



HAL
open science

Méthode du gradient topologique pour la détection de contours et de structures fines en imagerie

Audric Drogoul

► **To cite this version:**

Audric Drogoul. Méthode du gradient topologique pour la détection de contours et de structures fines en imagerie. Mathématiques générales [math.GM]. Université Nice Sophia Antipolis, 2014. Français. NNT : 2014NICE4063 . tel-01079699

HAL Id: tel-01079699

<https://hal.science/tel-01079699>

Submitted on 3 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ NICE-SOPHIA ANTIPOLIS – UFR Sciences

École Doctorale de Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences de l'Université Nice-Sophia Antipolis

Discipline : Mathématiques

présentée et soutenue par

Audric Drogoul

Méthode du gradient topologique pour la détection de contours et de structures fines en imagerie

Thèse dirigée par **Gilles Aubert et Didier Auroux**

soutenue le 8 octobre 2014

devant le jury composé de

M.	Grégoire Allaire	Rapporteur	Professeur École Polytechnique
M.	Habib Ammari	Rapporteur	Directeur de recherche CNRS, ENS
M.	Gilles Aubert	Directeur de thèse	Professeur UNSA
M.	Didier Auroux	Directeur de thèse	Professeur UNSA
Mme.	Laure Blanc-Féraud	Examineur	Directrice de recherche CNRS
M.	Roland Masson	Examineur	Professeur UNSA
M.	Gabriel Peyré	Rapporteur	Directeur de recherche CNRS

Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2



Remerciements

Ces trois années ont été pour moi très enrichissantes, tant sur le plan humain que sur le plan intellectuel.

En conséquence, je tiens tout d’abord à remercier mes directeurs de thèse pour m’avoir fait confiance et m’avoir permis de réaliser cette belle aventure ; Didier Auroux pour m’avoir introduit dans le sujet et conseillé sur des questions numériques et Gilles Aubert pour m’avoir dirigé, guidé, soutenu et accompagné pendant ces trois années.

Toujours à l’écoute et ouvert d’esprit, Gilles m’a donné la soif de découvrir et d’apprendre. Je ne pourrai jamais oublier toutes ces heures passées à discuter non seulement de maths, de sport ou plus généralement de la vie quotidienne, que ce soit dans son bureau ou le midi au restaurant universitaire. Je suis fier d’avoir pu partager avec lui mes premiers moments de doute et d’euphorie générés par la recherche, ces émotions qui ont rythmé cette thèse. Sa simplicité, sa patience et sa disponibilité m’ont parfois fait oublier qu’il était mon directeur de thèse et grâce à cela j’ai pu m’enrichir davantage à travers de nombreuses discussions pendant lesquelles j’ai apprécié de pouvoir donner mon point de vue afin de le comparer au sien. De plus, cela m’a permis d’avoir confiance dans ce que je faisais ce qui est essentiel lorsque l’on entreprend de tels travaux. Je lui suis également reconnaissant d’avoir apporté un peu d’ordre dans mon travail. Enfin, je retiendrai que la modestie chez quelqu’un de son niveau, est une des plus belles valeurs que l’on puisse avoir et je ne saurais comment le remercier si ce n’est en tentant de suivre le long chemin qu’il m’a éclairé.

Ensuite je voudrais remercier tous les membres de mon jury et en particulier les trois rapporteurs Grégoire Allaire, Habib Ammary et Gabriel Peyré qui m’ont permis à travers des remarques très pertinentes d’améliorer le manuscrit de cette thèse. C’est un honneur pour moi qu’ils aient accepté de lire et de s’intéresser à mes travaux. J’espère les avoir satisfaits.

Je remercie également tous ceux du labo que j’ai pu rencontrer : les habitués du midi, ceux de la pause café (tant pis pour les fumeurs;-)). Également merci à mes co-bureaux : Camille pour ses conseils, son écoute et les moments de rire que nous avons pu avoir, souvent à des heures tardives, le “jeune” Arthur pour les discussions interminables et les conseils qui m’ont parfois débloqué et enfin Guillaume. Également merci à mon ami Amine pour ses tuyaux bien utiles en informatique, ainsi qu’à Francesca Rapetti pour m’avoir accordé du temps sur des questions numériques. Je voudrais également remercier Roland Masson avec qui cela a été un plaisir d’enseigner l’analyse numérique et aussi Laure Blanc-Féraud pour les nombreuses discussions que l’on a pu partager notamment avec Gilles sur des problèmes d’imagerie. Enfin merci également à Jean-Marc Lacroix et Roland Ruelle pour leur disponibilité, à Hélène Politano pour ses conseils, à Manuelle pour sa patience à organiser mes missions, et à tous ceux de la pause du midi pour leur bonne humeur : Angélique, Véronique, Jean-Baptiste et bien d’autres.

Je souhaite également adresser un merci tout particulier à ma famille à qui j’ai eu du mal à expliquer ce que je faisais concrètement mais qui m’a toujours accompagné en montrant une fascination et un optimisme indéfectibles. Je pense notamment à mon père dont la moustache se frise à chaque fois que je lui explique ce que je fais et à ma mère pour qui la méthode du “gardien topologique” est impressionnante :-)) et qui a toujours été disponible et d’une grande efficacité pour m’aider à gérer mes problèmes quotidiens. Ensuite bien évidemment je remercie Laure pour avoir supporté mes moments “geek ” et d’avoir accepté pendant 3 ans de cohabiter avec toutes ces feuilles de brouillon mais aussi pour m’avoir encouragé même dans les moments difficiles.

Je voudrais également remercier tous mes amis proches qui ont cru en mon travail : Clémentine, Remy, Amandine, Julien toujours à l’écoute et mes amis du Kyokushin, Pio, Jérôme et les autres pour m’avoir

aidé à avancer dans cette passion et pour m'avoir permis de décompresser lorsque la thèse me faisait douter.

Je pense que sans l'aide du Kyokushin et de tous ces soutiens, l'accomplissement de cette thèse aurait été bien plus ardu, alors un grand merci à vous tous !

Table des matières

Introduction	9
Notations et prérequis	15
I Détection de contours et restauration d'images par la méthode du gradient topologique	
1 État de l'art : la méthode du gradient topologique et les autres méthodes	21
1.1 Quelques méthodes variationnelles classiques	21
1.1.1 Perona-Malik	21
1.1.2 Méthode de restauration dite TV (variation totale)	22
1.1.3 Une fonctionnelle de restauration/segmentation : la fonctionnelle de Mumford-Shah	23
1.1.4 Les contours actifs	23
1.2 D'autres méthodes discrètes de restauration d'images plus récentes	24
1.2.1 Méthode dite <i>DCT locale</i>	25
1.2.2 Méthode dite <i>moyenne non locale</i> (NL-means)	25
1.2.3 Méthode dite <i>BM3D</i>	25
1.2.4 Méthode dite <i>bayésienne non locale</i> (NL-bayes)	26
1.2.5 Méthode dite <i>K-SVD</i>	28
1.2.6 Comparaisons de toutes ces méthodes	29
1.3 La méthode du gradient topologique (GT)	29
1.3.1 Philosophie de la méthode et choix du modèle pour la détection de contours	29
1.3.2 Expressions des GTs pour des domaines perforé et fissuré	33
1.3.3 Application numérique : restauration et segmentation d'images	34
2 Lien entre boule et crack : l'ellipse	37
Introduction	37
2.1 Calcul du GT	38
2.1.1 Le nouveau problème	38
2.1.2 Modèle adjoint	39
2.1.3 Développement asymptotique de \widetilde{w}_ϵ	40
2.1.4 Expression du GT pour le problème auxiliaire (2.1.2)-(2.1.3)	43
2.1.5 Expression du GT pour le problème initial (1.3.1)-(1.3.2)	44
2.2 Conclusion	44
2.3 Application numérique	45

3	Calcul du gradient topologique pour une équation de la forme $-div(A(x)\nabla u) + u = f$ avec conditions de Neumann	49
	Introduction	49
3.1	Notations et problème	49
3.2	Développement asymptotique de w_ϵ	51
3.3	Estimations de \mathcal{I}_ϵ , \mathcal{J}_ϵ et \mathcal{K}_ϵ	51
3.4	Calcul du GT dans le cas du crack	53
3.5	Conclusion : expression générale pour un crack quelconque	53
3.6	Application numérique	53
3.7	Annexe	56
4	Détection de contours et restauration d'images pour plusieurs modèles non linéaires	63
	Introduction	63
4.1	Une approche bayésienne	65
4.2	Modélisation du blur	68
4.3	Modèle gaussien avec flou	69
4.4	Modèle speckle-Log	70
4.4.1	Le problème (4.0.1) est-il bien posé ?	70
4.4.2	Calcul du GT pour un domaine perforé	72
4.4.3	Expression du GT pour un domaine fissuré	75
4.5	Modèle poissonnien avec floutage	75
4.5.1	Le problème (4.5.1) est-il bien posé ?	76
4.5.2	Calcul du GT pour un domaine perforé	77
4.5.3	Expression du GT pour un domaine fissuré	80
4.6	Indicateurs topologiques	81
4.7	Restauration en utilisant le GT pour un domaine fissuré	81
4.8	Application numérique aux images 2D	82
4.8.1	Discrétisation du modèle gaussien avec flou	82
4.8.2	Discrétisation des modèles de Poisson et speckle-Log	84
4.8.3	Comparaison de notre méthode avec quelques méthodes classiques	86
4.8.4	Résultats numériques pour le modèle gaussien. Comparaisons	87
4.8.5	Résultats numériques pour le modèle speckle-Log. Comparaisons	89
4.8.6	Résultats numériques pour le modèle de Poisson. Comparaisons	92
4.9	Annexes	95
4.9.1	Annexe A	96
4.9.2	Annexe B	98

II Détection et restauration de structures fines par la méthode du gradient topologique

5	Présentation du modèle variationnel	103
	Introduction	103
5.1	Détection de structures fines : quel est le bon opérateur ?	105
5.2	Définition de la fonction coût et de l'EDP	109

6	Méthode du gradient topologique pour la détection de structures fines en imagerie.	
	Étude théorique	111
6.1	Étude dans le cas d'un domaine perforé	111
6.1.1	Position du problème. Notations	111
6.1.2	Estimations de $B_1(v_0)(x)$ et $B_2(v_0)(x)$ pour $x \in \partial B_\epsilon$	114
6.1.3	Développement asymptotique de w_ϵ	115
6.1.4	Estimation de $J_A, J_B, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ et \mathcal{E}_3	116
6.1.5	Calcul du gradient topologique dans le cas de la boule	118
6.1.6	Conclusion : expression générale en tout point x_0	119
6.2	Étude dans le cas du crack	119
6.2.1	Position du problème. Notations	119
6.2.2	Estimations de $B_1(v_0)(x)$ et $B_2(v_0)(x)$ pour $x \in \sigma_\epsilon$	121
6.2.3	Développement asymptotique de w_ϵ	122
6.2.4	Estimations de I_A, I_B	123
6.2.5	Calcul du gradient topologique dans le cas du crack	124
6.2.6	Conclusion : expression générale en tout point x_0	124
6.3	Calcul du GT dans le cas 3D dans le cas $\nu = 0$ pour un domaine fissuré par un crack circulaire et plan	124
6.3.1	Intégration par parties de $b_\Omega(u, v)$ en 3D	125
6.3.2	Expressions de B_1 et B_2 dans le cas d'un crack plan et circulaire	126
6.3.3	Solution fondamentale du bilaplacien en 3D	127
6.3.4	Calcul des densités λ_1 et λ_2	127
6.3.5	Expression du GT en 3D dans le cas d'un crack circulaire plan quelconque	128
6.4	Annexe A	128
6.5	Annexe B	139
7	Méthode du gradient topologique pour la détection de structures fines en imagerie.	
	Étude numérique	151
	Introduction	151
7.1	Fonction coût et problème variationnel	152
7.2	Expression des GTs pour (a) un domaine perforé et (b) un domaine fissuré	153
7.3	Adaptation à un problème plus général de défloutage	154
7.4	Restauration en utilisant le GT pour un domaine fissuré	154
7.5	Comparaison avec un indicateur classique	156
7.6	Discrétisation des EDPs (7.2.1) et (7.2.2) et calcul numérique des GTs	156
7.6.1	Discrétisation par éléments finis	156
7.6.2	Discrétisation par DCT	158
7.6.3	Algorithme pour le calcul des indicateurs topologiques	160
7.7	Application à la détection de filaments pour des images éventuellement bruitées	160
7.7.1	Structures détectées par les indicateurs topologiques	161
7.7.2	Robustesse des indicateurs topologiques par rapport à du bruit gaussien et comparaisons	162
7.7.3	Information supplémentaire donnée par le calcul de I_{Bilap}^c (7.3.3b)	164
7.8	Application à la détection de points sur des images éventuellement bruitées	165
7.8.1	Structures détectées par les indicateurs topologiques	165
7.8.2	Robustesse des GTs par rapport au bruit gaussien et comparaison	167
7.9	Application à des images floues : segmentation et restauration	169
7.9.1	Discrétisation par FFT	169
7.9.2	Résultats numériques	170

7.10 Application à des images 3D	177
--	-----

III Généralisation sur l'ordre du modèle

8 Généralisation : calcul du gradient topologique pour une équation d'ordre $2m$ utilisant l'itéré m-ième du laplacien	183
Introduction	183
8.1 Intégration par parties de la forme bilinéaire	186
8.2 Solution fondamentale associée au m -ième laplacien en 2D	190
8.3 Position du problème dans le cas du crack. Notations	191
8.4 Estimations des $A_i(u_0)(\epsilon X)$ pour $X \in \sigma$	193
8.5 Développement asymptotique de w_ϵ	194
8.6 Estimation des \mathcal{I}_k pour $k \in \llbracket 0, m - 1 \rrbracket$	194
8.7 Calcul du gradient topologique	195
8.8 Conclusion : expression générale en tout point $x_0 \in \Omega$	196
8.9 Annexe	196

Bibliographie	217
----------------------	------------

Introduction

L'un des principaux challenges en imagerie est la détection d'objets caractéristiques dans une image éventuellement dégradée (flou, bruit etc ...). Les objets recherchés peuvent être de volume non nul et on s'intéresse dans ce cas aux zones de variation d'intensité générée par les contours. Ces zones nécessitent généralement une attention particulière notamment en compression d'images et en restauration d'images. En compression d'images l'échantillonnage des niveaux de gris de l'image va devoir être plus fin dans les zones de contours que dans les zones de "background" où l'image varie peu. De la même manière en restauration d'images les zones de contour doivent être traitées avec soin car elles sont souvent associées à une dégradation due à la régularisation des données (perte de netteté dans l'image). Les objets peuvent également être de taille très petite et modélisés en domaine continu par des ensembles de mesure de Lebesgue nulle. Ces objets sont communément appelés structures fines. Ils sont un enjeu important en imagerie et les applications sont variées : détection d'un réseau routier dans des images satellitaires, détection de nodules cancéreux dans des images biomédicales. Afin de bien comprendre la distinction faite entre un contour et une structure fine, prenons l'exemple 2D suivant. Soit I une image définie sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma_1 \subset \Omega$ une courbe 1D fermée délimitant le sous domaine $\omega \subset \Omega$. Si I est la fonction valant 1 sur ω et 0 sur $\Omega \setminus \bar{\omega}$, alors l'objet caractérisé par $\{I = 1\} = \omega$ est de mesure de Lebesgue non nulle et est délimité par une discontinuité d'intensité avec saut (voir Figure 1-(a) et 1-(c)). Soit $\gamma_2 \subset \Omega$ une courbe quelconque et I l'image valant 1 sur γ_2 et 0 sur $\Omega \setminus \bar{\gamma}_2$, alors la discontinuité associée à l'objet de mesure de Lebesgue nulle $\{I = 1\} = \gamma_2$ est une discontinuité sans saut à travers la structure (voir Figure 1-(b) et 1-(d)).

En imagerie un problème fondamental et récurrent est la segmentation/restauration d'images. La segmentation consiste à partager le domaine image Ω en plusieurs parties. Par exemple pour la détection de contours ou/et de filaments on partagera le domaine image en une partie associée aux zones où l'image varie peu et une partie à forte variations de l'image (contours, filaments, ...). La restauration a pour objectif de reconstruire les niveaux de gris de l'image à partir d'une version dégradée. Très souvent les algorithmes couplent ces deux problèmes : on cherche alors un couple (u, γ) où u est une version restaurée de l'image sur $\Omega \setminus \bar{\gamma}$ et γ est l'ensemble des discontinuités de l'image (contours et/ou filaments). Plusieurs types de méthodes existent pour chacun de ces processus. Les méthodes spectrales sont classiques en théorie du signal : l'image est vue comme un signal périodique se décomposant dans une base de fonctions régulières (par exemple en cosinus et sinus ...). Dans ce cas, seule la fréquence des fonctions varie. Dans ce domaine, on peut citer Coifman et al. [36] et plus récemment l'algorithme de DCT locale de Yu-Sapiro [89]. Plus généralement les méthodes de décomposition temps-fréquences type ondelettes sont beaucoup utilisées en restauration d'images (voir les travaux de Mallat [60, 87]). L'image I est décomposée dans une base de fonctions déduites à partir d'une même fonction dite onde mère. Une autre méthode classique en imagerie est la morphologie mathématique. Différents types de filtres morphologiques sont définis à partir d'opérations ensemblistes élémentaires (érosion, dilatation etc ...); voir par exemple Serra [79] en restauration et Zana et al. [90] en segmentation. Viennent ensuite les méthodes stochastiques. Ici, chaque pixel de l'image est vu comme la réalisation d'une variable aléatoire et les modèles résultants sont discrets. En segmentation (détection de filaments) on peut citer [53, 44] et en restauration d'images [21] et plus récemment des méthodes type GSM [73] (*gaussian scale mixture*). D'autres méthodes discrètes basées

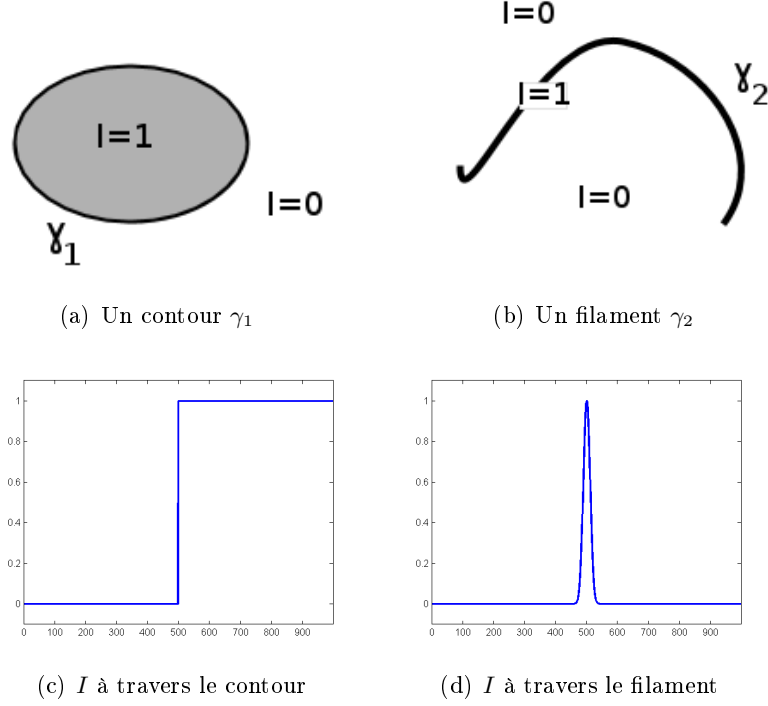


FIGURE 1 – Différences entre un contour et une structure fine de type filament

sur une décomposition de l'image en patchs similaires, comme les méthodes NL-means (*moyenne non locale*) [29, 30], NL-bayes (*bayésienne non locale*) [55], BM3D [37] sont largement utilisées. De nouvelles approches minimisent la norme l_0 d'une représentation de l'image dans un dictionnaire (voir la méthode K-SVD [2]). Enfin, et c'est toute l'approche de ce travail, les méthodes variationnelles sont largement utilisées en restauration/segmentation. Un des modèles les plus connus est le modèle de Mumford-Shah [67] et son approximation par la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli [4]. En restauration les modèles basés sur la variation totale (Rudin-Osher [76]) ou la diffusion anisotrope (Perona-Malik [72]) sont aussi souvent utilisés et des algorithmes robustes existent pour leur mise en œuvre (Chambolle [32], Aubert-Kornprobst [17]). En segmentation, pour des images non bruitées, les contours actifs sont très efficaces pour détecter des contours modélisés par des courbes fermées (voir [34]). Dans cette thèse nous nous intéresserons plus particulièrement à une méthode récente : la méthode du gradient topologique (GT) introduite par Sokolowski [80] et Masmoudi [63]. Elle consiste à étudier les variations par rapport au domaine d'une fonction énergie. Plus précisément si Ω est le domaine image de \mathbb{R}^d , on perturbe Ω soit en créant un trou de taille ϵ centré en x_0 , soit en créant une fissure de taille ϵ centrée en x_0 . En général on modélise le trou par une boule et on note (a) $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{\{x_0 + \epsilon B\}}$ où B est la boule unité. Pour la fissure on la modélise par un segment de normale \vec{n} noté $\sigma(\vec{n})$ (un crack), et on note (b) $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{\{x_0 + \epsilon \sigma(\vec{n})\}}$. Ensuite on se donne une EDP d'inconnue u_{Ω_ϵ} définie sur Ω_ϵ que l'on écrit sous la forme $Au_{\Omega_\epsilon} = f$, où A est un opérateur différentiel défini sur Ω_ϵ incluant les conditions aux bords et où f est la donnée (sur $\partial\Omega_\epsilon$ et sur Ω_ϵ). Puis on introduit une fonction coût $J_{\Omega_\epsilon}(u)$ de la forme $J_{\Omega_\epsilon}(u) = \int_{\Omega_\epsilon} F(u, \nabla u, \nabla^2 u, \dots)$, où u est une fonction définie sur Ω_ϵ , et $F : I \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d^2} \times \dots \rightarrow \mathbb{R}$. La méthode du gradient topologique consiste à étudier le terme principal lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ de la différence $J_{\Omega_\epsilon}(u_{\Omega_\epsilon}) - J_\Omega(u_\Omega)$: on montre qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ qui tend vers 0 lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, et deux fonctions \mathcal{I}^b et \mathcal{I}^c telles que dans le cas (a) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J_{\Omega_\epsilon}(u_{\Omega_\epsilon}) - J_\Omega(u_\Omega)}{\varphi(\epsilon)} = \mathcal{I}^b(x_0)$ et dans le cas (b) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J_{\Omega_\epsilon}(u_{\Omega_\epsilon}) - J_\Omega(u_\Omega)}{\varphi(\epsilon)} = \mathcal{I}^c(x_0, \vec{n})$. En pratique, pour mener à bien le calcul du gradient topologique, l'opérateur A et la fonction F ne peuvent pas être

choisis indépendamment l'un de l'autre. La fonction $\varphi(\epsilon)$ dépend généralement de la dimension de l'espace ambiant Ω et de l'opérateur A . Par exemple si A est l'opérateur laplacien avec conditions de Neumann, on a $\varphi(\epsilon) = \epsilon^d$ où d est la dimension de l'espace ambiant. Si A est l'opérateur laplacien avec conditions de Dirichlet, en 2D : $\varphi(\epsilon) = \frac{-1}{\log(\epsilon)}$ et en 3D $\varphi(\epsilon) = \epsilon$. La fonction \mathcal{I}^b (resp. \mathcal{I}^c) dépend des caractéristiques de la perturbation et est appelée le gradient topologique (GT) de la fonction $\epsilon \mapsto J_{\Omega_\epsilon}(u_{\Omega_\epsilon})$ pour un domaine perturbé par une boule (resp. un crack). Dans le cas du crack et notamment en segmentation, on définit généralement des indicateurs topologiques ne dépendant que du point où se trouve la perturbation. On utilise $\min_{\|\vec{n}\|=1} \mathcal{I}^b(x_0, \vec{n})$ (resp $\max_{\|\vec{n}\|=1} \mathcal{I}^c(x_0, \vec{n})$) si le but est de minimiser (resp maximiser) la fonction coût. Cette notion a été tout d'abord utilisée en mécanique des structures par Amstutz [10], puis a été reprise pour des problèmes d'imagerie par Belaid et al. [24] pour la détection de contours et la restauration d'images. En mécanique [10], le GT peut être utilisé pour trouver d'éventuelles fissures dans des plaques métalliques dont la température vérifie une équation de Poisson. Le principe de la méthode est le suivant : pour une donnée de Neumann fixée et connue (par exemple un courant électrique), on mesure la donnée de Dirichlet (la température) aux bords de la plaque, puis on calcule le GT associé à une fonction coût déduite du critère de Kohn-Vogelius. D'autres applications du GT ont été faites notamment pour l'étude de l'endommagement des matériaux fragiles (voir Allaire et al. [3] et Van Goethem et al. [86]). En imagerie, dans [24] le GT a été tout d'abord utilisé pour la détection de contours. La fonction coût considérée est $J_{\Omega_\epsilon}(u) = \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u|^2$ et u_{Ω_ϵ} est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_{\Omega_\epsilon} + u_{\Omega_\epsilon} = f \text{ dans } \Omega_\epsilon \\ \partial_n u_{\Omega_\epsilon} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\epsilon \end{cases} \quad (0.0.1)$$

L'idée est de trouver les points associés à une variation d'énergie importante et donc associés à un GT grand en valeur absolue. Un modèle de restauration basé sur une EDP linéaire de diffusion est déduit du calcul du GT (le coefficient de diffusion est calculé à partir du GT). D'autres applications ont été faites notamment en classification d'images [20, 9] ou en inpainting [19]. Les principales qualités de la méthode du gradient topologique sont sa simplicité de mise en œuvre, sa rapidité et sa robustesse. Généralement le calcul du GT nécessite la résolution de deux EDPs donnant l'état adjoint et l'état direct sur le domaine non perturbé Ω . Cependant les calculs théoriques sont très techniques et difficiles. Durant cette thèse on a utilisé cette notion pour la détection de contours, la détection de structures fines et pour la restauration d'images. Ce travail s'articule sur trois parties. Une première partie liée à la détection de contours et à la restauration d'images est présentée. On commence par présenter quelques méthodes existantes pour traiter ces deux problèmes puis on introduit et illustre la méthode du GT introduite par Belaid et al. [24] (chapitre 1). Dans le chapitre 2, on reprend le modèle (0.0.1) et on calcule le GT pour un domaine perforé par une ellipse afin de vérifier que la formule du crack est la limite de celle obtenue pour une ellipse lorsque l'ellipse tend vers un crack. Ensuite, on étudie théoriquement et numériquement un modèle basé sur un opérateur différentiel anisotrope et uniformément elliptique (chapitre 3) afin d'améliorer la régularisation proposée par le laplacien. La fonction coût est toujours $J_{\Omega_\epsilon}(u) = \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u|^2$ et l'EDP s'écrit

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u_{\Omega_\epsilon}) + u_{\Omega_\epsilon} = f \text{ dans } \Omega_\epsilon \\ \partial_n u_{\Omega_\epsilon} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\epsilon \end{cases} \quad (0.0.2)$$

avec $A(x)$ un tenseur symétrique défini positif. On finit cette partie avec le chapitre 4 en généralisant (0.0.1) ci-dessus à des problèmes quasi-linéaires associés à différents modèles de dégradation de l'image (floutage et différents bruits) et en utilisant toujours la même fonction coût $J_{\Omega_\epsilon}(u)$. Dans une deuxième partie on s'intéresse à la détection de structures fines et on présente un nouveau modèle variationnel (chapitre 5) utilisant la méthode du gradient topologique. La fonction coût proposée utilise des dérivées d'ordre deux et dans un cas particulier elle s'écrit $J_{\Omega_\epsilon}(u) = \int_{\Omega_\epsilon} \|\nabla^2 u\|_2^2$. L'EDP met en jeu l'opérateur

bilaplacien et deux opérateurs frontières B_1 et B_2 d'ordres respectifs 3 et 2. L'EDP dans un cas simple s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta^2 u_{\Omega_\epsilon} + u_{\Omega_\epsilon} = f & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ B_1(u_{\Omega_\epsilon}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\epsilon \\ B_2(u_{\Omega_\epsilon}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\epsilon \end{cases} \quad (0.0.3)$$

Une étude théorique (chapitre 6) et numérique (chapitre 7) en 2D et 3D est faite dans cette partie. Une dernière partie plus théorique est réalisée pour des équations d'ordre $2m$. Un long calcul est mené et une expression explicite est obtenue dans le cas d'un domaine fissuré en 2D. L'ordre élevé de l'équation peut apparaître comme un frein à l'application en imagerie mais il est intéressant de voir le comportement du GT pour des ordres plus élevés sur différents types de structures.

Contenu

Première partie : Détection de contours et restauration d'images par la méthode du gradient topologique

- **Chapitre 1** État de l'art : la méthode du gradient topologique et les autres méthodes

Dans ce chapitre on présente quelques méthodes classiques en détection de contours et restauration d'images. Ensuite on décrit le modèle utilisé par Belaid et al. [24] pour la restauration d'images et la détection de contours et on donne les expressions des GTs dans les cas d'un domaine perforé par une boule et d'un domaine fissuré par un crack.

- **Chapitre 2** Lien entre boule et crack : l'ellipse

Dans ce chapitre on calcule le gradient topologique pour une équation de la forme $-\Delta u + u = f$ avec conditions de Neumann homogènes dans le cas d'un domaine perforé par une ellipse. Le calcul permet d'établir que les expressions du GT dans les cas d'un domaine perturbé par une boule ou un crack s'obtiennent à partir de celle calculée pour un domaine perturbé par une ellipse en considérant deux cas limites. Un indicateur topologique est déduit et étudié numériquement pour la détection de contours.

- **Chapitre 3** Calcul du GT pour une équation de la forme $-div(A(x)\nabla u) + u = f$ avec conditions de Neumann

Ce chapitre permet de généraliser le calcul du gradient topologique à des opérateurs linéaires d'ordre 1. On calcule le GT sous certaines hypothèses de régularité du coefficient de diffusion $A(x)$. On explicite complètement le GT dans le cas où $A(x) = \alpha(x)I$ avec α une fonction à valeurs réelles assez régulière. On applique ensuite le modèle au traitement d'image, en prenant $A(x) = \alpha(x)I$ où α est définie à partir du GT calculé pour une équation de type Laplace (voir chapitre 1).

- **Chapitre 4** Détection de contours et restauration d’images pour plusieurs modèles quasi-linéaires

Dans ce chapitre, une étude bayésienne est faite pour trois modèles de dégradation de l’image. Un premier modèle dit “gaussien” suppose que l’image observée f s’écrit sous la forme $f = Ku + b$ avec u l’image à retrouver, K un opérateur de convolution n’annulant pas les constantes, et b un bruit gaussien. Le deuxième modèle suppose que $f = Su$ avec S un bruit de type “speckle” suivant une loi Gamma de moyenne 1. Enfin un modèle dit “poissonnien” est étudié. Dans ce dernier modèle, l’image est considérée comme une fonction constante par morceaux sur chaque pixel R_i et sa valeur est la réalisation d’une loi de Poisson de paramètre $\int_{R_i} Ku(x)dx$. Une fois le gradient topologique calculé, on restaure l’image par diffusion anisotrope selon la valeur du gradient topologique et la direction donnée par le calcul de l’indicateur topologique pour le cas d’un domaine fissuré par un crack. Ce chapitre a fait l’objet d’un article soumis pour publication dans JMIV [42].

Deuxième partie : Détection et restauration de structures fines par la méthode du gradient topologique

- **Chapitre 5** Présentation du modèle variationnel

Dans ce chapitre la notion de structures fines est précisée et on présente un modèle variationnel utilisant la notion du GT et adapté à la détection de telles structures. Plus précisément, on montre que les structures fines (discontinuités sans saut à travers la structure) sont chargées par des opérateurs différentiels d’ordre 2. Ensuite, on introduit un modèle basé sur une fonction coût définie à partir des dérivées secondes d’une régularisation des données solution d’une EDP d’ordre 4 de type Kirchhoff. Enfin, on pose le cadre de l’étude menée dans le chapitre 6.

- **Chapitre 6** Calcul du gradient topologique pour une équation du quatrième ordre de type Kirchhoff avec conditions de Neumann

Dans ce chapitre, on s’intéresse au calcul du GT pour une équation de type Kirchhoff avec conditions de Neumann. Le calcul est fait dans le cas de domaines 2D perforé par une boule et fissuré par un crack. On étend ensuite le résultat au cas 3D pour un domaine fissuré. Ce chapitre correspond en grande partie à un article soumis dans le journal COCV [15], à une note au Comptes Rendus de l’Académie des Sciences [16] et à un acte de conférence pour IEEE International Conference on Image Processing [43].

- **Chapitre 7** Étude numérique d’une méthode du GT basée sur une équation d’ordre 4 et application à la détection de structures fines en imagerie

Ce chapitre est une application numérique des résultats démontrés dans le chapitre 6. On propose dans un premier temps un modèle adapté à des images dégradées par du bruit gaussien puis on étend le modèle à un problème plus général de défloutage. Comme pour les contours on présente

un modèle de restauration par diffusion anisotrope préservant les filaments et/ou les contours, avec un coefficient de diffusion dépendant du GT calculé au préalable. Ce chapitre correspond à un article soumis dans le journal SIAM Imaging Sciences [40].

Troisième partie : généralisation

- **Chapitre 8** Calcul du GT pour une équation d'ordre $2m$ utilisant l'itéré m -ième du laplacien

Dans ce chapitre on calcule le GT pour une équation d'ordre $2m$ de la forme $(-1)^m \Delta^m u + u = f$ avec conditions de Neumann dans le cas d'un domaine 2D fissuré par un crack. L'expression du GT est explicitée en fonction de m et des dérivées m -ième du modèle direct et du modèle adjoint solution d'une équation du même type. Un article exposant ce résultat est en cours de rédaction [41].

Notations et prérequis

Dans ce paragraphe sont résumés les notations et quelques résultats classiques souvent utilisés durant cette thèse.

Abréviations fréquemment utilisées

GT	Gradient topologique
B	Boule unité
B_r	Boule de centre O et de rayon $r > 0$
ω'	Le domaine extérieur $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\omega}$ où $\omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine.
$ s $	$s_1 + s_2 + \dots + s_d$ pour $s \in \mathbb{N}^d$
∂x^s	$\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \dots \partial x_d^{s_d}$ pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $s \in \mathbb{N}^d$
$\frac{\partial^{ s }}{\partial x^s}$	Dérivée partielle d'ordre $ s $

Espaces fonctionnels usuels

On note $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine régulier et $\Gamma = \partial\Omega$ une variété de dimension $d - 1$. En pratique on considère que $d \in \{2, 3\}$.

$\mathcal{D}(\Omega)$	L'ensemble des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω .
$\mathcal{D}(\Omega)'$	L'ensemble des distributions définies sur Ω
$C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$	L'ensemble des fonctions C^k définies de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
$C^k(\Omega)$	L'ensemble des fonctions C^k définies de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$
$\langle u, v \rangle_\Omega$	$\int_\Omega uv$
$L^p(\Omega)$	$\{u, \int_\Omega u^p < \infty\}$
$W^{m,p}(\Omega)$	$\{v \in L^p(\Omega); D^\alpha v \in L^p(\Omega), \alpha \leq m\}$
$H^m(\Omega)$	$W^{m,2}(\Omega)$
$H_0^m(\Omega)$	$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)} = \left\{ u \in H^m(\Omega); u = \frac{\partial u}{\partial n} = \dots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$
$\ u\ _{m,\Omega}$	$\left(\sum_{ \alpha \leq m} \int_\Omega (D^\alpha u)^2 \right)^{1/2}$
$ u _{m,\Omega}$	$\left(\sum_{ \alpha =m} \int_\Omega (D^\alpha u)^2 \right)^{1/2}$ Semi-norme $H^m(\Omega)$
$\mathbb{P}_k(\Omega)$	Espace des fonctions polynômiales définies sur Ω de degré inférieur ou égal à k
$H^m(\Omega)/\mathbb{P}_k$	L'ensemble des fonctions $H^m(\Omega)$ définies modulo les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à k .
$L^2(\Gamma)$	$\{u; \int_\Gamma u^2(x) d\sigma(x)\}$
$H^m(\Gamma)$	$\{u; D^\alpha u \in L^2(\Gamma), \alpha \leq m\}$
$H^{1/2+m}(\Gamma)$	$\left\{ u \in H^m(\Gamma), \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{ D^m u(x) - D^m u(y) ^2}{ x-y ^d} d\sigma(x) d\sigma(y) \right\}$

$$\|u\|_{1/2+m,\Gamma} \left(\|u\|_{m,\Gamma}^2 + \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{|D^m u(x) - D^m u(y)|^2}{|x-y|^d} d\sigma(x) d\sigma(y) \right)^{1/2}$$

$H^{1/2+m}(\Gamma)/\mathbb{P}_k$ L'ensemble des fonctions $H^{1/2+m}(\Gamma)$ définies modulo les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à k .

$H_0^{-1/2}(\Gamma)$ L'ensemble des fonctions $H^{-1/2}(\Gamma)$ orthogonales aux constantes

Autres espaces fonctionnels

Pour $\omega \subset \mathbb{R}^d$ domaine de \mathbb{R}^d , on note $\omega' = \mathbb{R}^d \setminus \bar{\omega}$ le domaine extérieur. Pour σ une variété régulière ouverte de \mathbb{R}^d on notera $\tilde{\sigma}$ une variété fermée régulière contenant σ , $\sigma \subset \tilde{\sigma}$.

$W^m(\omega')$ • Si $\dim(\Omega) = 2$:

$$W^m(\omega') = \left\{ u, \frac{u}{(1+r^2)^{\frac{k}{2}} \log(2+r^2)} \in L^2(\omega'), \dots, \frac{D^l u}{(1+r^2)^{\frac{k-l}{2}} \log(2+r^2)} \in L^2(\omega'), \dots, \frac{D^{k-1} u}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}} \log(2+r^2)} \in L^2(\omega'), D^k u \in L^2(\omega') \right\}$$

• Si $\dim(\Omega) = 3$:

$$W^m(\omega') = \left\{ u, \frac{u}{(1+r^2)^{\frac{k}{2}}} \in L^2(\omega'), \dots, \frac{D^l u}{(1+r^2)^{\frac{k-l}{2}}} \in L^2(\omega'), \dots, D^k u \in L^2(\omega') \right\}$$

$W_0^m(\omega')$ $\overline{\mathcal{D}(\omega')}^{W^m(\omega')} = \left\{ u \in W^m(\omega'); u = \frac{\partial u}{\partial n} = \dots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}} = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\}$

$W^m(\omega')/\mathbb{P}_k$ L'ensemble des fonctions $W^m(\omega')$ définies modulo les polynômes de degré inférieur ou égal à k .

$W^m(\omega') \times H^m(\omega)$ L'ensemble des fonctions $W^m(\omega')$ et $H^m(\omega)$.

$H_{loc}^m(\omega')$ L'ensemble des fonctions H^m sur tout compact inclus ω' .

$H_{00}^{1/2+k}(\sigma)$ $\{u|_{\sigma}; u \in H^{1/2+k}(\tilde{\sigma}) \text{ et } u = 0 \text{ sur } \tilde{\sigma} \setminus \sigma\}$

Prérequis : quelques résultats utiles et importants

Dans ce prérequis on note $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine régulier et borné et $\Gamma = \partial\Omega$, et on donne quelques résultats classiques sur les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ et $H^{k+1/2}(\Gamma)$.

Définition (Trace d'une fonction). On appelle trace d'une fonction $u \in H^m(\Omega)$, l'application

$$u \mapsto \left(u, \frac{\partial u}{\partial n}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}} \right) \Big|_{\Gamma}$$

$$H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-1/2}(\Gamma) \times H^{m-3/2}(\Gamma) \times \dots \times H^{1/2}(\Gamma)$$

Théorème (Théorème de trace). Soit $u \in H^m(\Omega)$, l'application trace est continue de $H^m(\Omega)$ dans $H^{m-1/2}(\Gamma) \times H^{m-3/2}(\Gamma) \times \dots \times H^{1/2}(\Gamma)$. Plus précisément on a l'inégalité

$$\|u\|_{m-1/2,\Gamma} + \dots + \left\| \frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}} \right\|_{1/2,\Gamma} \leq C(\Omega) \|u\|_{m,\Omega}$$

Définition (Relèvement). Soit $\phi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}) \in H^{m-1/2}(\Gamma) \times H^{m-3/2}(\Gamma) \times \dots \times H^{1/2}(\Gamma)$, et

$u \in H^m(\Omega)$ telles que

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma} &= \varphi_0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)|_{\Gamma} &= \varphi_1 \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\ \left(\frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}}\right)|_{\Gamma} &= \varphi_{m-1} \end{aligned}$$

On dit alors que u est un relèvement de ϕ .

Théorème (Théorème de relèvement). *Soit $\phi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}) \in H^{m-1/2}(\Gamma) \times H^{m-3/2}(\Gamma) \times \dots \times H^{1/2}(\Gamma)$, il existe un relèvement continu de ϕ noté $R(\phi) \in H^m(\Omega)$. Plus précisément on a l'inégalité suivante :*

$$\|R(\phi)\|_{m,\Omega} \leq \|\varphi_0\|_{m-1/2,\Gamma} + \dots + \|\varphi_{m-1}\|_{1/2,\Gamma}$$

Théorème (Inégalité de Poincaré). *Soit $u \in H_0^m(\Omega)$, on a l'inégalité suivante*

$$\|u\|_{m,\Omega} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{0,\Omega}$$

Théorème (Inégalité de Poincaré-Wirtinger). *Soit $u \in H^1(\Omega)$, et $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u$, alors*

$$\|u - \bar{u}\|_{1,\Omega} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{0,\Omega}$$

Remarque 0.0.1. *Une question importante pour les estimations en norme $H^1(\Omega_\epsilon)$ est la dépendance de cette constante par rapport à ϵ .*

Dans [77], on montre que la constante $C(\Omega)$ dépend du diamètre de Ω et d'une constante caractérisant une propriété de connexité uniforme de Ω , sous réserve que Ω vérifie une propriété de cône intérieur (voir [1], p. 66). Pour les deux types de domaine (a) $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{\{x_0 + \epsilon B\}}$ et (b) $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{\{x_0 + \epsilon \sigma(\vec{n})\}}$ on montre que cette constante peut être bornée indépendamment de ϵ .

La même remarque s'applique pour l'inégalité de Deny-Lions suivante.

Théorème (Inégalité de Deny-Lions [35]). *Dans l'espace quotient $H^m(\Omega)/\mathbb{P}_{m-1}$ la norme $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)/\mathbb{P}_{m-1}}$ est équivalente à la semi-norme $|\cdot|_{m,\Omega}$. Plus précisément en notant $M = \dim(\mathbb{P}_{m-1}(\Omega))$ et $(\phi_i)_{1 \leq i \leq M}$ une base de $\mathbb{P}_{m-1}(\Omega)$ alors il existe une famille d'applications linéaires $l_i \in \mathcal{L}(\mathbb{P}_{m-1}(\Omega), \mathbb{R})$ pour $i \in \llbracket 1..M \rrbracket$ telle que $l_i(\phi_j) = \delta_{i,j}$ et $\forall u \in H^m(\Omega)$:*

$$\left\| u - \sum_{i=1}^m l_i(u) \phi_i \right\|_{m,\Omega} \leq C(\Omega) |u|_{m,\Omega}$$

Théorème (Inégalité de Hardy [68]). *On note $B' = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}$, la semi-norme*

$$|u|_{k,B'}^2 = \int_{B'} |D^k u|^2$$

est une norme sur $W_0^k(B')$.

Le lemme suivant est une conséquence des inégalités de Hardy et de Deny-Lions.

Lemme 0.0.2 (Inégalité de Deny-Lions généralisée). *Soit $\omega \subset B$, un sous ensemble de \mathbb{R}^d régulier. On note $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}$ le domaine extérieur à ω . Soit $u \in W^m(\mathcal{O})$, on a l'inégalité suivante*

$$\|u\|_{W^m(\mathcal{O})/\mathbb{P}_{m-1}} \leq C |u|_{m,\Lambda}$$

où C est une constante dépendant du domaine \mathcal{O} et où la définition de l'espace $W^m(\mathcal{O})$ est donnée dans le prérequis.

Démonstration. Soit $\varphi \in C^m([0, +\infty[)$, un profil de la forme

$$\begin{cases} \varphi = 0, & \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 1 & \text{pour } 1 \leq t \leq 2 \\ \varphi = 1 & \text{pour } t \geq 2 \end{cases}$$

Soit $\psi(x) = \varphi(|x|)$, alors $u\psi \in W_0^m(B')$. Sur l'espace $W_0^m(B')$, grâce à l'inégalité de Hardy, on a

$$\|u\psi\|_{W_0^m(B')} \leq C|\psi u|_{m, B'}$$

Par définition de ψ :

$$\|u\|_{W^m(B'_2)} \leq \|\psi u\|_{W_0^m(B')}$$

On déduit donc que

$$\|u\|_{W^m(B'_2)} \leq C|\psi u|_{m, B'} \leq C|u|_{m, B'_2} + C\|u\|_{W^m(B_2 \setminus \bar{B})} \leq C|u|_{m, B'_2} + C\|u\|_{W^m(B_2 \setminus \bar{\omega})} \quad (0.0.4)$$

Ensuite par définition de $W^m(B_2 \setminus \bar{\omega})$, en bornant les poids, on a équivalence entre la norme $W^m(B_2 \setminus \bar{\omega})$ et la norme $H^m(B_2 \setminus \bar{\omega})$. En prenant l'espace quotient, en utilisant le lemme de Deny-Lions on obtient :

$$\|u\|_{W^m(B_2 \setminus \bar{\omega})/\mathbb{P}_{m-1}} \leq C|u|_{m, B_2 \setminus \bar{\omega}} \quad (0.0.5)$$

Avec (0.0.4), et (0.0.5), on obtient

$$\|u\|_{W^m(\mathcal{O})/\mathbb{P}_{m-1}} \leq C|u|_{m, \mathcal{O}}$$

ce qui est l'inégalité cherchée. □

Théorème (Inégalité de Gagliardo-Nirenberg [1, 69]). *Soit $m \geq 1$, l'application $u \mapsto \left(\|u\|_{0, \Omega}^2 + |u|_{m, \Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_{m, \Omega}$ et plus précisément*

$$\|u\|_{m, \Omega} \leq C(m, \Omega) \left(\|u\|_{0, \Omega}^2 + |u|_{m, \Omega}^2\right)^{1/2}$$

où $C(\Omega, m)$ est une constante dépendante de m et de Ω .

Remarque 0.0.3. *La constante apparaissant dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg dépend de constantes caractérisant une propriété de cône intérieur (voir [1], p 66 et pp 75-79). On peut montrer que lorsque Ω est changé en Ω_ϵ (le domaine perturbé par une boule ou un crack de taille ϵ et ne touchant pas le bord), cette constante est bornée indépendamment de ϵ .*

Première partie

Détection de contours et restauration
d'images par la méthode du gradient
topologique

Chapitre 1

État de l'art : la méthode du gradient topologique et les autres méthodes

Résumé. Ce chapitre présente quelques méthodes variationnelles classiques pour la détection de contours et la restauration d'images. On présente ensuite la philosophie de la méthode du gradient topologique et on justifie le choix du modèle utilisé par Belaid et al. [24] pour la détection de contours et la restauration d'images via la méthode du gradient topologique.

1.1 Quelques méthodes variationnelles classiques

1.1.1 Perona-Malik

Le modèle de Perona-Malik est un modèle de diffusion non linéaire. Le modèle est construit de façon à préserver au mieux les contours de l'image : il s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (g(|\nabla u|^2)\nabla u) & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma \times [0, T] \\ u(x, 0) = f & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.1.1)$$

avec $g : [0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$, une fonction décroissante telle que $g(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Ainsi le comportement de l'opérateur différentiel est le suivant :

- À l'intérieur des régions où le gradient est faible ($|\nabla u| \sim 0$), le comportement est similaire à celui de l'équation de la chaleur : la diffusion est isotrope.
- Au niveau des points où le gradient est fort, la diffusion est stoppée.

Plus précisément en supposant g dérivable, en développant le terme de divergence et en notant $\vec{n} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ pour $|\nabla u| \neq 0$ et $\vec{\tau} = \vec{n}^\perp$, on obtient :

$$\operatorname{div} (g(|\nabla u|^2)\nabla u) = 2(u_x^2 u_{xx} + u_y^2 u_{yy} + 2u_x u_y u_{xy})g'(|\nabla u|^2) + g(|\nabla u|^2)(u_{xx} + u_{yy})$$

et en posant $h(s) = g(s) + 2sg'(s)$ on obtient

$$\operatorname{div} (g(|\nabla u|^2)\nabla u) = g(|\nabla u|^2)u_{\tau\tau} + h(|\nabla u|^2)u_{nn}$$

Ainsi aux points de contours où le gradient est fort, il est préférable de lisser principalement dans la direction tangentielle aux contours : on impose une condition du type $\lim_{s \rightarrow +\infty} h(s)/g(s) = 0 \iff$

$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{sg'(s)}{g(s)} = -\frac{1}{2}$. Si on se restreint aux fonctions positives à croissance polynomiale on obtient $g(s) \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{s}}$. De plus pour garantir que (1.1.1) soit parabolique, nécessairement la fonction g doit être positive.

Un exemple simple de fonction garantissant toutes ces conditions est $g(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s}}$. L'image restaurée est la solution $u(x, t)$ de (1.1.1); le paramètre t correspondant à un paramètre d'échelle ou de lissage. Une illustration est faite en Figure 1.1 avec deux choix de fonctions $g(x)$ vérifiant les conditions aux limites en 0 et $+\infty$, et celles de décroissance et de positivité. On remarque que le meilleur choix est bien $g(s) = (1 + \frac{s}{\epsilon^2})^{-1/2}$. Pour plus de détails sur la méthode on réfère le lecteur à [72].



(a) Image initiale, PSNR=16dB



(b) $g(x) = e^{-\frac{x}{\epsilon^2}}$, $\epsilon = 80$, $T = 2$, PSNR=26dB



(c) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{\epsilon^2}}}$, $\epsilon = 30$, $T = 1.7$, PSNR=27.5dB

FIGURE 1.1 – Perona-Malik (1.1.1)

1.1.2 Méthode de restauration dite TV (variation totale)

Dans de nombreux modèles variationnels, on cherche une version restaurée u de l'image observée f comme le minimiseur d'une fonction énergie composée d'un terme d'attache aux données (dépendant du modèle) et d'un terme de régularisation correspondant à la variation totale de u . L'espace fonctionnel utilisé est $\mathcal{BV}(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega); Du \text{ est une mesure de Radon}\}$. Le problème de minimisation en présence de bruit gaussien s'écrit (voir [76])

$$\min_{u \in \mathcal{BV}(\Omega)} \int_{\Omega} |Du| + \lambda \int_{\Omega} |u - f|^2 \quad (1.1.2)$$

où λ est un paramètre à régler selon l'intensité du bruit. L'espace $\mathcal{BV}(\Omega)$ est un espace assez grand contenant les fonctions constantes par morceaux qui permet de préserver assez bien les contours. Dans la suite on réfèrera à ce modèle en parlant de modèle TV. Une discrétisation est donnée par l'algorithme de Chambolle [32]. Pour plus détails on réfère le lecteur à [76] et pour des illustrations aux sections 4.3, 4.4, 4.5 du chapitre 4.

1.1.3 Une fonctionnelle de restauration/segmentation : la fonctionnelle de Mumford-Shah

Soit Ω un domaine régulier de \mathbb{R}^2 et $\gamma \subset \Omega$, la fonctionnelle introduite par Mumford-Shah en 1989 (voir [67]) est :

$$F(u, \gamma) = \int_{\Omega} |u - f|^2 + \lambda \int_{\Omega \setminus \bar{\gamma}} |\nabla u|^2 + \alpha \mathcal{H}^1(\gamma)$$

où f est l'image observée, u une fonction définie sur $\Omega \setminus \bar{\gamma}$ (la version restaurée de f) et $\gamma \subset \Omega$ est l'ensemble des discontinuités de u . \mathcal{H}^1 est la mesure de Hausdorff de γ , λ et α sont des paramètres positifs. La difficulté est que les inconnues ne sont pas de même nature : u est une fonction et γ est un ensemble. Ambrosio et Tortorelli [4] ont proposé une approximation de cette fonctionnelle (au sens de la Γ -convergence) comme suit :

$$\mathcal{F}_{\epsilon}(u, b) = \int_{\Omega} \left[|u - f|^2 + \lambda b^2 |\nabla u|^2 + \alpha \left(\epsilon |\nabla b|^2 + \frac{(b-1)^2}{4\epsilon} \right) \right]$$

avec $\epsilon > 0$ un paramètre qui tend vers zéro. Le terme $|u - f|^2$ est le terme d'attache aux données. On peut montrer en calculant une estimation du maximum a posteriori (MAP) que ce terme d'attache aux données est adapté au modèle $f = u + n$ où n est un bruit gaussien. Le problème de minimisation à résoudre s'écrit alors

$$\min_{u \in H^1(\Omega), b \in H^1(\Omega)} \int_{\Omega} \left[|u - f|^2 + \lambda b^2 |\nabla u|^2 + \alpha \left(\epsilon |\nabla b|^2 + \frac{(b-1)^2}{4\epsilon} \right) \right] \quad (1.1.3)$$

On note $(u_{\epsilon}, b_{\epsilon})$ le minimiseur de (1.1.3). $u_{\epsilon}(x)$ est l'image restaurée (processus de restauration) et $1 - b_{\epsilon}(x) \approx 0$ est l'approximation de la fonction caractéristique des contours de l'image (processus de segmentation). \mathcal{F}_{ϵ} approche F lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ au sens de la Γ -convergence [4]. Dans la suite, on référera ce modèle par le modèle de Mumford-Shah.

Pour plus de détails sur ce modèle on réfère le lecteur à [67] et pour des illustrations aux sections 4.3, 4.4, 4.5 du chapitre 4.

1.1.4 Les contours actifs

La méthode des contours actifs consiste à faire évoluer une courbe C_0 contenant initialement un objet, vers le contour de l'objet. Pour cela on considère une fonction $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $g(0) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$. Soit $\gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, Caselles et al. [31] ont proposé la fonctionnelle suivante :

$$J(\gamma) = \int_0^1 g(|\nabla I(\gamma(x))|) |\gamma'(x)| dx$$

Minimiser $J(\gamma)$ revient à trouver le plus court chemin $\gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ partant de $\gamma(0)$ et arrivant à $\gamma(1)$ au sens de la "métrique" $g(|\nabla I(\gamma)|)$. $J(\gamma)$ est active loin des contours et pour trouver un minimum local de cette fonction on introduit une famille de courbes paramétriques $(\gamma(t, p))_{t \geq 0}$ et on définit la longueur pondérée :

$$L(t) = \int_0^1 g(|\nabla I(\gamma(t, x))|) \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x}(t, x) \right| dx$$

Le but est de minimiser $L(t)$, on calcule donc

$$L'(t) = \int_0^{L(t)} \left\langle \kappa g \vec{N} - \langle \nabla g, \vec{T} \rangle \vec{T} + \nabla g, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle ds = \int_0^{L(t)} \left\langle \left(\kappa g + \langle \nabla g, \vec{N} \rangle \right) \vec{N}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle ds$$

où $\kappa(x)$ est la courbure de γ au point x . Pour que $L(t)$ décroisse le plus rapidement, avec Cauchy-Schwarz on peut prendre

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = - \left(\kappa g + \langle \nabla g, \vec{N} \rangle \right) \vec{N} \quad (1.1.4)$$

Le défaut de ce modèle est qu'il ne permet pas de détecter les formes non convexes. Pour remédier à ce problème Caselles et al. [31] ont légèrement modifié (1.1.4) et proposé :

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = - \left((\kappa + c)g + \langle \nabla g, \vec{N} \rangle \right) \vec{N} \text{ dans } \Omega \times [0, T] \\ \gamma(0, x) = \gamma_0(x) \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (1.1.5)$$

où c est une constante pour stabiliser la courbure lorsque l'objet dont on veut détecter les contours n'est pas convexe; γ_0 est une courbe initiale que l'on se donne entourant l'objet à détecter. Les problèmes majeurs de la forme paramétrique sont la difficulté de mise en œuvre numérique et le fait que ce modèle ne tolère pas les changements de topologie de la courbe qui ne peut pas se diviser en plusieurs composantes connexes. Pour pallier ce problème Osher-Sethian [70] ont utilisé la notion de courbes de niveaux en écrivant que $\gamma(t) = \{x \in \Omega; u(t, x) = 0\}$ et en réécrivant (1.1.5) en fonction de u . On prend pour convention que $\{x \in \Omega; u(t, x) < 0\}$ (resp $\{x \in \Omega; u(t, x) > 0\}$) désigne l'intérieur (resp l'extérieur) de l'objet. En utilisant que $\frac{\partial u}{\partial t} + \langle \nabla u, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \rangle = 0$, $\vec{N} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ et que $\kappa = \text{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$ on obtient le modèle sur u suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\text{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + c \right) |\nabla u| + \langle \nabla g, \nabla u \rangle \text{ dans } \Omega \\ u_0(x) = \text{dist}(x, \omega_0) - \text{dist}(x, \Omega \setminus \bar{\omega}_0) \end{cases} \quad (1.1.6)$$

où ω_0 est le sous domaine borné de Ω tel que $\partial \omega_0 = \gamma_0$ et u_0 est la distance signée à la courbe γ_0 . Une illustration de la méthode est donnée dans la Figure 1.2.

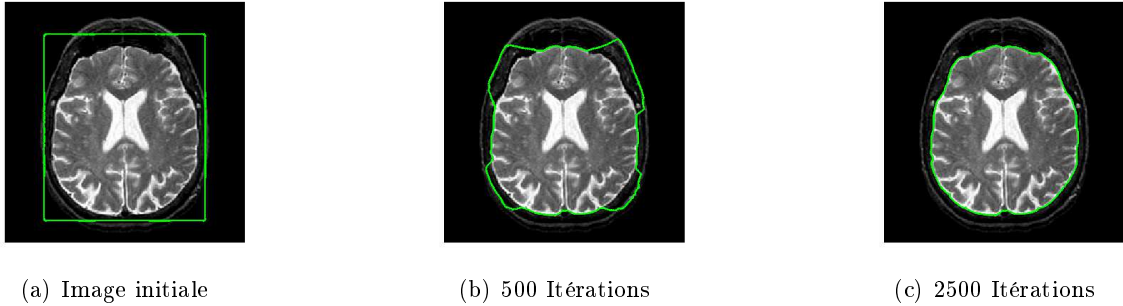


FIGURE 1.2 – Les contours actifs (1.1.6)

1.2 D'autres méthodes discrètes de restauration d'images plus récentes

Les méthodes présentées dans cette section sont des méthodes récentes de débruitage considérées pour certaines comme étant actuellement parmi les meilleures. On suppose pour toutes ces méthodes que l'image observée est dégradée par du bruit gaussien et s'écrit

$$f = u + b$$

où f est l'image observée, u l'image à retrouver et b du bruit gaussien identiquement et indépendamment distribué d'écart type σ . On note N le nombre de pixels de l'image. Le but est alors de retrouver u à partir de f . Pour plus de détails sur l'implémentation et les résultats obtenus par ces méthodes on renvoie le lecteur au site IPOL.

1.2.1 Méthode dite *DCT locale*

La méthode *DCT locale* introduite par Yu-Sapiro [89] (2011) est une méthode assez simple mais très efficace. En notant $(\varphi_n)_{1 \leq n \leq N}$ une base orthonormée de \mathbb{C}^N (par exemple une base de Fourier), cette méthode consiste en partie à décomposer l'image dans la base des φ_n et à ne garder que les coefficients plus grands qu'un certain seuil. Plus précisément pour un seuil $T > 0$, une estimation de u est

$$\hat{u} = \sum_n \rho_T(\langle f, \varphi_n \rangle) \varphi_n \quad (1.2.1)$$

où $\rho_T(x) = x \mathbf{1}_{\{|x| > T\}}$ est la fonction de seuillage. Donoho et Johnstone [39] ont montré que la valeur optimale du seuil est $T = \sigma \sqrt{2 \log_e(N)}$ avec σ l'écart type du bruit gaussien b . Si on applique simplement la DCT sur toute l'image et que l'on ne garde qu'une partie des coefficients de Fourier pour la reconstruction, des artefacts (par exemple des phénomènes de Gibbs au niveau des discontinuités) vont apparaître. Cela est dû à un "manque" d'invariance par translation de la base de Fourier. Pour remédier à cela Coifman et al. [36] ont montré qu'en calculant des reconstructions de plusieurs translations de l'image (l'image supposée périodique est décalée) obtenues en utilisant l'algorithme précédent et en effectuant un décalage inverse des reconstructions et en moyennant ces dernières, les artefacts sont considérablement diminués.

L'algorithme revient tout d'abord à décomposer l'image en patchs de taille $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$ (généralement $\sqrt{N} = 16$) "glissants" les uns sur les autres et se chevauchant (d'où le qualificatif de la méthode : *locale*) puis à reconstruire chaque patch en utilisant (1.2.1) et enfin à assembler tous les patchs débruités en moyennant.

1.2.2 Méthode dite *moyenne non locale* (NL-means)

Cette méthode introduite par Buades et al. [29] (2005), repose sur le fait suivant : la moyenne de n variables aléatoires identiquement distribuées et d'écart type σ a un écart type égale à σ/\sqrt{n} . La question est donc de savoir caractériser la similarité entre 2 pixels. Les pixels les plus similaires n'ont pas de raison d'être proches au sens usuel. Soit $r > 0$, on note $B(p, r)$ le patch de dimension $2r + 1 \times 2r + 1$ centré en p . On définit la distance entre deux pixels p et q par :

$$d^2(B(p, r), B(q, r)) = \frac{1}{(2r + 1)^2} \sum_{j \in B(0, r)} (f(p + j) - f(q + j))^2$$

En pratique, on choisit $r = 10$ pour $\sigma \leq 30$ et $r = 17$ pour $\sigma > 30$ où on rappelle que σ désigne l'écart type du bruit gaussien. La valeur de l'image reconstruite au pixel p est la moyenne pondérée suivante :

$$\tilde{u}(p) = \frac{1}{C(p)} \sum_{q \in B(p, s)} u(q) w(p, q)$$

avec $w(p, q) = e^{-\frac{\max(d^2 - 2\sigma^2, 0)}{h^2}}$, $C(p)$ une constante de normalisation, $h > 0$ est un paramètre dépendant de la valeur de σ et $s \in [1, 5]$ un paramètre définissant la taille du voisinage sur lequel on fait la moyenne (augmentant avec σ). Généralement $h = k\sigma$ avec $0.3 \leq k \leq 0.6$ un paramètre qui augmente en fonction de σ . Une version fonctionnelle est disponible sur le site IPOL [30].

1.2.3 Méthode dite *BM3D*

La méthode que nous allons décrire ici a été introduite par Dabov et al. [37] (2007) et une version détaillée et fonctionnelle est disponible sur le site IPOL [54]. Soit $x \in X$ un pixel de l'image, on note F_x (resp. U_x) le patch de taille $N_1 \times N_1$ de coin haut-gauche x et extrait de f (resp. u). Pour $S \subset X$ on note F_S (resp. U_S), le bloc 3D composé des patchs superposés F_x (resp. U_x) pour $x \in S$. La méthode se décompose

en une estimation grossière de l'image à retrouver à partir de l'image bruitée et en une estimation plus fine à partir de l'estimation précédente et de l'image bruitée. Chacune de ces étapes consiste d'abord à regrouper plusieurs patches similaires afin de former des blocs 3D constitué de patches similaires au sens d'une certaine distance, appliquer une transformation de débruitage sur ces blocs 3D puis reconstituer l'estimation de l'image à partir des blocs 3D débruités. Dans ce qui suit on note x_R le pixel définissant le patch de référence et x le pixel courant.

L'idée de la première étape est d'utiliser une application linéaire τ_{2D}^{ht} (par exemple la DCT) et de faire un groupage selon la distance entre deux patches suivante :

$$d^2(F_{x_R}, F_x) = \frac{\|\gamma_2(\tau_{2D}^{ht}(F_{x_R})) - \gamma_2(\tau_{2D}^{ht}(F_x))\|_2^2}{(N_1^{(ht)})^2}$$

où $N_1^{(ht)}$ est la taille des patches utilisés dans l'étape 1 (*ht* pour *hard thresholding*) et $\gamma_2(x) = x\mathbf{1}_{\{|x| \geq \lambda_{2D}\sigma\}}$ avec $\lambda_{2D} > 0$ un paramètre indépendant du niveau de bruit. Pour un seuil $\tau_{match}^{ht} > 0$ fixé, on note $S_{x_R}^{ht} = \{x \in X, d(Z_{x_R}, Z_x) < \tau_{match}^{ht}\}$. Par construction $|S_{x_R}^{ht}| > 1$ et on note $F_{S_{x_R}^{ht}}$ le tableau 3D $N_1^{ht} \times N_1^{ht} \times |S_{x_R}^{ht}|$ formé des patches F_x pour $x \in S_{x_R}^{ht}$.

La première estimation par bloc est définie par

$$\widehat{U}_{S_{x_R}^{ht}}^{ht} = \left(\tau_{3D}^{ht}\right)^{-1} \left(\gamma_3 \left(\tau_{3D}^{ht} \left(F_{S_{x_R}^{ht}}\right)\right)\right)$$

avec τ_{3D}^{ht} une application linéaire de $\mathbb{R}^{N_1^{ht} \times N_1^{ht} \times |S_{x_R}^{ht}|}$ et $\gamma_3(x) = x\mathbf{1}_{\{|x| \geq \lambda_{3D}\sigma\}}$ où $\lambda_{3D} > 0$ est un paramètre fixé. $\forall x_R \in X$, on obtient donc $|S_{x_R}^{ht}|$ patches : $\widehat{U}_x^{ht, x_R} \forall x \in S_{x_R}^{ht}$.

Une fois les estimations par blocs 3D calculées, lorsque plusieurs estimations pour un même pixel sont disponibles, on moyenne en pondérant par l'inverse des variances de chaque bloc 3D dont provient chaque estimation. On note \widehat{u}^{basic} l'estimation obtenue à l'étape 1.

Ensuite, l'estimation finale s'obtient de manière similaire à celle utilisée pour obtenir \widehat{u}^{basic} . Un groupement est effectué à partir de l'estimation précédente et on note : $S_{x_R}^{wie} = \left\{x \in X : \frac{\|\widehat{U}_{x_R}^{basic} - \widehat{U}_x^{basic}\|_2^2}{(N_1^{wie})^2} < \tau_{match}^{wie}\right\}$ où N_1^{wie} est la taille des côtés des patches utilisés pour cette étape (*wie* pour *Wiener*). L'estimation finale par bloc est

$$\widehat{U}_{S_{x_R}^{wie}}^{wie} = \left(\tau_{3D}^{wie}\right)^{-1} \left(W_{S_{x_R}^{wie}} \tau_{3D}^{wie} \left(F_{S_{x_R}^{wie}}\right)\right)$$

avec τ_{3D}^{wie} une application linéaire de $\mathbb{R}^{N_1^{wie} \times N_1^{wie} \times |S_{x_R}^{wie}|}$ et $W_{S_{x_R}^{wie}} = \frac{\left|\tau_{3D}^{wie} \left(\widehat{U}_{S_{x_R}^{wie}}^{basic}\right)\right|^2}{\left|\tau_{3D}^{wie} \left(\widehat{U}_{S_{x_R}^{wie}}^{basic}\right)\right|^2 + \sigma^2}$ où σ est l'écart type du bruit gaussien.

De la même manière que pour l'étape 1, pour les points appartenant à plusieurs patches et/ou plusieurs blocs 3D, \widehat{u}^{wie} est obtenue par moyenne pondérée des estimations provenant des $\widehat{U}_{x_m}^{wie, x_R}$ par les poids $w_{x_R}^{wie} = \sigma^{-2} \left\|W_{S_{x_R}^{wie}}\right\|_2^{-2}$ tel que le patch de coin haut-gauche x_m contienne x .

1.2.4 Méthode dite *bayésienne non locale* (NL-bayes)

Similaire à la méthode *BM3D*, cette méthode introduite par Lebrun et al. [56] (2013) et disponible sur le site IPOL [55], se décompose toujours en 2 étapes : une estimation à partir de l'image bruitée et une estimation à partir de l'estimation précédente et de l'image bruitée. Ces deux étapes se divisent elles-mêmes en 3 sous-étapes : groupement, filtrage par bloc 3D et assemblage. On note \tilde{P} le patch de référence de dimension $\kappa_1 \times \kappa_1$ associé à l'image bruitée et on suppose que $\tilde{P} = P + B$ avec B un bruit gaussien

identiquement et indépendamment distribué de variance σ^2 et P le patch à retrouver. Pour la première étape le groupement sur l'image bruitée se fait en utilisant la distance :

$$d^2(\tilde{P}, \tilde{Q}) = \frac{\|\tilde{P} - \tilde{Q}\|_2^2}{\kappa_1^2}$$

On ne garde que les N_1 patches les plus similaires à \tilde{P} au sens de la distance d . On obtient alors le bloc 3D $\mathcal{P}(\tilde{P})$ constitué des patches similaires à \tilde{P} . La première estimation P^{basic} est alors donnée par le maximum a priori de vraisemblance :

$$\begin{aligned} P^{basic} &= \underset{P}{\operatorname{argmax}} \mathbb{P}(P|\tilde{P}) \\ &= \underset{P}{\operatorname{argmax}} \mathbb{P}(\tilde{P}|P)\mathbb{P}(P) \\ &= \underset{P}{\operatorname{argmax}} e^{-\frac{\|\tilde{P}-P\|_2^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(P-\bar{P})^T C_P^{-1}(P-\bar{P})}{2}} \\ &= \underset{P}{\operatorname{argmin}} \frac{\|\tilde{P} - P\|_2^2}{2\sigma^2} + (P - \bar{P})C_P^{-1}(P - \bar{P}) \end{aligned}$$

Comme P et B sont indépendants, on a

$$\begin{aligned} C_{\tilde{P}} &= C_P + \sigma^2 I \\ E(\tilde{Q}) &= E(\tilde{P}) = \bar{P}, \quad \forall \tilde{Q} \in \mathcal{P}(\tilde{P}) \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

P^{basic} est donc donné par

$$P^{basic} = \bar{\tilde{P}} + (C_{\tilde{P}} - \sigma^2 I) C_{\tilde{P}}^{-1} (\tilde{P} - \bar{\tilde{P}}) \quad (1.2.3)$$

et

$$Q^{basic} = \bar{\tilde{Q}} + (C_{\tilde{P}} - \sigma^2 I) C_{\tilde{P}}^{-1} (\tilde{Q} - \bar{\tilde{P}}) \quad \forall \tilde{Q} \in \mathcal{P}(\tilde{P})$$

avec $C_{\tilde{P}}$ et $\bar{\tilde{P}}$ calculés sur les blocs 3D $\mathcal{P}(\tilde{P})$. Ensuite un premier estimateur u^{basic} de l'image à retrouver est obtenu en moyennant sur les différentes estimations par bloc.

La deuxième étape consiste à regrouper les pixels en patches de taille $\kappa_2 \times \kappa_2$ en utilisant la distance

$$d^2(P^{basic}, Q^{basic}) = \frac{\|P^{basic} - Q^{basic}\|_2^2}{\kappa_2^2}$$

où note P^{basic} et Q^{basic} les patches extraits de u^{basic} . Le groupement est fait par seuillage :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{basic}(P^{basic}) &= \left\{ Q^{basic}, d^2(Q^{basic}, P^{basic}) \leq \tau \right\} \\ \mathcal{P}^{basic}(\tilde{P}) &= \left\{ \tilde{Q}, d^2(Q^{basic}, P^{basic}) \leq \tau \right\} \end{aligned}$$

avec $\tau > 0$ un seuil fixé. C_P et $\bar{\tilde{P}}$ sont respectivement estimés par $C_{\tilde{P}}^{basic}$ et $\bar{\tilde{P}}^{basic}$ sur les blocs 3D $\mathcal{P}^{basic}(\tilde{P})$. À partir de (1.2.2) et (1.2.3) on obtient l'estimation finale par bloc de patches similaires :

$$\begin{aligned} P^{final} &= \bar{\tilde{P}}^{basic} + C_{\tilde{P}}^{basic} \left(C_{\tilde{P}}^{basic} + \sigma^2 I \right)^{-1} \left(\tilde{P} - \bar{\tilde{P}}^{basic} \right) \\ Q^{final} &= \bar{\tilde{Q}}^{basic} + C_{\tilde{P}}^{basic} \left(C_{\tilde{P}}^{basic} + \sigma^2 I \right)^{-1} \left(\tilde{Q} - \bar{\tilde{P}}^{basic} \right) \quad \forall \tilde{Q} \in \mathcal{P}^{basic}(\tilde{P}) \end{aligned}$$

Enfin l'estimation finale u^{final} est calculée en moyennant les estimations obtenues sur les différents carrés se chevauchant.

1.2.5 Méthode dite *K-SVD*

La méthode présentée dans cette section a été introduite par Aharon et al. [2] (2005) et une implémentation détaillée est disponible sur le site IPOL [57]. On suppose toujours que l'image observée s'écrit $f = u + b$ avec b un bruit gaussien identiquement et indépendamment distribué et u l'image à retrouver. On note $D \in \mathbb{R}^{n \times k} = (d_1, \dots, d_k)$ le dictionnaire utilisé avec $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, $k > n$ et n un carré. Puis on introduit $\alpha = (\alpha_{ij})_{i,j}$ où (i, j) est l'index du patch $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ sélectionné et où $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}^k$ est une représentation de $R_{ij}f$ dans le dictionnaire D avec R_{ij} l'opérateur de restriction au patch (i, j) . On note N_p le nombre de patches $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ dans l'image f .

La méthode se décompose en trois étapes :

- une première étape destinée à trouver une représentation de f dans le dictionnaire D la plus creuse possible. Plus précisément la première étape donne une approximation du problème NP-complet suivant

$$\widehat{\alpha}_{ij} = \underset{\alpha_{ij}}{\operatorname{argmin}} \|\alpha_{ij}\|_0 \quad \text{tel que} \quad \|R_{ij}f - D\alpha_{ij}\|_2^2 \leq n(C\sigma)^2$$

avec $C > 0$ une constante fixée et où pour une suite $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $\|x\|_0 = \#\{x_i, \neq 0, 1 \leq i \leq n\}$. Pour simplifier les notations, on considère le problème :

$$\widehat{\alpha} = \underset{\alpha \in \mathbb{R}^k}{\operatorname{argmin}} \|\alpha\|_0 \quad \text{tel que} \quad \|x - D\alpha\|_2^2 \leq \epsilon$$

avec $\epsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On note l_j l'indice du vecteur du dictionnaire D choisi à l'étape $j \geq 0$. On introduit le résidu $r = x - \operatorname{Project}(d_{l_0}, d_{l_1}, \dots, d_{l_j})(x)$. Si $\|r\|_1 \leq \epsilon$ on arrête et α est une représentation creuse de x dans D . Sinon, en notant $L_j = \{l_0, \dots, l_j\}$, l'index l_j est donné par

$$l_j = \underset{i \notin L_{j-1}}{\operatorname{argmin}} \|x - \operatorname{Project}(d_{l_0}, d_{l_1}, \dots, d_{l_{j-1}}, d_i)(x)\|_2^2$$

et α est obtenu en utilisant une orthonormalisation de la famille $(d_{l_0}, d_{l_1}, \dots, d_{l_j})$.

- une deuxième étape consistant à mettre à jour \widehat{D} et $(\widehat{\alpha}_{ij})$ tels que $\sum_{i,j} \|R_{ij}f - \widehat{D}\widehat{\alpha}_{ij}\|_2^2$ soit minimale et sans augmenter $\|\alpha_{ij}\|_0$. Cela est réalisé itérativement ($K > 0$ itérations) en minimisant le résidu $\|E_l - d_l \alpha_l\|_2^2$ par rapport à α_l et d_l avec $E_l = (e_{ij}^l)_{i,j}$ où $e_{ij}^l = R_{ij}f - \widehat{D}\widehat{\alpha}_{ij} + \widehat{\alpha}_{ij}(l)\widehat{d}_l$. Pour cela une décomposition en valeur propre de $E_l \in \mathbb{R}^{n \times N_p}$ est réalisée (*Singular Value Decomposition* en anglais) d'où le nom de la méthode. À noter que cette mise à jour, ne concerne que les patches utilisant le vecteur \widehat{d}_l après l'étape 1 (afin de garantir que la quantité $\|\alpha_{ij}\|_0$ n'augmente pas).
- une troisième étape où on résout

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \underset{u \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \lambda \|u - f\|_2^2 + \sum_{i,j} \|R_{ij}f - D\alpha_{ij}\|_2^2 \\ &= \left(\lambda I + \sum_{i,j} R_{ij}^T R_{ij} \right)^{-1} \left(\lambda f + \sum_{i,j} R_{ij}^T D \alpha_{ij} \right) \end{aligned}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre de régularisation. Il faut noter que pour cette dernière étape la matrice à inverser est diagonale.

1.2.6 Comparaisons de toutes ces méthodes

Toutes ces méthodes peuvent être testées sur le site IPOL. On les compare ici sur une seule image bruitée par un bruit gaussien mais une comparaison complète peut être trouvée dans [55].



(a) Image initiale, PSNR=16dB



(b) DCT locale, PSNR=31.7dB



(c) NL-means, PSNR=28.2dB



(d) BM3D, PSNR=30.0dB



(e) NL-bayes, PSNR=28.3dB



(f) K-SVD, 27.9dB

FIGURE 1.3 – Comparaisons de quelques méthodes sur une image bruitée par du bruit gaussien (PSNR=16dB)

1.3 La méthode du gradient topologique (GT)

1.3.1 Philosophie de la méthode et choix du modèle pour la détection de contours

Comme présentée en introduction, la méthode du GT consiste à étudier les variations de la quantité $J_{\Omega_\epsilon}(u_{\Omega_\epsilon})$ par rapport à ϵ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ où u_{Ω_ϵ} vérifie une EDP sur Ω_ϵ et où la fonction coût s'écrit sous la forme $J_{\Omega_\epsilon}(u) = \int_{\Omega_\epsilon} F(u, \nabla u, \nabla^2 u, \dots)$. Pour simplifier les notations on note $u_\epsilon = u_{\Omega_\epsilon}$ avec la convention $\Omega_0 = \Omega$ et $J_\epsilon(u) = J_{\Omega_\epsilon}(u)$. Il est important de choisir un modèle adapté aux types de structures à détecter. Dans Belaid et al. [24], on prend une EDP de la forme $Au_\epsilon + u_\epsilon = f$ où f est l'image observée (éventuellement dégradée par du bruit gaussien) et A est l'opérateur laplacien avec conditions de Neumann homogènes. On peut voir $u_0 = u_\Omega$ comme un version restaurée de l'image f . Il semble donc tout d'abord important que l'EDP soit un "bon modèle" de restauration de l'image f . Ensuite le choix de la fonction coût est également très important et détermine le type de structures à détecter dans l'image. En effet la

fonction doit “charger” les structures que l’on cherche. Si on considère dans une image les contours des objets comme des structures générant des discontinuités avec saut d’intensité lorsqu’on les traverse, alors les dérivées d’ordre 1 sont des opérateurs différentiels bien adaptés comme le précise le lemme suivant.

Lemme 1.3.1. Soit γ une courbe fermée de \mathbb{R}^2 C^1 et ω le domaine borné tel que $\partial\omega = \gamma$. On note $\omega' = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}$ et H_γ la fonction

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \omega \\ 1 & \text{si } x \in \omega' \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in \gamma \end{cases}$$

On note $\varphi(x) = \text{dist}(x, \omega) - \text{dist}(x, \omega')$ la distance signée au domaine ω . Soit la famille de fonctions $(g_h)_{h>0}$ définies par $g_h(x) = g\left(\frac{\varphi(x)}{h}\right)$ avec $g(x) = P(x)\chi_{\{-1 \leq x \leq 1\}} + \chi_{\{x > 1\}} \in C^2(\mathbb{R})$ avec $P(x) = \frac{1}{2} + \frac{15}{16}x - \frac{5}{8}x^3 + \frac{3}{16}x^5$ et $\chi_A(x)$ la fonction caractéristique de l’ensemble A (voir Figure 1.4).

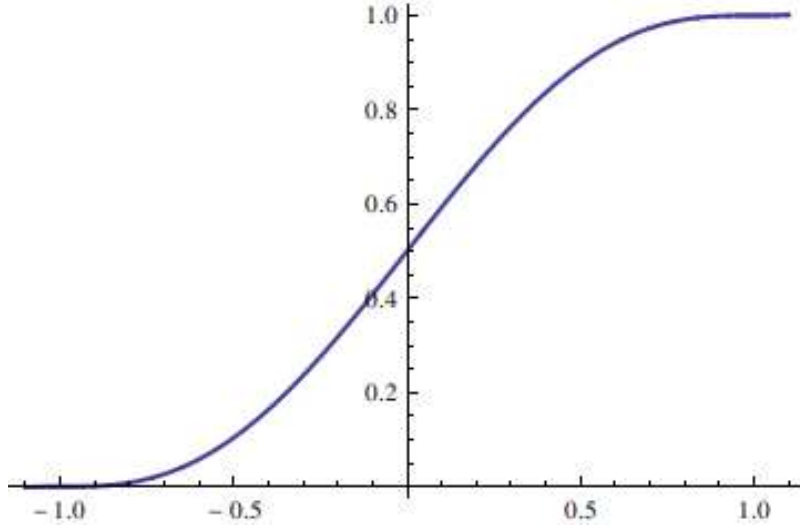


FIGURE 1.4 – Fonction $g(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{15}{16}x - \frac{5}{8}x^3 + \frac{3}{16}x^5\right) \chi_{\{-1 \leq x \leq 1\}} + \chi_{\{x > 1\}}$

On a :

$$g_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} H_\gamma, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$$

De plus, pour tout $x \in \gamma$, on a

$$\begin{aligned} \nabla g_h(x) &= \frac{g'(0)}{h} \nabla \varphi(x) \\ \text{spec}(\nabla^2 g_h(x)) &= \left\{ 0, g'(0) \frac{C_\gamma(x)}{h} \right\} \end{aligned}$$

et les vecteurs propres associés sont $(\nabla \varphi(x), \nabla \varphi(x)^\perp)$ (on rappelle que $\nabla \varphi(x)$ est la normale à γ et $C_\gamma(x)$ est la courbure de γ en $x \in \gamma$).

Démonstration. On conserve les notations utilisées pour énoncer le lemme. Soit $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on calcule

$\langle g_h, \xi \rangle :$

$$\begin{aligned}\langle g_h, \xi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} g_h(x) \xi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{\varphi(x)}{h}\right) \xi(x) dx \\ &= \int_{\varphi > h} \xi(x) dx + \int_{-h \leq \varphi \leq h} P\left(\frac{\varphi(x)}{h}\right) \xi(x) dx \\ &= A_h + B_h\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}A_h &= \int_{\varphi > h} \xi(x) dx \\ B_h &= \int_{-h \leq \varphi \leq h} g\left(\frac{\varphi(x)}{h}\right) \xi(x) dx\end{aligned}$$

En passant à la limite sous le signe intégrale on a

$$A_h = \int_{\mathbb{R}^2} \xi(x) \chi_{\varphi > h}(x) dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\omega'} \xi(x) dx$$

De même en changeant de variable et en passant à la limite on a

$$|B_h| = h \left| \int_{-1 \leq \varphi \leq 1} g\left(\frac{\varphi(ht)}{h}\right) \xi(ht) dt \right| \leq h \left| \int_{-1 \leq \varphi \leq 1} \xi(ht) dt \right| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

On déduit

$$\langle g_h, \xi \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\omega'} \xi(x) dx = \langle H_\gamma, \xi \rangle$$

ce qui prouve la convergence de g_h vers H_γ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Pour les valeurs du gradient et de la hessienne, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_h}{\partial x_i} &= \frac{1}{h} g' \left(\frac{\varphi(x)}{h} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ \frac{\partial^2 g_h}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{1}{h^2} g'' \left(\frac{\varphi(x)}{h} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{1}{h} g' \left(\frac{\varphi(x)}{h} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\end{aligned}$$

Sur Γ , $\varphi = 0$, $g''(0) = 0$ et $g'(0) \neq 0$ donc pour tout $x \in \Gamma$ on a

$$\begin{aligned}\nabla g_h(x) &= \frac{1}{h} g'(0) \nabla \varphi(x) \\ \nabla^2 g_h(x) &= \frac{1}{h} g'(0) \nabla^2 \varphi(x)\end{aligned}$$

Par des résultats classiques de géométrie différentielle, on sait que lorsque γ est régulière, $\nabla^2 \varphi$ possède deux valeurs propres : 0 associée à la direction normale à γ donnée par $\nabla \varphi$ et $C_\gamma(x)$ la courbure à γ en x associée à la direction orthogonale à $\nabla \varphi$. On peut donc écrire les développements de Taylor en $x \in \gamma$

suivants :

$$\begin{aligned}
g_h(x + \alpha \vec{n}) &= g\left(\frac{\varphi(x + \alpha \vec{n})}{h}\right) \\
&= g\left(\frac{\varphi(x)}{h} + \frac{\alpha}{h} \nabla \varphi(x) \cdot \vec{n} + \frac{\alpha^2}{2h} \underbrace{\vec{n} \cdot \nabla^2 \varphi(x) \vec{n}}_{=0} + o\left(\frac{\alpha^2}{h}\right)\right) \\
&= g\left(\frac{\varphi(x)}{h}\right) + g'\left(\frac{\varphi(x)}{h}\right) \left(\frac{\alpha}{h} \nabla \varphi(x) \cdot \vec{n} + o\left(\frac{\alpha^2}{h}\right)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \underbrace{g''\left(\frac{\varphi(x)}{h}\right)}_{=0} \left(\frac{\alpha}{h} \nabla \varphi(x) \cdot \vec{n} + o\left(\frac{\alpha^2}{h}\right)\right)^2 + o\left(\frac{\alpha^2}{h^2}\right) \\
&= g(x) + \frac{\alpha}{h} g'(0) + o\left(\frac{\alpha^2}{h}\right)
\end{aligned}$$

avec $\alpha > 0$ proche de zéro et où on a utilisé que pour $x \in \gamma$, $\varphi(x) = 0$, $\vec{n}(x) = \nabla \varphi(x)$ et $\vec{n} \cdot \nabla^2 \varphi(x) \vec{n} = 0$. De même pour la direction tangente à γ , on a

$$g_h(x + \alpha \vec{t}) = g(x) + \frac{\alpha^2}{2h} g'(0) C_\Gamma(x) + o\left(\frac{\alpha^2}{h}\right)$$

Lorsque $\alpha \rightarrow 0$, on déduit que la variation dans la direction normale est prépondérante par rapport à celle dans la direction tangentielle. La variation dans la direction normale est donnée par ∇g_h . À α fixé, la variation donnée par $\nabla^2 g_h$ est en $O\left(\frac{1}{h}\right)$ multipliée par la courbure de γ dans la direction tangente et est nulle selon la normale. \square

Ce lemme montre de manière heuristique que les dérivées d'ordre 1 sont appropriées pour la détection de contours et que les dérivées d'ordre 2 ne le sont pas. Cependant, les valeurs ponctuelles des dérivées de la fonction g_h ne sont pas autant représentatives que leurs valeurs moyennes sur un voisinage du contour : on pourrait remplacer g_h par la fonction $g_h(x + hv)$ avec v un vecteur constant et obtenir que la valeur propre de la hessienne associée à la direction normale ne soit pas nulle. Cependant on peut montrer que la moyenne locale autour d'un cercle des dérivées premières est en $O(h^{-2})$ et que la moyenne des dérivées secondes est en $O(h^{-1})$.

Plus précisément, prenons γ le cercle de rayon R et posons $W_h = \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta)), (r, \theta) \in [R - h\eta, R + h\eta] \times [0, \theta_0 h]\}$ avec $\eta > 0$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|W_h|} \int_{W_h} \frac{\partial g_h}{\partial x_i} &= O\left(\frac{1}{h^2}\right) \\
\frac{1}{|W_h|} \int_{W_h} \frac{\partial^2 g_h}{\partial x_i \partial x_j} &= O\left(\frac{1}{h}\right)
\end{aligned}$$

Ce résultat peut justifier de façon heuristique, le choix fait par Belaid et al. pour la définition de la fonction coût :

$$J_\epsilon(u) = \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u|^2 \tag{1.3.1}$$

L'EDP vérifiée par u_ϵ utilise l'opérateur de Laplace avec conditions de Neumann. Plus précisément u_ϵ est solution du problème suivant

$$(\mathcal{P}_\epsilon) \begin{cases} -\alpha \Delta u_\epsilon + u_\epsilon = f \text{ dans } \Omega_\epsilon \\ \partial_n u_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial \Omega_\epsilon \end{cases} \tag{1.3.2}$$

avec (b) $\Omega_\epsilon = \Omega_\epsilon \setminus \overline{\{x_0 + \epsilon \sigma(\vec{n})\}}$ et $\alpha > 0$.

1.3.2 Expressions des GTs pour des domaines perforé et fissuré

Les calculs théoriques du GT ont été effectués par Amstutz et al. [10]. On peut écrire la forme variationnelle de (1.3.2) :

$$a_\epsilon(u_\epsilon, v) = l_\epsilon(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega_\epsilon)$$

avec

$$a_\epsilon(u, v) = \int_{\Omega_\epsilon} \alpha \nabla u \cdot \nabla v + uv \quad l_\epsilon(v) = \int_{\Omega_\epsilon} f v$$

On introduit $\tilde{J}_\epsilon(u) = \int_{\Omega_\epsilon} (f - u)u$ qui est telle que $\tilde{J}_\epsilon(u_\epsilon) = \alpha J_\epsilon(u_\epsilon)$. Ensuite pour calculer le GT on définit un modèle adjoint $v_\epsilon \in H^1(\Omega_\epsilon)$ solution de

$$a_\epsilon(u, v_\epsilon) = - \left\langle \partial \tilde{J}_\epsilon(u_0), u \right\rangle_{\Omega_\epsilon} = \langle 2u_0 - f, u \rangle_{\Omega_\epsilon}$$

Les équations d'Euler associées sont :

$$\begin{cases} -\alpha \Delta v_\epsilon + v_\epsilon = 2u_0 - f \text{ dans } \Omega_\epsilon \\ \partial_n v_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\epsilon \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Pour un domaine fissuré (b) $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{\{x_0 + \epsilon \sigma(\vec{n})\}}$, le GT associé au modèle décrit par (1.3.2) et (1.3.1) est [10, 6, 24] :

$$\mathcal{I}^c(x_0, \vec{n}) = -\pi \nabla u_0(x_0) \cdot \vec{n} \cdot \nabla v_0(x_0) \cdot \vec{n} \quad (1.3.4)$$

où u_0 et v_0 sont respectivement les solutions de (1.3.2) et (1.3.3) pour $\epsilon = 0$. Dans [24] on utilise l'indicateur calculé en chaque point suivant

$$I_{Lap}^c(x_0) = \min_{\|\vec{n}\|=1} \mathcal{I}^c(x_0, \vec{n}) \quad (1.3.5)$$

Les points de contours sont donnés par les points associés à une grande diminution d'énergie c-à-d correspondant à un GT très négatif. On peut montrer pour un domaine perforé (a) $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{\{x_0 + \epsilon B\}}$ que le GT est donné par :

$$\mathcal{I}^b(x_0) = -2\pi \nabla u_0(x_0) \cdot \nabla v_0(x_0) - \frac{\pi}{\alpha} (f(x_0) - u_0(x_0))(v_0(x_0) - u_0(x_0)) \quad (1.3.6)$$

Dans le cas d'un domaine perforé on définit l'indicateur topologique suivant :

$$I_{Lap}^b(x_0) = |\mathcal{I}^b(x_0)| \quad (1.3.7)$$

Remarque 1.3.2. *Dans le cas de l'équation $-\Delta u + u = f$ avec conditions de Neumann, et de la fonction coût $J_\Omega(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2$, on ne sait pas montrer (à ma connaissance) si la création d'une perturbation (boule ou crack) conduit à une diminution ou augmentation d'énergie. On conjecture que la création d'une perturbation au niveau d'un contour (ensemble des points associés à une forte variation de f) va être associée à une variation d'énergie mais théoriquement on ne sais pas montrer si cette variation sera une augmentation ou une diminution. Cependant, on observe numériquement que la perturbation par un crack mène toujours à une diminution d'énergie tandis que pour la boule l'énergie est parfois positive (faiblement). Ainsi pour des raisons d'affichage on a pris comme indicateur la valeur absolue. C'est pour cette raison qu'on emploie le terme d'indicateur topologique (on perd l'information de diminution ou d'augmentation d'énergie, on sait juste que l'énergie varie).*

1.3.3 Application numérique : restauration et segmentation d'images

Segmentation Les Figure 1.5 et Figure 1.6 montrent que le modèle du crack est plus adapté à la détection de contours que le modèle de la boule (pour ces images on seuille les GTs afin de ne garder que 7% des pixels sur les contours). En effet en l'absence de bruit les deux indicateurs ont un comportement similaire. Cependant lorsqu'on ajoute du bruit, le GT (1.3.6) se montre moins robuste que l'indicateur topologique (1.3.4).



FIGURE 1.5 – Segmentation par le GT associé à un domaine (b) perforé et (c) fissuré pour (a) une image non bruitée

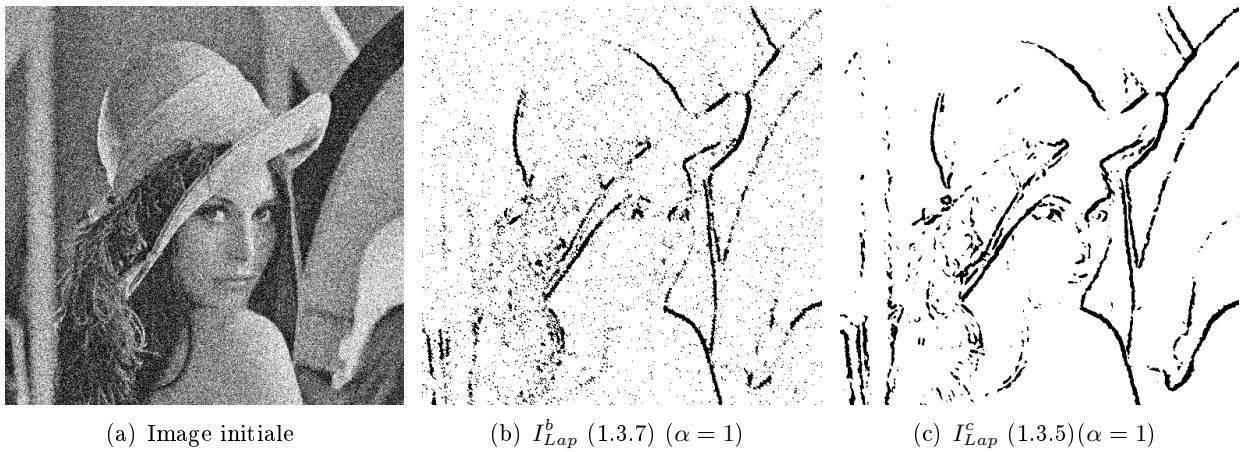


FIGURE 1.6 – Segmentation par le GT associé à un domaine (b) perforé et (c) fissuré pour (a) une image bruitée par du bruit gaussien (PSNR=14dB)

Restauration Le modèle de restauration utilisé dans [24] est le suivant :

- Calcul de l'indicateur topologique I_{Lap}^c donné par (1.3.5)
- Pour un seuil $\delta > 0$ fixé, on détermine l'ensemble des points de contours $E_\delta = \{x, |I_{Lap}^c(x)| > \delta\}$

- On cherche u solution de

$$\begin{cases} -\beta \operatorname{div}(c(x)\nabla u(x)) + u = f & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (1.3.8)$$

avec $\beta > 0$ un paramètre à régler en fonction du bruit et $c(x) = \begin{cases} \eta & \text{si } x \in E_\delta \\ 1 & \text{si } x \in \Omega \setminus \overline{E_\delta} \end{cases}$

Le modèle de restauration (1.3.8) est illustré en Figure 1.7. On peut voir que les points de contours ne sont pas du tout lissés et donc laissés à leur valeur initiale bruitée par le modèle. On verra comment remédier à cela dans le chapitre 4.

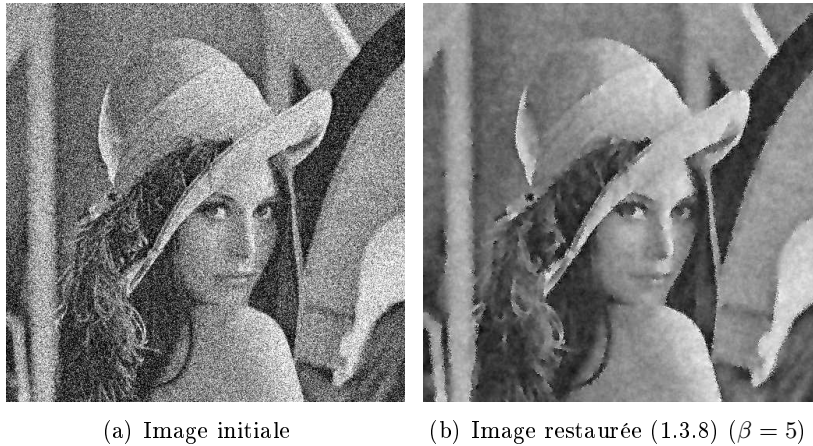


FIGURE 1.7 – (a) Image bruitée par du bruit gaussien (PSNR=20dB), (b) Restauration (1.3.8)

Chapitre 2

Lien entre boule et crack : l'ellipse

Résumé. *Ce chapitre, essentiellement théorique, permet de faire le lien entre les deux modèles de perturbation suivants : (a) $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus x_0 + \epsilon B$ un domaine perforé par une boule et (b) $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus x_0 + \epsilon \bar{\sigma}$ un domaine fissuré par un crack en calculant le GT associé à un domaine perturbé par une ellipse. Notons que le calcul du GT associé à un domaine perforé par une ellipse peut se faire en utilisant des tenseurs de polarisation (voir Ammari [5]). Dans ce chapitre on fait le calcul pour un domaine perforé par une ellipse en n'utilisant que la notion de potentiel simple couche. Par un changement d'échelle selon chaque axe, on se ramène à un domaine perturbé par une boule. L'EDP et la fonction définies sur le nouveau domaine mettent en jeu des opérateurs différentiels qui dépendent des paramètres du changement d'échelle définissant un problème auxiliaire équivalent. De manière classique [6], pour calculer le gradient topologique associé à ce problème auxiliaire, on introduit un modèle adjoint et un problème extérieur. Ce dernier s'écrit sous la forme d'un potentiel simple couche en fonction de la solution fondamentale de l'opérateur principal et d'une densité à déterminer. La densité associée est solution d'une équation intégrale de seconde espèce. Le noyau de cette équation intégrale, permet de conjecturer la forme de la solution. Le terme principal de l'expression du gradient topologique fait intervenir le produit scalaire des gradients des modèles direct et adjoint pondéré par un tenseur décrivant les propriétés géométriques de l'ellipse. On vérifie que lorsque l'ellipse est un cercle, on retrouve bien l'expression dans le cas d'un domaine perforé par une boule et lorsque l'ellipse tend vers un crack, on retombe sur l'expression du GT pour un domaine fissuré par un crack.*

Introduction

Dans ce chapitre on donne une démonstration de l'expression du gradient topologique pour le problème (\mathcal{P}_ϵ) (1.3.2) et la fonction coût $J_\epsilon(u)$ (1.3.1) dans le cas d'un domaine perforé par un domaine délimité par une ellipse. Pour ne pas alourdir les notations on écrira "ellipse" pour "domaine délimité par l'ellipse". On rappelle le problème variationnel étudié :

$$(\mathcal{P}_\epsilon) \begin{cases} -\alpha \Delta u_\epsilon + u_\epsilon = f \text{ dans } \Omega_\epsilon \\ \partial_n u_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\epsilon \end{cases} \quad \text{et} \quad J_\epsilon(u) = \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u|^2$$

avec $\alpha > 0$ un paramètre à régler. On note \mathcal{E} l'ellipse de centre x_0 , de grand axe a dirigé par \vec{n}^\perp et de petit axe b ($b \leq a$) dirigé par \vec{n} . On note (c) $\Omega_\epsilon^c = \Omega \setminus \{x_0 + \epsilon \mathcal{E}\}$ et $\vec{\tau}$ tel que $(\vec{\tau}, \vec{n})$ forme une base orthonormale de \mathbb{R}^2 . Pour simplifier on se place dans les coordonnées locales de l'ellipse : $\mathcal{E} = \left\{ (x, y), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$, $x_0 = 0$ et $\vec{n} = (0, 1)^T$. De même on suppose pour simplifier que $\alpha = 1$. Le raisonnement théorique pour calculer le GT dans le cas d'un domaine perforé par une ellipse reste le même que pour une boule. Pour le calcul explicite du GT on introduit un potentiel extérieur $Q \in W^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{E}) \times H^1(\mathcal{E})$ s'écrivant comme un

potentiel simple couche (voir [6])

$$Q(x) = \int_{\partial\mathcal{E}} \lambda(y)E(x-y)d\sigma(y)$$

où $\lambda \in H^{1/2}(\partial\mathcal{E})$ est la densité associée au potentiel simple couche et $E(x) = -\frac{1}{2\pi}\log(|x|)$ est la solution fondamentale associée au laplacien. λ est solution d'une équation intégrale de seconde espèce de la forme

$$g(x) = -\frac{\lambda(x)}{2} + \int_{\partial\mathcal{E}} \lambda(y)\partial_{n_x}E(x-y)d\sigma(y)$$

avec

$$\partial_{n_x}E(x-y) = \nabla E(x-y).n_x = -\frac{1}{2\pi} \frac{x-y}{|x-y|^2} \cdot \frac{\begin{pmatrix} \frac{x}{a^2} \\ \frac{y}{b^2} \end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}$$

Pour $a \neq b$, en passant en coordonnées polaires et avec les outils d'intégration usuels, il ne semble pas possible d'intégrer ce type d'équation. Cependant nous allons montrer que par un changement de variable on peut se ramener à un domaine perforé par une boule et ainsi calculer le GT dans le cas de l'ellipse de manière élémentaire. On peut noter qu'il est possible d'exprimer le gradient topologique dans le cas d'un domaine perturbé par une ellipse de manière plus direct en utilisant la notion de tenseur de polarisation d'ordre 1 donné explicitement dans le cas d'une ellipse par Pólya-Szego (voir [5] p. 81).

2.1 Calcul du GT

On notera (c) $\Omega_\epsilon^e = \Omega \setminus \overline{\{x_0 + \epsilon\mathcal{E}\}}$, $(\tilde{a}) \tilde{\Omega}_\epsilon^b = \{y, (ay_1, by_2) \in \Omega_\epsilon^e\}$ et $\tilde{\Gamma} = \{y, (ay_1, by_2) \in \Gamma\}$. Pour ne pas alourdir les notations on note n au lieu de \tilde{n} la normale unitaire sortante au domaine Ω_ϵ^e et \tilde{n} la normale sortante au domaine $\tilde{\Omega}_\epsilon^b$. Pour simplifier on rappelle qu'on se place dans le repère locale de l'ellipse c-à-d on suppose que $x_0 \equiv 0$, $\vec{\tau} = (1, 0)^T$ et $\tilde{n} = (0, 1)^T$.

2.1.1 Le nouveau problème

On peut se ramener au cas d'un domaine perforé par une boule en faisant le changement de variable simple :

$$\tilde{u}_\epsilon(y_1, y_2) = u_\epsilon(ay_1, by_2)$$

où u_ϵ est la solution du problème (1.3.2) avec $\Omega_\epsilon = \Omega_\epsilon^e$. La fonction coût (1.3.1) s'écrit donc

$$J_\epsilon(u) = \int_{\Omega_\epsilon^e} |\nabla u|^2 = ab \int_{\tilde{\Omega}_\epsilon^b} \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} \right)^2 + \frac{1}{b^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} \right)^2 = ab I_\epsilon(\tilde{u}) \quad (2.1.1)$$

où $\tilde{u}(y_1, y_2) = u(ay_1, by_2)$ et

$$I_\epsilon(\tilde{u}) = \int_{\tilde{\Omega}_\epsilon^b} \nabla_{a,b} \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u} \quad \text{avec} \quad \nabla_{a,b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{1}{b^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

L'équation vérifiée par \tilde{u}_ϵ est

$$(\tilde{\mathcal{P}}_\epsilon) \begin{cases} -\Delta_{a,b} \tilde{u}_\epsilon + \tilde{u}_\epsilon = g(y_1, y_2) \text{ sur } \tilde{\Omega}_\epsilon^b \\ \nabla_{a,b} \tilde{u}_\epsilon \cdot \tilde{n} = 0 \text{ sur } \partial\tilde{\Omega}_\epsilon^b \end{cases} \quad (2.1.3)$$

avec $\Delta_{a,b} = \nabla \cdot \nabla_{a,b}$, $g(y_1, y_2) = f(ay_1, by_2)$ et \tilde{n} la normale sortante de $\tilde{\Omega}_\epsilon^b$.

Remarque 2.1.1. Pour vérifier les conditions aux bords, on peut écrire le contour de Ω_ϵ^e comme les zéros d'une fonction $\phi \in C^1(\mathcal{O})$ avec \mathcal{O} un domaine régulier de \mathbb{R}^2 . Plus précisément on écrit $\partial\Omega_\epsilon^e = \{(x_1, x_2), \phi(x_1, x_2) = 0\}$. On en déduit que $\partial\widetilde{\Omega}_\epsilon^b$ s'écrit $\partial\widetilde{\Omega}_\epsilon^b = \{(y_1, y_2), \phi(ay_1, by_2) = 0\}$.

Pour $x \in \Gamma$, $\nabla\phi(x)$ est colinéaire à la normale $n(x)$ et pour $y \in \widetilde{\Gamma}$, $\begin{pmatrix} a \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(ay_1, by_2) \\ b \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(ay_1, by_2) \end{pmatrix}$ est colinéaire à la normale $\widetilde{n}(y)$. Soit $x = (x_1, x_1) \in \Gamma$ et $y = (\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{b}) \in \widetilde{\Gamma}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_1} \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_2} \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a} \frac{\partial \widetilde{u}_\epsilon}{\partial y_1} \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(ay_1, ay_2) + \frac{1}{b} \frac{\partial \widetilde{u}_\epsilon}{\partial y_2} \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(ay_1, ay_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} \frac{\partial \widetilde{u}_\epsilon}{\partial y_1} \left(a \frac{\partial\phi}{\partial X_1}(ay_1, by_2) \right) + \frac{1}{b^2} \frac{\partial \widetilde{u}_\epsilon}{\partial y_2} \left(b \frac{\partial\phi}{\partial X_2}(x_1, x_2) \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \nabla_{a,b} \widetilde{u}_\epsilon \cdot \widetilde{n} = 0 \end{aligned}$$

ce qui est bien l'égalité cherchée.

Le problème est donc de calculer le GT associé à l'EDP (2.1.3) et à la fonction coût (2.1.2) (à un facteur ab près).

2.1.2 Modèle adjoint

Pour alléger les notations on note n la normale sortante au domaine $\widetilde{\Omega}_\epsilon^b$. La formulation variationnelle associée au problème $(\widetilde{\mathcal{P}}_\epsilon)$ est : trouver $\widetilde{u}_\epsilon \in H^1(\widetilde{\Omega}_\epsilon^b)$ tel que

$$\widetilde{a}_\epsilon(\widetilde{u}_\epsilon, v) = \widetilde{l}_\epsilon(v) \quad \forall v \in H^1(\widetilde{\Omega}_\epsilon^b)$$

avec

$$\widetilde{a}_\epsilon(u, v) = \int_{\widetilde{\Omega}_\epsilon^b} \nabla_{a,b} u \cdot \nabla v + uv \quad , \quad \widetilde{l}_\epsilon(v) = \int_{\widetilde{\Omega}_\epsilon^b} gv$$

On cherche à exprimer le terme prépondérant dans la différence $I_\epsilon(\widetilde{u}_\epsilon) - I_0(\widetilde{u}_0)$:

$$I_\epsilon(\widetilde{u}_\epsilon) - I_0(\widetilde{u}_0) = \int_{\widetilde{\Omega}_\epsilon^b} (g - \widetilde{u}_\epsilon) \widetilde{u}_\epsilon - \int_{\widetilde{\Omega}_0^b} (g - \widetilde{u}_0) \widetilde{u}_0 = L_\epsilon(\widetilde{u}_\epsilon - \widetilde{u}_0) + \mathcal{I}_\epsilon + \mathcal{E}_1$$

Avec

$$L_\epsilon(u) = \int_{\widetilde{\Omega}_\epsilon^b} (2\widetilde{u}_0 - g)u \quad , \quad \mathcal{I}_\epsilon = - \int_{B_\epsilon} (g - \widetilde{u}_0) \widetilde{u}_0 \quad , \quad \mathcal{E}_1 = - \int_{\widetilde{\Omega}_\epsilon^b} (\widetilde{u}_\epsilon - \widetilde{u}_0)^2 \quad (2.1.4)$$

On définit le modèle adjoint \widetilde{v}_ϵ par

$$\widetilde{a}_\epsilon(u, \widetilde{v}_\epsilon) = L_\epsilon(u) \quad \forall u \in H^1(\widetilde{\Omega}_\epsilon^b) \quad (2.1.5)$$

Par intégration par parties, la différence s'écrit donc

$$\begin{aligned} I_\epsilon(\widetilde{u}_\epsilon) - I_0(\widetilde{u}_0) &= -\widetilde{a}_\epsilon(\widetilde{u}_\epsilon - \widetilde{u}_0, \widetilde{v}_\epsilon) + \mathcal{I}_\epsilon + \mathcal{E}_1 \\ &= - \int_{\partial B_\epsilon} \nabla_{a,b} \widetilde{u}_0 \cdot n \widetilde{v}_\epsilon + \mathcal{I}_\epsilon + \mathcal{E}_1 \\ &= - \int_{\partial B_\epsilon} \nabla_{a,b} \widetilde{u}_0 \cdot n \widetilde{w}_\epsilon + \int_{\partial B_\epsilon} \nabla_{a,b} \widetilde{u}_0 \cdot n \widetilde{v}_0 + \mathcal{I}_\epsilon + \mathcal{E}_1 \end{aligned}$$

où $B_\epsilon = \epsilon B$ et $\widetilde{w}_\epsilon = \widetilde{v}_\epsilon - \widetilde{v}_0$. Soit $\varphi \in H^{1/2}(\partial B_\epsilon)$, on introduit $\widetilde{l}_\epsilon^\varphi$ définie par

$$\begin{cases} \Delta_{a,b}\widetilde{l}_\epsilon^\varphi = 0 \text{ dans } B_\epsilon \\ \widetilde{l}_\epsilon^\varphi = \varphi \text{ sur } \partial B_\epsilon \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Pour $u \in H^1(\widetilde{\Omega}_\epsilon^b)$ on notera toujours l_ϵ^u ce prolongement et pour $\epsilon = 1$ on note $l^\varphi = l_1^\varphi$. En intégrant par parties on a :

$$I_\epsilon(\widetilde{u}_\epsilon) - I_0(\widetilde{u}_0) = \mathcal{I}_\epsilon + \mathcal{J}_\epsilon + \mathcal{K}_\epsilon + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 \quad (2.1.7)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\epsilon &= \int_{B_\epsilon} (g - \widetilde{u}_0)\widetilde{v}_0 \quad , \quad \mathcal{K}_\epsilon = \int_{\partial B_\epsilon} (\widetilde{u}_0 - \widetilde{u}_0(0))(\nabla_{a,b}\widetilde{l}_\epsilon^{w_\epsilon} \cdot n + \nabla_{a,b}\widetilde{v}_0 \cdot n) d\sigma \\ \mathcal{E}_2 &= \int_{B_\epsilon} (\widetilde{u}_0 - \widetilde{u}_0(0))\Delta_{a,b}\widetilde{v}_0 \quad , \quad \mathcal{E}_3 = - \int_{B_\epsilon} (g - \widetilde{u}_0)\widetilde{l}_\epsilon^{\widetilde{w}_\epsilon} \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Désormais on doit faire le développement asymptotique en norme $H^1(\widetilde{\Omega}_\epsilon^b)$ de \widetilde{w}_ϵ .

2.1.3 Développement asymptotique de \widetilde{w}_ϵ

\widetilde{w}_ϵ est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_{a,b}\widetilde{w}_\epsilon + \widetilde{w}_\epsilon = 0 \text{ sur } \widetilde{\Omega}_\epsilon^b \\ \nabla_{a,b}\widetilde{w}_\epsilon \cdot n = 0, \text{ sur } \widetilde{\Gamma} \\ \nabla_{a,b}\widetilde{w}_\epsilon \cdot n = -\nabla_{a,b}\widetilde{v}_0 \cdot n, \text{ sur } \partial B_\epsilon \end{cases} \quad (2.1.9)$$

De manière classique [6, 27], on introduit un problème extérieur associé à l'opérateur $\Delta_{a,b}$:

$$\begin{cases} \Delta_{a,b}P = 0, \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B} \\ \nabla_{a,b}P \cdot n = g_1, \text{ sur } \partial B \\ P \rightarrow 0, \text{ à l'infini} \end{cases} \quad (2.1.10)$$

avec $g_1 \in H_0^{-1/2}(\partial B)$. Le lemme suivant établit le développement asymptotique de w_ϵ en norme $H^1(\widetilde{\Omega}_\epsilon^b)$.

Lemme 2.1.2. *Soit \widetilde{w}_ϵ définie en (2.1.9) et P la solution du problème extérieur (2.1.10) avec $g_1 = -\nabla_{a,b}v_0(0) \cdot n$, on a*

$$\widetilde{w}_\epsilon = \epsilon P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) + e_\epsilon$$

avec $\|e_\epsilon\|_{1,\widetilde{\Omega}_\epsilon^b} = O\left(\epsilon^2 \sqrt{-\log(\epsilon)}\right)$ et on a les estimations $\|\widetilde{w}_\epsilon\|_{0,\widetilde{\Omega}_\epsilon^b} = O\left(\epsilon^2 \sqrt{-\log(\epsilon)}\right)$ et $|\widetilde{w}_\epsilon|_{1,\widetilde{\Omega}_\epsilon^b} = O(\epsilon)$.

Démonstration. Voir [6]. □

Le théorème suivant permet de caractériser la solution du problème extérieur (2.1.10).

Théorème 2.1.3. *Soit P défini par l'équation (2.1.10) où $g_1 \in H_0^{-1/2}(\partial B)$, alors*

- P s'écrit sous la forme d'un potentiel simple couche

$$P(x) = \int_{\partial B} \lambda(y) \widetilde{E}(x-y) d\sigma(y)$$

avec $\lambda \in H^{1/2}(\partial B)$ et $\widetilde{E}(x)$ la fonction fondamentale associée à l'opérateur $\Delta_{a,b}$ définie par :

$$\widetilde{E}(y_1, y_2) = -\frac{ab}{4\pi} \log((ay_1)^2 + (by_2)^2) \quad (2.1.11)$$

- λ est solution de l'équation intégrale

$$g_1(x) = -\frac{\lambda(x)}{2} + \int_{\partial B} \nabla_{a,b} \tilde{E}(x-y) \cdot n(x) d\sigma(y)$$

- Soit l^P la solution (2.1.6) pour $\epsilon = 1$, on a la relation de saut :

$$g_1(x) - \nabla_{a,b} l^P(x) \cdot n = -\lambda(x) \quad \forall x \in \partial B$$

- Pour $x \in \partial B$ on pose $x = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Si $g_1(x) = A \cos(\theta) + B \sin(\theta)$, on a $\lambda(x) = \alpha \cos(\theta) + \beta \sin(\theta)$ avec

$$\alpha = -\frac{a+b}{a}A \quad \beta = -\frac{a+b}{b}B$$

Démonstration. La théorie des potentiels associée au laplacien (voir [35] chapitre 6) permet de déduire les mêmes propriétés relatives à l'opérateur $\Delta_{a,b}$ en remplaçant la dérivée normale usuelle $\frac{\partial}{\partial n}$ par $\nabla_{a,b} \cdot n$ et en utilisant la fonction fondamentale \tilde{E} (2.1.11). On démontre ici une propriété de saut pour illustrer cela.

Lemme 2.1.4. Soient $\omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier, $\phi \in C(\partial\omega)$ et V_1 et V_2 les potentiels définis par $V_1(\phi) = \int_{\partial\omega} \phi(y) \tilde{E}(x-y) d\sigma(y)$ et $V_2(\phi) = \int_{\partial\omega} \phi(y) \nabla_{a,b} \tilde{E}(y-x) \cdot n(y) d\sigma(y)$. Soit $x \in \partial\omega$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} \frac{\partial}{\partial n} V_1^\pm(\phi)(y) &= \mp \frac{1}{2} \phi(x) + \int_{\partial\omega} \phi(y) \nabla_{a,b} \tilde{E}(x-y) \cdot n(x) d\sigma(y) \\ \lim_{y \rightarrow x} V_2^\pm(\phi)(y) &= \pm \frac{1}{2} \phi(x) + \int_{\partial\omega} \phi(y) \nabla_{a,b} \tilde{E}(y-x) \cdot n(y) d\sigma(y) \end{aligned}$$

où $y \rightarrow x$ et $y \in \omega$ pour “-” et où $y \rightarrow x$ et $y \in \omega'$ pour “+”.

Démonstration. On reprend la démonstration faite dans le Lemme 6.3 de Chen-Zhou [35] et on montre ici seulement un point important, le reste pouvant être directement déduit de la preuve dans le cas laplacien. On commence par calculer le saut associé à la fonction constante égale à 1 pour $V_2(\phi)$. En utilisant la formule de Green on a :

$$V_2(1)(x) = \int_{\partial\omega} \nabla_{a,b} \tilde{E}(y-x) \cdot n_y d\sigma_y = \int_{\omega} \Delta_{a,b} \tilde{E}(y-x) dy = - \int_{\omega} \delta_x(y) dy$$

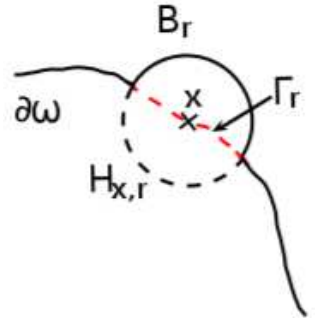
On en déduit que

$$V_2(1)(x) = \begin{cases} 0, & \text{pour } x \in \omega' \\ -1, & \text{pour } x \in \omega \end{cases}$$

D'autre part pour $x \in \partial\omega$ en intégrant par parties on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega} \nabla_{a,b} \tilde{E}(y-x) \cdot n_y d\sigma_y &= \int_{\omega} \Delta_{a,b} \tilde{E}(x-y) d\sigma(y) \\ &= \int_{B(x,r) \cap \omega} \Delta_{a,b} \tilde{E}(y-x) dy \\ &= \int_{H_{x,r}} \nabla_{a,b} \tilde{E}(y-x) \cdot n_y d\sigma_y + \int_{\Gamma_r} \nabla_{a,b} \tilde{E}(y-x) \cdot n_y d\sigma_y \end{aligned}$$

où $H_{x,r} = \{y \in \omega, |y-x| = r\}$ et $\Gamma_r = \partial\omega \cap B(x,r)$.



Et par le calcul on a :

$$\nabla_{a,b}\tilde{E}(y-x) = \frac{-ab}{2\pi} \frac{y-x}{a^2(y_1-x_1)^2 + b^2(y_2-x_2)^2}$$

Sur Γ_r , en utilisant que $\langle n_y, x-y \rangle = O(|x-y|^2) = O(r^2)$ pour $r \rightarrow 0$, on obtient que $\nabla_{a,b}\tilde{E}(y-x).n_y = O(1)$. Comme la mesure de Γ_r tend vers zéro lorsque $r \rightarrow 0$ l'intégrale tend vers zéro. On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega} \nabla_{a,b}\tilde{E}(y-x).n_y d\sigma_y &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{H_{x,r}} \nabla_{a,b}\tilde{E}(y-x).n_y d\sigma_y \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-abr^2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{a^2r^2 \cos^2(\theta) + b^2r^2 \sin^2(\theta)} d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

On obtient

$$\lim_{y \rightarrow x} V_2(1)^\pm(y) = \pm \frac{1}{2} + \int_{\partial\omega} \nabla_{a,b}\tilde{E}(y-x).n_y d\sigma_y$$

Ensuite l'idée est d'étendre le résultat aux fonctions continues. La suite de la preuve est identique à celle du Lemme 6.3 de Chen-Zhou [35]. Pour la relation des sauts concernant $V_1(\phi)$ on renvoie à la preuve du Théorème 6.9 de [35] et au résultat montré pour $V_2(\phi)$. □

On reprend la preuve du Théorème 2.1.3 :

Pour le premier point voir Chen-Zhou [35] (Theorem 6.39).

Pour le deuxième point en prenant $x \in B'$, en faisant $x \rightarrow \partial B$ et en utilisant le Lemme 2.1.4 on obtient :

$$g_1(x) = -\frac{\lambda(x)}{2} + \int_{\partial B} \lambda(y) \nabla_{a,b}\tilde{E}(x-y).n(x) d\sigma(y)$$

Pour le troisième point, considérons la fonction $\bar{u}(x) = \int_{\partial B} \lambda(y) \tilde{E}(x-y) d\sigma(y)$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\partial B}$. Pour $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\partial B}$ en inversant l'intégrale et les dérivées on a facilement que $\Delta_{a,b}\bar{u}(x) = 0$. De plus \bar{u} est continue à travers ∂B (voir [35] Theorem 6.3), on peut donc définir une trace sur ∂B et on a : $\bar{u}|_{\partial B} = P|_{\partial B}$. Par unicité on en déduit que $\bar{u}(x) = l^P(x)$ pour $x \in B$. En utilisant de nouveau le lemme 2.1.4 on en déduit le troisième point.

Pour le dernier point on reprend l'équation vérifiée par λ (deuxième point) :

$$A \cos(\varphi) + B \sin(\varphi) = -\frac{1}{2} \lambda(x) + \int_{\partial B} \lambda(y) \nabla_{a,b}\tilde{E}(x-y).n_x d\sigma_y$$

où, en passant en coordonnées polaires et en posant $x = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$

$$\begin{aligned} \nabla_{a,b}\tilde{E}(x-y).n_x &= -\frac{ab}{2\pi} \frac{(x-y).x}{a^2(x_1-y_1)^2 + b^2(x_2-y_2)^2} \\ &= -\frac{ab}{4\pi} \frac{1}{a^2 \sin^2(\frac{\varphi+\theta}{2}) + b^2 \cos^2(\frac{\varphi+\theta}{2})} \end{aligned}$$

On cherche $\lambda(\varphi)$ de la forme $\lambda(\varphi) = \alpha \cos(\varphi) + \beta \sin(\varphi)$. On doit donc résoudre l'équation

$$\begin{aligned} A \cos(\varphi) + B \sin(\varphi) &= -\frac{\hat{\lambda}(\varphi)}{2} - \frac{ab}{4\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\lambda}(\theta) \frac{1}{a^2 \sin^2(\frac{\varphi+\theta}{2}) + b^2 \cos^2(\frac{\varphi+\theta}{2})} d\theta \\ &= -\frac{1}{2} (\alpha \cos(\varphi) + \beta \sin(\varphi)) - (\alpha \cos(\varphi) - \beta \sin(\varphi)) I_1 + (\alpha \sin(\varphi) + \beta \cos(\varphi)) I_2 \end{aligned}$$

où

$$I_1 = -\frac{ab}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(2t)}{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt = \frac{a}{a+b} - \frac{1}{2}$$

$$I_2 = -\frac{ab}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(2t)}{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt = 0$$

On en déduit par identification

$$\alpha = -\frac{a+b}{a}A \quad \beta = -\frac{a+b}{b}B$$

d'où l'expression de $\lambda(x)$. □

2.1.4 Expression du GT pour le problème auxiliaire (2.1.2)-(2.1.3)

Lemme 2.1.5. Soient \mathcal{I}_ϵ , \mathcal{J}_ϵ , \mathcal{K}_ϵ , \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 et \mathcal{E}_3 définis en (2.1.4) et (2.1.8), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\epsilon &= \pi \epsilon^2 (f(0) - u_0(0)) u_0(0) + o(\epsilon^2) \\ \mathcal{J}_\epsilon &= -\pi \epsilon^2 (f(0) - u_0(0)) v_0(0) + o(\epsilon^2) \\ \mathcal{K}_\epsilon &= -\pi \frac{a+b}{ab} \epsilon^2 \nabla u_0(x_0) \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \nabla v_0(x_0) + o(\epsilon^2) \end{aligned}$$

et $\mathcal{E}_i \sim o(\epsilon^2)$ for $i \in \llbracket 1..3 \rrbracket$.

Démonstration. Des développements de Taylor en 0 de u_0 , v_0 et f (que l'on suppose continue sur Ω) donnent les deux premières estimations.

Ensuite en utilisant un changement de variable on réécrit \mathcal{K}_ϵ :

$$\mathcal{K}_\epsilon = \mathcal{L}_\epsilon + \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\epsilon &= \epsilon^2 \int_{\partial B} \nabla \widetilde{u}_0(0) \cdot x \left(\nabla_{a,b} \widetilde{l}^P \cdot n + \nabla_{a,b} \widetilde{v}_0(0) \cdot n \right) d\sigma \\ \mathcal{F}_1 &= \epsilon \int_{\partial B} (\widetilde{u}_0(\epsilon x) - \widetilde{u}_0(0)) \nabla_{a,b} l^{\epsilon(\epsilon x)} \cdot n d\sigma \\ \mathcal{F}_2 &= \epsilon \int_{\partial B} (\widetilde{u}_0(\epsilon x) - \widetilde{u}_0(0) - \epsilon \nabla \widetilde{u}_0(0) \cdot x) (\nabla_{a,b} l^P \cdot n + \nabla_{a,b} \widetilde{v}_0(\epsilon x) \cdot n) d\sigma \\ \mathcal{F}_3 &= \epsilon^2 \int_{\partial B} \nabla \widetilde{u}_0(0) \cdot x (\nabla_{a,b} \widetilde{v}_0 \cdot n - \nabla_{a,b} \widetilde{v}_0(0) \cdot n) d\sigma \end{aligned}$$

En utilisant un développement de Taylor en 0 de u_0 , le fait que $\Delta_{a,b} l_\epsilon^\varphi = 0$, le contrôle de sa norme par la donnée au bord, le théorème de trace, de nouveau un changement de variable puis le Lemme 2.1.2 on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &\leq C \epsilon^2 \|\partial_n l_\epsilon^{\epsilon(\epsilon x)}\|_{-1/2, \partial B} = C \epsilon \|\partial_n l^{\epsilon(\epsilon x)}\|_{-1/2, \partial B} \leq C \epsilon |l^{\epsilon(\epsilon x)}|_{1, B} \\ &\leq C \epsilon |e_\epsilon(\epsilon x)|_{H^{1/2}(\partial B)/\mathbb{R}} \leq C \epsilon |e_\epsilon(\epsilon x)|_{1, B_2 \setminus \overline{B}} \leq C \epsilon |e_\epsilon|_{1, \Omega_\epsilon} \leq C \epsilon^3 \sqrt{-\log(\epsilon)} \end{aligned}$$

Pour \mathcal{F}_2 et \mathcal{F}_3 un développement de Taylor donne $\mathcal{F}_2 \leq C \epsilon^3$ et $\mathcal{F}_3 \leq C \epsilon^3$.

Pour \mathcal{L}_ϵ en utilisant le Théorème 2.1.3 on obtient

$$\mathcal{L}_\epsilon = \epsilon^2 \nabla \widetilde{u}_0(0) \cdot \int_{\partial B} x \lambda(x) d\sigma$$

En posant $x = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ on a $\lambda(x) = \alpha \cos(\theta) + \beta \sin(\theta)$ avec

$$\alpha = \frac{a+b}{ab} \frac{b}{a^2} \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial x}(0) \quad \beta = \frac{a+b}{ab} \frac{a}{b^2} \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial y}(0)$$

En intégrant il vient que

$$\mathcal{L}_\epsilon = \epsilon^2 \pi \frac{a+b}{ab} \nabla \tilde{u}_0(0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{b}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{b^2} \end{pmatrix} \nabla \tilde{v}_0(0)$$

Il reste à faire le lien entre \tilde{u}_0 (resp \tilde{v}_0) et u_0 (resp v_0). On a les relations $\nabla \tilde{u}_0 = (a \frac{\partial u_0}{\partial x_1}, b \frac{\partial u_0}{\partial x_1})$ et $\tilde{u}_0(0) = u_0(0)$ ce qui donne l'estimation associée à \mathcal{L}_ϵ .

Ensuite pour \mathcal{E}_1 il suffit d'utiliser le Lemme 2.1.2 appliqué à $X_\epsilon = u_\epsilon - u_0$. Pour \mathcal{E}_2 , il suffit d'utiliser que $\Delta_{a,b} \tilde{v}_0 = g - 2\tilde{u}_0 + \tilde{v}_0$ et un développement de Taylor en 0.

Enfin pour \mathcal{E}_3 on utilise un changement de variable, le contrôle de la norme $H^1(B)$ de $l_\epsilon^{w_\epsilon(\epsilon x)}$ par la norme de la donnée au bord puis un nouveau changement de variable et enfin le Lemme 2.1.2 :

$$\mathcal{E}_3 \leq C \epsilon^2 \|l_\epsilon^{w_\epsilon(\epsilon x)}\|_{0, \Omega_\epsilon} \leq C \epsilon^2 \|w_\epsilon(\epsilon x)\|_{1/2, \partial B} \leq C \epsilon^2 \|w_\epsilon(\epsilon x)\|_{1, B_2 \setminus \bar{B}} \leq C \epsilon^2 \left(\frac{1}{\epsilon} \|w_\epsilon\|_{0, \Omega_\epsilon} + |w_\epsilon|_{1, \Omega_\epsilon} \right) \leq C \epsilon^3 \sqrt{-\log(\epsilon)}$$

□

En revenant à la différence $I_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon) - I_0(\tilde{u}_0)$ donnée en (2.1.7) et en utilisant le Lemme 2.1.5 on obtient le GT associé à la fonction coût (2.1.2) et à l'EDP (2.1.3) écrit dans la base $(x_0, \vec{\tau}, \vec{n})$:

$$\tilde{\mathcal{I}}^\epsilon(0) = \pi (f(0) - u_0(0))(v_0(0) - u_0(0)) - \pi \frac{a+b}{ab} \nabla u_0(0) \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \nabla v_0(0)$$

2.1.5 Expression du GT pour le problème initial (1.3.1)-(1.3.2)

En utilisant (2.1.1), on déduit le GT associé à la fonction coût (1.3.1) et à l'EDP (1.3.2) (pour $\alpha = 1$) pour un domaine perforé par une ellipse de centre x_0 de petit axe b dirigé par \vec{n} et de grand axe a dirigé par $\vec{\tau}$:

$$\mathcal{I}^\epsilon(x_0, \vec{n}) = \pi ab (f(x_0) - u_0(x_0))(v_0(x_0) - u_0(x_0)) - \pi (a+b) \nabla u_0(x_0) \cdot A \nabla v_0(x_0) \quad (2.1.12)$$

où en notant $\vec{n} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$

$$A = \begin{pmatrix} b \sin^2(\varphi) + a \cos^2(\varphi) & (a-b) \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ (a-b) \cos(\varphi) \sin(\varphi) & b \cos^2(\varphi) + a \sin^2(\varphi) \end{pmatrix}$$

2.2 Conclusion

Pour le cas $a = b = 1$ on retrouve bien l'expression du gradient topologique dans le cas de la boule.

En faisant tendre b vers 0 et en prenant $a = 1$ on retrouve l'expression du gradient topologique dans le cas du crack (voir [6])

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x_0, \vec{n}) &= -\pi \nabla u_0(x_0) \begin{pmatrix} \cos^2(\varphi) & \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \sin(\varphi) & \sin^2(\varphi) \end{pmatrix} \nabla v_0(x_0) \\ &= -\pi \nabla u_0(x_0) \cdot \vec{n} \nabla v_0(x_0) \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

Le GT associé au modèle de perturbation décrit par le crack est donc la limite de celui calculé pour un domaine perforé par une ellipse de petit axe tendant vers zéro.

2.3 Application numérique

À partir de (2.1.12), on déduit le GT associé à la fonction coût (1.3.1) et à l'EDP (1.3.2) pour $\alpha > 0$:

$$\mathcal{I}^e(x_0, \vec{n}) = \frac{\pi ab}{\alpha} (f(x_0) - u_0(x_0))(v_0(x_0) - u_0(x_0)) - \pi(a+b) \nabla u_0(x_0) \cdot A \nabla v_0(x_0)$$

avec u_0 et v_0 solutions respectivement de (1.3.2) et (1.3.3) en prenant $\epsilon = 0$.

Ensuite on définit l'indicateur topologique au point x_0 suivant :

$$I_{Lap}^e(x_0) = \min_{\|\vec{n}\|=1} \mathcal{I}^e(x_0, \vec{n}) \quad (2.3.1)$$

En récrivant le dernier terme de $\mathcal{I}^e(x_0, \vec{n})$ sous la forme d'une forme quadratique en \vec{n} on obtient :

$$I_{Lap}^e(x_0) = \frac{\pi ab}{\alpha} (f(x_0) - u_0(x_0))(v_0(x_0) - u_0(x_0)) - \pi(a+b) \lambda_{max}(M)$$

avec M la matrice définie par

$$M = \begin{pmatrix} au_x(x_0)v_x(u_0) + bu_y(x_0)v_y(x_0) & \frac{(a-b)}{2}v_y(x_0)u_x(x_0) + v_x(x_0)u_y(x_0) \\ \frac{(a-b)}{2}v_y(x_0)u_x(x_0) + v_x(x_0)u_y(x_0) & bu_x(x_0)v_x(u_0) + au_y(x_0)v_y(x_0) \end{pmatrix}$$

où u_x et u_y (resp. v_x et v_y) sont respectivement les dérivées par rapport à x et y de u_0 (resp. v_0). La Figure 2.1 illustre pour une image bruitée par un bruit gaussien à 14dB, les segmentations associées à l'indicateur topologique (2.3.1) pour différentes valeurs de b , a , α étant fixés. Cette figure vient compléter la Figure 1.6 où seules les segmentations générées par les cas du crack et de la boule ont été comparées. Dans cet exemple on seuile (2.3.1) afin de n'obtenir que les 7% de points dont le gradient topologique est le plus petit (très négatif). On peut souligner que lorsque $a = b = 1$ (cas de la boule), l'indicateur (2.3.1) ne correspond qu'au signe près à l'indicateur topologique (1.3.7). Ceci a peu d'importance car seuls quelques points sont associés à un GT positifs et donc le fait de rajouter la valeur absolue permet juste de ne pas avoir le fond de l'image gris. Enfin il est clair que plus b augmente moins l'indicateur topologique est robuste par rapport au bruit et on vérifie numériquement que I_{Lap}^e (2.3.1) pour $b = 0$ coïncide bien avec I_{Lap}^c (1.3.5).

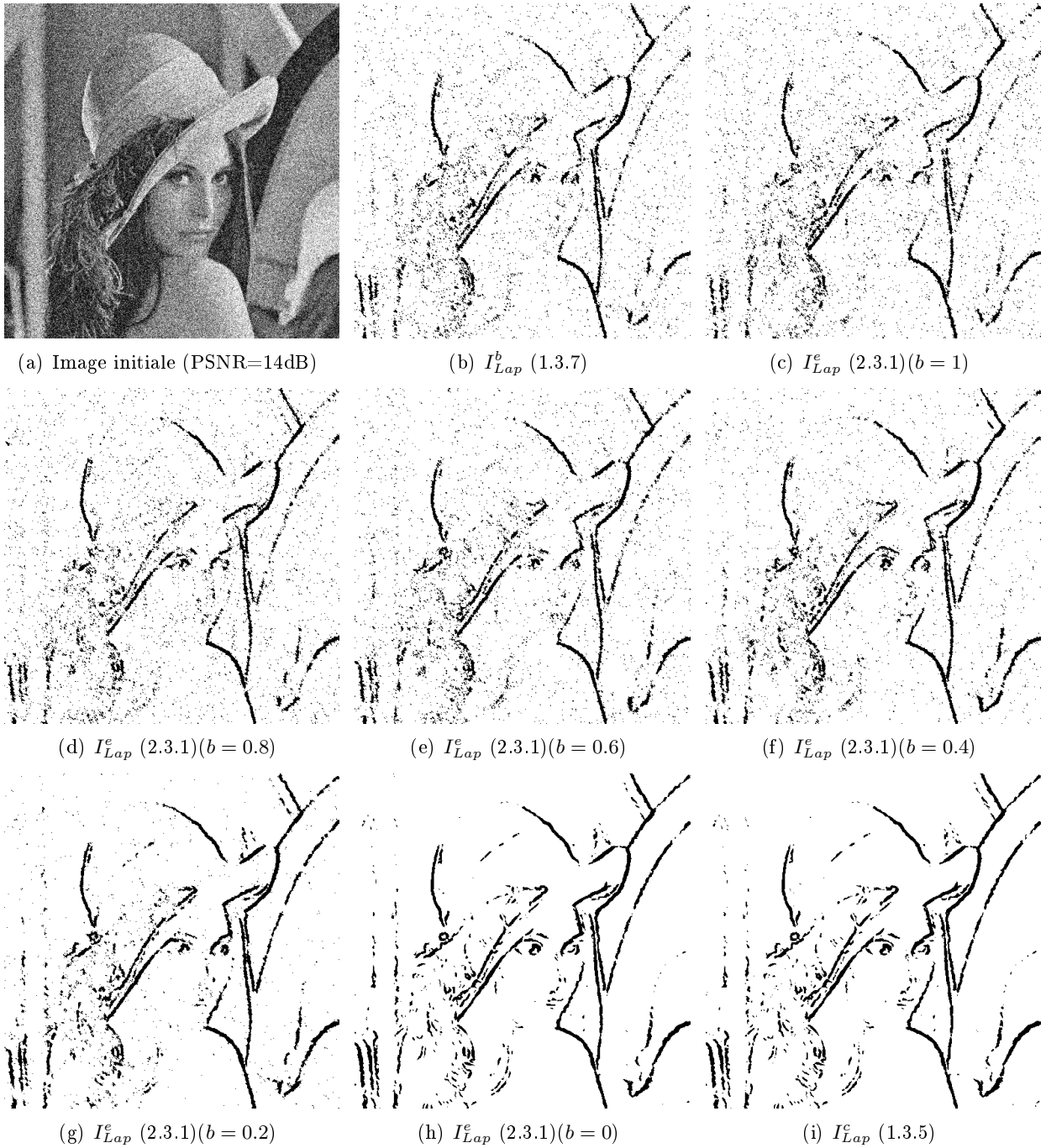


FIGURE 2.1 – Comparaison des segmentations générées par l'indicateur topologique (2.3.1) associé à un domaine perforé par une ellipse pour différentes valeurs de b et pour $a = \alpha = 1$

On peut étudier la robustesse de l'indicateur I_{Lap}^e (2.3.1), en fonction de b en illustrant d'une part le pourcentage de points associés à un indicateur I_{Lap}^e positif (positivité) et d'autre part en introduisant un indicateur permettant d'évaluer le pourcentage de contours détectés (robustesse). L'étude de la positivité de I_{Lap}^e permet de constater qu'il y a diminution d'énergie en tout point pour le cas du crack et parfois augmentation dans le cas d'une ellipse d'excentricité non nulle ($b \neq 0$). Pour la robustesse on détermine sur l'image non bruitée l'ensemble des contours donnés par I_{Lap}^c qui est un indicateur assez fiable en l'absence

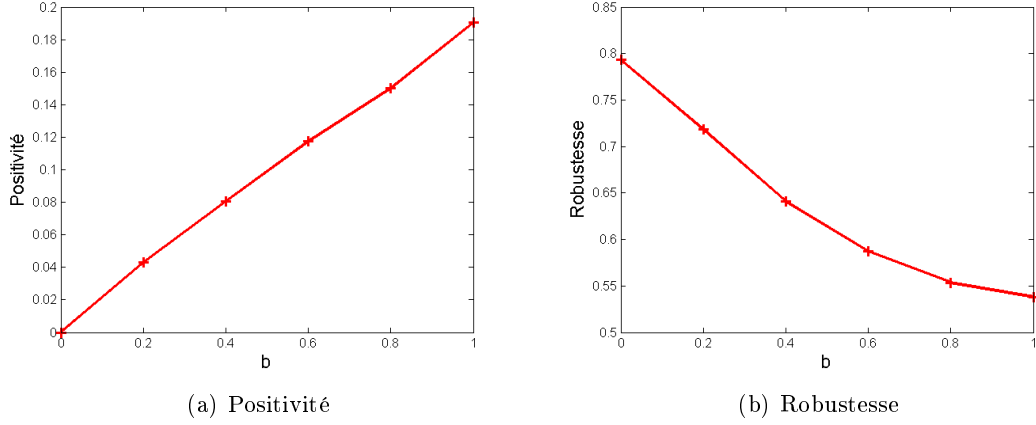


FIGURE 2.2 – (a) Pourcentage du nombre de points tels que $I_{Lap}^e > 0$, (b) indicateur de robustesse (2.3.2), en fonction de b et pour $a = \alpha = 1$.

de bruit (voir Figure 1.5) :

$$E_\delta = \{x \in \Omega, I_{Lap}^e \leq \delta\} \quad \text{avec } \delta \text{ tel que } \frac{\#E_\delta}{N} = 10\%$$

Sur l'image bruitée on calcule

$$F_\eta = \{x \in \Omega, I_{Lap}^e \leq \eta\} \quad \text{avec } \eta \text{ tel que } \frac{\#F_\eta}{N} = 10\%$$

puis on définit l'indicateur de robustesse suivant :

$$Robustesse \sim \frac{\#(E_\delta \cap F_\eta)}{\#E_\delta} \quad (2.3.2)$$

La Figure 2.2 illustre la positivité et la robustesse (2.3.2) pour l'image de la Figure 2.1-(a) bruitée à 14dB par un bruit additif gaussien ($\sigma = 50$). Les résultats que décrit cette figure viennent conforter l'étude qualitative de la Figure 2.1.

Chapitre 3

Calcul du gradient topologique pour une équation de la forme $-div(A(x)\nabla u) + u = f$ avec conditions de Neumann

Résumé. Dans les chapitres 1 et 2 et dans Belaid et al. [24], le modèle utilisé pour la détection de contours est basé sur une fonction coût dépendant d'une régularisation de l'image solution d'une équation de Laplace. Or, par son isotropie, on sait que l'opérateur laplacien a la mauvaise propriété de lisser les contours. Dans ce chapitre, on propose d'améliorer le modèle régularisant l'image observée en utilisant un opérateur de régularisation de la forme $-div(A(x)\nabla \cdot)$ où $A(x)$ est un tenseur symétrique défini positif. Pour que le modèle préserve les contours, on peut choisir $A(x)$ de telle sorte qu'aux points de contours, la régularisation ait lieu uniquement dans la direction de ces derniers. On parvient à expliciter complètement le GT seulement dans le cas où $A(x) = \alpha(x)I$. Dans le cas général, la valeur du GT est connue en fonction du potentiel extérieur associé au développement asymptotique du modèle direct. On termine ce chapitre par une application numérique qui permet de montrer que le modèle proposé avec $A(x) = \alpha(x)I$ est meilleur que celui utilisant l'opérateur laplacien étudié dans les chapitres 1 et 2 et introduit par Belaid et al. [24].

Introduction

Dans les chapitres 1 et 2 on a calculé la sensibilité par rapport au domaine de la fonction $j(\Omega) = J_\Omega(u_\Omega) = \int_\Omega |\nabla u_\Omega|^2$ où u_Ω est une régularisation de l'image observée f et est solution d'une EDP de type Laplace. Le laplacien est un opérateur isotrope qui lisse les contours. Dans ce chapitre on présente un nouveau modèle pour détecter les contours utilisant une EDP de la forme $-div(A(x)\nabla u_\Omega) + u_\Omega = f$ où $A(x)$ est un tenseur défini à partir d'une estimation de la localisation des contours et de leur direction et f est l'image observée éventuellement dégradée par du bruit gaussien.

3.1 Notations et problème

Soit σ une variété de dimension 1 de classe C^1 et de normale \vec{n} centrée en x_0 . On définit le domaine perturbé par $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{x_0 + \epsilon\sigma}$. On suppose que la perturbation ne touche pas le bord, et pour simplifier les notations on place l'origine en x_0 de telle sorte que $x_0 \equiv 0$. On note Λ le domaine extérieur au crack ($\Lambda = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\sigma}$), et $\sigma_\epsilon = \{x, \frac{x}{\epsilon} \in \sigma\}$. On a alors $\partial\Omega_\epsilon = \Gamma \cup \sigma_\epsilon$. On introduit l'espace de Sobolev avec poids :

$$W^1(\Lambda) = \left\{ u, \frac{u}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}} \log(2+r^2)} \in L^2(\Lambda), \nabla u \in L^2(\Lambda) \right\}$$

où $r = |x|$. Soit $\tilde{\sigma}$ une courbe régulière fermée de \mathbb{R}^2 contenant σ et soit $\tilde{\omega}$ le sous domaine de \mathbb{R}^2 tel que $\partial\tilde{\omega} = \tilde{\sigma}$. On note $\tilde{\omega}_\epsilon = \{x, \frac{x}{\epsilon} \in \tilde{\omega}\}$ et $\tilde{\Omega}_\epsilon = \Omega \setminus \tilde{\omega}_\epsilon$ (voir Figure 3.1). On définit le problème (P_ϵ) suivant

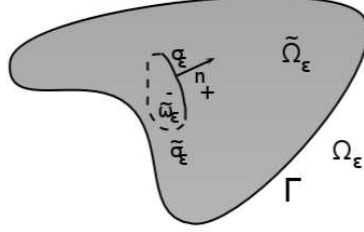


FIGURE 3.1 – Domaine perturbé par un crack

$$(P_\epsilon) \begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u_\epsilon) + u_\epsilon = f, & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ A(x)\nabla u_\epsilon \cdot \vec{n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_\epsilon \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où on suppose que le tenseur $A(x) : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie :

Hypothèses 1. • $\forall x \in \Omega$, $A(x)$ est symétrique définie positive (SDP) et $\eta = \inf_\Omega \|A\|_2 > 0$

• $A(x)$ est Holder continue : $\exists \beta > 0$, $\exists M > 0$, $\forall x, y \in \Omega$, $\|A(x) - A(y)\|_2 \leq M|x - y|^\beta$

En intégrant par parties sur $\Omega \setminus \tilde{\omega}_\epsilon \cup \tilde{\omega}_\epsilon$ on montre que la formulation variationnelle du problème (P_ϵ) s'écrit

$$\text{trouver } u_\epsilon \in H^1(\Omega_\epsilon) \text{ telle que } a_\epsilon(u_\epsilon, v) = l_\epsilon(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega_\epsilon)$$

avec

$$a_\epsilon(u, v) = \int_{\Omega_\epsilon} A(x)\nabla u \cdot \nabla v + uv \quad l_\epsilon(v) = \int_{\Omega_\epsilon} f v$$

On note toujours $J_\epsilon(u)$ la fonction coût définie en (1.3.1).

On rappelle que le GT est donné par le terme prépondérant dans la différence $J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0)$ quand $\epsilon \rightarrow 0$. En utilisant les équations vérifiées par u_ϵ et u_0 on obtient

$$\begin{aligned} J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) &= \int_{\Omega_\epsilon} 2\nabla u_0 \cdot \nabla(u_\epsilon - u_0) + \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla(u_\epsilon - u_0)|^2 \\ &= - \int_{\Omega_\epsilon} 2\Delta u_0 \cdot (u_\epsilon - u_0) - 2 \int_{\sigma_\epsilon} \partial_n u_0 [u_\epsilon - u_0] + \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla(u_\epsilon - u_0)|^2 \\ &= L_\epsilon(u_\epsilon - u_0) + \mathcal{I}_\epsilon + \mathcal{J}_\epsilon \end{aligned}$$

avec

$$L_\epsilon(u) = \int_{\Omega_\epsilon} -2\Delta u_0 u \quad \mathcal{I}_\epsilon = -2 \int_{\sigma_\epsilon} \partial_n u_0 [u_\epsilon - u_0] \quad \mathcal{J}_\epsilon = \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla(u_\epsilon - u_0)|^2 \quad (3.1.2)$$

On introduit le modèle adjoint $v_\epsilon \in H^1(\Omega_\epsilon)$

$$a_\epsilon(u, v_\epsilon) = -L_\epsilon(u) \quad \forall u \in H^1(\Omega_\epsilon) \quad (3.1.3)$$

Les équations d'Euler associées sont

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla v_\epsilon) + v_\epsilon = 2\Delta u_0 & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ A(x)\nabla v_\epsilon \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\epsilon \end{cases} \quad (3.1.4)$$

La différence $J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0)$ se réécrit en fonction de v_ϵ comme suit

$$J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) = - \int_{\sigma_\epsilon} A \nabla u_0 \cdot \vec{n} [w_\epsilon] + \mathcal{I}_\epsilon + \mathcal{J}_\epsilon = \mathcal{I}_\epsilon + \mathcal{J}_\epsilon + \mathcal{K}_\epsilon \quad (3.1.5)$$

où on a posé $w_\epsilon = v_\epsilon - v_0$ et \mathcal{K}_ϵ est défini par

$$\mathcal{K}_\epsilon = - \int_{\sigma_\epsilon} A \nabla u_0 \cdot \vec{n} [w_\epsilon] \quad (3.1.6)$$

Désormais il faut faire le développement asymptotique de w_ϵ en norme $H^1(\Omega_\epsilon)$.

3.2 Développement asymptotique de w_ϵ

On rappelle les équations d'Euler vérifiées par w_ϵ :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla w_\epsilon) + w_\epsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ A(x)\nabla w_\epsilon \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ A(x)\nabla w_\epsilon \cdot \vec{n} = -A(x)\nabla v_0 \cdot \vec{n} & \text{sur } \sigma_\epsilon \end{cases} \quad (3.2.1)$$

On fait un développement de Taylor en 0 de la condition au bord vérifiée par w_ϵ :

$A(x)\nabla v_0(x) \cdot \vec{n} = A(0)\nabla v_0(0) \cdot \vec{n} + O(x)$ pour $x \in \sigma_\epsilon$. On note $A_0 = A(0)$ et E_{A_0} la solution fondamentale associée à l'opérateur $-\operatorname{div}(A_0 \nabla \cdot)$ donnée en (3.7.1). Pour estimer w_ϵ on introduit $Q \in W^1(\Lambda)/\mathbb{R}$ la solution du problème extérieur :

$$(Q_{ext}) \begin{cases} -\operatorname{div}(A_0 \nabla Q) = 0 & \text{dans } \Lambda \\ A_0 \nabla Q \cdot \vec{n} = g(x) & \text{sur } \sigma \end{cases} \quad (3.2.2)$$

où $g(x) = -A_0 \nabla v_0(0) \cdot \vec{n} \in H_{00}^{1/2}(\sigma)'$. On suppose pour simplifier que σ est le segment de longueur 2 centré en x_0 et de normale \vec{n} . On suppose que σ s'écrit (on se place dans le repère local au crack) $\sigma = \{(s, 0), -1 < s < 1\}$, et on note $\vec{n} = \vec{e}_y = (0, 1)^T$. D'après le Théorème 3.7.3 (voir Annexe section 3.7), (Q_{ext}) admet une unique solution $Q \in W^1(\Lambda)/\mathbb{R}$ et Q s'exprime comme un potentiel double couche :

$$Q(x) = \int_{\sigma} \lambda(y) A_0 \nabla E_{A_0}(y - x) \cdot \vec{n}(y) d\sigma$$

avec $\lambda(x) = V \sqrt{1 - s^2} \in H_{00}^{1/2}(\sigma)$ pour $x = (s, 0) \in \sigma$ où $V = \frac{2A_0 \nabla v_0(0) \cdot \vec{e}_y}{|A_0|^{1/2}}$ et en notant $|A_0|$ le déterminant de A_0 . D'après le Lemme 3.7.5 (voir Annexe section 3.7) on a $w_\epsilon = \epsilon Q\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + e_\epsilon$ avec $\|e_\epsilon\|_{1, \Omega_\epsilon} = O(\epsilon^{1+\beta})$. De la même manière on introduit P le problème extérieur défini par (3.2.2) avec $g(x) = -A_0 \nabla u_0(0) \cdot \vec{n}$. On a $u_\epsilon - u_0 = \epsilon P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + r_\epsilon$ avec $\|r_\epsilon\|_{1, \Omega_\epsilon} = O(\epsilon^{1+\beta})$.

3.3 Estimations de \mathcal{I}_ϵ , \mathcal{J}_ϵ et \mathcal{K}_ϵ

Lemme 3.3.1. *Soient \mathcal{I}_ϵ , \mathcal{J}_ϵ et \mathcal{K}_ϵ donnés en (3.1.2) et (3.1.6), on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\epsilon &= -2 \nabla u_0(0) \cdot \vec{e}_y \int_{\sigma} \mu(y) d\sigma + o(\epsilon^2) \\ \mathcal{J}_\epsilon &= \epsilon^2 |P|_{1, \Lambda}^2 + o(\epsilon^2) \\ \mathcal{K}_\epsilon &= -\epsilon^2 A_0 \nabla u_0(0) \cdot \vec{e}_y \int_{\sigma} \lambda(y) d\sigma + o(\epsilon^2) \end{aligned}$$

où on rappelle que $\Lambda = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\sigma}$ et $\mu(y)$ est la densité associée à l'écriture de P sous la forme de potentiel double couche. Dans le cas où $A(x) = \alpha(x)I$, le terme \mathcal{J}_ϵ se réécrit comme suit :

$$\mathcal{J}_\epsilon = \epsilon^2 \nabla u_0(0) \cdot \vec{e}_y \int_{\sigma} \mu(y) d\sigma + o(\epsilon^2)$$

Démonstration. En utilisant un changement de variable, un développement de Taylor en 0 puis le Lemme 3.7.5 (voir Annexe section 3.7) on obtient

$$\mathcal{K}_\epsilon = -\epsilon^2 A(0) \nabla u_0(0) \cdot \vec{e}_y \int_{\sigma} [Q] d\sigma + \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= -\epsilon \int_{\sigma} A(0) \nabla u_0(0) \cdot \vec{n} [e_\epsilon(\epsilon x)] d\sigma & \mathcal{F}_2 &= -\epsilon \int_{\sigma} (A(\epsilon x) - A(0)) \nabla u_0(\epsilon x) \cdot \vec{n} [w_\epsilon(\epsilon x)] d\sigma \\ \mathcal{F}_3 &= -\epsilon \int_{\sigma} A(0) (\nabla u_0(\epsilon x) - \nabla u_0(0)) \cdot \vec{n} [w_\epsilon(\epsilon x)] d\sigma \end{aligned}$$

Grâce au Lemme 3.7.1 (Annexe section 3.7) et un changement de variable on déduit

$$|\mathcal{F}_1| \leq C\epsilon \| [e_\epsilon(\epsilon x)] \|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)} \leq C\epsilon |e_\epsilon(\epsilon x)|_{1, B_2 \setminus \bar{\sigma}} \leq C\epsilon |e_\epsilon|_{1, \Omega_\epsilon} \leq C\epsilon^{2+\beta}$$

De manière similaire en utilisant les Hypothèses 1, on montre que $|\mathcal{F}_2| \leq C\epsilon^{2+\beta}$ et par un développement de Taylor de u_0 en 0 on obtient $|\mathcal{F}_3| \leq C\epsilon^3$. Enfin, grâce à la relation de saut $[Q] = \lambda$ (Théorème 3.7.3), on obtient la deuxième estimation.

Pour \mathcal{I}_ϵ , on applique le Lemme 3.7.5 à $u_\epsilon - u_0$, et on note P le potentiel extérieur vérifiant (3.2.2) avec $g(x) = -A_0 \nabla u_0(0) \cdot \vec{n}$ et r_ϵ tels que $u_\epsilon - u_0 = \epsilon P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + r_\epsilon$ avec $\|r_\epsilon\|_{1, \Omega_\epsilon} = O(\epsilon^{1+\beta})$. En utilisant le même raisonnement que pour \mathcal{K}_ϵ on obtient

$$\mathcal{I}_\epsilon = -2\epsilon^2 \nabla u_0(0) \cdot \vec{e}_y \int_{\sigma_\epsilon} \mu d\sigma + o(\epsilon^2)$$

Puis le développement asymptotique de $u_\epsilon - u_0$ permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\epsilon &= \int_{\Omega_\epsilon} \nabla P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \cdot \nabla(u_\epsilon - u_0) + \int_{\Omega_\epsilon} \nabla r_\epsilon \cdot \nabla(u_\epsilon - u_0) \\ &= \int_{\Omega_\epsilon} \left| \nabla P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right|^2 + \int_{\Omega_\epsilon} \nabla P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \cdot \nabla r_\epsilon + \int_{\Omega_\epsilon} \nabla r_\epsilon \cdot \nabla(u_\epsilon - u_0) \\ &= \epsilon^2 \int_{\frac{\Omega_\epsilon}{\epsilon}} |\nabla P(x)|^2 dx + \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_4 \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{F}_3 = \int_{\Omega_\epsilon} \nabla P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \cdot \nabla r_\epsilon \quad \mathcal{F}_4 = \int_{\Omega_\epsilon} \nabla r_\epsilon \cdot \nabla(u_\epsilon - u_0)$$

Les estimations $\|r_\epsilon\|_{1, \Omega_\epsilon} = O(\epsilon^{1+\beta})$ et $|u_\epsilon - u_0|_{1, \Omega_\epsilon} = O(\epsilon)$ et le Lemme 3.7.4 nous donnent directement que $|\mathcal{F}_3| \leq C\epsilon^{2+\beta}$ et $|\mathcal{F}_4| \leq C\epsilon^{2+\beta}$. Ensuite comme $\frac{\Omega_\epsilon}{\epsilon} \rightarrow \Lambda$ on obtient $\mathcal{J}_\epsilon = \epsilon^2 |P|_{1, \Lambda}^2 + o(\epsilon^2)$.

Dans le cas où $A(x) = \alpha(x)I$, P est harmonique et on peut exprimer sa semi-norme $|\cdot|_{1, \Lambda}$, en fonction des données aux bords et du saut de P au travers de σ , en intégrant par parties :

$$\int_{\Lambda} |\nabla P(y)|^2 dy = - \int_{\sigma} \partial_n P(y) [P(y)] d\sigma$$

Enfin en utilisant la relation de saut $[P]_\sigma = -\mu$ on obtient le résultat dans ce cas particulier. □

Remarque 3.3.2. Dans le cas où $A(x)$ n'est pas proportionnelle à l'identité, on ne parvient pas à expliciter la semi-norme $|P|_{1, \Lambda}^2$ car pour tout $M \neq Cste \times I$, $\nabla \Psi$, $M \nabla P(x) = \nabla \Psi(x)$.

3.4 Calcul du GT dans le cas du crack

En revenant à la différence $J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0)$ (3.1.5), en utilisant le Lemme 3.3.1 et le Théorème 3.7.3, on obtient

$$J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) = -2\epsilon^2 \nabla u_0(0) \cdot \vec{e}_y \int_{-1}^1 U \sqrt{1-s^2} ds + o(\epsilon^2) + \epsilon^2 |P|_{1,\Lambda}^2 - \epsilon^2 A_0 \nabla u_0(0) \cdot \vec{e}_y \int_{-1}^1 V \sqrt{1-s^2} ds$$

où $V = \frac{2A_0 \nabla v_0(0) \cdot \vec{e}_y}{|A_0|^{1/2}}$ et $U = \frac{2A_0 \nabla u_0(0) \cdot \vec{e}_y}{|A_0|^{1/2}}$. Dans le repère local au crack l'expression du GT est donc

$$\mathcal{I}^c(0) = \frac{\pi}{|A_0|^{1/2}} \left(-2\nabla u_0(0) \cdot \vec{e}_y A_0 \nabla u_0(0) \cdot \vec{e}_y - A_0 \nabla u_0(0) \cdot \vec{e}_y A_0 \nabla v_0(0) \cdot \vec{e}_y \right) + |P|_{1,\Lambda}^2$$

où P est le problème extérieur donné par (3.2.2) avec $g(x) = -A_0 \nabla u_0(0) \cdot \vec{n}$. Dans le cas où $A(x) = \alpha(x)I$, on peut expliciter la semi-norme $|P|_{1,\Lambda}$ et réécrire le GT dans le repère local au crack :

$$\mathcal{I}^c(0) = \pi \left(-\alpha(0) \nabla u_0(0) \cdot \vec{e}_y \nabla v_0(0) \cdot \vec{e}_y - (\nabla u_0(0) \cdot \vec{e}_y)^2 \right)$$

3.5 Conclusion : expression générale pour un crack quelconque

Le GT associé à l'EDP (3.1.1) et à la fonction (1.3.1), pour un domaine fissuré par un crack de centre x_0 et de normale \vec{n} est

$$\mathcal{I}^c(x_0, \vec{n}) = \frac{\pi}{|A(x_0)|^{1/2}} \left(-2\nabla u_0(x_0) \cdot \vec{n} A(x_0) \nabla u_0(x_0) \cdot \vec{n} - A(x_0) \nabla u_0(x_0) \cdot \vec{n} A(x_0) \nabla v_0(x_0) \cdot \vec{n} \right) + |P|_{1,\Lambda}^2 \quad (3.5.1)$$

avec u_0 et v_0 données respectivement par (3.1.1) et (3.1.4) pour $\epsilon = 0$ et où P est le problème extérieur donné par (3.2.2) avec $g(x) = -A_0 \nabla u_0(0) \cdot \vec{n}$. Dans le cas où $A(x) = \alpha(x)I$, on peut expliciter $\mathcal{I}^c(x_0, \vec{n})$:

$$\mathcal{I}^c(x_0, \vec{n}) = \pi \left(-\alpha(x_0) \nabla u_0(x_0) \cdot \vec{n} \nabla v_0(x_0) \cdot \vec{n} - (\nabla u_0(x_0) \cdot \vec{n})^2 \right)$$

On définit l'indicateur topologique pour détecter les contours, suivant :

$$I_{div(A\nabla \cdot)}^c(x_0) = \min_{\|\vec{n}\|=1} \mathcal{I}^c(x_0, \vec{n}) \quad (3.5.2)$$

Remarque 3.5.1. Pour un domaine perforé et pour $A(x) = \alpha(x)I$, le GT associé à l'EDP (3.1.1) et à la fonction coût (1.3.1) est :

$$\mathcal{I}^b(x_0) = -2\pi\alpha(x_0) \nabla u_0(x_0) \nabla v_0(x_0) - \pi |\nabla u_0(x_0)|^2 + \pi(f(x_0) - u_0(x_0))v_0(x_0)$$

3.6 Application numérique

Dans cette section, on illustre l'indicateur topologique $I_{div(A\nabla \cdot)}^c$ (3.5.2) associé à la fonction coût $J_\epsilon(u) = \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u|^2$ et à l'EDP (3.1.1) basée sur l'opérateur $div(A(x)\nabla \cdot)$ avec $A(x) = \alpha(x)I$. Ici, $\alpha(x)$ est défini à partir de I_{Lap}^c (1.3.5) associé à la même fonction coût $J_\epsilon(u)$ et à l'EDP (1.3.2) définie à partir de l'opérateur de Laplace. Plus précisément, en s'inspirant du modèle de Perona-Malik (1.1.1) on définit

$$\alpha(x) = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \left(\frac{I_{Lap}^c(x)}{\lambda} \right)^2}} \quad (3.6.1)$$

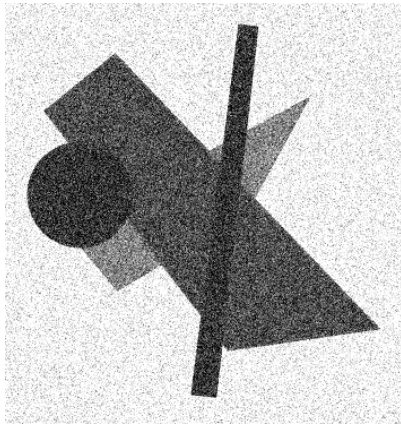
avec $\lambda > 0$ une constante de “seuillage” et $\gamma > 0$ un paramètre à régler en fonction du bruit. Un meilleur choix aurait été de prendre $A(x)$ en fonction de la direction donnée par le calcul de I_{Lap}^c . Mais pour cela il faut obtenir un calcul explicite du GT (3.5.1), ce qui semble techniquement difficile. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à la section 4.7 du chapitre 4 où un modèle de restauration anisotrope basé sur le GT est présenté. Avec le choix de $\alpha(x)$ donné en (3.6.1), au niveau des contours la diffusion est plus faible et toujours isotrope. On s’attend donc à ce que les contours soient plus fins mais aussi plus bruités que pour le modèle utilisant le laplacien comme opérateur de régularisation.

On peut étendre le modèle (3.1.1) à un modèle plus général de défloutage : on suppose que l’image observée s’écrit $f = Ku + b$ où K est le flou modélisé par une convolution telle que $K\mathbf{1} \neq 0$, u est l’image à retrouver et b est du bruit gaussien (voir chapitre 4). En écrivant que $u_\Omega = \operatorname{argmin}_{H^1(\Omega)} \int_\Omega \alpha(x) |\nabla u|^2 + (f - Ku)^2$, on déduit les modèles direct et adjoint sur le domaine non perturbé correspondant à ce problème :

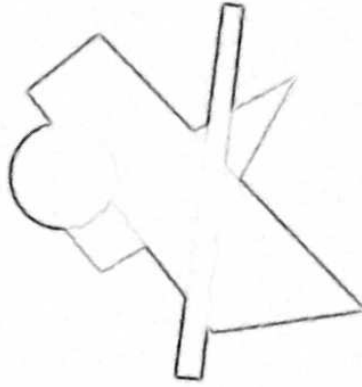
$$(\mathcal{P}_0) \begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha(x)\nabla u_0) + K^*Ku_0 = K^*f & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u_0 = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.6.2)$$

$$(\mathcal{Q}_0) \begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha(x)\nabla v_0) + K^*Kv_0 = 2\Delta u_0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n v_0 = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.6.3)$$

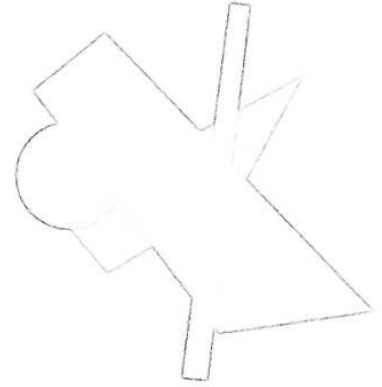
On peut montrer que le GT associé à ce problème, pour un domaine fissuré, s’écrit de la même manière en fonction des états direct u_0 et adjoint v_0 définis ci-dessus. On note $I_{\operatorname{div}(\alpha\nabla\cdot)}^c$ l’indicateur topologique (3.5.2) pour $A(x) = \alpha(x)I$. Sur les Figures 3.2 et 3.3, on compare I_{Lap}^c (1.3.5) et $I_{\operatorname{div}(\alpha\nabla\cdot)}^c$ (3.5.2) pour des images bruitées par du bruit gaussien. On constate que les contours détectés par $I_{\operatorname{div}(\alpha\nabla\cdot)}^c$ sont plus fins mais également moins réguliers que ceux détectés par I_{Lap}^c .



(a) Image Initiale



(b) I_{Lap}^c , (1.3.5), ($\alpha = 1$)



(c) $I_{\operatorname{div}(\alpha\nabla\cdot)}^c$ (3.5.2), ($\gamma = 2, \lambda = 150$)



(d) Zoom de I_{Lap}^c



(e) Zoom de $I_{\operatorname{div}(\alpha\nabla\cdot)}^c$

FIGURE 3.2 – Comparaison des indicateurs topologiques $I_{\operatorname{div}(\alpha\nabla\cdot)}^c$ (3.5.2) et I_{Lap}^c (1.3.5) pour une image bruitée par du bruit gaussien (PSNR=16dB).

La Figure 3.3 montre les segmentations générées par les deux indicateurs I_{Lap}^c et $I_{div(\alpha\nabla)}^c$: on seuille chaque indicateur afin de n'avoir que 7% des points détectés. On constate à nouveau que les contours sont détectés plus finement et en plus grand nombre par $I_{div(\alpha\nabla)}^c$ que par I_{Lap}^c mais qu'ils sont moins réguliers pour $I_{div(\alpha\nabla)}^c$ que pour I_{Lap}^c .

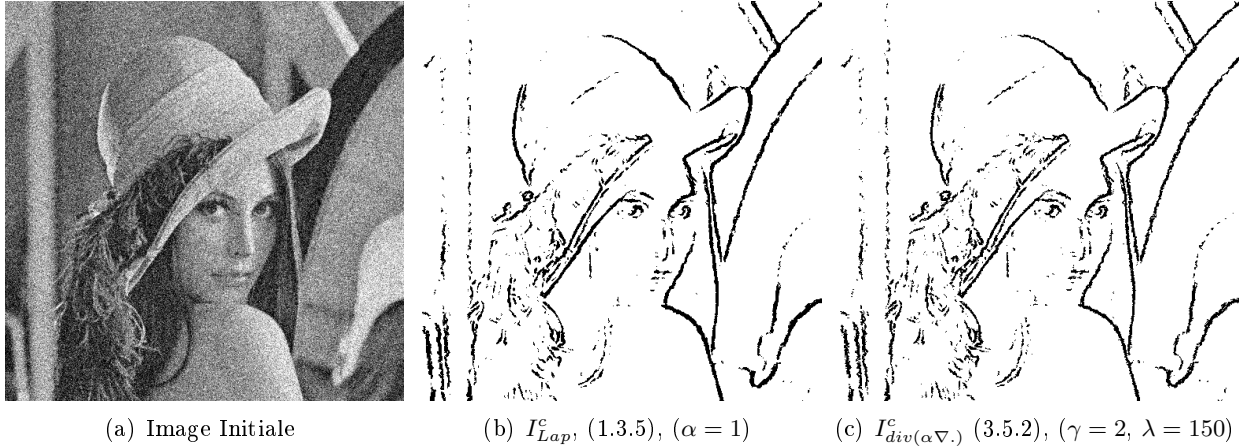


FIGURE 3.3 – Comparaison des indicateurs topologiques $I_{div(\alpha\nabla)}^c$ (3.5.2) et I_{Lap}^c (1.3.5) pour une image bruitée par du bruit gaussien (PSNR=16dB).

Les Figures 3.4 et 3.5 illustrent également les deux indicateurs I_{Lap}^c (4.6.1) et $I_{div(\alpha\nabla)}^c$ (3.5.2) sur des images bruitées et floutées. On peut voir que les contours sont plus fins pour $I_{div(\alpha\nabla)}^c$ que pour I_{Lap}^c . Sur la Figure 3.5, on observe que lorsque le niveau de bruit est relativement faible (PSNR \geq 20dB) les résultats obtenus par $I_{div(\alpha\nabla)}^c$ sont bons. En effet les contours sont moins altérés par le fait que les états direct (3.6.2) et adjoint (3.6.3) soient moins lissés au niveau des contours. De même, si le bruit est trop important, le fait d'augmenter γ va lisser les contours notamment dans leur direction normale et donc ces derniers vont être élargis.

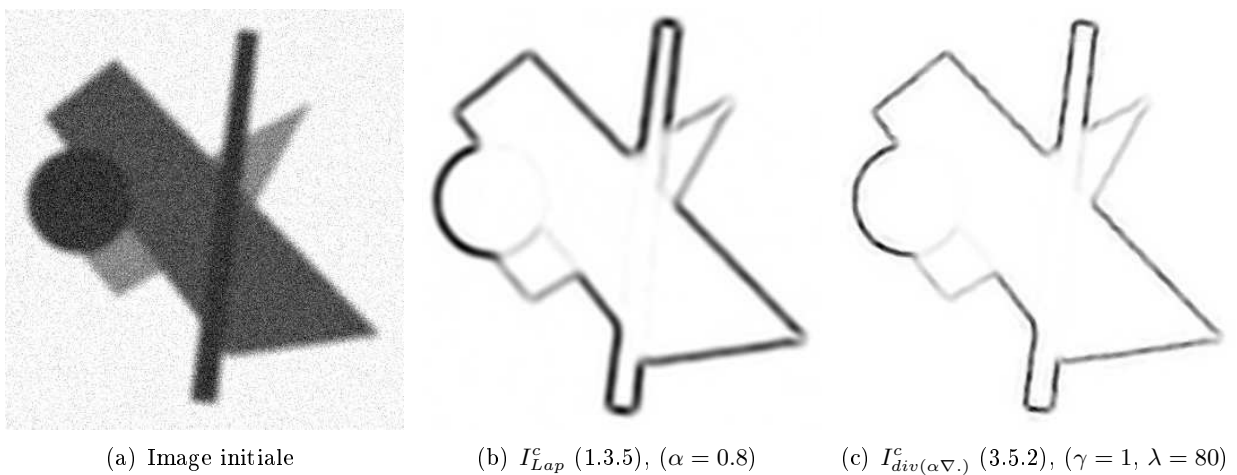


FIGURE 3.4 – Comparaison des indicateurs topologiques $I_{div(\alpha\nabla)}^c$ (3.5.2) et I_{Lap}^c (1.3.5) pour une image floutée par convolution gaussienne ($\sigma = 5$) et bruitée par du bruit gaussien (PSNR=16dB).

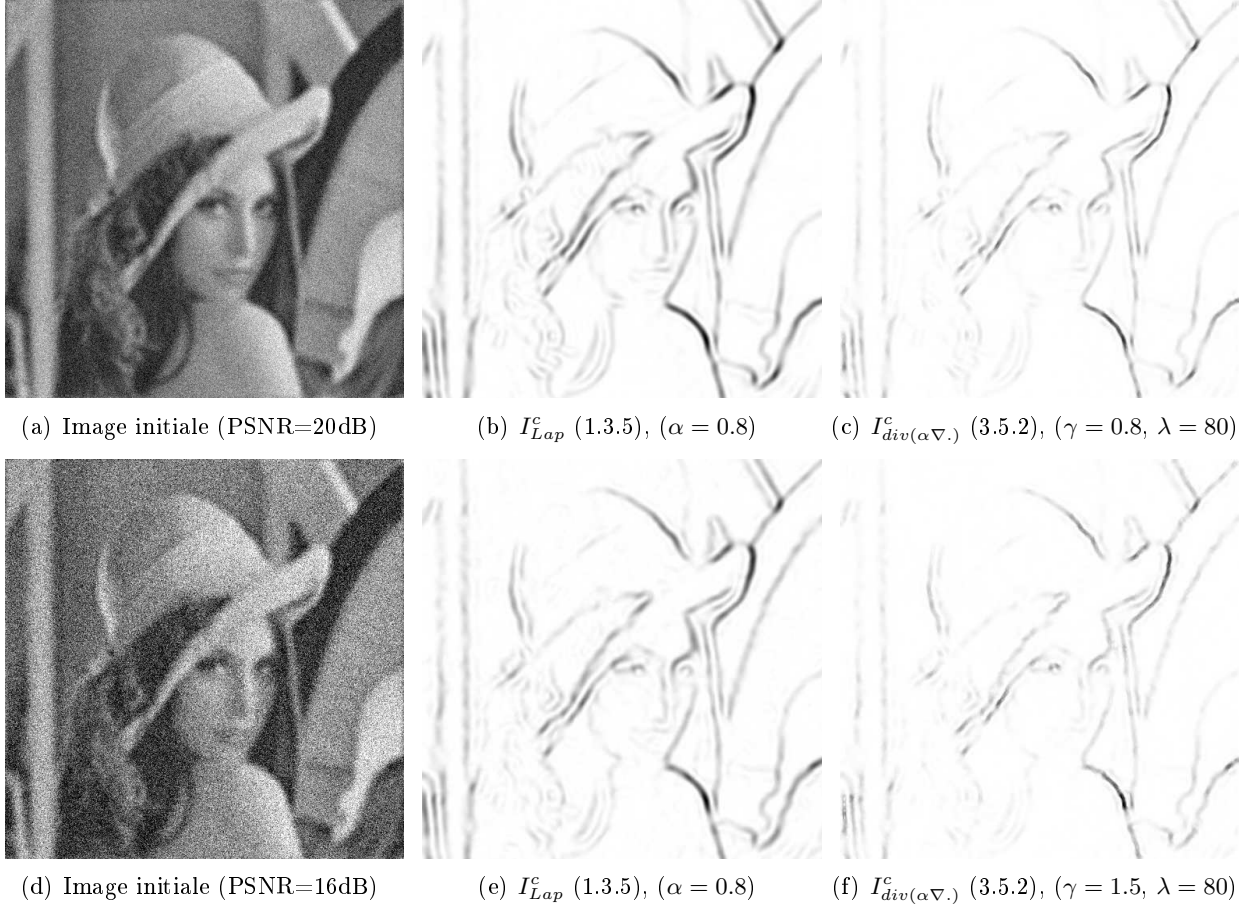


FIGURE 3.5 – Comparaison des indicateurs topologiques $I_{div(\alpha \nabla \cdot)}^c$ (3.5.2) et I_{Lap}^c (1.3.5) pour une image floutée par convolution gaussienne ($\sigma = 5$) et bruitée par du bruit gaussien pour différents niveaux de bruit.

3.7 Annexe

On rappelle que l'on note $\Lambda = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\sigma}$. Pour une matrice M , $|M|$ désigne son déterminant et M^{-1} son inverse. Soit $A_0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique définie positive (SDP), on note $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et D la matrice diagonale telles que $P^T A_0 P = D$. Enfin $D^{1/2}$ est la racine carrée de D et $D^{-1/2} = (D^{1/2})^{-1}$. On introduit

$$E_{A_0}(x) = \frac{1}{|D^{1/2}|} E \left(D^{-1/2} P^T x \right) \quad (3.7.1)$$

la solution fondamentale associée à l'opérateur $-div(A_0 \nabla \cdot)$.

Lemme 3.7.1. Soit $u \in H^1(\Omega \setminus \bar{\sigma})$, on a

$$\|[u]\|_{H_0^{1/2}(\sigma)} \leq C \|u\|_{H^1(B_2 \setminus \bar{\sigma})}$$

où $[u] = u^+ - u^-$ est le saut de u à travers σ .

Démonstration. On utilise que $[u]_{\bar{\sigma}} = 0$, la définition de la norme $H_0^{1/2}(\sigma)$, puis on explicite le saut et on applique le théorème de trace sur $B_2 \setminus \bar{\omega}$ et sur $\tilde{\omega}$: pour une fonction régulière ψ

$$\|[u]\|_{H_0^{1/2}(\sigma)} = \|[u + \psi]\|_{H^{1/2}(\bar{\sigma})} \leq \|u^+ + \psi\|_{H^{1/2}(\bar{\sigma})} + \|u^- + \psi\|_{H^{1/2}(\bar{\sigma})} \leq C \|u + \psi\|_{1, B_2 \setminus \bar{\sigma}}$$

En prenant $\psi \in \mathbb{R}$ et en utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger on obtient le résultat. \square

Lemme 3.7.2. Soit $g \in H_{00}^{1/2}(\sigma)'$, A_0 SDP, et $u \in H^1(B_2 \setminus \bar{\sigma})$ tel que $\text{div}(A_0 \nabla u) \in L^2(B_2 \setminus \bar{\sigma})$ alors

$$\|A_0 \nabla u \cdot \vec{n}\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma')} \leq (|u|_{1, B_2 \setminus \bar{\sigma}} + \|\text{div}(A_0 \nabla u)\|_{L^2(B_2 \setminus \bar{\sigma})})$$

Démonstration. Soit $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\sigma)$, on note toujours φ le prolongement de φ par 0 sur $\tilde{\sigma} \setminus \bar{\sigma}$. Soit $R(\varphi)$ un relèvement continu de φ tel que $\|R(\varphi)\|_{1, B_2 \setminus \bar{\sigma}} \leq \|\varphi\|_{1/2, \tilde{\sigma}}$. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} A_0 \nabla u \cdot \vec{n} \varphi &= \int_{\tilde{\sigma}} A_0 \nabla u \cdot \vec{n} \varphi = \int_{B_2 \setminus \bar{\sigma}} \text{div}(A_0 \nabla u) R(\varphi) + A_0 \nabla u \cdot \nabla R(\varphi) \\ &\leq (|u|_{1, B_2 \setminus \bar{\sigma}} + \|\text{div}(A_0 \nabla u)\|_{L^2(B_2 \setminus \bar{\sigma})}) \|R(\varphi)\|_{1, B_2 \setminus \bar{\sigma}} \leq (|u|_{1, B_2 \setminus \bar{\sigma}} + \|\text{div}(A_0 \nabla u)\|_{L^2(B_2 \setminus \bar{\sigma})}) \|\varphi\|_{1/2, \tilde{\sigma}} \end{aligned}$$

Puis en prenant le sup sur les φ tels que $\|\varphi\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)} = \|\varphi\|_{1/2, \tilde{\sigma}} = 1$ on obtient le résultat. \square

Soit $g \in H_{00}^{1/2}(\sigma)'$ et $Q \in W^1(\Lambda)/\mathbb{R}$ la solution du problème extérieur

$$(Q) \begin{cases} -\text{div}(A_0 \nabla Q) = 0 \text{ sur } \Lambda \\ A_0 \nabla Q \cdot \vec{n} = g \text{ sur } \sigma \end{cases} \quad (3.7.2)$$

Théorème 3.7.3. 1. Le problème (3.7.2) admet une solution unique dans $W^1(\Lambda)/\mathbb{R}$ et l'application $g \mapsto Q$ est continue de $H_{00}^{1/2}(\sigma)'$ dans $W^1(\Lambda)/\mathbb{R}$.

2. La solution de (3.7.2) s'écrit sous la forme d'un potentiel double couche de densité $\lambda \in H_{00}^{1/2}(\sigma)$:

$$Q(x) = \int_{\sigma} \lambda(y) A_0 \nabla E_{A_0}(y-x) \cdot n(y) d\sigma, \text{ pour } x \in \Lambda \quad (3.7.3)$$

3. On a la relation de saut à travers σ :

$$[Q] = Q|_{\sigma}^+ - Q|_{\sigma}^- = \lambda \quad (3.7.4)$$

4. La densité λ est donnée par l'équation intégrale :

$$g(x) = \oint_{\sigma} \lambda(y) A_0 \nabla_x (A_0 \nabla E_{A_0}(y-x) \cdot n(y)) \cdot n(x) d\sigma(y)$$

où \oint désigne la valeur principale de Cauchy.

5. Dans le cas où $\sigma = \{(s, 0) \times \{0\}, -1 < s < 1\}$ et $g(x) = \text{cst} = V$ la densité λ est donnée par

$$\lambda(s) = \frac{-2}{|A_0|^{1/2}} V \sqrt{1-s^2}, \quad \forall (s, 0) \in \Sigma \quad (3.7.5)$$

Démonstration. On rappelle (voir Figure 3.1) que l'on note $\tilde{\omega}$ le domaine de contour $\tilde{\sigma}$. On note $\Delta_{A_0} = \text{div}(A_0 \nabla \cdot)$ et on introduit les deux espaces :

$$H^1(\Delta_{A_0}, \tilde{\omega}) = \{u \in H^1(\tilde{\omega}), \Delta_{A_0} u \in L^2(\tilde{\omega})\}$$

$$W^1(\Delta_{A_0}, \tilde{\omega}') = \{u \in W^1(\tilde{\omega}), (1+r^2)^{\frac{1}{2}} \log(2+r^2) \Delta_{A_0} u \in L^2(\tilde{\omega})\}$$

où $\tilde{\omega}'$ désigne le domaine extérieur à $\tilde{\omega}$. Sur $\tilde{\omega}$ on utilise la formule de Green : soit $u \in H^1(\Delta_{A_0}, \tilde{\omega})$

$$\int_{\tilde{\omega}} A_0 \nabla u \cdot \nabla v = - \int_{\tilde{\omega}} \Delta_{A_0} u v + \int_{\tilde{\sigma}} A_0 \nabla u \cdot \vec{n} v, \quad \forall v \in H^1(\tilde{\omega}) \quad (3.7.6)$$

Sur $\tilde{\omega}'$ on a la formule de Green suivante [46, 45] : soit $u \in W^1(\Delta_{A_0}, \tilde{\omega}')$

$$\int_{\tilde{\omega}'} A_0 \nabla u \cdot \nabla v = - \int_{\tilde{\omega}'} \Delta_{A_0} u v - \int_{\tilde{\sigma}} A_0 \nabla u \cdot \vec{n} v, \quad \forall v \in W^1(\tilde{\omega}') \quad (3.7.7)$$

On définit

$$K = \{u \in H^1(\Delta_{A_0}, \tilde{\omega})/\mathbb{R} \times W^1(\Delta_{A_0}, \tilde{\omega}')/\mathbb{R}, \text{supp}(\Delta_{A_0} u) = \sigma, [\partial_n u]_\sigma = 0, [u]_{\tilde{\sigma} \setminus \bar{\sigma}} = 0\}$$

où $[u]_\sigma$ désigne le saut de u à travers σ (idem pour $[u]_{\tilde{\sigma} \setminus \bar{\sigma}}$). On réécrit K en utilisant la régularité des fonctions $H_{Loc}^1(\Lambda)$

$$K = \{u \in W^1(\Delta_{A_0}, \Lambda)/\mathbb{R}, \text{supp}(\Delta_{A_0} u) = \sigma, [\partial_n u]_\sigma = 0\}$$

En additionnant (3.7.6) et (3.7.7) on obtient l'égalité suivante :

$$\int_{\Lambda} A_0 \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\sigma} A_0 \nabla u \cdot \vec{n} u[v] \quad \forall u \in K \quad \forall v \in W^1(\Lambda)/\mathbb{R} \quad (3.7.8)$$

On remarque que K est un espace de Hilbert comme sous ensemble fermé de l'espace de Hilbert $W^1(\Lambda)/\mathbb{R}$. Le problème (3.7.2) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\text{trouver } Q \in K \text{ tel que } A_0 \nabla Q \cdot \vec{n} = g \text{ sur } \sigma \quad (\mathcal{P})$$

À partir de (3.7.8) on en déduit la formulation variationnelle du problème (\mathcal{P}) suivante :

$$\text{trouver } Q \in K \text{ tel que } \int_{\Lambda} A_0 \nabla Q \cdot \nabla v = \int_{\sigma} g[v] \quad \forall v \in K \quad (3.7.9)$$

Nous allons montrer que ce problème est coercif et continu.

La coercivité provient de la positivité de A_0 et de l'équivalence de la norme sur $W^1(\Lambda)/\mathbb{R}$ avec la semi norme $|u|_{1,\Lambda}$ (voir Lemme 0.0.2 en prérequis avec $m = 1$).

Pour la continuité, on utilise le Lemme 3.7.1 et la définition de l'espace $W^1(\Lambda)$:

$$\int_{\sigma} h[v] \leq \|h\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)} \| [v] \|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)} \leq C \|h\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)'} |v|_{1, B_2 \setminus \bar{\sigma}} \leq C \|h\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)'} |v|_{1, \Lambda}$$

L'application linéaire correspondant à la formulation variationnelle du problème (\mathcal{P}) est donc continue. Enfin on conclut à l'unicité et l'existence de la solution Q du problème (3.7.2) en appliquant le théorème de Lax-Milgram.

On définit ensuite l'isomorphisme

$$J_0 : \begin{array}{ccc} g & \longrightarrow & Q \\ H_{00}^{1/2}(\sigma)' & \longrightarrow & K \end{array}$$

En reprenant (3.7.8), avec $v \in K$, on obtient :

$$\int_{\Lambda} A_0 \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Sigma} A_0 \nabla v \cdot \vec{n} [u] \quad \forall u \in K \quad \forall v \in K \quad (3.7.10)$$

Soit $q \in H_{00}^{1/2}(\sigma)$, on considère le problème suivant :

$$\text{trouver } P \in K \text{ tel que } [P]_\sigma = q \quad (\mathcal{P}')$$

et soit

$$J_1 : \quad \begin{aligned} q &\longrightarrow P \\ H_{00}^{1/2}(\sigma) &\longrightarrow K \end{aligned}$$

Nous allons montrer que J_1 est un isomorphisme. La formulation variationnelle associée au problème (\mathcal{P}') est

$$\text{trouver } P \in K \text{ tel que } \int_{\Lambda} A_0 \nabla v \cdot \nabla v = \int_{\sigma} q A_0 \nabla v \cdot \vec{n} \quad \forall v \in K$$

La coercivité sur K est immédiate et utilise le même argument que pour le problème (\mathcal{P}) . Pour la continuité, on utilise le Lemme 3.7.2 et le fait que $\Delta_{A_0} v = 0$:

$$\int_{\sigma} q A_0 \nabla v \cdot \vec{n} = \|q\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)} \|A_0 \nabla v \cdot \vec{n}\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)'} \leq \|q\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)} |v|_{1, B_2 \setminus \tilde{\sigma}} \leq C \|q\|_{H_{00}^{1/2}(\Sigma)} |v|_{1, \Lambda}$$

La forme linéaire associée à la formulation variationnelle de (\mathcal{P}') est donc continue et on conclut avec le théorème de Lax-Milgram. On en déduit que $J = J_1^{-1} \circ J_0$ défini par $J : g \mapsto q$ est un isomorphisme de $H_{00}^{1/2}(\sigma)'$ dans $H_{00}^{1/2}(\sigma)$.

Pour les points 2 et 3, on vérifie que $E_{A_0} \in W^1(\Lambda)/\mathbb{R}$, et en appliquant la formule de Green sur $\tilde{\omega} \cup \tilde{\omega}'$ pour $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \tilde{\sigma}$:

$$Q(x) = \int_{\tilde{\sigma}} [Q] A_0 \nabla E_{A_0}(y-x) \cdot \vec{n}(y) d\sigma_y - \int_{\tilde{\sigma}} [A_0 \nabla Q \cdot \vec{n}(y)] E_{A_0}(y-x) d\sigma_y = \int_{\sigma} [Q] A_0 \nabla E_{A_0}(y-x) \cdot \vec{n}(y) d\sigma_y$$

L'expression ne dépendant pas de la courbe $\tilde{\sigma}$ choisie on en déduit que l'égalité est vraie pour $x \in \Lambda$.

En utilisant que $A_0 \nabla_x (A_0 \nabla E_{A_0}(y-x) \cdot \vec{n}(y)) = O(|x-y|^{-2})$ et la régularité du potentiel associé [35, 46], on obtient l'équation intégrale caractérisant l'isomorphisme J :

$$A_0 \nabla u \cdot \vec{n}(x) = \oint_{\sigma} q(y) A_0 \nabla_x (A_0 \nabla E_{A_0}(y-x) \cdot \vec{n}(y)) \cdot \vec{n}(x) d\sigma_y$$

où \oint correspond à la valeur principale de Cauchy. Enfin pour le dernier point on commence par calculer le noyau associé à l'équation intégrale :

$$V = \int_{\sigma} \lambda(y) K(x, y) d\sigma_y \quad (3.7.11)$$

où pour $\sigma = \{(s, 0), -1 < s < 1\}$, en notant $x = (s, 0)$ et $y = (t, 0)$ le noyau $K(x, y)$ s'exprime comme suit :

$$K(x, y) = A_0 \nabla_x (A_0 \nabla E_{A_0}(y-x) \cdot \vec{n}(y)) \cdot \vec{n}(x) = \frac{|A_0|^{1/2}}{2\pi} \frac{1}{(s-t)^2}$$

On réécrit (3.7.11) :

$$C = \frac{-2V}{|A_0|^{1/2}} = g'(s) \quad \text{avec} \quad g(s) = \frac{1}{\pi} \oint_{-1}^1 \frac{\lambda(t)}{s-t} dt$$

En intégrant et en prenant les constantes d'intégration égales à zéro on doit donc résoudre $Cs = g(s)$ et en utilisant [62] on obtient $\lambda(s) = C\sqrt{1-s^2} \in H_{00}^{1/2}(\sigma)$ ce qui termine la preuve de ce théorème. \square

Lemme 3.7.4. Soit Q la solution de (3.7.2), on a le comportement asymptotique suivant lorsque $|x| \rightarrow \infty$ et $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} |Q(x)| &\leq \frac{C}{|x|} & |\nabla Q(x)| &\leq \frac{C}{|x|^2} \\ \left\| Q\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right\|_{0, \Omega_\epsilon} &= O\left(\epsilon \sqrt{-\log(\epsilon)}\right) & \left| Q\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right|_{1, \Omega_\epsilon} &= O(1) & \left\| |x|^\beta \nabla Q(x) \right\|_{0, \Lambda} &\leq C \end{aligned}$$

pour tout $0 \leq \beta < 1$.

Démonstration. Pour les estimations ponctuelles en partant de l'expression de Q sous la forme d'un potentiel double couche, on a pour $x \in \Lambda$:

$$\nabla Q(x) = \int_\sigma \lambda(y) \nabla_x (A_0 \nabla E_{A_0}(y-x) \cdot n(y)) d\sigma$$

En utilisant un développement de Taylor en x et les estimations $\left| \frac{\partial^{|\alpha_1|} E_{A_0}}{\partial x^{\alpha_1}}(x) \right| \leq \frac{C}{|x|}$ et $\left| \frac{\partial^{|\alpha_2|} E_{A_0}}{\partial x^{\alpha_2}}(x) \right| \leq \frac{C}{|x|^2}$ pour $|x| \rightarrow +\infty$, $|\alpha_1| = 1$ et $|\alpha_2| = 2$, on déduit les deux premières estimations. Pour estimer les normes $L^2(\Omega_\epsilon)$ des dérivées de Q , on se donne deux réels positifs a et D assez grands et un réel positif ϵ assez petit tels que $B \subset B_a \subset \frac{1}{\epsilon} \Omega \subset \frac{1}{\epsilon} B_D$. Ainsi en utilisant les estimations ponctuelles on a :

$$\begin{aligned} \left\| Q\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right\|_{0, \Omega_\epsilon}^2 &= \int_{\Omega_\epsilon} Q\left(\frac{x}{\epsilon}\right)^2 dx = \epsilon^2 \int_{\frac{1}{\epsilon} \Omega \setminus \bar{\sigma}} Q(y)^2 dy \leq \epsilon^2 \left(\int_{B_a \setminus \bar{B}} Q(y)^2 dy + \int_{\frac{1}{\epsilon} B_D \setminus \bar{B}_a} Q(y)^2 dy \right) \\ &\leq C\epsilon^2 + C\epsilon^2 \int_a^{D/\epsilon} \frac{1}{r^2} r dr = C\epsilon^2 + C\epsilon^2 [\log(r)]_a^{D/\epsilon} \leq C\epsilon^2 (-\log(\epsilon)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left| Q\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right|_{1, \Omega_\epsilon}^2 &= \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla Q\left(\frac{x}{\epsilon}\right)|^2 dx = \int_{\frac{1}{\epsilon} \Omega \setminus \bar{\sigma}} |\nabla Q(y)|^2 dy \\ &\leq C \left(\int_{B_a \setminus \bar{\sigma}} |\nabla Q(y)|^2 dy + \int_{\frac{1}{\epsilon} B_D \setminus \bar{B}_a} |\nabla Q(y)|^2 dy \right) \\ &\leq C + C \int_{\frac{1}{\epsilon} B_D \setminus \bar{B}_a} \frac{1}{r^4} r dr \leq C + C \left[\frac{1}{r^2} \right]_a^{D/\epsilon} \leq C + C\epsilon^2 \leq C \end{aligned}$$

Pour la dernière inégalité il suffit de voir que $|x|^\beta \nabla Q(x) \underset{\infty}{=} O(|x|^{2-\beta})$ qui est $L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B})$ pour $0 \leq \beta < 1$. \square

Lemme 3.7.5. Soit $w_\epsilon \in H^1(\Omega_\epsilon)$ définie par (3.2.1), et $Q \in W^1(\Lambda)/\mathbb{R}$ la solution du problème extérieur donné en (3.2.2), on a

$$w_\epsilon = \epsilon Q\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + e_\epsilon$$

avec

$$\|e_\epsilon\|_{1, \Omega_\epsilon} = O(\epsilon^{1+\beta}) \quad \|w_\epsilon\|_{0, \Omega_\epsilon} = O(\epsilon^{1+\beta}) \quad \|w_\epsilon\|_{1, \Omega_\epsilon} = O(\epsilon)$$

Démonstration. On pose $e_\epsilon(x) = w_\epsilon(x) - \epsilon Q\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ avec Q définie en (3.2.2).

Les équations d'Euler vérifiées par e_ϵ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(A(x) \nabla e_\epsilon) + e_\epsilon = -\epsilon Q\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \operatorname{div}\left((A(x) - A(0)) \nabla Q\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right) \text{ dans } \Omega_\epsilon \\ A \nabla e_\epsilon \cdot \vec{n} = -A \nabla Q\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \cdot \vec{n} \text{ sur } \Gamma \\ A \nabla e_\epsilon \cdot \vec{n} = -A \nabla v_0 \cdot \vec{n} + A(0) \nabla v_0(0) \cdot \vec{n} = g(x) \text{ sur } \sigma_\epsilon \end{array} \right.$$

La formulation variationnelle associée à ce problème est : trouver $e_\epsilon \in H^1(\Omega_\epsilon)$ tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} A(x) \nabla e_\epsilon \cdot \nabla \varphi + e_\epsilon \varphi = & - \int_{\Gamma} A(0) \nabla Q \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \vec{n} \varphi d\sigma_x + \int_{\sigma_\epsilon} g(x) [\varphi] d\sigma_x - \int_{\sigma_\epsilon} (A(x) - A(0)) \nabla Q \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \vec{n} [\varphi] \\ & - \int_{\Omega_\epsilon} (A(x) - A(0)) \nabla Q \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \nabla \varphi - \int_{\Omega_\epsilon} \epsilon Q \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \varphi \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_\epsilon) \end{aligned}$$

En prenant $\varphi = e_\epsilon$ et en utilisant la coercivité du problème (voir Hypothèses 1) on a

$$\min(\eta, 1) \|e_\epsilon\|_{1, \Omega_\epsilon}^2 \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 = & - \int_{\Gamma} A(0) \nabla Q \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \vec{n} e_\epsilon d\sigma_x \quad I_2 = \int_{\sigma_\epsilon} g(x) [e_\epsilon] d\sigma \quad I_3 = - \int_{\sigma_\epsilon} (A(x) - A(0)) \nabla Q \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \vec{n} [e_\epsilon] \\ I_4 = & - \int_{\Omega_\epsilon} (A(x) - A(0)) \nabla Q \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \nabla e_\epsilon \quad I_5 = - \int_{\Omega_\epsilon} \epsilon Q \left(\frac{x}{\epsilon} \right) e_\epsilon \end{aligned}$$

Pour I_1 grâce au Lemme 3.7.4 et au théorème de trace sur $\Omega \setminus \bar{B}$ on obtient

$$|I_1| \leq \left\| A(0) \nabla Q \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \vec{n} \right\|_{-1/2, \Gamma} \|e_\epsilon\|_{1/2, \Gamma} \leq C \epsilon^2 \|e_\epsilon\|_{1, \Omega_\epsilon}$$

Pour I_2 en utilisant un changement de variable, l'estimation $g(x) = O(x)$, le Lemme 3.7.1 et un nouveau changement de variable, on déduit

$$|I_2| \leq C \epsilon \|g(\epsilon x)\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma')} \| [e_\epsilon(\epsilon x)] \|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)} \leq C \epsilon^2 |e_\epsilon(\epsilon x)|_{1, B_2 \setminus \bar{\sigma}} \leq C \epsilon^2 |e_\epsilon|_{1, \Omega_\epsilon}$$

Ensuite en faisant un changement de variable, puis en utilisant le Lemme 3.7.2, le Lemme 3.7.1, l'estimation $(A(\epsilon x) - A(0)) \nabla Q(x) \cdot \vec{n} = O(\epsilon^\beta)$ (voir Hypothèses 1) puis un nouveau changement de variable on obtient

$$|I_3| \leq \epsilon \|(A(\epsilon x) - A(0)) \nabla Q(x) \cdot \vec{n}\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma')} \| [e_\epsilon(\epsilon x)] \|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)} \leq C \epsilon^{1+\beta} |e_\epsilon(\epsilon x)|_{1, B_2 \setminus \bar{\sigma}} \leq C \epsilon^{1+\beta} |e_\epsilon|_{1, \Omega_\epsilon}$$

Pour I_4 grâce à un changement de variable, les Hypothèses 1 et le Lemme 3.7.4 puis un nouveau changement de variable on a

$$|I_4| \leq M \epsilon^{1+\beta} \| |x|^\beta \nabla Q(x) \|_{0, \frac{\Omega}{\epsilon} \setminus \bar{\sigma}} |e_\epsilon(\epsilon x)|_{1, \frac{\Omega}{\epsilon} \setminus \bar{\sigma}} \leq C \epsilon^{1+\beta}$$

Enfin pour I_5 il suffit d'appliquer le Lemme 3.7.4 : $|I_5| \leq C \epsilon^2 \sqrt{-\log(\epsilon)} \|e_\epsilon\|_{0, \Omega_\epsilon}$. En sommant toutes les inégalités obtenues, on obtient $\|e_\epsilon\|_{1, \Omega_\epsilon} \leq C \epsilon^{1+\beta}$. Ensuite en prenant la norme $L^2(\Omega_\epsilon)$ et la semi-norme $H^1(\Omega_\epsilon)$ dans le développement asymptotique de w_ϵ , on obtient $\|w_\epsilon\|_{0, \Omega_\epsilon} \leq \|\epsilon Q \left(\frac{x}{\epsilon} \right)\|_{0, \Omega_\epsilon} + \|e_\epsilon\|_{1, \Omega_\epsilon} \leq C \epsilon^2 \sqrt{-\log(\epsilon)} + C \epsilon^{1+\beta} \leq C \epsilon^{1+\beta}$ et de même $|w_\epsilon|_{1, \Omega_\epsilon} \leq C \epsilon + C \epsilon^{1+\beta} \leq C \epsilon$, ce qui termine la preuve de ce lemme. \square

Chapitre 4

Détection de contours et restauration d'images pour plusieurs modèles non linéaires

Résumé. Dans ce chapitre on propose une nouvelle méthode variationnelle pour segmenter/restaurer des images dégradées par divers bruits et flous. Cette méthode est basée sur la notion du gradient topologique (GT). D'abord utilisé par Belaid et al. [24] pour restaurer des images dégradées par du bruit gaussien, on propose ici d'étendre le processus de segmentation/restauration à des images éventuellement floues et contaminées par du bruit additif gaussien, du bruit multiplicatif de loi gamma ou bien résultant d'un processus poissonnien. On calcule pour un domaine perforé et pour un domaine fissuré le gradient topologique relatif à chaque modèle. Ensuite on présente un algorithme de segmentation/restauration basé sur le gradient topologique que l'on applique sur les trois modèles de dégradation décrits précédemment. On compare notre méthode avec l'approximation de la fonctionnelle de Mumford-Shah par Ambrosio-Tortorelli [67, 4]. On compare aussi notre méthode avec un modèle de restauration utilisant la variation totale (voir [13] pour le cas d'un bruit de type speckle). De nombreux résultats expérimentaux sont présentés montrant la robustesse et la rapidité de la méthode.

Introduction

Un problème important en traitement d'image est la reconstruction d'une image initiale u à partir d'une image observée f . En général cela inclut les processus de restauration et de segmentation. La transformation entre u et f a pour origine deux phénomènes. Le premier phénomène est lié à l'acquisition (flou dû à un mauvais réglage des lentilles ou à un mouvement, prise en compte dans l'acquisition de l'intensité, de la statistique de Poisson liée à l'émission de photons ...), et un second phénomène lié à la transmission du signal. De nombreuses méthodes pour reconstruire ce type d'images existent : des méthodes stochastiques [44, 21], les ondelettes [60, 33], la morphologie mathématique [79]. Ici on s'intéresse à une approche par méthode variationnelle [17]. Dans ce contexte, le modèle le plus connu est celui correspondant à la fonctionnelle de Mumford-Shah [67] (1989). Parmi les travaux les plus récents, on peut citer [13] (2008) pour la restauration d'images contaminées par du bruit de speckle et [78] (2013) pour la restauration d'images dégradées par différents types de bruits.

Dans ce chapitre on traite du problème de segmentation par la méthode du GT. Rappelons que telle notion consiste à étudier les variations de la fonction coût $j(\Omega) = J_\Omega(u_\Omega)$ par rapport à une variation topologique, où $J_\Omega(u)$ s'écrit $J_\Omega(u) = \int_\Omega F(u, \nabla u, \nabla^2 u, \dots)$ et u_Ω est solution d'une EDP définie sur Ω . Pour plus de détails on réfère le lecteur à l'introduction de ce manuscrit et au chapitre 1. Pour calculer le GT on perturbe le domaine Ω de deux manières : en retirant soit une boule soit un crack de taille ϵ et centrés

en x_0 . Plus précisément, pour ϵ assez petit on note (a) $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{\{x_0 + \epsilon B\}}$ et (b) $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{\{x_0 + \epsilon \sigma(\vec{n})\}}$ où $\sigma(\vec{n})$ est le segment centré en 0 de longueur 2 et de normale \vec{n} (un crack). Le GT mesure l'énergie contenue par ces perturbations et le choix de la fonction coût dépend des structures à détecter. On montre (voir Lemme 1.3.1) qu'une fonction coût adaptée à la détection de contours utilise des dérivées d'ordre 1. Pour la détection de contours on choisit généralement $J_\Omega(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2$ et u_Ω la solution d'une équation utilisant l'opérateur de Laplace (voir [18, 24] et chapitre 1). À noter que pour la détection de filaments la fonction coût doit utiliser des dérivées d'ordre 2 (voir partie II).

Dans [18, 24] et le chapitre 1, seul le cas d'un bruit additif gaussien est considéré et aucun opérateur de floutage n'a été introduit. Dans ce chapitre on propose : (i) d'étendre le modèle à d'autres types de bruits fréquents dans des images réelles et (ii) d'introduire du flou dans le processus. La restauration / segmentation en traitement d'image est en général un problème mal posé et une manière de surmonter cette difficulté est de régulariser le problème. Pour ce faire il est classique d'utiliser une formulation bayésienne menant à la minimisation d'une énergie composée de deux termes. Le premier terme correspond à l'attache aux données prenant en compte le flou et la loi suivie par le bruit, et le second correspond à la régularisation. Par exemple si on suppose que le modèle d'acquisition est décrit par $f = u + n$ où n est un bruit gaussien, alors l'estimateur minimisant l'opposé du log de la vraisemblance permet de choisir comme terme d'attache aux données la norme $\|u - f\|_{L^2(\Omega)}$. Bien évidemment ce terme change selon la loi du bruit. Le terme de régularisation est en général basé sur la norme L^p du gradient. La principale contribution de ce travail est de généraliser les résultats donnés dans [18, 24] à des images dégradées par du flou et contaminées par du bruit de speckle ou bien par un processus poissonnien, et de donner les expressions du GT pour chaque modèle associé à la fonction coût $J_\Omega(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2$. Plus précisément, nous allons étudier différents problèmes variationnels de la forme

Modèle gaussien et de speckle :

$$\min_{u \in H^1(\Omega)} \frac{\gamma}{2} J_\Omega(u) + \int_\Omega \psi(x, Ku) \quad (4.0.1)$$

Modèle poissonnien :

$$\min_{u \in H^1(\Omega)} \frac{\gamma}{2} J_\Omega(u) + \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} \psi_j \left(\int_{R_j} Ku \right) \quad (4.0.2)$$

où $I_{ind}(\Omega)$ est l'ensemble des indices des pixels, $\gamma > 0$ est un paramètre, R_j est le domaine correspondant au pixel j tel que Ω est l'union disjointe des $(R_i)_{i \in I_{ind}(\Omega)}$, $K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ est un opérateur de convolution (généralement positif et tel que $K\mathbf{1} \neq 0$) représentant le flou. Les fonctions $\psi(x, u)$ et $\psi_j(X)$ seront spécifiées en section 4.4 et section 4.5. Notons que le bruit de speckle est un bruit multiplicatif de loi gamma. Il est très fréquent dans des images de type SAR, laser et microscopiques [52, 49, 85]. Un processus poissonnien est généralement utilisé pour décrire l'acquisition d'images confocales [38], ou obtenues par émission tomographique [88] ou encore pour des images acquises par SPECT (single-photon emission computed tomography) [48]. En section 4.1 on rappelle le raisonnement pour justifier les différents termes d'attache aux données par approche bayésienne. En section 4.2 on définit les modèles variationnels en prenant en compte le flou. En section 4.3 on donne le GT pour des images floues et bruitées par du bruit gaussien. En section 4.4 on établit le GT pour le modèle associé au bruit de speckle et pour un problème plus général. En section 4.5 on traite le cas particulier du modèle de Poisson étant donné la forme particulière de l'EDP associée. Le GT n'est pas seulement un détecteur de contours mais il permet aussi de restaurer les images dégradées. On explique comment cela est possible en section 4.7. Finalement en section 4.8 on présente pour tous les modèles, l'analyse numérique permettant le calcul du GT, puis on illustre chaque modèle en donnant des résultats expérimentaux propres à chacun et en les comparant à ceux obtenus via d'autres méthodes variationnelles classiques. On rappelle que l'on note $J_\Omega(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2$, $J_{\Omega_\epsilon}(u) = J_\epsilon(u)$ et $\Omega = \Omega_0$. Seulement la preuve pour un domaine perforé est détaillée car plus intéressante que le crack. En effet, le modèle du crack "tue" la dépendance explicite du GT au terme d'attache aux

données à cause du fait qu'il est de mesure de Lebesgue nulle. Par conséquent, on donne juste l'expression du GT dans le cas d'un domaine fissuré (b) et on détaille la preuve dans le cas d'un domaine perforé (a).

4.1 Une approche bayésienne

Dans cette section on présente selon le modèle probabiliste a priori de l'image, une étude bayésienne pour déduire le modèle variationnel adéquat pour restaurer l'image observée éventuellement bruitée. On note N le nombre de pixels dans le support de l'image Ω . Le domaine discret est noté Ω^N . On note u^N (respectivement f^N) les versions discrètes de l'image u à retrouver (respectivement de l'image f observée). Pour chaque pixel $p_x \in \Omega^N$, $f^N(p_x)$ et $u^N(p_x)$ peuvent être vues comme des réalisations de variables aléatoires $U^N(p_x)$ et $F^N(p_x)$ où U^N et F^N sont les vecteurs aléatoires formés de ces variables en chaque pixel. On suppose qu'ils sont identiquement distribués et indépendants. La méthode est la suivante : on exprime la densité de probabilité a priori $g_{U^N|F^N}$ et ensuite on applique le raisonnement classique qui consiste à trouver u^N comme la valeur maximisant cette densité de probabilité appelée l'estimateur a posteriori du maximum de vraisemblance (MAP). Un modèle discret associé à une énergie discrète est déduit et en passant à la limite quand $N \rightarrow \infty$, on obtient le modèle continu approprié.

En appliquant la loi de Bayes $g_{U^N|F^N}$ vérifie :

$$g_{U^N|F^N} = \frac{g_{(F^N, U^N)}}{g_{F^N}} = \frac{g_{F^N|U^N} g_{U^N}}{g_{F^N}} \text{ si } g_{F^N} > 0, \text{ 0 sinon}$$

$g_{F^N|U^N}$ dépend du bruit et g_{U^N} est une densité de probabilité. En écrivant que u^N est le minimum de $-\log(g_{U^N|F^N})$ on obtient

$$u^N = \underset{u}{\operatorname{argmin}} E^N(u)$$

où

$$E^N(u) = -\log(g_{F^N|U^N}(u, f)) - \log(g_{U^N}(u)) \quad (4.1.1)$$

La densité a priori g_{U^N} est à déterminer, elle va jouer le rôle de terme de régularisation. En analogie avec la mécanique statistique, les densités a priori sont fréquemment des fonctions de Gibbs [44] de la forme :

$$g_{U^N}(u) = Cste \times e^{-\frac{\gamma}{2} J^N(u)}, \quad \gamma > 0$$

où $J^N(u)$ est une version discrète de la fonction coût positive $J_\Omega(u)$. Le choix de la densité de probabilité $g_{F^N|U^N}$ dépend de la statistique du modèle considéré. Ci-dessous on passe en revue le modèle gaussien, deux variantes du modèle de speckle et finalement le modèle poissonnien.

Modèle gaussien

Une modélisation classique de la formation d'une image est $F^N = U^N + G^N$ où U^N est une version discrète de l'image à retrouver et G^N un bruit gaussien de moyenne 0 et d'écart type σ . Pour simplifier on note de la même manière G^N , F^N et U^N les variables aléatoires $G^N(p_x)$, $F^N(p_x)$ et $U^N(p_x)$. La densité de la variable aléatoire associée au bruit gaussien est $g_{G^N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Exprimons la densité de probabilité conditionnelle $g_{F^N|U^N}$.

En utilisant la définition de la probabilité conditionnelle on a :

$$P(F^N \in \mathcal{A} | U^N = u) = \int_{\mathbb{R}} g_{F^N|U^N}(f|u) \mathbf{1}_{f \in \mathcal{A}} df \quad (4.1.2)$$

La densité conditionnelle $g_{F^N|U^N}(f|u)$ est une fonction dépendante de la variable f et du paramètre u . En utilisant le modèle $F^N = U^N + G^N$, l'indépendance de U^N et G^N , et un changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned}
P(F^N \in \mathcal{A} | U^N = u) &= P(U^N + G^N \in \mathcal{A} | U^N = u) \\
&= P(G^N \in \mathcal{A} - u | U^N = u) \\
&= P(G^N \in \mathcal{A} - u) \\
&= \int_{\mathbb{R}} g_{G^N}(x) \mathbb{1}_{x \in \mathcal{A} - u} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} g_{G^N}(f - u) \mathbb{1}_{f \in \mathcal{A}} df
\end{aligned}$$

Ainsi par identification avec (4.1.2) on déduit que $g_{F^N|U^N}(f|u) = g_{G^N}(f - u)$. En utilisant l'hypothèse d'indépendance, la densité associée à $F^N|U^N$ est le produit sur chaque pixel des densités associées à $F^N(p_x)|U^N(p_x)$. L'énergie donnée en (4.1.1) se réécrit donc dans ce cas :

$$E^N(u) = \sum_{p_x \in \Omega^N} \frac{1}{2\sigma^2} (f^N - u)^2 + \frac{\gamma}{2} J^N(u) + C$$

avec C une constante indépendante de u . La constante σ^2 est absorbée par le paramètre de régularisation γ et peut donc être négligée dans ce modèle. Cependant avec cette étude on voit que γ devra être de l'ordre de la variance du bruit σ^2 . En passant à la limite lorsque $N \rightarrow +\infty$, on obtient l'énergie continue suivante :

$$E_\Omega(u) = \int_{\Omega} (f - u)^2 + \gamma J_\Omega(u)$$

Modèle de speckle

Pour des images de type SAR, une modélisation classique de l'image est (voir [85]) $F^N = S^N U^N$ où U^N est la réflectivité et S^N le bruit de speckle. Nous allons expliciter la loi de S^N . Les images de type SAR sont construites à partir de $L \in \mathbb{N}$ observations F_k^N pour $1 \leq k \leq L$, et pour chaque observation on a $F_k^N = G_k^N U^N$. Généralement G_k^N est une variable aléatoire de loi exponentielle de moyenne 1 ayant pour densité $g_G(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$. L'image observée F^N s'écrit : $F^N = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L F_k^N = \left(\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L G_k^N \right) U^N$. On pose $S^N = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L G_k^N$; S^N suit une loi Gamma de densité $g_{S^N}(x) = \frac{L^L}{\Gamma(L)} x^{L-1} e^{-Lx} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$ avec $\Gamma(L) = (L-1)!$ (la moyenne de S^N est 1 et sa variance est $\frac{1}{L}$). Désormais on peut exprimer la densité $g_{F^N|U^N}$. Pour simplifier, on note F^N , S^N et U^N les variables aléatoires $F^N(p_x)$, $S^N(p_x)$ et $U^N(p_x)$. On part de la définition de la densité conditionnelle :

$$P(F^N \in \mathcal{A} | U^N = u) = \int_{\mathbb{R}} g_{F^N|U^N}(f|u) \mathbb{1}_{\{f \in \mathcal{A}\}} df \quad (4.1.3)$$

où $g_{F^N|U^N}(f|u)$ est une fonction de la variable f et dépendant du paramètre u . Ensuite, en utilisant le modèle $F^N = S^N U^N$ et l'indépendance de U^N et S^N on a :

$$\begin{aligned}
P(F^N \in \mathcal{A} | U^N = u) &= P(S^N U^N \in \mathcal{A} | U^N = u) \\
&= P\left(S^N \in \frac{\mathcal{A}}{u} | U^N = u\right) = P\left(S^N \in \frac{\mathcal{A}}{u}\right)
\end{aligned}$$

En explicitant la probabilité associée à $\{S^N \in \frac{\mathcal{A}}{u}\}$ et en utilisant un changement de variable on obtient :

$$P\left(S^N \in \frac{\mathcal{A}}{u}\right) = \int_{\mathbb{R}} g_{S^N}(s) \mathbb{1}_{\{s \in \frac{\mathcal{A}}{u}\}} ds = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{u} g_{S^N}\left(\frac{f}{u}\right) \mathbb{1}_{\{f \in \mathcal{A}\}} df$$

En identifiant avec (4.1.3) on déduit

$$g_{F^N|U^N}(f|u) = \frac{1}{u} g_{S^N}\left(\frac{f}{u}\right) \quad (4.1.4)$$

En utilisant l'indépendance des $F^N(p_x)$ et des $U^N(p_x)$, la densité de probabilité associée à $F^N|U^N$ est le produit sur chaque pixel p_x des densités associées à $F^N(p_x)|u^N(p_x)$. En appliquant la fonction $-\log$ on déduit que (4.1.1) se réécrit dans ce cas comme suit :

$$E^N(u) = L \sum_{p_x \in \Omega^N} \left(\frac{f^N}{u} + \log(u) \right) + \frac{\gamma}{2} J^N(u) + C$$

pour $u \in \mathbb{R}^N$ et $u > 0$, où C est une constante indépendante de u . Le facteur L peut être négligé car il est absorbé par la constante γ mais à nouveau on constate que γ devra être de l'ordre de la variance du bruit $\frac{1}{L}$. En passant à la limite lorsque $N \rightarrow \infty$, on déduit l'énergie continue suivante :

$$E_\Omega(u) = \int_\Omega \left(\frac{f}{u} + \log(u) \right) dx + \frac{\gamma}{2} J_\Omega(u) \quad (4.1.5)$$

Speckle avec le log de l'image (Modèle Speckle-Log)

Comme on peut le voir dans (4.1.5), l'énergie associée au modèle de speckle est non convexe. En prenant le logarithme du modèle de speckle on obtient :

$$\log(F^N) = \log(S^N) + \log(U^N)$$

En posant $G^N = \log(F^N)$, $T^N = \log(S^N)$ et $V^N = \log(U^N)$, le nouveau modèle s'écrit $G^N = V^N + T^N$. Désormais le problème est de retrouver V^N à partir des observations G^N . On suppose que la variable aléatoire V^N suit une loi de Gibbs. Calculons la densité de T^N :

$$\begin{aligned} P(T^N \in \mathcal{A}) &= P(S^N \in e^{\mathcal{A}}) = \int_{\mathbb{R}} g_{S^N}(s) \mathbf{1}_{\{s \in e^{\mathcal{A}}\}} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} g_{S^N}(e^r) e^r \mathbf{1}_{\{r \in \mathcal{A}\}} dr \end{aligned}$$

On déduit que la densité de T^N est $g_{T^N}(r) = g_{S^N}(e^r) e^r = \frac{L^L}{(L-1)!} e^{L(r-e^r)}$. Concernant la densité conditionnelle $g_{G^N|V^N}$ on a :

$$\begin{aligned} P(G^N \in \mathcal{A} | V^N = v) &= \int_{\mathbb{R}} g_{G^N|V^N}(g|v) \mathbf{1}_{\{g \in \mathcal{A}\}} dg \\ &= P(T^N \in \mathcal{A} - v | V^N = v) \\ &= P(T^N \in \mathcal{A} - v) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g_{T^N}(t) \mathbf{1}_{\{t \in \mathcal{A} - v\}} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} g_{T^N}(g - v) \mathbf{1}_{\{g \in \mathcal{A}\}} dg \end{aligned}$$

On déduit que $g_{G^N|V^N}(g|v) = g_{T^N}(g - v)$. Par conséquent (4.1.1) se réécrit en

$$E^N(v) = \sum_{p_x \in \Omega^N} L(v - g^N + e^{-(v-g^N)}) + \frac{\gamma}{2} J^N(u) + C$$

où C est une constante indépendante de v . En multipliant le modèle par la constante γ on obtient l'énergie continue en faisant $N \rightarrow \infty$:

$$E_\Omega(v) = \int_{\Omega} (v - g) + e^{-(v-g)} + \frac{\gamma}{2} J_\Omega(u) \quad (4.1.6)$$

qui est une fonction convexe de la variable $v = \log(u)$. L'image à retrouver est alors $u = e^v$.

Modèle poissonnien

Ce modèle est classique dans les images astronomiques, confocales et microscopiques [38]. La modélisation des observations par un processus de Poisson provient de la nature stochastique de l'émission des photons. On note R_j , pour $j \in I_{ind}(\Omega)$ le sous domaine de \mathbb{R}^2 modélisant le pixel j et tel que $\bar{\Omega} = \cup_{i \in I_{ind}(\Omega)} \bar{R}_i$ et $|R_i \cap R_j| = 0$ pour $i \neq j$. On suppose que f est une fonction en escalier constante sur chaque R_j et on note $f^N = f$ l'image observée vue comme une réalisation du vecteur aléatoire F .

Plus précisément pour $j \in I_{ind}(\Omega)$, f_j est une réalisation d'une statistique de Poisson de moyenne et variance égale à $\lambda_j^N = \int_{R_j} u^N(x) dx$ où $x \mapsto u^N(x)$ est une version discrète de u (constante par morceaux, interpolation bi-linéaire ...). Grâce à l'indépendance des F_j et U_j^N , la probabilité conditionnelle $P(F = f | U^N = u)$ est donnée par :

$$P(F = f | U^N = u) = \prod_{j \in I_{ind}(\Omega)} \frac{\lambda_j^N f_j e^{-\lambda_j^N}}{f_j!}$$

et en appliquant la fonction $-\log$ on déduit

$$-\log(P(F = f | U^N = u)) = \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} \lambda_j^N - f_j \log(\lambda_j^N) + C$$

où C est une constante indépendante de u . On déduit que (4.1.1) se réécrit dans ce cas en :

$$E^N(u) = \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} (\lambda_j^N - f_j \log(\lambda_j^N)) + \frac{\gamma}{2} J^N(u)$$

La dépendance de E^N par rapport à u provient de la définition de λ^N . En passant à la limite on obtient l'énergie continue :

$$E_\Omega(u) = \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} \left(\int_{R_j} u(x) dx - f_j \log \left(\int_{R_j} u(x) dx \right) \right) + \frac{\gamma}{2} J_\Omega(u) \quad (4.1.7)$$

4.2 Modélisation du flou

En imagerie, dans beaucoup d'applications, le matériel optique, un mouvement de caméra ou de cible peuvent introduire du flou dans l'image observée (voir [71]). Généralement, quand il est spatialement invariant, le flou est modélisé par un opérateur de convolution positif $u \mapsto Ku$ avec $K\mathbf{1} \neq 0$. On note K^N la matrice $N \times N$ associée à la version discrète de K sur Ω^N . En utilisant la section 4.1 on déduit les modèles associés à chaque type de bruit et prenant en compte le flou :

1. Modèle gaussien : l'image observée s'écrit $F^N = K^N U^N + G^N$ et en utilisant le raisonnement donné en section 4.1 on déduit l'énergie suivante :

$$E_\Omega(u) = \int_\Omega (f - Ku)^2 + \gamma J_\Omega(u) \quad (4.2.1)$$

2. Modèle de speckle : l'image observée s'écrit $F^N = S^N K^N U^N$ et l'énergie à minimiser est

$$E_\Omega(u) = \int_\Omega \log(Ku) + \frac{f}{Ku} + \frac{\gamma}{2} J_\Omega(u) \quad (4.2.2)$$

3. Modèle de speckle avec le log de l'image (Modèle speckle-Log). On rappelle que le modèle s'écrit $G^N = V^N + T^N$ avec $V^N = \log(K^N U^N)$. Le flou ne peut pas être pris en compte dans le processus de restauration par ce modèle. En effet, après le processus de "débruitage" on doit résoudre le problème $V^N = \log(K^N U^N)$ où l'inconnue U^N peut être

$$U^N = ((K^N)^T K^N)^{-1} (K^N)^T e^{V^N}$$

mais on sait que ce problème est mal posé, particulièrement quand K contient des valeurs propres proches de 0. Pour cette raison, le processus de défloutage n'est pas géré pour le modèle de speckle par notre méthode. Dans ce cas, si on veut restaurer une image floue et bruitée par du bruit de speckle, il est préférable d'utiliser le modèle (4.2.2).

4. Modèle poissonnien : l'observation de l'image au pixel p_x est une réalisation d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\int_{R_{p_x}} Ku^N(x) dx$, et donc l'énergie associée est

$$E_\Omega(u) = \sum_{p_x \in I_{ind}(\Omega)} \left(\int_{R_{p_x}} Ku(x) dx - f(p_x) \log \left(\int_{R_{p_x}} Ku(x) dx \right) \right) + \frac{\gamma}{2} J_\Omega(u) \quad (4.2.3)$$

Dans la suite on calcule le GT pour les modèles gaussien et poissonnien avec flou et le GT associé au modèle speckle-Log sans flou.

4.3 Modèle gaussien avec flou

On considère le problème (4.0.1) avec l'énergie (4.2.1) :

$$\min_{u \in H^1(\Omega)} \gamma J_\Omega(u) + \int_\Omega \psi(x, Ku) \quad (4.3.1)$$

où $\psi(x, v) = (f(x) - v)^2$ et $J_\Omega(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2$ est la fonction coût utilisée dans le calcul du GT. Une particularité de l'EDP associée à ce modèle est sa linéarité. On ne donne pas les calculs du GT à cause de la similarité avec le cas "sans flou" (voir chapitre 1 et 2 et [10, 6]). On ne donne que l'expression du GT et quelques résultats expérimentaux en section 4.8. Remarquons que le calcul du GT nécessite le calcul uniquement de deux fonctions solutions d'un problème direct et adjoint (on verra dans la prochaine section pourquoi un modèle adjoint est nécessaire). En suivant les notations données dans [10, 6], les problèmes direct et adjoint u_0 et v_0 sont donnés dans ce cas par :

$$(\mathcal{P}_0) \begin{cases} -\gamma \Delta u_0 + K^* K u_0 = K^* f, & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u_0 = 0, & \text{sur } \partial \Omega \end{cases} \quad (4.3.2)$$

et

$$(\mathcal{Q}_0) \begin{cases} -\gamma \Delta v_0 + K^* K v_0 = K^*(2K u_0 - f), & \text{dans } \Omega \\ \partial_n v_0 = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.3.3)$$

On peut montrer (voir [17] chapitre 3) que les problèmes (\mathcal{P}_0) et (\mathcal{Q}_0) sont bien posés dans $H^1(\Omega)$ si $K\mathbb{1} \neq 0$ et $\gamma > 0$. Le GT au point $x_0 \in \Omega$ pour un domaine perforé (a) $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{\{x_0 + \epsilon B\}}$ et pour un domaine fissuré (b) $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{\{x_0 + \epsilon \sigma(\vec{n})\}}$, noté respectivement $\mathcal{I}^b(x_0)$ et $\mathcal{I}^c(x_0)$ peut être facilement déduit du cas “sans flou” et est donné par le théorème suivant.

Théorème 4.3.1. *Le GT associé au problème (4.3.1) et à la fonction coût $J_\epsilon(u) = \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u|^2$, pour respectivement un domaine perforé et fissuré est donné par :*

$$\mathcal{I}^b(x_0) = \frac{\pi}{\gamma} (f(x_0) - K u_0(x_0)) (K v_0(x_0) - K u_0(x_0)) - 2\pi \nabla u_0(x_0) \cdot \nabla v_0(x_0) \quad (4.3.4a)$$

$$\mathcal{I}^c(x_0, \vec{n}) = -(\pi \nabla u_0(x_0) \cdot \vec{n}) (\nabla v_0(x_0) \cdot \vec{n}) \quad (4.3.4b)$$

avec u_0 et v_0 données par (4.3.2) et (4.3.3) et $\gamma > 0$.

4.4 Modèle speckle-Log

On considère le problème variationnel (4.0.1) avec l'énergie donnée en (4.1.6). Plus précisément, on étudie le problème de minimisation suivant :

$$\min_{u \in H^1(\Omega)} \frac{\gamma}{2} J_\Omega(u) + \int_\Omega \psi(x, u) \quad (4.4.1)$$

où $\psi(x, u) = u - g(x) + e^{-(u-g(x))}$ et $g = \log(f)$ est le logarithme de l'image observée. On suppose qu'il n'y a pas de flou : K est l'opérateur identité. Pour alléger les notations on note $\psi(u)$ à la place de $\psi(x, u)$.

Remarque 4.4.1. *Dans [13] les auteurs proposent un modèle variationnel pour restaurer des images contaminées par du bruit de speckle utilisant la variation totale et le terme d'attache aux données associé à (4.1.5).*

Cette section est organisée comme suit. Tout d'abord on montre que (4.4.1) admet de manière générale une unique solution pour une fonction ψ vérifiant les Hypothèses 2 suivantes et on montre que la solution vérifie un certain principe de minimum et de maximum. Ensuite on applique le résultat du cas général pour montrer que (4.4.1) admet une unique solution pour le modèle speckle-Log où on a $\psi(x, u) = u - g(x) + e^{-(u-g(x))}$. Finalement, on calcule le GT pour un domaine perforé dans le cadre général fixé par les Hypothèses 2.

Dans ce qui suit on note toujours E_Ω l'énergie $E_\Omega(u) = \frac{\gamma}{2} J_\Omega(u) + \int_\Omega \psi(x, u)$ où on rappelle que $J_\Omega(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2$ est la fonction coût utilisée dans le calcul du GT.

4.4.1 Le problème (4.0.1) est-il bien posé ?

Dans cette sous-section, on établit que le problème (4.4.1) pour une classe assez générale de fonctions $\psi(x, u)$ est bien posé, et on vérifie que la fonction $\psi(x, u)$ associée au modèle speckle-Log (4.4.1) rentre dans le cadre du cas général. Pour simplifier on suppose que $\gamma = 1$ et parfois on écrit $\psi(u)$ pour $\psi(x, u)$.

Hypothèses 2. *Soit $\psi : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que*

- $u \mapsto \psi(x, u) \in C^3(I) \forall x \in \overline{\Omega}$

- $x \mapsto D_u \psi(x, u) \in C^0(\Omega) \forall u \in I$
- $u \mapsto \psi(x, u)$ est strictement convexe sur I uniformément par rapport à $x \in \Omega$.
- ψ est minorée sur $\Omega \times I$
- $\exists a, b \in I$ tels que pour tout x , $D_u \psi(x, a) \leq 0$ et $D_u \psi(x, b) \geq 0$ avec $[a, b] \subset I$.

Lemme 4.4.2. Soit $\psi(x, u)$ une fonction vérifiant les Hypothèses 2, alors (4.4.1) admet une unique solution $u_\Omega \in H^1(\Omega)$ qui vérifie $a \leq u_\Omega \leq b$.

Démonstration. Existence : Soit (u_n) une suite minimisante de $E_\Omega(u)$. Il existe une constante C_1 telle que $E_\Omega(u_n) \leq C_1$. Puisque $\psi(x, u)$ est minorée sur $\Omega \times I$, il existe une constante C_2 telle que $\int_\Omega \psi(x, u_n) \geq C_2$. On déduit donc l'inégalité suivante :

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \max(C_1, C_1 - C_2)$$

Soit $v_n = \max(u_n, a)$, et $\Omega_n^- = \Omega \cap \{u_n \leq a\}$, on a $v_n \geq a$ et

$$E_\Omega(v_n) - E_\Omega(u_n) = - \int_{\Omega_n^-} |\nabla u_n|^2 + \int_{\Omega_n^-} \psi(a) - \psi(u_n)$$

Par convexité :

$\psi(u_n) - \psi(a) \geq D_u \psi(a)(u_n - a)$ et $\int_{\Omega_n^-} (\psi(a) - \psi(u_n)) \leq \int_{\Omega_n^-} D_u \psi(a)(a - u_n) \leq 0$.

On déduit facilement que $E_\Omega(v_n) \leq E_\Omega(u_n)$, et donc v_n est aussi une suite minimisante telle que $v_n \geq a$. De même en posant $w_n = \min(v_n, b)$, on déduit que $w_n \leq b$ et que w_n est une suite minimisante. Ainsi on peut supposer que u_n vérifie $a \leq u_n \leq b$. On voit facilement que u_n est borné dans $H^1(\Omega)$. Ainsi modulo une sous suite il existe $u \in H^1(\Omega)$ telle que $u_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} u$ et $u_n \xrightarrow{H^1(\Omega)} u$ (où $\xrightarrow{H^1(\Omega)}$ dénote la topologie faible). En utilisant la semi-continuité inférieure de $J_\Omega(u)$ et le Lemme de Fatou, on obtient que u est solution de (4.4.1). De plus on a $a \leq u \leq b$ presque partout sur Ω .

Unicité : La démonstration de l'existence d'une solution montre qu'on peut se restreindre à $H(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), a \leq v \leq b\}$. Puisque $\psi(u)$ est strictement convexe sur $[a, b] \subset I$ et $J_\Omega(u)$ est strictement convexe sur $H^1(\Omega)$, on déduit que la fonction $E_\Omega(u)$ est strictement convexe sur $H(\Omega)$ qui est un espace convexe et que E_Ω admet une unique solution dans $H^1(\Omega)$. On applique ci-dessous le Lemme 4.4.2 au modèle speckle-Log. \square

Proposition 4.4.3. Soit f une fonction telle que $0 < \alpha \leq f \leq \beta$ avec α et β deux constantes, le problème (4.4.1) avec $\psi(x, u) = u - g(x) + e^{-(u-g(x))}$ où $g = \log(f)$ admet une unique solution $u \in H^1(\Omega)$ et on a $\log(\alpha) \leq u \leq \log(\beta)$.

Démonstration. Un simple calcul montre que $D_u \psi(u) = 1 - e^{-(u-g)}$ et $D_u^2 \psi(u) = e^{-(u-g)} > 0$. Par conséquent $\psi(u)$ est strictement convexe sur $] -\infty, \eta] \forall \eta \in \mathbb{R}$. En utilisant que $0 < \alpha \leq f \leq \beta$, on obtient

$$1 - e^{-(u-\log(\beta))} \leq D_u \psi(u) \leq 1 - e^{-(u-\log(\alpha))}$$

Soit $a = \log(\alpha)$ et $b = \log(\beta)$, on a les inégalités suivantes :

$$D_u \psi(b) \geq 0 \text{ et } D_u \psi(a) \leq 0$$

Grâce au Lemme 4.4.2, il existe une unique fonction $u \in H^1(\Omega)$ solution de (4.4.1). De plus on a $a \leq u \leq b$. \square

Dans la section suivante on calcule le GT pour un domaine perforé. On donne également l'expression du GT pour un domaine fissuré.

4.4.2 Calcul du GT pour un domaine perforé

Soit $u_\epsilon = u_{\Omega_\epsilon}$ la solution du problème (4.4.1) en remplaçant Ω par $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{\{x_0 + \epsilon B\}}$ et soit $J_\epsilon(u) = J_{\Omega_\epsilon}(u)$. Afin d'établir le GT pour une EDP plus générale on suppose que $\psi(x, u)$ vérifie les Hypothèses 2. En écrivant que $DI_{\Omega_\epsilon}(u_\epsilon).v = 0$ pour tout $v \in H^1(\Omega_\epsilon)$, on obtient la formulation variationnelle suivante : trouver $u_\epsilon \in H^1(\Omega_\epsilon)$ telle que

$$\int_{\Omega_\epsilon} \gamma \nabla u_\epsilon \cdot \nabla v + D_u \psi(x, u_\epsilon) v = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega_\epsilon) \quad (4.4.2)$$

En intégrant par parties on en déduit les équations d'Euler associées :

$$(\mathcal{P}_\epsilon) \begin{cases} -\gamma \Delta u_\epsilon + D_u \psi(x, u_\epsilon) = 0 \text{ dans } \Omega_\epsilon \\ \partial_n u_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial \Omega_\epsilon \end{cases} \quad (4.4.3)$$

On introduit l'application suivante

$$F_\epsilon(u, v) = \int_{\Omega_\epsilon} \gamma \nabla u \cdot \nabla v + D_u \psi(x, u) v \quad \forall u, v \in H^1(\Omega_\epsilon)$$

Ainsi (4.4.2) s'écrit : trouver $u_\epsilon \in H^1(\Omega_\epsilon)$ telle que $F_\epsilon(u_\epsilon, v) = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega_\epsilon)$.

On note u_0 la solution de (4.4.2) pour $\epsilon = 0$. Ci-dessous on donne le résultat principal de cette section. Pour simplifier on suppose le temps de la preuve que $\gamma = 1$ (mais on donne le Théorème pour $\gamma > 0$).

Théorème 4.4.4. *On note \mathcal{I}^b le GT pour un domaine perforé. Le GT associé au problème (4.4.3) avec $\psi(x, u)$ vérifiant les Hypothèses 2 et à la fonction coût $J_\epsilon(u) = \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u|^2$ est*

$$\mathcal{I}^b(x_0) = -2\pi \nabla u_0(x_0) \cdot \nabla v_0(x_0) + \frac{\pi}{\gamma} D_u \psi(x_0, u_0) (u_0(x_0) - v_0(x_0)) \quad (4.4.4)$$

avec u_0 et v_0 données par (4.4.3) et (4.4.9) pour $\epsilon = 0$ et avec $\gamma > 0$.

Remarque. *La sensibilité topologique pour un ensemble d'EDPs non linéaires utilisant comme opérateur principal celui de Laplace avec conditions de Dirichlet sur le bord de la perturbation, a été étudiée par Amstutz [7].*

Démonstration. Le GT est donné par le terme prépondérant dans la différence $J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. On introduit la fonction $\tilde{J}_\epsilon(u) = -\int_{\Omega_\epsilon} D_u \psi(x, u) u$; en utilisant (4.4.2) avec $v = u_\epsilon$, il est clair que :

$$\begin{aligned} J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) &= \tilde{J}_\epsilon(u_\epsilon) - \tilde{J}_0(u_0) \\ &= -\int_{\Omega_\epsilon} (D_u \psi(u_\epsilon) u_\epsilon - D_u \psi(u_0) u_0) + \int_{B_\epsilon} D_u \psi(u_0) u_0 \\ &= -\int_{\Omega_\epsilon} (D_u \psi(u_0) (u_\epsilon - u_0) + (D_u \psi(u_\epsilon) - D_u \psi(u_0)) u_0) + (D_u \psi(u_\epsilon) - D_u \psi(u_0)) (u_\epsilon - u_0) \\ &= L_\epsilon(u_\epsilon - u_0) + \mathcal{I}_\epsilon + \mathcal{E}_1 \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

où

$$\begin{aligned} L_\epsilon(u) &= -\int_{\Omega_\epsilon} (D_u \psi(u_0) u + D_u^2 \psi(u_0) u_0 u) \\ \mathcal{I}_\epsilon &= \int_{B_\epsilon} D_u \psi(u_0) u_0 \\ \mathcal{E}_1 &= -\int_{\Omega_\epsilon} \left(D_u^2 \psi(u_{\delta_\epsilon}) + \frac{1}{2} D_u^3 \psi(u_{\eta_\epsilon}) u_0 \right) (u_\epsilon - u_0)^2 \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

où $u_{\delta_\epsilon} = \theta_1 u_0 + (1 - \theta_1) u_\epsilon$ et $u_{\eta_\epsilon} = \theta_2 u_0 + (1 - \theta_2) u_\epsilon$ avec $\theta_i : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $0 \leq \theta_i \leq 1$ pour $1 \leq i \leq 2$. Pour calculer le terme $L_\epsilon(u_\epsilon - u_0)$ dans (4.4.5) il est classique [8, 80] d'introduire un problème adjoint. À cause de la non linéarité du problème direct, on fait d'abord un développement de Taylor de $F_\epsilon(u, v)$ par rapport à u au point u_0 :

$$\begin{aligned} F_\epsilon(u_\epsilon, v) &= F_\epsilon(u_0, v) + D_u F_\epsilon(u_0, v) \cdot (u_\epsilon - u_0) + \frac{1}{2} D_u^2 F_\epsilon(u_{\delta_\epsilon}, v) \cdot (u_\epsilon - u_0, u_\epsilon - u_0) \\ &= F_\epsilon(u_0, v) + b_\epsilon(u_\epsilon - u_0, v) + c_\epsilon(u_\epsilon - u_0, u_\epsilon - u_0, v) \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

avec

$$\begin{aligned} b_\epsilon(u, v) &= D F_\epsilon(u_0, v) \cdot u = \int_{\Omega_\epsilon} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega_\epsilon} D_u^2 \psi(u_0) u v \quad , \\ c_\epsilon(u, t, v) &= \frac{1}{2} D_u^2 F_\epsilon(u_{\delta_\epsilon}, v) \cdot (u, t) = \int_{\Omega_\epsilon} \frac{1}{2} D_u^3 \psi(u_{\eta_\epsilon}) u t v \end{aligned}$$

On définit le problème adjoint $v_\epsilon \in H^1(\Omega_\epsilon)$ par :

$$b_\epsilon(u, v_\epsilon) = -L_\epsilon(u) \quad \forall u \in H^1(\Omega_\epsilon) \quad (4.4.8)$$

Les équations d'Euler associées à (4.4.8) sont :

$$(\mathcal{Q}_\epsilon) \begin{cases} -\gamma \Delta v_\epsilon + D_u^2 \psi(u_0) v_\epsilon = D_u \psi(u_0) + D_u^2 \psi(u_0) u_0 & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ \partial_n v_\epsilon = 0 & \text{sur } \partial \Omega_\epsilon \end{cases} \quad (4.4.9)$$

Remarque 4.4.5. • Dans la preuve, on suppose que $\gamma = 1$.

- Le problème adjoint (\mathcal{Q}_ϵ) est linéaire et on peut remarquer que la stricte convexité de $u \mapsto \psi(x, u)$ est nécessaire pour que (\mathcal{Q}_ϵ) soit coercif. Puisque $u \mapsto \psi(x, u)$ est $C^2(I)$, grâce au Lemme 4.4.2 il existe deux constantes $A, B \in \mathbb{R}$ telles que $A < D_u \psi(u_0) + D_u^2 \psi(u_0) u_0 < B$. Par conséquent (4.4.9) est bien posé et avec le Lemme 4.4.2, on a l'inégalité suivante :

$$\frac{A}{\sup_{\Omega} D_u^2 \psi(u_0)} \leq v_\epsilon \leq \frac{B}{\inf_{\Omega} D_u^2 \psi(u_0)}$$

On déduit de (4.4.5), (4.4.7) et (4.4.8) que :

$$\begin{aligned} J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) &= -b_\epsilon(u_\epsilon - u_0, v_\epsilon) + \mathcal{I}_\epsilon + \mathcal{E}_1 \\ &= F_\epsilon(u_0, v) - F_\epsilon(u_\epsilon, v_\epsilon) + c_\epsilon(u_\epsilon - u_0, u_\epsilon - u_0, v_\epsilon) + \mathcal{I}_\epsilon + \mathcal{E}_1 \\ &= F_\epsilon(u_0, v_\epsilon) + \mathcal{E}_2 + \mathcal{I}_\epsilon + \mathcal{E}_1 \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

avec

$$\mathcal{E}_2 = c_\epsilon(u_\epsilon - u_0, u_\epsilon - u_0, v_\epsilon) \quad (4.4.11)$$

Par intégration par parties, le terme $F_\epsilon(u_0, v_\epsilon)$ s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} F_\epsilon(u_0, v_\epsilon) &= \int_{\Omega_\epsilon} \nabla u_0 \cdot \nabla v_\epsilon + D_u \psi(u_0) v_\epsilon \\ &= - \int_{\partial B_\epsilon} \partial_n u_0 v_\epsilon + \int_{\Omega_\epsilon} (-\Delta u_0 + D_u \psi(u_0)) v_\epsilon \\ &= - \int_{\partial B_\epsilon} \partial_n u_0 w_\epsilon - \int_{\partial B_\epsilon} \partial_n u_0 v_0 \end{aligned}$$

avec $w_\epsilon = v_\epsilon - v_0$. Désormais pour $\varphi \in H^{1/2}(\partial B_\epsilon)$ on introduit le prolongement harmonique sur B_ϵ suivant :

$$\begin{cases} \Delta l_\epsilon^\varphi = 0, & \text{dans } B_\epsilon \\ l_\epsilon^\varphi = \varphi, & \text{sur } \partial B_\epsilon \end{cases} \quad (4.4.12)$$

Pour $v \in H^1(\Omega_\epsilon)$, on note l_ϵ^v la fonction harmonique définie sur B_ϵ telle que $l_\epsilon^v = v$ sur ∂B_ϵ . Par intégration par parties $F_\epsilon(u_0, v_\epsilon)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} F_\epsilon(u_0, v_\epsilon) &= - \int_{B_\epsilon} (\nabla u_0 \cdot \nabla v_0 + \Delta u_0 v_0) - \int_{B_\epsilon} (\nabla u_0 \cdot \nabla l_\epsilon^{w_\epsilon} + \Delta u_0 \cdot l_\epsilon^{w_\epsilon}) \\ &= - \int_{\partial B_\epsilon} \widetilde{u}_0 \partial_n v_0 + \int_{B_\epsilon} \widetilde{u}_0 \Delta v_0 - \int_{B_\epsilon} D_u \psi(u_0) v_0 - \int_{\partial B_\epsilon} \widetilde{u}_0 \partial_n l_\epsilon^{w_\epsilon} - \int_{B_\epsilon} D_u \psi(u_0) l_\epsilon^{w_\epsilon} \\ &= - \int_{\partial B_\epsilon} \widetilde{u}_0 (\partial_n v_0 + \partial_n l_\epsilon^{w_\epsilon}) - \int_{B_\epsilon} D_u \psi(u_0) v_0 + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 \\ &= \mathcal{J}_\epsilon + \mathcal{K}_\epsilon + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

avec $\widetilde{u}_0 = u_0 - u_0(0)$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\epsilon &= - \int_{\partial B_\epsilon} \widetilde{u}_0 (\partial_n v_0 + \partial_n l_\epsilon^{w_\epsilon}) & \mathcal{K}_\epsilon &= - \int_{B_\epsilon} D_u \psi(u_0) v_0 \\ \mathcal{E}_3 &= \int_{B_\epsilon} \widetilde{u}_0 \Delta v_0 & \mathcal{E}_4 &= - \int_{B_\epsilon} D_u \psi(u_0) l_\epsilon^{w_\epsilon} \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

Les calculs de \mathcal{J}_ϵ , \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 et \mathcal{E}_4 nécessitent d'approcher w_ϵ et $X_\epsilon = u_\epsilon - u_0$ au sens de la norme $H^1(\Omega_\epsilon)$. En appliquant le Lemme 4.9.3 (voir Annexe A section 4.9.1), on peut montrer que $\|X_\epsilon\|_{0, \Omega_\epsilon} = O(\epsilon^2 \sqrt{-\log(\epsilon)})$ et que $w_\epsilon = \epsilon Q\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + r_\epsilon$ où Q est donnée par (4.9.1) avec $g = -\nabla v_0(0) \cdot \vec{n}$ et $\|r_\epsilon\|_{1, \Omega_\epsilon} = O(\epsilon^2 \sqrt{-\log(\epsilon)})$.

Proposition 4.4.6. *Soit \mathcal{I}_ϵ , \mathcal{J}_ϵ , \mathcal{K}_ϵ , \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 , \mathcal{E}_3 et \mathcal{E}_4 données par (4.4.6), (4.4.11) et (4.4.14), on a les estimations :*

$$\begin{aligned} J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) &= \mathcal{I}_\epsilon + \mathcal{J}_\epsilon + \mathcal{K}_\epsilon + \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_i \\ \mathcal{I}_\epsilon &= \pi \epsilon^2 D_u \psi(0, u_0) u_0(0) \\ \mathcal{J}_\epsilon &= -2\pi \epsilon^2 \nabla u_0(0) \cdot \nabla v_0(0) \\ \mathcal{K}_\epsilon &= -\pi \epsilon^2 D_u \psi(0, u_0) v_0(0) \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

et $\mathcal{E}_i \sim o(\epsilon^2)$ pour $i \in \llbracket 1..4 \rrbracket$

Démonstration. La première estimation est évidente. Le Lemme 4.9.3, la régularité de $\psi(x, u)$ donnée dans les Hypothèses 2 et la Proposition 4.4.3 permettent de montrer que \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont $\sim O(\|u_\epsilon - u_0\|_{0, \Omega_\epsilon}^2) = O(-\epsilon^4 \log(\epsilon))$. On rappelle que la notation $\psi(u)$ désigne la quantité $\psi(x, u(x))$. Un changement de variable et la continuité de $x \mapsto D_u \psi(x, u_0(x))$ donnent

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\epsilon &= \epsilon^2 \int_B D_u \psi(\epsilon X, u_0(\epsilon X)) u_0(\epsilon X) = \epsilon^2 \pi D_u \psi(0, u_0) u_0(0) + o(\epsilon^2) \\ \mathcal{K}_\epsilon &= \epsilon^2 \int_B D_u \psi(\epsilon X, u_0(\epsilon X)) v_0(\epsilon X) dX = \epsilon^2 \pi D_u \psi(0, u_0) v_0(0) + o(\epsilon^2) \end{aligned}$$

À nouveau un changement de variable, l'égalité $\Delta v_0 = D_u^2 \psi(u_0)(v_0 - u_0) - D_u \psi(u_0)$ et la régularité de $\psi(u)$ permettent de déduire que $\mathcal{E}_3 \sim O(\epsilon^3)$. En utilisant le Lemme 4.9.4 et le Lemme 4.9.1 (voir Annexe A section 4.9.1) on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\epsilon &= \int_{\partial B} (u_0 - u_0(0)) (\partial_n l_\epsilon^{p_\epsilon} + \partial_n v_0) + \int_{\partial B_\epsilon} (u_0 - u_0(0)) \partial_n l_\epsilon^{e_\epsilon} \\ &= \epsilon^2 \nabla u_0(0) \cdot \int_{\partial B} \lambda(x) x + \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\lambda(x) &= -2 \nabla v_0(0) \cdot \vec{n}(x) & \mathcal{F}_1 &= \int_{\partial B_\epsilon} (u_0 - u_0(0)) (\partial_n v_0 - \nabla v_0(0) \cdot \vec{n}) \\ \mathcal{F}_2 &= \int_{\partial B_\epsilon} (u_0 - u_0(0)) \partial_n l_\epsilon^{e_\epsilon}\end{aligned}$$

Un changement de variable et un développement de Taylor de u_0 et v_0 en 0 permettent d'écrire que $\mathcal{F}_1 = O(\epsilon^3)$ et $\mathcal{F}_2 \leq C\epsilon^2 \|\partial_n l_\epsilon^{e_\epsilon}(\epsilon X)\|_{-1/2, \partial B}$. Pour \mathcal{F}_2 , on commence par faire un changement de variable, utiliser l'harmonicité de $l_\epsilon^{e_\epsilon(\epsilon x)}$ sur B et le théorème de trace sur $B_2 \setminus \bar{B}$:

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}_2| &\leq C\epsilon^2 \|\partial_n l_\epsilon^{e_\epsilon}(\epsilon X)\|_{-1/2, \partial B} \leq C\epsilon \|l_\epsilon^{e_\epsilon}(\epsilon X)\|_{1, B} = C\epsilon \|l_\epsilon^{e_\epsilon(\epsilon X)}(X)\|_{1, B} \\ &\leq C\epsilon \|e_\epsilon(\epsilon X)\|_{H^{1/2}(\partial B)/\mathbb{R}} \leq C\epsilon \|e_\epsilon(\epsilon X)\|_{H^1(B_2 \setminus \bar{B})/\mathbb{R}}\end{aligned}$$

L'équivalence de la norme sur $H^1(B_2 \setminus \bar{B})/\mathbb{R}$ et de la semi norme, et un changement de variable donnent $|\mathcal{F}_2| \leq C\epsilon \|e_\epsilon\|_{1, \Omega_\epsilon}$. En appliquant le Lemme 4.9.4, on obtient $\mathcal{F}_2 = O(\epsilon^3 \sqrt{-\log(\epsilon)})$. Finalement en utilisant encore un changement de variable, la continuité de $\varphi \mapsto l^\varphi$ de $H^{1/2}(\partial B)$ dans $H^1(B)$, le théorème de trace sur $B_2 \setminus \bar{B}$, à nouveau un changement de variable et le Lemme 4.9.4 on a :

$$\begin{aligned}|\mathcal{E}_4| &\leq C\epsilon^2 \|l_\epsilon^{w_\epsilon}(\epsilon X)\|_{0, B} = C\epsilon^2 \|l_\epsilon^{w_\epsilon(\epsilon X)}(X)\|_{0, B} \\ &\leq C\epsilon^2 \|w_\epsilon(\epsilon X)\|_{1/2, \partial B} \leq C\epsilon^2 \|w_\epsilon(\epsilon X)\|_{1, B_2 \setminus \bar{B}} \\ &\leq C\epsilon^2 \left(\frac{1}{\epsilon} \|w_\epsilon\|_{0, \Omega_\epsilon} + |w_\epsilon|_{1, \Omega_\epsilon} \right) \leq C\epsilon^3 \sqrt{-\log(\epsilon)}\end{aligned}$$

□

Le GT se déduit facilement de la Proposition 4.4.6 et ceci termine la preuve du Théorème 4.4.4. □

4.4.3 Expression du GT pour un domaine fissuré

Pour un domaine fissuré $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{x_0 + \epsilon \sigma(\vec{n})}$, les calculs sont analogues. Le terme \mathcal{I}_ϵ de (4.4.10) est nul et le terme $F_\epsilon(u_0, v_\epsilon)$ s'écrit $F_\epsilon(u_0, v_\epsilon) = -\int_{B_\epsilon} \partial_n u_0 [w_\epsilon]$. Les développements asymptotiques de u_ϵ et v_ϵ sont similaires et le calcul du GT est identique au cas linéaire (voir [10] et chapitre 3 pour plus de détails).

Théorème 4.4.7. *On note $\mathcal{I}(x_0, \vec{n})$ le GT pour un domaine fissuré (b) $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{x_0 + \epsilon \sigma(\vec{n})}$. Le GT associé au problème (4.4.3) et à la fonction c t $J_\epsilon(u) = \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u|^2$ est :*

$$\mathcal{I}(x_0, \vec{n}) = -\pi (\nabla u_0(x_0) \cdot \vec{n}) (\nabla v_0(x_0) \cdot \vec{n}) \quad (4.4.16)$$

avec u_0 et v_0 donnés par (4.4.3) et (4.4.9) pour $\epsilon = 0$ et avec $\gamma > 0$.

4.5 Modèle poissonnien avec floutage

On rappelle que l'on modélise l'image observée f par une fonction constante par morceaux définie par la valeur $f_j \in \mathbb{R}$ sur R_j le domaine modélisant le pixel j pour $j \in I_{ind}(\Omega)$. On note $N = |I_{ind}(\Omega)|$ et pour simplifier on suppose que $|R_j| = 1$ et que $\bar{\Omega} = \cup_{i \in I_{ind}(\Omega)} \bar{R}_i$ tels que $|R_i \cap R_j| = 0$ pour $i \neq j$. On suppose

que $\min_{j \in I_{ind}(\Omega)} f_j > 0$. On rappelle le problème général de minimisation associé au modèle de Poisson donné en (4.2.3) :

$$\min_{u \in H^1(\Omega)} \frac{\gamma}{2} J_\Omega(u) + \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} \psi_j \left(\int_{R_j} Ku \right) \quad (4.5.1)$$

avec $\psi_j(x) = x - f_j \log(x)$ et $J_\Omega(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2$ la fonction coût dont on calcul le GT. On note dans cette section $E_\Omega(u) = \frac{\gamma}{2} J_\Omega(u) + \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} \psi_j(\int_{R_j} Ku)$. Tout d'abord on montre que le problème (4.5.1) est bien posé, puis on calcule le GT pour un domaine perforé (a) : $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{x_0 + \epsilon B}$, et on donne l'expression du GT pour un domaine fissuré (b) : $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{x_0 + \epsilon \sigma}$.

4.5.1 Le problème (4.5.1) est-il bien posé ?

Proposition 4.5.1. *Soit f une fonction constante par morceaux telle que $\min_i f_i > 0$ et $\max_i f_i < +\infty$, alors le problème (4.5.1) avec $\psi_j(x) = x - f_j \log(x)$ pour $j \in I_{ind}(\Omega)$ admet une unique solution $u \in H^1(\Omega)$. De plus cette solution est telle que $\alpha \leq \int_{R_i} u \leq \beta \forall i \in I_{ind}(\Omega)$ avec $\alpha = \frac{\min_i f_i}{N}$ et $\beta = \int_\Omega f = \sum_{i \in I_{ind}(\Omega)} f_i$.*

Démonstration. Existence : Pour simplifier la preuve on suppose que l'opérateur de convolution K est l'opérateur identité et que $\gamma = 1$. La preuve dans le cas général est similaire. Pour plus de détails voir chapitre 3 de [17].

A priori on doit ajouter à la formulation (4.5.1), la condition $\int_{R_i} u > 0, \forall i \in I_{ind}(\Omega)$.

On définit $H = \left\{ u \in H^1(\Omega), \int_{R_i} u > 0 \forall i \in I_{ind}(\Omega) \right\}$. Alors (4.5.1) s'écrit :

$$\min_{u \in H(\Omega)} \frac{1}{2} J_\Omega(u) + \sum_j \psi_j \left(\int_{R_j} u \right)$$

Soit $(u_n)_n$ une suite minimisante de $E_\Omega(u)$ dans $H(\Omega)$. Il existe une constante $D > 0$ telle que $E_\Omega(u_n) \leq D$. Si $C = \sum_j \min_{x \in]0, +\infty[} \psi_j(x) = \sum_j f_j - f_j \log(f_j) > -\infty$ alors on obtient

$$0 \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq 2 \max(D, D - C) = D'$$

En utilisant la positivité de $\int_\Omega |\nabla u_n|^2$, on déduit que $\sum_j \psi_j \left(\int_{R_j} u_n \right) \leq D'$. En posant $K_i = \sum_{j \neq i} \min_x \psi_j$, il est clair que $\psi_i \left(\int_{R_i} u_n \right) \leq D' - K_i$ et que

$$0 < \underline{E}_i \leq \int_{R_i} u_n \leq \overline{E}_i \quad (4.5.2)$$

avec $\overline{E}_i = \max \{ \psi_i^{-1}(D' - K_i) \}$ et $\underline{E}_i = \min \{ \psi_i^{-1}(D' - K_i) \}$ où on note $\psi_i^{-1}(b) = \{ x \in]0, \infty[\mid \psi_i(x) = b \}$. Par conséquent la contrainte $\int_{R_i} u_n > 0$ est satisfaite. On déduit que $\sum_i \underline{E}_i \leq \int_\Omega u_n = \sum_i \int_{R_i} u_n \leq \sum_i \overline{E}_i$ et grâce à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger on obtient que u_n est bornée dans $L^2(\Omega)$. Ainsi il existe une sous-suite u_{n_k} (notée u_n) et $u \in H^1(\Omega)$ telles que $u_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} u$ et $u_n \xrightarrow{H^1(\Omega)^*} u$. On déduit que $J_\Omega(u) \leq \liminf J_\Omega(u_n)$ et en utilisant (4.5.2) et le théorème de Bolzano-Weierstrass on peut extraire une sous-suite u_n telle que $\int_{R_i} u_n \rightarrow l_i \in \mathbb{R}$ et par continuité $\psi_i \left(\int_{R_i} u_n \right) \rightarrow \psi_i(l_i) \forall i \in I_{ind}(\Omega)$. Finalement on a

$$E_\Omega(u) \leq \liminf E_\Omega(u_n)$$

et donc u est un minimum de $E_\Omega(u)$ dans $H^1(\Omega)$.

Bornes : Si $u \in H^1(\Omega)$ est une solution de (4.5.1) alors $DE_\Omega(u).v = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega)$ c-à-d

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} D\psi_j \left(\int_{R_j} u \right) \int_{R_j} v = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (4.5.3)$$

avec $D\psi_j \left(\int_{R_j} u \right) = 1 - \frac{f_j}{\int_{R_j} u}$.

- En prenant comme fonction test $v = 1$ on obtient l'égalité $N = \sum_j \frac{f_j}{\int_{R_j} u}$. Comme $\frac{f_j}{\int_{R_j} u} \geq 0$, $\forall j \in I_{ind}(\Omega)$, si $i_0 = \operatorname{argmin}_i \int_{R_i} u$ on a $N \geq \frac{f_{i_0}}{\int_{R_{i_0}} u}$ ce qui entraîne que $\int_{R_{i_0}} u \geq \frac{f_{i_0}}{N} \geq \frac{\min_i f_i}{N}$.
- En prenant comme fonction test $v = u$ on obtient l'inégalité $\sum_i \int_{R_i} u - f_i \leq 0$ et on déduit que $\max_i \int_{R_i} u \leq \sum_i \int_{R_i} u \leq \sum_i f_i$.

Unicité : En utilisant les deux premiers points on peut restreindre l'espace de minimisation à $H(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega), \alpha \leq \int_{R_j} u \leq \beta \right\}$. Comme $\psi_j(X)$ est strictement convexe sur $[\alpha, \beta]$ pour tout $j \in I_{ind}(\Omega)$, par linéarité de l'intégrale on déduit que $u \mapsto \psi_j \left(\int_{R_j} u \right)$ est strictement convexe sur $H(\Omega)$. Comme $J_\Omega(u)$ est strictement convexe, on déduit que $E_\Omega(u)$ est strictement convexe sur $H(\Omega)$ qui est un espace convexe et que par conséquent $E_\Omega(u)$ admet un unique minimum sur $H^1(\Omega)$. \square

Remarque 4.5.2. • *Sous les mêmes hypothèses sur f , on montre l'existence et l'unicité d'une solution $u_\epsilon \in H^1(\Omega_\epsilon)$ du problème (4.5.1). Pour $\epsilon \leq \epsilon_0$ assez petit (pour avoir $I_{ind}(\Omega) = I_{ind}(\Omega_\epsilon)$), on a $\min_i \int_{R_i^\epsilon} u_\epsilon \geq \frac{\min_i f_i}{N - \pi \epsilon_0^2}$ et $\max_i \int_{R_i^\epsilon} u_\epsilon \leq \int_{\Omega_\epsilon} f = \sum_{i=1}^N f_i |R_i^\epsilon|$, $\forall i \in I_{ind}(\Omega)$ où Ω_ϵ est l'union disjointe (au sens mesure de Lebesgue) des $(R_i^\epsilon)_{i \in I_{ind}(\Omega)}$.*

- *Quand $K \neq I$ est telle que $K\mathbf{1} \neq 0$ on peut montrer que le problème (4.5.1) est bien posé dans $H^1(\Omega)$. Pour plus de détails on réfère le lecteur à [17] chapitre 3.*
- *On peut montrer que la Proposition 4.5.1 est vraie dès que ψ_j est minorée pour $j \in I_{ind}(\Omega)$ et strictement convexe sur $I \subset \mathbb{R}$. Dans le cas général, α et β sont implicitement définis en fonction de ψ_j .*

4.5.2 Calcul du GT pour un domaine perforé

Dans cette section on calcule le GT pour un domaine perforé $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{\{x_0 + \epsilon B\}}$. Soit $j_0 \in I_{ind}(\Omega)$ tel que $R_{j_0} \supset B_\epsilon(x_0)$ où $B_\epsilon(x_0)$ est la boule de centre x_0 et de rayon ϵ . Pour simplifier la rédaction, on suppose qu'il existe $j_0 \in I_{ind}(\Omega)$ tel que $x_0 \in R_{j_0}$. Pour $\epsilon > 0$ assez petit, et $j \in I_{ind}(\Omega)$, on définit R_j^ϵ le domaine égale à $R_{j_0} \setminus \overline{B_\epsilon(x_0)}$ si $j = j_0$ et à R_j sinon. On note $I_j^\epsilon(u) = \int_{R_j^\epsilon} u$, $I_j(u) = \int_{R_j} u$, $J_\epsilon(u) = J_{\Omega_\epsilon}(u)$ et u_ϵ la solution de (4.5.1) en remplaçant Ω par Ω_ϵ . En écrivant que $DI_{\Omega_\epsilon}.v = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega_\epsilon)$, on déduit la formulation variationnelle de (4.5.1) :

$$\text{trouver } u_\epsilon \in H^1(\Omega_\epsilon) \text{ telle que } F_\epsilon(u_\epsilon, v) = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega_\epsilon)$$

où $F_\epsilon(u, v)$ est l'application définie sur $H^1(\Omega_\epsilon) \times H^1(\Omega_\epsilon)$:

$$F_\epsilon(u, v) = \int_{\Omega_\epsilon} \gamma \nabla u \cdot \nabla v + \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} D\psi_j \left(I_j^\epsilon(Ku) \right) \int_{R_j^\epsilon} Kv \quad (4.5.4)$$

En prenant $v \in \mathcal{D}(R_j^\epsilon)$, l'ensemble des fonctions $C^\infty(R_j^\epsilon)$ à support compact dans R_j^ϵ , on obtient $-\gamma\Delta u_\epsilon + D\psi_j(I_j^\epsilon(Ku_\epsilon))K^*\mathbf{1} = 0$ sur R_j^ϵ , $\forall j \in I_{ind}(\Omega)$. Puis en prenant $v \in H^1(\Omega_\epsilon)$, on déduit que $\partial_n u_\epsilon = 0$ sur $\partial\Omega_\epsilon$ et $[u_\epsilon]_{\partial R_j} = 0$:

$$(\mathcal{P}_\epsilon) \begin{cases} -\gamma\Delta u_\epsilon + D\psi_j(I_j^\epsilon(Ku_\epsilon))K^*\mathbf{1} = 0, \text{ dans } R_j^\epsilon \\ \partial_n u_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\epsilon \quad \text{et} \quad [u_\epsilon]_{\partial R_j} = 0 \end{cases} \quad (4.5.5)$$

où $[u_\epsilon]_{\partial R_j}$ est le saut de u_ϵ à travers ∂R_j . On donne ci-dessous le résultat principal de cette section. La preuve est faite dans le cas $\gamma = 1$ et $K = I$ pour alléger les notations mais la preuve reste identique dans le cas général.

Théorème 4.5.3. *Le GT associé au problème (4.5.5) et à la fonction coût $J_\epsilon(u) = \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u|^2$ pour un domaine perforé est :*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^b(x_0) &= -2\pi\nabla u_0(x_0) \cdot \nabla v_0(x_0) \\ &+ \frac{\pi}{\gamma} D\psi_{j_0}(I_{j_0}(Ku_0))(Ku_0(x_0) - Kv_0(x_0)) \\ &+ \frac{\pi}{\gamma} D^2\psi_{j_0}(I_{j_0}(Ku_0))Ku_0(x_0)(I_{j_0}(Ku_0) - I_{j_0}(Kv_0)) \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

avec u_0 et v_0 données par (4.5.5) et (4.5.11) pour $\epsilon = 0$.

Démonstration. On définit

$$\begin{aligned} \tilde{J}_\epsilon(u) &= - \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} \int_{R_j^\epsilon} D\psi_j(I_j^\epsilon(u))u \\ &= - \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} D\psi_j(I_j^\epsilon(u))I_j^\epsilon(u) \end{aligned}$$

La différence $J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0)$ s'écrit :

$$J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) = \tilde{J}_\epsilon(u_\epsilon) - \tilde{J}_\epsilon(u_0) = L_\epsilon(u_\epsilon - u_0) + \mathcal{I}_\epsilon \quad (4.5.7)$$

avec

$$\begin{aligned} L_\epsilon(u) &= - \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} \int_{R_j^\epsilon} (D\psi_{j_0}(I_{j_0}(u_0)) + D^2\psi_{j_0}(I_{j_0}(u_0))I_{j_0}(u_0))u \\ &= - \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} \int_{R_j^\epsilon} u \\ \mathcal{I}_\epsilon &= \int_{B_\epsilon} (D\psi_{j_0}(I_{j_0}(u_0)) + D^2\psi_{j_0}(I_{j_0}(u_0))I_{j_0}(u_0))u_0 \\ &= \int_{B_\epsilon} u_0 \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

Avant d'introduire le problème adjoint, on fait un développement de Taylor à l'ordre 2 par rapport à u de $F_\epsilon(u, v)$ au voisinage de u_0 :

$$F_\epsilon(u_\epsilon, v) = G_\epsilon(u_0, v) + b_\epsilon(u_\epsilon - u_0, v) + c_\epsilon(v) + d_\epsilon(v) \quad (4.5.9)$$

avec

$$\begin{aligned}
G_\epsilon(u, v) &= \int_{\Omega_\epsilon} \nabla u \cdot \nabla v + \sum_{j \in P(\Omega)} D\psi_j(I_j(u)) \int_{R_j^\epsilon} v \\
b_\epsilon(u, v) &= \int_{\Omega_\epsilon} \nabla u \cdot \nabla v + \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} D^2\psi_j(I_j(u_0)) \int_{R_j^\epsilon} u \int_{R_j^\epsilon} v \\
c_\epsilon(v) &= \frac{1}{2} \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} \int_{R_j^\epsilon} D^3\psi_j(\xi_\epsilon) (I_j^\epsilon(u_\epsilon) - I_j^0(u_0))^2 \int_{R_j^\epsilon} v \\
d_\epsilon(v) &= -D^2\psi_{j_0}(I_{j_0}(u_0)) \int_{B_\epsilon} u_0 \int_{R_{j_0}^\epsilon} v
\end{aligned}$$

où $\xi_\epsilon = \theta \int_{R_j^\epsilon} u_\epsilon + (1 - \theta) \int_{R_j} u_0 \in [\alpha, \beta]$ avec $0 < \theta < 1$. On introduit le problème adjoint $v_\epsilon \in H^1(\Omega_\epsilon)$ tel que :

$$b_\epsilon(u, v_\epsilon) = -L_\epsilon(u) \quad \forall u \in H^1(\Omega_\epsilon) \quad (4.5.10)$$

En prenant $u \in \mathcal{D}(R_j^\epsilon)$ puis $u \in H^1(\Omega_\epsilon)$ et en intégrant par parties, on déduit que les équations d'Euler associées à (4.5.10) sont :

$$\begin{cases} -\Delta v_\epsilon + D^2\psi_j(I_j(u_0)) \int_{R_j^\epsilon} v_\epsilon = \mathbf{1} \text{ dans } R_j^\epsilon \\ \partial_n v_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\epsilon \quad \text{et} \quad [v_\epsilon]_{\partial R_j} = 0 \end{cases}$$

Remarque 4.5.4. Pour $\gamma > 0$ et $K \neq I$, le problème adjoint sera défini par

$$\begin{cases} -\gamma \Delta v_\epsilon + D^2\psi_j(I_j(Ku_0)) \int_{R_j^\epsilon} K v_\epsilon = K^* \mathbf{1} \text{ dans } R_j^\epsilon \\ \partial_n v_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\epsilon \quad \text{et} \quad [v_\epsilon]_{\partial R_j} = 0 \end{cases} \quad (4.5.11)$$

En utilisant (4.5.7) et (4.5.9) on déduit que

$$\begin{aligned}
J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) &= -L_\epsilon(u_\epsilon - u_0) + \mathcal{I}_\epsilon = -b_\epsilon(u_\epsilon - u_0, v_\epsilon) + \mathcal{I}_\epsilon \\
&= G_\epsilon(u_0, v_\epsilon) + c_\epsilon(v_\epsilon) + d_\epsilon(v_\epsilon) + \mathcal{I}_\epsilon \\
&= G_\epsilon(u_0, v_\epsilon) + \mathcal{I}_\epsilon + \mathcal{J}_\epsilon + \mathcal{E}_1
\end{aligned} \quad (4.5.12)$$

avec

$$\mathcal{E}_1 = c_\epsilon(v_\epsilon) \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_\epsilon = d_\epsilon(v_\epsilon) \quad (4.5.13)$$

En intégrant par parties, $G_\epsilon(u_0, v_\epsilon)$ s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}
G_\epsilon(u_0, v_\epsilon) &= - \int_{\partial B_\epsilon} \partial_n u_0 v_\epsilon - \int_{\Omega_\epsilon} \Delta u_0 v_\epsilon + \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} D\psi_j(I_j(u_0)) \int_{R_j^\epsilon} v_\epsilon \\
&= - \int_{\partial B_\epsilon} \partial_n u_0 v_\epsilon
\end{aligned}$$

En utilisant des calculs similaires à ceux faits en (4.4.13) pour le modèle de speckle, $G_\epsilon(u_0, v_\epsilon)$ se réécrit :

$$\begin{aligned}
G_\epsilon(u_0, v_\epsilon) &= - \int_{\partial B_\epsilon} \widetilde{u}_0 (\partial_n v_0 + \partial_n l_\epsilon^{w_\epsilon}) - D\psi_{j_0}(I_{j_0}(u_0)) \int_{B_\epsilon} v_0 + \int_{B_\epsilon} \widetilde{u}_0 \Delta v_0 - D\psi_{j_0}(I_{j_0}(u_0)) \int_{B_\epsilon} l_\epsilon^{w_\epsilon} \\
&= \mathcal{K}_\epsilon + \mathcal{L}_\epsilon + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3
\end{aligned}$$

avec $\widetilde{u}_0 = u_0 - u_0(0)$, $w_\epsilon = v_\epsilon - v_0$ et

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_\epsilon &= - \int_{\partial B_\epsilon} \widetilde{u}_0 (\partial_n v_0 + \partial_n l_\epsilon^{w_\epsilon}) \\ \mathcal{L}_\epsilon &= -D\psi_{j_0}(I_{j_0}(u_0)) \int_{B_\epsilon} v_0 \\ \mathcal{E}_2 &= \int_{B_\epsilon} \widetilde{u}_0 \Delta v_0 \quad , \quad \mathcal{E}_3 = -D\psi_{j_0}(I_{j_0}(u_0)) \int_{B_\epsilon} l_\epsilon^{w_\epsilon}\end{aligned}\tag{4.5.14}$$

Dans la proposition suivante on donne le développement asymptotique des quantités que l'on vient d'introduire.

Proposition 4.5.5. *Soient \mathcal{I}_ϵ , \mathcal{J}_ϵ , \mathcal{K}_ϵ , \mathcal{L}_ϵ , \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 et \mathcal{E}_3 données en (4.5.8), (4.5.13) et (4.5.14), on a les estimations :*

$$\begin{aligned}J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) &= \mathcal{I}_\epsilon + \mathcal{J}_\epsilon + \mathcal{K}_\epsilon + \mathcal{L}_\epsilon + \sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_i \\ \mathcal{I}_\epsilon &= \pi\epsilon^2 (D\psi_{j_0}(I_{j_0}(u_0)) + D^2\psi_{j_0}(I_{j_0}(u_0)) I_{j_0}(u_0)) u_0(0) + o(\epsilon^2) \\ \mathcal{J}_\epsilon &= -\pi\epsilon^2 D^2\psi_{j_0}(I_{j_0}(u_0)) u_0(0) I_{j_0}(v_0) + o(\epsilon^2) \\ \mathcal{K}_\epsilon &= -2\pi\epsilon^2 \nabla u_0(0) \cdot \nabla v_0(0) + o(\epsilon^2) \\ \mathcal{L}_\epsilon &= -\pi\epsilon^2 D\psi_{j_0}(I_{j_0}(u_0)) v_0(0) + o(\epsilon^2)\end{aligned}\tag{4.5.15}$$

et $\mathcal{E}_i \sim o(\epsilon^2)$ pour $i \in \llbracket 1..3 \rrbracket$.

Démonstration. La première et la quatrième égalités (expressions de \mathcal{I}_ϵ et \mathcal{L}_ϵ) sont évidentes. Un développement de Taylor de u_0 en 0, le Lemme 4.9.6 (voir Annexe B section 4.9.2) et le fait que $R_{j_0}^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} R_{j_0}$ donnent la seconde estimation. Pour \mathcal{K}_ϵ on réfère le lecteur à la preuve de la Proposition 4.4.6. Pour \mathcal{E}_1 , on utilise le Lemme 4.9.5, la régularité de $\psi(x)$ et le fait que $\xi_\epsilon \in [\alpha, \beta]$:

$$\begin{aligned}|\mathcal{E}_1| &\leq C \sum_{j \in v} \left(\int_{R_j^\epsilon} u_\epsilon - u_0 \right)^2 + C \left(\int_{B_\epsilon} u_0 \right)^2 \\ &\leq C \|u_\epsilon - u_0\|_{0, \Omega_\epsilon}^2 + C\epsilon^4 = O(\epsilon^4 \log(\epsilon))\end{aligned}$$

En utilisant que $\Delta v_0 = D^2\psi_{j_0}(I_{j_0}(u_0)) I_{j_0}(v_0)$ et un développement de Taylor de u_0 en 0 on obtient $\mathcal{E}_2 = O(\epsilon^3)$. Pour \mathcal{E}_3 , par un changement de variable et le Lemme 4.9.6, on obtient

$$|\mathcal{E}_3| \leq C\epsilon^2 \|l_\epsilon^{w_\epsilon}(\epsilon X)\|_{0, B} \leq C\epsilon^3 \sqrt{-\log(\epsilon)}$$

□

En notant j_0 l'indice tel que $R_{j_0} \ni x_0$, on déduit l'expression du GT donnée dans le Théorème 4.5.3. □

4.5.3 Expression du GT pour un domaine fissuré

Pour un domaine fissuré (b) $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{\{x_0 + \epsilon\sigma(\vec{n})\}}$, les calculs sont similaires. Le terme \mathcal{I}_ϵ de la différence (4.5.12) est nul et le terme $F_\epsilon(u_0, v_\epsilon)$ est $F_\epsilon(u_0, v_\epsilon) = - \int_{\sigma_\epsilon} \partial_n u_0 [w_\epsilon]$. Les développements asymptotiques de u_ϵ et v_ϵ sont identiques à ceux faits pour un domaine perforé et le calcul du GT est semblables à celui fait dans le cas linéaire (voir [10, 6] pour plus de détails).

Théorème 4.5.6. *Le GT associé au problème (4.5.5) et à la fonction coût $J_\epsilon(u) = \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u|^2$ pour un domaine fissuré (b) est*

$$\mathcal{I}(x_0, \vec{n}) = -\pi \nabla u_0(x_0) \cdot \vec{n} \nabla v_0(x_0) \cdot \vec{n} \quad (4.5.16)$$

avec u_0 et v_0 données par (4.5.5) et (4.5.11) pour $\epsilon = 0$.

Remarque 4.5.7. *On peut montrer que l'expression du GT reste vraie pour $\psi_j \in C^3(I)$, strictement convexe et minorée sur I . La seule différence est dans la définition du problème adjoint : dans (4.5.11), le second membre $K^* \mathbf{1}$ doit être remplacé par $(D^2 \psi_j(I_j(Ku_0)) I_j(Ku_0) + D \psi_j(I_j(Ku_0))) K^* \mathbf{1}$.*

4.6 Indicateurs topologiques

Dans les sections 4.3, 4.4 et 4.5 on a calculé les gradients topologiques pour respectivement les modèles gaussien, speckle-Log et poissonnien, et pour les deux modèles de perturbations (crack et boule). Conformément à la Remarque 1.3.2 on choisit les indicateurs pour les modèles du crack et de la boule suivants :

$$I_{Lap}^c(x_0) = \min_{\|\vec{n}\|=1} \mathcal{I}^c(x_0, \vec{n}) \quad (4.6.1)$$

avec $\mathcal{I}^c(x_0, \vec{n})$ donné par (4.3.4b), (4.4.16) et (4.5.16) pour respectivement les modèles gaussien, speckle-log et poissonnien.

$$I_{Lap}^b(x_0) = \left| \mathcal{I}^b(x_0) \right| \quad (4.6.2)$$

avec $\mathcal{I}^b(x_0)$ donné par (4.3.4a), (4.4.4) et (4.5.6) pour respectivement les modèles gaussien, speckle-log et poissonnien.

4.7 Restauration en utilisant le GT pour un domaine fissuré

Plus qu'un détecteur de contours, l'indicateur topologique associé à un domaine fissuré I_{Lap}^c permet de restaurer les images dégradées par du flou et/ou différents types de bruits. Une fois I_{Lap}^c calculé, on définit pour un seuil $\delta > 0$ fixé, l'ensemble $E_\delta = \left\{ x \in \Omega; |I_{Lap}^c(x)| \geq \delta \right\}$ et la fonction caractéristique

$$\chi_\eta(x) = \begin{cases} \eta & \text{si } x \in E_\delta \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

où η est un paramètre positif assez petit. Le calcul de I_{Lap}^c permet d'avoir la direction normalisée $\vec{\tau} = \vec{n}^\perp$ du contour. Si $\vec{n} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ est la normale au crack donné par I_{Lap}^c , on a $\vec{\tau} = (\sin(\varphi), -\cos(\varphi))$. Si f est l'image observée dégradée, l'idée est de chercher une version restaurée $u \in H^1(\Omega)$ de f , solution du problème anisotrope suivant :

$$\begin{cases} -\text{div}(\beta P_\eta^\varphi(x) \nabla u) + K^* D \psi(x, Ku) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.7.1)$$

avec

$$\psi(x, u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f - u)^2 & \text{(Modèle gaussien)} \\ \sum_{j \in \text{Ind}(\Omega)} \left(\int_{R_j} u - f_j \log \left(\int_{R_j} u \right) \right) \mathbf{1}_{R_j}(x) & \text{(Modèle poissonnien)} \\ \log(u) + \frac{f}{u} & \text{(Modèle de speckle)} \end{cases}$$

où $P_\eta^\varphi(x)$ est un tenseur construit à partir de $\varphi(x)$ et $\chi_\eta(x)$, et $\beta > 0$ est un paramètre à régler en fonction du niveau de bruit. Plus précisément, on choisit, $P_\eta^\varphi(x)\nabla u(x) = (\nabla u \cdot \vec{\tau})\vec{\tau} + \chi_\eta(x)(\nabla u \cdot \vec{n})\vec{n}$. Une simple identification montre que $P_\eta^\varphi(x)$ est la matrice

$$P_\eta^\varphi(x) = \begin{pmatrix} n_2^2 + \chi_\eta(x)n_1^2 & n_1n_2(\chi_\eta(x) - 1) \\ n_1n_2(\chi_\eta(x) - 1) & n_1^2 + \chi_\eta(x)n_2^2 \end{pmatrix} \quad (4.7.2)$$

où $n_1 = \cos(\varphi(x))$ et $n_2 = \sin(\varphi(x))$. Une interprétation de la matrice $P_\eta^\varphi(x)$ est la suivante :

- Si x appartient au fond de l'image, grâce à la définition de $\chi_\eta(x)$, $P_\eta^\varphi(x)$ s'écrit $P_\eta^\varphi(x) = I$ donc $\text{div}(P_\eta^\varphi(x)\nabla u) = \Delta u$ et la diffusion est isotrope.
- Si x appartient à un contour (c-à-d $x \in E_\delta$), alors $\chi_\eta(x)$ est proche de zéro et $P_\eta^\varphi(x)\nabla u(x) \approx (\nabla u \cdot \vec{\tau})\vec{\tau}$ et la diffusion a lieu dans la direction tangente au contour. Comme on le verra sur des exemples numériques en section 4.8, les résultats obtenus par la restauration (4.7.1) sont très bons.

4.8 Application numérique aux images 2D

Dans cette section on illustre la théorie du GT en donnant des résultats expérimentaux variés des modèles (4.3.1), (4.4.1) et (4.5.1).

Les expressions des GTs pour les trois modèles sont données en section 4.3, 4.4 et 4.5. Pour chaque modèle, pour calculer le GT on utilise l'Algorithme 1. Le calcul des états direct et adjoint est spécifique à chaque modèle. Pour un domaine fissuré, le GT est le même pour les 3 modèles en fonction des états direct et adjoint.

Algorithme 1 Calcul du GT

- 1: Calcul de u_0 et v_0 en utilisant l'Algorithme 2 ou l'Algorithme 3 selon le modèle.
 - 2: Calcul des dérivées de u_0 et v_0 par convolution avec des masques dérivateurs.
 - 3: Calcul du GT relativement à chaque modèle en utilisant les théorèmes donnés en sections 4.3, 4.4 et 4.5.
-

Remarque 4.8.1. Pour calculer (4.6.1) on réécrit le GT sous la forme

$$\mathcal{I}^c(x_0, \vec{n}) = \vec{n}^T M(x_0) \vec{n} \text{ avec } M(x_0) = -\pi \frac{\nabla u_0(x_0)\nabla v_0(x_0)^T + \nabla v_0(x_0)\nabla u_0(x_0)^T}{2}$$

Ainsi le GT au point x_0 est donné par $I_{Lap}^c(x_0) = \lambda_{\min}(x_0)$ où λ_{\min} est la valeur propre minimale de la matrice symétrique $M(x_0)$ et est calculable explicitement.

Comme les équations (4.3.2) et (4.3.3) sont linéaires, on développe une discrétisation utilisant cette propriété dans la sous section spécifique 4.8.1. Ensuite on établit les discrétisations des problèmes (4.4.1) et (4.5.1) et finalement on donne quelques résultats expérimentaux. Comme les modèles adjoints (4.4.9) et (4.5.11) sont linéaires à coefficients non constants, on les discrétise en utilisant un schéma aux différences finies classique et en utilisant des "sparse solvers".

4.8.1 Discrétisation du modèle gaussien avec flou

Pour discrétiser (4.3.2) et (4.3.3) on utilise une DCT1 (discrete cosine transform of type 1) du fait de la propriété de symétrie sous-jacente à cet algorithme. De plus la DCT1 d'un produit de convolution est le produit des DCT1. La symétrie supposée par cet algorithme permet d'éviter les effets de bord puisque l'image ici est considérée comme un signal périodique et symétrique. Une DCT1 à N points est

équivalente à une DFT (discrete Fourier transform) à $2N - 2$ points. Par exemple en 1D pour $N = 4$, la DCT1 de $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ est équivalente à la DFT de $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_2, x_1]$. De manière classique, on utilise l'algorithme FFT (fast Fourier transform) pour implémenter la DFT. On sait que le coût d'une FFT est en $\mathcal{O}(N \log(N))$. Une étude numérique montre que pour $N \leq 10^{10}$, la FFT est plus rapide qu'un schéma aux différences finies (voir par analogie avec la DCT2 Figure 7.2). L'Algorithme 2 donne les différentes étapes pour calculer les solutions (4.3.2) et (4.3.3).

Il consiste en les étapes suivantes :

- Extension symétrique de l'image initiale $N_y \times N_x$ en une image $2(N_y - 1) \times 2(N_x - 1)$ et extension du noyau $(2n_y + 1) \times (2n_x + 1)$ en un noyau $2(N_y - 1) \times 2(N_x - 1)$. Pour fixer les idées en 1D et pour $n_x = 2$, l'extension du noyau $[x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2]$ est $[x_0x_1x_20\dots 0x_{-2}x_{-1}]$.
- Calcul de la FFT des extensions de l'image et des noyaux.
- Inversion algébrique dans le domaine de Fourier (simple division).
- Calcul de la solution en utilisant une FFT inverse.

Un point important est le choix du domaine fréquence. En effet la définition naturelle du domaine fréquence serait $\{0, \frac{2\pi}{N_x}, \dots, \frac{2\pi(N_x-1)}{N_x}\} \times \{0, \frac{2\pi}{N_y}, \dots, \frac{2\pi(N_y-1)}{N_y}\}$, mais ce n'est pas un bon choix. La raison est expliquée dans [51]. Donnons l'idée principale en 1D pour une image à N points vue comme une discrétisation d'un signal 1-périodique. La fonction trigonométrique associée aux coefficients calculés par la DFT est

$$u^N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{y}_k^N e^{2\pi i(k+m_k N)x}$$

où $\widehat{y}^N \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur tel que $\widehat{y}^N = DFT(y^N)$, $y^N = (u^N(l/N))_{0 \leq l \leq N-1}$ et $m_k \in \mathbb{Z}$ sont des coefficients qui ne changent pas la valeur de u^N aux points $x_l = \frac{l}{N}$, mais qui modifient beaucoup u^N entre ces points (de "aliasing" apparaît). Si on calcule la norme $L^2(0,1)$ de la dérivée de $u^N(x)$ on obtient :

$$\|(u^N)'\|_{L^2(0,1)}^2 = (2\pi)^2 \sum_{k=0}^{N-1} |\widehat{y}_k^N|^2 (k + m_k N)^2 \quad (4.8.1)$$

De (4.8.1) on déduit que m_k change considérablement la norme $L^2(0,1)$ de la dérivée de $u^N(x)$ et un bon choix pour m_k est la valeur minimisant $(k + m_k N)^2$. Si $0 \leq k < N/2$ alors $(k + m_k N)^2$ est minimisé pour $m_k = 0$ et si $N/2 \leq k < N$ alors $(k + m_k N)^2$ est minimisé pour $m_k = -1$. Une considération particulière est faite pour $k = N/2$ quand N est pair car deux choix sont possibles ($m_k = -1$ ou $m_k = 0$, voir [51] pour plus de détails). On déduit le domaine fréquence : $E = \left\{ \left(\frac{\pi k_x}{(N_x-1)}, \frac{\pi k_y}{(N_y-1)} \right), (k_x, k_y) \in E_x \times E_y \right\}$, avec $E_x = \{0, \dots, N_x - 1, -(N_x - 2), \dots, -1\}$ et $E_y = \{0, \dots, N_y - 1, -(N_y - 2), \dots, -1\}$. On note $\Lambda = (\Lambda_x, \Lambda_y)$ la grille $2(N_y - 1) \times 2(N_x - 1)$ associée à l'espace discret E et le vecteur composé des coefficients de Fourier discrets associés au signal discret $x \in \mathbb{R}^N$ est noté X .

Algorithme 2 Calcul des problèmes direct et adjoint

1. Soit f_{ij} une image définie pour $(i, j) \in \llbracket 0, N_y - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, N_x - 1 \rrbracket$, on l'étend en une image symétrique et périodique définie sur $\llbracket 0, 2(N_y - 1) - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, 2(N_x - 1) - 1 \rrbracket$.
 2. Soit k_{ij}^1 un noyau de convolution défini pour $(i, j) \in \llbracket 0, 2n_y \rrbracket \times \llbracket 0, 2n_x \rrbracket$, en utilisant la procédure décrite en section 4.8.1, on calcule son extension symétrique k_{mn} pour $0 \leq m < 2(N_y - 1)$ et $0 \leq n < 2(N_x - 1)$.
 3. Calcul des FFTs F_{kl} et K_{kl} pour $(k, l) \in \llbracket 0, 2(N_y - 1) - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, 2(N_x - 1) - 1 \rrbracket$.
 4. Soit $\Lambda = (\Lambda_x, \Lambda_y)$ la grille associée à l'espace fréquence discret décrit en section 4.8.1, on calcule $U_{kl} = \frac{\overline{K_{kl}} F_{kl}}{|K_{kl}|^2 + \gamma \Lambda_{kl}^2}$ et $V_{kl} = \frac{\overline{K_{kl}} (2K_{kl} U_{kl} - F_{kl})}{|K_{kl}|^2 + \gamma \Lambda_{kl}^2}$.
 5. On utilise une FFT inverse pour calculer u_{ij} et v_{ij} pour $(i, j) \in \llbracket 0, 2(N_y - 1) - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, 2(N_x - 1) - 1 \rrbracket$.
 6. Restriction de u_{ij} et v_{ij} à la grille initiale définie par $\llbracket 0, N_y - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, N_x - 1 \rrbracket$.
-

4.8.2 Discrétisation des modèles de Poisson et speckle-Log

Si $\text{inf}_{\Omega} f > 0$, par la Proposition 4.4.3 et la Proposition 4.5.1, les problèmes (4.4.1) et (4.5.1) sont bien posés et peuvent être discrétisés par :

$$\text{(Modèle speckle-Log)} \quad \min_{x \geq \log(\alpha_s)} J_s(x), \quad \alpha_s > 0 \quad (4.8.2a)$$

$$\text{(Modèle poissonnien)} \quad \min_{x \geq \alpha_p} J_p(x), \quad \alpha_p > 0 \quad (4.8.2b)$$

où $\alpha_s = \min(f^N) > 0$ et $\alpha_p = \frac{\min(f^N)}{N}$. f^N est une version discrète de f ; $J_p(x)$ et $J_s(x)$ sont respectivement les versions discrètes des fonctions énergies (4.2.3) et (4.1.6). On choisit une discrétisation simple : $u^N(x)$ est la fonction constante par morceaux égale à u_j sur le pixel j , et on représente u^N par un vecteur de \mathbb{R}^N . On note δ la constante égale à α_p pour le modèle poissonnien et égale à $\log(\alpha_s)$ pour le modèle speckle-Log. Durant la construction de la suite $x^{(k)}$, la condition $x^{(k)} \geq \delta$ doit être vérifiée à chaque itération. On assure cette condition par projection. Pour résoudre ces problèmes discrets, on utilise un algorithme itératif de descente de gradient appelé algorithme SGP (scaled gradient projection).

Les fonctions coût discrètes ont pour expression :

$$J_p(x) = -\frac{\gamma}{2} x^T A x + \sum_{i=1}^N (Kx)_i - f_i \log((Kx)_i)$$

$$J_s(x) = -\frac{\gamma}{2} x^T A x + \sum_{i=1}^N \left(u_i - g_i + e^{-(u_i - g_i)} \right)$$

où A est la matrice associé au laplacien avec conditions de Neumann homogènes, K est une discrétisation de l'opérateur de convolution (matrice circulante par bloc) et on rappelle que $g_i = \log(f_i)$. Nous allons donner l'idée principale de l'algorithme SGP. Les énergies discrètes J_p et J_s sont notées toutes les deux par J tant qu'on n'utilise pas leur expression particulière. On définit $\Lambda = \{x \in \mathbb{R}^N, x \geq \delta\}$. Le problème est donc de trouver $x^* \in \Lambda$ tel que $\nabla J(x^*) = 0$. À chaque itération, un développement de Taylor au point $x = x^{(k)}$ donne

$$\nabla J(x^{(k)}) + \nabla^2 J(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0$$

Si $\det(\nabla^2 J(x^{(k)})) \neq 0$, on obtient $x = x^{(k)} - \nabla^2 J(x^{(k)})^{-1} \nabla J(x^{(k)})$. On déduit par ce raisonnement que la direction de descente est donnée par $\nabla^2 J(x^{(k)})^{-1} \nabla J(x^{(k)})$, mais on voit que le temps de calcul de cette direction est non négligeable car elle nécessite la résolution d'un système linéaire. On note \mathcal{D}_L l'ensemble des matrices $N \times N$ symétriques définies positives telles que $\|D\| \leq L$ et $\|D^{-1}\| \leq \frac{1}{L} \forall D \in \mathcal{D}_L$. L'idée principale de l'algorithme SGP est de construire deux suites α_k et $D_k \in \mathcal{D}_L$ telles que $\alpha_k D_k$ approche $\nabla^2 J(x^{(k)})$ et de projeter chaque itéré sur Λ par rapport à la norme $\|x\|_D = \sqrt{x^T D x}$ où D sera une matrice d'échelle creuse. On définit $P_{\Lambda, D^{-1}}$ pour $D \in \mathcal{D}_L$ le projecteur sur Λ par rapport à la norme $\|\cdot\|_D$.

On rappelle l'algorithme SGP dans l'Algorithme 3 (voir [26] pour plus de détails).

Algorithme 3 Algorithme SGP

```

1: Soient  $x^{(0)} \geq \alpha$ ,  $\beta, \theta \in ]0, 1[$ ,  $0 < \alpha_{min} < \alpha_{max}$ ,  $L > 0$ , et  $M$  un entier positif.
2: for  $k = 0 : k_{max}$  do
3:   Choix du paramètre  $\alpha_k \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$  de la matrice d'échelle  $D_k \in \mathcal{D}_L$ 
4:   Projection :  $y^{(k)} \leftarrow P_{\Lambda, D_k^{-1}}(x^{(k)} - \alpha_k D_k \nabla f(x^{(k)}))$ 
5:   if  $y^{(k)} = x^{(k)}$  then
6:     Stop,  $x^{(k)}$  est un point stationnaire.
7:   end if
8:   Direction de descente  $d^{(k)} = y^{(k)} - x^{(k)}$ ;
9:    $\lambda_k \leftarrow 1$  et  $J_{max} \leftarrow \max_{0 \leq j \leq \min(k, M-1)} J(x^{(k-j)})$ 
10:   $\lambda_k$  calculée par backtracking :
11:  while  $f(x^{(k)} + \lambda_k d^{(k)}) \leq J_{max} + \beta \lambda_k \nabla J(x^{(k)})^T d^{(k)}$  do
12:     $\lambda_k \leftarrow \theta \lambda_k$ 
13:  end while
14:   $x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} + \lambda_k d^{(k)}$ 
15: end for

```

La construction des itérés D_k et α_k nécessite quelques explications. On prend $D_k = \text{diag}(d_i^k)$ avec $d_i^k = \min\left(L, \max\left(\frac{1}{L}, \frac{\partial^2 J}{\partial x_i^2}(x^{(k)})^{-1}\right)\right)$. L'approximation de la matrice hessienne $\nabla^2 J(x^{(k)})$ est donnée par $B(\alpha_k) = \alpha_k D_k$. En utilisant un développement de Taylor au premier ordre de $\nabla J(x)$ au point $x^{(k-1)}$ on obtient

$$\begin{aligned} \nabla J(x^{(k)}) - \nabla J(x^{(k-1)}) &= \nabla^2 J(x^{(k)}) \cdot (x^{(k)} - x^{(k-1)}) \\ &\quad + o\left(\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|^2\right) \end{aligned}$$

En cherchant $B(\alpha_k)$ comme une approximation de $\nabla J(x^{(k)})$, deux choix naturels pour définir α_k sont :

$$\begin{aligned} \alpha_k^1 &= \arg \min_{\alpha} \left\| B(\alpha_k) s^{(k-1)} - z^{(k-1)} \right\|_{D_k} = \frac{s^{(k-1)T} D_k^{-1} D_k^{-1} s^{(k-1)}}{s^{(k-1)T} D_k^{-1} z^{(k-1)}} \\ \alpha_k^2 &= \arg \min_{\alpha} \left\| s^{(k-1)} - B(\alpha_k)^{-1} z^{(k-1)} \right\|_{D_k} = \frac{s^{(k-1)T} D_k z^{(k-1)}}{z^{(k-1)T} D_k D_k z^{(k-1)}} \end{aligned}$$

où $s^{(k-1)} = x^{(k)} - x^{(k-1)}$ et $z^{(k-1)} = \nabla J(x^{(k)}) - \nabla J(x^{(k-1)})$. Dans [26] le calcul de α_k est donné par un algorithme appelé Algorithme SGP-SS (SGP step length selection) utilisant deux paramètres $0 < \alpha_{min} <$

α_{max} . Les dérivées des fonctions coût discrètes J_p et J_s sont :

$$\begin{aligned}\nabla J_p &= -\gamma Ax - K^T \frac{f}{Kx} + K^T \mathbf{1} \\ \nabla^2 J_p &= -\gamma A + K^T \text{diag} \left(\frac{f}{(Kx)^2} \right) K \\ \nabla J_s &= -\gamma Ax + 1 - e^{-(x-f)} \\ \nabla^2 J_s &= -\gamma A + \text{diag} \left(e^{-(x-f)} \right)\end{aligned}$$

où $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur composé uniquement de 1 ; pour $x \in \mathbb{R}^N$, $\text{diag}(x)$ est la matrice diagonale de diagonale x et $\varphi(x)$ est le vecteur $(\varphi(x_i))_{1 \leq i \leq N}$ où $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction. Les valeurs des paramètres utilisés dans l'Algorithme 3 sont : $\beta = 10^{-4}$, $\theta = 0.4$, $k_{max} = 600$, $M = 1$ et pour le modèle poissonnien (4.5.1) on prend $\alpha_{min} = 10^{-10}$, $\alpha_{max} = 10^5$ et $\alpha_{min} = 10^{-5}$, $\alpha_{max} = 10^{15}$ pour le modèle speckle-Log. La valeur initiale $x^{(0)}$ est soit l'image initiale pour le modèle de Poisson, soit son logarithme pour le modèle speckle-Log. Dans le cas du modèle de speckle, (4.7.1) est calculée avec $\psi(u) = \log(u) + \frac{f}{u}$ et ce problème est discrétisé pour les modèle de Poisson et de speckle par l'Algorithme 3 (SGP).

4.8.3 Comparaison de notre méthode avec quelques méthodes classiques

Comme rappelé dans le chapitre 1, il existe d'autres méthodes variationnelles pour segmenter/restaurer des images.

On va comparer la segmentation correspondant au GT et celle donnée par le modèle de Mumford-Shah. On va également comparer la restauration déduite du GT (4.7.1) avec le modèle de Mumford-Shah et une méthode TV (variation totale, voir chapitre 1).

Modèle de Mumford-Shah pour la segmentation/restauration d'images et son approximation

On reprend le modèle de Mumford-Shah (1.1.3) [67] et son approximation par la fonctionnelle de Ambrosio-Tortorelli [4] présentée au chapitre 1. On change le terme d'attache aux données $|u - f|^2$ en fonction du modèle a priori considéré (modèle gaussien, poissonnien et de speckle). Plus précisément le modèle d'Ambrosio-Tortorelli qu'on comparera au modèle de restauration utilisant le GT (4.7.1) est (voir [78]) :

$$\min_{u \in H^1(\Omega), b \in H^1(\Omega)} \int_{\Omega} \left[\psi(Ku) + \lambda b^2 |\nabla u|^2 + \alpha \left(\epsilon |\nabla b|^2 + \frac{(b-1)^2}{4\epsilon} \right) \right] \quad (4.8.3)$$

où K est l'opérateur associé au flou (représenté par une convolution), $u(x)$ l'image restaurée, $1 - b(x) \approx 0$ est la fonction caractéristique des contours et $\psi(u)$ dépend du modèle et est définie par :

$$\psi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f - u)^2 & \text{(Modèle gaussien)} \\ \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} \int_{R_j} u - f_j \log \left(\int_{R_j} u \right) & \text{(Modèle poissonnien)} \\ \log(u) + \frac{f}{u} & \text{(Modèle de speckle)} \end{cases} \quad (4.8.4)$$

Dans la suite, on appellera ce modèle le "modèle de Mumford-Shah".

Méthode TV pour la restauration d'images

On reprend le modèle (1.1.2) présenté au chapitre 1. De la même manière que pour le modèle de Mumford-Shah on adapte le terme d’attache aux données au modèle correspondant à l’image observée :

$$\min_{u \in \mathcal{BV}(\Omega)} \int_{\Omega} |Du| + \lambda \psi(Ku) \quad (4.8.5)$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre, K est l’opérateur de convolution (flou), et $\psi(u)$ est donnée en (4.8.4). Dans la suite on réfèrera à ce modèle en parlant de “modèle TV”. Pour plus de détails sur ces modèles on renvoie le lecteur à [13, 78, 67].

4.8.4 Résultats numériques pour le modèle gaussien. Comparaisons

Dans toute section I_{Lap}^c (resp. I_{Lap}^b) désigne (4.6.1) (resp. (4.6.2)) défini à partir de \mathcal{I}^c (4.3.4b) (resp. \mathcal{I}^b (4.3.4a)). Une première étude intéressante est de comparer I_{Lap}^b et I_{Lap}^c pour un domaine perforé et fissuré. Intuitivement I_{Lap}^b (indicateur topologique associé à un domaine perforé) devrait être adapté à la détection de structures isotropes assez petites (de taille une dizaine de pixels) et I_{Lap}^c (indicateur topologique associé à un domaine fissuré) serait adapté à la détection de contours de grands objets (de taille plus de 20 pixels). La Figure 4.1 montre I_{Lap}^b et I_{Lap}^c pour différentes valeurs de γ comparés à la fonction $b(x)$ obtenue en minimisant la fonctionnelle de Mumford-Shah (4.8.3). Pour γ assez petit, I_{Lap}^c semble plus robuste que I_{Lap}^b . Pour $\gamma = 1$, I_{Lap}^c détecte mieux le contour des taches noires du guépard que le modèle de Mumford-Shah. On remarque qu’en augmentant γ , I_{Lap}^b devient singulier sur les contours des taches noires tandis que I_{Lap}^c ne détecte plus que la silhouette du guépard. On déduit que γ doit être réglé par rapport au bruit mais aussi par rapport aux tailles des structures à détecter.

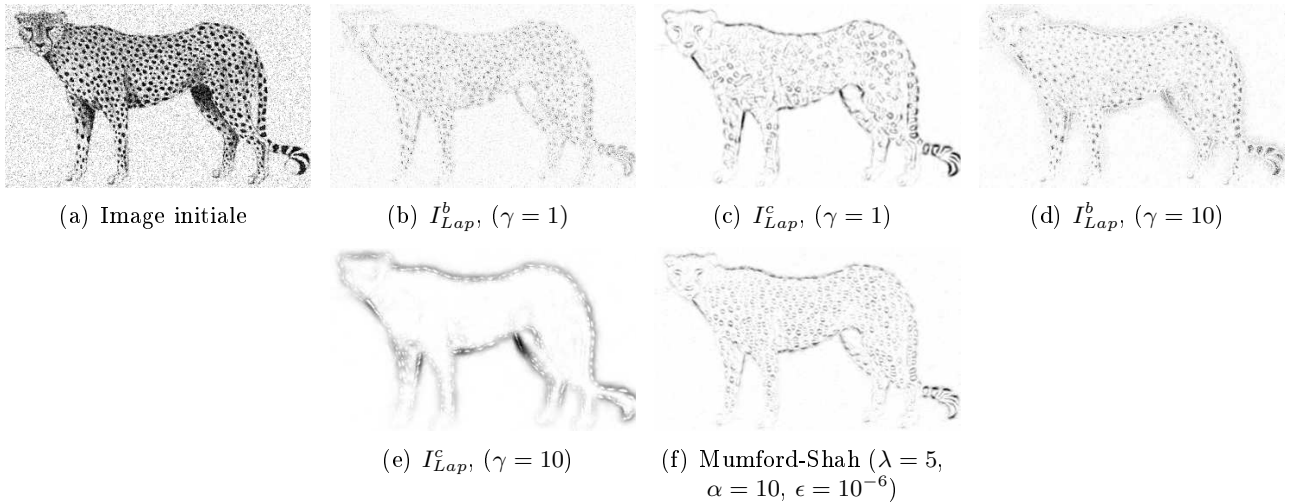


FIGURE 4.1 – Comparaison de I_{Lap}^b (4.6.2) et I_{Lap}^c (4.6.1) pour différentes valeurs de γ avec le modèle de Mumford-Shah (4.8.3) ($b \approx 0$) pour une image bruitée par du bruit gaussien (PSNR=16dB) contenant principalement des structures isotropes

La Figure 4.2 compare I_{Lap}^c aux résultats obtenus avec le modèle de Mumford-Shah pour une image floutée par une convolution avec une gaussienne et bruitée par du bruit gaussien. Les résultats sont similaires mais I_{Lap}^c a l’avantage d’être beaucoup plus rapide (pour cette image (213×315), le temps CPU est de l’ordre de la seconde sur un ordinateur équipé d’un processeur Intel Core 1.9 GHz contre environ 30s pour le modèle de Mumford-Shah).



(a) Image initiale



(b) I_{Lap}^{ϵ} , ($\gamma = 1$)

(c) Mumford-Shah ($\lambda = 10$,
 $\alpha = 5$, $\epsilon = 10^{-6}$)

(d) I_{Lap}^{ϵ} : Zoom

(e) Mumford-Shah : Zoom

FIGURE 4.2 – Comparaison de I_{Lap}^{ϵ} (4.6.1) avec le modèle de Mumford-Shah (4.8.3) pour une image contenant du bruit gaussien et floutée par une convolution gaussienne (PSNR=16dB, $\sigma = 3$)

La Figure 4.3 montre les versions restaurées par le GT (4.7.1), Mumford-Shah (4.8.3) et TV (4.8.5) sur une image contenant du bruit gaussien et floutée par une convolution gaussienne. On voit que la restauration fournie par le modèle de Mumford-Shah (4.8.3) dégrade les contours et ne permet pas d'inhiber l'effet du flou. Les restaurations utilisant le GT (4.7.1) et TV (4.8.5) sont assez similaires mais le temps CPU est plus court pour (4.7.1).



(a) Image initiale

(b) Version restaurée (4.7.1)
($\beta = 7$), PSNR=26.2dB

(c) Mumford-Shah ($\lambda = 10$,
 $\alpha = 5$, $\epsilon = 10^{-6}$),
PSNR=24.4dB

(d) TV ($\lambda = 0.05$),
PSNR=26.6dB

FIGURE 4.3 – Comparaison des versions restaurées utilisant le GT (4.7.1), Mumford-Shah (4.8.3) et TV (4.8.5) pour une image contenant du bruit gaussien (PSNR=16dB) et floutée par convolution gaussienne ($\sigma = 3$)

La Figure 4.4 montrent les profils 1D de l'image à retrouver, ses versions dégradées (floutée, floutée+bruitée), la version restaurée (4.7.1) et I_{Lap}^c (4.6.1) à travers un contour. On voit que la version restaurée est très proche de l'image à retrouver et que I_{Lap}^c détecte assez bien le contour.

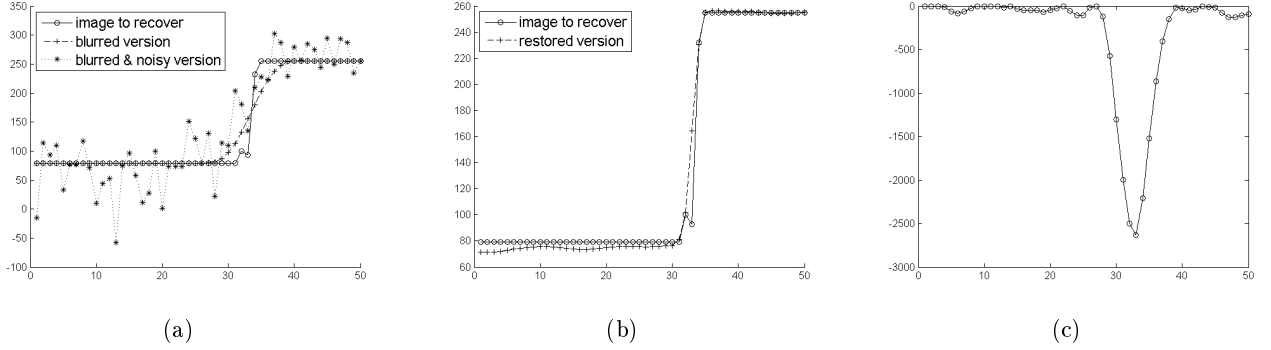


FIGURE 4.4 – Une coupe transverse illustrant (a) l'image à retrouver, la version floutée ($\sigma = 3$), la version floutée et bruitée (PSNR=16dB), (b) la version restaurée (4.7.1) ($\beta = 5$) et (c) I_{Lap}^c (4.6.1) ($\gamma = 1$)

4.8.5 Résultats numériques pour le modèle speckle-Log. Comparaisons

Dans toute section I_{Lap}^c (resp. I_{Lap}^b) désigne (4.6.1) (resp. (4.6.2)) défini à partir de \mathcal{I}^c (4.4.16) (resp. \mathcal{I}^b (4.4.4)).

Dans cette section on illustre la segmentation fournie par I_{Lap}^c , I_{Lap}^b et la fonction $b(x)$ associée au modèle de Mumford-Shah (4.8.3). On compare aussi les versions restaurées utilisant le GT (4.7.1), le modèle de Mumford-Shah (4.8.3) et le modèle TV (4.8.5).

Sur la Figure 4.5, on compare I_{Lap}^c (4.6.1) et I_{Lap}^b (4.6.2) pour différentes valeurs de γ avec la fonction $b(x)$ donnée par le modèle de Mumford-Shah sur une image bruitée par du bruit de speckle. Similairement au cas gaussien, I_{Lap}^c semble plus robuste que I_{Lap}^b et que le modèle de Mumford-Shah. On voit là encore que γ doit être réglé par rapport au bruit et à la taille des structures à détecter.

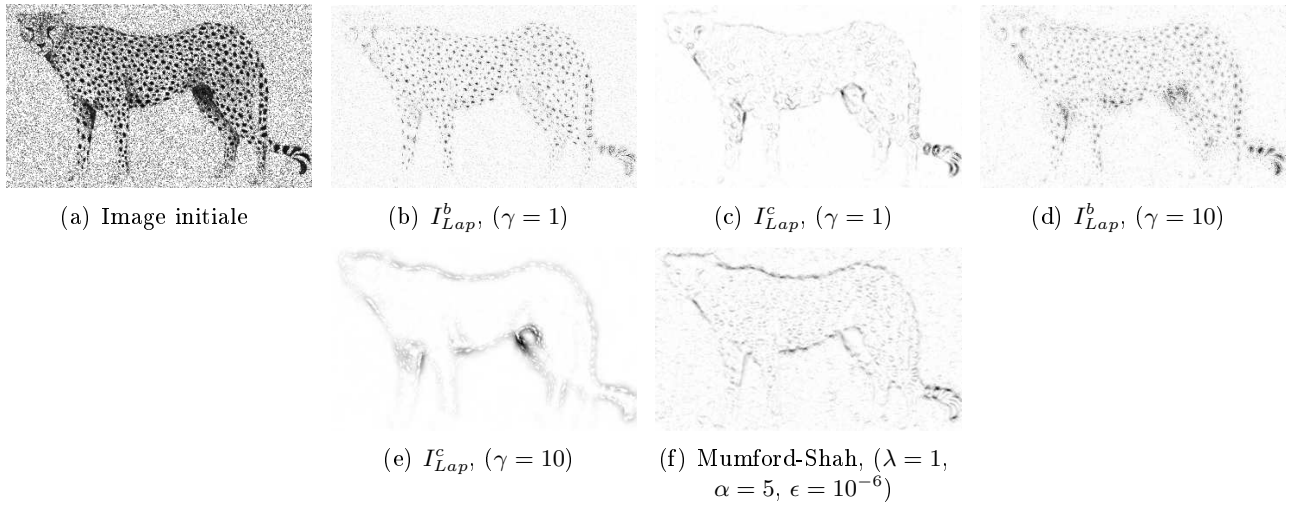


FIGURE 4.5 – Comparaison de I_{Lap}^b (4.6.2) et I_{Lap}^c (4.6.1) pour différentes valeurs de γ avec le modèle de Mumford-Shah (4.8.3) pour une image bruitée par du bruit de speckle ($L = 6$) et contenant principalement des structures isotropes

Les résultats donnés en Figure 4.6 pour une image réelle de type SAR sont comparables à ceux illustrés par la Figure 4.5. On voit ici que I_{Lap}^b et I_{Lap}^c peuvent être utilisés pour différents objectifs : en particulier au niveau des petites structures on voit que I_{Lap}^b en détecte l'intégralité tandis que I_{Lap}^c en détecte les contours.

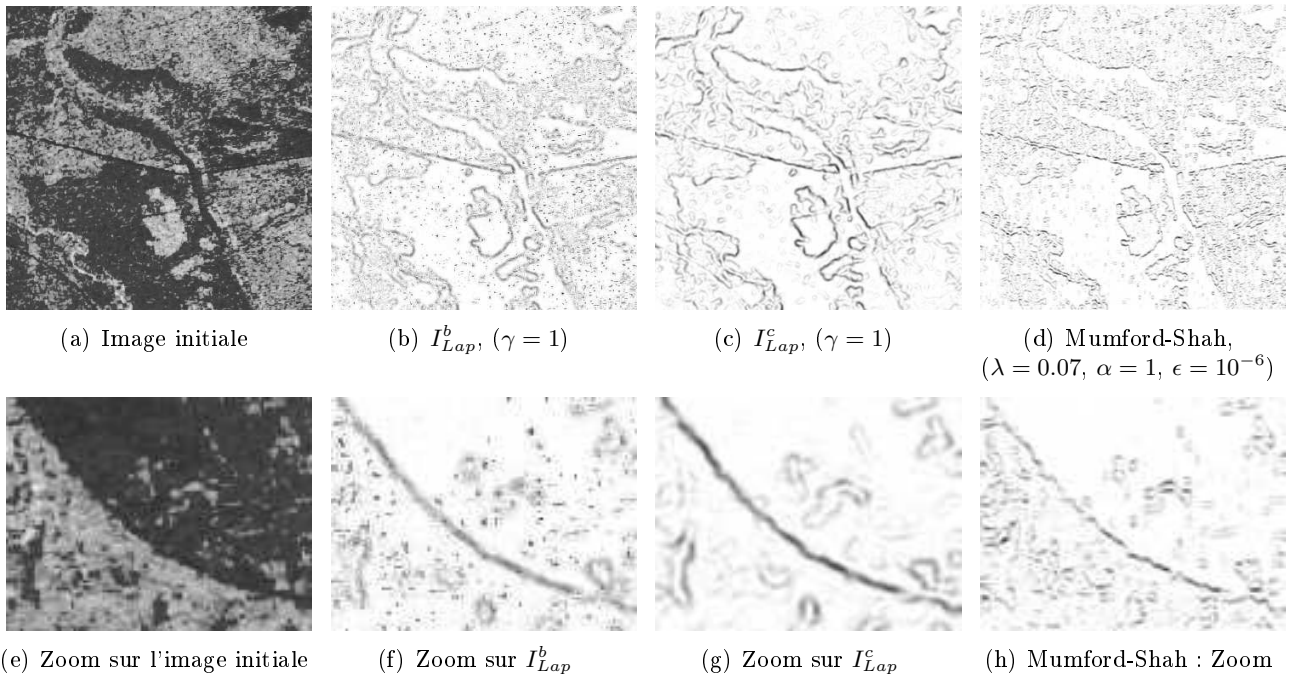


FIGURE 4.6 – Comparaison de I_{Lap}^b (4.6.2) et I_{Lap}^c (4.6.1) avec le modèle de Mumford-Shah (4.8.3) pour une image réelle de type SAR

La Figure 4.7 et la Figure 4.9 comparent les versions restaurées utilisant le GT (4.7.1), Mumford-Shah

(4.8.3) et TV (4.8.5) respectivement sur une image réelle de type SAR et sur une image bruitée par du bruit de speckle. La restauration fournie par le modèle de Mumford-Shah dégrade les contours tandis que les modèles (4.7.1) et (4.8.5) sont à peu près équivalents.

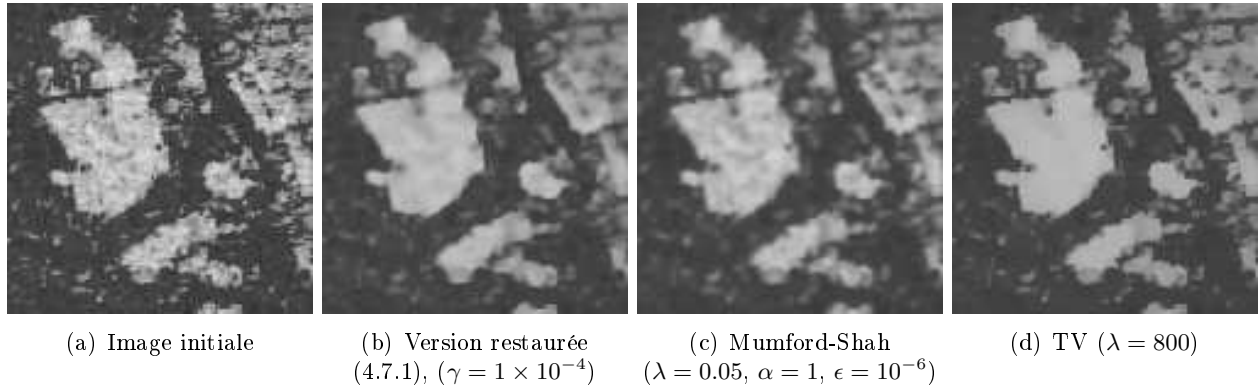


FIGURE 4.7 – Comparaison des versions restaurées utilisant le GT (4.7.1), Mumford-Shah (4.8.3) et TV (4.8.5) pour une image de type SAR (Zoom sur Figure 4.6-(a))

Sur la Figure 4.8 on compare I_{Lap}^c et la fonction $b(x)$ donnée par le modèle de Mumford-Shah (4.8.3) sur une image synthétique très bruitée ($L = 1$ c-à-d le pire cas possible pour ce modèle). Ici I_{Lap}^c donne d'assez bons résultats comparé à (4.8.3) qui élargit les contours.

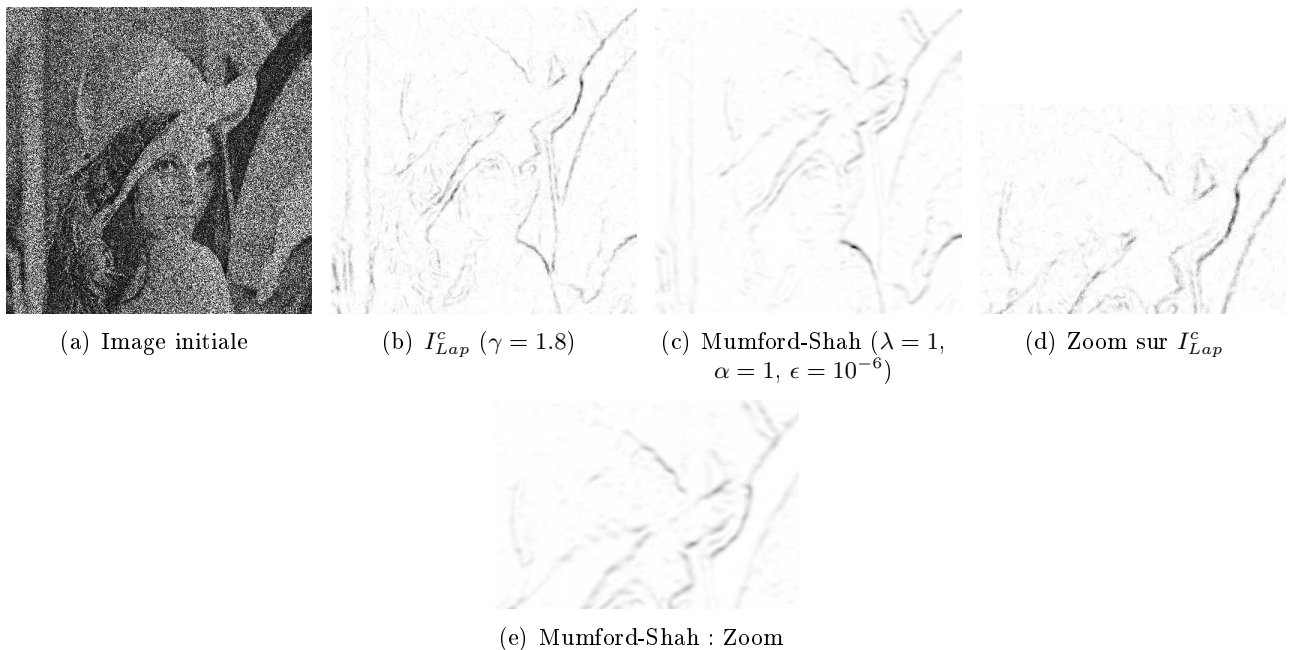


FIGURE 4.8 – Comparaison de I_{Lap}^c (4.6.1) avec le modèle de Mumford-Shah (4.8.3) pour une image synthétique bruitée par du bruit de speckle ($L = 1$)

Finalement la Figure 4.10 montre les profils 1D de l'image à retrouver, ses versions bruitée, et restaurée (4.7.1) et I_{Lap}^c (4.6.1) à travers un contour. La version restaurée est très proche de l'image à retrouver et le contour n'est pas dégradé. Cela montre que le modèle (4.7.1) est un bon modèle de restauration.

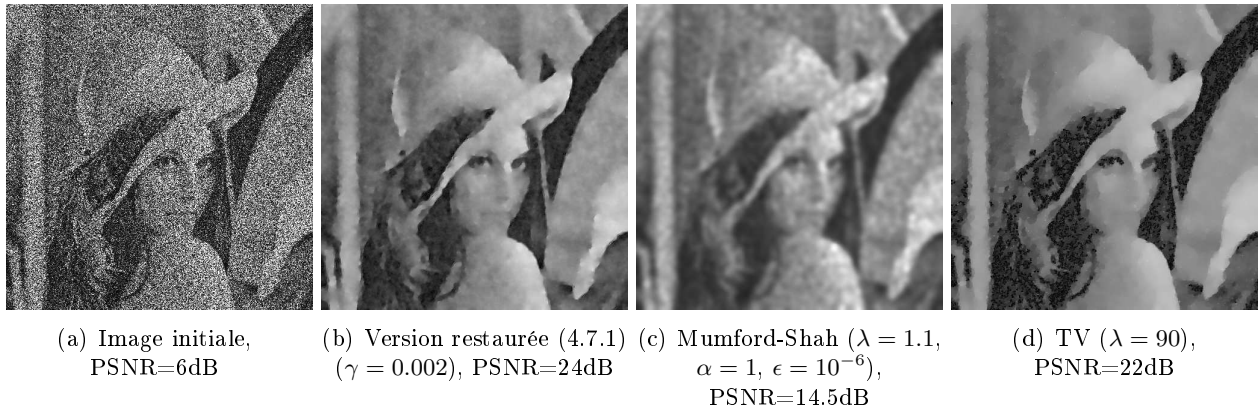


FIGURE 4.9 – Comparaison des versions restaurées par le GT (4.7.1), Mumford-Shah (4.8.3) et TV (4.8.5) pour une image bruitée par du bruit de speckle ($L = 1$)

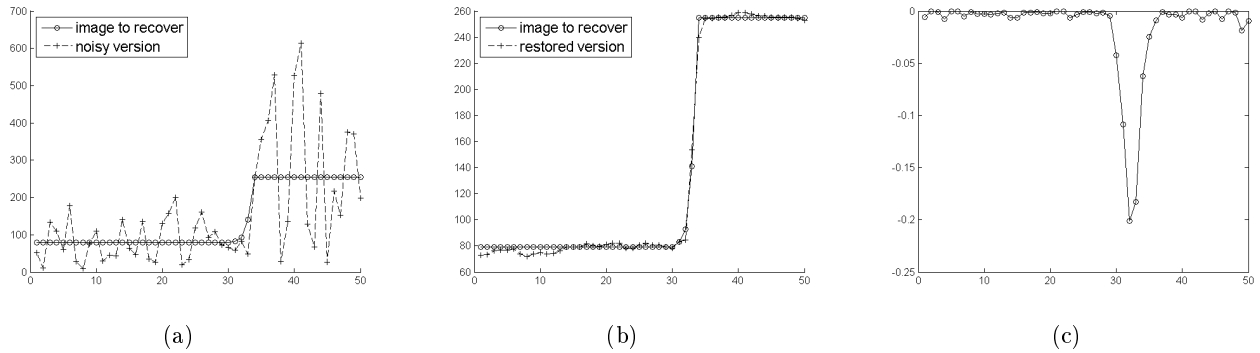


FIGURE 4.10 – Une coupe transverse de (a) l'image à retrouver et de sa version bruitée par du bruit de speckle, (b) la version restaurée (4.7.1) ($\gamma = 0.002$) et l'image à retrouver, (c) I_{Lap}^c (4.6.1) ($\gamma = 1.8$).

4.8.6 Résultats numériques pour le modèle de Poisson. Comparaisons

Dans toute section I_{Lap}^c (resp. I_{Lap}^b) désigne (4.6.1) (resp. (4.6.2)) défini à partir de \mathcal{I}^c (4.5.16) (resp. \mathcal{I}^b (4.5.6)).

Dans cette section, on compare la segmentation fournie par I_{Lap}^c , I_{Lap}^b et par le modèle de Mumford-Shah (4.8.3). On compare aussi les restaurations par le modèle utilisant le GT (4.7.1), Mumford-Shah et la méthode TV.

La Figure 4.11 et la Figure 4.12 montrent les résultats pour la segmentation respectivement dans les cas d'une image synthétique de type Poisson et d'une image confocale réelle d'un neurone de rat. I_{Lap}^c (4.6.1) détecte assez bien les contours comparé au modèle de Mumford-Shah. On voit que le I_{Lap}^b (4.6.2) détecte entièrement les petites structures pour γ petit (la taille de ces structures est liée à γ).

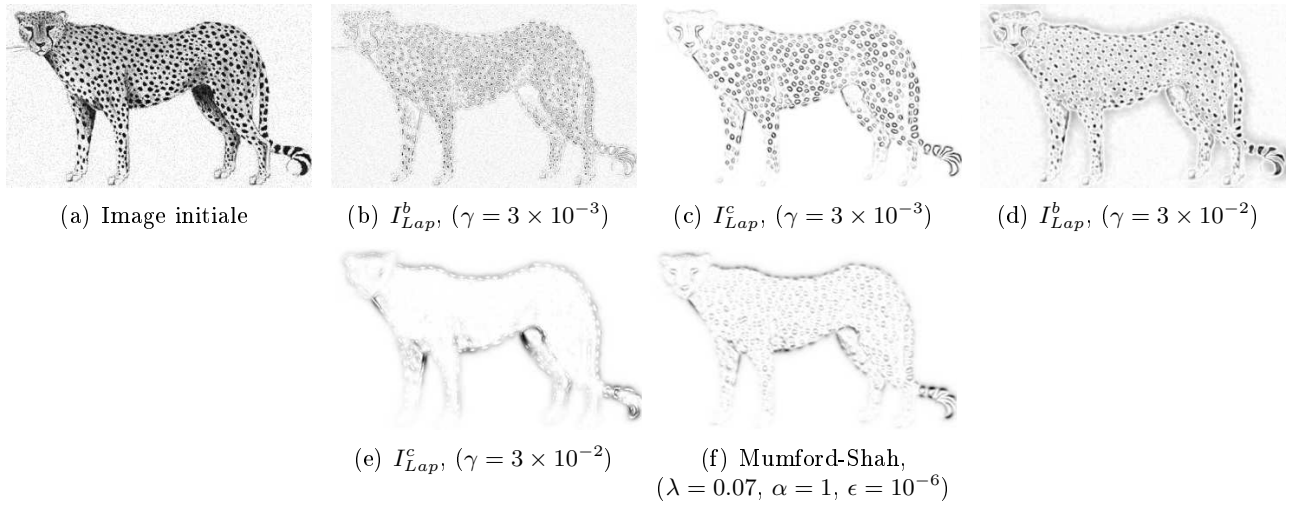


FIGURE 4.11 – Comparaison de I_{Lap}^b (4.6.2) et I_{Lap}^c (4.6.1) pour différentes valeurs de γ avec le modèle de Mumford-Shah (4.8.3) pour une image de type Poisson contenant principalement des structures isotropes

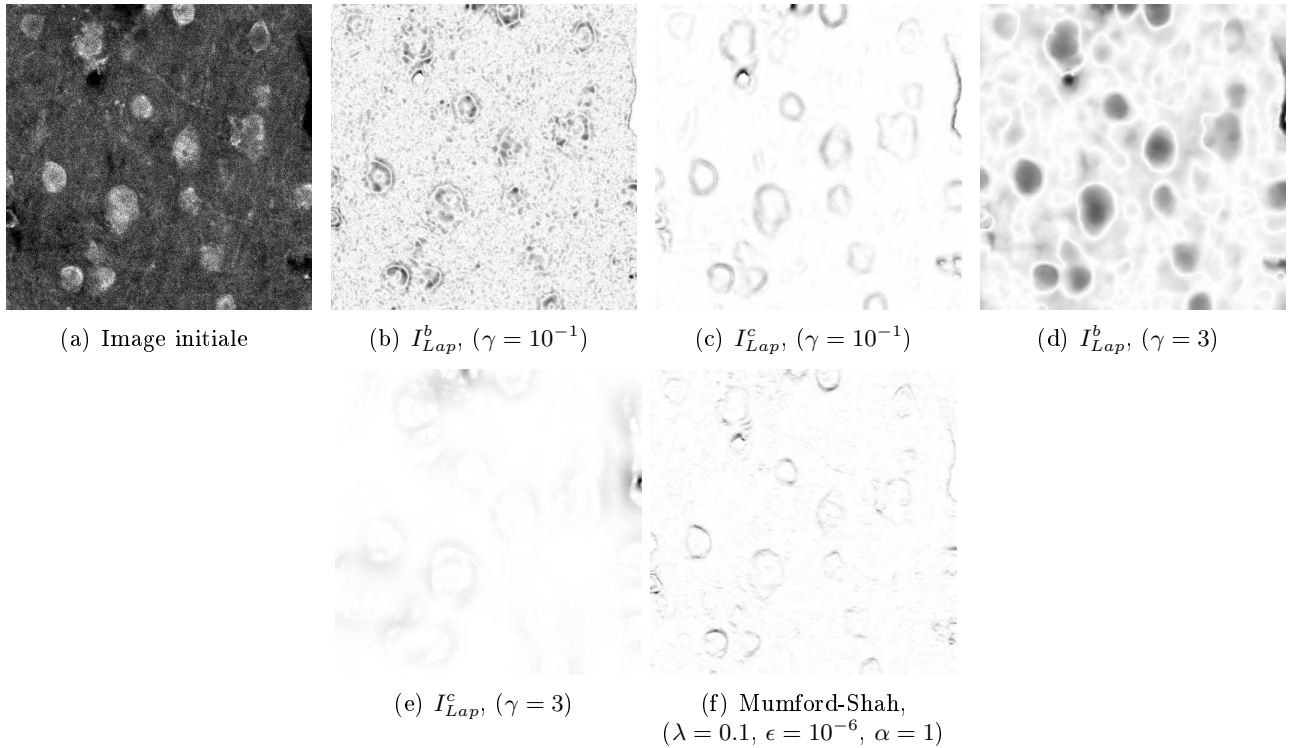


FIGURE 4.12 – Comparaison de I_{Lap}^b (4.6.2) et I_{Lap}^c (4.6.1) pour différentes valeurs de γ avec le modèle de Mumford-Shah (4.8.3) pour une image réelle confocale illustrant un neurone de rat

Les Figures 4.13 et 4.15 illustrent les restaurations utilisant le GT (4.7.1), Mumford-Shah (4.8.3) et TV (4.8.5) sur respectivement une image réelle confocale et une image synthétique de type Poisson floutée par convolution gaussienne. On remarque que le modèle basé sur le GT (4.7.1) et celui dit TV (4.8.5) restaurent assez bien les niveaux de gris de l'image en préservant les contours tandis que le modèle de

Mumford-Shah (4.8.3) dégrade les contours et l'effet du flou n'est pas inhibé complètement.

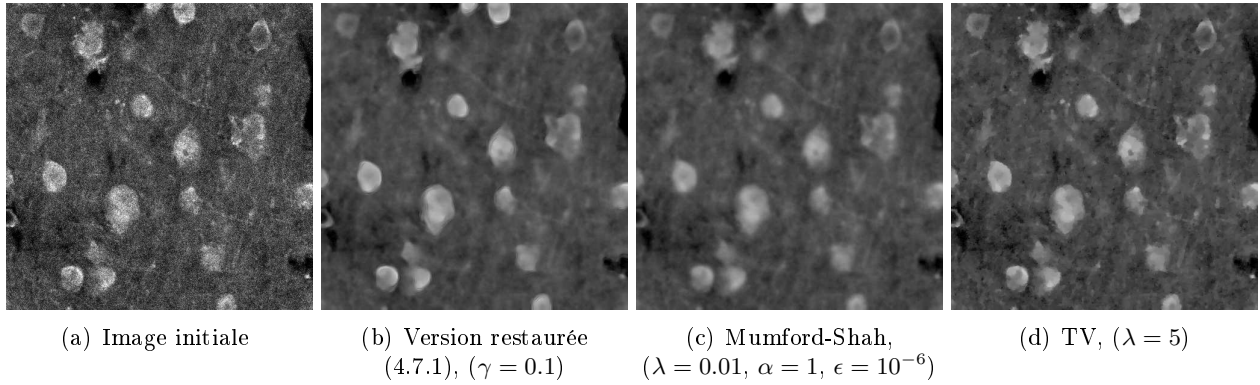


FIGURE 4.13 – Comparaison des versions restaurées utilisant le GT (4.7.1), Mumford-Shah (4.8.3) et TV (4.8.5) pour une image réelle confocale d'un neurone de rat

La Figure 4.14 compare I_{Lap}^c (4.6.1) avec la fonction $b(x)$ associée au modèle de Mumford-Shah (4.8.3) pour une image de type Poisson floutée par convolution gaussienne.

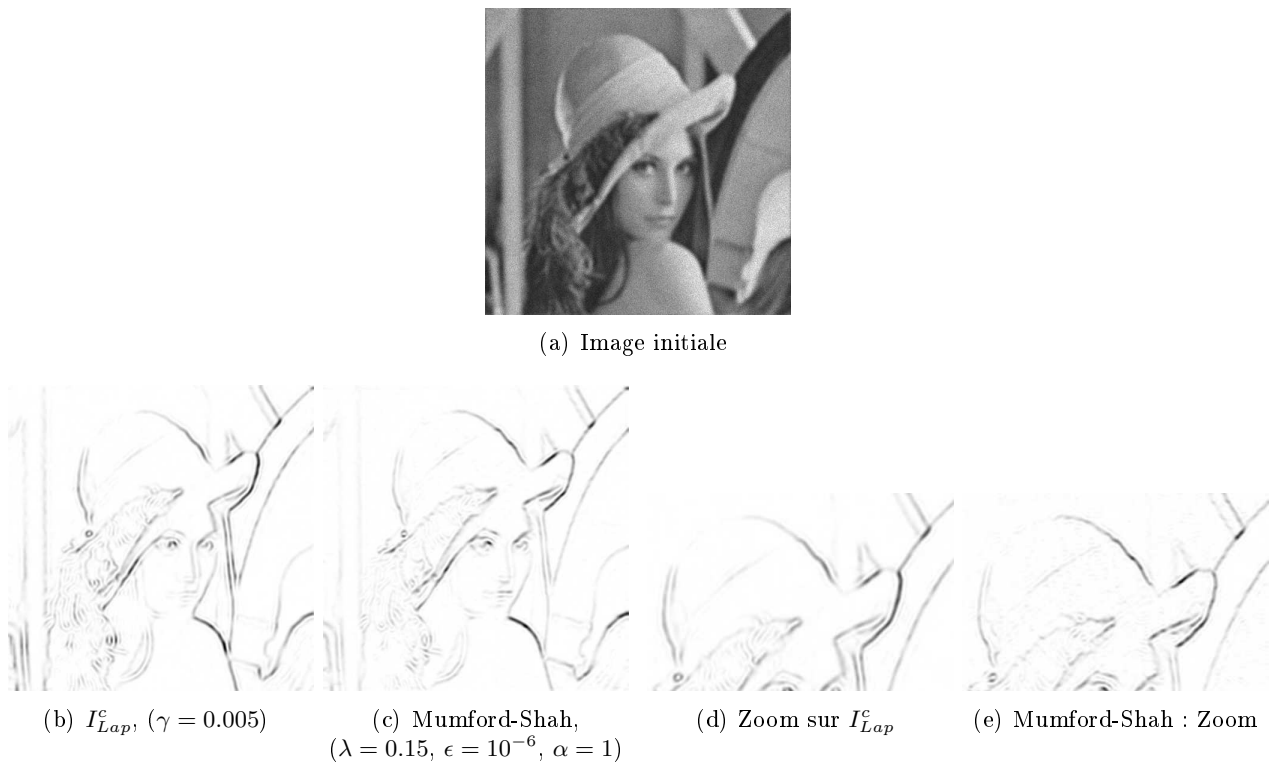


FIGURE 4.14 – Comparaison de I_{Lap}^c (4.6.1) avec le modèle de Mumford-Shah (4.8.3) sur une image synthétique de type Poisson floutée par convolution gaussienne ($\sigma = 3$).

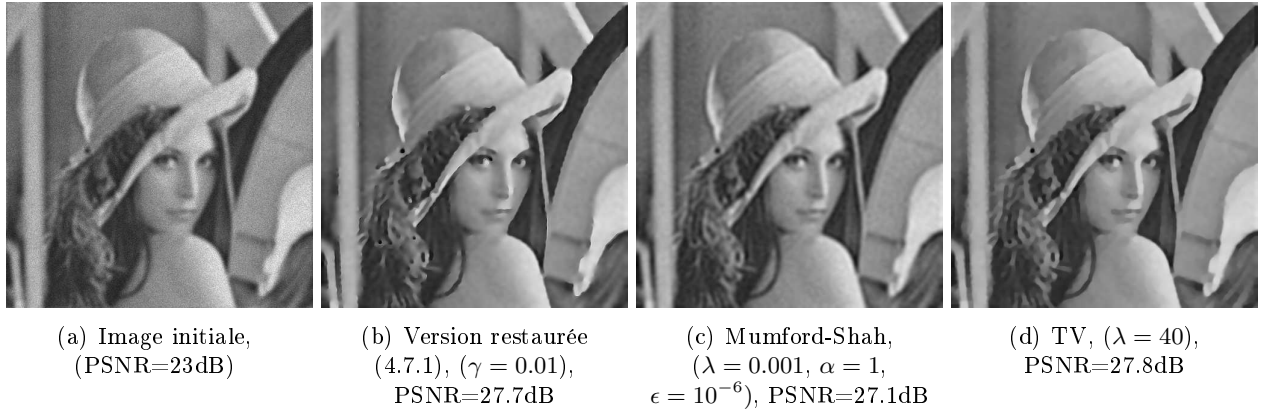


FIGURE 4.15 – Comparaison des versions restaurées utilisant le GT (4.7.1), Mumford-Shah (4.8.3) et TV (4.8.5) pour une image de type Poisson floutée par convolution gaussienne ($\sigma = 3$)

Finalement, la Figure 4.16 illustre les profils 1D de l'image à retrouver, de ses versions dégradées (floutée, floutée + processus de Poisson), de sa version restaurée par I_{Lap}^c (4.7.1) et de I_{Lap}^c (4.6.1) à travers un contour. On voit que (4.7.1) permet de retrouver une version assez proche de l'image initiale et que I_{Lap}^c détecte assez bien le contour.

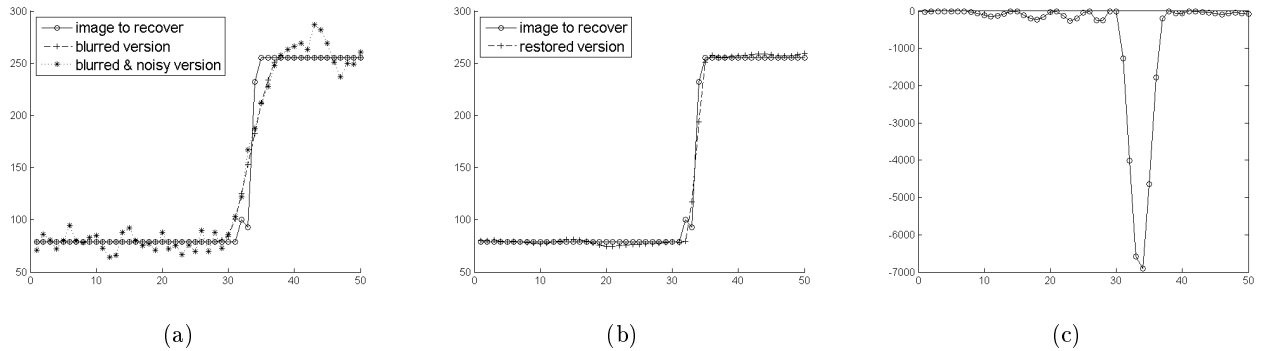


FIGURE 4.16 – Une coupe transverse de (a) l'image à retrouver, d'une version floutée par convolution gaussienne ($\sigma = 3$) et d'une version floutée et contaminée par un processus de Poisson, (b) la version restaurée (4.7.1) ($\gamma = 0.005$) et (c) I_{Lap}^c (4.6.1) ($\gamma = 0.001$)

4.9 Annexes

Dans ces annexes, on donne les justifications des développements asymptotiques des différences $u_\epsilon - u_0$ et $v_\epsilon - v_0$ pour les problèmes non linéaires étudiés dans ce chapitre (modèle de Poisson et modèle Speckle-log) dans le cas d'un domaine perforé. Les parties des preuves similaires au cas linéaire renvoient le lecteur à [10, 6]. Pour établir les développements asymptotiques, on a besoin de quelques résultats sur les problèmes extérieurs du type

$$(\mathcal{P}_{ext}) \begin{cases} \Delta H = 0, \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B} \\ \partial_n H = g, \text{ sur } \partial B \\ H \longrightarrow 0, \text{ à l'infini} \end{cases} \quad (4.9.1)$$

où $g \in H_0^{-1/2}(\partial B)$ et $H \in W^1(B')$. Pour le calcul du GT on aura aussi besoin de deux lemmes très utiles. On ne donne pas les preuves des deux lemmes suivants ici et on réfère le lecteur au chapitre 3 et à [6, 10] pour plus de détails.

Lemme 4.9.1. *La solution de (4.9.1) s'exprime sous la forme d'un potentiel simple couche :*

$$H(x) = \int_{\partial B} \lambda(y)E(x-y)d\sigma$$

où $E(x) = -\frac{1}{2\pi}\log(|x|)$ est la solution fondamentale associée au laplacien et $\lambda(y) = -2g(y)$. En notant l^H la solution de (4.4.12), on a les relations de saut à travers ∂B suivantes

$$\begin{cases} H - l^H = 0 \\ \partial_n H - \partial_n l^H = -\lambda \end{cases}$$

où l^H s'exprime sous la forme $l^H(x) = \int_{\partial B} \lambda(y)E(x-y)d\sigma$ avec $\lambda(y) = -2g(y)$.

On a les estimations asymptotiques suivantes.

Lemme 4.9.2. *Soit H la solution (4.9.1), alors :*

$$\begin{aligned} |H(x)| &\leq \frac{C}{|x|}, & |\nabla H(x)| &\leq \frac{C}{|x|^2} \\ \left\| H\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right\|_{0,\Omega_\epsilon} &= O\left(\sqrt{-\log(\epsilon)}\right), & \left\| \nabla H\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right\|_{0,\Omega_\epsilon} &= O(\epsilon) \end{aligned}$$

4.9.1 Annexe A

Dans cette annexe toutes les preuves sont faites en supposant $\gamma = 1$, et quand (4.4.3) est référencée on suppose que $\gamma = 1$. De plus on suppose que ψ vérifie les Hypothèses 2.

Lemme 4.9.3. *Soit $X_\epsilon = u_\epsilon - u_0$ où u_ϵ et u_0 sont respectivement données par (4.4.3) pour $\epsilon > 0$ et $\epsilon = 0$, et soit P la solution du problème (4.9.1) avec $g = -\nabla u_0(0) \cdot n$, alors on a le développement asymptotique suivant :*

$$X_\epsilon = \epsilon P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + e_\epsilon$$

avec $\|e_\epsilon\|_{1,\Omega_\epsilon} = O(\epsilon^2\sqrt{-\log(\epsilon)})$. De plus on a l'estimation :

$$\|X_\epsilon\|_{0,\Omega_\epsilon} = O\left(\epsilon^2\sqrt{-\log(\epsilon)}\right)$$

Démonstration. En faisant la différence de l'équation (4.4.3) pour $\epsilon > 0$ et pour $\epsilon = 0$ on obtient :

$$\begin{cases} -\Delta X_\epsilon + D_u\psi(x, u_\epsilon) - D_u\psi(x, u_0) = 0, & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ \partial_n X_\epsilon = -\partial_n u_0, & \text{dans } \partial B_\epsilon \\ \partial_n X_\epsilon = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.9.2)$$

Puis en intégrant par parties on a :

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla X_\epsilon \cdot \nabla v + \int_{\Omega_\epsilon} (D_u\psi(x, u_\epsilon) - D_u\psi(x, u_0)) v = - \int_{\partial B_\epsilon} \nabla u_0(0) \cdot \vec{n} v \quad \forall v \in H^1(\Omega_\epsilon) \quad (4.9.3)$$

De manière similaire on intègre par parties les équations d'Euler vérifiées par $\epsilon P\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ sur Ω_ϵ :

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \cdot \nabla v = - \int_{\partial B_\epsilon} \nabla u_0(0) \cdot \vec{n} - \int_{\Gamma} \partial_n P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) v \quad (4.9.4)$$

En posant $e_\epsilon = X_\epsilon - \epsilon P\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, en soustrayant (4.9.3) à (4.9.4), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\epsilon} \nabla e_\epsilon \cdot \nabla v + \int_{\Omega_\epsilon} (D_u \psi(x, u_\epsilon) - D_u \psi(x, u_0)) v \\ &= - \int_{\Gamma} \partial_n P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) v - \int_{\partial B_\epsilon} (\partial_n u_0 - \nabla u_0(0) \cdot \vec{n}) v \end{aligned}$$

Ensuite grâce à un développement de Taylor, on réécrit le second terme du second membre de l'égalité ci-dessus : $D_u \psi(x, u_\epsilon) - D_u \psi(x, u_0) = D_u^2 \psi(x, u_{\delta_\epsilon})(u_\epsilon - u_0)$ avec $u_{\delta_\epsilon} = \theta u_0 + (1 - \theta)u_\epsilon$, $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq \theta \leq 1$. On peut minorer ce terme en utilisant le Lemme 4.4.2. En effet comme $a \leq u_{\delta_\epsilon} \leq b$ et $\psi(u)$ est strictement convexe sur $[a, b] \subset I$, on déduit qu'il existe une constante $\delta > 0$ indépendante de ϵ telle que $D_u^2 \psi(x, u_{\delta_\epsilon}) \geq \delta > 0$. Ainsi e_ϵ est solution du problème variationnel suivant : trouver $e_\epsilon \in H^1(\Omega_\epsilon)$ tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} \nabla e_\epsilon \cdot \nabla v + \int_{\Omega_\epsilon} D_u^2 \psi(x, u_{\delta_\epsilon}) e_\epsilon v &= - \int_{\Gamma} \partial_n P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) v - \int_{\partial B_\epsilon} (\partial_n u_0 - \nabla u_0(0) \cdot \vec{n}) v \\ &\quad - \int_{\Omega_\epsilon} D_u^2 \psi(x, u_{\delta_\epsilon}) \epsilon P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) v \end{aligned}$$

pour tout $v \in H^1(\Omega_\epsilon)$. On décompose e_ϵ en $e_\epsilon = e_\epsilon^1 + e_\epsilon^2$ avec

- $e_\epsilon^1 \in H^1(\Omega_\epsilon)/\mathbb{R}$ solution de

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla e_\epsilon^1 \cdot \nabla v = - \int_{\partial B_\epsilon} (\partial_n u_0 - \nabla u_0(0) \cdot \vec{n}) v \quad \forall v \in H^1(\Omega_\epsilon)$$

- $e_\epsilon^2 \in H^1(\Omega_\epsilon)$ solution de

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla e_\epsilon^2 \cdot \nabla v + \int_{\Omega_\epsilon} D_u^2 \psi(x, u_{\delta_\epsilon}) e_\epsilon^2 v = - \int_{\Gamma} \partial_n P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) v - \int_{\Omega_\epsilon} D_u^2 \psi(x, u_{\delta_\epsilon}) \left(\epsilon P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + e_\epsilon^1 \right)$$

Ensuite en utilisant un changement de variable, le théorème de trace sur $B_2 \setminus \overline{B}$, et l'équivalence de la norme sur $H^1(B_2 \setminus \overline{B})/\mathbb{R}$ avec la semi norme et de nouveau un changement de variable, on obtient que $\|e_\epsilon^1\|_{H^1(\Omega_\epsilon)/\mathbb{R}} = O(\epsilon^2)$. Puis en utilisant le Lemme 4.9.2, le théorème de trace sur $\Omega \setminus \overline{B}$ et le fait que $e_\epsilon^1 \in H^1(\Omega_\epsilon)/\mathbb{R}$, on déduit que $\|e_\epsilon^2\|_{1, \Omega_\epsilon} = O(\epsilon^2 \sqrt{-\log(\epsilon)})$. L'estimation de la norme $H^1(\Omega_\epsilon)$ de e_ϵ est ensuite évidente en utilisant ces deux estimations et l'inégalité $\|e_\epsilon\|_{1, \Omega_\epsilon} \leq \|e_\epsilon^1\|_{H^1(\Omega_\epsilon)/\mathbb{R}} + \|e_\epsilon^2\|_{1, \Omega_\epsilon}$; l'estimation de $\|X_\epsilon\|_{0, \Omega_\epsilon}$ provient de l'inégalité $\|X_\epsilon\|_{0, \Omega_\epsilon} \leq \|\epsilon P\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\|_{0, \Omega_\epsilon} + \|e_\epsilon\|_{0, \Omega_\epsilon}$ et des inégalités précédentes, ce qui termine la preuve. \square

Lemme 4.9.4. Soit $w_\epsilon = v_\epsilon - v_0$ où v_ϵ et v_0 sont respectivement données par (4.4.8) pour $\epsilon > 0$ et $\epsilon = 0$, et soit Q la solution de (4.9.1) avec $g = -\nabla v_0(0) \cdot n$, alors on a le développement asymptotique suivant :

$$w_\epsilon = \epsilon Q\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + r_\epsilon$$

avec $\|r_\epsilon\|_{1, \Omega_\epsilon} = O(\epsilon^2 \sqrt{-\log(\epsilon)})$. De plus on a

$$\|w_\epsilon\|_{0, \Omega_\epsilon} = O\left(\epsilon^2 \sqrt{-\log(\epsilon)}\right) \quad , \quad \|w_\epsilon\|_{1, \Omega_\epsilon} = O(\epsilon)$$

Démonstration. On remarque que le problème vérifié par w_ϵ est linéaire. Grâce au Lemme 4.4.2 et aux Hypothèses 2, on obtient qu'il existe $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ telles que $\delta_2 \geq D_u^2 \psi(u_0) \geq \delta_1$. Il est ensuite facile de montrer que le problème associé est bien posé. La preuve peut facilement être déduite de celle du Théorème 4.9.3 ou bien de celle dans le cas linéaire à coefficient linéaire (voir [10, 6]). \square

4.9.2 Annexe B

Dans cette annexe on considère le problème (4.5.5) avec $K = I$ et $\gamma = 1$. Le cas général (quand K est un opérateur de convolution tel que $K\mathbf{1} \neq 0$) se déduit facilement de ce dernier cas (voir [17] chapitre 3 pour l'existence et l'unicité du problème).

Lemme 4.9.5. *Soit $X_\epsilon = u_\epsilon - u_0$ où u_ϵ et u_0 sont respectivement données par (4.5.5) pour $\epsilon > 0$ et $\epsilon = 0$, alors on a :*

$$X_\epsilon = \epsilon P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + e_\epsilon$$

où P est déterminé par (4.9.1) avec $g = -\nabla u_0(0) \cdot \vec{n}$ et où $\|e_\epsilon\|_{1, \Omega_\epsilon} = O(\epsilon^2)$. De plus on a l'estimation :

$$\|X_\epsilon\|_{0, \Omega_\epsilon} = O(\epsilon^2 \sqrt{-\log(\epsilon)})$$

Démonstration. On commence par écrire les équations d'Euler vérifiées par X_ϵ . En soustrayant les équations (4.5.5) pour $\epsilon > 0$ et pour $\epsilon = 0$, on obtient pour $j \in I_{ind}(\Omega)$:

$$(\mathcal{X}_\epsilon) \begin{cases} -\Delta X_\epsilon + D\psi_j \left(\int_{R_j^\epsilon} u_\epsilon \right) - D\psi_j \left(\int_{R_j} u_0 \right) = 0 \text{ sur } R_j^\epsilon, j \in I_{ind}(\Omega) \\ \partial_n X_\epsilon = -\partial_n u_0 \text{ sur } \partial B_\epsilon \\ \partial_n X_\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.9.5)$$

Par un développement de Taylor, il existe $\xi_\epsilon = \theta \int_{R_j^\epsilon} u_\epsilon + (1 - \theta) \int_{R_j} u_0$ avec $0 < \theta < 1$ tel que

$$D\psi_j \left(\int_{R_j^\epsilon} u_\epsilon \right) - D\psi_j \left(\int_{R_j} u_0 \right) = D^2\psi_j(\xi_\epsilon) \left(\int_{R_j^\epsilon} u_\epsilon - \int_{R_j} u_0 \right)$$

En utilisant la Proposition 4.5.1 et la Remarque 4.5.2, on déduit facilement que $0 < \alpha \leq \xi_\epsilon \leq \beta$ où $\alpha = \frac{\min_i f_i}{N - \pi\epsilon_0^2}$ et $\beta = \sum_{j \neq j_0} f_j + (1 - \pi\epsilon_0^2)f_{j_0}$.

(\mathcal{X}_ϵ) se réécrit pour $j \in I_{ind}(\Omega)$ comme suit :

$$(\mathcal{X}_\epsilon) \begin{cases} -\Delta X_\epsilon + D^2\psi_j(\xi_\epsilon) \int_{R_j^\epsilon} X_\epsilon = \int_{R_j \setminus \overline{R_j^\epsilon}} u_0 \text{ dans } R_j^\epsilon \\ \partial_n X_\epsilon = -\partial_n u_0, \text{ sur } \partial B_\epsilon \\ \partial_n X_\epsilon = 0, \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

avec $\int_{R_j \setminus \overline{R_j^\epsilon}} u_0 = \delta_{j_0}(j) \int_{B_\epsilon} u_0$, où δ est la mesure de Dirac. Soit $e_\epsilon = X_\epsilon - \epsilon P\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ où P est défini par (4.9.1) avec $g = -\nabla u_0(0) \cdot \vec{n}$. Alors e_ϵ vérifie :

$$(\mathcal{E}_\epsilon) \begin{cases} -\Delta e_\epsilon + D^2\psi_j(\xi_\epsilon) \int_{R_j^\epsilon} e_\epsilon = -\epsilon D^2\psi_j(\xi_\epsilon) \int_{R_j^\epsilon} P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \text{ dans } R_j^\epsilon, j \in I_{ind}(\Omega) \\ \partial_n e_\epsilon = -(\partial_n u_0 - \nabla u_0(0) \cdot \vec{n}) = \varphi_\epsilon(x) = O(|x|) \text{ sur } \partial B_\epsilon \\ \partial_n e_\epsilon = -\partial_n P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = \phi_\epsilon(x) = O(\epsilon^2) \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.9.6)$$

On pose :

$$K_\epsilon^j = \begin{cases} -\epsilon D^2\psi_j(\xi_\epsilon) \int_{R_j} P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = O(\epsilon^3), \text{ pour } j \neq j_0 \\ \int_{B_\epsilon} u_0 - \epsilon D^2\psi_{j_0}(\xi_\epsilon) \int_{R_{j_0}^\epsilon} P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = O(\epsilon^2), \text{ pour } j = j_0 \end{cases}$$

On décompose e_ϵ en la somme $e_\epsilon = e_\epsilon^1 + e_\epsilon^2 + e_\epsilon^3$ avec

- $e_\epsilon^1 \in H^1(\Omega_\epsilon)/\mathbb{R}$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta e_\epsilon^1 = 0, & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ \partial_n e_\epsilon^1 = \varphi_\epsilon(x), & \text{sur } \partial B_\epsilon \\ \partial_n e_\epsilon^1 = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

- $e_\epsilon^2 \in H^1(\Omega_\epsilon)/\mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} \Delta e_\epsilon^2 = 0, & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ \partial_n e_\epsilon^2 = 0, & \text{sur } \partial B_\epsilon \\ \partial_n e_\epsilon^2 = \phi_\epsilon(x), & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

- $e_\epsilon^3 \in H^1(\Omega_\epsilon)$ solution de

$$(\mathcal{E}_\epsilon^3) \begin{cases} -\Delta e_\epsilon^3 + D^2\psi_j(\xi_\epsilon) \int_{R_j} e_\epsilon^3 = K_\epsilon^j - D^2\psi_j(\xi_\epsilon) \int_{R_j^\epsilon} (e_\epsilon^2 + e_\epsilon^2) & \text{dans } R_j^\epsilon, j \in I_{ind}(\Omega) \\ \partial_n e_\epsilon^3 = 0, & \text{sur } \partial B_\epsilon \\ \partial_n e_\epsilon^3 = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Pour e_ϵ^1 en utilisant un changement de variable, le Théorème de trace sur $B_2 \setminus \overline{B}$, l'inégalité de Deny-Lions et un nouveau changement de variable on obtient $\|e_\epsilon^1\|_{H^1(\Omega_\epsilon)/\mathbb{R}} \leq C\epsilon^2$. Pour e_ϵ^2 , en appliquant le théorème de trace sur $\Omega \setminus \overline{B}$ on obtient $\|e_\epsilon^2\|_{H^1(\Omega_\epsilon)/\mathbb{R}} \leq C\epsilon^2$.

Pour estimer e_ϵ^3 , on part de la forme variationnelle de (\mathcal{E}_ϵ^3) :

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla e_\epsilon^3 \cdot \nabla v + \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} D^2\psi_j(\xi_\epsilon) \int_{R_j^\epsilon} e_\epsilon^3 \int_{R_j^\epsilon} v = \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} K_\epsilon^j \int_{R_j^\epsilon} v - D^2\psi_j^\epsilon(\xi_\epsilon) \int_{R_j^\epsilon} (e_\epsilon^1 + e_\epsilon^2) \int_{R_j^\epsilon} v \quad (4.9.7)$$

Grâce au calcul de $D^2\psi_j$ et en utilisant la Proposition 4.5.1 on a

$$\frac{\max_{i \in I_{ind}(\Omega)} f_i}{\alpha^2} \geq D^2\psi_j(\xi_\epsilon) = \frac{f_j}{\xi_\epsilon^2} \geq \frac{\min_{i \in I_{ind}(\Omega)} f_i}{\beta^2} > 0$$

où $N = |I_{ind}(\Omega)|$. En prenant comme fonction test $v = e_\epsilon^3$ dans (4.9.7), on déduit l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla e_\epsilon^3|^2 + C \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} \left(\int_{R_j^\epsilon} e_\epsilon^3 \right)^2 &\leq \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} |K_\epsilon^j| \left| \int_{R_j^\epsilon} e_\epsilon^3 \right| + |D^2\psi_j^\epsilon(\xi_\epsilon)| \int_{R_j^\epsilon} (|e_\epsilon^1| + |e_\epsilon^2|) \left| \int_{R_j^\epsilon} e_\epsilon^3 \right| \\ &\leq C (\epsilon^2 + \|e_\epsilon^1\|_{L^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{R}} + \|e_\epsilon^2\|_{L^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{R}}) \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} \left| \int_{R_j^\epsilon} e_\epsilon^3 \right| \\ &\leq C\epsilon^2 \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} \left| \int_{R_j^\epsilon} e_\epsilon^3 \right| \end{aligned}$$

Ensuite, grâce à l'inégalité suivante vraie pour toute suite réelle $(a_i)_i$

$$\left(\sum_{i \in I_{ind}(\Omega)} |a_i| \right)^2 \leq |I_{ind}(\Omega)| \sum_{i \in I_{ind}(\Omega)} |a_i|^2$$

et en utilisant la positivité de $\int_{\Omega_\epsilon} |\nabla e_\epsilon^3|^2$, on obtient

$$\sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} \left| \int_{R_j^\epsilon} e_\epsilon^3 \right| \leq C\epsilon^2$$

puis $|e_\epsilon^3|_{1,\Omega_\epsilon} \leq C\epsilon^2$. L'inégalité de Poincaré-Wirtinger permet d'écrire que :

$$\begin{aligned} \|e_\epsilon^3\|_{1,\Omega_\epsilon} &\leq \left\| e_\epsilon^3 - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_\epsilon} e_\epsilon^3 \right\|_{1,\Omega_\epsilon} + \left| \int_{\Omega_\epsilon} e_\epsilon^3 \right| \\ &\leq C|e_\epsilon^3|_{1,\Omega_\epsilon} + C \sum_{j \in I_{ind}(\Omega)} \left| \int_{R_\epsilon^j} e_\epsilon^3 \right| \leq C\epsilon^2 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $\|e_\epsilon\|_{1,\Omega_\epsilon} \leq \|e_\epsilon^1\|_{H^1(\Omega_\epsilon)/\mathbb{R}} + \|e_\epsilon^2\|_{H^1(\Omega_\epsilon)/\mathbb{R}} + \|e_\epsilon^3\|_{1,\Omega_\epsilon}$, on obtient le résultat. Pour l'estimation de la norme $L^2(\Omega_\epsilon)$ de X_ϵ , il suffit de prendre la norme $L^2(\Omega_\epsilon)$ de son développement asymptotique que l'on vient de montrer et d'utiliser le premier point du Lemme 4.9.5 et le Lemme 4.9.2. \square

Lemme 4.9.6. *Soit $w_\epsilon = v_\epsilon - v_0$ où v_ϵ et v_0 sont données en (4.5.10) pour $\epsilon > 0$ et $\epsilon = 0$, alors on a :*

$$w_\epsilon = \epsilon Q \left(\frac{x}{\epsilon} \right) + r_\epsilon$$

où Q est défini par (4.9.1) avec $g = -\nabla v_0(0) \cdot n$, et où $\|r_\epsilon\|_{1,\Omega_\epsilon} = O\left(\epsilon^2 \sqrt{-\log(\epsilon)}\right)$. De plus, on a :

$$\|w_\epsilon\|_{0,\Omega_\epsilon} = O\left(\epsilon^2 \sqrt{-\log(\epsilon)}\right) \quad , \quad |w_\epsilon|_{1,\Omega_\epsilon} = O(\epsilon)$$

Démonstration. En soustrayant l'équation (4.5.11) pour $\epsilon > 0$ et pour $\epsilon = 0$, on obtient les équations d'Euler associées à w_ϵ :

$$(\mathcal{W}_\epsilon) \left\{ \begin{array}{l} -\Delta w_\epsilon + D^2 \psi_j(I_j(u_0)) \int_{R_\epsilon^j} w_\epsilon = 0 \text{ dans } R_j \text{ avec } j \neq j_0 \\ -\Delta w_\epsilon + D^2 \psi_{j_0}(I_{j_0}(u_0)) \int_{R_{j_0}^\epsilon} w_\epsilon = D^2 \psi_{j_0}(I_{j_0}(u_0)) \int_{B_\epsilon} v_0 = O(\epsilon^2) \text{ dans } R_{j_0}^\epsilon \\ \partial_n w_\epsilon = -\partial_n v_0 \text{ sur } \partial B_\epsilon \\ \partial_n w_\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (4.9.8)$$

On remarque que le problème est linéaire et en utilisant la Proposition (4.5.1) on a :

$$\frac{\max_{i \in I_{ind}(\Omega)} f_i}{\alpha^2} \geq D^2 \psi_j(I_j(u_0)) = \frac{f_j}{I_j(u_0)^2} \geq \frac{\min_{i \in I_{ind}(\Omega)} f_i}{\beta^2}$$

Ensuite la preuve du développement asymptotique de w_ϵ peut être déduite de celle du Lemme 4.9.5 ou bien du cas linéaire [10].

Les deux dernières estimations se déduisent en utilisant le développement asymptotique de w_ϵ et le Lemme 4.9.2. \square

Deuxième partie

Détection et restauration de structures fines par la méthode du gradient topologique

Chapitre 5

Présentation du modèle variationnel

Résumé. Dans ce chapitre on décrit une nouvelle approche pour la détection de structures fines dans une image. Cette approche est basée sur le calcul du gradient topologique associé à une fonction coût définie à partir des dérivées secondes d'une régularisation des données (éventuellement bruitées). Cette régularisation est obtenue via la résolution d'une EDP du quatrième ordre de type Kirchhoff avec conditions de Neumann. Dans ce chapitre on présente et justifie les modèles qui seront étudiés dans les chapitres 6 et 7.

Introduction

Dans ce chapitre, on présente une méthode variationnelle basée sur le gradient topologique, dans le but de détecter des structures fines dans des images 2D. Ce problème a plusieurs applications en imageries médicale, biologique, ou satellitaire. On rappelle que les structures fines représentent des objets de dimension 0 ou 1, c-à-d des points ou des filaments. Ce problème est assez différent de celui de la détection de contours puisque pour ce dernier, le niveau de gris de l'image présente un saut d'intensité tandis que pour le premier l'intensité ne présente pas de saut à travers la structure (voir Figure 5.1).

Si pour la détection de contours le gradient usuel est classiquement utilisé, il est inefficace pour la détection de points ou de filaments. Pour illustrer cela considérons en 1D la fonction $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Cette fonction peut être approchée par la fonction $f_\eta(x) = 0$ si $|x| \geq \eta$ et $f_\eta(x) = \frac{2}{\eta^3} |x|^3 - \frac{3}{\eta^2} |x|^2 + 1$ si $|x| \leq \eta$. On a $f'_\eta(0) = 0$ mais $f''_\eta(0) = \frac{-6}{\eta^2}$, ainsi f'_η "ne voit pas" 0 mais f''_η devient singulier en 0. En fait on sait [81, 66] que pour détecter des structures fines en utilisant des opérateurs différentiels, on doit utiliser des opérateurs d'ordre au minimum 2. Nous allons préciser cela par la suite (voir Lemme 5.1.1). Ici on propose une solution à ce problème en utilisant la méthode du gradient topologique (GT). On rappelle brièvement la philosophie de cette méthode. Soit Ω un domain borné de \mathbb{R}^2 et $j(\Omega) = J_\Omega(u_\Omega)$ une fonction coût où u_Ω est la solution d'une EDP sur Ω . Pour $\epsilon \geq 0$ assez petit soit $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{x_0 + \epsilon\omega}$ où $x_0 \in \Omega$ et ω est un sous ensemble de \mathbb{R}^2 . La sensibilité topologique provient du développement asymptotique de $j(\Omega_\epsilon)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Généralement il prend la forme suivante :

$$j(\Omega_\epsilon) = j(\Omega) + \epsilon^2 \mathcal{I}(x_0) + o(\epsilon^2) \quad (5.0.1)$$

$\mathcal{I}(x_0)$ est le gradient topologique au point x_0 . Si on veut minimiser $j(\Omega_\epsilon)$ on créera des petits trous ou fissures aux points x_0 où $\mathcal{I}(x_0)$ est "le plus négatif". Comme illustré précédemment, la détection de structures fines (c-à-d des discontinuités sans saut d'intensité à travers les structures), nécessite des modèles utilisant des dérivées d'ordre 2. Si pour la détection de contours on utilisait $J_\Omega(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2$ il est naturel d'utiliser pour la détection de structures fines $J_\Omega(u) = \int_\Omega |\nabla^2 u|^2$. De même pour la détection de contours ([24] et chapitres 1 et 4), u_Ω est solution du modèle de restauration de l'image f suivant : $u_\Omega = \operatorname{argmin}_{H^1(\Omega)} \gamma \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u - f\|_{L^2(\Omega)}$ où $\gamma > 0$ est un paramètre à régler. Ici l'utilisation de

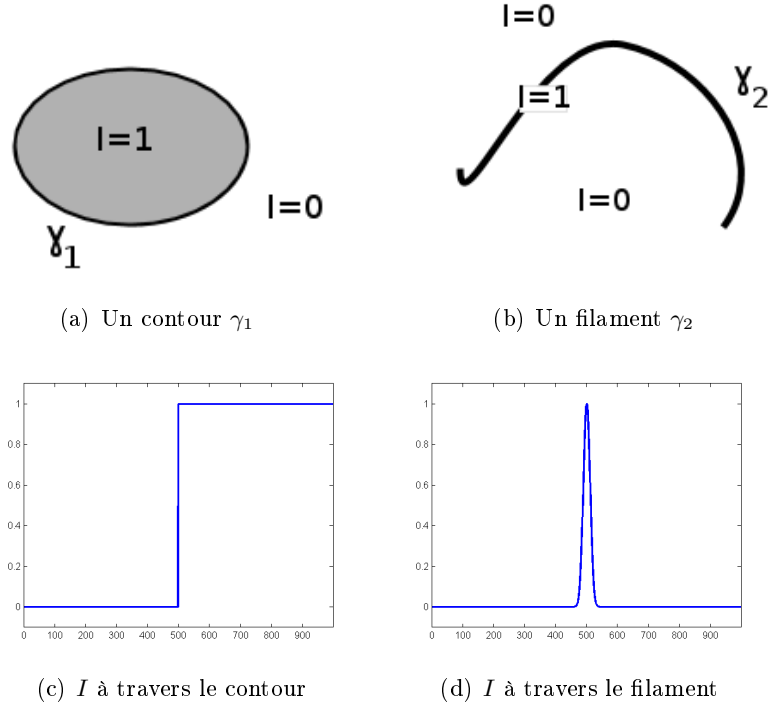


FIGURE 5.1 – Différences entre un contour et une structure fine de type filament

l'opérateur laplacien est liée au choix de la fonction coût. Pour la détection de structures fines il semble justifier de prendre : $u_\Omega = \operatorname{argmin}_{H^2(\Omega)} \gamma \|\nabla^2 u\|_{L^2(\Omega)} + \|u - f\|_{L^2(\Omega)}$. Ce modèle variationnel mène à des équations d'ordre 4 de types Kirchhoff ([35], chapitre 8) décrivant les mouvements verticaux d'une plaque fine soumise à des forces et moments extérieurs avec comme rapport de Poisson $\nu = 0$. Plus précisément, si f est l'image observée représentant les niveaux de gris de l'image (éventuellement dégradée par du bruit et/ou du flou), u_Ω est solution de l'EDP suivante (on prend $\alpha = 1$) :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \Delta^2 u + u = f, & \text{dans } \Omega \\ B_1(u) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \\ B_2(u) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.0.2)$$

où $B_1(u)$ et $B_2(u)$ sont des conditions aux bord naturelles que l'on va expliciter dans la section suivante. La fonction coût étudiée dans ce chapitre et le chapitre 6, dépend du rapport de Poisson $0 \leq \nu < 1$ et s'écrit :

$$J_\Omega(u) = \int_\Omega (\Delta u)^2 + 2(1 - \nu) \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \quad (5.0.3)$$

Dans le chapitre 6 on calculera le GT associé à (5.0.2) et (5.0.3) pour des domaines perforé $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{x_0 + \epsilon B(0, 1)}$ et fissuré $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{x_0 + \epsilon \sigma(\vec{n})}$ où $\sigma(\vec{n})$ est un segment de normale \vec{n} (un crack) (voir Figure 5.2).

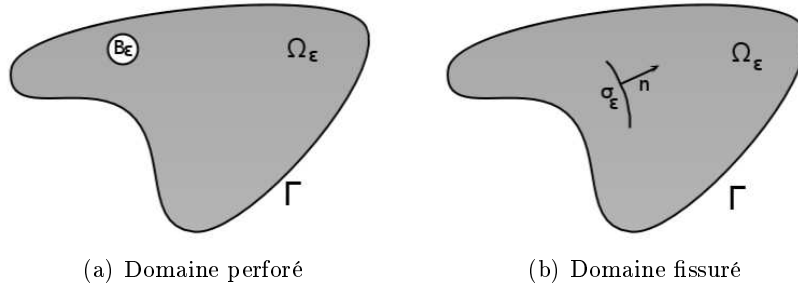


FIGURE 5.2 – Domaines perforé et fissuré

L'analyse numérique et une application au traitement d'image seront faites dans le chapitre 7.

Remarque 5.0.7. *L'étude de la sensibilité topologique pour des opérateurs d'ordre 4 n'est pas nouvelle. Dans [11], dans un contexte différent, les auteurs calculent le GT pour des équations de type Kirchhoff dans le cas d'un domaine perforé par une boule. Notre modèle est plus simple et on donne l'expression explicite du GT dans les cas d'un domaine perforé et fissuré.*

D'autres modèles variationnels ont été proposés dans la littérature avec diverses applications, voir [59] pour la détection de filaments biologiques ou [75] pour la détection de réseaux routiers dans des images satellitaires. Dans [14, 23] et [22] un modèle pour détecter des objets de codimension 1 et 2 dans des images 2D est proposé. L'approche est inspirée du modèle de Ginzburg-Landau. Un autre modèle variationnel utilisant des dérivées d'ordre 2 est développé dans [47] pour la détection de points dans des images 2D. Il existe bien sûr d'autres méthodes que les méthodes variationnelles. Dans [64, 90] des méthodes basées sur la morphologie mathématique sont utilisées. Dans [90], les auteurs proposent une méthode pour détecter automatiquement les structures de type vaisseaux sanguins en utilisant des filtres morphologiques et les courbures principales de l'image. La méthode est sensible au type de bruit (le bruit de loi uniforme détruit les vaisseaux) et le temps de calcul CPU est important. Dans [53, 84, 83], des méthodes stochastiques sont utilisées. Ici les filaments sont vus comme des réalisations de processus aléatoires. Ces méthodes sont très coûteuses en temps CPU. Dans [83] un réseau fin est simulé par un processus stochastique pénalisant les segments non connectés et favorisant les segments alignés. L'estimation du réseau cherché est obtenue en minimisant une fonction énergie. Finalement on peut mentionner la décomposition en ondelettes, [12, 58, 25].

Dans les deux sections suivantes, on donne l'expression de la fonction coût et on précise le modèle variationnel que l'on va étudier. Auparavant, on donne un lemme montrant que pour détecter des points ou des courbes en 2D on doit utiliser des opérateurs d'ordre 2.

5.1 Détection de structures fines : quel est le bon opérateur ?

On rappelle que l'on note $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans \mathbb{R}^2 et $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ l'espace des distributions définies sur \mathbb{R}^2 .

Lemme 5.1.1. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschitz continue, et soit $(g_h)_{h>0}$ une suite de fonctions définies par*

$$g_h(x) = \frac{1}{\theta_1(h)} e^{-\frac{\varphi^2(x)}{\theta_2(h)}} \quad \text{où } \theta_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \theta_i(h) = 0$$

(i) Soit $a \in \mathbb{R}^2$, en posant $\varphi(x) = \|x - a\|$, $\theta_1(h) = \pi h$ et $\theta_2(h) = h$ (voir Figure 5.3) alors

$$g_h \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \delta_a, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$$

De plus on a

$$\nabla g_h(a) = [0, 0]^T, \quad \nabla^2 g_h(a) = -\frac{2}{\pi h^2} I$$

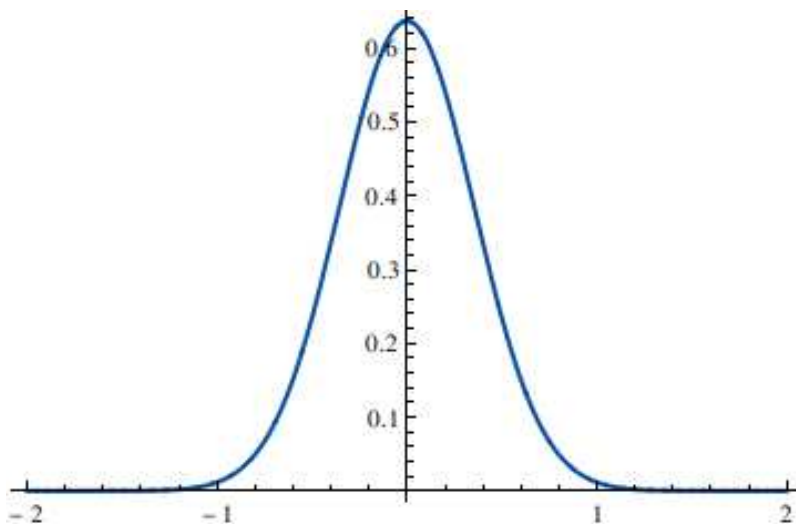


FIGURE 5.3 – Coupe de la fonction g_h pour $\theta_1(h) = \pi h$, $\theta_2(h) = h$ et $h = 0.5$

(ii) Soit γ une courbe fermée et régulière délimitant un sous-domaine borné ω . Soit φ la distance signée à γ définie par :

$$\varphi(x) = \text{dist}(x, \omega) - \text{dist}(x, \omega')$$

Avec cette convention on a $\omega = \{\varphi < 0\}$, $\omega' = \{\varphi > 0\}$ et $\gamma = \{\varphi = 0\}$.

En prenant les échelles suivantes : $\theta_1(h) = \sqrt{\pi h}$ et $\theta_2(h) = h$ on a

$$g_h \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \delta_\gamma, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$$

De plus pour tout $x \in \gamma$ on a

$$\nabla g_h(x) = [0, 0]^T, \quad \text{spec}(\nabla^2 g_h(x)) = \left\{ -\frac{2}{h^{3/2}}, 0 \right\}$$

où $\text{spec}(M)$ sont les valeurs propres de M . Les vecteurs propres associés à $\nabla^2 g_h$ sur γ sont $(\nabla \varphi(x), \nabla \varphi(x)^\perp)$ où $\nabla \varphi(x) = \vec{n}(x)$.

Démonstration. Soit $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ on calcule tout d'abord $\lim_{h \rightarrow 0} \langle g_h, \xi \rangle$. On suppose que $\nabla \varphi \neq 0$ presque partout donc on peut écrire que

$$\begin{aligned} \langle g_h, \xi \rangle &= \frac{1}{\theta_1(h)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\varphi^2(x)}{\theta_2(h)}} \xi(x) dx \\ &= \frac{1}{\theta_1(h)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-\frac{\varphi^2(x)}{\theta_2(h)}} \xi(x)}{|\nabla \varphi(x)|} |\nabla \varphi(x)| dx \end{aligned}$$

Avec la formule de la co-aire, on obtient

$$\begin{aligned} \langle g_h, \xi \rangle &= \frac{1}{\theta_1(h)} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\varphi=r} \frac{e^{-\frac{\varphi^2(x)}{\theta_2(h)}} \xi(x)}{|\nabla\varphi(x)|} ds \right) dr \\ &= \frac{1}{\theta_1(h)} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{r^2}{\theta_2(h)}} \Psi(r) dr \end{aligned}$$

où

$$\Psi(r) = \int_{\varphi=r} \frac{\xi}{|\nabla\varphi|} ds$$

On fait le changement de variable $t = \frac{r}{\sqrt{\theta_2(h)}}$ dans $\langle g_h, \xi \rangle$:

$$\langle g_h, \xi \rangle = \frac{\sqrt{\theta_2(h)}}{\theta_1(h)} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \Psi(\sqrt{\theta_2(h)}t) dt$$

À ce niveau il faut distinguer points et courbes.

- (1) Pour le point on choisit $\varphi(x) = \|x - a\|$ et sans perte de généralité on suppose que $a = O$. On déduit $|\nabla\varphi| = 1$ et

$$\Psi(r) = \int_{\varphi=r} \xi(x) ds = r \int_0^{2\pi} \xi(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) d\theta$$

donc

$$\Psi(\sqrt{\theta_2(h)}t) = \sqrt{\theta_2(h)}t \int_0^{2\pi} \xi(\sqrt{\theta_2(h)}t\cos(\theta), \sqrt{\theta_2(h)}t\sin(\theta)) d\theta$$

et en utilisant que $\varphi \geq 0$

$$\langle g_h, \xi \rangle = \frac{\theta_2(h)}{\theta_1(h)} \int_0^\infty t e^{-t^2} \int_0^{2\pi} \xi(\sqrt{\theta_2(h)}t\cos(\theta), \sqrt{\theta_2(h)}t\sin(\theta)) d\theta dt$$

Pour le passage à la limite lorsque $h \rightarrow 0$ dans $\langle g_h, \xi \rangle$, il faut que $\theta_1(h)$, et $\theta_2(h)$ soient du même ordre en h ; par exemple $\theta_1(h) = \pi h$ et $\theta_2(h) = 2h$, et dans ce cas

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \langle g_h, \xi \rangle &= 2\pi \frac{1}{\pi} \xi(0, 0) \int_0^\infty t e^{-t^2} dt \\ &= \xi(0, 0) \\ &= \langle \delta_0, \xi \rangle \end{aligned}$$

on déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} g_h = \delta_a$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

- (2) Pour la courbe, on choisit la distance signée à γ : $\varphi(x) = \text{dist}(x, \omega) - \text{dist}(x, \omega')$ où ω est le domaine borné délimité par γ . Grâce à cette définition :

$$\gamma = \{x, \varphi(x) = 0\}$$

φ est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{Sq(\gamma)}$ où $Sq(\gamma)$ est le squelette de γ défini par

$$Sq(\gamma) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2, \exists y, t \in \gamma, y \neq t \text{ et } \|x - t\| = \|x - y\| = \inf_{z \in \gamma} \|x - z\| \right\}$$

On montre que $|\nabla\varphi(x)| = 1, \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{Sq(\gamma)}$ et on obtient

$$\Psi(0) = \int_{\gamma} \frac{\xi(x)}{|\nabla\varphi(x)|} ds = \int_{\gamma} \xi(x) ds$$

Pour avoir une limite finie il faut que $\theta_1(h)$ et $\sqrt{\theta_2(h)}$ soient du même ordre en 0. Par exemple en prenant $\theta_1 = \sqrt{\pi h}$ et $\theta_2(h) = h$ et en utilisant que $|\nabla\varphi| = 1$ en particulier sur la courbe, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \langle g_h, \xi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right) \int_{\gamma} \xi(x) ds \\ &= \int_{\gamma} \xi(x) ds \\ &= \langle \delta_{\gamma}, \xi \rangle \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} g_h = \delta_{\gamma}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

On calcule les valeurs des dérivées premières et secondes au niveau du point et de la courbe c-à-d lorsque $\varphi(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_h}{\partial x_i} &= -\frac{2}{\theta_1(h)\theta_2(h)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \varphi(x) e^{-\frac{\varphi^2(x)}{\theta_2(h)}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour $i \in \{1, 2\}$ dans le cas de la courbe et du point. De même pour les dérivées secondes on a formellement :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{2}{\theta_1(h)\theta_2(h)} e^{-\frac{\varphi^2(x)}{\theta_2(h)}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) \varphi(x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \left(1 - 2 \frac{\varphi^2(x)}{\theta_2(h)} \right) \right)$$

- Pour le point, soit $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ on a

$$\begin{aligned} \nabla^2 g_h(x) &= -\frac{2}{\theta_1(h)\theta_2(h)} e^{-\frac{\varphi^2(x)}{\theta_2(h)}} \left(I - \frac{(x-a)(x-a)^T}{\|x-a\|^2} + \frac{(x-a)(x-a)^T}{\|x-a\|^2} \left(1 - 2 \frac{\|x-a\|^2}{\theta_2(h)} \right) \right) \\ &= -\frac{2}{\theta_1(h)\theta_2(h)} e^{-\frac{\varphi^2(x)}{\theta_2(h)}} \left(I - \frac{2}{\theta_2(h)} (x-a)(x-a)^T \right) \end{aligned}$$

On déduit que $\nabla^2 g_h(a) = -\frac{2}{\theta_1(h)\theta_2(h)} I$.

- Pour la courbe $\nabla^2 \varphi$ possède deux valeurs propres : la valeur propre 0 associée au vecteur $\nabla\varphi$ et la valeur C_{γ} égale à la courbure de γ correspondant au vecteur propre $\nabla\varphi^{\perp}$. Les coefficients de $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j(x)}$ sont donc bornés pour $x \in \gamma$ et donc le produit $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) \varphi(x)$ est nul sur γ . On déduit

$$\frac{\partial^2 g_h}{\partial x_i \partial x_j}(x) = -\frac{2}{\theta_1(h)\theta_2(h)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x), \text{ pour } (i, j) \in \{1, 2\}^2, \text{ et } \forall x \in \gamma$$

En utilisant que $|\nabla\varphi| = 1$ sur la courbe on obtient les valeurs propres λ_1 et λ_2 de $\nabla^2 g_h|_{\gamma}$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -\frac{2}{\theta_1(h)\theta_2(h)} |\nabla\varphi(x)|^2 = -\frac{2}{\theta_1(h)\theta_2(h)}$$

associées respectivement aux vecteurs normés $\nabla\varphi(x)$ et $\nabla\varphi(x)^{\perp}$.

En remplaçant θ_1 et θ_2 par leur valeur, on obtient l'expression des valeurs propres de la hessienne dans les cas de la courbe et du point. \square

Ce lemme montre de manière heuristique que le gradient “ne voit pas” les structures fines dans \mathbb{R}^2 (points et filaments) et que par contre les opérateurs d’ordre 2 sont singuliers sur ce type de structures. Ce lemme est heuristique car on regarde ponctuellement la valeur des dérivées de fonctions approchant la mesure de Dirac. Si on modifie légèrement les fonctions g_h (par exemple en remplaçant g_h par $g_h(x + hv)$ avec v un vecteur constant), la convergence vers les mesures de Dirac est toujours vérifiée mais le gradient sur la structure fine peut ne pas être nul. Par contre en moyenne, on a :

- Pour le point, en définissant $W_h = \{(x_1, 0), x_1 \in [-h\eta, h\eta]\}$ avec $\eta > 0$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|W_h|} \int_{W_h} \frac{\partial g_h}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{1}{|W_h|} \int_{W_h} \frac{\partial^2 g_h}{\partial x_i \partial x_j} &= O\left(\frac{1}{h^2}\right) \end{aligned}$$

- Pour la courbe, dans le cas où γ est le cercle de rayon R , et posons pour $\eta > 0$ et $\theta_0 > 0$ $W_h = \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta), (r, \theta) \in [R - \sqrt{h}\eta, R + \sqrt{h}\eta] \times [0, \theta_0 h]\}$, alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|W_h|} \int_{W_h} \frac{\partial g_h}{\partial x_i} &= O(1) \\ \frac{1}{|W_h|} \int_{W_h} \frac{\partial^2 g_h}{\partial x_i \partial x_j} &= O\left(\frac{1}{h}\right) \end{aligned}$$

ce qui justifie, à notre sens, de façon heuristique, l’usage de dérivées secondes dans la fonction coût pour détecter des structures fines.

5.2 Définition de la fonction coût et de l’EDP

Dans cette section on définit le problème variationnel qui sera étudié dans le chapitre 6 et qui est une version plus générale de celui testé numériquement dans le chapitre 7. On définit la fonction coût :

$$J_\Omega(u) = \int_\Omega (\Delta u)^2 + 2(1 - \nu) \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + \gamma |\nabla u|^2 dx, \quad 0 \leq \nu < 1, \gamma \geq 0 \quad (5.2.1)$$

Remarque 5.2.1. (i) Quand $\gamma = 0$ on retrouve (5.0.3).

(ii) Quand $\gamma = 0$ et $\nu = 0$ on trouve $J_\Omega(u) = \|\nabla^2 u\|_{0,\Omega}^2$.

(iii) On vérifie facilement que :

$$J_\Omega(u) \geq (1 - \nu) |u|_{H^2(\Omega)}^2 + \gamma |u|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H^2(\Omega) \quad (5.2.2)$$

Pour $\epsilon > 0$ assez petit, soit (a) $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{\{x_0 + \epsilon B\}}$ ou (b) $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{\{x_0 + \epsilon \sigma(\vec{n})\}}$, où $x_0 \in \Omega$ et $\sigma(\vec{n})$ est un segment de normale \vec{n} (un crack). On note $J_\epsilon(u) = J_{\Omega_\epsilon}(u)$ et $u_\epsilon = u_{\Omega_\epsilon}$ la solution du problème

$$\min_{H^2(\Omega_\epsilon)} J_\epsilon(u) + \|u - f\|_{0,\Omega_\epsilon}^2 \quad (5.2.3)$$

où $f \in L^2(\Omega_\epsilon)$ est l’image observée. On introduit les formes bilinéaire et linéaire sur $H^2(\Omega_\epsilon)$ suivantes :

$$\begin{aligned}
a_\epsilon(u, v) &= \int_{\Omega_\epsilon} \Delta u \Delta v + (1 - \nu) \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) + \gamma \nabla u \cdot \nabla v + uv \\
l_\epsilon(v) &= \int_{\Omega_\epsilon} f v
\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

En écrivant la formulation variationnelle associée au problème (5.2.3) et en utilisant le théorème de Lax-Milgram, on montre que pour $\epsilon \geq 0$ il existe une unique solution $u_\epsilon \in H^2(\Omega_\epsilon)$ telle que

$$a_\epsilon(u_\epsilon, v) = l_\epsilon(v), \quad \forall v \in H^2(\Omega_\epsilon) \tag{5.2.5}$$

u_ϵ vérifie les équations d'Euler suivantes :

$$(\mathcal{P}_\epsilon) \begin{cases} \Delta^2 u_\epsilon - \gamma \Delta u_\epsilon + u_\epsilon = f, & \text{sur } \Omega_\epsilon \\ B_1(u_\epsilon) - \gamma \partial_n u_\epsilon = 0, & \text{on } \partial\Omega_\epsilon \\ B_2(u_\epsilon) = 0, & \text{sur } \partial\Omega_\epsilon \end{cases} \tag{5.2.6}$$

où

$$B_1(u) = \partial_n(\Delta u) - (1 - \nu) \partial_\tau \left(n_1 n_2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) - (n_1^2 - n_2^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right)$$

et

$$B_2(u) = \nu \Delta u + (1 - \nu) \left(n_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + n_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2n_1 n_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right)$$

en notant $\vec{n} = (n_1, n_2)$ la normale sortante à Ω_ϵ , et $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ le vecteur tangent tel que $(\vec{n}, \vec{\tau})$ forme une base orthonormale.

Remarque 5.2.2. *Quand $\gamma = 0$, on montre que (5.2.5) reste bien posé dans $H^2(\Omega)$ grâce à l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (voir prérequis).*

Chapitre 6

Méthode du gradient topologique pour la détection de structures fines en imagerie. Étude théorique

Résumé. Dans ce chapitre on calcule le gradient topologique associé à la fonction coût (5.0.3) et à l'EDP (5.2.6) présentées dans le chapitre 5. L'étude de la sensibilité topologique est faite séparément en 2D dans les cas d'une inclusion circulaire et d'un crack puis en 3D dans le cas d'un crack circulaire et plan.

On rappelle que l'on suppose $0 \leq \nu < 1$ et $\gamma \geq 0$.

6.1 Étude dans le cas d'un domaine perforé

6.1.1 Position du problème. Notations

Soit $x_0 \in \Omega$, et B la boule unité. On définit $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{x_0 + \epsilon B}$ avec x_0 et ϵ tels que la perturbation ne touche pas le bord (voir Figure 5.2). Dans ce qui suit on suppose (quitte à changer de repère) que $x_0 \equiv 0$. On rappelle que l'on note $B_\epsilon = B(0, \epsilon)$; on a donc $\partial\Omega_\epsilon = \partial B_\epsilon \cup \Gamma$. On rappelle la définition de l'espace de Sobolev avec poids défini sur l'extérieur de la boule (voir prérequis) :

$$W^2(B') = \left\{ u, \frac{u}{(1+r^2)\log(2+r^2)} \in L^2(B'), \frac{\nabla u}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}\log(2+r^2)} \in L^2(B'), \nabla^2 u \in L^2(B') \right\} \quad (6.1.1)$$

Le problème (\mathcal{P}_ϵ) (5.2.6) se réécrit dans ce cas comme suit

$$(\mathcal{P}_\epsilon^b) \begin{cases} \Delta^2 u_\epsilon - \gamma \Delta u_\epsilon + u_\epsilon = f, & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ B_1(u_\epsilon) - \gamma \partial_n u_\epsilon = 0, & \text{sur } \partial B_\epsilon \cup \Gamma \\ B_2(u_\epsilon) = 0, & \text{sur } \partial B_\epsilon \cup \Gamma \end{cases} \quad (6.1.2)$$

Soit $v \in H^2(\Omega_\epsilon)$, et u_ϵ vérifiant (\mathcal{P}_ϵ^b) . Grâce à un résultat de régularité classique, $u_\epsilon \in H^4(\Omega_\epsilon)$. En intégrant par parties sur Ω_ϵ , et en utilisant [[35],p 376] on justifie la formulation variationnelle de (\mathcal{P}_ϵ) donnée en (5.2.5) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} f v &= \int_{\Omega_\epsilon} (\Delta^2 u_\epsilon - \gamma \Delta u_\epsilon + u_\epsilon) v \\ &= a_\epsilon(u_\epsilon, v) - \int_{B_\epsilon} ((B_1(u_\epsilon) - \gamma \partial_n u_\epsilon) v - B_2(u_\epsilon) \partial_n v) + \int_{\Gamma} ((B_1(u_\epsilon) - \gamma \partial_n u_\epsilon) v - B_2(u_\epsilon) \partial_n v) \end{aligned}$$

On calcule le gradient topologique en évaluant le terme prépondérant par rapport à ϵ dans la différence $J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0)$. En utilisant les équations vérifiées par u_ϵ et u_0 on a :

$$J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) = \int_{\Omega_\epsilon} (f - 2u_0)(u_\epsilon - u_0) - \int_{\Omega_\epsilon} (u_\epsilon - u_0)^2 - \int_{B_\epsilon} (f - u_0)u_0 \quad (6.1.3)$$

On définit $L_\epsilon : H^2(\Omega_\epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, l'application linéaire suivante

$$L_\epsilon(u) = \int_{\Omega_\epsilon} (f - 2u_0)u \quad (6.1.4)$$

Et on pose

$$\mathcal{J}_\epsilon = - \int_{\Omega_\epsilon} (u_\epsilon - u_0)^2 - \int_{B_\epsilon} (f - u_0)u_0 \quad (6.1.5)$$

Pour évaluer (6.1.3), on introduit v_ϵ solution du problème adjoint :

$$a_\epsilon(u, v_\epsilon) = -L_\epsilon(u), \quad \forall u \in H^2(\Omega_\epsilon) \quad (6.1.6)$$

Remarque 6.1.1. *Il est clair que la forme simple du modèle adjoint provient du fait que $J_\epsilon(u)$ et $a_\epsilon(u, u)$ contiennent les mêmes termes en dérivées secondes. Si une telle relation entre la forme variationnelle de u_ϵ et l'expression de $J_\epsilon(u)$ n'existait pas, le terme source du modèle adjoint serait changé et proviendrait de $DJ_\epsilon(u_0).v$. Dans ce cas, afin de pouvoir écrire (6.1.11), il faudrait réécrire $DJ_\epsilon(u_0).v$ en la somme*

$$DJ_\epsilon(u_0).v = L_\epsilon(v) + A_\epsilon(v), \quad \forall v \in H^2(\Omega_\epsilon)$$

avec $A_\epsilon(v)$ un opérateur faisant intervenir par exemple le petit bord ∂B_ϵ et $L_\epsilon(v)$ vérifiant

$$L_\epsilon(v) = L_\epsilon(v|_{\Omega_\epsilon}) + \int_{B_\epsilon} Lv, \quad \forall v \in H^2(\Omega)$$

où L est une fonction régulière au voisinage de l'origine. Le terme $L_\epsilon(u_\epsilon - u_0)$ serait évalué à l'aide du modèle adjoint et dépendrait implicitement du choix de la fonction coût et le terme $A_\epsilon(u_\epsilon - u_0)$ resterait à évaluer et dépendrait fortement de la forme de la fonction coût.

En utilisant (6.1.6) et (6.1.5) alors (6.1.3) s'écrit

$$\begin{aligned} J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) &= -a_\epsilon(u_\epsilon - u_0, v_\epsilon) + \mathcal{J}_\epsilon \\ &= -l_\epsilon(v_\epsilon) + a_\epsilon(u_0, v_\epsilon) + \mathcal{J}_\epsilon \\ &= - \int_{\Omega_\epsilon} f v_\epsilon + \int_{\Omega_\epsilon} (\Delta^2 u_0 - \gamma \Delta u_0 + u_0) v_\epsilon + \int_{\partial B_\epsilon} (B_1(u_0) - \gamma \partial_n u_0) v_\epsilon - B_2(u_0) \partial_n v_\epsilon + \mathcal{J}_\epsilon \\ &= \int_{\partial B_\epsilon} (B_1(u_0) - \gamma \partial_n u_0) v_\epsilon - B_2(u_0) \partial_n v_\epsilon + \mathcal{J}_\epsilon \end{aligned}$$

Soit $w_\epsilon = v_\epsilon - v_0$, où v_ϵ est solution de (6.1.6) et où v_0 est solution de la même équation pour $\epsilon = 0$. On réécrit la différence $J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0)$ en fonction de w_ϵ :

$$J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) = \int_{\partial B_\epsilon} (B_1(u_0) - \gamma \partial_n u_0) v_0 - B_2(u_0) \partial_n v_0 + \int_{\partial B_\epsilon} (B_1(u_0) - \gamma \partial_n u_0) w_\epsilon - B_2(u_0) \partial_n w_\epsilon + \mathcal{J}_\epsilon$$

Dans ce qui suit nous allons écrire la différence $J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0)$ comme une somme de termes plus simples à estimer. Soit $\varphi_1 \in H^{3/2}(\partial B_\epsilon)$, $\varphi_2 \in H^{1/2}(\partial B_\epsilon)$ on introduit $l_\epsilon^{\varphi_1, \varphi_2} \in H^2(B_\epsilon)$ le prolongement biharmonique :

$$\begin{cases} \Delta^2 l_\epsilon^{\varphi_1, \varphi_2} = 0, & \text{sur } B_\epsilon \\ l_\epsilon^{\varphi_1, \varphi_2} = \varphi_1, & \text{sur } \partial B_\epsilon \\ \partial_n l_\epsilon^{\varphi_1, \varphi_2} = \varphi_2, & \text{sur } \partial B_\epsilon \end{cases} \quad (6.1.7)$$

Par abus de notation, pour $u \in H^2(\Omega_\epsilon)$, on note $l_\epsilon^u = l_\epsilon^{u, \partial_n u}$, et pour $\epsilon = 1$, $l_1^{\varphi_1, \varphi_2} = l^{\varphi_1, \varphi_2}$. On obtient

$$\begin{aligned} J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) &= \int_{\partial B_\epsilon} (B_1(u_0) - \gamma \partial_n u_0) v_0 - B_2(u_0) \partial_n v_0 \\ &\quad + \int_{\partial B_\epsilon} (B_1(u_0) - \gamma \partial_n u_0) l_\epsilon^{w_\epsilon} - B_2(u_0) \partial_n l_\epsilon^{w_\epsilon} + \mathcal{J}_\epsilon \\ &= \mathcal{L}_\epsilon + \mathcal{K}_\epsilon + \mathcal{J}_\epsilon \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\epsilon &= \int_{\partial B_\epsilon} (B_1(u_0) - \gamma \partial_n u_0) v_0 - B_2(u_0) \partial_n v_0 \\ \mathcal{K}_\epsilon &= \int_{\partial B_\epsilon} (B_1(u_0) - \gamma \partial_n u_0) l_\epsilon^{w_\epsilon} - B_2(u_0) \partial_n l_\epsilon^{w_\epsilon} \end{aligned}$$

Soit $\widetilde{u}_0(x) = u_0(x) - u_0(0) - \nabla u_0(0) \cdot x$, alors il est clair que

$$\mathcal{K}_\epsilon = \int_{\partial B_\epsilon} (B_1(\widetilde{u}_0) - \gamma \partial_n u_0) l_\epsilon^{w_\epsilon} - B_2(\widetilde{u}_0) \partial_n l_\epsilon^{w_\epsilon}$$

En utilisant la formule d'intégration par parties donnée dans [[35], p 376] il vient

$$\mathcal{K}_\epsilon = \int_{B_\epsilon} \Delta^2 \widetilde{u}_0 l_\epsilon^{w_\epsilon} - b_\epsilon(\widetilde{u}_0, l_\epsilon^{w_\epsilon}) - \int_{B_\epsilon} \gamma (\Delta u_0 l_\epsilon^{w_\epsilon} - \nabla u_0 \cdot \nabla l_\epsilon^{w_\epsilon})$$

où b_ϵ est la forme bilinéaire correspondante à (6.1.7) définie par

$$b_\epsilon(u, v) = \int_{B_\epsilon} \Delta u \Delta v + (1 - \nu) \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right)$$

En intégrant à nouveau par parties :

$$\mathcal{K}_\epsilon = \int_{B_\epsilon} (\Delta^2 u_0 - \gamma \Delta u_0) l_\epsilon^{w_\epsilon} + \gamma \nabla u_0 \cdot \nabla l_\epsilon^{w_\epsilon} - \int_{B_\epsilon} \underbrace{\Delta^2 l_\epsilon^{w_\epsilon}}_{=0} \widetilde{u}_0 + \int_{\partial B_\epsilon} B_1(l_\epsilon^{w_\epsilon}) \widetilde{u}_0 - B_2(l_\epsilon^{w_\epsilon}) \partial_n \widetilde{u}_0 \quad (6.1.9)$$

De la même façon on a

$$\mathcal{L}_\epsilon = \int_{B_\epsilon} (\Delta^2 u_0 - \gamma \Delta u_0) v_0 + \gamma \nabla u_0 \cdot \nabla v_0 - \int_{B_\epsilon} \Delta^2 v_0 \widetilde{u}_0 + \int_{\partial B_\epsilon} B_1(v_0) \widetilde{u}_0 - B_2(v_0) \partial_n \widetilde{u}_0 \quad (6.1.10)$$

En posant $L = (f - 2u_0)$, au sens des distributions on a

$$\Delta^2 v_0 - \gamma \Delta v_0 + v_0 = -L \text{ dans } \mathcal{D}'(B_\epsilon) \quad (6.1.11)$$

En partant de (6.1.8), et en utilisant les équations (6.1.9), (6.1.10) et (6.1.11) on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\epsilon + \mathcal{K}_\epsilon &= \int_{B_\epsilon} (f - u_0) v_0 + \gamma \nabla u_0 \cdot \nabla v_0 + \int_{B_\epsilon} (L - \gamma \Delta v_0 + v_0) \widetilde{u}_0 + \int_{B_\epsilon} (\Delta^2 u_0 - \gamma \Delta u_0) l_\epsilon^{w_\epsilon} \\ &\quad + \gamma \nabla u_0 \cdot \nabla l_\epsilon^{w_\epsilon} + \int_{\partial B_\epsilon} (B_1(l_\epsilon^{w_\epsilon}) + B_1(v_0)) \widetilde{u}_0 - \int_{\partial B_\epsilon} (B_2(l_\epsilon^{w_\epsilon}) + B_2(v_0)) \partial_n \widetilde{u}_0 \\ &= \int_{B_\epsilon} (f - u_0) v_0 + \gamma \nabla u_0 \cdot \nabla v_0 + J_A - J_B + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

où

$$\begin{aligned}
J_A &= \int_{\partial B_\epsilon} (B_1(l_\epsilon^{w_\epsilon}) + B_1(v_0)) \widetilde{u}_0 \\
J_B &= \int_{\partial B_\epsilon} (B_2(l_\epsilon^{w_\epsilon}) + B_2(v_0)) \partial_n \widetilde{u}_0 \\
\mathcal{E}_1 &= \int_{B_\epsilon} (L - \gamma \Delta v_0 + v_0) \widetilde{u}_0 \\
\mathcal{E}_2 &= \int_{B_\epsilon} (\Delta^2 u_0 - \gamma \Delta u_0) l_\epsilon^{w_\epsilon} \\
\mathcal{E}_3 &= \int_{B_\epsilon} \gamma \nabla u_0 \cdot \nabla l_\epsilon^{w_\epsilon}
\end{aligned} \tag{6.1.13}$$

Dans la suite, on va montrer que $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ et \mathcal{E}_3 sont $\sim o(\epsilon^2)$ et que J_A et $J_B \sim O(\epsilon^2)$. Auparavant, on établit le développement asymptotique de $B_1(v_0), B_2(v_0)$ et de w_ϵ .

6.1.2 Estimations de $B_1(v_0)(x)$ et $B_2(v_0)(x)$ pour $x \in \partial B_\epsilon$

Proposition 6.1.2. *En supposant v_0 régulier, on a les développements, par rapport à ϵ , des conditions aux bords suivants*

$$\begin{aligned}
B_1(v_0)(\epsilon X) &= -\frac{g_1(X)}{\epsilon} + O(1) \\
B_2(v_0)(\epsilon X) &= -g_2(X) + O(\epsilon)
\end{aligned}$$

où, en posant $X = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \in \partial B$

$$\begin{aligned}
g_1(X) = g_1(\theta) &= (1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(0) - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2}(0) \right) \cos(2\theta) + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1 \partial x_2}(0) \sin(2\theta) \\
g_2(X) = g_2(\theta) &= -\frac{(1 + \nu)}{2} \Delta v_0(0) - \frac{(1 - \nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(0) - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2}(0) \right) \cos(2\theta) - (1 - \nu) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1 \partial x_2}(0) \sin(2\theta)
\end{aligned}$$

Démonstration. Pour $X \in \partial B$, $B_1(v_0)(\epsilon X)$ se développe comme suit

$$\begin{aligned}
B_1(v_0)(\epsilon X) &= \partial_n \Delta v_0(\epsilon X) - (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(n_1 n_2 \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2} \right) - (n_1^2 - n_2^2) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1 \partial x_2} \right) (\epsilon X) \\
&= \nabla(\Delta v_0)(0) \cdot n + O(\epsilon) \\
&\quad - (1 - \nu) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (n_1 n_2) \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2} \right) (\epsilon X) - \frac{\partial}{\partial \tau} (n_1^2 - n_2^2) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1 \partial x_2} (\epsilon X) \right) \\
&\quad - (1 - \nu) \left(n_1 n_2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2} \right) (\epsilon X) - (n_1^2 - n_2^2) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1 \partial x_2} \right) (\epsilon X) \right)
\end{aligned}$$

En coordonnées polaires pour $X = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et $n = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau} &= -\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} = \nabla f \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \theta}, \text{ pour } (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \in \partial B_\epsilon
\end{aligned}$$

On en déduit les estimations :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2} \right) (\epsilon X) &= O(1) \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1 \partial x_2} \right) (\epsilon X) &= O(1) \\ \frac{\partial}{\partial \tau} (n_1 n_2) &= \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos(\theta) \sin(\theta)) = \frac{\cos(2\theta)}{\epsilon} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} (n_1^2 - n_2^2) &= \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = \frac{-2\sin(2\theta)}{\epsilon}\end{aligned}$$

On obtient donc le développement

$$B_1(v_0)(\epsilon X) = -\frac{g_1}{\epsilon}(X) + O(1)$$

où

$$g_1(X) = g_1(\theta) = (1 - \nu) \left(\cos(2\theta) \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(0) - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2}(0) \right) + 2\sin(2\theta) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1 \partial x_2}(0) \right)$$

Pour $B_2(v_0)(\epsilon X)$, par un développement de Taylor en 0 à l'ordre 1 on a

$$\begin{aligned}B_2(v_0)(\epsilon X) &= \nu \Delta v_0(0) + (1 - \nu) \left(n_1^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2} + n_2^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2} + 2n_1 n_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1 \partial x_2} \right) (\epsilon X) \\ &= \nu \Delta v_0(0) + (1 - \nu) \left(n_1^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2} + n_2^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2} + 2n_1 n_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1 \partial x_2} \right) (0) + O(\epsilon) = -g_2(X) + O(\epsilon)\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}g_2(X) = g_2(\theta) &= -\nu \Delta v_0(0) - (1 - \nu) \left(n_1^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2} + n_2^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2} + 2n_1 n_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1 \partial x_2} \right) (0) \\ &= -\frac{(1 + \nu)}{2} \Delta v_0(0) - \frac{(1 - \nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(0) - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2}(0) \right) \cos(2\theta) - (1 - \nu) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1 \partial x_2}(0) \sin(2\theta)\end{aligned}$$

□

6.1.3 Développement asymptotique de w_ϵ

On rappelle que $w_\epsilon = v_\epsilon - v_0$ vérifie l'équation

$$(\mathcal{Q}_\epsilon^b) \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 w_\epsilon - \gamma \Delta w_\epsilon + w_\epsilon = 0, \text{ dans } \Omega_\epsilon \\ B_1(w_\epsilon) - \gamma \partial_n w_\epsilon = -B_1(v_0) + \gamma \partial_n v_0, \text{ sur } \partial B_\epsilon \\ B_2(w_\epsilon) = -B_2(v_0), \text{ sur } \partial B_\epsilon \\ B_1(w_\epsilon) - \gamma \partial_n w_\epsilon = 0, \text{ sur } \Gamma \\ B_2(w_\epsilon) = 0, \text{ sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (6.1.14)$$

Pour estimer w_ϵ , on introduit le problème extérieur (\mathcal{P}_{ext}) suivant :

$$(\mathcal{P}_{ext}) \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 P = 0, \text{ sur } B' \\ B_1(P) = g_1, \text{ sur } \partial B \\ B_2(P) = g_2, \text{ sur } \partial B \end{array} \right. \quad (6.1.15)$$

où $g_1 \in H^{-3/2}(\partial B)$ et $g_2 \in H^{-1/2}(\partial B)$ sont données dans la Proposition 6.1.2 et $B' = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}$. En utilisant le Théorème 6.4.3 (voir Annexe A section 6.4), on obtient que le problème (\mathcal{P}_{ext}) admet une solution unique $P \in W^2(B')/\mathbb{P}_1$ et que P s'écrit comme la somme de potentiels simple et double couche :

$$P(x) = \int_{\partial B} \lambda_1(y)E(x-y)d\sigma_y + \int_{\partial B} \lambda_2(y)\partial_{n_y}(E(x-y))d\sigma_y$$

où λ_1 et λ_2 sont des densités à déterminer et $E(x) = -\frac{1}{8\pi}|x|^2 \log(|x|)$ est la solution fondamentale associée à l'opérateur bilaplacien. Avec le Théorème 6.4.3, et la Proposition 6.1.2, les densités sont données par

$$\lambda_1 = c + a\cos(2\theta) + b\sin(2\theta) \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \alpha\cos(2\theta) + \beta\sin(2\theta)$$

où

$$\begin{aligned} a &= -2\frac{1-\nu}{3+\nu} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(0) - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(0) \right) \quad , \quad b = -4\frac{1-\nu}{3+\nu} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1 \partial x_2}(0) \quad , \quad c = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \Delta v_0(0) \\ \alpha &= 2a \quad , \quad \beta = 2b \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

En utilisant le Lemme 6.4.6 donné en Annexe A (section 6.4), on montre que $w_\epsilon = \epsilon^2 P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + e_\epsilon$ avec $\|e_\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon} = O(-\epsilon^2 \log(\epsilon))$.

Dans ce qui suit nous allons estimer $J_A, J_B, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ et \mathcal{E}_3 .

6.1.4 Estimation de $J_A, J_B, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ et \mathcal{E}_3

Lemme 6.1.3. *Soient $J_A, J_B, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ et \mathcal{E}_3 donnés en (6.1.13), on a les estimations :*

$$\begin{aligned} J_A &= \epsilon^2 \frac{1}{2} \int_{\partial B} \lambda_1(y) \nabla^2 u_0(0) y \cdot y + o(\epsilon^2) \\ J_B &= -\epsilon^2 \int_{\partial B} \lambda_2(y) \nabla^2 u_0(0) y \cdot y + o(\epsilon^2) \\ \mathcal{E}_1 &= O(\epsilon^3) \\ \mathcal{E}_2 &= O(-\epsilon^3 \log(\epsilon)) \\ \mathcal{E}_3 &= O(\epsilon^3 \sqrt{-\log(\epsilon)}) \end{aligned}$$

Démonstration. En utilisant la linéarité de (6.1.7) par rapport aux données aux bords, les relations de sauts du Théorème 6.4.3 et le développement asymptotique de w_ϵ , on obtient

$$\begin{aligned} J_A &= \int_{\partial B_\epsilon} \left(B_1 \left(l_\epsilon^{\epsilon^2 P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + e_\epsilon} \right) + B_1(v_0) \right) \widetilde{u}_0 \\ &= \epsilon \int_{\partial B} \left(B_1(v_0)(\epsilon X) + \frac{1}{\epsilon} B_1(l^P)(X) \right) \widetilde{u}_0(\epsilon X) d\sigma_X + \mathcal{F}_1 \\ &= \epsilon \int_{\partial B} \frac{-g_1(X) + B_1(l^P)(X)}{\epsilon} \widetilde{u}_0(\epsilon X) d\sigma_X + \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 \\ &= \epsilon \int_{\partial B} \frac{-g_1(X) + B_1(l^P)(X)}{\epsilon} \frac{1}{2} \nabla^2 u_0(0) X \cdot X d\sigma_X + \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3 \\ &= \epsilon^2 \frac{1}{2} \int_{\partial B} \lambda_1(y) \nabla^2 u_0(0) y \cdot y + \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \int_{\partial B_\epsilon} B_1(l_\epsilon^{e_\epsilon}) \widetilde{u}_0 \\ \mathcal{F}_2 &= \epsilon \int_{\partial B} \left(B_1(v_0)(\epsilon X) + \frac{g_1(X)}{\epsilon} \right) \widetilde{u}_0(\epsilon X) \\ \mathcal{F}_3 &= \int_{\partial B} (-g_1(X) + B_1(l^P)(X)) \left(\widetilde{u}_0(\epsilon X) - \epsilon^2 \frac{1}{2} \nabla^2 u_0(0) X \cdot X \right) d\sigma(X)\end{aligned}$$

Soit B_r tel que $B \subsetneq B_r \subset \frac{1}{\epsilon} \Omega$. Par un changement de variable, en utilisant le Lemme 6.4.1, l'estimation $\widetilde{u}_0(\epsilon X) = O(\epsilon^2)$, le Lemme 6.4.2, le théorème de trace sur $B_r \setminus \overline{B}$, un changement de variable et enfin le Lemme 6.4.6 on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \epsilon \int_{\partial B} B_1(l_\epsilon^{e_\epsilon})(\epsilon X) \widetilde{u}_0(\epsilon X) d\sigma_X = \epsilon \int_{\partial B} \frac{1}{\epsilon^3} B_1(l_\epsilon^{e_\epsilon}(\epsilon X)) \widetilde{u}_0(\epsilon X) d\sigma_X \\ &\leq C |l_\epsilon^{e_\epsilon}(\epsilon X)|_{2,B} = C |l^{e_\epsilon(\epsilon X)}|_{2,B} \\ &\leq C \|e_\epsilon(\epsilon X)\|_{H^2(B_r \setminus \overline{B})/\mathbb{P}_1} \leq C \epsilon |e_\epsilon|_{2,\Omega_\epsilon} \leq -C \epsilon^3 \log(\epsilon)\end{aligned}$$

En utilisant l'estimation $B_1(v_0)(\epsilon X)$ donnée dans la Proposition 6.1.2, et l'estimation $\widetilde{u}_0(\epsilon X) = O(\epsilon^2)$ on obtient facilement que

$$\mathcal{F}_2 = O(\epsilon^3)$$

Puis en utilisant le développement $\widetilde{u}_0(\epsilon X) - \epsilon^2 \frac{1}{2} \nabla^2 u_0(0) X \cdot X = O(\epsilon^3)$, on montre que

$$\mathcal{F}_3 = O(\epsilon^3)$$

De même

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_B &= \int_{\partial B_\epsilon} \left(B_2(v_0) + B_2 \left(l_\epsilon^{\epsilon^2 P(\frac{x}{\epsilon}) + e_\epsilon} \right) \right) \widetilde{u}_0 \\ &= \epsilon \int_{\partial B} (B_2(v_0)(\epsilon X) + B_2(l^P)(X)) \partial_n \widetilde{u}_0(\epsilon X) d\sigma_X + \mathcal{F}_4 \\ &= \epsilon \int_{\partial B} \frac{-g_2(X) + B_2(l^P)(X)}{\epsilon} \partial_n \widetilde{u}_0(\epsilon X) d\sigma_X + \mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_5 \\ &= \epsilon \int_{\partial B} \frac{-g_2(X) + B_1(l^P)(X)}{\epsilon} \nabla^2 u_0(0) X \cdot n d\sigma_X + \mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_5 + \mathcal{F}_6 \\ &= -\epsilon^2 \int_{\partial B} \lambda_2(y) \nabla^2 u_0(0) y \cdot y + \mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_5 + \mathcal{F}_6\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_4 &= \int_{\partial B_\epsilon} B_2(l_\epsilon^{e_\epsilon}) \partial_n \widetilde{u}_0 = O(-\epsilon^3 \log(\epsilon)) \\ \mathcal{F}_5 &= \epsilon \int_{\partial B} (B_2(v_0)(\epsilon X) + g_2(X)) \partial_n \widetilde{u}_0(\epsilon X) d\sigma_X = O(\epsilon^3) \\ \mathcal{F}_6 &= \int_{\partial B} (-g_2(X) + B_2(l^P)(X)) (\partial_n \widetilde{u}_0(\epsilon X) - \epsilon^2 \nabla^2 u_0(0) X \cdot n) d\sigma(X) = O(\epsilon^3)\end{aligned}$$

Grâce à des calculs identiques à ceux faits pour \mathcal{F}_1 et en utilisant l'estimation $\partial_n \widetilde{u}_0(\epsilon X) = O(\epsilon)$ on montre que

$$\mathcal{F}_4 = O(-\epsilon^3 \log(\epsilon))$$

Par définition de g_2 , $B_2(v_0)(\epsilon X) + g_2(X) = O(\epsilon)$. En utilisant l'estimation $\partial_n \widetilde{u}_0(\epsilon X) = O(\epsilon)$, on obtient

$$\mathcal{F}_5 = O(\epsilon^3)$$

Enfin l'estimation $\partial_n \widetilde{u}_0(\epsilon X) - \epsilon^2 \nabla^2 u_0(0) X \cdot n = O(\epsilon^3)$ permet d'écrire :

$$\mathcal{F}_6 = O(\epsilon^3)$$

d'où les estimations de J_A et J_B .

En ce qui concerne \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 , par un changement de variable et en utilisant l'estimation $\widetilde{u}_0(\epsilon X) = O(\epsilon^2)$ on obtient

$$\mathcal{E}_1 = O(\epsilon^3)$$

Pour \mathcal{E}_2 , en changeant de variable, en utilisant le Lemme 6.4.2 pour $\epsilon = 1$, le théorème de trace sur $B_r \setminus \overline{B}$, et de nouveau un changement de variable et enfin le Lemme 6.4.6 (donné en Annexe A section 6.4) on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= \epsilon^2 \int_B \Delta^2 u_0(\epsilon X) l_\epsilon^{w_\epsilon}(\epsilon X) \leq C \epsilon^2 \|l^{w_\epsilon(\epsilon X)}\|_{0, B_r \setminus \overline{B}} \leq C \epsilon^2 \|w_\epsilon(\epsilon X)\|_{2, B} \\ &\leq C \epsilon^2 \left(\|w_\epsilon(\epsilon X)\|_{0, B_r \setminus \overline{B}} + |w_\epsilon(\epsilon X)|_{1, B_r \setminus \overline{B}} + |w_\epsilon(\epsilon X)|_{2, B_r \setminus \overline{B}} \right) \\ &\leq C \epsilon^2 \left(\frac{1}{\epsilon} \|w_\epsilon\|_{0, \Omega_\epsilon} + |w_\epsilon|_{1, \Omega_\epsilon} + \epsilon |w_\epsilon|_{2, \Omega_\epsilon} \right) \leq -C \epsilon^3 \log(\epsilon) \end{aligned}$$

où $B \subsetneq B_r \subset \frac{1}{\epsilon} \Omega$. De même pour \mathcal{E}_3 on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3 &= \epsilon^2 \int_B \nabla u_0(\epsilon X) \cdot \nabla l_\epsilon^{w_\epsilon}(\epsilon X) \leq C \epsilon |l^{w_\epsilon(\epsilon X)}|_{1, B} \leq C \epsilon \|w_\epsilon(\epsilon X)\|_{H^2(B_r \setminus \overline{B})/\mathbb{R}} \\ &\leq C \epsilon \left(|w_\epsilon(\epsilon X)|_{1, B_r \setminus \overline{B}} + |w_\epsilon|_{2, B_r \setminus \overline{B}} \right) \leq C \epsilon \left(|w_\epsilon|_{1, \Omega_\epsilon} + \epsilon |w_\epsilon|_{2, \Omega_\epsilon} \right) \leq C \epsilon^3 \sqrt{-\log(\epsilon)} \end{aligned}$$

□

6.1.5 Calcul du gradient topologique dans le cas de la boule

En partant de (6.1.8), (6.1.12) et en utilisant les estimations données dans le Lemme 6.1.3 on a

$$\begin{aligned} \frac{J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0)}{\epsilon^2} &= \pi (f(0) - u_0(0)) v_0(0) + \gamma \pi \nabla u_0(0) \cdot \nabla v_0(0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial B} \lambda_1(y) \nabla^2 u_0(0) y \cdot y + \int_{\partial B} \lambda_2(y) \nabla^2 u_0(0) y \cdot y + \frac{\mathcal{J}_\epsilon}{\epsilon^2} + o(1) \end{aligned}$$

En passant en coordonnées polaires on exprime tout d'abord la quantité

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_0(0) y \cdot y &= \nabla^2 u_0(0) \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2}(0) - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(0) \right) \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2 \partial x_1}(0) \sin(2\theta) + \frac{\Delta u_0(0)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0)}{\epsilon^2} &= \pi (f(0) - u_0(0)) v_0(0) + \gamma \pi \nabla u_0(0) \cdot \nabla v_0(0) \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2}(0) - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(0) \right) \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(0) - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2}(0) \right) \pi a' \\ &\quad + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2 \partial x_1}(0) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2 \partial x_1}(0) \pi 4a' + \pi c' \Delta u_0(0) \Delta v_0(0) + \frac{\mathcal{J}_\epsilon}{\epsilon^2} + o(1) \end{aligned}$$

où

$$a' = -2 \frac{1 - \nu}{3 + \nu}, \quad c' = -\frac{1 + \nu}{1 - \nu}$$

On rappelle la définition de \mathcal{J}_ϵ

$$\mathcal{J}_\epsilon = - \int_{\Omega_\epsilon} (u_\epsilon - u_0)^2 - \int_{B_\epsilon} (f - u_0)u_0$$

Grâce au Lemme 6.4.6 appliqué à $u_\epsilon - u_0$ on obtient

$$\int_{\Omega_\epsilon} (u_\epsilon - u_0)^2 = O(\epsilon^4 (\log(\epsilon))^2) = o(\epsilon^2)$$

Par un développement de Taylor en 0, on obtient l'estimation de \mathcal{J}_ϵ

$$\mathcal{J}_\epsilon = -\pi\epsilon^2(f(0) - u_0(0))u_0(0) + o(\epsilon^2)$$

6.1.6 Conclusion : expression générale en tout point x_0

Proposition 6.1.4. *Le gradient topologique associé à la fonction coût (5.0.3) et à l'EDP (5.2.6), pour un domaine perforé par une boule centrée en $x_0 \in \Omega$ est :*

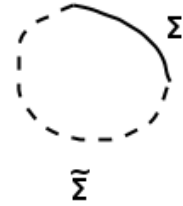
$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x_0) &= \pi(f(x_0) - u_0(x_0))(v_0(x_0) - u_0(x_0)) + \gamma\pi\nabla u_0(x_0) \cdot \nabla v_0(x_0) \\ &\quad - \frac{2\pi(1-\nu)}{3+\nu} \left(\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2}(x_0) - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_0) \right) \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(x_0) - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2}(x_0) \right) + 4 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) \right) \\ &\quad - \frac{\pi(1+\nu)}{1-\nu} \Delta u_0(x_0) \Delta v_0(x_0) \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

6.2 Étude dans le cas du crack

6.2.1 Position du problème. Notations

Pour toute variété $\Sigma \subset \Omega$, on rappelle (voir prérequis) les définitions des espaces suivants :

$$\begin{aligned} H_{00}^{1/2}(\Sigma) &= \{u|_\Sigma, u \in H^{1/2}(\tilde{\Sigma}), u|_{\tilde{\Sigma} \setminus \Sigma} = 0\} \\ H_{00}^{3/2}(\Sigma) &= \{u|_\Sigma, u \in H^{3/2}(\tilde{\Sigma}), u|_{\tilde{\Sigma} \setminus \Sigma} = 0\} \end{aligned}$$



On

où $\tilde{\Sigma}$ est une variété fermée contenant Σ et de même dimension que cette dernière (voir Figure 6.1).

FIGURE 6.1 – Σ et $\tilde{\Sigma}$

munit ces espaces des normes

$$\begin{aligned} \|u|_\Sigma\|_{H_{00}^{1/2}(\Sigma)} &= \|u\|_{H^{1/2}(\tilde{\Sigma})} \\ \|u|_\Sigma\|_{H_{00}^{3/2}(\Sigma)} &= \|u\|_{H^{3/2}(\tilde{\Sigma})} \end{aligned}$$

Maintenant, soit $\sigma \subset \Omega$ une variété de dimension 1 de classe C^1 et de normale \vec{n} passant par l'origine. On notera $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire tangent au crack σ orienté de telle sorte que $(\vec{n}, \vec{\tau})$ soit orthonormée. ∂_τ désigne la différentiation par rapport à $\vec{\tau}$ le long de σ . Dans cette section on note le domaine extérieur au crack $\Lambda = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\sigma}$, et on définit sur cet ensemble l'espace de Sobolev avec poids

$$W^2(\Lambda) = \left\{ u, \frac{u}{(1+r^2)\log(2+r^2)} \in L^2(\Lambda), \frac{\nabla u}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}\log(2+r^2)} \in L^2(\Lambda), \nabla^2 u \in L^2(\Lambda) \right\}$$

On définit le domaine perturbé par $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{x_0 + \epsilon\sigma}$. On suppose que la perturbation ne touche pas le bord, et pour simplifier, on suppose que $x_0 \equiv 0$. On note $\sigma_\epsilon = \{x, \frac{x}{\epsilon} \in \sigma\}$. Dans ce cas $\partial\Omega_\epsilon = \sigma_\epsilon \cup \Gamma$ et le problème (\mathcal{P}_ϵ) se réécrit comme suit :

$$(\mathcal{P}_\epsilon^c) \begin{cases} \Delta^2 u_\epsilon - \gamma \Delta u_\epsilon + u_\epsilon = f, & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ B_1(u_\epsilon) - \gamma \partial_n u_\epsilon = 0, & \text{sur } \sigma_\epsilon \cup \Gamma \\ B_2(u_\epsilon) = 0, & \text{sur } \sigma_\epsilon \cup \Gamma \end{cases} \quad (6.2.1)$$

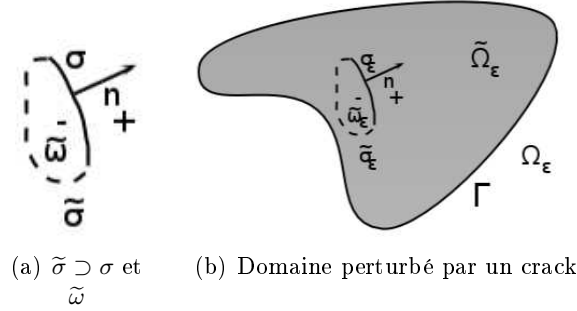


FIGURE 6.2

Soit $\tilde{\sigma}$ une courbe fermée régulière de même dimension que σ telle que $\sigma \subset \tilde{\sigma}$, et soit $\tilde{\omega}$ le domaine de \mathbb{R}^2 , tel que $\partial\tilde{\omega} = \tilde{\sigma}$; on note $\tilde{\omega}_\epsilon = \{x, \frac{x}{\epsilon} \in \tilde{\omega}\}$ et $\tilde{\Omega}_\epsilon = \Omega \setminus \overline{\tilde{\omega}_\epsilon}$ (voir Figure 6.2). Soit $v \in H^2(\Omega_\epsilon)$ et soit u_ϵ la solution du problème (\mathcal{P}_ϵ^c) donné en (6.2.1). Grâce à un résultat de régularité classique on a $u_\epsilon \in H^4(\Omega_\epsilon)$. En intégrant par parties sur $\Omega \setminus \overline{\tilde{\omega}_\epsilon} \cup \tilde{\omega}_\epsilon$, et en utilisant [[35], p.376] on justifie la formulation variationnelle de (\mathcal{P}_ϵ) donnée en (5.2.5)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} f v &= \int_{\Omega_\epsilon} (\Delta^2 u_\epsilon - \gamma \Delta u_\epsilon + u_\epsilon) v \\ &= a_\epsilon(u, v) - \int_{\sigma_\epsilon} ((B_1(u_\epsilon) - \gamma \partial_n u_\epsilon)[v] - B_2(u_\epsilon)[\partial_n v]) + \int_\Gamma (B_1(u_\epsilon)v - B_2(u_\epsilon)\partial_n v), \quad \forall v \in H^2(\Omega_\epsilon) \end{aligned}$$

où $a_\epsilon(u, v)$ est donnée en (5.2.4) et où on a noté $[v] = v^+ - v^-$ le saut de v à travers σ_ϵ et $[\partial_n v] = (\partial_n v)^+ - (\partial_n v)^-$ celui de $\partial_n v$, en respectant les conventions décrites dans la Figure 6.2. Pour simplifier, on suppose que $\sigma = \{(s, 0), -1 < s < 1\}$ (on se place dans le repère local au crack).

On calcule le gradient topologique comme dans le cas de la boule en évaluant le terme prépondérant par rapport à ϵ dans la différence $J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0)$. En utilisant l'équation vérifiée par u_ϵ et u_0 on a

$$J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) = \int_{\Omega_\epsilon} (f - 2u_0)(u_\epsilon - u_0) - \int_{\Omega_\epsilon} (u_\epsilon - u_0)^2 \quad (6.2.2)$$

On définit $L_\epsilon(u)$ par (6.1.4), et on pose

$$\mathcal{J}_\epsilon = - \int_{\Omega_\epsilon} (u_\epsilon - u_0)^2 \quad (6.2.3)$$

Pour évaluer (6.2.2), on introduit v_ϵ solution du problème donné en (6.1.6). En utilisant (6.1.6) et (6.2.3)

alors (6.2.2) s'écrit

$$\begin{aligned}
J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) &= -a_\epsilon(u_\epsilon - u_0, v_\epsilon) + \mathcal{J}_\epsilon \\
&= -l_\epsilon(v_\epsilon) + a_\epsilon(u_0, v_\epsilon) + \mathcal{J}_\epsilon \\
&= -\int_{\Omega_\epsilon} f v_\epsilon + \int_{\Omega_\epsilon} (\Delta^2 u_0 - \gamma \Delta u_0 + u_0) v_\epsilon + \int_{\sigma_\epsilon} B_1(u_0)[v_\epsilon] - B_2(u_0)[\partial_n v_\epsilon] + \mathcal{J}_\epsilon \\
&= \int_{\sigma_\epsilon} (B_1(u_\epsilon) - \gamma \partial_n u_\epsilon) [v_\epsilon] - B_2(u_0)[\partial_n v_\epsilon] + \mathcal{J}_\epsilon
\end{aligned}$$

puis en introduisant $w_\epsilon = v_\epsilon - v_0$ avec v_ϵ définie en (6.1.6), et où v_0 est solution de la même équation avec $\epsilon = 0$ on réécrit $J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0)$ en fonction de w_ϵ

$$\begin{aligned}
J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) &= \int_{\sigma_\epsilon} (B_1(u_0) - \gamma \partial_n u_0) [w_\epsilon] - B_2(u_0)[\partial_n w_\epsilon] + \mathcal{J}_\epsilon \\
&= I_A - I_B + \mathcal{J}_\epsilon
\end{aligned} \tag{6.2.4}$$

où

$$\begin{aligned}
I_A &= \int_{\sigma_\epsilon} (B_1(u_\epsilon) - \gamma \partial_n u_\epsilon) [w_\epsilon] \\
I_B &= \int_{\sigma_\epsilon} B_2(u_0)[\partial_n w_\epsilon]
\end{aligned} \tag{6.2.5}$$

Dans la suite, on va montrer que I_A et I_B sont $\sim O(\epsilon^2)$ et que le terme \mathcal{J}_ϵ est $\sim o(\epsilon^2)$. Auparavant, on établit le développement asymptotique de $B_1(v_0)$, $B_2(v_0)$ et de w_ϵ .

6.2.2 Estimations de $B_1(v_0)(x)$ et $B_2(v_0)(x)$ pour $x \in \sigma_\epsilon$

Proposition 6.2.1. *En supposant v_0 régulier, on a les développements par rapport à ϵ :*

$$\begin{aligned}
B_1(v_0)(\epsilon X) &= -g_1(X) + O(1) \\
B_2(v_0)(\epsilon X) &= -g_2(X) + O(\epsilon)
\end{aligned}$$

où en posant $X = (s, 0) \in \sigma$, pour $-1 < s < 1$

$$\begin{aligned}
g_1(X) &= 0 \\
g_2(X) &= -\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2}(0) - \nu \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(0)
\end{aligned}$$

Démonstration. La condition au bord $B_1(v_0)(\epsilon X)$ pour $X \in \sigma$ s'écrit

$$\begin{aligned}
B_1(v_0)(\epsilon X) &= \partial_n(\Delta v_0)(\epsilon X) - (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1 \partial x_2} \right) (\epsilon X) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_2}(\Delta v_0)(0) + (1 - \nu) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x_1^2 \partial x_2}(0) + O(\epsilon) \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

La condition $B_2(v_0)(\epsilon X)$ se développe en

$$\begin{aligned}
B_2(v_0)(\epsilon X) &= \nu \Delta v_0(\epsilon X) + (1 - \nu) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2}(\epsilon X) \\
&= \nu \Delta v_0(0) + (1 - \nu) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2}(0) + O(\epsilon) \\
&= -g_2(X) + O(\epsilon)
\end{aligned}$$

avec

$$g_2(X) = -\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2}(0) - \nu \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(0)$$

□

On établit ensuite le développement asymptotique de w_ϵ .

6.2.3 Développement asymptotique de w_ϵ

On rappelle que $w_\epsilon = v_\epsilon - v_0$ vérifie l'équation

$$(\mathcal{Q}_\epsilon^c) \begin{cases} \Delta^2 w_\epsilon - \gamma \Delta w_\epsilon + w_\epsilon = 0, & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ B_1(w_\epsilon) - \gamma \partial_n w_\epsilon = -B_1(v_0) + \gamma \partial_n v_0, & \text{sur } \sigma_\epsilon \\ B_2(w_\epsilon) = -B_2(v_0), & \text{sur } \sigma_\epsilon \\ B_1(w_\epsilon) - \gamma \partial_n w_\epsilon = 0, & \text{sur } \Gamma \\ B_2(w_\epsilon) = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (6.2.6)$$

Pour estimer w_ϵ , on introduit le problème extérieur (\mathcal{R}_{ext}) suivant

$$(\mathcal{R}_{ext}) \begin{cases} \Delta^2 R = 0, & \text{sur } \Lambda \\ B_1(R) = g_1, & \text{sur } \sigma \\ B_2(R) = g_2, & \text{sur } \sigma \end{cases} \quad (6.2.7)$$

On vérifie que $g_1 \in (H_{00}^{3/2}(\sigma))'$ et $g_2 \in (H_{00}^{1/2}(\sigma))'$. En utilisant le Théorème 6.5.3 donné en Annexe B (section 6.5), on déduit que le problème (\mathcal{R}_{ext}) admet une solution unique dans $W^2(\Lambda)/\mathbb{P}_1$ et que R s'écrit sous la forme

$$R(x) = \oint_\sigma \lambda_1(y) B_{1,y}(E(x-y)) d\sigma_y + \oint_\sigma \lambda_2(y) B_{2,y}(E(x-y)) d\sigma_y$$

où \oint désigne la valeur principale de Cauchy et on a les relations :

$$\begin{aligned} [R] &= R|_\sigma^+ - R|_\sigma^- = \lambda_1 \\ [\partial_n R] &= \partial_n R|_\sigma^+ - \partial_n R|_\sigma^- = -\lambda_2 \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_1(s) &= 0, \quad \forall (s, 0) \in \sigma \\ \lambda_2(s) &= \frac{-4\beta}{(1-\nu)(3+\nu)} \sqrt{1-s^2}, \quad \forall (s, 0) \in \sigma \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

avec $\beta = \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2}(0) + \nu \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(0)$. En utilisant le Lemme 6.5.5 (Annexe B section 6.5), on obtient

$$w_\epsilon = \epsilon^2 R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + e_\epsilon \quad (6.2.10)$$

avec $\|e_\epsilon\|_{H^2(\Omega_\epsilon)} = O(-\epsilon^2 \log(\epsilon))$. Dans ce qui suit nous allons montrer que $I_A \sim o(\epsilon^2)$ et que $I_B \sim O(\epsilon^2)$.

6.2.4 Estimations de I_A, I_B

Lemme 6.2.2. *Soient I_A et I_B données en (6.2.5), alors on a les estimations :*

$$\begin{aligned} I_A &= O(\epsilon^3) \\ I_B &= -\epsilon^2 \alpha \int_{\sigma} \lambda_2(X) d\sigma_X + O(\epsilon^3) \end{aligned}$$

Démonstration. En supposant u_0 assez régulier, avec la Proposition 6.2.1 on a

$$B_1(u_0)(\epsilon X) = O(1)$$

Grâce à un changement de variable, au Lemme 6.5.1 et en utilisant l'équivalence entre la norme et la semi-norme sur l'espace $H^2(B_2 \setminus \bar{\sigma})/\mathbb{P}_1$ et à nouveau un changement de variable, on obtient :

$$\begin{aligned} I_A &\leq \epsilon \|B_1(u_0)(\epsilon X)\|_{H_{00}^{3/2}(\sigma)} \|w_{\epsilon}(\epsilon X)\|_{H^2(B_2 \setminus \bar{\sigma})/\mathbb{P}_1} \\ &\leq C \epsilon |w_{\epsilon}(\epsilon X)|_{2, B_2 \setminus \bar{\sigma}} \\ &\leq C \epsilon^2 |w_{\epsilon}|_{2, \Omega_{\epsilon}} \end{aligned}$$

Avec le Lemme 6.5.5 (Annexe B section 6.5), il vient $I_A = O(\epsilon^3)$.

En partant de (6.2.5), en utilisant un changement de variable, (6.2.8) et (6.2.10) , on exprime I_B :

$$I_B = -\epsilon^2 \alpha \int_{\sigma} \lambda_2(X) d\sigma_X + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \quad (6.2.11)$$

où

$$\alpha = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(0) + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2}(0) \quad (6.2.12)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \epsilon \int_{\sigma} (B_2(u_0)(\epsilon X) - \alpha) [\partial_n w_{\epsilon}(\epsilon X)] d\sigma_X \\ \mathcal{E}_2 &= \epsilon \int_{\sigma} \alpha [\partial_n e_{\epsilon}(\epsilon X)] \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

Par un développement de Taylor en 0 de u_0 et en utilisant la définition de α donnée en (6.2.12) et la Proposition 6.2.1, on a

$$B_2(u_0)(\epsilon X) - \alpha = O(\epsilon)$$

De manière identique à l'estimation de I_A on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \epsilon \int_{\sigma} (B_2(u_0)(\epsilon X) - \alpha) \frac{1}{\epsilon} [\partial_n (w_{\epsilon}(\epsilon X))] \\ &\leq \|B_2(u_0)(\epsilon X) - \alpha\|_{H_{00}^{3/2}(\sigma)} \|w_{\epsilon}(\epsilon X)\|_{H^2(B_2 \setminus \bar{\sigma})/\mathbb{P}_1} \leq C \epsilon^2 |w_{\epsilon}|_{2, \Omega_{\epsilon}} \leq C \epsilon^3 \end{aligned}$$

De même

$$\mathcal{E}_2 = \alpha \int_{\sigma} [\partial_n (e_{\epsilon}(\epsilon X))] \leq C \|e_{\epsilon}(\epsilon X)\|_{H^2(B_2 \setminus \bar{\sigma})/\mathbb{P}_1} \leq C \epsilon |e_{\epsilon}|_{2, \Omega_{\epsilon}} \leq C \epsilon^3 \log(\epsilon)$$

□

6.2.5 Calcul du gradient topologique dans le cas du crack

En partant de (6.2.2), et en appliquant les estimations du Lemme 6.2.2, on a

$$\frac{J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0)}{\epsilon^2} = \alpha \int_\sigma \lambda_2(X) d\sigma_X + \frac{J_\epsilon}{\epsilon^2} + o(1)$$

En appliquant le lemme 6.5.5 à $u_\epsilon - u_0$ on déduit l'estimation de \mathcal{I}_ϵ :

$$\mathcal{I}_\epsilon = O(\epsilon^4 (\log(\epsilon))^2)$$

De cette estimation, et en utilisant l'expression de λ_2 donnée en (6.2.9) on obtient le gradient topologique en 0

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(0) &= \alpha \int_\sigma \lambda_2(X) d\sigma_X \\ &= -\frac{4\alpha\beta}{(1-\nu)(3+\nu)} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} ds \\ &= \frac{-2\pi\alpha\beta}{(1-\nu)(3+\nu)} \end{aligned}$$

c-à-d

$$\mathcal{I}(0, e_{\vec{y}}) = -\frac{2\pi}{(1-\nu)(3+\nu)} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(0) + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2}(0) \right) \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2}(0) + \nu \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(0) \right)$$

6.2.6 Conclusion : expression générale en tout point x_0

Proposition 6.2.3. *L'expression du gradient topologique associé à la fonction coût (5.0.3) et à l'EDP (5.2.6), pour un domaine fissuré par un crack centré en $x_0 \in \Omega$ et de normale \vec{n} est :*

$$\mathcal{I}(x_0, \vec{n}) = -\frac{2\pi}{(1-\nu)(3+\nu)} (\nabla^2 u_0(x_0)(\vec{n}, \vec{n}) + \nu \nabla^2 u_0(x_0)(\vec{\tau}, \vec{\tau})) (\nabla^2 v_0(x_0)(\vec{n}, \vec{n}) + \nu \nabla^2 v_0(x_0)(\vec{\tau}, \vec{\tau})) \quad (6.2.14)$$

où $\vec{\tau}$ tel que $(\vec{\tau}, \vec{n})$ soit une base orthonormée.

6.3 Calcul du GT dans le cas 3D dans le cas $\nu = 0$ pour un domaine fissuré par un crack circulaire et plan

En traitement d'images la détection de surfaces, de lignes et de points (petites boules de l'ordre de quelques pixels) est un enjeu important (voir section 7.10). Dans cette section on calcul le GT pour un domaine 3D fissuré en ne reprenant que les points de démonstration qui diffèrent par rapport au cas 2D (section 6.2). On suppose que $\gamma = 0$, $\nu = 0$ et on modélise le crack par un disque de normale \vec{n} . On note $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et $\Gamma = \partial\Omega$. On considère la forme bilinéaire $b_\Omega(u, v)$ suivante

$$b_\Omega(u, v) = \sum_{i,j} \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} dx \quad (6.3.1)$$

Dans ce qui suit on va tout d'abord intégrer par parties cette forme bilinéaire afin d'en déduire les expressions des conditions aux bord $B_1(u)$ et $B_2(u)$ en 3D. Ensuite par similarité avec le cas 2D on ne considèrera que la dernière étape du calcul du GT consistant à trouver l'expression des densités λ_1 et λ_2 associées aux potentiels multi-couches donnant le potentiel extérieur (6.2.7). Pour ce qui est des développements asymptotiques par rapport à ϵ de u_ϵ , v_ϵ et $J_\epsilon(u_\epsilon)$ le raisonnement est similaire. La seule différence est que les développements asymptotiques des solutions u_ϵ et v_ϵ sont $\sim o(\epsilon^{\frac{3}{2}})$ en norme $H^2(\Omega_\epsilon)$, et $J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0)$ est $\sim O(\epsilon^3)$.

6.3.1 Intégration par parties de $b_\Omega(u, v)$ en 3D

En vue d'intégrer par parties la forme bilinéaire $b_\Omega(u, v)$, on a besoin des résultats suivants d'intégration sur une surface. On prend la convention d'indices répétés $u_i = \sum_{i=1}^3 u_i$ lorsque i n'est pas fixé. Pour $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de régularité $C^1(\Omega)$, on note $Jac(\varphi)$ la matrice jacobienne associée. Dans tout ce qui suit on suppose que Ω est un domaine (toujours borné) de \mathbb{R}^3 de régularité C^2 . Les résultats d'intégrations sur une surface préliminaires au Théorème 6.3.7 sont une version simplifiée des résultats tirés de Henrot-Pierre [50] (pp 192-194) (en particulier on donne des résultats pour des fonctions régulières sur tout \mathbb{R}^3).

Définition 6.3.1 (Gradient tangentiel). Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, on définit son gradient tangentiel par

$$\nabla_\Gamma \varphi = \nabla \varphi - (\nabla \varphi \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

avec \vec{n} la normale sortante à Ω .

Définition 6.3.2 (Divergence tangentielle). Soit $\vec{q} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, on définit sa divergence tangentielle par

$$div_\Gamma(\vec{q}) = div(\vec{q}) - Jac(\vec{q})\vec{n} \cdot \vec{n}$$

Remarque 6.3.3. En introduisant le projecteur $P_{ij} = (\delta_{ij} - n_i n_j)$ on a donc

$$\begin{aligned} \nabla_\Gamma \varphi &= P \nabla \varphi \\ div_\Gamma(\vec{q}) &= P : Jac(\vec{q}) \end{aligned}$$

où on note le produit scalaire de deux matrices $A : B = A_{ij} B_{ij}$.

Définition 6.3.4 (Courbure moyenne). Soient Ω de classe C^2 , $\Gamma = \partial\Omega$ et \vec{n} la normale sortante de Ω , on définit la courbure moyenne de Γ par $H = div_\Gamma \vec{n}$.

Théorème 6.3.5. Soient Γ une surface fermée C^2 plongée dans \mathbb{R}^3 , $\vec{q} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ et $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, on a la formule d'intégration par parties sur une surface :

$$\int_\Gamma \vec{q} \cdot \nabla_\Gamma \varphi = - \int_\Gamma div_\Gamma(\vec{q}) \varphi + H \varphi \vec{q} \cdot \vec{n}$$

où on rappelle que H est la courbure moyenne de Γ .

Corollaire 6.3.6. Soient Γ une surface fermée C^2 plongée dans \mathbb{R}^3 , $\vec{q} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ et $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, alors la formule d'intégration par parties sur une surface suivante est vérifiée :

$$\int_\Gamma q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Gamma q n_i \partial_n \varphi + \int_\Gamma (-div_\Gamma(q \vec{e}_i) \varphi + H \varphi q n_i), \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

Démonstration. Soit $i \in \{1, 2, 3\}$, en décomposant le gradient en la somme $\nabla \varphi = (\nabla \varphi \cdot \vec{n}) \vec{n} + \nabla_\Gamma \varphi$ et en utilisant le fait que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \nabla \varphi \cdot \vec{e}_i$ on a :

$$\begin{aligned} \int_\Gamma q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \int_\Gamma q ((\nabla \varphi \cdot \vec{n}) \vec{n} + \nabla_\Gamma \varphi) \cdot \vec{e}_i \\ &= \int_\Gamma q n_i \partial_n \varphi + \int_\Gamma q \vec{e}_i \cdot \nabla_\Gamma \varphi \end{aligned}$$

On conclut en utilisant le Théorème 6.3.5. □

Théorème 6.3.7. Soient $v \in H^2(\Omega)$ et $u \in H^4(\Omega)$, alors par intégration par parties, $b_\Omega(u, v)$ se réécrit :

$$b_\Omega(u, v) = \int_\Omega \Delta^2 u v dx - \int_\Gamma (B_1(u)v - B_2(u)\partial_n v) ds$$

où en utilisant la convention des indices répétés

$$\begin{aligned} B_2(u) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} n_i n_j \\ B_1(u) &= \operatorname{div}_\Gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} n_i \vec{e}_j \right) - H \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} n_i n_j + \frac{\partial^3 u}{\partial x_i^2 \partial x_j} n_j \\ &= \operatorname{div}_\Gamma \left(P \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} n_i \vec{e}_j \right) + \frac{\partial^3 u}{\partial x_i^2 \partial x_j} n_j \end{aligned}$$

avec P le projecteur orthogonale sur la surface Γ et H la courbure moyenne de Γ . On peut donner une expression plus explicite de $B_1(u)$ comme suit :

$$B_1(u) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} n_i \right) - \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} n_i \right) n_j n_l - H \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} n_i n_j + \frac{\partial^3 u}{\partial x_i^2 \partial x_j} n_j$$

avec H la courbure moyenne de Γ .

Remarque 6.3.8. On retrouve l'expression de B_1 et B_2 dans le cas 2D en réécrivant $\operatorname{div}_\Gamma(P \cdot)$ comme suit

$$\operatorname{div}_\Gamma(P \vec{F}) = \partial_\tau (\vec{F} \cdot \vec{\tau}) \quad \forall \vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

où $\vec{\tau}$ est le vecteur tangent tel que $(\vec{n}, \vec{\tau})$ soit orthonormée.

Démonstration. En partant de (6.3.1) et en intégrant par parties, on obtient

$$b_\Omega(u, v) = \int_\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} n_i \frac{\partial v}{\partial x_j} ds - \int_\Gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x_i^2 \partial x_j} n_j v ds + \int_\Omega \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} v dx \quad (6.3.2)$$

On désire maintenant intégrer le premier terme de bord sur la surface Γ afin de faire apparaître les conditions aux bords. Pour cela on utilise le Corollaire 6.3.6 :

$$b_\Omega(u, v) = \int_\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} n_i n_j \partial_n v ds + \int_\Gamma \left[-\operatorname{div}_\Gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2 \partial x_j} n_i \vec{e}_j \right) + H \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} n_i n_j - \frac{\partial^3 u}{\partial x_i^2 \partial x_j} n_j \right] v ds + \int_\Omega \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} v dx$$

Ensuite on peut développer le terme en $\operatorname{div}_\Gamma$:

$$\operatorname{div}_\Gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2 \partial x_j} n_i \vec{e}_j \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} n_i \right) - \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} n_i \right) n_j n_l$$

ce qui termine la preuve. □

6.3.2 Expressions de B_1 et B_2 dans le cas d'un crack plan et circulaire

On définit le crack en coordonnées locales par

$$\sigma = \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta), 0), 0 \leq r < 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

La normale au crack est $\vec{n} = (0, 0, 1)^T$ et la courbure moyenne de σ est $H = 0$. Les conditions aux bords sur σ s'écrivent donc

$$\begin{aligned} B_2(u) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \\ B_1(u) &= 2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_i^2 \partial x_3} - \frac{\partial^3 u}{\partial x_3^3} \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

où on rappelle que la convention des indices répétés est utilisée.

6.3.3 Solution fondamentale du bilaplacien en 3D

Lemme 6.3.9. *La solution fondamentale notée $E(x)$ du bilaplacien en 3D est*

$$E(x) = \frac{|x|}{8\pi}$$

Démonstration. La solution fondamentale du laplacien est $E_1(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$. On note le temps de cette preuve $E_2(x)$ la solution fondamentale du bilaplacien telle que $-\Delta^2 E_2 = \delta_0$. On déduit que E_2 est telle que

$$\Delta E_2 = E_1 + P_1 \tag{6.3.4}$$

où P_1 est un polynôme de degré au plus 1. En cherchant E_2 sous la forme d'une fonction radiale et en écrivant le laplacien en coordonnées sphériques on obtient :

$$\Delta E_2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial E_2}{\partial r} \right)$$

On déduit donc

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial E_2}{\partial r} \right) = \frac{r}{4\pi}$$

puis en prenant les constantes d'intégration égales à zéros on obtient

$$\frac{\partial E_2}{\partial r} = \frac{1}{8\pi}$$

d'où le résultat en intégrant une nouvelle fois. □

6.3.4 Calcul des densités λ_1 et λ_2

Comme dans le cas 2D les densités sont solutions des équations (6.3.5) suivantes :

$$g_1(x) = \oint_{\sigma} \lambda_1(y) B_{1,x} B_{1,y}(E(x-y)) d\sigma(y) + \oint_{\sigma} \lambda_2(y) B_{1,x} B_{2,y}(E(x-y)) d\sigma(y) \tag{6.3.5a}$$

$$g_2(x) = \oint_{\sigma} \lambda_1(y) B_{2,x} B_{1,y}(E(x-y)) d\sigma(y) + \oint_{\sigma} \lambda_2(y) B_{2,x} B_{2,y}(E(x-y)) d\sigma(y) \tag{6.3.5b}$$

où \oint désigne la valeur principale de Cauchy et où les valeurs de g_1 et g_2 pour le calcul du gradient topologique sont :

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 0 \\ g_2(x) &= -\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_3^2}(0) = V \end{aligned}$$

Pour résoudre ces équations intégrales, on commence par calculer les noyaux associés. En posant $x = (x_1, y_1, 0) \in \sigma$ et $y = (y_1, y_2, 0) \in \sigma$, avec (6.3.3) on a :

$$\begin{aligned} B_{1,x}(B_{1,y}(E(x-y))) &= \frac{1}{8\pi} \frac{27}{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{5/2}} \\ B_{1,x}(B_{2,y}(E(x-y))) &= 0 \\ B_{2,x}(B_{2,y}(E(x-y))) &= \frac{1}{8\pi} \frac{-3}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{3/2}} \\ B_{2,x}(B_{1,y}(E(x-y))) &= 0 \end{aligned}$$

On obtient donc les deux équations découplées suivantes :

$$0 = \frac{1}{8\pi} \int_{\sigma} \frac{27\lambda_1(y)}{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{5/2}} ds_y$$

$$V = -\frac{3}{8\pi} \int_{\sigma} \frac{\lambda_2(y)}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{3/2}} ds_y$$

La première équation a une solution évidente $\lambda_1 = 0$. Pour la deuxième équation en utilisant [61] et en posant $r = |x|$, on a :

$$\begin{aligned} \lambda_2(r) &= -\frac{4}{\pi} \int_r^1 \frac{1}{(t^2 - r^2)^{1/2}} \int_0^t \frac{-\frac{2V}{3}s}{(t^2 - s^2)^{1/2}} ds dt \\ &= \frac{8}{3\pi} V \int_r^1 \frac{t}{(t^2 - r^2)^{1/2}} dt \\ &= \frac{8}{3\pi} V \sqrt{1 - r^2} \end{aligned}$$

6.3.5 Expression du GT en 3D dans le cas d'un crack circulaire plan quelconque

En reprenant l'expression du gradient topologique en fonction de la densité λ_2 on obtient dans le repère local au crack :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(0) &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_3^2}(0) \int_{\sigma} \lambda_2(X) ds_X \\ &= -\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_3^2}(0) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_3^2}(0) \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{8}{3\pi} \sqrt{1 - r^2} dr d\theta \\ &= -\frac{4\pi}{3} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_3^2}(0) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_3^2}(0) \end{aligned}$$

En changeant de repère on obtient l'expression du GT pour un crack circulaire plan centré en x_0 et de normal \vec{n}

$$\mathcal{I}(x_0, \vec{n}) = -\frac{4\pi}{3} \nabla^2 u_0(x_0)(\vec{n}, \vec{n}) \nabla^2 v_0(x_0)(\vec{n}, \vec{n}) \quad (6.3.6)$$

6.4 Annexe A

Dans cette annexe on développe tous les calculs techniques manquants dans la section 6.1. On rappelle que l'on note B la boule unité et B' le domaine extérieur à la boule unité.

Lemme 6.4.1. *Soient $\omega \subset \mathbb{R}^2$, $u \in H^2(\omega)$, tel que $\Delta^2 u \in L^2(\omega)$. Soit Γ_1 une courbe fermée tel que $\Gamma_1 \subset \partial\omega$. On a l'inégalité suivante*

$$\begin{pmatrix} B_1(u) \\ B_2(u) \end{pmatrix}_{H^{-3/2}(\Gamma_1) \times H^{-1/2}(\Gamma_1)} \leq C |u|_{2,\omega} + \|\Delta^2 u\|_{0,\omega}$$

où

$$\begin{pmatrix} B_1(u) \\ B_2(u) \end{pmatrix}_{H^{-3/2}(\Gamma_1) \times H^{-1/2}(\Gamma_1)} = \sup_{\|\varphi_1\|_{3/2,\Gamma_1} + \|\varphi_2\|_{1/2,\Gamma_1} = 1} \int_{\Gamma_1} B_1(u)\varphi_1 - B_2(u)\varphi_2$$

Démonstration. Soit Γ_2 telle que $\Gamma_2 \cup \Gamma_1 = \partial\omega$, $\varphi_1 \in H^{3/2}(\Gamma_1)$ et $\varphi_2 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$. On introduit $R(\varphi_1, \varphi_2) \in H^2(\omega)$ un relèvement continu de (φ_1, φ_2) tel que $R = \frac{\partial R}{\partial n} = 0$ sur Γ_2 ; en intégrant par parties on a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} B_1(u)\varphi_1 - B_2(u)\varphi_2 &= \int_{\omega} a(u, R(\varphi_1, \varphi_2)) - \int_{\omega} \Delta^2 u R(\varphi_1, \varphi_2) \\ &\leq C|u|_{2,\omega}|R(\varphi_1, \varphi_2)|_{2,\omega} + \|\Delta^2 u\|_{0,\omega}\|R(\varphi_1, \varphi_2)\|_{0,\omega} \end{aligned}$$

où

$$a(u, v) = \int_{\omega} \Delta u \Delta v + (1 - \nu) \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right)$$

En utilisant la continuité du relèvement et en passant au supremum en (φ_1, φ_2) on obtient le résultat. \square

Lemme 6.4.2. Soit $\omega \subset \mathbb{R}^2$, et soient $\varphi_1 \in H^{3/2}(\partial\omega)$ et $\varphi_2 \in H^{1/2}(\partial\omega)$, alors il existe $l^{\varphi_1, \varphi_2} \in H^2(\omega)$ définie par (voir (6.1.7) avec $\epsilon = 1$) :

$$\begin{cases} \Delta^2 l^{\varphi_1, \varphi_2} = 0, & \text{sur } \omega \\ l^{\varphi_1, \varphi_2} = \varphi_1, & \text{sur } \partial\omega \\ \partial_n l^{\varphi_1, \varphi_2} = \varphi_2, & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

et on a l'inégalité suivante

$$\|l^{\varphi_1, \varphi_2}\|_{2,\omega} \leq C\|\varphi_1\|_{3/2, \partial\omega} + C\|\varphi_2\|_{1/2, \partial\omega} \quad (6.4.1)$$

Démonstration. On relève (φ_1, φ_2) continuellement dans $H^2(\omega)$ par $R(\varphi_1, \varphi_2) \in H^2(\omega)$. On note $L^{\varphi_1, \varphi_2} = l^{\varphi_1, \varphi_2} - R(\varphi_1, \varphi_2)$. On a

$$\begin{cases} \Delta^2 L^{\varphi_1, \varphi_2} = -\Delta^2 R(\varphi_1, \varphi_2), & \text{sur } \omega \\ L^{\varphi_1, \varphi_2} = 0, & \text{sur } \partial\omega \\ \partial_n L^{\varphi_1, \varphi_2} = 0, & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

Pour $u \in H_0^2(\omega)$ la norme $H^2(\omega)$ est équivalente à $\|\Delta u\|_{0,\omega}$. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, en utilisant la formule de Green sur ω , on a

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 &= \int_{\omega} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = - \int_{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2} \\ &= \int_{\omega} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \leq \|\Delta \varphi\|_{0,\omega}^2 \end{aligned}$$

on en déduit que pour tout $u \in \mathcal{D}(\omega)$, $\|u\|_{2,\omega} \leq \|\Delta u\|_{0,\omega}$, puis par densité l'inégalité reste vraie sur $H_0^2(\omega)$. L'inégalité dans l'autre sens est évidente. On revient à la preuve de (6.4.1). En intégrant deux fois par parties on obtient

$$\begin{aligned} \|\Delta L^{\varphi_1, \varphi_2}\|_{0,\omega}^2 &= - \int_{\Omega} \Delta^2 R(\varphi_1, \varphi_2) L^{\varphi_1, \varphi_2} \\ &= - \int_{\partial\omega} \partial_n (\Delta R(\varphi_1, \varphi_2)) \underbrace{L^{\varphi_1, \varphi_2}}_{=0} + \int_{\partial\omega} \Delta R(\varphi_1, \varphi_2) \underbrace{\partial_n L^{\varphi_1, \varphi_2}}_{=0} - \int_{\omega} \Delta R(\varphi_1, \varphi_2) \Delta L^{\varphi_1, \varphi_2} \\ &\leq \|\Delta R(\varphi_1, \varphi_2)\|_{0,\omega} \|\Delta L^{\varphi_1, \varphi_2}\|_{0,\omega} \end{aligned}$$

En utilisant la continuité du relèvement on a le résultat. \square

Les quatre premiers points du théorème suivant sont tirés de [[35], p.402 et p.417]. Soient $f \in H^s(\partial B)$ et $g \in H^{-s}(\partial B)$, on note :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\partial B} f g d\sigma$$

Théorème 6.4.3. Soit $g_1 \in H^{-3/2}(\partial B)$, $g_2 \in H^{-1/2}(\partial B)$, tels que

$$\begin{aligned} \langle g_1, 1 \rangle &= 0 \\ \langle g_1, x_1 \rangle - \langle g_2, n_1 \rangle &= 0 \\ \langle g_1, x_2 \rangle - \langle g_2, n_2 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

On considère le problème extérieur suivant

$$(\mathcal{P}_{ext}) \begin{cases} \Delta^2 P = 0, \text{ sur } B' \\ B_1(P) = g_1, \text{ sur } \partial B \\ B_2(P) = g_2, \text{ sur } \partial B \end{cases} \quad (6.4.2)$$

1. Le problème (\mathcal{P}_{ext}) donné en (6.4.2) admet une solution unique dans $W^2(B')/\mathbb{P}_1$ et l'application $(g_1, g_2) \mapsto P$ est continue de $H^{-3/2}(\partial B) \times H^{-1/2}(\partial B)$ dans $W^2(B')/\mathbb{P}_1$, où $W^2(B')/\mathbb{P}_1$ est l'espace des fonctions $W^2(B')$ définies à un polynôme de degré 1 près.
2. La solution de (6.4.2) s'écrit dans $W^2(B')/\mathbb{P}_1$ sous la forme

$$P(x) = \int_{\partial B} \lambda_1(y) E(x-y) ds(y) + \int_{\partial B} \lambda_2(y) \partial_{n_y} E(x-y) ds(y), \text{ pour } x \in B' \quad (6.4.3)$$

3. Il existe $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tels que les densités λ_1 et λ_2 soient données par les cinq équations suivantes

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\lambda_1(x) + \int_{\partial B} \lambda_1(y) B_{1,x}(E(x-y)) d\sigma(y) + \oint_{\partial B} \lambda_2(y) B_{1,x}(\partial_{n_y} E(x-y)) d\sigma(y) + a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 &= g_1(x) \\ +\frac{1}{2}\lambda_2(x) + \int_{\partial B} \lambda_1(y) B_{2,x}(E(x-y)) d\sigma(y) + \int_{\partial B} \lambda_2(y) B_{2,x}(\partial_{n_y} E(x-y)) d\sigma(y) - a_1 n_1(x) - a_2 n_2(x) &= g_2(x) \\ \langle \lambda_1, 1 \rangle &= 0 \\ \langle \lambda_1, x_1 \rangle + \langle \lambda_2, n_1 \rangle &= 0 \\ \langle \lambda_1, x_2 \rangle + \langle \lambda_2, n_2 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

où $x \in \partial B$ et où \oint désigne la valeur principale de Cauchy.

Les trois dernières conditions dans 4. garantissent le comportement à l'infini de P :

$$P(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + A \log(|x|) + O(1), \quad A \in \mathbb{R}$$

4. Pour $x \in \partial B$, on pose $x = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Supposons que g_1 et g_2 soient de la forme $g_1(x) = A_1 \cos(2\theta) + B_1 \sin(2\theta)$, et $g_2(x) = C_2 + A_2 \cos(2\theta) + B_2 \sin(2\theta)$, alors $P(x) = O(\log(|x|))$ et donc $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ et les densités λ_1 et λ_2 sont données par

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= \alpha \cos(2\theta) + \beta \sin(2\theta) \\ \lambda_2(x) &= c + a \cos(2\theta) + b \sin(2\theta) \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= -8 \frac{A_1 + A_2(1+\nu)}{(1-\nu)(3+\nu)}, \quad \beta = -8 \frac{B_1 + B_2(1+\nu)}{(1-\nu)(3+\nu)} \\ a &= 2 \frac{A_1(1+\nu) + 4A_2}{(1-\nu)(3+\nu)}, \quad b = 2 \frac{B_1(1+\nu) + 4B_2}{(1-\nu)(3+\nu)}, \quad c = 2 \frac{C_2}{1-\nu} \end{aligned}$$

5. Avec l^P définie en (6.1.7) (pris pour $\epsilon = 1$), et les données de g_1 et g_2 du point 4, on a les relations de saut à travers ∂B :

$$\begin{aligned} g_1(x) - B_1(l^P)(x) &= -\lambda_1(x), \quad x \in \partial B \\ g_2(x) - B_2(l^P)(x) &= \lambda_2(x), \quad x \in \partial B \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

Remarque 6.4.4. Les choix de g_1 et de g_2 faits dans le point 4 du théorème est lié à la forme des conditions au bord données dans la Proposition 6.1.2.

Démonstration. On introduit la forme bilinéaire sur $W^2(B')/\mathbb{P}_1$

$$b'(u, v) = \int_{B'} \Delta u \Delta v + (1 - \nu) \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right)$$

ainsi que la forme linéaire sur $W^2(B')/\mathbb{P}_1$

$$l'(v) = \int_{\partial B} g_1 v - g_2 \partial_n v$$

La coercivité de $b'(u, v)$ se montre en utilisant (5.2.2) et le Lemme 0.0.2 (prérequis). En appliquant le théorème de trace sur $B_2 \setminus \bar{B}$, on obtient la continuité de $l'(v)$ sur l'espace $W^2(B')/\mathbb{P}_1$, ce qui constitue la preuve du premier point.

On renvoie à [[35], p.417] pour les deuxième et troisième points.

En utilisant la formule de Green sur B' , on a

$$\begin{aligned} P(x) &= \int_{B'} -\Delta^2 E(x-y) P(y) dy \\ &= \int_{\partial B} B_{1,y}(E(x-y)) P(y) dy - \int_{\partial B} B_{2,y}(E(x-y)) \partial_n P(y) dy \\ &\quad + \int_{\partial B} \partial_{n_y}(E(x-y)) B_{2,y}(P)(y) dy - \int_{\partial B} E(x-y) B_{1,y}(P)(y) dy \\ &= A - B + C - D \end{aligned}$$

On remarque que pour les valeurs particulières de g_1 et g_2 données dans l'énoncé du point 4, on a les relations suivantes

$$\begin{aligned} \langle g_1, 1 \rangle &= 0 \\ \langle g_1, x_1 \rangle &= \langle g_1, n_1 \rangle = \langle g_1, x_2 \rangle = \langle g_1, n_2 \rangle = 0 \\ \langle g_2, x_1 \rangle &= \langle g_2, n_1 \rangle = \langle g_2, x_2 \rangle = \langle g_2, n_2 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

En calculant les noyaux associés à $B_{1,y}(E(x-y))$ et $B_{2,y}(E(x-y))$, en faisant un développement de Taylor en x lorsque $|x| \rightarrow \infty$, il vient

$$\begin{aligned} A &= \int_{\partial B} B_{1,y}(E(x-y)) P(y) dy = O(\log(|x|)) \\ B &= \int_{\partial B} B_{2,y}(E(x-y)) \partial_n P(y) dy = O(\log(|x|)) \end{aligned}$$

Pour C et D , on fait un développement de Taylor en x de $E(x-y)$ et de $\partial_{n_y}(E(x-y))$, pour $|x| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} E(x-y) &= E(x) - y \cdot \nabla E(x) + \frac{1}{2} y \cdot \nabla^2 E(x) y + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \\ \partial_{n_y} E(x-y) &= \nabla E(x) \cdot n_y - \nabla^2 E(x) y \cdot n_y + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \end{aligned} \quad (6.4.8)$$

En utilisant l'estimation $\nabla^2 E(x) = O(\log(|x|))$, (6.4.8) et les relations (6.4.7) on obtient

$$\begin{aligned}
C &= \int_{\partial B} \partial_{n_y}(E(x-y))B_{2,y}(P)(y)dy \\
&= \nabla E(x) \cdot \int_{\partial B} n_y g_2(y) + O(\log(|x|)) \\
&= \nabla E(x) \cdot \begin{pmatrix} \langle g_2, n_1 \rangle \\ \langle g_2, n_2 \rangle \end{pmatrix} + O(\log(|x|)) \\
&= O(\log(|x|)) \\
D &= \int_{\partial B} E(x-y)B_{1,y}(P)(y)dy \\
&= E(x)\langle g_1, 1 \rangle - \nabla E(x) \cdot \begin{pmatrix} \langle g_1, y_1 \rangle \\ \langle g_1, y_2 \rangle \end{pmatrix} + O(\log(|x|)) \\
&= O(\log(|x|))
\end{aligned}$$

On déduit de ces estimations que $P(x) = O(\log(|x|))$ à l'infini et que donc $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

Pour déterminer λ_1 et λ_2 on commence par calculer les noyaux associés aux équations intégrales. Avec [[35], pages 390-392], en posant $x = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ et $y = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, on a

$$\begin{aligned}
B_{2,x}(E(x-y)) &= -\frac{1}{8\pi} ((1+\nu)\log(2(1-\cos(\varphi-\theta))) + (1+3\nu) + (1-\nu)(1-\cos(\varphi-\theta))) \\
B_{2,x}(\partial_{n_y}(E(x-y))) &= -\frac{\nu}{4\pi} + \frac{1-\nu}{8\pi}\cos(\varphi-\theta) \\
B_{1,x}(E(x-y)) &= -\frac{1}{4\pi} - \frac{1-\nu}{8\pi}\cos(\varphi-\theta) \\
B_{1,x}(\partial_{n_y}(E(x-y))) &= -\frac{1-\nu}{8\pi}\cos(\varphi-\theta) + \frac{1+\nu}{8\pi(1-\cos(\varphi-\theta))}
\end{aligned}$$

Pour alléger les notations on note $\lambda_1(\theta) = \lambda_1(\cos(\theta), \sin(\theta))$ et $\lambda_2(\theta) = \lambda_2(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Les équations données dans le point 3 se réécrivent :

$$\begin{aligned}
(Eq.1) \quad & \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{2}\lambda_1(\varphi) + \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{4\pi} - \frac{1-\nu}{8\pi}\cos(\varphi-\theta) \right) \lambda_1(\theta)d\theta \\ & + \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1-\nu}{8\pi}\cos(\varphi-\theta) + \frac{1+\nu}{8\pi(1-\cos(\varphi-\theta))} \right) \lambda_2(\theta)d\theta = A_1\cos(2\varphi) + B_1\sin(2\varphi) \end{aligned} \right. \\
(Eq.2) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2}\lambda_2(\varphi) + \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{8\pi} ((1+\nu)\log(2(1-\cos(\varphi-\theta))) + (1+3\nu) + (1-\nu)(1-\cos(\varphi-\theta))) \right) \lambda_1(\theta)d\theta \\ & + \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\nu}{4\pi} + \frac{1-\nu}{8\pi}\cos(\varphi-\theta) \right) \lambda_2(\theta)d\theta = C_2 + A_2\cos(2\varphi) + B_2\sin(2\varphi) \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Le seul noyau singulier est $\frac{1+\nu}{8\pi(1-\cos(\varphi-\theta))} = O(|\theta-\varphi|^2)$ associé à $B_{1,x}(\partial_{n_y}(E(x-y)))$. On remarque que

$B_{1,x}(\partial_{n_y}(E(x-y))) = \partial_{n_x}(B_{1,y}(E(x-y)))$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} B_{1,x}(\partial_{n_y}(E(x-y))) d\sigma(y) &= \int_{\partial B} \partial_{n_x}(B_{1,y}(E(x-y))) \\ &= \partial_{n_x} \int_{\partial B} B_{1,y}(E(x-y)) d\sigma(y) \\ &= \partial_{n_x} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{4\pi} - \frac{1-\nu}{8\pi} \cos(\varphi - \theta) \right) d\theta \\ &= \partial_{n_x} \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On peut donc réécrire le terme de gauche dans (Eq.1) comme suit

$$\oint_0^{2\pi} \left(-\frac{1-\nu}{8\pi} \cos(\varphi - \theta) + \frac{1+\nu}{8\pi(1-\cos(\varphi - \theta))} \right) (\lambda_2(\theta) - \lambda_2(\varphi)) d\theta$$

Ensuite on cherche la forme des solutions. On cherche λ_1 tel que $\langle \lambda_1, 1 \rangle = 0$ et avec l'énoncé du point 4, $g_1 \in Vect(\cos(2\theta), \sin(2\theta))$ donc on cherche λ_1 de la forme

$$\lambda_1(\theta) = \alpha \cos(2\theta) + \beta \sin(2\theta)$$

De même $g_2 \in Vect(1, \cos(2\theta), \sin(2\theta))$ donc on cherche λ_2 de la forme

$$\lambda_2(\theta) = a \cos(2\theta) + b \sin(2\theta) + c$$

On définit pour f continue sur $[0, 2\pi]$ l'intégrale impropre

$$I(f)(\varphi) = \oint_0^{2\pi} \frac{f(\theta) - f(\varphi)}{1 - \cos(\theta - \varphi)} d\theta$$

où par définition : $\oint_0^{2\pi} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varphi - \epsilon} + \int_{\varphi + \epsilon}^{2\pi}$. On calcule alors les deux intégrales impropres suivantes

$$\begin{aligned} I(\cos(2\theta))(\varphi) &= \oint_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta) - \cos(2\varphi)}{1 - \cos(\theta - \varphi)} d\theta \\ I(\sin(2\theta))(\varphi) &= \oint_0^{2\pi} \frac{\sin(2\theta) - \sin(2\varphi)}{1 - \cos(\theta - \varphi)} d\theta \end{aligned}$$

pour cela, on réécrit les numérateurs

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) - \cos(2\varphi) &= (\cos(2(\theta - \varphi)) - 1) \cos(2\varphi) + \sin(2(\theta - \varphi)) \sin(2\varphi) \\ \sin(2\theta) - \sin(2\varphi) &= \sin(2(\theta - \varphi)) \cos(2\varphi) + (\cos(2(\theta - \varphi)) - 1) \sin(2\varphi) \end{aligned}$$

Puis on exprime chaque terme de la somme en fonction de $\theta - \varphi$:

$$\begin{aligned} \cos(2(\theta - \varphi)) - 1 &= -2\sin^2(\theta - \varphi) \\ \sin(2(\theta - \varphi)) &= 2\sin(\theta - \varphi)\cos(\theta - \varphi) \end{aligned}$$

Ensuite on calcule chaque terme intervenant dans le calcul de l'intégrale

$$\begin{aligned} \oint_0^{2\pi} \frac{\sin^2(\theta - \varphi)}{1 - \cos(\theta - \varphi)} d\theta &= 2\pi \\ \oint_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta - \varphi)\cos(\theta - \varphi)}{1 - \cos(\theta - \varphi)} d\theta &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} I(\cos(2\theta))(\varphi) &= -4\pi\cos(2\varphi) \\ I(\sin(2\theta))(\varphi) &= -4\pi\sin(2\varphi) \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

On réécrit (Eq.1) :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(\alpha\cos(2\varphi) + \beta\sin(2\varphi)) + \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{4\pi} - \frac{1-\nu}{8\pi}\cos(\varphi-\theta) \right) (\alpha\cos(2\theta) + \beta\sin(2\theta)) d\theta \\ & + \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1-\nu}{8\pi}\cos(\varphi-\theta) + \frac{1+\nu}{8\pi(1-\cos(\varphi-\theta))} \right) (a(\cos(2\theta) - \cos(2\varphi)) + b(\sin(2\theta) - \sin(2\varphi))) d\theta \\ & = A_1\cos(2\varphi) + B_1\sin(2\varphi) \end{aligned}$$

En utilisant (6.4.9) et après calculs, on obtient l'équation :

$$-\frac{1}{2}(\alpha\cos(2\varphi) + \beta\sin(2\varphi)) + \frac{1+\nu}{8\pi}(-4\pi a\cos(2\varphi) - 4\pi b\sin(2\varphi)) = A_1\cos(2\varphi) + B_1\sin(2\varphi)$$

Par identification il vient

$$\left(\widetilde{\text{Eq.1}} \right) \begin{cases} -\frac{1+\nu}{2}a - \frac{\alpha}{2} = A_1 \\ -\frac{1+\nu}{2}b - \frac{\beta}{2} = B_1 \end{cases} \quad (6.4.10)$$

De même, on réécrit (Eq.2) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(a\cos(2\varphi) + b\sin(2\varphi) + c) \\ & + \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{8\pi}((1+\nu)\log(2(1-\cos(\varphi-\theta))) + (1+3\nu) + (1-\nu)(1-\cos(\varphi-\theta))) \right) (\alpha\cos(2\theta) + \beta\sin(2\theta)) d\theta \\ & + \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\nu}{4\pi} + \frac{1-\nu}{8\pi}\cos(\varphi-\theta) \right) (a\cos(2\theta) + b\sin(2\theta) + c) d\theta \\ & = A_2\cos(2\varphi) + B_2\sin(2\varphi) + C_2 \end{aligned}$$

On exprime l'intégrale :

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \cos(2\theta)\log(2(1-\cos(\varphi-\theta))) d\theta = \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \cos(2(t+\varphi))\log(2(1-\cos(t))) dt \\ & = \cos(2\varphi) \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \cos(2t)\log(2(1-\cos(t))) dt - \sin(2\varphi) \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \sin(2t)\log(2(1-\cos(t))) dt \\ & = -\pi\cos(2\varphi) \end{aligned}$$

De même

$$\int_0^{2\pi} \sin(2\theta)\log(2(1-\cos(\varphi-\theta))) d\theta = -\pi\sin(2\varphi)$$

d'où

$$\left(\widetilde{\text{Eq.2}} \right) \begin{cases} \frac{1-\nu}{2}c = C_2 \\ \frac{a}{2} + \frac{1+\nu}{8}\alpha = A_2 \\ \frac{b}{2} + \frac{1+\nu}{8}\beta = B_2 \end{cases} \quad (6.4.11)$$

En résolvant $(\widetilde{Eq.1})$ et $(\widetilde{Eq.2})$ on obtient les expressions de λ_1 et λ_2 données en (6.4.5), ce qui termine la preuve du point 4.

Pour le point 5, soit l^P définie par (6.1.7) (pour $\epsilon = 1$). Par continuité des potentiels simple et double couche (voir [[35], p.384]), on a

$$l^P(x) = \int_{\partial B} \lambda_1(y)E(x-y)ds(y) + \int_{\partial B} \lambda_2(y)\partial_{n_y}E(x-y)ds(y), \text{ pour } x \in B$$

En utilisant à nouveau les relations de saut données dans [[35], p.385], on obtient pour $x \in \partial B$

$$\begin{aligned} B_1(l^P)(x) &= \frac{1}{2}\lambda_1(x) + \int_{\partial B} \lambda_1(y)B_{1,x}(E(x-y))ds(y) + \int_{\partial B} \lambda_2(y)B_{1,x}(\partial_{n_y}E(x-y))ds(y) \\ B_2(l^P)(x) &= -\frac{1}{2}\lambda_2(x) + \int_{\partial B} \lambda_1(y)B_{2,x}(E(x-y))ds(y) + \int_{\partial B} \lambda_2(y)B_{2,x}(\partial_{n_y}E(x-y))ds(y) \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

Enfin en utilisant (6.4.12) et les deux premières équations de (6.4.4) avec $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, on obtient le point 5. \square

Lemme 6.4.5. *Soit P la solution du problème extérieur (\mathcal{P}_{ext}) donné en (6.1.15), on a le comportement à l'infini suivant : pour $|x|$ assez grand, il existe une constante positive C telle que*

$$|P(x)| \leq C \log(|x|) \quad |\nabla P(x)| \leq \frac{C}{|x|} \quad |\nabla^2 P(x)| \leq \frac{C}{|x|^2}$$

$$\left\| P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right\|_{0, \Omega_\epsilon} = O(-\log(\epsilon)) \quad \left| P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right|_{1, \Omega_\epsilon} = O(\sqrt{-\log(\epsilon)}) \quad \left| P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right|_{2, \Omega_\epsilon} = O\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$$

Démonstration. $P(x)$ est donnée par

$$P(x) = \int_{\partial B} \lambda_1(y)E(x-y) + \int_{\partial B} \lambda_2(y)\partial_{n_y}(E(x-y))$$

Pour les données particulières g_1 et g_2 précisées dans le dernier point du Théorème 6.4.3, λ_1 et λ_2 vérifient les relations suivantes

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1, 1 \rangle &= 0 \\ \langle \lambda_1, x_1 \rangle &= \langle \lambda_1, n_1 \rangle = \langle \lambda_1, x_2 \rangle = \langle \lambda_1, n_2 \rangle = 0 \\ \langle \lambda_2, x_1 \rangle &= \langle \lambda_2, n_1 \rangle = \langle \lambda_2, x_2 \rangle = \langle \lambda_2, n_2 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (6.4.13)$$

En faisant un développement de Taylor de P en x et en utilisant (6.4.13), on obtient la première inégalité. Les deux autres inégalités s'obtiennent en dérivant $P(x)$: pour $x \in B'$, les noyaux sont réguliers et on peut intervertir dérivées et signe intégrale. En appliquant à nouveau un développement de Taylor au point x on obtient le résultat. Pour les estimations suivantes, en utilisant les inégalités ponctuelles et en prenant deux réels a, D assez grands et ϵ assez petit tels que $B_a \subset \frac{1}{\epsilon}\Omega \subset \frac{1}{\epsilon}B_D$ on a :

$$\begin{aligned} \left\| P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right\|_{0, \Omega_\epsilon}^2 &= \int_{\Omega_\epsilon} P\left(\frac{x}{\epsilon}\right)^2 dx = \epsilon^2 \int_{\frac{1}{\epsilon}\Omega \setminus \overline{B}} P(y)^2 dy \\ &\leq \epsilon^2 \left(\int_{B_a \setminus \overline{B}} P(y)^2 dy + \int_{\frac{1}{\epsilon}B_D \setminus \overline{B_a}} P(y)^2 dy \right) \\ &\leq C\epsilon^2 + C\epsilon^2 \int_a^{D/\epsilon} \log(r)^2 r dr \\ &= C\epsilon^2 + C\epsilon^2 \left[\log(r) \frac{r^2}{2} (\log(r) - 1) + \frac{r^2}{4} \right]_a^{D/\epsilon} \\ &\leq C \log(\epsilon)^2 \end{aligned}$$

d'où la première estimation.

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right\|_{0, \Omega_\epsilon}^2 &= \int_{\Omega_\epsilon} \nabla P \left(\frac{x}{\epsilon} \right)^2 dx = \epsilon^2 \int_{\frac{1}{\epsilon} \Omega \setminus \bar{B}} \nabla P(y)^2 dy \\
&\leq \epsilon^2 \left(\int_{B_a \setminus \bar{B}} \nabla P(y)^2 dy + \int_{\frac{1}{\epsilon} B_D \setminus \bar{B}_a} \nabla P(y)^2 dy \right) \\
&\leq C\epsilon^2 + C\epsilon^2 \int_a^{D/\epsilon} \frac{1}{r^2} r dr \\
&= C\epsilon^2 + C\epsilon^2 [\log(r)]_a^{\frac{D}{\epsilon}} \\
&\leq -C\epsilon^2 \log(\epsilon)
\end{aligned}$$

d'où la seconde estimation.

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla^2 P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right\|_{0, \Omega_\epsilon}^2 &= \int_{\Omega_\epsilon} \nabla^2 P \left(\frac{x}{\epsilon} \right)^2 dx = \epsilon^2 \int_{\frac{1}{\epsilon} \Omega \setminus \bar{B}} \nabla^2 P(y)^2 dy \\
&\leq \epsilon^2 \left(\int_{B_a \setminus \bar{B}} \nabla^2 P(y)^2 dy + \int_{\frac{1}{\epsilon} B_D \setminus \bar{B}_a} \nabla^2 P(y)^2 dy \right) \\
&\leq C\epsilon^2 + C\epsilon^2 \int_a^{D/\epsilon} \frac{1}{r^4} r dr \\
&= C\epsilon^2 + C\epsilon^2 \left[\frac{-2}{r^2} \right]_a^{\frac{D}{\epsilon}} \\
&\leq C\epsilon^2
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Lemme 6.4.6. Soit w_ϵ donnée par (6.1.14) et P la solution du problème extérieur (\mathcal{P}_{ext}) donné en (6.1.15), alors on a le développement asymptotique suivant

$$w_\epsilon = \epsilon^2 P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) + e_\epsilon$$

avec

$$\|e_\epsilon\|_{2, \Omega_\epsilon} = O(-\epsilon^2 \log(\epsilon)) \quad \|w_\epsilon\|_{0, \Omega_\epsilon} = O(-\epsilon^2 \log(\epsilon)) \quad |w_\epsilon|_{1, \Omega_\epsilon} = O(-\epsilon^2 \log(\epsilon)) \quad |w_\epsilon|_{2, \Omega_\epsilon} = O(\epsilon)$$

Démonstration. e_ϵ est solution du problème

$$(\mathcal{E}_\epsilon) \left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 e_\epsilon - \gamma \Delta e_\epsilon + e_\epsilon = \gamma \Delta P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) - \epsilon^2 P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) & \text{sur } \Omega_\epsilon \\ B_1(e_\epsilon) - \gamma \partial_n e_\epsilon = -B_1(v_0) - \frac{1}{\epsilon} g_1 \left(\frac{x}{\epsilon} \right) - \gamma \partial_n v_0 = \varphi_1(x) = O(1), & \text{sur } \partial B_\epsilon \\ B_2(e_\epsilon) = -B_2(v_0) - g_2 \left(\frac{x}{\epsilon} \right) = \varphi_2(x) = O(x), & \text{sur } \partial B_\epsilon \\ B_1(e_\epsilon) - \gamma \partial_n e_\epsilon = -\epsilon^2 B_1 \left(P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right) = \phi_1^\epsilon(x) = O(\epsilon^2), & \text{sur } \Gamma \\ B_2(e_\epsilon) = -\epsilon^2 B_2 \left(P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right) = \phi_2^\epsilon(x) = O(\epsilon^2), & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (6.4.14)$$

où on rappelle les expressions de g_1 et g_2 :

$$\begin{aligned} g_1(X) &= A_1 \cos(2\theta) + B_1 \sin(2\theta) \\ g_2(X) &= C_2 + A_2 \cos(2\theta) + B_2 \sin(2\theta) \end{aligned}$$

avec $X = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et où

$$\begin{aligned} A_1 &= (1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(0) - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(0) \right) \\ B_1 &= 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1 \partial x_2}(0) \\ A_2 &= -\frac{1 - \nu}{2} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(0) - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2}(0) \right) \\ B_2 &= -(1 - \nu) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1 \partial x_2}(0) \\ C_2 &= -\frac{1 + \nu}{2} \Delta v_0(0) \end{aligned}$$

Remarque 6.4.7. Les estimations des conditions au bord $B_1(e_\epsilon)$ et $B_2(e_\epsilon)$ sur Γ nécessitent quelques explications. Tout d'abord, remarquons que la forme générale des noyaux $B_{i,x}(u)$ pour $i \in \{1, 2\}$ est :

$$B_{i,x}(u) = \sum_{2 \leq |p| \leq 4-i} \varphi_p^i(x) \frac{\partial^{|p|} u}{\partial x^p}$$

Ensuite, en utilisant que $P(x) \sim A \log(|x|)$ lorsque $|x| \rightarrow +\infty$ avec A une constante et que $\frac{\partial^{|s|} P(x)}{\partial x^s} = O(|x|^{-|s|}) \forall s \in \mathbb{N}^{*2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} B_{i,x} \left(P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right) &= \sum_{2 \leq |p| \leq 4-i} \varphi_p^i(x) \frac{1}{\epsilon^i} \frac{\partial^{|p|} P}{\partial x^p} \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \\ &= \sum_{2 \leq |p| \leq 4-i} \varphi_p^i(x) \frac{1}{\epsilon^{|p|}} O \left(\frac{\epsilon^{|p|}}{|x|^{|p|}} \right) \\ &= O(1) \end{aligned}$$

La formulation variationnelle associée au problème (6.4.14) est : trouver $e_\epsilon \in H^2(\Omega_\epsilon)$ telle que

$$a_\epsilon(e_\epsilon, v) = \int_{\Omega_\epsilon} \left(-\epsilon^2 P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) + \gamma \Delta P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right) v + \int_{\partial B_\epsilon} \varphi_1 v - \varphi_2 \partial_n v + \int_\Gamma -\phi_1^\epsilon v + \phi_2^\epsilon \partial_n v$$

On intègre par parties le second terme dans $a_\epsilon(e_\epsilon, v)$

$$\int_{\Omega_\epsilon} \Delta P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) v = \int_\Gamma \epsilon \partial_n P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) v - \epsilon^2 P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \partial_n v + \int_{\partial B_\epsilon} -\epsilon \partial_n P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) v + \epsilon^2 P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \partial_n v + \int_{\Omega_\epsilon} \epsilon^2 P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \Delta v$$

Soit b_ϵ la forme bilinéaire associée à l'opérateur principal de (6.4.14) telle que pour tout $u, v \in H^2(\Omega_\epsilon)$

$$b_\epsilon(u, v) = \int_{\Omega_\epsilon} \Delta u \Delta v + (1 - \nu) \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right)$$

L'équation reliant a_ϵ et b_ϵ est :

$$a_\epsilon(u, v) = b_\epsilon(u, v) + \gamma \int_{\Omega_\epsilon} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega_\epsilon} uv, \quad \forall u, v \in H^2(\Omega_\epsilon)$$

On décompose ensuite l'erreur en $e_\epsilon = e_\epsilon^1 + e_\epsilon^2$, où

- $e_\epsilon^1 \in H^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1$ est définie par

$$b_\epsilon(e_\epsilon^1, v) = l_\epsilon^1(v), \quad \forall v \in H^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1$$

avec

$$l_\epsilon^1(v) = \int_{\partial B_\epsilon} \left(\varphi_1 - \epsilon \partial_n P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right) v + \int_{\partial B_\epsilon} \left(-\varphi_2 + \epsilon^2 P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right) \partial_n v$$

En utilisant l'équivalence entre la norme et la semi-norme sur l'espace $H^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1$ (inégalité de Deny-Lions), l'inégalité suivante de coercivité est vérifiée :

$$b_\epsilon(u, u) \geq (1 - \nu) |u|_{2, \Omega_\epsilon} \geq C \|u\|_{H^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1}$$

Grâce au théorème de trace sur Ω_ϵ , l_ϵ^1 est continue sur $H^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1$. En appliquant le Théorème de Lax-Milgram, on obtient l'existence et l'unicité de e_ϵ^1 dans $H^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1$.

- $e_\epsilon^2 \in H^2(\Omega_\epsilon)$ est définie par

$$a_\epsilon(e_\epsilon^2, v) = l_\epsilon^2(v), \quad \forall v \in H^2(\Omega_\epsilon)$$

avec

$$\begin{aligned} l_\epsilon^2(v) &= \int_{\Omega_\epsilon} \left(-\epsilon^2 P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) + \gamma \Delta e_\epsilon^1 - e_\epsilon^1 \right) v + \gamma \epsilon^2 P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \Delta v \\ &+ \int_{\Gamma} \left(-\phi_1^\epsilon + \gamma \epsilon \partial_n P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right) v + \left(\phi_2^\epsilon - \gamma \epsilon^2 P \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right) \partial_n v \end{aligned}$$

La coercivité de a_ϵ est évidente sur $H^2(\Omega_\epsilon)$ (voir (5.2.2)), et la continuité de l_ϵ^2 sur $H^2(\Omega_\epsilon)$ s'obtient en appliquant le théorème de trace sur Ω_ϵ . On en déduit l'existence et l'unicité de e_ϵ^2 dans $H^2(\Omega_\epsilon)$.

Il reste à estimer $\|e_\epsilon^1\|_{H^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1}$ et $\|e_\epsilon^2\|_{2, \Omega_\epsilon}$ en fonction de ϵ . En reprenant la formulation variationnelle associée à e_ϵ^1 , en prenant $v = e_\epsilon^1$ et en changeant de variable on a

$$\begin{aligned} (1 - \nu) |e_\epsilon^1|_{2, \Omega_\epsilon}^2 &\leq b_\epsilon(e_\epsilon^1, e_\epsilon^1) = \epsilon \int_{\partial B} (\varphi_1(\epsilon X) - \epsilon \partial_n P(X)) e_\epsilon^1(\epsilon X) + \epsilon \int_{\partial B} (-\varphi_2(\epsilon X) + \epsilon^2 P(X)) \partial_n e_\epsilon^1(\epsilon X) \\ &\leq (\epsilon \|\varphi_1(\epsilon X)\|_{-3/2, \partial B} + \epsilon^2 \|\partial_n P\|_{-3/2, \partial B}) \|e_\epsilon^1(\epsilon X)\|_{H^{3/2}(\partial B)/\mathbb{P}_1} \\ &+ (\|\varphi_2(\epsilon X)\|_{-1/2, \partial B} + \epsilon^2 \|P\|_{-1/2, \partial B}) \|\partial_n (e_\epsilon^1(\epsilon X))\|_{H^{1/2}(\partial B)/\mathbb{P}_1} \end{aligned}$$

Soit $r > 0$ tel que $B \subsetneq B_r \subset \frac{1}{\epsilon} \Omega$. En appliquant le théorème de trace sur $B_r \setminus \bar{B}$, en utilisant l'inégalité de Deny-Lions et en changeant de variable on obtient :

$$\begin{aligned} |e_\epsilon^1|_{2, \Omega_\epsilon}^2 &\leq C (\epsilon \|\varphi_1(\epsilon X)\|_{-3/2, \partial B} + \epsilon^2 \|\partial_n P\|_{-3/2, \partial B}) \|e_\epsilon^1(\epsilon X)\|_{H^2(B_r \setminus \bar{B})/\mathbb{P}_1} \\ &+ C (\|\varphi_2(\epsilon X)\|_{-1/2, \partial B} + \epsilon^2 \|P\|_{-1/2, \partial B}) \|e_\epsilon^1(\epsilon X)\|_{H^2(B_r \setminus \bar{B})/\mathbb{P}_1} \\ &\leq C (\epsilon \|\varphi_1(\epsilon X)\|_{-3/2, \partial B} + \epsilon^2 \|\partial_n P\|_{-3/2, \partial B}) |e_\epsilon^1(\epsilon X)|_{2, B_r \setminus \bar{B}} \\ &+ C (\|\varphi_2(\epsilon X)\|_{-1/2, \partial B} + \epsilon^2 \|P\|_{-1/2, \partial B}) |e_\epsilon^1(\epsilon X)|_{2, B_r \setminus \bar{B}} \\ &\leq C \epsilon (\epsilon \|\varphi_1(\epsilon X)\|_{-3/2, \partial B} + \epsilon^2 \|\partial_n P\|_{-3/2, \partial B}) |e_\epsilon^1|_{2, \Omega_\epsilon} + C \epsilon (\|\varphi_2(\epsilon X)\|_{-1/2, \partial B} + \epsilon^2 \|P\|_{-1/2, \partial B}) |e_\epsilon^1|_{2, \Omega_\epsilon} \end{aligned}$$

En utilisant ensuite les estimations $\varphi_1(\epsilon X) = O(1)$ et $\varphi_2(\epsilon X) = O(\epsilon)$ il vient

$$\|e_\epsilon^1\|_{H^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1} = O(\epsilon^2) \tag{6.4.15}$$

De même pour e_ϵ^2 , en partant de la formulation variationnelle associée à e_ϵ^2 on a

$$\begin{aligned} C\|e_\epsilon^2\|_{2,\Omega_\epsilon}^2 \leq a_\epsilon(e_\epsilon^2, e_\epsilon^2) &= \int_{\Omega_\epsilon} \left(-\epsilon^2 P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \gamma \Delta e_\epsilon^1 - e_\epsilon^1 \right) e_\epsilon^2 + \gamma \epsilon^2 P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \Delta e_\epsilon^2 \\ &+ \int_\Gamma \left(-\phi_1^\epsilon + \gamma \epsilon \partial_n P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right) e_\epsilon^2 + \left(\phi_2^\epsilon - \gamma \epsilon^2 P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right) \partial_n e_\epsilon^2 \end{aligned} \quad (6.4.16)$$

Dans (6.4.16), on estime d'abord les termes faisant intervenir l'intégrale sur Ω_ϵ : on pose

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_{\Omega_\epsilon} \left(-\epsilon^2 P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \gamma \Delta e_\epsilon^1 - e_\epsilon^1 \right) e_\epsilon^2 + \gamma \epsilon^2 P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \Delta e_\epsilon^2 \\ &\leq C \left(\epsilon^2 \left\| P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right\|_{0,\Omega_\epsilon} + \gamma |e_\epsilon^1|_{2,\Omega_\epsilon} + \|e_\epsilon^1\|_{L^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1} \right) \|e_\epsilon^2\|_{0,\Omega_\epsilon} + C \gamma \epsilon^2 \left\| P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right\|_{0,\Omega_\epsilon} |e_\epsilon^2|_{2,\Omega_\epsilon} \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 6.4.5 et l'estimation (6.4.15) on obtient

$$E_1 \leq -C\epsilon^2 \log(\epsilon) \|e_\epsilon^2\|_{2,\Omega_\epsilon}$$

Puis on estime les intégrales faisant intervenir le grand bord Γ : on pose

$$\begin{aligned} E_2 &= \int_\Gamma \left(-\phi_1^\epsilon + \gamma \epsilon \partial_n P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right) e_\epsilon^2 + \left(\phi_2^\epsilon - \gamma \epsilon^2 P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right) \partial_n e_\epsilon^2 \\ &\leq \left(\|\phi_1^\epsilon\|_{-3/2,\Gamma} + \gamma \epsilon \left\| \partial_n P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right\|_{-3/2,\Gamma} \right) \|e_\epsilon^2\|_{3/2,\Gamma} + \left(\|\phi_2^\epsilon\|_{-1/2,\Gamma} + \gamma \epsilon^2 \left\| P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right\|_{-1/2,\Gamma} \right) \|\partial_n e_\epsilon^2\|_{1/2,\Gamma} \end{aligned}$$

On rappelle que B_r est une boule telle que $B \subsetneq B_r \subset \frac{1}{\epsilon}\Omega$. En utilisant le théorème de trace sur $\Omega \setminus \overline{B_r}$, les estimations $\phi_1^\epsilon = O(\epsilon^2)$ et $\phi_2^\epsilon = O(\epsilon^2)$, et le Lemme 6.4.5 on obtient

$$E_2 \leq -C\epsilon^2 \log(\epsilon) \|e_\epsilon^2\|_{2,\Omega_\epsilon}$$

On déduit l'estimation suivante

$$\|e_\epsilon^2\|_{2,\Omega_\epsilon} = O(-\epsilon^2 \log(\epsilon))$$

En revenant à e_ϵ , e_ϵ^1 étant défini modulo \mathbb{P}_1 , on a

$$\|e_\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon} \leq \|e_\epsilon^1\|_{H^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1} + \|e_\epsilon^2\|_{2,\Omega_\epsilon} \leq -C\epsilon^2 \log(\epsilon)$$

d'où la première estimation. Pour les autres estimations des normes $L^2(\Omega_\epsilon)$ de w_ϵ , ∇w_ϵ et de $\nabla^2 w_\epsilon$, il faut utiliser la décomposition de w_ϵ en $w_\epsilon = \epsilon^2 P\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + e_\epsilon$, différentier cette même équation, utiliser le Lemme 6.4.5 et l'estimation que l'on vient de montrer ($\|e_\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon} = O(-\epsilon^2 \log(\epsilon))$). \square

6.5 Annexe B

Soit σ une variété assez régulière que l'on prolonge en une courbe fermée $\tilde{\sigma}$. On note $\tilde{\omega}$ le domaine tel que $\partial\tilde{\omega} = \tilde{\sigma}$ (voir Figure 6.3) et $\Lambda = \mathbb{R}^2 \setminus \tilde{\sigma}$.

On rappelle les définitions des espaces $H_{00}^{1/2}(\sigma)$ et $H_{00}^{3/2}(\sigma)$:

$$H_{00}^{1/2}(\sigma) = \{u|_\sigma, u \in H^{1/2}(\tilde{\sigma}), u|_{\tilde{\sigma} \setminus \sigma} = 0\}$$

et

$$H_{00}^{3/2}(\sigma) = \{u|_\sigma, u \in H^{3/2}(\tilde{\Sigma}), u|_{\tilde{\sigma} \setminus \sigma} = 0\}$$

Dans ce qui suit on choisit $r > 0$ et ϵ assez petit telles que $\tilde{\omega} \subsetneq B_r \subset \frac{\Omega_\epsilon}{\epsilon}$ (voir Figure 6.3).

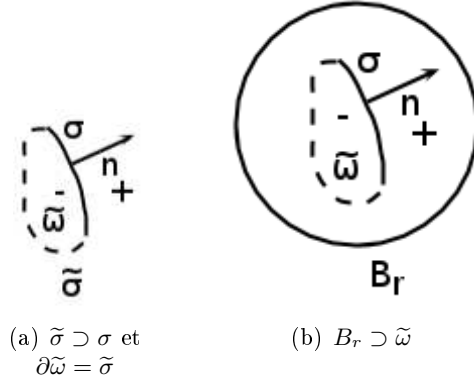


FIGURE 6.3 – Prolongement du crack en une courbe fermée et régulière

Lemme 6.5.1. Soient $u \in H^2(B_r \setminus \bar{\sigma})$, $g_1 \in \left(H_{00}^{3/2}(\sigma)\right)'$ et $g_2 \in \left(H_{00}^{1/2}(\sigma)\right)'$, on a les inégalités suivantes

$$\int_{\sigma} g_1[v] \leq C \|g_1\|_{H_{00}^{3/2}(\sigma)'} \|v\|_{2, B_r \setminus \bar{\sigma}}$$

$$\int_{\sigma} g_2[\partial_n v] \leq C \|g_2\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)'} |v|_{2, B_r \setminus \bar{\sigma}}$$

Démonstration. On rappelle que $\tilde{\omega}$ est le domaine tel que $\partial\tilde{\omega} = \tilde{\sigma}$ (voir Figure 6.3). En utilisant la définition de l'espace $H_{00}^{3/2}(\sigma)$ et en décomposant le saut

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} g_1[v] &\leq \|g_1\|_{H_{00}^{3/2}(\sigma)'} \|[v]\|_{H_{00}^{3/2}(\sigma)} = \|g_1\|_{H_{00}^{3/2}(\sigma)'} \|[v]\|_{H^{3/2}(\tilde{\sigma})} \\ &\leq C \|g_1\|_{H_{00}^{3/2}(\sigma)'} \left(\|v^+ + \psi\|_{H^{3/2}(\tilde{\sigma})} + \|v^- + \psi\|_{H^{3/2}(\tilde{\sigma})} \right) \end{aligned}$$

pour toutes fonctions ψ suffisamment régulières. En utilisant le théorème de trace pour v^+ sur $B_r \setminus \tilde{\omega}$ et pour v^- sur $\tilde{\omega}$, on obtient

$$\int_{\sigma} g_1[v] \leq C \|g_1\|_{H_{00}^{3/2}(\sigma)'} \left(\|v + \psi\|_{2, B_r \setminus \tilde{\omega}} + \|v + \psi\|_{2, \tilde{\omega}} \right) \leq C \|g_1\|_{H_{00}^{3/2}(\sigma)'} \|v + \psi\|_{2, B_r \setminus \bar{\sigma}}$$

En prenant $\psi \in \mathbb{P}_1$ et en utilisant l'inégalité de Deny-Lions, on obtient la première inégalité. La deuxième inégalité se démontre de la même manière. \square

Lemme 6.5.2. Soient $u \in H^2(B_r \setminus \bar{\sigma})$ telle que $\Delta^2 u \in L^2(B_r \setminus \bar{\sigma})$, $h_1 \in H_{00}^{3/2}(\sigma)$ et $h_2 \in H_{00}^{1/2}(\sigma)$, on a l'inégalité suivante

$$\int_{\sigma} B_1(u)q_1 - \int_{\sigma} B_2(u)q_2 \leq C \left(\|q_1\|_{H_{00}^{3/2}(\sigma)} + \|q_2\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)} \right) \left(|u|_{2, B_r \setminus \bar{\sigma}} + \|\Delta^2 u\|_{L^2(B_r \setminus \bar{\sigma})} \right)$$

Démonstration. On prolonge q_1 , et q_2 par 0 sur $\tilde{\sigma} \setminus \bar{\sigma}$. On note ces prolongements $\tilde{q}_1 \in H^{3/2}(\tilde{\sigma})$ et $\tilde{q}_2 \in H^{1/2}(\tilde{\sigma})$. Soit Q un relèvement continu de $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ dans $\tilde{\omega}$. On obtient en intégrant par parties

$$\tilde{a}(Q, u) = \int_{\tilde{\omega}} \Delta^2 u Q - \int_{\tilde{\sigma}} (B_1(u)q_1 - B_2(u)q_2)$$

où

$$\tilde{a}(u, v) = \int_{\tilde{\omega}} \Delta u \Delta v + (1 - \nu) \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right)$$

On a la majoration :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tilde{\sigma}} (B_1(u)q_1 - B_2(u)q_2) \right| &\leq |a(Q, u)| + \left| \int_{\tilde{\omega}} \Delta^2 u Q \right| \\ &\leq C |u|_{H^2(\tilde{\omega})} |Q|_{H^2(\tilde{\omega})} + \|\Delta^2 u\|_{L^2(\tilde{\omega})} \|Q\|_{L^2(\tilde{\omega})} \end{aligned}$$

En utilisant la continuité du relèvement, en utilisant que $B_r \supset \tilde{\omega}$ (voir Figure 6.3), et en utilisant la définition des normes $H_{00}^{1/2}(\sigma)$ et $H_{00}^{3/2}(\sigma)$, on obtient le résultat. \square

On introduit ensuite le problème extérieur :

$$(\mathcal{R}_{ext}) \begin{cases} \Delta^2 R = 0, \text{ sur } \Lambda \\ B_1(R) = g_1, \text{ sur } \sigma \\ B_2(R) = g_2, \text{ sur } \sigma \end{cases} \quad (6.5.1)$$

où $g_1 \in H_{00}^{3/2}(\sigma)'$ et $g_2 \in H_{00}^{1/2}(\sigma)'$.

Théorème 6.5.3. 1. Le problème (6.5.1) admet une solution unique dans $W^2(\Lambda)/\mathbb{P}_1$ et l'application $(g_1, g_2) \mapsto R$ est continue de $H_{00}^{3/2}(\sigma)' \times H_{00}^{1/2}(\sigma)'$ dans $W^2(\Lambda)/\mathbb{P}_1$.

2. La solution de (6.5.1) s'écrit comme la somme de potentiels double et triple couches

$$R(x) = \int_{\sigma} \lambda_1(y) B_1(E(x-y)) ds(y) + \int_{\sigma} \lambda_2(y) B_2(E(x-y)) ds(y), \text{ pour } x \in \Lambda \quad (6.5.2)$$

3. On a les relations de sauts à travers σ :

$$\begin{aligned} [R] &= R|_{\sigma}^+ - R|_{\sigma}^- = \lambda_1 \\ [\partial_n R] &= \partial_n R|_{\sigma}^+ - \partial_n R|_{\sigma}^- = -\lambda_2 \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

4. Les densités λ_1 et λ_2 sont données par les deux équations suivantes

$$g_1(x) = \oint_{\sigma} \lambda_1(y) B_{1,x} B_{1,y}(E(x-y)) d\sigma(y) + \oint_{\sigma} \lambda_2(y) B_{1,x} B_{2,y}(E(x-y)) d\sigma(y) \quad (6.5.4a)$$

$$g_2(x) = \oint_{\sigma} \lambda_1(y) B_{2,x} B_{1,y}(E(x-y)) d\sigma(y) + \oint_{\sigma} \lambda_2(y) B_{2,x} B_{2,y}(E(x-y)) d\sigma(y) \quad (6.5.4b)$$

où \oint désigne la valeur principale de Cauchy.

5. Dans le cas où $\sigma = \{(s, 0) \times \{0\}, -1 < s < 1\}$, $g_1(x) = 0$, et $g_2(x) = Cste = V$, les densités λ_1 et λ_2 sont données par

$$\begin{aligned} \lambda_1(s) &= 0, \forall (s, 0) \in \Sigma \\ \lambda_2(s) &= \frac{4}{(1-\nu)(3+\nu)} V \sqrt{1-s^2}, \quad \forall (s, 0) \in \Sigma \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

Démonstration. On introduit les deux espaces

$$H^2(\Delta^2, \tilde{\omega}) = \{u \in H^2(\tilde{\omega}), \Delta^2 u \in L^2(\tilde{\omega})\}$$

et

$$W^2(\Delta^2, \tilde{\omega}') = \{u \in W^2(\tilde{\omega}'), (1+r^2)\log(2+r^2)\Delta^2 u \in L^2(\tilde{\omega}')\}$$

où $W^2(\tilde{\omega}')$ est défini en prérequis de cette thèse. On définit :

$$\begin{aligned} \tilde{a}(u, v) &= \int_{\tilde{\omega}} \Delta u \Delta v + (1-\nu) \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \\ \tilde{a}'(u, v) &= \int_{\tilde{\omega}'} \Delta u \Delta v + (1-\nu) \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \end{aligned}$$

La formule de Green sur $\tilde{\omega}$ donne pour $u \in H^2(\Delta^2, \tilde{\omega})$

$$\tilde{a}(u, v) = \int_{\tilde{\omega}} \Delta^2 u v - \int_{\partial \tilde{\omega}} (B_1(u)v - B_2(u)\partial_n v), \quad \forall v \in H^2(\tilde{\omega})$$

De la même manière pour $u \in W^2(\Delta^2, \tilde{\omega}')$ on a

$$\tilde{a}'(u, v) = \int_{\tilde{\omega}'} \Delta^2 u v + \int_{\partial \tilde{\omega}} (B_1(u)v - B_2(u)\partial_n v)$$

On introduit l'espace

$$K = \{u \in H^2(\Delta^2, \tilde{\omega})/\mathbb{P}_1 \times W^2(\Delta^2, \tilde{\omega}')/\mathbb{P}_1, \text{supp}(\Delta^2 u) = \sigma, [B_1(u)]_\sigma = [B_2(u)]_\sigma = 0, [u]_{\tilde{\sigma}\setminus\sigma} = \partial_n u|_{\tilde{\sigma}\setminus\sigma} = 0\}$$

que l'on peut réécrire en utilisant la régularité des fonctions $H_{loc}^2(\Lambda)$

$$K = \{u \in W^2(\Delta^2, \Lambda)/\mathbb{P}_1, \text{supp}(\Delta^2 u) = \sigma, [B_1(u)]_\sigma = [B_2(u)]_\sigma = 0\}$$

On peut donc formuler (\mathcal{R}_{ext}) de la manière suivante

$$\text{trouver } R \in K \text{ tel que } B_1 R = g_1 \text{ et } B_2 R = g_2 \text{ sur } \sigma \text{ (}\mathcal{R}_{ext}\text{)}$$

La formulation variationnelle de (\mathcal{R}_{ext}) est : trouver $R \in K$ tel que

$$a(R, v) = l(v), \quad \forall v \in K$$

où

$$\begin{aligned} a(R, v) &= \int_{\Lambda} \Delta R \Delta v + (1-\nu) \left(2 \frac{\partial^2 R}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 R}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \\ l(v) &= \int_{\sigma} g_1[v] - g_2[\partial_n v] \end{aligned}$$

Le problème (\mathcal{R}_{ext}) admet une unique solution dans K . En effet, le problème est coercif sur K :

$$a(u, u) \geq (1-\nu)|u|_{W^2(\Lambda)}^2, \quad \forall u \in K \quad (6.5.6)$$

et d'après le Lemme 0.0.2 (prérequis) on a :

$$\|u\|_K = \|u\|_{W^2(\Lambda)/\mathbb{P}_1} \leq C(\Lambda)|u|_{W^2(\Lambda)}$$

d'où la coercivité de $a(u, v)$ sur K . Avec le Lemme 6.5.1, il vient

$$|l(v)| \leq C \left(\|g_1\|_{H_{00}^{3/2}(\sigma)'} + \|g_2\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)'} \right) \|v\|_{W^2(\Lambda)/\mathbb{P}_1} \quad (6.5.7)$$

d'où la continuité de l'application $l(v)$ sur K . K étant un sous espace fermé de $W^2(\Lambda)/\mathbb{P}_1$ qui est un espace de Hilbert, on en déduit que c'est un espace de Hilbert. En appliquant le théorème de Lax-Milgram, on obtient l'existence et l'unicité de la solution du problème (\mathcal{R}_{ext}) et en utilisant (6.5.6) et (6.5.7) on obtient la coninuité de l'application $(g_1, g_2) \mapsto R$ pour la topologie associée ce qui termine la preuve du point 1. On définit alors l'isomorphisme

$$J_0 : \begin{array}{ccc} (g_1, g_2) & \mapsto & R \\ \left(H_{00}^{3/2}(\sigma) \right)' \times \left(H_{00}^{1/2}(\sigma) \right)' & \longrightarrow & K \end{array}$$

On considère le problème suivant : pour $(q_1, q_2) \in H_{00}^{3/2}(\sigma) \times H_{00}^{1/2}(\sigma)$

$$\text{trouver } Q \in K \text{ tel que } [Q] = q_1 \text{ et } [\partial_n Q] = q_2 \quad (\mathcal{Q}_{ext})$$

Soit $v \in K$, on a

$$a(u, v) = \int_{\Lambda} \Delta^2 v u + \int_{\sigma} B_1(v)[u] - B_2(v)[\partial_n u]$$

La formulation variationnelle de (\mathcal{Q}_{ext}) est : trouver $Q \in K$ tel que

$$a(Q, v) = l'(v), \quad \forall v \in K$$

où on définit

$$l'(v) = \int_{\sigma} q_1 B_1(v) - \int_{\sigma} q_2 B_2(v)$$

Pour la coercivité le raisonnement est identique à celui fait pour l'étude du problème (\mathcal{R}_{ext}) . En utilisant le Lemme 6.5.2, il vient

$$l'(v) \leq C(\|q_1\|_{H_{00}^{3/2}(\sigma)} + \|q_2\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)}) |v|_{2, B_r \setminus \bar{\sigma}}$$

Avec l'équivalence entre la norme et la semi-norme sur l'espace $W^2(\Lambda)/\mathbb{P}_1$, on déduit la continuité de la fonction $l'(v)$ sur K . Finalement en appliquant le théorème de Lax-Milgram on montre l'existence et l'unicité de la solution Q dans K et on définit l'isomorphisme

$$J_1 : \begin{array}{ccc} (q_1, q_2) & \mapsto & Q \\ \left(H_{00}^{3/2}(\sigma) \right) \times \left(H_{00}^{1/2}(\sigma) \right) & \longrightarrow & K \end{array}$$

On note $J = J_1^{-1} \circ J_0$ l'isomorphisme

$$J : \begin{array}{ccc} (g_1, g_2) & \mapsto & (q_1, q_2) \\ \left(H_{00}^{3/2}(\sigma)' \right) \times \left(H_{00}^{1/2}(\sigma)' \right) & \longrightarrow & \left(H_{00}^{3/2}(\sigma) \right) \times \left(H_{00}^{1/2}(\sigma) \right) \end{array}$$

Maintenant, soit \bar{u} définie par

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= \int_{\sigma} \lambda_1(y) B_{1,y} E(x-y) d\sigma_y + \int_{\sigma} \lambda_2(y) B_{2,y} E(x-y) d\sigma_y \\ &= \int_{\partial\tilde{\omega}} \tilde{\lambda}_1(y) B_{1,y} E(x-y) d\sigma_y + \int_{\partial\tilde{\omega}} \tilde{\lambda}_2(y) B_{2,y} E(x-y) d\sigma_y \end{aligned}$$

où $x \in \Lambda$ et $\lambda_1 \in H_{00}^{3/2}(\sigma)$, $\lambda_2 \in H_{00}^{1/2}(\sigma)$ et $\tilde{\lambda}_i \in H^{3/2-(i-1)}(\tilde{\sigma})$ pour $i \in \{1, 2\}$ définis par

$$\tilde{\lambda}_i = \begin{cases} \lambda_i, & \text{sur } \sigma \\ 0, & \text{sur } \tilde{\sigma} \setminus \bar{\sigma} \end{cases}$$

Tout d'abord, \bar{u} est biharmonique. En effet pour $x \in \Lambda$, les fonctions, $B_{1,y}E(x - \cdot)$ et $B_{2,y}E(x - \cdot)$ sont $C^\infty(\sigma)$. De plus

$$\Delta_x^2 B_{1,y}E(x - y) = B_{1,y}\Delta_x^2 E(x - y) = 0$$

et

$$\Delta_x^2 B_{2,y}E(x - y) = B_{2,y}\Delta_x^2 E(x - y) = 0$$

En utilisant la régularité de $B_{1,y}E(\cdot - y)$ et de $B_{2,y}E(\cdot - y)$ sur Λ pour $y \in \sigma$ et le fait que leur bilaplacien est nul et donc majoré indépendamment de x , on peut intervertir le signe intégrale et l'opérateur bilaplacien, ce qui entraîne :

$$\Delta^2 \bar{u}(x) = 0, \forall x \in \Lambda$$

De plus pour $|x| \rightarrow \infty$, par un développement de Taylor en x on a $\bar{u}(x) = O(\log(|x|))$. En dérivant deux fois l'expression de \bar{u} et en utilisant de nouveau un développement de Taylor, on obtient que $\bar{u} \in W^2(\Lambda)$. En considérant \bar{u} comme un élément de $W^2(\Lambda)/\mathbb{P}_1$ on a $\bar{u} \in K$. En utilisant les relations de sauts données dans [[35], p.385-386] on a

$$\begin{aligned} B_{1,x}(\bar{u})(x) &= \oint_{\sigma} \lambda_1(y) B_{1,x} B_{1,y} E(x - y) d\sigma_y + \oint_{\sigma} \lambda_2(y) B_{1,x} B_{2,y} E(x - y) d\sigma_y \\ B_{2,x}(\bar{u})(x) &= \oint_{\sigma} \lambda_2(y) B_{2,x} B_{1,y} E(x - y) d\sigma_y + \oint_{\sigma} \lambda_2(y) B_{2,x} B_{2,y} E(x - y) d\sigma_y \end{aligned} \quad (6.5.8)$$

Nous allons montrer que ces deux relations caractérisent l'isomorphisme J^{-1} . En effet en utilisant [[35], p.384], on obtient

$$\begin{aligned} \bar{u}^\pm(x) &= \pm \lambda_1(x) + \oint_{\sigma} \lambda_1(y) B_{1,y} E(x - y) d\sigma_y + \oint_{\sigma} \lambda_2(y) B_{2,y} E(x - y) d\sigma_y \\ \bar{u}^\pm(x) &= \mp \lambda_2(x) + \oint_{\sigma} \lambda_1(y) \partial_{n_x} B_{1,y} E(x - y) d\sigma_y + \oint_{\sigma} \lambda_2(y) \partial_{n_x} B_{2,y} E(x - y) d\sigma_y \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} [\bar{u}] &= \lambda_1 \\ [\partial_n \bar{u}] &= -\lambda_2 \end{aligned}$$

Comme J_1 est un isomorphisme en prenant $\lambda_1 = [R]$ et $\lambda_2 = -[\partial_n R]$, on obtient $\bar{u} = R$ par unicité. Les relations données en (6.5.8) avec $B_1(\bar{u}) = g_1$ et $B_2(\bar{u}) = g_2$ caractérisent alors l'isomorphisme J^{-1} . Ceci constitue la preuve des points 2, 3 et 4 du Théorème 6.5.3.

Pour résoudre les équations intégrales (6.5.4) et prouver le point 5, on commence par calculer les noyaux dans le cas d'un crack linéaire : on utilise que $\vec{n}(x) = (0, 1)$, $\vec{\tau}(y) = (-1, 0)$ pour tout $x = (s, 0) \in \sigma$ et $y = (t, 0) \in \sigma$. Sous ses notations les expressions des noyaux sont :

$$\begin{aligned} B_{1,x}(B_{1,y}(E(x - y))) &= -\frac{3(-1 + \nu)(3 + \nu)}{2\pi(s - t)^4} \\ B_{2,x}(B_{1,y}(E(x - y))) &= 0 \\ B_{1,x}(B_{2,y}(E(x - y))) &= 0 \\ B_{2,x}(B_{2,y}(E(x - y))) &= \frac{(-1 + \nu)(3 + \nu)}{4\pi(s - t)^2} \end{aligned}$$

Les équations (6.5.4a) et (6.5.4b) s'écrivent de la manière suivante

$$0 = g_1(x) = - \oint_{-1}^1 \lambda_1(t) \frac{3(-1+\nu)(3+\nu)}{2\pi(s-t)^4} dt$$

et

$$V = g_2(x) = \oint_{-1}^1 \lambda_2(t) \frac{(-1+\nu)(3+\nu)}{4\pi(s-t)^2} dt$$

où $x = (s, 0) \in \sigma$ et $y = (t, 0) \in \sigma$ et pour alléger les notations $\lambda_1(t) = \lambda_1(y)$ et $\lambda_2(t) = \lambda_2(y)$. Les deux équations caractérisant λ_1 et λ_2 sont donc découplées. Pour la première équation le choix $\lambda_1 = 0$ convient et par unicité de la solution on en déduit que c'est la solution de (6.5.4a). On définit la fonction

$$g(s) = \frac{1}{\pi} \oint_{-1}^1 \frac{\lambda_2(t)}{s-t}, \quad -1 < s < 1$$

On remarque que (6.5.4b) s'écrit

$$g'(s) = -\frac{4}{(-1+\nu)(3+\nu)} V = A$$

Donc $g(s) = As + B$ avec B une constante arbitraire que l'on prend égale à 0. D'après [62], λ_2 est donnée par la formule

$$\begin{aligned} \lambda_2(s) &= -\frac{1}{\pi} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t^2}{1-s^2}} \frac{At}{s-t} dt + \frac{Cste}{\sqrt{1-s^2}} \\ &= -\frac{1}{\pi\sqrt{1-s^2}} \oint_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{s-t} (A(t-s) + As) dt + \frac{Cste}{\sqrt{1-s^2}} \\ &= \frac{-A}{\pi\sqrt{1-s^2}} \left(s \oint_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{s-t} dt - \oint_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt \right) + \frac{Cste}{\sqrt{1-s^2}} \\ &= \frac{-A}{\pi\sqrt{1-s^2}} \left(s^2\pi - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{Cste}{\sqrt{1-s^2}} \\ &= A\sqrt{1-s^2} \end{aligned}$$

où on a pris $Cste = A/2$ pour avoir $\lambda_2(-1) = \lambda_2(1) = 0$ (c'est à dire pour avoir $\lambda_2 \in H_{00}^{1/2}(\sigma)$), ce qui termine la preuve du point 5. □

Lemme 6.5.4. *Soit R la solution du problème extérieur défini par le problème (\mathcal{R}) donné en (6.5.1), on a le comportement à l'infini suivant : pour $|x|$ assez grand il existe une constante positive C telle que*

$$|R(x)| \leq C \log(|x|), \quad |\nabla R(x)| \leq \frac{C}{|x|}, \quad |\nabla^2 R(x)| \leq \frac{C}{|x|^2}$$

$$\|R\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\|_{0,\Omega_\epsilon} = O(-\log(\epsilon)), \quad |R\left(\frac{x}{\epsilon}\right)|_{1,\Omega_\epsilon} = O(\sqrt{-\log(\epsilon)}), \quad |R\left(\frac{x}{\epsilon}\right)|_{2,\Omega_\epsilon} = O\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$$

Démonstration. En utilisant l'expression de R donnée dans le Théorème 6.5.3, en prenant x assez grand et en faisant un développement de Taylor en x on obtient la première inégalité. La seconde et la troisième se montrent en différentiant par rapport à x l'expression de $R \in C^\infty(B')$ et en faisant un développement de Taylor de R au point x .

Pour le reste de la preuve on réfère le lecteur au Lemme 6.4.5. □

Lemme 6.5.5. Soit w_ϵ la solution du problème (\mathcal{Q}_ϵ^c) donné en (6.2.6), et R la solution du problème extérieur (\mathcal{R}_{ext}) donné en (6.2.7), on a le développement asymptotique suivant :

$$w_\epsilon = \epsilon^2 R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + e_\epsilon$$

avec

$$\begin{aligned} \|e_\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon} &= O(-\epsilon^2 \log(\epsilon)) \\ |w_\epsilon|_{2,\Omega_\epsilon} &= O(\epsilon) \end{aligned}$$

Démonstration. e_ϵ est solution du problème suivant

$$(\mathcal{E}_\epsilon) \left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 e_\epsilon - \gamma \Delta e_\epsilon + e_\epsilon = \gamma \Delta R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \epsilon^2 R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) & \text{sur } \Omega_\epsilon \\ B_1(e_\epsilon) - \gamma \partial_n e_\epsilon = -B_1(v_0) - \underbrace{\frac{1}{\epsilon} B_1(R)\left(\frac{x}{\epsilon}\right)}_{=0} - \gamma \partial_n v_0 = \varphi_1(x) = O(1), & \text{sur } \sigma_\epsilon \\ B_2(e_\epsilon) = -B_2(v_0) - g_2\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = \varphi_2(x) = O(x), & \text{sur } \sigma_\epsilon \\ B_1(e_\epsilon) - \gamma \partial_n e_\epsilon = -\epsilon^2 B_1\left(R\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right) = \phi_1^\epsilon(x) = O(\epsilon^2), & \text{sur } \partial\Omega \\ B_2(e_\epsilon) = -\epsilon^2 B_2\left(R\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right) = \phi_2^\epsilon(x) = O(\epsilon^2), & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (6.5.9)$$

où $g_2(X) = -\frac{\partial^2 v_0}{(\partial x_2)^2}(0) - \nu \frac{\partial^2 v_0}{(\partial x_1)^2}(0) = -\beta$ pour $X \in \sigma$.

Pour les estimations des conditions $B_1(e_\epsilon)$ et $B_2(e_\epsilon)$ sur Γ on renvoie à Remarque 6.4.7.

La formulation variationnelle associée au problème (\mathcal{E}_ϵ) donnée en (6.5.9) est : trouver $e_\epsilon \in H^2(\Omega_\epsilon)$ telle que

$$a_\epsilon(e_\epsilon, v) = \int_{\Omega_\epsilon} \gamma \Delta R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) v - \epsilon^2 R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) v + \int_{\sigma_\epsilon} \varphi_1[v] - \varphi_2[\partial_n v] - \int_{\Gamma} (\phi_1^\epsilon v - \phi_2^\epsilon \partial_n v), \quad \forall v \in H^2(\Omega_\epsilon)$$

On intègre par parties le premier terme dans $a_\epsilon(e_\epsilon, v)$:

$$\int_{\Omega_\epsilon} \Delta R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) v = \epsilon \int_{\Gamma} \partial_n R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) v - \epsilon \int_{\sigma_\epsilon} \left[\partial_n R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) v \right] - \epsilon^2 \int_{\Gamma} R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \partial_n v + \epsilon^2 \int_{\sigma_\epsilon} \left[R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \partial_n v \right] + \int_{\Omega_\epsilon} \epsilon^2 R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \Delta v$$

On réécrit la formulation variationnelle du problème (\mathcal{E}_ϵ) :

$$\begin{aligned} a_\epsilon(e_\epsilon, v) &= \epsilon \gamma \int_{\Gamma} \partial_n R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) v - \epsilon \gamma \int_{\sigma_\epsilon} \left[\partial_n R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) v \right] - \epsilon^2 \gamma \int_{\Gamma} R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \partial_n v \\ &\quad + \epsilon^2 \gamma \int_{\sigma_\epsilon} \left[R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \partial_n v \right] + \epsilon^2 \gamma \int_{\Omega_\epsilon} R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \Delta v - \epsilon^2 R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) v \\ &\quad + \int_{\sigma_\epsilon} \varphi_1[v] - \varphi_2[\partial_n v] - \int_{\Gamma} (\phi_1^\epsilon v - \phi_2^\epsilon \partial_n v), \quad \forall v \in H^2(\Omega_\epsilon) \end{aligned}$$

Soit b_ϵ la forme bilinéaire associée à l'opérateur principal définie par

$$b_\epsilon(u, v) = \int_{\Omega_\epsilon} \Delta u \Delta v + (1 - \nu) \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right), \quad \forall u, v \in H^2(\Omega_\epsilon)$$

$b_\epsilon(u, v)$ et $a_\epsilon(u, v)$ sont reliées par

$$a_\epsilon(u, v) = b_\epsilon(u, v) + \gamma \int_{\Omega_\epsilon} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega_\epsilon} uv, \quad \forall u, v \in H^2(\Omega_\epsilon)$$

On décompose e_ϵ au sens des distributions en $e_\epsilon = e_\epsilon^{1,+} + e_\epsilon^{1,-} + e_\epsilon^2$ avec

- $e_\epsilon^{1,\pm} \in H^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1$ défini par

$$b_\epsilon(e_\epsilon^{1,\pm}, v) = l_\epsilon^{1,\pm}(v), \forall v \in H^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1$$

et

$$l_\epsilon^{1,\pm}(v) = -\gamma\epsilon \int_{\sigma_\epsilon} \left(\partial_n R \left(\frac{x}{\epsilon} \right) v \right)^\pm + \gamma\epsilon^2 \int_{\sigma_\epsilon} \left(R \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \partial_n v \right)^\pm$$

où on rappelle que pour $x \in \sigma_\epsilon$, $u(x)^\pm$ désigne la valeur limite prise respectivement du coté de la normale \vec{n} ou de son opposée (voir Figure 6.2).

On vérifie que chaque problème $e_\epsilon^{1,\pm}$ est bien posé. En effet $b_\epsilon(u, v)$ est coercive sur $H^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1$ car en utilisant l'inégalité de Deny Lions [[35], Lemme 5.2], il vient

$$b_\epsilon(u, u) \geq (1 - \nu)|u|_{2,\Omega_\epsilon}^2 \geq C\|u\|_{H^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1}^2$$

La continuité des applications linéaires $l_\epsilon^{1,\pm}(v)$ se montre en appliquant le théorème de trace respectivement sur $\Omega \setminus \widetilde{\omega}_\epsilon$ et sur $\widetilde{\omega}_\epsilon$ (voir Figure 6.2).

En appliquant le théorème de Lax-Milgram sur $H^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1$, on déduit l'existence et l'unicité de chaque solution $e_\epsilon^{1,\pm}$.

- $e_\epsilon^2 \in H^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1$ est défini par la formulation variationnelle : soit $v \in H^2(\Omega_\epsilon)$

$$\begin{aligned} a_\epsilon(e_\epsilon^2, v) &= a_\epsilon(e_\epsilon - e_\epsilon^{1,+} - e_\epsilon^{1,-}, v) = - \int_{\Omega_\epsilon} \epsilon^2 R \left(\frac{x}{\epsilon} \right) v + \int_{\Omega_\epsilon} \gamma \epsilon^2 R \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \Delta v - \gamma \int_{\Omega_\epsilon} \nabla (e_\epsilon^{1,+} + e_\epsilon^{1,-}) \cdot \nabla v \\ &\quad - \int_{\Omega_\epsilon} (e_\epsilon^{1,+} + e_\epsilon^{1,-}) v - \int_{\Gamma} (\phi_1^\epsilon v - \phi_2^\epsilon \partial_n v) + \int_{\sigma_\epsilon} \varphi_1[v] - \varphi_2[\partial_n v] \end{aligned}$$

De la même manière que pour $e_\epsilon^{1,\pm}$, on montre que e_ϵ^2 est bien définie.

Il reste à estimer $\|e_\epsilon^{1,\pm}\|_{H^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1}$ et $\|e_\epsilon^2\|_{2,\Omega_\epsilon}$. En utilisant un changement de variable, le théorème de trace sur $B_r \setminus \widetilde{\omega}$, l'équivalence de la norme $H^2(B_r \setminus \widetilde{\omega})/\mathbb{P}_1$ avec la semi-norme, et à nouveau un changement de variable il vient

$$\begin{aligned} C|e_\epsilon^{1,+}|_{2,\Omega_\epsilon}^2 &\leq b_\epsilon(e_\epsilon^{1,+}, e_\epsilon^{1,+}) = -\epsilon \int_{\sigma_\epsilon} \left(\partial_n R \left(\frac{x}{\epsilon} \right) e_\epsilon^{1,+} \right)^+ + \epsilon^2 \int_{\sigma_\epsilon} \left(R \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \partial_n e_\epsilon^{1,+} \right)^+ \\ &= -\epsilon^2 \int_{\sigma} (\partial_n R(X) e_\epsilon^{1,+}(\epsilon X))^+ + \epsilon^3 \int_{\sigma} (R(X) \partial_n e_\epsilon^{1,+}(\epsilon X))^+ \\ &\leq C\epsilon^2 \|e_\epsilon^{1,+}(\epsilon X)\|_{H_{00}^{3/2}(\sigma)/\mathbb{P}_1} + C\epsilon^3 \|\partial_n e_\epsilon^{1,+}(\epsilon X)\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)/\mathbb{P}_1} \\ &\leq C\epsilon^2 |e_\epsilon^{1,+}(\epsilon X)|_{H^{3/2}(\partial\widetilde{\omega})/\mathbb{P}_1} + C\epsilon^3 \|\partial_n e_\epsilon^{1,+}(\epsilon X)\|_{H^{1/2}(\partial\widetilde{\omega})/\mathbb{P}_1} \\ &\leq \epsilon^2 \|e_\epsilon^{1,+}(\epsilon X)\|_{H^2(B_r \setminus \widetilde{\omega})/\mathbb{P}_1} \\ &\leq C\epsilon^2 |e_\epsilon^{1,+}(\epsilon X)|_{2, B_r \setminus \widetilde{\omega}} \\ &\leq C\epsilon^3 |e_\epsilon^{1,+}|_{2,\Omega_\epsilon} \end{aligned}$$

où la trace de $e_\epsilon^{1,+}$ sur σ prise à gauche de σ est notée par le même nom pour ne pas alourdir les notations. On déduit que $|e_\epsilon^{1,+}|_{2,\Omega_\epsilon} = O(\epsilon^3)$. De la même manière en appliquant le théorème de trace cette fois ci sur $\widetilde{\omega}$ on obtient $|e_\epsilon^{1,-}|_{2,\Omega_\epsilon} = O(\epsilon^3)$.

$e_\epsilon^{1,\pm}$ étant définies à un polynôme de degré 1 près, en utilisant le Lemme 6.5.1 on a

$$\begin{aligned}
C\|e_\epsilon^2\|_{2,\Omega_\epsilon}^2 &\leq a_\epsilon(e_\epsilon^2, e_\epsilon^2) \leq \epsilon^2 \left\| R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right\|_{0,\Omega_\epsilon} \|e_\epsilon^2\|_{0,\Omega_\epsilon} + \gamma\epsilon^2 \left\| R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right\|_{0,\Omega_\epsilon} |e_\epsilon^2|_{2,\Omega_\epsilon} \\
&\quad + \gamma (|e_\epsilon^{1,+}|_{H^1(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1} + |e_\epsilon^{1,-}|_{H^1(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1}) |e_\epsilon^2|_{1,\Omega_\epsilon} \\
&\quad + (\|e_\epsilon^{1,+}\|_{L^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1} + \|e_\epsilon^{1,-}\|_{L^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1}) \|e_\epsilon^2\|_{0,\Omega_\epsilon} \\
&\quad + \|\phi_1^\epsilon\|_{-3/2,\Gamma} \|e_\epsilon^2\|_{3/2,\Gamma} + \|\phi_2^\epsilon\|_{-1/2,\Gamma} \|\partial_n e_\epsilon^2\|_{1/2,\Gamma} \\
&\quad + \epsilon \|\varphi_1(\epsilon X)\|_{H_{00}^{3/2}(\sigma')} |e_\epsilon^2(\epsilon X)|_{2,B_r \setminus \bar{\sigma}} + \|\varphi_2(\epsilon X)\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma')} |e_\epsilon^2(\epsilon X)|_{2,B_r \setminus \bar{\sigma}} \\
&= \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} + \mathcal{D}
\end{aligned}$$

où on pose

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \epsilon^2 \left\| R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right\|_{0,\Omega_\epsilon} \|e_\epsilon^2\|_{0,\Omega_\epsilon} + \gamma\epsilon^2 \left\| R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right\|_{0,\Omega_\epsilon} |e_\epsilon^2|_{2,\Omega_\epsilon} \\
\mathcal{B} &= \gamma (|e_\epsilon^{1,+}|_{H^1(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1} + |e_\epsilon^{1,-}|_{H^1(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1}) |e_\epsilon^2|_{1,\Omega_\epsilon} \\
&\quad + (\|e_\epsilon^{1,+}\|_{L^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1} + \|e_\epsilon^{1,-}\|_{L^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1}) \|e_\epsilon^2\|_{0,\Omega_\epsilon} \\
\mathcal{C} &= \|\phi_1^\epsilon\|_{-3/2,\Gamma} \|e_\epsilon^2\|_{3/2,\Gamma} + \|\phi_2^\epsilon\|_{-1/2,\Gamma} \|\partial_n e_\epsilon^2\|_{1/2,\Gamma} \\
\mathcal{D} &= \epsilon \|\varphi_1(\epsilon X)\|_{H_{00}^{3/2}(\sigma')} |e_\epsilon^2(\epsilon X)|_{2,B_r \setminus \bar{\sigma}} + \|\varphi_2(\epsilon X)\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma')} |e_\epsilon^2(\epsilon X)|_{2,B_r \setminus \bar{\sigma}}
\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 6.5.4 on obtient

$$\mathcal{A} \leq -C\epsilon^2 \log(\epsilon) \|e_\epsilon^2\|_{2,\Omega_\epsilon}$$

Avec les estimations $|e_\epsilon^{1,\pm}|_{2,\Omega_\epsilon} = O(\epsilon^3)$ et l'équivalence de la norme sur $H^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1$ avec la semi-norme $H^2(\Omega_\epsilon)$, il vient

$$\mathcal{B} \leq C\epsilon^3 \|e_\epsilon^2\|_{2,\Omega_\epsilon}$$

En utilisant les estimations ponctuelles $\phi_1^\epsilon = O(\epsilon^2)$ et $\phi_2^\epsilon = O(\epsilon^2)$, on obtient les estimations suivantes :

$$\|\phi_1^\epsilon\|_{-3/2,\Gamma} = O(\epsilon^2) \quad \|\phi_2^\epsilon\|_{-1/2,\Gamma} = O(\epsilon^2)$$

De ces estimations et grâce au théorème de trace sur $\Omega \setminus \bar{B}$, il vient

$$\mathcal{C} \leq C\epsilon^2 \|e_\epsilon^2\|_{2,\Omega_\epsilon}$$

Enfin en utilisant l'équivalence entre la norme et la semi-norme sur l'espace $H^2(B_r \setminus \bar{\sigma})/\mathbb{P}_1$, les inégalités $|\varphi_1(\epsilon X)| \leq C$ et $|\varphi_2(\epsilon X)| \leq C\epsilon$ pour $X \in \sigma$ et un changement de variable, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &\leq C\epsilon \|e_\epsilon^2(\epsilon X)\|_{H^2(B_r \setminus \bar{\sigma})/\mathbb{P}_1} \\
&\leq C\epsilon |e_\epsilon^2(\epsilon X)|_{2,\Omega_\epsilon} \\
&\leq C\epsilon^2 |e_\epsilon^2|_{2,\Omega_\epsilon}
\end{aligned}$$

On en conclut que

$$\|e_\epsilon^2\|_{2,\Omega_\epsilon} = O(-\epsilon^2 \log(\epsilon))$$

En revenant à e_ϵ , $e_\epsilon^{1,\pm}$ étant définies à un polynôme de degré 1 près, on obtient

$$\|e_\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon} \leq \|e_\epsilon^{1,+}\|_{H^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1} + \|e_\epsilon^{1,-}\|_{H^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1} + \|e_\epsilon^2\|_{H^2(\Omega_\epsilon)}$$

d'où

$$\|e_\epsilon\|_{2,\Omega_\epsilon} = O(-\epsilon^2 \log(\epsilon))$$

Enfin pour l'estimation de $|w_\epsilon|_{2,\Omega_\epsilon}$ on utilise le Lemme 6.5.4 :

$$\begin{aligned} |w_\epsilon|_{2,\Omega_\epsilon} &\leq \epsilon^2 \left| R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right|_{2,\Omega_\epsilon} + |e_\epsilon|_{2,\Omega_\epsilon} \\ &\leq C\epsilon - C\epsilon^2 \log(\epsilon) \\ &\leq C\epsilon \end{aligned}$$

ce qui est bien l'inégalité à démontrer. □

Chapitre 7

Méthode du gradient topologique pour la détection de structures fines en imagerie. Étude numérique

Résumé. Dans ce chapitre on présente l'analyse numérique de la méthode du gradient topologique développée dans le chapitre 6 pour la détection de structures fines (filaments et points en 2D). Le modèle variationnel met en jeu des opérateurs différentiels d'ordre 2 et conduit à des EDPs d'ordre 4. On développe ici un modèle adapté à des images dégradées par du bruit gaussien et on étend le modèle à un cas plus général où l'image peut être dégradée par du bruit gaussien et du flou. On montre comme pour la détection de contours [42] que le gradient topologique n'est pas seulement un détecteur de filaments mais il permet aussi de restaurer des images contenant des filaments. Ensuite, on étend notre approche à la détection de surfaces et de filaments en 3D. On expérimente toutes les méthodes présentées sur des images synthétiques et réelles et on compare nos résultats avec ceux obtenus via d'autres méthodes classiques.

Introduction

Le but principal de ce chapitre est d'appliquer la méthode présentée dans le chapitre 6 à la détection de structures fines pour des images 2D et 3D.

Le chapitre est organisé comme suit. En section 7.1 on présente la fonction coût et le modèle variationnel utilisé pour la détection de structures fines. En section 7.2 on rappelle l'expression du GT pour ce modèle et donnée dans le chapitre 6. On étend ensuite en section 7.3 le résultat à un modèle plus général de dégradation de l'image. On verra en section 7.4 que le GT n'est pas seulement un détecteur de filament, mais il permet aussi de restaurer des images. Pour comparer notre indicateur à d'autres, en section 7.5 on présente un indicateur classique basé sur la hessienne de l'image et souvent utilisé pour la détection de filaments et de points [82, 81, 66]. En section 7.6 on développe l'analyse numérique associée à la méthode du GT. En section 7.7 et section 7.8 on donne des résultats expérimentaux pour la détection de points et de filaments pour des images éventuellement bruitées. On justifie numériquement la pertinence du modèle et on compare les résultats obtenus par la méthode du GT avec ceux obtenus en utilisant l'indicateur introduit en section 7.5. En section 7.9, on teste l'algorithme de segmentation donné en section 7.3 adapté à des images floues et bruitées, et on illustre le modèle de restauration présenté précédemment en section 7.4. Finalement, en section 7.10 on donne la valeur du GT dans le cas 3D pour un domaine fissuré par un crack circulaire et plan, et on présente quelques résultats expérimentaux.

7.1 Fonction coût et problème variationnel

Dans des images 2D, un filament peut être modélisé par une fonction supportée par une courbe régulière Γ . En utilisant le Lemme 5.1.1 on peut approcher un filament par une suite de fonctions régulières dont la hessienne explose dans la direction perpendiculaire à Γ et dont le gradient est nul sur Γ . Un raisonnement similaire peut être fait pour les points. Cela montre que pour détecter de telles structures, on doit utiliser des opérateurs 2 utilisant l'image que l'on veut retrouver. On reprend (5.2.1) et (5.2.6). On rappelle que le modèle est inspiré de l'équation de Kirchhoff modélisant le mouvement vertical d'une plaque fine soumise à des forces extérieures [35] avec comme coefficient de Poisson $\nu = 0$. La fonction que l'on va utiliser pour la détection de structures fines est :

$$J_\epsilon(u) = J_{\Omega_\epsilon}(u) = \int_{\Omega_\epsilon} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 = \int_{\Omega_\epsilon} \|\nabla^2 u\|^2, \quad (7.1.1)$$

et Ω_ϵ est soit (a) $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{\{x_0 + \epsilon\omega\}}$ soit (b) $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{\{x_0 + \epsilon\sigma(\vec{n})\}}$. Pour une matrice M on note $\|M\|^2 = \text{tr}(M^T M)$. Soit $u_{\Omega_\epsilon} = u_\epsilon$ une régularisation de l'image observée $f \in L^2(\Omega_\epsilon)$, solution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{u \in H^2(\Omega_\epsilon)} \left(\alpha J_\epsilon(u) + \|u - f\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 \right) \quad (\mathcal{P}_\epsilon) \quad (7.1.2)$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre à régler en fonction par exemple du bruit. La formulation variationnelle de (\mathcal{P}_ϵ) s'écrit : trouver $u_\epsilon \in H^2(\Omega_\epsilon)$ telle que

$$a_\epsilon(u_\epsilon, v) = l_\epsilon(v) \quad \forall v \in H^2(\Omega_\epsilon) \quad (7.1.3)$$

où $a_\epsilon(u, v)$ et $l_\epsilon(v)$ sont les formes bilinéaires et linéaires suivantes :

$$a_\epsilon(u, v) = \int_{\Omega_\epsilon} \alpha \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + uv \quad l_\epsilon(v) = \int_{\Omega_\epsilon} f v. \quad (7.1.4)$$

Les équation d'Euler associées à (\mathcal{P}_ϵ) sont

$$(\mathcal{P}_\epsilon) \begin{cases} \alpha \Delta^2 u_\epsilon + u_\epsilon = f \text{ dans } \Omega_\epsilon \\ B_1(u_\epsilon) = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\epsilon \\ B_2(u_\epsilon) = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\epsilon \end{cases} \quad (7.1.5)$$

où on rappelle les expressions des opérateurs B_1 et B_2

$$B_1(u) = \partial_n(\Delta u) - \partial_\tau \left(n_1 n_2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) - (n_1^2 - n_2^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right)$$

$$B_2(u) = n_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + n_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2n_1 n_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$\vec{n} = (n_1, n_2)$ étant la normale sortante au domaine Ω_ϵ et $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ le vecteur tangent tel que $(\vec{n}, \vec{\tau})$ soit une base orthonormée.

Remarque 7.1.1. *En utilisant un estimateur du maximum a posteriori (MAP), on peut montrer que le terme d'attache aux données de (7.1.2) est adapté au modèle $f = u + b$ où f est l'image observée, u l'image à retrouver et b du bruit gaussien.*

7.2 Expression des GTs pour (a) un domaine perforé et (b) un domaine fissuré

Le théorème suivant est tiré du chapitre 6 et adapté à un objectif numérique de détection de structures fines. Dans le chapitre 6 on a calculé le GT pour des domaines perforé et fissuré. On rappelle que le calcul du GT repose sur l'évaluation du terme prépondérant dans la différence $J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0)$ quand $\epsilon \rightarrow 0$. Cette évaluation est très technique mais (et cela est remarquable) elle nécessite le calcul de seulement deux solutions : u_0 la solution du problème direct (\mathcal{P}_0) et v_0 la solution du problème adjoint (\mathcal{Q}_0) définis par

$$(\mathcal{P}_0) \begin{cases} \alpha \Delta^2 u_0 + u_0 = f \text{ dans } \Omega \\ B_1(u_0) = B_2(u_0) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (7.2.1)$$

et

$$(\mathcal{Q}_0) \begin{cases} \alpha \Delta^2 v_0 + v_0 = 2u_0 - f \text{ dans } \Omega \\ B_1(v_0) = B_2(v_0) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (7.2.2)$$

Remarque 7.2.1. Dans le problème adjoint, le terme source est $2u_0 - f$ et donc v_0 est proche de f si u_0 est proche de f .

Théorème 7.2.2. Les GTs associés à la fonction coût (7.1.1) et à l'EDP (7.1.5) dans les cas d'un domaine perforé (noté \mathcal{I}^b) et d'un domaine fissuré (noté \mathcal{I}^c) sont

$$\mathcal{I}^b(x_0) = \frac{\pi}{\alpha} (f(x_0) - u_0(x_0)) (v_0(x_0) - u_0(x_0)) - \mathcal{M}(u_0, v_0)(x_0)$$

avec

$$\mathcal{M}(u, v) = \pi \Delta u \Delta v + \frac{2\pi}{3} \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right)$$

et

$$\mathcal{I}^c(x_0, \vec{n}) = -\frac{2\pi}{3} \nabla^2 u_0(x_0)(\vec{n}, \vec{n}) \nabla^2 v_0(x_0)(\vec{n}, \vec{n}) \quad (7.2.3)$$

où \vec{n} est la normale au crack, u_0 et v_0 sont respectivement les solutions des problèmes direct (\mathcal{P}_0) et adjoint (\mathcal{Q}_0) donnés par (7.2.1) et (7.2.2). On définit les indicateurs topologiques au point x_0 pour un domaine perforé et pour un domaine fissuré par

$$I_{Bilap}^b(x_0) = |\mathcal{I}^b(x_0)|$$

$$I_{Bilap}^c(x_0) = \max_{\|\vec{n}\|=1} |\mathcal{I}^c(x_0, \vec{n})|$$

Remarque 7.2.3. On définit un indicateur topologique au point x_0 à partir de la valeur absolue du gradient topologique car on ne sait pas montrer si la création d'un trou ou d'un crack en un point de discontinuité sans saut pour l'équation de Kirchhoff et la fonction coût $J_\epsilon(u) = \|\nabla^2 u_\epsilon\|_{0, \Omega_\epsilon}^2$ mène à une diminution ou une création d'énergie. Numériquement pour α petit les GTs associés aux modèles du crack et de la boule sont principalement négatifs (l'énergie $J_\epsilon(u)$ diminue lorsque qu'on crée un petit trou ou un crack) tandis que pour α grand, ceux-ci deviennent majoritairement positifs (création d'énergie). Ainsi on choisit de prendre un indicateur topologique qui soit grand aux points associés à une grande variation d'énergie et on vérifie dans le chapitre 7 que cet indicateur est adapté au problème de détection de structures fines présenté au chapitre 5 précédent.

En section 7.6 on propose deux manières de discrétiser les problèmes (7.2.1) et (7.2.2).

7.3 Adaptation à un problème plus général de défloutage

Dans beaucoup d'applications à l'imagerie, le matériel optique, le mouvement de la caméra ou de la cible, introduisent du flou sur l'image observée (voir [71]). Généralement, le flou quand il est spatialement invariant est modélisé par une convolution positive $u \mapsto Ku$ telle que $K\mathbb{1} \neq 0$ (voir [17] chapitre 3). On suppose que l'image observée s'écrit $f = Ku + b$ où K est le flou, u l'image à retrouver et b du bruit supposé gaussien. Ainsi, on peut prendre en compte le "flou" en remplaçant u par Ku dans (7.1.2). Les équations d'Euler deviennent :

$$(\mathcal{P}_0) \begin{cases} \alpha \Delta^2 u_0 + K^* K u_0 = K^* f, & \text{sur } \Omega \\ B_1(u_0) = B_2(u_0) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (7.3.1)$$

et

$$(\mathcal{Q}_0) \begin{cases} \alpha \Delta^2 v_0 + K^* K v_0 = K^*(2Ku_0 - f), & \text{sur } \Omega \\ B_1(v_0) = B_2(v_0) = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.3.2)$$

Pour l'existence et l'unicité de (7.3.1) et (7.3.2) on réfère le lecteur au chapitre 3 de [17]. Il est facile de voir que le GT pour un domaine fissuré est le même que dans le cas sans flou, tandis que pour un domaine perforé son expression est un peu changée. En notant toujours I_{Bilap}^b et I_{Bilap}^c les deux indicateurs topologiques associés à (7.1.1) et au problème déduit de (7.1.2) en remplaçant u par Ku , on a (voir section 7.2 pour les notations) :

$$I_{Bilap}^b(x_0) = |\mathcal{I}^b(x_0)| \quad (7.3.3a)$$

$$I_{Bilap}^c(x_0) = \max_{\|\vec{n}\|=1} |\mathcal{I}^c(x_0, \vec{n})| \quad (7.3.3b)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^b(x_0) &= \frac{\pi}{\alpha} (K^* f(x_0) - K^* K u_0(x_0)) (v_0(x_0) - u_0(x_0)) - \mathcal{M}(u_0, v_0)(x_0) \\ \mathcal{I}^c(x_0, \vec{n}) &= -\frac{2\pi}{3} \nabla^2 u_0(x_0)(\vec{n}, \vec{n}) \nabla^2 v_0(x_0)(\vec{n}, \vec{n}) \end{aligned}$$

et où u_0 et v_0 sont données respectivement par (7.3.1) et (7.3.2). On illustre ces deux indicateurs topologiques sur des images synthétiques et réelles, en section 7.7 et section 7.8 pour $K = I$ (pas de flou) et en section 7.9 pour $K \neq I$ (avec du flou).

7.4 Restauration en utilisant le GT pour un domaine fissuré

Dans cette section on présente un algorithme de restauration préservant à la fois les contours et les filaments. Comme expliquée en introduction de cette partie (chapitre 5), la différence entre les contours et les structures fines peut être caractérisée de la manière suivante : un contour est une discontinuité avec saut d'intensité et un filament est une discontinuité sans saut à travers la structure. La définition en domaine continu est claire mais il n'en demeure pas moins que pour les images numériques cette notion doit être précisée. Généralement on considère comme structure fine, une structure de largeur maximum 4 ou 5 pixels (point ou filament). Une structure de largeur supérieure à 5 pixels peut être considérée comme un objet de volume non nul et délimité par un contour. Comme pour la section 7.3, on suppose que l'image dégradée f s'écrit $f = Ku + b$. On note toujours I_{Bilap}^c l'indicateur topologique associé à un domaine fissuré (7.3.3b) où u_0 et v_0 sont données par (7.3.1) et (7.3.2) (section 7.3), et on rappelle le gradient topologique I_{Lap}^c défini dans [24, 42] pour la détection de contours :

$$I_{Lap}^c = \min_{\|\vec{n}\|=1} \mathcal{J}^c(x_0, \vec{n}) \text{ avec } \mathcal{J}^c(x_0, \vec{n}) = -\pi \nabla u_0(x_0) \cdot \vec{n} \nabla v_0(x_0) \cdot \vec{n} \quad (7.4.1)$$

où u_0 et v_0 sont données par

$$\begin{cases} -\gamma\Delta u_0 + K^*Ku_0 = K^*f \text{ sur } \Omega \\ \partial_n u_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\gamma\Delta v_0 + K^*Kv_0 = K^*(2Ku_0 - f) \text{ sur } \Omega \\ \partial_n v_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.4.2)$$

avec $\gamma > 0$ un paramètre à régler. Comme un produit supplémentaire, le calcul des GTs pour un domaine fissuré I_{Bilap}^c (7.3.3b) et I_{Lap}^c (7.4.1) permet de restaurer les images dégradées par du flou et/ou du bruit gaussien. La restauration que l'on propose préserve à la fois les contours et les filaments. En effet une fois I_{Bilap}^c et I_{Lap}^c calculés, on définit pour deux seuils fixés $\delta_1, \delta_2 > 0$, les ensembles $E_{\delta_1}^{Lap} = \{x \in \Omega; I_{Lap}^c \leq -\delta_1\}$ et $E_{\delta_2}^{Bilap} = \{x \in \Omega; I_{Bilap}^c \geq \delta_2\}$ et les fonctions caractéristiques

$$\chi_\eta^{Lap}(x) = \begin{cases} \eta & \text{si } x \in E_{\delta_1}^{Lap} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \chi_\eta^{Bilap}(x) = \begin{cases} \eta & \text{si } x \in E_{\delta_2}^{Bilap} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

où η est un paramètre positif petit. Du calcul de I_{Bilap}^c et I_{Lap}^c , on déduit également la direction normalisée $\vec{\tau} = \vec{n}^\perp$ de la discontinuité. Pour les contours, \vec{n} est donnée par la direction associée au calcul de I_{Lap}^c (7.4.1) et pour les filaments cette direction est calculée lors du calcul de I_{Bilap}^c (7.3.3b). Si $\vec{n} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ est la normale au crack optimal associée au calcul de I_{Bilap}^c ou de I_{Lap}^c , on note $\vec{\tau} = (\sin(\varphi), -\cos(\varphi))$. Si f est l'image observée éventuellement dégradée, l'idée est de trouver une version restaurée u de f comme la solution du problème anisotrope suivant :

$$\begin{cases} -div(\beta P_\eta^\varphi(x)\nabla u) + K^*Ku = K^*f \text{ dans } \Omega \\ \partial_n u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (7.4.3)$$

où $P_\eta^\varphi(x)$ est un tenseur construit à partir de $\varphi(x)$, $\chi_\eta^{Bilap}(x)$ et $\chi_\eta^{Lap}(x)$; K est un opérateur de flou et β est un paramètre à régler. Plus précisément, on choisit $P_\eta^\varphi(x)\nabla u(x) = (\nabla u \cdot \vec{\tau})\vec{\tau} + \chi_\eta(x)(\nabla u \cdot \vec{n})\vec{n}$ où χ_η désigne soit χ_η^{Lap} ou χ_η^{Bilap} selon que l'on souhaite préserver respectivement des contours ou des filaments. Une simple identification montre que $P_\eta^\varphi(x)$ est la matrice

$$P_\eta^\varphi(x) = \begin{pmatrix} \sin^2(\varphi(x)) + \chi_\eta(x)\cos^2(\varphi(x)) & \sin(\varphi(x))\cos(\varphi(x))(\chi_\eta(x) - 1) \\ \sin(\varphi(x))\cos(\varphi(x))(\chi_\eta(x) - 1) & \cos^2(\varphi(x)) + \chi_\eta(x)\sin^2(\varphi(x)) \end{pmatrix} \quad (7.4.4)$$

L'interprétation de la matrice $P_\eta^\varphi(x)$ est la suivante :

- Si x appartient au fond de l'image, grâce à la définition de $\chi_\eta(x)$, $P_\eta^\varphi(x)$ s'écrit $P_\eta^\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $div(P_\eta^\varphi(x)\nabla u) = \Delta u$ et la diffusion est isotrope.
- Si x appartient à un contour (c-à-d $x \in E_{\delta_1}^{Lap}$) et si $\chi_\eta(x) = \chi_\eta^{Lap}(x)$, alors $\chi_\eta(x)$ est proche de zéro et $P_\eta^\varphi(x)\nabla u(x) \approx (\nabla u \cdot \vec{\tau})\vec{\tau}$. La diffusion est dans la direction du contour.
- Si x appartient à un filament (c-à-d $x \in E_{\delta_2}^{Bilap}$) et si $\chi_\eta(x) = \chi_\eta^{Bilap}(x)$, alors $\chi_\eta(x)$ est proche de zéro et $P_\eta^\varphi(x)\nabla u(x) \approx (\nabla u \cdot \vec{\tau})\vec{\tau}$. La diffusion a lieu dans la direction du filament.

Remarque 7.4.1. Dans le cas où $\chi_\eta = \chi_\eta^{Lap}$, pour un modèle plus général de restauration avec différents types de bruit et flou, on réfère le lecteur au chapitre 4.

Remarque 7.4.2. Si on veut préserver à la fois les contours et les filaments, on peut choisir $\chi_\eta(x) = \min(\chi_\eta^{Lap}(x), \chi_\eta^{Bilap}(x))$ (voir section 7.9.2).

Comme nous allons le voir en section 7.9.2 sur des exemples numériques, les résultats de la restauration décrite par (7.4.3) sont bons et les filaments et les contours sont bien préservés.

7.5 Comparaison avec un indicateur classique

Dans [82, 81, 66] les auteurs utilisent pour détecter le centre des vaisseaux sanguins un indicateur défini à partir de la matrice hessienne d'une version régularisée de l'image. On note f l'image observée, G_σ la gaussienne d'échelle σ et $H_\sigma = \nabla^2 f * G_\sigma = f * \nabla^2 G_\sigma$. Si on pose λ_1 et λ_2 les valeurs propres de H_σ telles que $0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2|$, on définit les deux détecteurs de points et de filaments suivants :

$$\begin{aligned} I_{Hes}^p &= |\lambda_2| \text{ (détecteur de points)} \\ I_{Hes}^f &= |\lambda_2| - |\lambda_1| \text{ (détecteur de filaments)} \end{aligned} \quad (7.5.1)$$

$I_{Hes}^p(x)$ est grand si x appartient à un filament ou à un point. $I_{Hes}^f(x)$ est grand seulement si x appartient à une structure présentant une discontinuité dans exactement une direction c-à-d si x appartient à un filament. À I_{Hes}^f on associe v_1 le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre (en valeur absolue) de la matrice "normalisée" [66] suivante :

$$\widehat{H_{\sigma,\rho}} = G_\rho * \left[\frac{f * \nabla^2 G_\sigma}{(1 + |f * \nabla G_\sigma|^2)^{1/2}} \right]$$

où σ et ρ sont respectivement appelées les échelles de différentiation et d'intégration. Dans nos expérimentations on a pris $\rho = 0.5$ et σ constant choisi par rapport à la taille des structures à détecter. Cette direction est utilisée dans [66] pour approcher la tangente aux filaments (ou à la courbe décrite par le centre des vaisseaux sanguins). Le calcul des vecteurs propres de H_σ est connu comme étant très sensible au bruit et numériquement on peut vérifier que le vecteur v_1 est une meilleure approximation de la tangente au filament que le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de H_σ . On va comparer la direction de v_1 avec celle donnée par (7.3.3b) en section 7.7.3. L'échelle σ est choisie manuellement afin d'avoir le meilleur résultat et dépend de la taille des structures que l'on veut détecter.

7.6 Discrétisation des EDPs (7.2.1) et (7.2.2) et calcul numérique des GTs

Dans cette section on présente deux méthodes pour calculer numériquement les solutions u_0 et v_0 des problèmes (7.2.1) et (7.2.2). La première méthode utilise les éléments finis \mathbb{P}_2 dits "de Morley" notés élément finis P2-Morley et la seconde utilise une transformée en cosinus appelée DCT (Discrete Cosine Transform). D'un côté, la convergence de la première méthode vers la solution théorique est bien connue et on verra que cette méthode est la moins coûteuse parmi les méthodes utilisant les éléments finis. D'autre part, on montrera numériquement que si la seconde méthode ne converge a priori pas vers les solutions des problèmes (7.2.1) et (7.2.2), les résultats sont similaires et le temps de calcul est plus court. Tous les algorithmes sont implémentés en utilisant Matlab 7.5.0 (pour la méthode utilisant la DCT) et en FreeFem ++ (pour la méthode P2-Morley). Tous les calculs sont faits sur un ordinateur équipé d'un processeur Intel Core 1.9 GHz.

7.6.1 Discrétisation par éléments finis

Les formes variationnelles de (7.2.1) et (7.2.2) sont : trouver $u_0 \in H(\Omega)$ telle que

$$a_0(u_0, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H^2(\Omega) \quad (7.6.1)$$

et trouver $v_0 \in H^2(\Omega)$ telle que

$$a_0(u, v_0) = -\langle f - 2u_0, u \rangle \quad \forall u \in H^2(\Omega) \quad (7.6.2)$$

où $\langle u, v \rangle$ désigne le produit scalaire de $L^2(\Omega)$. Pour discrétiser ces deux problèmes on utilise l'élément fini quadratique non conforme dit "de Morley" (voir [65] et [28] pp 148-151 et p 305). Il est défini par le triplet $(K, \mathcal{P}_K, \Sigma_K)$ où

- (i) K est un triangle
- (ii) \mathcal{P}_K est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 définis sur K .
- (iii) Σ_K est l'ensemble des applications linéaires sur \mathcal{P}_K :

$$v \mapsto v(a_i), \text{ où les } a_i \text{ pour } i \in \{1, 2, 3\} \text{ sont les sommets de } K$$

$$v \mapsto \partial_n v(b_i), \text{ où les } b_i \text{ pour } i \in \{1, 2, 3\} \text{ sont les milieux des arêtes de } K$$

et où b_i est sur l'arête opposée au sommet a_i (voir Figure 7.1).

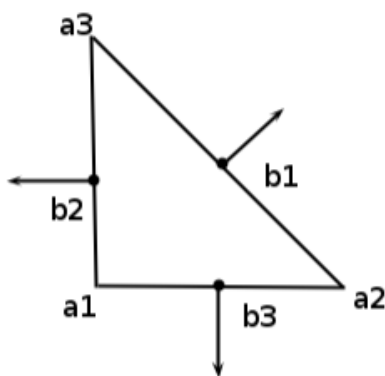


FIGURE 7.1 – La géométrie de l'élément fini "de Morley"

Soit $(\mathcal{T}_h)_h$ une triangularisation régulière de Ω . Pour tout $h > 0$, on note X_h l'ensemble des éléments finis de Morley associés à $(\mathcal{T}_h)_h$. On introduit le produit scalaire sur X_h suivant : $\langle u_h, v_h \rangle_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T u_h v_h$ et la norme discrète : $\|v_h\|_{m,h} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v_h\|_{m,T}^2 \right)^{1/2}$ pour $v_h \in X_h$.

Soient $a_0^h(u_h, v_h)$, $l_0^h(v_h)$ et $L_0^h(v_h)$ les formes bilinéaire et linéaire sur X_h suivantes :

$$a_0^h(u_h, v_h) = \alpha \sum_{i,j \in \{1,2\}} \left\langle \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 v_h}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle_h + \langle u_h, v_h \rangle_h, \forall u_h, v_h \in X_h,$$

$$l_0^h(v_h) = \langle f, v_h \rangle_h, \forall v_h \in X_h,$$

$$L_0^h(v_h) = -\langle f - 2u_{0,h}, v_h \rangle_h, \forall v_h \in X_h.$$

On note (\mathcal{P}_0^h) et (\mathcal{Q}_0^h) les deux problèmes discrets approchant (7.6.1) et (7.6.2) :

$$\text{trouver } u_0^h \in X_h \text{ telle que : } a_0^h(u_0^h, v_h) = l_0^h(v_h), \forall v_h \in X_h \quad (\mathcal{P}_0^h) \quad (7.6.3)$$

$$\text{trouver } v_0^h \in X_h \text{ telle que : } a_0^h(u_h, v_0^h) = L_0^h(u_h), \forall u_h \in X_h \quad (\mathcal{Q}_0^h) \quad (7.6.4)$$

On a le résultat de convergence suivant (voir [65]) :

Théorème 7.6.1. Soient u_0 et v_0 les solutions respectives des problèmes (7.6.1) et (7.6.2) et soient u_0^h et v_0^h les solutions définies respectivement par (7.6.3) et (7.6.4), on a les estimations :

$$\begin{aligned} \|u_0 - u_0^h\|_{2,h} &\leq Ch (|u_0|_{3,\Omega} + h\|f\|_{0,\Omega}) \\ \|v_0 - v_0^h\|_{2,h} &\leq Ch (|u_0|_{3,\Omega} + |v_0|_{3,\Omega} + h\|f\|_{0,\Omega} + h\|u_0\|_{0,\Omega}) \end{aligned} \quad (7.6.5)$$

où C est une constante indépendante de h .

Démonstration. Pour la première inégalité on renvoie à [65]. Pour la seconde, on décompose v_0^h en $v_0^h = p_0^h + q_0^h$, où p_0^h et q_0^h sont solutions de

$$\begin{aligned} a_0^h(u_h, p_0^h) &= -\langle f - 2u_0, u_h \rangle, \quad \forall u_h \in X_h, \\ a_0^h(u_h, q_0^h) &= -2\langle u_0 - u_0^h, u_h \rangle, \quad \forall u_h \in X_h. \end{aligned}$$

Grâce à [65], on obtient facilement que

$$\|p_0^h - v_0\|_{2,h} \leq Ch (|v_0|_{3,\Omega} + h\|f - 2u_0\|_{0,\Omega}).$$

En utilisant la coercivité de a_0^h sur X_h et en posant $u_h = q_0^h$, on obtient

$$\|q_0^h\|_{2,h} \leq C\|u_0 - u_0^h\|_{2,h}.$$

En utilisant le fait que $\|v_0^h - v_0\|_{2,h} \leq \|p_0^h - v_0\|_{2,h} + \|q_0^h\|_{2,h}$ et la première estimation, on obtient le résultat. \square

Cet élément fini a 6 degrés de liberté, ce qui correspond au nombre d'éléments dans \mathbb{P}_2 en 2D. Il y a $\mathcal{O}(2N)$ éléments si N est le nombre de points. La matrice correspondante au système linéaire est creuse et donc la résolution du système nécessite $\mathcal{O}(N)$ opérations (en utilisant des "sparse solvers" comme par exemple une méthode "LU-bande").

Remarque 7.6.2. On sait (voir [28], pp 148-151 et p 305) que cet élément fini non conforme a l'avantage d'être moins coûteux qu'un élément fini conforme (par exemple l'élément fini \mathbb{P}_5 d'Argyris qui a 21 degrés de liberté).

7.6.2 Discrétisation par DCT

Comme dit en introduction de cette section, la DCT ne résout pas exactement les problèmes (7.6.1) et (7.6.2) (les conditions de Neumann ne sont a priori pas remplies), mais si on regarde les résultats pour le traitement d'image (voir section 7.7 et 7.8) et le temps de calcul (voir Figure 7.2), cette méthode présente le sérieux avantage d'être très rapide. Le calcul théorique consiste en $\mathcal{O}(N \log(N))$ opérations élémentaires si on note N le nombre de pixels (ou voxels) et la méthode par éléments finis P2-Morley coûte $\mathcal{O}(N)$ opérations. Cependant, la Figure 7.2 montre que la DCT est plus rapide que la méthode éléments finis P2-Morley pour $N \leq 10^9$.

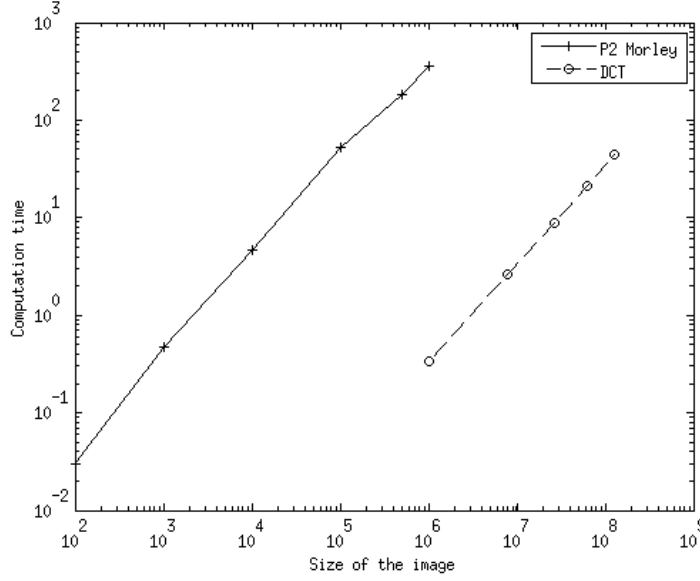


FIGURE 7.2 – Variations du temps de calcul des solutions u_0 et v_0 en fonction de la taille de l'image en échelle log-log pour la méthode utilisant la DCT et la méthode par éléments finis P2-Morley.

En considérant l'image comme un signal périodique, on choisit de discrétiser (7.2.1) et (7.2.2) en utilisant une DCT2 pour les propriétés de symétrie garanties par cet algorithme et d'autres avantages évoqués dans [74]. La DCT2 est l'algorithme le plus courant en traitement du signal. On peut voir l'image comme une partie d'un signal périodique et symétrique. Pour fixer les idées, en 1D si l'image est une suite de N points $[x_0 x_1 \dots x_{N-1}]$, le signal symétrique associé sera la suite composée de $2N - 2$ points $[x_0 x_1 \dots x_{N-1} x_{N-2} \dots x_1]$. En 1D, la fonction trigonométrique associée à un vecteur composé des coefficients renvoyés par la DCT2 est

$$u^N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{y}_k^N \cos\left(\frac{2\pi(k + \frac{1}{2})x}{T}\right) \quad (7.6.6)$$

où $\widehat{y}^N \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur tel que $\widehat{y}^N = DCT2(y^N)$, $y^N = (u^N(x_l))_l$ est le vecteur composé des valeurs de u aux points $x_l = \frac{lT}{2N}$ où T est la période du signal.

De (7.6.6), on peut facilement exprimer les dérivée de $u^N(x)$ évaluées aux points $x_l = \frac{lT}{2N}$ en fonction des coefficients de Fourier discrets \widehat{y}_k^N . Pour fixer les idées écrivons la dérivée d'ordre 4 de la fonction u^N :

$$\frac{du^N}{dx^4}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{y}_k^N \left(\frac{2\pi(k + \frac{1}{2})}{T}\right)^4 \cos\left(\frac{2\pi(k + \frac{1}{2})x}{T}\right)$$

Par conséquent, en prenant $x = x_l$, on obtient $\frac{du^N}{dx^4}(x_l)$ en fonction des \widehat{y}_k^N . On peut faire la même chose en 2D. En considérant l'image numérique comme un signal $2(N_x - 1)$ -périodique par rapport à x , et $2(N_y - 1)$ -périodique par rapport à y , on définit l'espace des fréquences par $\Lambda = \left\{ \left(\frac{\pi(k_x + \frac{1}{2})}{(N_x - 1)}, \frac{\pi(k_y + \frac{1}{2})}{(N_y - 1)} \right), (k_x, k_y) \in E_x \times E_y \right\}$ avec $E_x = \{0, \dots, N_x - 1\}$ et $E_y = \{0, \dots, N_y - 1\}$. On note Λ_x et Λ_y la grille $2(N_y - 1) \times 2(N_x - 1)$ associée à l'espace des fréquences. Le vecteur des coefficients de Fourier associé au signal discret $x \in \mathbb{R}^N$ est noté X .

Algorithme 4 Calcul des solutions (7.2.1) et (7.2.2)

Soit f_{ij} une image définie pour $(i, j) \in \llbracket 0, N_y - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, N_x - 1 \rrbracket$

1. En utilisant une DCT2, on calcule F_{kl} pour $(k, l) \in \llbracket 0, N_y - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, N_x - 1 \rrbracket$.
2. Soit $\Lambda = (\Lambda_x, \Lambda_y)$ l'espace discret des fréquences décrit en section 7.6.2, on calcule :

$$\Delta_{kl}^2 = \Lambda_{xkl}^4 + 2\Lambda_{xkl}^2\Lambda_{ykl}^2 + \Lambda_{ykl}^4$$
$$U_{kl} = \frac{F_{kl}}{1 + \alpha\Delta_{kl}^2} \text{ et } V_{kl} = \frac{2U_{kl} - F_{kl}}{1 + \alpha\Delta_{kl}^2}$$

3. En utilisant une DCT2 inverse, on calcule u_{ij} et v_{ij} pour $(i, j) \in \llbracket 0, N_y - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, N_x - 1 \rrbracket$.
-

7.6.3 Algorithme pour le calcul des indicateurs topologiques

L'un des avantages de la méthode du GT est sa simplicité de mise en œuvre. Pour calculer (7.3.3b), on réécrit le GT pour un crack de normale $\vec{n} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$:

$$\mathcal{I}^c(x_0, \varphi) = -\frac{2\pi}{3}P(\partial_{xx}u_0^N(x_0), \partial_{yy}u_0^N(x_0), \partial_{xy}u_0^N(x_0), \varphi) \times P(\partial_{xx}v_0^N(x_0), \partial_{yy}v_0^N(x_0), \partial_{xy}v_0^N(x_0), \varphi)$$

où $P : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction π -périodique par rapport à la dernière variable φ suivante :

$$P(a, b, c, \varphi) = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(a - b)\cos(2\varphi) + c\sin(2\varphi).$$

Ensuite le calcul de (7.3.3b) provient de la minimisation de $\mathcal{I}_c(x_0, \varphi)$ par rapport à $\varphi \in [0, \pi]$. Les dérivées de u_0^N et v_0^N sont calculées par convolution avec des filtres dérivateurs car la convolution est plus rapide qu'un produit matrice/vecteur. Il est plus facile (et plus rapide), de calculer (7.3.3a) que (7.3.3b) car la formule (7.3.3a) est explicite en fonction des solutions u_0^N et v_0^N . Finalement on résume le calcul des indicateurs topologiques I_{Bilap}^b et I_{Bilap}^c (7.3.3b) dans l'Algorithme 5 (pour l'instant on ne sait calculer (7.2.1) et (7.2.2) que lorsque $K = I$) :

Algorithme 5 Calcul de I_{Bilap}^b (7.3.3a) et I_{Bilap}^c (7.3.3b) ($K = I$)

1. Calcul de u_0^N et v_0^N l'approximation numérique des solutions (7.2.1) et (7.2.2) en utilisant les éléments finis ou la DCT.
 2. Calcul de l'indicateur topologique en utilisant (7.3.3a) ou (7.3.3b).
-

7.7 Application à la détection de filaments pour des images éventuellement bruitées

Dans cette section on donne quelques résultats pour des images synthétiques et réelles. Dans toute cette section, on suppose qu'il n'y a pas de flou. On compare les quatre indicateurs I_{Bilap}^b (7.3.3a), I_{Bilap}^c (7.3.3b), I_{Lap}^c (7.4.1) et I_{Hes}^f (7.5.1) pour des images contenant des filaments, des routes ou des structures "tubulaires". On va illustrer ces différents indicateurs sur des contours et des filaments afin de valider le Lemme 5.1.1. Ensuite on étudiera la robustesse de I_{Bilap}^b , I_{Bilap}^c et I_{Hes}^f par rapport au bruit. Pour visualiser des indicateurs positifs en niveau de gris, on affichera plutôt la valeur opposée (remise à l'échelle dans $[0, 255]$), afin d'avoir les structures à détecter en noir et le reste en blanc.

7.7.1 Structures détectées par les indicateurs topologiques

Dans cette section on compare les quatre indicateurs sur une image synthétique simple et sur une image réelle contenant des contours et des filaments.

La Figure 7.3 compare les indicateurs topologiques associés au bilaplacien et au laplacien avec l'indicateur I_{Hes}^f sur un contour et un filament. I_{Bilap}^b , I_{Bilap}^c et I_{Hes}^f sont beaucoup plus sensibles au filament qu'au contour, contrairement à I_{Lap}^c qui détecte principalement le contour. Cet exemple simple justifie l'opérateur d'ordre 2 dans la fonction coût (7.1.1) et c'est aussi une validation numérique du Lemme 5.1.1. De manière similaire, la Figure 7.4 montre les 4 indicateurs sur une image réelle. I_{Bilap}^b et I_{Bilap}^c détectent principalement le centre des routes. I_{Hes}^f est aussi plus élevé au niveau des centres des routes que sur les contours mais le bruit et la texture de l'image sont également détectés. I_{Lap}^c détecte les contours et également les bordures des routes.

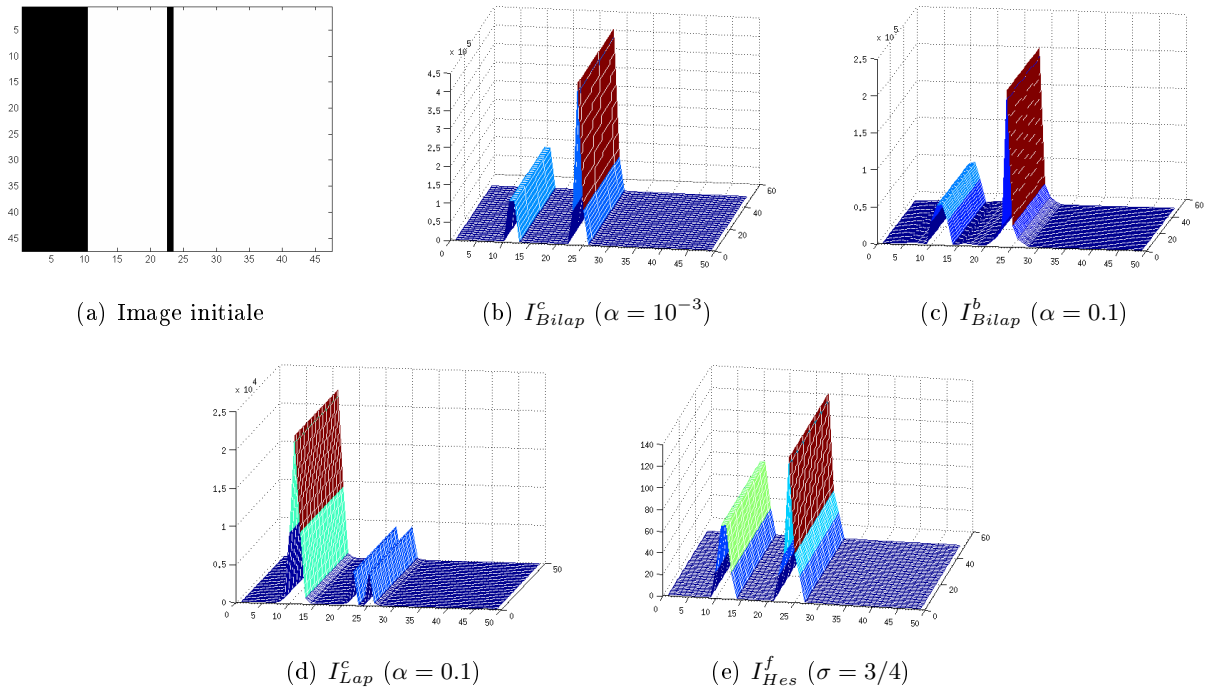


FIGURE 7.3 – Visualisation de I_{Bilap}^c (7.3.3b), I_{Bilap}^b (7.3.3a), I_{Lap}^c (7.4.1) et I_{Hes}^f (7.5.1) sur un contour et sur un filament pour une image synthétique

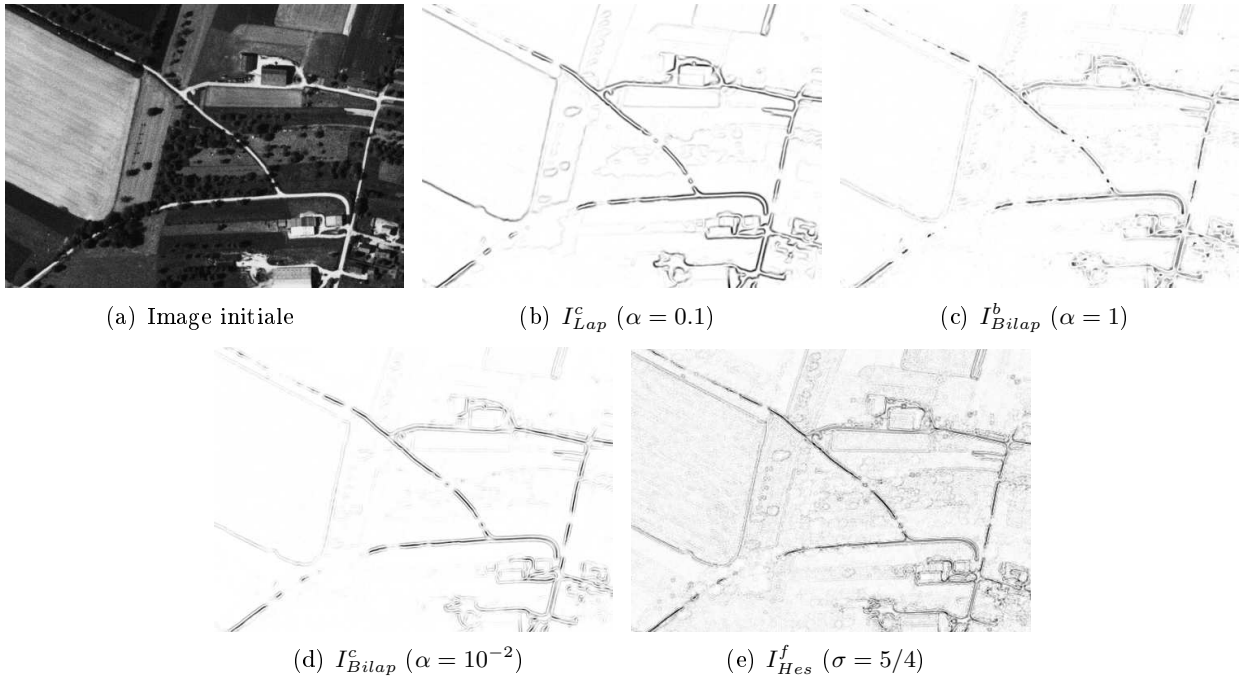


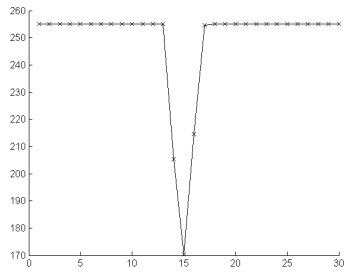
FIGURE 7.4 – Comparaison de I_{Bilap}^b (7.3.3a), I_{Bilap}^c (7.3.3b), I_{Lap}^c (7.4.1) et I_{Hes}^f (7.5.1) sur une image réelle

Ces résultats montrent que notre modèle est adapté à la détection de filament. Dans la prochaine sous-section, on étudie et compare la robustesse de I_{Bilap}^b , I_{Bilap}^c et I_{Hes}^f par rapport au bruit (de type gaussien).

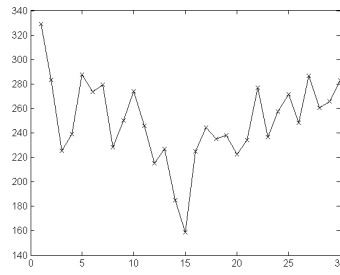
7.7.2 Robustesse des indicateurs topologiques par rapport à du bruit gaussien et comparaisons

Une qualité importante d'un indicateur est sa robustesse par rapport au bruit. Dans cette section, on compare la robustesse par rapport au bruit de I_{Bilap}^b , I_{Bilap}^c et I_{Hes}^f . La Figure 7.5 illustre les profils 1D d'une image bruitée, des solutions directe (7.2.1) et adjointe (7.2.2) et de I_{Bilap}^c (7.3.3b). On voit qu'un léger phénomène "d'aliasing" apparaît au niveau des états direct et adjoint. Cela est dû à la troncation dans la série de Fourier.

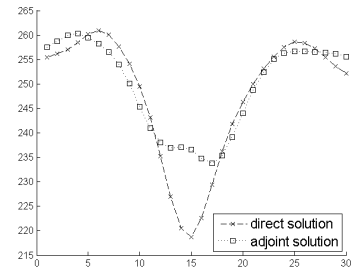
La Figure 7.6 montre ces trois indicateurs sur une image synthétique avec trois PSNR (peak signal-to-noise ratio) différents. On rappelle que dans toutes ces expériences seulement le bruit gaussien est utilisé. Cette étude montre que I_{Bilap}^c et I_{Bilap}^b sont plus robustes par rapport au bruit que l'indicateur I_{Hes}^f . Ensuite I_{Bilap}^c est plus robuste que I_{Bilap}^b . Le réglage de α dépend du niveau de bruit mais aussi de la taille des structures à détecter et de la précision souhaitée. Plus α est grand, plus le GT est régulier mais aussi peu précis.



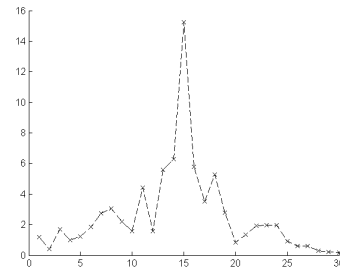
(a) Image initiale



(b) Image bruitée



(c) u_0 (7.2.1) et v_0 (7.2.2)



(d) I_{Bilap}^c (7.3.3b)

FIGURE 7.5 – Une coupe transverse à un filament illustrant (a) l'image initiale, (b) sa version bruitée (PSNR=26dB), (c) les solutions directe et adjointe et (d) I_{Bilap}^c pour $\alpha = 0.8$

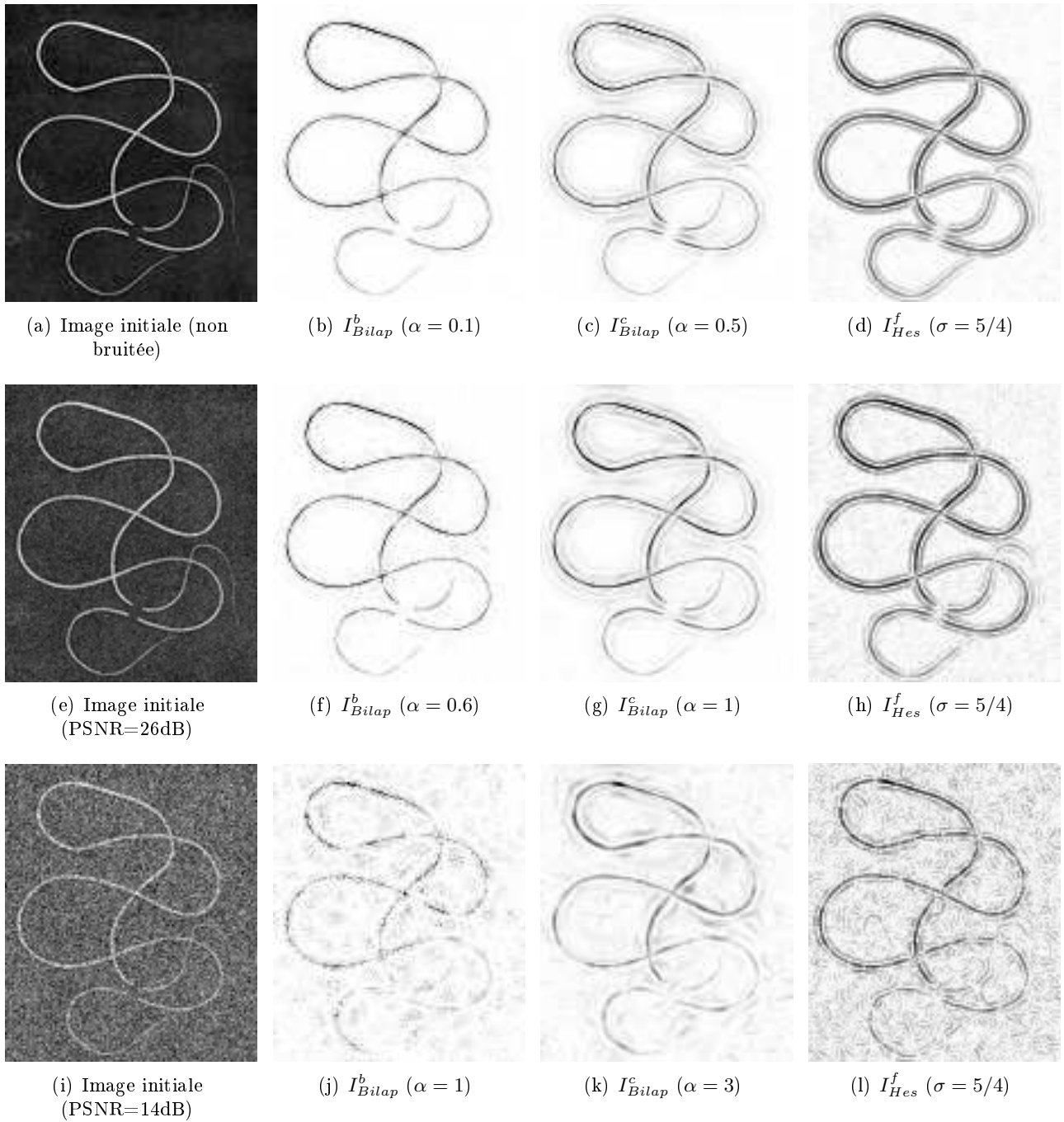


FIGURE 7.6 – Étude de la robustesse par rapport au bruit de I_{Bilap}^b (7.3.3a), I_{Bilap}^c (7.3.3b) et I_{Hes}^f (7.5.1) sur une image synthétique. Chaque ligne correspond à un niveau de bruit et chaque colonne correspond à un indicateur.

7.7.3 Information supplémentaire donnée par le calcul de I_{Bilap}^c (7.3.3b)

Deux données importantes pour la détection de filaments sont sa position, et sa direction. Dans cette section on présente un autre avantage du modèle du crack : le calcul de (7.3.3b) mène au calcul de la direction du crack optimal correspondant le mieux à la direction du filament. On rappelle que le calcul

de I_{Hes}^f permet aussi d'avoir une approximation de la direction du filament mais celle-ci est sensible au bruit. Dans [66] les auteurs calculent le vecteur associé à la valeur propre minimale (en valeur absolue) de la hessienne “normalisée” (voir section 7.5) ; on note v_1 le vecteur donné par cette méthode. Dans cette sous-section, on compare le champ de vecteurs décrit par v_1 avec la direction normale au crack donnée par (7.3.3b).

La Figure 7.7 montre le champ de vecteurs donné par (7.3.3b) et le champ de vecteurs associé à v_1 . On peut voir que le vecteur associé à (7.3.3b) est une meilleure approximation de la tangente au filament et est plus robuste par rapport au bruit (meilleur alignement des vecteurs) que v_1 . De plus le calcul de v_1 nécessite de régler deux paramètres ρ et σ , soit un paramètre de plus que la direction associée à I_{Bilap}^c . On va voir (dans les sections 7.3 et 7.9) que la méthode basée sur la hessienne se limite aux images seules bruitées par du bruit gaussien tandis que la méthode du GT s'adapte à un problème plus général de défloutage en changeant le terme d'attache aux données dans (7.1.2).

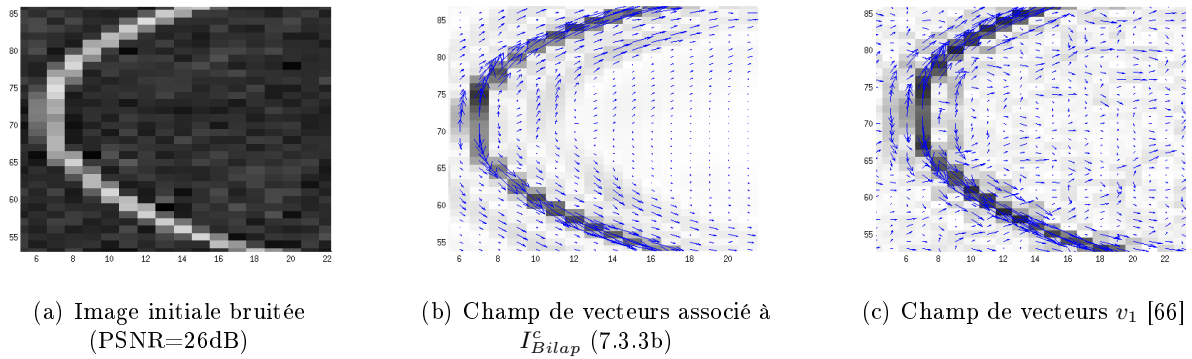


FIGURE 7.7 – Approximation de la tangente au filament par le champ de vecteurs topologique donné par (7.3.3b) comparé à celui décrit par v_1 [66]. Pour (b) la longueur des vecteurs est proportionnelle à I_{Bilap}^c (7.3.3b) et pour (c) à I_{Hes}^f (7.5.1).

7.8 Application à la détection de points sur des images éventuellement bruitées

Dans cette section on s'intéresse à la détection de points et on suppose qu'il n'y a pas de flou c-à-d $K = I$. On modélise les points par des petites structures circulaires (de 2 ou 3 pixels), n'ayant pas de direction privilégiée (structures isotropes). On va comparer les indicateurs I_{Lap}^c (7.4.1), I_{Bilap}^b (7.3.3a), I_{Bilap}^c (7.3.3b) et I_{Hes}^p (7.5.1) pour des images contenant ce type de structures. Tout d'abord on compare ces indicateurs sur une image non bruitée et simple contenant une petite et une grande structure circulaire. Ensuite on compare leur robustesse par rapport au bruit gaussien. On rappelle que pour visualiser des indicateurs positifs en niveau de gris on effectue une transformation affine afin d'avoir les structures à détecter en noir et le reste en blanc.

7.8.1 Structures détectées par les indicateurs topologiques

La Figure 7.8 est une validation numérique du Lemme 5.1.1. Cette figure illustre les indicateurs I_{Lap}^c , I_{Bilap}^c , I_{Bilap}^b et I_{Hes}^p sur une image contenant une grande et une petite structure isotrope. En accord avec le Lemme 5.1.1, on voit que I_{Lap}^c est inefficace pour la détection de petite structures : seulement les contours des structures sont détectés et le centre n'est pas détecté. Pour différentes valeurs de α , I_{Bilap}^b

et I_{Bilap}^c donnent des résultats similaires dans le cas d'une image non bruitée. En effet, on observe que I_{Bilap}^b pour $\alpha = 0.1$ et I_{Bilap}^c pour $\alpha = 10^{-3}$ sont plus sensibles aux petits objets (de taille 2 ou 3 pixels, par exemple des petites cellules) qu'aux grandes structures, tandis que I_{Lap}^c est plus sensible aux grandes structures (d'une dizaine de pixels) qu'aux petites. I_{Hes}^p pour $\sigma = 5/4$ détecte au même niveau d'intensité le centre des petites structures et les contours des grandes.

La Figure 7.8 et la Figure 7.9 montrent qu'en augmentant α , la taille des structures détectées par I_{Bilap}^b et I_{Bilap}^c augmente. On déduit que α doit être réglé par rapport à la taille des structures que l'on veut détecter. I_{Hes}^p est singulier sur les petites et les grandes structures mais le contraste entre le fond de l'image et les structures détectées est moins élevé que pour les indicateurs topologiques. Tout cela montre que le choix du modèle (7.1.1)-(7.1.2) est adapté pour la détection de points.

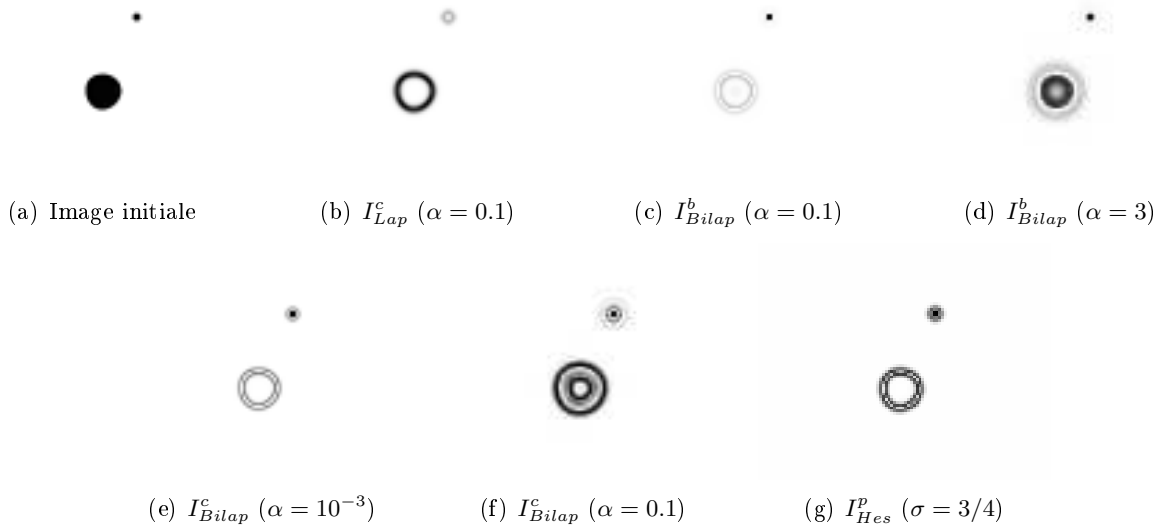


FIGURE 7.8 – Comparaison de I_{Lap}^c (7.4.1), I_{Bilap}^b (7.3.3a), I_{Bilap}^c (7.3.3b) et I_{Hes}^p (7.5.1) sur une image synthétique non bruitée

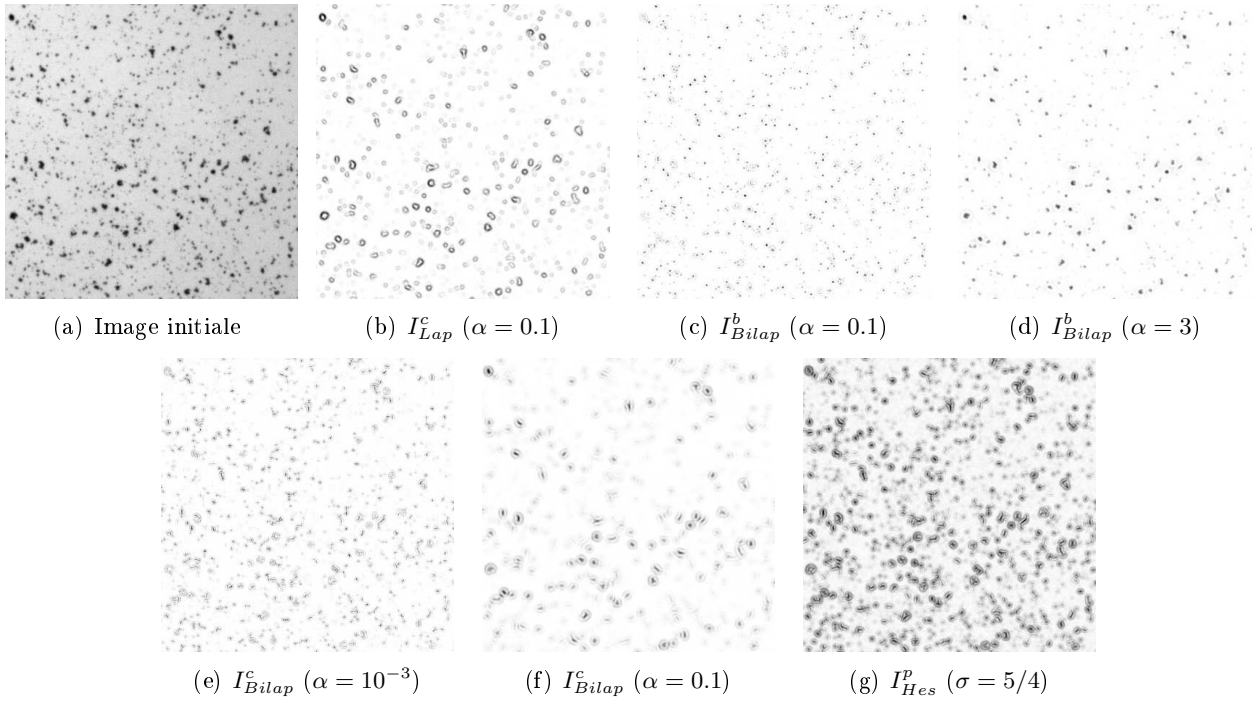


FIGURE 7.9 – Comparaison de I_{Lap}^c (7.4.1), I_{Bilap}^b (7.3.3a), I_{Bilap}^c (7.3.3b) et I_{Hes}^p (7.5.1) sur une image réelle contenant des cellules de tailles différentes

7.8.2 Robustesse des GTs par rapport au bruit gaussien et comparaison

Dans la section précédente, on a vu que la détection de points nécessitait d'utiliser des opérateurs d'ordre deux dans (7.1.1). Ici on va comparer les robustesses de I_{Bilap}^b (7.3.3a), I_{Bilap}^c (7.3.3b) et I_{Hes}^p (7.5.1) par rapport au bruit gaussien. La Figure 7.10 montre les indicateurs I_{Bilap}^b , I_{Bilap}^c et I_{Hes}^p pour une image contenant deux objets circulaires de tailles différentes et avec des niveaux de bruit différents. La Figure 7.11 montre la même chose mais pour une image que l'on a bruitée avec un bruit additif gaussien. Alors que les résultats donnés par I_{Bilap}^b et I_{Bilap}^c dans le cas sans bruit sont similaires, cela n'est plus vrai lorsqu'on ajoute du bruit. En effet si on compare I_{Bilap}^b et I_{Bilap}^c , on remarque que le fait d'augmenter α détruit plus les petites structures pour I_{Bilap}^c que pour I_{Bilap}^b . On règle également la valeur de α par rapport au niveau de bruit : quand le niveau de bruit est élevé, on augmente α dans le but de donner plus d'importance au terme de régularisation dans (7.1.2). Le réglage de ce paramètre par rapport au bruit est très facile. Un calcul de l'estimateur de maximum de vraisemblance a priori (MAP) montre que $\alpha \sim \sigma^2$. L'indicateur I_{Hes}^p est plus sensible au bruit que les indicateurs topologiques. En regardant la Figure 7.10 et la Figure 7.11 l'indicateur I_{Bilap}^b est le plus adapté pour détecter les petites structures isotropes. Cet indicateur est assez robuste par rapport au bruit et les structures sont détectées sans changement de leur forme. En effet on voit que la détection faite par I_{Bilap}^c déforme les structures dans une direction alors que visuellement celles-ci sont quasiment circulaires. De plus on peut remarquer qu'il est plus facile et rapide de calculer I_{Bilap}^b (7.3.3a) que I_{Bilap}^c (7.3.3b) qui est obtenu par minimisation discrète d'une expression sur le vecteur normal \vec{n} au crack.

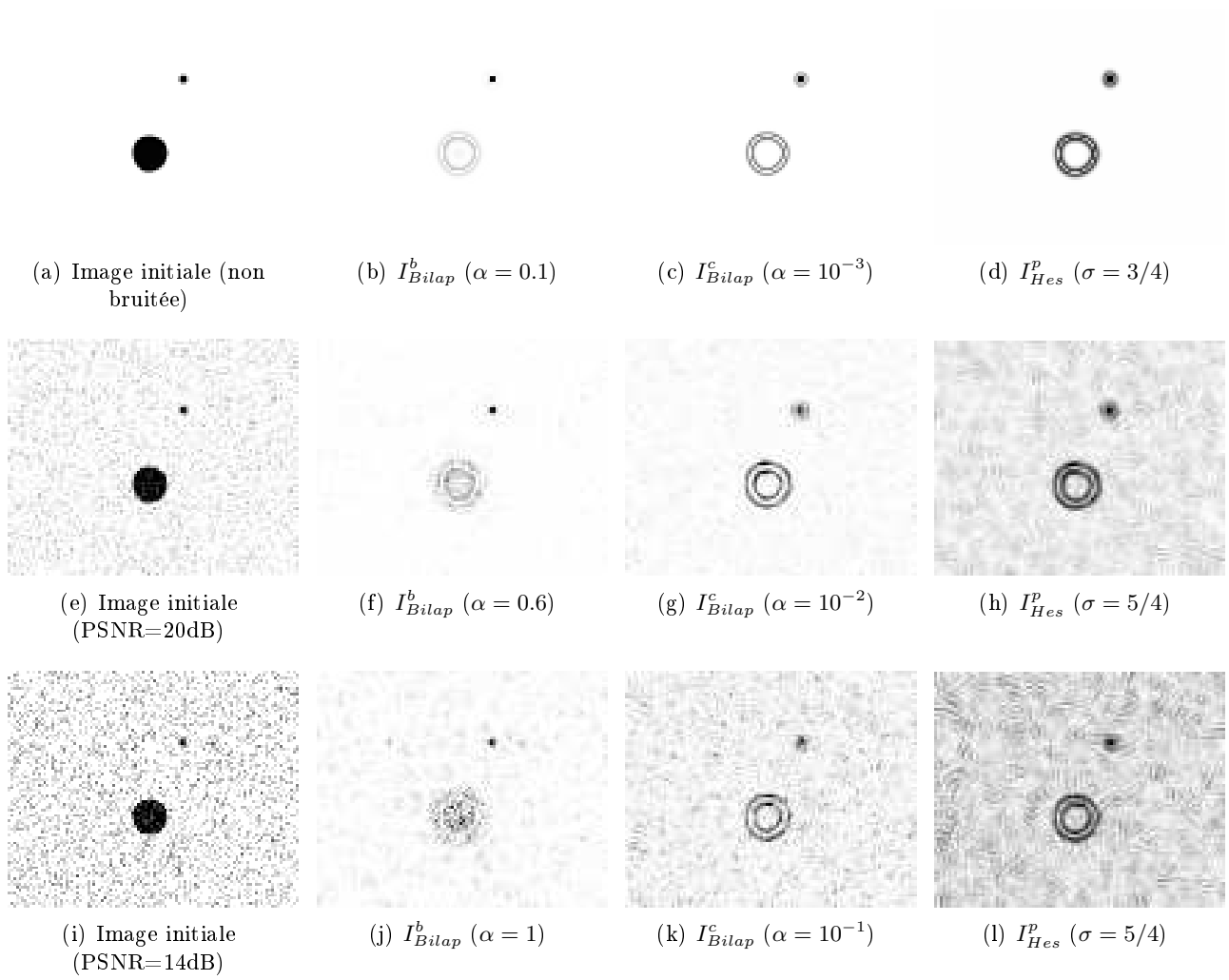


FIGURE 7.10 – Étude de la robustesse par rapport au bruit de I_{Bilap}^b (7.3.3a), I_{Bilap}^c (7.3.3b) et I_{Hes}^p (7.5.1) sur une image synthétique. Chaque ligne correspond à un niveau de bruit et chaque colonne correspond à un indicateur.

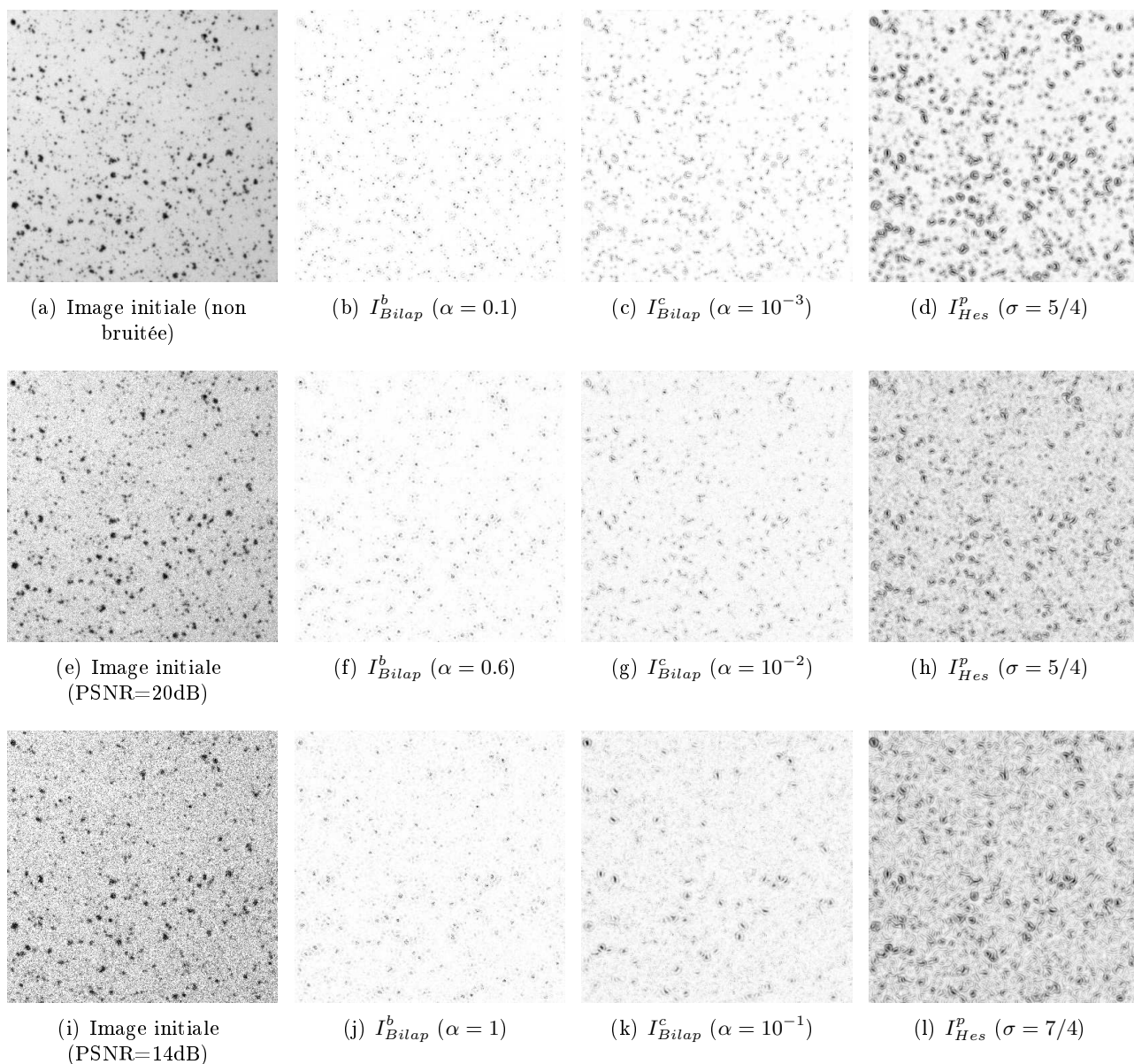


FIGURE 7.11 – Étude de la robustesse par rapport au bruit de I_{Bilap}^b (7.3.3a), I_{Bilap}^c (7.3.3b) et I_{Hes}^p (7.5.1) sur une image réelle non bruitée et sur des versions bruitées. Chaque ligne correspond à un niveau de bruit et chaque colonne correspond à un indicateur.

7.9 Application à des images floues : segmentation et restauration

Dans cette section on présente une manière de discrétiser (7.3.1) et (7.3.2) pour $K \neq I$ et on présente les résultats numériques pour la détection de points et de filaments sur des images contaminées par du flou et du bruit et on termine la section en expérimentant le modèle de restauration donné en (7.4.3).

7.9.1 Discrétisation par FFT

Une propriété non vérifiée par la DCT2 est que la DCT2 d'un produit de convolution n'est pas le produit des DCT2 de chaque facteur. Cependant on sait que cette propriété est garantie par une DCT1. Une

DCT1 à N points est équivalente à une DFT à $2N - 2$ points. Pour fixer les idées en 1D pour $N = 5$, la DCT1 du vecteur $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ est équivalente à la DFT du vecteur $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_3, x_2, x_1]$. Par conséquent, pour implémenter une DCT1 à partir d'une DFT, on doit étendre l'image $N_y \times N_x$ en une image $2(N_y - 1) \times 2(N_x - 1)$. On considère que l'image est un signal $2(N_x - 1)$ -périodique par rapport à x et $2(N_y - 1)$ -périodique par rapport à y . Comme dit en section 7.6.2, l'avantage de ce type d'extension est que l'interpolation trigonométrique du signal est régulière à travers la frontière de la cellule de base et symétrique par construction. Cela est classique en traitement d'image et cela permet d'éviter les effets de bord. Dans la suite on note X le vecteur composé des coefficients de Fourier discrets du vecteur x . Pour éviter le phénomène d'aliasing introduit par l'opérateur bilaplacien, on prend l'espace de fréquences suivant (voir [51] et chapitre 4) : $\Lambda = \left\{ \left(\frac{\pi k_x}{(N_x - 1)}, \frac{\pi k_y}{(N_y - 1)} \right), (k_x, k_y) \in E_x \times E_y \right\}$ avec $E_x = \{0, \dots, N_x - 1, -(N_x - 2), \dots, -1\}$ et $E_y = \{0, \dots, N_y - 1, -(N_y - 2), \dots, -1\}$. On note par le même nom $\Lambda = (\Lambda_x, \Lambda_y)$ la grille $2(N_y - 1) \times 2(N_x - 1)$ associée à l'espace des fréquences. Pour calculer la DFT d'un produit de convolution on peut soit

- étendre le noyau k_{ij} défini sur $\llbracket 0, 2n_x \rrbracket \times \llbracket 0, 2n_y \rrbracket$ centré en (n_x, n_y) en un noyau défini sur $\llbracket 0, 2(N_x - 1) - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, 2(N_y - 1) - 1 \rrbracket$ et centré en $(N_x - 1, N_y - 1)$
- utiliser une FFT pour calculer K_{ij}
- centrer le signal en $(0, 0)$ par translation de vecteur $(N_x - 1, N_y - 1)$: $K_{ij} \leftarrow K_{ij}(-1)^{i+j}$ pour $0 \leq i < 2(N_y - 1)$ et $0 \leq j < 2(N_x - 1)$

soit,

- étendre directement le noyau de convolution discret en un noyau symétrique et périodique défini sur $\llbracket 0, 2(N_x - 1) - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, 2(N_y - 1) - 1 \rrbracket$. Pour fixer les idées, en 1D l'extension du vecteur $[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2]$ est $[x_0, x_1, x_2, 0, \dots, 0, x_{-2}, x_{-1}]$ et centré en $(0, 0)$.
- utiliser une FFT pour calculer K_{ij}

Maintenant, on va calculer la DFT de l'opérateur dual de l'opérateur de convolution. En 1D, si on note k le signal discret N -périodique associé à un opérateur de convolution, l'opérateur dual est défini par le signal

$$k^*(i) = k(N - i) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i < N \quad \text{et} \quad k^*(0) = k(0)$$

La DFT associée à l'opérateur K^* est donc $K_i^* = \overline{K_i}$. Le résultat se généralise facilement en 2D et on déduit que $K_{ij}^* = \overline{K_{ij}}$ (en général k est symétrique et donc $K^* = K$). Pour calculer les solutions des problèmes (7.3.1) et (7.3.2) on utilise l'Algorithme 6

7.9.2 Résultats numériques

Dans cette section on teste les différents détecteurs de filaments et de points ainsi que la restauration utilisant le GT (7.4.3) sur des images floutées et bruitées. On illustre séparément la détection de filaments par I_{Bilap}^c (7.3.3b), la restauration d'images contenant des filaments et des objets de volume non nul en utilisant le modèle topologique (7.4.3), et la détection de points par (7.3.3a).

Détection de filaments et restauration

On teste deux types de floutage : le floutage de type gaussien et celui de type mouvement. Le floutage gaussien est modélisé par une convolution gaussienne d'échelle σ (dans notre exemple $\sigma = 2.1$). Ce

Algorithme 6 Calcul des solutions (7.3.1) et (7.3.2)

1. Soit une image f_{ij} définie pour $(i, j) \in \llbracket 0, N_y - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, N_x - 1 \rrbracket$, on l'étend en une image périodique et symétrique définie sur $\llbracket 0, 2(N_y - 1) - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, 2(N_x - 1) - 1 \rrbracket$.
2. Soit k_{ij} un noyau de convolution (représentant le flou), défini pour $(i, j) \in \llbracket 0, 2n_y \rrbracket \times \llbracket 0, 2n_x \rrbracket$, on utilise la procédure décrite précédemment en section 7.9.1 pour calculer K_{kl} pour $0 \leq k < 2(N_y - 1)$ et $0 \leq l < 2(N_x - 1)$.
3. Utiliser une FFT pour calculer F_{kl} et $(k, l) \in \llbracket 0, 2(N_y - 1) - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, 2(N_x - 1) - 1 \rrbracket$.
4. Soit $\Lambda = (\Lambda_x, \Lambda_y)$, la grille associé à l'espace des fréquences décrit précédemment en section 7.9.1, on calcule :

$$\Delta_{kl}^2 = \Lambda_{x_{kl}}^4 + 2\Lambda_{x_{kl}}^2\Lambda_{y_{kl}}^2 + \Lambda_{y_{kl}}^4$$

$$U_{kl} = \frac{\overline{K_{kl}}F_{kl}}{|K_{kl}|^2 + \alpha\Delta_{kl}^4} \text{ et } V_{kl} = \frac{\overline{K_{kl}}(2K_{kl}U_{kl} - F_{kl})}{|K_{kl}|^2 + \alpha\Delta_{kl}^4}$$

5. Utiliser une FFT inverse pour calculer u_{ij} et v_{ij} pour $(i, j) \in \llbracket 0, 2(N_y - 1) - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, 2(N_x - 1) - 1 \rrbracket$.
 6. On restreint u et v à la grille $\llbracket 0, N_y - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, N_x - 1 \rrbracket$
-

type de flou peut être causé par un mauvais réglage des lentilles. Le floutage de type mouvement modélise les effets d'un mouvement de la cible ou de la caméra. L'image associée est calculée par convolution avec un noyau symétrique dépendant de la longueur d'étalement du flou (comptée en nombre de pixels et généralement un nombre impair) et de l'angle avec l'axe horizontal. Pour plus de détails sur les origines de ces différents types de flou on réfère le lecteur à [71]. Dans les exemples de cette section, le floutage de type mouvement est calculé en utilisant la fonction Matlab *fspecial*. Sur les Figure 7.12 et Figure 7.13 on compare I_{Bilap}^c (7.3.3b) et I_{Hes}^f (7.5.1) sur une image floutée et bruitée. Pour ce qui est du floutage de type gaussien les effets sont isotropes tandis que pour le floutage de type mouvement la partie perpendiculaire à la direction du mouvement (ici la partie horizontale) est la plus dégradée par le flou. On remarque que I_{Bilap}^c est toujours efficace sur des images floues et bruitées mais que I_{Hes}^f ne permet pas de détecter des filaments dégradés de la sorte.

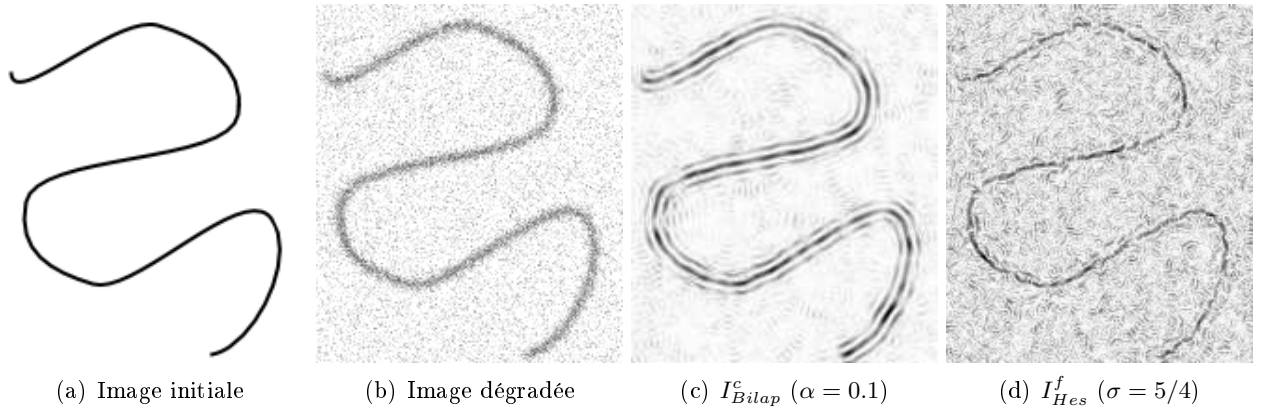


FIGURE 7.12 – Comparaison entre I_{Bilap}^c (7.3.3b) et I_{Hes}^f (7.5.1) pour une image floutée par convolution gaussienne ($\sigma = 2.1$) et bruitée par du bruit gaussien (PSNR=15.7dB).

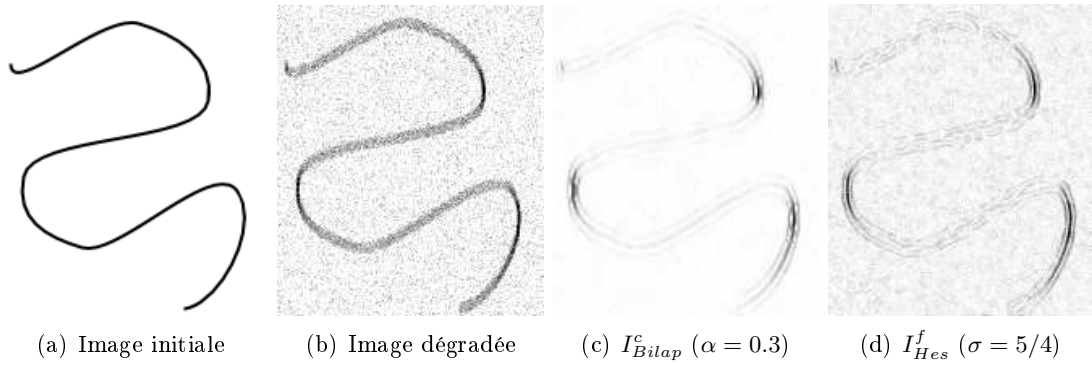


FIGURE 7.13 – Comparaison entre I_{Bilap}^c (7.3.3b) et I_{Hes}^f (7.5.1) pour une image floutée par un floutage de type mouvement ($\theta = 90^\circ$, longueur=7) et bruitée par du bruit gaussien (PSNR=15.7dB)

Sur les Figure 7.14 et Figure 7.15, on compare la restauration (7.4.3) avec $\chi_\eta = \chi_\eta^{Bilap}$ à une restauration de type TV (voir chapitre 1 et [76]) pour des images bruitées et respectivement floutées par convolution gaussienne et de type mouvement. On voit que (7.4.3) restaure bien le filament et que la version restaurée par (7.4.3) est plus proche de l'image à retrouver que la version restaurée en utilisant une méthode TV. Plus particulièrement le filament est assez bien préservé par le modèle (7.4.3) et dégradé par le modèle TV. De plus le temps de calcul pour (7.4.3) (5 secondes) est plus court que pour le modèle TV (20 secondes) pour une image 170×200 .

Remarque 7.9.1. On voit sur la Figure 7.14 que les parties du filament très courbées ne sont pas parfaitement restaurées. En effet si le filament est très courbé (relativement à la résolution de l'image), sa tangente n'est pas une bonne approximation. Ainsi on peut augmenter la résolution de l'image en interpolant les différentes données du problème (7.4.3) (le champ de vecteurs tangents, l'image et l'indicateur I_{Bilap}^c) sur la nouvelle grille en utilisant par exemple une interpolation bilinéaire (ou bien par splines). Il suffit ensuite de résoudre le problème (7.4.3) sur la nouvelle grille et projeter la solution sur le maillage initial en moyennant.

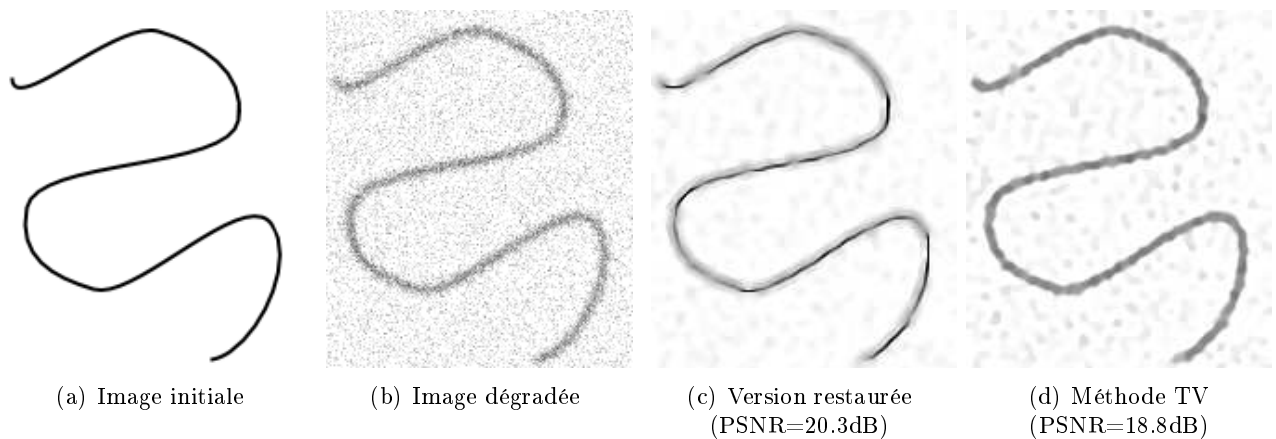


FIGURE 7.14 – Comparaison entre la restauration (7.4.3) ($\beta = 1$) et le modèle TV pour une image synthétique floutée par convolution gaussienne ($\sigma = 2.1$) et bruitée par du bruit gaussien (PSNR=15.7dB)

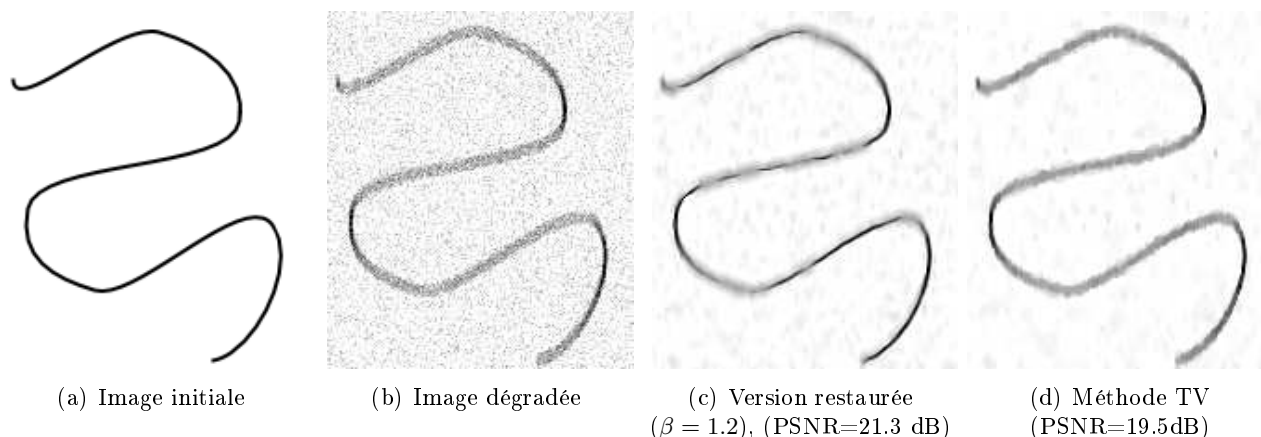


FIGURE 7.15 – Comparaison entre la restauration (7.4.3) et le modèle TV pour une image synthétique floutée par convolution de type mouvement ($\theta = 90^\circ$, longueur=7) et bruitée par du bruit gaussien (PSNR=15.7dB)

Les Figure 7.16 et Figure 7.17 montrent les profils 1D de l'image à retrouver, de ses versions dégradées (floutée et floutée + bruitée), de sa version restaurée (7.4.3) avec $\chi_\eta = \chi_\eta^{Bilap}$ et de I_{Bilap}^c (7.3.3b). On voit que la version restaurée (7.4.3) est assez proche de l'image à retrouver et que I_{Bilap}^c détecte assez bien le filament. Cependant on observe que I_{Bilap}^c présente deux pics de part et d'autre du filament. On peut expliquer ce phénomène par deux raisons. Tout d'abord d'un point de vue théorique si on représente en 1D un filament par la fonction $f(x) = e^{-x^2/\eta^2}$, on remarque que la courbure est maximale au point $x = 0$ ($f''(0) = -\frac{2}{\eta^2}$) et que celle-ci a deux maxima locaux aux points $x^\pm = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\eta$ ($f''(x^\pm) = \frac{4}{\eta^2}e^{-3/2}$). D'un point de vue numérique, la convolution est implémentée par transformée de Fourier discrète et on sait que le fait de tronquer la somme d'une série de Fourier a pour effet de générer de l'aliasing dont l'effet est accentué par la convolution qui introduit une multiplication dans le domaine fréquentiel.

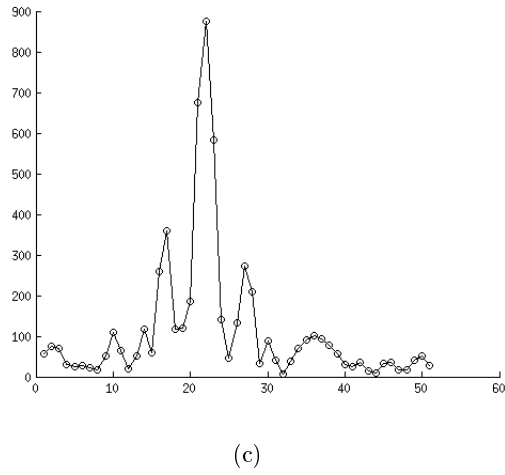
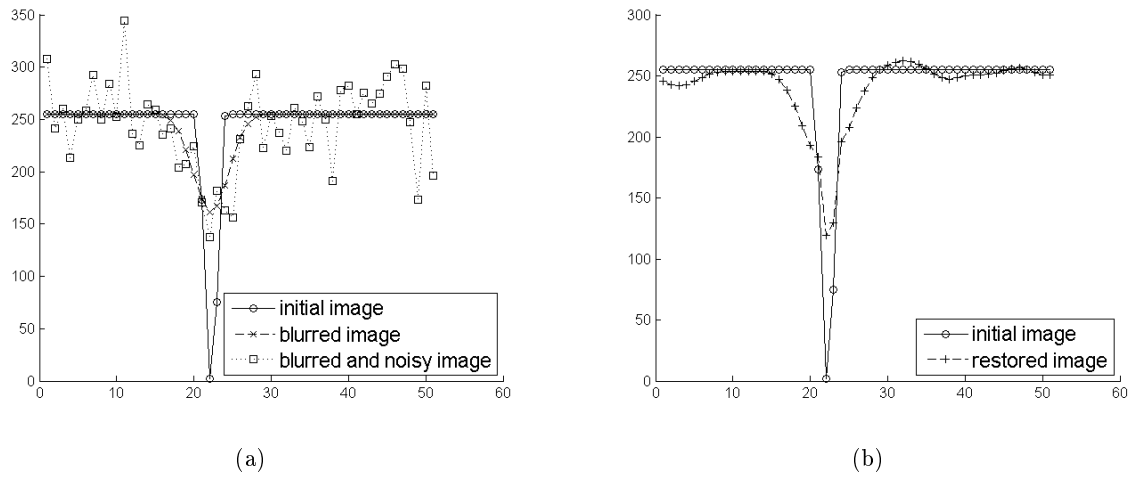


FIGURE 7.16 – (a) Une coupe transverse illustrant les effets d'un floutage gaussien ($\sigma = 2.1$) et d'un bruit gaussien (PSNR=15.7dB), (b) l'image initiale et sa version restaurée par le GT (7.4.3) ($\gamma = 1$) et (c) I_{Bilap}^c (7.3.3b) pour $\alpha = 0.1$

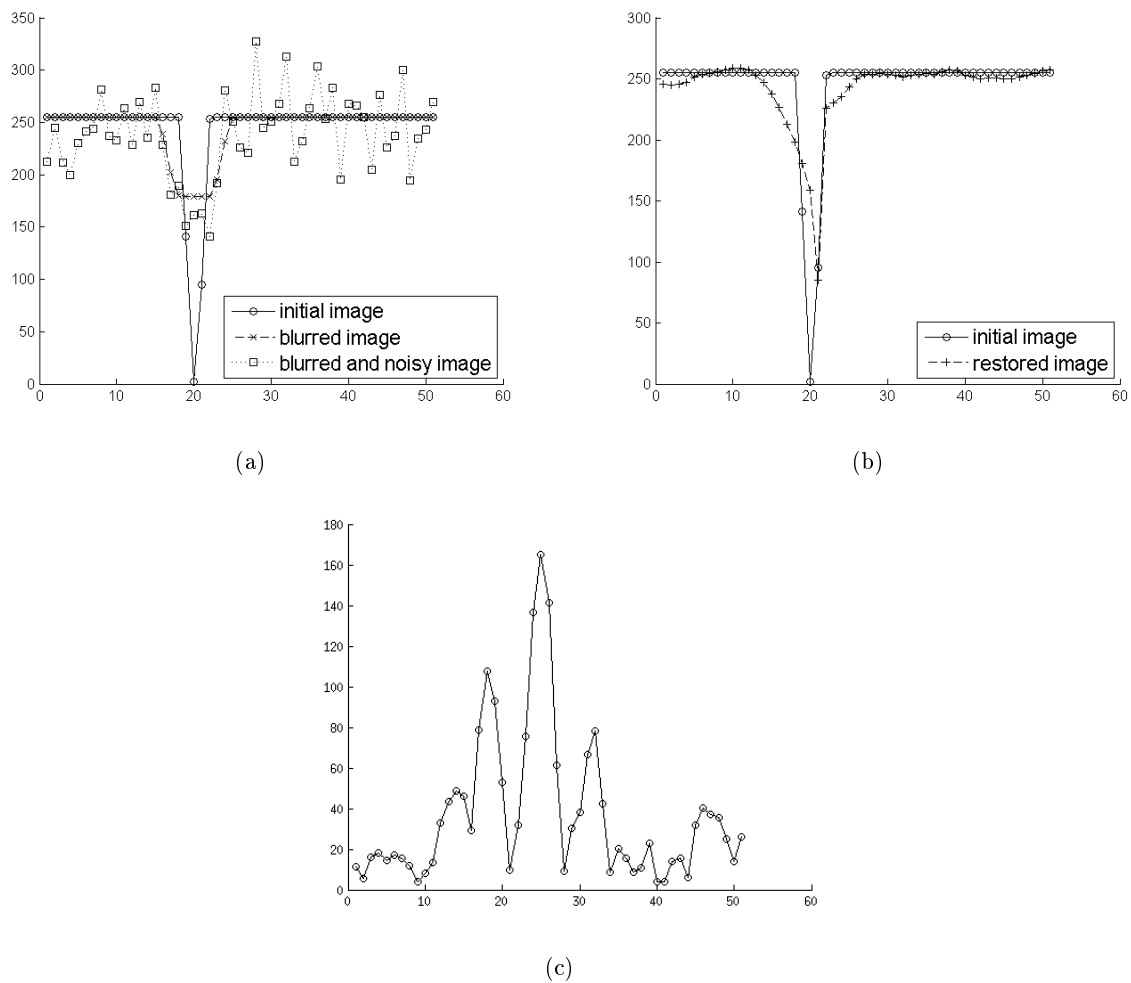


FIGURE 7.17 – (a) Une coupe transverse illustrant les effets d’un floutage de type mouvement ($\theta = 90^\circ$, longueur=7) et d’un bruit gaussien (PSNR=15.7dB), (b) l’image initiale et sa version restaurée (7.4.3) ($\gamma = 1$) et (c) I_{Bilap}^c (7.3.3b) pour $\alpha = 0.7$

Finalement, dans la Figure 7.18 on illustre la restauration par le GT (7.4.3) pour différents choix de χ_η pour une image floutée par convolution gaussienne et bruitée par du bruit gaussien et contenant des filaments et des objets de volume non nul. On voit que si on prend $\chi_\eta = \chi_\eta^{Lap}$ alors les contours sont préservés mais les filaments sont dégradés. Inversement, si on prend $\chi_\eta = \chi_\eta^{Bilap}$, alors le filament est assez bien restauré mais les contours sont lissés. Finalement en prenant $\chi_\eta = \min(\chi_\eta^{Bilap}, \chi_\eta^{Lap})$, les filaments et les contours sont tous deux bien restaurés. Dans toutes les expériences le choix des seuils δ_1 et δ_2 définissant χ_η sont tels que 3% des points appartiennent à E_{δ_1} et 7% sont dans E_{δ_2} .

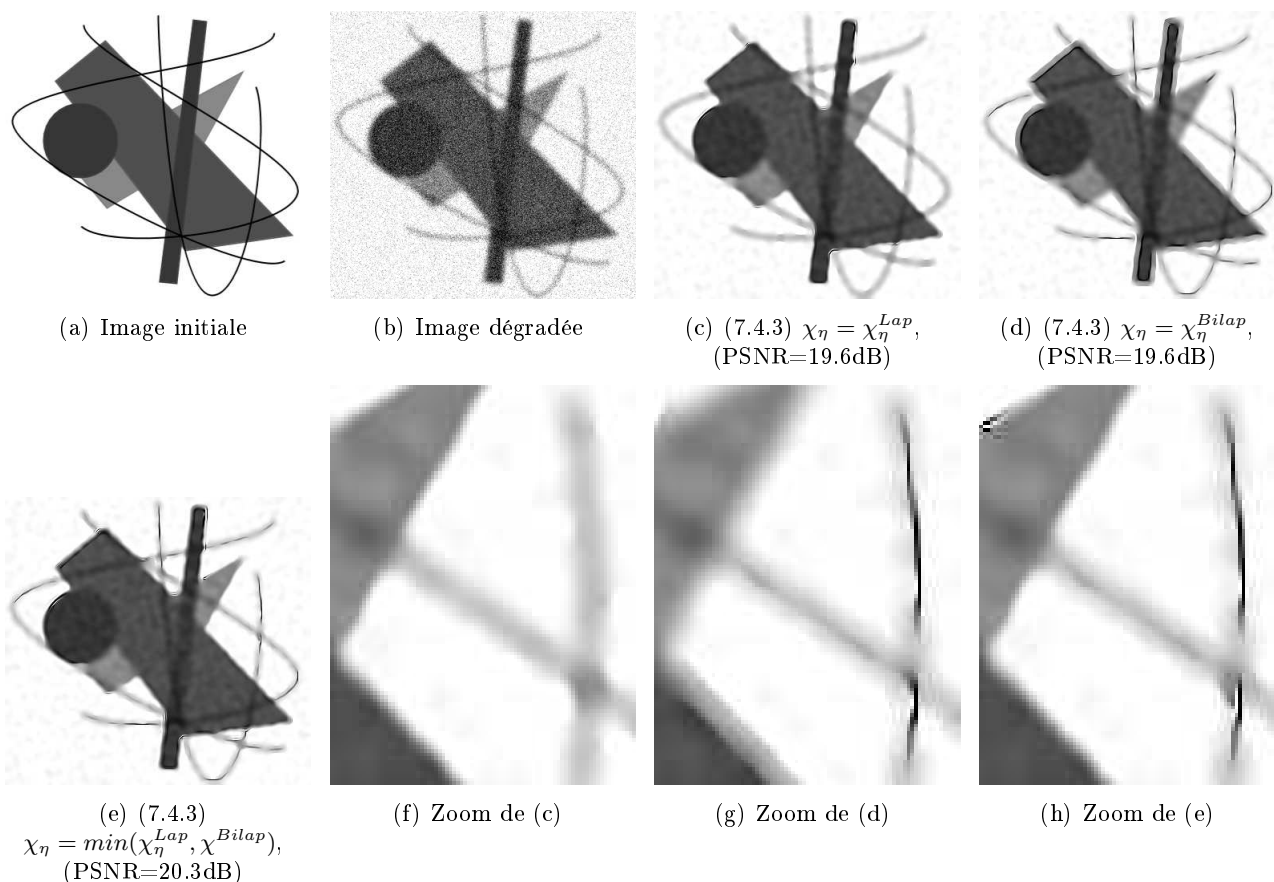


FIGURE 7.18 – Comparaison entre la restauration (7.4.3) ($\beta = 2$) avec différents choix de χ_η pour une image floutée par convolution gaussienne ($\sigma = 3$) et bruitée par du bruit gaussien (PSNR=16dB)

Détection de points

Dans la Figure 7.19 et la Figure 7.20 on compare I_{Bilap}^b (7.3.3a) à I_{Hes}^p (7.5.1) sur une image simple bruitée par du bruit gaussien et floutée par convolution gaussienne. On voit que I_{Bilap}^b détecte assez bien la petite structure isotrope qui est quasiment non visible sur l'image dégradée. On constate que I_{Hes}^p n'est pas efficace sur ce type d'image.

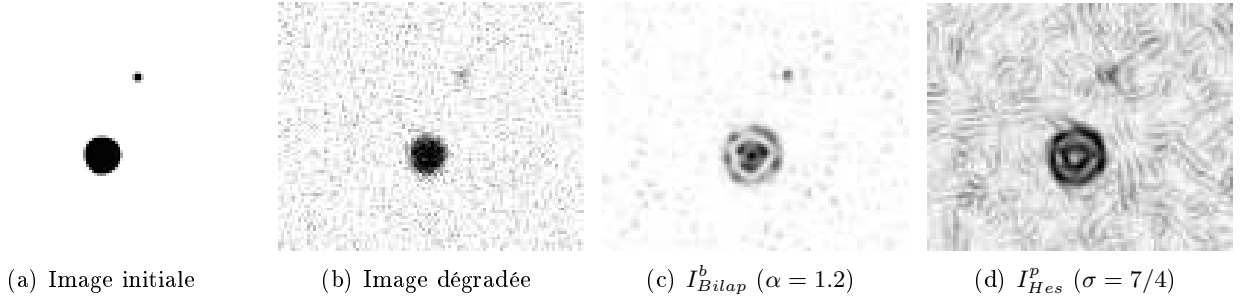


FIGURE 7.19 – Détection de points par l'indicateur topologique I_{Bilap}^b (7.3.3a) et l'indicateur I_{Hes}^p (7.5.1) sur une image synthétique floutée par convolution gaussienne ($\sigma = 1.5$) et bruitée par du bruit gaussien (PSNR=15.7dB)

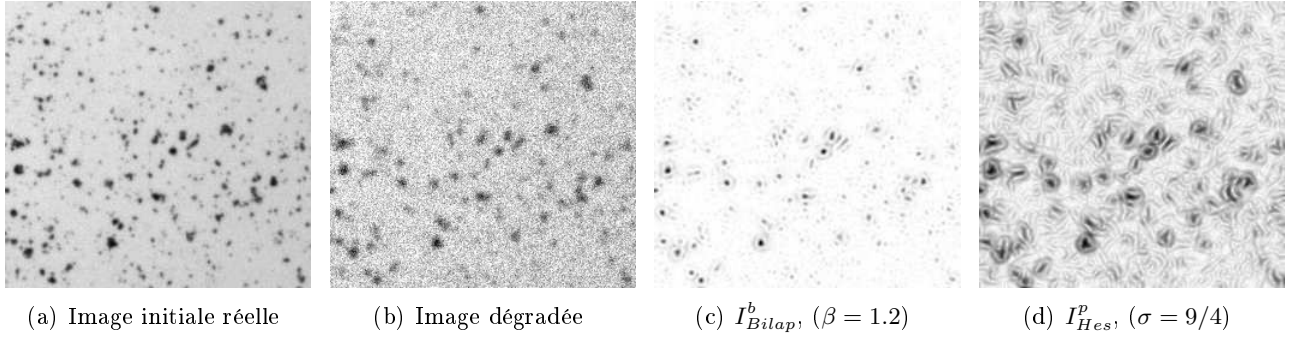


FIGURE 7.20 – Détection de points par l'indicateur topologique I_{Bilap}^b (7.3.3a) et l'indicateur I_{Hes}^p (7.5.1) sur une image réelle floutée par convolution gaussienne ($\sigma = 1.5$) et bruitée par du bruit gaussien (PSNR=18dB)

7.10 Application à des images 3D

Dans le chapitre 6 le gradient topologique associé au problème (7.1.5) et à la fonction coût (7.1.1) est explicitement donné en 2D et en 3D pour des domaines respectivement fissurés par un crack rectiligne et un crack plan et circulaire. En 3D, le problème est plus complexe qu'en 2D. En effet les expressions des conditions aux bords associées au problème (5.2.3) sont (voir section 6.3 chapitre 6)

$$B_2(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} n_i n_j$$

$$B_1(u) = \text{div}_s \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} n_i \vec{e}_j \right) + \frac{\partial^3 u}{\partial x_i^2 \partial x_j} n_j$$

où on adopte la notation avec indices répétés et où div_s est la divergence surfacique définie par $\text{div}_s(\vec{q}) = P : \text{Jac}(\vec{q})$; P est le projecteur $P_{ij} = (\delta_{ij} - n_i n_j)$ et $\text{Jac}(\vec{q})$ la matrice Jacobienne de $\vec{q}(x)$. $A : B$ est le produit scalaire usuel de deux matrices. Pour plus de détails on renvoie au chapitre 6. On définit le crack de normale $\vec{n} = (0, 0, 1)^T$ par :

$$\sigma = \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta), 0), 0 \leq r < 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

Un crack de normale \vec{n} quelconque s'écrit de la même manière dans la base orthonormée $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{n})$ où (\vec{v}, \vec{w}) est une base de \vec{n}^\perp . Ainsi, le gradient topologique pour un domaine fissuré par un crack circulaire plan et de normale \vec{n} est :

$$\mathcal{I}_c(x_0, \vec{n}) = -\frac{4\pi}{3} \nabla^2 u_0(x_0)(\vec{n}, \vec{n}) \nabla^2 v_0(x_0)(\vec{n}, \vec{n})$$

où u_0 et v_0 sont toujours données respectivement par (7.3.1) et (7.3.2). On continue de noter I_{Bilap}^c l'indicateur topologique associé :

$$I_{Bilap}^c(x_0) = \max_{\|\vec{n}\|=1} |\mathcal{I}_c(x_0, \vec{n})| \quad (7.10.1)$$

Dans la Figure 7.21 on illustre I_{Bilap}^c sur deux images bruitées. On précise que les résultats sont obtenus en utilisant des DCTs 3D (et DCTs 3D inverses) dans l'Algorithme 4 (voir section 7.6.2). Les images contiennent deux types de structures : un filament de dimension 1 en 3D (modélisé par un cylindre de rayon 3 ou 4 pixels et d'axe (Oz)) et des surfaces de dimension 2 en 3D (modélisées par deux sphères concentriques d'épaisseur 3 ou 4 pixels). On note $C = (x_c, y_c, z_c)$ les coordonnées du centre des sphères. La Figure 7.22 montre une coupe 2D dans le plan $z = z_c$ de l'image bruitée et de I_{Bilap}^c ; la Figure 7.23 montre une coupe 1D selon la droite $z = z_c$ et $y = y_c$. On voit que les filaments et les surfaces en 3D sont bien détectés par l'indicateur topologique I_{Bilap}^c (7.10.1).

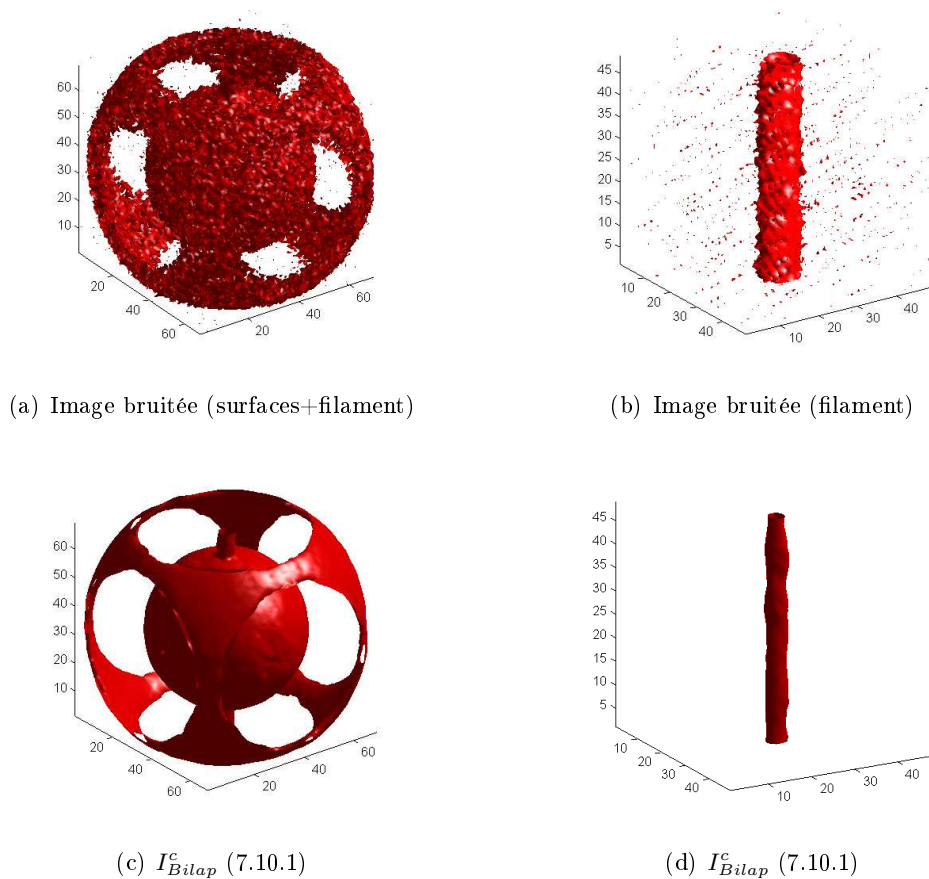
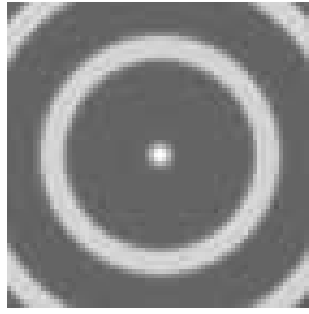
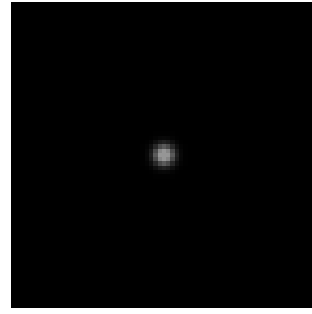


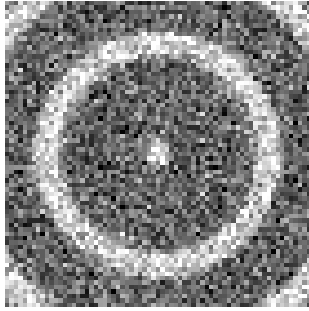
FIGURE 7.21 – Iso-surfaces de I_{Bilap}^c (7.10.1) ($\alpha = 0.25$) pour deux images bruitées par du bruit gaussien (PSNR=16dB)



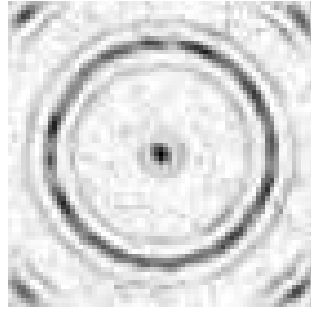
(a) Image initiale



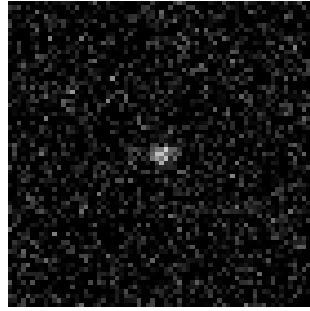
(b) Image initiale



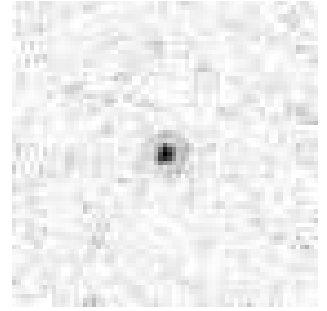
(c) Image bruitée



(d) $I_{Bilap}^c (\alpha = 0.25)$

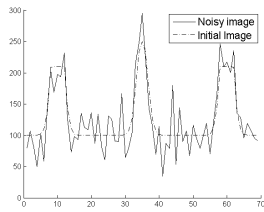


(e) Image bruitée

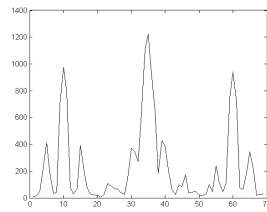


(f) $I_{Bilap}^c (\alpha = 0.25)$

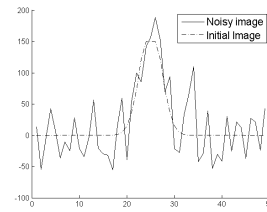
FIGURE 7.22 – Une coupe 2D ($z = z_c$) de I_{Bilap}^c (7.10.1) pour deux images bruitées par du bruit gaussien (PSNR=16dB).



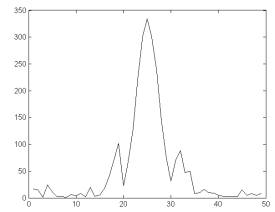
(a) Image bruitée



(b) $I_{Bilap}^c (\alpha = 0.25)$



(c) Image bruitée



(d) $I_{Bilap}^c (\alpha = 0.25)$

FIGURE 7.23 – Une coupe 1D ($y = y_c$) et ($z = z_c$) de I_{Bilap}^c (7.10.1) pour deux images bruitées par du bruit gaussien (PSNR=16dB) .

Remarque 7.10.1. *On peut montrer que I_{Bilap}^c (7.10.1) détecte aussi des points en 3D (modélisés par des petites sphères). Seulement, l'indicateur topologique le mieux adapté pour ce type de structures est le GT associé à un domaine perforé. Son calcul est très technique et il sera fait dans de prochains travaux.*

Troisième partie

Généralisation sur l'ordre du modèle

Chapitre 8

Généralisation : calcul du gradient topologique pour une équation d'ordre $2m$ utilisant l'itéré m -ième du laplacien

Résumé. Pour la détection de contours, dans les chapitres 1, 2, 4 et dans Belaid et al. [24] on a utilisé la fonction coût $J_\Omega(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2$ et une EDP basée sur l'opérateur de Laplace avec conditions de Neumann. En détection de structures fines, dans les chapitres 6 et 7 le modèle utilisé est basé sur la fonction coût $J_\Omega(u) = \int_\Omega |\nabla^2 u|^2$ et sur une EDP d'ordre 4 liée à l'opérateur bilaplacien avec conditions de Neumann. On peut tout d'abord se demander quels types de structures sont détectés par des opérateurs d'ordres supérieurs et s'il est techniquement possible de calculer le gradient topologique associé à des ordres supérieurs. Pour répondre à cette question, on commence par étudier en 1D le comportement des dérivées m -ième des versions régularisées de discontinuités de type contour (avec saut d'intensité) et de type filament (sans saut d'intensité à travers la structure). On montre que la minimisation dans $H^m(\Omega)$ de $J_\Omega(u) = \int_\Omega |\nabla^m u|^2$ mène à une EDP d'ordre $2m$ utilisant l'opérateur Δ^m (itéré m -ième du laplacien) et m conditions aux bords de type Neumann dont on explicite la valeur. Ensuite après avoir présenté le modèle que l'on va étudier, on calcule la solution fondamentale de l'opérateur Δ^m . On introduit un modèle adjoint puis un problème extérieur comme dans les cas $m = 1$ et $m = 2$. On montre qu'on peut écrire ce dernier comme la somme de m potentiels multicouches dépendant de m densités. Par des propriétés de saut que l'on démontre, on ramène le calcul du gradient topologique pour un domaine fissuré par un crack, à celui d'une seule densité non nulle. On explicite le gradient topologique en fonction de m et des modèles direct et adjoint définis sur le domaine non perturbé. Les calculs sont assez techniques et certains sont détaillés en annexe.

Introduction

Dans ce chapitre on étudie le GT associé à une fonction coût d'ordre m et à une EDP d'ordre $2m$ utilisant l'itéré m -ième du laplacien. Plus précisément, soit $m \in \mathbb{N}^*$, la fonction coût utilisée est $J_\Omega(u) = \int_\Omega |\nabla^m u|^2$ et u_Ω est la solution de l'EDP associée au problème de minimisation $\min_{H^m(\Omega)} \alpha J_\Omega(u) + \|u - f\|_{L^2(\Omega)}^2$; $f \in L^2(\Omega)$ est l'image observée éventuellement dégradée par du bruit gaussien et $\alpha > 0$ est un paramètre à régler. Pour savoir quelles structures sont chargées par cette fonction coût, on regarde en 1D comment se comporte la dérivée m -ième d'une régularisation d'une structure fine et de type contour. On rappelle qu'une discontinuité de type contour est une discontinuité avec saut tandis qu'une discontinuité de type structure fine est une discontinuité sans saut à travers la structure (voir Figure 5.1). Concrètement en 1D on peut modéliser un contour par la fonction Heaviside que l'on note H . On peut approcher H par la

suite de fonctions $H_\eta(x) = \varphi\left(\frac{x}{\eta}\right) \chi_{\{-\eta \leq x \leq \eta\}} + \chi_{\{x > \eta\}}$ lorsque $\eta \rightarrow 0$ avec $\varphi(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^4 a_{2k+1} x^{2k+1}$ et les a_k choisis de telle façon que $\varphi^{(k)}(1) = 0$ pour $k \in \llbracket 1 \dots 4 \rrbracket$ et $\varphi(1) = 1$. On peut voir sur la Table 8.1 que les dérivées d'ordre impair sont extrémales en 0 et que les dérivées d'ordre pair sont extrémales de part et d'autre de 0. On peut généraliser l'approche en 2D et 3D en raisonnant sur des coupes transverses aux discontinuités et montrer que les contours sont chargées par des opérateurs d'ordre impair tandis que les opérateurs d'ordre pair sont singuliers de part et d'autre de ces structures. Par exemple on a vu en première partie de cette thèse et en deuxième partie (voir Figure 7.3) que le gradient permet de détecter les contours et la hessienne est singulière de chaque côté de ce type de discontinuité. De la même manière, on peut modéliser une structure fine (filament ou point en 2D) par la fonction f valant 1 en 0 et 0 ailleurs. On peut ensuite approcher f par $f_\eta(x) = \varphi\left(\frac{x}{\eta}\right)$ avec $\varphi(x) = e^{-x^2}$ lorsque $\eta \rightarrow 0$. On remarque sur la Table 8.1 que les dérivées d'ordre pair sont singulières en 0, tandis que les dérivées d'ordre impair sont extrémales en deux points de part et d'autre de 0 et nulles en 0. Par le même raisonnement que pour les contours, on peut généraliser cette observation en 2D et 3D : les structures fines (filaments, points en 2D) sont chargées par des opérateurs d'ordre pair et les opérateurs d'ordre impair sont extrémaux autour de celles-ci. Par exemple on a vu en deuxième partie (chapitre 5), que les filaments et les points en 2D sont détectés par la hessienne évaluée dans la direction de la discontinuité et que le gradient est singulier autour des structures fines. Dans ce qui suit nous allons calculer le GT pour une fonction coût d'ordre m et une équation d'ordre $2m$ pour un domaine 2D fissuré. On définit le domaine perturbé par $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{x_0 + \epsilon \sigma}$ où $\sigma(\vec{n})$ est le crack centré 0 et de normale \vec{n} . On suppose que la perturbation ne touche pas le bord, et pour simplifier, on met l'origine du repère au centre du crack de sorte que $x_0 \equiv 0$.

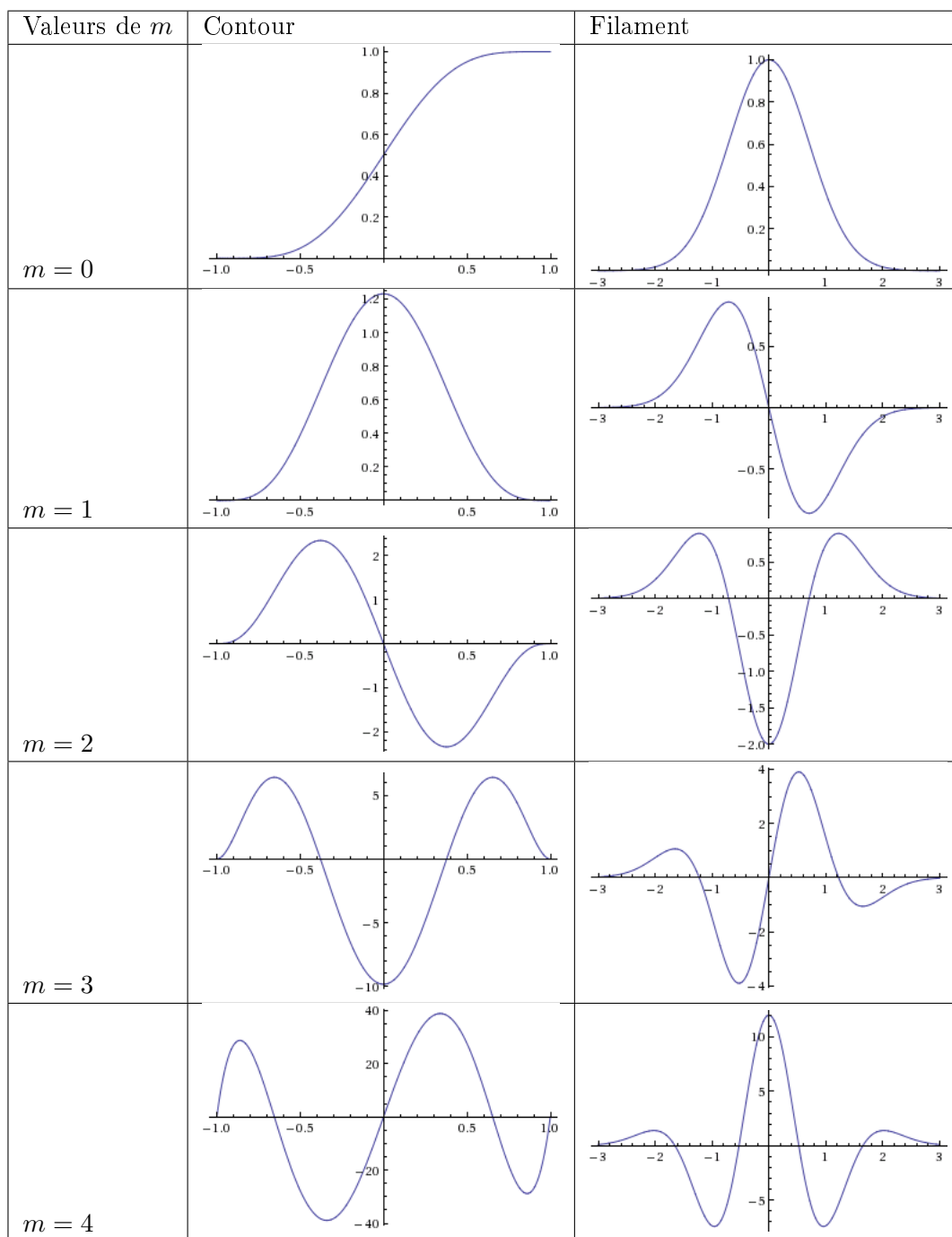


TABLE 8.1 – Étude 1D des dérivées d'ordre $m \in \llbracket 0.4 \rrbracket$ d'une régularisation d'un filament et d'un contour

On considère la fonction coût $J_\Omega : H^m(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ suivante

$$\begin{aligned}
 J_\Omega(u) &= \int_\Omega \sum_{k=0}^m C_m^k \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_1^k \partial x_2^{m-k}} \right)^2 \\
 &= \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla^m u|^2
 \end{aligned} \tag{8.0.1}$$

On introduit la fonction $u_\Omega \in H(\Omega)$ solution du problème variationnel suivant

$$u_\Omega = \min_{u \in H(\Omega)} J_\Omega(u) + \|u - f\|_{0,\Omega}^2 \quad (8.0.2)$$

où $H(\Omega)$ est l'espace de Hilbert défini par $H(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \nabla^m u \in L^2(\Omega)\}$. L'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (prérequis) permet de dire que $H(\Omega) = H^m(\Omega)$.

On définit la forme bilinéaire $b_\Omega(u, v) = DJ_\Omega(u).v$ de $H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$b_\Omega(u, v) = \int_\Omega \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{\partial^m u}{\partial x_1^k \partial x_2^{m-k}} \frac{\partial^m v}{\partial x_1^k \partial x_2^{m-k}} \quad (8.0.3)$$

On note $J_\epsilon(u) = J_{\Omega_\epsilon}(u)$ et on définit sur $H^m(\Omega_\epsilon)$ les formes bilinéaire $a_\epsilon(u, v)$ et linéaire $l_\epsilon(v)$ par :

$$\begin{aligned} a_\epsilon(u, v) &= b_{\Omega_\epsilon}(u, v) + \int_{\Omega_\epsilon} uv \\ l_\epsilon(v) &= \int_{\Omega_\epsilon} fv \end{aligned} \quad (8.0.4)$$

On introduit le problème (\mathcal{P}_ϵ^c) de solution $u_\epsilon \in H^m(\Omega_\epsilon)$ suivant :

$$a_\epsilon(u_\epsilon, v) = l_\epsilon(v) \quad \forall v \in H^m(\Omega_\epsilon), \quad (\mathcal{P}_\epsilon^c) \quad (8.0.5)$$

On va noter dans ce qui suit $u_{k,l} = \frac{\partial^{k+l} u}{\partial x_1^k \partial x_2^l}$ pour $u \in H^m(\Omega)$ et $k+l \leq m$, et on va commencer par montrer que l'équation d'Euler associée au problème de minimisation dans $H^m(\Omega)$ (8.0.2) fait intervenir l'itéré m -ième du laplacien Δ^m et m opérateurs différentiels définissant m conditions aux bords que l'on va expliciter.

8.1 Intégration par parties de la forme bilinéaire

Théorème 8.1.1. *Soit $b_\Omega(u, v)$ la forme bilinéaire sur $H^m(\Omega)$ définie en (8.0.3), on a*

$$b_\Omega(u, v) = (-1)^m \int_\Omega \Delta^m uv + \sum_{i=m}^{2m-1} \int_{\partial\Omega} A_i(u) \frac{\partial^{2m-1-i} v}{\partial n^{2m-1-i}} d\sigma$$

où $A_i : H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-i-1/2}(\partial\Omega)$ est l'opérateur linéaire d'ordre i pour $i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket$ défini par

$$\begin{aligned} A_i(u) &= \sum_{k=0}^m C_m^k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \sum_{\substack{0 \leq p \leq k-j-1 \\ 0 \leq q \leq m-k \\ p+q=i-m-j}} (-1)^q C_{k-j-1}^p C_{m-k}^q \frac{\partial^{p+q}}{\partial \tau^{p+q}} \left(n_1^{k-j-p+q} n_2^{m-k-q+p} u_{k+j, m-k} \right) \\ &+ \sum_{0 \leq k+l \leq i-m} C_m^k (-1)^{i-m} C_{m-k-l-1}^{i-m-(k+l)} \frac{\partial^{i-m-(k+l)}}{\partial \tau^{i-m-(k+l)}} \left(n_1^{i-m-(k+l)} n_2^{2m-i} u_{2k, m-k+l} \right) \end{aligned}$$

avec la convention $\sum_{k=0}^{-1} = 0$. De plus en posant $\widetilde{A}_i = A_{i+m}$, dans le cas du crack $\sigma = \{(s, 0), -1 < s < 1\}$ on a les valeurs des \widetilde{A}_{2i} et \widetilde{A}_{2i+1} suivantes :

- Pour $i \in \llbracket 0, \lfloor \frac{m-1}{2} \rrbracket \rrbracket$

$$\widetilde{A}_{2i} = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} C_m^{2k} \left(\sum_{j=0}^{2k-1} C_{2k-j-1}^{k+i-j} C_{m-2k}^{i-k} \right) u_{2(k+i), m-2k} + \sum_{k=0}^{2i} C_m^k u_{2k, m-2k+2i}$$

- Pour $i \in \llbracket 0, \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor \rrbracket$:

$$\widetilde{A_{2i+1}} = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k+1} C_m^{2k+1} \left(\sum_{j=0}^{2k-1} C_{2k-j}^{k+i-j+1} C_{m-2k-1}^{i-k} \right) u_{2(k+i+1), m-(2k+1)} - \sum_{k=0}^{2i+1} C_m^k u_{2k, m-2k+2i+1}$$

Remarque 8.1.2. Pour $m = 1$, avec ces notations on a $\widetilde{A_0} = A_1 = \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x_2}$.

Pour $m = 2$, on a (voir les notations [35, 15] et chapitre 6 pour $\nu = 0$), $\widetilde{A_0} = A_2 = B_2$ et $\widetilde{A_1} = A_3 = -B_1$. Dans le cas d'un crack rectiligne $\sigma = \{(s, 0), -1 < s < 1\}$, pour $m \geq 1$, on a $\widetilde{A_0} = A_m = \frac{\partial^m}{\partial n^m} = \frac{\partial^m}{\partial x_2^m}$, et les $\widetilde{A_i}$ sont des opérateurs différentiels homogènes d'ordre $m + i$.

Démonstration. Avec les notations de l'énoncé du théorème, on réécrit $b_\Omega(u, v)$:

$$b_\Omega(u, v) = \sum_{k=0}^m C_m^k \int_{\Omega} u_{k, m-k} v_{k, m-k} \quad (8.1.1)$$

Soit $k \geq 1$, en intégrant par parties k fois par rapport à x_1 on obtient :

$$\int_{\Omega} u_{k, m-k} v_{k, m-k} = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\partial\Omega} (-1)^j \int_{\partial\Omega} n_1 u_{k+j, m-k} v_{k-j, m-k} + (-1)^k \int_{\Omega} u_{2k, m-k} v_{0, m-k}$$

Ensuite on suppose $k \leq m - 1$, on intègre $m - k$ fois par rapport à x_2 :

$$\int_{\Omega} u_{2k, m-k} v_{0, m-k} = \sum_{l=0}^{m-k-1} (-1)^l \int_{\partial\Omega} n_2 u_{2k, m-k} v_{0, m-k-l-1} + (-1)^{m-k} \int_{\Omega} u_{2k, 2(m-k)} v$$

On a donc pour $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$ avec la convention $\sum_0^{-1} = 0$, la formule suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{k, m-k} v_{k, m-k} &= \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\partial\Omega} (-1)^j \int_{\partial\Omega} n_1 u_{k+j, m-k} v_{k-j, m-k} + (-1)^k \sum_{l=0}^{m-k-1} (-1)^l \int_{\partial\Omega} n_2 u_{2k, m-k} v_{0, m-k-l-1} \\ &+ (-1)^m \int_{\Omega} u_{2k, 2(m-k)} v \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

On introduit $\vec{\tau} = \vec{n}^\perp$ tel que $(\vec{n}, \vec{\tau})$ soit orthonormée. On exprime ensuite les $\frac{\partial^{k+l} u}{\partial x_1^k \partial x_2^l}$ en fonction des $\frac{\partial^{i+j}}{\partial \tau^i \partial n^j}$ (avec $i + j = k + l$). On a les relations suivantes entre $\partial\tau$, ∂n , ∂x_1 et ∂x_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= n_1 \frac{\partial}{\partial n} - n_2 \frac{\partial}{\partial \tau} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= n_2 \frac{\partial}{\partial n} + n_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \end{aligned}$$

Soient $p_2, q_2 \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{p_2, q_2} &= \left(n_1 \frac{\partial}{\partial n} - n_2 \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^{p_2} \left(n_2 \frac{\partial}{\partial n} + n_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^{q_2} v \\ &= \sum_{\substack{0 \leq p \leq p_2 \\ 0 \leq q \leq q_2}} (-1)^p C_{p_2}^p C_{q_2}^q n_1^{p_2-p+q} n_2^{q_2+p-q} \frac{\partial^{p_2+q_2} v}{\partial \tau^{p+q} \partial n^{p_2+q_2-p-q}} \end{aligned}$$

En utilisant la formule d'intégration par parties sur une courbe fermée ($\int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial \tau} d\sigma = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \tau} g d\sigma$), on obtient :

$$\int_{\partial\Omega} n_1 u_{p_1, q_1} v_{p_2, q_2} = \sum_{\substack{0 \leq p \leq p_2 \\ 0 \leq q \leq q_2}} (-1)^p C_{p_2}^p C_{q_2}^q (-1)^{p+q} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial^{p+q}}{\partial \tau^{p+q}} \left(n_1^{p_2-p+q+1} n_2^{q_2+p-q} u_{p_1, q_1} \right) \frac{\partial^{p_2+q_2-p-q} v}{\partial n^{p_2+q_2-p-q}} d\sigma \quad (8.1.3)$$

De même

$$\int_{\partial\Omega} n_2 u_{p_1, q_1} v_{p_2, q_2} = \sum_{\substack{0 \leq p \leq p_2 \\ 0 \leq q \leq q_2}} (-1)^q C_{p_2}^p C_{q_2}^q \int_{\partial\Omega} \frac{\partial^{p+q}}{\partial \tau^{p+q}} \left(n_1^{p_2-p+q} n_2^{p+q_2-q+1} u_{p_1, q_1} \right) \frac{\partial^{p_2+q_2-p-q} v}{\partial n^{p_2+q_2-p-q}} d\sigma \quad (8.1.4)$$

On applique ensuite (8.1.3) avec $p_1 = k + j$, $q_1 = m - k$, $p_2 = k - j - 1$ et $q_2 = m - k$:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} n_1 u_{k+j, m-k} v_{k-j-1, m-k} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq p \leq k-j-1 \\ 0 \leq q \leq m-k}} (-1)^q C_{k-j-1}^p C_{m-k}^q \int_{\partial\Omega} \frac{\partial^{p+q}}{\partial \tau^{p+q}} \left(n_1^{k-j-p+q} n_2^{m-k-q+p} u_{k+j, m-k} \right) \frac{\partial^{m-j-1-p-q} v}{\partial n^{m-j-1-p-q}} d\sigma \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

De même en utilisant (8.1.4) avec $p_1 = 2k$, $q_1 = m - k + l$, $p_2 = 0$ et $q_2 = m - k - l - 1$ on a :

$$\int_{\partial\Omega} n_2 u_{2k, m-k+l} v_{0, m-k-l-1} = \sum_{0 \leq q \leq m-k-l-1} (-1)^q C_{m-k-l-1}^q \int_{\partial\Omega} \frac{\partial^q}{\partial \tau^q} \left(n_1^q n_2^{m-k-l-q} u_{2k, m-k+l} \right) \frac{\partial^{m-k-l-1-q} v}{\partial n^{m-k-l-1-q}} d\sigma \quad (8.1.6)$$

Avec (8.1.2), (8.1.5) et (8.1.6), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_{k, m-k} v_{k, m-k} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \sum_{\substack{0 \leq p \leq k-j-1 \\ 0 \leq q \leq m-k}} (-1)^q C_{k-j-1}^p C_{m-k}^q \int_{\partial\Omega} \frac{\partial^{p+q}}{\partial \tau^{p+q}} \left(n_1^{k-j-p+q} n_2^{m-k-q+p} u_{k+j, m-k} \right) \frac{\partial^{m-j-1-p-q} v}{\partial n^{m-j-1-p-q}} d\sigma \\ &+ (-1)^k \sum_{l=0}^{m-k-1} (-1)^l \sum_{0 \leq q \leq m-k-l-1} (-1)^q C_{m-k-l-1}^q \int_{\partial\Omega} \frac{\partial^q}{\partial \tau^q} \left(n_1^q n_2^{m-k-l-q} u_{2k, m-k+l} \right) \frac{\partial^{m-k-l-1-q} v}{\partial n^{m-k-l-1-q}} d\sigma \\ &+ (-1)^m \int_{\Omega} u_{2k, 2(m-k)} v \end{aligned} \quad (8.1.7)$$

On en déduit l'expression de la formule d'intégration par parties de b_{Ω} à partir de (8.1.1) et (8.1.7) :

$$\begin{aligned} b_{\Omega}(u, v) &= (-1)^m \sum_{k=0}^m C_m^k \int_{\Omega} u_{2k, 2(m-k)} v \\ &+ \sum_{k=0}^m C_m^k \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \sum_{\substack{0 \leq p \leq k-j-1 \\ 0 \leq q \leq m-k}} (-1)^q C_{k-j-1}^p C_{m-k}^q \int_{\partial\Omega} \frac{\partial^{p+q}}{\partial \tau^{p+q}} \left(n_1^{k-j-p+q} n_2^{m-k-q+p} u_{k+j, m-k} \right) \frac{\partial^{m-j-1-p-q} v}{\partial n^{m-j-1-p-q}} d\sigma \right. \\ &\left. + (-1)^k \sum_{l=0}^{m-k-1} (-1)^l \sum_{0 \leq q \leq m-k-l-1} (-1)^q C_{m-k-l-1}^q \int_{\partial\Omega} \frac{\partial^q}{\partial \tau^q} \left(n_1^q n_2^{m-k-l-q} u_{2k, m-k+l} \right) \frac{\partial^{m-k-l-1-q} v}{\partial n^{m-k-l-1-q}} d\sigma \right\} \end{aligned} \quad (8.1.8)$$

On reconnaît l'expression du m -ième laplacien et on peut réécrire (8.1.8) comme la somme suivante :

$$b_{\Omega}(u, v) = (-1)^m \int_{\Omega} \Delta^m uv + \sum_{i=1}^{2m-1} \int_{\partial\Omega} A_i(u) \frac{\partial^{2m-1-i} v}{\partial n^{2m-1-i}} d\sigma$$

avec $A_i : H^m(\Omega) \longrightarrow H^{m-i-1/2}(\partial\Omega)$, l'opérateur linéaire d'ordre i pour $i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket$ défini par :

$$\begin{aligned} A_i(u) &= \sum_{k=0}^m C_m^k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \sum_{\substack{0 \leq p \leq k-j-1 \\ 0 \leq q \leq m-k \\ p+q=i-m-j}} (-1)^q C_{k-j-1}^p C_{m-k}^q \frac{\partial^{p+q}}{\partial \tau^{p+q}} \left(n_1^{k-j-p+q} n_2^{m-k-q+p} u_{k+j, m-k} \right) \\ &+ \sum_{0 \leq k+l \leq i-m} C_m^k (-1)^k (-1)^l (-1)^{i-m-(k+l)} C_{m-k-l-1}^{i-m-(k+l)} \frac{\partial^{i-m-(k+l)}}{\partial \tau^{i-m-(k+l)}} \left(n_1^{i-m-(k+l)} n_2^{2m-i} u_{2k, m-k+l} \right) \end{aligned}$$

On peut expliciter la valeur des A_i dans le cas du crack. Pour alléger les notations, on pose $\widetilde{A}_i = A_{i+m}$ pour $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$. L'expression de \widetilde{A}_i est :

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_i(u) &= \sum_{k=0}^m C_m^k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \sum_{\substack{0 \leq p \leq k-j-1 \\ 0 \leq q \leq m-k \\ p+q=i-j}} (-1)^q C_{k-j-1}^p C_{m-k}^q \frac{\partial^{p+q}}{\partial \tau^{p+q}} \left(n_1^{k-j-p+q} n_2^{m-k-q+p} u_{k+j, m-k} \right) \\ &+ \sum_{0 \leq k+l \leq i} C_m^k (-1)^i C_{m-k-l-1}^{i-(k+l)} \frac{\partial^{i-(k+l)}}{\partial \tau^{i-(k+l)}} \left(n_1^{i-(k+l)} n_2^{m-i} u_{2k, m-k+l} \right) \end{aligned}$$

On considère un crack rectiligne horizontal $\sigma = \{(s, 0), -1 < s < 1\}$. Pour $x \in \sigma$, on a $n_1 = 0$, $n_2 = 1$ et $\partial_{\tau} = -\partial_{x_1}$. L'élément de la première somme sur k est non nul lorsque $k-j-p+q = 0$ c-à-d $p-q = k-j$. En sommant sur les indices tels que $p+q = i-j$, on déduit que

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(k+i-2j), \quad (a) \\ q &= \frac{1}{2}(i-k), \quad (b) \end{aligned}$$

Pour avoir (a) et (b) réalisées deux cas sont possibles :

- i et k pairs et $i \geq k$
- i et k impairs et $i \geq k$

En utilisant que $q \geq 0$ on déduit qu'on somme sur les $0 \leq k \leq i$. Ensuite le terme de la deuxième somme sur k est non nul lorsque $i = k+l$ c-à-d $l = i-k$. On obtient donc les expressions des \widetilde{A}_{2i} et \widetilde{A}_{2i+1} suivantes :

- Pour $2i \leq m-1$:

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_{2i} &= \sum_{k=0}^i C_m^{2k} \sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^{j+i-k} C_{2k-j-1}^{k+i-j} C_{m-2k}^{i-k} \frac{\partial^{2i-j}}{\partial \tau^{2i-j}} (u_{2k+j, m-2k}) \\ &+ (-1)^{2i} \sum_{k=0}^{2i} C_m^k u_{2k, m-2k+2i} \\ &= \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} C_m^{2k} \left(\sum_{j=0}^{2k-1} C_{2k-j-1}^{k+i-j} C_{m-2k}^{i-k} \right) u_{2(k+i), m-2k} + \sum_{k=0}^{2i} C_m^k u_{2k, m-2k+2i} \end{aligned}$$

- Pour $2i + 1 \leq m - 1$:

$$\widetilde{A}_{2i+1} = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k+1} C_m^{2k+1} \left(\sum_{j=0}^{2k-1} C_{2k-j}^{k+i-j+1} C_{m-2k-1}^{i-k} \right) u_{2(k+i+1), m-(2k+1)} - \sum_{k=0}^{2i+1} C_m^k u_{2k, m-2k+2i+1}$$

ce qui termine la preuve de ce lemme. □

8.2 Solution fondamentale associée au m -ième laplacien en 2D

Lorsqu'on veut expliciter certaines solutions de problèmes linéaires utilisant un opérateur différentiel, on utilise souvent la solution fondamentale associée à cet opérateur. On calcule donc en vue d'expliquer certaines solutions assez simples mettant en jeu l'opérateur Δ^m , la solution fondamentale associée au m -ième laplacien.

Théorème 8.2.1. *On note $E_m(x)$ la solution fondamentale du m -ième laplacien telle que*

$$-\Delta^m E_m = \delta_0 \text{ dans } D'(\mathbb{R}^2)$$

où δ_0 est la distribution de Dirac en 0. Elle est donnée par

$$E_m(x) = -\frac{1}{2^{2m-1}\pi((m-1)!)^2} |x|^{2(m-1)} \log(|x|) \quad (8.2.1)$$

Démonstration. Pour $m = 1$, $E_1(x) = -\frac{1}{2\pi} \log(|x|)$.

Pour $m = 2$, $E_2(x) = -\frac{1}{8\pi} |x|^2 \log(|x|)$.

On cherche $E_m(x)$ de la forme

$$E_m(x) = a_m |x|^{p_m} \log(|x|)$$

alors ΔE_m doit vérifier

$$\Delta^{m-1}(\Delta E_m) = \delta_0$$

On en déduit l'égalité suivante :

$$\Delta E_m = E_{m-1} + P_{2m-3}(x) = a_{m-1} |x|^{p_{m-1}} \log(|x|) + P_{2m-3}(x)$$

où $P_{2m-3}(x)$ est un polynôme en x de degré au plus $2m - 3$. Après calcul on obtient :

$$\Delta(|x|^{p_m} \log(|x|)) = |x|^{p_m-2} p_m^2 \log(|x|) + 2p_m |x|^{p_m-2}$$

On déduit les relations suivantes :

$$\begin{cases} p_{m-1} = p_m - 2 \text{ et } p_1 = 0 \\ a_{m-1} = a_m p_m^2 \text{ et } a_1 = -\frac{1}{2\pi} \\ p_m - 2 \leq 2m - 3 \end{cases}$$

d'où les expressions :

$$\begin{cases} p_m = 2(m-1) + p_1 \\ a_m = \frac{a_{m-1}}{p_m^2} \end{cases}$$

avec $p_1 = 0$ on déduit d'abord que $p_m = 2(m-1)$ puis que

$$a_m = -\frac{1}{2^{2m-1}\pi((m-1)!)^2}$$

On vérifie que $|x|^{p_m-2} = |x|^{2(m-2)}$ est un polynôme en x de degré $2m - 4 \leq 2m - 3$ et on conclut avec (8.2.1). □

8.3 Position du problème dans le cas du crack. Notations

Pour toute variété $\Sigma \subset \Omega$ régulière, on définit les espaces suivants (voir prérequis) :

$$H_{00}^{1/2+i}(\Sigma) = \{u|_{\Sigma}, u \in H^{1/2+i}(\tilde{\Sigma}), u|_{\tilde{\Sigma} \setminus \Sigma} = 0\}, \forall i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$$

où $\tilde{\Sigma}$ est une variété fermée contenant Σ et de même dimension que cette dernière (voir Figure 8.1). On munit ces espaces des normes

$$\|u|_{\Sigma}\|_{H_{00}^{1/2+i}(\Sigma)} = \|u\|_{H^{1/2+i}(\tilde{\Sigma})}$$

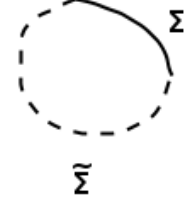
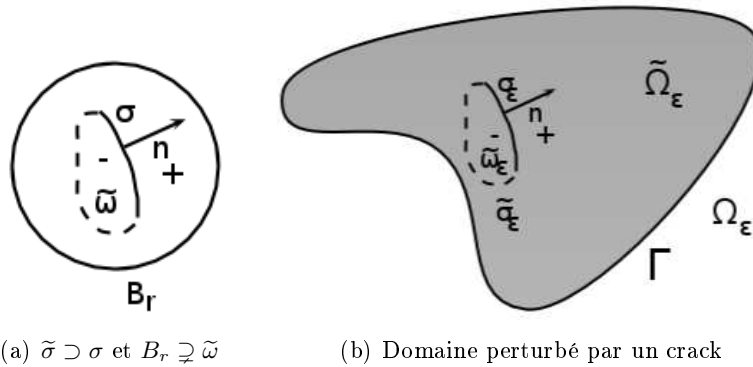


FIGURE 8.1 – Σ et $\tilde{\Sigma}$

Soit $\sigma \subset \Omega$ une variété de dimension 1 de classe C^1 , passant par l'origine et de normale \vec{n} . On note $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire tangent au crack σ orienté de telle sorte que $(\vec{n}, \vec{\tau})$ soit orthonormée. $\partial\tau$ désigne la différentiation par rapport à $\vec{\tau}$ le long de σ . Dans cette section on note le domaine extérieur au crack $\Lambda = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\sigma}$, et on définit sur cet ensemble l'espace de Sobolev avec poids

$$W^m(\Lambda) = \left\{ u, \frac{\nabla^k u}{r^{m-k} \log(r)} \in L^2(\Lambda), \text{ pour } k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, \nabla^m u \in L^2(\Lambda) \right\}$$

où $r = |x|$. Les poids donnés ici sont les poids les plus classiques et peuvent être changés en des poids dont le comportement à l'infini reste le même notamment pour éviter les problèmes en 0 (voir le prérequis pour une définition adéquate). On note $W^m(\Lambda)/\mathbb{P}_{m-1}$ l'ensemble des fonctions $W^m(\Lambda)$ définies modulo \mathbb{P}_{m-1} . On suppose que $\sigma_\epsilon = \{x, \frac{x}{\epsilon} \in \sigma\}$ ne touche pas le bord ; on déduit que $\partial\Omega_\epsilon = \sigma_\epsilon \cup \Gamma$. Soit $\tilde{\sigma}$ une courbe fermée régulière de même dimension que σ telle que $\sigma \subset \tilde{\sigma}$, et soit $\tilde{\omega}$ le domaine de \mathbb{R}^2 , tel que $\partial\tilde{\omega} = \tilde{\sigma}$; on note $\tilde{\omega}_\epsilon = \{x, \frac{x}{\epsilon} \in \tilde{\omega}\}$, $\tilde{\Omega}_\epsilon = \Omega \setminus \tilde{\omega}_\epsilon$ et on choisit $r > 0$ et ϵ assez petit tels que $\tilde{\omega} \subsetneq B_r \subset \frac{\Omega}{\epsilon}$ (voir Figure 8.2).



(a) $\tilde{\sigma} \supset \sigma$ et $B_r \supsetneq \tilde{\omega}$ (b) Domaine perturbé par un crack

FIGURE 8.2 – Domaine perturbé par un crack et extension du crack en une courbe fermée

Pour $v \in H^m(\Omega_\epsilon)$ et $u \in H^{2m}(\Omega_\epsilon)$, en appliquant la formule d'intégration par parties donnée par le Théorème 8.1.1 sur $\Omega \setminus \tilde{\omega}_\epsilon \cup \tilde{\omega}_\epsilon$, on obtient

$$\int_{\Omega_\epsilon} ((-1)^m \Delta^m u + u) v = a_\epsilon(u, v) + \int_{\sigma_\epsilon} \sum_{i=m}^{2m-1} A_i(u) \left[\frac{\partial^{2m-1-i} v}{\partial n^{2m-1-i}} \right] \quad (8.3.1)$$

où $a_\epsilon(u, v)$ est donnée en (8.0.4) et où on a noté $\left[\frac{\partial^k v}{\partial n^k}\right] = \left(\frac{\partial^k v}{\partial n^k}\right)^+ - \left(\frac{\partial^k v}{\partial n^k}\right)^-$ le saut de $\frac{\partial^k v}{\partial n^k}$ à travers σ_ϵ , en respectant les conventions décrites dans Figure 8.2. Avec (8.0.5) et (8.3.1), en supposant que $u_\epsilon \in H^{2m}(\Omega_\epsilon)$, on obtient que u_ϵ vérifie le problème

$$(\mathcal{P}_\epsilon^c) \begin{cases} (-1)^m \Delta^m u_\epsilon + u_\epsilon = f, & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ A_i(u_\epsilon) = 0, & \text{sur } \sigma_\epsilon \cup \Gamma, \forall i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket \end{cases} \quad (8.3.2)$$

où $f \in L^2(\Omega_\epsilon)$. Dans ce qui suit, pour simplifier, on suppose que $\sigma = \{(s, 0), -1 < s < 1\}$ (on se place dans le repère local au crack).

On calcule le gradient topologique en évaluant le terme prépondérant par rapport à ϵ dans la différence $J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. En utilisant l'équation vérifiée par u_ϵ et u_0 on a

$$J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) = \int_{\Omega_\epsilon} (f - 2u_0)(u_\epsilon - u_0) - \int_{\Omega_\epsilon} (u_\epsilon - u_0)^2 \quad (8.3.3)$$

On définit $L_\epsilon(u)$ par

$$L_\epsilon(u) = \int_{\Omega_\epsilon} (f - 2u_0)u$$

et on pose

$$\mathcal{J}_\epsilon = - \int_{\Omega_\epsilon} (u_\epsilon - u_0)^2 \quad (8.3.4)$$

Pour évaluer (8.3.3), on introduit v_ϵ solution du problème adjoint défini par :

$$a_\epsilon(u, v_\epsilon) = -L_\epsilon(u), \quad \forall u \in H(\Omega_\epsilon) \quad (8.3.5)$$

En utilisant (8.3.5), (8.3.4) et (8.3.1), alors (8.3.3) s'écrit

$$\begin{aligned} J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) &= -a_\epsilon(u_\epsilon - u_0, v_\epsilon) + \mathcal{J}_\epsilon \\ &= -l_\epsilon(v_\epsilon) + a_\epsilon(u_0, v_\epsilon) + \mathcal{J}_\epsilon \\ &= - \int_{\Omega_\epsilon} f v_\epsilon + \int_{\Omega_\epsilon} ((-1)^m \Delta^m u_0 + u_0) v_\epsilon - \int_{\sigma_\epsilon} \sum_{i=m}^{2m-1} A_i(u_0) \left[\frac{\partial^{2m-1-i} v_\epsilon}{\partial n^{2m-1-i}} \right] + \mathcal{J}_\epsilon \\ &= - \int_{\sigma_\epsilon} \sum_{i=m}^{2m-1} A_i(u_0) \left[\frac{\partial^{2m-1-i} v_\epsilon}{\partial n^{2m-1-i}} \right] + \mathcal{J}_\epsilon \end{aligned}$$

puis en introduisant $w_\epsilon = v_\epsilon - v_0$ avec v_ϵ et v_0 définies en (8.3.5) pour $\epsilon > 0$ et $\epsilon = 0$; on réécrit $J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0)$ en fonction de w_ϵ :

$$J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) = - \int_{\sigma_\epsilon} \sum_{i=m}^{2m-1} A_i(u_0) \left[\frac{\partial^{2m-1-i} w_\epsilon}{\partial n^{2m-1-i}} \right] + \mathcal{J}_\epsilon \quad (8.3.6)$$

Puis en changeant de variable et d'indices on a

$$\begin{aligned}
J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) &= - \sum_{i=m}^{2m-1} \epsilon \int_\sigma A_i(u_0)(\epsilon X) \left[\frac{\partial^{2m-1-i} w_\epsilon(\epsilon X)}{\partial n^{2m-1-i}} \right] d\sigma + \mathcal{J}_\epsilon \\
&= - \sum_{i=m}^{2m-1} \epsilon \int_\sigma A_i(u_0)(\epsilon X) \frac{1}{\epsilon^{2m-1-i}} \left[\frac{\partial^{2m-1-i} (w_\epsilon(\epsilon X))}{\partial n^{2m-1-i}} \right] d\sigma + \mathcal{J}_\epsilon \\
&= - \sum_{k=0}^{m-1} \epsilon^{1-k} \int_\sigma A_{2m-1-k}(u_0)(\epsilon X) \left[\frac{\partial^k}{\partial n^k} (w_\epsilon(\epsilon X)) \right] d\sigma + \mathcal{J}_\epsilon \\
&= - \sum_{k=0}^{m-1} \mathcal{I}_k + \mathcal{J}_\epsilon
\end{aligned} \tag{8.3.7}$$

où on définit les termes \mathcal{I}_k pour $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ comme suit :

$$\mathcal{I}_k = \epsilon^{1-k} \int_\sigma A_{2m-1-k}(u_0)(\epsilon X) \left[\frac{\partial^k}{\partial n^k} (w_\epsilon(\epsilon X)) \right] d\sigma \tag{8.3.8}$$

Maintenant on doit établir le développement asymptotique de w_ϵ . Pour cela on commence par déterminer les termes que l'on doit compenser pour obtenir un développement asymptotique en $o(\epsilon)$ en norme $H^m(\Omega_\epsilon)$ (voir section 8.5).

8.4 Estimations des $A_i(u_0)(\epsilon X)$ pour $X \in \sigma$

Le lemme suivant établit le développement asymptotique par rapport à ϵ en 0 des conditions aux bords $A_i(u_0)(\epsilon X)$ pour $X \in \sigma$.

Lemme 8.4.1. *Soit v_0 solution de (8.3.5) avec $\epsilon = 0$. Dans le cas d'un crack rectiligne, en supposant v_0 assez régulier, on a les estimations suivantes*

$$A_m(v_0)(\epsilon X) = g_m(X) + O(\epsilon) \tag{8.4.1a}$$

$$A_i(v_0)(\epsilon X) = g_i(X) + O(1), \quad \forall i \in \llbracket m+1, 2m-1 \rrbracket \tag{8.4.1b}$$

avec

$$\begin{cases} g_m(X) = \frac{\partial^m v_0}{\partial x_2^m}(0) \\ g_i(X) = 0, \text{ pour } m+1 \leq i \leq 2m-1 \end{cases} \tag{8.4.2}$$

Démonstration. Avec l'expression des $A_{i+m} = \widetilde{A}_i$ données dans le Théorème 8.1.1 pour $i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ et en faisant un développement de Taylor en 0 des fonctions $\frac{\partial^{k+l} v_0}{\partial x_1^k \partial x_2^l}$ on obtient (8.4.1b). Ensuite en utilisant l'expression de \widetilde{A}_0 donnée dans le Théorème 8.1.1, on obtient :

$$A_m(v_0)(\epsilon X) = \widetilde{A}_0(v_0)(\epsilon X) = \frac{\partial^m v_0}{\partial x_2^m}(\epsilon X)$$

On conclut avec un développement de Taylor de $\frac{\partial^m v_0}{\partial x_2^m}(\epsilon X)$ en 0. □

8.5 Développement asymptotique de w_ϵ

Dans cette section on établit le développement asymptotique de w_ϵ en $o(\epsilon)$ en norme $H^m(\Omega_\epsilon)$. On rappelle que $w_\epsilon = v_\epsilon - v_0$ vérifie l'équation

$$(\mathcal{Q}_\epsilon^c) \begin{cases} (-1)^m \Delta^m w_\epsilon + w_\epsilon = 0, \text{ sur } \Omega_\epsilon \\ A_i(w_\epsilon) = -A_i(v_0), \text{ sur } \sigma_\epsilon, \forall i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket \\ A_i(w_\epsilon) = 0, \text{ sur } \Gamma, \forall i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket \end{cases} \quad (8.5.1)$$

Pour estimer w_ϵ on introduit le problème extérieur $R \in W^m(\Lambda)/\mathbb{P}_{m-1}$ suivant :

$$(\mathcal{R}_{ext}^c) \begin{cases} \Delta^m R = 0, \text{ sur } \Lambda \\ A_i(R) = g_i, \text{ sur } \sigma \end{cases} \quad (8.5.2)$$

où $\forall i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket$, $g_i \in H_{00}^{1/2+2m-1-i}(\sigma)'$ est donnée par (8.4.2). En utilisant le Théorème 8.9.4 donné en Annexe, on déduit que le problème (\mathcal{R}_{ext}^c) admet une solution unique dans $W^m(\Lambda)/\mathbb{P}_{m-1}$ et que R s'écrit sous la forme

$$R(x) = \sum_{i=m}^{2m-1} \oint_{\sigma} \lambda_i(y) A_{i,y}(E(x-y)) d\sigma_y$$

où \oint désigne la valeur principale de Cauchy. De plus on a les relations :

$$(-1)^{m+1} \left[\frac{\partial^{2m-1-i} R}{\partial n^{2m-1-i}} \right] = \lambda_i \quad \forall i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket \quad (8.5.3)$$

où

$$\begin{cases} \lambda_m(s) = \frac{(-1)^{m+1} 2^{2m-1}}{(2m-1)C_{2(m-1)}^{m-1}} \beta \sqrt{1-s^2} & \forall (s,0) \in \sigma \\ \lambda_i(s) = 0 & \forall i \in \llbracket m+1, 2m-1 \rrbracket \quad \forall (s,0) \in \sigma \end{cases} \quad (8.5.4)$$

avec $\beta = \frac{\partial^m v_0}{\partial x_2^m}(0)$. Grâce au Lemme 8.9.6 (voir Annexe), on obtient

$$w_\epsilon = \epsilon^2 R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + e_\epsilon \text{ avec } \|e_\epsilon\|_{H^m(\Omega_\epsilon)} = O(\phi_m(\epsilon)) \quad (8.5.5)$$

où

$$\phi_m(\epsilon) = \begin{cases} -\epsilon^2 \log(\epsilon) & \text{pour } m \geq 2 \\ \epsilon^2 \sqrt{-\log(\epsilon)} & \text{pour } m = 1 \end{cases}$$

Dans ce qui suit nous allons montrer que $\mathcal{I}_k \sim o(\epsilon^2)$ pour $k \in \llbracket 0, m-2 \rrbracket$ et $\mathcal{I}_{m-1} \sim O(\epsilon^2)$.

8.6 Estimation des \mathcal{I}_k pour $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$

Le lemme suivant donne une estimation en $o(\epsilon^2)$ des quantités \mathcal{I}_k pour $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$.

Lemme 8.6.1. *Soient \mathcal{I}_k définies en (8.3.8) pour $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$. On a les estimations suivantes*

$$\mathcal{I}_k = o(\epsilon^2), \quad \forall k \in \llbracket 0, m-2 \rrbracket \quad (8.6.1a)$$

$$\mathcal{I}_{m-1} = \epsilon^2 \frac{\partial^m u_0}{\partial x_2^m}(0) (-1)^{m+1} \int_{\sigma} \lambda_m(y) d\sigma + o(\epsilon^2) \quad (8.6.1b)$$

Démonstration. Soit $k \in \llbracket 0, m-2 \rrbracket$, en utilisant le Lemme 8.9.1 et le Lemme 8.4.1 appliqué aux quantités $A_i(u_0)(\epsilon X)$ pour $i \in \llbracket m+1, 2m-1 \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k &= \epsilon^{1-k} \int_{\sigma} A_{2m-1-k}(u_0)(\epsilon X) \left[\frac{\partial^k}{\partial n^k} (w_{\epsilon}(\epsilon X)) \right] d\sigma \\ &\leq C \epsilon^{1-k} |w_{\epsilon}(\epsilon X)|_{m, B_r \setminus \bar{\sigma}} \end{aligned}$$

Puis en changeant de variable et en utilisant le Lemme 8.9.6 on obtient :

$$\mathcal{I}_k \leq C \epsilon^{m-k} |w_{\epsilon}|_{m, \Omega_{\epsilon}} \leq C \epsilon^{m-k+1} = o(\epsilon^2)$$

Maintenant, considérons \mathcal{I}_{m-1} ; avec le développement asymptotique de w_{ϵ} donné par le Lemme 8.9.6, le Lemme 8.4.1 appliqué à $A_m(u_0)(\epsilon X)$ et les relations de sauts données en (8.5.3), on déduit :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{m-1} &= \epsilon^{2-m} \int_{\sigma} A_m(u_0(\epsilon X)) \left[\frac{\partial^{m-1}(w_{\epsilon}(\epsilon X))}{\partial n^{m-1}} \right] d\sigma \\ &= \epsilon^{2-m} \frac{\partial^m u_0}{\partial x_2^m}(0) \int_{\sigma} \left[\frac{\partial^{m-1}(\epsilon^m R(X))}{\partial n^{m-1}} \right] d\sigma + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \\ &= \epsilon^2 \frac{\partial^m u_0}{\partial x_2^m}(0) (-1)^{m+1} \int_{\sigma} \lambda_m(y) d\sigma + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \epsilon^{2-m} \int_{\sigma} \left(A_m(u_0(\epsilon X)) - \frac{\partial^m u_0}{\partial x_2^m}(0) \right) \left[\frac{\partial^{m-1}(w_{\epsilon}(\epsilon X))}{\partial n^{m-1}} \right] d\sigma \\ \mathcal{E}_2 &= \epsilon^{2-m} \frac{\partial^m u_0}{\partial x_2^m}(0) \int_{\sigma} \left[\frac{\partial^{m-1}(e_{\epsilon}(\epsilon X))}{\partial n^{m-1}} \right] d\sigma \end{aligned}$$

On va montrer que \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont des $o(\epsilon^2)$. En utilisant le Lemme 8.9.1, un changement de variable, le Lemme 8.4.1, de nouveau un changement de variable et le Lemme 8.9.6 on obtient

$$\mathcal{E}_1 \leq \epsilon^{2-m} \left\| A_m(u_0(\epsilon X)) - \frac{\partial^m u_0}{\partial x_2^m}(0) \right\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)'} |w_{\epsilon}(\epsilon X)|_{m, B_r \setminus \bar{\sigma}} \leq C \epsilon^2 |w_{\epsilon}|_{m, \Omega_{\epsilon}} \leq C \epsilon^3$$

Enfin de la même manière on a :

$$\mathcal{E}_2 \leq \epsilon^{2-m} |e_{\epsilon}(\epsilon X)|_{m, B_r \setminus \bar{\sigma}} \leq C \epsilon |e_{\epsilon}|_{m, \Omega_{\epsilon}} \leq C \epsilon \phi_m(\epsilon)$$

avec $\phi_m(\epsilon) = o(\epsilon)$. On obtient donc l'estimation de \mathcal{I}_{m-1} suivante

$$\mathcal{I}_{m-1} = \epsilon^2 \frac{\partial^m u_0}{\partial x_2^m}(0) (-1)^{m+1} \int_{\sigma} \lambda_m(y) d\sigma + o(\epsilon^2)$$

□

8.7 Calcul du gradient topologique

En revenant à (8.3.7) et en utilisant les estimations données en (8.6.1a) et (8.6.1b) on obtient :

$$J_{\epsilon}(u_{\epsilon}) - J_0(u_0) = \epsilon^2 \frac{\partial^m u_0}{\partial x_2^m}(0) (-1)^m \int_{\sigma} \lambda_m(y) d\sigma + \mathcal{J}_{\epsilon} + o(\epsilon^2)$$

En utilisant le Lemme 8.9.6 appliqué à $u_{\epsilon} - u_0$, et la définition de \mathcal{J}_{ϵ} donnée en (8.3.4) on déduit l'estimation suivante :

$$|\mathcal{J}_{\epsilon}| = \|u_{\epsilon} - u_0\|_{0, \Omega_{\epsilon}}^2 \leq C \phi_m(\epsilon)^2 = o(\epsilon^2)$$

Avec l'expression de λ_m donnée en (8.5.4) on a :

$$\begin{aligned}
J_\epsilon(u_\epsilon) - J_0(u_0) &= \epsilon^2 \frac{\partial^m u_0}{\partial x_2^m}(0) (-1)^m \int_{-1}^1 \frac{(-1)^{m+1} 2^{2m-1}}{(2m-1)C_{2(m-1)}^{m-1}} \frac{\partial^m v_0}{\partial x_2^m}(0) \sqrt{1-s^2} ds + o(\epsilon^2) \\
&= -\epsilon^2 \frac{\partial^m u_0}{\partial x_2^m}(0) \frac{\partial^m v_0}{\partial x_2^m}(0) \frac{2^{2m-1}}{(2m-1)C_{2(m-1)}^{m-1}} \frac{\pi}{2} + o(\epsilon^2) \\
&= -\epsilon^2 \pi \frac{2^{2(m-1)}}{(2m-1)C_{2(m-1)}^{m-1}} \frac{\partial^m u_0}{\partial x_2^m}(0) \frac{\partial^m v_0}{\partial x_2^m}(0) + o(\epsilon^2)
\end{aligned}$$

L'expression du gradient topologique écrit dans le repère local au crack est donc

$$\mathcal{I}(0) = -\pi \frac{2^{2(m-1)}}{(2m-1)C_{2(m-1)}^{m-1}} \frac{\partial^m u_0}{\partial x_2^m}(0) \frac{\partial^m v_0}{\partial x_2^m}(0) \quad (8.7.1)$$

8.8 Conclusion : expression générale en tout point $x_0 \in \Omega$

Proposition 8.8.1. *De l'expression du GT (8.7.1), on déduit le GT associé à la fonction coût (8.0.1) et à l'EDP (8.3.2), pour un domaine fissurée par un crack de normale \vec{n} et de centre $x_0 \in \Omega$:*

$$\mathcal{I}(x_0, \vec{n}) = -\pi \frac{2^{2(m-1)}}{(2m-1)C_{2(m-1)}^{m-1}} \nabla^m u_0(x_0)(\vec{n}, \dots, \vec{n}) \nabla^m v_0(x_0)(\vec{n}, \dots, \vec{n}) \quad (8.8.1)$$

On définit l'indicateur topologique en x_0 par

$$\mathcal{I}(x_0) = \max_{|\vec{n}|=1} |\mathcal{I}(x_0, \vec{n})|$$

$\mathcal{I}(x_0)$ est sensible aux points de discontinuités chargés par la fonction coût (8.0.1) données par la Table (8.1).

Remarque 8.8.2. *On peut vérifier que pour $m = 1$ et $m = 2$ on retrouve respectivement les valeurs des gradients topologiques (1.3.4) et (6.2.14).*

8.9 Annexe

Dans ce qui suit on garde les notations et convention données dans la Figure 8.2 et on choisit $r > 0$ et ϵ assez petit tels que $\tilde{\omega} \subsetneq B_r \subset \frac{\Omega}{\epsilon}$ (voir Figure 8.2). On rappelle que l'on note B_r pour $r > 0$ la boule de centre O et de rayon r , et $B = B_1$ la boule unité. Pour alléger les notations on suppose que $\Omega \supset B$. Pour un domaine ω de \mathbb{R}^2 on note $\omega' = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}$ et $\mathcal{D}(\omega')$ l'ensemble des fonctions $C^\infty(\omega')$ à support compact inclus dans ω' .

Lemme 8.9.1. *Soit $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, soient $g_k \in \left(H_{00}^{1/2+(m-1)-k}(\sigma)\right)'$ et $u \in H^m(B_r \setminus \bar{\sigma})$, alors on a*

$$\left| \int_\sigma g_k \left[\frac{\partial^k u}{\partial n^k} \right] \right| d\sigma \leq \|g_k\|_{H_{00}^{1/2+m-1-k}(\sigma)'} |u|_{m, B_r \setminus \bar{\sigma}}$$

où la définition de l'espace $H_{00}^{1/2+i}(\sigma)$ pour $i \in \mathbb{N}$ est rappelée en section 8.3 et où l'on note $H_{00}^{1/2+i}(\sigma)'$ l'espace dual correspondant.

Démonstration. Par dualité et définition de la norme $\|\cdot\|_{H_{00}^{1/2+m-1-k}(\sigma)}$, en décomposant le saut $\left[\frac{\partial^k u}{\partial n^k}\right]$; et enfin en utilisant le théorème de trace sur $B_r \setminus \widetilde{\omega}$ et sur $\widetilde{\omega}$, on déduit

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma} g_k \left[\frac{\partial^k u}{\partial n^k}\right] &\leq \|g_k\|_{H_{00}^{1/2+(m-1)-k}(\sigma)'} \left\| \left[\frac{\partial^k u}{\partial n^k}\right] \right\|_{H_{00}^{1/2+(m-1)-k}(\sigma)} \\
&= \|g_k\|_{H_{00}^{1/2+(m-1)-k}(\sigma)'} \left\| \left[\frac{\partial^k u}{\partial n^k}\right] \right\|_{1/2+(m-1)-k, \widetilde{\sigma}} \\
&\leq C \|g_k\|_{H_{00}^{1/2+(m-1)-k}(\sigma)'} \left(\left\| \frac{\partial^k u^-}{\partial n^k} + \psi \right\|_{1/2+m-1-k, \widetilde{\sigma}} + \left\| \frac{\partial^k u^+}{\partial n^k} + \psi \right\|_{1/2+m-1-k, \widetilde{\sigma}} \right) \\
&\leq C \|g_k\|_{H_{00}^{1/2+(m-1)-k}(\sigma)'} \left(\|u + \psi\|_{m, \widetilde{\omega}} + \|u + \psi\|_{m, B_r \setminus \widetilde{\omega}} \right) \\
&= C \|g_k\|_{H_{00}^{1/2+(m-1)-k}(\sigma)'} \|u + \psi\|_{m, B_r \setminus \widetilde{\sigma}}
\end{aligned}$$

où ψ est une fonction quelconque régulière de \mathbb{R}^2 . En particulier, en prenant $\psi \in \mathbb{P}_{m-1}$, et en utilisant l'inégalité de Deny-Lions (prérequis), on a

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma} g_k \left[\frac{\partial^k u}{\partial n^k}\right] &\leq \|g_k\|_{H_{00}^{1/2+(m-1)-k}(\sigma)'} \|u\|_{H^m(B_r \setminus \widetilde{\sigma})/\mathbb{P}_{m-1}} \\
&\leq C \|g_k\|_{H_{00}^{1/2+(m-1)-k}(\sigma)'} |u|_{m, B_r \setminus \widetilde{\sigma}}
\end{aligned}$$

□

Lemme 8.9.2. Soit $u \in H^m(B_r \setminus \widetilde{\sigma})$ telle que $\Delta^m u \in L^2(B_r \setminus \widetilde{\sigma})$ et $q_i \in H_{00}^{1/2+2m-1-i}(\sigma)$ où $i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket$. Alors on a l'inégalité :

$$\sum_{i=m}^{2m-1} \int_{\sigma} q_i A_i(u) \leq \sum_{i=m}^{2m-1} \|q_i\|_{H_{00}^{1/2+2m-1-i}(\sigma)} (|u|_{B_r \setminus \widetilde{\sigma}} + \|\Delta^m u\|_{B_r \setminus \widetilde{\sigma}})$$

Démonstration. On prolonge les q_i par 0 sur $\widetilde{\sigma} \setminus \widetilde{\sigma}$. On note $\widetilde{q}_i \in H^{1/2+2m-1-i}(\widetilde{\sigma})$ ces prolongements. Soit Q un relèvement continu de $(\widetilde{q}_m, \widetilde{q}_{m+1}, \dots, \widetilde{q}_{2m-1})$ dans $\widetilde{\omega}$. En intégrant par parties (voir Théorème 8.1.1), on a :

$$\widetilde{b}(Q, u) = (-1)^m \int_{\widetilde{\omega}} \Delta^m u Q + \int_{\widetilde{\sigma}} \sum_{i=m}^{2m-1} A_i(u) q_i, \quad \forall u \in H^m(\widetilde{\omega})$$

où

$$\widetilde{b}(u, v) = \sum_{k=0}^m C_m^k \int_{\widetilde{\omega}} \frac{\partial^m u}{\partial x_1^k \partial x_2^{m-k}} \frac{\partial^m v}{\partial x_1^k \partial x_2^{m-k}}, \quad \forall u, v \in H^m(\widetilde{\omega})$$

De plus, on a la majoration :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\widetilde{\sigma}} \sum_{i=m}^{2m-1} A_i(u) q_i \right| &\leq |b(Q, u)| + \left| \int_{\widetilde{\omega}} \Delta^m u Q \right| \\
&\leq C |u|_{2, \widetilde{\omega}} |Q|_{2, \widetilde{\omega}} + \|\Delta^m u\|_{0, \widetilde{\omega}} \|Q\|_{0, \widetilde{\omega}}
\end{aligned}$$

En utilisant la continuité du relèvement, l'inclusion $B_r \supset \widetilde{\omega}$ (voir Figure 8.2), et en utilisant la définition des normes $H_{00}^{1/2+j}(\sigma)$ pour $j \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, on obtient le résultat. □

Lemme 8.9.3. Soit $E(x)$ définie en (8.2.1). Soit $s \in \mathbb{N}^2$ alors

$$\frac{\partial^{|s|} E}{\partial x^s} = \begin{cases} F_s(x) + G_s \log(|x|), & \text{pour } 0 \leq |s| \leq 2m - 2 \\ H_s, & \text{pour } |s| \geq 2m - 1 \end{cases}$$

où F_s , G_s et H_s sont des fonctions rationnelles $2(m-1) - |s|$ homogènes et où on note pour $s = (s_1, s_2)$, $\partial x^s = \partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2}$ et $|s| = s_1 + s_2$.

Démonstration. On peut écrire E comme le produit $E(x) = C_m g(x) h(x)$ où

$$\begin{aligned} g(x) &= (x_1^2 + x_2^2)^{m-1} \\ h(x) &= \log(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

et C_m est une constante dépendant de m . $g(x)$ est un polynôme en x , $2(m-1)$ homogène donc $\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x^\alpha}$ est un polynôme $2(m-1) - |\alpha|$ homogène. De même $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ est -1 homogène, donc $\frac{\partial^{|\alpha|} h}{\partial x^\alpha}$ est $-|\alpha|$ homogène. En utilisant la formule de Leibniz on obtient

$$\frac{\partial^{|s|} (gh)}{\partial x^s} = \sum_{0 \leq \alpha \leq s} C_s^\alpha \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{|s-\alpha|} h}{\partial x^{s-\alpha}}$$

où $C_s^\alpha = \prod C_{s_i}^{\alpha_i}$ avec $\alpha \leq s \iff \alpha_i \leq s_i, \forall i \in \{1, 2\}$. On obtient en décomposant la somme en deux parties :

$$\frac{\partial^{|s|} (gh)}{\partial x^s} = \sum_{0 \leq \alpha < s} C_s^\alpha \underbrace{\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^{|s-\alpha|} h}{\partial x^{s-\alpha}}}_{2(m-1)-|s| \text{ homogène}} + \underbrace{\frac{\partial^{|s|} g}{\partial x^s}}_{2(m-1)-|s| \text{ homogène et nul si } |s| \geq 2m-1} h$$

Pour $|s| \geq 2m - 1$, $\frac{\partial^s E}{\partial x^s}$ est une fonction $2(m-1) - |s|$ homogène et rationnelle □

Théorème 8.9.4. Soit $R \in W^m(\Lambda)/\mathbb{P}_{m-1}$ la solution du problème extérieur

$$(\mathcal{R}_{ext}) \begin{cases} \Delta^m R = 0, & \text{sur } \Lambda \\ A_i(R) = g_i, & \text{sur } \sigma \quad \forall i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket \end{cases} \quad (8.9.1)$$

avec $g_i \in \left(H_{00}^{1/2+2m-1-i}(\sigma) \right)'$. Alors :

1. $R(x)$ est unique dans $W^m(\Lambda)/\mathbb{P}_{m-1}$, et l'application $(g_m, \dots, g_{2m-1}) \mapsto R$ est continue de $\left(H_{00}^{1/2+m-1}(\sigma) \right)' \times \dots \times \left(H_{00}^{1/2}(\sigma) \right)'$ dans $W^m(\Lambda)/\mathbb{P}_{m-1}$.
2. $R(x)$ s'écrit dans $W^m(\Lambda)/\mathbb{P}_{m-1}$ comme la somme de potentiels multicouches :

$$R(x) = \sum_{i=m}^{2m-1} \int_{\sigma} \lambda_i(y) A_{i,y}(E(x-y)) d\sigma_y, \quad \forall x \in \Lambda$$

3. On a les relations de sauts suivantes à travers σ :

$$(-1)^{m+1} \left[\frac{\partial^{2m-1-i} R}{\partial n^{2m-1-i}} \right] = \lambda_i, \quad \text{pour } i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket$$

4. Les densités λ_i sont données par les m équations intégrales suivantes :

$$g_j(x) = \sum_{i=m}^{2m-1} \oint_{\sigma} \lambda_i(y) A_{j,x} A_{i,y}(E(x-y)) d\sigma_y, \text{ pour } j \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket$$

où \oint désigne la valeur principale de Cauchy.

5. Dans le cas où $\sigma = \{(s, 0), -1 < s < 1\}$ et $g_i(x) = 0$ pour $i \in \llbracket m+1, 2m-1 \rrbracket$ et $g_m(x) = Cste = V$, les densités λ_i sont données par

$$\begin{aligned} \lambda_i(s) &= 0, \forall i \in \llbracket m+1, 2m-1 \rrbracket \\ \lambda_m(s) &= \frac{(-1)^m 2^{2m-1}}{(2m-1)C_{2(m-1)}^{m-1}} V \sqrt{1-s^2} \end{aligned}$$

Démonstration. Preuve du premier point

On garde les mêmes notations que celles décrites dans Figure 8.2. On introduit les deux espaces fonctionnels

$$H^m(\Delta^m, \tilde{\omega}) = \{u \in H^m(\tilde{\omega}), \Delta^m u \in L^2(\tilde{\omega})\}$$

$$W^m(\Delta^m, \tilde{\omega}') = \left\{ u \in W^m(\tilde{\omega}'), (1+r^2)^{\frac{m}{2}} \log(2+r^2) \Delta^m u \in L^2(\tilde{\omega}') \right\}$$

où $\tilde{\omega}'$ désigne le domaine extérieur $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{\omega}$. On définit les formes bilinéaires suivantes : $\tilde{b}(u, v)$ définie sur $H^m(\tilde{\omega}) \times H^m(\tilde{\omega})$ par

$$\tilde{b}(u, v) = \sum_{k=0}^m C_m^k \int_{\tilde{\omega}} \frac{\partial^m u}{\partial x_1^k \partial x_2^{m-k}} \frac{\partial^m v}{\partial x_1^k \partial x_2^{m-k}}$$

et $\tilde{b}'(u, v)$ définie sur $W^m(\tilde{\omega}') \times W^m(\tilde{\omega}')$ par

$$\tilde{b}'(u, v) = \sum_{k=0}^m C_m^k \int_{\tilde{\omega}'} \frac{\partial^m u}{\partial x_1^k \partial x_2^{m-k}} \frac{\partial^m v}{\partial x_1^k \partial x_2^{m-k}}$$

La formule d'intégration par parties donnée dans le Théorème 8.1.1 et appliquée sur $\tilde{\omega}$ donne :

$$\tilde{b}(u, v) = (-1)^m \int_{\tilde{\omega}} \Delta^m u v + \sum_{i=m}^{2m-1} \int_{\partial \tilde{\omega}} A_i(u) \frac{\partial^{2m-1-i} v}{\partial n^{2m-1-i}}, \forall v \in H^m(\tilde{\omega})$$

De même la formule d'intégration par parties appliquée à $\tilde{\omega}'$ donne :

$$\tilde{b}'(u, v) = (-1)^m \int_{\tilde{\omega}'} \Delta^m u v - \sum_{i=m}^{2m-1} \int_{\partial \tilde{\omega}} A_i(u) \frac{\partial^{2m-1-i} v}{\partial n^{2m-1-i}} \forall v \in W^m(\tilde{\omega}')$$

On introduit ensuite l'espace fonctionnel K défini par

$$K = \left\{ u \in H^m(\Delta^m, \tilde{\omega}) \times W^m(\Delta^m, \tilde{\omega}') / \mathbb{P}_{m-1}, \text{supp}(\Delta^m u) = \sigma, [A_i(u)]_{\sigma} = 0, \left[\frac{\partial^k u}{\partial n^k} \right]_{\tilde{\sigma} \setminus \tilde{\sigma}} = 0, k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket \right\}$$

on peut réécrire K en bornant les poids utilisés dans la définition de $W^m(\Lambda)$ et en utilisant la régularité des fonctions $H_{loc}^m(\Lambda)$:

$$K = \{u \in W^m(\Delta^m, \Lambda) / \mathbb{P}_{m-1}, \text{supp}(\Delta^m u) = \sigma, [A_i(u)]_{\sigma} = 0, i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket\}$$

La formulation variationnelle de (\mathcal{R}_{ext}) est alors : trouver $R \in K$ telle que

$$\text{trouver } R \in K \text{ telle que : } b(R, v) = l(v), \quad \forall v \in K, \quad (\mathcal{R}_{ext})$$

où $l(v)$ et $b(u, v)$ sont les formes linéaire et bilinéaire sur K :

$$l(v) = \sum_{i=m}^{2m-1} \int_{\sigma} g_i \left[\frac{\partial^{2m-1-i} v}{\partial n^{2m-1-i}} \right] \quad \text{et} \quad b(u, v) = \sum_{k=0}^m C_m^k \int_{\Lambda} \frac{\partial^m u}{\partial x_1^k \partial x_2^{m-k}} \frac{\partial^m v}{\partial x_1^k \partial x_2^{m-k}}$$

Le problème (\mathcal{R}_{ext}) admet une solution unique dans K . En effet, le problème est coercif sur K :

$$b(u, u) \geq |u|_{W^m(\Lambda)}^2 \quad (8.9.2)$$

et d'après le Lemme 0.0.2 (prérequis)

$$\|u\|_K = \|u\|_{W^m(\Lambda)/\mathbb{P}_{m-1}} \leq C(\Lambda) |u|_{W^m(\Lambda)} \quad (8.9.3)$$

d'où la coercivité de $b(u, v)$ sur K . Avec le Lemme 8.9.1, il vient

$$|l(v)| \leq C \sum_{i=m}^{2m-1} \|g_i\|_{H_{00}^{1/2+2m-1-i}(\sigma)} \|v\|_{W^m(\Lambda)/\mathbb{P}_{m-1}} \quad \forall v \in K \quad (8.9.4)$$

d'où la continuité de l'application $l(v)$ sur K . K étant un sous ensemble fermé de $W^m(\Lambda)/\mathbb{P}_{m-1}$ qui est un espace de Hilbert, on en déduit que c'est un espace de Hilbert. En appliquant le théorème de Lax Milgram, on obtient l'existence et unicité de la solution du problème (\mathcal{R}_{ext}) . En partant de la forme variationnelle vérifiée par R , et en utilisant (8.9.2), (8.9.3) et (8.9.4) on obtient la continuité de l'application $(g_m, \dots, g_{2m-1}) \mapsto R$ pour les topologies associées, et on définit l'isomorphisme

$$J_0 : \begin{matrix} (g_m, g_{m+1}, \dots, g_{2m-2}, g_{2m-1}) \mapsto R \\ \left(H_{00}^{1/2+m-1}(\sigma) \right)' \times \dots \times \left(H_{00}^{1/2}(\sigma) \right)' \longrightarrow K \end{matrix} \quad (8.9.5)$$

Preuve des deuxième et troisième points

On considère le problème suivant : pour $(q_m, q_{m+1}, \dots, q_{2m-1}) \in H_{00}^{1/2}(\sigma) \times \dots \times H_{00}^{1/2+(m-1)}(\sigma)$

$$\text{trouver } Q \in K \text{ tel que } \left[\frac{\partial^{2m-1-i} Q}{\partial n^{2m-1-i}} \right] = q_i, \quad \forall i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket \quad (\mathcal{Q}_{ext})$$

Soit $u, v \in K$, on a

$$b(u, v) = (-1)^m \int_{\Lambda} \Delta^m u v - \sum_{i=m}^{2m-1} \int_{\sigma} A_i(v) \left[\frac{\partial^{2m-1-i} u}{\partial n^{2m-1-i}} \right]$$

La formulation variationnelle de (\mathcal{Q}_{ext}) est :

$$\text{trouver } Q \in K \text{ telle que : } b(Q, v) = l'(v), \quad \forall v \in K, \quad (\mathcal{Q}_{ext})$$

où on définit

$$l'(v) = - \sum_{i=m}^{2m-1} \int_{\sigma} q_i A_i(v)$$

Pour la coercivité, le raisonnement est identique à celui pour l'étude du problème (\mathcal{R}_{ext}) . En utilisant le Lemme 8.9.2, il vient

$$l'(v) \leq C \sum_{i=m}^{2m-1} \|q_i\|_{H_{00}^{1/2+2m-1-i}(\sigma)} |v|_{m, B_r \setminus \bar{\sigma}}$$

Avec l'équivalence entre la norme et la semi-norme sur l'espace $W^2(\Lambda)/\mathbb{P}_1$, on déduit la continuité de la fonction $l'(v)$ sur K . En appliquant le théorème de Lax-Milgram, on obtient l'existence et l'unicité de la solution Q du problème (\mathcal{Q}_{ext}) . En partant de la formulation variationnelle de (\mathcal{Q}_{ext}) on montre que l'application $(q_m, \dots, q_{2m-1}) \mapsto Q$ est continue pour les topologies considérées, et on définit l'isomorphisme

$$J_1 : \begin{array}{ccc} (q_m, q_{m+1}, \dots, \dots, q_{2m-2}, q_{2m-1}) & \mapsto & Q \\ H_{00}^{1/2}(\sigma) \times \dots & \times H_{00}^{1/2+m-1}(\sigma) & \longrightarrow K \end{array} \quad (8.9.6)$$

On note $J = J_1^{-1} \circ J_0$ avec J_0 défini en (8.9.5), l'isomorphisme

$$J : \begin{array}{ccc} (g_m, g_{m+1}, \dots, \dots, g_{2m-2}, g_{2m-1}) & \mapsto & (q_m, q_{m+1}, \dots, \dots, q_{2m-2}, q_{2m-1}) \\ \left(H_{00}^{1/2+m-1}(\sigma) \right)' \times \dots & \times \left(H_{00}^{1/2}(\sigma) \right)' & \longrightarrow H_{00}^{1/2}(\sigma) \times \dots \times H_{00}^{1/2+m-1}(\sigma) \end{array}$$

J est en fait l'application correspondant au problème Neumann to Dirichlet $(A_m(u), \dots, A_{2m-1}(u)) \rightarrow ([u], \dots, [\frac{\partial^{m-1}u}{\partial n^{m-1}}])$ où $u \in K$. Maintenant, soit \bar{u} définie par

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= \sum_{i=m}^{2m-1} \int_{\sigma} \lambda_i(y) A_{i,y}(E(x-y)) d\sigma(y) \\ &= \sum_{i=m}^{2m-1} \int_{\partial\tilde{\omega}} \tilde{\lambda}_i(y) A_{i,y}(E(x-y)) d\sigma(y) \end{aligned}$$

où $\lambda_i \in H_{00}^{2m-1-i}(\sigma)$ et $\tilde{\lambda}_i \in H^{2m-1-i}(\tilde{\sigma})$ sont les prolongements définis par

$$\tilde{\lambda}_i = \begin{cases} \lambda_i, & \text{sur } \sigma \\ 0, & \text{sur } \tilde{\sigma} \setminus \bar{\sigma} \end{cases} \quad \forall i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket$$

Montrons que $\Delta^m \bar{u} = 0$ sur Λ . Pour $x \in \Lambda$, les fonctions $y \mapsto A_{i,y}(E(x-y))$ sont $C^\infty(\sigma)$. De plus

$$\Delta_x^m A_{i,y}(E(x-y)) = A_{i,y}(\Delta^m(E(x-y))) = 0$$

En utilisant la régularité des $A_{i,y}E(-y)$ sur Λ et le fait que leur m -ième laplacien est nul et donc majoré indépendamment de x , on peut intervertir le signe intégral et l'opérateur Δ^m , ce qui entraîne :

$$\Delta^m \bar{u}(x) = 0, \forall x \in \Lambda$$

Par un développement de Taylor de $E(x-y)$ en $x \in \Lambda$ pour $|x| \rightarrow \infty$, et en utilisant les expressions des $A_i(u)$ pour un crack rectiligne (Théorème 8.1.1) et le Lemme 8.9.3 on a $\bar{u}(x) = O(|x|^{m-2} \log(|x|))$. On déduit que $\frac{\bar{u}}{(1+r^2)^{\frac{m}{2}} \log(2+r^2)} \in L^2(\Lambda)$. En dérivant k fois l'expression de \bar{u} pour $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on obtient par le même raisonnement que $\frac{\nabla^k \bar{u}}{(1+r^2)^{\frac{m-k}{2}} \log(2+r^2)} \in L^2(\Lambda)$. On conclut que $\bar{u} \in W^m(\Lambda)$. En considérant \bar{u} comme un élément de $W^m(\Lambda)/\mathbb{P}_1$ on a $\bar{u} \in K$. Ensuite en appliquant le Lemme 8.9.8 en considérant le domaine $\tilde{\omega}$, puis en utilisant les définitions des $\tilde{\lambda}_i$, on obtient

$$\frac{\partial^{2m-1-i} \bar{u}^\pm}{\partial n^{2m-1-i}}(x) = \frac{\pm(-1)^{m+1}}{2} \lambda_i(x) + \sum_{j=m}^{2m-1} \int_{\sigma} \lambda_j(y) \frac{\partial^{2m-1-i}}{\partial n^{2m-1-i}}(A_{j,y}(E(x-y))) d\sigma_y, \quad \forall x \in \sigma, \text{ et } \forall i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket$$

On en déduit les relations de saut à travers σ :

$$\lambda_i = (-1)^{m+1} \left[\frac{\partial^{2m-1-i} \bar{u}}{\partial n^{2m-1-i}} \right], \text{ pour } i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket$$

En prenant $\lambda_i = (-1)^{m+1} \left[\frac{\partial^{2m-1-i} R}{\partial n^{2m-1-i}} \right]$, comme J_1 est un isomorphisme on déduit que $\bar{u} = R$ d'où les points 2 et 3.

Preuve du quatrième point

En appliquant à \bar{u} l'opérateur $A_{i,x}$ pour $i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket$, en faisant $x \rightarrow \sigma$, et en utilisant le Lemme 8.9.3 on a tout d'abord

$$A_{i,x} A_{j,y}(E(x-y)) = O\left(\frac{1}{|x-y|^{2+(i+j)-2m}}\right)$$

où $i, j \geq m$. En utilisant la régularité de tels potentiels (voir Lemme 8.9.8), on obtient les m équations intégrales suivantes caractérisant l'isomorphisme J^{-1}

$$g_i(x) = \sum_{j=m}^{2m-1} \oint_{\sigma} \lambda_j(y) A_{i,x} A_{j,y}(E(x-y)) d\sigma_y, \forall i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket \quad (8.9.7)$$

où \oint désigne la valeur principale de Cauchy. Ces équations caractérisent l'isomorphisme J^{-1} .

Preuve du dernier point

Dans le cas où $\sigma = \{(s, 0), -1 < s < 1\}$, en posant $x = (s, 0)$ et $y = (t, 0)$ et en utilisant l'expression des A_i sur un crack rectiligne (Théorème 8.1.1) et le Lemme 8.9.3, on a :

$$A_{i,x} A_{j,y}(E(x-y)) = \frac{a_{i,j}}{(s-t)^{2+i+j-2m}} \quad (8.9.8)$$

où les a_{ij} sont des constantes. On réécrit (8.9.7) en utilisant (8.9.8) :

$$g_i(s) = \sum_{j=m}^{2m-1} a_{ij} \oint_{-1}^1 \frac{\lambda_j(t)}{(s-t)^{2+i+j-2m}}, \quad i, j \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket \quad (8.9.9)$$

On pose

$$f_j(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\lambda_j(t)}{s-t} dt, \text{ pour } -1 < s < 1$$

En dérivant f_j on montre pour $n \geq 0$ que

$$\frac{d^n f_j}{ds^n} = \frac{(-1)^n n!}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\lambda_j(t)}{(s-t)^{n+1}} dt$$

On note $\frac{d^n f_j}{ds^n} = f_j^{(n)}$. On peut donc réécrire (8.9.9) en fonction des $f_j^{(n)}$ comme suit :

$$\begin{aligned} g_i(s) &= \sum_{j=m}^{2m-1} \frac{a_{ij} (-1)^{i+j+1-2m} \pi}{(i+j+1-2m)!} f_j^{(i+j+1-2m)}(s) \\ &= \sum_{j=m}^{2m-1} b_{ij} f_j^{(i+j+1-2m)}(s) \quad \text{pour } i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket \end{aligned} \quad (8.9.10)$$

où on a posé

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}(-1)^{i+j+1-2m}\pi}{(i+j+1-2m)!} \quad (8.9.11)$$

On explicite (8.9.10) avec les valeurs des g_i données au point 5 du théorème :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} V = b_{m,m}f_m^{(1)} + b_{m,m+1}f_{m+1}^{(2)} + \dots & + b_{m,2m-1}f_{2m-1}^{(m)} \\ 0 = b_{m+1,m}f_m^{(2)} + b_{m+1,m+1}f_{m+1}^{(3)} + \dots & + b_{m+1,2m-1}f_{2m-1}^{(m+1)} \\ \vdots & \vdots \\ 0 = b_{2m-1,m}f_m^{(m)} + b_{2m-1,m+1}f_{m+1}^{(m+1)} + \dots & + b_{2m-1,2m-1}f_{2m-1}^{(2m-1)} \end{cases} \quad (8.9.12)$$

Pour résoudre (\mathcal{S}) , on intègre i fois la ligne i en choisissant comme constantes d'intégration 0 pour les $i-2$ premières intégrations, puis pour la $i-1$ ème constante on prend $\frac{Vb_{i+m-1,m}}{b_{m,m}}$. La dernière constante est prise nulle. On vérifiera plus tard que $b_{m,m}$ est non nulle en explicitant sa valeur. Le système (\mathcal{S}) devient :

$$(\mathcal{S}') \begin{cases} Vs = b_{m,m}f_m + b_{m,m+1}f_{m+1}^{(1)} + \dots & + b_{m,2m-1}f_{2m-1}^{(m-1)} \\ \frac{Vb_{m+1,m}s}{b_{m,m}} = b_{m+1,m}f_m + b_{m+1,m+1}f_{m+1}^{(1)} + \dots & + b_{m+1,2m-1}f_{2m-1}^{(m-1)} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{Vb_{2m-1,m}s}{b_{m,m}} = b_{2m-1,m}f_m + b_{2m-1,m+1}f_{m+1}^{(1)} + \dots & + b_{2m-1,2m-1}f_{2m-1}^{(m-1)} \end{cases} \quad (8.9.13)$$

Les inconnues de (\mathcal{S}') sont les $f_i^{(i-m)}$ pour $i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket$. Une solution évidente est

$$\begin{cases} f_m = \frac{Vs}{b_{m,m}} \\ f_i = 0, \text{ pour } i \in \llbracket m+1, 2m-1 \rrbracket \end{cases}$$

On obtient ainsi m équations intégrales découplées. Pour inverser la première équation, on utilise [62] : pour plus de détails, on renvoie à la preuve du Théorème (6.5.3) (chapitre 6, Annexe B section 6.5). Les équations suivantes ont pour solution évidentes $\lambda_i = 0$ pour $i \in \llbracket m+1, 2m-1 \rrbracket$. Les valeurs des λ_i sont donc :

$$\begin{cases} \lambda_m = \frac{V}{b_{m,m}}\sqrt{1-s^2}, \quad -1 < s < 1 \\ \lambda_i = 0, \text{ pour } i \in \llbracket m+1, 2m-1 \rrbracket \text{ et } -1 < s < 1 \end{cases}$$

On vérifie que $\lambda_i \in H_{00}^{1/2+i-m}$ et on déduit en utilisant la bijectivité de J que cette solution est unique. Avec (8.9.11), on a $b_{m,m} = -\pi a_{m,m}$ et $a_{m,m}$ est donnée par (voir (8.9.8)) :

$$A_{m,x}A_{m,y}(E(x-y)) = \frac{a_{m,m}}{(x_1 - y_1)^2}, \text{ pour } x, y \in \sigma$$

Avec le Théorème 8.1.1, on peut expliciter l'opérateur A_m et on obtient

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m}}{\partial x_2^{2m}} E(x-y) = \frac{a_{m,m}}{(x_1 - y_1)^2}, \text{ pour } x, y \in \sigma \quad (8.9.14)$$

On montre (voir Lemme 8.9.7 pour $n = m-1$) que

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial x_2^{2m}} \left(|x|^{2(m-1)} \log(|x|^2) \right) \Big|_{x_2=0} = \frac{2(2m-1)!}{x_1^2}$$

d'où avec (8.2.1) et (8.9.14) on obtient

$$a_{m,m} = \frac{(-1)^{m+1}(2m-1)!}{2^{2m-1}\pi((m-1)!)^2} \quad (8.9.15)$$

Les expressions de $b_{m,m}$ et λ_m sont donc

$$b_{m,m} = \frac{(-1)^m(2m-1)}{2^{2m-1}} C_{2(m-1)}^{m-1}$$

$$\lambda_m(s) = \frac{(-1)^m 2^{2m-1}}{(2m-1)C_{2(m-1)}^{m-1}} V \sqrt{1-s^2}$$

ce qui termine la preuve de ce dernier point et de ce théorème. □

Lemme 8.9.5. *Soit $R(x)$ la solution du problème (8.9.1).*

Pour $m \geq 1$, avec la convention $\llbracket 0, -1 \rrbracket = \emptyset$, on a les estimations suivantes pour $|x| \rightarrow \infty$ et $\epsilon \rightarrow 0$:

$$|\nabla^k R(x)| \leq C|x|^{m-2-k} \log(|x|), \quad k \in \llbracket 0, m-2 \rrbracket$$

$$|\nabla^{m-1} R(x)| \leq \frac{C}{|x|}$$

$$|\nabla^m R(x)| \leq \frac{C}{|x|^2}$$

$$\left\| \nabla^k R \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right\|_{0, \Omega_\epsilon} = O \left(-\epsilon^{-(m-2-k)} \log(\epsilon) \right), \quad \text{pour } k \in \llbracket 0, m-2 \rrbracket$$

$$\left\| \nabla^{m-1} R \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right\|_{0, \Omega_\epsilon} = O \left(\epsilon \sqrt{-\log(\epsilon)} \right)$$

$$\left\| \nabla^m R \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right\|_{0, \Omega_\epsilon} = O(\epsilon)$$

Démonstration. D'après le Théorème 8.9.4, $R(x)$ s'écrit sous la forme

$$R(x) = \sum_{i=m}^{2m+1} \int_{\sigma} \lambda_i(y) A_{i,y}(E(x-y)) d\sigma_y \quad (8.9.16)$$

En utilisant le Théorème 8.1.1, les $A_{i,y}(E(x-y))$ sont de la forme

$$A_{i,y}(E(x-y)) = \sum_{j=0}^{m-2} \varphi_j^i(y) |x-y|^{m-2-j} \log(|x-y|) + \frac{\varphi_{m-1}^i(y)}{|x-y|}$$

En faisant un développement de Taylor en x de $A_i(E(x-y))$ à l'ordre 1 puis en faisant $|x| \rightarrow \infty$ et en utilisant Lemme 8.9.3, on a

$$A_{i,y}(E(x-y)) = O(|x|^{m-2} \log(|x|))$$

En dérivant (8.9.16) k fois et en utilisant à nouveau un développement de Taylor et le Lemme 8.9.3 on obtient les comportements à l'infini des $\nabla^k R$ pour $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$. Soit $D > 0$ tel que $\Omega \subset B_D$ pour

$0 \leq k \leq m - 2$ on a :

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla^k R \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right\|_{0, \Omega_\epsilon}^2 &= \int_{\Omega_\epsilon} \left\| \nabla^k R \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right\|^2 dx = \epsilon^2 \int_{\frac{1}{\epsilon} \Omega \setminus \bar{\sigma}} \left\| \nabla^k R(y) \right\|^2 dy \\
&= \epsilon^2 \int_{B_r \setminus \bar{\sigma}} \left\| \nabla^k R(y) \right\|^2 dy + \epsilon^2 \int_{\frac{\Omega}{\epsilon} \setminus \bar{B}_r} \left\| \nabla^k R(y) \right\|^2 dy \\
&\leq \epsilon^2 \left(C + \int_{\frac{B_D}{\epsilon} \setminus \bar{B}_r} \left\| \nabla^k R(y) \right\|^2 dy \right) \\
&\leq \epsilon^2 \left(C + \int_2^{D/\epsilon} r^{2(m-2-k)} \log(r)^2 r dr \right) \\
&\leq \epsilon^2 \left(C + \frac{1}{2(m-1-k)} \left[r^{2(m-1-k)} \left(\log(r)^2 - \frac{1}{2(m-1-k)} \log(r) + \frac{1}{(2(m-1))^2} \right) \right]_2^{D/\epsilon} \right) \\
&\leq C \epsilon^{-2(m-2-k)} \log(\epsilon)^2
\end{aligned}$$

d'où la première estimation,

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla^{m-1} R \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right\|_{0, \Omega_\epsilon}^2 &= \int_{\Omega_\epsilon} \left\| \nabla^{m-1} R \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right\|^2 dx = \epsilon^2 \int_{\frac{1}{\epsilon} \Omega \setminus \bar{\sigma}} \left\| \nabla^{m-1} R(y) \right\|^2 dy \\
&\leq \epsilon^2 \left(\int_{B_r \setminus \bar{\sigma}} \left\| \nabla^{m-1} R(y) \right\|^2 dy + \int_{\frac{1}{\epsilon} B_D \setminus \bar{B}_r} \left\| \nabla^{m-1} R(y) \right\|^2 dy \right) \\
&\leq C \epsilon^2 + C \epsilon^2 \int_2^{D/\epsilon} \frac{1}{r^2} r dr \\
&= C \epsilon^2 + C \epsilon^2 \left[\log(r) \right]_2^{D/\epsilon} \\
&\leq -C \epsilon^2 \log(\epsilon)
\end{aligned}$$

et la seconde estimation.

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla^m R \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right\|_{0, \Omega_\epsilon}^2 &= \int_{\Omega_\epsilon} \left\| \nabla^m R \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right\|^2 dx = \epsilon^2 \int_{\frac{1}{\epsilon} \Omega \setminus \bar{\sigma}} \left\| \nabla^m R(y) \right\|^2 dy \\
&\leq \epsilon^2 \left(\int_{B_r \setminus \bar{\sigma}} \left\| \nabla^m R(y) \right\|^2 dy + \int_{\frac{1}{\epsilon} B_D \setminus \bar{B}_r} \left\| \nabla^m R(y) \right\|^2 dy \right) \\
&\leq C \epsilon^2 + C \epsilon^2 \int_2^{D/\epsilon} \frac{1}{r^4} r dr \\
&= C \epsilon^2 + C \epsilon^2 \left[\frac{-2}{r^2} \right]_2^{D/\epsilon} \\
&\leq C \epsilon^2
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Lemme 8.9.6. Soit w_ϵ la solution du problème (\mathcal{Q}_ϵ^c) donnée en (8.5.1) pour $m \geq 1$, et R la solution du problème extérieur (\mathcal{R}_{ext}) donnée en (8.5.2), on a le développement asymptotique suivant

$$w_\epsilon = \epsilon^m R \left(\frac{x}{\epsilon} \right) + e_\epsilon \tag{8.9.17}$$

avec

$$\begin{aligned}\|e_\epsilon\|_{H^m(\Omega_\epsilon)} &= O(\phi_m(\epsilon)) \\ |w_\epsilon|_{m,\Omega_\epsilon} &= O(\epsilon)\end{aligned}$$

où

$$\phi_m(\epsilon) = \begin{cases} -\epsilon^2 \log(\epsilon) & \text{pour } m \geq 2 \\ \epsilon^2 \sqrt{-\log(\epsilon)} & \text{pour } m = 1 \end{cases}$$

Démonstration. e_ϵ est solution de l'équation :

$$(\mathcal{E}_\epsilon) \begin{cases} (-1)^m \Delta^m e_\epsilon + e_\epsilon = -\epsilon^m R\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \text{ sur } \Omega_\epsilon \\ A_m(e_\epsilon) = \varphi_m(x) = O(|x|), \text{ sur } \sigma_\epsilon \\ A_i(e_\epsilon) = -A_i(v_0) = O(1), \text{ sur } \sigma_\epsilon \text{ pour } i \in \llbracket m+1, 2m-1 \rrbracket \\ A_i(e_\epsilon) = \psi_i^\epsilon(x) = O(\epsilon^2) \text{ sur } \Gamma \text{ pour } i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket \end{cases} \quad (8.9.18)$$

où $\varphi_m(x) = -A_m(v_0)(x) + A_m(v_0)(0) = O(|x|)$ (voir (8.4.1a)) et où $\psi_i^\epsilon(x) = -\epsilon^m A_i\left(R\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right)$.

Justification des estimations $\psi_i^\epsilon(x) = O(\epsilon^2)$

En utilisant le Théorème 8.1.1, les $A_j(u)$ pour $j \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket$ sont de la forme

$$A_{j,y}(u) = \sum_{m \leq |p| \leq j} \varphi_p^j(y) \frac{\partial^{|p|} u}{\partial y^p} \quad (8.9.19)$$

Avec (8.9.19) et le Lemme 8.9.3 on obtient pour $x \in \Gamma$ et $y \in \sigma$

$$\begin{aligned} A_{i,x} A_{j,y} \left(E\left(\frac{x}{\epsilon} - y\right) \right) &= \sum_{\substack{m \leq |p| \leq i \\ m \leq |q| \leq j}} \varphi_p^i(x) \varphi_q^j(y) \frac{\partial^{|p|+|q|}}{\partial x^p \partial x^q} \left(E\left(\frac{x}{\epsilon} - y\right) \right) \\ &= \sum_{\substack{m \leq |p| \leq i \\ m \leq |q| \leq j}} \varphi_p^i(x) \varphi_q^j(y) \frac{1}{\epsilon^{|p|}} \frac{\partial^{|p|+|q|} E}{\partial x^p \partial x^q} \left(\frac{x}{\epsilon} - y \right) \\ &= \sum_{\substack{m \leq |p| \leq i \\ m \leq |q| \leq j}} \varphi_p^i(x) \varphi_q^j(y) \frac{1}{\epsilon^{|p|}} G_{p+q} \left(\frac{x}{\epsilon} - y \right) \\ &= \sum_{\substack{m \leq |p| \leq i \\ m \leq |q| \leq j}} \varphi_p^i(x) \varphi_q^j(y) \frac{1}{\epsilon^{|p|}} \epsilon^{|p|+|q|-2m+2} G_{p+q}(x - \epsilon y) \\ &= \sum_{\substack{m \leq |p| \leq i \\ m \leq |q| \leq j}} \varphi_p^i(x) \varphi_q^j(y) \epsilon^{|q|-2m+2} G_{p+q}(x - \epsilon y) \\ &= O(\epsilon^{2-m}) \end{aligned}$$

où G_k est une fonction $2(m-1) - |k|$ homogène et en utilisant que $G_{p+q}(x - \epsilon y) = O(1)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ pour $x, y \in \Gamma$.

Décomposition de $\|e_\epsilon\|_{m,\Omega_\epsilon}$

On décompose e_ϵ en la somme $e_\epsilon = e_\epsilon^1 + e_\epsilon^2$ avec $e_\epsilon^1 \in H^m(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_{m-1}$ solution de l'équation

$$(\mathcal{E}_\epsilon^1) \begin{cases} (-1)^m \Delta^m e_\epsilon^1 = 0, \text{ sur } \Omega_\epsilon \\ A_m(e_\epsilon^1) = \varphi_m(x) = O(|x|), \text{ sur } \sigma_\epsilon \\ A_i(e_\epsilon^1) = -A_i(v_0) = O(1), \text{ sur } \sigma_\epsilon, \text{ pour } i \in \llbracket m+1, 2m-1 \rrbracket \\ A_i(e_\epsilon^1) = 0 \text{ sur } \Gamma, \text{ pour } i \in \llbracket m+1, 2m-1 \rrbracket \end{cases}$$

et $e_\epsilon^2 \in H^m(\Omega_\epsilon)$ solution du problème suivant :

$$(\mathcal{E}_\epsilon^2) \begin{cases} (-1)^m \Delta^m e_\epsilon^2 + e_\epsilon^2 = -e_\epsilon^1 - \epsilon^m R\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \text{ sur } \Omega_\epsilon \\ A_i(e_\epsilon^2) = 0, \text{ sur } \sigma_\epsilon, \text{ pour } i \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket \\ A_i(e_\epsilon^2) = \psi_i^\epsilon(x) \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Estimation de $\|e_\epsilon^1\|_{H^m(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_1}$

La formulation variationnelle de (\mathcal{E}_ϵ^1) est : trouver $e_\epsilon^1 \in H^m(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_{m-1}$ telle que

$$b_\epsilon(e_\epsilon^1, v) = - \int_{\sigma_\epsilon} \varphi_m \left[\frac{\partial^{m-1} v}{\partial n^{m-1}} \right] + \sum_{k=m+1}^{2m-1} \int_{\sigma_\epsilon} A_k(v_0) \left[\frac{\partial^{2m-1-k} v}{\partial n^{2m-1-k}} \right], \forall v \in H^m(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_{m-1}$$

où

$$b_\epsilon(u, v) = \sum_{k=0}^m C_m^k \int_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial^m u}{\partial x_1^k \partial x_2^{m-k}} \frac{\partial^m v}{\partial x_1^k \partial x_2^{m-k}}$$

On prend comme fonction test $v = e_\epsilon^1$ et on pose pour $k \in \llbracket m+1, 2m-1 \rrbracket$

$$\mathcal{J}_k = \int_{\sigma_\epsilon} A_k(v_0) \left[\frac{\partial^{2m-1-k} e_\epsilon^1}{\partial n^{2m-1-k}} \right]$$

et

$$\mathcal{J}_m = \int_{\sigma_\epsilon} \varphi_m \left[\frac{\partial^{m-1} e_\epsilon^1}{\partial n^{m-1}} \right]$$

En utilisant le Lemme 8.9.1, la coercivité de $b_\epsilon(u, v)$ et l'inégalité de Deny-Lions, on obtient

$$\|e_\epsilon^1\|_{H^m(\Omega_\epsilon)/\mathbb{P}_{m-1}}^2 \leq C |e_\epsilon^1|_{m, \Omega_\epsilon} \leq \sum_{k=m}^{2m-1} \mathcal{J}_k \quad (8.9.20)$$

Soit $k \in \llbracket m+1, 2m-1 \rrbracket$, grâce à un changement de variable, au Lemme 8.9.1, au Lemme 8.4.1 et à un nouveau changement de variable on a

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_k &= \epsilon \int_{\sigma} A_k(v_0)(\epsilon X) \left[\frac{\partial^{2m-1-k} e_\epsilon^1(\epsilon X)}{\partial n^{2m-1-k}} \right] d\sigma \\ &\leq C \epsilon^{1-(2m-1-k)} |e_\epsilon^1(\epsilon X)|_{m, B_r \setminus \bar{\sigma}} \\ &\leq C \epsilon^{k-(m-1)} |e_\epsilon^1|_{m, \Omega_\epsilon} \end{aligned}$$

Puisque $2m-1 \geq k \geq m+1$ (c-à-d $k - (m-1) \geq 2$), on en déduit que

$$\mathcal{J}_k \leq C \epsilon^2 |e_\epsilon^1|_{m, \Omega_\epsilon} \quad (8.9.21)$$

De la même manière en utilisant l'estimation $\varphi_m(\epsilon X) = O(\epsilon)$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_m &= \epsilon \int_{\sigma} \varphi_m(\epsilon X) \left[\frac{\partial^{m-1} e_{\epsilon}^1}{\partial n^{m-1}} \right] \\ &\leq C \epsilon \|\varphi_m(\epsilon X)\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)} \epsilon^{-(m-1)} |e_{\epsilon}^1(\epsilon X)|_{m, B_r \setminus \bar{\sigma}} \\ &\leq C \epsilon^{2-(m-1)} |e_{\epsilon}^1(\epsilon X)|_{m, B_r \setminus \bar{\sigma}} \\ &\leq C \epsilon^2 |e_{\epsilon}^1|_{m, \Omega_{\epsilon}} \end{aligned} \quad (8.9.22)$$

En partant de (8.9.20) et en utilisant (8.9.21) et (8.9.22), on obtient

$$\|e_{\epsilon}^1\|_{H^m(\Omega_{\epsilon})/\mathbb{P}_{m-1}} \leq C \epsilon^2 \quad (8.9.23)$$

Estimation de $\|e_{\epsilon}^2\|_{m, \Omega_{\epsilon}}$

La formulation variationnelle de $(\mathcal{E}_{\epsilon}^2)$ est : trouver $e_{\epsilon}^2 \in H^m(\Omega_{\epsilon})$ telle que

$$a_{\epsilon}(e_{\epsilon}^2, v) = \int_{\Omega_{\epsilon}} \left(-\epsilon^m R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - e_{\epsilon}^1 \right) v + \sum_{i=m}^{2m-1} \int_{\Gamma} \psi_i^{\epsilon} \frac{\partial^{2m-1-i} v}{\partial n^{2m-1-i}} \quad \forall v \in H^m(\Omega_{\epsilon})$$

On prend comme fonction test $v = e_{\epsilon}^2$ et on pose

$$\mathcal{K}_{\epsilon} = - \int_{\Omega_{\epsilon}} \left(\epsilon^m R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + e_{\epsilon}^1 \right) e_{\epsilon}^2 \quad \mathcal{L}_{\epsilon} = \sum_{i=m}^{2m-1} \int_{\Gamma} \psi_i^{\epsilon} \frac{\partial^{2m-1-i} e_{\epsilon}^2}{\partial n^{2m-1-i}}$$

En utilisant la définition de $a_{\epsilon}(u, v)$ (8.0.4) on déduit

$$\|e_{\epsilon}^2\|_{m, \Omega_{\epsilon}}^2 = \mathcal{K}_{\epsilon} + \mathcal{L}_{\epsilon} \quad (8.9.24)$$

Le Lemme 8.9.5 et l'estimation $\|e_{\epsilon}^1\|_{H^m(\Omega_{\epsilon})/\mathbb{P}_{m-1}} = O(\epsilon^2)$ permettent d'écrire

$$\mathcal{K}_{\epsilon} \leq C \phi_m(\epsilon) \|e_{\epsilon}^2\|_{0, \Omega_{\epsilon}} \quad (8.9.25)$$

Grâce à l'estimation $\psi_i^{\epsilon}(x) = O(\epsilon^2)$ et au Théorème de trace sur $\Omega \setminus \bar{B}$, on obtient

$$\mathcal{L}_{\epsilon} \leq C \epsilon^2 \|e_{\epsilon}^2\|_{m, \Omega \setminus \bar{B}} \leq C \epsilon^2 \|e_{\epsilon}^2\|_{m, \Omega_{\epsilon}} \leq C \epsilon^2$$

En partant de cette dernière inégalité et de (8.9.24) et (8.9.25) il vient

$$\|e_{\epsilon}^2\|_{m, \Omega_{\epsilon}} \leq C \phi_m(\epsilon) \quad (8.9.26)$$

En utilisant (8.9.23) et (8.9.26) on obtient la première estimation :

$$\begin{aligned} \|e_{\epsilon}\|_{m, \Omega_{\epsilon}} &\leq \|e_{\epsilon}^1\|_{H^m(\Omega_{\epsilon})/\mathbb{P}_{m-1}} + \|e_{\epsilon}^2\|_{m, \Omega_{\epsilon}} \\ &\leq C \phi_m(\epsilon) \end{aligned}$$

Enfin en dérivant m fois (8.9.17) et en utilisant le Lemme 8.9.5 on obtient la deuxième estimation :

$$\begin{aligned} |w_{\epsilon}|_{m, \Omega_{\epsilon}} &\leq \left\| \nabla^m R\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right\|_{0, \Omega_{\epsilon}} + |e_{\epsilon}|_{m, \Omega_{\epsilon}} \\ &\leq C \epsilon \end{aligned}$$

□

Lemme 8.9.7. On a l'égalité suivante¹ :

$$\frac{\partial^{2n+2}}{\partial x_2^{2n+2}} (|x|^{2n} \log(|x|^2))|_{x_2=0} = \frac{2(2n+1)!}{x_1^2} \quad \text{pour } x_1 \neq 0$$

Démonstration. On pose $f_n(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^n \log(x_1^2 + x_2^2)$ et $\psi_n(r) = r^n \log(r)$.

Étape 1 : Montrons par récurrence que :

$$\psi_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \psi_{n-k} + C(k, n) r^{n-k} \quad \forall 0 \leq k \leq n$$

où $C(k, n)$ est une constante dépendant de k et n .

Pour $k = 0$ la propriété est vérifiée.

Supposons la propriété vraie pour $0 < k < n$ alors on a :

$$\begin{aligned} \psi_n^{(k+1)} &= \frac{n!}{(n-k)!} \left[(n-k) \psi_{n-k-1} + r^{n-k-1} \right] + (n-k) C(k, n) r^{n-k-1} \\ &= \frac{n!}{(n-(k+1))!} \psi_{n-(k+1)} + \left[\frac{n!}{(n-k)!} + (n-k) C(k, n) \right] r^{n-(k+1)} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie pour $0 \leq k \leq n$ et les constantes $C(k, n)$ vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} C(0, n) &= 0 \\ C(k+1, n) &= \frac{n!}{(n-k)!} + (n-k) C(k, n) \quad \forall k < n \end{aligned}$$

Pour $k = n$, on a $\psi_n^{(n)}(r) = n! \log(r) + C(n, n)$. Par récurrence on trouve $\psi_n^{(n+1)}(r) = \frac{n!}{r}$, $\psi_n^{(n+2)}(r) = -\frac{n!}{r^2}$, $\psi_n^{(n+3)}(r) = 2\frac{n!}{r^3}$, ... c-à-d :

$$\psi_n^{(n+k)} = \frac{(-1)^{k+1} n! (k-1)!}{r^k}$$

Pour conclure, on a donc

$$\psi_n^{(k)}(r) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} \psi_{n-k} + C(k, n) r^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ \frac{(-1)^{k-n-1} n! (k-n-1)!}{r^{k-n}} & \text{si } k > n \end{cases} \quad (8.9.27)$$

avec

$$\begin{cases} C(0, n) = 0 \\ C(k+1, n) = \frac{n!}{(n-k)!} + (n-k) C(k, n) \quad \forall k < n \end{cases}$$

Étape 2 : On pose $f(x) = \varphi\left(\frac{|x|^2}{2}\right)$, montrons par récurrence que

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_2^k} = \sum_{0 \leq 2i \leq k} a_{i,k} \varphi^{(k-i)}\left(\frac{|x|^2}{2}\right) x_2^{k-2i} \quad \forall k \geq 0 \quad (8.9.28)$$

¹Merci à Arthur Vavasseur pour la démonstration de ce lemme

Pour $k = 0 : 0 \leq 2i \leq k \Leftrightarrow i = 0$ et $f(x) = \varphi^{(0)} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^0$.

Supposons la formule valide pour $k \in \mathbb{N}$ au rang $k + 1$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_2^{k+1}} &= \sum_{0 \leq 2i \leq k} a_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\varphi^{(k-i)} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^{k-2i} \right] \\
&= \sum_{0 \leq 2i \leq k-1} a_{i,k} \left[\varphi^{(k-i+1)} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^{k-2i+1} + \varphi^{(k-i)} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) (k-2i) x_2^{k-2i-1} \right] \\
&+ a_{\frac{k}{2},k} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\varphi^{(k-\frac{k}{2})} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^{k-2\frac{k}{2}} \right) \right] \mathbb{1}_{\{k \in 2\mathbb{N}\}} \\
&= \sum_{0 \leq 2i \leq k-1} a_{i,k} \varphi^{(k-i+1)} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^{k+1-2i} + \sum_{0 \leq 2i \leq k-1} a_{i,k} \varphi^{(k-i)} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) (k-2i) x_2^{k+1-2(i+1)} \\
&+ a_{\frac{k}{2},k} \left[\varphi^{(\frac{k}{2}+1)} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2 \right] \mathbb{1}_{\{k \in 2\mathbb{N}\}} \\
&= \sum_{0 \leq 2i \leq k-1} a_{i,k} \varphi^{(k+1-i)} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^{k+1-2i} + \sum_{2 \leq 2i \leq k+1} a_{i-1,k} \varphi^{(k+1-i)} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) (k-2i+2) x_2^{k+1-2i} \\
&+ a_{\frac{k}{2},k} \left[\varphi^{(k+1-\frac{k}{2})} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2 \right] \mathbb{1}_{\{k \in 2\mathbb{N}\}} \\
&= a_{0,k} \varphi^{(k+1)} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^{k+1} + \sum_{2 \leq 2i \leq k-1} [a_{i,k} + (k-2i+2)a_{i-1,k}] \varphi^{(k+1-i)} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^{k+1-2i} \\
&+ a_{j(k)-1,k} \left[\varphi^{(k+1-j(k))} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^{k+1-2j(k)} (k-2j(k)+2) \right] + a_{\frac{k}{2},k} \left[\varphi^{(k+1-\frac{k}{2})} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2 \right] \mathbb{1}_{\{k \in 2\mathbb{N}\}}
\end{aligned}$$

avec $j(k) = \frac{1}{2} \{k, k+1\} \cap 2\mathbb{N} = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$. On pose $a_{i,k+1} = \begin{cases} a_{0,k} = 1, \text{ si } i = 0 & \text{par récurrence} \\ a_{i,k} + (k-2i+2)a_{i-1,k} & \text{si } 2 \leq 2i \leq k-1 \end{cases}$

On a déjà :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_2^{k+1}} &= \sum_{0 \leq 2i \leq k-1} a_{i,k+1} \varphi^{(k+1-i)} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^{k+1-2i} \\
&+ a_{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor, k} \varphi^{(k+1-\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor)} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^{k+1-2\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \left(k-2\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor+2 \right) \\
&+ a_{\frac{k}{2},k} \left[\varphi^{(k+1-\frac{k}{2})} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^{k+1-2\frac{k}{2}} \right] \mathbb{1}_{\{k \in 2\mathbb{N}\}}
\end{aligned} \Bigg\} = g(x)$$

On discute les deux derniers termes selon la parité de k .

- Si $k \in 2\mathbb{N}$ on a donc $\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor = \frac{k}{2}$ et

$$\begin{aligned}
g(x) &= a_{\frac{k}{2}-1,k} \varphi^{k+1-\frac{k}{2}} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^{k+1-2\frac{k}{2}} \left(k-2\frac{k}{2}+2 \right) + a_{\frac{k}{2},k} \varphi^{k+1-\frac{k}{2}} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^{k+1-2\frac{k}{2}} \\
&= \left(2a_{\frac{k}{2}-1,k} + a_{\frac{k}{2},k} \right) \varphi^{k+1-\frac{k}{2}} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^{k+1-2\frac{k}{2}}
\end{aligned}$$

et $\{k, k+1\} \cap 2\mathbb{N} = k$ donc avec $a_{\frac{k}{2},k+1} = 2a_{\frac{k}{2}-1,k} + a_{\frac{k}{2},k}$, on retrouve bien l'hypothèse de récurrence.

- Si $k \in 2\mathbb{N} + 1$, $\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor = \frac{k+1}{2}$ et

$$\begin{aligned} g(x) &= a_{\frac{k+1}{2}-1,k} \varphi^{k+1-\frac{k+1}{2}} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^{k+1-2\frac{k+1}{2}} \left(k - 2\frac{k+1}{2} + 2 \right) \\ &= \left(a_{\frac{k-1}{2},k} + a_{\frac{k}{2},k} \right) \varphi^{k+1-\frac{k+1}{2}} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^{k+1-2\frac{k+1}{2}} \end{aligned}$$

et $\{k, k+1\} \cap 2\mathbb{N} = k+1$ donc avec $a_{\frac{k+1}{2},k+1} = a_{\frac{k-1}{2},k}$, on retrouve bien l'hypothèse de récurrence. Finalement on a donc bien (8.9.28) où les $a_{i,k}$ vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{0,k} = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ a_{i,k+1} = a_{i,k} + (k-2i+2)a_{i-1,k}, \text{ si } 2 \leq 2i \leq k-1 \\ a_{\frac{k}{2},k+1} = a_{\frac{k}{2},k} + 2a_{\frac{k}{2}-1,k}, \text{ si } k \in 2\mathbb{N} \\ a_{\frac{k+1}{2},k+1} = a_{\frac{k-1}{2},k} \text{ si } k \in 2\mathbb{N} + 1 \end{array} \right\} \text{ si } k \leq 2i \leq k+1 \quad (8.9.29)$$

Étape 3 On combine les deux formules de récurrence (8.9.27) et (8.9.29) en posant $f_n(x) = (x_1^2 + x_2^2)^n \log(x_1^2 + x_2^2) = \varphi_n \left(\frac{|x|^2}{2} \right)$ où $\varphi_n(r) = \psi_n(2r) = (2r)^n \log(2r)$. En utilisant les formules de récurrence montrées dans les étape 1 et 2 on a :

- Si $k \leq n$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k f_n}{\partial x_2^k} &= \sum_{0 \leq 2i \leq k} a_{i,k} \varphi_n^{(k-i)} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^{k-2i} \\ &= \sum_{0 \leq 2i \leq k} a_{i,k} 2^{k-i} \left[\frac{(k-i)!}{(n-k+i)!} \varphi_{n-k+i} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) + C(k-i, n) |x|^{2(n-k+i)} \right] x_2^{k-2i} \end{aligned}$$

avec $0 \leq k-i \leq n$. En particulier pour $x_2 = 0$ et $x_1 \neq 0$ le seul terme non nul est obtenu pour $k = 2i$ d'où

$$\frac{\partial^k f_n}{\partial x_2^k} = a_{\frac{k}{2},k} 2^{\frac{k}{2}} \left[\frac{\left(\frac{k}{2}\right)!}{\left(n-\frac{k}{2}\right)!} \varphi_{n-\frac{k}{2}} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) + C\left(\frac{k}{2}, n\right) |x|^{2(n-\frac{k}{2})} \right] \mathbb{1}_{\{k \in 2\mathbb{N}\}}$$

- Si $n < k < 2n+2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k f_n}{\partial x_2^k} &= \sum_{0 \leq 2i \leq k} a_{i,k} \varphi_n^{(k-i)} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^{k-2i} \\ &= \sum_{0 \leq 2i \leq k} a_{i,k} 2^{k-i} \left[\frac{(k-i)!}{(n-k+i)!} \varphi_{n-k+i} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) + C(k-i, n) |x|^{2(n-k+i)} \right] x_2^{k-2i} \mathbb{1}_{\{i \geq k-n\}} \\ &\quad + \sum_{0 \leq 2i \leq k} a_{i,k} 2^{k-i} \frac{(-1)^{k-i-n-1} n! (k-i-n-1)!}{|x|^{2(k-i-n)}} \mathbb{1}_{\{i < k-n\}} x_2^{k-2i} \end{aligned}$$

avec

$$(0 \leq k-i < 2n+2) \wedge (k-i \leq n) \iff (i \geq k-n)$$

et où on a utilisé la formule (8.9.27). En particulier pour $x_2 = 0$ et $x_1 \neq 0$ le seul terme non nul est obtenu pour $k = 2i$ et dans ce cas $i \leq k-n$ d'où

$$\frac{\partial^k f_n}{\partial x_2^k}(x_1, 0) = a_{\frac{k}{2},k} 2^{\frac{k}{2}} \left[\frac{\left(\frac{k}{2}\right)!}{\left(n-\frac{k}{2}\right)!} \varphi_{n-\frac{k}{2}} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) + C\left(\frac{k}{2}, n\right) |x|^{2(n-\frac{k}{2})} \right] \mathbb{1}_{\{k \in 2\mathbb{N}\}}$$

– Si $k = 2n + 2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2n+2} f_n}{\partial x_1^{2n+2}} &= \sum_{0 \leq 2i \leq 2n+2} a_{i,2n+2} \varphi_n^{(2n+2-i)} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^{2n+2-2i} \\ &= \sum_{0 \leq i \leq n+1} a_{i,2n+2} \varphi_n^{(2n+2-i)} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) x_2^{2(n-i+1)}\end{aligned}$$

$0 \leq i \leq n + 1$ donc $2n - i + 2 \geq n + 1 > n$ et on applique la formule de récurrence (8.9.27) pour $k > n$:

$$\varphi_n^{(2n+2-i)} \left(\frac{|x|^2}{2} \right) = \frac{2^{2n+2-i} n! (n+1-i)! (-1)^{n+1-i}}{|x|^{2(n+2-i)}}$$

donc

$$\frac{\partial^{2n+2} f_n}{\partial x_1^{2n+2}} = \sum_{0 \leq i \leq n+1} a_{i,2n+2} \frac{2^{2n+2-i} n! (n+1-i)! (-1)^{n+1-i}}{|x|^{2(n+2-i)}} x_2^{2(n-i+1)}$$

En particulier pour $x_2 = 0$ et $x_1 \neq 0$ le seul terme non nul est obtenu pour $i = n + 1$ d'où

$$\frac{\partial^{2n+2} f_n}{\partial x_1^{2n+2}}(x_1, 0) = \frac{2^{n+1} n! a_{n+1,2n+2}}{x_1^2} \quad (8.9.30)$$

Étape 4 : On calcule les coefficients $a_{i,k}$ définis par la formule de récurrence (8.9.29). On conjecture l'expression suivante :

$$a_{i,k} = \frac{k!}{2^i i! (k-2i)!} \quad (8.9.31)$$

Montrons cette égalité pour $(i, k) \in \{(i, k) \in \mathbb{N}^2, 2i \leq k\}$. Soit $\mathcal{P}(k) = \left\{ a_{i,k} = \frac{k!}{2^i i! (k-2i)!}, \forall 2i \leq k \right\}$. $\mathcal{P}(0)$ est trivialement vérifiée.

Supposons $\mathcal{P}(k)$ et montrons $\mathcal{P}(k+1)$. D'après (8.9.29) :

- pour $i = 0$ on a $a_{0,k+1} = 1 = \frac{(k+1)!}{(k+1)!}$
- pour $2 \leq 2i \leq k - 1$ on a :

$$\begin{aligned}a_{i,k+1} &= a_{i,k} + (k - 2i + 2) a_{i-1,k} = \frac{k!}{2^i i! (k-2i)!} + (k - (2i - 2)) \frac{k!}{2^{i-1} (i-1)! (k - (2i - 2))!} \\ &= \frac{k!}{2^{i-1} (i-1)! (k-2i)!} \left(\frac{1}{2i} + \frac{1}{k-2i+1} \right) \\ &= \frac{(k+1)!}{2^i i! ((k+1) - 2i)!}\end{aligned}$$

- pour $k \leq 2i \leq k + 1$ on a :

* si $k \in 2\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}a_{\frac{k}{2}, k+1} &= a_{\frac{k}{2}, k} + 2a_{\frac{k}{2}-1, k} = \frac{k!}{2^{\frac{k}{2}} \frac{k}{2}! 0!} + 2 \frac{k!}{2^{\frac{k}{2}-1} (\frac{k}{2}-1)! 2!} = \frac{k!}{2^{\frac{k}{2}} (\frac{k}{2}-1)! 2!} \left(\frac{2}{k} + 2 \right) \\ &= \frac{(k+1)!}{2^{\frac{k}{2}} \frac{k}{2}!}\end{aligned}$$

* si $k \in 2\mathbb{N} + 1$:

$$\begin{aligned}a_{\frac{k+1}{2}, k+1} &= a_{\frac{k-1}{2}, k} = \frac{k!}{2^{\frac{k-1}{2}} (\frac{k-1}{2})! (k - 2\frac{k-1}{2})!} = \frac{k!}{2^{\frac{k-1}{2}} (\frac{k-1}{2})!} = \frac{k+1}{2^{\frac{k+1}{2}}} \frac{k!}{2^{\frac{k-1}{2}} (\frac{k-1}{2})!} \\ &= \frac{(k+1)!}{2^{\frac{k+1}{2}} (\frac{k+1}{2})!}\end{aligned}$$

$\mathcal{P}(k+1)$ est donc vraie et donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Maintenant il suffit de revenir à (8.9.30) et d'appliquer (8.9.31) pour $(i, k) = (n+1, 2n+2)$ ($a_{n+1, 2n+1} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}$)

$$\frac{\partial^{2n+2} f_n}{\partial x_1^{2n+2}}(x_1, 0) = \frac{2^{n+1} n! a_{n+1, 2n+2}}{x_1^2} = \frac{2(2n+1)!}{x_1^2}$$

ce qui termine la preuve de ce lemme. \square

Lemme 8.9.8. Soient Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 , $f \in H^\alpha(\partial\Omega)$ avec $\alpha > 0$, et soit $V_k(f) : H^\alpha(\partial\Omega) \rightarrow H^{\alpha+2m-k}(\partial\Omega)$ pour $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ les potentiels multicouches suivants :

$$V_k(f) = \begin{cases} \int_{\partial\Omega} f(y) \frac{\partial^{k-1}(E(x-y))}{\partial n_y^{k-1}} d\sigma(y) \text{ pour } 1 \leq k \leq m \\ \int_{\partial\Omega} f(y) A_{k-1, y}(E(x-y)) d\sigma(y) \text{ pour } m+1 \leq k \leq 2m \end{cases}$$

où $E(x)$ est la solution fondamentale associée à l'opérateur $-\Delta^m$ définie par (8.2.1). En notant

$$\begin{aligned} V_k^-(f)(x) &= V_k(f)(x) \text{ pour } x \in \Omega \\ V_k^+(f)(x) &= V_k(f)(x) \text{ pour } x \in \Omega^c \end{aligned}$$

et pour $x \in \partial\Omega$ on définit

$$V_k^+(f)(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in \Omega^c}} V_k^+(f)(y), \quad V_k^-(f)(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in \Omega}} V_k^-(f)(y)$$

On a les relations suivantes pour $x \in \partial\Omega$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_1) \quad & \begin{cases} \frac{\partial^k}{\partial n^k} V_j^+(f)(x) = \frac{\partial^k}{\partial n^k} V_j^-(f)(x) = \frac{\partial^k}{\partial n^k} V_j(f)(x), \text{ dans } H^{\alpha+2m-k-j}(\partial\Omega) \text{ pour } k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket \wedge j \neq 2m-k \\ \frac{\partial^k}{\partial n^k} V_{2m-k}^\pm(f)(x) = \pm \frac{(-1)^{m+1}}{2} f(x) + V_{2m-k}(f), \text{ dans } H^\alpha(\partial\Omega) \text{ pour } k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket \end{cases} \\ (\mathcal{R}_2) \quad & \begin{cases} A_k V_j^\pm(f)(x) = A_k V_j(f)(x), \text{ dans } H^{\alpha+2m-k-j}(\partial\Omega) \text{ pour } k \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket \wedge j \neq 2m-k \\ A_k V_{2m-k}^\pm(f)(x) = \pm \frac{(-1)^m}{2} f(x) + A_k V_{2m-k}(f)(x), \text{ dans } H^\alpha(\partial\Omega) \text{ pour } k \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket \end{cases} \end{aligned}$$

où on a noté dans $H^{\alpha+2m-k-j}(\partial\Omega)$ les potentiels suivants (lorsque les noyaux sont singuliers (c-à-d lorsque $k+j \geq 2m$) pour $x \in \partial\Omega$, ces intégrales sont définies au sens de la valeur principale de Cauchy) :

$$\frac{\partial^k}{\partial n_x^k} V_j(f)(x) = \begin{cases} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial^k}{\partial n_x^k} \frac{\partial^{j-1}}{\partial n_y^{j-1}}(E(x-y)) f(y) d\sigma(y) \text{ pour } 1 \leq j \leq m \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial^k}{\partial n_x^k} A_{j-1, y}(E(x-y)) f(y) d\sigma(y) \text{ pour } m+1 \leq j \leq 2m \end{cases}$$

et

$$A_k V_j(f)(x) = \begin{cases} \int_{\partial\Omega} A_{k, x} \frac{\partial^{j-1}}{\partial n_y^{j-1}}(E(x-y)) f(y) d\sigma(y) \text{ pour } 1 \leq j \leq m \\ \int_{\partial\Omega} A_{k, x} A_{j, y}(E(x-y)) f(y) d\sigma(y) \text{ pour } m+1 \leq j \leq 2m \end{cases}$$

Démonstration. La preuve de ce lemme est en partie heuristique et est inspirée de [[35] pp 384-388]. On montre les propriétés de saut pour des densités particulières appartenant à l'espace (espace image de l'opérateur de Calderón associé à Δ^m) :

$$\mathcal{P} = \{(u|_{\partial\Omega}, \partial_n u|_{\partial\Omega}, \dots, \partial_n^{m-1} u|_{\partial\Omega}, A_m u|_{\partial\Omega}, \dots, A_{2m-1} u|_{\partial\Omega}), u \in H^m(\Omega) \text{ et } \Delta^m u = 0\}$$

De plus, on utilise dans cette preuve l'expression des noyaux dans le cas d'une variété rectiligne pour discuter de la singularité des noyaux. D'après le Théorème 8.1.1 on a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Omega} \delta(x-y)u \\ &= - \int_{\Omega} \Delta^m u E(x-y) dy + \sum_{i=m+1}^{2m} \int_{\partial\Omega} \left\{ A_{i-1,y}(E(x-y)) \frac{\partial^{2m-i} u(y)}{\partial n^{2m-i}} - A_{i-1,y}(u) \frac{\partial^{2m-i} E(x-y)}{\partial n^{2m-i}} \right\} d\sigma(y) \end{aligned} \quad (8.9.32)$$

Soit $w \in \tilde{H}^{2m}(\Omega)$ une fonction telle que $\Delta^m w = 0$ sur Ω . Soient $F_k \in H^{\alpha+2m-k}(\partial\Omega)$ pour $1 \leq k \leq 2m$ tels que

$$\begin{cases} \Delta^m w = 0 \text{ dans } \Omega \\ F_{2m-k} = -A_k(w) \text{ sur } \partial\Omega \text{ pour } m \leq k \leq 2m-1 \\ F_{2m-k} = \frac{\partial^k w}{\partial n^k} \text{ sur } \partial\Omega \text{ pour } 0 \leq k \leq m-1 \end{cases} \quad (8.9.33)$$

pour $x \in \Omega$, grâce à (8.9.32), on obtient

$$w(x) = \sum_{i=1}^{2m} V_i^-(F_i)(x) \quad (8.9.34)$$

Tout d'abord on prolonge $\vec{n}(x)$ et $\vec{\tau}(x)$ en des champs C^∞ sur un voisinage de $\partial\Omega$ noté $\tilde{n}(x)$ et $\tilde{\sigma}(x)$. Ainsi on prolonge les opérateurs $f \mapsto \frac{\partial^{2m-1-k} f}{\partial n^{2m-1-k}}$ et $f \mapsto A_k(f)$ pour $k \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket$ en utilisant les champs de vecteurs $\tilde{n}(x)$ et $\tilde{\sigma}(x)$.

Preuve des relations (\mathcal{R}_1)

- Si $0 \leq k \leq m-1$, en partant de (8.9.34), on obtient

$$\frac{\partial^k w}{\partial \tilde{n}^k} = (-1)^m \sum_{i=1}^{2m} \frac{\partial^k}{\partial \tilde{n}^k} V_i^-(F_i)(x), \quad x \in \Omega$$

Puis en faisant tendre x vers $\partial\Omega$ orthogonalement dans (8.9.32), seulement la moitié de la contribution de la distribution de Dirac $\delta(x-y)$ intervient en $x=y \in \partial\Omega$ donc on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^k w}{\partial n^k}(x) = (-1)^m \sum_{i=1}^{2m} \frac{\partial^k}{\partial n^k} V_i(F_i)(x), \quad x \in \partial\Omega \quad (8.9.35)$$

En utilisant le Lemme 8.9.3 et le Théorème 8.1.1 on obtient l'estimation des singularités suivantes dans le cas d'une variété rectiligne :

$$\begin{aligned} \text{pour } k+j < 2m & \quad \frac{\partial^k}{\partial n^k} V_j^-(x) = O\left(|x-y|^{2m-1-(k+j)} \log(|x-y|\right) \\ \text{pour } k+j \geq 2m & \quad \frac{\partial^k}{\partial n^k} V_j^-(x) = O\left(\frac{1}{|x-y|^{k+j+1-2m}}\right) \end{aligned}$$

On déduit donc

- pour $k + j < 2m$ les noyaux sont intégrables pour $x \in \partial\Omega$ et donc on peut intervertir limite et signe somme c-à-d :

$$\frac{\partial^k}{\partial n^k} V_j^-(x) = \frac{\partial^k}{\partial n^k} V_j(x)$$

- pour $k + j > 2m$ en utilisant le Lemme 6.4 donné dans [35] on obtient la même égalité au sens de la valeur principale de Cauchy.

En utilisant (8.9.33), (8.9.35) n'est donc possible que si

$$\begin{cases} \frac{\partial^k}{\partial n^k} V_{2m-k}^-(F_{2m-k})(x) = \frac{(-1)^m}{2} F_{2m-k}(x) + \frac{\partial^k}{\partial n^k} V_{2m-k}(F_{2m-k})(x) \\ \frac{\partial^k}{\partial n^k} V_j^-(x) = \frac{\partial^k}{\partial n^k} V_j(x), \text{ pour } 1 \leq j \leq 2m \text{ et } j \neq 2m - k \end{cases}$$

Pour $x \in B_R \setminus \bar{\Omega}$, (8.9.34) devient

$$w(x) = - \sum_{i=1}^{2m} V_i^+(F_i)(x) + G(x)$$

avec $G(x)$ défini de manière similaire à partir de potentiels multicouches utilisant le bord ∂B_R et réguliers sur un voisinage de $\partial\Omega$. Par le même raisonnement on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial^k}{\partial n^k} V_{2m-k}^+(F_{2m-k})(x) = -\frac{(-1)^m}{2} F_{2m-k}(x) + \frac{\partial^k}{\partial n^k} V_{2m-k}(F_{2m-k})(x) \\ \frac{\partial^k}{\partial n^k} V_j^+(x) = \frac{\partial^k}{\partial n^k} V_j(x), \text{ pour } 1 \leq j \leq 2m \text{ et } j \neq 2m - k \end{cases}$$

d'où les relations (\mathcal{R}_1) .

Preuve des relations (\mathcal{R}_2)

- Si $m \leq k \leq 2m - 1$, de la même manière on obtient pour $x \in \partial\Omega$:

$$\frac{A_k w(x)}{2} = (-1)^m \sum_{i=1}^{2m} A_k V_i(F_i)(x), \quad x \in \partial\Omega$$

Par le même raisonnement que pour $0 \leq k \leq m - 1$, et en utilisant (8.9.33), cette égalité n'est possible que si

$$\begin{cases} A_k V_{2m-k}^-(F_{2m-k})(x) = -\frac{(-1)^m}{2} F_{2m-k}(x) + A_k V_{2m-k}(F_{2m-k})(x) \\ A_k V_j^-(F_j)(x) = A_k V_j(F_j)(x), \text{ pour } 1 \leq j \leq 2m \text{ et } j \neq 2m - k \end{cases}$$

De la même manière on obtient

$$\begin{cases} A_k V_{2m-k}^+(F_{2m-k})(x) = \frac{(-1)^m}{2} F_{2m-k}(x) + A_k V_{2m-k}(F_{2m-k})(x) \\ A_k V_j^+(F_j)(x) = A_k V_j(F_j)(x), \text{ pour } 1 \leq j \leq 2m \text{ et } j \neq 2m - k \end{cases}$$

ce qui termine la preuve des relations (\mathcal{R}_2) et celle de ce lemme. □

Bibliographie

- [1] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Pure and applied mathematics. Academic Press, New York, 1978.
- [2] M. Aharon, M. Elad, and A. Bruckstein. K-svd : Design of dictionaries for sparse representation. In *IN : PROCEEDINGS OF SPARS'05*, pages 9–12, 2005.
- [3] G. Allaire, F. Jouve, and N. Van Goethem. Damage and fracture evolution in brittle materials by shape optimization methods. *J. Comput. Phys.*, 230(12) :5010–5044, June 2011.
- [4] L. Ambrosio and V.M. Tortorelli. Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via gamma-convergence. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XLIII :999–1036, 1990.
- [5] H. Ammari and H. Kang. *Polarization and moment tensors : with applications to inverse problems and effective medium theory*. Applied mathematical sciences. Springer, New York, 2007.
- [6] S. Amstutz. Sensitivity analysis with respect to a local perturbation of the material property. *Asymptotic Analysis*, 49(1-2) :87–108, 2006.
- [7] S. Amstutz. Topological sensitivity analysis for some nonlinear PDE system. *J. Math. Pures Appl.*, 2006.
- [8] S. Amstutz. The topological asymptotic for the Navier-Stokes equations. *ESAIM : Control, Optimization and Calculus of Variations*, 11(3) :401–425, 3 2010.
- [9] S. Amstutz, N. Van Goethem, and A.A. Novotny. Minimal partitions and image classification using a gradient-free perimeter approximation. 2013.
- [10] S. Amstutz, I. Horchani, and M. Masmoudi. Crack detection by the topological gradient method. *Control and Cybernetics*, 34(1) :81–101, 2005.
- [11] S. Amstutz and A.A. Novotny. Topological asymptotic analysis of the Kirchhoff plate bending problem. *ESAIM, Control Optim. Calc. Var.*, 17(3) :705–721, 2011.
- [12] J.P. Antoine, R. Murenzi, and P. Vandergheynst. Directional Wavelets Revisited : Cauchy Wavelets and Symmetry Detection in Patterns. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 6(3) :314–345, 1999.
- [13] G. Aubert and J-F. Aujol. A variational approach to removing multiplicative noise. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 68(4) :925–946, 2008.
- [14] G. Aubert, J.F Aujol, and L. Blanc-Féraud. Detecting Codimension - Two Objects in an Image with Ginzburg-Landau Models. 65(1-2) :29–42, 2005.

- [15] G. Aubert and A. Drogoul. Topological gradient for fourth order PDE and application to the detection of fine structures in 2D images (submitted). *Control, Optimization and Calculus of Variations*.
- [16] G. Aubert and A. Drogoul. Topological gradient for fourth-order PDE and application to the detection of fine structures in 2D images . *Comptes Rendus Mathématique*, 352(7-8) :609 – 613, 2014.
- [17] G. Aubert and P. Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing : Partial Differential Equations and the Calculus of Variations (second edition)*, volume 147 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 2006.
- [18] D. Auroux. From restoration by topological gradient to medical image segmentation via an asymptotic expansion. *Math. Comput. Model.*, 49(11-12) :2191–2205, 2009.
- [19] D. Auroux and M. Masmoudi. A one-shot inpainting algorithm based on the topological asymptotic analysis. *Computational & Applied Mathematics*, 25 :251 – 267, 00 2006.
- [20] D. Auroux, M. Masmoudi, and L. Jaafar Belaid. *Image restoration and classification by topological asymptotic expansion*, pages 23–42. Variational Formulations in Mechanics : Theory and Applications, E. Taroco, E.A. de Souza Neto and A.A. Novotny (Eds). CIMNE, Barcelona, Spain, 2007.
- [21] H. Ayasso and A. Mohammad-Djafari. Joint image restoration and segmentation using gauss-markov-potts prior models and variational bayesian computation. In *Image processing (ICIP), 2009 16 th IEEE International Conference on*, pages 1297–1300, 2009.
- [22] A. Baudour. Detections de Filaments dans des images 2D et 3D ; modélisation, étude mathématique et algorithmes. *Phd Dissertation, Université de Nice Sophia Antipolis*, 2009.
- [23] A. Baudour, G. Aubert, and L. Blanc-Féraud. Detection and Completion of Filaments : A Vector Field and PDE Approach. In Fiorella Sgallari, Almerico Murli, and Nikos Paragios, editors, *SSVM*, volume 4485 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 451–460. Springer, 2007.
- [24] L. Jaafar Belaid, M. Jaoua, M. Masmoudi, and L. Siala. Application of the topological gradient to image restoration and edge detection. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32(11) :891 – 899, 2008.
- [25] S. Berlemont and J-C. Olivo-Marin. Combining Local Filtering and Multiscale Analysis for Edge, Ridge, and Curvilinear Objects Detection. *IEEE Transactions on Image Processing*, 19(1) :74–84, 2010.
- [26] S. Bonettini, R. Zanella, and L. Zanni. A scaled gradient projection method for constrained image deblurring. *Inverse Problems*, 25(1) :015002, 2009.
- [27] V. Bonnaillie-Noël, D. Brancherie, M. Dambrine, F. Herau, S. Tordeux, and G. Vial. Multiscale expansion and numerical approximation for surface defects. *ESAIM : Proceedings*, 33 :22–35, 2011. CANUM 2010, 40e Congrès National d’Analyse Numérique.
- [28] S.C. Brenner and L.R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer-Verlag, 2002.
- [29] A. Buades, B. Coll, and J-M. Morel. A non-local algorithm for image denoising. In *Proceedings of the 2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, volume 2 of *CVPR '05*, pages 60–65, Washington, DC, USA, 2005. IEEE Computer Society.
- [30] A. Buades, B. Coll, and J-M. Morel. Non-Local Means Denoising. *Image Processing On Line*, 1, 2011.

- [31] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic active contours. *Int. J. Comput. Vision*, 22(1) :61–79, February 1997.
- [32] A. Chambolle. An algorithm for total variation minimization and applications. *J. Math. Imaging Vis.*, 20(1-2) :89–97, January 2004.
- [33] T. Chan and J. Shen. *Image Processing And Analysis : Variational, Pde, Wavelet, and Stochastic*.
- [34] T. F. Chan and L. A. Vese. Active contours without edges. *Trans. Img. Proc.*, 10(2) :266–277, February 2001.
- [35] G. Chen and J. Zhou. *Boundary Element Methods with Applications to Nonlinear Problems*. Atlantis studies in Mathematics for Engineering and Science, 1992.
- [36] R. R. Coifman and D. L. Donoho. Translation-invariant de-noising. pages 125–150. Springer-Verlag, 1995.
- [37] K. Dabov, A. Foi, V. Katkovnik, and K. Egiazarian. Image denoising by sparse 3d transform-domain collaborative filtering, 2007.
- [38] N. Dey, L. Blanc-Féraud, C. Zimmer, P. Roux, Z. Kam, J-C. Olivo-Marin, and J. Zerubia. 3d microscopy deconvolution using richardson-lucy algorithm with total variation regularization. Rapport de recherche RR-5272, INRIA, 2004.
- [39] D.L. Donoho and I.M. Johnstone. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81 :425–455, 1994.
- [40] A. Drogoul. Numerical analysis of the topological gradient method for fourth order models and applications to the detection of fine structures in imaging (submitted). *SIAM Journal on Imaging Sciences (SIIMS)*.
- [41] A. Drogoul. The topological sensitivity for a $2m$ order PDE and 2D crack domains (in preparation).
- [42] A. Drogoul and G. Aubert. The topological gradient method for semi-linear problems and application to edge detection and noise removal (submitted). *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2014.
- [43] A. Drogoul, G. Aubert, and D. Auroux. Topological gradient for a fourth order PDE and application to the detection of fine structures in 2D and 3D images. In *IEEE International Conference on Image Processing 2014 (ICIP 2014)*, Paris, France, October 2014.
- [44] S. Geman and D. Geman. Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(6) :721–741, 1984.
- [45] J. Giroire. Formulation variationnelle par equations intégrales de problèmes aux limites extérieurs. *Rapport Interne du Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique*, 1976.
- [46] J. Giroire and J. C. Nedelec. Numerical solution of an exterior Neumann problem using a double layer potential. 32(144) :973–990, October 1978.
- [47] D. Graziani, G. Aubert, and L. Blanc-Féraud. A formal Gamma-convergence approach for the detection of points in 2-D biological images. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 3(3) :578–594, September 2010.
- [48] T. Hebert and R. Leahy. A generalized em algorithm for 3d bayesian reconstruction from poisson data using gibbs prior. *IEEE Trans. Medical imaging*, 8(2) :194–202, 1989.

- [49] F.M. Henderson, R.A. Ryerson, and A.J. Lewis. *Principles and applications of imaging radar*. Number vol. 5 in Manual of remote sensing / ed. by Robert A. Ryerson. Publ. in cooperation with the American Society for Photogrammetry and Remote Sensing. Wiley, 1998.
- [50] A. Henrot and M. Pierre. *Variation et optimisation de formes : une analyse géométrique*. Mathématiques & applications. Springer, Berlin, New York, 2005.
- [51] S.G. Johnson. Notes on fft-based differentiation. *MIT Applied Mathematics*, 2011.
- [52] K. Krissian, R. Kikinis, C-F. Westin, and K.G. Vosburgh. Speckle-constrained filtering of ultrasound images. In *CVPR (2)*, pages 547–552. IEEE Computer Society, 2005.
- [53] C. Lacoste, X. Descombes, and J. Zerubia. Point Processes for Unsupervised Line Network Extraction in Remote Sensing. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 27(10) :1568–1579, 2005.
- [54] M. Lebrun. An Analysis and Implementation of the BM3D Image Denoising Method. *Image Processing On Line*, 2 :175–213, 2012.
- [55] M. Lebrun, A. Buades, and J-M. Morel. Implementation of the "Non-Local Bayes" (NL-Bayes) Image Denoising Algorithm. *Image Processing On Line*, 3 :1–42, 2013.
- [56] M. Lebrun, Antoni Buades, and Jean-Michel Morel. A nonlocal bayesian image denoising algorithm. *SIAM J. Imaging Sciences*, 6(3) :1665–1688, 2013.
- [57] M. Lebrun and A. Leclaire. An Implementation and Detailed Analysis of the K-SVD Image Denoising Algorithm. *Image Processing On Line*, 2 :96–133, 2012.
- [58] KM. Liew and Q. Wang. Application of Wavelet Theory for Crack Identification in Structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 124(2) :152–157, 1998.
- [59] M. Jacob and T. Blu and C. Vaillant and J.H. Maddocks and M. Unser. 3D shape estimation of DNA molecules from stereo cryo-electron micro-graphs using a projection-steerable snake. *IEEE Trans. Image Process*, 15 :214–227, 2006.
- [60] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1998.
- [61] P. A. Martin and L. Farina. Radiation of water waves by a heaving submerged horizontal disc. *Journal of Fluid Mechanics*, 337 :365–379, 4 1997.
- [62] P.A. Martin. Exact solution of a hypersingular integral equation. *Journal of integral equations and applications*, 4(2) :197–204, 1992.
- [63] M. Masmoudi. The topological asymptotic. In *Computational Methods for Control Applications*, volume 16 of *GAKUTO Internat. Ser. Math. Appl., Tokyo, Japan*, 2001.
- [64] A.M Mendona and A.C. Campilho. Segmentation of retinal blood vessels by combining the detection of centerlines and morphological reconstruction. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 25(9) :1200–1213, 2006.
- [65] W. Ming and J. Xu. Nonconforming tetrahedral finite elements for fourth order elliptic equations. *Math. Comput.*, 76(257) :1–18, 2007.
- [66] C.C. Morales and P. Radeva. Vesselness enhancement diffusion. *Pattern Recognition Letters*, 24(16) :3141–3151, 2003.

- [67] D. Mumford and J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 42(5) :577–685, 1989.
- [68] J-C. Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations : integral representations for harmonic problems*. Applied mathematical sciences. Springer, New York, 2001.
- [69] L. Nirenberg. On elliptic partial differential equations. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, 13(2) :115–162, 1959.
- [70] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS*, 79(1) :12–49, 1988.
- [71] J. Pawley. *Handbook of Biological Confocal Microscopy*. Springer, Berlin, 2006.
- [72] P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 12(7) :629–639, Jul 1990.
- [73] B. Rajaei. An Analysis and Improvement of the BLS-GSM Denoising Method. *Image Processing On Line*, 4 :44–70, 2014.
- [74] K. R. Rao and P. Yip. *Discrete Cosine Transform : Algorithms, Advantages, Applications*. Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA, 1990.
- [75] M. Rochery, I.H. Jermyn, and J. Zerubia. New higher-order active contour energies for network extraction. In *ICIP (2)*, pages 822–825. IEEE, 2005.
- [76] L.I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Phys. D*, 60(1-4) :259–268, November 1992.
- [77] D. Ruiz. A note on the uniformity of the constant in the Poincaré inequality. 2012.
- [78] A. Sawatzky, D. Tenbrinck, X. Jiang, and M. Burger. A variational framework for region-based segmentation incorporating physical noise models. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 47(3) :179–209, 2013.
- [79] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA, 1983.
- [80] J. Sokolowski and A. Zochowski. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM J. Control Optim.*, 37(4) :1251–1272, April 1999.
- [81] C. Steger. An unbiased detector of curvilinear structures. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 20(2) :113–125, 1998.
- [82] C. Steger. Estimating the fundamental matrix under pure translation and radial distortion. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 74 :202–217, 2012.
- [83] R. Stoica, X. Descombes, and J. Zerubia. A Gibbs Point Process for Road Extraction from Remotely Sensed Images. *International Journal of Computer Vision*, 57(2) :121–136, 2004.
- [84] F. Tupin, J.F. Mangin, E. Pechersky, J.M. Nicolas, and H. Maître. A Graph-Based Representation to Detect Linear Features. 12 :21–31, 1998.
- [85] M. Tur, K. C. Chin, and J. W. Goodman. When is speckle noise multiplicative? *Applied Optics*, 21(7) :1157–1159, 1982.

- [86] N. Van Goethem and A.A. Novotny. Crack nucleation sensitivity analysis. *Math. Methods Appl. Sci.*, 33(16) :1978–1994, 2010.
- [87] C. Vonesch and M. Unser. A fast multilevel algorithm for wavelet-regularized image restoration. *IEEE Trans. Image Processing*, pages 509–523.
- [88] M.N. Wernick and J.N. Aarsvold. *Emission tomography : The fundamental of PET and SPECT*. Elsevier, Amsterdam, 2004.
- [89] G. Yu and G. Sapiro. DCT image denoising : a simple and effective image denoising algorithm. *Image Processing On Line*, 1, 2011.
- [90] F. Zana and J-C. Klein. Segmentation of vessel-like patterns using mathematical morphology and curvature evaluation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(7) :1010–1019, 2001.

Méthode du gradient topologique pour la détection de contours et de structures fines en imagerie.

Résumé. Cette thèse porte sur la méthode du gradient topologique appliquée au traitement d'images. Principalement, on s'intéresse à la détection d'objets assimilés, soit à des contours si l'intensité de l'image à travers la structure comporte un saut, soit à une structure fine (filaments et points en 2D) s'il n'y a pas de saut à travers la structure. On commence par généraliser la méthode du gradient topologique déjà utilisée en détection de contours pour des images dégradées par du bruit gaussien, à des modèles non linéaires adaptés à des images contaminées par un processus poissonnien ou du bruit de speckle et par différents types de flous. On présente également un modèle de restauration par diffusion anisotrope utilisant le gradient topologique pour un domaine fissuré. Un autre modèle basé sur une EDP elliptique linéaire utilisant un opérateur anisotrope préservant les contours est proposé. Ensuite, on présente et étudie un modèle de détection de structures fines utilisant la méthode du gradient topologique. Ce modèle repose sur l'étude de la sensibilité topologique d'une fonction coût utilisant les dérivées secondes d'une régularisation de l'image solution d'une EDP d'ordre 4 de type Kirchhoff. En particulier on explicite les gradients topologiques pour des domaines 2D fissurés ou perforés, et des domaines 3D fissurés. Plusieurs applications pour des images 2D et 3D, floutées et contaminées par du bruit gaussien, montrent la robustesse et la rapidité de la méthode. Enfin on généralise notre approche pour la détection de contours et de structures fines par l'étude de la sensibilité topologique d'une fonction coût utilisant les dérivées m -ième d'une régularisation de l'image dégradée, solution d'une EDP d'ordre $2m$.

Mots clés : Gradient topologique, Segmentation, Restauration, Structures fines, Problèmes quasi-linéaires, Équation elliptique, Opérateur anisotrope, Équation de Kirchhoff, Problème d'ordre $2m$, Robustesse.

Topological gradient method applied to the detection of edges and fine structures in imaging

Abstract. This thesis deals with the topological gradient method applied in imaging. Particularly, we are interested in object detection. Objects can be assimilated either to edges if the intensity across the structure has a jump, or to fine structures (filaments and points in 2D) if there is no jump of intensity across the structure. We generalize the topological gradient method already used in edge detection for images contaminated by Gaussian noise, to quasi-linear models adapted to Poissonian or speckled images possibly blurred. As a by-product, a restoration model based on an anisotropic diffusion using the topological gradient is presented. We also present a model based on an elliptical linear PDE using an anisotropic differential operator preserving edges. After that, we study a variational model based on the topological gradient to detect fine structures. It consists in the study of the topological sensitivity of a cost function involving second order derivatives of a regularized version of the image solution of a PDE of Kirchhoff type. We compute the topological gradients associated to perforated and cracked 2D domains and to cracked 3D domains. Many applications performed on 2D and 3D blurred and Gaussian noisy images, show the robustness and the fastness of the method. An anisotropic restoration model preserving filaments in 2D is also given. Finally, we generalize our approach by the study of the topological sensitivity of a cost function involving the m -th derivatives of a regularization of the image solution of a $2m$ order PDE.

Key words : Topological gradient, Segmentation, Restoration, Fine structures, Quasi-linear problems, Elliptical equation, Anisotropic operator, Kirchhoff equation, $2m$ order PDE, Robustness.