



HAL
open science

Théorie de l'information, séries de Dirichlet, et analyse d'algorithmes

Mathieu Roux

► **To cite this version:**

Mathieu Roux. Théorie de l'information, séries de Dirichlet, et analyse d'algorithmes. Théorie de l'information [cs.IT]. Université de caen, 2011. Français. NNT : . tel-01076421

HAL Id: tel-01076421

<https://hal.science/tel-01076421>

Submitted on 22 Oct 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse

présentée par

Mathieu ROUX

et soutenue le **13 décembre 2011**

en vue de l'obtention du

Doctorat de l'Université de Caen

Spécialité : Informatique et applications

(arrêté du 7 août 2006)

Théorie de l'information, séries de Dirichlet, et analyse d'algorithmes

Membres du jury

Mme Viviane BALADI (DR, CNRS)
M. Jean-François MARCKERT (CR, CNRS)
M. Michael DRMOTA (PR)
Mme Valérie BERTHÉ (DR, CNRS)
M. Cyril NICAUD (PR)
M. Frédéric PACCAUT (MC)
Mme Brigitte VALLÉE (DR, CNRS)
M. Driss ESSOUABRI (PR)

ENS Paris
Université de Bordeaux
TU Wien (Autriche)
Université Paris 7
Université de Paris-Est
Université d'Amiens
Université de Caen
Université de Saint-Etienne

Rapporteur
Rapporteur
Rapporteur

Directrice
Co-directeur

Remerciements

Un peu tard, je me mets sérieusement à rédiger ces quelques pages délicates que constituent les remerciements de thèse. Composante importante, car elle permet d'occuper les gens venus par politesse ou habitude me voir soutenir (ne faites pas les innocents si vous lisez ces lignes pendant que je parle!).

Je tiens d'abord à remercier Brigitte qui a dirigé cette thèse. Malgré nos divergences d'opinions, à sa façon, elle a toujours cherché à m'aider. Son emploi du temps était presque tout le temps surchargé, et Brigitte sollicitée aux quatre coins de la France (et du monde), mais j'ai toujours pu obtenir rapidement une réponse par mail concernant n'importe quel problème, ou même un rendez-vous chaque fois que je le souhaitais. Elle s'est toujours montrée extrêmement prodigue, pleine de bonne volonté, sans regarder l'heure, sans ménager ses efforts. Je rends hommage à son travail, à son énergie intarissable, à sa psychologie énergique. Par ailleurs, j'admire son esprit de synthèse, sa capacité à jeter des ponts entre les domaines, et son imagination.

Merci à mon co-directeur Driss pour la vision envoûtante des mathématiques qu'il a su me communiquer, pendant la thèse et en cours autrefois : il me donne envie de continuer à faire des maths, en les présentant comme quelque chose de beau et de magique, dignes d'être étudiées pour elles-mêmes. Hélas, travailler à distance n'a pas été chose facile, et je le regrette. Je souligne aussi son côté très humain, et sa diplomatie éclairée.

Merci à Viviane BALADI, Mickael DRMOTA et Jean-François MARCKERT d'avoir accepté de rapporter sur cette (longue) thèse, et de me permettre de l'améliorer grâce à leurs remarques. Et merci aux autres membres du jury d'avoir accepté d'être là à ma soutenance.

Enfin je voudrais rendre hommage à Philippe FLAJOLET. Sans plus m'étendre sur son savoir universel, j'en garde le souvenir d'un patriarche désireux de faire *marcher la maison* harmonieusement, cherchant calmement à accorder les parties. Je me souviens encore du travail sur notre papier commun, dans une salle de travail enfumée par la (sa) cigarette. Et aussi d'un repas au restaurant en tête-à-tête avec lui, à son initiative, où il avait pris la peine de discuter avec moi par pure gentillesse.

A écrire les remerciements sur la *fin* de la thèse, on a surtout en mémoire les personnes qu'on côtoie à la *fin* de la thèse, au risque de laisser le côté ceux qui nous ont été précieux sur les débuts, plus par omission que par ingratitude. Il semble par ailleurs qu'habituellement, on n'évoque que les gens qui ont un lien direct avec la thèse ou son environnement, ou bien qui ont une importance telle qu'ils se doivent d'être mentionnés. Cela étant dit, je vais essayer de me plier à cet exercice...

La vie pendant et avant la thèse forme un tout, où se mêlent intellectuel, affectif, recherche, administration, enseignement, etc, et il est difficile de « classer » les gens en fonction de leurs apports respectifs. C'est pourquoi dans un premier temps, je vais saluer plutôt les *contributions* que les *personnes*.

Merci d'abord aux autres doctorants/ATER/post-doc, passés et présents, pour cet environnement de travail *en moyenne* très agréable. J'aurai passé cinq années dans le bureau 110 du LMNO. D'abord je considère comme un privilège d'avoir pu côtoyer des gens si intelligents, à la réflexion si rapide, si curieux et savants : tout ceci m'a considérablement *tiré vers le haut*. Mais cette émulation aurait été vaine sans la bonne humeur de discussions moins sérieuses, sur des sujets divers, et sans le soutien et la compréhension que j'ai trouvés auprès de personnes aux mentalités proches (aussi fous que moi ?). Je pense bien sûr aux jeunes de maths et d'info, mais aussi d'autres disciplines, que j'ai pu rencontrer par l'intermédiaire du CIES (diantre ! j'ai « omis » de rendre mon Projet Court !) et de l'Ecole Doctorale.

Merci à tous les enseignants que j'ai eus en maths, du collège à la fac, qui ont su me motiver à faire des maths. Je pense particulièrement à un prof de collège qui a provoqué ce déclic en moi : ils m'a enlevé de la tête l'idée fausse qu'en maths tout était découvert, qu'il n'y avait rien de nouveau à trouver, et qu'on ne pouvait que perfectionner un savoir qui serait de toute façon borné (pas facile de me remémorer ce que je pensais à l'époque, tant le contraire est évident pour moi maintenant). Il m'avait donné l'exemple de la conjecture de Fermat. Bien que ce ne soit pas dans cette branche des mathématiques que je me suis orienté, il m'a ouvert l'esprit. Je lui rends hommage, ainsi qu'à tous les enseignants qui ont su me communiquer la passion des maths.

Puis c'est moi qui ai commencé à enseigner. Merci à ceux qui ont répondu à mes questions sur ce que je ne connaissais pas : grâce à leur disponibilité, j'ai gagné un temps considérable. Merci plus généralement à tous les collègues d'enseignement.

Merci aux élèves, quels qu'ils soient, qui m'ont (plus ou moins) écouté (ils étaient obligés !) : à enseigner, on apprend beaucoup. Non seulement parce qu'on doit clarifier sa pensée pour l'exposer, mais aussi pédagogiquement et humainement.

Merci aux secrétaires, notamment du 2ème étage, pour leur travail et leur sourire.

Merci à la famille : mes parents, ma soeur, mes grand-mères.

Merci à tous mes amis et connaissances de tous bords, qui n'ont pas de lien avec la thèse,

mais qui m'ont chacun plus ou moins apporté (ce qui me permet de régler un gros problème : n'oublier personne dans les remerciements!).

Enfin, à défaut de trouver des mots parfaits qui n'existent pas, merci à Catherine pour tout ce qu'elle m'a apporté, et pour avoir supporté mes grognements pendant la thèse, chaque fois que ça n'allait pas...

Et comme un dessin vaut mieux qu'un long discours (sans chercher de nombres de Fibonacci dans le nombre de pétales)...

Merci à

Philippe Toffin
l'efficace Sandrine Soro
Isabelle, Sonia et Nadège
Hugues Bauchère
Chloé Perin
Seu et Jean-Charles
Matthieu Boussard, l'art-martien
Mohamed Gdoura
David Gruenewald
Philippe Regnaud
Valérie Girardin pour sa lucidité
Denis Simon
Jean-Paul Bézuin
Manfred LAREDIEN pour un temps
Thierry Charnois
Antonio, sobre et sérieux
Fred Wehrung
Jean-Claude Gruet
Bernard Leclerc
Francesco Amoroso
Jerémy Chamboredon
Gilles Darnanne
les gens de l'UT de Vire
Mehdi et Xavier
Yvan Ramadano
Gaëtan Richard plus récemment
Marya et Hien
Veronique Terrier
Hannid Rabbar par mail
autrefois
Loïc Lihofe
Erwan Le Yaouanc et Aleka Kosna
Tiphie Clément
Jean-Eromentin
Nicolas, mon collègue de
Louis, qui a relu cette thèse
Dalal et Célia
l'équanimie Yannick qui a relu cette thèse
Marya et Hien
chanteur et triathlète
Julien, poète, tourné à Madagascar
Patrick R. alias Choupette, surdono polyvalent
David, le dieu du nœud, pour la bonne humeur d'une chanson au labo
Nicolas, mon collègue de l'Université de Pissse
Gabriele, mio caro cognato de l'Université de Pissse
Catherine, de qui je dis tout en lui offrant cette fleur
Willy, le Gégé du LMO, grand finisher
O sense! Demomet, puits de science, et bon camarade
Pierre G, avec son humour si particulier
Mohamed Ipoda
Fatien Laguillaunie
Abdoulaye et ses habits chatoyants
Didier Trifoutoux
Jean-Paul Bézuin
Manfred LAREDIEN pour un temps
Thierry Charnois
Antonio, sobre et sérieux
Fred Wehrung
Jean-Claude Gruet
Bernard Leclerc
Francesco Amoroso
Jerémy Chamboredon
Gilles Darnanne
les gens de l'UT de Vire
Mehdi et Xavier
Yvan Ramadano
Gaëtan Richard plus récemment
Marya et Hien
Veronique Terrier
Hannid Rabbar par mail
autrefois
Loïc Lihofe
Erwan Le Yaouanc et Aleka Kosna
Tiphie Clément
Jean-Eromentin
Nicolas, mon collègue de
Louis, qui a relu cette thèse
Dalal et Célia
l'équanimie Yannick qui a relu cette thèse
Marya et Hien
chanteur et triathlète
Julien, poète, tourné à Madagascar
Patrick R. alias Choupette, surdono polyvalent
David, le dieu du nœud, pour la bonne humeur d'une chanson au labo
Nicolas, mon collègue de l'Université de Pissse
Gabriele, mio caro cognato de l'Université de Pissse
Catherine, de qui je dis tout en lui offrant cette fleur
Willy, le Gégé du LMO, grand finisher
O sense! Demomet, puits de science, et bon camarade
Pierre G, avec son humour si particulier
Mohamed Ipoda
Fatien Laguillaunie
Abdoulaye et ses habits chatoyants
Didier Trifoutoux
Jean-Paul Bézuin
Manfred LAREDIEN pour un temps
Thierry Charnois
Antonio, sobre et sérieux
Fred Wehrung
Jean-Claude Gruet
Bernard Leclerc
Francesco Amoroso
Jerémy Chamboredon
Gilles Darnanne
les gens de l'UT de Vire

Vis comme si tu devais mourir demain,
apprends comme si tu devais vivre toujours.

On vous a sans doute souvent demandé à quoi servent les mathématiques et si ces délicates constructions que nous tirons tout entières de notre esprit ne sont pas artificielles et enfantées par notre caprice.

Parmi les personnes qui font cette question, je dois faire une distinction ; les gens pratiques réclament seulement de nous le moyen de gagner de l'argent. Ceux-là ne méritent pas qu'on leur réponde ; c'est à eux plutôt qu'il conviendrait de demander à quoi bon accumuler tant de richesses et si, pour avoir le temps de les acquérir, il faut négliger l'art et la science qui seuls nous font des âmes capables d'en jouir,

et propter vitam vivendi perdere causas.

(pour vivre, perdre la raison de vivre.)

Henri Poincaré, *La Valeur de la science*

Si tu as atteint ton but,
c'est que tu n'as pas placé la barre assez haut.

Puisqu'on ne peut changer la direction du vent,
il faut apprendre à orienter les voiles.

À P    et Papy, tous deux partis pendant cette thèse.

Introduction

Problématique générale. Un thème récurrent en informatique théorique est l'étude des mots formés de symboles appartenant à un ensemble ordonné, et des arbres construits sur ces mots, qui servent de structure de données pour trier ou rechercher des mots. On étudiera ici les arbres digitaux (**Trie**) et les arbres binaires de recherche (**ABR**). Ainsi, la construction d'un **ABR** correspond exactement au déroulement de l'algorithme de tri **QuickSort**. Dans le cas des **ABR**, on parle de clés, pour indiquer que les mots sont vus globalement, sans tenir compte de leur composition. Dans le cas des **Tries**, les mots ne sont plus considérés globalement, mais comme une suite de symboles.

Or, les analyses classiques des algorithmes de tri comptent seulement le nombre de comparaisons entre clés. Cette analyse grossière ne tient pas compte de la nature des clés, qui sont des mots formés de symboles du même alphabet. Dans cette thèse, les mots à trier seront au contraire considérés comme des suites de symboles. En prenant en considération cette nouvelle nature, on aboutit à un cadre d'étude unifié avec les algorithmes de texte (qui travaillent par définition symbole par symbole). De plus, pour pouvoir comparer de façon pertinente les deux objets que sont les **Tries** et les **ABR**, il importe de disposer d'un coût commun pour la comparaison de deux mots.

C'est pour cela qu'on va étudier symbole par symbole les comparaisons effectuées par l'**ABR**, ce qui est bien différent de la comparaison globale entre clés. En effet, si deux clés se ressemblent beaucoup, il faudra beaucoup de comparaisons entre symboles pour les distinguer. Et donc si toutes les clés se ressemblent, l'algorithme **QuickSort** basé sur l'**ABR** sera plus coûteux, que si les clés sont très différentes. De même, si un **Trie** est bâti à partir de mots presque identiques, il sera très déséquilibré, et coûteux à stocker en mémoire. Tandis que si les mots peuvent être séparés facilement, le **Trie** sera mieux équilibré.

Le bon comportement des algorithmes travaillant sur les mots est lié à la bonne géométrie des arbres qui les contiennent. Ces paramètres géométriques vont dépendre de deux facteurs :

- ▶ la structure de données elle-même, avec la stratégie qu'elle a pour départager les mots
- ▶ mais aussi le comportement probabiliste de la source, qui quantifie la facilité avec laquelle les mots vont se laisser départager.

On se focalisera dans cette thèse sur trois paramètres importants en théorie de l'information : la taille et la longueur de cheminement dans le **Trie**, ainsi que la longueur de cheminement « en symboles » dans l'**ABR**, égale au nombre de comparaisons entre symboles nécessitées par l'algorithme **QuickSort** (c'est une base commune pour comparer **Trie** et **ABR** : on préfère regarder la longueur de cheminement « en symboles » plutôt qu'entre clés dans l'**ABR**).

Domaine d'étude. Toutes ces idées sur les clés aléatoires, et sur les objets qui en dépendent, ont déjà été étudiées et modélisées :

- ▶ d'abord, il faut définir les règles du jeu qui permettent de forger les mots, c'est-à-dire le processus de construction. Ceci correspond à la notion de source.
- ▶ il faut ensuite pouvoir analyser les paramètres des différentes structures. Dans cette thèse est traitée l'analyse en moyenne. Il s'agit (voir [24]), étant donné un certain modèle probabiliste sur l'ensemble des mots forgés, d'étudier (espérance, variance...) les variables aléatoires que sont la taille de l'arbre, la longueur de cheminement... L'outil central pour ce domaine scientifique est la série génératrice, le plus souvent entière. Ici, ce sera

la série génératrice de la source de type Dirichlet,

qui sera l'objet central. Pour les paramètres à étudier, sous des modèles naturels à préciser, des formules exactes sont déjà connues (voir [15] pour les **Tries** et [61] pour les **ABR**) : elles sont des sommes alternées faisant intervenir la série génératrice. Dans le cas du **Trie**, ces formules exactes ne sont pas très compliquées. Dans le cas de l'algorithme **QuickSort**, pour obtenir ces formules, il est nécessaire de donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux clés soient comparées.

- ▶ ces formules exactes sont ensuite transformées en intégrales dans le plan complexe grâce à la formule de Rice (voir par exemple Flajolet et Sedgewick dans [23]). Des formules asymptotiques sont données par le théorème des résidus. Pour avoir un terme de reste, il apparaît alors nécessaire d'étudier et de connaître

le comportement de la série de Dirichlet dans un domaine à gauche de $s = 1$, c'est-à-dire ses pôles et sa croissance quand $|s| \rightarrow +\infty$, ce qu'on appelle sa discipline.

Plus précisément, ont été mises en exergue différentes propriétés de discipline de la source, qui permettent d'obtenir de façon générique, une échelle asymptotique pour les paramètres étudiés.

Une classe de source apparaît à la fois très générale et susceptible pourtant d'une analyse précise : la classe des sources dynamiques, introduite par Vallée dans [56]. La série de Dirichlet est alors étudiée par le biais de l'analyse dynamique, qui est une extension de la combinatoire analytique. Il s'agit de modéliser le déroulement d'un algorithme par une trajectoire via un système dynamique ad hoc. Ici, grâce à une fonction de codage, le système dynamique permet de produire des mots.

Un des outils principaux dans la théorie des systèmes dynamiques est l'opérateur de transfert (tangent) introduit par Ruelle (voir [46] par exemple), extension du transformateur de densité, qui décrit comment une densité de probabilité est transformée par le système dynamique. Cet opérateur de transfert dépend d'un paramètre complexe s .

Vallée (dans [56]) a introduit les opérateurs sécants, généralisation des opérateurs tangents. La propriété essentielle des sources dynamiques, est alors que la série génératrice de Dirichlet est engendrée par le quasi-inverse de l'opérateur sécant. L'étude de Λ se ramène alors à l'étude du quasi-inverse. Et même, grâce à un argument classique, on pourra se contenter d'une étude sur la droite $\{\Re(s) = 1\}$, c'est-à-dire pour $s = 1 + it$, $t > 0$.

Contributions de cette thèse. Ceci constitue le point de départ de mon travail : étudier les pôles d'une série de Dirichlet, via le quasi-inverse de l'opérateur sécant. Il s'agit de trouver des conditions suffisantes sur le système dynamique pour pouvoir assurer un bon comportement de la série de Dirichlet. On se limitera aux systèmes dynamiques de la **Bonne Classe** (définition 1.12).

Dolgopyat a mis en évidence deux types de conditions sur les branches du système dynamique :

- ▶ des conditions de nature géométrique, qui ont été précisées par la suite par Baladi et Vallée (voir [5]). Elles permettent de montrer que la source est S -disciplinée (voir définition au chapitre 2), c'est-à-dire l'existence d'une bande sans pôle avec croissance polynomiale pour Λ .
- ▶ des conditions de nature arithmétique, que mon travail a consisté à étudier. Ces conditions sont de nature diophantienne, c'est-à-dire qu'on regarde la façon dont certains rapports sur les branches sont approximés par des nombres rationnels. Plus précisément, on utilise l'exposant d'irrationalité d'un nombre irrationnel, qui quantifie la qualité d'approximation de ce nombre par des rationnels.
La condition 2-DIOP, s'exprime sur 2 branches du système dynamique, et la condition 3-DIOP, s'exprime sur 3 branches. Ces conditions permettent de montrer que la source est H -disciplinée (voir définition au chapitre 2), c'est-à-dire l'existence d'une région sans pôle de type hyperbolique avec croissance polynomiale pour Λ .

Comme on l'a dit plus haut, dans le cas des sources dynamiques, la série génératrice Λ est exprimée en fonction du quasi-inverse de l'opérateur sécant. Or les travaux existants en systèmes dynamiques portaient sur l'opérateur (classique) tangent.

- ▶ Les travaux de Dolgopyat, Melbourne, Hachemi et Baladi (voir [3] et [41]) permettent de conclure pour la condition 3-DIOP avec alphabet infini sur l'opérateur tangent. J'ai généralisé ce travail à l'opérateur sécant.
- ▶ Le travail de Dolgopyat, précisé par Naud ([42]), permet de conclure avec la condition 2-DIOP dans le cas d'un alphabet fini. J'ai généralisé ce travail au cas d'un alphabet infini.
- ▶ J'ai mené une étude particulière dans le cas des sources sans mémoire (à alphabet fini ou dénombrable).
- ▶ Enfin, j'ai traité à part, et de façon plus fine et plus élémentaire, le cas d'une source sans mémoire avec alphabet fini. On montre en plus dans ce cas, l'optimalité de la région sans pôle avec croissance polynomiale trouvée pour Λ , ce qui, avec un petit travail supplémentaire, devrait pouvoir montrer l'optimalité du terme de reste dans l'analyse des coûts.

Pour résumer, la généralisation opérée dans cette thèse, s'est faite dans deux directions :

- (i) généralisation des propriétés de l'opérateur tangent (étudié dans la plupart des travaux existants) à l'opérateur sécant
- (ii) généralisation d'un alphabet fini à un alphabet infini.

Trois idées nouvelles ont rendu possibles ces généralisations (voir chapitre 7) :

- (i) l'utilisation non plus d'ensembles de Cantor comme Melbourne, Hachemi, et Baladi, mais de *réunions fondamentales*, plus grosses, qui sont des « Cantor en construction ».

- (ii) la dépendance de ces ensembles en $t = \Im(s)$ (rappelons qu'on étudie les opérateurs sur la droite $\{\Re(s) = 1\}$).
- (iii) les normes (θ) , qui étudient des restrictions de la fonction considérée près de la diagonale. Ces idées sont nécessaires pour traiter la condition 2-DIOP dans le cas d'un nombre infini de branches, et fournissent une preuve alternative pour 3-DIOP.

Les principaux résultats de la thèse sont énoncés à la sous-section 5.3.3.

- ▶ Le théorème (3-DIOP) conclut pour les systèmes dynamiques généraux avec condition arithmétique 3-DIOP
→ preuve au chapitre 10
- ▶ Le théorème (2-DIOP) conclut pour les systèmes dynamiques généraux avec condition arithmétique 2-DIOP
→ preuve au chapitre 10
- ▶ Le théorème (3-DIOP-sans mémoire) conclut pour les systèmes dynamiques sans mémoire avec condition arithmétique 3-DIOP
→ preuve au chapitre 11
- ▶ Le théorème (2-DIOP-sans mémoire) conclut pour les systèmes dynamiques sans mémoire avec condition arithmétique 2-DIOP
→ preuve au chapitre 11
- ▶ Le théorème (2-DIOP-sans mémoire-fini) donne un résultat optimal pour les systèmes dynamiques sans mémoire avec un nombre fini de branches
→ preuve au chapitre 12

On énoncera et montrera aussi dans le chapitre 9 les théorèmes (3-DIOP-tangent) et (2-DIOP-tangent) relatifs aux opérateurs tangents, et qui nous montrent la voie pour les opérateurs sécants, dans les théorèmes présentés ci-dessus. Les opérateurs tangents étant une restriction des opérateurs sécants, les théorèmes sur les opérateurs sécants (qui permettent de conclure sur Λ) sont une généralisation de ces théorèmes sur les opérateurs tangents.

Pour les théorèmes (2-DIOP) et (2-DIOP-tangent), dans le cas d'un alphabet fini, je trouve par une variante de la preuve, un autre résultat valable, différent de celui du cas général. Ce résultat peut être préféré au résultat général dans certains cas.

En particulierisant la preuve du théorème (2-DIOP-sans mémoire) au cas d'un alphabet fini, on retrouve la même conclusion qu'au théorème (2-DIOP-sans mémoire-fini).

Au final, la preuve mêle

- ▷ analyse fonctionnelle (étude de spectres)
- ▷ analyse complexe (théorème des résidus et déplacement de contour)
- ▷ et arithmétique (approximation diophantienne).

Le travail dans le cas d'une source sans mémoire avec alphabet fini, a donné lieu à un article accepté à la conférence internationale AoFA'10 et publié dans les actes de cette conférence (DMTCS, [22]). Le travail dans le cas général a fait l'objet d'un article publié à Words'11 ([45]).

Autres travaux. Dans les premiers travaux sur l'analyse « dynamique » de l'algorithme d'Euclide [57, 6, 55, 25], il s'agit de faire de l'analyse en moyenne, et dans ce cas la série génératrice des coûts étudiés est une série de Dirichlet $F(s)$ à coefficients positifs. On peut utiliser alors le

théorème taubérien dit de Delange, qui s'applique sous des hypothèses de discipline très faibles. Cela a permis d'obtenir des résultats sur l'analyse en moyenne de toute une classe d'algorithmes d'Euclide, mais on ne peut dans ce cas obtenir des termes de reste dans l'asymptotique de $N(t)$.

Quand on se tourne vers l'*analyse dynamique en distribution*, il faut manipuler des séries de Dirichlet où les coefficients $a_n := a_n(w)$ sont des nombres complexes qui dépendent d'un paramètre w lui-même complexe, et on veut obtenir des résultats asymptotiques sur $N(t)(w)$ qui soient uniformes par rapport à w . Il est donc nécessaire de travailler avec des séries de Dirichlet dont les coefficients a_n sont quelconques et on veut obtenir des termes de reste. On entre dans le domaine des théorèmes taubériens dits « avec reste ».

Dans le papier [5] fondateur de l'« analyse en distribution », les auteures, Baladi et Vallée, ont rencontré des difficultés, car elles ne connaissaient pas vraiment bien le domaine des théorèmes taubériens avec reste ; elles ont résolu ces difficultés par des méthodes un peu ad-hoc, en parties inexactes d'ailleurs, qui ont été corrigées par la suite par Cesaratto dans [9]. Quand il s'est agi d'obtenir des résultats d'analyse dynamique plus généraux, sur l'évolution de la densité des rationnels tout au long de l'exécution de l'algorithme d'Euclide, les auteurs de [10] se sont rendus compte qu'ils ne pouvaient plus étendre la technique de [5]. Il leur fallait vraiment pouvoir utiliser des théorèmes taubériens avec reste. C'est pourquoi Driss Essouabri et Brigitte Vallée ont eu l'idée de cette thèse, et de cette co-direction.

Dans cette thèse j'explique et améliore un célèbre théorème taubérien de Landau, qui permet d'estimer avec reste, la moyenne des coefficients d'une série de Dirichlet, sous l'hypothèse d'une bonne discipline de la série. Le théorème d'origine n'était valable que quand les coefficients étaient positifs. Je généralise au cas des coefficients quelconques. De plus, le théorème d'origine traitait le cas d'un prolongement méromorphe à une bande. Dans cette thèse, on regarde aussi ce qui se passe pour un prolongement méromorphe sur un domaine hyperbolique.

Ces travaux sont susceptibles de faire l'objet d'un rapport de recherche.

Plan. Dans une première partie, je présente en détail la problématique de la thèse, en introduisant les objets nécessaires à l'étude. Le modèle de sources dynamiques utilisé est ainsi présenté au chapitre 1. On décrit le modèle probabiliste et les structures au chapitre 2. Le concept de discipline et son approche font l'objet du chapitre 3. Les chapitres 4 et 5 mettent en avant les hypothèses sur le système dynamique pour conclure sur la discipline de la source. Les conditions du chapitre 4 sont de nature géométrique, et le travail présenté est celui de Baladi et Vallée ([5]). Dans le chapitre 5 sont décrits les résultats obtenus dans cette thèse avec les définitions correspondantes.

La deuxième partie introduit les outils nécessaires pour les preuves : analyse fonctionnelle au chapitre 6, réunions fondamentales au chapitre 7. Et je présente les preuves au chapitre 8.

Ces preuves décrites sont faites à la troisième partie. D'abord le chapitre 9 présente la preuve des résultats sur l'opérateur tangent, qui ne permettent pas de conclure à la discipline de la source, mais ouvrent la voie à l'étude de l'opérateur sécant qui a lieu au chapitre 10, et permet cette fois de conclure à la H -discipline de la source. Le chapitre suivant 11 peut être vu tout à la fois comme un cas particulier des deux précédents, dans le cas plus simple des sources sans mémoire. Puis le chapitre 12, largement indépendant, présente une preuve élémentaire dans le cas des sources sans mémoire avec alphabet fini, qui donne l'optimalité de la région sans pôle obtenue.

Enfin, la quatrième partie traite des théorèmes taubériens. Les théorèmes replacés dans leur

contexte sont énoncés au chapitre 13. La démonstration est amorcée au chapitre 14, et terminée dans le cas d'une région hyperbolique sans pôle au chapitre 15. Dans les autres cas, suivant la preuve historique de Landau, de nouveaux outils sont nécessaires, ce qui fait l'objet du chapitre 16.

Les différentes annexes présentent des versions plus précises de certains lemmes et des preuves techniques, en lien avec cette dernière partie.

Table des matières

Introduction	9
Table des figures	19
Notations	23
I Analyse en moyenne en théorie de l'information	33
1 Sources et sources dynamiques	35
1.1 Sources générales	35
1.1.1 Définitions	35
1.1.2 Paramétrisation d'une source	36
1.1.3 Séries de Dirichlet	37
1.1.4 Entropie	38
1.1.5 Sources sans mémoire	38
1.1.6 Chaînes de Markov	40
1.2 Sources dynamiques	41
1.2.1 Systèmes dynamiques	41
1.2.2 Codage d'un système dynamique	41
1.2.3 Branches inverses	44
1.2.4 Quelques cas particuliers de sources dynamiques	45
1.2.5 Opérateurs de transfert	48
1.2.6 Expression de la série de Dirichlet	51
1.2.7 Bonne Classe	53
2 ABR et Tries	57
2.1 Structures étudiées	58
2.1.1 Algorithme QuickSort et ABR	58
2.1.2 Trie	59
2.1.3 Paramètres sur les arbres	61
2.2 Modèle probabiliste	66

2.2.1	Comparaisons entre symboles	66
2.2.2	Modèle de Bernoulli	67
2.2.3	Modèle de Poisson	67
2.2.4	Dépoissonisation	69
2.3	Etude exacte des coûts	71
2.3.1	Sur l'ABR	71
2.3.2	Sur le Trie	75
2.3.3	Schéma général	76
2.4	Analyse asymptotique des coûts	77
2.4.1	Passage dans le plan complexe	78
2.4.2	Discipline des sources	79
2.4.3	Conclusions pour l'étude des coûts	80
3	Approches de la discipline d'une source dynamique	85
3.1	Intuition sur le cas sans mémoire	86
3.2	Retour au cas général	87
3.2.1	L'opérateur composante M_t	87
3.2.2	Théorème (A)	89
3.3	Géométrie des pôles de Λ	89
3.3.1	Théorème (B)	89
3.3.2	Démarche générale	90
4	Un précédent résultat : conditions géométriques pour la discipline	93
4.1	Systèmes conjugués affines	93
4.2	Condition nécessaire pour la périodicité	98
4.3	Renforcement de la contraposée et condition UNI	98
5	Résultats de la thèse : conditions arithmétiques pour la discipline	101
5.1	Arithmétique sur les branches	101
5.1.1	Points fixes	101
5.1.2	Rapports considérés	102
5.2	Conditions nécessaires pour la périodicité	104
5.2.1	Rationalité	104
5.2.2	Un contre-exemple pour bien comprendre la définition	109
5.2.3	Théorème (C)	110
5.3	Renforcement de la contraposée et exposant d'irrationalité	114
5.3.1	Exposant d'irrationalité	114
5.3.2	Approximations simultanées	116
5.3.3	Résultats de la thèse	120

II	Préliminaires aux preuves	125
6	Analyse fonctionnelle	127
6.1	Normes et espaces fonctionnels	127
6.1.1	Normes considérées	127
6.1.2	Etude des opérateurs \mathbf{M}	129
6.1.3	Etude des opérateurs \mathbf{H}	131
6.2	Etude des spectres	132
6.2.1	Propriétés spectrales des opérateurs	132
6.2.2	Normalisation	134
6.2.3	Décomposition spectrale et asymptotique	140
6.3	Preuve du théorème (A)	144
6.4	Relation entre \mathbf{M} et \mathbf{H}	148
7	Réunions fondamentales	151
7.1	Définitions	151
7.2	Cas particuliers utilisés	154
7.3	Majoration sur les ensembles introduits	157
7.4	Réunions fondamentales et points fixes	161
7.5	Sous-ensembles de Cantor	162
7.6	Une nouvelle norme	164
8	Présentation des preuves	167
8.1	Idées anciennes et nouvelles pour la preuve	168
8.2	Raisonnements ensemblistes	169
8.3	Ensembles introduits	169
8.3.1	Ensembles \mathcal{F}	169
8.3.2	Ensembles \mathcal{A}	171
8.3.3	Ensembles \mathcal{C}	172
8.3.4	Ensembles \mathcal{E}	173
8.3.5	Ensembles \mathcal{B}	174
8.4	Schéma des preuves	174
III	Preuve des résultats	177
9	Quasi-inverse du tangent dans le cas général	179
9.1	Etude fine du spectre de l'opérateur composante	180
9.1.1	Systèmes 3-DIOP	180
9.1.2	Systèmes 2-DIOP	183
9.2	Etude sur la droite $\{\Re(s) = 1\}$	185
9.2.1	Etape 1 $\mathcal{B} \tilde{\subset} \mathcal{A}$	185

9.2.2	Etape 2 $\mathcal{B}^c \tilde{\subset} \mathcal{F}$	190
9.2.3	Etape 3 $\mathcal{F}^c \tilde{\subset} \mathcal{A}^c \cup \mathcal{C}$	194
9.3	Domaine hyperbolique	202
9.4	Synthèse	205
9.4.1	Fin de la preuve du théorème (3-DIOP-tangent)	205
9.4.2	Fin de la preuve du théorème (2-DIOP-tangent)	206
10	Quasi-inverse du sécant dans le cas général	211
10.1	Etude fine du spectre de l'opérateur composante	211
10.1.1	Systèmes 3-DIOP	211
10.1.2	Systèmes 2-DIOP	212
10.2	Etude sur la droite $\{\Re(s) = 1\}$	214
10.2.1	Etape 1 adaptée	215
10.2.2	Etape 2 adaptée	220
10.2.3	Etape 3 adaptée	222
10.3	Domaine hyperbolique	231
10.4	Synthèse	232
10.4.1	Fin de la preuve du théorème (3-DIOP)	232
10.4.2	Fin de la preuve du théorème (2-DIOP)	232
10.5	Retour sur l'opérateur tangent	235
11	Etude particulière du cas sans mémoire	237
11.1	Etude fine de l'approximation des probabilités	237
11.1.1	Systèmes 3-DIOP	237
11.1.2	Systèmes 2-DIOP	238
11.2	Etude sur la droite $\{\Re(s) = 1\}$	239
11.2.1	Etape 1 adaptée	239
11.2.2	Etape 2 adaptée	241
11.2.3	Etape 3 adaptée	242
11.3	Domaine hyperbolique	245
11.4	Synthèse	245
11.4.1	Fin de la preuve du théorème (3-DIOP-sans mémoire)	245
11.4.2	Fin de la preuve du théorème (2-DIOP-sans mémoire)	246
12	Etude particulière du cas sans mémoire avec alphabet fini	249
12.1	Enoncé du théorème (2-DIOP-sans mémoire-fini)	252
12.2	Echelles et pôles	253
12.3	Fonction Δ et nouvelle famille de normes	255
12.4	Fin de la preuve du théorème (2-DIOP-sans mémoire-fini)	256
12.5	Preuves annexes	257
12.5.1	Invariance de l'exposant d'irrationalité	257

12.5.2	Preuves relatives aux échelles et aux pôles	260
12.5.3	Preuves relatives à la fonction Δ	262
IV	Théorèmes taubériens	265
13	Enoncé des différents résultats	269
13.1	Théorème de Landau revisité	269
13.2	Théorèmes taubériens pour séries à coefficients quelconques	272
13.3	Théorème taubérien hyperbolique	276
14	Principe de la démonstration	279
14.1	Formule de Perron	279
14.2	Contribution des résidus	282
15	Le cas simple où l'ordre 0 suffit	285
15.1	Formule de Perron effective	285
15.2	Preuve du théorème 13.16	286
16	Vers un ordre supérieur	291
16.1	Nouvelles notations et premières propriétés	291
16.2	Formule de Perron généralisée	295
16.3	Estimation des moyennes d'ordre supérieur	299
16.4	Fin de la preuve du théorème 13.3	302
16.5	Fin de la preuve des théorèmes 13.8 et 13.12	304
	Conclusion	309
A	Versions plus précises des lemmes 16.4 et 16.8	313
B	Preuve alternative de la proposition 16.19	315
C	Preuve alternative du lemme B.1	317
C.1	Preuve élémentaire	317
C.2	Preuve calculatoire	318
C.3	Preuve combinatoire	320
	Bibliographie	321

Table des figures

1.1	Paramétrisation d'une source	37
1.2	Graphe de l'entropie	40
1.3	Exemples de systèmes affines	42
1.4	Deux exemples de systèmes dynamiques	43
1.5	Mot émis par un système dynamique	45
1.6	Exemple de chaîne de Markov	47
2.1	L'algorithme QuickSort	59
2.2	Exemple d' ABR sur un ensemble de mots	60
2.3	Exemple de Trie sur un ensemble de mots	61
2.4	Influence qualitative de l'entropie sur la forme des Tries	62
2.5	Tries expérimentaux avec système sans mémoire de vecteur $\mathbf{p} = (0.4, 0.6)$	63
2.6	Tries expérimentaux avec système sans mémoire de vecteur $\mathbf{p} = (0.8, 0.2)$	64
2.7	Tries expérimentaux avec système sans mémoire de vecteur $\mathbf{p} = (0.3, 0.2, 0.5)$	65
2.8	Illustrations de principe sur la comparaison entre symboles	68
2.9	Stratégies possibles pour l'étude asymptotique	70
2.10	Triangles fondamentaux sur un exemple	72
2.11	Contour pour la preuve de la formule de Rice	78
2.12	Contour pour l'asymptotique de $T(n)$	80
2.13	Différents comportements naturels pour $\Lambda(s)$	81
2.14	Dictionnaire pôle / contribution dans l'asymptotique	82
3.1	Sources périodiques et apériodiques	90
3.2	Démarche générale pour l'étude de la discipline des sources	92
5.1	Illustration sur les approximations successives et les BSAD	117
5.2	Illustration de la notion de BSAD sur un exemple numérique	118
6.1	Spectre de l'opérateur tangent	135
6.2	Récapitulatif des différents opérateurs	136
6.3	Tableau résumé sur les normes des opérateurs	141
7.1	Carrés fondamentaux sur un exemple	153
7.2	Points fixes et réunions fondamentales	162

8.1	Schéma de la preuve pour l'opérateur sécant	176
12.1	Valeurs numériques d'approximations et de pôles dans le cas sans mémoire fini	251
12.2	Echelles régulières et échelle-intersection	254
13.1	Hypothèses (H)	271
13.2	Hypothèses (H_∞)	273
13.3	Hypothèses (H_-)	277
14.1	Premier contour pour la preuve de la formule de Perron	280
14.2	Deuxième contour pour la preuve de la formule de Perron	281
15.1	Contour d'intégration pour le théorème de Landau hyperbolique	287
16.1	Premier contour pour la preuve de la formule de Perron d'ordre supérieur	297
16.2	Deuxième contour pour la preuve de la formule de Perron d'ordre supérieur	298
16.3	Contour d'intégration pour le théorème de Landau revisité	301

Notations

Dans toute la thèse, quand on considèrera un nombre complexe $s = \sigma + it$, le comportement asymptotique des quantités étudiées en $t \rightarrow \pm\infty$ sera le même : c'est pourquoi, pour ne pas alourdir les notations avec des valeurs absolues $|t|$, on considèrera toujours que $t \geq 0$.

$\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$	alphabet au plus dénombrable
ϵ	mot vide
Σ^k	ensemble des mots de k lettres sur l'alphabet Σ
Σ^*	ensemble des mots finis (y compris le mot vide) sur Σ
Σ^∞	ensemble des mots infinis sur Σ
$ w $	longueur du mot w
p_w	probabilité qu'un mot de la source commence par le préfixe w
Λ	série de Dirichlet $\Lambda(s) = \sum_{w \in \Sigma^*} p_w^s$
\mathbf{p}	un vecteur de probabilités $(p_i)_{i \in \{1, \dots, r\}}$ avec $\sum_{i \in \{1, \dots, r\}} p_i = 1$
λ	$\lambda(s) = \sum_{i \in \{1, \dots, r\}} p_i^s$
$h(\mathcal{S})$	$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-1}{k} \sum_{w \in \Sigma^k} p_w \log p_w$ (entropie)

Systemes dynamiques

\mathcal{I}	$[0, 1]$
$\underline{\mathcal{I}}$	$\mathcal{I} \times \mathcal{I}$
$\mathbf{1}_{\mathcal{J}}$	fonction caractéristique de $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$
$\underline{\mathbf{1}}_{\underline{\mathcal{J}}}$	fonction caractéristique de $\underline{\mathcal{J}} \subset \underline{\mathcal{I}}$
\mathcal{H}	ensemble des branches inverses
$h^{(d)}$	$h \circ \dots \circ h$ (composé d fois avec lui-même)
$s_h(y_1, y_2)$	$\frac{h(y_1) - h(y_2)}{y_1 - y_2}$ (pente de la sécante)
\underline{x}	(x_1, x_2)
$\underline{h}(x)$	$(h(x_1), h(x_2))$
$ \mathcal{J} $	mesure de Lebesgue de l'intervalle \mathcal{J}
ρ	$\rho := \limsup_{n \rightarrow \infty} (\max\{ h'(x) ; h \in \mathcal{H}^n, x \in \mathcal{I}\})^{1/n} < 1$ (coefficient de contraction d'un système dynamique de Bonne Classe)
σ_0	$\sigma_0 = \inf \{ \sigma \in \mathbb{R} : \sum_{h \in \mathcal{H}} h'(\mathcal{I}) ^\sigma < +\infty \}$ (< 1 pour systèmes de Bonne Classe)
$\hat{\rho}$	$\rho < \hat{\rho} < 1$
ρ_0	$\inf_{h \in \mathcal{H}} \inf_{\mathcal{I}} h'(x) $ (dans le cas où l'alphabet est fini)

Arithmétique

On note $\underline{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$.

h^*	point fixe de la branche inverse h
$p(h)$	profondeur de la branche inverse h
$c(h)$	$-\log h'(h^*) /p(h)$
$c(h_1, h_2)$	$\frac{c(h_2)}{c(h_1)}$
$c(h_1, h_2, h_3)$	$\frac{c(h_1) - c(h_3)}{c(h_1) - c(h_2)}$
$c_{\text{aff}}(i)$	$-\log p_i$
$c_{\text{aff}}(i, j)$	$\frac{\log p_j}{\log p_i}$
$c_{\text{aff}}(i, j, k)$	$\frac{\log p_i - \log p_k}{\log p_i - \log p_j}$
w	$\frac{1}{c_{\text{aff}}(r)}$ en supposant $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_r$ (facteur de normalisation pour la preuve)
$\lfloor x \rfloor$	partie entière de x , ie $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$
$\lfloor x \rceil$	entier le plus proche de x ($\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$)
$\{x\}$	partie fractionnaire centrée de x ($x - \lfloor x \rfloor$)
$\{\underline{x}\}$	$(\{x_1\}, \dots, \{x_r\})$ vecteur des parties fractionnaires centrées
$n(\beta, t)$	$\lfloor \beta \log t \rfloor$
$\mathcal{H}(t, \beta, \delta)$	$\{h \in \mathcal{H}^{n(\beta, t)} : \inf_{x \in \mathcal{I}} h'(x) \geq \frac{1}{t^\delta}\}$
$\mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$	$\{i \in \mathbb{N}^*; c_{\text{aff}}(i) \geq \frac{1}{t^\delta}\}$

Opérateurs

I	opérateur identité sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$
<u>I</u>	opérateur identité sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$
1	fonction constante égale à 1 dans $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$
<u>1</u>	fonction constante égale à 1 dans $\mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$
H_s[f](x)	$\sum_{h \in \mathcal{H}} h'(x) ^s f \circ h(x)$ (opérateur de transfert tangent)
<u>H_s[f](x)</u>	$\sum_{h \in \mathcal{H}} s_h(x) ^s \underline{f}(h(x))$ (opérateur de transfert sécant)
$\tilde{\mathbf{H}}_s[f](x)$	$\frac{1}{\lambda(\sigma) \underline{f}_\sigma(x)} \sum_{h \in \mathcal{H}} h'(x) ^s (f \underline{f}_\sigma) \circ h(x)$ (opérateur de transfert tangent normalisé)
$\tilde{\mathbf{H}}_s[\underline{f}](\underline{x})$	$\frac{1}{\lambda(\sigma) \underline{f}_\sigma(\underline{x})} \sum_{h \in \mathcal{H}} s_h(\underline{x}) ^s (\underline{f} \underline{f}_\sigma)(h(\underline{x}))$ (opérateur de transfert sécant normalisé)
M_t[u](x)	$ T'(x) ^{it} u \circ T(x)$ (opérateur composante tangent)
<u>M_t[u](x)</u>	$\left \frac{T(x_1) - T(x_2)}{x_1 - x_2} \right ^{it} \underline{u}(T(x_1), T(x_2))$ (opérateur composante sécant)
π₁	projecteur $\pi_1(\underline{x}) = x_1$
Δ_u	opérateur de multiplication par $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$
<u>Δ_u</u>	opérateur de multiplication par $\underline{u} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$

Quand on omet le paramètre s , c'est pour dire $s = 1$. Ainsi $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$, $\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{H}}_1$, etc...

Spectres

Soit un système de la **Bonne Classe** d'abscisse de convergence σ_0 , et de coefficient de contraction ρ . Dans la suite, σ est réel et $\sigma > \sigma_0$.

f_σ	fonction propre dominante de \mathbf{H}_σ
\underline{f}_σ	fonction propre dominante de $\underline{\mathbf{H}}_\sigma$
$\lambda(\sigma)$	valeur propre dominante de \mathbf{H}_σ et $\underline{\mathbf{H}}_\sigma$
$L(\sigma)$	$\log \lambda(\sigma)$ (fonction de pression)
σ_1	$\sigma_0 < \sigma_1 < 1$ est défini implicitement pour les systèmes de Bonne Classe par $\sigma \mapsto (1 - \sigma_1) L'(\sigma_1) - L(\sigma_1) = \log \rho .$
\mathbf{P}_σ	$\int_\Gamma (\xi \mathbf{I} - \mathbf{H}_\sigma)^{-1} d\xi$ (projection dominante tangente) où Γ est un contour orienté positivement qui englobe $\lambda(\sigma)$ et aucune autre valeur spectrale de \mathbf{H}_σ
\mathbf{N}_σ	$\mathbf{H}_\sigma - \lambda(\sigma) \mathbf{P}_\sigma$ (opérateur de reste tangent)
$\tilde{\mathbf{P}}_\sigma$	$\int_{\tilde{\Gamma}} (\xi \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{H}}_\sigma)^{-1} d\xi$ (projection dominante tangente normalisée) où $\tilde{\Gamma}$ est un contour orienté positivement qui englobe 1 et aucune autre valeur spectrale de $\tilde{\mathbf{H}}_\sigma$
$\tilde{\mathbf{N}}_\sigma$	$\tilde{\mathbf{H}}_\sigma - \tilde{\mathbf{P}}_\sigma$ (opérateur de reste tangent normalisé)
$\underline{\mathbf{P}}_\sigma$	$\int_{\underline{\Gamma}} (\xi \mathbf{I} - \underline{\mathbf{H}}_\sigma)^{-1} d\xi$ (projection dominante sécante) où $\underline{\Gamma}$ est un contour orienté positivement qui englobe $\lambda(\sigma)$ et aucune autre valeur spectrale de $\underline{\mathbf{H}}_\sigma$
$\underline{\mathbf{N}}_\sigma$	$\underline{\mathbf{H}}_\sigma - \lambda(\sigma) \underline{\mathbf{P}}_\sigma$ (opérateur de reste sécant)
$\underline{\tilde{\mathbf{P}}}_\sigma$	$\int_{\underline{\tilde{\Gamma}}} (\xi \mathbf{I} - \underline{\tilde{\mathbf{H}}}_\sigma)^{-1} d\xi$ (projection dominante sécante normalisée) où $\underline{\tilde{\Gamma}}$ est un contour orienté positivement qui englobe 1 et aucune autre valeur spectrale de $\underline{\tilde{\mathbf{H}}}_\sigma$
$\underline{\tilde{\mathbf{N}}}_\sigma$	$\underline{\tilde{\mathbf{H}}}_\sigma - \underline{\tilde{\mathbf{P}}}_\sigma$ (opérateur de reste sécant normalisé)

Quand on omet le paramètre s , c'est pour dire $s = 1$. Ainsi $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1$, $\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}_1$, etc...

Normes

Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{I})$ et $\underline{f} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$.

$\ f\ _\infty$	$\sup_{x \in \mathcal{I}} f(x) $ (norme sup)
$\ \underline{f}\ _\infty$	$\sup_{\underline{x} \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} \underline{f}(\underline{x}) $ (norme sup)
$\ \underline{f}\ _{\infty,(\theta)}$	$\sup_{\underline{x} \in \underline{\mathcal{I}}(t,\theta)} \underline{f}(\underline{x}) $ (norme sup « restreinte »)

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ et $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$ et $N > 0$.

$D\underline{f}(\underline{x}_0)$	différentielle de \underline{f} en x_0
$\frac{\partial}{\partial 1} \underline{f}(\underline{x}_0)$	$D\underline{f}(\underline{x}_0) \cdot (1, 0)$ (dérivée partielle de \underline{f} par rapport à la première place)
$\frac{\partial}{\partial 2} \underline{f}(\underline{x}_0)$	$D\underline{f}(\underline{x}_0) \cdot (0, 1)$ (dérivée partielle de \underline{f} par rapport à la deuxième place)
$\ f\ _1$	$\sup_{x \in \mathcal{I}} f'(x) $ (semi-norme)
$\ \underline{f}\ _1$	$\sup_{\underline{x} \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} \left \frac{\partial}{\partial 1} \underline{f}(\underline{x}) \right + \sup_{\underline{x} \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} \left \frac{\partial}{\partial 2} \underline{f}(\underline{x}) \right $ (semi-norme)
$\ f\ _{1,1}$	$\ f\ _\infty + \ f\ _1$
$\ \underline{f}\ _{1,1}$	$\ \underline{f}\ _\infty + \ \underline{f}\ _1$
$\ f\ _{1,N}$	$\ f\ _\infty + \frac{1}{N} \ f\ _1$
$\ \underline{f}\ _{1,N}$	$\ \underline{f}\ _\infty + \frac{1}{N} \ \underline{f}\ _1$
$\ \underline{f}\ _{1,(\theta)}$	$\sup_{\underline{x} \in \underline{\mathcal{I}}(t,\theta)} \left \frac{\partial}{\partial 1} \underline{f}(\underline{x}) \right + \sup_{\underline{x} \in \underline{\mathcal{I}}(t,\theta)} \left \frac{\partial}{\partial 2} \underline{f}(\underline{x}) \right $ (norme « restreinte »)
$\ f\ _{1,1,(\theta)}$	$\ f\ _{\infty,(\theta)} + \ \underline{f}\ _{1,(\theta)}$ (norme « restreinte »)
$\ f\ _{1,N,(\theta)}$	$\ f\ _{\infty,(\theta)} + \frac{1}{N} \ \underline{f}\ _{1,(\theta)}$ (norme « restreinte »)

Ensembles tangents

$$\mathcal{I}(t, \beta, \delta) := \mathcal{H}(t, \beta, \delta)(\mathcal{I}) \quad \mathcal{K}(t, \beta, \delta) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{H}(t, \beta, \delta)^k(\mathcal{I})$$

$$\mathcal{A}(\alpha, \beta, \delta) = \left\{ \begin{array}{l} t > 0 : \exists (w_t, \eta_t)/w_t \in \mathcal{C}(\mathcal{I}), |w_t| = 1, \|w_t\|_{1,t} \leq K_0, \eta_t \in \mathbb{C}, |\eta_t| = 1, \\ \forall x \in \mathcal{I}(t, \beta, \delta), \left| \mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t](x) - \eta_t w_t(x) \right| \leq \frac{1}{t^\alpha} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{C}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta) = \left\{ \begin{array}{l} t > 0 : \exists (w_t, \eta_t)/w_t \in \mathcal{C}(\mathcal{I}), |w_t| = 1, \|w_t\|_{1,t} \leq K_0, \eta_t \in \mathbb{C}, |\eta_t| = 1, \\ \forall x \in \mathcal{I}(t, \beta, \delta), \left| \mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t](x) - \eta_t w_t(x) \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}, \\ |\eta_t - \xi^{n(\beta,t)}| \leq \frac{1}{t^\gamma}. \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{C}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \mathcal{C}(\alpha, \beta, \gamma, 1, \delta)$$

$$\mathcal{E}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta) = \left\{ \begin{array}{l} t > 0 : \exists (w_t, \eta_t)/w_t \in \mathcal{C}(\mathcal{I}), |w_t| = 1, \|w_t\|_{1,t} \leq K_0, \eta_t \in \mathbb{C}, |\eta_t| = 1, \\ \forall x \in \mathcal{I}(t, \beta, \delta), \left| \mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t](x) - \eta_t w_t(x) \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}, \\ |\eta_t - \xi^{n(\beta,t)}| > \frac{1}{t^\gamma}. \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{E}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \mathcal{E}(\alpha, \beta, \gamma, 1, \delta)$$

$$\mathcal{B}(\alpha, \beta) = \left\{ \begin{array}{l} t > 0 : \exists u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I}) / \|u_0\|_{1,t} \leq 1 \\ \forall n \in \{0, n(\beta, t), 2n(\beta, t)\}, \forall y \in \mathcal{I}, \\ \left| \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^n[u_0](y) \right| \geq 1 - \frac{1}{t^\alpha} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{R}(t, \eta) = \|(\mathbf{I} - \eta \mathbf{H}_{1+it})^{-1}\|_{1,t} \quad \mathcal{R}(t) = \mathcal{R}(t, 1)$$

$$\mathcal{F}(\alpha, \eta) = \{t, \mathcal{R}(t, \eta) \leq t^\alpha\} \quad \mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{F}(\alpha, 1)$$

Ensembles sécants

$$\underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta) = \bigcup_{h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)} h(\underline{\mathcal{I}}) \quad \underline{\mathcal{I}}(t, \theta) = \bigcup_{h \in \mathcal{H}^n(\theta, t)} h(\underline{\mathcal{I}})$$

$$\underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta) = \bigcup_{h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta), \ell \in \mathcal{H}^n(\theta, t)} h \circ \ell(\underline{\mathcal{I}}) = \bigcup_{h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)} h(\underline{\mathcal{I}}(t, \theta)).$$

$$\underline{\mathcal{A}}(\alpha, \beta, \delta, \theta) = \left\{ \begin{array}{l} t > 0 : \exists (\underline{w}_t, \eta_t) / \underline{w}_t \in \mathcal{C}(\mathcal{I} \times \mathcal{I}), |\underline{w}_t| = 1, \|\underline{w}_t\|_{1,t,\theta} \leq \underline{K}_0, \eta_t \in \mathbb{C}, |\eta_t| = 1, \\ \forall \underline{x} \in \underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta), \left| \underline{\mathbf{M}}_t^{n(\beta,t)}[\underline{w}_t](\underline{x}) - \eta_t \underline{w}_t(\underline{x}) \right| \leq \frac{1}{t^\alpha} \end{array} \right\}$$

$$\underline{\mathcal{C}}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta, \theta, k_0) = \left\{ \begin{array}{l} t > 0 : \exists (\underline{w}_t, \eta_t) / \underline{w}_t \in \mathcal{C}(\mathcal{I} \times \mathcal{I}), |\underline{w}_t| = 1, \|\underline{w}_t\|_{1,t,\theta} \leq \underline{K}_0, \eta_t \in \mathbb{C}, |\eta_t| = 1, \\ \forall \underline{x} \in \underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta), \left| \underline{\mathbf{M}}_t^{n(\beta,t)}[\underline{w}_t](\underline{x}) - \eta_t \underline{w}_t(\underline{x}) \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}, \\ \left| \eta_t^{k_0} - \xi^{k_0 n(\beta,t)} \right| \leq \frac{1}{t^\gamma}. \end{array} \right\}$$

$$\underline{\mathcal{C}}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, k_0) = \underline{\mathcal{C}}(\alpha, \beta, \gamma, 1, \delta, \theta, k_0)$$

$$\underline{\mathcal{E}}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta, \theta, k_0) = \left\{ \begin{array}{l} t > 0 : \exists (\underline{w}_t, \eta_t) / \underline{w}_t \in \mathcal{C}(\mathcal{I} \times \mathcal{I}), |\underline{w}_t| = 1, \|\underline{w}_t\|_{1,t,\theta} \leq \underline{K}_0, \eta_t \in \mathbb{C}, |\eta_t| = 1, \\ \forall \underline{x} \in \underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta), \left| \underline{\mathbf{M}}_t^{n(\beta,t)}[\underline{w}_t](\underline{x}) - \eta_t \underline{w}_t(\underline{x}) \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}, \\ \left| \eta_t^{k_0} - \xi^{k_0 n(\beta,t)} \right| > \frac{1}{t^\gamma}. \end{array} \right\}$$

$$\underline{\mathcal{E}}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, k_0) = \underline{\mathcal{E}}(\alpha, \beta, \gamma, 1, \delta, \theta, k_0)$$

$$\underline{\mathcal{B}}(\alpha, \beta, \theta) = \left\{ \begin{array}{l} t > 0 : \exists \underline{u}_0 \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I}) / \|\underline{u}_0\|_{1,t} \leq 1 \\ \forall n \in \{0, n(\beta, t), 2n(\beta, t)\}, \quad \forall \underline{y} \in \underline{\mathcal{I}}(t, \theta), \\ \left| \tilde{\underline{\mathbf{H}}}_{1+it}^n[\underline{u}_0](\underline{y}) \right| \geq 1 - \frac{1}{t^\alpha} \end{array} \right\}$$

$$\underline{\mathcal{R}}(t, \eta) = \left\| (\underline{\mathbf{I}} - \eta \underline{\mathbf{H}}_{1+it})^{-1} \right\|_{1,t} \quad \underline{\mathcal{R}}(t) = \underline{\mathcal{R}}(t, 1)$$

$$\underline{\mathcal{F}}(\alpha, \eta) = \{t, \underline{\mathcal{R}}(t, \eta) \leq t^\alpha\} \quad \underline{\mathcal{F}}(\alpha) = \underline{\mathcal{F}}(\alpha, 1)$$

Ensembles affines

$$\mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta) = \left\{ i \in \mathbb{N}^*; \quad c_{\text{aff}}(i) \geq \frac{1}{t^\delta} \right\}.$$

$$\mathcal{A}_{\text{aff}}(\alpha, \delta) = \left\{ \begin{array}{l} t : \exists \eta_t \in \mathbb{C} / |\eta_t| = 1 \\ \forall k \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta), |p_k^{-it} - \eta_t| \leq \frac{1}{t^\alpha}. \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{C}_{\text{aff}}(\alpha, \gamma, \xi, \delta) = \left\{ \begin{array}{l} t : \exists \eta_t \in \mathbb{C}, |\eta_t| = 1 \\ \forall k \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta), |p_k^{-it} - \eta_t| \leq \frac{1}{t^\alpha}, \\ |\eta_t - \xi| \leq \frac{1}{t^\gamma}. \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{C}_{\text{aff}}(\alpha, \gamma, \delta) = \mathcal{C}_{\text{aff}}(\alpha, \gamma, 1, \delta)$$

$$\mathcal{E}_{\text{aff}}(\alpha, \gamma, \xi, \delta) = \left\{ \begin{array}{l} t : \exists \eta_t \in \mathbb{C}, |\eta_t| = 1 \\ \forall k \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta), |p_k^{-it} - \eta_t| \leq \frac{1}{t^\alpha}, \\ |\eta_t - \xi| > \frac{1}{t^\gamma}. \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{E}_{\text{aff}}(\alpha, \gamma, \delta) = \mathcal{E}_{\text{aff}}(\alpha, \gamma, 1, \delta)$$

$$\mathcal{B}_{\text{aff}}(\alpha) = \left\{ t : |\lambda(1 + it)| \geq 1 - \frac{1}{t^\alpha} \right\}$$

$$\mathcal{R}_{\text{aff}}(t, \eta) = \left| \frac{1}{1 - \eta\lambda(1 + it)} \right| \quad \mathcal{R}_{\text{aff}}(t) = \mathcal{R}_{\text{aff}}(t, 1) = |\Lambda(s)|$$

$$\mathcal{F}_{\text{aff}}(\alpha, \eta) = \{t, \mathcal{R}_{\text{aff}}(t, \eta) \leq t^\alpha\} \quad \mathcal{F}_{\text{aff}}(\alpha) = \mathcal{F}_{\text{aff}}(\alpha, 1)$$

Première partie

Analyse en moyenne
en théorie de l'information

Chapitre 1

Sources et sources dynamiques

Sommaire

1.1 Sources générales	35
1.1.1 Définitions	35
1.1.2 Paramétrisation d'une source	36
1.1.3 Séries de Dirichlet	37
1.1.4 Entropie	38
1.1.5 Sources sans mémoire	38
1.1.6 Chaînes de Markov	40
1.2 Sources dynamiques	41
1.2.1 Systèmes dynamiques	41
1.2.2 Codage d'un système dynamique	41
1.2.3 Branches inverses	44
1.2.4 Quelques cas particuliers de sources dynamiques	45
1.2.5 Opérateurs de transfert	48
1.2.6 Expression de la série de Dirichlet	51
1.2.7 Bonne Classe	53

Dans ce chapitre, on introduit les sources, et en particulier les sources dynamiques, qui seront dans le reste de la thèse, les processus producteurs de mots qu'on aura à comparer, lors de la construction d'arbres ou du déroulement des algorithmes de tri.

On définira la série de Dirichlet associée à une source, qui est l'outil central du domaine, et de cette thèse en particulier. Son emploi sera justifié au chapitre 2.

1.1 Sources générales

1.1.1 Définitions

Dans toute la thèse, $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots\}$ désignera un alphabet au plus dénombrable, muni de la relation d'ordre $a_1 < a_2 < \dots < a_i < \dots$, ϵ désignera le mot vide, Σ^k l'ensemble des mots de k lettres sur l'alphabet Σ , Σ^* l'ensemble des mots finis (y compris le mot vide), et Σ^∞ l'ensemble des mots infinis sur ce même alphabet. L'ensemble des mots est muni de l'ordre lexicographique.

On notera enfin $|w|$ la taille du mot w , c'est-à-dire le nombre de symboles qu'il contient ($w \in \Sigma^k \Leftrightarrow |w| = k$).

Une source probabiliste \mathcal{S} sur l'alphabet Σ est un processus qui produit des mots infinis sur Σ . Le i -ème symbole émis étant noté X_i .

Définition 1.1. Une source probabiliste \mathcal{S} est la donnée d'un espace probabilisé Ω , d'un alphabet Σ , et d'une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_i : \Omega \rightarrow \Sigma.$$

Les X_i ne sont pas indépendants dans le cas général, c'est-à-dire qu'un symbole produit dépend de ceux qui précèdent.

Deux cas simples retiennent notre attention :

- ▶ les sources sans mémoire. Un symbole émis par une telle source l'est indépendamment de tous les symboles qui précèdent. Cela correspond au cas où les X_i sont indépendants et de même loi ;
- ▶ les chaînes de Markov. Un symbole émis par une telle source ne dépend que d'un nombre fini borné de symboles précédemment émis.

Ces deux types de sources constituent les sources simples.

Une source est déterminée par l'ensemble $\{p_w, w \in \Sigma^*\}$ de ses probabilités fondamentales, où p_w désigne la probabilité qu'un mot infini produit par la source, commence par le préfixe fini w . On désignera par $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ l'ensemble des mots infinis produits par la source.

Le shift T est l'application de décalage qui à la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ associe la suite $(X_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$. Ainsi le shift T appliqué à un mot le prive de son premier symbole.

On introduira également cette notion de décalage quand on parlera des systèmes dynamiques : les deux définitions, conjuguées, coïncident à un petit abus de notation près.

1.1.2 Paramétrisation d'une source

Il existe un moyen naturel de paramétriser une source par l'intervalle $[0, 1]$. Ceci est expliqué par exemple dans [61].

On supposera toujours que $\pi_k = \sup\{p_w : w \in \Sigma^k\}$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini.

On note également

$$p_w^{(-)} := \sum_{\substack{\alpha, |\alpha|=|w| \\ \alpha < w}} p_\alpha \quad ; \quad p_w^{(+)} := \sum_{\substack{\alpha, |\alpha|=|w| \\ \alpha > w}} p_\alpha,$$

les probabilités respectives qu'un mot produit par la source ait son préfixe respectivement inférieur et supérieur à w .

On a alors naturellement $p_w + p_w^{(-)} + p_w^{(+)} = 1$. Notons $b_w = p_w^{(-)}$ et $1 - c_w = p_w^{(+)}$. On en déduit $c_w - b_w = p_w$. Soit $X \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$. Notons w_k son préfixe de longueur k . La suite $(b_{w_k})_k$ est croissante et $(c_{w_k})_k$ est décroissante. D'après l'hypothèse, on a $p_{w_k} \leq \pi_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$. Donc les suites $(b_{w_k})_k$ et $(c_{w_k})_k$ sont adjacentes. Notons $P(X) \in \mathcal{I} := [0, 1]$ leur limite commune. $P(X)$ s'interprète comme la probabilité qu'un mot infini Y soit inférieur à X .

L'application $P : \mathcal{L}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{I}$ ainsi définie est strictement croissante sauf sur l'ensemble dénombrable formé des mots qui se terminent par une suite infinie de la plus petite lettre a_1 , ou de la plus grande lettre a_r (si l'alphabet est fini). Deux mots ont alors la même image, qui est dans l'ensemble $\{b_w, w \in \mathcal{L}(\mathcal{S})\}$.

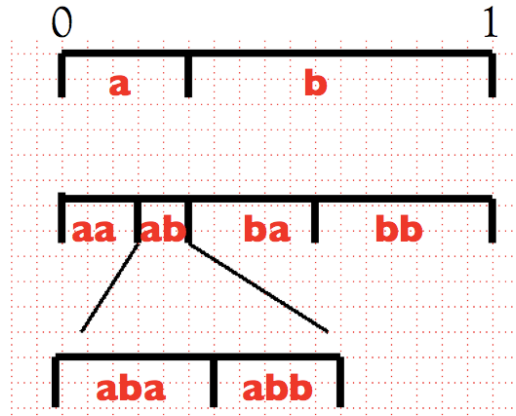


FIG. 1.1 – Paramétrisation d’une source

Ainsi, par exemple, si la source produit les chiffres de l’écriture en binaire d’un réel, $0.1011\bar{0}$ et $0.1010\bar{1}$ auront la même image par P (c’est ce qu’on appelle développement propre et développement impropre). Le chiffre 0 est alors la première lettre de l’alphabet, et 1 la dernière lettre de l’alphabet à deux symboles $\Sigma = \{0, 1\}$.

Presque partout (sauf sur l’ensemble $\{b_w, w \in \mathcal{L}(\mathcal{S})\}$), on peut définir l’application réciproque $M : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{S})$ qui associe à un réel u de l’intervalle \mathcal{I} le mot infini

$$M(u) \in \mathcal{L}(\mathcal{S}).$$

Ainsi, la probabilité qu’un mot Y soit plus petit que $M(u)$ est u . L’ordre lexicographique sur les mots est compatible avec l’ordre naturel sur l’intervalle \mathcal{I} .

L’intervalle $\mathcal{I}_w =]b_w, c_w[$ contient tous les réels u (sauf au plus 2) pour lesquels $M(u)$ commence par le préfixe w . Sa longueur est p_w . On dit que \mathcal{I}_w est l’intervalle fondamental du préfixe w .

1.1.3 Séries de Dirichlet

Dans la suite, on verra l’importance de la taille maximale du préfixe commun à deux mots.

C’est pourquoi, étant donné w un préfixe (fini), il est important de connaître p_w . On encapsule donc ces probabilités dans une série génératrice de Dirichlet, objet central en combinatoire analytique, et qui sera largement étudiée dans la suite :

Définition 1.2 (séries de Dirichlet associées à une source, Vallée).

$$\Lambda_k(s) = \sum_{w \in \Sigma^k} p_w^s \quad \Lambda(s) = \sum_{w \in \Sigma^*} p_w^s.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a l’égalité $\Lambda_k(1) = 1$, et donc $\Lambda(s)$ diverge en $s = 1$, et nous verrons que beaucoup de propriétés probabilistes de la source dépendent de la régularité de Λ pour $\Re(s)$ proche de 1.

1.1.4 Entropie

A une source on peut associer (quand elle existe) une donnée remarquable qui est son entropie :

$$h(\mathcal{S}) := \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-1}{k} \sum_{w \in \Sigma^k} p_w \log p_w. \quad (1.1)$$

L'entropie mesure le caractère imprévisible de la source. Si les symboles de la source sont très corrélés, on pourra d'autant mieux prévoir son comportement.

Ou, avec un autre point de vue, l'entropie représente la « quantité d'information » contenue dans la suite, c'est-à-dire sa « complexité ». Par exemple, pour décrire une suite constante, il suffit de donner la constante égale à chaque terme. Tandis que pour décrire une suite de variables aléatoires indépendantes, il faut donner chaque terme.

L'entropie s'exprime comme la dérivée de la série de Dirichlet Λ_k :

$$h(\mathcal{S}) = - \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{d}{ds} \Lambda_k(s) \Big|_{s=1}. \quad (1.2)$$

1.1.5 Sources sans mémoire

Les sources sans mémoire sont importantes parce qu'elles vont nous montrer le chemin pour l'étude de Λ dans le cas général.

Une source sans mémoire associée à un alphabet Σ est définie par la donnée d'un vecteur $\mathbf{p} = (p_i)_{i \in \Sigma}$, (éventuellement infini), de probabilités fondamentales, telle que la probabilité d'émettre le symbole i vaut à tout instant p_i . C'est-à-dire que pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \Sigma$,

$$\mathbb{P}[X_i = j] = p_j.$$

On a alors :

$$\sum_{i \in \Sigma} p_i = 1.$$

La probabilité d'émettre le mot $i_1, i_2, i_3, \dots, i_k$ vaut alors simplement $p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}$, et on obtient alors la propriété remarquable que pour tous mots finis w et w' ,

$$p_{ww'} = p_w p_{w'}.$$

On notera par des entiers les lettres de l'alphabet Σ , c'est-à-dire :

$$\Sigma = \begin{cases} \{1, 2, 3, \dots, r\} & \text{pour un alphabet fini;} \\ \mathbb{N} & \text{pour un alphabet infini.} \end{cases}$$

Dans la suite, on supposera les branches triées par probabilités décroissantes, c'est-à-dire $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_i$.

Dans ce cas particulier, Λ_k est égal à la somme sur tous les k -uplets $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in \Sigma^k$ des $(p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k})^s$, c'est-à-dire

$$\Lambda_k(s) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in \Sigma^k} (p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k})^s = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in \Sigma^k} p_{i_1}^s p_{i_2}^s \dots p_{i_k}^s,$$

ou encore, en notant

$$\lambda(s) = \sum_{i \in \Sigma} p_i^s, \quad (1.3)$$

on aboutit à $\Lambda_k(s) = \lambda(s)^k$, et on obtient alors l'expression suivante de la série de Dirichlet :

$$\Lambda(s) = \frac{1}{1 - \lambda(s)}, \quad (1.4)$$

qui exprime les propriétés multiplicatives des probabilités.

La fonction λ est appelée *information generating function* dans [27].

Par exemple, avec $\mathbf{p} = \left(\frac{5}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$, on obtient :

$$\lambda(s) = \left(\frac{5}{12}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{4}\right)^s$$

et

$$\Lambda(s) = 1 + \left(\frac{5}{12}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{4}\right)^s + \left(\frac{25}{144}\right)^s + \left(\frac{5}{36}\right)^s + \left(\frac{1}{9}\right)^s + \left(\frac{5}{48}\right)^s + \dots$$

Regardons ce qu'il en est de l'entropie. On obtient facilement l'expression de la dérivée de Λ_k :

$$\Lambda'_k(s) = k\lambda'(s)\lambda(s)^{k-1},$$

et sa valeur en $s = 1$

$$-\frac{1}{k}\Lambda'_k(1) = -\lambda'(1) = -\sum_{i \in \Sigma} p_i \log p_i,$$

montre alors, avec la relation 1.2, l'égalité

$$h(\mathcal{S}) = -\sum_{i \in \Sigma} p_i \log p_i.$$

Dans le cas d'un alphabet fini, une étude de fonction montre que le maximum est atteint en $p = 1/\text{card } \Sigma$, ce qui corrobore bien l'idée que l'entropie mesure l'imprévisibilité. En revanche, quand un des symboles devient beaucoup plus probable que les autres, l'entropie se rapproche de 0, et de fait, on peut prédire presque certainement l'apparition du symbole probable.

Considérons un alphabet à 2 lettres. Notons $p = p_1$ et alors $p_2 = 1 - p$. On a alors :

$$h(\mathcal{S}) = -p \log p - (1 - p) \log(1 - p).$$

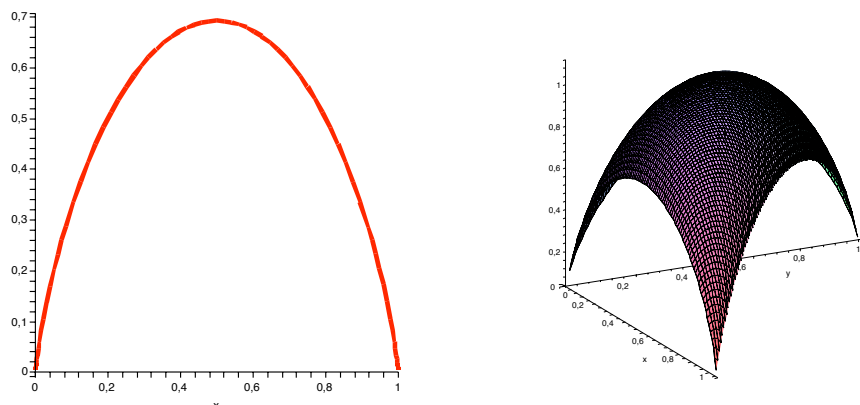
Ici, le maximum est atteint pour $p_1 = p_2 = 1/2$.

On rencontre le même phénomène avec un alphabet à 3 lettres :

$$h(\mathcal{S}) = -p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - p_3 \log p_3,$$

avec la condition $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

On peut montrer que $h(\mathcal{S})$ est maximal pour $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$.



A gauche alphabet à 2 lettres. A droite alphabet à 3 lettres.

FIG. 1.2 – Graphe de l'entropie

1.1.6 Chaînes de Markov

Une chaîne de Markov d'ordre 1 associée à un alphabet fini Σ est définie par la donnée du vecteur R de ses probabilités initiales $(r_i)_{i \in \Sigma}$ et de la matrice de transition $P = (p_{i|j})_{(i,j) \in \Sigma^2}$, tels que pour tout $i \in \Sigma$, $\mathbb{P}(X_0 = i) = r_i$, et pour tout $(i, j) \in \Sigma^2$, la probabilité conditionnelle d'émettre i alors qu'on vient d'émettre j , vaut $p_{i|j}$, c'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X_{k+1} = i | X_k = j) = p_{i|j}.$$

On a bien sûr

$$\forall j \in \Sigma, \quad \sum_{i \in \Sigma} p_{i|j} = 1,$$

c'est-à-dire que P est stochastique (chaque colonne de P a une somme égale à 1).

On notera $P(s)$ la matrice de terme général $p_{i|j}^s$ et par $R(s)$ le vecteur de composantes r_i^s . Alors

$$\Lambda(s) = \mathbf{1} + {}^t \mathbf{1} \cdot (\mathbf{I} - P(s))^{-1} \cdot R(s).$$

Le coefficient (i, j) de la matrice $P^n(s)$, noté simplement $P_{i,j}^n$ représente la probabilité de passer de l'état j à l'état i en exactement n unités de temps.

On dira que la chaîne de Markov est *irréductible* si tous les états communiquent, c'est-à-dire si n'importe quel état peut être atteint à partir de n'importe quel autre, c'est-à-dire si pour tout $i, j \in \{1, \dots, r\}$, $\exists n > 0$ tel que $P_{i,j}^n > 0$.

Un état a est dit récurrent s'il existe $n > 0$ tel que $P_{a,a}^n > 0$ (une chaîne irréductible est une chaîne dont tous les états sont récurrents).

La période d'un état récurrent $a \in \{1, \dots, r\}$ est définie par

$$d_a = \text{pgcd}\{n > 0 : P_{a,a}^n > 0\}.$$

On peut montrer que si la chaîne est irréductible, alors tous les états ont la même période. Si cette période commune vaut 1, alors la chaîne est dite apériodique.

Le théorème de Perron-Frobenius affirme que si la chaîne de Markov est irréductible et apériodique, alors, pour tout réel s , la matrice $P(s)$ a une unique valeur propre dominante $\lambda(s)$. Pour $s = 1$, la matrice $P = P(1)$ a un unique vecteur invariant avec des composantes strictement positives π_i dont la somme vaut 1. L'entropie de la source est égale à

$$h(\mathcal{S}) = -\lambda'(1) = - \sum_{(i,j) \in \Sigma^2} \pi_j p_{i|j} \log p_{i|j}.$$

1.2 Sources dynamiques

Dans cette section, on introduit la classe des sources dynamiques. Les sources dynamiques sont à la fois suffisamment générales (leur étude est suffisante pour les applications pratiques), et suffisamment particulières (l'étude est rendue possible car la série de Dirichlet est reliée au quasi-inverse de l'opérateur de transfert sécant).

1.2.1 Systèmes dynamiques

On dit que les intervalles ouverts \mathcal{I}_m , $m \in \Sigma$, forment une partition topologique d'un intervalle \mathcal{I} , si les \mathcal{I}_m sont disjoints deux à deux, et $\mathcal{I} = \cup_{m \in \Sigma} \overline{\mathcal{I}_m}$.

Voici la définition de système dynamique qu'on utilisera dans la suite :

Définition 1.3. *Un système dynamique de classe \mathcal{C}^k est la donnée d'un couple (\mathcal{I}, T) , où \mathcal{I} est un intervalle compact de \mathbb{R} , et T une application $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$, d'un alphabet Σ , et d'une partition topologique $(\mathcal{I}_m)_{m \in \Sigma}$ de \mathcal{I} , tels que pour tout $m \in \Sigma$, $T|_{\mathcal{I}_m}$ soit une bijection de classe \mathcal{C}^k de \mathcal{I}_m sur $T(\mathcal{I}_m)$.*

L'application T est appelée fonction de shift, ou simplement shift.

Dans la suite, \mathcal{I} désignera toujours l'intervalle $[0, 1]$.

- On dira que le système est complet si chaque restriction est surjective, c'est-à-dire $T(\overline{\mathcal{I}_m}) = \mathcal{I}$.
- On dira que le système est markovien si chaque intervalle $T(\overline{\mathcal{I}_m})$ est une réunion d'intervalles $\overline{\mathcal{I}_j}$.

Dans la suite, tous les systèmes considérés seront supposés complets.

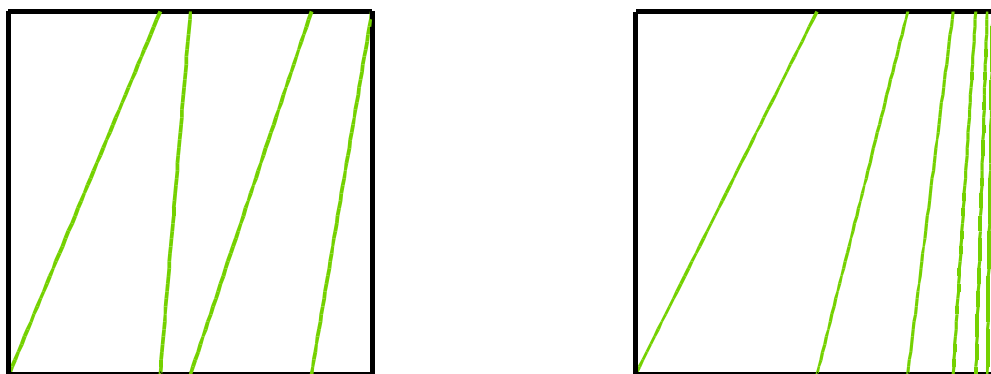
1.2.2 Codage d'un système dynamique

Pour définir une source à partir d'un système dynamique, on lui adjoint une distribution de probabilités sur \mathcal{I} , et une fonction de codage.

La fonction de codage σ est une fonction constante sur chaque \mathcal{I}_m , telle que

$$\forall x \in \mathcal{I}_m, \quad \sigma(x) = m.$$

Ainsi, l'application de codage σ est définie presque partout sur \mathcal{I} . Les images par σ sont appelées indifféremment symboles ou chiffres.



Ces systèmes dynamiques sont associés respectivement à $\mathbf{p} = (5/12, 1/12, 1/3, 1/6)$ et $\mathbf{p} = (1/2^k)_{k \geq 1}$.

FIG. 1.3 – Exemples de systèmes affines

Dans le cas par exemple des systèmes d'Euclide, et du système de développement en binaire (voir figure 1.2.2), la suite des chiffres obtenus a un sens mathématique :

► Le shift d'Euclide est défini par :

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

où on a noté $\lfloor y \rfloor$ la partie entière de y , ie $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq y < n + 1$.

La branche d'équation $x \mapsto \frac{1}{m+x}$ définie sur $] \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}]$ est alors codée par le symbole entier m . Ces entiers sont les quotients successifs dans l'application récursive de l'algorithme d'Euclide, c'est-à-dire les chiffres du développement en fraction continue.

Par exemple, le système dynamique d'Euclide appliqué à $x = \frac{1}{\pi}$ donne les chiffres

$$(3, 7, 15, 1, 293, 10, 3, 8, \dots)$$

qui permettent d'écrire le développement en fraction continue :

$$\frac{1}{\pi} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{293 + \frac{1}{10 + \frac{1}{3 + \frac{1}{8 + \dots}}}}}}}$$

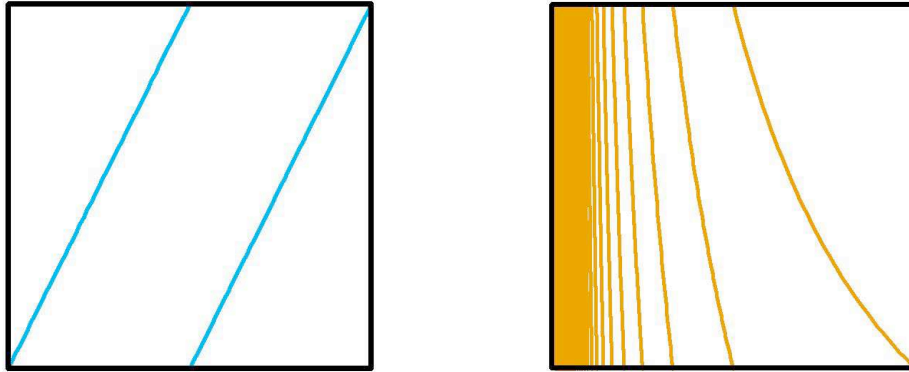
► Pour le développement binaire, à la branche $x \mapsto 2x$ définie sur $[0, 1/2[$, on associe le symbole entier 0. Et à la branche $x \mapsto 2x - 1$, définie sur $[1/2, 1]$ on associe le symbole 1 (sauf en 1, $T(x) = \{x\}$). Ces symboles sont les chiffres du développement en base 2.

Par exemple, le système dynamique de décomposition en base 2 appliqué à $x = \frac{1}{\pi}$ donne les chiffres

$$(0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots)$$

qui permettent d'écrire la décomposition en base 2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{2^{17}} + \frac{1}{2^{18}} + \dots \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \frac{1}{2048} + \frac{1}{4096} + \frac{1}{8192} + \frac{1}{16384} + \frac{1}{131072} + \frac{1}{262144} + \dots \end{aligned}$$



A gauche le développement en binaire : les intervalles codent les chiffres de l'écriture en binaire. A droite le système dynamique d'Euclide : les intervalles codent les quotients successifs par l'algorithme d'Euclide.

FIG. 1.4 – Deux exemples de systèmes dynamiques

Notre point de vue sera un peu différent : on utilisera les sources dynamiques pour produire aléatoirement des mots. Presque bijectivement, à un $x \in \mathcal{I}$ aléatoire choisi selon une densité de probabilité f , à l'intérieur duquel toute l'histoire est déjà écrite (pour un système donné), on associe un mot qu'on découvrira en appliquant le système dynamique. Le i -ème symbole émis ne dépend alors que de x , c'est-à-dire : $X_i = X_i(x)$.

Ce mot est produit de la façon suivante : on associe à x le mot infini

$$M(x) = (\sigma(x), \sigma(Tx), \dots, \sigma(T^k x), \dots) \in \Sigma^\infty,$$

correspondant à sa trajectoire $\mathcal{T}(x) = (x, T(x), T^2(x), \dots)$, c'est-à-dire :

$$X_i(x) = \sigma \circ T^i(x).$$

En fait, $M(x)$ n'est pas défini aux points $x \in \bigcup_{w \in \Sigma^*} \{b_w\}$, ensemble dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables.

La notion de shift pour les mots introduite pour les sources générales est bien la même que celle pour les réels pour un système dynamique, et on commettra l'abus de notation de les noter pareillement par T :

$$T(M(x)) = M(T(x)),$$

ce qui justifie le terme shift aussi employé pour désigner la fonction de transfert : au shift correspond un décalage d'une unité de temps sur les symboles produits par la source.

On introduit également par abus de notation l'application de codage σ qui à un mot $w \in \Sigma^*$ associe son premier symbole, c'est-à-dire que si $w = m_1, m_2, \dots$, alors $\sigma(w) = m_1$, si bien que :

$$\sigma(M(x)) := \sigma(x).$$

1.2.3 Branches inverses

Dans le cadre des systèmes complets où on s'est placé, on peut introduire les bijections réciproques de T et exprimer le lien avec les intervalles fondamentaux.

Soit $m \in \Sigma$. On notera $h_{[m]} :]0, 1[\rightarrow \mathcal{I}_m$ la bijection réciproque de $T|_{\mathcal{I}_m}$. L'application $h_{[m]}$ est appelée branche inverse de profondeur 1 associée au symbole m .

Plus généralement, étant donné $w \in \Sigma^k$, on notera $h_{[w]} :]0, 1[\rightarrow \mathcal{I}_w$ la bijection réciproque de $T|_{\mathcal{I}_w}$. L'application $h_{[w]}$ est appelée branche inverse de profondeur k associée au préfixe w , et elle vérifie

$$h_{[w]} = h_{[m_k]} \circ h_{[m_{k-1}]} \circ \dots \circ h_{[m_1]},$$

où $w = m_1, m_2, \dots, m_k$.

On désignera par \mathcal{H} l'ensemble des branches inverses de profondeur 1, et pour tout $k \geq 1$, par \mathcal{H}^k , l'ensemble des branches inverses de profondeur k . c'est-à-dire des composées de k branches inverses de profondeur 1. Ainsi toute $h \in \mathcal{H}^k$ s'écrit :

$$h = h_1 \circ h_2 \circ \dots \circ h_k,$$

où les h_i sont des branches inverses de profondeur 1. Les éléments de \mathcal{H}^k sont alors exactement les bijections réciproques de T^k .

Enfin, on désignera par

$$\mathcal{H}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{H}^n$$

l'ensemble des branches inverses de profondeur quelconque.

Etant donnés \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 deux sous-ensembles de \mathcal{H}^* , on note

$$\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2 = \{h_1 \circ h_2 : h_1 \in \mathcal{H}_1, h_2 \in \mathcal{H}_2\}.$$

Soit $x \in \mathcal{I}$. En notant m le premier symbole de $M(x)$, on a $h_{[m]} \circ T(x) = x$. L'intervalle $h_{[m]}(\mathcal{I})$ est alors l'intervalle fondamental associé à m , c'est-à-dire

$$\mathcal{I}_m = h_{[m]}(]0, 1[).$$

On a alors $h_{[m]}(T(x)) = x$, et $M(x)$ s'écrit comme la concaténation $M(x) = m, M(T(x))$.

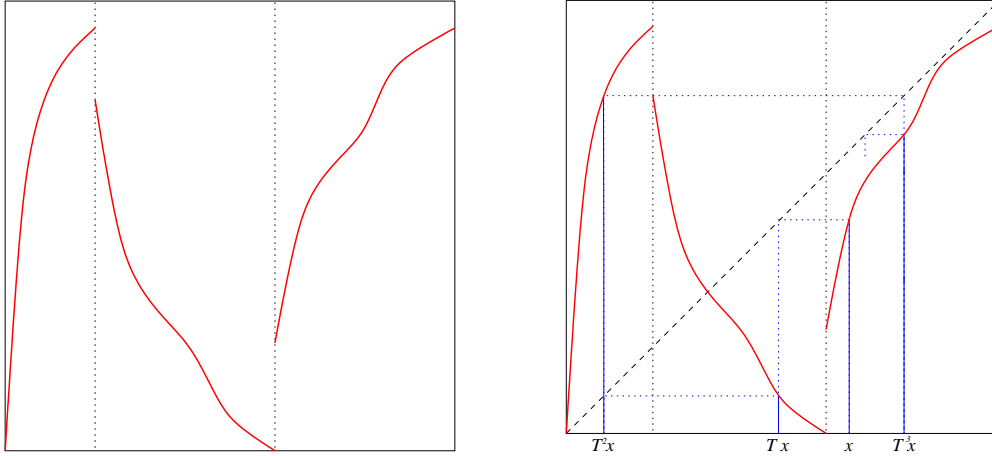
Et plus généralement, en notant w le préfixe de longueur k de $M(x)$, on a $h_{[w]} \circ T^k(x) = x$. L'intervalle $h_{[w]}(\mathcal{I})$ est alors l'intervalle fondamental associé à w , c'est-à-dire

$$\mathcal{I}_w = h_{[w]}(]0, 1[),$$

et

$$\begin{cases} (b_w, c_w) = (h_{[w]}(0), h_{[w]}(1)) & \text{si } h_{[w]} \text{ est croissante;} \\ (b_w, c_w) = (h_{[w]}(1), h_{[w]}(0)) & \text{si } h_{[w]} \text{ est décroissante.} \end{cases}$$

On a alors $h_{[w]}(T^k(x)) = x$, et $M(x)$ s'écrit comme la concaténation $M(x) = w, M(T^k(x))$.



L'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ comporte 3 lettres, et le mot émis est $M(x) = (c, b, a, c, \dots)$

FIG. 1.5 – Mot émis par un système dynamique

La mesure de l'intervalle fondamental $\mathcal{I}_w =]b_w, c_w[$ par rapport à la densité de fonction de distribution F , est égale à la probabilité fondamentale p_w de la source :

$$p_w = F(c_w) - F(b_w).$$

Dans le cas des sources dynamiques, avec les notations de ce qui précède, comme $\mathcal{I}_w = h_{[w]}(]0, 1[)$,

$$p_w = |F(h_{[w]}(1)) - F(h_{[w]}(0))|.$$

Les branches inverses $h_{[w]}$ étant générées dynamiquement, on va pouvoir exprimer les séries de Dirichlet associées à la source Λ_k et Λ en fonction de l'opérateur de transfert sécant, qu'on va introduire.

1.2.4 Quelques cas particuliers de sources dynamiques

Retour sur les sources sans mémoire

Une source sans mémoire correspond à un système dynamique affine sur chaque intervalle $(\mathcal{I}_m)_{m \in \Sigma}$, avec densité initiale uniforme sur \mathcal{I} . Sans perte de généralité, on peut supposer que chaque branche est croissante (plutôt que décroissante). Au contraire, dès que les branches ne sont plus affines, il apparaît des corrélations entre les différents symboles émis.

Dès lors, les dérivées des branches et des branches inverses sont des constantes :

- la dérivée de la fonction de transfert T' est constante sur chaque intervalle fondamental, et pour tout $x \in \mathcal{I}_m$, $T'(x) = 1/p_m$. Plus généralement, sur l'alphabet $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots\}$ éventuellement infini, soit $w = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_r} \in \Sigma^r$. Alors pour tout $x \in \mathcal{I}_w$, $(T^n)'(x) = 1/(p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_r})$;

- pour tout $m \in \Sigma$, la bijection réciproque $h_{[m]}$ est aussi une application affine sur $]0, 1[$ et

$$\text{pour tout } x \in]0, 1[, \quad h'_{[m]}(x) = p_m. \quad (1.5)$$

Avec w comme ci-dessus, $h'_{[w]}(x) = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_r}$.

Il apparaîtra dans la suite que dans le cas sans mémoire, on peut se limiter à étudier les branches inverses de profondeur 1. Dans ces conditions, chaque branche pourra simplement être désignée par son indice (voir par exemple la définition 5.6).

Retour sur les chaînes de Markov

Une chaîne de Markov d'ordre 1 peut être définie par la donnée d'un alphabet $\Sigma = \{a_1, \dots, a_r\}$, et de $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r)$ un ensemble de $r + 1$ systèmes dynamiques affines $\mathcal{S}_j = (\mathcal{I}, T_j)_{1 \leq j \leq r+1}$ tous définis sur le même alphabet Σ , avec σ_j la fonction de codage de \mathcal{S}_j .

Le système dynamique \mathcal{S}_0 est défini pour l'initialisation, et le système \mathcal{S}_j est choisi quand le symbole qui vient d'être immédiatement émis est a_j .

Décrivons plus précisément le mécanisme de la source : on associe à un réel $x \in \mathcal{I}$ choisi sur \mathcal{I} selon une certaine loi initiale, la trajectoire

$$(T^{<1>}(x), T^{<2>}(x), \dots, T^{<k>}(x), \dots),$$

et le mot infini $M(x) \in \Sigma^*$,

$$M(x) = (M_1(x), \dots, M_k(x), \dots),$$

avec $M_1(x) = \sigma_0(x)$, $T^{<1>} := T_0$ et pour tout $k \geq 1$, si $M_k(x) = a_j$, alors

$$\begin{cases} T^{<k+1>}(x) & := T_j(T^{<k>}(x)) \\ M_{k+1}(x) & := \sigma_j(T^{<k>}(x)) \end{cases}.$$

A chaque shift T_j est associée une partition topologique $(\mathcal{I}_{i|j})_{1 \leq i \leq r}$ de l'intervalle de base \mathcal{I} . Notons $(T_{i|j})_{1 \leq i \leq r}$ les branches de T_j , qui sont des bijections de $\mathcal{I}_{i|j}$ dans \mathcal{I} . Les branches inverses sont notées $h_{i|j}$, et elles sont des bijections de \mathcal{I} dans $\mathcal{I}_{i|j}$.

En notant $\Pi_j = (p_{i|j})_{1 \leq i \leq r}$ les systèmes de probabilités relatifs au système affine \mathcal{S}_j , la matrice de transition de la chaîne de Markov associée est

$$\Pi := (p_{i|j}), \quad 1 \leq i, j, \leq r,$$

et le vecteur de probabilités initial est Π_0 .

A la chaîne de Markov, on peut associer un seul système dynamique. Il suffit de prendre $r + 1$ translatés de \mathcal{I} , par exemple $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I} = [0, 1]$ et $\mathcal{I}_j =]j, j + 1[$. En notant Φ_m la translation $\Phi_m(x) := x + m$, on définit, pour tous $1 \leq i \leq r$, et $0 \leq j \leq r$,

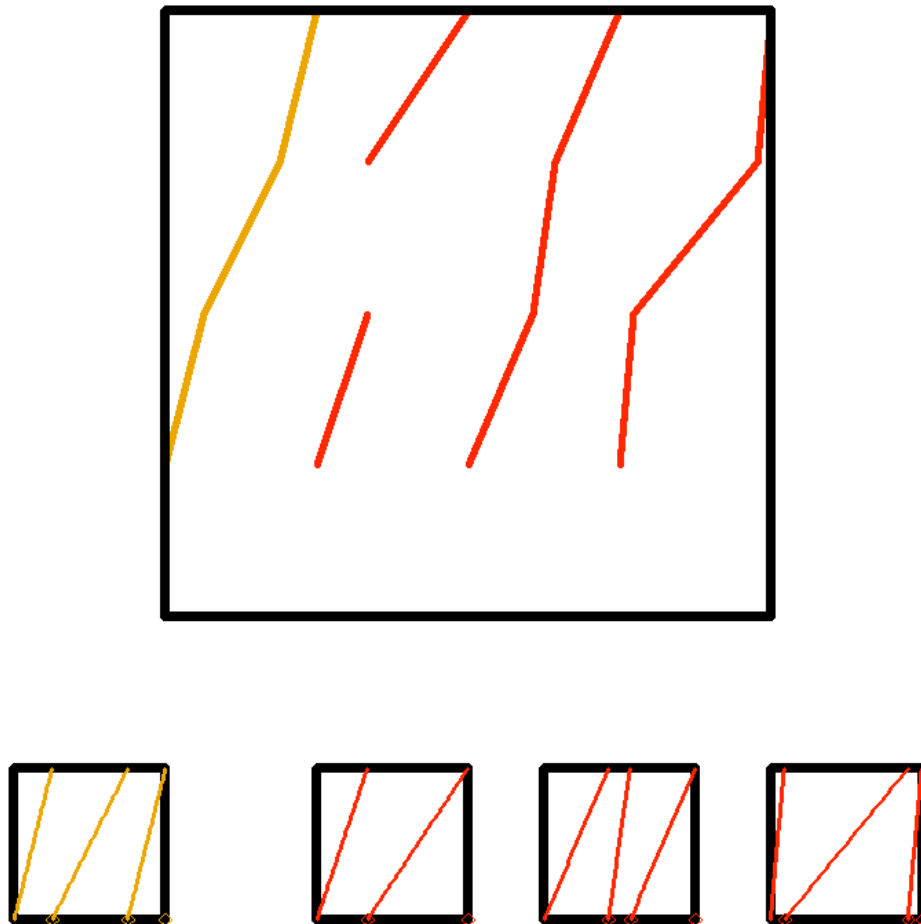
$$\mathcal{I}_{i,j} := \Phi_j(\mathcal{I}_{i|j}), \quad T_{i,j} := \Phi_j \circ T_{i|j} \circ \Phi_j^{-1},$$

de telle sorte que $T_{i,j}$ est une bijection de $\mathcal{I}_{i,j}$ dans \mathcal{I}_i , conjuguée de $T_{i|j}$.

En notant $\tilde{\mathcal{I}} = [0, r + 1]$, et $\tilde{T} = (T_{i,j})_{\substack{0 \leq j \leq r \\ 1 \leq i \leq r}}$, on a donc abouti à un système dynamique markovien $\tilde{\mathcal{S}} = (\tilde{\mathcal{I}}, \tilde{T})$ (avec la partition topologique associée $(\mathcal{I}_{i,j})_{\substack{0 \leq j \leq r \\ 1 \leq i \leq r}}$, l'intervalle $\mathcal{I}_{i,j}$ codant le symbole j), avec la densité uniforme sur \mathcal{I}_0 .

Un exemple de chaîne de Markov avec les différents systèmes dynamiques associés est représenté à la figure 1.6.

Dans la suite, on ne parlera plus de chaînes de Markov, mais on traitera le cas particulier des sources sans mémoire (en plus du cas général).



Sont représentés sur la figure les systèmes $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3)$ et le système $\tilde{\mathcal{S}}$ reconstitué, pour une chaîne de Markov à 3 états (Π est en colonnes)

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1/3 & 3/7 & 1/11 \\ 0 & 1/7 & 9/11 \\ 2/3 & 3/7 & 1/11 \end{pmatrix}, \quad \Pi_0 = (1/4, 1/2, 1/4)$$

FIG. 1.6 – Exemple de chaîne de Markov

1.2.5 Opérateurs de transfert

Dans le cas des sources dynamiques, la série de Dirichlet s'exprime en fonction du quasi-inverse de l'opérateur de transfert. Ceci constitue une généralisation de la formule dans le cas des sources sans mémoire (voir (1.4))

$$\Lambda(s) = \frac{1}{1 - \lambda(s)},$$

qui reflète la multiplicativité des probabilités.

Le transformateur de densité est un opérateur qui transforme une densité de probabilité en une autre densité de probabilité. Etant donnée une distribution f_0 sur \mathcal{I} , on se pose la question de connaître la densité f_1 des $T(x)$ après passage dans le système dynamique.

Lemme 1.4. *Dans le cas des systèmes complets, c'est l'opérateur de Perron-Frobenius qui permet de passer de f_0 à f_1 .*

$$f_1 = \mathbf{H}[f_0] \quad \text{où} \quad \mathbf{H}[f] = \sum_{h \in \mathcal{H}} |h'(x)| f \circ h(x).$$

La preuve, simple, utilise notamment le théorème de Fubini. On calcule la fonction de répartition F_1 associée à la densité f_1 .

Le point $y = T(x)$ appartient à $[0, X]$ si et seulement si il existe $m \in \Sigma$ tel que $x \in [h_{[m]}(0), h_{[m]}(X)]$ (cas où $h_{[m]}$ est croissante) ou $[h_{[m]}(X), h_{[m]}(0)]$ (cas où $h_{[m]}$ est décroissante). La fonction de répartition F_1 s'écrit alors

$$F_1(x) = \int_0^x f_1(t) dt = \sum_{m \in \Sigma} \left| \int_{h_{[m]}(0)}^{h_{[m]}(x)} f_0(t) dt \right|.$$

Le changement de variable $t = h_{[m]}(u)$ sur chaque intervalle donne alors :

$$F_1(x) = \sum_{m \in \Sigma} \left| \int_0^x f_0(h_{[m]}(u)) h'_{[m]}(u) du \right| = \sum_{m \in \Sigma} \int_0^x f_0(h_{[m]}(u)) |h'_{[m]}(u)| du$$

Les fonctions étant positives, on intervertit par le théorème de Fubini, et on dérive par rapport à x . On obtient alors :

$$f_1(x) = F_1'(x) = \sum_{m \in \Sigma} f_0(h_{[m]}(x)) |h'_{[m]}(x)| = \mathbf{H}[f_0](x),$$

ce qui termine la preuve.

Un des outils principaux dans la théorie des systèmes dynamiques est l'opérateur de transfert (tangent) introduit par Ruelle (voir [46] par exemple), qui généralise le transformateur de densité. Pour définir l'opérateur de transfert, il utilise un paramètre complexe, qui introduit une perturbation, et permet d'utiliser les outils de l'analyse complexe :

Définition 1.5 (opérateur de transfert tangent, Ruelle). *Pour toute fonction f continue sur \mathcal{I} , pour tout système dynamique complet (\mathcal{I}, T) d'ensemble de branches inverses \mathcal{H} , et pour tout $s \in \mathbb{C}$ au voisinage de 1, on définit l'opérateur de transfert tangent*

$$\mathbf{H}_s[f](x) = \sum_{h \in \mathcal{H}} |h'(x)|^s f \circ h(x).$$

L'opérateur de transfert coïncide avec le transformateur de densité pour $s = 1$, c'est-à-dire que $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$.

Il existe plusieurs manières de généraliser à deux variables l'opérateur tangent. Pour une généralisation dans un contexte arithmétique, on pourra consulter [54], [62], [13] et [11].

Nous nous intéressons ici à une autre extension, qu'est l'opérateur sécant, introduit par Vallée (voir [56]). Il fait intervenir non plus la dérivée de h , c'est-à-dire la pente de la tangente, mais son taux d'accroissement, c'est-à-dire la pente de la sécante. Il agit sur les fonction à 2 variables. Il permet d'exprimer la série de Dirichlet de la source comme un quasi-inverse.

Définition 1.6 (opérateur sécant, Vallée). *Pour toute fonction \underline{f} continue sur $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$, pour tout système dynamique complet (\mathcal{I}, T) d'ensemble de branches inverses \mathcal{H} , et pour tout $s \in \mathbb{C}$ au voisinage de 1, on définit l'opérateur de transfert sécant*

$$\underline{\mathbf{H}}_s[\underline{f}](x, y) = \sum_{h \in \mathcal{H}} \left| \frac{h(x) - h(y)}{x - y} \right|^s \underline{f}(h(x), h(y))$$

l'expression précédente étant prolongée par continuité quand $x = y$ (c'est-à-dire quand la sécante devient tangente) grâce au lemme qui suit.

Etant donnée \underline{f} fonction à deux variables, on notera $\text{diag } \underline{f}(x) = F(x, x)$. Avec cette notation, on obtient :

Lemme 1.7. *La diagonale de l'opérateur sécant appliqué à une fonction de deux variables continue, coïncide avec l'opérateur tangent appliqué à la diagonale de la fonction, c'est-à-dire :*

$$\forall \underline{u} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{I} \times \mathcal{I}), \quad \text{diag } (\underline{\mathbf{H}}_s[\underline{u}]) = \mathbf{H}_s[\text{diag } (\underline{u})].$$

C'est-à-dire que l'opérateur sécant est une restriction de l'opérateur tangent, qui en est un prolongement « continu » :

$$\underline{\mathbf{H}}_s[\underline{f}](x, x) = \mathbf{H}_s[\text{diag } \underline{f}](x).$$

A l'avenir, on pourra être amenés à écrire seulement le cas générique où $x \neq y$ tout en étant conscient qu'un petit effort d'écriture supplémentaire serait nécessaire pour écrire les choses complètement. On pourra consulter [56] ou [12] pour les bases sur l'opérateur sécant.

Dans la suite, on notera simplement $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$.

Pour des écritures plus légères, on notera ainsi dans la suite la pente de la sécante :

$$s_h(y_1, y_2) = \frac{h(y_1) - h(y_2)}{y_1 - y_2}.$$

On sera amenés aussi à noter \underline{x} pour un couple (x_1, x_2) , et $\underline{h}(\underline{x}) = (h(x_1), h(x_2))$.

Dans toute la suite \mathbf{I} désignera l'opérateur identité sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, $\underline{\mathbf{I}}$ l'opérateur identité sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{I}) \times \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$.

Les opérateurs contraints sont les opérateurs modifiés de telle façon qu'on ne s'autorise à prendre que certaines branches, c'est-à-dire à n'utiliser que certaines lettres de l'alphabet.

Soit $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ et $\underline{\mathcal{J}} \subset \underline{\mathcal{I}}$. On notera dans la suite $\mathbf{1}_{\mathcal{J}}$ et $\underline{\mathbf{1}}_{\underline{\mathcal{J}}}$ les fonctions caractéristiques respectives de \mathcal{J} et $\underline{\mathcal{J}}$, définies par :

$$\mathbf{1}_{\mathcal{J}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{J} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{1}}_{\underline{\mathcal{J}}}(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{x} \in \underline{\mathcal{J}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit \mathcal{H}_0 un sous-ensemble fini de \mathcal{H} . On appellera opérateurs contraints les opérateurs $\mathbf{H}_s[\mathbf{1}_{\mathcal{H}_0(\mathcal{I})} \cdot]$ et $\underline{\mathbf{H}}_s[\underline{\mathbf{1}}_{\underline{\mathcal{H}}_0(\underline{\mathcal{I}})} \cdot]$. Pour tout $h \notin \mathcal{H}_0$, $h(x) \notin \mathcal{H}_0(\mathcal{I})$, et donc, il suffit de faire la somme sur les branches $h \in \mathcal{H}_0$ dans la définition de l'opérateur :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_s[\mathbf{1}_{\mathcal{H}_0(\mathcal{I})} f](x) &= \sum_{h \in \mathcal{H}_0} |h'(x)|^s f \circ h(x) \\ \underline{\mathbf{H}}_s[\underline{\mathbf{1}}_{\underline{\mathcal{H}}_0(\underline{\mathcal{I}})} \underline{f}](x_1, x_2) &= \sum_{h \in \mathcal{H}_0} |s_h(x_1, x_2)|^s \underline{f}(h(x_1), h(x_2)). \end{aligned}$$

Les propriétés multiplicatives de la dérivation et des taux d'accroissements font que l'itération de l'opérateur prend une forme simple.

Soient \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 deux sous-ensembles de \mathcal{H} . Calculons :

$$\begin{aligned} &\underline{\mathbf{H}}_s^2[\mathbf{1}_{\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2(\mathcal{I})} f](\underline{x}) \\ &= \sum_{h \in \mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2} |s_h(\underline{x})|^s \underline{f}(h(\underline{x})) \\ &= \sum_{h_1 \in \mathcal{H}_1} \sum_{h_2 \in \mathcal{H}_2} |s_{h_1 \circ h_2}(\underline{x})|^s \underline{f}(h_1 \circ h_2(\underline{x})) \\ &= \sum_{h_2 \in \mathcal{H}_2} |s_{h_2}(\underline{x})|^s \sum_{h_1 \in \mathcal{H}_1} |s_{h_1}(h_2(\underline{x}))|^s \underline{f}(h_1 \circ h_2(\underline{x})) \\ &= \sum_{h_2 \in \mathcal{H}_2} |s_{h_2}(\underline{x})|^s \underline{\mathbf{H}}_s(\mathcal{H}_1)(h_2(\underline{x})) \\ &= \underline{\mathbf{H}}_s(\mathbf{1}_{\mathcal{H}_2(\mathcal{I})} \cdot) \circ \underline{\mathbf{H}}_s(\mathbf{1}_{\mathcal{H}_1(\mathcal{I})} \cdot)[\underline{f}](\underline{x}). \end{aligned}$$

Ce qui prouve que :

$$\underline{\mathbf{H}}_s[\mathbf{1}_{\mathcal{H}_2(\mathcal{I})} \cdot] \circ \underline{\mathbf{H}}_s(\mathbf{1}_{\mathcal{H}_1(\mathcal{I})} \cdot) = \underline{\mathbf{H}}_s^2(\mathbf{1}_{\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2(\mathcal{I})} \cdot)$$

et de même, on montrerait que

$$\mathbf{H}_s[\mathbf{1}_{\mathcal{H}_2(\mathcal{I})} \cdot] \circ \mathbf{H}_s(\mathbf{1}_{\mathcal{H}_1(\mathcal{I})} \cdot) = \mathbf{H}_s^2(\mathbf{1}_{\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2(\mathcal{I})} \cdot).$$

Et en particulier, avec $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, l'itéré k -ième des opérateurs pleins, font intervenir l'ensemble \mathcal{H}^k de branches inverses :

Lemme 1.8 (composition des opérateurs). *Les itérés des opérateurs sont des sommes prises sur des produits cartésiens de branches inverses. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_s^n[f](x) &= \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |h'(x)|^s f \circ h(x). \\ \underline{\mathbf{H}}_s^n[\underline{f}](x_1, x_2) &= \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |s_h(x_1, x_2)|^s \underline{f}(h(x_1), h(x_2)) \end{aligned}$$

Le lemme suivant fait que l'ensemble \mathcal{B}_{aff} (qu'on introduira dans la suite), prend une forme particulièrement simple, et qu'ainsi il n'intervient pas de condition sur les paramètres pour l'étape 2 dans le cas sans mémoire.

Lemme 1.9. *Dans le cas sans mémoire, les itérés $\mathbf{H}_s^n[1]$, $n \in \mathbb{N}$, sont tous des fonctions constantes. Et plus généralement, $\mathbf{H}_s^n[f]$, où f est constant sur les intervalles fondamentaux de profondeur n , c'est-à-dire constant sur les $\mathcal{H}^n(\mathcal{I})$, est une fonction constante.*

Démonstration. Par définition :

$$\mathbf{H}_s^n[1](x) = \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |h'(x)|^s$$

avec les h' constantes (spécificité du cas affine), donc $\mathbf{H}_s^j[1]$ est une fonction constante.

Pour la version plus précise :

$$\mathbf{H}_s^n[f](x) = \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |h'(x)|^s f \circ h(x),$$

où chaque terme de la somme est constant si f est constant sur les intervalles fondamentaux de profondeur n , car pour tout $h \in \mathcal{H}^n$, les $h(x)$ sont dans le même intervalle fondamental de profondeur n . \square

1.2.6 Expression de la série de Dirichlet

On a défini (définition 1.2) la série de Dirichlet associée à une source. Voici comment elle se relie à l'opérateur de transfert, ce qui justifie l'utilisation des sources dynamiques. La série de Dirichlet, qui contient l'information sur la source, va être étudiée avec la théorie spectrale sur les opérateurs qui la génèrent.

On appelle quasi-inverse de l'opérateur \mathbf{G} , la quantité formelle $(\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$.

Soit F une distribution. C'est-à-dire qu'en notant f la densité associée :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

On note G sa sécante définie par :

$$G(x, y) = \frac{F(x) - F(y)}{x - y} = \frac{1}{y - x} \int_x^y f(t) dt,$$

et prolongée par continuité sur la diagonale

$$G(x, x) = F'(x) = f(x).$$

Proposition 1.10 (Vallée). *Les séries de Dirichlet associées à la source s'expriment comme l'image des puissances de la sécante de la distribution initiale :*

$$\Lambda_k(s) = \sum_{w \in \Sigma^k} p_w^s = \mathbf{H}_s^k[G^s](1, 0).$$

$$\Lambda(s) = \sum_{w \in \Sigma^*} p_w^s = (\mathbf{I} - \mathbf{H}_s)^{-1}[G^s](1, 0).$$

Démonstration. On a vu que $p_w = |F(h_w(1)) - F(h_w(0))|$. Il s'agit de faire apparaître la sécante G de la distribution F et le taux d'accroissement de h . Ceci se fait tout naturellement en écrivant :

$$F(h_{[w]}(1)) - F(h_{[w]}(0)) = \frac{h_{[w]}(1) - h_{[w]}(0)}{1 - 0} \cdot \frac{F(h_{[w]}(1)) - F(h_{[w]}(0))}{h_{[w]}(1) - h_{[w]}(0)}.$$

Et donc :

$$\Lambda_k(s) = \sum_{w \in \Sigma^k} p_w^s = \sum_{h \in \mathcal{H}^k} \left| \frac{h_{[w]}(1) - h_{[w]}(0)}{1 - 0} \right|^s \cdot \left| \frac{F(h_{[w]}(1)) - F(h_{[w]}(0))}{h_{[w]}(1) - h_{[w]}(0)} \right|^s = \underline{\mathbf{H}}^k[G^s](0, 1),$$

où on a utilisé le lemme 1.8 pour reconnaître $\underline{\mathbf{H}}^k$. □

Dans le cas des systèmes sans mémoire, avec éventuellement alphabet infini, les opérateurs transforment des fonctions constantes en des fonctions constantes (voir lemme 1.9), et on peut étudier $\Lambda(s)$ directement.

Pour tout $x \in \mathcal{I}$, et pour tout $s = \sigma + it$, avec $\sigma > \sigma_0$,

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_s)^{-1}[\mathbf{1}](x) &= \sum_{h \in \mathcal{H}^*} |h'(x)|^s \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}} (p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k})^s \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(s)^k \\ &= \Lambda(s), \end{aligned}$$

donc l'étude de l'opérateur tangent suffit. Dit autrement $\lambda(s)$ est valeur propre de \mathbf{H}_s pour la fonction propre $\mathbf{1}$ et $\Lambda(s)$ est valeur propre de $(\mathbf{I} - \mathbf{H}_s)^{-1}$ pour la fonction propre $\mathbf{1}$.

On retrouve bien

$$\Lambda(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{H}_s)^{-1}[\mathbf{1}] = \frac{1}{1 - \lambda(s)},$$

avec $\lambda(s) = \mathbf{H}_s[\mathbf{1}]$.

Pour faire le lien avec la suite, on peut aussi établir que pour ξ de module 1 et $|s| > 1$

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \xi \mathbf{H}_s)^{-1}[\mathbf{1}](x) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \xi^k \sum_{h \in \mathcal{H}^k} |h'(x)|^s \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \xi^k \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}} (p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k})^s \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} (\xi \lambda(s))^k \\ &= \frac{1}{1 - \xi \lambda(s)}. \end{aligned}$$

Ceci justifie les définitions de $\mathcal{R}_{\text{aff}}(t, \xi)$ et $\mathcal{F}_{\text{aff}}(t, \xi)$ qu'on prendra dans la suite.

Quand on tente de particulariser aux systèmes sans mémoire l'étude générale des pôles du quasi-inverse qui va suivre, on s'aperçoit que les opérateurs mis en œuvre transforment des fonctions constantes en des fonctions constantes. Vu que pour tout $x \in \mathcal{I}$, $\Lambda(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{H}_s)^{-1}[\mathbf{1}](x)$ (on part d'une fonction constante), on peut donc raisonner directement sur les constantes des fonctions (les constantes dépendant de s), c'est-à-dire travailler directement sur $\Lambda(s)$.

En résumé, on retiendra la particularité essentielle suivante des systèmes sans mémoire.

Intuition 1.11. *Les opérateurs tangents et sécants coïncident et sont triviaux dans le cas des systèmes sans mémoire. On peut dans ce cas raisonner directement sur Λ , sans utiliser d'opérateurs.*

Dans la littérature, on parle surtout de l'opérateur tangent. Il faudra pourtant généraliser des résultats existants à l'opérateur sécant afin d'avoir des conclusions utiles sur Λ .

1.2.7 Bonne Classe

Les propriétés de **Bonne Classe**, assez naturelles en pratique, servent constamment dans les preuves à venir.

Définition 1.12 (Bonne Classe). *On dit que le système dynamique (\mathcal{I}, T) complet appartient à la Bonne Classe si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) *il existe $\hat{\rho} < 1$ tel que pour tout $h \in \mathcal{H}^n$ et pour tout $x \in \mathcal{I}$, $|h'(x)| \ll \hat{\rho}^n$, indépendamment de h et x . On pose alors*

$$\rho := \limsup_{n \rightarrow \infty} (\max\{|h'(x)|; h \in \mathcal{H}^n, x \in \mathcal{I}\})^{1/n}$$

Ce coefficient $0 < \rho < 1$ est appelé coefficient de contraction du système dynamique de Bonne Classe ;

(ii) *$\exists \hat{K} > 0$ appelée constante de distorsion du système dynamique de Bonne Classe, tel $\forall h \in \mathcal{H}, \forall x \in \mathcal{I} :$*

$$|h''(x)| \leq \hat{K}|h'(x)|;$$

(iii) *$\exists \sigma_1 < 1$ tel que la série $\sum_{h \in \mathcal{H}} \sup |h'|^{\sigma_1}$ converge, et on pose*

$$\sigma_0 := \inf \left\{ \sigma_1 : \forall \sigma > \sigma_1, \sum_{h \in \mathcal{H}} \sup |h'|^\sigma < \infty \right\}.$$

Ce coefficient est appelé abscisse de convergence du système dynamique de Bonne Classe.

On en déduit immédiatement que $\mathbf{H}_{\sigma+it}$ agit sur l'espace des fonctions bornées sur \mathcal{I} , pour $\sigma > \sigma_0$. En effet, pour tout g borné sur \mathcal{I}

$$\|\mathbf{H}_{\sigma+it}(g)\|_\infty \leq \left(\sum_{h \in \mathcal{H}} |h'|^\sigma \right) \|g\|_\infty \ll \|g\|_\infty.$$

Par exemple, avec l'algorithme d'Euclide classique, les branches inverses sont indexées par \mathbb{N}^* , et on a $\forall m \in \mathbb{N}^* :$

$$h(x) = \frac{1}{m+x} \quad , \quad |h'(x)| = \frac{1}{(m+x)^2} \quad \text{et} \quad \sup |h'| = \frac{1}{m^2}$$

donc $\sigma_0 = 1/2$.

Remarquons que les propriétés (ii) et (iii) sont toujours vérifiées dans le cas des sources avec un nombre fini de branches, et donc $\sigma_0 = -\infty$ dans la propriété (iii).

Dans le cas des systèmes affines (non triviaux), les propriétés (i) et (ii) sont toujours vérifiées. Plus précisément, le coefficient de contraction est égal à $p_1 < 1$ (en supposant les probabilités rangées par ordre décroissant $p_1 \geq p_2 \geq \dots$), et la constante de distorsion est nulle (car les h'' sont nuls). Quant à la propriété (iii), elle est équivalente à l'existence de $\sigma < 1$ tel que

$\sum_{i \in \mathcal{H}} p_i^\sigma < \infty$, c'est-à-dire que la série de Dirichlet $s \mapsto \sum_{i \in \mathcal{H}} p_i^s$ est d'abscisse de convergence strictement inférieure à 1. Par exemple, le système affine défini par le vecteur $\mathbf{p} = \left(\frac{1}{An \log^2 n} \right)_{n \geq 1}$, où $A = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \log^2 n}$, n'est pas de bonne classe, car pour tout $\sigma < 1$, la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\sigma \log^{2\sigma} n}$ diverge.

Nous allons maintenant donner des conséquences de la définition, qui seront utiles dans toute la suite, quand on aura à calculer des ordres de grandeur.

Dans toute la suite de la thèse, on notera $\hat{\rho}$ un réel tel que $\rho < \hat{\rho} < 1$. Travailler avec un tel réel, plutôt que directement avec ρ , est rendu nécessaire à cause de la définition de ρ comme une lim sup.

Lemme 1.13. *Soit (\mathcal{I}, T) un système dynamique de Bonne Classe.*

Conséquences de la propriété de contraction :

(i) *il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute branche inverse $h \in \mathcal{H}^n$, $|h'(x)| \leq C\hat{\rho}^n$, et donc*

$$\forall \hat{\rho} > \rho, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall h \in \mathcal{H}^n, |h'(x)| \ll \hat{\rho}^n,$$

c'est-à-dire que les branches inverses n'ont pas une pente trop forte ;

(ii) *T est uniformément expansive, c'est-à-dire que les branches du système dynamique ne sont pas trop horizontales :*

$$\forall \hat{\rho} > \rho, \forall n \in \mathbb{N}^*, |(T^n)'(x)| \gg \hat{\rho}^{-n};$$

(iii) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $h \in \mathcal{H}^n$. L'intervalle fondamental de profondeur n , $h(\mathcal{I})$ a une mesure de Lebesgue qui décroît exponentiellement :*

$$|h(\mathcal{I})| \ll \hat{\rho}^n;$$

(iv) *soit $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$. Si x_1 et x_2 appartiennent au même intervalle fondamental de profondeur n , c'est-à-dire s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $h \in \mathcal{H}^n$ et $y_1, y_2 \in \mathcal{I}$ tels que*

$$\begin{cases} x_1 = h(y_1) \\ x_2 = h(y_2) \end{cases},$$

alors, $|x_1 - x_2| \ll \hat{\rho}^n$ où la constante de majoration ne dépend que du système dynamique considéré.

Conséquences de la propriété de distorsion : *Il existe $L > 0$ tel que*

(v) *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $h \in \mathcal{H}^n$, on a*

$$\frac{1}{L} \leq \frac{\sup |h'|}{\inf |h'|} \leq L;$$

(vi) *les dérivées des branches en 2 points, sont du même ordre de grandeur :*

$$\frac{1}{L} \leq \frac{|(T^n)'(x)|}{|(T^n)'(y)|} \leq L;$$

(vii) *en désignant par $|\cdot|$ la mesure de Lebesgue, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$1 \ll \frac{1}{L} \leq \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |h'(x)| \leq L \ll 1;$$

(viii) La sécante s_h est du même ordre de grandeur que h' :

$$\|h'\|_\infty \ll \|s_h\|_\infty \ll \|h'\|_\infty.$$

Démonstration. (i) D'après la définition de la lim sup, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand, et pour tout $h \in \mathcal{H}^n$

$$|h'|^{1/n} \leq \widehat{\rho}, \quad \text{et donc} \quad |h'| \leq \widehat{\rho}^n.$$

La majoration suivante est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ pourvu qu'on multiplie le majorant par une constante qui tient compte du nombre fini de n petits :

$$|h'|^{1/n} \leq C\widehat{\rho}^n.$$

(iii) Il suffit d'écrire que $|h(\mathcal{I})| = |h(1) - h(0)| = \left| \int_0^1 h'(t) dt \right|$.

(iv) Les points x_1 et x_2 sont tous les deux dans $h(\mathcal{I})$ dont on contrôle la longueur par (vi).

(v) Le (ii) de la définition entraîne qu'il existe $K > 0$ tel que pour $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall h \in \mathcal{H}^n$, pour tout $x \in \mathcal{I}$:

$$|h''(x)| \leq K|h'(x)|.$$

En posant $L = e^K$, pour tous $x, y \in \mathcal{I}$,

$$\frac{1}{L} \leq \frac{|h'(x)|}{|h'(y)|} \leq L.$$

(vii) Il suffit d'écrire :

$$|h'(x)| \leq L \inf |h'| \leq L|h(1) - h(0)| = L|h(\mathcal{I})|$$

et de sommer sur $h \in \mathcal{H}^n$. L'autre inégalité se démontre de la même façon.

(viii) Utiliser l'égalité des accroissements finis. Pour tout $\underline{x} \in \underline{\mathcal{I}}$ avec $x_1 < x_2$, il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $s_h(\underline{x}) = h'(c)$.

(ii) et (vi) Les conséquences sur T sont basées sur la dérivation d'une fonction composée et le fait que $T^n \circ h = \text{Id}$.

□

Bien sûr, les propriétés de la **Bonne Classe** n'impliquent pas que pour tout $h \in \mathcal{H}^*$, pour tout $x \in \mathcal{I}$, $|h'(x)| \leq 1$ (ou de façon duale, on n'a pas pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathcal{I}$, $|T'(x)| \geq 1$). Cependant, en un certain sens, le meilleur des cas est atteint en les points fixes des branches (définition 5.1), comme l'explique le lemme 5.4 à venir.

Dans toute la suite, tous les systèmes dynamiques considérés sont supposés appartenir à la Bonne Classe.

Chapitre 2

Arbres Binaires de Recherche et Tries : analyse des coûts

Sommaire

2.1 Structures étudiées	58
2.1.1 Algorithme QuickSort et ABR	58
2.1.2 Trie	59
2.1.3 Paramètres sur les arbres	61
2.2 Modèle probabiliste	66
2.2.1 Comparaisons entre symboles	66
2.2.2 Modèle de Bernoulli	67
2.2.3 Modèle de Poisson	67
2.2.4 Dépoissonisation	69
2.3 Etude exacte des coûts	71
2.3.1 Sur l'ABR	71
2.3.2 Sur le Trie	75
2.3.3 Schéma général	76
2.4 Analyse asymptotique des coûts	77
2.4.1 Passage dans le plan complexe	78
2.4.2 Discipline des sources	79
2.4.3 Conclusions pour l'étude des coûts	80

Classiquement, en informatique, on cherche à construire des arbres à partir d'une séquence \mathcal{X} de n mots distincts X_1, X_2, \dots, X_n issus d'un même ensemble ordonné Ω , ou encore à les trier (dans ce contexte, les mots sont appelés clés). A cette fin, on procède à des comparaisons et des échanges entre les clés, et le coût usuellement utilisé est le nombre de comparaisons entre clés. C'est-à-dire que la configuration de l'arbre ou le comportement de l'algorithme de tri, ne dépendent que de l'ordre relatif entre les clés. Il est alors suffisant de se restreindre au cas où $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$.

Dans ce cadre, les analyses des arbres et des algorithmes sont bien connues, que ce soit dans le pire cas, ou dans le cas moyen.

Mais les mots sont en fait formés de symboles (du même alphabet), et on s'intéresse ici à un coût plus réaliste : le nombre de comparaisons entre symboles opérées pour construire les arbres ou par les algorithmes. Il est alors nécessaire d'explicitier comment sont construites les clés. On

a vu dans le chapitre précédent ce qu'était une source : on supposera dorénavant que les clés sont des mots produits par une même source, et sont ordonnées par ordre lexicographique. Le coût pour comparer deux clés vaut alors la longueur du plus long préfixe entre les clés, à laquelle on ajoute 1.

Précisément, on va étudier :

- ▶ le nombre moyen de comparaisons B effectuées lors de l'exécution de l'algorithme `QuickSort`, qui coïncide avec la longueur de cheminement en symboles dans l'ABR associé ;
- ▶ la taille moyenne R d'un `Trie` ;
- ▶ la longueur moyenne de cheminement C dans un `Trie`.

Notre étude permet de préciser l'asymptotique de ces valeurs moyennes, en donnant un terme de reste précis.

Dans une première section d'algorithmique, on introduit deux structures de données essentielles pour contenir des mots d'une source : les `Tries` et les `ABR`. Après avoir introduit des modèles probabilistes adéquats dans une deuxième section, on conduira l'étude de quelques paramètres essentiels de ces arbres construits, ainsi que du nombre de comparaisons en symboles de l'algorithme `QuickSort` dans une troisième section. On aura alors obtenu des formules combinatoires exactes pour les étudier : des sommes alternées faisant intervenir les probabilités fondamentales. Un asymptotique sera tiré à la quatrième section, dédiée à l'analyse.

2.1 Structures étudiées

2.1.1 Algorithme `QuickSort` et ABR

L'algorithme `QuickSort` est un algorithme de tri récursif bien connu, rappelé sur la figure 2.1. Il consiste à chaque étape à partager les clés à trier selon qu'elle sont plus petites ou plus grandes qu'un pivot choisi aléatoirement.

Avec l'ABR, on revisite une structure bien connue. Un arbre binaire de recherche (ABR) est un arbre binaire dans lequel chaque nœud est étiqueté par une clé, et tel que chaque nœud du sous-arbre gauche ait une clé inférieure à celle du nœud considéré, et chaque nœud du sous-arbre droit ait une clé supérieure à celle-ci. Un exemple d'ABR est donné à la figure 2.2.

Un ABR sépare les clés par dichotomie. Contrairement au `Trie` qu'on étudiera à la sous-section suivante, l'ordre d'insertion des éléments dans un ABR a une influence sur l'ABR construit. Chaque nœud interne d'un ABR est indexé par une clé.

Si $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est un ensemble de mots (infinis) produits par Σ , alors l'ABR associé à \mathcal{X} est défini récursivement par cette règle :

Définition 2.1 (construction d'un ABR sur un suite de mots).

- Si \mathcal{X} est vide, alors $\text{ABR}(\mathcal{X})$ est l'arbre vide.
- Si \mathcal{X} ne contient qu'un élément X_1 , alors $\text{ABR}(\mathcal{X})$ est une feuille étiquetée X_1 .
- Sinon $\text{ABR}(\mathcal{X})$ est formé d'un nœud interne contenant le premier élément X_1 de \mathcal{X} , auquel

```

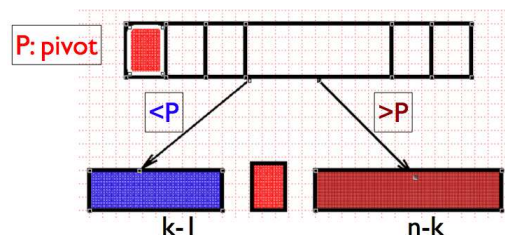
QuickSort( $n, B$ )
Entrée :  $B$  non trié
Sortie :  $B$  trié

Début

Si  $n > 1$  alors
   $p :=$  pivot aléatoire dans  $B$ 
   $(k, B_-, B_+) :=$  Partition( $B, p$ )
  QuickSort( $k - 1, B_-$ )
  QuickSort( $n - k, B_+$ )
FinSi

Fin

```



L'algorithme $\text{Partition}(B, p)$ qu'on ne rappelle pas ici, et dont il existe plusieurs variantes, modifie son argument B de telle sorte que toutes les clés inférieures à p soient situées avant p et toutes les clés supérieures à p soient situées après p .

FIG. 2.1 – L'algorithme QuickSort

sont rattachés les sous-arbres $\text{ABR}(\mathcal{X}^-)$ et $\text{ABR}(\mathcal{X}^+)$, où

$$\begin{cases} \mathcal{X}^- = (X_j : j \geq 2 \text{ et } X_j < X_1) \\ \mathcal{X}^+ = (X_j : j \geq 2 \text{ et } X_j > X_1) \end{cases},$$

où l'ordre sur les mots est l'ordre lexicographique.

L'algorithme QuickSort est équivalent à la construction de l'ABR sur les mots à trier, les pivots successifs étant les nœuds internes de l'arbre construit.

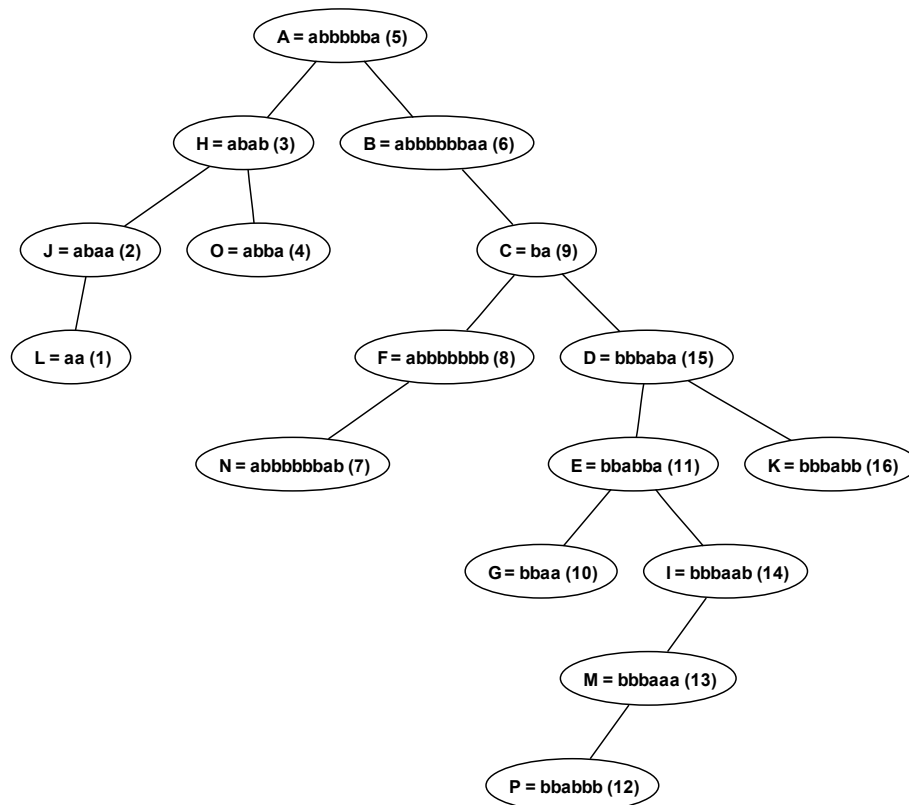
2.1.2 Trie

Un **Trie** est une structure d'arbre qui est utilisée comme dictionnaire pour de nombreuses applications, comme les tâches de traitement du texte, et la compression. C'est pourquoi la structure de **Trie** est une structure de données majeure en informatique. Voir [28] ou [48] par exemple, pour une étude algorithmique de cette structure.

Un **Trie** compare les mots via leurs préfixes : il sépare les mots suivant les symboles successifs rencontrés. Chaque nœud interne d'un **Trie** est indexé par un préfixe. Si \mathcal{X} est un ensemble de mots (infinis) produits par Σ , alors le **Trie** associé à \mathcal{X} est défini récursivement par cette règle :

Définition 2.2 (construction d'un **Trie** sur un ensemble de mots).

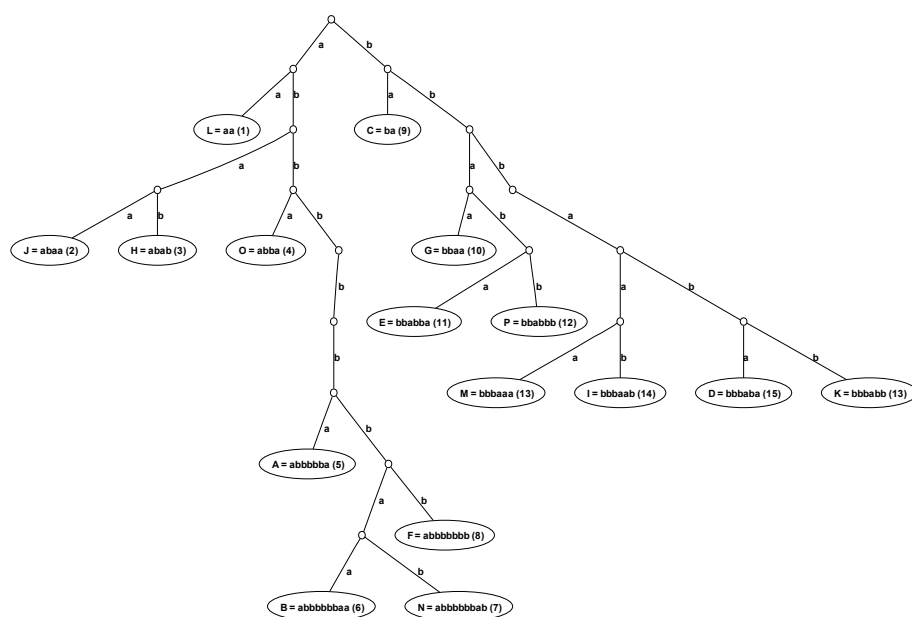
- Si \mathcal{X} est vide, alors $\text{Trie}(\mathcal{X})$ est l'arbre vide.
- Si \mathcal{X} ne contient qu'un élément X , alors $\text{Trie}(\mathcal{X})$ est une feuille étiquetée X .
- Sinon $\text{Trie}(\mathcal{X})$ est formé d'un nœud interne auquel sont rattachés les sous-arbres $\text{Trie}(\mathcal{X} \setminus a_1), \text{Trie}(\mathcal{X} \setminus a_2), \dots, \text{Trie}(\mathcal{X} \setminus a_r)$, où $\mathcal{X} \setminus a$ désigne le sous-ensemble des mots de \mathcal{X} commençant par a et privés de leur symbole initial ($a!$).



Cet ABR est construit sur un ensemble aléatoire de 16 mots produits par une source sans mémoire $p = (1/3, 2/3)$

A = abbbbaaabab	B = abbbbaaabaa	C = baabbabbbba
D = bbbababbbaab	E = bbabbaababb	F = abbbbbbabb
G = bbaabbabbaba	H = ababbabbab	I = bbbaabbbbb
J = abaabbbbaabb	K = bbbabbbbaa	L = aaaabbabaaba
M = bbbaabbbbb	N = abbbbbbbaa	O = abbababbbb
P = bbabbb		

FIG. 2.2 – Exemple d'ABR sur un ensemble de mots



Ce Trie est construit sur un ensemble aléatoire de 16 mots produits par une source sans mémoire $\mathbf{p} = (1/3, 2/3)$

A = abbbbaa**ab** B = abbbbbb**aa**baa C = baabbbabbbba
 D = bbbababbb**aa**b E = bbabbaababbb F = abbbbbb**bb**abb
 G = bbaabbabb**aba** H = ababbbabbb**ab** I = bbbaabbbbbb
 J = abaabbbba**abb** K = bbbabbbbbb**aa** L = aaaabbaba**aba**
 M = bbbaaaabbbbbb N = abbbbbb**bb**abbaa O = abbabababbb

(mêmes mots que ceux de la figure 2.2). Les préfixes soulignés sont ceux utilisés pour construire le Trie.

FIG. 2.3 – Exemple de Trie sur un ensemble de mots

Autrement dit, $\mathcal{X} \setminus a_i$ est l'ensemble des shiftés par l'application de décalage T sur les mots (introduite au début du chapitre 1), des mots commençant par le symbole a_i .

C'est-à-dire que par niveau de profondeur, on rajoute une nouvelle lettre à l'arbre et enlève une nouvelle lettre au mot, et qu'on met suffisamment de branches pour pouvoir discerner tous les mots.

Pour $|\mathcal{X}| = n$, $\text{Trie}(\mathcal{X})$ possède exactement n branches.

2.1.3 Paramètres sur les arbres

Voici maintenant les définitions du vocabulaire employé sur les arbres qui sera utilisé dans la suite :

- ▶ la *profondeur d'une branche* est le nombre de nœuds (internes) qu'elle contient ;
- ▶ la *profondeur d'un nœud* est le nombre d'arêtes qui le connectent à la racine (par exemple la racine est de profondeur 0) ;
- ▶ la *hauteur* est la profondeur maximale prise sur l'ensemble des feuilles. Dans le cas des **Tries**, la hauteur est une mesure de la distance entre les deux éléments de \mathcal{X} les plus proches : elle est égale au nombre minimum de comparaisons à effectuer pour être sûr de pouvoir séparer deux éléments (X_i, X_j) de \mathcal{X} quelconques ;

probabilités	entropie	Trie	nombre de sommets internes
toutes égales $1/r$	maximum $(\ln r)$	parfaitement équilibré	peu
dissemblables	plus petite	déséquilibré	plus
une beaucoup plus grande que les autres	très petite	très déséquilibré	beaucoup

Etant donné un vecteur $\mathbf{p} = (p_i)$, on regarde la forme d'un **Trie** construit à partir de mots issus de la source sans mémoire de vecteur \mathbf{p} .

FIG. 2.4 – Influence qualitative de l'entropie sur la forme des **Tries**

- la *longueur de cheminement externe* est la somme des hauteurs des feuilles, c'est-à-dire la somme des profondeurs de toutes les branches. Dans le cas des **Tries**, cette longueur de cheminement s'interprète comme le nombre total de symboles qu'il suffit d'examiner pour pouvoir distinguer tous les éléments de \mathcal{X} . En divisant par le cardinal de \mathcal{X} , on obtient le coût d'une recherche positive (c'est-à-dire recherche d'un mot effectivement présent dans le **Trie**).

Afin de disposer d'une unité de mesure commune, on étudie dans cette thèse la longueur de cheminement en symboles pour les **ABR**, c'est-à-dire des sommes pondérées de hauteurs de branches ;

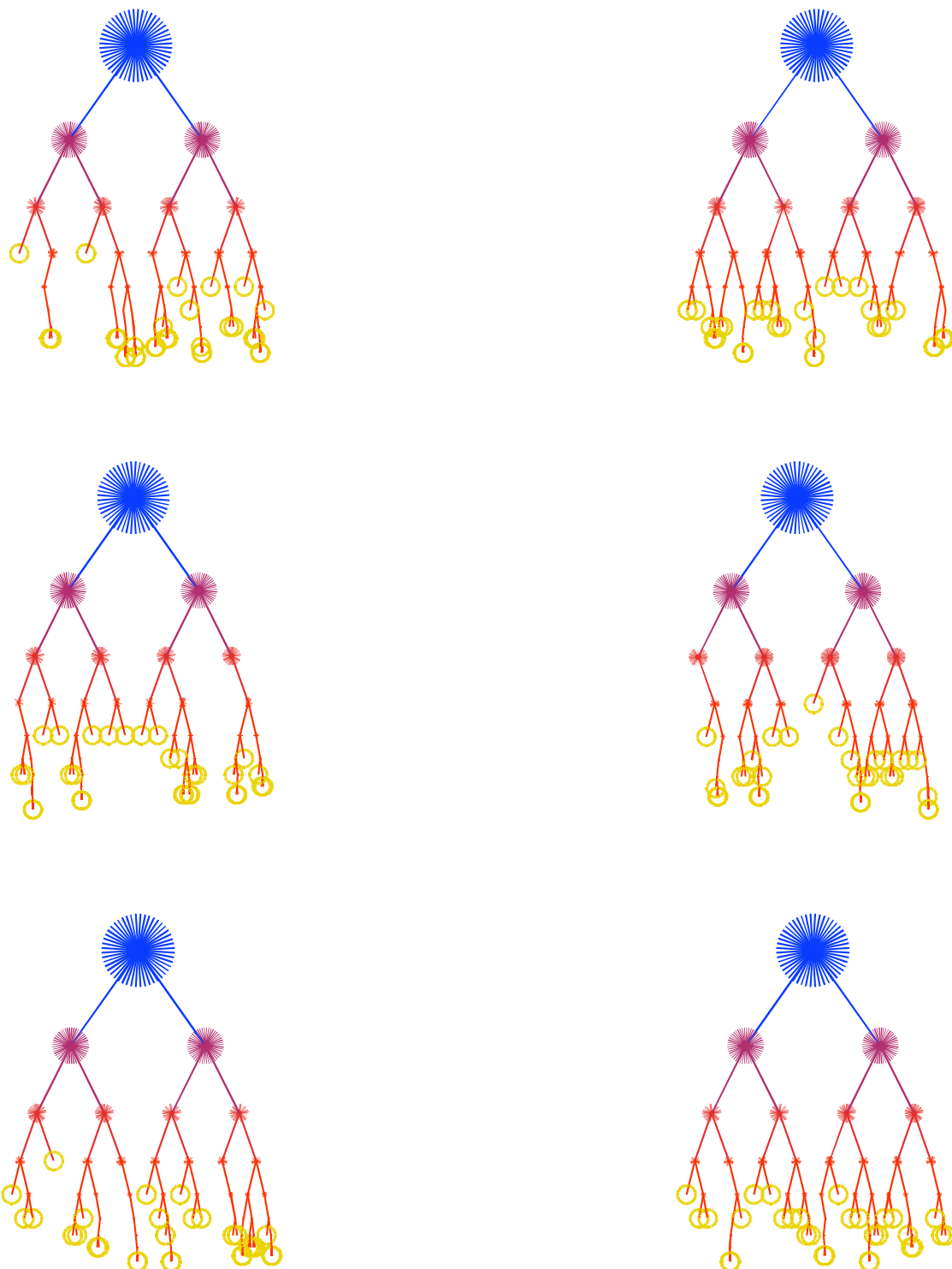
- la *taille* est le nombre de nœuds internes. Dans le cas du **Trie**, quand on lui ajoute le cardinal de \mathcal{X} , on obtient le nombre de préfixes nécessaires pour séparer tous les éléments de \mathcal{X} . La taille donne aussi une estimation précise de la place nécessaire en mémoire pour stocker le **Trie**.

Dans la suite, on étudiera ces deux paramètres : taille et longueur de cheminement.

Le nombre de comparaisons de symboles réalisées par **QuickSort** est égal à la longueur de cheminement en symboles dans l'**ABR** des pivots successifs. Ceci est différent de l'analyse « classique » qui consiste à étudier la longueur de cheminement « classique ».

En fait, la longueur de cheminement dans le **Trie** dépend de l'implémentation choisie. En effet, en général, cette longueur de cheminement est la somme de deux composantes : une liée à la structure de **Trie** ; et l'autre est un coût supplémentaire dû à la traversée des nœuds internes. On se limitera à étudier la structure de **Trie-tableau**, pour lequel la bifurcation à un nœud interne se fait en temps constant (pas de coût supplémentaire dû à la traversée des nœuds internes).

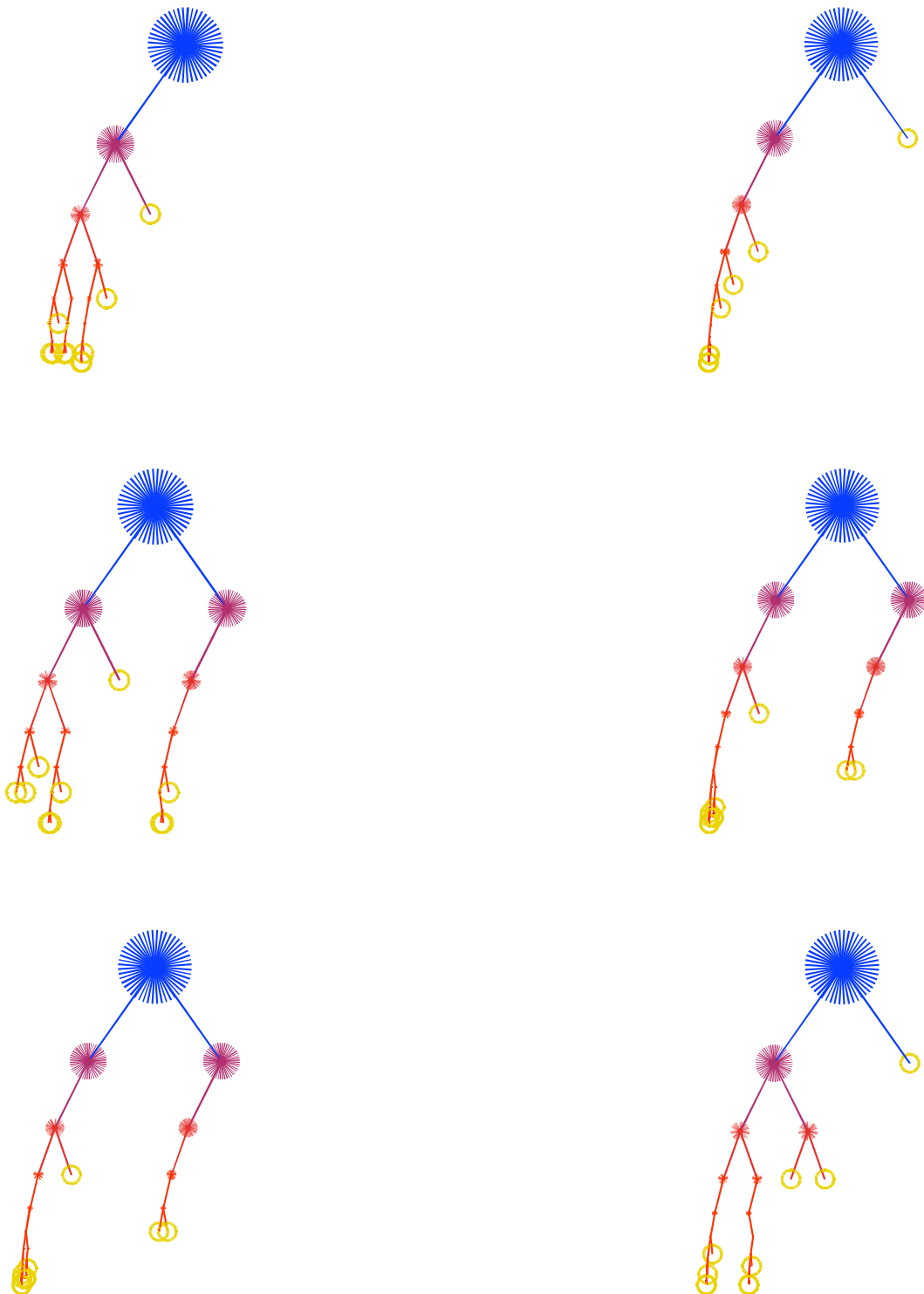
La figure 2.4 discute de l'influence de l'entropie sur la forme des **Tries**. Quant aux figures expérimentales 2.5, 2.6 et 2.7, elles représentent des **Tries** sur des mots tirés aléatoirement.



Dans chaque arbre sont rangés 30 mots aléatoires.

On compte sur les différents arbres 49, 44, 44, 40, 44 et 41 nœuds internes.

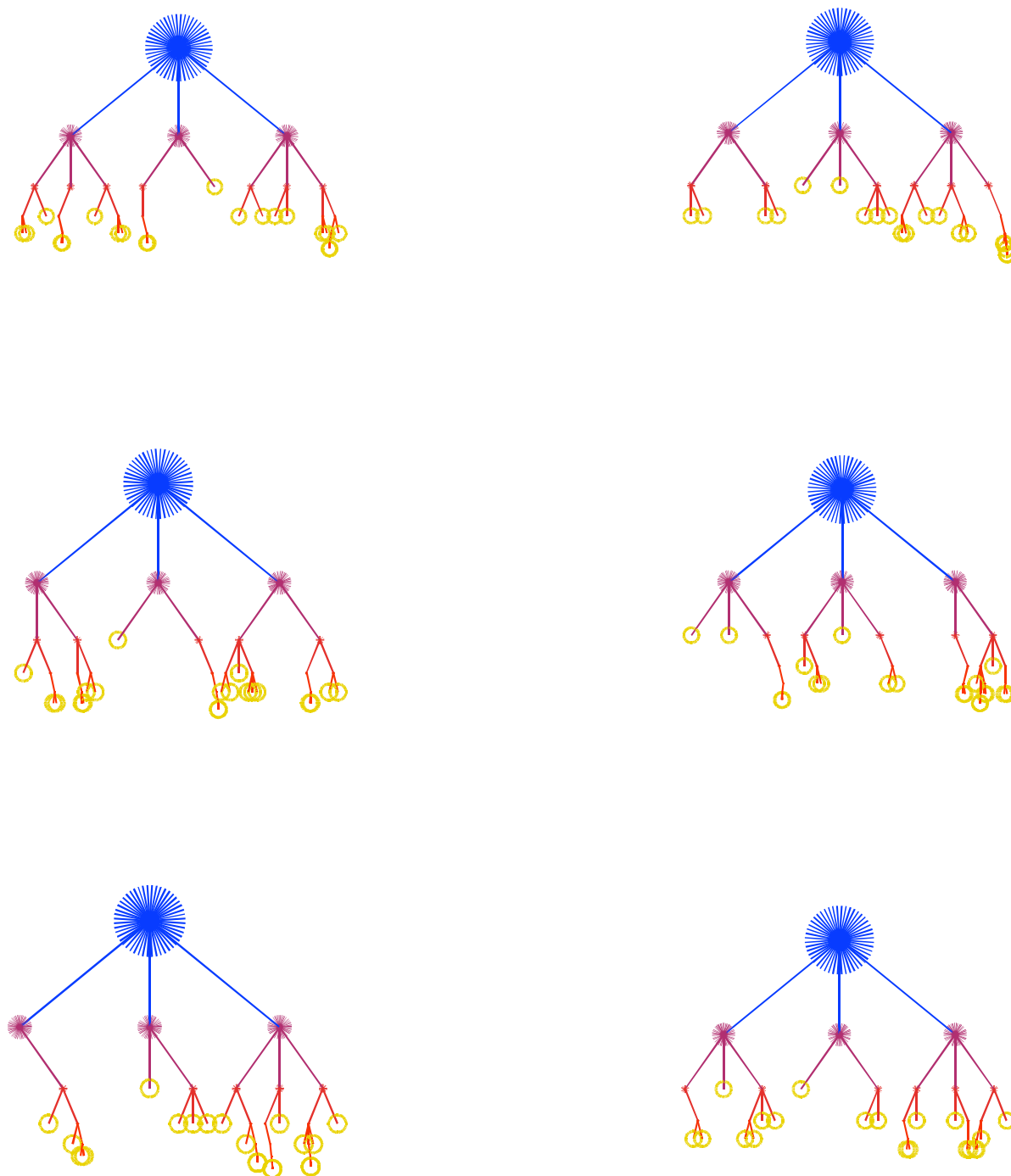
FIG. 2.5 – Tries expérimentaux avec système sans mémoire de vecteur $\mathbf{p} = (0.4, 0.6)$



Dans chaque arbre sont rangés 10 mots aléatoires.

On compte sur les différents arbres 15, 18, 15, 15, 21 et 18 nœuds internes.

FIG. 2.6 – Tries expérimentaux avec système sans mémoire de vecteur $\mathbf{p} = (0.8, 0.2)$



Dans chaque arbre sont rangés 20 mots aléatoires.

On compte sur les différents arbres 21, 17, 22, 23, 23 et 18 nœuds internes.

FIG. 2.7 – Tries expérimentaux avec système sans mémoire de vecteur $\mathbf{p} = (0.3, 0.2, 0.5)$

2.2 Modèle probabiliste

2.2.1 Comparaisons entre symboles

Les analyses classiques des algorithmes de tri et de sélection comptent le nombre total de comparaisons entre clés réalisées. On peut en fait réaliser une étude plus fine, en ne considérant plus les clés globalement, mais en les considérant comme des mots formés de symboles du même alphabet. L'analyse consiste alors à compter le nombre de comparaisons entre symboles, quand les mots sur lesquels on travaille sont issus d'une même source.

De plus, pour comparer de façon sensée les deux structures d'ABR et de Trie, il est nécessaire de prendre la même unité de mesure : or, comme on l'a vu, les Tries fonctionnent « symbole par symbole » (une branche correspond à un nouveau symbole), tandis que les ABR regardent les clés globalement.

En effet, comparer 2 mots ne prend pas toujours le même temps. Il s'agit de regarder jusqu'à quel point ils sont différents.

Ainsi, le nombre de comparaisons entre symboles pour s'apercevoir que

a	b	t	d	e	z	f	k	q	s
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

est inférieur (pour l'ordre lexicographique) à

a	g	e	q	w	e	z	n	e	l
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

, égal à 2 comparaisons,

... est plus petit que le nombre de comparaisons entre symboles pour s'apercevoir que

a	b	t	d	e	z	f	k	q	s
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

est inférieur à

a	b	t	d	e	z	f	k	q	w
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

, égal à 10 comparaisons,

... parce qu'on a moins de symboles à comparer !

C'est ici qu'apparaît l'importance de la coïncidence entre deux mots. Soient deux mots infinis $M = a_1 a_2 \dots a_i \dots$ et $M' = b_1 b_2 \dots b_i \dots$ dans Σ^∞ . On appelle *coïncidence* entre M et M' le plus grand indice i tel que les préfixes de taille i de M et M' coïncident, c'est-à-dire :

$$k = \max\{i, \forall j \leq i, a_j = b_j\}.$$

Soient u et $v \in \mathcal{I}$. On notera simplement $\gamma(u, v)$ la coïncidence entre $M(u)$ et $M(v)$ (les mots associés, voir chapitre 1), qu'on appellera aussi coïncidence entre u et v par abus de langage.

Pour comparer A et B de coïncidence k , on procède alors à $k+1$ comparaisons entre symboles.

Comment dès lors relier la coïncidence de 2 mots à notre modèle de sources ? Ce lien est fait par la constatation évidente suivante : la coïncidence entre A et B est supérieure ou égale à k , si et seulement si A et B commencent par le même préfixe de longueur k . C'est-à-dire que la coïncidence entre u et v est supérieure ou égale à k si et seulement si, il existe un préfixe de longueur k et donc un intervalle fondamental de longueur k , qui contient à la fois u et v , c'est-à-dire $w \in \Sigma^k$ tel que $u, v \in \mathcal{I}_w$. Autrement dit :

$$\gamma(u, v) \geq k \iff \exists w \in \Sigma^k : u, v \in \mathcal{I}_w. \quad (2.1)$$

2.2.2 Modèle de Bernoulli

Le but de l'analyse en moyenne de structures et d'algorithmes, est de caractériser la valeur moyenne de leurs paramètres sous un modèle probabiliste bien défini qui décrit la distribution initiale de leurs entrées.

Ici, on adopte le modèle général suivant : on travaille avec une suite finie \mathcal{X} de mots infinis produits indépendamment par la même source. Ce modèle est appelé modèle de Bernoulli et est noté $(\mathcal{B}_n, \mathcal{S})$, quand $|\mathcal{X}| = n$ et que la source est notée \mathcal{S} .

Une suite dans ce modèle est obtenue en tirant aléatoirement n réels x_1, x_2, \dots, x_n dans l'intervalle \mathcal{I} et en considérant les mots associés $X_i = M(x_i)$.

2.2.3 Modèle de Poisson

En pratique, plutôt que de fixer le cardinal N de \mathcal{X} à une valeur fixe n , il s'avère techniquement plus facile de considérer que ce cardinal N suit une loi de Poisson de paramètre z :

$$\mathbb{P}[N = k] = e^{-z} \frac{z^k}{k!}.$$

Dans ce modèle, N est concentré autour de son espérance z avec une forte probabilité, si bien que l'on s'attend à ce que z et n jouent des rôles similaires. Ce modèle est appelé modèle de Poisson, et est noté $(\mathcal{P}_z, \mathcal{S})$, quand le paramètre de la loi de Poisson est z , et la source est notée \mathcal{S} .

Une suite dans ce modèle est obtenue en tirant d'abord le cardinal N selon une loi de Poisson, puis N mots indépendamment à partir de la source \mathcal{S} , c'est-à-dire N réels x_i uniformément et indépendamment sur \mathcal{I} , et en considérant les mots associés $X_i = M(x_i)$.

Tout l'intérêt de la loi de Poisson réside dans la complète indépendance entre ce qui se passe sur des sous-intervalles disjoints de \mathcal{I} . De plus, le nombre d'éléments appartenant à un intervalle de longueur p suit une loi de Poisson de paramètre zp .

Plus précisément, le lemme suivant (classique) donne les propriétés, dans ce modèle de Poisson, des lois du nombre de mots commençant par des préfixes donnés.

Lemme 2.3. *On se place dans le modèle de Poisson $(\mathcal{P}_z, \mathcal{S})$. Soient w et w' deux mots finis sans préfixe commun (hormis le mot vide ϵ). Notons N_w et $N_{w'}$ le nombre de mots produits par la source et commençant respectivement par w et w' . On obtient*

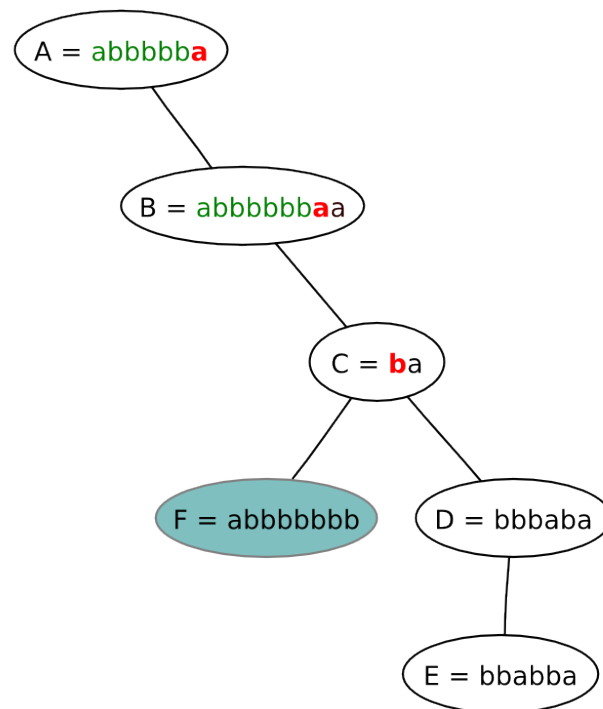
(i) N_w suit une loi de Poisson de paramètre zp_w ;

(ii) N_w et $N_{w'}$ sont indépendantes.

Démonstration. Notons $N_{\mathcal{P}_z,]b, c[}$ le nombre de mots $M(x)$ produits par le source \mathcal{S} , et dont le paramètre x appartient à l'intervalle $]b, c[$, dans le modèle $(\mathcal{P}_z, \mathcal{S})$. Et aussi $N_{\mathcal{B}_n,]b, c[}$ la même quantité dans le modèle $(\mathcal{B}_n, \mathcal{S})$. Enfin, on note $N_{\mathcal{P}_z}$ la variable aléatoire égale au cardinal $N = |\mathcal{X}|$ dans le modèle $(\mathcal{P}_z, \mathcal{S})$.

Alors il nous suffit de montrer que :

(i) $N_{\mathcal{P}_z,]b, c[}$ suit une loi de Poisson de paramètre $z(c - b)$.



3 comparaisons entre clés sont nécessaires pour insérer F dans l'ABR ci-dessus (comparaison avec A , B et C , tandis qu'il faut 16 comparaisons entre symboles :

- 7 comparaisons de symboles pour comparer les clés F et A ;
- 8 comparaisons de symboles pour comparer les clés F et B ;
- 1 comparaison de symboles pour comparer les clés F et C .

FIG. 2.8 – Illustrations de principe sur la comparaison entre symboles

Ceci est montré par le calcul élémentaire suivant :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{\mathcal{P}_z,]b,c[} = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(N_{\mathcal{P}_z,]b,c[} = k \cap N_{\mathcal{P}_z} = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(N_{\mathcal{B}_n,]b,c[} = k) \mathbb{P}(N_{\mathcal{P}_z} = n).\end{aligned}$$

Mais par définition de la loi de Poisson,

$$\mathbb{P}(N_{\mathcal{P}_z} = n) = e^{-z} \frac{z^n}{n!}.$$

Et finalement :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{\mathcal{P}_z,]b,c[} = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-z} \frac{z^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-z}}{k!} p^k z^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} z^{n-k} \\ &= \frac{e^{-z}}{k!} p^k z^k e^{(1-p)z} = e^{-pz} \frac{(pz)^k}{k!}.\end{aligned}$$

(ii) Si $]b, c[\cap]b', c'[= \emptyset$, alors les variables $N_{\mathcal{P}_z,]b,c[}$ et $N_{\mathcal{P}_z,]b',c'[}$ sont indépendantes.

On pose $p := b - c$ et $p' := b' - c'$. La propriété est montrée par le calcul élémentaire suivant. Pour tout $k, k' \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{\mathcal{P}_z,]b,c[} = k \cap N_{\mathcal{P}_z,]b',c'[} = k') &= \sum_{n=k+k'}^{+\infty} \mathbb{P}(N_{\mathcal{P}_z,]b,c[} = k \cap N_{\mathcal{P}_z,]b',c'[} = k' \cap N_{\mathcal{P}_z} = n) \\ &= \sum_{n=k+k'}^{+\infty} \mathbb{P}(N_{\mathcal{B}_n,]b,c[} = k \cap N_{\mathcal{B}_n,]b',c'[} = k') \mathbb{P}(N_{\mathcal{P}_z} = n) \\ &= \sum_{n=k+k'}^{+\infty} \binom{n}{k} \binom{n-k}{k'} p^k p'^{k'} (1-p-p')^{n-k-k'} e^{-z} \frac{z^n}{n!} \\ &= \frac{(pz)^k (p'z)^{k'}}{k!k'} e^{-z} \sum_{n=k+k'}^{+\infty} \frac{((1-p-p')z)^{n-k-k'}}{(n-k-k')!} \\ &= \frac{(pz)^k (p'z)^{k'}}{k!k'} e^{-z} e^{(1-p-p')z} \\ &= e^{-pz} \frac{(pz)^k}{k!} \times e^{-p'z} \frac{(p'z)^{k'}}{k'!} \\ &= \mathbb{P}(N_{\mathcal{P}_z,]b,c[} = k) \times \mathbb{P}(N_{\mathcal{P}_z,]b',c'[} = k').\end{aligned}$$

Pour conclure (i) et (ii), prendre $b = b_w$, $c = c_w$, $b' = b_{w'}$, $c' = c_{w'}$. □

2.2.4 Dépoissonisation

On explique comment passer du modèle de Poisson au modèle de Bernoulli.

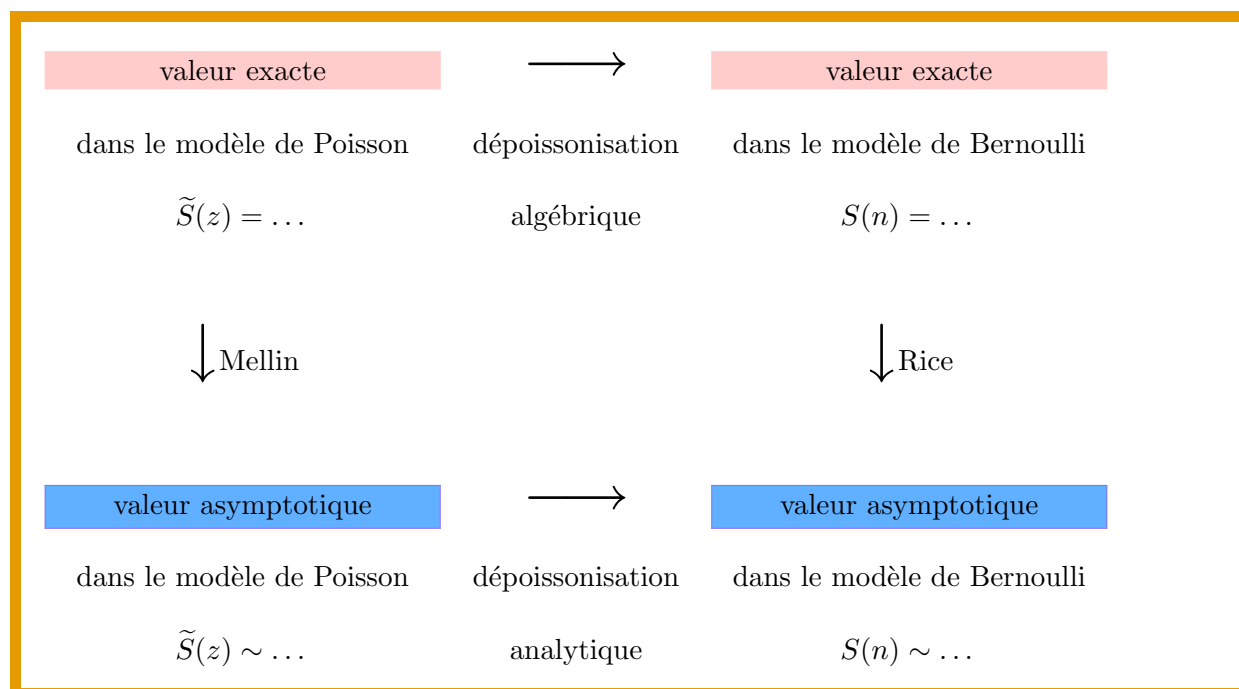


FIG. 2.9 – Stratégies possibles pour l'étude asymptotique

Pour tout $n \geq 0$, désignons par S l'espérance d'un certain paramètre X dans le modèle de Bernoulli $(\mathcal{B}_n, \mathcal{S})$, et pour tout $z > 0$, par \tilde{S} l'espérance du même paramètre dans le modèle de Poisson $(\mathcal{P}_z, \mathcal{S})$.

On a :

$$\tilde{S}(z) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_{\mathcal{P}(z)}(X 1_{|\mathcal{X}|=n}) \mathbb{P}(|\mathcal{X}| = n) = \sum_{n \geq 0} S(n) e^{-z} \frac{z^n}{n!},$$

d'où on tire

$$S(n) = n! [z^n] (e^z \tilde{S}(z)).$$

Bien sûr, le passage de $\tilde{S}(z)$ à $S(n)$ est linéaire, et on a le dictionnaire suivant :

$\tilde{S}(z)$	$S(n)$
e^{-az}	$(1-a)^n$
z^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$ pour $n \geq k$
$z^k e^{-az}$	$\frac{n!}{(n-k)!} (1-a)^{n-k}$ pour $n \geq k$

Dans la suite, on va « dépoissoniser » sur les formules exactes, c'est-à-dire procéder à la dépoissonisation algébrique. Signalons pour mémoire qu'on pourrait aussi « dépoissoniser » à partir des formules asymptotiques obtenues dans la section d'analyse. Ceci est résumé sur le schéma 2.9.

2.3 Etude exacte des coûts

2.3.1 Sur l'ABR

Le coût qu'on va étudier est une longueur de cheminement pondérée, qu'on appelle longueur de cheminement en symboles. Elle est égale au nombre total de comparaisons entre symboles nécessaires pour construire l'ABR ou trier les données avec `QuickSort`, et fournit donc une analyse fine de l'algorithme.

Tout ce qui suit fait l'objet de l'article [61]. On pourra aussi consulter le travail plus ancien [19].

On commence par donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux mots soient comparés par l'algorithme.

Lemme 2.4. *Deux mots M et M' , avec $M < M'$ sont comparés par `QuickSort` si et seulement si M ou M' est le pivot de plus petite hauteur de l'intervalle $[M, M']$, c'est-à-dire que dans l'ABR associé au déroulement de l'algorithme `QuickSort`, l'un des deux éléments M ou M' est un nœud interne, et à tous les autres éléments de l'intervalle $[M, M']$ est associé un nœud de hauteur strictement plus grande.*

Ainsi par exemple sur la figure 2.2, N et D ne sont pas comparés, car $[N, D] = \{N, F, C, D\}$ dont le pivot de plus petite hauteur est $C \neq N, C \neq D$. En revanche, I et C par exemple sont comparés, car $[C, I] = \{C, E, I\}$ dont le pivot de plus petite hauteur est C .

Voyons maintenant comment ce lemme permet de calculer le nombre de comparaisons effectuées par `QuickSort`.

Toute paire de mots de la source étant de la forme $(M(u), M(t))$ avec $0 \leq u \leq t \leq 1$, il est commode d'introduire le triangle $\mathcal{T} = \{(u, t) : 0 \leq u \leq t \leq 1\}$.

On a (à un ensemble de mesure nulle près sans importance pour l'intégration, car on a pris \mathcal{I}_w ouvert), d'après 2.1,

$$[\gamma \geq \ell] = \bigcup_{w \in \Sigma^\ell} (\mathcal{I}_w \times \mathcal{I}_w)$$

et donc

$$\mathcal{T} \cap [\gamma \geq \ell] = \bigcup_{w \in \Sigma^\ell} \mathcal{T}_w \quad \text{où } \mathcal{T}_w = (\mathcal{I}_w \times \mathcal{I}_w) \cap \mathcal{T}$$

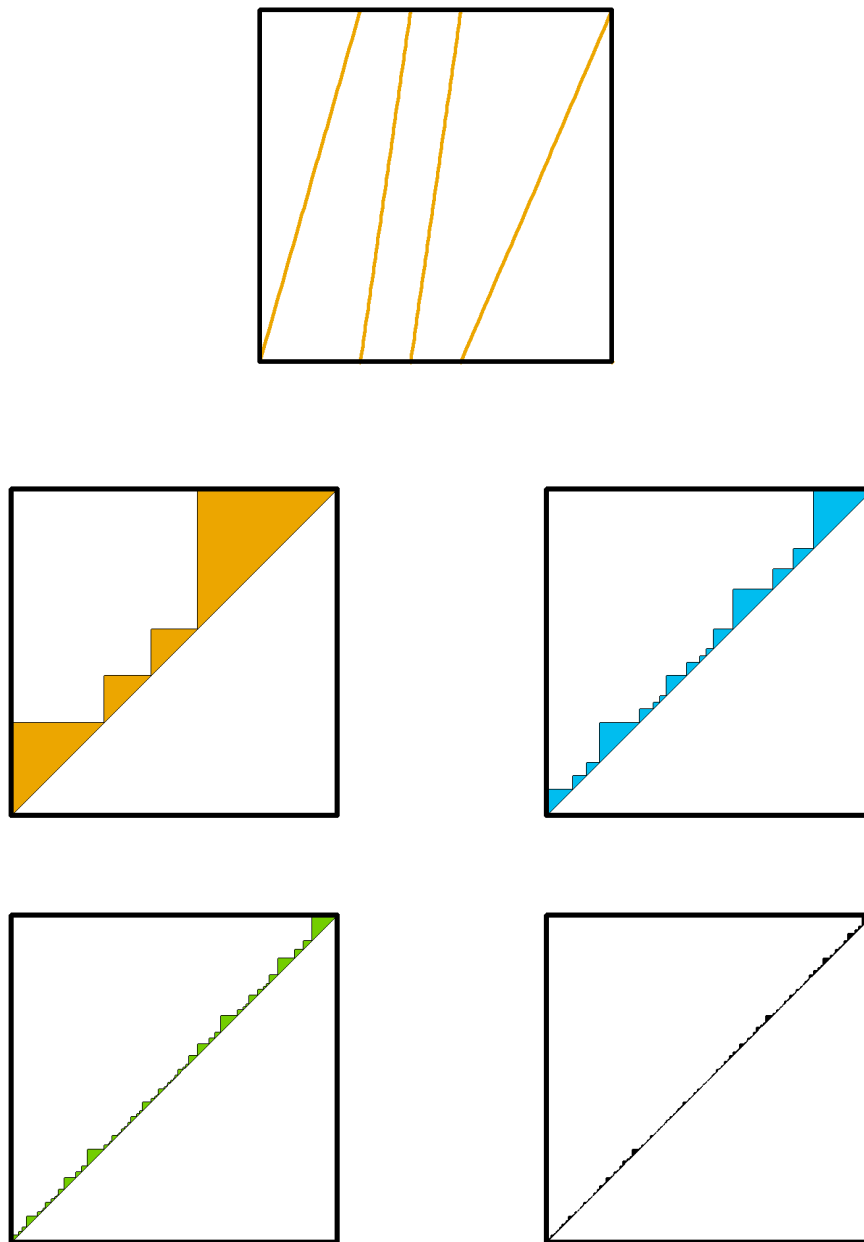
Le triangle \mathcal{T}_w est appelé triangle fondamental de préfixe w , et est construit sur l'intervalle fondamental $\mathcal{I}_w =]b_w, c_w[$.

Dans la suite, on utilisera largement les carrés fondamentaux (un triangle fondamental est un demi-carré fondamental). Ainsi par exemple, l'ensemble $\underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta)$ est la réunion de tous les $\mathcal{I}_w \times \mathcal{I}_w$ avec w de profondeur $n(\beta, t)$ associé à une branche inverse $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$ (voir chapitre 7).

Sur la figure 2.10 sont représentés un système dynamique affine et les triangles fondamentaux correspondants pour différentes profondeurs.

Pour calculer le nombre de comparaisons effectuées par un algorithme (`QuickSort` pour nous, mais la méthode est générale), il s'agit d'associer une densité ϕ à cet algorithme.

Définition 2.5. *Pour tous u, v tels que $0 \leq u \leq t \leq 1$, les densités $\tilde{\phi}_z(u, t)$ et $\phi_n(u, t)$ sont définies par les propriétés suivantes :*



Sur cette figure sont représentés un système dynamique affine ($\mathbf{p} = (2/7, 1/7, 1/7, 3/7)$), ainsi que les \mathcal{T}_w pour respectivement $|w| = 1$, $|w| = 2$, $|w| = 3$ et $|w| = 4$, pour une densité initiale uniforme.

FIG. 2.10 – Triangles fondamentaux sur un exemple

$\tilde{\phi}_z(u, t) du dt$ est égal au nombre moyen de comparaisons entre deux mots $M(u')$ et $M(t')$, où $u' \in [u, u + du]$ et $t' \in [v, v + dv]$, effectuées par l'algorithme sur une suite \mathcal{X} dans le modèle $(\mathcal{P}_z, \mathcal{S})$.

$\phi_n(u, t) du dt$ est égal au nombre moyen de comparaisons entre deux mots $M(u')$ et $M(t')$, où $u' \in [u, u + du]$ et $t' \in [v, v + dv]$, effectuées par l'algorithme sur une suite

\mathcal{X} dans le modèle $(\mathcal{B}_n, \mathcal{S})$.

Le nombre de comparaisons va alors s'exprimer comme une somme sur les mots de la source (on sent arriver la série de Dirichlet) de l'intégrale sur un triangle \mathcal{T}_w de la densité introduite. C'est-à-dire qu'on regarde pour chaque paire de mots possibles, combien de fois ils vont être comparés en moyenne.

Le lemme suivant exprime le lien entre le nombre de comparaisons et la densité de l'algorithme, et explicite la densité dans le cas de l'algorithme **QuickSort**.

Pour toute fonction g intégrale sur le triangle unité \mathcal{I} , on définit l'intégrale :

$$\mathcal{I}[g] := \sum_{w \in \Sigma^*} \int_{\mathcal{T}_w} g(u, t) du dt.$$

Lemme 2.6. (i) *Le nombre moyen de comparaisons effectuées par l'algorithme \mathcal{A} de densité ϕ_n (resp. $\tilde{\phi}_z$) dans le modèle $(\mathcal{B}_n, \mathcal{S})$ (resp. $(\mathcal{P}_z, \mathcal{S})$) est $\mathcal{I}[\phi_n]$ (resp. $\mathcal{I}(\tilde{\phi}_z)$).*

(ii) *Dans le modèle de Poisson $(\mathcal{P}_z, \mathcal{S})$, la densité de l'algorithme **QuickSort** est donnée par la formule suivante :*

$$\tilde{\phi}_z(u, t) = 2z^2 f_1((t - u)z) \quad \text{où} \quad f_1(\theta) = \theta^{-2} [e^{-\theta} - 1 + \theta].$$

Démonstration. (i) La preuve est faite dans le modèle de Bernoulli et identique dans le modèle de Poisson. Le nombre de comparaisons entre les deux clés $M(u)$ et $M(v)$ est $\phi_n(u, t)$, et le nombre de comparaisons entre symboles pour chaque comparaison entre ces deux clés est $\gamma(u, t) + 1$.

Donc le nombre de comparaisons entre symboles nécessaires pour comparer deux mots $M(u)$ et $M(t)$ est $\gamma(u, t) + 1$, et donc, le nombre moyen de comparaisons entre symboles est :

$$S(n) = \int_{\mathcal{I}} [\gamma(u, t) + 1] \phi_n(u, t) du dt = \int_{\mathcal{I}} \sum_{\ell \geq 0} \mathbf{1}_{[\gamma(u, t) = \ell]} (\ell + 1) \phi_n(u, t) du dt.$$

En utilisant l'identité classique :

$$\sum_{\ell \geq 0} (\ell + 1) \mathbf{1}_{[\gamma = \ell]} = \sum_{\ell \geq 0} \mathbf{1}_{[\gamma \geq \ell]},$$

et le théorème d'interversion de Fubini, on obtient :

$$S(n) = \int_{\mathcal{I}} \phi_n(u, t) du dt \sum_{\ell \geq 0} \mathbf{1}_{[\gamma(u, t) \geq \ell]} = \sum_{\ell \geq 0} \int_{\mathcal{I}} \mathbf{1}_{[\gamma(u, t) \geq \ell]} \phi_n(u, t) du dt.$$

Mais on a vu que :

$$\mathcal{I} \cap [\gamma \geq \ell] = \cup_{w \in \Sigma^\ell} \mathcal{T}_w,$$

et donc :

$$\int_{\mathcal{I}} \mathbf{1}_{[\gamma(u, t) \geq \ell]} \phi_n(u, t) du dt = \sum_{w \in \Sigma^\ell} \int_{\mathcal{T}_w} \phi_n(u, t) du dt$$

et comme

$$\Sigma^* = \cup_{\ell \geq 0} \cup_{w \in \Sigma^\ell} \{w\},$$

on obtient finalement :

$$S(n) = \sum_{w \in \Sigma^*} \int_{\mathcal{T}_w} \phi_n(u, t) du dt.$$

(ii) Soit $u < t$, et deux mots fixés issus de la source, associés respectivement aux réels u' et t' . Le nombre moyen de couples de clés $(M(u'), M(t'))$ tels que $u' \in [u, u + du]$ et $t' \in [t, t + dt]$, est

$$zdu \cdot zdt = z^2 dudt,$$

car les intervalles sont disjoints, et on utilise le lemme 2.3.

Conditionnellement au fait que les mots $M(u')$ et $M(t')$ sont tirés dans la séquence \mathcal{X} (pour que les mots soient comparés, encore faut-il qu'ils soient tirés!), les deux mots $M(u')$ et $M(t')$ sont comparés si et seulement si $M(u')$ ou $M(t')$ est le pivot de plus petite hauteur de l'intervalle $[M(u'), M(t')]$. Comme il y a $2 + N_{]u', t'[_}$ pivots potentiels dans cet intervalle, la probabilité que $M(u')$ et $M(t')$ soient comparés est :

$$\frac{2}{2 + N_{]u', t'[_}} \approx \frac{2}{2 + N_{]u, t[_}}.$$

Finalement, le nombre moyen de comparaisons entre des mots $M(u')$ et $M(t')$, avec $u' \in [u, u + du]$ et $t' \in [t, t + dt]$ est :

$$\frac{2z^2}{2 + N_{]u, t[_}} dudt,$$

d'où l'expression de la densité

$$\tilde{\phi}_z(u, t) = \frac{2z^2}{2 + N_{]u, t[_}} = 2z^2 \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k+2} e^{-(t-u)z} \frac{(z(t-u))^k}{k!}.$$

En écrivant par exemple :

$$\frac{1}{(k+2)k!} = \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k+2} \frac{(z(t-u))^k}{k!} &= \sum_{k \geq 0} \frac{(z(t-u))^k}{(k+1)!} - \sum_{k \geq 0} \frac{(z(t-u))^k}{(k+2)!} \\ &= \frac{1}{z(t-u)} (e^{z(t-u)} - 1) - \frac{1}{z^2(t-u)^2} (e^{z(t-u)} - 1 - z(t-u)) \\ &= \frac{1}{z^2(t-u)^2} ((z(t-u) - 1) e^{z(t-u)} + 1), \end{aligned}$$

d'où on déduit que :

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k+2} e^{-(t-u)z} \frac{(z(t-u))^k}{k!} = f_1((t-u)z).$$

□

Par un calcul simple, on peut en déduire la série alternée annoncée pour l'espérance $\tilde{B}(z)$ de la longueur de cheminement en symboles B d'un ABR dans le modèle de Poisson $(\mathcal{P}_z, \mathcal{S})$. En effet, le lemme précédent nous dit que :

$$\tilde{B}(z) = \mathcal{I}(\tilde{\phi}_z).$$

On commence par développer f_1 en série entière,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\tilde{\phi}_z) &= \mathcal{I}(2 \cdot f_1((t-u)\cdot)) \\ &= 2 \sum_{w \in \Sigma^*} \int_{\mathcal{T}_w} \frac{e^{-z(t-u)} - 1 + z(t-u)}{(t-u)^2} dudt \\ &= 2 \sum_{w \in \Sigma^*} \int_{\mathcal{T}_w} \sum_{k \geq 2} \frac{(-z(t-u))^k}{k!(t-u)^2} dudt. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant le théorème d'interversion de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\tilde{\phi}_z) &= 2 \sum_{k \geq 2} \sum_{w \in \Sigma^*} \int_{\mathcal{T}_w} \frac{(-z(t-u))^k}{k!(t-u)^2} dudt \\ &= 2 \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k z^k}{k!} \sum_{w \in \Sigma^*} \int_{\mathcal{T}_w} (t-u)^{k-2} dudt. \end{aligned}$$

On calcule à part par changement de variable

$$\int_{\mathcal{T}_w} (t-u)^{k-2} dudt = \int_0^{p_w} \int_0^t (t-u)^{k-2} dudt = \frac{p_w^k}{k(k-1)},$$

donc finalement :

$$\tilde{B}(z) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \varpi_B(k) \frac{z^k}{k!} \quad \text{où} \quad \varpi_B(k) = \frac{2}{k(k-1)} \Lambda(k).$$

La proposition suivante, simple application de la formule de dépoissonisation de la sous-section 2.2.4, donne l'expression du coût moyen $B(n)$ de **QuickSort** dans le modèle de Bernoulli $(\mathcal{B}_n, \mathcal{S})$.

Proposition 2.7 (Vallée, Clément, Fill, Flajolet, [61]). *Soit \mathcal{S} une source, et on considère le modèle de Bernoulli $(\mathcal{B}_n, \mathcal{S})$.*

L'espérance de la longueur de cheminement en symboles B d'un ABR dans ce modèle est alors :

$$B(n) = \sum_{k=2}^{\infty} \binom{n}{k} (-1)^k \varpi_B(k), \quad \text{où} \quad \varpi_B(k) = \frac{2}{k(k-1)} \Lambda(k).$$

2.3.2 Sur le Trie

Pour l'analyse des **Tries** pour les sources générales, le lecteur pourra consulter [15].

Pour l'analyse des **Tries** pour des sources plus simples ou pour des textes généraux, le lecteur pourra consulter notamment les textes suivants : [51], [34], [20], [32], [31], [33], [40], [50], et [49].

Le lemme suivant exprime la propriété fondamentale de la structure de **Trie**.

Lemme 2.8. *Soient $w \in \Sigma^*$ et \mathcal{X} un ensemble de mots infinis. L'arbre $\text{Trie}(\mathcal{X})$ contient un nœud interne étiqueté par w , si et seulement si le préfixe w est partagé par au moins deux mots de \mathcal{X} .*

La taille R du **Trie** est alors égale au nombre de préfixes partagés par au moins deux mots, c'est-à-dire que tout préfixe w qui étiquette un nœud interne, se voit attribuer un coût égal à 1 :

$$\tilde{R}(z) = \mathbb{E} \left(\sum_{w \in \Sigma^*} \mathbf{1}_{N_w \geq 2} \right) = \sum_{w \in \Sigma^*} \mathbb{P}(N_w \geq 2).$$

Quant à la longueur de cheminement C dans le **Trie**, elle est égale à la somme prise sur tous les nœuds internes de leur hauteur c'est-à-dire que tout préfixe w qui étiquette un nœud interne, se voit attribué un coût égal à sa hauteur :

$$\tilde{C}(z) = \mathbb{E} \left(\sum_{w \in \Sigma^*} N_w \mathbf{1}_{N_w \geq 2} \right) = \mathbb{E}(N_w) - \mathbb{P}(N_w = 1).$$

Mais d'après le lemme 2.3 on sait que sous le modèle $(\mathcal{P}(z), \mathcal{S})$, N_w suit une loi de Poisson de paramètre $p_w z$. Ceci nous permet de conclure sur les coûts moyens dans le modèle de Poisson.

L'espérance de la taille R d'un **Trie** est donnée par la formule :

$$\tilde{R}(z) = \sum_{w \in \Sigma^*} 1 - (1 + zp_w)e^{-zp_w}.$$

Quant à l'espérance de la longueur de cheminement C d'un **Trie** (implémentation **Trie-tableau**) dans ce modèle, elle vaut :

$$\tilde{C}(z) = \sum_{w \in \Sigma^*} zp_w(1 - e^{-zp_w}).$$

La proposition suivante, qui donne les expressions des coûts moyens $R(n)$ et $C(n)$ dans le modèle de Bernoulli, est alors une simple application de la formule de dépoissonisation de la sous-section 2.2.4.

Proposition 2.9 (Clément, Flajolet, Vallée, [15]).

Soit \mathcal{S} une source. On se place dans le modèle de Bernoulli $(\mathcal{B}_n, \mathcal{S})$.

L'espérance de la taille R d'un **Trie** dans ce modèle est alors :

$$R(n) = \sum_{w \in \Sigma^*} 1 - (1 - p_w)^n - np_w(1 - p_w)^{n-1}.$$

Quant à l'espérance de la longueur de cheminement C d'un **Trie** (implémentation **Trie-tableau**) dans ce modèle, elle vaut :

$$C(n) = \sum_{w \in \Sigma^*} (np_w(1 - (1 - p_w)^{n-1})).$$

2.3.3 Schéma général

On va donner l'expression exacte des coûts en fonction de $\Lambda(s)$, la série de Dirichlet de la source.

On observe que les expressions dans le modèle de Bernoulli des quantités étudiées ont toutes la même forme, qu'on donne ici (déjà écrit pour la longueur de cheminement B dans l'ABR).

Théorème 2.10 (forme générale pour l'étude des paramètres étudiés).

Soit \mathcal{S} une source. En notant

- ▶ B la longueur de cheminement en symboles dans l'ABR, qui coïncide avec le nombre de comparaisons entre symboles pour l'algorithme `QuickSort` ;
- ▶ R la taille du `Trie` ;
- ▶ C la longueur de cheminement dans le `Trie`,

dans le modèle de Bernoulli $(\mathcal{B}_n, \mathcal{S})$, pour $T = B, R$ ou C , l'expression exacte du coût T est donnée par une formule du type :

$$T(n) = \sum_{k=2}^n (-1)^k \binom{n}{k} \varpi_T(k),$$

où ϖ_T est une série de Dirichlet qui dépend de l'algorithme analysé et de la source, et est appelée série de Dirichlet mixte. Pour les paramètres étudiés, on a :

$$\begin{cases} \varpi_B(s) = 2 \frac{\Lambda(s)}{s(s-1)} \\ \varpi_R(s) = (s-1)\Lambda(s) \\ \varpi_C(s) = s\Lambda(s) \end{cases} .$$

Démonstration. La formule pour B a déjà été obtenue à la proposition 2.7.

De plus, on avait trouvé à la proposition 2.9 :

$$R(n) = \sum_{w \in \Sigma^*} 1 - (1 - p_w)^n - np_w(1 - p_w)^{n-1}.$$

En développant grâce à la formule du binôme on obtient :

$$\begin{aligned} R(n) &= \sum_{w \in \Sigma^*} 1 - \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k p_w^k \binom{n}{k} - np_w \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k p_w^k \binom{n-1}{k} \right) \\ &= \sum_{w \in \Sigma^*} \left(- \sum_{k=1}^n (-1)^k p_w^k \binom{n}{k} + n \sum_{k=1}^n (-1)^k p_w^k \binom{n-1}{k-1} \right) \\ &= \sum_{w \in \Sigma^*} \sum_{k=2}^n (-1)^k p_w^k \left(n \binom{n-1}{k-1} - \binom{n}{k} \right) \\ &= \sum_{k=2}^n (-1)^k \binom{n}{k} (k-1) \sum_{w \in \Sigma^*} p_w^k \\ &= \sum_{k=2}^n (-1)^k \binom{n}{k} (k-1) \Lambda(k) \\ &= \sum_{k=2}^n (-1)^k \binom{n}{k} \varpi_R(k). \end{aligned}$$

La formule pour C est obtenue de façon analogue. □

A ce stade, on a obtenu des formules exactes. Un travail supplémentaire est nécessaire pour en tirer l'asymptotique des paramètres étudiés.

2.4 Analyse asymptotique des coûts

Cette section est une section d'analyse. Dans la section précédente, on est arrivé à des formules combinatoires exactes (sommées alternées), dont on veut maintenant tirer une asymptotique.

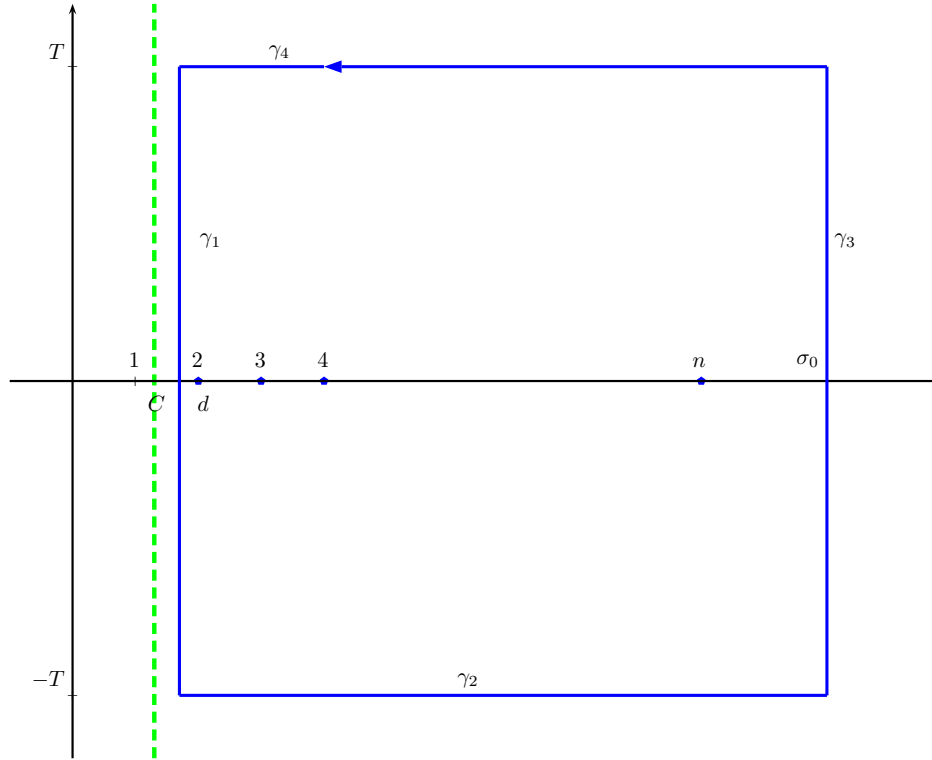


FIG. 2.11 – Contour pour la preuve de la formule de Rice

2.4.1 Passage dans le plan complexe

Il s'agit d'estimer la somme alternée obtenue au théorème 2.10. Pour cela, on utilise la formule de Rice. On pourra consulter par exemple [43] et [44].

Lemme 2.11 (formule de Rice). *Soit $S(n)$ une série numérique qui s'écrit :*

$$S(n) = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (-1)^k \varpi(k) \quad \text{pour } n \geq 2.$$

On suppose que ϖ est analytique et de croissance polynomiale d'ordre au plus r , sur $\Re(s) > C$, avec $1 < C < 2$.

Alors, $S(n)$ admet une représentation de Nörlund-Rice, valable pour $n > r + 1$ et $C < d < 2$:

$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{-1}{2i\pi} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \varpi(s) \frac{n!}{s(s-1)\dots(s-n)} ds \\ &= \frac{(-1)^n}{2i\pi} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \varpi(s) \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(-s)}{\Gamma(n+1-s)} ds. \end{aligned}$$

Démonstration. On applique le théorème des résidus au contour dessiné et à la fonction $s \mapsto \varpi(s) \frac{n!}{s(s-1)\dots(s-n)}$. Et ensuite, on fait tendre successivement $T \rightarrow \infty$ et $\sigma_0 \rightarrow +\infty$. Pour la preuve, on pourra voir par exemple [43], [44] ou [23].

□

2.4.2 Discipline des sources

Dans ce qui précède, on a transformé l'expression du coût moyen sous forme d'une somme alternée, en une intégrale sur une droite verticale du plan complexe. Il s'agit maintenant de donner une expression asymptotique de cette intégrale, en déplaçant le contour d'intégration vers les petites parties réelles (donc dans l'autre sens). Seulement, il faut prendre garde à éviter les pôles de ϖ .

La preuve de la formule de Rice consistait à passer d'une somme de résidus à une intégrale dans le plan complexe. Ici, on fait le travail inverse : ce sont les résidus dus au pôle en $s = 1$, et éventuellement aux autres pôles proches de $\{\Re(s) = 1\}$, qui vont fournir le terme principal dans l'asymptotique des paramètres étudiés. Il apparaît alors crucial de connaître la localisation des pôles de ϖ et donc de Λ , et d'en connaître une zone sans pôle avec croissance polynomiale la plus grande possible.

C'est pourquoi, il nous faut envisager les comportements possibles des fonctions ϖ_B , ϖ_R , et ϖ_C à gauche de la droite verticale $\Re(s) = 1$ c'est-à-dire de Λ . Les comportements considérés dans les définitions suivantes apparaissent naturellement pour une large classe de sources. Voir la figure 2.13 pour une illustration.

On commence par définir ce qu'est une source disciplinée sur un domaine \mathcal{R} .

Définition 2.12. *Soit \mathcal{R} une région qui contient le demi-plan $\Re(s) \geq 1$. Une source \mathcal{S} est dite \mathcal{R} -entropique si $\Lambda(s)$ est méromorphe sur \mathcal{R} avec un pôle en $s = 1$, simple, de résidu égal à l'entropie $h(\mathcal{S})$ (définie en (1.1)).*

Une source est \mathcal{R} -disciplinée si :

1. elle est \mathcal{R} -entropique ;
2. Λ n'a pas d'autre pôle que $s = 1$ dans \mathcal{R} ;
3. Λ a une croissance polynomiale dans \mathcal{R} quand $|s| \rightarrow +\infty$.

Ensuite, selon la forme du domaine \mathcal{R} , on distingue les sources S -disciplinées et H -disciplinées et périodiques : les sources S -disciplinées et H -disciplinées n'ont pas d'autre pôle que $s = 1$ sur $\Re(s) = 1$, contrairement aux sources périodiques.

Définition 2.13.

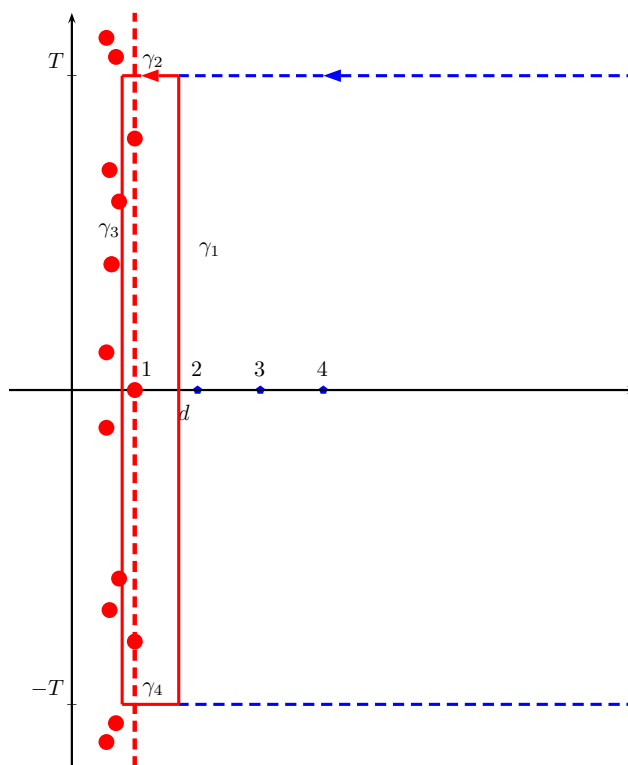
- On dit que la source est S -disciplinée d'abscisse δ , si elle est \mathcal{R} -disciplinée, avec $\mathcal{R} = \{s : \Re(s) > 1 - \delta\}$.
- On dit que la source est H -disciplinée d'exposant α , s'il existe $\delta > 0$ tel que que la source est \mathcal{R} -disciplinée, avec $\mathcal{R} = \{s : \Re(s) > 1 - \min(\delta, \frac{1}{\alpha})\}$.
- On dit que la source est périodique s'il existe $\delta > 0$ et $\tau > 0$ tels que

$$\{t \in \mathbb{R} : \Lambda \text{ a un pôle en } s = 1 + it\} = \tau \mathbb{Z}$$

et la source n'a pas d'autre pôle dans la bande $\{1 - \delta < \Re(s) < 1\}$.

On peut pour le moment s'interroger sur la pertinence de l'appellation « périodique » pour ce type de source. En fait, on peut montrer que ces sources sont exactement celles pour lesquelles la valeur propre dominante λ de l'opérateur de transfert est périodique de période $i\tau$ (voir le chapitre 6 d'analyse fonctionnelle).

Le théorème (B) montrera qu'il n'y a que deux comportements possibles pour la série de Dirichlet $\Lambda(s)$ associée à une source dynamique :

FIG. 2.12 – Contour pour l’asymptotique de $T(n)$

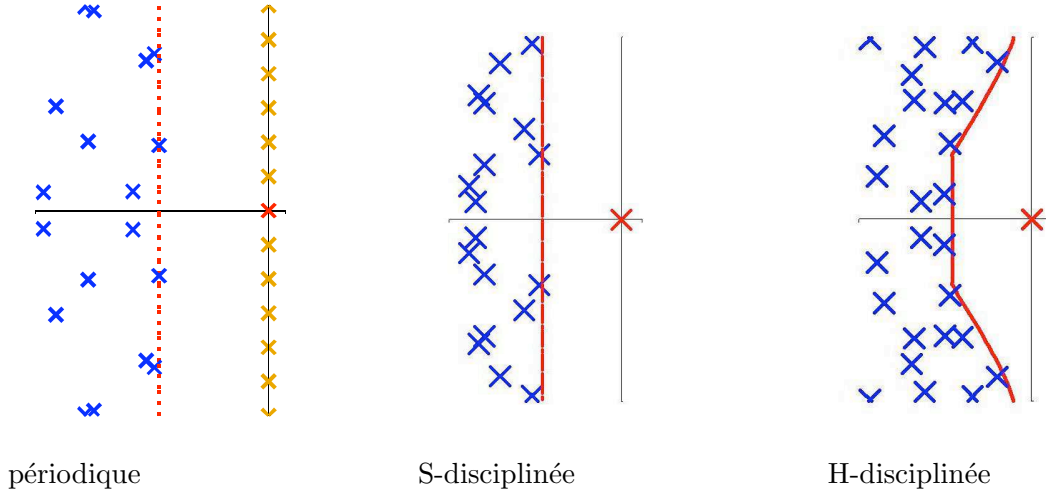
- ou bien elle est périodique, et possède une bande sans pôle à gauche de $\{\Re(s) = 1\}$;
- ou bien 1 est le seul pôle sur $\{\Re(s) = 1\}$: les sources S-disciplinées et H-disciplinées en constituent un cas particulier.

On peut dès maintenant décrire le comportement des différentes fonctions ϖ en $s = 1$ pour les différents paramètres, dans le cas d’une source entropique.

- la série de Dirichlet $\varpi_B(s)$ associée à la longueur de cheminement en symboles dans l’ABR, a un pôle d’ordre 2 (pôle d’ordre 1 pour $\Lambda(s)$ avec un facteur $\frac{1}{s-1}$ qui ajoute 1 à l’ordre du pôle) ;
- la série de Dirichlet $\varpi_R(s)$ associée à la taille R du Trie, a un pôle d’ordre 0 (la singularité en $s = 1$ de $\Lambda(s)$ est compensée par le facteur $s - 1$, et $\varpi_R(s)$ n’a qu’une singularité « apparente » en $s = 1$) ;
- la série de Dirichlet $\varpi_C(s)$ associée à la longueur de cheminement C dans le Trie, a un pôle d’ordre 1.

2.4.3 Conclusions pour l’étude des coûts

Le résultat de cette section, dont on ne donne pas la preuve ici, montre le lien qui existe entre les paramètres de la zone disciplinée (ordre, abscisse, exposant) et le comportement de l’intégrale

FIG. 2.13 – Différents comportements naturels pour $\Lambda(s)$

de Rice, et partant le comportement asymptotique des paramètres étudiés. Il existe en fait un dictionnaire qui transfère les propriétés de discipline de la source en propriétés asymptotiques pour $T(n)$.

Le théorème suivant rassemble et précise des résultats déjà obtenus dans [61] et [58] en donnant un énoncé global de l'asymptotique des différents coûts étudiés, comme somme d'un terme principal dont l'ordre de grandeur ne dépend pas de la source entropique, et d'un terme de reste qui dépend de la zone sans pôle obtenue pour Λ .

Théorème 2.14 (Clément, Fill, Flajolet, Vallée). *L'asymptotique des différents coûts étudiés pour une source entropique \mathcal{S} , est de la forme $T(n) = P_T(n) + E(n)$. Le terme principal fait intervenir l'entropie sous la forme :*

$$P_R(n) = \frac{1}{h(\mathcal{S})}n, \quad P_C(n) = \frac{1}{h(\mathcal{S})}n \log n + an, \quad P_B(n) = \frac{1}{h(\mathcal{S})}n \log^2 n + bn \log n + cn,$$

où a , b et c sont des constantes qu'on ne précise pas ici. Le terme de reste E dépend de la discipline de la source,

$$E(n) = \begin{cases} O(n^{1-\delta}) & \text{pour } \delta < \delta_0 \\ & \text{si la source est S-disciplinée d'abscisse } \delta_0; \\ O(n \exp[-(\log n)^\alpha]) & \text{pour } \alpha < 1/(\alpha_0 + 1) \\ & \text{si la source est H-disciplinée d'exposant } \alpha_0; \\ nP(\log n) + O(n^{1-\delta}) & \text{pour } \delta < \delta_0 \\ & \text{si la source est périodique d'abscisse } \delta_0. \end{cases}$$

où P est une fonction périodique (de faible amplitude).

Démonstration. La preuve consiste en une application du théorème des résidus, pour pouvoir déplacer le contour d'intégration vers la gauche, au-delà de 1. Plus précisément, si $\varpi(s)$ est de croissance polynomiale sur une région \mathcal{U} , la droite d'intégration $\Re(s) = d$ peut être déplacée vers la gauche jusqu'à une courbe \mathcal{C} , incluse dans la région \mathcal{U} , en prenant en compte les résidus aux pôles qui se trouvent dans \mathcal{U} .

Le terme principal fait toujours intervenir l'inverse de l'entropie $\frac{1}{h(\mathcal{S})}$. Plus précisément, on a un terme en $\frac{1}{h(\mathcal{S})} n \log^{k-1} n$, où k est l'ordre du pôle $s = 1$ dans la série de Dirichlet $\frac{\varpi_T(s)}{s-1}$ (voir figure 2.14), en l'occurrence :

- ▶ $k = 3$ pour la longueur de cheminement en symboles B dans l'ABR ;
- ▶ $k = 1$ pour la taille R du Trie ;
- ▶ $k = 2$ pour la longueur de cheminement C dans le Trie.

Reste à préciser ce qu'on choisit comme courbe \mathcal{U} .

- ▶ Dans les cas d'une source S -disciplinée ou périodique, la courbe \mathcal{C} est une droite verticale d'équation

$$\{\Re(s) = 1 - \delta\},$$

avec $\delta < \delta_0$.

- ▶ Dans le cas d'une source H -disciplinée, la courbe \mathcal{C} est prise d'équation

$$\left\{ \Re(s) = 1 - \frac{1}{2} \min \left(\delta_0, \frac{1}{t^{\alpha_0}} \right) \right\}.$$

Le reste de la preuve, non reproduite ici, mais qui peut être trouvée par exemple dans [58] (mais elle est très analogue à ce qu'on fait dans la partie IV, chapitre 15), consiste à évaluer l'intégrale

$$\int_{\mathcal{C}} \varpi(s) \frac{n!}{s(s-1)\dots(s-n)} ds = \int_{\mathcal{C}} \varpi(s) \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(-s)}{\Gamma(n+1-s)} ds.$$

qu'on prouve bien de la forme annoncée dans le théorème. □

Soient f méromorphe sur Ω ouvert de \mathbb{C} et $\chi \in \Omega$ un pôle de f .

multiplicité	localisation	définition	$\text{Res}_{x=\chi} x^s f(s)$
simple	$\chi = \sigma$ réel	$f(s) = \frac{A(s)}{s-\chi}$	$x^\sigma A(\chi)$
$k > 1$	$\chi = \sigma$ réel	$f(s) = \frac{A(s)}{(s-\chi)^k}$	$x^\sigma (\ln x)^{k-1} A(\chi)$
simple	$\chi = \sigma + it$ non réel	$f(s) = \frac{A(s)}{s-\chi}$	$x^\sigma \phi_t(x) A(\chi)$
$k > 1$	$\chi = \sigma + it$ non réel	$f(s) = \frac{A(s)}{(s-\chi)^k}$	$x^\sigma \phi_t(x) (\ln x)^{k-1} A(\chi)$

où

- A holomorphe autour de χ ;
- $\phi_t(x) = x^{it} = e^{it \ln x}$ est périodique en $\ln(x)$ de période $\frac{2\pi}{t}$.

FIG. 2.14 – Dictionnaire pôle / contribution dans l'asymptotique

Attention : le terme d'erreur n'en est pas vraiment un dans le cas de la taille du Trie, $nP(\log n)$ rentrant dans le terme principal.

Ce résultat prouve donc que, du point de vue du nombre de comparaisons entre symboles, l'ABR est moins efficace que le Trie.

A ce stade de la thèse, j'ai exposé différentes conditions de discipline qui ont été mises en évidence sur les sources dynamiques, et qui permettent de donner une asymptotique précise des différents paramètres étudiés sur les arbres construits à partir de mots de la source. La suite de la thèse va consister à exhiber des conditions suffisantes pour pouvoir assurer la discipline de la source. Au chapitre suivant, on verra comment aborder les preuves de discipline. Le chapitre 4 présente des conditions géométriques suffisantes obtenues par Baladi et Vallée ([5]) à la suite de travaux fondateurs de Dolgopyat. Ensuite le chapitre 5 présente des conditions arithmétiques également introduites par Dolgopyat, et qui permettent de formuler les principaux résultats de cette thèse.

Chapitre 3

Approches de la discipline d'une source dynamique

Sommaire

3.1	Intuition sur le cas sans mémoire	86
3.2	Retour au cas général	87
3.2.1	L'opérateur composante \mathbf{M}_t	87
3.2.2	Théorème (A)	89
3.3	Géométrie des pôles de Λ	89
3.3.1	Théorème (B)	89
3.3.2	Démarche générale	90

Dans ce qui précède, on a introduit les différents paramètres étudiés sur les **Tries**, et les **ABR/QuickSort**. On a prouvé que l'espérance moyenne de ces paramètres était égale à une somme alternée, et grâce à la formule de Rice, on a transformé cette somme alternée en une intégrale dans le plan complexe.

On a ensuite vu qu'une description fine de la géométrie des pôles de la série de Dirichlet $\Lambda(s)$ permettait, via le théorème des résidus, d'obtenir une asymptotique fine de l'espérance de ces paramètres pour une source générale.

Dès lors, quelles conditions suffisantes imposer pour garantir le bon comportement de $\Lambda(s)$ dans le cas particulier d'une source dynamique de la **Bonne Classe** ?

On a vu à la proposition 1.10, que la série de Dirichlet s'exprime comme le quasi-inverse de la sécante de la densité initiale, c'est-à-dire :

$$\Lambda(s) = \sum_{w \in \Sigma^*} p_w^s = (\mathbf{I} - \mathbf{H}_s)^{-1}[G^s](1, 0).$$

Soit \mathbf{G} un opérateur sur un certain espace fonctionnel. On dit que η est une valeur spectrale de \mathbf{G} , si $\mathbf{G} - \eta \mathbf{I}$ n'est pas inversible. On note $\text{Sp}(\mathbf{G})$ l'ensemble des valeurs spectrales de \mathbf{G} , qu'on appelle *spectre* de \mathbf{G} . On dit que η est une valeur propre de \mathbf{G} si $\mathbf{G} - \eta \mathbf{I}$ n'est pas injective, c'est-à-dire s'il existe une fonction f non identiquement nulle telle que $\mathbf{G}[f] = \eta f$.

Le quasi-inverse $(\mathbf{I} - \mathbf{H}_s)^{-1}$ est alors défini si et seulement si 1 n'est pas une valeur spectrale de \mathbf{G} . C'est-à-dire qu'étudier les pôles de la série de Dirichlet revient à étudier les valeurs spectrales de \mathbf{H}_s . Plus précisément, partout où le quasi-inverse est défini, Λ n'a pas de pôle.

On verra en fait, que pour la **Bonne Classe**, la partie supérieure du spectre est formée de valeurs propres isolées (théorème (A)). Cela montre que si 1 est valeur propre de \mathbf{H}_s , alors Λ a un pôle en s . Et réciproquement, si 1 n'est pas une valeur propre de \mathbf{H}_s , alors Λ est bien défini en s .

En revanche, on ne peut pas assurer à ce stade ni l'analyticité, ni la croissance polynomiale, ni une zone sans pôle à gauche de $\Re(s) = 1$ pour Λ . On va donc chercher à renforcer le fait que 1 n'est pas une valeur propre de \mathbf{H}_s .

Ceci permettra alors d'assurer que $\mathcal{F}(\alpha)^c$ est borné pour un certain α (voir définition 8.5 à venir).

Dans ce chapitre, on étudie précisément les liens entre les valeurs propres de \mathbf{H} et \mathbf{M} .

3.1 Intuition sur le cas sans mémoire

Dans ce qui suit, on va étudier le cas particulier des systèmes sans mémoire avec alphabet fini, ce qui nous fournira une indication pour le cas général.

On a vu que dans le cas d'un système sans mémoire, on pouvait étudier directement $\Lambda(s)$, qui prend une forme particulièrement simple (voir 1.4). On est donc amenés à résoudre l'équation suivante :

$$\lambda(s) = \sum_{k=1}^r p_k^s = 1. \quad (3.1)$$

Bien sûr $s = 1$ est solution. On cherche alors à savoir s'il y a d'autres solutions sur la droite $\{\Re(s) = 1\}$. Supposons que $s = 1 + it$ vérifie $\lambda(1 + it) = \sum_{k=1}^r p_k^{1+it} = 1$ (avec $\sum_{k=1}^r p_k = 1$).

L'égalité 3.1 s'écrit aussi :

$$\sum_{k=1}^r p_k e^{it \log p_k} = 1,$$

D'après la réciproque de l'inégalité triangulaire, ceci n'est possible que si pour tout k ,

$$e^{it \log p_k} = 1.$$

On a donc montré l'implication

$$\sum_{k=1}^r p_k (p_k^{it} - 1) = 0 \implies \forall k \in \{1, \dots, r\}, p_k^{it} = 1,$$

c'est-à-dire qu'il suffit de travailler composante par composante.

Pour les systèmes sans mémoire, ceci implique que $t \log p_k$ est un multiple de 2π pour tout k , et donc tous les $\frac{\log p_k}{\log p_1}$ sont rationnels. On verra le cas général dans la suite.

Maintenant, si on suppose que 1 est le seul pôle sur $\Re(s) = 1$ et qu'on cherche des solutions $s = \sigma + it$, avec σ proche de 1, alors on peut montrer qu'on doit avoir chacun des p_i^{it} *simultanément* proche de 1.

C'est-à-dire qu'on doit avoir *simultanément*

$$t \approx \frac{2q_1\pi}{|\log p_1|}, \quad t \approx \frac{2q_2\pi}{|\log p_2|}, \quad \dots \quad t \approx \frac{2q_r\pi}{|\log p_r|} \quad (3.2)$$

avec $q_1, q_2, \dots, q_r \in \mathbb{Z}$.

C'est-à-dire que pour tout k tel que $2 \leq k \leq r$, le rationnel q_k/q_1 doit être une bonne approximation du réel $\log p_k / \log p_1$.

Cela motive le traitement déparé des deux cas suivants :

- ▶ tous les rapports $\log p_k / \log p_1$ sont rationnels ;
- ▶ tous les rapports $\log p_k / \log p_1$ ne sont pas rationnels. Dans ce dernier cas, on examine s'ils sont bien approximables ou non par des rationnels.

Plus généralement, on pressent que :

Intuition 3.1. *Dans le cas général, on peut travailler composante par composante, c'est-à-dire qu'on va transposer une égalité d'une somme sur les branches inverses, en une égalité sur chaque terme.*

3.2 Retour au cas général

3.2.1 L'opérateur composante \mathbf{M}_t

L'opérateur \mathbf{H}_{1+it} qui s'exprime comme une série, n'est pas très maniable. Nous allons plutôt utiliser l'opérateur composante \mathbf{M}_t qu'on introduit dès maintenant. Il s'avère que \mathbf{M}_t a les mêmes valeurs propres (à inversion près) que \mathbf{H}_{1+it} comme on le verra dans le théorème (A). La suite repose sur l'étude de ces valeurs propres.

Commençons par définir l'opérateur-composante \mathbf{M}_t .

Définition 3.2. $\mathbf{M}_t[u](x) = |T'(x)|^{it} \cdot u \circ T(x)$.

$$\underline{\mathbf{M}}_t[\underline{u}](\underline{x}) = \begin{cases} \left| \frac{T(x_1) - T(x_2)}{x_1 - x_2} \right|^{it} \cdot \underline{u}(T(x_1), T(x_2)) & \text{si } x_1 \neq x_2 \\ \mathbf{M}_t[\text{diag } u](x_1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'opérateur ainsi défini est continu sur le diagonale comme le prouve le lemme suivant.

Lemme 3.3.

$$\text{diag } \underline{\mathbf{M}}_s[F](x) = \lim_{y \rightarrow x} \underline{\mathbf{M}}_s[F](x, y) = \mathbf{M}_s[\text{diag } F](x)$$

C'est-à-dire que là encore, l'opérateur sécant est une restriction de l'opérateur tangent, qui en est un prolongement « continu ». A l'avenir, on pourra être amenés à écrire seulement le cas générique où $x \neq y$ tout en étant conscient qu'un petit effort d'écriture supplémentaire serait nécessaire pour écrire les choses complètement.

Comme pour \mathbf{H} , la composition se déroule bien, parce que dérivées et sécantes se composent bien.

Lemme 3.4. *Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, et $x \in \mathcal{I}$:*

$$\mathbf{M}_t^n[u](x) = |(T^n)'(x)|^{it} \cdot u \circ T^n(x).$$

Pour tous $n \in \mathbb{N}^$, $\underline{u} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, et $(x_1, x_2) \in \mathcal{I}^2$:*

$$\mathbf{M}_t^n[\underline{u}](x_1, x_2) = \left| \frac{T^n(x_1) - T^n(x_2)}{x_1 - x_2} \right|^{it} \cdot \underline{u}(T^n(x_1), T^n(x_2)).$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur n . Supposons que

$$\mathbf{M}_t^n[u](x) = |(T^n)'(x)|^{it} \cdot u \circ T^n(x).$$

Alors par définition :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_t^{n+1}[u](x) &= \mathbf{M}_t^n[\mathbf{M}_t[u]](x) \\ &= |(T^n)'(x)|^{it} \cdot \mathbf{M}_t[u] \circ T^n(x) \\ &= |(T^n)'(x)|^{it} \cdot |T'(T^n(x))|^{it} \cdot u \circ T^{n+1}(x) \\ &= |(T^{n+1})'(x)|^{it} \cdot u \circ T^{n+1}(x). \end{aligned}$$

□

Le lemme suivant donne une propriété élémentaire importante de l'opérateur \mathbf{M} :

Lemme 3.5.

Soit $n \in \mathbb{N}^$.*

Pour tout $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, pour toute branche inverse $h \in \mathcal{H}^n$, et pour tout $y \in \mathcal{I}$, on a :

$$\mathbf{M}_t^n[u](h(y)) = |h'(y)|^{-it} u(y).$$

Pour tout $\underline{u} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, toutes branches inverses $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^n$, et pour tout $\underline{y} = (y_1, y_2) \in \mathcal{I}^2$, on a :

$$\mathbf{M}_t^n[\underline{u}](\underline{h}(\underline{y})) = \left| \frac{h_1(y_1) - h_2(y_2)}{y_1 - y_2} \right|^{-it} \underline{u}(\underline{y}).$$

En particulier, pour tout $h \in \mathcal{H}^n$, et pour tout $\underline{y} \in \underline{\mathcal{I}}$,

$$\mathbf{M}_t^n[\underline{u}](\underline{h}(\underline{y})) = |s_h(\underline{y})|^{-it} \underline{u}(\underline{y}).$$

Démonstration. Pour le tangent :

$$\mathbf{M}_t^n[u](h(y)) = |(T^n)'(h(y))|^{it} u \circ T^n(h(y))$$

avec $T^n(h(y)) = y$.

Pour le sécant :

$$\mathbf{M}_t^n[\underline{u}](h_1(y_1), h_2(y_2)) = \left| \frac{T^n(h_1(y_1)) - T^n(h_2(y_2))}{h_1(y_1) - h_2(y_2)} \right|^{it} \underline{u}(T^n(h_1(y_1)), T^n(h_2(y_2))),$$

avec $T^n(h_1(y_1)) = y_1$, $T^n(h_2(y_2)) = y_2$. □

On peut également énoncer le lemme suivant évident, qui est le pendant pour \mathbf{M} du lemme 1.9.

Lemme 3.6. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans le cas affine, les itérés $\mathbf{M}_t^n[1]$, sont tous des fonctions constantes sur les intervalles fondamentaux de profondeur n .*

3.2.2 Théorème (A)

Le théorème suivant fait le lien entre le spectre de \mathbf{H}_{1+it} et celui de \mathbf{M}_t , et va nous permettre d'étudier les singularités de $\Lambda(s)$. On en tirera de nombreuses conséquences, notamment le théorème (B) à la section suivante, qui décrit les deux seuls comportements possibles de la source vis-à-vis des pôles sur $\{\Re(s) = 1\}$.

Théorème (A). *On considère un système dynamique (\mathcal{I}, T) de Bonne Classe. Soient un réel $t_0 \neq 0$ et un nombre complexe η , avec $|\eta| = 1$.*

Les fonctions propres continues de \mathbf{M}_{t_0} associées à η sont de module constant, et les fonctions propres continues de $\underline{\mathbf{M}}_{t_0}$ associées à η sont de module constant sur la diagonale.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) $s \mapsto (\eta - \mathbf{H}_s)^{-1}$ a une singularité en $s = 1 + it_0$;
- (b) η est une valeur propre de \mathbf{H}_{1+it_0} ;
- (c) η^{-1} est une valeur propre de \mathbf{M}_{t_0} .

On obtient un théorème un peu plus faible pour l'opérateur sécant.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (d) $s \mapsto (\eta - \underline{\mathbf{H}}_s)^{-1}$ a une singularité en $s = 1 + it_0$;
- (e) η est une valeur propre de $\underline{\mathbf{H}}_{1+it_0}$.

Et dans ce cas, η^{-1} est une valeur propre de \mathbf{M}_{t_0} (mais on n'a pas la réciproque comme pour l'opérateur tangent).

Enfin, si $\eta = 1$, alors l'assertion

- (f) *la série de Dirichlet Λ a une singularité en $s = 1 + it_0$. implique (d) et (e).*

Les deux spectres sont donc inverses l'un de l'autre.

Ce théorème sera prouvé à la section 6.3, car la preuve qui utilise les propriétés spectrales des opérateurs, ne peut pas encore être faite ici.

L'absence de réciproque pour l'opérateur sécant préfigure les difficultés qu'on rencontrera dans la preuve de la H -discipline (pour l'opérateur sécant) dans la suite (chapitre 10).

Et donc, voici comment on va approcher les pôles de Λ :

Intuition 3.7. *Pour connaître la géométrie des pôles de Λ , on va étudier les valeurs propres de \mathbf{M}_t .*

3.3 Géométrie des pôles de Λ

3.3.1 Théorème (B)

Le théorème suivant montre que la source ne peut avoir que deux comportements possibles vis-à-vis des pôles de Λ sur $\{\Re(s) = 1\}$.

Théorème (B). *La série de Dirichlet $\Lambda(s)$ associée à une source dynamique de Bonne Classe n'a que deux comportements possibles :*

- *le cas apériodique : pas de pôle autre que $s = 1$ sur la droite $\{\Re(s) = 1\}$;*

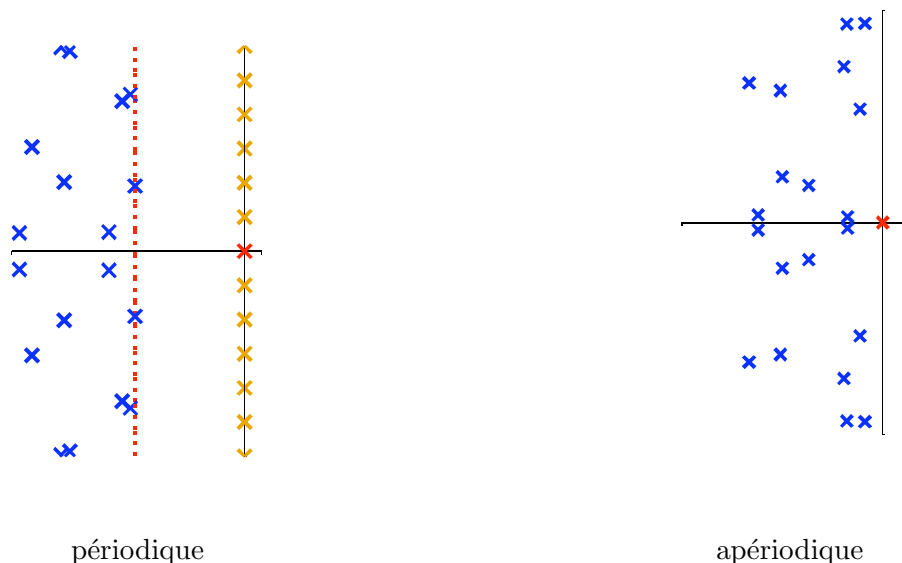


FIG. 3.1 – Sources périodiques et apériodiques

- le cas périodique : il y a une infinité de pôles sur $\{\Re(s) = 1\}$ et ceux-ci sont disposés périodiquement, c'est-à-dire qu'ils forment une suite $s_k = 1 + ik\tau$, avec $\tau > 0$. Chacun de ces pôles est simple. Et il existe $\delta_0 > 0$ tel que Λ n'ait pas de pôle sur le domaine

$$\{s : 1 - \delta_0 < \Re(s) < 1\}.$$

Démonstration. On part de la démonstration du théorème (A). On montre que les t convenables ont une structure de groupe. Je ne reproduis pas la preuve ici. Voir par exemple [56, proposition 9]. \square

3.3.2 Démarche générale

On va donner dans les deux chapitres qui suivent, deux conséquences de la périodicité d'un système, à savoir :

- la conjugaison à un système sans mémoire (conséquence géométrique, voir chapitre 4) ;
- la rationalité (conséquence arithmétique, voir chapitre 5).

Réunies, ces deux conditions nécessaires sont suffisantes pour la réciproque, c'est-à-dire la périodicité de la source.

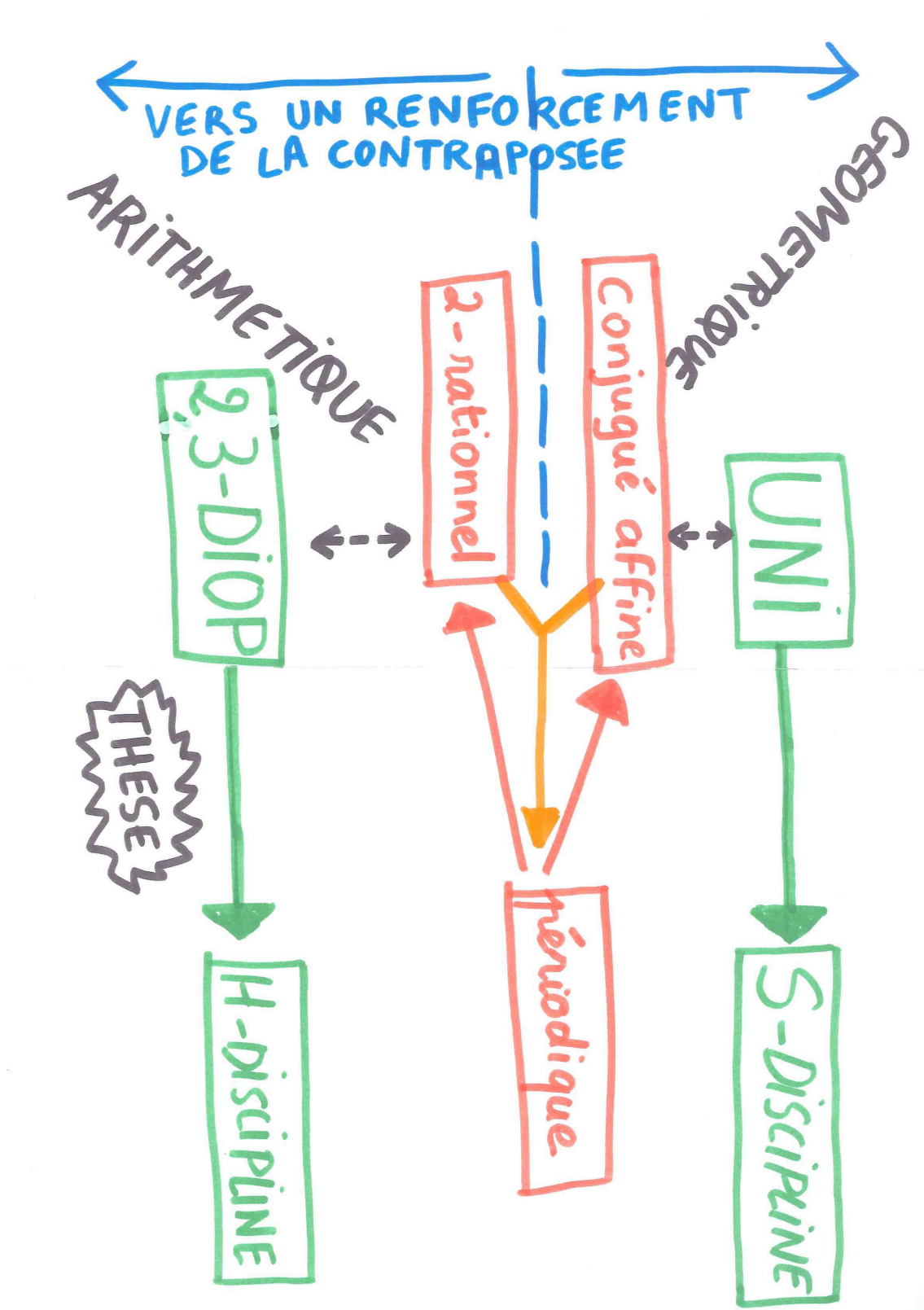
La suite du travail consiste à renforcer la contraposée, c'est-à-dire trouver des conditions suffisantes sur le système pour avoir un système apériodique avec des bonnes propriétés, c'est-à-dire une bonne géométrie des pôles de la série de Dirichlet Λ . En l'occurrence :

- la condition UNI permet de montrer que le système est S-discipliné (renforcement géométrique). Ceci constitue des travaux de Baladi, Cesaratto et Vallée (voir [5] et [12], inspirés par Dol-

gopyat ;

- les conditions DIOP permettent de montrer que le système est H-discipliné (renforcement arithmétique).

Cette thèse étudie les conditions DIOP. La démarche générale de la preuve est résumée à la figure 3.2.



Sur cette figure est représentée la démarche générale pour l'étude des sources. On met en évidence les contraposées qu'on renforce, dans les domaines géométrique et arithmétique.

FIG. 3.2 – Démarche générale pour l'étude de la discipline des sources

Chapitre 4

Un précédent résultat : conditions géométriques pour la discipline

Sommaire

4.1	Systèmes conjugués affines	93
4.2	Condition nécessaire pour la périodicité	98
4.3	Renforcement de la contraposée et condition UNI	98

On commence par le premier type de condition suffisante annoncée pour assurer un bon comportement des pôles. Issu d'un important travail fondateur de Dolgopyat (voir [16]), la condition UNI a d'abord permis la rédaction de l'article [5], qui travaille sur l'opérateur tangent. Ce travail a été adapté par Cesaratto et Vallée à l'opérateur sécant, ce qui leur permet de prouver que la source est S-disciplinée (voir [12]). Pour une autre généralisation d'UNI, voir [4].

4.1 Systèmes conjugués affines

Pour parler de la première conséquence, quelques mots d'abord sur les systèmes conjugués.

Définition 4.1. *On dit que le système dynamique (\mathcal{I}, T_1) est conjugué au système dynamique (\mathcal{I}, T_2) s'il existe ψ bijection de \mathcal{I} dans \mathcal{I} telle que :*

$$\psi \circ T_1 \circ \psi^{-1} = T_2.$$

On dit que la conjugaison est de classe C^k si ψ et ψ^{-1} sont de classe C^k .

On dit que le système de shift T est conjugué à un système à branches affines s'il est conjugué avec un système T_{aff} à branches affines.

Un système et son conjugué ont le même nombre de branches, et si h_1 est une branche inverse de T_1 , alors $h_2 = \psi \circ h_1 \circ \psi^{-1}$ est une branche inverse de T_2 .

En effet :

$$\begin{aligned}
T_2 \circ (\psi \circ h_1 \circ \psi^{-1}) &= (T_2 \circ \psi) \circ h_1 \circ \psi^{-1} \\
&= (\psi \circ T_1) \circ h_1 \circ \psi^{-1} \\
&= \psi \circ (T_1 \circ h_1) \circ \psi^{-1} \\
&= \psi \circ \psi^{-1} \\
&= \text{Id}.
\end{aligned}$$

On peut alors regarder les classes d'équivalence des sources pour la relation de conjugaison. Et notamment on s'intéresse à la classe des sources conjuguées à une source affine donnée. On va donner des définitions équivalentes de ces sources « conjuguées sans mémoire ». Ces définitions équivalentes sont intéressantes pour l'étude du spectre.

La définition équivalente (ii) constitue ce que Brigitte Vallée appelle *source similaire à une source sans mémoire* dans [56]. Elle conjecture que les sources similaires à une source sans mémoire coïncident avec les sources sans mémoire (équivalence entre (ii) et (iii) dans la proposition qui suit), et ceci est prouvé par Chazal et Maume ([14, proposition 3.7]).

Proposition 4.2. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *Le système dynamique (\mathcal{I}, T) est \mathcal{C}^{k+1} -conjugué à un système à branches affines.*
- (ii) *Il existe $f > 0$, $f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{I})$, tel que pour tout $h \in \mathcal{H}^*$ branche inverse, il existe $d(h) > 0$ tel que pour tout $x \in]0, 1[$,*

$$|h'(x)|f \circ h(x) = d(h)f(x), \quad (4.1)$$

et de façon équivalente, pour tout $x \in \mathcal{I}_h$,

$$|T'(x)|f \circ T(x) = \frac{1}{d(h)}f(x). \quad (4.2)$$

- (iii) *Il existe $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, et $g \in \mathcal{C}^k(\mathcal{I})$ avec $|g| = 1$, tels que pour tout $h \in \mathcal{H}^*$ branche inverse, il existe $e(h) \in \mathbb{C}$, $|e(h)| = 1$, tels que pour tout $x \in]0, 1[$,*

$$|h'(x)|^{it}g \circ h(x) = e(h)g(x), \quad (4.3)$$

et de façon équivalente, pour tout $x \in \mathcal{I}_h$,

$$|T'(x)|^{it}g \circ T(x) = \frac{1}{e(h)}g(x). \quad (4.4)$$

De plus, si (iii) est vrai pour une valeur particulière de t , alors (iii) est vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Les systèmes pour lesquels on peut imposer $e(h) = 1$ pour tout h , sont en fait les systèmes périodiques, et dans ce cas, l'ensemble des t valides forme un sous-groupe discret de \mathbb{R} .

Démonstration. On prouve d'abord l'équivalence de (i) et (ii). Soit h une branche inverse. On suppose que le système est \mathcal{C}^{k+1} conjugué à un système à branches affines. Alors il existe ψ bijection de classe \mathcal{C}^{k+1} telle que $\psi \circ h \circ \psi^{-1}$ est la branche inverse d'un système affine c'est-à-dire que pour tout $y \in \mathcal{I}$:

$$\psi \circ h \circ \psi^{-1}(y) = \tilde{d}(h)y + \hat{d}(h).$$

Soit $x \in \mathcal{I}$. En prenant $y = \psi(x)$, on obtient :

$$\psi \circ h(x) = \tilde{d}(h)\psi(x) + \hat{d}(h),$$

et en dérivant par rapport à x , on obtient alors :

$$\psi' \circ h(x) \cdot h'(x) = \tilde{d}(h)\psi'(x).$$

En prenant $f = |\psi'|$ et $d(h) = |\tilde{d}(h)|$, on a alors le résultat souhaité.

En itérant on obtient que 4.1 est vrai pour une branche inverse de profondeur quelconque. Le point de vue dual avec T est obtenu facilement (dérivation d'une fonction composée).

On prouve la réciproque en remontant la démonstration dans l'autre sens.

On prouve maintenant l'équivalence entre (ii) et (iii). Supposons d'abord que 4.4 est vraie. Il existe $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, et $g \in \mathcal{C}^k(\mathcal{I})$ avec $|g| = 1$, tels que pour tout $h \in \mathcal{H}^*$, il existe $e(h) \in \mathbb{C}$, $|e(h)| = 1$, et pour tout $x \in]0, 1[$:

$$|T'(x)|^{it} g \circ T(x) = \frac{1}{e(h)} g(x).$$

Ecrivons $g = e^{i\theta}$, $e(h) = e^{i\mu(h)}$, avec $\theta \in \mathcal{C}^k(\mathcal{I})$, et $\mu(h) \in \mathbb{R}$. C'est-à-dire qu'il existe une fonction ℓ à valeurs dans \mathbb{Z} , constante sur chaque \mathcal{I}_h , qu'on notera $\ell(h)$, telle que :

$$it \log |T'(x)| + i\theta \circ T(x) = i\theta(x) - i\mu(h) + 2i\ell(h)\pi$$

(en réalité, ℓ dépend a priori de x et h , mais par continuité, seulement de h), soit :

$$\log |T'(x)| + \frac{1}{t}\theta \circ T(x) = \frac{1}{t}\theta(x) - \frac{\mu(h)}{t} + 2\frac{\ell(h)\pi}{t}$$

On conclut en prenant l'exponentielle et en posant $f = e^{\theta/t} > 0$, $f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{I})$ et $d(h) = e^{(\mu(h) - 2\ell(h)\pi)/t}$.

La réciproque se fait en reprenant la démonstration dans l'autre sens. On commence par prendre le logarithme dans 4.2. Il existe $f > 0$, $f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{I})$ tel que pour tout $h \in \mathcal{H}^*$, il existe $d(h) > 0$, tels que :

$$\log |T'(x)| + \log f \circ T(x) = \log f(x) - \log d(h),$$

(tout est réel, donc pas de déphasage $2i\ell\pi$ en plus), et donc on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$it \log |T'(x)| + it \log f \circ T(x) = it \log f(x) - it \log d(h).$$

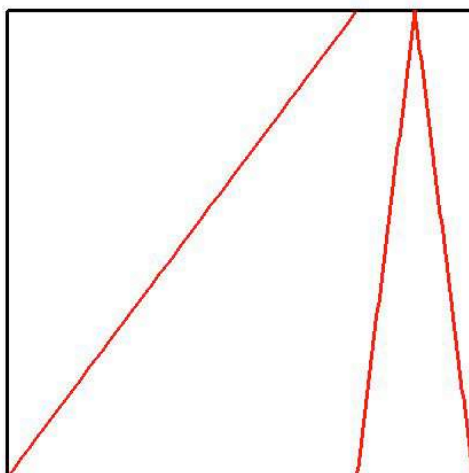
Pour n'importe quelle valeur de t et de $\ell(h)$, on peut trouver $\mu(h)$ telle que :

$$-t \log d(h) = -\mu(h) + 2\ell(h)\pi,$$

et on pose $g = f^{it}$ et $e(h) = e^{i\mu(h)}$. □

On va considérer différents exemples, en prenant différentes fonctions f dans l'équation 4.1.

Exemple 1 : $f \equiv 1$. Alors pour tout $h \in \mathcal{H}$, $|h'(x)|$ est constant, c'est-à-dire $h'(x)$ constant, et donc on retrouve les systèmes à branches affines (sans mémoire).



Exemple 2 : $f(x) = x$. Alors pour tout $h \in \mathcal{H}$, il existe $d(h) > 0$ tel que : pour tout $x \in \mathcal{I}$:

$$|h'(x)|h(x) = d(h) \cdot x.$$

Si la branche est croissante, l'équation différentielle devient :

$$h'(x) \cdot h(x) = d(h) \cdot x,$$

qui se résout en :

$$h(x) = \sqrt{K(h) + d(h)x^2}.$$

Si la branche est décroissante, l'équation différentielle devient :

$$h'(x) \cdot h(x) = -d(h) \cdot x,$$

qui se résout en :

$$h(x) = \sqrt{K(h) - d(h)x^2}.$$

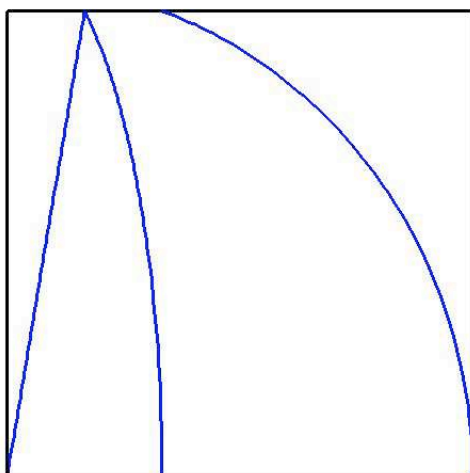
Par exemple, avec $\mathcal{I}_1 =]0, 1/6[$, $\mathcal{I}_2 =]1/6, 1/3[$, $\mathcal{I}_3 =]1/3, 1[$, en prenant la première branche croissante, et les 2 autres décroissantes, on obtient :

$$\begin{cases} h_1(x) = 1/6 \times x; \\ h_2(x) = \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{3}{4}x^2}; \\ h_3(x) = \sqrt{1 - \frac{8}{9}x^2}. \end{cases}$$

(les équations à résoudre sont $h_1(0) = 0$, $h_1(1) = 1/6$, $h_2(0) = 1/3$, $h_2(1) = 1/6$, $h_3(0) = 1$, $h_3(1) = 1/3$).

Et donc :

$$T(x) = \begin{cases} 6x & \text{sur } \mathcal{I}_1; \\ \sqrt{\frac{4}{3}(1 - 9x^2)} & \text{sur } \mathcal{I}_2; \\ \sqrt{\frac{9}{8}(1 - x^2)} & \text{sur } \mathcal{I}_3. \end{cases}$$



Exemple 3 : $f(x) = x^2$. Alors pour tout $h \in \mathcal{H}$, il existe $d(h) > 0$ tel que : pour tout $x \in \mathcal{I}$:

$$|h'(x)|h(x)^2 = d(h) \cdot x^2.$$

Si la branche est croissante, l'équation différentielle devient :

$$h'(x) \cdot h(x)^2 = d(h) \cdot x^2,$$

qui se résout en :

$$h(x) = \sqrt[3]{K(h) + d(h)x^3}.$$

Si la branche est décroissante, l'équation différentielle devient :

$$h'(x) \cdot h(x)^2 = -d(h) \cdot x^2,$$

qui se résout en :

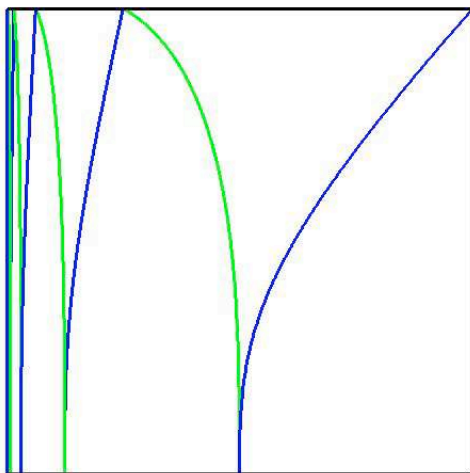
$$h(x) = \sqrt[3]{K(h) - d(h)x^3}.$$

Par exemple, en écrivant \mathcal{I} comme la réunion de $\mathcal{I}_n =]\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}[$ pour $n \geq 0$, en prenant les branches d'indices pairs croissantes et les branches d'indices impairs décroissantes, on obtient pour tout $k \geq 0$

$$\begin{cases} h_{2k}(x) = \frac{1}{2^{2k+1}} \sqrt[3]{1 + 7x^3}; \\ h_{2k+1}(x) = \frac{1}{2^{2k+1}} \sqrt[3]{1 - \frac{7}{8}x^3}. \end{cases}$$

Et donc :

$$T(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{8^{2k+1}x^3 - 1}{7}} & \text{sur } \mathcal{I}_{2k} \\ \sqrt[3]{\frac{8(1 - 8^{2k+1}x^3)}{7}} & \text{sur } \mathcal{I}_{2k+1} \end{cases}.$$



4.2 Condition nécessaire pour la périodicité

Proposition 4.3. *Si le système est périodique, alors il est \mathcal{C}^2 -conjugué à un système sans mémoire.*

Démonstration. D'après le théorème (A), si le système est périodique, alors il existe $t_0 > 0$ tel que 1 est valeur propre de \mathbf{H}_{1+it_0} , c'est-à-dire qu'il existe $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ de module 1 telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $h \in \mathcal{H}^n$, et pour tout $x \in \mathcal{I}$:

$$|h'(x)|^{it_0} f \circ h(x) = \eta^n f(x).$$

La proposition 4.2 prouve alors que le système est conjugué à un système sans mémoire. \square

4.3 Renforcement de la contraposée et condition UNI

Les conditions UNI fournissent une première condition suffisante sur le système, pour que la source soit apériodique avec de bonnes propriétés. Un système UNI est un système dans lequel les branches ont des formes très différentes les unes des autres. On commence par définir une notion de proximité entre les branches.

Définition 4.4. *Soient h et k deux branches inverses de même profondeur. On pose pour tout $x \in \mathcal{I}$,*

$$\psi_{h,k}(x) = \ln \left(\frac{|h'(x)|}{|k'(x)|} \right),$$

$$\Delta(h, k) = \inf_{x \in \mathcal{I}} |\psi'_{h,k}(x)| = \inf_{x \in \mathcal{I}} \left| \frac{h''(x)}{h'(x)} - \frac{k''(x)}{k'(x)} \right|.$$

Pour $h \in \mathcal{H}^n$, et $\eta > 0$, on note :

$$J(h, \eta) = \bigcup_{k \in \mathcal{H}^n, \Delta(h,k) \leq \eta} k(I).$$

On donne maintenant la définition des systèmes UNI.

Définition 4.5 (Systèmes UNI). *Soit (\mathcal{I}, T) un système dynamique de Bonne Classe, avec un coefficient de contraction ρ . On dit qu'il satisfait les conditions UNI (Uniform Non Integrability) si chaque branche inverse de T se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^3 , et :*

(a) *pour tout a ($0 < a < 1$), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $h \in \mathcal{H}^n$, on a*

$$|J(h, \rho^{an})| \ll \rho^{an};$$

(b) $Q := \sup\{|\psi''_{h,k}(x)|; n \geq 1, h, k \in \mathcal{H}^n, x \in \mathcal{I}\} < \infty$.

La condition (a) nous dit que la somme des longueurs des intervalles fondamentaux associés aux branches proches de h , est de l'ordre de la longueur maximale des intervalles fondamentaux de profondeur n . Elle peut se reformuler en

$$\forall \hat{\rho} \text{ tel que } \rho < \hat{\rho} < 1, \exists C > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall h \in \mathcal{H}^n, |J(h, \hat{\rho}^n)| \leq C \hat{\rho}^n.$$

Pour les systèmes dynamiques à branches affines, tous les $\Delta(h, k)$ sont nuls, et donc

$$\forall \eta > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall h \in \mathcal{H}^n, J(h, \eta) = \mathcal{I}.$$

En fait, même les systèmes conjugués à un système à branches affines ne peuvent pas être UNI, comme l'énonce la proposition suivante. C'est-à-dire qu'UNI est bien un renforcement du fait que le système n'est pas \mathcal{C}^2 -conjugué à un système à branches affines. Les systèmes UNI qu'on a introduits, sont en un certain sens, le contraire des systèmes sans mémoire.

Proposition 4.6. *Une source \mathcal{C}^2 -conjuguée à une source à branche affine n'est pas UNI.*

Ceci constitue la proposition 1 p. 366 de [5], dont on reprend la preuve.

Démonstration. Soient $h, k \in \mathcal{H}^n$. Alors il existe $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{I})$ tel que la relation 4.1 est vraie pour les deux branches h_1 et h_2 . On prend alors le logarithme de chaque membre en posant $\hat{f} = \log f$, et on dérive. On obtient :

$$\begin{cases} \left| \frac{h''(x)}{h'(x)} \right| + \hat{f}' \circ h(x) \cdot h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}; \\ \left| \frac{k''(x)}{k'(x)} \right| + \hat{f}' \circ k(x) \cdot k'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \end{cases}$$

et donc

$$\begin{aligned} & \left| \left| \frac{h''(x)}{h'(x)} \right| - \left| \frac{k''(x)}{k'(x)} \right| \right| \\ &= \left| \hat{f}' \circ h(x) \cdot h'(x) - \hat{f}' \circ k(x) \cdot k'(x) \right| \\ &\leq |h'(x)| \cdot \left| \hat{f}' \circ h(x) - \hat{f}' \circ k(x) \right| + |h'(x) - k'(x)| \cdot |\hat{f}' \circ k(x)|, \end{aligned}$$

donc pour n assez grand, et pour $\hat{\rho} > \rho$, pour tous $h, k \in \mathcal{H}^n$,

$$\Delta(h, k) \leq \hat{\rho}^n,$$

et donc si n est assez grand : $J(h, \hat{\rho}^n) = \mathcal{I}$ ce qui prouve que le système n'est pas UNI. \square

Maintenant qu'on a expliqué que la condition UNI constituait un renforcement du fait que le système n'est pas conjugué-affine, mentionnons des travaux qui prouvent que la condition UNI suffit à prouver une très bonne discipline de la source.

- ▶ Dolgopyat, repris et explicité par Baladi et Vallée ([5]) a montré que sous la condition UNI, le quasi-inverse de l'opérateur tangent pouvait être prolongé analytiquement sur une bande à gauche de $\{\Re(s) = 1\}$ avec une croissance polynomiale.
- ▶ Vallée et Cesaratto ([12]) ont montré que sous la condition UNI, alors la source était S-disciplinée. Ceci constitue une condition géométrique sur la forme des branches.

Théorème 4.7 (Dolgopyat, Baladi, Cesaratto, Vallée). *Considérons un système dynamique UNI de Bonne Classe. Alors il existe $\delta_0 > 0$ tel que les quasi-inverses des opérateurs tangents et sécants, respectivement sur $(\mathcal{C}^1(\mathcal{I}), \|\cdot\|_{1,1})$ et $(\mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I}), \|\cdot\|_{1,1})$, ainsi que la série Dirichlet $\Lambda(s)$, ont un pôle simple en $s = 1$, n'ont pas d'autres singularités sur le demi-plan $\{\delta_0 < \Re(s)\}$ et ont une croissance polynomiale sur $\{\delta_0 + \epsilon < \Re(s)\}$ pour tout $\epsilon > 0$. C'est-à-dire que la condition UNI est une condition suffisante pour la S-discipline de la source.*

Les espaces fonctionnels et les normes qui interviennent dans ce théorème sont précisés au chapitre 6.

Chapitre 5

Résultats de la thèse : conditions arithmétiques pour la discipline

Sommaire

5.1	Arithmétique sur les branches	101
5.1.1	Points fixes	101
5.1.2	Rapports considérés	102
5.2	Conditions nécessaires pour la périodicité	104
5.2.1	Rationalité	104
5.2.2	Un contre-exemple pour bien comprendre la définition	109
5.2.3	Théorème (C)	110
5.3	Renforcement de la contraposée et exposant d'irrationalité	114
5.3.1	Exposant d'irrationalité	114
5.3.2	Approximations simultanées	116
5.3.3	Résultats de la thèse	120

Ce chapitre est consacré au deuxième type de condition suffisante annoncé pour assurer un bon comportement des pôles du quasi-inverse des opérateurs et de la série de Dirichlet : cette fois il s'agit de conditions arithmétiques sur les branches, qui permettent de conclure que la source est H-disciplinée.

5.1 Arithmétique sur les branches

Dans cette section, on va introduire les systèmes rationnels. On va donner deux conditions nécessaires, c'est-à-dire deux conséquences, à la rationalité d'un système. Réunies, les conditions nécessaires prouvées (2-rationalité et conjugaison à un système sans mémoire exposée au chapitre 4 précédent) sont suffisantes pour la réciproque.

5.1.1 Points fixes

Chaque branche inverse étant bijective (la branche inverse associée au préfixe w est bijective de \mathcal{I}_w dans $]0, 1[$), elle possède un unique point fixe, ce qui donne lieu à la définition suivante.

Définition 5.1. *Pour tout $h \in \mathcal{H}^*$, on note h^* l'unique point fixe de h . C'est-à-dire que $h^* \in h(\mathcal{I})$ vérifie la relation*

$$h(h^*) = h^*.$$

Les points fixes vont jouer un rôle essentiel dans la suite.

En effet, d'après le théorème (A), η est une valeur propre de \mathbf{H}_{1+it} si et seulement si η^{-1} est une valeur propre de \mathbf{M}_t . En considérant une fonction propre f , cela a lieu si et seulement si pour tout $n > 0$, pour tout $h \in \mathcal{H}^n$ et pour tout $x \in \mathcal{I}$:

$$|h'(x)|^{-it} f(x) = \eta^{-n} f \circ h(x),$$

et ce qui évalué en h^* donne :

$$|h'(x)|^{-it} f(h^*) = \eta^{-n} f \circ h(h^*) = \eta^{-n} f(h^*).$$

Mais d'après le théorème (A), f est de module constant, donc en divisant par $f(h^*)$, on obtient :

$$|h'(x)|^{it_0} = \eta^n. \quad (5.1)$$

Dans le cas de l'opérateur sécant, toujours d'après le théorème (A), si η est une valeur propre de \mathbf{H}_{1+it} , alors η^{-1} est une valeur propre de \mathbf{M}_{t_0} (sans réciproque). En notant \underline{f} une fonction propre de \mathbf{H}_{1+it} , $\text{diag } \underline{f}$ est alors une fonction propre de \mathbf{M}_{t_0} de module constant.

Alors pour tout $x \in \mathcal{I}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $h \in \mathcal{H}^n$:

$$|h'(x)|^{-it_0} \text{diag } \underline{f}(h(x)) = \eta^{-n} \text{diag } \underline{f}(x).$$

En particulier pour $x = h^*$, comme $\text{diag } \underline{f}$ est de module constant et on retombe sur 5.1.

Ceci est le point de départ pour prouver le théorème (C).

5.1.2 Rapports considérés

Définition 5.2. *Soient h_1, h_2, h_3 trois branches inverses de profondeur respectives $p(h_1), p(h_2)$ et $p(h_3)$. On considère les rapports suivants (quand ils existent) :*

$$c(h_1) := -\frac{\log |h'_1(h_1^*)|}{p(h_1)}, \quad c(h_1, h_2) = \frac{c(h_2)}{c(h_1)} = \frac{\log |h'_2(h_2^*)|}{\log |h'_1(h_1^*)|} \times \frac{p(h_1)}{p(h_2)},$$

$$c(h_1, h_2, h_3) = \frac{c(h_1) - c(h_3)}{c(h_1) - c(h_2)} = \frac{\log |h'_1(h_1^*)| - \log |h'_3(h_3^*)|}{\log |h'_1(h_1^*)| - \log |h'_2(h_2^*)|} \times \frac{p(h_3)}{p(h_2)}.$$

Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $h \in \mathcal{H}^*$. On notera

$$h^{(d)} = h \circ \dots \circ h$$

(h composé d fois avec lui-même).

D'abord une remarque sur la valeur de la dérivée d'une composée au point fixe.

Lemme 5.3. *Soit $h \in \mathcal{H}^*$ et $d \in \mathbb{N}^*$. Alors h^* est le point fixe de $h^{(d)}$ et*

$$h^{(d)'}(h^*) = h'(h^*)^d.$$

Pour tout $h \in \mathcal{H}^*$, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$,

$$c(h^{(d)}) = c(h).$$

Démonstration. La preuve est faite par récurrence sur d . Supposons que pour un certain $d > 0$,

$$h^{(d)'}(h^*) = h'(h^*)^d.$$

Alors,

$$h^{(d+1)'}(h^*) = h^{(d)'}(h(h^*))h'(h^*) = h^{(d)'}(h^*)h'(h^*) = h'(h^*)^d h'(h^*) = h'(h^*)^{d+1}.$$

La deuxième partie du lemme est une simple réécriture en se servant des nouvelles définitions. \square

Ce lemme montre qu'on peut se ramener à des branches de même profondeur quand on considère les propriétés d'approximabilité.

En effet, soient h_1 et h_2 deux branches inverses de profondeur respectives $p(h_1)$ et $p(h_2)$. On note $n = \text{ppcm}(p(h_1), p(h_2))$, et d_1, d_2 , tel que $n = d_1 p(h_1) = d_2 p(h_2)$. Alors $\tilde{h}_1 := h_1^{d_1}$ et $\tilde{h}_2 := h_2^{d_2}$ sont de même profondeur n , et vérifient :

$$c(h_1, h_2) = c(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2).$$

Et de même avec trois branches. Si h_1, h_2 et h_3 sont trois branches inverses, on peut trouver $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3$ de même profondeur telles que :

$$c(h_1, h_2, h_3) = c(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3).$$

Bien sûr, les propriétés de la **Bonne Classe** (lemme 1.13) n'impliquent pas que pour tout $h \in \mathcal{H}^*$, pour tout $x \in \mathcal{I}$, $|h'(x)| \leq 1$ (ou de façon duale, on n'a pas pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathcal{I}$, $|T'(x)| \geq 1$). Cependant, en un certain sens, le meilleur des cas est atteint en les points fixes des branches, comme l'explique le lemme suivant :

Lemme 5.4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $h \in \mathcal{H}^n$, $|h'(h^*)| \leq \rho^n < 1$ et donc $c(h) \leq \rho$.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $h \in \mathcal{H}^n$ tels que $|h'(h^*)| > \rho^n$. Alors il existe $\hat{\rho} > \rho$ tel que $|h'(h^*)| > \hat{\rho}^n$.

D'après le lemme 5.3, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$\left| h^{(k)'}(h^*) \right| = |h'(h^*)|^k > \hat{\rho}^{kn}.$$

Ceci montre que

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \left| h^{(k)'}(h^*) \right|^{1/kn} > \hat{\rho}$$

et donc la définition de la **Bonne Classe** est contredite.

Pour prouver $c(h) \leq \rho$, il suffit de prendre le log et de se ramener à la définition. \square

Pour motiver les définitions particulières au cas des systèmes sans mémoire, retenons ce principe général pour la suite, qui sera justifié dans les lemmes 5.12 et 5.18.

Intuition 5.5. *Dans le cas des systèmes sans mémoire, on peut toujours se limiter à étudier des branches de profondeur 1.*

La sous-section 3.1 nous laisse penser que l'analogue des p_i du cas sans mémoire, est joué par les $|h'_i(h_i^*)|$ où h_i est une branche inverse de profondeur 1 et h_i^* son point fixe.

Définition 5.6. *Soient i, j, k trois indices de branches inverses de profondeur 1. On considère les quantités : $c_{\text{aff}}(i)$, $c_{\text{aff}}(i, j)$ et $c_{\text{aff}}(i, j, k)$ définies comme suit :*

$$c_{\text{aff}}(i) := -\log p_i, \quad c_{\text{aff}}(i, j) := \frac{\log p_j}{\log p_i},$$

$$c_{\text{aff}}(i, j, k) := \frac{\log p_i - \log p_k}{\log p_i - \log p_j}.$$

La définition est bien un cas particulier de la définition générale, car toute branche inverse affine est de dérivée constante (voir assertion 1.5).

Le lemme suivant donne le c d'une branche inverse affine de profondeur > 1 , en fonction des c_{aff} de ses composantes.

Lemme 5.7. *Soit $h = h_1 \circ h_2 \circ \dots \circ h_p$ une branche inverse affine de profondeur p , chacun des h_i étant une branche inverse affine de profondeur 1 indexée par k_i . Alors*

$$c(h) = \sum_{i=1}^p c_{\text{aff}}(k_i).$$

Démonstration. Découle des propriétés additives du logarithme et de la formule de dérivée de Leibniz. \square

5.2 Conditions nécessaires pour la périodicité

On va traiter dans cette section de l'approximabilité par des rationnels des rapports qu'on vient d'introduire, et on va voir comment relier ces propriétés d'approximabilité avec la périodicité de la source.

Dans toute la suite, on notera

- $[x]$ l'entier le plus proche de x , c'est-à-dire $[x] := \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$;
- et $\{x\} = x - [x]$ sa partie fractionnaire centrée, c'est-à-dire le représentant de x dans l'intervalle $] - 1/2; 1/2]$ modulo 1 (si on suppose que $x \notin \mathbb{Q}$, alors $\{x\} \notin \mathbb{Q}$).

5.2.1 Rationalité

La généralisation naturelle de l'intuition donnée à la sous-section 3.1 s'écrit :

Définition 5.8. *On dit que le système dynamique est 2-rationnel si pour toute profondeur p , pour tout $h_1 \in \mathcal{H}^p$, il existe $q \in \mathbb{Z}$ (dépendant de h_1), pour lequel $\{qc(h_1, h_2)\} = 0$ pour tout $h_2 \in \mathcal{H}^p$.*

On peut écrire les définitions équivalentes suivantes :

Proposition 5.9. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) le système dynamique est 2-rationnel ;
- (ii) pour toute profondeur p , il existe $h_1 \in \mathcal{H}^p$, tel que tous les éléments de l'ensemble $\{c(h_1, h_2) : h_2 \in \mathcal{H}^p\}$ sont rationnels avec un dénominateur commun ;
- (iii) pour toute profondeur p , pour tout $h_1 \in \mathcal{H}^p$, tous les éléments de l'ensemble $\{c(h_1, h_2) : h_2 \in \mathcal{H}^p\}$ sont rationnels avec un dénominateur commun.

Démonstration. On commence par prouver l'équivalence de (i) et (iii). Supposons que le système est 2-rationnel, et soit $p > 0$ et $h_1 \in \mathcal{H}^p$. Alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $h_2 \in \mathcal{H}^p$, $\{qc(h_1, h_2)\} = 0$. Autrement dit, $qc(h_1, h_2) \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire qu'il existe $\hat{q} \in \mathbb{Z}$ tel que

$$c(h_1, h_2) = \frac{\hat{q}}{q}.$$

Donc tous les $c(h_1, h_2)$ sont rationnels avec q comme dénominateur commun. Il suffit de remonter les arguments pour prouver la réciproque.

Prouvons maintenant l'équivalence de (iii) et (ii). Bien évidemment, (iii) implique (ii). Supposons que (ii) est vrai. Soient $p > 0$, et h_1 et h_2 deux branches inverses de \mathcal{H}^p . D'après (ii), il existe h_0 tel que $c(h_0, h_1)$ et $c(h_0, h_2)$ sont rationnels avec un dénominateur commun q , c'est-à-dire qu'il existe \hat{q}_1 et \hat{q}_2 tels que :

$$\begin{cases} c(h_0, h_1) = \frac{\hat{q}_1}{q}; \\ c(h_0, h_2) = \frac{\hat{q}_2}{q}. \end{cases}$$

Et donc

$$c(h_1, h_2) = \frac{c(h_0, h_2)}{c(h_0, h_1)} = \frac{\hat{q}_2}{\hat{q}_1},$$

c'est-à-dire que les éléments de l'ensemble $\{c(h_1, h_2), h_2 \in \mathcal{H}^p\}$ sont rationnels avec un dénominateur commun (c'est \hat{q}_1). □

Dans le cas d'un nombre fini de branches, on peut écrire encore d'autres définitions équivalentes plus simples, qui ne font pas intervenir de dénominateur commun :

- (i) le système dynamique est 2-rationnel ;
- (ii) pour toute profondeur p , il existe $h_1 \in \mathcal{H}^p$, tel que tous les éléments de l'ensemble $\{c(h_1, h_2) : h_2 \in \mathcal{H}^p\}$ sont rationnels ;
- (iii) pour toute profondeur p , pour tout $h_1 \in \mathcal{H}^p$, tous les éléments de l'ensemble $\{c(h_1, h_2) : h_2 \in \mathcal{H}^p\}$ sont rationnels.

Il suffit pour s'en convaincre de prendre le ppcm d'un nombre fini de dénominateurs.

On définit ensuite les systèmes 2-irrationnels :

Définition 5.10. *Un système dynamique 2-irrationnel est un système dynamique qui n'est pas 2-rationnel.*

On peut les caractériser à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 5.11. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) le système dynamique est 2-irrationnel ;

- (ii) il existe une profondeur p , telle que pour tout $h_1 \in \mathcal{H}^p$, il existe un élément de l'ensemble $\{c(h_1, h_2) : h_2 \in \mathcal{H}^p\}$ qui n'est pas rationnel, ou bien tous les éléments de cet ensemble sont rationnels, mais sans dénominateur commun ;
- (iii) il existe une profondeur p , et une branche inverse $h_1 \in \mathcal{H}^p$, telles qu'il existe un élément de l'ensemble $\{c(h_1, h_2) : h_2 \in \mathcal{H}^p\}$ qui n'est pas rationnel, ou bien tous les éléments de cet ensemble sont rationnels, mais sans dénominateur commun.

Dans le cas sans mémoire, on peut donner une définition équivalente plus simple.

Lemme 5.12. *S'il existe $i_0 \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$\{qc_{\text{aff}}(i_0, k)\} = 0,$$

alors, le système est 2-rationnel.

Démonstration. Notons h_0 la branche inverse affine de profondeur 1 indexée par i_0 . Soit $p > 0$. Il suffit de montrer que pour tout $h \in \mathcal{H}^p$, tous les $c(h_0^p, h)$ sont rationnels avec dénominateur commun. En effet, on peut se contenter de faire la preuve avec ce seul $h_1 = h_0^p$ et la propriété sur $c(h_1, h)$ sera vérifiée pour tout $h_1 \in \mathcal{H}^p$ comme expliqué plus haut.

En notant p la profondeur de h_1 , d'après le lemme précédent, $c(h_0, h_1)$ est de la forme :

$$c(h_0, h_1) = \frac{\sum_{i=1}^p c_{\text{aff}}(k_i)}{pc_{\text{aff}}(i_0)} = \sum_{i=1}^p \frac{c_{\text{aff}}(k_i)}{c_{\text{aff}}(i_0)} = \sum_{i=1}^p c_{\text{aff}}(i_0, k_i).$$

Or d'après l'hypothèse, tous les $c_{\text{aff}}(i_0, k_i) \in \mathbb{Q}$ avec le même dénominateur, ce qui permet de conclure. \square

On a donc montré que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) la source sans mémoire est 2-rationnelle ;
- (ii) il existe i_0 tel que tous les $c_{\text{aff}}(i_0, j)$ sont rationnels avec dénominateur commun ;
- (iii) pour tout i_0 , les $c_{\text{aff}}(i_0, j)$ sont tous rationnels avec dénominateur commun.

On définit aussi de façon analogue la 3-rationnalité, qui fait une hypothèse sur 3 branches inverses au lieu de 2.

Définition 5.13. *On dit que le système dynamique est 3-rationnel si pour toute profondeur p , pour tous $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^p$, il existe $q \in \mathbb{Z}$ (dépendant de p , de h_1 et de h_2), pour lequel $\{qc(h_1, h_2, h_3)\} = 0$ pour tout $h_3 \in \mathcal{H}^p$.*

On peut écrire les définitions équivalentes suivantes :

Proposition 5.14. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) le système dynamique est 3-rationnel ;
- (ii) pour toute profondeur p , il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^p$, tel que tous les éléments de l'ensemble $\{c(h_1, h_2, h_3) : h_3 \in \mathcal{H}^p\}$ sont rationnels avec un dénominateur commun ;

(iii) pour toute profondeur p , pour tous $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^p$, tous les éléments de l'ensemble $\{c(h_1, h_2, h_3) : h_3 \in \mathcal{H}^p\}$ sont rationnels avec un dénominateur commun.

Démonstration. On commence par prouver l'équivalence de (i) et (iii). Supposons que le système est 3-rationnel, soient $p > 0$ et $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^p$. Alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $h_3 \in \mathcal{H}^p$, $\{qc(h_1, h_2, h_3)\} = 0$. Autrement dit, $qc(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire qu'il existe $\hat{q} \in \mathbb{Z}$ tel que

$$c(h_1, h_2, h_3) = \frac{\hat{q}}{q}.$$

Donc tous les $c(h_1, h_2, h_3)$ sont rationnels avec q comme dénominateur commun. Il suffit de remonter les arguments pour prouver la réciproque.

Prouvons maintenant l'équivalence de (iii) et (ii). Bien évidemment, (iii) implique (ii). Supposons que (ii) est vrai. Soient $p > 0$, et h_1, h_2 et h_3 trois branches inverses de \mathcal{H}^p . D'après (ii), il existe h_{01} et h_{02} tels que $c(h_{01}, h_{02}, h_1)$, $c(h_{01}, h_{02}, h_2)$ et $c(h_{01}, h_{02}, h_3)$ sont rationnels avec un dénominateur commun q , c'est-à-dire qu'il existe \hat{q}_1, \hat{q}_2 et \hat{q}_3 tels que :

$$\begin{cases} c(h_{01}, h_{02}, h_1) = \frac{\hat{q}_1}{q} \\ c(h_{01}, h_{02}, h_2) = \frac{\hat{q}_2}{q} \\ c(h_{01}, h_{02}, h_3) = \frac{\hat{q}_3}{q}. \end{cases}$$

Et donc

$$c(h_1, h_2, h_3) = \frac{c(h_{01}, h_{02}, h_3) - c(h_{01}, h_{02}, h_1)}{c(h_{01}, h_{02}, h_2) - c(h_{01}, h_{02}, h_1)} = \frac{\hat{q}_3 - \hat{q}_1}{\hat{q}_2 - \hat{q}_1},$$

c'est-à-dire que les éléments de l'ensemble $\{c(h_1, h_2, h_3), h_3 \in \mathcal{H}^p\}$ sont rationnels avec un dénominateur commun (c'est $\hat{q}_2 - \hat{q}_1$). \square

Dans le cas d'un nombre fini de branches, on peut écrire encore d'autres définitions équivalentes.

- (i) le système dynamique est 3-rationnel ;
- (ii) pour toute profondeur p , il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^p$, tel que tous les éléments de l'ensemble $\{c(h_1, h_2, h_3) : h_3 \in \mathcal{H}^p\}$ sont rationnels ;
- (iii) pour toute profondeur p , pour tous $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^p$, tous les éléments de l'ensemble $\{c(h_1, h_2, h_3) : h_3 \in \mathcal{H}^p\}$ sont rationnels.

Là encore, il suffit pour s'en convaincre de prendre le ppcm d'un nombre fini de dénominateurs.

On définit ensuite les systèmes 3-irrationnels :

Définition 5.15. *Un système dynamique 3-irrationnel est un système dynamique qui n'est pas 3-rationnel.*

On peut les caractériser à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 5.16. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) le système dynamique est 3-irrationnel ;
- (ii) il existe une profondeur p , telle que pour tous $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^p$, il existe un élément de l'ensemble $\{c(h_1, h_2, h_3) : h_3 \in \mathcal{H}^p\}$ qui n'est pas rationnel, ou bien tous les éléments de cet ensemble sont rationnels, mais sans dénominateur commun ;

(iii) il existe une profondeur p , et deux branches inverses $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^p$, telles qu'il existe un élément de l'ensemble $\{c(h_1, h_2, h_3) : h_3 \in \mathcal{H}^p\}$ qui n'est pas rationnel, ou bien tous les éléments de cet ensemble sont rationnels, mais sans dénominateur commun.

Voici maintenant le lien entre 2-rationnalité et 3-rationnalité. Ce lien ne subsistera pas entre 2-DIOP et 3-DIOP.

Lemme 5.17. *Un système 2-rationnel est aussi 3-rationnel.*

Démonstration. Soient h_1 et h_2 deux branches inverses.

Alors par définition :

$$c(h_1, h_2, h_3) = \frac{c(h_1) - c(h_3)}{c(h_1) - c(h_2)} = \frac{1 - c(h_1, h_3)}{1 - c(h_1, h_2)}.$$

Si on suppose que le système est 2-rationnel, alors il existe $q_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout h_3 , il existe $q_3 \in \mathbb{N}$ tel que $c(h_1, h_3) = q_3/q_1$, et il existe q_2 tel que $c(h_1, h_2) = q_2/q_1$.

C'est-à-dire qu'on obtient :

$$c(h_1, h_2, h_3) = \frac{1 - \frac{q_3}{q_1}}{1 - \frac{q_2}{q_1}} = \frac{q_1 - q_3}{q_1 - q_2}.$$

Quand h_1 et h_2 sont fixés, le dénominateur $q_1 - q_2$ est commun. □

Le lemme suivant est l'analogie du lemme 5.12 pour la 3-rationnalité dans le cas des systèmes sans mémoire :

Lemme 5.18. *S'il existe $i_0, i_1 \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$\{qc_{\text{aff}}(i_0, i_1, k)\} = 0,$$

alors, le système est 3-rationnel.

Démonstration. Notons h_0 et h_1 les branches inverses de profondeur 1 indexées par i_0 et i_1 . Soit $p > 0$. D'après la proposition 5.14, pour montrer que le système est 3-rationnel, il suffit de montrer que pour tout $h \in \mathcal{H}^*$, les $c(h_0^p, h_1^p, h)$ sont rationnels avec un dénominateur commun.

En notant p la profondeur de h , d'après le lemme précédent, $c(h_0, h_1, h)$ est de la forme :

$$c(h_0, h_1, h) = \frac{pc_{\text{aff}}(i_0) - \sum_{i=1}^p c_{\text{aff}}(k_i)}{pc_{\text{aff}}(i_0) - pc_{\text{aff}}(i_1)} = \sum_{i=1}^p \frac{c_{\text{aff}}(i_0) - c_{\text{aff}}(k_i)}{c_{\text{aff}}(i_0) - c_{\text{aff}}(i_1)} = \sum_{i=1}^p c_{\text{aff}}(i_0, i_1, k_i).$$

Or d'après l'hypothèse, tous les $c_{\text{aff}}(i_0, i_1, k_i) \in \mathbb{Q}$ avec le même dénominateur, ce qui permet de conclure. □

On a donc montré que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) la source sans mémoire est 3-rationnelle;
- (ii) il existe i_0, i_1 tel que tous les $c_{\text{aff}}(i_0, i_1, k)$ sont rationnels avec dénominateur commun;
- (iii) pour tous i_0, i_1 , les $c_{\text{aff}}(i_0, i_1, k)$ sont tous rationnels avec dénominateur commun.

Définition 5.19. *Dans la suite, on parlera de rationalité et d'irrationalité de la famille \mathbf{p} de probabilités associée à un système sans mémoire, et non plus seulement de rationalité et d'irrationalité du système dynamique. Et quand on parlera de rationalité ou d'irrationalité d'une famille, il s'agira de 2-rationalité.*

Ainsi, des familles de probabilités comme $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, et $(\varphi^{-1}, \varphi^{-2})$, avec φ le nombre d'or, sont rationnelles.

Donnons à titre anecdotique les premiers termes de la série de Dirichlet associée à cette dernière famille $(\varphi^{-1}, \varphi^{-2})$. Le nombre d'or est solution de l'équation en X , $X^2 - X - 1 = 0$, et on retrouve les nombres de Fibonacci...

$$\begin{aligned} \Lambda(s) &= \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{\varphi}\right)^s - \left(\frac{1}{\varphi^2}\right)^s} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^s + 2\left(\frac{1}{\varphi^2}\right)^s + 3\left(\frac{1}{\varphi^3}\right)^s + 5\left(\frac{1}{\varphi^4}\right)^s + 8\left(\frac{1}{\varphi^5}\right)^s + 13\left(\frac{1}{\varphi^6}\right)^s + \dots \\ &= 1 + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^s + 2\left(\frac{1}{\varphi+1}\right)^s + 3\left(\frac{1}{2\varphi+1}\right)^s + 5\left(\frac{1}{3\varphi+2}\right)^s \\ &+ 8\left(\frac{1}{5\varphi+3}\right)^s + 13\left(\frac{1}{8\varphi+5}\right)^s + \dots \end{aligned}$$

5.2.2 Un contre-exemple pour bien comprendre la définition

Il faut être prudent, car dans le cas général, si l'alphabet est infini, tous les $c(h, k)$ peuvent être rationnels (avec h fixé et k qui varie, de même profondeur), sans que le système soit 2-rationnel. Terminons cette partie en donnant un contre-exemple dans le cas sans mémoire.

Supposons qu'on ait un pôle autre que $s = 1$ sur $\{\Re(s) = 1\}$. C'est à dire qu'on a

$$\lambda(1 + it) = 1$$

pour $t \neq 1$, ce qui s'écrit encore

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k^{1+it} = 1.$$

Ceci n'est possible que si chaque terme de la somme a même argument, c'est à dire que pour tout k , il existe $q_k \in \mathbb{Z}$, $q_k \neq 0$ tel que $c_{\text{aff}}(k)t = 2\pi q_k$. Et donc nécessairement tous les $c_{\text{aff}}(k, j)$ sont rationnels. Mais, l'existence des vecteurs (q_1, q_2, \dots) n'est pas garantie.

En fait, avoir tous les $c_{\text{aff}}(k, j)$ rationnels est une condition nécessaire pour avoir d'autres pôles que $s = 1$ sur $\Re(s) = 1$, ou, ce qui revient au même, une condition nécessaire pour avoir $\lambda(s)$ périodique, mais ce n'est pas une condition suffisante.

En effet, on doit avoir simultanément pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\log p_k}{\log p_1} = \frac{q_k}{q_1}.$$

Mais il peut arriver que le dénominateur de $\frac{\log p_k}{\log p_1}$ écrit sous forme de fraction irréductible tende vers l'infini avec k . Donc à plus forte raison (q_k/q_1) n'est pas forcément une fraction irréductible, q_1 est plus grand que n'importe quel entier, ce qui n'est pas possible.

Lemme 5.20. *Il existe un système dynamique de Bonne Classe qui n'est pas 2-rationnel, et pour lequel tous les $c(h, k)$ avec $h, k \in \mathcal{H}^*$ sont rationnels.*

Démonstration. Pour construire un contre-exemple, il suffit de prendre un vecteur $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$ tel que pour tout $k \geq 2$, $\frac{\log p_k}{\log p_1} = \frac{(k-1)^2}{k}$. Or $k-1$ et k sont premiers entre eux, donc la fraction $\frac{(k-1)^2}{k}$ est irréductible, avec son dénominateur k tendant vers l'infini. Il ne reste plus qu'à vérifier qu'on peut trouver un vecteur \mathbf{p} qui vérifie ces relations. La première probabilité p_1 doit être solution de l'équation en X :

$$X + \sum_{k \geq 2} X^{(k-1)^2/k} = 1.$$

La fonction $X \mapsto X + \sum_{k \geq 2} X^{(k-1)^2/k}$ vaut 0 en $X = 0$. Pour $0 < X < 1$, on se ramène à une intégrale, plus facile à étudier qu'une série. On écrit :

$$\int_1^{+\infty} X^{(t-1)^2/t} dt \leq \sum_{k \geq 2} X^{(k-1)^2/k} \leq \int_2^{+\infty} X^{(t-1)^2/t} dt.$$

Or pour tout $t \geq 1$,

$$t - 2 \leq \frac{(t-1)^2}{t} = t - 2 + \frac{1}{t} \leq t - 1.$$

Et donc :

$$\int_1^{+\infty} X^{t-1} dt \leq \sum_{k \geq 2} X^{(k-1)^2/k} \leq \int_2^{+\infty} X^{t-2} dt.$$

Or, $\int_1^{+\infty} X^t dt = \int_1^{+\infty} e^{-t \ln(1/X)} dt$ s'étudie grâce au changement de variable $u = t \ln(1/X)$, et donc on obtient :

$$\int_*^{+\infty} X^t dt = \frac{1}{\ln(1/X)} \int_*^{+\infty} e^{-u} du,$$

ce qui prouve que $\sum_{k \geq 2} X^{(k-1)^2/k}$ converge pour $X < 1$ et tend vers $+\infty$ pour $X \rightarrow 1$.

Remarquons que

$$\sum_{k \geq 2} X^{(k-1)^2/k} > \sum_{k \geq 2} X^k = \frac{X^2}{1-X},$$

et cette dernière quantité tend vers l'infini quand $X \rightarrow 1$, ce qui permet de montrer plus facilement la deuxième partie de l'énoncé ci-dessus.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut alors trouver $0 < p_1 < 1$, et par suite p_2, p_3, \dots ce qui termine la preuve de la validité du contre-exemple. □

5.2.3 Théorème (C)

On va voir ce que des considérations sur les valeurs propres de \mathbf{H}_{1+it} impliquent sur la rationalité de la source. Ce théorème a été la motivation pour l'introduction de h^* (voir sous-section 5.1.1). On repart de l'équation 5.1 établie alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall h \in \mathcal{H}^n, \quad |h'(x)|^{it_0} = \eta^n.$$

Les inconnues sont pour nous les $c(h)$.

- Dans le cas de la valeur propre $\eta = 1$, l'équation n'a qu'une seule inconnue : c'est t . On utilise alors deux branches pour pouvoir l'éliminer. Dans le cas d'une valeur propre racine de l'unité, on peut aussi se contenter de deux branches.

- Mais dans le cas d'une valeur propre $\eta = e^{i\theta}$ quelconque, on en utilise trois, car il y a cette fois deux paramètres à éliminer : t et θ .

Théorème (C).

On peut établir les liens suivants entre le spectre de \mathbf{H} et la rationalité de la source.

- (i) S'il existe $t_0 \neq 0$ tel que 1 est une valeur propre de \mathbf{H}_{1+it_0} ou de $\underline{\mathbf{H}}_{1+it_0}$, alors le système est 2-rationnel. Et en fixant $h_0 \in \mathcal{H}^p$ une branche inverse, et en notant q_0 le plus petit dénominateur commun aux $\{c(h_0, h), h \in \mathcal{H}^p\}$, alors les t_0 sont des éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}\tau$ où

$$\tau = \frac{2\pi q_0}{\log |h'_0(h_0^*)|}.$$

La réciproque est vraie dans le cas des systèmes conjugués affines, et l'ensemble des t_0 convenables est alors exactement $\mathbb{Z}\tau$.

- (ii) Soit ξ racine de l'unité, qu'on note $\xi = e^{2i\pi a/b}$, où a et b sont pris premiers entre eux. S'il existe $t_0 \neq 0$ tel que ξ est une valeur propre de \mathbf{H}_{1+it_0} ou de $\underline{\mathbf{H}}_{1+it_0}$, alors le système est 2-rationnel.

- (iii) S'il existe $t_0 \neq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\theta}$ est valeur propre de \mathbf{H}_{1+it_0} ou $\underline{\mathbf{H}}_{1+it_0}$, alors le système est 3-rationnel. Et en fixant $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^p$ deux branches inverses, et en notant q_0 le plus petit dénominateur commun aux $\{c(h_1, h_2, h), h \in \mathcal{H}^p\}$, alors les t_0 sont des éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}\tau$, où

$$\tau = \frac{2\pi q_0 p}{c(h_1) - c(h_2)}.$$

Démonstration. (i) On trouve :

$$|h'(h^*)|^{it_0} = 1.$$

Pour que 1 soit valeur propre de \mathbf{M}_{t_0} il faut donc que pour tout $h \in \mathcal{H}^*$, il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que :

$$t_0 \log |h'(h^*)| = 2\ell\pi. \quad (5.2)$$

Soient h_0 et h_1 deux branches inverses de même profondeur. Alors il existe ℓ et $\ell_0 \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\begin{cases} t_0 \log |h'_0(h_0^*)| = 2\ell_0\pi \\ t_0 \log |h'_1(h_1^*)| = 2\ell_1\pi \end{cases}. \quad (5.3)$$

C'est à dire que $c(h_0, h_1) = \frac{\ell_1}{\ell_0}$ dès qu'il est défini. En fixant h_0 et en faisant varier h_1 , on aboutit bien la définition d'un système 2-rationnel, le dénominateur commun étant ℓ_0 .

Montrons maintenant où chercher les réels t_0 . A un réel t_0 correspond un entier ℓ_0 tel que $t_0 \log |h'_0(h_0^*)| = 2\ell_0\pi$ avec pour seule contrainte que ℓ_0 est un multiple de q_0 . En effet, pour que les équations 5.3 soient vérifiées, on doit avoir

$$\frac{\ell}{\ell_0} = c(h_0, h) = \frac{q}{q_0}.$$

Et donc à un pôle correspond un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\ell_0 = kq_0$, c'est-à-dire que t_0 est à chercher dans l'ensemble

$$\mathbb{Z}\tau, \quad \text{avec } \tau = \frac{2\pi q_0}{\log |h'_0(h_0^*)|}.$$

Réciproquement, si on suppose le système 2-rationnel, en fixant une branche de référence $h_0 \in \mathcal{H}^p$, il existe q_0 , qu'on prend le plus petit possible, tel que pour tout $h \in \mathcal{H}^p$, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $c(h, h_0) = \frac{q}{q_0}$. Soit $t_0 \in \tau \mathbb{Z}$. C'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$t_0 = \frac{2\pi k q_0}{\log |h'_0(h_0^*)|}.$$

On obtient alors :

$$t_0 \log |h'(h^*)| = t_0 c(h, h_0) \log |h'_0(h_0^*)| = 2\pi k q_0 c(h, h_0) = 2\pi k q,$$

et donc $|h'(h^*)|^{it_0} = 1$. Cela ne signifie pas dans le cas général que les fonctions constantes sont propres pour \mathbf{M}_{t_0} avec la valeur propre 1.

Mais dans le cas d'un système conjugué affine, c'est pourtant le cas. En effet, les h' sont alors des fonctions constantes, et donc pour tout $x \in \mathcal{I}$, $|h'(x)|^{it_0} = 1$.

(ii) La preuve utilise le fait que ξ est une racine de l'unité, ce qui fait qu'il ne constitue pas *un paramètre de plus à éliminer*.

On arrive à :

$$|h'(h^*)|^{it_0} = \xi^n = e^{2i\pi an/b},$$

et donc :

$$|h'(h^*)|^{ibt_0} = 1.$$

Comme dans le (i), on conclut que le système est 2-rationnel.

(iii) Suivant le modèle de ce qu'on a fait avant, on montre que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{H}^p$:

$$|h'(h^*)|^{it_0} = e^{ip\theta},$$

c'est-à-dire que qu'il existe $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\begin{cases} t_0 \log |h'_1(h_1^*)| = p\theta + 2\ell_1\pi \\ t_0 \log |h'_2(h_2^*)| = p\theta + 2\ell_2\pi \\ t_0 \log |h'_3(h_3^*)| = p\theta + 2\ell_3\pi \end{cases} . \quad (5.4)$$

En soustrayant, on élimine le paramètre θ et on obtient :

$$\begin{cases} t_0 (\log |h'_1(h_1^*)| - \log |h'_2(h_2^*)|) = 2\pi (\ell_1 - \ell_2) \\ t_0 (\log |h'_1(h_1^*)| - \log |h'_3(h_3^*)|) = 2\pi (\ell_1 - \ell_3) \end{cases} .$$

Il reste t_0 à éliminer. En faisant le quotient des deux lignes :

$$c(h_1, h_2, h_3) = \frac{\log |h'_1(h_1^*)| - \log |h'_3(h_3^*)|}{\log |h'_1(h_1^*)| - \log |h'_2(h_2^*)|} = \frac{\ell_1 - \ell_3}{\ell_1 - \ell_2}$$

c'est à dire que $c(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{Q}$ dès qu'il est défini, avec, en fixant h_1 et h_2 , et en faisant varier h_3 , le dénominateur commun $\ell_1 - \ell_2$, ce qui prouve que le système est 3-rationnel.

Réciproquement, si on suppose le système 3-rationnel, en fixant deux branches de référence $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^p$, il existe q_0 , qu'on prend le plus petit possible, tel que pour tout $h_3 \in \mathcal{H}^*$, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $c(h_1, h_2, h_3) = \frac{q}{q_0}$.

A un pôle correspond donc un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\ell_1 - \ell_2 = kq_0$, et donc t_0 est à chercher dans l'ensemble $\mathbb{Z}\tau$ avec

$$\tau = 2\pi q_0 (\log |h'_1(h_1^*)| - \log |h'_2(h_2^*)|)^{-1} = \frac{2\pi q_0 p}{c(h_1) - c(h_2)}.$$

□

On obtient donc, que si tous les $c(h, k)$ définis ne sont pas rationnels ou sont rationnels sans dénominateur commun, alors il n'y a pas d'autre pôle que $s = 1$ sur la droite $\{\Re(s) = 1\}$. Mais on ne peut assurer ni la croissance polynomiale ni l'analyticité de $((\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\sigma+it})^{-1})_t$ sans hypothèse supplémentaire. Des hypothèses supplémentaires vont donc être rajoutées sur le système dynamique, pour assurer des propriétés spectrales fines de \mathbf{M}_t . Le retour au quasi-inverse constituera ensuite une étape non triviale.

Dans le cas des systèmes sans mémoire, on a en fait des équivalences dans le théorème (C).

En effet, on peut montrer facilement que la rationalité de \mathbf{p} est équivalente à l'existence d'un nombre réel $a > 0$ tel que pour tout j , p_j est de la forme a^{e_j} avec $e_j \in \mathbb{N}^*$.

Dans ce cas, la valeur propre dominante $\lambda(s)$ de l'opérateur de transfert (voir chapitre 6) admet la période complexe $i\tau$, avec $\tau = 2\pi/|\log a|$, si bien que les racines de l'équation $\lambda(s) = 1$ sont invariantes par la translation $s \mapsto s + i\tau$, ce qui justifie la dénomination de système périodique (voir chapitre 2).

De plus, clairement, $s = 1$ est la seule racine réelle de l'équation $\lambda(s) = 1$. Ceci, avec la réciproque de l'inégalité triangulaire, permet de prouver le théorème suivant.

Théorème (C-sans mémoire). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *la famille de probabilités \mathbf{p} est rationnelle ;*
- (b) *la série de Dirichlet Λ a un autre pôle que $s = 1$ sur la droite $\Re(s) = 1$ contient un autre point que $s = 1$;*
- (c) *l'ensemble des pôles de Λ sur $\Re(s) = 1$ est de la forme $1 + i\tau\mathbb{Z}$ avec $\tau > 0$;*
- (d) *la fonction $\lambda(s)$ a une période imaginaire $i\tau$ avec $\tau > 0$.*

Et dans ce cas, en notant q le dénominateur commun aux $c_{\text{aff}}(1, j)$, on a :

$$\tau = \frac{2\pi q}{c_{\text{aff}}(1)}.$$

L'ensemble des familles rationnelles s'injecte dans l'ensemble dénombrable des nombres algébriques (à une famille on associe a algébrique tel que $\sum a^{e_j} = 1$), donc l'ensemble des familles rationnelles est dénombrable, donc de mesure nulle, c'est-à-dire que *les familles rationnelles sont exceptionnelles*. C'est-à-dire que le cas générique correspond à une famille de probabilité \mathfrak{p} irrationnelle.

5.3 Renforcement de la contraposée et exposant d'irrationalité

Pour marquer l'éloignement avec le cas rationnel, on ne va même plus autoriser les nombres complexes de module 1 à être des valeurs propres, et même pas à être des valeurs presque propres (3 branches, condition 3-DIOP), ou alors seulement s'ils sont loin des racines de l'unité (2 branches, condition 2-DIOP) dans un sens restant à préciser.

On obtiendra alors une condition plus forte, à savoir que non seulement le système n'est pas périodique, mais qu'en plus le quasi-inverse de l'opérateur tangent est à croissance polynomiale.

Pour conclure sur Λ (voir proposition 1.10), il suffit d'étudier le quasi-inverse de l'opérateur sécant.

5.3.1 Exposant d'irrationalité

Dans la suite, on aura besoin d'une notion plus forte que l'irrationalité, pour prouver un résultat plus fort que la non-périodicité de la source (en l'occurrence on voudrait prouver que la source est H-disciplinée) : on veut que les rapports $c(h_1, h_2)$ ou $c(h_1, h_2, h_3)$ ne soient « vraiment » pas rationnels. C'est à cet effet qu'on introduit les exposants d'irrationalité, qui permettent de « mesurer la non-rationalité ».

Définition 5.21. *L'exposant d'irrationalité $\mu(x)$ d'un réel $x > 0$, $x \notin \mathbb{Q}$ est défini par :*

$$\mu(x) = \sup \left\{ \begin{array}{l} \alpha, \quad \text{tels que l'inégalité } \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{2+\alpha}} \\ \text{est vérifiée pour une infinité de paires } (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \end{array} \right\}.$$

Retenons l'intuition suivante, qui sous-tend l'idée que les conditions DIOP sont des renforcements de l'irrationalité du système.

Intuition 5.22. *L'exposant d'irrationalité $\mu(x)$ est fini si et seulement si x est mal approximable par des rationnels. Et x est d'autant plus mal approximable que son exposant d'irrationalité est petit.*

On ne peut pas affirmer, dans le cas général, si le sup (quand où il est fini) dans la définition est atteint ou non : ça dépend du réel x .

Bien souvent, on ne connaît pas, ou il est difficile de calculer l'exposant d'irrationalité d'un réel. C'est pourquoi on introduit la définition suivante :

Définition 5.23. *On dit qu'un réel $x > 0$ est diophantien d'exposant ν s'il existe un réel $C > 0$ tel que l'inégalité*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^{2+\nu}}$$

soit vérifiée pour toute paire $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

Les définitions ci-dessus conduisent aux implications suivantes :

$$\mu(x) < \nu \Rightarrow x \text{ diophantien d'exposant } \nu \Rightarrow \mu(x) \leq \nu$$

qui nous permettent d'énoncer le critère suivant, qui servira à prouver les propositions 9.1, 9.2, 10.1, 10.2, 11.1, et 11.2.

Lemme 5.24. *S'il existe $C > 0$, tel que l'équation $\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{C}{q^{2+\alpha}}$ a une infinité de solutions en $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, alors x n'est pas diophantien d'exposant α et $\mu(x) \geq \alpha$.*

Démonstration. Soit $\alpha' < \alpha$. Alors, pour q assez grand :

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{C}{q^{2+\alpha}} \leq \frac{1}{q^{2+\alpha'}}.$$

Ceci prouve donc que $\mu(x) \geq \alpha'$ et ce pour tout $\alpha' < \alpha$. Donc forcément $\mu(x) \geq \alpha$. \square

Discutons un peu autour de la notion d'exposant d'irrationalité.

Un résultat simple stipule que pour tout nombre réel $x \notin \mathbb{Q}$, l'inégalité $\mu(x) \geq 0$ est vraie. De plus, pour tout quadruplet $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ vérifiant $cx + d \neq 0$, et $ac - bd \neq 0$, on a $\mu\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = \mu(x)$, c'est-à-dire que l'exposant d'irrationalité est invariant par homographie à coefficients dans \mathbb{Z} .

De nombreux réels β (tels que $\pi, \tan(1), \exp(-2), \zeta(3), \log(5)$) ont un exposant d'irrationalité fini. Ainsi, le théorème de Roth précise que tous les nombres algébriques (non rationnels) ont un exposant d'irrationalité nul.

La proposition suivante, qui découle du théorème de Baker (voir [1]), précise le domaine d'application des théorèmes 2-DIOP-sans mémoire et 3-DIOP-sans mémoire. On en donnera en fait une version plus générale (proposition 5.31 à venir).

Proposition 5.25. (i) *Si a et b sont deux nombres algébriques strictement positifs, alors l'exposant d'irrationalité de $\log a / \log b$ est fini et effectivement calculable.*

(ii) *au sens de la mesure de Lebesgue, un réel x non rationnel est presque sûrement d'exposant d'irrationalité nul.*

Ecrire une inégalité stricte ne change rien dans la définition. En effet, soit $(\alpha_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(x)$, telle que pour tout n , l'inégalité

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^{2+\alpha_n}}$$

a une infinité de solutions. Alors en posant $\alpha'_n = \alpha_n - \frac{\mu(x) - \alpha_n}{2} < \alpha_n$, l'inégalité

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^{2+\alpha_n}} < \frac{1}{q^{2+\alpha'_n}}$$

a aussi une infinité de solutions, et $\alpha'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(x)$.

On peut aussi reformuler la définition en :

$$\mu(x) = \sup \left\{ \alpha, |\{qx\}| \leq \frac{1}{q^{1+\alpha}} \text{ pour une infinité de } q \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

De façon duale, on peut écrire d'autres définitions équivalentes :

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \inf \left\{ \alpha, \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{2+\alpha}} \text{ a un nombre fini de solutions } (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \right\} \\ &= \inf \left\{ \alpha, \exists C > 0 \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{C}{q^{2+\alpha}} \text{ n'a pas de solution } (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \right\} \\ &= \inf \left\{ \alpha, |\{qx\}| \leq \frac{1}{q^{1+\alpha}} \text{ a un nombre fini de solutions } q \in \mathbb{N}^* \right\} \\ &= \inf \left\{ \alpha, \exists C > 0 |\{qx\}| \leq \frac{C}{q^{1+\alpha}} \text{ n'a pas de solution } q \in \mathbb{N}^* \right\}. \end{aligned}$$

Là, encore on peut prendre des inégalités strictes dans les définitions reformulées.

Voici maintenant les définitions des sources 2-DIOP et 3-DIOP qui seront largement utilisées dans la suite, et qui font intervenir les définitions précédentes.

Définition 5.26. *On dit qu'une source est 2-DIOP s'il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^*$ telles que le quotient $c(h_1, h_2)$ est irrationnel avec un exposant d'irrationalité fini.*

On dit qu'une source est 2-DIOP d'exposant μ s'il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^$ telles que le quotient $c(h_1, h_2)$ est irrationnel avec un exposant d'irrationalité μ .*

On dit qu'une source est 3-DIOP s'il existe $h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{H}^$ telles que le quotient $c(h_1, h_2, h_3)$ est irrationnel avec un exposant d'irrationalité fini.*

On dit qu'une source est 3-DIOP d'exposant μ s'il existe $h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{H}^$ telles que le quotient $c(h_1, h_2, h_3)$ est irrationnel avec un exposant d'irrationalité μ .*

5.3.2 Approximations simultanées, BSADs, et fonctions d'approximation

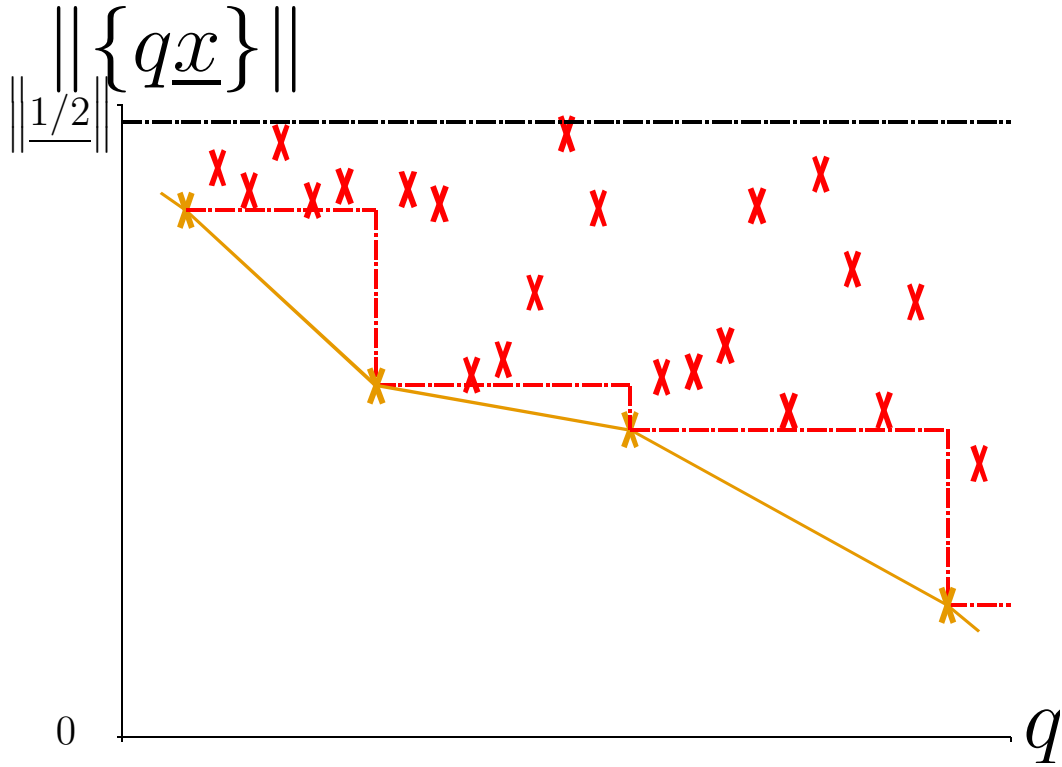
Pour traiter les systèmes sans mémoire avec alphabet fini, pour lesquels on obtiendra des résultats plus précis, on a aussi besoin de définitions plus précises, qu'on donne dans cette sous-section. On pourra consulter [35] et [8].

A un vecteur $\underline{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, on associe $\{\underline{x}\}$ qu'on définit comme le vecteur $\{\underline{x}\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_r\})$ des parties fractionnaires centrées des différentes coordonnées. On considère une norme sur \mathbb{R}^r notée $\|\cdot\|$ (rappelons que les toutes les normes sur \mathbb{R}^r sont équivalentes).

Fonction d'approximation et exposant d'irrationalité

On dit que l'entier Q est un *meilleur dénominateur d'approximation simultanée* (BSAD pour *best simultaneous approximation denominator*) du vecteur $\underline{x} \in \mathbb{R}^r$, si

$$\|\{Q\underline{x}\}\| < \|\{q\underline{x}\}\|, \quad \text{pour tout entier } q \text{ tel que } 0 < q < Q. \quad (5.5)$$



Les BSAD sont les records successifs d'approximation, c'est-à-dire des points avec une ordonnée $\|\{q\underline{x}\}\|$ qui n'est jamais aussi petite pour les q inférieurs.

FIG. 5.1 – Illustration sur les approximations successives et les BSAD

La définition de BSAD est illustrée sur le dessin de la figure 5.1, et avec l'exemple numérique de la figure 5.2.

L'existence, pour $\underline{x} \in \mathbb{R}^r \setminus \mathbb{Q}^r$, d'approximations arbitrairement bonnes est un résultat de base en théorie des nombres, qui implique que l'ensemble des BSAD est infini.

Définition 5.27. *Considérons un vecteur $\underline{x} \notin \mathbb{Q}^r$. La fonction d'approximation de \underline{x} est la fonction en escalier $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, constante sur chaque intervalle $[Q^-, Q^+[$ formé par deux BSAD successifs, et qui satisfait*

$$f(Q^-) = f(t) = \frac{1}{\|\{Q^- \underline{x}\}\|}, \quad \text{pour tout } t \in [Q^-, Q^+[,$$

et donc

$$f(q) \geq \frac{1}{\|\{q\underline{x}\}\|} \quad \text{pour tout } q \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Généralisant la définition 5.23, on dit que le vecteur $\underline{x} \notin \mathbb{Q}^r$ est diophantien d'exposant ν , s'il existe une fonction g de la forme $A_\nu t^{\nu+1}$ avec $A_\nu > 0$, qui satisfait pour tout $t \in \mathbb{R}_{>0}$, $g(t) \geq f(t)$, où f est la fonction d'approximation de \underline{x} .

Remarquons que comme toutes les normes sur \mathbb{R}^r sont équivalentes, cette notion est bien indépendante du choix de la norme utilisée.

Généralisant la définition 5.21, on définit l'exposant d'irrationalité $\mu_0(\underline{x}) \geq 0$ du vecteur \underline{x} comme la borne inférieure de l'ensemble des ν tels que \underline{x} est diophantien d'exposant ν . L'exposant d'irrationalité est pris infini, s'il n'existe pas de fonction d'approximation avec croissance polynomiale.

- 70 est un bon dénominateur pour $\sqrt{2}$: en effet $\{70\sqrt{2}\}$ est petit, c'est à dire que $70\sqrt{2}$ est proche d'un entier (en l'occurrence 99). On a alors :

$$70\sqrt{2} \approx 99 \Rightarrow \sqrt{2} \approx \frac{99}{70}$$

- 70 est en fait un BSAD : pour tout $q < 70$, $\{q\sqrt{2}\} > \{70\sqrt{2}\}$, c'est à dire que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| > \left| \sqrt{2} - \frac{99}{70} \right|$$

... et il faudra attendre $q = 169$ le BSAD suivant pour se rapprocher davantage de $\sqrt{2}$, c'est à dire que pour tout $99 < q < 169$, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| > \left| \sqrt{2} - \frac{99}{70} \right|.$$

Ici, on regarde l'approximation de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire un vecteur avec une seule coordonnée ($r = 1$).

FIG. 5.2 – Illustration de la notion de BSAD sur un exemple numérique

Là encore, on ne peut pas affirmer, dans le cas général, si la borne inférieure (quand elle existe) dans la définition est atteinte ou non : ça dépend du vecteur \underline{x} .

Quand $\mu_0(\underline{x})$ est fini, on dit que le vecteur \underline{x} est *diophantien* ; sinon, on dit qu'il est *de Liouville*.

De plus, on peut prouver le lemme suivant.

Lemme 5.28. *Soit \underline{x} diophantien, et $\theta < \mu_0(\underline{x})$. Il existe une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de BSAD de \underline{x} telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$f(q_n) \geq q_n^{\theta+1}.$$

Démonstration. Par l'absurde, dans le cas contraire, pour tout q BSAD assez grand,

$$f(q) < q^{\theta+1},$$

et donc il existe une constante A_θ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_{>0}$,

$$f(t) \leq A_\theta t^{\theta+1},$$

ce qui contredit la définition d'exposant d'irrationalité. □

Un exposant d'irrationalité fini indique que \underline{x} ne peut pas être *bien* approximé par des vecteurs rationnels avec un dénominateur commun.

Le lemme suivant fait le lien entre l'exposant d'irrationalité d'un vecteur, et l'exposant d'irrationalité de chacune de ses composantes. Il utilise le fait qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes à la norme infinie (sup des valeurs absolues).

Lemme 5.29. *L'exposant d'irrationalité μ_0 d'un vecteur $\underline{x} = (x_1, \dots, x_r)$ est égal au minimum des exposants d'irrationalité μ de ses coordonnées, c'est-à-dire :*

$$\mu_0(\underline{x}) = \min_{j \in \{1, \dots, r\}} \mu(x_j).$$

Cas particulier d'une famille de probabilités

Considérons une famille $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_r)$ irrationnelle de probabilités. La matrice $\mathcal{A} := (c_{\text{aff}}(k, \ell))$, a ses éléments diagonaux égaux à 1 (puisque $c_{\text{aff}}(k, k) = 1$). On note la ligne k de la matrice

$$\alpha^{(k)} := (c_{\text{aff}}(k, 1), \dots, c_{\text{aff}}(k, r)).$$

Chacun de ces vecteurs a au moins une coordonnée irrationnelle. On note f_k sa fonction d'approximation.

Puisque $c_{\text{aff}}(k, k) = 1 \in \mathbb{Z}$, on est en fait ramenés à approximer un vecteur à $r - 1$ coordonnées réelles.

La définition suivante sera largement utilisée dans la suite.

Définition 5.30 (fonction d'approximation globale). *Pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, on considère une norme (qui peut dépendre de k) et la fonction d'approximation f_k de $\alpha^{(k)}$ relative à cette norme. On définit alors la fonction d'approximation globale F relative à la famille de normes*

$$F(t) := \min_{k \in \{1, \dots, r\}} \left\{ f_k \left(\frac{c_{\text{aff}}(k)t}{2\pi} \right) \right\}. \quad (5.6)$$

On peut prouver de façon élémentaire (voir la section 12.5) que ces fonctions d'approximations f_k sont similaires dans un certain sens qu'on précisera. En conséquence, s'il existe k tel que $\alpha^{(k)}$ a un exposant d'irrationalité fini, alors tous les $\alpha^{(\ell)}$ ont le même exposant d'irrationalité, qu'on appelle alors *exposant d'irrationalité de la famille de probabilités* $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_r)$.

De nombreux résultats sont connus sur les exposants d'irrationalité. On en rappelle deux importants ici, qui précisent le domaine d'application du théorème DIOP-sans mémoire-fini. Cette proposition est une généralisation de la proposition 5.25 : le cas $r = 2$ correspond à un vecteur à approximer à une seule coordonnée, c'est-à-dire un réel. Et de fait en prenant $r = 2$, on retrouve bien la proposition 5.25.

Proposition 5.31. *L'exposant d'irrationalité $\mu_0(\mathbf{p})$ d'une famille irrationnelle $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_r)$ satisfait les assertions suivantes :*

- (i) *il est fini et effectivement calculable, si les probabilités p_i sont algébriques ;*
- (ii) *au sens de la mesure de Lebesgue (sur le domaine formé par l'ensemble des $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_r)$ tel que $p_j > 0$ et $p_1 + \dots + p_r = 1$), il satisfait presque sûrement l'égalité*

$$\mu_0(\mathbf{p}) = 1/(r - 1) - 1.$$

Démonstration. (i) C'est une conséquence directe du théorème de Baker (voir [1]) qui implique en particulier que tout rapport irrationnel $\rho := \log a / \log b$ avec a, b algébriques admet un exposant d'irrationalité (effectivement calculable).

(ii) La preuve est basée sur un résultat classique d'approximation diophantienne qui généralise le théorème de Khinchin sur les fractions continues.

Ce théorème affirme qu'étant donnée une fonction décroissante $\psi(q)$, l'ensemble des solutions des inégalités simultanées $|\{qy_j\}| < \psi(q)$, pour $1 \leq j \leq n$, est presque sûrement (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\{(y_1, \dots, y_n) \in [0, 1]^n\}$) fini si $\sum \psi(q)^n$ diverge ; et l'ensemble des solutions est presque sûrement infini si $\sum_{q \in \mathbb{N}^*} \psi(q)^n$ converge.

Ici, à cause du fait que $\alpha_{k,k} = 1$, notre problème est en réalité un problème en dimension $(r - 1)$, c'est-à-dire que $n = r - 1$. Avec $a > 1/(r - 1)$ et $\psi(q) = q^{-a}$, on a alors pour un certain

$\epsilon > 0$,

$$\sum_{q \in \mathbb{N}^*} \psi(q)^{r-1} = \sum_{q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{q^{a(r-1)}} = \sum_{q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{q^{1+\epsilon}} < +\infty.$$

Et si $a \leq 1/(r-1)$, la série $\sum_{q \in \mathbb{N}^*} \psi(q)^{r-1}$ diverge. Cela signifie que presque sûrement, l'exposant d'irrationalité de \mathfrak{p} est

$$\mu_0(\mathfrak{p}) = \frac{1}{r-1} - 1.$$

□

5.3.3 Résultats de la thèse

Les théorèmes principaux de la thèse permettent de conclure à la H -discipline de la source supposée de Bonne Classe. Les hypothèses varient suivant les théorèmes :

- ▶ Le théorème (3-DIOP) conclut pour les systèmes dynamiques généraux avec condition arithmétique 3-DIOP
→ preuve au chapitre 10.
- ▶ Le théorème (2-DIOP) conclut pour les systèmes dynamiques généraux avec condition arithmétique 2-DIOP
→ preuve au chapitre 10.
- ▶ Le théorème (3-DIOP-sans mémoire) conclut pour les systèmes dynamiques sans mémoire avec condition arithmétique 3-DIOP
→ preuve au chapitre 11.
- ▶ Le théorème (2-DIOP-sans mémoire) conclut pour les systèmes dynamiques sans mémoire avec condition arithmétique 2-DIOP
→ preuve au chapitre 11.
- ▶ Le théorème (2-DIOP-sans mémoire-fini) conclut pour les systèmes dynamiques sans mémoire avec alphabet fini
→ preuve au chapitre 12.

En réalité, on énoncera et montrera aussi dans le chapitre 9 les théorèmes (3-DIOP-tangent) et (2-DIOP-tangent) relatifs aux opérateurs tangents, qui montrent le chemin pour la preuve des autres théorèmes, mais ne permettent pas de conclure sur la discipline de la source. Les travaux existants portaient en effet sur l'opérateur tangent introduit par Ruelle ([46]), plus classique.

- ▶ Le théorème (3-DIOP-tangent) conclut *sur l'opérateur tangent* pour les systèmes dynamiques généraux avec condition arithmétique 3-DIOP
→ preuve au chapitre 9.
- ▶ Le théorème (2-DIOP-tangent) conclut *sur l'opérateur tangent* pour les systèmes dynamiques généraux avec condition arithmétique 2-DIOP
→ preuve au chapitre 9.

Ces résultats sur l'opérateur tangent sont présentés également ci-dessous.

Voici comment ces différents travaux se relient aux travaux existants :

- ▶ Le théorème (3-DIOP-tangent) est directement issu du travail de Dolgopyat/ Melbourne/ Hachemi/ Baladi (voir [3] et [41]). On a généralisé ce travail à l'opérateur sécant avec le théorème (3-DIOP-sécant).
- ▶ Le travail de Dolgopyat, explicité par Naud ([42]), permet de conclure pour la condition 2-DIOP avec alphabet fini. On a généralisé ce travail au cas d'un alphabet infini, ce qui a donné le théorème (2-DIOP-tangent), puis encore à l'opérateur sécant avec le théorème (2-DIOP-sécant).
- ▶ Les théorèmes (2-DIOP-sans mémoire) et (3-DIOP-sans mémoire) sont adaptés respectivement des théorèmes (2-DIOP-tangent) et (3-DIOP-tangent).
- ▶ Le théorème (2-DIOP-sans mémoire-fini), dont le travail fut amorcé par Fayolle, Flajolet et Hofri ([18]), et basé sur les travaux de Lapidus et van Frankenhuysen ([38] et [37]), résulte du traitement à part, et de façon plus fine et plus élémentaire, du cas d'une source sans mémoire avec alphabet fini. On obtient le même résultat que le théorème (2-DIOP-sans mémoire) en remplaçant μ par μ_0 (pour avoir la conclusion la meilleure possible, on prend μ le plus petit des exposants d'irrationalité, c'est-à-dire $\mu = \mu_0$) et en prenant $\sigma_0 = -\infty$, car le système est fini (voir discussion après la définition 1.12 des systèmes de **Bonne Classe**).

L'amélioration réside dans le fait qu'on prouve l'optimalité de la zone sans pôle, c'est-à-dire que dans le cas des systèmes sans mémoire finis, le α trouvé est le meilleur possible. Un travail débuté avec Flajolet mais inachevé, a tenté en reprenant la preuve, de montrer l'optimalité (en un certain sens) du terme de reste trouvé lors de l'étude des coûts.

La généralisation opérée dans cette thèse, s'est donc faite dans deux directions :

- (i) généralisation de l'opérateur tangent (étudié dans la plupart des travaux existants) à l'opérateur sécant ;
- (ii) généralisation d'un alphabet fini à un alphabet infini.

Enoncé des théorèmes. Voici d'abord les théorèmes sur l'opérateur sécant. La définition de la H -discipline est donnée au chapitre 2.

Théorème (Théorèmes sur la discipline).

Soit une source dynamique complète et de Bonne Classe (définition 1.12), d'abscisse de convergence σ_0 , et de coefficient de contraction ρ .

On note $\lambda(\sigma)$ la valeur propre dominante de \mathbf{H}_σ , $L(\sigma) = \log \lambda(\sigma)$ (théorème 6.11), et dans le cas où l'alphabet est fini $\rho_0 = \inf_{h \in \mathcal{H}} \inf_{\mathcal{I}} |h'(x)|$.

On prouve ici que pour α assez grand, et pour différents jeux d'hypothèses, une source dynamique complète et de Bonne Classe est H -disciplinée d'exposant α .

- *Théorème (3-DIOP) : s'il existe $h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{H}^*$, tels que le rapport $c(h_1, h_2, h_3)$ a comme exposant d'irrationalité μ , et en notant $C = \max_{i \in \{1,2,3\}} c(h_i)$, alors on peut prendre l'exposant de discipline*

$$\alpha > 4\mu + 2 \frac{\mu + 2}{|\log \rho|} C + 5.$$

- *Théorème (2-DIOP) : s'il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^*$, tels que le rapport $c(h_1, h_2)$ a comme exposant d'irrationalité μ , et en notant $C = \max_{i \in \{1,2\}} c(h_i)$, alors on peut prendre l'exposant de discipline*

$$\alpha > 4\mu + 2 \frac{\mu + 2}{|\log \rho|} \max(C, |L'(\sigma_1)|) + 5,$$

et dans le cas d'un alphabet fini, on peut prendre

$$\alpha > 4\mu + 2 \frac{\mu + 2}{|\log \rho|} |\log \rho_0| + 5.$$

- *Théorème (3-DIOP-sans mémoire) : si la source est sans mémoire, et qu'il existe $i_1, i_2, i_3 \in \mathbb{N}^*$, tels que le rapport $c_{\text{aff}}(i_1, i_2, i_3)$ a comme exposant d'irrationalité μ , alors on peut prendre l'exposant de discipline*

$$\alpha > 2\mu + 2.$$

- *Théorème (2-DIOP-sans mémoire) : si la source est sans mémoire, et qu'il existe $i_1, i_2, i_3 \in \mathbb{N}^*$, tels que le rapport $c_{\text{aff}}(i_1, i_2, i_3)$ a comme exposant d'irrationalité μ , alors on peut prendre l'exposant de discipline*

$$\alpha > (\mu + 1) \left(2 + \frac{1}{1 - \sigma_0} \right) = 2\mu + 2 + \frac{\mu + 1}{1 - \sigma_0}.$$

- *Théorème (2-DIOP-sans mémoire-fini) : si la source est sans mémoire, et associée à un vecteur de probabilités \mathbf{p} fini, irrationnel d'exposant d'irrationalité μ_0 , alors on peut prendre l'exposant de discipline*

$$\alpha > 2\mu_0 + 2,$$

et aucun $\alpha < 2\mu_0 + 2$ ne convient (meilleur choix possible).

Le théorème (2-DIOP), dans le cas d'un alphabet fini, est obtenu par une variante de la preuve. Ce résultat est à préférer à celui obtenu dans le cas général quand

$$|\log \rho_0| < \max(C, |L'(\sigma_1)|),$$

ce qui est le cas si

$$L'(\sigma_1) > |\log \rho_0|,$$

car par définition $C \leq |\log \rho_0|$ et donc dans ce cas $\max(C, |L'(\sigma_1)|) = |L'(\sigma_1)|$.

Voici enfin les théorèmes obtenus pour l'opérateur tangent :

Théorème (Théorèmes pour l'opérateur tangent).

Soit une source dynamique complète et de Bonne Classe (définition 1.12), de coefficient de contraction ρ .

On note $\lambda(\sigma)$ la valeur propre dominante de \mathbf{H}_σ , $L(\sigma) = \log \lambda(\sigma)$ (théorème 6.11), et dans le cas où l'alphabet est fini $\rho_0 = \inf_{h \in \mathcal{H}} \inf_{\mathcal{I}} |h'(x)|$.

On peut alors définir implicitement $\sigma_0 < \sigma_1 < 1$ par la relation

$$\sigma \mapsto (1 - \sigma_1)|L'(\sigma_1)| - L(\sigma_1) = |\log \rho|.$$

On prouve ici que pour α assez grand, et pour différents jeux d'hypothèses, il existe $\delta > 0$ tel que le quasi-inverse de l'opérateur tangent $(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\sigma+it})^{-1}$ n'a pas d'autre pôle que $s = 1$, et a une croissance polynomiale quand $|s| \rightarrow +\infty$, sur le domaine

$$\mathcal{R} = \left\{ s : \Re(s) > 1 - \min \left(\delta, \frac{1}{t^\alpha} \right) \right\}.$$

- *Théorème (3-DIOP-tangent)* : s'il existe $h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{H}^*$, tels que le rapport $c(h_1, h_2, h_3)$ a un exposant d'irrationalité μ , et en notant $C = \max_{i \in \{1,2,3\}} c(h_i)$, alors on peut prendre

$$\alpha > 4\mu + 2 \frac{\mu + 2}{|\log \rho|} C + 5.$$

- *Théorème (2-DIOP-tangent)* : s'il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^*$, tels que le rapport $c(h_1, h_2)$ a un exposant d'irrationalité μ , et en notant $C = \max_{i \in \{1,2\}} c(h_i)$, alors on peut prendre

$$\alpha > 4\mu + 2 \frac{\mu + 2}{|\log \rho|} \max(C, |L'(\sigma_1)|) + 5,$$

et dans le cas d'un alphabet fini, on peut prendre

$$\alpha > 4\mu + 2 \frac{\mu + 2}{|\log \rho|} |\log \rho_0| + 5.$$

De même que pour l'opérateur sécant, le résultat obtenu avec la condition 2-DIOP dans le cas d'un alphabet fini, est parfois meilleur que le résultat général.

Le résultat donné au théorème 2-DIOP-tangent résulte de la remarque faite à la section 10.5 à la fin du chapitre 10 : l'utilisation du paramètre k_0 est nécessaire pour conclure pour l'opérateur sécant, mais non pour l'opérateur tangent, pour lequel elle permet cependant d'améliorer le résultat du chapitre 9. Cette amélioration n'est cependant pas fondamentale, car rien ne prouve qu'on a trouvé l'ensemble optimal des exposants α comme dans le théorème (2-DIOP-sans mémoire-fini).

Deuxième partie

Préliminaires aux preuves

Chapitre 6

Analyse fonctionnelle

Sommaire

6.1 Normes et espaces fonctionnels	127
6.1.1 Normes considérées	127
6.1.2 Etude des opérateurs \mathbf{M}	129
6.1.3 Etude des opérateurs \mathbf{H}	131
6.2 Etude des spectres	132
6.2.1 Propriétés spectrales des opérateurs	132
6.2.2 Normalisation	134
6.2.3 Décomposition spectrale et asymptotique	140
6.3 Preuve du théorème (A)	144
6.4 Relation entre \mathbf{M} et \mathbf{H}	148

Le bon espace pour étudier l'opérateur tangent \mathbf{H}_s (ou l'opérateur sécant $\underline{\mathbf{H}}_s$) est l'espace $(\mathcal{C}^1(\mathcal{I}), \|\cdot\|_{1,1})$ (resp. $\mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$) des fonctions continûment dérivables sur \mathcal{I} (resp. $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$), car pour s réel, il est quasi-compact sur cet espace comme on le verra au théorème 6.11 (resp 6.13).

On commencera par introduire les normes qui nous seront utiles sur ces espaces, et dont l'introduction sera justifiée au cours de ce chapitre par les inégalités de Lasota-Yorke. On présentera alors les propriétés spectrales des opérateurs, ce qui nous permettra d'introduire les opérateurs normalisés. Enfin, on démontrera le théorème (A).

6.1 Normes et espaces fonctionnels

6.1.1 Normes considérées

On rappelle qu'on note $\underline{x} = (x_1, x_2)$ et $\underline{h}(\underline{x}) = (h(x_1), h(x_2))$.

On notera aussi $D\underline{f}(\underline{x}_0)$ la différentielle de \underline{f} en \underline{x}_0 , et

$$\frac{\partial}{\partial 1} \underline{f}(\underline{x}_0) = D\underline{f}(\underline{x}_0) \cdot (1, 0), \quad \frac{\partial}{\partial 2} \underline{f}(\underline{x}_0) = D\underline{f}(\underline{x}_0) \cdot (0, 1)$$

les dérivées partielles de \underline{f} par rapport respectivement à la première et à la deuxième place.

Dans la suite, on considérera les normes suivantes sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ et $\mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$.

Définition 6.1. Pour tous $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{I})$ et $\underline{f} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, on définit les normes suivantes :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathcal{I}} |f(x)| \qquad \|\underline{f}\|_\infty = \sup_{x \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} |\underline{f}(x)|.$$

Pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ et $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, on définit les pseudo-normes :

$$\|f\|_1 = \sup_{x \in \mathcal{I}} |f'(x)| \qquad \|\underline{f}\|_1 = \sup_{x \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} \left| \frac{\partial}{\partial 1} \underline{f}(x) \right| + \sup_{x \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} \left| \frac{\partial}{\partial 2} \underline{f}(x) \right|,$$

ainsi que les normes

$$\|f\|_{1,1} = \|f\|_\infty + \|f\|_1, \qquad \|\underline{f}\|_{1,1} = \|\underline{f}\|_\infty + \|\underline{f}\|_1.$$

En fait, on sera amenés à considérer d'autres normes ($\|\cdot\|_{1,t}$, où t est la partie imaginaire de s , et $\|\cdot\|_{1,N}$) pour avoir de bonnes majorations. On conclura pour $N = t$ dans la suite, mais on se servira aussi de $N = t^a$, avec $a > 1$ dans les preuves.

Définition 6.2. Soit $N > 0$. Pour tout f de classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, on définit la norme :

$$\|f\|_{1,N} = \|f\|_\infty + \frac{1}{N} \|f\|_1.$$

Pour tout $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, on définit la norme :

$$\|\underline{f}\|_{1,N} = \|\underline{f}\|_\infty + \frac{1}{N} \|\underline{f}\|_1.$$

L'introduction de cette norme sera justifiée par l'inégalité de Lasota-Yorke (lemme 6.7).

En fait, au chapitre suivant, on introduira une norme « restreinte » qui sera utile pour la preuve de l'étape 3 dans le cas de l'opérateur sécant.

D'autre part, il est facile de montrer les majorations suivantes des normes des produits :

► Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathcal{I})$, $\underline{f}, \underline{g} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$

$$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty, \qquad \|\underline{fg}\|_\infty \leq \|\underline{f}\|_\infty \|\underline{g}\|_\infty.$$

► Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, $\underline{f}, \underline{g} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, pour tout $N > 0$, et pour tout $\theta > 0$,

$$\|fg\|_{1,N} \leq \|f\|_{1,N} \|g\|_{1,N}, \qquad \|\underline{fg}\|_{1,N} \leq \|\underline{f}\|_{1,N} \|\underline{g}\|_{1,N}.$$

On verra dans la suite que sur l'axe réel, les éléments spectraux de l'opérateur tangent sont une restriction des éléments spectraux de l'opérateur sécant. Ce lemme comparant les normes d'une fonction de deux variables, avec les normes de sa diagonale nous sera bien utile.

Lemme 6.3. Pour tout $N > 0$:

$$\|\text{diag } \underline{f}\|_\infty \leq \|\underline{f}\|_\infty, \quad \|\text{diag } \underline{f}\|_1 \leq \|\underline{f}\|_1, \quad \|\text{diag } \underline{f}\|_{1,N} \leq \|\underline{f}\|_{1,N}.$$

On va maintenant comparer les normes $\|\cdot\|_{1,1}$, $\|\cdot\|_{1,t}$ et $\|\cdot\|_{1,N}$ d'une fonction et d'un opérateur.

Lemme 6.4. *Ici, f désigne une fonction de $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ ou bien de $\mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, et \mathbf{G} un opérateur agissant sur un de ces deux espaces, et $N \geq t$. On peut comparer alors les différentes normes de f :*

$$\|f\|_{1,N} \leq \|f\|_{1,t} \leq \|f\|_{1,1}$$

$$\|f\|_{1,1} \leq t\|f\|_{1,t}, \quad \|f\|_{1,1} \leq N\|f\|_{1,N}, \quad \|f\|_{1,t} \leq \frac{N}{t}\|f\|_{1,N}$$

On peut aussi comparer les normes subordonnées de \mathbf{G} :

$$\frac{1}{N}\|\mathbf{G}\|_{1,1} \leq \|\mathbf{G}\|_{1,N} \leq N\|\mathbf{G}\|_{1,1}.$$

$$\frac{1}{t}\|\mathbf{G}\|_{1,1} \leq \|\mathbf{G}\|_{1,t} \leq t\|\mathbf{G}\|_{1,1}.$$

$$\frac{t}{N}\|\mathbf{G}\|_{1,t} \leq \|\mathbf{G}\|_{1,N} \leq \frac{N}{t}\|\mathbf{G}\|_{1,t}.$$

Démonstration. Pour un opérateur, il y a 2 changements de normes à effectuer, pour la fonction dont on prend l'image, et pour son image, d'où les coefficients qui apparaissent à droite et à gauche. Par exemple, pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$,

$$\|G[f]\|_{1,t} \leq \frac{N}{t}\|G[f]\|_{1,N} \leq \frac{N}{t}\|G\|_{1,N}\|f\|_{1,N} \leq \frac{N}{t}\|G\|_{1,N}\|f\|_{1,t}$$

et

$$\|G[f]\|_{1,N} \leq \|G[f]\|_{1,t} \leq \|G\|_{1,t}\|f\|_{1,t} \leq \frac{N}{t}\|G\|_{1,t}\|f\|_{1,N},$$

ce qui prouve respectivement

$$\|G\|_{1,t} \leq \frac{N}{t}\|G\|_{1,N} \quad \|G\|_{1,N} \leq \frac{N}{t}\|G\|_{1,t}.$$

□

Ce lemme est sans intérêt quand N est fixé, mais il prend toute son importance quand N et n sont deux fonctions de la partie imaginaire t de s , qui tendent vers l'infini quand t tend vers l'infini, comme ce sera le cas dans la suite.

6.1.2 Etude des opérateurs \mathbf{M}

Poursuivons la section par l'étude de la norme des opérateurs composantes \mathbf{M} et $\underline{\mathbf{M}}$ déjà introduits au chapitre 3, et dont on rappelle la définition :

$$\mathbf{M}_t[u](x) = |T'|^{it} u \circ T \quad \underline{\mathbf{M}}_t[u](x) = \left| \frac{T(x_1) - T(x_2)}{x_1 - x_2} \right|^{it} \underline{u}(T(x_1), T(x_2)).$$

Les opérateurs \mathbf{M} transforment une fonction bornée en une fonction bornée.

Lemme 6.5. *Pour tout $t > 0$, la norme sup de l'opérateur \mathbf{M}_t est égale à 1, et celle de $\underline{\mathbf{M}}_t$ est inférieure ou égale à 1 :*

$$\|\mathbf{M}_t\|_{\infty} = 1 \quad \text{et} \quad \|\underline{\mathbf{M}}_t\|_{\infty} \leq 1.$$

Mais \mathbf{M} (et $\underline{\mathbf{M}}$) ne transforment pas une fonction continue en une fonction continue, ni une fonction dérivable (ou différentiable) en une fonction dérivable (ou différentiable). Même, dans le cas où le système possède un nombre infini de branches, on peut trouver des branches arbitrairement verticales, et la majoration de la dérivée de $\mathbf{M}^n[u]$ ou de la différentielle de $\underline{\mathbf{M}}^n[\underline{u}]$ n'est pas possible sur \mathcal{I} tout entier, c'est-à-dire que l'opérateur \mathbf{M} n'agit pas sur l'espace des fonctions continûment dérivables $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, et $\underline{\mathbf{M}}$ n'agit pas sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$. On pourra cependant majorer dérivée et différentielle sur une réunion fondamentale (voir le lemme 7.14).

Le lemme suivant permet l'étude de la dérivée de $\mathbf{M}^n[u]$ et de la différentielle de $\underline{\mathbf{M}}^n[\underline{u}]$ quand on les compose avec une branche inverse de profondeur n .

Lemme 6.6. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $h \in \mathcal{H}^n$, on a les majorations suivantes avec les constantes qui ne dépendent pas de h , ni de t :*

$$\|\mathbf{M}_t^n[u] \circ h\|_1 \ll |t| \|u\|_{1,t} \quad \|\underline{\mathbf{M}}_t^n[u] \circ \underline{h}\|_1 \ll |t| \|\underline{u}\|_{1,t}.$$

Démonstration. Soit $y \in \mathcal{I}$. D'après le lemme 3.5,

$$\mathbf{M}_t^n[u](h(y)) = |h'(y)|^{-it} u(y).$$

On a alors

$$(\mathbf{M}_t^n[u] \circ h)'(y) = \left[-it \frac{h''(y)}{h'(y)} u(y) + u'(y) \right] |h'(y)|^{-it}$$

et donc, en prenant le module

$$|(\mathbf{M}_t^n[u] \circ h)'(y)| \leq K|t| \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$$

où K est la constante de distorsion du système de Bonne Classe, ce qui permet de conclure.

La preuve est sensiblement identique pour l'opérateur sécant. Soit $\underline{y} = (y_1, y_2) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$. D'après le lemme 3.5,

$$\underline{\mathbf{M}}_t^n[\underline{u}](\underline{h}(\underline{y})) = |s_h(\underline{y})|^{-it} \underline{u}(\underline{y}).$$

On trouve alors

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \underline{\mathbf{M}}_t^n[\underline{u}](\underline{h}(\underline{y})) = \left[-it \frac{h'(y_1)(y_1 - y_2) - (h(y_1) - h(y_2))}{(y_1 - y_2)^2} \underline{u}(y_1, y_2) + \frac{\partial}{\partial y_1} \underline{u}(\underline{y}) \right] |s_h(\underline{y})|^{-it}$$

et donc, en prenant le module et en utilisant le lemme 1.13 (calcul analogue à celui qui sera fait dans la preuve du lemme 6.19), on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \underline{\mathbf{M}}_t^n[\underline{u}](\underline{h}(\underline{y})) \ll t \|\underline{u}\|_\infty + \|\underline{u}\|_1$$

et de même :

$$\frac{\partial}{\partial y_2} \underline{\mathbf{M}}_t^n[\underline{u}](\underline{h}(\underline{y})) \ll t \|\underline{u}\|_\infty + \|\underline{u}\|_1$$

ce qui permet de conclure. □

6.1.3 Etude des opérateurs \mathbf{H}

Commençons par faire agir \mathbf{H} et $\underline{\mathbf{H}}$ sur l'espace des fonctions continues.

Le lemme 1.13 des propriétés des systèmes de **Bonne Classe** nous montre que pour tout $x \in \mathcal{I}$, $\sum_{h \in \mathcal{H}} |h'(x)|$ est borné indépendamment de x . Ceci permet d'établir que l'opérateur \mathbf{H} est borné sur $(\mathcal{C}^0(\mathcal{I}), \|\cdot\|_\infty)$, et que l'opérateur $\underline{\mathbf{H}}$ est borné sur $(\mathcal{C}^0(\mathcal{I} \times \mathcal{I}), \|\cdot\|_\infty)$.

Les bornes pour s réel seront précisées grâce à la valeur propre dominante. Et pour les opérateurs normalisés, les bornes seront une conséquence de la décomposition spectrale.

Quand on fait maintenant agir \mathbf{H} et $\underline{\mathbf{H}}$ sur respectivement $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ et $\mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, les majorations de Lasota-Yorke sont fondamentales pour la suite. Elle permettent de ramener l'étude de la dérivée (resp. de la différentielle) de $\mathbf{H}_s[u]$ (resp. $\underline{\mathbf{H}}_s[u]$), à u et à sa dérivée (\underline{u} et sa différentielle).

Lemme 6.7 (Majorations de Lasota-Yorke).

Pour tout $s = \sigma + it$, avec $\Re(s) > \sigma_0$ (voir définition de la **Bonne Classe**), et $t \geq 1$, $\mathbf{H}_{\sigma+it}$ est borné sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, et $\underline{\mathbf{H}}_{\sigma+it}$ est borné sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$.

Notons $\hat{\rho} > \rho$ une constante supérieure au coefficient de contraction (voir définition 1.12). Pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$,

$$\|\mathbf{H}_{\sigma+it}^n[f]\|_1 \ll |t| \cdot \|f\|_\infty + \hat{\rho}^n \|f\|_1,$$

ou plus précisément :

$$\|\mathbf{H}_{\sigma+it}^n[f]\|_1 \ll \sum_{h \in \mathcal{H}^n} \|h'\|_\infty^\sigma (|t| \cdot \|f \circ h\|_\infty + \|(f \circ h)'\|_\infty),$$

et pour tout $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$,

$$\|\underline{\mathbf{H}}_{\sigma+it}^n[\underline{f}]\|_1 \ll |t| \cdot \|\underline{f}\|_\infty + \hat{\rho}^n \|\underline{f}\|_1,$$

ou plus précisément :

$$\|\underline{\mathbf{H}}_{\sigma+it}^n[\underline{f}]\|_1 \ll \sum_{h \in \mathcal{H}^n} \|h'\|_\infty^\sigma \left(|t| \cdot \|\underline{f} \circ \underline{h}\|_\infty + \sum_{j \in \{1,2\}} \left\| \frac{\partial (\underline{f} \circ \underline{h})}{\partial j} \right\|_\infty \right),$$

et pour tout $\theta > 0$

$$\|\underline{\mathbf{H}}_{\sigma+it}^n[\underline{f}]\|_{1,(\theta)} \ll \sum_{h \in \mathcal{H}^n} \|h'\|_\infty^\sigma \left(|t| \cdot \|\underline{f} \circ \underline{h}\|_{\infty,(\theta)} + \sum_{j \in \{1,2\}} \left\| \frac{\partial (\underline{f} \circ \underline{h})}{\partial j} \right\|_{\infty,(\theta)} \right),$$

De plus, les constantes de majorations écrites ne dépendent pas de σ appartenant à un compact, ni de t .

On prouvera dans la suite le lemme 6.19, dont la preuve est un peu plus difficile.

La norme $\|\cdot\|_{1,1}$ est la norme classique utilisée sur les espaces \mathcal{C}^1 . Grâce au lemme qui précède, indépendamment de n et de t assez grand

$$\|(\mathbf{H}_{\sigma+it}^n[f])'\|_\infty \ll |t| \cdot \|f\|_{1,1},$$

et donc :

$$\|(\mathbf{H}_{\sigma+it}^n[f])'\|_{1,1} \ll |t| \cdot \|f\|_{1,1},$$

estimation peu satisfaisante... en fait on gagne beaucoup en utilisant plutôt la norme $\|\cdot\|_{1,t}$, et la majoration grossière $\hat{\rho} < 1$. Pour tout $s = \sigma + it$, avec $\Re(s) > \sigma_0$ dans un compact (voir définition de la **Bonne Classe**), et $t \geq 1$, on a :

$$\|(\mathbf{H}_{\sigma+it}^n[f])'\|_\infty \ll |t| \cdot \|f\|_{1,t} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{H}_{\sigma+it}\|_{1,t} \ll 1$$

Et si $t \leq N$, on a :

$$\|(\mathbf{H}_{\sigma+it}^n[f])'\|_\infty \ll |N| \cdot \|f\|_{1,N} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{H}_{\sigma+it}\|_{1,N} \ll 1.$$

Ces inégalités justifient ainsi pleinement l'introduction des normes $\|\cdot\|_{1,t}$.

Les opérateurs introduits dépendent analytiquement de s , et on dispose d'un lemme analogue au lemme 6.7 pour les dérivées des opérateurs par rapport à s . Comme pour le lemme précédent, voir la preuve du lemme 6.19, et aussi la preuve de la proposition 9.11.

Lemme 6.8. *Pour tout $s = \sigma + it$, avec $\Re(s) > \sigma_0$ (voir définition de la **Bonne Classe**), et $t \geq 1$, les opérateurs \mathbf{H}_s et $\underline{\mathbf{H}}_s$ dépendent analytiquement de s , et les opérateurs dérivés \mathbf{H}'_s et $\underline{\mathbf{H}}'_s$ sont bornés respectivement sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ et $\mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$.*

De plus, les majorations du lemme 6.7 subsistent pour les opérateurs dérivées.

6.2 Etude des spectres

6.2.1 Propriétés spectrales des opérateurs

On a introduit le vocabulaire sur spectre et valeurs propres au début du chapitre 3.

Classiquement, la « partie supérieure » du spectre joue un rôle important. Ceci motive la définition suivante.

Définition 6.9. *Soit \mathbf{G} un opérateur borné sur un espace de Banach.*

Son rayon spectral $R(\mathbf{G})$ est défini par :

$$R(\mathbf{G}) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(\mathbf{G})\},$$

et son rayon spectral essentiel $R_e(\mathbf{G})$ par

$$R_e(\mathbf{G}) = \inf \left\{ \begin{array}{l} r > 0 \text{ tels que } \forall \lambda \in \text{Sp}(\mathbf{G}), \text{ si } |\lambda| > r, \\ \text{alors } \lambda \text{ est une valeur propre isolée de multiplicité géométrique finie} \end{array} \right\}.$$

On dit que \mathbf{G} est quasi-compact si $R_e(\mathbf{G}) < R(\mathbf{G})$.

On définit encore la rayon spectral sous-dominant :

$$r(\mathbf{G}) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \text{Sp}(\mathbf{G}), |\lambda| \neq R(\mathbf{G})\}.$$

Ainsi, la partie supérieure du spectre

$$\{\lambda \in \text{Sp}(\mathbf{G}); R_e(\mathbf{G}) < |\lambda| \leq R(\mathbf{G})\}$$

est formée de valeurs propres isolées de multiplicité géométrique finie.

Ces trois rayons sont rangés dans cet ordre :

$$R_e(\mathbf{G}) \leq r(\mathbf{G}) \leq R(\mathbf{G}).$$

Une définition équivalente consiste à dire que l'opérateur \mathbf{G} est quasi-compact si et seulement si la partie supérieure de son spectre est formé uniquement de valeurs propres isolées de multiplicité géométrique finie, c'est-à-dire qu'il ressemble à celui d'un opérateur compact, par exemple une matrice. C'est pourquoi, dans la suite, les éléments spectraux étudiés seront toujours des valeurs propres.

On énonce maintenant le théorème d'Hennion (voir [30]), qui avec les majorations de Lasota-Yorke du lemme précédent, permet d'établir les propriétés de quasi-compacité des opérateurs, à venir dans les théorèmes 6.11 et 6.13.

Théorème 6.10 (Hennion, Ionescu-Tulcea and Marinescu). *On suppose que l'espace de Banach E est muni de deux normes $|\cdot|$ et $\|\cdot\|$, telle que la boule unité de $(E, \|\cdot\|)$ est précompacte dans $(E, |\cdot|)$. Soit \mathbf{L} un opérateur borné sur $(E, \|\cdot\|)$. Supposons qu'il existe deux suites $(r_n)_n$ et $(t_n)_n$ de nombres strictement positifs, telles que pour tout $n \geq 1$,*

$$\|\mathbf{L}^n[f]\| \leq r_n \|f\| + t_n |f|.$$

Alors le rayon spectral essentiel de \mathbf{L} sur $(E, \|\cdot\|)$ satisfait l'inégalité :

$$R_e(\mathbf{L}) \leq r := \liminf_{n \rightarrow +\infty} (r_n)^{1/n}.$$

Si, de plus, le rayon spectral $R(\mathbf{L})$ sur $(E, \|\cdot\|)$ satisfait $R(\mathbf{L}) > r$, alors l'opérateur \mathbf{L} est quasi-compact sur $(E, \|\cdot\|)$.

En considérant les majorations du lemme 6.7, et en utilisant le théorème d'Hennion (cité précédemment), on montre que les opérateurs de transfert sécant et tangent sont quasi-compacts sur l'axe réel. Les propriétés spectrales des opérateurs sont rassemblées dans les théorèmes suivants.

Pour l'opérateur tangent, on pourra consulter [5], qui reprend [2], [7] et [57].

Théorème 6.11 (Propriétés spectrales classiques de l'opérateur de transfert tangent).

On considère un système dynamique de la Bonne Classe, de coefficient de contraction ρ et d'abscisse de convergence σ_0 (voir définition 1.12).

Pour tout $s = \sigma + it$ avec $\sigma > \sigma_0$,

1. *L'opérateur \mathbf{H}_s est borné sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$.*
2. *On a $R(\mathbf{H}_s) \leq R(\mathbf{H}_\sigma)$.*
3. *On a $R_e(\mathbf{H}_s) \leq \rho R(\mathbf{H}_\sigma)$.*
4. *L'opérateur \mathbf{H}_σ est quasi-compact.*
5. *Pour $\sigma > \sigma_0$, l'opérateur \mathbf{H}_σ a une unique valeur propre de module maximal. Cette valeur propre notée $\lambda(\sigma)$ (donc $R(\mathbf{H}_\sigma) = \lambda(\sigma)$) est réelle et simple, et on l'appelle valeur propre dominante. La fonction propre normalisée associée, notée f_σ , est strictement positive. En particulier, la mesure duale associée à \mathbf{H}_1 est la mesure de Lebesgue, et $\lambda(1) = 1$.*
6. *Pour $s = \sigma$ réel, $\sigma > \sigma_0$, \mathbf{H}_s a un saut spectral : la valeur propre sous-dominante $r(\mathbf{H}_\sigma)$ satisfait $r(\mathbf{H}_\sigma) < \lambda(\sigma)$.*
7. *Les fonctions $\sigma \mapsto f_\sigma^{\pm 1}$, $\lambda(\sigma)^{\pm 1}$ sont des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ .*
8. *La fonction pression $L : \sigma \rightarrow \log \lambda(\sigma)$ est strictement convexe.*

La figure 6.1 constitue une illustration sur le spectre de l'opérateur tangent. Elle sera réutilisée quand on parlera de décomposition spectrale, de projection dominante, et d'opérateur de reste.

En revanche, pour t grand, on ne peut pas garantir que la partie supérieure du spectre soit formée de valeurs propres, c'est-à-dire que l'opérateur soit quasi-compact.

Remarque 6.12. *Il n'y a pas de conflit de notation avec 1.3 du cas sans mémoire*

$$\lambda(s) = \sum_{i \in \Sigma} p_i^s.$$

En effet, $\lambda(s)$ est la valeur propre dominante de l'opérateur, valeur propre associée aux fonctions constantes, car dans le cas affine, d'après 1.5, les $h'(x)$ ne dépendent pas de x . C'est-à-dire que dans le cas des systèmes sans mémoire, $f_\sigma = 1$ pour tout σ .

Beaucoup des propriétés de l'opérateur tangent s'étendent à l'opérateur sécant. On pourra consulter [12].

Théorème 6.13 (Propriétés spectrales classiques de l'opérateur de transfert sécant).

On considère un système dynamique de la Bonne Classe, de coefficient de contraction ρ et d'abscisse de convergence σ_0 (voir définition 1.12).

Pour tout $s = \sigma + it$, avec $\sigma > \sigma_0$,

1. L'opérateur $\underline{\mathbf{H}}_s$ est borné sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$. Son rayon spectral et son rayon spectral essentiel satisfont les inégalités

$$R(\underline{\mathbf{H}}_s) \leq R(\underline{\mathbf{H}}_s) \leq R(\underline{\mathbf{H}}_\sigma) = R(\mathbf{H}_\sigma) = \lambda(\sigma) \quad \text{et} \quad R_e(\underline{\mathbf{H}}) \leq \rho R(\mathbf{H}_\sigma) = \rho \lambda(\sigma)$$

et $\underline{\mathbf{H}}_s$ est quasi-compact.

2. Les rayons spectraux des opérateurs tangents et sécants coïncident, i.e.

$$R(\underline{\mathbf{H}}_s) = R(\mathbf{H}_s).$$

3. L'opérateur $\underline{\mathbf{H}}_\sigma$ a une unique valeur propre de module maximum, qu'on appelle valeur propre dominante. De plus, cette valeur propre est réelle et simple, et égale à $\lambda(\sigma)$, et la diagonale de la fonction propre dominante \underline{f}_σ coïncide avec la fonction dominante f_σ de \mathbf{H}_σ (c'est-à-dire $f_\sigma = \text{diag } \underline{f}_\sigma$), et \underline{f}_σ est strictement positive.
4. L'opérateur $\underline{\mathbf{H}}_\sigma$ a un saut spectral, c'est-à-dire que le rayon spectral sous-dominant $r(\underline{\mathbf{H}}_\sigma)$ satisfait $r(\underline{\mathbf{H}}_\sigma) < R(\underline{\mathbf{H}}_\sigma)$.
5. La fonction $\sigma \mapsto \underline{f}_\sigma^{\pm 1}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ .

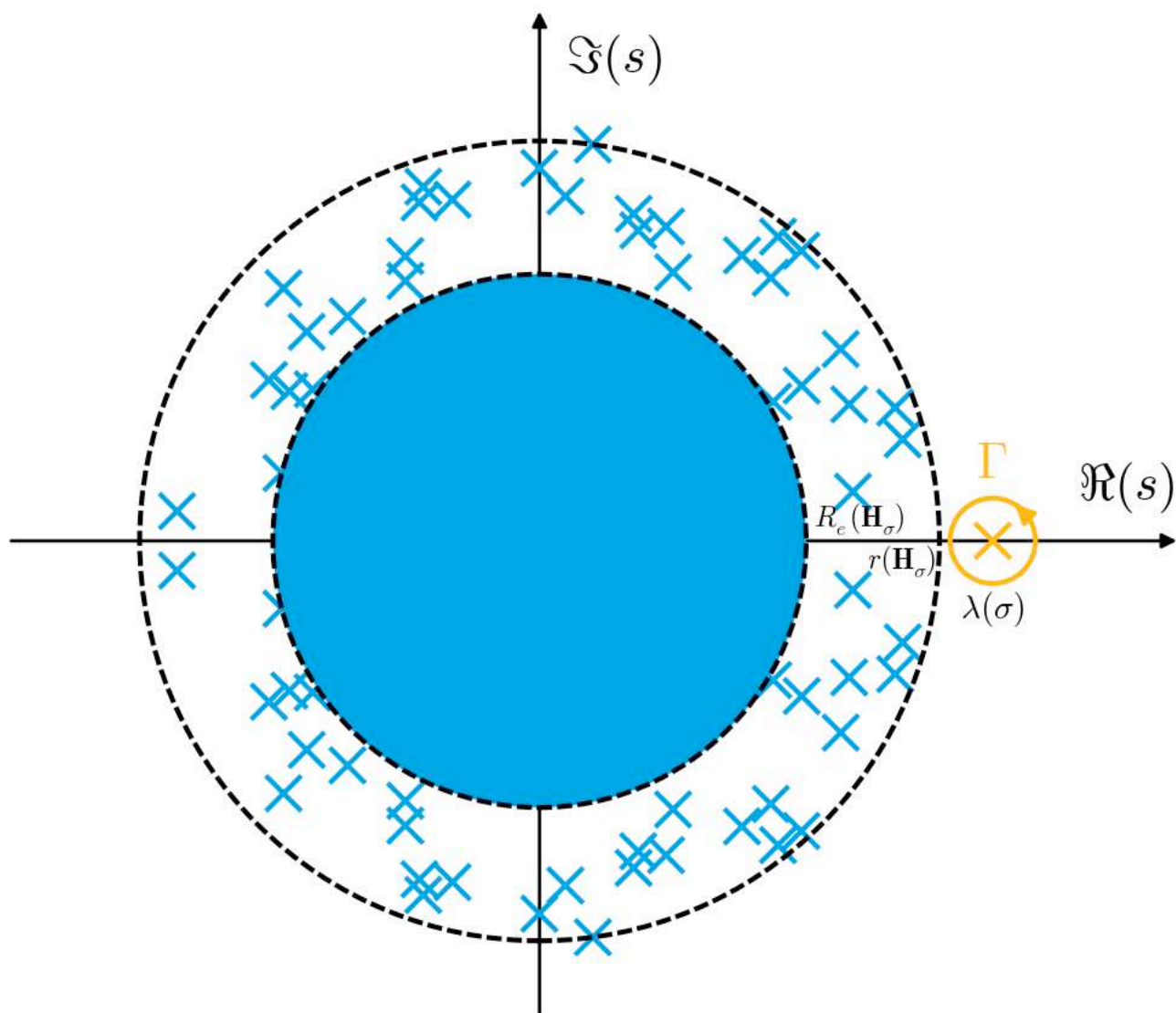
La figure 6.1 (à un changement de légende près) constitue une illustration sur le spectre de l'opérateur sécant.

En revanche, pour t grand, on ne peut pas garantir que la partie supérieure du spectre soit formée de valeurs propres, c'est-à-dire que l'opérateur soit quasi-compact.

6.2.2 Normalisation

Maintenant qu'on a introduit les éléments spectraux dominants, on peut définir les opérateurs normalisés, largement utilisés dans la suite.

On note Δ_u l'opérateur de multiplication par la fonction u (d'une variable), de même, on note $\Delta_{\underline{u}}$ l'opérateur de multiplication par la fonction \underline{u} (de deux variables).



Les valeurs spectrales de module strictement supérieur à $R_e(\mathbf{H}_\sigma)$ sont des valeurs propres isolées de multiplicité géométrique finie, et $\lambda(\sigma)$ est la valeur propre dominante, qui est réelle et simple.

FIG. 6.1 – Spectre de l'opérateur tangent

\mathbf{H}_s opérateur tangent	$\underline{\mathbf{H}}_s$ opérateur sécant
$\tilde{\mathbf{H}}_s$ opérateur tangent normalisé	$\underline{\tilde{\mathbf{H}}}_s$ opérateur sécant normalisé

FIG. 6.2 – Récapitulatif des différents opérateurs

Définition 6.14. Soit $s = \sigma + it$, avec $\sigma > \sigma_0$ (voir définition de la Bonne Classe). On définit alors les opérateurs conjugués tangents et sécants comme les conjugués suivants :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{H}}_s &= \frac{1}{\lambda(\sigma)} (\Delta_{f_\sigma})^{-1} \circ \mathbf{H}_s \circ \Delta_{f_\sigma} \\ \underline{\tilde{\mathbf{H}}}_s &= \frac{1}{\lambda(\sigma)} (\Delta_{\underline{f}_\sigma})^{-1} \circ \underline{\mathbf{H}}_s \circ \Delta_{\underline{f}_\sigma}\end{aligned}$$

où $f_\sigma, \underline{f}_\sigma$ et $\lambda(\sigma)$ sont les éléments spectraux dominants mis en évidence dans les théorèmes 6.11 et 6.13.

Comme pour les opérateurs non normalisés, on notera simplement $\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{H}}_1$ et $\underline{\tilde{\mathbf{H}}} = \underline{\tilde{\mathbf{H}}}_1$.

On a ainsi :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{H}}_s[f](x) &= \frac{1}{\lambda(\sigma)f_\sigma(x)} \mathbf{H}_s[ff_\sigma] = \frac{1}{f_\sigma\lambda(\sigma)} \sum_{h \in \mathcal{H}} |h'(x)|^s (ff_\sigma) \circ h(x) \\ \underline{\tilde{\mathbf{H}}}_s[\underline{f}](\underline{x}) &= \frac{1}{\lambda(\sigma)\underline{f}_\sigma(\underline{x})} \underline{\mathbf{H}}_s[\underline{f}\underline{f}_\sigma] = \frac{1}{F_\sigma(\underline{x})\lambda(\sigma)} \sum_{h \in \mathcal{H}} |s_h(\underline{x})|^s (\underline{f}\underline{f}_\sigma)(\underline{h}(\underline{x})).\end{aligned}$$

Le différents opérateurs sécants et tangents, normalisés ou non, sont rappelés à la figure 6.2.

Il est facile de montrer que $\mathbf{H}_{\sigma+it}$ et $\tilde{\mathbf{H}}_{\sigma+it}$ d'une part, et $\underline{\mathbf{H}}_{\sigma+it}$ et $\underline{\tilde{\mathbf{H}}}_{\sigma+it}$ d'autre part ont le même spectre à homothétie près. Plus précisément

- f est fonction propre de $\mathbf{H}_{\sigma+it}$ associée à une valeur propre λ si et seulement si f/f_σ est fonction propre de $\tilde{\mathbf{H}}_{\sigma+it}$ associée à la valeur propre $\lambda/\lambda(\sigma)$.
- \underline{f} est fonction propre de $\underline{\mathbf{H}}_{\sigma+it}$ associée à une valeur propre λ si et seulement si $\underline{f}/\underline{f}_\sigma$ est fonction propre de $\underline{\tilde{\mathbf{H}}}_{\sigma+it}$ associée à la valeur propre $\lambda/\lambda(\sigma)$.

Et donc, les fonctions propres dominantes de $\tilde{\mathbf{H}}_\sigma$ et $\underline{\tilde{\mathbf{H}}}_\sigma$ sont les fonctions constantes, avec valeur propre dominante 1.

Tout comme les opérateurs \mathbf{H} et $\underline{\mathbf{H}}$, leurs normalisés se composent bien.

Lemme 6.15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x, x_1, x_2 \in \mathcal{I}$:

$$\tilde{\mathbf{H}}_s^n[f](x) = \frac{1}{\lambda(\sigma)^n f_\sigma(x)} \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |h'(x)|^s (ff_\sigma) \circ h(x).$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_s^n[f](x) = \frac{1}{\lambda(\sigma)^n f_\sigma(x)} \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |s_h(x)|^s (ff_\sigma)(h(x)).$$

Le lemme suivant est le pendant du lemme 1.9. Il renforce l'intuition que dans le cas sans mémoire, il n'y a pas besoin d'étudier d'opérateurs, car toutes les fonctions considérées quand on particularise la preuve générale, sont constantes. Notons bien que le résultat n'est valable que pour $\Re(s) = 1$.

Lemme 6.16. *Dans le cas affine, les itérés $\tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^n[1]$, $n \in \mathbb{N}$, sont tous des fonctions constantes. Et même, $\tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^n[f]$, où f est constant sur les intervalles fondamentaux de profondeur n , est une fonction constante.*

Démonstration. Par définition :

$$\tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^j[1](x) = \frac{1}{\lambda(1)^j f_1(x)} \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |h'(x)|^{1+it} f_1 \circ h(x)$$

avec $\lambda(1) = 1$ (cas général), $f_1 = 1$ (spécificité du cas affine, voir remarque 6.12) et les h' sont des constantes (spécificité du cas affine, voir 1.5).

Pour la version plus précise, on écrit

$$\tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^j[f](x) = \frac{1}{\lambda(1)^j f_1(x)} \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |h'(x)|^{1+it} (f_1 f) \circ h(x),$$

avec chaque terme de la somme constant, car pour tout $h \in \mathcal{H}^n$, les $h(x)$ sont dans le même intervalle fondamental de profondeur n . \square

Le lemme suivant permet de passer de l'opérateur normalisé à l'opérateur non normalisé : à une constante près, on a les mêmes majorations.

Lemme 6.17. *On a uniformément en n et $s = \sigma + it$, avec $\Re(s) > \sigma_0$ dans un compact (voir définition de la Bonne Classe) :*

$$\|\mathbf{H}_s^n\|_\infty \ll \lambda(\sigma)^n \|\tilde{\mathbf{H}}_s^n\|_\infty \quad \|\mathbf{H}_s^n\|_{1,t} \ll \lambda(\sigma)^n \|\tilde{\mathbf{H}}_s^n\|_{1,t}.$$

En particulier, on a, uniformément en n et t :

$$\|\mathbf{H}_{1+it}^n\|_\infty \ll \|\tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^n\|_\infty \quad \|\mathbf{H}_{1+it}^n\|_{1,t} \ll \|\tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^n\|_{1,t}.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$. On a :

$$\mathbf{H}_s^n[f] = \lambda(\sigma)^n f_\sigma \tilde{\mathbf{H}}_s^n \left[\frac{f}{f_\sigma} \right].$$

Ainsi par exemple :

$$\|\mathbf{H}_s^n[f]\|_\infty \leq \lambda(\sigma)^n \|f_\sigma\|_\infty \left\| \tilde{\mathbf{H}}_s^n \left[\frac{f}{f_\sigma} \right] \right\|_\infty$$

soit :

$$\|\mathbf{H}_s^n[f]\|_\infty \leq \lambda(\sigma)^n \cdot \|f_\sigma\|_\infty \cdot \left\| \tilde{\mathbf{H}}_s^n \right\|_\infty \cdot \left\| \frac{f}{f_\sigma} \right\|_\infty$$

ou encore :

$$\|\mathbf{H}_s^n[f]\|_\infty \leq \lambda(\sigma)^n \cdot \|f_\sigma\|_\infty \cdot \|1/f_\sigma\|_\infty \cdot \left\| \tilde{\mathbf{H}}_s^n \right\|_\infty \cdot \|f\|_\infty.$$

Pour le cas où $\sigma = 1$, utiliser $\lambda(1) = 1$.

\square

La norme infinie de l'opérateur normalisé se majore facilement. C'est-à-dire que tout comme les opérateurs non normalisés, les opérateurs normalisés sont bornés sur l'espace des fonctions continues, mais en plus on a un meilleur contrôle sur leurs normes.

Lemme 6.18. *Les normes $\|\cdot\|_\infty$ de $\tilde{\mathbf{H}}_{\sigma+it}$ et $\underline{\mathbf{H}}_{\sigma+it}$ sont inférieures ou égales à 1. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ de $\tilde{\mathbf{H}}_\sigma$ et $\underline{\mathbf{H}}_\sigma$ sont égales à 1.*

Démonstration. On a :

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\sigma+it}[f](x) = \sum_{h \in \mathcal{H}^n} \frac{f_\sigma(h(x))}{f_\sigma(x)\lambda(\sigma)} |h'(x)|^{\sigma+it} f(h(x))$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \left| \tilde{\mathbf{H}}_{\sigma+it}[f](x) \right| &= \sum_{h \in \mathcal{H}^n} \frac{f_\sigma(h(x))}{f_\sigma(x)\lambda(\sigma)} |h'(x)|^{\sigma+it} |f(h(x))| \\ &\leq \left(\sum_{h \in \mathcal{H}^n} \frac{f_\sigma(h(x))}{f_\sigma(x)\lambda(\sigma)} |h'(x)|^\sigma \right) \|f\|_\infty \\ &= \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

et si $t = 0$, alors on a l'égalité avec la fonction constante égale 1.

La preuve est sensiblement identique pour les opérateurs sécants. \square

Pour terminer, signalons que le lemme 6.7 subsiste bien sûr pour l'opérateur normalisé. On le prouve pour cet opérateur normalisé, la démonstration pour l'opérateur non normalisé étant plus simple.

Lemme 6.19 (Majorations de Lasota-Yorke pour l'opérateur normalisé).

Pour tout $s = \sigma + it$, avec $\Re(s) > \sigma_0$ (voir définition de la Bonne Classe), et $t \geq 1$, $\tilde{\mathbf{H}}_{\sigma+it}$ est borné sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, et $\underline{\mathbf{H}}_{\sigma+it}$ est borné sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$.

De plus, les majorations du lemme 6.7 subsistent pour les opérateurs dérivées.

Démonstration. Par définition

$$\tilde{\mathbf{H}}_s[f](x) = \frac{1}{f_\sigma(x)\lambda(\sigma)^n} \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |h'(x)|^s (f f_\sigma) \circ h(x).$$

Les fonctions f_σ et f'_σ sont bornées inférieurement et supérieurement (voir théorème 6.11).

Il y a quatre facteurs qui dépendent de x . La dérivée par rapport à x est donc formée de quatre termes, qu'on majore séparément.

La réponse justifiera après coup qu'on pouvait bien dériver sous le signe \sum (nombre infini de termes quand l'alphabet est infini).

► 1er terme : on dérive $\frac{1}{f_\sigma(x)}$. Cette dérivée est bornée supérieurement et inférieurement. Reste les autres facteurs :

$$\frac{1}{\lambda(\sigma)^n} \left| \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |h'(x)|^s (f f_\sigma) \circ h(x) \right| \ll \frac{1}{\lambda(\sigma)^n} \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |h'(x)|^\sigma |f \circ h(x)| \ll \sum_{h \in \mathcal{H}^n} \|h'\|_\infty^\sigma \cdot \|f \circ h\|_\infty$$

(on a utilisé le lemme 1.13).

► 2ème terme : on dérive $|h'(x)|^s$. On obtient :

$$s|h'(x)|^s \frac{h''(x)}{h'(x)} \ll t|h'(x)|^\sigma$$

(on a utilisé le lemme 1.13).

Avec les autres facteurs, on obtient :

$$\frac{t}{\lambda(\sigma)^n f_\sigma(x)} \left| \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |h'(x)|^\sigma (ff_\sigma) \circ h(x) \right| \ll t \sum_{h \in \mathcal{H}^n} \|h'\|_\infty^\sigma \cdot \|f \circ h\|_\infty.$$

► 3ème terme : on dérive $f(h(x))$ (à l'intérieur du signe somme). Avec les autres facteurs, on obtient :

$$\frac{1}{\lambda(\sigma)^n f_\sigma} \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |h'(x)|^s f_\sigma \circ h(x) (f \circ h)'(x) \ll \sum_{h \in \mathcal{H}^n} \|h'\|_\infty^\sigma \|(f \circ h)'\|_\infty.$$

► 4ème terme : on dérive $f_\sigma(h(x))$ (à l'intérieur du signe somme). Avec les autres facteurs, on obtient :

$$\frac{1}{\lambda(\sigma)^n f_\sigma} \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |h'(x)|^s f_\sigma \circ h(x) (f_\sigma \circ h)'(x) \ll \sum_{h \in \mathcal{H}^n} \|h'\|_\infty^\sigma \|f \circ h\|_\infty.$$

La preuve pour l'opérateur sécant est sensiblement identique. On l'écrit tout de même complètement ici. Par définition

$$\tilde{\mathbf{H}}_s[f](\underline{x}) = \frac{1}{\underline{f}_\sigma(\underline{x}) \lambda(\sigma)^n} \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |s_h(\underline{x})|^s (\underline{ff}_\sigma)(\underline{h}(\underline{x})).$$

Les fonctions \underline{f}_σ et $\frac{\partial}{\partial_j} \underline{f}_\sigma$ pour $j \in \{1, 2\}$ sont bornées inférieurement et supérieurement (voir théorème 6.13).

Là encore, il y a quatre facteurs qui dépendent de x_j . La dérivée par rapport à x_j est donc formée de quatre termes, qu'on majore séparément.

► 1er terme : on dérive $\frac{1}{\underline{f}_\sigma(\underline{x})}$. Cette dérivée est bornée supérieurement et inférieurement. Reste les autres facteurs. Grâce au lemme 1.13, on obtient :

$$\frac{1}{\lambda(\sigma)^n} \left| \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |s_h(\underline{x})|^s (\underline{ff}_\sigma)(\underline{h}(\underline{x})) \right| \ll \sum_{h \in \mathcal{H}^n} \|s_h\|_\infty^\sigma \|\underline{f} \circ \underline{h}\|_\infty \ll \sum_{h \in \mathcal{H}^n} \|h'\|_\infty^\sigma \|\underline{f} \circ \underline{h}\|_\infty.$$

► 2ème terme : on dérive $|s_h(x_1, x_2)|^s$. On obtient pour un certain $c \in]x_1, x_2[$,

$$s |s_h(x_1, x_2)|^s \left| \frac{h'(x_1)(x_1 - x_2) - (h(x_1) - h(x_2))}{(x_1 - x_2)^2} \right| \ll t |h'(x_1)|^\sigma \left| \frac{h''(c)}{h'(c)} \right| \ll t |h'(x_1)|^\sigma$$

(on a utilisé le lemme 1.13).

Avec les autres facteurs, on obtient :

$$\frac{t}{\lambda(\sigma)^n \underline{f}_\sigma(\underline{x})} \left| \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |h'(x_1)|^\sigma (\underline{ff}_\sigma)(\underline{h}(\underline{x})) \right| \ll \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |t| \cdot \|h'\|_\infty^\sigma \|\underline{f} \circ \underline{h}\|_\infty$$

► 3ème terme : on dérive $\underline{f}(h(\underline{x}))$ (à l'intérieur du signe somme). Reste les autres facteurs. Grâce au lemme 1.13, on obtient :

$$\frac{1}{\lambda(\sigma)^n \underline{f}_\sigma(\underline{x})} \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |s_h(\underline{x})|^s \underline{f}_\sigma(h(\underline{x})) \frac{\partial(\underline{f} \circ h)}{\partial j}(x) \ll \sum_{h \in \mathcal{H}^n} \|h'\|_\infty^\sigma \left\| \frac{\partial(\underline{f} \circ h)}{\partial j} \right\|_\infty.$$

► 4ème terme : on dérive $\underline{f}_\sigma(h(\underline{x}))$ (à l'intérieur du signe somme). Reste les autres facteurs. Grâce au lemme 1.13, on obtient :

$$\frac{1}{\lambda(\sigma)^n \underline{f}_\sigma(\underline{x})} \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |s_h(\underline{x})|^s \underline{f}_\sigma \circ h(\underline{x}) \frac{\partial(\underline{f}_\sigma \circ h)}{\partial j}(x) \ll \sum_{h \in \mathcal{H}^n} \|h'\|_\infty^\sigma \|\underline{f}_\sigma \circ h\|_\infty.$$

La majoration pour la norme $\|\cdot\|_{1,(\theta)}$ est obtenue en reprenant les calculs qui précèdent avec $\underline{x} \in \mathcal{I}(t, \theta)$.

Les versions moins précises sont montrées en utilisant le lemme 1.13 qui fait apparaître les facteurs $\hat{\rho}^n$. □

Comme les opérateurs non normalisés, les opérateurs normalisés dépendent analytiquement de s , et on dispose du lemme suivant, dont la démonstration est analogue à celle du lemme 6.19 (on pourra également consulter la preuve de la proposition 9.11 qui effectue un calcul analogue).

Lemme 6.20. *On considère un système de la Bonne Classe d'abscisse de convergence σ_0 (voir définition de la Bonne Classe). Pour tout $s = \sigma + it$, avec $\Re(s) > \sigma_0$ et $t \geq 1$, les opérateurs $\tilde{\mathbf{H}}_s$ et $\tilde{\mathbf{H}}_s'$ dépendent analytiquement de s , et les opérateurs dérivés $\tilde{\mathbf{H}}_s'$ et $\tilde{\mathbf{H}}_s''$ sont bornés respectivement sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ et $\mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$.*

De plus, les majorations du lemme 6.7 subsistent pour les opérateurs dérivées.

On est maintenant en mesure de dresser le tableau résumé 6.3, qui donne une majoration des différentes normes considérés, des différents opérateurs, normalisés ou non.

6.2.3 Décomposition spectrale et asymptotique

On considère un système de la Bonne Classe d'abscisse de convergence σ_0 (voir définition de la Bonne Classe).

Il s'agit de projeter sur l'espace vectoriel engendré par la fonction propre dominante, et de donner une majoration du terme de reste, de rayon spectral strictement inférieur. Ceci permet de trouver l'asymptotique des itérés de l'opérateur.

Pour tout $\sigma > \sigma_0$, on définit les projections dominantes

$$\mathbf{P}_\sigma = \int_\Gamma (\xi \mathbf{I} - \mathbf{H}_\sigma)^{-1} d\xi \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{P}}_\sigma = \int_{\tilde{\Gamma}} (\xi \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{H}}_\sigma)^{-1} d\xi,$$

où Γ est un contour orienté positivement qui englobe la valeur propre dominante $\lambda(\sigma)$ et aucune autre valeur spectrale de \mathbf{H}_σ (voir figure 6.1), et où $\tilde{\Gamma}$ est un contour orienté positivement qui englobe la valeur propre dominante 1 et aucune autre valeur spectrale de $\tilde{\mathbf{H}}_\sigma$ (voir figure 6.1 à homothétie près). On définit aussi les opérateurs de reste

$$\mathbf{N}_\sigma = \mathbf{H}_\sigma - \lambda(\sigma) \mathbf{P}_\sigma \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{N}}_\sigma = \tilde{\mathbf{H}}_\sigma - \tilde{\mathbf{P}}_\sigma.$$

	norme $\ \cdot\ _\infty$	norme $\ \cdot\ _{1,t}$	norme $\ \cdot\ _{1,N}$	norme $\ \cdot\ _{1,1}$
$\tilde{\mathbf{H}}_{\sigma+it}^n, t \geq 1$	≤ 1	$\ll 1$	$\ll 1$	
$\mathbf{H}_{\sigma+it}^n, t \geq 1$	$\ll \lambda(\sigma)^n$	$\ll \lambda(\sigma)^n$	$\ll \lambda(\sigma)^n$	
$\mathbf{H}_{1+it}^n, t \geq 1$	$\ll 1$	$\ll 1$	$\ll 1$	
$\tilde{\mathbf{H}}_{\sigma+it}^n, \sigma$ dans un compact	≤ 1			$\ll 1$
$\tilde{\mathbf{H}}_\sigma^n$	$= 1$			$\ll 1$

Les constantes de majoration sont indépendantes de n . Mais elles dépendent du compact auquel appartient σ . Pour la preuve, on est amenés à utiliser le lemme 6.17. Pour les autres cas, utiliser le lemme 6.4. Seules les cases « naturelles » ont été remplies.

FIG. 6.3 – Tableau résumé sur les normes des opérateurs

Théorème 6.21 (décomposition spectrale de l'opérateur tangent).

On considère un système de la Bonne Classe d'abscisse de convergence σ_0 .

On se place en σ réel, avec $\sigma > \sigma_0$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$.

On a les décompositions spectrales suivantes de l'opérateur tangent et de son normalisé

$$\mathbf{H}_\sigma[f] = \lambda(\sigma) \mathbf{P}_\sigma[f] + \mathbf{N}_\sigma[f] \quad \tilde{\mathbf{H}}_\sigma[f] = \tilde{\mathbf{P}}_\sigma[f] + \tilde{\mathbf{N}}_\sigma[f],$$

où \mathbf{P}_σ et $\tilde{\mathbf{P}}_\sigma$ sont idempotentes :

$$\mathbf{P}_\sigma^2 = \mathbf{P}_\sigma \quad \tilde{\mathbf{P}}_\sigma^2 = \tilde{\mathbf{P}}_\sigma$$

avec les relations de commutativité

$$\mathbf{P}_\sigma \circ \mathbf{N}_\sigma = \mathbf{N}_\sigma \circ \mathbf{P}_\sigma = 0, \quad \tilde{\mathbf{P}}_\sigma \circ \tilde{\mathbf{N}}_\sigma = \tilde{\mathbf{N}}_\sigma \circ \tilde{\mathbf{P}}_\sigma = 0,$$

Les projetés $\mathbf{P}_\sigma[f]$ et $\tilde{\mathbf{P}}_\sigma[f]$, dirigés respectivement par la fonction propre dominante de \mathbf{H}_σ et de $\tilde{\mathbf{H}}_\sigma$ sont de la forme

$$\mathbf{P}_\sigma[f] = E_\sigma(f) f_\sigma \quad \tilde{\mathbf{P}}_\sigma[f] = \tilde{E}_\sigma(f)$$

où E_σ et \tilde{E}_σ sont des formes linéaires, choisies de telle sorte que $E_\sigma(f_\sigma) = 1$ et $\tilde{E}_\sigma(\mathbf{1}) = 1$, c'est-à-dire, qu'en notant μ_σ et $\tilde{\mu}_\sigma$ les mesures duales dominantes, on a :

$$E_\sigma[f] = \int_{\mathcal{I}} f d\mu_\sigma \quad \tilde{E}_\sigma[f] = \int_{\mathcal{I}} f d\tilde{\mu}_\sigma.$$

De plus $R(\mathbf{N}_\sigma) = r(\mathbf{H}_\sigma) < R(\mathbf{H}_\sigma)$ et $R(\tilde{\mathbf{N}}_\sigma) = \frac{r(\mathbf{H}_\sigma)}{R(\mathbf{H}_\sigma)} < 1$.

En effet, l'opérateur normalisé a une fonction propre dominante constante égale à 1, donc la partie principale est une fonction constante.

Dans la suite, on notera simplement $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}$ et $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}$.

On peut facilement majorer les termes de reste grâce au théorème du rayon spectral, qui nous apprend que la norme de rayon spectral de l'opérateur \mathbf{G} est égal à la \limsup quand n tend vers $+\infty$ de $\|\mathbf{G}^n\|^{1/n}$.

En l'occurrence, en notant $r(\mathbf{H}_\sigma)$ le rayon spectral sous-dominant de \mathbf{H}_σ , on a pour tout $\epsilon > 0$ et asymptotiquement en n :

$$\|\mathbf{N}_\sigma^n\|_{1,1} \ll_\epsilon (r(\mathbf{H}_\sigma) + \epsilon)^n \quad \left\| \tilde{\mathbf{N}}_\sigma^n \right\|_{1,1} \ll_\epsilon \left(\frac{r(\mathbf{H}_\sigma)}{R(\mathbf{H}_\sigma)} + \epsilon \right)^n.$$

En écrivant que pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$,

$$|E_\sigma[f]| \leq \|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \left| \tilde{E}_\sigma[f] \right| \leq \|f\|_\infty,$$

et que

$$\|\mathbf{N}_\sigma[f]\|_\infty \leq \|\mathbf{N}_\sigma[f]\|_{1,1} \quad \text{et} \quad \left\| \tilde{\mathbf{N}}_\sigma[f] \right\|_\infty \leq \left\| \tilde{\mathbf{N}}_\sigma[f] \right\|_{1,1},$$

on obtient aussi une majoration de la norme infinie des puissances de l'opérateur, pour tout $\epsilon > 0$ et asymptotiquement en n :

$$\|\mathbf{H}_\sigma^n\|_\infty \ll_\epsilon (\lambda(\sigma) + \epsilon)^n \quad \left\| \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^n \right\|_\infty \ll_\epsilon (1 + \epsilon)^n$$

(une égalité meilleure sur $\tilde{\mathbf{H}}_\sigma$ avait été obtenue, directement, au lemme 6.18).

Dans le lemme, les mesures mises en évidence vérifient

$$\tilde{\mu}_\sigma = f_\sigma \mu_\sigma,$$

et donc $\tilde{\mu}_\sigma$ et μ_σ sont absolument continues l'une par rapport à l'autre. De plus μ_1 est la mesure de Lebesgue, c'est-à-dire que

$$E_1[f] = \int_{\mathcal{I}} f dx.$$

Puisque,

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} |h'(x)| = \sum_{h \in \mathcal{H}} |h(1) - h(0)| = |h(\mathcal{I})| = 1,$$

la fonction propre dominante associée à \mathbf{H}_1 est constante, et comme μ_1 est la mesure de Lebesgue, forcément $f_1 \equiv 1$.

Remarque 6.22. *Attention, pour $\sigma \neq 1$, $\tilde{\mu}_\sigma$ et μ_σ ne sont pas continues par rapport à la mesure de Lebesgue, et la mesure de Lebesgue n'est pas continue par rapport à elles.*

Une conséquence immédiate du théorème est que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{H}_\sigma^k[f] = \lambda(\sigma)^k E_\sigma(f) f_\sigma + \mathbf{N}_\sigma^k[f] \quad \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^k[f] = \tilde{E}_\sigma(f) + \tilde{\mathbf{N}}_\sigma^k[f],$$

ce qui permet de décomposer également les quasi-inverses :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{H}_\sigma)^{-1}[f] = \frac{\lambda(\sigma)}{1 - \lambda(\sigma)} E_\sigma(f) f_\sigma + (\mathbf{I} - \mathbf{N}_\sigma)^{-1}[f]$$

$$(\tilde{\mathbf{I}} - \tilde{\mathbf{H}}_\sigma)^{-1}[f] = \tilde{E}_\sigma(f) + (\tilde{\mathbf{I}} - \tilde{\mathbf{N}}_\sigma)^{-1}[f].$$

L'opérateur sécant dont la partie supérieure du spectre coïncide avec le tangent, a une décomposition spectrale proche.

Pour tout $\sigma > \sigma_0$, on définit les projections dominantes

$$\underline{\mathbf{P}}_\sigma = \int_{\underline{\Gamma}} (\xi \mathbf{I} - \underline{\mathbf{H}}_\sigma)^{-1} d\xi \quad \text{et} \quad \tilde{\underline{\mathbf{P}}}_\sigma = \int_{\tilde{\underline{\Gamma}}} (\xi \mathbf{I} - \tilde{\underline{\mathbf{H}}}_\sigma)^{-1} d\xi,$$

où $\underline{\Gamma}$ est un contour orienté positivement qui englobe la valeur propre dominante $\lambda(\sigma)$ et aucune autre valeur spectrale de $\underline{\mathbf{H}}_\sigma$ (voir figure 6.1), et où $\tilde{\underline{\Gamma}}$ est un contour orienté positivement qui englobe la valeur propre dominante 1 et aucune autre valeur spectrale de $\tilde{\underline{\mathbf{H}}}_\sigma$ (voir figure 6.1 à homothétie près). On définit aussi les opérateurs de reste

$$\underline{\mathbf{N}}_\sigma = \underline{\mathbf{H}}_\sigma - \lambda(\sigma) \underline{\mathbf{P}}_\sigma \quad \text{et} \quad \tilde{\underline{\mathbf{N}}}_\sigma = \tilde{\underline{\mathbf{H}}}_\sigma - \tilde{\underline{\mathbf{P}}}_\sigma.$$

Théorème 6.23 (décomposition spectrale de l'opérateur sécant).

On considère un système de la **Bonne Classe** d'abscisse de convergence σ_0 .

On se place en σ réel, avec $\sigma > \sigma_0$, et $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$.

On a les décompositions spectrales suivantes de l'opérateur sécant et de son normalisé

$$\underline{\mathbf{H}}_\sigma[\underline{f}] = \lambda(\sigma) \underline{\mathbf{P}}_\sigma[\underline{f}] + \underline{\mathbf{N}}_\sigma[\underline{f}] \quad \tilde{\underline{\mathbf{H}}}_\sigma[\underline{f}] = \tilde{\underline{\mathbf{P}}}_\sigma[\underline{f}] + \tilde{\underline{\mathbf{N}}}_\sigma[\underline{f}],$$

où $\underline{\mathbf{P}}_\sigma$ et $\tilde{\underline{\mathbf{P}}}_\sigma$ sont idempotentes :

$$\underline{\mathbf{P}}_\sigma^2 = \underline{\mathbf{P}}_\sigma \quad \tilde{\underline{\mathbf{P}}}_\sigma^2 = \tilde{\underline{\mathbf{P}}}_\sigma$$

avec les relations de commutativité pour la composition

$$\underline{\mathbf{P}}_\sigma \circ \underline{\mathbf{N}}_\sigma = \underline{\mathbf{N}}_\sigma \circ \underline{\mathbf{P}}_\sigma = 0, \quad \tilde{\underline{\mathbf{P}}}_\sigma \circ \tilde{\underline{\mathbf{N}}}_\sigma = \tilde{\underline{\mathbf{N}}}_\sigma \circ \tilde{\underline{\mathbf{P}}}_\sigma = 0,$$

Les projetés $\underline{\mathbf{P}}_\sigma[\underline{f}]$ et $\tilde{\underline{\mathbf{P}}}_\sigma[\underline{f}]$, dirigés respectivement par la fonction propre dominante de $\underline{\mathbf{H}}_\sigma$ et de $\tilde{\underline{\mathbf{H}}}_\sigma$ sont de la forme

$$\underline{\mathbf{P}}_\sigma[\underline{f}] = E_\sigma(\text{diag } \underline{f}) \underline{f}_\sigma \quad \tilde{\underline{\mathbf{P}}}_\sigma[\underline{f}] = \tilde{E}_\sigma(\text{diag } \underline{f}),$$

où E_σ et \tilde{E}_σ ont été introduits dans le théorème 6.21 et \underline{f}_σ est normalisé pour que $E_\sigma(\text{diag } \underline{f}_\sigma) = 1$.

De plus $R(\underline{\mathbf{N}}_\sigma) = r(\underline{\mathbf{H}}_\sigma) < R(\underline{\mathbf{H}}_\sigma) = R(\underline{\mathbf{H}}_\sigma)$ et $R(\tilde{\underline{\mathbf{N}}}_\sigma) = \frac{r(\tilde{\underline{\mathbf{H}}}_\sigma)}{R(\tilde{\underline{\mathbf{H}}}_\sigma)} < 1$.

Dans la suite, on notera simplement $\underline{\mathbf{P}}_1 = \underline{\mathbf{P}}$ et $\underline{\mathbf{N}}_1 = \underline{\mathbf{N}}$.

Les conséquences sont analogues. Grâce au théorème du rayon spectral, on obtient pour tout $\epsilon > 0$,

$$\|\underline{\mathbf{N}}_\sigma^n\|_{1,1} \ll_\epsilon r(\underline{\mathbf{H}}_\sigma + \epsilon)^n \quad \|\tilde{\underline{\mathbf{N}}}_\sigma^n\|_{1,1} \ll_\epsilon \left(\frac{r(\tilde{\underline{\mathbf{H}}}_\sigma)}{R(\tilde{\underline{\mathbf{H}}}_\sigma)} + \epsilon \right)^n.$$

On obtient aussi une majoration de la norme infinie des puissances de l'opérateur :

$$\|\underline{\mathbf{H}}_\sigma^n\|_\infty \ll_\epsilon (\lambda(\sigma) + \epsilon)^n \quad \|\tilde{\underline{\mathbf{H}}}_\sigma^n\|_\infty \ll_\epsilon (1 + \epsilon)^n$$

(une égalité meilleure sur $\tilde{\underline{\mathbf{H}}}_\sigma$ avait été obtenue, directement, au lemme 6.18).

Et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{H}_\sigma^k[f] = \lambda(\sigma)^k E_\sigma(\text{diag } \underline{f}) \underline{f}_\sigma + \mathbf{N}_\sigma^k[f] \quad \tilde{\mathbf{H}}_\sigma^k[f] = \tilde{E}_\sigma(\text{diag } \underline{f}) + \tilde{\mathbf{N}}_\sigma^k[f],$$

d'où la décomposition du quasi-inverse :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{H}_\sigma)^{-1}[f] = \frac{\lambda(\sigma)}{1 - \lambda(\sigma)} E_\sigma(\text{diag } \underline{f}) \underline{f}_\sigma + (\mathbf{I} - \mathbf{N}_\sigma)^{-1}[f]$$

$$(\tilde{\mathbf{I}} - \tilde{\mathbf{H}}_\sigma)^{-1}[f] = \tilde{E}_\sigma(\text{diag } \underline{f}) + (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{N}}_\sigma)^{-1}[f],$$

où les fonctions E_σ et \tilde{E}_σ sont communes aux opérateurs tangent et sécant.

6.3 Preuve du théorème (A)

En fait, maintenant qu'on a introduit les éléments spectraux et les opérateurs normalisés, on peut démontrer la version plus précise du théorème (A) suivante (se rappeler que les valeurs propres de \mathbf{H}_{1+it} , de $\tilde{\mathbf{H}}_{1+it}$ et de $\underline{\mathbf{H}}_{1+it}$ sont les mêmes car $\lambda(1) = 1$), qui explique également le lien entre les fonctions propres de \mathbf{M} et de $\tilde{\mathbf{H}}$ et $\underline{\mathbf{H}}$.

Théorème (A). *On considère un système dynamique (\mathcal{I}, T) de Bonne Classe. Soit $t_0 \neq 0$ et $\eta \in \mathbb{C}$, avec $|\eta| = 1$.*

Les fonctions propres continues de \mathbf{M}_{t_0} associées à η sont de module constant, et les fonctions propres continues de $\underline{\mathbf{M}}_{t_0}$ associées à η sont de module constant sur la diagonale.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $s \mapsto (\eta - \mathbf{H}_s)^{-1}$ a une singularité en $s = 1 + it_0$.

(b) η est une valeur propre de $\tilde{\mathbf{H}}_{1+it_0}$.

(c) η^{-1} est une valeur propre de \mathbf{M}_{t_0} .

De plus, les fonctions propres sont les mêmes, et sont toutes de module constant.

On obtient un théorème un peu plus faible pour l'opérateur sécant.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(d) $s \mapsto (\eta - \underline{\mathbf{H}}_s)^{-1}$ a une singularité en $s = 1 + it_0$.

(e) η est une valeur propre de $\underline{\mathbf{H}}_{1+it_0}$.

Et dans ce cas, η^{-1} est une valeur propre de \mathbf{M}_{t_0} (mais on n'a pas la réciproque comme pour l'opérateur tangent).

De plus, si $\underline{f} \in C^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$ est une fonction propre de $\underline{\mathbf{H}}_{1+it_0}$, alors $\text{diag } \underline{f}$ est une fonction propre de $\underline{\mathbf{M}}_{t_0}$ de module constant (c'est-à-dire que \underline{f} est de module constant sur la diagonale).

Enfin, si $\eta = 1$, alors l'assertion

(f) *la série de Dirichlet Λ a une singularité en $s = 1 + it_0$.*

implique (d) et (e).

Démonstration. Soit η une valeur propre de \mathbf{M} de module 1, associée à la fonction propre f , c'est-à-dire qu'on a $\mathbf{M}^n[f](x) = \eta^n f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{I}$. Le lemme 3.5 montre alors l'égalité, valable pour tout $y \in \mathcal{I}$, pour tout $h \in \mathcal{H}^n$:

$$|f \circ h(y)| = |f(y)|.$$

Or, tout $y \in \mathcal{I}$ est limite quand $n \rightarrow +\infty$ d'une suite $h_n(y_0)$, avec h_n branche inverse de profondeur n (on prend des branches inverses de plus en plus profondes). Par passage à la limite, on obtient donc :

$$|f(y_0)| = |f \circ h_n(y_0)| \rightarrow |f(y)|.$$

f est donc de module constant.

Soit \underline{f} une fonction propre de $\underline{\mathbf{M}}_{t_0}$. On se restreint à la diagonale grâce au lemme 3.3 :

$$\text{diag } \underline{\mathbf{M}}_{t_0} [\underline{f}] = \mathbf{M}_{t_0} [\text{diag } \underline{f}],$$

ce qui permet de conclure, en utilisant ce qui précède, que $\text{diag } \underline{f}$ est de module constant.

Pour prouver l'équivalence de (a) et (b), on montre maintenant que si η de module 1 appartient au spectre de l'opérateur \mathbf{H}_{1+it} , alors η est une valeur propre.

Pour cela on utilise le théorème 6.11. On a $R(\mathbf{H}_{1+it}) = 1$ (car η est une valeur spectrale de module 1), et $R_e(\mathbf{H}_{1+it}) < \rho R(\mathbf{H}_1)$, avec $R(\mathbf{H}_1) = 1$, et donc $R_e(\mathbf{H}_{1+it}) < R(\mathbf{H}_{1+it})$, donc \mathbf{H}_{1+it} est quasi-compact (ce qui n'est pas vrai a priori pour t quelconque). Et donc η est une valeur propre.

Supposons (b) vrai. Alors η est aussi valeur propre de $\tilde{\mathbf{H}}$, donc il existe $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ non identiquement nulle pour laquelle :

$$\tilde{\mathbf{H}}_{1+it_0}[f] = \eta f.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\tilde{\mathbf{H}}_{1+it_0}^n[f] = \eta^n f,$$

et donc, pour tout $y \in \mathcal{I}$:

$$\frac{1}{f_1(y)} \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |h'(y)|^{1+it_0} (f f_1) \circ h(y) = \eta^n f(y). \quad (6.1)$$

Quitte à normaliser, on peut supposer $\max_{\mathcal{I}} |f| = 1$. Soit y_0 tel que $|f(y_0)| = 1$. En prenant $y = y_0$, on obtient :

$$\frac{1}{f_1(y_0)} \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |h'(y_0)|^{1+it_0} (f f_1) \circ h(y_0) = \eta^n f(y_0).$$

On pose, pour tout $y \in \mathcal{I}$:

$$a_h(y) = \frac{1}{f_1(y)} |h'(y)| f_1 \circ h(y) \quad \text{et} \quad b_h(y) = \frac{1}{f(y) \eta^n} |h'(y)|^{it_0} f \circ h(y).$$

L'égalité 6.1 s'écrit alors :

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^n} a_h(y_0) b_h(y_0) = 1, \quad \text{avec} \quad \sum_{h \in \mathcal{H}^n} a_h(y_0) = \frac{\mathbf{H}_1^n[f_1](y_0)}{f_1(y_0)} = 1,$$

et pour tout $h \in \mathcal{H}^n$, $|b_h(y_0)| \leq 1$ (c'est là qu'intervient l'hypothèse $|f(y_0)| = 1$). Donc, tous les $b_h(y_0)$ sont égaux à 1, c'est à dire

$$|h'(y_0)|^{it_0} f \circ h(y_0) = \eta^n f(y_0),$$

et donc en prenant le module :

$$|f \circ h(y_0)| = |f(y_0)| = 1.$$

En raisonnant comme dans la première partie du théorème, on montre que f est de module constant égal à 1. Donc on peut répéter le raisonnement précédent en remplaçant y_0 par tout $y \in \mathcal{I}$. Avec $n = 1$ on obtient que pour tout $h \in \mathcal{H}$,

$$|h'(y)|^{it_0} f \circ h(y) = \eta f(y),$$

c'est-à-dire, d'après le lemme 3.5 :

$$\mathbf{M}_{t_0}[f](h(y)) = \eta^{-1} f \circ h(y).$$

Soit $x \in \mathcal{I}$. Alors il existe $h \in \mathcal{H}$ et $y \in \mathcal{I}$ tels que $x = h(y)$, et donc :

$$\mathbf{M}_t[f](x) = \eta^{-1} f(x).$$

Réciproquement, soit f est une fonction propre de \mathbf{M} associée à η de module 1.

D'après les lemmes 3.4 et 3.5, on obtient pour tout $h \in \mathcal{H}$, pour tout $x \in \mathcal{I}$, l'égalité :

$$|h'(x)|^{it_0} f \circ h(x) = \eta f(x).$$

D'autre part, f est de module constant d'après la première partie du théorème. On peut alors facilement refaire la démonstration dans l'autre sens pour prouver la réciproque.

Les assertions (b) et (c), et finalement (a), (b) et (c) sont donc équivalentes.

Pour prouver l'équivalence de (d) et (e), on montre maintenant que si η de module 1 appartient au spectre de l'opérateur \mathbf{H}_{1+it} , alors η est une valeur propre.

Ceci découle du théorème 6.13. On obtient $R(\mathbf{H}_1) = R(\underline{\mathbf{H}}_1) = R(\underline{\mathbf{H}}_{1+it}) = 1$, et donc $R_e(\underline{\mathbf{H}}_{1+it}) \leq \rho R(\mathbf{H}_1) = \rho R(\underline{\mathbf{H}}_{1+it})$, donc $\underline{\mathbf{H}}_{1+it}$ est quasi-compact.

Supposons maintenant que (e) est vraie. En passant à la diagonale, si $\tilde{\mathbf{H}}_{1+it_0}[\underline{f}] = \eta \underline{f}$, alors $\tilde{\mathbf{H}}_{1+it_0}[\text{diag } \underline{f}] = \eta \text{diag } \underline{f}$, et on utilise l'implication (b) \Rightarrow (c) déjà prouvée pour conclure que η^{-1} est une valeur propre de \mathbf{M}_{t_0} et que $\text{diag } \underline{f}$ est de module constant.

On donne ici une preuve qui ne dépend pas de la première partie du théorème. Si (e) est vrai, alors $\exists \underline{f} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$ non identiquement nulle telle que :

$$\tilde{\mathbf{H}}_{1+it_0}[\underline{f}] = \eta \underline{f}.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\tilde{\mathbf{H}}_{1+it_0}^n[\underline{f}] = \eta^n \underline{f}.$$

c'est-à-dire que pour tout $\underline{y} = (y_1, y_2) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$:

$$\frac{1}{\underline{f}_1(\underline{y})} \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |s_h(\underline{y})|^{1+it_0} \left(\underline{f} \underline{f}_1 \right) (h(\underline{y})) = \eta^n \underline{f}(\underline{y}).$$

Quitte à normaliser, on peut supposer $\max_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}} |f| = 1$. Soit $\underline{y}_0 = (y_{10}, y_{20})$ tel que $|\underline{f}(\underline{y}_0)| = 1$. En prenant $y_1 = y_{10}$, $y_2 = y_{20}$, on obtient :

$$\frac{1}{\underline{f}_1(\underline{y}_0)} \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |s_h(\underline{y}_0)|^{1+it_0} (\underline{f} \underline{f}_1)(\underline{h}(\underline{y}_0)) = \eta^n \underline{f}(\underline{y}_0).$$

On pose, pour tout $\underline{y} = (y_1, y_2) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$:

$$a_h(\underline{y}) = \frac{1}{\underline{f}_1(\underline{y})} |s_h(\underline{y})| \underline{f}_1(\underline{h}(\underline{y}))$$

$$b_h(\underline{y}) = \frac{1}{\underline{f}(\underline{y}) \eta^n} |s_h(\underline{y})|^{it_0} \underline{f}(\underline{h}(\underline{y})).$$

L'égalité précédente s'écrit alors :

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^n} a_h(\underline{y}_0) b_h(\underline{y}_0) = 1, \quad \text{avec} \quad \sum_{h \in \mathcal{H}^n} a_h(\underline{y}_0) = \frac{\mathbf{H}_1^n[\underline{f}_1](\underline{y}_0)}{F_1(\underline{y}_0)} = 1,$$

et pour tout $h \in \mathcal{H}^n$, $|b_h(\underline{y}_0)| \leq 1$. Donc, tous les $b_h(\underline{y}_0)$ sont égaux à 1, c'est à dire

$$|s_h(\underline{y}_0)|^{it_0} \underline{f}(\underline{h}(\underline{y}_0)) = \eta^n \underline{f}(\underline{y}_0),$$

et donc en prenant le module :

$$|\underline{f}(\underline{h}(\underline{y}_0))| = |\underline{f}(\underline{y}_0)| = 1.$$

Soit $y \in \mathcal{I}$. On trouve alors (h_n) tel que $h_n(y_{01}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. On a alors aussi $h_n(y_{02}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$, et on obtient, par continuité de l'application \underline{f} :

$$|\text{diag } \underline{f}(y)| = |\underline{f}(y, y)| = 1,$$

c'est-à-dire que \underline{f} est de module constant égal à 1. Donc on peut répéter le raisonnement précédent en remplaçant $\underline{y}_0 = (y_{01}, y_{02})$ par (y, y) pour tout $y \in \mathcal{I}$. Avec $n = 1$ on obtient que pour tout $h \in \mathcal{H}$,

$$|h'(y)|^{it_0} \text{diag } \underline{f} \circ h(y) = \eta \text{diag } \underline{f}(y),$$

c'est-à-dire, d'après le lemme 3.5 :

$$\mathbf{M}_{t_0}[\text{diag } \underline{f}](h(y)) = \eta \text{diag } \underline{f}(h(y)).$$

Soit $x \in \mathcal{I}$. Alors il existe $h \in \mathcal{H}^n$ et $y \in \mathcal{I}$ tels que $x = h(y)$, et donc :

$$\mathbf{M}_t^n[\text{diag } \underline{f}](x) = \eta^{-n} \text{diag } \underline{f}(x).$$

Enfin, supposons (f) vraie. En se rappelant (proposition 1.10) que

$$\Lambda(1 + it_0) = (\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it_0})^{-1}[G^s](0, 1),$$

on obtient que $\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it_0}$ n'est pas inversible, c'est-à-dire l'assertion (e).

□

Le fait que « η^{-1} est une valeur propre de \mathbf{M}_{t_0} » n'implique pas (d) et (e), c'est-à-dire qu'on ne puisse pas reprendre la démonstration pour l'opérateur sécant dans l'autre sens comme pour l'opérateur tangent, est dû au fait que les suites $\underline{h}_n(\underline{x}_0) = (h_n(x_{01}), h_n(x_{02}))_n$, où $h_n \in \mathcal{H}^n$ ne permettent d'atteindre que les points de la diagonale, c'est-à-dire les points $(x, x) \in \mathcal{I}^2$. Cette absence de réciproque pour l'opérateur sécant préfigure les difficultés qu'on rencontrera dans la preuve de la H -discipline (pour l'opérateur sécant) dans la suite (chapitre 10).

En fait, on peut prouver prouver cette version plus précise du théorème 6.3.

Lemme 6.24. *On considère un système dynamique (\mathcal{I}, T) de Bonne Classe. Soit $t_0 \neq 0$ et $\eta \in \mathbb{C}$, avec $|\eta| = 1$.*

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) *il existe $\sigma > \sigma_0$, tel que η est une valeur propre de $\tilde{\mathbf{H}}_{\sigma+it_0}$.*

(b) *pour tout $\sigma > \sigma_0$, η est une valeur propre de $\tilde{\mathbf{H}}_{\sigma+it_0}$.*

(c) *η^{-1} est une valeur propre de \mathbf{M}_{t_0} .*

De plus, les fonctions propres sont à chaque fois les mêmes, et sont toutes de module constant.

Démonstration. Prendre cette fois

$$a_h(x) = \frac{1}{\lambda(\sigma)f_\sigma(x)} |h'(x)|^\sigma f_\sigma \circ h(x).$$

□

On a donc prouvé au passage que (pour les systèmes de Bonne Classe) les fonctions propres de $\tilde{\mathbf{H}}_{\sigma+it}$ associées à une valeur propre de module 1 étaient de module constant.

6.4 Relation entre M et H

On aura besoin dans l'étape 3 de la version très précise suivante.

Lemme 6.25. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, pour tout $w \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, et pour tout $t > 0$, pour lesquels les objets suivants sont définis, on a l'identité suivante :*

$$w \mathbf{H}_{1+it}^n[f] = \mathbf{H}_1^n[f \mathbf{M}_{-t}^n[w]].$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^$, pour tout $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, pour tout $\underline{w} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, et pour tout $t > 0$, pour lesquels les objets suivants sont définis, on a l'identité suivante :*

$$\underline{w} \mathbf{H}_{1+it}^n[\underline{f}] = \mathbf{H}_1^n[\underline{f} \underline{\mathbf{M}}_{-t}^n[\underline{w}]].$$

En particulier, avec $f \equiv \mathbf{1}$ et $\underline{f} \equiv \underline{\mathbf{1}}$, on obtient :

$$w \mathbf{H}_{1+it}^n[\mathbf{1}] = \mathbf{H}_1^n \circ \mathbf{M}_{-t}^n[w] \quad \text{et} \quad \underline{w} \mathbf{H}_{1+it}^n[\underline{\mathbf{1}}] = \mathbf{H}_1^n \circ \underline{\mathbf{M}}_{-t}^n[\underline{w}].$$

(d'une certaine façon, \mathbf{H} et \mathbf{M} sont inverses l'un de l'autre).

Démonstration. On a d'après le lemme 3.5 :

$$\mathbf{M}_t^n[w](x) = |(T^n)'(x)|^{-it} w \circ T(x),$$

et donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1^n[f \mathbf{M}_t^n[w]](x) &= \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |h'(x)| |(T^n)'(h(x))|^{-it} w \circ T^n(h(x)) f \circ h(x) \\ &= \sum_{h \in \mathcal{H}^n} |h'(x)|^{1+it} w(x) f \circ h(x),\end{aligned}$$

d'où la conclusion en « sortant » $w(x)$ de la somme.

La preuve pour le sécant ne présente pas de difficulté supplémentaire : les dérivées sont juste remplacées par des taux d'accroissements.

□

Chapitre 7

Réunions fondamentales

Sommaire

7.1	Définitions	151
7.2	Cas particuliers utilisés	154
7.3	Majoration sur les ensembles introduits	157
7.4	Réunions fondamentales et points fixes	161
7.5	Sous-ensembles de Cantor	162
7.6	Une nouvelle norme	164

On termine cette partie par quelques définitions et résultats sur les réunions fondamentales, qu'on va utiliser dans la preuve : en effet, on ne sait faire de l'analyse que dans le cas d'un nombre fini de branches. Ces réunions fondamentales vont nous permettre de nous ramener à ce cas.

Deux idées nouvelles rendent possible dans les chapitres qui suivent, les preuves pour la condition 2-DIOP dans le cas d'un alphabet infini (et fournissent une preuve alternative pour la condition 3-DIOP) :

- (i) l'utilisation non plus d'ensembles de Cantor comme Melbourne, Hachemi, et Baladi, mais de *réunions fondamentales*, plus grosses, qui sont des « Cantor en construction »,
- (ii) la dépendance de ces ensembles en $t = \mathfrak{S}(s)$ (les opérateurs étant étudiés dans un premier temps sur la droite $\{\Re(s) = 1\}$, le passage à gauche étant opéré par un argument classique).

7.1 Définitions

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}^n$. C'est-à-dire que les éléments de \mathcal{H}_0 sont des branches inverses de même profondeur n . On définit la réunion fondamentale de \mathcal{I} associée à \mathcal{H}_0 comme la réunion (disjointe) sur les éléments $h \in \mathcal{H}_0$, des intervalles fondamentaux $h(\mathcal{I})$ (voir chapitre 1). Dit autrement, les points de $\mathcal{H}_0(\mathcal{I})$ sont les points de \mathcal{I} dont le début de la trajectoire emprunte une branche de \mathcal{H}_0 .

On définit aussi les réunions fondamentales à deux variables, réunions de carrés fondamentaux, et généralisation des intervalles fondamentaux. Les carrés fondamentaux ont déjà joué un rôle dans [53], et bien sûr les triangles fondamentaux employés dans [61] et au chapitre 2, sont des demi-carrés fondamentaux. Enfin, les ensembles $\mathcal{I}(p, \mathcal{H}_0)$ et $\underline{\mathcal{I}}(p, \mathcal{H}_0)$, plus petits, contraignent encore plus la trajectoire des points leur appartenant, en considérant des branches de profondeur plus grande que 1.

Définition 7.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et un ensemble $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}^n$ de branches inverses de même profondeur n .

► On notera

$$\mathcal{I}(p, \mathcal{H}_0) = \bigcup_{h \in \mathcal{H}_0^p} h(\mathcal{I})$$

la réunion fondamentale de profondeur p associée \mathcal{H}_0 , et simplement

$$\mathcal{I}(\mathcal{H}_0) = \mathcal{I}(1, \mathcal{H}_0) = \mathcal{H}_0(\mathcal{I}) = \bigcup_{h \in \mathcal{H}_0} h(\mathcal{I}).$$

► Dans le cas de deux variables, on notera

$$\underline{\mathcal{I}}(p, \mathcal{H}_0) = \bigcup_{h \in \mathcal{H}_0^p} h(\underline{\mathcal{I}}) \times h(\underline{\mathcal{I}}) = \bigcup_{h \in \mathcal{H}_0^p} \underline{h}(\underline{\mathcal{I}})$$

la réunion fondamentale de profondeur p associée \mathcal{H}_0 , et simplement

$$\underline{\mathcal{I}}(\mathcal{H}_0) = \underline{\mathcal{I}}(1, \mathcal{H}_0) = \bigcup_{h \in \mathcal{H}_0} h(\underline{\mathcal{I}}) \times h(\underline{\mathcal{I}}) = \bigcup_{h \in \mathcal{H}_0} \underline{h}(\underline{\mathcal{I}}).$$

On peut voir la réunion fondamentale comme un ensemble de Cantor en construction, comme on le verra dans la suite : $\mathcal{I}(p, \mathcal{H}_0)$ (resp. $\underline{\mathcal{I}}(p, \mathcal{H}_0)$) est l'intersection des $\mathcal{H}_0^k(\mathcal{I})$ (resp. des $\bigcup_{h \in \mathcal{H}_0^k} \underline{h}(\underline{\mathcal{I}})$) pour k de 1 à p , tandis que l'intersection sera prise sur $k \in \mathbb{N}^*$ pour l'ensemble de Cantor.

La définition montre que $\mathcal{I}(t, \beta, \delta)$ est une réunion de segments, tandis que $\underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta)$ est une réunion de carrés dont la diagonale est la même que celle de $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$.

De façon équivalente, on peut définir ainsi les réunions fondamentales à deux variables.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(p, \mathcal{H}_0) &= \bigcup_{h \in \mathcal{H}_0^p} h(\mathcal{I}) \\ &= \mathcal{H}_0^p(\mathcal{I}) \\ &= \{x \in \mathcal{I} \text{ tels que } \exists h \in \mathcal{H}_0^p \text{ tel que } h \circ T^{np}(x) = x\} \\ &= \{x \in \mathcal{I} \text{ tels que } \forall m \in \mathbb{N}, m < p, T^{mn}(x) \in \mathcal{I}(\mathcal{H}_0)\} \end{aligned}$$

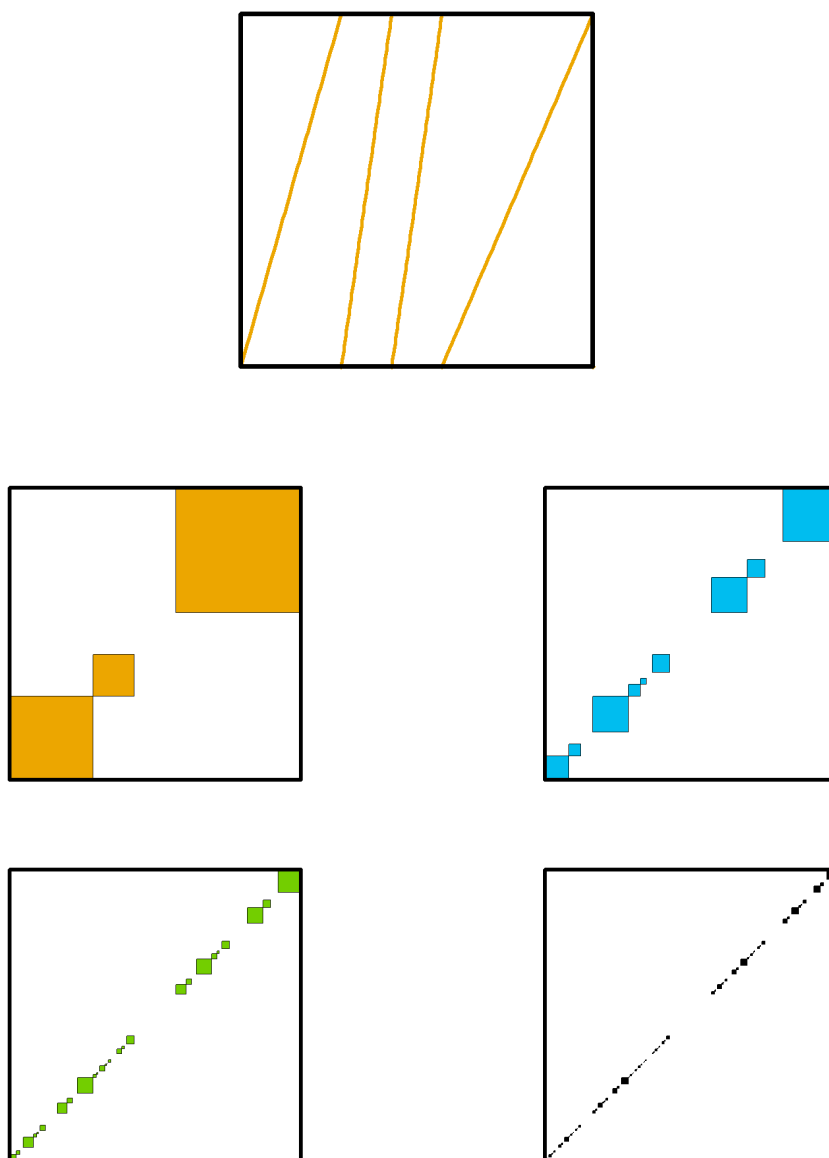
$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{I}}(p, \mathcal{H}_0) &= \bigcup_{h \in \mathcal{H}_0^p} \underline{h}(\underline{\mathcal{I}}) \\ &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \text{ tels que } \exists h \in \mathcal{H}_0^p \text{ tel que } \begin{cases} h \circ T^{np}(x_1) = x_1 \\ h \circ T^{np}(x_2) = x_2 \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

Les $x \in \mathcal{I}(p, \mathcal{H}_0)$ sont donc les x pour lesquels les p premiers itérés avec saut n empruntent des branches de \mathcal{H}_0 . Quant aux couples $(x_1, x_2) \in \underline{\mathcal{I}}(p, \mathcal{H}_0)$, ce sont les couples (x_1, x_2) tels que les p premiers itérés avec saut n empruntent la même branche pour x_1 et x_2 , et cette branche doit être dans \mathcal{H}_0 . Plus p est grand, et plus les points de $\underline{\mathcal{I}}(p, \mathcal{H}_0)$ sont proches de la diagonale.

Attention : pour $\mathcal{H}_0 \subsetneq \mathcal{H}$ (sous-ensemble strict), on a pour tout $p \geq 1$, $\underline{\mathcal{I}}(p, \mathcal{H}_0) \subsetneq \mathcal{I}(p, \mathcal{H}_0) \times \mathcal{I}(p, \mathcal{H}_0)$. Un point de $\mathcal{I}(p, \mathcal{H}_0) \times \mathcal{I}(p, \mathcal{H}_0)$ a ses deux coordonnées dans la réunion fondamentale, mais elles ne sont pas forcément associées à la même branche inverse, c'est-à-dire que le point n'est pas forcément proche de la diagonale.

A la figure 7.1 sont représentés sur un exemple des carrés fondamentaux... dans le cas sans mémoire, où précisément ils ne servent pas, car on n'a pas besoin d'introduire d'opérateurs sécants (pas d'opérateur du tout d'ailleurs).

Bien sûr, la moitié supérieure d'un carré de $\underline{\mathcal{I}}(p, \mathcal{H}_0)$, avec $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}^n$, est (à sa frontière près) un triangle \mathcal{T}_w avec $w \in \Sigma^{np}$ (introduits au moment de l'analyse de **QuickSort**, voir figure 2.10).



Sur cette figure est représenté un système dynamique affine ($\mathbf{p} = (2/7, 1/7, 1/7, 3/7)$), dont on sélectionne les branches inverses $\mathcal{H}_0 = (1, 2, 4) \subset \mathcal{H}$ (notation évidente). On représente successivement $\underline{\mathcal{I}}(1, \mathcal{H}_0)$, $\underline{\mathcal{I}}(2, \mathcal{H}_0)$, $\underline{\mathcal{I}}(3, \mathcal{H}_0)$ et $\underline{\mathcal{I}}(4, \mathcal{H}_0)$.

FIG. 7.1 – Carrés fondamentaux sur un exemple

7.2 Cas particuliers utilisés

On introduit la notation suivante, qui servira à définir la profondeur des branches des sous-ensemble \mathcal{H}_0 de \mathcal{H}^* qu'on va considérer.

Définition 7.2. *Pour tout $t > 0$, et pour tout $\beta > 0$, on note :*

$$n(\beta, t) = \lfloor \beta \log t \rfloor.$$

Voici maintenant les \mathcal{H}_0 bien particuliers qu'on va utiliser :

Définition 7.3. *On définit le sous-ensemble de \mathcal{H}^* suivant :*

$$\mathcal{H}(t, \beta, \delta) = \left\{ h \in \mathcal{H}^{n(\beta, t)} : \inf_{x \in \mathcal{I}} |h'(x)| \geq \frac{1}{t^\delta} \right\}.$$

Considérer $\mathcal{H}(t, \beta, \delta)$ revient à grouper les étapes de l'itération par $n(\beta, t)$. En effet, demander quelque chose sur $h \in \mathcal{H}^{n(\beta, t)}$ est moins restrictif que de demander quelque chose sur chaque branche inverse de profondeur 1 qui compose h . Donc l'ensemble $\mathcal{H}(t, \beta, \delta)$ diminue avec β .

De plus, plus δ est grand, et plus il y a de branches inverses qui vérifient l'inégalité de définition, donc l'ensemble $\mathcal{H}(t, \beta, \delta)$ augmente avec δ .

Intuition 7.4. *Le rapport $\frac{\delta}{\beta}$ mesure les ensembles $\mathcal{H}(t, \beta, \delta)$, et s'avère prépondérant dans la suite de la thèse.*

Grâce aux sous-ensembles de $\mathcal{H}(t, \beta, \delta) \subset \mathcal{H}^*$, on introduit les réunions fondamentales suivantes qui vont nous servir dans la suite.

Définition 7.5. *On introduit les réunions fondamentales suivantes :*

$$\mathcal{I}(t, \beta, \delta) := \mathcal{I}(\mathcal{H}(t, \beta, \delta)), \quad \underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta) := \underline{\mathcal{I}}(\mathcal{H}(t, \beta, \delta))$$

et

$$\mathcal{I}(p, t, \beta, \delta) := \mathcal{I}(p, \mathcal{H}(t, \beta, \delta)), \quad \underline{\mathcal{I}}(p, t, \beta, \delta) := \underline{\mathcal{I}}(p, \mathcal{H}(t, \beta, \delta)).$$

On introduit également :

$$\underline{\mathcal{I}}(t, \theta) = \underline{\mathcal{I}}\left(\mathcal{H}^{n(\theta, t)}\right),$$

ainsi que les ensembles plus complexes suivants :

$$\underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta) = \bigcup_{h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)} \underline{h}(\underline{\mathcal{I}}(t, \theta)).$$

La réunion fondamentale $\underline{\mathcal{I}}(t, \theta)$ est le voisinage de la diagonale formé de tous les carrés de « profondeur θ ». C'est-à-dire que quand on itère le shift sur un point de $\underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta)$, les $n(\beta, t)$ premières branches empruntées sont dans $\mathcal{H}(t, \beta, \delta)$ (c'est-à-dire que \underline{x} ne peut être que dans certains « grands » carrés de « profondeur β », autour de la diagonale). Puis, les $n(\theta, t)$ branches suivantes sont quelconques, mais toutes ces branches sont communes aux deux coordonnées (c'est-à-dire que le point est « très » proche de la diagonale). On a bien sûr :

$$\underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta) \subset \underline{\mathcal{I}}(t, \theta).$$

Comme dans le cas général, on peut donner plusieurs définitions équivalentes. Par exemple :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(p, t, \beta, \delta) &= \bigcup_{h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)^p} h(\mathcal{I}) \\
&= \mathcal{H}(t, \beta, \delta)^p(\mathcal{I}) \\
&= \{x \in \mathcal{I} \text{ tels que } \exists h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)^p \text{ tel que } h \circ T^{n(\beta, t)^p}(x) = x\} \\
&= \{x \in \mathcal{I} \text{ tels que } \forall m \in \mathbb{N}, m < p, T^{mn(\beta, t)}(x) \in \mathcal{I}(t, \beta, \delta)\} \\
\\
\underline{\mathcal{I}}(p, t, \beta, \delta) &= \bigcup_{h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)^p} \underline{h}(\underline{\mathcal{I}}) \\
&= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \text{ tels que } \exists h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)^p \text{ tel que } \begin{cases} h \circ T^{n(\beta, t)^p}(x_1) = x_1 \\ h \circ T^{n(\beta, t)^p}(x_2) = x_2 \end{cases} \right\}
\end{aligned}$$

$$\underline{\mathcal{I}}(t, \theta) = \bigcup_{h \in \mathcal{H}^n(\theta, t)} \underline{h}(\underline{\mathcal{I}}),$$

$$\begin{aligned}
\underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta) &= \underline{\mathcal{I}}\left(\mathcal{H}(t, \beta, \delta) \circ \mathcal{H}^n(\theta, t)\right) \\
&= \bigcup_{h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta), \ell \in \mathcal{H}^n(\theta, t)} \underline{h \circ \ell}(\underline{\mathcal{I}}) \\
&= \bigcup_{h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta), \ell \in \mathcal{H}^n(\theta, t)} h \circ \ell(\mathcal{I}) \times h \circ \ell(\mathcal{I}).
\end{aligned}$$

Dans le cas des systèmes sans mémoire, on a déjà donné l'intuition qu'on pouvait toujours se limiter à regarder la profondeur 1, et qu'on n'avait pas besoin d'utiliser d'opérateur. C'est pourquoi on va considérer un sous-ensemble de branches $\mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$ (il ne dépend pas de β).

De plus, comme les dérivées des différentes branches inverses sont constantes (voir 1.5), il n'y a pas besoin de restreindre l'intervalle d'étude : ce qui est vrai en un point, l'est partout. Aussi, pas besoin d'introduire d'ensemble $\mathcal{I}_{\text{aff}}(t, \delta)$ (on ne donne la définition que pour mémoire). En fait, on va travailler avec des fonctions constantes définies sur tout \mathcal{I} . Mais bien sûr, on pourra utiliser des opérateurs contraints, avec la somme prise sur les branches de $\mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$ ou son complémentaire dans \mathcal{H} .

Intuition 7.6. *Dans le cas des systèmes sans mémoire, on travaille sur des (fonctions) constantes, et on n'introduit donc pas de réunions fondamentales d'intervalles.*

Les définitions sont alors plus simples.

Définition 7.7.

On définit le sous-ensemble de \mathcal{H} suivant :

$$\mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta) = \left\{ i \in \mathbb{N}^*; \quad c_{\text{aff}}(i) \geq \frac{1}{t\delta} \right\}.$$

Grâce aux sous-ensembles de $\mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta) \subset \mathcal{H}^*$, on introduit pour mémoire les réunions fondamentales associées, bien qu'elle ne nous servent pas dans cette thèse.

Définition 7.8. *On introduit les réunions fondamentales suivantes :*

$$\mathcal{I}_{\text{aff}}(t, \delta) := \mathcal{I}_{\text{aff}}(\mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)),$$

et

$$\mathcal{I}_{\text{aff}}(p, t, \delta) := \mathcal{I}_{\text{aff}}(p, \mathcal{H}(t, \delta)).$$

Dans le cas des systèmes avec alphabet fini, on a, pour les systèmes généraux

$$\inf_{h \in \mathcal{H}} \inf_{\mathcal{I}} |h'(x)| > 0$$

et en particulier pour les systèmes affines :

$$\inf_{i \in \Sigma} c_{\text{aff}}(i) > 0.$$

En effet, les inf écrits ci-dessus sont en fait des min car l'ensemble considéré est fini.

Cette remarque fondamentale montre que, à δ fixé, et pour tout t assez grand :

$$\mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta) = \mathcal{H}.$$

Dans le cas général, notons $\rho_0 = \inf_{h \in \mathcal{H}} \inf_{\mathcal{I}} |h'(x)|$. C'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $h \in \mathcal{H}^n$, pour tout $x \in \mathcal{I}$,

$$|h'(x)| \geq \rho_0^n.$$

On a $\hat{\rho} < 1$ pour les systèmes de la Bonne Classe. Donc, pour $h \in \mathcal{H}^{n(\beta, t)}$,

$$|h'(x)| \geq \rho_0^{n(\beta, t)} \geq \rho_0^{\beta \log t} = t^{-\beta |\log \rho_0|},$$

ce qui termine la preuve du lemme suivant :

Lemme 7.9. *Etant donné un système fini et de la Bonne Classe, notons*

$$\rho_0 = \inf_{h \in \mathcal{H}} \inf_{\mathcal{I}} |h'(x)|.$$

Si $\frac{\delta}{\beta} > |\log \rho_0|$, alors pour tout $t > 0$,

$$\mathcal{H}(t, \beta, \delta) = \mathcal{H}.$$

Et d'autre part, pour t assez grand, et sans condition supplémentaire :

$$\mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta) = \mathcal{H}.$$

7.3 Majoration sur les ensembles introduits

Le problème avec un nombre infini de branches, c'est qu'on peut en trouver aussi près de la verticale qu'on veut, c'est-à-dire qu'on peut trouver une suite $(x_n)_n$ d'éléments de \mathcal{I} telle que :

$$|T'(x_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Ou encore, en notant h_n telle que $h_n \circ T(x_n) = x_n$,

$$|h'(x_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ou encore, les intervalles fondamentaux peuvent être arbitrairement petits.

Le lemme suivant donne différentes majorations sur les branches et les intervalles fondamentaux. Ce lemme n'est vrai que parce que \mathcal{H}_0 est fini. Dans le cas d'un nombre infini de branches, on est dans le cas limite $K(\mathcal{H}_0) = 0$.

Lemme 7.10. *Soit \mathcal{H}_0 un sous-ensemble fini de \mathcal{H}^n .*

(i) *Alors*

$$K = K(\mathcal{H}_0) = \min_{h \in \mathcal{H}_0} \inf_{x \in \mathcal{I}} |h'(x)| > 0$$

(ii) *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $h \in \mathcal{H}_0^k$ (branche inverse de profondeur nk), pour tous $y, y_1, y_2 \in \mathcal{I}$*

$$|h'(y)| \geq K(\mathcal{H}_0)^k \quad \text{et} \quad |s_h(y_1, y_2)| \geq K(\mathcal{H}_0)^k.$$

Les intervalles fondamentaux d'une réunion fondamentale finie ne peuvent pas être arbitrairement petits. Plus précisément, les intervalles fondamentaux de $\mathcal{I}(p, \mathcal{H}_0)$ ont une longueur supérieure ou égale à $K(\mathcal{H}_0)^p$.

(iii) *On peut aussi majorer les dérivées des itérés de T , si les branches sont prises parmi un nombre fini, car alors elles ne peuvent pas être trop verticales. Pour tout $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}^n$ fini, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathcal{I}(p, \mathcal{H}_0)$*

$$|(T^{np})'(x)| \leq K(\mathcal{H}_0)^{-p}.$$

Démonstration. (i) Une branche $h \in \mathcal{H}_0^k$ s'écrit :

$$h = h_1 \circ h_2 \circ \dots \circ h_k,$$

avec chacun des h_i dans \mathcal{H}_0 , et donc chacune des branches étant prolongeable en une fonction continue sur un intervalle fondamental compact, on a que chaque $|h'_i|$ est minoré par une constante strictement positive (comme fonction réciproque de T^n), pour $i \in \{1, \dots, k\}$. Et donc $K(\mathcal{H}_0) > 0$.

En dérivant la composée, il vient alors que pour tout $y \in \mathcal{I}$

$$|h'(y)| \geq K^k,$$

où K est indépendant de k .

Pour la sécante, d'après l'inégalité des accroissements finis, il existe $y_0 \in]y_1, y_2[$ tel que $s_h(y_1, y_2) = h'(y_0)$, ce qui permet de conclure.

(ii) La majoration sur la dérivée provient de la formule de dérivée d'une composée.

Pour la majoration du sécant, d'après l'égalité des accroissements finis, en supposant $y_1 < y_2$, il existe $y_0 \in]y_1, y_2[$ tel que $s_h(y_1, y_2) = h'(y_0)$ ce qui permet de conclure.

A un intervalle fondamental de profondeur k est associé une branche inverse $h \in \mathcal{H}_0^k$. La longueur de l'intervalle fondamental est alors :

$$|h(1) - h(0)| = |h'(c)| \cdot |1 - 0|$$

pour un certain $c \in \mathcal{I}$ d'après l'égalité des accroissements finis.

(iii) Soit $h \in \mathcal{H}_0^n$ la branche inverse de profondeur n tel que $h \circ T^n(x) = x$. On a alors en dérivant :

$$1 = h'(T^n(x))(T^n)'(x),$$

ce qui permet de conclure. \square

Les cas particuliers de $\mathcal{H}(t, \beta, \delta)$ et $\mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$ sont donnés par le lemme suivant. Dans le cas particulier qui nous intéresse, $K = t^{-\delta}$.

Lemme 7.11. (i) Pour tout $t > 0$, pour tout $\beta > 0$, pour tout $\delta > 0$, l'ensemble $\mathcal{H}(t, \beta, \delta)$ est fini, et on a :

$$K(\mathcal{H}(t, \beta, \delta)) \geq t^{-\delta}.$$

Pour tout $t > 0$, pour tout $\delta > 0$, l'ensemble $\mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$ est fini, on a :

$$K(\mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)) \geq t^{-\delta}.$$

(ii) Pour tout $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$ ou $h \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$, pour tout $y, y_1, y_2 \in \mathcal{I}$:

$$|h'(y)| \geq \frac{1}{t^\delta} \quad \text{et} \quad |s_h(y_1, y_2)| \geq \frac{1}{t^\delta}$$

Les intervalles fondamentaux de $\mathcal{I}(p, t, \beta, \delta)$ et de $\mathcal{I}_{\text{aff}}(p, t, \delta)$ ont une longueur supérieure ou égal à $t^{-\delta p}$.

(iii) En particulier, pour tout $x \in \mathcal{I}(p, t, \beta, \delta)$,

$$\left| \left(T^{pn(\beta, t)} \right)'(x) \right| \leq t^{p\delta}.$$

Démonstration. (i) Soit $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$, l'intervalle fondamental associé à h a une mesure de Lebesgue $|h(1) - h(0)|$ supérieure ou égale à $\inf_{\mathcal{I}} |h'| \geq \frac{1}{t^\delta}$ d'après l'inégalité des accroissements finis. Ceci prouve que le cardinal de $\mathcal{H}(t, \beta, \delta)$ est inférieur ou égal à $\lfloor t^\delta \rfloor$, donc en particulier, est fini. Et on procède de même dans le cas affine.

Le reste du lemme est une simple application du lemme précédent (sauf la minoration sur h' qui est une définition). \square

Le lemme suivant, en combinaison avec le précédent, justifie pleinement l'introduction de $\mathcal{H}(t, \beta, \delta)$. Ce lemme revient à mesurer (voir lemme 1.13), pour μ une mesure continue par rapport à la mesure de Lebesgue, l'ensemble des $x \in \mathcal{I}$ qui ne sont pas dans $\mathcal{I}(t, \beta, \delta)$, c'est-à-dire qu'il fournit une majoration de

$$1 - \mu(\mathcal{I}(t, \beta, \delta)).$$

Pour les systèmes de **Bonne Classe**, on rappelle l'existence de l'abscisse de convergence $\sigma_0 < 1$ telle que pour tout σ , avec $\sigma_0 < \sigma < 1$, $\sum_{h \in \mathcal{H}} \sup |h'|^\sigma < \infty$.

Le lemme suivant montre que les réunions fondamentales sont « assez grandes ». Etant donné $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$, on note $|\mathcal{J}|$ désigne la mesure de Lebesgue de \mathcal{J} .

Lemme 7.12. *Dans le cas d'un système dynamique de Bonne Classe d'abscisse de convergence σ_0 , pour tout $x \in \mathcal{I}$, et pour tout σ_1 tel que $\sigma_0 < \sigma_1 < 1$,*

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)} \setminus \mathcal{H}(t,\beta,\delta)} |h'(x)| \frac{1}{|t|^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}}, \quad \text{et donc} \quad |\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}(t,\beta,\delta)| \ll \frac{1}{|t|^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}},$$

et plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^{pn(\beta,t)} \setminus \mathcal{H}(t,\beta,\delta)^p} |h'(x)| \frac{1}{|t|^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}}, \quad \text{et donc} \quad |\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}(p,t,\beta,\delta)| \ll \frac{1}{|t|^{p((1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1))}}.$$

Et dans le cas d'un système affine de Bonne Classe d'abscisse σ_0 , on a la meilleure majoration suivante, valable pour tout $\epsilon > 0$, où la constante de majoration dépend de ϵ :

$$\sum_{k \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_{\text{aff}}(t,\delta)} p_k \ll_{\epsilon} \frac{1}{t^{(1-\sigma_0)\delta - \epsilon}}.$$

Le choix de σ_1 , en lien avec le choix des autres paramètres pour avoir une borne optimale, sera fait dans la fin de la preuve du théorème 9.4.2.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathcal{I}$,

$$\begin{aligned} \sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)} \setminus \mathcal{H}(t,\beta,\delta)} |h'(x)| &= \sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)} \setminus \mathcal{H}(t,\beta,\delta)} |h'(x)|^{1-\sigma_1} |h'(x)|^{\sigma_1} \\ &\ll \frac{1}{|t|^{(1-\sigma_1)\delta}} \sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)} \setminus \mathcal{H}(t,\beta,\delta)} |h'(x)|^{\sigma_1} \\ &\ll \frac{1}{|t|^{(1-\sigma_1)\delta}} \mathbf{H}_{\sigma_1}^{n(\beta,t)}[1](x) \end{aligned}$$

On a utilisé que par définition, si $h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)} \setminus \mathcal{H}(t,\beta,\delta)$, alors il existe $x_0 = x_0(h)$ tel que $|h'(x_0)| < \frac{1}{t^\delta}$. Le lemme 1.13 montre alors que pour tout $x \in \mathcal{I}$, $|h'(x)| \ll \frac{1}{t^\delta}$ où la constante ne dépend pas de h .

Le théorème 6.21 de décomposition spectrale montre alors :

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)} \setminus \mathcal{H}(t,\beta,\delta)} |h'(x)| \ll \frac{1}{|t|^{(1-\sigma_1)\delta}} \lambda(\sigma_1)^{n(\beta,t)}.$$

Avec la notation $L(\sigma_1) = \log \lambda(\sigma_1)$ (introduite au théorème 6.11), on peut alors conclure.

La généralisation à $p \neq 1$ est immédiate. On explique avec $p = 2$ et on conclut par récurrence. On a d'une part

$$\mathbf{H}_{\sigma_1}^{2n(\beta,t)}(x) \ll \lambda(\sigma_1)^{2n(\beta,t)},$$

et d'autre part tout $h \in \mathcal{H}^{2n(\beta,t)}$ s'écrit $h = h_1 \circ h_2$ avec $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)}$. Par définition, il existe $x_1 = x$ tel que $|h_1'(x_1)| < \frac{1}{t^\delta}$ et $x_2 = x$ tel que $|h_2'(x_2)| < \frac{1}{t^\delta}$. En utilisant le lemme 1.13, on a alors pour tout $x \in \mathcal{I}$

$$|h'(x)| = |h_1' \circ h_2(x)| \cdot |h_2'(x)| \leq |h_1'(x_1)| \cdot |h_2'(x_2)| \leq \frac{1}{t^{2\delta}}.$$

Pour conclure sur la mesure de Lebesgue des complémentaires des intervalles fondamentaux, il suffit d'utiliser la propriété de distorsion des systèmes de Bonne Classe (voir le lemme 1.13).

Dans le cas affine, on écrit que par définition, si $h \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$, alors $p_k < \frac{1}{t^\delta}$. Et donc, pour tout $\sigma_1 > \sigma_0$,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)} p_k &= \sum_{k \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)} p_k^{1-\sigma_1} p_k^{\sigma_1} \\ &< \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta}} \sum_{k \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)} p_k^{\sigma_1} \\ &\ll \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta}} \lambda(\sigma_1). \end{aligned}$$

Cette fois, il n'y plus d'exposant en $\log t$ pour λ . C'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\sum_{k \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)} p_k \ll \frac{\lambda(\sigma_0 + \epsilon)}{t^{(1-\sigma_0-\epsilon)\delta}} \ll_\epsilon \frac{1}{t^{(1-\sigma_0-\epsilon)\delta}}.$$

□

On termine par un dernier lemme qui permet de contrôler les dérivées de $\mathbf{M}_t[u]$ et $\underline{\mathbf{M}}_t[u]$. On rappelle les définitions :

$$\mathcal{I}(t, \beta, \delta) = \mathcal{H}(t, \beta, \delta)(\mathcal{I}) = \bigcup_{h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)} h(\mathcal{I}) \quad \underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta) = \bigcup_{h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)} \underline{h}(\underline{\mathcal{I}}).$$

Ce lemme est à mettre en relation avec le lemme 6.6, qui permettait de majorer la dérivée de $\mathbf{M}^n[u] \circ h$. La majoration n'a alors plus lieu partout si le nombre de branches est infini, car il existe dans ce cas des points où la dérivée de T est arbitrairement grande, et on ne contrôle plus la dérivée de $\mathbf{M}_t[u]$.

Le lemme qui suit est l'analogie du lemme 1.9.

Lemme 7.13. *Dans le cas des systèmes affines, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{M}_t^p[1]$ est une fonction en escalier, constante sur chaque intervalle fondamental de profondeur p . Donc en particulier, sa dérivée est nulle en tout point où la fonction est dérivable.*

Démonstration.

$$\mathbf{M}_t^p[1](x) = |T'(x)|^{it},$$

et T' est en escalier. □

Lemme 7.14. *Soit $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}^n$, et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors,*

$$\begin{aligned} \sup_{\mathcal{I}(p, \mathcal{H}_0)} |(\mathbf{M}_t^{np}[u])'| &\ll \mathcal{K}(\mathcal{H}_0)^{-p} |t| \|u\|_{1,t} \\ \sup_{\underline{\mathcal{I}}(p, \mathcal{H}_0)} \left| \frac{\partial}{\partial 1} \mathbf{M}_t^{np}[u] \right| + \sup_{\underline{\mathcal{I}}(p, \mathcal{H}_0)} \left| \frac{\partial}{\partial 2} \mathbf{M}_t^{np}[u] \right| &\ll \mathcal{K}(\mathcal{H}_0)^{-p} |t| \|\underline{u}\|_{1,t}, \end{aligned}$$

et en particulier, on a

$$\begin{aligned} \sup_{\mathcal{I}(t, \beta, \delta)} |(\mathbf{M}_t^{n(\beta, t)}[u])'| &\ll |t|^{\delta+1} \|u\|_{1,t} \\ \sup_{\underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta)} \left| \frac{\partial}{\partial 1} \mathbf{M}_t^{n(\beta, t)}[\underline{u}] \right| + \sup_{\underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta)} \left| \frac{\partial}{\partial 2} \mathbf{M}_t^{n(\beta, t)}[\underline{u}] \right| &\ll |t|^{\delta+1} \|\underline{u}\|_{1,t}. \end{aligned}$$

Démonstration. La preuve se fait en reprenant le lemme 6.6, en écrivant par exemple pour le tangent, si $x = h(y)$:

$$(\mathbf{M}_t^{np}[u])'(x) = (\mathbf{M}_t^{np}[u] \circ h)'(y)/h'(y)$$

et en utilisant le lemme 7.11 pour majorer. □

7.4 Réunions fondamentales et points fixes

Le lemme suivant fait le lien entre points fixes et réunions fondamentales.

Lemme 7.15. *Pour tout $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$, et pour tout $p > 0$,*

$$h^* \in \mathcal{I}(p, t, \beta, \delta).$$

Et aussi, pour tout $h \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$, et pour tout $p > 0$,

$$h^* \in \mathcal{I}_{\text{aff}}(p, t, \delta).$$

Démonstration. Il suffit d'écrire $h^* = h^p(h^*)$. □

En réalité, pour prouver les propositions 9.1, 11.1, 9.2 et 11.2, nous aurons besoin du lemme 7.20, qui lui-même utilise le lemme suivant. Nous aurons en effet besoin de considérer h de profondeur fixée n , et non $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$. Si n divise $n(\beta, t)$, alors en remarquant que h^* est aussi point fixe de $\tilde{h} = h^{n(\beta, t)/n}$, et en écrivant une hypothèse naturelle sur $c(h)$ pour que \tilde{h} soit dans $\mathcal{H}(t, \beta, \delta)$, le lemme précédent permet de conclure. Dans le lemme qui suit, on garde cette même hypothèse naturelle, mais on doit tenir compte du fait que n ne divise pas $n(\beta, t)$ a priori.

Lemme 7.16. *Dans ce lemme, β et δ sont deux réels strictement positifs.*

Soit $h \in \mathcal{H}^$. On suppose que $c(h) < \frac{\delta}{\beta}$, et on note h^* le point fixe de h . Alors pour t assez grand (le « assez grand » dépendant de β), et pour tout $p > 0$, $h^* \in \mathcal{I}(p, t, \beta, \delta)$.*

Dans le cas affine, soit $h \in \mathcal{H}$ et i l'indice associé. Sans condition sur δ , pour t assez grand (le « assez grand » dépendant de δ), et pour tout $p > 0$, on a $h^ \in \mathcal{I}_{\text{aff}}(p, t, \delta)$.*

Démonstration. Pour le cas affine, beaucoup plus simple, pour que $h^* \in \mathcal{I}_{\text{aff}}(p, t, \delta)$, il suffit que $h^* \in \mathcal{I}_{\text{aff}}(t, \delta)$, et donc il suffit que $c_{\text{aff}}(i) \leq \delta \log t$. C'est bien le cas en prenant t assez grand. Comme pour le cas général qui suit, on aurait aussi pu imposer une condition sur δ (ici par exemple $\delta \geq c_{\text{aff}}(i)$) et la conclusion aurait été vraie pour $t \geq e$. On préfère pour la suite avoir une conclusion valable pour t assez grand, mais pas de condition sur δ .

Dans le cas général, soit $p > 0$, et notons n la profondeur de h . On considère, pour $i \in \{1, \dots, p\}$, les branches inverses $h_i \in \mathcal{H}^{n(\beta, t)}$ telles que :

$$h^* \in h_1 \circ h_2 \circ \dots \circ h_p(\mathcal{I}).$$

On peut également écrire

$$h^* \in h^{\lceil pn(\beta, t)/n \rceil}(\mathcal{I}),$$

où $h^{\lceil pn(\beta, t)/n \rceil}$ est de profondeur supérieure ou égale à $pn(\beta, t)$, qui est celle de $h_1 \circ h_2 \circ \dots \circ h_p$. En fait, chaque h_i de profondeur $n(\beta, t)$ est recouvert par au plus $n(\beta, t)/n + 2$ copies de la branche h (avec « dépassement » éventuel), comme illustré à la figure 7.4.

Et en utilisant la propriété de distorsion des systèmes de Bonne Classe, on obtient pour tout $x \in \mathcal{I}$,

$$|h'_i| \gg |h'(h^*)|^{n(\beta, t)/n+2} \gg e^{-n(\beta, t)c(h)} \gg e^{-\beta \log tc(h)}.$$

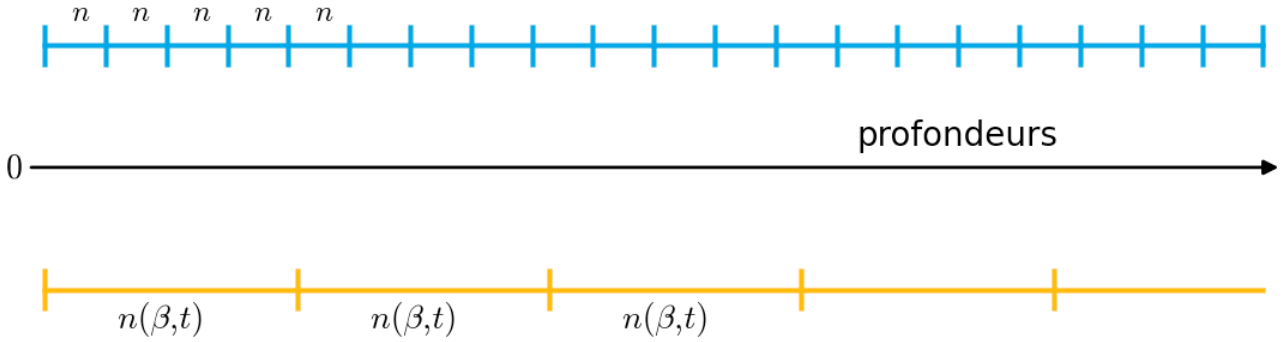


FIG. 7.2 – Points fixes et réunions fondamentales

En utilisant l'inégalité stricte $c(h) < \delta/\beta$, on obtient finalement pour t assez grand,

$$|h'_i| \geq e^{-\beta \log t \delta / \beta} = \frac{1}{t^\delta},$$

et donc chaque h_i est dans $\mathcal{H}(t, \beta, \delta)$, ce qui prouve finalement que h^* est dans $\mathcal{I}(p, t, \beta, \delta)$. □

7.5 Sous-ensembles de Cantor

Ici sont regroupés tous les définitions et théorèmes relatifs aux sous-ensembles de Cantor, qui sont des cas limites des réunions fondamentales qu'on vient d'introduire. En ce sens les réunions fondamentales peuvent être vues comme des Cantor en construction.

Définition 7.17. L'ensemble $\mathcal{K}(\mathcal{H}_0) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} \mathcal{H}^p(\mathcal{I}) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} \mathcal{I}(p, \mathcal{H}_0)$ est appelé sous-ensemble de Cantor associé à \mathcal{H}_0 .

De façon évidente, pour tout $p \geq 1$, $\mathcal{K}(\mathcal{H}_0) \subset \mathcal{I}(p, \mathcal{H}_0)$.

Voici regroupées dans un lemme, plusieurs façons équivalentes de définir le sous-ensemble de Cantor.

Soit $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^n$. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathcal{H}_0) &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{H}_0^k(\mathcal{I}) \\ &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{h \in \mathcal{H}_0^k} h(\mathcal{I}) \\ &= \{x \in \mathcal{I} \text{ tels que } \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists h \in \mathcal{H}_0^k \text{ tel que } h \circ T^{kn}(x) = x\} \\ &= \{x \in \mathcal{I} \text{ tels que } \forall m \in \mathbb{N}, T^{mm}(x) \in \mathcal{I}(\mathcal{H}_0)\}. \end{aligned}$$

Les $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_0)$ sont donc les x pour lesquels tous les itérés avec saut n empruntent des branches de \mathcal{H}_0 .

Tout comme avec les réunions fondamentales, on définit l'ensemble de Cantor suivant :

Définition 7.18.

$$\mathcal{K}(t, \beta, \delta) := \mathcal{K}(\mathcal{H}(t, \beta, \delta)).$$

Comme dans le cas général, voici regroupées des définitions équivalentes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(t, \beta, \delta) &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{H}(t, \beta, \delta)^k(\mathcal{I}) \\
&= \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)^k} h(\mathcal{I}) \\
&= \{x \in \mathcal{I} \text{ tels que } \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)^k \\
&\quad \text{tel que } h \circ T^{n(\beta, t)^k}(x) = x\} \\
&= \{x \in \mathcal{I} \text{ tels que } \forall m \in \mathbb{N}, T^{mn(\beta, t)}(x) \in \mathcal{I}(t, \beta, \delta)\}.
\end{aligned}$$

Les ensembles de Cantor ne seront pas utilisés dans le cas sans mémoire (voir intuition 7.6). On les introduit tout de même, pour mémoire. Là encore, les définitions sont plus simples :

Définition 7.19 (Cantor associé aux systèmes à branches affines).

$$\mathcal{K}_{\text{aff}}(t, \delta) := \mathcal{K}(\mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)).$$

Comme dans le cas des systèmes dynamiques généraux, voici un regroupement des différentes définitions équivalentes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\text{aff}}(t, \delta) &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)^k(\mathcal{I}) \\
&= \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{h \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)^k} h(\mathcal{I}) \\
&= \{x \in \mathcal{I} \text{ tels que } \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists h \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)^k \text{ tel que } h \circ T(x) = x\}.
\end{aligned}$$

On obtient facilement les corollaires suivants du lemme 7.15 : pour passer des réunions fondamentales au Cantor, il suffit de prendre l'intersection sur les profondeurs.

Lemme 7.20. *Pour tout $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$, on a*

$$h^* \in \mathcal{K}(t, \beta, \delta).$$

Et aussi, pour tout $h \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$, on a

$$h^* \in \mathcal{K}_{\text{aff}}(t, \delta).$$

Terminons par le corollaire suivant au lemme 7.16, obtenu de la même façon.

Lemme 7.21. *Soit $h \in \mathcal{H}^*$. On suppose que $c(h) < \frac{\delta}{\beta}$, et on note h^* le point fixe de h . Alors pour t assez grand, $h^* \in \mathcal{K}(t, \beta, \delta)$.*

Dans le cas affine, soit $h \in \mathcal{H}$. Alors, pour t assez grand, $h^ \in \mathcal{K}_{\text{aff}}(t, \delta)$.*

Ce lemme servira dans la preuve des propositions 9.2 et 9.1. Pour les analogues au cas sans mémoire (propositions 11.2 et 11.1), le lemme 7.16 suffira.

7.6 Une nouvelle norme

Dans l'étape 3 de la preuve pour l'opérateur sécant, on travaillera dans un premier temps avec les normes « restreintes » suivantes, qui considèrent la fonction de deux variables et ses dérivées partielles seulement au voisinage de la diagonale :

Définition 7.22. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$. On définit la norme

$$\|\underline{f}\|_{\infty,(\theta)} = \sup_{\underline{x} \in \underline{\mathcal{I}}(t,\theta)} |\underline{f}(\underline{x})|.$$

Soit maintenant $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$. On définit la pseudo-norme :

$$\|\underline{f}\|_{1,(\theta)} = \sup_{\underline{x} \in \underline{\mathcal{I}}(t,\theta)} \left| \frac{\partial}{\partial 1} \underline{f}(\underline{x}) \right| + \sup_{\underline{x} \in \underline{\mathcal{I}}(t,\theta)} \left| \frac{\partial}{\partial 2} \underline{f}(\underline{x}) \right|$$

et enfin, pour $N > 0$, les normes :

$$\|f\|_{1,1,(\theta)} = \|f\|_{\infty,(\theta)} + \|\underline{f}\|_{1,(\theta)}$$

$$\|f\|_{1,N,(\theta)} = \|f\|_{\infty,(\theta)} + \frac{1}{N} \|\underline{f}\|_{1,(\theta)}.$$

D'autre part, il est facile de montrer les majorations suivantes des normes des produits : pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, $\underline{f}, \underline{g} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, pour tout $N > 0$, et pour tout $\theta > 0$,

$$\|fg\|_{1,N,(\theta)} \leq \|f\|_{1,N,(\theta)} \|g\|_{1,N,(\theta)}, \quad \|\underline{fg}\|_{1,N,(\theta)} \leq \|\underline{f}\|_{1,N,(\theta)} \|\underline{g}\|_{1,N,(\theta)}.$$

La norme $\|\cdot\|_{1,N,(\theta)}$ se compare avec la norme $\|\cdot\|_{1,N}$ grâce au lemme suivant :

Lemme 7.23. (i) Pour tout $\underline{u} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, pour tout $N > 0$ et pour tout $\theta > 0$,

$$\|\underline{u}\|_{1,N,(\theta)} \leq \|\underline{u}\|_{1,N}.$$

(ii) Pour tout $\underline{u} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, on a la majoration suivante, indépendamment de $t > 0$ et de $N \geq t$,

$$\left\| \underline{\mathbf{H}}_{1+it}^{n(\theta,t)}[\underline{u}] \right\|_{1,N} \ll \|\underline{u}\|_{1,N,(\theta)}.$$

(iii) Pour tout $\theta > 0$, on a la majoration suivante, indépendamment de $t > 0$, $k \in \mathbb{N}$ et $N \geq t$,

$$\left\| \underline{\mathbf{H}}_{1+it}^k \right\|_{1,N,(\theta)} \ll 1.$$

(iv) On rappelle qu'on note $\underline{\mathbf{P}}$ la projection dominante, et $\underline{\mathbf{N}}$ l'opérateur de reste de la décomposition spectrale correspondant à $\sigma = 1$ (voir chapitre 6).

Pour tout $\theta > 0$, pour tout $t > 0$ et pour tout $N \geq t$,

$$\left\| \underline{\mathbf{N}}^{n(\theta,t)+k} \right\|_{1,N,(\theta)} \leq \left\| \underline{\mathbf{N}}^k \right\|_{1,N} \quad \text{et} \quad \|\underline{\mathbf{P}}\|_{1,N,(\theta)} \leq \|\underline{\mathbf{P}}\|_{1,N}.$$

(v) Pour tout $\theta > 0$, pour tout $t > 0$, pour tout $N \geq t$, et pour tout $\xi \in \mathbb{C}$, tel que $|\xi| = 1$,

$$\left\| (\underline{\mathbf{I}} - \xi \underline{\mathbf{H}}_{1+it})^{-1} \right\|_{1,N} \ll \log t + \left\| (\underline{\mathbf{I}} - \xi \underline{\mathbf{H}}_{1+it})^{-1} \right\|_{1,N,(\theta)}.$$

Démonstration.

(i) évident. Pour passer de la norme $\|\cdot\|_{1,N}$ à la norme $\|\cdot\|_{1,N,(\theta)}$, on restreint l'espace sur lequel on prend les sup.

(ii) Par définition, pour tout $\underline{u} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$,

$$\underline{\mathbf{H}}_{1+it}^{n(\theta,t)}[\underline{u}] = \sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\theta,t)}} |s_h(\underline{x})|^{1+it} \underline{u} \circ \underline{h}(\underline{x}).$$

On remarque que pour tout $\underline{x} \in \underline{\mathcal{I}}$, et pour tout $h \in \mathcal{H}^{n(\theta,t)}$, $\underline{h}(\underline{x}) \in \underline{\mathcal{I}}(\theta, t)$. On obtient alors ce qu'on souhaite en reprenant la preuve du lemme 6.7 (inégalité de Lasota-Yorke).

(iii) Ce point s'obtient également en reprenant la preuve du lemme 6.7, l'idée étant que pour tout $h \in \mathcal{H}^k$, si $\underline{x} \in \underline{\mathcal{I}}(t, \theta)$, alors a fortiori, $\underline{h}(\underline{x}) \in \underline{\mathcal{I}}(t, \theta)$.

(iv) D'après le théorème 6.23, $\underline{\mathbf{N}}_1^{k+n(\theta,t)} = \underline{\mathbf{N}}_1^k \circ \underline{\mathbf{H}}_1^{n(\theta,t)}$. Soit $\underline{u} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$. D'après (i),

$$\left\| \underline{\mathbf{N}}_1^{k+n(\theta,t)}[\underline{u}] \right\|_{1,N,(\theta)} \leq \left\| \underline{\mathbf{N}}_1^{k+n(\theta,t)}[\underline{u}] \right\|_{1,N} = \left\| \underline{\mathbf{N}}_1^k \circ \underline{\mathbf{H}}_1^{n(\theta,t)}[\underline{u}] \right\|_{1,N}.$$

Donc, par définition de la norme subordonnée :

$$\left\| \underline{\mathbf{N}}_1^{k+n(\theta,t)}[\underline{u}] \right\|_{1,N,(\theta)} \leq \left\| \underline{\mathbf{N}}_1^k \right\|_{1,N} \left\| \underline{\mathbf{H}}_1^{n(\theta,t)}[\underline{u}] \right\|_{1,N}.$$

Donc, d'après (ii),

$$\left\| \underline{\mathbf{N}}_1^{k+n(\theta,t)}[\underline{u}] \right\|_{1,N,(\theta)} \leq \left\| \underline{\mathbf{N}}_1^k \right\|_{1,N} \|\underline{u}\|_{1,N,(\theta)},$$

c'est-à-dire :

$$\left\| \underline{\mathbf{N}}_1^{k+n(\theta,t)} \right\|_{1,N,(\theta)} \leq \left\| \underline{\mathbf{N}}_1^k \right\|_{1,N}.$$

La propriété sur $\underline{\mathbf{P}}$ se montre de la même façon, en utilisant le fait que $\underline{\mathbf{P}}$ est un projecteur, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\underline{\mathbf{P}}^k = \underline{\mathbf{P}}$.

(v) Soit $\underline{u} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$. Alors

$$(\underline{\mathbf{I}} - \xi \underline{\mathbf{H}}_{1+it})^{-1}[\underline{u}] = \left(\underline{\mathbf{I}} + (\xi \underline{\mathbf{H}}_{1+it}) + \cdots + (\xi \underline{\mathbf{H}}_{1+it})^{n(\theta,t)-1} \right) [\underline{u}] + (\xi \underline{\mathbf{H}})^{n(\theta,t)} \circ (\underline{\mathbf{I}} - \xi \underline{\mathbf{H}}_{1+it})^{-1}[\underline{u}].$$

D'après le chapitre 6 d'analyse fonctionnelle

$$\left\| \left(\underline{\mathbf{I}} + (\xi \underline{\mathbf{H}}_{1+it}) + \cdots + (\xi \underline{\mathbf{H}}_{1+it})^{n(\theta,t)-1} \right) [\underline{u}] \right\|_{1,N} \ll n(\theta, t) \|\underline{u}\|_{1,N} \ll \|\underline{u}\|_{1,N} \log t.$$

D'autre part, d'après (ii),

$$\left\| (\xi \underline{\mathbf{H}})^{n(\theta,t)} \circ (\underline{\mathbf{I}} - \xi \underline{\mathbf{H}}_{1+it})^{-1}[\underline{u}] \right\|_{1,N} \leq \left\| (\underline{\mathbf{I}} - \xi \underline{\mathbf{H}}_{1+it})^{-1}[\underline{u}] \right\|_{1,N,(\theta)},$$

c'est-à-dire d'après (i),

$$\left\| (\xi \underline{\mathbf{H}})^{n(\theta,t)} \circ (\underline{\mathbf{I}} - \xi \underline{\mathbf{H}}_{1+it})^{-1}[\underline{u}] \right\|_{1,N} \leq \left\| (\underline{\mathbf{I}} - \xi \underline{\mathbf{H}}_{1+it})^{-1} \right\|_{1,N,(\theta)} \|\underline{u}\|_{1,N},$$

ce qui permet de conclure. \square

Chapitre 8

Présentation des preuves

Sommaire

8.1	Idées anciennes et nouvelles pour la preuve	168
8.2	Raisonnements ensemblistes	169
8.3	Ensembles introduits	169
8.3.1	Ensembles \mathcal{F}	169
8.3.2	Ensembles \mathcal{A}	171
8.3.3	Ensembles \mathcal{C}	172
8.3.4	Ensembles \mathcal{E}	173
8.3.5	Ensembles \mathcal{B}	174
8.4	Schéma des preuves	174

On se rappelle que d'après la proposition 1.10, il s'agit d'étudier le quasi-inverse

$$\Lambda(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{H}_s)^{-1}[G^s](0, 1),$$

où G est la sécante de la densité initiale de la source. Plus généralement, on va étudier le quasi-inverse $(\mathbf{I} - \mathbf{H}_s)^{-1}$. Comme on l'a vu au chapitre 6, le bon espace pour l'étude est l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$.

On va montrer qu'en munissant cet espace de la norme $\|\cdot\|_{1,t}$, le quasi-inverse existe sur une zone hyperbolique à gauche de $\{\Re(s) = 1\}$ et est borné par un polynôme en t sur les bandes verticales.

- En réalité (chapitre 9), je traite d'abord le cas des *opérateurs tangents*. Les travaux de Dolgopyat, et à sa suite, de Baladi et Hachemi ([3] et [29]), et Melbourne ([41]), se situent dans ce cadre, qui nous montre le chemin pour la condition 3-DIOP, la preuve pour 2-DIOP dans le cas d'un alphabet fini étant faite par Dolgopyat et explicitée par Naud ([42]). Cependant, la conclusion sur le quasi-inverse obtenue n'a pas de signification sur la discipline de la source.
- Ensuite (chapitre 10), je traite le cas des *opérateurs sécants*, introduits par Vallée dans [56]. Ces résultats demandent un travail supplémentaire, tout comme l'adaptation de la condition UNI avait demandé un travail supplémentaire dans [12]. Les outils nécessaires sont introduits dans la partie II. En vertu de la proposition 1.10, cette étude permet de conclure sur Λ , en l'occurrence la H-discipline de la source.

- Enfin (chapitre 11), je traite le cas des *systèmes sans mémoire*, avec un nombre possiblement infini de branches, par adaptation de la preuve générale (opérateurs sécants et tangents coïncident et sont triviaux pour les systèmes sans mémoire pour lesquels on regarde directement Λ). Là encore on prouve la H-discipline de la source. On obtient alors des résultats plus précis et des preuves plus simples.

Quant au cas des systèmes sans mémoire avec alphabet fini, je le traite à part, au chapitre 12, d'une manière plus élémentaire (sans utilisation de systèmes dynamiques), et indépendante des autres cas traités.

Pour résumer, la généralisation opérée dans cette thèse, s'est faite dans deux directions :

- (i) généralisation de l'opérateur tangent (étudié dans la plupart des travaux existants) à l'opérateur sécant ;
- (ii) généralisation d'un alphabet fini à un alphabet infini ;

8.1 Idées anciennes et nouvelles pour la preuve

On va être amenés à considérer non plus des systèmes de fonctions propres ou invariantes, mais des systèmes de fonctions presque propres ou presque invariantes, comme le font [42], [41] et [3] : dire qu'il n'en existe pas, c'est renforcer le fait que 1 n'est pas une valeur propre de \mathbf{M}_t .

On prend à Naud l'idée d'un ensemble \mathcal{C} (mieux que les fonctions presque propres, les fonctions presque invariantes). Mais Naud ne traite pas le cas d'un nombre infini de branches. On se tourne alors vers Melbourne, Baladi et Hachemi, qui ont eux-mêmes repris des travaux de Dolgopyat, et qui traitent le cas d'un nombre infini de branches, mais dont le travail, après adaptation, ne permet de conclure que pour les systèmes 3-DIOP. Ces auteurs utilisent, pour définir les fonctions presque propres ou presque invariantes, des sous-ensembles de Cantor de l'intervalle.

Pour cela, je vais considérer des réunions fondamentales (nos $\mathcal{I}(t, \beta, \delta)$ et $\underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta)$), c'est-à-dire

- (i) des ensembles plus gros que les ensembles de Cantor utilisés par Melbourne, Hachemi, et Baladi, les réunions fondamentales pouvant être vues comme des « Cantor en construction » ;
- (ii) des ensembles qui dépendent de $t = \Im(s)$ (rappelons qu'on étudie les opérateurs sur la droite $\{\Re(s) = 1\}$), tant dans la profondeur que dans la caractérisation.

et dans le cas de l'opérateur sécant, on utilise

- (iii) des normes (θ), qui étudient des restrictions de la fonction considérée près de la diagonale.

Ces idées sont nécessaires pour traiter la condition 2-DIOP dans le cas d'un nombre infini de branches, et fournissent une preuve alternative pour 3-DIOP.

On conclut dans la suite sur le quasi-inverse des opérateurs tangent et sécant (et donc sur Λ) dans le cas des systèmes 2-DIOP et 3-DIOP.

Pour que l'étape 2 fonctionne dans la preuve sur l'opérateur sécant, le paramètre θ introduit ci-dessous devra être choisi assez grand. Pour lever la contradiction apparente qui apparaît à l'étape 3, où θ doit être choisi petit, on introduit un paramètre supplémentaire k_0 , qui sert dans la comparaison des paramètres θ et β .

8.2 Raisonnements ensemblistes

Prouver une majoration asymptotique, c'est prouver que pour t assez grand, une certaine inégalité est vérifiée. C'est-à-dire encore que l'ensemble des t pour lesquels la majoration n'est pas vérifiée, est un ensemble borné.

Pour prouver les résultats de cette thèse, on va alors introduire des sous-ensembles de $\mathbb{R}_{>0}$ qui ont certaines propriétés (par exemple l'ensemble des t pour lesquels \mathbf{M}_t a une fonction presque invariante, ou encore l'ensemble des t pour lesquels le quasi-inverse est borné...).

De cette façon, on se débarrasse des quantificateurs et on a une vue plus schématique de la preuve. Ces ensembles dépendent de paramètres qu'il conviendra d'ajuster dans une synthèse à la fin.

Par exemple, pour nier le fait que le quasi-inverse est $\leq t^\alpha$, il suffit d'exhiber une sous-suite pour laquelle le quasi-inverse est $> t^\alpha$, c'est-à-dire que l'ensemble des t tels que le quasi-inverse est $> t^\alpha$ n'est pas borné. Inversement, dire qu'à partir d'un certain rang, le quasi-inverse est $\leq t^\alpha$, c'est dire que l'ensemble des t tels que le quasi-inverse est $> t^\alpha$ est borné. Ce genre de manipulation est résumé dans l'encadré suivant :

Intuition 8.1. *On dispose de la correspondance suivante :*

- ▶ une « sous-suite telle que », c'est
« le complémentaire d'un ensemble qui n'est pas borné, » ;
- ▶ « vrai à partir d'un certain rang », c'est
« le complémentaire d'un ensemble qui est borné ».

Pour pouvoir manipuler les ensembles, en écartant d'éventuels petits éléments gênants, et en se débarrassant des constantes multiplicatives, on introduit la notation suivante :

Définition 8.2. *Soit E_1 et E_2 deux ensembles de $\mathbb{R}_{>0}$. On dit que E_1 est faiblement inclus dans E_2 et on note $E_1 \tilde{\subset} E_2$ s'il existe $t_0 > 0$ tel que*

$$E_1 \cap [t_0; +\infty[\tilde{\subset} E_2 \cap [t_0; +\infty[.$$

On a la propriété évidente suivante, qui nous montre que comme l'inclusion ensembliste classique, la faible inclusion permet des manipulations conformes à l'intuition.

Lemme 8.3. *Soit E_1 et E_2 deux ensembles de $\mathbb{R}_{>0}$. Si $E_1 \tilde{\subset} E_2$, et E_2 est borné, alors E_1 est borné.*

On décrit les différents ensembles introduits dans la section suivante.

8.3 Ensembles introduits

Dans les définitions suivantes, la constante K_0 (resp. \underline{K}_0) ne dépend que du système dynamique considéré, et sera précisée dans l'étape 1 pour l'opérateur tangent (resp. sécant).

Dans toute la suite, ξ désigne une racine de l'unité, c'est-à-dire un complexe ξ de module 1 tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\xi^k = 1$.

8.3.1 Ensembles \mathcal{F}

Les ensembles \mathcal{F} servent à décrire l'objectif qu'on veut atteindre : la croissance polynomiale des quasi-inverses, et de la série de Dirichlet.

En effet, la proposition 1.10 donne l'expression suivante de la série de Dirichlet en fonction du quasi-inverse de l'opérateur sécant.

$$\Lambda(s) = \sum_{w \in \Sigma^*} p_w^s = (\mathbf{I} - \mathbf{H}_s)^{-1}[G^s](1, 0).$$

où G est la sécante de la distribution initiale.

En partant d'une densité initiale $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, la sécante

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t) dt = \frac{F(y)-F(x)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^2(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$ et $G(x, y) \leq \|f\|_\infty \ll 1$. On note F la fonction de répartition correspondant à la densité f ($F' = f$).

Si on suppose en plus que la densité f ne s'annule pas sur \mathcal{I} , alors la sécante $G(x, y)$ ne s'annule pas non plus. On écrit alors que pour tout $s = \sigma + it$, avec σ minoré

► d'une part

$$|G^s| \ll 1,$$

► et d'autre part on a pour tout $(x, y) \in \mathcal{I}^2$,

$$G(x, y) = f(c_1) = F'(c_1)$$

où $c_1 \in]x, y[$ pour $x \neq y$, et $c_1 = x$ pour $x = y$.

On écrit aussi que pour $x \neq y$,

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = \frac{F(x) - F(y) - F'(x)(x - y)}{(x - y)^2}$$

et donc pour tout $(x, y) \in \mathcal{I}^2$,

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = F''(c_2) = f'(c_2)$$

où $c_2 \in]x, y[$ pour $x \neq y$, et $c_2 = x$ pour $x = y$.

Ce qui permet de majorer la dérivée :

$$\frac{\partial}{\partial x} G^s(x, y) = s \left| \frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x, y)}{G(x, y)} \right| G^s(x, y) \ll t \left| \frac{f'(c_2)}{f(c_1)} \right| \ll t,$$

car c_1 et c_2 vivent dans le compact \mathcal{I} , et f ne s'annule pas. La dérivée par rapport à y se traite de la même façon.

Donc on a montré le lemme suivant :

Lemme 8.4. *Pour toute densité initiale f de classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ qui ne s'annule pas sur \mathcal{I} , et pour tout $s = \sigma + it$ avec σ minoré, la sécante de la densité*

$$G(x, y) = \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t) dt$$

a une norme $\|\cdot\|_{1,t}$ bornée, c'est-à-dire $\|G^s\|_{1,t} \ll 1$.

Ceci motive la définition suivante.

Définition 8.5.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t) &= \|(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it})^{-1}\|_{1,t} & \underline{\mathcal{R}}(t) &= \|(\mathbf{I} - \underline{\mathbf{H}}_{1+it})^{-1}\|_{1,t} & \mathcal{R}_{\text{aff}}(t) &= |\Lambda(s)| \\ \mathcal{F}(\alpha) &= \{t, \mathcal{R}(t) \leq t^\alpha\} & \underline{\mathcal{F}}(\alpha) &= \{t, \underline{\mathcal{R}}(t) \leq t^\alpha\} & \mathcal{F}_{\text{aff}}(\alpha) &= \{t, |\Lambda(s)| \leq t^\alpha\}. \end{aligned}$$

Le quasi-inverse est à croissance polynomiale si et seulement si il existe $\alpha > 0$ telle que $\mathcal{F}(\alpha)^c$ est borné.

Dans le cas des systèmes sans mémoire, on a vu que Λ ne dépendait pas de la densité initiale, et que $\Lambda(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it})^{-1}[\mathbf{1}]$ est une fonction constante en x (la constante dépend de s bien sûr) : ceci est conforme avec le fait qu'il n'y a pas lieu d'étudier de normes $\|\cdot\|_{1,t}$ mais seulement une norme $\|\cdot\|_\infty$, en l'occurrence $|\Lambda(s)|$.

Plus généralement, pour tout complexe η de module 1, on notera :

Définition 8.6.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t, \eta) &= \|(\mathbf{I} - \eta \mathbf{H}_{1+it})^{-1}\|_{1,t} & \underline{\mathcal{R}}(t, \eta) &= \|(\mathbf{I} - \eta \underline{\mathbf{H}}_{1+it})^{-1}\|_{1,t} \\ \mathcal{R}_{\text{aff}}(t, \eta) &= \left| \frac{1}{1 - \eta\lambda(1+it)} \right| \\ \mathcal{F}(\alpha, \eta) &= \{t, \mathcal{R}(t, \eta) \leq t^\alpha\} & \underline{\mathcal{F}}(\alpha, \eta) &= \{t, \underline{\mathcal{R}}(t, \eta) \leq t^\alpha\} & \mathcal{F}_{\text{aff}}(\alpha, \eta) &= \{\mathcal{R}_{\text{aff}}(t, \eta) \leq t^\alpha\}. \end{aligned}$$

On va obtenir des résultats dans le cas où η est une racine de l'unité.

Ces nouvelles notations dans le cas sans mémoire sont justifiées par les liens qu'on a établis entre série de Dirichlet et opérateur de transfert : pour tout ξ de module 1,

$$(\mathbf{I} - \xi \mathbf{H}_s)^{-1}[\mathbf{1}] \equiv \frac{1}{1 - \xi\lambda(s)}.$$

On rappelle que les intervalles fondamentaux qui interviennent dans les définitions suivantes sont définis au chapitre 7.

8.3.2 Ensembles \mathcal{A}

Les ensembles \mathcal{A} sont formés de tous les réels t pour lesquels il existe une fonction « presque » propre. Dire que \mathcal{A} est borné, c'est dire que pour t assez grand, \mathbf{M}_t n'a pas de fonction presque propre, renforcement du fait que \mathbf{M}_t n'a pas de fonction propre (voir théorème (A)).

Les trois degrés d'approximation sont les paramètres de l'ensemble :

- α quantifie la qualité de l'approximation
- β quantifie la profondeur de l'opérateur pour laquelle on a l'approximation
- γ quantifie la réunion fondamentale sur laquelle a lieu la majoration.

Le paramètre θ qui intervient pour les ensembles sécants, mesure la proximité à la diagonale des points où les inégalités sont valables. Les inégalités pour les opérateurs tangents correspondent au cas limite où θ tend vers l'infini.

Définition 8.7 (ensembles \mathcal{A} , $\underline{\mathcal{A}}$ et \mathcal{A}_{aff}).

L'ensemble $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \delta)$ est l'ensemble des réels t pour lesquels il existe une paire (w_t, η_t) , avec $w_t \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$, $|w_t| = 1$, $\|w_t\|_{1,t} \leq K_0$, et $\eta_t \in \mathbb{C}$, $|\eta_t| = 1$, qui vérifie, pour tout $x \in \mathcal{I}(t, \beta, \delta)$:

$$\left| \mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t](x) - \eta_t w_t(x) \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

L'ensemble $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \delta, \theta)$ est l'ensemble des réels t pour lesquels il existe une paire $(\underline{w}_t, \eta_t)$, avec $\underline{w}_t \in \mathcal{C}(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, $|\underline{w}_t| = 1$, $\|\underline{w}_t\|_{1,t,(\theta)} \leq \underline{K}_0$, et $\eta_t \in \mathbb{C}$, $|\eta_t| = 1$, qui vérifie, pour tout $\underline{x} = (x_1, x_2) \in \underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta)$:

$$\left| \underline{\mathbf{M}}_t^{n(\beta,t)}[\underline{w}_t](\underline{x}) - \eta_t \underline{w}_t(\underline{x}) \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

L'ensemble $\mathcal{A}_{\text{aff}}(\alpha, \delta)$ est l'ensemble des réels t pour lesquels il existe $\eta_t \in \mathbb{C}$, $|\eta_t| = 1$, qui vérifie, pour tout $k \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$:

$$\left| p_k^{-it} - \eta_t \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

Avec les notations de la définition, le complexe η_t de module 1 est presque une valeur propre, et $(w_t, \eta_t)_t$ constitue un système de fonctions presque propres.

L'assertion selon laquelle

$$\forall x \in \mathcal{I}(t, \beta, \delta), \quad \left| \mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t](x) - \eta_t w_t(x) \right| \leq \frac{1}{t^\alpha},$$

peut se reformuler en considérant que $x = h(y)$ avec $y \in \mathcal{I}$. D'après le lemme 3.5, elle est équivalente à l'assertion :

$$\forall y \in \mathcal{I}, \forall h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta), \quad \left| |h'(y)|^{-it} w_t(y) - \eta_t w_t \circ h(y) \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

De même, l'assertion selon laquelle

$$\forall \underline{x} = (x_1, x_2) \in \underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta), \quad \left| \underline{\mathbf{M}}_t^{n(\beta,t)}[\underline{w}_t](\underline{x}) - \eta_t \underline{w}_t(\underline{x}) \right| \leq \frac{1}{t^\alpha},$$

est équivalente à l'assertion :

$$\forall \underline{y} \in \underline{\mathcal{I}}(t, \theta), \forall h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta), \quad \left| |s_h(\underline{y})|^{-it} \underline{w}_t(\underline{y}) - \eta_t \underline{w}_t(h(\underline{y})) \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

Dans le cas sans mémoire, là encore, c'est plus simple. Voici comment on a obtenu la définition particulière donnée ci-dessus, et comment on obtiendra les définitions à venir.

Intuition 8.8. Dans le cas des systèmes sans mémoire, pour écrire la définition de \mathcal{A}_{aff} , on a pris $w_t \equiv 1$ et $n(\beta, t) = 1$ dans la définition de l'ensemble \mathcal{A} , et ce sera la même chose pour respectivement \mathcal{C}_{aff} et \mathcal{E}_{aff} où on reprend les définitions respectivement de \mathcal{C} et \mathcal{E} .

D'après le lemme 7.9, dans le cas d'un alphabet fini, les conditions $x \in \mathcal{I}(t, \beta, \delta)$, $x \in \underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta)$ et $k \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$ disparaissent (avec une condition supplémentaire dans le cas général, et sans condition dans le cas sans mémoire).

8.3.3 Ensembles \mathcal{C}

Les ensembles \mathcal{C} sont formés de tous les réels t pour lesquels il existe une fonction « presque » invariante.

Une fonction invariante est une fonction propre relative à la valeur propre 1, mais en fait, en itérant, on peut considérer plus généralement une valeur propre ξ racine de l'unité, comme on le justifiera lors de la preuve de la proposition 9.2 (inégalité 9.6).

Dire que \mathcal{C} est borné, c'est dire que pour t assez grand, \mathbf{M}_t n'a pas de fonction presque invariante, renforcement du fait que \mathbf{M}_t n'a pas de fonction invariante (voir théorème (A)).

Définition 8.9 (ensembles \mathcal{C} , $\underline{\mathcal{C}}$ et \mathcal{C}_{aff}). *Soit ξ une racine de l'unité.*

L'ensemble $\mathcal{C}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta)$ est l'ensemble des réels t pour lesquels il existe une paire (w_t, η_t) , avec $w_t \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$, $|w_t| = 1$, $\|w_t\|_{1,t} \leq K_0$, et $\eta_t \in \mathbb{C}$, $|\eta_t| = 1$, qui vérifie, pour tout $x \in \mathcal{I}(t, \beta, \delta)$:

$$\begin{cases} |\mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t](x) - \eta_t w_t(x)| \leq \frac{1}{t^\alpha} \\ |\eta_t - \xi^{n(\beta,t)}| \leq \frac{1}{t^\gamma}. \end{cases}$$

On notera simplement $\mathcal{C}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \mathcal{C}(\alpha, \beta, \gamma, 1, \delta)$ (prendre $\xi = 1$).

L'ensemble $\underline{\mathcal{C}}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta, \theta, k_0)$ est l'ensemble des réels t pour lesquels il existe une paire $(\underline{w}_t, \eta_t)$, avec $\underline{w}_t \in \mathcal{C}(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, $|\underline{w}_t| = 1$, $\|\underline{w}_t\|_{1,t,(\theta)} \leq \underline{K}_0$, et $\eta_t \in \mathbb{C}$, $|\eta_t| = 1$, qui vérifie, pour tout $\underline{x} = (x_1, x_2) \in \underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta)$:

$$\begin{cases} |\underline{\mathbf{M}}_t^{n(\beta,t)}[\underline{w}_t](\underline{x}) - \eta_t \underline{w}_t(\underline{x})| \leq \frac{1}{t^\alpha} \\ |\eta_t^{k_0} - \xi^{k_0 n(\beta,t)}| \leq \frac{1}{t^\gamma}. \end{cases}$$

On notera simplement $\underline{\mathcal{C}}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, k_0) = \underline{\mathcal{C}}(\alpha, \beta, \gamma, 1, \delta, \theta, k_0)$ (prendre $\xi = 1$).

L'ensemble $\mathcal{C}_{\text{aff}}(\alpha, \gamma, \xi, \delta)$ est l'ensemble des réels t pour lesquels il existe $\eta_t \in \mathbb{C}$, $|\eta_t| = 1$, qui vérifie, pour tout $k \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$:

$$\begin{cases} |p_k^{-it} - \eta_t| \leq \frac{1}{t^\alpha} \\ |\eta_t - \xi| \leq \frac{1}{t^\gamma}. \end{cases}$$

Avec les notations de la définition, le complexe η_t de module 1 est presque une valeur propre et presque une racine de l'unité, et $(w_t, \eta_t)_t$ constitue un système de fonctions presque invariants.

8.3.4 Ensembles \mathcal{E}

Les ensembles \mathcal{E} , $\underline{\mathcal{E}}$ et \mathcal{E}_{aff} seront utilisées dans la preuve de l'étape 3. Ils vérifient de façon évidente

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{C} \subset \mathcal{E},$$

(aussi bien pour chacune des trois versions tangente, sécante ou sans mémoire).

Définition 8.10 (ensembles \mathcal{E} , $\underline{\mathcal{E}}$ et \mathcal{E}_{aff}). *Soit ξ une racine de l'unité.*

L'ensemble $\mathcal{E}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta)$ est l'ensemble des réels t pour lesquels il existe une paire (w_t, η_t) , avec $w_t \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$, $|w_t| = 1$, $\|w_t\|_{1,t} \leq K_0$, et $\eta_t \in \mathbb{C}$, $|\eta_t| = 1$, qui vérifie, pour tout $x \in \mathcal{I}(t, \beta, \delta)$:

$$\begin{cases} |\mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t](x) - \eta_t w_t(x)| \leq \frac{1}{t^\alpha} \\ |\eta_t - \xi^{n(\beta,t)}| > \frac{1}{t^\gamma}. \end{cases}$$

On notera simplement $\mathcal{E}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \mathcal{E}(\alpha, \beta, \gamma, 1, \delta)$ (prendre $\xi = 1$).

L'ensemble $\underline{\mathcal{E}}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta, \theta, k_0)$ est l'ensemble des réels t pour lesquels il existe une paire $(\underline{w}_t, \eta_t)$, avec $\underline{w}_t \in \mathcal{C}(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, $|\underline{w}_t| = 1$, $\|\underline{w}_t\|_{1,t,(\theta)} \leq \underline{K}_0$, et $\eta_t \in \mathbb{C}$, $|\eta_t| = 1$, qui vérifie, pour tout $\underline{x} = (x_1, x_2) \in \underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta)$:

$$\begin{cases} |\underline{\mathbf{M}}_t^{n(\beta,t)}[\underline{w}_t](\underline{x}) - \eta_t \underline{w}_t(\underline{x})| \leq \frac{1}{t^\alpha} \\ |\eta_t^{k_0} - \xi^{k_0 n(\beta,t)}| > \frac{1}{t^\gamma}. \end{cases}$$

On notera simplement $\underline{\mathcal{E}}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, k_0) = \underline{\mathcal{E}}(\alpha, \beta, \gamma, 1, \delta, \theta, k_0)$ (prendre $\xi = 1$).

L'ensemble $\mathcal{E}_{\text{aff}}(\alpha, \gamma, \delta)$ est l'ensemble des réels t pour lesquels il existe $\eta_t \in \mathbb{C}$, $|\eta_t| = 1$, qui vérifie, pour tout $k \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$:

$$\begin{cases} |p_k^{-it} - \eta_t| \leq \frac{1}{t^\alpha} \\ |\eta_t - 1| > \frac{1}{t^\gamma}. \end{cases}$$

On notera simplement $\mathcal{E}_{\text{aff}}(\alpha, \gamma, \delta) = \mathcal{E}_{\text{aff}}(\alpha, \gamma, 1, \delta)$ (prendre $\xi = 1$).

8.3.5 Ensembles \mathcal{B}

Enfin, on introduit les ensembles \mathcal{B} , \mathcal{B}_{aff} qui interviendront dans les étapes 1 et 2. Les ensembles \mathcal{B} donnent des informations sur l'opérateur de transfert, qu'il s'agira de transférer sur \mathcal{A} .

Définition 8.11 (ensembles \mathcal{B} et \mathcal{B}_{aff}).

Pour tout α, β , on définit l'ensemble $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$ comme l'ensemble des réels t pour lesquels il existe $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, $\|u_0\|_{1,t} \leq 1$, qui vérifie, pour tout $n \in \{0, n(\beta, t), 2n(\beta, t)\}$, et pour tout $y \in \mathcal{I}$,

$$\left| \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^n[u_0](y) \right| \geq 1 - \frac{1}{t^\alpha}.$$

L'ensemble $\underline{\mathcal{B}}(\alpha, \beta, \theta)$ est l'ensemble des réels t pour lesquels il existe $\underline{u}_0 \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, $\|\underline{u}_0\|_{1,t} \leq 1$, qui vérifie, pour tout $n \in \{0, n(\beta, t), 2n(\beta, t)\}$, et pour tout $\underline{y} \in \underline{\mathcal{I}}(t, \theta)$,

$$\left| \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^n[\underline{u}_0](\underline{y}) \right| \geq 1 - \frac{1}{t^\alpha}.$$

Pour tout α , on définit l'ensemble $\mathcal{B}_{\text{aff}}(\alpha)$ comme l'ensemble des réels t qui vérifient

$$|\lambda(1+it)| = \left| \sum_{k \in \mathbb{N}^*} p_k^{1+it} \right| \geq 1 - \frac{1}{t^\alpha}.$$

Dans le cas des systèmes sans mémoire, pour écrire la définition de \mathcal{B}_{aff} , on a pris $u_0 \equiv 1$ et $n(\beta, t) = 1$ dans la définition de l'ensemble \mathcal{B} .

8.4 Schéma des preuves

Je prouve que :

- l'hypothèse 3-DIOP implique que les ensembles \mathcal{A} , $\underline{\mathcal{A}}$ et \mathcal{A}_{aff} sont bornés (propositions 9.1, 10.1 et 11.1)
- l'hypothèse 2-DIOP implique que les ensembles \mathcal{C} , $\underline{\mathcal{C}}$ et \mathcal{C}_{aff} sont bornés (propositions 9.2, 10.2 et 11.2)

Plus précisément, on va relier l'exposant d'irrationalité du rapport $c(h, k)$ (resp $c(h, k, \ell)$) diophantien, aux paramètres des ensembles \mathcal{A} (resp \mathcal{C}) qui sont bornés.

Puis, par des jeux d'inclusions sur les ensembles déjà introduits, on prouve la croissance polynomiale du quasi-inverse sur $\{\Re(s) = 1\}$ (c'est-à-dire \mathcal{F}^c est borné).

- Dans le cas 3-DIOP, pour montrer que \mathcal{F}^c est borné, on montre l'inclusion $\mathcal{F} \tilde{\subset} \mathcal{A}^c$.

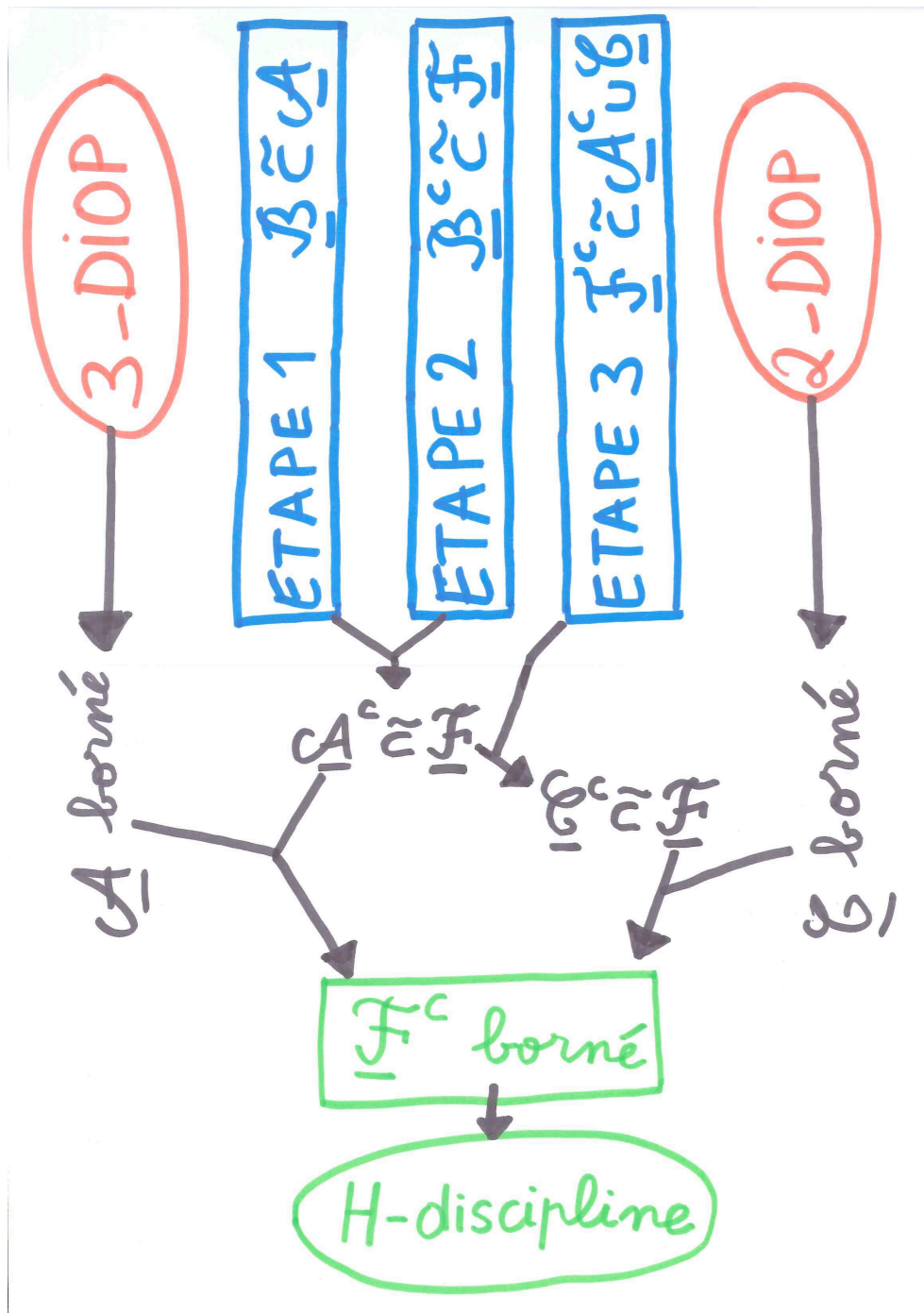
- Pour le cas 2-DIOP, grâce à l'égalité ensembliste

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{A} \setminus \mathcal{C})^c,$$

pour prouver que \mathcal{F}^c est borné, il suffit de montrer que \mathcal{F} est inclus dans \mathcal{C} , ou encore que $\mathcal{F} \tilde{\subset} \mathcal{A}$ et $\mathcal{F} \tilde{\subset} (\mathcal{A} \setminus \mathcal{C})^c$. C'est ce principe qu'on va mettre en œuvre pour la preuve dans le cas des systèmes 2-DIOP.

Enfin, de la croissance polynomiale obtenue sur la droite $\{\Re(s) = 1\}$, on déduit l'existence d'une zone hyperbolique sans pôle avec croissance polynomiale à gauche : ceci est classique (9.11, 10.11 et 11.7).

Le schéma 8.1 illustre les différentes étapes de la preuve.



Sur cette figure est représenté le schéma de la preuve pour l'opérateur sécant. Pour l'opérateur tangent, la preuve est la même, sauf qu'il suffit d'enlever tous les « soulignés », et qu'elle ne permet pas de conclure sur la série de Dirichlet Λ . Et pour le cas des systèmes sans mémoire, on suit les mêmes étapes.

FIG. 8.1 – Schéma de la preuve pour l'opérateur sécant

Troisième partie

Preuve des résultats

Chapitre 9

Quasi-inverse du tangent dans le cas général

Sommaire

9.1	Etude fine du spectre de l'opérateur composante	180
9.1.1	Systèmes 3-DIOP	180
9.1.2	Systèmes 2-DIOP	183
9.2	Etude sur la droite $\{\Re(s) = 1\}$	185
9.2.1	Etape 1 $\mathcal{B} \tilde{\subset} \mathcal{A}$	185
9.2.2	Etape 2 $\mathcal{B}^c \tilde{\subset} \mathcal{F}$	190
9.2.3	Etape 3 $\mathcal{F}^c \tilde{\subset} \mathcal{A}^c \cup \mathcal{C}$	194
9.3	Domaine hyperbolique	202
9.4	Synthèse	205
9.4.1	Fin de la preuve du théorème (3-DIOP-tangent)	205
9.4.2	Fin de la preuve du théorème (2-DIOP-tangent)	206

Voici maintenant les preuves relatives à l'opérateur tangent, plus étudié dans la littérature que l'opérateur sécant, et qui nous montrent le chemin pour l'étude de ce dernier. On conclura que sur un domaine hyperbolique à gauche de $\{\Re(s) = 1\}$, le quasi-inverse de l'opérateur de transfert tangent d'un système dynamique 2-DIOP ou 3-DIOP existe, et croît polynomialement.

Les preuves qui suivent sont une généralisation des travaux fondateurs de Dolgopyat ([17]), d'un alphabet fini à un alphabet infini.

L'étude des systèmes 3-DIOP est directement issue des travaux de Melbourne ([41]), Baladi et Hachemi ([3]).

Pour conclure dans le cas des systèmes 2-DIOP, on utilise l'ensemble \mathcal{C} déjà introduit, c'est-à-dire que mieux que les fonctions presque propres, on étudie les fonctions presque invariantes (idée de Naud [42]). Mais Naud ne traite pas le cas d'un nombre infini de branches. On s'est alors inspiré de Melbourne, Baladi et Hachemi. Ces auteurs utilisent, pour définir les fonctions presque propres ou presque invariantes, des sous-ensembles de Cantor de l'intervalle. Quant à nous, on va considérer des réunions fondamentales (nos $\mathcal{I}(t, \beta, \delta)$ et dans le chapitre suivant $\underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta)$), dont la profondeur (utilisation de $n(\beta, t)$ et dans le chapitre suivant $n(\theta, t)$) ainsi que la caractérisation dépendent de t .

A l'étape 3, prendre un alphabet fini apporte une simplification, qui peut dans certains cas, apporter une amélioration dans le résultat.

9.1 Etude fine du spectre de l'opérateur composante

Dans cette section, on étudie comment se répercute le fait que le système est 2 ou 3-DIOP.

On traite ici le cas général. La transposition au cas sans mémoire, (possiblement infini), pour lequel les preuves se simplifient, sera traité dans le chapitre 11.

9.1.1 Systèmes 3-DIOP

On prouve la proposition suivante :

Proposition 9.1. *Considérons $h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{H}^*$. Si $c(h_1, h_2, h_3)$ est diophantien avec exposant d'irrationalité μ , alors pour tout triplet (α, β, δ) avec*

$$\begin{cases} \alpha > \mu + 1 \\ \frac{\delta}{\beta} > \max_{i \in \{1,2,3\}} c(h_i) \end{cases},$$

l'ensemble $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \delta)$ est borné.

Démonstration. La preuve est faite par l'absurde.

Supposons qu'il existe un triplet (α, β, δ) qui vérifie les hypothèses, et tel que l'ensemble $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \delta)$ n'est pas borné.

Alors il existe une suite de triplets (t, w, η) avec t aussi grand qu'on veut, $w_t \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$, $|w_t| = 1$, $\|w_t\|_{1,t} \leq K$, et $\eta_t \in \mathbb{C}$, $|\eta_t| = 1$, et

$$\sup_{\mathcal{I}(t,\beta,\delta)} \left| \mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t] - \eta_t w_t \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

Donc en particulier la majoration a lieu sur l'ensemble de Cantor, plus petit :

$$\sup_{\mathcal{K}(t,\beta,\delta)} \left| \mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t] - \eta_t w_t \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}. \quad (9.1)$$

Soient $\mu > 0$, et $h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{H}^*$. Grâce au lemme 5.3, on peut supposer que h_1, h_2 et h_3 sont de même profondeur p . On suppose que

$$\begin{cases} \alpha > \mu + 1 \\ \frac{\delta}{\beta} > \max_{i \in \{1,2,3\}} c(h_i) \end{cases}.$$

Soit $\nu > \mu$ assez proche de μ pour que $\alpha > \nu + 1$. On va montrer qu'on peut trouver des entiers q_t aussi grand qu'on veut, tels que

$$\{q_t c(h_1, h_2, h_3)\} \ll \frac{1}{q_t^{1+\nu}},$$

ce qui prouvera par le lemme 5.24 que l'exposant d'irrationalité de $c(h_1, h_2, h_3)$ est strictement supérieur à μ .

Partie 1. Partant de 9.4, on a par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \sup_{\mathcal{K}(t,\beta,\delta)} \left| \mathbf{M}_t^{2n(\beta,t)}[w_t] - \eta_t^2 w_t \right| &\leq \sup_{\mathcal{K}(t,\beta,\delta)} \left| \mathbf{M}_t^{2n(\beta,t)}[w_t] - \mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t] \eta_t \right| \\ &+ \sup_{\mathcal{K}(t,\beta,\delta)} \left| \mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t] \eta_t - \eta_t^2 w_t \right|, \end{aligned}$$

et comme w_t et η_t sont de module 1, on obtient :

$$\begin{aligned} \sup_{\mathcal{K}(t,\beta,\delta)} \left| \mathbf{M}_t^{2n(\beta,t)}[w_t] - \eta_t^2 w_t \right| &\leq \sup_{\mathcal{K}(t,\beta,\delta)} \left| \mathbf{M}_t^{2n(\beta,t)}[w_t] - \mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t] \eta_t \right| \\ &+ \sup_{\mathcal{K}(t,\beta,\delta)} \left| \mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t] - \eta_t w_t \right|. \end{aligned}$$

En écrivant :

$$\sup_{\mathcal{K}(t,\beta,\delta)} \left| \mathbf{M}_t^{2n(\beta,t)}[w_t] - \mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t] \eta_t \right| = \sup_{\mathcal{K}(t,\beta,\delta)} \left| \mathbf{M}_t^{n(\beta,t)} \left[\mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t] - \eta_t w_t \right] \right|$$

avec pour tout $x \in \mathcal{K}(t, \beta, \delta)$, $T^n(x) \in \mathcal{K}(t, \beta, \delta)$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_t^{n(\beta,t)} \left[\mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t] - \eta_t w_t \right] (x) &= \left| (T^{n(\beta,t)})' (x) \right| \left[\mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t] - \eta_t w_t \right] (T^n(x)) \\ &\leq \sup_{\mathcal{K}(t,\beta,\delta)} \left| \mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t] - \eta_t w_t \right| \end{aligned}$$

et donc :

$$\sup_{\mathcal{K}(t,\beta,\delta)} \left| \mathbf{M}_t^{2n(\beta,t)}[w_t] w_t - \eta_t^2 w_t \right| \leq \frac{2}{t^\alpha}.$$

Avec la démonstration ci-dessus, on peut prouver par récurrence que :

$$\sup_{\mathcal{K}(t,\beta,\delta)} \left| \mathbf{M}_t^{pn(\beta,t)}[w_t] - \eta_t^p w_t \right| \leq \frac{p}{t^\alpha} \ll \frac{1}{t^{\nu+1}}, \quad (9.2)$$

avec p la profondeur commune de h_1 , h_2 et h_3 introduite plus haut.

Partie 2. On note h_1^* , h_2^* et h_3^* les points fixes respectifs de h_1 , h_2 et h_3 . Alors, d'après le lemme 7.21, et en utilisant l'hypothèse $\frac{\delta}{\beta} > \max_i c(h_i)$, on obtient que h_1^* , h_2^* et h_3^* sont dans l'ensemble de Cantor $\mathcal{K}(t, \beta, \delta)$. On applique alors l'inégalité 9.2 en h_i^* , pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

D'après le lemme 3.5, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_t^{pn(\beta,t)}[w_t](h_i^*) &= \mathbf{M}_t^{pn(\beta,t)}[w_t] \left(h_i^{n(\beta,t)}(h_i^*) \right) \\ &= \left| \left(h_i^{n(\beta,t)} \right)' (h_i^*) \right|^{-it} w_t(h_i^*) \end{aligned}$$

Et en utilisant encore le lemme 5.3

$$\left(h_i^{n(\beta,t)} \right)' (h_i^*) = (h_i'(h_i^*))^{n(\beta,t)},$$

et finalement :

$$\left| |h_i'(h_i^*)|^{-itn(\beta,t)} - \eta_t^p \right| \ll \frac{1}{t^{\nu+1}}.$$

C'est-à-dire, en notant $\eta_t = e^{i\theta_t}$,

$$|h'_i(h_i^*)|^{-itn(\beta,t)} e^{-i\theta_t p} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1$$

et donc il existe une suite $(q_t^{(i)})_t$ telle que :

$$tn(\beta, t)pc(h_i) - p\theta_t - 2\pi q_t^{(i)} \rightarrow 0.$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \left| |h'_i(h_i^*)|^{itn(\beta,t)} - \eta_t^{-p} \right| &= \left| e^{i(pc(h_i)tn(\beta,t) + p\theta_t - 2\pi q_t^{(i)})} - 1 \right| \\ &= \left| pc(h_i)tn(\beta, t) + p\theta_t - 2\pi q_t^{(i)} \right| (1 + o(1)). \end{aligned}$$

et donc :

$$pc(h_i)tn(\beta, t) + p\theta_t - 2\pi q_t^{(i)} \ll \frac{1}{t^{\nu+1}}.$$

Partie 3. En soustrayant, on obtient alors :

$$\begin{cases} ptn(\beta, t)(c(h_1) - c(h_3)) = 2\pi \widehat{q}_t + O\left(\frac{1}{t^{\nu+1}}\right) \\ ptn(\beta, t)(c(h_1) - c(h_2)) = 2\pi q_t + O\left(\frac{1}{t^{\nu+1}}\right) \end{cases}$$

où on a noté :

$$\begin{cases} \widehat{q}_t = q_t^{(1)} - q_t^{(3)} \\ q_t = q_t^{(1)} - q_t^{(2)} \end{cases}$$

Si $c(h_1) \neq c(h_3)$ et $c(h_1) \neq c(h_2)$, on a alors

$$\widehat{q}_t = \Theta(q_t) = \Theta(tn(\beta, t)),$$

donc \widehat{q}_t et q_t peuvent être pris arbitrairement grands, car t peut l'être (et en particulier, pour t assez grand, \widehat{q}_t et q_t sont non nuls).

On obtient :

$$\begin{cases} c(h_1) - c(h_3) = \frac{2\pi \widehat{q}_t}{ptn(\beta, t)} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{\nu+1}\widehat{q}_t}\right)\right) \\ c(h_1) - c(h_2) = \frac{2\pi q_t}{ptn(\beta, t)} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{\nu+1}q_t}\right)\right) \end{cases},$$

et donc :

$$c(h_1, h_2, h_3) = \frac{c(h_1) - c(h_3)}{c(h_1) - c(h_2)} = \frac{\widehat{q}_t}{q_t} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{\nu+1}\widehat{q}_t}\right) + O_\epsilon\left(\frac{1}{t^{\nu+1}q_t}\right)\right),$$

et finalement

$$\left| c(h_1, h_2, h_3) - \frac{\widehat{q}_t}{q_t} \right| \ll \frac{1}{t^{\nu+1}q_t}.$$

Enfin, pour tout $\epsilon > 0$, on a $q_t \ll_\epsilon t^{1+\epsilon}$, et donc quitte à renommer ϵ :

$$t \gg_\epsilon q_t^{1-\epsilon},$$

et finalement, en renommant encore ϵ et ν , on obtient

$$c(h_1, h_2, h_3) - \frac{\widehat{q}_t}{q_t} \ll \frac{1}{q_t^{2+\nu}}.$$

□

9.1.2 Systèmes 2-DIOP

Un résultat du même type subsiste pour les systèmes 2-DIOP.

Proposition 9.2. *Considérons $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^*$. Si $c(h_1, h_2)$ est diophantien d'exposant μ , alors pour tout 5-uplet $(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta)$ avec ξ une racine de l'unité, et*

$$\begin{cases} \min(\alpha, \gamma) > \mu + 1 \\ \frac{\delta}{\beta} > \max_{i \in \{1,2\}} c(h_i) \end{cases},$$

l'ensemble $\mathcal{C}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta)$ est borné.

Démonstration. La preuve est faite par l'absurde.

Supposons qu'il existe un 5-uplet $(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta)$ qui vérifie les hypothèses, et tel que l'ensemble $\mathcal{C}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta)$ n'est pas borné.

Alors il existe une suite de triplets (t, w, η) avec t aussi grand qu'on veut, $w_t \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$, $|w_t| = 1$, $\|w_t\|_{1,t} \leq K$, et $\eta_t \in \mathbb{C}$, $|\eta_t| = 1$, et

$$\sup_{\mathcal{I}(t, \beta, \delta)} \left| \mathbf{M}_t^{n(\beta, t)}[w_t] - \eta_t w_t \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}, \quad (9.3)$$

et :

$$|\eta_t - \xi^{n(\beta, t)}| \leq \frac{1}{t^\gamma}.$$

Donc en particulier la majoration a lieu sur l'ensemble de Cantor, plus petit :

$$\sup_{\mathcal{K}(t, \beta, \delta)} \left| \mathbf{M}_t^{n(\beta, t)}[w_t] - \eta_t w_t \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}. \quad (9.4)$$

Soient $\mu > 0$, et $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^*$. Là encore, grâce au lemme 5.3, on peut supposer que h_1 et h_2 sont de même profondeur p . On suppose aussi :

$$\begin{cases} \min(\alpha, \gamma) > \mu + 1 \\ \frac{\delta}{\beta} > \max_{i \in \{1,2\}} c(h_i) \end{cases}.$$

Soit $\nu > \mu$ assez proche de μ pour que $\alpha > \nu + 1$. On va montrer qu'on peut trouver des entiers q_t aussi grands qu'on veut, tels que

$$\{q_t c(h_1, h_2)\} \ll \frac{1}{q_t^{1+\nu}},$$

ce qui prouvera par le lemme 5.24 que l'exposant d'irrationalité de $c(h_1, h_2)$ est strictement supérieur à μ .

Partie 1. Comme dans la preuve de la proposition 9.1, on prouve par récurrence que :

$$\sup_{\mathcal{K}(t, \beta, \delta)} \left| \mathbf{M}_t^{pn_0 n(\beta, t)}[w_t] - \eta_t^{pn_0} w_t \right| \leq \frac{pn_0}{t^\alpha}. \quad (9.5)$$

où $n_0 \in \mathbb{N}$ est tel que $\xi^{n_0} = 1$.

On cherche alors à majorer $\eta_t^{pn_0} - 1$. La preuve est faite par récurrence sur p . D'abord on écrit :

$$\eta_t^{n_0} - 1 = \eta_t^{n_0} - \xi^{n(\beta,t)n_0} = (\eta_t - \xi^{n(\beta,t)}) \sum_{j=0}^{n_0-1} \eta_t^j \xi^{n(\beta,t)(n_0-1-j)}$$

et donc

$$|\eta_t^{n_0} - 1| \leq \left| \eta_t - \xi^{n(\beta,t)} \right| (n_0 - 1) \ll \frac{n_0 - 1}{t^\gamma}.$$

Ensuite on écrit :

$$|\eta_t^{2n_0} - 1| \leq |\eta_t^{2n_0} - \eta_t^{n_0}| + |\eta_t^{n_0} - 1| = 2|\eta_t^{n_0} - 1| \ll \frac{(n_0 - 1)}{t^\gamma},$$

et par récurrence,

$$|\eta_t^{pn_0} - 1| \leq \frac{p(n_0 - 1)}{t^\gamma}.$$

Donc en réinjectant dans 9.5, et en se servant du fait que $|w_t| = 1$, on obtient :

$$\sup_{\mathcal{K}(t,\beta,\delta)} \left| \mathbf{M}_t^{pn_0n(\beta,t)}[w_t] - w_t \right| \leq p \left(\frac{n_0 - 1}{t^\gamma} + \frac{n_0}{t^\alpha} \right) \ll \frac{1}{t^{\nu+1}}. \quad (9.6)$$

Partie 2. On note h_1^* et h_2^* les points fixes respectifs de h_1 et h_2 . Alors, d'après le lemme 7.21, et en utilisant l'hypothèse $\frac{\delta}{\beta} > \max_i c(h_i)$, on obtient que h_1^* et h_2^* sont dans l'ensemble de Cantor $\mathcal{K}(t, \beta, \delta)$. On applique alors l'inégalité 9.6 en h_i^* , pour $i \in \{1, 2\}$.

Comme dans la preuve de la proposition 9.1, en utilisant les lemmes 3.5 et 5.3, on arrive à

$$\left| |h'_i(h_i^*)|^{itn_0n(\beta,t)} - 1 \right| \ll \frac{1}{t^{\nu+1}}.$$

c'est-à-dire que :

$$|h'_i(h_i^*)|^{itn_0n(\beta,t)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$$

et donc il existe une suite $(q_t^{(i)})_t$ telle que :

$$tn_0n(\beta, t)pc(h_i) - 2\pi q_t^{(i)} \rightarrow 0.$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \left| |h'_i(h_i^*)|^{itn_0n(\beta,t)} - 1 \right| &= \left| e^{ipc(h_i)tn_0n(\beta,t) - 2\pi i q_t^{(i)}} - 1 \right| \\ &= \left| pc(h_i)tn_0n(\beta, t) - 2\pi q_t^{(i)} \right| (1 + o(1)). \end{aligned}$$

et donc :

$$pc(h_i)tn_0n(\beta, t) - 2\pi q_t^{(i)} \ll \frac{1}{t^\nu}.$$

Partie 3. En notant $q_t = q_t^{(1)}$ et $\hat{q}_t = q_t^{(2)}$, on obtient,

$$\hat{q}_t = \Theta(q_t) = \Theta(tn(\beta, t)),$$

donc \hat{q}_t et q_t peuvent être pris arbitrairement grands, car t peut l'être (et en particulier, pour t assez grand, \hat{q}_t et q_t sont non nuls).

On obtient :

$$\begin{cases} c(h_1) = \frac{2\pi\hat{q}_t}{tpn_0n(\beta, t)} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{\nu+1}\hat{q}_t}\right) \right) \\ c(h_2) = \frac{2\pi q_t}{tpn_0n(\beta, t)} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{\nu+1}q_t}\right) \right) \end{cases},$$

et donc :

$$c(h_1, h_2) = \frac{\hat{q}_t}{q_t} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{\nu+1}\hat{q}_t}\right) + O\left(\frac{1}{t^{\nu+1}q_t}\right) \right),$$

et finalement

$$\left| c(h_1, h_2) - \frac{\hat{q}_t}{q_t} \right| \ll O\left(\frac{1}{t^{\nu+1}q_t}\right).$$

Enfin, pour tout $\epsilon > 0$, on a $q_t \ll t^{1+\epsilon}$, et donc :

$$t \gg q_t^{1-\epsilon},$$

et finalement, en renommant ϵ et ν , on obtient

$$c(h_1, h_2) - \frac{\hat{q}_t}{q_t} \ll \frac{1}{q_t^{2+\nu}}.$$

□

Remarque. L'inégalité 9.6 est à comparer avec 9.2, et justifie l'appellation de système de fonctions presque invariantes, et non plus seulement presque propres.

9.2 Etude du quasi-inverse de l'opérateur sur la droite $\{\Re(s) = 1\}$

Maintenant les trois étapes annoncées pour la majoration du quasi-inverse sur la droite $\{\Re(s) = 1\}$. La synthèse sera faite dans la section suivante.

9.2.1 Etape 1 $\mathcal{B} \tilde{\subset} \mathcal{A}$

La proposition relative à cette partie est la suivante. Elle transfère une information sur l'opérateur \mathbf{H}_{1+it} de transfert, en une information sur l'opérateur-composante \mathbf{M}_t .

Cette proposition est l'adaptation du lemme 2.2 de Baladi et Hachemi ([3]), ou de la proposition 2.3 de Naud ([42]).

Proposition 9.3. Pour tout triplet (α, β, δ) vérifiant

$$\alpha < \min\left(\beta|\log \rho| - 1, \frac{\alpha_1 - \delta}{2}\right)$$

(où ρ est le coefficient de contraction du système de Bonne Classe), on a l'inclusion faible

$$\mathcal{B}(\alpha_1, \beta) \tilde{\subset} \mathcal{A}(\alpha, \beta, \delta).$$

La démonstration utilise trois lemmes énoncés dans la suite.

Preuve de la proposition 9.3. On prend $t \in \mathcal{B}(\alpha_1, \beta)$. Alors il existe $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, $\|u_0\|_{1,t} \leq 1$, tel que pour tout $n \in \{0, n(\beta, t), 2n(\beta, t)\}$, pour tout $y \in \mathcal{I}$,

$$\left| \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^n[u_0](y) \right| \geq 1 - \frac{1}{t^{\alpha_1}}.$$

Posons pour $k \in \{0, 1, 2\}$,

$$u_k = \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{kn(\beta, t)}(u_0), \quad b_k = |u_k| \quad \text{et} \quad v_k = \frac{u_k}{b_k}. \quad (9.7)$$

(les u_i, v_i, b_i dépendent de t , mais on ne l'indique pas pour alléger les notations). On a alors $|v_k| = 1$.

Le fait que $t \in \mathcal{B}(\alpha_1, \beta)$ entraîne que pour tout $y \in \mathcal{I}$:

$$\begin{cases} b_1(y) \geq 1 - \frac{1}{t^{\alpha_1}} \\ b_2(y) \geq 1 - \frac{1}{t^{\alpha_1}} \end{cases},$$

(donc les v_k sont bien définis).

On a $\|v_1\|_\infty = 1$, et on peut majorer $\|v_1\|_1$ grâce au lemme 9.6 :

$$\|v_1\|_1 = \left\| \frac{u_1}{|u_1|} \right\|_1 \leq \frac{2\|u_1\|_1}{\inf_{x \in \mathcal{I}} |u_1(x)|^2}.$$

Il suffit alors de remarquer que $u_1(x) \geq 1 - \frac{1}{t^{\alpha_1}} \geq \frac{1}{2}$ pour t assez grand, et $\|u_1\|_{1,t} = \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n(\beta, t)}[u_0] \right\|_{1,t} \ll 1$, donc $\|u_1\|_1 \ll t$, donc $\|v_1\|_1 \ll t$, et finalement, il existe K_0 tel que pour tout t assez grand, $\|v_1\|_{1,t} \leq K_0$. C'est ce K_0 qui apparaît dans les définitions de \mathcal{A} , \mathcal{C} et \mathcal{E} .

Dans la suite, x désigne un élément de $\mathcal{I}(t, \beta, \delta)$, et on note $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$ la branche inverse de profondeur $n(\beta, t)$ telle que $x \in h(\mathcal{I})$. On pose aussi $y = T^{n(\beta, t)}(x)$, de sorte que $x = h(y)$.

On fixe un élément $x_0 \in \mathcal{I}(t, \beta, \delta)$ qui servira de pivot dans la suite, et $h_0 \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$ la branche inverse telle que $x_0 \in h_0(\mathcal{I})$. On pose aussi $y_0 = T^{n(\beta, t)}(x_0)$, de sorte que $x_0 = h_0(y_0)$.

Pour conclure que si t est assez grand, alors $t \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, \delta)$, on va exhiber une fonction w_t et un scalaire η_t , tels que pour tout $x \in \mathcal{I}(t, \beta, \delta)$,

$$\left| \mathbf{M}_t^{n(\beta, t)}[w_t](x) - \eta_t w_t(x) \right| \leq \frac{1}{t^\alpha},$$

les éléments presque propres w_t et η_t étant construits à partir de u_0 :

$$w_t = v_1 \quad \text{et} \quad \eta_t = \frac{v_0(x_0)}{v_1(x_0)}.$$

Il est important de remarquer que η_t (la valeur presque propre) ne dépend pas de x , mais seulement du point de référence x_0 .

La démonstration consiste alors à estimer pour $x = h(y)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_t^{n(\beta, t)}[w_t](x) - \eta_t w_t(x) &= |h'(y)|^{-it} v_1(y) - \eta_t v_1(h(y)) \\ &= |h'(y)|^{-it} (v_1(y) - \eta_t v_2(y)) + \eta_t (|h'(y)|^{-it} v_2(y) - v_1(h(y))). \end{aligned}$$

Le lemme 9.4 s'applique alors :

$$v_1(h(y)) - |h'(y)|^{-it} v_2(y) \ll \frac{1}{t^{(\alpha_1 - \delta)/2}}, \quad (9.8)$$

ainsi que le lemme 9.5 :

$$v_1(y) - \eta_t v_2(y) \ll \frac{1}{t^{(\alpha_1 - \delta)/2}} + \frac{1}{t^{\beta |\log \hat{\rho}| - 1}}.$$

Compte-tenu de l'hypothèse sur α , on peut alors conclure que :

$$\left| \mathbf{M}_t^{n(\beta, t)}[w_t](x) - \eta_t w_t(x) \right| \leq \frac{1}{t^\alpha},$$

pour t assez grand, c'est-à-dire que $t \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, \delta)$.

□

Maintenant les trois lemmes techniques, avec leurs démonstrations.

Lemme 9.4. *Pour tout $t > 0$, pour tout $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$, pour tout $y \in \mathcal{I}$, et avec v_1 et v_2 définis en 9.7, on a :*

$$v_1(h(y)) - |h'(y)|^{-it} v_2(y) \ll \frac{1}{t^{(\alpha_1 - \delta)/2}},$$

où la constante de majoration ne dépend pas de h , ni de t , ni de y .

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} b_2(y) &= \frac{u_2(y)}{v_2(y)} \\ &= \frac{1}{v_2(y)} \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n(\beta, t)}(u_1)(y) \\ &= \frac{1}{v_2(y)} \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n(\beta, t)}(b_1 v_1)(y) \\ &= \sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta, t)}} \frac{f_1(h(y))}{f_1(y)} \frac{(b_1 v_1)(h(y))}{v_2(y)} |h'(y)|^{1+it} \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \tilde{\mathbf{H}}_1^{n(\beta, t)}(\mathbf{1}) \\ &= \sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta, t)}} \frac{f_1(h(y))}{f_1(y)} |h'(y)|, \end{aligned}$$

d'où on déduit :

$$1 - b_2(y) = \sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta, t)}} \frac{f_1(h(y))}{f_1(y)} |h'(y)| \left(1 - \frac{|h'(y)|^{it}}{v_2(y)} (b_1 v_1)(h(y)) \right).$$

Mais $u_1 = \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n(\beta, t)}[u_0]$ a une norme infinie inférieure ou égale à 1 d'après le lemme 6.18, donc dans la parenthèse $b_1(h(y))$, est réel positif et inférieur ou égal à 1, tandis que

$$\left| \frac{|h'(y)|^{it}}{v_2(y)} v_1(h(y)) \right| = 1 \quad \text{et} \quad \frac{f_1(h(y))}{f_1(y)} |h'(y)| > 0.$$

Ceci prouve que chaque terme de la somme est de partie réelle supérieure ou égale à 0. Et donc, pour tout $h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)}$:

$$\frac{f_1(h(y))}{f_1(y)} |h'(y)| \left(1 - b_1(h(y)) \Re \left(\frac{|h'(y)|^{it}}{v_2(y)} v_1(h(y)) \right) \right) \geq 0$$

Mais par hypothèse,

$$1 - b_2(y) \leq \frac{1}{t^{\alpha_1}}.$$

On a donc aussi la même majoration pour la partie réelle de chaque terme écrit plus haut, c'est à dire que pour tout $h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)}$,

$$\frac{f_1(h(y))}{f_1(y)} |h'(y)| \left(1 - b_1(h(y)) \Re \left(\frac{|h'(y)|^{it}}{v_2(y)} v_1(h(y)) \right) \right) \leq \frac{1}{t^{\alpha_1}}.$$

De plus, on a $\frac{f_1(h(y))}{f_1(y)}$ majorée inférieurement (et supérieurement), indépendamment de h .

On obtient donc (la constante ne dépend pas de $h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)}$, ni de t , ni de y) :

$$1 - b_1(h(y)) \Re \left(\frac{|h'(y)|^{it}}{v_2(y)} v_1(h(y)) \right) \ll \frac{1}{|h'(y)| t^{\alpha_1}}.$$

A partir de maintenant, on va se servir de l'hypothèse plus spécifique selon laquelle $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$. Par définition

$$|h'(y)| \geq t^{-\delta}.$$

C'est donc qu'on a pour tout $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$,

$$1 - b_1(h(y)) \Re \left(\frac{|h'(y)|^{it}}{v_2(y)} v_1(h(y)) \right) \ll \frac{1}{t^{\alpha_1 - \delta}},$$

avec la constante de majoration qui ne dépend pas de $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$, ni de $y \in \mathcal{I}$. Or, $b_1(h(y)) \geq 0$, donc pour $t \geq 1$, pour tout $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$,

$$\Re \left(\frac{|h'(y)|^{it}}{v_2(y)} v_1(h(y)) \right) > 0.$$

Mais on a vu que $b_1(h(y)) \leq 1$, donc indépendamment de $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$, de t et de y :

$$1 - \Re \left(\frac{|h'(y)|^{it}}{v_2(y)} v_1(h(y)) \right) \leq 1 - b_1(h(y)) \Re \left(\frac{|h'(y)|^{it}}{v_2(y)} v_1(h(y)) \right) \ll \frac{1}{t^{\alpha_1 - \delta}}.$$

Or, pour tout nombre complexe z de module 1 :

$$\begin{aligned} |1 - z| &= \sqrt{(1 - \Re(z))^2 + \Im(z)^2} \\ &= \sqrt{2 - 2\Re(z)} \\ &= \sqrt{2}(1 - \Re(z))^{1/2}. \end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} |v_2(y) - |h'(y)|^{it} v_1(h(y))| &= \left| 1 - |h'(y)|^{it} \frac{v_1(h(y))}{v_2(y)} \right| \\ &= \sqrt{2} \left(1 - \Re \left(\frac{|h'(y)|^{it}}{v_2(y)} v_1(h(y)) \right) \right)^{1/2} \\ &\ll \frac{1}{t^{(\alpha_1 - \delta)/2}}. \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$, et pour tout $y \in \mathcal{I}$,

$$|v_2(y) - |h'(y)|^{it} v_1(h(y))| \ll \frac{1}{t^{(\alpha_1 - \delta)/2}}, \quad (9.9)$$

où la constante de majoration ne dépend pas de h , ni de y , ni de t .

□

Ce lemme montre comment utiliser x_0 comme pivot, indépendant de x pour relier $v_1(y)$ et $v_2(y)$ qui dépendent de x . C'est l'introduction dans la démonstration d'un intermédiaire $\tilde{x} = h_0(y)$ entre x et x_0 qui va permettre de faire ce lien.

Lemme 9.5. *Pour tout $y \in \mathcal{I}$, et tout $x_0 \in \mathcal{I}(t, \beta, \delta)$, avec v_1 et v_2 définis en 9.7 :*

$$|v_1(y)v_1(x_0) - v_2(y)v_0(x_0)| \ll \frac{1}{t^{\beta|\log \hat{\rho}| - 1}} + \frac{1}{t^{(\alpha_1 - \delta)/2}}.$$

Démonstration. On définit $\tilde{x} = h_0(y)$. Donc $\tilde{x} \in \mathcal{I}(t, \beta, \delta)$, car $h_0 \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$.

On considère donc les trois points

$$x = h(y) \quad x_0 = h_0(y_0) \quad \tilde{x} = h_0(y).$$

Par le système dynamique :

- les $n(\beta, t)$ premiers symboles de \tilde{x} sont les mêmes que ceux de x_0 , et donc x_0 et \tilde{x} ne sont pas trop éloignés, car appartiennent au même intervalle fondamental $h_0(\mathcal{I})$. Plus précisément,

$$\begin{aligned} |x_0 - \tilde{x}| &= |h_0(y_0) - h_0(y)| \\ &\leq \|h'_0\|_\infty \cdot |y_0 - y| \\ &\ll \hat{\rho}^{n(\beta, t)} \ll t^{\beta \log \hat{\rho}}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

- puis les symboles suivants de \tilde{x} sont ceux de x (ce sont les symboles de y)

On va alors prouver :

$$\begin{aligned} |v_1(y) - v_0(x_0) |h'_0(y)|^{it}| &\ll \frac{1}{t^{\beta|\log \hat{\rho}| - 1}} + \frac{1}{t^{(\alpha_1 - \delta)/2}}, \\ |v_2(y) - v_1(x_0) |h'_0(y)|^{it}| &\ll \frac{1}{t^{\beta|\log \hat{\rho}| - 1}} + \frac{1}{t^{(\alpha_1 - \delta)/2}}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

On traite la première inégalité, l'autre étant obtenue de la même façon. Pour cela, on décompose par inégalité triangulaire :

$$|v_1(y) - v_0(x_0) |h'_0(y)|^{it}| \leq |v_1(y) - v_0(\tilde{x}) |h'_0(y)|^{it}| + |v_0(\tilde{x}) - v_0(x_0)|.$$

Comme $\tilde{x} = h_0(y)$, le terme $|v_1(y) - v_0(\tilde{x}) |h'_0(y)|^{it}|$ est estimé grâce au lemme qui précède (en remplaçant x par \tilde{x} , et « un cran plus bas »).

Quant au deuxième terme $|v_0(\tilde{x}) - v_0(x_0)|$, on l'estime à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, grâce à la majoration 9.10. En effet, la dérivée de v_0 est contrôlée par le lemme 9.6. Comme $s_0 = |u_0| = 1$ (d'après l'hypothèse), on obtient que

$$\|v_0\|_1 = \left\| \frac{u_0}{|u_0|} \right\|_1 \ll \|u_0\|_1 \ll t \cdot \|u_0\|_{1,t} \ll t$$

et donc :

$$|v_0(\tilde{x}) - v_0(x_0)| \ll t\widehat{\rho}^{n(\beta,t)} \ll \frac{1}{t^{\beta|\log \widehat{\rho}|-1}}.$$

La fin de la preuve du lemme est une simple application de l'inégalité triangulaire à partir des deux inégalités 9.11. □

Enfin, on donne ce lemme technique et général qui sert dans la preuve du lemme précédent.

Lemme 9.6. *Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, qui ne s'annule pas, et tel que $\|u\|_\infty \leq 1$. Alors $\frac{u}{|u|} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, et*

$$\left\| \frac{u}{|u|} \right\|_1 \leq \frac{2\|u\|_1}{\inf_{x \in \mathcal{I}} |u(x)|^2}.$$

Démonstration. Pour tous $x, x_0 \in \mathcal{I}$,

$$\left| \frac{1}{|u|(x)} - \frac{1}{|u|(x_0)} \right| \leq \left| \frac{1}{u(x)} - \frac{1}{u(x_0)} \right| \leq \frac{1}{(\inf |u|)^2} |u(x) - u(x_0)|$$

et donc, en divisant par $x - x_0$, en faisant tendre x vers x_0 , et en prenant le sup de chaque côté, on obtient :

$$\left\| \left(\frac{1}{|u|} \right)' \right\|_\infty \leq \frac{\|u\|_1}{\inf |u|^2}.$$

On conclut alors en écrivant :

$$\left\| \left(\frac{u}{|u|} \right)' \right\|_\infty \leq \|u\|_\infty \left\| \left(\frac{1}{|u|} \right)' \right\|_\infty + \frac{\|u\|_1}{\inf |u|},$$

et en utilisant le fait que $|u| \leq 1$, donc $\inf |u| \geq \inf |u|^2$. □

9.2.2 Etape 2 $\mathcal{B}^c \tilde{\subset} \mathcal{F}$

Cette proposition est l'adaptation du lemme 2.3 de Baladi et Hachemi ([3]) en utilisant les réunions fondamentales au lieu des Cantor, ou de la proposition 2.2 de Naud ([42]) à un alphabet infini plutôt que fini.

Proposition 9.7. *Pour tout couple (α_1, β) , on a l'inclusion faible valable pour tout $\alpha_2 > 2\alpha_1 + 1$*

$$\mathcal{B}^c(\alpha_1, \beta) \tilde{\subset} \mathcal{F}(\alpha_2).$$

Démonstration. Soit $t \in \mathcal{B}^c(\alpha_1, \beta)$ et $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, avec $\|u\|_{1,t} \leq 1$.

Le but est de majorer

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it})^{-1}\|_{1,t}$$

c'est-à-dire qu'on cherche à majorer

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it})^{-1}[u]\|_{1,t}$$

avec une constante de majoration qui ne dépend pas de t ni de u .

Par définition, il existe $x_0 \in \mathcal{I}$, et $j \in \{0, n(\beta, t), 2n(\beta, t)\}$ tels que :

$$\left| \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^j[u](x_0) \right| < 1 - \frac{1}{t^{\alpha_1}}.$$

Dans la suite, on sera amenés à considérer plusieurs indices d'itération $n_k(t)$ et plusieurs itérés $\tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n_k(t)}$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$. Pour alléger les notations, on notera :

$$u_k = \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n_k(t)}[u].$$

Par hypothèse, en prenant $n_1(t) = j$, on a alors :

$$|u_1(x_0)| < 1 - \frac{1}{t^{\alpha_1}}.$$

Puisque $u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, la valeur de $u_1(x)$ pour les x assez proches de x_0 est peu différente de $u_1(x_0)$. Notons \mathcal{I}_0 le voisinage de x_0 dans \mathcal{I} :

$$\mathcal{I}_0 = \left\{ x \in \mathcal{I} : |x - x_0| \leq \frac{1}{2t^{\alpha_1+1}} \right\}.$$

Pour tout $x \in \mathcal{I}_0$, par inégalité des accroissements finis,

$$|u_1(x)| \leq |u_1(x_0)| + \|u_1\|_1 \cdot |x - x_0| \leq |u_1(x_0)| + \frac{t}{2t^{\alpha_1+1}}.$$

On a utilisé que d'après l'inégalité de Lasota-Yorke (lemme 6.19)

$$\|u_1\|_1 \leq t \cdot \|u_1\|_{1,t} \leq t \cdot \|u\|_{1,t} \leq t.$$

On obtient finalement

$$|u_1(x)| \leq 1 - \frac{1}{t^{\alpha_1}} + \frac{t}{2t^{\alpha_1+1}} = 1 - \frac{1}{2t^{\alpha_1}}.$$

On s'est donc affranchi de la dépendance en le u de départ, mais seulement sur un petit voisinage \mathcal{I}_0 de x_0 . De plus, on n'a de l'information que sur le sup de u_1 , mais rien encore sur sa dérivée.

Pour étendre cette majoration partout ailleurs sur \mathcal{I} , on considère d'abord la norme $L_1(\tilde{\mu}_1)$ où $\tilde{\mu}_1$ est associée à la fonction propre 1 de $\tilde{\mathbf{H}}_1$, c'est-à-dire, qu'on cherche à évaluer :

$$\int_{\mathcal{I}} |u_1| d\tilde{\mu}_1.$$

Pour cela, on utilise la majoration de u_1 trouvé sur \mathcal{I}_0 ; partout ailleurs, on majore simplement brutalement $|u_1|$ par 1 (lemme 6.18),

$$\begin{aligned} \|u_1\|_{L^1(\tilde{\mu}_1)} &= \int_{\mathcal{I}_0} |u_1| d\tilde{\mu}_1 + \int_{\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0} |u_1| d\tilde{\mu}_1 \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{2t^{\alpha_1}}\right) \tilde{\mu}_1(\mathcal{I}_0) + 1 - \tilde{\mu}_1(\mathcal{I}_0), \end{aligned}$$

et finalement :

$$\|u_1\|_{L^1(\tilde{\mu}_1)} \leq 1 - \frac{\tilde{\mu}_1(\mathcal{I}_0)}{2t^{\alpha_1}}, \quad (9.12)$$

et ce, indépendamment du u de départ.

Mais $\tilde{\mu}_1$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue comme on l'a dit à la sous-section 6.2.3. Et d'autre part, on peut minorer la mesure de Lebesgue de \mathcal{I}_0 :

$$|\mathcal{I}_0| \geq \frac{1}{2t^{\alpha_1+1}}$$

(le facteur 2 vient du fait que seule la moitié \mathcal{I}_0 est toujours incluse dans \mathcal{I}).

Ce qui permet finalement d'obtenir

$$1 - \|u_1\|_{L^1(\tilde{\mu}_1)} \gg \frac{1}{t^{2\alpha_1+1}} \gg \frac{1}{t^{\alpha_2}},$$

où u_1 est défini en 9.12.

En se servant d'une puissance de référence, nous avons obtenu une minoration d'un itéré de u par l'opérateur $\tilde{\mathbf{H}}_{1+it}$ pour la norme $L^1(\mu_1)$.

Le reste de la preuve consiste à passer successivement à une estimation de la norme $\|\cdot\|_\infty$ d'un certain itéré (indépendante de la fonction u de départ), puis à une estimation de la norme $\|\cdot\|_{1,t}$ d'un autre itéré (indépendante de la fonction u de départ), de revenir à l'opérateur \mathbf{H}_{1+it} (et non plus l'opérateur normalisé), et enfin par sommation de déduire un résultat sur la norme $\|\cdot\|_{1,t}$ du quasi-inverse.

Pour tout $n \geq n_1$:

$$\tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^n[u] = \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n-n_1} \left[\tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n_1}[u] \right] = \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n-n_1}[u_1].$$

En fait, si u_1 s'annule, alors $|u_1|$ n'est plus forcément $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$; on peut alors remplacer $|u_1|$ (on n'explique pas ici la construction) par une fonction v de classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, avec une norme $\|\cdot\|_{1,t}$ arbitrairement proche. Comme d'après l'inégalité de Lasota-Yorke (lemme 6.19), $\|u_1\|_{1,t} \leq \|u\|_{1,t} \leq 1$, on peut faire en sorte que $\|v\|_{1,t} \ll 1$.

On écrit alors la décomposition spectrale pour $v \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ d'après le lemme 6.21

$$\tilde{\mathbf{H}}_1^{n-n_1}(v) = \int_{\mathcal{I}} v d\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mathbf{N}}_1^{n-n_1}[v].$$

avec

$$\left\| \tilde{\mathbf{N}}_1^{n-n_1}[v] \right\|_\infty \leq \left\| \tilde{\mathbf{N}}_1^{n-n_1}[v] \right\|_{1,t} \ll r(\mathbf{H}_1)^{n-n_1} \|v\|_{1,t} \ll r(\mathbf{H}_1)^{n-n_1},$$

et d'autre part, d'après le théorème 6.11, $r(\mathbf{H}_1) < \lambda(1) = 1$.

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned} 1 - \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^n(u) \right\|_\infty &= 1 - \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n-n_1}[u_1] \right\|_\infty \\ &\geq 1 - \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n-n_1}[|u_1|] \right\|_\infty \\ &\gg 1 - \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n-n_1}(v) \right\|_\infty \\ &\gg 1 - \|v\|_{L^1(\tilde{\mu}_1)} - r(\mathbf{H}_1)^{n-n_1} \\ &\gg 1 - \|u_1\|_{L^1(\tilde{\mu}_1)} - r(\mathbf{H}_1)^{n-n_1} \\ &\gg \frac{1}{t^{\alpha_2}} - r(\mathbf{H}_1)^{n-n_1} \end{aligned}$$

uniformément en t, u . Et en prenant $n = n_2(t) = \lfloor \beta_2 \log t \rfloor + n_1$ avec β_2 assez grand pour que

$$r(\mathbf{H}_1)^{n-n_1} = o\left(\frac{1}{t^{\alpha_2}}\right),$$

on obtient :

$$1 - \|u_2\|_\infty \gg \frac{1}{t^{\alpha_2}},$$

indépendamment de $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ tel que $\|u\|_{1,t} = 1$ et indépendamment de t .

Maintenant il s'agit de revenir à la norme $\|\cdot\|_{1,t}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_2(t)$. D'après le lemme 6.19, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^n [u] \right\|_{1,t} &= \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n-n_2} \left[\tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n_2(t)} [u] \right] \right\|_{1,t} \\ &= \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n-n_2} [u_2] \right\|_{1,t} \\ &\ll \|u_2\|_\infty + \frac{\hat{\rho}^{n-n_2}}{t} \|u_2\|_1 \\ &\ll \|u_2\|_\infty + \hat{\rho}^{n-n_2} \|u_2\|_{1,t} \end{aligned}$$

et en utilisant encore l'inégalité de Lasota-Yorke, on a $\|u_2\|_{1,t} \leq \|u\|_{1,t} \leq 1$, et finalement :

$$1 - \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^n (u) \right\|_{1,t} \gg \frac{1}{t^{\alpha_2}} - \hat{\rho}^{n-n_2}.$$

En prenant $n = n_3(t) = \lfloor \beta_3 \log t \rfloor + n_2$, avec β_3 assez grand pour que

$$\hat{\rho}^{n-n_2} = o\left(\frac{1}{t^{\alpha_2}}\right),$$

on obtient :

$$1 - \|u_3\|_{1,t} \gg \frac{1}{t^{\alpha_2}}.$$

On a donc montré qu'il existe $K > 0$ tel que

$$\|u_3\|_{1,t} \leq 1 - \frac{K}{t^{\alpha_2}}.$$

Et donc pour tout $k \geq 1$,

$$\left\| \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{kn_3(t)} (u) \right\|_{1,t} \leq \left(1 - \frac{K}{t^{\alpha_2}}\right)^k,$$

avec K qui ne dépend pas de k , ni de t , ni de $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ tel que $\|u\|_{1,t} \leq 1$.

Et donc, d'après le lemme 6.17, il existe K' qui ne dépend pas de k tel que :

$$\left\| \mathbf{H}_{1+it}^{kn_3(t)} \right\|_{1,t} \leq K' \left(1 - \frac{K}{t^{\alpha_2}}\right)^k. \quad (9.13)$$

On conclut alors pour le quasi-inverse, égal à la somme des puissances de \mathbf{H}_{1+it} . Considérons donc une puissance quelconque de \mathbf{H}_{1+it} . On a une majoration fine d'un certain itéré $n_3(t)$ grâce à ce qui précède. On fait la division euclidienne de l'exposant par $n_3(t)$ et on se sert d'une majoration grossière de $\|\mathbf{H}_{1+it}^m\|_{1,t}$ pour les m petits, et de ce qui précède.

En sommant, il vient :

$$\left\| \left(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it}^{n_3(t)} \right)^{-1} \right\|_{1,t} \ll \sum_{k \geq 0} \left\| \mathbf{H}_{1+it}^{kn_3(t)} \right\|_{1,t} \ll \sum_{k \geq 0} \left(1 - \frac{K}{t^{\alpha_2}} \right)^k \ll t^{\alpha_2}.$$

On conclut, en remarquant que pour un opérateur \mathbf{A} , et pour $m \in \mathbb{N}^*$:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{m-1})(\mathbf{I} - \mathbf{A}^m)^{-1}.$$

On applique cette formule avec $\mathbf{A} = \mathbf{H}_{1+it}$ et $m = n_3(t)$. Chacun des \mathbf{A} a une norme $\|\cdot\|_{1,t} \leq 1$ (inégalité de Lasota-Yorke, lemme 6.7), ce qui prouve que le premier facteur est majoré par $n_3(t) \ll \log t$. On obtient alors :

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it})^{-1}\|_{1,t} \ll (\log t)t^{\alpha_2}.$$

Or, la seule contrainte sur α_2 était $\alpha_2 > 2\alpha_1 + 1$.

Donc finalement, quitte à renommer α_2 ,

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it})^{-1}\|_{1,t} \ll t^{\alpha_2}.$$

□

9.2.3 Etape 3 $\mathcal{F}^c \tilde{\subset} \mathcal{A}^c \cup \mathcal{C}$

On va montrer la proposition suivante, valable pour tout ξ racine de l'unité. On utilisera cette proposition avec $\xi = 1$, mais on a gardé cette proposition générale, obtenue avec un moindre effort supplémentaire.

Cette proposition est l'extension de la proposition 2.1 de Naud ([42]) à un alphabet infini.

On rappelle qu'on note $L = \log \lambda$ le logarithme de la valeur propre dominante (sur l'axe réel).

Dans le cas d'un alphabet fini, en renforçant la condition $\delta/\beta > C$ en $\delta/\beta > |\log \rho_0|$, où $\rho_0 = \inf_{h \in \mathcal{H}} \inf_{\mathcal{I}} |h'(x)|$, une condition sur les paramètres disparaît, ce qui va considérablement simplifier les choses au moment de la synthèse à la section 9.4 (on n'aura plus à choisir le paramètre σ_1), et pourra dans certains cas apporter une meilleure conclusion.

Proposition 9.8. *Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta)$, et pour tout σ_1 tel que $\sigma_0 < \sigma_1 < 1$ (où $\sigma_0 = \inf\{\sigma : \sum_{h \in \mathcal{H}} \sup |h'|^\sigma < \infty\}$ est l'abscisse de convergence du système de Bonne Classe), si*

$$\begin{cases} \gamma < \min(\alpha, (1 - \sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1), \beta |\log \rho|) \\ \beta |\log r(\mathbf{H}_1)| > 1 + 2\gamma \end{cases}.$$

on a l'inclusion faible suivante :

$$\mathcal{F}^c(2\gamma, \xi) \tilde{\subset} \mathcal{A}(\alpha, \beta, \delta)^c \bigcup \mathcal{C}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta).$$

Dans le cas d'un alphabet fini, en notant

$$\rho_0 = \inf_{h \in \mathcal{H}} \inf_{\mathcal{I}} |h'(x)|,$$

et en prenant $\delta/\beta > |\log \rho_0|$, la condition $\gamma < (1 - \sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)$ n'est plus nécessaire.

Preuve de la proposition 9.8. De façon évidente, on a :

$$\mathcal{A}(\alpha, \beta, \delta) \setminus \mathcal{C}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta) \subset \mathcal{E}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta)$$

et donc il suffit de prouver que

$$\mathcal{E}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta) \widetilde{\subset} \mathcal{F}(2\gamma, \xi).$$

Soit donc $t \in \mathcal{E}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta)$. Par définition, il existe une paire (w_t, η_t) avec $|w_t| = 1$, $\|w_t\|_{1,t} \leq K_0$ qui vérifie, pour tout $x \in \mathcal{I}(t, \beta, \delta)$,

$$\left| \mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t](x) - \eta_t w_t(x) \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}, \quad \left| \eta_t - \xi^{n(\beta,t)} \right| > \frac{1}{t^\gamma}. \quad (9.14)$$

On va étudier la norme $\|\cdot\|_{1,N}$ de $(\mathbf{I} - \xi \mathbf{H}_{1+it})^{-1}$ pour $N = t^a \geq t$, avec $a \geq 1$ qui sera choisi plus tard. On commence par écrire la décomposition

$$(\mathbf{I} - \xi \mathbf{H}_{1+it})^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{n(\beta,t)-1} \xi^k \mathbf{H}_{1+it}^k \right) (\mathbf{I} - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)})^{-1} \quad (9.15)$$

Chacun des termes de la somme du premier facteur est un $O(1)$ (voir le chapitre 6, figure 6.3), et il y a $O(\log t)$ termes dans la somme. Donc :

$$\left\| \sum_{k=0}^{n(\beta,t)-1} \xi^k \mathbf{H}_{1+it}^k \right\|_{1,N} \ll \log t. \quad (9.16)$$

Reste à majorer l'autre facteur. On pose

$$\mathbf{K}_t = \Delta_{w_t} \circ \mathbf{H}_1 \circ \Delta_{w_t}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_t = \overline{\eta_t} (\xi \mathbf{K}_t)^{n(\beta,t)},$$

où w_t est défini en 9.14, Δ_{w_t} est l'opérateur de multiplication par w_t , c'est-à-dire

$$\mathbf{K}_t[f] = w_t \mathbf{H}_1 [f \overline{w_t}].$$

On désire passer par l'intermédiaire de $\mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}$. Pour cela, sous réserve que les quasi-inverses existent, on écrit l'égalité formelle :

$$\left(\mathbf{I} - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right)^{-1} = \left(\mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1} \left(\mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right) \right)^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1}. \quad (9.17)$$

On majore les facteurs $(\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1}$ et $\mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)}$ en norme $\|\cdot\|_{1,N}$, respectivement grâce aux lemmes 9.9 et 9.10.

Par une propriété élémentaire de la conjugaison, on obtient :

$$\mathbf{K}_t^{n(\beta,t)} = \Delta_{w_t} \circ \mathbf{H}_1^{n(\beta,t)} \circ \Delta_{w_t}^{-1},$$

et donc

$$\mathbf{L}_t = \Delta_{w_t} \circ \left(\overline{\eta_t} \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_1^{n(\beta,t)} \right) \circ \Delta_{w_t}^{-1},$$

et finalement :

$$\mathbf{I} - \mathbf{L}_t = \Delta_{w_t} \circ \left(\mathbf{I} - \overline{\eta_t} \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_1^{n(\beta,t)} \right) \circ \Delta_{w_t}^{-1}.$$

Or, $\|\Delta_{w_t}\|_{1,N}$ est bornée, car $\|w_t\|_{1,N}$ est bornée, et $w_t^{-1} = \overline{w_t}$, donc $\|w_t^{-1}\|_{1,N}$ est bornée, ce qui prouve que :

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1}\|_{1,N} \ll \left\| \left(\mathbf{I} - \overline{\eta_t} \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_1^{n(\beta,t)} \right)^{-1} \right\|_{1,N}.$$

C'est ici qu'intervient l'hypothèse qui affirme que $\xi^{n(\beta,t)}$ est loin de η_t , et qui permet d'appliquer le lemme 9.9 avec $\mu = \xi^{-n(\beta,t)} \eta_t$. Il apparaît alors un terme

$$|\mu - 1| = |\xi^{n(\beta,t)} - \eta_t|$$

minoré par hypothèse. Avec l'hypothèse $\beta |\log r(\mathbf{H}_1)| > 1 + 2\gamma > 1 + \gamma' + \gamma$, l'hypothèse du lemme 9.9 est vérifiée, et on obtient donc :

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1}\|_{1,N} \ll t^\gamma. \quad (9.18)$$

Maintenant, on va contrôler la norme $\|\cdot\|_{1,N}$ de :

$$\mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} [u] = \xi^{n(\beta,t)} \left(\overline{\eta_t} w_t \mathbf{H}_1^{n(\beta,t)} [u \overline{w_t}] - \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} [u] \right).$$

On veut une majoration suffisamment bonne pour que

$$\limsup_t \left\| (\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1} \left(\mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right) \right\|_{1,N} < 1,$$

afin d'obtenir une majoration de

$$\left(\mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1} \left(\mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right) \right)^{-1}$$

par développement en série.

Il suffit en l'occurrence d'assurer que :

$$\left\| (\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1} \left(\mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right) \right\|_{1,N} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, la majoration brutale

$$\left\| \left(\mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right) \right\|_{1,N} \ll 1$$

obtenue avec l'inégalité de Lasota Yorke (lemme 6.7) n'est pas suffisante, car ensuite on a seulement

$$\left\| (\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1} \left(\mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right) \right\|_{1,N} \ll t^\gamma$$

et le majorant ne tend pas vers 0 avec t .

Le lemme 9.10 nous donne mieux :

$$\left\| \left(\mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right) \right\|_{1,N} \ll \frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}} + \widehat{\rho}^{n(\beta,t)} + \frac{t}{N}. \quad (9.19)$$

Soit $\gamma' > 0$ tel que

$$\begin{cases} \gamma < \gamma' < \min(\alpha, (1 - \sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1), \beta |\log \rho|) \\ \beta > 1 + \gamma + \gamma' \end{cases}.$$

On prend $N = t^{1+\gamma'}$ (et donc $a = 1 + \gamma'$). On obtient alors :

$$\left\| \left(\mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right) \right\|_{1,N} \ll \frac{1}{t^{\gamma'}}. \quad (9.20)$$

En utilisant les majorations 9.15, 9.16, 9.17, 9.18 et 9.20, on obtient successivement :

$$\left\| (\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1} \left(\mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right) \right\|_{1,N} \ll \frac{t^\gamma}{t^{\gamma'}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

(puisqu'on a choisi $\gamma' > \gamma$),

$$\left\| \left(\mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1} \left(\mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right) \right)^{-1} \right\|_{1,N} \ll \frac{t^\gamma}{t^{\gamma'}}$$

$$\left\| \left(\mathbf{I} - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right)^{-1} \right\|_{1,N} \ll \frac{t^{2\gamma}}{t^{\gamma'}}$$

$$\left\| (\mathbf{I} - \xi \mathbf{H}_{1+it})^{-1} \right\|_{1,N} \ll \frac{t^{2\gamma} \log t}{t^{\gamma'}}$$

et donc, d'après le lemme 6.4, on obtient

$$\left\| (\mathbf{I} - \xi \mathbf{H}_{1+it})^{-1} \right\|_{1,t} \ll \frac{N t^{2\gamma} \log t}{t^{\gamma'}} = t^{2\gamma} \log t,$$

et donc, quitte à renommer γ , $t \in \mathcal{F}(2\gamma, \xi)$.

Dans le cas d'un alphabet fini, on conclut en remarquant que le deuxième terme disparaît dans la conclusion du lemme 9.10. □

La preuve de la proposition 9.8 repose sur deux lemmes essentiels.

Le premier exploite le fait que η_t est loin de la racine de l'unité ξ . Le fait que la valeur propre dominante de \mathbf{H}_1 est 1 est crucial pour la démonstration. Ce lemme est adapté d'un lemme de Dolgopyat ([17]).

Lemme 9.9. *Soit $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| = 1$, avec $|\mu - 1| > t^{-\gamma}$. Avec les hypothèses de la preuve de la proposition, pour tout $a \geq 1$, en posant $N = t^a$, et pour tout $\beta > 0$ tel que $\beta |\log r(\mathbf{H}_1)| > a + \gamma$, pour tout $t > 1$,*

$$\left\| \left(\mu \mathbf{I} - \mathbf{H}_1^{n(\beta,t)} \right)^{-1} \right\|_{1,N} \ll t^\gamma.$$

Démonstration. On rappelle qu'on note simplement $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1$ et $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. La décomposition spectrale de \mathbf{H}^k s'écrit (d'après le théorème 6.21)

$$\mathbf{H}^k = \mathbf{P} + \mathbf{N}^k,$$

et donc

$$\begin{aligned} \mu - \mathbf{H}^k &= \mu - \mathbf{P} - \mathbf{N}^k \\ &= (\mu - \mathbf{P})(\mathbf{I} - (\mu - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{N}^k). \end{aligned}$$

Sous réserve d'existence, on dispose donc de l'expression alternative suivante pour le quasi-inverse :

$$\left(\mu - \mathbf{H}^k\right)^{-1} = \left(\mathbf{I} - (\mu - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{N}^k\right)^{-1} (\mu - \mathbf{P})^{-1}.$$

En notant comme au chapitre 6 d'analyse fonctionnelle

$$r(\mathbf{H}_1) = \sup \{|\lambda|; \lambda \in \text{Sp}(\mathbf{H}_1) \setminus \{1\}\}$$

le rayon spectral sous-dominant, et en choisissant \hat{r} tel que $r(\mathbf{H}_1) < \hat{r} < 1$, on a :

$$\left\| \mathbf{N}^k \right\|_{1,N} \ll N \hat{r}^k.$$

On cherche à majorer $\left(\mathbf{I} - (\mu - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{N}^k\right)^{-1}$ en développant en série entière.

On a :

$$(\mu - \mathbf{P})^{-1} = \frac{\mathbf{P}}{\mu - 1} + \frac{\mathbf{I} - \mathbf{P}}{\mu}.$$

En effet, un calcul simple montre que pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| = 1$,

$$\begin{aligned} (\mu - \mathbf{P}) \circ \left(\frac{\mathbf{P}}{\mu - 1} + \frac{\mathbf{I} - \mathbf{P}}{\mu} \right) &= \frac{\mu \mathbf{P} - \mathbf{P}^2}{\mu - 1} + \frac{\mu - \mathbf{P} - \mu \mathbf{P} + \mathbf{P}^2}{\mu} \\ &= \frac{\mu \mathbf{P} - \mathbf{P}}{\mu - 1} + \frac{\mu - \mu \mathbf{P}}{\mu} \\ &= \mathbf{P} + \mathbf{I} - \mathbf{P} \\ &= \mathbf{I}, \end{aligned}$$

et bien sûr ça commute !

Et comme d'après le théorème du rayon spectral $\|\mathbf{P}\|_{1,N} \ll 1$, on obtient

$$\left\| (\mu - \mathbf{P})^{-1} \right\|_{1,N} \ll \frac{1}{|\mu - 1|}.$$

Ce qui permet d'établir que

$$\left\| (\mu - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{N}^k \right\|_{1,N} \ll \left\| (\mu - \mathbf{P})^{-1} \right\|_{1,N} \left\| \mathbf{N}^k \right\|_{1,N} \ll N \frac{\hat{r}^k}{|\mu - 1|},$$

et donc on peut affirmer que $\left\| (\mu - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{N}^k \right\|_{1,N} \leq 1/2$, dès que

$$k \geq \frac{1}{|\log \hat{r}|} \left(\log N + \log \frac{1}{|\mu - 1|} \right) + b,$$

où b est fixé, possiblement positif (c'est le log de la constante multiplicative).

L'hypothèse $\beta |\log r(\mathbf{H}_1)| > a + \gamma$ du lemme suffit alors à conclure pour t assez grand, en choisissant \hat{r} suffisamment proche de $r(\mathbf{H}_1)$.

On obtient en effet

$$\left\| \left(\mathbf{I} - (\mu - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{N}^k \right)^{-1} \right\|_{1,N} \ll 1,$$

d'où

$$\left\| \left(\mu - \mathbf{H}^k \right)^{-1} \right\|_{1,N} \ll \frac{1}{|\mu - 1|} \ll t^\gamma.$$

□

Maintenant un second lemme, qui montre que la norme de $\mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)}$ est suffisamment petite pour compenser la croissance polynomiale de $(\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1}$. On va utiliser une expression alternative de la quantité à majorer. Pour étudier la norme infinie, on devra étudier les opérateurs contraints, c'est-à-dire distinguer selon qu'une branche inverse est dans $\mathcal{H}(t, \beta, \delta)$ ou non.

Lemme 9.10. *Avec les notations de la preuve de la proposition*

$$\left\| \mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right\|_{1,N} \ll \frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}} + \widehat{\rho}^{n(\beta,t)} + \frac{t}{N}.$$

En notant

$$\rho_0 = \inf_{h \in \mathcal{H}} \inf_{\mathcal{I}} |h'(x)|,$$

et avec la condition supplémentaire $\delta/\beta > |\log \rho_0|$, le deuxième terme disparaît dans le cas d'un alphabet fini, si bien qu'on obtient :

$$\left\| \mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right\|_{1,N} \ll \frac{1}{t^\alpha} + \widehat{\rho}^{n(\beta,t)} + \frac{t}{N}.$$

Démonstration. La preuve fait rapidement apparaître que l'essentiel est dans la bonne définition de \mathbf{K}_t et \mathbf{L}_t , afin de pouvoir faire jouer l'hypothèse sur $\mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t] - \eta_t w_t$ qu'on a sur $\mathcal{I}(t, \beta, \delta)$.

La preuve se fait en quatre parties. D'abord, on donne une expression alternative de l'expression étudiée comme image par l'opérateur \mathbf{H}_1 d'une fonction qui fait intervenir l'hypothèse sur $\mathcal{I}(t, \beta, \delta)$. Ensuite, on étudie la norme $\|\cdot\|_\infty$. Enfin, on étudie la semi-norme $\|\cdot\|_1$. Finalement, on conclut sur $\|\cdot\|_{1,N}$.

Partie 1 de la preuve. D'abord on écrit que

$$\mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} = \xi^{n(\beta,t)} \left(\overline{\eta}_t \mathbf{K}_t^{n(\beta,t)} - \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right).$$

On cherche donc à majorer :

$$\left\| \left(\overline{\eta}_t \mathbf{K}_t^{n(\beta,t)} - \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right) [u] \right\|_{1,N},$$

pour toute fonction $u \in C^1(\mathcal{I})$ de norme $\|\cdot\|_{1,N}$ inférieure ou égale à 1.

Mais d'après le lemme 6.25, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{H}_{1+it}^n [u] = w_t \mathbf{H}_1^n [u \mathbf{M}_{-t}^n [\overline{w}_t]] = w_t \mathbf{H}_1^n [u \overline{\mathbf{M}_t^n [w_t]}]$$

et par ailleurs :

$$\mathbf{K}_t^n [u] \mathbf{I} = w_t \mathbf{H}_1^n [u \overline{w}_t] \mathbf{I}$$

et finalement en prenant $n = n(\beta, t)$:

$$\left(\mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} - \overline{\eta}_t \mathbf{K}_t^{n(\beta,t)} \right) [u] = w_t \mathbf{H}_1^{n(\beta,t)} [u \overline{v}_t] \quad (9.21)$$

où on a posé $v_t = \mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[w_t] - \eta_t w_t$. On pose aussi $u_t = u \overline{v}_t$.

Partie 2 de la preuve. Comme annoncé, commençons par la norme $\|\cdot\|_\infty$. On a $\|w_t\|_\infty \leq \|w_t\|_{1,t} \ll 1$. Donc il nous suffit de contrôler $\left\| \mathbf{H}_1^{n(\beta,t)}[u\bar{v}_t] \right\|_\infty$ pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ de norme $\|\cdot\|_{1,N}$ inférieure ou égale à 1.

Remarquons d'abord que $\|u\|_\infty \leq \|u\|_{1,N} = 1$. De plus

$$\begin{cases} \|v_t\|_\infty \ll 1 \\ \sup_{\mathcal{I}(t,\beta,\delta)} |v_t| \ll \frac{1}{t^\alpha} \end{cases},$$

et donc :

$$\begin{cases} \|u_t\|_\infty \ll 1 \\ \sup_{\mathcal{I}(t,\beta,\delta)} |u_t| \ll \frac{1}{t^\alpha}. \end{cases} \quad (9.22)$$

On a en utilisant le lemme 1.13,

$$\left\| \mathbf{H}^{n(\beta,t)}[u_t] \right\|_\infty \ll \sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)}} \|h'\|_\infty \|u_t \circ h\|_\infty.$$

Or, les deux sous-ensembles $\mathcal{I}(t, \beta, \delta)$ et $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}(t, \beta, \delta)$ forment une partition de \mathcal{I} , ce qui permet d'écrire la décomposition suivante :

$$u_t = \mathbf{1}_{\mathcal{I}(t,\beta,\delta)} u_t + \mathbf{1}_{\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}(t,\beta,\delta)} u_t. \quad (9.23)$$

On va majorer séparément chacun des termes

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)}} \|h'\|_\infty \|(\mathbf{1}_{\mathcal{I}(t,\beta,\delta)} u_t) \circ h\|_\infty = \sum_{h \in \mathcal{H}(t,\beta,\delta)} \|h'\|_\infty \|u_t \circ h\|_\infty$$

et

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)}} \|h'\|_\infty \|(\mathbf{1}_{\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}(t,\beta,\delta)} u_t) \circ h\|_\infty = \sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)} \setminus \mathcal{H}(t,\beta,\delta)} \|h'\|_\infty \|u_t \circ h\|_\infty.$$

La majoration de l'opérateur contraint est moins bonne pour les $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$, mais la fonction u_t est mieux majorée sur $\mathcal{I}(t, \beta, \delta)$, et les majorants vont être du même ordre de grandeur, avec le choix des paramètres qu'on fait.

- Pour le premier terme, on utilise la majoration de u_t sur $\mathcal{I}(t, \beta, \delta)$, ainsi que le lemme 1.13

$$\sum_{h \in \mathcal{H}(t,\beta,\delta)} \|h'\|_\infty \|u_t \circ h\|_\infty \ll \frac{1}{t^\alpha} \sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)}} \|h'\|_\infty \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

- Pour le deuxième terme, on utilise la majoration brutale $\|\mathbf{1}_{\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}(t,\beta,\delta)} u_t\|_\infty \ll 1$, et donc, d'après le lemme 7.12 (qui utilise la propriété (iii) de la **Bonne Classe**), pour tout σ_1 tel que $\sigma_0 < \sigma_1 < 1$,

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)} \setminus \mathcal{H}(t,\beta,\delta)} \|h'\|_\infty \|u_t \circ h\|_\infty \ll \sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)} \setminus \mathcal{H}(t,\beta,\delta)} \|h'\|_\infty \leq \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}}.$$

Et finalement :

$$\left\| \mathbf{H}^{n(\beta,t)}[u_t] \right\|_\infty \leq \frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}}. \quad (9.24)$$

Partie 3 de la preuve. Reste maintenant à contrôler la semi-norme $\left\|w_t \mathbf{H}^{n(\beta,t)}[u_t]\right\|_1$. On commence par étudier $\left\|\mathbf{H}^{n(\beta,t)}[u_t]\right\|_1$.

D'après le lemme 6.7, on a :

$$\left\|\mathbf{H}^{n(\beta,t)}[u_t]\right\|_1 \ll \sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)}} \|h'\|_\infty (\|u_t \circ h\|_\infty + \|(u_t \circ h)'\|_\infty).$$

- Le premier terme est majoré par $\frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}}$ comme nous l'avons vu plus haut.
 - Le deuxième terme s'étudie plus facilement que le premier, car on n'a pas besoin de séparer en deux l'ensemble des branches.
- D'après la formule de Leibniz :

$$(u_t \circ h)' = (u \circ h \cdot v_t \circ h)' = u' \circ h \cdot h' \cdot v_t \circ h + u \circ h \cdot (v_t \circ h)',$$

avec les hypothèses $\|u\|_1 \leq N$, $v_t \ll 1$, $\|u\|_\infty \leq 1$, et d'après le lemme 6.6,

$$(v_t \circ h)' \ll t,$$

et finalement, en utilisant encore le lemme 1.13, on obtient

$$(u_t \circ h)' \ll N|h'| + t,$$

et donc,

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)}} |h'| \cdot \|u_t \circ h\|_1 \ll N\widehat{\rho}^{n(\beta,t)} + t.$$

Finalement, on obtient :

$$\left\|\mathbf{H}^{n(\beta,t)}[u_t]\right\|_1 \ll \frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}} + N\widehat{\rho}^{n(\beta,t)} + t \ll N\widehat{\rho}^{n(\beta,t)} + t.$$

Partie 4 de la preuve. Or, $\|w_t\| = 1$ et $|w_t| = 1$, donc :

$$\begin{cases} \|w_t\|_\infty \ll 1 \\ \|w_t\|_1 \ll t \end{cases},$$

et on a montré plus haut que :

$$\left\|\mathbf{H}^{n(\beta,t_k)}[u_t]\right\|_\infty \ll \frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}}.$$

Donc, d'après la formule de Leibniz on obtient :

$$\begin{aligned} \left\|\mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)}[u] - \overline{\eta}t \mathbf{K}_t^{n(\beta,t)}[u]\right\|_1 &= \left\|w_t \mathbf{H}_1^{n(\beta,t)}[u_t]\right\|_1 \\ &\ll t \left(\frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}} \right) + N\widehat{\rho}^{n(\beta,t)} + t \\ &\ll N\widehat{\rho}^{n(\beta,t)} + t. \end{aligned}$$

On utilise enfin la majoration 9.24 pour conclure :

$$\begin{aligned} \left\| \left(\mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} - \overline{\eta}_t \mathbf{K}_t^{n(\beta,t)} \right) [u] \right\|_{1,N} &= \left\| \left(\mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} - \overline{\eta}_t \mathbf{K}_t^{n(\beta,t)} \right) [u] \right\|_{\infty} + \frac{1}{N} \left\| \left(\mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} - \overline{\eta}_t \mathbf{K}_t^{n(\beta,t)} \right) [u] \right\|_1 \\ &\ll \frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}} + \widehat{\rho}^{n(\beta,t)} + \frac{t}{N}. \end{aligned}$$

Le changement dans le cas d'un alphabet fini intervient dans la partie 2 de la preuve : d'après le lemme 7.9, $\mathcal{H}(t, \beta, \delta) = \mathcal{H}$, et on n'a alors plus cette fois à considérer la somme

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,\delta)} \setminus \mathcal{H}(t,\beta,\delta)} |h'(x)|,$$

d'où le terme en moins dans la conclusion. □

9.3 Domaine hyperbolique

Cette partie est classique : de la croissance modérée sur $\Re(s) = 1$ ($\mathcal{F}(\alpha)$ borné pour un certain α), on déduit le domaine hyperbolique sans pôle et avec croissance modérée.

La proposition qu'on prouve dans cette partie est la suivante :

Proposition 9.11. *On suppose qu'il existe f croissante et $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} +\infty$ telle que pour tout t assez grand,*

$$\mathcal{R}(t) = \left\| (\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it})^{-1} \right\|_{1,t} \leq f(t).$$

Alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma \geq 1 - \frac{M}{f(t)}$ et t assez grand,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\sigma+it})^{-1} \text{ existe et } \left\| (\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\sigma+it})^{-1} \right\|_{1,t} \leq f(t).$$

Et si $\mathcal{F}^c(\alpha_0)$ est borné, alors pour tout $\alpha > \alpha_0$, il existe $\delta > 0$ tel que le quasi-inverse de l'opérateur tangent $(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\sigma+it})^{-1}$ n'a pas d'autre pôle que $s = 1$, et a une croissance polynomiale quand $|s| \rightarrow +\infty$, sur le domaine

$$\mathcal{R} = \left\{ s : \Re(s) > 1 - \min \left(\delta, \frac{1}{t^\alpha} \right) \right\}.$$

Démonstration. Le résultat est trivial pour $\sigma > 1$. Le cas $\sigma = 1$ constitue l'hypothèse. Reste à regarder un peu à gauche.

Pour $\sigma > \sigma_0$, on va étudier $(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\sigma+it})^{-1}$ en se ramenant au cas où $\sigma = 1$ qui constitue l'hypothèse. Pour ça, on écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{I} - \mathbf{H}_{\sigma+it} &= (\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it}) + (\mathbf{H}_{1+it} - \mathbf{H}_{\sigma+it}) \\ &= \left(\mathbf{I} + (\mathbf{H}_{1+it} - \mathbf{H}_{\sigma+it}) (\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it})^{-1} \right) (\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it}) \end{aligned}$$

et donc en prenant l'inverse, on obtient

$$(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\sigma+it})^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\sigma+it})^{-1} \tag{9.25}$$

où

$$\mathbf{A}_{\sigma+it} = (\mathbf{H}_{\sigma+it} - \mathbf{H}_{1+it})(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it})^{-1}.$$

Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$. On a :

$$\begin{aligned} \|[\mathbf{H}_{\sigma+it} - \mathbf{H}_{1+it}][g]\|_{1,t} &\leq \sum_{h \in \mathcal{H}} \|g \circ h[|h'|^{\sigma+it} - |h'|^{1+it}]\|_{1,t} \\ &\leq \sum_{h \in \mathcal{H}} \|g\|_{1,t} \| |h'|^{\sigma+it} - |h'|^{1+it} \|_{1,t} \\ &= \|g\|_{1,t} \sum_{h \in \mathcal{H}} \| |h'|^{\sigma+it} - |h'|^{1+it} \|_{1,t}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathcal{I}$, d'après l'inégalité des accroissements finis, appliquée à la fonction $\sigma' \mapsto |h'(x)|^{\sigma'+it} - |h'(x)|^{1+it}$ entre 1 et σ , il existe $c = c(x) \in]\sigma, 1[$, tel que

$$\begin{aligned} |h'(x)|^{\sigma+it} - |h'(x)|^{1+it} &= \log |h'(x)| \cdot |h'(x)|^{c+it} \cdot (1 - \sigma) \\ &\ll |\log |h'(x)|| \cdot |h'(x)|^c \cdot (1 - \sigma). \end{aligned}$$

L'axiome (iii) des systèmes de **Bonne Classe** (définition 1.12) permet d'assurer que la série (sommation sur $h \in \mathcal{H}$), de terme général $|\log |h'(x)|| \cdot |h'(x)|^c \ll |h'(x)|^{c-\epsilon}$, où ϵ est pris tel que $c - \epsilon > \sigma$, est convergente.

Ce qui permet d'assurer que :

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} \| |h'|^{\sigma+it} - |h'|^{1+it} \|_{\infty} \ll_{\sigma \rightarrow 1} 1 - \sigma.$$

D'autre part, la dérivée par rapport à x de $\sigma \mapsto |h'(x)|^{\sigma+it} - |h'(x)|^{1+it}$ est

$$\frac{h''(x)}{h'(x)} |h'(x)|^{it} ((\sigma + it)|h'(x)|^{\sigma} - (1 + it)|h'(x)|).$$

D'après la propriété de distorsion des systèmes de **Bonne Classe** (lemme 1.13), $\frac{h''(x)}{h'(x)} \ll 1$ indépendamment de x et h . L'inégalité des accroissements finis appliqué à la fonction $\sigma' \mapsto (\sigma' + it)|h'(x)|^{\sigma'}$, donne l'existence de $c = c(x) \in]\sigma, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} (\sigma + it)|h'(x)|^{\sigma} - (1 + it)|h'(x)| &= |h'(x)|^c \cdot (1 + \log |h'(x)|(c + it)) \cdot (1 - \sigma) \\ &\ll t \cdot \log |h'(x)| \cdot |h'(x)|^c \cdot (1 - \sigma), \end{aligned}$$

et on conclut comme pour la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ grâce à l'axiome (iii) de la définition 1.12,

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} \| |h'|^{\sigma+it} - |h'|^{1+it} \|_1 \ll_{\sigma \rightarrow 1} t \cdot (1 - \sigma).$$

On aurait pu également utiliser le lemme 6.8.

Finalement, on obtient :

$$\| \mathbf{H}_{\sigma+it} - \mathbf{H}_{1+it} \|_{1,t} \ll 1 - \sigma.$$

Or par hypothèse :

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it})^{-1}\|_{1,t} \ll f(t).$$

D'où

$$\|\mathbf{A}_{\sigma+it}\|_{1,t} \ll (1-\sigma)f(t).$$

Pour que $(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\sigma+it})^{-1}$ existe pour la norme $\|\cdot\|_{1,t}$, il suffit par exemple que :

$$\|\mathbf{A}_{\sigma+it}\|_{1,t} \leq \frac{1}{2}.$$

En notant M' la constante de majoration $\|\mathbf{A}_{\sigma+it}\|_{1,t} \leq M'(1-\sigma)f(t)$, c'est le cas si

$$\sigma \geq 1 - \frac{1}{2M'f(t)},$$

et alors

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\sigma+it})^{-1}\|_{1,t} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \|\mathbf{A}_{\sigma+it}^n\|_{1,t} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n} = 1.$$

En prenant $M = \frac{1}{2M'}$, pour avoir la conclusion du lemme, et en utilisant 9.25, on a alors que pour tout $\sigma \geq 1 - \frac{M}{f(t)}$,

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\sigma+it})^{-1}\|_{1,t} &\leq \|(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it})^{-1}\|_{1,t} \\ &\leq f(t). \end{aligned}$$

Pour la fin de la preuve de la proposition, on prend $f(t) = t^{\alpha_0}$. La première partie prouve l'existence de M et de t_0 tel que $(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\sigma+it})^{-1}$ est sans pôle sur :

$$\mathcal{R}_0 = \left\{ s = \sigma + it : t > t_0, \sigma \geq 1 - \frac{M}{t_0^\alpha} \right\},$$

avec croissance polynomiale :

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\sigma+it})^{-1}\|_{1,t} \leq t^{\alpha_0}. \quad (9.26)$$

Fixons $\alpha > \alpha_0$. Alors il existe t_1 tel que $(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\sigma+it})^{-1}$ est sans pôle sur :

$$\mathcal{R}_1 = \left\{ s = \sigma + it : t > t_1, \sigma > 1 - \frac{1}{t^\alpha} \right\},$$

avec la croissance polynomiale 9.26.

Pour prouver que le domaine hyperbolique s'étend aux t petits comme dans l'énoncé, il reste à s'occuper des petites valeurs de $t = \Im(s)$, c'est-à-dire des $t < t_0$. On s'occupe séparément des valeurs de t au voisinage de 0, puis des valeurs intermédiaires entre ce voisinage et t_0 .

On sait que $1 \in \text{Sp } \mathbf{H}_1$. Donc il existe un voisinage complexe de 1 tel que $1 \notin \text{Sp } \mathbf{H}_s$ pour $s \neq 1$ (sinon, on aurait une accumulation de pôles de la fonction méromorphe $s \mapsto (\mathbf{I} - \mathbf{H}_s)^{-1}$). Il existe donc $\delta_0 > 0$ et $t_0 < t_1$ tel que $(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\sigma+it})^{-1}$ est sans pôle sur

$$\mathcal{R}_2 = \{s = \sigma + it : t < t_0, \sigma > 1 - \delta_0\} \setminus \{1\}.$$

Enfin, soit t tel que $t_0 \leq t \leq t_1$. D'après le théorème (B), $1 \notin \text{Sp}(\mathbf{H}_{1+it})$. D'autre part, d'après le théorème 6.11,

$$R_e(\mathbf{H}_{1+it}) \leq \rho R(\mathbf{H}_1) = \rho < 1,$$

où ρ est le coefficient de contraction du système de **Bonne Classe** (voir définition 1.12). Fixons $\widehat{\rho}$ tel que $\rho < \widehat{\rho} < 1$. Alors les valeurs spectrales de \mathbf{H}_{1+it} de module supérieur ou égal à $\widehat{\rho}$ sont des valeurs propres isolées de multiplicité finie. Or 1 ne fait pas partie de ces valeurs propres, donc finalement la distance de 1 au spectre de \mathbf{H}_{1+it} est strictement positive :

$$d(1, \text{Sp}(\mathbf{H}_{1+it})) > 0.$$

Donc par la théorie de la perturbation, il existe $\beta > 0$ et δ_1 tel que $(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\sigma+it})^{-1}$ est sans pôle sur

$$\mathcal{R}_3 = \{s = \sigma + it : t_0 \leq t \leq t_1, \sigma > 1 - \delta_1\}.$$

Donc finalement, en prenant $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$, et en notant

$$\mathcal{R}_4 = \left\{ s = \sigma + it : \sigma > 1 - \min\left(\delta, \frac{1}{t^\alpha}\right) \right\},$$

la source est \mathcal{R}_4 -disciplinée avec la croissance donnée par 9.26 (voir définition 2.12), c'est-à-dire que la source est H -disciplinée d'exposant α .

□

9.4 Synthèse

9.4.1 Fin de la preuve du théorème (3-DIOP-tangent)

Voici maintenant l'énoncé du théorème (3-DIOP-tangent), qu'on termine de prouver ici.

Théorème (3-DIOP-tangent).

Soit une source dynamique complète et de **Bonne Classe** (définition 1.12), de coefficient de contraction ρ . Notons $C = \max_{i \in \{1,2,3\}} c(h_i)$.

On suppose qu'il existe $h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{H}^*$, tels que $c(h_1, h_2, h_3)$ est diophantien avec exposant d'irrationalité μ . Alors en prenant

$$\alpha > 4\mu + 2 \frac{\mu + 2}{|\log \rho|} C + 5,$$

il existe $\delta > 0$ tel que le quasi-inverse de l'opérateur tangent $(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\sigma+it})^{-1}$ n'a pas d'autre pôle que $s = 1$, et a une croissance polynomiale quand $|s| \rightarrow +\infty$, sur le domaine

$$\mathcal{R} = \left\{ s : \Re(s) > 1 - \min\left(\delta, \frac{1}{t^\alpha}\right) \right\}.$$

Démonstration. On suit ici le schéma de preuve exposé à la section 8.4.

D'après la proposition 9.1, si

$$\begin{cases} \alpha_0 > \mu + 1 \\ \delta/\beta > C \end{cases}$$

alors $\mathcal{A}(\alpha_0, \beta, \gamma, \delta)$ est borné.

D'après la proposition 9.3, $\mathcal{B}(\alpha_1, \beta, \delta) \widetilde{\subset} \mathcal{A}(\alpha_0, \beta, \delta)$ pourvu que

$$\alpha_0 < \min\left(\beta |\log \rho| - 1, \frac{\alpha_1 - \delta}{2}\right).$$

D'après la proposition 9.7, $\mathcal{B}^c(\alpha_1, \beta, \delta) \tilde{\subset} \mathcal{F}(\alpha_2)$ pourvu que :

$$\alpha_1 < \frac{\alpha_2 - 1}{2}.$$

Enfin, d'après la proposition 9.11, si $\mathcal{F}^c(\alpha_2)$ est borné, alors pour tout $\alpha > \alpha_2$, il existe $\delta > 0$ tel que le quasi-inverse de l'opérateur tangent $(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\sigma+it})^{-1}$ n'a pas d'autre pôle que $s = 1$, et a une croissance polynomiale quand $|s| \rightarrow +\infty$, sur le domaine

$$\mathcal{R} = \left\{ s : \Re(s) > 1 - \min\left(\delta, \frac{1}{t^\alpha}\right) \right\}.$$

Reste à vérifier qu'on peut choisir des paramètres intermédiaires, et à minorer l'ensemble des exposants α pour lesquels la conclusion est vraie, en fonction des données du théorème.

On choisit dans cet ordre $\alpha_0 > \mu + 1$, $\beta > \frac{\alpha_0 + 1}{|\log \rho|}$, $\delta > \beta C$, $\alpha_1 > 2\alpha_0 + \delta$, $\alpha_2 > 2\alpha_1 + 1$, et $\alpha > \alpha_2$,

et finalement

$$\begin{aligned} \alpha &> \alpha_2 \\ &> 2\alpha_1 + 1 \\ &> 4\alpha_0 + 2\delta + 1 \\ &> 4\alpha_0 + 2\beta C + 1 \\ &> 4\alpha_0 + 2\frac{\alpha_0 + 1}{|\log \rho|}C + 1 \\ &> 4\mu + 2\frac{\mu + 2}{|\log \rho|}C + 5 \end{aligned}$$

l'inégalité stricte garantissant qu'on peut retrouver des paramètres intermédiaires. □

9.4.2 Fin de la preuve du théorème (2-DIOP-tangent)

Voici maintenant l'énoncé du théorème (2-DIOP-tangent), qu'on termine de prouver ici. En fait, le résultat sera amélioré à la fin du chapitre 10 : l'utilisation du paramètre k_0 est nécessaire pour conclure pour l'opérateur sécant, mais non pour l'opérateur tangent, pour lequel elle permet cependant d'améliorer le résultat donné ci-dessous.

Théorème (2-DIOP-tangent).

Soit une source dynamique complète et de Bonne Classe (définition 1.12), d'abscisse de convergence σ_0 , et de coefficient de contraction ρ .

On note $\lambda(\sigma)$ la valeur propre dominante de \mathbf{H}_σ , $L(\sigma) = \log \lambda(\sigma)$ (théorème 6.11), r le rayon spectral sous-dominant de \mathbf{H}_1 (théorème 6.21), et dans le cas où l'alphabet est fini $\rho_0 = \inf_{h \in \mathcal{H}} \inf_{\mathcal{I}} |h'(x)|$.

On peut alors définir implicitement $\sigma_0 < \sigma_1 < 1$ par la relation

$$\sigma \mapsto (1 - \sigma_1)|L'(\sigma_1)| - L(\sigma_1) = |\log \rho|.$$

Enfin, on note $C = \max_{i \in \{1,2\}} c(h_i)$.

On suppose qu'il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^*$, tels que $c(h_1, h_2)$ est diophantien avec exposant d'irrationalité μ . Alors en prenant

$$\alpha > 4\mu + 2 \max \left(\frac{\mu + 2}{|\log \rho|}, \frac{3 + 2\mu}{|\log r|} \right) \max(C, |L'(\sigma_1)|) + 5,$$

il existe $\delta > 0$ tel que le quasi-inverse de l'opérateur tangent $(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\sigma+it})^{-1}$ n'a pas d'autre pôle que $s = 1$, et a une croissance polynomiale quand $|s| \rightarrow +\infty$, sur le domaine

$$\mathcal{R} = \left\{ s : \Re(s) > 1 - \min \left(\delta, \frac{1}{t^\alpha} \right) \right\}.$$

Dans le cas d'un alphabet fini, la conclusion est également valable pour

$$\alpha > 4\mu + 2 \max \left(\frac{\mu + 2}{|\log \rho|}, \frac{3 + 2\mu}{|\log r|} \right) |\log \rho_0| + 5.$$

Démonstration. On suit ici le schéma de preuve exposé à la section 8.4.

D'après la proposition 9.2, si

$$\begin{cases} \min(\alpha_0, \gamma) > \mu + 1 \\ \delta/\beta > C \end{cases}$$

alors $\mathcal{C}(\alpha_0, \beta, \gamma, \delta)$ est borné.

D'après la proposition 9.3, $\mathcal{B}(\alpha_1, \beta) \tilde{\subset} \mathcal{A}(\alpha_0, \beta, \delta)$ pourvu que

$$\alpha_0 < \min \left(\beta |\log \rho| - 1, \frac{\alpha_1 - \delta}{2} \right).$$

D'après la proposition 9.7, $\mathcal{B}^c(\alpha_1, \beta) \tilde{\subset} \mathcal{F}(\alpha_2)$ pourvu que :

$$\alpha_1 < \frac{\alpha_2 - 1}{2}.$$

D'après la proposition 9.8, $\mathcal{F}^c(2\gamma) \tilde{\subset} \mathcal{A}(\alpha_0, \beta, \delta)^c \cup \mathcal{C}(\alpha_0, \beta, \gamma, \delta)$, pourvu qu'il existe σ_1 avec $\sigma_0 < \sigma_1 < 1$, tel que

$$\begin{cases} \gamma < \min(\alpha_0, (1 - \sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1), \beta |\log \rho|) \\ \beta |\log r| > 1 + 2\gamma \end{cases}.$$

Avec de tels paramètres, on a :

$$\alpha_2 > 2\alpha_1 > 4\alpha_0 > 4\gamma > 2\gamma,$$

et donc,

$$\mathcal{F}^c(\alpha_2) \subset \mathcal{F}^c(2\gamma)$$

donc finalement

$$\mathcal{F}^c(\alpha_2) \subset (\mathcal{A}(\alpha_0, \beta, \delta)^c \cup \mathcal{C}(\alpha_0, \beta, \gamma, \delta)) \cap \mathcal{A}(\alpha_0, \beta, \delta) = \mathcal{C}(\alpha_0, \beta, \gamma, \delta).$$

Enfin, d'après la proposition 9.11, si $\mathcal{F}^c(\alpha_2)$ est borné, alors pour tout $\alpha > \alpha_2$, il existe $\delta > 0$ tel que le quasi-inverse de l'opérateur tangent $(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\sigma+it})^{-1}$ n'a pas d'autre pôle que $s = 1$, et a une croissance polynomiale quand $|s| \rightarrow +\infty$, sur le domaine

$$\mathcal{R} = \left\{ s : \Re(s) > 1 - \min \left(\delta, \frac{1}{t^\alpha} \right) \right\}.$$

Reste à vérifier qu'on peut choisir des paramètres intermédiaires, et à minorer l'ensemble des exposants α pour lesquels la conclusion est vraie, en fonction des données du théorème.

On commence par choisir $\gamma > \mu + 1$, puis $\alpha_0 > \gamma$, puis

$$\beta > \max \left(\frac{\alpha_0 + 1}{|\log \rho|}, \frac{\gamma}{|\log \rho|}, \frac{1 + 2\gamma}{|\log r|} \right).$$

En posant $X = \delta/\beta$, la condition $\gamma < (1 - \sigma)\delta - \beta L(\sigma)$ se réécrit $\gamma < \beta((1 - \sigma)X - L(\sigma))$. Mais la fonction $\sigma \mapsto (1 - \sigma)X - L(\sigma)$ est maximum quand $|L'(\sigma)| = X$. On considère donc la fonction

$$k : \sigma \mapsto (1 - \sigma)|L'(\sigma)| - L(\sigma).$$

On définit alors implicitement $\sigma_0 < \sigma_1 < 1$ par la relation

$$k(\sigma_1) = |\log \rho|.$$

En effet, $k(1) = 0$ et à cause de la convexité de L (théorème 6.11), $k(\sigma) \xrightarrow{\sigma \rightarrow \sigma_0} +\infty$, ce qui prouve l'existence d'un tel σ_1 .

On termine alors en choisissant $\delta > \beta \max(|L'(\sigma_1)|, C)$ (où $C = \max_{i \in \{1,2\}} c(h_i)$).

De cette façon,

$$\frac{\gamma}{\beta} < |\log \rho| = k(\sigma_1) = (1 - \sigma_1)|L'(\sigma_1)| - L(\sigma_1) < (1 - \sigma_1)\frac{\delta}{\beta} - L(\sigma_1),$$

et donc la condition

$$\gamma < (1 - \sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)$$

est bien remplie.

Puis on prend $\alpha_1 > 2\alpha_0 + \delta$ et $\alpha_2 > 2\alpha_1 + 1$ et $\alpha > \alpha_2$.

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha &> \alpha_2 \\ &> 2\alpha_1 + 1 \\ &> 2(2\alpha_0 + \delta) + 1 \\ &> 2(2\alpha_0 + \beta \max(|L'(\sigma_1)|, C)) + 1 \\ &> 4(\mu + 1) + 2\beta \max(|L'(\sigma_1)|, C) + 1 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \beta &> \max \left(\frac{\alpha_0 + 1}{|\log \rho|}, \frac{\gamma}{|\log \rho|}, \frac{1 + 2\gamma}{|\log r|} \right) \\ &= \max \left(\frac{\alpha_0 + 1}{|\log \rho|}, \frac{1 + 2\gamma}{|\log r|} \right) \\ &> \max \left(\frac{\mu + 2}{|\log \rho|}, \frac{3 + 2\mu}{|\log r|} \right), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \alpha &> 4(\mu + 1) + 2 \max \left(\frac{\mu + 2}{|\log \rho|}, \frac{3 + 2\mu}{|\log r|} \right) \max(C, |L'(\sigma_1)|) + 1 \\ &= 4\mu + 2 \max \left(\frac{\mu + 2}{|\log \rho|}, \frac{3 + 2\mu}{|\log r|} \right) \max(C, |L'(\sigma_1)|) + 5, \end{aligned}$$

l'inégalité stricte garantissant qu'on peut retrouver des paramètres intermédiaires.

Dans le cas d'un alphabet fini, en renforçant la condition $\frac{\delta}{\beta} > C$ en $\frac{\delta}{\beta} > |\log \rho_0|$, la condition $\gamma < (1 - \sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)$ n'est plus nécessaire.

On n'a alors plus à choisir σ_1 de façon optimale, comme dans le cas d'un nombre quelconque de branches, ce qui simplifie la preuve.

On commence par choisir $\gamma > \mu + 1$, puis $\alpha_0 > \gamma$, puis

$$\begin{aligned} \beta &> \max\left(\frac{\alpha_0 + 1}{|\log \rho|}, \frac{\gamma}{|\log \rho|}, \frac{1 + 2\gamma}{|\log r|}\right) \\ &> \max\left(\frac{\mu + 2}{|\log \rho|}, \frac{3 + 2\mu}{|\log r|}\right). \end{aligned}$$

Puis on prend $\alpha_1 > 2\alpha_0 + \delta$, $\alpha_2 > 2\alpha_1 + 1$ et $\alpha > \alpha_2$.

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha &> \alpha_2 \\ &> 2\alpha_1 + 1 \\ &> 4\alpha_0 + 2\delta + 1 \\ &> 4\alpha_0 + 2\beta|\log \rho_0| + 1 \\ &> 4\mu + 2 \max\left(\frac{\mu + 2}{|\log \rho|}, \frac{3 + 2\mu}{|\log r|}\right) |\log \rho_0| + 5. \end{aligned}$$

□

Chapitre 10

Quasi-inverse du sécant dans le cas général

Sommaire

10.1 Etude fine du spectre de l'opérateur composante	211
10.1.1 Systèmes 3-DIOP	211
10.1.2 Systèmes 2-DIOP	212
10.2 Etude sur la droite $\{\Re(s) = 1\}$	214
10.2.1 Etape 1 adaptée	215
10.2.2 Etape 2 adaptée	220
10.2.3 Etape 3 adaptée	222
10.3 Domaine hyperbolique	231
10.4 Synthèse	232
10.4.1 Fin de la preuve du théorème (3-DIOP)	232
10.4.2 Fin de la preuve du théorème (2-DIOP)	232
10.5 Retour sur l'opérateur tangent	235

Voici maintenant les preuves relatives à l'opérateur sécant, qui généralisent celles faites pour l'opérateur tangent du chapitre précédent. Ce travail de généralisation à l'opérateur sécant, est l'analogue pour les conditions géométriques, de la généralisation de la condition géométrique UNI faite par Cesaratto et Vallée dans [12].

10.1 Etude fine du spectre de l'opérateur composante

Les propositions suivantes sont les analogues respectifs des propositions 9.1 et 9.2.

10.1.1 Systèmes 3-DIOP

Cette proposition est totalement gratuite, car $\underline{\mathcal{A}} \tilde{\subset} \mathcal{A}$.

Proposition 10.1. *Considérons $h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{H}^*$. Si $c(h_1, h_2, h_3)$ est diophantien avec exposant d'irrationalité μ , alors pour tout triplet (α, β, δ) avec*

$$\begin{cases} \alpha > \mu + 1 \\ \frac{\delta}{\beta} > \max_{i \in \{1,2,3\}} c(h_i) \end{cases} ,$$

l'ensemble $\underline{\mathcal{A}}(\alpha, \beta, \delta, \theta)$ est borné.

10.1.2 Systèmes 2-DIOP

La preuve suivante est très analogue à celle de la proposition 9.2. On la redonne tout de même, à cause du changement apporté par le paramètre k_0 (sans quoi elle serait également gratuite).

Proposition 10.2. *Considérons $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^*$. Si $c(h_1, h_2)$ est diophantien avec exposant d'irrationalité μ , alors pour tout 5-uplet $(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta)$ avec ξ une racine de l'unité, et*

$$\begin{cases} \min(\alpha, \gamma) > \mu + 1 \\ \frac{\delta}{\beta} > \max_{i \in \{1, 2\}} c(h_i) \end{cases},$$

l'ensemble $\underline{\mathcal{C}}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta, \theta, k_0)$ est borné.

Démonstration. La preuve est faite par l'absurde.

Supposons qu'il existe un 7-uplet $(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta, \theta, k_0)$ qui vérifie les hypothèses, et tel que l'ensemble $\underline{\mathcal{C}}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta, \theta, k_0)$ n'est pas borné.

Alors il existe une suite de triplets (t, \underline{w}, η) avec t aussi grand qu'on veut, $\underline{w}_t \in \mathcal{C}(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, $|\underline{w}_t| = 1$, $\|\underline{w}_t\|_{1, t, (\theta)} \leq K$, et $\eta_t \in \mathbb{C}$, $|\eta_t| = 1$, et

$$\sup_{\mathcal{I}(t, \beta, \delta, \theta)} \left| \mathbf{M}_t^{n(\beta, t)}[\underline{w}_t] - \eta_t \underline{w}_t \right| \leq \frac{1}{t^\alpha},$$

et :

$$|\eta_t^{k_0} - \xi^{k_0 n(\beta, t)}| \leq \frac{1}{t^\gamma}.$$

Donc en particulier, en restreignant à la diagonale, on a :

$$\sup_{\mathcal{I}(t, \beta, \delta, \theta)} \left| \mathbf{M}_t^{n(\beta, t)}[\text{diag } \underline{w}_t] - \eta_t \text{diag } \underline{w}_t \right| \leq \frac{1}{t^\alpha},$$

Donc en particulier, à cause des inclusions

$$\mathcal{I}(t, \beta, \delta, \theta) \subset \mathcal{I}(t, \beta, \delta) \subset \mathcal{K}(t, \beta, \delta),$$

la majoration a lieu sur l'ensemble de Cantor, plus petit :

$$\sup_{\mathcal{K}(t, \beta, \delta)} \left| \mathbf{M}_t^{n(\beta, t)}[\text{diag } \underline{w}_t] - \eta_t \text{diag } \underline{w}_t \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}. \quad (10.1)$$

Soient $\mu > 0$, et $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^*$. Là encore, grâce au lemme 5.3, on peut supposer que h_1 et h_2 sont de même profondeur p . On suppose aussi :

$$\begin{cases} \min(\alpha, \gamma) > \mu + 1 \\ \frac{\delta}{\beta} > \max_{i \in \{1, 2\}} c(h_i) \end{cases}.$$

Soit $\nu > \mu$ assez proche de μ pour que $\alpha > \nu + 1$. On va montrer qu'on peut trouver des entiers q_t aussi grands qu'on veut, tels que

$$\{q_t c(h_1, h_2)\} \ll \frac{1}{q_t^{1+\nu}},$$

ce qui prouvera par le lemme 5.24 que l'exposant d'irrationalité de $c(h_1, h_2)$ est strictement supérieur à μ .

Partie 1. Comme dans la preuve de la proposition 9.1, on prouve par récurrence que :

$$\sup_{\mathcal{K}(t,\beta,\delta)} \left| \mathbf{M}_t^{pk_0n_0n(\beta,t)} [\text{diag } \underline{w}_t] - \eta_t^{pk_0n_0} \text{diag } \underline{w}_t \right| \leq \frac{pk_0n_0}{t^\alpha}. \quad (10.2)$$

où $n_0 \in \mathbb{N}$ est tel que $\xi^{n_0} = 1$.

On cherche alors à majorer $\eta_t^{pk_0n_0} - 1$. La preuve est faite par récurrence sur p . D'abord on écrit :

$$\eta_t^{k_0n_0} - 1 = \eta_t^{k_0n_0} - \xi^{n(\beta,t)k_0n_0} = (\eta_t^{k_0} - \xi^{k_0n(\beta,t)}) \sum_{j=0}^{n_0-1} \eta_t^j \xi^{n(\beta,t)(n_0-1-j)}$$

et donc

$$|\eta_t^{k_0n_0} - 1| \leq \left| \eta_t - \xi^{n(\beta,t)} \right| (n_0 - 1) \ll \frac{n_0 - 1}{t^\gamma}.$$

Ensuite on écrit :

$$|\eta_t^{2k_0n_0} - 1| \leq |\eta_t^{2k_0n_0} - \eta_t^{k_0n_0}| + |\eta_t^{k_0n_0} - 1| = 2|\eta_t^{k_0n_0} - 1| \ll \frac{(n_0 - 1)}{t^\gamma},$$

et par récurrence,

$$|\eta_t^{pk_0n_0} - 1| \leq \frac{p(n_0 - 1)}{t^\gamma}.$$

Donc en réinjectant dans 10.2, et en se servant du fait que $|\underline{w}_t| = 1$, on obtient :

$$\sup_{\mathcal{K}(t,\beta,\delta)} \left| \mathbf{M}_t^{pk_0n_0n(\beta,t)} [\text{diag } \underline{w}_t] - \text{diag } \underline{w}_t \right| \leq p \left(\frac{n_0 - 1}{t^\gamma} + \frac{n_0}{t^\alpha} \right) \ll \frac{1}{t^{\nu+1}}. \quad (10.3)$$

Partie 2. On note h_1^* et h_2^* les points fixes respectifs de h_1 et h_2 . Alors, d'après le lemme 7.21, et en utilisant l'hypothèse $\frac{\delta}{\beta} > \max_i c(h_i)$, on obtient que h_1^* et h_2^* sont dans l'ensemble de Cantor $\mathcal{K}(t, \beta, \delta)$. On applique alors l'inégalité 10.3 en h_i^* , pour $i \in \{1, 2\}$.

Comme dans la preuve de la proposition 9.1, en utilisant les lemmes 3.5 et 5.3, on arrive à

$$\left| |h'_i(h_i^*)|^{itk_0n_0n(\beta,t)} - 1 \right| \ll \frac{1}{t^{\nu+1}}.$$

c'est-à-dire que :

$$|h'_i(h_i^*)|^{itk_0n_0n(\beta,t)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$$

et donc il existe une suite $(q_t^{(i)})_t$ telle que :

$$tk_0n_0n(\beta, t)pc(h_i) - 2\pi q_t^{(i)} \rightarrow 0.$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \left| |h'_i(h_i^*)|^{itk_0n_0n(\beta,t)} - 1 \right| &= \left| e^{ipc(h_i)tk_0n_0n(\beta,t) - 2\pi i q_t^{(i)}} - 1 \right| \\ &= \left| pc(h_i)tk_0n_0n(\beta, t) - 2\pi q_t^{(i)} \right| (1 + o(1)). \end{aligned}$$

et donc :

$$pc(h_i)tk_0n_0n(\beta, t) - 2\pi q_t^{(i)} \ll \frac{1}{t^\nu}.$$

Partie 3. En notant $q_t = q_t^{(1)}$ et $\widehat{q}_t = q_t^{(2)}$, on obtient,

$$\widehat{q}_t = \Theta(q_t) = \Theta(tn(\beta, t)),$$

donc \widehat{q}_t et q_t peuvent être pris arbitrairement grands, car t peut l'être (et en particulier, pour t assez grand, \widehat{q}_t et q_t sont non nuls).

On obtient :

$$\begin{cases} c(h_1) = \frac{2\pi\widehat{q}_t}{tpk_0n_0n(\beta,t)} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{\nu+1}\widehat{q}_t}\right)\right) \\ c(h_2) = \frac{2\pi q_t}{tpk_0n_0n(\beta,t)} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{\nu+1}q_t}\right)\right) \end{cases},$$

et donc :

$$c(h_1, h_2) = \frac{\widehat{q}_t}{q_t} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{\nu+1}\widehat{q}_t}\right) + O\left(\frac{1}{t^{\nu+1}q_t}\right)\right).$$

Les k_0 se sont simplifiés, et la fin de la preuve est la même que celle de la proposition 9.2 ; on la reproduit ici pour le confort du lecteur.

Finalement

$$\left|c(h_1, h_2) - \frac{\widehat{q}_t}{q_t}\right| \ll O\left(\frac{1}{t^{\nu+1}q_t}\right).$$

Enfin, pour tout $\epsilon > 0$, on a $q_t \ll t^{1+\epsilon}$, et donc :

$$t \gg q_t^{1-\epsilon},$$

et finalement, en renommant ϵ et ν , on obtient

$$c(h_1, h_2) - \frac{\widehat{q}_t}{q_t} \ll \frac{1}{q_t^{2+\nu}}.$$

□

Remarque. L'inégalité 10.3 est à comparer avec (l'analogue « sécant ») de 9.2, et justifie l'appellation de système de fonctions presque invariants, et non plus seulement presque propres.

10.2 Etude du quasi-inverse de l'opérateur sur la droite $\{\Re(s) = 1\}$

Maintenant les trois étapes annoncées pour la majoration du quasi-inverse sur la droite $\{\Re(s) = 1\}$. La synthèse sera faite dans la section suivante.

Ces trois étapes suivront deux mouvements :

- D'abord, on se restreint à $\underline{\mathcal{I}}(t, \theta)$, et on utilise les « normes θ » c'est-à-dire $\|\cdot\|_{1,N,\theta}$ et $\|\cdot\|_{1,t,\theta}$
- Ensuite, on étend à $\underline{\mathcal{I}}$ tout entier, la remarque fondamentale rendant cette extension possible étant que $\underline{\mathbf{H}}^{n(\theta,t)}[v]$ ne dépend que de la restriction de v à $\underline{\mathcal{I}}(t, \theta)$ (voir lemme 7.23).

Pour que l'étape 2 fonctionne, le paramètre θ des ensembles $\underline{\mathcal{A}}$, $\underline{\mathcal{B}}$, $\underline{\mathcal{C}}$ et $\underline{\mathcal{E}}$ devra être choisi assez grand. Le paramètre k_0 des ensembles $\underline{\mathcal{C}}$ et $\underline{\mathcal{E}}$ permet alors de lever la contradiction apparente qui apparaît à l'étape 3, où θ doit être choisi petit quand on compare les paramètres θ et β .

10.2.1 Etape 1 adaptée

La proposition relative à cette partie est la suivante. Elle est l'analogie pour l'opérateur sécant de la proposition 9.3.

Proposition 10.3. *Pour tout triplet (α, β, δ) vérifiant*

$$\alpha < \min \left(|\beta| \log \rho - 1, \frac{\alpha_1 - \delta}{2} \right)$$

(où ρ est le coefficient de contraction du système de Bonne Classe), on a l'inclusion faible

$$\underline{\mathcal{B}}(\alpha_1, \beta, \theta) \tilde{\subset} \underline{\mathcal{A}}(\alpha, \beta, \delta, \theta).$$

La démonstration utilise trois lemmes énoncés dans la suite.

Preuve de la proposition 10.3. On prend $t \in \underline{\mathcal{B}}(\alpha_1, \beta, \theta)$. Alors il existe $\underline{u}_0 \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, $\|\underline{u}_0\|_{1,t} \leq 1$, tel que pour tout $n \in \{0, n(\beta, t), 2n(\beta, t)\}$, pour tout $\underline{y} \in \underline{\mathcal{I}}(t, \theta)$,

$$\left| \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^n[\underline{u}_0](\underline{y}) \right| \geq 1 - \frac{1}{t^{\alpha_1}}.$$

Posons pour $k \in \{0, 1, 2\}$,

$$\underline{u}_k = \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{kn(\beta, t)}(\underline{u}_0), \quad \underline{b}_k = |\underline{u}_k| \quad \text{et} \quad \underline{v}_k = \frac{\underline{u}_k}{\underline{b}_k}. \quad (10.4)$$

(les $\underline{u}_i, \underline{v}_i, \underline{b}_i$ dépendent de t , mais on ne l'indique pas pour alléger les notations). On a alors $|\underline{v}_k| = 1$.

Le fait que $t \in \underline{\mathcal{B}}(\alpha_1, \beta, \theta)$ entraîne que pour tout $\underline{y} \in \underline{\mathcal{I}}(t, \theta)$:

$$\begin{cases} \underline{b}_1(\underline{y}) \geq 1 - \frac{1}{t^{\alpha_1}} \\ \underline{b}_2(\underline{y}) \geq 1 - \frac{1}{t^{\alpha_1}} \end{cases},$$

(donc les \underline{v}_k sont bien définis).

On a $\|\underline{v}_1\|_{\infty} = 1$, et on peut majorer $\|\underline{v}_1\|_{1,\theta}$ grâce au lemme 10.6 :

$$\|\underline{v}_1\|_{1,(\theta)} = \left\| \frac{\underline{u}_1}{|\underline{u}_1|} \right\|_{1,(\theta)} \leq \frac{2\|\underline{u}_1\|_{1,(\theta)}}{\inf_{\underline{x} \in \underline{\mathcal{I}}(t, \theta)} |\underline{u}_1(\underline{x})|^2}.$$

Il suffit alors de remarquer que pour tout $\underline{x} \in \underline{\mathcal{I}}(t, \theta)$, $\underline{u}_1(\underline{x}) \geq 1 - \frac{1}{t^{\alpha_1}} \geq \frac{1}{2}$ pour t assez grand, et d'après le lemme 7.23,

$$\|\underline{u}_1\|_{1,t,(\theta)} \leq \|\underline{u}_1\|_{1,t} = \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n(\beta, t)}[\underline{u}_0] \right\|_{1,t} \ll 1,$$

donc $\|\underline{u}_1\|_{1,(\theta)} \ll t$, donc $\|\underline{v}_1\|_{1,(\theta)} \ll t$, et finalement, il existe \underline{K}_0 tel que pour tout t assez grand, $\|\underline{v}_1\|_{1,t,(\theta)} \leq \underline{K}_0$. C'est ce \underline{K}_0 qui apparaît dans les définitions de $\underline{\mathcal{A}}$, $\underline{\mathcal{C}}$ et $\underline{\mathcal{E}}$.

Dans la suite, $\underline{x} = (x_1, x_2)$ désigne un élément de $\underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta)$, et on note $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$ la branche inverse de profondeur $n(\beta, t)$ telle que $\underline{x} \in \underline{h}(\underline{\mathcal{I}})$. On pose aussi $y_1 = T^{n(\beta, t)}(x_1)$, $y_2 = T^{n(\beta, t)}(x_2)$ et $\underline{y} = (y_1, y_2)$, de sorte que $\underline{x} = \underline{h}(\underline{y})$ et $\underline{y} \in \underline{\mathcal{I}}(t, \theta)$.

On fixe un élément $\underline{x}_0 = (x_{01}, x_{02}) \in \mathcal{I}(t, \beta, \delta, \theta)$ qui servira de pivot dans la suite, et $h_0 \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$ la branche inverse telle que $\underline{x}_0 \in h_0(\underline{\mathcal{I}})$. On pose aussi $\underline{y}_{01} = T^{n(\beta, t)}(\underline{x}_{01})$, $\underline{y}_{02} = T^{n(\beta, t)}(\underline{x}_{02})$ et $\underline{y}_0 = (y_{01}, y_{02})$, de sorte que $\underline{x}_0 = h_0(\underline{y}_0)$ et $\underline{y}_0 \in \underline{\mathcal{I}}(t, \theta)$.

Pour conclure que si t est assez grand, alors $t \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, \delta, \theta)$, on va exhiber une fonction \underline{w}_t et un scalaire η_t , tels que pour tout $\underline{x} \in \underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta)$,

$$\left| \underline{\mathbf{M}}_t^{n(\beta, t)}[\underline{w}_t](\underline{x}) - \eta_t \underline{w}_t(\underline{x}) \right| \leq \frac{1}{t^\alpha},$$

les éléments presque propres \underline{w}_t et η_t étant construits à partir de \underline{u}_0 :

$$\underline{w}_t = v_1 \quad \text{et} \quad \eta_t = \frac{v_0(\underline{x}_0)}{v_1(\underline{x}_0)}.$$

Il est important de remarquer que η_t (la valeur presque propre) ne dépend pas de \underline{x} , mais seulement du point de référence \underline{x}_0 .

La démonstration consiste alors à estimer pour $\underline{x} = h(\underline{y})$,

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}_t^{n(\beta, t)}[\underline{w}_t](\underline{x}) - \eta_t \underline{w}_t(\underline{x}) &= |s_h(\underline{y})|^{-it} v_1(\underline{y}) - \eta_t v_1(h(\underline{y})) \\ &= |s_h(\underline{y})|^{-it} (v_1(\underline{y}) - \eta_t v_2(\underline{y})) + \eta_t (|s_h(\underline{y})|^{-it} v_2(\underline{y}) - v_1(h(\underline{y}))). \end{aligned}$$

Le lemme 10.4 s'applique alors :

$$v_1(h(\underline{y})) - |s_h(\underline{y})|^{-it} v_2(\underline{y}) \ll \frac{1}{t^{(\alpha_1 - \delta)/2}}, \quad (10.5)$$

ainsi que le lemme 10.5 :

$$v_1(\underline{y}) - \eta_t v_2(\underline{y}) \ll \frac{1}{t^{(\alpha_1 - \delta)/2}} + \frac{1}{t^{\beta |\log \widehat{\rho}| - 1}}.$$

Compte-tenu de l'hypothèse sur α , on peut alors conclure que :

$$\left| \underline{\mathbf{M}}_t^{n(\beta, t)}[\underline{w}_t](\underline{x}) - \eta_t \underline{w}_t(\underline{x}) \right| \leq \frac{1}{t^\alpha},$$

pour t assez grand, c'est-à-dire que $t \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, \delta, \theta)$.

□

Maintenant les trois lemmes techniques, avec leurs démonstrations.

Lemme 10.4. *Pour tout $t > 0$, pour tout $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$, pour tout $\underline{y} \in \underline{\mathcal{I}}(t, \theta)$, et avec v_1 et v_2 définis en 10.4, on a :*

$$v_1(h(\underline{y})) - |s_h(\underline{y})|^{-it} v_2(\underline{y}) \ll \frac{1}{t^{(\alpha_1 - \delta)/2}},$$

où la constante de majoration ne dépend pas de h , ni de t , ni de \underline{y} .

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \underline{b}_2(\underline{y}) &= \frac{\underline{u}_2(\underline{y})}{\underline{v}_2(\underline{y})} \\ &= \frac{1}{\underline{v}_2(\underline{y})} \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n(\beta,t)}(\underline{u}_1)(\underline{y}) \\ &= \frac{1}{\underline{v}_2(\underline{y})} \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n(\beta,t)}(\underline{b}_1 \underline{v}_1)(\underline{y}) \\ &= \sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)}} \frac{\underline{f}_1(\underline{h}(\underline{y}))}{\underline{f}_1(\underline{y})} \frac{(\underline{b}_1 \underline{v}_1)(\underline{h}(\underline{y}))}{\underline{v}_2(\underline{y})} |s_h(\underline{y})|^{1+it} \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \underline{1} &= \tilde{\mathbf{H}}_1^{n(\beta,t)}(\underline{1}) \\ &= \sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)}} \frac{\underline{f}_1(\underline{h}(\underline{y}))}{\underline{f}_1(\underline{y})} |s_h(\underline{y})|, \end{aligned}$$

d'où on déduit :

$$1 - \underline{b}_2(\underline{y}) = \sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)}} \frac{\underline{f}_1(\underline{h}(\underline{y}))}{\underline{f}_1(\underline{y})} |s_h(\underline{y})| \left(1 - \frac{|s_h(\underline{y})|^{it}}{\underline{v}_2(\underline{y})} (\underline{b}_1 \underline{v}_1)(\underline{h}(\underline{y})) \right).$$

Mais $\underline{u}_1 = \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n(\beta,t)}[\underline{u}_0]$ a une norme infinie inférieure ou égal à 1 d'après le lemme 6.18, donc dans la parenthèse $\underline{b}_1(\underline{h}(\underline{y}))$, est réel positif et inférieur ou égal à 1, tandis que

$$\left| \frac{|s_h(\underline{y})|^{it}}{\underline{v}_2(\underline{y})} \underline{v}_1(\underline{h}(\underline{y})) \right| = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\underline{f}_1(\underline{h}(\underline{y}))}{\underline{f}_1(\underline{y})} |s_h(\underline{y})| > 0.$$

Ceci prouve que chaque terme de la somme est de partie réelle supérieure ou égale à 0. Et donc, pour tout $h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)}$:

$$\frac{\underline{f}_1(\underline{h}(\underline{y}))}{\underline{f}_1(\underline{y})} |s_h(\underline{y})| \left(1 - \underline{b}_1(\underline{h}(\underline{y})) \Re \left(\frac{|s_h(\underline{y})|^{it}}{\underline{v}_2(\underline{y})} \underline{v}_1(\underline{h}(\underline{y})) \right) \right) \geq 0$$

Mais par hypothèse, car $y \in \mathcal{I}(t, \theta)$,

$$1 - \underline{b}_2(\underline{y}) \leq \frac{1}{t^{\alpha_1}}.$$

On a donc aussi la même majoration pour la partie réelle de chaque terme écrit plus haut, c'est à dire que pour tout $h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)}$,

$$\frac{\underline{f}_1(\underline{h}(\underline{y}))}{\underline{f}_1(\underline{y})} |s_h(\underline{y})| \left(1 - \underline{b}_1(\underline{h}(\underline{y})) \Re \left(\frac{|s_h(\underline{y})|^{it}}{\underline{v}_2(\underline{y})} \underline{v}_1(\underline{h}(\underline{y})) \right) \right) \leq \frac{1}{t^{\alpha_1}}.$$

De plus, on a $\frac{\underline{f}_1(\underline{h}(\underline{y}))}{\underline{f}_1(\underline{y})}$ majorée inférieurement (et supérieurement), indépendamment de h .

On obtient donc (la constante ne dépend pas de $h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)}$, ni de t , ni de y) :

$$1 - \underline{b}_1(\underline{h}(\underline{y})) \Re \left(\frac{|s_h(\underline{y})|^{it}}{\underline{v}_2(\underline{y})} \underline{v}_1(\underline{h}(\underline{y})) \right) \ll \frac{1}{|s_h(\underline{y})| t^{\alpha_1}}.$$

A partir de maintenant, on va se servir de l'hypothèse plus spécifique selon laquelle $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$. Par définition

$$|h'(y)| \geq t^{-\delta},$$

donc d'après le lemme 1.13, indépendamment de t et de $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$,

$$|s_h(\underline{y})| \gg t^{-\delta}.$$

C'est donc qu'on a pour tout $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$,

$$1 - \underline{b}_1(\underline{h}(\underline{y})) \Re \left(\frac{|s_h(\underline{y})|^{it}}{\underline{v}_2(\underline{y})} \underline{v}_1(\underline{h}(\underline{y})) \right) \ll \frac{1}{t^{\alpha_1 - \delta}},$$

avec la constante de majoration qui ne dépend pas de $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$, ni de $\underline{y} \in \underline{\mathcal{I}}(t, \theta)$. Or, $\underline{b}_1(\underline{h}(\underline{y})) \geq 0$, donc pour $t \geq 1$, pour tout $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$,

$$\Re \left(\frac{|s_h(\underline{y})|^{it}}{\underline{v}_2(\underline{y})} \underline{v}_1(\underline{h}(\underline{y})) \right) > 0.$$

Mais on a vu que $\underline{b}_1(\underline{h}(\underline{y})) \leq 1$, donc indépendamment de $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$, de t et de y :

$$1 - \Re \left(\frac{|s_h(\underline{y})|^{it}}{\underline{v}_2(\underline{y})} \underline{v}_1(\underline{h}(\underline{y})) \right) \leq 1 - \underline{b}_1(\underline{h}(\underline{y})) \Re \left(\frac{|s_h(\underline{y})|^{it}}{\underline{v}_2(\underline{y})} \underline{v}_1(\underline{h}(\underline{y})) \right) \ll \frac{1}{t^{\alpha_1 - \delta}}.$$

Or, pour tout nombre complexe z de module 1 :

$$\begin{aligned} |1 - z| &= \sqrt{(1 - \Re(z))^2 + \Im(z)^2} \\ &= \sqrt{2 - 2\Re(z)} \\ &= \sqrt{2}(1 - \Re(z))^{1/2}. \end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} |\underline{v}_2(\underline{y}) - |s_h(\underline{y})|^{it} \underline{v}_1(\underline{h}(\underline{y}))| &= \left| 1 - |s_h(\underline{y})|^{it} \frac{\underline{v}_1(\underline{h}(\underline{y}))}{\underline{v}_2(\underline{y})} \right| \\ &= \sqrt{2} \left(1 - \Re \left(\frac{|s_h(\underline{y})|^{it}}{\underline{v}_2(\underline{y})} \underline{v}_1(\underline{h}(\underline{y})) \right) \right)^{1/2} \\ &\ll \frac{1}{t^{(\alpha_1 - \delta)/2}} \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$, et pour tout $y \in \underline{\mathcal{I}}(t, \theta)$,

$$\left| \underline{v}_2(\underline{y}) - |s_h(\underline{y})|^{it} \underline{v}_1(\underline{h}(\underline{y})) \right| \ll \frac{1}{t^{(\alpha_1 - \delta)/2}}, \quad (10.6)$$

où la constante de majoration ne dépend pas de h , ni de y , ni de t .

□

Ce lemme montre comment utiliser x_0 comme pivot, indépendant de x pour relier $v_1(y)$ et $v_2(y)$ qui dépendent de x . C'est l'introduction dans la démonstration d'un intermédiaire $\tilde{x} = h_0(y)$ entre x et x_0 qui va permettre de faire ce lien.

Lemme 10.5. *Pour tout $y \in \mathcal{I}(t, \theta)$, et tout $x_0 \in \mathcal{I}(t, \beta, \delta, \theta)$, avec v_1 et v_2 définis en 10.4 :*

$$|v_1(y) v_1(x_0) - v_2(y) v_0(x_0)| \ll \frac{1}{t^{\beta|\log \hat{\rho}|-1}} + \frac{1}{t^{(\alpha_1-\delta)/2}}.$$

Démonstration. On définit $\tilde{x} = h_0(y)$. Donc $\tilde{x} \in \mathcal{I}(t, \beta, \delta, \theta)$, car $h_0 \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$.

On considère donc les trois points

$$x = h(y) \quad x_0 = h_0(y_0) \quad \tilde{x} = h_0(y).$$

Par le système dynamique :

- les $n(\beta, t)$ premiers symboles de \tilde{x} sont identiques pour chaque coordonnée, et sont les mêmes que ceux des deux coordonnées de \tilde{x}_0 , et donc x_0 et \tilde{x} ne sont pas trop éloignés, car appartiennent au même carré fondamental $h_0(\mathcal{I})$. Plus précisément, pour $j \in \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned} |x_{0j} - \tilde{x}_j| &= h_0(y_{0j}) - h_0(y_j) \\ &\leq \|h'_0\|_\infty \cdot |y_{0j} - y_j| \\ &\ll \hat{\rho}^{n(\beta, t)} \ll t^{\beta \log \hat{\rho}} \end{aligned} \tag{10.7}$$

- puis les symboles suivants de \tilde{x} sont ceux de x (ce sont les symboles de y), et parmi ces symboles suivants, les $n(\theta, t)$ premiers sont identiques pour chaque coordonnée.

On va alors prouver :

$$\begin{aligned} |v_1(y) - v_0(x_0) |_{s_{h_0}(y)} |^{it}| &\ll \frac{1}{t^{\beta|\log \hat{\rho}|-1}} + \frac{1}{t^{(\alpha_1-\delta)/2}} \\ |v_2(y) - v_1(x_0) |_{s_{h_0}(y)} |^{it}| &\ll \frac{1}{t^{\beta|\log \hat{\rho}|-1}} + \frac{1}{t^{(\alpha_1-\delta)/2}}. \end{aligned} \tag{10.8}$$

On traite la première inégalité, l'autre étant obtenue de la même façon. Pour cela, on décompose par inégalité triangulaire :

$$|v_1(y) - v_0(x_0) |_{s_{h_0}(y)} |^{it}| \leq |v_1(y) - v_0(\tilde{x}) |_{s_{h_0}(y)} |^{it}| + |v_0(\tilde{x}) - v_0(x_0)|.$$

Comme $\tilde{x} = h_0(y)$, le terme $|v_1(y) - v_0(\tilde{x}) |_{s_{h_0}(y)} |^{it}|$ est estimé grâce au lemme qui précède (en remplaçant x par \tilde{x} , et « un cran plus bas »).

Quant au deuxième terme $|v_0(\tilde{x}) - v_0(x_0)|$, on l'estime à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, grâce aux majorations 10.7. En effet, la différentielle de v_0 sur $\mathcal{I}(t, \beta, \delta, \theta) \subset \mathcal{I}(t, \theta)$, est contrôlée par le lemme 10.6. Comme $s_0 = |u_0| = 1$ (d'après l'hypothèse), on obtient que

$$\|v_0\|_1 = \left\| \frac{u_0}{|u_0|} \right\|_1 \ll \|u_0\|_1 \ll t \cdot \|u_0\|_{1,t} \ll t$$

et donc :

$$|v_0(\tilde{x}) - v_0(x_0)| \ll t \hat{\rho}^{n(\beta, t)} \ll \frac{1}{t^{\beta|\log \hat{\rho}|-1}}.$$

La fin de la preuve du lemme est une simple application de l'inégalité triangulaire à partir des deux inégalités 10.8.

□

Enfin, on donne ce lemme technique et général qui sert dans la preuve du lemme précédent.

Lemme 10.6. *Soit $\underline{u} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, qui ne s'annule pas, et tel que $\|\underline{u}\|_\infty \leq 1$.*

Alors $\frac{\underline{u}}{|\underline{u}|} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$, et

$$\left\| \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|} \right\|_{1,(\theta)} \leq \frac{2\|\underline{u}\|_{1,(\theta)}}{\inf_{\underline{\mathcal{I}}(t,\theta)} |\underline{u}|^2}$$

Démonstration. Pour tout $\underline{x}_0 \in \underline{\mathcal{I}}(t, \theta)$ (ouvert de \mathbb{R}^2), pour tout $h \in \mathbb{R}$ assez petit,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{|\underline{u}(x_{01} + h, x_{02})|} - \frac{1}{|\underline{u}(x_{01}, x_{02})|} \right| &\leq \left| \frac{1}{\underline{u}(x_{01} + h, x_{02})} - \frac{1}{\underline{u}(x_{01}, x_{02})} \right| \\ &\leq \frac{1}{\inf_{\underline{\mathcal{I}}(t,\theta)} |\underline{u}|^2} |\underline{u}(x_{01} + h, x_{02}) - \underline{u}(x_{01}, x_{02})| \end{aligned}$$

et donc, en divisant par h , en faisant tendre h vers 0, et en prenant le sup de chaque côté, on obtient :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial 1} \left(\frac{1}{|\underline{u}|} \right) \right\|_{\infty,(\theta)} \leq \frac{\left\| \frac{\partial}{\partial 1} \underline{u} \right\|_{\infty,(\theta)}}{\inf_{\underline{\mathcal{I}}(t,\theta)} |\underline{u}|^2}.$$

On conclut alors en écrivant :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial 1} \left(\frac{\underline{u}}{|\underline{u}|} \right) \right\|_{\infty,(\theta)} \leq \|\underline{u}\|_\infty \left\| \frac{\partial}{\partial 1} \left(\frac{1}{|\underline{u}|} \right) \right\|_{\infty,(\theta)} + \frac{\left\| \frac{\partial}{\partial 1} \underline{u} \right\|_{\infty,(\theta)}}{\inf_{\underline{\mathcal{I}}(t,\theta)} |\underline{u}|},$$

et en utilisant le fait que $|\underline{u}| \leq 1$, donc $\inf_{\underline{\mathcal{I}}(t,\theta)} |\underline{u}| \geq \inf_{\underline{\mathcal{I}}(t,\theta)} |\underline{u}|^2$.

La dérivée par rapport à la deuxième place se traite de la même façon. □

10.2.2 Etape 2 adaptée

La proposition adaptée pour l'étape 2 est la suivante. Elle généralise la proposition 9.7 à un voisinage de la diagonale $\underline{\mathcal{I}}(t, \theta)$ suffisamment petit (d'où la condition selon laquelle θ doit être suffisamment grand). On utilise en effet que l'asymptotique des puissances $\mathbf{H}^n[\underline{u}]$ quand $n \rightarrow +\infty$ ne dépend que de la restriction de \underline{u} à la diagonale. Or on contrôle \underline{u} sur la diagonale, si on le contrôle en un point suffisamment proche de la diagonale.

Proposition 10.7. *Pour tout couple $(\alpha_1, \beta, \theta)$, avec les hypothèses*

$$\begin{cases} \alpha_1 < \frac{\alpha_2 - 1}{2} \\ \theta |\log \rho| > \alpha_1 + 1 \end{cases}$$

on a l'inclusion faible suivante :

$$\mathcal{B}^c(\alpha_1, \beta, \theta) \tilde{\subset} \mathcal{F}(\alpha_2).$$

On va faire jouer le fait que la projection sur l'espace propre dominant pour le sécant, fait intervenir le même coefficient que le sécant appliqué à la diagonale de la fonction considérée (voir théorème 6.23).

Démonstration. Soit $t \in \mathcal{B}^c(\alpha_1, \beta, \theta)$ et $\underline{u} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$ qui vérifie $\|\underline{u}\|_{1,t} \leq 1$.

Le but est de majorer

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it})^{-1}\|_{1,t}$$

c'est-à-dire qu'on cherche à majorer

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it})^{-1}[\underline{u}]\|_{1,t}$$

avec une constante de majoration qui ne dépend pas de t ni de \underline{u} .

Par définition, il existe $\underline{x} = (x_1, x_2) \in \mathcal{I}(t, \theta)$, et $j \in \{0, n(\beta, t), 2n(\beta, t)\}$ tels que :

$$\left| \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^j[\underline{u}](\underline{x}) \right| < 1 - \frac{1}{t^{\alpha_1}}.$$

On est amenés à considérer plusieurs indices d'itération $n_k(t)$ et plusieurs itérés $\tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n_k(t)}$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$, et pour alléger les notations, on note :

$$\underline{u}_k = \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n_k(t)}[\underline{u}]. \quad (10.9)$$

Le domaine $\mathcal{I}(t, \theta)$ étant une réunion de carrés fondamentaux, construits sur la diagonale de \mathcal{I} dont le côté est $\ll \hat{\rho}^{n(\theta, t)}$, on a :

$$|x_1 - x_2| \ll \hat{\rho}^{n(\theta, t)} \ll \frac{1}{t^{\alpha_1+1}},$$

c'est-à-dire que pour t assez grand :

$$|x_1 - x_2| \leq \frac{1}{2t^{\alpha_1+1}}.$$

On considère alors le point $\underline{x}_0 = (x_1, x_1)$.

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|\underline{u}_1(\underline{x}_0)| \leq |\underline{u}_1(\underline{x})| + \|\underline{u}_1\|_1 \cdot |x_1 - x_2| < 1 - \frac{1}{t^{\alpha_1}} + \frac{t}{2t^{\alpha_1+1}} = 1 - \frac{1}{2t^{\alpha_1}}.$$

c'est-à-dire :

$$|\text{diag } \underline{u}_1(x_1)| < 1 - \frac{1}{2t^{\alpha_1}}.$$

Tout le début de la preuve est le même que celui de la proposition 9.7, avec $u = \text{diag } \underline{u}_1$, ce qui est rendu possible car $\|\text{diag } \underline{u}_1\|_{1,t} \leq \|\underline{u}_1\|_{1,t} \leq 1$ comme on l'a vu au chapitre 6.

On obtient finalement, avec $n_1(t) = j$, et \underline{u}_1 défini en 10.9

$$1 - \|\text{diag } \underline{u}_1\|_{L^1(\tilde{\mu}_1)} \gg \frac{1}{t^{\alpha_2}}.$$

En se servant d'une puissance de référence, on est arrivés à une minoration sur la diagonale d'un itéré de \underline{u} par l'opérateur $\tilde{\mathbf{H}}_{1+it}$ pour la norme $L^1(\mu_1)$.

Comme pour l'opérateur tangent, on écrit pour l'opérateur sécant que pour tout $n \geq n_1$:

$$\tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^n[\underline{u}] = \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n-n_1} \left[\tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n_1}[\underline{u}] \right] = \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n-n_1}[\underline{u}_1],$$

et donc :

$$\left\| \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^n[\underline{u}] \right\|_{\infty} \leq \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{1+it}^{n-n_1}[\underline{u}_1] \right\|_{\infty}.$$

L'opérateur $\tilde{\mathbf{H}}_1$ étant quasi-compact, d'après le lemme 6.23, on peut écrire la décomposition spectrale d'une fonction v de classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$ proche de $|\underline{u}_1|$ en norme $\|\cdot\|_{1,t}$ ($|\underline{u}_1|$ n'est pas forcément \mathcal{C}^1 si \underline{u}_1 s'annule, voir traitement pour l'opérateur tangent) :

$$\tilde{\mathbf{H}}_1^{n-n_1} [|v|] = \int_{\mathcal{I}} \text{diag } |v| d\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mathbf{N}}_1^{n-n_1} [|v|],$$

avec $\int_{\mathcal{I}} \text{diag } |v| d\tilde{\mu}_1$ proche de $\int_{\mathcal{I}} \text{diag } |\underline{u}_1| d\tilde{\mu}_1 = \int_{\mathcal{I}} |\text{diag } \underline{u}_1| d\tilde{\mu}_1 = \|\text{diag } \underline{u}_1\|_{L^1(\tilde{\mu}_1)}$ sur lequel on a conclu ci-dessus.

Le reste de la preuve est juste une réécriture de la preuve pour l'opérateur tangent, faite à la proposition 9.7. \square

10.2.3 Etape 3 adaptée

On va montrer la proposition suivante, valable pour tout ξ racine de l'unité. On utilisera cette proposition avec $\xi = 1$, mais on a gardé cette proposition générale, obtenue avec un moindre effort supplémentaire.

Cette proposition représente une double-extension de la proposition 2.1 de Naud ([42]) à un alphabet infini (ce qui avait déjà été fait dans le chapitre précédent), et à l'opérateur sécant. Pour cette étape, le voisinage $\underline{\mathcal{I}}(t, \theta)$ doit être pris assez grand (c'est-à-dire θ assez petit). En prenant k_0 assez grand (ce paramètre intervient dans les définitions des ensembles $\underline{\mathcal{C}}$ et $\underline{\mathcal{E}}$), la deuxième condition faisant intervenir θ est vérifiée.

On rappelle qu'on note $L = \log \lambda$ le logarithme de la valeur propre dominante (sur l'axe réel).

Proposition 10.8. *Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta)$, et pour tout σ_1 tel que $\sigma_0 < \sigma_1 < 1$ (où $\sigma_0 = \inf\{\sigma : \sum_{h \in \mathcal{H}} \sup |h'|^\sigma < \infty\}$ est l'abscisse de convergence du système de Bonne Classe), si*

$$\begin{cases} \gamma < \min(\alpha, (1 - \sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1), \beta |\log \rho|) \\ (k_0\beta - \theta) |\log r(\mathbf{H}_1)| > 1 + 2\gamma \end{cases}.$$

on a l'inclusion faible suivante :

$$\mathcal{F}^c(2\gamma, \xi) \tilde{\subset} \underline{\mathcal{A}}(\alpha, \beta, \delta, \theta)^c \bigcup \underline{\mathcal{C}}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta, \theta, k_0).$$

Dans le cas d'un alphabet fini, en notant

$$\rho_0 = \inf_{h \in \mathcal{H}} \inf_{\mathcal{I}} |h'(x)|,$$

et en prenant $\delta/\beta > |\log \rho_0|$, la condition $\gamma < (1 - \sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)$ n'est plus nécessaire.

preuve de la proposition 10.8. De façon évidente, on a :

$$\underline{\mathcal{A}}(\alpha, \beta, \delta) \setminus \underline{\mathcal{C}}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta, \theta, k_0) \subset \underline{\mathcal{E}}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta, \theta, k_0)$$

et donc il suffit de prouver que

$$\underline{\mathcal{E}}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta, \theta, k_0) \tilde{\subset} \underline{\mathcal{F}}(2\gamma, \xi).$$

Soit donc $t \in \underline{\mathcal{E}}(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \delta, \theta, k_0)$. Par définition, il existe une paire $(\underline{w}_t, \eta_t)$ avec $|\underline{w}_t| = 1$, $\|\underline{w}_t\|_{1,t,\theta} \leq \underline{K}_0$ qui vérifie, pour tout $\underline{x} \in \underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta)$,

$$\left| \mathbf{M}_t^{n(\beta,t)}[\underline{w}_t](\underline{x}) - \eta_t \underline{w}_t(\underline{x}) \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}, \quad \left| \eta_t^{k_0} - \xi^{k_0 n(\beta,t)} \right| > \frac{1}{t^\gamma}. \quad (10.10)$$

On va étudier la norme $\|\cdot\|_{1,N,(\theta)}$ de $(\mathbf{I} - \xi \mathbf{H}_{1+it})^{-1}$ pour $N = t^a \geq t$, avec $a \geq 1$ qui sera choisi plus tard. On repassera ensuite successivement à la norme $\|\cdot\|_{1,N}$ et à la norme $\|\cdot\|_{1,t}$.

On commence par écrire la décomposition

$$(\mathbf{I} - \xi \mathbf{H}_{1+it})^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{k_0 n(\beta,t)-1} \xi^k \mathbf{H}_{1+it}^k \right) (\mathbf{I} - \xi^{k_0 n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{k_0 n(\beta,t)})^{-1} \quad (10.11)$$

Chacun des termes de la somme du premier facteur est un $O(1)$ (voir le lemme 7.23), et il y a $O(\log t)$ termes dans la somme. Donc :

$$\left\| \sum_{k=0}^{k_0 n(\beta,t)-1} \xi^k \mathbf{H}_{1+it}^k \right\|_{1,N,(\theta)} \ll \log t. \quad (10.12)$$

Reste à majorer l'autre facteur. On pose

$$\mathbf{K}_t = \underline{\Delta}_{\underline{w}_t} \circ \mathbf{H}_1 \circ \underline{\Delta}_{\underline{w}_t}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_t = \overline{\eta}_t^{k_0} (\xi \mathbf{K}_t)^{k_0 n(\beta,t)},$$

où \underline{w}_t est défini en 10.10, et $\underline{\Delta}_{\underline{w}_t}$ est l'opérateur de multiplication par \underline{w}_t , c'est-à-dire

$$\mathbf{K}_t [f] = \underline{w}_t \mathbf{H}_1 [f \underline{w}_t].$$

On désire passer par l'intermédiaire de $\mathbf{L}_t - \xi^{k_0 n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{k_0 n(\beta,t)}$. Pour cela, sous réserve que les quasi-inverses existent, on écrit l'égalité formelle :

$$(\mathbf{I} - \xi^{k_0 n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{k_0 n(\beta,t)})^{-1} = (\mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1} (\mathbf{L}_t - \xi^{k_0 n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{k_0 n(\beta,t)}))^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1}. \quad (10.13)$$

On majore les facteurs $(\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1}$ et $\mathbf{L}_t - \xi^{k_0 n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{k_0 n(\beta,t)}$ en norme $\|\cdot\|_{1,N,(\theta)}$, respectivement grâce aux lemmes 10.9 et 10.10.

Par une propriété élémentaire de la conjugaison, on obtient :

$$\mathbf{K}_t^{k_0 n(\beta,t)} = \underline{\Delta}_{\underline{w}_t} \circ \mathbf{H}_1^{k_0 n(\beta,t)} \circ \underline{\Delta}_{\underline{w}_t}^{-1}.$$

et donc

$$\mathbf{L}_t = \underline{\Delta}_{\underline{w}_t} \circ (\overline{\eta}_t^{k_0} \xi^{k_0 n(\beta,t)} \mathbf{H}_1^{k_0 n(\beta,t)}) \circ \underline{\Delta}_{\underline{w}_t}^{-1},$$

et finalement :

$$\mathbf{I} - \mathbf{L}_t = \underline{\Delta}_{\underline{w}_t} \circ (\mathbf{I} - \overline{\eta}_t^{k_0} \xi^{k_0 n(\beta,t)} \mathbf{H}_1^{k_0 n(\beta,t)}) \circ \underline{\Delta}_{\underline{w}_t}^{-1}.$$

Or, $\|\underline{\Delta}_{\underline{w}_t}\|_{1,N,(\theta)}$ est bornée, car $\|\underline{w}_t\|_{1,N,(\theta)}$ est bornée, et $\underline{w}_t^{-1} = \overline{\underline{w}_t}$, donc $\|\underline{w}_t^{-1}\|_{1,N,(\theta)}$ est bornée, ce qui prouve que :

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1}\|_{1,N,(\theta)} \ll \left\| (\mathbf{I} - \overline{\eta}_t^{k_0} \xi^{k_0 n(\beta,t)} \mathbf{H}_1^{k_0 n(\beta,t)})^{-1} \right\|_{1,N,(\theta)}.$$

C'est ici qu'intervient l'hypothèse qui affirme que $\xi^{k_0 n(\beta,t)}$ est loin de $\eta_t^{k_0}$, et qui permet d'appliquer le lemme 10.9 avec $\mu = \xi^{-k_0 n(\beta,t)} \eta_t^{k_0}$. Il apparaît alors un terme

$$|\mu - 1| = |\xi^{k_0 n(\beta,t)} - \eta_t^{k_0}|$$

minoré par hypothèse. Avec l'hypothèse $(\beta - k_0\theta) |\log r(\mathbf{H}_1)| > 1 + 2\gamma > 1 + \gamma' + \gamma$, l'hypothèse du lemme 10.9 est vérifiée, et on obtient donc :

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1}\|_{1,N,(\theta)} \ll t^\gamma. \quad (10.14)$$

Maintenant, on va contrôler la norme $\|\cdot\|_{1,N,(\theta)}$ de :

$$\mathbf{L}_t - \xi^{k_0n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{k_0n(\beta,t)} [\underline{u}] = \xi^{k_0n(\beta,t)} \left(\overline{\eta}_t w_t \mathbf{H}_1^{k_0n(\beta,t)} [\underline{u}\overline{w}_t] - \mathbf{H}_{1+it}^{k_0n(\beta,t)} [\underline{u}] \right).$$

On veut une majoration suffisamment bonne pour que

$$\limsup_t \left\| (\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1} \left(\mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right) \right\|_{1,N,(\theta)} < 1,$$

afin d'obtenir une majoration de

$$\left(\mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1} \left(\mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right) \right)^{-1}$$

par développement en série.

Il suffit en l'occurrence d'assurer que :

$$\left\| (\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1} \left(\mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right) \right\|_{1,N,(\theta)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, la majoration brutale

$$\left\| \left(\mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right) \right\|_{1,N,(\theta)} \ll 1$$

(utiliser le lemme 7.23) n'est pas suffisante, car ensuite on a seulement

$$\left\| (\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1} \left(\mathbf{L}_t - \xi^{k_0n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{k_0n(\beta,t)} \right) \right\|_{1,N,(\theta)} \ll t^\gamma$$

et le majorant ne tend pas vers 0 avec t .

Le lemme 10.10 nous donne mieux :

$$\left\| \left(\mathbf{L}_t - \xi^{k_0n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{k_0n(\beta,t)} \right) \right\|_{1,N,(\theta)} \ll \frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}} + \widehat{\rho}^{n(\beta,t)} + \frac{t}{N}. \quad (10.15)$$

Soit $\gamma' > 0$ tel que

$$\begin{cases} \gamma < \gamma' < \min(\alpha, (1 - \sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1), \beta |\log \rho|) \\ \beta > 1 + \gamma + \gamma' \end{cases}.$$

On prend $N = t^{1+\gamma'}$ (et donc $a = 1 + \gamma'$). On obtient alors :

$$\left\| \left(\mathbf{L}_t - \xi^{k_0n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{k_0n(\beta,t)} \right) \right\|_{1,N,(\theta)} \ll \frac{1}{t^{\gamma'}}. \quad (10.16)$$

En utilisant les majorations 10.11, 10.12, 10.13, 10.14, et 10.16, on obtient successivement :

$$\left\| (\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1} \left(\mathbf{L}_t - \xi^{k_0n(\beta,t)} \mathbf{H}_{1+it}^{k_0n(\beta,t)} \right) \right\|_{1,N,(\theta)} \ll \frac{t^\gamma}{t^{\gamma'}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

(puisqu'on a choisi $\gamma' > \gamma$),

$$\begin{aligned} \left\| \left(\mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1} \left(\mathbf{L}_t - \xi^{k_0 n(\beta, t)} \mathbf{H}_{1+it}^{k_0 n(\beta, t)} \right) \right)^{-1} \right\|_{1, N, (\theta)} &\ll \frac{t^\gamma}{t^{\gamma'}} \\ \left\| \left(\mathbf{I} - \xi^{k_0 n(\beta, t)} \mathbf{H}_{1+it}^{k_0 n(\beta, t)} \right)^{-1} \right\|_{1, N, (\theta)} &\ll \frac{t^{2\gamma}}{t^{\gamma'}} \\ \left\| (\mathbf{I} - \xi \mathbf{H}_{1+it})^{-1} \right\|_{1, N, (\theta)} &\ll \frac{t^{2\gamma} \log t}{t^{\gamma'}}. \end{aligned}$$

On va maintenant transférer l'inégalité à la norme $\|\cdot\|_{1, N}$ (ce qu'on n'a pas eu besoin de faire pour l'opérateur tangent).

Pour cela, on utilise le (v) du lemme 7.23. On obtient :

$$\begin{aligned} \left\| (\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it})^{-1} \right\|_{1, N} &\ll \log t + \left\| (\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1+it})^{-1} \right\|_{1, N, (\theta)} \\ &\ll \frac{t^{2\gamma} \log t}{t^{\gamma'}} + \log t \\ &\ll \frac{t^{2\gamma} \log t}{t^{\gamma'}}. \end{aligned}$$

Finalement, on passe de la norme $\|\cdot\|_{1, N}$ à la norme $\|\cdot\|_{1, t}$. D'après le lemme 6.4, on obtient

$$\left\| (\mathbf{I} - \xi \mathbf{H}_{1+it})^{-1} \right\|_{1, t} \ll \frac{N t^{2\gamma} \log t}{t t^{\gamma'}} = t^{2\gamma} \log t,$$

et donc, quitte à renommer γ , $t \in \mathcal{F}(2\gamma, \xi)$.

Dans le cas d'un alphabet fini, on conclut en remarquant que le deuxième terme disparaît dans la conclusion du lemme 10.10. □

La preuve de la proposition 10.8 repose sur deux lemmes essentiels.

Le premier exploite le fait que η_t est loin de la racine de l'unité ξ . Le fait que la valeur propre dominante de \mathbf{H}_1 est 1 est crucial pour la démonstration. Ce lemme est adapté d'un lemme de Dolgopyat ([17]). La preuve en est légèrement plus difficile que celle du lemme 9.9, à cause de la norme $\|\cdot\|_{1, N, (\theta)}$ au lieu de $\|\cdot\|_{1, N}$. L'opérateur de reste \mathbf{N} dans la décomposition spectrale est contrôlé en utilisant le lemme 7.23.

Lemme 10.9. *Soit $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| = 1$, avec $|\mu - 1| > t^{-\gamma}$. Avec les hypothèses de la preuve de la proposition, pour tout $a \geq 1$, en posant $N = t^a$, et pour tout $\beta > 0$ tel que $(k_0\beta - \theta) |\log r(\mathbf{H}_1)| > a + \gamma$, pour tout $t > 1$,*

$$\left\| \left(\mu \mathbf{I} - \mathbf{H}_1^{k_0 n(\beta, t)} \right)^{-1} \right\|_{1, N, (\theta)} \ll t^\gamma.$$

Démonstration. On rappelle qu'on note simplement $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1$ et $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. La décomposition spectrale de \mathbf{H}^k s'écrit (d'après le théorème 6.23)

$$\mathbf{H}^k = \mathbf{P} + \mathbf{N}^k,$$

et donc

$$\begin{aligned}\mu - \underline{\mathbf{H}}^k &= \mu - \underline{\mathbf{P}} - \underline{\mathbf{N}}^k \\ &= (\mu - \underline{\mathbf{P}})(\underline{\mathbf{I}} - (\mu - \underline{\mathbf{P}})^{-1}\underline{\mathbf{N}}^k),\end{aligned}$$

Sous réserve d'existence, on dispose donc de l'expression alternative suivante pour le quasi-inverse :

$$\left(\mu - \underline{\mathbf{H}}^k\right)^{-1} = \left(\underline{\mathbf{I}} - (\mu - \underline{\mathbf{P}})^{-1}\underline{\mathbf{N}}^k\right)^{-1} (\mu - \underline{\mathbf{P}})^{-1}.$$

En notant comme au chapitre 6 d'analyse fonctionnelle

$$r(\underline{\mathbf{H}}_1) = \sup \{|\lambda|; \lambda \in \text{Sp}(\underline{\mathbf{H}}_1) \setminus \{1\}\}$$

le rayon spectral sous-dominant, et en choisissant \hat{r} tel que $r(\underline{\mathbf{H}}_1) < \hat{r} < 1$, on a :

$$\|\underline{\mathbf{N}}^k\|_{1,N} \ll N\hat{r}^k.$$

D'après le lemme 7.23, si $k \geq n(\theta, t)$, alors on a :

$$\|\underline{\mathbf{N}}^k\|_{1,N,(\theta)} \leq \|\underline{\mathbf{N}}^{k-n(\theta,t)}\|_{1,N},$$

donc :

$$\|\underline{\mathbf{N}}^k\|_{1,N,(\theta)} \ll N\hat{r}^{k-n(\theta,t)}.$$

On cherche à majorer $\left(\underline{\mathbf{I}} - (\mu - \underline{\mathbf{P}})^{-1}\underline{\mathbf{N}}^k\right)^{-1}$ en développant en série entière.

On a :

$$(\mu - \underline{\mathbf{P}})^{-1} = \frac{\underline{\mathbf{P}}}{\mu - 1} + \frac{\underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{P}}}{\mu}.$$

En effet, un calcul simple montre que pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| = 1$,

$$\begin{aligned}(\mu - \underline{\mathbf{P}}) \circ \left(\frac{\underline{\mathbf{P}}}{\mu - 1} + \frac{\underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{P}}}{\mu}\right) &= \frac{\mu\underline{\mathbf{P}} - \underline{\mathbf{P}}^2}{\mu - 1} + \frac{\mu - \underline{\mathbf{P}} - \mu\underline{\mathbf{P}} + \underline{\mathbf{P}}^2}{\mu} \\ &= \frac{\mu\underline{\mathbf{P}} - \underline{\mathbf{P}}}{\mu - 1} + \frac{\mu - \mu\underline{\mathbf{P}}}{\mu} \\ &= \underline{\mathbf{P}} + \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{P}} \\ &= \underline{\mathbf{I}},\end{aligned}$$

et bien sûr ça commute !

Et comme d'après le théorème du rayon spectral $\|\underline{\mathbf{P}}\|_{1,N} \ll 1$, avec le lemme 7.23 on obtient $\|\underline{\mathbf{P}}\|_{1,N,(\theta)} \ll 1$, et donc

$$\|(\mu - \underline{\mathbf{P}})^{-1}\|_{1,N,(\theta)} \ll \frac{1}{|\mu - 1|}.$$

Ce qui permet d'établir que

$$\|(\mu - \underline{\mathbf{P}})^{-1}\underline{\mathbf{N}}^k\|_{1,N,(\theta)} \ll \|(\mu - \underline{\mathbf{P}})^{-1}\|_{1,N,(\theta)} \|\underline{\mathbf{N}}^k\|_{1,N,(\theta)} \ll N \frac{\hat{r}^{k-n(\theta,t)}}{|\mu - 1|},$$

et donc on peut affirmer que $\left\|(\mu - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{N}^k\right\|_{1,N,(\theta)} \leq 1/2$, dès que

$$k - n(\theta, t) \geq \frac{1}{|\log \widehat{r}|} \left(\log N + \log \frac{1}{|\mu - 1|} \right) + b.$$

où b est fixé, possiblement positif (c'est le log de la constante multiplicative).

L'hypothèse $(\beta k_0 - \theta) |\log r(\mathbf{H}_1)| > a + \gamma$ du lemme suffit alors à conclure pour t assez grand, en choisissant \widehat{r} suffisamment proche de $r(\mathbf{H}_1)$.

On obtient en effet

$$\left\| \left(\mathbf{I} - (\mu - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{N}^k \right)^{-1} \right\|_{1,N,(\theta)} \ll 1,$$

d'où

$$\left\| (\mu - \mathbf{H}^k)^{-1} \right\|_{1,N,(\theta)} \ll \frac{1}{|\mu - 1|} \ll t^\gamma.$$

□

Maintenant un second lemme, qui montre comme dans le chapitre précédent que la norme de $\mathbf{L}_t - \xi^{k_0 n(\beta, t)} \mathbf{H}_{1+it}^{k_0 n(\beta, t)}$ est suffisamment petite pour compenser la croissance polynomiale de $(\mathbf{I} - \mathbf{L}_t)^{-1}$. On va utiliser une expression alternative de la quantité à majorer. Pour étudier la norme infinie, on devra étudier les opérateurs contraints, c'est-à-dire distinguer selon qu'une branche inverse est dans $\mathcal{H}(t, \beta, \delta)$ ou non.

Par rapport au lemme 9.10, l'hypothèse est plus faible, car la majoration sur la valeur presque propre de \mathbf{M} n'a lieu que sur $\mathcal{I}(t, \beta, \delta, \theta)$ au lieu de $\mathcal{I}(t, \beta, \delta)$. En contre-partie, la conclusion est plus faible, car elle porte sur la norme $\|\cdot\|_{1,N,(\theta)}$ et non plus $\|\cdot\|_{1,N}$.

Lemme 10.10. *Avec les notations de la preuve de la proposition, et si le membre de droite de la majoration tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$,*

$$\left\| \mathbf{L}_t - \xi^{k_0 n(\beta, t)} \mathbf{H}_{1+it}^{k_0 n(\beta, t)} \right\|_{1,N,(\theta)} \ll \frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}} + \widehat{\rho}^{n(\beta, t)} + \frac{t}{N}.$$

En notant

$$\rho_0 = \inf_{h \in \mathcal{H}} \inf_{\mathcal{I}} |h'(x)|,$$

et avec la condition supplémentaire $\delta/\beta > |\log \rho_0|$, le deuxième terme disparaît dans le cas d'un alphabet fini : si le membre de droite de la majoration tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$, alors

$$\left\| \mathbf{L}_t - \xi^{n(\beta, t)} \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta, t)} \right\|_{1,N,(\theta)} \ll \frac{1}{t^\alpha} + \widehat{\rho}^{n(\beta, t)} + \frac{t}{N}.$$

Démonstration. La preuve fait rapidement apparaître que l'essentiel est dans la bonne définition de \mathbf{K}_t et \mathbf{L}_t , afin de pouvoir faire jouer l'hypothèse sur $\mathbf{M}_t^{n(\beta, t)} [w_t] - \eta_t w_t$ qu'on a sur $\mathcal{I}(t, \beta, \delta, \theta)$.

La preuve se fait en cinq parties.

Les quatre premières sont très analogues à l'étude qui a été faite pour l'opérateur tangent. Elles consistent à étudier $\overline{\eta}_t \mathbf{K}_t^{n(\beta, t)} - \mathbf{H}_{1+it}^{n(\beta, t)}$ (sans le k_0). D'abord, on donne une expression alternative de l'expression étudiée comme image par l'opérateur \mathbf{H}_1 d'une fonction qui fait intervenir l'hypothèse sur $\mathcal{I}(t, \beta, \delta, \theta)$. Ensuite, on étudie la norme $\|\cdot\|_{\infty,(\theta)}$. Enfin, on étudie la semi-norme $\|\cdot\|_{1,(\theta)}$. Finalement, on conclut sur la norme $\|\cdot\|_{1,N,(\theta)}$.

La cinquième partie, nouvelle par rapport au chapitre précédent, consiste à « remettre » le k_0 (c'est-à-dire étudier $\overline{\eta}_t^{k_0} \mathbf{K}_t^{k_0 n(\beta, t)} - \mathbf{H}_{1+it}^{k_0 n(\beta, t)}$).

Partie 1 de la preuve. D'abord on écrit que

$$\underline{\mathbf{L}}_t - \xi^{n(\beta,t)} \underline{\mathbf{H}}_{1+it}^{n(\beta,t)} = \xi^{n(\beta,t)} \left(\overline{\eta}_t \underline{\mathbf{K}}_t^{n(\beta,t)} - \underline{\mathbf{H}}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right).$$

On cherche donc à majorer :

$$\left\| \left(\overline{\eta}_t \underline{\mathbf{K}}_t^{n(\beta,t)} - \underline{\mathbf{H}}_{1+it}^{n(\beta,t)} \right) [\underline{u}] \right\|_{1,N,(\theta)},$$

pour toute fonction $\underline{u} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$ de norme $\|\cdot\|_{1,N,(\theta)}$ inférieure ou égale à 1.

Mais d'après le lemme 6.25, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\underline{\mathbf{H}}_{1+it}^n [\underline{u}] = w_t \underline{\mathbf{H}}_1^n [\underline{u} \underline{\mathbf{M}}_{-t}^n [\overline{w}_t]] = w_t \underline{\mathbf{H}}_1^n [\underline{u} \underline{\mathbf{M}}_t^n [\overline{w}_t]]$$

et par ailleurs :

$$\underline{\mathbf{K}}_t^n [\underline{u}] \mathbf{I} = w_t \underline{\mathbf{H}}_1^n [\underline{u} \overline{w}_t] \mathbf{I}$$

et finalement en prenant $n = n(\beta, t)$:

$$\left(\underline{\mathbf{H}}_{1+it}^{n(\beta,t)} - \overline{\eta}_t \underline{\mathbf{K}}_t^{n(\beta,t)} \right) [\underline{u}] = w_t \underline{\mathbf{H}}_1^{n(\beta,t)} [\underline{u} \overline{v}_t] \quad (10.17)$$

où on a posé $\underline{v}_t = \underline{\mathbf{M}}_t^{n(\beta,t)} [\overline{w}_t] - \eta_t w_t$. On pose aussi $\underline{u}_t = \underline{u} \overline{v}_t$.

Partie 2 de la preuve. Comme annoncé, commençons par la norme $\|\cdot\|_{\infty,(\theta)}$. On a $\|\underline{w}_t\|_{\infty,(\theta)} \leq \|\underline{w}_t\|_{1,t,(\theta)} \ll 1$. Donc il nous suffit de contrôler $\left\| \underline{\mathbf{H}}_1^{n(\beta,t)} [\underline{u} \overline{v}_t] \right\|_{\infty,(\theta)}$ pour toute fonction $\underline{u} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$ de norme $\|\cdot\|_{1,N,(\theta)}$ inférieure ou égale à 1.

Remarquons d'abord que $\|\underline{u}\|_{\infty,(\theta)} \leq \|\underline{u}\|_{1,N,(\theta)} = 1$. De plus

$$\begin{cases} \|\underline{v}_t\|_{\infty,(\theta)} \ll 1 \\ \sup_{\underline{\mathcal{I}}(t,\beta,\delta,\theta)} |\underline{v}_t| \ll \frac{1}{t^\alpha} \end{cases},$$

et donc :

$$\begin{cases} \|\underline{u}_t\|_{\infty,(\theta)} \ll 1 \\ \sup_{\underline{\mathcal{I}}(t,\beta,\delta,\theta)} |\underline{u}_t| \ll \frac{1}{t^\alpha} \end{cases}. \quad (10.18)$$

On a en utilisant le lemme 1.13,

$$\|\underline{\mathbf{H}}^{n(\beta,t)} [\underline{u}_t]\|_{\infty,(\theta)} \ll \sum_{h \in \mathcal{H}^n} \|h'\|_{\infty} \|\underline{u}_t \circ h\|_{\infty,(\theta)}.$$

Or, les deux sous-ensembles $\underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta)$ et $\underline{\mathcal{I}} \setminus \underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta)$ forment une partition de $\underline{\mathcal{I}}$, ce qui permet d'écrire la décomposition suivante :

$$\underline{u}_t = \mathbf{1}_{\underline{\mathcal{I}}(t,\beta,\delta)} \underline{u}_t + \mathbf{1}_{\underline{\mathcal{I}} \setminus \underline{\mathcal{I}}(t,\beta,\delta)} \underline{u}_t.$$

On va majorer séparément chacun des termes

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)}} \|h'\|_{\infty} \left\| \left(\mathbf{1}_{\underline{\mathcal{I}}(t,\beta,\delta)} \underline{u}_t \right) \circ h \right\|_{\infty,(\theta)} = \sum_{h \in \mathcal{H}(t,\beta,\delta)} \|h'\|_{\infty} \|\underline{u}_t \circ h\|_{\infty,(\theta)}$$

et

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^n(\beta, t)} \|h'\|_\infty \left\| \left(\mathbf{1}_{\underline{\mathcal{I}} \setminus \underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta)} \underline{u}_t \right) \circ \underline{h} \right\|_{\infty, (\theta)} = \sum_{h \in \mathcal{H}^n(\beta, t) \setminus \mathcal{H}(t, \beta, \delta)} \|h'\|_\infty \|\underline{u}_t \circ \underline{h}\|_{\infty, (\theta)}.$$

A cause de la norme $\|\cdot\|_{\infty, (\theta)}$, on se limite en fait à regarder \underline{u}_t sur $\underline{\mathcal{I}}(t, \theta)$, et on utilise que $\underline{\mathcal{I}}(t, \theta)$ est la réunion disjointe de $\underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta)$ et de $\underline{\mathcal{I}}(t, \theta) \setminus \underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta)$.

La majoration de l'opérateur contraint est moins bonne pour les $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$, mais la fonction \underline{u}_t est mieux majorée sur $\underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta)$, et les majorants vont être du même ordre de grandeur, avec le choix des paramètres qu'on fait.

• Pour le premier terme, la somme est faite sur les branches de $h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)$, et donc, comme $x \in \underline{\mathcal{I}}(t, \theta)$, $\underline{h}(x) \in \underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta)$, et finalement on utilise la majoration de \underline{u}_t sur $\underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta)$, ainsi que le lemme 1.13

$$\sum_{h \in \mathcal{H}(t, \beta, \delta)} \|h'\|_\infty \|\underline{u}_t \circ \underline{h}\|_{\infty, (\theta)} \ll \frac{1}{t^\alpha} \sum_{h \in \mathcal{H}^n(\beta, t)} \|h'\|_\infty \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

• Pour le deuxième terme, on utilise la majoration brutale $\|\mathbf{1}_{\underline{\mathcal{I}} \setminus \underline{\mathcal{I}}(t, \beta, \delta, \theta)} \underline{u}_t\|_\infty \ll 1$, et donc, d'après le lemme 7.12 (qui utilise la propriété (iii) de la Bonne Classe), pour tout σ_1 tel que $\sigma_0 < \sigma_1 < 1$,

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^n(\beta, t) \setminus \mathcal{H}(t, \beta, \delta)} \|h'\|_\infty \|\underline{u}_t \circ \underline{h}\|_{\infty, (\theta)} \ll \sum_{h \in \mathcal{H}^n(\beta, t) \setminus \mathcal{H}(t, \beta, \delta)} \|h'\|_\infty \leq \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}}.$$

Et finalement :

$$\left\| \underline{\mathbf{H}}^{n(\beta, t)}[\underline{u}_t] \right\|_{\infty, (\theta)} \leq \frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}}. \quad (10.19)$$

Partie 3 de la preuve. Reste maintenant à contrôler la semi-norme $\left\| \underline{w}_t \underline{\mathbf{H}}^{n(\beta, t)}[\underline{u}_t] \right\|_{1, (\theta)}$. On

commence par étudier $\left\| \underline{\mathbf{H}}^{n(\beta, t)}[\underline{u}_t] \right\|_{1, (\theta)}$.

D'après le lemme 6.7, on a :

$$\left\| \underline{\mathbf{H}}^{n(\beta, t)}[\underline{u}_t] \right\|_{1, (\theta)} \ll \sum_{h \in \mathcal{H}^n(\beta, t)} \|h'\|_\infty \left(\|\underline{u}_t \circ \underline{h}\|_{\infty, (\theta)} + \left\| \frac{\partial (\underline{u}_t \circ \underline{h})}{\partial 1} \right\|_{\infty, (\theta)} + \left\| \frac{\partial (\underline{u}_t \circ \underline{h})}{\partial 2} \right\|_{\infty, (\theta)} \right).$$

► Le premier terme est majoré par $\frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}}$ comme nous l'avons vu plus haut.

► Le deuxième terme s'étudie plus facilement que le premier, car on n'a pas besoin de séparer en deux l'ensemble des branches.

D'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial 1} (\underline{u}_t \circ \underline{h})(\underline{x}) &= \frac{\partial}{\partial 1} (\underline{u} \circ \underline{h} \cdot \underline{v}_t \circ \underline{h})(\underline{x}) \\ &= \frac{\partial \underline{u}}{\partial 1} \circ \underline{h}(\underline{x}) \cdot h'(x_1) \cdot \underline{v}_t \circ \underline{h}(\underline{x}) + \underline{u} \circ \underline{h}(\underline{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial 1} (\underline{v}_t \circ \underline{h})(\underline{x}), \end{aligned}$$

qu'on étudie pour $x \in \mathcal{I}(t, \theta)$, avec les hypothèses $\|\underline{u}\|_{1,(\theta)} \leq N$, $v_t \ll 1$, $\|\underline{u}\|_{\infty,(\theta)} \leq 1$, et d'après le lemme 6.6,

$$\frac{\partial}{\partial 1}(v_t \circ \underline{h}) \ll t,$$

et finalement, en utilisant encore le lemme 1.13, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial 1}(\underline{u}_t \circ \underline{h}) \ll N|h'| + t,$$

et donc,

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)}} \|h'\|_{\infty} \left\| \frac{\partial(\underline{u}_t \circ \underline{h})}{\partial 1} \right\|_{\infty,(\theta)} \ll N\widehat{\rho}^{n(\beta,t)} + t.$$

et de même

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta,t)}} \|h'\|_{\infty} \left\| \frac{\partial(\underline{u}_t \circ \underline{h})}{\partial 2} \right\|_{\infty,(\theta)} \ll N\widehat{\rho}^{n(\beta,t)} + t.$$

Finalement, on obtient :

$$\left\| \underline{\mathbf{H}}^{n(\beta,t)}[\underline{u}_t] \right\|_{1,(\theta)} \ll \frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}} + N\widehat{\rho}^{n(\beta,t)} + t \ll N\widehat{\rho}^{n(\beta,t)} + t.$$

Partie 4 de la preuve. Or, $\|\underline{w}_t\|_{1,t,(\theta)} = 1$ et $|\underline{w}_t| = 1$, donc :

$$\begin{cases} \|\underline{w}_t\|_{\infty,(\theta)} \ll 1 \\ \|\underline{w}_t\|_{1,(\theta)} \ll t \end{cases},$$

et on a montré plus haut que :

$$\left\| \underline{\mathbf{H}}^{n(\beta,t_k)}[\underline{u}_t] \right\|_{\infty,(\theta)} \ll \frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}}.$$

Donc, d'après la formule de Leibniz on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| \underline{\mathbf{H}}_{1+it}^{n(\beta,t)}[\underline{u}] - \overline{\eta}_t \underline{\mathbf{K}}_t^{n(\beta,t)}[\underline{u}] \right\|_{1,(\theta)} &= \left\| \underline{w}_t \underline{\mathbf{H}}_1^{n(\beta,t)}[\underline{u}_t] \right\|_{1,(\theta)} \\ &\ll t \left(\frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}} \right) + N\widehat{\rho}^{n(\beta,t)} + t \\ &\ll N\widehat{\rho}^{n(\beta,t)} + t. \end{aligned}$$

On utilise enfin la majoration 10.19 pour conclure :

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\underline{\mathbf{H}}_{1+it}^{n(\beta,t)} - \overline{\eta}_t \underline{\mathbf{K}}_t^{n(\beta,t)} \right) [\underline{u}] \right\|_{1,N,(\theta)} \\ &= \left\| \left(\underline{\mathbf{H}}_{1+it}^{n(\beta,t)} - \overline{\eta}_t \underline{\mathbf{K}}_t^{n(\beta,t)} \right) [\underline{u}] \right\|_{\infty,(\theta)} + \frac{1}{N} \left\| \left(\underline{\mathbf{H}}_{1+it}^{n(\beta,t)} - \overline{\eta}_t \underline{\mathbf{K}}_t^{n(\beta,t)} \right) [\underline{u}] \right\|_{1,(\theta)} \\ &\ll \frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}} + \widehat{\rho}^{n(\beta,t)} + \frac{t}{N}. \end{aligned}$$

Partie 5 de la preuve. On écrit que

$$\underline{\mathbf{L}}_t - \xi^{k_0 n(\beta, t)} \underline{\mathbf{H}}_{1+it}^{k_0 n(\beta, t)} = \xi^{k_0 n(\beta, t)} \left(\overline{\eta}_t^{-k_0} \underline{\mathbf{K}}_t^{k_0 n(\beta, t)} - \underline{\mathbf{H}}_{1+it}^{k_0 n(\beta, t)} \right),$$

donc il nous suffit d'étudier $\overline{\eta}_t^{-k_0} \underline{\mathbf{K}}_t^{k_0 n(\beta, t)} - \underline{\mathbf{H}}_{1+it}^{k_0 n(\beta, t)}$.

Posons $A = \overline{\eta}_t^{-k_0} \underline{\mathbf{K}}_t^{k_0 n(\beta, t)}$ et $B = \underline{\mathbf{H}}_{1+it}^{k_0 n(\beta, t)}$. C'est-à-dire qu'on cherche à étudier $A^{k_0} - B^{k_0}$ connaissant $C = A - B$.

D'après le lemme 7.23, B est borné en norme $\|\cdot\|_{1, N, (\theta)}$.

Or, d'après la formule du binôme non commutative, $A^{k_0} - B^{k_0} = (B+C)^{k_0} - B^{k_0}$ est une somme de $2^{k_0} - 1$ monômes non commutatifs en B et C , la puissance totale en B dans un monôme étant au maximum $k_0 - 1$, et la puissance totale en C dans un monôme étant au minimum 1 et au maximum k_0 .

En supposant que $\|C\|_{1, N, (\theta)}$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini, alors pour t assez grand, et pour $k \geq 1$, $\|C^k\|_{1, N, (\theta)} \leq \|C\|_{1, N, (\theta)}$. Ceci prouve que

$$\|A^{k_0} - B^{k_0}\|_{1, N, (\theta)} \ll (2^{k_0} - 1) \|C\|_{1, N, (\theta)} \ll \frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{t^{(1-\sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)}} + \widehat{\rho}^{n(\beta, t)} + \frac{t}{N}.$$

Le changement dans le cas d'un alphabet fini intervient dans la partie 2 de la preuve : d'après le lemme 7.9, $\mathcal{H}(t, \beta, \delta) = \mathcal{H}$, et on n'a alors plus cette fois à considérer la somme

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^{n(\beta, \delta)} \setminus \mathcal{H}(t, \beta, \delta)} |h'(x)|,$$

d'où le terme en moins dans la conclusion. □

10.3 Domaine hyperbolique

La proposition suivante se prouve exactement comme la proposition 9.11 démontrée pour l'opérateur tangent. Le passage du quasi-inverse à Λ est fait grâce à la proposition 1.10, et en utilisant le lemme 8.4. Pour prouver la H -discipline, on prend $f(t) = t^{\alpha_0}$, et on s'occupe des petites valeurs de t cette fois en se servant du théorème 6.11 qui affirme que

$$R_e(\underline{\mathbf{H}}_{1+it}) \leq \rho R(\underline{\mathbf{H}}_1) = \rho < 1,$$

ce qui permet de conclure comme pour l'opérateur tangent.

Proposition 10.11. *On suppose qu'il existe f croissante et $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} +\infty$ telle que pour tout t assez grand,*

$$\underline{\mathcal{R}}(t) = \left\| (\underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{H}}_{1+it})^{-1} \right\|_{1, t} \leq f(t).$$

Alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma \geq 1 - \frac{M}{f(t)}$ et t assez grand,

$$(\underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{H}}_{\sigma+it})^{-1} \quad \text{existe et} \quad \left\| (\underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{H}}_{\sigma+it})^{-1} \right\|_{1, t} \leq f(t),$$

et en particulier :

$$\Lambda(s) \quad \text{existe et} \quad |\Lambda(s)| \leq f(t).$$

Et si $\underline{\mathcal{F}}^c(\alpha_0)$ est borné, alors pour tout $\alpha > \alpha_0$, la source est H -disciplinée d'exposant α .

10.4 Synthèse

10.4.1 Fin de la preuve du théorème (3-DIOP)

Voici maintenant l'énoncé du théorème (3-DIOP)

Théorème (3-DIOP). *Soit une source dynamique complète et de Bonne Classe (définition 1.12), de coefficient de contraction ρ .*

Notons $C = \max_{i \in \{1,2,3\}} c(h_i)$.

On suppose qu'il existe $h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{H}^*$, tels que $c(h_1, h_2, h_3)$ est diophantien avec exposant d'irrationalité μ . Alors en prenant

$$\alpha > 4\mu + 2 \frac{\mu + 2}{|\log \rho|} C + 5,$$

la source est H -disciplinée d'exposant α .

Démonstration. La démonstration est sensiblement la même que celle du théorème (3-DIOP-tangent). Cette fois les propositions à utiliser sont les propositions 10.1, 10.3, 10.7, et 10.11. □

10.4.2 Fin de la preuve du théorème (2-DIOP)

Voici maintenant l'énoncé du théorème (2-DIOP), qu'on termine de prouver ici.

Théorème (2-DIOP).

Soit une source dynamique complète et de Bonne Classe (définition 1.12), d'abscisse de convergence σ_0 , et de coefficient de contraction ρ .

On note $\lambda(\sigma)$ la valeur propre dominante de \mathbf{H}_σ , $L(\sigma) = \log \lambda(\sigma)$ (théorème 6.11), et dans le cas où l'alphabet est fini $\rho_0 = \inf_{h \in \mathcal{H}} \inf_{\mathcal{I}} |h'(x)|$.

On peut alors définir implicitement $\sigma_0 < \sigma_1 < 1$ par la relation

$$\sigma \mapsto (1 - \sigma_1)|L'(\sigma_1)| - L(\sigma_1) = |\log \rho|.$$

Enfin, on note $C = \max_{i \in \{1,2\}} c(h_i)$.

On suppose qu'il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^*$, tels que $c(h_1, h_2)$ est diophantien avec exposant d'irrationalité μ . Alors en prenant

$$\alpha > 4\mu + 2 \frac{\mu + 2}{|\log \rho|} \max(C, |L'(\sigma_1)|) + 5,$$

la source est H -disciplinée d'exposant α .

Dans le cas d'un alphabet fini, la conclusion est également valable pour

$$\alpha > 4\mu + 2 \frac{\mu + 2}{|\log \rho|} |\log \rho_0| + 5.$$

Démonstration. On suit ici le schéma de preuve exposé à la section 8.4.

On obtient un résultat légèrement meilleur que pour le théorème 9.4.2. Pourtant, on a un paramètre θ en plus à choisir, qui doit vérifier la condition supplémentaire (étape 2).

$$\theta |\log \rho| > \alpha_1 + 1.$$

Seulement à l'étape 3, la condition

$$k_0\beta|\log r(\underline{\mathbf{H}}_1)| > 1 + 2\gamma + \theta|\log r|,$$

remplace la condition

$$\beta|\log r(\underline{\mathbf{H}}_1)| > 1 + 2\gamma,$$

si bien qu'en prenant k_0 assez grand la condition est vérifiée, et même, une des conditions sur β disparaît.

La preuve détaillée est reproduite dans la suite.

D'après la proposition 10.2, si

$$\begin{cases} \min(\alpha_0, \gamma) > \mu + 1 \\ \delta/\beta > C \end{cases}$$

alors $\underline{\mathcal{C}}(\alpha_0, \beta, \gamma, \delta, \theta, k_0)$ est borné.

D'après la proposition 10.3, $\underline{\mathcal{B}}(\alpha_1, \beta, \theta) \tilde{\subset} \underline{\mathcal{A}}(\alpha_0, \beta, \delta, \theta, k_0)$ pourvu que

$$\alpha_0 < \min\left(\beta|\log \rho| - 1, \frac{\alpha_1 - \delta}{2}\right).$$

D'après la proposition 10.7, $\underline{\mathcal{B}}^c(\alpha_1, \beta, \theta) \tilde{\subset} \underline{\mathcal{F}}(\alpha_2)$ pourvu que :

$$\begin{cases} \alpha_1 < \frac{\alpha_2 - 1}{2} \\ \theta|\log \rho| > \alpha_1 + 1. \end{cases}$$

Notons $r = r(\underline{\mathbf{H}}_1)$ le rayon spectral sous-dominant de $\underline{\mathbf{H}}_1$ (voir chapitre 6).

D'après la proposition 10.8, $\underline{\mathcal{F}}^c(2\gamma) \tilde{\subset} \underline{\mathcal{A}}(\alpha_0, \beta, \delta, \theta, k_0)^c \cup \underline{\mathcal{C}}(\alpha_0, \beta, \gamma, \delta, \theta, k_0)$, pourvu qu'il existe σ_1 avec $\sigma_0 < \sigma_1 < 1$, tel que

$$\begin{cases} \gamma < \min(\alpha_0, (1 - \sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1), \beta|\log \rho|) \\ k_0\beta|\log r| > 1 + 2\gamma + \theta|\log r|. \end{cases}$$

Avec de tels paramètres, on a :

$$\alpha_2 > 2\alpha_1 > 4\alpha_0 > 4\gamma > 2\gamma,$$

et donc,

$$\underline{\mathcal{F}}^c(\alpha_2) \subset \underline{\mathcal{F}}^c(2\gamma)$$

donc finalement

$$\underline{\mathcal{F}}^c(\alpha_2) \subset (\underline{\mathcal{A}}(\alpha_0, \beta, \delta, \theta, k_0)^c \cup \underline{\mathcal{C}}(\alpha_0, \beta, \gamma, \delta, \theta, k_0)) \cap \underline{\mathcal{A}}(\alpha_0, \beta, \delta, \theta, k_0) = \underline{\mathcal{C}}(\alpha_0, \beta, \gamma, \delta, \theta, k_0).$$

Enfin, d'après la proposition 10.11, si $\underline{\mathcal{F}}^c(\alpha_2)$ est borné, alors pour tout $\alpha > \alpha_2$, il existe $\delta > 0$ tel que le quasi-inverse de l'opérateur tangent $(\mathbf{I} - \underline{\mathbf{H}}_{\sigma+it})^{-1}$ n'a pas d'autre pôle que $s = 1$, et a une croissance polynomiale quand $|s| \rightarrow +\infty$, sur le domaine

$$\mathcal{R} = \left\{ s : \Re(s) > 1 - \min\left(\delta, \frac{1}{t^\alpha}\right) \right\}.$$

Reste à vérifier qu'on peut choisir des paramètres intermédiaires, et à minorer l'ensemble des exposants α pour lesquels la conclusion est vraie, en fonction des données du théorème.

On commence par choisir $\gamma > \mu + 1$, puis $\alpha_0 > \gamma$, puis

$$\beta > \max\left(\frac{\alpha_0 + 1}{|\log \rho|}, \frac{\gamma}{|\log \rho|}\right).$$

En posant $X = \delta/\beta$, la condition $\gamma < (1 - \sigma)\delta - \beta L(\sigma)$ se réécrit $\gamma < \beta((1 - \sigma)X - L(\sigma))$. Mais la fonction $\sigma \mapsto (1 - \sigma)X - L(\sigma)$ est maximum quand $|L'(\sigma)| = X$. On considère donc la fonction

$$k : \sigma \mapsto (1 - \sigma)|L'(\sigma)| - L(\sigma).$$

On définit alors implicitement $\sigma_0 < \sigma_1 < 1$ par la relation

$$k(\sigma_1) = |\log \rho|.$$

En effet, $k(1) = 0$ et à cause de la convexité de L (théorème 6.11), $k(\sigma) \xrightarrow{\sigma \rightarrow \sigma_0} +\infty$, ce qui prouve l'existence d'un tel σ_1 .

On termine alors en choisissant $\delta > \beta \max(|L'(\sigma_1)|, C)$ (où $C = \max_{i \in \{1,2\}} c(h_i)$).

De cette façon,

$$\frac{\gamma}{\beta} < |\log \rho| = k(\sigma_1) = (1 - \sigma_1)|L'(\sigma_1)| - L(\sigma_1) < (1 - \sigma_1)\frac{\delta}{\beta} - L(\sigma_1),$$

et donc la condition

$$\gamma < (1 - \sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)$$

est bien remplie.

Puis on prend $\alpha_1 > 2\alpha_0 + \delta$ et $\alpha_2 > 2\alpha_1 + 1$ et $\alpha > \alpha_2$.

Enfin, en prenant k_0 assez grand, on peut toujours trouver θ qui vérifie les conditions, comme expliqué plus haut.

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha &> \alpha_2 \\ &> 2\alpha_1 + 1 \\ &> 2(2\alpha_0 + \delta) + 1 \\ &> 2(2\alpha_0 + \beta \max(|L'(\sigma_1)|, C)) + 1 \\ &> 4(\mu + 1) + 2\beta \max(|L'(\sigma_1)|, C) + 1 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \beta &> \max\left(\frac{\alpha_0 + 1}{|\log \rho|}, \frac{\gamma}{|\log \rho|}\right) \\ &= \frac{\alpha_0 + 1}{|\log \rho|} \\ &> \frac{\mu + 2}{|\log \rho|}, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\alpha &> 4(\mu + 1) + 2\frac{\mu + 2}{|\log \rho|} \max(C, |L'(\sigma_1)|) + 1 \\ &= 4\mu + 2\frac{\mu + 2}{|\log \rho|} \max(C, |L'(\sigma_1)|) + 5,\end{aligned}$$

l'inégalité stricte garantissant qu'on peut retrouver des paramètres intermédiaires.

Dans le cas d'un alphabet fini, en renforçant la condition $\frac{\delta}{\beta} > C$ en $\frac{\delta}{\beta} > |\log \rho_0|$, la condition $\gamma < (1 - \sigma_1)\delta - \beta L(\sigma_1)$ n'est plus nécessaire.

On n'a alors plus à choisir σ_1 de façon optimale, comme dans le cas d'un nombre quelconque de branches, ce qui simplifie la preuve.

On commence par choisir $\gamma > \mu + 1$, puis $\alpha_0 > \gamma$, puis

$$\begin{aligned}\beta &> \max\left(\frac{\alpha_0 + 1}{|\log \rho|}, \frac{\gamma}{|\log \rho|}\right) \\ &> \frac{\mu + 2}{|\log \rho|}.\end{aligned}$$

Puis on prend $\alpha_1 > 2\alpha_0 + \delta$, $\alpha_2 > 2\alpha_1 + 1$ et $\alpha > \alpha_2$.

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}\alpha &> \alpha_2 \\ &> 2\alpha_1 + 1 \\ &> 4\alpha_0 + 2\delta + 1 \\ &> 4\alpha_0 + 2\beta|\log \rho_0| + 1 \\ &> 4\mu + 2\frac{\mu + 2}{|\log \rho|}|\log \rho_0| + 5.\end{aligned}$$

10.5 Retour sur l'opérateur tangent

Au chapitre précédent, nous avons donné une preuve qui permettait de conclure à une région de discipline pour le quasi-inverse de l'opérateur tangent. Cette preuve ne faisait pas intervenir de paramètre k_0 comme la preuve pour l'opérateur sécant, où rappelons-le, il permettait de lever la contradiction apparente entre la double-nécessité de prendre θ assez petit dans l'étape 2, et assez grand dans l'étape 3, et sans lequel on ne sait pas conclure.

Mais après avoir fait la preuve pour l'opérateur sécant, on s'aperçoit que l'utilisation d'un paramètre k_0 pour l'opérateur tangent (donc nouvelles définitions...), permet avec des changements mineurs, d'obtenir une meilleure conclusion dans le théorème 2-DIOP tangent. En effet, la condition $\beta|\log r| > 1 + 2\gamma$ de l'étape 3, devient $k_0\beta|\log r| > 1 + 2\gamma$, et elle est vérifiée dès que k_0 assez grand, ce qui permet d'obtenir la validité du théorème pour

$$\alpha > 4\mu + 2\frac{\mu + 2}{|\log \rho|} \max(C, |L'(\sigma_1)|) + 5$$

ce qui est dans certains cas mieux que

$$\alpha > 4\mu + 2 \max\left(\frac{\mu + 2}{|\log \rho|}, \frac{3 + 2\mu}{|\log r|}\right) \max(C, |L'(\sigma_1)|) + 5,$$

obtenu au chapitre précédent.

Cette amélioration n'est pas fondamentale, car rien ne prouve qu'on a trouvé l'ensemble optimal des exposants α comme dans le cas sans mémoire fini (voir chapitre 12).

□

Chapitre 11

Etude particulière du cas sans mémoire

Sommaire

11.1 Etude fine de l'approximation des probabilités	237
11.1.1 Systèmes 3-DIOP	237
11.1.2 Systèmes 2-DIOP	238
11.2 Etude sur la droite $\{\Re(s) = 1\}$	239
11.2.1 Etape 1 adaptée	239
11.2.2 Etape 2 adaptée	241
11.2.3 Etape 3 adaptée	242
11.3 Domaine hyperbolique	245
11.4 Synthèse	245
11.4.1 Fin de la preuve du théorème (3-DIOP-sans mémoire)	245
11.4.2 Fin de la preuve du théorème (2-DIOP-sans mémoire)	246

Dans le cas des systèmes sans mémoire, la preuve qui n'utilise pas les opérateurs, est conceptuellement plus simple que dans le cas général. L'étape 2 notamment devient triviale.

Grâce au lemme 7.9, le paramètre δ n'intervient plus dans le cas d'un alphabet fini.

11.1 Etude fine de l'approximation des probabilités

Cette partie est l'analogue de l'étude fine du spectre de l'opérateur composante pour l'étude générale des opérateurs tangent et sécant.

11.1.1 Systèmes 3-DIOP

Dans le cas sans mémoire, la proposition 11.2 prend la forme plus simple suivante :

Proposition 11.1. *Considérons $i_1, i_2, i_3 \in \mathbb{N}^*$. Si $c(i_1, i_2, i_3)$ est diophantien avec exposant d'irrationalité μ , alors pour tout couple (α, δ) tel que*

$$\alpha \geq \mu + 1,$$

l'ensemble $\mathcal{A}_{\text{aff}}(\alpha, \delta)$ est borné.

Démonstration. La preuve est faite par l'absurde. L'hypothèse donne alors une suite de couples (t, η_t) , avec t aussi grand qu'on veut, et $\eta_t \in \mathbb{C}$, $|\eta_t| = 1$, telle que pour tout $k \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$:

$$|p_k^{-it} - \eta_t| \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

Soit $i_1, i_2, i_3, \alpha, \delta$ comme dans l'hypothèse. Alors, d'après le lemme 7.16, pour t assez grand, $i_1, i_2, i_3 \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$.

Pour $j \in \{1, 2, 3\}$, et pour tout t assez grand, on obtient alors successivement :

$$\begin{aligned} |e^{itc(i_j)} - \eta_t| &\leq \frac{1}{t^\alpha} \ll \frac{1}{t^{\mu+1}} \\ tc(i_j) - \theta_t - 2\pi q_t^{(i_j)} &\ll \frac{1}{t^{\mu+1}} \end{aligned}$$

en notant $\eta_t = e^{i\theta_t}$, et pour des $q_t^{(i_j)} \in \mathbb{Z}$.

Par soustraction, on obtient :

$$\begin{cases} t(c(i_1) - c(i_3)) = 2\pi \hat{q}_t + O\left(\frac{1}{t^{\mu+1}}\right) \\ t(c(i_1) - c(i_2)) = 2\pi q_t + O\left(\frac{1}{t^{\mu+1}}\right) \end{cases}$$

avec $\hat{q}_t, q_t \in \mathbb{Z}$. Cette fois, contrairement au cas général,

$$\hat{q}_t = \Theta(q_t) = \Theta(t),$$

et on obtient finalement

$$c(i_1, i_2, i_3) = \frac{\hat{q}_t}{q_t} + O\left(\frac{1}{t^{\mu+1}q_t}\right) = \frac{\hat{q}_t}{q_t} + O\left(\frac{1}{q_t^{\mu+2}}\right).$$

□

11.1.2 Systèmes 2-DIOP

Dans le cas sans mémoire, le lemme 9.2 prend la forme plus simple suivante :

Proposition 11.2. *Considérons $i_1, i_2 \in \mathbb{N}^*$. Si $c(i_1, i_2)$ est diophantien avec exposant d'irrationalité μ , alors pour tout quadruplet $(\alpha, \gamma, \xi, \delta)$ tel que*

$$\min(\alpha, \gamma) \geq \mu + 1$$

l'ensemble $\mathcal{C}_{\text{aff}}(\alpha, \gamma, \xi, \delta)$ est borné.

Démonstration. La preuve est faite par l'absurde. L'hypothèse donne alors une suite de couples (t, η_t) , avec t aussi grand qu'on veut, et $\eta_t \in \mathbb{C}$, $|\eta_t| = 1$, telle que pour tout $k \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$:

$$|p_k^{-it} - \eta_t| \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

Soit $i_1, i_2, \alpha, \gamma, \delta$ comme dans l'hypothèse. Alors, d'après le lemme 7.16, pour t assez grand, $i_1, i_2 \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$.

Pour $j \in \{1, 2\}$, et pour tout t assez grand, on obtient alors successivement :

$$|e^{itc(i_j)} - 1| \leq \frac{1}{t^\alpha} \ll \frac{1}{t^{\mu+1}}$$

$$tc(i_j) - 2\pi q_t^{(i)} \ll \frac{1}{t^{\mu+1}}$$

pour des $q_t^{(i)} \in \mathbb{Z}$. Avec $\widehat{q}_t = q_t^{(1)}$ et $q_t = q_t^{(2)}$, on obtient :

$$\begin{cases} tc(i_1) = 2\pi\widehat{q}_t + O\left(\frac{1}{t^{\mu+1}}\right) \\ tc(i_2) = 2\pi q_t + O\left(\frac{1}{t^{\mu+1}}\right) \end{cases}$$

Cette fois, contrairement au cas général,

$$\widehat{q}_t = \Theta(q_t) = \Theta(t),$$

et on obtient finalement

$$c(i_1, i_2) = \frac{\widehat{q}_t}{q_t} + O\left(\frac{1}{t^{\mu+1}q_t}\right) = \frac{\widehat{q}_t}{q_t} + O\left(\frac{1}{q_t^{\mu+2}}\right).$$

□

11.2 Etude de Λ sur la droite $\{\Re(s) = 1\}$

11.2.1 Etape 1 adaptée

Dans le cas sans mémoire, si les choses sont plus simples à écrire, la preuve n'en est pas totalement triviale pour autant. Une des deux conditions sur α disparaît dans la proposition qui s'énonce maintenant ainsi :

Proposition 11.3. *Pour tout triplet (α, δ) vérifiant*

$$\alpha < \frac{\alpha_1 - \delta}{2}$$

on a l'inclusion faible

$$\mathcal{B}_{\text{aff}}(\alpha_1) \widetilde{\subset} \mathcal{A}_{\text{aff}}(\alpha, \delta).$$

De plus, dans le cas d'un alphabet fini, la condition $\alpha < \frac{\alpha_1 - \delta}{2}$ devient :

$$\alpha_1 > 2\alpha.$$

L'adaptation simple du lemme 9.4 est incorporée dans la démonstration de la proposition adaptée.

preuve de la proposition 11.3. Soit $t \in \mathcal{B}_{\text{aff}}(\alpha_1)$. Par définition :

$$|\lambda(1 + it)| = \left| \sum_{k \in \mathbb{N}^*} p_k^{1+it} \right| \geq 1 - \frac{1}{t^\alpha}.$$

On n'a plus ici besoin de définir s_2 , u_2 et v_2 comme dans le cas général (ces fonctions sont constantes dans le cas particulier qu'on considère).

Cette fois $u_1 = \lambda(1 + it)$ et $s_1 = |\lambda(1 + it)|$.

On a alors

$$|\lambda(1 + it)| = \left| \sum_{k \in \mathbb{N}^*} p_k^{1+it} \right| = \eta_t \sum_{k \in \mathbb{N}^*} p_k^{1+it},$$

et d'autre part :

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} p_k.$$

On prend alors

$$\eta_t = \frac{1}{v_1} = \frac{s_1}{u_1} = \frac{|\lambda(1 + it)|}{\lambda(1 + it)}.$$

(bien défini à cause de la minoration de $|\lambda|$).

D'où on déduit :

$$1 - |\lambda(1 + it)| = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} p_k (1 - p_k^{it} \eta_t).$$

Dans la parenthèse, $p_k^{it} \eta_t$ est de norme 1. Quant au terme p_k , il est toujours strictement positif.

Ceci prouve que chaque terme de la somme est de partie réelle supérieure ou égale à 0. C'est à dire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$p_k (1 - \Re(p_k^{it} \eta_t)) \geq 0.$$

Mais par hypothèse

$$1 - |\lambda(1 + it)| \leq \frac{1}{t^{\alpha_1}}.$$

On a donc aussi la même majoration pour la partie réelle de chaque terme écrit plus haut, c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$p_k (1 - \Re(p_k^{it} \eta_t)) \leq \frac{1}{t^{\alpha_1}}.$$

On obtient donc (la constante ne dépend pas de $k \in \mathbb{N}^*$, ni de t) :

$$1 - \Re(p_k^{it} \eta_t) \ll \frac{1}{p_k t^{\alpha_1}}.$$

A partir de maintenant, on va se servir de l'hypothèse plus spécifique selon laquelle $k \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$. Par définition

$$p_k \geq t^{-\delta}.$$

C'est donc qu'on a pour tout $k \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$, en posant $\alpha_2 = \frac{\alpha_1 - \delta}{2}$:

$$1 - \Re(p_k^{it} \eta_t) \ll \frac{1}{t^{2\alpha_2}},$$

avec la constante de majoration qui ne dépend pas de $h \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$.

Comme dans le cas général, on utilise que pour tout complexe z de module 1

$$|1 - z| = \sqrt{2}(1 - \Re(z))^{1/2},$$

et donc :

$$\begin{aligned} |\eta_t - p_k^{-it}| &= |1 - \eta_t p_k^{it}| \\ &= \sqrt{2} (1 - \Re(p_k^{it} \eta_t))^{1/2} \\ &\ll \frac{1}{t^{\alpha_2}}. \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout $k \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$:

$$|\eta_t - p_k^{-it}| \ll \frac{1}{t^{\alpha_2}}, \quad (11.1)$$

où la constante de majoration ne dépend pas de h , ni de t . Donc

$$|p_k^{-it} - \eta_t| \leq \frac{1}{t^\alpha},$$

pour t assez grand, c'est-à-dire que $t \in \mathcal{A}_{\text{aff}}(\alpha, \delta)$.

Dans le cas d'un alphabet fini, pour tout $k \in \Sigma$,

$$p_k \geq \min_{k \in \Sigma} p_k \gg 1.$$

On prend alors simplement $\alpha_2 = \alpha_1/2$ dans la preuve. D'où la modification de la conclusion. \square

11.2.2 Etape 2 adaptée

Maintenant la même chose, avec la preuve, dans le cas sans mémoire :

Proposition 11.4. *Pour tout couple $\alpha > 0$, on a l'inclusion faible*

$$\mathcal{B}_{\text{aff}}^c(\alpha) \tilde{\subset} \mathcal{F}_{\text{aff}}(\alpha).$$

Démonstration. Evident. Soit $t \in \mathcal{B}_{\text{aff}}^c(\alpha)$. Alors

$$|\lambda(1 + it)| = \left| \sum_{k \in \mathbb{N}^*} p_k^{1+it} \right| < 1 - \frac{1}{t^\alpha}.$$

Derrière cela, il y a le lemme 1.9 : les itérés d'une fonction constante sont constants. Concrètement, cela compense le fait qu'on ne peut pas appliquer l'inégalité des accroissements finis, vu qu'il n'y pas de profondeur dans le cas sans mémoire (pas de $\widehat{\rho}^{n(\beta, t)}$). La première partie de la preuve, si longue dans le cas général, n'a pas lieu d'être ici ; et on n'est même pas passé par la norme $\|\cdot\|_{L^1}$.

On écrit alors :

$$|1 - \lambda(1 + it)| \geq 1 - |\lambda(1 + it)| > \frac{1}{t^\alpha}.$$

On conclut ensuite sur $\Lambda(s) = \frac{1}{1 - \lambda(s)}$.

\square

11.2.3 Etape 3 adaptée

Là encore, cette proposition, valable pour tout ξ racine de l'unité, sera utilisée avec $\xi = 1$.

Comme dans le cas général, d'après le lemme 7.9, dans le cas d'un alphabet fini, une condition sur les paramètres disparaît (mais cette fois sans condition supplémentaire), ce qui va un peu simplifier les choses au moment de la synthèse à la section 11.4.

Proposition 11.5. *Pour tout (α, γ, δ) qui vérifie :*

$$\gamma < \min(\alpha, (1 - \sigma_0)\delta),$$

(où $\sigma_0 = \inf\{\sigma : \sum_{h \in \mathcal{H}} \sup |h'|^\sigma < \infty\}$ est l'abscisse de convergence du système de Bonne Classe), on a l'inclusion faible :

$$\mathcal{F}_{\text{aff}}^c(\gamma, \xi) \widetilde{\subset} \mathcal{A}_{\text{aff}}^c(\alpha, \delta) \cup \mathcal{C}_{\text{aff}}(\alpha, \gamma, \xi, \delta).$$

Dans le cas d'un alphabet fini, la condition $\gamma < (1 - \sigma_0)\delta$ n'est plus nécessaire.

preuve de la proposition 11.5. De façon évidente, on a :

$$\mathcal{A}_{\text{aff}}(\alpha, \delta) \setminus \mathcal{C}_{\text{aff}}(\alpha, \gamma, \xi, \delta) \subset \mathcal{E}_{\text{aff}}(\alpha, \gamma, \xi, \delta)$$

et donc il suffit de prouver que

$$\mathcal{E}_{\text{aff}}(\alpha, \gamma, \xi, \delta) \widetilde{\subset} \mathcal{F}_{\text{aff}}(\gamma, \xi).$$

Soit donc $t \in \mathcal{E}_{\text{aff}}(\alpha, \gamma, \xi, \delta)$. Par définition, il existe $\eta_t \in \mathbb{C}$, $|\eta_t| = 1$, qui vérifie, pour tout $k \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$:

$$\begin{cases} |p_k^{-it} - \eta_t| \leq \frac{1}{t^\alpha} \\ |\eta_t - \xi| > \frac{1}{t^\gamma} \end{cases}.$$

Sous réserve que les quasi-inverses existent, on a l'égalité formelle, analogue de la relation 9.17 du cas général :

$$(1 - \xi\lambda(1 + it))^{-1} = \left(1 + \xi \frac{\bar{\eta}_t - \lambda(1 + it)}{1 - \xi\bar{\eta}_t}\right)^{-1} (1 - \xi\bar{\eta}_t)^{-1}.$$

En effet, dans le cas sans mémoire, c'est particulièrement simple, et le \mathbf{L}_t du cas général est une constante

$$\mathbf{L}_t[\mathbf{1}] = \bar{\eta}_t (\xi \mathbf{H}_1[\mathbf{1}]) = \bar{\eta}_t \xi \sum_{k \in \mathbb{N}^*} p_k = \bar{\eta}_t \xi.$$

On majore le facteur $\bar{\eta}_t - \lambda(1 + it)$ grâce au lemme 11.6.

La majoration de $(1 - \xi\bar{\eta}_t)$ est donnée par hypothèse. Le lemme de Dolgopyat qui servait dans le cas général est ici totalement creux : $\tilde{\mathbf{H}}_1$ est ici l'opérateur constant, car $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} p_k = 1$. Et le lemme dit alors que si $|\mu - 1| > 1/t^\gamma$, alors $|1/(\mu - 1)| \ll t^\gamma$ (la valeur absolue remplace la norme $\|\cdot\|_{1,N}$ pour les fonctions constantes)!

On a donc :

$$|(1 - \xi\bar{\eta}_t)^{-1}| \ll t^\gamma. \tag{11.2}$$

Maintenant, on s'occupe de contrôler $\bar{\eta}_t - \lambda(1 + it)$.

L'idée, c'est qu'on veut une majoration suffisamment bonne pour que

$$\limsup_t \left| \frac{\bar{\eta}_t - \lambda(1 + it)}{1 - \bar{\eta}_t} \right| < 1,$$

afin d'obtenir une majoration de

$$\left(1 + \frac{\bar{\eta}_t - \lambda(1 + it)}{1 - \bar{\eta}_t} \right)^{-1}$$

par développement en série.

Il suffit en l'occurrence d'assurer que :

$$\left| \frac{\bar{\eta}_t - \lambda(1 + it)}{1 - \bar{\eta}_t} \right| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, la majoration brutale

$$\left(1 + \frac{\bar{\eta}_t - \lambda(1 + it)}{1 - \bar{\eta}_t} \right)^{-1} \ll 1$$

obtenue en écrivant :

$$\bar{\eta}_t - \lambda(1 + it) \ll 1$$

n'est pas suffisante, car elle permet seulement d'obtenir

$$\left(1 + \frac{\bar{\eta}_t - \lambda(1 + it)}{1 - \bar{\eta}_t} \right)^{-1} \ll t^\gamma$$

et le majorant ne tend pas vers 0 avec t . Il est donc bien nécessaire d'utiliser le lemme 11.6 qui nous donne, pour $\gamma < \gamma' < \min(\alpha, (1 - \sigma_0)\delta)$:

$$|\bar{\eta}_t - \lambda(1 + it)| \ll \frac{1}{t^{\gamma'}}.$$

On obtient successivement :

$$\left| \frac{\bar{\eta}_t - \lambda(1 + it)}{1 - \bar{\eta}_t} \right| \ll \frac{t^\gamma}{t^{\gamma'}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

(c'est là qu'apparaît l'importance de prendre $\gamma' > \gamma$), puis par développement analytique

$$\left| \left(1 + \xi \frac{\bar{\eta}_t - \lambda(1 + it)}{1 - \bar{\eta}_t} \right)^{-1} \right| \ll \frac{t^\gamma}{t^{\gamma'}}$$

$$\left| (1 - \xi \lambda(1 + it))^{-1} \right| \ll \frac{t^{2\gamma}}{t^{\gamma'}},$$

c'est-à-dire que pour t assez grand : $\left| (1 - \xi \lambda(1 + it))^{-1} \right| \leq t^\gamma$, et donc $t \in \mathcal{F}_{\text{aff}}(\gamma, \xi)$.

Dans le cas d'un alphabet fini, on conclut en remarquant que le deuxième terme disparaît dans la conclusion du lemme 11.6.

□

Maintenant le lemme 9.10 et sa preuve adaptés au cas sans mémoire :

Lemme 11.6. *Avec les notations de la preuve de la proposition*

$$|\bar{\eta}_t - \lambda(1 + it)| \ll_{\epsilon} \frac{1}{t^{\alpha}} + \frac{1}{t^{(1-\sigma_0)\delta-\epsilon}}.$$

Le deuxième terme disparaît dans le cas d'un alphabet fini, si bien qu'on obtient :

$$|\bar{\eta}_t - \lambda(1 + it)| \ll \frac{1}{t^{\alpha}}.$$

Démonstration. L'essentiel est de pouvoir faire jouer l'hypothèse sur $|p_k^{-it} - \eta_t|$ pour $k \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$. Tout le début de la preuve dans le cas général, qui utilise le lemme 6.25, se dégonfle. L'analogie de l'équation 10.17 consiste simplement à écrire :

$$\lambda(1 + it) - \bar{\eta}_t = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} p_k (p_k^{it} - \bar{\eta}_t).$$

On considère les deux sous-ensembles d'indices :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta) \\ \mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta) \end{cases}.$$

On a alors, $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, ce qui permet d'écrire la décomposition suivante, analogue de la décomposition 9.23 du cas général :

$$\lambda(1 + it) - \bar{\eta}_t = \sum_{k \in \mathcal{H}_1} p_k (p_k^{it} - \bar{\eta}_t) + \sum_{k \in \mathcal{H}_2} p_k (p_k^{it} - \bar{\eta}_t).$$

On va majorer séparément chacun des termes. Les branches $k \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$ sont nombreuses, mais la majoration du terme général de la série est meilleure, et finalement les majorations obtenues pour les deux termes de la somme vont être du même ordre de grandeur, avec le choix des paramètres qu'on a fait.

• Pour ce qui est du premier terme, si $k \in \mathcal{H}_{\text{aff}}(t, \delta)$, alors par définition $|p_k^{-it} - \eta_t| \leq \frac{1}{t^{\alpha}}$, et donc :

$$\left| \sum_{k \in \mathcal{H}_1} p_k (p_k^{it} - \bar{\eta}_t) \right| \leq \sum_{k \in \mathcal{H}_1} p_k |p_k^{it} - \bar{\eta}_t| \leq \frac{1}{t^{\alpha}} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} p_k = \frac{1}{t^{\alpha}}.$$

• Pour ce qui est du deuxième terme, on utilise le lemme 7.12 (qui utilise la propriété (iii) de la Bonne Classe). On obtient :

$$\left| \sum_{k \in \mathcal{H}_2} p_k (p_k^{it} - \bar{\eta}_t) \right| \ll_{\epsilon} \frac{1}{t^{(1-\sigma_0)\delta-\epsilon}}.$$

Et finalement pour tout $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k (p_k^{it} - \bar{\eta}_t) \right| &\leq \left| \sum_{k \in \mathcal{H}_1} p_k (p_k^{it} - \bar{\eta}_t) \right| + \left| \sum_{k \in \mathcal{H}_2} p_k (p_k^{it} - \bar{\eta}_t) \right| \\ &\ll_{\epsilon} \frac{1}{t^{\alpha}} + \frac{1}{t^{(1-\sigma_0)\delta-\epsilon}}, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve du lemme.

Dans le cas d'un alphabet fini, d'après le lemme 7.9, pour t assez grand, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, et on n'a alors plus à considérer la somme $\sum_{k \in \mathcal{H}_2} p_k$, d'où le terme en moins dans la conclusion, quitte à réajuster la constante de majoration.

□

11.3 Domaine hyperbolique

La proposition suivante est l'adaptation de la proposition 9.11 sans les opérateurs, superflus ici. Cependant, on explique pourquoi la preuve est plus simple.

Proposition 11.7. *On suppose qu'il existe f croissante et $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} +\infty$ telle que pour tout t assez grand,*

$$\mathcal{R}_{\text{aff}}(t) = |\Lambda(1 + it)| \leq f(t),$$

alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma \geq 1 - \frac{M}{f(t)}$ avec t assez grand,

$$\Lambda(s) \text{ existe et } |\Lambda(s)| \leq f(t).$$

Et si $\mathcal{F}^c(\alpha_0)$ est borné, alors pour tout $\alpha > \alpha_0$, la source est H -disciplinée d'exposant α .

Démonstration. Attention : cette fois, on considère des fonctions et plus des opérateurs. La preuve est sensiblement identique. L'analogue de la décomposition 9.25 étant :

$$\Lambda(s) = \frac{\Lambda(1 + it)}{1 - A_{\sigma + it}}$$

où

$$A_{\sigma + it} = (\lambda(s) - \lambda(1 + it))\Lambda(1 + it) \in \mathbb{C},$$

la relation étant évidente car $\Lambda(s) = \frac{1}{1 - \lambda(s)}$.

Pour terminer de prouver la H -discipline, on prend $f(t) = t^{\alpha_0}$, et on conclut pour les petites valeurs de t comme à la proposition 9.11. □

11.4 Synthèse

11.4.1 Fin de la preuve du théorème (3-DIOP-sans mémoire)

On énonce le théorème, et on le montre ensuite.

Théorème (3-DIOP-sans mémoire). *On considère une source dynamique sans mémoire de Bonne Classe (définition 1.12). On suppose qu'il existe $i_1, i_2, i_3 \in \mathbb{N}^*$, tels que $c_{\text{aff}}(i_1, i_2, i_3)$ est diophantien avec exposant d'irrationalité μ . En prenant alors*

$$\alpha > 2\mu + 2,$$

la source est H -disciplinée d'exposant α .

Démonstration. On suit ici le schéma de preuve exposé à la section 8.4.

D'après la proposition 11.1, si

$$\alpha_0 \geq \mu + 1$$

alors $\mathcal{A}_{\text{aff}}(\alpha_0, \delta)$ est borné.

D'après la proposition 11.3, $\mathcal{B}_{\text{aff}}(\alpha_1, \delta) \tilde{\subset} \mathcal{A}_{\text{aff}}(\alpha_0, \delta)$ pourvu que

$$\alpha_0 < \frac{\alpha_1 - \delta}{2}.$$

D'après la proposition 11.4, $\mathcal{B}_{\text{aff}}^c(\alpha_1, \delta) \tilde{\subset} \mathcal{F}_{\text{aff}}(\alpha_1)$.

Enfin, d'après la proposition 11.7, si $\mathcal{F}^c(\alpha_1)$ est borné, alors pour tout $\alpha > \alpha_1$, la source est H -hyperbolique d'exposant α .

Reste à vérifier qu'on peut choisir des paramètres intermédiaires, et à minorer l'ensemble des exposants α pour lesquels la conclusion est vraie, en fonction des données du théorème.

On choisit dans cet ordre $\alpha_0 \geq \mu + 1$, $\delta > 0$, $\alpha_1 > 2\alpha_0 + \delta$ et $\alpha > \alpha_1$.

Finalement :

$$\alpha > \alpha_1 > 2\alpha_0 \geq 2\mu + 2,$$

l'inégalité stricte garantissant qu'on peut retrouver des paramètres intermédiaires.

Dans le cas d'un alphabet fini, le paramètre δ n'intervient plus, mais comme on le minore ci-dessus par 0, on trouve la même chose au final. □

11.4.2 Fin de la preuve du théorème (2-DIOP-sans mémoire)

On énonce le théorème, et on le montre ensuite. Comme expliqué au chapitre 5, on peut retrouver le deuxième point du théorème (cas particulier d'un alphabet fini) en prenant une abscisse de convergence du système **Bonne Classe** $\sigma_0 = -\infty$ (voir discussion après la définition 1.12 des systèmes de **Bonne Classe**).

Théorème (2-DIOP-sans mémoire). *On considère une source dynamique sans mémoire de Bonne Classe (définition 1.12), d'abscisse de convergence σ_0 . On suppose qu'il existe $i_1, i_2 \in \mathbb{N}^*$, tels que $c_{\text{aff}}(i_1, i_2)$ est diophantien avec exposant d'irrationalité μ . En prenant alors*

$$\alpha > (\mu + 1) \left(2 + \frac{1}{1 - \sigma_0} \right),$$

la source est H -disciplinée d'exposant α .

Dans le cas d'un alphabet fini, la conclusion est valable pour

$$\alpha > 2\mu + 2.$$

Démonstration. On suit ici le schéma de preuve exposé à la section 8.4.

D'après la proposition 11.2, si

$$\min(\alpha_0, \gamma) \geq \mu + 1$$

alors $\mathcal{C}_{\text{aff}}(\alpha_0, \gamma, \delta)$ est borné.

D'après la proposition 11.3, $\mathcal{B}_{\text{aff}}(\alpha_1, \delta) \tilde{\subset} \mathcal{A}_{\text{aff}}(\alpha_0, \delta)$ pourvu que

$$\alpha_0 < \frac{\alpha_1 - \delta}{2}.$$

D'après la proposition 11.4, $\mathcal{B}_{\text{aff}}^c(\alpha_1, \delta) \tilde{\subset} \mathcal{F}_{\text{aff}}(\alpha_1)$.

D'après la proposition 11.5, $\mathcal{F}_{\text{aff}}^c(\gamma) \tilde{\subset} \mathcal{A}_{\text{aff}}(\alpha_0, \delta)^c \cup \mathcal{C}_{\text{aff}}(\alpha_0, \gamma, \delta)$, pourvu qu'il existe σ_1 avec $\sigma_0 < \sigma_1 < 1$, tel que

$$\gamma < \min(\alpha_0, (1 - \sigma_0)\delta).$$

Avec de tels paramètres, on a :

$$\alpha_1 > 2\alpha_0 > 2\gamma > \gamma,$$

et donc,

$$\mathcal{F}_{\text{aff}}^c(\alpha_1) \subset \mathcal{F}_{\text{aff}}^c(\gamma)$$

donc finalement

$$\mathcal{F}_{\text{aff}}^c(\alpha_1) \subset (\mathcal{A}_{\text{aff}}(\alpha_0, \delta)^c \cup \mathcal{C}_{\text{aff}}(\alpha_0, \gamma, \delta)) \cap \mathcal{A}_{\text{aff}}(\alpha_0, \delta) = \mathcal{C}_{\text{aff}}(\alpha_0, \gamma, \delta).$$

Enfin, d'après la proposition 9.11, si $\mathcal{F}^c(\alpha_1)$ est borné, alors pour tout $\alpha > \alpha_1$, la source est H -hyperbolique d'exposant α .

Reste à vérifier qu'on peut choisir des paramètres intermédiaires, et à minorer l'ensemble des exposants α pour lesquels la conclusion est vraie, en fonction des données du théorème.

On commence par choisir $\gamma \geq \mu + 1$, puis $\alpha_0 > \gamma$. Puis on prend $\delta > \frac{\gamma}{1 - \sigma_0}$. Enfin, on prend $\alpha_1 > 2\alpha_0 + \delta$. Finalement :

$$\begin{aligned} \alpha &> \alpha_1 \\ &> 2\alpha_0 + \frac{\gamma}{1 - \sigma_0} \\ &> 2\mu + 2 + \frac{\mu + 1}{1 - \sigma_0}, \end{aligned}$$

l'inégalité stricte garantissant qu'on peut retrouver des paramètres intermédiaires.

Dans le cas d'un alphabet fini, δ n'intervient plus, et on obtient simplement

$$\alpha > 2\mu + 2.$$

□

Chapitre 12

Etude particulière du cas sans mémoire avec alphabet fini

Sommaire

12.1	Enoncé du théorème (2-DIOP-sans mémoire-fini)	252
12.2	Echelles et pôles	253
12.3	Fonction Δ et nouvelle famille de normes	255
12.4	Fin de la preuve du théorème (2-DIOP-sans mémoire-fini)	256
12.5	Preuves annexes	257
12.5.1	Invariance de l'exposant d'irrationalité	257
12.5.2	Preuves relatives aux échelles et aux pôles	260
12.5.3	Preuves relatives à la fonction Δ	262

On a conduit une étude plus fine dans le cas d'un système sans mémoire avec un alphabet fini (c'est-à-dire un système dynamique affine avec un nombre fini de branches, associé à une densité initiale uniforme), en regardant précisément les *meilleures* approximations de certains rapports sur les branches.

Comme dans le cas général, il s'agit dans ce chapitre de conclure qu'une source sans mémoire avec alphabet fini est H -disciplinée, pourvu qu'on prenne de bonnes hypothèses arithmétiques sur les branches.

On obtient alors dans ce cadre l'optimalité de la région de discipline, c'est-à-dire la plus grande région de discipline possible, alors que dans les deux chapitres précédents, les régions obtenues étaient suffisantes, mais non a priori nécessaires.

Ce travail, conduit dans le papier [22] écrit avec Flajolet et Vallée, avait été largement amorcé dans [18]. Cette partie, qui utilise des définitions du chapitre 5, est relativement indépendante.

En réalité, la preuve de la croissance polynomiale est apportée par le chapitre 11 précédent, et on n'en donne pas de preuve avec les outils élémentaires de ce chapitre, la nouveauté étant l'optimalité annoncée plus haut. Pour replacer les choses dans l'ordre, le chapitre 11 étudie en fait la croissance polynomiale sur la droite $\{\Re(s) = 1\}$, et transfère ensuite l'information sur une région hyperbolique à gauche de cette droite, donnant par la même occasion une région sans pôle.

Dans ce chapitre, on va considérer des *échelles* régulières avec des barreaux de hauteur fixes, tandis qu'au chapitre 11, on considèrerait (sans le dire!) des échelles (réduites à des points de $\{\Re(s) = 1\}$) avec des barreaux de hauteur qui tend vers 0 avec t . En effet, dans les définitions

de \mathcal{A}_{aff} , \mathcal{C}_{aff} et \mathcal{E}_{aff} , il intervenait l'inégalité $|p_k^{-it} - \eta_t| \leq \frac{1}{t^\alpha}$, où $\Re(p_k^{-it}) = \cos(tc_{\text{aff}}(k))$ est une expression importante pour ce chapitre (affirmer qu'elle est proche de 1, c'est restreindre t à des intervalles réguliers centrés sur les points de $2\pi\mathbb{Z}/c_{\text{aff}}(k)$).

On considère un vecteur $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_r)$ probabilités, et on supposera sans perte de généralité que $p_1 \geq \dots \geq p_r$.

Les rapports $c_{\text{aff}}(i)$, $c_{\text{aff}}(i, j)$ et $c_{\text{aff}}(i, j, k)$ ont été définis dans la sous-section 5.1.2.

On rappelle que dans le cas des systèmes sans mémoire, $\Lambda(s) = (1 - \lambda(s))^{-1}$, où $\lambda(s) = p_1^s + p_2^s + \dots + p_r^s$.

C'est-à-dire que pour étudier les pôles de Λ , on est ramenés à étudier l'ensemble \mathcal{Z} des solutions de l'équation $\lambda(s) = 1$, d'inconnue s .

De plus, par conjugaison, il est suffisant d'étudier $\mathcal{Z}_+ := \mathcal{Z} \cap \{\Im(z) > 0\}$.

La suite de cette partie est consacrée à la structure de l'ensemble \mathcal{Z} dans le cas *irrationnel* (voir définition 5.19). Cette étude est basée sur d'importants travaux de Lapidus et Van Frankenhuysen (voir [38] et [37]).

Le début de cette partie est une explication de principe, et constitue la suite de la section 3.1.

Expliquons d'abord ce qui passe sur les systèmes dynamiques sans mémoire à deux branches (c'est-à-dire $r = 2$).

Si le système est rationnel, d'après le théorème (C-sans mémoire), les pôles sur $\{\Re(s) = 1\}$ sont situés aux points

$$s = 1 + \frac{2ik\pi}{c_{\text{aff}}(1)}q_0, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (12.1)$$

où $c_{\text{aff}}(1, 2)$ est égal à la fraction irréductible $\frac{q}{q_0}$.

On va considérer le cas irrationnel comme une déformation du cas rationnel. Si $c_{\text{aff}}(1, 2) \notin \mathbb{Q}$, alors 1 est le seul pôle sur $\{\Re(s) = 1\}$.

Et si $c_{\text{aff}}(1, 2) \approx \frac{q_2}{q_1}$, on peut penser qu'il y aura un pôle près de la droite $\{\Re(s) = 1\}$, au point

$$s \approx 1 + \frac{2i\pi}{c_{\text{aff}}(1)}q_1.$$

Notons Δ tel que

$$s = 1 + \frac{2i\pi}{c_{\text{aff}}(1)}q_1 + \Delta. \quad (12.2)$$

La quantité Δ est une (petite) correction à apporter par rapport à l'égalité 12.1 dans le cas d'un vecteur rationnel.

C'est-à-dire que les pôles $s = \sigma + it$, avec σ proche de 1, doivent vérifier *simultanément*

$$t \approx \frac{2q_1\pi}{c_{\text{aff}}(1)}, \quad t \approx \frac{2q_2\pi}{c_{\text{aff}}(2)},$$

avec $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, où la *qualité* de l'approximation est essentiellement déterminée par la quantité

$$v := q_1 \frac{c_{\text{aff}}(2)}{c_{\text{aff}}(1)} - q_2 = q_1 c_{\text{aff}}(1, 2) - q_2. \quad (12.3)$$

q_2/q_1	v	$2\pi q_1/c_{\text{aff}}(1)$	$\Im(s_0)$	$\Re(s_0)$
65/24	$+2.8 \cdot 10^{-2}$	371.74	371.81	0.9977
84/31	$-5.1 \cdot 10^{-3}$	480.412	480.400	0.999925
485/179	$+2.5 \cdot 10^{-3}$	2773.8128	2773.8189	0.99998222
1054/389	$-1.0 \cdot 10^{-4}$	6028.03862	6028.03836	0.999999675

Pour $\mathbf{p} = (2/3, 1/3)$, on calcule les premiers meilleurs approximatifs (donnés par l'algorithme des fractions continues) q_2/q_1 de $c_{\text{aff}}(1, 2)$, les valeurs correspondantes du « facteur de qualité » v , $2\pi q_1/c_{\text{aff}}(1)$, et les pôles associés s_0 trouvés près de $\Re(s) = 1$, grâce à l'équation (12.6).

FIG. 12.1 – Valeurs numériques d'approximations et de pôles dans le cas sans mémoire fini

En tenant compte des simplifications ($e^{2i\pi} = 1$), $\lambda(s) = 1$ devient :

$$e^{-c_{\text{aff}}(1)}e^{-c_{\text{aff}}(1)\Delta} + e^{-c_{\text{aff}}(2)}e^{-2i\pi v}e^{-c_{\text{aff}}(2)\Delta} - 1 = 0. \quad (12.4)$$

L'idée principale consiste à voir que cette équation définit implicitement Δ (en utilisant le *théorème des fonctions implicites*), comme une fonction de v . On trouvera

$$\Delta(v) = d_1 iv - d_2 v^2 + \sum_{j=3}^{\infty} d_j (iv)^j, \quad (12.5)$$

où le développement est valable pour tout v qui satisfait $|v| < R_0$ (pour un certain $R_0 > 0$), et les constantes d_1, d_2 sont strictement positives.

Une conséquence immédiate est l'*existence* d'une racine de $\lambda(s) = 1$ associée à une approximation suffisamment bonne q_2/q_1 de $c_{\text{aff}}(1, 2)$ qui satisfait $|v| < R_0$. Plus précisément, on trouve une racine de $\lambda(s) = 1$ en

$$s = \sigma + it, \quad \sigma = 1 - d_2 v^2 + O(v^4), \quad t = \frac{2\pi}{c_{\text{aff}}(1)} q_1 + d_1 v + O(v^3). \quad (12.6)$$

La partie imaginaire est très proche d'un multiple entier de $2\pi/c_{\text{aff}}(1)$; et l'écart entre la partie réelle et 1 est déterminée par la qualité de l'approximation, comme nous le montre l'équation (12.3) (et cette qualité est elle-même conditionnée par les propriétés diophantiennes de $c_{\text{aff}}(1, 2)$).

La figure 12.1 illustre l'équation (12.6), pour $p_1 = 2/3$, $p_2 = 1/3$.

Le cas général $r \geq 2$ est analogue. La partie imaginaire d'un pôle $s = \sigma + it$, vérifie *simultanément*

$$t \approx \frac{2q_1\pi}{c_{\text{aff}}(1)} \approx \dots \approx \frac{2q_r\pi}{c_{\text{aff}}(r)}, \quad q_1, \dots, q_r \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, *chaque* rapport q_j/q_1 , for $j \in \{1, \dots, r\}$, doit être une bonne approximation de $c_{\text{aff}}(1, j)$. Remarquons ici que q_1 est un dénominateur commun aux $c_{\text{aff}}(1, j)$.

La qualité des approximations est alors déterminée par le vecteur de qualité \vec{v} de dimension r ,

$$\vec{v} = (v_1, \dots, v_r), \quad \text{avec } v_j := q_1 c_{\text{aff}}(1, j) - q_j.$$

Là encore, le théorème des fonctions implicites (version multivariée), avec le changement de variables (12.2), nous dit que les éléments de \mathcal{Z} proches de la droite $\Re(s) = 1$ sont associés à de bonnes approximations simultanées.

La distance $1 - \Re(s)$ à la droite $\Re(s) = 1$ de ces pôles proches, est alors précisée par la *forme quadratique* en les composants v_j du vecteur de qualité, la partie imaginaire étant essentiellement proportionnelle au dénominateur commun q_1 .

Comme nous allons le voir, les propriétés de la géométrie des pôles de $\Lambda(s)$ dépendent de façon cruciale des *approximations simultanées* des rapports $c_{\text{aff}}(i, j)$, combinées avec les arguments analytiques du *théorème des fonctions implicites*.

12.1 Énoncé du théorème (2-DIOP-sans mémoire-fini)

Le théorème (C-sans mémoire) montre que dans le cas d'un vecteur de probabilités \mathbf{p} irrationnel, il n'existe pas d'autre point de \mathcal{Z} sur la droite $\Re(s) = 1$, à part $s = 1$. Le théorème suivant décrit précisément la géométrie de l'ensemble \mathcal{Z} proche de la droite $\Re(s) = 1$, en fonction des propriétés d'approximabilité du vecteur \mathbf{p} .

Il fait intervenir une famille particulière de normes (la famille canonique associée au vecteur \mathbf{p}). Cette famille sera définie à la sous-section 12.3, ainsi que la fonction Δ .

Théorème 12.1. *Soit $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_r)$ une famille irrationnelle de probabilités. Alors il existe une famille de normes pour laquelle la fonction d'approximation globale F satisfait les assertions suivantes :*

(i) *Pour tout $\eta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que tous les éléments $s = \sigma + it$ de l'ensemble \mathcal{Z}_+ satisfont*

$$\sigma \leq \sigma_+(t) := 1 - \frac{1 - \eta}{F^2((1 + \epsilon)t)}.$$

(ii) *Pour tout $\eta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel qu'il existe une infinité d'éléments $s = \sigma + it$ of \mathcal{Z}_+ qui satisfont*

$$\sigma \geq \sigma_-(t) := 1 - \frac{1 + \eta}{F^2((1 - \epsilon)t)}.$$

Le théorème 12.1 prend la forme particulière suivante dans le cas des exposants d'irrationalité finis. Pour conclure sur la H-discipline, on fait comme dans la partie sur le chapitre 11. Ceci est résumé dans la sous-section 5.3.3 des résultats de la thèse.

Théorème (2-DIOP-sans mémoire-fini). *On considère une source sans mémoire associée à un vecteur \mathbf{p} fini. Si la famille irrationnelle \mathbf{p} a un exposant d'irrationalité fini μ_0 , alors :*

(i) *Pour tout $\nu > \mu_0$, il existe $B_\nu > 0$, tel que toutes les racines $s = \sigma + it$ de l'ensemble \mathcal{Z}_+ satisfont l'inégalité*

$$\sigma \leq 1 - B_\nu t^{-2-2\nu}, \quad t \geq 1.$$

(ii) *Pour tout $\theta < \mu_0$, il existe $C_\theta > 0$, et un ensemble infini de racines $s = \sigma + it$ de l'ensemble \mathcal{Z}_+ telles que*

$$\sigma \geq 1 - C_\theta t^{-2-2\theta}, \quad t \geq 1.$$

Autrement dit, dans le cas d'un alphabet fini, le théorème (2-DIOP-sans mémoire) est optimal, c'est-à-dire que pour tout $\alpha < 2 + 2\mu_0$, il devient faux.

Cela laisse penser que pour les systèmes sans mémoire finis, l'ordre de grandeur pour l'étude des coûts sur lequel ce théorème permet de conclure (voir théorème (B)) est bien représentatif

de la réalité, c'est-à-dire qu'on a trouvé le *bon* ordre de grandeur. La preuve cependant n'a pas été complètement réalisée.

La preuve du théorème 12.1 comporte deux phases :

- On montre d'abord que les pôles de $\Lambda(s)$ sont forcément dans des régions précises, les « échelles », qui sont associées à des bons (et parmi eux des meilleurs) approximants (sous-section 12.2).
- On montre ensuite que réciproquement, une approximation suffisamment bonne donne effectivement lieu à un pôle (sous-section 12.3).

Tout ce qui suit est largement inspiré des travaux de Lapidus and Van Frankenhuijsen (voir [38, §3.5]).

12.2 Echelles et pôles

Dans la suite, nous aurons affaire plusieurs fois aux *bandes verticales* de la forme

$$\mathcal{B}(\delta) := \{s = \sigma + it; \sigma \in]1 - \delta, 1]\},$$

notre but étant de localiser les éléments de \mathcal{Z} situés juste à gauche de $\Re(s) = 1$.

Des réponses sont apportées par les lemmes 12.3–12.5 ci-dessous, dont les preuves peuvent être trouvées dans la section 12.5.

D'abord, la notion d'*échelle* est essentielle. Dans la suite, on utilisera le paramètre de normalisation $w := 1/c_{\text{aff}}(r)$.

Définition 12.2. [Echelles] *On note $\mathcal{R}(\delta, \epsilon)$ le rectangle*

$$\mathcal{R}(\delta, \epsilon) := \{s = \sigma + it; \sigma \in]1 - \delta, 1], |t| \leq \epsilon w\},$$

(avec $w := 1/c_{\text{aff}}(r)$). *Pour tout indice $k \in \{1, \dots, r\}$, on désigne par $\mathcal{R}_k(q, \delta, \epsilon)$ le translaté vertical de $\mathcal{R}(\delta, \epsilon)$ par le complexe $2i\pi q/c_{\text{aff}}(k)$. Leur réunion donne lieu, quand q varie dans \mathbb{Z} , à l'échelle régulière, notée $\mathcal{L}_k(\delta, \epsilon)$:*

$$\mathcal{L}_k(\delta, \epsilon) = \cup_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{R}_k(q, \delta, \epsilon).$$

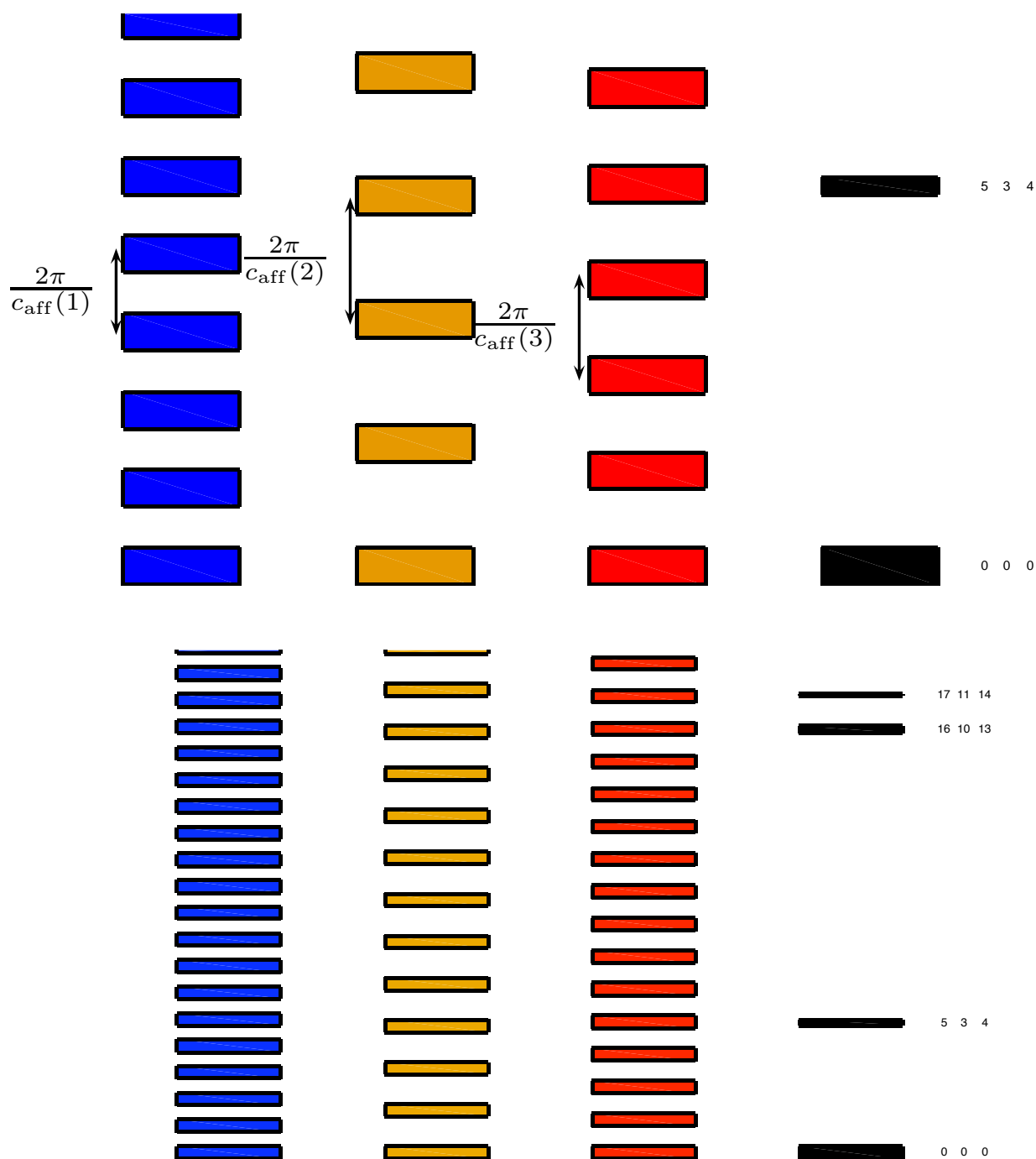
L'intersection $\cap \mathcal{L}_k(\delta, \epsilon)$ pour $k \in \{1, \dots, r\}$ définit l'échelle-intersection $\mathcal{L}(\delta, \epsilon)$ relative aux paramètres (δ, ϵ) .

La géométrie de l'échelle-intersection est très liée aux propriétés d'approximation. Plus précisément, un barreau de l'échelle-intersection existe si et seulement si il est associé à de bons dénominateurs d'approximation.

Lemme 12.3. *Pour tout ϵ , tel que $0 < \epsilon < \pi/2$, le barreau de l'échelle-intersection $\mathcal{L}(\delta, \epsilon)$ associé à la suite d'entiers (q_1, q_2, \dots, q_r) est non vide, si et seulement si, pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, le vecteur $\{q_k \alpha^{(k)}\}$ est dans l'ensemble (avec $w := 1/c_{\text{aff}}(r)$)*

$$\mathcal{U}(\epsilon) := \left\{ (u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{R}^r; |u_\ell| \leq \frac{\epsilon}{\pi} w c_{\text{aff}}(\ell) \right\}. \quad (12.7)$$

De plus, les éléments de \mathcal{Z} assez proches de la droite $\{\Re(s) = 1\}$ appartiennent forcément à l'échelle intersection.



Les trois premières échelles sont régulières, et les barreaux réguliers sur chaque échelle ne sont pas disposés avec les mêmes intervalles (car les $c_{\text{aff}}(i)$ sont différents). La dernière échelle (à droite), est l'intersection des échelles régulières.

FIG. 12.2 – Echelles régulières et échelle-intersection

Lemme 12.4. *Pour tout ϵ , tel que $0 < \epsilon < \pi/2$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que l'inclusion $\mathcal{Z} \cap \mathcal{B}(\delta) \subset \mathcal{L}(\delta, \epsilon)$ a lieu pour tout $\delta \leq \delta(\epsilon)$. De plus, δ est $O(\epsilon^2)$, quand $\epsilon \rightarrow 0$.*

Une paire (ϵ, δ) avec $\delta \leq \delta(\epsilon)$ est dite *compatible*.

Enfin, on prouve que pour des paramètres (ϵ, δ) bien choisis, chaque barreau de l'échelle-intersection contient *au moins* un pôle de Λ .

Lemme 12.5. *Il existe une paire compatible (ϵ, δ) , tels que tous les éléments de \mathcal{Z} dans la bande verticale $\mathcal{B}(\delta)$ appartiennent à l'échelle-intersection $\mathcal{L}(\delta, \epsilon)$, et chaque barreau de l'échelle-intersection contient au plus un élément de \mathcal{Z} .*

Finalement : les pôles suffisamment proches de $\Re(s) = 1$ se trouvent sur les barreaux d'une petite échelle sur laquelle il n'y a pas beaucoup de barreaux...

12.3 Fonction Δ et nouvelle famille de normes

Dans cette section, on prouve la réciproque : si l'approximation associée à un barreau est suffisamment bonne, alors forcément, il y a un pôle sur le barreau.

Comme on l'a déjà indiqué ci-dessus (voir par exemple l'équation (12.4)), la preuve repose sur l'existence d'une fonction analytique Δ de variable réelle, qui décrit, pour des paramètres (ϵ, δ) bien choisis, l'unique racine possible dans \mathcal{Z} contenue dans chaque barreau de l'échelle-intersection.

La preuve des lemmes 12.6 et 12.7 se trouve dans la section 12.5.

Lemme 12.6. *Il existe une paire compatible (ϵ, δ) , et une fonction analytique Δ de variable réelle, définie sur l'hypercube $\mathcal{U}(\epsilon)$ défini en (12.7), pour laquelle la seule racine possible de \mathcal{Z} contenue dans le barreau de l'échelle-intersection $\mathcal{L}(\delta, \epsilon)$ indexé par (q_1, q_2, \dots, q_r) , s'écrit, pour $k \in \{1, \dots, r\}$, comme*

$$z = 2i\pi \frac{q_k}{c_{\text{aff}}(k)} + \Delta(\{q_k \alpha^{(k)}\}). \quad (12.8)$$

La fonction Δ est définie à partir de l'extension multivariées de $\lambda(s)$ suivante :

$$\lambda(s, u) := \sum_{\ell=1}^r p_{\ell}^s \exp(-2\pi i u_{\ell}), \quad (12.9)$$

où $u = (u_1, \dots, u_r)$ (voir [38, §3.5] et la section 12.5 pour les détails).

Plus précisément, $\Delta(u)$ est la fonction analytique multivariable qui permet d'exprimer la solution s de l'équation $\lambda(s, u) = 1$, dont l'existence est garantie par le *théorème des fonctions implicites*.

Enfin, on montre dans le lemme qui suit qu'il existe une famille canonique de normes, attachée à Δ (équation (12.16)), qui est adaptée à la géométrie de Λ .

Lemme 12.7. *Soit $S := 1 - \Re(\Delta)$. On note T la forme quadratique hessienne de S à l'origine.*

Chaque restriction de T à un hyperplan $\{u_k = 0\}$ est définie positive et définit une norme notée T_k .

Pour tout u dans la réunion des hyperplans $\{u_{\ell} = 0\}$, il existe un indice ℓ tel que $u_{\ell} = 0$, et on pose alors $\|u\|_T := \|u\|_{T_{\ell}}$.

Alors, pour tout $\eta > 0$, il existe $\epsilon > 0$, tel que, sur le voisinage $\tilde{\mathcal{U}}(\epsilon)$ formé de l'intersection de $\mathcal{U}(\epsilon)$ avec l'union des hyperplans $\{u_k = 0\}$, l'inégalité suivante a lieu

$$(1 - \eta) \|u\|_T^2 \leq S(u) \leq (1 + \eta) \|u\|_T^2. \quad (12.10)$$

12.4 Fin de la preuve du théorème (2-DIOP-sans mémoire-fini)

Les lemmes 12.3, 12.4, 12.5, 12.6 et 12.3, permettent de terminer la preuve du théorème 12.1.

Considérons une famille irrationnelle $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_r)$ de probabilités.

(i) Pour tout $\eta > 0$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que l'inégalité (12.10) ait lieu sur $\mathcal{U}(\epsilon_0)$. Fixons une paire (ϵ, δ) comme dans le lemme 12.6, avec $\epsilon < \epsilon_0$. D'après ce lemme, toute racine $s = \sigma + it$ de $\lambda(s) = 1$ contenue dans la bande verticale $\mathcal{B}(\delta)$, est de la forme (12.8) pour un certain $q_k \in \mathbb{Z}$, avec $\{q_k \alpha^{(k)}\} \in \tilde{\mathcal{U}}(\epsilon)$, et ce pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$.

Donc, l'inégalité (12.10) s'applique à chaque $\{q_k \alpha^{(k)}\}$, et on a établi que pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$:

$$1 - \sigma = 1 - \Re[\Delta(\{q_k \alpha^{(k)}\})] \geq (1 - \eta) \|\{q_k \alpha^{(k)}\}\|_T^2 \geq \frac{1 - \eta}{f_k(q_k)^2},$$

où f_k est la fonction d'approximation de $\alpha^{(k)}$.

De plus, comme $s = \sigma + it$ appartient au rectangle $\mathcal{R}_k(q_k, \delta, \epsilon)$, on a que, si $t \geq 1$, alors

$$\left| t - 2\pi \frac{q_k}{c_{\text{aff}}(k)} \right| \leq \epsilon w, \quad \text{et donc} \quad q_k \leq \frac{c_{\text{aff}}(k)t}{2\pi} (1 + \epsilon w).$$

Finalement, pour $t \geq 1$, toute racine $s = \sigma + it$ contenue dans la bande verticale $\mathcal{B}(\delta)$ satisfait, pour tout k ,

$$1 - \sigma \geq \frac{1 - \eta}{f_k(q_k)^2} \quad \text{et donc} \quad 1 - \sigma \geq \frac{1 - \eta}{F^2((1 + \epsilon w)t)},$$

où $F(t) := \min \left\{ f_k \left(\frac{c_{\text{aff}}(k)t}{2\pi} \right) \right\}$ est la fonction d'approximation globale canonique.

(ii) Pour tout $\eta > 0$, il existe $\epsilon_0 > 0$ telle que l'inégalité (12.10) ait lieu sur $\mathcal{U}(\epsilon_0)$. Fixons une paire (ϵ, δ) comme dans le lemme 12.6. Et considérons un BSAD q_k du vecteur $\alpha^{(k)}$. Si q_k est un assez grand BSAD, alors le vecteur $\{q_k \alpha^{(k)}\}$ est assez proche de $\underline{0}$, et le nombre complexe $\Delta(\{q_k \alpha^{(k)}\})$ appartient au rectangle $\mathcal{R}(\delta, \epsilon)$.

La racine $s = \sigma + it$ associée à ce BSAD q_k de $\alpha^{(k)}$ satisfait alors

$$1 - \sigma \leq (1 + \eta) \|\{q_k \alpha^{(k)}\}\|_T^2 = \frac{1 + \eta}{f_k(q_k)^2}$$

où f_k est la fonction d'approximation de $\alpha^{(k)}$.

Ainsi, de manière analogue, on établit que l'inégalité $q_k \geq \frac{c_{\text{aff}}(k)t}{2\pi} (1 - \epsilon w)$ est valable pour $t \geq 1$, et elle entraîne

$$1 - \sigma \leq \frac{1 + \eta}{f_k \left(\frac{c_{\text{aff}}(k)t}{2\pi} (1 - \epsilon w) \right)^2} \leq \frac{1 + \eta}{F^2((1 - \epsilon w)t)},$$

où F est la fonction d'approximation globale canonique.

Le théorème (2-DIOP-sans mémoire-fini) se prouve de la même façon.

En effet, pour tout $\nu > \mu_0$, la fonction d'approximation globale F vérifie $F(t) \leq A_\nu t^{\nu+1}$ pour un certain $A_\nu > 0$ (voir chapitre 5 et proposition 12.9).

Le (i) du théorème 12.1 montre alors que pour tout $\eta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que tous les éléments de \mathcal{Z}_+ vérifient

$$\sigma \leq 1 - \frac{1 - \eta}{[A_\nu(1 + \epsilon)]^{2+2\nu} t^{2+2\nu}},$$

et donc :

$$\sigma \leq 1 - B_\nu t^{-2-2\nu},$$

pour une constante B_ν bien choisie.

Soit $\theta < \mu_0$. D'après le lemme 5.28, en reprenant la preuve du (ii) du théorème 12.1, on montre alors que pour tout $\eta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel qu'il existe une infinité d'éléments de \mathcal{Z}_+ tels que

$$\sigma \geq 1 - \frac{1 + \eta}{(1 - \epsilon)^{2+2\theta} t^{2+2\theta}}.$$

et donc :

$$\sigma \geq 1 - C_\nu t^{-2-2\theta},$$

pour une constante C_ν bien choisie.

12.5 Preuves annexes

12.5.1 Invariance de l'exposant d'irrationalité

On établit ici le fait, annoncé à la sous-section 5.3.2, que l'exposant d'irrationalité est bien défini, indépendamment de l'ordre des (p_j) .

Le lemme qui suit traite de la comparaison de l'approximation pour deux indices. Et la proposition 12.9 de l'approximation globale de tous les indices à la fois.

Lemme 12.8.

On suppose que pour un certain $k \in \{1, \dots, r\}$, et pour tout $\ell \in \{1, \dots, r\}$,

$$|\{q_k c_{\text{aff}}(k, \ell)\}| \leq \frac{1}{4} c_{\text{aff}}(r, \ell).$$

Pour tout $\ell \in \{1, \dots, r\}$, on note alors q_ℓ les numérateurs correspondants, c'est à dire :

$$q_\ell = q_k c_{\text{aff}}(k, \ell) - \{q_k c_{\text{aff}}(k, \ell)\}.$$

(pour $k = \ell$, $c_{\text{aff}}(k, k) = 1$, donc $\{q_k c_{\text{aff}}(k, k)\} = 0$, donc $q_k = q_\ell$ et tout est bien cohérent).

On peut tirer les conséquences suivantes :

(i) Alors pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, pour tout $\ell \in \{1, \dots, r\}$:

$$\{q_j c_{\text{aff}}(j, \ell)\} = q_j c_{\text{aff}}(j, \ell) - q_\ell$$

et

$$|\{q_j c_{\text{aff}}(j, \ell)\}| \leq \frac{1}{2} c_{\text{aff}}(r, \ell).$$

(ii) Soit $\ell \in \{1, \dots, r\}$. Pour toute norme $\|\cdot\|_k$ sur $\{u_k = 0\}$ et $\|\cdot\|_\ell$ sur $\{u_\ell = 0\}$ (par exemple T_k et T_ℓ), il existe c indépendant de la famille (q_1, \dots, q_r) tel que :

$$\|\{q_\ell \alpha^{(\ell)}\}\|_\ell \leq c \|\{q_k \alpha^{(k)}\}\|_k.$$

Si on suppose en plus que q_k est un $\|\cdot\|_k - \alpha$ -BSAD, alors pour toute paire de fonctions d'approximation f_ℓ de $\alpha^{(\ell)}$ pour $\|\cdot\|_\ell$ et f_k de $\alpha^{(k)}$ pour $\|\cdot\|_k$, on a :

$$f_k(q_k) \leq c f_\ell(q_\ell).$$

Proposition 12.9. *On suppose que pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, pour tout $\ell \in \{1, \dots, r\}$,*

$$|\{q_k c_{\text{aff}}(k, \ell)\}| \leq \frac{1}{4} c_{\text{aff}}(r, \ell).$$

D'après le lemme 12.8, tous les autres q_j sont alors déterminés. On a alors aussi :

(i) *pour toute famille de normes $(\|\cdot\|_k)_{k \in \{1, \dots, r\}}$, où la norme $\|\cdot\|_k$ est définie sur $\{u_k = 0\}$ (possiblement $\|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{T_k}$), il existe C tel que pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$ et pour tout $\ell \in \{1, \dots, r\}$:*

$$\|\{q_\ell \alpha^{(\ell)}\}\|_\ell \leq C \|\{q_k \alpha^{(k)}\}\|_k.$$

Et si q_k est un BSAD de $\alpha^{(k)}$ pour $\|\cdot\|_k$, alors il existe C tel que pour tout $\ell \in \{1, \dots, r\}$:

$$f_k(q_k) \leq C f_k(q_\ell).$$

(ii) *les $\alpha^{(k)}$, $k \in \{1, \dots, r\}$ ont même exposant d'irrationalité.*

Preuve du lemme 12.8.

(i) Soit $\ell \in \{1, \dots, r\}$. Par hypothèse,

$$|q_k c_{\text{aff}}(k, \ell) - q_\ell| \leq \frac{1}{4} c_{\text{aff}}(r, \ell),$$

c'est-à-dire

$$\left| \frac{q_k}{c_{\text{aff}}(k)} - \frac{q_\ell}{c_{\text{aff}}(\ell)} \right| \leq \frac{1}{4c_{\text{aff}}(r)}.$$

Soit $j \in \{1, \dots, r\}$. On a par inégalité triangulaire,

$$\left| \frac{q_j}{c_{\text{aff}}(j)} - \frac{q_\ell}{c_{\text{aff}}(\ell)} \right| \leq \left| \frac{q_j}{c_{\text{aff}}(j)} - \frac{q_k}{c_{\text{aff}}(k)} \right| + \left| \frac{q_k}{c_{\text{aff}}(k)} - \frac{q_\ell}{c_{\text{aff}}(\ell)} \right| \leq \frac{1}{2c_{\text{aff}}(r)}.$$

c'est-à-dire,

$$|q_j c_{\text{aff}}(j, \ell) - q_\ell| \leq \frac{1}{2} c_{\text{aff}}(r, \ell)$$

et donc

$$\{q_j c_{\text{aff}}(j, \ell)\} = q_j c_{\text{aff}}(j, \ell) - q_\ell.$$

(ii) On note encore $\|\cdot\|_\star$ la restriction de $\|\cdot\|_\star$ aux hyperplans. Par équivalence des normes en dimension finie, il existe c_- tel que :

$$c_- \|\{q_\ell \alpha^{(\ell)}\}\|_\ell \leq \|\{q_\ell \alpha^{(\ell)}\}\|_\star.$$

On a aussi qu'il existe c_+ tel que :

$$\|\{q_k \alpha^{(k)}\}\|_\star \leq c_+ \|\{q_k \alpha^{(k)}\}\|_k.$$

Et finalement :

$$\|\{q_\ell \alpha^{(\ell)}\}\|_\ell \leq \frac{2c_+}{c_-} \|\{q_k \alpha^{(k)}\}\|_k,$$

et on conclut en posant $c = \frac{2c_+}{c_-}$.

Comme f_ℓ est une fonction d'approximation :

$$\frac{1}{f_\ell(q_\ell)} \leq \|\{q_\ell \alpha^{(\ell)}\}\|_\ell,$$

donc d'après ce qui précède :

$$\|\{q_\ell \alpha^{(\ell)}\}\|_\ell \leq c \|\{q_k \alpha^{(k)}\}\|_k.$$

En écrivant que f_k est une fonction d'approximation et q_k un BSAD, on obtient :

$$\|\{q_k \alpha^{(k)}\}\|_k = \frac{1}{f_k(q_k)},$$

ce qui permet de conclure. □

Preuve de la proposition 12.9.

(i) En appliquant le lemme 12.8, on trouve une famille de $c_{k,\ell}$ tel que pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, pour tout $\ell \in \{1, \dots, r\}$,

$$\|\{q_\ell \alpha^{(\ell)}\}\|_\ell \leq c_{k,\ell} \|\{q_k \alpha^{(k)}\}\|_k.$$

Avec $C = \sup_{k \in \{1, \dots, r\}, \ell \in \{1, \dots, r\}} c_{k,\ell}$, on a bien ce qu'on veut.

Et pour les fonctions d'approximation, c'est pareil.

(ii) Soit $k \in \{1, \dots, r\}$, $\ell \in \{1, \dots, r\}$. Il suffit de montrer que $\alpha^{(k)}$ et $\alpha^{(\ell)}$ ont même exposant d'irrationalité. Pour ça, par symétrie du problème, il suffit simplement de montrer que si ν est un exposant d'approximation pour $\alpha^{(\ell)}$, alors il est un exposant d'approximation pour $\alpha^{(k)}$.

Tous les $q_k \alpha^{(k)}$ -BSAD, sauf éventuellement un nombre fini (les premiers BSAD), vérifient que pour tout $\ell \in \{1, \dots, r\}$:

$$|\{q_k c_{\text{aff}}(k, \ell)\}| \leq \frac{1}{4} c_{\text{aff}}(r, \ell).$$

On est donc en mesure d'appliquer le lemme 12.8 : il existe c tel que

$$f_k(q_k) \leq c f_\ell(q_\ell)$$

(où les q_ℓ sont bien définis dans le lemme 12.8 comme les numérateurs des approximants). Comme $\alpha^{(\ell)}$ admet ν comme exposant d'approximation, alors, il existe A_ν tel que pour tout $q \in \mathbb{Z}^*$:

$$f_\ell(q) \leq A_\nu q^{\nu+1},$$

et donc :

$$f_k(q_k) \leq c A_\nu q_\ell^{\nu+1} = c A_\nu \left(\frac{q_\ell}{q_k} \right)^{\nu+1} q_k^{\nu+1}.$$

On peut alors trouver une constante A'_ν qui tient compte du fait que $\frac{q_\ell}{q_k}$ est borné, et du fait qu'il y a quelques q_k (en nombre fini) tel que le raisonnement ne fonctionne pas (voir au début) pour conclure que pour tout q_k BSAD :

$$f_k(q_k) \leq A'_\nu q_k^{\nu+1}.$$

□

12.5.2 Preuves relatives aux échelles et aux pôles

Preuve du lemme 12.3.

On commence par considérer une famille d'intervalles de l'axe réel $\mathcal{I}(a_i, \epsilon)$ centrés en a_i (pour $i \in \{1, \dots, n\}$) et de même rayon ϵ .

Supposons que quelle que soit la paire d'intervalles choisie, ils ont une intersection non vide. Ordonnons les centres a_i par ordre croissant. On a $|a_1 - a_n| < 2\epsilon$, et donc le milieu a de l'intervalle $[a_1, a_n]$ satisfait $|a_i - a| < \epsilon$ pour tout i tel que $i \in \{1, \dots, n\}$. Ce qui prouve que $a \in \mathcal{I}(a_i, \epsilon)$, pour tout i tel que $i \in \{1, \dots, n\}$, et donc la famille a une intersection non vide. Et la réciproque est évidente.

On a donc montré que la famille des $\mathcal{I}(a_i, \epsilon)$ a une intersection non vide, si et seulement si quelle que soit la paire d'intervalles choisie, ils ont une intersection non vide.

On applique cette propriété aux intervalles verticaux qui définissent un barreau de l'échelle-intersection : on prouve ainsi que le barreau de l'échelle-intersection associé au vecteur entier (q_1, q_2, \dots, q_r) est non vide si et seulement si, pour tout paire (k, ℓ) ,

$$\mathcal{R}_k(q_k, \delta, \epsilon) \cap \mathcal{R}_\ell(q_\ell, \delta, \epsilon) \neq \emptyset. \quad (12.11)$$

Alors, en utilisant le fait que $0 < \epsilon < \pi/2$, on a que pour toute paire d'indices (k, ℓ) , les assertions suivantes sont équivalentes à l'assertion (12.11),

$$2\pi \left| \frac{q_k}{c_{\text{aff}}(k)} - \frac{q_\ell}{c_{\text{aff}}(\ell)} \right| \leq 2\epsilon w, \quad \left| q_k \frac{c_{\text{aff}}(\ell)}{c_{\text{aff}}(k)} - q_\ell \right| \leq \frac{\epsilon}{\pi} c_{\text{aff}}(\ell) w, \quad |\{q_k c_{\text{aff}}(k, \ell)\}| \leq \frac{\epsilon}{\pi} c_{\text{aff}}(\ell) w.$$

□

Preuve du lemme 12.4. Pour tout ϵ tel que $0 < \epsilon < \pi/2$, on écrit l'égalité

$$\cos(\epsilon) p_k + \sum_{j \neq k} p_j = 1 - (1 - \cos(\epsilon)) p_k < 1.$$

On note

$$\alpha_- = \min_{j, k \in \{1, \dots, r\}} c_{\text{aff}}(j, k) = c_{\text{aff}}(r, 1).$$

En utilisant la continuité de l'application $\sigma \mapsto \cos(\epsilon) p_k^\sigma + \sum_{j \neq k} p_j^\sigma$, on obtient que pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, et tout ϵ avec $0 < \epsilon < \pi/2$, il existe $\delta_k(\epsilon) > 0$ tel que

$$\cos(\epsilon \alpha_-) p_k^\sigma + \sum_{j \neq k} p_j^\sigma < 1 \quad \text{pour tout } \sigma > 1 - \delta_k(\epsilon). \quad (12.12)$$

La preuve est faite par l'absurde. Supposons qu'il existe $\epsilon_0 > 0$, tel que, pour tout $\delta_0 > 0$, il existe un indice $k_0 = k_0(\delta_0) \in \{1, \dots, r\}$ et une racine $s_0 = \sigma_0 + it$ de $\lambda(s) = 1$ qui satisfont

$$1 - \delta_0 < \sigma_0 < 1, \quad \text{et } \forall q \in \mathbb{Z}, \quad \left| t - 2q \frac{\pi}{c_{\text{aff}}(k_0)} \right| > \epsilon_0 w.$$

Ceci implique l'inégalité

$$\cos(tc_{\text{aff}}(k_0)) < \cos(\epsilon_0 w c_{\text{aff}}(k_0)) \leq \cos(\epsilon_0 \alpha_-),$$

et en notant $\delta(\epsilon_0) := \min_{k \in \{1, \dots, r\}} \delta_k(\epsilon_0)$, on obtient grâce à 12.12

$$\cos(tc_{\text{aff}}(k_0)) p_{k_0}^\sigma + \sum_{j \neq k_0} p_j^\sigma < 1 \quad \text{pour tout } \sigma > 1 - \delta(\epsilon_0).$$

En particulier, en prenant, $\delta_0 \geq \delta(\epsilon)$, on a $\sigma_0 > 1 - \delta_0 \geq 1 - \delta(\epsilon_0)$, et donc

$$\cos(tc_{\text{aff}}(k_0)) p_{k_0}^{\sigma_0} + \sum_{j \neq k_0} p_j^{\sigma_0} < 1.$$

On écrit alors que,

$$1 = \Re \lambda(s_0) = \sum_{k \in \{1, \dots, r\}} \cos(tc_{\text{aff}}(k)) p_k^{\sigma_0} \leq \cos(tc_{\text{aff}}(k_0)) p_{k_0}^{\sigma_0} + \sum_{j \neq k_0} p_j^{\sigma_0}$$

ce qui permet de conclure

$$1 = \Re \lambda(s_0) < 1$$

et on a la contradiction recherchée. □

Preuve du lemme 12.5.

Soit $\epsilon, \delta > 0$. Considérons un élément $s = \sigma + it$ qui appartient à l'échelle-intersection $\mathcal{L}(\delta, \epsilon)$. Alors on a $\cos(tc_{\text{aff}}(j)) \geq \cos(\epsilon w c_{\text{aff}}(j)) \geq \cos \epsilon$ et $p_j^\sigma > p_j$, ce qui implique l'inégalité

$$|\Re(\lambda'(s))| = \sum_{j=1}^r c_{\text{aff}}(j) p_j^\sigma \cos(tc_{\text{aff}}(j)) > \cos \epsilon \left(\sum_{j=1}^r c_{\text{aff}}(j) p_j \right) = \cos \epsilon |\lambda'(1)|.$$

Considérons maintenant deux racines s et $s + h$ de l'équation $\lambda(s) = 1$, situées dans la bande verticale $\mathcal{B}(\delta)$. Alors le développement de Taylor de λ en $s + h$ conduit à l'inégalité

$$|\lambda(s + h) - \lambda(s) - h\lambda'(s)| = |h\lambda''(s)| \leq \frac{|h|^2}{2} \sup\{|\lambda''(z)|; z \in \mathcal{B}(\delta)\}.$$

Mais si $z \in \mathcal{B}(\delta)$, alors l'inégalité $|\lambda''(z)| \leq \lambda''(1 - \delta)$ a lieu, et donc, la distance $|h|$ entre deux racines satisfait l'inégalité

$$|h| \geq (2 \cos \epsilon) \frac{|\lambda'(1)|}{\lambda''(1 - \delta)}.$$

On a obtenu un minorant de la distance entre les pôles de la bande $\mathcal{B}(\delta)$.

Comme la borne inférieure tend vers $2|\lambda'(1)|/\lambda''(1)$ quand ϵ (et donc δ) tend vers 0, il est possible de choisir ϵ (et donc δ), tel que l'inégalité

$$\sqrt{\delta^2 + 4\epsilon^2 w^2} < (2 \cos \epsilon) \frac{|\lambda'(1)|}{\lambda''(1 - \delta)}$$

ait lieu.

Avec ce choix, chaque rectangle $\mathcal{R}_k(q, \delta, \epsilon)$ contient au plus un élément de \mathcal{Z} . □

12.5.3 Preuves relatives à la fonction Δ

Preuve du lemme 12.6.

On commence par prendre une paire compatible (ϵ, δ) , comme nous l'autorise le lemme 12.4. Le seul élément possible z de \mathcal{Z} contenu dans un barreau (non vide) de l'échelle-intersection, relatif à la séquence (q_1, q_2, \dots, q_r) , s'écrit, pour $k \in \{1, \dots, r\}$, sous la forme

$$z = 2i\pi q_k / c_{\text{aff}}(k) + s_k$$

où $s := s_k$ appartient à $\mathcal{R}(\delta, \epsilon)$, et satisfait

$$p_k^{s_k} + \sum_{\ell \neq k} p_\ell^{s_k} \exp(-2\pi i q_\ell c_{\text{aff}}(k, \ell)) = \sum_{\ell=1}^r p_\ell^{s_k} \exp(-2\pi i \{q_\ell c_{\text{aff}}(k, \ell)\}) = 1.$$

L'idée principale (voir [38, §3.5]) est de considérer l'équation plus générale $\lambda(s, u) = 1$, d'inconnue $u = (u_1, u_2, \dots, u_r) \in \mathbb{C}^r$, où $\lambda(s, u)$ est défini par (12.9), et qu'on rappelle ici :

$$\lambda(s, u) = 1 \quad \text{avec} \quad \lambda(s, u) := \sum_{\ell=1}^r p_\ell^s \exp(-2\pi i u_\ell). \quad (12.13)$$

Chaque solution $z \in \mathcal{Z}$ appartenant au barreau indicé par (q_1, q_2, \dots, q_r) de l'échelle-intersection $\mathcal{L}(\delta, \epsilon)$, fournit r solutions de la forme $(s_k, \{q_k \alpha^{(k)}\})$, qui satisfont d'après le lemme 12.3,

$$\forall \ell, k, \quad \Re s_k = \Re s_\ell, \quad \Im(s_k - s_\ell) = 2\pi \left(\frac{q_\ell}{c_{\text{aff}}(\ell)} - \frac{q_k}{c_{\text{aff}}(k)} \right) \quad \{q_k \alpha^{(k)}\} \in \mathcal{U}(\epsilon),$$

où $\mathcal{U}(\epsilon)$ est défini dans le lemme 12.3, et qu'on rappelle ici :

$$\mathcal{U}(\epsilon) := \left\{ (u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{R}^r; \quad |u_\ell| \leq \frac{\epsilon}{\pi} w c_{\text{aff}}(\ell) \right\}.$$

C'est-à-dire que la paire $(1, \underline{0})$, ainsi que toutes les paires $(s_k, \{q_k \alpha^{(k)}\})$, appartiennent à l'ensemble

$$\underline{\mathcal{Z}}(\epsilon, \delta) := \{(s, u) \in \Sigma(\delta, \epsilon); \quad \lambda(s, u) = 1\}, \quad \text{avec} \quad \Sigma(\delta, \epsilon) = \mathcal{R}(\delta, \epsilon) \times \mathcal{U}(\epsilon).$$

Dans le but de décrire l'ensemble $\underline{\mathcal{Z}}(\epsilon, \delta)$, on applique le théorème des fonctions implicites à l'équation $\lambda(s, u) = 1$ autour du point $(1, \underline{0})$. Ceci est possible car la fonction $\lambda : \Sigma(\delta, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe \mathcal{C}^∞ (et même analytique), et la dérivée partielle $\partial\lambda/\partial s(1, \underline{0})$, qui est égale à $\lambda'(1)$, est non nulle. On prouve ainsi l'existence :

- ▶ d'un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}(\epsilon)$ de $\underline{0}$ dans \mathbb{R}^r ,
- ▶ d'un voisinage complexe $\mathcal{W} \subset \mathcal{R}(\delta, \epsilon)$ de 1 dans \mathbb{C} ,
- ▶ et d'une fonction Δ définie sur \mathcal{V} et de classe \mathcal{C}^∞ ,

telles que toute solution (s, u) de l'équation $\lambda(s, u) = 1$ avec $(s, u) \in \mathcal{W} \times \mathcal{V}$ s'écrit $s = \Delta(u)$.

Dit autrement :

$$(\mathcal{W} \times \mathcal{V}) \cap \underline{\mathcal{Z}}(\epsilon, \delta) = \{(s, u) \in \mathcal{W} \times \mathcal{V}; \quad s = \Delta(u)\}. \quad (12.14)$$

On choisit alors $\epsilon' < \epsilon$ et $\delta'' < \delta$ de telle sorte qu'on ait les deux inclusions :

$$\begin{cases} \mathcal{U}(\epsilon') \subset \mathcal{V} \\ \mathcal{R}(\delta'', \epsilon') \subset \mathcal{W} \end{cases} .$$

En prenant ensuite $\delta' = \min(\delta(\epsilon'), \delta'')$, la paire (ϵ', δ') est compatible, et l'égalité (12.14) implique

$$\underline{\mathcal{Z}}(\epsilon', \delta') = \{(s, u) \in \mathcal{R}(\delta', \epsilon') \times \mathcal{U}(\epsilon'); \quad s = \Delta(u)\}.$$

On peut maintenant conclure sur l'ensemble $\mathcal{Z} \cap \mathcal{B}(\delta')$, en écrivant que les éléments de $\underline{\mathcal{Z}}(\epsilon', \delta')$ sont à chercher parmi les couples de la forme $(s_k, \{q_k \alpha^{(k)}\})$, et ainsi on prouve que le seul élément possible de \mathcal{Z} sur un barreau non vide indexé par (q_1, q_2, \dots, q_r) de l'échelle-intersection $\mathcal{L}(\delta, \epsilon)$, peut s'écrire comme en (12.8). Cet élément existe dès que $\Delta(\{q_k \alpha^{(k)}\})$ est dans l'ensemble $\mathcal{R}(\delta, \epsilon)$. \square

Preuve du lemme 12.7.

La dérivée première $\Delta'(\underline{0})$ (non nulle, par le théorème des fonctions implicites), et la dérivée seconde $\Delta''(\underline{0})$ de Δ en $\underline{0}$ se calculent facilement.

De plus, la fonction Δ peut être prolongée sur un voisinage complexe de $\underline{0}$, en une fonction analytique en les nombres complexes (z_1, z_2, \dots, z_r) . Près de $\underline{0}$, les valeurs $\Delta(iu)$ sont réelles pour $u \in \mathbb{R}^r$. En effet, par prolongement analytique, on doit avoir $\lambda(\Delta(iu), iu) = 1$, c'est-à-dire que $\Delta(iu)$ est solution de l'équation en s :

$$\sum_{\ell=1}^r p_\ell^s \exp(2\pi u \ell^2)$$

qui possède une solution réelle par le théorème des valeurs intermédiaires, et par unicité, $\Delta(iu)$ est égal à cette solution réelle.

Ceci implique que les composants de $\Delta'(\underline{0})$ appartiennent à $i\mathbb{R}$,

$$\Delta'(\underline{0}) = \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x_\ell}(\underline{0}) \right) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x_\ell}(\underline{0}) = -2i\pi \frac{p_\ell}{\lambda'(1)}, \quad (12.15)$$

tandis que tous les coefficients de la matrice hessienne de $\Delta''(\underline{0})$ sont réels,

$$\frac{1}{4\pi^2} \Delta''(\underline{0})_{j,k} = \left(\frac{\lambda''(1)}{\lambda'(1)^3} + \frac{c_{\text{aff}}(j) + c_{\text{aff}}(k)}{\lambda'(1)^2} \right) p_j p_k + p_k \delta_{j,k} \left(\frac{1}{\lambda'(1)} \right) \quad (12.16)$$

(ici, $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker).

Remarque. Plus généralement, les coefficients de la dérivée d'ordre k sont réels pour k pair, et imaginaires purs pour k impair.

Ceci permet de définir la forme quadratique

$$-T(u) := \frac{1}{2} {}^t u \Delta''(\underline{0}) u$$

qui est réelle pour les r -uplets réels.

Le développement de Taylor de Δ en $u \in \mathcal{U}(\epsilon)$,

$$\Delta(u) = 1 + u \cdot \Delta'(\underline{0}) + \frac{1}{2} {}^t u \Delta''(\underline{0}) u + O(\|u\|^3)$$

implique les deux relations suivantes, valables pour tout $u \in \mathcal{U}(\epsilon)$,

$$S(u) := 1 - \Re \Delta(u) = T(u) + O(\|u\|^4), \quad \Im \Delta(u) = -iu \cdot \Delta'(\underline{0}) + O(\|u\|^3).$$

Mais la seconde composante $\{q_k \alpha^{(k)}\}$ des solutions $(s_k, \{q_k \alpha^{(k)}\})$ appartient à l'union sur ℓ des hyperplans $\{u_\ell = 0\}$. Considérons alors la restriction de Δ à

$$\tilde{\mathcal{U}}(\epsilon) := \mathcal{U}(\epsilon) \cap \bigcup_{\ell \in \{1, \dots, r\}} \{u_\ell = 0\}.$$

On va maintenant prouver que la restriction de la forme quadratique $u \mapsto T(u)$ à chaque hyperplan $\{u_k = 0\}$ est réelle définie positive. Ceci est une conséquence du lemme 12.10 ci-dessous.

Notons T_ℓ la restriction de T à l'hyperplan $\{u_\ell = 0\}$ et $\|u\|_{T_\ell}$ la norme définie par la forme T_ℓ définie positive. Pour tout u dans la réunion des hyperplans $\{u_\ell = 0\}$, il existe un indice ℓ tel que $u_\ell = 0$, et on pose $\|u\|_T := \|u\|_{T_\ell}$.

Alors, pour tout $\eta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que les inégalités (12.10) aient lieu pour tout $u \in \tilde{\mathcal{U}}(\epsilon)$. \square

Terminons par ce lemme qu'on a utilisé dans la preuve du lemme qui précède.

Lemme 12.10. *Tout point $(s, u) \in \underline{\mathcal{Z}}(\epsilon, \delta)$ vérifie $\Re s \leq 1$.*

Et le seul point (s, u) de $\underline{\mathcal{Z}}(\epsilon, \delta)$ pour lequel $\Re s = 1$ et $u_k = 0$ pour un certain $k \in \{1, \dots, r\}$, est le point $(1, \mathbf{0})$.

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $(s, u) \in \underline{\mathcal{Z}}(\epsilon, \delta)$ avec $s = \sigma + it$ et $\sigma > 1$. On a :

$$\lambda(\sigma + it, u) = \sum_{k=1}^r p_k^\sigma \exp(-itc_{\text{aff}}(k) - 2\pi i u_k) = 1,$$

et par inégalité triangulaire

$$\lambda(\sigma + it, u) \leq \sum_{k=1}^r p_k^\sigma < 1,$$

ce qui fournit une contradiction.

On considère alors un point $(s, u) \in \underline{\mathcal{Z}}(\epsilon, \delta)$ avec $\sigma = 1$. On écrit que :

$$\Re \lambda(1 + it, u) = \sum_{k=1}^r p_k \cos(tc_{\text{aff}}(k) + 2\pi u_k) = 1,$$

donc forcément, d'après la réciproque de l'inégalité triangulaire, pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, $\cos(tc_{\text{aff}}(k) + 2\pi u_k) = 1$.

Supposons qu'il existe une coordonnée $u_k = 0$, pour un certain $k \in \{1, \dots, r\}$. Pour cet indice k , l'égalité $\cos(tc_{\text{aff}}(k) + 2\pi u_k) = 1$ implique que $t = 0$, et les autres égalités $\cos(tc_{\text{aff}}(\ell) + 2\pi u_\ell) = 1$, pour $\ell \neq k$ impliquent $u_\ell = 0$. \square

Quatrième partie

Théorèmes taubériens

Une bonne connaissance de la région de discipline d'une série de Dirichlet, au sens où nous l'avons défini aux définitions 2.12 et 2.13, s'est avérée essentielle dans les résultats des premières parties de cette thèse. Dans le début de cette thèse, les séries de Dirichlet sont de la forme

$$\Lambda(s) = \sum_{w \in \Sigma^*} p_w^s,$$

avec des p_w réels positifs et inférieurs ou égaux à 1. Ici, dans cette partie, je me propose d'étudier les séries de Dirichlet classiques de la théorie des nombres, qui s'écrivent sous la forme

$$F(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}.$$

La question est analogue : en quoi une bonne connaissance de la région de discipline de cette série permet-elle d'obtenir des informations sur l'asymptotique des coefficients ? Ici, classiquement, on s'intéresse à la somme partielle $N(t) := \sum_{n \leq t} a_n$ et à son asymptotique pour $t \rightarrow \infty$. C'est l'objet des théorèmes taubériens que d'opérer un tel transfert, entre discipline de la série $F(s)$ et asymptotique de la fonction $N(t)$.

Motivations. Ce chapitre a été le point de départ « historique » de ma thèse, comme je l'explique maintenant :

Dans les premiers travaux sur l'analyse « dynamique » de l'algorithme d'Euclide [57, 6, 55, 25], il s'agit de faire de l'analyse en moyenne, et dans ce cas la série génératrice des coûts étudiés est une série de Dirichlet $F(s)$ à coefficients positifs. On peut utiliser alors le théorème taubérien dit de Delange, qui s'applique sous des hypothèses de discipline très faibles. Cela a permis d'obtenir des résultats sur l'analyse en moyenne de toute une classe d'algorithmes d'Euclide, mais on ne peut dans ce cas obtenir des termes de reste dans l'asymptotique de $N(t)$.

Quand on se tourne vers l'analyse « dynamique en distribution », il faut manipuler des séries de Dirichlet où les coefficients $a_n := a_n(w)$ sont des nombres complexes qui dépendent d'un paramètre w lui-même complexe, et on veut obtenir des résultats asymptotiques sur $N(t)(w)$ qui soient uniformes par rapport à w . Il est donc nécessaire de travailler avec des séries de Dirichlet dont les coefficients a_n sont quelconques et on veut obtenir des termes de reste. On entre dans le domaine des théorèmes taubériens dits « avec reste ».

Dans le papier [5] fondateur de l'« analyse en distribution », les auteures, Baladi et Vallée, ont rencontré des difficultés, car elles ne connaissaient pas vraiment bien le domaine des théorèmes taubériens avec reste ; elles ont résolu ces difficultés par des méthodes un peu ad-hoc, en parties inexacts d'ailleurs, qui ont été corrigées par la suite par Eda Cesaratto dans [9]. Quand il s'est agi d'obtenir des résultats d'analyse dynamique plus généraux, sur l'évolution de la densité des rationnels tout au long de l'exécution de l'algorithme d'Euclide, les auteurs de [10] se sont rendu compte qu'ils ne pouvaient plus étendre la technique de [5]. Il leur fallait vraiment pouvoir utiliser des théorèmes taubériens avec reste. C'est pourquoi Driss Essouabri et Brigitte Vallée ont eu l'idée de cette thèse, et de cette co-direction.

Pour d'autres utilisations de théorèmes taubériens avec reste, on pourra consulter [60] et [39].

Résultats. J'ai donc commencé, la première année de ma thèse, à travailler sur les théorèmes taubériens avec reste.

Le théorème taubérien de Landau (travail original [36]) permet d'estimer la moyenne des coefficients d'une série de Dirichlet à termes positifs, pourvu qu'elle se prolonge méromorphiquement sur une bande verticale à gauche du pôle dominant. Dans l'énoncé original du théorème, les

hypothèses sous lesquelles il peut s'appliquer apparaissent assez restrictives. Mais beaucoup de mathématiciens ont remarqué que ces hypothèses n'étaient pas réellement nécessaires dans la preuve.

- (a) Suivant une idée de Driss Essouabri, je donne une adaptation du texte original de Landau qui n'utilise que des hypothèses minimales. Cette adaptation est fondée sur l'observation détaillée de la preuve originale de Landau, qui me permet de supprimer les hypothèses superflues pour ne garder que les hypothèses essentielles.
- (b) Motivé par les besoins des auteurs de l'article [10], je traite aussi le cas où les coefficients a_n sont des complexes quelconques. Suivant une idée mise en avant par Loick Lhote, je montre qu'on peut obtenir aussi une asymptotique avec reste des sommes partielles $N(t)$, pourvu qu'on dispose d'une série de Dirichlet majorante et assez bien « disciplinée ». Les auteurs de [10] ont pu ensuite adapter ce résultat dans leur article, ce qui leur a permis d'obtenir la preuve qu'il leur manquait.
- (c) Dans le cas particulier où la série $F(s)$ possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} tout entier, j'obtiens des résultats plus forts.
- (d) Enfin, et en parallèle avec les notions de H -discipline (chapitre 1, définition 2.13), je donne aussi une version du théorème de Landau, avec reste, dans le cas où la série F se prolonge de manière méromorphe sur un domaine qui n'est plus une bande dans le plan complexe, mais seulement une zone hyperbolique à gauche de sa singularité dominante.

Dans tout ce qui suit, s désignera un nombre complexe et on notera $\sigma = \Re(s)$ et $\tau = \Im(s)$.

Chapitre 13

Énoncé des différents résultats

Sommaire

13.1 Théorème de Landau revisité	269
13.2 Théorèmes taubériens pour séries à coefficients quelconques	272
13.3 Théorème taubérien hyperbolique	276

Dans ce chapitre, on énonce les différents jeux d'hypothèses qu'on va être amenés à considérer sur une série de Dirichlet. Pour chacun, on met en regard le théorème taubérien qui lui correspond. Ces théorèmes seront prouvés dans le reste de la partie.

Définition 13.1. *Étant donnée la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de \mathbb{C} , on note*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad N(t) = \sum_{n \leq t} a_n.$$

Si $(a_n)_{n \geq 1}$ désigne une suite de nombres (qu'on comprendra réels positifs ou complexes selon les théorèmes), l'objet des théorèmes taubériens est de transporter des informations sur la série de Dirichlet

$$Z(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

en informations sur la moyenne $N(t)$, passage du monde continu analytique, au monde discret arithmétique.

Les différents jeux d'hypothèses qu'on va être amenés à supposer sont (H) , (H^∞) , (\widehat{H}_1) , (\widehat{H}_2) , (\widehat{H}_1^∞) , (\widehat{H}_2^∞) , et (H_-) .

Le résultat obtenu est toujours du même type : la localisation des pôles (leur partie réelle) intervient comme exposant de t , et l'ordre des pôles diminué de 1, comme exposant de $\ln(t)$, le terme principal étant somme de monômes en t et $\ln(t)$. Les pôles de plus grande partie réelle fournissent les termes les plus importants. Par ailleurs, plus on connaît le prolongement méromorphe vers la gauche, meilleur est le terme de reste.

13.1 Théorème de Landau revisité

Définition 13.2 (hypothèses (H)). *Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de \mathbb{R} . On dit que la suite (a_n) vérifie les hypothèses (H) avec les paramètres*

$$(\sigma_a, \delta, \{(s_0, m_0), (s_1, m_1), \dots, (s_r, m_r)\}, A)$$

si et seulement si :

1. L'abscisse de convergence absolue de $Z(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ est σ_a (ou du moins Z converge absolument sur le demi plan $\{\Re s > \sigma_a\}$)
2. L'application $s \mapsto Z(s)$ se prolonge méromorphiquement à $\Re(s) > \sigma_a - \delta$ avec un nombre fini de pôles (qu'on ne suppose pas nécessairement réels), et s_0, s_1, \dots, s_r sont les pôles de $\frac{Z(s)}{s}$ indicés de telle sorte que

$$\sigma_0 \geq \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_a - \delta$$

(où on a noté $\sigma_i = \Re s_i$). On note m_j l'ordre de s_j en tant que pôle de $\frac{Z(s)}{s}$.

3. On a $\forall \epsilon > 0$, $Z(s) \ll_{\epsilon, \sigma} 1 + |\tau|^{A(\sigma_a - \sigma) + \epsilon}$, pour tout $\sigma = \sigma_a - \delta + \epsilon$, avec ϵ assez petit, et en τ assez grand en valeur absolue (ne serait-ce que pour éviter les pôles de Z afin que l'expression ait un sens).

La preuve du théorème qui suit fait l'objet du chapitre 15.

Théorème 13.3 (Théorème taubérien de Landau revisité). *On considère la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ tel que pour tout $n \geq 1$, $a_n \geq 0$. On suppose que la suite (a_n) vérifie les hypothèses (H) avec les paramètres*

$$(\sigma_a, \delta, \{(s_0, m_0), (s_1, m_1), \dots, (s_r, m_r)\}, A).$$

Alors pour tout $j = 0 \dots r$, $Q_j(x) = e^{-s_j x} \text{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} e^{sx} \right)$ est un polynôme de degré $m_j - 1$, où m_j est l'ordre de s_j comme pôle de $\frac{Z(s)}{s}$. En notant :

$$k = \lfloor A\delta \rfloor + 1, \quad \text{et} \quad r' = \max \left\{ j \in \{0, \dots, r\} : \sigma_j > \sigma_a - \frac{\delta}{k+1} \right\},$$

on a alors $\forall \epsilon > 0$,

$$N(t) = \sum_{n \leq t} a_n = \sum_{j=0}^{r'} t^{s_j} Q_j(\ln t) + O_\epsilon \left(t^{\sigma_a - \frac{\delta}{\lfloor A\delta \rfloor + 2} + \epsilon} \right).$$

Remarque 13.4.

- En notant $m_{j_0} = \max_j \{m_j : \sigma_j = \sigma_0\}$, on a :

$$N(t) \ll t^{\sigma_0} (\ln t)^{m_{j_0} - 1}$$

et donc $\forall \epsilon > 0$:

$$N(t) \ll t^{\sigma_0 + \epsilon}$$

et le terme de reste annoncé est un « vrai » reste.

- On pourrait prendre comme hypothèse dans le 3 :

$\exists \xi > 0$, tels que $Z(s) \ll_{\epsilon, \sigma} |\tau|^\xi$, uniformément en $\sigma > \sigma_a - \delta + \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, et en τ assez grand en valeur absolue (ne serait-ce que pour éviter les pôles de Z afin que l'expression ait un sens) Cette fois, pour conclure dans le lemme 16.15, il suffit de prendre $k = \lfloor \xi \rfloor + 1$, et on trouve un reste dans le théorème en $O \left(t^{\sigma_a - \frac{\delta}{\lfloor \xi \rfloor + 2} + \epsilon} \right)$

- pourvu que $t_r^\sigma \ll \sum_{j=0}^r \text{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right)$, c'est à dire s'il n'y a pas de compensation (ce qui est le cas par exemple, s'il n'y a qu'un seul pôle de partie réelle égale à σ_a), on peut obtenir la forme factorisée suivante :

$$N(t) = \sum_{n \leq t} a_n = \sum_{j=0}^r t^{s_j} Q_j(\ln t) \left[1 + O_\epsilon \left(t^{\frac{\sigma_a - \sigma_r - \delta}{\lfloor A\delta \rfloor + 2} + \epsilon} \right) \right].$$

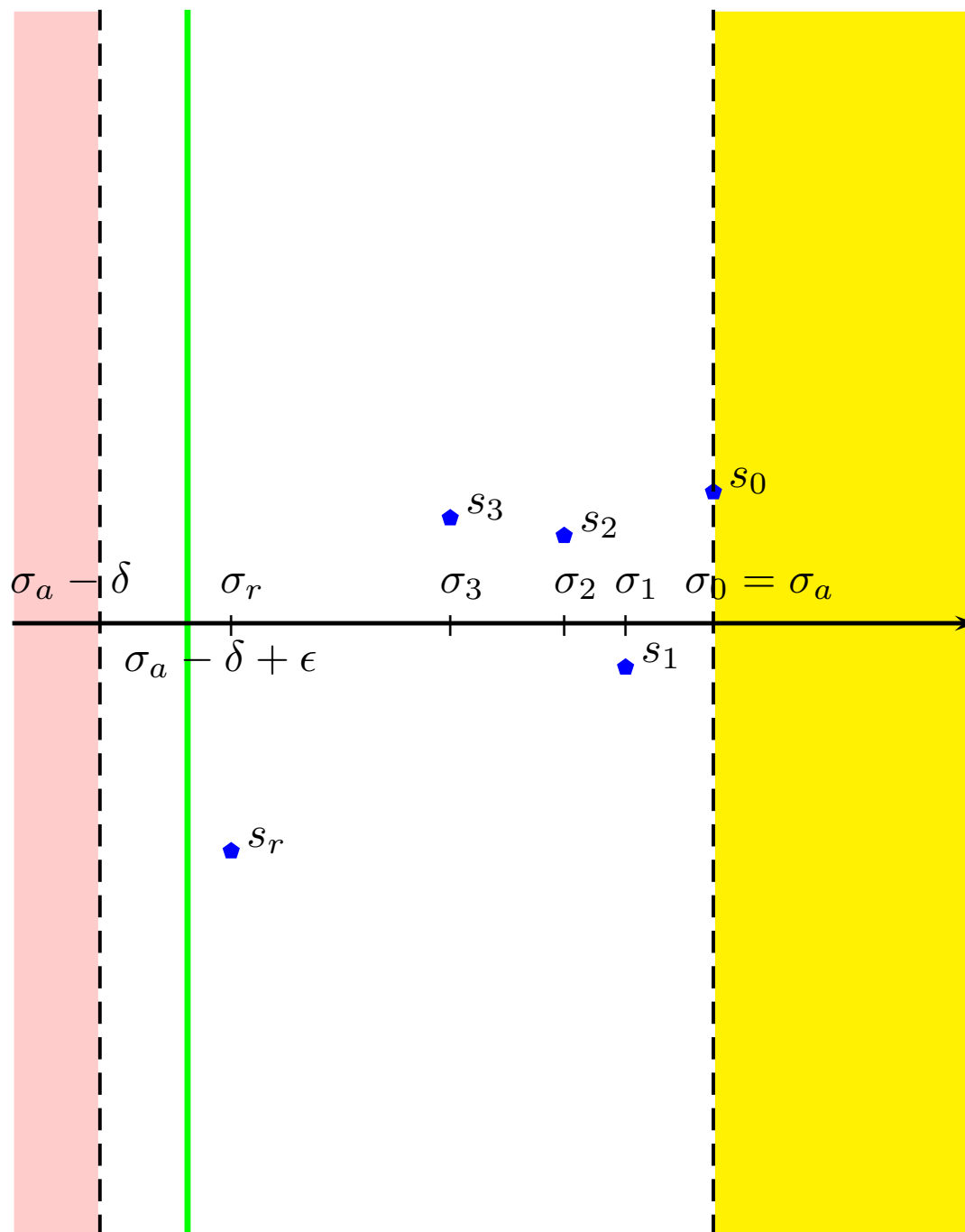


FIG. 13.1 – Hypothèses (H)

On va maintenant énoncer un corollaire au théorème 13.3, valable dans le cas où la série de Dirichlet admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe. A cet effet, on définit ce nouveau jeu d'hypothèses :

Définition 13.5 (hypothèses (H_∞)). Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de \mathbb{R} . On dit que la suite (a_n) vérifie les hypothèses (H_∞) avec les paramètres

$$(\sigma_a, \{(s_0, m_0), (s_1, m_1), \dots, (s_r, m_r)\}, A)$$

si et seulement si :

1. L'abscisse de convergence absolue de $Z(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ est σ_a (ou du moins Z converge absolument sur le demi plan $\{\Re s > \sigma_a\}$)
2. L'application $s \mapsto Z(s)$ se prolonge méromorphiquement à \mathbb{C} avec un nombre fini de pôles (qu'on ne suppose pas nécessairement réels) dans chaque bande verticale. On note s_0, s_1, \dots, s_r les pôles de $\frac{Z(s)}{s}$ dans la bande verticale $\{\sigma_a - \frac{1}{A} < \sigma \leq \sigma_a\}$, indicés de telle sorte que

$$\sigma_0 \geq \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_a - \frac{1}{A}$$

(où on a noté $\sigma_i = \Re s_i$).

On note m_j l'ordre de s_j en tant que pôle de $\frac{Z(s)}{s}$.

3. On a $\forall \epsilon > 0$, $Z(s) \ll_{\epsilon, \sigma} 1 + |\tau|^{A(\sigma_a - \sigma) + \epsilon}$, quel que soit $\sigma \in \mathbb{R}$ assez petit, et uniformément en τ assez grand en valeur absolue (ne serait-ce que pour éviter les pôles de Z afin que l'expression ait un sens).

Le corollaire énoncé est alors le suivant :

Corollaire 13.6. On considère la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ tel que pour tout $n \geq 1$, $a_n \geq 0$. On suppose que la suite (a_n) vérifie les hypothèses (H_∞) avec les paramètres

$$(\sigma_a, \{(s_0, m_0), (s_1, m_1), \dots, (s_r, m_r)\}, A).$$

Alors pour tout $j = 0 \dots r$, $Q_j(x) = e^{-s_j x} \text{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} e^{sx} \right)$ est un polynôme de degré $m_j - 1$, où m_j est l'ordre de s_j comme pôle de $\frac{Z(s)}{s}$, et $\forall \epsilon > 0$,

$$N(t) = \sum_{n \leq t} a_n = \sum_{j=0}^r t^{s_j} Q_j(\ln t) + O_\epsilon \left(t^{\sigma_a - \frac{1}{A} + \epsilon} \right)$$

(où l'indice du dernier pôle considéré dépend de ϵ).

13.2 Théorèmes taubériens pour séries à coefficients quelconques

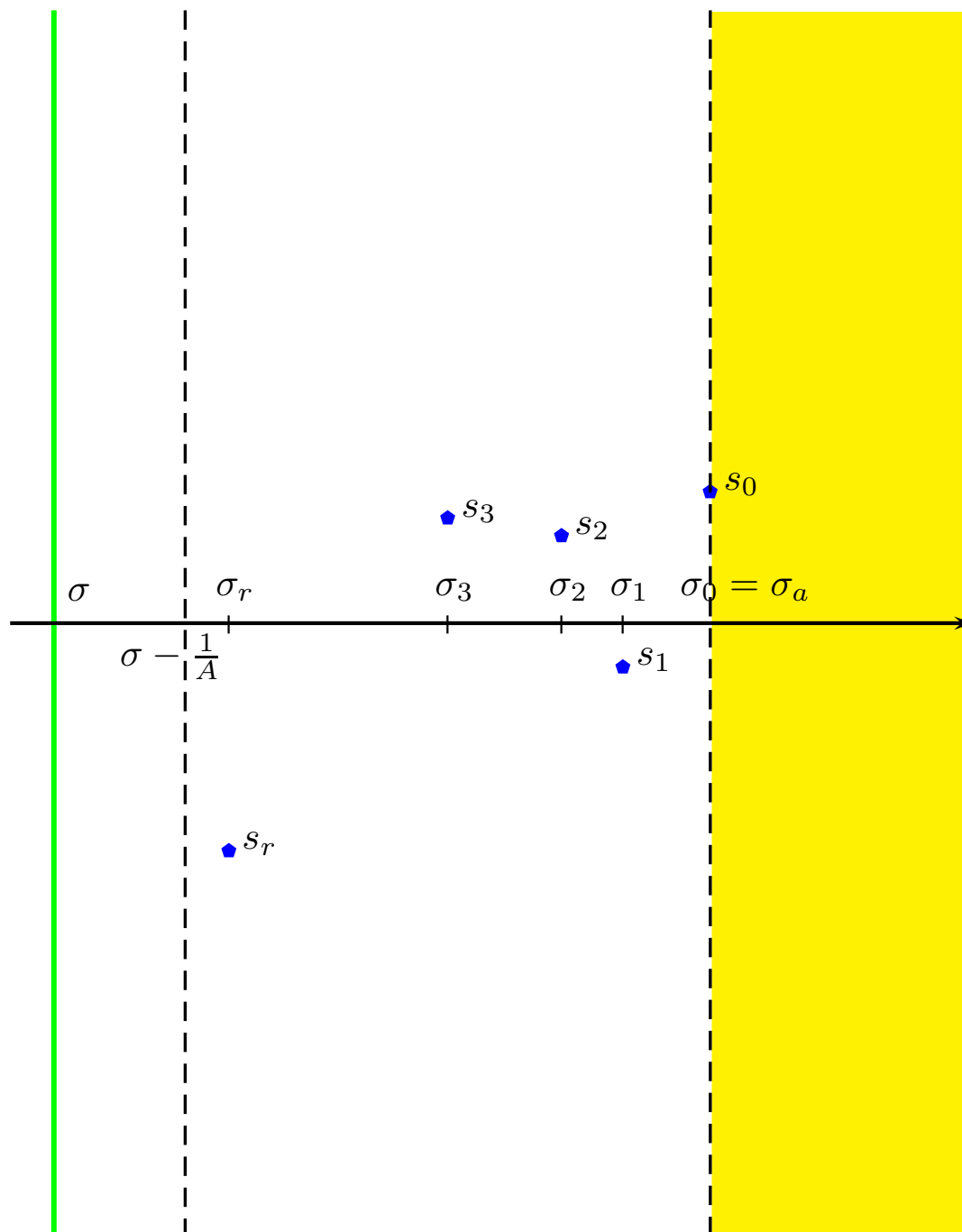
On énonce les deux théorèmes suivants, pour le cas où la série de Dirichlet n'est pas supposée à termes positifs, le deuxième théorème étant plus précis que le premier.

Définition 13.7. Soient $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(\hat{a}_n)_{n \geq 1}$ deux suites d'éléments de \mathbb{C} .

On dit que le couple $((a_n), (\hat{a}_n))$ vérifie les hypothèses (\hat{H}_1) de paramètres

$$(\hat{\sigma}_a, \delta, \{(s_0, m_0), (s_1, m_1), \dots, (s_r, m_r)\}, \{(\hat{s}_0, \hat{m}_0), (\hat{s}_1, \hat{m}_1), \dots, (\hat{s}_r, \hat{m}_r)\}, A),$$

si

FIG. 13.2 – Hypothèses (H_∞)

- les \hat{a}_n sont positifs ou nuls et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leq \hat{a}_n$ ((\hat{a}_n) domine (a_n)).
- la suite (a_n) vérifie les hypothèses (H) avec les paramètres

$$(\hat{\sigma}_a, \delta, (s_0, m_0), (s_1, m_1), \dots, (s_r, m_r), A),$$

- la suite (\hat{a}_n) vérifie les hypothèses (H) avec les paramètres

$$(\hat{\sigma}_a, \delta, (\hat{s}_0, \hat{m}_0), (\hat{s}_1, \hat{m}_1), \dots, (\hat{s}_{\hat{r}}, \hat{m}_{\hat{r}}), A).$$

Théorème 13.8 (Théorème de Landau dominé version 1). Soit (a_n) et (\hat{a}_n) deux suites d'éléments de \mathbb{C} , telles que le couple $((a_n), (\hat{a}_n))$ vérifie les hypothèses (\hat{H}_1) avec les paramètres

$$(\hat{\sigma}_a, \delta, \{(s_0, m_0), (s_1, m_1), \dots, (s_r, m_r)\}, \{(\hat{s}_0, \hat{m}_0), (\hat{s}_1, \hat{m}_1), \dots, (\hat{s}_{\hat{r}}, \hat{m}_{\hat{r}})\}, A).$$

On note :

$$k = \lfloor A\delta \rfloor + 1$$

et :

$$r' = \max \left\{ j \in \{0, \dots, r\} : \sigma_j > \hat{\sigma}_a - \frac{\delta}{k+1} \right\}$$

On a alors :

$$N(t) = \sum_{n \leq t} a_n = \sum_{j=0}^{r'} t^{s_j} Q_j(\ln t) + O_\epsilon \left(t^{\hat{\sigma}_a - \lfloor A\delta \rfloor + 2 + \epsilon} \right)$$

A l'instar du corollaire 13.6, on va donner un corollaire à ce théorème 13.8 dans le cas où la série admet un prolongement à tout le plan complexe.

A cet effet, on introduit le jeu d'hypothèses \hat{H}_1^∞ .

Définition 13.9. Soient $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(\hat{a}_n)_{n \geq 1}$ deux suites d'éléments de \mathbb{C} .

On dit que le couple $((a_n), (\hat{a}_n))$ vérifie les hypothèses (\hat{H}_1^∞) de paramètres

$$(\hat{\sigma}_a, \{(s_0, m_0), (s_1, m_1), \dots, (s_r, m_r)\}, \{(\hat{s}_0, \hat{m}_0), (\hat{s}_1, \hat{m}_1), \dots, (\hat{s}_{\hat{r}}, \hat{m}_{\hat{r}})\}, A),$$

si

- les \hat{a}_n sont positifs ou nuls et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leq \hat{a}_n$ ((\hat{a}_n) domine (a_n)).
- la suite (a_n) vérifie les hypothèses (H^∞) avec les paramètres

$$(\hat{\sigma}_a, (s_0, m_0), (s_1, m_1), \dots, (s_r, m_r), A),$$

- la suite (\hat{a}_n) vérifie les hypothèses (H^∞) avec les paramètres

$$(\hat{\sigma}_a, (\hat{s}_0, \hat{m}_0), (\hat{s}_1, \hat{m}_1), \dots, (\hat{s}_{\hat{r}}, \hat{m}_{\hat{r}}), A).$$

Corollaire 13.10 (théorème de Landau dominé version 1/prolongeable à \mathbb{C}). Soit (a_n) et (\hat{a}_n) deux suites d'éléments de \mathbb{C} , telles que le couple $((a_n), (\hat{a}_n))$ vérifie les hypothèses (\hat{H}_1) avec les paramètres

$$(\hat{\sigma}_a, \{(s_0, m_0), (s_1, m_1), \dots, (s_r, m_r)\}, \{(\hat{s}_0, \hat{m}_0), (\hat{s}_1, \hat{m}_1), \dots, (\hat{s}_{\hat{r}}, \hat{m}_{\hat{r}})\}, A).$$

On a alors :

$$N(t) = \sum_{n \leq t} a_n = \sum_{j=0}^r t^{s_j} Q_j(\ln t) + O_\epsilon \left(t^{\hat{\sigma}_a - \frac{1}{A} + \epsilon} \right)$$

En fait, étant donnée une suite (a_n) , on peut toujours trouver une suite majorante (\widehat{a}_n) . Mais on peut le faire plus ou moins finement. En distinguant σ_a l'abscisse de convergence de Z et $\widehat{\sigma}_a$ l'abscisse de convergence de \widehat{Z} , on souhaite obtenir un résultat qui dépend de la finesse de la majoration, c'est-à-dire qu'on souhaite avoir $\widehat{\sigma}_a - \sigma_a \geq 0$ le plus petit possible. Ceci est l'objet de la deuxième version plus fine du théorème. Pour énoncer ce théorème, on considère aussi que δ et $\widehat{\delta}$ sont a priori différents.

Définition 13.11. Soient $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(\widehat{a}_n)_{n \geq 1}$ deux suites d'éléments de \mathbb{C} .

On dit que le couple $((a_n), (\widehat{a}_n))$ vérifie les hypothèses (\widehat{H}_2) de paramètres

$$(\sigma_a, \widehat{\sigma}_a, \delta, \widehat{\delta}, \{(s_0, m_0), (s_1, m_1), \dots, (s_r, m_r)\}, \{(\widehat{s}_0, \widehat{m}_0), (\widehat{s}_1, \widehat{m}_1), \dots, (\widehat{s}_{\widehat{r}}, \widehat{m}_{\widehat{r}})\}, A),$$

si

- les \widehat{a}_n sont positifs ou nuls et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leq \widehat{a}_n$ ((\widehat{a}_n) domine (a_n)).
- la suite (a_n) vérifie les hypothèses (H) avec les paramètres

$$(\sigma_a, \delta, (s_0, m_0), (s_1, m_1), \dots, (s_r, m_r), A),$$

- la suite (\widehat{a}_n) vérifie les hypothèses (H) avec les paramètres

$$(\widehat{\sigma}_a, \widehat{\delta}, (\widehat{s}_0, \widehat{m}_0), (\widehat{s}_1, \widehat{m}_1), \dots, (\widehat{s}_{\widehat{r}}, \widehat{m}_{\widehat{r}}), A).$$

Théorème 13.12 (théorème de Landau dominé version 2). Soit (a_n) et (\widehat{a}_n) deux suites d'éléments de \mathbb{C} , telles que le couple $((a_n), (\widehat{a}_n))$ vérifie les hypothèses (\widehat{H}_2) avec les paramètres

$$(\sigma_a, \widehat{\sigma}_a, \delta, \widehat{\delta}, \{(s_0, m_0), (s_1, m_1), \dots, (s_r, m_r)\}, \{(\widehat{s}_0, \widehat{m}_0), (\widehat{s}_1, \widehat{m}_1), \dots, (\widehat{s}_{\widehat{r}}, \widehat{m}_{\widehat{r}})\}, A).$$

On note :

$$k = \max \left(\lfloor A\delta \rfloor + 1, \lfloor A\widehat{\delta} \rfloor + 1 \right),$$

$$r' = \max \left\{ j \in 0, \dots, r : \sigma_j > \widehat{\sigma}_a - \frac{\widehat{\delta}}{k+1} \right\}$$

et

$$r'' = \max \left\{ j \in 0, \dots, r : \sigma_j > \widehat{\sigma}_a - \frac{\widehat{\sigma}_a - \sigma_a + \delta}{k+1} \right\}.$$

On a alors :

$$N(t) = \sum_{n \leq t} a_n = \begin{cases} \sum_{j=0}^{r'} \text{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right) + O_\epsilon \left(t^{\widehat{\sigma}_a - \frac{\widehat{\delta}}{k+1} + \epsilon} \right) & \text{si } \widehat{\delta} - \delta \leq \widehat{\sigma}_a - \sigma_a \\ \sum_{j=0}^{r''} \text{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right) + O_\epsilon \left(t^{\widehat{\sigma}_a - \frac{\widehat{\sigma}_a - \sigma_a + \delta}{k+1} + \epsilon} \right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour terminer, voici une version du théorème 13.12 valable dans le cas où Z admet un prolongement méromorphe à \mathbb{C} tout entier. On introduit pour énoncer le théorème le jeu d'hypothèses \widehat{H}_2^∞ .

Définition 13.13. Soient $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(\widehat{a}_n)_{n \geq 1}$ deux suites d'éléments de \mathbb{C} .

On dit que le couple $((a_n), (\widehat{a}_n))$ vérifie les hypothèses (\widehat{H}_2^∞) de paramètres

$$(\sigma_a, \widehat{\sigma}_a, \{(s_0, m_0), (s_1, m_1), \dots, (s_r, m_r)\}, \{(\widehat{s}_0, \widehat{m}_0), (\widehat{s}_1, \widehat{m}_1), \dots, (\widehat{s}_{\widehat{r}}, \widehat{m}_{\widehat{r}})\}, A),$$

si

- les \widehat{a}_n sont positifs ou nuls et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leq \widehat{a}_n$ ((\widehat{a}_n) domine (a_n)).
- la suite (a_n) vérifie les hypothèses (H^∞) avec les paramètres

$$(\sigma_a, \{(s_0, m_0), (s_1, m_1), \dots, (s_r, m_r)\}, A),$$

- la suite (\widehat{a}_n) vérifie les hypothèses (H^∞) avec les paramètres

$$(\widehat{\sigma}_a, \{(\widehat{s}_0, \widehat{m}_0), (\widehat{s}_1, \widehat{m}_1), \dots, (\widehat{s}_r, \widehat{m}_r)\}, A).$$

Corollaire 13.14 (théorème de Landau dominé version 2/prolongeable à \mathbb{C}). Soit (a_n) et (\widehat{a}_n) deux suites d'éléments de \mathbb{C} , telles que le couple $((a_n), (\widehat{a}_n))$ vérifie les hypothèses (\widehat{H}_2^∞) avec les paramètres

$$(\sigma_a, \widehat{\sigma}_a, \{(s_0, m_0), (s_1, m_1), \dots, (s_r, m_r)\}, \{(\widehat{s}_0, \widehat{m}_0), (\widehat{s}_1, \widehat{m}_1), \dots, (\widehat{s}_r, \widehat{m}_r)\}, A).$$

On note :

$$k = \max \left(\lfloor A\delta \rfloor + 1, \lfloor A\widehat{\delta} \rfloor + 1 \right).$$

On a alors :

$$N(t) = \sum_{n \leq t} a_n = \sum_{j=0}^r \operatorname{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right) + O_\epsilon \left(t^{\widehat{\sigma}_a - \frac{\widehat{\delta}}{k+1} + \epsilon} \right)$$

13.3 Théorème taubérien hyperbolique

Enfin, le cas où cette fois, on ne dispose d'un prolongement méromorphe, que sur une zone hyperbolique sans pôle.

Définition 13.15 (hypothèses (H_-)). Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de \mathbb{C} et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, prise paire, avec $\varphi(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0$ et φ décroissante au sens large.

On définit la zone hyperbolique

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\varphi) = \{s = (\sigma, \tau) \in \mathbb{C} : \sigma_a - \varphi(\tau) \leq \sigma \leq \sigma_a\}$$

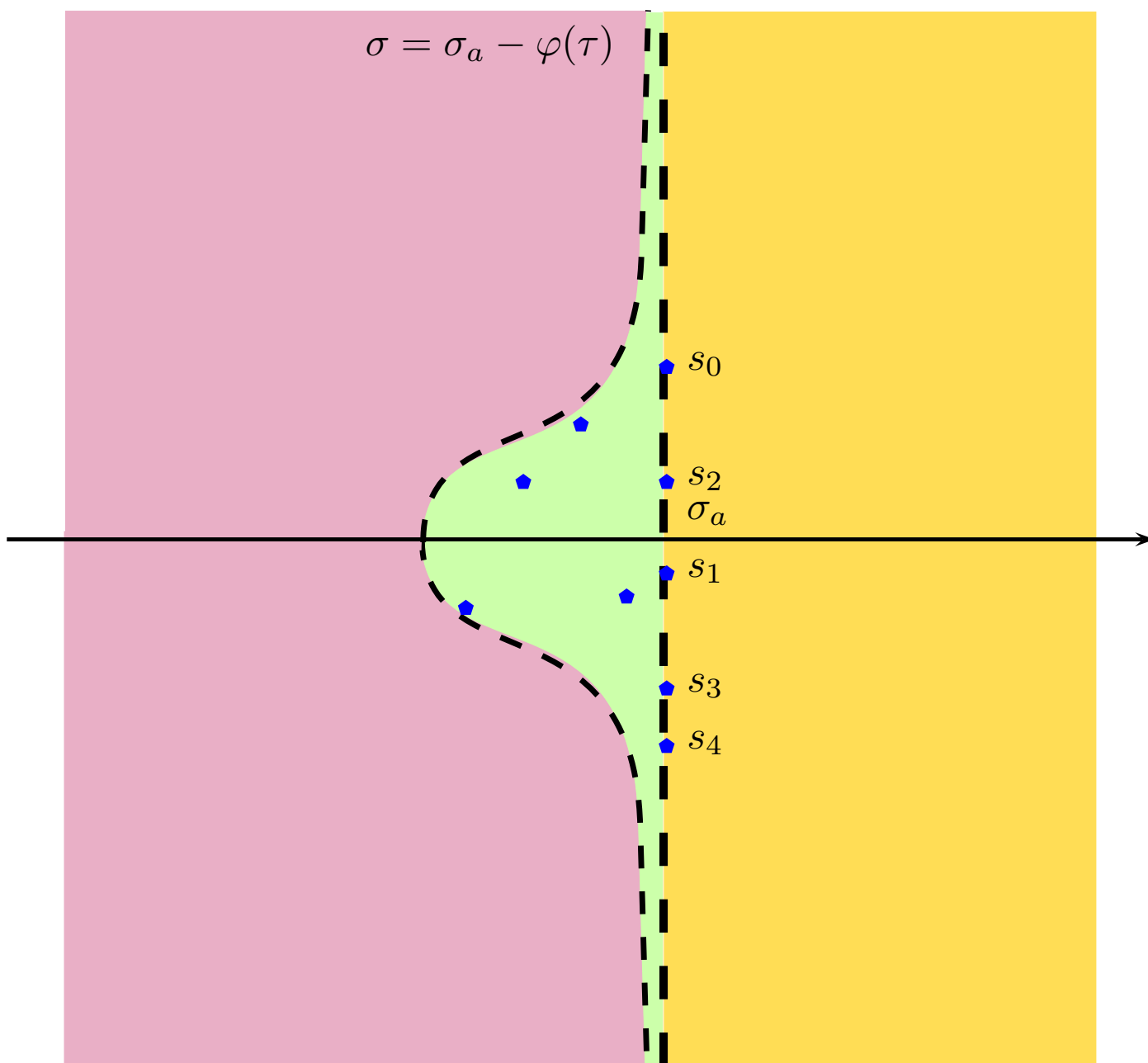
Soit $\alpha \geq 0$ et B une fonction croissante au sens large, bornée.

On dit que la suite (a_n) vérifie les hypothèses (H_-) avec les paramètres

$$(\sigma_a, \{(s_0, m_0), (s_1, m_1), \dots, (s_r, m_r)\}, A, \varphi, \alpha, B)$$

si et seulement si :

1. L'abscisse de convergence absolue de $Z(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ est σ_a (ou du moins Z converge absolument sur le demi plan $\{\Re s > \sigma_a\}$) et $\sigma_a > 0$.
2. L'application $s \mapsto Z(s)$ se prolonge méromorphiquement à \mathcal{U} , avec un nombre fini de pôles, et on note s_0, s_1, \dots, s_r les pôles (en nombre fini) de $\frac{Z(s)}{s}$ tels que $\forall 0 \leq i \leq r, \sigma_i = \sigma_a$ (où on a noté $\sigma_i = \Re s_i$). On note m_j l'ordre de s_j en tant que pôle de $\frac{Z(s)}{s}$.
3. On a $\forall \epsilon > 0, Z(s) \ll_{\epsilon, \sigma} 1 + |\tau|^{A(\sigma_a - \sigma) + \epsilon}$, pour $s \in \mathcal{U}$, et en τ assez grand en valeur absolue (ne serait-ce que pour éviter les pôles de Z afin que l'expression ait un sens),
4. $\sum_{n \geq 1} |a_n| n^{-\sigma} \ll (\sigma - \sigma_a)^{-\alpha}$, uniformément en $\sigma_a < \sigma \leq \sigma_a + 1$.
5. $|a_n| \leq B(n)$ pour $n \geq 1$

FIG. 13.3 – Hypothèses (H_-)

L'hypothèse selon laquelle $\varphi(\tau) \ln \tau$ est une fonction bornée, signifie que φ ne décroît pas trop rapidement, c'est-à-dire que la zone sans pôle est supposée assez large pour pouvoir conclure.

La preuve du théorème énoncé fait l'objet du chapitre 16.

Théorème 13.16 (Théorème taubérien de Landau hyperbolique). *On suppose que la suite (a_n) vérifie les hypothèses (H_-) avec les paramètres*

$$(\sigma_a, \{(s_0, m_0), (s_1, m_1), \dots, (s_r, m_r)\}, A, \varphi, \alpha, B),$$

où $\sigma_a \geq 1$. On a alors pour tout $j = 0 \dots r$,

$$Q_j(x) = e^{-s_j x} \operatorname{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} e^{sx} \right)$$

est un polynôme de degré $m_j - 1$, où m_j est l'ordre de s_j comme pôle de $\frac{Z(s)}{s}$.

On a alors $\forall \epsilon > 0$,

– en supposant $\exists \beta > 0$ tel que $\varphi(T) \geq \frac{1}{T^\beta}$ (pour T assez grand) et $\alpha < \frac{1}{\beta}$:

$$N(t) = \sum_{n \leq t} a_n = \sum_{j=0}^r t^{s_j} Q_j(\ln t) + O_\epsilon \left(t^{\sigma_a} (\ln t)^{\alpha - \frac{1}{\beta} + \epsilon} \right).$$

– en supposant $\exists \beta > 0$ et $M > 0$ tel que $\varphi(T) \geq \frac{M}{(\ln T)^\beta}$ (pour T assez grand)

$$N(t) = \sum_{n \leq t} a_n = \sum_{j=0}^r t^{s_j} Q_j(\ln t) + O_\epsilon \left(t^{\sigma_a} \exp \left(-(M \ln t)^{\frac{1}{1+\epsilon}} (1 - \epsilon) \right) \right).$$

Remarque 13.17. *Le premier cas permet de traiter le cas où*

$$\varphi(T) \gg \frac{1}{T^\beta (\ln T)^{\tilde{\beta}}},$$

où $\beta > 0$ et $\tilde{\beta} \geq 0$ car on a alors $\forall \epsilon > 0$, $\varphi(T) \geq \frac{1}{T^{\frac{1}{\beta+\epsilon}}}$, et donc, quitte à changer la constante du grand O , l'estimation est la même que dans le premier point du théorème 13.16.

Remarque 13.18. *Le terme de reste en est bien un car $\forall \epsilon \in]0, 1[$:*

$$t^{\sigma_a} \exp \left(-(M \ln t)^{\frac{1}{1+\epsilon}} (1 - \epsilon) \right) = o(t^{\sigma_a})$$

(bien penser qu'on n'a compté les pôles σ_j que pour $j \leq r'$). Quand aux pôles de parties réelles strictement inférieures à σ_a , ils rentrent dans ce terme de reste car $\forall \epsilon \in]0, 1[$:

$$t^{\sigma_a - \epsilon} = o \left(t^{\sigma_a} \exp \left(-(M \ln t)^{\frac{1}{1+\epsilon}} (1 - \epsilon) \right) \right).$$

Chapitre 14

Principe de la démonstration

Sommaire

14.1 Formule de Perron	279
14.2 Contribution des résidus	282

Dans ce chapitre, on explique comment la moyenne des coefficients peut-être calculée par une intégrale dans le plan complexe. On explicite aussi dès maintenant la contribution de chaque pôle de la série de Dirichlet, en vue de déplacer le contour d'intégration, ce qui sera fait aux chapitres suivants.

14.1 Formule de Perron

La première étape derrière le théorème taubérien de Landau est de transformer $N(t)$ en une intégrale sur une droite verticale dans le plan complexe. Ceci est l'objet de la formule de Perron, basée sur le lemme technique suivant :

Lemme 14.1. On note $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$.

On a

1. $\forall c > 0, T > 0, \text{ et } T' > 0,$

$$\left| h(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT'}^{c+iT} x^s \frac{ds}{s} \right| \leq \begin{cases} \frac{x^c}{2\pi |\ln x|} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{c}{T+c} & \text{si } x = 1 \text{ et } T = T' \end{cases}$$

2. Toujours en supposant $c > 0,$ on a,

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^s \frac{ds}{s}$$

(avec l'intégrale convergente si $x \neq 1$ et convergente en valeur principale si $x = 1$).

Démonstration. La preuve est assez classique et peut être trouvée dans [52, Tome 2]. Pour le 1), plaçons nous d'abord dans le cas $x > 1$. Soit M un entier assez grand pour que $c - M < 0$.

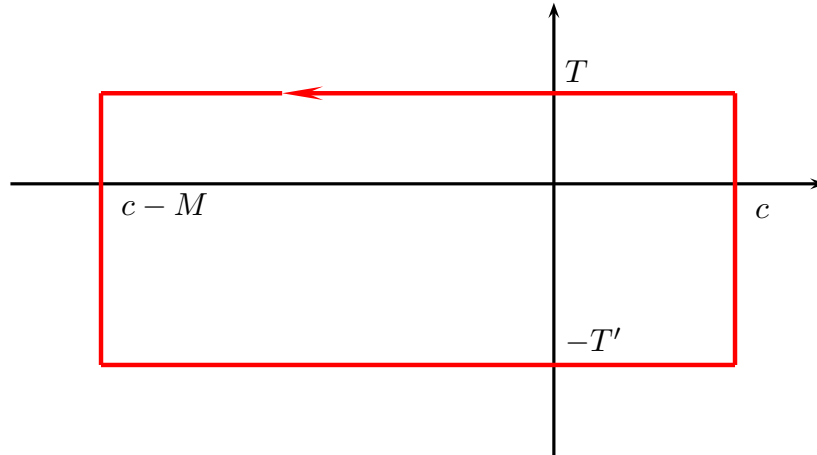


FIG. 14.1 – Premier contour pour la preuve de la formule de Perron

On utilise le contour \mathcal{R}_M dessiné à la figure 14.1.

Par la formule des résidus, on a :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{R}_M} x^s \frac{ds}{s} = 1 = h(x).$$

donc :

$$\left| h(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT'}^{c+iT} x^s \frac{ds}{s} \right| \leq \left| \int_{c+iT}^{c-M+iT} x^s \frac{ds}{s} \right| + \left| \int_{c-M+iT}^{c-M-iT'} x^s \frac{ds}{s} \right| + \left| \int_{c-M-iT'}^{c-iT'} x^s \frac{ds}{s} \right|,$$

qu'on peut paramétrer par (le paramétrage de la troisième est analogue à celui de la première) :

$$\begin{aligned} \int_{c+iT}^{c-M+iT} x^s \frac{ds}{s} &= \int_c^{c-M} x^{\sigma+iT} \frac{d\sigma}{\sigma+iT} \\ \int_{c-M+iT}^{c-M-iT'} x^s \frac{ds}{s} &= \int_T^{-T'} i x^{c-M+i\tau} \frac{d\tau}{c-M+i\tau} \end{aligned}$$

D'où les majorations (la deuxième s'obtient de façon analogue à la première) :

$$\begin{aligned} \left| \int_{c+iT}^{c-M+iT} x^s s^{-1} ds \right| &\leq \frac{1}{T} \int_{c-M}^c x^\sigma d\sigma = \frac{1}{T \ln x} (x^c - x^{c-M}) \\ &\leq \frac{x^c}{T \ln x} (1 - x^{-M}) \leq \frac{x^c}{T \ln x} \\ \left| \int_{c-M+iT}^{c-M-iT'} x^s \frac{ds}{s} \right| &\leq \frac{x^{c-M}}{c-M} \int_{-T'}^T d\tau = \frac{x^{c-M}}{c-M} (T + T') \\ \left| \int_{c-M-iT'}^{c-iT'} x^s \frac{ds}{s} \right| &\leq \frac{x^c}{T' \ln x} \end{aligned}$$

En utilisant ces majorations et en faisant tendre M vers l'infini, on obtient bien le lemme pour $x > 1$.

Le cas $0 < x < 1$ est symétrique au précédent. On applique le même raisonnement. Cette fois

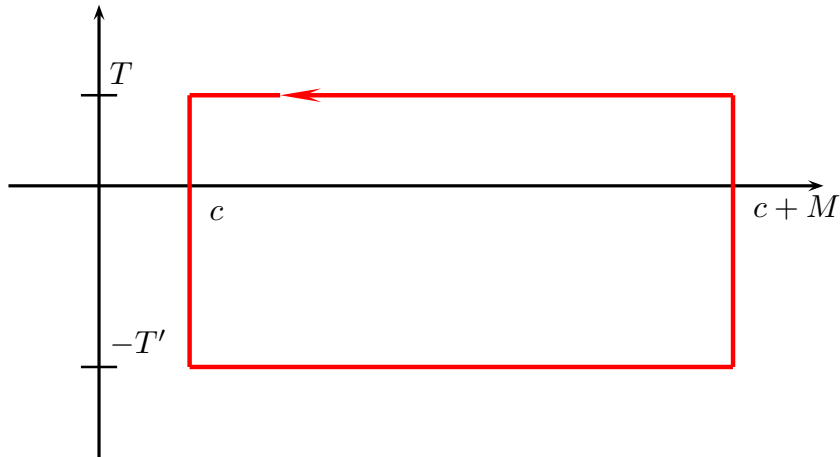


FIG. 14.2 – Deuxième contour pour la preuve de la formule de Perron

le contour \mathcal{R}'_M dessiné à la figure 14.2 n'englobe plus O et il n'y a plus de résidu.

On a alors :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{R}'_M} x^s \frac{ds}{s} = 0 = h(x).$$

Les majorations établies ci-dessus restent valables en changeant M en $-M$. On conclut de la même façon en faisant tendre M vers $+\infty$.

Lorsque $x = 1$, on remarque simplement que l'on a :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} s^{-1} ds = \frac{1}{2\pi} (\arg(c+iT) - \arg(c-iT)) = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{T}{c}.$$

Or, pour tout $y > 0$,

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \arctan y = \int_y^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \leq \int_y^{+\infty} \frac{2}{(1+t)^2} = \frac{2}{1+y}.$$

Et finalement :

$$\left| h(1) - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} s^{-1} ds \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \frac{T}{c} \right| \leq \frac{c}{\pi(T+c)} \leq \frac{c}{T+c}.$$

Le 2) est une conséquence immédiate du 1) quand $T \rightarrow +\infty$ et $T' \rightarrow +\infty$.

□

Pour énoncer la formule de Perron, on notera : $a_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin \mathbb{N}^* \\ a_n & \text{si } t \in \mathbb{N}^* \end{cases}$, et

$$\forall t \in \mathbb{R}, N_0(t) = \sum_{n < t} a_n + \frac{1}{2} a_t.$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$, $N(t) = N_0(t)$ (donc égalité presque partout).

Proposition 14.2 (Formule de Perron). *Soit $t > 0$ et $c > \max(0, \sigma_c)$. On a :*

$$N_0(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Z(s)t^s \frac{ds}{s},$$

où l'intégrale

- ▶ est semi-convergente lorsque $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$
- ▶ converge en valeur principale lorsque $t \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Classique. Voir [52, tome II]. Mieux, on prouvera la formule de Perron d'ordre supérieur (proposition 16.12) strictement plus forte. \square

14.2 Contribution des résidus

On termine cette partie en expliquant la façon dont vont compter les différents pôles à l'intérieur du contour, c'est-à-dire la contribution des résidus en ces pôles quand on applique le théorème des résidus.

Lemme 14.3. $\forall j = 0 \dots r$, $Q_j(x) = e^{-s_j x} \operatorname{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} e^{sx} \right)$ est un polynôme de degré $m_j - 1$, où m_j est l'ordre de s_j comme pôle de $\frac{Z(s)}{s}$ et donc $\forall \epsilon > 0$,

$$t^{\sigma_j} \ll \left| \operatorname{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right) \right| \sim C t^{\sigma_j} (\ln t)^{m_j-1} \ll_{t \rightarrow +\infty} t^{\sigma_j + \epsilon},$$

(C est une constante)

Démonstration. On écrit simplement

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right) &= t^{s_j} \operatorname{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^{s-s_j} \right) \\ &= t^{s_j} \operatorname{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} e^{(s-s_j) \ln t} \right) \\ &= t^{s_j} \sum_{m=1}^{m_j} C_{j,m} (\ln t)^{m-1} \end{aligned}$$

où $C_{j,m}$ désigne le coefficient en $(s - s_j)^{-m}$ dans le développement de Laurent de $\frac{Z(s)}{s}$, divisé par $(m-1)!$, soit :

$$\operatorname{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} e^{sx} \right) = e^{xs_j} \sum_{m=1}^{m_j} C_{j,k} x^{m-1}$$

La reste du lemme en découle immédiatement. \square

Corollaire 14.4. $\forall \epsilon > 0$:

$$t^{\sigma_0} \ll \sum_j \left| \operatorname{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right) \right| \ll t^{\sigma_0 + \epsilon}$$

Démonstration. Ceci tient au fait que tous les $\Re(s_j)$ sont inférieurs à σ_0 . \square

A l'issue de ce chapitre, on est donc ramenés à estimer une intégrale dans le plan complexe. Classiquement, cela se fait en déplaçant le contour d'intégration grâce au théorème des résidus. Les hypothèses de croissance polynomiale de la série de Dirichlet qu'on sera amenés à faire sont alors cruciales.

Seulement, la formule de Perron ne saurait suffire à conclure, car la convergence de l'intégrale n'est pas garantie. Selon les hypothèses, on contourne le problème de 2 façons différentes :

- dans le cas d'un domaine de prolongement méromorphe de type hyperbolique, le déplacement de contour se fera grâce à un rectangle fini touchant au bord du domaine de façon à optimiser le développement asymptotique obtenu. On n'a plus alors de problème de convergence car il suffit de considérer l'intégrale sur un segment de droite. Ceci fait l'objet du chapitre 15.

- dans le cas d'une bande de prolongement méromorphe, on considérera un contour rectangulaire qu'on rend doublement infini en hauteur. Une idée pour s'en sortir est alors de passer par des moyennes d'ordres supérieurs de la suite (a_n) . Ceci fait l'objet du chapitre 16.

Chapitre 15

Le cas simple où l'ordre 0 suffit

Sommaire

15.1 Formule de Perron effective	285
15.2 Preuve du théorème 13.16	286

Comme on l'a dit en conclusion du chapitre précédent, dans le cas d'un domaine de prolongement méromorphe de type hyperbolique, le déplacement de contour se fait grâce à un rectangle fini touchant au bord du domaine de façon à optimiser le développement asymptotique obtenu. On n'a plus alors de problème de convergence car il suffit de considérer l'intégrale sur un segment de droite.

On rappelle alors la célèbre formule de Perron effective 15.1, qui permet de relier cette intégrale tronquée avec $N(t)$, en majorant le reste.

15.1 Formule de Perron effective

On donne maintenant la formule de Perron effective, qui donne une majoration de l'erreur commise en n'intégrant pas sur toute la droite $\{\sigma = c\}$, mais seulement sur le segment : $[c - iT, c + iT]$.

Proposition 15.1 (Formule de Perron effective).

Soit $Z(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ une série de Dirichlet d'abscisse de convergence absolue finie σ_a finie. On suppose qu'il existe un nombre réel $\alpha \geq 0$ tel que :

$$\sum_{n \geq 1} |a_n| n^{-\sigma} \ll (\sigma - \sigma_a)^{-\alpha} \quad (\text{uniformément en } \sigma_a < \sigma \leq \sigma_a + 1),$$

et l'on se donne une fonction B croissante au sens large telle que $\forall n \in \mathbb{N} :$

$$|a_n| \leq B(n).$$

Alors on a pour $t \geq 2, T \geq 2, \sigma \leq \sigma_a, \kappa = \sigma_a - \sigma + \frac{1}{\ln t} :$

$$\sum_{n \leq t} \frac{a_n}{n^s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} Z(s+w) t^s \frac{ds}{s} + O_{T,\sigma} \left(t^{\sigma_a - \sigma} \frac{(\ln t)^\alpha}{T} + \frac{B(2t)}{t^\sigma} \left(1 + t \frac{\ln T}{T} \right) \right).$$

En particulier, avec $w = 0$, la conclusion devient que pour $t \geq 2, T \geq 2, \sigma_a \geq 0, \kappa = \sigma_a + \frac{1}{\ln t} :$

$$N(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} Z(s) t^s \frac{ds}{s} + O_T \left(t^{\sigma_a} \frac{(\ln t)^\alpha}{T} + B(2t) \left(1 + t \frac{\ln T}{T} \right) \right).$$

Démonstration. classique, voir par exemple [52] □

15.2 Preuve du théorème 13.16

preuve du théorème 13.16. On applique donc le théorème des résidus au contour :

à la fonction $s \mapsto \frac{Z(s)}{s} t^s$. Le bord droit du contour est pris de partie réelle

$$c = \sigma_a + \frac{1}{\ln T},$$

c'est-à-dire qu'il est d'autant plus proche de la droite $\{\sigma = \sigma_a\}$ que T est grand.

Les dimensions du rectangle annoncé pour le déplacement d'intégrale sont un compromis (qui dépend de t quand on donne l'asymptotique de $N(t)$, entre le bord gauche du rectangle (qu'on désire le plus à gauche possible) et T qu'on désire le plus grand possible, le rectangle devant tenir dans \mathcal{U}).

Le théorème des résidus s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} \frac{Z(s)}{s} t^s ds = \sum_{j=0}^r \text{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right) \quad (15.1)$$

En effet, si T est assez grand alors le contour n'englobe que les pôles situés sur l'axe $\{\Re(s) = \sigma_a\}$, c'est à dire les σ_j , pour $0 \leq j \leq r$.

D'autre part, sur γ_2 ,

$$\frac{Z(s)}{s} t^s \ll_{\epsilon} T^{A(\sigma_a - \sigma) + \epsilon - 1} t^{\sigma}.$$

On a $A(\sigma_a - \sigma) \leq A\varphi(T) \leq \frac{1}{2} - \epsilon$ pour T assez grand, et donc

$$T^{A(\sigma_a - \sigma) + \epsilon - 1} \ll T^{-1/2},$$

et l'expression sur γ_2 se simplifie en :

$$\frac{Z(s)}{s} t^s \ll_{\epsilon} \frac{t^{\sigma}}{T^{1/2}}$$

et en intégrant,

$$\int_{\gamma_2} \frac{Z(s)}{s} t^s ds \ll_{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{\sigma_a - \varphi(T)}^c t^{\sigma} d\sigma \ll_{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{t^{\sigma_a}}{\ln t}$$

et de même

$$\int_{\gamma_4} \frac{Z(s)}{s} t^s ds \ll_{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{t^{\sigma_a}}{\ln t}.$$

D'autre part, on a :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{Z(s)}{s} t^s ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{Z(s)}{s} t^s ds.$$

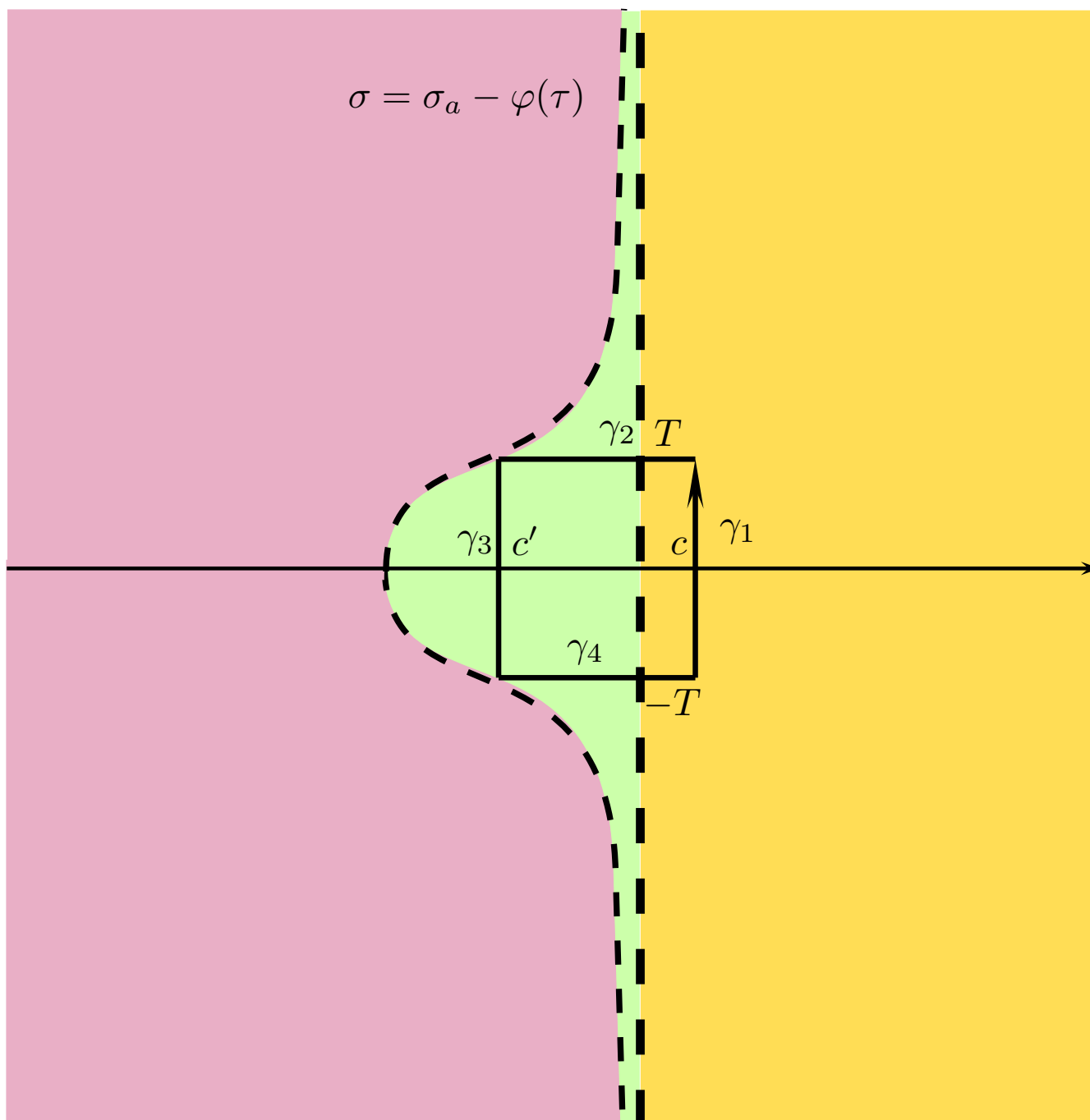


FIG. 15.1 – Contour d'intégration pour le théorème de Landau hyperbolique

Par la formule de Perron (proposition 15.1) effective, on obtient :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_3} \frac{Z(s)}{s} t^s ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} Z(s) t^s \frac{ds}{s} = N(t) + O\left(t^{\sigma_a} \frac{(\ln t)^\alpha}{T} + B(2t) \left(1 + t \frac{\ln T}{T}\right)\right).$$

Enfin, sur γ_3 , $Z(s) \ll_\epsilon 1 + |\tau|^{A\varphi(\tau)+\epsilon/2}$, et donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_3} \frac{Z(s)}{s} t^s ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_a - \varphi(T) + iT}^{\sigma_a - \varphi(T) - iT} \frac{Z(s)}{s} t^s ds \\ &\ll_\epsilon t^{\sigma_a - \varphi(T)} \int_{-T}^T (1 + |\tau|)^{A\varphi(\tau) + \epsilon/2 - 1} d\tau \\ &\ll_\epsilon t^{\sigma_a - \varphi(T)} \int_0^T (1 + |\tau|)^{A\varphi(\tau) + \epsilon/2 - 1} d\tau \end{aligned}$$

où on a utilisé la parité de φ .

Soit $T_0 > 0$ tel que $A\varphi(T_0) < \epsilon/2$ (ce qui est possible car φ tend vers 0 quand T_0 tend vers l'infini). On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^T (1 + |\tau|)^{A\varphi(\tau) + \epsilon/2 - 1} d\tau &\ll \int_0^{T_0} (1 + |\tau|)^{A\varphi(\tau) + \epsilon/2 - 1} d\tau + \int_{T_0}^T (1 + |\tau|)^{A\varphi(\tau) + \epsilon/2 - 1} d\tau \\ &\ll_\epsilon 1 + \int_{T_0}^T (1 + |\tau|)^{\epsilon - 1} d\tau \\ &\ll_\epsilon T^\epsilon. \end{aligned}$$

Et donc finalement $N(t)$ a le développement asymptotique suivant, pour tout $\epsilon > 0$ (les intégrales sur γ_2 et γ_4 sont plus petite que celle sur γ_3) :

$$\sum_{j=0}^{r'} \text{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right) + O_\epsilon \left(t^{\sigma_a} \frac{(\ln t)^\alpha}{T} + B(2t) \left(1 + t \frac{\ln T}{T}\right) + t^{\sigma_a - \varphi(T)} T^\epsilon \right).$$

Pour prouver le premier point, on prend T défini implicitement comme fonction de t par :

$$T^\beta \ln T = \frac{\ln t}{1 + \epsilon}.$$

On en déduit notamment

- $\ln t \ll_\epsilon T^{\beta+\epsilon}$ d'où $\frac{1}{T} \ll_\epsilon (\ln t)^{-\frac{1}{\beta} + \epsilon}$.
- $\ln T \ll \frac{\ln t}{T^\beta}$.

On obtient alors, pour $\epsilon > 0$ assez petit, une majoration de chacun des termes de la somme dans le grand O :

- $t^{\sigma_a} \frac{(\ln t)^\alpha}{T} \ll t^{\sigma_a} (\ln t)^{\alpha - \frac{1}{\beta} + \epsilon}$
- $B(2t) \ll 1$ qui rentre dans les autres termes de reste.
- $B(2t) t \frac{\ln T}{T} \ll t \frac{\ln t}{T^{\beta+1}} \ll_\epsilon t (\ln t)^{-\frac{1}{\beta} + \epsilon}$
- $t^{\sigma_a - \varphi(T)} T^\epsilon \leq t^{\sigma_a} \exp\left(-\frac{\ln t}{T^\beta}\right) T^\epsilon = t^{\sigma_a} \exp\left(-(1 + \epsilon) \ln T + \epsilon \ln T\right) = \frac{t^{\sigma_a}}{T}$

et donc $t^{\sigma_a - \varphi(T)} T^\epsilon \ll_\epsilon t^{\sigma_a} (\ln t)^{-\frac{1}{\beta} + \epsilon}$.

Pour le deuxième point, on prend :

$$T = \exp \left(\left(\frac{M \ln t}{1 + \epsilon} \right)^{\frac{1}{\beta+1}} \right)$$

On en déduit notamment

- $\frac{1}{T} \ll_{\epsilon} \exp \left(- (M \ln t)^{\frac{1}{\beta+1}} (1 - \epsilon) \right)$.

- $\ln T \ll (\ln t)^{\frac{1}{\beta+1}}$.

On obtient alors, pour $\epsilon > 0$ assez petit, une majoration de chacun des termes de la somme dans le grand O :

- $t^{\sigma_a} \frac{(\ln t)^{\alpha}}{T} \ll_{\epsilon} t^{\sigma_a} \exp \left(- (M \ln t)^{\frac{1}{\beta+1}} (1 - \epsilon) \right)$

- $B(2t) \ll 1$ qui rentre dans les autres termes de reste.

- $B(2t)t \frac{\ln T}{T} \ll_{\epsilon} t (\ln t)^{\frac{1}{\beta+1}} \exp \left(- (M \ln t)^{\frac{1}{\beta+1}} (1 - \epsilon) \right)$

d'où

$$B(2t)t \frac{\ln T}{T} \ll_{\epsilon} t \exp \left(- (M \ln t)^{\frac{1}{\beta+1}} (1 - \epsilon) \frac{1}{\beta+1} \ln \ln t \right)$$

donc quitte à renommer ϵ ,

$$B(2t)t \frac{\ln T}{T} \ll_{\epsilon} \exp \left(- (M \ln t)^{\frac{1}{\beta+1}} (1 - \epsilon) \right).$$

- $t^{\sigma_a - \varphi(T)} T^{\epsilon} \leq t^{\sigma_a} \exp \left(- \frac{M \ln t}{(\ln T)^{\beta}} \right) T^{\epsilon} = t^{\sigma_a} \exp \left(-(1 + \epsilon) \ln T + \epsilon \ln T \right) = \frac{t^{\sigma_a}}{T}$

et donc $t^{\sigma_a - \varphi(T)} T^{\epsilon} \ll_{\epsilon} t^{\sigma_a} \exp \left(- (M \ln t)^{\frac{1}{\beta+1}} (1 - \epsilon) \right)$.

□

Chapitre 16

Vers un ordre supérieur

Sommaire

16.1 Nouvelles notations et premières propriétés	291
16.2 Formule de Perron généralisée	295
16.3 Estimation des moyennes d'ordre supérieur	299
16.4 Fin de la preuve du théorème 13.3	302
16.5 Fin de la preuve des théorèmes 13.8 et 13.12	304

Dans le cas d'une bande de prolongement méromorphe, on considère un contour rectangulaire qu'on rend doublement infini en hauteur. Une idée pour s'en sortir est alors de passer par des moyennes d'ordres supérieurs de la suite (a_n) .

On énonce alors la formule de Perron généralisée (proposition 16.12). Cette formule relie la moyenne d'ordre supérieur $N_k(t)$ (moyenne de Cesaro, l'ordre k étant fonction de la croissance de la série de Dirichlet sur les droites verticales), et une intégrale $\int \frac{Z(s)t^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds$ sur une droite verticale dans le domaine d'absolue convergence.

Faute de relation entre N et N_k , les opérateurs Δ et $\tilde{\Delta}$ établissent une sorte de dérivation, respectivement dans le monde discret et le monde continu. La formule de Perron est alors transformée en une relation entre $\Delta_y^{(k)} N_k(t)$ et une intégrale $\int Z(s) \Delta_y^{(k)}(t^s) \dots$ (y est un paramètre qu'il faudra régler en fonction de t).

On obtient alors un développement asymptotique de $\Delta_y^{(k)} N_k$, puis il faudra « redescendre » à $N(t)$, par les propositions 16.16 ou 16.19, analogues de l'inégalité des accroissements finis.

16.1 Nouvelles notations et premières propriétés

On commence par introduire les moyennes d'ordre supérieur.

Définition 16.1. On note $\forall k \geq 1$, $N_k(t) = \frac{1}{k!} \sum_{n \leq t} a_n (t-n)^k$.

On définit deux opérateurs fonctionnels sur les fonctions continues par morceaux sur \mathbb{R} , indicées par un $y > 0$:

1. $\Delta_y f : t \mapsto f(t+y) - f(t)$ et $\Delta_y^{(k)} = \Delta_y \circ \Delta_y \circ \dots \circ \Delta_y$

2. $\tilde{\Delta}_y f : t \mapsto \int_t^{t+y} f(u) du$ et $\tilde{\Delta}_y^{(k)} = \tilde{\Delta}_y \circ \tilde{\Delta}_y \circ \dots \circ \tilde{\Delta}_y$

Comme dans l'énoncé du théorème, on appellera $Z(s)$ la série de Dirichlet associée à la suite (a_n) .

Les hypothèses du théorèmes sont supposés vérifiées à partir de maintenant, sauf la positivité des coefficients qu'on n'utilisera qu'à partir de la proposition 16.16.

Lemme 16.2. $\forall k \geq 0$, N_k est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$.

$\forall k \geq 1$, N_k est C^{k-1} sur \mathbb{R} .

$\forall k \geq 2$, $N'_k(t) = N_{k-1}(t)$ sur \mathbb{R} .

$N'_1(t) = N_0(t) = N(t)$, sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$.

Démonstration. N_0 est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$ de façon triviale.

Soit $k \geq 1$ et $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$. Alors, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $]x_0 - \epsilon_0; x_0 + \epsilon_0[\cap \mathbb{N}^* = \emptyset$ et donc : $\forall t \in]x_0 - \epsilon_0; x_0 + \epsilon_0[$, d'après la définition de N_k :

$$N_k(t) = \sum_{n \leq x_0 - \epsilon_0} a_n(t - n)^k.$$

Cette expression est celle d'un polynôme en t , et donc en particulier, N_k est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$.

Soit maintenant $k \geq 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Alors $\forall t \in]n_0 - 1; n_0 + 1[$,

$$N_k(t) = \sum_{n \leq x} a_n(t - n)^k = \begin{cases} \sum_{n \leq n_0 - 1} a_n(t - n)^k & \text{si } n_0 - 1 < t < n_0 \\ \sum_{n \leq n_0} a_n(t - n)^k & \text{si } n_0 \leq t < n_0 + 1 \end{cases}$$

Le deuxième cas contient juste un terme en plus par rapport au premier : $a_{n_0}(t - n_0)^k$ dont toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à $k - 1$ s'annulent en $t = n_0$. Donc N_k est C^{k-1} sur \mathbb{R} .

La fin de la preuve est évidente. □

Corollaire 16.3. On a : $N_1(t) = \int_0^x N(t) dt = \int_0^x N_0(t) dt$

et $\forall k \geq 1$, $N_k(t) = \int_0^t N_{k-1}(x) dx$.

Démonstration. évident □

Lemme 16.4. $\forall k \geq 1$, et $\forall y > 0$,

1. on a uniformément en t tel que $y \leq t$

$$|\Delta_y^{(k)} f(t)| \leq 2^k \sup_{[t, (k+1)t]} |f|$$

2. Si f est de classe C^k :

$$\Delta_y^{(k)} f = \tilde{\Delta}_y^{(k)}(f^{(k)})$$

c'est à dire :

$$\Delta_y^{(k)} f(t) = \int_t^{t+y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+y} f^{(k)}(t_k) dt_k$$

Remarque 16.5. Une version plus précise du premier point fait l'objet du lemme A.1.

Démonstration. 1. Preuve par récurrence immédiate à l'aide de la définition de Δ_y .
On a bien pour tout t tel que $t \geq y$: $|\Delta_y f(t)| \leq |f(t+y)| + |f(t)| \leq 2 \sup_{[t,2t]} |f|$.
Supposons que pour tout t tel que $t \geq y$, $|\Delta_y^{(k)} f(t)| \leq 2^k \sup_{[t,(k+1)t]} |f|$. Alors :

$$\left| \Delta_y^{(k+1)} f(t) \right| = \left| \Delta_y^{(k)} (\Delta_y f)(t) \right| \leq 2^k \sup_{[t,(k+1)t]} |\Delta_y f|$$

Or $\forall x \in [t, (k+1)t]$:

$$|\Delta_y f(x)| = |f(x+y) - f(x)| \leq |f(x+y)| + |f(x)| \leq 2 \sup_{[t,(k+2)t]} |f|,$$

ce qui permet de conclure.

2. Par récurrence sur k .

Pour $k = 1$, le lemme s'écrit :

$$\int_t^{t+y} f'(t_1) dt_1 = f(t+y) - f(t)$$

vrai.

Supposons que pour un certain $k \geq 1$ avec f de classe C^k :

$$\Delta_y^{(k)} f(t) = \int_t^{t+y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+y} f^{(k)}(t_k) dt_k$$

Prenons f de classe C^{k+1} . Alors, par définition :

$$\begin{aligned} \Delta_y^{(k+1)} f(t) &= \Delta_y^{(k)} f(t+y) - \Delta_y^{(k)} f(t) \\ &= \int_{t+y}^{t+2y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+y} f^{(k)}(t_k) dt_k \\ &\quad - \int_t^{t+y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+y} f^{(k)}(t_k) dt_k \end{aligned}$$

Avec le changement de variable global

$$(t_1, t_2, \dots, t_k) \mapsto (t_1 - y, t_2 - y, \dots, t_k - y)$$

(de jacobien égal à 1) on a :

$$\Delta_y^{(k+1)} f(t) = \int_t^{t+y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+y} [f^{(k)}(t_k + y) - f^{(k)}(t_k)] dt_k$$

et donc :

$$\Delta_y^{(k+1)} f(t) = \int_t^{t+y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+y} \int_{t_k}^{t_k+y} f^{(k+1)}(t_k) dt_k$$

□

Voici un corollaire immédiat au lemme 16.4 :

Corollaire 16.6. On dispose du lien suivant entre Δ et $\tilde{\Delta}$:

$$\tilde{\Delta}_y^{(k)}(u^s) = \left(\frac{1}{\prod_{j=1}^k (s+j)} \right) \Delta_y^{(k)}(u^{s+k})$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 16.4 à la fonction $u \mapsto u^{s+k}$, □

Cet autre corollaire relie les moyennes de la série, à l'opérateur $\Delta^{(k)}$ appliqué aux moyennes d'ordre supérieur.

Corollaire 16.7. $\forall k \geq 1 :$

$$\Delta_y N_k(t) = \int_t^{t+y} N_{k-1}(t_1) dt_1$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_y^{(k)} N_k(t) &= \int_t^{t+y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+y} N(t_k) dt_k \\ &= \int_t^{t+y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+y} N_0(t_k) dt_k \end{aligned}$$

Démonstration. D'après la proposition 15.1, N_k est \mathcal{C}^k presque partout et $N_k^{(k)} = N = N_0$ presque partout. On peut donc appliquer le lemme 16.4. □

Par abus de notation, on note u^s la fonction $u \mapsto u^s$, $\Delta_y^k(x^s)$ pour $\Delta_y^k(u^s)(x)$ et $\tilde{\Delta}_y^k(x^s)$ pour $\tilde{\Delta}_y^k(u^s)(x)$

Lemme 16.8. 1. On a :

$$\tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s) \ll_k t^{\sigma+k} |\tau|^{-k},$$

uniformément en $|\tau| \geq 1$, $0 < y \leq t$, et s appartenant à une bande de la forme $\{|\sigma| < C\}$, avec C fixé.

2. Soit K un compact de \mathbb{R} . On a uniformément en $0 < y \leq t$ et $\sigma \in K$ et en τ

$$\tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s) = y^k t^s \left(1 + O_{K,k} \left(\frac{y}{t} \right) \right)$$

Remarque 16.9. Une formule plus précise permettant de montrer le premier point fait l'objet du lemme A.2.

Démonstration. 1. On a vu au corollaire 16.6 que

$$\tilde{\Delta}_y^{(k)}(u^s) = \left(\frac{1}{\prod_{j=1}^k (s+j)} \right) \Delta_y^{(k)}(u^{s+k}),$$

et donc

$$\left| \tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s) \right| \leq \left(\frac{1}{\prod_{j=1}^k |s+j|} \right) \left| \Delta_y^{(k)}(t^{s+k}) \right|.$$

Toujours d'après le lemme 16.4, cela implique :

$$\left| \tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s) \right| \leq \left(\frac{1}{\prod_{j=1}^k |s+j|} \right) 2^k \sup_{[t, (k+1)t]} |u^{s+k}|$$

Or $\left| \frac{1}{s+j} \right| \ll \frac{1}{|\tau|}$ uniformément en $|\tau| \geq 1$ et

$$\sup_{[t, (k+1)t]} |u^{s+k}| \leq \left(1 + (k+1)^{\sigma+k} \right) t^{\sigma+k}.$$

(discuter suivant que $\sigma + k \geq 0$ ou non). Et donc en faisant dépendre la constante de majoration de k et de σ , on obtient bien le résultat annoncé.

2. On a :

$$\tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s) - y^k t^s = \int_t^{t+y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+y} (t_k^s - t^s) dt_k$$

avec $t_k \in [t, t + ky]$, c'est à dire $t_k = t + z$ avec $z \in [0, ky]$. On a alors :

$$\begin{aligned} t_k^s - t^s &= (t + z)^s - t^s \\ &= t^s \left(\left(1 + \frac{z}{t}\right)^s - 1 \right) \\ &= t^s O_{K,k} \left(\frac{y}{t} \right) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_j^{(k)}(t^s) - y^k t^s &= \int_t^{t+y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+y} t^s O_{K,k} \left(\frac{y}{t} \right) dt_k \\ &= t^s y^k O_{K,k} \left(\frac{y}{t} \right) \end{aligned}$$

□

16.2 Formule de Perron généralisée

D'abord un lemme :

Lemme 16.10. *Pour tout $j \geq 1$, pour tout $c > \max(\sigma_c, 0)$, on a :*

$$\sum_{n \leq t} a_n n^j = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Z(s) \frac{t^{s+j}}{s+j} ds$$

où l'intégrale

- est semi-convergente pour $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$
- converge en valeur principale pour $t \in \mathbb{N}$.

Démonstration. On écrit que :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n n^j}{n^s} = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^{s-j}} = Z_n(s),$$

où Z_n est définie par $Z_n(s) = Z(s - j)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On a donc :

$$Z_n(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n n^j}{n^s}.$$

De plus, en notant σ_a et σ_c respectivement les abscisses de convergence absolue et de convergence de $Z(s)$, l'abscisse de convergence absolue de Z_n est $\sigma_a + j$ tandis que son abscisse de convergence est $\sigma_c + j$.

Le problème est alors d'évaluer la moyenne des coefficients de Z_n . On applique alors la formule de Perron (proposition 14.2) à Z_n , et on obtient, pour tout $c' > \max(0, \sigma_c + j)$:

$$\sum_{n \leq t} a_n n^j = \frac{1}{2i\pi} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} Z_n(s') \frac{t^{s'}}{s'} ds' = \frac{1}{2i\pi} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} Z(s' - j) \frac{t^{s'}}{s'} ds',$$

où l'intégrale

- est semi-convergente pour $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$
- converge en valeur principale pour $t \in \mathbb{N}$.

Le changement de variable évident $s = s' - j$ conduit bien à la conclusion. \square

On donne aussi un lemme combinatoire qui sera utile dans la preuve :

Lemme 16.11. *Pour tout $k \geq 0$, on a :*

$$\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{(-1)^j}{s+j} = \frac{1}{s(s+1) \cdots (s+k)}.$$

Démonstration. Il s'agit simplement de trouver la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{s(s+1) \cdots (s+k)}$. Multiplier par $s+j$ et faire tendre s vers $-j$ de chaque côté. \square

La proposition qui suit est une généralisation de la formule de Perron ($k=0$), qu'elle contient strictement.

Proposition 16.12 (Formule de Perron d'ordre k).

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $t > 0$ et pour tout $c > \max(0, \sigma_c)$:

$$t^{-k} N_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{Z(s)t^s}{s(s+1) \cdots (s+k)}$$

où

- l'intégrale est semi-convergente pour $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$
- l'intégrale converge en valeur principale pour $t \in \mathbb{N}$

Démonstration. preuve classique. Le cas $k=0$ a déjà été traité (proposition 14.2). Reste à traiter le cas $k=1$.

On a par définition :

$$N_k(t) = \frac{1}{k!} \sum_{n \leq t} a_n (t-n)^k,$$

c'est-à-dire par la formule du binôme :

$$N_k(t) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} t^{k-j} (-1)^j \sum_{n \leq t} a_n n^j.$$

On utilise alors sur le lemme 16.10 (les modes de convergence sont celles de la conclusion du lemme 16.10) :

$$N_k(t) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} t^{k-j} (-1)^j \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) t^{s+j} \frac{ds}{s+j},$$

et donc en réarrangeant les termes, on obtient :

$$t^{-k} N_k(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) t^s \left(\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{(-1)^j}{s+j} \right) ds$$

et d'après le lemme 16.11, on a bien ce qu'on voulait démontrer. \square

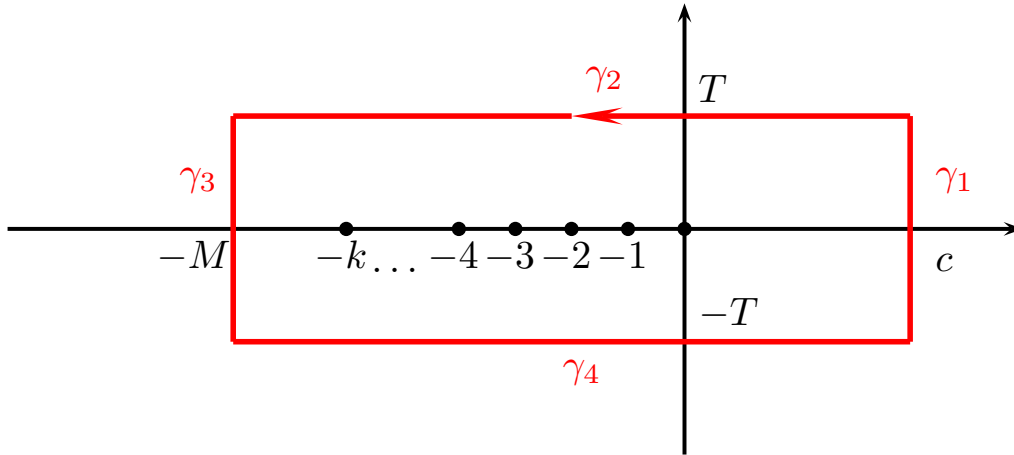


FIG. 16.1 – Premier contour pour la preuve de la formule de Perron d'ordre supérieur

Remarque. Le cas $k \geq 1$ et $c > \sigma_a$ peut-être traité à part, grâce au lemme suivant 16.13, analogue du lemme 14.1 pour l'ordre supérieur.

Lemme 16.13. $\forall k \geq 1, \forall c > 0,$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^s \frac{ds}{s(s+1)\dots(s+k)} = \begin{cases} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^k & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

preuve du lemme. Pour le cas, $t > 1$, on applique le théorème des résidus au contour :

avec la fonction $s \mapsto \frac{t^s}{s(s+1)\dots(s+k)}$, qui a ses pôles en $s = 0, s = -1, s = -2, \dots, s = -k$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{R}_M} \frac{t^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds &= \sum_{j=0}^k \frac{x^{-j}}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^k (-j+l)} \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{x^{-j}}{\prod_{\substack{l=-j \\ l \neq 0}}^{k-j} l} \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j x^{-j}}{j!(k-j)!} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j x^{-j} \binom{k}{j} \end{aligned}$$

soit :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{R}_M} x^s \frac{ds}{s} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^k \quad (16.1)$$

D'autre part :

$$\int_{c+iT}^{-M+iT} \frac{t^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds = \int_c^{-M} \frac{t^{\sigma+iT}}{(\sigma+iT)(\sigma+iT+1)\dots(\sigma+iT+k)} d\sigma$$

et donc :

$$\left| \int_{c+iT}^{-M+iT} \frac{t^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds \right| \leq \frac{1}{T^{k+1}} \frac{t^c - t^{-M}}{\ln t} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0.$$

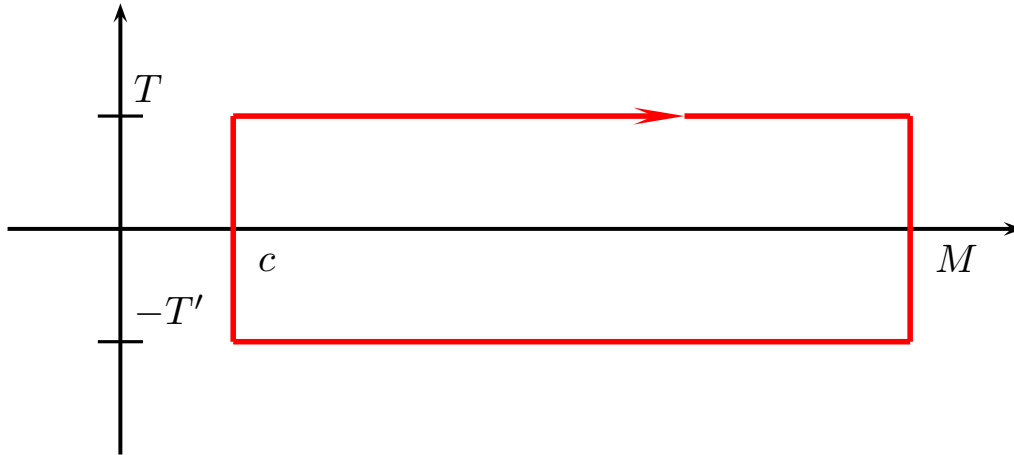


FIG. 16.2 – Deuxième contour pour la preuve de la formule de Perron d'ordre supérieur

De même :

$$\int_{-M-iT}^{c-iT} \frac{t^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0.$$

On a aussi :

$$\int_{-M+iT}^{-M-iT} \frac{t^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds = \int_T^{-T} \frac{it^{-M+i\tau}}{(-M+i\tau)(-M+i\tau+1)\dots(-M+i\tau+k)} d\tau$$

et donc :

$$\left| \int_{-M+iT}^{-M-iT} \frac{t^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds \right| \leq \frac{t^{-M}}{M^{k+1}} \int_{-T}^T d\tau = \frac{2T}{t^M M^{k+1}}.$$

On reporte les résultats trouvés dans 16.1 et on fait tendre $M \rightarrow +\infty$ d'abord, puis $T \rightarrow +\infty$, et on obtient bien le résultat.

Quand au cas $t \leq 1$, on considère cette fois le contour :

qui n'englobe plus de pôle. On a comme avant :

$$\int_{c+iT}^{M+iT} \frac{t^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0.$$

et :

$$\int_{M-iT}^{c-iT} \frac{t^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0.$$

On a aussi :

$$\left| \int_{M-iT}^{c-iT} \frac{t^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds \right| \leq \frac{2Tt^M}{M^{k+1}} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0.$$

On conclut encore en prenant la limite d'abord en M , puis en T . □

preuve alternative dans le cas $\sigma > \sigma_a$ et $k \geq 1$, en se servant du lemme 16.13.

On écrit :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^s \frac{ds}{s(s+1)\dots(s+k)} = \begin{cases} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{n}{t}\right)^k & \text{si } t \geq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

En multipliant par a_n et en sommant sur n , on obtient :

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a_n t^s}{n^s s(s+1)\dots(s+k)} = N_k(t)t^{-k}$$

Or, uniformément en $s = c + i\tau$:

$$\left| \frac{a_n t^s}{n^s s(s+1)\dots(s+k)} \right| \ll \frac{|a_n|t^c}{n^c(1+|\tau|)^{k+1}}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|t^c}{n^c(1+|\tau|)^{k+1}} d|\tau| = t^c \int \frac{d|\tau|}{(1+|\tau|)^{k+1}} \sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^c} < +\infty$$

car $c > \sigma_a$. D'après le théorème de Fubini, on peut donc permuter somme et intégrale, et on reconnaît $Z(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ ce qui permet de conclure. \square

16.3 Estimation des moyennes d'ordre supérieur

La proposition qui suit, fondée sur la proposition 16.12 permet de transférer l'évaluation de N_k en une évaluation sur $\Delta_y^{(k)} N_k$. Cette évaluation, qui donnera le lemme 16.15 grâce aux hypothèses sur la série, pourra ensuite être injectée dans l'encadrement de la proposition 16.16, et ainsi fournir l'évaluation avec reste de $N(t)$ souhaitée.

Proposition 16.14. *Soit $0 < y \leq t$ et k tel que $k > A\delta$ (par exemple $k = \lfloor A\delta \rfloor + 1$). On a :*

$$\Delta_y^{(k)} N_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{Z(s)}{s} \tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s) ds$$

Démonstration. D'après la formule de Perron d'ordre supérieur (proposition 16.12), on a :

$$N_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{Z(s)t^{s+k}}{s(s+1)\dots(s+k)}$$

On applique l'opérateur linéaire $\Delta_y^{(k)}$ aux deux membres de cette égalité, et on obtient :

$$\Delta_y^{(k)} N_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{Z(s)\Delta_y^{(k)}(t^{s+k})}{s(s+1)\dots(s+k)}$$

Et finalement, en utilisant le corollaire 16.6, on aboutit bien à l'énoncé de la proposition. \square

Le lemme qui suit donne un asymptotique en se servant du théorème des résidus et des hypothèses sur la série.

Lemme 16.15. *Pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, pour tous t et y tels que $0 < y \leq t$, et pour tout k fixé tel que $k > A\delta$, en prenant $c' = \sigma_a - \delta + \frac{2\epsilon}{A}$:*

$$\Delta_y^{(k)} N_k(t) = \sum_{j=0}^r y^k \text{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right) + O_\epsilon \left(t^{c'+k} + y^{k+1} t^{\sigma_0-1+\epsilon} \right).$$

Démonstration. On prend $\epsilon > 0$ assez petit pour que $c' < \sigma_r$ (c'est à dire que tous les pôles de Z sont dans le demi-plan $\{\Re(s) > c'\}$). On a

$$k > A\delta = A \left(\sigma_a - c' + \frac{2\epsilon}{A} \right) = A(\sigma_a - c') + 2\epsilon.$$

D'après le lemme 16.8 et les hypothèses du théorème 13.3, on a :

$$\frac{Z(s)}{s} \tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s) \ll_{\epsilon} (1 + |\tau|)^{-\epsilon-1}$$

On applique alors le théorème des résidus au contour dessiné à la figure 16.3 et à la fonction $s \mapsto \frac{Z(s)}{s} \tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s)$ et on fait tendre $T \rightarrow +\infty$. c est un réel qui ne joue pas dans la suite, qu'on prendre juste $c > \max(\sigma_a, 0)$. Pour T assez grand, le contour considéré englobe tous les pôles et on obtient :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} \frac{Z(s)}{s} \tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s) ds = \sum_{j=0}^r \text{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} \tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s) \right) \quad (16.2)$$

Les s_k sont en nombre fini, donc on peut trouver un compact K qui englobe un voisinage de leur ensemble. D'après le lemme 16.8, on a donc :

$$\text{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} \tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s) \right) = y^k \text{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right) \left[1 + O_{K,k} \left(\frac{y}{t} \right) \right]$$

uniformément en $0 < y \leq t$.

D'autre part, $\forall \epsilon > 0$, $Z(s) \ll_{\sigma} 1 + |\tau|^{\epsilon}$ pour $\sigma > \sigma_a$. Donc d'après le théorème de Phragmen-Lindelöf on a $Z(s) \ll 1 + |\tau|^{A(\sigma_a - \delta) + \epsilon}$ uniformément en σ pour $\sigma > \sigma_a - \delta$,

Donc d'après le lemme 16.8, sur γ_2 , à t fixé :

$$\frac{Z(s)}{s} \tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s) \ll_{\epsilon} T^{A(\sigma_a - \sigma) + \epsilon - 1 - k},$$

(uniformément en $T \geq 1$ et σ). Mais $\forall \sigma \geq c'$, on a :

$$A(\sigma_a - \sigma) + \epsilon - 1 - k \leq A(\sigma_a - c') + \epsilon - 1 - k$$

et donc, compte-tenu du choix de k et de c' :

$$A(\sigma_a - \sigma) + \epsilon - 1 - k < -1 - \epsilon < 0$$

et donc pour tout $\sigma \geq c'$, $\frac{Z(s)}{s} \tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s)$ converge vers 0 sur γ_2 quand $T \rightarrow +\infty$. De plus, uniformément en T , $\frac{Z(s)}{s} \tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s) \ll 1$ intégrable (en σ) sur $[c, c']$ (compact).

Donc, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_{\gamma_2} \frac{Z(s)}{s} \tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s) ds = \int_c^{c'} \frac{Z(\sigma + iT)}{\sigma + iT} \tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^{\sigma + iT}) d\sigma \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$$

De même :

$$\int_{\gamma_4} \frac{Z(s)}{s} \tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s) ds \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$$

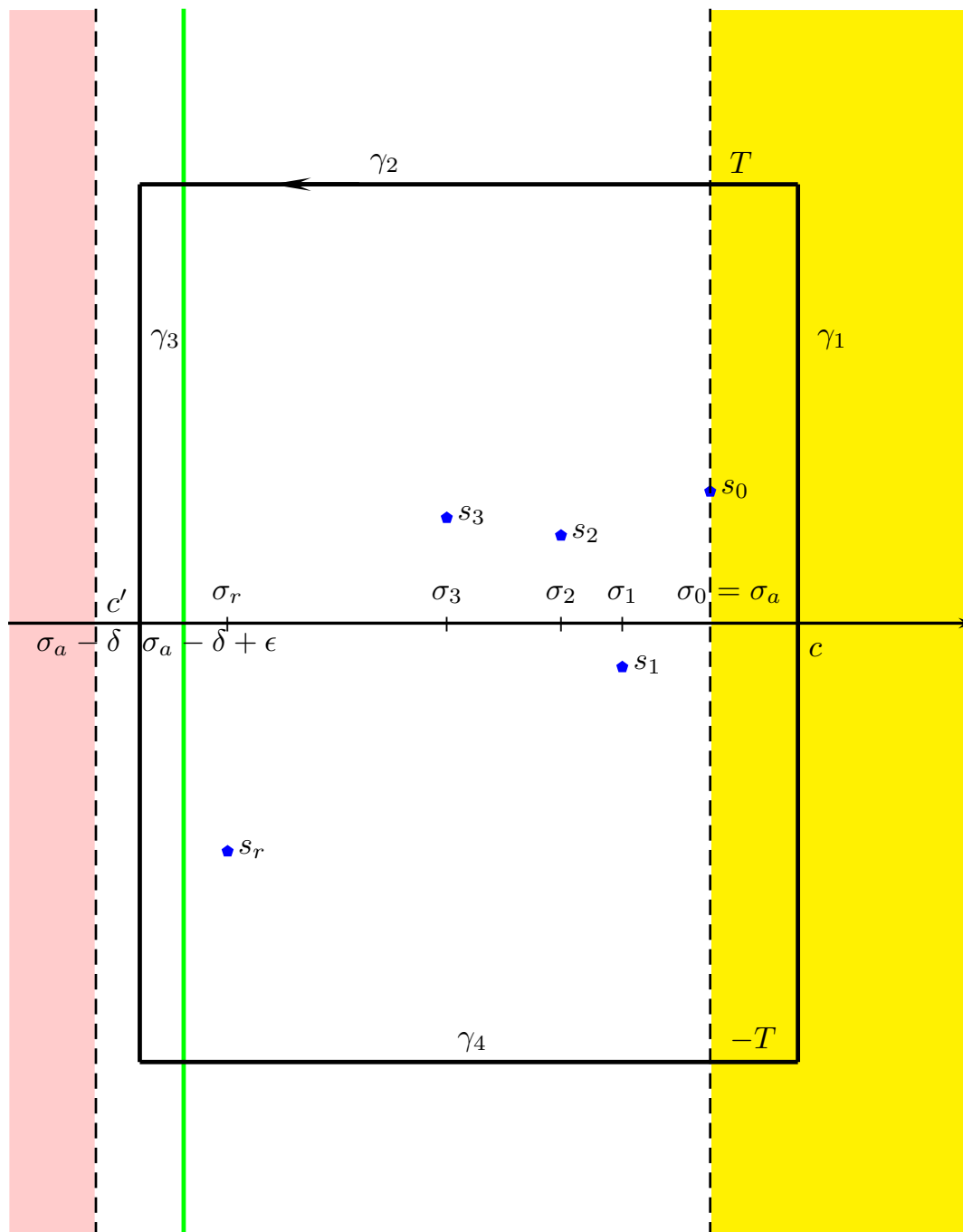


FIG. 16.3 – Contour d'intégration pour le théorème de Landau revisité

D'autre part, d'après la proposition 16.14 :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{Z(s)}{s} \tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s) ds \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \Delta_y^{(k)} N_k(t).$$

Enfin, on écrit que sur γ_3 , $\forall \epsilon > 0$, d'après le lemme 16.8, $\sigma = c'$ étant fixé :

$$\frac{Z(s)}{s} \tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s) \ll_{k,\epsilon} t^{c'+k} (1 + |\tau|)^{A(\sigma_a - c') + \epsilon - 1 - k},$$

uniformément en $\tau \in \mathbb{R}$ et en $0 < y \leq t$ (la fonction considérée à gauche étant continue sur la droite $\{\Re(s) = c'\}$, la majoration est vraie pour les τ petits par compacité). Et donc compte-tenu du choix de k , pour ϵ assez petit :

$$\frac{Z(s)}{s} \tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s) \ll_{k,\epsilon} t^{c'+k} (1 + |\tau|)^{-1 - \epsilon},$$

(avec la même uniformité), et en intégrant :

$$\int_{\gamma_3} \frac{Z(s)}{s} \tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s) ds \ll_k t^{c'+k}.$$

et donc en reportant dans 16.2, on prouve :

$$\Delta_y^{(k)} N_k(t) = \sum_{j=0}^r y^k \operatorname{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right) \left[1 + O_{K,k} \left(\frac{y}{t} \right) \right] + O_k \left(t^{c'+k} \right). \quad (16.3)$$

On écrit enfin, grâce au lemme 14.3 :

$$\sum_{j=0}^r y^k \operatorname{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right) O_{K,k} \left(\frac{y}{t} \right) = \sum_{j=0}^r y^k t^{\sigma_j} Q_j(\ln t) O_{K,k} \left(\frac{y}{t} \right) = O_\epsilon(y^{k+1} t^{\sigma_0 - 1 + \epsilon})$$

et on reporte dans 16.3.

□

16.4 Fin de la preuve du théorème 13.3

C'est seulement maintenant, et pour tout le reste du chapitre, qu'on suppose que les a_n sont positifs. On va prouver le théorème 13.3.

Les inégalités suivantes encadrent la moyenne des coefficients par des bornes dépendant de la moyenne d'ordre supérieur.

Proposition 16.16. *On a pour tout $k \geq 1$:*

$$\frac{\Delta_y^{(k)} N_k(t - ky)}{y^k} \leq N(t) \leq \frac{\Delta_y^{(k)} N_k(t)}{y^k}$$

Démonstration. Par définition :

$$\Delta_y^{(k)} N_k(t) = \int_t^{t+y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+y} N(t_k) dt_k,$$

mais $t_k \geq t_{k-1} \geq \dots \geq t_1 \geq t$ et par croissance de N (à cause de la positivité des coefficients) :

$$\Delta_y^{(k)} N_k(t) \geq \int_t^{t+y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+y} N(t) dt_k = y^k N(t).$$

De même :

$$\Delta_y^{(k)} N_k(t - ky) = \int_{t-ky}^{t-(k-1)y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+y} N(t_k) dt_k,$$

mais $t_k \leq t_{k-1} + y \leq t_{k-2} + 2y \leq \dots \leq t_1 + (k-1)y \leq t$ et par croissance de N :

$$\Delta_y^{(k)} N_k(t - ky) \leq \int_{t-ky}^{t-(k-1)y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+y} N(t) dt_k = y^k N(t).$$

□

On en déduit facilement le corollaire suivant, en se servant aussi du lemme 16.15.

Corollaire 16.17. *Pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, pour tous t et y tels que $0 < y \leq t$, et pour tout k fixé tel que $k > A\delta$, en prenant $c' = \sigma_a - \delta + \frac{2\epsilon}{A}$:*

$$N(t) = \sum_{k=0}^r t^{sk} Q_k(\ln t) + O_\epsilon(t^{c'+k} y^{-k} + yt^{\sigma_0-1+\epsilon})$$

La preuve du théorème 13.3 est alors immédiate.

Fin de la preuve du théorème 13.3. Reporter l'estimation du corollaire 16.17, et égaliser les termes de reste (prendre $y = t^{1-\frac{\sigma_0-c'+\epsilon}{k+1}}$). Les deux extrémités ont bien le même comportement asymptotique, car on a choisi y tel que $\frac{y}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Les affirmations concernant les Q_j font l'objet du lemme 14.3.

□

Maintenant on passe à la preuve du corollaire 13.6.

Remarque 16.18. *A partir du corollaire 13.6, on obtient :*

$$N(t) = \sum_{n \leq t} a_n = \sum_{j=0}^{m_0} t^{sj} Q_j(\ln t) \left[1 + O_\epsilon \left(t^{\sigma_a - \sigma_r - \frac{1}{A} + \epsilon} \right) \right].$$

Ce qui précède n'a en effet du sens, c'est-à-dire le terme de reste en est un, que si $\sigma_r < \sigma_a$.

preuve du corollaire 13.6. Avec les notations du théorème 13.3, on a : $\frac{\delta}{k+1} = \frac{\delta}{[A\delta]+2} \xrightarrow{\delta \rightarrow +\infty} \frac{1}{A}$ et donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_0 > 0$ tel que $\left| \frac{\delta_0}{[A\delta_0]+1} - \frac{1}{A} \right| < \frac{\epsilon}{2}$. Or d'après le théorème 13.3, comme Z a un prolongement méromorphe avec un nombre fini de pôles sur chaque bande verticale, on a pour tout $\delta > 0$ et pour tout $\epsilon > 0$:

$$N(t) = \sum_{n \leq t} a_n = \sum_{j=0}^{r''} t^{sj} Q_j(\ln t) + O_\epsilon \left(t^{\sigma_a - \frac{\delta}{[A\delta]+2} + \frac{\epsilon}{2}} \right),$$

où $r'' = \max \left\{ j \in \{0, \dots, r\} : \sigma_j > \sigma_a - \frac{\delta}{k+1} \right\}$ (r'' dépend de δ). En particulier, avec $\delta = \delta_0$:

$$\sigma_a - \frac{\delta_0}{[A\delta_0] + 2} + \frac{\epsilon}{2} < \sigma_a - \frac{1}{A} + \epsilon,$$

et donc on obtient que pour tout $\epsilon > 0$:

$$N(t) = \sum_{n \leq t} a_n = \sum_{j=0}^{r'} t^{s_j} Q_j(\ln t) + O_\epsilon \left(t^{\sigma_a - \frac{1}{A} + \epsilon} \right),$$

où

$$r' = \max \left\{ j \in \{0, \dots, r\} : \sigma_j > \sigma_a - \frac{\delta_0}{[A\delta_0] + 2} \right\}.$$

Et comme $\frac{\delta_0}{[A\delta_0] + 1} < \frac{\delta_0}{A\delta_0} = \frac{1}{A}$, il est loisible de prendre la somme jusqu'à r comme dans l'énoncé du corollaire, les $j > r'$ rentrant dans le terme d'erreur.

□

16.5 Fin de la preuve des théorèmes 13.8 et 13.12

Dans toute la suite, on ne supposera plus sauf mention contraire (et on mettra dorénavant le symbole $\hat{}$ (chapeau) pour tout ce qui s'y rapporte) que les séries considérées sont à coefficients positifs.

On considère une suite $(\hat{a}_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de \mathbb{R}^+ tel que $\forall n \leq 1, |a_n| \leq \hat{a}_n$, et on notera de manière évidente : $\hat{N}(t), \hat{N}_k(t), \hat{Z}(s)$ etc...

Proposition 16.19. $\forall k \geq 1,$

$$\frac{\Delta_y^{(k)} N_k(t)}{y^k} = N(t) + O_k \left(\hat{N}(t + ky) - \hat{N}(t) \right) = N(t) + O_k \left(\Delta_{ky}^{(1)} \hat{N}(t) \right)$$

Remarque 16.20. Cette proposition est le pendant de la proposition 16.16 quand les coefficients de la série de Dirichlet ne sont pas supposés positifs.

Démonstration. On démontre la proposition par récurrence sur k . Au rang $k = 1$, la proposition s'écrit :

$$\frac{N_1(t+y) - N_1(t)}{y} = N(t) + O \left(\hat{N}(t+y) - \hat{N}(t) \right).$$

Mais en fait :

$$N_1(t+y) - N_1(t) = \sum_{n \leq t} a_n [(t+y) - t] = \sum_{n \leq t} y a_n$$

et donc

$$\frac{N_1(t+y) - N_1(t)}{y} - N(t) = 0$$

et donc la proposition est vraie au rang $k = 1$.

On suppose que la proposition est vraie jusqu'au rang $k-1 \geq 1$ ($k \geq 2$). Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_y^{(k)} N_k(t)}{y^k} - N(t) &= \left[\frac{1}{y^k} \Delta_y^{(k)} N_k(t) - \frac{1}{y^{k-1}} \Delta_y^{(k-1)} N_{k-1}(t) \right] + \left[\frac{1}{y^{k-1}} \Delta_y^{(k-1)} N_{k-1}(t) - N(t) \right] \\ &= \left[\frac{1}{y^k} \Delta_y^{(k)} N_k(t) - \frac{1}{y^{k-1}} \Delta_y^{(k-1)} N_{k-1}(t) \right] + O_k \left(\hat{N}(t + (k-1)y) - \hat{N}(t) \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^k} \Delta_y^{(k)} N_k(t) - \frac{1}{y^{k-1}} \Delta_y^{(k-1)} N_{k-1}(t) &= \frac{1}{y^{k-1}} \Delta_y^{(k-1)} \left[\frac{1}{y} \Delta_y N_k(t) - N_{k-1}(t) \right] \\ &= \frac{1}{y^{k-1}} \Delta_y^{(k-1)} \left[\frac{1}{y} (N_k(t+y) - N_k(t)) - N_{k-1}(t) \right] \end{aligned}$$

et donc d'après l'égalité des accroissements finis, $\exists v \in]t, t+y[$ tel que :

$$\frac{1}{y^k} \Delta_y^{(k)} N_k(t) - \frac{1}{y^{k-1}} \Delta_y^{(k-1)} N_{k-1}(t) = \frac{1}{y^{k-1}} \Delta_y^{(k-1)} [N_{k-1}(v) - N_{k-1}(t)]$$

soit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^k} \Delta_y^{(k)} N_k(t) - \frac{1}{y^{k-1}} \Delta_y^{(k-1)} N_{k-1}(t) &= \\ \left[\frac{1}{y^{k-1}} \Delta_y^{(k-1)} N_{k-1}(v) - N(v) \right] &- \left[\frac{1}{y^{k-1}} \Delta_y^{(k-1)} N_{k-1}(t) - N_k(t) \right] + [N(v) - N(t)] \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\frac{1}{y^{k-1}} \Delta_y^{(k-1)} N_{k-1}(v) - N(v) = O_k \left(\widehat{N}(v + (k-1)y) - \widehat{N}(v) \right)$$

et :

$$\frac{1}{y^{k-1}} \Delta_y^{(k-1)} N_{k-1}(t) - N(t) = O_k \left(\widehat{N}(t + (k-1)y) - \widehat{N}(t) \right).$$

Enfin :

$$|N(v) - N(t)| = \left| \sum_{t < n \leq v} a_n \right| \leq \sum_{t < n \leq v} |a_n| \leq \sum_{t < n \leq t+ky} |a_n| = \widehat{N}(t+ky) - \widehat{N}(t).$$

De même par croissance de \widehat{N} , les autres termes d'erreur obtenus : $O_k \left(\widehat{N}(t + (k-1)y) - \widehat{N}(t) \right)$, $O_k \left(\widehat{N}(v + (k-1)y) - \widehat{N}(v) \right)$ et $O_k \left(\widehat{N}(t + (k-1)y) - \widehat{N}(t) \right)$ rentrent bien dans le reste annoncé ce qui termine la preuve. \square

Pour démontrer les théorèmes qui suivent, on va aussi démontrer :

Proposition 16.21. *Pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, pour tous t et y tels que $0 < y \leq t$, et pour tout k fixé tel que $k > A\delta$, en prenant $c' = \sigma_a - \delta + \frac{2\epsilon}{A}$, et en supposant $\frac{y}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$,*

$$\widehat{N}(t+ky) - \widehat{N}(t) = O_\epsilon(t^{c'+k}y^{-k} + yt^{\widehat{\sigma}_a-1+\epsilon})$$

Démonstration. On utilise le corollaire 16.17 qui nous donne :

$$\widehat{N}(t) = \sum_{j=0}^r t^{s_j} Q_j(\ln t) + O_\epsilon(t^{c'+k}y^{-k}) + O_\epsilon(yt^{\widehat{\sigma}_a-1+\epsilon})$$

On note $R(t) = \sum_{j=0}^r t^{s_j} Q_j(\ln t)$. D'après le lemme 14.3,

$$t^{s_j} Q_j(\ln t) = \text{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right) = \sum_{m=1}^{m_j} g_{j,m}(t)$$

où $g_{j,m}(t) = C_{j,m} t^{s_j} (\ln t)^{m-1}$, avec les $C_{j,m} \in \mathbb{C}$. On a pour tout $t > 0$:

$$g'_{j,m}(t) \ll_{j,m} t^{\sigma_j-1} (\ln t)^{m-1}$$

donc d'après le théorème des accroissement finis :

$$g_{j,m}(t+my) - g_{j,m}(t) \ll_{j,m} yt^{\sigma_j-1} (\ln t)^{m-1},$$

et donc

$$\operatorname{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} (t+ky)^s \right) - \operatorname{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right) = \sum_{m=1}^{m_j} g_{j,m}(t+my) - g_{j,m}(t) \ll_j yt^{\sigma_j-1} (\ln t)^{m_j-1}$$

et finalement $\forall \epsilon > 0$,

$$R(t+ky) - R(t) = \sum_{j=0}^r \left(\operatorname{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} (t+ky)^s \right) - \operatorname{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right) \right) \ll_{\epsilon} yt^{\hat{\sigma}_a-1+\epsilon}$$

D'autre part, la différence des O , comme $\frac{y}{t} \rightarrow 0$, est bien de la forme annoncée. \square

On est maintenant en mesure de prouver le théorème 13.8.

preuve du théorème 13.8. D'après la proposition 16.19, on a :

$$N(t) = \frac{\Delta_y^{(k)} N_k(t)}{y^k} + O_k \left(\hat{N}(t+ky) - \hat{N}(t) \right).$$

On choisit alors $y = t^{1-\frac{\delta}{k+1}}$ pour conclure.

► Le lemme 16.15 montre que $\forall \epsilon > 0$,

$$\frac{\Delta_y^{(k)} N_k(t)}{y^k} = \sum_{j=0}^r \operatorname{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right) + O_{\epsilon} \left(t^{\hat{\sigma}_a - \frac{\delta}{[A\delta]+2} + \epsilon} \right).$$

► On traite le $O_k \left(\hat{N}(t+ky) - \hat{N}(t) \right)$ avec la proposition 16.21.

Le terme principal du théorème en l'état est alors en $O(t^{\sigma_a+\epsilon})$, le reste en $t^{\hat{\sigma}_a - \frac{\delta}{[A\delta]+2} + \epsilon}$. Certaines composantes du terme principal rentrent donc dans le reste : à savoir les termes avec s_j tels que $\hat{\sigma}_a - \sigma_j \geq \frac{\delta}{[A\delta]+2}$, d'où la conclusion finale. \square

Remarque 16.22. Si on factorise le résultat déjà obtenu dans le cas où $t_r^{\sigma} \ll \sum_{j=0}^r \operatorname{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right)$ (ce qui est le cas par exemple, s'il n'y a qu'un seul pôle de partie réelle égale à σ_a), on obtient :

$$N(t) = \sum_{j=0}^r \operatorname{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right) \left[1 + O_{\epsilon} \left(t^{\hat{\sigma}_a - \sigma_r - \frac{\delta}{k+1} + \epsilon} \right) \right].$$

On n'obtient pas mieux en revenant à la proposition 16.21.

Remarque 16.23. Plus $\hat{\sigma}_a$ est proche de σ_a , meilleur est le résultat (c'est là qu'apparaît l'importance de la qualité de la majoration). Et donc le reste dépend de la qualité de la majoration et donc de $\hat{\sigma}_a$. Plus précisément, il n'y a plus de terme principal si $\hat{\sigma}_a - \sigma_0 \geq \frac{\delta}{[A\delta]+2}$.

preuve du corollaire 13.10. analogue à celle du corollaire 13.6 \square

preuve du théorème 13.12. On part du résultat de la proposition 16.19 :

$$N(t) = \frac{\Delta_y^{(k)} N_k(t)}{y^k} + O_k \left(\widehat{N}(t+ky) - \widehat{N}(t) \right).$$

Cette fois, pour plus de précision, $\frac{\Delta_y^{(k)} N_k(t)}{y^k}$ est évalué grâce au lemme 16.15. Le terme principal est $\sum_j \text{Res} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right)$. On obtient aussi 2 restes :

1. $t^{\sigma_a - \delta + \epsilon + k} y^{-k}$
2. $yt^{\sigma_0 - 1 + \epsilon}$

On doit aussi prendre en compte le reste provenant de $O_k \left(\widehat{N}(t+ky) - \widehat{N}(t) \right)$.

On utilise la proposition 16.21 (avec une série à coefficients positifs donc $\widehat{\sigma}_0 = \widehat{\sigma}_a$) qui nous donne les 2 restes :

1. $t^{\widehat{\sigma}_a - 1 + \epsilon} y$
2. $t^{\widehat{\sigma}_a - \widehat{\delta} + \epsilon + k} y^{-k}$

C'est seulement maintenant qu'on a écrit les différents restes obtenus, qu'on va choisir y fonction de t , pour minimiser le reste résultant.

Par analogie avec la première version du théorème dominé, on cherche y sous la forme $t^{1 - \frac{B}{k+1}}$, avec $B > 0$ pour que $\frac{y}{t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. (à réécrire avec la limite sous la flèche).

Les exposants en t des différents restes obtenus sont alors :

1. $\sigma_a - \delta + \epsilon + k - k + \frac{kB}{k+1} = \sigma_a - \delta + \epsilon + \frac{kB}{k+1}$
2. $\sigma_0 - 1 + \epsilon + 1 - \frac{B}{k+1} = \sigma_0 + \epsilon - \frac{B}{k+1}$
3. $\widehat{\sigma}_a - 1 + \epsilon + 1 - \frac{B}{k+1} = \widehat{\sigma}_a + \epsilon - \frac{B}{k+1}$
4. $\widehat{\sigma}_a - \widehat{\delta} + \epsilon + k - k + \frac{kB}{k+1} = \widehat{\sigma}_a - \widehat{\delta} + \epsilon + \frac{kB}{k+1}$

Le deuxième reste est plus petit que le troisième car $\sigma_0 \leq \sigma_a \leq \widehat{\sigma}_a$. On cherche donc $B > 0$ tel que le maximum entre

1. $\sigma_a + \epsilon + \frac{kB}{k+1} - \delta$
2. $\sigma_a + \epsilon + \frac{kB}{k+1} + \widehat{\sigma}_a - \sigma_a - B$
3. $\sigma_a + \epsilon + \frac{kB}{k+1} + \widehat{\sigma}_a - \sigma_a - \widehat{\delta}$

soit le plus petit possible.

$\text{Max}(-\delta, \widehat{\sigma}_a - \sigma_a - B, \widehat{\sigma}_a - \sigma_a - \widehat{\delta})$ vaut :

– si $\widehat{\delta} - \delta \leq \widehat{\sigma}_a - \sigma_a$: $\max(\widehat{\sigma}_a - \sigma_a - B, \widehat{\sigma}_a - \sigma_a - \widehat{\delta})$, et on est ramenés à chercher $B > 0$ tel que $\max(\frac{-B}{k+1}, \frac{kB}{k+1} - \widehat{\delta})$ soit minimal. Les $B \geq \widehat{\delta}$ conviennent, et on obtient un reste en

$$O(t^{\widehat{\sigma}_a - \frac{\widehat{\delta}}{k+1} + \epsilon}).$$

– sinon : $\max(-\delta, \widehat{\sigma}_a - \sigma_a - B)$, et on est ramenés à chercher $B > 0$ tel que $\max(\frac{kB}{k+1} - \delta, -\frac{B}{k+1} + \widehat{\sigma}_a - \sigma_a)$ soit minimal. Le cas d'égalité donne : $B = \widehat{\sigma}_a - \sigma_a + \delta$, et on obtient alors un reste en

$$O_\epsilon \left(t^{\frac{\sigma_a - \delta + k\widehat{\sigma}_a + \epsilon}{k+1}} \right) = O_\epsilon \left(t^{\widehat{\sigma}_a - \frac{\widehat{\sigma}_a - \sigma_a + \delta}{k+1} + \epsilon} \right).$$

En fait, le terme de reste n'en est pas toujours un suivant la finesse des informations dont on dispose, ou du moins, il peut arriver que certains termes du terme principal rentrent dans le reste. En fait, $\forall j$ tel $j \in 0, \dots, r$:

$$\text{Res}_{s=s_j} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right) \sim C (t^{\sigma_j} (\ln t)^{m_j - 1}),$$

où C est une constante. Donc :

- Dans le cas $\widehat{\delta} - \delta \leq \widehat{\sigma}_a - \sigma_a$, seuls comptent les j tels que

$$t^{\widehat{\sigma}_a - \frac{\widehat{\delta}}{k+1} + \epsilon} = o(t^{\sigma_j} (\ln t)^{m_j - 1})$$

c'est à dire les j tels que :

$$\sigma_j > \widehat{\sigma}_a - \frac{\widehat{\delta}}{k+1}.$$

- Dans l'autre cas, on trouve que seuls comptent les j tels que

$$\sigma_j > \widehat{\sigma}_a - \frac{\widehat{\sigma}_a - \sigma_a + \delta}{k+1}$$

□

Les remarques qui suivent peuvent s'appliquer aux théorèmes 13.3 et 13.8 ou être facilement transposés à ces théorèmes.

Remarque 16.24. – On aurait pu obtenir comme pour les théorèmes 13.3 et 13.8, une version factorisée du résultat. Pour ça, on peut utiliser le lemme 16.15 et la proposition 16.21, et choisir après coup y en fonction de t . Cependant il semble que les calculs se déroulent moins bien que pour ce qu'on a démontré...

- Plus $\widehat{\sigma}_a$ est grand, plus la majoration des a_n est grossière, et plus le reste obtenu est grand.
- Plus $\widehat{\delta}$ ou δ selon le cas, est petit, plus loin à gauche on connaît \widehat{Z} ou Z , et meilleur est le reste.
- Plus la fonction est estimée finement sur les bandes verticales, plus A est petit, plus k diminue et meilleur est le reste
- Dans le premier cas, le reste obtenu est celui du théorème 13.3 et du théorème 13.8, et quand $\widehat{\sigma}$ se rapproche de σ et $\widehat{\delta}$ de δ , on se rapproche du cas du théorème 13.3 des coefficients positifs, et le reste effectivement se rapproche de celui trouvé dans le théorème 13.3 et le théorème 13.8.
- En fait, l'évaluation obtenue est la même que celle du théorème 13.8 quand $\widehat{\delta} = \delta$ ou bien quand $\widehat{\sigma}_a$ est grand. Dans le cas contraire, le terme de reste fait intervenir σ_a .
- Etudions pour terminer le cas particulier très simple où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| = \widehat{a}_n$ et où on suppose que $Z(s)$ n'a qu'un seul pôle s_0 dans la bande considérée. On est alors dans le deuxième cas du théorème 13.12 et d'après le point précédent de la remarque, dans le cas d'une bande avec un seul pôle, le théorème n'apporte un terme exact que dans le cas où :

$$\sigma_0 > \widehat{\sigma}_a - \frac{\delta}{k+1}$$

et on a alors

$$N(t) = \text{Res}_{s=s_0} \left(\frac{Z(s)}{s} t^s \right) + O \left(t^{\widehat{\sigma}_a - \frac{\delta}{k+1} + \epsilon} \right).$$

- En fait, dès qu'on prend $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| = \widehat{a}_n$, l'estimation du théorème 13.3 est valable, quitte à éventuellement changer k (maintenant on prend $k = \max([\underline{A}\delta] + 1, [\widehat{A}\delta] + 1)$).

Quant à la preuve du corollaire 13.14, elle est analogue à celle du corollaire 13.6. En prenant $\delta = \delta'$, on se place dans le premier cas du théorème 13.12.

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons mis en évidence des conditions arithmétiques sur les branches d'un système dynamique qui permettent de caractériser les pôles de la série de Dirichlet associée à la source. Cette géométrie des pôles, utilisée conjointement avec des résultats déjà existants, permet de donner une asymptotique fine de paramètres sur les **Tries**, les **ABR**, et l'algorithme de tri **QuickSort**.

Ce travail constitue un prolongement vers les opérateurs sécants, des travaux de Dolgopyat et Naud d'une part ([42]), et de Dolgopyat, Melbourne, Baladi et Hachemi d'autre part ([17], [41], [3]). L'étude est faite sur le quasi-inverse de l'opérateur de transfert, qui dépend d'un paramètre complexe s . Les résultats de Naud sur les systèmes 2-DIOP ont été généralisés aux systèmes dynamiques possédant un nombre infini de branches. Baladi et Hachemi considèrent des sous-ensembles de Cantor de l'intervalle : nous considérons ici des réunions fondamentales d'intervalles, qui peuvent être vues comme des Cantor en construction, où la profondeur et le choix des branches dépend de $t = \Im(s)$.

On démontre ainsi que les conditions arithmétiques 2-DIOP et 3-DIOP sont suffisantes pour conclure à un domaine hyperbolique de discipline pour le quasi-inverse de l'opérateur tangent, et la même chose pour le quasi-inverse de l'opérateur sécant, et donc pour la série de Dirichlet.

Il serait intéressant de généraliser ces résultats à des systèmes qui ne seraient pas complets. On pense alors d'abord tout naturellement aux systèmes markoviens. Plus particulièrement, dans un premier temps, on pourrait étudier les chaînes de Markov, dont les branches sont affines.

On peut aussi se poser la question de l'optimalité de la zone sans pôle : peut-on la prouver plus grande ? en a-t-on saisi l'ordre de grandeur ? (Dans le cas des systèmes sans mémoire finis, la réponse est oui, et c'est prouvé dans cette thèse.)

On se pose aussi la question du lien précis entre la condition géométrique UNI, et les conditions arithmétiques 2-DIOP, et 3-DIOP.

Quant à la partie IV, elle permet d'estimer avec reste la moyenne des coefficients d'une série de Dirichlet, avec différents jeux d'hypothèses minimalistes, grâce notamment à la formule de Perron d'ordre supérieur, et à un procédé de descente, qui permettent de conclure pour des séries quelle que soit la croissance (polynomiale) sur les bandes verticales. Ceci ouvre la voie au domaine de l'analyse « dynamique en distribution », où on a à manipuler des séries de Dirichlet à coefficients complexes.

Appendices

Annexe A

Versions plus précises des lemmes 16.4 et 16.8

Le lemme est une version plus précise du lemme 16.4.

Lemme A.1. $\forall k \geq 1 : \Delta_y^{(k)} f(t) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(t + jy)$

Démonstration. Par récurrence sur k .

Pour $k = 1$, le lemme s'écrit :

$$\Delta_y f(t) = f(t + y) - f(t)$$

vrai par définition.

Supposons que pour un certain $k \geq 1$:

$$\Delta_y^{(k)} f(t) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(t + jy)$$

Alors, en utilisant la formule du binôme, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta_y^{(k+1)} f(t) &= \Delta_y^{(k)} f(t + y) - \Delta_y^{(k)} f(t) \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(t + (j+1)y) - \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(t + jy) \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k-j+1} \binom{k}{j-1} f(t + jy) - \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(t + jy) \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j+1} \binom{k+1}{j} f(t + jy) + f(t + (k+1)y) - (-1)^k f(t) \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{k+1}{j} f(t + jy) \end{aligned}$$

□

Quant au lemme suivant, il constitue une version plus précise du lemme 16.8.

Lemme A.2. *On a :*

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s) &= \left(\prod_{i=1}^k \frac{1}{s+i} \right) \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (t + (k-j)y)^{s+k} \\ &= \left(\prod_{i=1}^k \frac{1}{s+i} \right) \Delta_y^{(k)}(t^{s+k})\end{aligned}$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur k . Pour $k = 1$, l'affirmation est vraie car : $\tilde{\Delta}_y(t^s) = \int_t^{t+y} u^s du = \frac{1}{s+1} [(t+y)^{s+1} - t^{s+1}] = \frac{1}{s+1} \Delta_y[t^{s+1}]$. Supposons donc que la proposition est vraie au rang k , ie :

$$\tilde{\Delta}_y^{(k)}(t^s) = \left(\prod_{i=1}^k \frac{1}{s+i} \right) \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (t + (k-j)y)^{s+k}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_y^{(k+1)}(t) &= \int_t^{t+y} \tilde{\Delta}_y^{(k)}(u^s) du \\ &= \int_t^{t+y} \left(\prod_{i=1}^k \frac{1}{s+i} \right) \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (u + (k-j)y)^{s+k} du \\ &= \prod_{i=0}^k \frac{1}{s+i} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \frac{1}{s+k+1} \left[(t + (k+1-j)y)^{s+k+1} - (t + (k-j)y)^{s+k+1} \right]\end{aligned}$$

et par changement de variable dans le deuxième terme, on obtient :

$$\begin{aligned}&\tilde{\Delta}_y^{(k+1)}(t) \\ &= \prod_{i=1}^{k+1} \frac{1}{s+i} \left[\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (t + (k+1-j)y)^{s+k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{k}{j} (t + (k+1-j)y)^{s+k+1} \right] \\ &= \left(\prod_{i=1}^{k+1} \frac{1}{s+i} \right) \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{k+1}{j} (t + (k+1-j)y)^{s+k+1}.\end{aligned}$$

Le lien avec Δ_y est fait grâce au lemme A.1, avec le changement de variable $j \leftarrow k-j$ (cette deuxième égalité peut être obtenue directement grâce au lemme 16.4).

Remarque A.3. *On retrouve ainsi la majoration du premier point du lemme 16.8, car $t + (k-j)y \ll_k t$ et donc $(t + (k-j)y)^{s+k} \ll_{k,\sigma} t^{\sigma+k}$ (avec une constante du type $(k+1)^{\sigma+k}$ croissante en σ). On a aussi $\binom{k}{j} \ll_k 1$ et $\left| \frac{1}{s+i} \right| \ll \frac{1}{|\tau|}$ uniformément en $|\tau| \geq 1$ (comme déjà expliqué), ce qui prouve l'estimation annoncée dans le théorème (et aussi que la constante de majoration ne dépend pas de σ si σ est majoré).*

□

Annexe B

Preuve alternative de la proposition 16.19

Dans ce chapitre de l'annexe, on va montrer le lemme suivant, qui nous donne une preuve alternative de la proposition 16.19.

Lemme B.1. $\forall t, y \in \mathbb{C}, \forall k \geq 1 :$

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (t + jy - n)^k = k! y^k$$

Démonstration. On remarque que le membre de gauche vaut $\Delta_y^{(k)} f(t)$, avec $f : u \mapsto (u - n)^k$. D'après le lemme 15.1, f étant \mathcal{C}^∞ , et $f^{(k)}(u) = k!$, on a :

$$\Delta_y^{(k)} f(t) = \int_t^{t+y} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+y} f^{(k)}(t_k) dt_k = y^k k!.$$

□

Ayant montré le lemme B.1, on est maintenant en mesure de donner notre deuxième preuve de la proposition 16.19.

Preuve calculatoire de la proposition 16.19. D'après le lemme A.1 :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_y^{(k)} N_k(t)}{y^k} &= \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j} \binom{k}{j} N_k(t + jy)}{y^k} \\ &= N(t) + \sum_{j=0}^k \sum_{n \leq t+jy} \frac{(-1)^{k-j} \binom{k}{j} a_n (t + jy - n)^k}{y^k k!} - \sum_{n \leq t} a_n \\ &= N(t) + \sum_{n \leq t} \left[\sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j} \binom{k}{j} (t + jy - n)^k}{y^k k!} - 1 \right] a_n \\ &\quad + \sum_{j=0}^k \sum_{n=[t]+1}^{[t+jy]} \frac{(-1)^{k-j} \binom{k}{j} (t + jy - n)^k}{y^k k!} a_n. \end{aligned}$$

D'après le lemme B.1 :

$$\sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j} \binom{k}{j}}{y^k} \frac{(t + jy - n)^k}{k!} - 1 = 0.$$

Reste donc :

$$\frac{\Delta_y^{(k)} N_k(t)}{y^k} = N(t) + \sum_{j=0}^k \sum_{n=\lfloor t \rfloor + 1}^{\lfloor t + jy \rfloor} \frac{(-1)^{k-j} \binom{k}{j}}{y^k} \frac{(t + jy - n)^k}{k!} a_n.$$

Pour l tel que $0 \leq l \leq k - 1$, on introduit les ensembles $I_l = \{\lfloor t + ly \rfloor + 1, \lfloor t + ly \rfloor + 2, \dots, \lfloor t + (l + 1)y \rfloor\}$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_y^{(k)} N_k(t)}{y^k} &= N(t) + \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{n \in I_l} \frac{(-1)^{k-j} \binom{k}{j}}{y^k} \frac{(t + jy - n)^k}{k!} a_n \\ &= N(t) + \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{j=l+1}^k \sum_{n \in I_l} \frac{(-1)^{k-j} \binom{k}{j}}{y^k} \frac{(t + jy - n)^k}{k!} a_n \end{aligned}$$

et donc $\forall l$, pour $n \in I_l$, le coefficient en a_n est :

$$\sum_{j=l+1}^k \frac{(-1)^{k-j} \binom{k}{j}}{y^k} \frac{(t + jy - n)^k}{k!}.$$

Or :

$$\frac{(t + jy - n)^k}{y^k} = \left(j + \frac{t - n}{y} \right)^k$$

avec :

$$t + ly \leq n \leq t + (l + 1)y$$

et donc :

$$-l - 1 \leq \frac{t - n}{y} \leq -l$$

et donc :

$$\left(j + \frac{t - n}{y} \right)^k = O_k(1),$$

et finalement, on a :

$$\frac{\Delta_y^{(k)} N_k(t)}{y^k} = N(t) + O_k(1) \sum_{n=\lfloor t \rfloor + 1}^{\lfloor t + ky \rfloor} \hat{a}_n$$

ce qui est exactement la conclusion souhaitée. □

Annexe C

Preuve alternative du lemme B.1

Sommaire

C.1	Preuve élémentaire	317
C.2	Preuve calculatoire	318
C.3	Preuve combinatoire	320

On propose ici des preuves alternatives au lemme B.1. En utilisant la formule du binôme sur le premier membre de l'égalité à démontrer on obtient :

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \sum_{i=0}^k (jy)^i (t-n)^{k-i} \binom{k}{i} = \sum_{i=0}^k \left(\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^i (t-n)^{k-i} \binom{k}{i} \right) y^i.$$

En identifiant le coefficient de y^k et les coefficients de y^i pour $i < k$, on voit que pour montrer le lemme B.1, il suffit de montrer que :

Lemme C.1. $\forall k \geq 1$:

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^k = k!$$

et pour $0 \leq i < k$:

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^i = 0$$

On va donner trois preuves de ce lemme C.1 : une élémentaire, une calculatoire et une combinatoire.

C.1 Preuve élémentaire

Preuve élémentaire du lemme C.1, d'après Oswaldo VELÁSQUEZ.

On pose $\forall k \geq 0$: $f_k(x) = (e^x - 1)^k$. Montrons par récurrence que $\forall i \geq 0$:

$$f_k^{(i)} = \begin{cases} k! & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k > i \end{cases}$$

Pour $i = 0$, c'est vrai car

$$f_k(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

On suppose que la proposition à démontrer au rang $k - 1 \geq 0$. On a :

$$f'_k(x) = k(e^x - 1)^{k-1}e^x = k(f_k(x) + f_{k-1}(x))$$

et donc en dérivant encore $i - 1$ fois, et en évaluant en 0 :

$$\begin{aligned} f_k^{(i)}(0) &= k \left(f_k^{(i-1)}(0) + f_{k-1}^{(i-1)}(0) \right) \\ &= \begin{cases} k(0 + (k-1)!) = k! & \text{si } k = i \\ k(0 + 0) & \text{si } k > i \end{cases} \end{aligned}$$

Or, en appliquant la formule du binôme de Newton à f_k , on obtient :

$$f_k(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} e^{jx}$$

et donc :

$$f_k^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^i e^{jx}$$

ce qui donne, en évaluant en $x = 0$:

$$f_k^{(i)}(0) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^i$$

et on a bien la conclusion souhaitée. □

C.2 Preuve calculatoire

Preuve calculatoire du lemme C.1. On commence par montrer par récurrence sur $k \geq 1$, que $\forall i, 0 \leq i < k$, on a dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (X + j)^i = 0.$$

La formule est vraie au rang $k = 1$. Supposons qu'elle soit vraie au rang k .

On va démontrer par une deuxième récurrence sur i qu'elle est vraie au rang $k + 1$. Si $i = 0$ c'est évident d'après la formule du binôme. Sinon, on calcule, pour $1 \leq i < k + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{k+1}{j} j^i &= (k+1) \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{k}{j-1} j^{i-1} \\ &= (k+1) \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (j+1)^{i-1} \end{aligned}$$

et donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{k+1}{j} j^i = 0.$$

D'autre part :

$$\frac{d}{dX} \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{k+1}{j} (X+j)^i = i \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{k+1}{j} (X+j)^{i-1}$$

et donc d'après l'hypothèse de récurrence (sur i) :

$$\frac{d}{dX} \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{k+1}{j} (X+j)^i = 0$$

et finalement $\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{k+1}{j} (X+j)^i$ est constamment égal à 0, $\forall i, 0 \leq i < k$, ce qui termine la première partie de la preuve.

En se servant de ce qui vient d'être fait, on montre en suite par récurrence sur $k \geq 1$ que dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (X+j)^k = k!.$$

C'est vrai pour $k = 1$. Supposons que la formule soit vraie au rang k . Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{k+1}{j} j^{k+1} &= (k+1) \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{k}{j-1} j^k \\ &= (k+1) \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (j+1)^k \end{aligned}$$

et donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{k+1}{j} j^{k+1} = (k+1)k! = (k+1)!.$$

D'autre part :

$$\frac{d}{dX} \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{k+1}{j} (X+j)^{k+1} = (k+1) \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{k+1}{j} (X+j)^k$$

et donc, d'après la première partie de la preuve, avec $i = k < k+1$, on a :

$$\frac{d}{dX} \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{k+1}{j} (X+j)^{k+1} = 0.$$

et finalement $\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{k+1}{j} (X+j)^{k+1}$ est constamment égal à $(k+1)!$, ce qui termine la deuxième partie de la preuve. \square

C.3 Preuve combinatoire

Pour la preuve combinatoire, notons $u_{k,l}$ le nombre de mots de longueur l que l'on peut former en utilisant exactement k symboles.

On a alors de façon évidente

$$u_{k,k} = k!$$

et pour $0 \leq i < k$:

$$u_{k,i} = 0.$$

Cette remarque suffit pour nous convaincre qu'il va suffir de montrer le lemme suivant pour avoir une preuve combinatoire du lemme C.1 :

Lemme C.2. $\forall k \geq 1, \forall l, 0 \leq l \leq k$:

$$u_{k,l} = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^l$$

preuve combinatoire du lemme C.1, d'après Louis LEROUX. Avec k symboles, on peut former k^l mots de l lettres. Pour trouver $u_{k,l}$, il suffit de retirer les mots qui utilisent au plus $k-1$ symboles. On les retire tous en soustrayant $\binom{k}{k-1}(k-1)^l$ où

- $\binom{k}{k-1}$ est le nombre de choix possibles pour les $k-1$ symboles utilisés parmi les k disponibles
- $(k-1)^l$ est le nombre de mots possiblement formés avec $k-1$ symboles.

Ainsi, les mots contenant exactement $k-1$ symboles ont été retirés une seule fois, mais ce n'est pas le cas pour les mots contenant $k-2$ symboles qui l'ont été deux fois chacun. En effet, si l'alphabet est $\{A_1, \dots, A_k\}$, par exemple, le mot $A_1 A_2 \dots A_{k-2} A_{k-2} A_{k-2}$ a été retiré :

- une fois avec le choix de lettres : $\{A_1, A_2, \dots, A_{k-2}, A_{k-1}\}$
- et une fois avec le choix de lettres : $\{A_1, A_2, \dots, A_{k-2}, A_k\}$.

Et donc, au total trouvé, on ajoute $\binom{k}{k-2}(k-2)^l$ où :

- $\binom{k}{k-2}$ est le nombre de choix possibles pour les $k-2$ symboles utilisés parmi les k disponibles
- $(k-2)^l$ est le nombre de mots possiblement formés avec $k-2$ symboles.

De cette façon, on a bien tenu compte de tous les mots de l lettres utilisant exactement $k-1$ et $k-2$ lettres. On est donc arrivés à l'expression :

$$k^k - \binom{k}{k-1}(k-1)^l + \binom{k}{k-2}(k-2)^l.$$

Seulement, chaque mot utilisant exactement $k-3$ symboles :

- a été retiré 3 fois quand on a soustrait $\binom{k}{k-1}(k-1)^l$. Le mot $A_1 A_2 \dots A_{k-3} A_{k-3} A_{k-3} A_{k-3}$ correspond au choix des $(k-1)$ symboles :
 - $\{A_1, A_2, \dots, A_{k-3}, A_{k-2}, A_{k-1}\}$
 - $\{A_1, A_2, \dots, A_{k-3}, A_{k-2}, A_k\}$
 - ou $\{A_1, A_2, \dots, A_{k-3}, A_{k-1}, A_k\}$
- a été ajouté 3 fois quand on a ajouté $\binom{k}{k-2}(k-2)^l$. Le mot de l'exemple correspond aux choix des $(k-2)$ symboles :
 - $\{A_1, A_2, \dots, A_{k-3}, A_{k-2}\}$
 - $\{A_1, A_2, \dots, A_{k-3}, A_{k-1}\}$
 - ou $\{A_1, A_2, \dots, A_{k-3}, A_k\}$

Donc finalement, en retirant $\binom{k}{k-3}(k-3)^l$, on retire bien tous les mots utilisant exactement $k-3$ symboles du total auquel on était arrivés.

Etc... et on aboutit alors à l'expression :

$$k^k - \binom{k}{k-1}(k-1)^l + \binom{k}{k-2}(k-2)^l - \dots + (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^l$$

où on a bien tenu compte des mots utilisant $k, k-1, \dots$ et j symboles.

Arrivés à ce stade, chaque mot utilisant exactement $j-1$ symboles :

- a été retiré $\binom{k-(j-1)}{k-j}$ fois avec le terme $\binom{k}{k-1}(k-1)^l$ (parmi $k-(j-1)$ symboles, $k-1-(j-1) = k-j$ sont choisis librement)
- a été ajouté $\binom{k-(j-1)}{k-j-1}$ fois avec le terme $\binom{k}{k-2}(k-2)^l$ (parmi $k-(j-1)$ symboles, $k-2-(j-1) = k-j-1$ sont choisis librement)
- etc...
- "ajouté" $(-1)^{k-j} \binom{k-(j-1)}{1}$ fois avec le terme $(-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^l$ (parmi $k-(j-1)$ symboles, 1 seul est choisi librement).

Finalement, chaque mot a été "ajouté" :

$$\sum_{m=1}^{k-j} \binom{k-j+1}{m} (-1)^{k-j-m+1} = (1-1)^{k-j+1} - (-1)^{k-j+1} - 1 = (-1)^{k-j} - 1$$

fois, et donc le terme suivant à "ajouter" est :

$$(-1)^{k-(j-1)} \binom{k}{j-1} (j-1)^l$$

ce qui règle définitivement le sort des mots à $j-1$ symboles qui sont bien retirés une seule fois. Finalement, on arrive à montrer la formule annoncée par récurrence. \square

Bibliographie

- [1] A. Baker. *Transcendental number theory*. second ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [2] Viviane Baladi. Positive transfer operators and decay of correlations. *Advanced Series in Nonlinear Dynamics, World Scientific, Singapore*, 2000.
- [3] Viviane Baladi and Aïcha Hachemi. A local limit theorem with speed of convergence for euclidean algorithms and diophantine costs. *Ann. I.H.P. prob. stat.*, 44 :749–770, 2008.
- [4] Viviane Baladi and Brigitte Vallée. Exponential Decay of Correlations for surface semi-flows without finite Markov partitions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 133 (3) :pp 865–874, 2004.
- [5] Viviane Baladi and Brigitte Vallée. Euclidean algorithms are gaussian. *Journal of Number Theory*, 110 :pages 331–386, 2005.
- [6] Jérémie Bourdon, Benoît Daireaux, and Brigitte Vallée. Dynamical Analysis of α -Euclidean Algorithms. *Journal of Algorithms*, 44 :pages 246–285, 2002.
- [7] Anne Broise. Transformations dilatantes de l’intervalle et théorèmes limites. *Astérisque, Société Mathématique de France*, 238 :pp. 5–109, 1996.
- [8] JWS Cassels. *An introduction to diophantine approximation*. Cambridge Tracts 45, 1957.
- [9] Eda Cesaratto. A note on “Euclidean algorithms are Gaussian” by V. Baladi and B. Vallée. *Journal of Number Theory*, Volume 129, Issue 10 :pages 2267–2273, October 2009.
- [10] Eda Cesaratto, Julien Clément, Benoît Daireaux, Lhote Loïck, Véronique Maume-Deschamps, and Brigitte Vallée. Regularity of the Euclid Algorithm : application to the analysis of fast gcd Algorithms. *Journal of Symbolic Computation*, 44 :pp726–767, 2009.
- [11] Eda Cesaratto, Alain Plagne, and Brigitte Vallée. On the non-randomness of modular arithmetic progressions : a solution to a problem by V. I. Arnold. *Comptes-rendus du Colloquium on Mathematics and Computer Science : Algorithms, Trees, Combinatorics and Probability*, DMTCS :pp. 271–288, 2006.
- [12] Eda Cesaratto and Brigitte Vallée. Gaussian Distribution of Trie Depth for Dynamical Sources. *soumis*.
- [13] Eda Cesaratto and Brigitte Vallée. Pseudo-randomness of a random Kronecker sequence. *soumis*, 20 pages.
- [14] Frédéric Chazal and Véronique Maume-Deschamps. Statistical properties of General Markov dynamical sources : applications to information theory. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 6(no 2) :pages 283–314, 2004.
- [15] Julien Clément, Philippe Flajolet, and Brigitte Vallée. Dynamical Sources in Information Theory : A general analysis of trie structures. *Algorithmica* 29, 1/2 :pages 307–369, 2001.
- [16] Dimitri Dolgopyat. On decay of correlations in Anosov flows. *Ann. Math.*, 147 :pp 357–390, 1998.

- [17] Dimitri Dolgopyat. Prevalence of rapid mixing in hyperbolic flows. *Ergodic theory and dynamical systems*, (18) :pp 1097–1114, 1998.
- [18] Guy Fayolle, Philippe Flajolet, and Micha Hofri. On a functional equation arising in the analysis of a protocol for a multi-access broadcast channel. *Adv. Appl. Prob*, 18(441-472), 1986.
- [19] James Allen Fill and Svante Janson. The number of bit comparisons used by Quicksort : An average-case analysis. *Proceedings of the ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA04)*, pages 293–300, 2004.
- [20] Philippe Flajolet. The ubiquitous digital tree. *STACS 2006, B. Durand and W. Thomas Eds., vol 3884 of Lecture Notes in Computer Science, pp 1–22, Proceedings of 23rd Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, Marseille, February 2006.*
- [21] Philippe Flajolet, Xavier Gourdon, and Philippe Dumas. Mellin transforms and asymptotics : Harmonic sums. *Theoretical Computer Science*, 144(3-58), 1995.
- [22] Philippe Flajolet, Mathieu Roux, and Brigitte Vallée. Digital trees and memoryless sources : from arithmetics to analysis. In *Comptes-rendus du Congrès AofA'10, DMTCS, proc AM*, pages 231–258, 2010.
- [23] Philippe Flajolet and Robert Sedgewick. Mellin transforms and asymptotics : Finite differences and rice's integrals. *Theoretical Computer Science*, 144(101-124), 1995.
- [24] Philippe Flajolet and Robert Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge Université Press, Available electronically from the authors' home pages, 2009.
- [25] Philippe Flajolet and Brigitte Vallée. Continued fractions, comparison algorithms, and fine structure constants. In Ed. Providence, M. Théra, editor, *Constructive, Experimental, and Nonlinear Analysis*, volume vol. 27 of *American Mathematical Society*, pages 53–82. Canadian Mathematical Society Conference Proceedings, 2000.
- [26] Phillippe Flajolet, Peter Grabner, Peter Kirschenhofer, Helmut Prodinger, and Robert F. Tichy. Mellin transforms and asymptotics : digital sums. *Theoretical Computer Science*, 123 :pp 291–314, 1994.
- [27] S. Golomb. The information generating function of a probability distribution. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 12(1) :75–77, 1966.
- [28] G. H. Gonnet and R. Baeza-Yates. *Handbook of Algorithms and Data Structures : in Pascal and C*. 1991.
- [29] Aïcha Hachemi. *Analyse dynamique d'algorithmes euclidiens et théorèmes limites*. PhD thesis, Université Paris 7, juillet 2007.
- [30] Hubert Hennion. Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipschitziens. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118 :pp 627–634, 1993.
- [31] Philippe Jacquet and Mireille Régnier. Trie Partitioning Process : Limiting Distributions. *Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag*, 214 :pages 196–210, New York, 1986.
- [32] Philippe Jacquet and Wojciech Szpankowski. Asymptotic behavior of the Lempel-Ziv parsing scheme and Digital Search Trees. *Theoretical Computer Science*, 144 :pp 161–197, 1995.
- [33] Philippe Jacquet and Wojciech Szpankowski. Analytical Depoissonization and its Applications. *Theoretical Computer Science, in "Fundamental Study"*, 201(1-2, 1-62), 1998.
- [34] Donald Ervin Knuth. *The Art of Computer Programming*, volume 3 Sorting and Searching. Addison-Wesley, 1998.

- [35] J.C. Lagarias. *Best Simultaneously Diophantine Approximations I : Growth Rates of Best Approximation Denominators*, volume Vol. 272. American Mathematical Society, Aug., 1982.
- [36] Edmund Landau. Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen. *Nachr. v. d. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse*, 1915.
- [37] Michel Lapidus and Machiel van Frankenhuysen. Complex dimensions of self-similar fractal strings and diophantine approximation. *Experimental Mathematics* 12 :1, page 41, 2001.
- [38] Michel L. Lapidus and Machiel van Frankenhuysen. *Fractal Geometry, Complex Dimensions and Zeta Functions*. Springer, 2006.
- [39] Loïck Lhote and Brigitte Vallée. Gaussian laws for the main parameters of the Euclid Algorithms. *Algorithmica*, 50 :pp 497–554, 2008.
- [40] Hosam M. Mahmoud. *Evolution of Random Search Trees*. Wiley-Interscience Series, 1992.
- [41] Ian Melbourne. Rapid decay of correlations for nonuniformly hyperbolic flows. *Transactions of the American Mathematical Society*, 359 :2421–2441, 2007.
- [42] Frédéric Naud. Analytic continuation of a dynamical zeta function under a diophantine condition. *Institute of Physics Publishing, Nonlinearity* 14, Vol. 5 :995–1009, 2001.
- [43] Niels Erik Nörlund. Leçons sur les équations linéaires aux différences finies. *Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, Paris*, 1929.
- [44] Niels Erik Nörlund. Vorlesungen über differenzenrechnung. *Chelsea Publishing Company, New York*, 1954.
- [45] Mathieu Roux and Brigitte Vallée. Information theory : Sources, dirichlet series, and realistic analysis of data structures. *Comptes-rendus du Congrès Words'11*, Volume 63 of Electronic Proceedings of Theoretical Computer Science :pp. 199–214.
- [46] David Ruelle. Dynamical zeta functions and transfert operators. *Notices Amer. Math. Soc.*, 69 :887–895, 2002.
- [47] Werner Schachinger. Limiting distributions for the costs of partial match retrievals in multidimensional tries. *Random Structures and Algorithms*, 17(no. 3 – 4) :428—459, 2000.
- [48] Robert Sedgewick. *Algorithms in C*. third ed. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1998.
- [49] Wojciech Szpankowski. Patricia Tries Again Revisited. *Journal of the ACM*, 37 :pp 691–711, 1991.
- [50] Wojciech Szpankowski. Limiting Distribution for the depth in Patricia tries. *SIAM J. Discrete Math.* 6, (No. 2) :pp 197–213, 1993.
- [51] Wojciech Szpankowski. *Average-Case Analysis of Algorithms on Sequences*. John Wiley, New York, 2001.
- [52] Gérald Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*. Belin, 2008.
- [53] Brigitte Vallée. Algorithms for computing signs of 2×2 determinants : dynamics and average-case analysis. *présenté au congrès ESA'97 (5th Annual European Symposium on Algorithms, Graz, septembre 97*, paru dans LNCS(1284) :pp. 486–499.
- [54] Brigitte Vallée. Opérateurs de Ruelle-Mayer généralisés et analyse en moyenne des algorithmes de Gauss et d'Euclide. *Acta Arithmetica*, 81.2 :pp 101–144, 1997.
- [55] Brigitte Vallée. Dynamics of the Binary Euclidean Algorithm : Functional analysis and operators. *numéro spécial d'Algorithmica sur l'analyse en moyenne d'algorithmes*, 22 (4) :pp 660–685, 1998.

-
- [56] Brigitte Vallée. Dynamical Sources in Information Theory : Fundamental Intervals and Word Prefixes. *Algorithmica*, 29(262-306), 2001.
- [57] Brigitte Vallée. Dynamical Analysis of a class of Euclidean Algorithms. *Theoretical Computer Science*, 297/1-3 :pages 447–486, 2003.
- [58] Brigitte Vallée. Théorie de l'information : Modèles, Algorithmes, Analyse. *Notes du Mini-Cours donné aux Journées 2010 du GT ALEA*, 2010.
- [59] Brigitte Vallée. Euclidean dynamics. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 15(1) :pp 281–352, mai 2006.
- [60] Brigitte Vallée and Eda Cesaratto. Small quotients in Euclidean Algorithms. *Ramanujan Journal*, 24 :pp 183–218, 2011.
- [61] Brigitte Vallée, Julien Clément, James Allen Fill, and Philippe Flajolet. The number of symbol comparisons in Quicksort and Quickselect. *ICALP 2009*, Part I, LNCS 5555, pp. 750-763, 2009.
- [62] Brigitte Vallée and Antonio Vera. Lattice reduction in two dimensions : analyses under realistic probabilistic models. *Comptes-rendus du colloque AofA'07 (Analysis of Algorithms)*, *DMTCS proc AH*, pages 181–216, 2007.
- [63] Peter Walters. *An introduction to Ergodic Theory*. Springer, 2000.

Théorie de l'information, séries de Dirichlet, et analyse d'algorithmes

En théorie de l'information, l'étude d'une source et des principales structures de données associées, repose sur sa série de Dirichlet ; il est essentiel d'en étudier la discipline, c'est-à-dire de trouver une région à gauche de sa singularité dominante, où elle est analytique et de croissance polynomiale. C'est une étape centrale dans l'analyse précise et réaliste de la complexité des principaux algorithmes de texte sur des mots produits aléatoirement par la source. Mon travail porte sur la classe des sources dynamiques, dont la série de Dirichlet s'exprime en fonction d'un opérateur de transfert du système dynamique, dit « sécant », qui généralise l'opérateur « tangent » usuellement utilisé, et dont on est alors ramenés à étudier les spectres. Dolgopyat a obtenu des conditions suffisantes de nature diophantienne sur le système dynamique, qui montrent qu'une région de discipline de l'opérateur tangent, pour un alphabet fini, est de forme hyperbolique. Dans cette thèse, j'opère une double extension des résultats de Dolgopyat, à la fois vers l'opérateur sécant et vers un alphabet infini. De plus, pour des sources sans mémoire, j'obtiens une région de discipline optimale. Je présente aussi une version d'un célèbre théorème taubérien avec reste, dû à Landau, avec des hypothèses épurées. Ce théorème est valable pour les séries de Dirichlet à termes positifs, et permet d'obtenir une bande verticale de discipline. J'obtiens deux généralisations : une pour des séries à termes quelconques, et l'autre pour une région de discipline hyperbolique.

Information theory, Dirichlet series, and analysis of algorithms

In information theory, the study of a source and its main associated data structures is based on its Dirichlet series ; it is essential to study its discipline, namely, to find a region to the left of its dominant singularity where it is analytic and of polynomial growth. It is a central step in the accurate and realistic complexity analysis of the principal text algorithms on words randomly generated by the source. My work deals with the class of dynamical sources, whose Dirichlet series is expressed in terms of a transfer operator of the dynamical system called "secant", which generalizes the "tangent" operator usually used, and whose spectra we are then led to study. Dolgopyat obtained sufficient conditions of Diophantine type on the dynamical system, showing that a discipline region of the tangent operator for a finite alphabet has hyperbolic shape. In this thesis, I extend Dolgopyat's results in two ways : by using the secant operator and by considering an infinite alphabet. In addition, for memoryless sources I get an optimal area of discipline. I also present a version of a famous Tauberian theorem with remainder, due to Landau, with refined hypotheses. This theorem is valid for Dirichlet series with non-negative terms, and allows one to obtain a vertical strip of discipline. I obtain two generalizations : for series with arbitrary terms, and for series with hyperbolic regions of discipline.

Mots clés (indexation Rameau) : Algorithmes ; Probabilités ; Dirichlet, séries de ; Information, théorie de l' ; Systèmes dynamiques ; Structures de données (informatique) ; Fonctions génératrices ; Opérateurs de transfert

Mots clés (indexation libre) : Combinatoire analytique ; Analyse en moyenne d'algorithmes ; Arbres binaires de recherche ; Arbres digitaux de recherche