



HAL
open science

Synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires à retards

Amine Sboui

► **To cite this version:**

Amine Sboui. Synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires à retards. Automatique / Robotique. Université de Caen, 2010. Français. NNT : . tel-01075152

HAL Id: tel-01075152

<https://hal.science/tel-01075152>

Submitted on 16 Oct 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ de CAEN/BASSE-NORMANDIE

U.F.R. : SCIENCES CAEN

ECOLE DOCTORALE : SIMEM

THÈSE

présentée par

Amine SBOUI

et soutenue

le 06 12 2010

en vue de l'obtention du

DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN/BASSE-NORMANDIE

Spécialité : Automatique, productique

(Arrêté du 07 août 2006)

TITRE :

**SYNTHÈSE D'OBSERVATEURS
POUR LES SYSTÈMES NON LINÉAIRES À RETARDS**

MEMBRES du JURY

- M. L. DUGARD** Dr. de recherche CNRS, GIPSA-LAB, Grenoble.
- M. C. MOOG** Dr. de recherche CNRS, IRCCyN, Nantes. (Rapporteur)
- M. J. DAAFOUZ** Pr. des Universités à l'INPL, Nancy. (Rapporteur)
- M. M. M'SAAD** Pr. des Universités à l'ENSICAEN (Directeur de thèse)
- M. M. FARZA** Pr. à l'Université de Caen (Co-Directeur de thèse)

Liste des publications de Amine SBOUI

Reuves internationales

1. M. Farza, A. Sboui, E. Cherrier and M. M'Saad (2010), "High-gain observer for a class of time-delay nonlinear systems", IJC : Int. Journal of Control, Page 273-280, Vol 83, Issue 2, 2010.

Conférences invitées

1. E. Cherrier, A. Sboui, M. Farza and M. M'Saad (2008) "Observateur à grand gain pour une classe de systèmes non linéaires à retards", Actes de la Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA), 3-5 septembre , Bucarest, Roumanie.
2. A. Sboui, M. Farza, E. Cherrier and M. M'Saad (2009) "Adaptive observer for a class of nonlinear time-delay systems", Proceedings of the 15th IFAC Symposium on System Identification, 6-8 juillet , St-Malo, France.
3. A. Sboui, M. Farza and M. M'Saad (2010) "Synthèse d'observateur pour une classe de systèmes non linéaires avec retard inconnu sur la sortie", Actes de la Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA), 2-4 juin , Nancy, France.

Table des matières

Liste des figures	9
1 Introduction Générale	13
2 État de l'art	17
2.1 Introduction	17
2.2 Généralités sur les systèmes à retards	17
2.2.1 Modélisation des systèmes à retards	17
2.2.2 Catégories des retards	18
2.2.3 Stabilité des systèmes à retards	20
2.2.3.1 Seconde méthode de Lyapunov	22
2.2.3.2 Approche par fonctionnelles de Krasovskii	22
2.2.3.3 Approche par fonctions de Razumikhin	23
2.3 Observabilité et observateurs	24
2.3.1 Observabilité	25
2.3.1.1 Quelques définitions	26
2.3.1.2 U -uniforme observabilité	28
2.3.2 Observateurs	28
2.3.2.1 Observateur de Luenberger	29
2.3.2.2 Filtre de Kalman	30
2.3.3 Observateur à grand gain pour une classe de systèmes non linéaires	32
2.3.3.1 Forme canonique d'observabilité	33
2.3.3.2 Synthèse de l'observateur	33
2.3.3.3 Classe particulière de SNL MIMO uniformément observables	35
2.3.3.4 Synthèse de l'observateur	36
2.4 Conclusion	39
3 Observateur à grand gain pour des systèmes à retards	41
3.1 Introduction	41
3.2 Synthèse d'observateurs pour une classe de SNL à retards	42

3.2.1	Préliminaires et formulation du problème	42
3.2.1.1	TVM pour les fonctions vectorielles	42
3.2.1.2	Equation Algébrique de Lyapunov	43
3.2.1.3	Quelques identités et inégalités	44
3.2.2	Synthèse de l'observateur en présence d'un seul retard	45
3.2.2.1	Formulation du problème	45
3.2.2.2	Procédure de synthèse de l'observateur	47
3.2.2.3	Analyse de la convergence	48
3.2.3	Généralisation aux systèmes comportant plusieurs retards	51
3.2.3.1	Synthèse de l'observateur	51
3.2.3.2	Analyse de la convergence	52
3.3	Exemple d'illustration	54
3.4	Nouvelle forme canonique pour les systèmes UO	56
3.4.1	Introduction	56
3.4.2	Forme canonique observable	56
3.4.2.1	Quelques définitions et notations	58
3.4.2.2	Synthèse de l'observateur	62
3.4.3	Extension pour les systèmes à retards	63
3.4.3.1	Synthèse de l'observateur	64
3.4.3.2	Analyse de la convergence	65
3.4.4	Exemple de simulation	69
3.5	Conclusion	72
4	Observateur adaptatif pour des systèmes à retards	73
4.1	Introduction	73
4.2	Observateur adaptatif pour les systèmes linéaires MIMO	74
4.3	Observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes à retards	76
4.3.1	Classe des systèmes considérée	77
4.3.2	Synthèse de l'observateur	79
4.3.3	Analyse de la convergence	81
4.3.4	Quelques observateurs particuliers	88
4.3.4.1	Observateur adaptatif à grand gain	89
4.3.4.2	Observateur adaptatif de type mode glissant	89
4.4	Exemples d'illustration	90
4.4.1	Exemple1 : Identification d'un moteur à fuel	90
4.4.2	Exemple2 : Synchronisation de systèmes hyperchaotiques	92
4.5	Conclusion	95

5 Synthèse d'observateur pour des systèmes à sortie retardée	97
5.1 Introduction	97
5.2 Formulation du problème	98
5.3 Synthèse de l'observateur	100
5.3.1 Synthèse de l'observateur avec un retard connu	101
5.3.1.1 Quelques préliminaires	101
5.3.1.2 Equations de l'observateur	102
5.3.1.3 Analyse de la convergence	103
5.3.2 Synthèse de l'observateur avec un retard inconnu	105
5.4 Exemple	110
5.4.1 Résultats d'estimation avec retard connu	111
5.4.2 Résultats d'estimation avec retard inconnu	112
5.5 Conclusion	112
6 Conclusion Générale	115
Bibliographie	119

Table des figures

2.1	stabilité au sens de Lyapunov autour d'un point d'équilibre x_{eq}	21
2.2	stabilité asymptotique au sens de Lyapunov autour d'un point d'équilibre x_{eq}	21
2.3	principe de l'observateur	25
3.1	Comparaison des états estimés et simulés x_1 et x_2	55
3.2	Comparaison des états estimés et simulés pour $z_i, i = 1, 2$	71
3.4	Comparaison des états estimés et simulés pour $z_i, i = 5, \dots, 7$	71
3.3	Comparaison des états estimés et simulés pour $z_i, i = 3, 4$	72
4.1	Évolution de l'entrée $v(t)$, avec la sortie correspondante $z_1(t)$	91
4.2	Estimation des paramètres inconnus ρ_1, ρ_4	92
4.3	Estimation du retard (ρ_5) et de l'état non mesuré z_2	92
4.4	Erreurs de synchronisation $x_1 - \hat{x}_1, x_2 - \hat{x}_2$ et $x_3 - \hat{x}_3$	95
4.5	Evolution des paramètres inconnus γ et ε	96
5.1	Prédiction de x_1 et x_2 avec $\tau = 1.7$ et $m = 2$ et $m = 4$	111
5.2	Erreur de prédiction de x_1 et x_2 avec retard inconnu ($\tau = 1.7$)	112
5.3	Estimation du retard inconnu	113

Notations, symboles et abréviations

\mathbb{R}	ensemble des nombres réels
\mathcal{C}	ensemble des nombres complexes
\mathbb{R}^+	ensemble des nombres réels positifs ou nuls
\mathbb{R}^n	espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels
$\mathbb{R}^{n \times m}$	ensemble des matrices réelles de dimension $n \times m$
I_n	matrice identité de dimension $n \times n$ (appropriées)
$0_{n \times m}$	matrice nulle de dimension $n \times m$ (appropriées)
$[a, b]$	intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémités a et b
$]a, b[$	intervalle ouvert de \mathbb{R} d'extrémités a et b
t	variable temporelle
$[a, b[$	intervalle semi-fermé de \mathbb{R} d'extrémités a et b
$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$	dérivée temporelle de l'état x
C^ω	ensemble des fonctions continûment différentiables ω fois dans \mathbb{R}^n
$X > 0$ (≥ 0)	X définie positive (semi définie positive)
$X < 0$ (≤ 0)	X définie négative (semi définie négative)
$\dim(X)$	dimension de la matrice X
$(\cdot)^T$	transposée du bloc symétrique
\triangleq	égal par définition
$\lambda_{\min}(P)$	la plus petite valeur propre de la matrice carrée P
$\lambda_{\max}(P)$	la plus grande valeur propre de la matrice carrée P
$\ \cdot\ $	norme Euclidienne
$ a $	valeur absolue du nombre réel a
ρ	vecteur des paramètres inconnus
θ	paramètre de réglage du gain de l'observateur
λ	paramètre de réglage du gain de la loi de commande

SNL	Système non linéaire (Non Linear System)
SISO	Mono-entrée Mono-sortie (Single Input Single Output)
MISO	Multi-entrée Mono-sortie (Multiple Input Single Output)
MIMO	Entrées multiples sorties multiples (Multiple Input Multiple Output)
LVT	Linéaire variant dans le temps
ODE	Equation différentielle ordinaire (Ordinary Differential Equation)
DDE	Equation différentielle à retard (Delay Differential Equation)
TVM	Théorème de la valeur moyenne
UO	Uniformément Observable

Introduction Générale

Le comportement dynamique d'un procédé peut être entièrement décrit par l'évolution de ses variables d'état. Pour la commande et le diagnostic d'un système dynamique, la connaissance de ces variables est capitale. Or les grandeurs directement mesurées (sorties) ne couvrent généralement pas la totalité des états dynamiques du procédé. Ce problème peut être résolu, sous certaines conditions, en introduisant un observateur d'état dont la tâche sera de fournir une estimation (asymptotique ou exponentielle) du vecteur d'état du système étudié. L'observateur consiste en un système dynamique auxiliaire dont les entrées sont les entrées/sorties mesurées du procédé. Les premiers observateurs, dédiés à l'estimation de l'état des systèmes linéaires, ont été développés par Luenberger dans un cadre déterministe et par Kalman dans un cadre stochastique. Ce dernier a eu un impact considérable dans la pratique et a été appliqué à de nombreux problèmes tels la poursuite de cibles, le contrôle, la navigation, etc.

Au cours des dernières décennies, une part importante des activités de recherche en automatique s'est focalisé sur le problème de l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires. La non linéarité est due soit à la complexité des phénomènes décrits, soit à la nature des bouclages utilisés. En effet, et même si on se contente d'un modèle linéaire, le respect de certaines contraintes pratiques (saturation, hystérésis,...) mène à des systèmes bouclés qui sont non linéaires. Des solutions spécifiquement non linéaires ont été envisagées et ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux (cf. par exemple [9, 16, 30, 36, 39, 37, 45, 48, 62, 63, 77, 93]).

La synthèse d'observateurs devient plus délicate lors de la prise en compte des retards dans la dynamique des systèmes. D'un point de vue plus pragmatique, comme toute vitesse est finie, tous les processus physiques comportent des retards. Cependant, dans certains cas, les temps de propagation mis en cause se révèlent très largement inférieurs aux constantes de temps du système. Les retards peuvent alors être négligés. En revanche, s'ils sont du même ordre de grandeur que les constantes de temps du système, les retards ne peuvent plus être négligés, et la description du système conduit à un modèle à retards. Les systèmes à retards sont présents dans des domaines aussi variés que la physique, la

biologie ou l'économie, et la compréhension des processus qui régissent leur dynamique est un point fondamental de recherche.

Les systèmes à retards appartiennent à la classe plus générale des systèmes de dimension infinie, ainsi l'étude de la stabilité s'avère plutôt délicate, puisque les systèmes à retards ne sont plus décrits par des équations différentielles ordinaires, mais par des équations différentielles fonctionnelles. Parmi les nombreux travaux sur ce sujet, on peut citer les articles [83, 76, 59, 42, 53, 54]. L'estimation des systèmes à retards est également l'objet d'une recherche intensive, et ce depuis une vingtaine d'années. Plusieurs résultats ont été établis dans le cas des systèmes linéaires, [1, 11, 12, 10, 73]. On retrouve des problèmes classiques, comme la synthèse \mathcal{H}_∞ [33], la synthèse d'observateurs d'ordre réduit [90], d'observateurs fonctionnels [20].

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse est une contribution au problème de synthèse d'observateurs. Cette synthèse concerne des classes de systèmes non linéaires à retards.

Avant de concevoir des observateurs spécifiques pour des classes particulières de systèmes à retards, il nous semble primordial de présenter un état de l'art pour situer et motiver nos travaux. Ainsi, le premier chapitre est divisé en deux parties. La première partie est consacrée à la présentation des différents modèles des systèmes à retards ainsi que les différents types de retards rencontrés dans la littérature, nous rappelons aussi les principaux outils pour l'étude de la stabilité basée sur les extensions aux systèmes à retards de la théorie des fonctions de Lyapunov. La notion d'observabilité des systèmes non linéaires est présentée dans la deuxième partie de ce chapitre. Nous rappelons quelques résultats concernant la synthèse d'observateurs de type grand gain pour une classe particulière de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables. Cette deuxième partie nous permettra ainsi d'introduire les bases nécessaires à la bonne compréhension de nos travaux.

Le deuxième chapitre est dédié à la synthèse d'observateurs à grand gain pour deux formes canoniques caractérisant certaines classes de systèmes multi-sorties observables pour toute entrée. La première forme est une généralisation de la forme canonique caractérisant les systèmes mono-sorties uniformément observables [39]. le système considéré se compose de plusieurs blocs dont chacun est associé à une composante vectorielle de l'état, le premier bloc est associé à toutes les sorties et les non linéarités ont une structure triangulaire. Après quelques rappels sur l'utilisation du théorème de la valeur moyenne, et les propriétés liés à la classe des système considérés, nous présentons la synthèse de l'observateur en présence d'un ou plusieurs retards . La convergence exponentielle de l'observateur a été obtenue grâce à l'utilisation d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii particulière. Une deuxième classe plus générale a été également présentée dans la deuxième section de ce chapitre [28]. La classe de systèmes considérée est constituée par plusieurs sous-systèmes.

Chaque sous-système est associé à un ensemble de sorties. L'état d'un sous-système, k , est un vecteur en blocs, ayant λ_k composantes et dont la première composante correspond aux sorties auxquelles le sous-système est associé. La dynamique de chaque sous système ayant une structure triangulaire par rapport à ses propres variables. La dernière non linéarité, associée à la dernière composante de chaque sous-système, pourrait par contre dépendre de l'état complet du système. L'extension de cette classe pour les systèmes à retards permet de compléter les résultats développés dans la littérature d'une part, et d'autre part, elle permet d'étendre la synthèse d'observateur pour une classe plus large de systèmes, à savoir les systèmes non complètement triangulaires.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à l'estimation de l'état pour une forme canonique triangulaire où certains paramètres inconnus interviennent au niveau des non-linéarités. Nous proposons la synthèse d'observateurs adaptatifs pour l'estimation conjointe des états, en présence de retards, et des paramètres, qui interviennent de manière non linéaire. La convergence exponentielle des erreurs d'observation et celles d'estimation paramétrique est garantie sous une certaine condition d'excitation persistante. Les principales caractéristiques des observateurs proposés résident dans leur simplicité de mise en oeuvre et leur capacité de donner lieu à différents types d'observateurs tels que les observateurs adaptatifs à grand gain et les observateurs à modes glissants.

Au quatrième et dernier chapitre, on s'intéresse aux systèmes dont la sortie présente un retard constant. Nous proposons un ensemble d'observateurs en cascade qui permettent d'estimer l'état à partir de sa sortie retardée. Le nombre de ces systèmes que l'on considère dépend de l'amplitude du retard considéré et de la constante de Lipschitz des non linéarités. Le premier observateur permet l'estimation de l'état retardé à partir de la mesure retardée. Chaque système de la cascade permet prédire l'état du système qui le précède avec un pas constant. ainsi le dernier étage est une estimation de l'état courant. On traitera dans un premier temps le cas d'un retard connu, puis, on adoptera les techniques proposés dans le chapitre précédent pour estimer les états ainsi que le retard inconnu présent en sortie.

Nous terminerons ce mémoire par une conclusion et les perspectives de recherche dans le contexte des résultats obtenus.

État de l'art

2.1 Introduction

Dans ce chapitre introductif, nous présenterons dans une première partie les systèmes à retards et les notions mathématiques qui s'y rapportent. L'objectif n'est pas de présenter de manière exhaustive les problématiques associées à une telle classe de systèmes mais plutôt d'introduire les concepts qui nous seront utiles par la suite. Ainsi nous nous intéresserons plus particulièrement à la stabilité des systèmes à retards basée sur l'extension de la théorie de Lyapunov. La seconde partie de ce chapitre est consacrée à l'observabilité des systèmes avec une attention particulière au concept d'entrées universelles et de systèmes uniformément observables, nous rappelons brièvement les résultats de synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires uniformément observables.

2.2 Généralités sur les systèmes à retards

2.2.1 Modélisation des systèmes à retards

Lors de l'étude d'un système, l'étape de modélisation est essentielle car elle conditionne les méthodes qui seront ensuite utilisées pour analyser ses propriétés. La classe de systèmes considérée dans ce mémoire présente la particularité de posséder un phénomène de retard dans leur dynamique. Les modèles associés sont alors régis par des équations différentielles fonctionnelles [44]. Au delà de l'intérêt théorique pour l'étude de telles équations, la modélisation par systèmes à retards trouve sa justification dans de nombreux problèmes appliqués. Biologie, chimie, économie sont autant de domaines pour lesquels certains processus font apparaître lors de leur modélisation une partie dynamique retardée [59, 58].

Contrairement aux systèmes ordinaires dont l'évolution est déterminée à partir de la valeur x à l'instant présent t : $\dot{x} = f(t, x(t))$, celle des systèmes retardés dépend de surcroît des valeurs passées de l'état $x(t - h)$, $h > 0$. Il est donc nécessaire de mémoriser une partie de "l'histoire" du système pour connaître son évolution. De telles systèmes sont

nommés aussi systèmes héréditaires et sont généralement représentés par des équations différentielles de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(u, u_\tau, x, x_\tau), \\ x_{t_0} = \phi(\theta) \text{ pour } \theta \in [t_0 - \tau, t_0], \\ u_{t_0} = \zeta(\theta) \text{ pour } \theta \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases} \quad (2.1)$$

où f est à présent une fonctionnelle, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état à l'instant t du système, $u(t) \in \mathbb{R}^s$ est l'entrée, $\tau > 0$ et les fonctions x_τ et u_τ sont définies par :

$$\begin{cases} [0, \tau_{max}] \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \tau \mapsto x_\tau(t) = x(t - \tau), \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} [0, \tau_{max}] \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \tau \mapsto u_\tau(t) = u(t - \tau). \end{cases} \quad (2.3)$$

τ_{max} correspond au retard maximum. Nous noterons par la suite \mathcal{C} l'ensemble de fonctions continues de $[0, \tau_{max}]$ dans \mathbb{R}^n . La fonction $x_\tau \in \mathcal{C}$ et u_τ représentent respectivement l'état et l'entrée retardés du système. Contrairement aux équations différentielles ordinaires, les conditions initiales d'une équation différentielle retardée sont représentés par les fonctions ϕ et ζ appartenant à \mathcal{C} et supposées continues par morceaux.

De ce fait, les systèmes à retards appartiennent à la classe de systèmes de dimension infinie.

2.2.2 Catégories des retards

Lors de la phase de modélisation, au même titre que les matrices définissant un modèle, il est essentiel de déterminer le type de retard qui affecte le système. Plus précisément, un retard, constant ou variant dans le temps, est souvent restreint à un certain domaine de définition. Le cas échéant, les propriétés intrinsèques au système physique peuvent apporter des informations sur les valeurs admissibles du retard. Nous avons dégagé les principales catégories du retard :

a) Retards constants : Les premières recherches sur les systèmes à retards concernaient principalement des retards constants. On compte de nombreux critères développés pour la stabilité des systèmes à retards constants [18] ou [42]. Depuis les années 90, différentes conditions de stabilité robuste des systèmes linéaires à retards constants mais inconnus ont été développées [75].

b) Retards variables majorés : Comme la constance du retard est une hypothèse rarement vérifiée dans la réalité, le cas des retards variables majorés a été largement considéré dans la littérature [50, 42, 3]. On définit cette classe de retards qui suppose la connaissance d'une valeur maximale sur le retard :

$$0 \leq \tau(t) \leq \tau_{max}. \quad (2.4)$$

c) Retards variables bornés : De nombreux retards apparaissent dans des processus réels et sont dus à des phénomènes de transfert d'information ou de matière. Ces retards imposent un délai (dû au temps de propagation) minimum incompressible. Dans ce contexte, et à condition bien sûr que cela conduise à des critères moins restrictifs, il paraît intéressant de se donner une borne inférieure du retard. On définit alors les retards bornés, les retards $\tau(t)$ qui vérifient la contrainte suivante :

$$0 < \tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2. \quad (2.5)$$

Des récentes solutions ont été obtenues pour ce type de retard [94]. Elles consistent à transformer le retard $\tau(t)$ en une somme de deux retards. Le premier peut être assimilé à un retard nominal et le second comme étant une perturbation bornée par rapport au retard nominal.

d) Retards variables avec contrainte sur la dérivée : Dans le cas des retards variant dans le temps, une contrainte supplémentaire relative à sa dérivée peut être ajoutée. On suppose alors qu'il existe un réel d tel que :

$$\dot{\tau}(t) \leq d < 1. \quad (2.6)$$

Indiquant alors une limitation sur la vitesse de variation du retard $\tau(t)$. Cette contrainte est souvent utilisée afin d'assurer que le retard ne varie pas plus rapidement que le temps et que les informations retardées arrivent dans l'ordre chronologique.

e) Retards variables continus par morceaux : Ces retards apparaissent notamment lors de l'échantillonnage d'un signal. Ce cas particulier autorise la dérivée du retard à prendre la valeur 1 :

$$\dot{\tau}(t) \leq 1. \quad (2.7)$$

Généralement, les contraintes faites sur les retards sont des combinaisons des différents modèles présentés.

2.2.3 Stabilité des systèmes à retards

La notion de stabilité constitue une problématique centrale de l'automatique. Elle caractérise le comportement des trajectoires d'un système autour de ses points d'équilibre. Souvent liée à la façon d'appréhender un système, la stabilité possède un large éventail de définitions [99].

Dans cette section, nous allons rappeler quelques concepts sur la stabilité des systèmes à retards en se focalisant sur l'approche temporelle liée à la seconde méthode de Lyapunov. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), \\ x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta) \in \mathcal{C} \text{ pour } \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (2.8)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. Nous rappelons que \mathcal{C} désigne l'ensemble des fonctions continues de $[-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Comme le contenu de ce mémoire ne concerne que la stabilité d'une erreur d'estimation, alors nous supposons que le système (2.8) possède un unique point d'équilibre $x_e = 0$. Ceci nous mène à présenter les définitions de la stabilité du système (2.8) autour de l'origine. Dans la plupart des cas, on peut toujours ramener le point d'équilibre à l'origine par un changement de variable.

Définition 2.1. (Stabilité) [44]

L'origine du système (2.8) est dit :

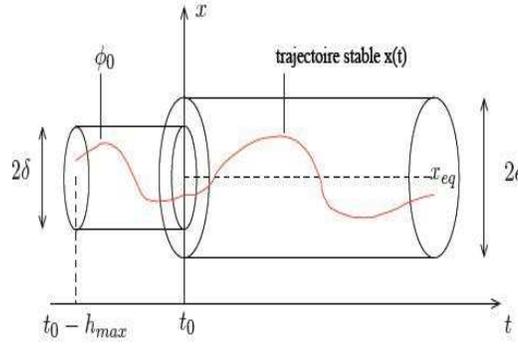
- **stable** si, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(t_0, \epsilon) > 0$ tel que :

$$\|\phi\|_{\mathcal{C}} \leq \delta \Rightarrow \|x(t, t_0, \phi)\| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.9)$$

- **uniformément stable** si, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$, indépendant de t_0 , tel que la condition (2.9) soit satisfaite.

Définition 2.2. (Stabilité asymptotique)[44]

L'origine du système (2.8) est dit :

FIG. 2.1 – stabilité au sens de Lyapunov autour d'un point d'équilibre x_{eq}

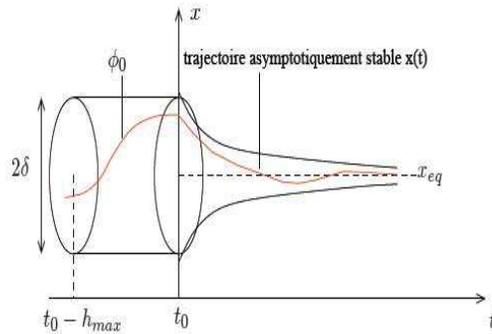
- **asymptotiquement stable** si elle est stable et s'il existe $b_0(t_0) > 0$ tel que :

$$\|\phi\|_C \leq b_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, t_0, \phi)\| = 0, \quad (2.10)$$

- **uniformément asymptotiquement stable** si elle est uniformément stable et s'il existe $b_0 > 0$ tel que $\forall \eta > 0$, il existe un $T(\eta)$ de telle sorte que :

$$\|\phi\|_C \leq b_0 \Rightarrow \|x(t, t_0, \phi)\| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta). \quad (2.11)$$

- **globalement uniformément asymptotiquement stable** si la condition précédente est vraie quelle que soit $\phi \in \mathcal{C}$.

FIG. 2.2 – stabilité asymptotique au sens de Lyapunov autour d'un point d'équilibre x_{eq}

Définition 2.3. (Stabilité exponentielle)[57] L'origine du système (2.8) est dit : **exponentiellement stable** s'il existe trois constantes a, b et δ telles que :

$$\|\phi\|_C \leq \delta \Rightarrow \|x(t, t_0, \phi)\| \leq a \|\phi\| e^{-b(t-t_0)}, \quad (2.12)$$

La propriété est uniforme si a , b et δ ne dépendent pas du temps t_0 .

L'utilisation des définitions précédentes, pour démontrer la stabilité de (2.8) autour de son point d'équilibre exige la résolution explicite de l'équation différentielle (2.8), ce qui est très souvent difficile voir impossible dans la plupart des cas. De ce fait, la méthode directe de Lyapunov permet de contourner cet obstacle. Cette méthode consiste à définir une fonction particulière dont l'existence garantit la stabilité.

2.2.3.1 Seconde méthode de Lyapunov

La théorie de Lyapunov établit le fait que les systèmes dont la trajectoire est attirée par un point d'équilibre asymptotiquement stable perdent progressivement de l'énergie, de façon monotone. Lyapunov généralise la notion d'énergie par une fonction scalaire V qui dépend de l'état du système. Cette fonction, appelée fonction candidate de Lyapunov, est souvent une norme [70].

Ainsi la seconde méthode de Lyapunov repose sur l'existence d'une fonction V définie positive telle que le long des trajectoires de (2.8), on ait $\frac{dV}{dt} < 0$, si $x \neq 0$.

Étant de dimension infinie, la seconde méthode de Lyapunov, ainsi énoncée n'est valable que pour une classe restreinte de systèmes héréditaires car $\frac{dV}{dt}$ dépend des valeurs passées x_t . Elle est donc très difficile à appliquer dans le cas général des systèmes à retards. Des résultats ont été développés et mis en pratique dans le cadre des équations différentielles à retards au début de la deuxième moitié du 20^e siècle [79, 82, 50]. Deux théories, désormais usuelles ont été développées : la méthode de Lyapunov-Krasovskii qui utilise des fonctionnelles de Lyapunov et la méthode de Lyapunov-Razumikhin qui emploie des fonctions de Lyapunov classiques. Cette dernière, moins utilisée dans la littérature et non abordée dans cette thèse, sera tout de même brièvement présentée.

2.2.3.2 Approche par fonctionnelles de Krasovskii

Cette technique est une extension des fonctions usuelles de Lyapunov aux équations différentielles retardées. Elle consiste à rechercher des fonctionnelles $V(t, x_t)$ qui décroissent le long des trajectoires de (2.8).

Théorème 2.1. (Lyapunov-Krasovskii).[79] Soient $u, v, w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions continues croissantes ; $u(\theta)$ et $v(\theta)$ strictement positives pour $\theta > 0$ et $u(0) = v(0) = 0$. Supposons que le champ de vecteur f de (2.8) soit borné pour des valeurs bornées de ses arguments.

S'il existe une fonctionnelle continue $V : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

a- $u(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi) \leq v(|\phi|)$,

b- $\dot{V}(t, \phi) \leq -w(|\phi(0)|)$, $\forall t \geq t_0$ le long des trajectoires de (2.8).

Alors la solution nulle de (2.8) est uniformément stable. Si de plus $w(\theta) > 0 \forall \theta > 0$, Cette solution est asymptotiquement stable.

Si v vérifie plutôt les conditions :

i- $u(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi) \leq v(|\phi|)$,

ii- $\dot{V}(t, \phi) \leq -w(|\phi(0)|)$, $\forall t \geq t_0$ et $w(\theta) > 0$ pour tout $\theta > 0$, alors la solution nulle de (2.8) est exponentiellement stable.

L'idée principale de ce théorème consiste à déterminer une fonctionnelle qu'on appelle fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii définie positive et dont la dérivée est définie négative le long des trajectoires de (2.8). La difficulté majeure de cette approche reste la conception, lorsqu'elle existe, d'une telle fonctionnelle vérifiant les spécifications du théorème et plus particulièrement la condition de décroissance le long des trajectoires du système (2.8).

2.2.3.3 Approche par fonctions de Razumikhin

Contrairement à l'approche de Krasovskii qui considère l'ensemble de l'état $x_t \in \mathcal{C}$, la méthode proposée par Razumikhin tient compte simplement de l'état instantané $x(t)$. On se place alors dans \mathbb{R}^n en considérant cette fois une fonction de Lyapunov $V(t, x(t))$ classique pour les équations différentielles ordinaires. De plus, cette méthode présente la particularité de vérifier la décroissance de la fonction candidate seulement pour les trajectoires qui ont tendance à quitter un voisinage du point d'équilibre, plus précisément lorsque $V(x(t)) \geq \max_{\theta \in [-h_{max}, 0]} V(x(t + \theta))$.

Théorème 2.2. (Lyapunov-Razumikhin). [82] Soient $u, v, w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions continues, strictement croissantes; $u(\theta)$ et $v(\theta)$ positives pour $\theta > 0$ et $u(0) = v(0) = 0$. Supposons que la fonction f de (2.8) est bornée pour des valeurs bornées de ses arguments. Alors, s'il existe une fonction continue $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

a- $u(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi) \leq v(|\phi|)$,

b- $\dot{V}(t, \phi) \leq -w(|\phi(0)|)$ pour toutes les trajectoires de (2.8) vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq V(t, \phi(t)), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0], \end{array} \right. \quad (2.13)$$

alors la solution nulle de (2.8) est uniformément stable.

De plus, si $w(\theta) > 0$ pour tout $\theta > 0$ et s'il existe une fonction $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ strictement croissante avec $p(\theta) > \theta$ pour tout $\theta > 0$ telle que :

i- $u(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi) \leq v(|\phi|)$,

ii- $\dot{V}(t, \phi) \leq -w(|\phi(0)|)$ pour toutes les trajectoires de (2.8) vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq p(V(t, \phi(t))), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0], \end{array} \right. \quad (2.14)$$

alors une telle fonction est appelée fonction de Lyapunov-Razumikhin et la solution nulle de (2.8) est uniformément asymptotiquement stable.

Dans la pratique, les fonctions p les plus souvent utilisées sont celles de la forme $p = q\theta$ où q est une constante strictement supérieure à 1. De plus, les fonctions recherchées dans l'approche de Razumikhin sont souvent des fonctions quadratiques de la forme :

$$V(t) = x^T P x(t)$$

,

où P est une matrice symétrique définie positive. L'équation (2.14) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^T(t + \theta) P x(t + \theta) \leq q x^T(t) P x(t), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0] \text{ et } q > 1. \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Ainsi dans l'approche Lyapunov-Razumikhin, la négativité n'est requise que pour les trajectoires qui, à l'instant t , appartiennent à un certain espace défini par l'évolution du système sur l'intervalle $[t - \tau, t]$.

Même si l'approche Lyapunov-Razumikhin conduit généralement à des résultats plus conservatifs que ceux tirés de l'approche de Lyapunov-Krasovskii, elle permet de prendre en compte les retards variables sans restriction sur la dérivée du retard. Il a par ailleurs été montré que, pour des retards constants, l'existence d'une fonction de Lyapunov-Razumikhin entraîne celle d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii [26]. Cependant, dans la littérature, la stabilité des systèmes à retards fait plus généralement appel à des fonctions de Lyapunov-Krasovskii.

2.3 Observabilité et observateurs

De manière générale, un observateur est un système dynamique qui permet la reconstruction (asymptotique ou exponentielle) de l'état du système, à partir de ses entrées, de ses sorties, et de la connaissance de son modèle dynamique, qui sont les seules informations disponibles. Ce principe est illustré par la figure (3.4).

Préalablement à toute stratégie d'observation d'un système dynamique, il est nécessaire de s'assurer que l'état de ce dernier peut être estimé à partir des informations sur l'entrée

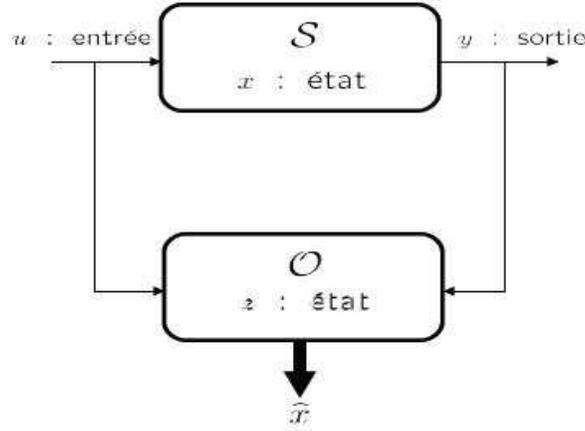


FIG. 2.3 – principe de l’observateur

et la sortie du système. L’étude de l’observabilité du système apporte une solution à ce problème. A la différence des systèmes linéaires, l’observabilité des systèmes non linéaires est intrinsèquement liée aux entrées et aux conditions initiales.

Après un rappel de quelques concepts fondamentaux sur l’observabilité, nous introduisons dans cette section les notions d’entrées universelles et de systèmes uniformément observables qui permettent de s’affranchir des problèmes de singularité liés aux entrées. Nous décrirons brièvement les différentes approches utilisées dans la littérature pour la synthèse d’observateurs en se focalisant sur la synthèse d’observateur à grand gain pour une forme canonique des systèmes uniformément observables.

2.3.1 Observabilité

On considère les systèmes dont le comportement entrée-sortie peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{S} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(u, x) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.16)$$

Où l’état $x(t) \in \mathcal{V}$ est un ouvert de \mathbb{R}^n , l’entrée est $u(t) \in U$ où U est un ensemble mesurable de \mathbb{R}^m et les sorties $y(t) \in \mathbb{R}^p$. Pour une entrée donnée, les trajectoires au cours du temps des variables d’état dépendent de leur conditions initiales.

L’observabilité d’un système exprime la possibilité de reconstruire l’état initial $x(t_0)$ à partir de la seule connaissance des sorties $y(t, t_0)$ et des entrées $u(t, t_0)$ pendant un intervalle de temps suffisamment long contenu dans $[t_0, t_0 + T[$.

Dans ce qui suit, nous allons rappeler certaines définitions inhérentes à l’observabilité des systèmes non linéaires, que l’on peut retrouver dans [46, 8].

2.3.1.1 Quelques définitions

La notion d'observabilité est basée sur la possibilité de différencier deux conditions initiales distinctes. On parlera ainsi de la distinguabilité d'un couple de conditions initiales.

Définition 2.4. (*Distinguabilité - Indistinguabilité*) : Deux états initiaux $x_0, x_1 \in \mathcal{V}$ tel que $x_0 \neq x_1$ sont dits distinguables dans \mathcal{V} si $\exists t \geq 0$ et $\exists u : [0, t] \rightarrow U$ une entrée admissible telle que les trajectoires des sorties issues respectivement de x_0 et x_1 restent dans \mathcal{V} pendant la durée $[0, t]$ et vérifient $y(t, x_0, u(t)) \neq y(t, x_1, u(t))$. Dans ce cas, on dira que u distingue x_0 et x_1 dans \mathcal{V} . Réciproquement, deux états initiaux $x_0, x_1 \in \mathcal{V}$ tel que $x_0 \neq x_1$ sont dits indistinguables si $\forall t \geq 0$ et $\forall u : [0, t] \rightarrow U$ pour lesquels les trajectoires issues de x_0, x_1 restent dans \mathcal{V} on a : $y(t, x_0, u(t)) = y(t, x_1, u(t))$.

Il est maintenant possible de donner une définition de l'observabilité d'un système en un point, et par extension, de définir un système observable.

Définition 2.5. (*Observabilité*) : Le système (\mathcal{S}) est observable en $x_0 \in \mathcal{V}$ si x_0 est distinguable de tout $x \in \mathbb{R}^n$. En outre, le système (\mathcal{S}) est observable si $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, x_0 est distinguable.

Pour les systèmes linéaires stationnaires

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^\mu, y \in \mathbb{R}^p \quad (2.17)$$

l'observabilité est caractérisée par la fameuse condition du rang : le système (2.17) est

observable si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ est de rang plein ($= n$).

La distinguabilité est un concept global. Il arrive souvent que pour engendrer deux trajectoires à partir de x_0 et x_1 , on ait besoin de s'éloigner suffisamment de x_0 et x_1 . Les deux définitions qui suivent sont de nature locale.

Définition 2.6. (*observabilité locale*) : On dit que le système \mathcal{S} est localement observable en x_0 si pour tout voisinage ouvert V_{x_0} de x_0 , l'ensemble des points qui sont indistinguables de x_0 dans V_{x_0} via les trajectoires dans V_{x_0} est le point x_0 lui-même.

Lorsqu'il s'agit de distinguer x_0 de ses voisins, on peut affaiblir la notion d'observabilité locale. Dans cette optique, on a :

Définition 2.7. (*observabilité locale faible*) : On dit que le système \mathcal{S} est localement faiblement observable en x_0 s'il existe un voisinage ouvert V_{x_0} de x_0 tel que pour tout voisinage ouvert $V'_{x_0} \subset V_{x_0}$, l'ensemble des points qui sont indistinguables de x_0 dans V'_{x_0} via les trajectoires dans V'_{x_0} est le point x_0 lui-même.

Un système est donc localement faiblement observable si tout état x_0 peut être instantanément distingué de ses voisins en utilisant les trajectoires qui restent dans un voisinage de x_0 .

Dans le but de traduire cette propriété d'observabilité par une condition de rang comme dans le cas des systèmes linéaires, nous sommes amenés à définir l'espace d'observation.

Définition 2.8. (*Espace d'observation*) : L'espace d'observation du système \mathcal{S} est le plus petit sous-espace vectoriel, \mathcal{O} , de fonctions de \mathcal{V} à valeurs dans l'espace de sortie qui contienne h_1, \dots, h_p , et qui soit fermé pour la dérivation de Lie par rapport à tous les champs de vecteurs du type $f_u(x) = f(u, x)$, $u \in U$, fixé.

Définition 2.9. (*Observabilité au sens du rang*) : Soit $d\mathcal{O}$ l'espace des différentielles des éléments de \mathcal{O} . Désignons par $d\mathcal{O}(x_0)$ l'évaluation de $d\mathcal{O}$ en x_0 . Le système \mathcal{S} est localement faiblement observable en x_0 si

$$\dim d\mathcal{O}(x_0) = n \tag{2.18}$$

La condition (2.18) est appelée condition du rang. Si cette condition est satisfaite pour tout $x_0 \in \mathcal{V}$, on dit que le système \mathcal{S} est observable au sens du rang.

Le théorème précédent donne une condition suffisante d'observabilité locale faible. Le théorème suivant donne une condition nécessaire :

Théorème 2.3. : Supposons que le système \mathcal{S} est localement faiblement observable. Alors la condition (2.18) est vérifiée presque partout dans \mathcal{V} , c'est-à-dire, $\dim d\mathcal{O}(x) = n$ en tout point x appartenant à un ouvert \mathcal{V}' dense dans \mathcal{V} .

On remarque que les définitions d'observabilité données précédemment n'impliquent pas que toute entrée distingue des couples de points de \mathcal{V} . En pratique, on aimerait se placer

dans le cas où l'entrée u étant fixée, tout couple d'états distincts donne lieu à des sorties différentes. En effet, ce n'est que dans ce cas que l'on peut reconnaître l'état initial du système à partir des informations antérieures sur l'entrée et la sortie. Ceci nous conduit au concept des entrées universelles et des systèmes qui sont observables au sens du rang pour toutes les entrées appliquées.

2.3.1.2 U -uniforme observabilité

Lorsqu'une entrée distingue tous les couples d'état initiaux sur \mathcal{V} , celle-ci est dite universelle.

Définition 2.10. (*Entrée universelle*) : Une entrée $u : [0, T] \rightarrow U$ admissible est dite universelle pour le système \mathcal{S} sur $[0, T]$ si, pour tout couple d'états initiaux distincts x_0 et x_1 , il existe au moins un temps $t \in [0, T]$ tel que $y(t, x_0, u(t)) \neq y(t, x_1, u(t))$. Une entrée non universelle est dite singulière.

Lorsqu'il n'existe pas d'entrée singulière parmi l'ensemble des entrées admissibles U , alors tout couple d'états initiaux sont distinguables. Cette propriété est appelée la U -uniforme observabilité.

Définition 2.11. (*U -uniforme observabilité*) : Un système dont toutes les entrées admissibles à valeur dans U sont universelles est dit U -uniformément observable.

Dans le cas où l'ensemble de toutes les entrées à valeurs bornées dans \mathbb{R}^m sont universelles, ce système sera dit \mathbb{R}^m -uniformément observable (et l'on dira par la suite seulement uniformément observable).

L'uniforme observabilité sur un espace \mathcal{V} permet de caractériser un ensemble d'entrées U tel que pour toute entrée $u(t) \in U$, le système soit observable sur \mathcal{V} . Des résultats importants ont été établis pour les systèmes bilinéaires dans [92] et pour les systèmes affines en la commande dans [36]. Dans le cas multi-sorties, certaines conditions suffisantes de structure ont été données dans [9] et seront détaillés plus loin.

2.3.2 Observateurs

Considérons le système dynamique suivant :

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{z} = \bar{f}(z, u, y) \\ \hat{x} = \bar{h}(z) \end{cases} \quad (2.19)$$

où $z \in M$ une variété différentiable telle que $\bar{h} : M \rightarrow \mathcal{V}$ soit une submersion (application différentiable surjective), \mathcal{V} étant l'ouvert de \mathbb{R}^n constituant l'espace d'état de (\mathcal{S}) ; u et y sont respectivement les entrées et les sorties de (\mathcal{S}) .

Définition 2.12. (*Observateur*) : (i) Le système \mathcal{O} est un observateur asymptotique local s'il existe $x_0 \in \mathcal{V}$ et un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0$$

pour toute condition initiale $x(0) \in V_{x_0}$ et $z(0) \in \bar{h}^{-1}(V_{x_0})$.

(ii) Le système \mathcal{O} est un observateur global si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0$$

pour toute condition initiale $x(0) \in \mathcal{V}$ et $z(0) \in M$.

(iii) Dans les deux cas ci-dessus, \mathcal{O} est dit observateur exponentiel si :

$$\exists \lambda, \mu > 0 \text{ tel que } \|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \mu e^{-\lambda t} \|\hat{x}(0) - x(0)\|$$

La structure d'observateur la plus utilisée est :

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - G(g)(h(\hat{x}) - y) \\ \dot{g} = \varphi(\hat{x}, u, y, g) \end{cases} \quad (2.20)$$

$G(g)$ est appelé *gain d'observation* et $G(g)(h(\hat{x}) - y)$ est le terme de correction.

Initialement les systèmes abordés ont été les systèmes linéaires, pour lesquels une solution simple et optimale a été proposée par Luenberger [69] dans le cadre déterministe, et par Kalman [51] dans le cadre stochastique.

2.3.2.1 Observateur de Luenberger

La théorie de l'observation de Luenberger repose essentiellement sur des techniques de placement de pôles. On se place dans le cas déterministe et on considère le système linéaire stationnaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.21)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^\mu$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ et A, B, C sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

Luenberger propose l'observateur suivant pour le système (2.21) :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (2.22)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ a pour expression :

$$\dot{e}(t) = (A - KC)e(t) \quad (2.23)$$

En utilisant une technique de placement de pôles, il suffit choisir le gain K de l'observateur de sorte que les valeurs propres de la matrice $A - KC$ soient à partie réelle négative. L'observateur (2.23) garantit ainsi une convergence exponentielle vers zéro de l'erreur d'observation.

2.3.2.2 Filtre de Kalman

On se place dans le cadre stochastique et on considère le modèle dynamique d'un système linéaire défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Lw(t) \\ y(t) = Cx(t) + v(t) \end{cases} \quad (2.24)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^\mu$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ et $v(t) \in \mathbb{R}^p$ sont deux bruits blancs gaussiens d'espérance nulle, de covariances respectives Q et R . Ces bruits sont supposés non corrélés. Les matrices A, B et C sont de dimensions appropriées.

La théorie de l'observation de Kalman nécessite, quant à elle, la résolution d'une équation de Ricatti. Kalman utilise les propriétés statistiques des bruits w et v et propose la structure d'observateur suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(t)(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (2.25)$$

En minimisant la matrice de covariance de l'erreur d'estimation $P(t) = E[e(t)e(t)^T]$, on obtient l'expression du gain de l'observateur :

$$K(t) = P(t)C^T R^{-1} \quad (2.26)$$

où $P(t)$ est solution de l'équation de Ricatti :

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T - P(t)C^T R^{-1} CP(t) + LQL^T \quad (2.27)$$

Sous certaines conditions [4], on peut montrer que la matrice $P(t)$ tend vers une limite et que le filtre est stable, ce qui permet éventuellement de conserver pour K sa valeur en régime permanent.

Le problème de l'observation des systèmes linéaires est donc entièrement résolu. C'est loin d'être le cas lorsqu'il s'agit de systèmes non linéaires. Il n'existe pas à ce jour, d'approche universelle pour la synthèse d'observateurs des systèmes non linéaires. En effet, plusieurs travaux de recherche y sont consacrés, donnant naissance à un large éventail d'algorithmes d'estimation [9, 16, 30, 36, 39, 37, 45, 48, 62, 63, 77, 93]. D'une manière générale, nous pouvons classer ces différentes contributions en cinq classes selon l'approche utilisée.

- La première est basée sur le filtre de Kalman et a suscité beaucoup d'intérêt pendant longtemps. Ceci est essentiellement dû à une simplicité relative dans sa mise en oeuvre même pour des systèmes de taille importante. De plus, ce filtre constitue souvent le point de départ pour la synthèse d'observateurs pour de tels systèmes. Toutefois, dans la plupart des cas, on manque de preuve de convergence du filtre.

- La deuxième approche est basée sur la linéarisation de l'erreur. Elle consiste à considérer des transformations appropriées qui mettent le système à étudier sous une forme où les non linéarités ne dépendent que des entrées et des sorties (cf. par exemple [48, 62, 63, 43, 93]). Dans les premiers travaux relatifs à cette approche, une difficulté essentielle réside dans la recherche de la transformation appropriée qui nécessite la résolution de systèmes d'Equations à Dérivées Partielles (EDP). Plus récemment, cette difficulté est surmontée par la proposition d'algorithmes constructifs qui permettent de transformer le système original sous la forme appropriée sans avoir à résoudre de systèmes EDP [88].

- La troisième approche est basée sur des techniques LMI. Les systèmes considérés sont composés d'une partie linéaire constante qui sert à calculer le gain d'observation et d'une partie non linéaire qui est supposée être globalement lipschitzienne. Le calcul du gain se fait simultanément avec la recherche de la plus grande valeur de la constante de Lipschitz pour laquelle la synthèse de l'observateur est possible. Cette méthode ne tient pas compte la structure de la non linéarité, ce qui réduit parfois considérablement l'ensemble des solutions [81].

- La quatrième approche utilise des outils de l'algèbre différentielle. Elle consiste à exprimer les états non mesurés en fonction des sorties, des entrées et de leurs dérivées (par rapport au temps) successives, ces dérivées étant calculées par des différentiateurs numériques (cf. par exemple [23, 22, 35]).

- La cinquième et dernière approche se base sur les formes canoniques d'observabilité

et utilise le concept d'observabilité pour toute entrée [36]. Ce concept est issu naturellement du fait que contrairement aux systèmes linéaires, l'observabilité des systèmes non linéaires dépend généralement des entrées considérées. D'où l'idée de caractériser, à travers des formes canoniques d'observabilité, l'ensemble des systèmes non linéaires qui sont observables indépendamment de l'entrée considérée. La caractérisation de tels systèmes a été réalisée dans le cas d'une seule sortie pour les systèmes affines en la commande et une condition nécessaire et suffisante a été donnée [39]. De tels systèmes peuvent toujours se mettre sous une la forme triangulaire bien connue. Elle consiste en une série d'intégrateurs avec une non linéarité additive faisant intervenir l'entrée et les états du système de manière triangulaire, c'est-à-dire que la jacobienne des non linéarités est une matrice triangulaire inférieure. En se basant sur cette forme triangulaire, les auteurs ont proposé un observateur de type grand gain. Le gain de cet observateur est issu d'une équation algébrique de Lyapunov. Il est explicitement donné et son réglage se fait à travers la spécification d'un seul paramètre constant. Le problème principal inhérent à la quatrième approche réside dans le manque de formes canoniques pour les systèmes multi-sorties. Toutefois, dans plusieurs travaux, des classes particulières de systèmes non linéaires observables pour toute entrée ont été proposés et un observateur de type grand gain, généralisant celui proposé dans le cas mono sortie, a été synthétisé [21, 37, 84, 13, 47, 86, 30, 45]. Ci après, nous présentons un peu plus en détails cette dernière méthode.

Bien sûr, il existe d'autres travaux sur la synthèse d'observateurs qui n'appartiennent pas aux approches décrites précédemment, et le classement de différentes méthodes est un choix qui n'est pas unique.

2.3.3 Observateur à grand gain pour une classe de systèmes non linéaires

Dans cette section, nous présentons une forme canonique observable caractérisant des classes de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables. Nous détaillons aussi la synthèse d'observateur à grand gain pour cette forme canonique. Ensuite, nous présenterons une classe particulière de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables qui peut se mettre à l'aide d'une transformation appropriée, qui sera aussi présentée, sous forme canonique présentée ci dessous. Cette classe particulière sera considérée ensuite dans la partie qui traite de la synthèse des observateurs pour les systèmes à retards.

2.3.3.1 Forme canonique d'observabilité

On considère les systèmes multi-sorties qui peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(u, x) \\ y = Cx = x^1 \end{cases} \quad (2.28)$$

où l'état $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $x^k \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \dots, q$, $n = qp$, la sortie $y \in \mathbb{R}^p$, l'entrée $u \in \mathbb{R}^s$ et $\tilde{\varphi}(u, x)$ a une structure triangulaire par rapport à x , c'est-à-dire

$$\varphi(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u, x^1) \\ \varphi^2(u, x^1, x^2) \\ \vdots \\ \varphi^q(u, x) \end{pmatrix};$$

La matrice A de dimension $n \times n$ est la matrice anti-décalage par blocs :

$$A = \begin{bmatrix} 0_p & I_p & 0_p & 0_p \\ \vdots & & I_p & 0_p \\ 0_p & & \ddots & I_p \\ 0_p & \dots & 0_p & 0_p \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

La matrice d'observation C a la structure particulière suivante :

$$C = [I_p \ 0_p \ \dots \ 0_p] \quad (2.30)$$

La forme canonique présentée a été proposée par [45]. Le système considéré se compose de plusieurs blocs dont chacun est associé à une composante vectorielle de l'état. La caractéristique principale de ce système réside dans le fait que le premier bloc est associé à toutes les sorties et que les non linéarités du système ont une structure triangulaire, c'est-à-dire la non linéarité d'un bloc ne dépend que des variables propres du bloc ou de celles des blocs supérieurs. Cette forme peut être interprétée comme une généralisation de la forme canonique caractérisant les systèmes mono-sortie uniformément observables [36, 39, 37].

2.3.3.2 Synthèse de l'observateur

Pour la synthèse de l'observateur, les hypothèses suivantes sont adoptées :

Hypothèse 2.1. *L'état $x(t)$ et l'entrée $u(t)$ sont bornés. Plus précisément, nous avons $x(t) \in X$, $u(t) \in U$ pour tout $t \geq 0$ où X et U sont deux compacts respectivement de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^s .*

Hypothèse 2.2. *La fonction $\varphi(u, x)$ est Lipschitzienne par rapport à x , uniformément en u , c'est-à-dire*

$$\exists L > 0; \forall u \in U; \forall \hat{x}, x \in X : \|\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)\| \leq L\|\hat{x} - x\| \quad (2.31)$$

Rappelons que l'hypothèse (H2.2) est classique et elle est généralement adoptée lors de la synthèse d'observateurs de type grand gain (se référer par exemple à [39, 45]). Cette hypothèse est bien sûr restrictive par son caractère global. Toutefois, en pratique, la trajectoire du système (physique) reste généralement confinée dans un domaine compact borné $\Omega \in \mathbb{R}^n$ sur lequel les non linéarités sont lipschitziennes. Dans ce cas, ils suffit de les étendre sur tout \mathbb{R}^n par une fonction globalement lipschitziennes. On pourra se référer par exemple à ([86, 30]) où ces problèmes sont traités.

Dans la suite de ce mémoire, on adoptera des hypothèses similaires à (H2.2) tout en gardant en mémoire la remarque formulée précédemment.

Un observateur à grand gain pour le système (2.28) est le système dynamique suivant :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varphi(u, \hat{x}) - \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^T(C\hat{z} - y) \quad (2.32)$$

où

- $\theta > 0$ est le paramètre de réglage de l'observateur.
- S est l'unique solution de l'équation algébrique de Lyapunov suivante :

$$S + A^T S + S A = C^T C \quad (2.33)$$

- Δ_θ est la matrice diagonale par bloc suivante :

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left(I_p, \frac{1}{\theta} I_p, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}} I_p \right) \quad (2.34)$$

Il est clair que l'observateur (2.32) est la simple généralisation de l'observateur proposé dans [39] au cas multi-sorties. De manière similaire au cas mono-sortie, la solution S de l'équation (2.33) ainsi que le vecteur $S^{-1}C^T$ peuvent s'exprimer comme suit :

$$S(i, j) = (-1)^{(i+j)} C_{i+j-2}^{j-1} I_p \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq n \quad (2.35)$$

$$S^{-1}C^T = \begin{pmatrix} C_q^1 I_p \\ C_q^2 I_p \\ \vdots \\ C_q^q I_p \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

où I_p est la matrice identité $p \times p$.

2.3.3.3 Classe particulière de SNL MIMO uniformément observables

Nous allons présenter maintenant une classe particulière de systèmes non linéaires uniformément observables qui peut se mettre à l'aide d'une transformation appropriée sous la première forme canonique présentée ci-dessus. Soit la classe de systèmes non linéaires MIMO suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(u, x) \\ y = f^0(u, x^1) \end{cases} \quad (2.37)$$

Avec

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} ; f(u, x) = \begin{pmatrix} f^1(u, x^1, x^2) \\ f^2(u, x^1, x^2, x^3) \\ \vdots \\ f^{q-1}(u, x) \\ f^q(u, x) \end{pmatrix} ;$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état, $x^k \in \mathbb{R}^{n_k}$, $k = 1, \dots, q$ et $p = n_0 \geq n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_q$, $\sum_{k=1}^q n_k = n$; l'entrée $u(t) \in \mathcal{U}$ l'ensemble des fonctions absolument continues à dérivées bornées de \mathbb{R}^+ dans U un compact de \mathbb{R}^μ ; $f(u, x) \in \mathbb{R}^n$ où $f^k(u, x) \in \mathbb{R}^{n_k}$ et $f^0(u, x^1) \in \mathbb{R}^{n_0}$. L'hypothèse suivante est adoptée :

Hypothèse 2.3. Pour $0 \leq k \leq q - 1$; la fonction $x^{k+1} \mapsto f^k(u, x^1, \dots, x^k, x^{k+1})$ de $\mathbb{R}^{n_{k+1}}$ dans \mathbb{R}^{n_k} est injective. De plus, on suppose que $\exists \alpha, \beta > 0$ tels que pour tout $k \in \{0, \dots, q - 1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall u \in U$,

$$0 < \alpha^2 I_{n_{k+1}} \leq \left(\frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \right)^T \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \leq \beta^2 I_{n_{k+1}}$$

où $I_{n_{k+1}}$ est la matrice identité $(n_{k+1}) \times (n_{k+1})$.

Cette classe de systèmes a été considérée par [45] pour la caractérisation d'une classe des systèmes uniformément observables. Les auteurs ont proposé un observateur à grand gain dont la synthèse a été effectuée en deux étapes. Dans la première étape, les auteurs ont introduit un changement de coordonnées qui a ramené le système (2.37) sous la première forme canonique (2.28). La synthèse de l'observateur dans les nouvelles coordonnées est immédiate (c'est l'observateur (2.32)) puis les équations de l'observateur dans les coordonnées originales sont données en considérant la pseudo-inverse de la matrice jacobienne. Ce système a ensuite été reconsidéré par ([31]) où les auteurs ont proposé une version légèrement modifié de l'observateur présenté dans ([45]). En effet, la nouvelle version ne nécessite pas l'inversion de toute la matrice jacobienne mais que des termes diagonaux de cette matrice. Nous proposons dans ce qui suit de donner la transformation qui permet de transformer le système (2.37) sous la première forme canonique ainsi que les équations de l'observateur modifié dans les nouvelles coordonnées et les coordonnées originales.

2.3.3.4 Synthèse de l'observateur

Considérons le changement de coordonnées suivant :

$$\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n_0q}$$

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \longrightarrow z = \Phi(u, x) = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^q \end{pmatrix}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} z^1 = f^0(u, x^1) \\ z^2 = \frac{\partial f^0}{\partial x^1}(u, x^1) f^1(u, x^1, x^2) \\ z^3 = \frac{\partial f^0}{\partial x^1}(u, x^1) \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x^1, x^2) f^2(u, x^1, x^2, x^3) \\ \vdots \\ z^q = \left(\prod_{k=0}^{q-2} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \right) f^{q-1}(u, x) \end{array} \right. \quad (2.38)$$

où $z^k \in \mathbb{R}^{n_0}$, $k = 1, \dots, q$.

D'après l'hypothèse (H1), l'application Φ est injective; soit Φ^c sa fonction réciproque. Avant d'écrire la dynamique de z , nous introduisons les notations suivantes :

- Soit $\Lambda(u, x)$ la matrice diagonale en blocs suivante :

$$\Lambda(u, x) = \text{diag} \left(\frac{\partial f^0}{\partial x^1}(u, x), \frac{\partial f^0}{\partial x^1}(u, x) \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x), \dots, \prod_{k=0}^{q-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \right) \quad (2.39)$$

D'après l'hypothèse (H1), $\Lambda(u, x)$ est inversible à gauche. On désignera dans la suite par $\Lambda^+(u, x)$ son inverse à gauche. On peut facilement vérifier que :

$$\begin{aligned} \Lambda(u, x)f(u, x) &= Az + G(u, x) \text{ ou encore} \\ f(u, x) &= \Lambda^+(u, x)Az + \Lambda^+(u, x)G(u, x) \end{aligned} \quad (2.40)$$

où A est une matrice carrée $n_0q \times n_0q$ et $G(u, x) \in \mathbb{R}^{n_0q}$ et ils sont donnés par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_0} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & I_{n_0} & \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & I_{n_0} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } G(u, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \left(\prod_{k=0}^{q-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \right) f^q(u, x) \end{pmatrix}$$

Nous pouvons maintenant générer l'expression de la dérivée par rapport au temps de z :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x)\dot{x}(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, x)\dot{u}(t) \\ &= \Lambda(u, x)f(u, x) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x) - \Lambda(u, x) \right) f(u, x) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, x)\dot{u}(t) \\ &= Az + G(u, x) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x) - \Lambda(u, x) \right) (\Lambda^+(u, x)Az + \Lambda^+(u, x)G(u, x)) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, x)\dot{u}(t) \end{aligned}$$

d'après (3.67).

Notons que la matrice $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x) - \Lambda(u, x) \right)$ est triangulaire inférieure avec des zéros sur toute sa diagonale. Puisque $\Lambda^+(u, x)$ est diagonale et que les $((q-1)n_0)$ premières composantes de $G(u, x)$ sont nulles, on a :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x) - \Lambda(u, x) \right) \Lambda^+(u, x)G(u, x) = 0 \quad (2.41)$$

Par conséquent, la dynamique de z peut être réécrite comme suit :

$$\dot{z}(t) = Az + G(u, x) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x) - \Lambda(u, x) \right) \Lambda^+(u, x)Az + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, x)\dot{u}(t)$$

Pour alléger les écritures, on adoptera les notations suivantes dans la suite :

$$\begin{aligned}
\Theta(u, z) &\triangleq \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x) - \Lambda(u, x) \right) \Lambda^+(u, x) \\
&= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, \Phi^c(z)) - \Lambda(u, \Phi^c(z)) \right) \Lambda^+(u, \Phi^c(z)) \\
\varphi(u, z) &\triangleq \Theta(u, z)Az + G(u, x) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, x)\dot{u}(t) \\
&= \Theta(u, z)Az + G(u, \Phi^c(z)) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, \Phi^c(z))\dot{u}(t)
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Compte tenu du fait que $\Theta(u, z)$ est triangulaire inférieure avec des zéros sur la diagonale principale, on peut vérifier que la fonction $\varphi(u, z)$ possède une structure triangulaire.

En utilisant les notations adoptées, le système (2.37) peut être écrit dans les nouvelles coordonnées en z comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \varphi(u, z) \\ y = Cz \end{cases} \tag{2.43}$$

où

$$C = [I_{n_0}, 0_{n_0}, \dots, 0_{n_0}]$$

est une matrice $n_0 \times n_0q$ avec 0_{n_0} la matrice nulle de dimension $n_0 \times n_0$.

Il est clair que le système (2.43) est sous la forme canonique (2.28). De ce fait, l'observateur (2.32) peut être synthétisé pour ce système (sous l'hypothèse technique portant sur le caractère Lipschitz de la fonction φ). Toutefois, comme nous l'avons signalé précédemment, l'équation d'un tel observateur dans les coordonnées originales en x , nécessite l'inversion de toute la matrice jacobienne. Pour contourner cette inversion, un nouvel observateur a été proposé. Les équations de cet observateur s'écrivent dans les nouvelles coordonnées comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}(t) &= A\hat{z} + \varphi(u, \hat{z}) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C (\hat{z} - z) \\
&\quad - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, \Phi^c(\hat{z})) \left(\Lambda^+(u, \Phi^c(\hat{z})) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, \Phi^c(\hat{z})) \right)^+ \right) \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C (\hat{z} - z)
\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\text{où } \hat{z} = \begin{bmatrix} \hat{z}^1 \\ \hat{z}^2 \\ \vdots \\ \hat{z}^q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_0q} \text{ avec } \hat{z}^k \in \mathbb{R}^{n_0}, k = 1, \dots, q.$$

Maintenant, il est clair que l'observateur (2.44) s'écrit dans les coordonnées originales x comme suit :

$$\dot{\hat{x}} = f(u, \hat{x}) - \theta \Lambda^+(u, \hat{x}) \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T (f^0(u, \hat{x}^1) - f^0(u, x^1)) \quad (2.45)$$

où $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ avec $\hat{x}^k \in \mathbb{R}^{n_k}$, $k = 1, \dots, q$ et x est le vecteur des trajectoires du système (2.37).

On remarque que l'observateur dans les coordonnées originales ne nécessite pas l'inversion de toute la matrice jacobienne mais que de ses termes diagonaux rassemblés au sein de la matrice Λ .

2.4 Conclusion

Ce chapitre a été consacré aux principaux éléments de la théorie et aux différentes notions fondamentales abordées dans ce mémoire. Il est composé de deux parties. La première partie est un bref rappel sur les systèmes à retards. Leur apparition fréquente dans la modélisation des phénomènes physiques a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs. Après avoir présenté les modèles des systèmes à retards rencontrés dans la littérature, nous avons rappelé les conditions de stabilité liées à l'extension de la théorie de Lyapunov. La seconde partie est un panorama sur l'observation et la synthèse d'observateurs des systèmes dynamiques. Les concepts d'observabilité uniforme et de grand gain ont été particulièrement privilégiés pour les avoir utilisés dans toutes nos contributions.

Observateur à grand gain pour des systèmes à retards

3.1 Introduction

Les phénomènes de retard apparaissent naturellement dans la modélisation de nombreux processus physiques. La biologie, l'écologie, les sciences de l'ingénieur ou les télécommunications sont des domaines où interviennent des équations différentielles dont l'évolution dépend non seulement de la valeur de leurs variables à l'instant présent t , mais aussi d'une partie de leur passé. La présence d'un retard dans la dynamique d'un système lui confère une dimension infinie, ce qui rend son analyse particulièrement complexe, d'où la nécessité d'adaptation des techniques de commande et d'observabilité pour cette catégorie de systèmes.

Dans le cadre de la synthèse d'observateurs pour les systèmes à retards, thème dont traite cette contribution, la plupart des résultats disponibles traitent des systèmes linéaires ([19, 72, 20, 49, 54, 5, 42, 53, 73] ...) et on ne recense que peu de résultats dédiés aux systèmes non linéaires [98, 1, 90, 100, 32]. De plus, la plupart de ces résultats sont basés sur des techniques de type LMI et par conséquent l'existence d'un observateur dépend de la faisabilité de certaines LMI. Or, comme c'est justement souligné [2], les conditions de faisabilité des problèmes de type LMI ne sont généralement pas explicitées et de ce fait la faisabilité devrait être préalablement déterminée de manière numérique.

Dans ce chapitre, nous proposons des techniques de construction d'observateur à grand gain pour deux classes de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables. La première classe est une extension de la forme canonique (2.28) pour les systèmes à retards. Nous traitons dans un premier lieu le cas d'un seul retard variable présent dans la dynamique, une généralisation de l'observateur au cas de plusieurs retards sera ensuite présentée. La deuxième classe considérée s'étend de celle proposée dans [86] et caractérise une classe plus large de systèmes observables pour toute entrée. En effet le système considéré est composé de plusieurs sous-systèmes, chacun de ses sous-systèmes étant triangulaire par rapport à ses propres variables mais le couplage entre deux systèmes

n'est pas forcément triangulaire. Nous proposons de rappeler la classe de systèmes ainsi que l'observateur associé proposé dans [64], ensuite, nous présenterons l'extension de cette classe pour les systèmes à retards et nous détaillerons la synthèse de l'observateur proposé. Les observateurs proposés sont caractérisés par une simplicité de mise en oeuvre et garantissent une convergence exponentielle de l'erreur d'estimation.

3.2 Synthèse d'observateurs pour une classe de SNL à retards

Dans cette partie, nous allons considérer la synthèse d'observateur à grand gain pour une classe de systèmes non linéaires à retards.

3.2.1 Préliminaires et formulation du problème

Avant de présenter la classe des systèmes non linéaires considérée, nous proposons d'introduire certaines notations et de rappeler certains résultats que nous utiliserons tout au long de la synthèse.

3.2.1.1 TVM pour les fonctions vectorielles

Le théorème de la valeur moyenne peut s'énoncer comme suit dans le cas d'une fonction à plusieurs variables à valeurs dans \mathbb{R} .

Théorème 3.1. *Soit $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Soient \hat{x} et x deux vecteurs de \mathbb{R}^n . Alors, il existe $\theta_i \in [0, 1]$ tel que :*

$$\begin{aligned} f_i(\hat{x}) &= f_i(x) + f'_i(x + \theta_i(\hat{x} - x))(\hat{x} - x) \\ &= f_i(x) + (\nabla f_i(x + \theta_i(\hat{x} - x)))^T (\hat{x} - x) \\ &\triangleq f_i(x) + (\nabla f_i(\xi_i))^T (\hat{x} - x) \end{aligned} \tag{3.1}$$

où ∇f_i est le gradient de f_i et $\xi_i = x + \theta_i(\hat{x} - x)$.

Ce théorème s'étend dans le cas d'une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^n . En effet, soit $f =$

$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 . Alors, il existe $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\begin{aligned}
 f(\hat{x}) &= f(x) + f'(\xi_1, \dots, \xi_n)(\hat{x} - x) \\
 &= f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1, \dots, \xi_n)(\hat{x} - x)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

où $\frac{\partial f}{\partial x}$ est la jacobienne de f .

Plus précisément, nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \begin{pmatrix} (\nabla f_1(\xi_1))^T \\ \vdots \\ (\nabla f_n(\xi_n))^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\nabla f_1(x + \theta_1(\hat{x} - x)))^T \\ \vdots \\ (\nabla f_n(x + \theta_n(\hat{x} - x)))^T \end{pmatrix}$$

où $\xi_i = x + \theta_i(\hat{x} - x)$ avec $\theta_i \in [0, 1]$; $i = 1, \dots, n$.

Pour alléger les écritures, nous utiliserons dans la suite de ce mémoire la notation suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1, \dots, \xi_n) &= \begin{pmatrix} (\nabla f_1(\xi_1))^T \\ \vdots \\ (\nabla f_n^T(\xi_n))^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\nabla f_1(x + \theta_1(\hat{x} - x)))^T \\ \vdots \\ (\nabla f_n(x + \theta_n(\hat{x} - x)))^T \end{pmatrix} \\
 &\triangleq \begin{pmatrix} \nabla f_1^T \\ \vdots \\ \nabla f_n^T \end{pmatrix} (x + \Theta(\hat{x} - x)) \\
 &= \begin{pmatrix} \nabla f_1^T \\ \vdots \\ \nabla f_n^T \end{pmatrix} (\xi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

avec $\xi = x + \Theta(\hat{x} - x)$ et $\Theta = \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_n)$.

3.2.1.2 Equation Algébrique de Lyapunov

Considérons l'équation algébrique de Lyapunov suivante :

$$\theta S_\theta + A^T S_\theta + S_\theta A = C^T C \tag{3.4}$$

où A et C sont données respectivement par (2.29) et (2.30), l'inconnue est la matrice S_θ et enfin θ est un réel strictement positif. Il a été montré dans [39] que l'équation (3.4) admet une solution unique qui est Symétrique Définie Positive (SDP) et qui peut s'exprimer comme suit :

$$S_\theta = \frac{1}{\theta} \Delta_\theta S \Delta_\theta$$

où S est la solution de (3.4) pour $\theta = 1$ et Δ_θ est une matrice diagonale donnée par

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left(I_p, \frac{1}{\theta} I_p, \frac{1}{\theta^2} I_p, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}} I_p \right) \quad (3.5)$$

De même, on peut vérifier à partir de (3.4) pour $\theta = 1$, que chaque entrée $S(i, j)$ de la matrice S s'exprime comme suit :

$$S(i, j) = (-1)^{(i+j)} C_{i+j-2}^{j-1} I_p \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n$$

$$\text{où } C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

De même, on a :

$$S^{-1}C^T = [C_q^1 I_p, \dots, C_q^q]^T \quad (3.6)$$

Soit maintenant un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$. A partir de l'équation (3.4), pour $\theta = 1$, on a :

$$2x^T A S x = -x^T S x + x^T C^T C x \quad (3.7)$$

L'égalité (3.7) sera utilisée dans les démonstrations de différents résultats en considérant des fonctions de Lyapunov appropriées.

3.2.1.3 Quelques identités et inégalités

Considérons les matrices Δ_θ , A et C données respectivement par (3.5), (2.29) et (2.30). Un calcul direct permet d'établir les identités suivantes :

$$\begin{cases} \Delta_\theta A \Delta_\theta^{-1} &= \theta A \\ C \Delta_\theta &= C \end{cases} \quad (3.8)$$

Maintenant, soit $F(s(t))$ une matrice carrée triangulaire $n \times n$ où $s(t)$ est une fonction bornée à valeurs réelles. On suppose que chaque entrée $f_{ij}(s(t))$ de la matrice F , $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, n$ est uniformément bornée. Il existe donc une constante $L > 0$ telle que :

$$\|F(s(t))\| \leq \|F(s(t))\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (f_{ij}(s(t)))^2} \leq L \quad (3.9)$$

où $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_F$ désignent respectivement la norme euclidienne et la norme de Frobenius de (\cdot) .

Posons

$$Q(s(t)) = \Delta_\theta F(s(t)) \Delta_\theta^{-1} \quad (3.10)$$

Soit $q_{ij}(s(t))$ l'entrée de la matrice Q située à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne. Compte tenu de la structure triangulaire de F et du fait que Δ_θ est diagonale, il est clair que la matrice

Q est aussi triangulaire inférieure, c'est-à-dire $q_{ij} = 0$ pour $j > i$. Par ailleurs, à partir de (3.10), nous avons :

$$q_{ij}(s(t)) = \theta^{j-i} f_{ij}(s(t)) \text{ pour } j \leq i \quad (3.11)$$

A partir (3.9) et (3.11), on peut conclure

$$\forall \theta \geq 1 : \|Q(s(t))\| \leq L \quad (3.12)$$

Remarque 3.1. Soit $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \hat{x}^k, x^k \in \mathbb{R}^p, k = 1, \dots, q,$

$n = qp$, soit $\varphi : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (u, x) \mapsto \varphi(u, x)$, où U est un compact de \mathbb{R}^m , une fonction ayant une structure triangulaire par rapport à x et est globalement lipschitzienne par rapport à x uniformément en u . En posant $e = \hat{x} - x$ et $\bar{e} = \Delta_\theta e$, alors l'application du théorème de la valeur moyenne permet d'avoir les égalités et inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|\Delta_\theta(\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x))\| &= \left\| \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, \xi) e \right\| \\ &= \left\| \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, \xi) \Delta_\theta^{-1} \bar{e} \right\| \\ &\leq \left\| \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, \xi) \Delta_\theta^{-1} \right\| \|\bar{e}\| \\ &\leq L \|\bar{e}\| \end{aligned} \quad (3.13)$$

où $\xi \in \mathbb{R}^n$ et L est une constante positive qui ne dépend pas de θ pour $\theta \geq 1$.

L'utilisation du théorème de la valeur moyenne au niveau de la dynamique de l'erreur permet de transformer le problème d'estimation d'état en un problème de stabilité, ainsi, la stabilité exponentielle de l'erreur d'estimation implique la convergence exponentielle de l'observateur.

3.2.2 Synthèse de l'observateur en présence d'un seul retard

3.2.2.1 Formulation du problème

Considérons maintenant les systèmes à retards qui peuvent se mettre sous la forme triangulaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \varphi(u(t), u_\tau(t), x(t), x_\tau(t)) \\ y(t) &= Cx(t) = x^1(t) \\ x(s) &= \varphi(s) \forall s \in [-\tau^*, 0] \end{cases} \quad (3.14)$$

où l'état $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $x^k \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \dots, q$, $n = qp$, La sortie $y \in \mathbb{R}^p$, l'entrée

$u \in \mathbb{R}^s$. On désigne par $\tau(t)$ le retard variable connu et qui intervient au niveau de l'entrée

et des états du système. Les états retardés sont donnés par : $x_\tau = \begin{pmatrix} x_{\tau(t)}^1 \\ x_{\tau(t)}^2 \\ \vdots \\ x_{\tau(t)}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$;

$x_\tau^k \in \mathbb{R}^p$. $u_\tau(t)$ représente l'ensemble des entrées retardées. Notons que le retard est supposé borné : $0 \leq \tau(t) \leq \tau^*$ et qu'il intervient dans la partie non linéaire de façon triangulaire, les fonctions non linéaires $\varphi^k(u(t), u_\tau(t), x(t), x_\tau(t), \cdot)$, $k = 1, \dots, q$, possèdent ainsi une structure triangulaire respectivement par rapport à x et x_τ , c.à.d.

$$\varphi^k(u(t), u_\tau(t), x(t), x_\tau(t), \cdot) = \varphi^k(u(t), u_\tau(t), x^1(t), \dots, x^k(t), x_\tau^1(t), \dots, x_\tau^k(t))$$

La matrice A de dimension $n \times n$ est la matrice anti-décalage par blocs :

$$A = \begin{bmatrix} 0_p & I_p & 0_p & 0_p \\ \vdots & & I_p & 0_p \\ 0_p & & \ddots & I_p \\ 0_p & \dots & 0_p & 0_p \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

La matrice d'observation C a la structure particulière suivante :

$$C = [I_p \ 0_p \ \dots \ 0_p] \quad (3.16)$$

Remarque 3.2. Le système (3.14) peut être interprété comme une généralisation aux systèmes à retards de la forme canonique (2.28) caractérisant une classe de systèmes non linéaires uniformément observable (2.37). En effet, il suffit de considérer le système (2.37) avec un retard qui intervient sur les entrées et les états de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(u, u_\tau, x, x_\tau) \\ y = f^0(u, x^1) \end{cases} \quad (3.17)$$

Où la fonction f possède la structure suivante :

$$f(u, u_\tau, x, x_\tau) = \begin{pmatrix} f^1(u, u_\tau, x^1, x^2, x_\tau^1) \\ f^2(u, u_\tau, x^1, x^2, x^3, x_\tau^1, x_\tau^2) \\ \vdots \\ f^{q-1}(u, u_\tau, x, x_\tau^1, \dots, x_\tau^{q-1}) \\ f^q(u, u_\tau, x, x_\tau) \end{pmatrix};$$

Les fonctions f^k , $k = 1, \dots, q$ vérifient l'hypothèse (H2.3).

Dans ce qui suit, nous proposons une approche de type grand gain permettant l'estimation de l'état du système (3.14). Nous développons une procédure systématique pour la synthèse du gain de l'observateur.

3.2.2.2 Procédure de synthèse de l'observateur

Comme dans la plupart des contributions relatives à la synthèse d'observateurs à grand gain, nous adoptons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 3.1. La fonction $\varphi(u, u_\tau, x, x_\tau)$ est globalement Lipschitzienne par rapport à x, x_τ , uniformément en u

Nous admettons aussi l'hypothèse suivante qui porte sur le retard :

Hypothèse 3.2. Le retard $\tau(t)$ est borné et il vérifie la contrainte (2.6) sur la dérivée, i.e :

$$\exists \tau^* \in \mathbb{R}^+, \quad \forall t : 0 \leq \tau(t) \leq \tau^*$$

$$\exists \varepsilon > 0; \quad \dot{\tau}(t) \leq 1 - \varepsilon \quad (3.18)$$

L'observateur à grand gain que nous proposons est décrit par le système dynamique suivant :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(u(t), u_\tau(t), \hat{x}(t), \hat{x}_\tau(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C (\hat{x}(t) - x(t)) \quad (3.19)$$

où $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{x}^k \in \mathbb{R}^p$ est l'estimé de l'état x , $k = 1, \dots, q$, $n = qp$; u, y et x

sont respectivement l'entrée, la sortie et la trajectoire inconnue du système (3.14), \hat{x}_τ est l'estimation de l'état retardé, Δ_θ et C sont respectivement données par (3.5) et (3.16) et finalement $\theta > 0$ est un paramètre de synthèse.

Nous énonçons maintenant le résultat suivant :

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses (H3.1) et (H3.2), les trajectoires des systèmes (3.19) et (3.14) vérifient la propriété suivante :*

$$\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0; \exists \theta_0 > 0; \forall \theta > \theta_0; \exists c(\theta) \text{ tels que} \quad (3.20)$$

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \theta^{q-1} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} e^{-c(\theta)t} \max_{s \in [-\tau^*, 0]} \|\hat{x}(s) - x(s)\|$$

avec $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} c(\theta) = +\infty$

i.e. le système (3.19) est un observateur, dont la convergence est exponentielle, du système (3.14).

Nous allons, dans ce qui suit, détailler la preuve de convergence de l'observateur proposé.

3.2.2.3 Analyse de la convergence

On définit le vecteur d'erreur d'observation $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$. d'après (3.14) et (3.19), la dynamique de l'erreur est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + \varphi(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau) - \varphi(u, u_\tau, x, x_\tau) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \tilde{x} \quad (3.21)$$

On introduit le changement de variable suivant : $\bar{x} = \Delta_\theta \tilde{x}$ avec Δ_θ définie dans (3.5) ; En utilisant les identités (3.67), on obtient :

$$\dot{\bar{x}} = \theta A \bar{x} + \Delta_\theta (\varphi(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau) - \varphi(u, u_\tau, x, x_\tau)) - \theta S^{-1} C^T C \bar{x} \quad (3.22)$$

En appliquant le théorème de la valeur moyenne (3.3), il existe $\xi_x, \xi_{x_\tau} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tels que l'équation (3.22) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \theta A \bar{x} + \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, u_\tau, \xi_x, x_\tau) \tilde{x} + \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}(u, u_\tau, \hat{x}, \xi_{x_\tau}) \tilde{x}_\tau - \theta S^{-1} C^T C \bar{x} \\ &= \theta A \bar{x} + \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, u_\tau, \xi_x, x_\tau) \Delta_\theta^{-1} \bar{x} + \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}(u, u_\tau, \hat{x}, \xi_{x_\tau}) \Delta_\theta^{-1} \bar{x}_\tau - \theta S^{-1} C^T C \bar{x} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Afin d'étudier la convergence de l'erreur d'estimation, on considère la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V(\bar{x}) = \bar{x}^T S \bar{x} + \theta^{-\frac{t}{2\tau^*}} \int_{t-\tau}^t \theta^{\frac{s}{2\tau^*}} \bar{x}^T(s) \bar{x}(s) ds \quad (3.24)$$

La dérivée de V le long des trajectoires de (3.23) a pour expression :

$$\dot{V} = 2\bar{x}^T S \dot{\bar{x}} - \frac{\ln \theta}{2\tau^*} (V - \bar{x}^T S \bar{x}) + \theta^{-\frac{t}{2\tau^*}} \left(\theta^{\frac{t}{2\tau^*}} \bar{x}^T \bar{x} - (1 - \dot{\tau}) \theta^{\frac{t-\tau}{2\tau^*}} \bar{x}_\tau^T \bar{x}_\tau \right) \quad (3.25)$$

En remplaçant la dynamique de \bar{x} par son expression (3.23) il vient :

$$\begin{aligned} \dot{V} + \frac{\ln \theta}{2\tau^*} V &= 2\theta \bar{x}^T S A \bar{x} + 2\bar{x}^T S \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, u_\tau, \xi_x, x_\tau) \Delta_\theta^{-1} \bar{x} \\ &\quad + 2\bar{x}^T S \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}(u, u_\tau, \hat{x}, \xi_{x_\tau}) \Delta_\theta^{-1} \bar{x}_\tau - 2\theta \bar{x}^T C^T C \bar{x} \\ &\quad + \frac{\ln \theta}{2\tau^*} \bar{x}^T S \bar{x} + \bar{x}^T \bar{x} - \frac{1 - \dot{\tau}}{\sqrt{\theta^{\tau/\tau^*}}} \bar{x}_\tau^T \bar{x}_\tau \end{aligned} \quad (3.26)$$

A partir de l'hypothèse (H3.2), on peut déduire la majoration suivante :

$$\frac{1 - \dot{\tau}}{\sqrt{\theta^{\tau/\tau^*}}} \geq \frac{1}{\sqrt{\theta}} \quad \forall \theta \geq 1 \quad (3.27)$$

En utilisant cette inégalité avec (3.4), on obtient pour $\theta \geq 1$:

$$\begin{aligned} \dot{V} + \frac{\ln \theta}{2\tau^*} V &\leq -\theta \bar{x}^T S \bar{x} - \theta \bar{x}^T C^T C \bar{x} + \frac{\ln \theta}{2\tau^*} \bar{x}^T S \bar{x} + \bar{x}^T \bar{x} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta}} \bar{x}_\tau^T \bar{x}_\tau \\ &\quad + 2\bar{x}^T S \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, u_\tau, \xi_x, x_\tau) \Delta_\theta^{-1} \bar{x} + 2\bar{x}^T S \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}(u, u_\tau, \hat{x}, \xi_{x_\tau}) \Delta_\theta^{-1} \bar{x}_\tau \end{aligned} \quad (3.28)$$

D'après la structure triangulaire de la fonction φ , les matrices jacobiennes $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\cdot)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}(\cdot)$ sont aussi des matrices triangulaires inférieures. et d'après la définition (3.5) de la matrice Δ_θ , si $\theta > 1$, sachant que φ est lipschitzienne par rapport à x et x_τ , il existe une constante k_1 , indépendante de θ , telle que :

$$\begin{aligned} \left\| \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, u_\tau, \xi_x, x_\tau) \Delta_\theta^{-1} \right\| &\leq k_1 \\ \left\| \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}(u, u_\tau, \hat{x}, \xi_{x_\tau}) \Delta_\theta^{-1} \right\| &\leq k_1 \end{aligned} \quad (3.29)$$

En remplaçant (3.29) dans (3.28), on obtient :

$$\dot{V} + \frac{\ln \theta}{2\tau^*} V \leq -(\theta - c_1 - \frac{\ln \theta}{2\tau^*}) \bar{x}^T S \bar{x} + c_2 \|\bar{x}\| \|\bar{x}_\tau\| - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta}} \bar{x}_\tau^T \bar{x}_\tau \quad (3.30)$$

Avec c_1 et c_2 définis par :

$$c_1 = \frac{1}{\lambda_m(S)} (2k_1 \|S\| + 1) \text{ et } c_2 = 2k_1 \|S\|$$

et $\lambda_m(S)$ désigne la valeur propre minimale de la matrice carrée S. On choisit alors le paramètre θ de telle sorte que :

$$k(\theta) \triangleq \theta - c_1 - \frac{\ln \theta}{2\tau^*} > 0 \quad (3.31)$$

Notations 3.1. Pour alléger les formules, on introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \bar{x}^T S \bar{x}, \quad V_2 = \bar{x}_\tau^T \bar{x}_\tau, \\
 V_1^* &= k(\theta) V_1, \quad V_2^* = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta}} V_2, \\
 V^* &= V_1^* + V_2^*, \\
 c_3 &= \frac{c_2}{\sqrt{\lambda_m(S)}}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

On peut alors réécrire l'inégalité (3.30) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{V} + \frac{\ln \theta}{2\tau^*} V &\leq -k(\theta) V_1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta}} V_2 + c_3 \sqrt{V_1} \sqrt{V_2} \\
 &\leq -V_1^* - V_2^* + c_3 \sqrt{\frac{\theta^{1/2}}{\varepsilon k(\theta)}} \sqrt{V_1^*} \sqrt{V_2^*} \\
 &\leq - \left(1 - \frac{c_3}{2} \sqrt{\frac{\theta^{1/2}}{\varepsilon k(\theta)}} \right) V^*
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Pour montrer le résultat (3.20), on choisit θ_0 tel que $1 - \frac{c_3}{2} \sqrt{\frac{\theta_0^{1/2}}{\varepsilon k(\theta)}} > 0$. Ainsi, pour tout $\theta > \theta_0$, on obtient :

$$\dot{V} + \frac{\ln \theta}{2\tau^*} V \leq 0 \tag{3.34}$$

Si on pose $c(\theta) = \frac{\ln \theta}{4\tau^*}$, l'inégalité (3.34) devient :

$$\dot{V} \leq e^{-2c(\theta)t} \max_{s \in [-\tau^*, 0]} V(\bar{x}(s)) \tag{3.35}$$

On déduit :

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} e^{-c(\theta)t} \max_{s \in [-\tau^*, 0]} \bar{x}(s) \tag{3.36}$$

Avec

$$\alpha_1 = \lambda_M(S) \text{ et } \alpha_2 = \lambda_m(S)$$

et $\lambda_M(S)$ désigne la valeur propre maximale de la matrice carrée S .

Or pour $\theta \geq 1$ on a

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \|x(t)\| \leq \theta^{q-1} \|\bar{x}(t)\| \tag{3.37}$$

D'où, en revenant aux variables originales :

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \theta^{q-1} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} e^{-c(\theta)t} \max_{s \in [-\tau^*, 0]} \tilde{x}(s) \tag{3.38}$$

Ainsi, le théorème 3.2 est vérifié, et $\hat{x}(t)$ converge exponentiellement vers $x(t)$. Notons tout de même que la convergence est proportionnelle à $\ln(\theta)$ contrairement aux observateurs proposés en absence de retards [39, 37] où la vitesse de convergence décroît proportionnellement par rapport au paramètre constant θ . Cette décroissance est en quelque sorte le prix à payer pour compenser la présence du retard dans la dynamique.

3.2.3 Généralisation aux systèmes comportant plusieurs retards

Les résultats précédents peuvent être généralisés avec des systèmes comportant plusieurs retards, la condition à préserver est la structure triangulaire des nonlinéarités par rapport aux différents états retardés. En effet, considérons m retards différents et connus. Le système considéré s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \varphi(u(t), u_{\tau_1}(t), \dots, u_{\tau_m}(t), x(t), x_{\tau_1}(t), \dots, x_{\tau_m}(t)) \\ y(t) &= Cx(t) = x^1(t) \\ x(s) &= \varphi(s) \quad \forall s \in [-\tau^*, 0] \end{cases} \quad (3.39)$$

où l'état $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $x^k \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \dots, q$, $n = qp$, les états retardés sont

donnés par : $x_{\tau_i} = \begin{pmatrix} x_{\tau_i}^1 \\ x_{\tau_i}^2 \\ \vdots \\ x_{\tau_i}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$; $x_{\tau_i}^k \in \mathbb{R}^p$; La sortie $y \in \mathbb{R}^p$; l'entrée $u \in \mathbb{R}^s$.

On désigne par $u_{\tau_i}(t)$ et $x_{\tau_i}(t)$ respectivement les entrées et les états retardés, c.à.d. $u_{\tau_i}(t) = u(t - \tau_i)$ et $x_{\tau_i}(t) = x(t - \tau_i)$. Les retards $\tau_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ sont des fonctions connues et variables dans le temps qui vérifient : $0 \leq \tau_1(t) \leq \dots \leq \tau_m(t) \leq \tau^*$. Les fonctions non linéaires $\varphi^k(u(t), u_{\tau_1}(t), \dots, u_{\tau_m}(t), x(t), x_{\tau_1}(t), \dots, x_{\tau_m}(t))$, $k = 1, \dots, q$, possèdent une structure triangulaire respectivement par rapport à $x, x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_m}$, c.à.d.

$$\begin{aligned} \varphi^k(u(t), u_{\tau_1}(t), \dots, u_{\tau_m}(t), x(t), x_{\tau_1}(t), \dots, x_{\tau_m}(t)) = \\ \varphi^k(u(t), u_{\tau_1}(t), \dots, u_{\tau_m}(t), x^1(t), \dots, x^k(t), x_{\tau_1}^1(t), \dots, x_{\tau_1}^k(t), \dots, x_{\tau_m}^1(t), \dots, x_{\tau_m}^k(t)) \end{aligned}$$

Les matrices A et C sont respectivement données par (3.15) et (3.16).

3.2.3.1 Synthèse de l'observateur

On adopte des hypothèses similaires à celles vues dans le cas d'un seul retard, en l'occurrence :

Hypothèse 3.3. Les retards sont supposés bornés, i.e. $\exists \tau^* \in \mathbb{R}^+$, tq :

$$0 \leq \tau_i(t) \leq \tau^* \quad \forall i = 1 \dots q$$

De plus la dérivée par rapport au temps du retard vérifie l'hypothèse suivante :

$$\exists \varepsilon > 0; \forall i \in \{1, \dots, q\} : \sup_{t \geq 0} \dot{\tau}_i(t) \leq 1 - \varepsilon \quad (3.40)$$

On peut alors généraliser l'observateur (3.19) de la manière suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(u(t), u_{\tau_1}(t), \dots, u_{\tau_m}(t), \hat{x}(t), \hat{x}_{\tau_1}(t), \dots, \hat{x}_{\tau_m}(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C (\hat{x}(t) - x(t)) \quad (3.41)$$

où $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{x}^k \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \dots, q$, $n = qp$; u , y et x sont respectivement

l'entrée, la sortie et la trajectoire inconnue du système (3.39); S , C et Δ_θ sont respectivement données par (3.4), (3.16) et (3.5) et finalement $\theta > 0$ est un paramètre de synthèse.

On étend alors le résultat de la partie précédente :

Théorème 3.3. Sous les hypothèses (H3.1) et (H3.3), les trajectoires des systèmes (3.41) et (3.39) vérifient la propriété suivante :

$$\begin{aligned} & \exists \alpha_1, \alpha_2 > 0; \exists \theta_0 > 0; \forall \theta > \theta_0; \exists c(\theta) \text{ tels que} \\ & \|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \theta^{q-1} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} e^{-c(\theta)t} \max_{s \in [-\tau^*, 0]} \|\hat{x}(s) - x(s)\| \end{aligned} \quad (3.42)$$

avec $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} c(\theta) = +\infty$

La preuve de ce théorème est détaillée dans ce qui suit.

3.2.3.2 Analyse de la convergence

Le début de la démonstration est similaire à celle du théorème précédent, on définit l'erreur d'observation $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$, puis $\bar{x} = \Delta_\theta \tilde{x}$ et on arrive à la dynamique de $\bar{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \theta A \bar{x} + \Delta_\theta (\varphi(u(t), u_{\tau_1}(t), \dots, u_{\tau_m}(t), \hat{x}(t), \hat{x}_{\tau_1}(t), \dots, \hat{x}_{\tau_m}(t)) \\ & \quad - \varphi(u(t), u_{\tau_1}(t), \dots, u_{\tau_m}(t), x(t), x_{\tau_1}(t), \dots, x_{\tau_m}(t))) - \theta S^{-1} C^T C \bar{x} \end{aligned} \quad (3.43)$$

On introduit la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii :

$$V(\bar{x}) = \bar{x}^T S \bar{x} + \theta^{-\frac{t}{2\tau^*}} \sum_{i=1}^m \int_{t-\tau_i}^t \theta^{\frac{s}{2\tau^*}} \bar{x}^T(s) \bar{x}(s) ds \quad (3.44)$$

La dérivée de V le long des trajectoires de (3.43) a pour expression :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &= 2\bar{x}^T S \dot{\bar{x}} - \theta^{-\frac{t}{2\tau^*}} \sum_{i=1}^m \frac{\ln \theta}{2\tau^*} \int_{t-\tau_i}^t \theta^{\frac{s}{2\tau^*}} \bar{x}^T(s) \bar{x}(s) ds \\ &+ \sum_{i=1}^m \theta^{-\frac{t}{2\tau^*}} \theta^{\frac{t}{2\tau^*}} \bar{x}^T S \bar{x} - \sum_{i=1}^m \theta^{-\frac{t}{2\tau^*}} \theta^{\frac{t-\tau_i}{2\tau^*}} (1 - \dot{\tau}_i) \bar{x}_{\tau_i}^T \bar{x}_{\tau_i} \end{aligned} \quad (3.45)$$

En procédant comme au paragraphe précédent, on obtient :

$$\dot{V} \leq 2\bar{x}^T S \dot{\bar{x}} - \frac{\ln \theta}{2\tau^*} (V - \bar{x}^T S \bar{x}) + m \bar{x}^T \bar{x} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta}} \sum_{i=1}^m \bar{x}_{\tau_i}^T \bar{x}_{\tau_i} \quad (3.46)$$

Compte tenu de la structure triangulaire de φ et de l'hypothèse (H3.1), on peut montrer par le théorème de la valeur moyenne (3.3) que :

$$\begin{aligned} 2\bar{x}^T S \Delta (\varphi(u, u_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_q}, \hat{x}, \hat{x}_{\tau_1}, \dots, \hat{x}_{\tau_m}) - \varphi(u, u_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_q}, x, x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_m})) \\ \leq k_1 \bar{x}^T S \bar{x} + k_2 \sum_{i=1}^m \bar{x}_{\tau_i}^T \bar{x}_{\tau_i} \end{aligned} \quad (3.47)$$

où $k_1, k_2 > 0$ sont des constantes qui ne dépendent pas de θ .

Combinant (3.46), (3.43) et (3.47), il vient :

$$\begin{aligned} \dot{V} + \frac{\ln \theta}{2\tau_{max}} V &\leq 2\theta \bar{x}^T S A \bar{x} + k_1 \bar{x}^T S \bar{x} + k_2 \sum_{i=1}^q \bar{x}_{\tau_i}^T \bar{x}_{\tau_i} - 2\theta \bar{x}^T C^T C \bar{x} \\ &+ \frac{\ln \theta}{2\tau_{max}} \bar{x}^T S \bar{x} + m \bar{x}^T \bar{x} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta}} \sum_{i=1}^q \bar{x}_{\tau_i}^T \bar{x}_{\tau_i} \end{aligned} \quad (3.48)$$

et d'après (3.4) :

$$\begin{aligned} \dot{V} + \frac{\ln \theta}{2\tau_{max}} V &\leq -\theta \bar{x}^T S \bar{x} - \theta \bar{x}^T C^T C \bar{x} + \frac{\ln \theta}{2\tau_{max}} \bar{x}^T S \bar{x} + k_1 \bar{x}^T S \bar{x} \\ &+ k_2 \sum_{i=1}^q \bar{x}_{\tau_i}^T \bar{x}_{\tau_i} + \frac{m}{\lambda_m(S)} \bar{x}^T S \bar{x} - \frac{1 - \dot{\tau}_i}{\sqrt{\theta}} \bar{x}_{\tau_i}^T \bar{x}_{\tau_i} \\ &\leq -\left(\theta - \frac{\ln \theta}{2\tau_{max}} - c_1\right) \bar{x}^T S \bar{x} + k_2 \sum_{i=1}^q \bar{x}_{\tau_i}^T \bar{x}_{\tau_i} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta}} \sum_{i=1}^q \bar{x}_{\tau_i}^T \bar{x}_{\tau_i} \end{aligned} \quad (3.49)$$

où $c_1 = k_1 + \frac{m}{\lambda_m(S)}$.

On choisit maintenant θ de telle sorte que

$$k(\theta) = \theta - \frac{\ln \theta}{2\tau_{max}} - c_1 > 0 \quad (3.50)$$

On introduit alors les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned} \bar{x}^* &= \bar{x} \sqrt{k(\theta)} \\ \bar{x}_{\tau_i}^* &= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\theta^{\frac{1}{4}}} \bar{x}_{\tau_i} \\ V^* &= \bar{x}^{*T} S \bar{x}^* + \sum_{i=1}^q \bar{x}_{\tau_i}^{*T} \bar{x}_{\tau_i}^* \end{aligned} \quad (3.51)$$

L'équation (3.49) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V} + \frac{\ln \theta}{2\tau_{max}} V &\leq -V^* + \frac{k_2 \theta^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\varepsilon k(\theta)}} \sum_{i=1}^q \bar{x}_{\tau_i}^{*T} \bar{x}_{\tau_i}^* \\ &\leq -V^* + \frac{k_2 \theta^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\varepsilon k(\theta)}} \left(m \bar{x}^{*T} \bar{x}^* + \sum_{i=1}^q \bar{x}_{\tau_i}^{*T} \bar{x}_{\tau_i}^* \right) \\ &\leq -V^* \\ &+ \frac{k_2 \theta^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\varepsilon k(\theta)}} \left(\frac{m}{\lambda_m(S)} \bar{x}^{*T} S \bar{x}^* + \sum_{i=1}^q \bar{x}_{\tau_i}^{*T} \bar{x}_{\tau_i}^* \right) \\ &\leq -\left(1 - \frac{ck_2 \theta^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\varepsilon k(\theta)}}\right) V^* \end{aligned}$$

où $c = \max(1, \frac{m}{\lambda_m(S)})$. Il suffit maintenant de choisir θ de sorte que $1 - \frac{ck_2 \theta^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\varepsilon k(\theta)}} > 0$.

Ceci termine la démonstration.

3.3 Exemple d'illustration

Dans ce paragraphe, nous allons illustrer les performances de l'observateur proposé (3.41) à travers un exemple de simulation appartenant à la classe de systèmes (3.39). L'exemple choisi satisfait les hypothèses considérés.

On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1(t - \tau_1)^3 - u(t - \tau_2(t))x_1(t - \tau_2(t)) \\ \dot{x}_2 &= -x_2(t - \tau_1) - \frac{x_2}{1 + x_2(t - \tau_1)^2} + \sin(x_2(t - \tau_2(t))) \\ y &= x_1 \end{cases} \quad (3.52)$$

où $x = [x_1 \ x_2]^T \in \mathbb{R}^2$, l'entrée choisie lors de la simulation est donnée par : $u(t) = \sin(0.1t)$. La dynamique du système (3.52) fait intervenir deux retards connus τ_1 et τ_2 ,

le premier a été choisi constant $\tau_1 = 1.5$ et le second est un retard variable qui vérifie l'hypothèse (H3.3) tels que : $\tau_2(t) = 1 - 0.2 \sin(t)$.

Un observateur de type (3.41) a été synthétisé pour l'estimation de trajectoires de ce système. Les équations de cet observateur s'écrivent dans les coordonnées d'origine comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 - \hat{x}_1(t - \tau_1)^3 - u(t - \tau_2(t))\hat{x}_1(t - \tau_2(t)) - 2\theta(\hat{x}_1 - x_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\hat{x}_2(t - \tau_1) - \frac{\hat{x}_2}{1 + \hat{x}_2(t - \tau_1)^2} + \sin(\hat{x}_2(t - \tau_2(t))) - \theta^2(\hat{x}_1 - x_1) \end{cases}$$

Les performances de l'observateur ont été testées en simulation dans l'environnement Matlab-Simulink. Pour se rapprocher du cas réel, un bruit blanc de moyenne nulle et d'écart type 10^{-2} a été ajouté à la sortie x_1 .

Les conditions initiales utilisées par le modèle et l'observateur sont les suivantes :

$$\begin{cases} x_1(t) = \hat{x}_1(t) = 0 \text{ for } t \in [-\tau, 0[\\ x_2(t) = \sin(t); \hat{x}_2(t) = 0 \text{ for } t \in [-\tau, 0[\\ x_1(0) = 0; \hat{x}_1(0) = 0.2; x_2(0) = 0.5; \hat{x}_2(0) = 1; \end{cases}$$

Le gain de l'observateur θ est égale à 15.

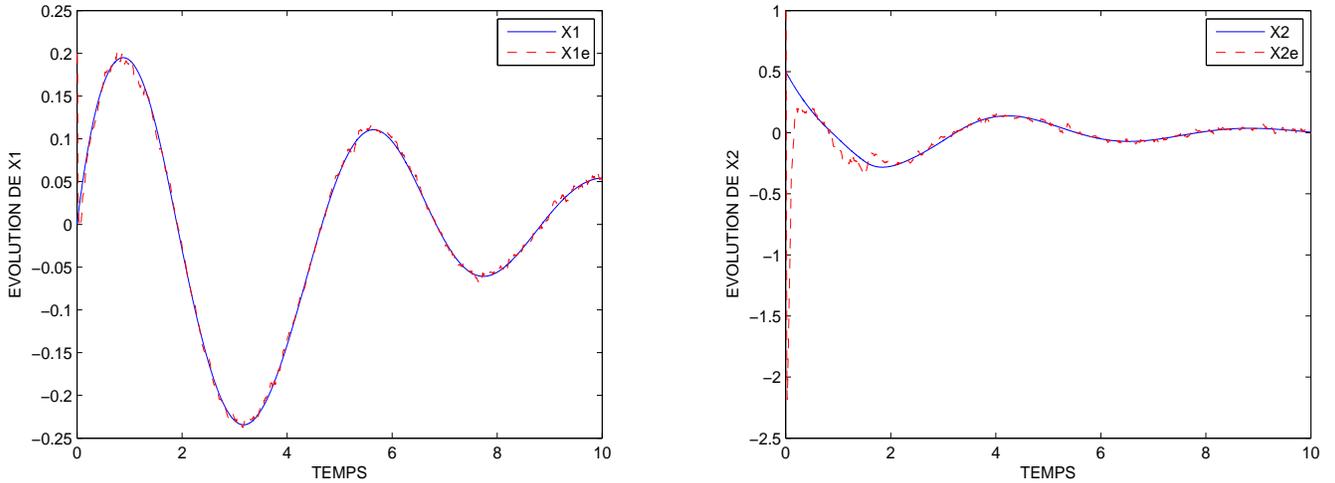


FIG. 3.1 – Comparaison des états estimés et simulés x_1 et x_2

Les résultats obtenus sont représentés sur la figure (3.1) où les estimations de x_1 et x_2 sont comparés avec leurs vraies valeurs (issues de la simulation du modèle). On remarque que ces résultats sont satisfaisants aussi bien en terme de rapidité de convergence qu'en terme de comportement vis-à-vis des bruits de mesures.

3.4 Nouvelle forme canonique pour les systèmes UO

3.4.1 Introduction

Dans cette section, nous proposons l'extension pour les systèmes à retards, d'une nouvelle forme canonique pour les systèmes non linéaires MIMO uniformément observable. La nouvelle forme canonique, qui inclut la forme observable (2.28) présentée au chapitre précédent, présente une classe assez générale de systèmes non linéaires satisfaisant certaines propriétés structurelles [65]. La classe considérée est un ensemble de sous systèmes non linéaires couplés, chacun de ses sous systèmes étant triangulaire par rapport à ses propres variables mais le couplage entre deux systèmes n'est pas forcément triangulaire mais satisfait à des contraintes spécifiques garantissant l'uniforme observabilité du système.

Nous proposons de rappeler la classe de systèmes ainsi que l'observateur associé proposé dans [65], ensuite nous présenterons l'extension de cette forme canonique pour les systèmes à retards et nous détaillerons la synthèse de l'observateur.

3.4.2 Forme canonique observable

Dans [65], les auteurs ont considéré la classe suivante des systèmes MIMO :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(u, x) \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.53)$$

où

- x est l'état du système et il a la structure suivante

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{avec} \quad x^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_{\lambda_k}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k}$$

$$\text{où } x_i^k = \begin{pmatrix} x_{i,1}^k \\ \vdots \\ x_{i,p_k}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p_k} \text{ avec } x_{i,j}^k \in \mathbb{R} \text{ pour } k = 1, \dots, q, i = 1, \dots, \lambda_k, j = 1, \dots, p_k$$

$$\text{avec } \sum_{k=1}^q n_k = \sum_{k=1}^q p_k \lambda_k = n; p_k \geq 1 \text{ et } \lambda_k \geq 2.$$

- u et y représentent respectivement l'entrée et la sortie du système. La sortie y a la

structure suivante

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

où $y_k \in \mathbb{R}^{p_k}$ pour $k = 1, \dots, q$, c'est-à-dire que nous avons

$$\sum_{k=1}^q p_k = p$$

- Les matrices A et C sont données par

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_q \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad A_k = \begin{bmatrix} 0 & I_{p_k} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & I_{p_k} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

et

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_q \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad C_k = \begin{bmatrix} I_{p_k} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

- $\varphi(u, x)$ est une fonction non linéaire :

$$\varphi(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u, x) \\ \varphi^2(u, x) \\ \vdots \\ \varphi^q(u, x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{avec} \quad \varphi^k(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1^k(u, x) \\ \varphi_2^k(u, x) \\ \vdots \\ \varphi_{\lambda_k}^k(u, x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k}$$

où chaque fonction $\varphi_i^k(u, x) \in \mathbb{R}^{p_k}$ est dérivable par rapport à x et possède la structure suivante.

- pour $1 \leq i \leq \lambda_k - 1$:

$$\varphi_i^k(u, x) = \varphi_i^k(u, x^1, x^2, \dots, x^{k-1}, x_1^k, x_2^k, \dots, x_i^k, x_1^{k+1}, x_1^{k+2}, \dots, x_1^q) \quad (3.56)$$

- pour $i = \lambda_k$:

$$\varphi_{\lambda_k}^k(u, x) = \varphi_{\lambda_k}^k(u, x^1, x^2, \dots, x^q) \quad (3.57)$$

Cette nouvelle forme permet d'étendre les résultats existants dans la littérature concernant la synthèse d'observateurs de type grand gain en proposant une forme canonique caractérisant une large classe de systèmes observables pour toute entrée.

La structure du système (3.53) étend celle proposée dans [86] et exhibe deux nouveautés par rapport aux contributions existantes :

- (i) La sortie de chaque bloc peut consister en un vecteur et n'est pas nécessairement scalaire
- (ii) La dernière équation différentielle de chaque bloc peut dépendre de tout l'état du système et la structure du système global n'est donc pas triangulaire

Notons enfin, que le système (3.53) inclut la classe de systèmes représentée par la première forme canonique (2.28) puisque cette dernière se déduit de (3.53) en prenant $q = 1$, c'est-à-dire en considérant toutes les sorties au sein d'un même bloc.

Avant de passer à la synthèse de l'observateur, nous allons introduire quelques variables qui seront utilisées par la suite, nous insistons en particulier sur le lemme technique qui sera utile pour la démonstration de la convergence de l'erreur d'observation.

3.4.2.1 Quelques définitions et notations

Pour $k = 1, \dots, q$, on définit la matrice diagonale $\Delta_k(\theta)$ comme suit

$$\Delta_k(\theta) = \text{diag} \left(I_{p_k}, \frac{1}{\theta^{\delta_k}} I_{p_k}, \dots, \frac{1}{\theta^{\delta_k(\lambda_k-1)}} I_{p_k} \right) \quad (3.58)$$

où $\theta > 0$ est un réel positif et les réels δ_k qui interviennent dans les puissances de θ sont donnés par :

$$\begin{cases} \delta_k &= \left(\prod_{i=k+1}^q (\lambda_i - 1) \right) \text{ pour } k = 1, \dots, q-1 \\ \delta_q &= 1 \end{cases} \quad (3.59)$$

Nous noterons que pour tout $k = 1, \dots, q-1$, nous avons

$$\delta_k = (\lambda_{k+1} - 1)\delta_{k+1} \quad (3.60)$$

Comme $\lambda_k \geq 2$, on a $(\lambda_{k+1} - 1) \geq 1$ et la suite des réels positifs δ_k est alors décroissante, c'est-à-dire

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_q = 1 \quad (3.61)$$

De manière similaire, nous définissons la suite des réels suivants pour $k = 1, \dots, q$ et $i = 1, \dots, \lambda_k$:

$$\sigma_i^k = \sigma_1^k + (i-1)\delta_k \text{ avec } \sigma_1^k = -(\lambda_k - \frac{1}{2})\delta_k + (\lambda_1 - \frac{1}{2})\delta_1 + (1 - \frac{1}{2^{k-1}}) \quad (3.62)$$

Nous pouvons vérifier que $\sigma_i^k \geq 0$ pour $k = 1, \dots, q$ et $i = 1, \dots, \lambda_k$. En effet, pour $k = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \sigma_i^1 &= \sigma_1^1 + (i - \frac{1}{2})\delta_1 \\ &= (i - \frac{1}{2})\delta_1 \\ &\geq 0 \text{ pour } i \geq 1 \text{ puisque } \delta_1 > 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

Pour $k \geq 2$, nous avons

$$\begin{aligned}
\sigma_i^k &= (\lambda_1 - \frac{1}{2})\delta_1 - (\lambda_k - \frac{1}{2})\delta_k + (1 - \frac{1}{2^{k-1}}) \\
&\geq (\lambda_1 - \frac{1}{2})\delta_1 - (\lambda_k + \frac{1}{2})\delta_k \\
&= (\lambda_1 - \frac{1}{2})\delta_1 - \frac{\delta_{k-1}}{2} - \frac{\delta_k}{2} \text{ conformément à (3.60)} \\
&\geq (\lambda_1 - \frac{1}{2})\delta_1 - \frac{\delta_1}{2} - \frac{\delta_1}{2} \text{ conformément à (3.61)} \\
&= (\lambda_1 - \frac{3}{2})\delta_1 \geq 0
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Comme pour les Δ_k , nous définissons pour $k = 1, \dots, q$, les matrices diagonales Λ_k comme suit :

$$\begin{aligned}
\Lambda_k(\theta) &= \theta^{-\sigma_1^k} \Delta_k(\theta) \\
&= \text{diag} \left(\frac{1}{\theta^{\sigma_1^k}} I_{p_k}, \frac{1}{\theta^{\sigma_2^k}} I_{p_k}, \dots, \frac{1}{\theta^{\sigma_{\lambda_k}^k}} I_{p_k} \right)
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Compte tenu des structures des matrices $\Lambda_k(\theta)$, $\Delta_k(\theta)$, A_k et C_k respectivement données par (3.65), (3.58), (3.54) et (3.55), nous avons les identités suivantes : Les identités suivantes peuvent être vérifiées par un simple calcul :

$$\begin{aligned}
&\bullet \Lambda_k(\theta) = \theta^{-\sigma_1^k} \Delta_k(\theta) \\
&\bullet \Lambda_k(\theta) A_k \Lambda_k^{-1}(\theta) = \theta^{\delta_k} A_k \\
&\bullet C_k \Lambda_k^{-1}(\theta) = \theta^{\sigma_1^k} C_k
\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\bullet C_k \Delta_k^{-1}(\theta) = C_k \tag{3.67}$$

Une autre matrice qui sera utilisée dans l'équation de l'observateur est la matrice S_k qui est l'unique solution de l'équation algébrique de Lyapunov suivante

$$S_k + A_k^T S_k + S_k A_k = C_k^T C_k \tag{3.68}$$

où A_k et C_k sont respectivement définies par (3.54) et (3.55). Il a été établi que S_k est symétrique définie positive et nous avons en particulier [39, 13]

$$S_k^{-1} C_k^T = (C_{\lambda_k}^1 I_{p_k}, \dots, C_{\lambda_k}^{\lambda_k} I_{p_k})^T \text{ où } C_{\lambda_k}^i = \frac{\lambda_k!}{i!(\lambda_k - i)!} \text{ pour } i = 1, \dots, \lambda_k \tag{3.69}$$

Dans la suite, nous noterons par λ_{min}^k et λ_{max}^k respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de S_k . Les variables λ_{min} et λ_{max} désigneront respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice diagonale par blocs, S , définie comme suit

$$S = \text{diag}(S_1, S_2, \dots, S_q) \tag{3.70}$$

Avant de clore ce paragraphe, nous allons énoncer et démontrer un lemme fort utile pour la démonstration du résultat principal. Ce lemme permet d'exhiber une suite de réels qui reflète dans un sens qui sera clarifié ultérieurement l'interconnexion entre les non linéarités des sous-systèmes du système (3.53).

Lemme 3.1. *Soit*

$$\chi_{l,j}^{k,i} = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial x_j^l}(u, x) \equiv 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.71)$$

pour $k, l = 1, \dots, q$, $i = 1, \dots, \lambda_k$ et $j = 2, \dots, \lambda_l$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tels que la suite des nombres réels σ_i^k définie par (3.62) vérifie la condition suivante :

$$\text{si } \chi_{l,j}^{k,i} = 1 \text{ alors } \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} \leq -\varepsilon \quad (3.72)$$

Preuve du lemme 3.1 : cette preuve se basera sur les deux faits suivants. Tout d'abord, compte tenu de la structure des non linéarités décrite par (3.81) et (3.83), si $\chi_{l,j}^{k,i} = 1$ pour $k, l \in \{1, \dots, q\}$ et $j \in \{2, \dots, \lambda_l\}$, alors nous sommes forcément dans l'une des trois situations suivantes :

- $k > l$ et i peut prendre toute valeur dans $\{1, \dots, \lambda_k\}$; ceci traduit la structure pseudo-triangulaire du système (3.53).
- $k = l$ et $i \in \{1, \dots, \lambda_k\}$ avec $i \geq j$; ceci traduit le fait que chaque sous-système est triangulaire par rapport à ses propres variables.
- $k < l$ et $i = \lambda_k$; ceci résulte du fait que la dernière équation de chaque sous-système peut dépendre des variables de tous les sous-systèmes.

Le deuxième fait résulte de l'équation (3.62) à partir de laquelle nous avons

$$\begin{aligned} \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2} &= \sigma_1^l - \sigma_1^k + (j - \frac{3}{2})\delta_l - (i - \frac{1}{2})\delta_k \\ &= (\lambda_k - \frac{1}{2})\delta_k - (\lambda_l - \frac{1}{2})\delta_l + (j - \frac{3}{2})\delta_l - (i - \frac{1}{2})\delta_k - (\frac{1}{2^{l-1}} - \frac{1}{2^{k-1}}) \\ &= (\lambda_k - i)\delta_k + (j - \lambda_l - 1)\delta_l - (\frac{1}{2^{l-1}} - \frac{1}{2^{k-1}}) \end{aligned} \quad (3.73)$$

Dans ce qui suit, nous allons démontrer la condition (3.72) en considérant les trois situations décrites précédemment et en partant de l'égalité (3.73).

- Le cas $k > l$ et i prend toute valeur dans $\{1, \dots, \lambda_k\}$. Notons tout d'abord que comme $k > l$, nous avons $k \geq 2$ et par conséquence l'égalité (3.73) devient

$$\begin{aligned} \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2} &\leq (\lambda_k - 1)\delta_k - \delta_l - (\frac{1}{2^{l-1}} - \frac{1}{2^{k-1}}) \\ &= \delta_{k-1} - \delta_l - (\frac{1}{2^{l-1}} - \frac{1}{2^{k-1}}) \end{aligned} \quad (3.74)$$

Maintenant, à partir de l'expression de δ_k (équation (3.59)) et comme $k - 1 \geq l$, on a

$$\delta_{k-1} - \delta_l \leq 0 \quad (3.75)$$

D'un autre côté, on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2^{l-1}} - \frac{1}{2^{k-1}}\right) &= \frac{1}{2^{k-1}} \left(\frac{1}{2^{l-k}} - 1\right) = \frac{1}{2^{k-1}} (2^{k-l} - 1) \\ &\geq \frac{1}{2^{k-1}} (2 - 1) \text{ pour } k \geq l + 1 \\ &= \frac{1}{2^{k-1}} \end{aligned} \quad (3.76)$$

En combinant les inégalités (3.74), (5.16) et (3.76), on obtient :

$$\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2} \leq -\frac{1}{2^{k-1}} \leq -\frac{1}{2^{q-1}} \quad (3.77)$$

- Le cas $k = l$ et $i \in \{1, \dots, \lambda_k\}$ avec $i \geq j$. L'égalité (3.73) devient

$$\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} = (j - i - 1)\delta_k \leq -\delta_k \leq -\delta_q \leq -\frac{1}{2^{q-1}}$$

- Le cas $k < l$ et $i = \lambda_k$. L'égalité (3.73) devient

$$\begin{aligned} \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2} &= (j - \lambda_l - 1)\delta_l - \left(\frac{1}{2^{l-1}} - \frac{1}{2^{k-1}}\right) \\ &\leq -\delta_l + \left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}}\right) \\ &\leq -\delta_l + \left(1 - \frac{1}{2^{q-1}}\right) \\ &= -\frac{1}{2^{q-1}} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Maintenant, il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{2^{q-1}}$. Ceci termine la preuve du lemme.

Remarque 3.3. *Le résultat du lemme (3.1) est très important pour la démonstration de la convergence de l'erreur d'observation relative à l'observateur proposé pour le système (3.59). En effet, le but ultime consiste à montrer, sous l'hypothèse classique portant sur le caractère globalement lipschitzien des non linéarités, que la norme de chaque entrée (matricielle de dimension $p_k \times p_l$) de la matrice $n_k \times n_l$ suivante : $\theta^{-\frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2}} \Lambda_k(\theta) \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^l}(u, x) \Lambda_l^{-1}(\theta)$, où Λ_k et Λ_l sont définies par (3.65), peut être rendue aussi petite que désirée pour des valeurs de θ relativement élevées ($\theta \geq 1$). Compte tenu des structures diagonales de Λ_k et Λ_l , il est facile de remarquer que l'entrée (en bloc) située à la i ème ligne et j ème colonne de cette matrice est soit zero (if $\chi_{l,j}^{k,i} = 0$), soit dépend de θ à travers un terme multiplicatif en $\theta^{-\sigma_i^k + \sigma_j^l - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2}}$. Le résultat du lemme 3.1 nous garantit alors le fait que chacun de ces termes peut être rendu aussi petit que désiré pour $\theta \geq 1$ puisque la puissance de θ est négative.*

3.4.2.2 Synthèse de l'observateur

Pour la synthèse de l'observateur, l'hypothèse suivante est adoptée :

Hypothèse 3.4. $\varphi(u, x)$ est une fonction globalement Lipschitzienne par rapport à x , localement uniformément en u .

L'observateur proposé pour le système (3.53) est décrit par le système dynamique suivant :

$$\dot{\hat{x}}^k = A_k \hat{x}^k + \varphi^k(u, \hat{x}) - \theta^{\delta_k} \Delta_k^{-1}(\theta) S_k^{-1} C_k^T (C_k e^k) \quad \text{pour } k = 1, \dots, q \quad (3.79)$$

où u et y désignent respectivement les entrées et sorties du système (3.53), $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de l'état estimé

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{avec} \quad \hat{x}^k = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^k \\ \hat{x}_2^k \\ \vdots \\ \hat{x}_{\lambda_k}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k} \quad \text{et} \quad \hat{x}_i^k = \begin{pmatrix} \hat{x}_{i,1}^k \\ \vdots \\ \hat{x}_{i,p_k}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p_k}$$

où $\hat{x}_{i,j}^k \in \mathbb{R}$ pour $k = 1, \dots, q, i = 1, \dots, \lambda_k, j = 1, \dots, p_k$ avec $\sum_{k=1}^q n_k = n$, $\hat{x}^k \in \mathbb{R}^{n_k}$ est le vecteur de l'état estimé modulo une injection de sortie

$$\hat{x}_i^k = \begin{cases} x_1^k & \text{pour } i = 1 \\ \hat{x}_i^k & \text{pour } i = 2, \dots, \lambda_k \end{cases}$$

$e^k \in \mathbb{R}^{n_k}$ est la i ème composante du vecteur d'erreur d'observation défini par

$$e^k = \hat{x}^k - x^k$$

$\Delta_k(\theta)$, δ_k et S_k sont donnés respectivement par (3.58), (3.59) et (3.68).

Le théorème suivant est donné dans [64] :

Théorème 3.4. *Supposons que le système (3.53) satisfait l'hypothèse (H3.4). Alors, $\forall M > 0; \exists \theta_0 > 0; \forall \theta > \theta_0; \exists \lambda_\theta > 0; \exists \mu_\theta > 0$ tel que pour $k \in \{1, \dots, q\}$*

$$\|\hat{x}^k(t) - x^k(t)\| \leq \lambda_\theta e^{-\mu_\theta t} \|\hat{x}(0) - x(0)\|$$

pour toute entrée admissible u telle que $\|u\|_\infty \leq M$. De plus, λ_θ est polynômial en θ et $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \mu_\theta = +\infty$. En d'autres termes, en considérant des entrées bornées, le système (3.79)

est un observateur exponentiel pour le système (3.53).

Nous proposons dans ce qui suit, d'étendre la classe proposée pour les systèmes à retards. et nous détaillerons la synthèse de l'observateur ainsi que l'analyse de la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation.

3.4.3 Extension pour les systèmes à retards

On considère la classe suivante des systèmes MIMO à retards :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(u(t), x(t), x_\tau(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.80)$$

$$\text{où l'état } x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, 0 \text{ avec } x^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_{\lambda_k}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k}, x_i^k \in \mathbb{R}^{p_k}, i = 1, \dots, \lambda_k,$$

$$k = 1, \dots, q, \sum_{k=1}^q n_k = n; \text{ la sortie du système } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \text{ avec } y_k \in \mathbb{R}^{p_k},$$

$$k = 1, \dots, q$$

et $\sum_{k=1}^q p_k = p$; Les matrices A et C sont données respectivement par (3.54) et (3.55).

On désigne par x_τ l'état retardé $x(t - \tau(t))$, le réel positif τ représente le retard variable connu.

L'état initial est donné par : $x(s) = \phi(s), \forall s \in [-\tau_M, 0]$, avec $\tau_M = \max(\tau) \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(u, x, x_\tau) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u, x, x_\tau) \\ \varphi^2(u, x, x_\tau) \\ \vdots \\ \varphi^q(u, x, x_\tau) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n; \varphi^k(u, x, x_\tau) = \begin{pmatrix} \varphi_1^k(u, x, x_\tau) \\ \varphi_2^k(u, x, x_\tau) \\ \vdots \\ \varphi_{\lambda_k}^k(u, x, x_\tau) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k} \text{ où}$$

chaque fonction $\varphi_i^k(u, x, x_\tau) \in \mathbb{R}^{p_k}, k = 1, \dots, q$, possède la structure suivante :

- pour $1 \leq i \leq \lambda_k - 1$:

$$\varphi_i^k(u, x, x_\tau) = \varphi_i^k(u, x^1, x^2, \dots, x^{k-1}, x_1^k, \dots, x_i^k; \quad (3.81)$$

$$x_1^{k+1}, x_1^{k+2}, \dots, x_1^q; x_\tau^1, x_\tau^2, \dots, x_\tau^{k-1}; x_{1\tau}^k, \dots, x_{i\tau}^k; x_{1\tau}^{k+1}, \dots, x_{1\tau}^q) \quad (3.82)$$

- pour $i = \lambda_k$:

$$\varphi_{\lambda_k}^k(u, x, x_\tau) = \varphi_{\lambda_k}^k(u, x^1, x^2, \dots, x^q, x_\tau^1, x_\tau^2, \dots, x_\tau^q) \quad (3.83)$$

Les états retardés interviennent ainsi dans la partie non linéaire de sorte que chaque sous système soit triangulaire par rapport à ses propres variables, et la dernière composante de chaque sous système peut dépendre de tout les états retardés.

3.4.3.1 Synthèse de l'observateur

Pour la synthèse de l'observateur, nous adoptons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 3.5. La fonction $\varphi(u, x, x_\tau)$ est globalement Lipschitzienne par rapport à x , x_τ , uniformément en u .

Hypothèse 3.6. Le retard est supposé borné, i.e : $\exists \tau_M \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \tau < \tau_M$, de plus il vérifie la condition suivante : $\forall t > 0, \exists \alpha > 0$ tel que $\dot{\tau} \leq 1 - \alpha$.

Soit le système dynamique décrit par les q blocs suivants :

$$\dot{\hat{x}}^k = A_k \hat{x}^k + \varphi(u, \hat{x}^k, \hat{x}_\tau^k) - \theta^{\delta_k} \Delta_k^{-1}(\theta) S_k^{-1} C_k^T (C_k \hat{x}^k - y_k) \quad (3.84)$$

pour $k = 1, \dots, q$ avec

- $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{x}^k = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^k \\ \hat{x}_2^k \\ \vdots \\ \hat{x}_{\lambda_k}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k}$, $\hat{x}_i^k \in \mathbb{R}^{p_k}$, $i = 1, \dots, \lambda_k$, $k = 1, \dots, q$.
- $\hat{x}_1^k = x_1^k$ (injection de sortie) pour $k = 1, \dots, q$.
- $\hat{x}_j^k = \hat{x}_j^k$ si $j \neq 1$.
- $e_1^k = \hat{x}_1^k - x_1^k$.
- u et y sont respectivement l'entrée et la sortie connues du système .

Nous énonçons le théorème suivant :

Théorème 3.5. Supposons que le système (3.84) satisfait les hypothèses H3.5 et H3.6, alors :

$$\forall M > 0; \exists \theta_0 > 0; \forall \theta \geq \theta_0; \exists \lambda_\theta > 0; \exists \mu_\theta > 0 \text{ tel que } \|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \lambda_\theta e^{-\mu_\theta t} \|\hat{x}(0) - x(0)\|$$

pour toute entrée admissible u telle que $\|u(t)\|_\infty \leq M$. De plus, $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \mu_\theta = +\infty$. En d'autres termes, en considérant des entrées bornées, le système (3.84) est un observateur exponentiel pour le système (3.80).

3.4.3.2 Analyse de la convergence

Soit $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ l'erreur d'estimation et soit $e^k(t)$ la $k^{\text{ième}}$ composante de $e(t)$. Pour alléger les expressions et tant qu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous omettrons dans la suite la variable temps t . Nous avons :

$$\dot{e}^k = A_k e^k + \varphi^k(u, \hat{x}, \hat{x}_\tau) - \varphi^k(u, x, x_\tau) - \theta^{\delta_k} \Delta_k^{-1}(\theta) S_k^{-1} C_k^T C_k e_1^k \quad (3.85)$$

où u est une entrée admissible telle que $\|u\|_\infty \leq M$ où $M > 0$ est un réel.

Pour $k = 1, \dots, q$, posons

$$\bar{e}^k = \Lambda_k(\theta) e^k \quad (3.86)$$

où $\Lambda_k(\theta)$ est la matrice définie par (3.65).

A partir de l'équation (3.85) et en exploitant les identités (3.67) et (3.86), nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}^k &= \Lambda_k(\theta) A_k \Lambda_k(\theta)^{-1} \bar{e}^k + \Lambda_k(\theta) (\varphi^k(u, \hat{x}, \hat{x}_\tau) - \varphi^k(u, x, x_\tau)) - \theta^{\delta_k} \Lambda_k(\theta) \Delta_k^{-1}(\theta) S_k^{-1} C_k^T C_k \theta^{\sigma_1^k} \bar{e}_1^k \\ &= \theta^{\delta_k} A_k \bar{e}^k - \theta^{\delta_k} S_k^{-1} C_k^T C_k \bar{e}_1^k + \Lambda_k(\theta) (\varphi^k(u, \hat{x}, \hat{x}_\tau) - \varphi^k(u, x, x_\tau)) \end{aligned} \quad (3.87)$$

On définit les fonctions suivantes : $V_{1k}(\bar{e}) = \theta^{\delta_k} \bar{e}^{kT} S \bar{e}^k$; $V_{2k}(\bar{e}) = \theta^{\delta_k} \bar{e}_\tau^{kT} \bar{e}_\tau^k$ et considérons la fonction de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V_k(\bar{e}^k) = \bar{e}^{kT} S_k \bar{e}^k(t) + \theta^{-\frac{\varepsilon t}{2\tau}} \int_{t-\tau}^t \theta^{\frac{\varepsilon s}{2\tau}} \bar{e}^{kT}(s) S_k \bar{e}^k(s) (\theta^{\delta_k})^{(1-\frac{\varepsilon}{2\delta_k})} ds$$

La dérivée par rapport au temps de V_k peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &= 2\bar{e}^{kT} S_k \dot{\bar{e}}^k - \frac{\varepsilon \ln \theta}{2\tau} \left(V_k - \bar{e}^{kT} S_k \bar{e}^k \right) \\ &\quad + \theta^{-\frac{\varepsilon t}{2\tau}} \left(\theta^{\frac{\varepsilon t}{2\tau}} \bar{e}^{kT} S_k \bar{e}^k - (1 - \dot{\tau}) \theta^{\frac{\varepsilon(t-\tau)}{2\tau}} \bar{e}_\tau^{kT} S_k \bar{e}_\tau^k \right) (\theta^{\delta_k})^{(1-\frac{\varepsilon}{2\delta_k})} \end{aligned} \quad (3.88)$$

En remplaçant la dynamique de l'erreur, donnée par (3.87), on déduit :

$$\begin{aligned} \dot{V}_k + \frac{\varepsilon \ln \theta}{2\tau} V_k &= 2\bar{e}^{kT} S_k \dot{\bar{e}}^k + \frac{\varepsilon \ln \theta}{2\tau} \bar{e}^{kT} S_k \bar{e}^k + (\theta^{\delta_k})^{(1-\frac{\varepsilon}{2\delta_k})} \bar{e}^{kT} S_k \bar{e}^k - (1 - \dot{\tau}) \theta^{(\delta_k - \varepsilon)} \bar{e}_\tau^{kT} S_k \bar{e}_\tau^k \\ &= 2\theta^{\delta_k} \bar{e}^{kT} S_k A_k \bar{e}^k - 2\theta^{\delta_k} \bar{e}^{kT} C_k^T C_k \bar{e}^k + 2\bar{e}^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) (\varphi^k(u, \hat{x}, \hat{x}_\tau) - \varphi^k(u, x, x_\tau)) \\ &\quad + \frac{\varepsilon \ln \theta}{2\tau} \bar{e}^{kT} S_k \bar{e}^k + (\theta^{\delta_k})^{(1-\frac{\varepsilon}{2\delta_k})} \bar{e}^{kT} S_k \bar{e}^k - (1 - \dot{\tau}) \theta^{(\delta_k - \varepsilon)} \bar{e}_\tau^{kT} S_k \bar{e}_\tau^k \end{aligned} \quad (3.89)$$

A partir de l'équation algébrique de Lyapunov (3.68), nous déduisons

$$\begin{aligned} \dot{V}_k + \frac{\varepsilon \ln \theta}{2\tau} V_k &= -\theta^{\delta_k} \bar{e}^{kT} S_k \bar{e}^k + \frac{\varepsilon \ln \theta}{2\tau} \bar{e}^{kT} S_k \bar{e}^k + \frac{\theta^{\delta_k}}{\sqrt{\theta^\varepsilon}} \bar{e}^{kT} S_k \bar{e}^k \\ &\quad + 2\bar{e}^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) (\varphi^k(u, \hat{x}, \hat{x}_\tau) - \varphi^k(u, x, x_\tau)) - (1 - \dot{\tau}) \theta^{(\delta_k - \varepsilon)} \bar{e}_\tau^{kT} S_k \bar{e}_\tau^k \\ &\leq -\left(1 - \frac{\varepsilon \ln \theta}{2\tau \theta^{\delta_k}} - \frac{1}{\sqrt{\theta^\varepsilon}}\right) \theta^{\delta_k} \bar{e}^{kT} S_k \bar{e}^k - \frac{\alpha}{\theta^\varepsilon} \theta^{\delta_k} \bar{e}_\tau^{kT} S_k \bar{e}_\tau^k \\ &\quad + 2\bar{e}^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) (\varphi^k(u, \hat{x}, \hat{x}_\tau) - \varphi^k(u, x, x_\tau)) \end{aligned} \quad (3.90)$$

La dernière égalité résulte de l'hypothèse (H3.6).

On pose maintenant $h(\theta) = 1 - \frac{\varepsilon \ln \theta}{2\tau\theta^{\delta_k}} - \frac{1}{\sqrt{\theta^\varepsilon}}$ et On choisit dans un premier temps θ de sorte que $h(\theta) > 0$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_k + \frac{\varepsilon \ln \theta}{2\tau} V_k &\leq -h(\theta)V_{1k} - \frac{\alpha}{\theta^\varepsilon} V_{2k} \\
 &\quad + 2\bar{e}^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) (\varphi^k(u, \hat{x}, \hat{x}_\tau) - \varphi^k(u, x, x_\tau)) \\
 &\leq -h(\theta)V_{1k} - \frac{\alpha}{\theta^\varepsilon} V_{2k} \\
 &\quad + 2\|S_k \bar{e}^k\| \|\Lambda_k(\theta) (\varphi^k(u, \hat{x}, \hat{x}_\tau) - \varphi^k(u, x, \hat{x}_\tau))\| \\
 &\quad + 2\|S_k \bar{e}^k\| \|\Lambda_k(\theta) (\varphi^k(u, x, \hat{x}_\tau) - \varphi^k(u, x, x_\tau))\| \\
 &\leq -h(\theta)V_{1k} - \frac{\alpha}{\theta} V_{2k} \\
 &\quad + 2\sqrt{\frac{\lambda_{max}^k V_{1k}}{\theta^{\delta_k}}} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \frac{1}{\theta^{\sigma_i^k}} \|\varphi_i^k(u, \hat{x}, \hat{x}_\tau) - \varphi_i^k(u, x, \hat{x}_\tau)\| \\
 &\quad + 2\sqrt{\frac{\lambda_{max}^k V_{1k}}{\theta^{\delta_k}}} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \frac{1}{\theta^{\sigma_i^k}} \|\varphi_i^k(u, x, \hat{x}_\tau) - \varphi_i^k(u, x, x_\tau)\|
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

où λ_{max}^k est la plus grande valeur propre de S_k et $\sigma_i^k = \sigma_1^k + (i-1)\delta_k$ est, rappelons le, défini par (3.62).

A partir de l'hypothèse (H3.5), qui implique la bornitude de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}$, nous avons

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_k + \frac{\varepsilon \ln \theta}{2\tau} V_k &\leq -h(\theta)V_{1k} - \frac{\alpha}{\theta^\varepsilon} V_{2k} \\
 &\quad + 2\rho_k \sqrt{\frac{\lambda_{max}^k V_{1k}}{\theta^{\delta_k}}} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \theta^{-\sigma_i^k} \|e_j^l\| \\
 &\quad + 2\rho'_k \sqrt{\frac{\lambda_{max}^k V_{1k}}{\theta^{\delta_k}}} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \beta_{l,j}^{k,i} \theta^{-\sigma_i^k} \|e_{j\tau}^l\|
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

où $\rho_k = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial x_j^l}(u, x, x_\tau) \right\| ; x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|u\|_\infty \leq M \right\}$;

$\rho'_k = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial x_{j\tau}^l}(u, x, x_\tau) \right\| ; x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|u\|_\infty \leq M \right\}$;

Les $\chi_{l,j}^{k,i}$ sont donnés par le lemme 2.1 dans (3.71) et les $\beta_{l,j}^{k,i}$ sont définis de la même manière, i.e :

$$\beta_{l,j}^{k,i} = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial x_{j\tau}^l}(u, x, x_\tau) \equiv 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.93}$$

Remarque 3.4. Compte tenu de la structure de $\varphi(u, x, x_\tau)$ donnée par (3.81) et (3.83), les états retardés ont le même mode d'interconnexion que les états du système (3.80), ce qui permet de déduire que les $\beta_{l,j}^{k,i}$ définis dans (3.93) vérifient le lemme 2.1, c.à.d : pour

$k, l = 1, \dots, q$, $i = 1, \dots, \lambda_k$ et $j = 2, \dots, \lambda_l$, on a :

$$\text{si } \beta_{l,j}^{k,i} = 1 \text{ alors } \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} \leq -\varepsilon \quad (3.94)$$

En effet, si l'on a $\beta_{l,j}^{k,i} = 1$ alors on sera forcément dans l'une des trois situations décrites dans la preuve du lemme, et on aura ainsi $\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} \leq -\varepsilon$

L'inégalité (3.96) peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} \dot{V}_k + \frac{\varepsilon \ln \theta}{2\tau} V_k &\leq -h(\theta)V_{1k} - \frac{\alpha}{\theta^\varepsilon} V_{2k} \\ &+ 2\rho_k \sqrt{\frac{\lambda_{max}^k V_{1k}}{\theta^{\delta_k}}} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \theta^{\sigma_j^l - \sigma_i^k} \|\bar{e}_j^l\| \\ &+ 2\rho'_k \sqrt{\frac{\lambda_{max}^k V_{1k}}{\theta^{\delta_k}}} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \beta_{l,j}^{k,i} \theta^{\sigma_j^l - \sigma_i^k} \|\bar{e}_{j\tau}^l\| \end{aligned} \quad (3.95)$$

avec σ_j^l défini par (3.62), c'est-à-dire $\sigma_j^l = \sigma_1^l + (j-1)\delta_l$.

Finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V}_k + \frac{\varepsilon \ln \theta}{2\tau} V_k &\leq -h(\theta)V_{1k} - \frac{\alpha}{\theta^\varepsilon} V_{2k} \\ &+ 2\rho_k \sqrt{\frac{\lambda_{max}^k V_{1k}}{\theta^{\delta_k}}} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \theta^{\sigma_j^l - \sigma_i^k} \frac{\sqrt{V_{1l}}}{\sqrt{\theta^{\delta_l} \lambda_{min}^l}} \\ &+ 2\rho'_k \sqrt{\frac{\lambda_{max}^k V_{1k}}{\theta^{\delta_k}}} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \beta_{l,j}^{k,i} \theta^{\sigma_j^l - \sigma_i^k} \frac{\sqrt{V_{2l}}}{\sqrt{\theta^{\delta_l} \lambda_{min}^l}} \end{aligned} \quad (3.96)$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \dot{V}_k + \frac{\varepsilon \ln \theta}{2\tau} V_k &\leq -h(\theta)V_{1k} - \frac{\alpha}{\theta^\varepsilon} V_{2k} \\ &+ 2\rho_k \mu_s \sqrt{V_{1k}} \sum_{j=2}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \theta^{\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2}} \sqrt{V_{1l}} \\ &+ 2\rho'_k \mu_s \sqrt{V_{1k}} \sum_{j=2}^{\lambda_l} \beta_{l,j}^{k,i} \theta^{\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2}} \sqrt{V_{2l}} \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\text{où } \mu_s = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(S)}{\lambda_{min}(S)}}.$$

En utilisant les résultats du lemme 2.1, on obtient

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_k + \frac{\varepsilon \ln \theta}{2\tau} V_k &\leq -h(\theta)V_{1k} - \frac{\alpha}{\theta^\varepsilon} V_{2k} \\
 &\quad + 2\rho_k \mu_S \sqrt{V_{1k}} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \theta^{-\varepsilon} \sqrt{V_{1l}} \\
 &\quad + 2\rho'_k \mu_S \sqrt{V_{1k}} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \theta^{-\varepsilon} \sqrt{V_{2l}} \\
 &\leq -h(\theta)V_{1k} - \frac{\alpha}{\theta^\varepsilon} V_{2k} \\
 &\quad + 2\lambda_k \rho_k \mu_S \theta^{-\varepsilon} \sqrt{V_{1k}} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \sqrt{V_{1l}} \\
 &\quad + 2\lambda_k \rho'_k \mu_S \theta^{-\varepsilon} \sqrt{V_{1k}} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \sqrt{V_{2l}}
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

Maintenant, posons $V = \sum_{k=1}^q V_{1k}$, $V_\tau = \sum_{k=1}^q V_{2k}$ et $V^* = \sum_{k=1}^q V_k$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_k + \frac{\varepsilon \ln \theta}{2\tau} V_k &\leq -h(\theta)V_{1k} - \frac{\alpha}{\theta^\varepsilon} V_{2k} \\
 &\quad + 2\lambda_k n \rho_k \mu_S \theta^{-\varepsilon} \sqrt{V_{1k}} \sqrt{V} \\
 &\quad + 2\lambda_k n \rho'_k \mu_S \theta^{-\varepsilon} \sqrt{V_{1k}} \sqrt{V_\tau}
 \end{aligned} \tag{3.99}$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned}
 \dot{V}^* + \frac{\varepsilon \ln \theta}{2\tau} V^* &\leq -h(\theta)V - \frac{\alpha}{\theta^\varepsilon} V_\tau \\
 &\quad + 2n^2 \rho \mu_S \theta^{-\varepsilon} V + 2n^2 \rho' \mu_S \theta^{-\varepsilon} \sqrt{V} \sqrt{V_\tau} \\
 &\leq -h(\theta)V - \frac{\alpha}{\theta^\varepsilon} V_\tau \\
 &\quad + 2C_1 \theta^{-\varepsilon} V + 2C_2 \theta^{-\varepsilon} \sqrt{V} \sqrt{V_\tau}
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

avec $C_1 = 2n^2 \rho \mu_S$ et $C_2 = 2n^2 \rho' \mu_S$.

on pose maintenant : $\bar{V}_1 = \frac{h(\theta)}{2} V$ et $\bar{V}_2 = \frac{\alpha}{\theta^\varepsilon} V_\tau$ on obtient :

$$\dot{V}^* + \frac{\ln \theta}{2\tau} V^* \leq -2\bar{V}_1 - \bar{V}_2 + 4\frac{C_1}{h(\theta)} \theta^{-\varepsilon} \bar{V}_1 + 2C_2 \theta^{-\varepsilon} \sqrt{\frac{2\theta^\varepsilon}{\alpha h(\theta)}} \sqrt{\bar{V}_1} \sqrt{\bar{V}_2} \tag{3.101}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}^* + \frac{\ln \theta}{2\tau} V^* &\leq -(1 - 4\frac{C_1}{h(\theta)} \theta^{-\varepsilon}) \bar{V}_1 \\
 &\quad - (1 - C_2 \theta^{-\varepsilon} \sqrt{\frac{2(\theta)^\varepsilon}{\alpha h(\theta)}}) (\bar{V}_1 + \bar{V}_2)
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

Soit maintenant θ_0 un réel tel que $1 - 4\frac{C_1}{h(\theta)} \theta^{-\varepsilon} > 0$ et $1 - C_2 \theta^{-\varepsilon} \sqrt{\frac{2(\theta)^\varepsilon}{\alpha h(\theta)}} > 0$ pour tout $\theta > \theta_0$, et par conséquent :

$$\dot{V}^* + \frac{\ln \theta}{2\tau} V^* \leq 0$$

Et l'on a ainsi prouvé la convergence exponentielle de l'erreur d'observation énoncée dans la théorème 3.4.

3.4.4 Exemple de simulation

Les performances de l'observateur proposé sont illustrées en simulation dans ce paragraphe à travers l'exemple suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_3 - 0.01u_1 \tanh(z_1 z_{2\tau_2} z_5) - z_1 - z_{1\tau_1} \\ \dot{z}_2 = z_4 - 0.01u_2 \tanh(z_{1\tau_2} z_2 z_5) - z_2 - z_{2\tau_1} \\ \dot{z}_3 = -z_3^3 - \frac{u_1 z_6}{1 + (z_1 z_2 z_3 z_4 z_{5\tau_1} z_6 z_{7\tau_2})^2} \\ \dot{z}_4 = -z_4 + \frac{u_2 z_7}{2 + \tanh(z_1 z_2 z_{3\tau_1} z_4 z_5 z_{6\tau_2} z_7)} \\ \dot{z}_5 = z_6 + 0.01 z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 u_1 \\ \dot{z}_6 = z_7 - z_6 + (1 - z_1^2) z_2 z_5 + \frac{u_1}{1 + (z_3 z_{4\tau_2})^2} + \frac{\tanh(u_2)}{1 + z_6^2} \\ \dot{z}_7 = -z_7 + (1 - z_2)^2 z_1 z_5 + \frac{\tanh(u_1)}{1 + (z_{6\tau_1} z_7)^2} + \frac{u_2}{1 + (z_3 z_4)^2} \\ y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_5 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (3.103)$$

Tels que $z_{i\tau_j} = z_i(t - \tau_j) \forall i = 1 \dots 7$ et $j = 1, 2$. τ_1 et τ_2 désignent les retards qui interviennent dans la dynamique du système et que l'on considère respectivement constant et variable. Il est clair que le système (3.103) est sous la forme (3.80) avec :

$$\begin{aligned} x^1 &= \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}, x_1^1 = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}, x_2^1 = \begin{pmatrix} z^3 \\ z^4 \end{pmatrix} \\ x^2 &= \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix}, x_1^2 = z_5, x_2^2 = z_6, x_3^2 = z_7 \\ y &= \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}, y^1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, y_2 = z_5 \end{aligned} \quad (3.104)$$

On notera que la le système (3.103) n'appartient pas à la classe de système représentée par (3.14).

Nous avons ainsi $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

Un observateur de type (3.84) a été synthétisé pour l'estimation des trajectoires de ce système. Les équations de cet observateur se présentent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{\hat{z}}_1 \\ \dot{\hat{z}}_2 \\ \dot{\hat{z}}_3 \\ \dot{\hat{z}}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.01u_1 \tanh(z_1 z_{2\tau_2} z_5) - z_1 - z_{1\tau_1} \\ -0.01u_2 \tanh(z_{1\tau_2} z_2 z_5) - z_2 - z_{2\tau_1} \\ -\hat{z}_3^3 - \frac{u_1 \hat{z}_6}{1 + (z_1 z_2 \hat{z}_3 \hat{z}_4 z_5 \tau_1 \hat{z}_6 \hat{z}_7 \tau_2)^2} \\ -\hat{z}_4 + \frac{u_2 \hat{z}_7}{2 + \tanh(z_1 z_2 \hat{z}_3 \tau_1 \hat{z}_4 z_5 \hat{z}_6 \tau_2 \hat{z}_7)} \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} 2\theta^{\delta_1} & 0 \\ 0 & 2\theta^{\delta_1} \\ \theta^{2\delta_1} & 0 \\ 0 & \theta^{2\delta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z}_1 - z_1 \\ \hat{z}_2 - z_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{\hat{z}}_5 \\ \dot{\hat{z}}_6 \\ \dot{\hat{z}}_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{z}_6 \\ \hat{z}_7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.01z_1 z_2 \hat{z}_3 \hat{z}_4 z_5 u_1 \\ -\hat{z}_6 + (1 - z_1^2) z_2 z_5 + \frac{u_1}{1 + (\hat{z}_3 \hat{z}_4 \tau_2)^2} + \frac{\tanh(u_2)}{1 + \hat{z}_6^2} \\ -\hat{z}_7 + (1 - z_2)^2 z_1 z_5 + \frac{\tanh(u_1)}{1 + (\hat{z}_6 \tau_1 \hat{z}_7)^2} + \frac{u_2}{1 + (\hat{z}_3 \hat{z}_4)^2} \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} 3\theta \\ 3\theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} (\hat{z}_5 - z_5) \end{array} \right.$$

où $\delta_1 = (\lambda_2 - 1) = 2$ conformément à (3.59).

La simulation a été effectuée avec les conditions initiales suivante :

$$z_i(0) = 1, \hat{z}_i(0) = -1, i = 1, \dots, 7$$

De la même manière que l'exemple précédent, on utilise un retard constant et un autre variable de sorte que :

$$\tau_1 = 1, \tau_2(t) = 0.8 - 0.2 \sin(t)$$

La valeur de paramètre θ utilisée au cours de la simulation est égale à 5. Les retards considérés sont : $\tau_1 = 1$ et $\tau_2 = 0.8 - 0.2 \sin(t)$. Les résultats obtenus sont représentés sur les figures (3.2), (3.3) et (3.4) et ils montrent que les trajectoires estimées convergent rapidement vers leurs vraies valeurs issues de la simulation du modèle.

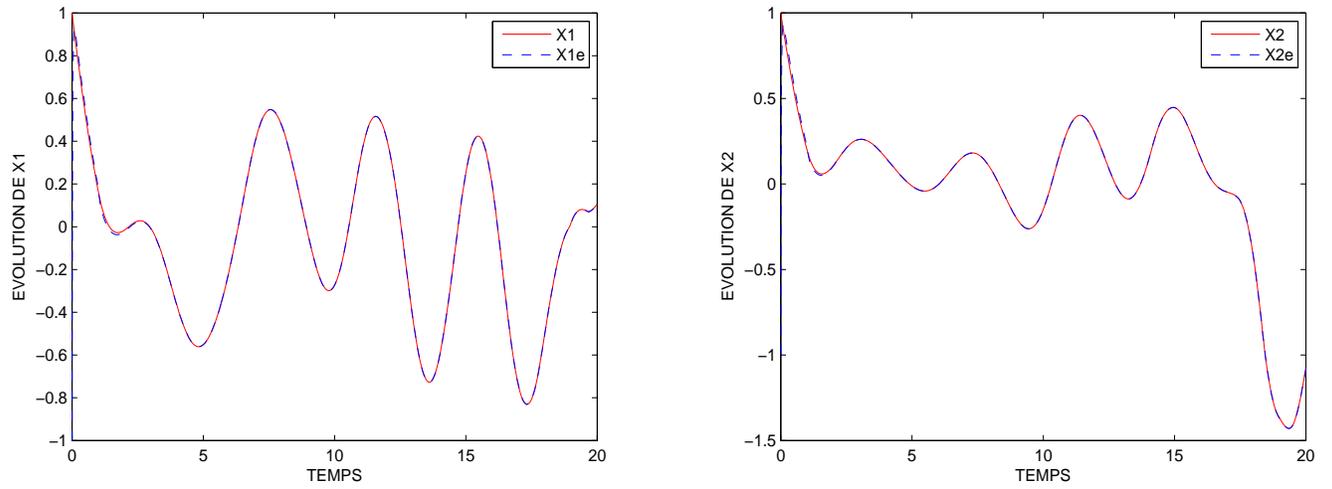


FIG. 3.2 – Comparaison des états estimés et simulés pour $z_i, i = 1, 2$

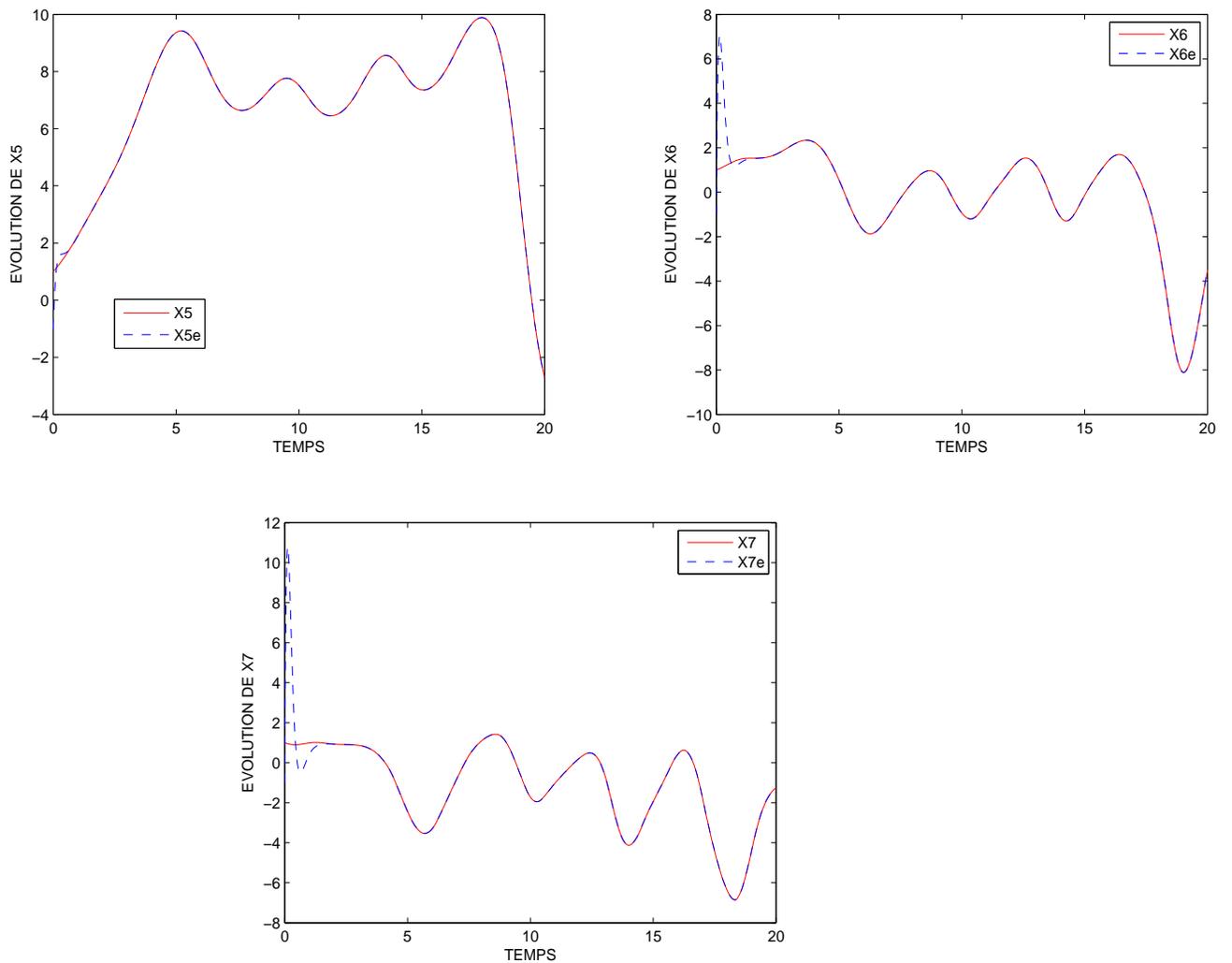
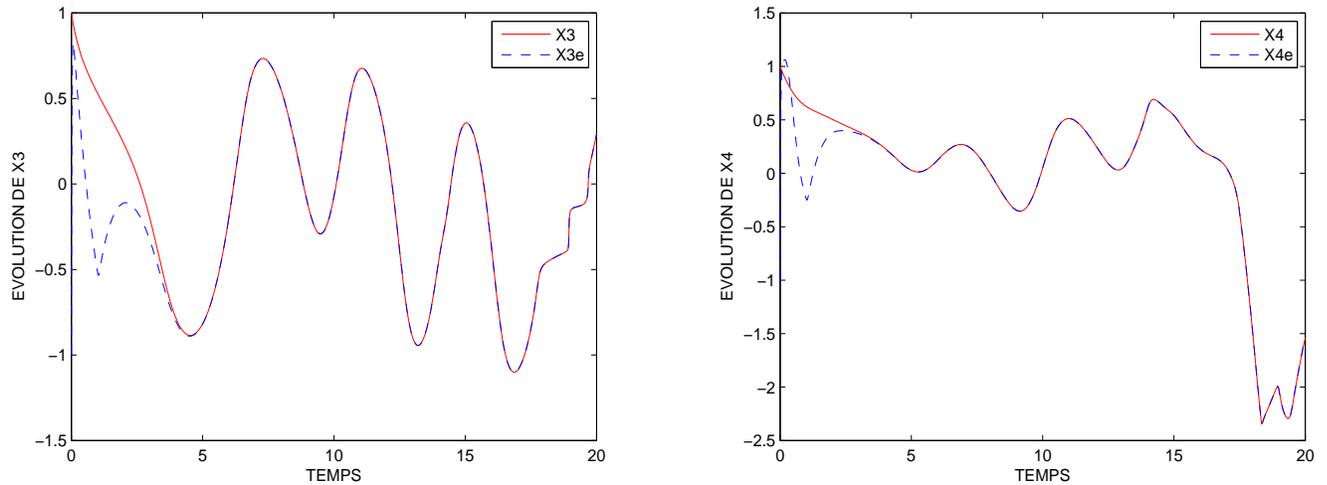


FIG. 3.4 – Comparaison des états estimés et simulés pour $z_i, i = 5, \dots, 7$

FIG. 3.3 – Comparaison des états estimés et simulés pour z_i , $i = 3, 4$

3.5 Conclusion

Le problème de synthèse d'observateurs de systèmes à retard, à la fois sur l'état et la commande, a été résolu pour une classe de systèmes MIMO uniformément observable. Les théorèmes présentés dans ce chapitre, garantissent (sous certaines hypothèses) la convergence exponentielle des observateurs proposés en présence d'un ou plusieurs retards variables et connus. Des résultats de simulation ont été présentés et ont démontré de bonnes performances en terme de rapidité de convergence qu'en terme de comportement vis-à-vis des bruits de mesure.

Observateur adaptatif pour des systèmes à retards

4.1 Introduction

Pour assurer la surveillance des systèmes dynamiques (procédé de production, machine, installation, etc.), fréquemment, nous faisons appel à des algorithmes détectant les défauts qui peuvent survenir. Pour ce faire, certains chercheurs ont travaillé sur le développement d'observateurs adaptatifs utilisés dans la détection et l'isolation des défauts en estimant simultanément les états non mesurables et les paramètres inconnus du système [97, 96, 102, 103]. Dans ce cas, la classe de systèmes envisagée peut être exprimée en fonction des paramètres inconnus caractérisant ces défauts.

Dans la littérature, la conception d'observateurs adaptatifs a vu le jour depuis les années 70 pour des systèmes linéaires invariants dans le temps (cf. par exemple, [68, 61]). La construction de ce genre d'observateurs nécessite la transformation des systèmes étudiés en une certaine forme canonique. Dans certains travaux [6, 71], les systèmes non linéaires considérés sont supposés être linéarisables par un changement de coordonnées approprié modulo une injection de sortie. Dans [7, 15], les auteurs supposent que les systèmes considérés admettent à priori des fonctions de Lyapunov satisfaisant certaines. Plus récemment, une approche a été proposée pour la synthèse d'observateurs adaptatifs pour des systèmes linéaires à temps variant (cf. par exemple, [101, 104]). Dans un premier temps, un observateur avec un gain d'adaptation constant a été proposé [101], puis en deuxième temps, pour avoir une estimation consistante des paramètres, un autre observateur avec un gain d'adaptation à temps variant a été suggéré [104]. Toutefois, une difficulté particulière dans la synthèse de ces observateurs réside dans le choix du gain d'observation. Dans [95], les auteurs ont étendu la synthèse du premier observateur à une classe de systèmes non linéaires uniformément observables. Cependant, la dimension de l'observateur résultant est beaucoup plus grande que celle du système. Dans ([60]), les auteurs ont proposé un observateur adaptatif pour une classe de systèmes uniformément observables. Le gain d'observation de cet observateur est issu des techniques de type grand gain tandis que le

gain d'adaptation paramétrique est déterminé à partir des techniques des moindres carrés avec un facteur d'oubli.

Dans cette contribution, nous proposons des méthodes constructives de conception d'observateurs adaptatifs à convergence exponentielle pour une classe de systèmes non-linéaires MIMO uniformément observables. La classe des systèmes considérée présente des retards dans sa dynamique et comprend une paramétrisation non linéaire.

Nous proposons, dans un premier temps, de rappeler la synthèse d'observateur adaptatif pour les systèmes linéaires temps variant multi-entrées/sorties proposé par [101] avec une adaptation des paramètres de type gradient. La synthèse des différents observateurs que nous proposerons dans ce chapitre s'inspire de ces travaux en ce qui concerne l'adaptation des paramètres. Toutefois, plusieurs modifications ont été introduites pour coupler cette adaptation à l'observation conjointe de l'état via des techniques de type grand gain.

Dans la deuxième section, nous présentons un observateur adaptatif pour les systèmes non linéaires à retards, avec une paramétrisation non linéaire. Les principales caractéristiques des observateurs proposés résident dans leur simplicité de mise en oeuvre et leur capacité de donner lieu à différents types d'observateurs. En effet, les gains d'observation et d'adaptation paramétrique font apparaître une fonction de synthèse satisfaisant une certaine condition qui sera explicitée. Différentes expressions de cette fonction sont proposées, et il est démontré que les observateurs adaptatifs à grand gain [9, 39, 30] et les observateurs adaptatifs à modes glissants [24, 91, 25, 34] peuvent être générés en considérant les expressions particulières de la fonction de synthèse. Le réglage du gain de l'observateur est réalisé par le choix d'un simple paramètre de synthèse et la convergence exponentielle est garantie sous une certaine condition d'excitation persistante qui sera présentée.

Dans la dernière partie, un exemple de reconstruction simultanée état/paramètres est présenté afin d'illustrer les performances de l'approche proposée.

4.2 Observateur adaptatif pour les systèmes linéaires MIMO

Considérons le système linéaire temps variant multi-entrées multi-sorties suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \Psi(t)\rho \\ y = C(t)x(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^l$ et $y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont, respectivement, l'état, l'entrée et la sortie du système. $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$ sont des matrices connues variant dans le temps et de dimensions appropriées, $\rho \in \mathbb{R}^p$ est un vecteur colonne de paramètres inconnus et supposé constant, $\Psi(t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ est une matrice de signaux mesurés. Toutes les matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ et $\Psi(t)$ sont connues par morceaux et uniformément bornées en temps.

Hypothèse 4.1. *Supposons que la paire matricielle $(A(t), C(t))$ dans le système (4.1) est détectable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice bornée (variant dans le temps) $K(t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tel que le système :*

$$\dot{x}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]x(t) \quad (4.2)$$

est globalement exponentiellement stable.

Hypothèse 4.2. *Notons par $\Upsilon(t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ la matrice de signaux générée par un filtre stable :*

$$\dot{\Upsilon}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\Upsilon(t) + \Psi(t) \quad (4.3)$$

Supposons que $\Psi(t)$ est à excitation persistante, i.e. il existe deux constantes positives α et T et une matrice définie positive $\Sigma(t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ telle que, pour tout t , l'inégalité suivante :

$$\int_t^{t+T} \Upsilon^T(\tau)C^T(\tau)\Sigma(\tau)C(\tau)\Upsilon(\tau)d(\tau) \geq \alpha I \quad (4.4)$$

est satisfaite, où $I \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ est la matrice identité.

L'hypothèse (H4.1) montre que, pour chaque paramètre ρ donné, un observateur d'état à convergence exponentielle peut être construit pour le système (4.1) avec la matrice de gain $K(t)$ qui règle la dynamique de l'observateur. L'hypothèse (H4.2) est une condition d'excitation persistante, nécessaire pour l'identification des paramètres inconnus.

Sous les hypothèses (H4.1) et (H4.2), le système d'équations différentielles ordinaires suivant [101] :

$$\begin{cases} \dot{\Upsilon}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\Upsilon(t) + \Psi(t) \\ \dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + \Psi\hat{\rho}(t) + [K(t) + \Upsilon(t)\Gamma\Upsilon^T(t)C^T\Sigma(t)](y(t) - C(t)\hat{x}(t)) \\ \dot{\hat{\rho}} = \Gamma\Upsilon^T(t)C^T\Sigma(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t)) \end{cases} \quad (4.5)$$

où $\Gamma \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ est une matrice symétrique définie positive quelconque, est un observateur adaptatif global exponentiel pour le système (4.1).

La mise à jour des paramètres inconnus dans l'observateur (4.5) est de type gradient. Dans [104], les auteurs proposent un observateur adaptatif similaire à (4.5) avec une adaptation paramétrique de type moindres carrés : la matrice Γ n'est plus constante mais elle est régie par l'Equation Différentielle Ordinaire (EDO) suivante :

$$\dot{\Gamma}(t) = -\Gamma(t)\Upsilon^T(t)C^T\Sigma(t)C(t)\Upsilon(t)\Gamma(t) + \lambda\Gamma(t) \quad (4.6)$$

où $\Gamma(0)$ est choisie symétrique définie positive. Sous l'hypothèse ($H4.2$), c'est-à-dire lorsque la matrice $\Gamma(t)\Upsilon^T(t)C^T\Sigma(t)C(t)\Upsilon(t)\Gamma(t)$ est à excitation persistante, les auteurs montrent que la matrice $\Gamma(t)$ régie par l'ODE (4.6) est symétrique définie positive et est bornée. Une tentative pour la généralisation de l'observateur proposé à une classe de systèmes non linéaires a été présentée par [95] mais l'observateur résultant est assez complexe puisqu'il fait intervenir plusieurs copies du système original avec des pseudo-sorties qui correspondent aux sorties retardées du système original.

4.3 Observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes à retards

Dans cette section, nous allons considérer la synthèse d'un observateur adaptatif pour l'estimation conjointe de l'état et des paramètres inconnus. La particularité de la classe de systèmes non linéaires considérée est qu'elle présente des retards dans la dynamique, et dont les paramètres inconnus interviennent de manière non linéaire.

Dans la littérature, on dispose de très peu de résultats concernant l'estimation conjointe de l'état et des paramètres avec une paramétrisation non linéaire [66, 56, 87, 55]. Pourtant, la paramétrisation non linéaire est inévitable dans beaucoup de modèles dynamiques représentant des procédés physiques même dans le cas où ces modèles ne renferment que très peu de variables d'état. Les tentatives pour se ramener à une paramétrisation linéaire aboutissent en général à une sur-paramétrisation avec ses problèmes sous-jacents (condition forte d'excitation persistante, non injectivité de la transformation de linéarisation etc.) [55]. De plus, lorsqu'une paramétrisation non linéaire est considérée, les non linéarités associées à cette sur-paramétrisation ne dépendent en général que de variables connues (mesurées). Cette remarque est d'ailleurs valable même dans la plupart des cas des paramétrisations linéaires. Signalons toutefois que les travaux faisant apparaître des paramétrisations non linéaires traitent généralement de la commande adaptative et le problème de convergence des paramètres est rarement soulevé. Remarquons enfin les travaux décrits dans [55], où les auteurs ont considéré une classe de systèmes avec une paramétrisation concave/convexe et ils ont montré que la convergence paramétrique est

garantie sous certaines conditions d'excitation persistante.

4.3.1 Classe des systèmes considérée

Considérons les systèmes non linéaires MIMO de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \varphi(u(t), u_{\tau_1}(t), \dots, u_{\tau_r}(t), x(t), x_{\tau_1}(t), \dots, x_{\tau_r}(t), \rho) \\ y(t) &= Cx(t) = x^1(t) \\ x(s) &= \varphi(s) \quad \forall s \in [-\tau^*, 0] \end{cases} \quad (4.7)$$

tel que l'état $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$; $x^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_p^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$, avec $x_i^k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, q$ et

$i = 1, \dots, p$;

$$x_{\tau_i} = \begin{pmatrix} x_{\tau_i}^1 \\ x_{\tau_i}^2 \\ \vdots \\ x_{\tau_i}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n; x_{\tau_i}^k = \begin{pmatrix} x_{1\tau_i}^k \\ x_{2\tau_i}^k \\ \vdots \\ x_{p\tau_i}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p, \text{ avec } x_{j\tau_i}^k \in \mathbb{R}, \text{ tel que } x_{j\tau_i}^k = x_j^k(t - \tau_i(t)).$$

Les réels positifs $\tau_i(t)$, $i = 1 \dots, r$ représentent l'ensemble des retards affectant les états ainsi que les entrées du système. Ces retards sont supposés bornés, i.e : $\forall i = 1 \dots, r$, $0 < \tau_i < \tau^*$ avec $\tau^* \in \mathbb{R}$. La sortie $y \in \mathbb{R}^p$; l'entrée $u(t) \in U$, un compact de \mathbb{R}^s .

Les matrices A et C sont respectivement définies par (2.29) et (2.30), et $\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_m \end{pmatrix}$

$\in \mathbb{R}^m$ désigne le vecteur de paramètres inconnus à estimer. Ces paramètres sont constants ou varient suffisamment lentement pour être considérés constants.

La fonction φ est définie comme suit :

$$\varphi(u, u_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_r}, x, x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_r}, \rho) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u, u_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_r}, x, x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_r}, \rho) \\ \varphi^2(u, u_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_r}, x, x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_r}, \rho) \\ \vdots \\ \varphi^q(u, u_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_r}, x, x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_r}, \rho) \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Où chaque composante non-linéaire $\varphi^k(u, u_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_r}, x, x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_r}, \rho) \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \dots, q$ possède une structure triangulaire par rapport à $x, x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_r}$, tel que :

$$\varphi^k(u, u_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_r}, x, x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_r}, \rho) = \varphi^k(u, u_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_r}, x^1, \dots, x^k, x_{\tau_1}^1, \dots, x_{\tau_1}^k, \dots, x_{\tau_r}^1, \dots, x_{\tau_r}^k, \rho)$$

Notre objectif consiste à faire la synthèse d'observateurs adaptatifs pour le système (4.7), permettant l'estimation conjointe de l'état x et du vecteur des paramètres inconnus ρ .

Pour de tels observateurs, il est nécessaire d'adopter certaines hypothèses qui seront données au fur et à mesure. Comme pour les systèmes décrits dans le chapitre précédent, on suppose que la fonction non linéaire φ est globalement Lipschitzienne et que les retards sont bornés. Nous supposons aussi la bornitude des entrées, de l'état aussi bien que des paramètres inconnus. Pour l'instant nous considérons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 4.3. *L'état du système $x(t)$ ainsi que l'entrée $u(t)$ et les paramètres inconnus ρ sont bornés, c.à.d. il existe des compacts $X \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ et $\Omega \in \mathbb{R}^m$ tels que $\forall t \geq 0$, $x(t) \in X$, $u(t) \in U$ et $\rho \in \Omega$.*

Hypothèse 4.4. *La fonction $\varphi(u, u_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_r}, x, x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_r}, \rho)$ est globalement Lipschitzienne par rapport à x , x_{τ} et ρ , uniformément en u et u_{τ} .*

Hypothèse 4.5. *La fonction $\varphi(u, u_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_r}, x, x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_r}, \cdot)$ est injective, c'est-à-dire la paramétrisation non linéaire en ρ est injective.*

Hypothèse 4.6. *Les retards sont supposés bornés, i.e.*

$$\exists \tau^* > 0; \sup_{t \geq 0} \tau_i(t) \leq \tau^* \quad \forall i = 1 \dots r \quad (4.9)$$

De plus la dérivée par rapport au temps du retard vérifie l'hypothèse suivante :

$$\exists \varepsilon > 0; \forall i \in \{1, \dots, q\} : \sup_{t \geq 0} \dot{\tau}_i(t) \leq 1 - \varepsilon \quad (4.10)$$

Remarque 4.1. *Comme l'état et les paramètres inconnus restent confinés dans des compacts bornés X et Ω respectivement, on peut toujours étendre la fonction non linéaire $\varphi(u, u_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_r}, x, x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_r}, \rho)$ en considérant un prolongement $\tilde{\varphi}(u, u_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_r}, x, x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_r}, \rho)$ de sorte que celle-ci coïncide avec $\varphi(\cdot)$ sur $X^{r+1} \times \Omega$ et que $\tilde{\varphi}(\cdot)$ soit globalement Lipschitzienne sur tout l'espace $\mathbb{R}^{(r+1)n} \times \Omega$. Une façon d'effectuer ce prolongement consiste à considérer une fonction de saturation qui soit au moins de classe \mathcal{C}^1 , $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow X$, $x \mapsto \sigma(x)$ et $\sigma^\rho : \mathbb{R}^m \rightarrow \Omega$, $\rho \mapsto \sigma^\rho(\rho)$ de sorte que, $\sigma(x) = x$ et $\sigma^\rho(\rho) = \rho$ pour tout $x \in X$ et $\rho \in \Omega$. On définit alors le prolongement $\tilde{\varphi}$ de φ comme suit :*

$$\tilde{\varphi}(u, u_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_r}, x, x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_r}, \rho) = \tilde{\varphi}(u, u_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_r}, \sigma(x), \sigma(x_{\tau_1}), \dots, \sigma(x_{\tau_r}), \sigma^\rho(\rho)) \quad (4.11)$$

Maintenant, considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \tilde{\varphi}(u, u_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_r}, \sigma(x), \sigma(x_{\tau_1}), \dots, \sigma(x_{\tau_r}), \sigma^\rho(\rho)) \\ y = Cx = x^1 \end{cases} \quad (4.12)$$

Il est clair que le système (4.12) est identique au système (4.7) pour tout $(x, u, \rho) \in X \times U \times \Omega$. Par conséquent, nous pouvons considérer le système (4.12) à la place de (4.7) lors de la synthèse des observateurs. En effet, c'est le système (4.12) qui sera considéré dans toute la suite de cette contribution. Rappelons que pour toute entrée bornée $u \in U$, la fonction $\tilde{\varphi}(u, x, x_\tau, \rho)$ est par construction bornée et est globalement lipschitzienne par rapport à x , x_τ et ρ . On peut se référer à [85, 86, 17, 29] pour plus de détails sur la façon de procéder pour effectuer les prolongements. Dans la suite de ce chapitre et dans un but de clarté, nous supposons que les prolongements ont déjà été effectués et par conséquent que les nonlinéarités considérées sont bornées et globalement lipchitziennes. De ce fait, on utilisera la notation φ et non $\tilde{\varphi}$ pour désigner le prolongement.

4.3.2 Synthèse de l'observateur

Pour alléger la démonstration et sans nuire à la généralité, on traitera le long de cette partie le cas où un seul retard noté τ intervient dans la dynamique. Le système (4.7) s'écrit alors comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(u(t), u_\tau(t), x(t), x_\tau(t), \rho) \\ y(t) = Cx(t) = x^1(t) \end{cases} \quad (4.13)$$

Avant de donner les équations de l'observateur proposé, nous introduisons les notations suivantes :

1) Soient Δ_θ et S les matrices définies au chapitre précédent et donnés par les équations (2.34) et (2.33). Pour la clarté, nous rappelons les définitions de ces matrices :

La matrice Δ_θ est définie comme suit :

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left[I_p, \frac{1}{\theta} I_p, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}} I_p \right] \quad (4.14)$$

où θ est un réel positif ($\theta > 0$).

La matrice S symétrique définie positive et satisfait l'équation algébrique de Lyapunov suivante :

$$S + A^T S + SA - C^T C = 0 \quad (4.15)$$

2) Soit $K(\xi) : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^p$ une fonction bornée satisfaisant la propriété suivante : pour tout compact $D \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\forall \xi \in D : \quad \xi^T C^T C K(\xi) \geq \frac{1}{2} \xi^T C^T C \xi \quad (4.16)$$

où la matrice C est donnée par (2.30).

L'observateur candidat que nous proposons pour le système (4.13) est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + \varphi(u(t), u_\tau(t), \hat{x}(t), \hat{x}_\tau(t), \hat{\rho}) - \theta \Delta_\theta^{-1} (S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^T(t)) C^T K(C(\hat{x} - x)) \\ \dot{\hat{\rho}} &= -\theta P \Upsilon^T(t) C^T K(C(\hat{x} - x)) \\ \dot{\Upsilon}(t) &= \theta (A - S^{-1} C^T C) \Upsilon(t) + \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \hat{\rho}) ; \Upsilon(0) = 0 \\ \dot{P}(t) &= -\theta P(t) \Upsilon(t)^T C^T C \Upsilon(t) P(t) + \theta P(t) \text{ avec } P(0) = P^T(0) > 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

où $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ avec $\hat{x}^k \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \dots, q$; $\tilde{x} = \hat{x} - x$ où x est la trajectoire

inconnue du système (4.13); $\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}^1 \\ \hat{\rho}^2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}^m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$;

$K(C\tilde{x})$ est une fonction satisfaisant la condition (4.16); u et y sont respectivement l'entrée et la sortie du système (4.13); $\theta > 0$ est un nombre réel et enfin $P(0) = P^T(0)$ signifie que la condition initiale pour l'EDO régissant la matrice $P(t)$ dans le système (4.17) est prise symétrique définie positive.

Avant d'énoncer le résultat principal de cette contribution, nous avons besoin de l'hypothèse additionnelle suivante :

Hypothèse 4.7. *L'entrée u est tel que pour toute trajectoire $(\hat{x}, \hat{\rho}) \in X \times \Omega$ du système (4.13), la matrice $C\Upsilon(t)$ est à excitation persistante c.à.d. :*

$$\begin{aligned} &\exists \delta_1, \quad \delta_2; \exists T > 0; \forall t \geq 0 : \\ &\delta_1 I_m \leq \int_t^{t+T} \Upsilon^T(\tau) C^T C \Upsilon(\tau) d\tau \leq \delta_2 I_m \end{aligned}$$

Nous énonçons maintenant le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Supposons que le système (4.13) vérifie les hypothèses (H4.3) à (H4.7). Alors le système (4.17) est un observateur adaptatif, garantissant l'estimation des trajectoires de (4.13) et des paramètres inconnus avec une convergence exponentielle.*

4.3.3 Analyse de la convergence

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin au préalable d'établir les deux résultats suivants :

(a) Pour $t \geq t_0$, la matrice $P(t)$ régie par l'EDO donnée par le système (4.17) est symétrique définie positive dès que $P(0)$ l'est. De plus, $P(t)$ est bornée et ses bornes (inférieure et supérieure) ne dépendent pas de θ .

(b) La matrice Υ régie par l'EDO donnée par le système (4.17) est bornée et sa borne supérieure ne dépendent pas de θ pour $\theta \geq 1$.

Commençons par démontrer le (a). En effet, considérons l'EDO suivante :

$$\dot{M}(t) = \theta \Upsilon^T(t) C^T C \Upsilon(t) - \theta M(t); \quad M(0) = M^T(0) > 0 \quad (4.18)$$

où $M(t)$ est une matrice $m \times m$. Il est clair que la matrice $M(t)$ est la version filtrée (par un filtre stable d'ordre 1 et de pôle $(-\theta)$ de la matrice $\theta \Upsilon^T(t) C^T C \Upsilon(t)$). Or la matrice $\Upsilon^T(t) C^T C \Upsilon(t)$ est à excitation persistante d'après l'hypothèse (H4.5) ce qui implique que la matrice $M(t)$ est symétrique définie positive dès que $M(0)$ l'est [29]. Montrons maintenant que les bornes supérieure et inférieure de $M(t)$ ne dépendent pas de θ . Pour ce faire, réalisons une mise à l'échelle temporelle via le changement $s = t/\theta$ et considérons la matrice $\bar{M}(t) = M(s) \triangleq M(t/\theta)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \dot{\bar{M}}(t) &= \frac{1}{\theta} \dot{M}(t/\theta) \\ &= \Upsilon^T(t) C^T C \Upsilon(t) - M(t/\theta) \\ &= \Upsilon^T(t) C^T C \Upsilon(t) - \bar{M}(t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Il est clair que l'EDO régissant $\bar{M}(t)$ ne dépend pas de θ et par conséquent il en est de même pour les bornes de $\bar{M}(t)$ et de manière équivalente pour celles de $M(t)$.

Finalement, comme la matrice $M(t) = M^T(t) > 0$, il en est de même pour $M^{-1}(t)$ qui est régie par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{M}^{-1}(t) &= -M^{-1}(t)\dot{M}(t)M^{-1}(t) \\ &= -\theta M^{-1}\Upsilon^T(t)C^T C\Upsilon(t)M^{-1} + \theta M^{-1} \end{aligned} \quad (4.20)$$

La matrice $M^{-1}(t)$ est régie par la même EDO que celle de $P(t)$ et nous avons donc $P(t) = M^{-1}(t)$ (ou de manière équivalente $P^{-1}(t) = M(t)$) dès que $P(0) = M^{-1}(0)$. Pour conclure, sous l'hypothèse (H4.5), la matrice $P(t)$ est symétrique définie positive dès que $P(0)$ l'est.

Nous allons maintenant démontrer le (b), c'est-à-dire que $\Upsilon(t)$ est bornée et sa borne supérieure ne dépend pas de θ pour $\theta \geq 1$. Pour ce faire, procédons par un changement de l'échelle temporelle comme précédemment et posons $\bar{\Upsilon}(t) = \Upsilon(t/\theta)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{\Upsilon}(t) &= \frac{1}{\theta} \dot{\Upsilon}(t/\theta) \\ &= (A - S^{-1}C^T C) \Upsilon(t/\theta) + \frac{1}{\theta} \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \hat{\rho}) \\ &= (A - S^{-1}C^T C) \bar{\Upsilon}(t) + \frac{1}{\theta} \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \hat{\rho}) \end{aligned}$$

La matrice $\bar{\Upsilon}(t)$ est donc la version filtrée, par un filtre stable ayant tous ses pôles en (-1) (valeurs propres de $(A - S^{-1}C^T C)$), de la matrice $\frac{1}{\theta} \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \hat{\rho})$. Il s'ensuit que $\bar{\Upsilon}(t)$ est bornée dès que $\frac{1}{\theta} \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \hat{\rho})$ l'est. Or, la non linéarité $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \rho)$ correspond à un prolongement lipschitzien borné d'après la remarque 4.1 et elle est donc bornée pour tout $(u, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \rho) \in U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \Omega$. Il s'ensuit que la matrice $\frac{1}{\theta} \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \hat{\rho})$ est polynômiale en $1/\theta$ et sa norme peut donc être bornée par une constante qui ne dépend pas de θ pour $\theta \geq 1$.

Après avoir démontré les propriétés (a) et (b) énoncées ci-dessus, nous allons maintenant démontrer la convergence exponentielle vers zéro des erreurs d'observation et d'estimation paramétrique.

Remarquons tout d'abord que la dynamique de \hat{x} donnée par (4.17) peut s'écrire comme suit :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(u(t), u_\tau(t), \hat{x}(t), \hat{x}_\tau(t), \hat{\rho}) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T K(C\tilde{x}) + \Delta_\theta^{-1} \Upsilon(t) \dot{\hat{\rho}}(t) \quad (4.21)$$

Cette équation consiste en une copie du modèle (4.7) faisant apparaître deux termes correctifs. Le premier terme, $-\theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^TK(C\tilde{x})$ est plutôt classique et souvent utilisé pour la synthèse d'observateurs à grand gain [31]. Le second terme, $\Delta_\theta^{-1}\Upsilon(t)\dot{\hat{\rho}}(t)$, est similaire à l'expression utilisée pour l'adaptation des paramètres inconnus, c.à.d. l'expression de $\dot{\hat{\rho}}(t)$.

On définit le vecteur d'erreur d'observation $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ et celle d'estimation des paramètres $\tilde{\rho} = \hat{\rho} - \rho$, d'après (4.7) et (4.17), leur dynamique est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + \varphi(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \hat{\rho}) - \varphi(u, u_\tau, x, x_\tau, \rho) - \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^TK(C\tilde{x}) + \Delta_\theta^{-1}\Upsilon\dot{\tilde{\rho}} \\ \dot{\tilde{\rho}} &= -\theta P\Upsilon^TC^TK(C\tilde{x})\end{aligned}\tag{4.22}$$

En appliquant le théorème de la valeur moyenne (3.3) au cas vectoriel, on peut déduire l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\varphi(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \hat{\rho}) - \varphi(u, u_\tau, x, x_\tau, \rho) &= \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \xi_\rho)\tilde{\rho} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau}(u, u_\tau, \hat{x}, \xi_{x_\tau}, \rho)\tilde{x}_\tau \\ &\quad + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(u, u_\tau, \xi_x, x_\tau, \rho)\tilde{x}\end{aligned}\tag{4.23}$$

avec $\xi_x, \xi_{x_\tau} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\xi_\rho \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

En remplaçant (4.23) dans (4.22), on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(u, u_\tau, \xi_x, x_\tau, \rho)\tilde{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau}(u, u_\tau, \hat{x}, \xi_{x_\tau}, \rho)\tilde{x}_\tau + \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \hat{\rho})\tilde{\rho} \\ &\quad + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \xi_\rho) - \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \hat{\rho}) \right) \tilde{\rho} - \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^TK(C\tilde{x}) + \Delta_\theta^{-1}\Upsilon\dot{\tilde{\rho}}\end{aligned}\tag{4.24}$$

Considérons le changement de variable suivant : $\bar{x} = \Delta_\theta\tilde{x}$, en utilisant les identités introduites au chapitre précédent (3.67), la dynamique de \bar{x} s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \theta A\bar{x} + \Delta_\theta \frac{\partial\varphi}{\partial x}(u, u_\tau, \xi_x, x_\tau, \rho)\Delta_\theta^{-1}\bar{x} + \Delta_\theta \frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau}(u, u_\tau, \hat{x}, \xi_{x_\tau}, \rho)\Delta_\theta^{-1}\bar{x}_\tau \\ &\quad + \Delta_\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \rho)\tilde{\rho} + \Delta_\theta \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \xi_\rho) - \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \rho) \right) \tilde{\rho} \\ &\quad - \theta S^{-1}C^TK(\tilde{C}\bar{x}) + \Upsilon(t)\dot{\tilde{\rho}}(t)\end{aligned}\tag{4.25}$$

Maintenant on définit le couplage entre l'erreur d'observation et celui de l'estimation des paramètres en introduisant la variable $\eta(t) = \bar{x}(t) - \Upsilon(t)\tilde{\rho}(t)$ où $\Upsilon(t)$ est la matrice définie $n \times m$ régie par l'EDO donnée au système (4.17). La dérivée par rapport au temps de $\eta(t)$ peut être générée à partir de (4.25) comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{\eta} &= \dot{\tilde{x}} - \Upsilon \dot{\tilde{\rho}} - \Upsilon \dot{\tilde{\rho}} \\
&= \theta A(\eta + \Upsilon \tilde{\rho}) + \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, u_\tau, \xi_x, x_\tau, \rho) \Delta_\theta^{-1} \tilde{x} + \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}(u, u_\tau, \hat{x}, \xi_{x_\tau}, \rho) \Delta_\theta^{-1} \tilde{x}_\tau \\
&\quad + \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \hat{\rho}) \tilde{\rho} + \Delta_\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \xi_\rho) - \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \hat{\rho}) \right) \tilde{\rho} \\
&\quad - \theta S^{-1} C^T K(C \tilde{x}) - \Upsilon \dot{\tilde{\rho}} \\
&= \theta A \eta + \theta S^{-1} C^T C \Upsilon \tilde{\rho} - \theta S^{-1} C^T K(C \tilde{x}) \\
&\quad + \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, u_\tau, \xi_x, x_\tau, \rho) \Delta_\theta^{-1} \tilde{x} + \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}(u, u_\tau, \hat{x}, \xi_\tau, \rho) \Delta_\theta^{-1} \tilde{x}_\tau \\
&\quad + \Delta_\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \xi_\rho) - \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \hat{\rho}) \right) \tilde{\rho} \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Notons que la dernière égalité est obtenue à partir de la dynamique de Υ donnée dans (4.17).

On considère maintenant la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii candidate suivante :

$$V(t, \eta, \tilde{\rho}) = V_1(t, \eta) + V_2(t, \tilde{\rho}) \tag{4.27}$$

avec

$$V_1(t, \eta) = \eta^T S \eta + \theta^{-\frac{t}{2\tau^*}} \int_{t-\tau(t)}^t \theta^{-\frac{s}{2\tau^*}} \eta^T(s) \eta(s) ds \tag{4.28}$$

et

$$V_2(t, \tilde{\rho}) = \tilde{\rho}^T P^{-1} \tilde{\rho} + \theta^{-\frac{t}{2\tau^*}} \int_{t-\tau(t)}^t \theta^{-\frac{s}{2\tau^*}} \tilde{\rho}^T(s) \tilde{\rho}(s) ds \tag{4.29}$$

La dérivée de V_1 le long des trajectoires de (4.25) a pour expression :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= 2\eta^T S \dot{\eta} - \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} (V_1 - \eta^T S \eta) + \theta^{-\frac{t}{2\tau^*}} \left(\theta^{\frac{t}{2\tau^*}} \eta^T \eta - (1 - \dot{\tau}) \theta^{-\frac{t-\tau}{2\tau^*}} \eta_\tau^T \eta_\tau \right) \\
&= 2\eta^T S \dot{\eta} - \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} (V_1 - \eta^T S \eta) + \eta^T \eta - (1 - \dot{\tau}) \theta^{\frac{\tau}{2\tau^*}} \eta_\tau^T \eta_\tau \tag{4.30}
\end{aligned}$$

En remplaçant la dynamique de η dans (4.30) on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 + \frac{\ln \theta}{2\tau^*} V_1 &= 2\theta \eta^T S A \eta + 2\theta \eta^T C^T C \Upsilon \tilde{\rho} - 2\theta \eta^T C^T K(C \tilde{x}) \\
&\quad + 2\eta^T S \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, u_\tau, \xi_x, x_\tau, \rho) \Delta_\theta^{-1} (\eta + \Upsilon \tilde{\rho}) \\
&\quad + 2\eta^T S \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}(u, u_\tau, \hat{x}, \xi_{x_\tau}, \rho) \Delta_\theta^{-1} (\eta_\tau + \Upsilon_\tau \tilde{\rho}_\tau) \\
&\quad + 2\eta^T S \Delta_\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \xi_\rho) - \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \rho) \right) \tilde{\rho} \\
&\quad + \frac{\ln \theta}{2\tau^*} \eta^T S \eta + \eta^T \eta - (1 - \dot{\tau}) \theta^{\frac{\tau}{2\tau^*}} \eta_\tau^T \eta_\tau \tag{4.31}
\end{aligned}$$

avec $\Upsilon_\tau = \Upsilon(t - \tau(t)) \quad \forall t > 0$.

A partir de l'hypothèse (H4.4), on peut déduire pour $\theta \geq 1$ la majoration suivante :

$$\begin{aligned} (1 - \dot{\tau})\theta^{\frac{-\tau}{2\tau^*}} &= \frac{1 - \dot{\tau}}{\sqrt{\theta^{\tau/\tau^*}}} \\ &\geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta^{\tau/\tau^*}}} \\ &\geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta}} \quad \forall \theta \geq 1 \end{aligned} \quad (4.32)$$

En utilisant cette majoration avec la définition de S dans (4.15) on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 + \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} V_1 &\leq -\theta\eta^T S\eta + \theta\eta^T C^T C\eta + 2\theta\eta^T C^T C\Upsilon\tilde{\rho} - 2\theta\eta^T C^T K(C\bar{x}) \\ &\quad + 2\eta^T S\Delta_\theta \frac{\partial\varphi}{\partial x}(u, u_\tau, \xi_x, x_\tau, \rho)\Delta_\theta^{-1}(\eta + \Upsilon\tilde{\rho}) \\ &\quad + 2\eta^T S\Delta_\theta \frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau}(u, u_\tau, \hat{x}, \xi_\tau, \rho)\Delta_\theta^{-1}(\eta_\tau + \Upsilon_\tau\tilde{\rho}_\tau) \\ &\quad + 2\eta^T S\Delta_\theta \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \xi_\rho) - \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \hat{\rho}) \right) \tilde{\rho} \\ &\quad + \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} \eta^T S\eta + \eta^T \eta - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta}} \eta_\tau^T \eta_\tau \end{aligned} \quad (4.33)$$

Compte tenu de la structure triangulaire de la fonction φ par rapport à x et x_τ , les matrices $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\cdot)$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau}(\cdot)$ sont triangulaires inférieures. De plus, ces matrices sont bornées d'après l'hypothèse (H2). Par conséquent, les matrices $\Delta_\theta \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\cdot)\Delta_\theta^{-1}$ et $\Delta_\theta \frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau}(\cdot)\Delta_\theta^{-1}$ sont polynomiales en $\frac{1}{\theta}$ et sont uniformément bornées par des constantes qui ne dépendent pas de θ pour $\theta \geq 1$, c.à.d :

$$\left\| \Delta_\theta \frac{\partial\varphi}{\partial x}(u, u_\tau, \xi_x, x_\tau, \rho)\Delta_\theta^{-1} \right\| \leq k_1 \quad (4.34)$$

$$\left\| \Delta_\theta \frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau}(u, u_\tau, \hat{x}, \xi_\tau, \rho)\Delta_\theta^{-1} \right\| \leq k_2 \quad (4.35)$$

tels que k_1 et k_2 sont des constantes positives qui ne dépendent pas de θ pour $\theta \geq 1$.

De la même manière, la fonction φ est globalement Lipschitzienne par rapport à ρ , on a alors :

$$\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \xi_\rho) \right\| \leq k'_3 \quad (4.36)$$

Ce qui implique pour $\theta \geq 1$ l'inégalité suivante :

$$\left\| \Delta_\theta \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \xi_\rho) - \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \hat{\rho}) \right) \right\| \leq 2k'_3 \triangleq k_3 \quad (4.37)$$

Où k'_3 et k_3 sont des constantes positives qui ne dépendent pas de θ pour $\theta \geq 1$.

A partir de ces inégalités, on peut maintenant déduire les majorations suivantes :

$$\|2\eta^T S \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, u_\tau, \xi_x, x_\tau, \rho) \Delta_\theta^{-1}(\eta + \Upsilon \tilde{\rho})\| \leq 2k_1 \|\eta^T S\| (\|\eta\| + \|\Upsilon\| \|\tilde{\rho}\|) \quad (4.38)$$

$$\|2\eta^T S \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}(u, u_\tau, \hat{x}, \xi_\tau, \rho) \Delta_\theta^{-1}(\eta_\tau + \Upsilon_\tau \tilde{\rho}_\tau)\| \leq 2k_2 \|\eta^T S\| (\|\eta_\tau\| + \|\Upsilon_\tau\| \|\tilde{\rho}_\tau\|) \quad (4.39)$$

$$\|2\eta^T S \Delta_\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \xi_\rho) - \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(u, u_\tau, \hat{x}, \hat{x}_\tau, \hat{\rho}) \right) \tilde{\rho}\| \leq 2k_3 \|\eta^T S\| \|\tilde{\rho}\| \quad (4.40)$$

$$(4.41)$$

En remplaçant finalement (4.38) dans (4.33), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 + \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} V_1 &\leq -\theta \eta^T S \eta + \theta \eta^T C^T C \eta + 2\theta \eta^T C^T C \Upsilon \tilde{\rho} - 2\theta \eta^T C^T K(C\bar{x}) \\ &\quad + \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} \eta^T S \eta + \eta^T \eta - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta}} \eta_\tau^T \eta_\tau \\ &\quad + c_1 \eta^T \eta + c_2 \eta_\tau^T \eta_\tau + c_3 \eta^T \tilde{\rho} + c_4 \eta_\tau^T \tilde{\rho}_\tau \end{aligned} \quad (4.42)$$

tels que $c_1 = 2k_1 \lambda_M(S)$, $c_2 = 2k_2 \lambda_M(S)$, $c_3 = 2\lambda_M(S)(k_1 \gamma + k_3)$, $c_4 = 2k_2 \lambda_M(S) \gamma$ avec $\gamma = \sup_{t \geq 0} \Upsilon(t)$ et $\lambda_M(\cdot)$ est la plus grande valeur propre de (\cdot) .

Par ailleurs, la dérivée de V_2 est donnée par :

$$\dot{V}_2 = 2\tilde{\rho}^T P^{-1} \dot{\tilde{\rho}} - \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} (V_2 - \tilde{\rho}^T P^{-1} \tilde{\rho}) + \tilde{\rho}^T \dot{\tilde{\rho}} - (1 - \dot{\tau}) \theta^{\frac{\tau}{2\tau^*}} \tilde{\rho}_\tau^T \tilde{\rho}_\tau - \tilde{\rho}^T P^{-1} \dot{P} P^{-1} \tilde{\rho} \quad (4.43)$$

En utilisant la dynamique de ρ donnée par (4.17) d'une part, et l'inégalité (4.32) d'autre part, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 + \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} V_2 &\leq -2\theta \tilde{\rho}^T \Upsilon^T C^T K(C\bar{x}) + \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} \tilde{\rho}^T P^{-1} \tilde{\rho} \\ &\quad + \tilde{\rho}^T \dot{\tilde{\rho}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta}} \tilde{\rho}_\tau^T \tilde{\rho}_\tau + \theta \tilde{\rho}^T \Upsilon^T C^T C \Upsilon \tilde{\rho} - \theta \tilde{\rho}^T P^{-1} \tilde{\rho} \end{aligned} \quad (4.44)$$

On peut maintenant regrouper les deux résultats (4.42) et (4.44), pour aboutir à la dynamique de V :

$$\begin{aligned} \dot{V} + \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} V &= \dot{V}_1 + \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} V_1 + \dot{V}_2 + \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} V_2 \\ &\leq -\theta \eta^T S \eta + \theta (\eta + \Upsilon \tilde{\rho})^T C^T C (\eta + \Upsilon \tilde{\rho}) - 2\theta (\eta + \Upsilon \tilde{\rho})^T C^T K(C\bar{x}) \\ &\quad + \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} \eta^T S \eta + \eta^T \eta - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta}} \eta_\tau^T \eta_\tau + \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} \tilde{\rho}^T P^{-1} \tilde{\rho} + \tilde{\rho}^T \dot{\tilde{\rho}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta}} \tilde{\rho}_\tau^T \tilde{\rho}_\tau - \theta \tilde{\rho}^T P^{-1} \tilde{\rho} \\ &\quad + c_1 \eta^T \eta + c_2 \eta_\tau^T \eta_\tau + c_3 \eta^T \tilde{\rho} + c_4 \eta_\tau^T \tilde{\rho}_\tau \end{aligned} \quad (4.45)$$

A partir de la propriété de la fonction K donnée dans (4.16), on peut déduire ce qui suit :

$$\begin{aligned} \theta (\eta + \Upsilon \tilde{\rho})^T C^T C (\eta + \Upsilon \tilde{\rho}) - 2\theta (\eta + \Upsilon \tilde{\rho})^T C^T K(C\bar{x}) &= \theta (\bar{x}^T C^T C \bar{x} - 2\bar{x}^T C^T K(C\bar{x})) \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

L'équation (4.45) peut alors s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V} + \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} V &\leq - \left(\theta - \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} - \frac{1+c_1}{\lambda_m(S)} \right) \eta^T S \eta \\ &\quad - \left(\theta - \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} - \frac{1}{\lambda_M(P)} \right) \tilde{\rho}^T P^{-1} \tilde{\rho} \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta}} \eta_\tau^T \eta_\tau - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta}} \tilde{\rho}_\tau^T \tilde{\rho}_\tau \\ &\quad + \eta^T (c_2 \eta_\tau + c_3 \tilde{\rho} + c_4 \tilde{\rho}_\tau) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Où $\lambda_m(\cdot)$ est la plus petite valeur propre de (\cdot) .

On choisit dans un premier temps θ assez grand, de sorte que :

$$\mu_1(\theta) \triangleq \theta - \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} - \frac{1+c_1}{\lambda_m(S)} > 0 \text{ et } \mu_2(\theta) \triangleq \theta - \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} - \frac{1}{\lambda_M(P)} > 0 \quad (4.48)$$

Notations 4.1. On introduit les variables suivantes afin de simplifier les formules :

$$V^* = \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \\ V_3^* \\ V_4^* \end{pmatrix} \text{ avec} \quad (4.49)$$

$$V_1^* = \mu_1(\theta) \eta^T S \eta, \quad V_2^* = \mu_2(\theta) \tilde{\rho}^T P^{-1} \tilde{\rho},$$

$$V_3^* = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta}} \eta_\tau^T \eta_\tau, \quad V_4^* = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta}} \tilde{\rho}_\tau^T \tilde{\rho}_\tau$$

A partir de ces nouvelles variables, l'équation (4.47) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V} + \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} V &\leq -V_1^* - V_2^* - V_3^* - V_4^* \\ &\quad + \frac{\sqrt{V_1^*}}{\lambda_m(S) \sqrt{\mu_1(\theta)}} \left(c_2 \frac{\theta^{1/4} \sqrt{V_3^*}}{\sqrt{\varepsilon}} + c_3 \frac{\sqrt{V_2^*}}{\lambda_M(P) \sqrt{\mu_2(\theta)}} + c_4 \frac{\theta^{1/4} \sqrt{V_4^*}}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \\ &= -\frac{1}{2} V^{*T} M(\theta) V^* \end{aligned} \quad (4.50)$$

Tel que :

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} 2 & m_{12}(\theta) & m_{13}(\theta) & m_{14}(\theta) \\ m_{12}(\theta) & 2 & 0 & 0 \\ m_{13}(\theta) & 0 & 2 & 0 \\ m_{14}(\theta) & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

avec

$$\begin{aligned} m_{12}(\theta) &= \sqrt{\frac{c_3^2}{\lambda_M^2(P)\lambda_m^2(S)\mu_1(\theta)\mu_2(\theta)}} \\ m_{13}(\theta) &= \sqrt{\frac{c_2^2\theta^{1/2}}{\lambda_m^2(S)\varepsilon\mu_1(\theta)}} \\ m_{14}(\theta) &= \sqrt{\frac{c_4^2}{\lambda_M^2(P)\lambda_m^2(S)\mu_1(\theta)\mu_2(\theta)}} \end{aligned}$$

D'après la structure de la matrice M (4.51), celle-ci est symétrique définie positive si son déterminant est strictement positif. Or on a :

$$\det(M(\theta)) = 4(4 - m_{12}(\theta) - m_{13}(\theta) - m_{14}(\theta)) \quad (4.52)$$

Ce déterminant est strictement positif pour des valeurs de θ relativement élevées. L'équation (4.47) devient alors :

$$\dot{V} + \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*} V \leq 0 \quad (4.53)$$

On pose $\eta(\theta) = \frac{\ln(\theta)}{2\tau^*}$ et on obtient :

$$V(t) \leq e^{-\eta(\theta)t} \max_{s \in [-\tau^*, 0]} V(s) \quad (4.54)$$

Ceci termine la démonstration.

4.3.4 Quelques observateurs particuliers

Dans ce paragraphe, nous allons considérer quelques fonctions qui satisfont la condition (4.16) et qui sont donc valables pour $K(C\tilde{x}) = K(\hat{y}-y)$. Nous montrerons que certaines de ces fonctions permettent de retrouver des observateurs bien connus tels que l'observateur adaptatif à grand gain ou des observateurs adaptatifs de type modes glissants.

4.3.4.1 Observateur adaptatif à grand gain

Considérons l'expression suivante de $K(C\tilde{x})$:

$$K_{HG}(C\tilde{x}) = kC\tilde{x} \quad (4.55)$$

où k est un nombre réel positif tel que $k \geq \frac{1}{2}$. On peut facilement vérifier que (4.55) satisfait la condition (4.16). Notons que si tous les paramètres sont connus, on reconnaît facilement la structure d'un observateur à grand gain. Plus précisément, l'observateur proposé avec $K(C\tilde{x})$ spécifié dans (4.55) est en effet une version adaptative de l'observateur d'état communément appelé à grand gain (cf. par exemple [39, 30]).

4.3.4.2 Observateur adaptatif de type mode glissant

Considérons l'expression suivante du vecteur $K(C\tilde{x})$:

$$K(C\tilde{x}) = ksign(C\tilde{x}) \quad (4.56)$$

où $k > 0$ est un nombre réel et 'sign' est la fonction signe usuelle. En effet, pour les systèmes à entrées-bornées sorties-bornées, la condition (4.16) est satisfaite par (4.56). Cependant, il est bien connu que l'utilisation de la fonction signe donne lieu au phénomène de réticence (connu sous le nom de 'chattering') et de ce fait elle est souvent approchée par des fonctions appropriées. Ces fonctions permettent d'une part de surmonter les problèmes de la fonction signe, d'autre part elles sont d'une grande importance en pratique du fait qu'elles sont largement utilisées dans l'implantation d'observateurs de type mode glissant. En effet, considérons la fonction suivante :

$$K_{Tanh}(C\tilde{x}) = k_1Tanh(k_0C\tilde{x}) \quad (4.57)$$

où $Tanh$ désigne la fonction tangente hyperbolique et $k_1, k_0 > 0$ étant deux nombres réels positifs.

On peut facilement vérifier que (4.57) satisfait la condition (4.16) pour des grandes valeurs de k_1 . De plus, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} Tanh(k_0C\tilde{x}) = sign(C\tilde{x})$.

De la même façon, on peut montrer facilement que la fonction tangente hyperbolique peut être remplacée par l'inverse de la fonction tangente $K_{ArcTan}(C\tilde{x})$ qui représente aussi une expression valide pour $K(C\tilde{x})$. En plus, on peut considérer de nouvelles expressions valides pour $K(C\tilde{x})$, par exemple en ajoutant $K_{Tanh}(C\tilde{x})$ à $K_{HG}(C\tilde{x})$. Bien sûr, le choix de $K(C\tilde{x})$ reste très large et ne se limite pas aux fonctions que nous venons de présenter.

4.4 Exemples d'illustration

4.4.1 Exemple 1 : Identification d'un moteur à fuel

Cet exemple traite l'identification d'un moteur à fuel qui peut être décrit par le système linéaire du second ordre SISO avec retard suivant [41] :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= \rho_1 \dot{u}(t - \rho_5) + \rho_2 u(t - \rho_5) - \rho_3 z_2(t) - \rho_4 z_1(t) \\ y(t) &= z_1(t) \end{cases} \quad (4.58)$$

où la sortie $z_1(t)$ est le rapport carburant/air à l'intérieur du moteur et l'entrée $u(t)$ est le rapport carburant injecté/air. On suppose que ce système est asymptotiquement stable tandis que les paramètres inconnus ρ_i sont constants et positifs. Ce système a été récemment considéré dans [41] où les auteurs ont proposé un procédé d'identification en ligne pour estimer les paramètres du modèle. L'inconvénient majeur de la méthode proposée réside dans le fait que le retard, c'est-à-dire ρ_5 , peut être estimé à condition que sa vraie valeur doit appartenir à un ensemble de nombres finis de valeurs connues. Une telle condition est inutile avec l'approche proposée dans ce chapitre puisque le système (4.58) est sous la forme (4.13) avec

$$A \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(u, z, \rho) \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_1 \dot{u}(t - \rho_5) + \rho_2 u(t - \rho_5) - \rho_3 z_2(t) - \rho_4 z_1(t) \end{pmatrix}$$

et on peut alors utiliser un observateur de la forme (4.17) pour l'estimation de ρ_i , $i = 1, \dots, 5$ aussi bien que pour l'estimation de l'état non mesurable z_2 .

Notons que la conception d'observateur exige le calcul de la matrice $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(u, \hat{z}, \hat{\rho})$ qui peut être écrite comme suit :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(u, \hat{z}, \hat{\rho}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{u}(t - \rho_5) & u(t - \rho_5) & -\hat{z}_2 & -\hat{z} & -(\rho_1 \dot{u}(t - \rho_5) + \rho_2 \dot{u}(t - \rho_5)) \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

Beaucoup d'essais en simulation ont été effectués en utilisant différentes expressions de la fonction de synthèse de l'observateur $K(C\tilde{x})$. Comme dans le premier exemple et puisque les résultats obtenus étaient assez semblables, on ne fournit ici uniquement que ceux obtenus avec l'observateur à grand gain standard, c'est-à-dire que, la fonction K est définie par l'équation (4.55). L'entrée $u(t)$ a été générée comme étant la sortie d'un filtre de second ordre avec un pôle double en -5 attaqué par une entrée de type bruit blanc centré suivant une loi normale. Ceci nous a permis d'obtenir simultanément les dérivées par rapport au temps, \dot{u} et \ddot{u} , de l'entrée u du système. La simulation a été effectuée sous

l'environnement de MATLAB et l'entrée du filtre du second ordre a été choisie en faisant appel à la fonction standard de MATLAB suivante :

$$v(t) = 0.012(4 + \text{randn}([0 : 0.1 : t_f], 1)); \quad (4.60)$$

où t_f désigne le temps final de simulation ($t_f = 50s$).

L'amplitude de l'entrée du filtre a permis d'obtenir une variation du signal de sortie dans la plage de fonctionnement normal du moteur, c'est-à-dire environ 0.08 (voir figure 4.1).

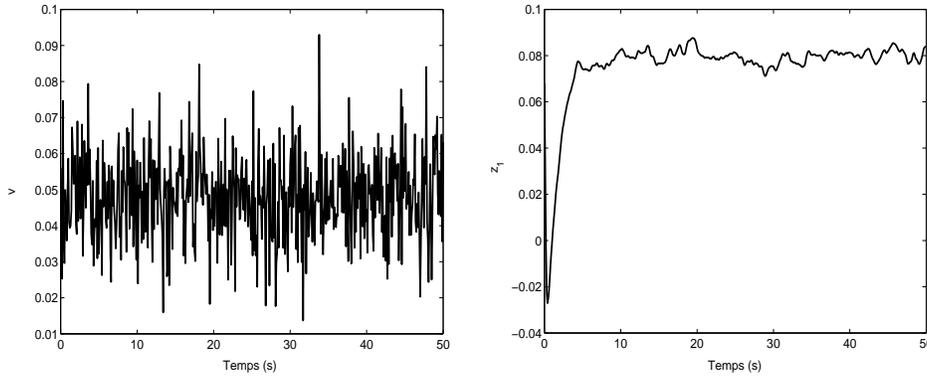


FIG. 4.1 – Évolution de l'entrée $v(t)$, avec la sortie correspondante $z_1(t)$

Les vraies valeurs des paramètres ρ_i utilisés dans le modèle de simulation sont [41] :

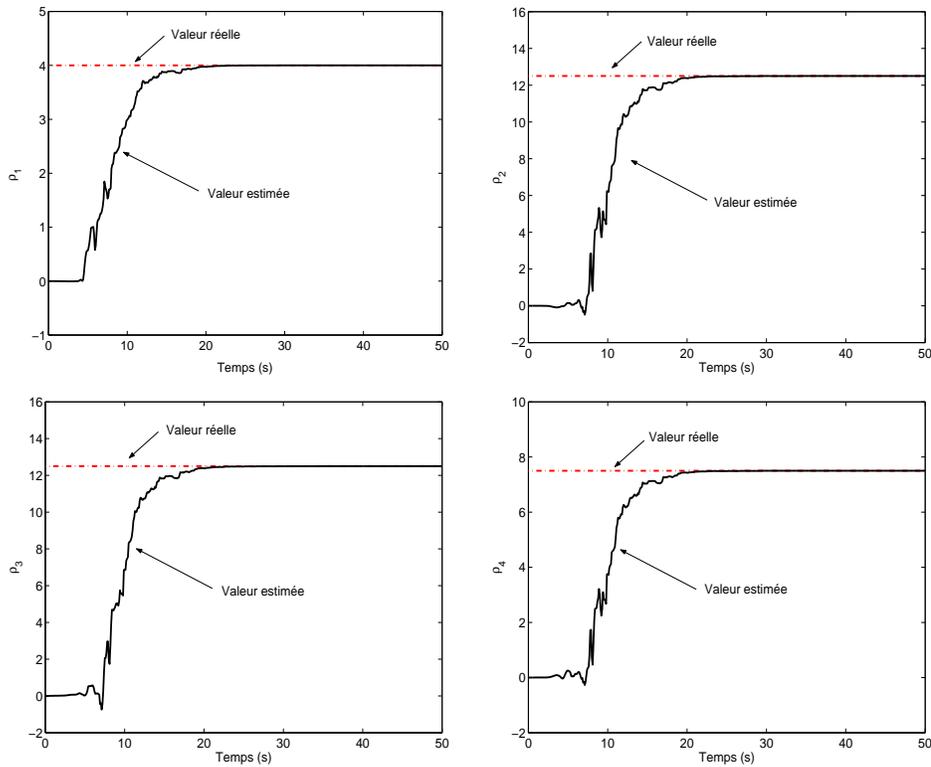
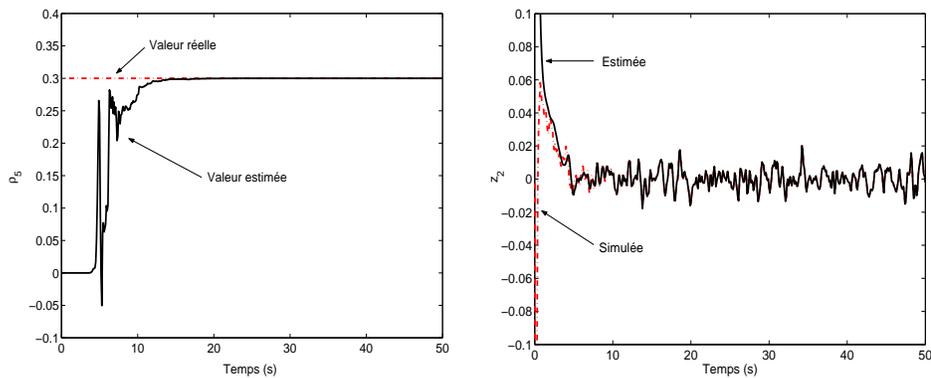
$$\rho_1 = 4 \quad \rho_2 = 12.5 \quad \rho_3 = 12.5 \quad \rho_4 = 7.5 \quad \rho_5 = 0.3$$

Les variables d'état du modèle, z_1, z_2 et de l'observateur \hat{z}_1, \hat{z}_2 sont initialisées à :

$$z_1(0) = \hat{z}_1(0) = 0.068 \quad z_2(0) = 0.1 \quad \hat{z}_2(0) = 0$$

Les estimés des cinq paramètres inconnus ont été arbitrairement initialisés à zéro dans l'observateur.

Lors de la simulation, le choix des paramètres de réglage est réalisé toujours selon l'approche essai-erreur. Les résultats donnés sont obtenus avec $\theta = 3$.

FIG. 4.2 – Estimation des paramètres inconnus ρ_1, ρ_4 FIG. 4.3 – Estimation du retard (ρ_5) et de l'état non mesuré z_2

Les estimés ρ_i , $i = 1, \dots, 5$ aussi bien que celui de z_2 fournis par l'observateur sont comparés à leurs vraies valeurs (générées par la simulation du modèle) dans les figures 4.2 et 4.3. Les résultats obtenus montrent clairement les bonnes performances de l'observateur qui fournit des estimations satisfaisantes des états aussi bien que des paramètres inconnus.

4.4.2 Exemple 2 : Synchronisation de systèmes hyperchaotiques

Depuis les années 1990, les techniques de synchronisation du chaos ont connu un formidable essor. Les travaux novateurs de Pecora et Carroll [80] ont constitué une révolution

dans l'étude de la synchronisation des systèmes chaotiques : ils ont prouvé que deux systèmes chaotiques identiques, de conditions initiales différentes, peuvent se synchroniser selon le principe appelé *maître-esclave*, ou *drive-response*, défilant ainsi la propriété de sensibilité aux conditions initiales caractéristiques du chaos. Par la suite, [74] et [78] ont relié le processus de synchronisation à un problème classique d'estimation d'état non linéaire : le récepteur peut être conçu comme un observateur de l'émetteur. Peu de travaux ont été consacrés à la synchronisation adaptative pour les systèmes chaotiques à retard. Cette classe de systèmes chaotiques de dimension infinie, étudiée en détails dans [27], possède un comportement hyperchaotique, plus complexe que celui des systèmes chaotiques (lié à la présence de plusieurs exposants de Lyapunov positifs), qui pourrait, à priori, renforcer la sécurité. Parmi les articles récents consacrés à ce sujet, on peut citer [67], [89]. Le premier utilise la théorie du contrôle adaptatif pour stabiliser des systèmes chaotiques comportant un retard connu. Le second fait appel à des techniques récentes d'optimisation multi-dimensionnelle pour estimer les paramètres - dont le retard - du système, mais la méthode proposée nécessite la connaissance de tout l'état du système à chaque instant. Nous proposons dans cette partie d'utiliser l'observateur adaptatif précédent pour approfondir la cryptanalyse du cryptosystème présenté dans [14].

Système hyperchaotique

Le système hyperchaotique considéré est présenté dans [14], où les auteurs détaillent un schéma de communication sécurisée, dont l'émetteur est un système hyperchaotique à retard, le récepteur est un observateur non linéaire et la transmission d'information, de type transmission sur deux voies, repose sur la modulation de phase d'un signal hyperchaotique. Le système considéré est le suivant :

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + \phi(x(t), x_\tau(t), \rho) \quad (4.61)$$

où

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

$$\phi(x, x_\tau, \rho) = \begin{pmatrix} -\alpha x_1(t) - \alpha \delta \tanh(x_1(t)) \\ x_1(t) - x_2(t) \\ -\beta x_2(t) - \gamma x_3(t) + \varepsilon \sin(\sigma x_1(t - \tau)) \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

et ρ est le vecteur de paramètres inconnus qui jouent le rôle de la clé de chiffrement dans cette partie.

La première étape consiste à mettre la dynamique de l'émetteur (4.61) sous la forme canonique (4.7), grâce au changement de variable suivant :

$$z = \Lambda x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} x \quad (4.64)$$

Pa conséquent, la dynamique de z est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) + (-\alpha z_1(t) - \alpha \delta \tanh(z_1(t))) \\ \dot{z}_2(t) = z_3(t) + (\alpha z_1(t) - z_2(t)) \\ \dot{z}_3(t) = (\beta z_2(t) - \gamma z_3(t) + \alpha \varepsilon \sin(\sigma z_1(t - \tau))) \end{cases} \quad (4.65)$$

Il apparaît clairement que le système dans les nouvelles coordonnées est sous la forme canonique (4.7). Les résultats du théorème 4.1 sont appliqués à l'émetteur, dans les nouvelles coordonnées. On obtient ensuite la dynamique de l'observateur dans les coordonnées originales (on remarquera que $C\Lambda = C$) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = F\hat{x}(t) + \phi(\hat{x}(t), \hat{x}_\tau(t), \hat{\rho}) - \theta \Lambda^{-1} \Delta_\theta^{-1} (S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^T(t))C^T C \tilde{x}(t) \\ \dot{\hat{\rho}} = -\theta P \Upsilon^T(t) C^T C \tilde{x}(t) \\ \dot{\Upsilon}(t) = \theta(A - S^{-1}C^T C)\Upsilon(t) + \Delta_\theta \Lambda \frac{\partial \phi}{\partial \rho}(\hat{x}, \hat{x}_\tau(t), \hat{\rho}) ; \Upsilon(0) = 0 \\ \dot{P}(t) = -\theta P(t)\Upsilon(t)^T(t)C^T C \Upsilon(t)(t)P(t) + \theta P(t) \text{ avec } P(0) = P^T(0) > 0 \end{cases} \quad (4.66)$$

Cryptanalyse

D'après les résultats du théorème 4.1, l'observateur (4.66) converge exponentiellement si les hypothèses (H4.3) à (H4.7) sont vérifiées. Les hypothèses (H4.3), (H4.4) et (H4.6) sont remplies, l'hypothèse (H4.5) dépend du choix des paramètres choisis pour tenir le rôle de la clé et l'hypothèse (H4.7) dépend des valeurs choisies pour l'ensemble des paramètres de l'émetteur : si l'émetteur est en régime chaotique, (H4.7) est vérifiée. Si l'émetteur est dans une fenêtre d'ordre (qui correspond à un retour à un comportement périodique après une phase chaotique), alors la condition d'excitation persistante ne peut être vérifiée. Il a été montré dans [14] que les paramètres de l'émetteur doivent justement être choisis pour garantir un comportement réellement hyperchaotique, ce qui définit l'espace des clés. On supposera donc que l'ensemble des paramètres appartient à cet espace des clés, et par conséquent l'hypothèse (H4.7) est vérifiée.

Les simulations montrent qu'un intrus, connaissant le cryptosystème, à l'exception d'un paramètre, peut se synchroniser avec l'émetteur, et estimer ces paramètres. On donne dans cet exemple l'estimation des paramètres γ et ε . Ces paramètres sont fixés au niveau

de l'émetteur et supposés inconnus au niveau du récepteur (4.66). ρ est par conséquent donné par le vecteur $(\gamma \ \varepsilon)^T$. On calcule la dérivée partielle de ϕ par rapport au vecteur ρ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho}(\hat{x}, \hat{x}_\tau(t), \hat{\rho}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\hat{x}_3(t) & \sin(\sigma \hat{x}_1(t - \tau)) \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

Les valeurs suivantes sont choisies afin de garantir un comportement hyperchaotique (cf.[14]).

α	β	γ	δ	ε	σ	τ
9	14	5	-1	100	10	1

TAB. 4.1 – Paramètres de l'émetteur (4.61)

Les conditions initiales suivantes ont été fixées :

$$x(0) = (0.1 \ 0.1 \ 0.1)^T, \quad \hat{x}(0) = -x(0),$$

La valeur de θ est fixée à 15.

Les figures ci-dessous illustrent ces simulations.

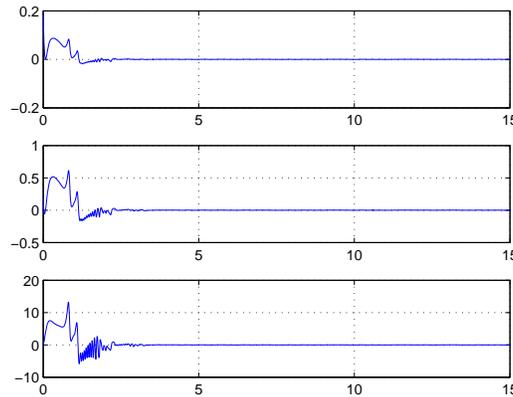
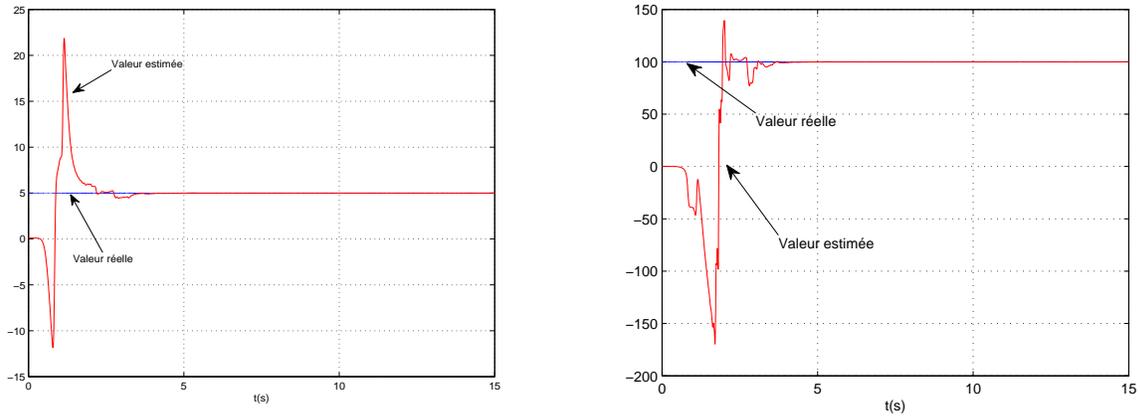


FIG. 4.4 – Erreurs de synchronisation $x_1 - \hat{x}_1$, $x_2 - \hat{x}_2$ et $x_3 - \hat{x}_3$

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré l'estimation conjointe de l'état et de paramètres inconnus pour une forme canonique de systèmes non linéaires MIMO à retards et dont les paramètres affectent la dynamique de l'état de manière non linéaire. Les observateurs proposés offrent une simplicité dans leur implémentation et garantissent une convergence

FIG. 4.5 – Evolution des paramètres inconnus γ et ε

exponentielle sous une certaine condition d'excitation persistante. Il a été démontré que certains choix de la fonction de synthèse des observateurs proposés ont permis de retrouver les observateurs adaptatifs à grand gain et à modes glissants. Des résultats de simulation ont été présentés pour illustrer ces performances. Avec cette méthode et comme nous l'avons vu en simulation, on peut estimer les retards constants qui apparaissent au niveau de l'entrée. Nous utiliserons plus particulièrement ce résultat au chapitre suivant, dans lequel nous allons considérer la classe des systèmes à sortie retardée.

Synthèse d'observateur pour des systèmes à sortie retardée

5.1 Introduction

Les travaux réalisés précédemment traitent des systèmes à retards avec un retard qui intervient dans la dynamique sans affecter la sortie. En effet, très peu de travaux traitent de la synthèse d'observateurs avec des sorties retardées. Cependant, dans certains cas, le retard s'avère inévitable au niveau de la sortie et peut se présenter sous forme de retard de transmission, d'échantillonnage, etc...

Parmi ces travaux, nous pouvons citer [40] et [52]. Dans [40], les auteurs proposent un observateur, dont la convergence est exponentielle, pour une classe de systèmes non linéaires mono-sortie uniformément observable, avec des non linéarités globalement lipschitziennes et avec une sortie exhibant un retard constant et connu, τ . L'observateur proposé consiste en une chaîne de $(m + 1)$ systèmes en cascade dont la dimension de chacun est égale à la dimension du système considéré. L'état du premier système de la cascade permet d'estimer l'état retardé du système avec un retard de τ . L'état du dernier système de la cascade est une estimation de l'état courant du système. Il est à noter que le nombre de systèmes en cascade est d'autant plus grand que la constante de Lipschitz et l'amplitude de retard sont importantes. Dans [52], les auteurs proposent un observateur en cascade ayant la même structure que celui proposé dans [40] pour une classe de systèmes similaire aussi à celle considérée dans [40]. Toutefois, le gain de l'observateur proposé dans [52] résulte de la résolution d'une équation aux dérivées partielles.

Dans cette contribution, nous proposons un observateur en cascade pour une classe de systèmes non linéaires uniformément observables exhibant un retard constant qui peut être connu ou non. La caractéristique principale de l'observateur proposé consiste dans le fait que son gain fait intervenir en particulier un paramètre de synthèse de type matrice. L'introduction de cette matrice qui devra être stable permet d'avoir un nombre relativement réduit de systèmes en cascade formant l'observateur proposé et ce même en présence de retard relativement important.

5.2 Formulation du problème

Considérons la classe de systèmes qui peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(u(t), x(t)) \\ y(t) = Cx(t - \tau) = x^1(t - \tau) \end{cases} \quad (5.1)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

l'état $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$; avec $x^k \in \mathbb{R}$; la sortie $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est disponible avec un retard

constant mais inconnu τ et u est l'entrée du système. La fonction non linéaire φ admet une structure triangulaire par rapport à x , c'est-à-dire

$$\varphi(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u, x^1) \\ \varphi^2(u, x^1, x^2) \\ \vdots \\ \varphi^q(u, x) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Nous adoptons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 5.1. *La fonction $\varphi(u, x)$ est Lipschitz par rapport à x uniformément en u où $(u, x) \in U \times X$.*

Notons que comme l'état reste confiné dans un compact X , on peut toujours étendre la fonction non linéaire $\varphi(u, x)$ en considérant un prolongement $\tilde{\varphi}(u, x)$ qui est globalement Lipschitzien et dont la restriction à X coïncide avec $\varphi(u, x)$, c'est à dire la fonction $\tilde{\varphi}(u, x)$ est globalement lipschitzienne sur \mathbb{R}^n . Une façon d'effectuer ce prolongement consiste à considérer une fonction de saturation qui soit au moins de classe \mathcal{C}^1 , $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow X$, $x \mapsto \sigma(x)$ qui coïncide avec x sur le compact X , i.e. $\sigma(x) = x$ pour tout $x \in X$. On définit alors le prolongement $\tilde{\varphi}$ de φ comme suit :

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(u, x) = \varphi(u, \sigma(x)) \end{cases} \quad (5.5)$$

Considérons maintenant le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \tilde{\varphi}(u, x) \\ y = Cx = x^1 \end{cases} \quad (5.6)$$

Il est clair que le système (5.6) est identique au système (5.1) pour tout $(x, u) \in X \times U$. Par conséquent, nous pouvons considérer le système (5.6) à la place de (5.1) lors de la synthèse des observateurs. En effet, c'est le système (5.6) qui sera considéré dans toute la suite de cette contribution. Rappelons que pour toute entrée bornée $u \in U$, la fonction $\tilde{\varphi}(u, x)$ est par construction bornée et est globalement lipschitzienne par rapport à x . On peut se référer à [85, 86, 17, 29] pour plus de détails sur la façon de procéder pour effectuer les prolongements. Dans la suite de ce chapitre et dans un but de clarté, nous supposons que les prolongements ont déjà été effectués et par conséquent que les non linéarités considérées sont bornées et globalement lipschitziennes. De ce fait, on utilisera la notation φ et non $\tilde{\varphi}$ pour désigner le prolongement.

Maintenant, nous attirons l'attention sur le fait que lorsque la sortie ne présente pas de retard, le système (5.1) est une forme canonique qui caractérise une classe de systèmes uniformément observables. On pourra se référer à [45, 29] où l'on présente plusieurs systèmes avec des transformations appropriées qui les mettent sous la forme (5.1). De plus, en l'absence de retard sur la sortie et sous l'hypothèse (H5.1), on peut concevoir un observateur, dont la convergence est exponentielle, pour l'estimation de la trajectoire du système (5.1). On pourra se référer à [45, 30] où de tels observateurs, de type grand gain, sont présentés.

Notre objectif consiste à concevoir un observateur pour estimer l'état du système (5.1) à partir de sa mesure retardée.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, très peu de travaux ont traité ce thème, i.e. conception d'observateur en présence de sortie retardée. Parmi les travaux concernés, nous pouvons citer ceux de [40] et [52] où les systèmes considérés possèdent une seule sortie et se mettent donc sous la forme (5.1) [39, 38]. De plus, le retard a été supposé connu. Dans ces travaux, les auteurs ont proposé un observateur en cascade pour les systèmes considérés et ont prouvé la convergence exponentielle de l'erreur d'observation sous une condition portant sur le retard et la constante de Lipschitz des non linéarités.

Dans ce qui suit, nous allons présenter la synthèse d'un observateur pour l'estimation de l'état courant du système (5.1). Pour la clarté de l'exposé, nous proposons de présenter la synthèse de l'observateur en supposant tout d'abord que le retard est connu. Puis, on montrera comment étendre la synthèse au cas du retard inconnu.

5.3 Synthèse de l'observateur

Avant de présenter le système dynamique correspondant aux équations de l'observateur en cascade, nous allons introduire certaines notations.

- Soit Δ_θ la matrice diagonale (par blocs) définie par :

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left[I_p, \frac{1}{\theta} I_p, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}} I_p \right] \quad (5.7)$$

où $\theta > 0$, est un réel.

- Soit S est la solution unique de l'équation algébrique de Lyapunov suivante :

$$S + A^T S + SA - C^T C = 0 \quad (5.8)$$

Il a été établi que la matrice S est symétrique définie positive et que l'on a en particulier [39, 30] :

$$S^{-1} C^T = \begin{bmatrix} C_q^1 I_p \\ C_q^2 I_p \\ \vdots \\ C_q^q I_p \end{bmatrix} \quad \text{with } C_q^k = \frac{q!}{k!(q-k)!} \quad \text{pour } k = 1, \dots, q$$

- Comme nous l'avons mentionné précédemment, en l'absence de retard, le système (5.1) admet un observateur dont la convergence est exponentielle. De ce fait, avec une sortie retardée, on peut estimer l'état retardé $x(t-\tau)$ du système (5.1) à l'aide de cet observateur. En effet, en posant $x_0(t) = x(t-\tau)$, nous avons :

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = Ax_0(t) + \varphi(u(t-\tau), x_0) \\ y(t) = Cx_0(t) = x_0^1(t) \end{cases} \quad (5.9)$$

Nous avons affaire à un système uniformément observable où le retard n'affecte pas l'état. L'état de ce système peut être estimé par l'observateur de type grand gain suivant :

$$\dot{\hat{x}}_0(t) = A\hat{x}_0(t) + \varphi(u_0(t), \hat{x}_0) - \theta \Delta_\theta^{-1} C^T C \tilde{x}_0(t) \quad (5.10)$$

où $\tilde{x}_0(t) = \hat{x}_0(t) - x_0(t)$; Δ_θ , S et C sont donnés respectivement par (5.7), (5.8) et (5.2) et $\theta > 0$ est un paramètre de synthèse de l'observateur.

- Comme dans [40] et [52], on définit différents états et entrées retardés :

$$\begin{aligned} x_j(t) &= x\left(t - \tau + \frac{j}{m}\tau\right) \\ u_j(t) &= u\left(t - \tau + \frac{j}{m}\tau\right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

pour $j = 0, \dots, m$ et $t \geq -\frac{j}{m}\tau$.

Dans ce qui suit, nous allons proposer un observateur lorsque le retard est connu. Puis, le cas du retard inconnu (et constant) sera considéré.

5.3.1 Synthèse de l'observateur avec un retard connu

Nous allons présenter quelques préliminaires avant de donner les équations de l'observateur.

5.3.1.1 Quelques préliminaires

Le système (5.1) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \bar{A}x(t) + \varphi(u(t), x(t)) + (A - \bar{A})x(t) \\ y(t) &= Cx(t - \tau) = x^1(t - \tau) \end{cases} \quad (5.12)$$

où \bar{A} est une matrice $n \times n$ quelconque que l'on supposera dans toute la suite être Hurwitz. Ce changement nous permettra par la suite de minimiser le conservatisme au niveau de la valeur maximale du retard que l'on peut considérer. De ce fait, l'état courant $x(t)$ peut s'exprimer à l'aide de l'état retardé $x(t - \tau)$ comme suit :

$$x(t) = e^{\bar{A}\tau} x(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t e^{\bar{A}(t-s)} (\varphi(u(s), x(s)) + (A - \bar{A})x(s)) ds \quad (5.13)$$

Pour la synthèse de l'observateur, nous allons considérer un ensemble de systèmes en cascade, l'état de chacun de ces systèmes sera noté \hat{x}_j et appartient à \mathbb{R}^n . L'idée derrière la cascade consiste à faire en sorte que le premier système, qui est en tête de la cascade, permette l'estimation de l'état retardé du système (5.1) à partir de la sortie retardée. Ensuite, le deuxième système permettra de prédire l'état du système (5.1) sur une fenêtre dont la longueur dépendra de l'amplitude du retard considéré et de la constante de lipschitz des non linéarités. Au mieux, la longueur de cette fenêtre sera égale à la valeur du retard et l'état du deuxième système sera donc l'estimation de l'état courant du système. Au pire, la longueur de cette fenêtre sera infiniment petite et il faudra alors considérer beaucoup d'autres systèmes en cascade. Dans tous les cas, l'état du premier système peut être vue comme une approximation de la version retardée de l'état du deuxième système avec un retard égal à la longueur de la fenêtre. De ce fait, considérons $(m+1)$ systèmes en cascade, numérotés de 0 à m , de sorte que le premier système de la cascade, c'est-à-dire le système dont l'état est \hat{x}_0 , soit un observateur de l'état retardé $x(t - \tau)$ et que l'estimation de l'état courant $x(t)$ soit fournie par l'état du dernier système de la cascade, en l'occurrence \hat{x}_m .

$$\begin{cases} \hat{x}_0(t) &= \hat{x}(t - \tau) \\ \hat{x}_1(t) &= \hat{x}(t - \tau + \frac{\tau}{m}) \\ \vdots & \\ \hat{x}_j(t) &= \hat{x}(t - \tau + j\frac{\tau}{m}) \\ \hat{x}_m(t) &= \hat{x}(t - \tau + m\frac{\tau}{m}) = \hat{x}(t) \end{cases} \quad (5.14)$$

A partir de cette relation, l'état du $(j - 1)^{\text{ème}}$ système apparaît comme étant la version retardée de l'état du système j avec un retard égal à $\frac{\tau}{m}$ qui présente la longueur de la fenêtre de prédiction de \hat{x}_{j-1} .

5.3.1.2 Equations de l'observateur

La dynamique de l'état \hat{x}_0 est donnée par l'observateur (5.10). Il reste donc à déterminer la dynamique de \hat{x}_j , $j = 1, \dots, m$.

En nous inspirant de la relation (5.13), nous imposons à deux états successifs \hat{x}_{j-1} et \hat{x}_j d'être liés par la relation suivante :

$$\hat{x}_j(t) = e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}\hat{x}_{j-1}(t) + e^{\bar{A}t} \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{A}s}\psi_j(s)ds$$

pour $j = 1, \dots, m$ (5.15)

Avec $\psi_j(t) = \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) + (A - \bar{A})\hat{x}_j(t)$.

À partir de cette relation, on peut déduire la dynamique des observateurs $\hat{x}_j(t)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_j(t) &= e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}\dot{\hat{x}}_{j-1}(t) + \bar{A} \left(\hat{x}_j(t) - e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}\hat{x}_{j-1}(t) \right) \\ &\quad + e^{\bar{A}t}e^{-\bar{A}t}\psi_j(t) - e^{\bar{A}t}e^{-\bar{A}(t-\frac{\tau}{m})}\psi_j(t-\frac{\tau}{m}) \\ &= A\hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) \\ &\quad + e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left(\dot{\hat{x}}_{j-1}(t) - \bar{A}\hat{x}_{j-1}(t) - \varphi(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) - (A - \bar{A})\hat{x}_{j-1}(t) \right) \\ &\quad - e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left(\psi_j(t-\frac{\tau}{m}) - \varphi(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) - (A - \bar{A})\hat{x}_{j-1}(t) \right) \\ &= A\hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) \\ &\quad + e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left(\dot{\hat{x}}_{j-1}(t) - A\hat{x}_{j-1}(t) - \varphi(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) \right) \\ &\quad - e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left(\psi_j(t-\frac{\tau}{m}) - \psi_{j-1}(t) \right) \end{aligned} \tag{5.16}$$

La dernière égalité résulte de l'expression de u_j , en l'occurrence $u_j(t - \frac{\tau}{m}) = u_{j-1}(t)$.

Introduisons maintenant les variables suivantes pour $j = 0, m - 1$,

$$\begin{aligned} s_j &= \dot{\hat{x}}_j - A\hat{x}_j(t) - \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) \\ \delta_j &= \psi_j(t) - \psi_{j+1}(t - \frac{\tau}{m}) \end{aligned} \tag{5.17}$$

D'après l'observateur (5.9), nous avons :

$$s_0 = -\theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C (\hat{x}_0 - x(t - \tau)) \quad (5.18)$$

Avec ces notations, l'équation (5.16) devient

$$s_j = e^{\bar{A} \frac{\tau}{m}} s_{j-1} + e^{\bar{A} \frac{\tau}{m}} \delta_{j-1} \quad (5.19)$$

d'où l'on peut déduire :

$$s_j = e^{\bar{A} \frac{\tau}{m} j} s_0 + \sum_{i=0}^{j-1} e^{\bar{A} \frac{\tau}{m} (j-i)} \delta_i \quad (5.20)$$

En utilisant les deux expressions de s_j données par (5.17) et (5.20) et en remplaçant s_0 par son expression dans (5.18), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_j &= A \hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) - \theta e^{\bar{A} \frac{\tau}{m} j} \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C (\hat{x}_0 - x(t - \tau)) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{j-1} e^{\bar{A} \frac{\tau}{m} (j-i)} (\psi_{i+1}(t - \frac{\tau}{m}) - \psi_i(t)) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Nous pouvons maintenant présenter l'ensemble des systèmes en cascade qui forment l'observateur permettant d'estimer l'état $x(t)$ à partir de la mesure de la sortie retardé $Cx(t - \tau)$. Ces équations s'écrivent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_0(t) = A \hat{x}_0(t) + \varphi(u_0(t), \hat{x}_0) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \tilde{x}_0 \\ \dot{\hat{x}}_j(t) = A \hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), \hat{x}_j) - \theta e^{\bar{A} \frac{\tau}{m} j} \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \tilde{x}_0 \\ \quad - \sum_{i=0}^{j-1} e^{(j-i) \frac{\tau}{m} \bar{A}} (\psi_{i+1}(t - \frac{\tau}{m}) - \psi_i(t)) \\ \quad \quad \quad j = 1, \dots, m, \quad \text{et } \forall t \geq 0 \end{array} \right. \quad (5.22)$$

avec $\hat{x}_j \in \mathbb{R}^n$, la matrice \bar{A} est une matrice de synthèse et devra être choisie Hurwitz et enfin le paramètre θ est un scalaire et représente aussi un paramètre de synthèse.

Nous allons maintenant montrer la convergence exponentielle de l'observateur proposé.

5.3.1.3 Analyse de la convergence

Posons $\tilde{x}_j = \hat{x}_j - x_j$, $j = 0, \dots, m$. Nous allons procéder par récurrence sur l'indice j . Comme l'erreur d'observation sur l'état retardé, i.e. $\tilde{x}_0(t)$, converge exponentiellement vers 0 avec une vitesse de convergence pouvant être choisie arbitrairement grande, il existe alors $\mu_0, \alpha_0 > 0$ tel que

$$\|\tilde{x}_0\| \leq \mu_0 e^{-\alpha_0 t}, \quad t \geq 0 \quad (5.23)$$

Supposons maintenant qu'il existe $\mu_{m-1}, \alpha_{m-1} > 0$ tel que :

$$\|\tilde{x}_{m-1}\| \leq \mu_{m-1} e^{-\alpha_{m-1} t} \quad (5.24)$$

et montrons l'existence de réels $\mu_m = \mu > 0$ et $\alpha_m = \alpha$ pour lesquels

$$\|\tilde{x}_m\| \leq \mu e^{-\alpha t} \quad (5.25)$$

A partir de (5.13) et (5.15), on a :

$$\tilde{x}_j(t) = e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \tilde{x}_{j-1}(t) + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{\bar{A}(t-s)} (\varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \varphi(u_j(s), x_j(s)) + (A - \bar{A})\tilde{x}_j(s)) ds \quad (5.26)$$

D'où, compte tenu du fait que φ est globalement lipschitzienne, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_j(t)\| &\leq \|e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}\| \|\tilde{x}_{j-1}(t)\| + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|e^{\bar{A}(t-s)}\| (\|\varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \varphi(u_j(s), x_j(s))\| + \|A - \bar{A}\| \|\tilde{x}_j(s)\|) ds \\ &\leq \|e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}\| \|\tilde{x}_{j-1}(t)\| + (L_\varphi + \|A - \bar{A}\|) \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|e^{\bar{A}(t-s)}\| \|\tilde{x}_j(s)\| ds \end{aligned} \quad (5.27)$$

où L_φ est la constante de Lipschitz de φ .

Or, comme \bar{A} est Hurwitz, nous avons les deux inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \|e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}\| &\leq 1 \\ \|e^{\bar{A}(t-s)}\| &\leq 1 \text{ pour tout } s \in [t - \tau, t] \end{aligned}$$

L'inégalité (5.27) devient :

$$\|\tilde{x}_j(t)\| \leq \|\tilde{x}_{j-1}(t)\| + (L_\varphi + \|A - \bar{A}\|) \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|\tilde{x}_j(s)\| ds \quad (5.28)$$

Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, l'inégalité (5.28) s'écrit pour $j = m$ comme suit :

$$\|\tilde{x}_m(t)\| \leq \mu_{m-1} e^{-\alpha_{m-1}t} + (L_\varphi + \|A - \bar{A}\|) \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|\tilde{x}_m(s)\| ds \quad (5.29)$$

Pour conclure, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme : [40] Soit $\varphi(t) \geq 0$, $t \in [\delta, +\infty[$, avec $\delta > 0$ une fonction qui est telle que

$$\int_{-\delta}^0 \varphi(s) ds < +\infty \quad \text{and} \quad \varphi(s) \leq \mu^* e^{-\alpha^* s} + \gamma \int_{t-\delta}^t \varphi(s) ds \quad (5.30)$$

où μ^* , α^* et γ sont des réels strictement positifs. Si $\gamma\delta < 1$, alors il existe un réel $0 < \alpha \leq \alpha^*$ tel que

$$\varphi(t) \leq \mu e^{-\alpha t} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{e^{\alpha\tau}}{1-c} \left(\mu^* + \gamma \int_{-\delta}^0 \varphi(s) ds \right) \quad \text{et} \quad c = \frac{\gamma}{\alpha} (e^{\alpha\delta} - 1) < 1 \quad (5.31)$$

En effet, compte tenu de l'inégalité (5.29), nous traduisons la condition d'application du lemme par une hypothèse supplémentaire. Cette hypothèse va mettre en relation les différents paramètres du système avec le retard en sortie de la manière suivante :

Hypothèse 5.2. La matrice \bar{A} , le retard τ , la constante de Lipschitz L_φ et m satisfont l'inégalité suivante :

$$L_\varphi(1 + \|\bar{A} - A\|)\frac{\tau}{m} < 1 \quad (5.32)$$

Ainsi, nous sommes dans les conditions de l'application du lemme qui assure l'existence du réel $\alpha = \alpha_m$ ainsi que de celle de $\mu_m = \mu$ qui de plus s'exprime comme suit :

$$\mu = \frac{e^{\alpha\frac{\tau}{m}}}{1 - c} \left(\mu_{m-1} + L_\varphi(1 + \|\bar{A} - A\|) \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|e_j(s)\| ds \right) \quad (5.33)$$

$$(5.34)$$

et

$$c = \frac{L_\varphi(1 + \|\bar{A} - A\|)}{\alpha} (e^{\alpha\frac{\tau}{m}} - 1) \quad (5.35)$$

Nous énonçons maintenant le premier résultat de cette contribution :

Théorème 5.1. Sous les hypothèses (H5.1) et (H5.2), le système (5.22) est un observateur exponentiel pour le système (5.1). Plus précisément, nous avons :

$$\exists \mu_m > 0 ; \exists \alpha_m > 0 ; \forall t \geq -\tau : \|\hat{x}_m(t) - x(t)\| \leq \mu_m e^{-\alpha_m t}$$

5.3.2 Synthèse de l'observateur avec un retard inconnu

Lorsque le retard est inconnu, le système (5.9) peut être vu comme étant un système qui est paramétré de manière non linéaire en le paramètre inconnu τ . Nous pouvons dans ce cas utiliser l'observateur adaptatif proposé dans le chapitre précédent pour estimer conjointement l'état retardé et le retard inconnu. L'équation de l'observateur se présente comme suit [32] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_0 &= A\hat{x}_0 + \tilde{\varphi}(u(t - \hat{\tau}), \hat{x}_0) - \theta p(t) \Delta_\theta^{-1} (S^{-1} + \Upsilon(t) \Upsilon^T(t)) C^T C \tilde{x}_0 \\ \dot{\hat{\tau}}(t) &= -\theta p(t) \Upsilon^T(t) C^T C \tilde{x}_0 \\ \dot{\Upsilon}(t) &= \theta (A - S^{-1} C^T C) \Upsilon(t) - \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u(t - \hat{\tau}), \hat{x}_0) \dot{u}(t - \hat{\tau}) \text{ avec } \Upsilon(0) = 0 \\ \dot{p}(t) &= -\theta p^2(t) \Upsilon^T(t) C^T C \Upsilon(t) + \theta p(t) \text{ avec } p(0) > 0 \end{cases} \quad (5.36)$$

où Δ_θ , S et C sont donnés respectivement par (5.7), (5.8) et (5.2) et $\theta > 0$ est un paramètre de synthèse de l'observateur.

La convergence exponentielle des erreurs d'observation et d'adaptation paramétrique est garantie dès lors que la condition "classique" d'excitation persistante suivante est satisfaite :

Hypothèse 5.3. *L'entrée $u(t)$ est telle que pour toute condition initiale $\hat{x}_0 \in X$, la trajectoire du système dynamique (5.36) est telle que la matrice $C\Upsilon(t)$ est à excitation persistante, c'est-à-dire*

$$\exists \delta_1, \delta_2 > 0; \exists T > 0; \forall t \geq 0 : \quad \delta_1 I_m \leq \int_t^{t+T} \Upsilon^T(\tau) C^T C \Upsilon(\tau) d\tau \leq \delta_2 I_m$$

Bien sûr, nous supposons que la parametrization en τ est injective sur l'ensemble d'appartenance de τ pour que le retard soit identifiable. On notera que le vecteur $\Upsilon(t)$ intervenant dans l'observateur (5.36) et sur lequel porte la condition d'excitation persistante n'est en fait qu'une version filtrée (par la matrice stable $\theta(A - S^{-1}C^T C)$) du vecteur $\Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u(t - \hat{\tau}), \hat{x}_0) \dot{u}(t - \hat{\tau})$. Il est à noter que compte tenu de l'hypothèse (H5.1), le vecteur $\Upsilon(t)$ est borné. De même, sous l'hypothèse (H5.3), la fonction réelle $p(t)$ reste strictement positive dès lors que $p(0)$ est choisie > 0 .

Dans ce qui suit, nous allons présenter un observateur adaptatif en cascade qui permet l'estimation du retard et de l'état actuel $x(t)$ en fonction de la sortie retardée $x(t - \tau)$. Pour ce faire, nous définissons, en plus des états et entrées retardés introduits en (5.37), les variables suivantes :

$$\begin{aligned} z_j(t) &= x\left(t - \left(1 - \frac{j}{m}\right)\hat{\tau}(t)\right) \\ \hat{u}_j(t) &= u\left(t - \left(1 - \frac{j}{m}\right)\hat{\tau}(t)\right) \end{aligned} \quad (5.37)$$

pour $j = 0, \dots, m$ et $t \geq -\frac{j}{m}\tau$ et $\hat{\tau}$ est l'estimation de τ fournie par l'observateur (5.36). Rappelons que $\tilde{\tau}(t) = \hat{\tau}(t) - \tau$ converge exponentiellement vers 0. Nous allons montrer que $z_j(t)$ converge exponentiellement vers $x_j(t)$. En effet, appliquons le théorème de la valeur moyenne à chacune des composantes de z_j :

$$\begin{aligned} z_j(t) &= x\left(t - \left(1 - \frac{j}{m}\right)\tau\right) \\ &\quad - \left(1 - \frac{j}{m}\right) \dot{x} \left(t - \left(1 - \frac{j}{m}\right)(\hat{\tau}(t) + t_j(\hat{\tau}(t) - \tau)) \right) (\hat{\tau}(t) - \tau) \end{aligned} \quad (5.38)$$

où $t^j \in]0, 1[$.

Comme l'état $x(t)$ est borné, nous pouvons déduire à partir de l'équation du système (5.1), qu'il en est de même pour sa dérivée par rapport au temps. Compte tenu de ce

fait et du fait que $\tilde{\tau}(t) = \hat{\tau}(t) - \tau$ converge exponentiellement vers 0, on déduit que $z_j(t)$ converge exponentiellement vers $x_j(t)$.

Dans la suite, nous allons proposer un observateur pour estimer les états $z_j(t)$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\dot{z}_j(t) &= \left(1 - \left(1 - \frac{j}{m}\right)\dot{\hat{\tau}}\right) \dot{x}_j\left(t - \left(1 - \frac{j}{m}\right)\hat{\tau}\right) \\
&= \left(1 - \left(1 - \frac{j}{m}\right)\dot{\hat{\tau}}\right) \left(Ax\left(t - \left(1 - \frac{j}{m}\right)\hat{\tau}\right) + \varphi\left(u\left(t - \left(1 - \frac{j}{m}\right)\hat{\tau}\right), x\left(t - \left(1 - \frac{j}{m}\right)\hat{\tau}\right)\right)\right) \\
&\triangleq \left(1 - \left(1 - \frac{j}{m}\right)\dot{\hat{\tau}}\right) \left(Az_j(t) + \varphi(\hat{u}_j(t), z_j(t))\right) \\
&= Az_j(t) + \varphi(\hat{u}_j(t), z_j(t)) - \left(1 - \frac{j}{m}\right)\dot{\hat{\tau}}(Az_j(t) + \varphi(\hat{u}_j(t), z_j(t))) \\
&= \bar{A}z_j(t) + \varphi(\hat{u}_j(t), z_j(t)) + (A - \bar{A})z_j(t) - \left(1 - \frac{j}{m}\right)\dot{\hat{\tau}}(Az_j(t) + \varphi(\hat{u}_j(t), z_j(t)))
\end{aligned}$$

d'où l'on peut déduire :

$$\begin{aligned}
z_j(t) &= e^{\bar{A}\frac{\hat{\tau}}{m}} z_j\left(t - \frac{\hat{\tau}}{m}\right) \\
&\quad + e^{\bar{A}t} \int_{t - \frac{\hat{\tau}}{m}}^t e^{-\bar{A}s} \left(\varphi(\hat{u}_j(s), z_j(s)) + (A - \bar{A})z_j(s) - \left(1 - \frac{j}{m}\right)\dot{\hat{\tau}}(s) (Az_j(s) + \varphi(\hat{u}_j(s), z_j(s)))\right) ds
\end{aligned} \tag{5.39}$$

L'observateur en cascade que nous proposons est tel que :

$$\hat{z}_j(t) = e^{\bar{A}\frac{\hat{\tau}}{m}} \hat{z}_{j-1}(t) + e^{\bar{A}t} \int_{t - \frac{\hat{\tau}}{m}}^t e^{-\bar{A}s} \left(\varphi(\hat{u}_j(s), \hat{z}_j(s)) + (A - \bar{A})\hat{z}_j(s)\right) ds \tag{5.40}$$

Dérivons par rapport au temps les deux membres de cette équation. On obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}_j(t) &= \bar{A} \frac{\dot{\hat{\tau}}(t)}{m} e^{\bar{A}\frac{\hat{\tau}}{m}} \hat{z}_{j-1}(t) + e^{\bar{A}\frac{\hat{\tau}}{m}} \dot{\hat{z}}_{j-1}(t) + \bar{A} \left(\hat{z}_j(t) - e^{\bar{A}\frac{\hat{\tau}}{m}} \hat{z}_{j-1}(t)\right) \\
&\quad + \varphi(\hat{u}_j(t), \hat{z}_j(t)) + (A - \bar{A})\hat{z}_j(t) \\
&\quad - e^{\bar{A}\frac{\hat{\tau}}{m}} \left(1 - \frac{\dot{\hat{\tau}}(t)}{m}\right) \left(\varphi(\hat{u}_{j-1}(t), \hat{z}_j\left(t - \frac{\hat{\tau}}{m}\right)) + (A - \bar{A})\hat{z}_j\left(t - \frac{\hat{\tau}}{m}\right)\right) \\
&= A\hat{z}_j(t) + \varphi(\hat{u}_j(t), \hat{z}_j(t)) \\
&\quad + e^{\bar{A}\frac{\hat{\tau}}{m}} \left(\dot{\hat{z}}_{j-1}(t) - (A\hat{z}_{j-1}(t) + \varphi(\hat{u}_{j-1}(t), \hat{z}_{j-1}(t)))\right) \\
&\quad - e^{\bar{A}\frac{\hat{\tau}}{m}} \left(\varphi(\hat{u}_{j-1}(t), \hat{z}_j\left(t - \frac{\hat{\tau}}{m}\right)) - \varphi(\hat{u}_{j-1}(t), \hat{z}_{j-1}(t)) + (A - \bar{A})(\hat{z}_j\left(t - \frac{\hat{\tau}}{m}\right) - \hat{z}_{j-1}(t))\right) \\
&\quad + \frac{\dot{\hat{\tau}}(t)}{m} e^{\bar{A}\frac{\hat{\tau}}{m}} \left(Az_j\left(t - \frac{\hat{\tau}}{m}\right) + \varphi(\hat{u}_{j-1}(t), \hat{z}_j\left(t - \frac{\hat{\tau}}{m}\right)) + \bar{A}(\hat{z}_{j-1}(t) - \hat{z}_j\left(t - \frac{\hat{\tau}}{m}\right))\right)
\end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} s_j &= \dot{\hat{z}}_j - (A\hat{z}_j(t) + \varphi(\hat{u}_j(t), \hat{z}_j(t))) \\ \delta_j &= \left(\varphi(\hat{u}_j(t), \hat{z}_j(t)) - \varphi(\hat{u}_j(t), \hat{z}_{j+1}(t - \frac{\hat{\tau}}{m})) + (A - \bar{A})(\hat{z}_j(t - \frac{\hat{\tau}}{m}) - \hat{z}_{j+1}(t)) \right) \\ \gamma_j &= Az_{j+1}(t - \frac{\hat{\tau}}{m}) + \varphi(\hat{u}_j(t), \hat{z}_{j+1}(t - \frac{\hat{\tau}}{m})) + \bar{A}(\hat{z}_j(t) - \hat{z}_{j+1}(t - \frac{\hat{\tau}}{m})) \end{aligned}$$

Nous avons :

$$s_j = e^{\bar{A}\frac{\hat{\tau}}{m}} s_{j-1} + e^{\bar{A}\frac{\hat{\tau}}{m}} \left(\delta_{j-1} + \frac{\dot{\hat{\tau}}(t)}{m} \gamma_{j-1} \right) \quad (5.41)$$

où l'expression de s_0 peut se déduire à partir de l'équation de l'observateur (5.36) et elle s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} s_0 &= -\theta \Delta_\theta^{-1} (S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^T(t)) C^T C \tilde{x}_0 \\ &= -\theta \Delta_\theta^{-1} (S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^T(t)) C^T C \tilde{z}_0 \end{aligned} \quad (5.42)$$

A partir de (5.41), on peut déduire l'expression suivante de s_j :

$$\begin{aligned} s_j &= e^{\bar{A}\frac{j\hat{\tau}}{m}} s_0 + \sum_{i=0}^{j-1} e^{\bar{A}\frac{(j-i)\hat{\tau}}{m}} \left(\delta_i + \frac{\dot{\hat{\tau}}(t)}{m} \gamma_i \right) \\ &= -\theta e^{\bar{A}\frac{j\hat{\tau}}{m}} \Delta_\theta^{-1} (S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^T(t)) C^T C \tilde{z}_0 + \sum_{i=0}^{j-1} e^{\bar{A}\frac{(j-i)\hat{\tau}}{m}} \left(\delta_i + \frac{\dot{\hat{\tau}}(t)}{m} \gamma_i \right) \end{aligned}$$

Finalement, il suffit de remplacer s_j par son expression donnée dans (5.41) pour déduire la dynamique de \hat{z}_j :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_j &= A\hat{z}_j(t) + \varphi(\hat{u}_j(t), \hat{z}_j(t)) + s_j(t) \\ &= A\hat{z}_j(t) + \varphi(\hat{u}_j(t), \hat{z}_j(t)) - \theta e^{\bar{A}\frac{j\hat{\tau}}{m}} \Delta_\theta^{-1} (S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^T(t)) C^T C \tilde{z}_0 \\ &\quad + \sum_{i=0}^{j-1} e^{\bar{A}\frac{(j-i)\hat{\tau}}{m}} \left(\delta_i + \frac{\dot{\hat{\tau}}(t)}{m} \gamma_i \right) \\ &= A\hat{z}_j(t) + \varphi(\hat{u}_j(t), \hat{z}_j(t)) - \theta e^{\bar{A}\frac{j\hat{\tau}}{m}} \Delta_\theta^{-1} (S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^T(t)) C^T C \tilde{x}_0 \\ &\quad - \sum_{i=0}^{j-1} e^{\bar{A}\frac{(j-i)\hat{\tau}}{m}} \left(\varphi(\hat{u}_i(t), \hat{z}_{i+1}(t - \frac{\hat{\tau}}{m})) - \varphi(\hat{u}_i(t), \hat{z}_i(t)) + (A - \bar{A})(\hat{z}_{i+1}(t - \frac{\hat{\tau}}{m}) - \hat{z}_i(t)) \right) \\ &\quad - \frac{\theta}{m} \Delta_\theta^{-1} P(t)\Upsilon^T(t) C^T C \tilde{z}_0 \\ &\quad + \sum_{i=0}^{j-1} e^{\bar{A}\frac{(j-i)\hat{\tau}}{m}} \left(Az_{i+1}(t - \frac{\hat{\tau}}{m}) + \varphi(\hat{u}_i(t), \hat{z}_{i+1}(t - \frac{\hat{\tau}}{m})) + \bar{A}(\hat{z}_i(t) - \hat{z}_{i+1}(t - \frac{\hat{\tau}}{m})) \right) \end{aligned}$$

Pour résumer, les équations de l'observateur avec retard inconnu se présentent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{z}}_0 = A\hat{z}_0 + \tilde{\varphi}(u(t - \hat{\tau}), \hat{z}_0) - \theta \Delta_\theta^{-1} (S^{-1} + p(t)\Upsilon(t)\Upsilon^T(t)) C^T C \tilde{z}_0 \\ \dot{\hat{\tau}}(t) = -\theta p(t)\Upsilon^T(t)C^T C \tilde{z}_0 \\ \dot{\Upsilon}(t) = \theta (A - S^{-1}C^T C) \Upsilon(t) - \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u(t - \hat{\tau}), \hat{z}_0) \dot{u}(t - \hat{\tau}) \text{ avec } \Upsilon(0) = 0 \\ \dot{p}(t) = -\theta p^2(t)\Upsilon^T(t)C^T C \Upsilon(t) + \theta p(t) \text{ avec } p(0) > 0 \\ \dot{\hat{z}}_j = A\hat{z}_j(t) + \varphi(\hat{u}_j(t), \hat{z}_j(t)) - \theta e^{\bar{A} \frac{j\hat{\tau}}{m}} \Delta_\theta^{-1} (S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^T(t)) C^T C \tilde{x}_0 \\ \quad - \sum_{i=0}^{j-1} e^{\bar{A} \frac{(j-i)\hat{\tau}}{m}} (\varphi(\hat{u}_i(t), \hat{z}_{i+1}(t - \frac{\hat{\tau}}{m})) - \varphi(\hat{u}_i(t), \hat{z}_i(t)) + (A - \bar{A})(\hat{z}_{i+1}(t - \frac{\hat{\tau}}{m}) - \hat{z}_i(t))) \\ \quad - \frac{\theta}{m} p(t)\Upsilon^T(t)C^T C \tilde{z}_0 \\ \quad + \sum_{i=0}^{j-1} e^{\bar{A} \frac{(j-i)\hat{\tau}}{m}} (Az_{i+1}(t - \frac{\hat{\tau}}{m}) + \varphi(\hat{u}_i(t), \hat{z}_{i+1}(t - \frac{\hat{\tau}}{m})) + \bar{A}(\hat{z}_i(t) - \hat{z}_{i+1}(t - \frac{\hat{\tau}}{m}))) \\ \quad j = 1, \dots, m, \end{array} \right.$$

Avant d'énoncer le second résultat de cette contribution, nous avons besoin de remplacer l'hypothèse (H5.2) par l'hypothèse suivante :

Hypothèse 5.4. La matrice \bar{A} , l'estimé du retard $\hat{\tau}(t)$, la constante de Lipschitz L_φ et m satisfont l'inégalité suivante :

$$L_\varphi(1 + \|\bar{A} - A\|) \frac{\tau^*}{m} < 1 \text{ avec } \tau^* = \sup_{t \geq 0} \hat{\tau}(t) \quad (5.43)$$

Nous énonçons maintenant le résultat suivant :

Théorème 5.2. Sous les hypothèses (H5.1), (H5.3) et (H5.4), le système (5.43) permet d'estimer simultanément la trajectoire de $z_m(t)$ et le retard τ . De plus, l'erreur d'estimation décroît de manière exponentielle. Plus précisément, nous avons :

$$\exists \mu_m > 0 ; \exists \alpha_m > 0 ; \forall t \geq -\tau : \|\hat{z}_m(t) - z_m(t)\| \leq \mu_m e^{-\alpha_m t} \text{ et } \|\hat{\tau}(t) - \tau\| \leq \mu_m e^{-\alpha_m t}$$

Preuve : Posons $\tilde{z}_j = \hat{z}_j - z_j$. A partir de (5.39) et (5.40), nous avons :

$$\begin{aligned} \tilde{z}(j) &= e^{\bar{A} \frac{\hat{\tau}}{m}} \tilde{z}_{j-1}(t) + e^{\bar{A} t} \int_{t - \frac{\hat{\tau}}{m}}^t e^{-\bar{A} s} (\varphi(\hat{u}_j(s), \hat{z}_j(s)) - \varphi(\hat{u}_j(s), z_j(s)) + (A - \bar{A})\tilde{z}_j(s)) ds \\ &\quad - \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (5.44)$$

où

$$\varepsilon(t) = \left(1 - \frac{j}{m}\right) e^{\bar{A} t} \int_{t - \frac{\hat{\tau}}{m}}^t e^{-\bar{A} s} \dot{\hat{\tau}}(s) (Az_j(s) + \varphi(\hat{u}_j(s), z_j(s))) ds \quad (5.45)$$

Au terme $\varepsilon(t)$ près, l'équation (5.44) vérifiée par \tilde{z}_j est similaire à l'équation (5.26) vérifiée par \tilde{x}_j lorsque le retard est connu. Pour la preuve du théorème, il suffit donc de montrer que $\varepsilon(t)$ tend exponentiellement vers zéro et la suite de la démonstration ressemblera en tout point à celle du théorème 4.1. Montrons donc que $\varepsilon(t)$ tend exponentiellement vers zéro. En effet, nous avons

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \left(1 - \frac{j}{m}\right) \rho_j \int_{t-\frac{\hat{\tau}}{m}}^t \|\dot{\hat{\tau}}(s)\| ds$$

où $\rho_j = \sup_{t \geq 0} (Az_j(t) + \varphi(\hat{u}_j(t), z_j(t)))$ qui est fini compte tenu de l'hypothèse (H5.1).

En remplaçant, $\dot{\hat{\tau}}(s)$ par son expression donnée par l'observateur (5.43), l'inégalité (5.46) devient

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(t)\| &\leq \theta \left(1 - \frac{j}{m}\right) \rho_j \int_{t-\frac{\hat{\tau}}{m}}^t \|p(s) \Upsilon^T(s) C^T C \tilde{z}_0(s)\| ds \\ &\leq p^* \gamma^* \theta \left(1 - \frac{j}{m}\right) \rho_j \int_{t-\frac{\hat{\tau}}{m}}^t \|\tilde{z}_0(s)\| ds \end{aligned} \quad (5.46)$$

où $p^* = \sup_{t \geq 0} p(t)$ et $\gamma^* = \sup_{t \geq 0} \gamma(t)$. Comme l'erreur d'observation sur l'état retardé, i.e. $\tilde{z}_0(t)$, converge exponentiellement vers 0 avec une vitesse de convergence pouvant être choisie arbitrairement grande, il existe $\mu_0, \alpha_0 > 0$ tel que

$$\|\tilde{z}_0\| \leq \mu_0 e^{-\alpha_0 t}, \quad t \geq 0 \quad (5.47)$$

d'où

$$\|\varepsilon(t)\| \leq p^* \gamma^* \theta \left(1 - \frac{j}{m}\right) \rho_j \frac{\mu_0}{\alpha_0} [e^{\alpha_0 \frac{\hat{\tau}}{m}} - 1] e^{-\alpha_0 t} \quad (5.48)$$

Ceci termine la démonstration.

Nous remarquons que l'hypothèse (H5.4) est assez restrictive. En effet, bien que cette hypothèse rejoint l'hypothèse (H5.2) dès que l'estimé $\hat{\tau}(t)$ aurait convergé vers τ , elle risque d'être violée pendant le transitoire et une valeur de m relativement très élevée devient nécessaire pour que la condition soit vérifiée. Ceci sera illustrée à travers un exemple en simulation.

5.4 Exemple

Nous allons considérer le même exemple que dans [40] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) + x_1(t)x_2(t) + x_1(t)u(t) \\ y &= x_1(t - \tau) \end{cases} \quad (5.49)$$

Dans ce qui suit, nous allons présenter deux ensembles de résultats correspondant à l'estimation de l'état respectivement avec un retard connu et inconnu. Dans le cas du retard inconnu, une estimation de sa valeur est délivrée par l'observateur (5.43).

Dans toutes les simulations, nous avons pris $\bar{A} = A - I_2$ où I_2 est la matrice identité 2×2 .

5.4.1 Résultats d'estimation avec retard connu

Plusieurs simulations ont été effectuées avec des observateurs formés de 2, 3 et 4 systèmes en cascade. Pour chacun de ces observateurs, nous avons déterminé la valeur maximale du retard, τ_{max} , pour laquelle l'estimation fournie par l'observateur est convenable. Nous reproduisons dans le tableau suivant les résultats obtenus. Nous avons également comparé ces résultats avec celles dans [40]. On montre ainsi l'intérêt de la transformation effectuée dans (5.12) à travers l'introduction de la matrice \bar{A} et qui permet d'avoir un retard relativement élevé pour un même nombre de systèmes en cascade.

m	2	3	4
τ_{max} Observateur (5.22)	2.0	3.8	5.4
τ_{max} dans [40]	1.3	1.7	-

TAB. 5.1 – Différentes valeurs de m donnant des estimations satisfaisantes pour $\tau \leq \tau_{max}$

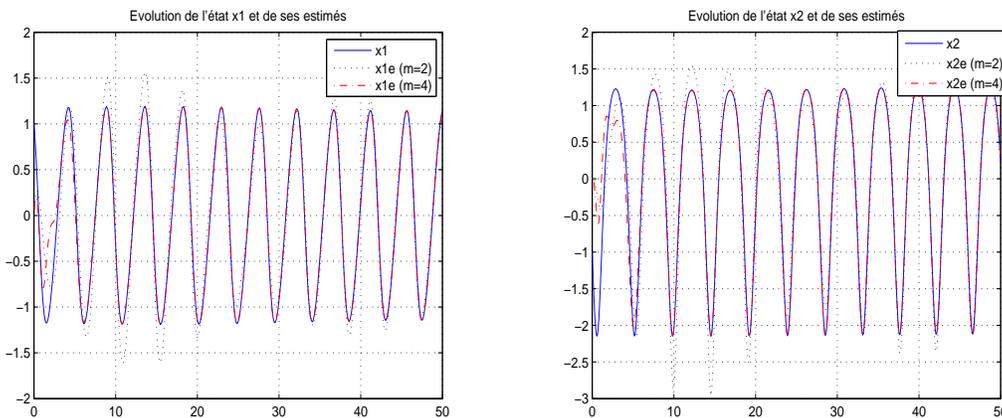


FIG. 5.1 – Prédiction de x_1 et x_2 avec $\tau = 1.7$ et $m = 2$ et $m = 4$

Nous avons représenté sur la figure (5.1) les états x_1 et x_2 avec leurs estimations lorsque $\tau = 1.7$ pour deux valeurs de m qui sont respectivement égales à 2 et à 4. Dans les deux cas, les valeurs prédites par l'observateur convergent vers les vraies valeurs avec, comme l'on devrait s'y attendre, une convergence plus rapide pour $m = 4$.

5.4.2 Résultats d'estimation avec retard inconnu

Comme dans le cas du retard connu, plusieurs simulations ont été effectuées avec des observateurs formés de 2, 3 et 4 systèmes en cascade. Pour chacun de ces observateurs, nous avons déterminé la valeur maximale du retard, τ_{max} , pour laquelle l'estimation fournie par l'observateur est convenable.

m	2	3	4
τ_{max}	1.9	2.8	3.7

TAB. 5.2 – Différentes valeurs de m donnant des estimations satisfaisantes pour $\tau \leq \tau_{max}$

Comme l'on devrait s'y attendre, pour une valeur de m fixée, la valeur maximale du retard pour laquelle la prédiction fournie par l'observateur est inférieure à celle trouvée dans le cas du retard connu.

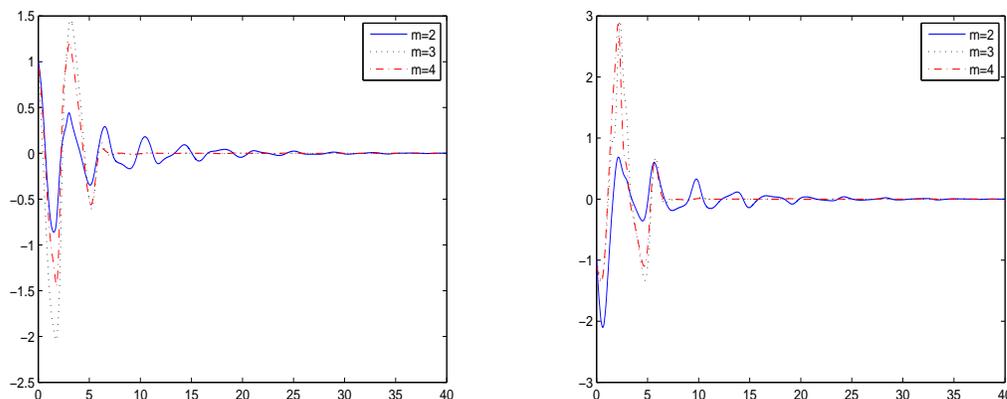


FIG. 5.2 – Erreur de prédiction de x_1 et x_2 avec retard inconnu ($\tau = 1.7$)

Nous avons reproduit dans la figure (5.2) l'évolution dans le temps des erreurs d'observation sur les états x_1 et x_2 pour des valeurs de m respectivement égales à 2, 3 et 4. On remarque que pour un retard fixé, l'observateur converge plus rapidement pour des valeurs de m plus élevées. L'estimation du retard est comparée avec sa vraie valeur sur la figure (5.3). On remarque que dans ce cas aussi, l'observateur proposé permet d'estimer de manière satisfaisante aussi bien le retard que les états du système.

5.5 Conclusion

Nous avons présenté la synthèse d'un observateur en cascade permettant la prédiction de l'état à partir de la mesure retardée, avec un retard constant, pour une classe de systèmes

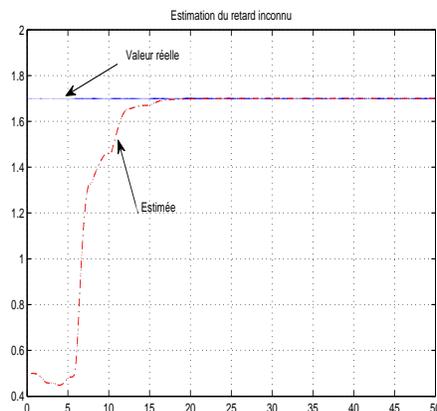


FIG. 5.3 – Estimation du retard inconnu

non linéaires uniformément observables. La synthèse a tout d'abord été présentée en supposant le retard connu. Puis, nous avons étendu la synthèse au cas du retard inconnu et un observateur adaptatif, en cascade, a été présenté pour estimer simultanément l'état actuel du système ainsi que la valeur du retard. Les performances des observateurs proposés ont été illustrés en simulation à travers un exemple.

Conclusion Générale

Les travaux développés dans cette thèse ont porté sur la synthèse d'observateurs (adaptatifs) pour certaines classes de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables exhibant des retards.

La synthèse des observateurs a porté sur deux formes canoniques caractérisant certaines classes de systèmes multi-sorties observables pour toute entrée. La première forme peut être interprétée comme une extension directe de la forme canonique caractérisant tous les systèmes uniformément observables et observables pour toute entrée dans le cas mono-sortie. Cette forme consiste en un système dynamique dont l'état admet comme première composante la sortie du système. La structure de ce système se présente alors sous la forme d'une chaîne d'intégrateurs avec des non linéarités additives (où intervient l'entrée) ayant une forme triangulaire, c'est-à-dire que la jacobienne des non linéarités est une matrice triangulaire inférieure. Le passage au cas de plusieurs sorties est immédiat. Il suffit de considérer un vecteur ayant des composantes en blocs et dont la première composante (en bloc) est constituée par toutes les sorties du systèmes. Dans notre cas, nous avons considéré cette forme canonique dans le cas de plusieurs sorties et nous avons supposé que des états retardés peuvent intervenir au niveau des non linéarités mais de manière triangulaire, c'est-à-dire que la jacobienne des non linéarités par rapport aux états retardés est une matrice triangulaire inférieure. Nous avons alors montré qu'un observateur ayant une structure similaire à celui considéré en l'absence de retard peut estimer les trajectoires du système avec une vitesse de convergence qui décroît exponentiellement. Les outils pour l'analyse de la convergence sont similaires à ceux utilisés dans le cas sans retard, exception faite de la fonction de Lyapunov qui est remplacée par une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii, communément utilisée lors de l'étude des systèmes à retard. Dans la suite, on se référera à la forme canonique précédente par la forme canonique triangulaire.

La synthèse précédente a ensuite été étendue à une classe plus large de systèmes uniformément observables. Cette classe est caractérisée par une forme canonique que l'on

appellera forme canonique non triangulaire. Cette appellation trouve sa justification dans ce qui suit. En effet, la classe de systèmes considérée est constituée par plusieurs sous-systèmes. Chaque sous-système est associé à un ensemble de sorties. L'état d'un sous-système, k , est un vecteur en blocs, ayant λ_k composantes et dont la première composante (en bloc) correspond aux sorties auxquelles le sous-système est associé. La dynamique de chaque sous système se présente sous la forme d'une chaîne d'intégrateurs (par rapport à l'état associé au bloc) avec des non linéarités additives. La structure des non linéarités intervenant dans les $\lambda_k - 1$ premières équations du sous-systèmes est triangulaire par rapport à l'état de tous les systèmes précédant le système k , c'est-à-dire des états des sous-systèmes 1 jusqu'à $k - 1$. La dernière non linéarité, associée à la dernière composante, pourrait par contre dépendre de l'état de tous les systèmes, c'est -à-dire de l'état complet du système. Un observateur de type grand gain a déjà été proposé pour cette classe de systèmes en l'absence de retard. Dans cette thèse, nous avons montré que les non linéarités du système peuvent dépendre d'états retardés à condition que cette dépendance soit de la même nature que pour les états non retardés (au niveau des non linéarités). Dans ces conditions, un observateur similaire à celui proposé en l'absence de retard a été proposé. Les outils pour l'analyse de la convergence d'erreur d'observation combinent ceux utilisés lors de la synthèse de l'observateur avec la forme précédente avec retard d'une part et ceux adoptés lors de la l'analyse de la convergence de l'observateur en l'absence de retard pour cette forme plus générale, d'autre part.

Pour résumer, nous avons montré qu'un même observateur peut estimer l'état d'un système uniformément observable, dont les non linéarités satisfont une propriété structurelle par rapport à l'état, même en présence de retard dès lors que les non linéarités résultantes continuent à satisfaire la propriété structurelle par rapport aux états retardés. Notons toutefois une différence au niveau des propriétés de l'observateur. En effet, en l'absence de retard, la vitesse de convergence de l'erreur d'observation est proportionnelle à un certain paramètre constant θ . En présence de retard, cette vitesse décroît et devient proportionnelle à $\log(\theta)$. Cette décroissance est en quelque sorte le prix à payer pour compenser la présence du retard dans la dynamique du système.

Dans tout ce qui précède, nous nous sommes intéressés à l'estimation de l'état du système en supposant que tous les paramètres constants du modèle sont connus. Nous avons considéré par la suite le cas où certains paramètres du système considéré sont inconnus et devront être estimés.

Un observateur adaptatif a déjà été synthétisé pour la forme canonique triangulaire où certains paramètres constants intervenant au niveau des non linéarités ont été supposés inconnus [29]. La convergence exponentielle des erreurs d'observation et d'estimation paramétrique a été établie sous les mêmes conditions que dans le cas où seul l'état est

inconnu, modulo une hypothèse additionnelle portant sur l'excitation persistante des entrées. Nous avons reconsidéré cette même classe de systèmes mais nous avons supposé que des états retardés peuvent intervenir (de manière triangulaire) au niveau des non linéarités. Dans ce cas aussi, nous avons montré qu'un observateur adaptatif similaire à celui utilisé en l'absence de retard, permet l'estimation conjointe de l'état du système et des paramètres inconnus avec une vitesse de convergence, non pas proportionnelle à θ , comme en l'absence de retard, mais plutôt à $\log(\theta)$.

Notre dernière contribution dans cette thèse porte sur l'estimation de l'état d'un système dont la sortie est disponible avec un retard τ . En nous inspirant de résultats existants [40, 52], nous avons proposé un observateur de type grand pour cette classe de systèmes. L'observateur proposé se présente sous la forme de m systèmes en cascade. L'état du premier sous système correspond à l'état retardé. Il est estimé à partir de la sortie retardée du système. Ensuite, l'état du deuxième sous-système de l'observateur permet de prédire l'état du premier sous-système, la durée de prédiction étant égale $\frac{\tau}{m}$. De manière similaire, l'état du système numéro k permet de prédire l'état du système $k - 1$ et la durée de prédiction est égale aussi à $\frac{\tau}{m}$. Ce même état constitue une prédiction de l'état du sous-système 1 avec une durée de prédiction égale à $k\frac{\tau}{m}$. Ainsi, l'état du dernier sous-système de l'observateur, c'est-à-dire le sous-système numéro m constitue une prédiction de l'état du premier sous-système avec une durée de prédiction égale à $m\frac{\tau}{m}$, c'est-à-dire que l'état du sous-système m est en fait l'état du actuel du système que l'on cherche à estimer. Le nombre de sous-systèmes dépend de la constante de Lipschitz des non linéarités. Notre apport par rapport aux résultats existants est multiple. En effet, le gain de l'observateur ne nécessite pas la résolution d'équations aux dérivées partielles comme dans [52]. De même, la relation liant m à la constante de Lipschitz du système est plus explicite que dans [52]. Notons aussi que le nombre de sous-systèmes nécessité par l'observateur que nous proposons est plus petit que celui utilisé par l'observateur proposé dans [40]. D'un autre côté, les observateurs proposés dans [40, 52] ont simplement traité le cas où le retard est connu. Le cas du retard inconnu a été traité dans cette thèse et un observateur adaptatif en cascade a été proposé pour l'estimation simultanée du retard inconnu et de l'état du système.

Plusieurs perspectives des travaux présentés sont envisagés. Tout d'abord, il s'agit d'étendre la synthèse des observateurs adaptatifs à la forme canonique non triangulaire avec des états retardés qui peuvent apparaître au niveau des non linéarités au même titre que des états non retardés. La difficulté de la synthèse réside dans le fait que les paramètres inconnus peuvent apparaître dans tous les blocs et ne sont pas contraints par la structure imposée aux états.

Un autre problème relatif à la synthèse d'observateurs adaptatifs pour les systèmes à re-

tard concernent le cas des retards inconnus qui n'interviennent pas au niveau des entrées mais seulement au niveau de certains états non mesurés. Ces retards ne peuvent pas être considérés comme de simples paramètres externes qui sont paramétrés de manière non linéaire. En effet, la dérivée par rapport au retard fera apparaître la dérivée par rapport au temps des états, ce qui ne se produisait pas lorsque les paramètres à estimer n'étaient pas des retards. D'autres études devront donc être effectuées pour s'affranchir de ce problème.

Un autre axe pour la poursuite des recherches concernent le cas de la sortie retardée avec un retard connu mais variant dans le temps. Nous avons vu que l'idée principale derrière la synthèse de l'observateur en cascade consiste à diviser le retard initial, τ , en m retards égaux à $\frac{\tau}{m}$ de sorte que l'état à l'instant t d'un sous-système devienne la prédiction à l'instant $t + \frac{\tau}{m}$ de l'état du sous-système qui le précède. Cette propriété ne peut être vérifiée dans le cas d'un retard variable puisqu'on aura affaire aussi à des versions retardées (ou avancées) du retard lui-même. Nous travaillons actuellement pour contourner cette difficulté.

Bibliographie

- [1] W. Aggoune, M. Boutayeb, and M. Darouach. Observers design for a class of nonlinear systems with time-varying delay. 1999.
- [2] M. Arcaç and P. Kokotović. Nonlinear observers : a circle criterion design and robustness analysis. *Automatica*, 37 :1923–1930, 2001.
- [3] A.Seuret. *Commande et observation des systèmes à retards variables : théorie et applications*. Phd thesis, Ecole Centrale de Lille, Lille, France, 2006.
- [4] D. Aubry. *Contribution à la synthèse d’observateurs pour les systèmes non linéaires*. Phd thesis, Université Henry Poincaré, NancyI, France, 1999.
- [5] T. Azuma, S. Sagara, M. Fujita, and K. Uchida. Output feedback control synthesis for linear time-delay systems via infinite-dimensional LMI approach. 2003.
- [6] G. Bastin and M. Gevers. Stable adaptive observers for nonlinear time varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33 :650–658, 1988.
- [7] G. Besançon. Remarks on nonlinear adaptive observers design. *Syst. Control Lett.*, 41(4) :271–280, 2000.
- [8] G. Bornard, F. Celle, G. Dauphin-Tanguy, G. Gilles, J. Lottin, L. Pronzato, S. Scavarda, D. Thomasset, and E. Walter. *Systèmes non linéaires. 1. modélisation - estimation*, chapter Observabilité et observateurs, pages 177–221. Automatique. Masson, 1993.
- [9] G. Bornard and H. Hammouri. A high gain observer for a class of uniformly observable systems. In *Proc. 30th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 122, Brighton, England, 1991.
- [10] M. Boutayeb. Observers design for linear time-delay systems. *Systems and control letters*, 44 :103–109, 2001.
- [11] M. Boutayeb and M. Darouach. A kalman type observer for discrete-time systems with multiple delays. In *Proc. 37th IEEE Conf. Decision and Control*, Florida, USA, 1998.
- [12] M. Boutayeb and M. Darouach. A reduced order observer for nonlinear discrete-time systems. *Systems and control letters*, 39 :141–151, 2000.

- [13] K. Busawon, M. Farza, and H. Hammouri. A nonlinear observer for induction motors. *International Journal of Control*, 71 :405–418, 1998.
- [14] E. Cherrier, M. Boutayeb, and J. Ragot. Observers-based synchronization and input recovery for a class of nonlinear chaotic models. *Circuits and Systems I, IEEE Transactions on*, 53(9) :1977 –1988, 2006.
- [15] Y. M. Cho and R. Rajamani. A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42 :534–537, 1997.
- [16] G. Ciccarella, M. D. Mora, and A. Germani. A luenberger-like observer for nonlinear systems. *International Journal of Control*, 57 :537–556, 1993.
- [17] L. Conlon. *Differentiable Manifolds*. Birkhauser, 1992.
- [18] M. Dambrine. *Contribution à l'étude de la stabilité des systèmes à retards*. Phd thesis, Université des sciences et de technologie de Lille, Lille, France, 1994.
- [19] C. Darengosse, P. Chevrel, I. Souleiman Guelle, and S. Siala. A LMI-based observer for induction motor. In *Proc. of ECC'99*, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [20] M. Darouach. Linear Functional Observers for Systems with Delays in State Variables. 46(3) :491–496, 2001.
- [21] F. Deza, E. Busvelle, and J.P. Gauthier. Exponentially converging observers for distillation columns and internal stability of the dynamic output feedback. *Chemical Engineering Science*, 47(15/16), 1992.
- [22] S. Diop and M. Fliess. Nonlinear observability, identifiability and persistent trajectories. In *Proc. 36th IEEE Conf. Decision Control*, pages 714–719, Brighton, 1991.
- [23] S. Diop and M. Fliess. On nonlinear observability. In *Proc. 1st Europ. Control Conf*, pages 152–157, Hermès, 1991.
- [24] S. Drakunov. Sliding mode observers based on equivalent control method. In *Proc. 31th IEEE Conference on Decision and Control*, Tucson, Arizona, 1992.
- [25] S. Drakunov and V. Utkin. Sliding mode observers : a tutorial. In *Proc. 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, 1995.
- [26] D.R. Driver. *Ordinary and delay differential equations*. Springer-Verlag, 1977. New York.
- [27] J. Doyne Farmer. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 4(3) :366 – 393, 1982.
- [28] M. Farza, M. M'Saad, F.L. Liu, and B. Targui. Generalized observers for a class of nonlinear systems. *Int. Journal of Modelling, Identification and Control*, 2(1) :24–32, 2007.

- [29] M. Farza, M. M'Saad, T. Maatoug, and M. Kamoun. Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems. *Automatica*, 45(10) :2292–2299, 2009.
- [30] M. Farza, M. M'Saad, and L. Rossignol. Observer design for a class of MIMO nonlinear systems. *Automatica*, 40 :135–143, 2004.
- [31] M. Farza, M. M'Saad, and M. Sekher. A set of observers for a class of nonlinear systems. In *Proc. of the IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, 2005.
- [32] M. Farza, A. Sboui, E. Cherrier, and M. M'Saad. High-gain observer for a class of time-delay nonlinear systems. *Int. J. of Contr.*, page DOI : 10.1080/00207170903141069, 2009.
- [33] A. Fattouh, O. Sename, and J. Dion. Robust observer design for time-delay systems : A riccati equation approach. *Kybernetika*, 35(6) :753–764, 1999.
- [34] A. Filipescu, L. Dugard, and J.M. Dion. Adaptive gain sliding controller for uncertain parameters nonlinear systems : application to flexible joint robots. In *Proc. 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii, 2003.
- [35] M. Fliess, C. Join, and H. Sira-Ramírez. Nonlinear estimation is easy. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, page to appear, 2008.
- [36] J. P. Gauthier and G. Bornard. Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-26 :922–926, 1981.
- [37] J. P. Gauthier and I. Kupka. Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM J. on Control and Optimisation*, 32 :975–994, 1994.
- [38] J. P. Gauthier and I. Kupka. *Deterministic Observation Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2001.
- [39] J.P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems - application to bioreactors. *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-37 :875–880, 1992.
- [40] A. Germani, C. MANes, and P. Pepe. A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output. 47 :96–101, 2002.
- [41] O. Gomez, Y. Orlov, and I. V. Kolmanovskiy. On-line identification of SISO linear time-invariant delay systems from output measurements. *Automatica*, 43 :2060–2069, 2007.
- [42] K. Gu, V.L. Kharitonov, and J. Chen. *Stability of time-delay systems*. Birkhäuser, 2003.
- [43] M. Guay. Observer linearization by output-dependent time-scale transformations. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 47 :1730–1735, 2002.

- [44] J.K. Hale and S.M. Verduyn-Lunel. *Introduction to functional differential equations*, volume 99 of *Applied Math. Sciences*. Springer, NY, 1993.
- [45] H. Hammouri and M. Farza. Nonlinear observers for locally uniformly observable systems. *ESAIM J. on Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 9 :353–370, 2003.
- [46] R. Hermann and A.J. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-22 :728–740, 1977.
- [47] M. Hou, K. Busawon, and M. Saif. Observer design for a class of MIMO nonlinear systems. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 45(7) :1350–1355, 2000.
- [48] M. Hou and A. C. Pugh. Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems. *Systems and Control Letters*, 12 :1–9, 1999.
- [49] M. Hou, P. Zitek, and R.J. Patton. An observer design for linear time-delay systems. 47(1) :121–125, 2002.
- [50] J.Hale. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, 1977.
- [51] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction theory. *J. Basic Eng., Trans. ASME, Ser. D*, 82(1) :35–45, 1960.
- [52] N. Kazantzis and R. A. Wright. Nonlinear observer design in the presence of delayed output measurements. *Systems and control letters*, 54 :877–886, 2005.
- [53] V.L. Kharitonov and D. Hinrichsen. Exponential estimates for time delay systems. *Systems and control letters*, 53(5) :395–405, 2004.
- [54] V.L. Kharitonov and A. Zhabko. Lyapunov-Krasovskii approach for robust stability of time delay systems. *Automatica*, 39 :15–20, 2003.
- [55] A. Kojić and A. M. Annaswamy. Adaptive control of nonlinearly parameterized systems with a triangular structure. *Automatica*, 38 :115–123, 2002.
- [56] A. Kojić, A. M. Annaswamy, A. P. Loh, and R. Lozano. Adaptive control of a class of nonlinear systems with convex/concave parameterization. *Systems and Control Letters*, 37 :267–274, 1999.
- [57] V.B. Kolmanovskii and A. Myshkis. *Applied Theory of Functional Differential Equations*. Kluwer Acad., 1992.
- [58] V.B. Kolmanovskii and A. Myshkis. *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*. Kluwer Acad., Dordrecht, 1999.
- [59] V.B. Kolmanovskii, S.I. Niculescu, and K. Gu. Delay effects on stability : a survey. In *Proc. 38th IEEE Conf. Decision and Control*, Phoenix, Arizona, 1999.
- [60] Y. Koubaa, M. Farza, and M. M'Saad. Synthèse d'observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes non-linéaires. In *actes du CIFA*, Douz, Tunisie, 2004.

- [61] G. Kreisselmeier. Adaptive observers with exponential rate of convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(1) :2–8, 1977.
- [62] A. J. Krener and A. Isidori. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Syst. Contr. Lett.*, 3 :47–52, 1983.
- [63] A. J. Krener and W. Respondek. Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *SIAM J. of Control and Optimisation*, 23 :197–216, 1985.
- [64] F. Liu. *Synthèse d’observateurs à entrées inconnues pour les systèmes non linéaires*. Phd thesis, Université de Caen/Basse-Normandie, France, 2007.
- [65] F.L. Liu, M. Farza, M. M’Saad, and H. Hammouri. Observer design for a class of uniformly observable MIMO nonlinear systems with coupled structure. In *Proc. of the 17th IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.
- [66] A. P. Loh, A. M. Annaswamy, and F. P. Skantze. Adaptation in the presence of a general nonlinear parameterization : an error model approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9 :1634–1652, 1999.
- [67] J. Lu, J. Cao, and D.W.C. Ho. Adaptive stabilization and synchronization for chaotic lur’e systems with time-varying delay. *Circuits and Systems I : Regular Papers, IEEE Transactions on*, 55(5) :1347–1356, 2008.
- [68] G. Lüders and K.S. Narendra. An adaptive observer and identifier for a linear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18 :496–499, 1973.
- [69] D.G. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 16(6) :596–602, 1971.
- [70] A. M. Lyapunov. *The general Problem of Motion Stability*. Princeton University Press, 1947. The original version has been written in Russian in 1892.
- [71] R. Marino and P. Tomei. Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37 :1239–1245, 1992.
- [72] F. Mazenc and S.I. Niculescu. Lyapunov stability analysis for nonlinear delay systems. *Systems and control letters*, 42 :245–251, 2001.
- [73] S. Mondie and V.L. Kharitonov. Exponential estimates for retarded time-delay systems : an LMI approach. 50(2) :268–273, 2005.
- [74] Ömer Morgül and Ercan Solak. Observer based synchronization of chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 54(5) :4803–4811, 1996.
- [75] S. I. Niculescu. *Delay effects on stability*, volume 269 of *Lecture notes in control and information sciences*. Springer, Berlin, 2001.
- [76] S.I. Niculescu, A. Trofino-Neto, J.-M. Dion, and L. Dugard. Delay-dependent stability of linear systems with delayed states : An LMI approach. pages 1495–1496, 1995.

- [77] H. Nijmeijer. Observability of a class of nonlinear systems : A geometric approach. *Ricerche di Automatica*, 12 :1–19, 1981.
- [78] H. Nijmeijer and I.M.Y. Mareels. An observer looks at synchronization. *Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 44(10) :882 –890, 1997.
- [79] N.Krasovskii. *Stability of motions*. Stanford University Press, 1963.
- [80] Louis M. Pecora and Thomas L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64(8) :821–824, 1990.
- [81] R. Rajamani. Observers for lipschitz nonlinear systems. *IEEE Trans. Auto. Control*, 43(3) :397–401, 1998.
- [82] B. S. Razumikhin. On the stability of systems with a delay. 1956.
- [83] J.-P. Richard. Time-delay systems :an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39 :1667 – 1694, 2003.
- [84] J. Rudolph and M. Zeitz. A block triangular nonlinear observer normal form. *Syst. Contr. Lett.*, 23 :1–8, 1994.
- [85] H. Shim. *A Passivity-based nonlinear observer and a semi-global separation principle*. Phd thesis, School of Electrical Engineering, Seoul National University, 2000.
- [86] H. Shim, Y. I. Son, and J. H. Seo. Semi-global observer for multi-output nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 42 :233–244, 2001.
- [87] F. P. Skantze, A. Kojić, A. P. Loh, and A. M. Annaswamy. Adaptive estimation of discrete-time systems with nonlinear parameterization. *Automatica*, 36 :1879–1887, 2000.
- [88] I. Souleiman, A. Glumineau, and G. Schreirer. Direct transformation of nonlinear systems into state affine MISO form and nonlinear observers design. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 48 :2191–2196, 2003.
- [89] Yinggan Tang and Xinping Guan. Parameter estimation of chaotic system with time-delay : A differential evolution approach. *Chaos, Solitons and Fractals*, 42(5) :3132 – 3139, 2009.
- [90] H. Trinh, M. Aldeen, and S. Nahavandi. An observer design procedure for a class of nonlinear time-delay systems. *Computers and electrical engineering*, 30 :61–71, 2004.
- [91] V.Utkin. *Sliding Mode in Optimization and Control*. Springer Verlag, 1992.
- [92] D. Williamson. Observation of bilinear systems with application to biological control. *Automatica*, 13 :243–254, 1977.
- [93] X.H. Xia and W.B. Gao. Nonlinear observer design by observer error linearization. *SIAM J. Control and Optimisation*, 27 :199–216, 1989.

- [94] X.Jiang and Q.-L. Han. On H_∞ control for linear systems with interval time-varying delay. *Automatica*, 41 :2099–2106, 2005.
- [95] A. Xu and Q. Zhang. State and parameter estimation for nonlinear systems. In *In Proc. of the 15th IFAC World Congress*, Barcelona,Spain, 2002.
- [96] A. Xu and Q. Zhang. Nonlinear systems fault diagnosis based on adaptive estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49 :767–, 2004.
- [97] A. Xu and Q. Zhang. Residual generation for fault diagnosis in linear time-varying systems. *Automatica*, 40 :1181–1193, 2004.
- [98] H. Yang and M. Saif. Observer design and fault diagnosis for state-retarded dynamical systems. *Automatica*, 34(2) :217–227, 1998.
- [99] N. Yeganefar. *Définition et analyse de stabilités pour les systèmes à retard non linéaires*. Phd thesis, Ecole centrale de Lille,Lille, France, 2006.
- [100] A. Zemouche, M. Boutayeb, and G. Iulia Bara. Observer design for a class of Lipschitz time-delay systems. *Int. J. of Modelling, Identification and Control*, 1(4) :28–36, 2008.
- [101] Q. Zhang. Adaptive observers for mimo linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 :525–529, 2002.
- [102] Q. Zhang. An adaptive observer for sensor fault estimation in linear time varying. In *Proc. of the IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, 2005.
- [103] Q. Zhang and G. Besançon. Nonlinear system sensor fault estimation. In *Proc. of the IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, 2005.
- [104] Q. Zhang and A. Clavel. Adaptive observer with exponential forgetting factor for linear time-varying systems. In *In Proc. 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida, 2001.