N° d'ordre : 2013-06-TH

THÈSE DE DOCTORAT

DOMAINE : STIC

SPECIALITE : AUTOMATIQUE

Ecole Doctorale
« Sciences et Technologies de l'Information des Télécommunications et des Systèmes »

Présentée par :

Cristina VLAD

Sujet :

Commande prédictive des systèmes hybrides et application à la commande de systèmes en électronique de puissance

Soutenue le 21 Mars 2013 devant les membres du jury :

M. Fréderic BOUILLAULT	LGEP	Président du jury
M. Maurice FADEL	ENSEEIHT/INPT	Rapporteur
M. Emmanuel GODOY	SUPELEC	Directeur de thèse
M. Nicolas LANGLOIS	IRSEEM	Rapporteur
M. Pierre LEFRANC	ENSE3 – G2ELAB	Co-encadrant de thèse
M. Pedro RODRIGUEZ-AYERBE	SUPELEC	Co-encadrant de thèse
Mme. Xuefang LIN SHI	INSA de Lyon	Examinatrice
Mme. Claire VALENTIN	LAGEP	Examinatrice

A la mémoire de mon père

A ma mère et à ma sœur

A Rayen

Remerciements

Je tiens particulièrement à remercier mon directeur de thèse, M. Emmanuel Godoy, pour sa confiance en mes capacités, pour la qualité de son encadrement et sa constante disponibilité. J'ai eu le privilège de bénéficier de tous ses précieux conseils dans le domaine de l'Automatique tout au long de l'élaboration de ma thèse, de son soutien et ces qualités humaines, qui m'ont aidé dans la réalisation de ces travaux de thèse.

J'adresse ma profonde gratitude à M. Pedro Rodriguez-Ayerbe, co-directeur de cette thèse, pour les nombreuses conseils et discussions qui ont orienté mes recherches au cours de cette thèse. Je lui exprime toute ma reconnaissance pour son apport scientifique indéniable, son approche rigoureuse et son expérience d'où j'ai pu bénéficier. Grâce à sa grande disponibilité et sa persévérance, j'ai réussi à résoudre les problèmes rencontrés durant ces travaux.

Je remercie sincèrement M. Pierre Lefranc pour son implication dans le co-encadrement de mes travaux de thèse, pour ses conseils enrichissants au niveau théorique et pratique dans le domaine de l'électronique de puissance et son soutien constant.

Je tiens à remercier M. Maurice Fadel et M. Nicolas Langlois pour avoir accepté de juger mon travail en qualité de rapporteurs de cette thèse et pour leurs commentaires constructifs qui m'ont permis d'améliorer la qualité du mon mémoire de thèse.

Je remercie également M. Fréderic Bouillault pour avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Je remercie très sincèrement Mme. Xuefang Lin Shi pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Je lui exprime toute ma reconnaissance pour sa collaboration, l'accueil chaleureux au sein du laboratoire de l'INSA de Lyon et de l'intérêt porté à mes travaux de thèse.

Mes remerciements vont également à Mme. Claire Valentin pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

J'adresse ma gratitude à M. Patrick Boucher, ancien chef du département Automatique de Supélec, et à M. Didier Dumur, nouveau chef du département Automatique, pour m'avoir accueilli dans le laboratoire et m'avoir permis d'exploiter les ressources matérielles nécessaires à la réalisation des essais expérimentaux sur des maquettes des convertisseurs de puissance.

J'exprime ma reconnaissance à tous les enseignants, les doctorants, les stagiaires et les membres du personnel administratif du département Automatique pour son chaleureux accueil et également pour l'ambiance agréable et très favorable au bon déroulement de cette thèse.

Je remercie de tout mon cœur toute ma famille, ma mère, ma sœur et ma grand-mère, qui m'ont toujours soutenu, m'ont encouragé et m'ont motivé dans les moments difficiles de cette expérience, malgré la distance. Mes meilleures pensées s'adressent aussi à feu mon père qui me manque énormément et à qui je dédie entièrement mes travaux de thèse.

J'adresse toute ma reconnaissance à Rayen pour son soutien, sa présence constante, sa patience et ses conseils, qui m'ont énormément aidé à dépasser les difficultés rencontrées pendant cette thèse et qui ont contribué à la réussite de ce travail.

Enfin, mes remerciement vont à mes amis, qui ont été présents pour moi et m'ont encouragé tout au long de cette expérience.

AVANT-PROPOS

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse se sont déroulés au sein du département Automatique et du département Energie de Supélec. Les résultats obtenus ont donné lieu à la publication d'un certain nombre d'articles à l'ocasion des conférences internationales avec actes et des communications nationales sans actes.

➢ Conférences internationales avec actes

- Vlad C., Rodriguez-Ayerbe P., Godoy E., Lefranc P., "A Hybrid Model for Buck Converter Operating in Continuous and Discontinuous Conduction Modes." In *IEEE Industrial Electronics Society* (36th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, IECON-2010), pp. 138 – 143, Glendale, AZ, November 2010.

- Vlad C., Rodriguez-Ayerbe P., Godoy E., Lefranc P., « Modélisation Affine Par Morceaux Et Commande Par Retour D'état Linéaire par Morceaux D'un Convertisseur Flyback avec filtre D'entrée ». In *Actes de la Conférence Internationale Francophone en Automatique CIFA 2012* (CIFA 2012), pp. 647 – 652, Grenoble (France), July 2012.

- Vlad C., Rodriguez-Ayerbe P., Godoy E., Lefranc P., "Explicit Model Predictive Control of Buck Converter." In *Proceedings of the 15th International Power Electronics and Motion Control Conference and Exposition* (EPE-PEMC 2012), pp. DS1e.4-1 – DS1e.4-6, Novi Sad (Serbia), September 2012.

➢ Communications sans actes

- Vlad C., Rodriguez-Ayerbe P., Godoy E., Lefranc P., « Commande prédictive explicite du convertisseur Buck », Séminaire à l'INSA de Lyon, 15 Février 2012.

- Vlad C., Rodriguez-Ayerbe P., Godoy E., Lefranc P., « Commande prédictive des systèmes hybrides. Application à la commande d'un convertisseur buck », Présentation à la Commission Automatique, Supélec, 20 Mars 2013.

Sommaire

TABLE DES FIGURES 11

LISTE DES TABLEAUX 15

1 INTRODUCTION GÉNÉRALE 17

1.1 CONTEXTE 17
1.2 PROBLEMATIQUE 22
1.3 OBJECTIFS ET ORGANISATION DES TRAVAUX DE THESE 25

2 CONCEPTS THEORIQUES 29

2.1 SYSTEMES HYBRIDES 30
2.1.1 Automates hybrides discrets (DHA) 32
2.1.2 Modèles à complémentarité linéaire (LC) 34
2.1.3 Modèles à complémentarité linéaire étendue (ELC) 35
2.1.4 Modèles MMPS (Min-Max Plus Scaling) 35
2.1.5 Modèles logique/dynamiques mixtes (MLD) 36
2.1.6 Modèles affines par morceaux (PWA) 37
2.1.7 L'équivalence des modèles hybrides 38
2.2 STABILITE DES MODELES AFFINE PAR MORCEAUX 39
2.2.1 Stabilité au sens de Lyapunov 40
2.2.2 Stabilité des systèmes hybrides représentés par des modèles PWA à temps discret 41
2.2.3 Synthèse de lois de commande par retour d'état stabilisant 43
2.3 COMMANDE PREDICTIVE 47
2.4 COMMANDE PREDICTIVE A BASE DES MODELES LINEAIRES : RESOLUTION « EN-LIGNE » 48
2.5 COMMANDE PREDICTIVE A BASE DE MODELES LINEAIRES : RESOLUTION « HORS-LIGNE » 60
2.6 COMMANDE PREDICTIVE A BASE DE MODELES HYBRIDES 60
2.7 IMPLANTATION DE LA COMMANDE PREDICTIVE EXPLICITE 69
2.8 CONCLUSIONS 72

3 MODELISATION HYBRIDE DES CONVERTISSEURS DE PUISSANCE 73

3.1 MODES DE FONCTIONNEMENT 73
3.2 MODELE MOYEN DES CONVERTISSEURS DC-DC 75
3.3 MODELISATION HYBRIDE EN MODE DE CONDUCTION CONTINUE 77
3.3.1 Application à un convertisseur de type buck 78
3.3.2 Application à un convertisseur de type flyback avec filtre d'entrée 88
3.4 MODELISATION HYBRIDE CARACTERISANT DES TRANSITIONS ENTRE LES DEUX MODES CCM ET DCM 99
3.4.1 Application à un convertisseur de type buck 99
3.5 CONCLUSIONS 115

4 COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT A GAINS COMMUTES EN MODE DE CONDUCTION CONTINUE 117

4.1 APPLICATION A UN CONVERTISSEUR DE TYPE BUCK 118
4.2 APPLICATION A UN CONVERTISSEUR DE TYPE FLYBACK AVEC FILTRE D'ENTREE 132
4.3 CONCLUSIONS 144

5 COMMANDE PREDICTIVE SOUS LA FORME EXPLICITE EN MODE DE CONDUCTION CONTINUE 147

5.1 APPLICATION AU CONVERTISSEUR DE TYPE BUCK 148
5.2 RESULTATS DE SIMULATION ET VALIDATION EXPERIMENTALE DE LA LOI DE COMMANDE PREDICTIVE 154

5.3 CONCLUSIONS 160
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES 163
CONCLUSIONS 163
PERSPECTIVES 166
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 169

Table des figures

Figure 1 : Circuits représentatifs des convertissuers de puissence DC-DC. *18*
Figure 2.1 (a) : Schéma d'un système hybride. *30*
Figure. 2.1 (b) : Système hybride avec 4 modes de fonctionnement. *31*
Figure 2.1.1 : Automate hybride discret [Tob05]. *33*
Figure 2.1.2 : Système composé par deux chariots, qui peut être exprimé par un modèle hybride de type LC [HSW00]. *35*
Figure 2.1.7 : Les équivalences entre les différents modèles hybrides. Les étoiles marquent l'équivalence sous certaines conditions à satisfaire. *39*
Figure 2.3.1 : Schéma du principe de l'horizon fuyant. *50*
Figure 2.6.1 : Schéma d'implantation de la commande prédictive explicite *70*
Figure 2.6.2 : Exemple d'arbre binaire construit pour une loi de commande représentée en 2D, définie sur 8 régions qui sont délimitée par 7 hyperplans. *71*
Figure 3.1.1 : Schéma du convertisseur buck. *74*
Figure 3.1.2 : Forme d'onde du courant en CCM (a) et DCM (b). *74*
Figure 3.3.1.1 : Schéma du convertisseur buck avec pertes. *78*
Figure 3.3.1.2 : Configurations du circuit du convertisseur buck avec perte : S_1 position fermée (a), S_1 position ouvert (b). *79*
Figure 3.3.1.3 : Modélisation avec une résolution $\nu = 4$. *Évolution du courant d'inductance* i_L *du modèle moyen bilinéaire à temps continu (ligne continue) en comparaison avec les états donnés par le modèle hybride (ligne en pointillé) sur une période de commutation* T_e *(a). Position de l'interrupteur* S_1 *dans chaque sous-période (b).* *81*
Figure 3.3.1.4 : Comparaison entre les caractéristiques du courant par l'inductance i_L *en régime permanent générés en utilisant le modèle moyen et le modèle PWA avec la résolution* $\nu = 3$. *85*
Figure 3.3.1.5 : Comparaison entre les caractéristiques de la tension de sortie V_s *en régime permanent générés en utilisant le modèle moyen et le modèle PWA avec la résolution* $\nu = 3$. *86*
Figure 3.3.1.6 : Formes d'ondes du courant i_L *et de la tension* V_s *pour un échelon du rapport cyclique de* $D = 0{,}55$ *à* $D = 0{,}275$. *Comparaison entre le circuit en commutation, le modèle PWA et le modèle moyen. Les valeurs intermédiaires des variables d'états déterminées en utilisant le modèle hybride sont représentées en trait pointille.* *87*
Figure 3.3.1.7 : Formes d'ondes du courant i_L *et de la tension* V_s *pour un échelon du rapport cyclique de* $D = 0{,}55$ *à* $D = 0{,}733$. *Comparaison entre le circuit en commutation, le modèle PWA et le modèle moyen. Les valeurs intermédiaires des variables d'états déterminées en utilisant le modèle hybride sont représentées en trait pointille.* *87*
Figure 3.3.2.1 : Schéma équivalent du convertisseur flyback avec filtre d'entrée avec pertes. *88*
Figure 3.3.2.2 : Caractéristique en régime stationnaire de la tension de sortie V_s. $D_{\max}$ *indique le rapport cyclique pour lequel la valeur maximale de la tension de sortie est atteinte.* *91*
Figure 3.3.2.3 : Caractéristique en régime permanent de la tension de sortie V_s *du modèle PWA discontinu avec la résolution* $\nu = 7$. *94*
Figure 3.3.2.4 : Caractéristiques en régime permanent de la tension de sortie V_s *(a) et du courant de l'inductance* L_m *(b) du modèle PWA continu par rapport à la tension de sortie et la résolution* $\nu = 7$. *95*
Figure 3.3.2.5 : Caractéristiques en régime permanent des variables d'état du modèle PWA avec les dynamiques affines continues à travers leurs intervalles de validité et la résolution $\nu = 7$. *97*

Figure 3.3.2.6 : Comportement du modèle PWA à temps discret avec la résolution $\nu = 7$ pour un changement du rapport cyclique $D = 0{,}512$ à $D = 0{,}75$. *98*
Figure 3.3.2.7 : Comportement du modèle PWA à temps discret avec la résolution $\nu = 7$ pour un changement du rapport cyclique $D = 0{,}512$ à $D = 0{,}3$. *98*
Figure 3.4.1.1 : Circuit idéal du convertisseur buck. *99*
Figure 3.4.1.2 : Configurations du circuit idéal du convertisseur buck : en CCM ((a) et (b)), en DCM ((a), (b) et (c)). *100*
Figure 3.4.1.3 : Formes d'ondes de la tension V_L (a) et du courant i_L (b) en DCM. *102*
Figure 3.4.1.4 : Formes d'onde du courant par l'inductance en régime permanent sur une période d'échantillonnage et pour une résolution $\nu = 3$. *107*
Figure 3.4.1.5 : Point d'équilibre x_4^e avant (a) et après (b) l'introduction d'éléments zéro dans la matrice $A^d_{DCM_{2,1,3}}$. Comparaison avec la valeur exacte du point d'équilibre X_0 et avec la valeur moyenne $X_{e,1}$. *110*
Figure 3.4.1.6 : Fonctionnement du convertisseur buck en DCM. Comportement des dynamiques 2 et 3 du modèle PWA à temps discret (résolution $\nu = 3$). *112*
Figure 3.4.1.7 : Fonctionnement du convertisseur buck en DCM. Comportement des dynamiques 3 et 4 du modèle PWA à temps discret (résolution $\nu = 3$). *112*
Figure 3.4.1.8 : Changement du mode de fonctionnement (DCM → CCM) du convertisseur buck Comportement des dynamiques 4 et 1 du modèle PWA à temps discret (résolution $\nu = 3$). *113*
Figure 3.4.1.9 : Forme d'onde du courant par l'inductance en régime transitoire sur une période de commutation T_e *113*
Figure 3.4.1.10 : Fonctionnement du convertisseur buck en DCM. Comportement des dynamiques 6 et 7 du modèle PWA à temps discret (résolution $\nu = 3$). *114*
Figure 3.4.1.11 : Changement du mode de fonctionnement (DCM → CCM) du convertisseur buck Comportement des dynamiques 7 et 5 du modèle PWA à temps discret (résolution $\nu = 3$). *114*
Figure 3.4.1.12 : Changement du mode de fonctionnement (DCM → CCM) du convertisseur buck Comportement des dynamiques 9 et 8 du modèle PWA à temps discret (résolution $\nu = 3$). *115*
Figure 4.1.1 : Schéma du convertisseur buck sans pertes. *118*
Figure 4.1.2 : Prototype du convertisseur buck (a), banc de variation de charge (b) et carte d'acquisition « xPC Target ». *126*
Figure 4.1.3 : Schéma de la commande à gains commutés. *126*
Figure 4.1.4 : Tension de sortie V_s obtenue en simulation pour une variation de consigne V_{ref} : 12[V] – 14[V] – 12[V] *127*
Figure 4.1.5 : Rapport cyclique (a) généré en simulation et dynamiques du modèle hybride (b) pour une variation de consigne V_{ref} : 12[V] – 14[V] – 12[V]. *127*
Figure 4.1.6 : Tension de sortie V_s obtenue expérimentalement pour une variation de consigne V_{ref} :12[V] – 14[V] – 12[V]. *128*
Figure 4.1.7 : Rapport cyclique (a) généré expérimentalement et dynamiques du modèle hybride utilisées (b) pour une variation de consigne V_{ref} : 12[V] – 14[V] – 12[V]. *129*
Figure 4.1.8 : Tension de sortie Vs obtenue en simulation pour une variation de la charge R : 6[Ω] – 3[Ω] - 6[Ω] à V_e = 24[V], V_e = 20[V] et V_e = 30[V] *129*
Figure 4.1.9 : Rapport cyclique (a) généré en simulation et dynamiques du modèle hybride (b) pour une variation de la charge R : 6[Ω] – 3[Ω] - 6[Ω] à V_e = 24[V], V_e = 20[V] et V_e = 30[V]. *130*
Figure 4.1.10 : Tension de sortie Vs obtenue expérimentalement pour une variation de la charge R : 6[Ω] – 3[Ω] - 6[Ω] à V_e = 24[V], V_e = 20[V] et V_e = 30[V] *130*
Figure 4.1.11 : Rapport cyclique (a) généré expérimentalement et dynamiques du modèle hybride (b) pour une variation de la charge R : 6[Ω] – 3[Ω] - 6[Ω] à V_e = 24[V], V_e = 20[V] et V_e = 30[V]. *131*
Figure 4.2.1 : Schéma équivalent du convertisseur flyback avec filtre d'entrée sans pertes. *132*
Figure 4.2.2 : Caractéristiques en régime permanent de la tension de sortie du : modèle moyen considérant les pertes résistives au niveau du circuit (courbe « cercles »), modèle moyen idéal (courbe discontinue) et du modèle PWA avec la résolution $\nu = 7$ (courbe pleine). *135*

Figure 4.2.3 : Tension de sortie V_s obtenue en simulation pour une variation de consigne V_{ref} : 24[V] – 26[V] – 24[V]. *138*
Figure 4.2.4 : Rapport cyclique (a) généré en simulation et dynamiques du modèle hybride (b) pour une variation de consigne V_{ref} : 24[V] – 26[V] – 24[V]. *139*
Figure 4.2.5 : Tension de sortie V_s obtenue en simulation pour des variations de la charge R à V_e = 12[V]. *140*
Figure 4.2.6 : Rapport cyclique (a) généré en simulation et dynamiques du modèle hybride (b) pour des variations de la charge R à V_e = 12[V]. *140*
Figure 4.2.7 : Tension de sortie V_s obtenue en simulation pour des variations de la tension d'alimentation V_e, avec R = 22[Ω] et V_{ref} = 24[V]. *141*
Figure 4.2.8 : Rapport cyclique (a) généré en simulation et dynamiques du modèle hybride (b) pour une variation de la tension d'alimentation V_e, avec R = 22[Ω] et V_{ref} = 24[V]. *141*
Figure 4.2.9 : Tension de sortie V_s obtenue en simulation pour une variation de consigne *142*
V_{ref} : 45[V] – 15[V] – 45[V] *142*
Figure 4.2.10 : Rapport cyclique (a) généré en simulation et dynamiques du modèle hybride (b) pour une variation de consigne V_{ref} : 45[V] – 15[V] – 45[V]. *143*
Figure 4.2.11 : Tension de sortie V_s obtenue en simulation pour des variations de la charge *143*
R : 22[Ω] - 11[Ω] - 22[Ω] à V_e = 12[V] et V_{ref} = 16[V]. *143*
Figure 4.2.12 : Rapport cyclique (a) généré en simulation et dynamiques du modèle hybride (b) pour des variations de la charge R : 22[Ω] - 11[Ω] - 22[Ω] à V_e = 12[V] et V_{ref} = 16[V]. *144*
Figure 5.1.1 : Schéma du convertisseur buck sans pertes. *149*
Figure 5.1.2 : Partitions du domaine de définition de la commande PWA représentées en fonction des valeurs décalées $\bar{i}_L$ et $\bar{v}_s$, suite à l'intersection en préalable du domaine 4D de l'espace d'état avec les valeurs à l'équilibre du rapport cyclique $\bar{d}(k-1) = 0$ et la tension de référence $\bar{V}_{ref} = 0$. *153*
Figure 5.1.3 : Simulation de la commande PWA sur le modèle de synthèse hybride. *153*
Figure 5.2.1 : Représentation schématique de l'implantation de la commande prédictive explicite. *155*
Figure 5.2.2 : Tension de sortie V_s obtenue en simulation pour une variation de consigne *155*
V_{ref} : 12[V] – 14[V] – 12[V] *155*
Figure 5.2.3 : Rapport cyclique (a) généré en simulation, régions de la commande PWA (b) et dynamiques du modèle hybride utilisées par l'observateur (c) pour une variation de consigne *156*
V_{ref} : 12[V] – 14[V] – 12[V] *156*
Figure 5.2.4 : Tension de sortie V_s obtenue expérimentalement pour une variation de consigne *157*
V_{ref} : 12[V] – 14[V] – 12[V] *157*
Figure 5.2.5 : Rapport cyclique (a) généré expérimentalement, régions de la commande PWA (b) et dynamiques du modèle hybride utilisées par l'observateur (c) pour une variation de consigne *157*
V_{ref} : 12[V] – 14[V] – 12[V] *157*
Figure 5.2.6 : Tension de sortie V_s obtenue en simulation pour une variation de la charge *158*
R : 6[Ω] – 3[Ω] – 6[Ω] à V_e = 24[V], V_e = 20[V] et V_e = 30[V]. *158*
Figure 5.2.7 : Rapport cyclique (a) généré en simulation, régions de la commande PWA (b) et dynamiques du modèle hybride utilisées par l'observateur (c) pour une variation de la charge *159*
R : 6[Ω] – 3[Ω] – 6[Ω] à V_e = 24[V], V_e = 20[V] et V_e = 30[V]. *159*
Figure 5.2.8 : Tension de sortie V_s obtenue expérimentalement pour une variation de la charge *159*
R : 6[Ω] – 3[Ω] – 6[Ω] à V_e = 24[V], V_e = 20[V] et V_e = 30[V]. *159*
Figure 5.2.9 : Rapport cyclique (a) généré expérimentalement, régions de la commande PWA (b) et dynamiques du modèle hybride utilisées par l'observateur (c) pour une variation de la charge *160*
R : 6[Ω] – 3[Ω] – 6[Ω] à V_e = 24[V], V_e = 20[V] et V_e = 30[V]. *160*

Liste des tableaux

Tableau 2.6 : Représentation compacte des tables de recherche contenant la structure de la commande explicite. *70*
Tableau 2.8.1 Types de problèmes d'optimisation formulés à base des modèles linéaires et hybrides. *72*
Tableau 3.3.1 : Valeurs numériques des paramètres du convertisseur buck. *84*
Tableau 3.3.2.1 : Valeurs numériques des paramètres du convertisseur flyback avec filtre d'entrée. . *93*
Tableau 3.4.1.1 : Valeurs du rapport cyclique et de la résistance de charge utilisées afin de simuler le comportement du modèle PWA avec une résolution $\nu = 3$..... *111*

1 Introduction générale

1.1 Contexte

Le progrès technologique dans le domaine de l'électronique contribue à l'accroissement de l'utilisation des convertisseurs de puissance dans de nombreux domaines. La gamme d'applications est très vaste et peut concerner les plus simples telles que les sources d'alimentation des ordinateurs portables, les téléphones mobiles, les appareils électroménagers, et les plus exigeantes rencontrées dans différents domaines tels que l'aéronautique, l'industrie automobile (les véhicules hybrides et électriques), les télécommunications, les énergies renouvelables (les panneaux solaires photovoltaïques, les éoliennes), etc. En conséquence à cet ensemble d'applications diversifiées, les convertisseurs de puissance font l'objet de recherches très actives (conception, composants de puissance à semiconduteurs, packaging, composants passifs, intégration, etc.). Leurs fonctionnalités sont fortement liées à la conversion, la commande et la gestion de l'énergie électrique. Dans l'environnement industriel, la fiabilité, la robustesse ainsi que l'efficacité énergétique des dispositifs électroniques sont essentielles. Pour ces raisons, les principaux axes de recherche portent particulièrement sur les topologies de convertisseurs dédiées à chaque application et sur la conception d'architectures et de méthodes de commande permettant de répondre aux objectifs de conversion fixés a priori.

En fonction du principe de conversion utilisé, les convertisseurs de puissance se classifient en quatre grandes catégories : continu-continu (en anglais DC-DC), continu-alternatif (DC-AC), alternatif-continu (AC-DC) et alternatif-alternatif (AC-AC).

Les convertisseurs continu-continu sont des dispositifs électriques permettant de délivrer une tension continue réglable à partir d'une autre source de tension continue. La conversion est faite en stockant l'énergie d'entrée sous une autre forme, puis en la redistribuant vers la sortie sous une tension différente. Le stockage temporaire de l'énergie se fait soit sous forme magnétique grâce à des inductances ou des transformateurs, ou bien sous forme électrostatique dans des capacités.

Les convertisseurs alternatif-continu (redresseurs) transforment une tension alternative (monophasée ou triphasée) de valeur moyenne nulle en une tension de valeur moyenne non nulle.

Les convertisseurs de puissance continu-alternatif, appelés onduleurs, peuvent fournir un courant ou une tension d'une certaine amplitude et fréquence. L'application la plus connue est certainement l'onduleur de tension pour piloter une machine électrique inductive (machine synchrone, asynchrone).

Les convertisseurs de puissance alternatif-alternatif permettent d'obtenir une tension alternative réglable à partir d'une tension alternative de fréquence fixe. Les topologies les plus connues sont les cycloconvertisseurs et les convertisseurs matriciels.

Nos travaux de recherche, au cours de cette thèse, se concentrent sur la classe de convertisseurs de puissance continu-continu qui ont une contribution essentielle pour l'alimentation des circuits électroniques : circuits analogiques, microcontrôleurs, FPGA, micro-processeurs, etc.. Ceux-ci contiennent souvent des composants réalisant des fonctions variées, chacun avec sa propre exigence avec un niveau de tension différent de celui fourni par une batterie ou une alimentation externe (parfois plus ou moins élevée que la tension d'alimentation, et éventuellement une tension négative). Dans la majorité des cas, quelle que

soit la source de tension utilisée (batterie, panneaux solaires, alternateur à vitesse variable, etc.), il est nécessaire de fournir une tension d'alimentation régulée. Les convertisseurs continu-continu offrent donc la possibilité d'ajuster le niveau de tension à partir d'une source de tension qui peut subir des variations.

En ce qui concerne le niveau de puissance fourni, les convertisseurs DC-DC se retrouvent dans des applications de faible puissance (quelque watt), telles que des alimentations d'ordinateurs portables, des chargeurs de téléphones mobiles mais également de forte puissance (quelques kilowatts jusqu'à quelques centaines de kilowatts).

La gestion de puissance est devenue une priorité dans le domaine électronique. Actuellement, beaucoup de recherches sont réalisées afin d'augmenter l'autonomie des appareils portables. Afin d'atteindre cet objectif, un axe de recherche fréquemment abordé réside dans l'augmentation du rendement des convertisseurs de tension DC-DC, qui permet de diminuer leur consommation [LJD12], [ELLC12].

Au regard du rôle important des convertisseurs DC-DC dans les systèmes de conversion d'énergie, plusieurs topologies de circuits sont proposées. De manière générale, on peut les classifier soit par les topologies simples, correspondant aux convertisseurs DC-DC représentés par des modèles mathématiques de deuxième ordre, soit par les topologies complexes, associées avec les convertisseurs DC-DC ayant des modèles mathématiques d'ordre plus élevé. Parmi les topologies simples, on note les convertisseurs abaisseur (buck), élévateur (boost) et inverseur (buck-boost ou flyback), et pour ceux complexes, les convertisseurs Ćuk et SEPIC (Single-Ended Primary Inductor Converter en anglais). Les circuits représentatifs des convertisseurs cités sont illustrés sur les Figures de 1 à 6.

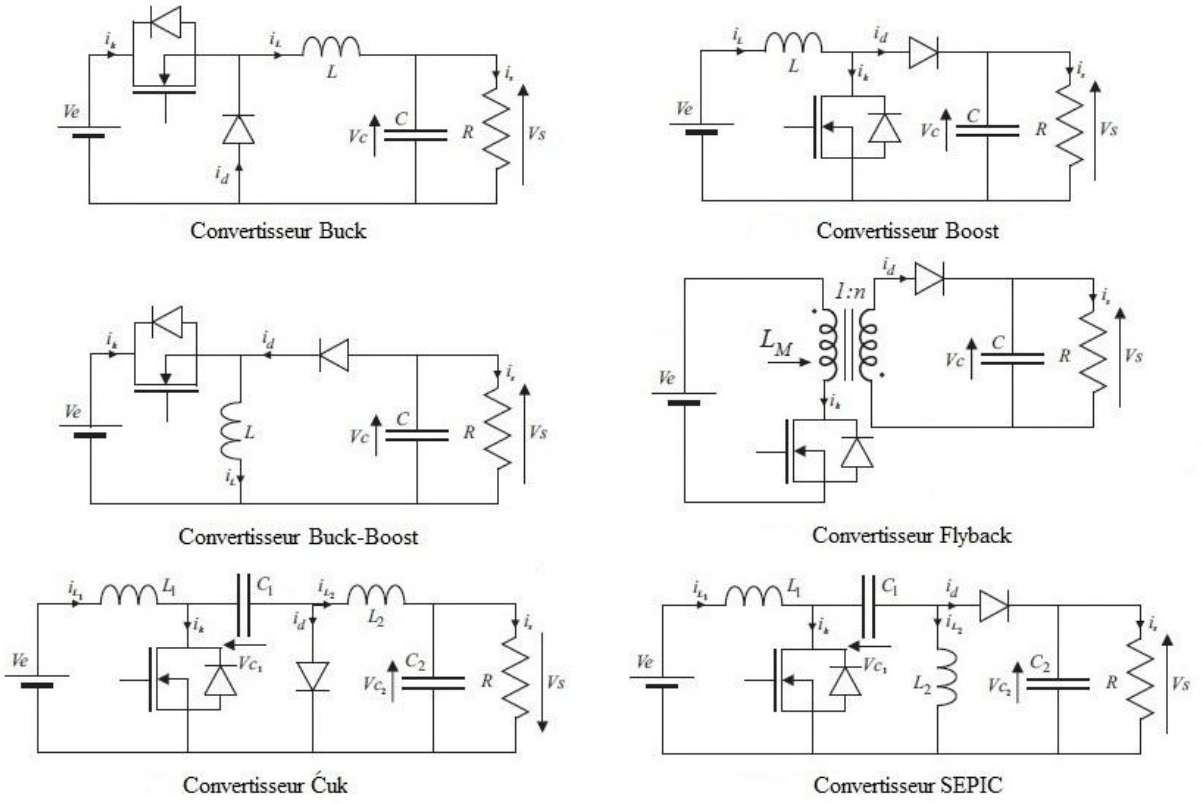


Figure 1 : Circuits représentatifs des convertissuers de puissence DC-DC.

Dans la deuxième catégorie, on considère également les convertisseurs d'ordre deux mentionnés précédemment avec des filtres d'entrée. Ces topologies peuvent assurer un haut rendement de conversion, une flexibilité au niveau du rapport de conversion et permettent également de réaliser une isolation galvanique entre l'entrée et la sortie (à transformateur magnétique par exemple).

Du point de vue de la modélisation, les convertisseurs de puissance sont des systèmes avec un comportement fortement non-linéaire. La topologie des éléments dynamiques du système dépend de l'état de chaque transistor commandé à travers une modulation en largeur d'impulsion (MLI) du signal de commande continu ou discret. On peut distinguer deux modes de fonctionnement des convertisseurs continu-continu : le mode de conduction continue (CCM ou Continuous Conduction Mode en anglais) lorsque le courant dans l'inductance ne s'annule jamais, et le mode de conduction discontinue (DCM ou Discontinuous Conduction Mode en anglais) où le courant dans l'inductance est nul à la fin de la période de découpage. En fonction du mode de fonctionnement, ces convertisseurs présentent deux états du circuit en mode de conduction continue et respectivement trois états du circuit en mode discontinue, chaque état associé à une dynamique linéaire en temps continu différente.

La modélisation dynamique des convertisseurs DC-DC représente un domaine de recherche exploré depuis les années 1970 [MC76], [CM77] mais néanmoins actif à l'heure actuelle [UI08], [ULSK09], [VRGL10], [Jaa11], [VRGL12]. La modélisation du comportement dynamique doit permettre de caractériser le fonctionnement dans les deux modes de conduction (continu et discontinu). De nombreux travaux de recherches se sont focalisés sur le développement des différentes approches de modélisation. Les modèles résultants sont exploités pour l'analyse de convertisseurs et pour la synthèse des lois de commande qui permettent de satisfaire un des cahiers de charge préalablement définis.

Pour chaque mode de fonctionnement (CCM/DCM), les modèles proposés dans la littérature peuvent se classifier selon deux catégories : *modèles à temps continu* et *modèles à temps discret.* Dans chaque classe, il y a des types de modèle qui s'adressent à un mode de conduction bien spécifique. On citera par la suite les différentes approches utilisées pour la modélisation des convertisseurs en fonction du mode de fonctionnement.

En mode de conduction continue, *les modèles à temps continu* sont souvent conçus sur la base de techniques de moyennage dans l'espace d'état [MC76]. Le modèle obtenu, est un modèle « moyen », fréquemment employé pour décrire et analyser le comportement des convertisseurs en raison de la simplicité de l'expression mathématique de la représentation obtenue et du fait que le domaine de validité du modèle coïncide avec l'espace fonctionnement des convertisseurs. La caractéristique de ce modèle consiste à supposer que les effets du découpage sont « moyennés » pendant une période de commutation. Cette technique à base de moyennage est adaptée lorsque la moyenne est calculée pour une fréquence de découpage beaucoup plus grande que la bande passante du système. Pour la plupart des convertisseurs, les modèles moyens sont non-linéaires, en raison du produit entre la grandeur de commande des convertisseurs (rapport cyclique) et le vecteur d'état. Cependant, un modèle linéaire peut s'obtenir en linéarisant le modèle initial autour d'un point de fonctionnement. Le résultat est ainsi un modèle en « petits signaux » [WM73], [ILG78], qui fournit une approximation valide uniquement au voisinage du point de linéarisation. Cependant, elle reste une approche à basse fréquence qui ignore complètement l'aspect discontinu des commutations produites par les transistors. Ainsi, l'approximation fournie par un modèle moyen ne peut pas expliquer certains phénomènes qui se produisent au niveau du circuit, tels que l'apparition des sous harmoniques de la fréquence de découpage dans les formes d'onde des signaux [MB00].

En revanche, parmi les modèles à temps continu, on trouve également des modèles moyens non linéaires, fondés sur la technique de moyennisation de KBM (Krylov-Bogoliubov-Miltropolsky) [Nay73], [KBBL90], [LB96], qui présentent une formulation plus précise, dans le sens qu'ils reflètent les ondulations des signaux en temps réel. En contrepartie, la complexité des expressions analytiques obtenues ne facilite pas la synthèse des lois de commande. Dans cette même catégorie, on peut citer les modèles qui utilisent la décomposition en séries de Fourier [SNVL91], [MEBE97] pour approcher les variables d'état à l'intérieur de la période de commutation. Cette méthode est aussi capable de modéliser les ondulations des signaux autour de leur moyenne.

Une autre procédure de modélisation est constituée par la méthode du circuit équivalent moyenné [Lee85], [Vor90a], [Eri97], [Sun00]. Celle-ci fournit une topologie moyenne, unique des convertisseurs, en remplaçant la partie de commutation, représentée par le transistor et la diode, par un circuit équivalent, composé d'éléments passifs, des transformateurs idéaux et de sources de courant ou de tensions. Même si le modèle continu du circuit équivalent est non-linéaire, une linéarisation autour d'un point de fonctionnement permet d'obtenir un modèle linéaire « petits signaux ».

Les approches de modélisation en mode de conduction continu font également appel à la classe de modèles linéaires à paramètres variants (LPV) [OLAGQ10], où les non-linéarités du système sont formulées à travers un système linéaire ayant les matrices d'état dépendantes de paramètres variant dans le temps. Pour les convertisseurs DC-DC, la résistance et la tension d'entrée représentent les paramètres pour lesquels les valeurs changent dans le temps. Néanmoins, l'utilisation des modèles LPV reste assez limitée en raison des difficultés à formuler les modèles des convertisseurs sous l'une des formes spécifiques des modèles LPV et aussi du conditionnement numérique des représentations obtenues.

La classe de modèles énergétiques représente une classe de modèles continus, très intéressante pour les convertisseurs de puissance. Le modèle d'Euler-Lagrange [OLNS98] et le modèle Hamiltonien [EvdSO99] sont les deux types de modèle employés pour caractériser le comportement des convertisseurs du point de vue énergétique. La formulation du modèle est faite à travers des fonctions du stockage permettant d'exprimer les énergies du système (l'énergie emmagasinée dans les inductances, l'énergie stockée dans les condensateurs et la dissipation dans le circuit).

Tous les modèles continus mentionnés pour le mode de conduction continu sont également utilisables dans le mode de conduction discontinu [CM77], [Vor90b], [NTM01], sauf les modèles moyens non-linéaires complexes.

Les modèles à temps discret sont facilement obtenus en considérant les dynamiques linéaires continues du convertisseur dans chaque configuration des modes CCM ou DCM et en appliquant une approximation de la forme discrète des matrices qui caractérisent chacune des dynamiques. Effectivement, les modèles discrets linéaires [HBY89] sont utilisés uniquement en mode de conduction continue, alors que les modèles discrets non-linéaires fondés sur le théorème de Cayley-Hamilton [Su05], ou la méthode de Newton et la théorie de la fonction implicite [FA99] peuvent être utilisés séparément dans les deux modes de fonctionnement et présentent une meilleure précision que les modèles discrets linéaires.

En ce qui concerne l'aspect pratique, des modèles à temps discret peuvent être facilement simulés par rapport aux modèles à temps continu, qui nécessitent une étape intermédiaire de discrétisation pour la simulation numérique.

Indépendamment du mode de fonctionnement et de la méthode de modélisation abordée, les modèles énumérés précédemment sont composés par une seule dynamique continue ou discrète, linéaire ou non-linéaire, qui approche les deux ou les trois configurations du circuit en mode CCM ou DCM, et qui reflète le comportement moyen des variables d'états, dans la majorité des cas.

Du point de vue de la commande des convertisseurs DC-DC, le principal objectif consiste à piloter le transistor tel que la composante continue de la tension de sortie soit égale à une tension de référence donnée. La synthèse d'une loi de commande pour les convertisseurs de puissance doit répondre aux objectifs classiques de stabilité, de performance dynamique et de robustesse. De manière générale, le réglage devient difficile en raison des différents éléments qui perturbent leur fonctionnement. Une fois que les convertisseurs sont embarqués dans différentes applications, leur comportement est fortement influencé par plusieurs facteurs : les variations de la charge et de la tension d'alimentation, la sensibilité aux bruits, les changements dans le temps ou en présence des perturbations des paramètres incertains (des inductances ou des condensateurs par exemple) présents dans la structure des convertisseurs. Dans certaines situations, ces éléments forcent le comportement du système à s'écarter du fonctionnement désiré. Pour ces raisons, les recherches s'orientent vers l'élaboration des lois de commande performantes, stabilisantes et robustes quel que soit le point de fonctionnement du convertisseur.

En pratique, les méthodes de commande des convertisseurs sont fondées sur la régulation de la tension de sortie ou du courant. Des correcteurs de type PI réglés par rapport aux modèles moyens linéarisés sont souvent employés pour piloter les convertisseurs. Lorsqu'ils sont convenablement ajustés, ces correcteurs fournissent des résultats satisfaisants pour diverses applications pratiques sans recours à une description détaillée de la dynamique du système. Cependant, leurs performances peuvent facilement se dégrader en présence d'effets non linéaires et de ce fait, il est nécessaire de réajuster les gains ou d'utiliser une approche adaptative.

Dans la littérature, plusieurs approches ont été proposées afin d'améliorer la conception de la commande en choisissant la méthode la plus adaptée au regard d'un cahier de charges, capable d'améliorer l'efficacité des convertisseurs en réduisant l'effet des perturbations (des changements de la tension d'entrée et de la charge), de diminuer les interférences électromagnétiques et de limiter les variations paramétriques [Ejj10]. Généralement, les stratégies de réglage sont directement liées au type du modèle choisi pour décrire le comportement des convertisseurs et aux exigences de chaque application concernant le niveau de performance et de robustesse. Il y a des modèles qui favorisent la synthèse d'une certaine loi de commande, alors que pour d'autres types de commandes, ils ne sont pas adaptés. Un choix inapproprié du modèle peut introduire des difficultés dans la synthèse de la loi de commande ou même la complexifier et la rendre inefficace.

L'approche « classique » du point de vue de l'automatique consiste à utiliser des techniques de commandes linéaires à base d'un modèle moyen linéarisé autour d'un point de fonctionnement spécifique. Parmi ces stratégies de commande, on note la commande linéaire quadratique (LQR ou Linear Quadratic Regulation en anglais) [LTL91], [LTL93] et la famille de régulateurs PI avec des paramètres qui dépendent de façon non-linéaire de la valeur de la commande en régime permanent [Sir91]. Cependant, les lois de commande obtenues ne sont pas capables d'assurer la stabilité globale du convertisseur et de conserver des performances identiques dans tout le domaine du fonctionnement. Ces inconvénients dérivent de la précision limitée du modèle de synthèse utilisé.

Des lois de commande fondées sur un modèle moyen non-linéaire ou un modèle énergétique ont également été appliquées : la commande par modes de glissements (SMC ou Sliding Mode Control en anglais) [Utk93], [TLT06], [HL06], [JGL+10] la commande par passivité [Jaa11], [OGC04], [SS09]. Ces méthodes de commande utilisent des outils théoriques plus complexes qui permettent de démontrer la stabilité globale du système.

Une autre approche, qui consiste à commander directement les différents commutateurs sans passer par un modèle moyen, a été utilisée pour de convertisseurs DC-DC fonctionnant aux fréquences variables [MRST95], [RKJ09].

Les différentes méthodes de modélisation ont permis de représenter et d'analyser le comportement physique des convertisseurs DC-DC par des concepts mathématiques qui conviennent par la suite à la synthèse des lois de commande. Les méthodologies et les approches de synthèse proposées ont sans aucun doute apporté leur contribution du point de vue théorique. En revanche, les lois de commande élaborées ont été trop peu implantées en temps réel. De ce fait, l'objectif de ces travaux de thèse consiste à développer des lois de commande fondées sur une démarche théorique cohérente et qui peuvent être validées expérimentalement.

1.2 Problématique

Comme nous l'avons mentionné dans les paragraphes précédents, la famille des convertisseurs de puissance DC-DC représente une classe de convertisseurs à découpage particulièrement importante en termes d'applications. Généralement, ces dispositifs sont embarqués dans beaucoup d'appareils comportant une alimentation électrique. Actuellement, les fonctionnalités des appareils mobiles ont considérablement augmenté et ont été améliorées grâce à l'intégration de processeurs numériques dédiés au traitement de signal (DSP) par exemple. Ces nouveaux facteurs conduisent à des cahiers de charges assez stricts concernant la performance dynamique, la stabilité et la robustesse. L'utilisation de techniques usuelles de modélisation (le modèle moyen) et de commande (PI et PID) ne conduit plus à des réponses satisfaisantes [AKS04], [OLAGQ10], [HSRD10].

En conséquence, au cours des dernières années, certains axes de recherches se sont orientés vers les approches de modélisation issues des systèmes hybrides [Son81], [Son96], [BBM98], [vdSS98], [BM99a]. L'aspect hybride d'un système est donné par la présence simultanée de variables continues et discrètes. La partie continue du système est modélisée par des équations différentielles ou algébriques, alors que la partie discrète est attribuée aux systèmes à transitions par des règles « si-alors » ou aux machines avec un nombre fini d'états. Classiquement, les systèmes hybrides commutent entre différents modes de fonctionnement où chaque mode est représenté par une loi dynamique propre. Les transitions entre les modes sont déclenchées par des variables qui dépassent certaines limites ou par des entrées externes.

Les systèmes hybrides sont prédominants dans le domaine de l'électronique de puissance et en particulier sur les convertisseurs de puissance DC-DC qui sont caractérisés par une structure variable (en raison du changement de la topologie du circuit selon les états passant ou bloqué des transistors et diodes). En conséquence, les convertisseurs DC-DC à découpage sont considérés comme des systèmes hybrides pour lesquels la partie discrète est représentée par les commutations à haute-fréquence des transistors, alors que les courants et les tensions au sein du système sont décrits par des équations dynamiques à variables continues.

L'exploitation des techniques de modélisations hybrides a connu un développement important afin de prendre en compte le comportement hybride de convertisseurs continu-continu, assuré par les commutations du transistor et les dynamiques continues associées à ces commutations, et de reproduire le comportement dynamique du système réel [SEK03], [AFJ+07], [BPM+07]. Grâce à ces méthodes de modélisation hybride, il est possible de tenir compte à la fois de l'évolution en temps continu des variables d'état du système et de l'effet des éléments discrets. Le principe consiste à exprimer les configurations du convertisseur en utilisant un modèle à temps continu ou discret et d'utiliser une expression ou une variable logique pour sélectionner le modèle de la configuration active à chaque instant.

Une première approche qui concerne la modélisation hybride de convertisseurs de puissance DC-DC est la formulation d'un modèle hybride pour les convertisseurs à résonance. Le comportement du convertisseur est exprimé soit à travers un automate hybride [SEK03], assurant des propriétés de sécurité, soit par un modèle énergétique de type Hamiltonien, qui contient une variable logique du signal de commande [Son81]. L'utilisation d'une fréquence de commutation variable augmente l'efficacité de ce type de convertisseurs, en minimisant les pertes dues à la commutation des transistors, d'une part, mais complexifie la conception de l'étage de puissance du convertisseur et du filtre nécessaire à la réduction des interférences électromagnétiques d'autre part.

Plusieurs groupes de recherche ont orienté leur intérêt sur des méthodes de modélisation hybride dédiés aux convertisseurs DC-DC fonctionnant à une fréquence de découpage constante. Jusqu'à présent, les études traitent seulement sur le mode de conduction continue :

Le groupe de recherche du CNRS-CRAN (Le Centre de recherche en Automatique de Nancy) propose un modèle linéaire commuté, composé des dynamiques linéaires associées à chaque configuration du circuit. Les changements entre les différentes dynamiques sont assurés par une fonction de commutation construite différemment en fonction de la topologie du convertisseur utilisée.

EPFZ (L'École polytechnique fédérale de Zurich, Suisse) utilise un modèle affine par morceaux à temps discret [Son96], construit à partir de la notion de *v*-résolution. Cette technique de modélisation donne une approximation efficace du comportement du convertisseur dans tout le domaine de fonctionnement. De plus, le modèle est capable de représenter l'évolution des variables d'état à l'intérieur de la période de commutation en fonction de la résolution *v* choisie et d'offrir un compromis précision/complexité introduite par une valeur significative de *v*.

L'Institut Royal de technologie de Stockholm, Suède (KTH) a opté pour l'utilisation d'un modèle échantillonné où les dynamiques changent de façon périodique dans un ordre donné entre les deux configurations du circuit en mode de conduction continue (CCM).

École polytechnique de l'Université de Lund, Suède (LTH) utilise un modèle robuste à temps discret où les matrices du système sont fortement non linéaires par rapport au signal de commande et de la résistance de charge. Cette forme de modèle n'est pas adaptée pour la commande et de ce fait, le modèle est préalablement linéarisé pour l'utilisation dans la synthèse d'une commande.

En comparaison avec les modèles à temps continu et discret, les modèles hybrides reflètent un comportement plus précis du convertisseur dû à une modélisation spécifique de chaque configuration du circuit en mode de conduction continue. Les modèles obtenus à travers les approches proposées sont linéaires ce qui facilite l'analyse et la synthèse des lois

de commande. Cependant, la gestion des transitions entre les différentes dynamiques du modèle hybride représente le principal défi lié essentiellement à l'analyse de stabilité du système et à la complexité des outils mathématiques utilisés. En boucle ouverte, la stabilité ou l'instabilité de chaque dynamique du modèle ne fournit aucune information sur le comportement global du système. Il y a des exemples où des changements entre les dynamiques du modèle génèrent des trajectoires divergentes ou des situations où la trajectoire du système est obligée de rester à la frontière des deux dynamiques, ce qui l'empêche d'atteindre un point de fonctionnement souhaité.

Obtenir une forme explicite d'un modèle hybride pour les convertisseurs de puissance est une étape intéressante afin de procéder aux phases d'analyse et de synthèse des lois de commande.

Mis à part les facteurs énoncés précédemment qui influencent les convertisseurs et compliquent les réglages des lois de commande, le comportement non-linéaire des convertisseurs constitue la principale difficulté de point de vue de la commande. Selon le mode de fonctionnement, les convertisseurs ont deux (CCM) ou trois (DCM) configurations possibles, au niveau du circuit, représentées par une dynamique linéaire à temps continu différente. La topologie du convertisseur introduit des contraintes sur le rapport cyclique (la commande du transistor) limité dans l'intervalle zéro et un, et également sur le courant dans l'inductance qui prend une valeur strictement positive en mode de conduction continue et une valeur positive ou égale à zéro dans le mode de conduction discontinue.

Dans ce cas, l'utilisation des correcteurs de types prédictifs (Model Predictive Control en anglais) est recommandée. Ce type de commande est fondé sur une optimisation en temps réel qui utilise un modèle de prédiction et l'application du principe de l'horizon glissant. En raison de la formulation dans le domaine temporel, il permet de prendre en compte les contraintes et les incertitudes du système directement dans la phase de conception des lois de commande. De ce fait, des nombreuses recherches s'intéressent à la commande prédictive qui peut se révéler bien adaptée pour répondre aux problèmes industriels [QB03], [MRRS00]. Dans la littérature, certains auteurs abordent les développements de cette technique de commande en introduisant une variété des classes dérivées de la procédure standard [CB97], [Mac02], [Ros03].

En absence de contraintes, la solution du problème d'optimisation peut être exprimée par une commande par retour d'état. La présence des contraintes ou de non-linéarités implique la résolution d'un problème d'optimisation à chaque période d'échantillonnage de façon à garantir la minimisation d'un critère portant sur la performance désirée. La procédure d'optimisation fournit une séquence optimale de commande où seul le premier élément est appliqué conformément au principe de l'horizon glissant. Par la suite, la mise à jour de l'état du système est effectuée afin de faire glisser la fenêtre de prédiction et ainsi de réitérer la procédure d'optimisation. Cependant la résolution « en-ligne » s'avère très couteuse en temps de calcul, ce qui empêche l'implantation du correcteur en temps réel et restreint le domaine d'application. Au cours des dernières années, l'utilisation de méthodes multiparamétriques a permis la description explicite de la loi de commande sous la forme d'une commande par retour d'état. Elle est représentée par une fonction affine par morceaux, définie sur une partition polyédrale de l'espace d'état. Dans un premier temps, la solution explicite est fournie pour des problèmes d'optimisation fondée sur des modèles linéaires. Récemment des méthodes ont été proposées pour les modèles hybrides [Bor03]. La structure du correcteur explicite, obtenu « hors-ligne », est gardée dans des tables de recherche. Ainsi, l'implantation de la loi de commande se résume d'une part à la recherche dans une table de la région active à

chaque instant, et d'autre part, à l'évaluation d'une fonction affine par morceaux en utilisant l'état courant.

Revenant à la commande des convertisseurs DC-DC, les méthodes de la commande prédictive permettront la synthèse d'une loi de commande explicite à base d'un modèle hybride ainsi que la manipulation des contraintes imposées par la topologie du circuit. Le fait de pouvoir ajouter des contraintes au niveau du rapport cyclique ou d'un courant justifie ainsi l'utilisation de la commande prédictive pour la régulation des convertisseurs de puissance DC-DC. De plus, d'autres avantages de cette technique de commande sont intéressants tels que l'anticipation du comportement futur du système, l'utilisation explicite d'un modèle numérique et l'application sur un horizon fini de la trajectoire future désirée.

Cependant, l'inconvénient de la méthode consiste dans la difficulté d'implantation en temps réel de l'algorithme de commande. La taille de la solution explicite obtenue dépend de l'horizon de prédiction, de nombreuses contraintes imposées et également de la complexité du modèle hybride utilisé (donné par le nombre des dynamiques et de variables d'état du modèle). Généralement, un horizon de prédiction important améliore les performances dynamiques de la commande synthétisée et dans le même temps, augmente la dimension de sa structure. Pour les convertisseurs fonctionnant à une fréquence de découpage élevée, l'évaluation de la loi de commande calculée « hors-ligne » peut également poser des problèmes pour des dimensions significatives de la table de recherche contenant les régions sur lesquelles la commande est définie.

1.3 Objectifs et organisation des travaux de thèse

Dans ce contexte, l'objectif de nos travaux de recherche consiste à développer des méthodes de modélisation hybride afin de procéder à l'analyse et à l'élaboration de la loi de commande des convertisseurs de puissance DC-DC. Jusqu'à présent, les modèles simplifiés décrivant le comportement dynamique des convertisseurs n'ont pas permis d'expliciter les dynamiques complexes qui proviennent de la nature hybride des systèmes en commutation. Evidemment, l'utilisation des modèles imprécis pour l'élaboration des lois de commande peut limiter les performances des correcteurs conçus. Par conséquent, dans un premier temps, nous envisageons d'élaborer un algorithme générique pour la construction d'un modèle hybride capable d'approcher le comportement d'un convertisseur DC-DC fonctionnant en mode de conduction continue, à une fréquence de commutation fixe. L'objectif est d'obtenir une technique de modélisation hybride applicable aux convertisseurs de deuxième ordre et par la suite aux convertisseurs d'ordres plus élevé. Dans un deuxième temps, nous souhaitons développer une méthode de modélisation afin de prendre en compte les deux modes de fonctionnement : conductions continue et discontinue (et les transitions entre les deux modes).

À partir des modèles hybrides développés, nous proposons de mettre en œuvre des méthodes de commande avancées, performantes et robustes afin de piloter les convertisseurs DC-DC tout en anticipant sur la faisabilité de l'implantation en temps réel. De manière plus spécifique, nous essayons de répondre aux problèmes de régulation et de stabilisation à travers des lois de commande associées aux méthodes de la commande prédictive. De plus, nos démarches de modélisation et de conception des lois de commande sont guidées par un compromis entre la partie théorique et l'aspect pratique afin de permettre la validation expérimentale des lois de commande synthétisées.

Nous avons choisi deux topologies de convertisseur afin de valider les approches destinées à la modélisation et la synthèse des lois de commande proposées. Dans un premier

temps nous considérons le convertisseur de type Buck (abaisseur) et dans un second temps, un convertisseur d'ordre plus élevé de type flyback avec un filtre d'entrée.

Actuellement, les convertisseurs de puissance DC-DC sont capables de fonctionner à des fréquences de commutation élevées (quelques kilo-Hertz jusqu'à quelques méga-Hertz), avec un rendement élevé grâce aux développements en matière de topologies mais présentent en contre partie des imperfections. L'un des inconvénients se situe dans le phénomène d'ondulation du courant d'entrée qui représente une source d'interférences électromagnétiques pour le réseau amont (interférences électromagnétiques « conduites »). En présence d'un filtre approprié à l'entrée du convertisseur, l'ondulation du courant peut être limitée. Cependant, ce filtre accroît la complexité et le coût du circuit, et génère un système à déphasage non-minimal, ce qui complique la stabilisation du convertisseur pour un niveau de performances exigeant. Pour répondre aux problèmes de régulation introduite par l'utilisation d'un tel filtre, nous considérons le convertisseur flyback avec un filtre d'entrée. Ce convertisseur présente un fort caractère non linéaire en comparaison avec le convertisseur Buck.

Les travaux menés au cours de cette thèse sont organisés comme suit :

- Le deuxième chapitre introduit des concepts théoriques liés aux principales classes de modèles hybrides employés pour la représentation mathématique des systèmes hybrides. Ensuite, pour une gamme spécifique des modèles hybrides (la représentation linéaire par morceaux) une méthode de synthèse de lois de commande et d'analyse de la stabilité fondée sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov est présentée. La deuxième partie du chapitre est focalisée sur des méthodes de la commande prédictive fondées sur des modèles linéaires et hybrides à temps discret. Pour les modèles linéaires, la problématique de commande optimale est formulée sur un critère d'optimisation quadratique et linéaire. Dans chaque cas, la forme explicite de la loi de commande optimale est obtenue à travers des méthodes de programmation multiparamétrique quadratique ou linéaire. Une extension de la procédure de calcul de la commande, fondée sur les concepts appliqués sur les modèles linéaires, est réalisée pour les modèles hybrides. Dans cette partie, un modèle logique/dynamique mixte est utilisé et des méthodes de programmation multiparamétriques mixte en nombres entiers avec un critère linéaire sont employées pour déterminer la solution explicite du problème d'optimisation. Également, une méthode de programmation dynamique à base d'un modèle affine par morceaux est présentée, conduisant ainsi à une loi de commande explicite. Quelques détails d'implantation de la commande prédictive explicite sont donnés, faisant appel aux techniques de réduction de la taille du correcteur synthétisé et aux tables de recherche permettant d'exploiter d'une manière plus efficace la structure du régulateur.
- Le troisième chapitre présente des méthodes de modélisation hybride pour les convertisseurs de puissance DC-DC. En premier lieu, le modèle moyen est détaillé. La dynamique de ce modèle est souvent utilisée pour approcher le comportement des convertisseurs de puissance DC-DC, en mode de conduction continue (CCM) et séparément, en mode de conduction discontinue (DCM) et présente un rôle important dans la modélisation hybride des convertisseurs à fréquence de commutation constante. Après l'introduction du modèle moyen classique, des modèles hybrides sont développés dans un premier temps pour un

convertisseur d'ordre deux de type Buck et ensuite pour un convertisseur d'ordre quatre de type flyback avec un filtre d'entrée, en supposant l'hypothèse de fonctionnement en régime de conduction continue. Le convertisseur flyback a été choisi pour son caractère non-linéaire plus prononcé au niveau de la dynamique du système, en comparaison avec la dynamique du convertisseur Buck. Le fait d'ajouter un filtre à l'entrée accentue d'avantage les non linéarités et augmente l'ordre du modèle décrivant le convertisseur. Dans cette situation, une distinction claire est faite entre la précision et le domaine de validité de l'approximation hybride, composée des plusieurs modèles linéaires, et l'approximation du modèle moyen linéarisé autour d'un point de fonctionnement. Finalement, la méthode de modélisation est étendue vers un modèle hybride qui permet de représenter le comportement réel du système dans les deux modes de fonctionnement (CCM/DCM), dans le cas du convertisseur Buck.

- Dans le quatrième et le cinquième chapitre nous proposons deux approches différentes de synthèses de lois de commande linéaires. Dans le quatrième chapitre, une loi de commande à gains commutés est élaborée pour le convertisseur flyback avec filtre d'entrée. L'approche proposée est fondée sur les méthodes de synthèse présentées dans le deuxième chapitre et le modèle hybride conçu dans le chapitre précèdent. La commande par retour d'état développée est linéaire par morceaux et assure la stabilité du système en boucle fermé. Les approches théoriques permettent de conclure sur la stabilité des modèles utilisés et elles sont vérifiées en simulation. Les résultats sont validés vis-à-vis de variations de la tension d'entrée, de la charge ou encore de la consigne (bien que dans un cas réel la consigne soit constante dans la plupart des applications). L'intérêt de cette technique de modélisation hybride, et de la commande par retour d'état linéaire par morceaux, est prouvé comparativement aux méthodes de modélisation classiques associées à une régulation de type PI, usuelle pour ce type de systèmes, et à une commande par retour d'état à gains constants.
- Le cinquième chapitre est consacré à la synthèse de lois de commandes affines par morceaux en considérant les outils théoriques spécifiées dans la deuxième partie du deuxième chapitre. Des méthodes de commande prédictive à base de modèle sont appliquées en deux étapes sur les convertisseurs Buck et flyback avec un filtre d'entrée. Dans la première étape, le modèle moyen linéarisé et un critère d'optimisation quadratique sont employés afin d'obtenir une solution explicite de la commande prédictive, et dans la deuxième étape, la forme explicite est déterminée en utilisant un modèle hybride et un critère d'optimisation linéaire. Les lois de commande prédictive conçues sont validées en simulation sur un modèle reprenant le fonctionnement en commutation. Une validation expérimentale est proposée sur deux prototypes.

Finalement, les conclusions de nos travaux de recherches sont présentées, suivies par des futures perspectives orientées vers la méthode de modélisation hybride abordée, l'amélioration des lois de commande prédictive proposée du point de vue de la stabilité et robustesse vis-à-vis des paramètres.

2 Concepts théoriques

Comme mentionné au chapitre précédent l'objectif de cette thèse est de proposer des solutions pour la commande des convertisseurs de puissance DC-DC, en appliquant des méthodes de modélisation et de synthèse hybrides pour une description plus précise de la structure variable des circuits. Plus précisément, les changements au niveau de la topologie du circuit en fonction de l'état passant ou bloqué de l'interrupteur et la diode font que les convertisseurs DC-DC sont considérés comme des systèmes en commutation. De ce fait, la modélisation d'un convertisseur peut se faire à partir de la perspective d'un système hybride pour lequel il existe différentes représentations mathématiques. Ce chapitre est dédié à la présentation des principales classes des systèmes hybrides et des méthodes développées pour l'analyse et la synthèse de lois de commande associées à des représentations affines par morceaux (PWA ou Piecewise Affine en anglais).

La première partie du chapitre est consacrée aux principaux modèles employés pour exprimer le comportement dynamique d'un système hybride dans l'espace d'état (automates discrets hybrides, modèles logiques/dynamiques mixtes, modèles affines par morceaux, etc.). Ensuite, les méthodologies d'analyse et de synthèse seront orientées vers la classe des modèles affines par morceaux à temps discret, composés par plusieurs dynamiques qui correspondent à différentes régions de l'espace d'état. Ce type de modèle a la capacité d'approcher une large gamme de systèmes physiques avec un caractère non linéaire prononcé, ainsi que le comportement des systèmes où les dynamiques changent en fonction de l'évolution des variables d'une région à une autre dans l'espace d'état.

L'analyse des modèles affines par morceaux est complexe du fait que les propriétés des dynamiques, linéaires localement, ne peuvent pas être généralisées pour l'ensemble des dynamiques du modèle. Des méthodes d'analyse de la stabilité pour les modèles PWA fondées sur des fonctions de Lyapunov sont présentées dans la deuxième partie du chapitre. Également, des méthodes de synthèse des lois de commande capables de garantir la stabilité globale du modèle, au sens de Lyapunov, sont brièvement décrites.

La troisième partie du chapitre est réservée à une stratégie de la commande prédictive et à la conception de lois de commande explicites, en utilisant des méthodes de programmation multiparamétriques. Dans cette optique, la solution explicite du problème d'optimisation formulée sur un modèle linéaire soumis aux contraintes sera détaillée en considérant des critères d'optimisations quadratiques et linéaires. Cela représente une étape intermédiaire vers l'élaboration d'une loi de commande explicite à partir d'un modèle hybride. Malgré les solutions proposées récemment dans la littérature [BBBM03], [BBBM05], à base de critères quadratiques, les algorithmes permettant d'obtenir une loi de commande prédictive explicite fondée sur des modèles hybrides sont disponibles dans des boites à outils uniquement pour des critères d'optimisation linéaire. De ce fait, dans ce chapitre, on présente deux méthodes de programmation multiparamétrique pour la résolution « hors-ligne » du problème d'optimisation : la première utilise la programmation mixte en nombres entiers et la seconde, la programmation dynamique. La description de ces méthodes est faite en exprimant les performances de la loi de commande explicite par un critère linéaire d'optimisation.

Dans le cadre de cette thèse, la résolution « hors-ligne » du problème d'optimisation et la détermination de la forme explicite de la commande prédictive sont essentielles afin de pouvoir implanter les régulateurs obtenus en temps réel sur différents convertisseurs de puissance DC-DC. Généralement, ces convertisseurs sont des systèmes rapides, commutant à

haute fréquence, ce qui impose que le temps de calcul de la commande à chaque pas soit inférieur à la période d'échantillonnage. Pour ces raisons, la résolution « en-ligne » du problème d'optimisation n'est pas faisable, dans le cas général, pour les convertisseurs DC-DC et plus largement les systèmes de conversion d'énergie.

2.1 Systèmes hybrides

L'innovation technologique encourage la considération des systèmes hybrides, caractérisés par l'interaction entre les variables d'état à temps continu et les variables discrètes. Par exemple, un système hybride peut provenir de l'association d'un système analogique à temps continu et d'une commande numérique. Plusieurs produits de consommation (tels des lave-linges, micro-ondes, photocopieuses, cameras etc.) sont commandées au moyen d'un logiciel embarqué, ce qui conduit à un système global {procédé + commande} hybride comportant des dynamiques mixtes. En conséquence, les systèmes hybrides sont déjà présents dans la vie quotidienne et leur nombre continue à augmenter avec l'accroissement des produits commandés par ordinateur. La représentation de ce type de système hybride est illustrée par la Figure 2.1 (a).

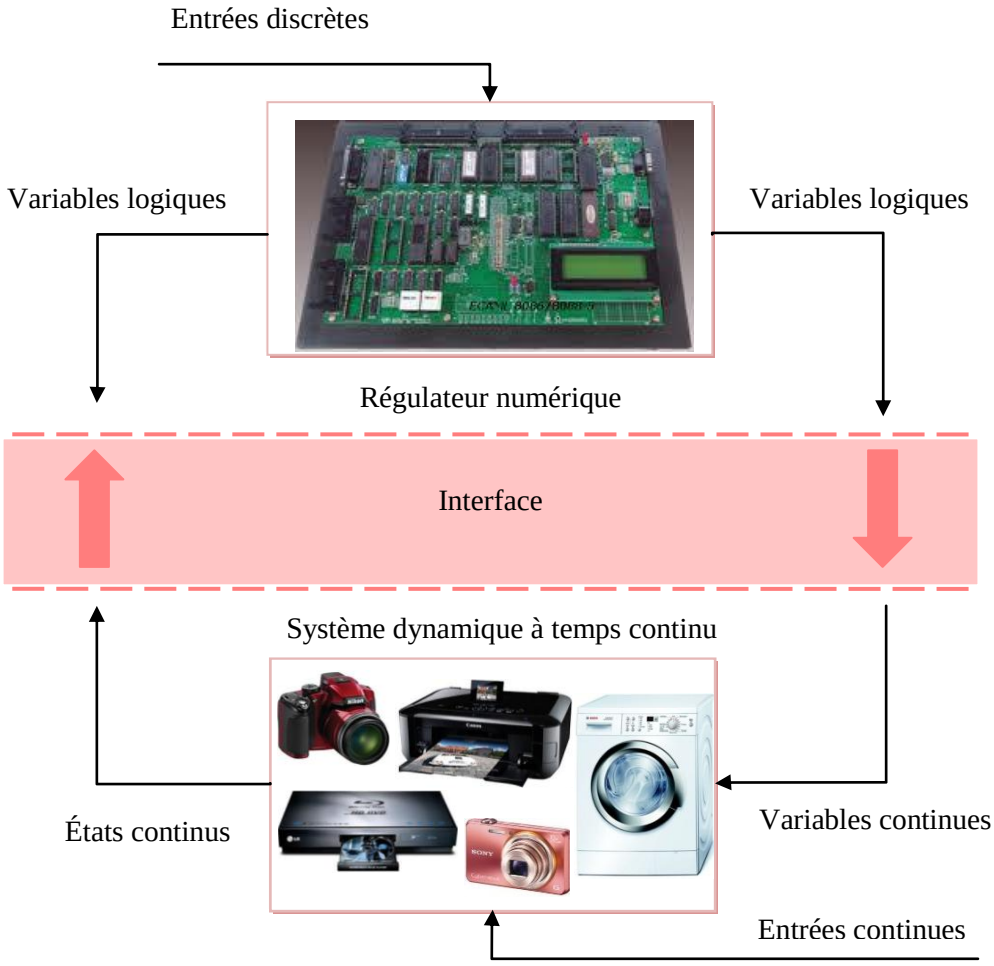


Figure 2.1 (a) : Schéma d'un système hybride.

La nature hybride n'est pas nécessairement générée par l'intervention humaine dans les systèmes. Même s'il existe de nombreux exemples de systèmes hybrides créés en ajoutant des

régulateurs numériques aux systèmes physiques, la commutation conduisant à différents comportements dynamiques se manifeste naturellement dans une large variété des systèmes.

Dans le domaine de l'électronique de puissance, les convertisseurs de puissance DC-DC utilisent couramment des composants électroniques qui fonctionnent comme des interrupteurs commandés par un signal exogène. Selon l'ouverture ou la fermeture de ces interrupteurs, un convertisseur peut avoir plusieurs configurations de fonctionnement décrites par des dynamiques à temps continu différentes. La représentation mathématique de son comportement dépend de la variable logique exogène qui commande la durée que l'interrupteur reste dans chacune des positions ouverte/fermée, d'une part, et de l'état bloqué ou passant d'éléments comme les diodes, d'autre part. À part le domaine de l'électronique de puissance, on retrouve, également, des exemples dans le domaine de la mécanique. Par exemple dans les modèles de frottement, les dynamiques changent en fonction de la phase d'adhérence, de patinage ou encore celle de glissement. D'autres exemples incluent les modèles décrivant l'évolution des corps rigides où les équations des dynamiques sont formulées différemment si le corps est en contact avec une surface ou pas. En ce qui concerne l'aspect hybride, quelques applications mécaniques intéressantes ont été abordées, telles que la commande des robots manipulateurs [BNO97], l'amortissement des vibrations dans les boîtes de vitesses des voitures ou dans les machines de forage [PG96], les essais de simulation d'impact permettant la régulation des manœuvres d'atterrissage des avions, la conception des robots de jonglage [BR00], etc.

En principe, un système hybride présente un comportement caractérisé par plusieurs modes de fonctionnement. Dans chaque mode, l'évolution des états continus du système est décrite par une équation différentielle propre. Le système hybride commute entre les différents modes lorsqu'un événement particulier se produit. Dans la Figure 2.1 (b), des liens sont utilisés pour représenter les évènements qui provoquent les changements entre les dynamiques du système hybride.

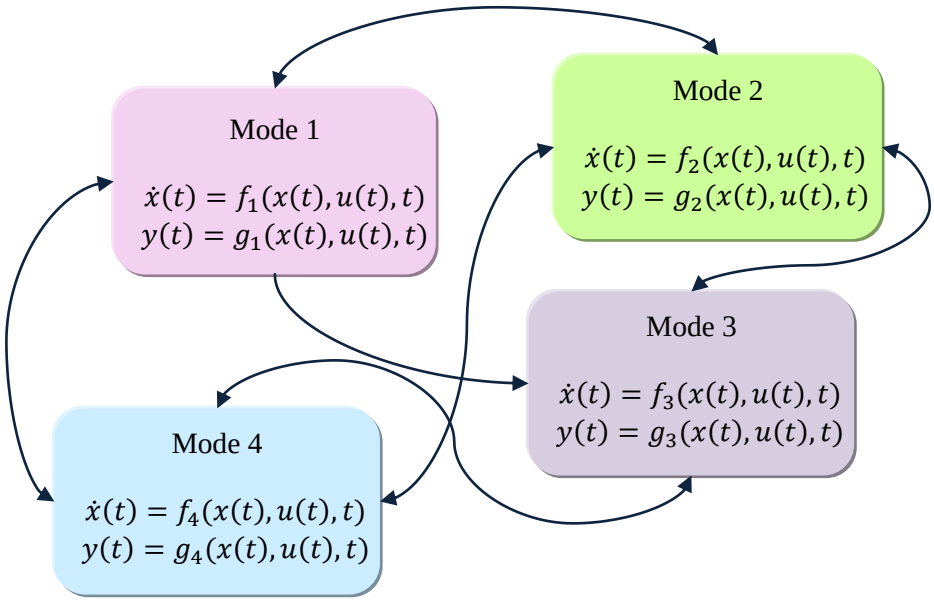


Figure. 2.1 (b) : Système hybride avec 4 modes de fonctionnement.

L'origine de l'évènement générant la transition est assez variée : une variable qui dépasse une certaine limite, l'écoulement d'un intervalle de temps donné ou les entrées externes. Au niveau des commutations, un problème souvent rencontré est constitué par les

discontinuités qui peuvent apparaitre dans l'évolution des variables du système à l'instant de la transition.

Les modèles hybrides sont nécessaires pour répondre à plusieurs problèmes, tels que la définition et le calcul des trajectoires, l'analyse de la stabilité, la synthèse des lois de commande, l'estimation d'états, etc.

Il existe plusieurs approches possibles de modélisation des systèmes hybrides. La méthode de modélisation la plus générale est celle qui exprime le système hybride sous la forme d'un automate hybride (HA ou Hybrid Automata en anglais). Dans [BBM98], ces modèles sont utilisés afin de formuler des méthodes d'analyse de la stabilité et le cadre général de synthèse des lois de commande pour les systèmes hybrides. Des résultats concernant la modélisation et l'analyse de la stabilité des systèmes hybrides sont aussi présentés dans des études plus récentes où les propriétés dynamiques d'automates hybrides sont analysées et des notions de stabilité sont formulées pour ce type de système [vdSS00], [LJSZS03], [GT06].

Ces automates fournissent des modèles assez complets et généraux des systèmes hybrides, capables de représenter le comportement du système d'une manière très précise. Malgré leur puissance de modélisation, ce type de modèle hybride introduit une complexité analytique et une charge de calcul élevée au niveau des méthodes d'analyse et de synthèse des lois de commande. De ce fait, le choix de la méthode de modélisation implique un compromis entre la précision du modèle et la complexité de l'analyse. Pour ces raisons, les études se sont intéressées aux classes des modèles qui ont des représentations mathématiques simplifiées, mieux structurées, et applicables dans un large domaine d'applications industrielles. Dans cette catégorie on peut trouver les modèles à complémentarité linéaire (LC ou Linear Complementarity en anglais) [vdSS98], les modèles à complémentarité linéaire étendue (ELC ou Extended Linear Complementarity en anglais) [SM99], les modèles MMPS (Max-Min Plus Scaling en anglais) [SvdB00], les modèles logique/dynamique mixtes (MLD ou Mixed Logical Dynamical Systems en anglais) [BM99a], [Bem04] et les modèles affines par morceaux (PWA) [Son81], [Son96]. La structure de chaque modèle hybride sera décrite par la suite.

2.1.1 Automates hybrides discrets (DHA)

Un automate hybride discret est décrit dans la référence [TB04] comme le résultat de l'interaction entre une machine avec un nombre fini d'états (FSM ou Finit State Machine en anglais) et un système affine à commutations (SAS ou Switched Affine System en anglais) qui représentent, respectivement, la partie discrète et la partie continue du système hybride. Cette interaction est facilitée par un générateur d'évènements (EG ou Event Generator en anglais) et un sélecteur de mode (MS ou Mode Selector en anglais). Le générateur d'évènements extrait les signaux binaires de la partie continue. Les évènements binaires, et d'autres entrées binaires exogènes, déclenchent les commutations de la machine avec un nombre fini d'états. Le sélecteur de mode utilise toutes les variables binaires (les états, les entrées et les évènements) pour choisir le mode, c'est-à-dire la dynamique continue du système affine à commutations. Les éléments d'un automate hybride discret sont présentés dans la Figure 2.1.1 et définis dans les paragraphes suivants.

Un *système affine à commutations* représente une famille des systèmes :

$$x_{k+1}^r = A_{i_k} x_k^r + B_{i_k} u_k^r + f_{i_k} \quad (2.1)$$

$$y_k^r = C_{i_k} x_k^r + D_{i_k} u_k^r + g_{i_k} \quad (2.2)$$

avec :

- $k \in \mathbb{N}_0$ – l'instant de temps discret ;
- $x^r \in X_r \subseteq \mathbb{R}^{n_r}$ – l'état réel ;
- $u^r \in U_r \subseteq \mathbb{R}^{m_r}$ – l'entré réelle exogène ;
- $y^r \in Y_r \subseteq \mathbb{R}^{p_r}$ – la sortie réelle ;
- $\{A_i, B_i, f_i, C_i, D_i, g_i\}_{i \in I}$ – des matrices ayant des dimensions appropriées ;
- $i \in I \subset \mathbb{N}$ – le mode qui choisit la fonction de mise à jour de l'état et de la sortie.

Le *générateur d'événements* fourni un évènement sous la forme d'un signal binaire δ^e lorsqu'un ensemble des contraintes est satisfait. L'évènement s'exprime comme un vecteur de fonctions qui décrit un groupe de contraintes affines :

$$\delta^e = f_i^H(x_k^r, u_k^r), f^H : \mathbb{R}^{n_r} \times \mathbb{R}^{m_r} \to \mathcal{D} \subseteq \{0,1\}^{n_e} \quad (2.3)$$

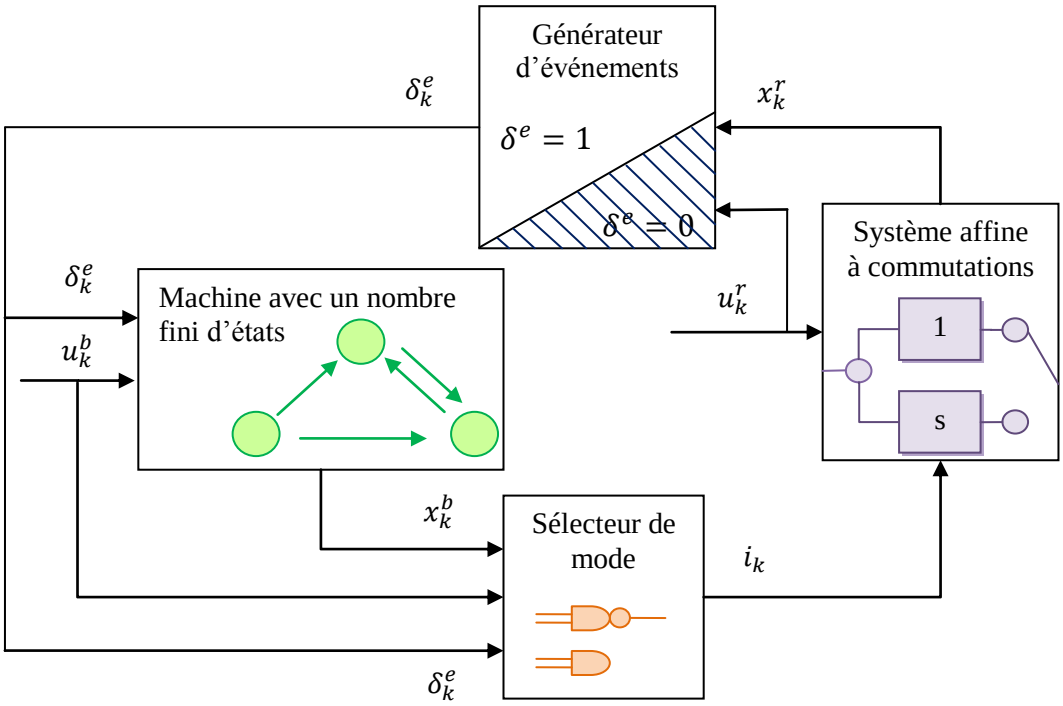


Figure 2.1.1 : Automate hybride discret [Tob05].

Les contraintes affines sont modélisées en utilisant, par exemple, des expressions logiques : $[\delta_i^e = 1] \leftrightarrow [f_i^H(x_k^r, u_k^r) \leq 0]$, où l'indice *i* représente la position d'un élément du vecteur. Si les contraintes dépendent du temps, une variable *t* est ajoutée au système affine à commutation ayant la dynamique : $t_{k+1} = t_k + T_s$ où T_s représentant la période d'échantillonnage. Dans ce cas, les évènements générés par des contraintes temporelles s'écrivent de la manière suivante : $[\delta_i^e = 1] \leftrightarrow [t_k \geq t_0]$.

La *machine avec un nombre fini d'états* représente un système dynamique discret qui peut s'exprimer du point de vu mathématique à travers une fonction binaire de mise-à-jour de l'état :

$$x_{k+1}^b = f^B\left(x_k^b, u_k^b, \delta_k^e\right) \tag{2.4}$$

$$y_k^b = g^B\left(x_k^b, u_k^b, \delta_k^e\right) \tag{2.5}$$

avec :

- $x^b \in X_b \subseteq \{0,1\}^{n_b}$ – l'état binaire ;
- $u^b \in U_b \subseteq \{0,1\}^{m_b}$ – l'entrée binaire exogène ;
- $y^b \in Y_b \subseteq \{0,1\}^{p_b}$ – la sortie binaire ;
- δ^e – l'événement ;
- $f^B: X_b \times U_b \times \mathcal{D} \to X_b$, $g^B: X_b \times U_b \times \mathcal{D} \to Y_b$ – des fonctions déterministes binaires.

Le *sélecteur de mode* utilise l'état binaire x^b, l'entrée binaire u^b, l'évènement δ^e et une fonction déterministe binaire $f^M: X_b \times U_b \times \mathcal{D} \to I$ afin de sélectionner le mode *i* actif :

$$i_k = f^M\left(x_k^b, u_k^b, \delta_k^e\right) \tag{2.6}$$

et implicitement, de choisir l'une des dynamiques du système affine à commutation. À l'instant *k*, la transition entre deux modes se produit seulement si $i_k \neq i_{k-1}$.

2.1.2 Modèles à complémentarité linéaire (LC)

Un modèle à complémentarité linéaire [HSW00] en temps discret présente la structure suivante :

$$x_{k+1} = Ax_k + B_1u_k + B_2w_k \tag{2.7}$$

$$y_k = Cx_k + D_1u_k + D_2w_k \tag{2.8}$$

$$v_k = E_1x_k + E_2u_k + E_3w_k + g \tag{2.9}$$

$$0 \leq v_k \perp w_k \geq 0 \tag{2.10}$$

où les vecteurs auxiliaires $v_k, w_k \in \mathbb{R}^s$, ayant la même dimension, sont orthogonaux. La dernière équation est équivalente à $v_k^T w_k = 0$, ce qui implique qu'à chaque instant du temps *k*, sur la position *i* de chaque vecteur v_k et w_k, au moins un des éléments $v_k(i)$ et $w_k(i)$ est égal à zéro.

Afin de mieux comprendre la signification de vecteurs auxiliaires on prend l'exemple d'un système composé par deux chariots et deux ressorts illustré sur la Figure 2.1.2. Le premier chariot est attaché au mur à travers un de ressorts et son mouvement est contraint par un obstacle. Les deux vecteurs auxiliaires : v_k et w_k représentent respectivement la force de réaction exercée par l'obstacle et la distance ($x_1 = w_k$) entre celui-ci et le premier chariot lié au mur. Lorsque le chariot n'est pas en contact avec l'obstacle, la distance w_k est positive alors que la force réactive v_k est nulle. En contre partie, quant le chariot est bloqué par l'obstacle, la force réactive est positive et la distance considérée est égale à zéro.

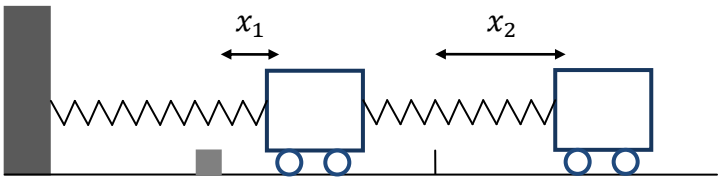


Figure 2.1.2 : Système composé par deux chariots, qui peut être exprimé par un modèle hybride de type LC [HSW00].

2.1.3 Modèles à complémentarité linéaire étendue (ELC)

Il a été démontré [Sch00], [SM99], [SvbB00] que certains systèmes hybrides peuvent être représentés sous la forme mathématique suivante d'un modèle à complémentarité linéaire étendue :

$$x_{k+1} = Ax_k + B_1u_k + B_2d_k \tag{2.11}$$

$$y_k = Cx_k + D_1u_k + D_2d_k \tag{2.12}$$

$$E_1x_k + E_2u_k + E_3d_k \leq g \tag{2.13}$$

$$\sum_{i=1}^{p} \prod_{j\in\Phi_i}(g - E_1x_k + E_2u_k + E_3d_k)_j = 0 \tag{2.14}$$

avec $d(k) \in \mathbb{R}^r$ une variable auxiliaire. En raison de l'inégalité (2.13), la condition (2.14) est équivalente avec :

$$\prod_{j\in\Phi_i}(g - E_1x_k + E_2u_k + E_3d_k)_j = 0 \tag{2.15}$$

pour chaque $i = \{1, \dots, p\}$. De ce fait, (2.13)-(2.14) sont considérés comme un système d'inégalités linéaires de type (2.14). Ce système est composé de p groupes d'inégalités linéaires (un groupe pour chaque ensemble Φ_i) tel que dans chaque groupe il faut qu'au moins l'une d'inégalités soit satisfaite pour égalité :

$$\begin{aligned} &\forall i \in \{1, \dots, p\}: \exists j \in \Phi_i \text{ tel que} \\ &\qquad (g - E_1x_k + E_2u_k + E_3d_k)_j = 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

On note qu'on peut toujours exprimer un modèle LC sous la forme étendue d'un modèle ELC par l'introduction de la condition de complémentarité (2.14).

2.1.4 Modèles MMPS (Min-Max Plus Scaling)

La classe de modèles MMPS [SvbB00] utilise les opérations ; maximisation, minimisation, somme et produit scalaire dans la représentation mathématique des systèmes hybrides. Avant de présenter les équations d'un modèle MMPS, on introduit la définition d'une expression de type « min-max plus scaling ». L'expression MMPS d'une fonction $f(x_1, x_2, .., x_n)$ est donnée par :

$$f \triangleq x_i|\alpha|\max(f_k, f_l)\min(f_k, f_l)|f_k + f_l|\beta f_k \tag{2.17}$$

avec : $i \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, f_k, f_l – également des expressions MMPS.

Un modèle MMPS est décrit par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \mathcal{M}_x(x_k, u_k, d_k), \\ y_k = \mathcal{M}_y(x_k, u_k, d_k), \\ \mathcal{M}_c(x_k, u_k, d_k) \leq c \end{cases} \tag{2.18}$$

où $\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y, \mathcal{M}_c$ sont des expressions MMPS en fonction de l'état x_k, de l'entrée commandable u_k et de la variable auxiliaire d_k.

2.1.5 Modèles logique/dynamiques mixtes (MLD)

Le principe de la modélisation logique/dynamiques mixte est d'associer à chaque proposition logique X_i une variable binaire $\delta \in \{0,1\}$. Si la proposition logique X_i est vrai, alors la variable binaire δ prend la valeur 1 :

$$X_i = vrai \leftrightarrow \delta = 1 \tag{2.19}$$

Une combinaison des propositions logiques peut se traduire par des égalités/inégalités linéaires contenant plusieurs variables binaires $\delta_i \in \{0,1\}$. Par exemple, les propositions et les contraintes linéaires suivantes sont équivalentes :

$$X_1 \vee X_2 \leftrightarrow \delta_1 + \delta_2 \geq 1\,, \tag{2.20}$$

$$X_1 \wedge X_2 \leftrightarrow \delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \tag{2.21}$$

$$\sim X_1 \leftrightarrow \delta_1 = 0, \tag{2.22}$$

$$X_1 \rightarrow X_2 \leftrightarrow \delta_1 - \delta_2 \leq 0, \tag{2.23}$$

$$X_1 \oplus X_2 \leftrightarrow \delta_1 + \delta_2 = 1. \tag{2.24}$$

En conséquence, ce formalisme est utilisé pour la modélisation de la partie discrète d'un système, telle que : la fermeture/ouverture des interrupteurs, les mécanismes discrets, les sélecteurs de vitesse etc. Cependant, la liaison entre les différentes dynamiques continues et les évènements discrets du système est établie au moyen d'inégalités linéaires mixtes.

Il est montré [Wil93] que le genre de proposition : $[x_k \geq 0] \leftrightarrow [\delta = 1]$ s'exprime par les inégalités suivantes :

$$-m\delta_k \geq x_k - m \tag{2.25}$$

$$-(M + \varepsilon)\delta_k \leq -x_k - \varepsilon \tag{2.26}$$

où $M = \max x_k$ et $m = \min x_k$ et ε est une tolérance de valeur négligeable.

Les produits entre des variables binaires et les produits des variables continues et binaires peuvent se réécrire sous la forme d'inégalités linéaires mixtes en ajoutant des variables auxiliaires. Dans le premier cas, le terme $\delta_1\delta_2$ est remplacé par une variable auxiliaire binaire $\delta_3 \triangleq \delta_1\delta_2$, pour laquelle on formule la proposition : $[\delta_3 = 1] \leftrightarrow [\delta_1 = 1] \wedge [\delta_2 = 1]$. Alors $\delta_3 = \delta_1\delta_2$ est équivalent à :

$$\begin{cases} -\delta_1 + \delta_3 \leq 0 \\ -\delta_2 + \delta_3 \leq 0 \\ \delta_1 + \delta_2 - \delta_3 \leq 1 \end{cases} \tag{2.27}$$

Dans le deuxième cas, le terme $\delta f(x)$, avec $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\delta \in \{0,1\}$, est écrit au moyen d'une variable auxiliaire continue $y \triangleq \delta f(x)$ qui satisfait les relations : $[\delta = 0] \rightarrow [y = 0]$,

$[\delta = 1] \rightarrow [y = f(x)]$. Cela conduit à l'équivalence entre $y = \delta f(x)$ et les inégalités linéaires mixtes suivantes :

$$y \leq M\delta \tag{2.28}$$

$$y \geq m\delta \tag{2.29}$$

$$y \leq f(x) - m(1-\delta) \tag{2.30}$$

$$y \geq f(x) - M(1-\delta) \tag{2.31}$$

où $M = \max_x f(x)$ et $m = \min_x f(x)$.

Ces principes de modélisation permettent de caractériser le comportement d'un système hybride avec un modèle logique/dynamiques mixte. Ce type de modèle contient dans sa structure des variables logiques, des dynamiques qui incluent des variables continues et binaires, et des contraintes de fonctionnement. La forme générale d'un modèle logique/dynamiques mixte [Wil93] à temps discret est la suivante :

$$x_{k+1} = Ax_k + B_1u_k + B_2\delta_k + B_3z_k \tag{2.32}$$

$$y_k = Cx_k + D_1u_k + D_2\delta_k + D_3z_k \tag{2.33}$$

$$E_2\delta_k + E_3z_k \leq E_4x_k + E_1u_k + E_5 \tag{2.34}$$

où les états $x = [x^r \quad x^b]^T$, $x^r \in \mathbb{R}^{n_r}, x^b \in \{0,1\}^{n_b}$, les entrés $u = [u^r \quad u^b]^T$, $u^r \in \mathbb{R}^{m_r}$, $u^b \in \{0,1\}^{m_b}$ et les sorties $y = [y^r \quad y^b]^T$, $y^r \in \mathbb{R}^{p_r}$, $y^b \in \{0,1\}^{p_b}$ sont composées des variables continues et binaires. $\delta \in \{0,1\}^{n_\delta}$ et $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ représentent des variables auxiliaires binaires et continues, introduites en remplaçant des propositions logiques par des inégalités linéaires. Les matrices réelles $A, B_1, B_2, B_3, C, D_1, D_2, D_3, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$ ont des dimensions appropriées. Les équations (2.32), (2.33) et l'inégalité (2.34) contenant toutes les contraintes de fonctionnement sont linéaires. Par conséquent, les non-linéarités du modèle sont formulées à travers les contraintes imposées sur les variables binaires.

2.1.6 Modèles affines par morceaux (PWA)

Dans la littérature, les diverses études [CD88], [LvB98], [BFTM00] ont montré leur intérêt pour la classe de modèles affines par morceaux à temps discret, du fait qu'elle présente plusieurs avantages. Les modèles PWA sont capables de caractériser, d'une manière très précise, de nombreux procédés physiques, tels des systèmes discrets qui présentent des non-linéarités statiques ou des systèmes à commutation pour lesquels le comportement dynamique est décrit par un nombre fini de modèles linéaires à temps discret et par un ensemble de règles logiques qui sélectionnent le modèle utilisé à chaque instant. En plus, les modèles PWA peuvent approcher des dynamiques non linéaires discrètes au moyen des linéarisations multiples autour des différents points de fonctionnement et, également, des systèmes hybrides non linéaires à temps continu en utilisant des procédés de discrétisation de la dynamique continue et de remplacement des non linéarités par des approximations affines linéaires. Par ailleurs, la représentation mathématique des modèles PWA facilite l'application de différentes méthodes d'analyse et de synthèse des lois de commande.

Les modèles affines par morceaux sont définis par la partition de l'espace d'état en plusieurs régions polyédrales auxquelles sont associées des fonctions affines de mise-à-jour de l'état et de la sortie. L'expression mathématique en temps discret a la forme suivante :

$$x_{k+1} = A_{j(k)}x_k + B_{j(k)}u_k + f_{j(k)} \quad (2.35)$$

$$y_k = C_{j(k)}x_k + D_{j(k)}u_k + g_{j(k)} \quad (2.36)$$

$$\text{avec } j(k) \text{ tel que } \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \in \mathcal{R}_{j(k)}$$

où :

- $x = \begin{bmatrix} x^r \\ x^b \end{bmatrix} \in X, X = X_r \times X_b,\ x^r \in X_r \subseteq \mathbb{R}^{n_r},\ x^b \in X_b \subseteq \{0,1\}^{n_b},$
- $u = \begin{bmatrix} u^r \\ u^b \end{bmatrix} \in U,\ U = U_r \times U_b,\ u^r \in U_r \subseteq \mathbb{R}^{m_r},\ u^b \in U_b \subseteq \{0,1\}^{m_b},$
- $y = \begin{bmatrix} y^r \\ y^b \end{bmatrix} \in Y,\ Y = Y_r \times Y_b,\ y^r \in Y_r \subseteq \mathbb{R}^{p_r},\ y^b \in Y_b \subseteq \{0,1\}^{p_b}$

représentent les états, les entrées et les sorties réelles et binaires à l'instant $k \in \mathbb{N}_0$. $\mathcal{R}_{j(k)}$ définissent les différentes régions correspondantes à chaque dynamique dont la partie linéaire est décrite par les matrices réelles $A_{j(k)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_{j(k)} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C_{j(k)} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D_{j(k)} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ et la partie affine par les vecteurs réels $f_{j(k)} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ et $g_{j(k)} \in \mathbb{R}^{p\times 1}$. Les dimensions des matrices et vecteurs réels sont exprimées en fonction de $n = n_r + n_b,\ m = m_r + m_b,\ p = p_r + p_b$.

L'ensemble des polyèdres $\{\mathcal{R}_{j(k)}\}_{j\in J}$ est défini par des hyperplans dans l'espace des états et des entrées $X \times U$:

$$\mathcal{R}_{j(k)} = \left\{ \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} : H^x_{j(k)}x_k + H^u_{j(k)}u_k \leq K_{j(k)} \right\} \quad (2.37)$$

tel que $H^x_{j(k)}$, $H^u_{j(k)}$ et $K_{j(k)}$ décrivent des contraintes linéaires qui déterminent l'espace de chaque région. L'index $j(k) \in J$ représente le *mode* du modèle affine par morceaux à l'instant *k* du temps et appartient à l'ensemble fini *J* contenant tous les modes possibles du modèle. Généralement, un mode correspond à une combinaison faisable des états et des entrées binaires.

Le domaine de définition du modèle (2.35), (2.36) dans de l'espace des états et des entrées est représenté par l'union $\mathcal{R} = \bigcup_{j(k)\in J} \mathcal{R}_{j(k)}$. Même si les régions $\mathcal{R}_{j(k)}$ sont convexes, la convexité n'est pas forcement conservée pour leur union $\mathcal{R}$.

Concernant la continuité des dynamiques du modèle affine par morceaux, il existe une continuité dans les frontières des régions adjacentes, mais le modèle (2.35), (2.36) peut présenter des dynamiques définies sur des régions isolées de l'espace d'état.

2.1.7 L'équivalence des modèles hybrides

Chaque formalisme de modélisation présente ses propres avantages. Par exemple, les modèles PWA ont été employés afin d'établir des critères de stabilité pour les systèmes hybrides [MFM00], [Fen02], alors que les modèles MLD ont servi à l'élaboration de lois de commande [BM99b], [BTM00]. Sous certaines conditions, l'équivalence entre les modèles PWA et les autres classes de modèles hybrides présentées précédemment (DHA, MLD, LC, ELC, MMPS) est démontrée [BFTM00], [HdSB01], ce qui permet le transfert des propriétés et des outils théoriques d'une classe de modèles à une autre. En conséquence, le modèle choisi pour la représentation mathématique d'un système hybride pourra être converti vers un modèle équivalent, dans le cas où cette transformation aidera à l'analyse et la synthèse des

lois de commande. La Figure 2.1.7 montre les équivalences qui existent entre les modèles hybrides mentionnés.

Généralement, la modélisation des systèmes hybrides est une tâche assez difficile. Afin de faciliter l'étape de modélisation, le langage HYSDEL (Hybrid Systems Description Language en anglais) [TB04] a été développé. En utilisant ce langage, le modèle d'un système hybride est décrit sous une forme textuelle. De cette manière, HYSDEL permet la modélisation d'une classe des systèmes hybrides discrets définis par l'interaction des systèmes linéaires, des automates et des règles exprimées à travers des propositions logiques. Les descriptions fournies par HYSDEL sont transformées dans des modèles mathématiques discrets de type MLD par l'intermédiaire d'une boite à outils appelée MPT (Multi Parametric Toolbox) [KGBM04]. Ainsi, le modèle MLD obtenu est, soit utilisé directement pour l'analyse et la synthèse de la loi de commande, soit converti vers l'un des modèles équivalents (PWA, LC, ELC, MMPS). En conséquence, la boite d'outils MPT effectue la conversion automatique entre les modèles hybrides, si les conditions de conversion sont vérifiées (voir Figure 2.1.7).

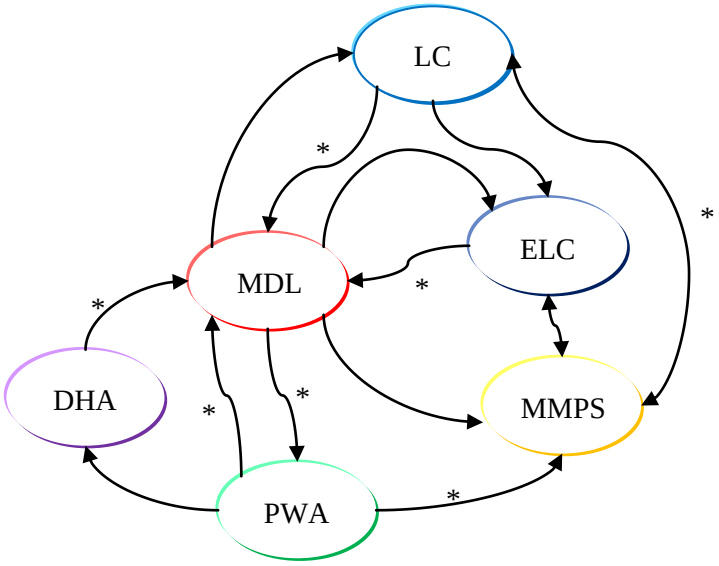


Figure 2.1.7 : Les équivalences entre les différents modèles hybrides. Les étoiles marquent l'équivalence sous certaines conditions à satisfaire.

2.2 Stabilité des modèles affine par morceaux

Dans le cadre de cette thèse, on s'intéresse strictement aux modèles hybrides à temps discret et en particulier aux modèles affines par morceaux. L'analyse de la stabilité des modèles PWA est assez complexe, du fait que leur comportement est influencé par plusieurs facteurs : la non-convexité du domaine de définition, l'existence de discontinuités entre les différentes régions du modèle qui, parfois, conduisent à l'apparition de trajectoires complexes. Également, la partition de l'espace d'état présente un rôle important dans la détermination de la stabilité d'un modèle PWA. En dépit du fait que chacune des dynamiques affines du modèle est stable (conformément aux critères de stabilité spécifiques aux systèmes linéaires), il peut s'avérer que le comportement global du modèle PWA soit instable. Un autre phénomène intéressant est l'apparition d'une surface de glissement à la frontière de deux régions du modèle. Dans ce cas, chacune des dynamiques correspondantes à ces régions conduit les trajectoires du modèle vers la région voisine. En conséquence, les trajectoires du

modèle sont contraintes à rester dans la surface qui délimite les deux régions. Il existe des situations où la surface de glissement contient un point d'équilibre du système et donc les trajectoires sont dirigées vers celui-ci, assurant la stabilité du système. Cependant la surface de glissement peut aussi provoquer la divergence des trajectoires et, par conséquent, l'instabilité du modèle.

Dans la littérature, l'analyse de la stabilité des modèles affines par morceaux à temps discret [JR98], [MFM00], [Fen02], [FCMM02] est fondée sur des fonctions de Lyapunov quadratiques ou quadratiques par morceaux. Les différences principales par rapport aux modèles à temps continu réside d'une part dans le fait que la continuité des fonctions de Lyapunov n'est pas imposée, et d'autre part que les variables du modèle peuvent évoluer dans des régions non adjacentes de l'espace d'état. Généralement, l'analyse de la stabilité a été abordée pour des modèles affines autonomes qui ont l'origine comme point d'équilibre, en considérant une fonction de Lyapunov quadratique commune [FCMM02]. Ensuite, d'autres fonctions de Lyapunov quadratiques ou linéaires par morceaux ont été considérées, puisqu'elles permettent d'exploiter la structure des modèles PWA. Les techniques d'analyse proposées permettent d'établir des conditions de stabilité suffisantes pour des modèles ayant des dynamiques discontinues. Ces conditions de stabilité, au sens de Lyapunov, sont exprimées au moyen d'inégalités matricielles linéaires (LMI ou Linear Matrix Inequalities en anglais) pour lesquelles des algorithmes et des outils pratiques, efficaces pour leur résolution numérique existent [GNLC94].

Par la suite, on présente des notions générales de stabilité au sens Lyapunov et des conditions de stabilité établies [Fen02], [FCMM02] pour les systèmes hybrides sous la forme PWA.

2.2.1 Stabilité au sens de Lyapunov

Considérons un système dynamique non linéaire autonome à temps discret :

$$x_{k+1} = G(x_k) \tag{2.38}$$

tel que $G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction arbitraire, même discontinue, non linéaire et le point $x_e = 0$, $x_e \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ représente le point d'équilibre du système (2.38) pour lequel $G(x_e) = 0$. L'ensemble $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ contient un voisinage du point x_e.

Définition 2.2.1 Le point d'équilibre x_e du système (2.38) est *stable au sens Lyapunov* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \|x_k - x_e\| \leq \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$$

où x_k et x_0 représentent, respectivement, l'état du système (2.38) à l'instant $k \in \mathbb{Z}_+$, et l'état initial à l'instant $k = 0$.

Définition 2.2.2 Le point d'équilibre x_e du système (2.38) est :

- *attractif* en $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ si :

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x_e\| = 0 , \qquad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

- *localement attractif* s'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\|x_k - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \|x_k - x_e\| = 0.$$

- *globalement attractif* si x_e est un point attractif en $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.2.3 Le point d'équilibre x_e du système (2.38) est *localement (globalement) asymptotiquement stable au sens de Lyapunov* si x_e est un point stable au sens de Lyapunov et également localement (globalement) attractif.

Définition 2.2.4 Le point d'équilibre x_e du système (2.38) est :

- *exponentiellement stable* en $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ s'il existe $\theta > 0$ et $\gamma \in [0,1)$ tel que :

$$\|x_k - x_e\| \leq \theta \|x_0 - x_e\| \gamma^k, \forall\, x_0 \in \mathbb{X}\,, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

- *localement exponentiellement stable* au sens de Lyapunov s'il existe $\delta > 0$ et $\gamma \in [0,1)$ tel que :

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \|x_k - x_e\| \leq \theta \|x_0 - x_e\| \gamma^k, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

- *globalement exponentiellement stable* si x_e est un point exponentiellement stable en $\mathbb{R}^n$.

2.2.2 Stabilité des systèmes hybrides représentés par des modèles PWA à temps discret

Considérons le système hybride avec la représentation mathématique suivante :

$$x_{k+1} = A_j x_k + f_j, \text{avec } j(k) \text{ tel que } x_k \in \mathcal{R}_j, x_k \in \mathbb{X} \tag{2.39}$$

où : l'état $x \in \mathbb{R}^n$ appartient à un ensemble $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ représentant un domaine dans l'espace d'état qui contient l'origine du système. Pour le système autonome (2.39), les régions $\{\mathcal{R}_j\}_{j=1}^{N_\mathcal{R}}$ constituent une partition polyédrale de l'ensemble $\mathbb{X}$, c'est-à-dire chaque région $\mathcal{R}_j$ est un polyèdre convexe $\mathcal{R}_j = \{x_k : H_j x_k \leq K_j\}$, $j(k) \in J$ tel que $\mathcal{R}_j \cap \mathcal{R}_i = \emptyset$, $\forall\, j \neq i$, $\bigcup_{j=1}^{N_\mathcal{R}} \mathcal{R}_j = \mathbb{X}$.

On appelle $J = \{1, .., N_\mathcal{R}\}$ l'ensemble des indices des régions polyédrales $\mathcal{R}_j$ du système hybride (2.39). Cet ensemble est partitionné comme $J = J_0 \cup J_1$ où J_0 indique les régions qui contiennent l'origine du système, alors que J_1 marque les régions qui n'incluent pas ce point. De même, on considère que $x_e = 0$ est le point d'équilibre du système ce qui implique que les termes affines f_j sont nuls pour les régions $\mathcal{R}_j$, $j \in J_0$.

Pour la suite, on suppose que toutes les régions de l'espace d'état contiennent le point $x_e = 0$, c'est-à-dire que les régions qui définissent l'espace d'état ont l'origine comme point d'intersection, et donc l'ensemble $J = J_0$, $\forall \mathcal{R}_j, j \in J$. Dans cette hypothèse, les conditions de stabilité seront formulées pour des termes $f_j = 0$. Si $f_j \neq 0$ la stabilité peut être vérifiée par des méthodes semblables (résolution d'un système d'inégalités matricielles linéaires) mais plus complexes [CM01].

- *Fonction de Lyapunov quadratique*

La stabilité du système hybride (2.39) est déterminée en utilisant une fonction de Lyapunov quadratique de la forme suivante :

$$V(x_k) = x_k^T P x_k \tag{2.40}$$

où : $P = P^T,\ P > 0$ est une matrice symétrique, définie positive.

Alors, le point $x_e = 0$ est asymptotiquement stable s'il existe une fonction de Lyapunov (2.40) commune à toutes les dynamiques $\{A_1, \dots, A_{N_\mathcal{R}}\}$, telle que les inégalités suivantes soient satisfaites :

$$P > 0 \tag{2.41}$$

$$A_j^T P A_j - P < 0, \forall j \in J = \{1, \dots, N_\mathcal{R}\} \tag{2.42}$$

La matrice P qui représente la solution des inégalités (2.41)-(2.42) est calculée par la résolution d'un problème d'optimisation convexe. Cependant, le fait de considérer une fonction de Lyapunov quadratique est très conservatif et implique certaines limitations. Si le système présente des trajectoires non convexes, il n'est pas toujours possible de trouver une fonction de Lyapunov commune. En contrepartie, l'infaisabilité de l'ensemble des inégalités (2.41)-(2.42) ne fournit aucune information sur la stabilité ou l'instabilité du système (2.39).

– *Fonction de Lyapunov quadratique par morceaux*

Pour les cas où une fonction de Lyapunov unique, nécessaire pour garantir la stabilité du système (2.39) avec $f_j = 0$, n'existe pas, il faut s'orienter vers d'autres constructions de la fonction de Lyapunov. Un choix plus adapté pour l'étude de la stabilité d'un système affine par morceaux est une fonction de Lyapunov quadratique par morceaux (PWQ ou Piecewise Quadratic) avec l'expression suivante :

$$V(x_k) = x_k^T P_j x_k \tag{2.43}$$

où les matrices $P_j = P_j^T$, $P_j > 0$ sont symétriques et définies positives.

Afin de montrer la stabilité du système hybride (2.39), il est suffisant que la fonction (2.43) soit définie positive dans un voisinage du point d'équilibre $x_e = 0$ et que la valeur de la fonction $V(x_k)$ soit décroissante pour chaque évolution de l'état :

$$\Delta V(x_{k+1}, x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0 \tag{2.44}$$

En supposant que $x_k \in \mathcal{R}_j$ et $x_{k+1} \in \mathcal{R}_i$, avec $\mathcal{R}_j$, $\mathcal{R}_i$ deux régions dans l'espace d'état pas forcement adjacentes, les conditions de stabilité sont exprimées par les inégalités matricielles suivantes :

$$P_i > 0, \forall i \in J \tag{2.45}$$

$$A_j^T P_i A_j - P_j < 0, \forall (j, i) \in J_{all} \tag{2.46}$$

où $J_{all} = J \times J$ contient les paires d'indices qui désignent, d'un point de vue théorique, toutes les combinaisons possibles de transitions entre les régions de l'espace d'état. On appelle « combinaisons possibles » toutes les paires d'indices (i, j) possibles du point de vue théorique et « combinaisons admissibles » toutes les paires d'indices (i, j) qui correspondent aux transitions qui peuvent se produire du point de vue pratique.

Cependant, il n'est pas nécessaire de prendre en compte toutes ces combinaisons possibles dans la formulation des inégalités (2.45)-(2.46). En conséquence, une relaxation de la condition exprimée en (2.46) consiste à considérer seulement toutes les transitions admissibles entre les différentes régions. La méthode présentée en [BTM00] permet de déterminer l'ensemble d'indices correspondants aux transitions admissibles $S \subseteq J_{all}$, tel que :

$$S = \{(j,i): j,i \in J \; et \; \exists k \in \mathbb{N}_0, x_k \in \mathcal{R}_j \; et \; x_{k+1} \in \mathcal{R}_i\} \tag{2.47}$$

Théorème 1 Le point d'équilibre $x_e = 0$ du système (2.39) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices P_i qui satisfont les inégalités avec l'expression :

$$P_i > 0, \forall i \in J \tag{2.48}$$

$$A_j^T P_i A_j - P_j < 0, \forall (j,i) \in S \tag{2.49}$$

Les inégalités (2.49) sont écrites pour toutes les transitions admissibles d'une région à une autre et garantissent que la fonction de Lyapunov (2.43) est décroissante pour toutes les trajectoires possibles des états du système (2.39).

La stabilité du système (2.39) peut être démontrée avec une fonction de Lyapunov quadratique par morceaux seulement si les matrices A_j respectent certaines conditions. Premièrement, si les états du système (2.39) évoluent à l'intérieur de la même région de l'espace d'état, alors les inégalités (2.48)-(2.49) sont écrites pour des paires d'indices (j,j). Pour assurer la stabilité asymptotique il faut que les matrices A_j soient stables, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres des matrices se trouvent à l'intérieur du cercle unité. Ensuite, s'il y a des transitions entre des régions différentes qui correspondent aux paires d'indices (j,i) et (i,j), alors la stabilité asymptotique est garantie seulement si les produits des matrices $A_j A_i$ et $A_i A_j$ sont stables. Enfin, si les trajectoires du système (2.39) décrivent des cycles parmi un nombre constant des régions de l'espace d'état :

$$j_1 \to j_2 \to j_3 \to \cdots j_l \to j_1 \tag{2.50}$$

il faut que toutes les matrices qui font partie de l'ensembles $\tilde{A}$ soient stables :

$$\tilde{A} = \cup_{l=2}^{\infty} \{A: A = \prod_{t=1}^{l} A_{j_t} \; , (j_1, \dots, j_l) \in S_l\} \tag{2.51}$$

avec l'ensemble S_l défini par :

$$S_l = \{(j_1,..,j_l) \in J^n : \{(j_1,j_2), \dots, (j_{l-1},j_l), (j_l,j_1)\} \subset S \\ \text{avec } j_1,..,j_l \text{ tous différents }\} \tag{2.52}$$

L'ensemble $\tilde{A}$ contient des produits des matrices associées aux régions qui forment les cycles parcourus par les trajectoires du système.

2.2.3 Synthèse de lois de commande par retour d'état stabilisant

Considérons le système hybride donné par la représentation affine par morceaux :

$$x_{k+1} = A_j x_k + B_j u_k + f_j, \\ \text{avec } j(k) \text{ tel que } x_k \in \mathcal{R}_j \text{ et } x_k \in \mathbb{X} = \cup_{j=1}^{N_{\mathcal{R}}} \mathcal{R}_j \tag{2.53}$$

Pour ce système, on se propose de stabiliser le point d'équilibre $x_e = 0$ au moyen d'un correcteur par retour d'état linéaire par morceaux avec la structure suivante :

$$u_k = K_j x_k, \forall x_k \in \mathcal{R}_j, \forall \; j \in J \tag{2.54}$$

On note qu'on cherche à trouver un gain diffèrent K_j pour chaque région de l'espace d'état.

En introduisant l'équation (2.54) dans (2.53), on obtient l'expression du système en boucle fermée :

$$x_{k+1} = (A_j + B_j K_j)x_k + f_j, \forall x_k \in \mathcal{R}_j, \forall\, j \in J \tag{2.55}$$

On rappelle que la synthèse de la commande (2.54) sera élaborée sous l'hypothèse que l'origine se trouve à l'intersection de toutes les régions de l'espace d'état, ce qui implique $f_j = 0$, $\forall x_k \in \mathcal{R}_j, \forall\, j \in S$.

– *Synthèse du correcteur par une fonction de Lyapunov quadratique*

D'une manière plus conservative, la synthèse du correcteur (2.54), permettant de stabiliser l'origine du système (2.55) est faite à travers une fonction de Lyapunov quadratique (2.40). Par conséquent, le problème réside dans la recherche de matrices inconnues P et K_j qui satisfont les conditions suivantes :

$$P > 0 \tag{2.56}$$

$$(A_j + B_j K_j)^T P (A_j + B_j K_j) - P < 0, \forall j \in J \tag{2.57}$$

Lorsque la matrice P et les vecteurs K_j sont inconnus, les inégalités (2.57) sont bilinéaires. Afin d'obtenir des inégalités linéaires équivalentes, le changement de variables suivant est réalisé :

$$Y_j = K_j Z, \forall j \in J \tag{2.58}$$

$$Z = P^{-1} \tag{2.59}$$

Si on multiplie à gauche et à droite les inégalités (2.56), (2.57) avec P^{-1} on obtient :

$$P^{-1} P P^{-1} > 0 \tag{2.60}$$

$$P^{-1}(A_j + B_j K_j)^T P (A_j + B_j K_j) P^{-1} - P^{-1} P P^{-1} < 0, \forall j \in J \tag{2.61}$$

Tout en sachant que :

– la matrice P est symétrique ($P = P^T$) $\Rightarrow PP^{-1} = I$, $I = diag(1, \dots, 1)$ et $P^{-1} = P^{-T}$
– $(AB)^T = B^T A^T$

les inégalités (2.60)-(2.61) se réécrivent sous la forme :

$$\begin{matrix} P^{-1} > 0 \\ ((A_j + B_j K_j)P^{-1})^T P (A_j + B_j K_j) P^{-1} - P^{-1} < 0 \end{matrix}, \forall j \in J \Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix} P^{-1} > 0 \\ \Leftrightarrow (A_j \underbrace{P^{-1}}_{Z} + B_j \underbrace{K_j P^{-1}}_{Y_j})^T P (A_j \underbrace{P^{-1}}_{Z} + B_j \underbrace{K_j P^{-1}}_{Y_j}) - \underbrace{P^{-1}}_{Z} < 0, \forall j \in J \end{matrix}$$

Alors, les inégalités (2.56)-(2.57) sont reformulées avec les variables Z et Y_j :

$$Z > 0 \tag{2.62}$$

$$(A_j Z + B_j Y_j)^T Z^{-1} (A_j Z + B_j Y_j) - Z < 0, \forall j \in J \tag{2.63}$$

et les inégalités matricielles linéaires (LMI) équivalentes sont obtenues en utilisant le complément de Schur.

Complément de Schur. Soit la matrice symétrique partitionnée

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$$

où A et C sont des matrices carrées. Cette matrice est définie positive si et seulement si A et C-$B^TA^{-1}B$ sont définies positives :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ C - B^T A^{-1} B > 0 \end{cases}$$

Également, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} C > 0 \\ A - B C^{-1} B^T > 0 \end{cases}$$

En conséquence, les LMI à résoudre afin de garantir la stabilité asymptotique du système (2.55) sont :

$$Z > 0 \tag{2.64}$$

$$\begin{bmatrix} Z & (A_j Z + B_j Y_j) \\ (A_j Z + B_j Y_j)^T & Z \end{bmatrix} > 0, \forall j \in J \tag{2.65}$$

Une fois que le problème de faisabilité (2.64)-(2.65) est résolu, les valeurs des Z et Y_j sont connues et les différents gains de la commande par retour d'état $u_k = K_j x_k$ sont récupérés en utilisant les expressions :

$$K_j = Y_j Z^{-1}$$

La région d'attraction ellipsoïdale, positive invariante à l'intérieur de l'ensemble $\mathbb{X}$, de la loi de commande linéaire par morceaux élaborée est définie par le plus grand ensemble $\mathbb{X}_0 \subseteq \mathbb{X}$, $\mathbb{X}_0 = \{x_k^T P x_k < \xi, \xi > 0\}$. Alors, toutes les trajectoires du système en boucle fermée qui démarrent de l'ensemble $\mathbb{X}_0$ convergent vers l'origine et restent à l'intérieur de cet ensemble.

- *Synthèse du correcteur par une fonction de Lyapunov quadratique par morceaux (PWQ)*

Un correcteur stabilisant de la forme (2.54) peut être obtenu par l'utilisation d'une fonction de Lyapunov quadratique par morceaux (2.43). En attribuant une fonction de Lyapunov quadratique différente à chaque région $\mathcal{R}_j$ de l'espace d'état, on rend la synthèse de la loi de commande moins conservative.

Les conditions de stabilité du système en boucle fermé (2.55) (avec les termes affines $f_j = 0$), fondées sur une fonction de Lyapunov PWQ sont les suivantes :

$$P_j > 0, \forall j \in J \tag{2.66}$$

$$(A_j + B_j K_j)^T P_i (A_j + B_j K_j) - P_j < 0, \forall (j,i) \in S \tag{2.67}$$

L'évolution de l'état à l'instant k, ou l'état $x(k+1)$, est donnée par la dynamique de la région active à l'instant k, soit $\mathcal{R}_j$, et le gain K_j consacré à cette région. Le nouvel état peut rester dans la région $\mathcal{R}_j$ ou passer dans une autre région $\mathcal{R}_i$. Par conséquent, la vérification de ces inégalités (2.66)-(2.67) est nécessaire pour toutes les transitions admissibles entre deux régions différentes de l'espace d'état ($x_k \in \mathcal{R}_j \rightarrow x_{k+1} \in \mathcal{R}_i, \forall (j,i) \in S$), effectuées dans un seul pas d'échantillonnage, ainsi que pour des évolutions de l'état dans la même région pour

plusieurs pas ($x_k \in \mathcal{R}_j \rightarrow x_{k+1} \in \mathcal{R}_j$). Ceci équivaut à résoudre un système d'inégalités définies par (2.66)-(2.67) pour des paires (j,i), avec $j = i$ lorsque l'état reste dans la même région et autrement avec $j \neq i$.

Par l'introduction des variables :

$$W_j = K_j Z_j, \forall j \in J \tag{2.68}$$

$$Z_j = {P_j}^{-1} \tag{2.69}$$

les conditions de stabilité (2.66)-(2.67) deviennent :

$$Z_i > 0, \forall i \in J \tag{2.70}$$

$$(A_j Z_j + B_j W_j)^T Z_i^{-1} (A_j Z_j + B_j W_j) - Z_j < 0, \forall (j,i) \in S \tag{2.71}$$

En utilisant le complément de Schur, les LMI à résoudre ont l'expression suivante :

$$Z_i > 0, \forall i \in J \tag{2.72}$$

$$\begin{bmatrix} Z_i & (A_j Z_j + B_j W_j) \\ (A_j Z_j + B_j W_j)^T & Z_j \end{bmatrix} > 0, \forall (j,i) \in S \tag{2.73}$$

S'il existe W_j et Z_j satisfaisant les LMI (2.72)-(2.73), alors la commande par retour d'état linéaire par morceaux $u_k = K_j x_k$ avec $K_j = W_j Z_j^{-1}$, stabilise le point d'équilibre $x_e = 0$ du système hybride (2.55) avec les termes affines $f_j = 0$. La région d'attraction du correcteur est définie par l'ensemble ellipsoïdal, positif invariant : $\mathbb{X}_0 \subseteq \mathbb{X}$, $\mathbb{X}_0 = \{x_k^T P_j x_k < \xi, \xi > 0\}$ pour $x_k \in \mathcal{R}_j$.

Afin de pouvoir ajuster les gains K_j du régulateur, les matrices de pondération $Q_x > 0$, $Q_x = Q_x^T$, $R_u > 0$, $R_x = R_x^T$ définies positive sont introduites dans les inégalités (2.66)-(2.67) de la manière suivante :

$$P_j > 0, \forall j \in J \tag{2.74}$$

$$\left(A_j + B_j K_j\right)^T P_i \left(A_j + B_j K_j\right) - P_j + Q_x + K_j^T R_u K_j < 0 \quad \forall (j,i) \in S \tag{2.75}$$

Après avoir procédé au changement de variables (2.68)-(2.69), la forme des LMI est donnée par :

$$Z_i > 0, \forall i \in J, \forall (j,i) \in S \tag{2.76}$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} Z_j & Z_j & W_j & (A_j Z_j + B_j W_j)^T \\ \hline Z_j & Q_x^{-1} & 0 & 0 \\ W_j & 0 & R_u^{-1} & 0 \\ (A_j Z_j + B_j W_j) & 0 & 0 & Z_i \end{array}\right] > 0 \tag{2.77}$$

Au moyen des pondérations ajoutées, le réglage de gain $K_j = W_j Z_j^{-1}$ est facilité afin d'obtenir les performances désirées pour la loi de commande stabilisante synthétisée.

2.3 Commande prédictive

La commande prédictive (MPC ou Model Predictive Control en anglais) est une stratégie de commande qui peut être employée dans des applications industrielles et dans des travaux de recherche, afin de répondre aux problèmes de régulation des systèmes soumis aux contraintes [GPM89], [May01], [QB03], [FIAF03], [CB04]. Cette stratégie de commande est fondée sur la résolution répétée d'un problème d'optimisation à chaque pas d'échantillonnage et sur le principe de l'horizon fuyant, afin de déterminer une séquence optimale de commandes satisfaisant les contraintes du système et les performances formulées à travers un certain critère d'optimisation. La commande prédictive implique la connaissance a priori d'un modèle mathématique du système. Au moyen du modèle employé, la prédiction du comportement dynamique du système est réalisée en fonction de l'état courant et également des commandes appliquées. De ce fait, la précision du modèle choisi se reflète dans la qualité de prédiction de l'évolution du système et dans les performances de la commande issue de l'optimisation en temps réel.

Les avantages de cette technique de commande sont représentés par la possibilité de prendre en compte explicitement les contraintes dès la phase de conception et par la capacité de la méthode à gérer les contraintes pour des systèmes MIMO (Multiple Input Multiple Output en anglais), ce qui est essentiel dans les applications industrielles. En contrepartie, l'inconvénient de la stratégie de commande prédictive est représenté par l'effort de calcul « en-ligne », ce qui limite l'applicabilité de cette technique aux systèmes lents ou avec un faible nombre d'états.

Concernant l'évolution de la commande prédictive, la base théorique de la méthodologie a été formulée dans les années 1980 pour des systèmes linéaires exprimés par des modèles en représentation d'état [MZM84]. Ensuite, des algorithmes pour la résolution du problème d'optimisation sur un horizon fini ont été développés pour des modèles en fonction de transfert ou en représentation d'état [CB04]. Également, un cadre général pour l'algorithme de la commande prédictive à base de modèles linéaires (GPC General Predictive Control) [CMT87] a été élaboré.

Du point de vu de la méthode de résolution, selon le critère d'optimisation (quadratique ou linéaire) le problème d'optimisation pour des modèles linéaires à temps discret se traduit par un problème de programmation quadratique (QP ou Quadratic Programming en anglais) ou linéaire (LP ou Linear Programming en anglais). Une solution est obtenue à chaque pas d'échantillonnage, ce qu'on appelle la résolution *« en-ligne »* du problème d'optimisation. Dans la littérature, des méthodes de résolution *« hors-ligne »* sont proposées également, telles que la programmation linéaire/quadratique multiparamétrique (mp-LP/mp-QP) [BM99a], [BBM00b] en relation avec un critère d'optimisation linéaire/quadratique. La loi de commande résultante est une commande par retour d'état exprimée sous la forme d'une fonction affine par morceaux. Bien évidemment, entre les deux approches de résolution, l'optimisation réalisée en temps réel est préférée seulement si le problème d'optimisation à résoudre « hors-ligne » est infaisable ou d'une complexité élevée.

Même si la méthode de la commande prédictive fondée sur des modèles linéaires a été implantée pour différentes applications industrielles, la majorité des procédés réels sont non linéaires et une approximation par des modèles linéaires n'est pas toujours satisfaisante. En conséquence, les algorithmes de la commande prédictive existants pour les modèles linéaires ont été étendus vers des modèles non linéaires [KG88], [MM93], [CA96].

Récemment, la commande prédictive a été formulée en relation avec des modèles hybrides. La solution d'un problème optimal fondé sur des modèles hybrides à temps discret a été formulée à la fin des années 1990. Plusieurs algorithmes de commande prédictive ont été présentés dans la littérature pour des problèmes d'optimisation à base des modèles MLD à temps discret avec des critères d'optimisation quadratiques et linéaires. Pour ce type de modèle, la commande prédictive est déterminée au moyen d'une optimisation en temps réel, pour laquelle des méthodes de programmation mixte en nombres entiers (MIP ou Mixte Integer Programming en anglais) sont employées [BM99a]. Le problème d'optimisation résolu « en-ligne » utilise des méthodes de programmation linéaire mixte en nombres entiers (MILP) si le critère employé est linéaire, ou des méthodes de programmation quadratique mixte en nombres entiers (MIQP) si le critère employé est quadratique. Dans les cas où la résolution « en-ligne » n'est pas réalisable, les méthodes de programmation multiparamétrique permettent de synthétiser une commande affine par morceaux qui représente la solution d'un problème d'optimisation hybride fondée sur un critère linéaire ou quadratique. Les méthodes utilisées afin d'obtenir une commande par retour d'état affine par morceaux sont la programmation multiparamétrique associée avec la programmation mixte en nombres entiers (mp-MILP/mp-MIQP ou multi parametric – Mixte Integer Linear/Quadratic Programming en anglais) [BBM00a], [BBM00c] ou avec la programmation dynamique (mp-DP ou multi parametric – Dynamic Programming en anglais) [KM02], [BCM03], [BBBM03], [Bor03], [BBBM05]. Au niveau du modèle de prédiction utilisé, les problèmes d'optimisation de type mp-MIP sont formulés sur des modèles MLD, alors que ceux de type mp-DP exploitent la structure des modèles PWA afin de synthétiser des lois de commande.

Pour la suite, la formulation mathématique à temps discret et le principe des méthodes mentionnées précédemment seront présentées pour la résolution du problème d'optimisation respectivement à base des modèles linéaires et à base des modèles hybrides.

2.4 Commande prédictive à base des modèles linéaires : résolution « en-ligne »

En comparaison avec d'autres stratégies de commande qui utilisent des régulateurs déterminés « hors-ligne », la commande prédictive exploite la structure d'un modèle à temps discret afin de prédire son comportement futur.

Considérons le modèle linéaire à temps discret :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathrm{A}x_k + Bu_k \,, k \in \mathbb{N} \\ y_k &= \mathrm{C}x_k \end{aligned} \tag{2.78}$$

avec $x_k \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^{nxn}$, $u_k \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^{mxn}$ et $y_k \in \mathbb{Y} \subseteq \mathbb{R}^{pxn}$ qui est soumis aux contraintes au niveau de la commande u_k et des sorties y_k :

$$\begin{aligned} u_{min} \leq u_k \leq u_{max} \\ y_{min} \leq y_k \leq y_{max} \end{aligned} \tag{2.79}$$

On considère de même le point d'équilibre du système (2.78) $x_0 = 0$ et on se propose d'amener toutes les trajectoires du système discret à l'origine, en respectant les contraintes (2.79).

Les objectifs de la commande sont explicités à travers les contraintes imposées (2.79) et un critère d'optimisation :

$$J(U, x_k) = \left\| P_N x_{k+N|k} \right\|_p + \sum_{i=0}^{N-1} \left\| Q x_{k+i|k} \right\|_p + \sum_{i=0}^{N_u-1} \left\| R u_{k+i|k} \right\|_p \tag{2.80}$$

avec :

N – l'horizon de prédiction ;

N_u– l'horizon de commande, $N_u \leq N$;

$P_N \geq 0$– le coût terminal ;

$Q = Q^T, Q \geq 0, R = R^T, R > 0$ – les matrices de pondération des états prédits et des commandes futures ;

$p = \{1,2,\infty\}$ – la norme du critère tel que :

$$\|x\|_p \triangleq \begin{cases} |x_1| + \cdots + |x_n|, p = 1 \\ \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, p = 2 \\ \max_{i=1:n} |x_i|, p = \infty \end{cases} ; \quad (2.81)$$

$x_{k|k} = x_k$ – l'état à l'instant k ;

$x_{k+i+1|k} = Ax_{k+i|k} + Bu_{k+i|k},\ 0 \leq i \leq N-1$ – les états futurs ;

$u_{k+i|k} = \begin{cases} Kx_{k+i|k} \\ u_{k+N_u-1|k} \end{cases}, N_u \leq i \leq N-1$ – les entrées futures.

La matrice R qui pondère les actions de la commande $u_{k+i|k}$ représente l'énergie dépensée afin de satisfaire les objectifs de la commande.

Pour un horizon de commande inferieur à l'horizon de prédiction, on peut exprimer les termes $u_{k+i|k},\ i = N_u, \ldots, N-1$ sous la forme des commandes par retour d'état $Kx_{k+i|k}$. Un choix classique du gain K de la commande par retour d'état représente la solution du problème de régulation quadratique à horizon infini sans contraintes (LQR ou Linear Quadratic Regulator en anglais) issu de l'équation algébrique discrète de Riccati :

$$K = (R + B^T PB)^{-1} B^T PA \quad (2.82)$$

$$P = Q + A^T PA - A^T PB(R + B^T PB)^{-1} B^T PA \quad (2.83)$$

Une alternative est de choisir $K = 0$ et P la solution de l'équation de Lyapunov :

$$P = A^T PA + Q \quad (2.84)$$

Du fait que le modèle n'est plus commandé après N_u pas de prédiction signifie que ce choix est cohérant seulement si le modèle en boucle ouverte est stable.

Une autre possibilité consiste à conserver la même valeur de la commande à partir de l'instant $k + N_u - 1$.

À chaque pas d'échantillonnage, l'état courant du système est utilisé afin de résoudre un problème d'optimisation sur un horizon de prédiction fini, défini sous la forme :

$$J^*(U_k, x_k) = \min_{U_k} J(U_k, x_k)$$

sujet à :

$$\begin{aligned} u_{min} \leq u_{k+i|k} \leq u_{max},\ & 0 \leq i \leq N \\ y_{min} \leq y_{k+i|k} \leq y_{max},\ & 1 \leq i \leq N \\ x_{k|k} = x_k & \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$x_{k+i+1|k} = Ax_{k+i|k} + Bu_{k+i|k}, 0 \le i \le N-1$$
$$u_{k+i|k} = \begin{cases} Kx_{k+i|k} \\ u_{k+N_u-1|k} \end{cases}, N_u \le i \le N-1$$
$$y_{k+i|k} = Cx_{k+i|k}, \qquad 0 \le i \le N-1$$

avec $J(U_k, x_k)$ défini par (2.80) et $U_k = \left[u_{k|k}, u_{k+1|k}, \dots, u_{k+N_u-1|k}\right]^T$ la séquence de commandes appliquée au système (2.78) afin de générer la séquence d'états prédits : $X_k = \left[x_{k|k}, x_{k+1|k}, \dots, x_{k+N|k}\right]^T$.

La solution fournie à chaque itération représente une séquence optimale de commande :

$$U_k^* = \left[{u_{k|k}^*}^T, {u_{k+1|k}^*}^T, \dots, {u_{k+N_u-1|k}^*}^T\right]^T \tag{2.86}$$

qui minimise la fonction de cout, tout en respectant les contraintes imposées et en assurant que l'état du système :

$$X_k^*(x_k, U_k^*) = \left[{x_{k|k}^*}^T, {x_{k+1|k}^*}^T, \dots, {x_{k+N|k}^*}^T\right]^T \tag{2.87}$$

évolue conformément à la trajectoire prédite. En utilisant le principe de l'horizon fuyant (RH ou Receding Horizon en anglais), seul le premier élément de la séquence de commande obtenue est appliqué au système à l'instant courant :

$$u_k = U_k^*(1) \tag{2.88}$$

À l'instant suivant, l'horizon de prédiction glisse d'un pas et la procédure d'optimisation est répétée avec un nouvel état échantillonné. Ce principe de la commande prédictive est illustré dans la Figure 2.3.1.

Afin de garantir une erreur stationnaire nulle dans la boucle de régulation, le modèle de prédiction pour la formulation du problème d'optimisation est construit à partir de l'incrément de la commande Δu , ce qui assure l'effet d'action intégrale :

$$\Delta u_k = u_k - u_{k-1} \tag{2.89}$$

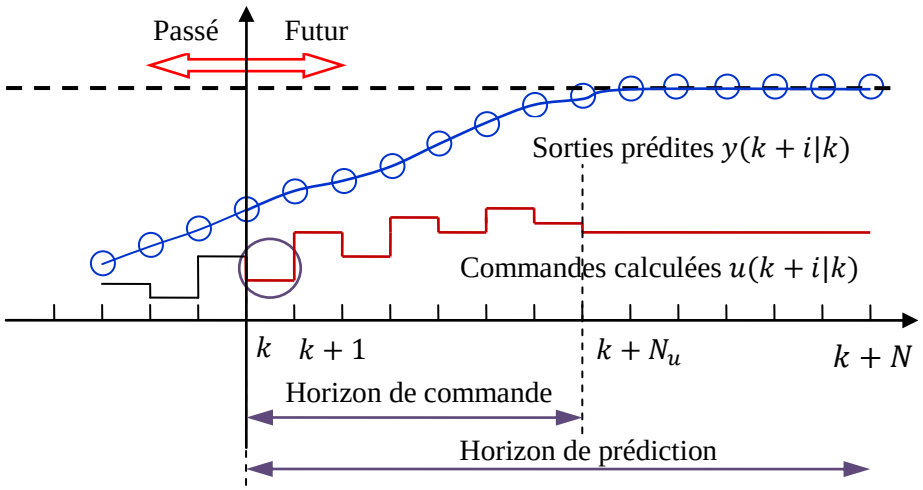


Figure 2.3.1 : Schéma du principe de l'horizon fuyant.

Pour le modèle discret à temps continu (2.79), l'état est augmenté avec l'entrée à l'instant précèdent. En notant $x_k^e = [x_k^T \quad u_{k-1}^T]^T$, les équations du modèle sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\underbrace{\begin{bmatrix}x_{k+1}\\u_k\end{bmatrix}}_{x^e_{k+1}} &= \underbrace{\begin{bmatrix}A & B\\0 & I\end{bmatrix}}_{A_e}\underbrace{\begin{bmatrix}x_k\\u_{k-1}\end{bmatrix}}_{x^e_k} + \underbrace{\begin{bmatrix}B\\I\end{bmatrix}}_{B_e}\Delta u_k\,, k \in \mathbb{N}\\ y_k &= \underbrace{[C \quad 0]}_{C_e}\underbrace{\begin{bmatrix}x_k\\u_{k-1}\end{bmatrix}}_{x^e_k}\end{aligned} \tag{2.90}$$

En conséquence, la commande du modèle (2.90) est représentée par l'incrément de la commande Δu_k au lieu de u_k. Pour ce modèle étendu, le problème d'optimisation est défini par :

$$\begin{aligned}J^*(\Delta U_k, x^e_k) = \min_{U_k} &\left\|P_N x^e_{k+N|k}\right\|_p + \sum_{i=0}^{N-1}\left\|Q x^e_{k+i|k}\right\|_p +\\ &+\sum_{i=0}^{N_u-1}\left\|R\Delta u_{k+i|k}\right\|_p\end{aligned} \tag{2.91}$$

sujet à :

$$\begin{aligned}\Delta u_{min} \le \Delta u_{k+i|k} \le \Delta u_{max},\ \ 0 \le i \le N_u - 1\\ u_{min} \le u_{k+i|k} \le u_{max},\ \ 0 \le i \le N_u - 1\\ y_{min} \le y_{k+i|k} \le y_{max},\ \ 1 \le i \le N\\ x^e_{k|k} = x^e_k\\ x^e_{k+i+1|k} = A_e x^e_{k+i|k} + B_e \Delta u_{k+i|k}, 0 \le i \le N-1\\ u_{k+i|k} = \begin{cases} K x^e_{k+i|k} \\ u_{k+N_u-1|k}\end{cases}, N_u \le i \le N-1\\ y_{k+i|k} = C_e x^e_{k+i|k},\ \ 0 \le i \le N-1\end{aligned} \tag{2.92}$$

avec $P_N \ge 0, Q = Q^T, Q > 0,\ R = R^T,\ R \ge 0$, N, N_u et $p = \{1,2,\infty\}$ donnés par (2.81).

On remarque que les problèmes d'optimisation (2.85), (2.91)-(2.92) utilisent un critère d'optimisation classique, avec des pondérations pour les états et la commande ou l'incrément de la commande. Cependant, les objectifs de la commande peuvent s'exprimer en fonction de l'erreur entre la sortie prédite et la trajectoire de référence sur un horizon de prédiction fini. Dans ce cas, la fonction de coût à minimiser, en utilisant un modèle de prédiction commandé par la variation Δu_k, est la suivante :

$$J(\Delta U_k, x^e_k) = \sum_{i=1}^{N}\left\|Q_y(y_{k+i|k} - y^{ref}_{k+i|k})\right\|_p + \sum_{i=0}^{N_u-1}\left\|R\Delta u_{k+i|k}\right\|_p \tag{2.93}$$

où les matrices $Q_y = Q_y^T, Q_y > 0, R = R^T, R > 0$ pondèrent, respectivement, l'erreur de sortie par rapport à la référence y^{ref}_k et l'incrément de la commande Δu_k. Afin d'obtenir les performances dynamiques désirées pour le système commandé, les pondérations Q_y et R sont les paramètres d'ajustement. Dans ce cas la séquence de commande optimale est représentée par :

$$\Delta U^*_k = \left[\Delta u^{*}_{k|k}{}^T, \Delta u^{*}_{k+1|k}{}^T, \dots, \Delta u^{*}_{k+N_u-1|k}{}^T\right]^T \tag{2.94}$$

Reformulation du problème d'optimisation

Conformément au principe de l'horizon fuyant, il est nécessaire de résoudre un problème d'optimisation à chaque pas d'échantillonnage pour le calcul de la commande optimale qui sera injectée au système. En conséquence, le problème d'optimisation est reformulé afin de permettre l'application des méthodes de programmation paramétrique et d'obtenir la commande optimale à chaque itération. Par la suite, on présentera la reformulation du problème d'optimisation (2.91)-(2.92) sur la base :

- d'un critère quadratique et ensuite, d'un critère linéaire ;
- des contraintes associées.

➢ *Critère quadratique :* $p = 2$

Pour $N_u = N$ dans le problème d'optimisation (2.91)-(2.92), la fonction de coût (2.80) a la forme suivante :

$$J(\Delta U_k, x_k^e) = {x_{k+N|k}^e}^T P_N x_{k+N|k}^e + \\ + \sum_{i=0}^{N-1} ({x_{k+i|k}^e}^T \mathrm{Q} x_{k+i|k}^e + {\Delta u_{k+i|k}}^T R \Delta u_{k+i|k}) \tag{2.95}$$

En utilisant la relation de récurrence :

$$x_{k+i|k}^e = A_e^i x_k^e + \sum_{j=0}^{i-1} A^j B\, \Delta u_{k+i-j-1}, 1 \le i \le N \tag{2.96}$$

et en considérant les séquences :

$$\Delta U_k = \left[{\Delta u_{k|k}}^T, {\Delta u_{k+1|k}}^T, \dots, {\Delta u_{k+N_u-1|k}}^T\right] \in \mathbb{R}^{mN} \\ X_k = \left[{x_{k|k}^e}^T, {x_{k+1|k}^e}^T, \dots, {x_{k+N-1|k}^e}^T\right] \in R^{(n+1)N} \\ Y_k = \left[{y_{k|k}}^T, {y_{k+1|k}}^T, \dots, {y_{k+N-1|k}}^T\right] \in R^{pN} \tag{2.97}$$

les termes pénalisés par les pondérations P_N, Q, R deviennent :

- ${x_{k+N|k}^e}^T P_N x_{k+N|k}^e = (\varphi_N x_k^e + \delta_N \Delta U_k)^T P_N (\varphi_N x_k^e + \delta_N \Delta U_k) = {x_k^e}^T \varphi_N^T P_N \varphi_N x_k^e + \\ + 2{x_k^e}^T \varphi_N^T P_N \delta_N \Delta U_k + \Delta U_k^T \delta_N^T P_N \delta_N \Delta U_k$

  avec : $x_{k+N|k}^e = \varphi_N x_k^e + \delta_N \Delta U_k$

  $\varphi_N = A_e^N, \varphi_N \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$

  $\delta_N = [A_e^{N-1} B_e \;\; A_e^{N-2} B_e \;\; \dots \;\; B_e],\ \delta_N \in \mathbb{R}^{(n+1)\times mN}$

- $\sum_{i=0}^{N-1} {x_{k+i|k}^e}^T \mathrm{Q} x_{k+i|k}^e = X_k^T \bar{Q} X_k = (\Phi x_k^e + \Gamma \Delta U_k)^T \bar{Q} (\Phi x_k^e + \Gamma \Delta U_k) = \\ = {x_k^e}^T \Phi^T \bar{Q} \Phi x_k^e + 2{x_k^e}^T \Phi^T \bar{Q} \Gamma \Delta U_k + X_k \Gamma^T \bar{Q} \Gamma \Delta U_k$

  avec : $X_k = \Phi x_k^e + \Gamma \Delta U_k$, $\bar{Q} = diag(Q) \in \mathbb{R}^{(n+1)N\times(n+1)N}$

$$\Phi = \begin{bmatrix} I \\ A_e \\ A_e^2 \\ \vdots \\ A_e^{N-1} \end{bmatrix} \in R^{(n+1)N\times(n+1)},\ \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B_e & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_eB_e & B_e & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_e^{N-2}B_e & A_e^{N-3}B_e & \dots & B_e & 0 \end{bmatrix} \in R^{(n+1)N\times mN}$$

– $\sum_{i=0}^{N-1} \Delta u_{k+i|k}{}^T R \Delta u_{k+i|k} = \Delta U_k^T \bar{R} \Delta U_k$, avec : $\bar{R} = diag(R) \in \mathbb{R}^{mN\times mN}$

La fonction de coût se traduit par :

$$\begin{aligned} J(\Delta U_k, x_k^e) = {} & x_k^{eT}(\varphi_N^T P_N \varphi_N + \Phi^T \bar{Q} \Phi) x_k^e + 2x_k^{eT}(\varphi_N^T P_N \delta_N \\ & + \Phi^T \bar{Q} \Gamma)\Delta U_k \\ & + \Delta U_k^T(\delta_N^T P_N \delta_N + \Gamma^T \bar{Q} \Gamma + \bar{R})\Delta U_k \end{aligned} \tag{2.98}$$

En notant :

$$Y = 2\varphi_N^T P_N \varphi_N + \Phi^T \bar{Q} \Phi, \qquad Y \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} \tag{2.99}$$

$$F = 2\varphi_N^T P_N \delta_N + \Phi^T \bar{Q} \Gamma, \qquad F \in \mathbb{R}^{(n+1)\times mN} \tag{2.100}$$

$$H = 2\delta_N^T P_N \delta_N + \Gamma^T \bar{Q} \Gamma + R, \qquad H \in \mathbb{R}^{mN\times mN} \tag{2.101}$$

la fonction de coût devient :

$$J(\Delta U_k, x_k^e) = \frac{1}{2} x_k^{eT} Y x_k^e + x_k^{eT} F \Delta U_k + \frac{1}{2} \Delta U_k^T H \Delta U_k \tag{2.102}$$

Au niveau des contraintes :

– les contraintes formulées sur l'incrément de la commande Δu_k :

$\Delta u_{min} \le \Delta u_{k+i|k} \le \Delta u_{max},\ 0 \le i \le N-1$ sont exprimées selon une formulation matricielle comme :

$$\begin{matrix} \Delta U_k \le \Delta U_{max} \\ -\Delta U_k \le -\Delta U_{min} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I_{mN} \\ -I_{mN} \end{bmatrix} \Delta U_k \le \begin{bmatrix} \Delta U_{max} \\ -\Delta U_{min} \end{bmatrix} \tag{2.103}$$

avec :

$$\Delta U_{\max} = \begin{bmatrix} \Delta u_{\max} \\ \Delta u_{\max} \\ \vdots \\ \Delta u_{\max} \end{bmatrix},\ \Delta U_{\min} = \begin{bmatrix} \Delta u_{\min} \\ \Delta u_{\min} \\ \vdots \\ \Delta u_{\min} \end{bmatrix},\ I_{mN} = diag(1,\dots,1) \in \mathbb{R}^{mN\times mN}$$

et ΔU_k comme dans (2.97).

– les contraintes formulées sur la commande u_k :

$u_{min} \le u_{k+i|k} \le u_{max},\ 0 \le i \le N-1$ peuvent être écrites en fonction de Δu_k.

Les commandes u_k sont exprimées en fonction de Δu_k par la relation suivante :

$$u_{k+i} = u_{k-1} + \sum_{j=0}^{i} \Delta u_{k+j}, 0 \le i \le N-1 \tag{2.104}$$

écrite sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ I_m \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} u_{k-1} + \underbrace{\begin{bmatrix} I_m & 0 & \dots & 0 \\ I_m & I_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_m & I_m & \dots & I_m \end{bmatrix}}_{G_u} \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \Delta u_{k+1} \\ \vdots \\ \Delta u_{k+N-1} \end{bmatrix} \tag{2.105}$$

où :

$$u_{k-1} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1_m] x_k^e,\ 1_m = \underbrace{[1 \quad \dots \quad 1]^T}_{m} \tag{2.106}$$

En utilisant la relation (2.105), les contraintes sur la commande u_k sont formulées sous la forme :

$$\begin{bmatrix} G_u \\ -G_u \end{bmatrix} \Delta U_k \leq \begin{bmatrix} U_{max} \\ -U_{min} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_u \\ -E_u \end{bmatrix} x_k^e \tag{2.107}$$

avec :

$$U_{max} = \begin{bmatrix} u_{max} \\ u_{max} \\ \vdots \\ u_{max} \end{bmatrix}, U_{min} = \begin{bmatrix} u_{min} \\ u_{min} \\ \vdots \\ u_{min} \end{bmatrix}, E_u = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.108}$$

– les contraintes formulées sur la sortie y_k

$y_{min} \leq y_{k+i|k} \leq y_{max},\ 1 \leq i \leq N$ sont écrites sous forme matricielle à partir de l'expression de Y_k défini par l'équation (2.97) :

$$\begin{gathered} Y_{min} \leq Y_k \leq Y_{max} \\ Y_k = \mathrm{C}_\varphi \Phi' x_k^e + C_\gamma \Gamma' \Delta U_k \end{gathered} \tag{2.109}$$

avec :

$$\begin{gathered} Y_{max} = \begin{bmatrix} y_{max} \\ y_{max} \\ \vdots \\ y_{max} \end{bmatrix}, Y_{min} = \begin{bmatrix} y_{min} \\ y_{min} \\ \vdots \\ y_{min} \end{bmatrix} \\ C_\varphi = \begin{bmatrix} C_e & 0 & 0 & 0 \\ C_e & C_e & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_e & C_e & \cdots & C_e \end{bmatrix}, C_\gamma = diag(C_e, \dots, C_e) \\ \Phi' = \begin{bmatrix} A_e \\ A_e^2 \\ \vdots \\ A_e^{N-1} \\ A_e^N \end{bmatrix}, \Gamma' = \begin{bmatrix} B_e & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_e B_e & B_e & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_e^{N-2} B_e & A_e^{N-3} B_e & \dots & B_e & 0 \\ A_e^{N-1} B_e & A_e^{N-2} B_e & \dots & A_e B_e & B_e \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{2.110}$$

En notant :

$$G_y = C_\gamma \Gamma', E_y = C_\varphi \Phi' \tag{2.111}$$

les contraintes sur les sorties prédites Y_k sont :

$$\begin{matrix} E_y x_k^e + G_y \Delta U_k \leq Y_{max} \\ -E_y x_k^e - G_y \Delta U_k \leq -Y_{max} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} G_y \Delta U_k \leq Y_{max} - E_y x_k^e \\ -G_y \Delta U_k \leq -Y_{min} + E_y x_k^e \end{matrix} \tag{2.112}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} G_y \\ -G_y \end{bmatrix} \Delta U_k \leq \begin{bmatrix} Y_{max} \\ -Y_{min} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -E_y \\ E_y \end{bmatrix} x_k^e \tag{2.113}$$

En conséquence, les contraintes du problème d'optimisation (2.91)-(2.92) sont données en fonction des équations (2.103), (2.107), (2.113) :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_{mN} \\ -I_{mN} \\ G_u \\ -G_u \\ G_y \\ -G_y \end{bmatrix}}_{G} \Delta U_k \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta U_{max} \\ -\Delta U_{min} \\ U_{max} \\ -U_{min} \\ Y_{max} \\ -Y_{min} \end{bmatrix}}_{W} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -E_u \\ E_u \\ -E_y \\ E_y \end{bmatrix}}_{E} x_k^e \tag{2.114}$$

Le problème d'optimisation (2.91)-(2.92) formulé sur un critère quadratique (2.95) se réécrit comme :

$$\begin{aligned} J^*(\Delta U_k, x_k^e) &= \min_{\Delta U_k} \frac{1}{2} \Delta U_k^T H \Delta U_k + x_k^{eT} F \Delta U_k + \frac{1}{2} x_k^{eT} Y x_k^e \\ \text{sujet à :} \quad & G \Delta U_k \leq W + E x_k^e \end{aligned} \tag{2.115}$$

avec les matrices H, F, Y, G, W, E définies par les équations (2.99)-(2.101), (2.114). L'optimisation est faite par rapport à la séquence de commande ΔU et, en conséquence, le dernier terme $\frac{1}{2} x_k^{eT} Y x_k^e$ qui dépend uniquement de l'état, n'influence pas le résultat de la minimisation. Cependant il intervient dans le calcul de la valeur optimale de la fonction de coût.

Le problème (2.115) représente un *problème de programmation quadratique* (QP) qui contient, comme paramètre, la valeur courante de l'état x_k^e. De ce fait, l'implantation de la commande prédictive nécessite la résolution du problème QP (2.115) à chaque pas d'échantillonnage.

La commande optimale appliquée au système à chaque itération est la suivante :

$$u_k^* = \Delta U_k(1)$$

- *Critère linéaire :* $p = \{1, \infty\}$

En premier lieu, la reformulation du problème d'optimisation (2.91)-(2.92) est présentée pour un critère à norme 1.

Dans l'hypothèse $N_u = N$ et $p = 1$ la fonction de coût associée au problème d'optimisation (2.91)-(2.92) s'écrit sous la forme suivante :

$$J(\Delta U_k, x_k^e) = \left| P_N x_{k+N|k}^e \right| + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\left| Q x_{k+i|k}^e \right| + \left| R \Delta u_{k+i|k} \right| \right) \tag{2.116}$$

La traduction de la minimisation de la norme 1 sous un problème de programmation linéaire est faite en utilisant la transformation suivante :

$$\begin{aligned}
&\min_x \left\| \begin{bmatrix} a_1 x(1) \\ a_2 x(2) \end{bmatrix} \right\|_1 + \left\| \begin{bmatrix} b_1 x(1) \\ b_2 x(2) \end{bmatrix} \right\|_1 = \\
&= \min_x [|a_1 x(1)| + |a_2 x(2)| + |b_1 x(1)| + |b_2 x(2)|] \\
&\quad \Leftrightarrow \ \min_\varepsilon \varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{2,1} + \varepsilon_{2,2} \\
&\quad \text{Sujet à : } -\varepsilon_{1,1} + a_1 x(1) \le 0, \ -\varepsilon_{2,1} + b_1 x(1) \le 0 \\
&\qquad\qquad -\varepsilon_{1,1} - a_1 x(1) \le 0, \ -\varepsilon_{2,1} - b_1 x(1) \le 0 \\
&\qquad\qquad -\varepsilon_{2,1} + a_2 x(2) \le 0, \ -\varepsilon_{2,2} + b_2 x(2) \le 0 \\
&\qquad\qquad -\varepsilon_{2,1} - a_2 x(2) \le 0, \ -\varepsilon_{2,2} - b_2 x(2) \le 0
\end{aligned} \tag{2.117}$$

En appliquant le même principe que dans l'équation (2.117), on introduit le vecteur des paramètres :

$$\begin{aligned}
z \triangleq [&\varepsilon^x_{0,1}, \dots, \varepsilon^x_{0,n}, \dots \dots, \varepsilon^x_{N,1}, \dots \varepsilon^x_{N,n}, \varepsilon^u_{0,1}, \dots, \varepsilon^u_{0,m}, \dots \dots, \\
&\varepsilon^u_{N-1,1}, \dots \varepsilon^u_{N-1,m}, \Delta u_k, \dots, \Delta u_{k+N-1}] \ \in \mathbb{R}^s
\end{aligned} \tag{2.118}$$

où $s = (n+1)(N+1) + 2mN$.

Les composantes $\varepsilon^x_{i,j|(i=0:N,j=1:n)}, \varepsilon^u_{i,j|(i=0:N-1,j=1:n)}$ du vecteur z représentent une limite supérieure de chaque élément des termes pondérés respectivement par P_N, Q et par R dans la relation (2.116). L'index i corresponde aux les termes de la somme à l'instant $k+i$ de prédiction, alors que l'index j se réfère à chaque élément des produits $\left|Qx^e_{k+i|k}\right|$ et $\left|R\Delta u_{k+i|k}\right|$.

En utilisant les notations :

$$\begin{aligned}
\varepsilon^x_i &= \begin{bmatrix} \varepsilon^x_{i,1} & \varepsilon^x_{i,2} & \dots & \varepsilon^x_{i,n} \end{bmatrix}^T, 0 \le i \le N \\
\varepsilon^u_i &= \begin{bmatrix} \varepsilon^u_{i,1} & \varepsilon^u_{i,2} & \dots & \varepsilon^u_{i,m} \end{bmatrix}^T, 0 \le i \le N-1
\end{aligned} \tag{2.119}$$

on formule les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\left|Qx^e_{k+i|k}\right| \le \varepsilon^x_i &\Leftrightarrow -\varepsilon^x_i \le \pm Qx^e_{k+i|k}, 0 \le i \le N-1 \\
\left|P_N x^e_{k+N|k}\right| \le \varepsilon^x_N &\Leftrightarrow -\varepsilon^x_N \le \pm P_N x^e_{k+N|k} \\
\left|R\Delta u_{k+i|k}\right| \le \varepsilon^u_i &\Leftrightarrow -\varepsilon^u_i \le \pm R\Delta u_{k+i|k}, 0 \le i \le N-1
\end{aligned} \tag{2.120}$$

où $x^e_{k+i|k}$ est défini par la relation (2.96).

La somme des premières $n(N+1) + mN$ éléments du vecteur z :

$$\begin{aligned}
J(z) = \varepsilon^x_{0,1} + \dots + \varepsilon^x_{0,n} + \dots + \varepsilon^x_{N,1} + \dots + \varepsilon^x_{N,n} + \varepsilon^u_{0,1} + \dots + \varepsilon^u_{0,n} \\
+ \dots + \varepsilon^u_{N,1} + \dots + \varepsilon^u_{N,n}
\end{aligned} \tag{2.121}$$

représente une borne supérieure de la valeur optimale du critère $J^*(\Delta U_k, x^e_k)$. Il est montré dans [CM87] que le vecteur z, qui satisfait les inégalités (2.120) et en même temps qui minimise la somme (2.121), résout également le problème d'optimisation (2.91)-(2.92) formulé sur le critère (2.116) avec $N_u = N$. En d'autres termes, la séquence optimale de commande ΔU^*_k minimise les deux fonctions de coût $J(z)$, $J(\Delta U_k, x^e_k)$. La relation (2.121) se réécrit sous la forme compacte :

$$J(z) = c'z, \quad \text{avec } c = \underbrace{[1 \ \dots \ 1}_{n(N+1)+mN} \underbrace{0 \ \dots \ 0]}_{mN}^T \in \mathbb{R}^s \tag{2.122}$$

Les inégalités (2.120) s'écrivent en fonction de l'état courant x^e_k défini par (2.90) et des termes Δu_{k+i} comme :

$$
\begin{aligned}
&-\varepsilon_i^x \le \pm\left[QA_e^i x_k^e + \mathrm{Q}\sum_{j=0}^{i-1} A^j B\,\Delta u_{k+i+j-1}\right], 1 \le i \le N-1\\
&-\varepsilon_N^x \le \pm\left[P_N A_e^N x_k^e + P_N \sum_{j=0}^{N-1} A^j B\,\Delta u_{k+i+j-1}\right]\\
&-\varepsilon_i^u \le \pm R\Delta u_{k+i}, 1 \le i \le N-1
\end{aligned}
\tag{2.123}
$$

Également, les contraintes sur les incréments des commandes, les commandes, et les sorties prédits Δu_{k+i} , u_{k+i}, y_{k+i} (2.92) sont reformulées :

$$
\begin{aligned}
&\pm I_m \Delta u_{k+i} \le [\Delta u_{max} \quad -\Delta u_{min}]^T \ , \ 0 \le i \le N-1\\
&\pm u_{k-1} \pm \sum_{j=0}^{i} \Delta u_{k+j} \le [u_{max} \quad -u_{min}]^T, \ 0 \le i \le N-1\\
&\pm C_e A_e^i x_k^e \pm C_e \sum_{j=0}^{i-1} A^j B\,\Delta u_{k+i+j-1} \le [y_{max} - y_{min}]^T \ , 1 \le i \le N
\end{aligned}
\tag{2.124}
$$

avec u_{k-1} donné par la relation (2.106).

L'ensemble des contraintes imposées sur les éléments du vecteur z (2.118) est décrit par les inégalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
&-\varepsilon_i^x \pm \mathrm{Q}\sum_{j=0}^{i-1} A^j B\,\Delta u_{k+i+j-1} \le \mp QA_e^i x_k^e, \qquad 0 \le i \le N-1\\
&-\varepsilon_N^x \pm P_N \sum_{j=0}^{N-1} A^j B\,\Delta u_{k+i+j-1} \le \mp P_N A_e^N x_k^e\\
&-\varepsilon_i^u \pm R\Delta u_{k+i} \le 0, \qquad 1 \le i \le N-1\\
&\pm I_m \Delta u_{k+i} \le [\Delta u_{max} \quad -\Delta u_{min}]^T \ , \qquad 0 \le i \le N-1\\
&\pm \sum_{j=0}^{i} \Delta u_{k+j} \le [u_{max} - u_{min}]^T \mp \begin{bmatrix} 0 \dots 0 & 1 \\ 0 \dots 0 & 1 \end{bmatrix} x_k^e \ , 0 \le i \le N-1\\
&\pm C_e \sum_{j=0}^{i-1} A^j B\,\Delta u_{k+i+j-1} \le [y_{max} - y_{min}]^T \mp C_e A_e^i x_k^e, 1 \le i \le N
\end{aligned}
\tag{2.125}
$$

qui peuvent s'écrire aussi sous une forme matricielle :

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
-I_n & 0 & \dots & 0\\
-I_n & 0 & \dots & 0\\
0 & -I_n & \dots & 0\\
0 & -I_n & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
\dots & \dots & -I_n & 0\\
\dots & \dots & -I_n & 0\\
0 & \dots & 0 & -I_n\\
0 & \dots & 0 & -I_n
\end{bmatrix}}_{G_{\varepsilon^x}}
\begin{bmatrix} \varepsilon_0^x \\ \varepsilon_1^x \\ \dots \\ \varepsilon_{N-1}^x \\ \varepsilon_N^x \end{bmatrix}
+
\underbrace{\begin{bmatrix}
0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & \dots & 0\\
QB_e & 0 & \dots & 0\\
-QB_e & 0 & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
QA_e^{N-2}B_e & QA_e^{N-3}B_e & \dots & 0\\
-QA_e^{N-2}B_e & -QA_e^{N-3}B_e & \dots & 0\\
P_N A_e^{N-1}B_e & P_N A_e^{N-2}B_e & \dots & P_N B_e\\
-P_N A_e^{N-1}B_e & -P_N A_e^{N-2}B_e & \dots & P_N B_e
\end{bmatrix}}_{G_{\Delta u}^1}
\begin{bmatrix} \Delta u_0 \\ \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_{N-1} \end{bmatrix}
\le
\underbrace{\begin{bmatrix}
-Q\\
Q\\
-QA_e\\
QA_e\\
\dots\\
-QA_e^{N-1}\\
QA_e^{N-1}\\
-QA_e^N\\
QA_e^N
\end{bmatrix}}_{S^1} x_k^e
\tag{2.126}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
-I_m & \dots & 0\\
-I_m & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots\\
0 & \dots & -I_m\\
0 & \dots & -I_m
\end{bmatrix}}_{G_{\varepsilon^u}}
\begin{bmatrix} \varepsilon_0^u \\ \varepsilon_1^u \\ \vdots \\ \varepsilon_{N-1}^u \end{bmatrix}
+
\underbrace{\begin{bmatrix}
R & \dots & 0\\
-R & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots\\
0 & \dots & R\\
0 & \dots & -R
\end{bmatrix}}_{G_{\Delta u}^2}
\begin{bmatrix} \Delta u_0 \\ \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_{N-1} \end{bmatrix}
\le
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{2.127}
$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_m & \dots & 0 \\ -I_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & I_m \\ 0 & \dots & -I_m \end{bmatrix}}_{G^3_{\Delta u}} \begin{bmatrix} \Delta u_0 \\ \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_{N-1} \end{bmatrix} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u_{\max} \\ -\Delta u_{\min} \\ \dots \\ \Delta u_{\max} \\ -\Delta u_{\min} \end{bmatrix}}_{W^3} \tag{2.128}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_m & 0 & \dots & 0 \\ -I_m & 0 & \dots & 0 \\ I_m & I_m & \dots & 0 \\ -I_m & -I_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_m & I_m & \dots & I_m \\ -I_m & I_m & \dots & -I_m \end{bmatrix}}_{G^4_{\Delta u}} \begin{bmatrix} \Delta u_0 \\ \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_{N-1} \end{bmatrix} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} u_{\max} \\ -u_{\min} \\ u_{\max} \\ -u_{\min} \\ \dots \\ u_{\max} \\ -u_{\min} \end{bmatrix}}_{W^4} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{S^4} x_k^e \tag{2.129}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_e B_e & 0 & \dots & 0 \\ -C_e B_e & 0 & \dots & 0 \\ C_e A_e B_e & 0 & \dots & 0 \\ -C_e A_e B_e & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_e A_e^{N-1} B_e & C_e A_e^{N-2} B_e & \dots & C_e B_e \\ -C_e A_e^{N-1} B_e & -C_e A_e^{N-2} B_e & \dots & C_e B_e \end{bmatrix}}_{G^5_{\Delta u}} \begin{bmatrix} \Delta u_0 \\ \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_{N-1} \end{bmatrix} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} y_{\max} \\ -y_{\min} \\ y_{\max} \\ -y_{\min} \\ \dots \\ y_{\max} \\ -y_{\min} \end{bmatrix}}_{W^5} + \underbrace{\begin{bmatrix} -C_e A_e \\ C_e A_e \\ -C_e A_e^2 \\ C_e A_e^2 \\ \dots \\ -C_e A_e^N \\ C_e A_e^N \end{bmatrix}}_{S^5} x_k^e \tag{2.130}$$

avec les paramètres $\varepsilon_i^x, \varepsilon_i^u$ définis par l'équation (2.119).

En conséquence, le problème d'optimisation initial (2.91)-(2.92), avec $N_u = N$ et le critère linéaire (2.116) est reformulé par :

$$\begin{aligned} &\min_z c'\mathrm{z} \\ &\text{sujet à :} \quad Gz \leq W + Sx_k^e \end{aligned} \tag{2.131}$$

où $G \in \mathbb{R}^{q \times s}, W \in \mathbb{R}^{q \times n}, S \in \mathbb{R}^{q \times 1}$, $q = 2((n+1)(N+1) + pN + 3mN)$ et les matrices G, W, S associées aux contraintes (2.125) sont :

$$G = \begin{bmatrix} G_{\varepsilon^x} & 0 & G^1_{\Delta u} \\ 0 & G_{\varepsilon^u} & G^2_{\Delta u} \\ 0 & 0 & G^3_{\Delta u} \\ 0 & 0 & G^4_{\Delta u} \\ 0 & 0 & G^5_{\Delta u} \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W^3 \\ W^4 \\ W^5 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} S^1 \\ 0 \\ 0 \\ S^4 \\ S^5 \end{bmatrix} \tag{2.132}$$

Le problème d'optimisation obtenu (2.131) est un *problème de programmation linéaire* (LP) avec les contraintes dépendantes de la valeur de l'état au pas d'échantillonnage courant x_k^e, ce qui implique la résolution de ce problème à chaque pas d'échantillonnage. La séquence de commandes optimale est donnée par z^*, de laquelle uniquement l'élément

$\Delta u_k^*(1)$ est envoyé au procédé. La commande optimale Δu_k^* est extraite du vecteur optimal z^* avec la relation suivante :

$$\Delta u_k^*(1) = [\underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{(n+1)(N+1)+mN} \quad I_m \quad \underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{m(N-1)}]\mathrm{z}^* \tag{2.133}$$

Si les objectifs de la commande prédictive sont formulés au moyen d'une fonction de coût à norme ∞ de la forme :

$$\begin{aligned} J(\Delta U_k, x_k^e) = &\left|P_N x_{k+N|k}^e\right|_\infty + \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} \left(\left|Q x_{k+i|k}^e\right|_\infty + \left|R\Delta u_{k+i|k}\right|_\infty\right) \end{aligned} \tag{2.134}$$

pour laquelle on considère le même horizon de commande et de prédiction ($N_u = N$), en appliquant un raisonnement analogue à celui présenté précédemment, le problème d'optimisation (2.91)-(2.92) avec le critère linéaire (2.134) est reformulé par un problème LP.

Dans ce cas, le problème de programmation linéaire équivalent est obtenu en procédant à la transformation suivante :

$$\begin{aligned} &\min_{\mathrm{x}} \left\|\begin{bmatrix} a_1 x(1) \\ a_2 x(2) \end{bmatrix}\right\|_\infty + \left\|\begin{bmatrix} b_1 x(1) \\ b_2 x(2) \end{bmatrix}\right\|_\infty = \\ &= \min_{\mathrm{x}} (\max(|a_1 x(1)|, |a_2 x(2)|) + \\ &\qquad + \max(|b_1 x(1)|, |b_2 x(2)|)) \\ &\quad \Leftrightarrow \ \min_\varepsilon \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ &\quad \text{sujet : } -\varepsilon_1 + a_1 x(1) \le 0, \ -\varepsilon_2 + b_1 x(1) \le 0 \\ &\qquad\qquad -\varepsilon_1 - a_1 x(1) \le 0, \ -\varepsilon_2 - b_1 x(1) \le 0 \\ &\qquad\qquad -\varepsilon_1 + a_2 x(2) \le 0, \ -\varepsilon_2 + b_2 x(2) \le 0 \\ &\qquad\qquad -\varepsilon_1 - a_2 x(2) \le 0, \ -\varepsilon_2 - b_2 x(2) \le 0 \end{aligned} \tag{2.135}$$

Par conséquent, la différence consiste dans la définition du vecteur des paramètres d'optimisation z, qui contient un nombre de variables réduit :

$$\begin{aligned} z \triangleq [\varepsilon_0^x, \dots, \varepsilon_N^x, \dots \dots, \varepsilon_o^u, \dots \varepsilon_{N-1}^u, \Delta u_0, \dots, \Delta u_{N-1}] \in \mathbb{R}^s \\ s = N + 1 + (m+1)N \end{aligned} \tag{2.136}$$

lorsqu'on utilise le même paramètre ε_i pour les éléments de chaque terme de la somme (2.134). Les bornes des termes sont données par les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \left|Q x_{k+i|k}^e\right| \le \varepsilon_i^x &\Leftrightarrow -1_n \varepsilon_i^x \le \pm Q x_{k+i|k}^e, 0 \le i \le N \\ \left|P_N x_{k+N|k}^e\right| \le \varepsilon_N^x &\Leftrightarrow -1_n \varepsilon_N^x \le \pm P_N x_{k+N|k}^e \\ \left|R\Delta u_{k+i|k}\right| \le \varepsilon_i^u &\Leftrightarrow -1_m \varepsilon_i^u \le \pm R\Delta u_{k+i|k}, 0 \le i \le l \end{aligned} \tag{2.137}$$

où la notation 1_n représente un vecteur colonne : $1_j = \underbrace{[1 \quad \dots \quad 1]^T}_{j}$ et $x_{k+i|k}^e$ est donné par l'équation (2.96).

Le problème LP associé au problème d'optimisation initial (2.91)-(2.92) s'écrit :

$$\begin{aligned} J^*(z) &= \min_z c'z \\ \text{sujet à :} \quad & Gz \le W + S x_k^e \end{aligned} \tag{2.138}$$

avec $G \in \mathbb{R}^{q \times s}, W \in \mathbb{R}^{q \times n}, S \in \mathbb{R}^{q \times 1}$, $q = 2((N+1) + pN + (2m+1)N)$ et le vecteur $c = [\underbrace{1 \quad \dots \quad 1}_{N+1+N} \underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{mN}]^T \in \mathbb{R}^s$. Les matrices G, W, S conservent la forme décrite par l'équation (2.132). Cependant, dans les matrices G_{ε^x}, G_{ε^u} des équations (2.126), (2.127), les termes I_n, I_m sont remplacés par les vecteurs $1_n, 1_m$.

En dépit du fait qu'un critère d'optimisation à norme 1 ou ∞ conduit vers un problème LP de la même forme et va permettre l'obtention d'une loi explicite pour des systèmes PWA, les deux normes présentent des inconvénients. En utilisant la norme ∞, les performances en boucle fermée sont dégradées du fait que les pondérations P_N, Q et R pénalisent seulement l'état et l'incrément de la commande avec la plus large déviation sur l'horizon de prédiction. En revanche, l'utilisation de la norme 1 introduit un nombre important de variables et complexifie la résolution du problème de programmation linéaire.

2.5 Commande prédictive à base de modèles linéaires : résolution « hors-ligne »

Parfois, le temps de calcul de la solution optimale en temps réel est supérieur à période d'échantillonnage, ce qui ne permet pas en conséquence l'implantation du régulateur issu de la commande prédictive (en particulier dans le cas de systèmes rapides). Afin de surmonter cette limitation, la loi de commande est calculée « hors-ligne » au moyen de méthodes de programmation multiparamétrique.

Les problèmes QP et LP formulés dans les équations (2.115), (2.138) et construits à base de critères quadratiques et linéaires représentent des problèmes de programmation quadratique et linéaire multiparamétrique (mp-QP, mpLP) si le vecteur x_k^e est considéré comme paramètre. La loi de commande obtenue est la commande par retour d'état affine par morceaux :

$$u(x_k^e) = F_j x_k^e + G_j, x_k^e \in \mathcal{R}_j \tag{2.139}$$

définie sur une partition polyédrale dans l'espace d'état ($\mathcal{R}_j \cap \mathcal{R}_i = \emptyset, \forall i \neq j$). L'union des régions représentent le domaine de validité $\mathbb{X} = \bigcup_{j=1}^{s} \mathcal{R}_j$ du modèle considéré où s est le nombre de régions de ce domaine.

2.6 Commande prédictive à base de modèles hybrides

Dans la littérature, il existe deux approches différentes, fondées sur des modèles hybrides, qui conduisent vers une forme explicite de la commande prédictive : la programmation multiparamétrique mixte à nombres entiers (mp-MIP) et la programmation multiparamétrique (mp) associée avec la programmation dynamique (DP). Par la suite, on résume le principe de chaque méthode pour le cas particulier de problèmes d'optimisation à base de critères linéaires formulés sur des modèles PWA.

Considérons un système hybride représenté par le modèle affine par morceaux construit à partir de l'incrément de commande $\Delta u_k = u_k - u_{u-1}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}}_{x_{k+1}^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_j & B_j \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{A_j^e} \underbrace{\begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix}}_{x_k^e} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_j \\ I \end{bmatrix}}_{B_j^e} \Delta u_k + \underbrace{\begin{bmatrix} f_j \\ 0 \end{bmatrix}}_{f_j^e}, x_k^e \in \mathcal{R}_j \tag{2.140}$$

$$y_k = \underbrace{[C_j \quad D_j]}_{C_j^e} \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix} + D_j \Delta u_k + g_j$$

avec $x_k^e \in \mathbb{R}^{n_r+m_r} \times \{0,1\}^{n_b+m_b}$, $\Delta u_k \in \mathbb{R}^{m_r} \times \{0,1\}^{m_b}$ et $y_k^e \in \mathbb{R}^{p_r} \times \{0,1\}^{p_b}$ contenant des éléments réels et discrets. Les régions polyédrales de l'espace d'état sont définies par des hyperplans en fonction de l'état courant et de la commande précédente :

$$\mathcal{R}_j = \left\{ \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix} : H_j^x x_k + H_j^u u_{k-1} \leq K_j \right\} \tag{2.141}$$

et le domaine de définition du modèle dans l'espace d'état est représenté par l'union $\mathbb{X} = \bigcup_{j=1}^{N_\mathcal{R}} \mathcal{R}_j$. Le modèle PWA (2.140)-(2.141) est soumis aux contraintes imposées sur les entrées et les sorties du modèle :

$$\begin{aligned} \Delta u_{min} \leq \Delta u_k \leq \Delta u_{max} \\ y_{min} \leq y_k \leq y_{max} \end{aligned} \tag{2.142}$$

En utilisant une fonction de coût à norme 1, le problème d'optimisation est le suivant :

$$J^*(\Delta U_k, x_k^e) = \min_{\Delta U_k} |P_N x_{k+N}^e| + \sum_{i=0}^{N-1} (|Q x_{k+i}^e| + |R \Delta u_{k+i}|) \tag{2.143}$$

$$\begin{aligned} \text{sujet à :} \quad & x_{k+1}^e = A_j^e x_k^e + B_j^e \Delta u_k + f_j^e, \; x_k^e \in \mathcal{R}_j \\ & y_k = C_j^e x_k^e + D_j \Delta u_k + g_j \\ & \Delta u_{min} \leq \Delta u_k \leq \Delta u_{max} \\ & y_{min} \leq y_k \leq y_{max} \\ & x_{k=0}^e = x^e(0) \end{aligned} \tag{2.144}$$

Le point initial $x^e(0)$ appartient au domaine de définition du modèle PWA. Le problème d'optimisation (2.143)-(2.144) n'a pas un minimum pour tous les états initiaux faisables $x^e(0)$ si le modèle PWA (2.140)-(2.141) présente des discontinuités par rapport à la commande et si la solution du problème (2.143)-(2.144) se trouve à la frontière des deux régions du modèle PWA [Bor02]. Dans ce cas, même pour des petites différences de comportement entre le modèle PWA et le système réel, les discontinuités dans le modèle de prédiction provoque la dégradation des performances de la commande prédictive, appliquée au système en boucle fermée, vis-à-vis des performances obtenues sur le modèle hybride de synthèse.

Par conséquent, on suppose que la suite de modèles (définissant le modèle PWA) à temps discret, construits à partir de l'incrément de commande Δu_k, est continue par rapport à celle-ci et par conséquent par rapport à la commande précédente u_{k-1} ajoutée au vecteur d'état x_k^e. De plus, on considère $x_{k_0}^e = 0$ le point d'équilibre du modèle (2.140)-(2.141) et l'objectif envisagé de la commande prédictive est d'assurer que toutes les trajectoires du modèle convergent vers l'origine et se stabilisent dans ce point en régime stationnaire.

– *algorithme de programmation multiparamétrique linéaire mixte en nombres entiers (mp-MILP)*

Cet algorithme résout un problème d'optimisation à base d'un modèle hybride de type MLD et une fonction de coût à norme 1 ou ∞. En utilisant la représentation MLD équivalente du modèle PWA (2.140)-(2.141), le problème d'optimisation (2.143)-(2.144) devient :

$$J^*(\Delta U_k, x_k^e) = \min_{\Delta U_k} |P_N\, x_{k+N}^e| + \sum_{i=0}^{N-1} (\,|Q_1 \Delta u_{k+i}| + |Q_2 \delta_{k+i}| + |Q_3 z_{k+i}| + |Q_4\, x_{k+i}^e|\,) \tag{2.145}$$

$$\begin{aligned} \text{sujet à :} \quad & x_{k+1}^e = A x_k^e + B_1 \Delta u_k + B_2 \delta_k + B_3 z_k \\ & y_k^e = C x_k^e + D_1 \Delta u_k + D_2 \delta_k + D_3 z_k \\ & E_2 \delta_k + E_3 z_k \le E_1 \Delta u_k + E_4 x_k^e + E_5 \\ & \Delta u_{min} \le \Delta u_k \le \Delta u_{max} \\ & y_{min} \le y_k \le y_{max} \\ & x_{k=0}^e = x^e(0) \end{aligned} \tag{2.146}$$

avec les variables auxiliaires continues $z_k \in \mathbb{R}^{r_c}$ et discretes $\delta_k \in \{0,1\}^{r_d}$ et les matrices de pondération réelles symétriques $P_N = P_N^T,\ P_N \ge 0,\ Q_1 = Q_1^T,\ Q_1 > 0,\ Q_2 = Q_2^T,\ Q_2 \ge 0,$ $Q_3 = Q_3^T, Q_3 \ge 0, Q_4 = Q_4^T, Q_4 > 0.$

Si on considère $x_0^e = 0$ et $\Delta u_0 = 0$ en régime permanent, alors les paramètres (z_0, δ_0) sont choisis de manière à satisfaire l'inégalité $E_2\delta_0 + E_3 z_0 \le E_1 \Delta u_0 + E_4 x_0^e + E_5$.

Le problème d'optimisation à base du modèle MLD (2.145)-(2.146) est équivalant à un *problème de programmation linéaire mixte en nombres entiers (MILP).* La formulation MILP est obtenue en appliquant une procédure similaire avec celle utilisée dans le cas des systèmes linéaires.

Tout en sachant que le modèle MLD contient des variables d'état, des entrées et des sorties à valeurs réelles et également binaires, le vecteur de paramètres introduit pour la reformulation du problème d'optimisation a la forme suivante :

$$\begin{aligned} z \triangleq [&\varepsilon_{0,1}^u, \dots, \varepsilon_{0,m}^u, \dots \dots, \varepsilon_{N-1,1}^u, \dots \varepsilon_{N-1,m}^u, \varepsilon_{0,1}^\delta, \dots, \varepsilon_{0,r_d}^\delta, \dots \dots, \\ &\varepsilon_{N-1,1}^\delta, \dots, \varepsilon_{N-1,r_d}^\delta, \varepsilon_{0,1}^z, \dots, \varepsilon_{0,r_c}^z, \dots \dots, \varepsilon_{N-1,1}^z, \dots, \varepsilon_{N-1,r_c}^z, \varepsilon_{0,1}^x, \dots, \varepsilon_{0,n}^x, \\ &\dots \dots, \varepsilon_{N,1}^x, \dots, \varepsilon_{N,n}^x, \Delta u_k, \dots, \Delta u_{k+N-1}, \delta_k, \dots, \delta_{k+N-1}, z_k \dots, z_{k+N-1}]^T \end{aligned} \tag{2.147}$$

où $z \in \mathbb{R}^s$, avec $s = n(N+1) + 2(m + r_c + r_d)N, n = n_r + m_r + n_b + m_b, m = m_r + m_b.$

Si les éléments $\varepsilon_{i,j}^*$ du vecteur z satisfont les inégalités :

$$\begin{aligned} &|P_N\, x_{k+N}^e| \le \varepsilon_N^x \Leftrightarrow -I_n \varepsilon_N^x \le \pm P_N x_{k+N} \\ &|Q_1 \Delta u_{k+i}| \le \varepsilon_i^u \Leftrightarrow -I_m \varepsilon_i^{\mathrm{u}} \le \pm Q_1 \Delta u_{k+i} \\ &|Q_2 \delta_{k+i}| \le \varepsilon_i^\delta \Leftrightarrow -I_{r_d} \varepsilon_i^\delta \le \pm Q_2 \delta_{k+i}, i = 0, .., N-1 \\ &|Q_3 z_{k+i}| \le \varepsilon_i^z \Leftrightarrow -I_{r_c} \varepsilon_i^z \le \pm Q_3 z_{k+i} \\ &|Q_4 x_{k+i}| \le \varepsilon_i^x \Leftrightarrow -I_n \varepsilon_i^x \le \pm Q_4 x_{k+i} \end{aligned} \tag{2.148}$$

alors, la somme de ces éléments représente une borne supérieure pour la fonction de coût $J(\Delta U_k, x_k^e)$. Les matrices I_* sont de matrices diagonales, les expressions des termes ε_i^* sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^u &= [\varepsilon_{i,1}^u \quad \varepsilon_{i,2}^u \quad \dots \quad \varepsilon_{i,m}^u]^T, i = 0, \dots, N-1 \\ \varepsilon_i^\delta &= [\varepsilon_{i,1}^\delta \quad \varepsilon_{i,2}^\delta \quad \dots \quad \varepsilon_{i,r_d}^\delta]^T, i = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \tag{2.149}$$

$$\varepsilon_i^z = \left[\varepsilon_{i,1}^z \quad \varepsilon_{i,2}^z \quad \dots \quad \varepsilon_{i,r_c}^z\right]^T, i = 0, \dots, N-1$$
$$\varepsilon_i^x = [\varepsilon_{i,1}^x \quad \varepsilon_{i,2}^x \quad \dots \quad \varepsilon_{i,n}^x]^T, i = 0, \dots, N$$

et les états x_{k+i}^e sont calculés en utilisant la relation de récurrence :

$$x_{k+i|k}^e = A_e^i x_k^e + \sum_{j=0}^{i-1} A^j (B_1 \Delta u_{k+i-j-1} + B_2 \delta_{k+i-j-1} + \\ + B_3 z_{k+i-j-1}), 1 \le i \le N \tag{2.150}$$

Le vecteur z donné par l'équation (2.147), qui respecte les inégalités (2.148) et qui minimise en même temps la somme :

$$J(z) = \varepsilon_{0,1}^u + \dots + \varepsilon_{0,m}^u + \dots + \varepsilon_{N-1,1}^u + \dots + \varepsilon_{N-1,m}^u + \varepsilon_{0,1}^\delta + \dots \\ + \varepsilon_{0,r_d}^\delta + \dots + \varepsilon_{N-1,1}^\delta + \dots + \varepsilon_{N-1,r_d}^\delta + \varepsilon_{0,1}^z + \dots + \varepsilon_{0,r_c}^z + \dots + \varepsilon_{N-1,1}^z \\ + \dots + \varepsilon_{N-1,r_c}^z + \varepsilon_{0,1}^x + \dots + \varepsilon_{0,n}^x + \dots + \varepsilon_{N,1}^x + \dots + \varepsilon_{N,n}^x \tag{2.151}$$

représente, également, la solution du problème d'optimisation (2.145)-(2.146). Cela signifie que $J^*(z)$ est la plus petite borne supérieure de $J(\Delta U_k, x_k^e)$ et en plus, le vecteur optimal z^* contient une séquence de commande optimale $\Delta U_k^* = [\Delta u_k^{*T} \quad \dots \quad \Delta u_{k+N-1}^{*T}]^T$ qui minimise $J(\Delta U_k, x_k^e)$.

En conséquence, le problème d'optimisation (2.145)-(2.146) est reformulé par un problème MILP :

$$J^*(z, x_k^e) = \min_z c'z, \mathrm{c} = [\underbrace{1 \quad \dots \quad \dots \quad 1}_{(n+1)N+(m+r_d+r_c)N} \underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{(m+r_d+r_c)N}]^T z \tag{2.152}$$

$$\text{sujet à :} \quad -I_n \varepsilon_N^x \le \pm P_N (A^N x_k^e + \sum_{j=0}^{i-1} A^j (B_1 \Delta u_{k+i-j-1} + \\ + B_2 \delta_{k+i-j-1} + B_3 z_{k+i-j-1}))$$
$$-I_m \varepsilon_i^u \le \pm Q_1 \Delta u_{k+i}, \ i = 0, \dots, N-1$$
$$-I_{r_d} \varepsilon_i^\delta \le \pm Q_2 \delta_{k+i}, \ i = 0, \dots, N-1$$
$$-I_{r_c} \varepsilon_i^z \le \pm Q_3 z_{k+i}, \ i = 0, \dots, N-1$$
$$-I_n \varepsilon_i^x \le \pm Q_3 (A^i x_{k+i}^e + \sum_{j=0}^{i-1} A^j (B_1 \Delta u_{k+i-j-1} + \\ + B_2 \delta_{k+i-j-1} + B_3 z_{k+i-j-1})), i = 0, \dots, N-1 \tag{2.153}$$
$$E_2 \delta_{k+i} + E_3 z_{k+i} \le E_1 \Delta u_{k+i} + E_4 (A^i x_{k+i}^e + \\ \sum_{j=0}^{i-1} A^j \left(B_1 \Delta u_{k+i-j-1} + B_2 \delta_{k+i-j-1} + B_3 z_{k+i-j-1}\right) + E_5$$
$$\Delta u_{min} \le \Delta u_{k+i} \le \Delta u_{max}, i = 0, \dots, N-1$$
$$y_{min} \le C (A_e^i x_{k+i}^e + \sum_{j=0}^{i-1} A^j (B_1 \Delta u_{k+i-j-1} + \\ B_2 \delta_{k+i-j-1} + B_3 z_{k+i-j-1}) + D_1 \Delta u_{k+i} + D_2 \delta_{k+i} + \\ + D_3 z_{k+i}) \le \Delta y_{max}, i = 0, \dots, N-1$$

avec les paramètres ε_i^* données par l'équation (2.149).

Le problème (2.152)-(2.153) s'écrit sous une forme plus compacte :

$$\begin{aligned} J^*(z, x_k^e) &= \min_z c'z \\ \text{sujet à :} \quad & Gz \leq W + Sx_k^e \end{aligned} \tag{2.154}$$

où $G \in \mathbb{R}^{q \times s}, W \in \mathbb{R}^{q \times n}, S \in \mathbb{R}^{q \times 1}$, $q = 2(n(N+1) + 2mN + 2r_dN + 2r_cN + 2pN + rN)$ et les matrices G, W, S associées aux contraintes (2.153) sont :

$$G = \begin{bmatrix} G_{\varepsilon^x} & 0 & 0 & 0 & G_{\Delta u}^1 & G_\delta^1 & G_z^1 \\ 0 & G_{\varepsilon^u} & 0 & 0 & G_{\Delta u}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{\varepsilon^\delta} & 0 & 0 & G_\delta^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{\varepsilon^z} & 0 & 0 & G_z^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{\Delta u}^5 & G_\delta^5 & G_z^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{\Delta u}^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{\Delta u}^7 & G_\delta^7 & G_z^7 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ W^5 \\ W^6 \\ W^7 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} S^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ S^5 \\ 0 \\ S^7 \end{bmatrix} \tag{2.155}$$

avec :

$$G_{\varepsilon^x} = \begin{bmatrix} -I_n & 0 & \dots & 0 \\ -I_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_n & \dots & 0 \\ 0 & -I_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -I_n & 0 \\ 0 & \dots & -I_n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -I_n \\ 0 & \dots & 0 & -I_n \end{bmatrix}, G_{\Delta u}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -Q_4B_1 & 0 & \dots & 0 \\ Q_4B_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -Q_4A^{N-2}B_1 & -Q_4A^{N-3}B_1 & \dots & 0 \\ Q_4A^{N-2}B_1 & Q_4A^{N-3}B_1 & \dots & 0 \\ -P_NA^{N-1}B_1 & -P_NA^{N-2}B_1 & \dots & -P_NB_1 \\ P_NA^{N-1}B_1 & P_NA^{N-2}B_1 & \dots & -P_NB_1 \end{bmatrix}, S^1 = \begin{bmatrix} Q_4 \\ -Q_4 \\ Q_4A \\ -Q_4A \\ \dots \\ Q_4A^{N-1} \\ -Q_4A^{N-1} \\ P_NA^N \\ -P_NA^N \end{bmatrix}$$

$$G_\delta^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -Q_4B_2 & 0 & \dots & 0 \\ Q_4B_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -Q_4A^{N-2}B_2 & -Q_4A^{N-3}B_2 & \dots & 0 \\ Q_4A^{N-2}B_2 & Q_4A^{N-3}B_2 & \dots & 0 \\ -P_NA^{N-1}B_2 & -P_NA^{N-2}B_2 & \dots & -P_NB_2 \\ P_NA^{N-1}B_2 & P_NA^{N-2}B_2 & \dots & -P_NB_2 \end{bmatrix}, G_z^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -Q_4B_3 & 0 & \dots & 0 \\ Q_4B_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -Q_4A^{N-2}B_3 & -Q_4A^{N-3}B_3 & \dots & 0 \\ Q_4A^{N-2}B_3 & Q_4A^{N-3}B_3 & \dots & 0 \\ -P_NA^{N-1}B_3 & -P_NA^{N-2}B_3 & \dots & -P_NB_3 \\ P_NA^{N-1}B_3 & P_NA^{N-2}B_3 & \dots & -P_NB_3 \end{bmatrix} \tag{2.156}$$

$$G_{\varepsilon^u} = \begin{bmatrix} -I_m & \dots & 0 \\ -I_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -I_m \\ 0 & \dots & -I_m \end{bmatrix}, G_{\Delta u}^2 = \begin{bmatrix} -Q_1 & \dots & 0 \\ Q_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & Q_1 \\ 0 & \dots & -Q_1 \end{bmatrix}$$

$$G_{\varepsilon^\delta} = \begin{bmatrix} -I_{r_d} & \dots & 0 \\ -I_{r_d} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -I_{r_d} \\ 0 & \dots & -I_{r_d} \end{bmatrix}, G_{\Delta u}^3 = \begin{bmatrix} -Q_2 & \dots & 0 \\ Q_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & Q_2 \\ 0 & \dots & -Q_2 \end{bmatrix} \tag{2.157}$$

$$G_{\varepsilon^z}=\begin{bmatrix}-I_{r_c} & \dots & 0\\ -I_{r_c} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & -I_{r_c}\\ 0 & \dots & -I_{r_c}\end{bmatrix}, G_{\Delta u}^{4}=\begin{bmatrix}-Q_3 & \dots & 0\\ Q_3 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & Q_3\\ 0 & \dots & -Q_3\end{bmatrix} G_{\Delta u}^{6}=\begin{bmatrix}I_m & \dots & 0\\ -I_m & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & I_m\\ 0 & \dots & -I_m\end{bmatrix}, W^{6}=\begin{bmatrix}\Delta u_{\max}\\ -\Delta u_{\min}\\ \dots\\ \Delta u_{\max}\\ -\Delta u_{\min}\end{bmatrix} \tag{2.158}$$

$$G_{\Delta u}^{5}=\begin{bmatrix}-E_1 & 0 & \dots & 0\\ -E_4B_1 & -E_1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -E_4A^{N-2}B_1 & -E_4A^{N-3}B_1 & \dots & -E_1\end{bmatrix}, G_{\delta}^{5}=\begin{bmatrix}-E_2 & 0 & \dots & 0\\ -E_4B_2 & -E_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -E_4A^{N-2}B_2 & -E_4A^{N-3}B_2 & \dots & -E_2\end{bmatrix}$$

$$G_{z}^{5}=\begin{bmatrix}-E_3 & 0 & \dots & 0\\ -E_4B_3 & -E_3 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -E_4A^{N-2}B_3 & -E_4A^{N-3}B_3 & \dots & -E_3\end{bmatrix}, W^{5}=\begin{bmatrix}E_5\\ E_5\\ \dots\\ E_5\end{bmatrix}, S^{5}=\begin{bmatrix}E_4\\ E_4A\\ \dots\\ E_4A^{N-1}\end{bmatrix} \tag{2.159}$$

$$G_{\Delta u}^{7}=\begin{bmatrix}D_1 & 0 & \dots & 0\\ -D_1 & 0 & \dots & 0\\ CB_1 & D_1 & \dots & 0\\ -CB_1 & -D_1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ CA^{N-1}B_1 & CA^{N-2}B_1 & \dots & D_1\\ -CA^{N-1}B_1 & -CA^{N-2}B_1 & \dots & -D_1\end{bmatrix}, G_{\delta}^{7}=\begin{bmatrix}D_2 & 0 & \dots & 0\\ -D_2 & 0 & \dots & 0\\ CB_1 & D_2 & \dots & 0\\ -CB_1 & -D_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ CA^{N-1}B_2 & CA^{N-2}B_2 & \dots & D_2\\ -CA^{N-1}B_2 & -CA^{N-2}B_2 & \dots & -D_2\end{bmatrix} \tag{2.160}$$

$$G_{z}^{7}=\begin{bmatrix}D_3 & 0 & \dots & 0\\ -D_3 & 0 & \dots & 0\\ CB_3 & D_3 & \dots & 0\\ -CB_3 & -D_3 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ CA^{N-1}B_3 & CA^{N-2}B_3 & \dots & D_3\\ -CA^{N-1}B_3 & -CA^{N-2}B_3 & \dots & -D_3\end{bmatrix}, W^{7}=\begin{bmatrix}y_{\max}\\ -y_{\min}\\ y_{\max}\\ -y_{\min}\\ \dots\\ y_{\max}\\ -y_{\min}\end{bmatrix}, S^{7}=\begin{bmatrix}-C\\ C\\ -CA\\ CA\\ \dots\\ -CA^{N}\\ CA^{N}\end{bmatrix}$$

On note que le vecteur étendu d'état x_k^e n'intervient plus dans la fonction de coût lorsqu'il apparaît seulement au niveau des contraintes. En connaissant la valeur de l'état x_k^e, la commande prédictive peut être implantée au moyen de la résolution « en-ligne » du problème MILP (2.154).

Cependant, si on considère l'état x_k^e comme un vecteur des paramètres, le problème d'optimisation (2.154) devient un *problème de programmation multiparamétrique MILP (mp-MILP)*, pour lequel le vecteur optimal $z^*(x_k^e)$ et la commande optimale $\Delta u^*(x_k^e)$ sont dépendants du paramètre x_k^e. La valeur de la commande optimale est récupérée en conservant seulement *m* éléments du vecteur optimal $z^*(x_k^e)$.

$$\Delta u^*(x_k^e) = [0 \dots 0 \;\; I_m \; 0 \dots 0] z^*(x_k^e) \tag{2.161}$$

La solution du problème mp-MILP représente la commande prédictive explicite du modèle PWA initial (2.140)-(2.141), exprimée par une fonction affine par morceaux du vecteur d'état x_k^e :

$$\Delta u(x_k^e) = f(x_k^e) = F_i x_k^e + G_i, \;\; x_k^e \in \mathcal{R}_j^i, \; i = 1, \dots, N_{\mathcal{R}_j} \tag{2.162}$$

La loi de commande explicite est définie sur une nouvelle partition polyédrale de régions $\mathcal{R}_j^i$ obtenue à partir des régions initiales $\mathcal{R}_j$ du modèle PWA (2.140)-(2.141).

Dans la littérature, deux approches ont été proposées pour la résolution du problème mp-MILP.

Le premier algorithme est fondé sur des méthodes « branch and bound » [AP97] qui explorent les combinaisons 0-1 des variables discrètes à travers la structure d'un arbre binaire contenant dans chaque nœud un problème mp-LP. Les ramifications de l'arbre sont obtenues à travers des priorités établies en avance pour les variables z. Les nœuds ont des étiquettes : « en attente » si le problème mp-LP n'a pas été encore résolu, ou « parcouru » si le nœud a été déjà exploré. L'algorithme est fini si tous les nœuds ont été parcourus. L'énumération de toutes les combinaisons possibles 0 - 1 des variables discrètes du vecteur z est évitée en comparant les solutions multiparamétriques obtenues et en marquant les nœuds explorés qui ne présentent pas une amélioration au niveau de la fonction de coût.

Le deuxième algorithme décompose respectivement le problème mp-MILP initial (2.154) en un problème mp-LP et un problème MILP [DP99]. L'algorithme démarre avec un pas d'initialisation et continue avec une récursivité entre la solution du problème mp-LP et celle du problème MILP.

Le vecteur des paramètres z (2.147) peut s'écrire comme $z = [z_c^T \quad z_d^T]^T$, où z_c et z_d représentent les ensembles des variables continues et discrètes du vecteur z. Le pas d'initialisation consiste à résoudre le problème MILP (le problème (2.154) avec le vecteur d'état x_k^e traité comme variable indépendante) et de trouver la solution $(z^*)_{MILP}$ et implicite $(z_d^*)_{MILP}$. Lorsque les variables discrètes z_d du vecteur des paramètres sont initialisées avec $(z_d^*)_{MILP}$ et le vecteur d'état x_k^e est traité comme un paramètre, un problème mp-LP est résolu et une solution continue $(z_c^*(x_k^e))_{mp-LP}$ est trouvée. La valeur de la fonction de coût calculée pour $(z^*(x_k^e))_{mp-LP}$ représente une limite supérieure du coût $J^*(z, x_k^e)$ et elle est ensuite utilisée afin de partitionner le domaine de définition $\mathbb{X} = \bigcup_{j=1}^{N_{\mathcal{R}}} \mathcal{R}_j$, du modèle PWA (2.140)-(2.141), dans plusieurs régions polyédrales $\mathcal{R}_j^i, i = 1, \dots, N_{\mathcal{R}_j}$. En considérant le vecteur d'état x_k^e comme variable indépendante, pour chaque nouvelle région polyédrale $\mathcal{R}_j^i$ obtenue, un problème MILP est résolu. Les contraintes formulées au niveau du problème MILP interdisent d'obtenir des valeurs $(z_d^*)_{MILP}$ déjà utilisées pour la résolution du problème mp-LP, d'une part, et permettent d'améliorer la valeur du critère au moins dans un point de la région polyédrale courante, d'autre part. Si le problème MILP est faisable, c'est-à-dire qu'un nouveau vecteur $(z^*)_{MILP}$ qui respecte les contraintes mentionnées est obtenu, alors la partie discrète optimale $(z^*)_{MILP}$ est conservée pour l'initialisation d'un nouveau problème mp-LP. En contrepartie, si le problème MILP est infaisable, la région courante $\mathcal{R}_j^i$ est exclue de l'algorithme récursif.

Les itérations entre les solutions des problèmes mp-LP et MILP se poursuivent jusqu'à ce que tous les problèmes MILP soient infaisables. À la fin, l'algorithme génère une partition de l'espace d'état, où chaque région attribue une commande par retour d'état affine par morceaux de la forme (2.162).

On note que le domaine de validité $\mathbb{X}$ du modèle PWA (2.140)-(2.141) peut être discontinu et non convexe et, également, la commande PWA obtenue avec l'algorithme présenté peut être discontinue.

– *algorithme de programmation multiparamétrique associé avec la programmation dynamique (mp-DP)*

La description de cet algorithme suit le format de la référence [BCM03].

Considérons la forme compacte du modèle PWA (2.140)-(2.141), construit à partir de l'incrément de la commande :

$$\begin{aligned} x_{k+1}^e &= f_{PWA}(x_k^e, \Delta u_k) = A_j^e x_k^e + B_j^e \Delta u_k + f_j^e \\ \mathcal{R}_j &= \left\{ \begin{bmatrix} x_k^e \\ \Delta u_k \end{bmatrix} : H_j^x x_k^e + H_j^u \Delta u_k \leq K_j \right\} \\ x_k^e &= \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix}, k \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{2.163}$$

avec : $x_k^e \in \mathbb{R}^n$, $\Delta u_k \in \mathbb{R}^m$ et $\{\mathcal{R}_j\}_{j=1}^{N_\mathcal{R}}$ la partition des régions polyédrales de l'espace étendu des états et des entrées. Les contraintes imposées sur x_k^e et Δu_k sont exprimées sous la forme générale :

$$K x_k^e + L \Delta u_k \leq M \tag{2.164}$$

et sont intégrées dans la description des régions $\mathcal{R}_j$.

Le problème de programmation dynamique équivalent, à base du modèle PWA (2.163) et d'un critère linéaire ($p = \{1, \infty\}$) est le suivant :

$$\begin{aligned} J_{k+i}^*(x_{k+i}^e) = \min_{\Delta u_{k+i}} & \|Q x_{k+i}^e\|_p + \|R \Delta u_{k+i}\|_p + \\ & + J_{k+i+1}^*\left(f_{PWA}(x_{k+i}^e, \Delta u_{k+i})\right) \end{aligned} \tag{2.165}$$

$$\text{sujet à : } f_{PWA}(x_{k+i}^e, \Delta u_{k+i}) \in \mathcal{X}^{i+1},\ i = N-1, \dots, 0 \tag{2.166}$$

avec les conditions :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^N &= \mathcal{X}^f \\ J_{k+N}^* &= \|P_N x_{k+N}^e\|_p, \end{aligned} \tag{2.167}$$

où $\mathcal{X}^f$ représente la région terminale qui inclue le point d'équilibre du modèle PWA et l'ensemble $\mathcal{X}^i$ contient tous les états initiaux pour lesquels le problème (2.165)-(2.166) est faisable :

$$\mathcal{X}^i = \left\{ x_k^e \in \mathbb{R}^n \mid \exists \Delta u_k, f_{PWA}(x_k^e, \Delta u_k) \in \mathcal{X}^{i+1} \right\} \tag{2.168}$$

L'algorithme mp-DP génère une solution explicite de la commande optimale associée au problème d'optimisation (2.165)-(2.166) en remontant le cours du temps, conformément à la stratégie de la programmation dynamique et en résolvant un problème mp-LP à chaque itération.

Par la suite, quelques notions de base de programmation paramétrique sont introduites et permettront une description plus détaillée de l'implantation de l'algorithme utilisé. Les résultats présentés par la suite ont été également démontrés pour des problèmes mp-QP [BBBM03], [BBBM05].

Considérons le problème d'optimisation multiparamétrique :

$$J^*(x) = \min_u l(x, u) + q(f^+(x, u)) \tag{2.169}$$

$$\text{sujet à :} \quad f^+(x, u) \in S \tag{2.170}$$

avec : $S \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f^+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, q : S \to \mathbb{R}, l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ des fonctions affines par morceaux. La fonction q correspond à la fonction de cout J_{k+i+1}^* de l'équation (2.165). On note avec $\mathcal{X}$ l'ensemble des variables x pour lesquels le problème (2.169)-(2.170) est faisable.

Définition 2.5.1 Une fonction $q: \Theta \to \mathbb{R}$, avec $\Theta \subseteq \mathbb{R}^s$, est une fonction PWA multiple d'ordre $d \in \mathbb{N}^+$ si $q(\theta) = \min\{q^1(\theta) \coloneqq l^1\theta + c^1, \dots, q^d(\theta) \coloneqq l^d\theta + c^d\}$ où Θ représente une région convexe.

Les principaux résultats nécessaires pour la résolution du problème (2.165)-(2.166) à travers la programmation dynamique sont les suivants :

a) Si f^+ est une fonction linéaire, q est une fonction affine par morceaux et S une région convexe, alors la solution du problème (2.169)-(2.170) est obtenue par la résolution d'un problème mp-LP.
b) Si f^+ est une fonction linéaire, q est une fonction affine par morceaux multiple d'ordre d, alors la solution du problème (2.169)-(2.170) est obtenue par la résolution de d problèmes mp-LP.
c) Si f^+ est une fonction linéaire, q est une fonction affine par morceaux définie sur r régions, alors la solution du problème (2.169)-(2.170) est obtenue par la résolution de r problèmes mp-LP.
d) Si f^+ est une fonction linéaire, q est une fonction affine par morceaux multiple d'ordre d qui est définie sur r régions, alors la solution du problème (2.169)-(2.170) est obtenue par la résolution de rd problèmes mp-LP.
e) Si f^+ est une fonction affine par morceaux définie sur s régions, q est une fonction affine par morceaux et S une région convexe, alors la solution du problème (2.169)-(2.170) est obtenue par la résolution de s problèmes mp-LP.
f) Si f^+ est une fonction affine par morceaux définie sur s régions, q est une fonction affine par morceaux définie sur r régions, alors la solution du problème (2.169)-(2.170) est obtenue par la résolution de sr problèmes mp-LP.
g) Si f^+ est une fonction affine par morceaux définie sur s régions, q est une fonction affine par morceaux multiple d'ordre d qui est définie sur r régions, alors la solution du problème (2.169)-(2.170) est obtenue par la résolution de srd problèmes mp-LP.

Le problème de programmation dynamique (2.165)-(2.166) est résolu « à l'envers » à l'aide d'une procédure récursive, en utilisant des méthodes de programmation multiparamétrique linéaire.

Au premier pas ($i = N - 1$) l'état se retrouve à l'intérieur de la région terminale $\mathcal{X}^T$et le problème à résoudre devient :

$$\begin{aligned} J^*_{k+N-1}(x^e_{k+N-1}) &= \min_{\Delta u_{k+N-1}} \|Q x^e_{k+N-1}\|_p + \\ &+ \|R\Delta u_{k+N-1}\|_p + J^*_{k+N}\left(f_{PWA}(x^e_{k+N}, \Delta u_{k+N})\right), \end{aligned} \tag{2.171}$$

$$\text{sujet à :} \quad f_{PWA}(x^e_{k+N}, \Delta u_{k+N}) \in \mathcal{X}^f \tag{2.172}$$

La fonction de coût $J^*_{k+N}\left(f_{PWA}(x^e_{k+N}, \Delta u_{k+N})\right)$ est affine par morceaux et l'ensemble $\mathcal{X}^f$ est une région qui inclut des contraintes affines par morceaux. Dans ce cas, le problème (2.171)-(2.172) est décomposé dans s problèmes mp-LP, suite au résultat (e).

Au deuxième pas ($i = N - 2$) la fonction de coût $J^*_{k+N-1}\left(f_{PWA}(x^e_{k+N-1}, \Delta u_{k+N-1})\right)$ est affine par morceaux et l'ensemble $\mathcal{X}^{N-1}$ est l'union de N^r_{T-1} régions, avec N^r_{T-1} représentant le nombre de régions de J^*_{k+N-1}. L'union des régions $\mathcal{X}^{N-1}$ contient des contraintes affines par morceaux et n'est pas forcément une région convexe. Le problème (2.171)-(2.172) est décomposé dans sN^r_{T-1} problèmes mp-LP, suite au résultat (f).

À partir du troisième pas $i = N - 3$ jusqu'à $i = 0$, la fonction de coût J^*_{k+i} est affine par morceaux, multiple d'ordre d_i et les ensembles $\mathcal{X}^{i+1}$ sont des unions de N^r_{i+1}. Par conséquent, le problème (2.171)-(2.172) est décomposé dans $sd_iN^r_{i+1}$ problèmes mp-LP, suite au résultat (g).

La loi de commande explicite obtenue présente la forme donnée dans l'équation (2.162).

Les deux méthodes (mp-MILP et mp-DP) permettent de trouver une solution explicite de la commande prédictive à base d'un modèle hybride. Pourtant, l'algorithme mp-DP est plus efficace en ce qui concerne le partitionnement de l'espace des états et des entrées et, par conséquent, le temps de calcul de la solution. Le nombre de régions de la commande explicite, déterminé en utilisant la programmation dynamique, est beaucoup plus petit que celui de régions générées par l'algorithme mp-MILP. Cela est dû au fait que le modèle PWA contient uniquement des transitions faisables entre ces dynamiques, alors que la majorité des modes du modèle MDL sont infaisables.

2.7 Implantation de la commande prédictive explicite

La loi de commande explicite issue des méthodes de programmation multiparamétrique ayant l'expression suivante :

$$u(x_k) = f(x_k) = F_j x_k + G_j, \qquad x_k \in \mathcal{R}_j, j = 1, \dots, N_{\mathcal{R}} \tag{2.173}$$

représente une fonction affine par morceaux, dépendante de la valeur de l'état x_k à chaque période d'échantillonnage.

La structure de cette commande par retour d'état calculée « hors-ligne » est stockée dans trois tables de recherche. La première contient les partitions des régions $\mathcal{R}_j$ sur lesquelles la commande $\Delta u(x_k)$ est définie, alors que la deuxième et la troisième contiennent les gains F_j, G_j associés à chaque région du domaine de fonctionnement $\mathcal{R}_j$.

L'implantation de la loi de commande revient à l'identification de la région active $\mathcal{R}_j$ où l'état x_k se trouve à l'instant k de temps et ensuite au calcul de la commande $\Delta u(x_k)$ par l'évaluation de la fonction affine $f(x_k)$.

Considérons les trois tables de recherche et la commande donnée par la fonction affine en x_k présentées dans le Tableau 2.6. Les pas effectués à chaque période d'échantillonnage afin de déterminer la valeur de la commande $\Delta u(x_k)$ sont les suivants :

- utiliser l'état échantillonné à chaque instant x_k pour la recherche de la région $\mathcal{R}_j$ qui contient cet état,
- s'il n'existe pas une région faisable, alors il faut reconsidérer la synthèse de la commande (voir le réajustement des matrices de pondération, la reformulation des contraintes ou des objectifs de la commande à travers un autre critère d'optimisation).

En outre, si une région $\mathcal{R}_j$ active est trouvée, alors l'index j est utilisé afin de sélectionner les lignes j des tables qui contiennent les gains F_j, G_j,

– déterminer la valeur de la commande à l'instant courant : $u(x_k) = F_j x_k + G_j$ et l'appliquer au système,
– échantillonner un nouvel état et reprendre le pas 1.

Table 1	Table 2	Table 3	Evaluation de la commande en x_k
$\mathcal{R}_1$	F_1	G_1	$F_1 x_k + G_1$
…	…	…	…
$\mathcal{R}_{N_\mathcal{R}}$	$F_{N_\mathcal{R}}$	$G_{N_\mathcal{R}}$	$F_{N_\mathcal{R}} x_k + G_{N_\mathcal{R}}$

Tableau 2.6 : Représentation compacte des tables de recherche contenant la structure de la commande explicite.

L'application de la commande prédictive sous la forme explicite est résumée par la Figure 2.6.1.

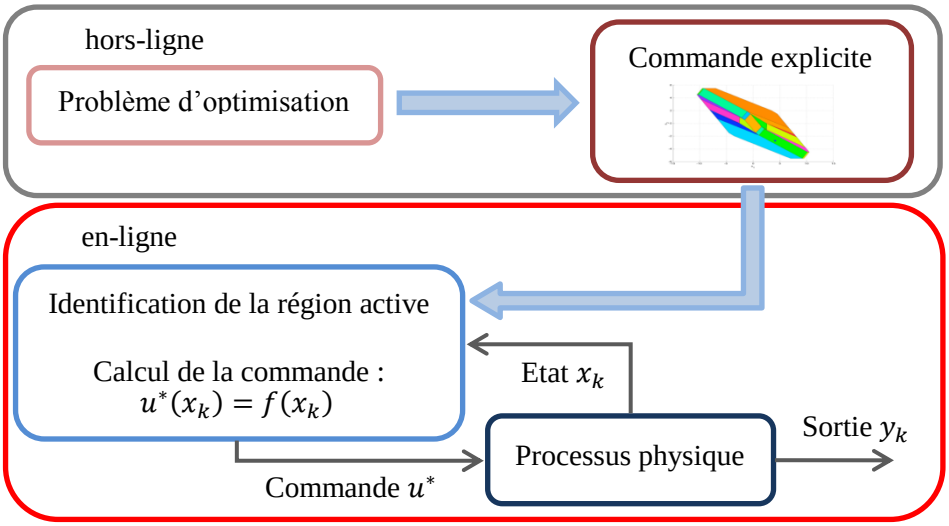


Figure 2.6.1 : Schéma d'implantation de la commande prédictive explicite

Le temps d'évaluation de la commande à chaque période d'échantillonnage est donné, principalement, par la recherche de la région active. Afin de trouver cette région d'une manière efficace, la table est présentée selon une structure d'arbre binaire de recherche pour lequel des algorithmes ont été développés [TJB03]. La profondeur de l'arbre généré à partir des régions de la commande est minime et correspond au nombre maximal des hyperplans qu'il faut évaluer « en-ligne » afin que la région active courante soit identifiée. En fonction de l'état à l'instant k, l'arbre est parcouru du nœud-racine vers les nœuds-feuilles. Chaque nœud est associé avec un hyperplan et en fonction du positionnement de l'état par rapport à l'hyperplan, la recherche avance sur la ramification droite ou gauche du nœud. Les conditions d'appartenance à une région sont les suivantes :

$$x_k \in \mathcal{R}_j \Leftrightarrow H_i \coloneqq a_i x_k + b_i \geq 0 \; \forall i \in H_i$$

Tous les nœuds-feuilles, placés sur le dernier niveau de l'arbre binaire, contiennent une région de la loi de commande. Une fois que l'algorithme de recherche rencontre un nœud feuille, la région active est trouvée et la procédure est répétée à la prochaine période d'échantillonnage.

Il a été montré que le temps d'évaluation de l'arbre binaire dépend logarithmique du nombre de régions de la loi de commande. Un exemple de la procédure de recherche est représenté dans la Figure 2.6.2.

Du fait que le nombre de régions de la commande explicite est important afin d'assurer une évaluation « en-ligne » rapide, la taille du correcteur synthétisé peut être réduite par des méthodes de simplification. Ces méthodes regroupent les régions voisines qui sont convexes et dont la loi de commande à les mêmes propriétés caractéristiques (c'est-à-dire les mêmes gains F_j, G_j).

On note que l'algorithme de programmation multiparamétrique associé à la programmation dynamique (mp-DP), utilisé pour le calcul de la commande prédictive explicite, l'algorithme de simplification de régions de la commande, celui de la construction de l'arbre binaire de recherche et d'identification de la région active sont tous disponibles dans la boite à outils MPT [KGBM04]. Dans le Chapitre V, les fonctions faisant appel à ces algorithmes seront utilisées pour l'élaboration et pour l'implantation des lois de commande explicites.

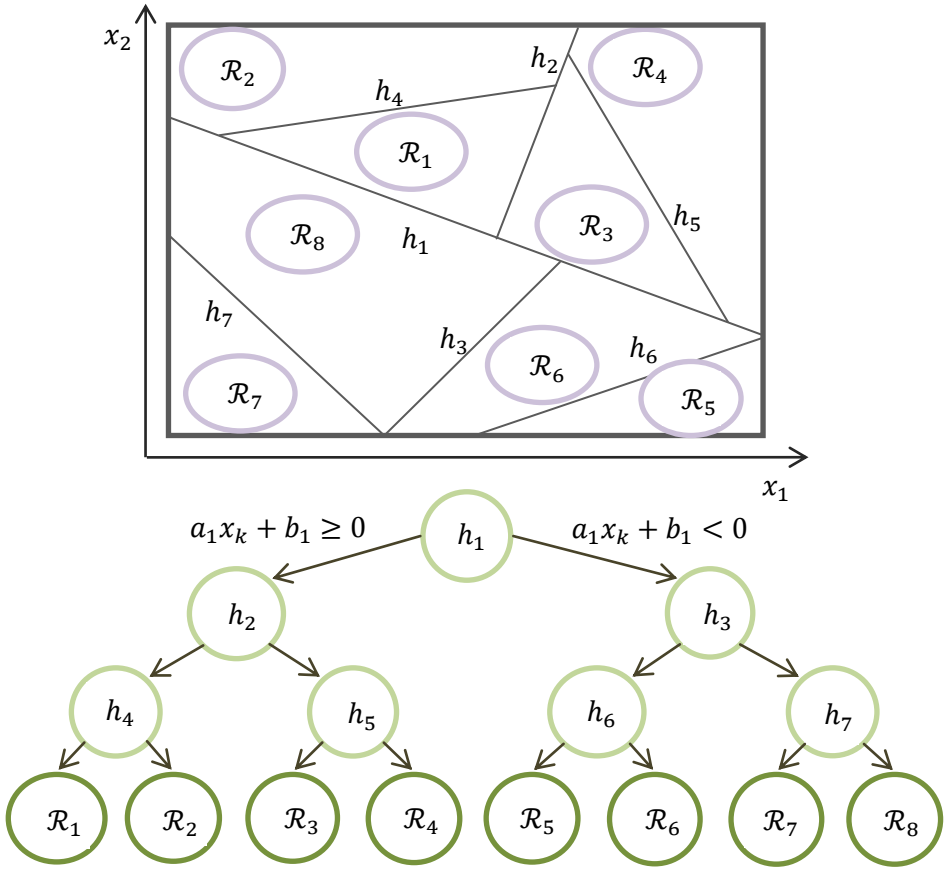


Figure 2.6.2 : Exemple d'arbre binaire construit pour une loi de commande représentée en 2D, définie sur 8 régions qui sont délimitée par 7 hyperplans.

2.8 Conclusions

Ce chapitre comporte trois parties consacrées aux principales méthodes de modélisation, d'analyse de la stabilité et de la synthèse des lois de commande dédiées aux systèmes hybrides.

Dans la première partie, les modèles hybrides à temps discret ont été présentés, ainsi que les équivalences possibles entre certaines représentations mathématiques. Au regard du fait que les conditions de stabilité pour les systèmes hybrides sont formulées sur des modèles affines par morceaux tandis que les modèles logique/dynamiques mixtes sont plutôt employés dans la synthèse des régulateurs, cette équivalence est exploitée afin de faciliter l'étude de la stabilité et l'élaboration d'une loi de commande.

La deuxième partie comporte des méthodes d'analyse de stabilité et de synthèse des correcteurs linéaires par morceaux à base de modèles PWA.

Finalement, la troisième partie présente les méthodes de synthèse d'une loi de commande prédictive explicite formulée sur des modèles linéaires et hybrides de type MLD et PWA soumis à des contraintes, ainsi que des précisions pour l'implantation de la loi de commande déterminée « hors-ligne ». Les méthodes décrites dans ce chapitre sont résumées dans le tableau suivant :

		Problème à résoudre « en-ligne »	Problème à résoudre « hors-ligne »
Modèles linéaires		LP/QP	mp-LP/mp-QP
Modèles hybrides	MLD	MILP	mp-MILP
	PWA	-	mp-DP

Tableau 2.8.1 Types de problèmes d'optimisation formulés à base des modèles linéaires et hybrides.

3 Modélisation hybride des convertisseurs de puissance

Les modèles hybrides sont des représentations mathématiques qui permettent de caractériser le comportement dynamique des systèmes non-linéaires et plus particulièrement avec une structure variable tels que les convertisseurs DC-DC de puissance. Ces modèles peuvent tenir compte des différentes configurations du circuit d'un convertisseur, selon le mode de fonctionnement (CCM ou DCM) et d'évènements qui génèrent des transitions au niveau de la configuration à chaque instant. Le changement d'un mode de fonctionnement à un autre peut être considéré dans la représentation mathématique du modèle hybride du convertisseur. Afin de répondre aux objectifs de commande fixés dans cette étude, la structure du modèle hybride doit pouvoir proposer un bon compromis entre la simplicité du modèle et la précision d'approximation de la dynamique du convertisseur. De plus, l'expression mathématique du modèle doit permettre l'analyse de ses propriétés dynamiques et faciliter l'application de différentes stratégies des lois de commande. Pour ces raisons, nous avons choisi un modèle hybride exprimé sous la forme affine par morceaux : en effet, pour ce type de modèle, il existe des méthodes pour l'analyse de la stabilité et la synthèse des régulateurs. Concernant la validité du modèle PWA (Piecewise Affine), nous verrons à l'aide de plusieurs exemples classiques que l'approximation fournie par ce modèle est satisfaisante dans l'ensemble du domaine de fonctionnement du convertisseur.

Dans ce chapitre, nous proposons une procédure générique de construction des modèles PWA pour les convertisseurs de puissance commutant à une fréquence de découpage constante. Dans la première partie du chapitre, la technique de modélisation est appliquée en supposant le fonctionnement du convertisseur en mode de conduction continue. Dans un premier temps, le modèle PWA est développé pour un convertisseur d'ordre deux de type buck (abaisseur) et ensuite pour un convertisseur d'ordre quatre de type flyback avec filtre d'entrée. Ce type de convertisseur est caractérisé par un comportement fortement non linéaire. Dans la deuxième partie du chapitre, nous présentons une extension de la méthode de modélisation afin de permettre la représentation du comportement dynamique d'un convertisseur dans les deux modes de fonctionnement : conductions continue et discontinue. Ce modèle est déterminé dans le cas particulier du convertisseur buck.

3.1 Modes de fonctionnement

Les convertisseurs de puissance DC-DC présentent deux modes de fonctionnement : mode de conduction continue (CCM) et mode de conduction discontinue (DCM). Afin de comprendre le fonctionnement d'un convertisseur dans ces deux modes, prenons l'exemple du convertisseur buck, dont le circuit est illustré sur la Figure 3.1.1. Les modes de fonctionnement sont différenciés en fonction de la forme d'onde du courant i_L qui traverse l'inductance L en régime stationnaire. Une fois que le convertisseur atteint le point de fonctionnement souhaité, les signaux correspondant aux courants et tensions du circuit sont périodiques, avec une période d'échantillonnage $T_e = \frac{1}{F}$ inversement proportionnelle à la fréquence de commutation F du convertisseur. Pour la suite, on considère le MOSFET comme un interrupteur parfait à deux positions : *ouvert* si le transistor est bloqué (impédance infinie) et *fermé* (impédance nulle), s'il est en conduction.

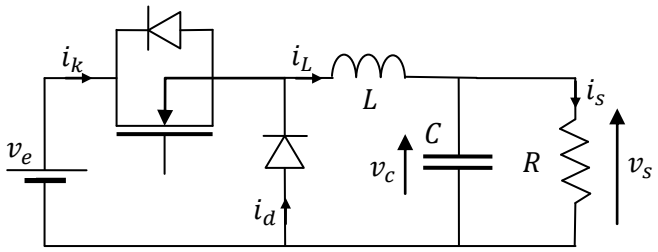


Figure 3.1.1 : Schéma du convertisseur buck.

En *mode de conduction continue*, selon la position de l'interrupteur, on peut différencier deux configurations possibles du circuit. Dans la première configuration l'interrupteur se trouve dans la position *fermée* et la diode est bloquée, ce qui permet de stocker l'énergie fournie par la source d'alimentation v_e dans l'inductance L. Par conséquent, sur l'intervalle $[kT_e, (k+d)T_e]$ la valeur du courant i_L augmente linéairement. Dans la seconde configuration, lorsque l'interrupteur est dans la position *ouverte*, la diode devient passante et l'énergie emmagasinée est restituée à la charge R et le condensateur C, ce qui se traduit par la diminution de la valeur du courant i_L sur l'intervalle $[(k+d)T_e, (k+1)T_e]$. Ce comportement génère une forme d'onde triangulaire du courant dans l'inductance i_L en régime stationnaire (cf. Figure 3.1.2 (a)). On constate que le courant i_L ne s'annule pas dans la phase où l'interrupteur est ouvert, alors le convertisseur fonctionne en mode de conduction continue.

En *mode de conduction discontinue*, il y a trois configurations différentes du circuit qui sont associées aux intervalles représentés dans la Figure 3.1.2 (b). L'intervalle $[kT_e, (k+d_1)T_e]$ correspond à la position *fermée* de l'interrupteur, où d_1 est équivalent au rapport cyclique d défini en CCM. Cependant, la position *ouverte* de l'interrupteur est représentée par deux intervalles : $[(k+d_1)T_e, (k+d_1+d_2)T_e]$ et $[(k+d_1+d_2)T_e, (k+1)T_e]$. À la fin du premier intervalle, le courant dans l'inductance i_L s'annule et maintient sa valeur égale à zéro pendant le deuxième intervalle. La variable d_2 s'exprime en fonction de la valeur du rapport cyclique d_1 et du point de fonctionnement du convertisseur. Lorsque le courant i_L arrive à zéro pendant l'intervalle où l'interrupteur est ouvert, le convertisseur fonctionne en mode de conduction discontinue.

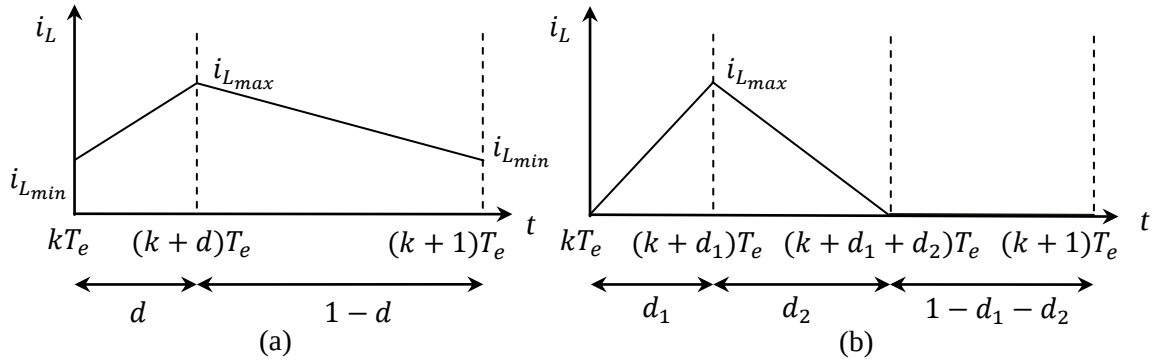


Figure 3.1.2 : Forme d'onde du courant en CCM (a) et DCM (b).

3.2 Modèle moyen des convertisseurs DC-DC

Le modèle appelé « moyen » est obtenu en moyennant les deux ou les trois configurations possibles du circuit, selon le mode de fonctionnement (CCM/DCM) considéré, sur une période de découpage. Chaque configuration du circuit d'un convertisseur est représentée par un modèle linéaire à temps continu. Les expressions mathématiques des dynamiques continues sont obtenues en appliquant les lois de Kirchhoff qui décrivent le comportement du convertisseur dans chacune des configurations. Le vecteur d'état des différents modèles est composé par les courants et les tensions des éléments réactifs du circuit qui représentent l'énergie emmagasinée (tels que les inductances et les condensateurs), et l'entrée des modèles est donnée par la tension d'alimentation v_e et par la grandeur de commande correspondant au rapport cyclique.

En mode de conduction continue (CCM), en fonction de la position de l'interrupteur noté *S*, il existe deux états du circuit associés aux positions *fermée* et *ouverte*, représentés dans l'espace d'état par les dynamiques suivantes :

$$S - \textit{fermé} : \begin{cases} \dot{x} = A_1 x + b_1 v_e \\ y = c_1 x \end{cases} \tag{3.1}$$

$$S - \textit{ouvert} : \begin{cases} \dot{x} = A_2 x + b_2 v_e \\ y = c_2 x \end{cases} \tag{3.2}$$

Dans les équations de ces modèles, *x* représente le vecteur d'état du modèle, *y* est la sortie et v_e correspond à la tension d'entrée.

Quand l'interrupteur *S* se trouve dans la position *fermée*, la diode est bloquée. Lorsque l'interrupteur passe en position *ouvert*, la diode se met en conduction. Donc, dans le mode de conduction continue, les états de l'interrupteur et de la diode sont complémentaires.

Le modèle moyen [MC76] est fourni par la moyenne des représentations linéaires (3.1), (3.2) et présente une expression de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(d)x + b(d)v_e \\ y = c(d)x \end{cases} \tag{3.3}$$

avec :

$$\begin{aligned} A(d) &= A_1 d + A_2 (1-d) \\ b(d) &= b_1 d + b_2 (1-d) \\ c(d) &= c_1 d + c_2 (1-d) \end{aligned} \tag{3.4}$$

On note que le rapport cyclique *d* devient l'une des entrées du modèle moyen au même titre que la tension d'alimentation v_e. Cette nouvelle entrée représente également la commande du système qui est utilisée afin de piloter la sortie *y*. Le domaine de validité de la modélisation par modèle moyen donnée par les équations (3.3)-(3.4) est donné par la condition suivante : la fréquence de commutation du convertisseur est beaucoup plus importante que la limite haute du domaine de validité.

$$\frac{1}{T_e} >> \omega \tag{3.5}$$

Le modèle moyen obtenu est un modèle non-linéaire, et plus précisément bilinéaire, en raison du produit entre le vecteur d'état *x* et le signal de commande *d*. Cependant, une dynamique linéaire peut être facilement obtenue en linéarisant le modèle (3.3)-(3.4) autour d'un point de fonctionnement souhaité en régime permanent. Le point d'équilibre noté avec X_e et la sortie du système correspondante Y_e sont calculés en imposant $\dot{x} = 0$. Cette équation conduit aux expressions suivantes des valeurs stationnaires :

$$\begin{aligned} X_e &= -A^{-1}BV_e \\ Y_e &= -CA^{-1}BV_e \end{aligned} \tag{3.6}$$

sous réserve que la matrice *A* soit inversible. V_e représente la valeur de la tension d'alimentation en régime stationnaire et les matrices *A, B* et *C* s'expriment en fonction de la valeur du rapport cyclique à l'équilibre *D* :

$$\begin{aligned} A &= A_1 D + A_2(1-D) \\ B &= b_1 D + b_2(1-D) \\ C &= c_1 D + c_2(1-D) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Par conséquent, la dynamique caractérisant le comportement du modèle dans un voisinage de la valeur de linéarisation X_e a la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{v}_e + \left[(A_1 - A_2)X_e + (b_1 - b_2)V_e\right]\tilde{d} \\ \tilde{y} &= C\tilde{x} + (c_1 - c_2)X_e\tilde{d} \end{aligned} \tag{3.8}$$

avec $\tilde{x} = x - X_e$.

En mode de conduction discontinue (DCM), le circuit est décrit par trois configurations différentes. Les deux premières sont identiques avec les configurations mentionnées en CCM, tandis que la troisième configuration apparait si la diode devient bloquée durant le temps que l'interrupteur est dans la position *ouverte*, à la fin de la période de découpage. Par conséquent, en fonction de l'état passant ou bloqué de ces deux éléments on a trois dynamiques linéaires différentes caractérisant le comportement dynamique du convertisseur :

$$\begin{matrix} S-\textit{fermé} \\ \textit{diode}-\textit{bloquée} \end{matrix} : \begin{cases} \dot{x} = A_1 x + b_1 v_e \\ y = c_1 x \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{matrix} S-\textit{ouvert} \\ \textit{diode}-\textit{passante} \end{matrix} : \begin{cases} \dot{x} = A_2 x + b_2 v_e \\ y = c_2 x \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\begin{matrix} S-\textit{ouvert} \\ \textit{diode}-\textit{bloquée} \end{matrix} : \begin{cases} \dot{x} = A_3 x + b_3 v_e \\ y = c_3 x \end{cases} \tag{3.11}$$

Dans ce mode de conduction, la moyenne des modèles (3.9)-(3.11) est faite avec le rapport cyclique $d_1 = d$ (donné par la fraction de la période de commutation où l'interrupteur est dans la position *fermé*), d_2 (déterminé par la partie de la période de commutation où l'interrupteur est ouvert et le courant par l'inductance est positif) et $d_3 = 1 - d_1 - d_2$ (la partie de la période T_e où le courant s'annule lorsque l'interrupteur reste dans la position *ouverte*). Les deux variables d_2 et d_3 ont des expressions algébriques dépendantes de la valeur du rapport cyclique d_1, des paramètres du circuit, de la tension d'alimentation v_e et celle de

sortie v_s. Ainsi, tout en gardant l'hypothèse (3.5), le modèle moyen bilinéaire en DCM [CM77] présente la dynamique suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(d)x + b(d)v_e \\ y &= c(d)x \end{aligned} \tag{3.12}$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= A_1 d_1 + A_2 d_2 + A_3 d_3,\ d_1 = d \\ b &= b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3 \\ c &= c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Également, le modèle moyen peut être linéarisé autour d'un point de fonctionnement $X_e = -A^{-1}BV_e$, pour lequel la sortie du système est représentée par $Y_e = -CA^{-1}BV_e$. Les matrices *A* (supposée inversible), *B* et *C* calculées en fonction des valeurs à l'équilibre D_1, D_2, $D_3 = 1 - D_1 - D_2$ ont les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A &= A_1 D_1 + A_2 D_2 + A_3 (1 - D_1 - D_2) \\ B &= b_1 D + b_2 D_2 + b_3 (1 - D_1 - D_2) \\ C &= c_1 D + c_2 D_2 + c_3 (1 - D_1 - D_2) \end{aligned} \tag{3.14}$$

La dynamique du modèle moyen linéarisé est représentée en DCM par les équations :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{v}_e + \left[(A_1 - A_3)X_e + (b_1 - b_3)V_e\right]\tilde{d}_1 + \left[(A_2 - A_3)X_e + (b_2 - b_3)V_e\right]\tilde{d}_2 \\ \tilde{y} &= C\tilde{x} + (c_1 - c_3)X_e\tilde{d}_1 + (c_2 - c_3)X_e\tilde{d}_2 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Etant donné qu'en régime permanent la valeur du courant est nulle au début et à la fin de la période de commutation $i_L(kT_e) = i_L((k+1)T_e) = 0$ (cf. la Figure 3.1.2 (b)) il est possible de réduire l'ordre du modèle moyen (3.12) à travers l'approximation $\frac{di_L}{dt} \cong 0$. Dans ce cas, la variable d'état représentée par le courant i_L est remplacée par sa moyenne pendent la période de commutation $i_L = i_{L_{\max}}/2$. Ainsi, l'expression du courant dépend de plusieurs variables et paramètres : d_1, v_e, v_s, L, T_e.

3.3 Modélisation hybride en mode de conduction continue

Dans la littérature, plusieurs groupes de recherche [AFJ+07], [BPM+07] ont proposé des méthodes de modélisation appliquées aux convertisseurs de puissances DC-DC afin d'obtenir des modèles hybrides capables de reproduire le comportement non-linéaire des convertisseurs d'une manière précise, et également exploitables en vue de l'analyse de la stabilité et de la synthèse de lois de commande. Selon le type de modèles développés, on peut différencier des modèles linéaires commutés à temps continu, des modèles affines par morceaux à temps discret et des modèles affines par morceaux robustes, des modèles échantillonnés à temps continu et des modèles affines par morceaux issues des approches énergétiques.

Dans ces travaux de thèse, nous adoptons l'approche proposée par le groupe de recherche de l'École polytechnique fédérale de Zurich, Suisse. Le modèle hybride abouti

présente l'expression mathématique d'un modèle affine par morceaux à temps discret et il a été appliqué sur des convertisseurs DC-DC d'ordre deux, de type buck [GPM08] et boost [BPM+07], fonctionnant uniquement en mode de conduction continue. En utilisant le même principe de modélisation, on se propose de généraliser l'algorithme qui permet d'obtenir un modèle PWA afin de pouvoir l'appliquer à d'autres types de convertisseurs et en particulier à des convertisseurs d'ordre élevé. Pour ces raisons, les idées principales de la technique de modélisation proposées dans [GPM05] sont décrites par la suite en prenant l'exemple du convertisseur buck. La méthode est également adaptée aux cas des convertisseurs d'ordre élevé tel qu'un convertisseur flyback avec filtre d'entrée qui présente un modèle mathématique d'ordre quatre et un comportement non-linéaire très prononcé.

3.3.1 Application à un convertisseur de type buck

La méthode de modélisation hybride est appliquée au convertisseur buck dont la topologie du circuit est représentée par le schéma de la Figure 3.3.1.1.

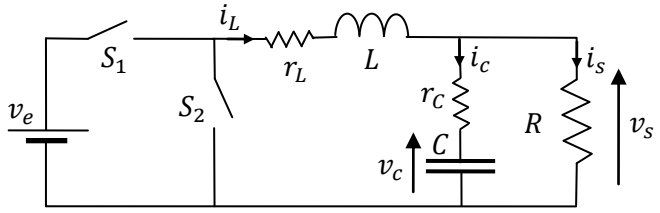


Figure 3.3.1.1 : Schéma du convertisseur buck avec pertes.

Au niveau du circuit, *L*, *C*, *R* correspondent respectivement à l'inductance, le condensateur et la résistance de charge du convertisseur. v_e est la tension d'alimentation et r_L, r_C sont respectivement la résistance interne de l'inductance *L* et la résistance équivalente série (ESR ou Equivalent Series Resistor) du condensateur *C*. Ces résistances sont des éléments parasites introduits afin de prendre en compte les pertes dans le circuit du convertisseur. Le transistor MOSFET et la diode sont représentés comme deux interrupteurs S_1 et S_2 à deux positions : fermée/ouverte.

Avant de décrire le principe de la méthode de modélisation hybride, on présente l'approche « classique » de modélisation utilisée afin de déterminer une représentation mathématique dans l'espace d'état du convertisseur buck.

Généralement, l'ordre du modèle d'un convertisseur et la dimension du vecteur d'état considéré sont déterminés par le nombre d'éléments du circuit qui emmagasinent d'énergie. Dans le cas du convertisseur buck, l'inductance et le condensateur représentent ces éléments. Ainsi, le vecteur d'état $x(t) = \left[i_L(t) \quad v_c(t) \right]^T$ est composé par le courant de l'inductance $i_L(t)$ et la tension aux bornes du condensateur $v_c(t)$. Cependant, du point de vue pratique il est préférable de pouvoir mesurer tous les états du modèle du convertisseur. En conséquence, la deuxième variable d'état $v_c(t)$ est remplacée par la tension aux bornes de la résistance de charge $v_s(t)$ et le vecteur d'état est défini par :

$$x(t) = \left[i_L(t) \quad v_s(t) \right]^T \tag{3.16}$$

En considérant que le convertisseur fonctionne en mode de conduction continue, les deux configurations du circuit (voir la Figure 3.3.1.2) sont représentées dans l'espace d'état par les dynamiques linéaires à temps continu suivantes :

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_{fermé}x(t) + B_{fermé}v_e, & t \in [kT_e, (k+d(k))T_e] \\ A_{ouvert}x(t), & t \in [(k+d(k))T_e, (k+1)T_e] \end{cases} \tag{3.17}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{3.18}$$

La première dynamique linéaire correspond aux positions : *fermé* de l'interrupteur S_1 et *ouvert* de l'interrupteur S_2 et s'applique dans l'intervalle $[kT_e, (k+d(k))T_e]$ de la période k d'échantillonnage T_e. La deuxième dynamique caractérise l'intervalle $[(k+d(k))T_e, (k+1)T_e]$ où l'interrupteur S_1 reste dans la position *ouverte*. Le changement de position de l'interrupteur S_1 est commandé par le rapport cyclique $d(k)$ de chaque période d'échantillonnage kT_e. En ce qui concerne la sortie du modèle, elle est toujours représentée par la tension de sortie $v_s(t)$. Les matrices réelles $A_{fermé}$, $B_{fermé}$, A_{ouvert} et C dépendent des éléments du circuit : L, C, de la résistance de charge R, et également des éléments parasites r_L et r_C :

$$A_{fermé} = A_{ouvert} = \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{R}{(r_C+R)C}\left(1 - r_C r_L \frac{C}{L}\right) & -\frac{1}{(r_C+R)C}\left(1 + r_C \frac{RC}{L}\right) \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

$$B_{fermé} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{r_C R}{(r_C+R)L} \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

Si la résistance équivalente en série du condensateur et la résistance de l'inductance sont considérées nulles ($r_C = r_L = 0$), on obtient un modèle simplifié, sans perte du convertisseur buck pour lequel la tension de sortie $v_s(t)$ est égale à la tension aux bornes du condensateur $v_c(t)$.

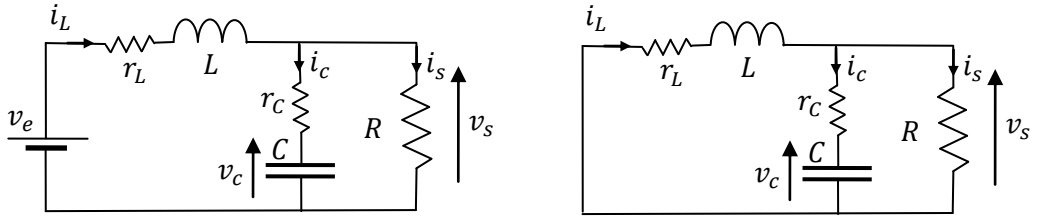


Figure 3.3.1.2 : Configurations du circuit du convertisseur buck avec perte : S_1 position fermée (a), S_1 position ouvert (b).

Comme décrit dans la Section 3.2, le modèle moyen bilinéaire prenant en compte les pertes du circuit est donné par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \underbrace{[A_{fermé}d + A_{ouvert}(1-d)]}_{A}x(t) + \underbrace{B_{fermé}}_{B}dv_e = Ax(t) + Bdv_e \\ y(t) &= \underbrace{[Cd + C(1-d)]}_{C}x(t) = Cx(t)\end{aligned} \tag{3.21}$$

Tenant compte du fait que les matrices A des dynamiques (3.17) sont identiques, la non-linéarité du modèle (3.21) est représentée par le produit entre le rapport cyclique d et la tension d'entrée v_e. Cependant, le modèle moyen peut être linéarisé autour d'un point d'équilibre, ce qui permettra l'application des méthodes d'analyse et de synthèse de lois de commande dédiées aux systèmes linéaires.

Considérons la dynamique du modèle (3.21) donnée sous la forme d'une fonction dépendante du vecteur d'état x et des deux entrées d, v_e du modèle :

$$\dot{x} = f(x, d, v_e) \tag{3.22}$$

Le vecteur d'état, la commande et la tension d'alimentation sont exprimés par les variations $\tilde{x}$, $\tilde{d}$ et $\tilde{v}_e$ autour des valeurs à l'état d'équilibre X_e, D, V_e :

$$x = \tilde{x} + X_e, \quad d = \tilde{d} + D, \quad v_e = \tilde{v}_e + V_e \tag{3.23}$$

où V_e et D sont respectivement les valeurs nominales de la tension d'alimentation et rapport cyclique en régime stationnaire calculées pour une tension de sortie de référence V_s. L'expression du point d'équilibre X_e et le rapport entrée/sortie sont donnés par la solution de l'équation $\dot{x}(t) = 0$:

$$X_e = \begin{bmatrix} I_L & V_S \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{r_L + R} DV_e & \dfrac{R}{r_L + R} DV_e \end{bmatrix}^T \tag{3.24}$$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{R}{R + r_L} D \tag{3.25}$$

La dynamique du modèle linéarisé est déterminée de la manière suivante :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=X_e \\ d=D \\ v_e=V_e}} \underbrace{(x(t) - X_e)}_{\tilde{x}(t)} + \left.\frac{\partial f}{\partial d}\right|_{\substack{x=X_e \\ d=D \\ v_e=V_e}} \underbrace{(d - D)}_{\tilde{d}} + \left.\frac{\partial f}{\partial v_e}\right|_{\substack{x=X_e \\ d=D \\ v_e=V_e}} \underbrace{(v_e - V_e)}_{\tilde{v}_e} \tag{3.26}$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + BV_e\tilde{d} + BD\tilde{v}_e = A\tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} BV_e & BD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{d} \\ \tilde{v}_e \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Les dynamiques linéaires à temps continu (3.16)-(3.17) et (3.27), présentées précédemment, sont utilisées par la suite afin de déduire l'expression mathématique d'un modèle affine par morceaux à temps discret du convertisseur buck. La formulation du modèle hybride à temps discret est faite naturellement tout en sachant que la valeur du rapport cyclique est constante pendant une période de commutation T_e et qu'elle ne change qu'à l'instant kT_e, $k \in \mathbb{N}$.

Le principe de cette approche de modélisation consiste à découper la période d'échantillonnage T_e dans ν sous-périodes ayant la même longueur, notée avec $\tau_e = \frac{T_e}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}, \nu \geq 1$. De même, à l'intérieur d'une période T_e la notation $\varepsilon(n)$, $n = 0,...,\nu-1$ est utilisée pour les variables d'états intermédiaires, échantillonnées avec la période τ_e. Par conséquent, on se réfère aux variables d'état au début et à la fin de la période d'échantillonnage avec $\varepsilon(0) = x(k)$ et $\varepsilon(\nu-1) = x(k+1)$.

Selon la position de l'interrupteur S_1 pour chaque sous-période n on définit trois modes possibles :

- *mode 1* : l'interrupteur S_1 maintient la position *fermée* pour toute la sous-période n ,
- *mode 2* : l'interrupteur S_1 maintient la position *ouverte* pour toute la sous-période n ,
- *mode 3* : l'interrupteur S_1 commute entre la position *fermée* et *ouverte* à l'intérieure d'une sous-période n.

Ainsi les valeurs intermédiaires des variables d'états $\varepsilon(n)$, $n = 0, \dots, \nu-1$ sont calculées en appliquant les dynamiques exactes du système pour les sous-périodes n où le *mode 1* ou le *mode 2* est actif, et la dynamique du modèle moyen linéarisé pour la sous-période où le *mode 3* intervient. Ce principe est illustré dans la Figure 3.3.1.3 pour une résolution $\nu = 4$.

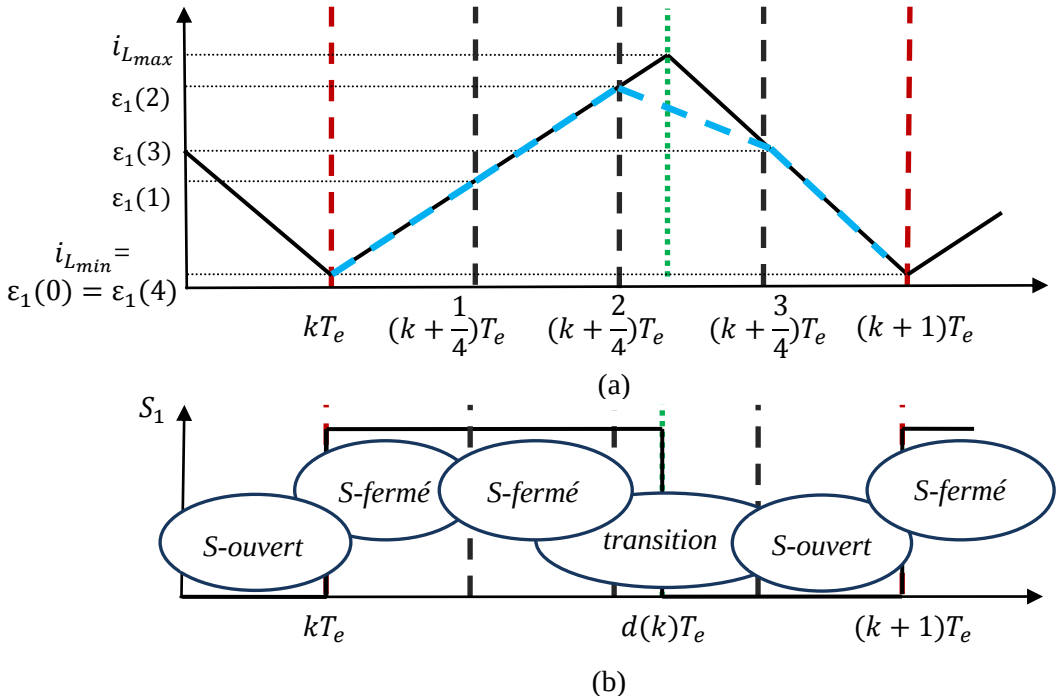


Figure 3.3.1.3 : Modélisation avec une résolution $\nu = 4$. Évolution du courant d'inductance i_L du modèle moyen bilinéaire à temps continu (ligne continue) en comparaison avec les états donnés par le modèle hybride (ligne en pointillé) sur une période de commutation T_e (a). Position de l'interrupteur S_1 dans chaque sous-période (b).

En ce qui concerne le modèle moyen linéarisé utilisé dans la sous période contenant la transition de l'interrupteur S_1, son expression est obtenue à partir du modèle moyen bilinéaire (3.21).

Il faut mentionner que la variable de commande rapportée à une sous-période n est définie par $d'(k)$ qui s'exprime en fonction du nombre de sous-périodes ν, la sous-période n contenant la transition et la valeur « réelle » du rapport cyclique $d(k)$:

$$d'(k) = \nu d(k) - n,\ \ n = 0,...,\nu - 1 \tag{3.28}$$

avec $d'(k) \in [0,1]$. Pour chaque sous-période n, $n = 0, \dots, \nu - 1$ le rapport cyclique $d(k)$ appartient à un intervalle $\left[\frac{n}{\nu}, \frac{n+1}{\nu}\right]$, avec $n = 0, \dots, \nu - 1$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
&n = 0 \ \rightarrow d(k) \in \left[0, \tfrac{1}{\nu}\right],\ d'(k) = \nu d(k),\ d'(k) \in [0,1],\\
&n = 1 \ \rightarrow d(k) \in \left[\frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}\right],\ d'(k) = \nu d(k) - 1, \qquad d'(k) \in [0,1],\\
&\qquad\qquad \vdots\\
&n = \nu - 1 \ \rightarrow d(k) \in \left[\tfrac{\nu-1}{\nu}, 1\right],\ d'(k) = \nu d(k) - \nu + 1,\ d'(k) \in [0,1].
\end{aligned}$$

En utilisant la relation (3.28) pour la commande du modèle (3.21), le modèle moyen bilinéaire devient :

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + B(\nu d(k) - n)v_e,\ n = 0,...,\nu - 1\\
y(t) &= Cx(t)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Afin d'obtenir une dynamique linéaire, le modèle (3.29) est linéarisé autour d'un point de fonctionnement « réel » D_{n+1} appartenant à l'intervalle $\left[\frac{n}{\nu}, \frac{n+1}{\nu}\right]$, avec $n = 0, \dots, \nu - 1$. La valeur du point de linéarisation est choisie au milieu de chaque intervalle :

$$D_{n+1} = \frac{2n+1}{2\nu},\ n = 0,...,\nu - 1 \tag{3.30}$$

ce qui conduit à la même valeur de linéarisation rapportée à une sous-période :

$$D' = \nu D_{n+1} - n = \frac{1}{2}, \forall n = 0,...,\nu - 1 \tag{3.31}$$

Après la linéarisation, le modèle moyen d'une sous-période *n* s'écrit :

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}(n) = A\tilde{\varepsilon}(n) + BV_e\tilde{d}'(k) + D'B\tilde{v}_e \tag{3.32}$$

où $\tilde{\varepsilon}(n) = \varepsilon(n) - \varepsilon_e(n), \tilde{d}'(k) = d'(k) - D', \tilde{v}_e = v_e - V_e$. La notation $\varepsilon_e(n)$ représente le point de linéarisation de la sous-période n. La valeur du ce point est donnée par l'équation (3.24) avec $D = D'$ et V_e représente la valeur nominale de la tension d'alimentation. Ce modèle à temps continu est ensuite discrétisé avec la période τ_e :

$$\tilde{\varepsilon}(n+1) = A^d\tilde{\varepsilon}(n) + B^dV_e\tilde{d}'(k) + D'B^d\tilde{v}_e(k) \tag{3.33}$$

Finalement, la dynamique qui traduit l'évolution des variables intermédiaires $\varepsilon(n)$ de l'état $x[k]$ à l'intérieur de la sous-période contenant une transition de l'interrupteur S_1 est la suivante :

$$\varepsilon(n+1) = A^d\varepsilon(n) + B^dV_ed'(k) + D'B^dv_e(k) - D'B^dV_e \tag{3.34}$$

avec :

$$\varepsilon_e(n+1) = A^d \varepsilon_e(n) + B^d V_e D' \tag{3.35}$$

En conséquence, les équations de mise-à-jour des variables d'états pour la n-ème sous-période sont les suivantes :

$$\varepsilon(n+1) = \begin{cases} A^d_{fermé}\varepsilon(n) + B^d_{fermé} v_e(k), & \text{si } S\text{ - }fermé \text{ (mode 1)} \\ A^d_{ouvert}\varepsilon(n), & \text{si } S\text{ - }ouvert \text{ (mode 2)} \\ A^d \varepsilon(n) + B^d V_e(\nu d(k) - n) + , & \text{si } transition \text{ (mode 3)} \\ \quad + B^d D' v_e(k) - B^d D' V_e & \end{cases} \tag{3.36}$$

où les matrices A^d_*, B^d_* sont les matrices $A_{fermé}, A_{ouvert}$ et $B_{fermé}$ des dynamiques exactes (3.16)-(3.17) discrétisées avec une période égale à la longueur τ_e d'une sous-période n.

Ainsi, en appliquant consécutivement les relations de récurrence (3.36), on obtient l'expression générale du modèle affine par morceaux à temps discret du convertisseur buck :

$$\begin{aligned} & x(k+1) = A^x_{n+1} x(k) + \begin{bmatrix} F^d_{n+1} & F^{v_e}_{n+1} + ct_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu d(k) - n \\ v_e(k) \end{bmatrix} + f'_{n+1} \\ & \text{si } \frac{n}{\nu} \le d(k) \le \frac{n+1}{\nu},\ n = 0,...,\nu - 1 \end{aligned} \tag{3.37}$$

avec les matrices du modèle PWA déterminées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} A^x_{n+1} &= \left(A^d_{ouvert}\right)^{\nu-n-1}\left(A^d\right)\left(A^d_{fermé}\right)^n \\ F^{d'}_{n+1} &= \left(A^d_{ouvert}\right)^{\nu-n-1} B^d V_e \\ ct_{n+1} &= \left(A^d_{ouvert}\right)^{\nu-n-1} B^d D' \\ F^{v_e}_{n+1} &= \begin{cases} 0, n = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(A^d_{ouvert}\right)^{\nu-n-1}\left(A^d\right)\left(A^d_{fermé}\right)^{n-i} B^d_{fermé}, n \ge 1 \end{cases} \\ f'_{n+1} &= -ct_{n+1} V_e \end{aligned} \tag{3.38}$$

Une expression équivalente du modèle PWA (3.37)-(3.38) pour les entrées du modèle $[d(k) \quad v_e(k)]^T$ est la suivante :

$$\begin{aligned} & x(k+1) = A^x_{n+1} x(k) + B^u_{n+1} \begin{bmatrix} d(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} + f_{n+1} \\ & \text{si } \frac{n}{\nu} \le d(k) \le \frac{n+1}{\nu},\ n = 0,...,\nu - 1 \end{aligned} \tag{3.39}$$

où les matrices B^u_{n+1} et les termes affines f_{n+1} sont exprimés par :

$$\begin{aligned} & B^u_{n+1} = [B^d_{n+1} \quad B^{v_e}_{n+1}] \quad B^d_{n+1} = \nu F^{d'}_{n+1} \\ & f_{n+1} = f'_{n+1} - n F^{d'}_{n+1} \quad , B^{v_e}_{n+1} = F^{v_e}_{n+1} + ct_{n+1} \end{aligned} \tag{3.40}$$

On note que le modèle hybride obtenu contient ν dynamiques affines différentes à temps discret et que le changement de la dynamique utilisée à l'instant k est sélectionné en fonction de la valeur du rapport cyclique $d(k)$.

Cette méthode de modélisation présente l'avantage d'approcher le comportement du convertisseur dans le domaine de fonctionnement établi en mode de conduction continue. De plus, le découpage en ν sous-périodes permet d'agir sur la précision et sur la complexité du modèle PWA. Cependant, plus on augmente le nombre de sous-périodes, plus on augmente la dimension du modèle hybride. Le modèle confère une représentation des variables d'état échantillonnées très précise, puisque la seule approximation utilisée est celle de la sous-période où la transition de l'interrupteur S_1 se produit (le *mode 3* de l'équation (3.36)). Effectivement, ce modèle est développé afin de pouvoir appliquer des différentes stratégies de commande, ce qui nous amène devant un compromis entre la précision du modèle et le nombre de dynamiques qui seront prises en compte dans la synthèse de lois de commande.

Le modèle PWA (3.37)-(3.38) a été déterminé avec une résolution $\nu = 3$ pour un convertisseur buck ayant un espace de fonctionnement en mode de conduction continue, défini par l'intervalle $[20[\mathrm{V}] - 30[\mathrm{V}]]$ pour la tension d'alimentation v_e et l'intervalle $[10[\mathrm{W}] - 100[\mathrm{W}]]$ pour la puissance de sortie. Dans cette hypothèse, les paramètres du circuit et les valeurs nominales de la tension d'alimentation V_e et de la résistance de charge R considérées sont présentés, respectivement, dans le Tableau 3.3.1.

$L = 220$ [µH]	$F = 20$ [kHz]	$R = 2$ [Ω]
$C = 47$ [µF]	$V_{ref} = 12[\mathrm{V}]$	$V_e = 24[\mathrm{V}]$

Tableau 3.3.1 : Valeurs numériques des paramètres du convertisseur buck.

Les pertes prises en compte dans le modèle hybride sont représentées par une valeur de la résistance interne de l'inductance $r_L = 200$ [mΩ], alors que la résistance équivalente en série r_C du convertisseur est négligée.

Par la suite, nous analysons la continuité des variables d'état (le courant de l'inductance et la tension de sortie) du modèle PWA avec la résolution $\nu = 3$ par rapport à l'entrée de commande du modèle (le rapport cyclique). Dans la référence [AMM10] il a été démontré le fait que la continuité de variables d'état aux frontières des régions de définition du modèle PWA est importante afin d'assurer des bonnes performances d'une loi de commande prédictive synthétisée à partir d'un modèle affine par morceaux. Les discontinuités entre les différentes dynamiques du modèle hybride rendent la commande élaborée plus sensible aux imperfections du modèle (par rapport au système physique) et par conséquent, conduisent à l'apparition du phénomène de réticence. De plus, en ce qui concerne la commande prédictive, le choix des paramètres de réglage devient plus difficile, d'une part, et la taille de la solution explicite est plus importante, d'autre part. Tout en sachant que le modèle PWA avec une résolution $\nu = 3$ est développé dans le but d'appliquer la stratégie de la commande prédictive, on analyse le modèle hybride obtenu du point de vue de la continuité des variables d'état aux frontières des dynamiques affines.

En régime permanent, le point d'équilibre de chaque dynamique du modèle PWA est calculé par la relation suivante :

$$X^{0}_{n+1} = (I_2 - A^{x}_{n+1})^{-1}(B^{d}_{n+1}D_{n+1} + B^{v_e}_{n+1}V_e + f_{n+1}) \tag{3.41}$$

où I_2 représente la matrice unité.

Par conséquent, la continuité des variables d'état du modèle PWA (3.39)-(3.40) est vérifiée si à la frontière d'intervalles $\left[\frac{n}{\nu},\frac{n+1}{\nu}\right]$, $n=0,\ldots,\nu-2$ les conditions d'égalité suivantes sont satisfaites :

$$(I_2-A_{n+1}^x)^{-1}(B_{n+1}^d\frac{n+1}{\nu}+B_{n+1}^{v_e}V_e+f_{n+1})=(I_2-A_{n+2}^x)^{-1}(B_{n+2}^d\frac{n+1}{\nu}+B_{n+2}^{v_e}V_e+f_{n+2}) \quad (3.42)$$

Pour les deux variables d'état, nous montrons l'influence des changements de la résistance de charge et de la tension d'alimentation sur leur continuité vis-à-vis du rapport cyclique.

Dans les Figure 3.3.1.4 et Figure 3.3.1.5, les caractéristiques du courant d'inductance i_L et de la tension de sortie V_s sont illustrées dans trois situations. Premièrement les valeurs nominales de la résistance et de la tension d'entrée sont considérées, ensuite la valeur de la résistance de charge varie ($R=4[\Omega]$) et troisièmement une valeur différente de la tension d'entrée est imposée ($V_e=20$ [V]). De même, les caractéristiques du courant i_L et de la tension V_s données par le modèle PWA sont comparées avec celles fournies par le modèle moyen bilinéaire afin d'évaluer la précision du modèle hybride obtenu.

Sur la Figure 3.3.1.4 (a) on constate que la continuité du courant i_L par rapport au rapport cyclique d est respectée en considérant les valeurs nominales de la tension d'alimentation et de la résistance de charge, d'une part, et que le modèle hybride approche bien le comportement du modèle moyen bilinéaire d'une autre part. Dans le cas où la résistance $R=4[\Omega]$ est utilisée (voir Figure 3.3.1.4 (b)), la continuité du courant à la frontière des dynamiques du modèle PWA n'est pas influencée, vu le fait que le modèle hybride ne prend pas en compte la modification de ce paramètre. Cependant, on constate un léger écart par rapport à la caractéristique fournie par le modèle moyen bilinéaire.

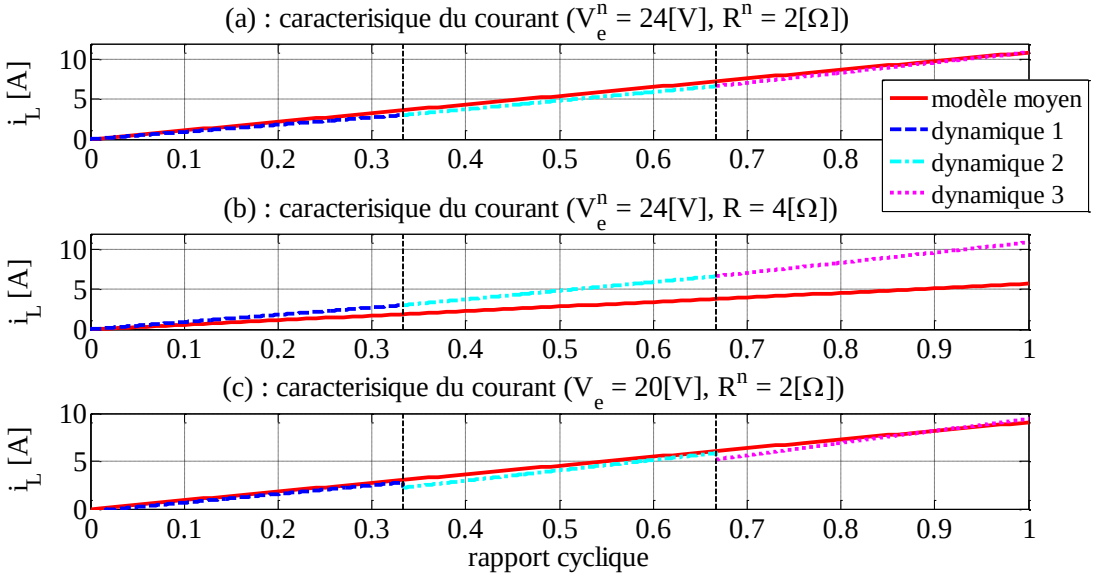


Figure 3.3.1.4 : Comparaison entre les caractéristiques du courant par l'inductance i_L en régime permanent générés en utilisant le modèle moyen et le modèle PWA avec la résolution $\nu=3$.

Dans la Figure 3.3.1.4 (c), lorsqu'on considère une valeur de la tension de d'alimentation V_e différente de la valeur nominale (utilisée pour obtenir les matrices du modèle PWA) on remarque des discontinuités du courant au niveau des dynamiques du

modèle PWA, malgré une approximation satisfaisante de la caractéristique du modèle moyen bilinéaire.

De même, la caractéristique de la tension de sortie V_s en régime permanent obtenue en utilisant les dynamiques du modèle PWA est continue à ses frontières (pour les valeurs du rapport cyclique : $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$) pour une valeur nominale de la résistance de charge R (voir Figure 3.3.1.5 (a)). Mais, la continuité n'est pas assurée par rapport à la valeur de la tension d'alimentation (voir Figure 3.3.1.5 (c)). Cependant, on peut constater que le modèle hybride fournit une approximation de la tension de sortie satisfaisante dans les trois situations proposées par rapport à la caractéristique du modèle moyen bilinéaire.

En conséquence, les dynamiques du modèle PWA présentent des discontinuités aux frontières d'intervalles de définition : $\left[0,\frac{1}{3}\right],\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right],\left[\frac{2}{3},1\right]$ vis-à-vis des changements de la tension d'alimentation utilisée. Concernant la précision du modèle hybride développé entre les deux variables d'état du modèle PWA, le courant de l'inductance est plus sensible aux changements de la valeur de la résistance.

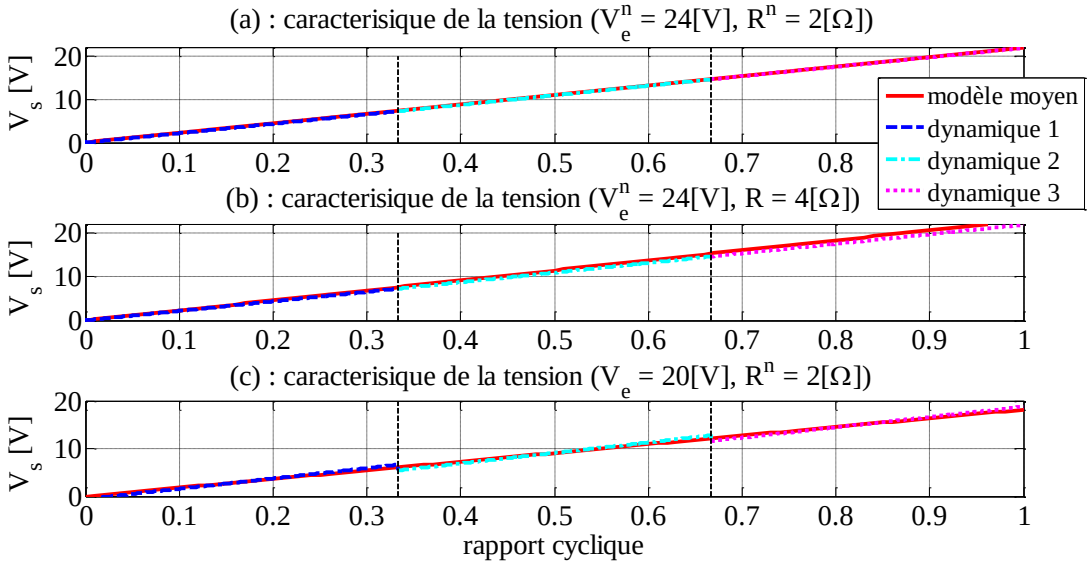


Figure 3.3.1.5 : Comparaison entre les caractéristiques de la tension de sortie V_s en régime permanent générés en utilisant le modèle moyen et le modèle PWA avec la résolution $\nu = 3$.

Le comportement dynamique du modèle PWA avec la résolution $\nu = 3$ est évalué par plusieurs simulations effectuées avec Matlab/Simulink™ et la librairie SimPowerSystems™. L'évolution des variables d'états du modèle hybride est comparée avec les signaux du courant de l'inductance et la tension de sortie générées par le circuit en commutation du convertisseur buck. Vu que les valeurs nominales choisies pour R et V_e correspondent à un rapport cyclique $D = 0{,}55 \in \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$, la seconde dynamique du modèle hybride est active. Afin d'observer le comportement des autres dynamiques du modèle PWA, nous proposons deux cas particuliers. Dans le premier cas, illustré sur la Figure 3.3.1.6, une variation en échelon du rapport cyclique de $D = 0{,}55$ à $D = 0{,}275$ est appliquée, ce qui permet l'utilisation de la première dynamique.

Sur la Figure 3.3.1.6, les valeurs intermédiaires des variables d'états calculées, en utilisant la dynamique active du modèle PWA, suivent les formes d'onde des signaux générés par le circuit en commutation. En comparaison avec le modèle moyen qui fournit la moyenne

des signaux sur chaque période de commutation, le modèle PWA à temps discret offre des informations supplémentaires sur l'évolution de variables d'état à l'intérieur d'une période de commutation T_e.

Dans le deuxième cas, le fonctionnement passe de la deuxième région de fonctionnement à la troisième à l'aide de la variation du rapport cyclique de $D = 0{,}55$ à $D = 0{,}733$. Cette situation est représentée sur la Figure 3.3.1.7.

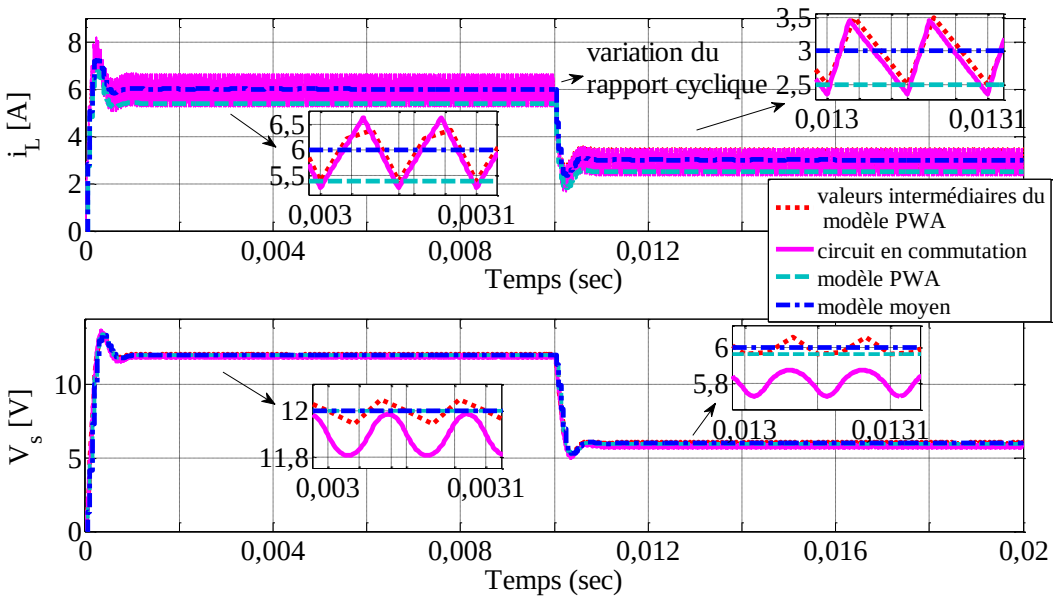


Figure 3.3.1.6 : Formes d'ondes du courant i_L et de la tension V_s pour un échelon du rapport cyclique de $D = 0{,}55$ à $D = 0{,}275$. Comparaison entre le circuit en commutation, le modèle PWA et le modèle moyen. Les valeurs intermédiaires des variables d'états déterminées en utilisant le modèle hybride sont représentées en trait pointille.

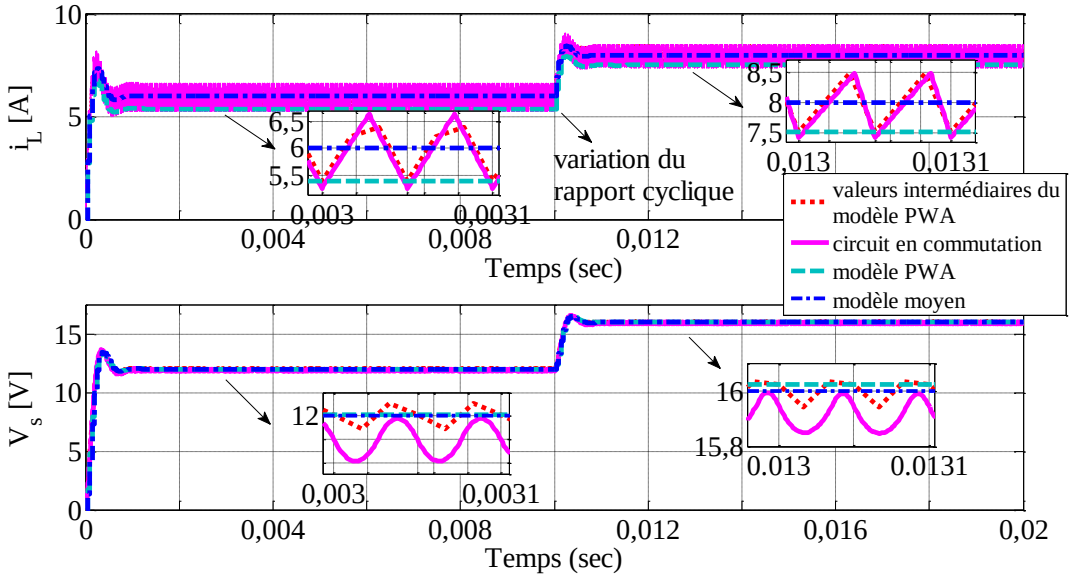


Figure 3.3.1.7 : Formes d'ondes du courant i_L et de la tension V_s pour un échelon du rapport cyclique de $D = 0{,}55$ à $D = 0{,}733$. Comparaison entre le circuit en commutation, le modèle PWA et le modèle moyen. Les valeurs intermédiaires des variables d'états déterminées en utilisant le modèle hybride sont représentées en trait pointille.

Le modèle affine par morceaux à temps discret (3.39)-(3.40) développé sera utilisé comme modèle de synthèse pour différentes stratégies de commande dans les Chapitres IV et V.

3.3.2 Application à un convertisseur de type flyback avec filtre d'entrée

La technique de modélisation hybride décrite dans la Section 3.3.1 est adaptée au convertisseur flyback avec filtre d'entrée. Le schéma équivalent est donné sur la figure 3.3.2.1. Ce convertisseur est piloté à fréquence de découpage fixe T_e. On considère le fonctionnement du convertisseur en mode de conduction continue : l'interrupteur MOSFET est passant, ensuite bloqué et la diode *D* a un état complémentaire à celui du MOSFET. Le transformateur de cette structure fonctionne comme deux inductances couplées où l'énergie provenant de la source est emmagasinée sous forme magnétique dans le transformateur quand le MOSFET est passant. Lorsque la diode *D* devient passante, cette énergie magnétique est restituée à la charge : on parle alors de structure à accumulation inductive. Les résistances équivalentes r_{L_e}, r_{C_e} et r_L représentent les pertes résistives dans le convertisseur.

Dans l'optique d'une modélisation hybride, on choisit le vecteur d'état suivant :

$$x(t) = \left[i_L(t) \quad v_{C_e}(t) \quad i_{L_m}(t) \quad v_s(t) \right]^T \tag{3.43}$$

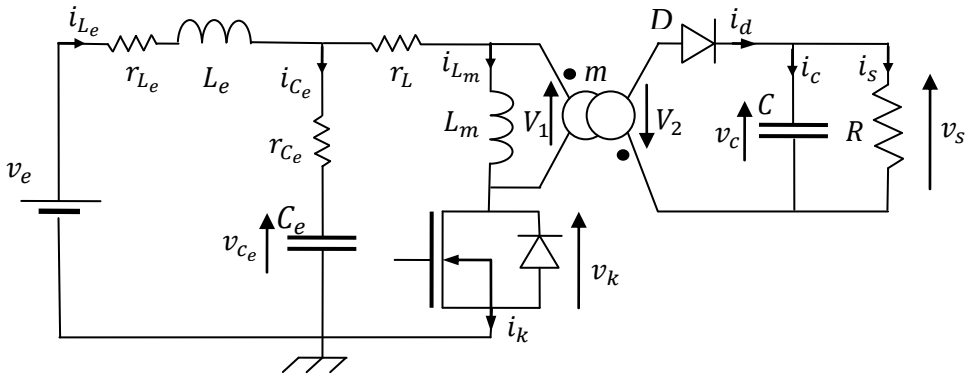


Figure 3.3.2.1 : Schéma équivalent du convertisseur flyback avec filtre d'entrée avec pertes.

où $i_L(t)$ et $v_C(t)$ représentent, respectivement, le courant de l'inductance et la tension du condensateur du filtre d'entrée. Les états $i_{L_m}(t)$ et $v_s(t)$ correspondent au courant traversant l'inductance L_m ainsi qu'à la tension de sortie. La dynamique du convertisseur en CCM sur la k-ème période de commutation T_e est décrite par les équations à temps continues suivantes :

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_{fermé}x(t) + B_{fermé}v_e, & t \in \left[kT_e, (k+d(k))T_e\right] \\ A_{ouvert}x(t) + B_{ouvert}v_e, & t \in \left[(k+d(k))T_e, (k+1)T_e\right] \end{cases} \tag{3.44}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{3.45}$$

où les matrices $A_{fermé}$, $B_{fermé}$, A_{ouvert}, B_{ouvert}, et C sont données par :

$$A_{fermé}=\begin{bmatrix} -\frac{r_{L_e}+r_{C_e}}{L_e} & -\frac{1}{L_e} & \frac{r_{C_e}}{L_e} & 0 \\ \frac{1}{C_e} & 0 & -\frac{1}{C_e} & 0 \\ \frac{r_{C_e}}{L_m} & \frac{1}{L_m} & -\frac{r_{C_e}+r_L}{L_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, B_{fermé}=B_{ouvert}=\begin{bmatrix} \frac{1}{L_e} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{ouvert}=\begin{bmatrix} -\frac{r_{L_e}+r_{C_e}}{L_e} & -\frac{1}{L_e} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_e} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{mL_m} \\ 0 & 0 & \frac{1}{mC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \mathrm{C}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \tag{3.46}$$

Les deux entrées du système sont représentées par la tension d'alimentation v_e et le rapport cyclique $d(k)$. Plus précisément, $d(k)$ représente l'entrée de commande du système.

La technique classique d'espace d'état moyenné caractérisant les deux dynamiques du système conduit à un modèle non-linéaire de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_{fermé}x(t)+Bv_e)d(k)+(A_{ouvert}x(t)+Bv_e)(1-d(k)) \\ &= Ax(t)+Bv_e \end{aligned} \tag{3.47}$$

avec :

$$A=\begin{bmatrix} -\frac{r_{L_e}+r_{C_e}}{L_e} & -\frac{1}{L_e} & \frac{r_{C_e}}{L_e}d(k) & 0 \\ \frac{1}{C_e} & 0 & -\frac{1}{C_e}d(k) & 0 \\ \frac{r_{C_e}}{L_m}d(k) & \frac{1}{L_m}d(k) & -\frac{r_{C_e}+r_L}{L_m}d(k) & -\frac{1-d(k)}{mL_m} \\ 0 & 0 & \frac{1-d(k)}{mC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \tag{3.48}$$

$$B=B_{fermé}$$

Le modèle moyen peut être linéarisé autour d'un point d'équilibre X_e qui représente la solution de l'équation $\dot{x}(t)=0$. L'expression des variables d'état en fonction des valeurs du rapport cyclique et de la tension d'alimentation D et V_e en régime permanent est la suivante :

$$X_e = \begin{bmatrix} I_{L_e} & V_{C_e} & I_{L_m} & V_s \end{bmatrix}^T$$

avec :

$$\begin{aligned} I_{L_e} &= \frac{m^2 D^2 V_e}{R(1-D)^2 + m^2\left[r_{L_e} D^2 + r_{C_e} D(1-D) + r_L D\right]} \\ V_{C_e} &= V_e - \frac{r_{L_e} m^2 D^2 V_e}{R(1-D)^2 + m^2\left[r_{L_e} D^2 + r_{C_e} D(1-D) + r_L D\right]} \\ I_{L_m} &= \frac{m^2 D V_e}{R(1-D)^2 + m^2\left[r_{L_e} D^2 + r_{C_e} D(1-D) + r_L D\right]} \\ V_s &= \frac{mRD(1-D) V_e}{R(1-D)^2 + m^2\left[r_{L_e} D^2 + r_{C_e} D(1-D) + r_L D\right]} \end{aligned} \tag{3.49}$$

Ainsi, en utilisant l'ensemble (X_e, D, V_e) la dynamique linéaire du modèle moyen est donnée par :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A^l \tilde{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} B_d^l & B_{v_e}^l \end{bmatrix}}_{B^l} \begin{bmatrix} \tilde{d}(k) \\ \tilde{v}_e \end{bmatrix} = A^l \tilde{x}(t) + B^l \begin{bmatrix} \tilde{d}(k) & \tilde{v}_e \end{bmatrix}^T \tag{3.50}$$

où $\tilde{x} = x(t) - X_e$, $\tilde{d}(k) = d(k) - D$, $\tilde{v}_e(k) = v_e - V_e$ représentent les variations des variables d'état $x(t)$, de l'entrée de commande $d(k)$ et de la tension d'alimentation v_e dans un voisinage des valeurs en régime permanent (X_e, D, V_e). Les matrices A^l, B_d^l et $B_{v_e}^l$ ont les expressions suivantes :

$$A^l = \left[\begin{array}{cccc} -\frac{r_{L_e} + r_{C_e}}{L_e} & -\frac{1}{L_e} & \frac{r_{C_e}}{L_e} d(k) & 0 \\ \frac{1}{C_e} & 0 & -\frac{1}{C_e} d(k) & 0 \\ \frac{r_{C_e}}{L_m} d(k) & \frac{1}{L_m} d(k) & -\frac{r_{C_e} + r_L}{L_m} d(k) & -\frac{1-d(k)}{mL_m} \\ 0 & 0 & \frac{1-d(k)}{mC} & -\frac{1}{RC} \end{array}\right]_{d(k)=D},$$

$$B_d^l = \begin{bmatrix} \frac{r_{C_e}}{L_e} I_{L_m} \\ -\frac{1}{C_e} I_{L_m} \\ \frac{r_{C_e}}{L_m} I_{L_e} + \frac{1}{L_m} V_{C_e} - \frac{r_{C_e} + r_L}{L_m} I_{L_m} + \frac{1}{mL_m} V_s \\ -\frac{1}{mC} I_{L_m} \end{bmatrix}, \quad B_{v_e}^l = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_e} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

La relation entrée/sortie caractéristique du convertisseur flyback avec filtre d'entrée, en tenant compte des éléments résistifs r_{L_e}, r_{C_e}, r_L, est déduite facilement de l'équation (3.49) :

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{mRD(1-D)}{R(1-D)^2 + m^2\left[r_{L_e} D^2 + r_{C_e} D(1-D) + r_L D\right]} \tag{3.52}$$

Si les pertes dans le convertisseur sont négligées : $r_{L_e} = r_{C_e} = r_L = 0$, l'expression du gain statique $\frac{V_s}{V_e}$ devient :

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{mD}{(1-D)} \tag{3.53}$$

On constate que la tension de sortie V_s varie entre 0 et ∞ pour une variation du rapport cyclique D de 0 à 1. Cependant, dans l'expression (3.52), considérant les pertes résistives pour $D = 1$, on obtient une tension de sortie $V_s = 0$. Cela signifie qu'en pratique il existe une valeur maximale du rapport cyclique D_{max} inferieure à 1, après laquelle la tension de sortie V_s diminue. Pour des valeurs du rapport cyclique supérieures à D_{max}, le rendement du convertisseur n'est pas très favorable. Par conséquent, le rapport cyclique est borné dans l'intervalle $[0, D_{max}]$ (voir Figure 3.3.2.2). Dans le cas du convertisseur flyback avec filtre d'entrée, la limite supérieure D_{max} s'exprime en fonction d'éléments dissipatifs du circuit (la résistance de charge R et les résistances r_{L_e}, r_L) :

$$D_{\max}(R) = \frac{R - m\sqrt{R(r_{L_e} + r_L)}}{R - m^2(r_{L_e} + r_L)} \tag{3.54}$$

En suivant les étapes de la technique de modélisation hybride présentées dans la section précédente sur le convertisseur buck :

- découper de la période de commutation $T_e = \frac{1}{F}$ en ν sous-périodes ayant la même longueur $\tau_e = \frac{T_e}{\nu}$;
- déterminer les expressions des modèles linéaires à temps discret valides sur une sous-période $n, n = 0{:}\,\nu - 1$ selon les trois modes possibles en CCM :
  - *mode 1* : état passant de l'interrupteur MOSFET sur une sous-période n entière ;
  - *mode 2* : état bloqué de l'interrupteur MOSFET sur une sous-période n entière ;
  - *mode 3* : transition entre l'état passant et l'état bloqué de l'interrupteur MOSFET à l'intérieur de la sous-période n.

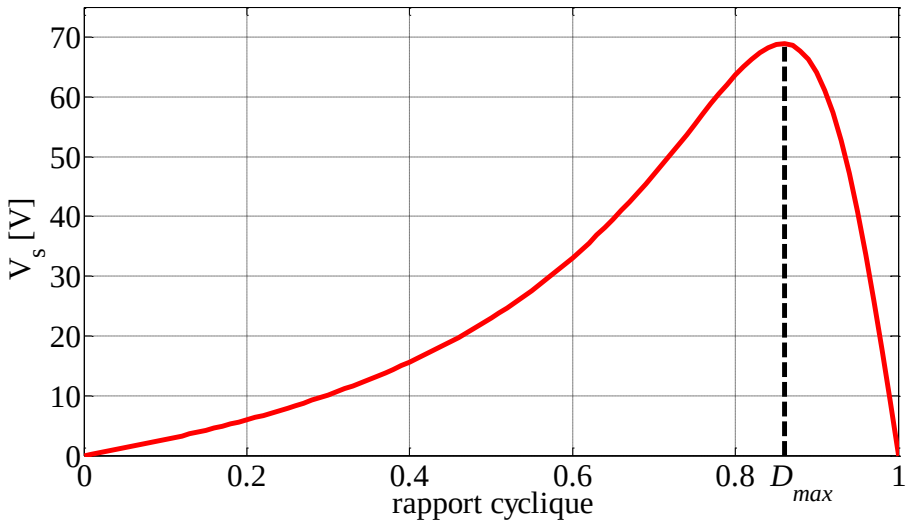


Figure 3.3.2.2 : Caractéristique en régime stationnaire de la tension de sortie V_s. $D_{\max}$ indique le rapport cyclique pour lequel la valeur maximale de la tension de sortie est atteinte.

Les équations de mise-à-jour de l'état pour la n-ème sous-période sont données par :

$$\varepsilon(n+1)=\begin{cases} A^{d}_{fermé}\varepsilon(n)+B^{d}_{fermé}v_e(k), & \text{si mode 1}\\ A^{d}_{ouvert}\varepsilon(n)+B^{d}_{ouvert}v_e(k), & \text{si mode 2}\\ A^{l,d}_{n+1}\varepsilon(n)+B^{l,d}_{D_{n+1}}(\nu d(k)-n)+B^{l,d}_{v_e}v_e(k)- & \text{si mode 3}\\ \quad -B^{l,d}_{D_{n+1}}(\nu D_{n+1}-n)+(B^{d}-B^{l,d}_{v_e})V_e & \end{cases} \tag{3.55}$$

où les matrices $A^{l}_{n+1}, B^{l}_{d_{n+1}}$ et $B^{l}_{v_e}$ sont obtenues en remplaçant D par $\nu D_{n+1}-n$ dans les équations (3.49) et (3.51) :

$$A^{l}_{n+1}=\left[\begin{array}{cccc} -\frac{r_{L_e}+r_{C_e}}{L_e} & -\frac{1}{L_e} & \frac{r_{C_e}}{L_e}(\nu D_{n+1}-n) & 0\\ \frac{1}{C_e} & 0 & -\frac{1}{C_e}(\nu D_{n+1}-n) & 0\\ \frac{r_{C_e}}{L_m}(\nu D_{n+1}-n) & \frac{1}{L_m}(\nu D_{n+1}-n) & -\frac{r_{C_e}+r_L}{L_m}(\nu D_{n+1}-n) & -\frac{1-(\nu D_{n+1}-n)}{mL_m}\\ 0 & 0 & \frac{1-(\nu D_{n+1}-n))}{mC} & -\frac{1}{RC} \end{array}\right]_{d(k)=D},$$

$$B^{l}_{d_{n+1}}=\begin{bmatrix} \frac{r_{C_e}}{L_e}I_{L_m}\\ -\frac{1}{C_e}I_{L_m}\\ \frac{r_{C_e}}{L_m}I_{L_e}+\frac{1}{L_m}V_{C_e}-\frac{r_{C_e}+r_L}{L_m}I_{L_m}+\frac{1}{mL_m}V_s\\ -\frac{1}{mC}I_{L_m} \end{bmatrix},\quad B^{l}_{v_e}=\begin{bmatrix}\frac{1}{L_e}\\0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{3.56}$$

avec $I_{L_e}, V_{C_e} I_{L_m}, V_s$ calculés avec $D=(\nu D_{n+1}-n)$ dans (3.49).

Etant donné que les matrices $A^{l}_{n+1}, B^{l}_{d_{n+1}}$ caractérisent le comportement dynamique du convertisseur sur une seule sous-période n, la valeur du point de linéarisation notée D_{n+1} choisie en rapport avec la période de commutation T_e entière s'exprime en rapport avec une sous-période n par la relation $\nu D_{n+1}-n$. Également, les notations A^{d}_{*} et B^{d}_{*} indiquent le fait que les matrices $A_{fermé}, B_{fermé}, A_{ouvert}, B_{ouvert}$ de l'équation (3.46) et $A^{l}, B^{l}_{d}, B^{l}_{v_e}$ sont discrétisées avec une période égale à τ_e.

Si on applique consécutivement les relations de récurrence (3.55), on obtient l'expression d'un modèle affine par morceaux à temps discret de la forme suivante :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A^{x}_{n+1}x(k)+B^{d'}_{n+1}\begin{bmatrix}\nu d(k)-n\\ v_e(k)\end{bmatrix}+f'_{n+1}\\ \text{si } \frac{n}{\nu}\le d(k)\le\frac{n+1}{\nu} &\quad \text{avec } n=0,\ldots,\nu-1 \end{aligned} \tag{3.57}$$

avec :

$$
\begin{aligned}
A_{n+1}^{x} &= \left(A_{ouvert}^{d}\right)^{\nu-n-1}\left(A_{n+1}^{l,d}\right)\left(A_{fermé}^{d}\right)\\
B_{n+1}^{d'} &= \left(A_{ouvert}^{d}\right)^{\nu-n-1}\left[B_{d_{n+1}}^{l,d} \quad B_{v_e}^{l,d}\right]\\
f'_{n+1} &= \Bigg(\left(A_{ouvert}^{d}\right)^{\nu-n-1} B^{d} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\left(A_{ouvert}^{d}\right)^{\nu-n-1}\left(A_{n+1}^{l,d}\right)\left(A_{fermé}^{d}\right)^{n-j} B_{fermé}^{d}}_{n\geq 1} +\\
&+ \underbrace{\sum_{j=1}^{\nu-n-1}\left(A_{ouvert}^{d}\right)^{j-1} B_{ouvert}^{d}}_{n<\nu-1}\Bigg) V_e - \left(A_{ouvert}^{d}\right)^{\nu-n-1}\left[B_{d_{n+1}}^{l,d} \quad B_{v_e}^{l,d}\right]\begin{bmatrix}\nu D_{n+1}-n\\ V_e\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

Une forme équivalente du modèle (3.58) est donnée par :

$$
\begin{aligned}
&x(k+1) = A_{n+1}^{x}x(k) + B_{n+1}^{d}\begin{bmatrix}d(k)\\ v_e(k)\end{bmatrix} + f_{n+1}\\
&\text{si } \frac{n}{\nu} \leq d(k) \leq \frac{n+1}{\nu} \quad \text{avec } n = 0,\ldots,\nu-1
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

où les matrices A_{n+1}^{x} ont les expressions de l'équation (3.58), tandis que les matrice B_{n+1}^{d} et les termes affines f_{n+1} deviennent :

$$
\begin{aligned}
B_{n+1}^{d} &= \left(A_{ouvert}^{d}\right)^{\nu-n-1}\left[\nu B_{d_{n+1}}^{l,d} \quad B_{v_e}^{l,d}\right]\\
f_{n+1} &= f'_{n+1} - n\left(A_{ouvert}^{d}\right)^{\nu-n-1} B_{d_{n+1}}^{l,d}
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

Concernant les valeurs des points de linéarisation D_{n+1}, plusieurs choix ont été envisagés. Dans un premier temps, on a choisi les valeurs au milieu de chaque intervalle : $\left[\frac{n}{\nu}, \frac{n+1}{\nu}\right], n = 1, \ldots, \nu-1$, comme dans le cas du convertisseur buck. Mais ce choix n'assure pas la continuité des variables d'état par rapport à l'entrée de commande et introduit des discontinuités au niveau des dynamiques du modèle hybride à temps discret (3.60). Par la suite nous appelons «modèle PWA continu/discontinu» un modèle PWA avec les dynamiques affines continues/discontinues à travers les intervalles de validité, par rapport à toutes ses variables d'état.

La Figure 3.3.2.3 présente la caractéristique en régime permanent de la tension de sortie V_s du modèle PWA pour une résolution $\nu = 7$ en comparaison avec celles du modèle moyen non-linéaire considérant les résistances en série des composants inductifs et également du modèle moyen linéarisé autour d'une valeur du rapport cyclique $D = 0{,}512$. Ce point de linéarisation est calculé en fonction des paramètres du convertisseur flyback avec filtre d'entrée pour lesquels l'on a utilisé les valeurs numériques données dans le Tableau 3.3.2.1.

$L_e = 130$ [µH]	$C = 49$ [µF]	$F = 40$ [kHz]	$r_{L_e} = 50$ [mΩ]
$C_e = 102$ [µF]	$m = 2$	$R = 22$ [Ω]	$r_{C_e} = 0$ [mΩ]
$L_m = 68$[µH]	$V_{ref} = 24$[V]	$V_e = 12$[V]	$r_L = 100$ [mΩ]

Tableau 3.3.2.1 : Valeurs numériques des paramètres du convertisseur flyback avec filtre d'entrée.

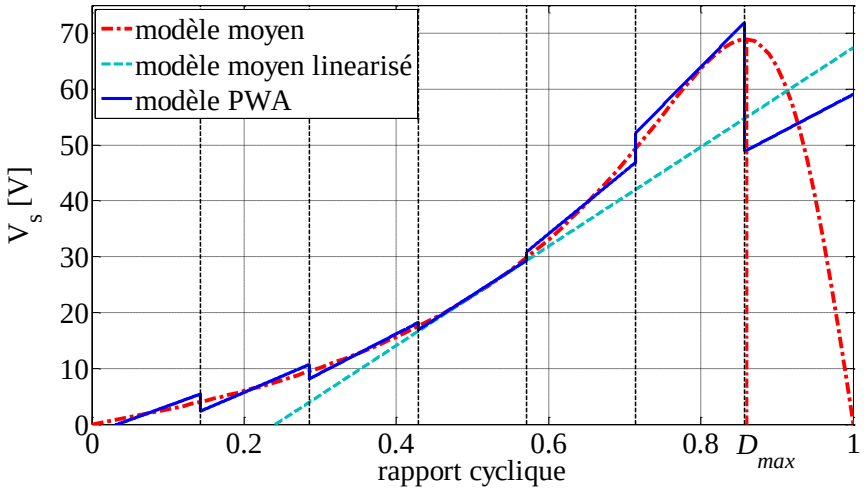


Figure 3.3.2.3 : Caractéristique en régime permanent de la tension de sortie V_s du modèle PWA discontinu avec la résolution $\nu = 7$.

On remarque que les approximations fournies par le modèle PWA sur chaque intervalle sont discontinues à travers leurs frontières en raison d'un choix inapproprié des valeurs des points de linéarisation D_{n+1}.

Afin de garantir la continuité des dynamiques du modèle PWA par rapport à la tension de sortie V_s la valeur de linéarisation D_1 est choisie arbitrairement dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{\nu}\right]$, alors que toutes les autres valeurs D_{n+1}, $n = 1, \ldots, \nu - 1$ sont déterminées en imposant les conditions :

$$C(I_4 - A_{n+1}^x)^{-1}\left(B_{n+1}^d \begin{bmatrix} D_{n+2} \\ V_e \end{bmatrix} + f_{n+1}\right) = C(I_4 - A_{n+2}^x)^{-1}\left(B_{n+2}^d \begin{bmatrix} D_{n+2} \\ V_e \end{bmatrix} + f_{n+2}\right) \tag{3.61}$$

aux bornes inferieures et supérieures d'intervalles $\left[\frac{n}{\nu}, \frac{n+1}{\nu}\right], n = 0, \ldots, \nu - 2$, au niveau du point stationnaire $Y_e = CX_e = V_s$. Cependant, les dynamiques du modèle PWA présentent toujours des discontinuités par rapport aux trois autres variables d'état du modèle (voir les caractéristiques en régime permanant de la tension de sortie V_s de la Figure 3.3.2.4 (a) et du courant de l'inductance L_m de la Figure 3.3.2.4 (b) par exemple). Si l'on procède ensuite à la synthèse d'une loi de commande formulée sur ce modèle PWA discontinu, les performances du système en boucle fermé pourront être dégradées en raison de l'apparition du phénomène de réticence introduit par les discontinuités au niveau des dynamiques affines du modèle hybride.

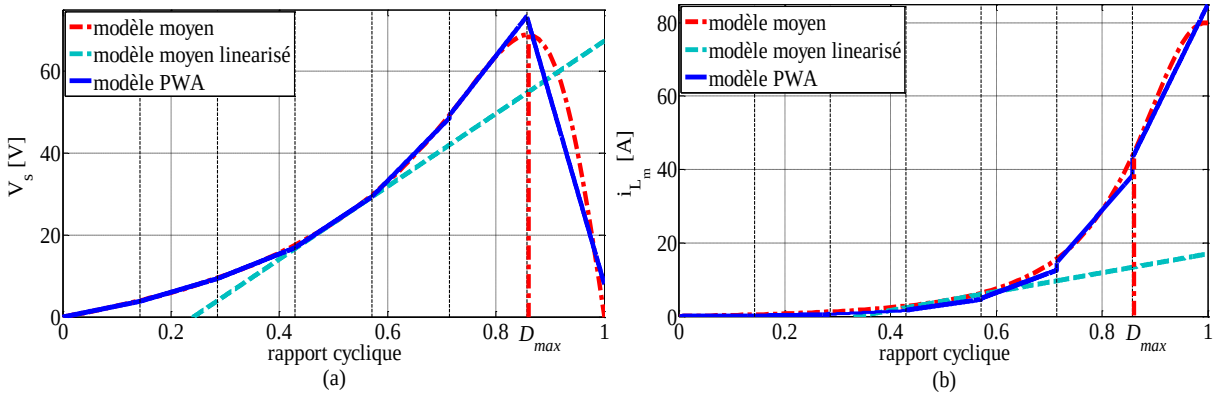


Figure 3.3.2.4 : Caractéristiques en régime permanent de la tension de sortie V_s (a) et du courant de l'inductance L_m (b) du modèle PWA continu par rapport à la tension de sortie et la résolution $\nu = 7$.

En conclusion, le choix des valeurs des points de linéarisation D_{n+1} est assez difficile si l'on veut assurer la continuité des dynamiques du modèle PWA par rapport à toutes les variables d'état. De ce fait la méthode de modélisation hybride est modifiée dans le cas du convertisseur flyback avec filtre d'entrée conformément l'approche abordée dans la référence [BMC+09].

Considérons que le modèle moyen à temps discret du convertisseur peut être écrit selon la forme suivante :

$$\begin{aligned} x(k) &= (A^d_{fermé}x(k) + B^d_{fermé}V_e)d(k) + (A^d_{ouvert}x(k) + B^d_{ouvert}V_e)(1-d(k)) \\ &= \underbrace{A^d_{ouvert}}_{A_m}x(k) + \underbrace{(A^d_{fermé} - A^d_{ouvert})}_{B_m}x(k)d(k) + \\ &\quad + \underbrace{(B^d_{fermé} - B^d_{ouvert})V_e}_{C_m}d(k) + \underbrace{B^d_{ouvert}V_e}_{D_m} \\ &= A_m x(k) + B_m x(k)d(k) + C_m d(k) + D_m \end{aligned} \tag{3.62}$$

où les matrices $A^d_{fermé}$, $B^d_{fermé}$, A^d_{ouvert}, B^d_{ouvert} sont les matrices $A_{fermé}$, $B_{fermé}$, A_{ouvert}, B_{ouvert} définies par l'équation (3.46) discrétisées avec le période d'échantillonnage T_e et la tension d'alimentation V_e est considérée constante. Ce modèle moyen est bilinéaire en raison du produit entre le vecteur d'état $x(k)$ et le rapport cyclique $d(k)$.

Par la suite, on détermine un modèle affine par morceaux à temps discret ayant l'expression :

$$\begin{aligned} &x(k+1) = A^x_j x(k) + B^u_j d(k) + f_j \\ &\text{si } d_j \le d(k) \le d_{j+1},\ j = 1,\ldots,\nu \end{aligned} \tag{3.63}$$

en utilisant plusieurs approximations affines du modèle moyen bilinéaire (3.62). Les valeurs d_j et d_{j+1} représentent les bornes inferieures et supérieures des intervalles du rapport cyclique pour lesquelles chaque approximation j est valide.

Un choix intuitif pour l'approximation du produit $x(k)d(k)$ dans la dynamique bilinéaire (3.62) est de remplacer la valeur du rapport cyclique $d(k)$ par la valeur moyenne de chaque intervalle $[d_j, d_{j+1}]$. Par conséquent, les dynamiques affines qui approchent le comportement du modèle moyen bilinéaire sur les intervalles $[d_j, d_{j+1}]$ sont données par :

$$x(k+1)=\left(A_m+B_m\frac{d_j+d_{j+1}}{2}\right)x(k)+C_m d(k)+D_m \quad \text{si } d(k)\in\left[d_j,d_{j+1}\right],\ j=1,...,\nu \tag{3.64}$$

Ainsi, les matrices du modèle PWA à temps discret (3.64) ont les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A_j^x &= A_m+B_m\frac{d_j+d_{j+1}}{2},\ j=1,...,\nu \\ B_j^u &= C_m \\ f_j &= D_m \end{aligned} \tag{3.65}$$

Cependant, cette procédure conduit à un modèle PWA dont les dynamiques affines sont toujours discontinues à travers les frontières d'intervalles $[d_j, d_{j+1}]$ du rapport cyclique $d(k)$ en régime stationnaire. La continuité peut être assurée si l'on impose des conditions de continuité en régime permanent pour le modèle PWA (3.64) directement liées au modèle moyen (3.62). Ces conditions de continuité permettent de déterminer les valeurs des matrices B_j^u et les termes affines f_j tels que la continuité des dynamiques affines du modèle PWA soit garantie.

D'un part, en utilisant le modèle moyen bilinéaire (3.62) les points de fonctionnement qui correspondent aux valeurs stationnaires du rapport cyclique d_j sont :

$$X_{m,j}^e=\left(I_4-A_m-B_m d_j\right)^{-1}(C_m d_i+D_m) \tag{3.66}$$

D'autre part, le modèle PWA (3.63), (3.65) fournit les expressions suivantes :

$$X_{j,j}^e=(I_4-A_j^x)^{-1}(B_j^u d_j+f_j) \tag{3.67}$$

$$X_{j,j+1}^e=(I_4-A_j^x)^{-1}(B_j^u d_{j+1}+f_j) \tag{3.68}$$

pour les points de fonctionnement calculés aux bornes inferieures et supérieures de chaque intervalle $[d_j, d_{j+1}]$. Les matrices A_j^x sont données dans l'équation (3.65), alors que B_j^u et f_j sont déterminés en imposant les conditions :

$$\begin{aligned} X_{j,j}^e &= X_{m,j}^e \\ X_{j,j+1}^e &= X_{m,j+1}^e \end{aligned} \tag{3.69}$$

Donc, on a huit conditions d'égalité (deux pour chaque variable d'état aux bornes inferieures et supérieures d'intervalles $[d_j, d_{j+1}]$) pour chaque dynamique j du modèle PWA. En choisissant les valeurs d_j et en utilisant les conditions (3.69) les matrices B_j^u et les termes affines f_j sont calculés avec la relation :

$$\begin{bmatrix} B_j^u \\ f_j \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \left(I_4-A_j^x\right)^{-1}\left[d_j I_4 \quad I_4\right] \\ \left(I_4-A_j^x\right)^{-1}\left[d_{j+1} I_4 \quad I_4\right] \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

En conséquence, le modèle PWA (3.63), (3.65) est développé à partir du modèle moyen du convertisseur et ses dynamiques affines sont continues sur les frontières de leurs intervalles de validité $[d_j, d_{j+1}]$ par rapport à toutes les variables d'état. Nous avons déterminé un modèle hybride définit sur sept intervalles de longueur égale ; c'est-à-dire qu'on a

$[d_j, d_{j+1}] = [\frac{j-1}{\nu}, \frac{j}{\nu}], j = 1, \ldots, \nu$ et $\nu = 7$. Pour cette résolution, les caractéristiques en régime permanent des variables d'état du système sont illustrées sur la Figure 3.3.2.5.

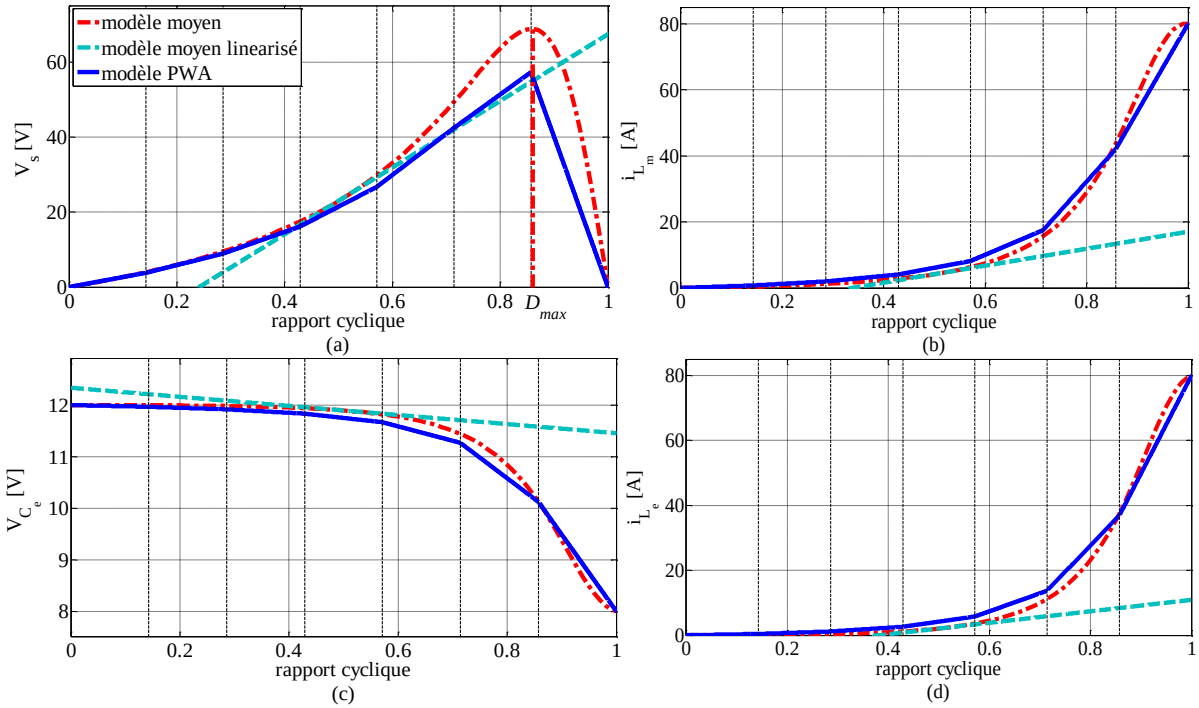


Figure 3.3.2.5 : Caractéristiques en régime permanent des variables d'état du modèle PWA avec les dynamiques affines continues à travers leurs intervalles de validité et la résolution $\nu = 7$.

On note le fait que le modèle PWA continu fournit une approximation satisfaisante du modèle moyen bilinéaire pour toutes les variables d'état du système. De même, le modèle hybride est beaucoup plus précis par rapport à la dynamique linéaire du modèle moyen.

Le comportement du modèle hybride (3.63), (3.65) avec une résolution $\nu = 7$ est évalué par des simulations effectuées en Matlab^{TM}/Simulink^{TM}. L'évolution des variables d'état du modèle PWA est comparée avec celles obtenues en utilisant le modèle bilinéaire (3.47)-(3.48) et le modèle moyen linéarisé autour du point $D = 0{,}512$ (3.50)-(3.51) à temps discret et également avec les signaux générés par le circuit en commutation, construit en utilisant la librairie SinPowerSystems^{TM}. Les Figures 3.3.2.6 et Figures 3.3.2.7 présentent les réponses du modèle PWA respectivement pour un changement du rapport cyclique du $D = 0{,}512$ à $D = 0{,}75$ et de $D = 0{,}512$ à $D = 0{,}3$. Pour la valeur initiale du rapport cyclique $D = 0{,}512$ le modèle hybride utilise la quatrième dynamique, alors que les deux autres valeurs $D = 0{,}75$, $D = 0{,}3$ permettent de visualiser le comportement de la sixième et la troisième dynamique du modèle PWA.

On constate que le modèle PWA approche d'une manière satisfaisante le comportement du circuit en commutation pour des points de fonctionnement différents. De plus, le modèle PWA développé fournit une meilleure approximation par rapport à toutes les variables d'état en comparaison avec le modèle moyen linéarisé autour de la valeur $D = 0{,}512$. Ce modèle est précis dans un voisinage de la valeur de linéarisation utilisée, mais pour de grandes variations du rapport cyclique, l'erreur du modèle est considérable. En conséquence, le modèle PWA approche le comportement du convertisseur flyback avec filtre d'entré fonctionnant en CCM avec une bonne précision dans tout le domaine de fonctionnement. De ce fait, il sera utilisé dans le chapitre suivant comme modèle de synthèse d'une loi de commande à gains commutés.

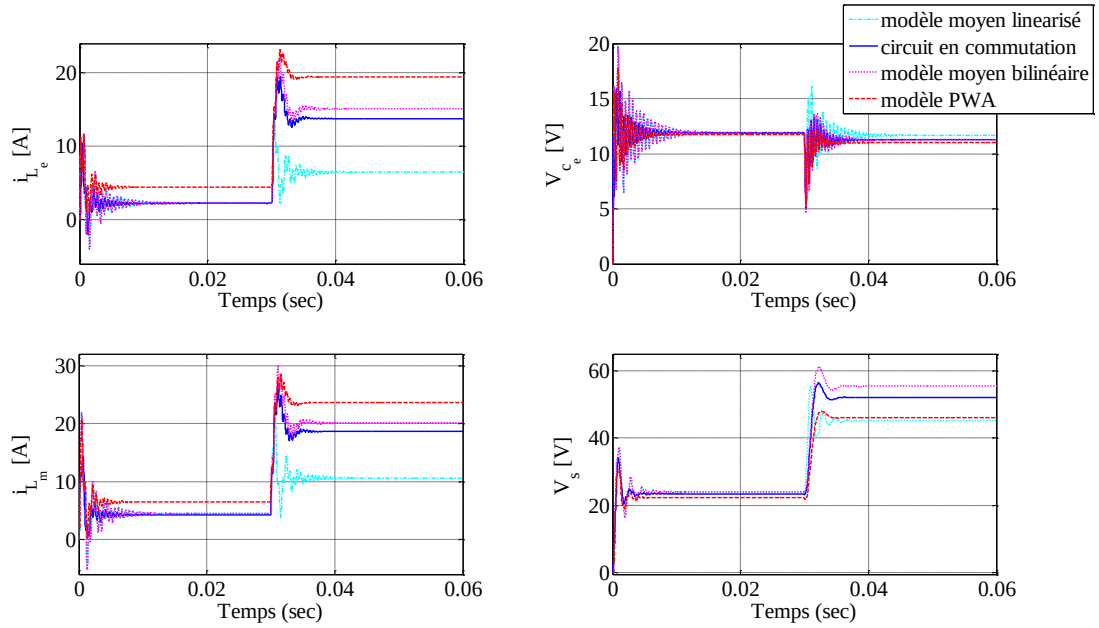


Figure 3.3.2.6 : Comportement du modèle PWA à temps discret avec la résolution $\nu = 7$ pour un changement du rapport cyclique $D = 0{,}512$ à $D = 0{,}75$.

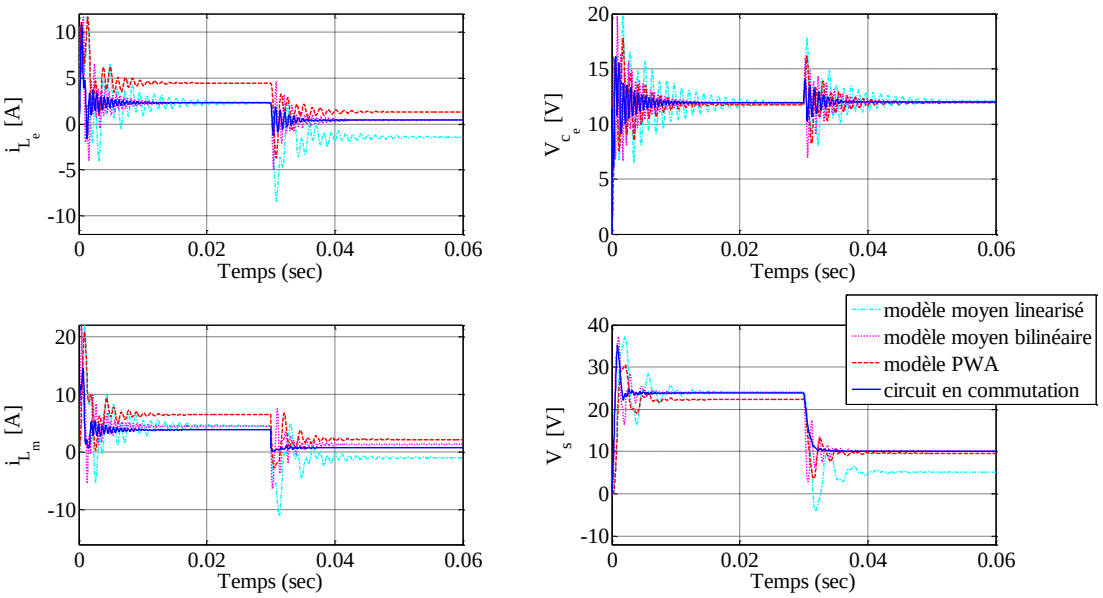


Figure 3.3.2.7 : Comportement du modèle PWA à temps discret avec la résolution $\nu = 7$ pour un changement du rapport cyclique $D = 0{,}512$ à $D = 0{,}3$.

3.4 Modélisation hybride caractérisant des transitions entre les deux modes CCM et DCM

Le comportement dynamique et les modèles mathématiques des convertisseurs de puissance DC-DC en mode de conduction discontinue diffèrent de façon significative de ceux caractéristiques au mode de conduction continue [MC76], [Vor90a], [LB96], [CM77], [Vor90b], [NTM01]. Pour ces raisons, les convertisseurs sont généralement conçus pour des domaines de tension d'alimentation et de puissance de sortie valides dans un des deux régimes de fonctionnement. Par conséquent, l'étape de modélisation et ensuite celle de synthèse des lois de commande sont faites séparément selon le mode de fonctionnement pour lequel le convertisseur a été conçu. Cependant, étant donné que dans les applications industrielles les performances exigées imposent des domaines d'opérations plus larges, les transitions entre les deux modes de conduction deviennent plus fréquentes. Cela justifie la nécessité des modèles mathématiques capables de prendre en compte le comportement dynamique du convertisseur en CCM et également en DCM, afin de pouvoir élaborer des lois de commande performantes quel que soit le mode de fonctionnement actif.

Par la suite, la méthode de modélisation hybride utilisée dans la Section 3.3.1 pour le convertisseur buck fonctionnant en mode de conduction continue, est étendue afin de caractériser le fonctionnement du convertisseur dans les deux modes CCM et DCM, tout en conservant les avantages du modèle hybride initial (formulation à temps discret, observation de l'évolution des variables d'état à l'intérieur de la période d'échantillonnage, choix de la précision du modèle). Tout en sachant que les deux modes de fonctionnement sont différenciés selon la valeur du courant de l'inductance : strictement positive en CCM et égale à zéro à la fin de chaque période de commutation en DCM, cette information est utilisée pour identifier le mode de fonctionnement présent, pendant que la dynamique active à chaque instant est sélectionnée également en fonction de la valeur du rapport cyclique.

3.4.1 Application à un convertisseur de type buck

Afin de réduire la complexité du modèle hybride caractérisant les modes CCM et DCM nous négligeons les éléments parasites r_l et r_c au niveau du circuit du convertisseur buck. Nous considérons également que la tension d'alimentation v_e est constante et égale à sa valeur nominale V_e. Le circuit idéal du convertisseur buck est illustré sur la Figure 3.4.1.1 avec les valeurs des paramètres données dans le Tableau 3.3.1.1.

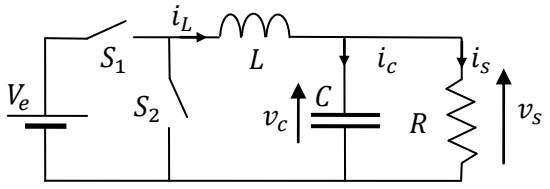


Figure 3.4.1.1 : Circuit idéal du convertisseur buck.

Les deux interrupteurs S_1 et S_2 sont la représentation schématique d'un transistor MOSFET qui génère le rapport cyclique $d \in [0,1]$ et d'une diode.

Dans un premier temps, les dynamiques exactes du convertisseur buck sont présentées séparément en mode de conduction continue et discontinue et de même le modèle moyen caractérisant l'évolution des variables d'état dans chaque mode de fonctionnement. Dans un deuxième temps, le modèle PWA à temps discret est adapté afin de caractériser le

comportement du convertisseur en CCM et également en DCM. Finalement, le modèle hybride est développé avec une résolution $\nu = 3$ et est évalué par des simulations effectuées avec Matlab™/Simulink™.

En fonction de la position des interrupteurs S_1 et S_2, le circuit présente deux états différents : S_1 – fermé, S_2 – ouvert (voir Figure 3.4.1.2 (a)) et S_1 – ouvert, S_2 – fermé (voir Figure 3.4.1.2 (b)) dans le mode de conduction continue, pendant que dans le mode de conduction discontinue un troisième état du circuit est possible : S_1 – ouvert, S_2 – ouvert (voir Figure 3.4.1.2 (c)) qui permet au courant d'inductance de rester à zéro jusqu'à la fin de la période de commutation $T_e = \frac{1}{F}$.

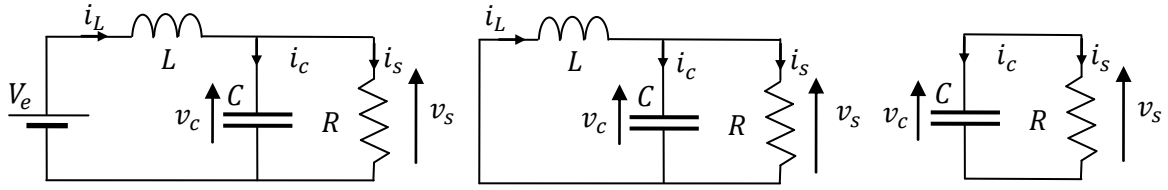


Figure 3.4.1.2 : Configurations du circuit idéal du convertisseur buck : en CCM ((a) et (b)), en DCM ((a), (b) et (c)).

Le vecteur d'état $x(t) = [i_L(t) \quad v_s(t)]^T$ est composé du courant de l'inductance i_L et de la tension de sortie v_s, égale à la tension v_c de la capacité C, car les pertes n'ont pas été prises en compte dans le modèle de synthèse.

La représentation dans l'espace d'état des dynamiques à temps continu décrivant le comportement du convertisseur en CCM est la suivante :

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_{fermé}x(t) + B_{fermé}V_e\,, & t \in [kT_e, (k+d(k))T_e] \\ A_{ouvert}x(t), & t \in [(k+d(k))T_e, (k+1)T_e] \end{cases} \tag{3.71}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{3.72}$$

où les matrices $A_{fermé}$, A_{ouvert}, $B_{fermé}$ et C sont données par :

$$A_{fermé} = A_{ouvert} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, B_{fermé} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.73}$$

$$C = [0 \quad 1]$$

Pour une tension d'alimentation V_e constante, la dynamique du modèle moyen à temps continu en mode de conduction continue a pour expression :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A_{fermé}d + A_{ouvert}(1-d)]x(t) + B_{fermé}V_e d \\ &= A_{fermé}x(t) + B_{fermé}V_e d \\ y(t) &= [Cd + C(1-d)]x(t) = Cx(t) \end{aligned} \tag{3.74}$$

Cette formulation est linéaire par rapport à l'état $x(t)$ et l'entrée de commande d du système.

Le point d'équilibre X_e du modèle moyen linéaire (3.74) et le rapport des tensions entrée/sortie ont les expressions décrites par les équations (3.24)-(3.25) avec $r_L = 0$:

$$X_e = \begin{bmatrix} I_L & V_S \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{DV_e}{R} & DV_e \end{bmatrix}^T, \frac{V_s}{V_e} = D \tag{3.75}$$

où *D* représente la valeur du rapport cyclique en régime stationnaire.

En mode de conduction discontinue, le convertisseur est caractérisé par trois dynamiques différentes à temps continu :

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_{fermé}x(t) + B_{fermé}V_e\ ,\ t \in \left[kT_e, \left(k + d_1(k)\right)T_e\right] \\ A_{ouvert}x(t),\ t \in \left[\left(k + d_1(k)\right)T_e, \left(k + d_2(k)\right)T_e\right] \\ A_{ouvert+i_L=0}x(t),\ t \in \left[\left(k + d_2(k)\right)T_e, \left(k+1\right)T_e\right] \end{cases} \tag{3.76}$$

avec :

$$A_{ouvert+i_L=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

La variable $d_1(k)$ représente le rapport cyclique, alors que la variable $d_2(k)$ indique l'instant de temps où le courant de l'inductance s'annule dans une période de commutation T_e. Tenant compte du fait que $d_1(k)$ en DCM et $d(k)$ en CCM ont la même signification, nous utilisons la notation $d_1(k) = d(k)$.

Dans le mode DCM, ces deux variables satisfont la condition : $d(k) + d_2(k) \in [0,1]$. La valeur de $d_2(k)$ est exprimée en fonction de celle du rapport cyclique $d(k)$, la tension d'alimentation V_e et la tension de sortie V_s. Afin de déterminer l'expression de $d(k)$ et $d_2(k)$, on considère les formes d'onde de la tension V_L de l'inductance et du courant i_L illustrées sur la Figure 3.4.1.3 (a) et (b).

On utilise également le fait que les composantes moyennes de la tension de l'inductance *L* et du courant du condensateur *C* sont nulles :

$$\langle v_L \rangle = 0 \tag{3.78}$$

$$\langle i_c \rangle = 0 \tag{3.79}$$

Comme la forme d'onde de tension $v_L(t)$ est rectangulaire (voir Figure 3.4.1.3 (a)), la composante continue a l'expression suivante :

$$\langle v_L \rangle = (V_e - V_s)d(k) - V_s d_2(k) \tag{3.80}$$

En utilisant les relations (3.78) et (3.80), on obtient la relation suivante pour la variable d_2 :

$$d_2(k) = \frac{V_e - V_s}{V_s} d(k) \tag{3.81}$$

Généralement, le rapport cyclique $d(k)$ (commande du système) est considérée connue. Cependant, la variable $d_2(k)$ est inconnue, il faut en conséquence l'éliminer de l'équation (3.81) en utilisant une relation additionnelle afin de déterminer l'expression du rapport entrée/sortie.

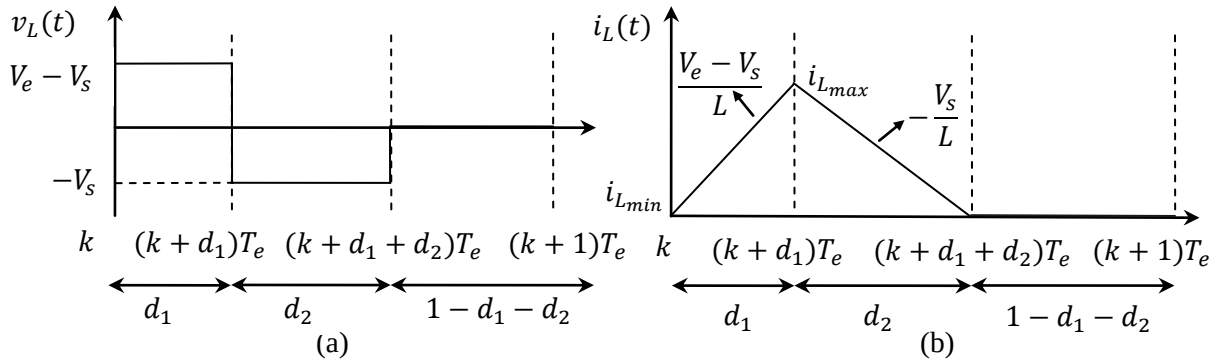


Figure 3.4.1.3 : Formes d'ondes de la tension V_L (a) et du courant i_L (b) en DCM.

La composante continue du courant de l'inductance est égale à la somme de la composante continue du courant par le condensateur *C* et celle du courant de la résistance de charge *R* :

$$\langle i_L \rangle = \langle i_c \rangle + \langle i_s \rangle \tag{3.82}$$

En prenant en compte l'équation (3.79) et la forme d'onde triangulaire de $\langle i_L(t) \rangle$ (voir Figure 3.4.1.3 (b)) on obtient l'équation de la forme :

$$\langle i_L \rangle = \frac{V_s}{R} = \frac{i_{L_{\max}}(d(k) + d_2(k))}{2} \tag{3.83}$$

où $i_{L_{max}}$ est calculé par le produit entre la pente et le premier intervalle de la période de commutation :

$$i_L(d_1 T_e) = i_{L_{\max}} = \frac{V_e - V_s}{L} d(k) T_e \tag{3.84}$$

Les équations (3.83) et (3.84) conduisent à la relation suivante :

$$\frac{V_s}{R} = \frac{(V_e - V_d) d(k)(d(k) + d_2(k)) T_e}{2L} \tag{3.85}$$

En conséquence, les relations (3.81) et (3.85) permettent d'obtenir le rapport entrée/sortie :

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4K}{d^2(k)}}}, K = \frac{2L}{RT_s} \tag{3.86}$$

Dans le mode DCM, la dynamique du modèle moyen du convertisseur est obtenue en moyennant les trois dynamiques (3.76) avec les valeurs de d, d_2 et $d_3 = 1 - d - d_2$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{(A_{fermé} d + A_{ouvert} d_2 + A_{ouvert+i_L=0} d_3)}_{A_{DCM}} x(t) + B_{fermé} V_e d \\ &= A_{DCM}(d) x(t) + B_{fermé} V_e d \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{3.87}$$

où les matrices $B_{fermé}$ et C sont définies comme dans l'équation (3.73) et la matrice A_{DCM} a la forme suivante :

$$A_{DCM} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{d(k)V_e}{LV_s} \\ \dfrac{d(k)V_e}{CV_s} & -\dfrac{1}{RC} \end{bmatrix} \tag{3.88}$$

On note que le modèle moyen en DCM est bilinéaire en raison du produit entre le rapport cyclique $d(k)$ et le vecteur d'état $x(t)$. Une dynamique linéaire peut être obtenue par la linéarisation du modèle (3.87) autour du point d'équilibre :

$$X_e = \begin{bmatrix} I_L & V_S \end{bmatrix}^T \text{ avec :}$$
$$I_L = \frac{V_s}{R}, V_s = \frac{2V_e}{1+\sqrt{1+\dfrac{4K}{d^2(k)}}}, K = \frac{2L}{RT_s} \tag{3.89}$$

Les modèles moyens (3.74) en CCM et (3.87) en DCM servent par la suite à définir un modèle affine par morceaux à temps discret.

L'idée de base de la modélisation hybride est maintenue : le découpage de la période d'échantillonnage en plusieurs sous-périodes de longueur égale à $\tau_e = \frac{T_e}{\nu}$ et la notation $\varepsilon(n), n = 0, \dots, \nu - 1$ pour les valeurs intermédiaires des variables d'état à l'intérieur de la période de commutation T_e. La différence consiste dans le nombre des modes possibles pour chaque sous-période n, $n = 0, \dots, \nu - 1$ dû au fait qu'il faut considérer l'instant où le courant d'inductance s'annule. Dans ce cas, pour chaque sous-période n six modes sont possibles :

- *mode 1* : l'interrupteur S_1 reste dans la position *fermée ;*
- *mode 2* : l'interrupteur S_1 reste dans la position *ouverte* et la valeur du courant par l'inductance i_L est positive *;*
- *mode 3* : l'interrupteur S_1 reste dans la position *ouverte* alors que le courant par l'inductance i_l est égal à zéro ;
- *mode 4* : l'interrupteur S_1 commute de la position *fermée* à la position *ouverte ;*
- *mode 5 :* l'interrupteur S_1commute de la position *fermée* à la position *ouverte* et le courant par l'inductance i_L s'annule à l'intérieur de la sous-période ;
- *mode 6 :* l'interrupteur S_1 reste dans la position *ouverte* lorsque le courant par l'inductance i_L décroit à zero à l'intérieur de la sous-période ;

Pour les premiers trois modes, les dynamiques exactes du convertisseur, discrétisées au préalable avec une période τ_e, sont appliquées dans la sous-période n respective. Les matrices qui caractérisent les dynamiques exactes du convertisseur à temps discret sont notées avec : $A^d_{fermé}$, $B^d_{fermé}$, A^d_{ouvert}, $A^d_{ouvert+i_L=0}$ et correspondent aux matrices d'équations (3.73), (3.77) discrétisées avec τ_e.

Concernant les modes décrivant des transitions : *mode 4, mode 5 et mode 6,* des modèles moyens linéarisés sont déterminés afin d'approcher le comportement du convertisseur dans la sous-période n où la transition se produit. On note que, dans une période de commutation entière T_e, une seule transition peut se produire. En conséquence,

l'approximation est faite uniquement pour une sous-période, alors que les dynamiques exactes sont utilisées dans les autres $\nu - 1$ sous-périodes.

Les dynamiques des modèles moyens utilisées pour décrire les modes 4, 5 et 6 sont déterminées par la suite.

En mode de conduction continue, le modèle moyen avec la commande $\nu d(k) - n$, $n = 0, \dots, \nu - 1$ est le suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{fermé}\, x(t) + \underbrace{B_{fermé}(\nu d(k) - n)}_{B_{CCM}} V_e = \\ &= A_{CCM_{n+1}}\, x(t) + B_{CCM_{n+1}} V_e = f(x(t), d(k), V_e) \end{aligned} \tag{3.90}$$

En mode de conduction discontinue, le modèle moyen complet (avec les trois dynamiques caractérisées par les matrices : $A_{fermé,}\ A_{ouvert}$, $A_{ouvert+i_L=0}$) pour une sous-période $n = 0, \dots, \nu - 1$ a l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{DCM_{3,n+1}}\, x(t) + \underbrace{B_{fermé}(\nu d(k) - n)}_{B_{DCM_{3,n+1}}} V_e = \\ &= A_{DCM_{3,n+1}}\, x(t) + B_{DCM_{3,n+1}} V_e = f(x(t), d(k), V_e) \end{aligned} \tag{3.91}$$

où la matrice $A_{DCM_{3,n+1}}$ est donnée par l'équation (3.88) avec $d(k)$ remplacé par $\nu d(k) - n$.

Dans ce mode de conduction, pour la sous-période où le courant d'inductance s'annule lorsque l'interrupteur S_1 est dans la position *ouvert*, le modèle moyen partiel (contenant uniquement les deux dynamiques caractérisées par les matrices : A_{ouvert} , $A_{ouvert+i_L=0}$ d'équations (3.73) et (3.77)) est calculé pour l'entrée $d'(k) = \nu(d(k) + d_2(k)) - s$, $s = n+1, \dots, \nu - 1$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_{ouvert} d'(k) + A_{ouvert+i_L=0}(1 - d'(k)))x(t) = \\ &= A_{DCM_{2,n+1,s+1}}\, x(t) = f(x(t), d(k)) \end{aligned} \tag{3.92}$$

En utilisant l'équation (3.81) pour la variable $d_2(k)$, la matrice $A_{DCM_{2,n+1,s+1}}$ a la forme suivante :

$$A_{DCM_{2,n+1,s+1}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\nu d(k) V_e - s V_s}{L V_s} \\ \dfrac{\nu d(k) V_e - s V_s}{C V_s} & -\dfrac{1}{RC} \end{bmatrix} \tag{3.93}$$

$$\text{avec } s = n+1, \dots, \nu - 1 \text{ pour } n = 0, \dots, \nu - 2$$

La valeur d'indice s est strictement positive, ceci est dû au fait que ce type de transition est défini par des valeurs du rapport cyclique $d(k)$ et de la somme $d(k) + d_2(k)$ qui appartiennent à des sous-périodes différentes. Par conséquent, la valeur de l'indice s est associée à la sous-période contenant la somme $d(k) + d_2(k)$, c'est-à-dire la sous-période où le courant i_L s'annule.

On note que les modèles moyens (3.90), (3.91), (3.92) s'expriment comme des fonctions $f(x, d, V_e)$ dépendantes du vecteur d'état et du rapport cyclique. Afin d'obtenir des

dynamiques linéaires de ces modèles moyens en mode de conduction continue et discontinue, on procède à leur linéarisation :

$$\dot{\tilde{x}} = \left.\frac{\partial f(x,d,V_e)}{\partial x}\right|_{\substack{x=X_{e,n+1}\\ d=D_{n+1}}} \tilde{x} + \left.\frac{\partial f(x,d,V_e)}{\partial d}\right|_{\substack{x=X_{e,n+1}\\ d=D_{n+1}}} \tilde{d}(k) \tag{3.94}$$

où les valeurs de linéarisation du rapport cyclique :

$$D_{n+1} = \frac{2n+1}{2\nu},\quad n = 0,...,\nu-1 \,\text{pour}\, d(k) \in \left[\frac{n}{\nu}, \frac{n+1}{\nu}\right] \tag{3.95}$$

ont été choisies au milieu de chaque sous-période n et les valeurs du point de linéarisation X_e sont les suivantes :

$$X_{e,n+1} = \begin{bmatrix} I_L \\ V_s \end{bmatrix},\ I_L = \frac{V_s}{R}, V_s = \begin{cases} D_{n+1}V_e \text{ en CCM} \\ \dfrac{2V_e}{1+\sqrt{1+\dfrac{4K}{D_{n+1}^2}}}, K = \dfrac{2L}{RT_s} \text{ en DCM} \end{cases} \tag{3.96}$$

Du fait que la tension de sortie V_s de l'équation (3.89) s'exprime en fonction du rapport cyclique $d(k)$, dans le terme $\frac{\partial f(x,d,V_e)}{\partial d}$, il faut également déterminer la dérivée de V_s par rapport au rapport cyclique d :

$$\frac{\partial V_s}{\partial d} = \frac{8KV_e}{\sqrt{1+\dfrac{4K}{d^2}}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{4K}{d^2}}\right)^2 d^3} \tag{3.97}$$

avant d'évaluer le terme $\frac{\partial f(x,d,V_e)}{\partial d}$ dans la valeur du rapport cyclique : $d = D_{n+1}$.

Les représentations dans l'espace d'état des modèles linéarisés à temps continu sont alors les suivantes :

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{cases} A^l_{CCM_{n+1}}\tilde{x} + B^l_{CCM_{n+1}}\tilde{d}(k), & \text{si mode 4} \\ A^l_{DCM_{3,n+1}}\tilde{x} + B^l_{DCM_{3,n+1}}\tilde{d}(k), & \text{si mode 5} \\ A^l_{DCM_{2,n+1,s+1}}\tilde{x} + B^l_{DCM_{2,n+1,s+1}}\tilde{d}(k), & \text{si mode 6} \end{cases} \tag{3.98}$$

avec les matrices $A^l_{CCM_{n+1}}$, $B^l_{CCM_{n+1}}$, $A^l_{DCM_{3,n+1}}$, $B^l_{DCM_{3,n+1}}$, $A^l_{DCM_{2,n+1,s+1}}$, $B^l_{DCM_{2,n+1,s+1}}$ données par :

$$A^l_{CCM_{n+1}} = A_{fermé},\ B^l_{CCM_{n+1}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\nu V_e}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^l_{DCM_{3,n+1}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{(\nu D_{n+1}-n)V_e}{LV_s} \\ \dfrac{(\nu D_{n+1}-n)V_e}{CV_s} & -\dfrac{1}{RC} \end{bmatrix},\ B^l_{DCM_{3,n+1}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{(\nu D_{n+1}-n)V_e}{LV_s}\left.\dfrac{\partial V_s}{\partial d}\right|_{d=D_{n+1}} \\ \dfrac{\nu V_e}{RC} - \dfrac{(\nu D_{n+1}-n)V_e}{RCV_s}\left.\dfrac{\partial V_s}{\partial d}\right|_{d=D_{n+1}} \end{bmatrix} \tag{3.99}$$

$$A^l_{DCM_{2,n+1,s+1}}=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\nu D_{n+1}V_e - sV_s}{LV_s} \\ \dfrac{\nu D_{n+1}V_e - sV_s}{CV_s} & -\dfrac{1}{RC} \end{bmatrix},\ B^l_{DCM_{2,n+1,s+1}}=\begin{bmatrix} -\dfrac{\nu V_e}{L}+\dfrac{\nu D_{n+1}V_e}{LV_s}\dfrac{\partial V_s}{\partial d}\Big|_{d=D_{n+1}} \\ \dfrac{\nu V_e}{RC}-\dfrac{\nu D_{n+1}V_e}{RCV_s}\dfrac{\partial V_s}{\partial d}\Big|_{d=D_{n+1}} \end{bmatrix}$$

La variable s prend une valeur de l'ensemble : $\{n+1, n+2, ..., \nu-2\}$, avec $n=0,...,\nu-2$ en fonction de la sous-période où le courant d'inductance s'annule.

En conséquence, les relations de mise-à-jour des valeurs intermédiaires $\varepsilon(n), n=0,..,\nu-1$ de l'état pour la n-ème sous-période sont les suivantes :

$$\varepsilon(n+1)=\begin{cases} A^d_{fermé}\varepsilon(n)+B^d_{fermé}V_e, & \text{si mode 1} \\ A^d_{ouvert}\varepsilon(n), & \text{si mode 2} \\ A^d_{ouvert+i_L=0}\varepsilon(n), & \text{si mode 3} \\ A^{l,d}_{CCM_{n+1}}(\varepsilon(n)-\varepsilon_{e,n})+B^{l,d}_{CCM_{n+1}}(d(k)-D_{n+1})+\varepsilon_{e,n+1}, & \text{si mode 4} \\ A^{l,d}_{DCM_{3,n+1}}(\varepsilon(n)-\varepsilon_{e,n})+B^{l,d}_{DCM_{3,n+1}}(d(k)-D_{n+1})+\varepsilon_{e,n+1}, & \text{si mode 5} \\ A^{l,d}_{DCM_{2,n+1,s+1}}(\varepsilon(n)-\varepsilon_{e,n})+B^{l,d}_{DCM_{2,n+1,s+1}}(d(k)-D_{n+1})+\varepsilon_{e,n+1}, & \text{si mode 6} \end{cases} \quad (3.100)$$

où les notations A^d_* et B^d_* indiquent le fait que les matrices A_* et B_* ont été discrétisées avec une période égale à la longueur τ_e d'une sous-période, et $\varepsilon_{e,n}$ représentent des points de linéarisation satisfaisant les relation suivantes :

$$\varepsilon_{e,n+1}=\begin{cases} A^d_{CCM_{n+1}}\varepsilon_{e,n}+B^d_{CCM_{n+1}}\Big|_{d(k)=D_{n+1}}V_e, & \text{si mode 4} \\ A^d_{DCM_{3,n+1}}\varepsilon_{e,n}+B^d_{DCM_{3,n+1}}\Big|_{d(k)=D_{n+1}}V_e, & \text{si mode 5} \\ A^d_{DCM_{2,n+1,s+1}}\varepsilon_{e,n}, & \text{si mode 6} \end{cases} \quad (3.101)$$

L'application de la relation (3.100) de façon consécutive conduit ainsi à un modèle affine par morceaux à temps discret de la forme :

$$\begin{aligned} &x(k+1)=A^x_q x(k)+B^u_q d(k)+f_q, \text{ avec } q=1,...,N_{dynamique} \\ &\text{si} \quad \frac{n}{\nu}\le d(k)\le\frac{n+1}{\nu},\ n=0,...,\nu-1 \\ &\quad \text{et} \begin{cases} d(k)+d_2(k)>1, & \text{en CCM} \\ \dfrac{p}{\nu}\le d(k)+d_2(k)\le\dfrac{p+1}{\nu},\ p=n,...,\nu-1, s=p \text{ pour } p>n & \text{en DCM} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.102)$$

qui décrit le comportement du convertisseur buck dans les deux modes de fonctionnement CCM et DCM. De manière générale, le nombre de dynamiques affines du modèle PWA à temps discret (3.102) est :

$$N_{dynamique}=\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}-1 \quad (3.103)$$

Le modèle PWA à temps discret (3.102) pour une résolution $\nu=3$ contient neuf dynamiques différentes selon la position du rapport cyclique $d(k)$ et la valeur du courant par l'inductance i_L à la fin de chaque sous-période, évaluée par la somme $d(k)+d_2(k)$. La

Figure 3.4.1.4 présente toutes les combinaisons possibles pour l'évolution du courant i_L en régime stationnaire : trois cas (voir Figure 3.4.1.4 (1), (5), (8)) pour le fonctionnement du convertisseur en mode de conduction continue et les autres six cas caractérisant le mode de conduction discontinue.

Chaque dynamique du modèle PWA avec $\nu = 3$ présente un point d'équilibre local noté x_q^e, $q = 1, \dots, N_{dynamique}$. Par la suite, on prend l'exemple du cas illustré sur la Figure 3.4.1.4 (4) afin de montrer la méthode de calcul du point d'équilibre x_4^e et la façon d'obtenir l'expression de la dynamique numéro 4 du modèle PWA à temps discret.

Dans ce cas, l'évolution de l'interrupteur S_1 et du courant i_L suit la séquence suivante :

$$\underbrace{(transition : S_1 - fermé \rightarrow S_1 - ouvert)}_{sous-période\ 1} \rightarrow \underbrace{S_1 - ouvert}_{sous-période\ 2} \rightarrow \underbrace{S_1 - ouvert + i_L = 0}_{sous-période\ 3}$$

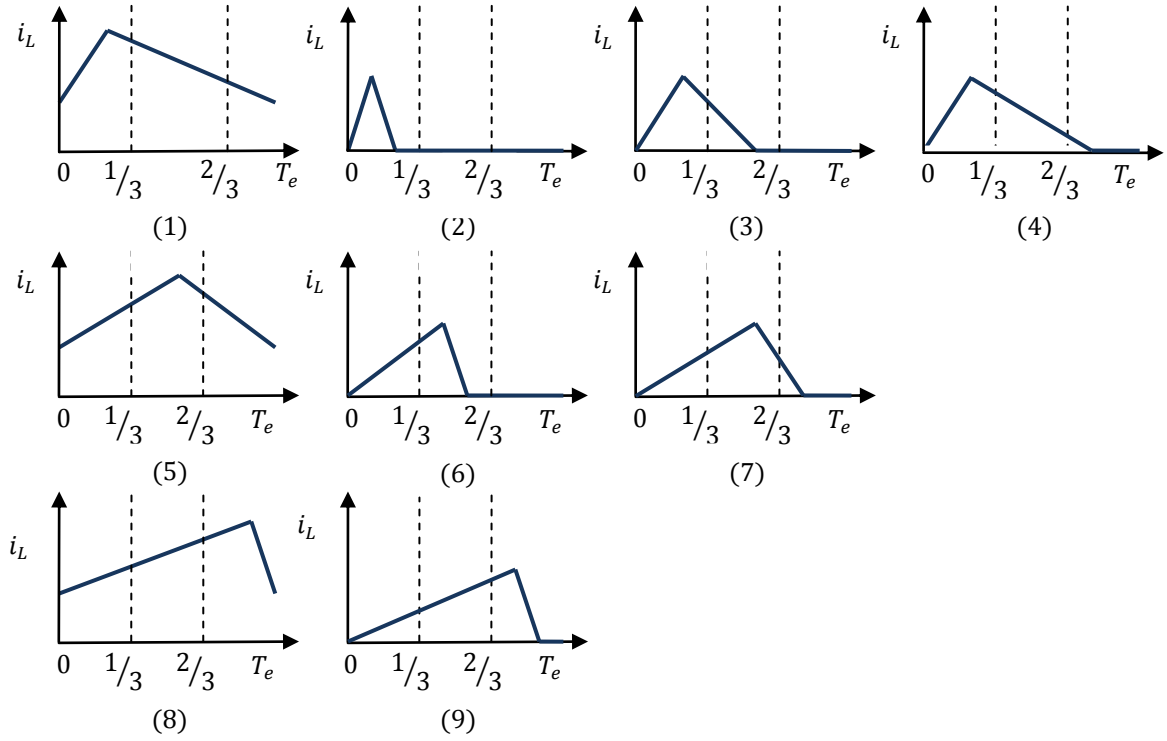


Figure 3.4.1.4 : Formes d'onde du courant par l'inductance en régime permanent sur une période d'échantillonnage et pour une résolution $\nu = 3$.

Par conséquent, dans l'équation (3.102) on a :

- $n = 0 : d(k) \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \Longrightarrow$ cette valeur de la variable n est utilisée pour la dynamique du *mode 4* dans les équations (3.98)-(3.99), lorsque l'interrupteur S_1 commute de la position *fermée* dans la position *ouverte* pendant la première sous-période ;
- $p = 2 : d(k) + d_2(k) \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \Longrightarrow s = 2$ pour la dynamique du *mode 6* dans l'équation (3.98)-(3.99), lorsque le courant traversant l'inductance s'annule à l'intérieur de la troisième sous-période.

Comme la transition de l'interrupteur S_1 se produit dans la première sous-période avec $n = 0$, la valeur du rapport cyclique utilisée pour le calcul des matrices associées aux *modes 4* et *6* dans l'équation (3.98)-(3.99) est $D_1 = \frac{1}{6}$.

En régime stationnaire, les équations qui décrivent les valeurs des variables d'état à la fin de chaque sous-période sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_4^1 &= A_{CCM_1}^d \varepsilon_4^0 + B_{CCM_1}^d V_e \\ \varepsilon_4^2 &= A_{ouvert}^d \varepsilon_4^1 \\ \varepsilon_4^3 &= A_{DCM_{2,1,3}}^d \varepsilon_4^2 \end{aligned} \tag{3.104}$$

où les matrices $A_{CCM_1}^d$, $B_{CCM_1}^d$ et $A_{DCM_{2,1,3}}^d$ représentent les matrices A_{CCM_1}, B_{CCM_1} de l'équation (3.90) et $A_{DCM_{2,1,3}}\big|_{d(k)=D_1}$ de l'équation (3.93) discrétisées avec la période τ_e.

En imposant que les valeurs de l'état au début et à la fin de la période de commutation soient égales : $\varepsilon_4^0 = \varepsilon_4^3$, on trouve l'expression du point $x_4^e[k] = \varepsilon_4^0$:

$$x_4^e[k] = (I_2 - A_{DCM_{2,1,3}}^d A_{ouvert}^d A_{CCM_1}^d)^{-1} A_{DCM_{2,1,3}}^d A_{ouvert}^d B_{CCM_1}^d V_e \tag{3.105}$$

Une fois que la valeur du point d'équilibre x_4^e est déterminée, les valeurs intermédiaires ε_4^1 et ε_4^2 sont calculées de manière récursive.

Alors, l'état à l'instant $k+1$ est obtenu en appliquant successivement les dynamiques des *modes* : *4*, *2* et *6* de l'équation (3.100) et en utilisant le point local d'équilibre x_4^e et les valeurs intermédiaires ε_4^1, ε_4^2 des équations (3.104) :

$$\begin{aligned} \varepsilon(1) &= A_{CCM_1}^{l,d}(\varepsilon(0) - x_4^e) + B_{CCM_1}^{l,d}(d(k) - D_1) + \varepsilon_4^1 \\ \varepsilon(2) &= A_{ouvert}^d \varepsilon(1) \\ \varepsilon(3) &= A_{DCM_{2,1,3}}^{l,d}(\varepsilon(2) - \varepsilon_4^2) + B_{DCM_{2,1,3}}^{l,d}(d(k) - D_1) + x_4^e \end{aligned} \tag{3.106}$$

Tout en sachant que $\varepsilon(0) = x(k)$ et $\varepsilon(3) = x(k+1)$, la dynamique numéro 4 du modèle PWA présente l'expression suivante :

$$x(k+1) = A_4^x x(k) + B_4^u x(k) + f_4 \tag{3.107}$$

avec :

$$\begin{aligned} A_4^x &= A_{DCM_{2,1,3}}^{l,d} A_{ouvert}^d A_{CCM_1}^{l,d} \\ B_4^u &= A_{DCM_{2,1,3}}^{l,d} A_{ouvert}^d B_{CCM_1}^{l,d} + B_{DCM_{2,1,3}}^{l,d} \\ f_4 &= x_4^e - A_4^x x_4^e - B_4^u D_1 \end{aligned} \tag{3.108}$$

La méthode de calcul du point local d'équilibre x_4^e et de la dynamique numéro 4 peut également être appliquée pour tous les autres cas illustrés sur la Figure 3.4.1.4. Cela conduit à un modèle PWA avec une résolution $\nu = 3$ valide dans les deux modes CCM et DCM de la forme :

$$x(k+1)=\begin{cases} A_1^x x(k)+B_1^u x(k)+f_1,\ \text{si}\ d\in\left[0,\frac{1}{3}\right], d+d_2>1 \\ A_2^x x(k)+B_2^u x(k)+f_2,\ \text{si}\ d\in\left[0,\frac{1}{3}\right], d+d_2\in\left[0,\frac{1}{3}\right] \\ A_3^x x(k)+B_3^u x(k)+f_3,\ \text{si}\ d\in\left[0,\frac{1}{3}\right], d+d_2\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right] \\ A_4^x x(k)+B_4^u x(k)+f_4,\ \text{si}\ d\in\left[0,\frac{1}{3}\right], d+d_2\in\left[\frac{2}{3},1\right] \\ A_5^x x(k)+B_5^u x(k)+f_5,\ \text{si}\ d\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right], d+d_2>1 \\ A_6^x x(k)+B_6^u x(k)+f_6,\ \text{si}\ d\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right], d+d_2\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right] \\ A_7^x x(k)+B_7^u x(k)+f_7,\ \text{si}\ d\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right], d+d_2\in\left[\frac{2}{3},1\right] \\ A_8^x x(k)+B_8^u x(k)+f_8,\ \text{si}\ d\in\left[\frac{2}{3},1\right], d+d_2>1 \\ A_9^x x(k)+B_9^u x(k)+f_9,\ \text{si}\ d\in\left[\frac{2}{3},1\right], d+d_2\in\left[\frac{2}{3},1\right] \end{cases} \quad (3.109)$$

En mode de conduction discontinue, la valeur du courant d'inductance i_L à la fin de la période de commutation T_e est égale à zéro. Cependant, le modèle PWA à temps discret (3.109) approche le courant d'inductance par une valeur supérieure à zéro en DCM. Afin d'améliorer l'approximation de la valeur du courant fournie par le modèle hybride à temps discret on introduit des éléments égaux à zéro dans la première ligne des matrices : $A^d_{DCM_{2,*}}, B^d_{DCM_{2,*}}, A^d_{DCM_{3,*}}, B^d_{DCM_{3,*}}$ utilisées dans le calcul des points d'équilibre locaux de chaque dynamique, et $A^l_{DCM_{2,*,*}}, B^l_{DCM_{2,*,*}}, A^l_{DCM_{3,*}}, B^l_{DCM_{3,*}}, A^{l,d}_{DCM_{2,*,*}}, B^{l,d}_{DCM_{2,*,*}}, A^{l,d}_{DCM_{3,*}}, B^{l,d}_{DCM_{3,*}}$ employées afin d'obtenir les dynamiques affines du modèle PWA (3.109). Ainsi, on peut écrire la forme générale de ces matrices comme :

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ * & *\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\ *\end{bmatrix} \quad (3.110)$$

L'influence des éléments égaux à zéro introduits dans les matrices mentionnées précédemment est la suivante :

- au niveau des matrices $A^{l,d}_*, B^{l,d}_*$, les zéros permettent de réduire les oscillations du modèle au démarrage, qui conduisent vers des valeurs négatives du courant traversant l'inductance ;
- au niveau des matrices A^d_*, B^d_* , les zéros influencent les valeurs des variables d'état en régime permanent ;
- au niveau de matrices A^l_*, B^l_* , les zéros influencent l'écart entre la tension de sortie fournie par le modèle PWA et la tension de sortie de référence.

Par conséquent, si on introduit des éléments égaux à zéro uniquement dans les matrices $A^{l,d}_*, B^{l,d}_*$ et A^d_*, B^d_* , on garantit une valeur nulle du courant par l'inductance à la fin de la période de commutation. En contrepartie, on obtient une erreur considérable entre la tension de sortie et sa valeur de référence. D'autre part, l'introduction d'éléments égaux à

zéro uniquement dans les matrices $A_*^{l,d}$, $B_*^{l,d}$ et A_*^l, B_*^l , fournit une meilleure approximation de la tension de sortie, alors que le courant dans l'inductance prend une valeur positive à la fin de la période de commutation.

La Figure 3.4.1.5 montre ces deux situations en considérant le point d'équilibre local x_4^e de l'exemple présenté précédemment, c'est-à-dire avant (Figure 3.4.1.5(a)) et après (Figure 3.4.1.5(b)) l'introduction d'éléments égaux à zéro sur la première ligne de la matrice $A_{DCM_{2,1,3}}^d$. La valeur du point d'équilibre x_4^e calculée à base du modèle PWA est comparée avec le point d'équilibre X_0 déterminé en utilisant les dynamiques exactes des *modes 1, 2* et *3*, discrétisées avec des périodes appropriées, et également avec la valeur du point d'équilibre $X_{e,1}$ de la relation (3.96), employée pour l'évaluation de la matrice $A_{DCM_{2,1,3}}^d$.

Le point d'équilibre X_0 est calculé avec la relation suivante :

$$X_0 = (I_2 - A^d_{ouvert+i_L=0} A^d_{ouvert} A^d_{fermé})^{-1} A^d_{ouvert+i_L=0} A^d_{ouvert} B^d_{fermé} V_e \qquad (3.111)$$

où les matrices $A^d_{fermé}$, $B^d_{fermé}$, A^d_{ouvert}, $A^d_{ouvert+i_L=0}$ correspondent respectivement aux matrices : $A_{fermé}$, $B_{fermé}$ discrétisées avec la période $D_1 T_e$, A_{ouvert} discrétisée avec la période $d_2 T_e$ et $A_{ouvert+i_L=0}$ discrétisée avec la période $(1 - D_1 - d_2)T_e$. La valeur de la variable d_2 est déterminée à partir de l'équation (3.81) avec $d(k) = D_1$, $V_s = \dfrac{2V_e}{1+\sqrt{1+\dfrac{4K}{d^2(k)}}}$, $K = \dfrac{2L}{RT_s}$ et $R = 22$ [Ω].

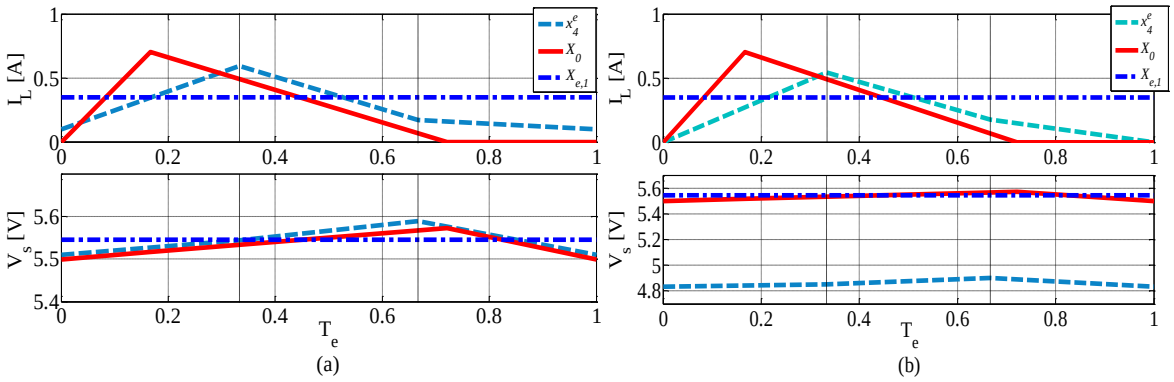


Figure 3.4.1.5 : Point d'équilibre x_4^e avant (a) et après (b) l'introduction d'éléments zéro dans la matrice $A^d_{DCM_{2,1,3}}$. Comparaison avec la valeur exacte du point d'équilibre X_0 et avec la valeur moyenne $X_{e,1}$.

Finalement, nous concluons qu'un modèle qui assure une bonne approximation au niveau du courant par l'inductance en mode de conduction discontinue est préférable à un modèle plus précis concernant la tension de sortie. Ainsi, les matrices $A_*^{l,d}$, $B_*^{l,d}$, A_*^d, B_*^d, A_*^l, B_*^l, modifiées conformément à l'équation (3.110), seront utilisées dans l'expression du modèle PWA (3.109).

Le comportement de ce modèle hybride est évalué par plusieurs simulations sous Matlab™/Simulink™. L'évolution des variables d'état est comparée avec les signaux générés par le circuit en commutation du convertisseur construit avec la libraire SimPowerSystems et,

en même temps, avec l'évolution des variables d'état fournies par le modèle moyen de l'équation (3.74) en CCM et (3.87) en DCM.

Plusieurs valeurs du rapport cyclique d et de la résistance de charge R ont été considérées dans le but de présenter le comportement des neuf dynamiques affines du modèle PWA (3.109). Ces valeurs sont données dans le Tableau 3.4.1.1.

V_e [V]	Rapport cyclique d	$R[\Omega]$	Dynamique du modèle PWA	Mode de fonctionnement
24	0.2	2	Dynamique 1	CCM
		300	Dynamique 2	DCM
		100	Dynamique 3	DCM
		22	Dynamique 4	DCM
	0.5	2	Dynamique 5	CCM
		10	Dynamique 6	DCM
		44	Dynamique 7	DCM
	0.75	2	Dynamique 8	CCM
		100	Dynamique 9	DCM

Tableau 3.4.1.1 : Valeurs du rapport cyclique et de la résistance de charge utilisées afin de simuler le comportement du modèle PWA avec une résolution $\nu = 3$.

Dans un premier temps on considère une valeur du rapport cyclique comprise dans l'intervalle $\left]0,\frac{1}{3}\right]$: $d = 0.2$ et une résistance de charge $R = 300[\Omega]$. Pour ces valeurs le convertisseur fonctionne en mode de conduction discontinue et le courant d'inductance s'annule dans le premier tiers de la période de commutation T_e. En utilisant un changement en échelon de la résistance de $R = 300[\Omega]$ à $R = 100[\Omega]$, le courant i_L atteint la valeur zéro dans le deuxième tiers de la période de commutation. Sur la Figure 3.4.1.6, le modèle PWA utilise la deuxième dynamique jusqu'à $t = 0{,}107$ s et ensuite la troisième dynamique. Également, les valeurs intermédiaires des variables d'état ont été représentées (trait pointillé). On constate la bonne précision du modèle PWA au niveau du courant dans l'inductance malgré l'écart (de l'ordre de 50%) au niveau de la tension de sortie. Comme mentionné précédemment une plus grande importance a été accordée à une bonne représentation du courant dans l'inductance.

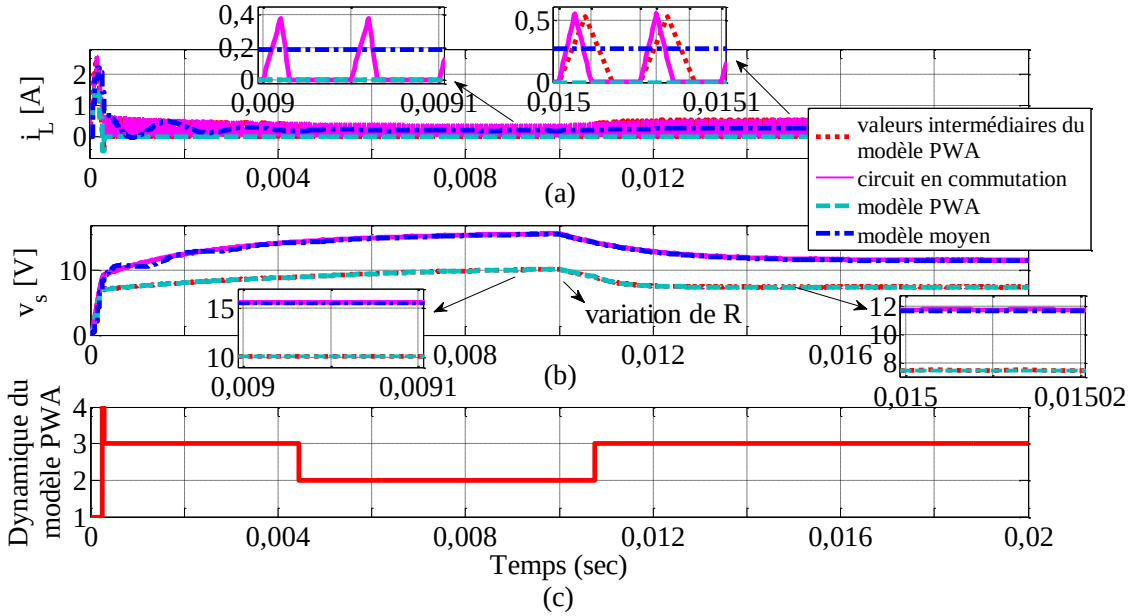


Figure 3.4.1.6 : Fonctionnement du convertisseur buck en DCM. Comportement des dynamiques 2 et 3 du modèle PWA à temps discret (résolution $\nu = 3$).

Pour un changement de résistance de la valeur initiale $R = 100[\Omega]$ à $R = 22[\Omega]$, le comportement des dynamiques 3 et 4 du modèle PWA est illustré sur la Figure 3.4.1.7. Ces valeurs de la résistance et un rapport cyclique $d = 0{,}2$ assurent toujours un fonctionnement du convertisseur buck en mode de conduction discontinue.

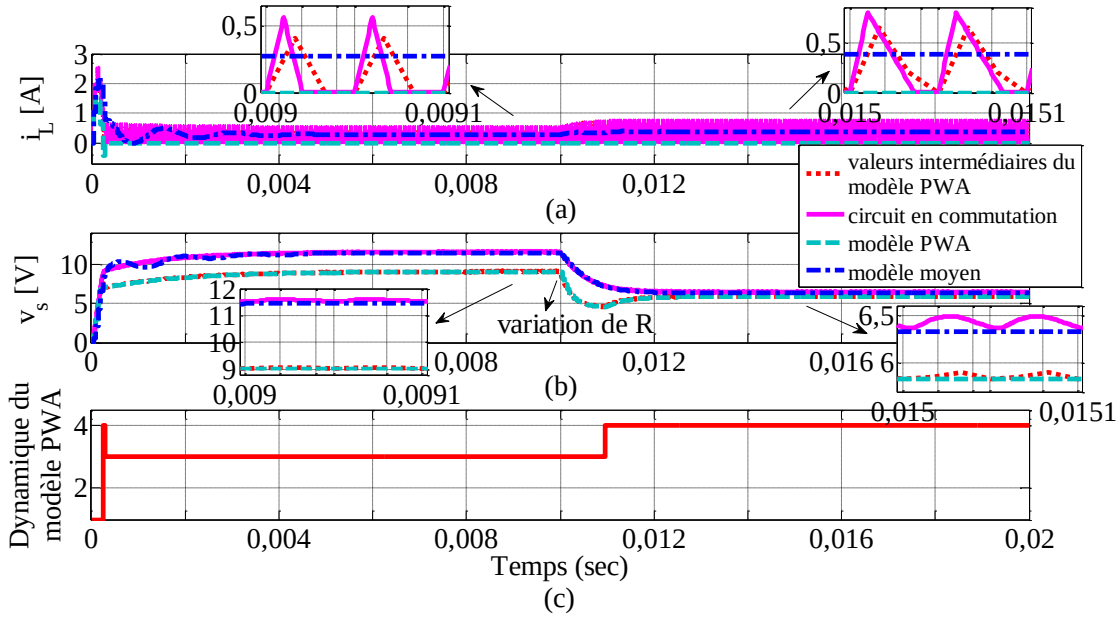


Figure 3.4.1.7 : Fonctionnement du convertisseur buck en DCM. Comportement des dynamiques 3 et 4 du modèle PWA à temps discret (résolution $\nu = 3$).

La Figure 3.4.1.8 présente la transition entre les deux modes de fonctionnement. Initialement, le convertisseur fonctionne dans le mode DCM avec une résistance $R = 22[\Omega]$. Si on diminue cette valeur à $R = 2\,[\Omega]$, le convertisseur passe en mode de conduction continue. On note que le modèle PWA est capable d'approcher le comportement du convertisseur buck en DCM et également en CCM.

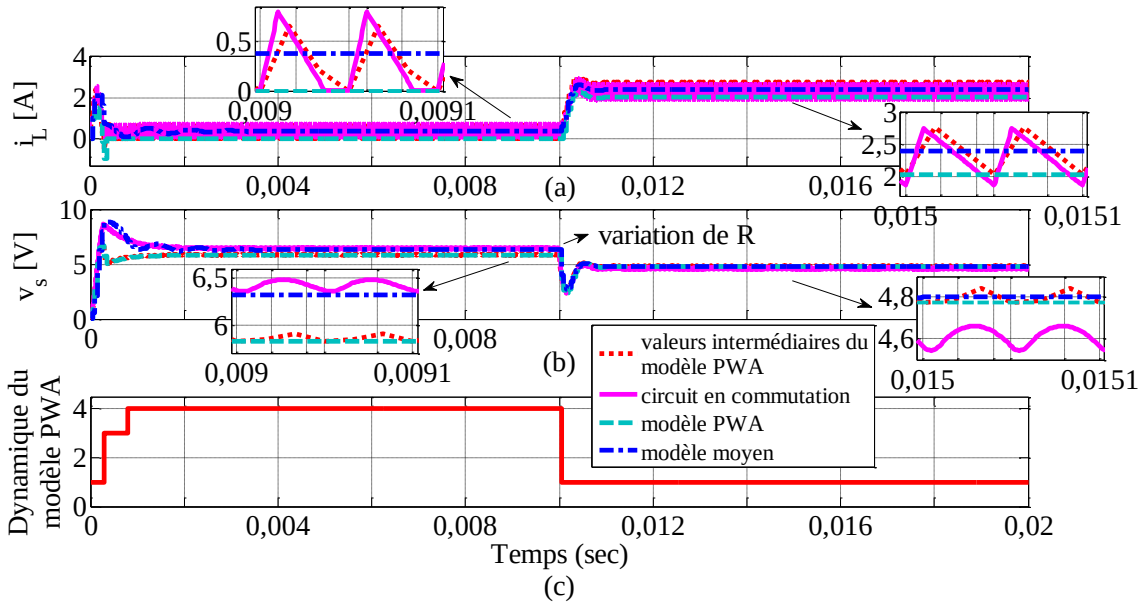


Figure 3.4.1.8 : Changement du mode de fonctionnement (DCM → CCM) du convertisseur buck Comportement des dynamiques 4 et 1 du modèle PWA à temps discret (résolution $\nu = 3$).

Afin de déterminer le mode de conduction, la condition suivante :

$$\begin{cases} \text{CCM} : d_2(k) \geq 1 - d(k) \\ \text{DCM} : d_2(k) \leq 1 - d(k) \end{cases} \tag{3.112}$$

$$d_2(k) = \frac{V_e - v_s(k)}{v_s(k)} d(k) + \frac{i_L(k) L}{v_s(k) T_e} \tag{3.113}$$

est vérifiée à chaque instant, en utilisant les valeurs des signaux $i_L(k)$ et $v_s(k)$ générés par le circuit en commutation.

L'expression (3.113) est déterminée en utilisant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} i_{L_{\max}}(k) - i_L(k) &= \frac{V_e - v_s(k)}{L} d T_e \\ i_{L_{\max}}(k) &= \frac{v_s(k)}{L} d_2(k) T_e \end{aligned} \tag{3.114}$$

qui ont été déduites de la forme d'onde du courant d'inductance en régime transitoire illustré dans la Figure 3.4.1.9.

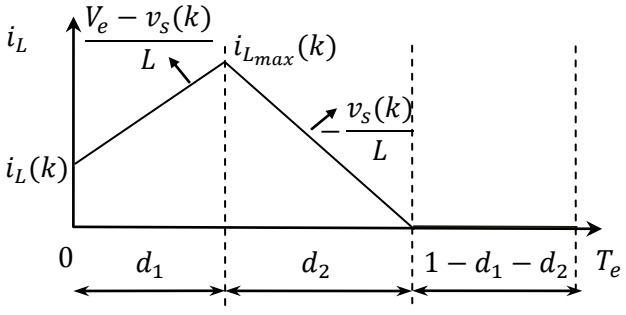


Figure 3.4.1.9 : Forme d'onde du courant par l'inductance en régime transitoire sur une période de commutation T_e.

Dans un deuxième temps, on considère la valeur du rapport cyclique : $d = 0{,}5$ qui appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$. En mode de conduction discontinue, l'évolution des variables d'états est présentée sur la Figure 3.4.1.10 pour une variation de la résistance de charge de $R = 100[\Omega]$ à $R = 44[\Omega]$.

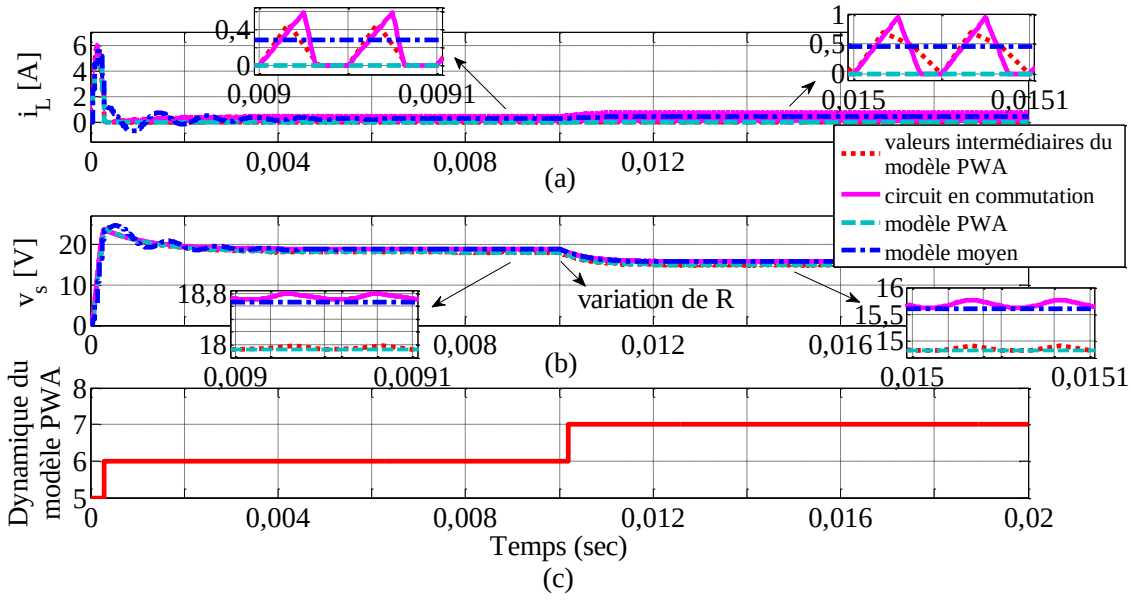


Figure 3.4.1.10 : Fonctionnement du convertisseur buck en DCM. Comportement des dynamiques 6 et 7 du modèle PWA à temps discret (résolution $\nu = 3$).

Pour un rapport cyclique $d = 0{,}5$, la transition en mode de conduction continue est réalisée par un changement de résistance de $R = 44[\Omega]$ à $R = 2[\Omega]$. Le comportement du convertisseur buck est illustré sur la Figure 3.4.1.11.

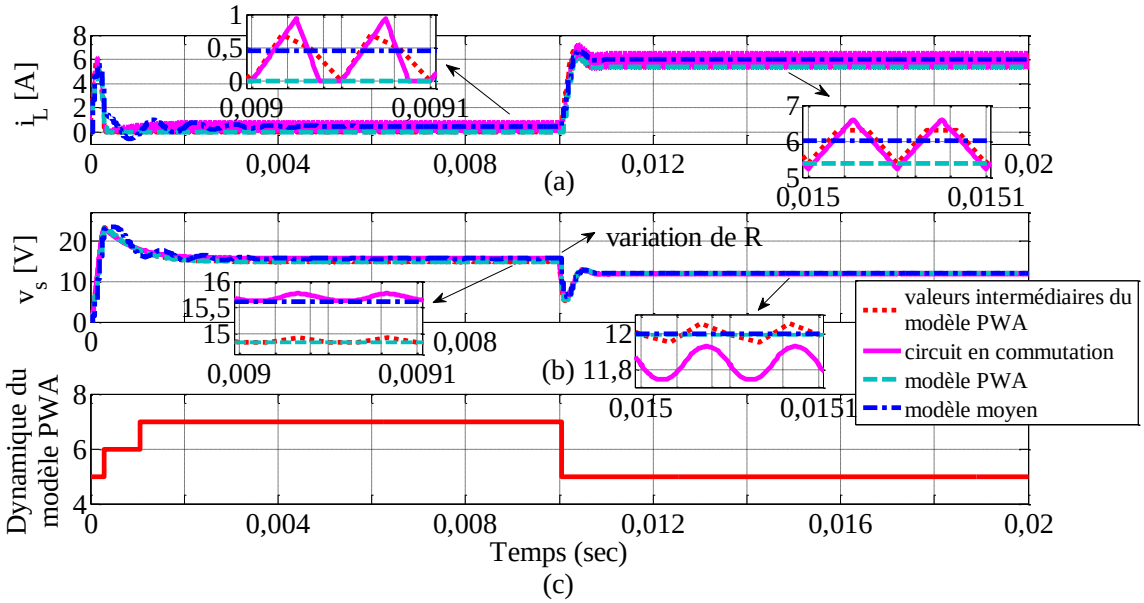


Figure 3.4.1.11 : Changement du mode de fonctionnement (DCM → CCM) du convertisseur buck Comportement des dynamiques 7 et 5 du modèle PWA à temps discret (résolution $\nu = 3$).

Finalement, la valeur du rapport cyclique est choisie dans l'intervalle $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$: $d = 0{,}75$. Pour une résistance de charge $R = 100[\Omega]$, le convertisseur fonctionne en DCM où le modèle

PWA utilise la neuvième dynamique affine. Lorsqu'on change la valeur de la résistance à $R = 2[\Omega]$, on génère une transition en CCM. Cette situation est présentée sur la Figure 3.1.1.12.

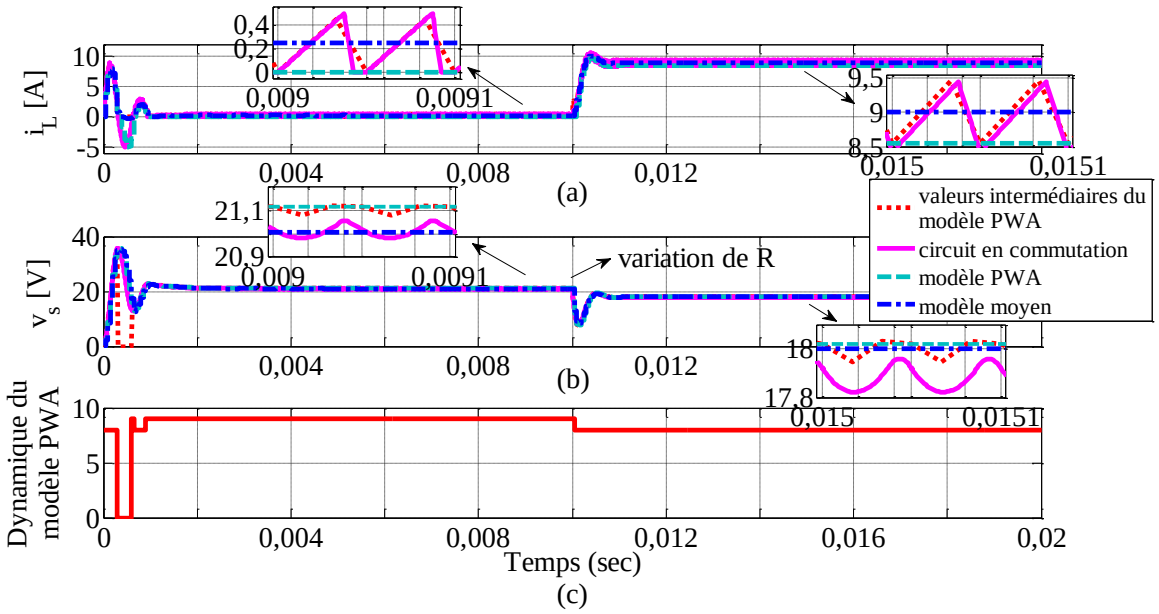


Figure 3.4.1.12 : Changement du mode de fonctionnement (DCM → CCM) du convertisseur buck
Comportement des dynamiques 9 et 8 du modèle PWA à temps discret (résolution $\nu = 3$).

En conclusion, le modèle affine par morceaux à temps discret (3.109) proposé reproduit le comportement du convertisseur d'une manière satisfaisante en mode de conduction continue et également en mode discontinue.

3.5 Conclusions

Dans le cadre du développement des lois de commande stabilisantes et robustes, des modèles mathématiques affines par morceaux à temps discret ont été déterminés pour des convertisseurs de puissance DC-DC fonctionnant à fréquence de commutation fixe. La méthode de modélisation proposée repose sur la partition de la période de commutation en ν sous-périodes. Le comportement dynamique est approché dans chaque sous-période par une dynamique affine à temps discret différente, ce qui permet d'obtenir un modèle PWA avec les dynamiques sélectionnées en fonction de la valeur d'entrée de commande (le rapport cyclique). Cette approche de modélisation a été abordée dans les deux modes de fonctionnement caractéristiques aux convertisseurs DC-DC : le mode de conduction continue et le mode de conduction discontinue.

En CCM, la technique de modélisation est appliquée, en particulier, sur deux convertisseurs DC-DC : tout d'abord, un convertisseur d'ordre deux (de type buck) qui nous a permis d'expliquer le principe et d'établir les étapes de la méthode proposée, et ensuite un convertisseur d'ordre quatre (de type flyback avec filtre d'entrée) qui présente un comportement fortement non-linéaire rencontré sur la majorité des convertisseurs DC-DC. Pour le deuxième convertisseur considéré, la méthode de modélisation a été adaptée afin d'assurer la continuité en régime permanent des dynamiques affines du modèle aux frontières d'intervalles de validité de chaque approximation. Après avoir présenté les détails de la technique de modélisation sur ces deux exemples, celle-ci pourra être appliquée facilement à

d'autres topologies de convertisseurs DC-DC. Dans les deux cas traités, il a été montré par plusieurs simulations que le modèle PWA approche d'une manière satisfaisante le comportement dynamique de chaque convertisseur dans l'ensemble du domaine de fonctionnement.

La méthode de modélisation a été étendue, afin de pouvoir représenter le comportement dynamique du convertisseur buck fonctionnant séparément en CCM ou DCM et également pour des transitions entre ces deux modes de fonctionnement. Les simulations effectuées montrent que les dynamiques caractérisant le mode de fonctionnement discontinu fournissent une bonne approximation de la forme d'onde du courant d'inductance.

Le principal avantage des modèles PWA conçus est représenté par la possibilité de choisir la résolution ν désirée, directement liée à la précision et la complexité des modèles hybrides. Un modèle PWA très précis comprend implicitement un nombre élevé de dynamiques affines différentes. Par conséquent, il s'avère nécessaire de faire un compromis précision/complexité pour obtenir une approximation affine par morceaux satisfaisante et de faible complexité qui pourra servir pour la mise en place des stratégies de commande stabilisantes et performantes.

4 Commande par retour d'état à gains commutés en mode de conduction continue

Le principal objectif de nos travaux consiste dans la synthèse d'une loi de commande en vue de régler la tension de sortie d'un convertisseur de puissance DC-DC quelque soit les différentes perturbations possibles (changements de la tension d'alimentation et (ou) de la résistance de charge), afin de satisfaire un cahier de charges préalablement défini. Dans cette optique, il s'avère nécessaire de proposer des stratégies de commande performantes, capables de garantir la stabilité globale du système bouclé et d'assurer des performances satisfaisantes dans tout le domaine de fonctionnement du convertisseur. Le développement des stratégies de commande présente des difficultés liées au comportement non-linéaire, des convertisseurs DC-DC, généré par leur structure variable. Par conséquent, le développement d'un modèle précis qui reflète le comportement du circuit électronique d'un convertisseur, tout en restant suffisamment simple du point de vue mathématique, est essentiel. À cet effet, nous avons opté, dans le Chapitre III, pour une approche de modélisation hybride en mode de conduction continue, qui conduit à un modèle affine par morceaux (PWA) avec une résolution ajustable et qui peut s'appliquer facilement à différentes topologies de convertisseurs. La méthode de modélisation proposée permet d'obtenir une bonne approximation de la dynamique d'un convertisseur dans tout le domaine de fonctionnement d'une part, et une structure du modèle hybride adaptée aux méthodes d'analyse de la stabilité et de synthèse de différents lois de commande d'autre part.

Par ailleurs, une autre difficulté réside dans la validation expérimentale d'une loi de commande. La complexité du régulateur élaboré selon la stratégie de commande adoptée peut rendre la loi de commande difficile à implanter en temps réel, et ce en raison du temps de calcul élevé par rapport à la période d'échantillonnage du système (les convertisseurs de puissance étant des systèmes rapides) ou par rapport aux ressources de calcul nécessaires.

Dans ce chapitre, nous proposons l'élaboration d'une loi de commande par retour d'état linéaire par morceaux (PWL) afin de réguler la tension de sortie à une valeur de référence désirée. La synthèse de cette loi de commande est formulée sur la base d'un modèle PWA qui décrit le comportement dynamique du convertisseur, fonctionnant en mode de conduction continue. Nous avons décrit, dans le Chapitre II (Section 2.2.3), les fondements théoriques et la synthèse d'une loi de commande PWL fondée sur une fonction de Lyapunov quadratique commune (la fonction de Lyapunov est la même pour toutes les régions du modèle PWA) ou sur une fonction de Lyapunov quadratique par morceaux (dans ce cas, il existe une fonction de Lyapunov quadratique pour chaque région de définition du modèle PWA). Cette approche conduit à l'obtention d'une loi de commande par retour d'état stabilisante définie par plusieurs vecteurs de retour différents, où chaque vecteur est attribué à l'une des dynamiques du modèle PWA. Dans les sections suivantes, cette commande à gains commutés est appliquée sur les modèles PWA développés dans le Chapitre III pour les convertisseurs buck et flyback avec filtre d'entrée, en mode de conduction continue. Pour chacune de ces deux topologies, la stratégie de commande PWL est adaptée afin de répondre aux objectifs envisagés. De même, l'analyse des performances de lois de commande PWL est réalisée grâce à des essais en simulation et leurs performances sont comparées aux résultats obtenus par des commandes « classiques » : un régulateur PI et une commande par retour d'état à gains fixes calculée par la méthode de placement de pôles. Afin d'analyser l'apport de l'approximation affine par morceaux dans la synthèse du correcteur, nous avons déterminé une loi de commande par retour d'état à gains fixes sur la base du modèle moyen linéaire de chaque convertisseur. L'élaboration de cette commande est fondée sur l'utilisation d'une

fonction de Lyapunov quadratique, ce qui assure la stabilité du système bouclé comme dans le cas de la commande par retour d'état PWL.

Pour le convertisseur buck, les résultats de l'analyse comparative effectuée en simulation sont complétés avec ceux fournis par des essais expérimentaux.

4.1 Application à un convertisseur de type buck

La stratégie de commande par retour d'état linéaire par morceaux (PWL) est appliquée sur le convertisseur buck avec la topologie du circuit idéal représenté sur la Figure 4.1.1. On peut constater que les pertes dans le circuit (représentées par r_L - la résistance interne de l'inductance L et r_C - la résistance en série du condensateur C) ne sont pas prises en compte pour la synthèse du correcteur PWL.

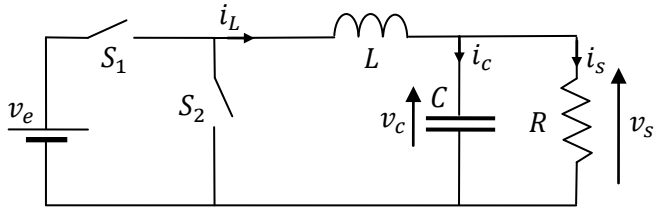


Figure 4.1.1 : Schéma du convertisseur buck sans pertes.

Avant de présenter notre approche, nous rappelons la forme du modèle affine par morceaux (PWA) à temps discret valide en CCM, obtenu pour les valeurs numériques des paramètres du convertisseur : $L,\ C,\ F,\ V_e$ et V_{ref} données dans la Table 3.3.1, une résistance de charge $R = 6\ [\Omega]$ et une résolution $\nu = 3$:

$$x(k+1) = A^x_{n+1}x(k) + B^u_{n+1}\begin{bmatrix} d(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} + f_{n+1}$$
$$\text{si} \quad \frac{n}{\nu} \le d(k) \le \frac{n+1}{\nu},\ n = 0,\ldots,\nu-1 \tag{4.1}$$

Les matrices B^u_{n+1} et les termes affines f_{n+1} présentent les expressions suivantes :

$$B^u_{n+1} = [B^d_{n+1} \quad B^{v_e}_{n+1}], \qquad B^d_{n+1} = \nu F^{d'}_{n+1}$$
$$f_{n+1} = -ct_{n+1}V_e - nF^{d'}_{n+1}, \quad B^{v_e}_{n+1} = F^{v_e}_{n+1} + ct_{n+1} \tag{4.2}$$

tandis que les matrices A^x_{n+1}, $F^{d'}_{n+1}$, $F^{v_e}_{n+1}$ et les vecteurs ct_{n+1} sont donnés par la relation (3.38) et V_e représente la valeur nominale de la tension d'alimentation.

Le modèle hybride (4.1)-(4.2) développé dans le cas général, présente deux entrées : la tension d'alimentation $v_e(k)$ et le rapport cyclique $d(k)$. Cependant, pour synthétiser la loi de commande PWL, nous avons opté pour une forme simplifiée du modèle affine par morceaux à temps discret pour lequel l'entrée est représentée uniquement par le rapport cyclique $d(k)$, alors que la tension d'alimentation est considérée constante. Par conséquent, le modèle PWA à temps discret est reformulé de la façon suivante :

$$x(k+1) = A^x_{n+1}x(k) + B^d_{n+1}d(k) + f''_{n+1} \tag{4.3}$$

$$\text{si} \quad \frac{n}{\nu} \le d(k) \le \frac{n+1}{\nu}, \; n = 0,\ldots,\nu-1$$

avec les termes affines f''_{n+1} donnés par la relation :

$$f''_{n+1} = F^{v_e}_{n+1} V_e - nF^{d'}_{n+1} \tag{4.4}$$

À partir de cette expression, le modèle PWA sera modifié afin de pouvoir servir comme modèle de synthèse de la loi de commande PWL.

Dans la Section 2.2.3 du Chapitre II, la synthèse d'une loi de commande linéaire par morceaux (PWL) [Fen02], [FCMM02] a été détaillée sur la base d'un modèle affine par morceaux (PWA) à temps discret autonome, pour lequel les termes affines sont nuls ($f_j = 0$). Ce type de modèle présente le point d'équilibre $x = 0$ et la loi de commande PWL, élaborée en utilisant une fonction de Lyapunov quadratique ou quadratique par morceaux, assure la stabilité asymptotique du point d'équilibre du système en boucle fermée. Afin de pouvoir appliquer ces notions théoriques sur le modèle PWA (4.3)-(4.4) du convertisseur buck, le modèle hybride est centré autour de l'un des points d'équilibres locales $x_{0,n+1}, n = 0,\ldots\nu-1$ de ses ν dynamiques affines. L'objectif est d'obtenir $x = 0$ comme point d'équilibre pour l'une des dynamiques du modèle PWA. Les points d'équilibre locaux sont calculés par la relation suivante :

$$x_{0,n+1} = (I_2 - A^x_{n+1})^{-1}(B^d_{n+1} D_{n+1} + f''_{n+1}), n = 0,\ldots,\nu-1 \tag{4.5}$$

où D_{n+1} représente les points de linéarisation utilisés dans l'étape de modélisation hybride et leurs valeurs sont données par l'équation (3.30).

En sachant qu'en mode de conduction continue, le domaine de fonctionnement du convertisseur est défini pour une tension d'alimentation et une puissance de sortie comprises, respectivement, dans l'intervalle $[20[\text{V}] - 30[\text{V}]]$ et l'intervalle $[10[\text{W}] - 100[\text{W}]]$, et que la tension de sortie de référence est $V_{ref} = 12[\text{V}]$, alors les points de fonctionnements admissibles dans ces marges correspondent aux valeurs du rapport cyclique appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}\right], \nu = 3$. De ce fait, nous avons choisi le point d'équilibre local $x_{0,n+1}, n = 1$, caractéristique à la seconde dynamique du modèle hybride. Ainsi, l'expression du modèle PWA à temps discret (4.3)-(4.4) centré dans le point d'équilibre $x_{0,2}$ est la suivante :

$$\begin{aligned} &\bar{x}(k+1) = A^x_{n+1}\bar{x}(k) + B^d_{n+1}\bar{d}(k) + \bar{f}''_{n+1} \\ &\text{si} \quad \frac{n}{\nu} - D_2 \le \bar{d}(k) \le \frac{n+1}{\nu} - D_2, \; n = 0,\ldots,\nu-1 \end{aligned} \tag{4.6}$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{x}(k) &= x(k) - x_{0,2} \\ \bar{d}(k) &= d(k) - D_2 \\ \bar{f}''_{n+1} &= A^x_{n+1} x_{0,2} + B^d_{n+1} D_2 + f''_{n+1} - x_{0,2} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dans cette formulation, la seconde dynamique du modèle est linéaire ($\bar{f}_2 = 0$), alors que les première et troisième dynamiques sont toujours affines ($\bar{f}_1 \neq 0$, $\bar{f}_3 \neq 0$).

Généralement, les régions du modèle PWA sont partagées en fonction des contraintes imposées sur les variables d'état, c'est-à-dire que le choix de la dynamique active à chaque pas d'échantillonnage est réalisé par l'évaluation de conditions qui impliquent le vecteur d'état $\bar{x}(k)$. Dans notre cas, les dynamiques du modèle hybride (4.6)-(4.7) dépendent uniquement de la valeur du rapport cyclique. Ainsi, nous avons ajouté l'entrée de commande au vecteur d'état $\bar{x}(k)$ afin de vérifier, à chaque instant, dans quelle région se trouve l'état et d'identifier la dynamique qu'il faut appliquer pour la mise-à-jour de l'état. Par ailleurs, l'intégrale de l'erreur de la tension de sortie est introduite dans le but d'éliminer l'écart entre la tension de sortie et la valeur de référence V_{ref} spécifiée.

Par conséquent, nous avons augmenté le vecteur d'état $\bar{x}(k)$ par deux états supplémentaires : l'entrée de commande et l'intégrale de l'erreur de la tension de sortie, à l'instant $k-1$:

$$\begin{aligned} \bar{d}(k) &= \bar{d}(k-1) + \Delta\bar{d}(k) \\ \bar{z}(k) &= \bar{z}(k-1) + \bar{v}_s(k) - \bar{v}_{ref}(k) \end{aligned} \tag{4.8}$$

où $\bar{v}_{ref}(k) = v_{ref}(k) - V_{ref}$.

Ainsi, le vecteur d'état modifié $\bar{x}_e(k)$ est composé par quatre états :

$$\bar{x}_e(k) = \begin{bmatrix} \bar{i}_L(k) & \bar{v}_s(k) & \bar{d}(k-1) & \bar{z}(k-1) \end{bmatrix}^T \tag{4.9}$$

et le modèle PWA à temps discret (4.3) étendu devient :

$$\begin{aligned} &\bar{x}_e(k+1) = A^x_{e,n+1}\bar{x}_e(k) + B^d_e\Delta\bar{d}(k) + \overline{f}''_{e,n+1} + H\bar{v}_{ref}(k) \\ &\text{si} \quad \frac{n}{\nu} - D_2 \le \bar{d}(k-1) \le \frac{n+1}{\nu} - D_2\,,\ n = 0,\ldots,\nu-1 \end{aligned} \tag{4.10}$$

où les matrices $A^x_{e,n+1}$ et les vecteurs B^d_e, $\overline{f}''_{e,n+1}$ et H sont égaux à :

$$\begin{aligned} A^x_{e,n+1} &= \begin{bmatrix} A^x_{n+1} & B^d_{n+1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ B^d_e &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \overline{f}''_{e,n+1} &= \begin{bmatrix} \overline{f}''_{n+1} & 0 \end{bmatrix}^T,\ H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{4.11}$$

Cette structure du modèle PWA permet l'identification de la région active au pas d'échantillonnage courant en utilisant une valeur du rapport cyclique connue, calculée au pas précédent. On peut constater que la commande de ce système est donnée par $\Delta\bar{d}(k)$, exprimée comme la différence entre deux valeurs consécutives du rapport cyclique.

La synthèse de la loi de commande à gains commutés est effectuée sur la base du modèle hybride étendu (4.10)-(4.11) avec les termes $\overline{f}''_{e,n+1} = 0$ et $H = 0$. Dans ce cas, l'entrée de commande du modèle PWA - $\Delta\bar{d}(k)$ présente la structure d'une commande par retour d'état linéaire par morceaux :

$$\Delta\bar{d}(k) = K_{n+1}\bar{x}_e(k), \forall\bar{d}(k-1) \in \left[\frac{n}{\nu} - D_2, \frac{n+1}{\nu} - D_2\right],\ n = 0,\ldots,\nu-1 \tag{4.12}$$

Elle est capable d'assurer la stabilité du système hybride en boucle fermée dans son domaine de validité. Pour chaque dynamique du modèle PWA à temps discret étendu (4.10)-(4.11) on cherche un gain $K_{n+1} \in R^{4x1}$, $n = 0,...,\nu-1$ différent, et, par conséquent, la valeur du rapport cyclique précédent sera utilisée pour le choix du gain appliqué à chaque pas d'échantillonnage.

Le correcteur stabilisant de la forme (4.12) est obtenu en considérant une fonction de Lyapunov quadratique par morceaux (PWQ) :

$$V\left(\bar{x}_e(k)\right) = \bar{x}_e^T(k) P_{n+1} \bar{x}_e(k) \tag{4.13}$$

où les matrices P_{n+1} sont symétriques ($P_{n+1} = P_{n+1}^T$) et définies positives ($P_{n+1} > 0$).

Le fait d'avoir une fonction de Lyapunov différente associée à chaque région de définition des dynamiques du modèle PWA diminue le degré de conservatisme de la méthode de synthèse.

La stabilité du système PWA (4.10)-(4.11) (avec $\bar{f}''_{e,n+1} = 0$ et $H = 0$) commandé par le correcteur (4.12) est garantie s'il existe de matrices P_{n+1} et des vecteurs du retour d'état K_{n+1} avec $n = 0,\ldots,\nu-1$ pour lesquels la valeur de la fonction de Lyapunov (4.13) est décroissante :

$$\Delta V(\bar{x}_e(k)) = V(\bar{x}_e(k)) - V(\bar{x}_e(k-1)) < 0 \tag{4.14}$$

pour chaque évolution de l'état du système en boucle fermée :

$$\begin{gathered} \bar{x}_e(k) = (A_{e,n+1}^x + B_e^d K_{n+1})\bar{x}_e(k-1) \\ \text{si} \quad \frac{n}{\nu} - D_2 \le \bar{d}(k-1) \le \frac{n+1}{\nu} - D_2,\ n = 0,\ldots,\nu-1 \end{gathered} \tag{4.15}$$

Les conditions de stabilité fondées sur la fonction de Lyapunov PWQ (4.13) s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{gathered} P_{m+1} > 0,\ m = 0,\ldots,\nu-1 \\ P_{n+1} - (A_{e,n+1}^x + B_e^d K_{n+1})^T P_{m+1}(A_{e,n+1}^x + B_e^d K_{n+1}) - Q_x - K_{n+1}^T R_u K_{n+1} > 0, \\ \forall (n,m) \in \{0,\ldots,\nu-1\} \end{gathered} \tag{4.16}$$

où Q_x et R_u représentent des matrices de pondération définies positive ($Q_x = Q_x^T, Q_x > 0$, $R_u = R_u^T, R_u > 0$) qui permettent d'ajuster les valeurs des gains afin d'obtenir les performances désirées. Les inégalités avec $n = m$ caractérisent l'évolution de l'état $x_e(k)$ à l'intérieur de la même région dans l'espace d'état, alors que les indices $n \neq m$ permettent de vérifier les conditions de stabilité pour des transitions de l'état entre deux régions différentes du modèle hybride. Par exemple, supposons qu'à l'instant $k-1$ la valeur du rapport cyclique $\bar{d}(k-1)$ est comprise dans le premier intervalle $[-D_2, \frac{1}{\nu} - D_2]$, alors $\bar{x}_e(k-1)$ appartient à la première région du modèle PWA. En appliquant la commande $\Delta d(k) = K_1 x_e(k)$, la valeur du

rapport cyclique $\bar{d}(k)$ peut se situer encore dans l'intervalle $[-D_2, \frac{1}{\nu} - D_2]$ ou peut appartenir à un intervalle diffèrent $[\frac{n}{\nu} - D_2, \frac{n+1}{\nu} - D_2]$, $n = 1, \ldots, \nu - 1$.

Cependant, il est suffisant de tester la décroissance de la fonction de Lyapunov PWQ pour les transitions admissibles du point de vue pratique. Dans notre cas, le modèle PWA fournit une bonne approximation du comportement du convertisseur buck dans tout son domaine de fonctionnement. En conséquence, on considère que les transitions possibles du point de vue théorique sont également admissibles du point de vue pratique. Cela signifie que pour le calcul des matrices P_{n+1} et des gains K_{n+1} de la commande par retour d'état PWL (4.12), avec $n = 0, \ldots, \nu - 1$ nous avons à résoudre un système de $\nu(\nu+1)$ d'inégalités : ν inégalités afin de vérifier si les matrices P_{n+1} sont définies positives, $\nu(\nu-1)$ inégalités caractérisant des évolutions de l'état entre des régions différentes et ν inégalités décrivant des évolutions de l'état à l'intérieure de la même région.

Afin de résoudre ce problème de faisabilité, les conditions de stabilité (4.16) sont reformulées sous la forme d'un système d'inégalités matricielles linéaires (LMI) par l'introduction des variables suivantes :

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= K_{n+1} Z_{n+1} \\ Z_{n+1} &= P_{n+1}^{-1} \end{aligned}, \; n = 0, \ldots, \nu - 1 \tag{4.17}$$

et par la multiplication à gauche et à droite d'inégalités (4.16) avec P_{n+1}^{-1}. En utilisant les propriétés des matrices P_{n+1} symétriques : $P_{n+1} P_{n+1}^{-1} = I$, $P_{n+1}^{-1} = P_{n+1}^{-T}$, les inégalités (4.16) se réécrivent comme :

$$\begin{gathered} Z_{n+1} > 0, \; n = 0, \ldots, \nu - 1 \\ Z_{n+1} - (A_{e,n+1}^{x} Z_{n+1} + B_e^d W_{n+1})^T Z_{m+1}^{-1} (A_{e,n+1}^{x} Z_{n+1} + B_e^d W_{n+1}) - Z_{n+1} Q_x Z_{n+1} - \\ - W_{n+1}{}^T R_u W_{n+1} > 0, \; \forall (n, m) \in \{0, \ldots, \nu - 1\} \end{gathered} \tag{4.18}$$

L'utilisation du complément de Schur (voir la Section 2.23 du Chapitre II) conduit au système de LMI suivant :

$$\begin{gathered} Z_{m+1} > 0 \\ \left[\begin{array}{c|ccc} Z_{n+1} & Z_{n+1} & W_{n+1}^T & (A_{e,n+1}^{x} Z_{n+1} + B_e^d W_{n+1})^T \\ \hline Z_{n+1} & Q_x^{-1} & 0 & 0 \\ W_{n+1} & 0 & R_u^{-1} & 0 \\ (A_{e,n+1}^{x} Z_{n+1} + B_e^d W_{n+1}) & 0 & 0 & Z_{m+1} \end{array}\right] > 0, \\ \forall (n, m) \in \{0, \ldots, \nu - 1\} \end{gathered} \tag{4.19}$$

Après avoir résolu le système d'inégalités (4.19), les matrices de Lyapunov P_{n+1} et les vecteurs de retour d'état K_{n+1}, $n = 0, \ldots, \nu - 1$ sont récupérés avec les relations :

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= Z_{n+1}^{-1} \\ K_{n+1} &= W_{n+1} Z_{n+1}^{-1} \end{aligned} \tag{4.20}$$

La loi de commande par retour d'état linéaire par morceaux, élaborée avec cette méthode de synthèse, permet de stabiliser le système autour du point de fonctionnement souhaité et d'assurer la stabilité pour une large gamme de variations de la charge R et de la tension d'alimentation v_e.

Pour le modèle PWA à temps discret (4.10)-(4.11) avec la précision $\nu = 3$, les vecteurs de retour d'état $K_{n+1}, n = \{0,1,2\}$ ont été calculés par la résolution d'un système de 12 inégalités matricielles linaires, avec les matrices de pondération : $R = 1$ et $Q = \mathrm{diag}([1 \quad 1 \quad 30000 \quad 1])$. La solution de ce problème de faisabilité conduit aux valeurs suivantes des vecteurs de retour d'état :

$$K_1 = [\text{-}0{,}0409 \quad \text{-}0{,}0024 \quad \text{-}1{,}2164 \quad \text{-}0{,}0068]$$
$$K_2 = [\text{-}0{,}0413 \quad \text{-}0{,}0024 \quad \text{-}1{,}2162 \quad \text{-}0{,}0068]$$
$$K_3 = [\text{-}0{,}0417 \quad \text{-}0{,}0024 \quad \text{-}1{,}2059 \quad \text{-}0{,}0069]$$

et des matrices $P_{n+1}, n = \{0,1,2\}$:

$$P_1 = 10^4 * \begin{bmatrix} 0{,}0359 & 0{,}0057 & 0{,}2644 & 0{,}0060 \\ 0{,}0057 & 0{,}0034 & 0{,}0377 & 0{,}0016 \\ 0{,}2644 & 0{,}0377 & 6{,}6629 & 0{,}0442 \\ 0{,}0060 & 0{,}0016 & 0{,}0442 & 0{,}0015 \end{bmatrix}, P_2 = 10^4 * \begin{bmatrix} 0{,}0359 & 0{,}0056 & 0{,}2610 & 0{,}0060 \\ 0{,}0056 & 0{,}0034 & 0{,}0330 & 0{,}0016 \\ 0{,}2610 & 0{,}0330 & 6{,}5812 & 0{,}0432 \\ 0{,}0060 & 0{,}0016 & 0{,}0432 & 0{,}0015 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = 10^4 * \begin{bmatrix} 0{,}0358 & 0{,}0055 & 0{,}2508 & 0{,}0060 \\ 0{,}0055 & 0{,}0034 & 0{,}0270 & 0{,}0015 \\ 0{,}2508 & 0{,}0270 & 6{,}4166 & 0{,}0411 \\ 0{,}0060 & 0{,}0015 & 0{,}0411 & 0{,}0015 \end{bmatrix}$$

On constate que les valeurs de vecteurs de retour d'état $K_{n+1}, n = \{0,1,2\}$ sont très proches. Cette ressemblance entre les valeurs obtenues provient du fait que les trois dynamiques du modèle hybride présentent un comportement similaire (la matrice A est la même pour toutes les dynamiques du modèle PWA). Également, la forte pondération appliquée sur le rapport cyclique au niveau de la matrice Q_x, permet l'obtention d'une commande moins rapide et, par la même des vecteurs $K_{n+1}, n = \{0,1,2\}$ avec des valeurs moins importantes. Par conséquent, le changement du vecteur de retour d'état utilisé, selon la valeur du rapport cyclique, n'apportera pas une amélioration significative dans le comportent dynamique du système bouclé. Cependant, la loi de commande par retour d'état PWL présente l'avantage d'assurer la stabilité du système dans tout son domaine de fonctionnement.

Résultats de simulation et validation expérimentale de la loi de commande à gains commutés

Les performances en boucle fermée du régulateur par retour d'état linéaire par morceaux sont analysées à partir des essais de simulation effectués par Matlab/Simulink™ sur le circuit en commutation du convertisseur buck. Ensuite, les résultats obtenus en simulations sont validés expérimentalement.

Afin d'analyser les performances de la stratégie de commande proposée, on va comparer les résultats obtenus avec ceux issus de l'utilisation de trois autres approches de commande linéaire : une régulation PI et deux commandes par retour d'état à gains fixes.

– *Régulateur PI*

Pour le régulateur PI, ayant la fonction de transfert $K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$, les paramètres $K_p = 0{,}003$ et $T_i = 3{,}1552\cdot 10^{-5}$ sont utilisés.

– *Commande par retour d'état obtenue par placement de pôles*

La commande par retour d'état est synthétisée par la méthode de placement de pôles. Le vecteur de retour d'état est déterminé en utilisant le modèle moyen à temps continu du convertisseur donné par l'équation (3.21). Ce modèle est linéaire pour une tension d'alimentation constante et prise égale à la valeur nominale $V_e = 24\,[\mathrm{V}]$. Afin d'assurer une erreur statique nulle, le vecteur d'état du modèle moyen linéaire est augmenté en ajoutant l'intégrale de l'erreur de la tension de sortie comme un troisième état : $\int\left(V_{ref} - v_s(t)\right)dt$. Pour le système étendu, on considère les pôles : $p = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}$, où (p_1, p_2) représentent une paire de pôles complexes conjugués et p_3 est un pôle réel de la forme :

$$p_{1,2} = \omega_0(-1 \pm i), \qquad p_3 = -\omega_1 \qquad \omega_* = 2\pi f_*$$

Les pôles complexes conjugués correspondent aux pôles d'une dynamique de deuxième ordre : $p_{1,2} = \omega_n(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})$ pour un amortissement $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. En choisissant cette valeur de l'amortissement, on a l'égalité suivante : $\xi = \sqrt{1-\xi^2}$, ce qui conduit à l'expression des pôles utilisée : $p_{1,2} = \omega_n\xi(-1 \pm i)$, où $\omega_0 = \omega_n\xi$. Les pôles en boucle fermée p_* ont été placés aux pulsations ω_* qui correspondent aux fréquences $f_0 = 0{,}91$ kHz et $f_1 = 1{,}26$ kHz, de telle manière que la commande par retour d'état atteint les performances du régulateur par retour d'état PWL pour les valeurs nominales. Ce choix de pôles a permis de déterminer le vecteur de retour suivant : $L = \begin{bmatrix} 0{,}1449 & 0{,}0014 & -223 \end{bmatrix}$. Ainsi, la valeur du rapport cyclique calculée à chaque pas présente l'expression : $d(t) = -Lx_e(t)$.

– *Commande par retour d'état sur la base d'une fonction de Lyapunov quadratique*

La loi de commande par retour d'état à gains fixes est élaborée en utilisant le modèle moyen (3.21) (linéaire pour une tension d'alimentation V_e constante) du convertisseur, discrétisé avec la période d'échantillonnage $T_e = \frac{1}{F}$. Par conséquent, la forme du modèle moyen à temps discret utilisé est la suivante :

$$\begin{aligned} &x(k+1) = A^d x(k) + B^d d(k) V_e,\ A = A_{fermé}, \\ &y(k) = Cx(k) \end{aligned} \tag{4.21}$$

où les matrices $A_{fermé}, B, C$ sont données par les relations (3.19) et (3.20) avec $r_L = r_C = 0$ et la notation *d* indique le fait que le modèle a été discrétisé avec la période T_e. Ce modèle est également augmenté avec l'intégrale de l'erreur de la tension de sortie :

$$z(k) = z(k-1) + v_s(k) - v_{ref}(k) \tag{4.22}$$

en vue d'éliminer une possible erreur statique.

Afin de pouvoir appliquer les notions théoriques qui permettent d'obtenir un vecteur de retour stabilisant, le modèle moyen augmenté à temps discret est centré pour les valeurs à l'équilibre de l'état et du rapport cyclique : (X_e, D), où X_e est donné par la relation (3.24) pour $r_L = r_C = 0$ et $D = V_{ref}/V_e$. Ainsi, le modèle de synthèse utilisé présente l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \bar{x}_a(k+1) &= A_a^d \bar{x}_a(k) + B_a^d \bar{d}(k) V_e + H v_{ref} \\ \bar{y}_a(k) &= C_a \bar{x}_a(k) \end{aligned} \tag{4.23}$$

avec :

$$\begin{aligned} x_a &= \begin{bmatrix} i_L(k) & v_s(k) & z(k) \end{bmatrix}^T \\ \bar{x}_a(k) &= x_a(k) - \begin{bmatrix} X_e ; 0 \end{bmatrix}, \ \bar{d}(k) = d(k) - D \\ A_a^d &= \begin{bmatrix} A^d & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}, B_a^d = \begin{bmatrix} B^d \\ 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T, C_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.24}$$

Si on considère l'entrée de commande du système sous la forme d'une commande par retour d'état :

$$\bar{d}(k) = K \bar{x}_a \tag{4.25}$$

et la fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(x(k)) = x^T(k) P x(k) \tag{4.26}$$

les conditions de stabilité du système en boucle fermée sont exprimées par l'ensemble d'inégalités suivant :

$$\begin{aligned} P &> 0 \\ P - (A_a^d + B_a^d K)^T P (A_a^d + B_a^d K) - K^T Q_x^m K - R_u^m &> 0 \end{aligned} \tag{4.27}$$

où $R_u^{mT} = R_u^m$, $R_u^m > 0$ et $Q_x^{mT} = Q_x^m$, $Q_x^m > 0$ représentent deux matrices de pondération symétriques et définies positives, permettant d'ajuster la valeur du vecteur de retour K.

En choisissant $R_u^m = 30000$ et $Q_x^m = \mathrm{diag}(\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \end{bmatrix})$, la résolution du système composé par deux inégalités matricielles linéaires conduit au vecteur de retour suivant :

$$K = \begin{bmatrix} -0{,}0425 & -0{,}0054 & -0{,}006 \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

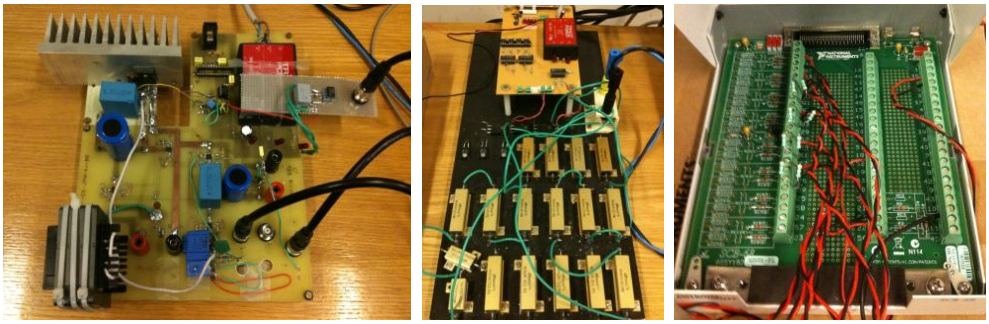
Ce vecteur de retour assure la stabilité au sens de Lyapunov du point d'équilibre désiré.

La valeur de la commande appliquée au convertisseur est représentée par la somme du rapport cyclique (4.25) calculé à chaque période d'échantillonnage et la valeur en régime stationnaire D : $d(k) = \bar{d}(k) + D$.

Afin de comparer le comportement du système en boucle fermée ainsi que les performances de lois de commande élaborées, nous avons considéré plusieurs scenarios de test, composés par des variations de la tension de référence et de la résistance de charge. Pour

chaque scenario de test, nous présentons les résultats obtenus en simulation sur le circuit en commutation du convertisseur buck et également ceux obtenus expérimentalement.

Le convertisseur utilisé pour les essais expérimentaux est présenté sur la Figure 4.1.2. Afin d'implanter les quatre stratégies de commandes linéaires, il s'avère nécessaire de mesurer le courant de l'inductance et la tension de sortie (pour le régulateur PI, la mesure de la tension de sortie est suffisante), de calculer la valeur du rapport cyclique à chaque période d'échantillonnage et, ensuite, d'envoyer le signal de commande au convertisseur. Le transfert de données entre le convertisseur et le PC est réalisé en utilisant un système d'acquisition et de commande « xPC Target ». La période de calcul de la valeur du rapport cyclique est de $50\mu s$ et correspond à la période de commutation du convertisseur buck. Cependant, l'acquisition des signaux est réalisée de façon séquentielle, ce qui introduit un délai de $4\mu s$ entre deux acquisitions consécutives. De même, la mesure des signaux et l'envoi du signal de commande ne sont pas synchronisés, ce qui peut influencer les performances des lois de commande proposées.



(b) (c)

Figure 4.1.2 : Prototype du convertisseur buck (a), banc de variation de charge (b) et carte d'acquisition « xPC Target ».

Le schéma de la loi de commande PWL est représenté sur le schéma de la Figure 4.1.3. Pour l'implantation de cette stratégie de commande, on utilise deux mesures : le courant dans l'inductance et la tension de sortie.

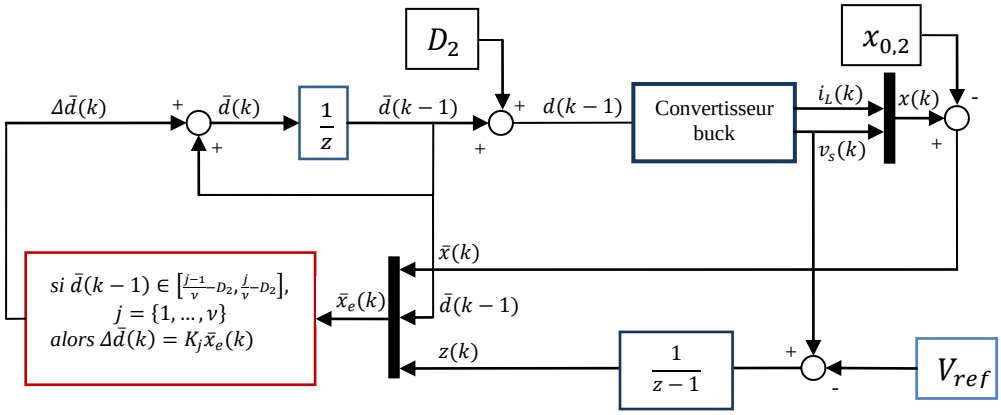


Figure 4.1.3 : Schéma de la commande à gains commutés.

Selon la valeur de la commande appliquée au pas d'échantillonnage précédent, on identifie le gain actif pour le calcul de la commande $\Delta\tilde{d}(k)$. Ensuite, la valeur du rapport cyclique $d(k)$ est récupérée afin d'être envoyée au convertisseur.

Dans un premier temps, la réponse en simulation du système par rapport à une variation de la tension de référence sous la forme d'un signal carré de $12[V] - 14[V] - 12[V]$ et le rapport cyclique généré sont représentés sur la Figure 4.1.4 et la Figure 4.1.5

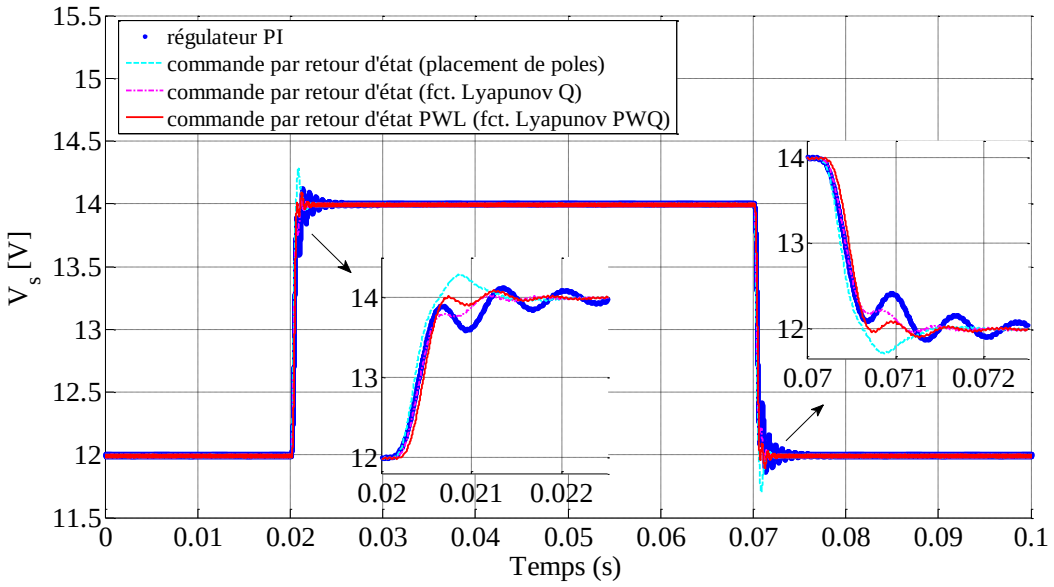


Figure 4.1.4 : Tension de sortie V_s obtenue en simulation pour une variation de consigne V_{ref} : 12[V] – 14[V] – 12[V].

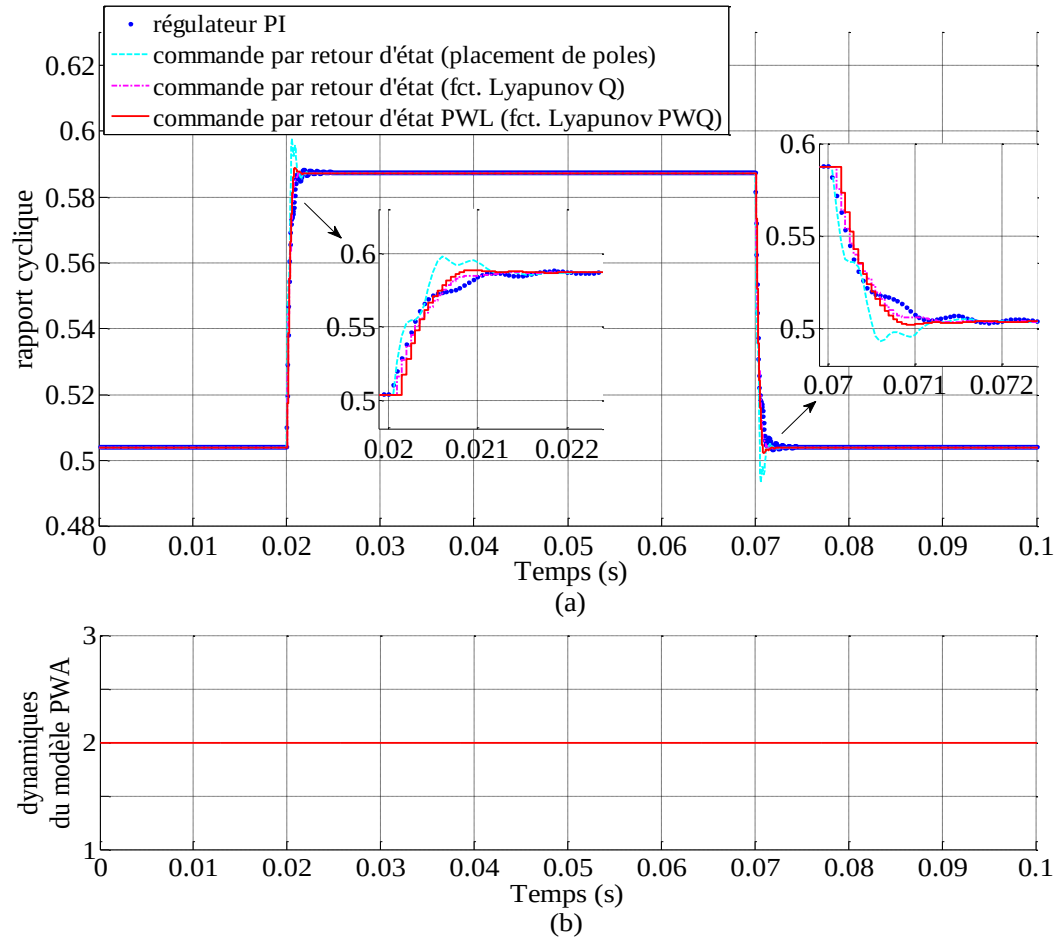


Figure 4.1.5 : Rapport cyclique (a) généré en simulation et dynamiques du modèle hybride (b) pour une variation de consigne V_{ref} : 12[V] – 14[V] – 12[V].

Dans ce cas, la commande par retour d'état à gains commutés et les deux commandes par retour d'état à gains fixes conduisent au même temps de réponse de 1,5 ms, qui est plus rapide que celui obtenu en utilisant le régulateur PI ($t_r = 3{,}5$ ms). Cependant, la commande PWL utilise toujours le vecteur de retour d'état caractéristique à la deuxième dynamique du modèle hybride, étant donné que la valeur du rapport cyclique reste dans l'intervalle $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$.

On note que la tension de sortie atteint la nouvelle valeur de référence avec une erreur statique nulle, pour les quatre lois de commande appliquées.

Le comportement du convertisseur obtenu expérimentalement vis-à-vis de la même variation de consigne est illustré sur la Figure 4.1.6. Le rapport cyclique et la dynamique active à chaque pas d'échantillonnage sont donnés sur la Figure 4.1.7.

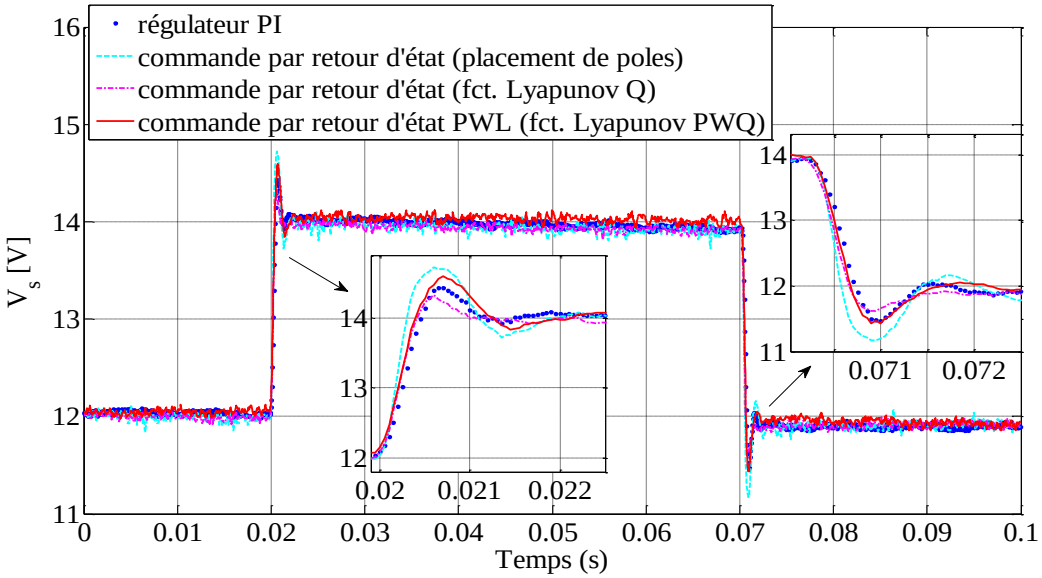


Figure 4.1.6 : Tension de sortie V_s obtenue expérimentalement pour une variation de consigne V_{ref} :12[V] – 14[V] – 12[V].

Les essais expérimentaux montrent un meilleur temps de réponse ($t_r = 1{,}5$ ms) du convertisseur, en utilisant la régulation PI et la commande par retour d'état à gains fixes synthétisée sur la base d'une fonction de Lyapunov quadratique. Pour cette dernière loi de commande, la tension de sortie présente le plus petit dépassement sur le front montant de la variation de consigne. En contre partie, la commande par retour d'état PWL et la commande par retour d'état à gains fixes obtenue par placement de pôles conduisent à un dépassement plus important et à un temps de réponse plus grand ($t_r = 2$ ms). Par ailleurs, en raison de bruits dans la chaine de mesures, le signal de commande est également «bruité» ce qui induit parfois un changement de région sur la dynamique du convertisseur (cf. Figure 4.1.7).

Dans un deuxième temps, la performance de la commande PWL est testée en présence de perturbations de la résistance de charge R et de la tension d'alimentation V_e. On a choisi de montrer la dynamique du convertisseur pour des variations de la charge, en utilisant des valeurs différentes de la tension d'alimentation : la valeur nominale $V_e = 24$[V] et les bornes de l'intervalle établie pour cette tension en CCM, respectivement, $V_e = 20$[V] et $V_e = 30$[V] . La réponse du système pour une variation de charge : $6[\Omega] - 3[\Omega] - 6[\Omega]$ obtenue en simulation et le rapport cyclique correspondant sont représentés, respectivement, sur la Figure

4.1.8 et la Figure 4.1.9. Les signaux de la tension de sortie et du rapport cyclique fournis expérimentalement sont donnés sur la Figure 4.1.10 et la Figure 4.1.11.

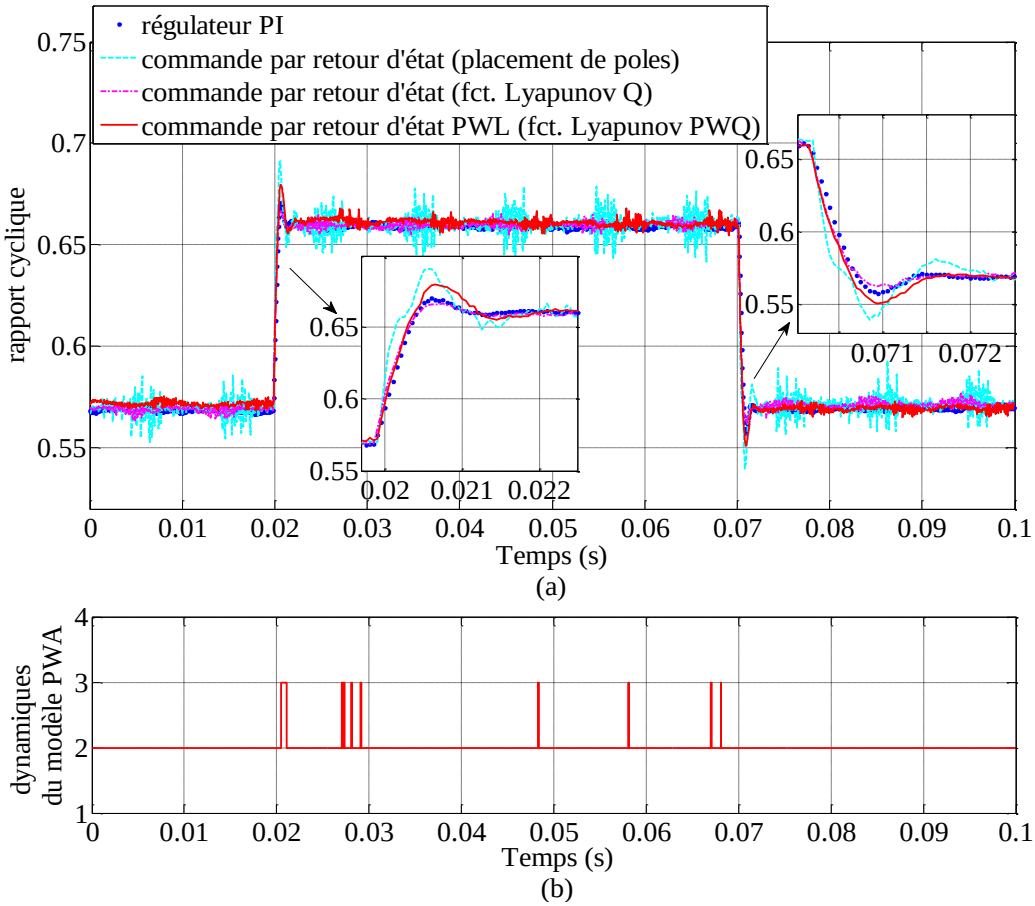


Figure 4.1.7 : Rapport cyclique (a) généré expérimentalement et dynamiques du modèle hybride utilisées (b) pour une variation de consigne V_{ref} : 12[V] – 14[V] – 12[V].

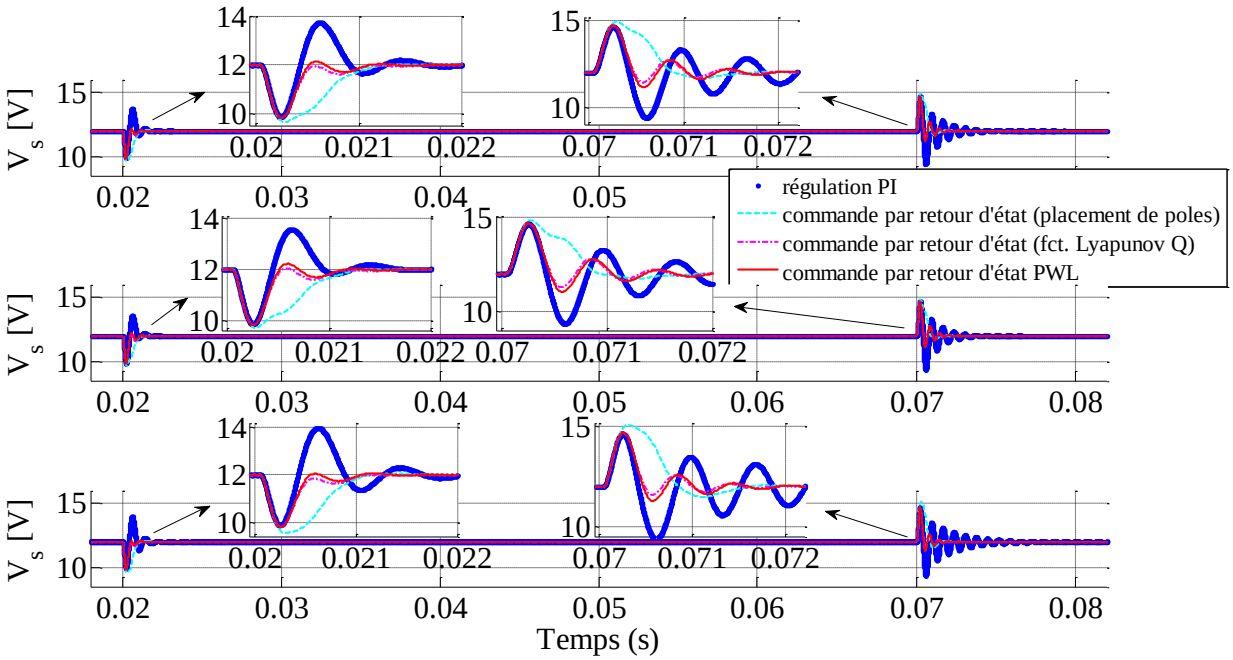


Figure 4.1.8 : Tension de sortie Vs obtenue en simulation pour une variation de la charge R : 6[Ω] – 3[Ω] - 6[Ω] à V_e = 24[V], V_e = 20[V] et V_e = 30[V].

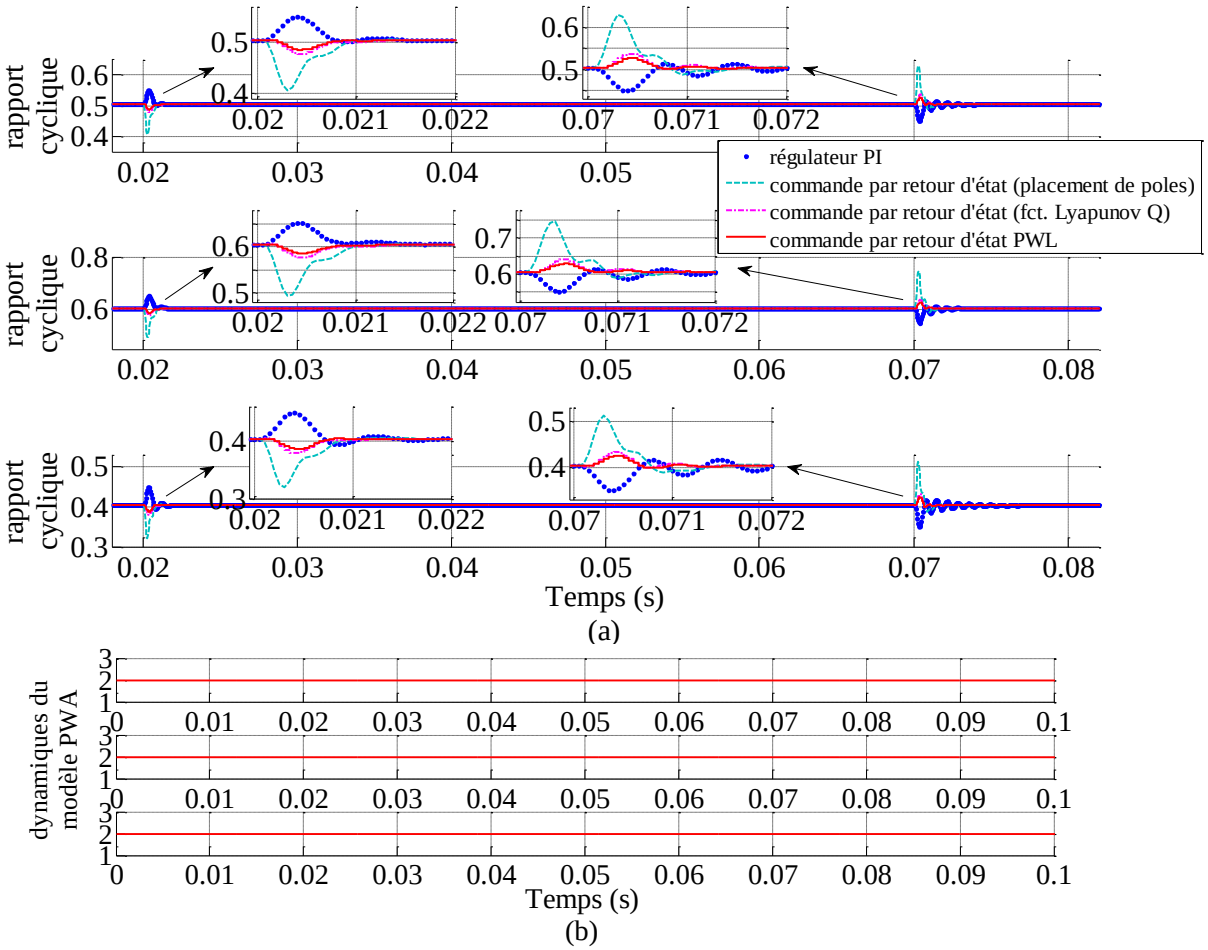


Figure 4.1.9 : Rapport cyclique (a) généré en simulation et dynamiques du modèle hybride (b) pour une variation de la charge R : 6[Ω] – 3[Ω] - 6[Ω] à V_e = 24[V], V_e = 20[V] et V_e = 30[V].

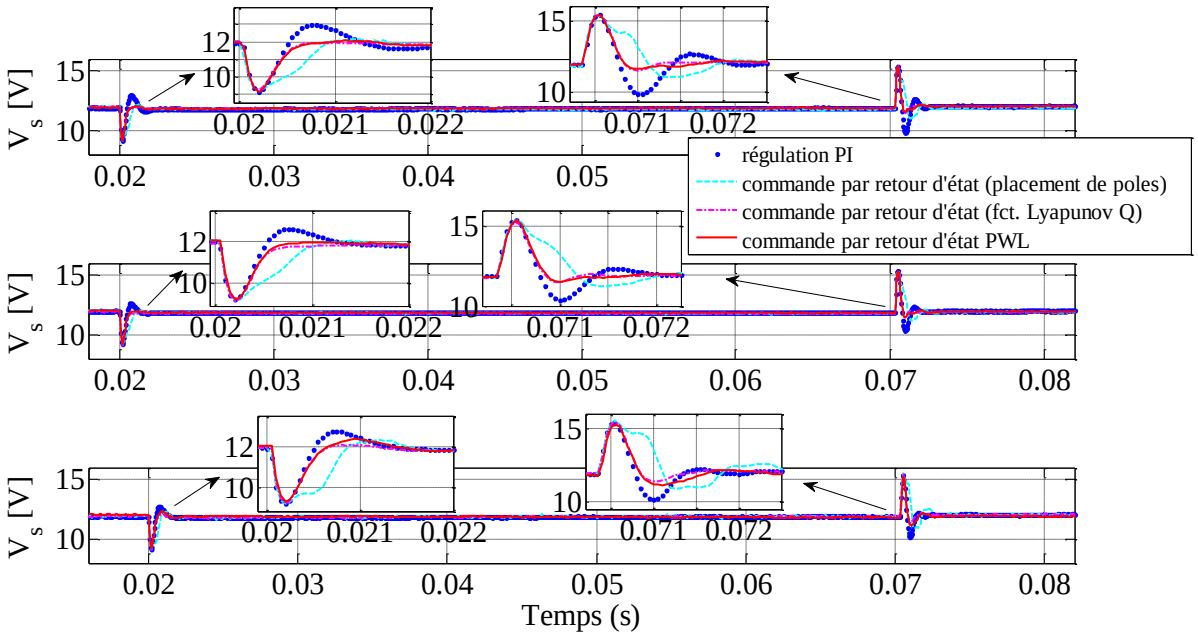


Figure 4.1.10 : Tension de sortie Vs obtenue expérimentalement pour une variation de la charge R : 6[Ω] – 3[Ω] - 6[Ω] à V_e = 24[V], V_e = 20[V] et V_e = 30[V].

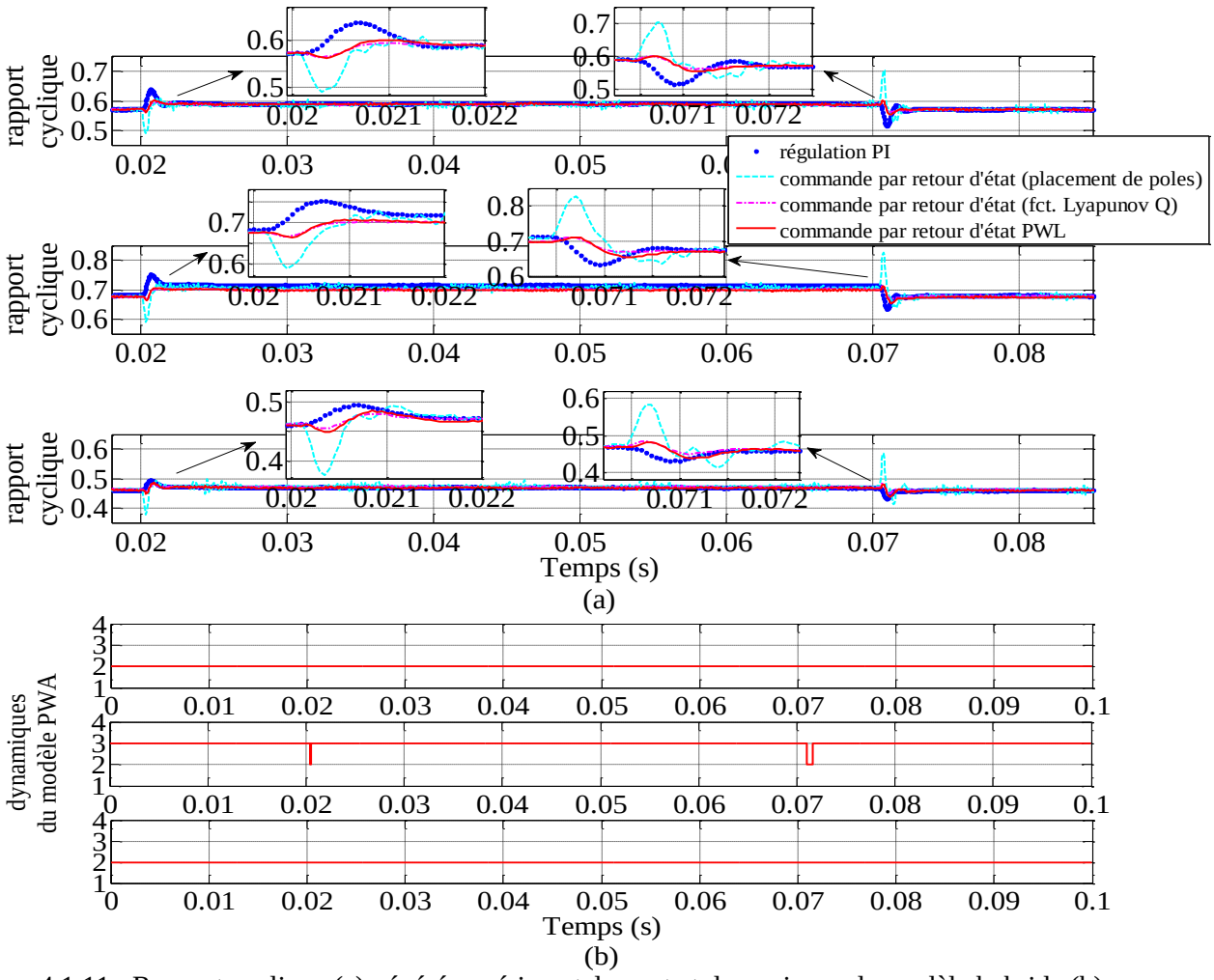


Figure 4.1.11 : Rapport cyclique (a) généré expérimentalement et dynamiques du modèle hybride (b) pour une variation de la charge R : 6[Ω] – 3[Ω] - 6[Ω] à V_e = 24[V], V_e = 20[V] et V_e = 30[V].

La loi de commande linéaire par morceaux génère un temps de réponse de 1 ms et un dépassement de la tension de sortie entre 30% et 33% sur le front descendant de chaque variation. Sur le front montant, le dépassement de la tension de sortie est plus important (37,5%) alors que le temps de réponse est moins rapide : 1,5 ms pour les essais expérimentaux et 2 ms pour les essais en simulation. Les performances de la commande à gains commutés sont comparables avec celles de la commande par retour d'état à gains fixes sur la base d'une fonction de Lyapunov quadratique, en ce qui concerne le temps de réponse obtenu et le dépassement résultant. Cependant, la commande PWL est plus rapide et la tension de sortie fournie est moins oscillante par rapport aux signaux de sortie générés par le régulateur PI et la commande par retour d'état obtenue par placement de pôles.

On note, également, que le rapport cyclique, calculé avec la loi de commande PWL, est généralement compris dans l'intervalle $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, ce qui implique l'utilisation du même vecteur de retour d'état K_2 en régimes permanent et transitoire. Dans le cas de la variation de la charge de 3[Ω] à 6[Ω], pour une tension d'alimentation de 20[V], la loi de commande PWL implantée expérimentalement utilise plutôt le troisième gain du fait que la valeur du rapport cyclique dépasse la valeur de 2/3.

Concernant la régulation en présence des variations de la charge, les résultats de simulations et les validations expérimentales montrent que la loi de commande par retour d'état PWL est plus performante en termes de temps de réponse et dépassement au niveau de la tension de sortie que celles de commandes linéaires « classiques », telles que la régulation PI et la commande par retour d'état obtenu par la méthode de placement de pôles. Cependant, la commande par retour d'état synthétisée sur la base d'une fonction de Lyapunov quadratique, en utilisant le modèle moyen du convertisseur conduit à des performances satisfaisantes. Par conséquent, étant donné que les dynamiques du modèle PWA présentent des comportements similaires, le fait de considérer un modèle hybride dans la synthèse de la loi de commande par retour d'état, fondée sur une fonction de Lyapunov, n'apporte pas une amélioration significative en termes de performances de la commande élaborée. Ces résultats sont à relativisés car nous venons de considérer un convertisseur buck sans filtre d'entrée. Dans le cas d'un convertisseur avec filtre en entrée, nous allons montrer que notre approche donne de meilleurs résultats.

4.2 Application à un convertisseur de type flyback avec filtre d'entrée

Dans cette section, nous allons appliquer la stratégie de commande à gains commutés sur un convertisseur flyback avec filtre d'entrée (voir la Figure 4.2.1) fonctionnant en mode de conduction continue avec une fréquence de découpage constante.

Ce convertisseur présente plusieurs difficultés du point de vue de la commande. La topologie du circuit est plus complexe, ce qui se traduit par un modèle mathématique d'ordre augmenté, d'une part, et le convertisseur présente un comportement de déphasage non-minimal (des zéros dans le demi-plan droit) ce qui rend la stabilisation du système assez délicate d'autre part.

Afin d'élaborer une loi de commande PWL stabilisante, nous considérons le modèle hybride à temps discret suivant :

$$\begin{aligned} &x(k+1) = A_j^x x(k) + B_j^u d(k) + f_j \\ &\text{si } d_j \le d(k) \le d_{j+1},\ j = 1,\dots,\nu \end{aligned} \tag{4.29}$$

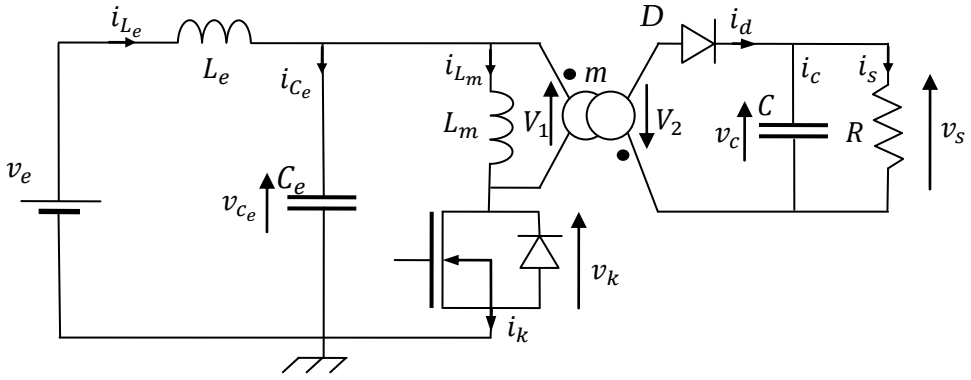


Figure 4.2.1 : Schéma équivalent du convertisseur flyback avec filtre d'entrée sans pertes.

Ce modèle a été développé pour les valeurs des paramètres du circuit présentées dans la Tableau 3.3.2.1, pour une fréquence de commutation $F = 50[\text{kHz}]$ et pour des intervalles de validité $[d_j, d_{j+1}], j = 1, \dots, \nu$ de la forme : $\left[\frac{j-1}{\nu}, \frac{j}{\nu}\right], j = 1, \dots, \nu$ avec $\nu = 7$. Cependant, pour

la synthèse de la loi de commande, les pertes résistives au niveau du circuit ont été négligées ($r_{L_e} = r_{C_e} = r_L = 0$).

Le modèle PWA utilisé comprend des dynamiques affines « continues » à travers les frontières d'intervalles de définition par rapport à toutes les variables d'état et à l'entrée de commande. Cette propriété est importante lorsque la discontinuité du modèle de synthèse peut causer l'apparition du phénomène de réticence.

Ce modèle est *a priori* adapté à la synthèse de la commande PWL en suivant les mêmes étapes que dans le cas du convertisseur buck :

- le modèle PWA à temps discret est centré autour d'un point local d'équilibre, tel que le point $x = 0$, lequel représente le point de fonctionnement de l'une des dynamiques du modèle hybride. La dynamique et le point local caractéristique sont choisis selon les marges de fonctionnement du convertisseur en mode de conduction continue. Etant donné le domaine de la tension d'alimentation v_e: $[10[\mathrm{V}] - 14[\mathrm{V}]]$ et la relation entrée/sortie (3.53) valide en régime permanent, les valeurs du rapport cyclique sont comprises dans l'intervalle $\left[\frac{3}{\nu}, \frac{4}{\nu}\right], \nu = 7$. Ainsi, le point local d'équilibre, noté $x_{0,4}$, correspond à la quatrième dynamique du modèle PWA à temps discret et son expression est donnée par :

$$x_{0,4} = \left(I_4 - A_4^x\right)^{-1}\left(B_4^u D_4 + f_4\right), D_j = \frac{2j-1}{2\nu},\ j = 4 \tag{4.30}$$

Par conséquent, la forme du modèle PWA centré par rapport au point de fonctionnement $x_{0,4}$ est la suivante :

$$\begin{aligned} &\bar{x}(k+1) = A_j^x \bar{x}(k) + B_j^u \bar{d}(k) + f_j' \\ &\text{si } \tfrac{j\text{-}1}{\nu} - D_4 \le \bar{d}(k) \le \tfrac{j}{\nu} - D_4,\ j = 1,\ldots,\nu \end{aligned} \tag{4.31}$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{x}(k) &= x(k) - x_{0,4} \\ \bar{d}(k) &= d(k) - D_4 \\ f_j' &= A_j^x x_{0,4} + B_j^u D_4 + f_j \end{aligned} \tag{4.32}$$

Sous cette forme, le terme affine f'_4 du modèle PWA (4.31) est nul, alors que les autres termes $f'_j, j = 1, \ldots, \nu, j \neq 4$ ont des valeurs non nulles.

- le modèle PWA (4.31)-(4.32) est étendu avec deux états supplémentaires : le rapport cyclique à l'instant $k-1$ (identifie la dynamique active du modèle hybride à chaque période d'échantillonnage) et l'erreur de la tension de sortie, noté $z(k-1)$ (assure une erreur statique nulle). L'expression du modèle PWA étendu est la suivante :

$$\begin{aligned} &\bar{x}_e(k+1) = A_{e,j}^x \bar{x}_e(k) + B_{e,j}^u \Delta\bar{d}(k) + f_{e,j}' + Hz(k) \\ &\text{si } \tfrac{j\text{-}1}{\nu} - D_4 \le \bar{d}(k-1) \le \tfrac{j}{\nu} - D_4,\ j = 1,\ldots,\nu \end{aligned} \tag{4.33}$$

où le vecteur d'état étendu est composé de six états : $\bar{x}_e(k) = \left[\bar{\imath}_{L_e}(k)\ \ \bar{v}_{C_e}(k)\ \ \bar{\imath}_{L_m}(k)\ \ \bar{v}_s(k)\ \ \bar{d}(k-1)\ \ \bar{z}(k-1)\right]^T$, la commande du système est représentée par $\Delta d(k)$, la différence entre deux rapports cycliques consécutifs : $\Delta\bar{d}(k) = \bar{d}(k) - \bar{d}(k-1)$ et la dynamique de l'intégrale de l'erreur de

la tension de sortie est exprimée par : $\bar{z}(k) = \bar{z}(k-1) + \bar{v}_s(k) - \bar{v}_{ref}(k)$, avec $\bar{v}_{ref}(k) = v_{ref}(k) - V_{ref}$. Les matrices du modèle PWA augmenté s'écrivent :

$$A_{e,j}^x = \begin{bmatrix} A_j^x & B_j^u & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$B_e^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{4.34}$$
$$\bar{f}'_{e,j} = \begin{bmatrix} \bar{f}'_j & 0 \end{bmatrix}^T,\ H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$$

L'objectif consiste à déterminer une loi de commande par retour d'état : $\Delta d(k) = K_j \bar{x}_e$, avec $j = 1, \ldots, \nu$ en utilisant une fonction de Lyapunov quadratique par morceaux $V(\bar{x}_e(k)) = \bar{x}_e^T(k) P_j \bar{x}_e(k)$ afin d'assurer la stabilité du système PWA étendu (4.33)-(4.34) avec $\bar{f}'_e = 0$ et $H = 0$.

Les conditions de stabilité formulées pour le système bouclé sont décrites par les inégalités suivantes :

$$P_i > 0,\ i = 1, \ldots, \nu - 1$$
$$P_j - (A_{e,j}^x + B_e^d K_j)^T P_i (A_{e,j}^x + B_e^d K_j) - Q_x - K_j^T R_u K_j > 0, \tag{4.35}$$
$$\forall (j,i) \in \{1, \ldots, \nu - 1\}$$

avec Q_x, R_u des paramètres d'ajustement des valeurs des vecteurs de retour K_j.

Ces conditions imposent :

1. la décroissance de la fonction de Lyapunov quadratique par morceaux pour :
   a. toutes les évolutions de l'état à l'intérieur du même intervalle $\left[\frac{j-1}{\nu}, \frac{j}{\nu}\right]$, $j = 1, \ldots, \nu - 1$. Ceci équivaut à écrire les inégalités (4.35) pour des paires (i,j) avec $i = j$.
   b. toutes les transitions de l'état d'un intervalle $\left[\frac{j-1}{\nu}, \frac{j}{\nu}\right]$ à un autre $\left[\frac{i-1}{\nu}, \frac{i}{\nu}\right]$, avec $j \neq i$, $j, i = 1, \ldots, \nu - 1$.
2. la propriété des matrices P_j, $j = 1, \ldots, \nu - 1$ qui représentent des matrices symétriques définies positives.

En utilisant le changement de variables (4.17), les conditions de stabilité (4.35) sont réécrites sous la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI) :

$$Z_i > 0$$
$$\left[\begin{array}{c|ccc} Z_j & Z_j & W_j^T & (A_{e,j}^x Z_j + B_e^d W_j)^T \\ \hline Z_j & Q_x^{-1} & 0 & 0 \\ W_j & 0 & R_u^{-1} & 0 \\ (A_{e,j}^x Z_j + B_e^d W_j) & 0 & 0 & Z_i \end{array}\right] > 0, \forall (j,i) \in \{1, \ldots, \nu - 1\} \tag{4.36}$$

afin de déterminer les vecteurs de retour K_j et les matrices P_j, $j = 1, \ldots, \nu - 1$. Une fois que ce problème de faisabilité est résolu, les valeurs des gains sont calculées à l'aide de la relation (4.20).

Toutefois, il convient de préciser que la dernière dynamique du modèle PWA à temps discret a été éliminée de la synthèse de la loi de commande du fait que l'approximation fournie par celle-ci n'approche pas d'une manière satisfaisante le comportement réel du convertisseur. Sur la Figure 4.2.2, la caractéristique réelle en régime permanent de la tension de sortie montre que la valeur de cette tension décroit après une limite physique du rapport cyclique. En pratique, la limite supérieure D_{max} de la grandeur de commande est inferieure à 1 – valeur qui correspond à la limite supérieure de point de vu théorique. Concernant le modèle PWA, la valeur D_{max} appartient au septième intervalle de définition du modèle hybride. Dans cet intervalle, le rapprochement affine obtenu ne correspond pas à la caractéristique réelle en régime permanent étant donné que les pertes au niveau du circuit ont été négligées. Par conséquent, la prise en compte de la dernière dynamique pour la conception de la loi de commande pourrait conduire à l'infaisabilité des LMIs ou à la dégradation des performances du régulateur. Pour cette raison, dans l'intervalle $\left[\frac{6}{7}, D_{max}\right]$ on utilise la sixième dynamique afin d'approcher le comportement du convertisseur.

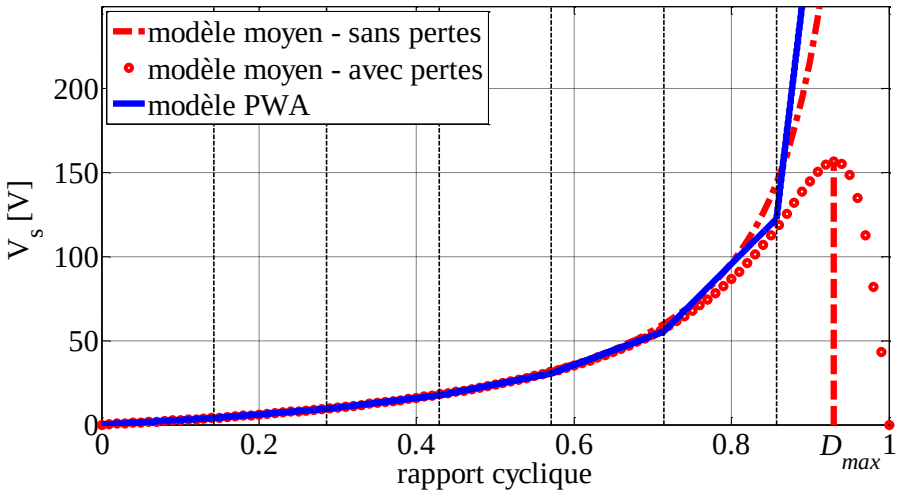


Figure 4.2.2 : Caractéristiques en régime permanent de la tension de sortie du : modèle moyen considérant les pertes résistives au niveau du circuit (courbe « cercles »), modèle moyen idéal (courbe discontinue) et du modèle PWA avec la résolution $\nu = 7$ (courbe pleine).

Ainsi, le système à résoudre est composé de $\nu(\nu-1)$ inégalités matricielles linéaires : $\nu-1$ pour des conditions de type 1.a, $(\nu-1)(\nu-2)$ pour celles de type 1.b et $\nu-1$ pour des conditions de type 2.

La loi de commande PWL a été élaborée sur la base des premières six dynamiques affines du modèle PWA (4.33)-(4.34), en choisissant les pondérations : $R_u = 180000$ et $Q_x = diag([1,1,1,1,1,1])$. La solution du système composé par 42 LMIs est représentée par les valeurs des vecteurs de retour K_j et des matrices P_j, $j = 1, \ldots, 6$ suivantes :

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0{,}0892 & 0{,}0375 & -0{,}1167 & -0{,}0656 & -1{,}3923 & -0{,}0052 \end{bmatrix}$$
$$K_2 = \begin{bmatrix} -0{,}1078 & 0{,}0286 & -0{,}1237 & -0{,}0868 & -1{,}4481 & -0{,}0062 \end{bmatrix}$$
$$K_3 = \begin{bmatrix} -0{,}1119 & 0{,}0220 & -0{,}1220 & -0{,}0936 & -1{,}5306 & -0{,}0064 \end{bmatrix}$$
$$K_4 = \begin{bmatrix} -0{,}1103 & 0{,}0157 & -0{,}1154 & -0{,}0950 & -1{,}6329 & -0{,}0063 \end{bmatrix}$$
$$K_5 = \begin{bmatrix} -0{,}0839 & 0{,}0088 & -0{,}0864 & -0{,}0738 & -1{,}6310 & -0{,}0048 \end{bmatrix}$$
$$K_6 = \begin{bmatrix} -0{,}0693 & 0{,}0048 & -0{,}0739 & -0{,}0615 & -1{,}7450 & -0{,}0040 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = 10^5 * \begin{bmatrix} 0.6023 & -0.0133 & 0.4628 & 0.5255 & 1.6283 & 0.0316 \\ -0.0133 & 0.0359 & -0.0222 & -0.0025 & -0.1808 & -0.0001 \\ 0.4628 & -0.0222 & 0.3943 & 0.4180 & 1.5013 & 0.0260 \\ 0.5255 & -0.0025 & 0.4180 & 0.4915 & 1.4232 & 0.0298 \\ 1.6283 & -0.1808 & 1.5013 & 1.4232 & 8.2084 & 0.0917 \\ 0.0316 & -0.0001 & 0.0260 & 0.0298 & 0.0917 & 0.0020 \end{bmatrix}, P_2 = 10^6 * \begin{bmatrix} 0.0635 & -0.0014 & 0.0486 & 0.0557 & 0.1979 & 0.0033 \\ -0.0014 & 0.0033 & -0.0021 & -0.0004 & -0.0175 & 0 \\ 0.0486 & -0.0021 & 0.0409 & 0.0441 & 0.1774 & 0.0027 \\ 0.0557 & -0.0004 & 0.0441 & 0.0521 & 0.1754 & 0.0032 \\ 0.1979 & -0.0175 & 0.1774 & 0.1754 & 1.0215 & 0.0111 \\ 0.0033 & -0.0000 & 0.0027 & 0.0032 & 0.0111 & 0.0002 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = 10^6 * \begin{bmatrix} 0.0655 & -0.0007 & 0.0493 & 0.0580 & 0.2366 & 0.0035 \\ -0.0007 & 0.0032 & -0.0015 & 0.0002 & -0.0159 & 0 \\ 0.0493 & -0.0015 & 0.0408 & 0.0452 & 0.2067 & 0.0028 \\ 0.0580 & 0.0002 & 0.0452 & 0.0546 & 0.2124 & 0.0033 \\ 0.2366 & -0.0159 & 0.2067 & 0.2124 & 1.3067 & 0.0132 \\ 0.0035 & 0.0000 & 0.0028 & 0.0033 & 0.0132 & 0.0002 \end{bmatrix}, P_4 = 10^6 * \begin{bmatrix} 0.0672 & -0.0000 & 0.0499 & 0.0600 & 0.2846 & 0.0035 \\ 0 & 0.0031 & -0.0009 & 0.0008 & -0.0150 & 0.0001 \\ 0.0499 & -0.0009 & 0.0407 & 0.0460 & 0.2445 & 0.0028 \\ 0.0600 & 0.0008 & 0.0460 & 0.0569 & 0.2578 & 0.0034 \\ 0.2846 & -0.0150 & 0.2445 & 0.2578 & 1.7507 & 0.0158 \\ 0.0035 & 0.0001 & 0.0028 & 0.0034 & 0.0158 & 0.0002 \end{bmatrix}$$

$$P_5 = 10^6 * \begin{bmatrix} 0.0749 & 0.0004 & 0.0560 & 0.0674 & 0.3730 & 0.0040 \\ 0.0004 & 0.0030 & -0.0006 & 0.0011 & -0.0181 & 0.0001 \\ 0.0560 & -0.0006 & 0.0457 & 0.0520 & 0.3213 & 0.0031 \\ 0.0674 & 0.0011 & 0.0520 & 0.0640 & 0.3394 & 0.0038 \\ 0.3730 & -0.0181 & 0.3213 & 0.3394 & 2.6273 & 0.0207 \\ 0.0040 & 0.0001 & 0.0031 & 0.0038 & 0.0207 & 0.0002 \end{bmatrix}, P_6 = 10^6 * \begin{bmatrix} 0.0703 & 0.0023 & 0.0502 & 0.0639 & 0.2528 & 0.0037 \\ 0.0023 & 0.0030 & 0.0007 & 0.0029 & -0.0420 & 0.0002 \\ 0.0502 & 0.0007 & 0.0397 & 0.0470 & 0.2526 & 0.0028 \\ 0.0639 & 0.0029 & 0.0470 & 0.0615 & 0.2168 & 0.0036 \\ 0.2528 & -0.0420 & 0.2526 & 0.2168 & 3.1323 & 0.0134 \\ 0.0037 & 0.0002 & 0.0028 & 0.0036 & 0.0134 & 0.0002 \end{bmatrix}$$

Cependant, lorsque la valeur du rapport cyclique se trouve dans l'intervalle $\left[\frac{6}{7}, D_{max}\right]$, le vecteur de retour K_6 est appliqué.

Résultats de simulation de la loi de commande à gains commutés

Les performances du correcteur par retour d'état PWL sont analysées à travers plusieurs simulations sur le circuit en commutation du convertisseur par l'intermédiaire de Matlab/Simulink™ et de la libraire SimPowerSystems™. Afin d'évaluer les résultats obtenus, cette stratégie de commande est comparée avec deux autres approches linéaires : une commande par retour d'état déterminée par la méthode de placement de pôles et une commande par retour d'état synthétisée sur la base d'une fonction de Lyapunov quadratique. La synthèse de ces deux lois de commande est réalisée sur la base du modèle moyen du convertisseur, linéarisé au préalable autour d'un point de fonctionnement. La dynamique du modèle moyen linéaire et le point de linéarisation X_e utilisés sont donnés par les relations (3.50)-(3.51) et (3.49) pour une tension d'alimentation V_e constante et des pertes résistives nulles ($r_{L_e} = r_{C_e} = r_L = 0$). De même, la valeur D de linéarisation présente l'expression suivante : $D = \frac{1}{1+m\frac{V_e}{V_{ref}}}$. Pour rappel, la forme du modèle moyen linéarisé est définie par :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A^l \tilde{x}(t) + B_d^l \tilde{d}(k) \tag{4.37}$$

avec $\tilde{x}(t) = x(t) - X_e$ et $\tilde{d}(t) = d(t) - D$.

– *Commande par retour d'état obtenue par placement de pôles*

La loi de commande par retour d'état est élaborée en utilisant le modèle linéaire à temps continu (4.37). Le vecteur d'état $x(t)$ est complété avec l'intégrale de l'erreur de la tension de sortie : $\int\left(V_{ref} - v_s(t)\right) dt$ afin de compenser un écart possible entre la tension de

sortie et la valeur de référence désirée. Pour ce modèle du cinquième ordre, l'on a considéré les pôles suivants : $p=\begin{bmatrix}p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5\end{bmatrix}$ avec (p_1,p_2), (p_3,p_4) représentant deux paires de pôles complexes conjugués et p_5 constituant un pôle réel de la forme :

$$p_{1,2}=\omega_0(-1\pm i),\qquad p_{3,4}=\omega_1(-1\pm i),\qquad p_5=-\omega_2,\qquad \omega_*=2\pi f_*$$

Les pôles sont placés aux fréquences : $f_0=0{,}3\,\text{kHz}$, $f_1=1{,}5\,\text{kHz}$ et $f_2=3\,\text{kHz}$ afin d'obtenir une commande rapide pour laquelle le système en boucle fermée est stable. Ce choix a conduit à la valeur du vecteur du retour suivant :

$$L=\begin{bmatrix}0{,}1745 & -0{,}2123 & 0{,}0968 & 0{,}0608 & -175\end{bmatrix}$$

Ainsi, la loi de commande du système est définie par : $\tilde{d}=-L\tilde{x}_e(t)$. Cependant, la valeur appliquée au circuit en commutation représente la somme de cette commande calculée avec la valeur en régime permanent du rapport cyclique: $\tilde{d}+D$.

– *Commande par retour d'état sur la base d'une fonction de Lyapunov quadratique*

Cette loi de commande utilise un modèle moyen linéarisé à temps discret. De ce fait, le modèle à temps continu (3.50) est discrétisé avec une période d'échantillonnage $T_e=\frac{1}{F}$. Dans ce cas, l'intégrale de l'erreur de la tension de sortie, ajoutée au vecteur d'état $x(k)$, présente la dynamique suivante: $\tilde{z}(k)=\tilde{z}(k-1)+\tilde{v}_s(k)-\tilde{v}_{ref}(k)$, avec $\tilde{v}_{ref}(k)=v_{ref}(k)-V_{ref}$. Le modèle étendu à temps discret, utilisé pour la synthèse de la commande, par retour d'état est défini par :

$$\begin{aligned}\tilde{x}_e(k+1)&=A_e^{l,d}\tilde{x}_e(k)+B_e^{l,d}\tilde{d}(k)+H\tilde{v}_{ref}(k)\\ \tilde{y}_e(k)&=C_e\tilde{x}_e(k)\end{aligned}\tag{4.38}$$

avec :

$$\begin{aligned}\tilde{x}_e&=\begin{bmatrix}\tilde{i}_{L_e}(k) & \tilde{v}_{C_e}(k) & \tilde{i}_{L_m}(k) & \tilde{v}_s(k) & \tilde{z}(k-1)\end{bmatrix}^T\\ A_e^{l,d}&=\begin{bmatrix}A^{l,d} & 0\\ c & 1\end{bmatrix},B_e^{l,d}=\begin{bmatrix}B^{l,d}\\ 0\end{bmatrix},c=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\\ H&=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}^T,C_e=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4.39}$$

Considérons que l'entrée de commande $\tilde{d}(k)$ présente la forme d'une commande par retour d'état à gains fixes : $\tilde{d}(k)=K\tilde{x}_e(k)$ et qu'il existe une fonction de Lyapunov quadratique: $V\left(\tilde{x}_e(k)\right)=\tilde{x}_e^T(k)P\tilde{x}_e(k)$, $P=P^T$, $P>0$ telle que les conditions de stabilité :

$$\begin{aligned}&P>0\\ &P-(A_e^{l,d}+B_e^{l,d}K)^T P^{-1}(A_e^{l,d}+B_e^{l,d}K)-K^TQ_x^mK-R_u^m>0\end{aligned}\tag{4.40}$$

soient satisfaites, alors le vecteur de retour K déterminé permet d'assurer la stabilité du système en boucle fermée. Les matrices R_u^m $\left(R_u^m=R_u^{mT},\ R_u^m>0\right)$ et Q_x^m $\left(Q_x^m=Q_x^{mT},\ Q_x^m>0\right)$ représentent des pondérations appliquées aux variables d'état et à l'entrée de commande afin d'ajuster les performances de la commande élaborée.

Du fait que le modèle de synthèse (4.38)-(4.39) présente le point d'équilibre $x_e=0$, les conditions de stabilité sont directement formulées sans modifier le modèle.

En choisissant les pondérations suivantes : $R_u = 600000$ et $Q_x = \text{diag}([1,1,1,1,1])$, on obtient le vecteur de retour suivant :

$$K = \begin{bmatrix} -0{,}0229 & -0.0044 & -0{,}0264 & -0{,}0203 & -0{,}0018 \end{bmatrix}$$

La loi de commande présente ainsi l'avantage d'assurer la stabilité du système dans un voisinage des valeurs de linéarisation (X_e, D).

La valeur du rapport cyclique appliquée au convertisseur est déterminée par la relation : $d(k) = \tilde{d}(k) + D$.

Nous avons opté pour trois scenarios de test afin de comparer les résultats de simulation obtenus en utilisant les trois types de commande linéaire : variations de la consigne v_{ref}, de la résistance de charge R et de la tension d'alimentation v_e. Dans un premier temps, le comportement du système est analysé en présence d'une variation de consigne : V_{ref}: 24[V] − 26[V] − 24[V], pour les valeurs nominales de la charge et de la tension d'alimentation : $R = 22[\Omega]$, $V_e = 12[\text{V}]$. La réponse du système, la valeur du rapport cyclique et la dynamique du modèle active à chaque instant sont montrés sur la Figure 4.2.3 et la Figure 4.2.4. On constate que la commande PWL est légèrement plus rapide sur le front montant de la variation par rapport à la commande par retour d'état classique. De même, elle génère un dépassement sur la tension de sortie moins important que celui obtenu lorsque la commande sur la base d'une fonction de Lyapunov quadratique est appliquée.

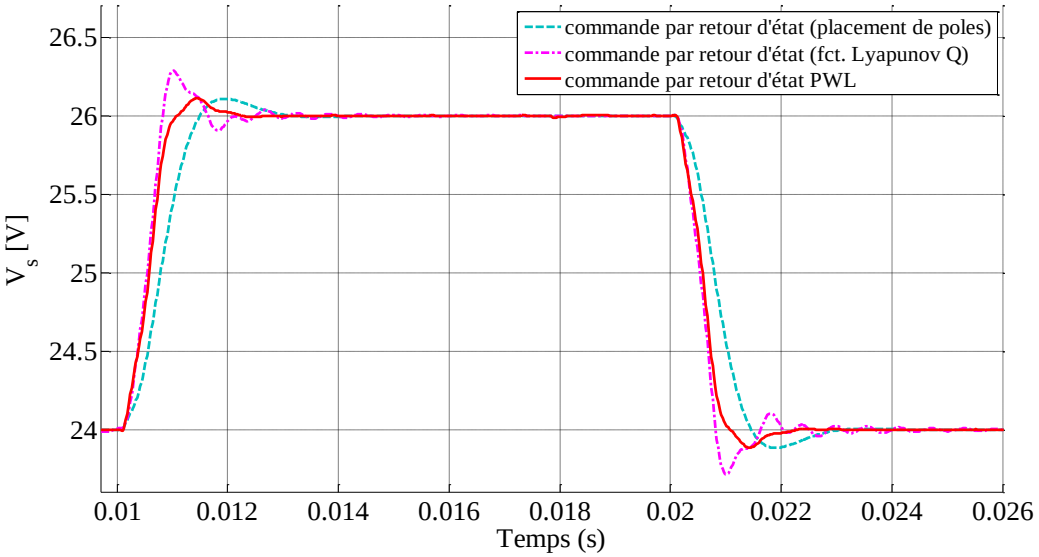


Figure 4.2.3 : Tension de sortie V_s obtenue en simulation pour une variation de consigne V_{ref} : 24[V] – 26[V] – 24[V].

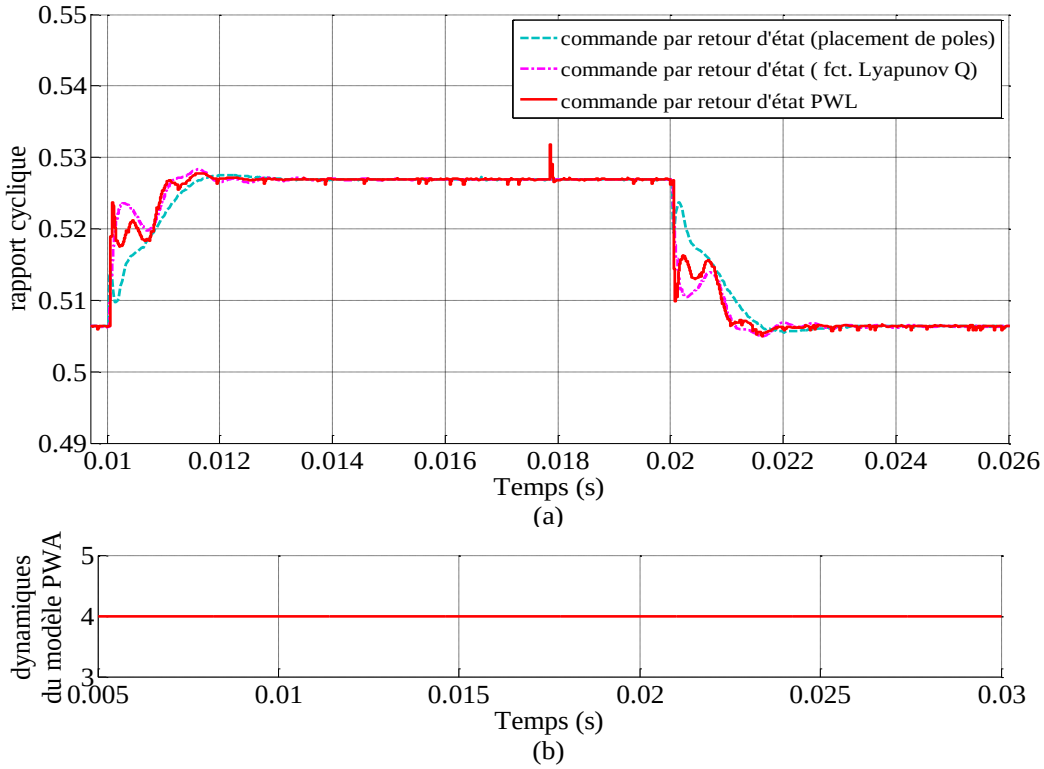


Figure 4.2.4 : Rapport cyclique (a) généré en simulation et dynamiques du modèle hybride (b) pour une variation de consigne V_{ref} : 24[V] – 26[V] – 24[V].

Dans un deuxième temps, la réponse du convertisseur est évaluée pour des variations de charge. La tension de sortie, le rapport cyclique et dynamique active sont présentés, respectivement, dans la Figure 4.2.5 et la Figure 4.2.6 (a) et (b). La valeur initiale de la charge utilisée en simulation est de $44[\Omega]$ et correspond à une puissance de sortie de $P_w = 13[\mathrm{W}]$. À partir de cette valeur, les variations effectuées permettent de visualiser le comportement du convertisseur aux puissances de sortie suivantes: $P_w = 26[\mathrm{W}]$, $P_w = 52[\mathrm{W}]$, $P_w = 72[\mathrm{W}]$ et $P_w = 100[\mathrm{W}]$. Pour des faibles variations de charge (de $13[\mathrm{W}]$ à $26[\mathrm{W}]$), les performances des trois lois de commande sont presque identiques. La différence est significative pour des échelons importants où le régulateur par retour d'état PWL est plus efficace au niveau du temps de réponse et du dépassement de la tension de sortie. Même si le système atteint le régime établi dans chaque cas, la réponse est plus rapide lorsqu'on utilise la commande à gains commutés. D'ailleurs, lorsque le même gain est appliqué dans l'ensemble du domaine de fonctionnement, le dépassement atteint 45% sur le front descendant et 80% sur le front montant dans le cas d'une variation de charge de $13[\mathrm{W}]$ à $100[\mathrm{W}]$. Cependant, les performances de la commande par retour d'état fondée sur une fonction de Lyapunov quadratique sont similaires avec celles de la commande PWL dans tous les cas considérés.

Au niveau de la commande par retour d'état à gains commutés, le quatrième vecteur de retour est utilisé, du fait que la valeur du rapport cyclique en régime permanent est comprise dans l'intervalle $\left[\frac{3}{7},\frac{4}{7}\right]$. Pour des fortes variation de charge $13[\mathrm{W}]$ à $72[\mathrm{W}]$ et $13[\mathrm{W}]$ à $100[\mathrm{W}]$, la commande PWL change la valeur du gain utilisée en régime transitoire.

Dans le troisième temps, les évolutions de la tension de sortie et du rapport cyclique en boucle fermée sont données pour des variations de la tension d'alimentation V_e (voir la Figure 4.2.7 et la Figure 4.2.8). Pour la résistance de charge et la consigne, les valeurs nominales sont utilisées, alors que la tension d'alimentation varie entre les deux bornes, inferieure et supérieure, de $10[\mathrm{V}]$ et $14[\mathrm{V}]$. Comme on peut le constater, la commande à gains commutés

génère encore un dépassement moins important sur la tension de sortie par rapport à la commande obtenue par placement de pôles.

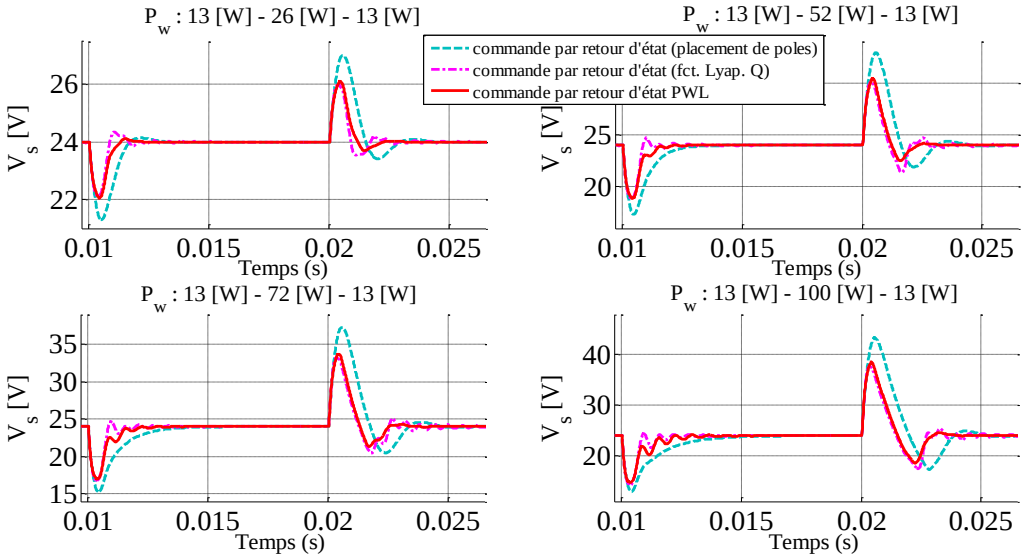


Figure 4.2.5 : Tension de sortie V_s obtenue en simulation pour des variations de la charge R à V_e = 12[V].

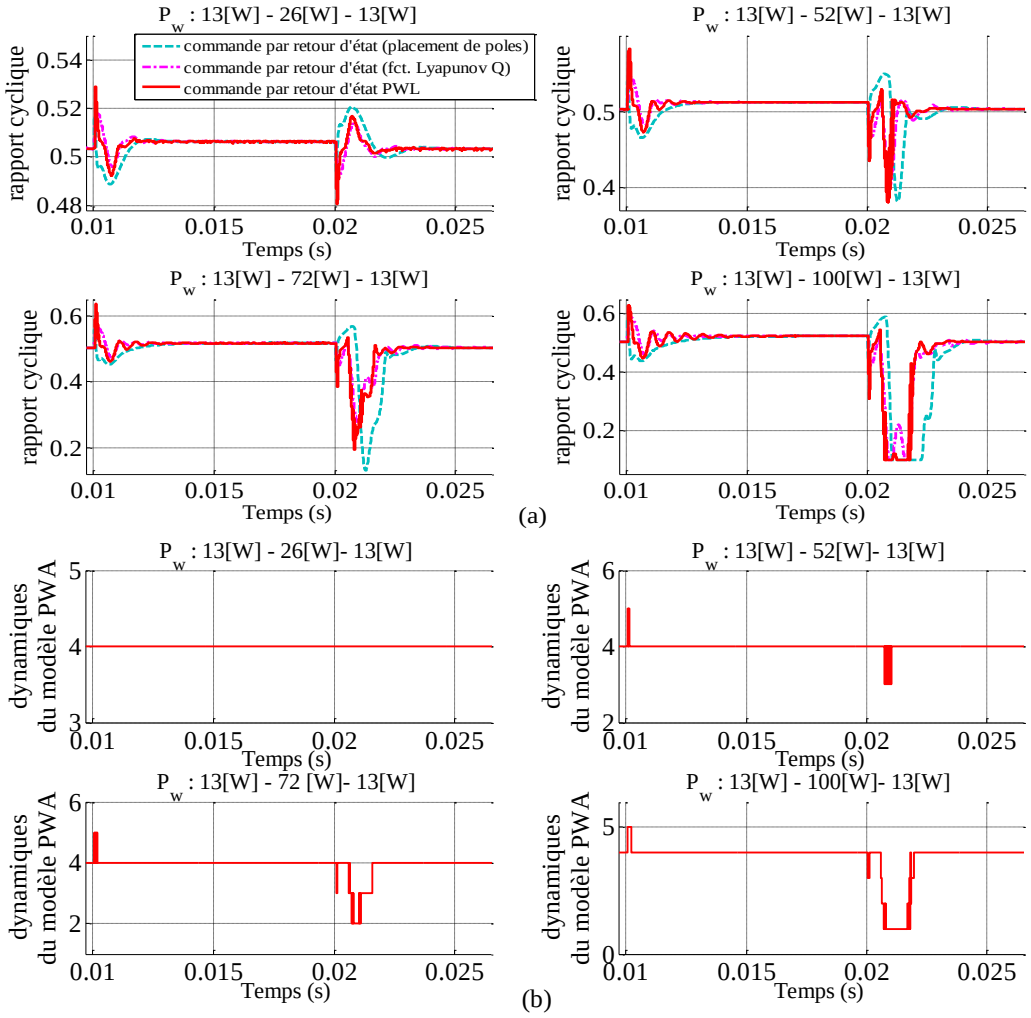


Figure 4.2.6 : Rapport cyclique (a) généré en simulation et dynamiques du modèle hybride (b) pour des variations de la charge R à V_e = 12[V].

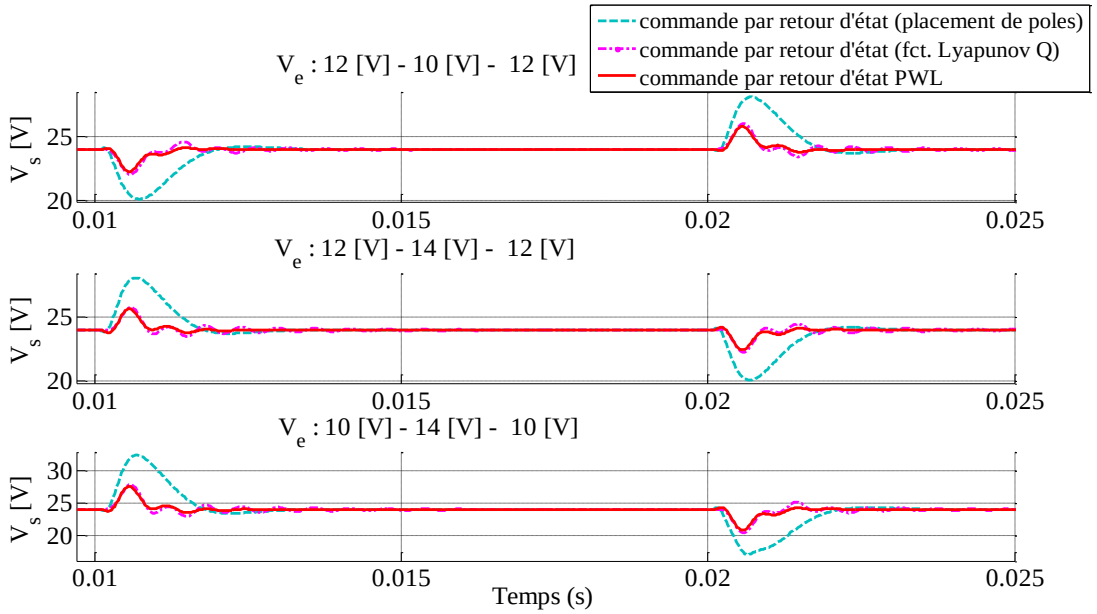


Figure 4.2.7 : Tension de sortie V_s obtenue en simulation pour des variations de la tension d'alimentation V_e, avec $R = 22[\Omega]$ et $V_{ref} = 24[V]$.

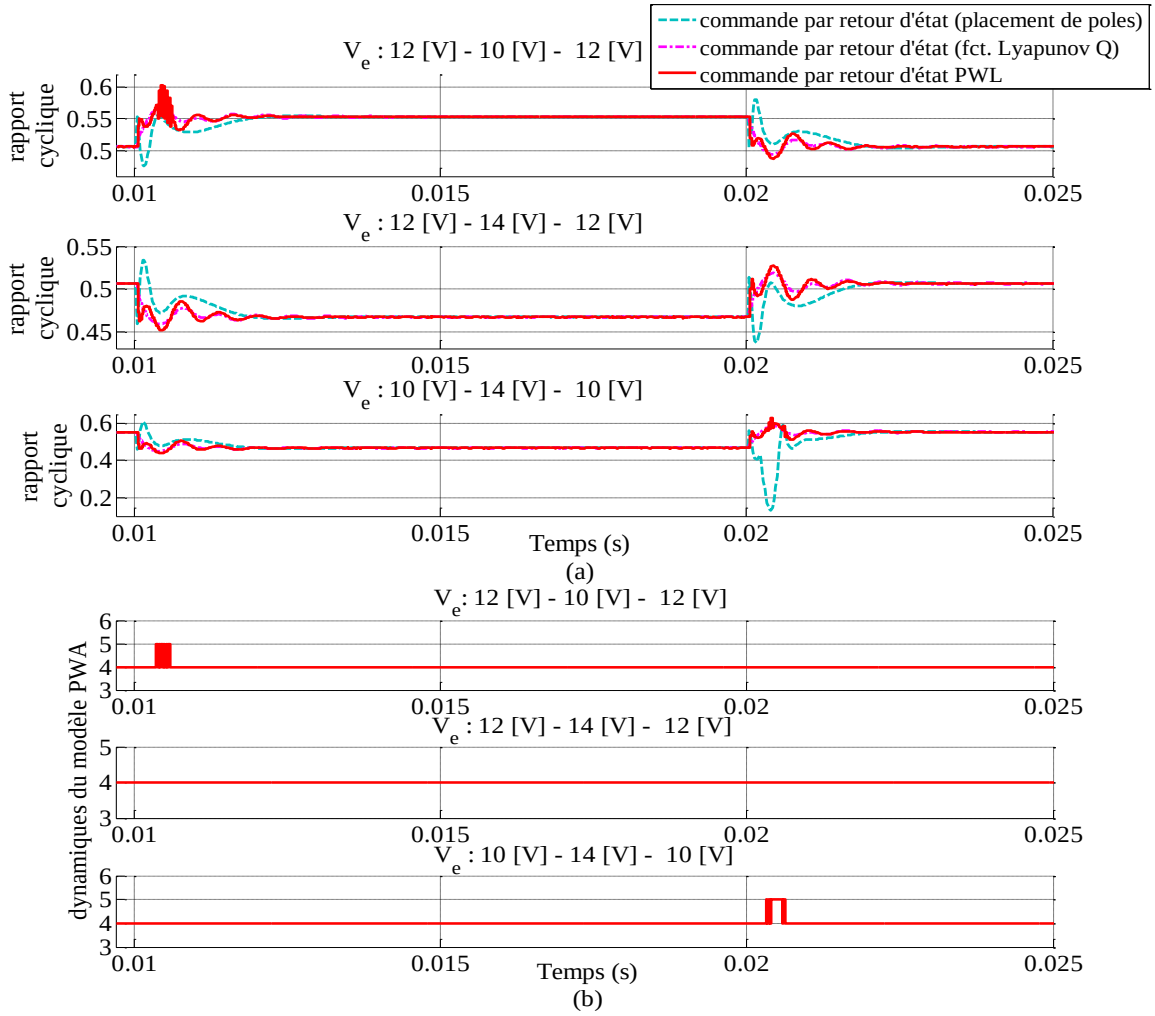


Figure 4.2.8 : Rapport cyclique (a) généré en simulation et dynamiques du modèle hybride (b) pour une variation de la tension d'alimentation V_e, avec $R = 22[\Omega]$ et $V_{ref} = 24[V]$.

Les résultats présentés ne montrent pas une amélioration significative des performances de la commande lorsqu'un modèle hybride est utilisé du fait que le domaine de fonctionnement en CCM restreint la valeur du rapport cyclique au quatrième intervalle du modèle PWA. Ainsi, le vecteur de retour change uniquement en régime transitoire lors d'une perturbation appliquée. Afin de montrer l'intérêt de la stratégie de commande PWL nous présentons deux scenarios de simulations qui permettent d'atteindre des points de fonctionnement pour lesquels le modèle hybride utilise la troisième et la cinquième dynamique. Les deux essais sont effectués sur les modèles de synthèse caractéristiques à chaque type de commande : le modèle PWA à temps discret (4.33)-(4.34) pour la commande PWL, le modèle moyen linéarisé à temps discret (4.38)-(4.39) pour la commande par retour d'état fondée sur une fonction de Lyapunov quadratique et le modèle moyen linéarisé à temps continu (4.37) pour la commande par retour d'état obtenue par placement de pôles.

Dans le premier cas, la comparaison entre les trois lois de commande est présentée pour une variation de consigne sous la forme d'un signal carrée : $45[\mathrm{V}]$ -$15[\mathrm{V}]$ - $45[\mathrm{V}]$, une tension d'alimentation $V_e = 12[\mathrm{V}]$ et une résistance de charge $R = 22[\Omega]$. Dans ces conditions, la puissance de sortie varie de la façon suivante : $92[\mathrm{W}]$ - $10[\mathrm{W}]$ - $92[\mathrm{W}]$. La tension de sortie, le rapport cyclique et la dynamique active du modèle hybride sont représentés dans la Figure 4.2.9 et la Figure 4.2.10 (a) et (b). On constate qu'en régime stationnaire, le modèle hybride utilise la cinquième dynamique pour une référence de $45[\mathrm{V}]$ et la troisième dynamique pour une consigne de $15[\mathrm{V}]$. On remarque également de meilleures performances de la commande PWL en termes de temps d'établissement et de dépassement de la tension de sortie par rapport aux performances de la commande par retour d'état synthétisé sur la base d'une fonction de Lyapunov quadratique.

Dans le deuxième cas, les performances des lois de commande sont évaluées vis-à-vis d'une variation de charge $R = 22[\Omega] - 11[\Omega] - 22[\Omega]$. La tension d'alimentation et de référence considérées sont respectivement $V_e = 12[\mathrm{V}]$ et $V_{ref} = 16[\mathrm{V}]$. Pour ces valeurs, on considère une variation de la puissance de sortie de : $11.6[\mathrm{W}] - 23.3[\mathrm{W}] - 11.6[\mathrm{W}]$. Le correcteur PWL est le plus efficace parmi le trois régulateurs proposés (voir la Figure 4.2.11), même si la commande PWL utilise toujours le troisième vecteur de retour (voir la Figure 4.2.12 (b)).

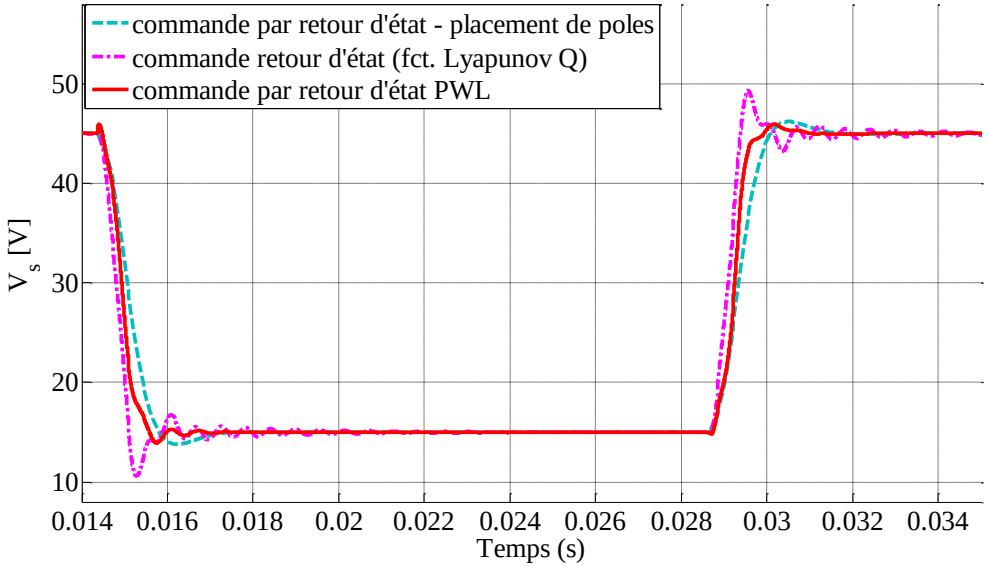


Figure 4.2.9 : Tension de sortie V_s obtenue en simulation pour une variation de consigne V_{ref} : 45[V] – 15[V] – 45[V].

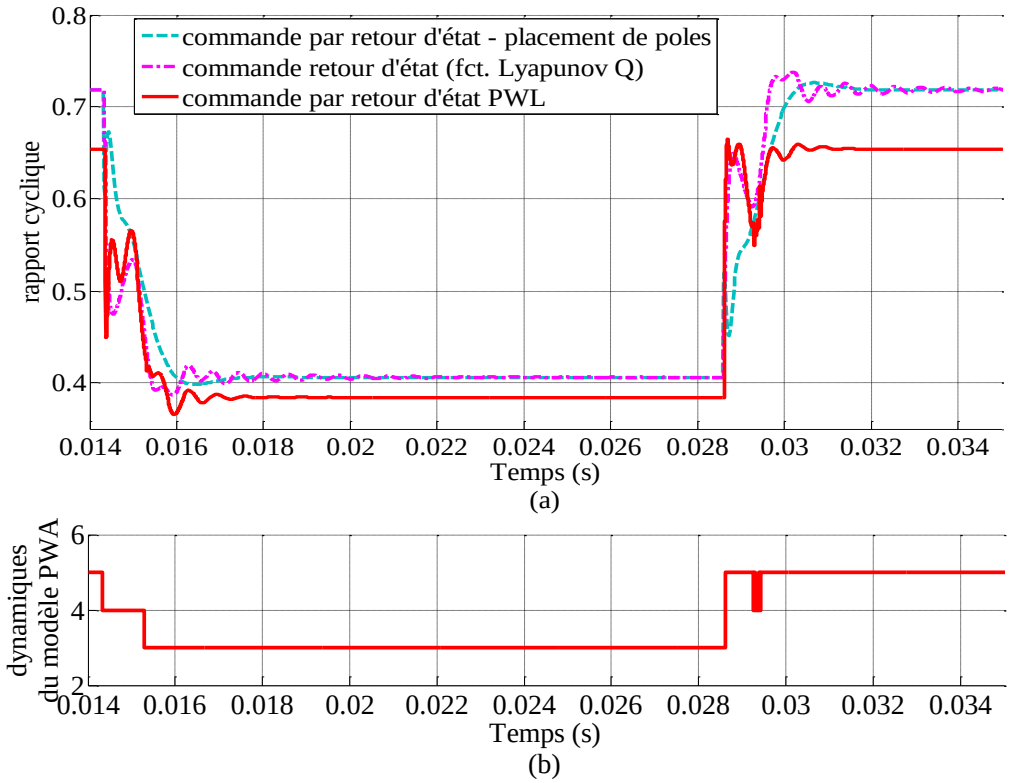


Figure 4.2.10 : Rapport cyclique (a) généré en simulation et dynamiques du modèle hybride (b) pour une variation de consigne V_{ref} : 45[V] – 15[V] – 45[V].

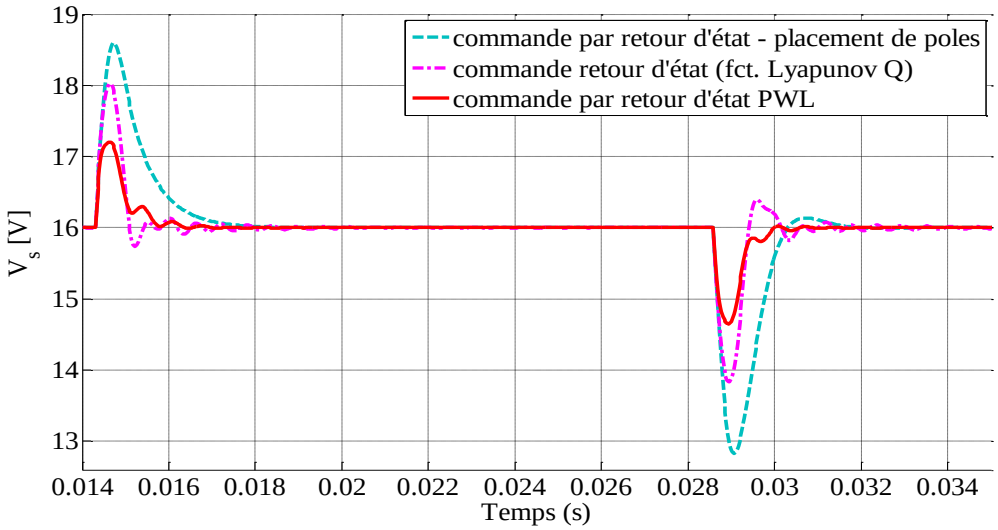


Figure 4.2.11 : Tension de sortie V_s obtenue en simulation pour des variations de la charge R : 22[Ω] - 11[Ω] - 22[Ω] à V_e = 12[V] et V_{ref} = 16[V].

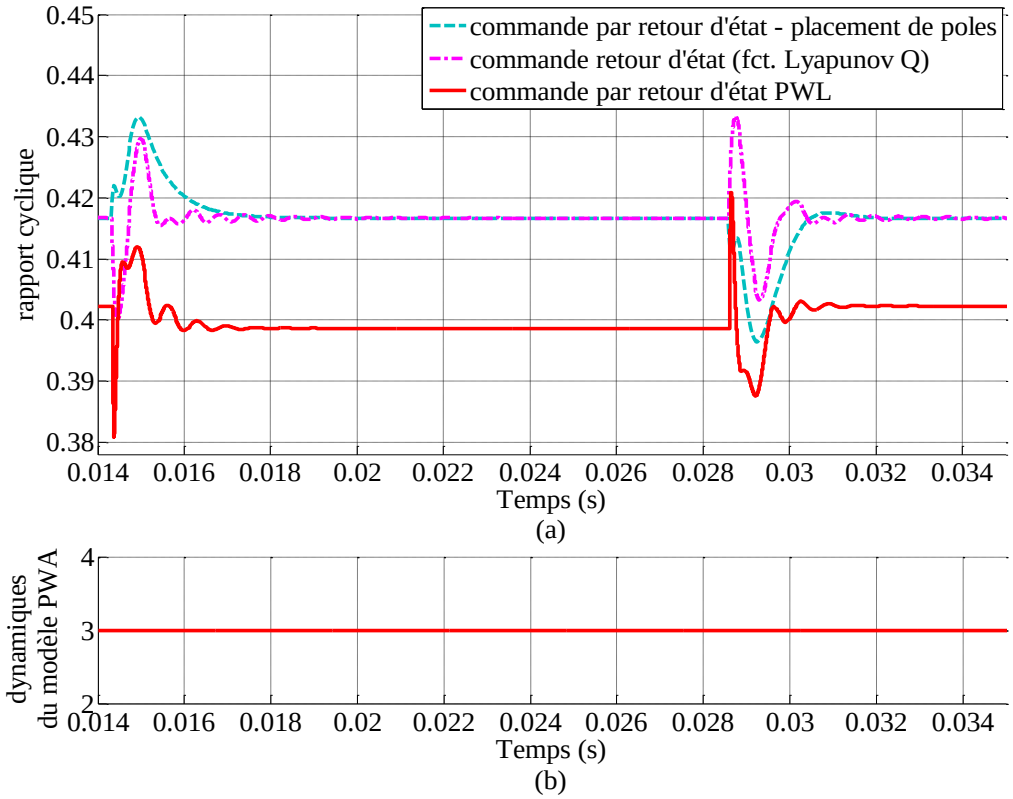


Figure 4.2.12 : Rapport cyclique (a) généré en simulation et dynamiques du modèle hybride (b) pour des variations de la charge R : 22[Ω] - 11[Ω] - 22[Ω] à V_e = 12[V] et V_{ref} = 16[V].

Le régulateur par retour d'état PWL à gains commutés garantit la stabilité du système pour une large gamme de variations de la tension d'entrée, de la charge et de la consigne avec de meilleures performances que la commande à gains constants. Le fait d'utiliser un modèle hybride dans la synthèse de la commande par retour d'état fondée sur une fonction de Lyapunov améliore également le comportement du système bouclé pour des points de fonctionnement du convertisseur appartenant à une dynamique du modèle hybride différente de celle centrale (la quatrième dynamique), qui coïncide avec l'approximation du modèle moyen linéarisé.

4.3 Conclusions

Dans ce chapitre, la stratégie de commande par retour d'état linéaire par morceaux (PWL) a été appliquée sur deux topologies différentes de convertisseurs. Dans les deux cas considérés, les modèles PWA à temps discrets ont été utilisés afin de synthétiser des régulateurs par retour d'état PWL stabilisants. La stabilité est garantie avec des conditions *a priori* de stabilisation par des fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux, qui ont conduit à la résolution d'un système d'équations LMI.

Les résultats des simulations effectuées sur les circuits en commutation avec Matlab/Simulink^{TM} démontrent l'efficacité de la loi de commande proposée par rapport aux lois de commande « classiques » : la régulation PI (uniquement dans le cas du convertisseur buck) et la loi de commande à gains fixes (testée sur les deux convertisseurs) qui fournissent des résultats satisfaisants seulement pour des faibles variations de paramètres et pour des points de fonctionnement proches de la valeur de linéarisation. Par ailleurs, la loi de commande à gains commutés a été implantée sur le convertisseur buck, ce qui a permis la

validation expérimentale des résultats obtenus en simulation. Malheureusement, la loi de commande PWL n'a pas pu être complètement validée expérimentalement sur le convertisseur flyback avec filtre d'entrée pour des raisons matérielles liées à la maquette de ce convertisseur.

Cependant, les performances pourraient être améliorées en évitant les transitions multiples entre deux intervalles adjacents. En général, ces situations apparaissent pour des valeurs du rapport cyclique proches d'une limite entre deux intervalles $\frac{j}{\nu}, j = 0, \dots, \nu - 1$. Dans ce cas, le phénomène de réticence pourrait être éliminé en utilisant un comparateur à hystérésis, ce qui permettra de diminuer les commutations entre les dynamiques du modèle hybride lorsque le rapport cyclique se situe à proximité d'une frontière, et par conséquent d'obtenir un régulateur plus efficace.

5 Commande prédictive sous la forme explicite en mode de conduction continue

La commande prédictive est une stratégie de commande permettant la formulation des objectifs de commande fixés au moyen d'une fonction de coût et des contraintes imposées sur les entrées, les variables d'état et les sorties du système à piloter. L'application de la commande prédictive repose sur plusieurs principes :

- l'utilisation d'un modèle mathématique du système afin de prédire à chaque instant les sorties futures du système sur un horizon de prédiction fini ;
- la minimisation d'une fonction de coût pour le calcul de la séquence de commandes optimale qui vérifie les contraintes de fonctionnement ;
- l'utilisation du principe de l'horizon fuyant - seulement le premier élément de la séquence de commandes futures est appliqué au système. Ensuite, la procédure d'optimisation est répétée à la période d'échantillonnage suivante.

Du fait que la commande prédictive est formulée sur la base d'un modèle de prédiction, les performances de cette commande dépendent principalement de la précision et la complexité du modèle de prédiction utilisé dans l'algorithme pour la prédiction du comportement futur du système. Un modèle de prédiction complexe implique un temps de calcul plus important pour la résolution du problème d'optimisation. De plus, les performances de la commande sont influencées par l'horizon de prédiction choisi. Plus l'horizon de prédiction est grand dans la limite du temps de réponse en boucle ouverte, plus la commande est efficace. Cependant, la taille de la fenêtre de prédiction correspond également à la taille du problème d'optimisation à résoudre. Ainsi, un compromis doit être effectué entre la précision du modèle, la grandeur d'horizon de prédiction et la complexité de calcul. D'un autre point de vue, le temps de calcul dépend de l'algorithme d'optimisation appliqué pour le calcul de la commande. L'algorithme adopté doit assurer la convergence et la faisabilité de l'optimisation, sachant que le calcul de la commande optimale, à chaque instant d'échantillonnage, doit être effectué en un temps inférieur à la période d'échantillonnage. De ce fait, l'implantation de la stratégie de commande prédictive peut se faire par la résolution du problème d'optimisation « en-ligne », à chaque pas d'échantillonnage, ou « hors-ligne » en utilisant des méthodes de programmation multiparamétriques [BM99a], [BBM00b], [BBM00a], [BBM00c], [BCM03], [BBBM03], [Bor03], [BBBM05].

Dans le cas des convertisseurs de puissance DC-DC qui fonctionnent en mode de conduction continue, l'objectif consiste à maintenir la tension de sortie à une valeur de référence désirée en utilisant un rapport cyclique compris dans l'intervalle $[0,1]$ et une valeur du courant de l'inductance strictement positif. La tension de sortie doit suivre la consigne souhaitée en présence des perturbations (variations de la tension d'entrée et de la charge par exemple) tout en respectant des contraintes sur le rapport cyclique et le courant de l'inductance. Afin de répondre aux objectifs de commande fixés, nous proposons d'appliquer la méthode de commande prédictive en utilisant comme modèle de prédiction le modèle hybride à temps discret du convertisseur buck développé dans le Chapitre III. Par conséquent, les performances de la commande sont exprimées par la définition d'un problème d'optimisation soumis aux contraintes fondées sur un modèle affine par morceaux, lequel fourni une bonne approximation du comportement dynamique du convertisseur dans tout son domaine de fonctionnement. Dans le Chapitre II (Sections 2.3, 2.4, 2.5 et 2.6), nous avons classifié la résolution du problème d'optimisation selon :

- le type de modèle de prédiction utilisé, modèles linéaires et modèles hybrides à temps discret ;
- la norme du critère à minimiser, norme linéaire/quadratique pour les modèles linéaires et norme linéaire pour les modèles hybrides ;
- la méthode d'implantation de l'algorithme de commande « en-ligne » ou « hors-ligne ».

Etant donné que le modèle de prédiction utilisé est un modèle hybride et que la période d'échantillonnage considérée ne permet pas l'application d'un algorithme de commande « en-ligne », le problème d'optimisation est formulé en choisissant un critère de minimisation linéaire alors que la résolution est effectuée « hors-ligne » en utilisant la méthode de programmation multiparamétrique associée avec la programmation dynamique, décrite dans la Section 2.6 du Chapitre II. Cette approche permet l'implantation de l'algorithme de commande prédictive en temps réel et réduit la complexité de calcul générée par la résolution du problème d'optimisation à chaque période d'échantillonnage. La solution explicite déterminée « hors-ligne » présente la forme d'une commande par retour d'état affine par morceaux [Bor02] définie sur une partition du domaine de fonctionnement. La structure de ce correcteur explicite (les régions de définition de la commande dans le domaine de fonctionnement, les vecteurs de retour d'état et les termes affines) est sauvegardée dans des tables de recherche. De ce fait, l'implantation « en-ligne » de la commande prédictive se réduit à la recherche de la région active selon la valeur de l'état à chaque période d'échantillonnage et au calcul de la commande, en appliquant le vecteur de retour et le terme affine caractéristiques à la région identifiée. La loi de commande est donnée sous la forme d'une fonction affine par morceaux exprimée en fonction de l'état du système. Dans le cas des convertisseurs de puissance, la loi de commande explicite permet le calcul de la valeur du rapport cyclique, qui représente l'entrée de commande des convertisseurs.

La méthode de commande prédictive sous la forme explicite a été déjà abordée et appliquée aux convertisseurs de puissance DC-DC en CCM, tels que les convertisseurs buck [AFJ+07] et boost [BPM+07], avec des bons résultats obtenus en simulation. En conséquence, le principal objectif de nos travaux de thèse, concernant l'implantation de la stratégie de commande, représente la validation expérimentale de la loi de commande explicite élaborée sur le modèle PWA du convertisseur buck.

Les performances de la commande explicite à horizon fini sont évaluées en comparaison avec celles de la commande à horizon infini élaborée dans le Chapitre IV. De même, l'analyse des performances est effectuée par rapport à une commande « classique » de type PI, utilisée souvent pour la régulation des convertisseurs de puissance. Les scenarios de test proposés sont validés par des résultats obtenus en simulation et également par des essais expérimentaux.

5.1 Application au convertisseur de type buck

Dans cette section, le problème d'optimisation utilise un modèle hybride afin de déterminer la forme explicite de la commande prédictive dans le cas du convertisseur buck. Le modèle hybride est déterminé en considérant le circuit sans pertes du convertisseur (voir la Figure 5.1.1.), les valeurs des paramètres présentées dans le Tableau 3.3.1, une résistance de charge $R = 6\ [\Omega]$, une tension d'alimentation V_e constante et une résolution $\nu = 3$.

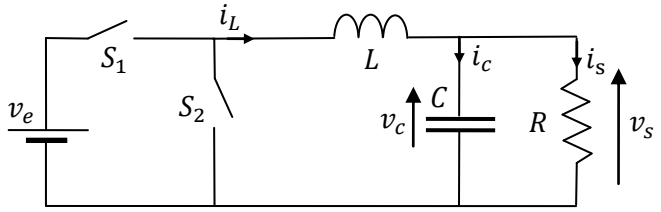


Figure 5.1.1 : Schéma du convertisseur buck sans pertes.

La stratégie de la commande prédictive est formulée sur le modèle PWA (4.3) modifié par un changement de variables et complété en ajoutant un troisième état. En utilisant un raisonnement similaire à celui présenté dans le Chapitre IV, le modèle PWA à temps discret (4.3) est exprimé autour des valeurs en régime permanent $(x_{0,2}, D_2)$ afin d'avoir le point $(0,0)$ comme point d'équilibre de la dynamique centrale du modèle hybride. Ce changement de coordonnés n'influence pas le domaine de validité du modèle. La seule différence est au niveau des valeurs des variables d'état qui sont décalées avec la valeur constante $x_{0,2}$.

On rappelle la forme du modèle après le changement de variables :

$$\begin{aligned} &\bar{x}(k+1) = A^x_{n+1}\bar{x}(k) + B^d_{n+1}\bar{d}(k) + \bar{f}''_{n+1} \\ &\text{si} \quad \frac{n}{\nu} - D_2 \le \bar{d}(k) \le \frac{n+1}{\nu} - D_2\ ,\ n = 0,\ldots,\nu-1 \end{aligned} \tag{5.1}$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{x}(k) &= x(k) - x_{0,2} \\ \bar{d}(k) &= d(k) - D_2 \\ \bar{f}''_{n+1} &= A^x_{n+1}x_{0,2} + B^d_{n+1}D_2 + f''_{n+1} - x_{0,2} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Les matrices A^x_{n+1}, B^u_{n+1}, les termes affines f''_{n+1} et les valeurs stationnaires de $x_{0,2}$ et de D_2 sont donnés respectivement par les relations (3.38), (4.2), (4.4), (4.5) et (3.30).

Ensuite, ce modèle est formulé à partir de l'incrément de commande $\Delta d(k)$ qui représente la différence entre deux valeurs du rapport cyclique à deux instants de temps consécutifs :

$$\Delta\bar{d}(k) = \bar{d}(k) - \bar{d}(k-1) \tag{5.3}$$

De ce fait, le vecteur d'état $\bar{x}(k)$ est augmenté avec la valeur du rapport cyclique précédent $\bar{d}(k-1)$:

$$\bar{x}_t(k) = \begin{bmatrix} \bar{x}(k) & \bar{d}(k-1) \end{bmatrix}^T \tag{5.4}$$

Le modèle affine par morceaux est réécrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &\bar{x}_t(k+1) = A^x_{t,n+1}\bar{x}_t(k) + B^u_{t,n+1}\Delta\bar{d}(k) + \bar{f}''_{t,n+1} \\ &\text{si} \quad \frac{n}{\nu} - D_2 \le \bar{d}(k-1) \le \frac{n+1}{\nu} - D_2,\quad n = 0,\ldots,\nu-1 \end{aligned} \tag{5.5}$$

où les matrices $A^x_{t,n+1}$, $B^u_{t,n+1}$ et les vecteurs $\bar{f}''_{t,n+1}$ sont exprimés par les relations :

$$A^x_{t,n+1} = \begin{bmatrix} A^x_{n+1} & B^u_{n+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B^u_{t,n+1} = \begin{bmatrix} B^u_{n+1} \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{f}''_{t,n+1} = \begin{bmatrix} \bar{f}''_{n+1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

L'objectif envisagé consiste à maintenir la tension de sortie à une valeur de référence donnée en présence des perturbations avec une erreur stationnaire nulle. Pour cette raison, l'incrément de la commande $\Delta d(k)$ est ajouté au modèle hybride afin d'assurer le rôle d'action intégrale pour le système bouclé. Cependant, cette structure revient à placer l'intégrateur en entrée du procédé. En raison de la commande par retour d'état (plus le terme affine) le rôle de l'intégrateur n'est pas assuré vis-à-vis des perturbations. Ce problème peut être résolu en considérant une perturbation ramenée sur le rapport cyclique réellement appliqué qui nécessite en conséquence d'être est estimée par ailleurs. En conséquence, un observateur est utilisé pour estimer l'état étendu du système. La dynamique de l'observateur est représentée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\bar{x}}_t(k+1) &= (A^x_{t,n+1} - K_{est}C_t)\hat{\bar{x}}_t(k) + B^u_{t,n+1}\Delta\bar{d}(k) + K_{est}\bar{y}_t(k) \\ \bar{y}_t(k) &= C_t\bar{x}_t(k) = \bar{v}_s(k), \qquad C_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{si } \frac{n}{\nu} - D_2 \le \bar{d}(k-1) &\le \frac{n+1}{\nu} - D_2, \quad n = 0,...,\nu-1 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Le gain K_{est} de l'observateur est déterminé par placement de pôles en utilisant la dynamique centrale (la deuxième dynamique – $(A^x_{t,2}, C_t)$) du modèle PWA. Du fait que les trois dynamiques du modèle PWA à temps discret présentent un comportement assez similaire (la matrices A est la même pour chacune des dynamiques), le gain K_{est} est appliqué dans tout le domaine de fonctionnement afin d'estimer les variables du modèle augmenté. Bien que le gain de l'observateur soit constant, la dynamique du modèle est sélectionnée à chaque pas d'échantillonnage à partir de la valeur du rapport cyclique précédent $\bar{d}(k-1)$. On note le fait que les termes affines $\bar{f}''_{t,n+1}$ ne sont pas considérés dans la dynamique de l'observateur.

La stabilité de l'observateur affine par morceaux (5.7) est vérifiée *a posteriori*, au moyen d'une fonction de Lyapunov quadratique : $V(\bar{x}_t(k)) = \bar{x}_t{}^T(k)P_{est}\bar{x}_t(k)$, commune aux trois différentes dynamiques de l'observateur. S'il existe une matrice P_{est} symétrique définie-positive $(P_{est} = P_{est}^T, P_{est} > 0)$ qui assure la décroissance de la fonction de Lyapunov $V(\bar{x}_t(k))$ $(V(\bar{x}_t(k+1)) - V(\bar{x}_t(k)) > 0, \forall\bar{x}_t)$ quelle que soit la dynamique de l'observateur appliquée, alors le système hybride (5.7) est stable.

Les conditions de stabilité sont données par :

$$\begin{aligned} &P_{est} > 0 \\ &P_{est} - (A^x_{t,n+1} - K_{est}C_t)^T P_{est}(A^x_{t,n+1} - K_{est}C_t) > 0, n = 0,...,\nu-1 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Afin d'exprimer ces conditions sous la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI), on procède à un changement de variable : $Z_{est} = P_{est}{}^{-1}$, après la multiplication à gauche et à droite d'inégalités (5.8) avec la matrice $P_{est}{}^{-1}$. Par conséquent, les inégalités (5.8) deviennent :

$$\begin{aligned} &Z_{est} > 0 \\ &Z_{est} - ((A^x_{t,n+1} - K_{est}C_t)Z_{est})^T Z_{est}^{-1}((A^x_{t,n+1} - K_{est}C_t)Z_{est}) > 0, n = 0,...,\nu-1 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Les inégalités (5.9) permettent l'application du complément de Schur afin d'obtenir les LMI suivantes :

$$Z_{est} > 0 \tag{5.10}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{est} & ((A^{x}_{t,n+1} - K_{est}C_t)Z_{est})^T \\ (A^{x}_{t,n+1} - K_{est}C_t)Z_{est} & Z_{est} \end{bmatrix} > 0,\ \forall n = 0,...,\nu - 1 \tag{5.11}$$

Le problème de faisabilité à résoudre est composé par un système de quatre LMI : une inégalité de type (5.10) qui vérifie si la matrices Z_{est} est définie-positive et trois inégalités de type (5.11) décrivant l'évolution de l'état estimé à l'intérieur de chaque intervalle $\left[\frac{n}{\nu}, \frac{n+1}{\nu}\right]$, $n = 0, \dots, \nu - 1$. La solution Z_{est} du système des LMI permet de récupérer la valeur de la matrice $P_{est} = Z_{est}^{-1}$ qui garantit la stabilité du système hybride PWL (5.7) pour une valeur constante de vecteur K_{est}.

Ainsi, le modèle de prédiction utilisé pour l'application de la commande prédictive est constitué par le modèle PWA à temps discret (5.5). Le problème d'optimisation est formulé par la définition d'une fonction de coût et des contraintes afin de répondre aux objectifs fixés avec des performances satisfaisantes. Dans cette optique, nous avons choisi la fonction de coût suivante :

$$J(\bar{x}_t(k), \Delta\bar{D}(k)) = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\left\| Q_y \left(\bar{v}_s(k+j|k) - \bar{v}_{ref}(k+j|k) \right) \right\|_1 + \left\| R_u^{mpc} \Delta\bar{d}(k+j|k) \right\|_1 \right) \tag{5.12}$$

qui pénalise l'évolution de l'erreur de la tension de sortie prédite $\bar{v}_s(k+j|k) - \bar{v}_{ref}(k+j|k)$ et la différence $\Delta\bar{d}(k+j|k)$ sur un horizon de prédiction N avec la norme 1. Sachant que dans l'équation (5.12), on ne considère que des termes scalaires, le critère correspond à la somme pondérée des valeurs absolues des erreurs de suivi et des incréments de commande. Le fait de considérer une norme linéaire au niveau de la formulation du problème d'optimisation fondé sur un modèle hybride, permet d'utiliser des algorithmes de résolution disponibles dans la boîte à outils MPT (Multiparametric Toolbox) [KGBM04] et d'obtenir une loi de commande explicite pour le modèle PWA du convertisseur buck. La fonction de coût (5.12) est minimisée sur la séquence de commande $\Delta\bar{D}(k) = [\Delta\bar{d}(k) \dots \Delta\bar{d}(k+N-1)]$ par rapport aux dynamiques du modèle PWA à temps discret (5.5) sélectionnées en fonction de la valeur du rapport cyclique précédent et aux contraintes imposées sur l'incrément de la commande $\Delta\bar{d}(k)$, afin de déterminer l'entrée de commande du modèle PWA augmenté. On note que la fonction de coût ne tient pas compte ni du coût terminal, ni des contraintes terminales, car ces contraintes compliquent davantage la détermination de la forme explicite de la commande prédictive, conduisant à une structure plus complexe du correcteur.

Le problème d'optimisation est défini comme suit :

$$\begin{aligned} &\min_{\Delta\bar{D}(k)} J(\bar{x}_t(k), \Delta\bar{D}(k)) \\ \text{Sujet à} \quad &\bar{x}_t(k+1) = A^{x}_{t,n+1}\bar{x}_t(k) + B^{u}_{t,n+1}\Delta\bar{d}(k) + \bar{f}''_{t,n+1} \\ &\text{si} \quad \frac{n}{\nu} - D_{0,2} \le \bar{d}(k-1) \le \frac{n+1}{\nu} - D_{0,2}, \quad n = 0,...,\nu - 1 \end{aligned} \tag{5.13}$$

représentant un problème de commande optimale sous contraintes. La solution explicite de ce problème est obtenue en utilisant un algorithme de programmation multiparamétrique (mp –

multiparametric programming) associé avec la programmation dynamique (DP – Dynamic Programming). Cet algorithme mp-DP, proposé dans la référence [BCM03], est détaillé dans la Section 2.5 du Chapitre II. La résolution du problème d'optimisation est réalisée en remontant le cours de temps, conformément à la stratégie de la programmation dynamique et en résolvant un problème mp-LP à chaque itération.

On constate que le problème d'optimisation (5.13) constitue un problème de suivi de trajectoire. Par conséquent, la loi de commande explicite est représentée par une fonction PWA définie en fonction du vecteur d'état étendu $\bar{x}_t(k)$ et la valeur de la tension de référence $\bar{v}_{ref}(k)$:

$$\bar{x}_T(k) = [\bar{x}_t(k) \quad \bar{v}_{ref}(k)]^T \tag{5.14}$$

La solution explicite présente la structure d'une commande par retour d'état affine par morceaux, définie comme suit :

$$\Delta\bar{d}(k) = F_j \bar{x}_T(k) + G_j, \ \bar{x}_T(k) \in R_j, \ j = 1,..., N_R \tag{5.15}$$

La loi de commande obtenue est définie sur un domaine de l'espace d'état où les contraintes imposées sont respectées. En fonction de la région R_j qui contient l'état $\bar{x}_T(k)$ à l'instant k, le vecteur F_j et le terme affine constant G_j sont utilisés pour le calcul de la commande $\Delta\bar{d}(k)$. La structure du correcteur explicite permet de sauvegarder les régions R_j de définition de la commande et les gains F_j, G_j déterminés « hors-ligne » dans trois tables de recherche, ce qui simplifie l'implantation du correcteur sur le système réel. La première table contient les hyperplans qui partitionnent le domaine de l'espace d'état où la commande est définie, alors que la deuxième et la troisième contiennent les vecteurs F_j et les termes constants G_j. En conséquence, l'application « en-ligne » de la commande prédictive consiste à chercher, à chaque pas d'échantillonnage, la région active de la commande et à évaluer sa valeur en utilisant les gains qui correspondent à la région identifiée (voir la Figure 2.1.6). La recherche de la région active R_j est effectuée d'une manière optimale, étant donné que la table de recherche présente la structure d'un arbre binaire. La procédure de recherche de la région active est présentée en détail dans la Section 2.7 du Chapitre II.

La loi de commande explicite pour le convertisseur buck a été déterminée en choisissant les matrices de pondération suivantes : $Q_y = 1$, $R_u^{mpc} = 2$ et un horizon de prédiction $N = 3$. Les contraintes imposées sur l'incrément de la commande sont données par : $\Delta\bar{d}_{min} = -0{,}9$, $\Delta\bar{d}_{max} = 0{,}9$, alors que les limites inferieures et supérieures des variables d'état sont définies par : $\bar{X}_{min} = [-3 \quad -13 \quad -0{,}5]^T$, $\bar{X}_{max} = [4 \quad 14 \quad 0{,}4]^T$. Ainsi, les contraintes sur la valeur réelle du rapport cyclique se traduisent par $d_{min} = 0$ et $d_{max} = 0{,}9$. La solution du problème d'optimisation (5.13) est générée en utilisant la boîte à outils MPT et simplifiée par la suite par le regroupement des régions voisines qui sont convexes et qui sont caractérisées par les mêmes gains F_j, G_j. La loi de commande PWA obtenue est définie sur 420 régions différentes. Dans la Figure 5.1.2, les régions de définition de la commande PWA sont représentées en 2D, après l'intersection du domaine de fonctionnement avec les valeurs en régime permanent du rapport cyclique précédent $\bar{d}(k-1) = 0$ et de la consigne $\bar{V}_{ref} = 0$.

La commande obtenue a été évaluée en simulation, sur le modèle hybride de prédiction. La Figure 5.1.3 présente l'évolution des variables d'état, de la commande appliquée et de la dynamique du modèle hybride utilisée à chaque instant. On constate la

convergence de la tension de sortie à zéro en 10 périodes d'échantillonnage, pour un horizon de prédiction $N = 3$.

Concernant l'observateur sous la forme d'un modèle hybride à temps discret (5.7), le gain K_{est} est calculé par placement de pôles. Les valeurs absolues des pôles sont situées à l'intérieur du cercle unité afin d'assurer la stabilité du système. En choisissant les pôles suivants : [0,5 0,6 0,7], on obtient le vecteur :

$$K_{est} = \begin{bmatrix} 0{,}387 & 0{,}8204 & 0{,}0114 \end{bmatrix}^T \tag{5.16}$$

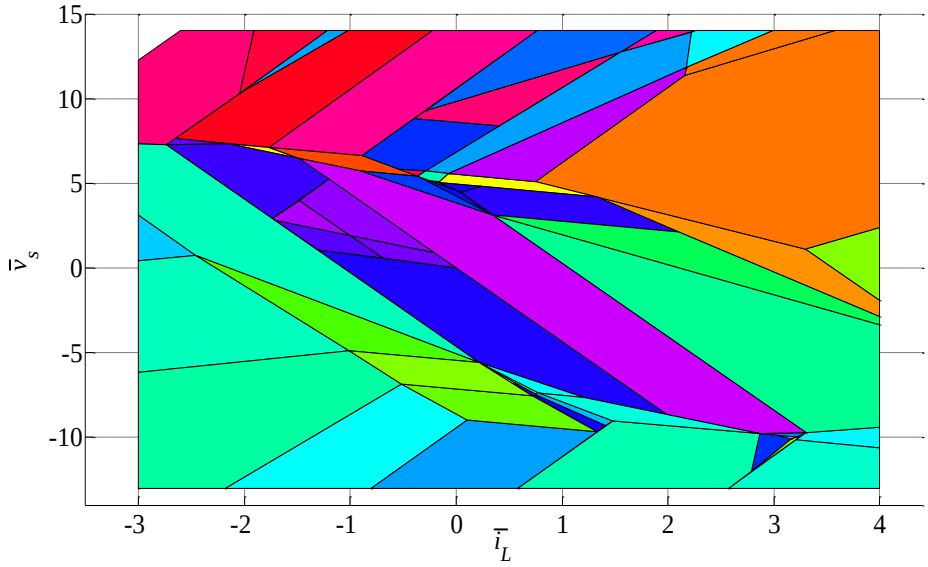


Figure 5.1.2 : Partitions du domaine de définition de la commande PWA représentées en fonction des valeurs décalées $\bar{i}_L$ et $\bar{v}_s$, suite à l'intersection en préalable du domaine 4D de l'espace d'état avec les valeurs à l'équilibre du rapport cyclique $\bar{d}(k-1) = 0$ et la tension de référence $\bar{V}_{ref} = 0$.

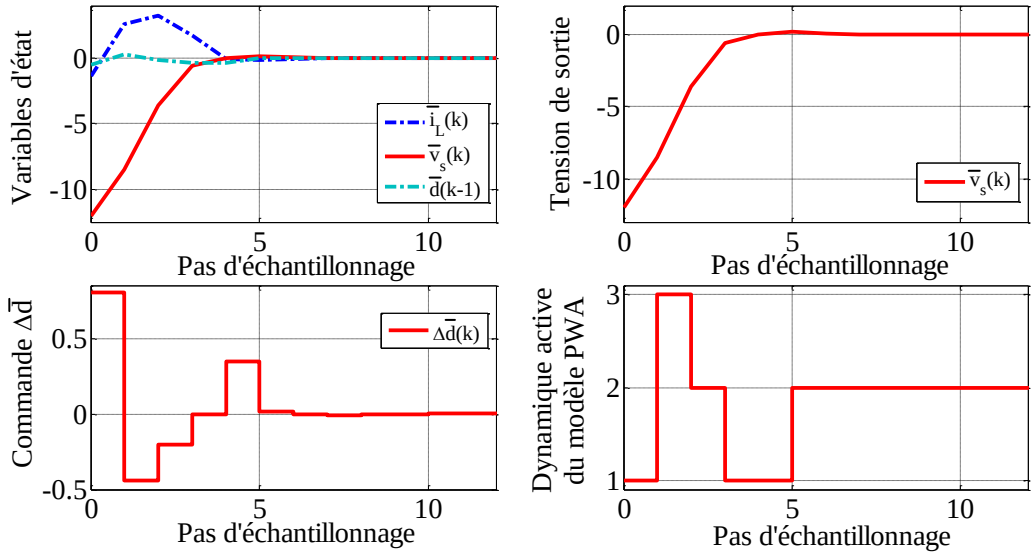


Figure 5.1.3 : Simulation de la commande PWA sur le modèle de synthèse hybride.

Ce gain est appliqué dans tout le domaine de fonctionnement du convertisseur, pendant que la dynamique utilisée change selon la valeur à l'instant k du rapport cyclique précédent. Afin de conclure sur la capacité du gain (5.16) à stabiliser les trois dynamiques affines différentes de l'observateur (5.7), le système de LMI (5.10)-(5.11) est résolu. La solution du problème de faisabilité est représentée par la matrice P_{est} suivante :

$$P_{est} = \begin{bmatrix} 0{,}0012 & -0{,}0005 & -0{,}0041 \\ -0{,}0005 & 0{,}0007 & -0{,}0033 \\ -0{,}0041 & -0{,}0033 & 0{,}2075 \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

La faisabilité du système de LMI montre l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune qui assure la stabilité de l'observateur considéré.

5.2 Résultats de simulation et validation expérimentale de la loi de commande prédictive

Les performances de la stratégie de commande prédictive sont évaluées par des essais de simulation effectués dans l'environnement Matlab/Simulink^{TM} sur le circuit en commutation du convertisseur buck. De même, les résultats obtenus en simulation sont validés expérimentalement.

L'analyse des performances est réalisée en comparant la stratégie de commande proposée avec deux autres approches de commande : la régulation PI et la commande par retour d'état à gains commutés élaborée dans le Chapitre IV. Nous rappelons que les valeurs des paramètres utilisés pour chacune de ces approches sont les suivants :

- *Régulateur PI :* $K_p = 0{,}003$; $T_i = 3{,}1552 \cdot 10^{-5}$
- *Commande par retour d'état PWL :*

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0{,}0409 & -0{,}0024 & -1{,}2164 & -0{,}0068 \end{bmatrix}$$
$$K_2 = \begin{bmatrix} -0{,}0413 & -0{,}0024 & -1{,}2162 & -0{,}0068 \end{bmatrix}$$
$$K_3 = \begin{bmatrix} -0{,}0417 & -0{,}0024 & -1{,}2069 & -0{,}0069 \end{bmatrix}$$

Les trois lois de commande sont évaluées en présence de variations de la consigne et de la résistance de charge. Les résultats obtenus en simulation sur le circuit en commutation du convertisseur buck sont également complétés avec ceux obtenus par les essais expérimentaux. Ainsi, le schéma de la loi de commande prédictive explicite est représenté sur la Figure 5.2.1. Pour l'implantation de cette stratégie de commande, on utilise uniquement la mesure de la tension de sortie.

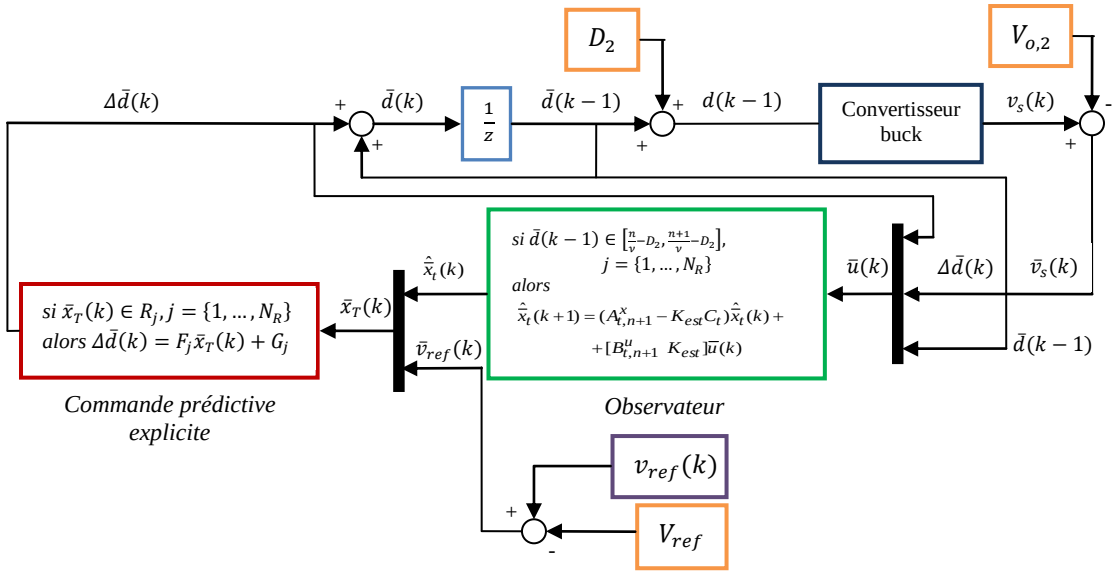


Figure 5.2.1 : Représentation schématique de l'implantation de la commande prédictive explicite.

Le premier scénario de test consiste à effectuer une variation de consigne, sous la forme d'un signal carré V_{ref}: 12[V] – 14[V] – 12[V]. La Figure 5.2.2 présente la réponse du convertisseur en simulation, alors que les Figures 5.2.3 (a), (b) et (c) montrent le rapport cyclique généré, les régions de la commande prédictive et les dynamiques de l'observateur utilisées à chaque pas d'échantillonnage.

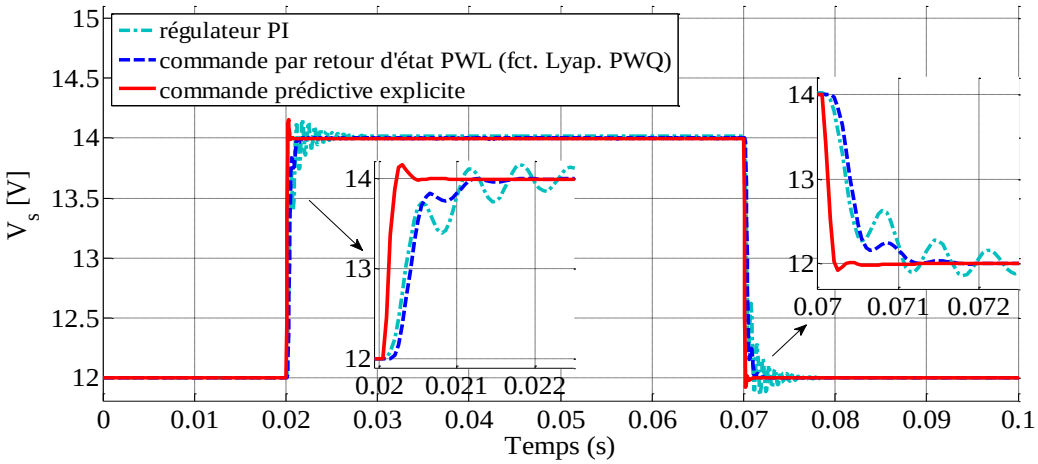


Figure 5.2.2 : Tension de sortie V_s obtenue en simulation pour une variation de consigne V_{ref} : 12[V] – 14[V] – 12[V].

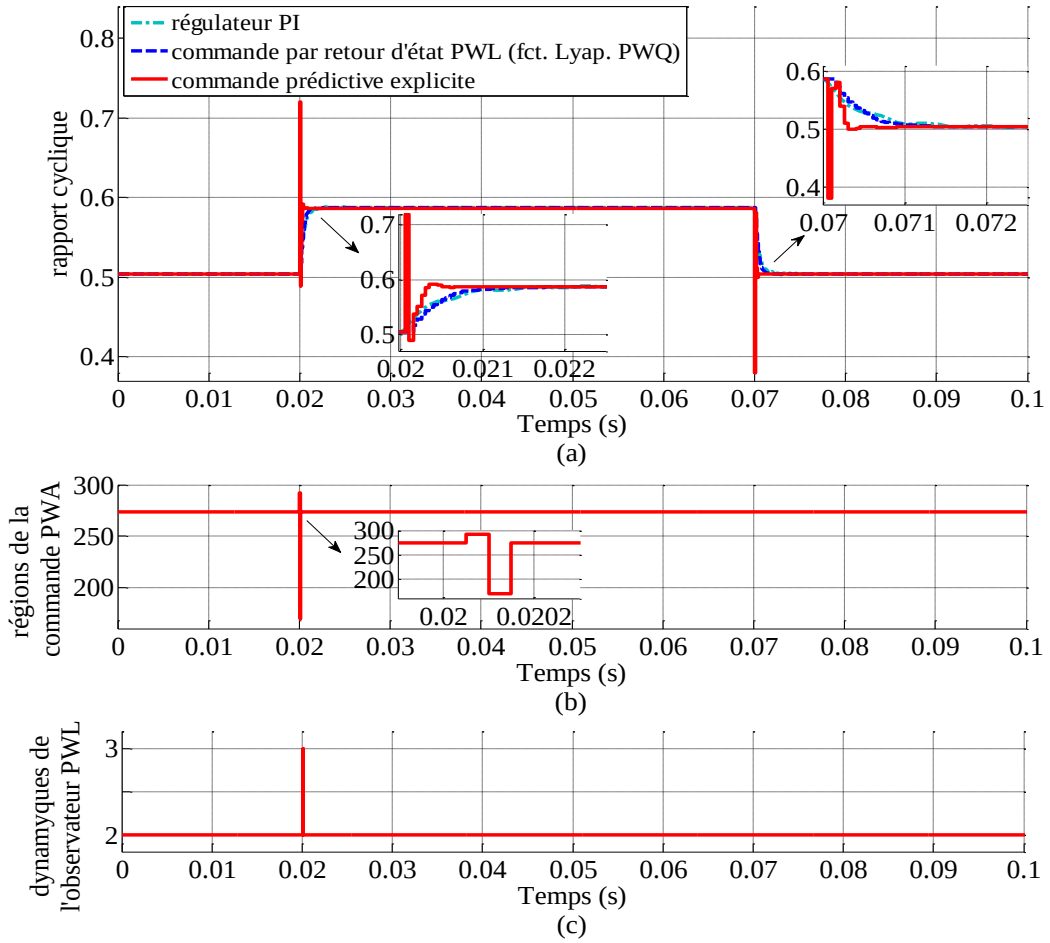


Figure 5.2.3 : Rapport cyclique (a) généré en simulation, régions de la commande PWA (b) et dynamiques du modèle hybride utilisées par l'observateur (c) pour une variation de consigne V_{ref} : 12[V] – 14[V] – 12[V].

À l'instant $t = 0$, la tension de sortie est stabilisée à la valeur de référence $V_{ref} = 12[\mathrm{V}]$ pour laquelle la commande PWA utilise le gain de la région centrale. Dans la Figure 5.2.3 (b), cette région est la 274$^{\text{ème}}$. Sur le front montant ($V_{ref}: 12[\mathrm{V}] - 14[\mathrm{V}]$) de la variation, le gain utilisé par le correcteur explicite varie afin d'atteindre la nouvelle valeur de référence tout en respectant les contraintes imposées sur le rapport cyclique, alors qu'en régime permanent, la commande PWA se stabilise toujours dans la région centrale.

En ce qui concerne l'observateur, la deuxième dynamique du modèle hybride est active, sauf en régime transitoire pour l'échelon $V_{ref}: 12[\mathrm{V}] - 14[\mathrm{V}]$ où la dynamique change selon la valeur du rapport cyclique. Par ailleurs, sur la Figure 5.2.2 on constate que la loi de commande PWA présente des meilleures performances en terme de rapidité par rapport à la régulation PI et à la commande PWL. La commande prédictive sous la forme explicite nécessite un temps d'établissement plus faible du régime transitoire. Cependant, cette commande présente un dépassement de 1,2% sur le front montant et inferieure à 1% sur le front descendant, par rapport à la commande à gains commutés et à la régulation PI.

Les résultats expérimentaux des trois correcteurs proposés sont représentés sur la Figure 5.2.4 et la Figure 5.2.5. Les performances de la commande PWA sont dégradées par rapport celles obtenus en simulation. Au niveau expérimental, le convertisseur présente le même temps de réponse pour le trois correcteurs proposés. De même, en utilisant la commande prédictive explicite, le dépassement de la tension de sortie devient plus important

($\approx$ 4,2%) sur le front descendant de la variation de consigne $(V_{ref}: 14[\mathrm{V}] - 12[\mathrm{V}])$. Cette dégradation des performances est expliquée par la présence d'un filtre passe-bas utilisé pour atténuer les bruits au niveau de la tension de sortie mesurée.

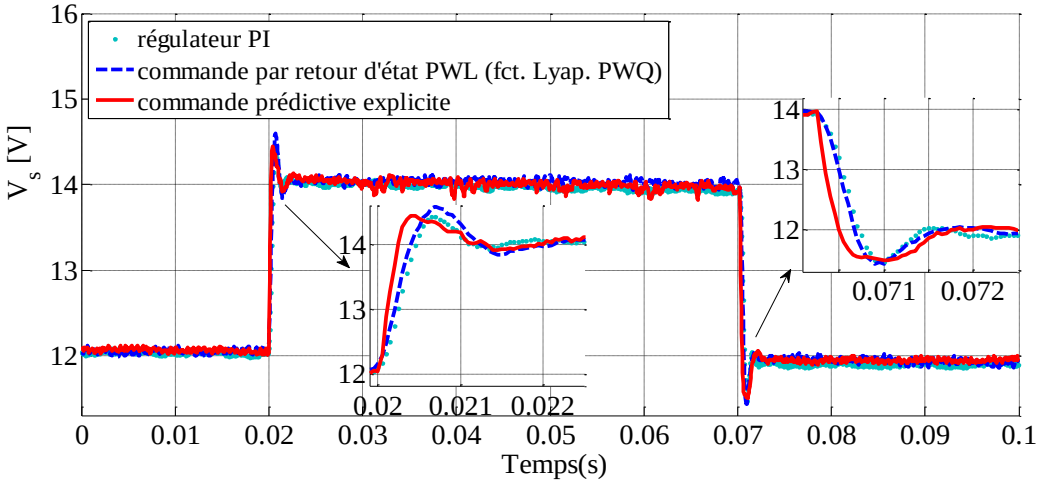


Figure 5.2.4 : Tension de sortie V_s obtenue expérimentalement pour une variation de consigne V_{ref} : 12[V] – 14[V] – 12[V].

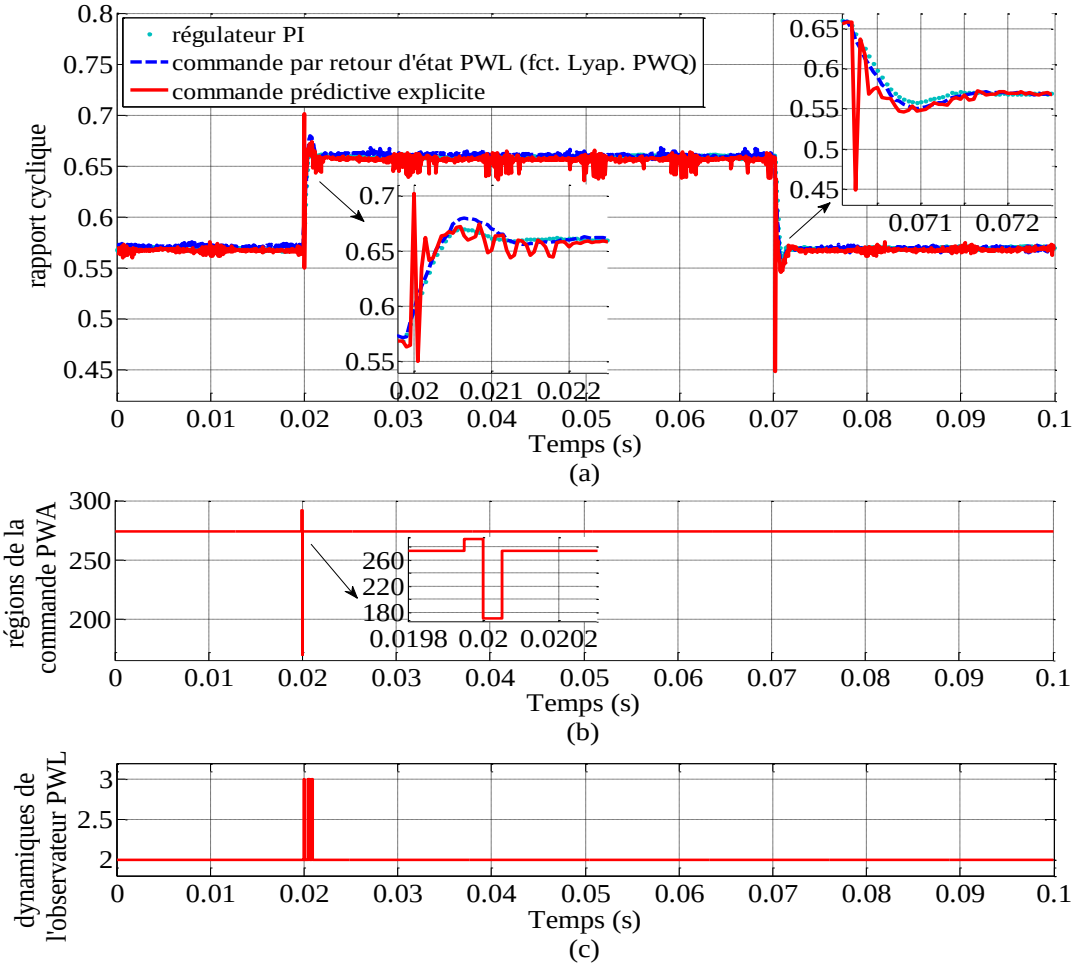


Figure 5.2.5 : Rapport cyclique (a) généré expérimentalement, régions de la commande PWA (b) et dynamiques du modèle hybride utilisées par l'observateur (c) pour une variation de consigne V_{ref} : 12[V] – 14[V] – 12[V].

Pour le convertisseur buck fonctionnant à une fréquence de commutation de 20kHz, la mesure de la tension de sortie est filtrée à 2[kHz], ce qui ralentit la dynamique du système bouclé. Tout en sachant que les performances de la commande prédictive dépendent beaucoup de la précision du modèle de prédiction, la dégradation des performances est justifiée par le fait que la dynamique du filtre n'est pas considérée dans le modèle de synthèse. Les différences entre les résultats en simulation et ceux expérimentaux pourront être réduites si la synthèse de la loi de commande est fondée sur un modèle de prédiction qui inclut la dynamique du convertisseur et celle du filtre de mesure.

Le deuxième scenario de test présente le comportement du convertisseur en présence d'une variation de la résistance de charge $R: 6[\Omega] - 3[\Omega] - 6[\Omega]$. Cette variation en échelon est appliquée en considérant la tension d'alimentation nominale ($V_e = 24[\mathrm{V}]$) et par la suite deux valeurs différentes : $V_e = 20[\mathrm{V}]$ et $V_e = 30[\mathrm{V}]$ qui correspondent aux bornes de l'intervalle $[20[\mathrm{V}] - 30[\mathrm{V}]]$ fixé pour cette tension en mode de conduction continue. Les résultats en simulation (voir la Figure 5.2.6 et la Figure 5.2.7) montrent des performances de la commande PWA proches de celles de la commande PWL. Sur le front descendant de la variation ($R: 6[\Omega] - 3[\Omega]$), le dépassement de la commande prédictive explicite est largement plus important que celui généré par la commande à gains commutés, et vice-versa sur le front montant de la variation de charge ($R: 3[\Omega] - 6[\Omega]$). Cependant, la commande PWA est plus performante que le régulateur PI en termes de temps d'établissement et dépassement de la tension de sortie. On constate également que la commande PWA utilise toujours le gain de la région centrale R_{274}.

Les performances des correcteurs obtenues expérimentalement sont représentées sur la Figures 5.2.8 et la Figure 5.2.9. De même, on constate la dégradation des performances de la commande PWA. Le dépassement de la tension de sortie obtenue en appliquant la commande prédictive est comparable avec celui généré par le régulateur PI et le temps de réponse est plus important (2ms) (en simulation le système répond en 1ms).

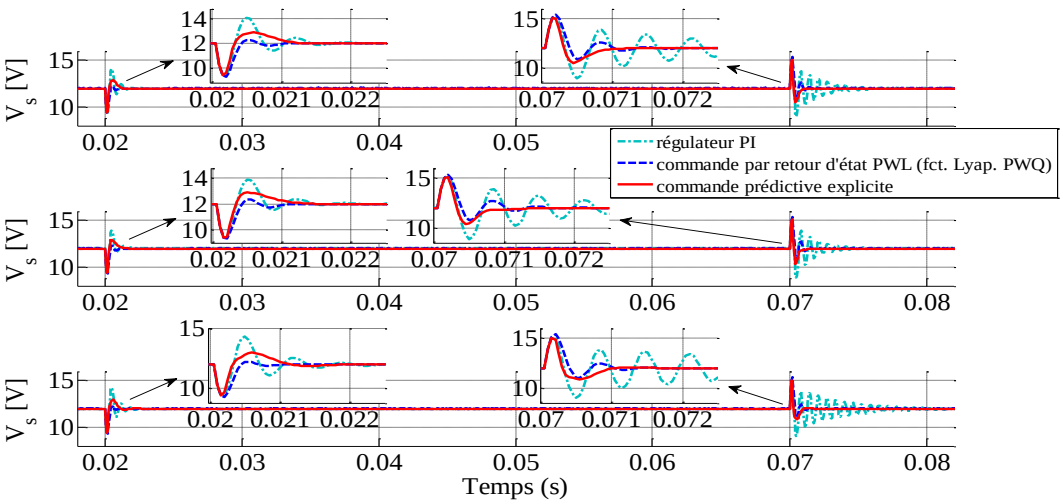


Figure 5.2.6 : Tension de sortie V_s obtenue en simulation pour une variation de la charge R : 6[Ω] – 3[Ω] – 6[Ω] à V_e = 24[V], V_e = 20[V] et V_e = 30[V].

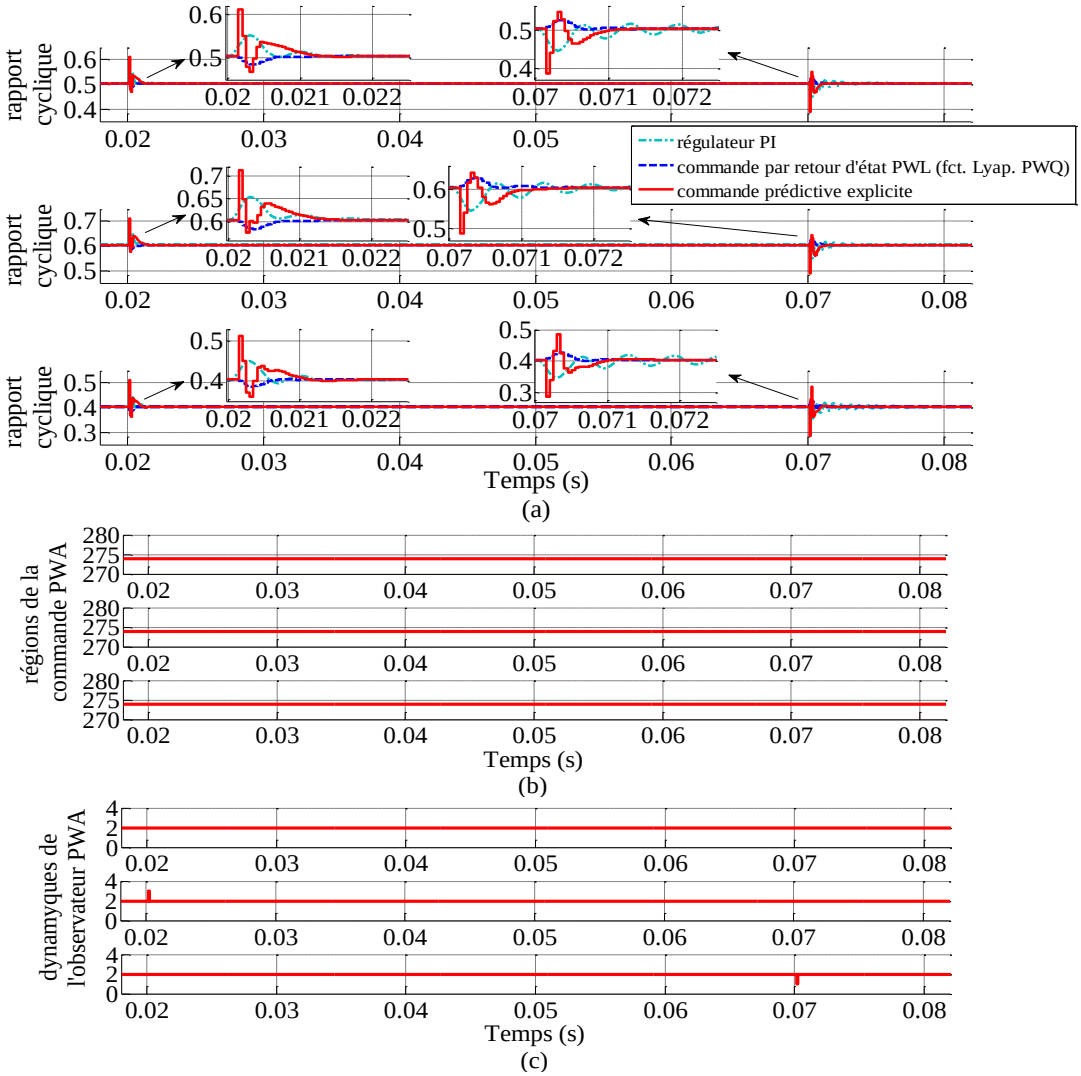


Figure 5.2.7 : Rapport cyclique (a) généré en simulation, régions de la commande PWA (b) et dynamiques du modèle hybride utilisées par l'observateur (c) pour une variation de la charge R : 6[Ω] – 3[Ω] – 6[Ω] à V_e = 24[V], V_e = 20[V] et V_e = 30[V].

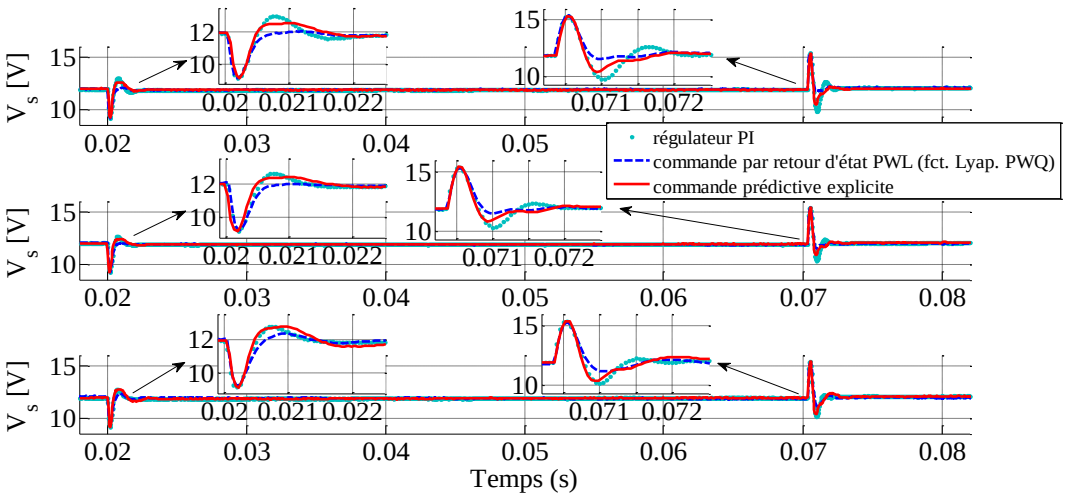


Figure 5.2.8 : Tension de sortie V_s obtenue expérimentalement pour une variation de la charge R : 6[Ω] – 3[Ω] – 6[Ω] à V_e = 24[V], V_e = 20[V] et V_e = 30[V].

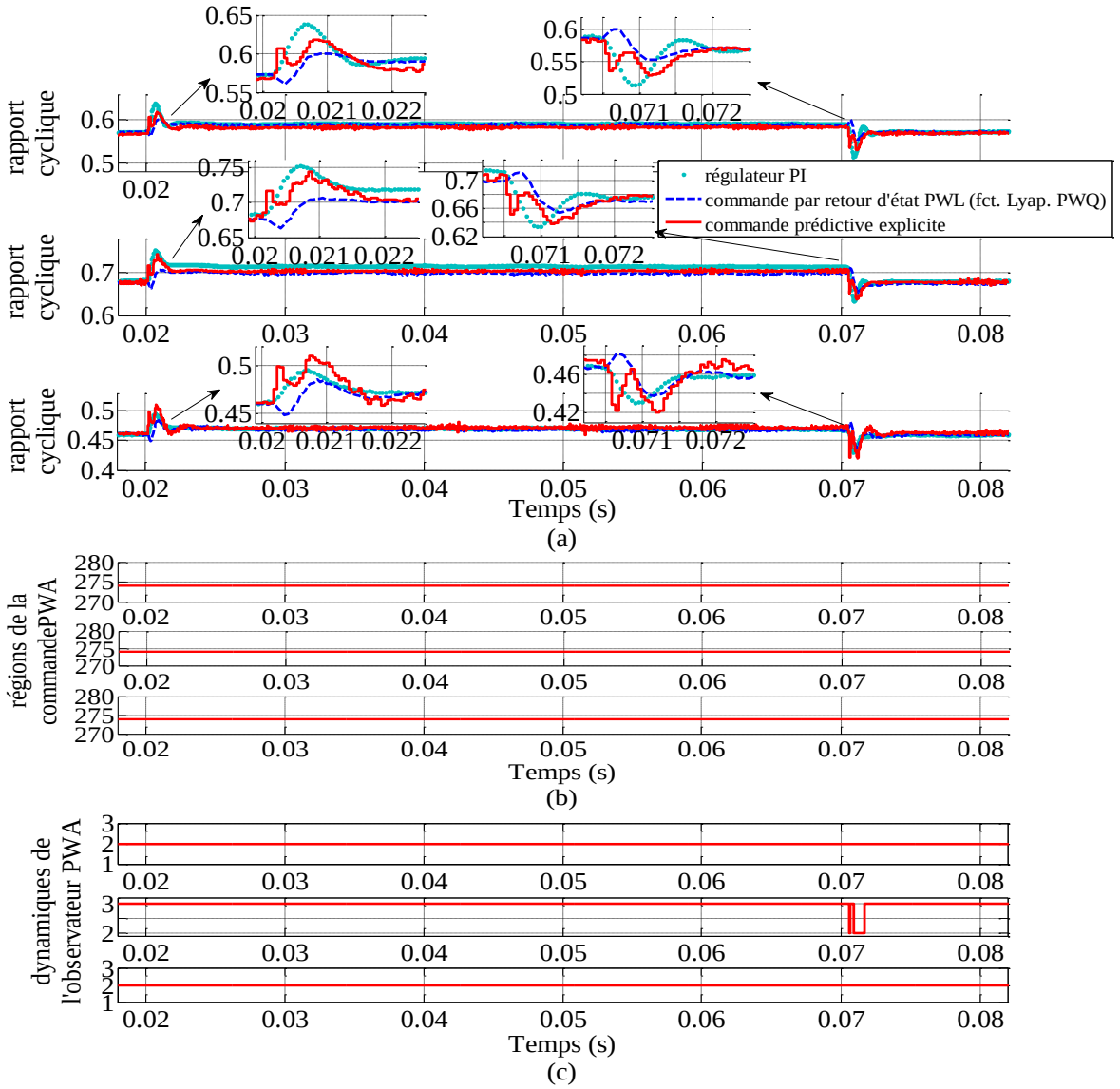


Figure 5.2.9 : Rapport cyclique (a) généré expérimentalement, régions de la commande PWA (b) et dynamiques du modèle hybride utilisées par l'observateur (c) pour une variation de la charge R : 6[Ω] – 3[Ω] – 6[Ω] à V_e = 24[V], V_e = 20[V] et V_e = 30[V].

Par rapport aux valeurs du rapport cyclique obtenues en simulation pour chaque test effectué, les valeurs obtenues expérimentalement sont plus importantes en raison des pertes dans le circuit. Par conséquent, pour la variation de charge réalisée à $V_e = 20[\mathrm{V}]$, le rapport cyclique prend des valeurs dans l'intervalle $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. En conséquence, l'observateur utilise la troisième dynamique du modèle hybride en régime permanent.

5.3 Conclusions

Ce chapitre a permis de présenter la démarche suivie pour la mise en œuvre de la loi de commande prédictive sous la forme explicite dans le but de réguler la tension de sortie du convertisseur buck fonctionnant en CCM à fréquence de commutation constante. La commande prédictive repose sur la prédiction du comportement futur du système en

commutation à partir d'un modèle hybride et de la résolution « hors-ligne » d'un problème d'optimisation soumis à des contraintes.

La mise en œuvre de cette stratégie de commande comprend deux étapes essentielles : la résolution du problème d'optimisation « hors-ligne » et l'implantation d'un correcteur élaboré en temps réel. La forme explicite de la commande prédictive a été déterminée en utilisant l'algorithme de programmation multiparamétrique associé à la programmation dynamique (mp-DP) disponible dans la boîte à outils MPT. La structure de la commande a été ensuite simplifiée et sauvegardée dans trois tables de recherche. La table contenant les régions de la commande affine par morceaux présente la structure d'un arbre binaire de recherche qui permet de diminuer le temps d'identification de la région active à chaque période d'échantillonnage. Les algorithmes de simplification de régions de la commande et de construction de l'arbre binaire de recherche sont également accessibles dans la boîte à outils MPT.

Les performances de la loi de commande prédictive ont été vérifiées grâce à des essais de simulation et expérimentaux, en appliquant trois approches différentes : la commande PWA couplée à un observateur, la commande à gains commutés et la régulation PI.

En simulation et en présence des variations de la tension de référence, la stratégie de commande proposée présente de meilleures performances en termes de rapidité de régulation de la sortie du système à asservir en comparaison avec la commande à gains commutés. Concernant les variations de charge réalisées en considérant plusieurs valeurs de la tension d'alimentation, la commande PWA est plus performante par rapport à la régulation PI en termes de temps de réponse et dépassement de la tension de sortie. Cependant, les performances de la commande prédictive en régulation sont proches de celles de la commande à gain commutés.

En contre partie, les essais expérimentaux ne permettent pas de confirmer les performances de la commande PWA obtenues en simulation qui peuvent être expliqués par des différences significatives entre le modèle de synthèse et le système réel. En des termes plus précis, la dynamique du filtre de mesure (utilisé pour diminuer les bruits présents dans le signal de la tension de sortie), n'est pas prise en compte dans le modèle de prédiction. Par conséquent, on remarque la dégradation des performances de la commande PWA en régulation lors des variations de la charge et également en suivi de trajectoire lors de la variation de la consigne.

Afin d'améliorer les performances lors des variations de la charge, la prise en compte de cet aspect dynamique dans le modèle de synthèse du correcteur PWA est envisagé dans le futur.

Les résultats de simulation et expérimentaux obtenus avec la commande PWA montrent le potentiel de cette commande en termes de prise en compte des contraintes et de facilité d'implantation et d'interprétation de la commande obtenue. Néanmoins ces résultats montrent aussi le fort lien de la commande avec le modèle de prédiction, et amènent, pour des futurs travaux, à la prise en compte de termes de perturbations et de robustesse.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Répondant aux besoins actuels des systèmes d'alimentations d'énergie capables d'assurer un fonctionnement stable dans des domaines de fonctionnement assez larges avec des bonnes performances dynamiques (rapidité du système pour atteindre des points de fonctionnement différentes, variations limitées de la tension de sortie en réponse aux différentes perturbations de charge ou encore de tension d'alimentation), les travaux présentés dans ce manuscrit ont été orientés vers l'application de la stratégie de commande prédictive sur des convertisseurs de puissance DC-DC, représentés du point de vue mathématique par des modèles hybrides. En prenant en compte la structure variable de ces systèmes à commutations, un modèle hybride permet de décrire d'une manière précise la dynamique d'un convertisseur dans l'ensemble du domaine de fonctionnement. Dans cette optique, après l'analyse des classes des modèles hybrides existants (automates hybrides discrets, modèles logique/dynamiques mixtes - MLD, modèles affines par morceaux - PWA, modèles à complémentarité linéaire - LC et à complémentarité linéaire étendue - ELC), nous avons choisi de caractériser le comportement dynamique des convertisseurs de puissance DC-DC en utilisant l'approximation affine par morceaux (PWA – Piecewise Affine). Ce choix a été fait, tout en sachant qu'il existe des méthodes d'analyse de stabilité et de synthèse des régulateurs fondées sur les modèles hybrides sous la forme affine par morceaux. Par conséquent, nous nous sommes intéressés, dans un premier temps, à la stabilisation des convertisseurs de puissance au moyen des correcteurs à gains commutés élaborés sur la base de fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux et, dans un deuxième temps, à l'implantation d'une loi de commande prédictive sous la forme explicite, en considérant des contraintes sur l'entrée de commande (soit le rapport cyclique dans le cas des convertisseurs).

Au niveau des applications, en vue de valider expérimentalement les approches utilisées, nous avons opté pour deux topologies différentes de convertisseurs de puissance DC-DC. La méthode de modélisation hybride et les stratégies de commande proposées ont été appliquées sur un convertisseur de type buck (d'ordre deux), afin de mieux maitriser le réglage des lois de commande, d'une part, et sur un convertisseur flyback avec filtre d'entrée (système d'ordre quatre), d'autre part. Le fait de considérer cette dernière topologie nous a permis de répondre aux difficultés du point de vue de la commande (structure caractérisée par un comportement non-linéaire à déphasage non-minimal) rencontrées dans la majorité des topologies des convertisseurs DC-DC et également aux difficultés liées à la commande des convertisseurs d'ordre élevé.

Concernant l'étape de modélisation, nous avons développé une méthode générale permettant de déterminer un modèle hybride de type PWA pour des convertisseurs DC-DC fonctionnant en mode de conduction continue à fréquence de découpage constante. L'algorithme utilise la valeur du rapport cyclique pour la sélection de la dynamique active à chaque instant de temps. Cette technique a été appliquée sur les deux convertisseurs considérés. Les modèles déterminés ont été validés par des essais en simulation qui ont permis de mettre en valeur une meilleure précision des modèles hybrides par rapport à un modèle moyen « classique ». Dans le cas du convertisseur flyback avec filtre d'entrée, la méthode de modélisation a été modifiée afin d'assurer la continuité des variables d'état à la limite des intervalles de définition du rapport cyclique, et de diminuer l'apparition du phénomène de réticences pour des valeurs du rapport cyclique proches de la frontière entre deux intervalles de définition.

De même, la méthode de modélisation hybride a été étendue afin de permettre la représentation du comportement dynamique d'un convertisseur dans les deux modes de fonctionnement (conductions continue et discontinue). Celle-ci a été appliquée dans le cas particulier du convertisseur buck. Le modèle hybride PWA caractérisant des transitions d'un mode de fonctionnement à un autre, utilise la valeur du courant de l'inductance pour l'identification du mode actif et, la valeur du rapport cyclique afin de choisir, à chaque période d'échantillonnage, l'une des dynamiques affines du modèle hybride. La validation du modèle PWA effectuée en simulation sur le circuit en commutation du convertisseur, montre une bonne approximation du courant de l'inductance en mode de conduction discontinue. Cette méthode de modélisation permet de développer un modèle unique du convertisseur, valide dans l'ensemble du domaine de fonctionnement, qui pourra servir par la suite pour la synthèse d'une loi de commande capable de réguler la tension de sortie pour une large gamme des variations de la charge et de la tension d'alimentation. Cependant, la bonne précision du modèle implique nécessairement une complexité élevée qui pourra introduire des difficultés au niveau de la synthèse d'une loi de commande.

Suite aux modèles hybrides obtenus pour les deux convertisseurs en mode de fonctionnement continu (CCM), nous avons proposé une stratégie de commande à gains commutés fondée sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux. Cette loi de commande présente l'avantage d'assurer la stabilité du système à piloter dans l'ensemble du domaine de fonctionnement établi en conduction continue. La stratégie de commande a été appliquée sur les deux topologies des convertisseurs : buck et flyback avec filtre d'entrée. Les performances des lois de commande élaborées ont été tout d'abord analysées en simulation en utilisant l'environnement Matlab/Simulink^{TM}, en utilisant les circuits en commutations des convertisseurs et en comparaison aux performances des lois de commandes rencontrées classiquement pour piloter des convertisseurs de puissance DC-DC : la régulation PI et la commande par retour d'état (synthétisée sur la base d'un modèle moyen linéaire du chaque convertisseur). La commande à gains commutés s'est avérée plus performante, en termes de rapidité et de dépassement de la tension de sortie.

De même, pour chaque topologie des convertisseurs envisagée, cette commande a été comparée avec une loi de commande synthétisée sur la base d'un modèle moyen en utilisant une fonction de Lyapunov commune. Cette comparaison a été faite afin d'évaluer l'intérêt d'utiliser un modèle hybride dans la synthèse des correcteurs. Dans le cas du convertisseur buck, la modélisation hybride n'améliore pas les performances de la loi de commande étant donné que les comportements des dynamiques affines du modèle PWA sont presque identiques. Concernant le convertisseur flyback avec filtre d'entrée, l'apport du modèle hybride est démontré. Cependant, afin de pouvoir exploiter l'avantage d'une modélisation hybride pour la synthèse de la commande, le domaine de fonctionnement du convertisseur doit permettre d'atteindre de points de fonctionnement pour lesquels le modèle hybride a été conçu.

La loi de commande à gains commutés a été implantée sur une maquette du convertisseur buck fonctionnant à 20kHz. Les essais effectués ont permis de valider les performances de la commande proposée, en particulier en présence de perturbations des conditions de fonctionnement (variations de la charge à différents valeurs de la tension d'alimentation, des variations de la consigne). La commande à gains commutés présente de meilleures performances en régulation que la commande par retour à gains fixes et la régulation PI, notamment en termes de dépassement et de rapidité.

La deuxième stratégie de commande proposée réside dans une loi de commande prédictive sous la forme explicite, couplée à un observateur hybride. Le développement de

cette stratégie de commande prédictive, impliquant un problème d'optimisation fondé sur un modèle hybride soumis aux contraintes, repose sur une résolution de ce problème d'optimisation selon un algorithme de programmation multiparamétrique associée à la programmation dynamique. Les avantages de cette approche de commande sont représentés par :

- la prise en compte des contraintes sur le rapport cyclique dès la phase de conception,
- la facilité d'implantation en temps réel vu que le correcteur explicite est exprimé sous la forme d'une fonction affine par morceaux,
- la réduction du nombre de capteurs due à l'utilisation d'un observateur couplé à la stratégie de commande prédictive.

La loi de commande explicite a été élaborée dans le cas particulier du convertisseur buck. Dans un premier temps, les performances du correcteur ont été évaluées en simulation, en comparaison à celles de la commande à horizon fini (la commande à gains commutés) et à la régulation « classique » de type PI. La commande prédictive sous la forme explicite permet de montrer des bonnes performances en termes de régulation de la tension de sortie à une valeur de consigne désirée. Concernant les performances de la commande en régulation en présence des variations de la charge, la réponse obtenue est comparable en termes de rapidité et dépassement à celle de la commande à gains commutés. Cependant, la comparaison avec la régulation PI démontre de meilleures performances de la commande prédictive au niveau de temps de réponse et de dépassement.

Dans un deuxième temps, le correcteur explicite couplé à un observateur hybride a été implanté sur la maquette du convertisseur buck fonctionnant à une fréquence de découpage de 20kHz. Les essais expérimentaux ont montré une dégradation des performances de la commande prédictive explicite obtenues expérimentalement par rapport à celles obtenues en simulation. Une hypothèse sur cette dégradation est la dynamique du filtre de mesure non pris en compte dans la phase de synthèse. La réponse obtenue reste malgré tout de bonne qualité en termes de rapidité et de dépassement pour des consignes en échelon et des variations de la charge.

Ainsi, les principales contributions de nos travaux de recherche effectués dans le cadre de cette thèse reposent sur :

- le développement d'une méthode de modélisation hybride permettant d'obtenir un modèle hybride commun afin de caractériser le comportement d'un convertisseur dans les deux modes de fonctionnement CCM/DCM ;
- l'application de la technique de modélisation hybride sur un convertisseur d'ordre élevé en mode de conduction continue ;
- l'élaboration d'une loi de commande PWL stabilisante ayant une structure facile à implanter en temps réel ;
- la conception d'une loi de commande prédictive sous la forme explicite qui permet la formulation des contraintes dès l'étape de synthèse ;
- l'implantation des deux lois de commande sur la maquette du convertisseur buck.

Perspectives

Le bilan des résultats présentés dans ce mémoire nous a permis de formuler des nombreuses perspectives qui pourront éventuellement améliorer les performances des stratégies de commande proposées.

Les pistes envisagées au niveau théorique concernent l'étape de modélisation et de synthèse des lois de commande.

Modélisation :

- l'application de la méthode de modélisation hybride sur d'autres convertisseurs DC-DC d'ordre élevé (Cuk, SEPIC) en CCM pourrait être envisagée. Une perspective intéressante serait de développer un modèle hybride caractérisant des transitions entre les deux modes de fonctionnement (CCM/DCM) pour ces convertisseurs avec un comportement fortement non-linéaire ;
- la technique de modélisation pourrait être appliquée sur d'autres types de systèmes de conversion d'énergie (par exemple des onduleurs).

Commande à gains commutés :

- afin d'améliorer la précision de la commande, un modèle hybride tenant compte des pertes dans le circuit pourra être utilisée dans la synthèse du correcteur PWL ;
- les termes affines du modèle PWA pourront être considérés dans la formulation des conditions de stabilité du système bouclé. Dans ce cas, il faudra utiliser d'autres techniques afin de reformuler ces conditions sous la forme des LMI, qui permettront le calcul des vecteurs de retour de la commande à gains commutés ;
- étant donné que la commande déterminée n'assure pas la continuité des variables d'état à la limite des intervalles de définition du rapport cyclique, l'utilisation d'un comparateur à hystérésis pourra être utilisé afin d'éviter l'apparition du phénomène de réticence.

Commande prédictive explicite :

- en tenant compte du fort lien entre les performances de la commande et le modèle de prédiction utilisé, plusieurs améliorations pourront être envisagées au niveau du modèle de synthèse afin d'augmenter sa précision : la prise en compte des pertes résistives dans le circuit et l'introduction de la dynamique du filtre utilisé pour la réduction des bruits dans le signal de mesure de la tension de sortie ;
- afin d'améliorer les performances de la commande en régulation lors des variations de la résistance de charge, cette dernière pourra être considérée comme une perturbation dans le modèle de synthèse. Dans ce cas, un estimateur de charge, associé à l'observateur hybride, pourra être utilisé. D'un autre point de vue, l'estimation de la résistance de charge permettra la prise en compte des contraintes sur le courant de l'inductance.

- afin de réduire davantage le nombre de régions sur lesquelles la commande explicite est définie et, par conséquent, de faciliter l'implantation en temps réel du correcteur PWA, des techniques plus efficaces de simplification de la taille de la commande pourront être appliquées.
- une étude *a posteriori* de la stabilité de la commande explicite pourra être effectuée par la recherche d'une fonction de Lyapunov quadratique ou linéaire par morceaux ;
- dans le cas du convertisseur buck, la stratégie de commande couplée à un observateur de l'état et de la résistance de charge pourra être appliquée en utilisant le modèle moyen du convertisseur en CCM, et étendu par la dynamique du filtre de mesures. Le fait d'utiliser un modèle linéaire permettra la formulation des objectifs de commande au moyen d'un critère de minimisation quadratique. Par ailleurs, la mise en œuvre de la stratégie de la commande prédictive en utilisant le modèle hybride valide dans les deux modes de conduction CCM/DCM représente un axe de travail très important et très intéressant ;
- dans le cas du convertisseur flyback avec filtre d'entrée, l'application de la stratégie de commande prédictive explicite sur la base du modèle hybride du convertisseur en CCM pourrait être envisagée ;
- au niveau des applications, il serait intéressant d'implanter la commande explicite sur des convertisseurs utilisant des cartes FPGA à fréquences de commutation élevée (500 kHz, 1 MHz) afin de travailler avec des convertisseurs de puissance optimisés par rapport à leur dimensionnement.

Références bibliographiques

[AFJ+07] Almér, S., H. Fujioka, U. Jonsson, C.-Y. Kao, D. Patino, P. Riedinger, T. Geyer, A. Beccuti, G. Papafotiou, M. Morari, A. Wernrud and A. Rantzer. Hybrid Control Techniques for Switched-Mode DC-DC Converters Part I: The Step-Down Topology. In *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, New York City, USA, 2007.

[AKS04] Ahmed, M., M. Kuisma and P. Silventoinen. Comparison between PID Control and Sliding Mode Control for Buck Converter. In *Proceedings of the Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion*. SPEEDAM 2004. CAPRI - ITALY, 16-18 June 2004.

[AMM10] Almér, S., S. Mariéthoz and M. Morari. Piecewise Affine Modeling and Control of a Step-Up DC-DC Converter. In *Proceedings of American Control Conference*, Baltimore, Maryland, USA, pp. 3299-3304, July 2010.

[AP97] Acevedo, J. and E. N. Oistikoloulos. A Multiparametric Programming Approach for Linear Process Engineering Problems under Uncertainty. In *Industrial & Engineering Chemistry Research (ACS Publications)*, 36:717-728, 1997.

[Bem04] Bemporad, A. Efficient Conversion of Mixed Logical Dynamical Systems into an Equivalent Piecewise Affine Form. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 5, pp. 832–838, 2004.

[Bor02] Borrelli, F. Discrete Time Optimal Control. PhD thesis, ETH Zurich, Suisse, 2002.

[Bor03] Borrelli, F. Constrained Optimal Control of Linear and Hybrid Systems. In volume 290 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer, 2003.

[BBBM03] Borrelli, F., M. Baotić, A. Bemporad and M. Morari. An Efficient Algorithm for Computing the State Feedback Optimal Control Law for Discrete Time Hybrid Systems. In *Proceedings of American Control Conference*, Denver, Colorado, USA, June 2003.

[BBBM05] Borrelli, F., M. Baotić, A. Bemporad and M. Morari. Dynamic Programming for Constrained Optimal Control of Discrete-Time Linear Hybrid Systems. In *Automatica*, vol. 41, pp. 1709-1721, 2005.

[BBM98] Branicky, M. S., V. S. Borkar and S. K. Mitter. A Unified Framework for Hybrid Control: Model and Optimal Control Theory. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 1, pp. 31–45, January 1998.

[BBM00a] Bemporad, A., F. Borrelli and M. Morari. Optimal Controllers for Hybrid Systems: Stability and Piecewise Linear Explicit Form. In *Proceedings of 39th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1810—1815, December 2000.

[BBM00b] Bemporad, A., F. Borrelli and M. Morari. The Explicit Solution of Constrained LP-Based Receding Horizon Control. In *Proceedings of 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, 2000.

[BBM00c] Bemporad, A., Borrelli F. and M. Morari. Piecewise Linear Optimal Controllers for Hybrid Systems. In *Proceedings of the American Control* Conference, pp. 1190-1194, Chicago, IL, June 2000.

[BCM03] Baotić, M., F. J. Christophersen and M. Morari. A New Algorithm for Constrained Finite Time Optimal Control of Hybrid Systems with a Linear Performance Index. In *Proceedings of the European Control Conference*, Cambridge, UK, September 2003.

[BFTM00] Bemporad, A., G. Ferrari-Trecate and M. Morari. Observability and Controllability of Piecewise Affine and Hybrid Systems. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 10, pp. 1864–1876, 2000.

[BM99a] Bemporad, A. and M. Morari. Control of Systems Integrating Logic, Dynamics and Constraints. In *Automatica* vol. 35, no. 3, pp. 407–427, March 1999a.

[BM99b] Bemporad, A. and M. Morari. Robust Model Predictive Control: A Survey. In Garulli, A., A. Tesi and A. Vincio (editors): Robustness in Identification and control, volume 25 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pp. 207-226. Springer-Verlag, 1999.

[BMC+09] Beccuti, G. A., S. Mariéthoz, S. Cliquennois, S. Wang and M. Morari. Explicit Model Predictive Control of DC-DC Switched-Mode Power Supplies With Extended Kalman Filtering. In *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 56, no. 6, June 2009.

[BNO97] Brogliato, B., S. I. Niculescu and P. Orthant. On the Control of Finite Dimensional Mechanical Systems with Unilateral Constraints. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, pp. 200–215, 1997.

[BPM+07] Beccuti, A., G. Papatofiou, M. Morari, S. Aimer, H. Fujioka, U. Jonsson, C. Kao, A. Wernud, A. Rantzer, M. Baja, *et al*.. Hybrid Control Techniques for Switched-Mode DC-DC Converters Part II : the step-up Topology. In *IEEE American Control Conference*, 2007- ACC'07, pp. 5464-5471, 2007.

[BR00] Brogliato, B. and A. Z. Rio. On the Control of Complementary-slackness Mechanical Juggling Systems. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, pp. 235–246, 2000.

[BTM00] Bemporad, A., F. D. Torrisi and M. Morari. Optimization-Based Verification and Stability Characterization of Piecewise Affine and Hybrid systems. In B. Krogh and N. Lynch, editors, Hybrid Systems: Computation and Control, volume 1790 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 45–58. Springer Verlag, 2000.

[CA96] Chen, H. and F. Allgöwer. A Quasi-Infinite Horizon Predictive Control Scheme for Constrained Nonlinear Systems. In: *16th Chinese Control Conference.*Quindao, China, pp. 309–316, 1996.

[CB97] Camacho, E. F. and C. A. Bordons. Model Predictive control in the Process Industry. Springer-Verlag, New York, Inc. Secaucus, NJ, USA, 1997.

[CB04] Camacho, E. F. and C. Bordons. Model Predictive Control. Springer-Verlag, London, 2004.

[CD88] Chua, L. O. and A.-C. Deng. Canonical Piecewise Linear Representation. In *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 35, no. 1, pp. 101–111, 1988.

[CM77] Ćuk, S. and R. D. Middlebrook. A General Unified Approach to Modeling Switching DC-to-DC Converters in Discontinuous Conduction Mode. In *Power Electronics Specialists Conference, Palo Alto, California, June 14-16, 1997, Record. (A79-10876 01-33), New York, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc*., pp. 36-57, vol. 1, 1997.

[CM87] Campo, P. J. and M. Morari. Robust model predictive control. In *Proceedings of American Control Conference*, vol. 2, pp. 1021-1026, 1987.

[CM01] Cuzzola, F. A. and M. Morari. A Generalized Approach for Analysis and Control of Discrete-Time Piecewise Affine and Hybrid Systems. In *International Journal of Control*, vol. 75, pp. 189-203, 2001.

[CMT87] Clarke, D. W., C. Mohtadi and P. S. Tuffs. Generalized Predictive Control Part I. The Basic Algorithm. In *Automatica*, vol. 23, no. 2, pp. 137-148, 1987.

[DP99] Dua, V. and E. N. Pistikopoulos. An Algorithm for the Solution of MultiparametricMixed Integer Linear Programming Problems.In *Annals of operations Research*, to appear 1999.

[Eri97] Erickson, R.W. Advances in Averaged Switch Modeling. In *4th Brazilian Congress of Power Electronics*, Invited paper, December 1997.

[Ejj10] Ejjabraoui, K. Contribution à la modélisation, l'analyse et l'optimisation de lois de commande pour convertisseurs DC-DC de puissance. PhD thesis, SUPELEC, Gif sur Yvette, France, 2010.

[ELLC12] Ejjabraoui, K., C. Larouci, P. Lefranc and C. Marchand. Pre-sizing Methodology of DC-DC Converters using Optimization under Multi-Physic Constraints: Application to a Buck Converter. In *IEEE Transactions On Industrial Electronics*, vol. 59, no. 7, ISSN : 0278-0046, 2012.

[EvdSO99] Escobar, G., A. J. van der Schaft and R. Ortega. A Hamiltonian Viewpoint in the Modeling of Switching Power Converters. In *Automatica*, vol. 35, pp. 445–452, 1999.

[Fen02] Feng, G. Stability Analysis of Piecewise Discrete-Time Linear Systems. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no. 7, pp. 1108–1112, 2002.

[FA99] Fang Chung-Chieh and E. H. Abed. Sampled-Data Modeling and Analysis of Closed-Loop PWM DC-DC Converters. In *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, vol. 5, pp. 110–115, 1999.

[FCMM02] Ferrari-Trecate, G., F. A Cuzzola, D. Mignone and M. Morari. Analysis of Discrete-Time Piecewise Affine and Hybrid Systems. In *Automatica* vol. 38, no. 12, pp. 2139–2146, 2002.

[FIAF03] Findeisen, R., L.Imsland, F. Allgöwer and B. A. Foss. State and Output Feedback Nonlinear Model Predictive Control: An Overview. *European Journal of Control* 9 (2–3), pp.190–206, 2003.

[GNLC94] Gahinet P., A. Nemirowski, A. J. Laub and M. Chilali: LMI Control Toolbox, The MathWorks Inc., 1994.

[GPM89] Garcia C. E., D. M. Prett and M. Morari. Model Predictive Control: Theory and Practice - a Survey. In *Automatica*, vol 25, no. 3, pp. 335–348, 1989.

[GPM05] Geyer, T., G. Papafotiou and M. Morari. Model Predictive Control in Power Electronics: A Hybrid Systems Approach. In *IEEE Conference on Decision and Control*, Seville, Spain, 2005.

[GPM08] Geyer, T., G. Papafotiou and M. Morari. Hybrid Model Predictive Control of the Step-down DC-DC Converter. In *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 16, no. 6, pp. 1112-1124, November 2008.

[GT06] Goebel R. and A. R. Teel. Solutions to Hybrid Inclusions via Set and Graphical Convergence with Stability Theory Applications. In *Automatica* vol. 42, no. 4, pp. 573–587, 2006.

[HBY89] Huliehel, F. and S. Ben-Yaakov. Low-Frequency Sampled-Data Models of Switched Mode DC-DC Converters. In *IEEE Power Electronics Specialists Conference*, pp. 92–499, June 1989.

[HL06] He, Y. and F. L. Luo. Sliding-Mode Control for DC-DC Converters with Constant Switching Frequency. In *IEEE Proceedings on Control Theory Applications*, vol. 153, no. 1, pp. 37–45, 2006.

[HdSB01] Heemels W. P. M. H., B. De Schutter and A. Bemporad. Equivalence of Hybrid Dynamical Models. In *Automatica*, vol. 37, no. 7, pp. 1085-1091, July 2001.

[HSRD10] Hernandez-Torres, D., O. Sename, D. Riu and F. Druart. On the Robust Control of DC-DC Converters: Application to a Hybrid Power Generation System, 2010. In *the 4th IFAC Symposium on system, structure and control, SSSC 2010*, Ancona, Italy.

[HSW00] Heemels, W., J. M. Schumacher and S. Weiland. Linear Complementarity Systems. In *SIAM Journal of Applied Mathematics*, vol. 60, no. 4, pp. 1234–1269, 2000.

[ILG78] Iung, C., J. Louis and V. Gelezevicius. Analysis of the Validity of Linear Approximations for the Regulation of DC Motor fed by AC/DC Converters. In *Proceeding of the International Conference on Electrical Machines*, Brussels, 1978.

[Jaa11] Jaafar, A. Contribution à la modélisation, l'analyse et l'optimisation de lois de commande pour convertisseurs DC-DC de puissance. PhD thesis, SUPELEC, Gif sur Yvette, France, 2011.

[JGL+10] Jaafar, A., E. Godoy, P. Lefranc, X. Lin-Shi, A. Fayaz, and N. Li. Nonlinear Sliding Mode observer and control of high order DC-DC converters. In *IEEE Industrial Electronics Society Conference*, Glendale, AZ, USA, November 2010, pp. 174–180.

[JR98] Johansson, M. and A. Rantzer. Computation of Piecewise Quadratic Lyapunov Functions for Hybrid Systems. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 4, pp. 555–559, 1998.

[KBBL90] Krein, P.T., J. Bentsman, R. M. Bass and B. L. Lesieutre. On the Use of Averaging for the Analysis of Power Electronic Systems. In *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 5, no. 2, pp. 182–190, April 1990.

[KG88] Keerthi, S. S. and E. G. Gilbert. Optimal, Infinite Horizon Feedback Lawsfor a General Class of Constrained Discrete Time Systems: Stability and Moving-Horizon Approximations. In *Journal of Optimization Theory and Applications*57 (2), 265–293, 1988.

[KGBM04] Kvasnica, M., P. Grieder, M. Baotić and M. Morari. Multi Parametric Toolbox (MPT). In Alur R., G. Pappas (editors) : Hybrid Systems: Computation and Control, volume 2993 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp.448-462. Springer-Verlag, 2004. http://control.ee.ethz.ch/~mpt.

[KM02] Kerrigan, E. C. and D. Q. Mayne. Optimal Control of Constrained, Piecewise Affine Systems with Bounded Disturbances. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, USA, December 2002.

[Lee85] Lee, Y. S. A Systematic and Unified Approach to Modeling Switches in Switch-Mode Power Supplies. In *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. IE-32, pp. 445–448, 1985.

[LB96] Lehman, B. and R. M. Bass. Switching Frequency Dependent Averaged Models for PWM DC-DC Converters. In *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 11, no. 1, pp. 89–98, January 1996.

[LvB98] Leenaerts, D. M. W. and W.M.G. van Bokhoven. Piecewise Linear Modeling and Analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1998.

[LJD12] P. Lefranc, P., X. Jannot and P. Dessante. Virtual Prototyping and Pre-sizing Methodology for Buck DC-DC Converters using Genetic Algorithms. In *IET Power Electronics*, vol. 5, no. 1, pp. 41-52, January 2012.

[LJSZS03] Lygeros, J., K. H. Johansson, S. N. Simic, J. Zhang and S. Sastry. Dynamical Properties of Hybrid Automata. In *IEEE Transactions on Automatic Control* 48, 2–17, 2003.

[LTL91] Leung, F. H. F., P. K. S. Tam and C. K. Li. The Control of Switching DC-DC Converters – a General LQR Problem. In *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 38, no. 1, pp. 65–71, February 1991.

[LTL93] Leung, F. H. F., P. K. S. Tam and C. K. Li. An Improved LQR-based Controller for Switching DC-DC Converters. In *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 40, no. 5, pp. 521–528, October 1993.

[Mac02] Maciejowski, J. M. Predictive Control with Constraints. Prentice Hall, 2002.

[May01] Mayne, D. Q. Control of Constrained Dynamic Systems. European Journal of Control 7, pp. 87–99, 2001.

[MB00] Mollerstedt, E. and B. Bernhardsson. Out of Control Because of Harmonics-an Analysis of the Harmonic Response of an Inverter Locomotive. In *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 20, no. 4, pp.70–81, 2000.

[MC76] Middlebrook, R. D. and S. Ćuk. A General Unified Approach to Modeling Switching Power Converter Stages. In *IEEE International Conference PESC'76 Proceedings*, pp. 18–34, Cleveland, OH, USA, 1976.

[MEBE97] Mahdavi, J., A. Emaadi, M. D. Bellar and M. Ehsani. Analysis of Power Electronic Converters using the Generalized State-Space Averaging Approach. In *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, vol. 44, no. 8, pp. 767–770, August 1997.

[MFM00] Mignone, D., G. Ferrari-Trecate and M. Morari. Stability and Stabilization of Piecewise Affine and Hybrid Systems: An LMI Approach. In *39th IEEE Conference on Decision and Control*, December, pp. 504-509, 2000.

[MM93] Michalska, H. and D. Q. Mayne. Robust Receding Horizon Control of Constrained Nonlinear Systems. In *IEEE Transactions on Automatic Control* 38 (11), 1623–1633, 1993.

[MRRS00] Mayne, D. Q., J. B. Rawlings, C. V. Rao and P. O. M. Scokaert. Constrained Model Predictive Control: Stability and Optimality. In *Automatica*, vol. 36, no. 6, pp. 789–814, June 2000.

[MRST95] Malesani, L., L. Rossetto, G. Spiazzi and P. Tenti. Performance Optimization of Cuk Converter by Sliding Mode Control. In *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 10, no. 3, May 1995.

[MZM84] Mosca, E. and G. Zappa, C. Manfredi. Multistep Horizon Self-Tuning Controllers. In *9th IFAC World Congress*, Budapest, Hungary, 1984.

[Nay73] Nayfeh, A. H. Perturbation Methods. New York: Wiley, 1973.

[NTM01] Nirgude, G., R. Tirumala and N. Mohan. A New, Large-Signal Average Model for Single-Switch DC-DC Converters Operating in both CCM and DCM. In *IEEE Power Electronics Specialists Conference*, vol. 3, pp. 1736–1741, 2001.

[OGC04] Ortega, R. and E. Garcia-Canseno. Interconnection and damping assignment passivity-based control: A survey. In *European Journal of Control*, 10(5):432–450, 2004.

[OLAGQ10] Olalla, C., R. Leyva, A. El Aroudi, P. Garcés and I. Queinnec. LMI Robust Control Design for Boost PWM Converters. In *IET Power Electronics*, vol. 3, no. 1, pp.75–85, 2010.

[OLNS98] Ortega, R., A. Loria, Per J. Nicklasson and H. J. Sira-Ramírez. Passivity-based control of Euler-lagrange systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications. Springer-Verlag, 1998.

[PG96] Pfeiffer, F. and C. Glocker.Multibody Dynamics with Unilateral Contacts.Wiley, Chichester, 1996.

[QB03] Qin, S. J. and T. A.Badgwell. A Survey of Industrial Model Predictive Control Technology.In *Control Engineering Practice* 11, pp. 733–764, 2003.

[RKJ09] Ramash Kumar, K. and S. Jeevananthan. Hysteresis Modulation Based Sliding Mode Control for Positive Output Elementary Super Lift Luo Converter. In International *Journal of Electrical and Electronics Engineering*, vol. 2, no. 3, pp. 131-138, 2009.

[Ros03] Rossiter J. A. Model-based Predictive Control: A Practical Approach. CRC Press, 2003.

[Sch00] De Schutter, B. Optimal Control of a Class of Linear Hybrid Systems with Saturation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 39(3):835–851, 2000.

[Sir91] Sira-Ramirez, H. Nonlinear P-I Controller Design for Switch mode DC- to-DC Power Converters. In *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 38, no. 4, pp. 410–417, April 1991.

[Son81] Sontag, E. D. Nonlinear regulation: the piecewise linear approach. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2):346-358, 1981.

[Son96] Sontag, E. D. Interconnected Automata and Linear Systems. A Theoretical Framework in Discrete-Time. In Alur, R., T. A. Henzinger, E. D. Sontag (editors), Hybrid Systems III – Verification and Control, no. 1066 in LNCS, pp. 436-448, Springer-Verlag, 1996.

[Su05] Su, Juing-Huei. Comparisons on Discrete-Time Modeling Techniques of DC-DC Switching Converters. In *Journal of The Chinese Institute of Engineers*, vol. 5, no. 28, pp.893–898, September 2005.

[Sun00] Sun, J. Unified Averaged Switch Models for Stability Analysis of Large Distributed Power Systems. In *IEEE Conference APEC (The Applied Power Electronics Conference)*, vol. 1, pp. 249–255, 2000.

[SvdB00] De Schutter, B. and T. van den Boom. On Model Predictive Control for MaxMin-Plus-Scaling Discrete Event Systems. Technical Report bds: 00-04, Control Lab, Fac. ITS, Delft Univ. Techn., Delft, The Netherlands, February 2000.

[SEK03] Senesky, M., G. Eirea and T. J. Koo. Hybrid Modeling and Control of Power Electronics. In Pnueli, A., O. Maler (editors): Hybrid Systems: Computation and Control, volume 2623 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 450–465. Springer-Verlag, 2003.

[SM99] De Schutter, B. and B. de Moor. The Extended Linear Complementarity Problem and the modeling and Analysis of Hybrid Systems. In P. Antsaklis, W. Kohn, M. Lemmon, A. Nerode, and S. Sastry, editors, Hybrid Systems V, volume 1567 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 70–85. Springer, 1999.

[SNLV91] Sanders, S., J.M. Noworolski, X. Z. Liu, G. C. Verghese. Generalized Averaging Method for Power Conversion Circuits. In *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 6, no. 2, pp. 251–159, April 1991.

[SS09] Stadlmayr, R. and K. Schlacher. An energy-based control strategy for DC/DC power converters. In *European Control Conference*, pages 3967–3972, Budapest, Hungary, August 2009.

[Tob05] Geyer, T. Low Complexity Model Predictive Control in Power Electronics and Power Systems, PhD thesis, ETH Zürich, Suisse, 2005.

[TB04] Torrisi, F. D. and A. Bemporad: HYSDEL — A Tool for Generating Computational Hybrid Models for Analysis and Synthesis Problems. In *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 12, no. 2, pp. 235–249, March 2004.

[TJB03] Tondel, P., T. A. Johansen and A. Bemporad. Evaluation of Piecewise Affine Control via Binary Search Tree. In *Automatica*, 39(5):945-950, May 2003.

[TLT06] Tan, S. C., Y. M. Lai and C. K. Tse. A Unified Approach to the Design of PWM-based Sliding-Mode Voltage Controllers for Basic DC-DC Converters in Continuous Conduction Mode. In *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 53, no. 8, pp. 1816–1827, 2006.

[UI08] Usman-Iftikhar, M. Contribution à la modélisation des convertisseurs continu/continu dans une perspective de commande - Influence du filtre d'entrée. PhD thesis, SUPELEC, Gif sur Yvette, France, 2008.

[ULSK09] Usman, M., P. Lefranc, D. Sadarnac and C. Karimi. Efficiency Investigation of DC-DC Converters with Passively Damped Input Filter Circuit. In *International Journal of Electronics*, vol. 96, no. 9, pp. 961-976, September 2009.

[Utk93] Utkin, V. J. Sliding Mode Control Design Principles and Applications to Electric Drives. In *IEEE transactions on Industrial Electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 23–36, 1993.

[vdSS98] van der Schaft, A. J. and J. M Schumacher. Complementarity Modeling of Hybrid Systems. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 3, pp. 483–490, 1998.

[vdSS00] van der Schaft, A. J. and J. M. Schumacher. An Introduction to Hybrid Dynamical Systems. Volume 251 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer, 2000.

[Vor90a] Vorpérian, V. Simplified Analysis of PWM Converters using Model of PWM Switch, Part I : Continuous Conduction Mode. In *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 26, no. 3, pp. 490–496, May 1990a.

[Vor90b] Vorpérian, V. Simplified Analysis of PWM Converters using Model of PWM Switch, Part II : Discontinuous Conduction Mode. In *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic. Systems*, vol. 26, no. 3, pp. 497–505, May 1990b.

[VRGL10] Vlad, C., P. Rodriguez-Ayerbe, E. Godoy and P. Lefranc. A Hybrid Model for Buck Converter Operating in Continuous and Discontinuous Conduction Modes. In *IEEE Industrial Electronics Society, 36th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, IECON-2010*, November 2010, Glendale, AZ, United-States.

[VRGL12] Vlad C., P. Rodriguez-Ayerbe, E. Godoy and P. Lefranc. Explicit Model Predictive Control of Buck Converter. In *IEEE International Conference*

EPE-PEMC (Power Electronics and Motion Control), September 2012, Novi Sad, Serbia.

[Wil93] Williams, H. P. Model Building in Mathematical Programming (3rd ed.). New York : Wiley, 1993.

[WM73] Wester, G. W. and R. Middlebrook. Low-Frequency Characterization of Switched DC-DC Converters. In. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES9 :376–385, May 1973.

Résumé

Actuellement la nécessité des systèmes d'alimentation d'énergie, capables d'assurer un fonctionnement stable dans des domaines de fonctionnement assez larges avec des bonnes performances dynamiques (rapidité du système, variations limitées de la tension de sortie en réponse aux perturbations de charge ou de tension d'alimentation), devient de plus en plus importante. De ce fait, cette thèse est orientée sur la commande des convertisseurs de puissance DC-DC représentés par des modèles hybrides.

En tenant compte de la structure variable de ces systèmes à commutation, un modèle hybride permet de décrire plus précisément le comportement dynamique d'un convertisseur dans son domaine de fonctionnement. Dans cette optique, l'approximation PWA est utilisée afin de modéliser les convertisseurs DC-DC. A partir des modèles hybrides développés, on s'est intéressé à la stabilisation des convertisseurs au moyen des correcteurs à gains commutés élaborés sur la base de fonctions de Lyapunov PWQ, et à l'implantation d'une commande prédictive explicite, en considérant des contraintes sur l'entrée de commande. La méthode de modélisation et les stratégies de commande proposées ont été appliquées sur deux topologies : un convertisseur buck, afin de mieux maîtriser le réglage des correcteurs et un convertisseur flyback avec filtre d'entrée. Cette dernière topologie nous a permis de répondre aux difficultés du point de vue de la commande (comportement à déphasage non-minimal) rencontrées dans la majorité des convertisseurs DC-DC. Les performances des commandes élaborées ont été validées en simulation sur les topologies considérées et expérimentalement sur une maquette du convertisseur buck.

***Mots-clés* :** systèmes hybrides, modèle affine par morceaux, commande par retour d'état linéaire par morceaux, commande prédictive explicite, convertisseurs de puissance DC-DC.

Abstract

Lately, power supply systems, guaranteeing the global stability for large enough operation ranges with good dynamic performances (small settling time, bounded overshoot of the output voltage in the presence of load or supply voltage variations), are strongly needed. Therefore, this thesis deals with control problems of DC-DC power converters represented by hybrid models.

Considering the variable structure of these switched systems, a hybrid model describes more precisely the converter's dynamics in its operating domain. From this perspective, a PWA (piecewise affine) approximation is used in order to model the DC-DC converters. Based on the developed hybrid models, first we have designed a stable piecewise linear state-feedback controller using piecewise quadratic (PWQ) Lyapunov functions, and secondly, we have implemented an explicit predictive control law taking into account constraints on the control input. The hybrid modeling technique and the proposed control strategies were applied on two different topologies of converters: a buck converter, in order to have a thorough knowledge of the controllers' tuning, and a flyback converter with an input filter. This last topology, allowed us to manage different control problems (non-minimum phase behavior) encountered in the majority of topologies of DC-DC power converters. The controllers' performances were validated in simulation on both considered topologies and also experimentally on buck converter.

Keywords: hybrid systems, piecewise affine model, piecewise linear state-feedback control, explicit model predictive control, DC-DC power converters.