situé dans le demi-plan des ordonnées positives ($y = \sqrt{1 - x^2}$) et à mobiliser la formule de l'aire d'un disque pour obtenir $\mathcal{A} = \frac{\pi}{2}$ (u. a).

Activité 3 page 110

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$. On a tracé ci-contre (Fig. 10) la courbe C_f , représentative de f .

Soit $t \in [1, +\infty[$ et $\mathcal{A}(t)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$.

On se propose de déterminer $\mathcal{A}(t)$ pour tout $t \in [1, +\infty[$.

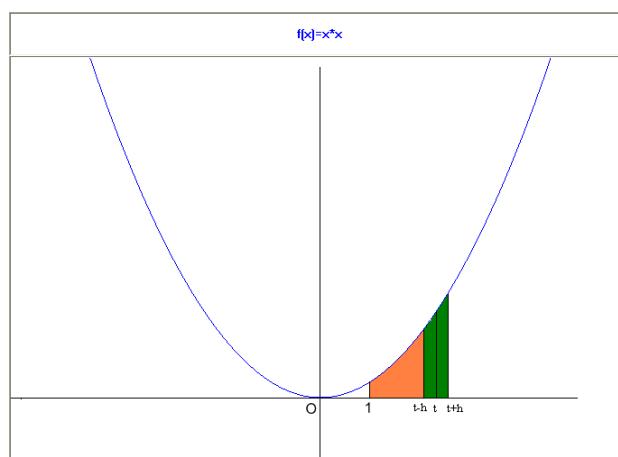


Fig. 10

On désigne par \mathcal{A} la fonction $t \mapsto \mathcal{A}(t)$.

1. Que vaut $\mathcal{A}(1)$?

2. Soit $h > 0$.

a. Montrer que $hf(t) \leq \mathcal{A}(t+h) - \mathcal{A}(t) \leq hf(t+h)$.

b. En déduire que la fonction \mathcal{A} est dérivable à droite en t et que $\mathcal{A}'_d(t) = f(t)$.

3. Soit $t \in]1, +\infty[$ et $1 < t-h < t$

a. Montrer que $hf(t-h) \leq \mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(t-h) \leq hf(t)$.

b. En déduire que la fonction \mathcal{A} est dérivable à gauche en t et que $\mathcal{A}'_g(t) = f(t)$.

4. a. Montrer que $\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(1) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}$, $t \geq 1$.

b. Quelle est l'aire de la partie limitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

5. Soit F une primitive de f sur $]1, +\infty[$. Montrer que $F(t) - F(1) = \mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(1)$, $t \geq 1$.

Solution attendue

1. $\mathcal{A}(1) = 0$.

2. a. $\mathcal{A}(t+h) - \mathcal{A}(t)$ représente l'aire de la surface limitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = t$ et $x = t+h$. Comme la fonction f est croissante sur $]1, +\infty[$ alors la surface en question contient la surface rectangulaire de dimension h et $f(t)$, dans le même temps qu'elle est contenue dans la surface rectangulaire de dimensions h et $f(t+h)$. Il en découle que $hf(t) \leq \mathcal{A}(t+h) - \mathcal{A}(t) \leq hf(t+h)$.

b. Compte tenu de l'encadrement $hf(t) \leq \mathcal{A}(t+h) - \mathcal{A}(t) \leq hf(t+h)$ et de la condition $h > 0$, on a : $f(t) \leq \frac{\mathcal{A}(t+h) - \mathcal{A}(t)}{h} \leq f(t+h)$. Comme la fonction f est continue en tout réel $t \geq 1$, alors $\lim_{h \rightarrow 0} f(t+h) = f(t)$ et donc $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{A}(t+h) - \mathcal{A}(t)}{h} = f(t)$. Il en découle que \mathcal{A} est dérivable à droite en chaque réel $t \geq 1$ et que $\mathcal{A}'_d(t) = f(t)$.

3. a. L'encadrement demandé s'obtient en remplaçant dans 2. a), t par $t-h$.

b. L'encadrement $h f(t-h) \leq \mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(t-h) \leq h f(t)$ et la condition $h > 0$ impliquent l'encadrement $f(t-h) \leq \frac{\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(t-h)}{h} \leq f(t)$. La continuité de f sur $[1, +\infty[$ permet d'écrire que $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(t-h) = f(t)$, puis de conclure, moyennant le théorème des gendarmes, que \mathcal{A} est dérivable à gauche en tout réel $t > 1$ et que $\mathcal{A}'_g(t) = f(t)$.

4.a. Compte tenu de ce qui précède, la fonction $t \mapsto \mathcal{A}(t)$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et, pour tout réel $t \geq 1$, $\mathcal{A}'(t) = f(t)$. Cela exprime que la fonction \mathcal{A} est une primitive de la fonction f sur $[1, +\infty[$ et se traduit, pour tout réel $t \geq 1$, par $\mathcal{A}(t) = \frac{1}{3} t^3 + c$ où c est une constante réelle. Comme $\mathcal{A}(1) = 0$ alors $c = -\frac{1}{3}$ et donc $\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(1) = \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{3}$.

b. L'aire (exprimée en unités d'aire) de la surface limitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ est $\mathcal{A}(2) = \frac{7}{3}$.

5. Si F est une autre primitive de f sur $[1, +\infty[$ alors la fonction $F - \mathcal{A}$ est constante sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Par suite, pour tout réel $t \geq 1$, $F(t) - \mathcal{A}(t) = F(1) - \mathcal{A}(1)$, et donc $F(t) - F(1) = \mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(1)$.

Commentaire

Dans cette activité le but déclaré est de déterminer $\mathcal{A}(t)$ pour $t \in [1, +\infty[$, ce qui doit être atteint dans la question 4.a). Dès lors, nous nous interrogeons sur l'intérêt des deux dernières questions de l'activité. L'analyse dévoile qu'il y a dans cette activité quelque chose pour le moins ambigu. Ce qui est ambigu c'est la manière dont le manuel ignore ce qui doit être le résultat essentiel de l'activité au profit du calcul algébrique. L'activité établit un résultat fort qui devrait à la fois éveiller la curiosité des élèves et susciter leur intérêt :

Pour une fonction f continue et positive, la dérivée de l'aire variable sous la courbe de f est la fonction f .

Ce résultat établit, dans le cas particulier de l'activité, un lien entre aire et primitive. Plus que le calcul de $\mathcal{A}(t)$, c'est l'interprétation du résultat qu'il convient ici de mettre en avant. L'égalité $\mathcal{A}'(t) = f(t)$ qui exprime que \mathcal{A} est une primitive de f permet de calculer $\mathcal{A}(t)$, mais elle ne suggère pas forcément son interprétation et n'assure pas nécessairement sa signification. Ce qui est encore ambigu c'est le rapport des deux dernières questions avec le but déclaré de l'activité. Peut-être l'activité cherche-t-elle à rattraper sa signification à travers la question 4.b). Si tel est l'objectif de cette question, alors elle met son projet en échec.

L'interprétation que nous préconisons à propos de l'égalité $\mathcal{A}'(t) = f(t)$ établit qu'il y a un lien entre aire et primitive généralisable à toute fonction continue et positive. La question 4.b) n'établit, quant à elle, aucun lien. Elle est une application numérique simple et isolée du résultat obtenu, et de surcroît indiquée, dans la question précédente. En ce qui concerne la dernière question enfin, il n'est pas possible de faire des corrélations simples et de la rattacher au but déclaré de l'activité. Elle est ambiguë.

Une première explication peut être saisie en redéfinissant le but de l'activité. On peut par exemple envisager de montrer que la fonction $t \mapsto \mathcal{A}(t)$ est une primitive de f sur $[1, +\infty[$ et que pour tout $t \geq 1$, le nombre réel $\mathcal{A}(t)$ est indépendant du choix de la primitive de f . C'est dans cette perspective que l'égalité $F(t) - F(1) = \mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(1)$ prend toute sa signification. Non seulement elle caractérise et détermine $\mathcal{A}(t)$, mais elle établit aussi un lien direct entre aire et primitive. Un lien que le manuel n'évoque pas.

Une deuxième explication possible pourrait être saisie en se rapportant à la propriété énoncée juste à la suite de l'activité. Ici il n'est pas besoin d'une analyse poussée pour déceler une motivation de cette question. La question 5 serait un prétexte pour la propriété en question, un trait d'union entre l'activité et cette propriété.

Voici l'énoncé de la propriété (démontrée dans le manuel) proposée à la suite de l'activité 3 :

Propriété

Soit f est une fonction continue sur un intervalle I . Si F et G sont deux primitives de f sur I alors pour tous réels a et b de I , $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

Immédiatement après cette propriété le manuel propose la définition suivante :

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ et F une primitive de f sur $[a, b]$.

L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $F(b) - F(a)$.

Le réel $F(b) - F(a)$ est appelé intégrale de f de a à b et est noté $\int_a^b f(x)dx$.

Que l'on soit ou non tout à fait d'accord de qualifier cet énoncé de *définition*, il énonce un résultat important qui généralise le résultat obtenu dans l'activité 3 en l'étendant à toute fonction continue et positive, encore que le manuel n'a pas jugé utile de le souligner.

La définition à proprement parler est l'objet de la deuxième partie de l'énoncé :

Le réel $F(b) - F(a)$ est appelé intégrale de f de a à b et est noté $\int_a^b f(x)dx$.

Peut-être faudrait-il, souligner que le manuel n'accorde à l'évidence aucune valence aux ostensifs \int et dx qui interviennent dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$. Se pose alors la question sur le rôle de chacun de ces ostensifs dans l'enseignement secondaire tunisien. Nous chercherons en particulier les valences de l'ostensif dx en posant la question dans le cadre d'un questionnaire adressé à de nouveaux bacheliers et d'une enquête auprès d'enseignants de classes terminales.

Analyse critique

Si nous cherchons à tracer un lien entre les trois activités que nous venons d'exposer, il faut bien reconnaître qu'il ne se donne à voir qu'à celui qui le veut bien. De très nombreuses questions invitent à explorer les failles de l'organisation de cette première partie du cours : Quand peut-on parler d'activités d'introduction d'une nouvelle notion ? Doit-on l'interroger par problématisation ? Comment peut-on être certain qu'une activité participe efficacement de la problématique étudiée ? Peut-on être certain que les enseignants saisiront les liens non explicités entre les trois activités ? S'agit-il de la même notion d'aire ? Quand et comment pourront-ils s'en rendre compte ? Où et comment doit-on le préciser ?

Il n'y a pas dans le domaine mathématique une notion en marche par elle-même dont il suffirait d'énoncer la définition sans l'interroger par problématisation, sans la confronter aux questions. Qui plus est, il n'y a pas dans la manière dont ces activités sont exposées ce qui peut permettre de développer la pensée intuitive, heuristique et prospective. Applications simples et isolées, liens imprécis entre les trois activités, absence de rigueur¹²⁷ caractérisent la stratégie en acte dans cette introduction. Une stratégie opaque qui fonctionne à une distance éloignée de sa propre intention. Il n'est que de constater que l'activité 3 fait appel à des calculs sur la notion d'aire d'une surface non polygonale qui n'a même pas été évoqué. Mais les auteurs du manuel semblent choisir de s'éloigner (intentionnellement ?) de la rigueur

¹²⁷ Nous précisons ce point tout à l'heure.

mathématique en ignorant les différences de nature entre la notion d'aire telle qu'elle est définie dans la géométrie élémentaire et celle de l'aire d'une surface non polygonale.

Intégrale d'une fonction continue

Cette sous-section est constituée d'une définition et de deux activités. L'intégrale d'une fonction continue est introduite immédiatement après le titre de la sous-section. La transition est brusque. Une remarque ou un commentaire soulignant le caractère généralisateur de cette définition par rapport à celle vue dans la sous-section précédente aurait pu éclairer et atténuer cette transition.

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I . On appelle intégrale de f entre a et b le réel, noté $\int_a^b f(x)dx$, défini par :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ici, l'aspect formel prend le pas sur l'aspect géométrique présent dans la première définition. Dans cette deuxième définition le manuel évacue à la fois l'interprétation géométrique et l'illustration graphique. Soulignons cependant que cette définition établit un lien clair entre primitive et intégrale. La notion de primitive fournit à la fois une définition formelle de l'intégrale d'une fonction continue et un outil pour le calcul effectif d'intégrales. Enfin, à l'issue de cette définition le manuel propose quelques précisions sur le vocabulaire et les notations utilisées :

- Le réel $\int_a^b f(x)dx$ est appelé intégrale de f sur $[a, b]$, ou encore de a à b , ou encore entre a et b .
- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, on peut remplacer la lettre x par n'importe quelle autre lettre et on peut écrire $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$. On dit que x est une variable muette.
- Pour toute primitive F de f , on écrit : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. L'expression $[F(x)]_a^b$ se lit « $F(x)$ pris entre a et b ».

Le premier point révèle de façon claire la confusion entre l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ et l'intégrale de f de a à b . Dans le premier cas, a est nécessairement inférieur à b alors que dans les deux autres cas les réels a et b sont arbitrairement choisis dans l'intervalle I . D'autre part, contrairement à x que l'on qualifie de variable muette, l'ostensif dx , nous l'avons déjà dit, semble n'avoir aucun statut. On ne lui attribue aucune valence¹²⁸. La confusion soulignée ici, l'absence de précision sur le rôle des ostensifs qui interviennent dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ et l'absence d'une interprétation de cette écriture sont autant de facteurs qui pourraient participer à l'évanouissement du sens de l'intégrale et constituer la source de certaines difficultés que nous tenterons de cerner dans la suite de ce travail.

En fin de cette première partie sont proposées deux autres activités. La première est un exercice d'application simple et immédiate. La deuxième, en revanche, porte en elle une potentialité particulièrement intéressante qui pourrait être exploitée avantageusement en un autre endroit du cours. Nous expliquerons notre remarque à l'issue de l'analyse qui va suivre.

Activité 2 p.112

1. Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{x^2}$.
2. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de $-f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
3. En déduire que l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ est égale à $\int_1^2 -f(x)dx$.

Dans cette activité l'enjeu est de vérifier, sur un exemple simple, que si une fonction f est continue et négative sur un intervalle $[a, b]$ alors l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est l'opposée de l'aire de la surface limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Mais une fois de plus il nous semble bien saisir un aspect de ce que nous avons qualifié de *négligence didactique*. En effet, l'enjeu de cette activité n'est ni moins actuel ni moins important que celui de l'activité 3 de la page 110. Il est même central et doit constituer un élément important dans cette approche de la définition de l'intégrale d'une fonction continue.

¹²⁸ Et c'est précisément ce constat qui motive notre enquête sur l'ostensif dx auprès de nouveaux bacheliers et d'enseignants de classes terminales.

On n'ajoute aucune difficulté si à la place de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ on prend une fonction continue et négative sur un intervalle $[a, b]$, en ce sens qu'on ne fait appel à aucune autre connaissance que celles requises par l'activité pour établir le résultat souligné plus haut. Bien entendu, il serait plus naturel de mettre l'activité ainsi envisagée juste après l'activité 3. Ce faisant, on donne assez tôt le bon point de vue sur le signe de l'intégrale et on prévient l'erreur, fréquente chez les élèves, qui consiste à identifier intégrale et aire.

Commentaire

Nous venons de comprendre l'approche utilisée dans le manuel scolaire pour définir l'intégrale d'une fonction continue. L'idée en œuvre dans cette approche consiste à proposer des activités familières aux élèves pour justifier empiriquement la définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive et d'étendre ensuite cette définition à celle d'une fonction continue. Qui plus est, il nous semble saisir en filigrane dans cette approche ce qui pourrait être une intention de mobiliser les connaissances géométriques et intuitives des élèves sur la notion d'aire et d'établir des liens entre aire, intégrale et primitive. Mais cette intention, si elle est réelle, gagne à être mise en avant.

Ce qui a véritablement manqué à l'approche utilisée dans le manuel c'est d'abord un aperçu sur la notion d'aire et ses propriétés élémentaires. Le test d'évaluation que nous avons soumis aux élèves d'une classe terminale montre que cette notion d'aire ne va pas d'elle-même pour ces élèves et que les erreurs inhérentes sont multiples et diverses. Ensuite l'absence d'objectifs explicites, clairs et précis et de commentaires à propos des résultats établis voile les fins spécifiques que vise cette partie et pourrait être à l'origine de certaines ambiguïtés chez beaucoup d'enseignants. Nous chercherons à le vérifier à travers l'enquête que nous comptons mener auprès d'enseignants de classe terminale. Ces ambiguïtés s'accusent encore lorsqu'on sait que l'approche utilisée dans le manuel n'est pas celle que le programme officiel recommande. En effet, le texte officiel précise que « *L'intégrale sur $[a, b]$ d'une fonction f continue sur un intervalle I contenant $[a, b]$ sera définie comme étant le réel, noté $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)dx$, et égal à $F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f* » (PO, p.47).

À l'issue de l'étude de cette première partie du cours, nous avons pu constater que les tâches proposées dans les six activités sont routinières et les techniques requises sont a priori connues des élèves, du moins elles sont supposées l'être. Globalement, ces activités, sauf la première, sont assez fermées et suffisamment découpées au point que l'activité des élèves

tend à se réduire à produire des réponses directes et immédiates. En fait, dans quatre des six activités, les tâches sont pratiquement reproduites à l'identique selon le même triptyque « *représentation graphique d'une fonction usuelle – identification d'une surface plane associée à la fonction – calcul de l'aire de la surface en question* ». D'ailleurs on peut douter que ces activités invitent vraiment à l'effort. Aucun espace n'est laissé aux élèves pour prendre des initiatives, chercher et/ou mobiliser une démarche critique. Qui plus est, ce modèle induit systématiquement des opérations de conversion entre registres graphique, géométrique et algébrique. Mais ces opérations sont opaques pour l'élève ; elles sont entièrement pilotées par les énoncés. Nous les qualifions de *conversion sans conscience*.

Enfin, nous considérons que les tâches proposées dans cette première partie du cours ne répondent pas de façons satisfaisante aux objectifs déclarés dans la préface du manuel, et encore moins à ceux fixés par les textes officiels. Dès lors, la manière dont cette partie est organisée nous semble imparfaite, voire inadéquate.

Propriétés algébriques de l'intégrale

Cette section contient d'abord les propriétés élémentaires de l'intégrale : nullité de l'intégrale lorsque les bornes sont égales, inversion des bornes de l'intégrale, relation de Chasles pour les intégrales et linéarité de l'intégrale. Toutes ces propriétés sont démontrées dans le manuel à l'aide de la formule de Newton. Mais le manuel ne propose ni interprétation ni illustration graphique pour aucune de ces propriétés. La relation de Chasles et la propriété de conservation d'aire par une symétrie axiale sont utilisées dans une activité (activité 1 p.113) qui semble servir de support à l'énoncé suivant :

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $\int_a^b |f(x)| dx$.

Cet énoncé est étendu un peu plus loin aux surfaces planes limitées par les courbes de deux fonctions continues entre les abscisses $x = a$ et $x = b$:

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f , la courbe de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Ces énoncés établissent un moyen pour identifier l'aire de certaines surfaces planes, ils fixent une méthode pour calculer cette aire, mais ils ne fournissent pas une définition de l'aire.

Intégrales et inégalités.

Cette sous-section contient pour l'essentiel un théorème et trois corollaires que nous reprenons ici intégralement ainsi que leurs démonstrations.

Théorème (positivité)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si f est positive sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Démonstration (manuel)

Toute primitive sur $[a, b]$ d'une fonction positive est croissante sur $[a, b]$. Le théorème en découle.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ où $a < b$. Si f est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels, alors $\int_a^b f(x) dx > 0$.

Démonstration (manuel)

Toute primitive sur $[a, b]$ d'une fonction positive qui ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de $[a, b]$ est strictement croissante. Le résultat en découle.

Corollaire (comparaison)

Soit f, g et h trois fonctions continues sur $[a, b]$.

Si $h \leq f \leq g$ alors $\int_a^b h(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Démonstration (manuel)

La fonction $f - h$ étant positive sur $[a, b]$, il résulte de la positivité de l'intégrale que $\int_a^b [f(x) - h(x)] dx \geq 0$ ou encore $\int_a^b h(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$.

On montre de même que $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Corollaire

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Démonstration (manuel)

La propriété découle du corollaire précédent et de la double inégalité $-|f| \leq f \leq |f|$.

Analyse critique et commentaires

Cette partie du cours dévoile la tendance du manuel scolaire ainsi qu'un exemple de négligence didactique. Il ne semble pas qu'on ait besoin d'un examen très poussé pour déceler l'orientation opérationnaliste de cette partie du cours. Tout à l'opposé des objectifs du texte officiel, les auteurs du manuel ont choisi d'insérer ces propriétés et leurs démonstrations dans le registre strictement formel et de les confiner dans ce qui peut paraître comme un système prédéfini de règles du jeu. La démonstration mathématique établit (des propriétés, des propositions, des théorèmes) en invoquant des arguments, en combinant des techniques, en mobilisant des raisonnements, mais comme bien souvent, elle n'explique pas, n'illustre pas, n'interprète pas ; elle n'anticipe pas sur certaines formes d'erreurs. Il nous faut remarquer que les propriétés exposées ici énoncent des conditions suffisantes interprétables géométriquement et dont les réciproques sont contre-exemplifiables. Mais ces questions ne semblent pas motiver l'intérêt des auteurs du manuel. On pourrait, il est vrai, nous objecter que des mises en garde, des commentaires et des contre-exemples seront sans doute développés en classe par les enseignants. L'objection ne nous semble pas valable. En effet, les remarques, les commentaires, les exemples et éventuellement les contre-exemples servent en général non seulement à éclairer un énoncé mathématique mais aussi à anticiper sur des erreurs potentielles des élèves (et peut être aussi de certains enseignants). Expliquer les conditions et les limites d'un énoncé mathématique et prévenir des erreurs inhérentes doit être une composante importante du projet du manuel. Ce projet doit être élaboré indépendamment de celui de l'enseignant, d'autant qu'il s'agit d'un manuel unique qui s'adresse à la fois aux

enseignants et aux élèves. Les enseignants connaissent généralement fort bien le contenu spécifique du programme et ils attendent du manuel scolaire qu'il leur indique une façon de l'interpréter et de le commenter. Nous pouvons d'ailleurs pousser d'un cran l'exigence en faisant remarquer qu'elle se recommande des objectifs du programme qui ont été définis par le texte officiel s'il est vrai que l'on vise à faire acquérir aux élèves la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante. Si nous invoquons cette dernière raison, c'est parce que nous connaissons l'ampleur des erreurs de confusion chez les élèves entre condition nécessaire et condition suffisante, entre implication et équivalence. Nous vérifierons d'ailleurs ce point dans le questionnaire que nous soumettrons à de nouveaux bacheliers.

Il y a aussi un autre constat particulièrement frappant. Depuis le début de la deuxième partie de ce cours, le manuel s'est totalement écarté de la pente géométrique suivie dans la première partie. Ici les propriétés, les théorèmes, les corollaires sont énoncés et démontrés dans le registre algébrique. Nous n'avons enregistré aucun argument géométrique, aucune illustration graphique. Ce constat donne à penser que, pour les auteurs du manuel, les registres géométrique et graphique ne sont pas des registres de validation. Pourtant, des justifications géométriques et des illustrations graphiques sont possibles et utiles surtout pour la cohérence des différentes parties du cours. Il aurait été intéressant, par exemple à propos de la propriété de positivité de l'intégrale, de voir que pour une fonction continue et positive sur $[a, b]$, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire géométrique sous la courbe de f et donc $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Ajoutons enfin que les preuves développées dans le manuel à l'aide des primitives ne sont valables que lorsque la fonction f est continue alors que le recours à des arguments géométriques permet de justifier les propriétés de l'intégrale pour des fonctions continues par morceaux.

Notre dernier commentaire concerne le corollaire énoncé juste après la propriété de positivité de l'intégrale. L'énoncé en question exprime sans équivoque le malaise institutionnel. La manière même d'exprimer cet énoncé mathématique est imparfaite et inadéquate. Il nous faut rappeler qu'un énoncé mathématique doit prétendre à la fois à une optimalité des hypothèses et une portée la plus large possible. C'est au regard de ces deux exigences que l'énoncé en question est jugé imparfait, partiel et donc encore ouvert du point de vue de la connaissance mathématique. Pour comprendre notre propos, il n'est qu'à examiner l'exemple (Fig. 11) de la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$, si $0 < x \leq 1$ et $f(0) = 0$. La fonction f

est bien continue sur $[0, 1]$ et l'on a $\int_0^1 f(x)dx > 0$ alors même que la fonction f admet une infinité de zéros dans l'intervalle $[0, 1]$.

Pour rendre véritablement compte du résultat mathématique visé par l'énoncé en question, nous faisons remarquer qu'il n'est pas sans rappeler un théorème plus précis et plus simple à utiliser, en l'occurrence du théorème de séparation dont nous donnons une démonstration simple et accessible à des élèves de terminale.

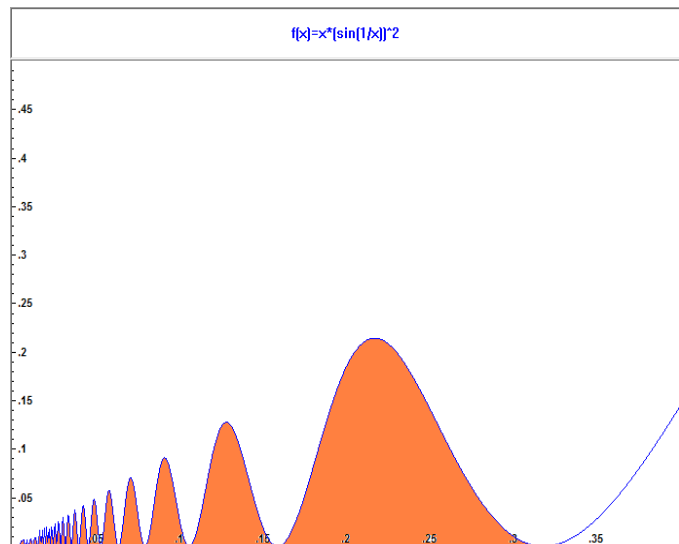


Fig. 11

Théorème de séparation

Si f est une fonction continue et positive sur $[\alpha, \beta]$, alors on a l'équivalence suivante :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \text{Pour tout } x \text{ de } [\alpha, \beta], f(x) = 0$$

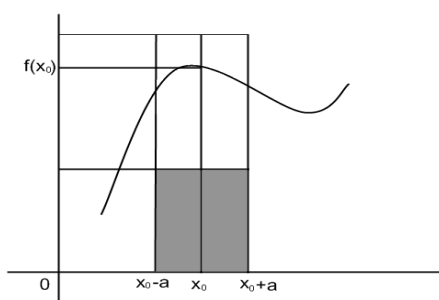
Démonstration

La condition suffisante étant triviale, la démonstration est centrée sur la condition nécessaire. Pour ce faire, nous faisons appel à un raisonnement par contraposition.

Supposons que la fonction f est non nulle sur $[\alpha, \beta]$ où $\alpha < \beta$. Il existe alors au moins un élément x_0 de $[\alpha, \beta]$ tel que $f(x_0) > 0$. Comme f est continue, alors en prenant $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ dans la définition de la continuité on affirme l'existence d'un intervalle ouvert de centre x_0 , contenu dans $[\alpha, \beta]$ et de longueur $2a$ sur lequel on a : $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ et donc $f(x) > \varepsilon$

Par suite $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq a f(x_0) > 0$.

La courbe de f est dans le rectangle supérieur. La fonction f est minorée par $\frac{f(x_0)}{2}$. L'aire sous la courbe de f est minorée par celle $af(x_0)$ du rectangle plein.



Le théorème de séparation est non seulement plus puissant que le corollaire proposé dans le manuel mais il est aussi plus général et plus simple à utiliser. En effet, pour une fonction continue et positive, il suffit d'exhiber un élément x_0 de $[\alpha, \beta]$ tel que $f(x_0) > 0$, pour conclure que $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$. La figure ci-dessus devrait permettre à l'élève de mieux saisir le sens du théorème et de bien comprendre l'enjeu de la démonstration. Il est intéressant de faire remarquer ici que dans l'énoncé du corollaire que propose le manuel, contrairement au théorème de séparation, l'hypothèse de continuité n'est pas nécessaire. En effet, pour une fonction positive, continue par morceaux et ne s'annulant qu'un nombre fini de fois sur un intervalle $[\alpha, \beta]$, on a encore $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$. Il y a lieu de préciser aussi que l'hypothèse de continuité avancée dans tous les énoncés du manuel est le plus souvent non évoquée dans la rédaction des démonstrations et des corrigés d'exercices.

Pour conclure localement cette analyse, il nous semble que l'orientation de cette partie s'oppose à l'esprit même du nouveau programme à la fois du point de vue épistémologique et du point de vue didactique. Cette partie se borne à reprendre et à juxtaposer quatre propriétés de l'intégrale sans les interroger, sans les discuter, sans les interpréter. On comprend bien qu'aussitôt démontrée, la propriété devient une règle qui sera utilisée dans les exercices. Mais que fait la démonstration? Non, elle n'anticipe pas les « incompréhensibilités », les confusions, les imprécisions et les inadéquations. On comprend moins en revanche en quoi cette manière de présenter les propriétés exposées plus haut aide l'élève à comprendre leurs significations et leur utilité et encore moins comment peut-il saisir les limites de leur portée.

Calculs d'intégrales

Cette section est consacrée aux deux seules méthodes utilisées dans l'enseignement secondaire tunisien : calcul d'intégrales au moyen d'une primitive et la méthode d'intégration par parties.

Calcul d'intégrales à l'aide de primitives

La partie consacrée au calcul d'intégrales au moyen d'une primitive composée de deux activités regroupant au total neuf intégrales dont huit se présentent sous des formes directement identifiables du type $u'u^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{Q} - \{1\}$). Ci-dessous le seul exemple nécessitant une transformation préalable de l'expression de la fonction qu'on cherche à intégrer.

Exercice (activité 2 p.117)

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx$.

En l'absence d'indication d'ordre méthodologique, il est possible d'envisager les deux solutions suivantes :

Solution 1

En écrivant $\sin^3 x = \sin x \sin^2 x = \sin x (1 - \cos^2 x) = \sin x - \sin x \cos^2 x$, il vient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin x - \sin x \cos^2 x] \, dx = \left[-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Solution 2

La linéarisation de $\sin^3 x$ donne $\sin^3 x = -\frac{1}{4} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x$. Donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{4} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x \right] \, dx = \left[\frac{1}{12} \cos 3x - \frac{3}{4} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Intégration par parties

Cette partie est constituée de la formule d'intégration par partie (théorème et démonstration) et trois applications. Les deux premières applications sont immédiates et ne nécessitent qu'une seule intégration par parties. Le calcul de la troisième intégrale exige deux intégrations par parties successives. Soulignons, encore une fois, que les auteurs du manuel ne développent aucune remarque sur cette méthode qui pourrait éclairer son intérêt et/ou les

contextes de son utilisation. On pourrait par exemple préciser que la méthode d'intégration par parties permet de transformer la recherche d'une primitive de la fonction uv' en celle d'une primitive de la fonction $u'v$ qui peut s'avérer plus facile à trouver.

Plus concrètement, au niveau du secondaire, l'intégration par parties est utilisée surtout lorsque la fonction que l'on cherche à intégrer contient une fonction transcendante ayant une dérivée algébrique comme par exemple la fonction $x \mapsto \ln x$ ¹²⁹ dont la fonction dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$, ou bien lorsqu'elle se présente sous la forme d'un produit d'une fonction polynôme par une fonction dont on connaît des primitives successives, notamment lorsque la fonction a l'une des formes suivantes : $P(x)\cos(ax + b)$, $P(x)\sin(ax + b)$, $P(x)e^{ax}$, $P(x)\ln(ax + b)$, ..., où $P(x)$ est une fonction polynômiale. L'intégration par parties est aussi souvent employée dans le cas de suites définies par une intégrale lorsqu'il s'agit par exemple de trouver une relation de récurrence entre certains termes de la suite.

Calcul approché d'intégrales (Méthode des rectangles)

Cette sous-section contient une seule activité. Il s'agit de déterminer des encadrements de plus en plus fins de l'intégrale $A = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ par la méthode des rectangles. Les découpages et les schémas sont proposés dans le manuel. L'activité se réduit donc à une simple vérification numérique. Voici les résultats qu'obtiendrait un élève ayant accompli ce qui est demandé dans cette activité :

$$\text{Pour } n = 1, \quad \frac{1}{2} \leq A \leq 1.$$

$$\text{Pour } n = 2, \quad \frac{7}{12} \leq A \leq \frac{5}{6}.$$

$$\text{Pour } n = 3, \quad \frac{1627}{2520} \leq A \leq \frac{1879}{2520}.$$

Les deux premiers encadrements sont donnés dans l'activité et l'élève n'a qu'à les vérifier. Le troisième encadrement en revanche est entièrement à la charge de l'élève. Sans doute que l'activité permet aux élèves de constater qu'en découplant la surface sous la courbe de plus en plus finement on en arrive à obtenir une assez bonne approximation de A .

¹²⁹ La fonction \ln est enseignée dans le chapitre suivant.

Ici, pour $n = 5$, on obtient un encadrement de d'amplitude 10^{-1} . Mais lorsqu'on sait que $A = \ln 2 = 0.69314718 \dots$ peut-on encore dire qu'un encadrement de A à 10^{-1} près est un bon encadrement ? Et surtout *que peut apprendre un élève de cette activité ?*

Quoiqu'on en pense, l'activité qui nous occupe ici n'atteint pas à l'intérêt de la méthode des rectangles. Il lui manque de poursuivre le découpage, donc de construire une procédure qui à la limite conduit à la valeur exacte de A . Au risque de digresser, mais l'idée sous-jacente à la méthode des rectangles est une sorte de jeu dialectique entre le calcul approché et le calcul exact ; une voie pour passer d'un niveau local à un niveau global, d'un milieu discret dans un milieu continu. Ce jeu est sous-tendu par un processus infini de sommation de contributions élémentaires. Appliqué à l'aire sous la courbe d'une fonction continue, ce processus converge et sa limite est la valeur exacte de cette aire ; mais tronqué à un rang donné il en fournit une valeur approchée dont on sait contrôler l'erreur. C'est ce processus que les élèves doivent comprendre et apprendre. Pour cela il aurait fallu engager les élèves dans la recherche d'une conjecture (suites adjacentes, suites faiblement adjacentes) qu'ils devront ensuite vérifier et valider.

Pour comprendre la place qu'accorde le manuel à la méthode des rectangles, nous avons examiné les exercices proposés en fin de chapitre. Cet examen nous a permis de constater que cette méthode est utilisée une seule fois dans la dernière question de l'exercice 17 p.133, dans une situation identique à celle proposée dans l'activité (découpage de l'intervalle $[1, 2]$ en cinq intervalles de même amplitude 0,2).

Valeur moyenne et inégalité de la moyenne

Cette sous-section se compose d'une définition, d'une interprétation géométrique, quatre activités, un théorème et un corollaire. À la suite de la définition de la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, le manuel donne l'interprétation géométrique suivante :

Interprétation géométrique de la valeur moyenne

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

L'aire (en u. a) de la partie du plan limitée par la courbe de f , les droites d'équations $x = a$, $x = b$ et $y = 0$ est égale à celle du rectangle de côtés $(b - a)\bar{f}$.

Cette interprétation géométrique (Fig. 12) constitue une évolution par rapport au programme précédent. Le programme ne précise cependant ni l'intérêt ni les limites et la portée de la valeur moyenne. Nous savons par exemple que si une fonction f , définie sur \mathbb{R} , est T -périodique et vérifie $f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t)$ pour tout réel t alors sa valeur moyenne sur tout intervalle de longueur T est nulle. Dans ce cas la

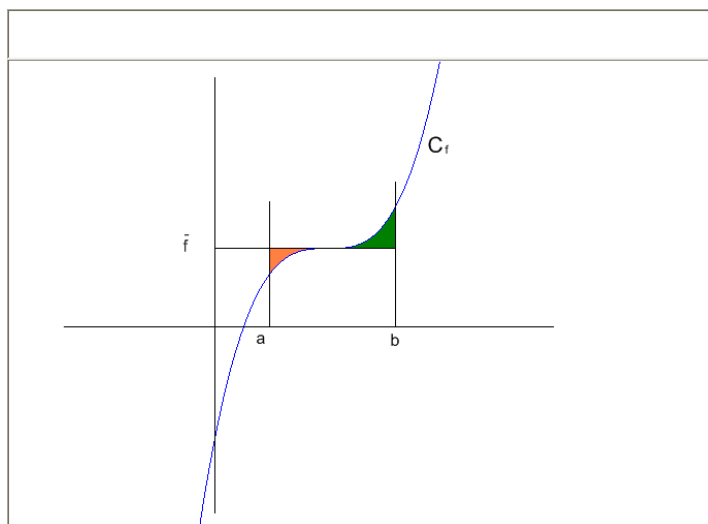


Fig. 12

valeur moyenne ne fournit aucune information¹³⁰ sur la fonction f .

À la suite de trois applications directes de la définition de la valeur moyenne, on énonce l'inégalité de la moyenne et un corollaire qui stipule qu'une fonction continue sur $[a, b]$ atteint sa moyenne au moins en un point c de $[a, b]$. Le théorème et son corollaire sont démontrés dans le manuel mais ils ne sont ni commentés ni illustrés.

Calcul de volumes de solides de révolution

Les auteurs du manuel commencent par donner la définition d'une surface de révolution et puis celle d'un solide de révolution : dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, un arc \widehat{AB} d'une courbe d'équation $y = f(x)$ engendre, dans sa rotation autour de l'axe (ox) des abscisses, une surface appelée surface de révolution (S) (Fig. 13). Dans sa rotation autour de l'axe (Ox) , chaque point $M(x, f(x))$ de l'arc \widehat{AB} décrit un cercle d'axe (ox) , de centre le projeté orthogonal H de M sur (ox) et de rayon $HM = |f(x)|$. La partie de l'espace limitée par la surface (S) et les plans d'équations $x = a$ et $x = b$

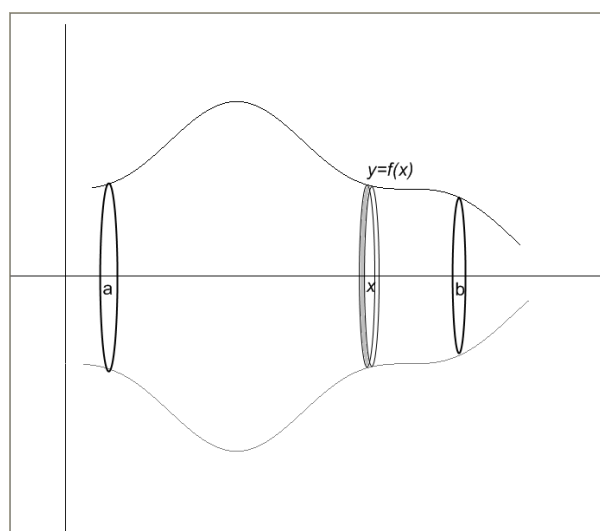


Fig. 13

¹³⁰ On cherche alors la valeur efficace de fonction f qui n'est autre que le rayon r du cylindre qui a le même volume et la même hauteur T que le solide engendré par la rotation de la courbe de f autour de l'axe des abscisses.

est appelée solide de révolution de surface (S). La section de ce solide par le plan passant par M et perpendiculaire à l'axe (Ox) est le disque de centre H et de rayon $|f(x)|$. L'aire de ce disque est $S(x) = \pi f^2(x)$.

Après cette activité descriptive, on donne sans justification l'énoncé suivant qui fixe la formule du volume d'un solide de révolution.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\widehat{AB} = \{M(x, y) \text{ tels que } y = f(x) \text{ et } a \leq x \leq b\}$ autour de l'axe $(O; \vec{i})$ est le réel $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Soulignons ici que cet énoncé est imparfait, voire inadéquat, si l'on peut s'autoriser, dans une analyse institutionnelle, une telle terminologie. Tout d'abord, il nous semble que la positivité de f est inutile, voire inadéquate. Ensuite, le passage de la formule donnant $S(x)$ à celle de V n'est pas expliqué, il n'est pas justifié. Cela met en évidence un manquement à la rigueur mathématique et une négligence didactique, d'une part, et, d'autre part, un aspect du contrat institutionnel qui semble n'exiger que la connaissance et l'application de la formule. Nous le vérifierons dans l'analyse des tâches proposées dans la partie « *Exercices* ».

Le manuel propose ensuite deux activités simples. La première activité a pour but de retrouver le volume d'une boule de rayon R . Les élèves savent déjà que ce volume est $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Dans la deuxième activité, il s'agit de déterminer le volume du solide de révolution engendré par la rotation d'un arc de la parabole d'équation $y = \sqrt{x}$, ($0 \leq x \leq 4$), autour de l'axe (Ox). Le volume cherché est $V = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi$.

Fonctions définies par une intégrale

Cette section se compose de quatre théorèmes, un corollaire, six activités et un exercice résolu. Les démonstrations des deux premiers théorèmes sont totalement développées dans le manuel alors que celles des deux autres sont proposées à titre d'activités. Les auteurs commencent cette section par énoncer le premier théorème suivant :

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I . Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .

Suivent ensuite la démonstration du théorème et la « conséquence » suivante :

Conséquence

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I . Alors la fonction

$F: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$, pour tout x de I .

Il nous semble en fait qu'il s'agit du même énoncé mais formulé d'une autre façon. Quoiqu'il en soit, ce résultat établit un nouveau sens du lien entre primitive et intégrale que nous représentons par le schéma suivant : *Intégrale* \rightarrow *Primitive*. Ce sens fournit à la fois une définition formelle de la primitive d'une fonction continue et un outil pour le calcul explicite de certaines primitives. Mais ce point n'est pas souligné dans le manuel. Il aurait été intéressant de préciser que ce résultat permet d'étudier les propriétés de certaines primitives dont on ne sait pas expliciter l'expression. Le cas de la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est instructif. L'activité qui vient juste après cet énoncé en est une application directe et simple. Il s'agit de vérifier sur quatre exemples la dérivabilité de fonctions de type $F: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, où f est une fonction continue sur un intervalle I et de calculer $F'(x)$, pour tout x de I . Le manuel propose ensuite le premier exercice résolu de ce chapitre. Cet exercice revêt pour nous une importance certaine. L'analyse de la solution doit nous révéler certaines règles du contrat institutionnel à propos de la rigueur de la rédaction, les techniques mises en œuvre et les outils de validation. Vu l'importance de ces points pour notre travail, nous avons estimé utile de reproduire ici l'exercice en question et la solution du manuel.

Exercice résolu 1

Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt$.

1.a. Montrer que F est croissante sur $[1, +\infty[$.

b. Montrer que F est majorée par 2.

c. En déduire que F admet une limite finie L au voisinage de $+\infty$.

2. Soit G la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $G(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$.

Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que $G(x) = F(x) + \frac{1-\cos x}{x} + \cos 1 - 1$.

En déduire que G possède une limite finie en $+\infty$.

Solution du manuel

1.a. Sur $[1, +\infty[$, la fonction F est la primitive qui s'annule en 1 de la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$. De plus, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est positive sur $[1, +\infty[$, car $0 \leq \cos t \leq 1$. On en déduit que, pour tout $x \geq 1$, $F'(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ et par suite F est croissante sur $[1, +\infty[$.

b. Pour tout $t \geq 1$, $\left| \frac{1-\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{2}{t^2}$. Il en résulte que $\left| \int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt \right| \leq 2 \int_1^x \frac{dt}{t^2}$, $x \geq 1$.

Le résultat découle alors de l'égalité $2 \int_1^x \frac{dt}{t^2} = 2 \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x = 2 - \frac{2}{x} \leq 2$.

c. La fonction F est croissante et majorée sur $[1, +\infty[$. On en déduit qu'elle admet une limite

finie L en $+\infty$.

2. Posons $\begin{cases} u(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = \sin t \end{cases}$, alors $\begin{cases} u'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ v(t) = 1 - \cos t \end{cases}$.

On peut alors écrire $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1-\cos t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt$.

On en déduit que $G(x) = F(x) + \frac{1-\cos x}{x} + \cos 1 - 1$, pour tout x de $[1, +\infty[$.

On sait que F admet une limite finie L en $+\infty$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1-\cos x}{x} \right| = 0$ car $0 \leq \left| \frac{1-\cos x}{x} \right| \leq \frac{2}{x}$, pour tout $x \geq 1$.

Le résultat en découle.

Commentaire

Le premier constat qui se dégage de l'examen de cette solution est l'absence de justification de l'existence de l'intégrale. Comme cette absence de justification a été constatée dans toutes les démonstrations du cours, nous en concluons que la justification de l'existence de l'intégrale ne fait pas partie des exigences de l'institution. Or dans l'enseignement secondaire, on ne parle d'intégrale que d'une fonction continue. Dès lors admettre systématiquement l'existence de l'intégrale, c'est admettre la continuité de la fonction qu'on intègre. Ceci justifie notre hypothèse selon laquelle la propriété de continuité des fonctions qu'on intègre est totalement naturalisée. Nous pouvons donc considérer qu'il s'agit ici d'une règle du contrat institutionnel :

L'écriture $\int_a^b f(t)dt$ suppose implicitement que la fonction f est continue entre a et b .

En l'admettant maintenant, cette règle permet d'utiliser la propriété de continuité de la fonction qu'on intègre sans avoir nécessairement à le justifier, mais elle n'autorise pas de l'écarter des hypothèses des énoncés mathématiques (définition, propriété, théorème, etc.) auxquels elle participe. Utiliser un énoncé mathématique sans en avoir vérifié les hypothèses, c'est commettre une erreur mathématique. C'est plus qu'une question de rigueur, c'est une question fondamentale. Aussi pour affirmer, par exemple, que la fonction F est la primitive qui s'annule en 1 de la fonction $f: t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$, il est nécessaire, quitte à ne pas le justifier, de préciser d'abord que la fonction f est continue sur $[1, +\infty[$. De même, la formule d'intégration par parties exige que les fonctions u et v soient continûment dérivables, ce qui n'a pas été souligné dans la solution du manuel.

Il importe aussi de remarquer que sur l'intervalle $[1, +\infty[$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ et que l'encadrement $0 \leq \cos x \leq 1$ (voir 1.a) est faux. Quoique l'erreur est sans incidence sur la solution.

Une autre remarque concerne la solution de la question 1.c). Ici le critère utilisé n'est pas enseigné en lycée. Le fait qu'il donne la solution attendue est incontestable, mais cela ne rend

pas son utilisation légitime pour autant. Enfin, nous constatons encore une fois l'absence de commentaires et de remarques qui pourraient expliquer et justifier certains points de la solution. Il aurait été par exemple souhaitable qu'on explique l'implication :

$$v'(t) = \sin t \Rightarrow v(t) = 1 - \cos t.$$

Pour l'avoir souvent constaté en classe, ce passage n'a rien d'évident pour des élèves en classe de terminale, d'autant qu'ils ont, en général, l'habitude de prendre la constante nulle. Ici, le choix de la constante égale à 1 est certes judicieux, mais il ne va pas de soi et, surtout, ses motivations peuvent échapper à beaucoup d'élèves.

Juste après cet exercice résolu, on propose avec sa démonstration le théorème suivant :

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , u une fonction dérivable sur un intervalle J telle que $u(J) \subset I$ et a un réel de I . Alors la fonction $F: x \mapsto \int_a^{u(x)} f(t)dt$ est dérivable sur J et $F'(x) = f[u(x)] \times u'(x)$, pour tout x de J .

Ici encore, il y a dans la présence de ce théorème dans le manuel quelque chose de contradictoire avec le texte officiel du programme. Conformément à ce qui est requis à propos des fonctions de ce type, tel qu'il a été précisé dans le programme officiel est « l'étude sur des exemples¹³¹ de fonctions définies sur un intervalle I par $x \mapsto \int_a^{v(x)} f(t)dt$, où f est continue sur I et v est dérivable sur I et à valeurs dans I ». Comme on le voit, en mettant entre parenthèses la remarque sur l'intervalle I , la recommandation est sans équivoque : aucun résultat général ne doit être institutionnalisé. Dès lors les intentions de cette recommandation deviennent claires ; elles sont autres que celles du manuel scolaire. Elle vise à faire acquérir à l'élève tout à la fois une maîtrise de la méthode de décomposition $F = \varphi \circ u$, où φ est la primitive de f qui s'annule en a ($\varphi: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$) et la compétence de réinvestir les connaissances requises par cette méthode. Ici, le principe consiste à amener l'élève à construire progressivement une suite d'actions en discernant ses différentes étapes ainsi que les éléments technologiques les justifiant. En revanche, une fois énoncé, le théorème devient l'outil d'une technique opératoire indifférente aux connaissances que la recommandation du programme semble chercher à faire acquérir aux élèves. Cette situation crée non seulement une ambiguïté mais aussi, et surtout, des divergences parmi les enseignants à propos de

¹³¹ C'est nous qui soulignons.

l'emploi de ce théorème. On comprend alors que pour beaucoup d'enseignants, une solution consiste à éviter de proposer en classe des exercices qui font appel à ce théorème ou, lorsqu'ils en proposent, de choisir d'indiquer toutes les étapes que vise la recommandation officielle.

Le manuel ne donne pas d'exercice résolu utilisant le théorème en question, mais propose plutôt deux activités. La première (activité 2 p.124) est un exercice assez long de même type que les problèmes qui figurent dans la partie *Exercices* en fin de chapitre. La deuxième activité (activité 3 p.125) a principalement pour enjeu d'établir que pour une fonction f continue sur un intervalle I centré en 0 et x un élément de I , on a :

- Si f est une fonction paire alors $\int_{-x}^x f(t)dt = 2 \int_0^x f(t)dt$.
- Si f est une fonction impaire alors $\int_{-x}^x f(t)dt = 0$.

Cette activité confirme encore une fois que lorsqu'il s'agit d'établir et de valider un résultat mathématique, le manuel évacue systématiquement les registres graphique et géométrique. L'absence dans cette activité d'éléments qui renvoient à ces deux registres est singulièrement frappante. Toutes nos analyses s'accordent maintenant sur le fait qu'il y a, dans le manuel, non seulement une préférence nette pour les registres algébrique, analytique et formel mais aussi une certitude que les registres graphique et géométrique ne sont utilisés ni dans les preuves ni dans la validation.

Exemples de suites définies par une intégrale

Cette sous-section est constituée d'une activité, d'un exercice résolu et d'un problème résolu. Il s'agit dans les trois cas du même schéma d'action fondé sur une formule de récurrence qu'on exploite pour calculer certains termes de la suite (dans les trois cas) et pour établir un encadrement du terme général de la suite comme c'est le cas dans le problème. Dans la mesure où ce problème traite d'une intégrale de Wallis qui fait déjà l'objet de l'exercice prévu dans notre enquête auprès d'enseignants de classe terminale, il nous paraît important d'examiner ici le problème résolu dans le manuel. Nous allons examiner ici les techniques investies dans cette solution et explorer ce qui peut être l'essentiel des exigences du manuel, pour les comparer ensuite à celles des enseignants.

Problème

On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$.

1. Calculer I_0 , I_1 et I_2 .

2.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

b) En déduire I_3 , I_4 , I_5 et I_6 .

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < I_{n+1} \leq I_n$.

3.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}$.

b) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (n+1)I_n I_{n+1}$.

Montrer que la suite (u_n) est constante et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\pi}{2}$.

Montrer que $\frac{\pi}{2(n+1)} \leq I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}$. Donner un encadrement de I_{1000} .

Solution du manuel

1.a) Le calcul donne immédiatement que $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

D'autre part, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

b) $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t dt$.

Pour $n \geq 2$, on pose $\begin{cases} u(t) = \cos^{n+1} t \\ v'(t) = \cos t \end{cases}$, alors $\begin{cases} u'(t) = -(n+1) \sin t \cos^n t \\ v(t) = \sin t \end{cases}$.

Il en résulte que $I_{n+2} = [\sin t \cos^{n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t dt$.

Ou encore $I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^n t dt = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$.

On en déduit que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$, pour tout entier $n \geq 1$.

D'autre part, il résulte de a) que $I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4}$. Le résultat en découle.

c) En appliquant la relation $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ ($n \geq 0$), on obtient que :

$$I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}, \quad I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3\pi}{16}, \quad I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{8}{15}, \quad I_6 = \frac{5}{6} I_4 = \frac{5\pi}{32}.$$

2. Pour tout $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \cos t \leq 1$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $0 \leq \cos^{n+1} t \leq \cos^n t$. De plus, $\cos t > 0$ pour tout réel t tel que $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$. Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t \, dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$ et donc $0 < I_{n+1} \leq I_n$.

3.a) D'après la question précédente, la suite (I_n) est strictement positive et décroissante.

On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$, $0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$. Ce qui implique que $1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}$.

b) D'après la première question $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ ($n \geq 0$).

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{I_{n+2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$.

Par passage à la limite dans l'encadrement $1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} = 1$.

4. Pour $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = [(n+2)I_{n+2} - (n+1)I_{n+1}]I_n$.

D'après la question 1.b) $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$, et donc $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$. Il en résulte que $u_{n+1} - u_n = 0$, pour tout entier naturel n , c'est-à-dire que la suite (u_n) est constante. On déduit de l'égalité $u_0 = I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$ et donc que $u_n = \frac{\pi}{2}$, pour tout entier naturel n .

La suite (I_n) étant décroissante, on peut écrire pour tout entier non nul n :

$$n I_n I_{n+1} \leq I_n^2 \leq n I_n I_{n-1} \text{ ou encore } \frac{n}{n+1} (n+1) I_n I_{n+1} \leq n I_n^2 \leq n I_n I_{n-1}.$$

Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{n}{n+1}\right) \times \frac{\pi}{2} \leq n I_n^2 \leq \frac{\pi}{2}$, et donc $\frac{\pi}{2(n+1)} \leq I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}$.

On déduit de l'inégalité précédente que $\sqrt{\frac{\pi}{2002}} \leq I_{1000} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2000}}$.

Commentaires

Le premier constat qui se dégage nettement de l'analyse de cette solution est l'absence de vérification de l'existence de l'intégrale ainsi que l'absence de justification des énoncés mathématiques utilisés. Ces résultats concordent totalement avec les résultats soulignés précédemment, notamment la naturalisation de la propriété de continuité dans tous les énoncés en rapport avec l'intégrale.

À ce premier constat s'en ajoute un second, non moins net et important : le manque de rigueur. La solution du problème s'adresse pour l'essentiel à des élèves et doit donc leur offrir un modèle de la rigueur mathématique, de la manière de rédiger une solution et des exemples explicites de manipulation des énoncés mathématiques utilisés. Un des buts des exercices résolus dans le manuel doit être de montrer aux élèves des chaînes de raisonnement, d'en comprendre la nécessité et le fonctionnement ainsi que les liens entre le cours et son emploi. Prenons par exemple la question 2 : l'énoncé utilisé ici est le corollaire suivant du cours « *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ où $a < b$. Si f est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels, alors $\int_a^b f(x)dx > 0$ », et il était nécessaire, de notre point de vue, de préciser que la fonction $t \mapsto \cos^n t$ est continue positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et qu'elle ne s'annule qu'une seule fois en $\frac{\pi}{2}$ (et renvoyer peut être au corollaire en question) avant de conclure que $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t dt$. Nous pensons qu'il n'est pas facile pour un élève en classe de terminale de faire des corrélations simples entre la solution telle qu'elle est rédigée dans le manuel et le résultat rappelé ici.*

La conjonction de toutes ces insuffisances peut poser de sérieux problèmes pour les élèves et être source d'incompréhensions et de confusions.

II.2.2. Conclusion de l'étude de la partie « Cours »

À la lumière de l'étude que nous venons de réaliser, il nous semble que le cours que propose le manuel est composé de trois parties. La première partie vise à introduire la notion d'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. Pour ce faire, on propose trois activités où il s'agit de calculer l'aire d'une surface polygonale dans la première, l'aire du quart du disque unité (surface non polygonale) dans la deuxième, de mettre en rapport l'aire du sous-graphe de la fonction $f: x \mapsto x^2$ entre les abscisses $x = 1$ et $x = t$ ($t \geq 1$) et sa primitive sur $[1, +\infty[$ dans la troisième. Dans la mesure où le choix de ces

activités n'est pas expliqué et ses intentions ne sont pas précisées, leur enchaînement apparaît comme arbitraire effaçant du coup la problématique qu'elles sont supposées étudier. Qui plus est, l'aire (non polygonale) énoncée dans la définition exposée à la suite de la troisième activité est paradoxalement celle en œuvre dans cette dernière activité. Pour conclure localement notre analyse, les connaissances et les savoirs mathématiques présents dans cette partie, quelques pertinents qu'ils soient par rapport aux objets qu'elles visent, sont seulement engagés en elle. Ils ne sont pas interrogés, ils ne sont pas véritablement articulés, leur intention n'est pas clairement communiquée. L'analyse met également en évidence une sorte de négligence didactique (absence de spécification des objectifs des activités, de commentaires, d'explications, etc.) et, par endroits, un écartement de la rigueur mathématique (faire des calculs sur la notion d'aire non polygonales alors qu'elle n'a pas été encore définie, confusion entre aire polygonale et aire non polygonale, utiliser un résultat mathématique sans vérifier les conditions de sa validité, etc.).

La deuxième partie est constituée de la définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ via la formule de Newton et les propriétés algébriques de l'intégrale définie. Dans l'ensemble, cette partie est organisée suivant le schéma :

énoncé → démonstration → application

L'analyse de cette partie permet de constater une rupture totale avec l'approche adoptée dans la première partie du cours. Ici, la dimension intuitive, l'aspect géométrique et les illustrations graphiques sont entièrement évacués. L'approche adoptée dans cette partie paraît « réfléchir » simplement l'orientation effective du manuel. Devant le caractère opérationnaliste interne de cette partie, il semble que l'introduction et la partie centrale du cours n'obéissent pas à la même approche ni à la même logique. L'idée d'éliminer les aspects intuitif et géométrique prive la notion d'intégrale de sa véritable base et tend à la réduire à ses aspects analytique et fonctionnel. L'approche en œuvre dans le manuel s'appauvrit par elle-même et met en doute son aptitude à atteindre les objectifs fixés dans les textes officiels du programme. On peut se demander alors ce qu'il en advient des objectifs de la rubrique « *démarche et raisonnement mathématique* » qui apparaît comme l'une des principales composantes du programme officiel. Il nous semble que, si on reste au niveau de l'aspect analytique et/ou fonctionnel de la notion d'intégrale, il devient peu probable qu'on atteigne aux attentes du programme en termes d'apprentissage de la démarche et du raisonnement mathématique. Exposer et démontrer, à l'aide de la formule de Newton, les propriétés algébriques de la notion d'intégrale, si

exactement et si clairement que ce soit, suffit-il à éclairer les limites de leur portée et la nature des difficultés inhérentes ? Il nous semble que cette orientation installe un contexte restreint à l'intérieur duquel elle érige une forme *unidimensionnelle* de l'activité mathématique qui se suffit à elle-même et se ferme l'accès à d'autres aspects de cette activité. L'examen de l'organisation de la partie centrale du cours rend compte du fait qu'il n'y a pas d'espace pour une discussion dans laquelle on ferait le projet d'orientations différentes susceptibles de développements plus riches. Cette organisation établit des énoncés, qui se valident les uns les autres, coupés de toute interprétation. Nous avons illustré dans notre analyse des écarts de la rigueur mathématique et des négligences didactiques et, surtout, le caractère peu satisfaisant du projet que propose le manuel scolaire.

La troisième partie est consacrée à des applications de la notion d'intégrale: calcul d'aire de surfaces planes, calcul du volume de solides de révolution autour de l'axe des abscisses, exemples de fonctions définies par une intégrale, exemples de suites définies par une intégrale. L'analyse met en évidence que ces applications sont isolées de tout contexte concret réel qui éclaire leurs attributs et détermine leurs fonctions. Ce contexte est plus vaste que celui développé dans le manuel et il en est différent. Il est plus vaste car il déborde les aspects calculatoires et fonctionnels que le manuel propose. Il est différent car, à l'opposé de celui du manuel, il invite à l'observation, il requiert l'évaluation et le contrôle, il appréhende les relations et il suscite l'interrogation. Si l'on fait abstraction de l'observation, de l'évaluation, du contrôle, des relations et des interrogations, que reste-t-il de l'activité mathématique ? C'est ici que se pose le problème de la pertinence d'un projet d'enseignement. Les tâches qui sont proposées aux élèves doivent inclure des questions qui suscitent la discussion et l'exercice de l'esprit critique, il faudrait qu'elles soient à même de permettre à l'élève de reconnaître qu'une connaissance est confuse, là où la confusion pourrait être la moins évidente, il faudrait qu'elles soient capables de démasquer des incompréhensions, des imprécisions et des imperfections. Alors le projet atteindrait le niveau où l'activité spécifiquement mathématique, qui ouvre l'accès à la compréhension et forme l'esprit, peut être comprise, fréquentée et pratiquée par l'élève. L'activité mathématique acquiert ainsi sa véritable dimension qui lui confère un sens et une fonction.

La même analyse rend compte que ce qui caractérise la tendance prévalente dans le manuel c'est une sorte d'opérationnalisme non problématisant dans le sens où l'activité mathématique proposée à l'élève est cristallisée dans des schémas d'action presque mécanique :

1. Étude de fonction → représentation graphique → calcul d'aire ou de volume.
2. a. Fonction de type $F: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, où f est une fonction dont on ne sait pas déterminer une primitive à l'aide des méthodes enseignées en terminale.
- b. Introduction d'une fonction auxiliaire de type $G: x \mapsto \int_a^{u(x)} f(t)dt$, où u est une fonction dérivable (changement de variable implicite).
- c. Dérivation de G , intégration de G' , puis détermination de $G(x)$.
- d. Utilisation de G pour déterminer certaines valeurs et/ou propriétés de F .
3. a. Suite de terme général de type $u_n = \int_a^b v^n(x)f(x)dx$, où f et v sont continues sur $[a, b]$ avec $0 \leq v(x) \leq 1$, pour tout x de $[a, b]$.
- b. Calcul de certains termes de la suite.
- c. Relation de récurrence.
- d. Variation de la suite (u_n) et/ou encadrement de u_n .
- e. Calcul de limite ou d'une valeur approchée.

Ces schémas illustrent clairement l'orientation de l'activité mathématique que le manuel propose aux élèves. Cette orientation est essentiellement calculatoire et restrictive. Elle établit des méthodes de direction peu efficaces, des connaissances peu précises et des compétences peu sûres. Certes, il est juste qu'atteindre à des compétences calculatoires, à des connaissances opératoires, peuvent être des fins en elles-mêmes. Nous dirons même que faire acquérir aux élèves de telles connaissances et de telles compétences est bien l'affaire de l'enseignement. Ce serait une erreur de nier leur importance. Mais l'enseignement ne se borne pas à cela. Sa principale entreprise est d'offrir à l'élève un point de vue pertinent susceptible de lui permettre d'atteindre à une bonne compréhension, à des connaissances plus riches et à des compétences plus larges.

Dès le départ, notre analyse s'est attachée à examiner le problème de la pertinence du projet retenu dans le manuel scolaire à l'aune de l'adéquation de l'approche et des activités qui y sont proposées. C'est un problème qui apparaît aux deux niveaux où l'analyse étudie les conditions des apprentissages potentiels des élèves :

1. L'initiation des élèves à la démarche mathématique est possible et elle doit être rendue telle. Ce principe est la base fondamentale de tout effort didactique et/ou pédagogique.
2. Pour la notion d'intégrale, il existe des possibilités spécifiques pour faire accéder les élèves à sa compréhension et des moyens spécifiques pour réaliser ces possibilités.

II.2.3. Étude de la partie « Exercices »

La partie *Exercices* n'est pas une rubrique additionnelle que l'on pourrait isoler de ses implications pratiques et théoriques. Les exercices fonctionnent comme un système qui détermine les connaissances à faire acquérir aux élèves ainsi que les moyens de les entretenir et d'étendre leur efficacité et leur portée. Ce système fonctionne à la fois au niveau de la formation des conceptions des élèves et de la construction de leurs connaissances. Il tend à devenir dominant et à déterminer dans l'ensemble les apprentissages potentiels des élèves. Aussi, dans la mesure où cette partie prolonge et complète le cours, son analyse revêt-elle une importance cruciale dans notre recherche. Deux analyses sont envisagées. La première, que nous qualifions de *globale*, s'attache à dégager toutes les tâches (regroupées en types de tâches) en rapport avec la notion d'intégrale et d'étudier leur nature et les adaptations qu'elles imposent au niveau de l'activité mathématique des élèves. La deuxième analyse, que nous qualifions de *locale*, s'attache à développer une étude approfondie de quelques exercices qui nous semblent assez bien traduire l'orientation du manuel, du moins au niveau de ce chapitre. Nous proposerons des solutions détaillées des tâches contenus dans ces exercices et développerons un commentaire et/ou une analyse critique à l'endroit de chaque exercice.

Les aspects de l'intégrale présents dans le manuel et leur mise en rapport, les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances requises dans les exercices sur la notion d'intégrale et les registres de représentation sémiotique utilisés sont autant d'éléments qui président à la compréhension et à l'émergence du sens mathématique de la notion d'intégrale. Pour en rendre compte, nous ferons appel au modèle des « quatre T » développé par Chevallard (1998) dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, à l'approche de niveaux de mise en fonctionnement d'une notion mathématique de Robert (2005) et la notion de registres de représentation sémiotique élaborée par Duval (1993).

La partie *Exercices* est composée d'un QCM, d'une rubrique Vrai-Faux, de 35 exercices et de 4 problèmes. Pour nous tenir strictement à notre sujet, nous avons choisi de centrer notre analyse seulement sur les tâches spécifiques à la notion d'intégrale. Cependant, sachant que les quatre problèmes proposés traitent principalement de l'intégrale et que les problèmes 36 et 37, d'une part, et les problèmes 37 et 38, d'autre part, sont de même type nous avons choisi de développer les solutions détaillées des problèmes 36 p.135 et 38 p.136 et une analyse complète de ces deux problèmes.

II.2.3.a. Analyse globale de la partie « Exercices »

Dans un souci de clarté, nous présentons ci-dessous les notations que nous utiliserons dans notre analyse :

- T_i désigne le type de tâches numéro i .
- t_{ij} désigne la tâche numéro j appartenant au type de tâches T_i .
- τ_{ij}^k désigne une technique possible pour accomplir la tâche t_{ij} .
- $(\theta, \Theta)_i$ désigne le bloc théorique qui justifie le bloc pratique $(t_{ij}, (\tau_{ij}^k))$.
- N_{ij}^k désigne le nombre de tâches impliquant la technique τ_{ij}^k .

1. Premier type de tâches

Le premier type de tâches correspond à T_1 : *Calculer une intégrale*.

Nous distinguons deux tâches qui relèvent du type de tâche T_1 :

- ❖ t_{11} : *Calculer l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$, où f est une fonction continue, a et b deux constantes réelles.*
- ❖ t_{12} : *Calculer l'intégrale $\int_a^{u(x)} f(t)dt$, où f est une fonction continue, u une fonction dérivable et a une constante réelle.*

La tâche t_{11} est proposée 84 fois et sa réalisation fait appel, suivant les cas, à différentes techniques que nous illustrons par des exemples choisis dans la partie *Exercices* :

- τ_{11}^1 : Reconnaître que f est la dérivée d'une fonction donnée. $N_{11}^1 = 27$.

Exemple : $\int_{-1}^3 \left(\frac{x^2}{2} - x\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^3 = \frac{2}{3}$.

- τ_{11}^2 : Reconnaître que f a la forme d'une dérivée. $N_{11}^2 = 14$.

Exemple : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t \sin t dt = \left[-\frac{1}{5} \cos^5 t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{2}}{40}$.

- τ_{11}^3 : Exprimer $f(x)$ sous la forme d'une somme de fonctions dont on sait déterminer des primitives. Cette technique inclut les méthodes classiques de décomposition en éléments simples de fractions rationnelles et de linéarisation de fonctions polynômes trigonométriques. $N_{11}^3 = 9$.

Exemple 1:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{(x-1)^3} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2(x-1)+1}{(x-1)^3} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{(x-1)^2} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x-1)^3} dx = \left[-\frac{2}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}.$$

Exemple2 :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8} \right] dx = \left[\frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{9}{8} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}$$

Exemple3 :

$$\int_1^2 x\sqrt{x-1} dx = \int_1^2 [(x-1)\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}] dx = \left[\frac{2}{5} (x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{16}{15}.$$

- τ_{11}^4 : Utiliser une intégration par parties. $N_{11}^4 = 8$.

Exemple : $\int_0^{\pi} x \cos 2x dx = \left[\frac{1}{2} x \sin 2x \right]_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin 2x dx = 0 + \left[\frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\pi} = 0.$

- τ_{11}^5 : utiliser conjointement une autre intégrale. $N_{11}^5 = 16$.

Exemple : Soit à calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx$.

On introduit l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$, puis on établit que $I + J = \frac{\pi^2}{8}$ et $I - J = -\frac{1}{2}$.

Donc $I = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$.

- τ_{11}^6 : Reconnaître que $\int_a^b f(t) dt$ est l'aire d'une surface que l'on sait évaluer. $N_{11}^6 = 3$.

Exemple : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ est l'aire d'un quart du disque unité. Donc $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.

- τ_{11}^7 : Remplacer x par b si l'expression de $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est disponible. $N_{11}^7 = 7$.

Exemple : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, où $F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x$.

La tâche t_{12} est proposée dans quatre exercices et sa résolution requiert l'une des deux techniques suivantes :

- τ_{12}^1 : Expliciter l'expression de $F(x)$ au moyen d'une primitive de f . $N_{12}^1 = 1$.

Exemple : Soit à expliciter $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, où f est la fonction définie sur l'intervalle

$$[0, 3] \text{ par : } \begin{cases} f(t) = t, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ f(t) = \frac{1}{t^2}, & \text{si } 1 < t \leq 3 \end{cases}$$

On commence par vérifier que la fonction f est continue sur $[0, 3]$ et justifier par là que la fonction F est bien définie. Sachant que $F(0) = 0$, l'expression de F est alors donnée par:

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{3}{2}, & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases}.$$

- τ_{12}^2 : Dériver la fonction F , puis intégrer sa dérivée F' . $N_{12}^2 = 3$.

Exemple : Soit F la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$.

La fonction $f: t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur \mathbb{R} , la fonction $u: x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et $u\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Par suite la fonction F est dérivable sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et l'on a :

$F'(x) = u'(x)f[u(x)] = (1 + \tan^2 x) \times \frac{1}{1+\tan^2 x} = 1$. Comme $F(0) = 0$, il en résulte que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $F(x) = x$.

Les techniques susceptibles d'être utilisées pour accomplir les tâches de type T_1 sont justifiées par un bloc technologico-théorique $(\theta, \Theta)_1$ officiellement institutionnalisé :

- Définition de l'intégrale définie : formule de Newton-Leibniz.
- Propriétés de l'intégrale définie.
- Formule d'intégration par parties.
- Théorème sur les fonctions $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, où f est continue sur I et $a \in I$.
- Théorème sur les fonctions $x \mapsto \int_a^{u(x)} f(t)dt$, où u est dérivable sur I , f est continue sur $u(I)$ et $a \in I$.
- Théorèmes relatifs aux opérations sur les primitives et les dérivées.
- Interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction continue et positive.

Commentaire

Il est important de souligner que les tâches appartenant au type T_1 s'appuient, pour l'essentiel, sur des techniques strictement calculatoires dont certaines sont seulement en acte, en ce sens qu'elles ne sont justifiées par aucun élément technologique. Nous avons en effet pointé l'absence d'éléments théoriques sur la notion d'aire et ses propriétés et l'absence d'éléments technologiques justifiant la méthode de décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples. Il convient en outre de faire constater que dans les tâches t_{11} et t_{12} , la mise en fonctionnement des connaissances sur la notion d'intégrale relève du *niveau technique* dans 60% des cas proposés (53/88) et du *niveau mobilisable* dans les autres cas (35/88). D'autre

part, ces tâches sont, dans une large proportion, réalisées dans le registre algébrique (85/88). Le registre géométrique est sollicité dans les trois autres cas.

2. Deuxième type de tâches

Le deuxième type de tâches T_2 correspond au travail sur *les intégrales et inégalités*. L'analyse de la partie *Exercices* nous a permis de repérer 23 questions à propos de ce type de tâches que nous avons découpé, suivant les techniques à utiliser, en deux tâches :

- ❖ t_{21} : Établir une inégalité intégrale.
- ❖ t_{22} : Établir un encadrement d'une intégrale.

La tâche t_{21} , proposée dans 5 exercices, consiste à établir que $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$, où f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ (l'une d'elles est éventuellement constante).

Cette tâche requiert, suivant les cas, l'une des techniques suivantes :

- τ_{21}^1 : Établir que $f \leq g$ sur $[a, b]$ et passer ensuite à l'intégrale. $N_{21}^1 = 4$.
- τ_{21}^2 : Établir que $f - g \leq 0$ sur $[a, b]$ et passer ensuite à l'intégrale. $N_{21}^2 = 1$.

La tâche t_{22} , proposée 13 fois, consiste à établir que $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b h(x)dx$, où f , g et h sont continues sur $[a, b]$ (l'une des fonctions g ou h , ou les deux à la fois, étant éventuellement constante).

Les techniques susceptibles d'être utilisées pour résoudre cette tâche sont les suivantes :

- τ_{22}^1 : Établir séparément que $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b h(x)dx$ à l'aide de τ_{21}^1 ou τ_{21}^2 . $N_{22}^1 = 1$.
- τ_{22}^2 : Établir que $g \leq f \leq h$ sur $[a, b]$ et passer ensuite à l'intégrale. $N_{22}^2 = 10$.
- τ_{22}^3 : Utiliser la méthode des rectangles. $N_{22}^3 = 2$.

Le bloc technologico-théorique $(\theta, \Theta)_2$ justifiant ces techniques renvoie à la partie *cours*.

- Intégrales et ordre.
- Inégalité de la moyenne.
- Méthode des rectangles.

Commentaire

Il convient de noter ici que la tâche t_{22} est fortement liée à l'étude de suites dont le terme général est défini par une intégrale. D'autre part, les techniques τ_{22}^1 et τ_{22}^2 sont exclusivement investies dans des opérations de traitement dans le registre algébrique. La technique τ_{22}^3 intervient dans la comparaison d'aires et s'appuie sur le graphique, ce qui pourrait donner lieu à des opérations de coordination entre les registres géométrique, graphique et numérique.

Enfin, les tâches t_{21} et t_{22} sont, pour l'essentiel, des applications immédiates de résultats de cours et le mode de fonctionnement des connaissances requises est de type technique (15/18) dans la plupart des cas et de type mobilisable dans les autres cas (3/18).

3. Troisième type de tâches

Le troisième type de tâches T_3 concerne l'aire d'une surface et contient deux tâches :

- ❖ t_{31} : Calculer l'aire d'une surface plane.
- ❖ t_{32} : Trouver un encadrement de l'aire d'une surface plane.

La tâche t_{31} est rencontrée 11 fois et sa résolution requiert l'une des techniques suivantes :

- τ_{31}^1 : Reconnaître une surface usuelle et appliquer la formule appropriée. $N_{31}^1 = 1$.
- τ_{31}^2 : Identifier les bornes d'intégration et la fonction à intégrer puis appliquer le théorème du cours. $N_{31}^2 = 6$.
- τ_{31}^3 : Reconnaître que la surface en question est isométrique à une autre surface dont on sait évaluer l'aire. $N_{31}^3 = 1$.
- τ_{31}^4 : Reconnaître que l'aire cherchée est donnée par une fonction définie par une intégrale dont on sait expliciter l'expression. $N_{31}^4 = 3$.

La tâche t_{32} , proposée 5 fois, s'appuie sur l'une des deux techniques suivantes :

- τ_{32}^1 : Utiliser la méthode des rectangles. $N_{32}^1 = 2$.
- τ_{32}^2 : Trouver un encadrement de la fonction à intégrer et passer à l'intégrale. $N_{32}^2 = 3$.

Les techniques utilisées dans ce type de tâches trouvent leurs justifications dans le bloc technologico-théorique $(\theta, \Theta)_3$ suivant :

- Les théorèmes du cours relatifs à l'aire d'une surface plane.
- Les théorèmes sur l'intégrale et l'ordre.
- La méthode des rectangles.

Commentaire

Le type de tâches T_3 est rencontré dans 9 exercices. Dans chacun des exercices, la surface plane dont on demande d'évaluer l'aire est représentée graphiquement. Le tracé des courbes qui délimitent la surface en question est fourni par le manuel dans deux exercices et laissé à la charge de l'élève dans les sept autres exercices. L'étude des positions relatives des courbes délimitant la surface peut apparaître dans la consigne (2 exercices) ou non (7 exercices), mais sa conduite est toujours laissée à la charge de l'élève. Dans la plupart des tâches examinées, il s'agit d'applications immédiates de résultats de cours et les connaissances requises relèvent du niveau technique. Ces tâches exigent des opérations de conversion ou de coordination entre les registres géométrique, graphique et algébrique et/ou numérique ; mais ces opérations sont souvent pilotées par les énoncés.

4. Quatrième type de tâches

Le quatrième type de tâches T_4 correspond au *calcul de volume*. Ce type de tâches est réduit à une tâche unique.

❖ t_4 : *Calculer le volume d'un solide de révolution.*

Cette tâche fait l'objet de 5 exercices consécutifs (31, 32, 33, 34 et 35 p.135). Dans chacun de ces exercices, l'arc de courbe qui génère le solide de révolution est définie avec précision: $(C) = \{M(x, y); y = f(x) \text{ et } a \leq x \leq b\}$, où l'expression de $f(x)$ est fournie dans les énoncés. Dès lors, une technique s'impose comme étant la seule pour accomplir cette tâche :

- t_4 : Appliquer la formule du cours $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. $N_5 = 5$.

Il s'agit à l'évidence d'une application simple et isolée de la formule $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ qui est fixée par un théorème de cours. Remarquons aussi que la résolution de cette tâche est d'ordre strictement calculatoire qui renvoie à des traitements dans le registre algébrique.

Commentaire

Ici, l'élève n'a qu'à identifier les bornes d'intégration et la fonction f , appliquer la formule et conduire correctement les calculs. Des calculs qui ne doivent pas faire difficulté lorsqu'on sait que les fonctions proposées dans les 5 exercices en questions sont toutes élémentaires. Nous considérons donc que dans la tâche t_4 le mode de fonctionnement des connaissances requises est de type technique.

5. Cinquième type de tâches

Le cinquième type de tâches T_5 correspond au calcul de la valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Ce type de tâche aussi est réduit à une seule tâche :

❖ τ_5 : Calculer la valeur moyenne d'une fonction continue.

Cette tâche est proposée trois fois dans l'exercice 28 de la page 135. Il s'agit d'appliquer sur trois exemples simples la définition de la valeur moyenne d'une fonction continue.

- τ_5 : Appliquer la formule du cours $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$. $N_5 = 3$.

Il s'agit clairement d'une application simple et isolée de la formule $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ qui est fixée dans le cours par une définition. La résolution de cette tâche, également d'ordre strictement calculatoire, renvoie à des traitements dans le registre algébrique.

II.2.3.b. Conclusion de l'analyse globale de la partie « Exercices »

Dans son ensemble, la partie *Exercices* du chapitre *Intégrales* propose cinq types de tâches totalisant 125 tâches et mobilisant potentiellement 22 techniques qui sont toutes ou presque justifiées par des éléments technologiques institutionnalisés dans la partie *Cours*. Un compte rendu des principaux résultats en termes de mise en fonctionnement des connaissances à utiliser et en termes d'opérations sémiotiques potentielles de l'analyse globale est donné dans le tableau suivant :

	Niveaux de mise en fonctionnement			Registres de représentation sémiotique		
	Technique	Mobilisable	Disponible	Algébrique	Graph/Géom.	Alg/Graph/Géom.
Nombre	83/125	42/125		109/125	3/125	13/125

L'analyse globale développée plus haut confirme le résultat principal que nous avons dégagé au terme de l'analyse de la partie *Cours* : la tendance prévalente dans l'enseignement de l'intégrale en classe terminale suit une orientation operationaliste. Pour mieux comprendre cette tendance, il nous faut faire une remarque très importante. Le manuel ne propose aucune situation ouverte de recherche, il ne propose aucune tâche problématique, il ne propose aucune tâche de contre-exemplification. Cela donne à penser que l'absence de ces tâches pourrait s'expliquer par le fait qu'on ne peut les définir de façon adéquate en termes d'opération ou de fonctionnement. L'activité mathématique de l'élève se trouve dès lors réduite à un ensemble de tâches et de techniques qui répétées de manière fréquente finissent

par s'inscrire dans ses habitudes d'action. Les exercices que nous allons examiner dans l'analyse locale ci-dessous sont ici des exemples typiques.

II.2.4.a. Analyse locale de la partie « Exercices »

Exercice 22 p.134

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \tan^3 x + \tan x$.

1. Étudier les variations de f .
 2. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0, 2]$.
 3. a. Représenter dans un repère orthonormé, les fonctions f et f^{-1} en précisant les demi-tangentes aux extrémités des deux courbes.
2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$. En déduire $\int_0^2 f^{-1}(x) dx$.

Compte tenu de l'objet de notre recherche, nous ne nous occupons ici que de la dernière question, c'est-à-dire des connaissances qui doivent être mises en jeu dans le calcul des deux intégrales proposées.

a. Calcul de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$

Pour calculer cette intégrale, l'élève doit d'abord reconnaître la nécessité de factoriser l'expression $\tan^3 x + \tan x = (1 + \tan^2 x)\tan x$, identifier ensuite la forme $u'u$ et connaître la formule qui en fournit une primitive.

Bien que pouvant être supposée routinière, la tâche requiert la mobilisation de connaissances qui ne sont pas directement indiquées. D'autre part, la solution, qui consiste en des opérations de traitement dans le registre algébrique, permet de constater le caractère strictement

calculatoire de la tâche : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x)\tan x dx = \left[\frac{1}{2}\tan^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$.

b. Calcul de l'intégrale $\int_0^2 f^{-1}(x)dx$

Ici, malgré l'indication implicite (en déduire), l'élève doit trouver les arguments et les outils appropriés pour évaluer cette intégrale. Et le cas de cette dernière est bien plus ardu que celui de la première intégrale. L'élève doit d'abord reconnaître qu'un calcul direct sur cette intégrale n'est pas envisageable, non seulement parce qu'il ne dispose pas de l'expression algébrique de $f^{-1}(x)$, mais surtout parce qu'il ne peut pas

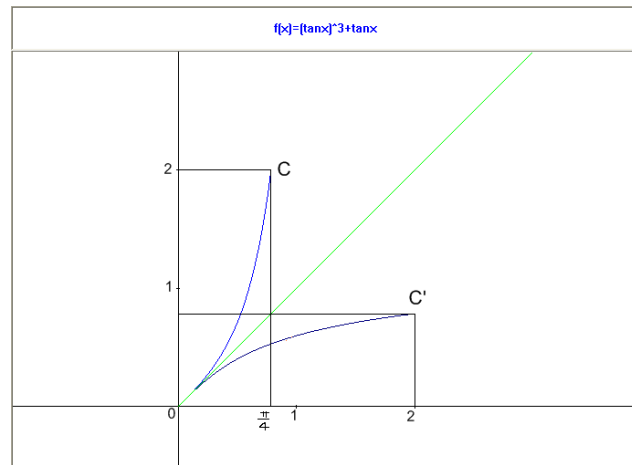


Fig. 14

l'expliciter. Il est donc forcé d'explorer d'autres possibilités.

L'élève aura d'abord à reconnaître qu'il lui faut chercher une idée à partir du graphique réalisé dans la question précédente (Fig. 14).

La référence à la question 2 induit l'utilisation conjointe des registres graphique et géométrique. Dès lors l'élève aura à mener le jeu des liens subtils entre ces deux registres qui commandent à la mise en fonctionnement des connaissances requises.

En se référant au graphique l'élève aura à

- Constater que la fonction f^{-1} est continue et positive sur $[0, 2]$.
- Reconnaître alors que l'intégrale $\int_0^2 f^{-1}(x)dx$ s'interprète comme l'aire de la surface (S') limitée par la courbe (C') et les droites d'équations $x = 2$ et $y = 0$.
- Introduire dans le graphique la droite d'équation $x = 2$.
- Reconnaître que (S') est isométrique à la surface (S) limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$ et $y = 2$. (Figure 15).
- Reconnaître l'aire de (S) est égale à $\int_0^{\frac{\pi}{4}} [2 - f(x)]dx$.

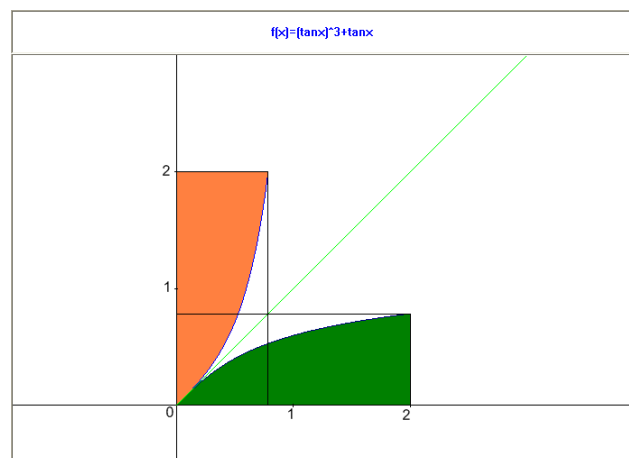


Fig. 15

- Calculer enfin $\int_0^2 f^{-1}(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [2 - f(x)]dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$.

Il est possible aussi qu'au niveau du quatrième point l'élève reconnaisse que la surface (S'') limitée par la courbe (C') et les droites d'équations $x = 0$ et $y = \frac{\pi}{4}$ est isométrique à celle limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $y = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$. (Fig. 16).

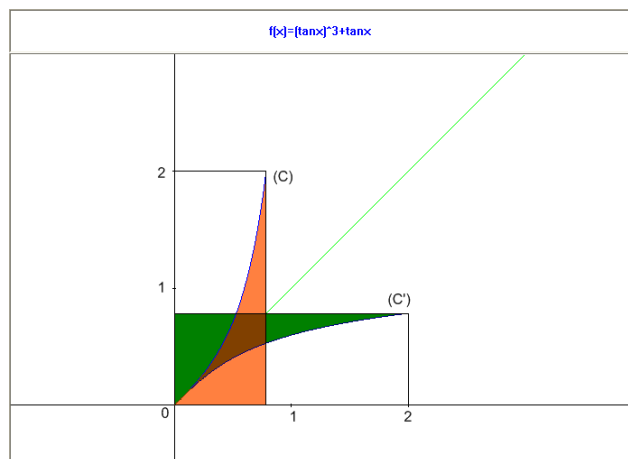


Fig.16

Dans ce cas, il aura à :

- Reconnaître que la somme des aires des surfaces (S') et (S'') est égale à l'aire du rectangle de dimensions 2 et $\frac{\pi}{4}$.
- Traduire algébriquement ce qu'il vient de constater par $\int_0^2 f^{-1}(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \frac{\pi}{2}$.
- Dédire que $\int_0^2 f^{-1}(x)dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$.

Commentaire

L'analyse montre que cette dernière question requiert tout à la fois la disponibilité et la mobilisation de connaissances non indiquées ainsi que le choix d'une stratégie de résolution.

D'un autre côté, la solution exige des coordinations (aller-retour) entre les trois registres algébrique, graphique et géométrique. Compte tenu de l'absence d'indications et du fait que les connaissances des élèves sur les propriétés de l'aire ne sont qu'en acte, il y a lieu de considérer que cette dernière tâche est problématique. Enfin, en raison de l'importance des adaptations auxquelles l'élève doit faire appel, il nous semble que les connaissances requises pourraient se situer au *niveau disponible*.

Ajoutons une remarque. L'exercice rend compte du fait qu'il est possible de calculer certaines intégrales à l'aide de considérations d'aire et établit un lien entre les notions d'aire et d'intégrale dans le sens *aire* \rightarrow *intégrale*. Un sens lien qui n'est pas signalé dans le manuel.

Exercice 24 p.134

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

1. a) Étudier f .

b) Vérifier que la courbe représentative C_f de f est un quart de cercle de centre O et de rayon 1.

2. Pour $x \in [0, 1]$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Représenter la partie du plan dont l'aire est égale à $F(1)$. En déduire $F(1)$.

3. Pour tout $x \in [0, 1]$, on désigne par a le réel de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos a = x$.

a) Montrer que $F(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$.

b) Calculer $F\left(\frac{1}{2}\right)$ et $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Pour les raisons déjà précisées en début de l'exercice précédent, nous limitons notre analyse aux questions 2 et 3.

Analyse didactique

Question 2

Dans la première partie de la question l'élève aura à écrire que $F(1) = \int_0^1 f(t)dt$, constater que la fonction f est continue et positive sur $[0, 1]$, interpréter alors $F(1)$ comme l'aire sous la courbe de f et reconnaître enfin que la surface en question est le quart du disque unité situé dans la partie du plan définie par $x \geq 0$ et $y \geq 0$. L'élève n'a plus ensuite qu'à connaître l'aire du disque pour conclure que $F(1) = \frac{\pi}{4}$.

À la condition que la courbe d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ soit correctement représentée, la tâche constitue une application immédiate de résultats de cours, en l'occurrence l'interprétation de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ et la formule de l'aire d'un disque. Sa résolution nécessite cependant des articulations conscientes entre les registres algébrique, géométrique, graphique et numérique. À ce niveau, les connaissances requises étant supposées actives chez les élèves, la tâche nous paraît routinière.

Question 3

En l'absence d'indications, la stratégie de résolution de la question est entièrement à la charge de l'élève. Pour ce faire, il peut s'inspirer d'autres exercices qui figurent en fin des chapitres *Primitives* et *Intégrales*. Il nous semble qu'il est possible d'envisager deux stratégies différentes que nous qualifierons de *stratégie algébrique* et de *stratégie géométrique*. Il convient enfin de souligner que la résolution de la question exige à la fois la disponibilité de plusieurs connaissances et la maîtrise de leur mise en fonctionnement.

Stratégie algébrique

Cette stratégie trouve son pendant dans d'autres exercices du manuel. L'élève aura à :

- Remplacer $x = \cos a$ dans l'expression de F : $F(\cos a) = \int_0^{\cos a} f(t) dt$.
- Reconnaître qu'il s'agit d'une fonction définie par une intégrale.
- Introduire la fonction G définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $G(a) = F(\cos a)$.
- Justifier que G est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- Établir que $G'(a) = -\sin^2 a$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- Reconnaître que G' est primitivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et que $G(\frac{\pi}{2}) = 0$.
- Calculer $G(a) = \int_{\frac{\pi}{2}}^a -\sin^2 t dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^a \frac{1}{2}(-1 + \cos 2t) dt = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} + \frac{1}{4} \sin 2a$.
- Exprimer $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ en fonction de x :

$$\sin 2a = 2 \cos a \sqrt{1 - \cos^2 a} = 2x \sqrt{1 - x^2}$$

- Conclure que $F(x) = G(a) = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$.

Stratégie géométrique

Cette stratégie (Fig. 17) pourrait s'inspirer de la question 2, mais nous ne considérons pas que cette dernière se présente comme une indication pour la question 3.a. Il nous semble même que très peu d'élèves sont susceptibles de

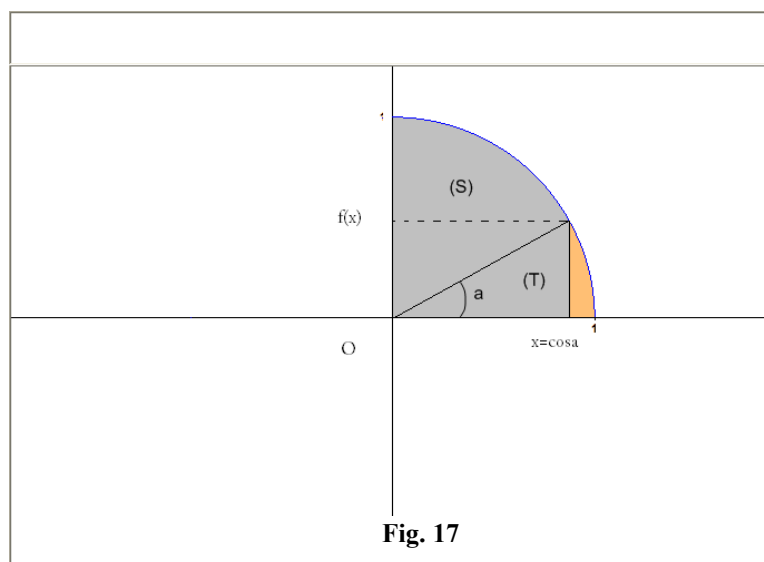


Fig. 17

l'envisager. En effet, dans cette stratégie l'élève aura à :

- Interpréter $F(x)$ comme l'aire de la surface limitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $t = 0$ et $t = x$.
- Décompose la surface en question en celle du secteur circulaire¹³² de rayon 1 et d'angle $\frac{\pi}{2} - a$ et celle du triangle rectangle de base $x = \cos a$ et de hauteur $f(x)$.
- Calculer $F(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - a \right) + \frac{1}{2} x f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$.

Commentaire

Cette stratégie permet de constater que le jeu entre intuition et formalisme ouvre souvent la voie à l'émergence d'idées simples, inédites et stimulantes. On peut apprécier à la lumière de la solution à la fois la subtilité des liens entre le graphique, le géométrique et l'algébrique et la puissance des opérations de conversion.

D'autre part, comme la fonction $a \mapsto \cos a$ réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$, l'égalité $x = \cos a$ est équivalente à $a = \cos^{-1} x$ ¹³³ et donc $F(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}$. On voit alors que $F: x \mapsto \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}$ est la primitive de f sur $[0, 1]$ qui s'annule en 0.

Il est très important de souligner ici que cette situation, particulière certes, offre un exemple remarquable qui montre qu'on peut, dans certains cas, expliciter l'expression algébrique d'une primitive d'une fonction par des considérations d'aire.

Ceci étant, dans la mesure où les connaissances à mettre en œuvre dans cette tâche et leur mode de mise en fonctionnement ne sont pas indiqués alors toute la stratégie est à construire par l'élève. Compte tenu de l'importance des adaptations à trouver et des connaissances à utiliser dans la construction et la conduite de cette stratégie, il nous semble que le mode de fonctionnement des connaissances requises pourrait être de type disponible.

¹³² L'aire d'un secteur circulaire de rayon r et d'angle α (exprimé en radians) est $A = \frac{\alpha r^2}{2}$.

¹³³ La fonction $x \mapsto \arccos x$ est hors programme, mais les élèves ont une certaine familiarité avec la notation \cos^{-1} utilisée sur les calculatrices scientifiques.

Exercice 36 p.125

- I. On considère la fonction F définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$.
1. Montrer que F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et déterminer sa fonction dérivée.
 2. En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $F(x) = x$.
 3. Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.
- II. On considère la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$, $n \geq 0$.
1. Calculer I_0 et I_1 .
 2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2^n} + (2n-1)I_n \right)$.
 3. Calculer I_2 , I_3 et I_4 .
- III. On considère la suite (J_n) définie par $J_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et $J_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$, $n \geq 1$.
- 1.a. Vérifier que pour tout n , $0 \leq J_n \leq \frac{1}{1+2n}$.
 - b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.
 - 2.a. Montrer que pour tout n , $J_{n+1} + J_n = \frac{1}{1+2n}$.
 - b. Calculer J_1 , J_2 , J_3 , J_4 et J_5 .
 3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{1+2n}$.
 - a. Montrer que pour tout n , $J_{n+1} = (-1)^n (u_n - J_0)$.
 - b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Solution attendue

- I.1. La fonction $u: x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et $u\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = [0, 1]$. Comme, d'autre part, la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $[0, 1]$ alors la fonction F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $F'(x) = u'(x) \times f[u(x)] = (1 + \tan^2 x) \times \frac{1}{1+\tan^2 x} = 1$.
2. Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $F'(x) = 1$. Comme $F(0) = 0$ alors, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $F(x) = x$.
3. En remarquant que $1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$, il vient aussitôt $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.
- II.1. $I_0 = \int_0^1 dt = 1$ et $I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

Si l'on prend $u(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}$ et $v'(t) = 1$ alors $u'(t) = -\frac{2nt}{(1+t^2)^{n+1}}$ et $v(t) = t$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et leurs dérivées sont continues alors la formule d'intégration par parties s'applique et permet d'écrire que :

$$I_n = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^1 + 2n \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \frac{1}{2^n} + 2n(I_n - I_{n+1}).$$

On en déduit que pour tout entier $n \geq 1$, $I_{n+1} = \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2^n} + (2n-1)I_n \right)$.

3. Comme $I_1 = \frac{\pi}{4}$, il vient successivement $I_2 = \frac{2+\pi}{8}$, $I_3 = \frac{4+\pi}{32}$, $I_4 = \frac{8+\pi}{192}$.

III.1. a) Pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1+t^2 \geq 1$ et $t^{2n} \geq 0$; donc $0 \leq \frac{t^{2n}}{1+t^2} \leq t^{2n}$.

Les fonctions étant continues sur $[0, 1]$, on obtient après passage à l'intégrale : $0 \leq J_n \leq \frac{1}{1+2n}$.

b) On a : $0 \leq J_n \leq \frac{1}{1+2n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+2n} = 0$; donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$.

2.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n + J_{n+1} = \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{1+2n}$.

b) D'après I.3) $J_0 = \frac{\pi}{4}$. Compte tenu de l'égalité $J_n + J_{n+1} = \frac{1}{1+2n}$, il vient successivement :

$$J_1 = 1 - \frac{\pi}{4}, J_2 = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}, J_3 = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}, J_4 = -\frac{76}{105} + \frac{\pi}{4}.$$

3.a) On procède par récurrence sur l'entier naturel n .

Comme $u_0 = 1$, $J_0 = \frac{\pi}{4}$ et $J_1 = 1 - \frac{\pi}{4}$ alors l'égalité est bien vérifiée pour $n = 0$.

Supposons que, pour un entier naturel n donné, $J_{n+1} = (-1)^n [u_n - J_0]$.

Comme $u_n = u_{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{3+2n}$ alors $J_{n+1} = (-1)^n [u_{n+1} - J_0] + \frac{1}{3+2n}$. Or $\frac{1}{3+2n} = J_{n+2} + J_{n+1}$,

d'où : $J_{n+2} = \frac{1}{3+2n} - J_{n+1} = (-1)^{n+1} [u_{n+1} - J_0]$.

Le principe de récurrence permet de conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} = (-1)^n [u_n - J_0]$.

b) On a : $J_{n+1} = (-1)^n [u_n - J_0]$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{n+1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = J_0 = \frac{\pi}{4}$.

Analyse didactique

Dans la partie I, les tâches sont routinières et clairement formulées. Pour résoudre cette partie, l'élève aura à :

- Reconnaître que F est définie par une expression du type $\int_a^{u(x)} f(t) dt$.
- Savoir justifier la dérivabilité de F et la dériver (théorème du cours).

- Reconnaître que F est la primitive sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ de la fonction $x \mapsto 1$ qui s'annule en 0.
- Reconnaître que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = F\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Comme on le voit les tâches et les techniques sont clairement identifiables. Les connaissances en jeu dans cette partie sont des applications simples et isolées de résultats de cours. Leur mise en fonctionnement consiste en des opérations de traitement dans le registre algébrique.

Dans la partie II, à l'exception de la question 2, toutes les autres tâches sont d'ordre calculatoire. Les calculs sont pour l'essentiel conduits grâce à la même technique de substitution justifiée par la formule de récurrence indiquée dans la question 2.

La question 2, en revanche, exige non seulement que l'on reconnaisse le recours à la méthode d'intégration par parties mais aussi qu'on l'applique à I_n et non à I_{n+1} ce qui est peu habituel pour les élèves. Ensuite, pour traiter l'intégrale de droite, il faut penser à la décomposer et trouver une technique pour le faire. La technique de compensation n'est envisageable que par qui reconnaît que l'intégrale en question s'exprime à l'aide de I_n et I_{n+1} . La question requiert donc la disponibilité de connaissances à la fois opératoires et fonctionnelles.

Dans la partie III, on distingue quatre questions où sont proposées des tâches calculatoires simples dont la résolution repose sur des techniques de substitution et de passage à la limite, et deux questions (1.a et 3.a) qui nécessitent la mobilisation de connaissances sur les techniques d'encadrement et sur le raisonnement par récurrence.

En conclusion, toutes les tâches ou presque (19/20) sont d'ordre strictement calculatoire. La plupart de ces tâches (17/20) sont simples et leur résolution s'appuie sur des applications immédiates de résultats issus de l'exercice et/ou du cours. Les connaissances à utiliser dans la résolution de ces tâches seront mise en fonctionnement au *niveau technique*. Les trois autres tâches (II. 2, III. 1.a, III. 3.a) sont complexes. La tâche II. 2, contrairement aux deux dernières qui peuvent être considérées comme routinière, est plutôt problématique. L'élève aura à voir qu'il faut faire appel à la formule d'intégration par partie et l'appliquer à I_n et non pas à I_{n+1} .

Analyse critique

On ne peut qu'être frappé par l'architecture et le contenu de ce problème. Il est ici malaisé d'attacher un but clair et précis à l'énoncé en question, d'une part, et d'expliquer le superflu dont il fourmille, d'autre part. Il ne semble pas qu'on ait besoin d'un examen très poussé pour en rendre compte :

- Le but de la première partie est à l'évidence le calcul de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$. Cette partie s'inscrit dans le troisième schéma d'action dégagé en l'endroit de la conclusion de la partie *Cours*¹³⁴. Ce schéma est reproduit à l'identique en tous points dans trois autres exercices¹³⁵.
- La deuxième partie ne semble pas chercher un but précis. On pourra certes admettre qu'elle mobilise des techniques diverses ; mais les résultats qu'elle établit sont totalement coupés du reste du problème. En revanche, le but visé dans la troisième partie nous paraît clair. Il s'agit d'établir le résultat suivant :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

D'un point de vue strictement mathématique, la construction de la solution se suffirait des deux relations $J_n + J_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$ et $J_{n+1} = (-1)^n [u_n - J_0]$ et de la positivité des termes de la suite (J_n) . Nous comprenons¹³⁶ toutefois le choix des questions 1.a et 1.b, mais ce que nous comprenons moins c'est l'intérêt à faire calculer les termes J_2, J_3, J_4 et J_5 .

Ainsi, il y a lieu de penser que les énoncés de ce problème dérapent au moins en deux endroits : dirigés par une tendance opérationnaliste, ils exagèrent les tâches calculatoires tout en négligeant la démarche mathématique.

¹³⁴ Voir p. 143.

¹³⁵ Activité 2, p.124 ; Ex. 38, p. 136 ; Ex. 39, p.36.

¹³⁶ Les résultats obtenus dans ces deux questions sont contenus dans les suivants : $J_n > 0$ et $J_n + J_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$.

Exercice 39 p.136

On considère la fonction f définie sur $[-2, 2]$ par $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$.

1. Étudier f et tracer sa courbe C dans un repère orthonormé.
2. Soit F la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $F(x) = \int_0^{2\cos x} \sqrt{4 - t^2} dt$.
 - a. Montrer que F est dérivable sur $[0, \pi]$ et que $F'(x) = -4\sin^2 x$, $x \in [0, \pi]$.
 - b. Calculer $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
 - c. En déduire que pour tout $x \in [0, \pi]$, $F(x) = -2x + \sin 2x + \pi$.
3. Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C et les droites d'équations $y = x$, $x = -2$ et $x = 2$.
 - a. Montrer que $A = F(0) - F(\pi)$.
 - b. En déduire A .

Solution attendue

1. La fonction f est définie et continue sur $[-2, 2]$ et dérivable sur $] -2, 2[$. (on notera en particulier que la courbe C admet en chacun des points d'abscisse -2 et 2 une demi-tangente de vecteur directeur \vec{j}).

Pour tout $x \in] -2, 2[$, $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. (on notera que f' s'annule et change de signe en $\sqrt{2}$). Le tableau de variation de f est le suivant :

x	-2	$\sqrt{2}$	2
$f'(x)$	0		
$f(x)$		$2\sqrt{2}$	
	-2		2

2. a) La fonction $u: x \mapsto 2\cos x$ est dérivable sur $[0, \pi]$ et $u([0, \pi]) = [-2, 2]$. Comme la fonction $g: t \mapsto \sqrt{4 - t^2}$ est continue sur $[-2, 2]$ alors la fonction F est dérivable sur $[0, \pi]$ et l'on a : $F'(x) = u'(x) \times f(u(x)) = -2\sin x \sqrt{4 - 4\cos^2 x} = -4\sin^2 x$ car $\sin x \geq 0$ sur $[0, \pi]$.

b) $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

c) Pour tout $x \in [0, \pi]$, $F'(x) = -4 \sin^2 x = -2 + 2\cos(2x)$.

On en déduit que pour tout $x \in [0, \pi]$, $[F(t)]_{\frac{x}{2}}^x = \pi - 2x + \sin(2x)$.

3. a) La courbe C étant située au-dessus de la droite d'équation $y = x$ alors

$$A = \int_{-2}^2 [f(x) - x] dx = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx - \int_0^{-2} \sqrt{4 - x^2} dx = F(0) - F(\pi).$$

b) Comme $F(0) = \pi$ et $F(\pi) = -\pi$, alors $A = 2\pi$ (u. a.).

Analyse didactique

La première question est sans rapport avec l'intégrale et se situe donc en dehors de ce qui nous préoccupe dans le présent travail. Les tâches que propose cette question sont toutefois routinières et généralement bien travaillées en classe.

La question 2 nous semble identique en tous points à la partie I de l'exercice précédent. Elle s'inscrit dans un modèle d'exercices types assez présent dans le manuel et généralement assez travaillés en classe. Le problème mathématique traité dans ce modèle consiste à expliciter l'expression algébrique dans des cas particuliers de fonctions définies par une intégrale de la forme $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt$ qu'on ne sait pas calculer directement. La stratégie de résolution de ce problème renvoie en général aux mêmes trois tâches suivantes:

t_1 : Justifier que F est dérivable.

t_2 : Calculer l'expression $F'(x)$ de la dérivée de F .

t_3 : Calculer l'expression $F(x)$ de la fonction F .

Souvent pour aider à faire aboutir cette stratégie, on ajoute certaines indications. Ces indications, qui peuvent servir dans le même temps de moyens de contrôle, sont directes comme par exemple la donnée de l'expression de $F'(x)$ et/ou de $F(x)$ ou indirectes comme la donnée d'une tâche supplémentaire ; ici par exemple « Calculer $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ». Ces tâches requièrent une utilisation directe et isolée du théorème de dérivation des fonctions définies par une intégrale (i.e : de fonctions composées) et de techniques de calcul sur les primitives.

La tâche que propose la question 3 consiste à calculer l'aire A . Elle renvoie à l'identification d'un ensemble de sous-tâches qui appellent la coordination d'une série d'actions :

- Reconnaître graphiquement ou algébriquement que la courbe C est située au-dessus de la droite d'équation $y = x$.
- Reconnaître que l'aire cherchée est $A = \int_{-2}^2 [f(x) - x] dx = \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$.

- Reconnaître que les bornes de l'intégrale $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$ sont $2\cos\pi$ et $2\cos 0$.
- Reconnaître que l'intégrale $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$ s'exprime à l'aide de la fonction F .
- Décomposer l'intégrale $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx - \int_0^{-2} \sqrt{4-x^2} dx$.
- Identifier chacun des termes de l'égalité précédente et écrire $A = F(0) - F(\pi)$.
- Calculer $F(0)$ et $F(\pi)$, puis déduire la valeur de A .

Il convient ici de souligner que la référence à l'axe des abscisses dans la définition de la surface visée devrait être vue comme une erreur d'énoncé du manuel.

Analyse critique

Commençons par essayer de lire cet exercice avec les yeux d'un élève de classe terminale. On peut douter que la plupart d'entre eux peuvent n'y voir qu'un exercice comme bien d'autres qu'ils ont souvent l'habitude de fréquenter. Un exercice dont les questions sont assez bien détaillées et renseignées :

1. Étude et représentation graphique d'une fonction.
2. Fonction définie par une intégrale.
3. Calcul d'aire.

Mais combien d'entre eux comprennent-ils l'enjeu de l'exercice ? Nous ne pensons pas qu'on puisse attendre une réponse précise à cette question. Cependant, puisque c'est de démarche mathématique qu'il est question, il est légitime de préférer à la question précédente la question suivante : dans le manuel scolaire tunisien, donne-t-on aux élèves quelque chance pour s'initier à la démarche mathématique ? La réponse nous semble sans équivoque : Non. L'analyse laisse en effet paraître en plusieurs endroits des négligences didactiques, des écartements de la rigueur mathématique, un délaissement des raisonnements et une absence de stratégies heuristiques, au profit de développements d'ordre opérationnel. Pour justifier l'objectivité de notre propos, nous proposons d'affiner sur la démarche sous-jacente à l'organisation de l'exercice 39 de la page 136 dont le but est clairement le calcul de l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe de f et la droite d'équation $y = x$.

L'enjeu de la première question est la réactivation et /ou la mobilisation de connaissances anciennes sur la pratique de l'étude et la représentation graphique de fonctions. Cependant, il y a lieu de faire remarquer ici que cette question n'apporte rien dans la suite de l'exercice, c'est-à-dire qu'elle ne participe pour ainsi dire d'aucune manière au but de l'exercice.

En ce qui concerne la question 2, pour saisir l'idée qui est à l'origine de l'introduction de la fonction $F: x \mapsto \int_0^{2\cos x} \sqrt{4-t^2} dt$, on peut voir que $A = \int_{-2}^2 [f(x) - x] dx = \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$. Cette égalité porte en elle l'idée en œuvre dans cette question. En effet, la fonction définie sur $[-2, 2]$ par $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ étant paire alors $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = 2 \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ et la question revient donc à déterminer une primitive de g sur l'intervalle $[0, 2]$, de préférence la primitive $G: u \mapsto \int_0^u g(t) dt$ qui s'annule en 0. Comme il n'est pas possible d'explicitier l'expression $G(u)$ de G , on utilise implicitement le changement de variable $u = 2\cos x$ (ou $u = 2\sin x$). Ainsi se trouve justifié le recours à la fonction F . Dans la mesure où ce développement se situe strictement en dehors du programme à cause du recours à la méthode de changement de variable, l'idée sous-jacente au choix de la fonction F est simplement inaccessible à des élèves en classe terminale. Le reste de l'exercice est constitué d'une série de questions assez simples et riches en indications. Comme on peut le constater à travers la solution développée précédemment, l'élève n'aura qu'à se laisser guider par ces indications pour se porter de tâche en tâche sans vraiment se poser de question.

Se pose alors la question sur ce que l'élève pourrait apprendre de cet exercice. On comprend bien que l'exercice offre à l'élève une occasion pour mobiliser et consolider des connaissances anciennes et/ou en cours d'apprentissage et de construire éventuellement de nouvelles connaissances. Ce qu'on comprend moins en revanche c'est en quoi la stratégie mise en œuvre dans cet exercice pourrait faire acquérir à l'élève le sens de la démarche mathématique. L'analyse met en évidence des défauts d'adéquation de la stratégie utilisée dans l'exercice par rapport aux possibilités actuelles des élèves. Les possibilités actuelles des élèves doivent s'entendre comme celles qui sont vraiment à leur portée.

L'analyse précédente permet de constater que la raison d'être de la fonction F est inaccessible aux élèves et pourrait constituer un obstacle à l'appréhension de la stratégie de résolution en œuvre. C'est ce que nous appelons un *défaut d'adéquation*. Une alternative qui nous semble plus naturelle et compatible avec les possibilités actuelles des élèves consiste à remplacer la variable didactique que représente la fonction F par une autre. Dans cette alternative, la première question doit surtout fournir à l'élève une illustration graphique de la surface dont on cherche à évaluer l'aire A . À l'issue de cette question, la démarche naturelle consiste à déterminer la position de C par rapport à la droite $\Delta: y = x$. Ici, l'élève aura à constater graphiquement ou par le calcul que C est située au-dessus de Δ et que l'aire cherchée est alors

$A = \int_{-2}^2 [f(x) - x] dx = \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$. Pour calculer la dernière intégrale, il nous semble qu'une voie naturelle pourrait être de faire constater (comme, par exemple, dans l'exercice 24 p. 134) que la courbe d'équation $y = \sqrt{4 - x^2}$ est le demi-cercle de centre l'origine du repère et de rayon 2 situé dans le demi-plan des ordonnées positives et que A est alors l'aire du demi-disque correspondant. D'où $A = 2\pi$ (u. a).

II.2.4.b. Conclusion de l'analyse locale de la partie « Exercices »

Les quatre exercices que nous venons d'étudier représentent de manière assez significative la tendance prévalente dans la plupart des exercices proposés dans le manuel. Il nous semble même qu'ils sont caractéristiques de l'esprit du manuel. L'analyse donne à voir que les exercices du manuel puisent, pour l'essentiel, dans un catalogue de tâches de restitution et de tâches calculatoires. Insistons ici, encore une fois, sur le fait que nous n'entendons ni ravalier cette dimension de l'activité mathématique ni nier son importance et son utilité, seulement il nous semble que la place qu'elle prend dans le manuel est excessivement disproportionnée.

Il est un fait fondamental qu'on doit se garder d'oublier, c'est que pour aider l'élève à apprendre à faire des mathématiques il est important de le placer dans des situations où il sera amené à *réfléchir* et/ou *produire* plutôt qu'à *réciter* et /ou *reproduire*. En ce sens l'accent devrait être mis sur une participation active et effective de l'élève dans la résolution des tâches qui lui sont proposées dans les exercices et les problèmes. D'autant qu'une telle exigence n'est pas une exigence tendancielle, elle est au cœur même des objectifs mis en avant dans les textes officiels. Pour essayer d'atteindre à ce résultat, il faut non seulement que l'élève comprenne ce qu'il cherche, mais qu'il dispose d'un certain *espace* pour déployer sa réflexion et son action. Est-ce que ces bases sont respectées dans les exercices et les problèmes que propose le manuel scolaire ?

Dans les exercices et les problèmes du manuel les objectifs ne sont jamais explicités, les motivations des démarches utilisées sont souvent ambiguës et les questions sont organisées de sorte qu'il ne soit laissé que peu d'espace entre les différentes questions. Pour s'en rendre compte, nous renvoyons à l'ensemble des exercices cités dans ce travail. Un exemple typique est le dernier exercice étudié.

II.2.4. Conclusion de l'analyse du manuel

Les analyses précédentes nous ont conduit à l'idée que le projet d'enseignement de l'intégrale que propose le manuel scolaire est peu satisfaisant. Nous allons en rassembler les dérapages ainsi que les principales faiblesses.

Absence de problématisation

L'analyse de la partie *Cours* ne révèle aucune forme de problématisation de la notion d'intégrale. Dans toutes les activités du manuel, les objectifs ne sont pas explicités et les résultats ne sont pas commentés et/ou interprétés.

Liens entre Aire- Intégrale- Primitive

L'examen des liens entre aire, intégrale et primitive présents dans le manuel scolaire nous a conduit à distinguer deux types de liens. Il y a les liens établis dans le cours, de façon explicite et en toute généralité, en ce sens qu'ils sont énoncés dans le cas de fonctions continues quelconques dans le cadre par exemple d'une définition, d'une propriété ou d'un théorème. Nous les appellerons *liens institués*. Mais d'autres liens ne sont saisis que dans des cas particuliers comme par exemple des activités ou des exercices. Et suivant les cas, ces liens peuvent se donner à voir de façon claire comme ils peuvent échapper à qui ne cherche pas à les explorer. Nous les appellerons *liens non institués*.

Liens institués

1. La formule de Newton-Leibniz $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ donne à la fois une définition formelle de l'intégrale et, dans certains cas, un outil de calcul effectif d'intégrales.
2. Le théorème selon lequel si f est une fonction continue sur un intervalle I et a est un élément de I , la fonction $F: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a , donne à la fois une définition formelle d'une primitive et permet, dans certains cas d'en expliciter l'expression algébrique.
3. L'énoncé : « Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$. L'aire (en u. a) de la partie du plan limitée par la courbe de f , la courbe de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ ».

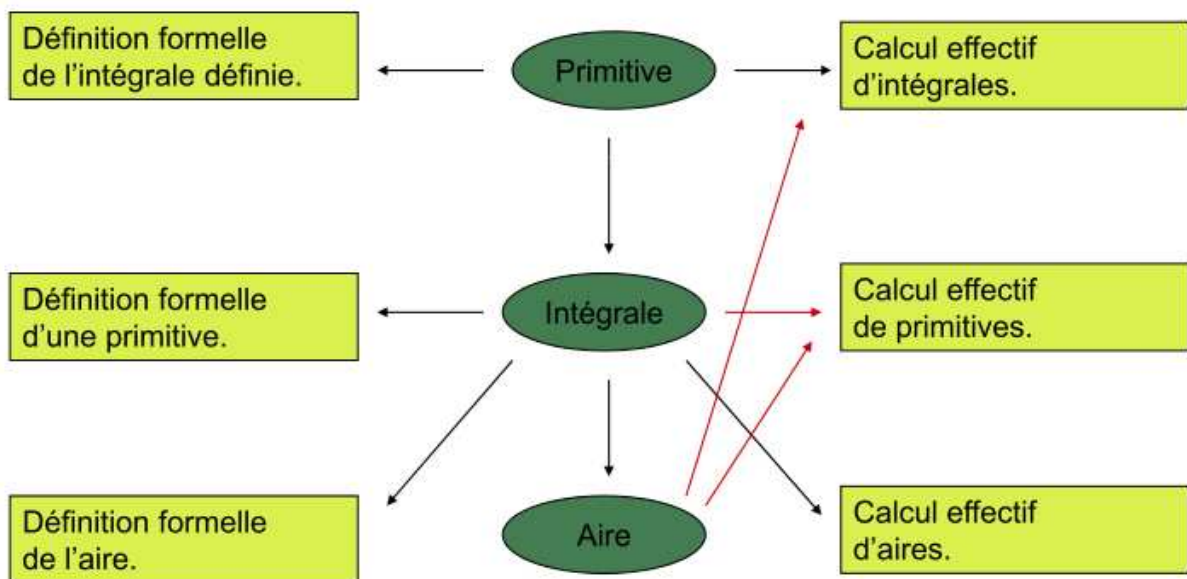
Cet énoncé donne à voir que l'intégrale fournit une définition formelle de l'aire d'une certaine classe de surfaces planes et, dans certains cas, un moyen pour la calculer.

Liens non institués

Nous avons déjà souligné dans nos analyses que, dans certains cas particuliers, des considérations d'aire permettent à la fois de calculer des intégrales et d'explicitier des primitives. C'est le cas par exemple de $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ ou de $\int_0^2 f^{-1}(x) dx$ connaissant la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ (Ex.22), mais aussi de l'expression de $\int_0^x \sqrt{1-t^2} dt$ (Ex. 24).

Les liens présents dans le manuel scolaire, quelque pertinents qu'ils soient, sont sous-utilisés. Il leur manque d'être suffisamment soulignés et articulés de façon qu'ils puissent s'éclairer mutuellement et échanger leurs outils. L'analyse rend en effet compte du fait que ces liens sont le plus souvent utilisés dans le sens *Primitive* \rightarrow *Intégrale* \rightarrow *Aire*. Ce schéma renvoie dans la plupart des cas à des tâches de facture calculatoire. Et même quand il arrive que ces liens soient appelés à fonctionner suivant un autre sens comme dans certains des exercices étudiés supra, le mode de leur mise en fonctionnement n'est jamais mis en avant. Pour nous résumer, l'analyse met en évidence une sous-utilisation des liens entre aire, intégrale et primitive.

Une synthèse des différents liens mis en évidence par notre étude est présentée dans le schéma suivant où les flèches noires représentent les liens institués et les flèches rouges représentent les liens non institués.



Liens entre aire, intégrale et primitive.

Rapport du manuel aux objectifs du programme

Ici, nous souhaitons prendre la mesure de l'adéquation du contenu spécifique du manuel scolaire aux objectifs du programme officiel. Comme l'énoncé de ces objectifs est fait plutôt en termes vagues et généraux, par exemple « *ils élaborent des stratégies pour résoudre un problème en faisant appel à un répertoire de connaissances, de techniques, de procédures appropriées* » ou encore « *ils procèdent à une vérification en exerçant leur esprit critique pour juger si les résultats sont raisonnables* », nous avons été conduit à classer les objectifs du programme en trois composantes : démarche expérimentale, raisonnement mathématique, résolution de problèmes et utilisation des TICE.

La démarche expérimentale

Notre analyse du chapitre Intégrale nous a permis de constater qu'à l'exception de l'activité 1 que l'on peut inscrire dans une démarche expérimentale, la démarche en œuvre dans tout le chapitre s'oppose au principe même de la démarche expérimentale. C'est que cette dernière s'oppose à l'enfermement du champ de la pensée et du champ de l'action qui caractérise le contexte stéréotypé des activités et des exercices que propose le manuel. Il y a en effet dans le manuel une insistance importante sur des canevas de tâches fermées, répétitives et standardisées centrées sur des techniques calculatoires ritualisées. Le modèle d'organisation praxéologique utilisé dans le manuel a un caractère accommodant, à la fois non critique et non dialectique. Dans ce modèle, l'opérateur et le comportemental écrasent l'essentiel de la démarche mathématique, en l'occurrence sa dimension discursive et sa dimension critique. Il convient ici de souligner en particulier que c'est dans la pratique de la démarche critique¹³⁷ que se développent les compétences liées aux divers modes de raisonnements mathématiques.

Pour nous résumer, nous considérons que la démarche en œuvre dans le manuel scolaire n'a pas un caractère expérimental et ne peut donc atteindre aux objectifs inhérents.

Raisonnements mathématiques

Contrairement à ce qui est requis par le programme officiel, le manuel scolaire ne semble pas accorder un espace particulier aux modes de raisonnement mathématique. Plus exactement, il y a dans le manuel comme une propension franche à l'utilisation du raisonnement déductif et du raisonnement par récurrence. L'inclination à ces deux modes de raisonnement apparaît

¹³⁷ Capacité à juger de façon pertinente ou à remettre en question mais aussi et surtout à saisir les limites.

clairement dans la plupart des activités et des exercices du manuel. Le contexte stéréotypé de ces activités met en relief la forme limitée et même décevante de la démarche mathématique que les élèves sont invités à fréquenter. Et cela n'a rien pour étonner. Déjà en s'écartant de la démarche expérimentale, on réduit considérablement les activités d'exploration et de recherche : observation, conjecture, vérification mais aussi examen de cas particuliers, champ de validité, contre-exemplification, tentative de démonstration, de changement d'approches, recherche d'analogie, etc..

D'autre part, les démonstrations de toutes les propriétés et théorèmes énoncés dans la partie *Cours* sont entièrement prises en charge et réalisées par les auteurs du manuel. Qui plus est, les processus de preuves et le statut des différents connecteurs logiques ne semblent pas faire l'objet d'un quelconque effort de la part des auteurs.

On comprend alors sans peine qu'en négligeant tous ces éléments l'activité des élèves se trouve sévèrement réduite. Cette réduction ne peut évidemment atteindre qu'à des connaissances lacunaires et isolées des conditions qui constituent leur réalité.

Résolution de problèmes

L'analyse praxéologique permet de voir qu'il y a dans les exercices et problèmes que propose le manuel comme une tendance à recourir à des procédés que l'on peut rapprocher de l'effet Topaze¹³⁸ et l'usage abusif de l'analogie (Brousseau, 2003). D'abord, le plus souvent les énoncés sont formulés de manière telle que la réponse attendue n'est pas autre chose que le contenu désigné par la question. Le même style d'énoncé est ensuite systématisé et réutilisé pour faire un modèle standard. On peut cependant suspecter que la standardisation des exercices, la routinisation des tâches et la systématisation des méthodes ne conduisent chez beaucoup d'élèves qu'à une aptitude à produire des réponses justes indépendamment d'un véritable apprentissage.

Dans ce modèle d'exercices la pensée et l'action trouvent leurs pôles dans des tâches ritualisées et des techniques mises au point à la faveur de leur répétitivité. Dans la façon dont se présentent les exercices et problèmes du manuel, la tension entre la tâche et l'action tend à disparaître. Ces exercices sont souvent peu instructifs, voire même indifférent à la démarche mathématique, ne permettant au mieux que l'acquisition de compétences calculatoires mais sans atteindre véritablement à éclairer l'esprit. Il nous paraît ainsi que les exercices et les

¹³⁸ «*Tout procédé qui permet d'obtenir une réponse juste indépendamment d'un apprentissage.*».

problèmes que proposent le manuel n'ont pas ce qui pourrait engager l'élève dans une démarche d'élaboration de stratégie de résolution.

Les TICE

Les TICE, qui semblent une évidence pour les auteurs du programme, ne sont pas du tout exploitées dans le manuel ; elles ne sont pas évoquées. Nous y voyons l'indication que les potentialités que le programme met en avant ne sont pas aisément mises en œuvre en classe. Soulignons ici que la littérature didactique (Artigue, Trouche, Lagrange...) montre que l'actualisation des potentialités ne va pas de soi et, dans le contexte qui nous intéresse, devrait faire l'objet de recherches spécifiques que nous n'entreprendrons pas dans cette thèse.

CHAPITRE CINQUIÈME

ÉPREUVES DU BACCALAURÉAT

I. Analyse des épreuves du baccalauréat

L'examen de baccalauréat constitue la pierre angulaire de l'enseignement secondaire. Cet examen fait peser ses exigences sur tout le système didactique dans le même temps qu'il s'en inspire. En plus de son importance au plan institutionnel et social, il joue un rôle structurant à la fois pour le travail des élèves et la pratique des enseignants en leur servant de référence. Le baccalauréat apparaît ainsi comme le régulateur par défaut du système scolaire. D'autre part, dans la mesure où l'élaboration des épreuves du baccalauréat obéit en partie au contrat institutionnel en vigueur dans le secondaire, l'analyse de ces épreuves doit nous révéler, à tout le moins localement, quelques exigences effectives de l'institution à propos de ce qui doit être acquis par les élèves sur la notion d'intégrale.

L'analyse du texte du programme officiel met en évidence une insistance particulière de ses auteurs sur l'importance de développer chez les élèves des compétences assez larges (prise d'initiatives, élaboration de stratégies de résolution, exercice de l'esprit critique, etc.). L'analyse du manuel scolaire, au niveau de la notion d'intégrale, rend en revanche compte de l'inclination de ses auteurs à circonscrire l'activité mathématique des élèves dans des schémas stéréotypés interchangeables où cette activité se cristallise dans des tâches calculatoires et redondantes.

Dans la perspective de notre travail, l'analyse des tâches sur la notion d'intégrale proposées au baccalauréat pourrait éclairer la question de la prévalence de la dimension calculatoire observée dans le manuel scolaire et préciser l'orientation effective du programme officiel, en ce sens qu'elle permettrait de rendre compte des compétences spécifiques à l'intégrale requises dans l'examen de baccalauréat.

Pour l'analyse, nous faisons le choix, de notre point de vue complètement approprié et suffisant, de recourir à des outils issus des travaux de Robert (2002), en l'occurrence la notion de *niveau de mise en fonctionnement des connaissances*. Dans la perspective de notre travail, ces outils doivent nous aider à comparer ce qui a été effectivement enseigné avec ce qui est effectivement attendu, d'une part, et de situer les exigences de l'institution dans les épreuves

du baccalauréat par rapport aux objectifs fixés dans les textes officiels, d'autre part. Cette étude cherche à rendre compte de la nature des tâches prescrites aux élèves et des différentes adaptations requises pour la réalisation de ces tâches. Nous distinguons, suivant leur nature, leurs conditions et les processus qu'elles mobilisent et mettent en fonctionnement, six catégories de tâches :

- *Les tâches ouvertes* : Ce sont les tâches qui ne portent pas en elle une réponse indiquée de façon claire et précise.
- *Les tâches fermées* : Ce sont celles dont la réponse attendue est clairement précisée.
- *Les tâches simples* : Ce sont les tâches dont la réalisation est immédiate. C'est le cas lorsqu'il s'agit, par exemple, d'une question dont la réponse découle directement d'un résultat de cours, d'une autre question déjà traitée ou d'une indication explicite.
- *Les tâches complexes* : Ce sont les tâches dont la réalisation nécessite certains types d'adaptations. C'est le cas, par exemple, lorsque la tâche renvoie à la résolution d'au moins deux sous-tâches qui ne sont pas indiquées.
- *Les tâches routinières* : Ce sont les tâches dont la résolution renvoie à une ou plusieurs techniques *instituées*. Nous entendons des techniques dont l'utilisation apparaît comme assez régulière dans le manuel scolaire. Il s'agit donc de techniques supposées construites.
- *Les tâches problématiques*¹³⁹ : Ce sont celles pour lesquelles l'élève ne dispose pas a priori d'une méthode lui permettant de les accomplir.

Dans cette catégorisation, hormis le cas des tâches simples, la résolution des autres tâches nécessite le recours à des adaptations. Pour en rendre compte, nous ferons appel à la typographie de Robert (2005).

¹³⁹ Au sens de Chevallard.

I.1. Juin 2008 (Session Principale)

Exercice n° 2 (5 points)

- 1) Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1 page 3), on a représenté dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe (\mathcal{C}) de la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ par $f(x) = \ln^3(x) - 3\ln x$ et les demi-tangentes à la courbe (\mathcal{C}) aux points d'abscisses respectives $\frac{1}{e}$ et e .
- a) En utilisant le graphique :
- Montrer que f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ sur $[-2, 2]$. (On note f^{-1} la fonction réciproque de f et (\mathcal{C}') la courbe représentative de f^{-1} dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})).
- b) Tracer la courbe (\mathcal{C}') et les demi-tangentes à (\mathcal{C}') aux points d'abscisses respectives -2 et 2 .
- 2) Soit la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ définie par $a_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.
- a) Calculer a_1 .
- b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier $n \geq 1$; $a_{n+1} = e - (n+1) a_n$.
- c) En déduire que $a_3 = 6 - 2e$.
- 3) Soit \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (\mathcal{C}') et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.
- a) Calculer $\int_1^e f(x) dx$.
- b) En déduire \mathcal{A} .

Analyse didactique

La partie de l'exercice qui fait l'objet de cette analyse propose dans son ensemble cinq tâches:

$$t_1 : \text{Calculer } a_1 = \int_1^e \ln x \, dx.$$

$$t_2 : \text{Établir l'égalité } a_{n+1} = e - (n+1)a_n.$$

$$t_3 : \text{En déduire que } a_3 = 6 - 2e.$$

$$t_4 : \text{Calculer } \int_1^e f(x) dx.$$

$$t_5 : \text{En déduire } \mathcal{A}.$$

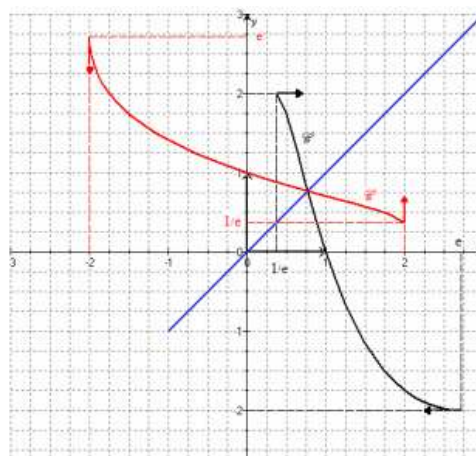


Fig. 18

1. Pour calculer a_1 , l'élève doit connaître (ou retrouver à l'aide d'une intégration par parties) qu'une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $f: x \mapsto \ln x$ est la fonction $F: x \mapsto x \ln x - x$. C'est un résultat de cours fréquemment utilisé dans les exercices. Dans cette question il

s'agit d'une tâche routinière dont la résolution se présente comme une application simple et isolé d'un résultat de cours.

2. Dans cette question l'élève aura à appliquer la formule d'intégration par parties. L'utilisation de cette formule est indiquée explicitement et l'élève n'a plus qu'à reconnaître qu'il faut prendre $u(x) = (\ln x)^n$ et $v'(x) = 1$. Ce choix est a priori bien connu par les élèves en classe terminale¹⁴⁰. Ici aussi, il s'agit d'une tâche routinière dont la résolution ne nécessite pas plus qu'une application directe de la formule d'intégration par parties.
3. Ici, l'élève n'a qu'à remplacer n par 3 dans l'égalité $a_{n+1} = e - (n + 1)a_n$, déjà indiquée dans la question précédente. C'est encore une tâche routinière et sa résolution est immédiate.
4. Pour répondre à cette question l'élève aura à remplacer $f(x)$ dans l'intégrale indiquée, reconnaître qu'il faut décomposer cette intégrale (propriété de linéarité), identifier a_1 et a_3 , les remplacer par leurs valeurs respectives (celle de a_3 est déjà donnée dans l'exercice). Il s'agit donc d'une tâche complexe, constituée de sous-tâches routinières qui sont de l'ordre des applications immédiates et se situent donc au niveau *technique*.
5. Cette question en revanche requiert la mobilisation de connaissances non indiquées dans l'énoncé. Aussi, l'élève aura à trouver une stratégie adéquate. Pour ce faire, il aura à envisager plusieurs étapes:
 - Identifier graphiquement la partie Δ' du plan limitée par la courbe C' , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.
 - Reconnaître que Δ' est symétrique de la partie Δ du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $y = -2$ et $y = 0$, par rapport à la droite d'équation $y = x$.
 - Connaître la propriété d'invariance de l'aire par une isométrie.
 - Penser, par exemple¹⁴¹, à adjoindre à Δ la surface S limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = e$ pour obtenir le rectangle de dimensions e et 2.
 - Reconnaître que l'intégrale déjà calculée $\int_1^e f(x)dx$ est l'opposée de l'aire de S .
 - Écrire que $\text{aire}(\Delta) + \text{aire}(S) = 2e$ (u. a).
 - Dédire que $A = \text{aire}(\Delta) = 2e - \text{aire}(S) = 2e + \int_1^e f(x)dx = 3$ (u. a).

¹⁴⁰ Pour les fonctions se présentant sous la forme $P(x)(\ln x)^n$, ($n \geq 1$) où $P(x)$ est un polynôme, on choisit $u(x) = (\ln x)^n$ et $v'(x) = P(x)$.

¹⁴¹ D'autres choix sont possibles.

Comme on peut le constater, la question requiert non seulement la disponibilité de plusieurs connaissances qui ne sont pas indiquées dans l'exercice, mais aussi plusieurs *types d'adaptations*¹⁴² : reconnaissance des modalités d'applications de certaines connaissances, introduction d'intermédiaires, coordination de plusieurs registres, utilisation des questions précédentes. Mais compte tenu du contexte de l'exercice, nous considérons que le mode de fonctionnement des connaissances requises est de type *mobilisable*.

Nous proposons enfin, et en guise de synthèse, le tableau récapitulatif suivant qui résume assez bien notre analyse :

Tâche	Ouverte/Fermé	Simple/Complex	Routinière/Problématique	Technique	Niveau	Registre
t_1	Ouverte	Simple	Routinière	Instituée	Technique	Algébrique
t_2	Fermée	Simple	Routinière	Instituée	Technique	Algébrique
t_3	Fermée	Simple	Routinière	Instituée	Technique	Algébrique
t_4	Ouverte	Complexe	Routinière	Instituée	Mobilisable	Algébrique
t_5	Ouverte	Complexe	Problématique	Non instituée	Mobilisable	Coordination Gra-Géo-Alg

Comme on peut le constater à l'aide de ce tableau, les quatre premières questions proposent des tâches routinières qui ne requièrent pas plus que la mise en œuvre d'applications simples et isolées (*niveau technique*)¹⁴³ de *connaissances opératoires*¹⁴⁴. La résolution de ces tâches qui s'appuient exclusivement sur des opérations de traitement dans le registre algébrique est réalisable à l'aide de techniques instituées, du moins supposées l'être. Qui plus est, ces tâches sont en général suffisamment travaillées en classe, comme nous avons pu le constater à travers l'analyse des exercices proposés dans le manuel scolaire et la consultation de fiches d'exercices d'enseignants de classe terminale.

La tâche t_5 , en revanche, exige la mobilisation et la coordination de plusieurs connaissances à la fois. Dans la mesure où aucune stratégie de résolution n'est indiquée, l'élève doit s'ajuster et ajuster habilement ses connaissances aux impératifs d'une démarche non indiquée : imaginer une stratégie possible, concevoir des étapes intermédiaires, identifier les tâches correspondantes, trouver les techniques appropriées et gérer les moyens de contrôle et les outils de validation.

¹⁴² Aline Robert, 2005, p.232.

¹⁴³ Aline Robert, 1998, p.165.

¹⁴⁴ Connaissances relatives à la manière de procéder pour obtenir un résultat.

Analyse critique

L'analyse que nous venons de développer soulève pour l'essentiel deux remarques qui méritent d'être examinées. La première concerne l'organisation des énoncés. Il nous semble qu'il y a dans cette organisation quelque chose de factice et controversable. Il s'agit de la manière dont les questions sont organisées et dont les difficultés sont planifiées. En effet, à l'exception de la dernière question, les autres questions sont simples et leurs solutions sont suffisamment indiquées au point qu'il n'est laissé entre elles aucun espace pour apprécier la disponibilité de certaines connaissances de l'élève. Et peut être plus. Les questions et les réponses tendent à se recouvrir exactement. Qui plus est, ces questions n'interrogent que les compétences calculatoires des élèves et ne permettent pas de se rendre compte si ces derniers ont bien compris la notion d'intégrale, sauf à postuler que l'essentiel de la notion d'intégrale se réduit au calcul d'intégrales. Mais ce point de vue nous semble contraire aux objectifs fixés dans le programme officiel qui vise des compétences plus larges. La dernière question, en revanche, concentre à elle seule toute la difficulté de l'exercice et suscite notre deuxième remarque. Il importe cependant de faire constater que si cette question requiert la disponibilité de plusieurs connaissances et la capacité à les articuler, elle n'en sanctionne que dérisoirement l'absence, nous entendons en terme d'évaluation de l'élève. Enfin, il ne semble pas qu'on ait besoin d'une analyse très poussée pour déceler les formes dominantes d'évaluation scolaire à propos de la notion d'intégrale ; elles sont opérationnalistes.

La deuxième remarque, et la plus considérable, concerne la notion d'aire et ses propriétés élémentaires. La tâche t_5 nécessite l'appel à l'égalité des aires pour des surfaces symétriques et à la propriété d'additivité des aires alors que l'institution n'en organise pas l'apprentissage, et à aucun niveau de l'enseignement secondaire. C'est pour le moins paradoxal. Dès lors, il devient clair que l'institution situe les propriétés de la notion d'aire *au niveau de la dimension implicite de la culture mathématique du secondaire* (Artigue). Nous tenons ici un aspect du contrat institutionnel qui tombe sous la notion de négligence didactique, en l'occurrence le fait de proposer des tâches qui requièrent des techniques en acte fonctionnant dans un vide technologique.

Laissons maintenant de côté cette question de vide technologique à propos de la notion d'aire et admettons que les élèves puissent en avoir ainsi que de ses propriétés élémentaires une saisie intuitive. Il reste alors le défaut de l'organisation des tâches que nous avons pointé dans notre première remarque. Sans doute peut-on rendre compte de ce défaut en invoquant par

exemple la présence superflue de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$, en ce sens qu'elle ne fait pas l'objet d'une étude spécifique aux suites et qu'elle n'apporte pas dans l'exercice plus que ce que deux intégrations par parties auraient fourni. Quoiqu'il en soit, il nous semble qu'il aurait été possible d'envisager une organisation praxéologique différente susceptible de mieux répondre aux exigences du texte officiel du programme. En effet, puisque aussi bien c'est de calcul d'aire qu'il s'agit, nous pouvons envisager, par exemple une organisation praxéologique qui engagerait l'élève dans des tâches plus significatives susceptibles de mieux évaluer ses connaissances sur la notion d'intégrale.

Enfin, il nous faut ajouter une remarque sur l'énoncé examiné ici. Il ne nous semble pas difficile de le rapprocher en tous points de l'exercice 22 de la page 134 du manuel scolaire.

Énoncés alternatifs

Au plan strictement mathématique, l'objet de l'exercice est le calcul de l'aire A de la partie¹⁴⁵ du plan limitée par la courbe (C') et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$. Pour ce faire, l'élève aura d'abord à reconnaître que $A = \int_{-2}^0 f^{-1}(x) dx$. Mais dans la mesure où l'élève n'a pas (et ne peut pas expliciter) l'expression algébrique de la fonction réciproque f^{-1} , le calcul de A constitue alors un problème pour lui. Et un problème difficile.

Il y a alors besoin d'apporter à l'élève une aide susceptible de mieux orienter son travail. Cette aide peut être directe ou indirecte. Pour cela, on peut lui suggérer que l'aire cherchée est égale à celle de la partie du plan limitée par la courbe (C) , les axes des coordonnées et la droite d'équation $y = -2$. Ici, deux choix, au moins, sont envisageables:

- i) L'aire cherchée est égale à la somme de l'aire du rectangle de dimensions 1 et 2 et celle de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $y = -2$.

Une première question possible pourrait être donc :

$$\text{Montrer que } A = 2 + \int_1^e [f(x) + 2] dx.$$

Ainsi formulée, la question contient suffisamment d'indications pour permettre à l'élève de s'en saisir. La question prend ici tout son sens : l'élève comprend ce qu'on est en train de faire, pourquoi on le fait et devrait donc pouvoir décoder à quoi renvoient la constante

¹⁴⁵ La partie en question n'est pas bornée. Il pourrait encore s'agir à la fois d'une négligence didactique et d'une absence de rigueur mathématique.

2 et l'intégrale $\int_1^e [f(x) + 2]dx$ dont les bornes doivent à la fois lui suggérer la décomposition envisagée et lui permettre de contrôler son action.

- ii) L'aire cherchée est égale à la différence entre l'aire du rectangle de dimensions 2 et e et celle de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = e$. Une autre possibilité pour la première question pourrait être alors :

Montrer que $A = 2e + \int_1^e f(x)dx$ ou bien montrer que $A + \int_1^e [-f(x)]dx = 2e$.

Ici aussi, la question porte en elle simultanément son sens, la stratégie de sa résolution et suffisamment d'indices pour que l'élève puisse engager et contrôler son action.

Dans les deux cas envisagés plus haut, l'élève aura à calculer l'intégrale $\int_1^e f(x)dx$. Ce calcul peut être laissé entièrement à la charge de l'élève ou impulsé par exemple par la question:

Établir à l'aide de deux intégrations par parties successives que $\int_1^e (\ln x)^3 dx = 6 - 2e$ ou bien $\int_1^e f(x)dx = 3 - 2e$.

Enfin, la dernière question est évidemment : *En déduire la valeur de A.*

I.2. Juin 2008 (Session de Contrôle)

Exercice 4 : (5 points)

- 1) Soit f la fonction définie sur $[-2, 2]$ par
$$\begin{cases} f(x) = (x + 2)\ln(x + 2) & \text{si } x \neq -2 \\ f(-2) = 0. \end{cases}$$

et (\mathcal{C}) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Montrer que f est continue à droite en (-2) .
- Etudier la dérivabilité de f à droite en (-2) .
- Donner le tableau de variation de f .

- 2) Soit g la fonction définie sur $[-2, 2]$ par $g(x) = f(x) - x\sqrt{4 - x^2}$ et (\mathcal{C}') sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Déterminer la position relative des courbes (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') .
- Dans l'annexe ci-jointe (page 4), on a tracé la courbe (\mathcal{C}') de g .
Tracer la courbe (\mathcal{C}) dans le même repère.

- 3) Soit α un réel non nul appartenant à $[-2, 2]$.

On désigne par \mathcal{A}_α l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

- Montrer que $\mathcal{A}_\alpha = \int_0^\alpha x\sqrt{4 - x^2} dx$. (On distinguera les deux cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$).
- Calculer \mathcal{A}_α .
- Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') .

Analyse didactique

La question que nous allons examiner ici est constituée de trois tâches :

t_1 : Montrer que $A_\alpha = \int_0^\alpha x\sqrt{4 - x^2} dx$.

(On distinguera les deux cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$).

t_2 : Calculer A_α .

t_3 : Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') .

- Pour obtenir l'égalité demandée, l'élève aura d'abord à reconnaître que l'expression $x\sqrt{4 - x^2}$ est celle de la différence $f(x) - g(x)$. Il lui faut ensuite faire remarquer que cette différence est négative sur $[-2, 0]$ et

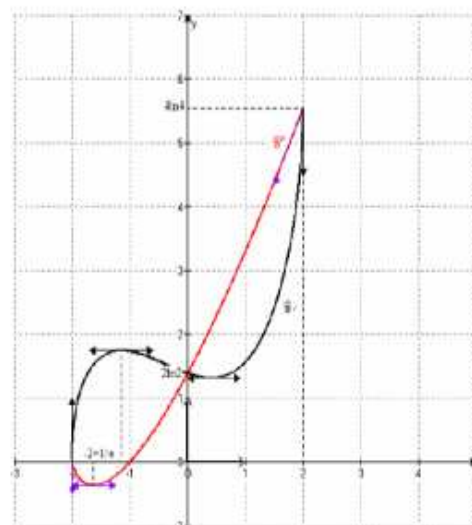


Fig. 19

positive sur $[0, 2]$ (le résultat est établi dans la question 2. a), envisager par là les deux cas $\alpha < 0$ et $\alpha > 0$ (indiqué dans l'énoncé) et utiliser enfin le résultat de cours qui donne l'aire de la surface limitée par les courbes de deux fonctions continues.

La tâche t_1 requiert donc la gestion de l'ordre des bornes 0 et α de l'intégrale et du signe de la fonction $g - f$ suivant celui de α . Bien que le signe de la fonction $g - f$ soit déjà étudié dans la question 2. a et que les cas $\alpha < 0$ et $\alpha > 0$ ainsi que l'expression de l'aire A_α soient indiqués, il nous semble que les types d'adaptations imposés à l'élève situent le fonctionnement des connaissances requises dans cette tâche au niveau *mobilisable*.

2. Dans cette question l'élève doit reconnaître que l'expression $x\sqrt{4-x^2}$ est, à un facteur multiplicatif près, de la forme $u'(x)\sqrt{u(x)}$ et savoir qu'une primitive de $x \mapsto u'(x)\sqrt{u(x)}$ est la fonction $x \mapsto \frac{2}{3} u(x)\sqrt{u(x)}$. Il aura ensuite à conduire correctement les calculs pour obtenir $A_\alpha = -\frac{1}{3} [(4-x^2)\sqrt{4-x^2}]_0^\alpha = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}(4-\alpha^2)\sqrt{4-\alpha^2}$.

La tâche t_2 est à l'évidence simple et routinière ; mais comme l'expression $x\sqrt{4-x^2}$ n'est pas tout à fait de la forme $u'(x)\sqrt{u(x)}$, l'élève aura à transformer l'expression en jeu sous la forme $x\sqrt{4-x^2} = -\frac{1}{2}(4-x^2)'\sqrt{4-x^2}$. Ici, il nous semble que, bien que les reconnaissances et le calcul de l'intégrale $\int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2} dx$ soient entièrement à la charge de l'élève, le mode de fonctionnement des connaissances requises dans la résolution de cette tâche est de type *technique*.

3. Pour accomplir la tâche t_3 , l'élève aura à reconnaître que $A = A_{-2} + A_2$, remplacer α dans l'expression de A_α successivement par -2 et 2 et obtenir $A = \frac{16}{3}$ (u. a). Ici aussi, il nous paraît que la tâche est simple et routinière. Ici aussi, malgré que l'identification, l'adaptation du résultat à utiliser et la gestion des calculs (additivité de l'aire et application numérique) qui font aboutir à l'aire cherchée soient entièrement à la charge de l'élève, le mode de fonctionnement des connaissances nécessaires dans la réalisation de cette tâche est de type *technique*. Voici, pour résumer, les résultats mis en évidence par notre analyse :

Tâche	Ouverte/Fermée	Simple/Complexe	Routinière/Problématique	Technique	Niveau	Registre
t_1	Fermée	Complexe	Routinière	Instituée	Mobilisable	Algébrique/Graphique
t_2	Ouverte	Simple	Routinière	Instituée	Technique	Algébrique
t_3	Ouverte	Simple	Routinière	Instituée	Technique	Numérique

Commentaire

Soulignons ici que la partie de l'exercice que nous venons d'examiner est telle que la stratégie de résolution ainsi que les étapes intermédiaires sont imposés. En revanche, l'élève a l'entière responsabilité de l'identification des connaissances requises et des modalités de leur utilisation. Toutefois, les tâches proposées sont routinières et les techniques qui servent dans leur résolution sont a priori connues des élèves. Ces techniques portent pour l'essentiel sur des opérations de traitements dans le registre algébrique.

I.3. Juin 2009 (Session Principale)

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \ln(1 - \sqrt{x})$.

On note (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

b) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f .

x	0	1
$f(x)$		-
$f(x)$	0	$-\infty$

Tracer (\mathcal{C}) . (On précisera la demi-tangente à (\mathcal{C}) en O).

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $]-\infty, 0]$.

(On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et (Γ) sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})).

b) Tracer (Γ) . (On précisera la demi-tangente à (Γ) en O).

3) a) Montrer que, pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $f^{-1}(x) = (e^x - 1)^2$.

b) Calculer l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations $x = -\ln 2$, $x = 0$ et $y = 0$.

c) En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1 - \sqrt{x}) dx$.

La partie de l'exercice que nous examinons ici est constituée de deux tâches :

t_1 : Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations $x = -\ln 2$, $x = 0$ et $y = 0$.

t_2 : En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1 - \sqrt{x}) dx$.

Voici, pour commencer, le graphique obtenu à l'issue des autres questions de l'exercice dans lequel nous avons colorié les surfaces en jeu.

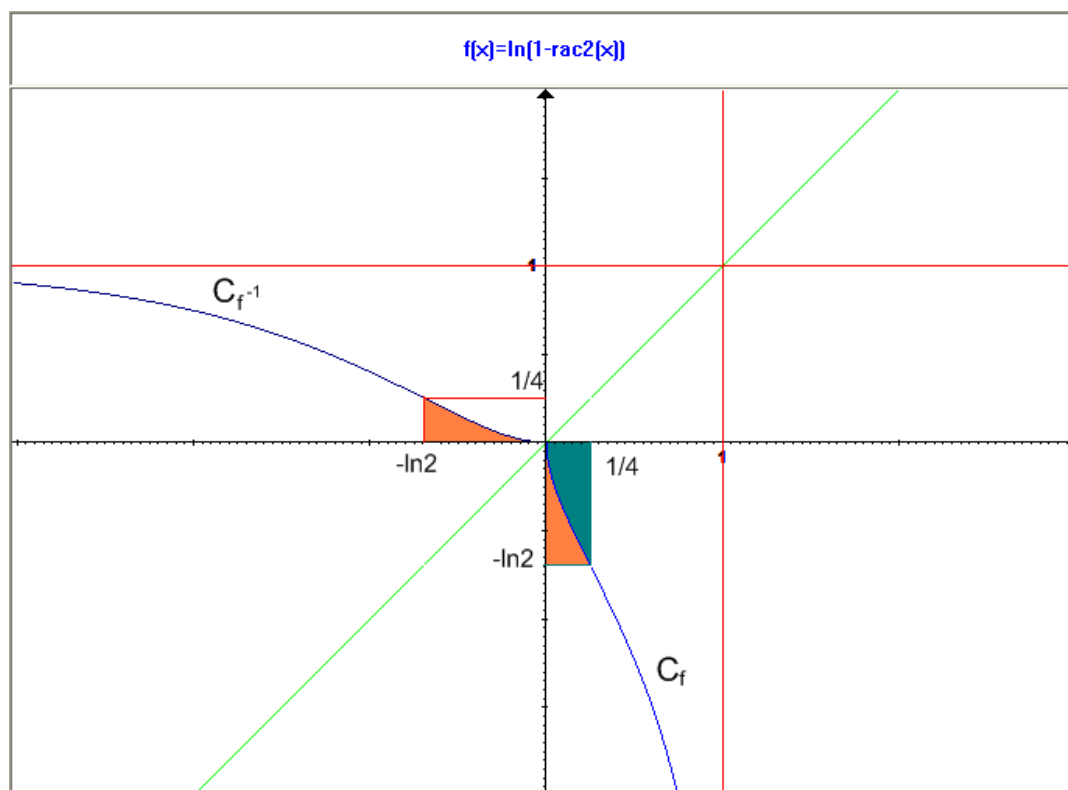


Fig. 20

Analyse didactique

1. Pour calculer l'aire A de la surface (S) limitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations $y = 0$, $x = 0$ et $x = -\ln 2$ (Fig. 20), l'élève aura à reconnaître et justifier (la fonction f^{-1} est continue et positive sur l'intervalle $[-\ln 2, 0]$) que $A = \int_{-\ln 2}^0 f^{-1}(x) dx$, remplacer $f^{-1}(x)$ par son expression (donnée dans l'exercice), développer, intégrer l'expression obtenue et effectuer le calcul numérique :

$$A = \int_{-\ln 2}^0 (e^{2x} - 2e^x + 1) dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} - 2e^x + x \right]_{-\ln 2}^0 = \ln 2 - \frac{5}{8} \text{ (u. a.)}$$

Dans la mesure où sa résolution renvoie à des sous-tâches simples proposées dans un grand nombre d'exercices du manuel, la tâche t_1 est routinière. Cependant, compte tenu du fait que la reconnaissance des *modalités d'application* (Robert, 2005, p.232) de résultats issus des questions précédentes de l'exercice et du cours est entièrement à la charge de l'élève, nous considérons que le mode de fonctionnement des connaissances requises est de type *mobilisable*. Les techniques à mettre en œuvre dans la résolution de

cette tâche se définissent, en référence aux modalités identifiées, comme des techniques instituées de traitements dans le registre algébrique.

2. Dans cette question, l'élève aura d'abord à constater que la fonction f est continue et négative sur $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ et interpréter l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1 - \sqrt{x}) dx$ comme l'opposée de l'aire de la surface (S') limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \frac{1}{4}$. Il aura ensuite à voir qu'en raison de la symétrie des courbes (C) et (Γ) par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$, la somme des aires de (S) et de (S') est égale à l'aire du rectangle de dimensions $\frac{1}{4}$ et $\ln 2$. Il aura enfin à remplacer dans cette dernière égalité *aire* (S) et *aire* (S') respectivement par les intégrales $\int_{-\ln 2}^0 f^{-1}(x) dx$ et $\int_0^{\frac{1}{4}} -f(x) dx$ et déduire l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1 - \sqrt{x}) dx$:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1 - \sqrt{x}) dx = \int_{-\ln 2}^0 f^{-1}(x) dx - \frac{1}{4} \ln 2 = \frac{3}{4} \ln 2 - \frac{5}{8}$$

Cette tâche exige le recours à plusieurs notions qui ne sont pas indiquées. Il y a d'abord à mettre en relation l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1 - \sqrt{x}) dx$ et l'aire A . Pour ce faire, l'élève a besoin de faire appel au support graphique, à un argument géométrique et d'introduire la surface (S'). L'élève doit aussi envisager tout seul les étapes intermédiaires (identification des sous-tâches), trouver les techniques appropriées et gérer les opérations de coordination entre registres graphique, géométrique et algébrique dans le même temps que les calculs. La résolution de la tâche t_2 nécessite donc plusieurs *types d'adaptations* et le mode de fonctionnement des connaissances à utiliser est de type *mobilisable*.

Voici, pour résumer, un tableau récapitulatif des résultats de notre analyse :

Tâche	Ouverte/Fermée	Simple/Complexe	Routinière/Problématique	Technique	Niveau	Registre
t_1	Ouverte	Complexe	Routinière	Instituée	Mobilisable	Algébrique
t_2	Ouverte	Complexe	Problématique	Non	Mobilisable	Gra-Géo-

Commentaire

L'analyse que nous venons de faire met suffisamment en évidence que les tâches que nous venons d'examiner sont, à bien d'égards, à rapprocher de celles de la session principale de Juin 2008. C'est un type de situation que nous avons déjà repéré dans deux exercices du manuel scolaire (voir l'exercice 22 p. 134 et l'exercice 22 p. 154). Le schéma en œuvre dans ce type de situations est le suivant : on donne une fonction f continue et monotone de sorte

que le calcul de l'une seulement des deux intégrales $\int_a^b f(x)dx$ ou $\int_a^b f^{-1}(x)dx$ soit accessible à l'élève. On introduit ensuite à partir de la courbe (C) de f ou celle (C') de f^{-1} une surface (S) ou (S') de sorte que, moyennant l'action de la symétrie orthogonale d'axe Δ d'équation $y = x$, la somme des aires de (S) et de (S') soit égale à celle d'une surface simple dont le calcul est directement accessible à l'élève (triangle, rectangle, trapèze, etc.). Dans ce schéma, la connaissance de la valeur de l'une des deux intégrales $\int_a^b f(x)dx$ ou $\int_a^b f^{-1}(x)dx$ implique celle de l'autre intégrale et/ou celle de l'aire qui s'y ramène.

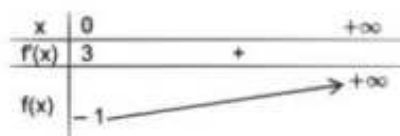
I.4. Juin 2009 (Session de Contrôle)

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ et soit \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (unité graphique 2 cm)

- 1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 - b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$.
 - c) Déterminer la position relative de \mathcal{C} et Δ .
- 2) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	3	+
$f(x)$	-1	$+\infty$



- a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans \mathbb{R}_+ , une seule solution α et vérifier que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.
 - b) Tracer la droite Δ et la courbe \mathcal{C} .
(On précisera la demi tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0 et on prendra $\alpha \approx 0,4$.)
- 3) On désigne par (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \int_{\alpha}^1 |f(x)|^n dx$.
- a) Calculer u_1 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
 - b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 - c) En déduire la limite de la suite (u_n) .

La partie de l'exercice que nous examinons ici est composée de quatre tâches :

t_1 : Calculer u_1 .

t_2 : Interpréter graphiquement u_1 .

t_3 : Établir l'encadrement $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

t_4 : En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

1. Pour résoudre la tâche t_1 , l'élève aura à reconnaître que $u_1 = \int_{\alpha}^1 f(x)dx$, remplacer $f(x)$ par son expression et écrire, par exemple¹⁴⁶, que

$$\int_{\alpha}^1 f(x)dx = \int_{\alpha}^1 x dx + \int_{\alpha}^1 (x - 1)e^{-x} dx$$
 et envisager une intégration par parties pour calculer la dernière intégrale. Les sous-tâches qu'engendre la résolution de t_1 sont à l'évidence simples et routinières. Cependant, en l'absence d'indications et

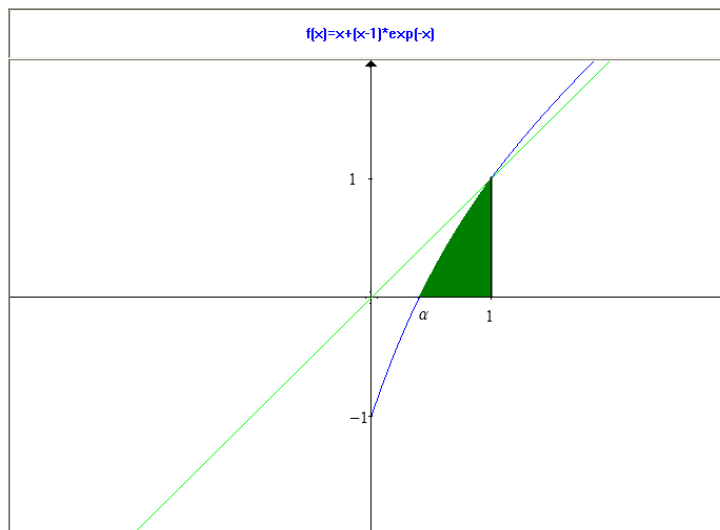


Fig. 21

- dans la mesure où l'élève a en charge la reconnaissance des différentes sous-tâches et des techniques nécessaires, la gestion et le contrôle de son action, nous situons le fonctionnement des connaissances requises au niveau *mobilisable*.
2. Pour la tâche t_2 , l'élève aura à constater (Fig. 21) que la fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[\alpha, 1]$ et reconnaître que u_1 s'interprète comme l'aire de la surface (S) limitée par la courbe (C) de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$. Cette tâche est à la fois simple et routinière et le mode de fonctionnement des connaissances requises est de type *technique*.
 3. Pour résoudre la tâche t_3 , il est possible d'envisager l'une des deux démarches suivantes:
 - i) L'élève se réfère soit au graphique soit à la question 1.c) pour constater que sur l'intervalle $[\alpha, 1]$, la courbe (C) est située au-dessus de l'axe des abscisses et en-dessous de la droite Δ ce qu'il aura à traduire par l'encadrement $0 \leq f(x) \leq x$. Il aura ensuite à élever à la puissance $n^{ième}$ les membres de cet encadrement, passer, en le justifiant, à l'intégrale sur l'intervalle $[\alpha, 1]$ et majorer enfin le membre de droite par $\frac{1}{n+1}$:

$$0 \leq \int_{\alpha}^1 [f(x)]^n dx \leq \int_{\alpha}^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

¹⁴⁶ Il peut aussi écrire $\int_{\alpha}^1 f(x)dx = \int_{\alpha}^1 [x - e^{-x}] dx + \int_{\alpha}^1 x e^{-x} dx$.

ii) L'élève reconnaît que $\frac{1}{n+1} = \int_0^1 x^n dx$, que $\int_\alpha^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n dx$ et sait le justifier¹⁴⁷. Il aura alors à écrire, en le justifiant, que pour tout réel x de l'intervalle $[\alpha, 1]$, et pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq [f(x)]^n \leq x^n$, passer à l'intégrale sur $[\alpha, 1]$ et conclure à l'aide de l'inégalité $\int_\alpha^1 x^n dx \leq \frac{1}{n+1}$.

Comme on peut le voir dans les deux stratégies envisagées, la tâche t_3 fait apparaître plusieurs sous-tâches qui ne sont pas indiquées et dont l'identification et la justification sont entièrement à la charge de l'élève. De plus, les techniques à utiliser sont à trouver par l'élève. Comme la première stratégie est utilisée dans beaucoup d'exercices du manuel scolaire, nous considérons que le mode de fonctionnement des connaissances requises renvoie au niveau *mobilisable*.

4. Compte tenu de l'encadrement $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$, indiqué explicitement dans la question précédente, l'élève n'a qu'à appliquer le théorème des gendarmes déjà très utilisé dans les exercices du manuel. La tâche t_4 est à la fois simple et routinière et le fonctionnement des connaissances qu'elle engage se situe au niveau *technique*.

Voici enfin une synthèse des résultats de l'analyse des tâches que nous venons d'examiner :

Tâche	Ouverte/Fermée	Simple/Complexe	Routinière/Problématique	Technique	Niveau	Registre
t_1	Ouverte	Complexe	Routinière	Instituée	Mobilisable	Algébrique
t_2	Ouverte	Simple	Routinière	Instituée	Technique	Algébrique/Graphique
t_3	Fermée	Complexe	Routinière	Instituée	Mobilisable	Graphique/Algébrique
t_4	Ouverte	Simple	Routinière	Instituée	Technique	Algébrique

Commentaire

Dans la manière dont on a organisé les tâches proposées dans l'exercice, nous saisissons un aspect caractéristique de l'orientation du manuel scolaire. Il n'est qu'à se reporter à l'exercice résolu 2 de la page 126 (voir l'analyse de la partie *Cours* du manuel) ou encore aux exercices 18, 19, 20 et 21 de la page 133 pour constater que la partie de l'exercice en question ici est en tous points analogue aux exercices cités ci-dessus.

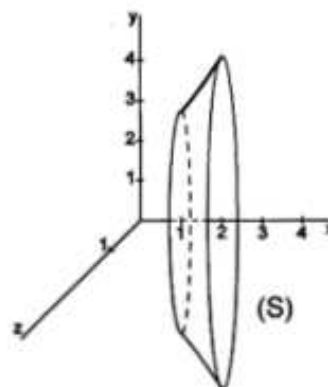
¹⁴⁷ Ici $0 \leq \int_\alpha^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n dx$ car $[\alpha, 1] \subset [0, 1]$ et $x \mapsto x^n$ est continue et positive sur $[0, 1]$.

I.5. Juin 2010 (Session principale)

Exercice 5 (4 points)

Dans la figure ci-contre, le solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation $y = e^{\sqrt{x}}$, $x \in [1, 2]$ autour de l'axe (Ox).

Le but de cet exercice est de calculer le volume \mathcal{V} de ce solide.



1) Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x e^{\sqrt{4t}} dt$.

Vérifier que $\mathcal{V} = \pi F(2)$.

2) Soit G la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t dt$.

a) Montrer que G est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que $G'(x) = 2 F'(x)$.

b) En déduire que pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $2 F(x) = G(x) - G(1)$.

3) a) Montrer que pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $G(x) = (\sqrt{4x} - 1)e^{\sqrt{4x}}$.

b) Calculer alors \mathcal{V} .

Les tâches en rapport avec la notion d'intégrale sont les suivantes :

t_1 : Vérifier que $V = \pi F(2)$

t_2 : Montrer que la fonction G^{148} est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que $G'(x) = 2F'(x)$.

t_3 : En déduire que pour tout réel $x \geq 1$, $2F(x) = G(x) - G(1)$.

t_4 : Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $G(x) = (\sqrt{4x} - 1)e^{\sqrt{4x}}$.

t_5 : Calculer V .

Analyse didactique

1. Pour vérifier l'égalité demandée, l'élève doit connaître la formule qui donne le volume d'un solide de révolution engendré par la rotation d'une courbe d'équation $y = f(x)$ autour de l'axe des abscisses, en l'occurrence $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. Il aura ensuite à adapter cette formule à l'expression de F : $V = \pi \int_1^2 (e^{\sqrt{x}})^2 dx = \pi \int_1^2 e^{\sqrt{4x}} dx = \pi F(2)$.

¹⁴⁸ $G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t dt$, $x \in [1, +\infty[$.

La tâche t_1 est à l'évidence simple et, en référence aux exercices du manuel, routinière. Le mode de fonctionnement des connaissances requises est de type *technique* et la solution renvoie à des opérations de traitement dans le registre algébrique.

2. L'élève doit d'abord connaître le théorème qui fixe les conditions de la dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale (*type* $\varphi(x) = \int_a^{u(x)} f(x)dx$) et qui donne l'expression de sa dérivée ($\varphi'(x) = u'(x)f(x)$). Il aura donc à préciser que la fonction $u: x \mapsto \sqrt{4x}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et prend ses valeurs dans $[2, +\infty[$ et que la fonction $f: x \mapsto te^t$ est continue sur l'intervalle $[2, +\infty[$ pour conclure que G est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que $G'(x) = 2e^{\sqrt{4x}} = 2F'(x)$.

Ici aussi, il s'agit d'une application immédiate d'un théorème de cours. Comme ce théorème est utilisé dans beaucoup d'exercices du manuel, la tâche t_2 nous semble simple et routinière. Dans cette tâche aussi, le mode de fonctionnement des connaissances à utiliser est de type *technique*.

3. Pour résoudre la tâche t_3 , l'élève aura à intégrer l'égalité obtenue dans la question précédente sur $[1, x]$ pour obtenir $[G(t)]_1^x = 2[F(x)]_1^x$. Il aura ensuite à faire remarquer que $F(1) = 0$ et conclure que $2F(x) = G(x) - G(1)$.
4. Pour résoudre la tâche t_4 , l'élève doit se rendre compte qu'il lui faut utiliser une intégration par parties en choisissant $u(t) = t$ et $v'(t) = e^t$. Il aura ensuite à préciser que les fonctions u, v, u' et v' sont continues sur $[1, +\infty[$ et appliquer la formule d'intégration par parties : $G(x) = [te^t]_1^{\sqrt{4x}} - \int_1^{\sqrt{4x}} e^t dt = [(t-1)e^t]_1^{\sqrt{4x}} = (\sqrt{4x} - 1)e^{\sqrt{4x}}$.

La tâche d'intégration par parties est considérée, pour un élève en classe terminale, comme simple et routinière. Il s'agit d'une formule d'usage fréquent dans un grand nombre d'exercices du manuel et sa mise en fonctionnement se situe au niveau *technique*.

5. Enfin, pour la dernière tâche, l'élève aura besoin d'utiliser conjointement les résultats issus des tâches t_1 , t_3 et t_4 qui sont tous indiqués dans les énoncés :

$$V = \pi F(2) = \frac{\pi}{2} [G(2) - G(1)] = \frac{\pi}{2} [(2\sqrt{2} - 1)e^{2\sqrt{2}} - e^2].$$

Comme on peut le constater, cette tâche est simple et routinière. Il s'agit d'appliquer de façon directe des résultats indiqués et obtenus dans les questions précédentes ce qui place le mode de fonctionnement des connaissances à utiliser dans cette tâche au niveau *technique*.

Voici, pour résumer, un tableau récapitulatif des résultats de notre analyse :

Tâche	Ouverte/Fermée	Simple/Complexe	Routinière/Problématique	Technique	Niveau	Registre
t_1	Fermée	Simple	Routinière	Instituée	Technique	Algébrique
t_2	Fermée	Simple	Routinière	Instituée	Technique	Algébrique
t_3	Fermée	Simple	Routinière	Instituée	Technique	Algébrique
t_4	Fermée	Simple	Routinière	Instituée	Technique	Algébrique
t_5	Ouverte	Simple	Routinière	Instituée	Technique	Algébrique

Commentaire

Il nous semble que l'exercice examiné ici se borne à reprendre et à juxtaposer des formules et des théorèmes de cours. Dans ce type d'exercices que nous avons déjà repéré dans le manuel scolaire¹⁴⁹, la stratégie de résolution est entièrement pilotée par les énoncés et échappe totalement à l'action et au contrôle de l'élève. Elle fonctionne à une distance éloignée de lui. En mathématique, un problème est une difficulté qui est d'abord à comprendre, qui est ensuite à appréhender et à résoudre. Dans l'exercice que nous venons d'examiner la difficulté se pose au niveau du calcul de l'intégrale $F(2) = \int_1^2 e^{\sqrt{4t}} dt$ qui est indispensable pour le calcul du volume V . Pour résoudre cette difficulté, la stratégie envisagée consiste à faire appel à la fonction G définie sur $[1, +\infty[$ par $G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t dt$. Il nous semble que ce choix, à tout le moins hétéronome, met a priori entre parenthèses le droit de l'élève à comprendre et à s'objectiver les moyens utilisés pour résoudre la difficulté en jeu. Ici, ces moyens et particulièrement la raison qui a orienté vers le recours à la fonction G lui sont inaccessibles. Il s'agit de faire appel à un changement de variable¹⁵⁰ qui est hors de portée des élèves de classe terminale.

II. Conclusion de l'analyse des épreuves du baccalauréat

En dernière analyse, la plupart des tâches proposées dans les cinq sessions que nous venons d'examiner repose sur un bon nombre d'exercices déjà présents dans le manuel scolaire. Il s'agit pour l'essentiel de réarrangement de certains exercices du manuel, ou quelque chose qui ne s'en distingue pas nettement. Pour résumer les choses sur ce point, il ne fait aucun doute que ces exercices sont gouvernés par la même tendance opérationnaliste prévalente dans le manuel scolaire. Pour en rendre compte, nous résumons dans le tableau suivant les résultats de notre analyse en termes de nature des tâches :

¹⁴⁹ Voir par exemples les exercices 36, 38 et 39, pp. 135 – 136.

¹⁵⁰ Si l'on pose $u = \sqrt{4t}$ alors $du = \frac{dt}{\sqrt{t}}$ et donc $dt = \frac{u}{2} du$. Par suite : $2F(x) = \int_2^{\sqrt{4x}} ue^u du = G(x) - G(1)$.

Tâche	Ouverte	Fermée	Simple	Complexe	Routinière	Problématique
Nombre de tâches	11/19 57%	8/19 43%	12/19 63%	7/19 37%	17/19 89%	2/19 11%

Tâche	T. inst.	Tech. non inst.	N. tech.	N. mob.	Alg.	Alg/Gra.	Gra/Alg	Gra/Géo/alg
Nombre de tâches	17/19 89%	2/19 11%	12/19 63%	7/19 37%	14/19 74%	2/19 10%	1/19 6%	2/19 10%

Pour mieux saisir la signification de ces résultats, il suffit de constater que 75% des tâches en moyenne sont simples et routinières, les connaissances à utiliser sont appelées à fonctionner au *niveau technique* et les méthodes requises consistent en des traitements dans le registre algébrique. Ces tâches, de par leur nature, s'appuient en général sur des habitudes d'action acquises à la faveur de leur répétitivité et de leur routinisation. Pour beaucoup d'élèves, la réussite dans ces tâches pourrait ne pas relever de compétences effectives mais plutôt d'une sorte de *mimesis*, une identification immédiate de la tâche avec la réponse. En revanche, les tâches qui exigent des connaissances plus profondes et des compétences plus larges sont très peu interrogées. Sur les 19 tâches étudiées, sept tâches nécessitent la reconnaissance par l'élève d'au moins deux sous-tâches (tâche complexe), deux tâches qui renvoient à des techniques non instituées dont l'élève pourrait donc ne pas disposer. Enfin, le recours aux registres graphique et géométrique et leur articulation et/ou coordination avec le registre algébrique est très timide (3 opérations de conversion *algébrique* ↔ *graphique* et 2 opérations de coordination *graphique* – *géométrique* – *algébrique*). De plus, quand il arrive que la tâche l'exige, ces opérations sont le plus souvent pilotées par les énoncés.

À la lumière de ces résultats et ceux issus de l'analyse du manuel de la classe terminale, il semble que c'est caractéristique de l'institution scolaire tunisienne la manière dont elle organise l'enseignement de la notion d'intégrale et l'évaluation des élèves sur cette notion. Les formes dominantes à la fois dans l'enseignement et dans l'évaluation en question sont instrumentalistes¹⁵¹ dans un sens strict. L'orientation opérationnaliste a, sans doute, contribué à rendre l'enseignement de la notion d'intégrale par cet aspect plus économique et plus accessible à un plus grand nombre d'élèves et son évaluation plus facile. Sauf que, de notre point de vue, cet aspect de l'intégrale n'en constitue en réalité que la couche externe et ne prépare pas l'élève à fréquenter avec aisance l'enseignement de l'intégrale à l'université.

¹⁵¹ Dans le sens où toute théorie est un outil, un instrument pour l'action.

CHAPITRE SIXIÈME

INVESTIGATIONS DIDACTIQUES

L'analyse du programme officiel, du manuel scolaire de la classe terminale et de quelques sujets de baccalauréat nous a permis, en partie, une description du rapport institutionnel à l'objet de savoir *intégrale*. Ce rapport est saisi à partir de l'étude du contenu mathématique à enseigner et la logistique didactique mise à la disposition de la classe. Cette étude nous semble cependant insuffisante, en ce sens qu'elle ne rend pas compte de la réalité de la classe. C'est pourquoi nous cherchons ici à la compléter à l'aune de quelques investigations didactiques auprès d'un groupe d'élèves (17 élèves) en classe terminale, d'un groupe d'enseignants (79 enseignants) de classe terminale et un groupe d'étudiants (76 étudiants) en première année d'université. Le premier groupe doit nous renseigner sur les connaissances des élèves sur la notion d'aire avant qu'ils n'abordent la notion d'intégrale. Le deuxième groupe doit nous éclairer sur le rapport des enseignants à la notion d'intégrale et leurs approches pour l'enseigner. Le troisième groupe doit nous renseigner sur les connaissances que gardent les nouveaux bacheliers des notions d'aire, d'intégrale et de primitive.

I. Test d'évaluation sur la notion d'aire

La notion d'aire est familière aux élèves depuis l'école primaire. Mais s'ils ont certes appris à calculer l'aire de figures élémentaires (disque, triangle, carré, rectangle, parallélogramme, trapèze,...etc.), ils n'ont jamais fréquenté d'approche de la notion d'aire, quelle qu'elle soit intuitive ou axiomatique. Nous pouvons dès lors affirmer que pour les élèves la notion d'aire n'est pas une notion institutionnellement constituée. Et pourtant, il est bien question, sinon d'une notion constituante, du moins d'une notion fondamentale dans l'enseignement de l'intégrale au lycée. Il semble alors que les auteurs des programmes et les auteurs du manuel considèrent qu'il s'agit là d'une notion naturalisée que les élèves peuvent appréhender intuitivement et qu'il n'est point nécessaire d'en faire un enjeu d'enseignement. Mais n'est-il pas envisageable qu'il en soit autrement ? Les élèves ont-ils toujours conscience des propriétés qu'ils manipulent ? Sont-ils capables de les formaliser ?

L'enjeu de ce test d'évaluation est précisément d'explorer les connaissances des élèves sur la notion d'aire et de ses propriétés élémentaires, et de tenter de recueillir par là quelques

éléments de réponse à nos questions. Ces connaissances peuvent être appréciées à la lumière de leur mise en fonctionnement par les élèves dans des cas particuliers et représentables et de leur formalisation dans le cas général.

I.1. Analyse a priori du test d'évaluation

La fiche d'évaluation proposée aux élèves comporte trois exercices dont l'intégralité figure en annexes (p. 388). Dans chacun des deux premiers exercices, il s'agit de calculer l'aire d'une surface plane formée d'une réunion finie de surfaces élémentaires. Dans ces deux exercices, les figures doivent permettre aux élèves une utilisation intuitive et empirique des propriétés d'additivité et d'invariance par une isométrie. Dans le troisième exercice, nous cherchons à interroger le niveau de conscience des élèves dans la mise en œuvre de ces propriétés et à explorer leur capacité à les formaliser mathématiquement.

Exercice 1

Dans cet exercice nous commençons par demander aux élèves de représenter graphiquement

la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 6]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) = 2x - 1 & \text{si } 2 < x < 4. \\ f(x) = -\frac{1}{2}x + 9 & \text{si } 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

Dans la première question, l'élève aura d'abord à reconnaître que f est une fonction affine par intervalles continue¹⁵² sur $[0, 6]$ et que sa représentation graphique est une ligne polygonale formée de trois segments de droite. Il aura ensuite à déterminer par leurs coordonnées les sommets de la ligne polygonale et à la représenter graphiquement. Il est possible aussi que certains élèves choisissent de dresser le tableau de variation de f , placer ensuite dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) les points d'abscisses 0, 2, 4 et 6 et les relient par des segments.

L'élève aura ainsi à interpréter l'expression algébrique qui définit la fonction f , à identifier les valeurs utiles de la variable et à exprimer ces informations dans le registre graphique. Cependant, compte tenu du fait que les élèves sont habitués à travailler sur les fonctions affines par intervalles, la tâche peut être considérée comme simple et routinière. Dans cette question, le mode de fonctionnement des connaissances requises est de type *technique*.

Cette première question doit permettre de construire un milieu de référence qui va servir à la dévolution du problème : calculer l'aire d'une surface polygonale, et à la validation pragmatique de la solution. Ce problème constitue le véritable enjeu de la question suivante.

¹⁵² Il est peu probable que les élèves pensent à la continuité. Mais cela n'est pas exclu.

Dans cette question, l'élève aura à reconnaître qu'il lui faut procéder à un découpage de la surface polygonale étudiée en surfaces élémentaires (triangles, rectangles, trapèzes), connaître les formules d'aire appropriées et utiliser la propriété d'additivité de l'aire. Cela suppose la mobilisation de connaissances empiriques sur la notion d'aire élémentaire et l'articulation dans le cadre géométrique des registres graphique et numérique. Plus précisément, l'élève aura à trouver les adaptations adéquates et conduire correctement les calculs.

Solution attendue

Il est possible d'envisager plusieurs découpages. Dès lors, nous nous attendons à rencontrer chez les élèves différentes solutions et probablement le bon résultat numérique dans la majorité des copies. Nous pensons cependant que, pour une raison d'économie, la solution la plus probable sera la suivante :

La surface limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites

d'équations $x = 0$ et $x = 6$ est la

réunion des surfaces limitées par les trapèzes $OABE$, $EBCF$ et $FCDG$. (Fig. 22).

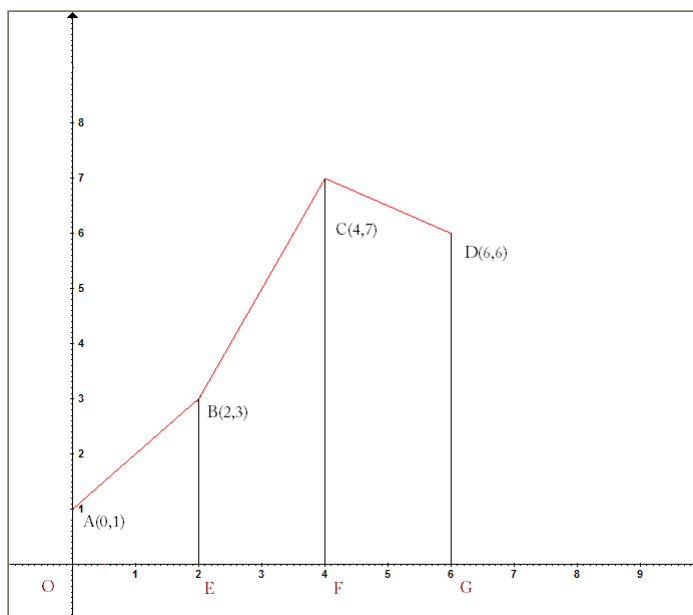


Fig. 22

Les élèves sont supposés connaître la formule de l'aire d'un trapèze :

$$\frac{1}{2} \times (\text{somme des bases}) \times (\text{hauteur}).$$

On peut remarquer que le fait que dans la figure considérée ici les « bases » soient verticales et les « hauteurs » horizontales pourrait constituer un obstacle pour des élèves plus jeunes qui ont l'habitude de travailler sur des trapèzes ayant les « bases » horizontales et les « hauteurs » verticales. Nous pensons cependant que ce problème ne se pose pas pour des élèves en classe terminale.

Une unité d'aire étant fixée, nous avons :

$$\text{aire}(OABE) = \frac{1}{2}(OA + BE) \times OE = 4.$$

$$\text{aire}(BCFE) = \frac{1}{2}(BE + CF) \times EF = 10.$$

$$\text{aire}(CDGF) = \frac{1}{2}(CF + DG) \times FG = 13.$$

Par suite l'aire de la surface polygonale ($OABCDG$) vaut 27 u. a.

Exercice 2

Dans cet exercice, nous proposons aux élèves la surface plane ci-contre et nous leur demandons de déterminer son aire.

L'enjeu de l'exercice est d'explorer les propriétés de l'aire actuellement actives chez les élèves.

Dans le cas de la situation que nous proposons, les demi-disques de centres respectifs $A(1,0)$ et $C(3,0)$ sont de même rayon 1. Ici, l'élève aura à

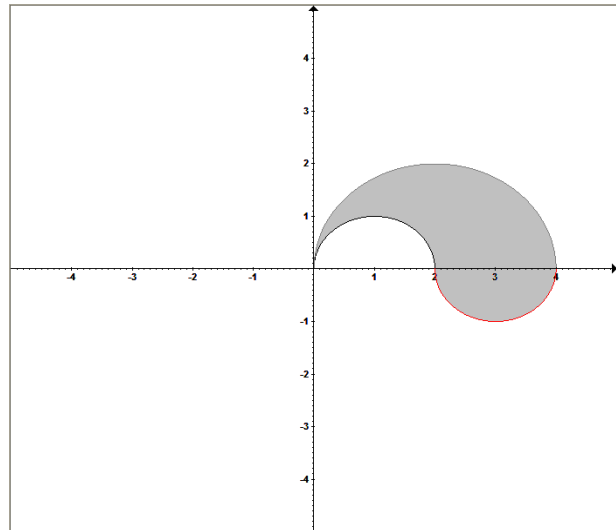


Fig. 23

constater que ces deux demi-disques sont isométriques et que l'aire cherchée est alors celle du demi- disque de centre A et de rayon 2. Il aura ensuite à envisager l'une des deux solutions suivantes :

Solution 1

Les deux demi-disques de centres respectifs $A(1,0)$ et $C(3,0)$ étant de même rayon sont alors isométriques¹⁵³ et ont donc même aire. Par suite l'aire de la surface ombrée vaut celle du demi-disque de centre $B(2,0)$ et de rayon 2, c'est-à-dire $2\pi \text{ (u. a.)}$.

Solution 2

Si D_A et D_C sont les disques de centres respectifs A et C et de même rayon 1, D_B est le disque de centre B et de rayon 2 alors l'aire de la surface ombrée (S) est donnée par :

$$\text{aire}(S) = \frac{1}{2}\text{aire}(D_B) + \frac{1}{2}\text{aire}(D_C) - \frac{1}{2}\text{aire}(D_A) = 2\pi + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi = 2\pi \text{ (u. a.)}.$$

¹⁵³ Il est possible aussi de voir que le premier est le transformé du second dans la symétrie centrale de centre $B(2,0)$, ou encore dans la symétrie glissante de vecteur $-2\vec{i}$ et d'axe $D(O; \vec{i})$.

Nous insistons ici sur le fait que ce qui nous importe c'est moins les calculs que les propriétés mises en œuvre par les élèves dans leurs calculs ainsi que les savoirs intuitifs sous-jacents. Comme nous l'avons souligné plus haut, notre but est d'explorer les connaissances sur les propriétés de l'aire qui sont actuellement actives chez les élèves. Nous cherchons plus particulièrement à vérifier laquelle des deux propriétés d'additivité et d'invariance par une isométrie est la plus utilisée par les élèves. Ajoutons cependant qu'il est peu probable de rencontrer la première solution chez beaucoup d'élèves. La raison en est que les élèves préfèrent en général faire des calculs (malgré leurs déficiences dans ce domaine) que l'exploration des propriétés de la figure qui ne sont pas directement indiquées.

Exercice 3

Dans cet exercice, nous cherchons à vérifier si des élèves ayant utilisé implicitement des propriétés de la notion d'aire en ont conscience pour les exprimer formellement. Nous portons surtout une attention particulière à la cohérence entre les propriétés implicitement utilisées dans le calcul effectif d'aire et les propriétés explicitement formulées. Cet exercice devrait donc nous permettre d'identifier des erreurs, voire des obstacles, en rapport avec la notion d'aire et ses propriétés élémentaires. Nous envisagerons, selon la nature et l'importance de ces erreurs, le moment et la manière d'agir sur elles pour tenter de mettre les connaissances des élèves en conformité à la fois avec les exigences de la rigueur mathématique et avec les attentes de l'institution.

Nous donnons ci-après les réponses possibles envisageables par les élèves :

Peut-on parler de l'aire d'un point ? Si oui, quelle est sa valeur ?			
Oui		Non	Je ne sais pas
0	Je ne sais pas		

Peut-on parler de l'aire d'une ligne ? Si oui, quelle est sa valeur ?			
Oui		Non	Je ne sais pas
0	Un réel non nul	Je ne sais pas	

Remarque

Il nous semble très peu probable, voire non envisageable du tout, que des élèves attribuerait une valeur non nulle ou infinie à l'aire d'un point ou encore une valeur infinie à l'aire d'une

ligne¹⁵⁴. Il est à peine nécessaire d'insister sur le fait qu'il est crucial que les élèves sachent que les points et les lignes n'ont pas d'étendue mais aussi, et peut-être surtout, distinguer entre ensemble vide et ensemble d'aire nulle. Des connaissances inadéquates peuvent en effet constituer une source d'erreurs pour les élèves, voire se constituer en obstacle à la construction de nouvelles connaissances. Il est donc important de prévenir des erreurs possibles à propos de l'aire d'un point ou d'une ligne. D'ailleurs la nullité de l'aire d'une ligne est au cœur même de la propriété d'additivité, objet de la deuxième question que nous reproduisons ici :

Soient (S) et (S') deux surfaces planes quelconques.

Pouvez-vous comparer $aire(S \cup S')$ et $aire(S) + aire(S')$?

Il s'agit ici d'une propriété que les élèves sont supposés ne pas connaître. Nous devons donc nous attendre à relever à travers les réponses des élèves des erreurs, des ambiguïtés et des approximations, mais peut-être aussi de bonnes réponses. Sans doute ces réponses ne nous diraient pas tout sur les conceptions des élèves sur l'additivité de l'aire et pour les saisir au mieux nous avons choisi de donner à la question un caractère relativement ouvert et libre.

Réponses attendues

Nous donnons dans le tableau suivant toutes les possibilités susceptibles d'être relevées sur les copies des élèves :

R_1	$aire(S \cup S') = aire(S) + aire(S') - aire(S \cap S')$
R_2	$aire(S \cup S') = aire(S) + aire(S')$
R_3	$aire(S \cup S') \leq aire(S) + aire(S')$
R_4	$aire(S \cup S') < aire(S) + aire(S')$
R_5	$aire(S \cup S') \geq aire(S) + aire(S')$
R_6	$aire(S \cup S') > aire(S) + aire(S')$
R_7	$aire(S \cup S') \neq aire(S) + aire(S')$
R_8	On ne peut pas comparer
R_9	Je ne sais pas

¹⁵⁴ Entendue au sens de l'élève, c'est-à-dire un ensemble de points qui forment un tracé continue à une dimension. Nous ne pensons pas qu'il soit possible, à ce niveau, d'envisager des courbes remplies telles que celle de Lebesgue ou de Peano.

Dans le cas de la réponse R_9 deux possibilités sont envisageables: ou bien l'élève, ignorant le résultat, n'est pas parvenu à une réponse le satisfaisant et a décidé qu'il ne sait pas, ou bien il ne veut pas réfléchir et refuse simplement d'entrer dans le jeu.

La réponse R_8 , quant à elle, est moins facile à interpréter. Elle est ambiguë. Elle peut renvoyer à la réponse R_9 , mais elle peut aussi laisser entendre que, suivant le cas, on peut avoir l'une quelconque des réponses R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 ou R_7 .

Nous ne nous attendons pas à relever R_5 ou R_6 parmi les réponses des élèves. Toutefois, s'il se trouve qu'un élève donne l'une de ces deux réponses, il pourrait fort probablement s'agir d'une simple obéissance au contrat didactique. Beaucoup d'élèves pensent en effet qu'il faut toujours répondre. Même quand ils ne comprennent pas la question, ils essaient d'imaginer ou de deviner ce qui est attendu d'eux. Un effet du contrat didactique pourrait également expliquer les réponses R_2, R_3 et R_4 , en ce sens que, pour un élève, le verbe *comparer* renvoie souvent à l'un des symboles $=; \neq; \leq; \geq; <; >$.

Les réponses R_2, R_3, R_4 et R_7 pourraient donc être le résultat d'un choix strictement arbitraire. De ce point de vue, il est possible que pour certains élèves, il y aurait une relation indéterminée entre $aire(S \cup S')$ et $aire(S) + aire(S')$. Ces résultats pourraient être aussi le résultat d'une constatation empirique incomplète. Une constatation empirique pour un élève imaginant l'une et/ou l'autre des figures suivantes :

	<p>Un élève peut faire de visu l'une des constatations suivantes :</p> $aire(S \cup S') \neq aire(S) + aire(S')$ $aire(S \cup S') \leq aire(S) + aire(S')$ $aire(S \cup S') < aire(S) + aire(S')$
	<p>Un élève peut faire de visu la constatation suivante :</p> $aire(S \cup S') = aire(S) + aire(S')$

Au cours de son activité, l'élève traverse divers états mentaux et peut, de façon intuitive et privée, se représenter telle ou telle situation selon sa propre lecture de la question et l'usage qu'il fait des signes qu'elle contient. Un élève qui s'est limité à se représenter deux surfaces (S) et (S') contenue l'une dans l'autre ou empiétant l'une sur l'autre peut, selon sa propre croyance, se satisfaire de R_3 , R_4 ou R_7 . En revanche, un autre élève se limitant à se représenter deux surfaces (S) et (S') disjointes ou adjacentes pourrait certainement conclure que $aire(S \cup S') = aire(S) + aire(S')$.

Encore une fois, aux yeux de certains élèves, dans les réponses R_2, R_3, R_4 et R_7 , la relation algébrique coïncide avec l'intuition géométrique illustrée dans la représentation graphique et constitue un résultat licite ne manifestant pas de contradiction, mais qui n'est peut être pas le seul possible. Ces erreurs sont possiblement inhérentes au rapport de l'élève à l'expérience en mathématiques. Certains élèves ne ressentent ni le besoin ni la nécessité d'examiner différents cas de figures pour tester la validité d'une constatation empirique.

Par ailleurs, il est possible que des élèves ne faisant pas appel à une illustration graphique, donnent l'une des réponses R_2, R_3, R_4 ou R_7 , et probablement beaucoup plus la réponse R_2 . L'intérêt de l'analyse de cette réponse tient au fait qu'elle peut rendre compte d'un obstacle didactique, en ce sens qu'elle peut s'expliquer par des choix du système d'enseignement mais aussi par des pratiques sociales courantes. C'est que, comme nous l'avons déjà souligné, dans le système scolaire tunisien, les propriétés de l'aire ne font pas l'objet d'un enseignement spécifique. Paradoxalement, depuis l'école primaire les élèves ont appris à effectuer des calculs sur les aires de beaucoup de figures géométriques simples et complexes. Toutefois, si l'absence des propriétés de l'aire n'a pas jusque là fait difficulté pour les élèves, c'est parce que les surfaces qu'ils ont l'habitude de manipuler sont toujours disjointes ou quasi-disjointes. Pour un élève, à qui la mise en œuvre de la règle constituant la réponse R_2 , selon laquelle $aire(S \cup S') = aire(S) + aire(S')$, a permis de produire des réponses justes dans les situations rencontrées antérieurement, il s'agit d'une règle qui est à la fois efficace et mathématiquement valide. Aux yeux de certains élèves, cette règle peut donc ne pas soulever de problème d'autant plus que dans la pratique, on découpe en parties quasi-disjointes pour le calcul d'une aire complexe.

Enfin, il est possible que des élèves convaincus de la réponse R_1 , choisissent l'une des réponses R_3, R_4 ou R_7 , seulement pour se mettre en conformité avec une certaine règle du contrat institutionnel selon laquelle la réponse doit n'utiliser que des éléments contenus dans

l'énoncé. Il s'agit bien entendu d'une interprétation inadéquate du contrat institutionnel. Pour un élève, à qui on demande de comparer deux nombres a et b la réponse ne peut être que $a = b$ ou $a \leq b$ (*resp.* $a < b$) ou $a \geq b$ (*resp.* $a > b$). Mais il ne songe pas à chercher un réel c tel que $a=b+c$ et conclure en fonction du signe de c . Dans le même temps, d'autres élèves donneront certainement la réponse R_1 . Ces élèves nous intéressent au plus haut degré. Au plus haut degré puisque, ne se satisfaisant pas d'un résultat très général et peut être non opérationnel, c'est le résultat précis, la relation ultime qu'ils visent. Nous souhaitons saisir leur démarche et vérifier, par exemple, s'ils recourent spontanément au registre graphique.

La réponse R_1 pourrait s'expliquer par une constatation empirique appuyée ou non par un examen partiel ou complet d'un ou plusieurs cas de figures, voire par une preuve mathématique partielle ou rigoureuse. Mais elle peut également s'expliquer par le recours à une analogie de forme avec la propriété déjà rencontrée en dénombrement (combinatoire finie), en l'occurrence $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.

L'analogie de forme avec cette propriété est évidemment insuffisante¹⁵⁵ pour en arriver à la réponse R_1 , mais il ne paraît pas absurde qu'un élève puisse s'en satisfaire puisqu'il peut ignorer les différences de nature entre ces formules. En effet, les ensembles A et B en question dans les formules rappelées ci-dessus sont discrets et vérifient $card(A \cap B) \neq 0$ pourvu que $A \cap B \neq \emptyset$ alors que les surfaces (S) et (S') de la question sont des ensembles continus qui peuvent vérifier $aire(S \cap S') = 0$ même dans des cas où $S \cap S' \neq \emptyset$ ¹⁵⁶. C'est dans cette perspective que se situe précisément la première question de l'exercice.

Dans la deuxième question de l'exercice nous avons demandé aux élèves s'il est possible de comparer $aire(S)$ et $aire(S')$ lorsque $(S) \subset (S')$. Ici notre perspective est plus subtile que dans la première question. Explorer les rapports que les élèves établissent entre inclusion et inégalité est une entreprise complexe. Déjà, à elle seule, l'inclusion rend l'analyse difficile car nous ne pouvons pas atteindre à l'interprétation qui en est faite par les élèves. En effet, l'inclusion $(S) \subset (S')$ est possiblement large pour les uns et stricte pour d'autres.

Les élèves pour qui l'inclusion est à prendre au sens large sont susceptibles de fournir la bonne réponse, c'est-à-dire $aire(S) \leq aire(S')$. Mais cette réponse n'est pas forcément motivée par des connaissances adéquates ; elle peut être plutôt le résultat d'un raisonnement simpliste. L'inclusion large exprime que $(S) = (S')$ ou $((S) \subset (S') \text{ et } (S) \neq (S'))$ et :

¹⁵⁵ Bien sûr, il s'agit d'une propriété commune aux mesures mais nous situons notre question au niveau de l'enseignement secondaire.

¹⁵⁶ Lorsque $S \cap S'$ est de mesure nulle.

$$i) (S) = (S') \Rightarrow \text{aire}(S) = \text{aire}(S')$$

$$j) ((S) \subset (S') \text{ et } (S) \neq (S')) \Rightarrow \text{aire}(S) < \text{aire}(S').$$

Il peut alors déduire que $(S) \subset (S') \Rightarrow \text{aire}(S) \leq \text{aire}(S')$.

Les élèves pour qui l'inclusion est prise au sens strict fourniront majoritairement la réponse j). Nous venons de suggérer que par rapport aux deux interprétations possibles de l'inclusion les élèves peuvent potentiellement commettre la même erreur. Nous pensons en effet qu'il est très improbable qu'en classe de terminale, un élève puisse envisager la possibilité d'avoir à la fois l'inclusion stricte $((S) \subset (S') \text{ et } (S) \neq (S'))$ et l'égalité $\text{aire}(S) = \text{aire}(S')$. Nous espérons trouver dans les traces écrites des élèves de quoi vérifier cette hypothèse.

Enfin, dans la dernière question nous demandons aux élèves s'il est possible de comparer $\text{aire}[\varphi(S)]$ et $\text{aire}(S)$, lorsque φ est une isométrie du plan. Ici encore, nous nous attendons à ce que les élèves fournissent majoritairement la bonne réponse, puisque le résultat est déjà rencontré dans le cours sur les isométries du plan.

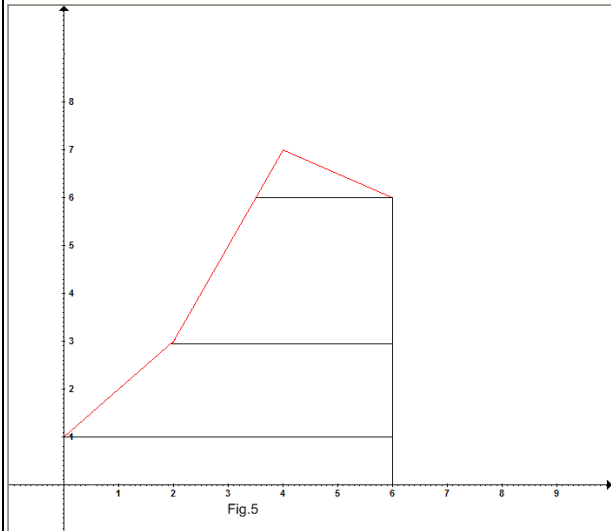
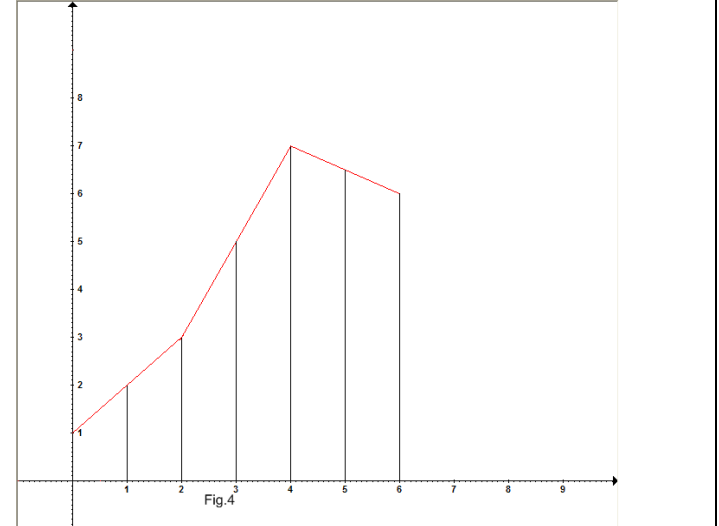
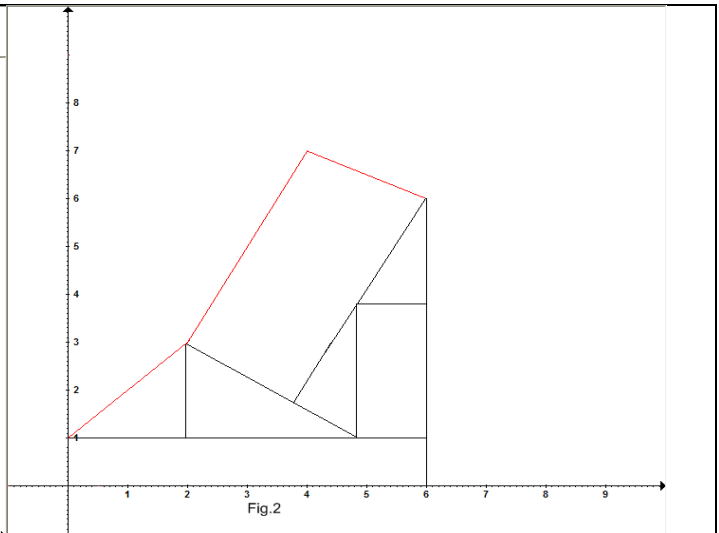
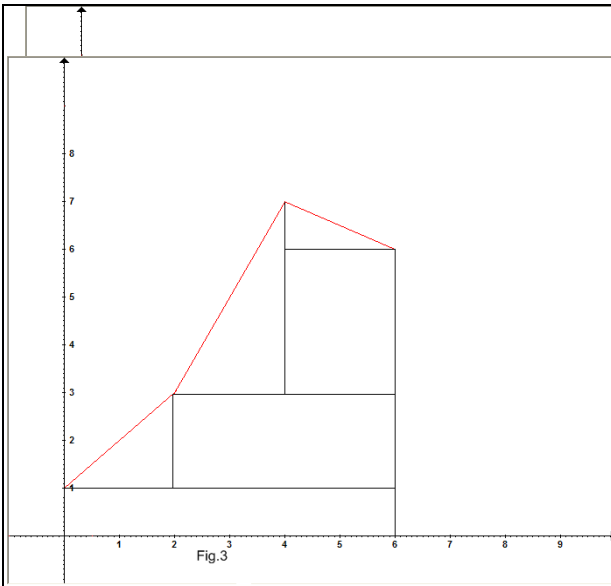
I.2. Analyse a posteriori du test d'évaluation

Le test d'évaluation a été proposé en Janvier 2009 dans une classe terminale (section Mathématiques) du Lycée secondaire Boumhel (banlieue sud de Tunis). C'est une classe de dix-sept (17) élèves. Le test a été proposé aux élèves, durant une heure, en classe et sous la surveillance de l'enseignant de la classe, une semaine avant d'aborder avec eux le cours sur la notion d'intégrale.

Dans l'analyse des productions des élèves, nous avons procédé à la lecture des réponses recueillies que nous avons répertoriées suivant les stratégies mobilisées dans les deux premiers exercices. Nous avons enfin conduit une étude comparative entre les propriétés de l'aire utilisées dans les deux premiers exercices et celles formalisées dans le dernier exercice.

Analyse de l'exercice 1

Notons d'abord que, contrairement à ce qui est prévu, 5 élèves n'ont pas réussi le tracé de la représentation graphique de la fonction ce qui doit les avoir empêchés de traiter l'exercice.



Tous les autres élèves ont réussi à la fois à représenter correctement la fonction et à mettre en œuvre une procédure de découpage de la surface visée.

Parmi les 12 élèves ayant réussi la représentation graphique de la fonction f , 8 élèves ont découpé la surface en question comme nous l'avons prévu dans notre analyse a priori, c'est-à-dire en trois trapèzes (Fig.1). Les 4 autres élèves ont utilisé 4 découpages différents combinant trapèzes, rectangles et triangles (Fig.2, 3, 4, 5).

À la lumière des résultats obtenus dans cet exercice, nous constatons un choix de découpages plus riche que ce que nous avons prévu. Deux élèves ont choisi des découpages n'utilisant que des rectangles et des triangles (Fig.2 et Fig.3). Ce choix peut renvoyer à un problème de disponibilité des formules d'aire ; il est possible que ces deux élèves ne se rappellent pas la formule de l'aire d'un trapèze. La motivation de l'élève ayant découpé la surface en 3 trapèzes « horizontaux » et un triangle pourrait trouver son explication dans le fait que ces trapèzes sont plus naturels que les trapèzes « verticaux ».

D'autre part, la vérification des calculs nous a permis de constater que 5 élèves seulement, tous parmi ceux ayant décomposé la surface en trois trapèzes « verticaux », ont obtenu le bon résultat (27 u. a).

Analyse de l'exercice 2

L'exercice a été traité par 13 élèves seulement parmi lesquels 9 élèves ont pu conduire les calculs avec succès. Tous les élèves ont utilisé la propriété d'additivité et de substitution de l'aire. Ce résultat confirme celui obtenu dans l'exercice 1. En revanche, aucun élève de la classe n'a utilisé la propriété d'invariance de l'aire par une isométrie, ce qui donne à penser que cette propriété peut ne pas être disponible chez les élèves. Il est possible aussi qu'elle soit simplement masquée par la propriété d'additivité qui s'en distingue par son enracinement dans la culture mathématique des élèves.

Analyse de l'exercice 3

Dans cet exercice, nous souhaitons explorer les conceptions des élèves sur quelques propriétés de l'aire et nous cherchons à savoir s'ils sont capables de formaliser certaines propriétés élémentaires de la notion d'aire considérées comme intuitives.

Question 1

Dans la première question de l'exercice, nous avons demandé aux élèves s'il est possible de parler de l'aire d'un point et de l'aire d'une ligne. Pour rendre compte des résultats recueillis lors de la lecture des réponses des élèves, nous reprenons et complétons les tableaux que nous avons utilisé dans l'analyse a priori.

Peut-on parler de l'aire d'un point ? Si oui, quelle est sa valeur ?		
Oui		Non
0	Je ne sais pas	
6	3	8

Peut-on parler de l'aire d'une ligne ? Si oui, quelle est sa valeur ?			
Oui			Non
0	Un réel non nul	Je ne sais pas	
8	0	3	6

Le premier constat qui se dégage de ces résultats est que l'aire d'un point ou d'une ligne n'est ni transparente ni intuitive. La lecture met en évidence beaucoup d'ambiguïtés à propos de cette question. Voici quelques réponses qui illustrent ces ambiguïtés :

Ghassen : *À mon avis, si une chose existe alors elle possède une aire ; sinon ça sera impossible de la voir. Donc le point et la ligne possèdent une aire ; mais quelle est sa valeur ? Je ne sais pas encore.*

Hend : *On sait que chaque forme possède une aire, alors l'aire d'un point est zéro, l'aire d'une ligne est encore zéro car c'est la somme d'une infinité de points d'aire zéro.*

Hichem : *Oui on peut parler de l'aire d'un point et d'une ligne, on peut parler de l'aire de chaque corps quelque soit ce corps. La valeur dépend des grandeurs des corps, mais l'aire d'un point vaut 0 et l'aire d'une ligne vaut l'aire d'une infinité de points, donc $0+0+0+\dots+0=0$*

Nous pensons que ces trois réponses décrivent avec clarté et de manière précise la conception de l'aire chez ces élèves, et peut être chez d'autres aussi. L'idée sous-jacente en œuvre dans cette conception de l'aire est que tout objet mathématique, peu importe qu'ils l'appellent

chose, forme ou corps, possède une aire. Cette idée pourrait se traduire, en termes savants, par « *tout ensemble est mesurable* », ce qui est totalement faux.

Question 2

Dans la deuxième partie de l'exercice, formée de trois questions, nous cherchons à vérifier si les résultats obtenus par les élèves dans les questions précédentes relèvent de la contingence ou s'ils sont plutôt dictés par une intuition qu'ils sont capables d'exprimer dans le langage formel.

Question 2.a.

La lecture des réponses révèle que des élèves ayant donné la réponse R_1 concluent par une autre réponse. Pour rendre compte des réponses recueillies et du glissement de la réponse R_1 vers d'autres réponses, nous reprenons le tableau des réponses que nous avons prévu dans l'analyse a priori et nous y rajoutons deux nouvelles colonnes. Pourquoi ?

Lors de la lecture des traces écrites des élèves, nous avons constaté que certains élèves commencent par écrire $aire(S \cup S') = aire(S) + aire(S') - aire(S \cap S')$ et finissent par proposer une autre réponse. Pour en rendre compte, nous indiquons dans la première colonne tous les résultats tels qu'ils apparaissent sur les copies des élèves et dans la deuxième colonne les réponses finales des élèves.

R_1	$aire(S \cup S') = aire(S) + aire(S') - aire(S \cap S')$	9	2
R_2	$aire(S \cup S') = aire(S) + aire(S')$	3	3
R_3	$aire(S \cup S') \leq aire(S) + aire(S')$	2	7
R_4	$aire(S \cup S') < aire(S) + aire(S')$	2	3
R_5	$aire(S \cup S') \geq aire(S) + aire(S')$	0	0
R_6	$aire(S \cup S') > aire(S) + aire(S')$	0	0
R_7	$aire(S \cup S') \neq aire(S) + aire(S')$	0	1
R_8	On ne peut pas comparer	1	1
R_9	Je ne sais pas	0	0

Ainsi, comme on peut le constater à partir de ce tableau, parmi les 9 élèves ayant envisagé l'égalité $aire(S \cup S') = aire(S) + aire(S') - aire(S \cap S')$, 5 élèves ont fini par donner la réponse R_3 , 1 élève la réponse R_4 et 1 élève la réponse R_7 . Ce constat pourrait s'expliquer par une mauvaise interprétation par ces élèves du contrat institutionnel : « *la réponse doit n'utiliser que des éléments contenus dans l'énoncé* ». Pour ces élèves, la question n'autorise

qu'une relation entre $aire(S \cup S')$ et $aire(S) + aire(S')$. De plus, il convient ici de faire remarquer que si la réponse R_3 est recevable, la réponse R_4 est en revanche fausse.

Question 2.b

Dans cette question, contrairement à ce que nous avons prévu, un élève (1/17) a fourni une réponse à laquelle nous ne nous attendions pas et pour laquelle nous n'avons aucune explication: $(S) \subset (S') \Rightarrow aire(S) = aire(S')$.

Hormis cet élève et un autre qui n'a pas répondu à la question, les réponses des autres élèves sont conformes à nos attentes. Le tableau suivant fournit toutes les réponses recueillies :

$(S) \subset (S') \Rightarrow aire(S) \leq aire(S')$	6
$(S) \subset (S') \Rightarrow aire(S) < aire(S')$	9
$(S) \subset (S') \Rightarrow aire(S) = aire(S')$	1

Comme on peut le constater sur ce tableau, la réponse prévalente chez la plupart des élèves est : $(S) \subset (S') \Rightarrow aire(S) < aire(S')$. Ce résultat confirme ce que nous disions dans notre analyse a priori. Pour beaucoup d'élèves l'inclusion est toujours prise au sens strict et traduite en inégalité stricte. 6 élèves ont donné la bonne réponse : $(S) \subset (S') \Rightarrow aire(S) \leq aire(S')$. Comme nous l'avons déjà souligné dans notre analyse a priori, cette réponse n'est pas forcément motivée par des connaissances adéquates. Elle peut être le résultat d'un raisonnement faux. Quoiqu'il en soit, il est possible que les réponses des uns et des autres cachent d'autres erreurs beaucoup moins évidentes. Mais nous insistons sur l'erreur soulignée ci-dessus pour l'avoir souvent rencontrée chez beaucoup d'élèves. Pour ces élèves, les deux inégalités (large et stricte) ont tendance à s'assimiler et sont donc utilisées de manière indifférente. Enfin cette question montre que, pour beaucoup d'élèves, l'inclusion entre surfaces et son rapport à l'inégalité entre aires est ambiguë.

Question 2.c.

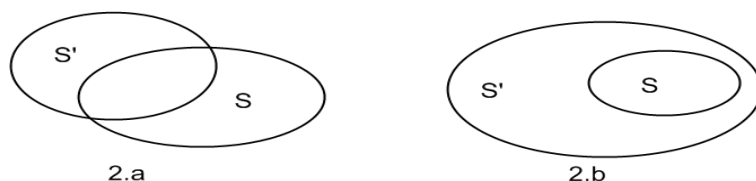
Dans cette question, encore plus que pour la propriété de croissance de l'aire, la propriété d'invariance par une isométrie nous a livré des résultats auxquels nous ne nous attendions pas du tout. Nous exposons dans le tableau suivant les réponses des élèves à cette question :

$aire[\varphi(S)] = aire(S)$	10
$aire[\varphi(S)] \geq aire(S)$	3
$aire[\varphi(S)] \neq aire(S)$	1
On ne peut pas comparer	2

Les résultats obtenus ici sont d'autant plus étonnants que la propriété de conservation de l'aire par une isométrie constitue un résultat de cours sur les isométries du plan vu en géométrie cinq semaines avant de passer le test d'évaluation.

Commentaire

Au terme de cette analyse, nous avons cherché dans les copies des élèves des traces d'un recours au graphique. Notre enquête révèle que l'outil graphique est très peu utilisé par les élèves. Nous avons relevé exactement deux types de dessins correspondant aux questions 2.a) et 2.b) de l'exercice 3 dont nous donnons ici une illustration.



Au total 4 dessins de chaque type parmi lesquels 4 seulement sont accompagnés de traces écrites dont nous proposons ici une reproduction.

Fatma

$$2.a) \text{ aire}(S \cup S') = \text{aire}(S) + \text{aire}(S') - \text{aire}(S \cap S').$$

$$\text{Donc } \text{aire}(S \cup S') \leq \text{aire}(S) + \text{aire}(S').$$

Hend

$$2.a) \text{ aire}(S \cup S') = \text{aire}(S) + \text{aire}(S') - \text{aire}(S \cap S').$$

$$\text{Donc } \text{aire}(S \cup S') < \text{aire}(S) + \text{aire}(S').$$

Kaouther

$$2.a) \text{ aire}(S \cup S') = \text{aire}(S) + \text{aire}(S') - \text{aire}(S \cap S').$$

$$\text{Donc } \text{aire}(S \cup S') + \text{aire}(S \cap S') = \text{aire}(S) + \text{aire}(S').$$

$$\text{D'où } (S \cup S') \leq \text{aire}(S) + \text{aire}(S').$$

Ces trois exemples semblent confirmer ce que nous disions plus haut à propos du rapport des élèves au graphique. D'abord, les élèves ne semblent pas ressentir le besoin d'examiner plusieurs cas de figure ; ensuite, ils se refusent de valider ce que le dessin suggère clairement comme étant vrai. Ici, certains aspects du contrat institutionnel, justifiés ou non, ont une puissance suggestive plus forte. L'élève se réglant sur les exigences de ce contrat peut en arriver à invalider certains résultats, pourtant vrais. Il n'y a qu'à le constater dans les réponses de *Hend* et de *Kaouther* pour s'en convaincre. Et particulièrement dans la réponse de *Hend*

qui passe d'un résultat vrai, constaté graphiquement certes, à un résultat complètement faux suggéré par un rapport inadéquat au statut du graphique dans l'enseignement secondaire. Le cas de *Kaouther* et de *Fatma* est différent puisqu'elle conserve un résultat valable en évitant la controverse de l'inégalité stricte.

1.3. Conclusion de l'analyse du test d'évaluation

Il convient d'abord de souligner que les résultats issus de notre analyse sont à prendre avec beaucoup de précautions en raison du petit nombre d'élèves ayant passé ce test d'évaluation.

Au regard du programme officiel, la notion d'aire joue par rapport à celle d'intégrale un rôle à la fois fondamental et structurant. Nous nous étions alors demandé si les connaissances intuitives des élèves en classe terminale sur la notion d'aire sont suffisamment valables pour être utilisées sans aucune autre forme de développement. Il nous fallait donc vérifier si ces connaissances sont actives chez les élèves de ce niveau et si elles répondent aux exigences des mathématiques enseignées au lycée et à celles de l'institution.

Le test nous a permis de distinguer trois profils d'élèves. Un premier groupe est constitué de quatre élèves (soit environ 24%) qui sont capables de mobiliser spontanément une procédure de découpage optimal de la surface et de réussir les calculs numériques et les tâches de formalisation. Les élèves ayant ce profil se distinguent particulièrement par la clarté et la précision de leurs réponses et se caractérisent par leur régularité. Un deuxième groupe est formé de huit élèves (soit environ 47%) capables de procéder spontanément à un découpage (qui n'est pas toujours optimal) de la surface et d'une certaine réussite dans les calculs numériques et les tâches de formalisation. Les élèves ayant ce profil n'exercent souvent aucune forme de contrôle, ni sur leurs calculs ni sur leurs contradictions. Un troisième groupe est composé de cinq élèves (soit environ 29%) qui échouent presque sur tout.

Globalement, les résultats de notre enquête ne nous semblent pas satisfaire aux exigences soulignées plus haut, soit parce que les connaissances disponibles chez les élèves manquent de précision et de consistance, soit parce qu'elles sont simplement erronées. Notre analyse révèle en effet que majoritairement les élèves sont capables de mobiliser spontanément une procédure de découpage de la surface visée, mais que beaucoup d'entre eux échouent à la fois dans les calculs numériques et dans la formalisation des propriétés de l'aire qu'ils utilisent dans leurs calculs. Cet échec tient probablement à des confusions de nature entre qualité

(surface ou étendue plane) et quantité (aire), entre ensemble vide et ensemble de mesure nulle, entre inclusion stricte et inclusion large et leur rapport aux inégalités.

Nous pensons que ces ambiguïtés et ces confusions ou du moins ce qui en a été révélé risquent d'être à l'origine de difficultés potentielles au niveau de la notion d'intégrale. Enfin, au plan de l'enseignement, voir la notion d'aire comme intuitive, c'est se méprendre sur les difficultés inhérentes et permettre chez beaucoup d'élèves l'installation de certaines erreurs susceptibles de se constituer en obstacles à la construction de nouvelles connaissances. Il reste que les interrogations qui sont à l'origine de ce test sont bien fondées et qu'une véritable réflexion sur une approche pour enseigner la notion d'aire au lycée est nécessaire.

II. Enquête auprès des enseignants de classes terminales

II.1. Introduction

Cette enquête constitue une composante importante de notre travail, non seulement du point de vue de la description du rapport institutionnel à la notion d'intégrale, mais aussi du point de vue de la compréhension de la nature et du statut des éléments du savoir à enseigner. Elle peut en effet nous révéler le jeu différentiel entre les conceptions et les intentions qui sous-tendent le projet institutionnel et celles des enseignants qui ont en charge la réalisation de ce projet. Cette responsabilité inclut aussi l'organisation et la réalisation effective des situations d'enseignement considérées comme favorables aux apprentissages des élèves. L'enseignant a aussi en charge d'expliquer l'objet de savoir en jeu qui peut être une règle, une propriété, un théorème ou une technique. L'organisation des situations d'enseignement, leur réalisation et l'explication de leur contenu mathématique sont trois composantes importantes de la logistique didactique. Une autre tâche importante de l'enseignant est la tâche d'évaluation. À côté du fait qu'elle sert à rendre compte de la conformité de la production de l'élève avec ce qui est attendu par l'institution, elle est révélatrice du rapport de l'enseignant au savoir interrogé.

Pour cerner autant qu'il est possible le rapport des enseignants concernés par notre enquête à la notion d'intégrale et la logistique didactique en œuvre dans leur projet pour l'enseignement de cette notion, il nous a semblé nécessaire d'envisager une tripartition du champ de cette enquête. Nous souhaitons :

1. Connaître les supports et les ressources utilisés par les enseignants dans l'exercice de leur métier.
2. Saisir les aspects spécifiques de l'intégrale susceptibles de fonder leurs projets et, par là, les situations proposées aux élèves.
3. Saisir enfin leurs exigences en termes d'évaluation.

Il est important ici de souligner que les intentions de ce travail se défendent de tout jugement de valeur sur les approches envisageables par les enseignants concernés par notre enquête dont le texte figure en annexe (p. 390).

II.2. Analyse a priori de l'enquête

Partie I

Dans cette partie, nous cherchons à connaître les différents supports et les différentes ressources utilisés par les enseignants dans la préparation du cours et des exercices pour leurs élèves. Plus précisément, nous souhaitons explorer les moyens susceptibles d'être utilisés par les enseignants concernés par notre enquête dans l'enseignement de la notion d'intégrale. L'enseignant se contente-t-il du manuel scolaire ou bien cherche-t-il à s'inspirer d'autres ressources, notamment de documents utilisés dans l'enseignement supérieur ?

Pour l'avoir toujours appliquée, nous avons découvert dans la multiplication des sources du savoir, par le fait de leur diversité, « *des surplus et des richesses dans les deux directions privilégiées de la théorie et de la pratique*¹⁵⁷ ». C'est une instruction véritable qui permet de mieux circonscrire le sens mathématique du savoir en jeu, de mettre au propre sa spécificité et de dégager la pointe de son intuition. Il est à peine nécessaire d'insister sur ce que l'importance de la multiplication des sources du savoir peut avoir d'instructif dans la préparation d'une situation d'enseignement. Pour autant, cela ne signifie pas que l'on puisse accorder à cette instruction un effet direct sur les apprentissages des élèves, mais son exploration nous semble nécessaire pour saisir les cadres de référence et de réflexion qui sont ceux des enseignants.

Mais l'enseignant est assujéti à un programme officiel et à des directives institutionnelles strictes, et dans le même temps, à des représentations personnelles sur la manière dont un élève apprend et sur les finalités de l'enseignement de l'intégrale et bien d'autres contraintes. Il nous semble dès lors que peu d'enseignants, parmi ceux qui ont quelque expérience de

¹⁵⁷ Gaston Bachelard

l'élaboration des tâches, prennent la peine de se démarquer de l'approche que propose le manuel scolaire à propos de la notion d'intégrale. C'est pour la bonne raison qu'ils considèrent que l'essentiel de ce qui doit être dit et fait à propos de cette notion est développé dans ce manuel. Nous estimons donc que le manuel scolaire constitue le support privilégié pour la plupart des enseignants, et peut être, mais à un degré moindre, le web pour les exercices.

La manière dont un enseignant prépare son cours nous intéresse au plus haut degré d'autant qu'elle doit nous révéler les aspects de l'intégrale susceptibles d'être présents en classe, et donc des rapports qu'enseignants et élèves peuvent entretenir avec cette notion. Ces aspects peuvent se donner à voir à travers les interprétations qui en sont faites et la manière dont elles sont articulées. C'est la question que la deuxième partie de notre enquête cherche à éclairer.

Partie II

Après nous être intéressé aux supports et aux ressources utilisées par les enseignants, nous souhaitons explorer, dans cette deuxième partie de notre enquête, ce qui est spécifique à l'enseignement de l'intégrale en classe terminale. Plus précisément, nous cherchons à repérer ce qui pourrait se donner à voir du *projet de l'enseignant*. L'idée que nous avançons ici pour notre propre compte consiste à considérer que l'articulation que l'on fait des liens entre aire, intégrale et primitive éclairerait l'esprit du projet de l'enseignant. Et ce projet nous intéresse car il est d'abord ce qui est inscrit dans une représentation, la représentation de l'enseignant sur la notion d'intégrale et sur la manière de l'enseigner. Il faut convenir ici que toute représentation comporte invariablement un contenu mathématique et une approche pour l'enseigner reconnaissables et analysables, au moins partiellement. C'est précisément ce que notre enquête cherche à dégager. Expliquons-nous encore une fois. Comme nous l'avons dit en un autre endroit, il est possible d'introduire l'intégrale par les aires (méthode des rectangles) ou par les primitives (intégrale de Newton). Mais les organisations mathématiques correspondant à ces deux approches, si elles étudient le même contenu mathématique, elles se distinguent par la méthode qu'elles utilisent.

Les éléments constitutifs du contenu mathématique sont ce qui est stable et permanent : ils sont les invariants de toute organisation mathématique. Ils sont prescrits par le texte officiel qui en fixe l'identité et la finalité. Les interprétations que l'on fait de l'intégrale et de ses propriétés sont une variation autour de son sens mathématique et de sa fonctionnalité. Nous considérons donc que c'est la manière de l'enseigner qui détermine le sens mathématique et la

fonctionnalité de la notion d'intégrale. Aussi avons-nous choisi, dans cette partie de notre enquête, de mettre l'accent prioritairement sur l'approche utilisée dans l'introduction de l'intégrale, sur les liens entre aire, intégrale et primitive et sur les difficultés constatées par les enseignants chez leurs élèves. Dans la mesure où nous estimons que la majorité des enseignants s'appuient pour l'essentiel sur le manuel scolaire, il y a lieu de penser que cette majorité adopte l'approche utilisée dans le manuel. Dans le même temps, nous envisageons que, dans une proportion moindre, d'autres enseignants choisissent d'introduire l'intégrale directement par les primitives. Ce choix pourrait s'expliquer par le souci de se conformer strictement au texte du programme officiel, mais aussi, et peut être surtout, par un argument d'économie. Quoi qu'il en soit, pour ce qui concerne l'articulation des liens entre aire, intégrale et primitive, il nous semble fortement probable qu'une très grande majorité des enseignants les envisagent dans le même sens *primitive* → *intégrale* → *aire*. Il faut entendre que les primitives servent à calculer des intégrales qui sont utilisées, à leur tour, dans le calcul d'aires. La raison principale en est la prépondérance de ce schéma dans les exercices proposés à la fois dans le manuel scolaires et dans les épreuves du baccalauréat. Enfin, compte tenu des orientations des projets potentiels envisagés ici, nous nous attendons à ce que les difficultés évoquées par la plupart des enseignants seront d'ordre calculatoire.

Partie III

Au départ, l'idée était de soumettre aux enseignants un exercice et de leur demander de rédiger une solution qui peut être potentiellement attendue d'un élève en classe terminale, de souligner les tâches susceptibles de faire difficulté aux élèves et s'ils estiment envisageable de proposer l'exercice en classe. Mais nous avons vite renoncé à cette idée. S'agissant précisément d'enseignants de mathématiques, l'enjeu de l'exercice ne peut être ni d'évaluer des connaissances ni de provoquer une activité mathématique dans la perspective de faire acquérir un savoir. Sans doute des indices sur le rapport des enseignants à la notion d'intégrale apparaissent-ils à travers ce choix : les techniques et les propriétés utilisées ainsi que les registres de validation. Toutefois, quelque pertinent qu'il soit par rapport à l'objet de notre recherche, ce choix n'est pas sans équivoque. D'abord, il est possible que certains enseignants voient dans le fait de leur demander de rédiger une solution comme une façon d'évaluer leurs compétences et pourraient alors se refuser à répondre. Il se peut aussi que certains enseignants, avant tout soucieux de se mettre à la place d'un élève, ne s'engagent pas proprement dans l'exercice et produiraient une solution en rupture avec ce qui devrait être leur propre production. Ainsi ce choix nous semble peu pertinent, à la fois parce qu'il peut

échouer à saisir le rapport réel de l'enseignant à la notion d'intégrale, et parce qu'il risque de ne pas montrer ses vraies exigences en matière de savoir et de savoir-faire. Ce sont toutes les raisons qui nous ont décidé à renoncer à notre première idée.

Toutefois, il nous semble que nous pouvons beaucoup apprendre sur le rapport à l'intégrale et les exigences d'un enseignant en le plaçant en situation d'exercer son expertise dans l'évaluation du travail d'un élève. C'est sans doute dans l'exercice de son jugement et de sa réflexion sur les productions d'élèves que nous pouvons saisir ce qui détermine, à ses yeux, les conditions de ce qui pourrait être un rapport adéquat à la notion d'intégrale. Nous considérons qu'il y a dans l'analyse de l'acte d'évaluer une façon d'atteindre au rapport à l'intégrale et aux exigences des enseignants. Pour obtenir des observables à ce propos, nous avons soumis aux enseignants le texte d'un exercice que nous avons fait accompagner de deux solutions élaborées par deux élèves différents et nous les avons invité à se prononcer sur l'exercice et d'évaluer les deux solutions à l'aide d'une note qui peut varier de 0 à 10.

L'exercice

Rappelons d'abord le texte de l'exercice :

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par son terme général $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$.

a) Montrer que la suite (u_n) est monotone.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c) Montrer que pour tout réel $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq a + \frac{\pi}{2} \cos^n a$.

d) En déduire la limite L de la suite (u_n) .

Il s'agit évidemment d'un exercice sur les intégrales de Wallis. Le choix de cet exercice est motivé par le souci de proposer un énoncé qui peut se recommander d'une référence à la fois théorique et culturelle. La résolution de l'exercice s'appuie sur les résultats suivants qui sont largement utilisés par les élèves en classe terminale :

- Étude de la monotonie d'une suite réelle.
- Critères de convergence d'une suite monotone.
- Théorème de comparaison sur les suites.
- Définition formelle de la limite d'une suite.

- Limite d'une suite géométrique.
- Propriétés de l'intégrale définie : relation de Chasles, positivité et ordre.
- Interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction continue et positive.

A priori, ces connaissances devraient être disponibles chez la plupart des élèves en classe terminale. Les suites réelles sont introduites en 2^e année de l'enseignement secondaire (classe de Seconde en France) et leur étude s'étend sur trois années de suite jusqu'à la classe terminale. En particulier l'étude de la monotonie d'une suite et l'utilisation des critères de convergence des suites monotones sont abordées en 3^e année de l'enseignement secondaire (classe de Première en France) et reprises en début de la classe terminale. Les suites réelles sont régulièrement travaillées dans les autres parties du programme, notamment dans le cadre de l'étude de fonctions et du calcul intégral. Ainsi, du point de vue du contenu mathématique, l'exercice ne prétend à aucune originalité. Et pourtant il se démarque nettement des exercices se rapportant à la même thématique auxquels enseignants et élèves sont habitués. La différence peut se donner à voir au niveau de la nature des tâches ainsi qu'au niveau de la part de responsabilité laissée aux élèves pour résoudre ces tâches. Pour expliquer notre propos, considérons à titre d'exemple la tâche t_1 : *Montrer que la suite (u_n) est monotone.*

Il est possible qu'on ne voit pas clairement en quoi la formulation de cette tâche rompt avec les règles du contrat institutionnel en usage dans l'enseignement secondaire tunisien. Si nous devons respecter ces règles, il nous faut formuler la tâche sous l'une des deux formes :

t'_1 : *Montrer que la suite (u_n) est décroissante.*

t''_1 : *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos^{n+1}x \leq \cos^n x$.*

En déduire que (u_n) est décroissante.

Nous voyons que ces deux formulations, notamment la dernière, offre à l'élève une aide directe et un moyen de contrôle. Toutefois, nous ne nous attendons pas à enregistrer des commentaires notables à propos de cette question, ni à propos de la suivante d'ailleurs. La question c) pourrait, en revanche, provoquer des réactions importantes des enseignants. La tâche est certes fermée, mais elle ne propose aucune indication qui pourrait aider l'élève à élaborer une stratégie gagnante et contrôler son action. Sous cette forme, la question relève du niveau des connaissances réflexives et requiert leur disponibilité. Selon Robert (2002) :

Il se peut qu'ils aient à introduire eux-mêmes la connaissance, sans avoir eu aucune indication en ce sens (si c'est réussi, on dit que ces connaissances sont disponibles chez les élèves).

Ici, plus qu'ailleurs, nous espérons saisir les exigences des enseignants en termes de contrat institutionnel ainsi que leur rapport à certains registres de représentation sémiotique, notamment les registres algébrique, géométrique et graphique. Expliquons-nous. Pour provoquer et faire apparaître ce rapport, nous soumettons aux enseignants deux solutions différentes de cette question. D'autre part, pour comprendre les règles du contrat utilisées dans l'enseignement secondaire tunisien, nous proposons ici une décomposition de la tâche en question sous une forme adaptée au contrat institutionnel en usage à ce niveau :

1. Soit $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, a]$, $0 \leq \cos^n x \leq 1$.
En déduire que $0 \leq \int_0^a \cos^n x \, dx \leq a$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [a, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \cos^n x \leq \cos^n a$. En déduire que $0 \leq \int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \leq (\frac{\pi}{2} - a)\cos^n a$.
3. Établir alors que pour tout $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq a + \frac{\pi}{2}\cos^n a$.

Il est immédiat que cette formulation, non seulement induit un autre niveau d'utilisation des connaissances mais aussi, et c'est crucial, elle crée une situation différente, une tension moindre. Ici la stratégie de résolution est très bien renseignée, en ce sens que sa construction ainsi que ses étapes sont entièrement pilotées par les énoncés. Dans ce cas l'activité de l'élève va dans le sens de l'identification, de la reconnaissance et des calculs. En revanche, la manière dont la tâche est formulée dans l'exercice que nous proposons privilégie l'autonomie et la réflexion de l'élève et lui accorde un espace de liberté pour exprimer toutes ses potentialités et choisir en toute liberté une stratégie pour résoudre la question. Selon Robert et Rogalski (2002) :

Il est intéressant de proposer des énoncés mettant en jeu ce niveau de fonctionnement pour permettre aux élèves à la fois d'acquérir et de cultiver la disponibilité de leurs connaissances.

Passons maintenant à l'analyse des solutions soumises aux enseignants. Ces solutions ont été élaborées en classe par deux élèves différents (Fatma et Kaouther) sans aucune aide extérieure.

Première solution (Kaouther)

Par la relation de Chasles $u_n = \int_0^a \cos^n x \, dx + \int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$.

Or $0 \leq \cos^n x \leq 1$ sur $[0, a]$ donc $\int_0^a \cos^n x \, dx \leq a$ et $0 \leq \cos^n x \leq \cos^n a$ sur $[a, \frac{\pi}{2}]$ donc

$$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \leq (\frac{\pi}{2} - a) \cos^n a \leq \frac{\pi}{2} \cos^n a.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq a + \frac{\pi}{2} \cos^n a$.

Ainsi cette solution est entièrement réalisée dans le registre algébrique: relation de Chasles, encadrement et passage à l'intégrale, opérations algébriques. Du point de vue de la rigueur mathématique, la solution manque par endroits de justifications. Il fallait préciser en particulier que la fonction $x \mapsto \cos^n x$ est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ ainsi que la continuité des fonctions à intégrer avant le passage à l'intégrale. Nous traquons les remarques des enseignants sur l'absence de ces justifications. Nous saisissons ici une nouvelle occasion pour vérifier la naturalisation de l'hypothèse de continuité lors du passage à l'intégrale.

Deuxième solution (Fatma)

	<p>Comme la fonction $f_n: x \mapsto \cos^n x$ est continue et positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ alors l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ est égale à l'aire de la surface comprise entre la courbe de f_n, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.</p> <p>Comme on peut le voir sur la figure, on a :</p> $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \leq \text{aire}(OABC) + \text{aire}(AEFD)$ <p>Donc $0 \leq u_n \leq a + (\frac{\pi}{2} - a) \cos^n a$.</p> <p>Or $0 < \frac{\pi}{2} - a < \frac{\pi}{2}$ et $\cos^n a > 0$</p> <p>d'où : $0 \leq u_n \leq a + \frac{\pi}{2} \cos^n a$.</p>
--	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Comme on peut le voir aussitôt, la méthode algébrique en œuvre dans la première solution cède le pas à un jeu de conversion entre registres algébrique, géométrique et graphique en termes d'aire. Clairement, cette méthode fournit les mêmes résultats, mais cette fois en partant du domaine accessible de l'intuition. Ici, l'élève commence par préciser que la fonction est continue et positive pour justifier que $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ s'interprète comme l'aire sous la courbe de la fonction $f_n: x \mapsto \cos^n x$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Immédiatement après, l'élève s'appuie sur le registre graphique pour déduire le résultat demandé à l'aide de l'articulation dans le cadre géométrique des registres graphique et algébrique. Que peut-on reprocher à cette solution ? On ne peut pas faire mieux probablement pour ce qui est de l'approche intuitive et de la coordination des registres graphique, géométrique et algébrique. Mais il lui manque des arguments pour justifier certains résultats constatés de visu. Cette solution a la particularité de faire porter la preuve sur la notion d'aire en utilisant une courbe générique. De plus les coordonnées des points introduits dans la figure ne sont pas précisées, quoiqu'il ne soit pas difficile de les deviner. Et puis, il aurait été nécessaire que l'élève justifie que la surface sous la courbe de $f_n: x \mapsto \cos^n x$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ est contenue dans la réunion des surfaces délimitées par les deux rectangles $OABC$ et $Aefd$ et que ces deux dernières sont quasi- disjointes¹⁵⁸. Mais une telle justification est-elle à la portée d'un élève en classe de terminale, fut-il excellent ?

La première difficulté que pourrait soulever cette solution concerne la recevabilité de l'argument graphique. Il y a parmi les enseignants de mathématiques comme une opinion presque unanime et tranchée sur le fait que le registre graphique n'est pas un registre de validation. Cette opinion pourrait légitimement trouver son origine dans les fondements même du rationalisme mathématique : *n'accepter rien pour vrai qu'on ne soit capable de prouver*.

La deuxième difficulté est moins évidente. Elle est contenue dans les conversions implicites entre registres graphique, géométrique et algébrique, ce qui donne à voir seulement des inférences effectuées en vertu du sens géométrique des éléments présents dans la figure.

Il est possible que certains enseignants jugeront cette solution peu satisfaisante, voire contestable, et imputent cette décision aux imperfections soulignées plus haut. Quoiqu'il en soit, nous allons revenir sur cette solution dans notre analyse a posteriori pour essayer de

¹⁵⁸ Ayant une intersection de mesure nulle, en l'occurrence le segment $[AD]$ ou, de façon équivalente, d'intérieurs disjoints.

l'aborder sous un autre angle, dans le sens où nous tenterons de rendre compte de sa pertinence et peut être de la justifier en regard de l'esprit du programme officiel.

II.3. Analyse a posteriori de l'enquête

L'enquête dont le texte figure en annexe a été menée en Tunisie auprès d'un groupe d'enseignants de classes terminale au cours de l'année scolaire 2008-2009. Le texte de l'enquête a été adressé à 150 enseignants exerçant dans différents gouvernorats du pays. Soixante-dix-neuf (79) questionnaires ont été renseignés, soit un taux de retour d'environ 53%. Ces enseignants exercent dans 23 lycées différents situés dans 6 gouvernorats différents. Parmi ces enseignants, onze (11) enseignants n'ont pas précisé leur ancienneté. Les autres enseignants ont en moyenne une ancienneté de 17 ans dont 14 ans en moyenne d'enseignement de classes terminales. Le diagramme en boîte ci-dessous illustre la diversité des expériences des enseignants ayant répondu à notre enquête.

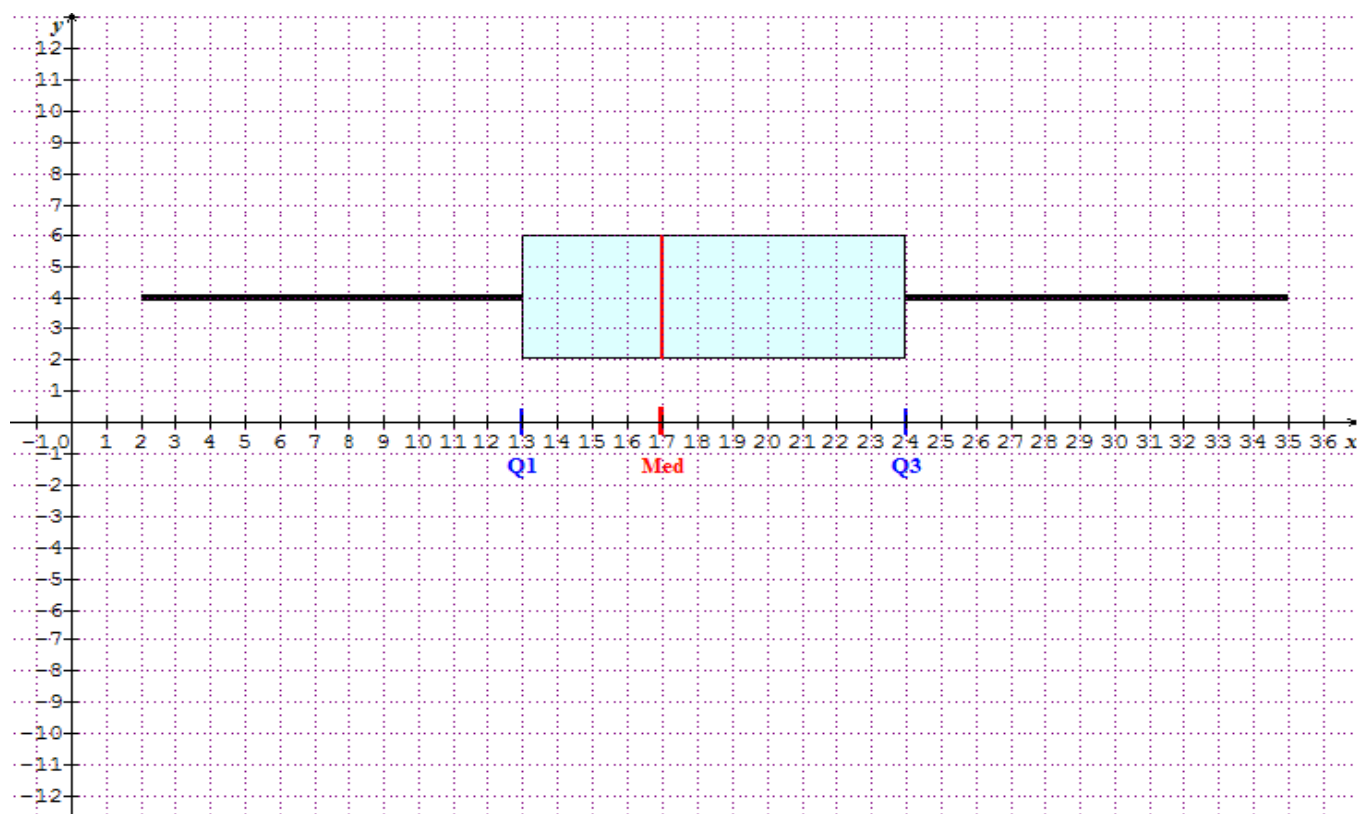


Figure 24 : *ancienneté des enseignants.*

Nous estimons dès lors que nous avons un échantillon assez représentatif de la population des enseignants de classes terminales.

Avant d'aborder l'analyse du contenu de cette enquête, nous voulons insister sur le fait que cette analyse est particulièrement centrée sur les tendances prévalentes chez les enseignants interrogés. Il y a probablement un grand nombre d'enseignants à l'extérieur du groupe concerné par notre enquête où ces tendances ne sont pas (ou ne sont pas encore) prévalentes. Aussi s'agit-il ici juste de mettre en lumière ces tendances et d'avancer quelques hypothèses.

Partie I

Dans cette partie, constituée de trois questions, nous cherchons à connaître les supports utilisés par les enseignants dans la préparation du cours et des exercices qu'ils proposent à leurs élèves en classe. Nous avons demandé ensuite aux enseignants interrogés s'ils suivent ou non l'évolution des programmes de mathématiques dans l'enseignement supérieur et s'ils consultent des documents utilisés à ce niveau (cours, fiches de TD¹⁵⁹, livres, etc.). Nous leur avons demandé enfin de nous livrer leur point de vue sur l'adéquation de l'enseignement de l'intégrale au lycée avec l'enseignement de l'intégrale en première année d'université.

La lecture des réponses des enseignants à la première question nous a permis de dégager les résultats résumés dans le tableau suivant :

Sur les supports didactiques et pédagogiques utilisés	Manuel scolaire	65/79
	Supports en ligne	47/79
	parascolaires	19/79
	livres ¹⁶⁰	21/79

La tendance qui se dégage de ce tableau permet de constater que le manuel scolaire (82%) et le web (60%) sont des supports privilégiés chez les enseignants. Ce choix relève de plusieurs raisons dans le détail desquelles il est inutile d'entrer ici, mais qui tiennent pour l'essentiel à un vague principe d'économie. Expliquons-nous. Parmi les enseignants, il y a une conviction forte que le meilleur moyen de rester en conformité avec le programme officiel et le contrat institutionnel est d'utiliser le manuel scolaire. Ce faisant, l'enseignant se dégage de la préparation du cours et des exercices. Il lui suffit en effet de suivre le cours développé dans le manuel et choisir quelques exercices dans la liste des exercices proposés en fin de chapitre ou, pour d'autres, proposés sur internet.

¹⁵⁹ Travaux dirigés.

¹⁶⁰ Il s'agit le plus souvent de manuels français (Transmath, Belin, etc.)

Une deuxième tendance qui pourrait être liée à la première se lit dans le rapport des enseignants à l'enseignement supérieur. Les résultats issus de la lecture des réponses aux questions I.2 et I.3 et résumés dans le tableau suivant sont éloquentes.

Sur l'évolution des programmes de mathématiques dans l'enseignement supérieur.	régulièrement	13/79
	Parfois	13/79
	Jamais	52/79
Sur la consultation de documents utilisés dans l'enseignement supérieur.	Régulièrement	13/79
	Parfois	23/79
	Jamais	41/79
Sur l'adéquation à propos de l'enseignement de l'intégrale entre le secondaire et le supérieur.	Oui	40/79
	Non	23/79

La plupart des enseignants, soit environ 66%, ne sont pas au fait de ce qui est enseigné en première année d'université. Ceci peut s'expliquer par le fait que, majoritairement, les enseignants des classes terminales organisent leur enseignement en fonction des examens du baccalauréat. S'agissant d'une attente institutionnelle et sociale forte, ces examens conditionnent totalement la motivation de la plupart des enseignants de ce niveau. Cependant, il nous semble qu'un enseignant qui n'est pas au courant des programmes de mathématiques et du contrat institutionnel en aval de son enseignement ne peut pas apprêter son projet d'enseignement à des prolongements ultérieurs.

Il y a enfin un résultat qui nous semble pour le moins curieux : 40 enseignants jugent l'enseignement de l'intégrale au lycée en adéquation avec l'enseignement de l'intégrale à l'université alors que 13 enseignants seulement suivent l'évolution des programmes dans ce dernier niveau. Il n'est qu'à observer les chiffres qui figurent dans les cases ombrées dans le tableau suivant pour saisir une sorte d'arbitraire dans les réponses recueillies.

		Évolution des programmes dans l'enseignement supérieur			Consultation de documents utilisés dans l'enseignement supérieur		
		Régulièrement	Parfois	Jamais	Régulièrement	Parfois	Jamais
Sur l'adéquation de l'enseignement de l'intégrale entre lycée et université	Oui	8	8	23	10	10	19
	Non	4	3	13	2	6	10
	Je ne sais pas	1		16	1		14

Cependant, si l'on se tient seulement aux opinions de ceux qui suivent l'évolution des programmes de mathématiques en première année d'université plus ou moins régulièrement, il y a lieu de considérer qu'il y a une certaine adéquation de l'enseignement de l'intégrale au lycée et en première année d'université. Il est bien entendu que, compte tenu du fait que le nombre d'enseignants susceptibles d'avoir des vues objectives sur la question soit très modeste, nous ne pouvons prétendre à aucune conclusion sur cette question d'adéquation.

Partie II

Dans cette partie nous nous intéressons particulièrement aux projets des enseignants interrogés à propos de l'enseignement de la notion d'intégrale. Comme nous l'avons déjà précisé les enseignants interrogés ont tous une assez longue pratique de l'enseignement de l'intégrale en classe terminale.

Approche pour l'introduction de l'intégrale

La première question que nous avons posée aux enseignants est la suivante :

Introduisez-vous la notion d'intégrale par les aires ou par les primitives ? Pouvez-vous expliquer votre choix ?

Le constat qui s'impose d'emblée lors de la lecture des réponses est l'importance du nombre de réponses courtes et souvent ambiguës (20/79). C'est ainsi que, par exemple, nous relevons des réponses comme « *oui* » ou « *les deux* ». Pour mieux rendre compte de ce premier constat, nous avons regroupé toutes les réponses recueillies dans le tableau suivant :

Introduisez-vous la notion d'intégrale par les aires ou par les primitives ?			
Par les aires	Par les primitives	Par les deux	Oui
38	21	13	7

Une réponse comme « *oui* » est complètement ambiguë et ne peut recevoir aucune interprétation. Elle est simplement inclassable. La réponse « *par les deux* » est également ambiguë mais elle peut être éclairée à la lumière d'une autre réponse fournie par l'un des enseignants qui précise « *au début par les aires, puis par les primitives* ». Cette réponse pourrait renvoyer à l'activité 3 de la page 110 du manuel scolaire¹⁶¹. Il est possible aussi que l'enseignant parle d'introduire l'intégrale d'une fonction continue et de signe constant par les

¹⁶¹ Voir *analyse du manuel scolaire*.

aires et de définir ensuite l'intégrale d'une fonction continue par la formule de Newton. Dans ce cas, il s'agit encore de la démarche utilisée dans le manuel scolaire.

Quoiqu'il en soit, en nous attachant seulement aux réponses sans équivoque, les résultats montrent que 38 enseignants (soit environ 48%) adhèrent à l'esprit du manuel scolaire et que 21 enseignants (soit environ 27%) se conforment strictement aux termes du texte du programme officiel. Il semble donc que l'approche adoptée pour introduire la notion d'intégrale en classe terminale ne fait pas l'unanimité parmi les enseignants. Reste à savoir maintenant si ces choix sont justifiés ou non. En fait, plus que le choix, ce qui nous intéresse au premier chef c'est la motivation d'un tel choix. Elle est activement reliée à la conception du projet de l'enseignant. Pourtant, les éléments de réponses que nous avons recueillis donnent à penser que la majorité des enseignants ne sont pas conscients des enjeux réels de la phase d'introduction de la notion d'intégrale. D'abord, 25 enseignants (soit environ 32%) n'ont fourni aucune explication de leur choix à propos de l'introduction de l'intégrale. L'absence d'explication peut s'entendre comme étant une attitude *passive*. Il nous faut souligner ici que nous envisageons une catégorisation des enseignants selon qu'ils sont actifs, passifs ou inclassables. Nous qualifions d'*actifs* les enseignants qui adhèrent à l'approche institutionnelle de façon consciente et active, en ce sens qu'ils procèdent continuellement à des adaptations, voire des modifications, de leurs propres représentations pour apporter les ajustements nécessaires dans la pratique de leur métier et se mettre en conformité avec le programme officiel. Dans cette catégorie, nous trouvons les enseignants qui se conforment strictement au contenu du manuel scolaire, mais aussi ceux qui, sous l'impulsion d'un positionnement épistémologique et d'un enracinement culturel, se démarquent du manuel scolaire et entreprennent d'élaborer une approche qui puise dans leurs représentations privées et l'esprit du programme officiel. Pour donner un exemple de ce que peut être la réponse d'un enseignant *actif*, nous citons la réponse suivante « *par les aires, puis les primitives. Pour faire apparaître le lien entre les notions d'aire, intégrale et primitive* ».

En revanche, les enseignants que nous qualifions de *passifs* sont ceux qui tendent à reproduire une copie du manuel scolaire de façon indifférente et passive. L'attitude typique d'un enseignant passif peut être saisie dans la réponse suivante « *Ce n'est pas mon choix (le programme officiel)* ». À ces deux profils, nous ajoutons un troisième profil, celui des enseignants dont nous n'avons pas pu saisir l'attitude, soit parce qu'ils n'ont pas répondu à la question, soit parce qu'ils ont fourni des réponses ambiguës ou sans rapport avec la question. Ces enseignants ne rentrent dans aucune des deux autres catégories. Ils sont *inclassables*.

La lecture des réponses des enseignants à la première question de la partie II a fourni les résultats suivants :

	Par les aires	Par les primitives	Par les deux	Oui
Actif	19	10	2	
Passif	5	5		2
Inclassable	14	6	11	5

Le constat qui se dégage de ce tableau est le nombre important d'enseignants (36/79 soit environ 46%) dont l'attitude par rapport à cette question est inclassable et le faible taux d'enseignants (31/79 soit environ 39%) que nous qualifions d'actifs. Il faudrait souligner ici que la plus grande partie des enseignants qualifiés d'actifs préfèrent introduire l'intégrale par les aires que par les primitives.

Valences de l'ostensif dx

La deuxième question de cette partie est un complément d'enquête sur les valences de l'ostensif dx . Comme nous l'avons déjà souligné, le programme officiel et le manuel scolaire ne font aucun cas de cet ostensif. Néanmoins, en posant la question à ce propos à des étudiants en première année d'université¹⁶² avant qu'ils n'abordent le cours d'intégration, nous avons constaté quand même la présence chez certains de ces étudiants de deux valences de dx : cet ostensif joue le rôle de facteur multiplicatif (valence instrumentale) pour les uns et d'indicateur de variable d'intégration (valence sémiotique et instrumentale) pour d'autres. C'est ce constat qui nous a décidé à enquêter sur les valences de dx auprès des enseignants. Le croisement des résultats de cette question avec ceux de la première question sur l'approche pour l'introduction de l'intégrale a donné le tableau suivant :

	Par les aires	Par les primitives	Par les deux	oui
Facteur multiplicatif	6	2	1	2
Indicateur de variable d'intégration	15	9	4	2
Simple notation	6			1
Pas de réponse	12	9	8	2

Ce tableau rend compte que, du moins pour les enseignants interrogés, l'ostensif dx n'a pas la même valence pour tous les enseignants. Qui plus est, il semble que pour beaucoup d'entre eux (38/79 soit environ 48%) l'ostensif dx n'a aucune valence. Pour les autres, il y a lieu

¹⁶² Voir le questionnaire proposé aux étudiants de la MA1.

d'observer que la cohérence entre la valence de dx et l'approche utilisée n'est pas toujours de mise. Autant il peut sembler plus naturel d'attacher à dx une valence instrumentale dans l'approche par les aires, autant lui accorder une valence sémiotique dans l'approche par les primitives.

Liens entre aire, intégrale et primitive

Dans notre analyse a priori nous avons avancé l'idée selon laquelle l'articulation que l'on fait des liens entre aire, intégrale et primitive permet de saisir l'esprit du projet de l'enseignant.

Dans le même ordre d'idée Tran (Tran, 2006) considère que :

Les liens entre ces éléments reflètent ce que l'enseignant cherche à institutionnaliser de l'objet de savoir intégrale (Tran, 2006, p.111).

Dans la perspective d'investiguer la manière dont les enseignants envisagent l'articulation des notions d'aire, intégrale et primitive, nous leur avons posé les questions suivantes :

Comment expliquez-vous à vos élèves les liens entre les notions d'aire, intégrale et primitive ? Leur donnez-vous des exercices spécifiques pour mettre en évidence ces liens ? Si oui, lesquels (vous pouvez donner des exemples) ?

La première question a été renseignée par 48 enseignants (soit environ 61%) et la deuxième ne l'a été que par 33 enseignants (soit environ 40%). Comme 19 enseignants disent expliquer les liens entre aire, intégrale et primitive par des exemples, on peut penser qu'ils considèrent avoir déjà répondu à la deuxième question. Sur les 29 autres enseignants ayant répondu à la première question, 21 (soit environ 26%) s'accordent sur le fait que les primitives permettent de calculer des intégrales et que les intégrales servent à calculer des aires. Ces liens sont exactement ceux mis en avant dans le manuel scolaire. Enfin les 8 autres réponses sont ambiguës pour les uns et sans rapport avec la question pour les autres. Pour en rendre compte nous avons choisi de les reproduire intégralement (tableau suivant) :

Réponse	Effectif
Méthode des rectangles	2
Selon les activités du manuel	4
L'aire est une application de l'intégrale	1
La notation permet de faire le lien entre intégrale et calcul d'aire mais il n'y a pas de lien évident entre intégrale et primitive (niveau secondaire).	1

En ce qui concerne la deuxième question nous n'avons enregistré aucune réponse significative. Les exemples proposés par les enseignants, qui ne sont pas d'ailleurs toujours des exemples en relation avec la question, sont tous pris dans le manuel scolaire.

Exemple	Effectif
Fonctions affines.	11
Exercices de calcul d'aire et de calcul d'intégrales par les primitives.	2
Étude de fonction qui se ramène à la fin à un calcul d'aire.	4
Intégration par parties.	2
Méthodes des rectangles.	3
Exemples du manuel scolaire.	9
Activité 3 page 110 (manuel scolaire).	1

À la lumière de ces résultats, il semble que les liens entre aire, intégrale et primitive ne sont pas enjeux d'enseignement. Ils ne semblent pas faire partie des éléments constitutifs du projet des enseignants. Ce constat donne à penser que la plupart des enseignants orientent leur projet vers l'aspect calculatoire de l'intégrale. Nous devons d'ailleurs le vérifier à travers la nature des difficultés des élèves citées par les enseignants.

Les difficultés constatées par les enseignants chez les élèves

Nous avons demandé aux enseignants : *avez-vous repéré chez vos élèves des difficultés persistantes liées à la notion d'intégrale ? Si oui, citez quelques unes.*

Sur les 79 enseignants interrogés, 16 enseignants (soit environ 20%) n'ont pas répondu à cette question et 20 (soit environ 25%) disent ne pas avoir constaté de difficultés chez leurs élèves. Les 43 autres (soit environ 55%) ont cité quelques difficultés dont nous reproduisons ici les plus significatives.

Difficultés	Effectif
Calcul d'intégrales.	17
Intégration par parties.	10
Comparaison d'intégrales et encadrements.	10
Fonction définie par une intégrale.	10
Suite définie par une intégrale.	2
Difficulté à reconnaître l'aire demandée.	4
Identification entre aire et intégrale.	3

On ne peut qu'être frappé par la généralité et le vague sur la nature des difficultés citées ici. Une difficulté du type « calcul d'intégrales » est très générale et peut porter sur toute la dimension calculatoire de la notion d'intégrale (primitives de fonctions usuelles, linéarisation,

décomposition en éléments simples, etc.). La différence entre l'intégrale de la dérivée d'une fonction usuelle, celle d'une fonction rationnelle et celle d'une fonction trigonométrique n'est pas mathématiquement négligeable. Plus concrètement des intégrales comme $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$, $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$, $\int_0^1 \frac{x}{x^3+6x^2+11x+6} dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$, $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$, etc. requièrent des techniques différentes qui relèvent de technologies¹⁶³ différentes. L'analyse praxéologique renvoie à des difficultés qui sont non seulement de nature différente, mais aussi indépendantes du calcul intégral stricto sensu. La deuxième difficulté « intégration par parties » citée par d'autres enseignants s'inscrit dans la première et, même si elle est plus précise, elle renvoie aussi à des difficultés de natures multiples et différentes. Pour s'en convaincre, il suffit de saisir la subtilité de la différence entre les deux intégrales $\int_1^2 \ln x dx$ et $\int_1^2 \ln(x+1) dx$ ou encore la difficulté à calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

Les mêmes remarques s'appliquent à toutes les autres difficultés citées plus haut. Plus particulièrement le cas des fonctions et des suites définies par des intégrales renvoie à un champ de problèmes très vaste où il n'est pas toujours facile de cerner ce qui peut faire difficulté aux élèves. Ainsi les témoignages des enseignants nous semblent vagues et superficiels et qu'il est dès lors difficile d'en tirer des résultats précis. Il est cependant un constat tangible dont l'importance pour notre recherche n'est pas négligeable, c'est que les difficultés soulignées par les enseignants sont toutes d'ordre calculatoire. Ce constat peut donner à penser que d'autres registres, notamment le graphique et le géométrique, ainsi que les opérations de coordination entre registres de représentation sémiotique ne font pas partie des préoccupations principales des enseignants. La partie suivante de notre enquête doit nous donner occasion pour vérifier le rapport des enseignants à certains registres de représentation sémiotique.

¹⁶³ Au sens de la TAD.

Partie III

Dans cette partie nous proposons l'exercice suivant :

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par son terme général $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$.

a) Montrer que la suite (u_n) est monotone.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c) Montrer que pour tout réel $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq a + \frac{\pi}{2} \cos^n a$.

d) En déduire la limite L de la suite (u_n) .

Dans une première question nous avons demandé aux enseignants interrogés s'il est envisageable pour eux de proposer l'exercice à leurs élèves en classe (section Mathématiques) et d'expliquer leur choix. Les résultats recueillis donnent 46 enseignants (58%) favorables à proposer l'exercice en classe, 23 enseignants (29%) contre et 10 enseignants (13%) sans réponse. Nous avons regroupé dans le tableau suivant les raisons données par certains enseignants pour expliquer leur choix.

Oui	Non
Application du cours.	Les questions c) et d) sont très difficiles pour les
Conforme au programme.	Les élèves ne maîtrisent pas les fonctions trigonométriques.
Exploitation de l'intégrale dans l'étude des suites.	La déduction de d) à partir de c) n'est pas évidente.
Exercice type.	Objectifs non clairs. Quels théorèmes ?
Exercice riche d'objectifs.	Les fonctions trigonométriques sont déconseillées.
Monotonie, convergence, limite et ordre	L'exercice est très difficile.
L'exercice couvre des parties importantes du programme.	Il faut changer l'énoncé. Aider les élèves en ajoutant des étapes intermédiaires.

Le premier constat que nous pouvons faire à l'issue de l'examen des réponses recueillies est l'absence de commentaires sur le niveau de formulation de l'exercice. Hormis deux (2) enseignants pour qui l'énoncé doit être reformulé en y introduisant des questions auxiliaires, tous les autres se sont contentés de focaliser sur le contenu strictement mathématique de l'exercice. Il nous semble donc que la plupart des enseignants interrogés ont plutôt un rapport passif au niveau de formulation de l'énoncé de l'exercice.

D'autre part, il est évident que le contenu mathématique de l'exercice suscite des divergences parmi les enseignants. Exercice type, conforme au programme et riche pour les uns ; très difficile ou, en partie, inaccessible à des élèves en classe terminale pour les autres. Pour le dire dans des termes plus exacts, l'analyse des réponses des enseignants fait apparaître deux tendances qui se distinguent nettement. Nous allons essayer dans ce qui suit de saisir ce qui unit les uns et ce qui sépare les autres.

Les enseignants favorables à la proposition de l'exercice en classe semblent s'attacher principalement à la conformité au programme officiel du contenu mathématique de l'exercice. Les difficultés contenues dans l'exercice et les connaissances requises ne paraissent pas constituer une préoccupation pour eux. Les termes élève et difficulté ne sont jamais cités. Une explication possible de cette attitude pourrait être que ces enseignants ne font aucune analyse de l'exercice et se contentent de procéder, le plus souvent par une lecture rapide et superficielle de l'énoncé, à une identification des notions en jeu et à une vérification de leur conformité au contenu disciplinaire du programme.

En revanche, les enseignants défavorables à la proposition de l'exercice en classe focalisent majoritairement sur les termes élève et difficulté. Il est clair que, chez ces enseignants, les appréciations sont d'un ordre différent et leur analyse suit une autre orientation. Cette analyse semble s'appuyer sur ce qui peut être accessible à des élèves en classe terminale et sur ce qui peut leur faire difficulté. Les réponses de ces enseignants donnent à penser qu'ils ont une bonne connaissance du niveau de leurs élèves mais probablement pas de leurs difficultés spécifiques à la notion d'intégrale. Les résultats de la question précédente donnent en effet à penser que ces enseignants n'ont pas une saisie précise des difficultés spécifiques de leurs élèves à la notion d'intégrales. Il y a ici une distinction qui n'est pas toujours facile à saisir entre savoir ce qu'un élève est capable (ou n'est pas capable) de faire et ce qui constitue une difficulté pour lui. Il est possible en effet de prévoir qu'un élève ne va pas pouvoir réussir un certain type de tâches sans être capable de reconnaître avec exactitude la nature et le niveau de ses difficultés. Prévoir l'échec d'un élève dans un type de tâches peut être le résultat d'un constat empirique alors que connaître les difficultés d'un élève dans un type de tâches précis ne peut être que le résultat d'une analyse de l'activité de l'élève.

À la lumière de cette courte analyse, nous pouvons dire que ce qui sépare les deux groupes d'enseignants qui se sont prononcé sur l'exercice c'est d'abord les critères qu'ils utilisent

dans l'évaluation de l'énoncé de l'exercice et ensuite leur capacité à percevoir la difficulté que pourrait rencontrer l'élève même lorsqu'elle ne se manifeste pas avec évidence.

Évaluation des solutions proposées.

Cette partie tient une place considérable dans notre enquête. Elle doit rendre compte de certaines des exigences des enseignants sur la manière d'utiliser certaines techniques et de les justifier. Elle doit notamment nous révéler le rapport des enseignants interrogés au graphique, au géométrique et à l'algébrique.

L'examen des réponses révèle que sur les 79 enseignants interrogés, 31 enseignants (39%) n'ont pas attribué de note à la première solution et 34 enseignants (43%) n'ont pas attribué de note à la deuxième solution. Voici le compte rendu des notes attribuées par les enseignants :

Proposition	Appréciation	Commentaires	Note	Effectif
Première solution	excellent		10	24
	Satisfaisant		9.5	3
			9	10
			8	7
	Insuffisant		7.5	2
			6.5	1
6			1	
Deuxième solution	Excellent	La méthode reflète la compréhension du lien entre aire et intégrale.	10	15
	Satisfaisant		9.5	3
			9	12
			8.5	2
			8	8
	Insuffisant	Les inégalités sont non justifiées. La courbe n'est pas exacte.	7.5	1
			7	2
6			2	

On peut déjà mesurer à l'aide de ces résultats à quel point les appréciations des uns et des autres sont divergentes. Pour mieux en rendre compte, nous représentons les notes attribuées à chacune des deux solutions à l'aide des diagrammes en boîte suivants :

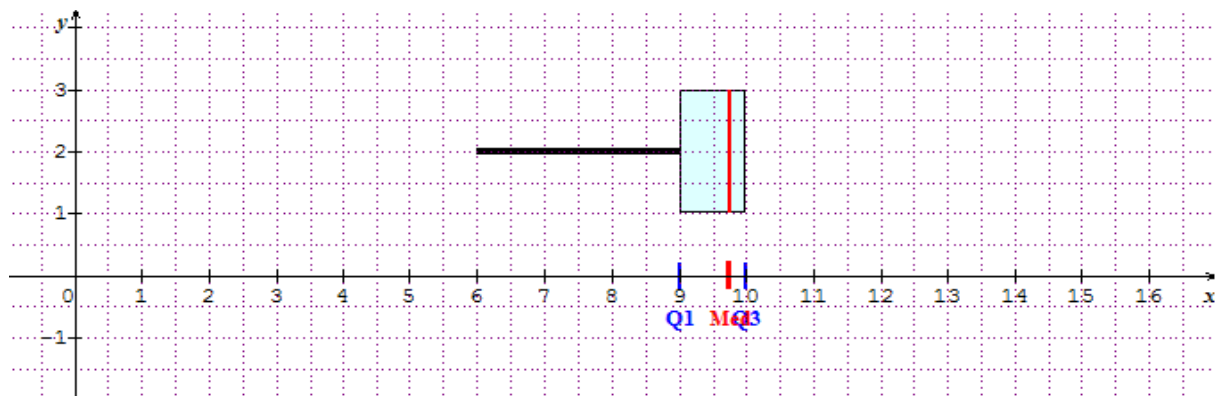


Figure 25 : Notes attribuées à la solution 1

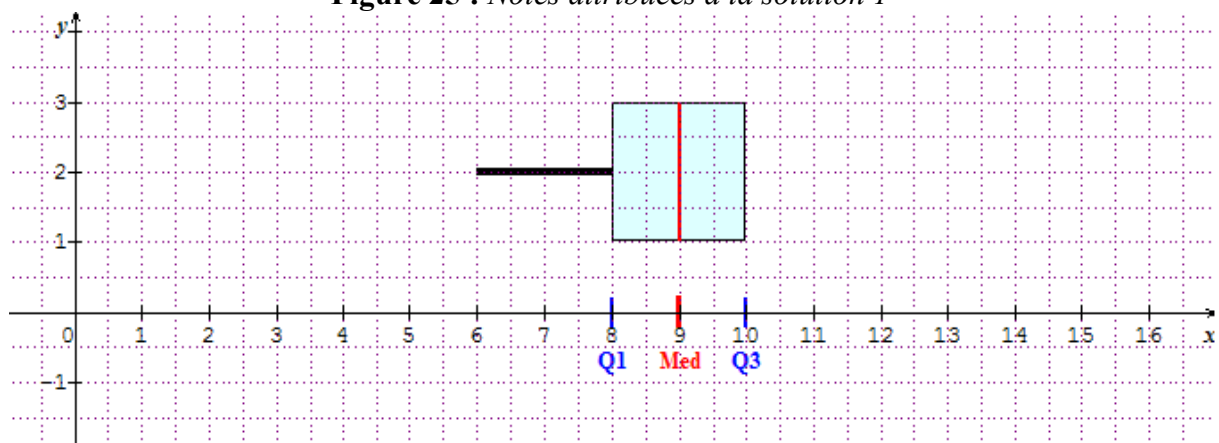


Figure 26 : Notes attribuées à la solution 2

Il n'est qu'à comparer les intervalles interquartiles et les médianes des deux séries pour constater que la première solution est nettement mieux notée que la seconde. L'écart dans les appréciations de ces solutions pourrait être justifié par les commentaires suivants développés par certains enseignants :

C_1 : La courbe n'est pas justifiée.

C_2 : On ne peut pas utiliser le graphique dans une démonstration.

C_3 : (C_n) est une famille de courbes. Donc il faut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \leq \text{aire}(OABC) + \text{aire}(AEFD)$$

C_4 : C'est une méthode que je ne peux pas noter car elle n'est pas donnée dans le programme officiel.

Ces commentaires nous semblent suffisamment significatifs quant au statut des registres graphique et géométrique dans ce que Bloch (2000) appelle le *système de preuves de l'analyse* (SPA). La réserve exprimée par ces enseignants et par bien d'autres pourrait s'expliquer par le fait que ces deux registres ne sont jamais utilisés dans les démonstrations développées dans le manuel scolaire. Il semble que pour beaucoup d'enseignants le registre graphique n'est pas un registre de travail mathématique.

Enfin, nous n'avons enregistré que deux remarques sur la nécessité de préciser la continuité de la fonction avant le passage à l'intégrale, ce qui pourrait confirmer notre hypothèse sur la naturalisation de cette propriété dans le système scolaire tunisien.

II.4. Conclusion de l'enquête

Cette enquête menée auprès d'enseignants de mathématiques de classe terminale constitue une composante importante de la partie de ce travail consacrée à l'analyse institutionnelle. De quelque façon que les auteurs des programmes conçoivent l'objet de savoir *intégrale*, il faut admettre que son enseignement effectif dépend des enseignants, de la manière avec laquelle ils l'appréhendent, de leur aptitude à le faire fréquenter à leurs élèves. En d'autres termes, il dépend du rapport de l'enseignant à la notion d'intégrale lui-même plongé dans une épistémologie et enraciné dans une culture dont sa pratique se nourrit.

Pour tenter de cerner le rapport effectif des enseignants à la notion d'intégrale, nous avons orienté notre enquête dans trois directions différentes et complémentaires : le rapport de l'enseignant à l'intégrale à travers ses références théorique et didactique, puis à travers son projet d'enseignement et enfin à travers ses exigences en termes de preuve et de validation.

L'analyse a posteriori de la première partie a permis de rendre compte que les enseignants recourent majoritairement au manuel scolaire et au web. Le manuel scolaire constitue une référence institutionnelle et un support de cours alors que le web constitue une source d'exercices. D'un autre côté, il semble que les enseignants ne ressentent pas en général le besoin de connaître ce qui se fait dans l'enseignement supérieur et ne cherche pas à inscrire leur projet dans une perspective plus large qui pourrait mieux aider leurs élèves lors de leur transition vers l'enseignement supérieur. Notre analyse montre en effet que la plupart des enseignants interrogés ne suivent pas l'évolution des programmes dans l'enseignement supérieur et ne savent pas si ce qu'ils enseignent à propos de l'intégrale est en adéquation avec le cours d'intégration au niveau supérieur ou non.

D'autre part, l'analyse des résultats issus de la deuxième partie met en évidence que l'esprit du manuel scolaire est présent chez la plupart des enseignants et que son influence, à des degrés différents certes, sur le rapport des enseignants à l'intégrale est tangible. Cette influence se manifeste surtout dans l'articulation des liens entre aire, intégrale et primitive. De même que dans le manuel scolaire ces liens sont articulés dans le sens où les primitives permettent de calculer des intégrales et les intégrales servent à calculer des aires, de même la plupart des enseignants mettent en avant les mêmes *liens unidirectionnels* (Khanh, 2006). Ce résultat concorde d'ailleurs avec celui obtenu par Khanh. Si l'on nous accorde que non seulement l'absence d'articulation des liens entre aire, intégrale et primitive opère une réduction du domaine des représentations de l'élève, mais elle risque de faire apparaître chez ce dernier des représentations différentes. On peut saisir, à la lumière des résultats obtenus ici, des causes des erreurs d'identification et de confusion entre aire et intégrale observées chez un grand nombre d'étudiants en première année d'université.

Nos analyses montrent aussi que dans leur majorité les enseignants ayant participé à notre enquête semblent manquer de repères par rapport aux difficultés liées à l'intégrale que peuvent rencontrer leurs élèves. Très peu d'enseignants ont cité ce qu'ils considèrent comme des difficultés et tous les exemples cités sont d'ordre strictement calculatoire. La connaissance des difficultés potentielles des élèves doit constituer une composante importante dans le projet de l'enseignant, s'il est vrai que se donner les moyens pour prévenir et anticiper sur les difficultés est l'un des objectifs principaux de l'enseignant. Et l'absence de cette connaissance réduit sévèrement le projet de l'enseignant.

Dans la troisième partie de notre enquête le malaise des enseignants, déjà ressenti dans les deux premières parties, est plus tangible. Nos analyses mettent en évidence que les attitudes des enseignants par rapport à l'exercice proposé sont assez contrastées. Mais l'exercice proposé n'a pas cependant provoqué les réactions attendues. Ni le niveau de formulation de l'énoncé ni la solution géométrique n'ont réussi à susciter des commentaires significatifs susceptibles de manifester les exigences des enseignants. Toutefois nous pouvons dire, avec prudence, que pour certains enseignants les registres graphique et géométrique ne sont pas des registres de validation.

Pour nous résumer, nous pouvons dire que cette enquête nous a permis de constater que ce qui peut être le projet de l'enseignant est en fait une copie du projet développé dans le manuel scolaire, souvent limitée et diminuée. D'un autre côté, nous estimons que dans la mesure où

nos analyses mettent en évidence une préférence chez la plupart des enseignants de l'aspect calculatoire de l'intégrale, le rapport qu'entretiennent ces enseignants avec l'intégrale est essentiellement un rapport à la fois *opérationnaliste* et *unidimensionnel*.

III. Questionnaire soumis à des étudiants en première année d'université

III.1. Le contexte

Le questionnaire a été soumis deux fois à des étudiants en première année Licence (L1) de la Faculté des Sciences de Bizerte. Il a été passé une première fois en Octobre 2009 par un groupe de 37 étudiants de première année Mathématiques Appliquées (MA1), et une deuxième fois en Octobre 2010 par un groupe de 39 étudiants de première année Mathématiques Fondamentales (MF1). Le questionnaire est soumis aux étudiants pendant une heure sous le contrôle de l'enseignant chargé des travaux dirigés. Dans la mesure où le questionnaire est proposé seulement à de nouveaux bacheliers et cela avant qu'ils n'abordent le cours d'intégration à l'université, les connaissances interrogées sont celles acquises en classe terminale au lycée. Ces étudiants sont donc supposés avoir appris à faire des calculs sur les notions de primitive, d'intégrale, d'aire, de volume et de probabilités (loi uniforme, loi exponentielle). Qui plus est, eu égard au programme officiel et au manuel scolaire, ces étudiants sont supposés avoir travaillé sur des fonctions et des suites définies par des intégrales et suffisamment manipulé les propriétés géométriques et algébriques de l'intégrale. Nous présumons aussi qu'ils ont acquis une certaine familiarité avec l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ ainsi qu'avec les éléments technologiques justifiant les différentes techniques utilisées dans le calcul et l'interprétation d'intégrales.

Cependant il y a, parmi les enseignants du supérieur, une observation récurrente que les nouveaux bacheliers arrivent à l'université avec très peu de connaissances et que ce peu est souvent fait de connaissances incomplètes, voire fausses. Des discussions informelles avec certains enseignants d'université nous ont permis en effet de faire le constat empirique qu'il y a dans le milieu de ces enseignants comme une croyance que l'enseignement de l'intégrale au lycée est centré sur le travail des automatismes et que les connaissances qu'il génère n'ont pas la consistance suffisante pour être utilisables à l'université. Selon ces mêmes enseignants, il semble qu'à la sortie du secondaire les élèves n'auraient gardé sur la notion d'intégrale que des connaissances lacunaires et imprécises. D'un entretien que nous avons eu avec un enseignant à l'université ayant l'habitude d'enseigner le cours d'intégration en première année d'université, nous avons retenu la remarque suivante qui résume assez bien la situation :

En amphi, je me dis comment ont-ils fait pour décrocher leur bac. À l'exception de quelques uns, les autres ne se rappellent même pas de la définition d'une intégrale. Les connaissances les plus élémentaires sur l'intégrale leur font défaut.

On en arrive à s'interroger alors sur ce que les élèves retiennent de l'enseignement de l'intégrale au lycée et surtout si cet enseignement leur permet d'acquérir des connaissances significatives séparables du contexte stéréotypé des tâches calculatoires.

Pour tenter de comprendre l'opinion des enseignants rencontrés, il nous a semblé nécessaire de conduire une enquête auprès de nouveaux bacheliers qui vise à la fois l'exploration des connaissances sur la notion d'intégrale actives chez eux et leur *adéquation*¹⁶⁴ ainsi que le niveau de leur compréhension.

III.2. Les objectifs du questionnaire

Le principe de ce questionnaire est de proposer aux étudiants des questions en rupture par rapport aux mathématiques calculatoires¹⁶⁵, celles qu'ils ont l'habitude de fréquenter souvent en classe terminale¹⁶⁶. Nous préciserons dans la suite ces questions ainsi que les raisons de notre choix. Il s'agit pour nous d'élaborer un questionnaire qui, sans verser dans les mathématiques calculatoires, serait à même de nous permettre de vérifier le bien fondé de la croyance dominante chez certains enseignants à l'université en la confrontant aux connaissances actives chez les nouveaux bacheliers, du moins chez le groupe touché par notre enquête. Plus précisément notre enquête cherche à explorer l'adéquation et la validité des connaissances des étudiants sur la notion d'intégrale définie, leur faculté à discriminer le vrai du faux et leur capacité à reconnaître qu'une question donnée relève du calcul intégral.

III.3. Élaboration d'un outil d'analyse

C'est en se plaçant dans le domaine mathématique qui s'écarte suffisamment du calculatoire que l'on peut cerner la nature et la consistance des connaissances effectives des étudiants sur la notion d'intégrale et la qualité de leur compréhension. Pour en rendre compte, il nous faut

¹⁶⁴ Nous dirons d'une connaissance qu'elle est adéquate si elle satisfait aux deux types d'exigences : celle de la *validité* et de la *cohérence*.

¹⁶⁵ Voir notre mémoire de maîtrise (Haddad, 2006). Il ne s'agit d'aucune façon de ravalier les mathématiques calculatoires. Elles sont utiles et nécessaires. Mais il ne faut pas dans le même temps qu'elles s'accaparent toute l'activité de l'élève.

¹⁶⁶ Voir notre analyse du manuel scolaire.

chercher un outil approprié à cette tâche dont on ne peut ignorer la difficulté s'il est vrai que la compréhension ne se laisse pas analyser de front. Il importe de souligner que nous ne nous occupons pas ici de l'aspect psychologique de la compréhension¹⁶⁷. Notre but est de trouver un moyen d'explorer la qualité de compréhension des étudiants, en tant qu'elle est une forme de contrôle et de maîtrise de connaissances.

Les mathématiques calculatoires, plus soucieuses d'efficacité que de signification, inclinent à négliger la question du sens au profit de recettes acquises à la faveur de leur systématisation en classe et ne rendent pas compte, en général, du rapport des étudiants à la signification qu'ils entretiennent avec la notion d'intégrale. À ce propos, Diènes¹⁶⁸ écrit :

À l'heure actuelle, la plupart des gens trouvent les manipulations mathématiques difficiles à apprendre parce que, dans l'ensemble, ils ne savent pas ce qu'ils sont en train de faire.

Il y a dans cette remarque une des questions les plus délicates pour qui veut interroger le rapport d'adéquation, à la fois *sens* et *valeur*, des connaissances des étudiants. Il faut reconnaître que ce rapport d'adéquation, non seulement ne peut être saisi objectivement¹⁶⁹, mais encore ne peut renseigner pleinement la question de compréhension¹⁷⁰. C'est que la question de compréhension en mathématiques est notoirement ambiguë. D'abord, il est difficile de dire en quoi consiste en général le fait d'avoir compris une notion mathématique. Ensuite il est difficile, s'agissant précisément de mathématiques, d'apprécier exactement l'épaisseur et la portée de ce qu'on a compris. Est-ce à dire que toute tentative de cerner la compréhension est vaine ? N'y a-t-il pas moyen de l'explorer et de l'éclairer ?

En nous plaçant strictement au plan scolaire, la compréhension de la notion d'intégrale doit s'entendre comme la capacité à saisir ses attributs et ses fonctions. Un élève n'aurait bien compris la notion d'intégrale que lorsqu'il a appris à la manipuler en tant qu'*objet* : sa définition, ses propriétés, leurs conditions de validité et leurs limites ; et en tant qu'*outil*¹⁷¹ : quand l'utiliser et comment l'appliquer. Il faut ajouter que, dans le même temps, la

¹⁶⁷ Une approche intéressante de cet aspect peut être saisie chez R. Thom pour qui « *comprendre, c'est adhérer à une prégnance* ». Dans ce sens, l'acte de comprendre consiste à acquérir un élément ou une opération externe, l'intérioriser et en construire un modèle interne adéquat.

¹⁶⁸ Z. P. Dienes, *Comprendre la mathématique*, O. C. D. L / Éducation Nouvelle, 1965.

¹⁶⁹ Ce rapport est jugé par un acte qui se définit lui-même par son rapport à la connaissance en question.

¹⁷⁰ Comprendre un résultat mathématique, c'est en saisir le sens. Sans doute, la compréhension ne se satisfait-elle pas du sens ; pourtant elle s'en inspire au même temps qu'elle l'éclaire.

¹⁷¹ Au sens de la dialectique objet/ outil développée par Régine Douady.

compréhension suppose une forme de contrôle sur le rapport qui s'établit entre l'élève, les objets mathématiques et les outils afférents auxquels se réfèrent la situation qu'il étudie. L'on comprend alors que seule la compréhension qui appréhende les attributs et les fonctions de l'intégrale comme un tout structuré et cohérent serait à même de générer des connaissances significatives et adéquates. Inversement, si l'on nous accorde que toute connaissance acquise par l'élève rencontre inévitablement ses limites, il devient possible d'évaluer la qualité de sa compréhension aux limites de ses connaissances, en ce sens que ces limites déterminent le champ d'action et la validité des connaissances de l'élève. Reste à savoir comment nous comptons repérer ces limites, si l'on veut les saisir.

Pour tenter de manifester les limites de ces connaissances, nous distinguons, sur un choix méthodologique, deux niveaux de connaissances¹⁷². Le premier niveau que nous appelons niveau des *connaissances basiques* correspond aux connaissances empiriques, techniques¹⁷³, instrumentales et notamment tous les énoncés mathématiques institutionnalisés comme les définitions, les formules, les propriétés, les théorèmes etc.. Ce niveau contient généralement les outils, justifiés ou non, que l'élève utilise dans son activité mathématique. Le deuxième niveau est ce que nous appelons niveau des *connaissances élaborées* correspond à la fois à l'organisation et la structuration des connaissances basiques. Les connaissances de ce niveau sont exercées par une pensée réfléchissante et consciente capable non seulement de contrôler sa propre démarche mais aussi de se soumettre à son propre examen et d'élaborer des outils spécifiques de validation comme par exemple la construction de contre-exemples.

Nous n'avons, bien entendu, aucune prétention à élaborer ici une classification des connaissances scolaires, et encore moins une théorie des connaissances scolaires. Nous sommes d'ailleurs conscient de la précarité de notre perspective : la connaissance et plus encore la compréhension, ne se donnent que dans des esquisses qui, souvent, échouent pour livrer leur contenu. Il est donc toujours possible qu'au-delà du contenu saisi, il peut y avoir encore de la connaissance, mais une connaissance qui n'est plus attestée par notre exploration.

La compréhension s'exerce dans les mathématiques, mais elle n'est pas un être mathématique. On ne peut donc déterminer sa qualité à la façon des objets mathématiques, mais comme nous

¹⁷² Pour prévenir toute méprise sur la question, nous insistons sur le fait qu'il s'agit ici seulement de connaissances spécifiques à la notion d'intégrale qui s'inscrivent strictement dans les programmes de la classe de terminale et de la première année d'université.

¹⁷³ Au sens de savoir-faire (Chevallard, 1998).

venons de le voir cela ne signifie pas qu'elle soit insaisissable sous tous les rapports. Pour tenter de l'éclairer nous allons chercher à la faire paraître indirectement en la confrontant à des foyers de tensions, en l'induisant dans des situations retournées. Dans la mesure où de telles situations sont susceptibles de manifester avec le moins d'équivoque des formes d'être dans lesquelles la connaissance est en tant qu'elle-même (donc adéquate) et des formes où elle n'est pas (ces formes renvoient aux cas où elle est viciée, réduite, bornée ou simplement absente), un recours à l'antinomie du « vrai » et du « faux » constitue un outil simple et approprié à l'exploration des conditions et des limites des connaissances présentes chez les étudiants. Comme nous le savons déjà la notion d'intégrale entretient des liens étroits avec les notions d'aire et de primitive. L'articulation de ces trois notions est une composante fondamentale dans la compréhension de la notion d'intégrale. Tant que l'élève n'a pas intégré cette articulation à la structure de ses connaissances sur la notion d'intégrale, les liens entre ces trois notions lui restent extérieurs, et il peut alors arriver qu'ils se dégradent en des mécompréhensions malheureuses. C'est donc à l'intérieur de l'articulation entre aire, intégrale et primitive que nous pensons tenir des foyers de tension susceptibles d'abriter ambiguïtés, confusions, contresens, et bien d'autres erreurs.

Ainsi donc, pour explorer l'adéquation des connaissances et la qualité de compréhension de la notion d'intégrale chez un étudiant, nous avançons l'hypothèse que les formes d'erreurs auxquelles il se heurte constituent un moyen approprié pour notre analyse. Notre positionnement méthodologique est en fait assez simple. Nous soumettons aux étudiants des propositions qui couvrent les deux niveaux de connaissance que nous avons déjà distingués et qui sont en rupture avec les standards de types de tâches auxquels les étudiants sont habitués, en l'occurrence « *des tâches centrées sur la mise en fonctionnement de connaissances apprises dans le cours : travail du comment* » (Robert, 2005). Car ce n'est pas dans ces types de tâches que nous pouvons rencontrer les erreurs que nous recherchons, d'autant plus que ces types de tâches ne requièrent pas souvent le développement de leur sens, telles celles qui renvoient à des manipulations calculatoires ou à des applications directes de résultats de cours. Comme nous l'avons dit en un autre endroit, ces tâches sont généralement suffisamment travaillées en classe terminale pour que leur simple apparition provoque une réponse adéquate. Nous insistons toutefois sur le fait que ces types de tâches sont nécessaires dans les apprentissages des élèves et leur intérêt ne doit pas être nié.

« La maîtrise du calcul reste un objectif de base de l'enseignement des mathématiques [...] ; elle donne l'aisance indispensable pour comprendre et traiter un problème sans se bloquer sur la moindre aspérité calculatoire » (BO, p.10)¹⁷⁴.

La situation peut être totalement différente pour des tâches qui se situent hors du contexte l'activité calculatoire ritualisée. Il est en effet d'autres contextes où la tâche, en devenant une proposition qui doit être décodée, identifiée, modifiée, démontrée ou niée, manifeste certaines erreurs significatives. Il faut distinguer ici les erreurs contingentes, celles dues à l'inattention, à l'oubli ou à l'ignorance et qui sont potentiellement surmontables, des erreurs essentielles qui peuvent se constituer en obstacles aux apprentissages ultérieurs, les seules qui doivent retenir notre analyse.

III.4. Méthodologie

Dans une première étape de cette analyse, nous examinons les réponses des étudiants et nous répertorions les erreurs significatives clairement avérées. Pour les besoins de ce travail, nous distinguons trois formes d'erreurs : des erreurs d'identification, des erreurs de confusion et des erreurs que nous assimilons à des défauts de validité des connaissances des étudiants. Ce qui est en jeu dans le recours à ces trois formes d'erreurs, c'est plus qu'une manière d'évaluer les connaissances disponibles (ou non disponibles) chez les étudiants, ce sont les conditions même et les limites de ces connaissances, c'est aussi leur cohérence et leur adéquation.

La notion d'intégrale est étroitement liée à celles d'aire et de primitive. Et c'est précisément à travers la capacité des étudiants à distinguer les différences de nature entre ces trois notions que se juge en grande partie l'adéquation de leurs connaissances. À défaut de cette distinction, ce sont des erreurs d'identification que nous pourrions saisir. Il est en effet fréquent qu'en classe terminale des élèves traitent aire et intégrale, et moins souvent primitive et intégrale, en synonymes. Les questions¹⁷⁵ Q_{11} et Q_{13} nous semblent bien désignées pour observer cette forme d'erreur.

Dans la plupart des résultats énoncés dans le cours les hypothèses expriment des conditions suffisantes. Mais ce fait n'est pas mis en avant dans le manuel scolaire, comme peut en témoigner l'absence totale, sinon de contre-exemples, du moins de remarque à ce propos. Des erreurs observées au lycée chez beaucoup d'élèves nous semblent inhérentes à cette

¹⁷⁴ Le BO de référence : [BO hors série n° 4 du 30 août 2001](#). Document d'accompagnement : Orientations générales : [acc-ts-oriengene](#).

¹⁷⁵ Les questions sont placées en annexe et exposées dans les analyses infra.

négligence didactique vis-à-vis des conditions de validité des résultats du cours. Ces erreurs s'expriment sous forme de *confusions* entre condition nécessaire, condition suffisante et équivalence mais aussi d'incohérence et de contresens. Nous considérons que les questions Q_{14} , Q_{21} et Q_{23} sont appropriées pour faire apparaître ces erreurs.

On observe aussi que beaucoup d'élèves isolent souvent le résultat principal d'une propriété ou d'un théorème de celles, parmi ses propres données, qui l'invalident sûrement du point de vue interne et possiblement dans l'usage qui en est fait lorsque la situation n'assure pas elle-même ces données. Il s'agit alors d'un défaut de *validité* qui peut être *interne*¹⁷⁶ ou *externe*¹⁷⁷. Il importe de remarquer qu'en général l'utilisation dans les exercices des résultats du cours est immunisée contre les erreurs de validité par le contenu même des énoncés proposés aux élèves. Nous pouvons saisir des erreurs de validité interne dans toutes les questions et les erreurs de validité externe particulièrement dans les questions Q_{22} et Q_{25} .

Dans la deuxième étape de notre analyse nous essayerons d'évaluer, à la lumière des erreurs observées dans la première étape, l'adéquation des connaissances et la qualité de compréhension des étudiants concernés par l'enquête. Nous vérifierons en particulier que l'erreur permet, dans chaque niveau de connaissances, d'éclairer les conditions et les limites des connaissances des étudiants et de pointer l'inadéquation de certains choix institutionnels.

III.5. Le questionnaire

Le questionnaire est constitué de dix questions également réparties en deux parties. Dans la première partie, nous interrogeons les étudiants qui participent à l'enquête sur la définition de l'intégrale définie, sur la valence de l'ostensif dx dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ et sur certains liens entre aire, intégrale et primitive. Dans la deuxième partie, nous soumettons aux étudiants cinq propositions où il s'agit d'énoncés retournés et de certaines propriétés algébriques de l'intégrale et nous leur demandons si chacune de ces propositions est vraie ou fausse et de justifier chaque réponse. Pour mieux éclairer toutes ces questions, nous allons les examiner une à une.

¹⁷⁶ Elle concerne les conditions de validité d'un savoir mathématique institutionnalisé : définition, propriété, théorème, etc..

¹⁷⁷ Elle concerne la validité du savoir-faire de l'étudiant : adaptation, interprétation, calcul, inférence, etc..

III.6. Analyse a priori du questionnaire

IV.3.6.a. Analyse a priori de la partie 1

Q₁₁: Donner la définition du nombre $\int_a^b f(x)dx$.

Dans cette question, nous cherchons à connaître la définition de l'intégrale définie prévalente chez les étudiants et à identifier des erreurs éventuelles installées au niveau de cette définition. La formulation de la question est volontairement ambiguë dans le but de prendre la mesure du rapport des étudiants à l'écriture $\int_a^b f(x)dx$. En l'absence d'hypothèses spécifiques sur la fonction f (intégrabilité ou continuité), cette écriture n'a pas de sens.

En ce qui concerne les réponses des étudiants à cette question nous envisageons rencontrer des erreurs d'identification et de validité (interne) et ce à travers les trois réponses suivantes auxquelles nous nous attendons :

R₁: L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ n'existe que si la fonction f est continue sur un intervalle I contenant a et b . Dans ce cas, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur I .

R₂: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur un intervalle contenant a et b .

R₃: $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

La réponse R_1 , bien que mathématiquement incorrecte car la continuité de f n'est pas une condition nécessaire pour l'existence de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$, est conforme au programme officiel de la classe de terminale et peut être qualifiée d'institutionnellement recevable. Les conditions de l'intégrabilité d'une fonction quelconque se situent en dehors du domaine des connaissances des élèves en classe de terminale.

En référence au programme officiel, la réponse R_2 est fautive ; la continuité de f étant nécessaire pour justifier l'existence d'une primitive F de f . Toutefois, elle pourrait être jugée comme institutionnellement recevable car, comme nous l'avons déjà souligné en plusieurs endroits, l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ suppose implicitement la continuité de la fonction f . Il s'agit

ici d'une réponse en équilibre instable entre naturalisation et rigueur mathématique, mais nous considérons qu'il y a ici une erreur de validité interne.

La réponse R_3 est erronée aussi bien d'un point de vue strictement mathématique que du point de vue du contrat institutionnel. La fonction f n'étant pas supposée positive, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ ne peut s'interpréter en termes d'aire. La réponse R_3 est caractéristique de ce nous appelons une erreur d'identification.

Q₁₂: Que représente l'élément dx dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$?

Remarquons d'abord que nous avons choisi d'utiliser le terme *élément* pour désigner l'ostensif dx au lieu des termes *signe* ou *symbole* car c'est bien le terme utilisé par beaucoup d'enseignants. Ceci étant, le but de cette question est de compléter notre enquête sur les valences de l'ostensif dx . Rappelons ici que le programme officiel et le manuel scolaire ne font aucun cas de l'ostensif dx , c'est-à-dire que, officiellement, on ne lui attache ni un nom ni un rôle. Toutefois, l'enquête menée auprès d'enseignants de classe terminale nous a permis de constater que cet ostensif a une valence instrumentale (dx est un facteur multiplicatif) pour certains et une valence sémiotique et instrumentale (dx indique la variable d'intégration) pour certains autres. Dès lors, outre l'absence de réponse ou quelque chose qui ne s'en distingue pas par le contenu, trois autres possibilités nous semblent envisageables : l'ostensif dx est inutile car il ne joue aucun rôle, il joue le rôle de facteur multiplicatif ou d'indicateur de la variable d'intégration.

Q₁₃ : Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé. On désigne par (S) la partie du plan délimitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Comparer l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ et l'aire de (S) .

Nous cherchons à vérifier si les étudiants sont conscients ou non des différences de nature entre aire et intégrale. En fait, cette question prend encore de l'importance à la lumière des résultats obtenus dans la question Q_{11} . Il nous semble qu'utilisées conjointement les questions Q_{11} et Q_{13} pourraient nous fixer sur le sens de l'intégrale chez les étudiants interrogés. Les réponses qui nous intéressent particulièrement sont celles des étudiants n'ayant pas répondu à la question Q_{11} et celles des étudiants ayant cité la formule de Newton-Leibniz en guise de définition de l'intégrale définie. Nous pouvons en effet trouver parmi les premiers des

étudiants pour qui l'intégrale s'identifie à l'aire, et vérifier chez les seconds la cohérence¹⁷⁸ de leurs connaissances.

Outre ce premier objectif, nous souhaitons également vérifier le niveau de disponibilité de connaissances critiques chez ces étudiants. Contrairement aux deux premières questions que nous situons au niveau des connaissances basiques, la question Q_{13} renvoie plutôt au niveau des connaissances élaborées. Les connaissances requises par cette question sont le rapport de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ à l'aire sous sa courbe, le rapport d'un nombre réel à sa valeur absolue et l'inégalité $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ valable pour une fonction f continue sur $[a, b]$. La question exige non seulement la disponibilité de ces connaissances mais aussi, comme on peut le voir ci-dessous, la capacité à les articuler d'une façon appropriée et cohérente. En effet, une réponse correctement justifiée attendue pourrait être la suivante :

La fonction f étant continue sur l'intervalle $[a, b]$, $\int_a^b f(x) dx \leq \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Or $\int_a^b |f(x)| dx = \text{aire}(S)$, d'où $\int_a^b f(x) dx \leq \text{aire}(S)$.

Il nous semble toutefois peu probable que les étudiants fournissant cette réponse et la justifient correctement. Mais il est possible que des étudiants ne disposant que de connaissances très sommaires sur les notions d'intégrale et d'aire pourraient, par un raisonnement approximatif et non justifié, en arriver à conclure que $\int_a^b f(x) dx \leq \text{aire}(S)$. En effet, pour qui sait que l'aire de (S) est un nombre réel positif alors que, pour une fonction f continue et de signe arbitraire sur $[a, b]$, l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est un nombre réel de signe quelconque, il est possible qu'il choisisse la réponse que nous avons prévu. Mais il est également envisageable qu'il choisisse l'une des réponses suivantes $\int_a^b f(x) dx < \text{aire}(S)$ ou $\int_a^b f(x) dx \neq \text{aire}(S)$.

D'autre part, des étudiants, dont le nombre sera certainement important, pour qui l'intégrale s'identifie à l'aire la réponse ne souffre pas le moindre doute $\int_a^b f(x) dx = \text{aire}(S)$.

¹⁷⁸ Dans la mesure où un étudiant identifie l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ avec l'aire sous la courbe dans les deux questions, son rapport aux liens entre les deux notions est stable et ses connaissances à ce propos, bien qu'erronées, sont cohérentes.

Enfin, comme le verbe *comparer* pourrait, pour certains étudiants, renvoyer à l'un des signes $=$; \neq ; \leq ; \geq ; $<$; $>$, alors, pour ces derniers, toutes ces possibilités ainsi que l'absence de réponse sont envisageables.

Q_{14} : Soit f une fonction bornée et positive ou nulle sur l'intervalle $[a, b]$. Donner des conditions suffisantes pour que $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Sans doute qu'il nous faut commencer par préciser que la question se situe par rapport au théorème suivant que nous avons déjà étudié dans la partie *Cours* du manuel:

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ où $a > b$. Si f est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx > 0$.

On peut légitimement s'interroger sur les motivations sous-jacentes au choix de cette question. Nous sommes d'ailleurs conscients que, pour qui ne prendrait pas en compte les termes du contrat institutionnel, elle risque d'être une source de méprise. Mais il faut savoir que nous avons sciemment imposé à f d'être bornée au lieu d'être continue sur $[a, b]$. Il y a à ce choix deux raisons que nous allons essayer de développer et de justifier. La première est d'explorer le rapport des étudiants à la propriété de continuité de la fonction f . Comme nous l'avons déjà souligné en un autre endroit, au regard du contrat institutionnel, cette propriété est implicitement admise dans la mesure où, dans l'enseignement secondaire tunisien, l'intégrale est toujours intégrale d'une fonction continue et que son existence se justifie alors par elle-même. Mais les étudiants ont-ils conscience que cette règle du contrat institutionnel s'arrête là et qu'elle n'atteint pas aux résultats énoncés dans le cours comme les propriétés et les théorèmes ? C'est encore un point que nous voulons vérifier. La seconde raison, d'ailleurs liée à la première, est de tester la sensibilité des étudiants à la présence d'une donnée redondante : la fonction f est bornée sur $[a, b]$. Dans la mesure où l'on admet que la continuité de f sur $[a, b]$ est une donnée implicite alors le fait qu'elle soit bornée sur cet intervalle (fermé borné) en découle. Le résultat est connu en classe terminale.

À ces deux raisons s'en ajoute une remarque non moins importante. Le fait que nous demandons des conditions suffisantes confère à la question un caractère ouvert et ouvre sur beaucoup de possibilités. Il est très probable cependant que les étudiants confondent entre condition suffisante et condition nécessaire. Aussi, attendions-nous à beaucoup de réponses de type :

- Pour que $\int_a^b f(x)dx > 0$ il faut que f soit continue et qu'elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois dans l'intervalle $[a, b]$.
- Pour que $\int_a^b f(x)dx > 0$ il faut que f soit continue et $f(x) > 0$ sur $[a, b]$.

D'autres réponses sont également envisageables telles que :

- Pour que $\int_a^b f(x)dx > 0$ il faut que f ne s'annule qu'un nombre fini de fois dans l'intervalle $[a, b]$.
- Pour que $\int_a^b f(x)dx > 0$ il suffit que f ne s'annule qu'un nombre fini de fois dans l'intervalle $[a, b]$.
- Pour que $\int_a^b f(x)dx > 0$ il suffit que f soit continue et $f(x) > 0$ sur $[a, b]$.
- Pour que $\int_a^b f(x)dx > 0$ il faut que $f(x) > 0$ sur $[a, b]$.
- Pour que $\int_a^b f(x)dx > 0$ il suffit que $f(x) > 0$ sur $[a, b]$.

Il est possible aussi d'appréhender la question par une sorte d'intuition géométrique. La fonction f étant continue et positive ou nulle sur $[a, b]$, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ s'interprète comme l'aire sous la courbe de f . Pour avoir $\int_a^b f(x)dx > 0$, il suffit¹⁷⁹ que la courbe de f passe par un point situé strictement au-dessus de l'axe des abscisses, ce qui revient à dire qu'il suffit qu'il existe un réel $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$.

Enfin, il est très probable que bon nombre d'étudiants ne produisent sur la question que des réponses ambiguës ou vides.

Q_{15a}: L'aire permet-elle de calculer certaines intégrales ?

Q_{15b}: L'aire permet-elle d'expliciter certaines primitives ?

Dans cette question nous demandons aux étudiants s'il est possible de calculer certaines intégrales ou d'expliciter certaines primitives par des considérations d'aire. Ces deux liens ne sont pas abordés dans le cours.

Notre analyse rend compte du fait que le cours développé dans le manuel scolaire repose sur une conception assez limitée à propos des liens entre aire, intégrale et primitive. Selon cette conception, la notion de primitive fournit via la formule de Newton-Leibniz une définition

¹⁷⁹ Il s'agit en fait d'une condition nécessaire et suffisante.

formelle de l'intégrale d'une fonction continue et permet le calcul effectif de certaines intégrales. La notion d'intégrale, quant à elle, sert à donner une définition formelle de la primitive F sur un intervalle I de \mathbb{R} qui s'annule en un point donné a de I d'une fonction f continue sur cet intervalle ($F(x) = \int_a^x f(t)dt$) et permet le calcul effectif de l'aire de certaines surfaces planes. Enfin, l'aire sous la courbe d'une fonction continue sert à interpréter géométriquement l'intégrale de la fonction. L'analyse de la partie *Exercices* du manuel et des sujets de baccalauréat rend compte de la présence de questions qui explorent ces liens : L'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ et la fonction $F: x \mapsto \int_0^x \sqrt{1-x^2} dx$ sont deux exemples probants. Cependant, l'analyse du manuel permet de constater que le sens de ces liens demeure implicite, il n'est pas souligné, il n'est pas évoqué.

En l'absence de discours d'accompagnement, comme par exemple afficher l'objectif d'un exercice ou commenter sa solution, les élèves (et peut être aussi certains enseignants) pourraient ne pas saisir le sens de certains liens entre aire, intégrale et primitive. Dès lors, il est possible que beaucoup d'étudiants ne gardent des exercices qu'ils ont traités en classe de terminale qu'une expérience très restreinte et risquent donc de ne pas reconnaître le sens des liens que nous leur proposons.

Il nous faut insister ici que notre objectif n'est pas du tout de montrer la faiblesse des étudiants interrogés, mais plutôt de donner à voir des erreurs qui pourraient résulter de ce que nous appelons une *négligence didactique*, en l'occurrence l'absence de discours qui pourrait aider l'élève à comprendre « ce qu'on est en train de faire, et pourquoi on le fait ». Dans le même temps, il est également possible que certains enseignants cherchent à aider leurs élèves à prendre du recul sur les exercices corrigés et de réfléchir au sens de leur contenu. C'est aussi un autre point que nous souhaitons vérifier.

Nous nous attendons donc, suivant le cas, à relever des réponses de type « Vrai » ou « Faux » qui ne se réfèrent à aucune connaissance, qu'elle soit empirique ou fondée, mais aussi des réponses de même type issue d'une expérience vécue (méthode des rectangles, exercices travaillés en classe, etc.). Il est possible que des étudiants incertains préfèrent ne pas répondre, surtout à la question Q_{15b} . tant il est vrai que le rapport de l'aire aux primitives est moins évoqué dans les exercices que le rapport de l'aire à l'intégrale.

IV.3.6.b. Analyse à priori de la partie II

Cette partie est formée de cinq propositions sur lesquelles les étudiants sont invités à se prononcer en justifiant¹⁸⁰ leurs réponses. L'exigence de justifier la réponse est un autre aspect de rupture du questionnaire avec les règles du contrat en usage dans l'enseignement secondaire tunisien. Les propositions que nous soumettons aux étudiants constituent en fait un échantillon parmi un certain nombre de propositions recueillies auprès d'enseignants du supérieur et sont considérées comme des erreurs récurrentes et incompréhensibles, surtout qu'elles touchent souvent des résultats élémentaires en cours de terminale. Elles doivent, selon ces enseignants, nous révéler des rapports impropres des étudiants interrogés à certaines propriétés algébriques de l'intégrale et surtout à l'implication logique. Ce sont les formes d'erreurs, susceptibles de faire surface chez les étudiants interrogés, que nous souhaitons identifier.

Il s'agit maintenant d'examiner les propositions soumises aux étudiants. Notre objectif est d'identifier les formes d'erreurs prévalentes chez les étudiants interrogés et vérifier par là le bien fondé de l'opinion des enseignants.

Q_{21} : Si $\int_a^b f(x)dx$ existe alors la fonction f est continue sur $[a, b]$.

Q_{22} : La moyenne des carrés des réels compris entre 0 et 1 est égale à $\frac{1}{3}$.

Q_{23} : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$.

Si $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ alors, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$.

Q_{24} : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[c, d]$.

Si $[a, b] \subset [c, d]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_c^d f(x)dx$.

Q_{25} : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Nous avons : $\int_a^b f(x)dx = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}$.

Comme on peut le voir, il s'agit de placer l'étudiant face à des propositions mathématiques qui devraient évoquer pour lui un résultat, une propriété algébrique ou une règle en rapport avec la notion d'intégrale déjà étudiée en classe terminale. Nous lui demandons dans un premier temps de se prononcer sur chacune de ces propositions et de justifier sa réponse. Pour

¹⁸⁰ Dans cette partie du questionnaire, les réponses non justifiées sont rejetées.

ce faire il peut, suivant les cas, produire une preuve de la correction de la proposition ou construire un contre-exemple ou une figure pour l'infirmier. Bien sûr, il est possible que certains étudiants vont se satisfaire de répondre par vrai ou faux et que d'autres ne répondront simplement pas à certaines des propositions.

Réponses attendues

Q_{21} : Comme nous l'avons déjà souligné en plusieurs endroits, dans l'enseignement secondaire tunisien, l'intégrale est toujours intégrale d'une fonction continue ce qui évacue d'emblée la question de l'intégrabilité. Cependant, alors que le problème d'existence d'une intégrale ne doit pas se poser, on trouve dans le manuel scolaire des questions où l'on demande de justifier l'existence d'une intégrale¹⁸¹. Évidemment, les élèves apprennent par les exercices que pour justifier l'existence de l'intégrale d'une fonction f , il suffit de vérifier que la fonction f est continue entre les bornes de l'intégrale. Notre question s'inscrit justement dans ce flou institutionnel et cherche à rendre compte de ce qui se joue au bord du texte officiel. Mais nous pouvons déjà prévoir ce à quoi nous pouvons nous attendre en réponse à cette question. Les étudiants qui gardent une assez bonne connaissance de leur cours diront que c'est la réciproque qui est vraie. Ceux pour qui l'existence de l'intégrale et la continuité de la fonction sont deux questions identiques et ceux qui ne distinguent pas entre condition nécessaire et condition suffisante diront probablement que la proposition est vraie. Mais il est aussi envisageable que des étudiants sachent¹⁸² qu'une fonction bornée ayant un nombre fini de discontinuité entre les bornes a et b possède une intégrale et en arrivent à conclure que la proposition est fausse. Le cas d'une fonction en escalier serait probant. Il y a ensuite les étudiants qui, pour une raison ou une autre, ne répondront pas.

Convenons ici que la première réponse (c'est la réciproque qui est vraie) n'est pas recevable. Ce n'est pas parce que la réciproque d'une proposition est vraie que la proposition en question est nécessairement fausse. D'autre part, dans la mesure où l'analyse du manuel scolaire met en évidence que la contre-exemplification ne figure pas parmi les composantes importantes de l'activité mathématique des élèves, il nous paraît peu probable que les étudiants interrogés soient capables d'en produire.

¹⁸¹ Voir (exercice 30. C.1), p.157. Tome 1. Analyse.

¹⁸² Certains enseignants ne manquent pas de le souligner dans leur cours.

Q₂₂: La question n'est pas sans évoquer la moyenne d'une fonction, en l'occurrence la fonction $x \mapsto x^2$. Il s'agit donc de déterminer la constante μ telle que $\int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 \mu dx$. Le calcul est immédiat et donne $\mu = \frac{1}{3}$. Il est également envisageable de recourir à un découpage régulier de $[0, 1]$ à l'aide des nombres $\frac{k}{n}$ ($0 \leq k \leq n$), de calculer la moyenne μ_n de leurs carrés et de passer ensuite à la limite en faisant tendre n vers $+\infty$.

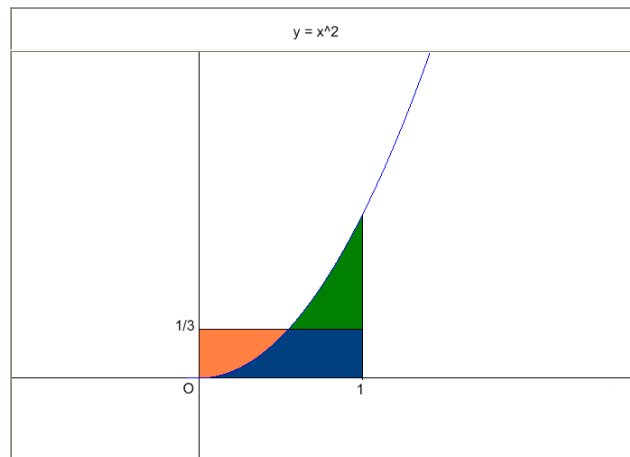


Fig. 27

La somme $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ étant supposée connue par les élèves en classe terminale alors $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$.

Il s'ensuit que $\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = \frac{1}{3}$.

La question vise à tester la capacité des étudiants interrogés à reconnaître qu'elle relève du calcul intégral et à écrire l'intégrale correspondante. À la différence des autres propositions cette question pourrait, en dépit de la simplicité de la solution, mettre véritablement les étudiants en difficulté. Comment expliquer cette difficulté alors que les étudiants sont supposés connaître les outils qui servent dans la résolution de cette question ? Si notre hypothèse se vérifie, nous pourrions imputer cette lacune à une négligence didactique. Ici les raisons peuvent s'expliquer par le fait que, en dehors du contexte de calcul d'aire, les élèves en classe terminale ont l'habitude de calculer des intégrales mais pas d'exprimer des données à l'aide d'une intégrale. Comme nous l'avons déjà souligné, les élèves en classe terminale puisent leurs connaissances dans des modèles d'exercices stéréotypés qui reposent sur des techniques de résolutions bien routinisées en classe. Mais ils méconnaissent généralement la signification de la moyenne d'une fonction, d'autant plus que l'institution scolaire ne propose quasiment pas de tâches qui s'y rattache. En témoigne l'analyse du manuel scolaire qui montre que cette notion est ignorée dans les exercices ce qui pourrait constituer, pour l'élève, une raison pour ne pas s'y arrêter. Nous pouvons donc nous attendre à ce que des étudiants ne répondent pas à cette question. Il est possible que d'autres élèves proposent $\frac{1}{2}$ comme valeur

moyenne. Néanmoins, nous envisageons que certains étudiants sont capables de fournir, en la justifiant, la bonne réponse.

Q_{23} : Les étudiants ont l'habitude d'utiliser la croissance de l'intégrale. Mais l'utilisation de cette propriété intervient généralement dans un contexte sécurisé où les étudiants ont à établir une inégalité du type $f(x) \leq g(x)$, où f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ et passer ensuite à l'intégrale. Nous pensons dès lors qu'il est intéressant de proposer aux étudiants ce type d'énoncé pour explorer la présence (ou l'absence) des connaissances requises pour distinguer entre condition nécessaire et condition suffisante et vérifier, ce faisant, leur rapport aux conditions qui fondent la validité de l'énoncé en question. Dans le même temps, nous cherchons quels sont les arguments que les étudiants qui arrivent à reconnaître la fausseté de la proposition sont susceptibles de produire pour justifier leurs réponses. En particulier, nous voulons explorer les connaissances, notamment géométrique et graphique, mobilisables par les étudiants, et leur capacité à les utiliser pour produire une preuve ou un contre-exemple.

Dans cette question, nous pensons que les étudiants répondront majoritairement que la proposition est vraie mais sans justifier leur réponse et que d'autres diront qu'elle est fausse parce que la réciproque est vraie pour les uns et sans justification pour les autres.

Q_{24} : Cette proposition est plus subtile que la proposition précédente. Le fait que l'implication soit vraie pour une fonction continue et positive peut induire en erreur un bon nombre d'étudiants et engendrer des tensions chez d'autres. La situation est que, dans les exercices proposés en classe de terminale, la proposition en question est toujours utilisée avec des fonctions continues et positives ce qui lui confère, aux yeux des élèves de ce niveau, une validité et une efficacité en ce sens qu'elle conduit dans les situations rencontrées à la réponse attendue. Or souvent les élèves puisent leurs connaissances dans les exercices, les adaptent à d'autres exercices et les ajustent au travers encore d'autres exercices. Pour ces élèves, les connaissances sont toujours contextuelles, elles ne sont jamais interrogées hors de leur contexte, là où elles peuvent ne s'avérer ni valides ni efficaces. Sans doute les principaux traits de l'incompréhension et de la confusion des liens entre aire et intégrale apparaissent-ils à travers ces erreurs, en ce sens que dans la plupart des exercices proposés en classe de terminale il s'agit généralement de calculer, à l'aide d'intégrale, l'aire sous la courbe d'une fonction continue et positive. À ceci, il faut ajouter l'absence dans le manuel scolaire non seulement de mise en garde spécifique pour prévenir ces erreurs, mais aussi d'exercice qui

visé à faire acquérir à l'élève la distinction entre aire et intégrale, entre condition nécessaire et condition suffisante.

Bien que nous pensons que la plupart des étudiants répondront que la proposition est vraie sans produire de justification, il est cependant envisageable que d'autres verront qu'elle est fautive et donneront peut être un contre-exemple dans le cadre algébrique ou graphique : l'exemple d'une fonction ou d'un dessin.

Q₂₅: Dans cette question nous nous intéressons à des erreurs avérées mais très peu observées chez les élèves en terminale et ce en raison de la rareté des situations qui les montrent. Certains enseignants de mathématiques soulignent en effet qu'il leur arrive de voir dans les copies de certains de leurs étudiants l'intégrale d'un produit de deux fonctions se transformer en un produit de deux intégrales. Dans la question que nous proposons aux étudiants, nous

avons choisi de proposer l'égalité $\int_a^b f(x)dx = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}$ dans le but de vérifier à la fois un certain nombre de connaissances inadéquates pointées par des enseignants du supérieur et d'évaluer, dans le même temps, la capacité des étudiants en termes d'analyse et de contrôle, d'une part, et en termes de production de contre-exemples, d'autre part. Il suffit en effet de voir que dans l'égalité que nous proposons, le premier membre est un réel arbitraire alors que le second membre est un réel positif, ce qui disqualifie aussitôt l'égalité en général pour

n'autoriser que l'inégalité $\int_a^b f(x)dx \leq \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}$, ou peut-être le résultat moins probable

$\int_a^b f(x)dx \neq \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}$. Il est possible cependant d'aboutir à la même conclusion mais de façon erronée en utilisant l'égalité¹⁸³ pointée par les enseignants, c'est-à-dire:

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx} = \sqrt{\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2} = \left|\int_a^b f(x)dx\right| \geq \int_a^b f(x)dx.$$

Toujours d'après les mêmes enseignants, il serait possible de relever les réponses suivantes :

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx} = \sqrt{\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2} = \int_a^b f(x)dx .$$

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx} = \sqrt{[F(b) - F(a)]^2} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

¹⁸³ Théorème en acte (Vergnaud, 1990).

De plus, nous envisageons des réponses courtes et non justifiées de type Faux, Vrai ou $\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx} \neq \int_a^b f(x) dx$. Enfin, nous n'excluons pas d'enregistrer des réponses correctes et peut être aussi des contre-exemples.

III.7. Analyse a posteriori du questionnaire

Dans la mesure où le questionnaire a été soumis aux étudiants avant qu'ils n'abordent la notion d'intégrale à l'université, les connaissances dont ils disposeraient sont celles qu'ils conservent en mémoire depuis le lycée. Nous insistons par ailleurs sur le fait que si le nombre des étudiants peut sembler modeste pour être suffisamment significatif, nous considérons qu'il peut se recommander d'une large représentativité par le fait que les étudiants participant à notre enquête sont issus de lycées différents et géographiquement dispersés.

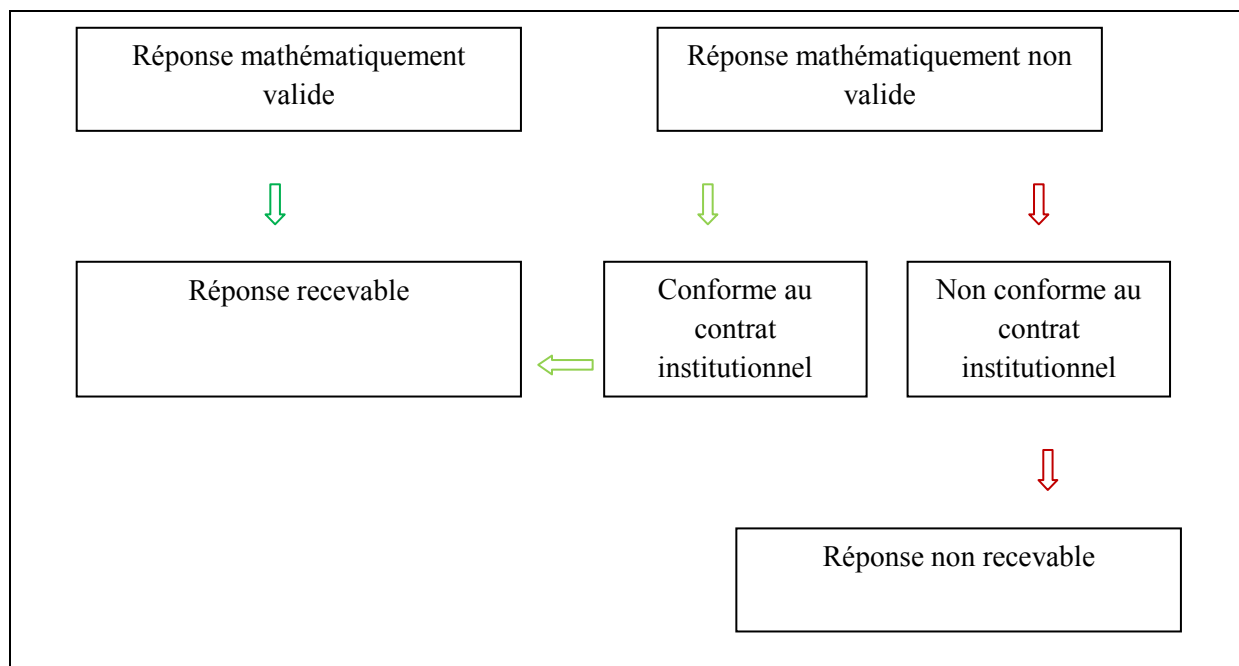
Dans notre analyse nous avons procédé à la lecture des réponses recueillies que nous avons regroupées en types de réponses. Nous avons ensuite répertorié les réponses des étudiants selon le niveau des connaissances requises par chaque question et les formes d'erreurs présentes dans chaque réponse. Nous avons enfin conduit une analyse plus fine centrée sur les liens entre aire, intégrale et primitive. Remarquons par ailleurs qu'en marge de cette analyse, nous avons enquêté sur l'utilisation de graphiques et de contre-exemples par les étudiants.

Les réponses des étudiants

L'analyse des réponses recueillies nous a conduites à envisager un nouveau classement plus significatif des réponses des étudiants selon leur validité mathématique. Parmi les réponses qui ne sont pas valides du point de vue strictement mathématique, nous distinguons celles qui répondent aux termes du contrat institutionnel et celles qui ne le font pas. C'est le cas, par exemple, lorsqu'un élève, à qui on soumet une proposition, répond par vrai ou faux. Une telle réponse, lorsqu'elle n'est pas justifiée, ne peut revendiquer aucune validité mathématique, mais, dans le système scolaire tunisien, elle est acceptée¹⁸⁴. Nous qualifions de recevables les réponses qui sont conformes au contrat institutionnel et de non recevables les autres réponses. Insistons cependant sur le fait que lorsque la consigne impose la justification des réponses, la règle du contrat institutionnel évoquée plus haut n'est plus valable.

L'organigramme suivant précise la classification des réponses selon leur recevabilité :

¹⁸⁴ Voir par exemple le sujet de baccalauréat de la session principale de juin 2009. Dans l'exercice 1, on lit : *aucune justification n'est demandée. Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.*



Selon cette classification les réponses recueillies sont regroupées dans le tableau suivant où G_1 et G_2 correspondent aux deux groupes d'étudiants interrogés en 2009 et en 2010 respectivement :

	Réponses institutionnellement recevables				Réponses institutionnellement non recevables		Absence de réponse	
	Mathématiquement valide		Mathématiquement non valide					
	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2
Q_{11}			11	14	24	25	2	
Q_{12}			7	12	22	25	8	2
Q_{13}		1	2	9	34	28	1	1
Q_{14}			5	4	27	31	5	4
$Q_{15a.}$		1	22	22	15	12		4
$Q_{15b.}$			6	9	21	23	10	7
Q_{21}			1	2	36	37		
Q_{22}	2	8			15	23	20	10
Q_{23}	7			3	30	33		2
Q_{24}	1	1		1	28	32	8	5
Q_{25}	1			4	31	26	5	8
Totaux	11	11	54	80	283	295	59	43

Classification des réponses des étudiants selon leur validité

Un premier constat qui se dégage immédiatement de ce tableau est le très faible taux des connaissances mathématiquement valides (11/407 pour G_1 et 11/429 pour G_2). Suit un deuxième constat non moins frappant, le nombre des réponses recevables selon le contrat

institutionnel qui ne sont pas mathématiquement valides (54/407 pour G_1 et 80/429 pour G_2). Il est à peine besoin de remarquer ici qu'en l'absence de consigne qui exige la justification des réponses, alors une réponse du type *Vrai* ou *Faux* donne lieu à toutes les suppositions possibles et ne livre pas en fait une information fiable sur la nature des connaissances recueillies. Cette remarque pourrait expliquer le nombre assez élevé des réponses institutionnellement recevables dans le cas de la question $Q_{15}a$. On peut s'interroger alors pourquoi n'enregistre-t-on pas des résultats assez proches dans la question $Q_{15}b$. Il nous paraît que cela pourrait tenir au fait que, pour les étudiants, le lien entre aire et intégrale est beaucoup plus net et plus naturel que celui entre aire et primitive. Et c'est encore cette raison qui pourrait expliquer le nombre d'étudiants ayant répondu à la question $Q_{15}a$ (72/76 soit environ 95%) est plus élevé que celui des étudiants ayant répondu à la question $Q_{15}b$. (59/76 soit environ 78%).

Enfin, on ne peut manquer de souligner en trait gras l'importance, à la fois, du nombre de réponses non recevables (283/407 pour G_1 et 295/429 pour G_2) et du nombre de réponses qui manquent (59/407 pour G_1 et 43/429 pour G_2). En résumé, on ne peut qu'enregistrer la faiblesse du nombre de réponses institutionnellement recevables. Au total seulement 65 (soit environ 16%) réponses recevables sur 407 possibles dans le premier groupe et 99 (soit environ 23%) réponses recevables sur 429 possibles dans le deuxième groupe.

Pour tenter de mieux éclairer ces résultats, nous allons examiner de plus près les réponses enregistrées dans le tableau précédent à travers une lecture horizontale.

Partie I

Question Q_{11}

Cette question porte sur la définition de l'intégrale définie. La lecture des réponses des étudiants montre que seulement 11 étudiants sur un total de 37 (soit 30%) dans le premier groupe et 14 étudiants sur un total de 39 (soit 36%) dans le deuxième groupe sont capables de donner une définition de l'intégrale définie qui soit institutionnellement recevable :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur un intervalle contenant } a \text{ et } b.$$

Dans cette question, aucun étudiant n'a évoqué la continuité de la fonction f sur un intervalle I contenant a et b pour justifier l'existence de F . De même, aucun étudiant n'a envisagé que les réels a et b sont deux réels arbitraires de l'intervalle I . On comprend alors pourquoi, au plan strictement mathématique, la définition ci-dessus n'est pas valide.

Ce premier constat signifie que 26 étudiants du premier groupe et 25 étudiants du deuxième groupe ne disposent pas d'une définition de l'intégrale qui soit institutionnellement recevable. C'est à la fois frappant et inquiétant s'il est vrai que cette définition constitue une base fondamentale des connaissances sur l'intégrale. Pour 13 étudiants (soit environ 32%) du premier groupe et 14 étudiants (soit environ 36%) du deuxième groupe, la définition de l'intégrale définie est la suivante :

$\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Il est clair que nous tenons ici une première confirmation de ce que disait l'enseignant universitaire dont nous rapportons les propos en début de ce chapitre.

Question Q_{12}

La deuxième ligne, contenant les réponses à la question Q_{12} , nous livre un résultat qui corrobore notre hypothèse sur la valence de l'ostensif dx dans l'enseignement secondaire tunisien. 30 étudiants (soit 81%) dans le premier groupe et 27 étudiants (soit 69%) n'ont produit sur la question que des réponses confuses ou vides. D'ailleurs, les réponses retenues ne s'en distinguent que difficilement. Nous avons cependant considéré qu'au-delà de la formulation le contenu sous-jacent pourrait être accepté. Voici les types de réponses retenus :

R_1 : On calcule l'intégrale par rapport à x .

R_2 : dx représente la variable de l'écriture $\int_a^b f(x)dx$.

R_3 : dx représente l'élément par rapport auquel on intègre.

R_4 : dx représente que la variable est x .

Variable pour les uns, élément par rapport auquel on intègre pour les autres, l'ostensif dx ne semble pas connaître une appellation pour le désigner. Mais ce point n'a rien pour étonner d'autant qu'il n'en est fait aucun cas dans le manuel scolaire.

Question Q_{13}

Concernant la question Q_{13} , le constat important est le nombre très élevé (34 dans le premier groupe et 28 dans le deuxième groupe) de réponses institutionnellement non recevables. Seulement 2 étudiants de G_1 et 10 étudiants de G_2 ont fourni des réponses recevables parmi lesquelles une seule réponse est mathématiquement valide:

$|f(x)| \geq f(x) \Rightarrow \int_a^b |f(x)| dx \geq \int_a^b f(x)dx$. Donc aire (S) $\geq \int_a^b f(x)dx$.

Dans cette réponse, les connaissances mathématiques de l'étudiants sont précises et correctement articulées puisque la fonction f est par hypothèse continue sur l'intervalle $[a, b]$.

Comme nous l'avons déjà dit dans l'analyse a priori, cette question doit éclairer et compléter les résultats enregistrés dans la question Q_{11} . Pour ce faire, nous proposons de croiser les réponses recueillies dans les deux questions. Des raisons de commodité et de mise en page nous ont conduit à classer les réponses comme suit :

R_1^1 : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur $[a, b]$.

R_1^2 : $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

R_3^1 : $\int_a^b f(x)dx = \text{aire}(S)$.

R_3^2 : $\int_a^b |f(x)| dx = \text{aire}(S)$

R_3^3 : $\int_a^b f(x)dx \leq \text{aire}(S)$.

RNS : Réponses non significatives¹⁸⁵.

		R_3^1		R_3^2		R_3^3		RNS		Totaux
		G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	
R_1^1	G_1	7		2				2		11
	G_2		9		1		1		3	14
R_1^2	G_1	11						2		13
	G_2		7				1		1	9
RNS	G_1	9		1		1		2		13
	G_2		7		2		2		5	16
Totaux		27	23	3	3	1	4	6	9	37 / 39

Ces résultats montrent que pour 27 étudiants (soit environ 73%) de G_1 et 23 étudiants (soit environ 60%) de G_2 la notion d'intégrale s'identifie à la notion d'aire et ce indépendamment de la qualité et du signe de la fonction. C'est une erreur importante qu'on ne risque pas de minimiser, et nous pouvons pousser l'analyse pour constater que parmi les 11 étudiants de G_1 et 14 étudiants de G_2 ayant défini l'intégrale par la formule de Newton-Leibniz dans la question Q_{11} , 7 étudiants de G_1 et 9 étudiants de G_2 font l'identification entre aire et intégrale ce qui n'est pas loin d'identifier primitive, intégrale et aire. D'un autre côté, dans G_1 , 11

¹⁸⁵ Ce sont des réponses qui sont sans rapport avec la question, confuses, inintelligibles ou vides.

étudiants sur 13 et, dans G_2 , 7 étudiants sur 9, ayant déjà identifié l'intégrale définie avec l'aire, confirment leur réponse à Q_{11} . Enfin, parmi les 13 étudiants de G_1 et les 16 étudiants de G_2 n'ayant pas donné de réponse significative dans la question Q_{11} , il y a respectivement 9 et 7 étudiants pour qui les notions d'aire et d'intégrale sont identiques.

Question Q_{14}

La question Q_{14} ne recueille que très peu de réponses recevables. Seulement 5 étudiants (soit environ 14%) de G_1 et 4 étudiants (soit environ 10%) de G_2 ont réussi à proposer des réponses recevables. À ce résultat s'en ajoute un autre bien plus important: les étudiants ne semblent avoir aucune conscience de la signification des notions mathématiques dont ils se servent : 27 étudiants de G_1 et 31 étudiants de G_2 ont fourni des réponses contenant toute sorte d'erreurs. En voici quelques exemples :

- *Il faut $f'(x) > 0$, d'où f est croissante sur $[a, b]$.*
- *$0 < a < b$.*
- *Il faut $a > 0$.*
- *Les conditions suffisantes pour que $\int_a^b f(x)dx > 0$ sont : il faut que $f(x) > 0$ et f est une fonction croissante sur $[a, b]$.*
- *$f(x) > 0$ et $a < b$.*
- *f définie sur $]0, +\infty[$ et $a \neq b$.*
- *F est une primitive de f . $\int_a^b f(x)dx > 0$ ssi $F(b) - F(a) > 0 \implies F(b) > F(a)$.*
- *f est une fonction bornée et positive, donc elle est continue et strictement croissante. D'où f est bijective, d'où $\int_a^b f(x)dx > 0$.*

L'examen des réponses de ces étudiants établit sans équivoque que beaucoup d'entre eux ne comprennent pas ce que l'on entend par condition suffisante. Exactement 16 étudiants de G_1 et 14 étudiants de G_2 écrivent « pour que $\int_a^b f(x)dx > 0$ il faut que¹⁸⁶... », ce qui vérifie, du moins dans une certaine mesure, ce que nous disions à ce propos dans l'analyse à priori.

Question Q_{15}

L'analyse des réponses aux questions Q_{11} et Q_{13} donne à penser que les étudiants tendent majoritairement à identifier les notions d'aire et d'intégrale. Cette tendance se confirme

¹⁸⁶ C'est nous qui soulignons.

encore dans la question Q_{15} . L'examen des réponses des étudiants aux deux parties de cette question donne les résultats résumés dans le tableau suivant :

L'aire permet-elle de calculer certaines intégrales ?						L'aire permet-elle d'explicitier certaines primitives ?					
Oui		Non		Pas de réponses		Oui		Non		Pas de réponse	
G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2
30	28	7	7	0	4	12	21	15	10	10	8

Les 58 étudiants ayant répondu « Oui » à la première partie de la question se répartissent comme suit :

46 étudiants n'ont pas donné de justifications recevables à leur réponse.

8 étudiants justifient leur réponse par le fait que l'intégrale est l'aire sous la courbe de f .

3 étudiants justifient leur réponses en invoquant « *la méthode des rectangles* », « *les fonctions constantes par intervalles* » et « *Quelques intégrales dont on ne peut pas déterminer les primitives, mais on peut se ramener à calculer l'aire à partir d'un encadrement* ».

1 étudiant justifie sa réponse en donnant l'exemple $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.

Les réponses des 33 étudiants ayant répondu « Oui » à la deuxième partie de la question sont soit non justifiées soit dénuées de sens. Le même constat s'établit d'ailleurs à propos des réponses négatives.

L'importance du nombre d'étudiants ayant répondu affirmativement à la question Q_{15a} pourrait s'expliquer par le fait qu'ils identifient l'intégrale avec l'aire et peut être aussi par le fait qu'ils ne distinguent pas entre les deux sens des liens entre intégrale et aire. Quant à la disproportion de la réponse « Oui » dans les questions Q_{15a} et Q_{15b} , elle peut s'expliquer par le fait que pour la plupart des étudiants, les liens entre aire et intégrale sont bien mieux identifiés que les liens entre aire et primitive. Les résultats ainsi constatés concordent assez bien avec ce que nous avons prévu dans notre analyse a priori. Enfin il nous semble que, majoritairement, les étudiants interrogés n'ont ni la conscience ni la connaissance des liens entre aire et intégrale dans le sens *aire* \rightarrow *intégrale*, d'une part, et entre aire et primitive dans le sens *aire* \rightarrow *primitive*, d'autre part.

Partie II

Pour des raisons de cohérence et de commodité, nous analysons successivement Q_{21} , Q_{23} et Q_{24} , puis Q_{22} et Q_{25} .

Question Q₂₁

Cette proposition est jugée « *Vraie* » par 30 étudiants du groupe G_1 et par 33 étudiants du groupe G_2 et « *Fausse* » par tous les autres.

Vrai				Faux				Pas de réponse	
Justifié		Non justifié		Justifié		Non justifié		G_1	G_2
G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2		
18	29	12	4	6	5	1	1	0	0

Le constat qui se donne à voir immédiatement dans ce tableau est le nombre élevé (63/76) des étudiants qui ont répondu « Vrai » ainsi que le nombre de réponses non justifiées (39/76). Environ 24% des étudiants (12+4+1+1=18) semblent ne pas tenir compte de la consigne et continuent à fonctionner selon les règles du contrat dans le secondaire. L'examen des réponses des 58 autres étudiants permet de constater qu'il y a 3 réponses institutionnellement recevables. L'analyse des arguments fournis dans les réponses rejetées met en lumière une forte présence d'erreurs de confusion et d'erreurs de validité. Voici, à titre d'exemple, quelques unes de ces erreurs :

- *Vrai, car si f est continue sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx$ existe.*
- *Vrai, car il ne faut pas calculer l'intégrale d'une fonction discontinue.*
- *Vrai, car pour que $\int_a^b f(x)dx$ existe il faut que f soit continue sur $[a, b]$.*
- *Vrai, car si $F(x) = \int_a^b f(x)dx$ est la primitive de f alors f est la dérivée de F . Donc f est dérivable sur $[a, b]$ et par suite f est continue sur $[a, b]$.*

Il semble que, pour les étudiants concernés par le premier exemple, l'existence de l'intégrale et la continuité de la fonction se recouvrent mutuellement : elles sont synonymes. Dès lors, il n'y a plus, pour ces étudiants, de distinction entre condition nécessaire et condition suffisante. Il s'agit ici d'une erreur de confusion. Dans les deux exemples suivants, la continuité est donnée comme condition nécessaire à l'existence de l'intégrale. Ici encore, les étudiants ayant fourni cette réponse commettent une erreur de confusion.

Le dernier exemple est plus riche en observables. Il y a d'abord une identification entre l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ et l'intégrale indéfinie $F: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$. La deuxième erreur est contenue dans la phrase « *f est la dérivée de F », Donc f est dérivable sur $[a, b]$ ». Ici, l'étudiant commet une erreur de validité.*

Question Q₂₃

Cette proposition est jugée « *Vraie* » par 23 étudiants du groupe G_1 et par 22 étudiants du groupe G_2 , « *Fausse* » par 14 étudiants du premier groupe et par 15 étudiants du deuxième groupe, « non renseignée » par trois étudiants du groupe G_2 .

Vrai				Faux				Pas de réponse	
Justifié		Non justifié		Justifié		Non justifié		G_1	G_2
G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2		
11	14	12	8	12	10	2	4	0	3

Dans cette question aussi le nombre d'étudiants ayant répondu « *Vrai* » est assez élevé (environ 60%) et le taux des réponses non argumentées (34%) est aussi important que dans la question précédente. Sur les 47 réponses argumentées, nous avons enregistré 10 (7+3) réponses recevables. L'analyse des autres réponses fait apparaître plusieurs formes d'erreurs dont voici quelques exemples :

- *Vrai, car $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.*
- *Vrai, car $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.*
- *Vrai, car l'intégrale ne change pas le signe.*
- *Vrai, car l'intégrale conserve les variations des fonctions.*
- *Vrai, car on a $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. On applique la dérivée, on trouve $f(x) \leq g(x)$.*

Il nous semble que ces erreurs sont suffisamment éloquents et qu'elles ne nécessitent pas d'explication. Leurs auteurs n'en ont sans doute pas conscience ce qui pourrait s'expliquer par des confusions entre implication et équivalence logique, entre intégrale définie et intégrale indéfinie.

Deux autres réponses fausses mais non moins significatives sont les suivantes :

- *Faux, car on ne connaît pas le signe des deux fonctions.*
- *Faux, car $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \Leftrightarrow |f(x)| \leq |g(x)|$.*

Ici le sens de l'implication est lié à une question de signe, et peut être à une interprétation de l'intégrale en termes d'aire. Il s'agit clairement d'erreurs de validité.

Question Q_{24}

La proposition est jugée « Vraie » par 20 étudiants du groupe G_1 et par 17 étudiants du groupe G_2 , « Fausse » par 9 étudiants du premier groupe et par 15 étudiants du deuxième groupe, « non renseignée » par 8 étudiants de G_1 et par 7 étudiants de G_2 .

Vrai				Faux				Pas de réponse	
Justifié		Non justifié		Justifié		Non justifié		G_1	G_2
G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2		
9	12	11	5	4	7	5	8	8	7

Le premier constat que l'on fait à propos de cette proposition par rapport aux questions Q_{21} et Q_{23} est l'importance à la fois du nombre d'étudiants n'ayant pas répondu (20%), le nombre des étudiants ayant jugé la proposition vraie (49%) et celui des étudiants n'ayant pas justifié leurs réponses (38%).

L'examen des justifications données par les étudiants a permis de dégager exactement 3 réponses recevables : un exemple graphique d'une courbe située en-dessous de l'axe des abscisses et deux exemples de fonctions négatives.

Les autres réponses permettent de saisir surtout des connaissances mal faites (conceptions d'élèves) et confuses dont voici quelques exemples :

- *Faux, car l'aire ne dépend pas de l'intervalle.*
- *Vrai, car $a < c$ et $b < d \Rightarrow F(b) - F(a) < F(d) - F(c)$.*
- *Faux, car ça dépend de f si elle est croissante ou décroissante.*
- *Vrai, car l'intervalle $[c, d]$ est plus grand que l'intervalle $[a, b]$.*
- *Faux, car il faut que f soit strictement monotone sur $[c, d]$.*
- *Vrai. Contre-exemple : $f(x) = x^2$, $[a, b] = [1, 2]$, $[c, d] = [0, 3]$.*

On ne peut qu'être frappé par les incohérences, les confusions, les imperfections et les imprécisions dont ces exemples fourmillent. Si la première et la cinquième réponses ne doivent a priori se fonder sur aucune explication qui ne soit elle-même absurde, la deuxième réponse, en revanche, pourraient être attachées à des erreurs qu'on observe souvent chez certains élèves en lycée qui consistent à soustraire membre à membre deux inégalités quoiqu'il reste à expliquer ce que représente la fonction F , sa croissance stricte et l'erreur qui consiste à traduire l'inclusion $[a, b] \subset [c, d]$ à l'aide des inégalités $a < c$ et $b < d$. La

troisième réponse pourrait renvoyer à une confusion entre sens de variation et signe d'une fonction ce qui constitue une erreur courante chez certains élèves en lycée. Il est possible donc que dans ce dernier cas l'étudiant voulait dire que l'inégalité proposée dépend du signe de la fonction f sur $[c, d]$. En ce qui concerne la réponse suivante, il est clair qu'il s'agit d'une fausse conception du rapport de la valeur de l'intégrale à l'amplitude de l'intervalle d'intégration : plus grand est l'intervalle, plus grande est la valeur de l'intégrale. Cette conception pourrait s'expliquer par une autre conception selon laquelle l'intégrale est une aire géométrique. Cette erreur, nous l'avons vu dans la première partie de nos analyses, est assez bien installée chez les étudiants et pourrait être attachée aux raisons que nous avons déjà développées dans notre analyse a priori de cette question. Enfin, la dernière réponse rend compte du rapport de certains élèves au rôle du contre-exemple ce qui pourrait s'expliquer, entre autres, par le fait que la contre-exemplification est négligée dans l'enseignement secondaire tunisien, elle est marginalisée. Ce fait a été déjà constaté et souligné dans notre analyse du manuel scolaire.

Question Q_{22}

La proposition est jugée « *Vraie* » par 4 étudiants du groupe G_1 et par 11 étudiants du groupe G_2 , « *Fausse* » par 13 étudiants de G_1 et par 19 étudiants de G_2 . Pour les autres, 18 (10+8) étudiants n'ont rien écrit et 11 (10+1) étudiants disent :

- *Je ne comprends pas.*
- *C'est quoi la moyenne des carrés.*
- *Je ne sais pas ce qu'est la moyenne des carrés.*
- *Je ne sais pas car je ne peux pas calculer tous les carrés des réels compris entre 0 et 1 ; c'est une infinité.*

Un compte rendu des résultats enregistrés ici est donné par le tableau suivant :

Vrai				Faux				Pas de réponse	
Justifié		Non justifié		Justifié		Non justifié		G_1	G_2
G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2		
2	8	2	3	6	9	7	10	20	9

Le premier constat qui se donne aussitôt à voir ici est l'importance du nombre d'étudiants qui n'ont pas renseigné la question (environ 38%). Ce taux traduit sans doute l'incapacité de ces étudiants à comprendre l'énoncé de la proposition. Les étudiants ayant jugé la proposition

fausse justifient leurs réponses par le fait que la moyenne des carrés des réels compris entre 0 et 1 est $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ou $\frac{0^2+1^2}{2} = \frac{1}{2}$ ou $0^2 + 1^2 = 1$.

Ainsi, en dépit du fait que le questionnaire porte clairement sur l'intégrale, seulement 10 étudiants (soit environ 13%) ont compris que la question relève du calcul intégral. Tous ces étudiants ont réussi à obtenir le bon résultat.

Question Q_{25}

La proposition est jugée « Vraie » par 8 étudiants de G_1 et par 6 étudiants de G_2 , « Fausse » par 24 étudiants de G_1 et par 26 étudiants de G_2 . Elle n'a pas été renseignée par 5 étudiants du premier groupe et par 7 étudiants du deuxième groupe.

Vrai				Faux				Pas de réponse	
Justifié		Non justifié		Justifié		Non justifié		G_1	G_2
G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2		
4	4	4	2	16	19	8	7	5	7

L'examen des justifications que les étudiants proposent met en évidence un très grand nombre d'erreurs. Parmi ces réponses, nous avons enregistré exactement 5 (1+4) réponses recevables :

- $\int_1^2 x dx \neq \sqrt{\int_1^2 x^2 dx}$ car $\frac{3}{2} \neq \sqrt{\frac{5}{3}}$ ¹⁸⁷.
- Si $f(x) = x^2$ alors $\int_a^b f(x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b$ et $\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx} = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_a^b \neq \left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b$.
- $\int_a^b f(x) dx$ peut être positive ou négative mais $\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}$ toujours positif.

Les autres réponses sont des amalgames d'erreurs, de confusions et d'étrangetés. En voici quelques exemples :

- Vrai, car $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ et $\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx} = \sqrt{[F(b) - F(a)]^2} = F(b) - F(a)$. Donc $\int_a^b f(x) dx = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}$.
- Vrai, car $\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx} = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b f(x) dx$.
- Faux, car $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ et $\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{2}F(b)^3 - \frac{1}{2}F(a)^3}$.

¹⁸⁷ En fait $\sqrt{\int_1^2 x^2 dx} = \sqrt{\frac{7}{3}}$.

Dans la première réponse, nous relevons une erreur déjà pointée par certains enseignants du supérieur $\int_a^b [f(x)]^2 dx = \left(\int_a^b f(x) dx\right)^2$ à laquelle s'en ajoute une autre, assez fréquente chez les élèves en lycée, en l'occurrence $\sqrt{X^2} = X$.

La deuxième réponse met en lumière une autre erreur $\sqrt{\int_a^b u(x) dx} = \int_a^b \sqrt{u(x)} dx$ (u étant une fonction continue et positive sur $[a, b]$).

Dans la dernière réponse, l'erreur pourrait consister à voir qu'une primitive de la fonction u^n , ($n \geq 2$) est $\frac{1}{n+1} u^{n+1}$, bien qu'il reste à justifier le coefficient $\frac{1}{2}$. Une deuxième erreur, non moins importante, est l'absence de contrôle sur les calculs, en ce sens que rien n'assure que $F^3(b) - F^3(a) \geq 0$, ce qui doit suffire pour disqualifier l'égalité donnée dans cette réponse.

Les erreurs

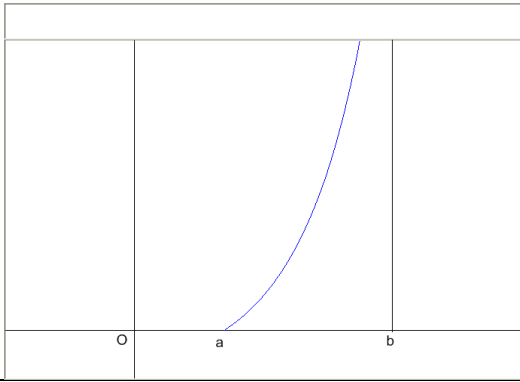
Pour expliquer ce que nous entendons concrètement par erreurs d'identification, de confusion et de validité, nous donnons en exemple l'analyse de deux copies d'étudiants choisis de façon arbitraire. Ces deux exemples doivent éclairer le sens des résultats qui suivent :

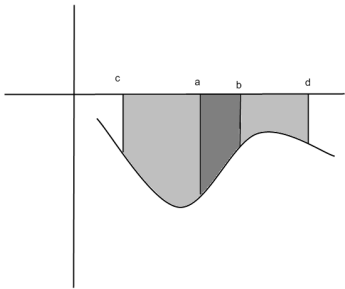
Premier exemple

Question	Réponse	Commentaire
Q_{11}	$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, où F est la primitive de f .	Identification intégrale-primitive. Validité interne : l'existence de F n'a pas été justifiée.
Q_{12}	dx c'est une variable qui désigne la dérivée.	Confusion entre variable et fonction.
Q_{13}	$\int_a^b f(x) dx$ et l'aire de (S) sont égales car la donnée de (S) représente la définition de $\int_a^b f(x) dx$.	Identification <i>aire – intégrale</i> .
Q_{14}	Pour que $\int_a^b f(x) dx > 0$ il faut que $a > b$ et f soit une fonction strictement positive sur $[a, b]$.	Confusion $CN - CS$.
Q_{15a}	Oui. Elle permet de calculer certaines intégrales car l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) et les droites d'équations $x = a$, $x = b$ et $y = 0$.	Identification <i>aire – intégrale</i> .
Q_{15b}		
Q_{21}	Vrai, puisque l'intégrale existe alors nécessairement elle est continue.	Confusion $CN - CS$.
Q_{22}	Vrai. $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.	
Q_{23}	Vrai. On applique l'intégrale $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.	Confusion $CS - \acute{E}q$.
Q_{24}	Vrai, puisque $[a, b] \subset [c, d]$.	La réponse est fausse.

Q ₂₅	Faux. $\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx} = \left \int_a^b f(x) dx \right = \int_a^b f(x) dx$.	Validité interne+ validité externe. Deux théorèmes en acte : $\int_a^b [f(x)]^2 dx = \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2$ $\left \int_a^b f(x) dx \right = \int_a^b f(x) dx$.
-----------------	----------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Deuxième exemple

Question	Réponse	Commentaire
Q ₁₁	$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, où F est la primitive de f .	Identification intégrale-primitive. Validité interne : l'existence de F n'a pas été justifiée.
Q ₁₂	dx élément de la courbe (C_f).	Validité interne+confusion.
Q ₁₃	Si f est positive alors $\int_a^b f(x) dx = \text{aire}(S)$. Si f est négative alors $\int_a^b f(x) dx = -\text{aire}(S)$. Si f est ni positive ni négative alors $\int_a^b f(x) dx = \text{aire}(S)$.	Les connaissances sont adéquates et précises, mais l'étudiant ne répond pas à la question. Validité externe.
Q ₁₄	f non nulle et f positive.	La réponse est fausse.
Q _{15a.}	Oui. Si f est continue et positive alors : $\int_a^b f(x) dx = \text{aire}(S)$.	Le résultat est correct mais il ne répond à la question. Validité externe.
Q _{15b.}	Non.	La réponse est institutionnellement recevable
Q ₂₁	Faux. par exemple le graphique suivant existe mais f n'est pas continue en b . 	Validité interne : la fonction n'est pas définie en b . Validité externe : L'exemple ne correspond pas aux données de la question. Confusion: intégrale définie-intégrale généralisée.
Q ₂₂	Faux car $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3}$.	Validité externe : (la moyenne des carrés) = (le carré des moyennes).
Q ₂₃	Faux car $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.	Confusion CN – CS.

Q ₂₄	<p>Faux. Exemple :</p> 	La réponse est recevable.
Q ₂₅	Faux. Exemple : $\int_1^2 x dx \neq \sqrt{\int_1^2 x^2 dx}$ car $\frac{3}{2} \neq \sqrt{\frac{5}{3}}$.	Validité externe.

Avant de rendre compte des résultats de notre analyse, il nous faut préciser qu'un étudiant qui ne répond pas à une question ne commet pas d'erreur mais, dans le même temps, il ne fait pas partie de ceux dont les réponses ne renferment pas l'erreur visée. Les réponses qui manquent ne seront pas donc prises en compte dans le nombre total des réponses possibles. Il nous faut préciser aussi qu'une même réponse peut renfermer plusieurs erreurs de natures différentes. D'autre part, il nous semble qu'il convient de rappeler ici que les connaissances interrogées relèvent de deux niveaux différents : Le premier niveau est celui des connaissances que nous qualifions de *basiques* et renvoie aux questions Q₁₁, Q₁₂, Q₁₃, Q_{15a.} et Q_{15b.} Le deuxième niveau est celui des connaissances que nous qualifions d'*élaborées* et renvoie aux questions Q₁₄, Q₂₁, Q₂₂, Q₂₃, Q₂₄ et Q₂₅.

Un résumé des erreurs dégagées par notre analyse est donné dans le tableau suivant :

	Erreur →	Identification				Validité				Confusion				Pas de réponse		Totaux	
		Aire		Primitive		Interne		Externe		CN-CS		Autres					
		Question ↓	Intégrale	G ₁	G ₂	G ₁	G ₂	G ₁	G ₂	G ₁	G ₂	Équivalence		G ₁	G ₂	G ₁	G ₂
Connaissances basiques	Q ₁₁	15	14	13	15	28	29	1	2			7	8	2		64	68
	Q ₁₂							8	3			10	12	9	2	18	15
	Q ₁₃	28	25		1	29	27	1	4			2	1	1	1	60	58
	Q _{15a.}	5	3												4	5	3
	Q _{15b.}		1			1									10	7	1
Connaiss-	Q ₁₄					2	3		6	16	16	2	1	5	4	20	26
	Q ₂₁		1	2	3	5	9	13	11	19	19	4				43	43
	Q ₂₂							8	15		2	2	2	18	9	10	19

sances élaborées	Q_{23}					2	13	18	11	6	2	2		2	26	28	
	Q_{24}				2	2	14	19		1	2	2	7	6	18	24	
	Q_{25}				10	11	15	21			2	2	5	7	27	34	
Totaux		48	44	15	19	77	83	73	99	46	44	33	30	57	42	292	319

Dans ce tableau, nous avons placé dans la colonne « autres » toutes sortes de confusion qui ne sont pas de l'ordre de la logique formelle telles que, par exemple : « dx désigne l'unité d'aire » ; « l'aire est une valeur constante donc elle permet d'expliciter les fonctions définies comme polynômes de degré 1 » ; « oui l'aire permet d'expliciter certaines primitives pour connaître la dérivée » ou encore « $\int_a^b f(x)dx = [f(x)]_a^b$ ».

Les connaissances basiques

Pour des raisons de clarté et de commodité, nous commençons par extraire du tableau précédent les erreurs enregistrées au niveau des connaissances basiques :

Erreur → Groupe ↓	Identification		Validité		Confusion		Pas de réponse	Totaux des erreurs
	Aire intégrale	Primitive intégrale	Interne	Externe	CN-CS-éq.	Autres		
G_1	48	13	58	10	0	19	22	148
G_2	43	16	56	9	0	21	14	145

Comme on peut le constater sur ce tableau, les résultats nous semblent à la fois éloquentes et frappants : sur les 344 (environ 91%) réponses reçues, nous avons relevé 293 erreurs (environ 85%) dont 120 erreurs d'identification, 133 erreurs de validité du savoir et/ou du savoir-faire utilisés et 40 erreurs entre confusion, imprécision, imperfection et incohérence. Les erreurs d'identification consistent à traiter les notions d'intégrale et d'aire, d'intégrale et de primitive ou les trois notions à la fois en synonymes. En effet, dans la question Q_{11} qui ne porte en elle aucune suggestion, pour quinze étudiants (15/35, soit environ 43%) du premier groupe et quatorze étudiants (14/39, soit environ 36%) du deuxième groupe il y a identité entre intégrale et aire, pour treize étudiants (13/35, soit environ 37%) du groupe G_1 et pour quinze étudiants (15/39, soit environ 38%) du groupe G_2 il y a identité entre intégrale et primitive. Ces erreurs d'identification sont souvent doublées d'erreurs de validité des savoirs utilisés. Il s'agit surtout des conditions d'utilisation de la formule de Newton-Leibniz et d'interprétation de l'intégrale en termes d'aire. Ici, l'étudiant ne dispose d'aucune hypothèse sur la fonction f et

d'aucune condition sur les bornes a et b de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$. Les conditions justifiant l'interprétation de l'intégrale en termes d'aire ne sont pas données mais cela semble être ignoré par la plupart des étudiants. Ce constat est notamment confirmé dans la question Q_{13} . Dans cette question, il y a identité entre aire et intégrale pour 28 étudiants (environ 78%) du groupe G_1 et pour 25 étudiants (environ 66%) des étudiants du groupe G_2 . Dans l'ensemble, 53 étudiants sur un total de 74 (environ 72%) considèrent que, pour une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est la valeur de l'aire du sous-graphe de f sur $[a, b]$. Ici, l'examen des copies des étudiants permet de constater que même les étudiants ayant défini l'intégrale par la formule de Newton-Leibniz dans la question Q_{11} répondent par $\int_a^b f(x)dx = \text{aire}(S)$ dans la question Q_{13} ce qui donne à penser que dès que la situation évoque la notion d'aire, la plupart des étudiants interprètent l'intégrale en termes d'aire sans jamais chercher à vérifier les conditions de validité d'une telle interprétation.

Les connaissances élaborées

Les erreurs en rapport direct avec ces connaissances sont résumées dans le tableau suivant :

Erreur → Groupe ↓	Identification		Validité		Confusion		Pas de réponse	Totaux des erreurs
	Aire intégrale	Primitive intégrale	Interne	Externe	CN-CS-éq.	Autres		
G_1	0	2	19	63	46	14	35	144
G_2	1	3	27	90	44	9	28	174

D'après ce tableau, il nous semble que le constat global est assez proche de ce que nous avons observé dans la première série de questions. En effet, sur les 393 ($76 \times 6 - 63 = 393$) réponses recueillies nous avons enregistré 318 erreurs (environ 81%). Ces formes d'erreurs sont inhérentes non seulement aux conditions de la validité des savoirs et des savoir-faire mobilisés par les étudiants mais à toute la rigueur et à toute la logique mathématiques. La plupart des réponses que fournissent les étudiants donnent pour vraies des implications qui ne le sont pas, ce qui donne à penser qu'ils ne distinguent pas entre condition nécessaire, condition suffisante et équivalence. Ces réponses contiennent une négation de l'adéquation de leurs connaissances qui apparaît particulièrement dans la forme propositionnelle des questions Q_{14} , Q_{21} et Q_{23} . Ici, l'analyse révèle le caractère lacunaire et inadéquat, voire vicié, des connaissances des étudiants ayant répondu au questionnaire. Ce constat s'accuse encore à la lumière des résultats enregistrés dans les questions Q_{22} , Q_{24} et Q_{25} . Sur les 393 réponses

fournies par les étudiants aux questions se rapportant aux connaissances élaborées, nous avons relevé 289 (soit environ 74%) erreurs réparties comme suit :

Erreur	Validité interne	Validité externe	Confusion CN-CS-EQ
Nombre d'erreurs	46	153	90

Dans la façon dont se présentent les réponses des étudiants, la différence entre condition nécessaire, condition suffisante et équivalence tend à disparaître. En examinant de plus près ces réponses, on constate que les idées et les connaissances mobilisées par les étudiants sont privées de clarté et de précision, voire de cohérence. Dans leur grande majorité, ces étudiants n'expliquent pas leurs réponses, ils ne les justifient pas. Quand ils répondent, la réponse est une simple affirmation qui juge à l'aide d'arguments le plus souvent faux et sans fondements. Enfin, nous avons examiné le recours des étudiants aux contre-exemples et au graphique pour justifier leurs réponses. Cet examen a permis de recenser exactement un contre-exemple et trois dessins dans le premier groupe, sept contre-exemples et quatre dessins dans le deuxième groupe. Parmi tous les contre-exemples et tous les graphiques rencontrés, nous avons relevé un seul contre-exemple et un seul dessin qui remplissent leur fonction. Ce constat pourrait traduire le fait que la contre-exemplification, qu'elle soit d'ordre graphique, algébrique ou autre, n'est pas d'un usage courant chez les étudiants ayant répondu au questionnaire.

À la lumière des résultats que nous venons d'exposer nous pouvons dire que, chez une majorité écrasante des étudiants interrogés, on n'atteint même pas le palier des connaissances basiques. Dès lors, hormis des connaissances calculatoires hypothétiques, les connaissances des étudiants concernés par notre questionnaire rencontrent leurs limites, et sévèrement, au premier niveau. Si nous avons maintenant une idée du niveau auquel se limitent les connaissances des étudiants, nous n'avons pas encore insisté sur ce que sont leurs conditions. Comme nous l'avons précisé au début de ce chapitre, les formes d'erreurs telles qu'elles ont été définies constituent un moyen approprié pour éclairer et saisir les conditions des connaissances des étudiants. Pour mieux préciser les résultats de notre analyse, nous allons les examiner selon la spécificité de chacune des trois formes d'erreurs que nous avons distinguées auparavant.

Erreurs d'identification

Comme nous l'avons précisé dans l'analyse a priori les questions Q_{11} et Q_{13} nous semblent bien désignées pour saisir cette forme d'erreurs. Les résultats issus de l'examen de ces deux

questions (voir tableau ci-dessous) laissent voir des disparités dans les erreurs d'identification entre aire et intégrale, d'une part, et entre primitive et intégrale, d'autre part.

Erreur	Identification aire-intégrale		Identification primitive-intégrale		Pas de réponse	
	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2
Nombre d'erreurs	43	39	13	15	3	1

Comme on peut le voir, l'identité entre aire et intégrale est en quelque sorte une erreur avérée dans 82 réponses sur un total de 148 réponses reçues (environ 55%). Dans la mesure où les résultats sont obtenus à partir des réponses des étudiants à deux questions différentes dont l'une, en l'occurrence Q_{13} , est précise et explicite, nous considérons qu'il est assez fiable. En revanche, l'identité entre primitive et intégrale se donne à voir comme une erreur moins fréquente (28/148, soit environ 19%). Mais c'est peut être parce que nous ne l'avons pas interrogé directement comme nous l'avons fait avec la première, en ce sens qu'il n'a pas été explicitement demandé aux étudiants de comparer $\int_a^b f(x)dx$ et $F(x)$ où f est une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b et F est une primitive de f sur I .

Ces erreurs d'identification semblent bien installées chez un bon nombre d'étudiants, et risquent d'être déjà un obstacle à la compréhension. Ce sont des connaissances « *mal faites* » qui se recommandent pourtant aux yeux de beaucoup d'étudiants d'une validité et d'une efficacité, dans la mesure où elles leur ont permis une certaine réussite dans le contexte stéréotypé des exercices en classe terminale. Un élève à qui on a régulièrement demandé de manipuler des intégrales pour calculer des aires pourrait finir par acquérir la conviction que l'intégrale n'est pas autre chose qu'une aire.

Erreurs de confusion

Les formes d'erreurs dont il est question ici concernent la confusion entre condition nécessaire, condition suffisante et équivalence logique, d'une part, et toutes autres sortes de confusions, d'autre part. Comme nous l'avons précisé dans l'analyse a priori, ces formes d'erreurs sont traquées à travers les questions Q_{14} , Q_{21} et Q_{23} . Les résultats issus de l'examen des réponses des étudiants à ces trois questions sont résumés dans le tableau suivant :

Erreur	$CN - CS - EQ$		Autres		Pas de réponse	
	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2
Nombre d'erreurs	46	41	8	3	5	6

Comme on peut le constater dans ce tableau, le nombre d'erreurs de confusions, surtout entre condition nécessaire et condition suffisante, est considérable. Pour mieux comprendre ces résultats, il nous faut rappeler que, dans ces trois questions, très peu d'étudiants ont produit des réponses recevables (15 réponses au total, soit environ 7%). Les autres étudiants ayant répondu par « faux » sans aucune forme de justification. Dès lors, il y a lieu de penser que la majorité des étudiants ont à propos des propriétés de l'intégrale des connaissances confuses et inadéquates.

Erreurs de validité

Ces erreurs sont observables dans toutes les questions. L'examen des copies des étudiants a donné les résultats suivants :

Erreur	Validité interne		Validité externe		Pas de réponse	
	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2
Nombre d'erreurs	77	83	73	99	57	42

Ces résultats donnent à voir l'importance des difficultés et des faiblesses des étudiants interrogés. Des faiblesses au niveau des conditions de validité des énoncés mathématiques qu'ils utilisent. C'est le cas, par exemple dans la question Q_{11} à propos de la définition de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$. Aucun des 28 étudiants ayant défini l'intégrale par la formule de Newton-Leibniz n'a évoqué la continuité de f pour justifier l'existence d'une primitive F . Des difficultés à reconnaître qu'une tâche relève du calcul intégral, à manipuler et à contrôler des opérations algébriques. Nous voyons par exemple que 19 étudiants (soit 25%) n'ont pas répondu à la question Q_{22} et que 47 autres (soit environ 62%) n'ont produit sur la question que des réponses confuses ou absurdes. Mais le cas de la question Q_{25} est plus instructif. En effet, 34 étudiants (environ 45%) n'ont pas répondu à cette question et 37 autres ont produit toutes sortes d'erreurs. Cette question rend compte des difficultés qu'ont les étudiants interrogés à comprendre une tâche mathématique qui se distingue des tâches qui leur sont familières de type « *calculer l'intégrale* ». Cette question a permis de faire apparaître toutes sortes d'erreurs où se déploient côte à côte les conceptions les plus singulières, les plus absurdes et les plus aberrantes. En fait ces erreurs s'interprètent aussi bien en termes de confusion qu'en termes de validité des connaissances et montrent dans le même temps la présence de beaucoup de vrai dans les propos de certains enseignants d'université lorsqu'ils parlent de connaissances incomplètes, voire fausses et inutilisables.

III.8. Conclusion du questionnaire

Ce questionnaire nous a permis de vérifier le bien fondé des propos de certains enseignants d'université rapportés en début de ce chapitre et d'évaluer les connaissances sur la notion d'intégrale capitalisées en classe terminale par les étudiants interrogés.

Ce qui nous paraît le plus remarquable c'est l'importance des connaissances « mal faites » qui semblent bien installées chez les étudiants qui ont répondu au questionnaire. Nous avons en effet constaté que ces connaissances ont atteint un niveau où on ne pourra plus les définir véritablement en termes traditionnels de validité et de rigueur mathématiques. L'analyse nous a permis de vérifier que le contenu des connaissances disponibles chez les étudiants ne peut se recommander au mieux que d'une recevabilité de facture institutionnelle et qu'elles n'atteignent pas aux prérequis à l'entrée en première année d'université.

L'examen des copies des étudiants nous a permis de dégager au moins quatre résultats importants. D'abord, c'est l'identification entre aire et intégrale qui se distingue par son ampleur. Pour 53 étudiants (soit environ 70%) parmi les 76 étudiants ayant répondu au questionnaire, l'intégrale n'est pas autre chose qu'une aire. C'est ici, plus qu'ailleurs, que l'on peut saisir une première limite des connaissances des étudiants ayant cette conception de l'intégrale. L'analyse de cette limitation fait bien apparaître le problème : les élèves ayant manipulé en classe terminale le calcul d'intégrales pour évaluer des aires, finissent par traiter l'intégrale et l'aire en tant que synonymes. Le rapport que ces étudiants ont avec la notion d'intégrale est vicié en ceci que cette dernière est interprétée en termes d'aire en dehors de toute considération sur les propriétés que la fonction possède ou ne possède pas.

Le deuxième résultat, non moins important que le premier, concerne la question de validité des connaissances des étudiants en rapport avec les savoirs et les savoir-faire scolaires qu'ils utilisent. Sur la question de validité, nous avons recensé 332 erreurs sur 737 réponses reçues. Ces erreurs révèlent sous certains rapports les connaissances des étudiants sur leurs propres utilisations. L'analyse des copies rend en effet compte que les étudiants ne cherchent pas, et peut-être ne comprennent pas, les conditions qui valident les résultats mathématiques qu'ils utilisent et qu'ils produisent ; aussi observe-t-on certains étudiants invoquer des arguments de dérivabilité là où ils ont besoin de la continuité seulement, de monotonie de la fonction à la place de son signe, etc.. Ce constat donne à voir des imprécisions et des imperfections qui entachent une grande partie des connaissances des étudiants interrogés et confirme dans une certaine mesure la croyance prévalente chez beaucoup d'enseignants d'université.

Un troisième résultat remarquable qui est directement liée à la fois aux conditions et aux limites des connaissances des étudiants interrogés touche la logique mathématique. Les étudiants, dans leur grande majorité, confondent entre condition nécessaire, condition suffisante et équivalence. Leurs réponses recèlent beaucoup d'incohérences et de contresens, le plus souvent conséquences des erreurs d'identification. Dans la mesure où ces erreurs sont observées sur des réponses effectives de la majorité des étudiants, il nous semble qu'elles expriment plus que de simples confusions, elles pourraient constituer pour ces étudiants un ordre de faits qui est faux. Comme souvent ces confusions se déploient dans l'action qui, à son tour, les perpétue et les renouvelle, l'ordre de faits qu'elles gouvernent risque de mettre en échec la construction par ces étudiants de connaissances adéquates sur la notion d'intégrale et, à partir de là, les empêcher d'accéder à un niveau supérieur de connaissances.

Le dernier résultat que notre analyse retient concerne la place de la contre-exemplification dans la démarche mathématique des étudiants. L'examen des copies¹⁸⁸ des étudiants nous a permis de recenser 7 dessins et 8 contre-exemples dans le registre algébrique dont un seul dessin et une seule fonction définie par son expression algébrique conviennent. Ce résultat rend compte de la faiblesse des étudiants en matière de contre-exemplification et l'absence de recours par ces derniers à d'autres registres, notamment le registre numérique. Il y a ici ce qui pourrait confirmer ce que nous disions à propos du fait que le recours à des contre-exemples, pourtant d'une grande pertinence dans l'activité mathématique, est un outil très sous-utilisé dans l'enseignement tunisien.

Les questions qui tentent de rappeler et de préserver la rigueur et la logique mathématique sont écartées de l'ensemble des tâches fréquemment proposées aux élèves. L'activité mathématique que les élèves en classe terminale fréquentent trouve ses pôles dans des types de tâches comme « *calculer l'intégrale...* » ; « *calculer l'aire...* » ; « *établir l'égalité...* » ; « *établir l'encadrement...* ». Elle trouve ses pôles dans des méthodes et des formules routinisées et standardisées qui ne conviennent pas aux tâches que propose ce questionnaire où le calculatoire est strictement retenu en tant qu'outil au service de compétences capables de conjuguer à la fois savoirs enseignés, synthéticité¹⁸⁹ et esprit critique. La routinisation et la standardisation exercent un contrôle et opèrent une réduction sur les formes et le domaine de la réflexion, de l'abstraction, du développement, de la contradiction ; elles les réduisent en

¹⁸⁸ Nombre des copies=76 ; Nombre des réponses reçues =737.

¹⁸⁹ Par synthéticité, nous entendons le caractère de ce qui peut se voir comme le résultat de la mobilisation et l'utilisation conjointe de plusieurs notions et/ou de plusieurs connaissances en un tout organisé, cohérent et offrant une vision globale de ce qu'on fait et pourquoi on le fait.

substituant les procédures aux concepts. Ce modèle d'activité, particulièrement dominant dans l'enseignement secondaire tunisien, nie ou escamote la recherche dialectique entre vrai et faux.

Dans ce modèle, les conditions de validité des concepts qu'il utilise ne sont pas discutées mais elles sont justifiées dans les énoncés de la situation et/ou par elles-mêmes dans l'action. Cela permet à des connaissances de surface à continuer à fonctionner, diminuées, mais adaptées et des conditions assez bonnes. En fait, il nous semble qu'il y a une redéfinition complète de l'activité mathématique de l'élève, de sa fonction et de son contenu. L'adaptation de l'élève avec l'activité mathématique qu'il fréquente affecte les couches de l'esprit où sont élaborés les concepts qui sont destinés à élargir le champ des connaissances de l'élève et à les préparer au mieux à des constructions ultérieures. Pour voir à quel point l'enseignement secondaire tunisien rompt avec cette orientation, il n'est qu'à voir le rapport que les étudiants concernés par notre questionnaire ont avec le vrai et le faux. Ce rapport est très singulier en ceci que ces étudiants affirment des réponses, ils ne les justifient pas, ils ne discutent pas les conditions de la véracité ou de la fausseté des propositions qui leur sont soumises. Beaucoup d'entre eux alignent côte à côte des opposés et leurs réponses manifestent l'absence de toute forme de l'exercice d'un esprit critique et/ou de raisonnement mathématique.

À la lumière de ce dernier développement, de l'analyse du manuel scolaire et des épreuves du baccalauréat et enfin des résultats que l'analyse des réponses des étudiants a permis de dégager, nous estimons, avec toutes les précautions qui s'imposent, que l'orientation qui gouverne l'enseignement de l'intégrale en classe terminale n'atteint pas les objectifs fixés dans les textes du programme officiel et ne prépare pas au mieux les nouveaux bacheliers au premier cycle d'université.

TROISIÈME PARTIE

INGÉNIERIE DIDACTIQUE

1. Introduction

L'ingénierie présente une approche pour introduire l'intégrale en classe terminale. Il s'agit de proposer une réalisation effective d'un cours dans une classe ordinaire, c'est-à-dire un cours réalisé dans des conditions réelles avec tout ce qu'il peut inclure comme contraintes. Les questions posées dans cette ingénierie sont principalement la faisabilité et la mise en œuvre d'une alternative à l'approche proposée dans le manuel scolaire. Cette alternative part des questions suivantes qui nous ont servi de base à notre troisième question de recherche:

- Est-il possible d'organiser un enseignement de l'intégrale autour d'une problématique qui rend compte des articulations épistémologiques entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive ?
- Comment faire fréquenter à des élèves en classe terminale la mise en rapport de ces notions?
- Qu'est-ce qui est effectivement possible d'être mis en œuvre, en situation réelle de classe, pour permettre à ces élèves de construire du sens autour de la notion d'intégrale ?

Mais avant d'essayer de répondre à ces questions, il nous semble nécessaire d'expliquer les motivations de l'ingénierie, préciser les outils théoriques et les orientations méthodologiques utilisés dans nos analyses.

2. Pourquoi cette ingénierie ?

Rappelons qu'une ingénierie didactique est une méthodologie de recherche didactique qui comprend quatre phases : les analyses préalables, la conception et l'analyse a priori de situations didactiques, l'expérimentation, l'analyse a posteriori et l'évaluation. La première phase est destinée à faire émerger les connaissances liées au domaine étudié, afin de préparer la phase de conception qui suivra, et prennent en compte les objectifs spécifiques de la recherche. Ces analyses préalables concernent :

- a) l'analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement.
- b) l'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets.

- c) l'analyse du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation didactique effective.
- d) l'analyse des conceptions des élèves, des difficultés et obstacles rencontrés.

Pour mieux expliquer à la fois notre choix et notre démarche, nous référons à Artigue (1996) :

On considère un point du système didactique dont le fonctionnement apparaît, pour des raisons qui peuvent être de nature diverse, peu satisfaisant. On analyse ce point de fonctionnement et les contraintes qui tendent à en faire un point d'équilibre du système puis, en jouant sur ces contraintes, on cherche à déterminer les conditions d'existence d'un point de fonctionnement plus satisfaisant.

L'analyse du manuel scolaire a révélé que la présentation du chapitre « *Intégrales* » n'est pas satisfaisante. L'approche adoptée dans le manuel présente plusieurs faiblesses. En particulier, il nous semble qu'elle ne favorise pas le développement du sens mathématique de la notion d'intégrale et ne rend pas suffisamment compte des liens entre aire, intégrale et primitive. Cette faiblesse apparaît à tous les niveaux de l'analyse. De plus, en insistant à l'excès sur les tâches calculatoires, le manuel scolaire fait passer au second plan les autres aspects de la notion d'intégrale négligeant en particulier les moyens susceptibles d'aider l'élève à construire des connaissances riches, exactes et précises. Les incohérences, les confusions, les approximations dont nous avons rendu compte de l'importance chez les étudiants en première année d'université ne sont pas des simples sous-produits de l'enseignement de l'intégrale dans le secondaire, elles sont au cœur même de l'approche conceptuelle qui le dirige. Sans doute ces erreurs sont-elles imputables aux élèves, mais notre analyse du manuel révèle aussi un manque de rigueur et une négligence didactique susceptibles d'induire chez les étudiants à la fois mécompréhension et confusions. Ces faiblesses ne vivent pas seulement dans le manuel, mais elles sont susceptibles de vivre aussi, et peut-être surtout, dans la classe. L'enquête menée auprès d'un groupe d'enseignants de terminale montre que le manuel scolaire est la référence et le support de cours privilégié pour la majorité d'entre eux. En outre, ces derniers semblent surtout manquer de référence quant aux erreurs de leurs élèves ; ces erreurs ne sont pas identifiées, elles ne sont pas exposées, elles ne sont donc pas anticipées. L'enquête donne aussi à penser qu'il y a, dans la pratique en classe de ces enseignants, une grande centration sur le travail des compétences calculatoires. Cette pratique laisse peu de place (ou pas du tout) à la compréhension de la notion d'intégrale. En effet, comprendre la notion d'intégrale est

tout autre chose que savoir calculer une intégrale. Les faiblesses mises en évidence par notre analyse, même si elles ne constituent pas la cause des erreurs constatées chez les étudiants mais seulement leurs effets secondaires, ne justifient-elles pas la mise en question de la manière dont la notion d'intégrale est développée dans le manuel scolaire tunisien ?

Selon notre analyse la principale faiblesse de l'approche en question se situe dans la première partie du cours qui sert à introduire les élèves à la notion d'intégrale. Cette introduction n'est pas satisfaisante aussi bien au niveau de l'organisation didactique qu'au niveau de l'organisation mathématique. Au premier niveau, nous avons rendu compte d'une négligence didactique manifeste. Dans les situations proposées les enjeux ne sont pas précisés, ils ne sont même pas évoqués. Également escamotée est la logique qui sous-tend l'enchaînement de ces situations, elle n'est pas indiquée, elle n'est pas commentée. Quant à l'organisation mathématique, elle ne fait apparaître aucune problématisation de la notion d'intégrale. La notion d'aire d'une surface non polygonale est traitée avec indifférence et de façon circulaire. Les activités préparatoires proposent en effet des tâches de calcul sur l'aire de surfaces non polygonales alors même que l'aire du sous-graphe d'une fonction continue et positive n'est définie que plus tard. Ainsi, on définit l'aire non polygonale qui est utilisée dans la situation sur laquelle s'appuie la définition.

Nous considérons cependant qu'il existe des possibilités pour améliorer la présentation de la notion d'intégrale en classe terminale. Mais ces possibilités sont actuellement sous-utilisées dans l'enseignement tunisien et, peut être même, ignorées. Quelles sont ces possibilités ? Comment peut-on les utiliser pour organiser, sous une forme plus pertinente, l'enseignement de l'intégrale en classe terminale? Comment en rendre compte ?

L'ingénierie que nous proposons, en tant que *projet*¹⁹⁰ alternatif à celui du manuel scolaire, s'attache en somme à éclairer ces questions en mettant en avant quelques unes de ces possibilités et une manière de les utiliser. Ce faisant, l'ingénierie apporte une réponse à notre troisième question de recherche :

Q₃ : Est-il possible d'élaborer une alternative au projet institutionnel qui proposerait une approche essentiellement différente de celle du manuel scolaire, une logistique didactique qualitativement plus pertinente, une nouvelle orientation pour l'activité mathématique de l'élève plus riche et plus productive ?

¹⁹⁰ Nous utilisons le terme *projet* parce qu'il nous semble être le terme le mieux adapté au caractère spécifique de l'enseignement.

Mais avant d'entreprendre cette tâche, il nous semble important de commencer par souligner les difficultés que nous avons rencontrées dans l'élaboration de l'ingénierie.

3. Les difficultés liées à l'élaboration de l'ingénierie

Il y a lieu de préciser ici au moins deux difficultés, liées à notre dernière question de recherche, que nous posons comme une question intérieure à l'élaboration de l'ingénierie. La première, qui concerne le choix des situations pour introduire la notion d'intégrale, est un problème classique de commencement :

Quelle situation porteuse de l'idée d'intégrale, faisable et compatible avec l'enseignement en amont et en aval, peut-on proposer à ce niveau ?

La deuxième difficulté concerne la notion d'aire. Il nous faut rappeler que dans l'enseignement tunisien la notion d'aire est présente dans un vide technologique, en ce sens que la définition de l'aire élémentaire et ses propriétés ne sont pas exposées ; elles ne sont pas explicitées ; elles ne sont pas enseignées. Les résultats du test d'évaluation sur la notion d'aire auquel nous avons soumis des élèves de terminale montrent que les connaissances de la plupart d'entre eux sont lacunaires et inadéquates. La question que soulève ici la notion d'aire est à la fois complexe et difficile. Nous sommes face à deux choix. D'un côté, nous sommes soucieux de donner des énoncés précis de la définition et des propriétés de l'aire. D'un autre côté, nous sommes conscient du fait que développer proprement et en toute rigueur la notion d'aire et ses propriétés essentielles est difficile et coûteux. La première partie de ce travail donne une idée claire à la fois sur la problématique et sur la complexité d'une telle entreprise. Mais la notion d'aire est au cœur même de la notion d'intégrale et en constitue l'accès naturel :

Peut-on alors adapter à ce niveau de scolarité une présentation de la notion d'aire qui soit valable mathématiquement et acceptable socialement et culturellement ?

L'examen des difficultés posées ici nous a conduit à envisager d'inclure dans l'ingénierie une phase pour discuter dans la classe les propriétés essentielles de l'aire et de les énoncer. Ce choix est justifié par le fait que les connaissances requises dans les problèmes de calcul d'aire ne sont pas limitées à celles indiquées dans le programme officiel mais que les situations dans lesquelles elles sont susceptibles d'être utilisées donnent un rôle décisif à des propriétés de l'aire qu'il convient de préciser aux élèves. L'importance de ces connaissances apparaît

clairement aux deux niveaux où l'ingénierie met en jeu la notion d'aire et ses propriétés ainsi qu'une mise en rapport entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive.

4. Présentation de l'ingénierie

L'ingénierie est constituée de trois *situations* organisées autour de deux problématiques différentes mais connexes : celle du calcul de l'aire d'une surface non polygonale et celle du calcul de l'intégrale d'une fonction continue. La notion d'aire, nous l'avons dit, est considérée par l'institution comme intuitive, claire par elle-même et naturalisée depuis l'école primaire. Mais, en réalité, il en est autrement. Pour essayer d'anticiper sur des formes de difficultés possibles chez les élèves qui participent à l'ingénierie, nous avons choisi de commencer par organiser une phase de rappel et d'approfondissement sur les propriétés de l'aire élémentaire. Ce choix répond à notre souci de donner à l'élève les outils nécessaires pour justifier les calculs sur les aires qu'il aura à faire et de donner à nos développements ultérieurs la rigueur nécessaire.

La première situation est ce que nous qualifions de *situation de structuration/apprentissage*. Elle vise la mobilisation et la réorganisation de connaissances mathématiques et empiriques anciennes de l'élève et à établir la médiation entre ces connaissances et un savoir mathématique nouveau. Les connaissances anciennes et le savoir nouveau portent sur la notion d'aire élémentaire, celle des surfaces polygonales. Cette situation nous donne occasion pour poser le problème de l'aire d'une surface non polygonale.

La deuxième situation est une mise en œuvre de la procédure intégrale dans le cas du sous-graphe d'une fonction continue positive et croissante. La situation sert de support pour présenter l'intégrale comme une réponse à la question : *comment calculer l'aire d'une surface non polygonale ?*

La troisième situation consiste à établir, dans le cas d'une fonction f continue positive et croissante sur un intervalle $[a, b]$, que la fonction $A: x \mapsto A(x)$, où $A(x)$ est l'aire du sous-graphe de f restreinte à l'intervalle $[a, x]$, est dérivable en tout x de $[a, b]$ et que $A'(x) = f(x)$. La situation sert de support pour présenter la notion de primitive comme une réponse à la question : *comment calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$?*

En résumé, l'ingénierie met en avant une problématisation de l'intégrale et une méthode généralisable à l'ensemble des fonctions continues, voire des fonctions continues par morceaux.

5. Les références théoriques utilisées dans l'élaboration de l'ingénierie

Compte tenu de notre méthodologie de recherche et du cadre théorique précisé dans l'introduction générale de la thèse, l'ingénierie que nous proposons, en tant qu'elle est une séquence d'enseignement/apprentissage que nous posons comme une alternative au projet du manuel scolaire, est le résultat d'une longue réflexion en même temps que le projet d'un cours ordinaire. Son élaboration s'appuie sur des choix théoriques articulant trois approches : épistémologique, didactique et psychocognitive.

5.1. L'approche épistémologique

Si nous cherchons à tracer un lien, à tout le moins géométrique, entre la notion de primitive et la notion d'intégrale, il nous faut bien reconnaître que la problématique qui sous-tend ce lien renvoie à celle de la notion d'aire. Pour bien comprendre les articulations épistémologiques entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive, nous renvoyons à la première partie de ce travail ainsi qu'au livre de Rogalski (2001) « *Carrefour entre Analyse-Algèbre-Géométrie* ».

Pour rester, comme il convient, dans les limites du programme de terminale qui préconise l'enseignement de l'intégrale définie d'une fonction continue, il suffit d'examiner les premiers développements du calcul intégral par Newton et Leibniz exposés dans la première partie de ce travail. L'intuition centrale de Newton suit une démarche globale qui se fonde sur la notion d'intégrale indéfinie et donc sur le calcul de primitives. En revanche, l'intuition centrale de Leibniz suit une démarche locale qui met en avant la notion d'intégrale définie. Ces deux démarches, nous l'avons dit, se fondent sur deux problématiques différentes et utilisent des méthodes différentes : la *procédure primitive* pour la première et la *procédure intégrale* pour la seconde. La première cherchant à obtenir d'un seul coup ce que la deuxième obtiendrait par la sommation d'un nombre infini de contributions élémentaires.

Ces deux points de vue sur l'intégrale doivent être compris l'un par l'autre, en dépit de la différence fondamentale de leurs intuitions centrales. En effet, prises ensemble et éclairées l'une par l'autre, ces deux démarches se communiquent leurs outils et se fertilisent mutuellement. C'est précisément cette idée qui gouverne et pilote notre ingénierie en même temps qu'elle fixe notre choix d'ordre épistémologique. Elle se fonde sur des hypothèses spécifiques à propos des relations entre savoirs et apprentissages. Nous considérons que la construction du sens de l'objet mathématique *Intégrale* se réalise à l'aune de mises en relations entre aire, intégrale et primitive et des différentes représentations de ces objets.

5.2. L'approche didactique

Du point de vue didactique, l'idée de base de l'ingénierie est double. Elle consiste en premier lieu à proposer une approche articulant assez tôt les notions d'aire, d'intégrale et de primitive qui soit à la fois réalisable dans le cadre d'un cours ordinaire et accessible à des élèves en classe terminale à l'aide de leurs connaissances actuelles. L'idée est en second lieu de placer l'élève dans une situation où il peut engager pleinement sa pensée et son action. Il faudra convenir que la situation doit permettre à l'élève de construire de nouvelles connaissances. Qui plus est, la situation doit fournir à l'élève une occasion pour consolider et stabiliser des connaissances anciennes, organiser et coordonner des savoirs déjà acquis, mais séparément.

La notion d'aire permet de construire des situations qui répondent de manière satisfaisante aux objectifs de l'ingénierie. Dans la mesure où ces situations s'appuient sur des connaissances anciennes supposées disponibles chez les élèves (ou à réactiver et/ou à réactualiser), elles offrent des *situations de rappel* (Perrin-Glorian, 1992) et se posent avec tout un réservoir de potentialités didactiques. En effet, l'ingénierie est conçue de sorte qu'elle favorise l'engagement des élèves dans des activités de calcul d'aire et de calcul sur les suites, dans des activités graphique et géométrique. Ces activités devraient permettre aux élèves d'observer, d'interpréter et de valider des résultats issus de leurs activités. Dans le même temps, il y a dans l'ingénierie des savoirs méthodologiques nouveaux, enjeu d'enseignement, qui nécessitent plusieurs types d'adaptations¹⁹¹ que nous préciserons plus loin.

5.3. L'approche psychocognitive

L'ingénierie alterne des phases d'activités autonome et collective de l'élève. Cette alternance de phases doit lui permettre d'engager son action propre et de participer à l'enrichissement et à l'évolution des différents niveaux de la situation. Il faut également souligner l'importance de cette alternance dans l'engagement actif de l'élève dans la construction de ses connaissances. Les tâches que nous proposons à l'élève correspondent, au sens de l'approche socioconstructiviste, avec la zone de développement proximal. Nous considérons que c'est précisément dans cette zone que l'élève donne du sens à son activité et capitalise des connaissances utiles, c'est-à-dire qu'il comprend et apprend des mathématiques, et surtout qu'il s'initie à en faire.

¹⁹¹ Au sens d'Aline Robert.

6. Éléments théoriques pour les analyses

Pour rendre compte de l'accessibilité et de la pertinence de l'approche que nous proposons, nous allons préciser les outils théoriques et les orientations méthodologiques que nous utilisons dans nos analyses. Comme nous l'avons évoqué au début de ce travail, nous utilisons des outils issus de la théorie des situations et de la double approche. Ces outils nous semblent suffisamment adaptés pour analyser l'ingénierie à la fois du point de vue du *contenu mathématique* et du point de vue de la *logistique didactique* associée. Soulignons que la dimension de la logistique didactique qui nous intéresse ici est celle relative aux moyens (intellectuels et matériels) mis en œuvre par l'enseignant pour organiser l'*activité de la classe* autour du contenu mathématique en jeu. Nous appelons activité de la classe tout ce qui est abordé et tout ce qui est mis en œuvre pour travailler le contenu en jeu au cours d'une séance d'enseignement : tâches proposées aux élèves, discours mathématique et non mathématique, gestion des rôles et des interventions des uns et des autres, utilisation de la calculatrice, utilisation du tableau, utilisation d'autres supports, etc.

Pour rendre compte du contenu mathématique et les différentes composantes de la logistique didactique envisagées, nous nous appuyons, comme précisé dans l'introduction générale, sur des éléments théoriques issus de la théorie des situations initialement développée par Brousseau (1990) et de la double approche¹⁹² élaborée par Robert et Rogalski (2002).

6.1. Éléments issus de la théorie des situations

6.1.a. Structuration du milieu

Commençons par rappeler la structuration du milieu selon le schéma de Margolinas (1995) :

M_3 : M- de construction		P_3 : P- noosphérien	S_3 : situation noosphérienne	Sur- didactique
M_2 : M- de projet		P_2 : P- constructeur	S_2 : situation de construction	
M_1 : M- didactique	E_1 : E-réflexif	P_1 : P- projeteur	S_1 : situation de projet	
M_0 : M- d'apprentissage	E_0 : Élève	P_0 : Professeur	S_0 : situation didactique	
M_{-1} : M- de référence	E_{-1} : E-apprenant	P_{-1} : P-observateur	S_{-1} : situation d'apprentissage	A- didactique
M_{-2} : M- objectif	E_{-2} : E-agissant		S_{-2} : situation de référence	
M_{-3} : M- matériel	E_{-3} : E-objectif		S_{-3} : situation objective	

Structuration du milieu

¹⁹² Méthodologie élaborée par les auteurs pour analyser les déroulements en classe du point de vue de la didactique et de la psychologie ergonomique.

Dans sa thèse, Bloch (2000) discute ce modèle à partir de l'étude de situations pouvant comprendre une composante adidactique. Contrairement à Margolinas, qui se place dans la perspective d'un professeur pour l'élève et laisse vide les deux dernières cases de la situation du professeur, Bloch fait l'hypothèse que « *le travail du professeur et son apprentissage, dans son activité mathématique en classe, se situent surtout dans les niveaux adidactique* » (Bloch, 2000, p.74). Elle enrichit le modèle précédant en proposant de le compléter par un milieu matériel et un milieu objectif pour l'enseignant :

Le milieu objectif du professeur est constitué des éléments de la situation, des actions des élèves et surtout des connaissances de ceux-ci et des modifications que ces connaissances provoquent dans le milieu objectif des élèves. La situation de référence, pour l'enseignant, s'établit donc par rapport à l'élève agissant; il en résulte qu'à ce niveau, contrairement au niveau précédent, le professeur ne surdétermine plus aucune part du milieu, puisque le milieu objectif de l'élève comporte déjà des réalisations de celui-ci, tentatives, erreurs, connaissances... Dire qu'il ne surdétermine plus le milieu dans lequel il évolue et avec lequel il interagit ne signifie nullement qu'il en a perdu tout contrôle: c'est ici qu'interviennent des connaissances utiles à ce contrôle. (Bloch, 2000, p.76).

6.1.b. Contrat didactique

Le second angle d'approche de la situation didactique est la notion de contrat didactique. L'emploi simultané des notions de milieu et de contrat didactique est susceptible de renseigner le partage des responsabilités entre enseignant et élèves en même temps que les occasions laissées à l'élève pour consolider et stabiliser des connaissances anciennes et pour acquérir de nouvelles connaissances. Perrin-Glorian et Hersant (2003) proposent d'affiner la caractérisation des contrats fortement didactiques au sens de Brousseau (1996) en considérant de nouvelles dimensions du contrat didactique autres que le partage des responsabilités entre les différents acteurs de la situation :

Nous distinguerons ainsi quatre composantes du contrat didactique. Les deux premières sont liées au savoir en jeu; le domaine mathématique, le statut didactique du savoir, la troisième composante est liée à la nature et aux caractéristiques de la situation didactique en cours, la dernière à la répartition entre le professeur et les élèves des responsabilités liées au savoir. (Perrin-Glorian et Hersant, 2003, p.238).

Les auteurs distinguent par ailleurs trois niveaux de structuration du contrat qui correspondent à différentes échelles de durée et d'enjeux didactiques :

- Le *macrocontrat* à l'échelle d'un objectif d'enseignement au moins.
- Le *méscontrat* à l'échelle de la réalisation d'une activité.
- Le *microcontrat* à l'échelle d'un épisode.

Cette classification est établie en fonction du niveau auquel se stabilisent certaines composantes du contrat didactique. Nous considérons qu'à l'échelle de l'ingénierie que nous proposons, la dimension épistémologique du savoir, l'approche didactique et l'approche psychocognitive sont relativement stables et qu'elles caractérisent le macrocontrat. Par ailleurs, les auteurs ont mis en évidence treize types de méscontrat selon les deux composantes qui se stabilisent à ce niveau : le statut didactique du savoir (ancien, nouveau, en cours) et le niveau d'adidacticité du milieu¹⁹³. Suivant les différents types de méscontrat, la stabilité du partage des responsabilités entre enseignant et élèves face au savoir est une stabilité a priori ; elle est virtuelle : reconnaissance, mobilisation, adaptation, réinvestissement, restitution sont généralement à la charge de l'élève ; initiation, rappel, dévolution et institutionnalisation relèvent plutôt de la responsabilité de l'enseignant. Mais souvent l'analyse a posteriori permet de constater que le partage des responsabilités entre enseignant et élèves est géré tout autrement que ce qui est prévu a priori. Ceci conduit les auteurs à considérer que le partage de responsabilité face au savoir n'est pas stable au niveau du méscontrat et à introduire la notion de micro-contrat. Cette dernière notion est centrée sur la dimension du contrat didactique au sens de Brousseau (1996)

Les méscontrats didactiques

Les méscontrats didactiques sont résumés dans le tableau ci-après dans lequel les auteurs indiquent le sens principal des relations entre situation, savoirs et connaissances des élèves. Dans ce tableau les symboles S , Σ et K désignent respectivement *situation*, *savoirs* et *connaissances* des élèves.

¹⁹³ On pourra consulter à cet effet, dans l'article cité ci-dessus, le tableau proposé à la page 242.

→ Avancée du temps didactique →					
Statut du savoir → Type de situation ↓	Savoir entièrement nouveau	Savoir en cours d'apprentissage			Savoir déjà institué
		Après une première rencontre	En cours d'institutionnali sation	Institutionnali sé à exercer	
Absence de milieu adidactique ou non utilisation de ce milieu	$\Sigma \rightarrow K$ <i>Initiation</i>	$\Sigma, S \rightarrow K$ <i>Pseudo – dévolution</i>	$K \leftrightarrow \Sigma$ <i>Reconnaissance du savoir</i>		$\Sigma \rightarrow S$ <i>Mobilisation du savoir</i>
Existence d'un milieu adidactique permettant des rétroactions interprétables par les élèves	$S \rightarrow K$ <i>Dévolution d'une première situation</i>	$S \leftrightarrow K$ <i>Rappel</i>	$\Sigma \rightarrow K$ <i>Entraînement</i>		$\Sigma \rightarrow \Sigma$ <i>Restitution du savoir</i>
		$\Sigma \rightarrow K$ <i>Réinvestissement de savoirs</i>			$(S \rightarrow K)$ $\Sigma \rightarrow \Sigma$ <i>Revue de savoirs</i>
		$K \rightarrow S$ <i>Réinvestissement de connaissances</i>			$S \rightarrow \Sigma$ <i>Reprise</i>
		$K \rightarrow \Sigma$ <i>Institution- nalisation</i>			

Les microcontrats didactiques

Les auteurs précisent qu'en général les microcontrats ne sont pas complètement indépendants des mésocontrats et identifient sept types de microcontrats, répartis en trois catégories.

1. Microcontrats dans lesquels le professeur garde toute la responsabilité :

- *Microcontrat d'information* : Le professeur apporte la connaissance sous une forme générale sans se référer à des exemples et à l'utilisation du savoir.
- *Microcontrat d'ostension assumée* : Le professeur apporte le savoir et montre comment l'utiliser. De plus, il évalue les réponses des élèves.
- *Microcontrat d'ostension déguisée* : Le professeur assume entièrement la responsabilité dans la production des connaissances et l'évaluation mais il dissimule cette responsabilité en utilisant une situation (il utilise la maïeutique ou des effets Topaze) ; (contrat local d'ostension, Salin, 1999).

2. Microcontrats dans lesquels la responsabilité est partagée entre le professeur et la classe :

- *Microcontrat d'adhésion* : Le professeur s'appuie sur quelques élèves de la classe pour produire les connaissances et ainsi faire avancer son cours, sans réellement évaluer les réponses et en laissant aux élèves la possibilité d'intervenir lorsqu'ils ne sont pas d'accord avec ce qui est dit (contrat local d'adhésion, Comiti et Grenier

(1997)). Dans ce microcontrat, l'enseignant donne aux élèves la responsabilité de manifester leur désaccord.

- *Microcontrat de production collective* : Le professeur laisse aux élèves la responsabilité de la production de la connaissance et une part de responsabilité dans la validation des réponses. Le rôle de l'enseignant est réduit à la gestion de prise de parole dans la classe et à la retransmission des informations données par un élève, sans déformation, à l'ensemble de la classe (la part d'adidacticité est importante s'il y a un savoir nouveau à produire).

3. Microcontrats dans lesquels la responsabilité est partagée entre le professeur et chaque élève de la classe :

- *Microcontrat de production individuelle* : Les élèves travaillent individuellement ou en groupes, sans intervention du professeur. Chaque élève assume une part de responsabilité effective dans la production de la connaissance et dans la validation des réponses (ce qui distingue ce microcontrat du microcontrat de production collective c'est que dans ce dernier la part d'investissement peut être très variable d'un élève à un autre).
- *Microcontrat de tutorat* : Le professeur intervient pour aider un élève ou un groupe d'élèves sans entrer dans un microcontrat d'ostension ou d'information.

Dans la mesure où il est possible de déduire la nature globale du contrat (i.e la nature du macrocontrat) à partir de l'analyse d'un certain nombre de composantes à un niveau plus local (composantes du mésocontrat et du microcontrat), les auteurs considèrent que le macrocontrat est davantage caractérisé par les mésocontrats et les microcontrats qu'il permet de faire vivre. Et c'est en ce sens que les auteurs remontent les analyses d'un niveau local à un niveau global.

6.2. Éléments issus de la double approche

La double approche, initialement élaborée comme méthode d'analyse des pratiques enseignantes, accorde une place centrale aux contenus travaillés en classe et s'attache entre autres à rendre compte des apprentissages potentiels des élèves. Dans la perspective de notre travail¹⁹⁴, ce qui nous intéresse dans la double approche c'est la composante liée aux activités des élèves du point de vue de leurs apprentissages potentiels. Les auteurs distinguent trois

¹⁹⁴ Il nous faut préciser ici que notre intention n'est pas d'étudier la pratique enseignante, ce qui nous intéresse c'est particulièrement les différentes aides que l'enseignant peut apporter aux élèves.

dimensions d'analyse spécifiques aux mathématiques qui nous semblent très adaptées à notre recherche :

1. Contenus travaillés en classe et répartition des tâches entre enseignant et élèves

Les auteurs distinguent deux niveaux de description des contenus mathématiques en jeu :

- Globalement, à l'échelle de l'enseignement d'une notion, à un niveau scolaire donné, il s'agit de préciser les dialectiques organisées pour les élèves entre savoir ancien et savoir nouveau, entre contextualisation et décontextualisation des savoirs en jeu.
- Localement, à l'échelle de chaque séance, il s'agit de :
 - déterminer quels sont les savoirs exposés en classe, notamment s'ils sont généraux (décontextualisés), génériques (avec un degré d'abstraction moindre que les précédents), « méta » (portant sur les mathématiques, méthodes, analogies, etc.)
 - décrire les tâches prévues pour les élèves, notamment en termes de découpages des questions, d'étapes, de longueur des problèmes, de niveaux de mise en fonctionnement des connaissances attendus.

2. Formes de travail des élèves pendant les séances

Les questions à renseigner sont les suivantes :

- Qui fait quoi en classe ?
- Avec quelle dynamique temporelle (en termes de durée et d'alternances) ?
- Avec quelles modalités (support et nature de l'activité) ?

Les réponses à ces questions doivent notamment permettre de déterminer :

- Dans quelle mesure certaines tâches sont dévolues aux élèves.
- Comment les élèves travaillent sur les tâches qui leur sont prescrites.
- La nature des interactions des élèves entre eux et avec l'enseignant.
- Les supports de l'activité de la classe (oral, écrit, tableau, etc.).

La nécessité de renseigner ces questions tient surtout à la différence entre ce qui est prévu par l'enseignant et ce qui est effectivement réalisé en classe. Nous développerons ce point plus avant dans la suite.

3. *Échanges avec l'enseignant pendant la séance*

L'étude de cette dimension vise essentiellement toutes les aides apportées par l'enseignant. Les auteurs distinguent deux niveaux d'analyse :

- Localement, il s'agit d'analyser dans le détail la nature et la forme de ces aides :
 - Les aides directes sont celles qui portent sur la tâche en cours comme, par exemple, les informations mathématiques (rappel d'une définition, d'un théorème, d'une formule, etc.) ou métamathématiques (suggérer une définition, un théorème ou une formule à utiliser, insister sur la nécessité de vérifier les conditions de validité d'un énoncé mathématique, etc.).
 - Les aides indirectes sont celles qui se présentent sous forme de mises en relation entre la tâche et un énoncé mathématique utile, d'appel à la réflexion, d'encouragement, des conseils généraux, etc. ou des rappels à l'ordre.
- Globalement, il s'agit de repérer le moment où l'aide intervient (avant ou après l'activité correspondante des élèves), sa nature (exceptionnelle, régulière, etc.) et la fréquence des différentes aides. Le moment où l'aide intervient, notamment, détermine sa fonction, en ce sens qu'elle peut contribuer à compléter, valider ou clore un travail ou, au contraire, le préparer. La nature de l'aide contribue à saisir le niveau auquel l'élève est engagé dans l'action et la réflexion.

L'organisation de la forme de travail de la classe et la gestion des interventions des uns et des autres, enseignant et élèves, s'inscrivent entièrement dans la logistique didactique attachée au contenu mathématique, enjeu du travail de la classe. Ce que nous avons dit jusqu'ici à propos de la logistique didactique ne représente en fait qu'une face de cette notion. Le choix et la conception de l'activité de la classe, le scénario prévu pour l'organiser et la conduire en classe constituent une autre composante importante de la logistique didactique. Il est bien entendu que toutes les composantes de cette logistique sont à la charge de l'enseignant.

Si le travail individuel de l'élève sur les tâches qui lui sont prescrites ne doit rien devoir à l'enseignant, il est en même temps vrai que sa réussite dépend de la logistique didactique mise en œuvre et de sa conduite qui sont entièrement sous le contrôle de l'enseignant. Pour éclairer les positions et les rôles des uns et des autres, élèves et enseignant, des analyses en termes de structuration du milieu et de contrat didactique seront nécessaires.

Par ailleurs, il nous semble qu'il y a lieu de rapprocher certains types de microcontrats de la gestion de ce que Roditi (2003) appelle incident. Pour ce dernier :

L'incident est une manifestation publique (au sens où elle s'intègre à la dynamique de la classe) d'un élève ou d'un groupe, en relation avec l'enseignement, et en décalage négatif par rapport à l'ensemble des réponses correctes envisageables compte tenu de la tâche proposée¹⁹⁵. L'incident n'est pas nécessairement en décalage par rapport à ce que le professeur attend : c'est la tâche proposée aux élèves qui constitue la référence de ce qui est attendu. (Roditi, 2003, p. 192).

Cependant nous pensons élargir le sens de cette notion d'incident en tant qu'elle est *une manifestation publique en décalage par rapport à l'ensemble des solutions valables qui sont attendues dans le projet principal de l'enseignant*. Cet élargissement exige une explication plus approfondie étant donné la définition que nous proposons. L'incident, au sens de Roditi, est une forme de pensée ou de comportement d'un élève qui ne sait pas, qui ne comprend pas et peut-être qui ne peut pas comprendre ce qui est en train de se jouer et pourquoi. Dans la mesure où la manifestation de cette forme est liée à un contenu d'enseignement donné, elle exprime un décalage négatif par rapport à ce qui est attendu dans le projet de l'enseignant. De la même manière, certaines réponses et certaines solutions d'élèves peuvent être *originales* et donc en décalage¹⁹⁶ par rapport à ce qui est attendu, en ce sens qu'elles se situent en dehors de l'ensemble des réponses et des solutions correctes envisagées dans le projet de l'enseignant. Dans la mesure où il est possible que de telles solutions fassent l'objet d'une explication et/ou d'une valorisation particulière, elles sont susceptibles de bousculer le déroulement prévu par l'enseignant. C'est en ce sens qu'elles constituent un incident. Il se peut aussi que l'enseignant lui-même provoque sciemment un incident. C'est le cas par exemple s'il propose, de façon intentionnelle, une affirmation fausse ou s'il nie, toujours de façon intentionnelle, une proposition vraie.

Roditi (2005) rend compte de six types d'incidents qu'il définit comme suit¹⁹⁷ :

1. *Les erreurs* : une erreur dans ce contexte est définie comme étant « toute réponse non conforme à celle qui est manifestement attendue en fonction de la tâche ».

¹⁹⁵ Cette définition est inspirée des travaux de psychologie ergonomique, notamment de ceux de Rogalski (2000). Elle se distingue néanmoins sensiblement des incidents que considèrent les ergonomes par le fait que le professeur peut provoquer volontairement des incidents.

¹⁹⁶ Un tel décalage peut être qualifié de décalage positif.

¹⁹⁷ In : (Mounier, 2010, p. 241).

2. *Les questions ou les propositions*, qui constituent « des éléments nouveaux en cours de résolution d'un problème », et nous ajoutons aussi au cours de la phase de synthèse ou de dévolution.

3. *Les réponses incomplètes* ou non suffisamment argumentées.

4. *Les élèves interrogés qui restent silencieux*.

5. *Ce que disent les élèves quand la réponse est hors de leur portée*.

6. *Les élèves sont en désaccord mais personne n'a tort*, ceci arrive en particulier lorsque plusieurs stratégies de résolution correctes sont exposées.

Roditi a identifié plusieurs modes de gestion des incidents dans le détail desquels nous n'entrons pas ici. L'auteur utilise la notion d'incident comme un observable pour l'étude des déroulements effectifs du point de vue des pratiques enseignantes. De notre côté, nous pensons utiliser avec avantage cette notion d'incidents, non pas du point de vue de leur gestion en tant que des adaptations de l'enseignant mais en tant qu'ils sont un facteur susceptible de modifier le projet de l'enseignant et de le dédoubler. Nous préciserons et nous développerons ce point dans l'analyse a posteriori.

7. Méthodologie

Rappelons d'abord que notre but est de vérifier l'accessibilité de l'approche que nous proposons et d'évaluer sa pertinence. Pour ce faire, nous commençons par procéder à une analyse a priori de l'ingénierie à la fois du point de vue du *contenu mathématique* et du point de vue de la *logistique didactique* associée. Nous mènerons ensuite une analyse a posteriori de sa réalisation effective en classe que nous confronterons au projet virtuel de l'enseignant. Cette dernière analyse est faite à partir un enregistrement vidéo, les transcriptions et les traces écrites des élèves. Nous essayerons enfin de dégager quelques éléments de réponse aux questions d'accessibilité et de pertinence.

CHAPITRE SEPTIÈME

ANALYSE A PRIORI

I. Les observables choisis

L'ingénierie répond à l'expérimentation d'une approche pour enseigner l'intégrale en classe terminale. Dans la mesure où l'approche en question est motivée par une finalité didactique, sa pertinence renvoie pour l'essentiel à sa potentialité en termes d'apprentissages. Ici, il faudra convenir, que l'on soit ou non tout à fait d'accord avec notre point de vue, que cette potentialité se mesure au niveau de *synthéticité* de l'activité mathématique qu'implique l'ingénierie. Par *synthéticité*, nous entendons le caractère de ce qui peut se voir comme le résultat de la mobilisation et l'utilisation conjointe de plusieurs notions et/ou de plusieurs connaissances en un tout organisé, cohérent et offrant une vision globale de ce qu'on fait et pourquoi on le fait. En ce sens, la dimension synthétique de l'activité mathématique a une productivité ou tout au moins un potentiel susceptible de permettre la construction de nouvelles connaissances et d'aider à stabiliser d'autres connaissances supposées acquises. Pour prendre sa pleine valeur, l'activité mathématique de l'élève doit s'appuyer sur des tâches riches et variées susceptibles de provoquer diverses *opérations d'adaptations*. Non seulement cette activité élargit le champ de l'action et de la pensée de l'élève, mais elle donne à ses connaissances plus d'épaisseur et les rend plus productives. Dans cette perspective, on peut dire de la réalité de la connaissance qu'elle est la manière ou le mode suivant lequel l'élève fait la synthèse de son action et de sa pensée et les complète. Dès lors il devient significatif de distinguer entre une connaissance et ses actes. Chez l'élève, une connaissance ne réfère pas seulement à un processus mental en tant qu'il se manifeste dans son action, dans son comportement, dans l'expression de sa pensée, c'est-à-dire en tant qu'il est éprouvé dans son activité mathématique visible. Mais elle réfère aussi à ce qu'il n'exprime pas, à ce qu'il ne montre pas et qui détermine fortement sa compréhension, ses compétences, ses conceptions et leur champ d'exercice. Ce point de vue rejoint celui de plusieurs chercheurs¹⁹⁸, notamment Roditi qui distingue entre l'activité potentielle, l'activité réelle et l'activité effective de l'élève :

¹⁹⁸ Robert et Rogalski (2003), Roditi (2003), Mounier (2010).

Une tâche étant proposée à la classe, l'activité potentielle¹⁹⁹ est ce que l'élève doit faire pour réaliser cette tâche ; l'activité réelle est ce que l'élève a fait pour accomplir la tâche. Cette activité s'effectue essentiellement en pensée, elle conduit parfois à une production. Ainsi l'activité réelle n'est pas toujours accessible au chercheur, ni même au professeur. Cela conduit à considérer finalement l'activité effective qui est la reconstitution de ce qu'aurait pu être l'activité réelle, en fonction de l'activité potentielle et des productions recueillies, notamment ce qui est dit par l'élève. (Roditi, 2003, p. 192).

Les connaissances sont les éléments premiers de l'action et de la pensée, ou plus généralement de l'*expérience*²⁰⁰. Pour prendre toute sa valeur et devenir édifiant, ce dont l'élève fait l'expérience doit s'inscrire dans un continuum de relations et de représentations. Cette expérience est, au sens strict, individuelle et doit être confrontée à celles des autres. C'est à travers la discussion et la confrontation de sa pensée à celle des autres que l'élève peut, pour une grande part, mettre à l'épreuve et au travail ses connaissances. Une fois discutées, complétées et peut-être même rectifiées, ces connaissances deviennent celles qu'un groupe d'élèves (ou toute la classe) ont en commun, à des degrés divers. L'importance de l'expérience individuelle et celle de l'expérience collective dans l'apprentissage de l'élève justifie particulièrement l'intérêt, dans l'activité mathématique de l'élève, d'alterner des phases de travail autonome et des phases de travail collectif.

Les remarques que nous venons de faire nous suggèrent les éléments de référence pour l'analyse a priori de notre projet et des éléments de base pour l'évaluation de sa réalisation. L'analyse a priori cherche à éclairer par leurs virtualités, le contenu mathématique et la logistique didactique en jeu dans notre projet. La double approche et la structuration du milieu nous fournissent les outils nécessaires pour conduire cette analyse. Pour ce faire, nous avons retenu les observables suivants :

V₁ : *Organisation potentielle du travail de la classe.*

V₂ : *Nature des tâches proposées aux élèves :*

Ici nous distinguons cinq catégories de tâches : ouvertes, fermées, simples, complexes et problématiques. Une tâche est simple lorsque sa réalisation est immédiate. C'est le cas, par

¹⁹⁹ Souligné par l'auteur.

²⁰⁰ Il faut l'entendre au sens large qui inclut les savoir-faire et les savoirs pratiques et intellectuels rencontrés dans des situations vécues.

exemple, quand il s'agit d'une question dont la réponse découle directement d'un résultat de cours, d'une question déjà traitée ou encore d'une indication explicite.

Une tâche est complexe lorsque sa réalisation nécessite la reconnaissance et la résolution d'au moins deux sous-tâches simples qui ne sont pas indiquées. Une tâche est problématique lorsque l'élève ne connaît pas *a priori* une méthode pour l'accomplir.

V₃ : Niveau de mise en fonctionnement des connaissances et types d'adaptations.

V₄ : Structuration du milieu de l'élève.

Ces observables doivent suffisamment renseigner la synthéticité des activités proposées dans l'ingénierie, et, par là, permettre de rendre compte de la pertinence virtuelle de l'ingénierie. Pour conduire l'analyse a priori, nous avons choisi d'organiser le déroulement des séances selon la forme de travail de la classe. Ce choix nous a conduit à envisager des phases de « cours dialogué », des phases de travail autonome des élèves, des phases de bilan et de validation (correction au tableau) et des phases d'institutionnalisation.

II. Déroulement prévu de l'ingénierie

Le déroulement prévoit l'intervention de l'enseignant pour organiser les phases de rappel, de correction, de discussion et d'institutionnalisation. Il aura aussi à compléter et à enrichir le milieu par des apports ponctuels de connaissances et de savoirs que l'on pourrait assimiler à des aides directes ou indirectes.

II.1. Situation 0

Compte tenu de la centralité de la notion d'aire, compte tenu de l'insuffisance (et parfois l'inadéquation) des connaissances des élèves en rapport avec cette notion, il nous a paru nécessaire de commencer par un rappel des propriétés de l'aire. Cette phase est envisagée sous forme de « cours dialogué » et les propriétés (admises) sont énoncées progressivement. Les questions prévues dans cette phase sont les suivantes :

t₁ : Peut-on attacher une aire à un point ?

t₂ : Peut-on attacher une aire à un segment ?

t₃ : Quelle est l'aire d'un carré de côté 1 ?

t₄ : Qu'est-ce qu'on entend par l'additivité de l'aire ?

t₅ : Si $S \subset S'$, l'inégalité entre l'aire de S et celle de S' est-elle large ou stricte ?

t₆ : Quelle est l'action d'une isométrie sur l'aire d'une surface ?

Il est possible toutefois que l'enseignant se trouve forcé, en vue d'apporter une aide indirecte à un élève ou à toute la classe, d'introduire d'autres tâches suite à un incident ou à un constat d'insuffisance dans les connaissances des élèves.

Cette phase se proposerait donc d'éclairer la notion d'aire (si tant est que l'on soit capable, à ce niveau, de préciser avec une quelconque rigueur en quoi consiste cette notion). Compte tenu des résultats observés dans le test passé en janvier 2009 par un groupe d'élèves en classe terminale, nous prévoyons plusieurs difficultés, notamment des confusions, des imprécisions et peut être même des étrangetés. Une grande partie des tâches proposées dans cette phase pourront donc s'avérer problématiques et provoquer plusieurs incidents. Il est possible donc que l'enseignant aura à intervenir souvent non seulement pour organiser les interventions des uns et des autres mais surtout pour mettre en évidence des confusions et/ou des imprécisions dans les connaissances des élèves et de les corriger. L'identification entre surface et aire, l'interprétation de l'inclusion à l'aide d'inégalité stricte que nous avons observé chez les élèves ayant passé le test cité plus haut sont deux exemples parmi de nombreuses erreurs que cette phase pourrait révéler. On pourrait ajouter des inadéquations au niveau du langage mathématique utilisé par certains élèves. L'enseignant aura donc à insister sur l'exactitude et la clarté du langage relatif aux notions de surface et d'aire.

Dans la mesure où cette phase est organisée sous forme d'un cours dialogué, il y a lieu de prévoir une alternance entre l'activité de l'enseignant et celle de la classe avec d'importantes variations dans le partage des responsabilités face aux savoirs en jeu. De plus, il y a lieu de prévoir l'existence d'un milieu contenant suffisamment de rétroactions interprétables par la classe et il est possible qu'en dépit des interventions de l'enseignant la situation garde des potentialités adidactiques importantes. D'autre part, compte tenu de la nature des tâches qui sous-tendent le projet principal de l'enseignant et des difficultés qu'elles pourraient soulever, il y a lieu d'envisager une structuration du milieu avec une dynamique entre les positions E_{-2} du milieu objectif, E_{-1} du milieu de référence et E_0 du milieu d'apprentissage pour l'élève.

II.2. Situation 1

Énoncé 1

Le but de cette activité est de trouver un procédé pour calculer, sur un exemple, l'aire d'une surface polygonale.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère la fonction définie par :
$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -x + 4 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{3}{2}x - 1 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ -5x + 25 & \text{si } 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2. On désigne par S la surface limitée par la représentation graphique de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 5$. S est appelée le sous-graphe de f entre les abscisses $x = -1$ et $x = 5$. calculer l'aire A de S .

Dans cette situation, l'objectif d'apprentissage est double. Il est en premier lieu la réactivation et/ou la mobilisation, la consolidation et la structuration de connaissances mathématiques et empiriques anciennes. Il est en second lieu la construction d'une stratégie pour calculer l'aire d'une surface polygonale et la présentation d'un savoir mathématique nouveau²⁰¹. Les tâches proposées dans cette phase sont les suivantes :

t_1 : Reconnaître la nature d'une fonction.

t_2 : Reconnaître la nature de la représentation d'une fonction affine par intervalles et la réaliser.

t_3 : Calculer l'aire du sous-graphe (S) d'une fonction affine par intervalles.

t_4 : Reconnaître que l'aire de (S) est indépendante de la décomposition utilisée.

Cette situation répond à la question : *comment calculer l'aire d'une surface polygonale ?*

Déroulement prévu

- Travail individuel.
- Correction au tableau.

²⁰¹ Voir le chapitre *Étude Épistémologique* de ce travail. Il s'agit d'un résultat attribué à Hadamard : l'aire d'une surface polygonale ne dépend pas de sa décomposition en triangles.

- Intervention de l'enseignant pour organiser une phase de discussion sur la possibilité d'envisager d'autres découpages.
- Énoncé du théorème (admis) suivant :

L'aire d'une surface polygonale, c'est-à-dire une surface constituée par un nombre fini de triangles adjacents, est égale à la somme des aires de ces triangles et cette aire ne dépend pas de la décomposition de la surface en triangles.

Analyse a priori du point de vue des tâches et des types d'adaptations

Pour la première question, il faut d'abord reconnaître que f est une fonction affine par intervalles et que sa représentation graphique est une ligne polygonale. Il est peu probable (mais il n'est pas exclu) que les élèves vérifient la continuité de la fonction f . Pour représenter cette fonction, l'élève peut déterminer par leurs coordonnées les sommets de la ligne polygonale, les placer dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , puis les relier par des segments. Il est possible aussi que certains élèves choisissent de dresser le tableau de variation de la fonction f , placer dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) les points ayant pour abscisses $-1, 0, 2, 4$ et 5 et les relier par des segments. L'élève aura ainsi à interpréter l'expression algébrique qui définit la fonction f , à identifier les valeurs utiles de la variable et à exprimer ces données algébriques dans le registre graphique.

Comme on peut le constater, les voies envisagées ici renvoient toutes à des sous-tâches routinières, du moins supposées l'être. La réalisation de ces sous-tâches ne doit pas poser de problème pour des élèves en classe terminale et peut être considérée comme une application simple et immédiate. Cette première question doit permettre de construire un milieu de référence qui va servir à la dévolution du problème : calculer l'aire d'une surface polygonale, et à la validation pragmatique de la solution.

Dans la deuxième question, l'élève aura à trouver par lui-même qu'il lui faut procéder à un découpage de la surface polygonale étudiée en surfaces élémentaires (triangles, rectangles, trapèzes), connaître les formules d'aire appropriées et la propriété d'additivité de l'aire. Cela suppose la mobilisation de connaissances empiriques sur la notion d'aire élémentaire et l'articulation des registres graphique, géométrique et numérique. Les dernières tâches sont complexes et peuvent s'avérer problématiques pour beaucoup d'élèves.

L'enseignant, quant à lui, il aura à intervenir pour désigner un élève au tableau, superviser la correction à l'issue de laquelle il aura à organiser une discussion sur la validité des résultats

des uns et des autres, puis autour du fait que plusieurs découpages sont possibles. Il aura ensuite à vérifier avec la classe que les différents découpages envisagés et envisageables doivent conduire au même résultat et finir par la présentation et l'institutionnalisation du savoir visé.

Analyse a priori du point de vue de la structuration du milieu et du contrat didactique

En termes de structuration du milieu, pour traiter la première question, l'élève est placé au niveau E_{-2} de la situation de référence. On peut cependant voir que le choix de la voie à suivre renvoie au niveau E_{-1} de la réflexion. Dans la deuxième question, compte tenu de l'absence d'indication, l'élève se trouve d'emblée au niveau E_{-1} de la réflexion et de l'apprentissage. Ainsi donc, la construction du milieu de départ, son évolution, la mobilisation des savoirs et des connaissances requises et la gestion des situations intermédiaires sont entièrement à la charge de l'élève. L'enseignant fait passer enfin les élèves d'une situation de réflexion et d'action autonome à une situation d'évaluation et de discussion avant de faire passer la classe au niveau de la situation didactique, présenter le nouveau savoir, l'institutionnaliser et clôturer la situation.

Compte tenu du déroulement prévu pour cette situation, nous envisageons une phase de travail individuel et une phase de travail collectif (correction au tableau, etc.). Dans la première phase, la classe est placée dans un microcontrat de production individuelle. Comme les connaissances nécessaires pour résoudre les tâches prescrites aux élèves sont supposées disponibles chez les élèves, le mésocontrat en place est alors un mésocontrat de réinvestissement de connaissances et de savoirs. Dans la deuxième phase, nous envisageons, pour l'essentiel, un microcontrat de production collective et peut être le recours, par endroits, de l'enseignant à un microcontrat d'adhésion ou d'ostension. D'autre part, nous envisageons une alternance entre mésocontrat de réinvestissement et mésocontrat de dévolution et un mésocontrat d'institutionnalisation à la fin de cette phase.

Conclusion de la situation 1

À la lumière de ce qui vient d'être dit, la situation possède une forte potentialité a-didactique. Elle offre à l'élève une occasion intéressante pour réactiver et actualiser des connaissances anciennes et pour engager de façon libre et consciente son action et sa pensée. De plus, la situation met en jeu un savoir mathématique et un savoir méthodologique nouveaux qui sont a priori accessibles aux élèves. Enfin, l'éclairage sur les propriétés de l'aire devrait permettre à

beaucoup d'élèves d'éviter dans l'avenir certaines erreurs, notamment les erreurs de confusion (entre aire et surface, entre inclusion et inégalité, etc.).

II.3. Situation 2

À l'issue de la première situation, l'enseignant aura à organiser une phase de préparation dans laquelle il prend en charge d'expliquer la question qui motive la situation 2 et de préciser son objectif. Il aura à souligner que le théorème énoncé à l'issue de la première situation fournit une méthode pour calculer l'aire du sous-graphe d'une fonction affine par intervalles continue et positive sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Il aura ensuite à soulever le problème de l'aire d'une surface non polygonale : existence, définition, propriétés. Il importe ici d'insister sur ce problème dans le but de susciter chez les élèves à la fois la curiosité et le besoin d'un savoir nouveau. Mais, dans la mesure où le problème doit rester dans les limites du programme, l'enseignant aura à préciser qu'on n'aura à s'occuper que de surfaces non polygonales particulières du type $S = \{M(x, y); a \leq x \leq b \text{ et } g(x) \leq y \leq f(x)\}$, où g et f sont des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$. Il aura encore à préciser que l'on démontre en dehors du cadre du cours que S possède une aire et que cette aire prolonge l'aire que fournit la géométrie élémentaire, c'est-à-dire qu'elle coïncide, dans le cas d'une surface polygonale, avec l'aire élémentaire et vérifie les mêmes propriétés que celle-ci.

Ceci convenu, l'enseignant aura à préciser que le but de la situation 2 est d'étudier, dans un cas particulier, une procédure qui va permettre de fixer une définition de l'aire du sous-graphe d'une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. Cette situation répond à la question : *Comment calculer l'aire d'une surface non polygonale ?*

Analyse a priori de la situation 2

Dans cette situation aussi, l'objectif d'apprentissage est double. Il est en premier lieu méthodologique et consiste à initier les élèves à la méthode des rectangles. La compétence à faire acquérir aux élèves est modélisée par la procédure intégrale :

découpage – encadrement – sommation – passage à la limite.

Notre objectif est en second lieu mathématique et consiste à présenter et à expliquer aux élèves une mise en fonctionnement sur un exemple d'une procédure qui permet de justifier l'existence de l'aire du sous-graphe d'une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ et d'en fournir une définition. Il importe ici d'insister sur le fait que l'enseignant aura à

expliquer la procédure pour en faciliter l'assimilation et interagir avec la classe pour en vérifier la compréhension.

Voici maintenant le texte proposé à la classe :

Énoncé 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[0, 1]$ et soit C sa courbe représentative.

On note S la surface comprise entre la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Nous admettons que la surface S admet une aire A et nous présentons une procédure permettant de trouver une manière pour la déterminer. L'idée consiste à encadrer de proche en proche la surface S par des surfaces polygonales dont nous savons calculer l'aire. Pour cela, nous procédons comme il suit: nous divisons l'intervalle $[0, 1]$ en n intervalles de même longueur $\frac{1}{n}$ ($n \geq 1$), puis nous construisons sur chaque intervalle $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ ($1 \leq k \leq n$) de la division les rectangles r_k et R_k de hauteurs respectives $f\left(\frac{k-1}{n}\right)$ et $f\left(\frac{k}{n}\right)$.

On note u_n la somme des aires des rectangles r_k et v_n celle des aires des rectangles R_k .

1.
 - a. Représentez les rectangles r_k et R_k , ($1 \leq k \leq 5$).
 - b. Comparez géométriquement u_5 , v_5 et A .
 - c. Hachurez la surface dont l'aire est $v_5 - u_5$.
 - d. Déplacez parallèlement à l'axe des abscisses puis empilez dans la colonne de droite les surfaces comprises entre les rectangles r_k et R_k , ($1 \leq k \leq 5$). Que vaut alors $v_5 - u_5$?
2.
 - a. Reprenez les mêmes tâches successivement avec $n = 10$ et $n = 20$.
 - b. Prouvez que pour tout entier $n \geq 1$, $v_n - u_n = \frac{1}{n} [f(1) - f(0)]$.
 - c. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n)$.
3.
 - a. Comparez géométriquement u_n , A et v_n . Justifiez votre réponse.
 - b. Établir que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq A - u_n \leq v_n - u_n$ et $u_n - v_n \leq A - v_n \leq 0$.
 - c. Conclure.

Déroulement prévu

- Distribution d'un jeu de trois copies de la courbes C et explication de la consigne.
- Travail individuel sur la question 1.
- Correction au tableau de la question 1.
- Travail individuel sur la question 2.

- Correction au tableau de la question 2.
- Interprétation et commentaires : vocabulaire, notations, ostensifs dx et \int .
- Généralisation : l'enseignant aura à organiser une phase de généralisation dans laquelle il fait constater que le résultat ne change pas dans le cas d'une fonction décroissante et plus généralement dans le cas d'une fonction continue et positive mais non nécessairement monotone.
- Énoncé du théorème (admis) et de la définition suivants :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. La surface limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ possède une aire. On l'appelle l'intégrale de f de a à b et on la note $\int_a^b f(x)dx$.

Analyse a priori du point de vue des tâches et des types d'adaptations

La première partie de l'énoncé présente le problème mathématique à résoudre et explique la méthode convoquée pour le faire. Pour comprendre le problème mathématique et assimiler le fonctionnement de la méthode proposée, l'élève doit consentir un effort intellectuel important. Il lui faudra en effet bien saisir que la problématique de l'aire d'une surface non polygonale est différente de celle de l'aire d'une surface polygonale, comprendre que la question de l'existence de l'aire n'est ni évidente ni facile et saisir la mise en fonctionnement de la procédure utilisée pour approcher l'aire de la surface étudiée. Cette première partie est une composante importante de la situation, en ce sens qu'elle expose les savoirs mathématiques, enjeux d'apprentissage, en même temps qu'elle doit susciter l'intérêt des élèves pour qu'ils acceptent d'entrer dans le jeu.

Pour commencer, l'élève aura à construire les rectangles r_k et R_k ($1 \leq k \leq 5$). Pour cela, il doit utiliser en l'adaptant le découpage décrit dans la première partie des énoncés en remplaçant d'abord n par 5, puis en donnant à l'entier k successivement les valeurs 1, 2, 3, 4 et 5. Il aura ensuite à exprimer ces données numériques dans le registre graphique, c'est-à-dire porter les valeurs $\frac{k}{5}$ sur l'axe des abscisses et les valeurs $f\left(\frac{k}{5}\right)$ sur l'axe des ordonnées. Les connaissances mises en œuvre pour réaliser cette tâche fonctionnent au *niveau technique*²⁰². Mais le fait qu'il s'agisse d'applications simples et immédiates n'exclut pas que certains élèves pourront échouer dans cette tâche. Cette difficulté peut être due à une mauvaise compréhension de la procédure de découpage ou de la manière dont sont définis les rectangles

²⁰² Au sens d'Aline Robert.

r_k et R_k ou, peut être aussi à une incapacité pour représenter graphiquement des données numériques. Après avoir construit les rectangles r_k et R_k , ($1 \leq k \leq 5$), l'élève aura à reconnaître les surfaces polygonales s_5 et S_5 dont u_5 et v_5 sont les aires respectives :

$$u_5 = \sum_{k=1}^5 a_k; \quad v_5 = \sum_{k=1}^5 A_k.$$

Les notations a_k et A_k désignent respectivement les aires des rectangles r_k et R_k .

L'élève aura ensuite à comparer (au sens de l'ordre sur \mathbb{R}) les nombres réels u_5 , A et v_5 . Ici, la réponse de l'élève ne peut s'appuyer que sur des bases empiriques. Il est possible cependant que certains élèves justifient leur réponse en comparant (au sens de l'inclusion) graphiquement et de visu les surfaces s_5 , S et S_5 . Pour ces élèves, les inégalités $u_5 \leq A \leq v_5$ résultent des inclusions $s_5 \subset S \subset S_5$. Il est probable que quelques uns parmi ces élèves utilisent des inégalités strictes au lieu des inégalités larges. En effet, pour beaucoup d'élèves l'inclusion stricte se traduit en inégalité stricte²⁰³. Il nous paraît important de préciser que nous n'avons pas demandé aux élèves de justifier leurs réponses parce que nous considérons qu'une justification rigoureuse est coûteuse et peu utile en considération des objectifs de notre projet.

L'élève aura ensuite à reconnaître et hachurer la surface dont l'aire est $v_5 - u_5$. Il lui faudra alors constater que la surface en question est formée de cinq surfaces rectangulaires qu'il devra faire glisser parallèlement à l'axe des abscisses et empiler dans la colonne réservée à cet effet. Il s'agit de tâches simples et immédiates qui renvoient à un traitement direct dans le registre géométrique et une conversion dans le registre graphique.

La tâche suivante, qui consiste à évaluer $v_5 - u_5$, nécessite la mobilisation et l'articulation de plusieurs connaissances à la fois qui ne s'expriment pas toutes dans le même registre sémiotique. Pour résoudre cette tâche, trois voies au moins sont envisageables et correspondent à des situations qui peuvent fonctionner à des niveaux différents selon les connaissances des élèves et leurs capacités à justifier ou non leur calcul.

1. L'élève peut choisir d'exprimer les calculs dans le registre formel comme il suit :

²⁰³ Voir les résultats du test d'évaluation que nous avons réalisé avec des élèves en classe terminale en 2009.

- Écrire *in extenso* :

$$v_5 = \frac{1}{5} \left[f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) + f(1) \right]$$

$$u_5 = \frac{1}{5} \left[f(0) + f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) \right]$$

- Faire la différence et obtenir : $v_5 - u_5 = \frac{1}{5} [f(1) - f(0)]$.

L'écriture de u_5 et v_5 peut être le résultat d'une application directe des données (milieu matériel) comme elle peut être le résultat d'une lecture graphique (milieu objectif).

2. L'élève peut constater de visu que les surfaces déplacées et empilées forment une surface rectangulaire de dimensions $\frac{1}{5}$ et $f(1) - f(0)$ et conclure, sans aucune forme de justification, que $v_5 - u_5 = \frac{1}{5} [f(1) - f(0)]$.

3. L'élève peut constater de visu et le justifier²⁰⁴ ou non que, pour $k = 2, 3, 4$, $a_{k+1} = A_k$, et écrire : $v_5 - u_5 = (A_1 - a_1) + (A_2 - a_2) + (A_3 - a_3) + (A_4 - a_4) + (A_5 - a_5) = A_5 - a_1$. Comme $A_5 = \frac{1}{5} \times f(1)$ et $a_1 = \frac{1}{5} \times f(0)$, il peut conclure que $v_5 - u_5 = \frac{1}{5} [f(1) - f(0)]$.

L'exposition au tableau et la discussion des différentes méthodes mises en œuvre par les élèves de la classe pour évaluer $v_5 - u_5$ nous semblent nécessaires. En effet, pour aborder dans la suite la situation d'apprentissage l'élève aura besoin non seulement de mettre en image le mode de formation de $v_n - u_n$, mais surtout de dégager l'idée que $v_n - u_n$ est une *somme télescopique*²⁰⁵ se simplifiant directement. Cette première phase de bilan nous semble déterminante, en ce sens qu'elle doit aider à homogénéiser le mieux possible les connaissances des élèves et aider à faire entrer dans la situation ceux qui n'y sont pas encore.

Pour $n = 10$ et $n = 20$, la représentation des rectangles r_k et R_k n'est plus à la charge de l'élève qui doit cependant reconnaître, hachurer, puis faire glisser parallèlement à l'axe des abscisses et empiler les surfaces comprises entre les rectangles r_k et R_k . Ces gestes étant identiques à ceux que l'élève a déjà accompli dans la première partie de la situation, la tâche peut être considérée comme routinière et simple. Son exécution est entièrement réalisée dans le registre graphique. Pour évaluer $v_n - u_n$, l'élève peut s'appuyer sur le graphique pour

²⁰⁴ $aire(r_{k+1}) = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = aire(R_k)$.

²⁰⁵ La somme des différences est égale à la différence entre le premier et le dernier terme de la suite initiale.

constater de visu que, dans les deux cas, les surfaces empilées dans la colonne de droite forment une surface rectangulaire de hauteur constante $f(1) - f(0)$. Il peut aussi commencer par exprimer explicitement u_n et v_n pour $n = 10$ puis pour $n = 20$ et calculer ensuite la différence $v_n - u_n$. Il peut encore calculer directement la somme explicite des aires des surfaces rectangulaires comprises entre les rectangles r_k et R_k , pour $1 \leq k \leq 10$ puis pour $1 \leq k \leq 20$. Dans les trois cas de figure, l'élève doit se rendre compte qu'à mesure que n augmente, le calcul explicite devient de plus en plus lourds et pénibles. Il lui faudra alors essayer de chercher un raccourci en introduisant, par exemple, l'ostensif de sommation Σ et faire des calculs formels. Cette étape de la situation doit permettre à l'élève de prendre le contrôle de la situation et de dégager son action des deux registres graphique et numérique et la déployer dans le registre formel.

La tâche suivante qui consiste à prouver que $v_n - u_n = \frac{1}{n} \times [f(1) - f(0)]$ est non routinière et sa résolution est entièrement laissée à la charge de l'élève. Son activité commence par la formation dans le registre géométrique de représentations de u_n et v_n , en l'occurrence les surfaces polygonales s_n et S_n déterminées par les rectangles r_k et R_k , ($1 \leq k \leq n$). Cette première opération mène à deux choix possibles:

1. L'élève peut s'inspirer de la correction de la question précédente et choisir de rester dans le cadre géométrique. Il aura alors à interpréter géométriquement la différence $v_n - u_n$ comme l'aire de la surface Σ_n comprise entre les deux surfaces polygonales s_n et S_n . Il lui faudra ensuite imaginer qu'en empilant les surfaces comprises entre les rectangles r_k et R_k , il obtient une surface rectangulaire de dimensions $\frac{1}{n}$ et $f(1) - f(0)$. Pour écrire la preuve mathématique de ce constat empirique, il lui faudra interpréter les données géométrique dans le registre formel, ce qui revient à voir que l'aire de la surface rectangulaire comprise entre les rectangles r_k et R_k est $A_k - a_k = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right]$. Il peut alors conclure que :

$$v_n - u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right] = \frac{1}{n} [f(1) - f(0)].$$

2. L'élève peut aussi exprimer directement u_n et v_n dans le registre formel et calculer la différence $v_n - u_n$.

Pour cela, il peut s'appuyer sur le fait que $A_k = \frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $a_k = \frac{1}{n} \times f\left(\frac{k-1}{n}\right)$ pour écrire :

$$v_n - u_n = \sum_{k=1}^{k=n} A_k - \sum_{k=1}^{k=n} a_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right] = \frac{1}{n} [f(1) - f(0)].$$

Comme on peut le constater, la résolution de cette tâche nécessite la mobilisation à la fois de connaissances mathématiques et de compétences calculatoires. Qui plus est, des adaptations sont nécessaires : reconnaissances (surfaces, formules, propriétés), organisation des calculs, opérations de traitement et de conversion. À ceci, il faut ajouter que le choix de la méthode et la gestion de sa conduite sont entièrement à la charge de l'élève. Enfin, dans la mesure où la tâche consiste à établir une égalité faisant intervenir des suites alors compte tenu des habitudes d'action des élèves, il est très probable que certains élèves fassent appel au raisonnement par récurrence.

L'élève devra voir ensuite que, lorsque n tend vers $+\infty$, le membre de droite dans l'égalité $v_n - u_n = \frac{1}{n} [f(1) - f(0)]$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$, et conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$. La tâche est à l'évidence facile et la réponse s'obtient par passage à la limite dans une égalité déjà indiquée sans aucune forme d'adaptation ni calcul supplémentaire.

En revanche, la tâche suivante est problématique. Les savoirs (présents dans les énoncés) nécessaires à la justification de l'encadrement $u_n \leq A \leq v_n$ peuvent ne pas être reconnus par les élèves car leur exploitation requiert des connaissances qui ne sont probablement pas disponibles chez les élèves. Une telle justification n'est peut-être pas à leur portée. Pour une justification rigoureuse²⁰⁶, il faudrait descendre à un niveau d'analyse plus fin, car ce qui est véritablement en jeu ici c'est deux plans de pensée abstraite, deux systèmes différents de représentation. D'ailleurs nous avons longuement hésité entre proposer la question telle qu'elle est formulée dans l'énoncé ou faire admettre aux élèves l'encadrement $u_n \leq A \leq v_n$. Notre choix pourrait se justifier par notre souci de ne pas rompre l'engagement de l'élève en injectant dans la situation un résultat auquel il ne participe pas. De plus, il est intéressant de voir les attitudes des uns et des autres face à une tâche pour laquelle ils ne disposent pas de technique a priori. La tâche est ouverte et particulièrement problématique. Paradoxalement,

²⁰⁶ Soit $M(x, y)$ un point de la surface S_n . Il existe un entier k , ($1 \leq k \leq n$), tel que $\frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n}$ et $0 \leq y \leq f\left(\frac{k-1}{n}\right)$. Or f est croissante sur l'intervalle $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, donc $f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq f(x)$ et par suite $0 \leq y \leq f(x)$. Nous en déduisons que $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq f(x)$ et par suite $M \in S$. Ainsi donc $S_n \subset S$.

D'autre part, pour tout point $M(x, y)$ de la surface S , il existe un entier k , ($1 \leq k \leq n$) tel que $\frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n}$ et $0 \leq y \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$. Comme f est croissante sur l'intervalle $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, alors $f(x) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$ et donc $0 \leq y \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$. Nous en déduisons que $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$ et par suite $M \in S_n$. Ainsi donc $S \subset S_n$.

En conclusion, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \subset S \subset S_n$ et donc $u_n \leq A \leq v_n$.

nous nous attendons à ce que la majorité des élèves fournissent le bon encadrement qui, à leurs yeux, serait une simple généralisation des encadrements précédents.

Dans la question suivante, l'élève aura à reconnaître que les encadrements demandés s'obtiennent à partir de l'encadrement $u_n \leq A \leq v_n$ en retranchant u_n pour le premier et v_n pour le second. Enfin, la conclusion est clairement suggérée par la dernière question. L'élève n'a qu'à utiliser conjointement les questions 2.c et 3.b et appliquer le théorème des gendarmes pour conclure que $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. Ces tâches sont routières, simples et immédiatement réalisables au prix de quelques manipulations algébriques.

Analyse du point de vue de la structuration du milieu et du contrat didactique

A priori, la situation a une potentialité fortement adidactique. Le milieu matériel effectif avec lequel l'élève a un rapport direct est déterminé par les propriétés de f , la courbe C , la subdivision de l'intervalle $[0, 1]$ et les rectangles r_k et R_k . L'acteur objectif de la situation est celui qui découpe le sous-graphe de f , construit les rectangles r_k et R_k , détermine leurs dimensions, construit les suites (u_n) et (v_n) et imagine une méthode pour prouver leur convergence. L'acteur de la situation de référence est l'élève qui appréhende la situation objective, la comprend, trace les rectangles r_k et R_k ($1 \leq k \leq 5$), compare empiriquement u_5 , v_5 et A , identifie les surfaces d'aires $A_k - a_k$, les fait glisser et les empile, évalue l'aire $v_5 - u_5$. Cette phase d'action permet à la fois de vérifier l'assimilation par les élèves de la situation objective, la bonne mise en fonctionnement du procédé de calcul de $v_n - u_n$ et prépare la dévolution de la situation d'apprentissage.

Il est important de souligner ici que les tâches que les élèves ont à faire dans cette première phase de la situation ne sont pas routinières pour eux. Leur problématique est la manière dont sont définies les suites (u_n) et (v_n) . En effet, les élèves ont l'habitude de faire des calculs sur des suites pour lesquelles ils disposent soit d'une formule explicite soit d'une formule de récurrence. Ici, la situation est différente. Les suites (u_n) et (v_n) sont définies en termes d'aire sous la courbe d'une fonction dont on ne donne pas l'expression algébrique et la formation des expressions de u_n et de v_n est entièrement à la charge de l'élève. Ce dernier aura à articuler dans le cadre géométrique les registres langagier, graphique et formel. Il lui faudra reconnaître la surface dont l'aire est $A_k - a_k$, identifier ses dimensions, comprendre les gestes *déplacer* et *empiler*, évaluer $v_n - u_n$, ($n = 5, 10, 20$). Ces tâches nécessitent la mise en œuvre de plusieurs connaissances et leur articulation.

Le milieu organisé ici est à la fois riche et peu contraignant. Potentiellement, il est tel que l'élève puisse observer que pour différentes valeurs de l'entier naturel n :

- Les rectangles R_k et r_{k+1} ont même aire : $A_k = a_{k+1}$ ($1 \leq k \leq n-1$).
- Les surfaces σ_k ($1 \leq k \leq n$) hachurées, déplacées puis empilées sont adjacentes et forment une surface rectangulaire S_n de hauteur constante égale à $f(1) - f(0)$.
- $\text{aire}(S_n) = \sum_{k=1}^n a_k$.

Il y a ainsi un milieu potentiel susceptible de permettre à l'élève de dégager les éléments pertinents pour établir la preuve que $v_n - u_n = \frac{1}{n}[f(1) - f(0)]$. Dans la mesure où la situation de référence doit permettre à l'élève une bonne compréhension du mode de formation de la différence $v_n - u_n$ et d'en extraire les connaissances utiles à l'élaboration de la preuve, le milieu potentiel place ce dernier au niveau -1 de la situation d'apprentissage. Il ne s'agit plus, pour l'élève, de procéder empiriquement à l'intérieur de la situation de référence à partir d'objets matériels, mais il lui faut procéder à une série d'abstractions. C'est de l'organisation du milieu objectif et des applications précédentes que l'élève doit abstraire les savoirs utiles dans la preuve.

À ce niveau de la situation, l'élève doit avoir un bon contrôle de la situation et conscience de sa démarche, en ce sens qu'il doit choisir une méthode et savoir que sa méthode est bonne. D'une certaine façon, nous rejoignons Bloch (2000) selon qui « *La problématique de validation ne vient pas de la tâche matérielle à accomplir, mais de la recherche des savoirs permettant d'accomplir cette tâche (et permettant de le faire en l'absence de cette tâche, c'est-à-dire avec un milieu évoqué)* ». (Bloch, 2000, p. 78).

Dans la dernière partie de la situation, le milieu de la situation est tel que l'élève n'a plus à mobiliser que des connaissances élémentaires sur les encadrements et sur le calcul de limites. Toutes les réponses ou presque sont déjà dans le milieu, ce qui replonge l'élève au niveau -2 de la situation de référence. L'intervention de l'enseignant à l'issue de la situation fera passer les élèves directement au niveau de la situation didactique. Il aura, entre autres, à expliquer que la différence $v_n - u_n = \frac{1}{n}[f(1) - f(0)]$ est l'écart entre la somme des aires A_k des rectangles R_k et celle des aires a_k des rectangles r_k : c'est l'erreur maximale commise sur l'aire A du sous-graphe de f entre les abscisses $x = 0$ et $x = 1$. En faisant remarquer que cette erreur maximale peut être rendue aussi petite que l'on veut, il en viendra à souligner que la méthode des rectangles permet d'obtenir une valeur approchée de A avec la précision voulue. De plus, en passant à la limite on obtient exactement l'aire A cherchée. Il devra enfin

se charger d'introduire et d'expliquer les ostensifs dx et \int ainsi que l'écriture $\int_0^1 f(x)dx$. Nous examinerons de près, et avec beaucoup d'intérêt, cette intervention dans notre analyse a posteriori.

D'autre part, le déroulement prévu dans cette situation alterne microcontrat de production individuelle et microcontrat de production collective dans des mésocontrats de réinvestissement de connaissances et de savoirs, de dévolution et d'institutionnalisation. Cependant, compte tenu de l'importance du nombre de tâches proposées dans cette situation, compte tenu de la nature de ces tâches, il est possible de voir apparaître des microcontrats d'adhésion et d'ostension. De plus, l'enseignant aura à expliquer la signification des ostensifs dx et \int et justifier la notation $\int_a^b f(x) dx$ ce qui correspond à un microcontrat d'information.

Conclusion de la situation 2

L'analyse précédente permet de constater que la situation est très riche en elle-même et se pose avec tout un réservoir de potentialités a-didactiques. Dans la mesure où elle se développe sur un horizon expérimental, l'élève est fortement amené à déployer à la fois son action et sa pensée. En effet, observer, organiser les données et en établir les coordinations, interpréter, conclure, ce sont des démarches qui ne se font jamais dans un espace pratique de l'action non structuré par la pensée. L'élève qui observe, qui calcule, qui établit des relations, procède à partir d'une situation précise et cette situation possède le potentiel de provoquer des opérations sur les objets qui s'y trouvent ou des abstractions à partir d'objets qui s'y trouvent. Ces objets fonctionnent donc comme vecteur des apprentissages de l'élève. Qui plus est, la situation est structurée d'une manière telle qu'elle doit favoriser un engagement actif et productif de l'élève. Enfin, de quelque manière qu'on l'analyse, on constate que la situation offre à l'élève la possibilité d'apprendre à faire des mathématiques. Apprendre à faire des mathématiques ne commence pas juste au moment où l'élève résout des tâches. Cela se situe dans le processus de production lui-même, et c'est précisément ce que la situation vise. Dans la mesure où elle propose des tâches différentes de celles que les élèves ont l'habitude de fréquenter, la situation crée pour l'élève une autre manière d'utiliser ses connaissances. C'est une manière différente et, en tant que telle, elle pourrait, qualitativement, provoquer un changement cognitif chez l'élève et donner une forme nouvelle à ses connaissances, à ses idées, à sa façon d'appréhender des situations nouvelles.

II.3. Situation 3

Énoncé 3

On considère une fonction f définie, continue et croissante sur un intervalle $[a, b]$ et on note C sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit $t \in [a, b]$. On admet que la surface S_t limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = t$ admet une aire $A(t)$.

On définit ainsi sur l'intervalle $[a, b]$ une fonction $A: t \mapsto A(t)$.

Le but de cette activité est de montrer que la fonction $A: t \mapsto A(t)$ est la primitive de f sur l'intervalle $[a, b]$ qui s'annule en a .

1. Soit $t \in [a, b[$ et $h > 0$. On suppose que $t + h \in [a, b]$.
 - a) En utilisant l'une des copies de la courbe C de f représentez la surface dont l'aire est $A(t + h) - A(t)$.
 - b) Justifiez que $h f(t) \leq A(t + h) - A(t) \leq h f(t + h)$.
 - c) En déduire que la fonction A est dérivable à droite en t et que $A'_d(t) = f(t)$.
2. Soit $t \in]a, b]$ et $h > 0$. On suppose que $t - h \in [a, b]$.
 - a) Justifiez que $h f(t - h) \leq A(t) - A(t - h) \leq h f(t)$.
 - b) En déduire que la fonction A est dérivable à gauche en t et que $A'_g(t) = f(t)$.
3. Conclure.

Ici encore, l'objectif d'apprentissage dans la situation est double. Il s'agit en premier lieu d'établir un savoir mathématique en montrant, dans le cas d'une fonction f continue, positive et croissante sur un intervalle $[a, b]$, que la dérivée de l'aire variable sous la courbe de f est la fonction f . Il s'agit en second lieu d'exposer un savoir-faire qui consiste à présenter aux élèves une méthode de calcul effectif d'intégrale. Cette situation répond à la question : *comment calculer l'intégrale d'une fonction continue ?*

Il nous faut sans doute préciser que les élèves ne sont pas directement confrontés à cette question. La réponse à la question doit émerger à travers le travail collectif de la classe suite à

la question de la dérivabilité de la fonction d'aire. Il s'agit surtout d'amener les élèves à prendre conscience du fait que la notion de primitive fournit un outil pratique pour calculer l'aire de certaines surfaces non polygonales, d'une part, et de mettre en rapport les questions qui sous-tendent les trois situations étudiées.

Déroulement prévu

- Travail individuel.
- Correction au tableau par les élèves.
- Bilan et commentaires collectifs : pour une fonction continue, positive et croissante sur $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, où F est n'importe quelle primitive de f sur l'intervalle $[a, b]$.
- Généralisation : l'enseignant aura à organiser une phase de généralisation du résultat précédent à une fonction continue sur $[a, b]$.
- Énoncé du théorème (admis) suivant :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux réels de I . L'intégrale de f entre a et b est donnée par $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, où F est n'importe quelle primitive de f sur I .

Analyse a priori du point de vue des tâches et des types d'adaptations

Dans la première partie de l'énoncé, on présente les objets mathématiques en jeu et on énonce le résultat visé. Pour entrer dans la situation qu'on lui présente et se saisir de ses éléments, l'élève aura à comprendre la fonction d'aire $A: t \mapsto A(t)$. Il ne peut le faire que par l'intermédiaire d'une représentation géométrique du sous-graphe S_t de la restriction de f à l'intervalle $[a, t]$ qui, à son tour, ne lui est accessible qu'à travers son illustration graphique. On peut donc penser que rien ne manque à celui qui sait transformer une représentation sémiotique en une autre qui lui est congruente (ou presque) pour comprendre la manière dont la fonction A est définie. Mais malgré tout, la fonction A ne rentre pas dans la configuration classique des fonctions auxquelles les élèves sont habitués²⁰⁷ et la manière par laquelle A est définie n'apprend pas à elle seule comment la manipuler. Tout n'est donc pas donné pour l'élève. Il aura, en effet, à gérer de manière concomitante trois registres différents (géométrique, graphique, formel). Mais dans la mesure où la situation requiert, pour

²⁰⁷ Les élèves ont l'habitude de ne fréquenter que des fonctions définies par une expression explicite.

l'essentiel, des savoirs déclaratifs sur du général non calculable, l'élève est amené à tout exprimer dans un cadre strictement formel.

L'élève aura d'abord à reconnaître la surface dont l'aire est $A(t + h) - A(t)$ et la représenter graphiquement. Pour cela, il faudra qu'il constate que la surface S_{t+h} est la réunion presque disjointe de la surface S_t et de la surface S_h en question. Il s'agit donc d'interpréter l'écriture formelle $A(t + h) - A(t)$ dans le registre géométrique et de l'illustrer dans le registre graphique. Nous estimons que tous les élèves ou presque s'acquitteront de cette tâche sans difficulté. En revanche, il est possible qu'un plus grand nombre d'élèves ne réussiront pas (ou ne chercherons pas) à justifier l'encadrement indiqué. Pour accomplir cette tâche, l'élève aura à mobiliser plusieurs connaissances et savoir les articuler dans différents registres. Si certaines connaissances nécessaires sont évoquées, plusieurs autres sont entièrement à la charge de l'élève. L'activité potentielle de celui-ci pourrait s'organiser autour des étapes suivantes :

- Reconnaître que la surface $S(h)$ d'aire $A(t + h) - A(t)$ est celle limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = t$ et $x = t + h$.
- Reconnaître que le produit $h \times f(t)$ est l'aire du rectangle r_h de dimensions h et $f(t)$ et que le produit $h \times f(t + h)$ est celle du rectangle R_h de dimensions h et $f(t + h)$.
- Utiliser la croissance de f pour justifier l'inclusion $r_h \subset S_h \subset R_h$.
- Utiliser la propriété de croissance de l'aire pour justifier l'implication :

$$r_h \subset S_h \subset R_h \implies h \times f(t) \leq A(t + h) - A(t) \leq h \times f(t + h).$$

- Diviser les membres de l'encadrement $h \times f(t) \leq A(t + h) - A(t) \leq h \times f(t + h)$ par le réel $h > 0$ pour obtenir $f(t) \leq \frac{A(t+h)-A(t)}{h} \leq f(t + h)$.
- Passer à la limite en faisant tendre h vers zéro, utiliser la continuité de f et le théorème des gendarmes pour obtenir $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t+h)-A(t)}{h} = f(t)$.
- Conclure que la fonction A est dérivable à droite en t et que $A'_d(t) = f(t)$.

Pour traiter la question suivante, l'élève peut reprendre les mêmes étapes comme il peut adapter l'encadrement précédent en remplaçant t par $t - h$. Dans le dernier cas, il nous paraît peu probable que l'élève examine le cas particulier des bornes de l'intervalle. Enfin, l'élève aura à conclure que la fonction $t \mapsto A(t)$ est dérivable en chaque t de $[a, b]$ et $A'(t) = f(t)$.

La réalisation de cette deuxième partie de la situation est à l'évidence rapide. Il aurait été sans doute intéressant d'étudier la fonction d'aire sur quelques exemples, mais en raison de difficultés que nous préciserons plus loin dans l'analyse a posteriori, nous avons dû renoncer à davantage de développements.

Analyse du point de vue de la structuration du milieu et du contrat didactique

Le milieu matériel de l'élève comprend la fonction f évoquée par ses propriétés, la courbe C , la surface S_t et la fonction $t \mapsto A(t)$. L'acteur objectif de la situation est celui qui trace la courbe, découpe la surface S_t , définit la fonction $t \mapsto A(t)$ et organise l'étude de sa dérivabilité. L'acteur de la situation de référence est l'élève qui mobilise les connaissances nécessaires pour mettre en rapport et comprendre les éléments présents dans la situation objective.

Pour reconnaître la surface S_h dont l'aire est $A(t+h) - A(t)$, il faut mobiliser et articuler le cadre géométrique avec les registres graphique et formel. Il s'agit de savoir interpréter l'écriture $A(t+h) - A(t)$ comme la différence des aires des surfaces S_{t+h} et S_t et de l'illustrer graphiquement. L'élève peut alors commencer par illustrer graphiquement les deux surfaces S_t et S_{t+h} et reconnaître ensuite visuellement la surface S_h . Dans ce cas, l'élève se place au niveau -2 de la situation de référence. Il est possible aussi que l'élève voit immédiatement dans la différence $A(t+h) - A(t)$ l'aire du sous-graphe de la fonction f entre les abscisses $x = t$ et $x = t+h$. Cela suppose qu'il procède à partir d'une lecture préalable, où il décompose la surface S_{t+h} en la réunion des surfaces S_t et S_h , de manière à l'adapter au schéma imposé. Dans ce cas, l'élève se place d'emblée au niveau -1 de la situation de réflexion et d'apprentissage.

Pour traiter la question suivante, l'élève peut refaire le même travail que dans la question précédente et se trouver au niveau -2 de la situation de référence. Mais il est possible qu'il se place au niveau -1 de la réflexion et de l'apprentissage et anticipe directement sur la situation de référence (ici la question 1) en substituant $t-h$ à t .

L'enseignant aura alors à organiser une *phase de bilan et de validation*²⁰⁸. Il peut être conduit à enrichir le milieu de référence en provoquant débat et commentaires, en apportant explications et connaissances. Il aura à insister notamment sur le vocabulaire mathématique introduit et devra ensuite prendre en charge le passage vers la situation didactique où il aura à

²⁰⁸ Bloch. I, 2000, p.77.

gérer la phase d'institutionnalisation des savoirs visés. Nous étudierons cette situation dans l'analyse a posteriori que nous développerons un peu plus loin.

D'autre part, le déroulement prévu pour cette situation suggère un microcontrat de production individuelle, un microcontrat de production collective et un microcontrat d'information. Il est toutefois possible que, si par endroits les connaissances des élèves s'avèrent insuffisantes, l'enseignant se trouve forcé d'installer à l'intérieur du microcontrat de production collective un microcontrat d'adhésion et/ou un microcontrat d'ostension. De plus, compte tenu de la nature des tâches présentes dans la situation, nous envisageons une alternance entre mésocontrat de réinvestissement de connaissances et de savoirs et mésocontrat de dévolution. Pour finir, l'enseignant installe un mésocontrat d'institutionnalisation et peut être un mésocontrat d'entraînement.

Conclusion de la situation 3

L'analyse développée ici rend compte des apprentissages potentiels des élèves. La situation proposée ici contient tous les éléments nécessaires pour permettre à l'élève de pratiquer une démarche mathématique. Elle offre un espace important pour le travail autonome de l'élève et force à envisager plusieurs types d'adaptations et à engager des actions multiples et variées : illustration graphique, observation, interprétation, changement de registres sémiotiques, calcul formel, etc.. Ces adaptations et ces actions ont une fonction et un contenu qui sont déterminés par des éléments présents dans le milieu de l'élève. Dans la mesure où le contrôle de ces éléments est accessible à l'élève à l'aide de ses connaissances actuelles, la situation constitue une source potentielle d'apprentissages pour l'élève.

III. Conclusion de l'analyse a priori

Compte tenu de l'analyse a priori des différentes composantes de l'ingénierie, compte tenu également du déroulement prévu en classe, l'ingénierie nous paraît suffisamment pertinente et pourrait être une riche source d'apprentissage pour l'élève. En effet, le milieu est globalement peu contraignant et le déroulement virtuel de l'ingénierie prévoit de larges espaces de liberté laissés à l'élève pour agir sur le milieu et interpréter ses rétroactions. Cependant, il faut admettre qu'il y a un milieu propre à chaque élève. La réalisation des tâches proposées dépend des connaissances de l'élève, de la perspicacité avec laquelle il appréhende la situation, son aptitude à agir sur le milieu et à interpréter ses rétroactions. Cette aptitude dépend à son tour de la manière dont l'élève utilise, dont il comprend, dont il fait les

mathématiques. Se pose alors la question : comment permettre à un maximum d'élèves de savoir utiliser, de comprendre et de faire des mathématiques ? Les phases de discussion, de validation et d'institutionnalisation doivent éclairer la démarche mathématique, consolider et réguler les connaissances correctes, dévoiler et rectifier des connaissances erronées. Ces phases constituent une composante hautement importante dans les apprentissages de l'élève.

Pour rendre compte de la pertinence, à tout le moins virtuelle, de l'introduction des élèves à la notion d'intégrale telle qu'elle est présentée dans l'ingénierie, nous présentons par leur virtualité les résultats essentiels de l'analyse a priori que nous venons de développer :

1. *Problématisation*

L'analyse a priori rend compte du fait que l'ingénierie met en avant une problématisation globale sous-tendue par trois problématiques clairement explicitées localement au niveau de chaque situation et organisées autour de trois questions centrales :

- a) *Comment calculer l'aire d'une surface polygonale ?*
- b) *Comment calculer l'aire d'une surface non polygonale ?*
- c) *Comment calculer l'intégrale d'une fonction continue ?*

L'aspect global de la problématique de l'ingénierie est saisi à travers les interventions de l'enseignant qui aura à expliquer plus avant l'enjeu de chaque situation et piloter la mise en rapport des notions d'aire, d'intégrale et de primitive.

2. *Tâches.*

L'analyse a priori des situations étudiées donne à voir que les tâches proposées aux élèves sont riches, multiples et variées. Plusieurs tâches renvoient à des sous-tâches non indiquées et nécessitent donc des adaptations de la part des élèves. L'identification des sous-tâches et les adaptations nécessaires sont toutes entièrement à la charge de l'élève.

3. *Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances.*

L'analyse des tâches proposées dans les trois situations permet de constater que les trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances identifiées par Robert (Robert, 2005) sont utilisés. Cependant, compte tenu de toutes les adaptations que l'élève aura à faire, les connaissances requises seront le plus souvent appelées à fonctionner au niveau mobilisable.

4. *Opérations sémiotiques.*

Une analyse locale fine des tâches proposées aux élèves permet de rendre compte qu'un recours fréquent et conscient aux différentes opérations sémiotiques et leur coordination sont requis. Le plus souvent, ces changements de registres ne sont pas pilotés par les énoncés mais laissés à l'initiative de l'élève. L'élève aura, par exemple, à articuler de façon fréquente le cadre géométrique avec les registres graphique et algébrique ou les registres graphique et formel. La démonstration de l'encadrement $u_n \leq A \leq v_n$ développée plus haut dans l'analyse a priori est un exemple d'une telle articulation.

5. *Structuration du milieu.*

En référence au déroulement prévu et à l'activité potentielle de l'élève, on peut voir nettement qu'il y a une structuration interne du milieu de l'élève. En affinant sur l'analyse, on constate que l'élève (pourvu qu'il accepte d'entrer dans la situation) est amené à appréhender par l'action et par la pensée²⁰⁹ un univers d'objets qui s'oppose à lui. L'analyse permet de rendre compte du fait que le milieu de l'élève est particulièrement riche et peu contraignant offrant une forte potentialité adidactique.

6. *Contrat didactique.*

Compte tenu du déroulement prévu pour chacune des trois situations, la classe est placée dans une alternance entre microcontrat de production individuelle et microcontrat de production collective à l'intérieur de laquelle apparaissent par endroits des microcontrats d'information, d'adhésion et/ou d'ostension. De même, il y a une alternance entre mésocontrat de réinvestissement de connaissances et de savoirs et mésocontrat de dévolution et un mésocontrat d'institutionnalisation à la fin de chaque situation.

7. *Organisation potentielle du travail de la classe.*

L'ingénierie est organisée de manière à alterner des phases de travail individuel autonome et des phases de travail collectif. En effet, dans chacune des trois situations proposées, le déroulement prévoit une phase de travail individuel, une phase de travail collectif (correction au tableau) et une phase d'institutionnalisation.

²⁰⁹ Il nous faut souligner ici que l'élève pense et détermine son action selon des fins qu'il élabore et ordonne par les idées. En effet, si nous considérons un élève en prise avec une tâche, le milieu de l'élève devient le théâtre de l'action, de l'effort et de la réflexion, l'ensemble des obstacles et des voies de passage pour la pensée et l'action.

CHAPITRE HUITIÈME

ANALYSE A POSTERIORI

De quelque façon qu'on définisse la pertinence du projet virtuel de l'enseignant, il faut reconnaître que sa portée dépend des acteurs qui participent à sa réalisation effective en classe, de l'intelligence avec laquelle ils appréhendent les objets de savoirs mis à l'étude, de leurs aptitudes à les utiliser. Ces aptitudes dépendent à leur tour de la façon dont on organise l'étude et de la façon dont on reconnaît, dont on comprend ces objets de savoir.

Le but de cette partie est de vérifier l'accessibilité des élèves à l'ingénierie et d'évaluer (dans un sens que nous préciserons en fin de ce paragraphe) sa réalisation effective. Contrairement à l'analyse a priori qui s'attache à rendre compte de la virtualité du projet de l'enseignant, l'analyse a posteriori étudie la réalisation effective de ce projet. Mais la réalité de la classe pourrait, par endroits, transformer le projet de l'enseignant et le dédoubler. En effet, à mesure que la réalisation effective du projet de l'enseignant se développe, elle peut révéler des difficultés et conduire l'enseignant à réorienter son action et faire de nouveaux choix. L'activité des élèves, le niveau de leur engagement et de leur participation, la qualité de leurs productions, la nature de leurs questions créent très souvent un nouveau projet pour l'enseignant et le dirigeant. Ce projet, nous l'appelons *projet émergent*. Nous distinguons ainsi deux projets qui sont souvent là, côte à côte, l'un dans l'autre même. Le *projet principal* est celui préalablement prévu par l'enseignant. Il est défini et préparé *a priori*. En revanche, le *projet émergent* procède sur une base empirique ; c'est un projet qui naît et se développe à l'intérieur du projet principal qui est déjà en cours de réalisation. Son objet est d'enrichir des connaissances valables et de corriger celles qui sont inadéquates au niveau de la pensée et/ou du discours, d'éclairer des obscurités, de supprimer des illusions et des confusions ou du moins ce qui peut en être dévoilé ; ainsi la fonction d'un tel projet est bien évidente. Ce projet se définit à l'intérieur du projet principal en fonction des actions effectives des élèves. C'est seulement dans *l'a posteriori* d'une analyse que l'on peut saisir le contenu et l'évolution de ce projet. Il est essentiellement déclenché et développé par certains incidents. Aussi, nous paraît-il intéressant d'identifier les incidents qui surviennent au cours de la réalisation du projet principal de l'enseignant en tant qu'éléments fondamentaux du projet émergent et d'étudier leur gestion par l'enseignant en tant que composante du contrat didactique. La gestion de ces

incidents semble bien correspondre à certains types de microcontrats au sens de Perrin-Glorian et Hersant (2003).

Ce qui vient d'être dit nous conduit à élargir l'objectif de l'analyse a posteriori. Outre le but précisé plus haut, cette analyse doit aussi permettre de rendre compte de l'écart entre le projet virtuel et le projet effectif de l'enseignant, d'une part, de l'ampleur et de la pertinence du projet émergent, d'autre part. Pour cela, il lui faut analyser la réalisation effective en classe et la confronter au projet virtuel de l'enseignant. Sans doute les principaux défauts de la première par rapport au second et les incidents les plus significatifs apparaissent-ils à travers cette confrontation. Il nous faut ensuite rendre compte des incidents les plus significatifs et identifier le projet émergent. Il nous faut enfin analyser, interpréter et chercher à expliquer les défauts et les incidents observés.

I. Les difficultés rencontrées dans la réalisation de l'ingénierie

L'ingénierie didactique a été réalisée en Février 2011. Il nous faut, d'emblée, insister sur le fait que notre expérimentation a été réalisée dans un contexte scolaire très particulier car fortement perturbé par les mouvements de manifestations des élèves et par les grèves que connaît la Tunisie depuis le mois de décembre 2010. Au départ, notre projet était d'organiser quatre séances de deux heures chacune. La première séance est une leçon modèle à laquelle sont invités l'inspectrice de mathématiques et 15 enseignants. Dans cette séance, l'enseignant est désigné par l'inspectrice et devait réaliser avec sa classe les trois premières activités du chapitre *Intégrale* proposées dans le manuel scolaire. L'enseignant n'a reçu aucune consigne quant à la manière de conduire cette séance. Mais notre projet a été sérieusement bousculé par la précipitation des événements dans le pays²¹⁰. Nous avons été obligés de reporter la première leçon au 9 février au lieu du 13 janvier. Malgré ce report, seul l'inspectrice et trois enseignants ont pu venir à cette leçon et la séance a été écourtée car nous avons été avertis par le proviseur que le lycée doit fermer en raison d'une manifestation des élèves devant l'établissement. Les trois séances consacrées à l'expérimentation de notre projet devaient être réalisées par le même enseignant et avec la même classe. Nous avons envisagé d'organiser avec les élèves un débat dont l'objet est de comparer l'approche du manuel à celle de l'ingénierie que nous leur proposons. Mais, compte tenu des événements, l'enseignant a proposé de réaliser l'ingénierie en une seule séance de trois heures, d'autant plus que le retard

²¹⁰ La révolution tunisienne en janvier 2011.

sur le programme officiel commençait à se faire sentir sérieusement et que les cours n'ont pas repris depuis les vacances de décembre. La séance a été réalisée le lendemain (10 février 2011), mais son déroulement ne fut pas satisfaisant du tout. Les élèves étaient très agités et l'enseignant avait perdu le contrôle de la classe ce qui a affecté sérieusement sa gestion du déroulement de la séance sur les deux plans mathématique et pédagogique.

Comme le déroulement effectif de la séance ne correspond pas du tout au scénario prévu, nous avons dû refaire nous-mêmes l'ingénierie au lycée Boumhel avec une classe dont nous avons la charge. Les perturbations des cours et le retard par rapport à la progression prévue du programme nous ont forcé à réduire le temps prévu pour notre ingénierie et la réaliser en deux séances seulement. Pour réduire le temps des déroulements prévus au départ, nous avons dû faire deux modifications de notre scénario initial. Pour cela nous avons dû fournir le support graphique nécessaire dans les deux dernières activités. Ce choix se justifie par le fait que, par rapport aux objectifs de l'ingénierie, la construction de ces graphiques n'est pas enjeu d'apprentissage. Nous avons également supprimé deux exercices d'application prévus à la fin des deux dernières activités. Ces deux exercices seront proposés dans une autre séance de cours (hors ingénierie).

Sans doute devrions-nous insister enfin sur le fait que nous sommes dans une classe terminale ce qui nous soumet à l'obligation non seulement de terminer le programme mais aussi de bien préparer nos élèves pour l'examen de baccalauréat. Il s'agit ici d'un enjeu social important.

II. Supports utilisés dans l'analyse a posteriori et méthodologie

Comme nous l'avons précisé ci-dessus, l'ingénierie a été réalisée en deux séances²¹¹ dans une classe terminale de 22 élèves²¹². Conformément à ce qui est couramment d'usage dans les analyses locales à partir des déroulements en classe, nous nous appuyons sur les transcriptions qui sont réalisées à partir d'enregistrements vidéo et audio²¹³ ainsi que sur les traces écrites recueillies à partir des copies des élèves. Les transcriptions des deux séances sont placées en annexe.

Pour étudier la réalisation effective de l'ingénierie en classe, nous avons choisi d'analyser les séances en termes de contenu et en termes de forme de travail en classe. Cette dernière

²¹¹ D'une durée de 3 heures pour la première séance et 2 heures pour la deuxième séance.

²¹² Nous avons enregistré la présence de tous les élèves dans la première séance et l'absence de 4 élèves dans la deuxième séance.

²¹³ Nous n'avons pas pu reproduire certaines interventions d'élèves car, par endroit, la voix n'est pas perceptible.

dimension concerne le travail de l'enseignant et le travail des élèves dans un sens que nous précisons. Chacune de ces deux dimensions est analysée à partir d'un certain nombre d'observables que nous définirons en leurs endroits. Nous essayerons enfin de dégager et d'analyser le projet émergent en tant qu'il est une composante particulièrement importante de la réalisation effective.

L'analyse du déroulement effectif en classe est réalisée à partir de découpages des transcriptions. Ces découpages correspondent à des phases déterminées par des objectifs locaux. Chaque phase est constituée d'une ou de plusieurs tâches déterminées par un contenu, un objectif et une démarche.

Forme de travail de la classe

La forme de travail de la classe à laquelle nous nous intéressons ici renvoie à l'organisation des rôles des élèves et de l'enseignant dans le déroulement effectif de l'ingénierie. Il s'agit d'évaluer le partage des responsabilités entre élèves et enseignant à propos de l'enjeu mathématique visé, de rendre compte de la dynamique du déroulement effectif de l'activité de la classe et des modalités utilisées dans cette activité.

Deux analyses sont envisagées. La première analyse est centrée sur l'organisation au niveau global de l'ingénierie. Il s'agit de rendre compte des supports de l'activité de la classe (oral, écrit, tableau, etc.) et de la dynamique du déroulement effectif de l'activité de la classe (travail individuel, travail collectif, durée, alternance, etc.) en fonction de la nature du travail de la classe et sa mise en rapport avec le déroulement prévu. La deuxième analyse est centrée sur l'organisation du travail de la classe au niveau de chaque phase. Ici, l'analyse est centrée sur les modes d'interventions des uns et des autres, élèves et enseignant. Cette analyse doit, d'une part, renseigner la question de partage des responsabilités entre élèves et enseignant et, d'autre part, permettre d'identifier les incidents éventuels et par là le projet émergent. Qui plus est, la nature des incidents et la teneur des interventions des élèves doivent permettre d'évaluer le degré d'accessibilité de l'ingénierie aux élèves.

Contenu travaillé en classe

L'étude du contenu travaillé en classe que nous effectuons ici met en perspective et complète l'analyse a priori. Il s'agit d'évaluer ce qui est fait en classe par rapport à ce qui est prévu dans le projet principal en termes de connaissances, de savoir-faire et de savoirs mathématiques et/ ou méthodologiques. L'analyse s'attache notamment à dégager la teneur

mathématique du projet émergent susceptible de se développer à l'intérieur du projet principal.

III. Les observables retenus pour l'analyse a posteriori

La double approche et la théorie des situations didactiques, et notamment les dimensions liées aux contenus travaillés en classe et aux formes de travail des élèves et aux échanges avec l'enseignant pendant la séance, la structuration du milieu (Margolinas, 1995) et la structuration du contrat didactique (Perrin-Glorian et Hersant, 2003) nous paraissent particulièrement adaptées à notre travail. Elles nous permettent d'envisager plusieurs observables sur les contenus effectivement travaillés en classe, sur la dynamique des déroulements effectifs des séances et sur tous les échanges enregistrés dans la classe. Pour rendre compte de ces dimensions d'analyse nous avons choisi de retenir les observables suivants :

F_1 : *Dynamique du déroulement des séances* : travail individuel, travail collectif, durée.

F_2 : *Niveau de participation des élèves* : faible, moyen, fort.

F_3 : *Types d'interventions de l'enseignant* : L'analyse du déroulement effectif des deux séances de l'ingénierie nous a permis de distinguer deux types d'interventions de l'enseignant, qui sont en rapport direct avec l'enseignement, que nous appelons *interventions ordinaires* et *interventions ponctuelles*.

— *Les interventions ordinaires* de l'enseignant sont les actions d'ordre organisationnel qui semblent être d'un usage courant et régulier dans sa pratique de l'enseignement. Nous avons distingué les cinq actions suivantes :

- Organiser le travail au tableau.
- Recueillir les réponses des élèves et les reprendre à l'intention de toute la classe.
- Gérer les interventions des élèves.
- Gérer les échanges avec et entre les élèves.
- Faire avancer la classe.
- Organiser les phases de bilan, de validation et d'institutionnalisation.

— *Les interventions ponctuelles* de l'enseignant renvoient aux différentes formes d'aides (directes et indirectes) apportées aux élèves : explication d'une donnée ou d'une tâche,

réponse donnée à un élève, rappel, correction d'une erreur, etc.. Soulignons que l'aide, quelle qu'en soit la nature, peut être personnelle ou publique.

F₄ : Les incidents.

F₅ : Gestion des incidents : L'analyse des transcriptions a permis de dégager cinq modes de gestion des incidents par l'enseignant :

1. La relance : Il arrive souvent que, suite à une erreur ou en l'absence de réponse, l'enseignant décide d'accorder à la classe une occasion pour assimiler l'erreur et réfléchir de nouveau sur la question. La relance peut être réitérée plusieurs fois et suivre plusieurs formes : *enrichir, reformuler la question sous une forme plus fermée, changer d'angle d'attaque*²¹⁴, *suggérer la présence d'une imprécision ou d'une confusion.*

2. L'expectative : Il arrive que l'enseignant reprenne une bonne réponse de façon neutre et attende la réaction des élèves avant de prendre la décision de la valider.

3. La conclusion : L'enseignant valide la réponse de l'élève et clôt la question.

4. La déséquilibration : C'est le cas par exemple lorsque l'enseignant glisse sciemment dans son discours une proposition fautive ou s'il soutient la réponse d'un élève qui est fautive. Dans ce cas l'enseignant provoque l'incident. Une illustration d'un tel incident est, par exemple, lorsque l'enseignant déclare sur un ton affirmatif :

P₃₂ : Donc. Si l'inclusion est stricte, l'inégalité est stricte.

5. L'illustration : L'enseignant peut faire appel à un dessin, un exemple ou un contre-exemple pour aider les élèves à mieux comprendre une question.

Précisons ici que les deux derniers observables permettent non seulement de révéler certains aspects du contrat didactique ainsi que certains éléments de la logistique didactique mise en œuvre par l'enseignant, mais aussi de saisir certaines composantes du projet émergent.

D'autre part, dans la perspective de l'étude du contenu mathématique travaillé en classe et en référence aux tâches proposées dans les trois situations de l'ingénierie, nous avons retenu les observables suivants :

²¹⁴ Remplacer la question par une nouvelle question qui vise le même résultat que la première.

C_1 : *Nature des savoirs exposés en classe* : il s'agit surtout de rendre compte des dialectiques anciens/nouveaux, contextualisés/décontextualisés, génériques, métamathématiques.

C_2 : *Nature des tâches travaillées en classe* : il s'agit de classer les tâches travaillées en classe suivant les catégories simple/complexe, routinière/problématique, fermée/ouverte.

C_3 : *Niveaux de mises en fonctionnement des connaissances utilisées.*

C_4 : *Types d'adaptations mises en œuvre.*

IV. Analyse des différentes phases du déroulement de l'ingénierie

IV.1. Analyse a posteriori de la situation 0

Phase 1 (16 minutes)

Cette première phase est un rappel organisé autour des propriétés de l'aire. L'objectif est de réactiver et d'actualiser les connaissances des élèves sur la notion d'aire en vue de les parfaire et de les homogénéiser.

Analyse en termes de contenu travaillé

C_1 : Nature des savoirs

Cette phase a permis de discuter et de mettre en forme des connaissances intuitives et anciennes à propos de l'aire d'un point, d'un segment de droite, du carré unité, l'additivité de l'aire et l'invariance de l'aire par une isométrie. La mise en forme de ces connaissances leur confère un statut de savoirs décontextualisés. L'analyse a posteriori permet de constater que d'autres savoirs mathématiques décontextualisés ont fait l'objet de cette phase, notamment sur l'aire de la frontière commune de deux surfaces fermées adjacentes et sur celle du bord d'une surface fermée ainsi que sur le rapport entre inclusion et inégalité. Insistons ici que, dans les mesures où ils ne sont pas évoqués dans les programmes des autres niveaux de l'enseignement tunisiens, les savoirs abordés dans cette phase sont nouveaux pour les élèves. Soulignons enfin que nous inscrivons parmi les savoirs métamathématiques les remarques de l'enseignant sur la correction du langage mathématique et sur la distinction entre surface et aire.

C_2 : Nature des tâches

Les tâches travaillées dans cette phase sont, à l'exception d'une seule (la tâche t_5 ci-dessous), celles déjà prévues dans l'analyse a priori. Ces tâches sont explicitées ci-dessous, puis classées dans le tableau suivant :

t_1 : Peut-on attacher une aire à un point ?

t_2 : Peut-on attacher une aire à un segment ?

t_3 : Quelle est l'aire d'un carré de côté 1 ?

t_4 : Qu'est-ce qu'on entend par l'additivité de l'aire ?

t_5 : Représenter graphiquement deux surfaces ayant une intersection d'aire nulle.

t_6 : Si $S \subset S'$, l'inégalité entre l'aire de S et celle de S' est-elle large ou stricte ?

t_7 : Quelle est l'action d'une isométrie sur l'aire d'une surface ?

Tâche	Simple/complexe	Routinière/problématique	Fermée/ouverte
t_1	Simple	Problématique	Ouverte
t_2	Simple	Problématique	Ouverte
t_3	Simple	Routinière	Ouverte
t_4	Simple	Problématique	Ouverte
t_5	Complexe	Problématique	Ouverte
t_6	Simple	Problématique	Ouverte
t_7	Simple	Routinière	Ouverte

Il est sans doute nécessaire de préciser en quoi les tâches t_1 , t_2 , t_4 , t_5 , t_6 sont problématiques. Il est difficile de séparer ici des désaccords possibles sur l'emploi des concepts : la notion de *tâche problématique* n'est ni nette ni absolue. La dualité *routinier/problématique* n'est pas tout à fait la même pour tous les élèves et à l'intérieur de toutes les institutions à un niveau de scolarité donné. Ceci étant, les tâches mentionnées ci-dessus, que l'on soit ou non tout à fait fondé à qualifier de problématiques, requièrent la mobilisation de connaissances intuitives dont l'institution n'organise aucun système didactique susceptible d'en permettre l'utilisation et le développement. Cela nous conduit à présupposer que les élèves ne disposent pas *a priori* de techniques dont la portée permet de réaliser ces tâches.

C_3 : Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances

Compte tenu de la nature des tâches mises en jeu dans cette phase, nous situons les réponses des élèves au niveau mobilisable de la typologie de Robert (1998). Les connaissances requises sont intuitives et indiquées mais elles ne correspondent à aucun savoir institutionnalisé. Les

réponses des élèves peuvent être le produit de connaissances acquises personnellement ou d'un effort intellectuel individuel.

C₄ : Types d'adaptations

Compte tenu de la nature de cette phase (cours dialogué), compte tenu de la nature des tâches mises en jeu, les adaptations nécessaires sont pour l'essentiel de l'ordre de l'implicite de type changement de registres. En effet, il s'agit de convertir des données dans le registre du langage en représentations mentales. Ces représentations renvoient, selon les élèves, au registre géométrique abstrait²¹⁵ et/ou au registre graphique concret²¹⁶. L'analyse a posteriori suggère aussi le recours des élèves à des opérations de conversion du registre géométrique au registre algébrique (traduction de relations entre surfaces en relations entre aires).

Analyse en termes de forme de travail de la classe

F₁ : Forme de travail des élèves

Les élèves sont invités à répondre aux questions posées par l'enseignant et à discuter les réponses de leurs camarades. Ils participent à la production, à l'explication, à la validation et à l'institutionnalisation des résultats visés. Le caractère collectif de leur travail est évident.

F₂ : Niveau de participation

Les élèves ont fortement participé à cette première phase. En effet, du point de vue comptable, nous avons enregistré 83 échanges (44 interventions d'élèves et 41 interventions de l'enseignant), soit en moyenne un échange toutes les 11 secondes. Parmi les 22 élèves de la classe, 5 élèves se sont particulièrement distingués par la fréquence de leurs interventions, totalisant à eux seuls 18 interventions.

F₃ : Types d'interventions de l'enseignant

Dans cette phase qui est organisée sous forme de cours dialogué, l'enseignant tient un rôle central. Il est le moteur dans le même temps que le relais de la classe. Les interventions de l'enseignant sont, en grande partie, d'ordre organisationnel ou des aides mineures, à l'exception d'une seule intervention lorsqu'il décide d'expliquer à l'aide d'un dessin au

²¹⁵ Un point, une ligne, une surface sont des objets géométriques abstraits.

²¹⁶ Un point est la trace de la pointe d'un crayon sur une feuille, une ligne est la trace d'un crayon sur une feuille, une surface est une partie (ou une réunion finie de parties) du plan délimitée (s) par une ligne fermée.

tableau le rapport entre inclusion et inégalité. Globalement, les interventions de l'enseignant sont restées de l'ordre de la dévolution.

F₄ : Les incidents

Nous avons relevé 16 erreurs de trois natures différentes résumées dans le tableau suivant :

Incidents	Confusion	Imprécision	Imperfection	Autres
Effectifs	6	4	6	

La confusion, par exemple, entre la négation d'attacher une aire à une surface et sa nullité, entre une surface et son aire sont des erreurs fréquentes chez les élèves. Les confusions, les imperfections et les imprécisions saisies au niveau des réponses comme au niveau du langage des élèves rendent compte de l'importance des difficultés qu'ils ont pour s'exprimer sur les questions en rapport avec la notion d'aire. Cela pourrait s'expliquer par le fait que, dans l'enseignement tunisien, ces questions constituent ce que Castela (2000) appelle des *enjeux non explicités d'apprentissage*²¹⁷.

F₅ : Gestion des incidents

L'enseignant a pris le temps de mettre en évidence et de reprendre à l'intention de toute la classe les bonnes réponses ainsi que les erreurs des élèves ayant participé au cours de cette phase. Il s'est également servi de plusieurs modes d'animation et de gestions des interventions des élèves. Les réponses des élèves sont évaluées et le plus souvent reformulées et complétées. Les erreurs sont soumises à la classe, discutées et corrigées.

Analyse en termes de milieu et de contrat

L'enseignant installe d'emblée un milieu adidactique et un microcontrat de production collective dans un mésocontrat de réinvestissement de connaissances et de savoirs. L'analyse a posteriori a permis d'identifier au total six microcontrats :

- Trois microcontrats de production collective : $P_8 \rightarrow P_{15}, P_{27} \rightarrow P_{37}, P_{38} \rightarrow P_{41}$.
- Un microcontrat individuel : $E_2 \rightarrow P_4$.
- Un microcontrat d'information : P_{26} .
- Un microcontrat de tutorat : P_{31} .

²¹⁷ Il s'agit de connaissances qu'un élève doit acquérir pour réussir, mais pour lesquelles l'institution n'organise aucun système didactique en vue de permettre aux élèves les apprentissages inhérents.

Le microcontrat individuel est apparu à la suite d'une erreur de confusion commise par un élève pour qui il semble qu'il y a identité entre « *un point n'a pas d'aire* » et « *l'aire d'un point est nulle* ». Le microcontrat d'information répond à une autre erreur de confusion entre surface et aire. Enfin le microcontrat de tutorat s'est installé à l'intérieur du deuxième microcontrat de production collective lorsque l'enseignant intervient pour aider certains élèves à propos de la conversion de l'inclusion en inégalité large.

Les élèves sont placés, presque au cours de toute la phase, dans un milieu objectif perpétuellement enrichi par l'enseignant pour permettre suffisamment de rétroactions. L'examen des transcriptions permet de constater que suffisamment d'élèves disposent des connaissances nécessaires pour répondre aux questions de l'enseignant. Les interventions de ce dernier sont restées de l'ordre de la dévolution cherchant surtout à amener les élèves à corriger certaines de leurs erreurs et à prendre à leur charge la production et la validation de leurs réponses.

IV.2. Conclusion de la situation 0

Cette phase a permis de discuter et de mettre en forme des connaissances intuitives et anciennes à propos de l'aire d'un point, d'un segment de droite, du carré unité, l'additivité de l'aire et l'invariance de l'aire par une isométrie. Les questions débattues ont permis de relever et de corriger plusieurs erreurs, notamment des confusions, des imprécisions et des imperfections. Ces erreurs se manifestent particulièrement au niveau de l'inadéquation du langage mathématique utilisé, de l'identification entre surface et aire et de la correspondance entre inclusion et inégalité. Enfin, il nous faut sans doute souligner que les erreurs relevées ici sont les mêmes que celles que nous avons déjà identifiées dans le test d'évaluation auquel nous avons soumis en 2009 d'autres élèves en classe terminale.

IV.3. Analyse a posteriori de la situation 1

Phase 2 (12 minutes)

Au terme de la première phase, l'enseignant distribue les énoncés de la situation 1 et explique la consigne. L'enregistrement vidéo rend compte du caractère individuel du travail des élèves et l'absence d'interventions de l'enseignant. Les productions des élèves recueillies à partir de leurs copies nous ont permis de dégager les résultats suivants :

1. Tous les élèves ont réussi le tracé de la représentation graphique de f .

- 11 élèves n'ont produit aucune trace qui pourrait rendre compte de la façon dont ils ont représenté graphiquement la fonction f .
- 9 élèves ont déterminé par leurs coordonnées les sommets de la ligne polygonale qui représente graphiquement la fonction f .
- 2 élèves ont dressé le tableau de variation de la fonction f .
- Aucun élève n'a évoqué la nature de f ni celle de sa représentation graphique. Également non évoquée, la continuité de la fonction.

Ces résultats donnent à voir que, pour beaucoup d'élèves, la réalisation d'une tâche graphique ne requiert pas nécessairement une justification. Une représentation graphique se définit, à leurs yeux, par son tracé et non par les propriétés de la fonction qui conduisent à sa réalisation.

2. Dans cette question aussi, tous les élèves ont utilisé la stratégie de décomposition de la surface S pour calculer A . La lecture des traces écrites des élèves permet de constater différents découpages, mais aussi des difficultés à la fois au niveau du contrôle de ces découpages et au niveau des calculs numériques. Voici maintenant les différents découpages (voir infra) et les différentes valeurs de l'aire A de S relevés dans les copies des élèves :

Découpage	Valeur de A	Effectif
D_1 : 4 triangles + 1 carré + 1 rectangle	$A = 18$ (u. a)	13
	$A = 10 + 8\sqrt{2}$ (cm^2)	1
D_2 : 4 triangles	$A = 10,8$	1
	$A = 21,5$ (u. a)	1
	$A = 25,85$ cm	1
D_3 : 3 triangles + 2 trapèzes	$A = \frac{34 + \sqrt{10}}{2}$ (u. a)	1
D_4 : 3 triangles + 2 rectangles	$A = 18$ (u. a)	1
D_5 : 3 triangles + 1 trapèze	$A = 21,15$ (u. a)	1
D_6 : 2 triangles + 2 trapèzes	$A = \frac{107}{6}$ (u. a)	1
D_7 : 1 triangle + 3 trapèzes	$A = 18$ (u. a)	1

L'examen des erreurs de calcul chez certains élèves montre qu'elles sont dues, pour l'essentiel, à l'utilisation de triangles scalènes et à des erreurs de mesurage.

Sur le plan quantitatif, 15 élèves ont correctement réussi la tâche grâce à un choix *conscient et contrôlé*²¹⁸ du découpage de la surface S et une bonne conduite des calculs. L'échec des autres élèves s'explique, à l'évidence, par un mauvais choix de la décomposition de S (8 élèves) ou par des erreurs de calcul (1 élève). On constate ainsi que pour tous les élèves de la classe la tâche n'est pas problématique puisqu'ils disposent, à l'évidence, d'une technique pour l'accomplir. Il semble cependant que ceux qui échouent sont incapables d'en contrôler une mise en œuvre appropriée. Nous avons également constaté que 15 élèves (qui ne sont pas tous ceux ayant réussi la tâche) ont introduit, par leurs coordonnées ou seulement par la notation, les sommets utilisés dans la décomposition de S . De plus, l'examen des traces écrites montre que les élèves ne semblent pas avoir de difficulté dans le domaine de la lecture graphique ni dans la conversion de registres *algébrique* \rightarrow *graphique*, d'une part, et *graphique* \rightarrow *numérique*, d'autre part.

Enfin, l'enregistrement vidéo et les traces écrites des élèves donnent à voir un engagement total de tous les élèves dans le travail qui leur a été proposé. Le tableau suivant rend compte des résultats que nous avons recueillis compte tenu des critères fixés plus haut.

Contenus travaillés

	C_1	C_2	C_3	C_4
Q_1	<i>Anciens contextualisés</i>	<i>Simple. Routinière. Fermée.</i>	<i>Technique</i>	<i>Changement de registres. Introduction d'intermédiaires</i>
Q_2	<i>Anciens/nouveaux</i>	<i>Complexe. Problématique. Ouverte.</i>	<i>Mobilisable</i>	

Forme de travail de la classe

	F_1	F_2	F_3	F_4	<i>Milieu</i>	<i>Microcontrat</i>
Q_1	<i>Autonome</i>	<i>Élevé</i>	<i>Aucune</i>	<i>Aucun</i>	$M_{-2}; M - \text{objectif}$	<i>Restitution</i>
Q_2	<i>Autonome</i>	<i>Élevé</i>	<i>Aucune.</i>	<i>Aucun</i>	$M_{-1}; M - \text{de référence}$	<i>Dévolution</i>

Phase 3 : (30 minute)

Cette phase, consacrée à la correction au tableau de la situation 1, est une phase de bilan et d'institutionnalisation. Elle est particulièrement longue et animée. La raison en est la richesse des découpages proposés par les élèves et leur discussion, d'une part, et l'importance du projet émergent, d'autre part.

²¹⁸ Découper S en triangles rectangles et en rectangles dont les dimensions peuvent être relevées par une lecture graphique sans calcul supplémentaire.

Analyse en termes de contenus travaillés

C₁ : Nature des savoirs

Cette phase a permis la réactivation et la discussion de savoirs anciens dans le même temps que la rencontre de savoirs nouveaux. L'analyse a posteriori montre que les dialectiques entre savoirs anciens et savoirs nouveaux, entre contextualisation et décontextualisation de ces savoirs sont organisées en trois temps. Dans un premier temps (la première question), il y a contextualisation de savoirs mathématiques et méthodologiques anciens. Dans un second temps (la deuxième question), il s'agit plutôt d'une contextualisation de savoirs mathématiques anciens et d'un savoir méthodologique nouveau. Enfin, dans un troisième temps, les savoirs institutionnalisés à travers le théorème énoncé au terme de cette phase sont entièrement nouveaux et décontextualisés.

En plus de ces dialectiques organisées à l'avance pour les élèves, d'autres savoirs mathématiques et métamathématiques anciens et contextualisés ont été abordés surtout suite aux deux incidents sur la possibilité de déterminer les coordonnées de certains points (E_{70}) et sur la décomposition de la surface étudiée en segments (E_{75}).

C₂ : Nature des tâches

Dans cette phase, le travail de la classe s'est organisé principalement autour des quatre tâches suivantes :

t₁ : Reconnaître la nature d'une fonction.

t₂ : Reconnaître la nature de la représentation d'une fonction affine par intervalles et la réaliser.

t₃ : Comment calculer l'aire du sous-graphe (S) d'une fonction affine par intervalles.

t₄ : Reconnaître que l'aire de (S) est indépendante de la décomposition utilisée.

Tâche	Simple/ complexe	Routinière/ problématique	Ouverte/fermée
t_1	Simple	Routinière	Ouverte
t_2	Simple	Routinière	Ouverte
t_3	Complexe	Problématique	Ouverte
t_4	Complexe	Problématique	Ouverte

Il nous faut souligner ici que plusieurs sous-tâches se sont avérées nécessaires pour réaliser les quatre tâches précisées ci-dessus.

C₃ : Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances

L'analyse des transcriptions permet de constater qu'en dépit de la parcellisation des tâches et les différentes aides apportées par l'enseignant, les mises en fonctionnement des connaissances utilisées par les élèves dépassent le plus souvent le niveau technique. Le tableau suivant rend compte de la synthèse de l'analyse de cette phase selon la typologie de Robert (2005) :

Tâche	t_1	t_2	t_3	t_4
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	Technique	Mobilisable	Disponible	Mobilisable

C₄ : Types d'adaptations

L'analyse a posteriori rend compte de la réussite individuelle et/ou collective des élèves à trouver les adaptations nécessaires pour accomplir les tâches en jeu dans cette phase. Donnons quelques exemples des types d'adaptations réussies par les élèves :

A₁ : Les reconnaissances : f est une fonction affine par intervalles dont la représentation graphique est formée de quatre segments de droite (E_{47}, E_{49}), pour calculer l'aire de la surface S on la décompose en surfaces élémentaires et application des formules correspondantes (E_{51}, E_{53}).

A₂ : L'introduction d'intermédiaires : décomposition de la surface S (E_{53}, E_{63}).

A₃ : L'intervention conjointe de plusieurs cadres ou notions : opérations sémiotiques, notamment des coordinations entre les registres géométrique, graphique et numérique.

A₄ : L'introduction d'étapes : décomposition de S et organisation des calculs.

A₅ : L'utilisation de résultats déjà validés: l'aire de S ne dépend pas de la décomposition choisie.

A₆ : L'existence de choix : plusieurs découpages sont possibles.

Analyse en termes de formes de travail de la classe

F₁ : Forme de travail des élèves

S'agissant d'une phase de correction, les élèves sont invités à répondre aux questions posées par l'enseignant. Certains élèves sont désignés au tableau pour exposer leurs propositions. Les autres élèves sont appelés à s'exprimer sur les réponses et les suggestions de leurs camarades. Le caractère collectif du travail de la classe est bien évident.

F₂ : Niveau de participation des élèves

Cette phase, nous l'avons dit, est à la fois longue et très animée en raison d'une forte participation des élèves. Nous avons enregistré 107 échanges (48 interventions d'élèves et 59 interventions de l'enseignant), soit en moyenne un échange toutes les 17 secondes. Trois élèves se sont succédés au tableau et quatre découpages différents ont été exposés publiquement et discutés.

F₃ : Types d'interventions de l'enseignant

Ici encore, les interventions de l'enseignant sont, pour une grande part, des interventions ordinaires. Les interventions ponctuelles sont mineures et consistent surtout à inciter certains élèves à la réflexion (P_{66}, P_{77}) à la prise de distance par rapport à leurs démarches (P_{58}, P_{61}, P_{63}). Dans cette phase aussi les interventions de l'enseignant restent de l'ordre de la dévolution. Enfin, au terme de cette phase, l'enseignant a pris en charge d'expliquer que la méthode de triangulation répond à la question posée au début de cette phase (P_{49}) sur le calcul de l'aire du sous-graphe d'une fonction affine par intervalles continue et positive.

F₄ : Les incidents

L'examen de la transcription de cette phase a permis de relever 15 incidents dont 12 incidents se répartissent entre confusion, imprécision et imperfection selon le tableau suivant :

Incidents	Confusion	Imprécision	Imperfection	Autres
Effectifs	2	6	4	

Les trois autres incidents, particulièrement intéressants, sont analysés et commentés plus bas en tant que composantes du projet émergent.

F₅ : Gestion des incidents

Ici encore, l'enseignant a pris le temps de mettre en évidence et de rendre publiques aussi bien les bonnes réponses que les erreurs en se servant des mêmes techniques de gestion que celles relevées plus haut. L'examen des transcriptions a permis cependant de constater le recours à un nouveau mode de relance : *Reprendre une réponse fournie sur un mode interrogatif* ($E_{45} - E_{47}$).

Analyse en termes de milieu et de contrat

L'analyse a posteriori rend compte de l'existence d'un milieu adidactique assez riche pour permettre des rétroactions facilement interprétables par les élèves. L'examen de la transcription de cette phase du point de vue de l'activité mathématique conjointe de l'enseignant et des élèves met en évidence un mouvement incessant entre la situation S_{-1} d'apprentissage et de réflexion et la situation didactique S_0 . En effet, par un mouvement d'aller-retour entre le milieu P_{-2} de référence et le milieu P_0 de « Professeur pour l'élève », l'enseignant fait passer la classe du milieu objectif de la situation de référence au milieu d'apprentissage et vice-versa.

D'autre part, nous l'avons déjà souligné, les interventions de l'enseignant sont mineures et restent de l'ordre de la dévolution. L'enseignant installe un microcontrat de production collective en alternant mésocontrat de réinvestissement de connaissances et de savoirs et mésocontrat de dévolution. Il laisse très souvent la responsabilité de la production et de l'évaluation des réponses aux élèves et décide par moments de se placer dans un microcontrat d'adhésion ou d'information.

Séquence	$P_{42} \rightarrow P_{48}$	$P_{49} \rightarrow P_{53}$	$P_{53} \rightarrow P_{70}$	$P_{70} \rightarrow P_{72}$	$P_{73} \rightarrow P_{88}$	$P_{88} \rightarrow P_{101}$
Mésocontrat	Réinvestissement	Dévolution	Réinvestissement	Dévolution	Reconnaissance de savoirs	institutionnalisation
Microcontrat	Production collective.	Production collective	Production collective/individuelle	Production collective	Production collective Adhésion Ostension assumée	Production collective

Le projet émergent

Quatre incidents semblent avoir provoqué un écart par rapport au déroulement prévu par l'enseignant :

1. La méthode exposée au tableau par Tarek (E_{63}) qui consiste non pas à décomposer la surface S , mais plutôt la surface S' qui complète S dans le rectangle de dimensions 6 et 5. Tarek décompose la surface S' en un carré, un rectangle et quatre triangles et obtient :

$$\text{aire}(S) = (6 \times 5) - \left(\frac{5}{2} + 2 + 2 + 3 + \frac{5}{2} \right) = 18 \text{ (u. a.)}.$$

Pour mieux rendre compte de la réalité de cette solution, il suffit de savoir que ce n'est pas ce découpage, mais plutôt le découpage D_1 , que Tarek a utilisé dans sa copie. Cela donne à penser que cette solution est soit le résultat d'un second moment expérimental dirigé par une intuition prospective, soit le produit d'une pensée critique qui cherche à se confronter et donc à se potentialiser. Dans les deux cas de figure, cette solution constitue un enrichissement certain au projet principal de l'enseignant et son décalage (positif) est bien évident.

Cet incident est, à l'évidence, un incident heureux. La solution proposée ici n'est pas prévue parmi les solutions envisagées par l'enseignant. Son originalité réside dans la stratégie, entièrement élaborée et exécutée par l'élève, qui consiste à faire appel à un calcul indirect sur l'aire de S . Ce calcul est rendu possible grâce à une habile adjonction d'une autre surface S' de manière à obtenir une surface rectangulaire de dimensions déterminées.

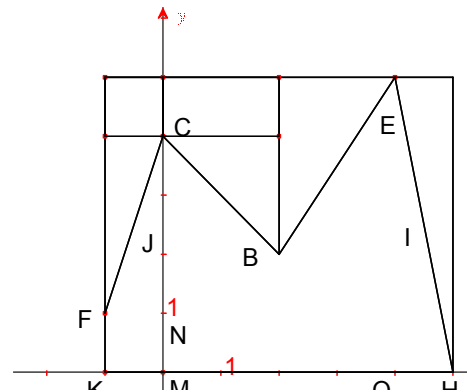


Fig. 28

Il convient cependant de souligner que cette solution n'a pas fait l'objet d'une gestion particulière de la part de l'enseignant et n'a pas provoqué de rupture au niveau du microcontrat en place. L'enseignant s'est contenté de demander aux autres élèves s'ils ont bien compris l'idée.

2. Le deuxième incident est provoqué par Youssef (E_{75}) dont l'idée consiste à décomposer la surface S en segments²¹⁹. Cette idée se démarque clairement de celle de triangulation de la surface S . Sa motivation pourrait être de tenter de contre-exemplifier l'indépendance de l'aire de la surface S de la décomposition choisie. D'une certaine manière, cet incident, certes peu instructif en raison de sa brièveté, a le mérite de remettre en cause certaines idées simplistes et d'éclairer l'esprit, en l'occurrence à propos de l'appréhension mentale de l'infini. Il ne fait

²¹⁹ Il est peu probable que l'élève soit au fait des indivisibles de Cavalieri.

aucun doute que l'élève distingue nettement²²⁰ entre le pronom indéfini « beaucoup » et la locution nominale « infini²²¹ ». Mais, pour cet élève, il semble que l'on peut recouvrir la surface S en juxtaposant un grand nombre de segments, ce qui peut être dû à une confusion entre l'objet géométrique « segment » et sa matérialisation graphique comme la trace d'un crayon sur une feuille de papier.

Nous l'avons dit, l'idée autour de laquelle se concentre la pensée de l'élève est que toutes les décompositions ne conduisent pas au même résultat. Ce comportement pourrait trouver une explication dans le résultat des calculs de l'élève. En effet, en revenant à sa copie, nous avons constaté qu'il est l'auteur de la décomposition D_3 . Ce constat rend l'interprétation plus hypothétique. Pourquoi l'élève n'a-t-il pas cherché à soutenir sa position en discutant ses propres calculs ? Comment expliquer l'idée qui est derrière le découpage proposé ? Par rapport à la première question, une chose est certaine : l'élève n'est pas sûr de ses calculs et il ne veut pas (ou ne peut pas) les soumettre à révision. En ce qui concerne la deuxième question, il nous semble que l'élève a improvisé son intervention sous l'inspiration d'une idée intuitive et simpliste. La manière même d'argumenter son point de vue est imparfaite et inadéquate et il ne semble pas réaliser que, dans la mesure où son idée est d'emblée disqualifiée de visu, sa position était à l'évidence paradoxale.

Cependant, la proposition de Youssef n'a pas été discutée plus avant et l'enseignant s'est contenté de négocier d'abord un microcontrat de production individuelle qu'il abandonne aussitôt à la faveur d'un microcontrat d'adhésion.

3. Le troisième incident est provoqué par la remarque de Malek (E_{70}) quand il dit « *Le problème c'est pas le triangle qui n'est pas rectangle. Le point A, le point D, le point G qu'on ne peut pas déterminer* ». Cet incident est, à l'évidence, dû à une déficience au niveau des opérations sémiotiques, en l'occurrence la conversion entre registre de la représentation graphique et registre de la géométrie analytique. L'enseignant a choisi de répondre personnellement à la remarque de Malek, se plaçant ainsi dans un microcontrat d'information.

IV.4. Conclusion de la situation 1

Reprenons pour conclure la problématique de la situation 1. Il s'agit d'étudier sur un exemple la question : *comment calculer l'aire d'une surface polygonale ?* La question est posée par l'enseignant (P_{49}) au début de cette phase 3 et sa réponse est soulignée également par

²²⁰ E_{77} : *c'est pas infini, mais beaucoup.*

²²¹ Il faut entendre l'infini mathématique.

l'enseignant (P_{98}) suite au théorème énoncé au terme de cette même phase. L'examen de la transcription de cette phase rend compte du fait qu'elle a permis aux élèves d'aborder le procédé de découpage, d'évaluer et de discuter différents découpages et de constater que l'aire de la surface polygonale S ne dépend pas du découpage choisi. Les élèves ont eu à mobiliser en les articulant des connaissances et des savoirs anciens, contextualisés pour certains et décontextualisés pour d'autres. Ils ont également eu à engager leur responsabilité dans la reconnaissance et l'utilisation des adaptations adéquates nécessaires, notamment l'introduction d'intermédiaires et surtout les opérations de conversion et de coordination entre registres.

Le même examen permet de constater que la plupart des interventions de l'enseignant sont des interventions ordinaires. Elles sont soit d'ordre organisationnel soit d'ordre incitatif pour plus de précisions et de rigueur. Comme nous l'avons déjà souligné, ces interventions sont restées de l'ordre de la dévolution. Les élèves ont bien engagé leur responsabilité dans la production, l'évaluation et la validation de la plupart des réponses. En outre, ils ont largement participé à l'institutionnalisation des savoirs visés.

IV.5. Analyse a posteriori de la situation 2

Phase 4 (20 minutes)

Cette phase est consacrée à un travail individuel des élèves sur la première partie de la situation 2 de l'ingénierie. L'enseignant commence par lire publiquement les énoncés de la situation. Il prend ensuite à sa charge de préciser et d'expliquer la problématique de la situation, puis de vérifier si les élèves ont bien compris la mise en fonctionnement de la méthode des rectangles. Il rappelle enfin le caractère individuel du travail demandé, ce qui a été respecté par l'ensemble des élèves de la classe. L'enregistrement vidéo montre, en effet, qu'à l'exception d'un seul élève qui a sollicité une aide de l'enseignant, tous les autres élèves ont travaillé de façon individuelle.

L'examen des traces écrites des élèves nous a permis de dégager les résultats suivants :

- Tous les élèves ont réussi la construction graphique des rectangles r_k et R_k , ($1 \leq k \leq 5$).
- Tous les élèves ont identifié, en la hachurant, la surface dont l'aire est $v_5 - u_5$.
- Tous les élèves ont correctement exécuté les gestes *déplacer* et *empiler*.
- Cinq élèves (soit environ 23%) n'ont produit aucune réponse sur la comparaison de u_5 , v_5 et A ni sur la valeur de $v_5 - u_5$.

- Un élève a fourni l'encadrement $u_5 \leq A \leq v_5$ mais pas la valeur de $v_5 - u_5$.
- Un élève a fourni la valeur de $v_5 - u_5$ mais pas l'encadrement $u_5 \leq A \leq v_5$.
- Quinze élèves (soit environ 68%) ont fourni à la fois l'encadrement $u_5 \leq A \leq v_5$ et la résultat $v_5 - u_5 = \frac{1}{5} [f(1) - f(0)]$.

Question	Q 1. a	Q 1. b	Q 1. c	Q1. d. i	Q 1. d ii
Effectif	22 (100%)	16 (73%)	22 (100%)	22 (100%)	16 (73%)

L'enregistrement vidéo et l'examen des traces écrites permettent de constater un engagement sérieux de l'ensemble des élèves de la classe dans le travail dont ils ont été chargé. Enfin, la lecture des copies des élèves révèle qu'au contraire de l'illustration graphique des données algébrique/numérique, la conversion *graphique* → *algébrique/numérique* semble poser des difficultés sérieuses aux élèves. Ces difficultés renvoient à une incapacité à abstraire les éléments pertinents d'un graphique. Dans le cas qui nous occupe ici, parmi les 16 élèves ayant fourni le résultat $v_5 - u_5 = \frac{1}{5} [f(1) - f(0)]$, 4 élèves seulement ont jugé nécessaire de le justifier. Ils ont, tous les quatre, utilisé le fait que $v_5 - u_5$ est l'aire du rectangle de dimensions $\frac{1}{5}$ et $f(1) - f(0)$.

Commentaire

Cette première question constitue une étape importante dans la situation étudiée et les élèves ont majoritairement réussi plus ou moins correctement les tâches qui leur sont prescrites. Les autres élèves auront sans doute, à l'occasion de la correction au tableau, la possibilité de comprendre et de corriger leurs erreurs.

Phase 5 (18 minutes)

Cette phase, consacrée à la correction au tableau de la première question de la situation 2, vise à établir un premier bilan et à vérifier la bonne mise en fonctionnement de la méthode des rectangles.

Analyse en termes de contenus travaillés

C₁ : Nature des savoirs

Les savoirs et les savoir-faire mobilisés par les élèves pour accomplir les tâches prescrites dans cette première partie de la situation sont anciens et contextualisés. Il s'agit pour

l'essentiel de reconnaître et d'illustrer dans le registre graphique et/ou dans le registre formel des éléments de géométrie élémentaire.

C₂ : Nature des tâches

Les tâches et les sous-tâches travaillées dans cette phase de l'ingénierie, sauf la dernière sur l'évaluation de l'aire $v_5 - u_5$, sont à la fois simples, routinières et fermées. Les élèves ont majoritairement réussi à s'en acquitter sans difficulté notable. Ce résultat, déjà prévu dans notre analyse a priori, est attesté par l'examen des productions des élèves et par l'absence d'incidents pendant la correction au tableau. En revanche, les connaissances des élèves se sont révélées insuffisantes pour justifier la valeur de $v_5 - u_5$. En effet, la tâche correspondant à l'évaluation de $v_5 - u_5$, déjà complexe et ouverte, s'est avérée problématique ce qui a conduit l'enseignant à introduire l'idée de comparer A_k et a_{k+1} , ($1 \leq k \leq 4$).

C₃ : Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances

En dépit du caractère simple et routinier des tâches proposées aux élèves, ceux-ci ont eu à faire plusieurs adaptations, notamment des reconnaissances et des changements de registres. Les connaissances requises pour accomplir les tâches proposées aux élèves se situent donc au niveau mobilisable de la typologie d'Aline Robert.

C₄ : Types d'adaptations

Le travail sur les tâches proposées dans cette phase nécessite pour l'essentiel deux types d'adaptations. Il s'agit de faire, le plus souvent de manière simultanée, des reconnaissances et des changements de registres.

Analyse en termes de formes de travail de la classe

F₁ : Forme de travail des élèves

Ici aussi, s'agissant d'une phase de correction, les élèves sont invités à répondre aux questions posées par l'enseignant. Certains élèves sont désignés au tableau pour exposer leurs propositions. Les autres élèves sont appelés à s'exprimer sur les réponses et les suggestions de leurs camarades. Le caractère collectif du travail de la classe est bien évident.

F_2 : Niveau de participation des élèves

Au cours de cette phase, nous avons compté 41 échanges (16 interventions d'élèves et 25 interventions de l'enseignant). Deux élèves se sont succédés au tableau ; le premier pour la réalisation des tâches graphiques et le second pour le calcul de $v_5 - u_5$. Beaucoup d'autres élèves ont pris part à la réflexion sur la justification et la validation de ce calcul.

C_3 : Types d'interventions de l'enseignant

À côté de ses interventions ordinaires, notamment celles d'ordre organisationnel, l'enseignant a fait deux interventions ponctuelles. La première fois, c'est lorsqu'il demande à Mustapha d'écrire, dans chaque rectangle de la colonne de droite sur la figure au tableau, l'aire $A_k - a_k$ correspondante. La disposition des différences en colonne a pour but de suggérer aux élèves

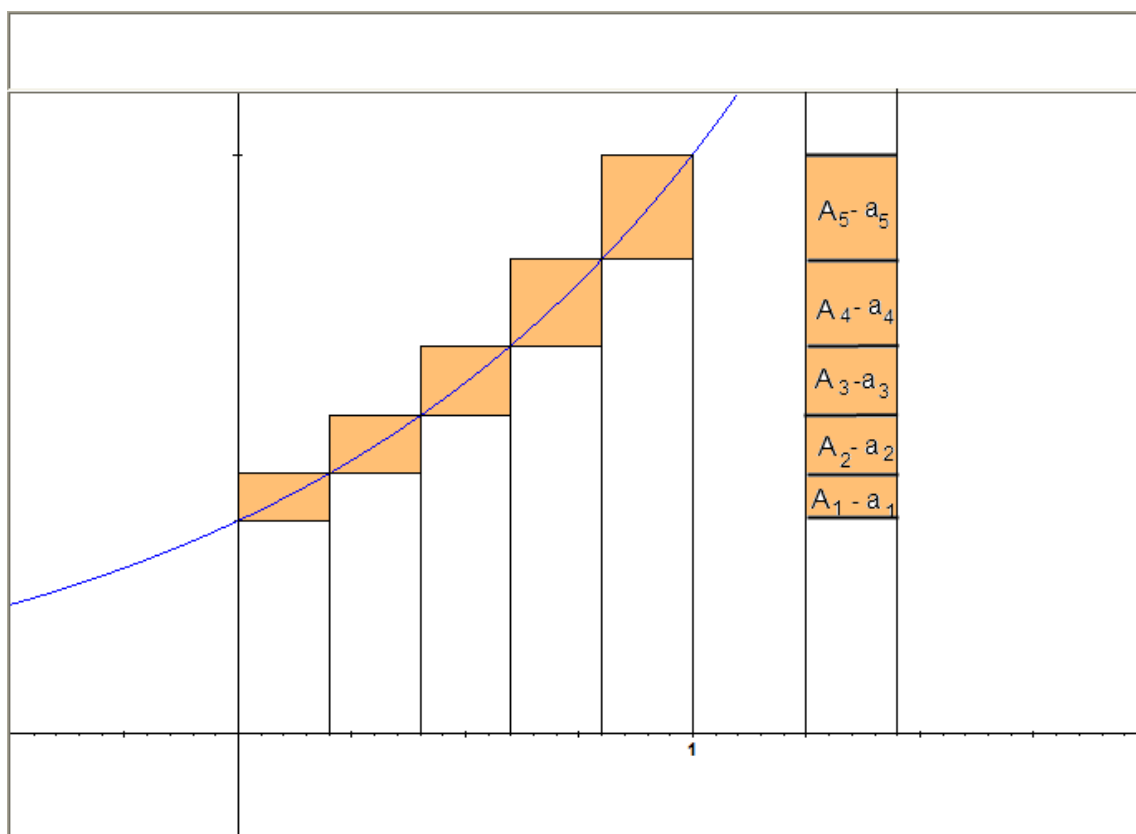


Fig. 29

le procédé d'itération qui est d'un usage courant dans le calcul sur les suites. La deuxième fois, lorsqu'il introduit l'idée de trouver une relation entre les aires des rectangles r_k et R_k . Les deux aides apportées ici par l'enseignant sont importantes dans la mesure où elles tentent de suggérer une méthode simple et généralisable pour calculer en toute rigueur $v_5 - u_5$.

F₄ : Les incidents

Au cours de cette phase nous avons relevé deux types d'incidents. Il s'agit d'une imprécision sur le lien (*inclusion* → *inégalité*) et l'absence de réponse à la question sur la relation entre *A* et *a* (*P*₁₂₉).

Incident Question	Confusion	Imprécision	Imperfection	Autres
<i>Q. 1. a</i>				
<i>Q. 1. b</i>		<i>E_T²²² (p. 15)</i>		
<i>Q. 1. c</i>				
<i>Q. 1. d</i>				Silence

F₅ : Gestion des incidents

La lecture des transcriptions de cette phase permet de constater que l'enseignant utilise toujours les mêmes techniques décrites précédemment pour gérer les interventions des élèves et faire avancer la classe.

Analyse en termes de milieu et de contrat

L'analyse a posteriori donne à voir qu'il y a un milieu fortement adidactique et ce malgré les interventions de l'enseignant. En effet, nous avons constaté que l'enseignant laisse à la charge des élèves suffisamment d'espace pour engager leurs connaissances dans la réalisation des tâches proposées dans cette phase. Les connaissances supposées avoir été utilisées, au moins partiellement, par les élèves dans la phase de travail individuel, placent d'emblée la classe au niveau *S*₋₂ de la situation de référence. En reformulant certaines questions et en posant des questions intermédiaires, l'enseignant enrichit le milieu de l'élève et crée, dans le même temps, un mouvement d'aller-retour entre la situation *S*₋₂ et la situation *S*₋₁ d'apprentissage. Pour capturer ce mouvement, il nous semble intéressant de voir que l'enseignant commence par installer un microcontrat de production collective dans un mésocontrat de réinvestissement de connaissances et de savoirs. Les élèves sont invités à participer à un jeu de questions/réponses en même temps qu'à un jeu d'évaluation/validation. Le milieu est organisé de manière à ce que les élèves puissent prendre en charge la production et la validation de leurs réponses, pour certains, et la correction de leurs erreurs, pour d'autres.

²²² *E_T* renvoie à l'élève au tableau.

Phase 6 (20 minutes)

L'enregistrement vidéo a permis de vérifier le caractère strictement individuel du travail des élèves. L'examen des traces écrites de ces derniers a fourni les résultats suivants :

Question 2.a. $n = 10$

- Tous les élèves ont identifié et hachuré les surfaces comprises entre les rectangles r_k et R_k ($1 \leq k \leq 10$), puis exécuté le déplacement et l'empilement de ces surfaces dans la colonne de droite.
- 6 élèves n'ont rien produit sur la comparaison de u_{10} , A et v_{10} ni sur la valeur de $v_{10} - u_{10}$.
- 4 élèves ont fourni l'encadrement $u_{10} < A < v_{10}$.
- 12 élèves ont fourni l'encadrement $u_{10} \leq A \leq v_{10}$.
- 11 élèves ont donné la réponse $v_{10} - u_{10} = \frac{1}{10} (f(1) - f(0))$ sans aucune justification.
- 5 élèves ont donné la réponse $v_{10} - u_{10} = \frac{1}{10} (f(1) - f(0))$ en la justifiant par le fait que $v_{10} - u_{10}$ est l'aire du rectangle de dimensions $\frac{1}{10}$ et $f(1) - f(0)$.

Question 2.a. $n = 20$

- Tous les élèves ont identifié et hachuré les surfaces comprises entre les rectangles r_k et R_k ($1 \leq k \leq 20$), puis exécuté le déplacement et l'empilement de ces surfaces dans la colonne de droite.
- 6 élèves n'ont rien produit sur la comparaison de u_{20} , A et v_{20} ni sur la valeur de $v_{20} - u_{20}$. Ce sont les mêmes élèves qui n'ont rien produit sur les deux questions dans le cas $n = 10$.
- 4 élèves ont fourni l'encadrement $u_{20} < A < v_{20}$. Ici aussi, il s'agit des quatre élèves ayant fourni l'encadrement $u_{10} < A < v_{10}$.
- 12 élèves ont fourni l'encadrement $u_{20} \leq A \leq v_{20}$.
- 11 élèves ont donné la réponse $v_{20} - u_{20} = \frac{1}{20} (f(1) - f(0))$ sans aucune justification.
- 5 élèves ont donné la réponse $v_{20} - u_{20} = \frac{1}{20} (f(1) - f(0))$ en la justifiant par le fait que $v_{20} - u_{20}$ est l'aire du rectangle de dimensions $\frac{1}{20}$ et $f(1) - f(0)$.

Question 2.b

- 6 élèves n'ont entrepris aucune tentative pour établir que $v_n - u_n = \frac{1}{n} (f(1) - f(0))$.
- 9 élèves ont essayé d'établir l'égalité en question à l'aide du raisonnement par récurrence.
- 7 élèves ont réussi à établir l'égalité demandée. Deux formes de calculs sont utilisées :

Première forme (3 élèves)

$$\begin{aligned}v_n - u_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} n f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} n f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{n} (f(1) - f(0)).\end{aligned}$$

Deuxième forme (4 élèves)

$$\begin{aligned}v_n - u_n &= (A_1 - a_1) + (A_2 - a_2) + \dots + (A_n - a_n) \\ &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (A_n - a_n) \\ &= A_n - a_1 \\ &= \frac{1}{n} f(1) - \frac{1}{n} f(0) \\ &= \frac{1}{n} (f(1) - f(0))\end{aligned}$$

Question 2.c.

- 11 élèves n'ont pas répondu à cette question.
- 11 élèves ont réussi à déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n)$.

Question 3.a.

- 11 élèves n'ont pas répondu à cette question.
- 11 élèves ont donné l'encadrement $u_n \leq A \leq v_n$, mais sans aucune forme de justification.

Questions 3.b. et 3.c.

17 élèves n'ont répondu à aucune de ces deux questions. En revanche, les 5 autres élèves ont réussi les deux questions à la fois.

Commentaire

L'analyse des productions des élèves mettent en évidence deux résultats notables que nous commentons ci-dessous :

1. La réussite de tous les élèves dans les tâches d'ordre graphique (représentation des rectangles r_k et R_k , identification et déplacement dans la colonne de droite des surfaces d'aires $v_n - u_n$ pour $n = 10$, puis pour $n = 20$, lecture graphique). Ce résultat traduirait la disponibilité chez les élèves des compétences nécessaires pour réussir les tâches d'ordre graphique. L'accessibilité de ces tâches aux élèves est bien évidente. Il n'est à peine nécessaire de souligner que le milieu ainsi construit et la correction au tableau de la première partie de la situation contiennent les *moyens sémiotiques d'objectivation*²²³ suffisants pour permettre aux élèves de mener à bien la suite de leur activité. Mais l'analyse a posteriori montre que ces moyens ne sont pas identifiés par certains élèves et ne sont que partiellement utilisés par d'autres.
2. La difficulté des élèves à objectiver le *schème*²²⁴ de *généralisation factuelle*²²⁵ de la somme télescopique. Alors que le procédé de cette sommation a été déjà exposé et mis en fonctionnement au tableau dans le cas particulier $n = 5$, les élèves n'ont pas réussi, pour la grande partie (15 élèves, soit 68%), à le mobiliser dans le cas général. Ces élèves se répartissent en deux groupes ; le premier est formé des six élèves (27%) qui n'ont rien produit sur la question, le second regroupe de neuf élèves (41%) qui ont cherché à établir le résultat à l'aide du raisonnement par récurrence. Ce résultat met en évidence la difficulté qu'ont les élèves à employer une méthode autre que celles dont ils ont l'habitude d'utiliser. Cette difficulté apparaît surtout au niveau du choix de la méthode de récurrence qui est à l'évidence inadéquat. Il nous semble que ce choix procède à partir de ce que nous avons qualifié d'habitudes d'actions²²⁶ : la simple apparition d'une tâche dans le cadre des suites à propos d'une relation faisant intervenir l'entier naturel n provoque un recours au raisonnement par récurrence. Une autre difficulté, non moins considérable, apparaît au niveau des trois dernières questions de la situation. Il s'agit de l'importance du nombre

²²³ *Ce sont des objets, des artefacts, des termes linguistiques et des signes en général qu'on utilise afin de rendre apparente une intension et de mener à terme une action* (Radford, 2004, p.13)

²²⁴ Il faut l'entendre au sens kantien tel que l'explique Radford dans (Redford, 2004, p. 8) : « *c'est le schème qui assure la relation entre le général et le particulier. Le concept « descend » pour ainsi dire du monde intellectuel et, en se schématisant, il s'inscrit dans l'expérience humaine ; il y prend une forme particulière qui, malgré ses particularités revêt tout de même les traits de sa généralité* ».

²²⁵ Radford appelle ainsi « *une généralisation d'actions sous la forme d'un schème opérationnel qui reste confiné au niveau numérique* » (Radford, 2004, p. 16)

²²⁶ Voir le chapitre « Analyse institutionnelle »

d'élèves n'ayant pas répondu à ces questions (11 élèves) ainsi que celle de ceux (6 élèves) qui ont répondu à ces questions sans aucune forme de justification. Ce dernier résultat donne à penser que la réponse de ces élèves est le produit d'une analogie directe avec les cas $n = 5, 10, 30$ plutôt que le produit d'un calcul conscient sur les surfaces en jeu. Soulignons, cependant, que cinq élèves ont réussi à justifier les deux encadrements indiqués dans la situation et à conclure que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Phase 7 (30 minutes)

Cette phase est consacrée à la correction des questions 2 et 3 de la situation 2. Elle vise à prouver que les suites (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers la valeur A de l'aire de la surface (S) et à donner une interprétation de la différence $v_n - u_n$.

Analyse en termes de contenus travaillés

C₁ : Nature des savoirs

En termes de statuts du savoir au sens de Perrin-Glorian et Hersant (2003), les savoirs en jeu sont pour l'essentiel des savoirs anciens à réinvestir et à consolider, un savoir méthodologique nouveau après une première rencontre à réinvestir et à généraliser et un savoir entièrement nouveau à construire et à institutionnaliser. Il s'agit surtout de savoirs contextualisés et de savoirs génériques.

C₂: Nature des tâches

Les tâches autour desquelles s'est organisé le travail de la classe sont les suivantes :*

t_1 : Reprendre la question Q_1 avec $n = 10$, puis avec $n = 20$.

t_2 : Justifier l'égalité $v_n - u_n = \frac{1}{n} [f(1) - f(0)]$.

t_3 : Préciser $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n)$.

t_4 : Comparer en le justifiant u_n, A et v_n .

t_5 : Établir les encadrements $0 \leq A - u_n \leq v_n - u_n$ et $u_n - v_n \leq A - v_n \leq 0$.

t_6 : Conclure.

L'examen du déroulement effectif de cette phase nous a permis de constater les résultats suivants :

Tâche	Simple/Complexe	Routinière/Problématique	Ouverte/Fermée
t_1	Simple	Routinière	Fermée
t_2	Complexe	Problématique	Fermée
t_3	Simple	Routinière	Fermée
t_4	Complexe	Problématique	Ouverte
t_5	Simple	Routinière	Fermée
t_6	Simple	Routinière	Fermée

C₃ : Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances

L'examen des aides apportées par l'enseignant et l'analyse des réponses fournies par les élèves nous ont permis de constater les résultats suivants :

Tâche	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	Technique	Mobilisable	Technique	Mobilisable	Technique	Technique

C₄ : Types d'adaptations

Les élèves ont réussi individuellement et collectivement, suivant les cas, à trouver les adaptations nécessaires pour répondre aux questions qui leur ont été posées. Il s'agit pour l'essentiel d'adaptations de types reconnaissances et coordination entre différents registres.

Analyse en termes de formes de travail de la classe

F₁ : Forme de travail des élèves

Ici encore, le travail de la classe ressemble en tous points aux autres phases de correction. Les élèves sont invités à participer aux jeux de questions/réponses et d'évaluation/validation organisés et pilotés par l'enseignant.

F₂ : Niveau de participation des élèves

Au cours de cette phase, nous avons enregistré 100 échanges (50 interventions d'élèves et 50 interventions de l'enseignant). Quatre élèves se sont succédés au tableau et beaucoup d'autres ont participé activement à la fois pour proposer des solutions aux tâches prescrites et pour répondre aux questions posées par l'enseignant.

F₁ : Types d'interventions de l'enseignant

Comme dans les phases précédentes de correction au tableau, la plupart des interventions de l'enseignant sont des interventions ordinaires et souvent d'ordre organisationnel. L'enseignant a eu à intervenir ponctuellement en trois endroits : deux fois pour faire appel à la mémoire de la classe (P_{151}, P_{153}) et une fois pour expliquer au tableau l'inadéquation du procédé d'itération dans le calcul de $v_n - u_n$ (transcription p.22) .

F₄ : Les incidents

Dans cette phase, particulièrement longue, nous n'avons relevé que très peu d'incidents. Il y a eu exactement 6 incidents : trois réponses imparfaites, deux réponses imprécises et un dernier incident difficile à classer. Ce dernier incident concerne le recours au raisonnement par récurrence et la difficulté de le classer est due au fait qu'aucune intervention audible d'élève sur la question n'apparaît dans l'enregistrement audio.

Incident / Question	Confusion	Imprécision	Imperfection	Autres
<i>Q. 2. a</i>				
<i>Q. 2. b</i>		E_{134}		
<i>Q. 2. c</i>				p. 22
<i>Q. 3. a</i>				
<i>Q. 3. b</i>				
<i>Q. 3. c</i>		E_{155}	$E_{158}, E_{159}, E_{161}$	
Total		2	3	1

F₅ : Gestion des incidents

L'examen de la transcription de cette phase donne à voir que les incidents sont gérés à l'aide des mêmes techniques que nous avons déjà identifiées dans la phase 1. Encore une fois, la relance apparaît comme le mode dominant dans la gestion des incidents par l'enseignant. En effet, sur les 15 incidents enregistrés dans cette phase, nous avons compté 13 relances.

Le cas de l'incident sur le raisonnement par récurrence nous dévoile cependant un autre mode de gestion utilisé par l'enseignant. L'incident apparaît d'abord dans une remarque de l'enseignant :

P_{161} : Une remarque. Beaucoup d'entre vous ont essayé d'obtenir ça par récurrence. Est-ce que la situation se prête à un raisonnement par récurrence ?

Ici, l'utilisation du raisonnement par récurrence par certains élèves est rendue publique mais elle n'est pas exposée, elle n'est pas commentée. La question de son inadéquation est renvoyée à toute la classe, et la réponse négative E_{139} de l'un des élèves n'a reçu aucune réaction de l'enseignant. Mais la question réapparaît environ 5 minutes après lorsque deux élèves sollicitent de nouveau l'enseignant sur la possibilité d'utiliser le procédé d'itération pour calculer $v_n - u_n$. Cette fois, l'enseignant leur explique, en le contre-exemplifiant graphiquement²²⁷, l'inadéquation de ce procédé.

Analyse en termes de milieu et de contrat

Dans la mesure où il succède à la situation de référence que constitue la phase précédente, dans la mesure où il s'appuie sur les aides de l'enseignant, le milieu de l'élève dans cette phase est particulièrement riche. L'analyse a posteriori met en évidence un mouvement perpétuel entre la situation S_{-2} de référence et de *production du savoir*²²⁸ et la situation didactique S_0 en passant par la situation S_{-1} d'apprentissage et de réflexion. En effet, par des mouvements incessants entre le milieu P_{-2} de référence et le milieu P_0 de « Professeur pour l'élève », l'enseignant pilote la classe du milieu objectif M_{-2} de production du savoir de la situation de référence au milieu M_0 d'apprentissage de la situation didactique. La perpétuation de ce mouvement est souvent forcée par l'insuffisance, du moins au niveau individuel, des connaissances des élèves. Alors que le microcontrat dominant est un microcontrat de production collective dans un mésocontrat de réinvestissement de connaissances, l'enseignant est obligé, par moment, de négocier un microcontrat d'adhésion où le savoir nouveau est obtenu par un jeu de questions/réponses entre l'enseignant et quelques élèves.

Phase 8 (26 minutes)

Nous nous trouvons dans l'une des plus difficiles phases de l'ingénierie : faire émerger la notion d'intégrale définie d'une fonction continue et positive, la charger de sens et expliquer sa notation. Cette phase est centrée sur un contenu critique et elle est dirigée en fonction des interventions des élèves, son contrôle est organisé et ce contrôle sous-tend les étapes de l'institutionnalisation du savoir visé. Le savoir en question est accessible aux élèves à

²²⁷ Voir l'explication dans la page 22 de la transcription.

²²⁸ Comme le remarquait déjà Radford : « alors que la production du nouveau savoir résulte d'activités communales, réflexives, médiatisées débouchant sur la création de concepts culturels, l'apprentissage scolaire est le processus de transformation des objets culturels en objets de conscience » (Radford, 2004, p.12).

condition de mobiliser, d'organiser et d'exploiter leurs connaissances. En effet, le contenu critique à enseigner est essentiellement des connaissances supposées disponibles qu'il faut activer et projeter.

Analyse en termes de contenus travaillés en classe

C₁ : Nature des savoirs

Les savoirs exposés sont pour l'essentiel des savoirs nouveaux après une première rencontre. Il s'agit d'abord de généraliser ces savoirs et de les décontextualiser et de finir par exposer le savoir nouveau visé par cette situation de l'ingénierie.

C₂ : Nature des tâches

Les tâches travaillées dans cette phase ne sont pas directement prescrites aux élèves. Ceux-ci sont invités à rappeler les résultats de la situation travaillée dans l'autre séance et à se prononcer sur certaines questions à propos de la portée de la méthode des rectangles dans le cas d'une fonction continue positive et décroissante, puis dans le cas d'une fonction continue positive et non monotone. Compte tenu de la nature des tâches travaillée dans cette phase, une part importante de ces tâches est prise en charge par l'enseignant. Les tâches en jeu dans cette phase sont, pour l'essentiel, problématiques et complexes. En dernière analyse, ces tâches peuvent être formulées comme suit :

t₁ : La méthode des rectangles s'applique-t-elle à une fonction décroissante ?

t₂ : Généraliser la méthode des rectangles à une fonction non monotone ?

t₃ : Introduire et expliquer la notation dx .

t₄ : Introduire et expliquer la notation $\int_a^b f(x)dx$.

C₃ : Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances

Compte tenu de la nature des tâches travaillées dans cette phase, notamment l'introduction des ostensifs dx et \int ainsi que le degré de généralité atteint, les connaissances requises relèvent pour l'essentiel du niveau mobilisable.

C₄ : Types d'adaptations

L'analyse a posteriori met en évidence le fait que les élèves, du moins ceux ayant participé à la réalisation effective des tâches, ont eu besoin de faire plusieurs adaptations. Le tableau suivant rend compte des différentes adaptations réussies par les élèves :

Types d'adaptations Tâche	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆
t ₁	E ₅ , E ₇ , E ₉					
t ₂	E ₂₃ , E ₂₅ , E ₂₇		E ₂₆ , E ₂₇	E ₁₂	E ₁₀ , E ₁₄ , E ₁₇	
t ₃	E ₃₀ , E ₃₁ , E ₃₂					
t ₄						

L'absence d'adaptations dans la tâche t₄ est due au fait que cette tâche est entièrement prise en charge par l'enseignant.

Analyse en termes de forme de travail de la classe

F₁ : Forme de travail des élèves

Les élèves sont invités au jeu de questions/ réponses organisé et piloté par l'enseignant. Ils sont particulièrement sollicités dans la première partie de cette phase où les questions portent sur la méthode des rectangles. Dans la deuxième partie, l'enseignant a essayé de laisser une part de responsabilité aux élèves, mais les connaissances de ceux-ci se sont révélées insuffisantes ce qui conduit l'enseignant à prendre entièrement à sa charge la dernière tâche dans cette phase.

F₂ : Niveau de participation de la classe

Au cours de cette phase, nous avons enregistré 94 échanges (40 interventions d'élèves et 54 interventions de l'enseignant) et le passage au tableau d'un seul élève. La baisse de la participation des élèves (et donc celle de la prise de responsabilité par ceux-ci) par rapport aux phases précédentes s'explique par le statut de savoir nouveau rencontré à travers les deux dernières tâches travaillées dans cette phase.

F₃ : Types d'intervention de l'enseignant

Cette phase est conduite sous forme d'un cours dialogué. Les interventions de l'enseignant sont très fréquentes et variées. Plus précisément, outre les interventions ordinaires, nous avons distingué les interventions ponctuelles suivantes :

- Présentation de la problématique de la situation 2 et sa mise en rapport avec celle de la situation 1 (P_{102}).
- Des aides ponctuelles surtout dans la troisième tâche (P_{124} , P_{150} , P_{153}).
- Remarques sur la précision et la correction du langage utilisé.
- Explication des ostensifs dx et \int et justification de l'écriture $\int_a^b f(x)dx$.
- Recours à des illustrations graphiques et la contre-exemplification dans la phase de généralisation de la définition de l'intégrale à une fonction continue et positive mais non nécessairement monotone.

F₄ : Les incidents

L'étude des transcriptions de cette phase a permis de constater qu'il n'y a eu que deux incidents. Le premier ($E_{20} \rightarrow P_{28}$) est provoqué par la difficulté qu'ont les élèves à reconnaître, dans le cas d'une fonction continue et positive, les hauteurs des rectangles r_k et R_k construits sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$. Cet incident « met en évidence la difficulté qu'ont les élèves à atteindre un niveau plus élevé de généralité » (Radford. L, 2004, p. 19). La difficulté rencontrée ici est fréquente dans l'enseignement secondaire. Le résultat attendu concerne toute fonction continue et positive sur $[x_k, x_{k+1}]$, mais les élèves ne semblent considérer que ce qui se donne à voir de visu dans le cas particulier du graphique tracé au tableau. Ceci nous conduit donc à penser que la difficulté des élèves réside dans leur incapacité à établir un contact avec la réalité de la situation et à discriminer entre deux types de propriétés d'une fonction continue et positive : ses *propriétés empiriques* (celles qui sont susceptibles d'être attrapées à travers l'exemple d'une figure donnée) et ses *propriétés générales* (celles qui sont partagées par toute autre exemplification d'une fonction continue et positive). Le moment du contact avec la réalité (quoi qu'on entende par là) est essentiellement celui de la mobilisation et de la mise en fonctionnement des connaissances adéquates.

Le second incident ($E_{33} \rightarrow E_{38}$) concerne la question de discriminer entre *zéro* et un nombre qui *tend vers zéro* (un nombre infiniment petit). À l'évidence, il y a chez certains élèves une confusion entre une grandeur et sa limite.

Incidents	Confusion	Imprécision	Imperfection	Autres
Effectif	1	1		

F₅ : Gestion des incidents

À côté des techniques de relance et d'illustration graphique qui semblent d'un usage régulier et stable dans la pratique de l'enseignant, nous avons enregistré des aides à la fois directes et indirectes, notamment à propos des propriétés générales d'une fonction continue sur un segment.

Analyse en termes de milieu et de contrat

L'analyse a posteriori met en évidence une organisation en trois temps correspondant aux milieux E_{-2}, E_{-1}, E_0 de l'élève. L'enseignant commence, grâce à un jeu de questions/réponses, par installer un microcontrat de production collective d'abord dans un mésocontrat de rappel (cas d'une fonction continue positive et croissante), puis dans un mésocontrat de réinvestissement de connaissances (cas d'une fonction continue positive et décroissante). Ici, la situation de référence S_{-2} est constituée de la situation travaillée en fin de la séance précédente. Le milieu de cette situation s'appuie sur la mémoire de la classe et il est enrichi par le graphique tracé par l'enseignant au tableau et par les questions de l'enseignant.

Dans le second temps, la situation (cas d'une fonction continue et positive) dévolue aux élèves nécessite la mise en œuvre de savoirs anciens et/ou en cours d'apprentissage qui doivent constituer un milieu de référence pour la production du savoir visé. Aussi, l'enseignant tente-t-il de maintenir le microcontrat de production collective pour laisser aux élèves le plus possible de responsabilité dans la production du savoir en jeu. Mais les connaissances des élèves se sont avérées insuffisantes ce qui amène l'enseignant à négocier un microcontrat d'adhésion puis un microcontrat d'ostension déguisée.

Dans la dernière étape de cette phase, l'enjeu consiste à mettre en forme, puis à institutionnaliser le savoir nouveau. L'enseignant commence par chercher à installer un microcontrat de production collective mais l'insuffisance des connaissances des élèves le

conduit à négocier un microcontrat d'adhésion avant d'opter pour un microcontrat d'information.

IV.6. Conclusion de la situation 2

Rappelons d'abord la problématique étudiée dans cette situation. Il s'agit d'étudier dans le cas particulier d'une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ la question : *comment calculer l'aire du sous-graphe de f ?* Cette question, qui s'inscrit dans la problématique plus générale du calcul de l'aire d'une surface non polygonale, met en œuvre la procédure intégrale illustrée dans notre cas par la méthode des rectangles.

La situation offre aux élèves une occasion pour découvrir et manipuler la méthode des rectangles. Dans la mesure où elle s'appuie, pour l'essentiel, sur la contextualisation de connaissances et de savoirs anciens, la classe est le plus souvent placée dans un mésocontrat de réinvestissement de connaissances et de savoirs alternant microcontrat de production individuelle et microcontrat de production collective. Ainsi, la situation organisée pour la classe est fortement adidactique. À chaque niveau de la situation adidactique, des moyens sémiotiques d'objectivation suffisants sont présents dans le milieu de l'élève qui permet, en dernière analyse, des rétroactions suffisantes. Cependant, l'analyse a posteriori donne à penser que ces moyens ne sont pas identifiés par certains élèves et ne sont que partiellement utilisés par d'autres. En effet, l'analyse met en évidence les difficultés qu'éprouvent beaucoup d'élèves dans les tâches de généralisation et de justification. Toutefois, l'étude des transcriptions rend compte d'une forte participation des élèves (106 interventions) et d'une baisse du nombre de confusions et d'imprécisions. Ce dernier constat est saisi à partir du nombre, et surtout de la nature, des incidents enregistrés au cours des différentes phases de cette situation.

En dernière analyse, la situation que propose cette situation nous paraît disposer d'un milieu suffisant pour permettre aux élèves de participer de façon active et effective à la construction de nouvelles connaissances et la production de nouveaux savoirs. Qui plus est, cette analyse donne à voir, surtout lors des phases de correction au tableau, l'absence de difficulté notable sur la question de l'accessibilité des élèves à la méthode des rectangles. En effet, il nous semble que les élèves disposent majoritairement des connaissances nécessaires pour fréquenter l'approche de l'intégrale par les aires et la capacité d'en saisir le sens mathématique. Sans doute, la mise en rapport entre le niveau local de l'interaction didactique observé (actions des élèves) et le niveau global de l'acquisition du savoir visé (apprentissages

des élèves) nécessite l'observation des élèves dans des phases de résolution de problèmes appropriés, ce que nous n'avons pas pu réaliser dans notre expérimentation.

IV.7. Analyse a posteriori de la situation 3

Phase 9 (25 minutes)

Après la lecture (à l'intention de la classe) de l'énoncé de la situation 3, l'enseignant explique la consigne. Les élèves sont invités à travailler les questions 1.a, 1.b et 1.c. L'enregistrement vidéo nous a permis de vérifier que les élèves ont travaillé de façon autonome et individuelle.

L'examen des productions des 18 élèves présents a donné les résultats suivants :

- Tous les élèves ont tracé correctement les droites d'équations $x = t$ et $x = t + h$.
- 16 élèves ont identifié la surface dont l'aire est $A(t + h) - A(t)$.
- 12 élèves ont réussi à justifier l'encadrement $hf(t) \leq A(t + h) - A(t) \leq hf(t + h)$.
- 8 élèves ont réussi à justifier la dérivabilité à droite en t de la fonction A .

Commentaire

L'analyse des productions des élèves rend compte du fait que ces derniers ont bien réussi les tâches d'ordre graphique, entendons la réalisation de représentations graphiques (100%), l'identification sur le graphique des surfaces en jeu (89%), l'interprétation graphique des produit $hf(t)$ et $hf(t + h)$ (67%). Cependant, cette réussite diminue considérablement dans les tâches de justification et de validation. En effet, huit élèves seulement (44%) ont vu qu'il s'agit de diviser d'abord par h les membres de l'encadrement $hf(t) \leq A(t + h) - A(t) \leq hf(t + h)$ et de passer ensuite à la limite avant de conclure à l'aide du théorème des gendarmes. Cependant, aucun élève n'a invoqué la continuité de f pour justifier $\lim_{h \rightarrow 0} f(t + h) = f(t)$. Ce constat pourrait traduire la difficulté des élèves à faire des connexions entre ce qui est donné et ce qui est demandé, voire leur incapacité à comprendre ce à quoi sert une donnée, quand et comment l'exploiter.

Phase 10 (38 minutes)

Cette phase n'est pas seulement consacrée à la correction au tableau de la dernière situation de l'ingénierie, mais elle est aussi, et surtout, une phase de bilan et d'institutionnalisation. C'est ce qui explique, entre autres, la durée de cette phase.

Analyse en termes de contenus travaillés

C₁ : Nature des savoirs

Cette phase a permis la mobilisation, la contextualisation et l'utilisation de savoirs anciens et de savoirs en cours d'apprentissage et leur connexion à un savoir nouveau. L'analyse a posteriori met en évidence l'organisation de mise en rapport et de dialectiques entre ces savoirs, entre leur contextualisation et leur décontextualisation.

Il y a d'abord une mise en œuvre de la méthode des rectangles (contextualisation d'un savoir méthodologique en cours d'apprentissage) pour obtenir un encadrement de $A(t+h) - A(t)$, puis celui du taux de variation de la fonction A entre t et $t+h$. Il s'agit ensuite de se ramener, moyennant une manipulation algébrique, à un encadrement du taux de variation de la fonction A entre t et $t+h$ avant de passer à la limite et conclure à l'aide du théorème des gendarmes (contextualisation de savoirs et de savoir-faire anciens). Le savoir nouveau (la dérivée de l'aire du sous-graphe de f est la fonction f) est le résultat en même temps que la motivation de cette situation. Outre ces dialectiques préalablement organisées pour la classe, d'autres savoirs mathématiques et métamathématiques ont été développés par l'enseignant surtout à propos de la problématique de l'intégrale et sa mise en rapport avec les notions d'aire et de primitive (P_{103}).

C₂ : Nature des tâches

Le travail de la classe s'est organisé pour l'essentiel autour des tâches suivantes :

t_1 : Reconnaître et représenter graphiquement une surface d'aire donnée.

t_2 : Établir l'encadrement $hf(t) \leq A(t+h) - A(t) \leq hf(t+h)$, ($h > 0$).

t_3 : Justifier que f est dérivable à droite en t et que $A'_d(t) = f(t)$.

t_4 : Établir l'encadrement $hf(t-h) \leq A(t) - A(t-h) \leq hf(t)$, ($h > 0$).

t_5 : Justifier que f est dérivable à gauche en t et que $A'_g(t) = f(t)$.

t_6 : Conclure.

Compte tenu de la manière dont les énoncés de la situation sont formulés, compte tenu des aides apportées par l'enseignant (parcellisation et/ou reformulation de certaines tâches) pendant la correction, les tâches travaillées dans cette phase nous paraissent simples, routinières et fermées. Cependant, l'analyse des transcriptions nous a permis de constater que

la question de l'enseignant sur la justification du résultat $\lim_{h \rightarrow 0} f(t+h) = f(t)$ a fait difficulté dans la classe. Cette question rend compte, encore une fois, de la difficulté des élèves à faire appel aux arguments adéquats pour justifier leurs réponses.

C₃ : Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances

L'analyse des transcriptions donne à voir qu'en raison du jeu de questions/réponses organisé par l'enseignant avec la classe, les connaissances des élèves mises dans la situation relèvent souvent du niveau technique et, moins souvent, du niveau mobilisable. Le tableau suivant rend compte des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances des élèves en tenant compte des aides apportées par l'enseignant :

Tâche	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
Niveau de mise en fonctionnement Des connaissances	Technique	Mobilisable	Mobilisable	Technique	Technique	Technique

C₄ : Types d'adaptations

Compte tenu de la nature des tâches travaillées dans cette phase, les adaptations faites par les élèves sont, pour une grande partie, du type adaptations. Pour en rendre compte de façon plus précise, nous proposons le tableau suivant :

Type d'adaptations Tâche	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
t_1	E_{43}, E_{46}		×	×		
t_2	E_{50}, E_{51}	×	×	×		
t_3	E_{55}, E_{59}, E_{65}					
t_4	E_{66}, E_{68}, E_{71}				×	
t_5	×					
t_6	E_{74}, E_{76}, E_{88}					

Dans ce tableau, le signe × renvoie à l'élève au tableau quand il écrit sans parler.

Analyse en termes de formes de travail de la classe

F₁ : Forme de travail des élèves

Comme dans les autres phases de correction, l'enseignant désigne un élève au tableau et engage la classe dans un jeu de questions/réponses dans lequel ils sont invités, suivant les cas, à compléter, à enrichir et à évaluer les réponses de leurs camarades. L'examen des transcriptions de cette phase rend clairement compte du caractère collectif du travail de la classe.

F₂ : Niveau de participation des élèves

Dans cette phase, nous avons noté le passage de trois élèves au tableau et compté 95 échanges dont 47 interventions d'élèves. L'enregistrement vidéo nous a permis d'observer que 8 élèves (au moins) ont participé de façon effective dans cette phase.

F₃ : Types d'interventions de l'enseignant

Comme dans les autres phases de correction, les interventions de l'enseignant sont, le plus souvent, des interventions ordinaires. L'analyse des transcriptions permet de constater que les interventions ponctuelles de l'enseignant sont mineures et consistent pour l'essentiel à inciter les élèves à l'auto-correction (P_{56}, P_{68}), à la réflexion (P_{77}, P_{85}), à la prise de distance par rapport à la manière d'appréhender les données (P_{84}).

F₄ : Les incidents

L'examen des transcriptions nous a permis de relever quatre incidents : une confusion entre surface et aire (Mustapha au tableau, p. 38), une réponse incomplète (E_{45}), une réponse circulaire se résumant en $\lim_{h \rightarrow 0} f(t+h) = f(t)$ car h tend vers 0 (E_{63}) et le silence de la classe face à la question sur l'intérêt de l'hypothèse de continuité de la fonction.

Incidents	Confusion	Imprécision	Imperfection	Autres
effectif	1		2	Silence

F₅ : Gestion des incidents

Dans cette phase aussi, l'enseignant a fait appel aux mêmes modes de gestion que ceux déjà soulignés dans les autres phases de correction.

Analyse en termes de milieu et de contrat

Comme dans les autres phases de correction, l'enseignant désigne un élève au tableau et sollicite une correction collective. Les élèves sont ainsi placés dans un microcontrat de production collective à l'intérieur d'un mésocontrat de réinvestissement de connaissances et de savoirs. Le milieu objectif/matériel constitué par la situation individuelle des élèves (phase précédente), le support écrit et graphique au tableau et les réponses des élèves a permis à la classe d'atteindre sans difficulté l'encadrement du taux de variation de la fonction A entre t et $t + h$. L'élève au tableau a indiqué qu'il s'agit ensuite de passer à la limite et de conclure à l'aide du théorème des gendarmes mais lorsque l'enseignant demande à l'élève au tableau, puis la classe, de justifier que $\lim_{h \rightarrow 0} f(t + h) = f(t)$, les connaissances des élèves se révèlent insuffisantes. Ce manque dans le milieu constitué des réponses des élèves conduit l'enseignant à négocier un microcontrat d'ostension déguisée, suivi d'un microcontrat d'information avant de laisser de nouveau à la charge de la classe la production des connaissances et la validation des réponses. Il replace ainsi la classe dans un microcontrat de production collective à l'intérieur d'un mésocontrat de réinvestissement de connaissances et de savoirs, puis d'institutionnalisation d'un savoir nouveau.

IV.8. Conclusion de la situation 3

Reprenons pour conclure le but de cette dernière situation. Il s'agit d'établir, dans le cas générique d'une fonction f continue et positive, que la dérivée de l'aire variable sous le graphe de f est la fonction f et, par là, de mettre en rapport les notions d'aire, d'intégrale et de primitive.

La situation offre aux élèves une nouvelle occasion pour utiliser l'idée sous-jacente à la méthode des rectangles et découvrir une application de la notion de primitive. La classe est placée, le plus souvent, dans un microcontrat de production collective et/ou individuelle à l'intérieur d'un mésocontrat de réinvestissement de connaissances et de savoirs anciens et/ou génériques.

L'analyse a posteriori rend compte d'une participation active et satisfaisante des élèves aux différentes phases de cette situation, notamment en acceptant de prendre en charge une part importante dans la production du savoir. D'après la même analyse, il nous semble que, dans l'ensemble, les élèves ont réussi individuellement et/ou collectivement à mobiliser et à mettre en fonctionnement les connaissances mathématiques et méthodologiques suffisantes pour

répondre aux questions posées dans les différentes phases de cette situation. Ce résultat pourrait se donner à voir à travers l'absence d'incident en rapport direct avec projet principal de l'enseignant.

Enfin, il nous paraît que la situation répond de façon favorable à la question sur l'accessibilité des élèves à la mise en rapport entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive. En effet, l'analyse du déroulement effectif de la situation permet de saisir la disponibilité des connaissances nécessaires à cette mise en rapport chez les élèves et leur capacité à les mobiliser.

V. Conclusion de l'analyse a posteriori

Rappelons avant de conclure les motivations et les objectifs de l'ingénierie. Il s'agit d'expérimenter une approche pour introduire l'intégrale dans une classe terminale. Les questions posées dans cette ingénierie sont principalement la faisabilité et la mise en œuvre d'une alternative à l'approche proposée dans le manuel scolaire. Cette alternative part des questions suivantes :

1. Est-il possible d'organiser un enseignement de l'intégrale autour d'une problématique qui rend compte des articulations épistémologiques entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive ?
2. Comment faire fréquenter à des élèves en classe terminale la mise en rapport de ces notions?
3. Qu'est-ce qui est effectivement possible d'être mis en œuvre, en situation réelle de classe, pour permettre à ces élèves de construire du sens autour de la notion d'intégrale ?

Dans cette conclusion, nous allons tenter, à partir des résultats de nos analyses, de voir dans quelle mesure la réalisation effective de l'ingénierie pourrait éclairer ces questions. Dans la mesure où cette conclusion s'appuie sur des résultats tels qu'ils apparaissent et tels qu'ils sont saisis par nos analyses, c'est une conclusion limitée et même incomplète. Ce que nous inférons de ces analyses ne constitue que pour une petite part un résultat objectif et certain, pour la plus grande part, il s'agit surtout d'un examen général de quelques possibilités. Pour en rendre compte, nous proposons une synthèse de nos analyses du point de vue des contenus travaillés en classe et du point de vue de la forme de travail de la classe.

Contenus travaillés en classe

Les connaissances, les savoirs et les savoir-faire mathématiques mobilisés et construits sont divers et nombreux et il nous semble que toute entreprise d'en rendre compte de façon exhaustive serait fastidieuse et sans intérêt certain. Aussi, avons-nous choisi de centrer notre synthèse sur les savoirs les plus notables et plus particulièrement les savoirs nouveaux. Ce choix pourrait être justifié par l'intérêt que nous attachons à l'évaluation de l'accessibilité des élèves à ces savoirs. Le principe de l'ingénierie consiste à mettre l'élève en situation de mobiliser ses connaissances intuitives, mathématiques et méthodologiques pour participer dans la production des savoirs nouveaux visés. Les savoirs en question et leurs natures sont synthétisés dans le tableau suivant :

Savoirs et savoir-faire	Nature
Propriétés élémentaires de l'aire	Mathématique décontextualisé
Calculer l'aire d'une surface polygonale (découpage)	Méthodologique contextualisé
Théorème de Hadamard	Mathématique/méthodologique décontextualisé
Procédure intégrale (méthode des rectangles)	Méthodologique générique
Suites faiblement adjacentes	Mathématique générique
Ostensifs dx et \int	Mathématique contextualisé
Lien entre aire et intégrale	Mathématique générique
Intégrale d'une fonction continue	Mathématique décontextualisé
Procédure dérivée-primitive	Méthodologique générique
Lien entre aire et primitive	Mathématique générique
Lien entre intégrale et primitive	Mathématique décontextualisé

Remarquons d'abord que le déroulement effectif de l'ingénierie est tout à fait conforme au déroulement prévu et que les résultats de l'analyse a posteriori sont dans leur grande majorité ceux prévus dans l'analyse a priori. Ceci étant, l'ingénierie a permis la rencontre de l'élève avec une problématique de l'aire d'une surface non polygonale, et une mise en rapport entre les trois notions d'aire, d'intégrale et de primitive. Compte tenu du déroulement effectif de l'ingénierie, il nous semble raisonnable d'affirmer que l'ingénierie répond de façon satisfaisante à la première question rappelée en début de cette conclusion.

Dans le même temps, l'ingénierie a permis aux élèves de mobiliser et de mettre en fonctionnement des connaissances anciennes diverses et variées et par là, la consolidation de certaines d'entre elles, pour certains élèves, et la correction de certaines autres, pour d'autres élèves. Cela devrait permettre de renforcer tout un ensemble de connaissances et d'aptitudes

qui, à leur tour, doivent diriger le progrès cognitif de l'élève et créer des formes de compétences plus efficaces et plus productives.

Enfin, l'analyse a posteriori met en évidence que le contenu et les méthodes mathématiques prévues dans le projet de l'enseignant ont été effectivement travaillés en classe et enrichis d'autres développements suites à certaines questions soulevées par quelques élèves, notamment sur les propriétés de l'aire et sur les preuves formelles. À la lumière de l'analyse des transcriptions, il nous semble que la discussion de certains incidents a permis à quelques élèves de se corriger au niveau de la pensée et du langage mathématique, et à certains autres d'éclairer des confusions et des imprécisions. Nous examinerons ce constat dans l'analyse du point de vue de la logistique didactique dans le paragraphe suivant.

Forme de travail de la classe

L'examen de l'organisation de l'ingénierie au niveau global rend compte que les supports utilisés dans l'activité de la classe sont l'écrit dans les phases de travail individuel, l'oral et le tableau pendant les phases de travail collectif. D'autre part, cette organisation alterne phase de travail collectif et phase de travail individuel de durées variables selon l'importance des tâches en jeu.

Au niveau local de chaque phase de travail individuel, nous avons pu vérifier sur l'enregistrement vidéo le caractère autonome et individuel du travail de l'ensemble des élèves de la classe. Cette alternance de phases a créé une dynamique intéressante et productive. En effet, la richesse et la diversité des réponses et des questions des élèves observées dans les phases de travail collectif, d'une part, et l'examen des traces écrites recueillies dans leurs copies, d'autre part, indiquent le bon engagement des élèves dans le travail de recherche. Ici, il y a lieu de penser que l'ingénierie a suscité l'intérêt de la majorité des élèves.

Niveau de participation des élèves

L'examen des transcriptions nous a permis de compter un total de 522 interventions réparties en 245 interventions d'élèves et 277 interventions de l'enseignant détaillées dans le tableau suivant :

Phase	1	3	5	7	8	10
Nombre d'interventions des élèves	44	48	16	50	40	47
Nombre d'interventions de l'enseignant	41	59	25	50	54	48

Ces résultats donnent à voir une forte participation de la classe. L'importance du nombre d'échanges, nous l'avons dit, pourrait s'interpréter comme un engagement effectif de la plupart des acteurs (élèves et enseignant), d'une part, et, d'autre part, comme un signe de l'intérêt des élèves pour le contenu de l'ingénierie.

Les résultats des élèves

L'examen des traces écrites des élèves a fourni les résultats suivants:

Situation 1

Question	Q. 1.	Q. 2.
Réussite	100%	64%

Situation 2

Questio	Q. 1. a	Q. 1. b	Q. 1. c	Q. 1. d. i	Q. 1. d. ii	Q. 2. a. i	Q. 2. a. ii	Q. 2. b	Q. 2. c	Q. 3. a	Q. 3. b	Q. 3. c
Réussite	100%	73%	100%	100%	73%	73%	73%	32%	50%	50%	23%	23%

Situation 3

Question	Q. 1 a	Q. 1. b	Q. 1. c
Réussite	89%	67%	44%

L'analyse de ces trois tableaux met en évidence les résultats suivants exprimés en moyenne sur l'ensemble des élèves de la classe :

- 96% ont réussi les tâches d'ordre graphique (représentations, découpages, reconnaissances et/ou lecture graphique, interprétations).
- 55% ont fourni les résultats attendus (avec ou sans justification) dans les tâches qui ne sont pas d'ordre graphique (évaluation de l'aire d'une surface, égalités, encadrements, limites).
- 32% ont obtenu, en les justifiant de façon acceptable, tous les résultats attendus dans l'ingénierie.

Pour mieux rendre compte de ce dernier résultat, nous donnons les pourcentages des élèves ayant totalement réussi à obtenir et à justifier de manière acceptables les résultats attendus dans chaque situation:

Situation	1	2	3
Réponse juste et justifiée	64%	18%	44%

Ces résultats nous semblent intéressants et riches en enseignement :

- Les connaissances des élèves relatives aux différentes tâches graphiques et au calcul numérique sont satisfaisantes.
- La majorité des élèves ont une bonne maîtrise de la gestion de la coordination entre le visuel et ce qui lui correspond, suivant le cas, dans les registres numérique, analytique et formel.
- La majorité des élèves (15/22) ont buté sur la question 2.b. de la situation 2. L'examen des traces écrites de ces élèves montre que 6 élèves n'ont pas atteint cette question et que les 9 autres élèves ont essayé d'établir l'égalité à l'aide d'un raisonnement par récurrence. En ce qui concerne ces derniers, deux explications sont possibles : le choix du raisonnement par récurrence est délibéré et renvoie alors à une habitude d'action ou bien il est forcé dans le sens que l'élève n'a pas compris comment calculer $v_n - u_n$. Enfin, les autres élèves (7/22) ont réussi à mettre en œuvre la stratégie de la somme télescopique et à justifier l'égalité demandée. Ces résultats pourraient se justifier par le fait que la tâche en question rompt avec le stéréotype de tâches sur les suites auxquelles les élèves sont habitués. Ajoutons que quoique la stratégie de la somme télescopique n'a pas bien fonctionné dans la phase de travail individuel, nous estimons que la correction au tableau a permis à certains élèves de mieux comprendre sa mise en fonctionnement.
- Un grand nombre d'élèves (14/22) n'ont pas réussi à justifier la dérivabilité à droite même si 7 d'entre eux ont justifié l'encadrement $hf(t) \leq A(t+h) - A(t) \leq hf(t+h)$. Ce résultat pourrait s'expliquer par la difficulté qu'ont ces élèves à travailler dans le registre formel.

Les incidents

Les différentes interventions des élèves ont provoqué 42 incidents répartis comme suit :

Incidents	Confusion	Imprécision	Imperfection	Autres
Phase 1	6	4	6	
Phase 3	2	6	4	
Phase 5		1		Silence
Phase 7		2	3	1
Phase 8	1	1		
Phase 10	1		2	Silence
Totaux	10	14	15	3

L'examen de ce tableau donne à voir clairement la baisse progressive du nombre d'incidents. À mesure que l'ingénierie se développe, les élèves commettent moins d'erreurs de confusion, le langage utilisé est plus précis, les connaissances et les savoirs mobilisés sont moins lacunaires et leurs réponses sont plus claires et plus complètes.

Pour saisir le contenu critique des différents résultats obtenus et comprendre en quoi les connaissances des élèves étaient insuffisantes, on peut invoquer des causes : le statut de la démonstration en mathématique dans l'enseignement secondaire tunisien qui l'a marginalisé ; ou encore la faible (ou l'absence de) prise en compte du processus de généralisation dans l'activité mathématique de l'élève. Les élèves sont majoritairement capables d'appliquer des formules, de faire des calculs et de conjecturer des résultats mais ils sont, pour une grande partie, incapables de justifier leurs conjectures, de donner du sens et/ ou d'interpréter ces formules et les résultats de leurs calculs. Ces difficultés pourraient s'expliquer par la tendance dominante dans l'enseignement secondaire tunisien qui, nous l'avons souligné plusieurs fois dans l'analyse institutionnelle, consiste à faire acquérir aux élèves des compétences essentiellement calculatoires. Pour mieux saisir notre propos, nous renvoyons à notre analyse du manuel scolaire. Toutefois, les élèves ont une nouvelle occasion, que constituent les phases de correction collective, pour corriger certaines erreurs et combler quelques connaissances lacunaires.

Cependant, au-delà de ces difficultés, il nous semble que dans l'ensemble une grande partie des élèves de la classe possèdent à la fois le potentiel et les connaissances pour fréquenter les situations que propose l'ingénierie. Sans doute les principaux aspects de ce potentiel et la disponibilité des connaissances de ces élèves apparaissent-ils plus clairement dans les phases de production collective : forte participation, richesse des réponses et des propositions, variation du questionnement, etc.

Par ailleurs, il nous semble qu'il est possible de dire de la réalité de l'ingénierie qu'elle est mise sous le signe de l'élève agissant, de l'élève produisant le savoir et de l'élève apprenant. Cette position est saisie à travers l'importance de la part d'adidacticité des situations proposées, la structuration du milieu de l'élève et le jeu de contrats didactiques organisés. L'élève est, le plus souvent, entre le niveau E_{-2} de la situation de référence et le niveau E_{-1} de la situation d'apprentissage avant de passer au niveau E_0 de la situation didactique en fin de chaque situation. L'analyse a posteriori en termes de contrat permet de constater que, la plupart du temps, la classe est placée dans une alternance de microcontrats de production

individuelle et de production collective à l'intérieur d'un mésocontrat de réinvestissement de connaissances et de savoirs.

Pour nous résumer, nous pouvant maintenant considérer que l'ingénierie répond favorablement aux trois questions rappelées au début de cette conclusion. Elle montre qu'il existe en effet des possibilités spécifiques pour faire accéder les élèves à une approche capable de rendre compte des articulations épistémologiques entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive ainsi que des moyens spécifiques pour réaliser ces possibilités. De plus cette approche est compatible avec l'esprit et les objectifs du programme officiel.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Rappelons que ce travail de recherche part d'un constat empirique sur les difficultés, en rapport avec la notion d'intégrale, éprouvées par des élèves en classe terminales et des étudiants en première année d'université. Ce constat est fortement partagé par beaucoup d'enseignants d'université qui soulignent que lorsqu'ils arrivent à l'université, les nouveaux bacheliers n'ont sur la notion d'intégrale que des connaissances de surface, approximatives et lacunaires. Cette situation nous a interpellé et nous a conduit à l'idée d'entreprendre ce travail d'ingénierie didactique. Pour rendre compte des résultats de ce travail, nous avons choisi de donner à notre exposé l'ordre des phases de l'ingénierie didactique telles qu'elles apparaissent dans l'introduction générale de ce travail en l'endroit du cadre théorique.

I. Les analyses préalables

I.1. Analyses épistémologique et historique

La première partie de ce travail nous a permis de rendre compte des articulations épistémologiques entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive. Notre étude met en évidence que la problématique qui est à l'origine de la notion d'intégrale renvoie pour l'essentiel à des problèmes de calcul d'aires. En partant de ce constat sur la centralité de la notion d'aire, nous nous sommes attaché à explorer sa genèse historique et les difficultés inhérentes. Dans la première partie de ce travail, nous avons rendu compte que pour calculer l'aire de certaines surfaces, les mathématiciens utilisaient des techniques construites *ad hoc* qui s'appuient principalement sur la stratégie d'inscription et de circonscription. Nous avons ensuite souligné que, jusqu'à la création du calcul infinitésimal par Newton et Leibniz, ces techniques sont motivées par les besoins du calcul plutôt que par un questionnement sur le sens mathématique des notions utilisées. Expliciter les idées non formulées qui présidaient à ces calculs n'eut pas pour seul effet de satisfaire les exigences de rigueur mathématique, cela a permis de forger les outils propres à déterminer, puis à étendre le domaine de validité de ces calculs et de les effectuer dans tous les cas où ils sont valables. Pour cela, il fallait trouver une manière d'attribuer à toute surface, du moins à tout élément d'une classe Q la plus large possible, un nombre qu'on appellera l'aire de la surface, et qui soit en accord avec la notion intuitive d'aire utilisée dans la géométrie élémentaire. En particulier, en nous plaçant dans le plan, la classe Q doit contenir la classe P des surfaces polygonales. Cela exige naturellement

que toute définition de l'aire d'une surface de cette classe coïncide avec la définition classique de l'aire élémentaire d'une surface polygonale.

La première partie de ce travail permet de voir que la notion d'aire, même si elle est généralement considérée comme intuitive et simple, peut réserver bien des surprises et être l'objet de développements intéressants. La question de l'enseignabilité de la définition de l'aire d'une surface plane au niveau du lycée peut être l'objet de discussions sérieuses. On a vu que la définition la plus générale qui répond de façon adéquate aux exigences requises, dans le sens où elle est géométriquement intrinsèque et se justifie totalement par la géométrie élémentaire est celle de Lebesgue « *l'aire d'une surface S est la plus petite des limites des aires des surfaces polygonales tendant vers S* ». Mais cette définition est sans doute très abstraite pour des élèves en classe terminale et sa justification n'est pas à leur portée.

I.2. Le projet institutionnel

I.2.1. Le programme officiel

Si l'on tente de recapter le contenu critique du programme officiel en termes d'objectifs et en termes de contenu mathématique et de comprendre la logique qui l'oriente, on se heurte à une ambiguïté. L'examen des objectifs généraux tels qu'ils sont formulés dans le texte officiel du programme de la classe terminale donne à voir que ce programme accorde une place importante à la démarche expérimentale. En référence au texte officiel, cette orientation constitue un choix institutionnel explicitement déclaré : « *les élèves utilisent les instruments de dessin, la calculatrice ou un logiciel en vue de faire des essais ou une expérimentation sur des cas simples ou particuliers* ». En revanche, l'examen des objectifs spécifiques permet de rendre compte de la préférence à peine dissimulée des auteurs du programme pour l'aspect calculatoire de l'intégrale. Pour s'en convaincre, il suffit de constater la prédominance des tâches (calculer, comparer, résoudre) placées en avant dans les compétences à développer. D'ailleurs, cette préférence est saisie plus clairement dans le choix même de la définition de l'intégrale par la formule de Newton que le programme recommande. Cette « définition » ne dit pas *ce qu'est une intégrale*. Elle dit seulement *comment calculer certaines intégrales*. L'organisation de l'enseignement de l'intégrale sous-jacente au texte du programme consiste à mettre en œuvre la notion de primitive comme outil explicite, à la fois, pour définir la notion d'intégrale et pour le calcul d'intégrales. Dans cette organisation, la notion d'intégrale apparaît comme un outil dans les calculs d'aire de surfaces planes et de volume de solides de révolution. Dès lors, il nous semble que les auteurs du programme s'attachent pour l'essentiel

à développer le schéma : *Primitive* \rightarrow *Intégrale* \rightarrow *Aire*. Qui plus est, l'absence de commentaires et/ou de document d'accompagnement qui pourraient éclairer l'esprit du programme, son interprétation est laissée sous la responsabilité des auteurs du manuel scolaire et des enseignants qui auront surtout à trouver des réponses aux questions suivantes :

- Faut-il envisager au moins une définition intuitive et provisoire de la notion d'aire et énoncer ses propriétés élémentaires ?
- Dans quels sens doit-on mettre en rapport les notions de primitive, d'intégrale et d'aire ?

I.2.2. Le manuel scolaire

L'étude du manuel scolaire au niveau du chapitre *Intégrale* donne à voir de façon claire que le projet que propose les auteurs du manuel pour l'enseignement de l'intégrale n'est pas satisfaisant. Pour en rendre compte, nous avons rassemblé les écarts du manuel avec le programme officiel et les principales faiblesses révélés par nos analyses :

Les faiblesses du projet du manuel

La principale faiblesse de l'approche adoptée dans le manuel est saisie dans la première partie du cours qui sert à introduire les élèves à la notion d'intégrale. Cette introduction n'est pas satisfaisante à la fois du point de vue de l'organisation didactique et du point de vue de l'organisation mathématique. L'analyse de cette partie révèle une négligence didactique (absence de spécification des objectifs des activités, de commentaires, d'explications, etc.) et, par endroits, un éloignement de la rigueur mathématique (faire des calculs sur la notion d'aire non polygonales alors qu'elle n'a pas été encore définie, confusion entre aire polygonale et aire non polygonale, etc.). En ce qui concerne l'organisation mathématique, elle ne fait apparaître aucune problématisation de la notion d'intégrale. Qui plus est, elle ne favorise pas le développement du sens mathématique de la notion d'intégrale et ne rend pas suffisamment compte des liens entre aire, intégrale et primitive. Nos analyses rendent surtout compte d'une sous-utilisation des liens entre aire, intégrale et primitive, d'une part, et des registres graphique, numérique et géométrique, d'autre part.

Rapport du manuel scolaire aux objectifs du programme officiel

Notre étude permet de voir que dans la démarche du manuel, les objectifs du texte officiel ont été déplacés. Les activités d'exploration et de recherche que préconise le texte officiel sont remplacées par des activités calculatoires; l'élaboration de stratégies est remplacée par la

maîtrise de recettes prêtes à l'emploi. Ces choix ne sont pas sans conséquences sur les apprentissages potentiels des élèves :

L'absence de motivation adéquate et l'absence d'idées directrices transforment inmanquablement un cours de mathématiques en un fatras de recettes partielles qui dégènèrent très vite en recettes à appliquer automatiquement sans contrôle rationnel possible (Revuz, 2006).

À ce premier décalage du manuel par rapport au texte officiel s'en ajoute un autre, non moins considérable, qui concerne la démarche mathématique et particulièrement les modes de raisonnement à mobiliser. Alors que le programme officiel recommande d'engager l'élève à utiliser « *un raisonnement inductif, un raisonnement déductif ou un raisonnement par l'absurde ou un raisonnement par récurrence* » et à produire « *un contre-exemple pour montrer qu'une assertion est fausse* » ou encore à distinguer « *entre une implication et une équivalence, entre une condition nécessaire et une condition suffisante* », l'examen du manuel permet de constater que les tâches proposées aux élèves requièrent exclusivement le raisonnement déductif et le raisonnement par récurrence. Et lorsqu'on sait que le raisonnement par récurrence est exclusivement utilisé dans les exercices sur les suites, on comprend qu'en dehors d'un ensemble réduit de tâches sur les suites, le raisonnement déductif est prépondérant. De plus, le manuel ne prévoit pas de tâches pour travailler sur les connecteurs logiques ou la production de contre-exemples.

Les limitations évoquées ci-dessus affectent, de fait, le contenu des exercices et des problèmes proposés aux élèves en opérant une réduction importante de leur champ, une réduction qui est très susceptible de diminuer fortement la dimension intellectuelle de l'activité mathématique dont la contrepartie semble être une centration sur l'aspect calculatoire. D'ailleurs l'analyse du manuel met suffisamment en évidence l'insistance des auteurs sur la routinisation de tâches calculatoires à travers des canevas d'exercices assez répétitifs. Dans ce contexte stéréotypé, les exercices différents ne se distinguent pas par des modes de pensée différents, mais ils se singularisent parce qu'ils recourent à des techniques calculatoires différentes. Encore dans ce contexte stéréotypé, la plupart des énoncés d'exercices sont rédigés de façon que les questions ne renvoient pas à autre chose qu'à un comportement, en ce sens que les questions sont si bien détaillées et riches d'indications que leur simple apparition provoque une réponse convenant à ce qui est attendu. Ce constat rejoint d'ailleurs celui mis en évidence par Ghdamsi pour qui « *dans tous les cas, le découpage préalable de l'énoncé en questions*

intermédiaires induit la technique à mettre en œuvre » (Ghdamsi, 2008, p.16). Enfin toujours dans ce même contexte les apprentissages des élèves sont plus susceptibles de se cristalliser dans des *habitudes d'action* plutôt que dans des connaissances adéquates.

Un autre constat, non moins remarquable, concerne l'utilisation des registres de représentation sémiotique et particulièrement les registres graphique et géométrique. Le manuel ne prévoit pas de tâches qui requièrent le recours intuitif et spontané au graphique et au géométrique par les élèves. Et lorsque, dans un exercice, le recours à ces deux derniers registres ou à une opération de conversion est nécessaire alors ce recours est pris en charge et piloté par l'énoncé de l'exercice. Bien plus, l'analyse révèle que ces registres ont surtout des rôles illustratif pour le graphique et interprétatif pour le géométrique mais ils sont exclus des démonstrations et des actions de validation. D'ailleurs les opérations de conversion sont principalement mobilisées dans des tâches de calcul d'aire, toujours selon le même schéma :

représentation graphique de fonction → identification de surface → calcul d'aire

Ce schéma sous-tend dans le même temps un autre schéma prépondérant dans le manuel qui concerne les liens entre aire, intégrale et primitive. Selon ce schéma les primitives servent à calculer des intégrales et l'intégrale permet de calculer l'aire de surfaces planes. Le fait de se limiter à ce schéma dans la mise en relation entre aire, intégrale et primitive risque d'induire chez les élèves une identification entre la notion d'aire, la notion d'intégrale et la notion de primitive. Le fait que ces trois notions soient toujours associées dans un même schéma et aux mêmes attributs pourrait transformer le schéma en une formule qui, répétée suffisamment de fois, fixe le sens dans l'esprit de celui qui l'applique. Qui plus est, d'autres significations et d'autres utilisations de ces notions mais se situant en dehors du schéma en question pourraient lui rester cachées et étrangères.

Ajoutons aussi que la démarche adoptée ne tient pas compte du caractère expérimental que le texte officiel préconise, qu'elle n'offre que très peu de place (ou pas du tout) à l'initiative de l'élève et que la tendance prévalente dans le manuel verse, pour l'essentiel, dans une certaine forme d'opérationnalisme dont un aspect caractéristique est cette tendance à exprimer et à favoriser l'identification entre le concept et ses fonctions, entre le *vrai* et le *localement valable*. Rappelons ici que le principe de l'opérationnalisme (restreindre le concept à un ensemble d'opérations) consiste à considérer que les noms des choses indiquent leur mode de fonctionnement et leurs propriétés représentent l'appareillage qui doit être utilisé pour les reconnaître et les manipuler. Cet aspect apparaît particulièrement au niveau des questions

étudiées qui insistent sur le *comment* tout en évitant le *pourquoi*. L'activité mathématique, en devenant opératoire, évacue l'*interprétatif*, le *discursif* et le *réflexif* qui sont à la fois les *médiats* de la connaissance et les *fondamentaux* de la compréhension.

Pour finir, nous pensons que ce que le manuel propose ne constitue pas véritablement un projet pour l'enseignement de l'intégrale. Ce sont plutôt des schémas qui cherchent à faire acquérir des habitudes d'action. Des schémas qui ne sont portés par aucun mouvement et qui ne sont impulsés par aucune organisation.

II. Les effets de l'enseignement actuel

Ici, il s'agit d'essayer de compléter l'analyse institutionnelle et de rendre compte de quelques effets de l'enseignement actuel. Ce complément d'enquête est réalisé avec un groupe de 17 élèves en classe terminale, un groupe de 79 enseignants de classe terminale et un groupe de 76 étudiants en première année d'université. Le premier groupe doit nous renseigner sur les connaissances des élèves sur la notion d'aire avant qu'ils n'abordent la notion d'intégrale. Le deuxième groupe doit nous éclairer sur le rapport des enseignants à la notion d'intégrale et leurs approches pour l'enseigner. Le troisième groupe doit nous renseigner sur les connaissances que gardent les nouveaux bacheliers des notions d'aire, d'intégrale et de primitive.

Le test nous a permis de distinguer trois profils d'élèves. Un premier groupe est constitué de quatre élèves (soit environ 24%) qui sont capables de mobiliser spontanément une procédure de découpage optimal de la surface et de réussir les calculs numériques et les tâches de formalisation. Les élèves ayant ce profil se distinguent particulièrement par la clarté et la précision de leurs réponses et se caractérisent par leur régularité. Un deuxième groupe est formé de huit élèves (soit environ 47%) capables de procéder spontanément à un découpage (qui n'est pas toujours optimal) de la surface et d'une certaine réussite dans les calculs numériques et les tâches de formalisation. Les élèves ayant ce profil n'exercent souvent aucune forme de contrôle, ni sur leurs calculs ni sur leurs contradictions. Un troisième groupe est composé de cinq élèves (soit environ 29%) qui échouent presque sur tout. Globalement, les connaissances disponibles chez les élèves manquent de précision et de consistance, voire sont simplement erronées. À la lumière des productions des élèves, il nous semble que les interrogations qui sont à l'origine de ce test sont bien fondées et qu'une véritable réflexion sur une approche pour enseigner la notion d'aire au lycée est nécessaire.

L'enquête menée auprès d'un groupe d'enseignants de classe terminale met en évidence que l'esprit du manuel scolaire est présent chez la plupart des enseignants et que son influence, à des degrés différents certes, sur le rapport des enseignants à l'intégrale est tangible. Cette influence se manifeste surtout dans l'articulation des liens entre aire, intégrale et primitive. Globalement, nous pouvons dire que cette enquête nous a permis de constater que ce qui peut être le projet de l'enseignant est en fait une copie du projet développé dans le manuel scolaire, souvent limitée et diminuée. D'un autre côté, nous estimons que dans la mesure où nos analyses mettent en évidence une préférence chez la plupart des enseignants de l'aspect calculatoire de l'intégrale, le rapport qu'entretiennent ces enseignants avec l'intégrale est essentiellement un rapport opérationnaliste et unidimensionnel.

Le questionnaire a permis de vérifier la faiblesse des connaissances capitalisées en classe terminale et, dans le même temps, l'importance des connaissances « mal faites » qui semblent bien installées chez les étudiants qui ont répondu au questionnaire. Chez la plupart des étudiants interrogés, ces connaissances ont atteint un niveau où on ne peut plus les définir véritablement en termes traditionnels de validité. L'examen des copies des étudiants nous a permis de dégager au moins quatre résultats importants.

1. L'erreur d'identification entre aire et intégrale se distingue par son importance. Pour 53 étudiants (soit environ 70%) parmi les 76 étudiants interrogés, il y a identité entre les notions d'intégrale et d'aire.
2. Concernant la validité des connaissances des étudiants en rapport avec les savoirs et les savoir-faire scolaires qu'ils utilisent, nous avons recensé 332 erreurs sur 737 réponses reçues. L'analyse des copies rend compte du fait que les étudiants ne cherchent pas, et peut-être ne comprennent pas, les conditions qui valident les résultats mathématiques qu'ils utilisent et qu'ils produisent.
3. Les étudiants, dans leur grande majorité, confondent entre condition nécessaire, condition suffisante et équivalence. Leurs réponses recèlent beaucoup d'incohérences et de contresens, le plus souvent conséquences des erreurs d'identification. Dans la mesure où ces erreurs sont observées sur des réponses effectives de la majorité des étudiants, il nous semble qu'elles expriment plus que de simples confusions, elles pourraient constituer pour ces étudiants un ordre de faits qui est établi.

4. La faiblesse des étudiants en matière de contre-exemplification et de recours notamment aux registres graphique et numérique. Ce constat confirme l'hypothèse que, dans l'enseignement tunisien, ces registres sont sous-utilisés et que les élèves ne les reconnaissent pas comme des registres de travail mathématique.

III. Conception et analyse a priori de la séquence d'enseignement

En référence à Brousseau (1991) l'objectif principal de l'enseignement est le fonctionnement de la connaissance comme une production libre de l'élève dans ses rapports avec un milieu a-didactique. Autrement dit, l'élève doit être capable de fonder ses décisions par des raisonnements et non en se laissant guider par un milieu entièrement fléché, par exemple par un calcul déjà posé. Dans le cas de notre travail, il s'agit de trouver un "point de fonctionnement" du système didactique pour lequel la notion d'intégrale soit, dans une certaine mesure, construite plutôt que préconstruite. L'idée principale est de proposer un contexte dans lequel les notions d'aire, d'intégrale et de primitive puissent fonctionner comme des outils permettant de résoudre certains problèmes du type:

- *Comment calculer l'aire d'une surface polygonale ?*
- *Comment calculer l'aire d'une surface non polygonale ?*
- *Comment calculer l'intégrale d'une fonction continue ?*

L'ingénierie didactique s'articule autour de ces trois questions qui définissent les problématiques étudiées dans les trois situations qui composent l'ingénierie. La première situation est précédée d'une phase préalable sous forme d'un cours dialogué sur la notion d'aire. L'objectif de cette phase est double : réactiver et/ou réactualiser les connaissances des élèves à propos de la notion d'aire et fixer ses propriétés essentielles, d'une part, et, d'autre part, repérer des difficultés, des obstacles et des erreurs possibles au niveau des connaissances des élèves sur la notion d'aire. Cette première phase essaye, dans une certaine mesure, d'aider les élèves à éclairer des difficultés, à combattre des obstacles et à corriger des erreurs.

Les tâches proposées aux élèves sont riches, multiples et variées. Plusieurs tâches renvoient à des sous-tâches non indiquées et nécessitent donc des adaptations de la part des élèves. L'identification des sous-tâches et les adaptations nécessaires sont toutes entièrement à la charge de l'élève. Compte tenu de toutes les adaptations que l'élève aura à faire, les connaissances requises sont le plus souvent appelées à fonctionner au niveau mobilisable. Une analyse locale fine des tâches proposées aux élèves permet de rendre compte qu'un

recours fréquent et conscient aux différentes opérations sémiotiques et leur coordination sont requis. Plus précisément, l'analyse a priori de l'ingénierie fait ressortir les résultats suivants :

- Les contenus proposés sont riches et variés : savoirs anciens, savoirs nouveaux, savoirs généraux (décontextualisés), savoirs génériques (avec un degré d'abstraction moindre que les précédents) et savoirs métamathématiques (langage mathématique, rigueur mathématique, méthodes, analogies, etc.).
- Utilisation de situations non-routinières riches à la fois du point de vue de l'activité mathématique de l'élève et du point de vue des connaissances mathématiques à construire. La réalisation virtuelle de ces situations s'appuie sur une logistique didactique qui privilégie la participation active de l'élève par un jeu de variations du contrat didactique (alternance de phases de travail individuel et de travail collectif) et du milieu de l'élève (dynamique des différents niveaux de la situation didactique) susceptibles de stimuler l'engagement actif de l'élève et de l'aider à consolider et/ou corriger des connaissances anciennes et à construire des connaissances nouvelles. Les situations proposées ont le potentiel d'enrichir l'expérience de l'élève.
- Utilisation fréquente et équilibrée des registres graphiques, géométrique, numérique et algébrique : l'ingénierie donne un rôle privilégié à l'articulation du cadre géométrique avec les registres graphique, numérique et algébrique. En particulier, le registre graphique est souvent utilisé comme moyen d'exploration et de contrôle.
- Utilisation de tâches dont la réalisation requiert les différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances et qui sont susceptibles de provoquer plusieurs types d'adaptations de l'élève.

IV. Expérimentation, analyse a posteriori et évaluation

D'abord, l'examen des enregistrements vidéo et des transcriptions rend compte du fait que la réalisation effective en classe de la séquence d'enseignement s'est déroulée de manière conforme à ce qui était prévu. En effet, l'analyse a posteriori met en évidence que le contenu et les méthodes mathématiques prévus dans le projet de l'enseignant ont été effectivement travaillés en classe et enrichis d'autres développements suites à certaines questions soulevées par quelques élèves, notamment sur les propriétés de l'aire et sur les preuves formelles.

D'autre part, à la lumière de cette analyse, il nous semble que nos hypothèses de départ sont largement vérifiées, ce qui nous permet d'affirmer :

- Il est possible d'améliorer l'enseignement de l'intégrale en classe terminale et de l'organiser autour d'une problématique qui rend compte des articulations épistémologiques entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive qui soit à la fois réalisable dans le cadre d'un cours ordinaire et accessible à des élèves en classe terminale à l'aide de leurs connaissances actuelles.
- Il est possible d'améliorer les apprentissages des élèves par la mise en œuvre d'une logistique didactique adéquate : expliquer la problématique étudiée, adopter une approche expérimentale, préciser les objectifs des situations étudiées, engager l'élève de façon active dans des activités de recherche autonome et de discussions collectives.
- La visualisation dans le registre graphique apporte à l'élève une aide non négligeable dans la pratique de l'activité mathématique en lui servant, dans le même temps, de support au raisonnement et de moyen de contrôle.

Par rapport à nos attentes le niveau atteint par la participation des élèves et la richesse des connaissances mises à contribution traduisent une motivation réelle des élèves et une pertinence certaine des situations étudiées. Dans la mesure où nous avons constaté que tous les élèves ou presque ont pu accéder aux situations étudiées et contrôler leurs actions, dans la mesure où nous avons vu certains élèves exercer leur esprit critique à l'intérieur de l'ensemble des savoirs (savoirs mathématiques et savoirs méthodologiques) présents dans les différentes situations de l'ingénierie, nous pouvons considérer que cette dernière constitue pour les élèves un moyen terme qui leur permet d'actualiser et d'enrichir leurs connaissances.

Pour mieux rendre compte de la réalité de l'engagement des élèves, nous invoquons l'importance de la part d'adidacticité des situations proposées, la structuration du milieu de l'élève et le jeu de contrats didactiques organisés. En effet, l'élève est, le plus souvent, entre le niveau E_{-2} ($E - agissant$) de la situation de référence et le niveau E_{-1} ($E - apprenant$) de la situation d'apprentissage avant de passer au niveau E_0 (*élève*) de la situation didactique en fin de chaque situation. L'analyse a posteriori en termes de contrat permet de constater que, la plupart du temps, la classe est placée dans une alternance de microcontrats de production individuelle et de production collective à l'intérieur d'un mésocontrat de réinvestissement de connaissances et de savoirs.

Les phases de travail collectif se sont révélées très utiles. Comme l'analyse a posteriori le montre, à mesure que la séquence se développe, le nombre d'incidents diminue et le langage mathématique utilisé par les élèves est mieux approprié. En effet, la discussion de certains incidents a permis à certains élèves de se corriger au niveau de la pensée et du langage mathématique, et à certains autres d'éclairer des confusions et des imprécisions.

Compte tenu des résultats issus de l'examen des traces écrites des élèves (phases de travail individuel), compte tenu de la teneur des interventions des élèves au cours des phases de travail collectif, nous pouvons affirmer que l'accessibilité des élèves aux différentes situations que propose l'ingénierie est évidente. Pour mieux en rendre compte, nous reprenons ici les principaux résultats enregistrés :

- 96% des élèves ont réussi les tâches d'ordre graphique (représentations, découpages, reconnaissances et/ou lecture graphique, interprétations).
- 55% des élèves ont fourni les résultats attendus (avec ou sans justification) dans les tâches qui ne sont pas d'ordre graphique (évaluation de l'aire d'une surface, égalités, encadrements, limites).
- 32% des élèves ont obtenu, en les justifiant de façon acceptable, tous les résultats attendus dans l'ingénierie.

V. Pertinence de l'ingénierie

Compte tenu des différentes analyses, nous pouvons affirmer que l'ingénierie est en tous points conforme à l'esprit interne du projet noosphérique, en ce sens que :

- Elle respecte le programme officiel dans sa structure véritable (contenu disciplinaire et objectifs spécifiques), dans sa tendance (démarche expérimentale) et dans ces relations (connexion avec d'autres thèmes du programme).
- Elle est réalisable à l'aide des connaissances actuelles des élèves, du moins celles supposées être déjà disponibles dans le répertoire culturel des élèves.

Pour rendre compte de la supériorité de la pertinence de l'ingénierie à celle du projet que propose le manuel scolaire, nous nous appuyons sur le tableau comparatif suivant :

	Manuel scolaire	Ingénierie
Problématisation	Non	Oui
Précision des objectifs.	Non	Oui
Approche expérimentale.	Non	Oui
Rigueur mathématique.	Peu satisfaisante	Satisfaisante
Prise en charge des propriétés de l'aire.	Non	Oui
Justification des ostensifs dx et \int .	Non	Oui
Lien entre aire, intégrale et primitive.	Non explicités	Explicités

L'analyse du manuel scolaire montre que les trois premières situations utilisées pour introduire la notion d'intégrale ne sont pas satisfaisantes aussi bien du point de vue du contenu que du point de vue de la logistique didactique. D'abord, ces situations ne font pas apparaître une problématisation de la notion d'intégrale. Ensuite, la notion d'aire de surfaces non polygonales n'y est pas évoquée et son utilisation dans la définition de l'intégrale définie constitue une contradiction à l'intérieur du manuel. Notre analyse montre aussi que la démarche adoptée dans le manuel scolaire ne tient pas compte du caractère expérimental que le programme officiel préconise, qu'elle n'offre que très peu de place (ou pas du tout) à l'initiative de l'élève et que la tendance prévalente dans le manuel verse, pour l'essentiel, dans l'opérationnalisme. Ces remarques établissent que la pertinence de l'ingénierie que nous proposons est, à l'évidence, supérieure à celle du manuel. En effet, dans la mesure où elle s'organise autour de problématiques précises et clairement explicitées, l'ingénierie se distingue nettement en cela du manuel scolaire. D'autre part, le fait d'inclure une phase de rappel et d'approfondissement sur la notion d'aire rend l'ingénierie plus riche autant du point de vue du contenu mathématique que du point de vue de la logistique didactique. Enfin, l'ultime argument est que, contrairement au manuel, l'ingénierie est susceptible d'offrir une plus grande chance de succès pour les apprentissages attendus et de mieux favoriser la compréhension et le développement des compétences des élèves. Pour Piaget, le processus de la connaissance en mathématique est une abstraction qui se fait à l'intérieur de l'action comme telle²²⁹:

Contrairement à ce que l'on dit souvent, les êtres mathématiques ne résultent donc pas d'une abstraction à partir des objets, mais bien d'une abstraction effectuée au sein des actions comme telle. Réunir, ordonner, déplacer, etc. sont des actions plus générales que penser, pousser, etc. parce qu'elles tiennent à la coordination, même de toutes les actions

²²⁹ Piaget : *Introduction à l'épistémologie génétique*, tome III, Presses universitaires, Paris, 1950, p. 287.

particulières et entrent en chacune d'elles à titre de facteur coordinateur... . (Piaget, 1950, p.287).

Ainsi, il y a lieu de conclure que l'ingénierie a rempli au moins deux fonctions importantes :

- Constituer un projet alternatif à celui que propose le manuel plus pertinent et réalisable en tant qu'il est une séquence d'enseignement dans une classe ordinaire.
- Constituer un instrument de recherche pour évaluer le projet institutionnel et rendre compte de quelques difficultés et erreurs des élèves.

Ajoutons que, par rapport aux travaux de recherche consacrés aux intégrales, le sujet de notre travail est différent de ceux de travaux de Legrand (1997), Gonzalez-Martin (2005) et Henriques (2006). En revanche, si notre travail rencontre celui de Tran (2006) sur le sujet, il s'en distingue par la méthodologie de recherche. La ligne de démarcation la plus considérable entre notre travail et celui de Tran se situe au niveau où nous proposons une ingénierie didactique alors que Tran ne le fait pas.

VI. Limites de la recherche et perspectives futures

Au terme de ce travail, il y a lieu de souligner que l'ingénierie que nous proposons a un véritable potentiel et une productivité mais qui n'ont pas été totalement exploitées. Cela est dû pour l'essentiel à des facteurs externes à la conception de notre projet qui nous forcé à écourter sa réalisation et à renoncer à certains de ses éléments.

Il aurait été intéressant de proposer des exercices d'évaluations pendant le déroulement de l'ingénierie, un questionnaire et des entretiens avec quelques élèves à l'issue de l'expérimentation. Quoiqu'il en soit, nous considérons que, malgré les difficultés rencontrées, l'ingénierie répond de façon satisfaisante à nos attentes. Nous avons enregistré un engagement important des élèves, des interventions très intéressantes et une évolution notable chez plusieurs d'entre eux. Néanmoins, nous pensons qu'il est possible d'apporter à l'ingénierie quelques améliorations au niveau de la logistique didactique, d'étendre son contenu mathématique à tout le chapitre *Intégrale*, de l'enrichir par des problèmes appropriés. Enfin, il y a une dimension qui n'a pas été prise en compte dans la thèse, à savoir celle de la contribution que les technologies numériques pour l'enseignement pourraient apporter à l'ingénierie proposée dans la thèse. Voici pour chacune des trois questions qui structurent l'ingénierie, des hypothèses quant à l'aide que pourraient apporter des logiciels.

1. *Comment calculer l'aire d'une surface polygonale ?* De nombreux logiciels de géométrie dynamique affichent une valeur numérique approchée de l'aire de surfaces polygonales. Ceci pourrait permettre de multiplier les exemples avec un auto-contrôle à l'aide d'un tel logiciel. Certains logiciels permettent l'évaluation de formules faisant intervenir des distances. Avec un tel logiciel l'élève pourrait contrôler la validité d'une formule pour l'aire d'une surface polygonale issue d'un choix de découpage. Ceci permettrait de multiplier les exemples et de systématiser ainsi les connaissances sur les aires. En posant la question du mode opératoire des logiciels, on pourrait aussi construire un algorithme de calcul d'aire pour toute surface polygonale.
2. *Comment calculer l'aire d'une surface non polygonale ?* Avec un logiciel approprié, il doit être possible de représenter les fonctions en escalier minorant et majorant une fonction donnée et de calculer leurs intégrales. La possibilité d'un passage à la limite, pour un nombre de divisions tendant vers l'infini, pourra être conjecturée à partir de valeurs approchées. Des possibilités de calcul formel pourront aider à formaliser le raisonnement et à traiter plusieurs exemples.
3. *Comment calculer l'intégrale d'une fonction continue ?* Les logiciels intégrant du calcul formel permettent d'obtenir facilement des primitives usuelles sans l'entraînement que requièrent les procédures papier/crayon. Ceci devrait permettre de valoriser très rapidement aux yeux des élèves le résultat mathématique en jeu dans la situation 3.

Le contexte de notre expérimentation ne permettait pas de tester ces hypothèses. Elles pourront faire l'objet de prochaines recherches.

BIBLIOGRAPHIES

Bibliographie de la partie sur l'étude épistémologique

1. Dahan-Dalmedico A. et Peiffer J. (1986), *Une histoire des mathématiques : Routes et dédales*, Editions du Seuil, Mars 1986.
2. Banach S. (1925), *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie*. *Fundamenta Mathematicae* VII (1925), p. 225- 236.
3. Bourbaki N. (1984), *Éléments d'histoire des Mathématiques*, nouv.éd., Masson.
4. Bulletin de l'IREM de Besançon n° 68 mars 2003, pufc.
5. Burali-Forti C. (1897), *Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann*, Paris : Gauthier-Villars.
6. Borel E. [Borel, 1898] : *Leçons sur la théorie des fonctions*, 1898.
7. Cartan E. (1907), *Sur la définition de l'aire d'une portion de surface courbe*. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*.
8. Gruson L. (1963), *Travaux de Krickeberg et de Giorgi sur l'application de la théorie des distributions à l'étude de l'aire des surfaces*, Séminaire CHOQUET, 2^e année, 1962/63.
9. Desanti J. (1962), *Les Grands Courants de la Pensée Mathématique*, p.179-187, Albert Blanchard, Paris.
10. Dieudonné J. et al.(1986), *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, t. I, Hermann, nouv.éd.1986.
11. Fréchet M. (1939), *Sur une définition intrinsèque de l'aire d'une surface courbe comme limite d'aires polyédrales inscrites*. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* 2^e série, tome 8, n° 34 (1939), p. 285- 300.
12. Gandon S. (2008), *Le problème de la définition d'une surface gauche*. *Laboratoire de Mathématiques pures, UBP- CNRS UMR 6620*.
13. Hawkins T. (1970), *Lebesgue's Theory of Integration. Its Origins and Development*. University of Wisconsin Press, Madison, 1970.
14. Hermite C. (1882), *Cours de M. Hermite rédigé en 1882 par M. Andoyer*, 4^{ème} édition, Paris : Hermann, 1891.
15. Jordan C. (1882), *Cours d'analyse* (1882). Gauthier- Villars, Paris.
16. Kempisty S. (1936), *Sur la méthode triangulaire du calcul de l'aire d'une surface et sur l'aire des surfaces courbes*. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 64.
17. Lebesgue Henri :

- [Lebesgue, 1975] : *La mesure des grandeurs*, Paris. Blanchard.
- [Lebesgue, 1902] : *intégrale, longueur, aire*
- [Lebesgue, 1903] : *Sur le problème des aires*. Bulletin de S.M.F, tome 31, pp. 197-203.
- [Lebesgue, 1904] : *Leçons sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives* (1904). Gauthier- Villard. Paris.
- [Lebesgue, 1908] : *Sur la définition de l'aire des surfaces*, L'Enseignement Mathématique, Vol. 10 (1908).
- [Lebesgue, 1934] : *Sur la mesure des grandeurs*, L'Enseignement Mathématique, Vol. 33 (1934).
18. Lee Peng Yee, Vyborny Rudolf. (2000), *The Integration: An Easy Approach after Kurzweil and Henstock*. Cambridge University Press, 2000. ISBN 0 521 77968 5.
19. Meyer Yves [Meyer, 2006] : *Comment mesurer les surfaces ?* SMF- Gazette- 109, 2006.
20. Peano Guisepe:
 [Peano, 1887]: *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, Torino : Bocca.
 [Peano, 1888]: *Calcolo geometrico secondo l'Ausedehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Torino : Bocca. Traduction anglaise de L. C. Kannenberg, Boston : Birkhäuser, 2000.
 [Peano, 1890]: Sulla definizione dell'area d'una superficie, *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, (4), 6-1, p. 54-57. Traduction anglaise dans [Kennedy 1973, p. 137-142].
21. Perrin D. (2005), *Mathématiques- Nombres, mesures et géométrie*. ISBN : 2-84225-057-5. EAN : 9782842250577. Cassini.
22. Revuz A. (2004), *intégration et mesure* .Encyclopædia Universalis, v10, 2004.
23. Roshdi R. (2002), *Les mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle. Volume 4, Ibn Al-Haytham: méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques*. ISBN : 1-873992-60-2. *AL-Furqan Islamic Heritage*.
24. Rogalski M. (2001), *Carrefour entre Analyse- Algèbre- Géométrie*. ISBN 2-7298-0607-5. Ellipse Editions, 2001.
25. Serret J. (18779), *Cours de calcul différentiel et intégral*. Gauthier- Villard, Paris.
26. Saks S. (1933) , *Théorie de l'intégrale*. Monografje Maematyczne, tom. II. Warszawa.
27. Taton R. (2004), Encyclopædia Universalis, v10, 2004.
28. Tonelli L. (1926), *Sur la quadrature des surfaces*. Comptes Rendus de l'académie des Sciences du 10 mai 1926.
29. Villeneuve J. (2009), *Le processus d'abstraction dans le développement des premières théories de la mesure*. Cégep de Rimouski, Rimouski, Québec, Canada.

Bibliographie de la partie didactique

1. Artigue M. (1996), *Textes de base en pédagogie : Didactique des mathématiques*, Lausanne, Paris, 1996.
2. Ben Bachir A., Zaki M. (2001) Production d'exemples et de contre exemples en Analyse : Étude de cas en première d'université. ESM, vol. 47, pp. 273-295.
3. Bloch I. (2000), Thèse : *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*.
4. Bosch M. et Chevallard Y (1999), *La Sensibilité de l'Activité Mathématique aux ostensifs*, éditions la pensée sauvage, Grenoble, 1999.
5. Brousseau G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage, Grenoble, 1998
6. Castela C. (2000), *Travail de la question des enjeux non explicités d'apprentissage avec les outils de la théorie anthropologique. Curriculum et chronogenèse praxique*. Équipe Didirem Paris 7, IUFM de l'Académie de Rouen, France.
7. Chevallard Y. (1998), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : La notion d'organisation praxéologique*, Acte de l'université d'été de la Rochelle, Juillet 1998
8. Dorier J-L. (2000), *Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques- Perspectives théoriques sur leur interaction*, les cahiers du laboratoire Leibniz, n°12, Octobre 2000
9. Duval R. (1993), *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, Annales de didactiques et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg, 1993
10. Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Lang, 1995.
11. Ghedamsi I. (2008), Thèse : *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université*, Université Bordeaux 2 & Université de Tunis, Novembre 2008.
12. Gonzalez-Martin A. S. (2005), Thèse : *La généralisation de l'intégrale définie depuis les perspectives numérique, graphique et symbolique en utilisant des environnements informatiques : Problèmes d'enseignement et d'apprentissage*.
13. Haddad S. (2006), Mémoire de mastère : *Enseignement de l'intégrale entre la classe terminale et la première année de l'enseignement supérieur*, Université de Tunis, 2006.
14. Houdement C. (2004), *Actes des journées de formation*, IREM Montpellier 13-14 mai 2004.
15. Lebesgue H. (1904), *Leçons sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives* (1904). Gauthier- Villard. Paris.
16. Legrand M. (1997), *La problématique des situations fondamentales et l'approche anthropologique*, REPÉRES-IREM N° 27-AVRIL 1997.
17. Margolinas C. (1995), *La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations*, in MARGOLINAS C., *Les débats de didactique des mathématiques*, annales 1993-1994, Grenoble : La Pensée Sauvage,.
18. Mounier E. (2010), Thèse : *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP vers de nouvelles pistes*, Université Paris Diderot, Paris7.

19. Perrin-Glorian M.J. (1992), *Thèse de Doctorat d'état*, université Paris VII, février 1992.
20. Perrin-Glorian, M-J. et Hersant M. (2003), Milieu et Contrat Didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 23, n° 2, pp.217-276, 2003.
21. Piaget, J., Inhelder, B. & coll. (1968), *Mémoire et intelligence* (pp. 1-33 et 441-482). Paris PUF.
22. Radford L. (2004) : *La généralisation mathématique comme processus sémiotique*, In G. Arrigo (ed.), *Atti del Convegno di didactica della matematica 2004*, Alta Scuola Pedagogica. Locarno : Suisse, pp.11-27.
23. Revuz A. (2006), Actes du 49^e congrès de l'Association mathématique du Québec, Université de Sherbrooke, 2006.
24. Robert A. et Rogalski J. (2002), *Le système complexe et cohérent des pratiques de enseignants de mathématique : une double approche*, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* vol 2/4, pp. 505-528.
25. Robert A. et Rogalski M. (2002), *Petit x*, n° 60.
26. Robert A. (2005), *APMEP* n° 457.
27. Roditi E. (2003), *Recherche en Didactique des mathématiques*, Vol. 23, n° 2, pp. 183-196.
28. Rogalski J. (2000), Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant, in : *Actes du XXVI^e colloque COPPIRELEM* (pp. 45-66), Limoges ; IREM.
29. Rogalski M. (2001), *Carrefour entre Analyse-Algèbre-Géométrie*. Ellipse Edition, 2001. ISBN 2-7298-0607-5.
30. Tran Luong Công Khanh (2006), Thèse : *La notion d'intégrale dans l'enseignement des mathématiques au lycée : une étude comparative entre la France et le Vietnam*, Université Joseph Fourier, Grenoble.
31. Vergnaud G. (2007), *Définitions du concept de schème*, *Recherches en Education*, n°4 – Octobre 2007, pp 17-22.
32. Vygotski L. (1997), *Pensée et Langage*, éditions La Dispute, 1997.

ANNEXES

Test d'évaluation	389
Enquête auprès des enseignants	391
Le questionnaire	394
Transcriptions	396

1. Test d'évaluation

La notion d'aire d'une surface vous est familière depuis l'école primaire. Vous avez appris à calculer l'aire de certaines figures élémentaires (cercle, triangle, carré, rectangle, parallélogramme, trapèze, ...etc.). Nous cherchons à évaluer vos connaissances sur la notion d'aire d'une surface et la manière dont vous les utilisez. Nous souhaitons connaître aussi votre point de vue à propos de certaines questions relatives à la notion d'aire. Nous nous intéressons particulièrement à votre démarche personnelle pour calculer l'aire d'une surface, c'est pourquoi nous vous prions de tout écrire (calculs, brouillon, figures, etc.) sur ces feuilles. Si vous manquez d'espace, vous pouvez utiliser les versos des feuilles.

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,6]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) = 2x - 1 & \text{si } 2 < x < 4 \\ f(x) = -\frac{1}{2}x + 9 & \text{si } 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

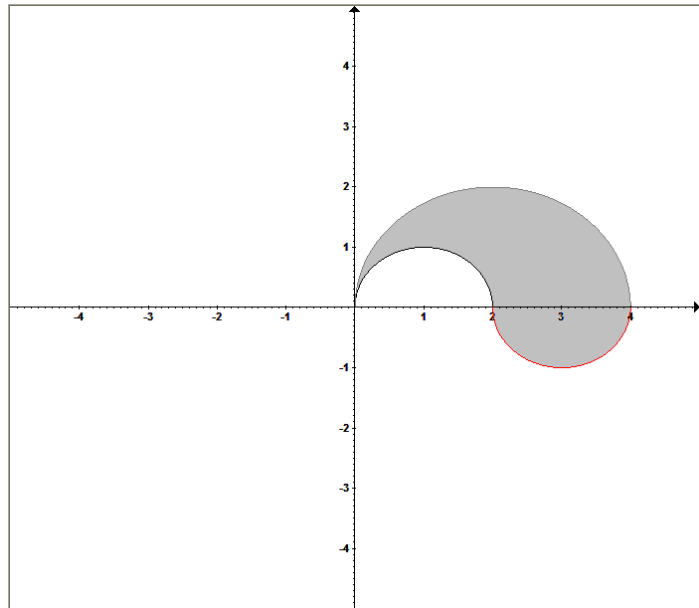
Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Calculer l'aire de la surface plane délimitée par la représentation graphique de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 6$.

Exercice 2

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on donne la figure ombrée ci-dessous formée du demi-cercle de centre $A(1,0)$ et de rayon 1, du demi-cercle de centre $B(2,0)$ et de rayon 2 et du demi-cercle de centre $C(3,0)$ et de rayon 1.

Déterminer l'aire de la surface délimitée par ces trois demi-cercles.



Exercice 3

Peut-on parler de l'aire d'un point ? d'une ligne ? Si oui, quelle est sa valeur ?

Soient (S) et (S') deux surfaces planes quelconques.

Pouvez-vous comparer $aire(S \cup S')$ et $aire(S) + aire(S')$?

Pouvez-vous comparer $aire(S)$ et $aire(S')$, lorsque $(S) \subset (S')$?

Pouvez-vous comparer $aire[\varphi(S)]$ et $aire(S)$, où φ est une isométrie du plan ?

2. Enquête auprès des enseignants.

Partie I

1. Le manuel scolaire constitue-t-il un support privilégié dans l'exercice de votre profession ?
2. Utilisez-vous d'autres supports, notamment des supports en ligne? Si oui, lesquels ?
3. Suivez-vous l'évolution des programmes de mathématiques dans l'enseignement supérieur ?
4. Consultez-vous des documents utilisés dans le supérieur (cours, fiches de TD, livres, etc.) ?
5. Pensez-vous que le programme actuel de la classe terminale permet aux élèves de capitaliser les connaissances suffisantes pour appréhender l'intégrale enseignée en première année d'université ?

Partie II

1. Introduisez-vous la notion d'intégrale par les aires ou par les primitives ? Pouvez-vous expliquer votre choix ?
2. Quel rôle accordez-vous au signe dx dans l'écriture de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$?
3. Comment expliquez-vous à vos élèves les liens entre les notions d'aire, intégrale et primitive ? Leur donnez-vous des exercices spécifiques pour mettre en évidence ces liens ? Si oui, lesquels (vous pouvez donner des exemples) ?
4. Avez-vous repéré chez vos élèves des difficultés persistantes liées à la notion d'intégrale ? Si oui, citez quelques unes.

Partie III

Voici l'énoncé d'un exercice qui a été proposé à des élèves en classe de Terminale Math :

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par son terme général $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

- a) Montrer que la suite (u_n) est monotone.
- b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- c) Montrer que pour tout réel $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq a + \frac{\pi}{2} \cos^n a$.
- d) En déduire la limite L de la suite (u_n) .

Proposeriez-vous cet exercice dans une classe de Terminale ? Pourquoi ?

Voici deux solutions produites par deux élèves différents. En fait, nous avons repris à notre compte la forme de la rédaction de ces solutions tout en portant une attention scrupuleuse à la reproduction de leur contenu mathématique. Nous vous prions de vous prononcer sur ces solutions et de leur attribuer une note sur une échelle variant de 0 à 10.

Première solution

Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \cos x \leq 1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos^{n+1}x \leq \cos^n x$.

Par suite $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}x \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

Ainsi la suite (u_n) est décroissante.

La fonction $x \mapsto \cos^n x$ est continue et positive sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \geq 0$ ou encore $u_n \geq 0$ ce qui exprime que la suite (u_n) est minorée.

La suite (u_n) , alors décroissante et minorée, est convergente.

Par la relation de Chasles $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \int_0^a \cos^n x \, dx + \int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$.

Or $0 \leq \cos^n x \leq 1$ sur $[0, a]$ donc $\int_0^a \cos^n x \, dx \leq a$. De même $\cos^n x \leq \cos^n a$ sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$

Donc $\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \leq \left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos^n a \leq \frac{\pi}{2} \cos^n a$. On en déduit que pour tout n de \mathbb{N} ,

$$0 \leq u_n \leq a + \frac{\pi}{2} \cos^n a.$$

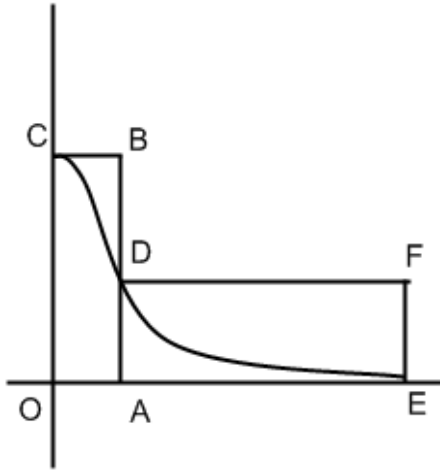
Comme $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ alors $0 < \cos a < 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n a = 0$.

Puisque $0 \leq u_n \leq a + \frac{\pi}{2} \cos^n a$ et (u_n) converge vers L alors il vient après passage à

la limite que $0 \leq L \leq a$, et ce pour tout réel $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$. En conséquence $L = 0$.

Deuxième solution

Cette solution ne diffère de la première que par la méthode utilisée au c). Les solutions développées en réponses aux questions a), b) et d) étant les mêmes, nous n'avons pas estimé utile de les reproduire ici. Nous donnons ci-dessous la solution de question c) proposée par le deuxième élève :



Comme la fonction $f_n: x \mapsto \cos^n x$ est continue et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ est égale à l'aire de la surface comprise entre la courbe de f_n , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

Comme on peut le voir sur la figure, on a :

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \leq \text{aire}(OABC) + \text{aire}(AEFD).$$

$$\text{Donc } 0 \leq u_n \leq a + \left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos^n a.$$

Or $0 < \frac{\pi}{2} - a < \frac{\pi}{2}$ et $\cos^n a > 0$, d'où :

$$0 \leq u_n \leq a + \frac{\pi}{2} \cos^n a.$$

3. Le questionnaire soumis aux étudiants

Partie I

Q_{11} : Donner la définition du nombre réel $\int_a^b f(x) dx$.

Q_{12} : Que représente l'élément dx dans l'écriture $\int_a^b f(x) dx$?

Q_{13} : Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé. On désigne par (S) la partie du plan délimitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Comparer l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ et l'aire de (S) .

Q_{14} : Soit f une fonction bornée et positive ou nulle sur l'intervalle $[a, b]$. Donner des conditions suffisantes pour que $\int_a^b f(x) dx > 0$.

Q_{15a} : L'aire permet-elle de calculer certaines intégrales ?

Q_{15b} : L'aire permet-elle d'expliciter certaines primitives ?

Partie II

Dans chacun des cas suivants, préciser, en le justifiant, si la proposition est vraie ou fausse.

Q_{21} : Si $\int_a^b f(x) dx$ existe alors la fonction f est continue sur $[a, b]$.

Q_{22} : La moyenne des carrés des réels compris entre 0 et 1 est égale à $\frac{1}{3}$.

Q_{23} : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$.

Si $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ alors, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$.

Q_{24} : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[c, d]$

Si $[a, b] \subset [c, d]$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_c^d f(x) dx$.

Q_{25} : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Nous avons : $\int_a^b f(x) dx = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}$.

4. Transcriptions de l'ingénierie

Séance du 25 Février 2011

Durée : 3 heures

Nombre d'élèves : 22.

Phase 1 (20 minutes) : cours dialogué

Le professeur commence par écrire au tableau le titre de la leçon : INTEGRATION.

Il s'adresse ensuite à la classe : « on va commencer par un petit rappel sur la notion d'aire » et il écrit au tableau : Rappel.

P₁ : Pensez-vous qu'on puisse attacher une aire à un point ?

E₁ : L'aire d'un point est nulle

P₂ : L'aire d'un point est égale à zéro

E₂ (Mhadheb) : un point n'a pas d'aire.

P₃ : Eh bien, on peut lui attacher une aire ou pas ?

E₃ (Mhadheb) : Oui, oui, égale à zéro.

P₄ : On peut attribuer une aire à un point et cette aire est nulle.

P₅ : Un segment de droite ?

E₄ : Zéro.

P₆ : On verra. Quelqu'un veut bien écrire au tableau ?

Un élève (Youssef) se porte volontaire et passe au tableau. Le professeur dicte et Youssef écrit :

1. L'aire d'un segment de droite est nulle.

P₇ : Quelle est l'aire d'un carré de côté 1 ?

E₅ : Un.

Youssef écrit au tableau :

2. L'aire du carré de côté 1 vaut 1.

P_8 : Il y a juste un petit problème à propos de deux autres propriétés. Il y a d'abord la propriété d'additivité. Qu'est-ce qu'on entend par l'additivité de l'aire ?

E_6 (Yosr) : La somme.

P_9 : La somme ? Vas-y Yosr. Qu'est-ce qu'on entend par la somme ?

E_7 (Yosr) : On peut additionner les aires.

P_{10} : On peut additionner les aires. Dans quel sens ?

E_8 (Manel) : Quand elles ne sont pas incluses.

P_{11} : C'est-à-dire ?

E_9 : Séparées.

E_{10} (Youssef, en arabe) : Quand une aire empiète sur une autre....

P_{12} : Vous parlez d'aire ou de surface ?

E_{11} (Youssef reprend ce qu'un élève de la classe vient de lui souffler) : surface.

P_{13} : Comment doivent-être ces surfaces ?

E_{12} (Youssef) : Séparées.

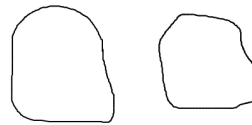
E_{13} : Non incluse l'une dans l'autre.

P_{14} : Leur intersection ?

E_{14} : Nulle.

E_{15} : Vide. L'ensemble vide.

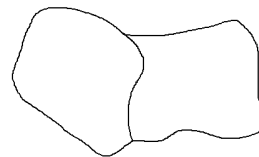
P_{15} : Quelqu'un peut-il représenter ...
(inaudible) dont l'aire est...



L'élève Mhadheb passe au tableau et produit le dessin suivant :

P_{16} : C'est la seule possibilité ?

E_{16} (Mhadheb, en arabe) : Elles peuvent avoir une ligne en commun.



Et il produit le deuxième dessin suivant :

P_{17} : Là, l'intersection des deux surfaces est ?

E_{17} : Une droite.

E_{18} : Un ensemble de points.

P_{18} : Une droite ? Un ensemble de points ? Quelle est l'aire de l'intersection ?

E_{19} : Égale à zéro.

P_{19} : C'est l'aire qui est égale à zéro, c'est-à-dire que l'intersection a une aire nulle.

Le professeur dicte la troisième propriété :

3. Si (S) et (S') sont deux surfaces dont l'intersection est d'aire nulle...

P_{20} : Et donc. Vous avez deux surfaces (S) et (S') dont l'intersection a une aire nulle, que peut-on conclure ?

E_{20} (Youssef) : Donc la somme des aires est aire de (S) plus aire de (S') .

P_{21} : L'aire de ?

E_{21} : SS' .

P_{21} : C'est-à-dire SS' ?

E_{22} (Yosr) : Inter.

P_{22} : Inter ?

E_{23} (Yosr) : Union.

P_{23} : Union ou bien inter ?

E_{24} (Yosr) : Union.

P_{24} : L'aire de (S) union (S') égale ?

E_{25} : aire de (S) plus aire de (S') .

P_{25} (à l'intention de Youssef) : alors l'aire de (S) union (S') égale l'aire de (S) plus celle de (S') .

Youssef écrit à la suite de ce qui figure déjà au tableau **aire $(S) \cup$ aire $(S') =$ aire (**

L'enseignant intervient immédiatement :

P_{26} : Non. Il s'agit de deux choses complètement différentes. Quand on dit $(S) \cup (S')$, il s'agit d'une surface. L'aire est un nombre. C'est une grandeur.

L'enseignant corrige l'écriture au tableau et laisse Youssef terminer.

Voici enfin ce qui est écrit au tableau :

3. Additivité : **Si (S) et (S') sont deux surfaces dont l'intersection est d'aire nulle alors**

$$\text{aire}(S \cup S') = \text{aire}(S) + \text{aire}(S').$$

L'enseignant s'adresse ensuite à la classe et demande

P_{27} : Si nous avons deux surfaces (S) et (S') telles que (S) est contenue dans (S'), que peut-on dire de l'aire de (S) et de l'aire de (S') ?

E_{26} : L'aire de (S) est inférieure à l'aire de (S').

E_{27} : Inférieure ou égale.

L'enseignant s'adresse à la classe pour demander :

P_{27} : Quelqu'un peut formuler correctement la propriété ?

L'élève Nadia manifeste sa disposition à le faire et obtient l'aval de l'enseignant.

E_{28} (Nadia) : Si (S) est inclus dans (S') alors aire de (S) est inférieure à aire de (S').

E_{29} : Inférieure ou égale.

Youssef écrit au tableau :

4. Croissance : si $(S) \subset (S')$ alors aire (S) <

E_{30} (Youssef s'arrête et sollicite l'enseignant du regard): inférieur ou égal ?

P_{28} : C'est à toi de voir. L'inégalité est stricte ou large ?

E_{31} (Youssef) : Large.

E_{32} : Stricte.

P_{29} : Il me semble qu'on ne parle pas de la même chose !

E_{33} (Youssef) : si les deux surfaces sont superposables, on peut toujours dire que $(S) \subset (S')$.

P_{30} : Si.

E_{34} (Youssef): Alors c'est inférieur ou égal.

P_{31} : C'est inférieur ou égal. Même si l'inclusion... est-ce que l'inégalité large subsiste même si l'inclusion est stricte ; c'est-à-dire ça reste toujours inférieur ou égal même si l'inclusion est stricte ?

E_{35} : Non.

P_{32} : Donc. Si l'inclusion est stricte, l'inégalité est stricte.

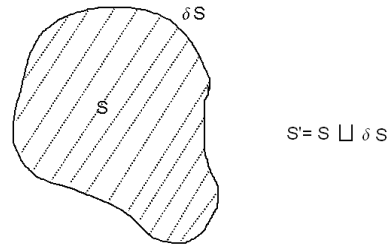
E_{36} (Yosr) : Pas toujours.

P_{33} : Tout le monde est d'accord avec ça, sur l'inégalité ?

Il y a eu un court silence dans la classe. Youssef décide de finir d'écrire l'énoncé de la propriété 4.

4. Croissance : **si** $(S) \subset (S')$ **alors aire** $(S) \leq$ **aire** (S') .

L'enseignant reprend la parole et dit : « la question était la suivante » et il se dirige vers le tableau en disant : « Si l'inclusion est stricte, c'est-à-dire si (S) est contenue dans (S') tout en étant différente » et il dessine le schéma ci-dessous tout en précisant « Si vous prenez cette surface (et hachure l'intérieur) sans son bord.



Sans le bord, je l'appelle (S) . Et là c'est le bord que je note ∂S alors j'aurai $S' = S \cup \partial S$. Quelle est l'aire du bord de cette surface ? »

E_{37} : Zéro.

P_{35} : C'est zéro. Comment sont l'aire de (S) et l'aire de (S') ?

E_{38} : Égales.

P_{36} : Elles sont égales. Donc vous maintenez toujours que l'inégalité est stricte ?

E_{40} : Non.

P_{37} : L'inégalité est large même si l'inclusion est stricte.

P_{38} : Cinq. Quelle est l'action d'une isométrie sur l'aire d'une surface ?

E_{41} : Elle ne change pas.

E_{42} : Conservation.

P_{39} : Une isométrie conserve...

E_{43} : Les surfaces.

P_{40} : Si on considère une surface (S) et une isométrie φ , quelle est l'aire de $\varphi(S)$?

E_{44} : l'aire de (S) .

Youssef écrit au tableau :

5. Invariance par isométrie : **Pour toute surface et pour toute isométrie φ , aire** $(\varphi(S)) =$ **aire** (S) .

P_{41} : Bien, voilà pour l'essentiel des propriétés de l'aire.

Phase 2 (15 minutes) : Travail individuel.

Phase 3 (30 minutes) : correction au tableau

L'élève Yosr se porte volontaire au tableau.

P_{42} : *Ma première question va être la suivante : quelle est la nature de la fonction f ?*

E_{45} : *Affine.*

P_{43} : *Affine ?*

E_{46} : *Affine par...*

P_{44} : *Affine par ?*

E_{47} : *Par intervalles*

P_{45} : *C'est-à-dire affine par intervalles. Donc sa représentation graphique est constituée de ?*

E_{48} (Yosr) : *Segments.*

P_{46} : *Combien de segments ?*

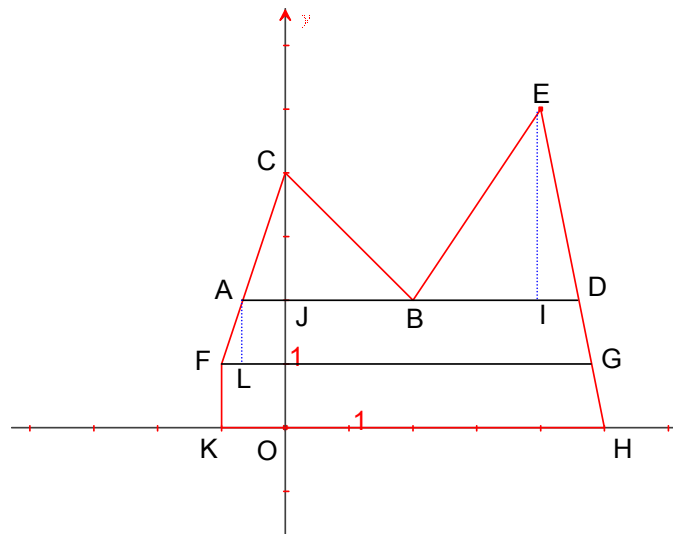
E_{49} (Yosr) : *Quatre.*

P_{47} : *Quatre segments.*

Yosr trace au tableau la représentation graphique de f .

P_{48} : *Bien. Tout le monde est d'accord avec ça ?*

L'enseignant rappelle qu'il s'agit ensuite de hachurer la surface S , ce que Yosr fait immédiatement.



P_{49} : *Bien. Comment calculer l'aire de cette surface ?*

E_{50} (Yosr, en arabe) : *On la partage.*

E_{51} : *On divise la surface en somme...*

P_{50} : *Réunion.*

Yosr produit au tableau la figure ci-contre:

P_{51} : *Bien. Alors vous avez combien de figures ?*

E_{52} (Yosr) : *Quatre.*

P_{52} : *Quatre. Lesquelles ?*

E_{53} (Yosr) : *Le triangle ABC, le triangle BDE... (et elle montre sur le tableau les deux trapèzes).*

P_{53} : *Oui. S est égale donc ? Ou vous préférez parler de l'aire de S ?*

Yosr écrit au tableau :

$$\begin{aligned} \text{aire}(S) &= \text{aire}(ABC) + \text{aire}(BDE) + \text{aire}(FADG) + \text{aire}(KFGH) \\ &= \frac{AB \times CJ}{2} + \frac{BD \times IE}{2} + \frac{(AD + FG) \times AL}{2} + \frac{(FG + KH) \times FK}{2} \end{aligned}$$

P_{54} : *Bien. Là, tout le monde est d'accord sur les formules? Pour l'aire d'un triangle, c'est simplement base fois hauteur sur deux, et pour l'aire d'un trapèze ?*

E_{54} : *(petite base + grande base) \times hauteur / 2*

E_{55} (Yosr) : $AB = \frac{7}{3}$.

P_{55} : $\frac{7}{3}$? *Comment avez-vous fait pour trouver $\frac{7}{3}$?*

Yosr montre sur la figure le segment $[AB]$ et explique en arabe ce qui se traduit par $BJ = 2$ et $AJ = \frac{2}{3}$.

P_{56} : *Bien. Et CJ?*

E_{56} (Yosr) : 2 .

P_{57} : *Donc $(\frac{7}{3} \times 2)/2$, cela fait $\frac{7}{3}$. Que vaut BD ensuite ?*

E_{57} (Yosr) : $\frac{7}{2}$.

La classe s'est ensuite animée pendant 5 minutes autour des dimensions des figures utilisées et des calculs numériques. Le résultat de ces discussions est ce qui fut écrit au tableau :

$$\begin{aligned} \text{aire}(S) &= \text{aire}(ABC) + \text{aire}(BDE) + \text{aire}(FADG) + \text{aire}(KFGH) \\ &= \frac{AB \times CJ}{2} + \frac{BD \times IE}{2} + \frac{(AD + FG) \times AL}{2} + \frac{(FG + KH) \times FK}{2} \\ &= \frac{7}{3} + \frac{7}{2} + \frac{\left(\frac{14}{3} + \frac{31}{6}\right) \times 1}{2} + \frac{\frac{31}{6} + 6}{2} \\ &= \frac{7}{3} + \frac{7}{2} + \frac{59}{12} + \frac{67}{12} \\ &= \frac{196}{12} = \frac{49}{3} \quad (u.a.). \end{aligned}$$

P_{58} : Bien. Il semble que certains de vos camarades ont trouvé un autre résultat.

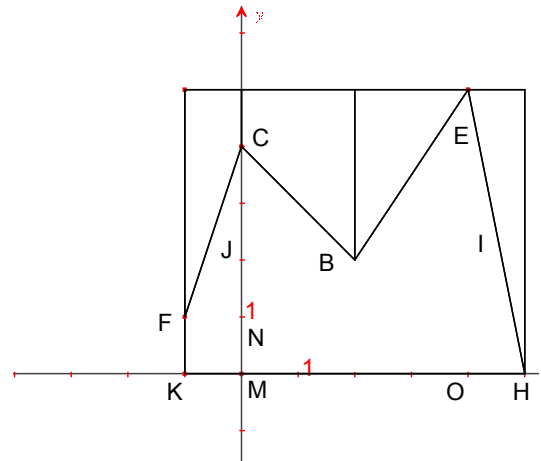
Plusieurs élèves répondent simultanément « 18 ».

P_{59} : Ils ont trouvé 18 unités d'aire.

E_{58} (plaisantant en arabe) : c'est pas loin.

P_{60} : Ça, c'est pas 18. $\frac{49}{3}$ n'est pas 18.

Mhadheb demande s'il peut exposer au tableau une autre décomposition, ce qui lui fut accordé.



P_{61} (s'adressant à Yosr): Quel est le problème ?

Êtes-vous sûre d'avoir fait la bonne décomposition ? Peut-on lire graphiquement AJ ?

Yosr explique en arabe qu'elle l'a fait à la règle.

P_{62} (en pointant du doigt le résultat écrit au tableau): Voilà, le résultat est là. Quand on fait des calculs approximatifs, le résultat, il est là.

Mhadheb propose la décomposition suivante :

P_{63} : Quand on utilise ainsi ces triangles rectangles et ces rectangles, aucun risque d'erreur de lecture.

Mhadheb écrit au tableau :

$$\begin{aligned} \text{aire}(S) = & \\ & \text{aire}(KFMN) + \text{aire}(MJLO) + \\ & \text{aire}(IEB) + \text{aire}(CJB) + \text{aire}(CNF). \end{aligned}$$

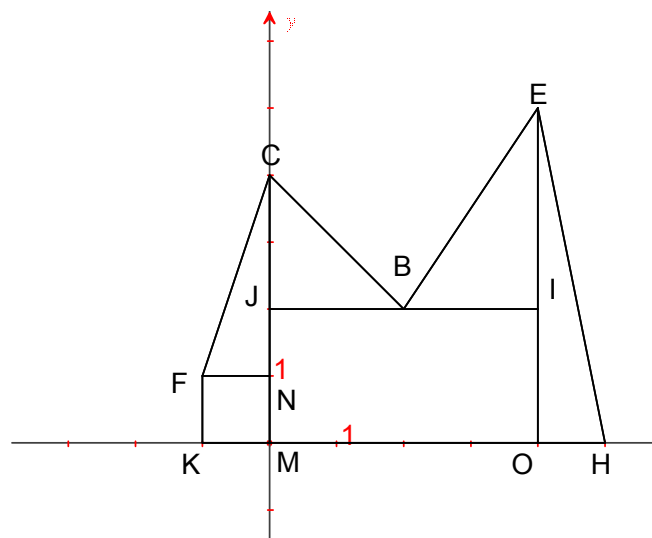
$$\begin{aligned} \text{aire}(S) = & 1 + 8 + \frac{5}{2} + 3 + 2 + \frac{3}{2} = \\ & 14 + \frac{8}{2} = 18 \text{ (u. a.)}. \end{aligned}$$

P_{64} : Bien. Y a-t-il un autre résultat ?

E_{59} : 18,5.

P_{65} : Comment obtenez-vous ce résultat ?

E_{60} (Youssef) : le triangle ABC, le triangle MDE, ...



P_{66} : Le triangle ABC, est-ce que c'est un bon triangle ?

E_{61} (Youssef) : $(\text{base} \times \text{hauteur})/2$

P₆₇ : Le problème, c'est la base. Y a-t-il une autre décomposition ?

E₆₂ (Manel) : Trapèze KFCM, trapèze MCBX²³⁰...

L'enseignant montre sur la figure au tableau les quatre figures (3 trapèzes + 1 triangles) qui constituent la décomposition que Manel propose et fait remarquer que l'on obtient le même résultat que celui obtenu par Mhadheb.

Un autre élève (Tarek) propose une autre manière pour calculer l'aire de S. L'enseignant lui demande de l'exposer au tableau. Tarek propose la démarche illustrée par la figure suivante :

P₆₈ (s'adressant à Tarek) : Oui !

E₆₃ (Tarek) : le grand rectangle moins... (Il montre la surface S' qui complète S dans le rectangle de dimensions 6 et 5)

P₆₉ (s'adressant à la classe) : Vous avez compris l'idée ?

Tarek décompose la surface S' en un carré, un rectangle et trois triangles comme ci-contre. Puis, il écrit au tableau :

$$\begin{aligned} \text{aire}(S) &= (6 \times 5) - \left(\frac{5}{2} + 2 + 2 + 3 + \frac{5}{2} \right) \\ &= 18 \text{ (u. a)} \end{aligned}$$

P₇₀ : Donc finalement, quelle conclusion ou bien quel constat peut-on faire, pour calculer l'aire de S ?

E₆₄ (Malek) : Il y a plusieurs...

P₇₁ : Il y a plusieurs ?

E₆₅ : Une infinité de surfaces...

P₇₂ (reprenant le propos de l'élève) : Il y a plusieurs décompositions possibles et elles conduisent au même résultat. Et donc, le résultat ne dépend pas en fait de la décomposition.

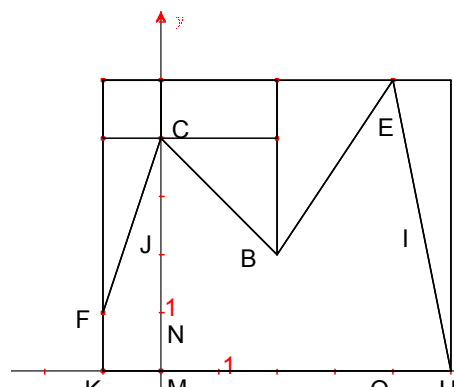
Un élève dit quelque chose mais la voix est inaudible.

P₇₃ : Sûr ? J'ai dit, le résultat, l'aire de S ne dépend pas de...

E₆₆ : La décomposition de S.

P₇₄ : Sûr ? C'est-à-dire si on change la décomposition, on ne risque pas d'avoir un autre résultat.

E₆₇ (Youssef en plaisantant) : Non. On risque.



²³⁰ Le point que nous notons X (désigne le projeté orthogonal de B sur l'axe des abscisses) n'a pas été nommé par Manel mais pointé du doigt.

P₇₅: On risque, n'est-ce pas !!

L'enseignant renvoie Yosr au tableau et lui demande :

P₇₆ : Avez-vous réalisé votre erreur ?

E₆₈ (Yosr) : Oui.

P₇₆ : C'est dû à quoi ?

E₆₉ (Yosr) : Les triangles ne sont pas rectangles.

P₇₇: Est-ce que c'est un problème de décomposition ou un problème de lecture ou de mesurage ?

Yosr sourit.

P₇₈ : C'est pas un problème de décomposition. C'est pas la (Malek intervient)

E₇₀ (Malek) : Le problème c'est pas le triangle qui n'est pas rectangle. Le point A, le point D, le point G qu'on ne peut pas déterminer.

P₇₉ : Les points A, D, G ? On peut les déterminer.

E₇₁ (Malek) : On ne peut pas les déterminer avec précision.

P₈₀ : Si. On peut les déterminer, mais algébriquement. Il faut faire les calculs, c'est-à-dire, vous allez faire l'intersection du segment dont l'équation est $y = -5x + 25$ avec la droite d'équation $x = 2$ puis $x =$ plutôt $y = 2$ et $y = 1$. Là vous trouvez la valeur de x , je veux dire, vous trouverez l'abscisse de D et l'abscisse de G. Mais (à l'intention de Yosr), la règle, ça ne donne pas la valeur exacte.

E₇₂ (Yosr) : Sur le schéma j'ai trouvé 17,80.

P₈₁: 17,80 n'est pas 18. Qu'on soit bien d'accord sur ce point 17,99 n'est pas 18. Donc finalement...

E₇₃ (Yosr) : La décomposition...

E₇₄ (Mhadheb) : Toutes les décompositions ...

P₈₂ (reprenant la phrase de Mhadheb) : Toutes les décompositions conduisent au même résultat.

E₇₅ (Youssef) : Si on décompose la surface en un ensemble de segments.

P₈₃: Si on décompose ça en un ensemble de segments. Oui ?

E₇₆ (Youssef, en arabe) : Tous égaux à zéro. Donc l'aire est zéro.

P₈₄: Votre camarade vous propose l'idée suivante : une surface peut être toujours décomposée en segments. Il va juxtaposer des segments. Évidemment, l'aire d'un segment est nulle. Et (à l'intention de Youssef), vous aurez combien de segments ?

E₇₇ (Youssef) : C'est pas infini, mais beaucoup.

P₈₅: J'ai pas compris « c'est pas infini, mais beaucoup »

E₇₈ (Youssef) : (inaudible).

P₈₆: Il vous faut combien de segments ? Cette surface est composée de combien de segments verticaux ?

E₇₉ (Mustapha) : Une infinité.

P₈₇: C'est pas un nombre fini de segments. Une infinité et c'est même pas dénombrable. Et vous avez $0 \times \infty$?

E₈₀ (Malek) : C'est une forme indéterminée.

L'enseignant clôt ce débat pour conclure. Il envoie Yosr au tableau.

P₈₈ : L'aire d'une surface polygonale (temps d'arrêt). Qu'est-ce que c'est qu'une surface polygonale ?

E₈₁ (Yosr, en arabe) : On peut la diviser en ...

P₈₉ : C'est une surface dont le bord est formé de segments de droites. Une surface (s'adressant à Yosr) qu'en peut diviser en ?

E₈₂ (Yosr) : Triangles.

P₉₀ : C'est-à-dire une surface formée de ?

E₈₃ (Yosr) : Nombre fini.

P₉₁ : Formée d'un nombre fini de triangles. Les triangles doivent être comment ?

E₈₄ : Triangles rectangles.

P₉₂ : Non, pas nécessairement des triangles rectangles. Mais est-ce qu'ils peuvent empiéter les uns sur les autres ?

E₈₅ : Non...

P₉₃ : On ne dit pas qu'ils sont tangents. On dit qu'ils sont ?

E₈₆ : Adjacents.

P₉₄: On dit qu'ils sont adjacents.

E₈₇ (Mhadheb) : Pourquoi fini ?

P₉₅ : Parce que sinon la surface aurait, l'aire serait ?

E₈₈ : Infinie.

P₉₆ : Nous parlons de surfaces dont l'aire est un nombre fini. Que vaut cette aire ?

E₈₉ (Yosr) : La somme des aires des triangles.

P₉₇ : Bien. Et l'autre résultat très important que nous avons souligné tout à l'heure ?

E₉₀ (Yosr) : L'aire ne dépend pas de la décomposition.

Yosr fini d'écrire le théorème au tableau

Théorème (admis)

L'aire d'une surface polygonale, c'est-à-dire une surface formée d'un nombre fini de triangles adjacents, est égale à la somme des aires des triangles. De plus, cette aire ne dépend pas de la décomposition de la surface en triangles.

P₉₈ : Bien. Ceci étant, le théorème fournit, en particulier dans le cas de cette figure, une méthode pour calculer l'aire du sous-graphe d'une fonction affine par intervalles qui est, en plus, comment ?

E₉₁ : Continue.

P₉₉ : Elle est continue et ? Quelle autre remarque sur la fonction ?

E₉₂ (Nadia) : Dérivable.

P₁₀₀ : Non. Oui, désolé, elle possède des points anguleux.

E₉₃ : Positive.

P₁₀₁ : Elle est continue et elle est positive.

L'enseignant ramasse les copies et distribue l'énoncé de l'activité 2.

Phase 4 (5 minutes)

L'enseignant prend en charge de présenter l'activité 2 et d'expliquer la consigne :

P₁₀₂ : Dans la première activité, nous avons vu comment calculer l'aire d'une surface polygonale. Maintenant, la question qui se pose est : peut-on attribuer une aire à des surfaces plus générales, c'est-à-dire des surfaces qui ne sont pas nécessairement des surfaces polygonales ?

Il s'agit d'une question difficile et complexe qu'on ne va pas aborder dans toute sa généralité. Nous allons nous maintenir au programme officiel. Plus précisément, nous allons, au lieu d'avoir des fonctions affines par intervalles, j'ai donné ici l'exemple d'une fonction continue positive, et pour faciliter les calculs j'ai choisi une fonction croissante ; et c'est uniquement pour faciliter les calculs ; mais ça reste valable pour toute fonction continue et positive.

Après la lecture de l'énoncé de l'activité, l'enseignant demande :

P₁₀₃ : C'est clair ? Pas de questions ?

Silence...

P₁₀₄ : Non. Quelqu'un peut leur expliquer comment on procède ?

E₉₄ (Mustapha) : On partage la surface en rectangles puis... (Il fait un geste pour demander s'il peut le montrer au tableau).

P₁₀₅ : Ah, non. Ça, ils doivent le faire sur leurs copies.

P₁₀₆ : Bien. 1.a. Représentez les rectangles r_k et R_k pour k variant de 1 à 5, c'est-à-dire que vous allez avoir des rectangles de base ?

E₉₅ : 1 sur 5.

P₁₀₇ : Vous allez avoir des rectangles de base $\frac{1}{5}$, c'est-à-dire qu'on partage l'intervalle $[0, 1]$ en cinq intervalles de même longueur $\frac{1}{5}$.

E₉₆ (Mhadheb) : ... longueur $\frac{1}{n}$ et hauteurs l'une ...

P₁₀₈ : k varie de 1 à n . Nous sommes dans le cas ?

E₉₇ : $n = 5$.

P₁₀₉ : Donc k varie de 1 à 5. Quelles sont les hauteurs de ces rectangles, des rectangles r_k ?

P₁₁₀ : Premier... f de La première valeur de k , c'est combien ?

E₉₈ : Un.

P₁₁₁ : Un. Donc ?

E₉₉ : $f\left(\frac{k-1}{5}\right)$.

P₁₁₂ : On a $\frac{k-1}{5}$... Donc $f(0)$. La deuxième ?

E₁₀₀ : $\frac{1}{5}$.

P_{113} : Troisième ?

E_{101} : $\frac{2}{5}$.

P_{114} : Et ainsi de suite.

L'enseignant reprend l'énoncé une deuxième fois pour expliquer les gestes *déplacer* et *empiler* et laisse ensuite les élèves travailler seuls.

Phase 5 (15 minutes)

Travail individuel.

Phase 5 (20 minutes)

L'élève Mustapha se porte volontaire pour la correction au tableau. L'enseignant lui demande de commencer par représenter les « petits » rectangles et sollicite les autres élèves pour qu'ils suivent au tableau.

Mustapha trace rapidement les rectangles r_k , ($1 \leq k \leq 5$).

P_{115} : Que représente u_5 ?

E_{102} (Mustapha) : La somme des ... (il indique par le geste les rectangles r_1, r_2, \dots, r_5).

P_{116} : Hachurez la surface dont l'aire est u_5 . Ensuite (s'adressant à la classe), ça c'est la surface dont l'aire est u_5 . C'est la somme des aires des petits rectangles.

L'enseignant ajoute à l'intention de l'élève au tableau :

P_{117} : Changez de couleur et tracez les « grands » rectangles.

L'élève trace les rectangles R_1, R_2, \dots, R_5 .

P_{118} : Très bien. Sans chercher vraiment à justifier le résultat, mais géométriquement, comparez u_5, v_5 et A .

E_{103} (Mustapha) : v_5 est plus grand que A et u_5 plus petit.

L'enseignant lui demande d'écrire sa réponse au tableau et s'adressant à la classe :

P_{119} : Il est clair que la surface formée par les rectangles r_k est contenue dans la surface S qui est contenue dans la surface formée par les rectangles R_k .

Mustapha commence d'écrire $u_5 < v_5$, l'enseignant intervient immédiatement pour demander :

P_{120} : Est-ce que l'inégalité est... , est-ce qu'on a besoin d'écrire des inégalités strictes ?

E_{104} : Non.

Mustapha écrit au tableau :

1.b) $u_5 \leq A \leq v_5$.

P_{121} : Très bien. Hachurez la surface dont l'aire est $v_5 - u_5$.

Mustapha hachure la surface en question.

P_{122} : Tout le monde est d'accord sur ces surfaces ?

Personne ne semble réagir à la question et l'enseignant poursuit :

P_{123} : Maintenant, vous allez déplacer et empiler les surfaces dans la colonne de droite.

Mustapha exécuta aussitôt les deux gestes. L'enseignant se dirige ensuite vers le tableau et écrit :

c) Soit a_k l'aire du rectangle r_k et A_k celle du rectangle R_k ($1 \leq k \leq 5$).

P_{124} : ... l'aire du premier rectangle, le rectangle en bas (en montrant au tableau le rectangle situé en bas dans la colonne de droite). J'ai appelé a_k l'aire du rectangle r_k et A_k l'aire du rectangle R_k . Alors que représente ...

E_{105} : a k moins...

P_{125} : Grand A ou petit a ? Laquelle est la plus grande, l'aire du rectangle R_k ou celle du rectangle r_k ?

E_{106} : Grand R_k .

P_{126} : Donc $A_k - a_k$.

L'enseignant demande à Mustapha d'écrire dans chaque rectangle de la colonne de droite sur la figure, l'aire correspondante.

P_{127} : Après avoir déplacé et empilé, on vous demande simplement : que vaut $v_5 - u_5$?

E_{107} (Mustapha) : L'aire de ... (il montre du geste le rectangle représenté dans la colonne de droite).

P_{128} : Après avoir déplacé et empilé, on obtient en fait un rectangle. Quelles sont ses dimensions ?

E_{108} : $\frac{1}{5}$ et $f(1) - f(0)$.

Mustapha écrit au tableau :

$v_5 - u_5$ est l'aire du rectangle de dimensions $\frac{1}{5}$ et $f(1) - f(0)$.

Donc $v_5 - u_5 = \frac{1}{5} \times (f(1) - f(0))$.

P_{129} : Y a-t-il une relation entre A et a , entre A_k et a_k ?

Silence ...

P_{130} : Observez bien.

E_{109} (Amina) : Ils ont même largeur.

P_{131} : Tous les rectangles ont la même largeur, d'accord. N'y a rien de remarquable ? Observez bien.

E_{110} (Manel) : La largeur du rectangle d'aire $A_1 - a_1$ est plus petite que la largeur du rectangle d'aire $A_2 - a_2$.

P_{132} : Mais ça, c'est relatif à quoi ?

E_{111} (Hamza) : À la fonction.

P_{133} : Si vous avez une fonction qui croît moins rapidement, vous aurez évidemment un rectangle de largeur plus petite. Il n'y a rien d'autre ?

Malek passe au tableau, marque sur l'axe des abscisses les valeurs $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \dots, \frac{4}{5}, 1$. Il explique ensuite sur la figure au tableau que l'aire A_1 du rectangle R_1 est égale à l'aire a_1 du rectangle r_1 plus celle de la surface comprise entre r_1 et R_1 .

P_{134} : C'est-à-dire plus ça (il montre au tableau le rectangle situé en bas dans la colonne de droite), si vous ajoutez vous allez obtenir la même chose ($A_1 = a_1 + (A_1 - a_1)$).

Un élève dans la salle propose :

E_{112} : Égale a_2 .

P_{135} : Égale ?

E_{113} : Petit a_2 .

P_{136} : Petit a_2 . Grand A_2 ?

E_{114} : Petit a_3 .

P_{137} : Grand A_3 ?

E_{115} : Petit a_4 .

P_{138} : Et c'est pour cette raison (il montre sur la figure au tableau la surface représentée dans la colonne de droite) que les termes vont s'éliminer deux à deux.

Malek écrit au tableau :

$$\begin{aligned}v_5 - u_5 &= (A_1 - a_1) + (A_2 - a_2) + (A_3 - a_3) + (A_4 - a_4) + (A_5 - a_5) \\ &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + (A_5 - a_4).\end{aligned}$$

P_{139} : On appelle cette somme, une somme télescopique. Les termes s'éliminent deux à deux et il ne reste que ?

$$E_{116} : A_5 - a_1.$$

P_{140} : Il ne reste que le dernier et le premier. Et que vaut A_5 ?

$$E_{117} : \frac{1}{5} \times f(1).$$

Malek écrit au tableau :

$$v_5 - u_5 = \frac{1}{5} \times f(1) - \frac{1}{5} \times f(0) = \frac{1}{5} \times (f(1) - f(0))$$

Phase 6 (25 minutes)

Travail individuel sur la question 2. a.

Phase 7 (30 minutes)

L'enseignant désigne Inès au tableau :

P_{141} : Comparer u_{10} , A et v_{10} . Géométriquement.

$$E_{118} : u_{10} \leq A \leq v_{10}.$$

Inès écrit au tableau :

$$\mathbf{2. a. u_{10} \leq A \leq v_{10}.}$$

P_{142} : Après avoir déplacé et empilé les surfaces que vous avez, vous obtenez encore une fois...

E_{119} : Un rectangle.

P_{143} : Un rectangle. Quelles sont ses dimensions ?

$$E_{120} : \frac{1}{10} \text{ et } f(1) - f(0).$$

P_{144} : $\frac{1}{10}$ et ?

E_{121} : $f(1) - f(0)$.

P_{145} : Encore une fois, $v_{10} - u_{10}$?

Inès écrit au tableau :

$$v_{10} - u_{10} = \frac{1}{10} (f(1) - f(0)).$$

P_{146} : Pour $n = 20$, quels sont les résultats ?

E_{122} : $v_{20} - u_{20} \dots$

Inès écrit au tableau :

$$\text{De même pour } n = 20, u_{20} \leq A \leq v_{20} ; v_{20} - u_{20} = \frac{1}{20} (f(1) - f(0)).$$

P_{147} : Alors maintenant la question... il s'agit de prouver, de justifier en fait... on le constate avec $n = 5$, $n = 10$ et $n = 20$; donc a priori $v_n - u_n$ égale ?

E_{123} : $\frac{1}{n}$ fois $f(1) - f(0) \dots$

P_{148} : Ça, vous devrez le prouver. Il va falloir le démontrer ... avec la méthode de votre choix.

L'enseignant accorde aux élèves quelques minutes de réflexion et envoie ensuite Manel au tableau.

P_{149} : C'est quoi u_n ? C'est quoi v_n , d'abord ?

E_{124} : Somme (inaudible).

P_{150} : Tout à l'heure, j'ai noté a_k l'aire du petit rectangle r_k et A_k l'aire du grand rectangle R_k . Donc u_n égale ?

Manel écrit au tableau :

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k ; v_n = \sum_{k=1}^n A_k ; v_n - u_n = \sum_{k=1}^n (A_k - a_k).$$

P_{151} : Tout à l'heure, vous avez fait la remarque sur le fait ... que vaut grand A_k ?

E_{125} : a_{k+1} .

P_{152} : a_{k+1} . (À l'intention de Manel) Égale somme ...

Manel écrit au tableau :

$$v_n - u_n = \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k).$$

P_{153} : Je rappelle la remarque de tout à l'heure (il écrit au tableau en face de la dernière égalité **car** $A_k = a_{k+1}$). Et donc, là encore vous avez ... qu'est-ce qu'on a dit ... quand vous avez une somme de différences consécutives ? Qu'est-ce qu'on obtient ?

E_{126} : La dernière moins ...

P_{154} : Le dernier terme moins le premier terme. Le dernier terme est obtenu pour k égal ?

E_{127} : n .

P_{155} : n . Ça nous donne ?

E_{128} : A_n .

E_{129} (en arabe) : petit a ...

E_{130} (en arabe) : Pourquoi petit a ?

E_{131} : petit a_{n+1} .

Manel écrit au tableau :

$$v_n - u_n = a_{n+1} - a_1.$$

E_{132} : A_n .

P_{156} : C'est ça. Que vaut a_{n+1} ?

E_{133} : $\frac{1}{n}$...

P_{157} : La base c'est $\frac{1}{n}$, et la hauteur ?

E_{134} : $f\left(\frac{1}{n}\right)$.

E_{135} : ... (inaudible).

P_{158} : En fait, c'est $f\left(\frac{k-1}{n}\right)$ avec k égal combien ?

E_{136} : $n + 1$.

P_{159} : Il reste $f\left(\frac{n}{n}\right)$, c'est-à-dire ?

E_{137} : $f(1)$.

P_{160} : Moins a_1 . a_1 égal ?

E_{138} : $\frac{1}{n} f(0)$.

Manel écrit au tableau :

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} f(1) - \frac{1}{n} f(0) = \frac{1}{n} (f(1) - f(0)).$$

Un élève dit quelque chose (inaudible) ce qui provoque la remarque suivante de l'enseignant :

P₁₆₁ : Une remarque. Beaucoup d'entre vous ont essayé d'obtenir ça par récurrence. Est-ce que la situation se prête à un raisonnement par récurrence ?

E₁₃₉ : Non.

P₁₆₂ : La dernière question, c'est : préciser la limite de $v_n - u_n$.

E₁₄₀ : limite de $\frac{1}{n}$...

L'enseignant demande quelqu'un au tableau. Tarek y va et écrit :

$$\text{c) } v_n - u_n = \frac{1}{n} (f(1) - f(0)).$$

P₁₆₃ : Vous dites que la limite est égale à combien ?

E₁₄₁ : Zéro.

P₁₆₄ : Pourquoi ?

E₁₄₂ : Limite de $\frac{1}{n}$ égale 0.

P₁₆₅ : Limite de $\frac{1}{n}$ égale 0 et l'autre, $f(1) - f(0)$ c'est une ...

E₁₄₃ : Constante.

Un élève parle à l'enseignant mais la voix est inaudible.

P₁₆₆ : On va interpréter ça géométriquement. Votre camarade dit que lorsqu'on fait tendre n vers l'infini, les rectangles peuvent être assimilés à des segments et l'aire d'un segment est nulle. Vous êtes d'accord avec lui ?

Un élève réagit (en arabe) mais encore une fois la voix est inaudible.

Tarek écrit au tableau :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

P₁₆₇ : (S'adressant à Tarek) Justifiez. Pourquoi cette limite est-elle égale à 0 ?

E₁₄₄ (Tarek) : ... $\frac{1}{n}$...

P₁₆₈ : Car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Deux élèves sollicitent l'enseignant sur la possibilité d'utiliser le procédé d'itération pour calculer $v_n - u_n$. L'enseignant semble²³¹ leur expliquer que u_n et u_{n+1} correspondent à deux subdivisions différentes de l'intervalle $[0, 1]$ et indépendantes l'une de l'autre. Il montre rapidement sur le graphique au tableau obtenu pour $n = 5$ que pour avoir u_6 , on divise l'intervalle $[0, 1]$ en six intervalles ce qui génère six rectangles r_k ($1 \leq k \leq 6$) dont le lien avec les rectangles r_k ($1 \leq k \leq 5$) n'est à l'évidence ni direct ni simple. Il n'y a donc pas de relation directe entre u_5 et u_6 .

P_{169} : La dernière question : comparer géométriquement u_n , A et v_n .

E_{145} : $v_n \geq A \geq u_n$.

L'enseignant demande à Ramy de passer au tableau. Il y va et écrit :

3. c) $u_n < A < v_n$.

E_{146} : Inégalités larges.

P_{170} : Oui, des inégalités larges. Établir que $0 \leq A - u_n \leq v_n - u_n$. Comment obtenir ces inégalités ?

E_{147} : On retranche u_n .

P_{171} : On retranche u_n . Oui.

Ramy écrit au tableau :

$$u_n - u_n \leq A - u_n \leq v_n - u_n ; 0 \leq A - u_n \leq v_n - u_n.$$

P_{172} : Bien. La deuxième c'est $u_n - v_n \leq A - v_n \leq 0$. On retranche ?

E_{148} : v_n .

Ramy écrit au tableau :

$$u_n - v_n \leq A - v_n \leq v_n - v_n ; u_n - v_n \leq A - v_n \leq 0.$$

$$\text{c) } 0 \leq A - u_n \leq v_n - u_n.$$

P_{173} : Que peut-on conclure? Qu'est-ce qu'on sait d'abord ?

E_{149} : Limite de $v_n - u_n$ égale 0.

P_{174} : On sait que limite de $v_n - u_n$ égale ...

E_{150} : Zéro.

²³¹ La qualité de l'enregistrement audio n'est pas bonne du tout.

P₁₇₅ : Et donc ?

E₁₅₁ : Limite de u_n égale A .

E₁₅₂ : Limite de $A - u_n$ égale zéro.

L'enseignant reprend la dernière réponse à l'intention de Ramy qui écrit:

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A - u_n) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = A$

$u_n - v_n \leq A - v_n \leq 0$.

on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A - v_n) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = A$

P₁₇₆ : Donc finalement ?

E₁₅₃ : Limite de u_n égale limite de v_n égale A .

P₁₇₇ : C'est-à-dire que les deux suites (u_n) et (v_n)

E₁₅₄ : Convergent.

P₁₇₈ : Convergent vers la même limite ... A .

Ramy écrit au tableau :

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = A$.

Par suite les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers A .

E₁₅₅ : Les deux suites sont adjacentes.

P₁₇₉ : Ah non, on n'a rien dit de tel. En fait, on n'a pas cherché à prouver que les deux suites sont adjacentes. On a utilisé un autre (un élève dit quelque chose mais la voix n'est pas claire) ; On dit faiblement adjacentes. C'est pour éviter de travailler directement sur les expressions de u_n et v_n , et c'est assez lourd. Donc on a procédé autrement.

L'enseignant fait remarquer qu'il ne reste plus beaucoup de temps et s'adressant à Ramy :

P₁₈₀ : Bien. Juste une question : que représente en fait $v_n - u_n$?

E₁₅₆ : L'aire d'un rectangle.

P₁₈₁ : L'aire d'un rectangle.

E₁₅₇ : La différence des aires.

P₁₈₂ : La différence des aires des ...

E₁₅₈ : Des rectangles grand R_k et des rectangles petit r_k .

P₁₈₂ : La différence ... c'est la différence de la somme...

E₁₅₉ : La somme des aires.

P₁₈₃ : $v_n - u_n$ est en fait l'écart ou la différence si vous voulez ; c'est la différence de la somme ... la somme de quoi ?

E₁₆₀ : La somme des aires...

E₁₆₁ : Des rectangles R_k ...

P₁₈₄ : Des aires des rectangles R_k et celle des rectangles r_k . Que représente cette différence ?

E₁₆₂ : C'est l'erreur ...

P₁₈₅ : Ça représente l'erreur... C'est l'erreur maximale commise sur l'aire A de (S) . Cette différence dépend de quoi ?

E₁₆₃ : n .

P₁₈₆ : De n ; en fait vous avez... $v_n - u_n$ égal ?

Un élève dit quelque chose mais sa voix est complètement inaudible.

P₁₈₇ ; Comme $v_n - u_n$, vous dites $\frac{1}{n}$ fois ...

E₁₆₄ : $f(1) - f(0)$.

P₁₈₈ : En d'autres termes, elle est inversement proportionnelle

E₁₆₅ : n .

P₁₈₉ : À n , ce qui veut dire que cette erreur est d'autant plus petite que n est grand. Lorsqu'on donne à n des valeurs de plus en plus grandes on obtient une erreur de plus en plus petite. Donc on peut, en fait, obtenir une valeur... elle permet d'obtenir une valeur...

E₁₆₆ : Approchée.

E₁₆₇ : Si on passe à la limite... (inaudible).

P₁₉₀ : Oui, à la limite on obtient la valeur exacte. Donc (s'adressant à Ramy), elle permet d'obtenir une valeur approchée de A avec la précision que l'on veut. Lorsqu'on passe à la limite, cette méthode fournit exactement la valeur de A .

Voici ce que Ramy a écrit sur le tableau :

Commentaire

$v_n - u_n$ est la différence de la somme des aires des rectangles R_k et celle des aires des rectangles r_k . C'est l'erreur maximale commise sur l'aire A de (S) . Comme $v_n - u_n = \frac{1}{n} (f(1) - f(0))$, elle permet d'obtenir une valeur approchée de A avec la précision voulue. Lorsqu'on passe à la limite, cette méthode fournit exactement la valeur de A .

Séance du 04 Mars 2011

Durée : 2 heures

Nombre d'élèves : 18.

Il nous faut d'abord avertir que le tout début de la séance n'a pas été enregistré²³². Ensuite, l'enseignant a pris en charge de rappeler la situation étudiée dans l'activité 2. Dans la mesure où il parlait en même temps qu'il illustrait graphiquement son discours, il est nécessaire, pour la bonne compréhension de son discours, de mettre en rapport ses propos avec le graphique qui les accompagne.

Phase 8 (26 minutes)

Dans la première image que nous avons, l'enseignant écrit au tableau :

Posons $x_k = \frac{k-1}{n}$ et $\Delta x = \frac{1}{n}$.

P₁ : Je rappelle la situation. Nous avons travaillé sur une fonction qui est croissante ; et nous avons décomposé (il trace au tableau la courbe d'une fonction continue, positive et croissante) ; là, vous avez $f(0)$, $f(1)$. Nous avons fait quoi précisément ?

Deux élèves répondent, mais la voix est inaudible.

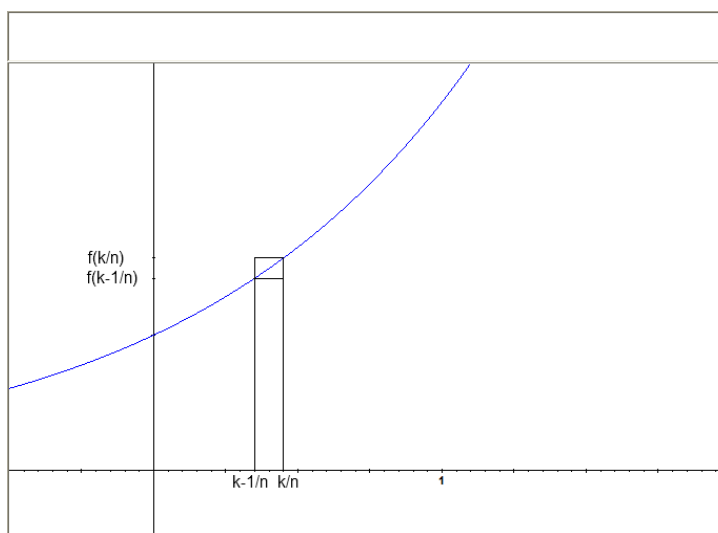
P₂ : Décomposer en des ?

E₁ : Rectangles.

P₃ : En bandes rectangulaires et considéré deux rectangles : un rectangle petit r_k dont la largeur est ?

E₂ : $\frac{1}{n}$.

P₄ : $\frac{1}{n}$. Pour les rectangles r_k la hauteur c'est ?



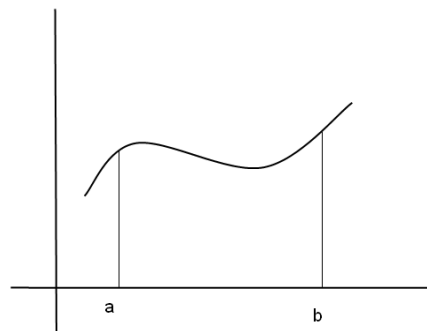
L'enseignant place sur l'axe des abscisses les valeurs $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$ et attend une réponse.

E₃ : $f\left(\frac{k-1}{n}\right)$.

²³² Le cameraman dit qu'il ne comprend pas comment cela est arrivé.

P_5 : $f\left(\frac{k-1}{n}\right)$; et pour l'autre rectangle ?

E_4 : $f\left(\frac{k}{n}\right)$.



P_6 : Est-ce que vous pensez que ... différent. Si l'on change la fonction en une fonction décroissante ? Le même procédé reste valable si la fonction est décroissante, ou pas ?

E_5 : ... valable.

P_7 : Il reste valable ?

E_6 : Oui.

P_8 : Qu'est-ce qui change ?

E_7 : ... les rectangles...

P_9 : Les rectangles ?

E_8 : Le grand rectangle et le petit rectangle

...

P_{10} : Le grand rectangle aura pour hauteur ?

E_9 : $f\left(\frac{k-1}{n}\right)$.

P_{11} : Donc le résultat, du moins le procédé s'applique pour une fonction monotone, qu'elle soit croissante ou décroissante. Si la fonction n'est pas monotone, pensez-vous que l'on puisse utiliser le même procédé pour arriver à calculer l'aire d'une telle surface ?

E_{10} (Mhadheb) : On travaille par intervalles.

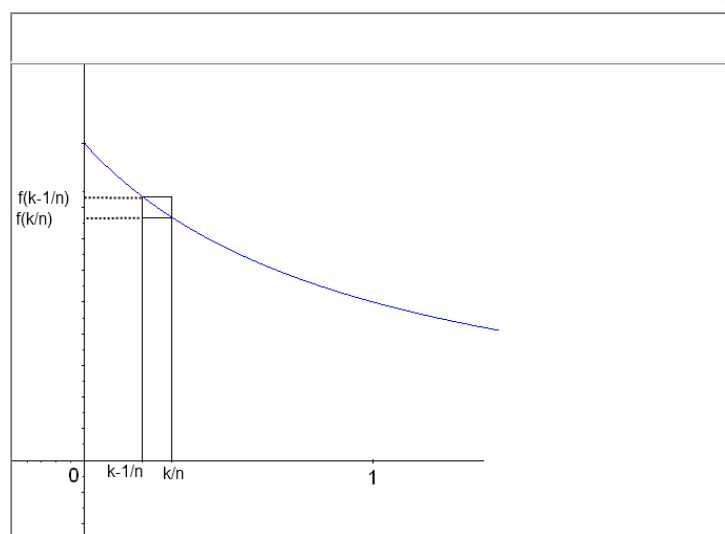
P_{12} : On travaille par ?

E_{11} (Mhadheb) : Par intervalles.

P_{13} : Moi, je pose la question. Si vous avez des propositions à faire, je vous écoute (il trace au tableau la courbe d'une fonction continue et positive mais qui n'est pas monotone).

Un élève semble proposer quelque chose mais la voix est encore une fois inaudible.

P_{14} : Vous proposez quoi exactement ? En vous inspirant évidemment de ce qui a été fait dans l'activité.



E_{12} (Malek) : On coupe l'intervalle $[a, b]$ en deux parties.

E_{13} : Non, en trois.

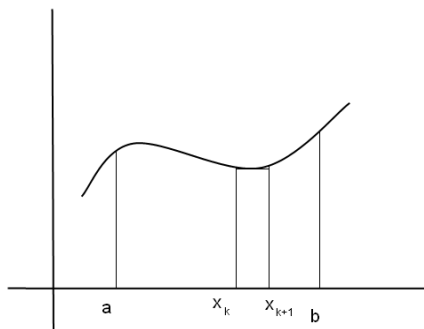
P_{15} : Pourquoi en deux parties ?

E_{14} (Malek) : Un intervalle où la fonction est croissante et un intervalle où la fonction est décroissante.

P_{16} : Et si vous avez une fonction qui varie autrement²³³.

E_{15} (Malek) : Ça ne marche pas.

P_{17} : Ça ne marche pas. Malek dit que ça ne peut pas marcher quand on a une fonction qui n'est pas monotone.



E_{16} (Tarek) : Si.

P_{18} : Si, ça marche ! Comment ?

E_{17} (Tarek) : On peut faire le grand rectangle et le petit rectangle.

P_{19} : On peut toujours considérer les ?

E_{18} (Tarek) : Les grands rectangles et les petits rectangles.

P_{20} : Oui. Quelle serait la hauteur du grand rectangle ? Et celle du petit rectangle ?

E_{19} : f de ...

P_{21} : Vous dites que vous pouvez, c'est-à-dire qu'on va décomposer en des intervalles (l'enseignant porte sur l'axe des abscisses les nombres $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$). Alors quelle est la hauteur de petit rectangle et celle du grand rectangle ?

E_{20} : $f(x_k)$ et $f(x_{k+1})$.

P_{22} : f de ... ? C'est pas sûr. Il va falloir proposer peut être une autre courbe (l'enseignant trace au tableau une nouvelle courbe). Vous pensez toujours que c'est $f(x_k)$ et $f(x_{k+1})$?

L'enseignant demande à Tarek de tracer les rectangles r_k et R_k .

P_{23} : Quelle est la hauteur du rectangle r_k ?

E_{21} (Tarek) : Petit r_k ? (et il fait non de la tête).

²³³ En référence à la courbe tracée au tableau.

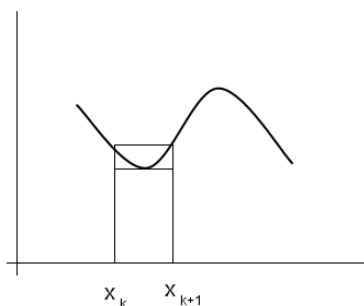
Un élève dans la salle dit quelque chose qui est inaudible.

E_{22} (Tarek) : *Je ne sais pas.*

P_{24} : *Pourquoi ? (et il montre sur la figure le point le plus bas sur la courbe dans l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$). Vous voyez ça ? Ça représente quoi ?*

Tarek montre l'abscisse du point en question et balbutie quelques mots.

P_{25} : *Oui, je sais que c'est l'abscisse de ce point, mais il correspond à quoi ?*



E_{23} : *Le minimum.*

P_{26} : *C'est le minimum de la fonction sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$; et la hauteur du grand rectangle ?*

E_{24} : *$f(x_{k+1})$.*

E_{25} (Tarek) : *$f(x_k)$.*

P_{27} : *Pourquoi ? Sinon, il va falloir que je change un peu cette courbe aussi. Pourquoi vous ne voyez que ça ? La hauteur du petit rectangle, c'est le minimum de la fonction et celle ...*

E_{25} : *Le maximum.*

P_{28} : *C'est simplement le maximum. Maintenant est-ce que la fonction atteint sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ son maximum et son minimum ?*

E_{26} (Tarek) : *Oui.*

P_{29} : *Oui. Pourquoi ? Qu'est-ce qui fait que cette fonction admet sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ un minimum et un maximum ?*

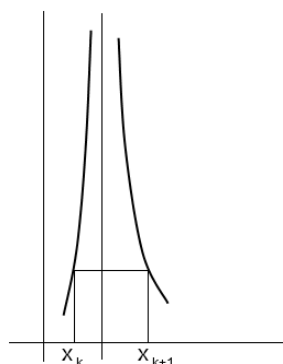
Tarek semble essayer de répondre à la question, mais sa voix est complètement imperceptible.

L'enseignant trace alors au tableau la courbe ci-contre et demande :

P_{30} : *Est-ce qu'elle a un maximum ?*

E_{26} : *Non.*

P_{31} : *Il a dit non. Pourquoi ?*



E_{27} : Elle n'est pas continue.

P_{32} : Elle n'est pas continue. Quelle est ... (la voix n'est pas claire) ?

E_{28} : La continuité.

P_{33} : La continuité. Nous savons que si une fonction est continue, l'image d'un intervalle ...

E_{29} : Est un intervalle.

P_{34} : ... est un intervalle ; et quand l'intervalle est fermé borné, son image ...

E_{30} : Fermée bornée.

P_{35} : ... est un intervalle fermé borné ; donc atteint son maximum et son minimum. C'est pour ça qu'on insiste tout le temps sur le fait que la fonction doit être continue. C'est très important. C'est la continuité qui fait que l'on peut dire que la fonction est bornée sur cet intervalle.

Donc le procédé continue à marcher même si la fonction n'est pas monotone. On peut toujours parler des deux suites (u_n) et (v_n) ...

L'enseignant va ensuite au tableau et écrit :

La somme s_n des aires des rectangles r_k est donnée par $s_n =$

P_{36} : J'attends vos réponses. Que vaut cette somme ?

Un élève semble proposer une réponse (la voix est imperceptible) que l'enseignant reprend :

P_{37} : Oui, c'est l'aire de r_1 plus l'aire de r_2 plus ... Nous disions que **aire** $(r_k) = \frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)$.

Le $\frac{1}{n}$, nous l'avons appelé ?

Silence ...

P_{38} : C'est écrit au tableau.

E_{30} : Δx .

P_{39} : Et le $\frac{k-1}{n}$, nous l'avons appelé ?

E_{31} : x_k .

P_{40} : Donc ça (il montre l'égalité $\text{aire}(r_k) = \frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)$), ça vaut quoi ?

E_{32} : Δx fois $f(x_k)$.

P_{41} : Et donc cette somme est égale à somme de $k = 1$ à n de $f(x_k)\Delta x$.

L'enseignant écrit au tableau :

$$s_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

P₄₂ : Ce qui nous intéresse maintenant c'est de savoir ce que devient cette somme lorsque n tend vers l'infini. Que devient d'abord Δx lorsque n tend vers l'infini ?

E₃₃ : Zéro.

P₄₃ : Δx tend vers zéro.

L'enseignant écrit au tableau :

En passant à la limite lorsque n tend vers l'infini, Δx devient

P₄₄ : Δx devient comment ?

E₃₄ : Nul.

P₄₅ : Nul. Égal à zéro !

E₃₅ : Non ...

P₄₆ : Non ! Est-ce que c'est nul ou très petit ?

E₃₆ : Très petit.

P₄₇ : Donc devient ; Mustapha tu as dit quoi tout à l'heure ?

E₃₇ (Mustapha) : Infiniment ...

P₄₈ : Infiniment ?

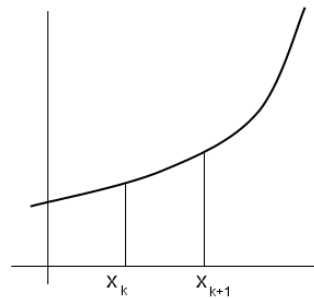
E₃₈ (Mustapha) : Petit.

L'enseignant reprend au tableau :

Δx devient infiniment petit (il précise oralement qu'il est d'usage de le noter) **que l'on note dx.**

P₄₉ : Et retenez bien ce dx. C'est une notation pour désigner une quantité infiniment petite ... Et quelle serait la hauteur de ce rectangle²³⁴?

L'enseignant trace au tableau la figure ci-contre :



²³⁴ Il faut entendre le rectangle r_k .

P_{50} : Je reprends ma situation. Donc là, vous avez x_k et x_{k+1} . Lorsqu'on fait tendre n vers l'infini, évidemment x_k et x_{k+1} sont très proches de sorte que la largeur devient infiniment petite et vu la continuité de la fonction, est-ce que les valeurs de la fonction sur l'intervalle ainsi obtenu varient beaucoup ?

E_{39} (Yosr) : Non.

P_{51} : Non. Bien sûr, elles ne varient pas ... et si la fonction n'est pas continue est-ce qu'elles peuvent varier beaucoup ?

E_{40} (Yosr) : Oui.

P_{52} : Oui. Ici, elles ne varient pas beaucoup car la fonction est continue.

L'enseignant continue d'écrire au tableau :

... et la hauteur du rectangle r_k est la valeur $f(x)$ correspondante.

L'enseignant avertit ensuite du caractère peu rigoureux de ce qu'il va dire.

P_{53} : voilà ce qui se passe. En fait, j'étais face à une somme qui est indexée sur \mathbb{N} ...

Il écrit au tableau :

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

Cette somme est indexée sur \mathbb{N} , c'est-à-dire qu'elle dépend de l'entier n . Quand on fait tendre n vers l'infini alors ceci (entendre $\frac{1}{n}$) tend vers dx et ceci (entendre $f\left(\frac{k-1}{n}\right)$) tend vers $f(x)$ et la somme $s(n)$ n'est plus ... en fait elle dépend d'une variable réelle x , donc j'aurai une somme $s(x)$. En d'autres termes j'obtiens une somme qui n'est plus indexée sur \mathbb{N} qui est un ensemble discret, mais plutôt elle est indexée par une variable réelle x , elle est indexée sur l'intervalle $[0, 1]$. On obtient en fait une fonction continue (entendre $s(x)$) ... on passe de cette notation (entendre Σ), ce sigma à une nouvelle notation, celle-ci \int qu'on lit encore somme ; c'est un S allongé. Ça traduit en fait une sommation, sur une fonction, indexée sur un intervalle, c'est-à-dire une fonction continue ; et là on l'indexe (entendre \int) sur l'intervalle $[0, 1]$ et on lit somme de 0 à 1 de $f(x)dx$. Ça doit toujours vous rappeler, lorsque la fonction est continue et positive, l'aire d'un certain rectangle de dimensions $f(x)$ et dx .

$$\begin{array}{ccc}
 s(n) = & \sum_{k=1}^n & \frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 s(x) = & \int_0^1 & dx \quad f(x)
 \end{array}$$

Une différence, c'est que les deux sommes ne sont pas indexées sur le même ensemble ; l'une est indexée sur \mathbb{N} et l'autre est indexée sur l'intervalle $[0, 1]$.

Quelques instants sont laissés aux élèves pour assimiler ce qui vient d'être dit et réagir.

E_{40} (Malek) : ... après passage à la limite qu'on écrit la deuxième ...

P_{54} : Oui, uniquement lorsqu'on passe à la limite. Nous disions, encore une fois, que la méthode, le procédé utilisé, c'est-à-dire la méthode des rectangles, ça ne fournit qu'une valeur approchée de l'aire. à n'importe quel niveau, elle ne fournit qu'une valeur approchée dont l'erreur peut être évidemment rendue aussi petite que l'on veut. Mais c'est toujours une valeur approchée, on n'obtient la valeur exacte de l'aire que lorsqu'on passe à la limite. Quand on passe à la limite, on passe de cette somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)$ à celle-ci $\int_0^1 f(x)dx$ qui représente la valeur exacte de l'aire.

L'enseignant demande à Yosr de passer au tableau pour écrire :

Théorème et définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. La surface limitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ possède une aire. on l'appelle l'intégrale de f de a à b et on la note $\int_a^b f(x)dx$.

Yosr continue d'écrire sous la dictée de l'enseignant :

L'écriture $\int_a^b f(x)dx$ se lit « intégrale de a à b de $f(x) dx$ » ou encore « somme de a à b de $f(x) dx$ ».

La variable x qui intervient dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ s'appelle une variable muette et peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$

Phase 9 (25 minutes)

Travail individuel.

L'enseignant lit publiquement l'énoncé de l'activité 3, explique la consigne et rappelle le caractère individuel du travail demandé. L'examen des copies des 18 élèves présents dans cette deuxième séance a donné les résultats suivants :

1. Tous les élèves (18 élèves) ont tracé correctement les droites d'équations $x = t$ et $x = t + h$.
2. 14 élèves ont identifié et hachuré la surface dont l'aire est $A(t + h) - A(t)$.
3. 12 élèves ont réussi à justifier l'encadrement $hf(t) \leq A(t + h) - A(t) \leq hf(t + h)$.

4. 8 élèves ont justifié la dérivabilité à droite en t de la fonction A .

5. 8 élèves ont répondu correctement à la deuxième question avant de conclure que la fonction A est dérivable en chaque t de $[a, b]$.

Phase 10 (38 minutes)

Correction de la première question.

L'élève Mustapha est au tableau. Il commence par reproduire sur le tableau la courbe proposée dans l'activité, trace ensuite les droites d'équations $x = t$ et $x = t + h$, identifie et hachure enfin la surface dont l'aire est $A(t + h) - A(t)$.

P_{55} : Est-ce qu'on peut savoir pourquoi ? Pourquoi ça représente la surface dont l'aire est

$$A(t + h) - A(t) ?$$

E_{41} (Mustapha): $A(t)$, c'est cette surface (il hachure la surface limitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$)

P_{56} : Quelle surface ? Entre quoi et quoi ?

E_{42} (Mustapha) : Entre t et ...

P_{57} : Malek n'est pas d'accord.

E_{43} (Najla) : $x = t$ et $x = a$.

P_{58} : $A(t + h)$, ça représente ?

Mustapha hachure la surface dont l'aire est $A(t + h)$.

P_{59} : Au fait, $A(t + h) - A(t)$ représente quoi ?

E_{44} (Manel): La différence.

P_{60} : La différence de quoi ?

E_{45} (Manel): entre ...

P_{61} : Est-ce une surface d'abord ?

E_{46} : L'aire d'une surface.

Mustapha écrit au tableau : **$A(t + h) - A(t)$ est l'aire de la surface limitée par les droites d'équations $x = t$, $x = t + h$, $y = 0$ et la courbe (C) .**

E_{47} : L'axe des abscisses.

P_{62} : Il a écrit ?

E_{48} : $y = 0$.

P_{63} : Très bien. Comment allez-vous encadrer l'aire de cette surface ?

E_{49} (Mustapha) : Graphiquement.

P_{64} : Graphiquement ?

E_{50} (Mustapha) : $h \times f(t)$ représente l'aire de ...

Il écrit au tableau :

$h \times f(t)$ est l'aire du rectangle de dimensions h et $f(t)$.

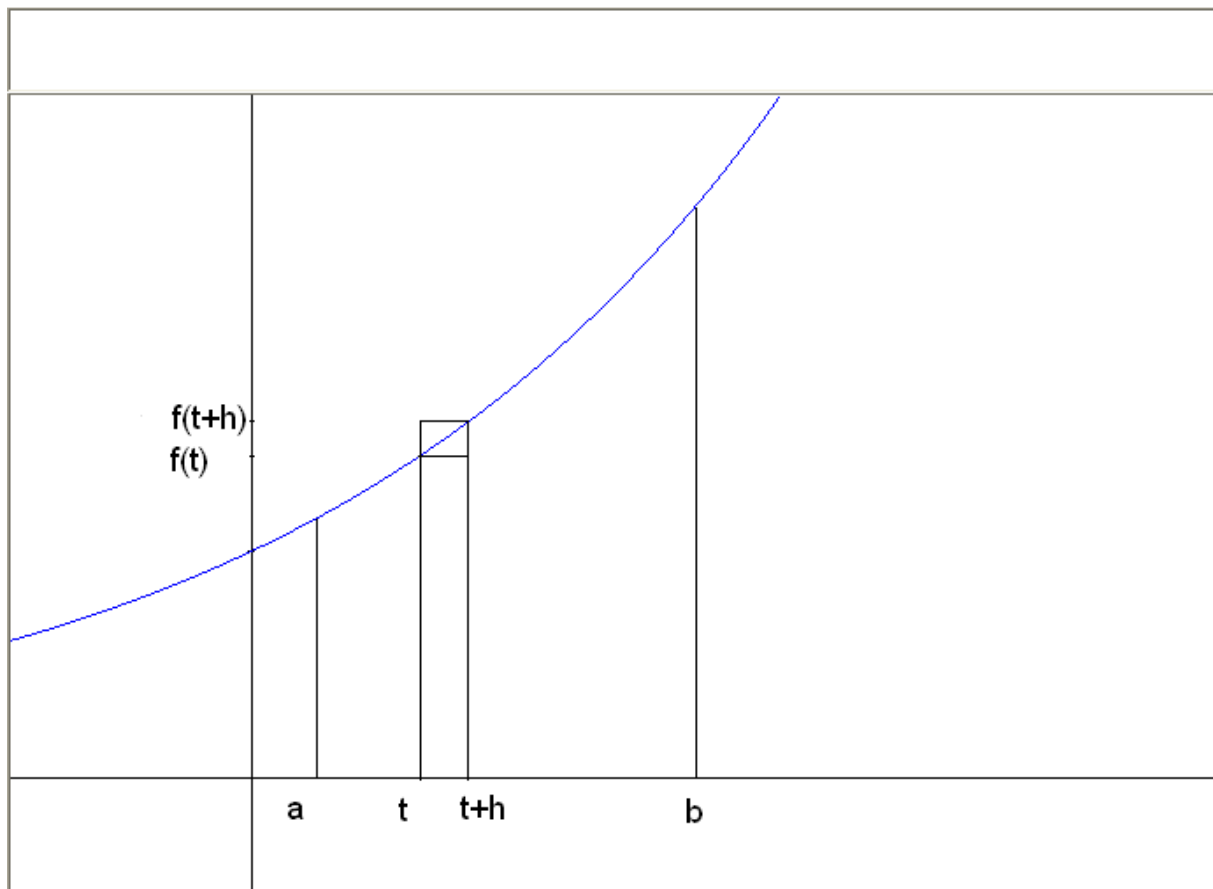
P_{65} : Que représente $h \times f(t + h)$?

E_{51} (Alaa) : L'aire du rectangle de dimensions h et $f(t + h)$.

Mustapha continue d'écrire au tableau :

$h \times f(t + h)$ est l'aire du rectangle de dimensions h et $f(t + h)$.

L'enseignant demande à Mustapha de représenter les deux rectangles, ce qu'il fait aussitôt.



P_{66} : Bien. Donc, on sait que (coupé par Mustapha).

E_{52} : L'aire $A(t + h) - A(t)$ est comprise entre $h \times f(t)$ et $h \times f(t + h)$.

P_{67} : Donc, c'est juste une question de considération de surfaces.

L'enseignant demande à Mustapha de noter S_h la surface dont l'aire est $A(t + h) - A(t)$, r_h le rectangle de dimensions h et $f(t)$ et R_h le rectangle de dimensions h et $f(t + h)$.

Mustapha reprend ensuite au tableau :

On a : $r_h \subset S_h$

P_{68} : Est-ce une inégalité ? Une surface est un ensemble de points, non pas un nombre. Est-ce qu'on utilise des inégalités pour les surfaces ?

E_{53} : Non.

P_{69} : Non, c'est une in ...

E_{54} (Ramy): Inclusion.

Mustapha reprend à la suite de ce qui est écrit au tableau :

$$r_h \subset S_h \subset R_h$$

P_{70} : Très bien. Ça se traduit par ?

Mustapha continue au tableau :

Donc, $h \times f(t) \leq A(t + h) - A(t) \leq h \times f(t + h)$.

L'enseignant rappelle la question suivante et demande :

P_{71} : Qu'est-ce qu'il faut faire ?

E_{55} (Mustapha) : On divise par h puis on fait la limite.

P_{72} : On passe à la limite. Qu'est-ce qui vous autorise à diviser par h ?

E_{56} : h est strictement positif.

P_{73} : h étant un réel strictement positif, on peut évidemment diviser par h . Et les inégalités changent ou non ?

E_{57} : Non.

Mustapha reprend au tableau :

c) Comme $h > 0$, on a : $f(t) \leq \frac{A(t+h)-A(t)}{h} \leq f(t + h)$

P_{74} : Bien. Expliquez ce que vous allez faire, d'abord.

E_{58} (Mustapha) : On fait la limite.

P_{75} : Qu'est-ce qui vous donne à penser qu'il faut passer à la limite ?

E_{59} : Les deux membres (il montre par le geste ce qui peut suggérer que les membres extrêmes tendent vers la même limite).

P_{76} : La fonction est ?

Un élève parle dans la salle mais la voix est imperceptible.

P_{77} : Non. Ça sert à quoi de savoir que la fonction est continue ? Ça va servir où ?

Silence ...

P_{78} : Le fait que la fonction soit continue va nous servir à quel niveau ?

Silence ... pas de réponse.

P_{79} : On fait tendre h vers ?

E_{60} : Zéro.

P_{80} : Quelle est la limite de $f(t)$ quand h tend vers 0 ?

E_{61} (Mustapha) : $f(t)$.

P_{81} : Et la limite de $f(t + h)$?

E_{62} (Mustapha) : $f(t)$.

P_{82} : Pourquoi ?

E_{63} (Mustapha) : h tend vers 0.

E_{64} (Najla) : h tend vers 0.

P_{83} : Simplement ! Lorsque h tend vers 0, $f(t + h)$ tend vers $f(t)$? Est-ce qu'on a nécessairement limite de $f(t + h)$ égale $f(t)$ lorsque h tend vers 0 ? Qu'est-ce qui fait (coupé par Yosr)

E_{65} (Yosr) : Continue ... la continuité.

P_{84} : Bien sûr. Et c'est là où l'on voit tout l'intérêt de cette hypothèse que la fonction f doit être une fonction continue. Si la fonction n'est pas continue, on ne peut pas dire que la limite de $f(t + h)$, lorsque h tend vers 0, est égale à $f(t)$.

Mustapha reprend de nouveau au tableau :

Comme f est continue alors $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(t+h) = f(t)$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(t) = f(t)$$

$$\text{Donc } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A(t+h) - A(t)}{h} = f(t).$$

D'où A est dérivable à droite en t et $A'_d(t) = f(t)$.

P_{85} : Très bien. Juste pour gagner du temps. Est-ce que vous pensez qu'il y a un grand changement entre la question 1 et la question 2 ?

E_{66} : L'intervalle.

P_{86} : L'intervalle ?

E_{67} : Ouvert en a .

E_{68} : $t - h$.

P_{87} : Qu'est-ce qui change ?

E_{69} (en arabe) : c'est le contraire, avant ...

P_{88} : $t - h$ vient avant ?

E_{70} : Avant t .

P_{89} : Si l'on veut exploiter ces calculs (il montre les calculs au tableau) sans vraiment tout refaire, qu'est-ce que vous ferez ?

Silence ...

E_{71} (Yosr) : On remplace $t + h$ par ...

P_{90} : On remplace $t + h$ par ?

E_{72} (Yosr) : Par t .

P_{91} : On remplace $t + h$ par t ou t par ?

E_{73} (Yosr) : Par $t - h$.

L'enseignant demande à Yosr d'écrire au tableau une correction de la question 2. Elle écrit :

2. En remplaçant t par $t - h$ dans 1.b) on obtient :

$$h \times f(t-h) \leq A(t) - A(t-h) \leq h \times f(t)$$

Comme $h > 0$ alors $f(t-h) \leq \frac{A(t) - A(t-h)}{h} \leq f(t)$.

Comme f est continue alors $\lim_{h \rightarrow 0} f(t-h) = f(t)$ et donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t) - A(t-h)}{h} = f(t)$.

Donc A est dérivable à gauche en chaque t et $A'_g(t) = f(t)$.

3. On a $A'_g(t) = A'_d(t) = f(t)$, alors A est dérivable en chaque t de l'intervalle $[a, b]$ et $A'(t) = f(t)$.

P_{92} : Ce qui veut dire ?

E_{74} (Malek) : A est une primitive.

P_{93} : C'est une primitive. Que vaut $A(a)$?

E_{75} : Zéro.

P_{94} : Zéro. Donc c'est la primitive ... (coupé par Najla)

E_{76} (Najla) : S'annule en a .

P_{94} : ... qui s'annule en a .

Yosr reprend au tableau :

Comme de plus $A(a) = 0$, alors A est la primitive de f qui s'annule en a .

L'enseignant prend la relève au tableau :

Remarque : Soit F une autre primitive de f sur $[a, b]$.

S'adressant à la classe, il demande :

P_{95} : Comment exprimer le fait que F soit une primitive de f sur $[a, b]$.

E_{77} (Seif): Grand F est dérivable et F' ...

P_{96} : Grand F' ?

E_{78} : $F'(t)$ égal $f(t)$.

L'enseignant écrit :

Pour tout $t \in [a, b]$, $F'(t) = f(t)$.

E_{79} : Égal $A'(t)$.

L'enseignant rajoute au tableau la deuxième égalité :

Pour tout $t \in [a, b]$, $F'(t) = f(t) = A'(t)$.

E_{80} : Donc $F(t)$ égal $A(t)$ plus constante.

L'enseignant continue d'écrire au tableau :

Il existe donc une constante réelle c telle que $F(t) = A(t) + c$.

S'adressant à la classe, l'enseignant demande :

P_{97} : Si l'on veut trouver c (coupé par un élève)

E_{81} : $A(a)$ égal zéro.

L'enseignant reprend au tableau :

Il existe donc une constante réelle c telle que $F(t) = A(t) + c$.

En particulier $F(a) = A(a) + c =$

E_{82} : Égal c .

P_{98} : Car ?

E_{83} : $A(a) = 0$.

L'enseignant termine d'écrire l'égalité :

Il existe donc une constante réelle c telle que $F(t) = A(t) + c$.

En particulier $F(a) = A(a) + c = c$

P_{99} : Donc, vous allez avoir $F(t)$ égal $A(t)$ plus ?

E_{84} : $F(a)$.

L'enseignant reprend au tableau :

Donc $F(t) = A(t) + F(a)$.

Donc $F(t) - F(a) = A(t)$

Il remarque ensuite qu'il ne change rien en écrivant :

$F(t) - F(a) = A(t) - A(a)$.

P_{100} : Ainsi $A(t) - A(a)$ ne dépend pas de ... (coupé par un élève)

E_{85} : De A .

P_{100} : ... de la primitive. On peut considérer n'importe quelle autre primitive, on obtient toujours le même résultat. Et c'est très important. Donc, en fait, ce nombre là (il montre au tableau la différence $A(t) - A(a)$) représente quoi précisément ?

E_{86} : L'aire.

P_{101} : L'aire ?

E_{87} : De la surface limitée ...

P_{102} : Limitée par quoi ?

E_{88} (Mustapha) : $x = a, x = t$, la courbe (C) et ...

P_{103} : Les droites d'équations $x = a, x = t$, l'axe des abscisses et la courbe (C) . Donc cette aire ne dépend pas de la primitive choisie. On peut considérer n'importe quelle primitive de la fonction f , on obtient toujours le même résultat. Ce qui nous fournit là un outil très important pour calculer l'aire d'une surface non polygonale.

Donc si l'on veut voir clair dans les trois activités que nous venons de traiter : la première nous a fourni une technique, une méthode pour calculer l'aire d'une surface polygonale ; la deuxième activité nous a permis de voir un procédé, en l'occurrence la méthode des rectangles, qui permet de calculer l'aire d'une surface non polygonale et surtout de la définir comme étant l'intégrale ; là (il montre le tableau), vous avez un outil, une méthode, un moyen pour calculer effectivement l'aire d'une surface non polygonale. C'est très important de voir à quoi sert une primitive et à quoi sert une intégrale.

En fait, je l'avais dit l'autre fois et je le répète ici encore une fois, l'intégrale apparaît ainsi comme une réponse à une certaine question : Comment calculer l'aire d'une surface non polygonale ? Les primitives servent aussi à calculer des intégrales.

L'enseignant demande ensuite à Ramy de passer au tableau pour écrire l'énoncé suivant :

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a et b deux éléments de I .

L'intégrale de f entre a et b est donnée par $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, où F est n'importe quelle primitive de f sur I ²³⁵. Le réel $F(b) - F(a)$ est souvent noté $[F(t)]_a^b$.

²³⁵ L'élève au tableau a écrit l'intervalle $[a, b]$ et l'enseignant ne s'en est pas rendu compte. L'erreur a été remarquée et corrigée par un élève de la classe.