



HAL
open science

Contribution aux approches multi-échelles séquencées pour la modélisation numérique des matériaux à matrice cimentaire

Nathan Benkemoun

► **To cite this version:**

Nathan Benkemoun. Contribution aux approches multi-échelles séquencées pour la modélisation numérique des matériaux à matrice cimentaire. Autre. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2010. Français. NNT : 2010DENS0047 . tel-00657311

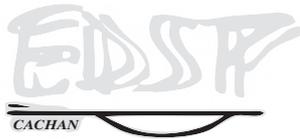
HAL Id: tel-00657311

<https://theses.hal.science/tel-00657311>

Submitted on 6 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENSC-2010 n°260



**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Domaine :

MÉCANIQUE, GÉNIE MÉCANIQUE, GÉNIE CIVIL

par **Nathan BENKEMOUN**

pour obtenir le grade de :

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Sujet de la thèse :

**Contribution aux approches multi-échelles séquencées pour
la modélisation numérique des matériaux à matrice
cimentaire**

Thèse soutenue le 10 Décembre 2010 devant le jury composé de :

Jean-Marie REYNOUARD	INSA, INSA de Lyon	<i>Président du jury</i>
Fekri MEFTAH	L2MGC, Université de Cergy-Pontoise	<i>Rapporteur</i>
Karam SAB	UR Navier, École des Ponts ParisTech	<i>Rapporteur</i>
Jean-Baptiste COLLIAT	LMT-Cachan, ENS de Cachan	<i>Examineur</i>
Luc DAVENNE	LEME, IUT de Ville d'Avray	<i>Examineur</i>
Adnan IBRAHIMBEGOVIĆ	LMT-Cachan, ENS de Cachan	<i>Directeur de thèse</i>

LMT-Cachan

ENS Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris
61, avenue du Président Wilson 94235 CACHAN
FRANCE

Je tiens, en premier lieu, à remercier le Professeur Jean-Marie Reynouard de m'avoir fait l'honneur d'être le président de mon jury de thèse ainsi que MM. Fekri Meftah et Karam Sab d'avoir accepté la tâche d'être rapporteurs du travail présenté dans ce manuscrit. Je remercie aussi le Professeur Luc Davenne d'avoir bien voulu prendre part à mon jury de soutenance en tant qu'examineur.

Je tiens aussi à remercier mon directeur de thèse, le Professeur Adnan Ibrahimbegović pour, tout d'abord, ses cours de Master 2 concernant la modélisation numérique par Éléments Finis qui m'ont donné envie de continuer dans cette voie, puis pour les conseils qu'il m'a donnés durant ces trois années de thèse aussi bien humains que scientifiques. Je lui suis très reconnaissant pour la confiance dont il m'a témoigné au travers des nombreuses participations à des colloques, de Sarajevo à Barcelone.

Je tiens ensuite à remercier M. Jean-Baptiste Colliat pour son encadrement, du stage de Master 2 jusqu'à le fin de ma thèse. J'ai apprécié nos discussions, tes conseils pratiques aussi bien sur le côté scientifique que sur le côté pédagogique notamment concernant mes présentations. Je pense qu'ensemble nous sommes arrivés à un outil numérique, certes perfectible mais intéressant pour la modélisation des matériaux quasi-fragiles qui laisse présager de nombreuses applications.

Je tiens finalement à remercier particulièrement deux personnes qui sont devenues des amis " hors Cachan ". Je pense, tout d'abord, à Christophe Kassiotis qui m'a fait rêver avec ses tsunamis. Je te remercie pour l'aide que tu m'as apportée concernant coFeap et tes conseils scientifiques en général. Je pense, ensuite, à Martin Hautefeuille que je suis venu voir à peu près tous les jours, quand il était encore à Cachan, pour de l'aide. Je te remercie pour ton encadrement, tes conseils et nos cafés " retour de post-doc ".

Je voudrais saluer tous les thésards et les membres du LMT Cachan qui ont fait que ces trois années de thèse ont été très agréables : les gens de la 211, de la mezzanine et tout particulièrement Roxane Marull qui a corrigé toutes les fautes d'orthographe et de grammaire de ma thèse.

Nathan Benkemoun
Laboratoire de Mécanique et Technologie
École Normale Supérieure de Cachan.

À Laura, qui me manque chaque jour un peu plus

Table des matières

Introduction	1
0.1 Objectifs et présentation du problème	1
0.2 Motivation	1
0.3 Méthodologie	4
0.4 Plan de la dissertation	5
1 Modélisation du caractère hétérogène	7
1.1 Notion de maillage non adapté	11
1.2 Méthodes d'enrichissement de la cinématique	12
1.2.1 <i>Generalized Finite-Element Method</i> : G-FEM	12
1.2.2 <i>eXtended Finite-Element Method</i> : X-FEM	14
1.2.3 <i>Embedded Finite-Element Method</i> : E-FEM	14
1.3 Formulation variationnelle à trois champs	15
1.3.1 Types courants d'enrichissement	16
1.3.2 Méthode des Modes Incompatibles	18
1.4 Représentation par un treillis spatial	21
1.4.1 Convergence globale en élasticité homogène	24
1.5 Élément fini bi-phasique	27
1.5.1 Linéarisation du problème (1.40)	30
1.5.2 Procédure de résolution du problème (1.46)	31
1.5.3 Erreur par rapport à une solution exacte	32
1.6 Génération et projection des inclusions	33
1.6.1 Processus de génération des rayons des inclusions	35
1.6.2 Processus de placement des inclusions	36
1.6.3 Projection des inclusions	37
1.6.4 Perspectives autour des modèles géométriques	37
1.7 Meso-modèle en élasticité hétérogène	42
1.7.1 Notion de VER	42
1.7.2 Homogénéisation en élasticité linéaire	43
1.7.3 Convergence globale en élasticité hétérogène	45
1.7.4 VER morphologique	47
1.7.5 Module de compressibilité	50

2	Modélisation du caractère hétérogène quasi-fragile	55
2.1	Revue bibliographique des limiteurs de localisation	58
2.2	Modèles à discontinuité forte	59
2.3	Modèle discret sur la discontinuité	61
2.4	Élément fini bi-phasique quasi-fragile	64
2.4.1	Fonction seuil	67
2.4.2	Linéarisation du problème (2.29)	68
2.4.3	Procédure de résolution du problème (2.42)	71
2.5	Méthode de résolution du problème éléments finis (2.49)	73
2.6	Validations numériques	74
2.6.1	Performances de l'algorithme local 2	74
2.6.2	Objectivité à l'égard du maillage	78
2.7	Chargements macroscopiques simples	81
2.7.1	Traction uniaxiale	81
2.7.2	Compression uniaxiale	86
2.7.3	Traction/Compression uniaxiale	87
2.7.4	Traction hydrostatique	91
3	Poutres de Timoshenko et matériaux hétérogènes	95
3.1	Cinématique et discrétisation éléments finis	97
3.1.1	Cinématique d'une poutre de Timoshenko	97
3.1.2	Interpolation éléments finis	98
3.2	Méthode des Modes Incompatibles et poutre de Timoshenko	99
3.3	Linéarisation du problème (3.14)	102
3.3.1	Linéarisation de (3.14a)	102
3.3.2	Linéarisation de (3.14b)	104
3.3.3	Linéarisation de (3.14c)	104
3.3.4	Linéarisation de (3.14d)	104
3.3.5	Procédure de résolution du problème (3.35)	105
3.4	Convergence globale en élasticité homogène	107
3.5	Convergence globale en élasticité hétérogène	109
4	Applications de l'approche multi-échelle séquentielle	115
4.1	Chargements complexes : surface de rupture	117
4.1.1	Bibliographie : surfaces de rupture	118
4.1.2	Programme de chargement	119
4.1.3	Surface de rupture macroscopique	120
4.2	Transfert de masse dans les milieux fissurés	127
4.2.1	Loi de Poiseuille	127
4.2.2	Formulation éléments finis du problème de transfert de masse	128
4.2.3	Validations du modèle	134
	Conclusions et perspectives	141
	Bibliographie	144

A Annexe A	155
A.1 Calcul du gradient de pression macroscopique avec des conditions aux limites homogènes	155

Introduction

0.1 Objectifs et présentation du problème

L'objectif principal de cette thèse est de développer un modèle numérique capable de proposer une représentation fine des phénomènes de fissuration pour les matériaux quasi-fragiles à matrice cimentaire. Dans ce sens, l'échelle pertinente retenue est l'échelle mesoscopique. L'échelle mesoscopique est ici de l'ordre du centimètre et le matériau peut être considéré comme bi-phasique (agrégats inclus dans un mortier, contenant lui même des inclusions de taille inférieure). Par ailleurs, de part la diversité des phénomènes de fissuration pour les matériaux quasi-fragiles comme le béton, il est nécessaire de mettre en place un modèle capable de représenter explicitement les fissures à l'interface agrégats/mortier et/ou dans n'importe quelles des deux phases (agrégats et mortier).

La modélisation numérique des phénomènes de fissuration proposée s'inscrit, ici, dans le cadre de la méthode des Éléments Finis à discontinuité forte. Plus précisément, la fissure est ici définie comme l'apparition d'une discontinuité de déplacements ou encore d'une zone d'épaisseur nulle dans laquelle toutes les déformations sont localisées. Elle correspond au cas extrême des bandes de localisation observées dans les sols ou les roches avec une largeur des bandes tendant vers zéro. Par ailleurs, le modèle proposé intègre aussi une discontinuité faible (discontinuité de déformations) afin de capturer les hétérogénéités sans que le maillage soit contraint.

Finalement le but est d'intégrer ce meso-modèle dans le cadre d'une approche multi-échelle séquencée permettant le transfert des informations du niveau mesoscopique vers le niveau macroscopique ou au moins sa borne inférieure, le Volume Élémentaire Représentatif. Cette approche séquencée permet, par exemple, de déterminer une surface de rupture macroscopique (dans l'esprit d'une fonction seuil) intégrant les principales caractéristiques des matériaux cimentaires.

0.2 Motivation

Tout d'abord, nous allons revenir sur notre motivation quant à la prise en compte des hétérogénéités. Le niveau d'hétérogénéité d'un matériau à matrice cimentaire comme le béton est intimement lié à son échelle d'observation. Pour illustrer ce propos considérons les trois échelles (microscopique, mesoscopique et macroscopique) de la figure 1 et leur dimension. Plaçons nous tout d'abord à l'échelle microscopique (en dessous de 10^{-4} m). La photo (Fig. 2) obtenue à l'aide d'un microscope optique permet de se rendre compte de la complexité des formes des différentes phases et aussi de leur nombre important (plaquettes de $Ca(OH)_2$, gel de CSH $((CaO)_3 - (SiO_2)_2 - (H_2O)_3)$ et ettringite

$((CaO)_6 - (Al_2O_3) - (SO_3)_3 - (H_2O_{32}))$). À l'échelle mesoscopique (10^{-2} m), les hétérogénéités sont moins marquées. Sont observées ainsi deux ou trois phases (granulats, pâte de ciment, vides) (Fig. 3) avec des formes moins complexes et moins diverses. Finalement à l'échelle macroscopique (du VER à l'échelle d'une structure (Fig. 4)), le matériau est considéré comme homogène et une seule phase est habituellement retenue. À cette échelle les modèles phénoménologiques reposant sur des quantités macroscopiques comme les contraintes et les déformations et des lois macroscopiques dérivant d'un cadre thermodynamique sont couramment utilisés. Notons ainsi, pour le béton, des modèles fondés sur la théorie de la plasticité [Lubliner, 1990] ou de l'endommagement [Lemaitre and Chaboche, 2004], potentiellement couplés, ainsi que des surfaces seuils et des lois d'évolution adaptées à différents trajets de chargement statiques ou dynamiques. De nombreux exemples peuvent être trouvés dans [G. Pijaudier-Cabot and Torrenti, 2009].

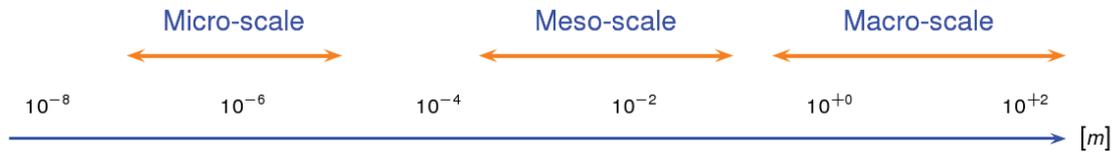


FIG. 1 – Échelles d'observation



FIG. 2 – Échelle microscopique : plaquettes de $Ca(OH)_2$, gel de CSH et ettringite (d'après [Stutzmann,])

Néanmoins de part leur caractère macroscopique, ces modèles sont peu capables de décrire correctement les mécanismes physiques (mécanismes de rupture, de dégradation ou de transport) aux échelles fines à l'origine des observations macroscopiques. Ceci s'explique par l'absence de représentation explicite des hétérogénéités (formes, distribution, tailles et comportement) présentes aux échelles fines (Fig. 2 et 3) et jouant un rôle fondamental [Yaman et al., 2002] dans la plupart des phénomènes physiques observés à l'échelle macroscopique. Cet inconvénient majeur a ainsi conduit à développer des techniques de



FIG. 3 – Échelle mesoscopique : pâte de ciment, mortier et béton



(a) éprouvette 16*32



(b) viaduc de Millau

FIG. 4 – Échelle macroscopique : du VER à la structure

changement d'échelles permettant de fournir des outils pour répondre à la question : comment transférer des informations détaillées conçues aux échelles fines vers l'échelle macroscopique pour un matériau soumis à une sollicitation donnée ? Ces outils sont référencés sous le terme d'homogénéisation dans la littérature. Dans ce travail de thèse, le choix de se tourner vers l'homogénéisation dite " numérique ", qui a connu un intérêt croissant ces dernières années grâce au développement des outils et de la puissance informatique, a été fait.

L'homogénéisation numérique, en suivant l'idée de [Feyel and Chaboche, 2001], peut être scindée en deux approches : une approche dite " séquencée " et une dite " intégrée ". L'approche séquencée repose sur une séquence de calculs (analytiques ou numériques (éléments finis)) menés à l'échelle fine permettant de fournir soit des réponses constitutives du matériau étudié à partir desquelles des modèles macroscopiques vont être identifiés *a posteriori*, modèles qui permettront ensuite de mener une analyse éléments finis à l'échelle structurelle [Colliat et al., 2007] soit des informations de type morphologique (détermination de la taille d'un VER [Kanit et al., 2003]).

D'un autre côté, l'approche intégrée, par l'analyse numérique (éléments finis) des échelles fines, fournit *in situ* et en temps réel les réponses macroscopiques ; il n'y a plus besoin d'un modèle macroscopique. La communication entre les échelles fines et l'échelle macroscopique peut se faire de plusieurs façons : au niveau des points de Gauss [Feyel and Chaboche, 2000], par des zones de collage [Ben Dhia, 1998] ou par des multiplicateurs de Lagrange [Ibrahimbegović and Marković, 2003], [Marković and Ibrahimbegović, 2004] et [Hautefeuille, 2009]. Au final, quelle que soit l'approche utilisée, un modèle à l'échelle fine est nécessaire ; c'est ce qui a motivé ce travail. L'utilisation de meso-modèles a été illustrée récemment par d'autres groupes de recherches [Wriggers and Moftah, 2006] pour le béton ou bien [Borja and Andrade, 2006] pour les sols.

0.3 Méthodologie

D'un point de vue numérique, le meso-modèle développé repose sur la méthode des Éléments Finis [Zienkiewicz and Taylor, 2001]. Nous avons choisi de travailler avec un treillis spatial dont la géométrie est obtenue par une triangulation de Delaunay. Nous avons également exploré une autre possibilité fondée sur un assemblage de poutres de Timoshenko.

Les hétérogénéités sont explicitement représentées par des inclusions sphériques. Le processus de maillage retenu pour tenir compte de ces inclusions est fondé sur un maillage non adapté aux interfaces [Belytschko et al., 2003], [Hautefeuille et al., 2009], c'est-à-dire non contraint à suivre la position géométrique des interfaces ; certains éléments sont alors coupés en deux parties, chacune d'entre elles ayant des propriétés différentes. Une discontinuité faible (saut fini dans le champ de déformations) [Ortiz et al., 1987], [Belytschko et al., 1988] est donc introduite dans chaque élément afin de prendre en compte cette cinématique particulière. Ceci conduit à un processus de maillage qui ne dépend pas de la position et de la forme des inclusions. Considérons un matériau bi-phasique (agrégats et mortier), trois types d'éléments apparaissent : ceux entièrement inclus dans le mortier (discontinuité faible non activée), ceux entièrement inclus dans les agrégats (discontinuité

faible non activée) et ceux coupés en deux par l'interface agrégats/mortier pour lesquelles la discontinuité faible est activée.

La fissuration et le comportement adoucissant observés pour des matériaux quasi-fragiles comme le béton sont introduits au moyen de discontinuités fortes (saut fini dans le champ de déplacements) [Simo et al., 1993], [Oliver, 1996] au sein de chaque élément. Ces discontinuités représentent la micro-fissuration qui peut apparaître dans n'importe quelle phase (agrégats ou mortier) ainsi que le décohesion aux interfaces entre les deux phases. Finalement, parmi toutes les méthodes existantes pour introduire les deux discontinuités au sein de l'élément, la méthode des Modes Incompatibles [Simo and Rifai, 1990], [Ibrahimbegovic and Wilson, 1991] a été choisie avec comme cadre mathématique sous-jacent la formulation variationnelle à trois champs indépendants de Hu-Washizu [Washizu, 1982].

Ce modèle a été implanté dans le code Éléments Finis coFEAP [Taylor, 2008], [Kassiotis and Hautefeuille, 2008] afin de simuler des réponses sous divers types de chargement. Nous montrons comment l'introduction de mécanismes de dégradation locaux très simples (rupture en extension ou traction et ouverture en mode I) conduisent à des réponses macroscopiques beaucoup plus "riches". Des applications de la méthodologie développée dans ce travail ont été réalisées. Premièrement, une surface de limite ultime a été fabriquée ; celle-ci pourrait, ainsi, être utilisée pour le calcul mono-échelle reposant sur des modèles phénoménologiques capables de représenter le comportement limite ultime d'une structure complexe ([Brancherie and Ibrahimbegovic, 2009] et [Ibrahimbegovic, 2006]). Deuxièmement, des applications de type multi-physiques ont aussi été traitées, notamment avec le calcul de tenseurs de perméabilité dans le cas de transfert de masse dans les milieux poreux.

0.4 Plan de la dissertation

Cette thèse s'articule de la façon suivante. Dans le premier chapitre, la stratégie de maillage retenue pour modéliser des microstructures hétérogènes est présentée. Nous revenons ainsi sur la notion de maillage adapté et non adapté. L'utilisation d'un maillage non adapté nécessitant un enrichissement cinématique de la base élément fini, différentes méthodes d'enrichissement cinématique sont présentées. Puis, dans un premier temps le cadre mathématique permettant d'introduire la méthode d'enrichissement choisie dans un problème éléments finis est présenté : la formulation variationnelle de Hu-Washizu est alors introduite. Dans un second temps, la méthode de discrétisation des champs du problème, reposant sur la méthode des Modes Incompatibles, est exposée. Ensuite, le processus de génération du maillage treillis trois dimensions et de placement des agrégats est expliqué. Une méthode permettant d'obtenir des agrégats de forme aléatoire reposant sur le seuillage de champs Gaussiens corrélés est évoquée brièvement. La méthode des Modes Incompatibles est ensuite appliquée à un élément barre, lui faisant ainsi hériter du caractère bi-phasique, et le système éléments finis à résoudre est exposé. Enfin, des validations numériques sont présentées aussi bien à l'échelle d'une barre que d'une meso-structure (convergence du maillage et homogénéisation).

Dans le deuxième chapitre, la rupture quasi-fragile est intégrée au sein de chaque élément barre bi-phasique. La méthode retenue repose sur l'introduction d'une discontinuité

forte (discontinuité dans le champ de déplacements). Cette discontinuité permet de modéliser la micro-fissuration qui peut apparaître dans n'importe quelle phase (agrégats ou mortier) ainsi que la décohésion aux interfaces entre les deux phases ; par ailleurs, elle joue aussi le rôle de limiteur de localisation. Ainsi, dans un premier temps, une bibliographie sur les limiteurs de localisation est présentée puis les points-clés des modèles à discontinuité forte sont rappelés. D'un point de vue numérique, la flexibilité de la méthode des Modes Incompatibles est exploitée afin d'introduire la discontinuité forte au sein de l'élément barre. Finalement, le système éléments finis tenant compte des deux discontinuités (faible et forte) est obtenu et l'algorithme de résolution est présenté. Des validations concernant l'objectivité du maillage sont, tout d'abord, exposées et des réponses sous divers chargements sont ensuite présentées.

Dans le troisième chapitre, une alternative à l'utilisation des éléments barres du treillis est présentée : elle repose sur des éléments poutres de Timoshenko. Ces dernières intègrent la cinématique de cisaillement qui manque à un élément barre. La cinématique et l'interpolation éléments finis d'une poutre de Timoshenko sont tout d'abord rappelées. Puis, la méthode des Modes Incompatibles est appliquée, en suivant la même technique que pour une barre, à une poutre : une poutre bi-phasique est ainsi obtenue. Finalement, des validations concernant la convergence du maillage en élasticité homogène et hétérogène sont exposées.

Dans le dernier chapitre, deux applications concernant l'approche multi-échelle séquentielle sont présentées. La première traite du développement d'une surface de rupture macroscopique en deux dimensions. La seconde s'inscrit dans le cadre de problèmes multiphysiques, à savoir le transfert de masse dans un milieu poreux et concerne l'obtention d'un tenseur de perméabilité macroscopique.

Chapitre 1

Modélisation du caractère hétérogène : enrichissements cinématiques éléments finis

Contents

1.1	Notion de maillage non adapté	11
1.2	Méthodes d'enrichissement de la cinématique	12
1.2.1	<i>Generalized Finite-Element Method</i> : G-FEM	12
1.2.2	<i>eXtended Finite-Element Method</i> : X-FEM	14
1.2.3	<i>Embedded Finite-Element Method</i> : E-FEM	14
1.3	Formulation variationnelle à trois champs	15
1.3.1	Types courants d'enrichissement	16
1.3.1.1	Statically Optimal Symmetric	17
1.3.1.2	Kinematically Optimal Symmetric	17
1.3.1.3	Statically and Kinematically Optimal Nonsymmetric	18
1.3.2	Méthode des Modes Incompatibles	18
1.4	Représentation par un treillis spatial	21
1.4.1	Convergence globale en élasticité homogène	24
1.5	Élément fini bi-phasique	27
1.5.1	Linéarisation du problème (1.40)	30
1.5.2	Procédure de résolution du problème (1.46)	31
1.5.3	Erreur par rapport à une solution exacte	32
1.6	Génération et projection des inclusions	33
1.6.1	Processus de génération des rayons des inclusions	35
1.6.2	Processus de placement des inclusions	36
1.6.3	Projection des inclusions	37
1.6.4	Perspectives autour des modèles géométriques	37
1.7	Meso-modèle en élasticité hétérogène	42
1.7.1	Notion de VER	42
1.7.2	Homogénéisation en élasticité linéaire	43
1.7.2.1	Conditions aux limites	43
1.7.2.2	Modules apparents et effectifs	44
1.7.2.3	Réponse effective isotrope	45
1.7.3	Convergence globale en élasticité hétérogène	45
1.7.4	VER morphologique	47
1.7.5	Module de compressibilité	50

Comme il a été évoqué en introduction, les matériaux hétérogènes comme le béton présentent une hétérogénéité qui varie selon l'échelle d'observation. À l'échelle macroscopique, le béton peut être modélisé comme un matériau homogène alors qu'à l'échelle mesoscopique, il peut être traité comme un mortier contenant des inclusions de taille millimétrique ou centimétrique. Il est possible d'aller encore plus loin dans la modélisation en considérant le mortier comme de la pâte de ciment durcie contenant les inclusions les plus fines et des pores. Des détails sur les échelles d'observation peuvent être trouvés dans [Huet, 1993] et [Garboczi, 1993]. L'approche fondée sur des modèles à l'échelle mesoscopique est certainement celle qui a la plus grande faisabilité et utilité pour l'étude de l'influence de la composition du béton sur les propriétés macroscopiques [Wang et al., 1999] et pour la prise en compte de l'origine et de la nature de la non-linéarité observée dans le comportement du béton. En effet, contrairement aux modèles phénoménologiques utilisés couramment à l'échelle macroscopique qui sont incapables d'intégrer les hétérogénéités (taille, forme et distribution des inclusions) et les phénomènes physiques à l'origine du comportement macroscopique observé, les modèles à l'échelle mesoscopique considérant le béton comme un matériau multi-phasique où la microstructure est simulée de façon explicite et réaliste sont capables d'intégrer par une analyse multi-échelle tous ces détails relatifs au comportement à l'échelle macroscopique.

Lors de la simulation numérique du béton à l'échelle mesoscopique, la taille, la forme et la distribution spatiale des inclusions au sein du mortier vont jouer un rôle significatif sur le comportement mécanique du béton. Un des objectifs du premier chapitre de cette thèse est donc de générer des modèles de microstructure aléatoire à l'échelle mesoscopique reposant sur des paramètres donnés (rayon minimum, rayon maximum des inclusions et intensité) et des probabilités de distribution des tailles et des coordonnées des inclusions. L'outil d'analyse numérique retenu étant la méthode des Éléments Finis, la stratégie de maillage des domaines d'étude et des inclusions est aussi présentée dans ce premier chapitre.

Au regard de la simulation de la distribution spatiale des agrégats, différentes techniques ont été développées afin de générer une structure mesoscopique ressemblant à un béton réel. [Bažant et al., 1990], [Schlangen and van Mier, 1992], [Wittmann et al., 1984] et [Wang et al., 1999] ont choisi la "take-and-place method" pour générer des fractions volumiques d'inclusions faibles. [De Schutter and Taerwe, 1993] ont utilisé une autre approche fondée sur la "divide-and-fill method". Un algorithme stochastique a été développé par [Leite et al., 2004] pour réaliser des simulations trois dimensions d'un béton. Afin de prendre en compte des fractions volumiques d'inclusions très élevées, [van Mier and van Vliet, 2003] ont choisi de travailler avec la "random particle drop method" et [Wriggers and Moftah, 2006] avec la "divide-and-fill method" couplée à un algorithme de régénération pour placer les plus petites inclusions. Une dernière approche appelée la "distinct element method" a été appliquée par [Cundall, 1979] pour simuler le comportement de géomatériaux comme le sable.

La forme des agrégats a une influence significative sur la distribution des contraintes dans le matériau et donc sur l'initiation de la fissuration jusqu'à la ruine du matériau. [Wang et al., 1999] et [Wittmann et al., 1984] ont ainsi généré des inclusions de forme arrondie en suivant les lois morphologiques développées par [Beddow and Meloy, 1980]. Pour des agrégats de forme anguleuse, [Wang et al., 1999] ont choisi d'ajuster les formes de polygones aléatoirement distribués afin d'avoir des taux d'élongation imposés. Néanmoins pour des modèles trois dimensions, [Bažant et al., 1990], [Guidoum and Navi, 1993],

[Schlangen and van Mier, 1992], [Schorn and Rode, 1991] et [Wriggers and Moftah, 2006] ont travaillé avec des inclusions de forme sphérique. Plus récemment [Häfner et al., 2003], [Leite et al., 2004] et [Zohdi, 2001] ont utilisé des fonctions ellipsoïdes avec des paramètres permettant de faire varier la forme des inclusions.

La distribution de la taille des agrégats joue un rôle essentiel dans la conception et l'optimisation du mélange mortier/inclusions. Une sélection correcte de la distribution de la taille des agrégats affecte directement les principales propriétés du béton telles que la résistance mécanique, la perméabilité et la durabilité.

L'analyse numérique des matériaux hétérogènes utilisant la méthode des Éléments Finis requiert la discrétisation du modèle mesoscopique créé. Différentes techniques de maillage peuvent être utilisées afin de mailler la microstructure ; nous pouvons les classer en deux catégories : les maillages adaptés aux interfaces [Jean, 2009] et les maillages non adaptés aux interfaces [Moës et al., 2003]. Par le terme non adaptés, nous entendons que les interfaces entre les inclusions et le mortier ne sont pas explicitement maillées. Le principal avantage de cette méthode est qu'à chaque fois que l'on change de microstructure, toutes les interfaces inclusions/mortier n'ont pas à être remaillées. Cependant, cette méthode implique que certains éléments se retrouvent coupés au niveau de l'interface inclusions/mortier en deux parties ayant des propriétés matérielles différentes ; de ce fait, un traitement numérique spécial est nécessaire pour prendre en compte cette cinématique particulière au sein de l'élément coupé. Ce traitement numérique spécial est appelé enrichissement cinématique.

De nombreux meso-modèles ont déjà été développés dans la littérature [Bažant et al., 1990], [Schorn and Rode, 1991], [Schlangen and van Mier, 1992], [Wang et al., 1999] et [Wriggers and Moftah, 2006]. Parmi eux, nombreux sont ceux issus d'une approche fondée sur des modèles treillis ou poutres. Ces approches ont connu un intérêt croissant avec l'augmentation de la puissance de calcul. Ce type de modélisation remonte aux travaux de [Hrennikoff, 1941]. Plus récemment, différents modèles treillis ont été utilisés pour étudier la rupture de différents types de matériaux [Herrmann and Roux, 1990], [Jirásek and Bažant, 1995b] (pour de la glace), [Schlangen and van Mier, 1992], [Schlangen and Garboczi, 1997], [Lilliu and van Mier, 2003] et [Man and van Mier, 2007] (pour du béton) ou le calcul de propriétés effectives [Lachihab and Sab, 2005]. Ces modèles ont en général l'avantage de dépendre de peu de paramètres et de présenter un comportement mécanique simple. Par ailleurs, leur caractère discret en fait des outils pratiques pour représenter la fissuration. Le choix retenu dans cette thèse pour la discrétisation éléments finis repose aussi sur un modèle treillis en trois dimensions.

Ce chapitre s'articule de la façon suivante : après avoir, dans la première partie, présenté la stratégie adoptée pour le maillage de microstructures, nous aborderons le cadre mathématique et numérique (parties deux et trois) de cette stratégie. Dans la partie quatre, nous expliquerons la méthode retenue pour la génération d'un maillage treillis trois dimensions. La partie cinq présentera l'enrichissement cinématique des éléments finis barres du treillis. Finalement dans la partie six, des validations du meso-modèle en élasticité hétérogène seront étudiées.

1.1 Notion de maillage non adapté et lien avec les enrichissements

Lorsque des matériaux hétérogènes sont étudiés, il est nécessaire de pouvoir faire varier la microstructure (nombre d'inclusions, fractions volumiques et formes) sans que ces changements entraînent un coût prohibitif du processus de remaillage.

La première méthode de maillage de matériaux hétérogènes consiste à utiliser un maillage adapté aux interfaces, c'est-à-dire contraint à suivre la position géométrique des interfaces (par exemple interfaces agrégats/mortier pour un béton). Cette approche nécessite souvent des processus de maillage sophistiqués. En général, ce type d'approche peut être décomposé en trois étapes majeures. Une première étape consiste à représenter la géométrie en construisant l'interface, soit en utilisant des outils de CAO, soit à partir d'algorithmes dits de Marching-Cubes [Lorensen and Cline, 1987]. Une deuxième étape consiste à générer un maillage surfacique de cette interface (avec par exemple un maillage composé de triangles sous formes d'éléments coques [Jean, 2009]). Enfin, dans une troisième étape le domaine d'étude est rempli par un maillage volumique. Deux méthodes sont couramment utilisées, la triangulation de Delaunay [Georges and Borouchaki, 1997] ou les méthodes dites de front [Löhnert, 2004]. Un exemple de ces trois étapes concernant le maillage de microstructures d'élastomères chargés est proposé dans [Jean, 2009]. Le principaux désavantages de cette approche sont les suivants. Tout d'abord, la modélisation du comportement à l'interface, comme le décollement, requiert un effort important du fait de la complexité des algorithmes de Marching-Cubes. Il arrive, ensuite, que les éléments à l'interface soient distordus ce qui entraîne des problèmes de conditionnement et donc de convergence. Enfin, à chaque fois que l'on change la microstructure, cela oblige à remailler à la fois tout le domaine, toute la microstructure et toutes les interfaces.

Ce dernier point est certainement celui qui a motivé une approche différente, à savoir l'utilisation d'un maillage non adapté aux interfaces, c'est-à-dire non contraint à suivre la position géométrique des interfaces. De ce fait, certains éléments se retrouvent coupés au niveau de l'interface en deux parties ayant des propriétés différentes : leurs champs de déformations présentent alors un saut fini au niveau de l'interface (discontinuité dans le champ de déformations), cela est appelé dans la littérature une discontinuité faible. Ainsi, l'information géométrique et matérielle est directement intégrée au sein de l'élément. Un exemple d'utilisation de discontinuité faible est présent dans [Ortiz et al., 1987] où la prise en compte de bandes de cisaillement avec des éléments finis de type Q4 est expliquée : dans cette approche, seule une discontinuité faible peut être présente au sein d'un élément, et donc une autre discontinuité faible est nécessaire dans l'élément voisin pour modéliser la bande de localisation entière (Fig. 1.1). L'inconvénient de la méthode réside dans le fait qu'une seule discontinuité faible est introduite dans l'élément. L'apparition de la bande de localisation est donc dépendante, dans une certaine mesure, de la taille de l'élément. Cette idée a ensuite été développée et améliorée par [Belytschko et al., 1988]. Les auteurs ont proposé de mettre directement dans l'élément une zone de localisation, c'est-à-dire qu'un élément peut contenir une bande de déformation localisée bornée par deux discontinuités faibles parallèles (Fig. 1.2). La bande de localisation devient ainsi indépendante de la taille de l'élément et peut être considérée comme un paramètre matériel. Cependant la taille minimale des éléments doit être imposée. En effet, l'épaisseur de la bande de localisation doit rester inférieure à la taille d'un élément. Notre approche s'inscrit dans les travaux de

[Ortiz et al., 1987]; une seule discontinuité faible est en effet nécessaire au sein de chaque élément car nous ne cherchons pas à modéliser une bande de localisation mais seulement un saut fini dans le champ de déformations d'un élément coupé en deux.

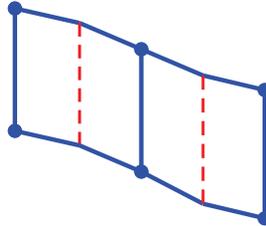


FIG. 1.1 – Éléments avec une discontinuité faible (lignes rouges) [Jirásek, 2000]

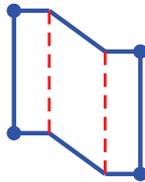


FIG. 1.2 – Élément avec deux discontinuités faibles parallèles (lignes rouges) [Jirásek, 2000]

Après avoir présenté dans cette partie la stratégie de maillage retenue (maillage non adapté) et la conséquence sur le champ de déformations des éléments coupés en deux (saut fini dans le champ de déformations : discontinuité faible), nous allons introduire, dans la partie suivante, les méthodes permettant de prendre en compte de façon numérique cette discontinuité faible. Elles reposent toutes sur un enrichissement cinématique de la base Éléments Finis classique.

1.2 Méthodes d'enrichissement de la cinématique d'un élément fini

La littérature fournit de nombreuses méthodes d'enrichissement cinématique de la base éléments finis classique permettant d'introduire une discontinuité faible avec des maillages non adaptés. Cette discontinuité faible permet de capturer entre autres la présence de vides ou d'inclusions.

1.2.1 *Generalized Finite-Element Method* : G-FEM

Notons, tout d'abord, la *Generalized Finite-Element Method* (G-FEM) [Strouboulis et al., 2000a] qui permet aux auteurs [Strouboulis et al., 2000b] de modéliser des vides. La G-FEM repose sur une combinaison de la méthode des Éléments Finis classique et de la méthode de la Partition de l'Unité [Babuška and Melenk, 1997]. Les espaces éléments finis classiques sont enrichis par l'ajout de fonctions spéciales prenant en compte

des informations connues au sujet des conditions aux limites et des données d'entrée. Ces fonctions spéciales sont multipliées par la partition de l'unité correspondant aux fonctions de forme élément fini linéaire standard valant 1 en un sommet V_i donné et 0 ailleurs. Elles sont ensuite sommées avec la base élément fini existante pour construire un espace élément fini continu enrichi.

La partition de l'unité peut se définir, dans le cas de la G-FEM, de la façon suivante : étant donné un ensemble de sous-domaines se chevauchant appelés patch $\{\Omega_i\}$ et un ensemble de fonctions $\Psi_i = \{\psi_j^{(i)} | \psi_j^{(i)} \in H^1(\Omega)\}$ ayant les propriétés d'approximations souhaitées associées à chaque patch, la solution en terme de partition de l'unité sur un domaine Ω se définit comme

$$u_{PUM} = \sum_i \phi_i \left(\sum_j a_j^{(i)} \psi_j^{(i)} \right), \quad (1.1)$$

où $\psi_j^{(i)}(x, y)$ est une fonction spéciale de l'ensemble Ψ_i (Fig. 1.3). L'espace Ψ_i sera appelé l'espace patch. Les $a_j^{(i)}$ sont des coefficients constants. La séquence de fonctions ϕ_i (une pour chaque patch de l'ensemble $\{\Omega_i\}$) est une partition de l'unité C^0 sur Ω et sert à imposer la continuité. Cette version de la partition de l'unité inclut l'espace des fonctions linéaires éléments finis usuelles, mais rien n'interdit d'ajouter l'espace des fonctions de forme élément fini d'ordre plus élevé, $\tilde{\phi}_k$. Finalement l'approximation élément fini type G-FEM s'écrit :

$$u_{GFEM} = \sum_i^{n_{vert}} \phi_i \left(\sum_j^{n_i} a_j^{(i)} \psi_j^{(i)} \right) + \sum_k^{n_{FEM}} b_k \tilde{\phi}_k, \quad (1.2)$$

où n_{vert} est le nombre de fonctions ϕ_i , n_i est le nombre de fonctions spéciales dans l'espace patch Ψ_i associé à un sommet V_i et n_{FEM} est le nombre d'éléments finis d'ordre plus élevé.

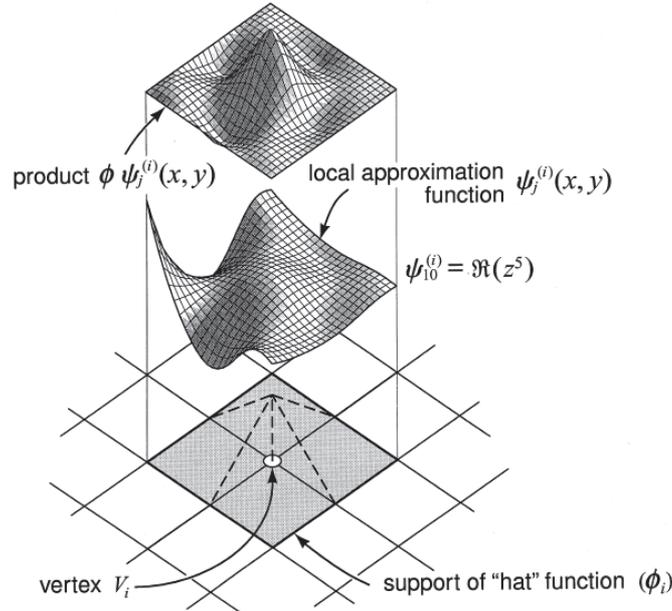


FIG. 1.3 – Construction du produit $\phi_i \psi_j^{(i)}$ sur le patch $\{\Omega_i\}$ pour l'ensemble de polynômes harmoniques [Strouboulis et al., 2000a]

1.2.2 *eXtended Finite-Element Method* : X-FEM

Nous trouvons, ensuite, la *eXtended Finite-Element Method* (X-FEM) [Moës et al., 1999] qui, couplée à une méthode de level set, permet aux auteurs [Moës et al., 2003] et [Sukumar et al., 2001] de modéliser des matériaux bi-phasiques en deux et trois dimensions. La X-FEM, repose là aussi sur une combinaison de la méthode des Éléments Finis classique et de la méthode de la Partition de l'Unité. Mais cette fois-ci, les espaces éléments finis classiques sont enrichis par des degrés de liberté additionnels au niveau des nœuds pour lesquels le support est coupé par une interface auxquels des fonctions d'enrichissement sont associées (Fig. 1.4.b). Cette combinaison est ensuite multipliée par la partition de l'unité correspondant aux fonctions de forme élément fini linéaire standard valant 1 en un sommet V_i donné et 0 ailleurs. L'approximation élément fini type X-FEM s'écrit :

$$u_{X-FEM} = \sum_j^{n_{enr}} a_j N_j F + \sum_i^{n_{FEM}} u_i N_i, \quad (1.3)$$

où les a_j sont les degrés de liberté additionnels au niveau des nœuds pour lesquels le support est coupé par une interface, n_{enr} est le nombre de nœuds dont le support est coupé par une interface (enrichis) et n_{FEM} correspond au nombre de nœuds dont le support n'est pas coupé par une interface (non enrichis). Les fonctions N sont les fonctions de forme classiques éléments finis vérifiant la partition de l'unité. Enfin F est la fonction d'enrichissement. Dans [Sukumar et al., 2001], [Belytschko et al., 2003] et [Moës et al., 2003] sont référencés des choix pour la fonction d'enrichissement.

1.2.3 *Embedded Finite-Element Method* : E-FEM

Il y a enfin la *Embedded Finite-Element Method* (E-FEM) qui permet aussi aux auteurs de modéliser des matériaux bi-phasiques en deux [Hautefeuille et al., 2009] et trois dimensions [Benkemoun et al., 2010]. La E-FEM est fondée une fois de plus sur la méthode des Éléments Finis classique mais plus sur la méthode de la Partition de l'Unité. Les espaces éléments finis classiques sont enrichis par des degrés de liberté additionnels non plus au niveau de chaque nœud pour lequel le support est coupé par une interface, mais au niveau de chaque élément qui est coupé par une interface auquel des fonctions d'enrichissement sont associées (Fig. 1.4.a). Cette approche a l'avantage de séparer le champ de déplacements en une partie globale (partie élément fini classique) et une partie locale (partie enrichie), ce qui permet une résolution des inconnues ajoutées à l'échelle locale. L'approximation élément fini type E-FEM s'écrit :

$$u_{E-FEM} = \sum_j^{n_{enr}} a_j M + \sum_i^{n_{FEM}} u_i N_i, \quad (1.4)$$

où les a_j sont les degrés de liberté additionnels dits " degrés de liberté améliorés " au niveau des éléments coupés par une interface, n_{enr} est le nombre d'éléments coupés par une interface (enrichis) et n_{FEM} correspond au nombre d'éléments qui ne sont pas coupés par une interface (non enrichis). Les fonctions N sont les fonctions de forme classiques éléments finis vérifiant la partition de l'unité. Enfin M est la fonction d'enrichissement.

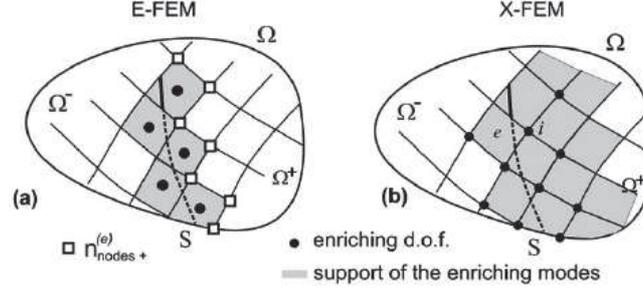


FIG. 1.4 – Types d'enrichissements : a- élémentaires et b- nodaux [Oliver et al., 2006]

Finalement c'est dans le contexte de la *Embedded Finite-Element Method* que les nous avons choisi de travailler. La partie suivante s'attachera ainsi à présenter le cadre mathématique permettant d'introduire ce type d'enrichissement dans un problème Éléments Finis.

1.3 Formulation variationnelle à trois champs de Hu-Washizu

Un cadre mathématique unifié permettant d'enrichir la cinématique d'un élément fini par la *Embedded Finite-Element Method* peut être obtenu à partir de la formulation variationnelle à trois champs de Hu-Washizu [Washizu, 1982]. Cette formulation, contrairement à une formulation de type déplacements, considère trois champs indépendants : le champ de déplacements \mathbf{u} , le champ de déformations $\boldsymbol{\epsilon}$ et le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$. Ces trois champs sont définis sur un domaine Ω dont les frontières sont séparées en deux parties, S_t et S_u , soumises respectivement à des forces surfaciques et des déplacements imposés. À part pour les conditions aux limites en déplacement, $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ sur S_u , et pour certaines exigences de régularité, les champs sont complètement arbitraires et mutuellement indépendants.

Le formulation s'écrit alors :

Trouver $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}) \in (\mathbb{V}, \mathbb{E}, \mathbb{T})$ tel que $\forall (\delta \mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\epsilon}, \delta \boldsymbol{\sigma}) \in (\mathbb{V}_0, \mathbb{E}, \mathbb{T})$,

$$\begin{aligned}
 HW_u(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}; \delta \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \partial \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{S_t} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dS = \mathbf{0} \\
 HW_{\sigma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}; \delta \boldsymbol{\sigma}) &= \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\sigma} : (\partial \mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon}) \, d\Omega = \mathbf{0} \\
 HW_{\epsilon}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}; \delta \boldsymbol{\epsilon}) &= \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon} : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}) - \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega = \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

où

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V} &= \{ \mathbf{u} \text{ tel que } \mathbf{u} \in H^1(\Omega), \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ sur } S_u \} \\
 \mathbb{V}_0 &= \{ \delta \mathbf{u} \text{ tel que } \delta \mathbf{u} \in H^1(\Omega), \delta \mathbf{u} = 0 \text{ sur } S_u \} \\
 \mathbb{E} &= \{ \boldsymbol{\epsilon} \text{ tel que } \boldsymbol{\epsilon} \in L_2(\Omega) \} \\
 \mathbb{T} &= \{ \boldsymbol{\sigma} \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma} \in L_2(\Omega) \}
 \end{aligned}$$

$\tilde{\sigma}$ est un champ de contraintes vérifiant la loi de comportement.

Dans (1.5), $(\delta \mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\epsilon}, \delta \boldsymbol{\sigma})$ sont respectivement les champs de déplacements virtuels, de déformations virtuelles et de contraintes virtuelles. D'autre part, \mathbf{b} est la force de volume et $\bar{\mathbf{t}}$ la force de surface.

Une fois le cadre mathématique posé, nous pouvons discrétiser le problème en approximant les champs inconnus $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ [Jirásek, 2000] par

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N} \mathbf{d} + \mathbf{N}_u \mathbf{d}_u \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \mathbf{B} \mathbf{d} + \mathbf{G} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{S} \mathbf{s} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Dans (1.6), \mathbf{N} est la matrice standard d'interpolation des déplacements (contenant les fonctions de forme standard), $\mathbf{B} = \partial \mathbf{N}$ est la matrice standard d'interpolation des déformations (contenant les dérivées des fonctions de forme standard), \mathbf{N}_u et \mathbf{G} sont respectivement les matrices contenant les termes d'enrichissement pour les déplacements et les déformations, \mathbf{S} est la matrice d'interpolation des contraintes et les vecteurs \mathbf{d} , \mathbf{d}_u , \mathbf{a} et \mathbf{s} regroupent les degrés de liberté correspondant respectivement aux déplacements nœuds, aux déplacements additionnels dits "déplacements améliorés", aux déformations additionnelles dites "déformations améliorées" et aux paramètres de contrainte.

En injectant (1.6) dans la formulation de Hu-Washizu (1.5) et en prenant en compte l'indépendance des champs virtuels $(\delta \mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\epsilon}, \delta \boldsymbol{\sigma})$, le problème discrétisé suivant est obtenu

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} (\mathbf{B} \mathbf{d} + \mathbf{G} \mathbf{a}) \, d\Omega = \mathbf{f}_{ext} \quad (1.7a)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{G}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} (\mathbf{B} \mathbf{d} + \mathbf{G} \mathbf{a}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{G}^T \mathbf{S} \, d\Omega \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (1.7b)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{S}^T \mathbf{B}_u \, d\Omega \mathbf{d}_u - \int_{\Omega} \mathbf{S}^T \mathbf{G} \, d\Omega \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (1.7c)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \mathbf{S} \, d\Omega \mathbf{s} = \mathbf{f}_{ext,u} \quad (1.7d)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{ext} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{S_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \, dS \\ \mathbf{f}_{ext,u} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{S_t} \mathbf{N}_u^T \bar{\mathbf{t}} \, dS \end{aligned} \quad (1.8)$$

Dans la suite, il est supposé que le chargement est appliqué en dehors de la région où la cinématique est enrichie, de ce fait $\mathbf{f}_{ext,u} = \mathbf{0}$.

1.3.1 Types courants d'enrichissement

Nous allons maintenant introduire les trois différentes méthodes que l'on retrouve dans la littérature pour choisir les matrices \mathbf{N}_u et \mathbf{G} . Les méthodes sont dites :

1. *Statically Optimal Symmetric* (SOS)
2. *Kinematically Optimal Symmetric* (KOS)
3. *Statically and Kinematically Optimal Nonsymmetric* (SKON)

Elles diffèrent dans le choix des matrices d'interpolation \mathbf{N}_u et \mathbf{G} .

1.3.1.1 Statically Optimal Symmetric

Dans ce cas, seul le champ de déformations est souhaité être enrichi ; le champ de déplacements n'est pas enrichi. De ce fait, tous les termes contenant \mathbf{d}_u , \mathbf{N}_u et $\mathbf{B}_u (= \partial \mathbf{N}_u)$ peuvent être retirés de (1.7). L'équation (1.7d) disparaît complètement et l'équation (1.7c) se réduit à

$$\int_{\Omega} \mathbf{S}^T \mathbf{G} \, d\Omega \, \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (1.9)$$

Dans le but de passer le patch-test, l'élément doit être capable de reproduire exactement un champ de contraintes constant, et le choix le plus simple pour la matrice d'interpolation de la contrainte \mathbf{S} est $\mathbf{S} = \mathbf{I}$, où \mathbf{I} est la matrice identité. Ainsi (1.9), devient

$$\int_{\Omega} \mathbf{G} \, d\Omega \, \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (1.10)$$

Si \mathbf{G} satisfait la condition de moyenne nulle sur l'élément,

$$\int_{\Omega} \mathbf{G} \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (1.11)$$

alors (1.7c) est satisfaite pour n'importe quel \mathbf{a} . De plus comme la matrice qui multiplie \mathbf{s} dans (1.7b) est maintenant une matrice nulle, les paramètres de contraintes \mathbf{s} disparaissent complètement de la formulation. L'ensemble d'équations est alors :

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{a}) \, d\Omega = \mathbf{f}_{ext} \quad (1.12a)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{G}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{a}) \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (1.12b)$$

Les éléments finis qui dérivent de cette interpolation vérifient la condition de continuité du vecteur traction sur la discontinuité mais ne peuvent pas représenter proprement les cinématiques de discontinuité, d'où le terme de “ Statically ”. Un exemple mené sur un CST peut être trouvé dans [Jirásek, 2000].

1.3.1.2 Kinematically Optimal Symmetric

Dans ce cas, contrairement à la SOS, le champ de déplacements est aussi enrichi. Tous les termes contenant \mathbf{d}_u , \mathbf{N}_u et $\mathbf{B}_u (= \partial \mathbf{N}_u)$ ne peuvent donc plus être retirés. En revanche, en suivant la proposition faite par [Ibrahimbegovic and Wilson, 1991], $\partial \mathbf{N}_u$ peut être construite comme égale à \mathbf{G} ou encore \mathbf{B}_u comme égale à \mathbf{G} et \mathbf{d}_u comme égale à \mathbf{a} . Ainsi (1.7c) et (1.7d) disparaissent complètement de la formulation. L'ensemble d'équations est alors :

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{a}) \, d\Omega = \mathbf{f}_{ext} \quad (1.13a)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{G}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{a}) \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (1.13b)$$

Notons encore que les paramètres de contraintes \mathbf{s} disparaissent complètement de la formulation. Les deux approches (SOS) et (KOS) donnent les mêmes équations d'équilibre à la différence près que la matrice \mathbf{G} vérifie (1.11) ou bien est construite en prenant $\mathbf{G} = \mathbf{B}_u$.

Les éléments qui dérivent de cette interpolation reflètent bien la cinématique de discontinuités mais vérifient de façon grossière la condition de continuité du vecteur traction sur la discontinuité, d'où le terme de “ Kinematically ”. La méthode KOS peut ainsi présenter des problèmes de blocage. Là encore, un exemple mené sur un CST peut être trouvé dans [Jirásek, 2000].

1.3.1.3 Statically and Kinematically Optimal Nonsymmetric

Dans ce cas, les deux précédentes techniques sont combinées [Simo and Oliver, 1994]. \mathbf{G} est choisie égale à \mathbf{B}_u mais la matrice qui vérifie (1.11) n'est plus prise égale à \mathbf{G} mais à $\tilde{\mathbf{G}}$. L'ensemble d'équations est alors :

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{a}) \, d\Omega = \mathbf{f}_{ext} \quad (1.14a)$$

$$\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{a}) \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (1.14b)$$

Cette approche permet de représenter proprement la cinématique et la statique, d'où le terme “ Statically and Kinematically ”; la condition de continuité du vecteur traction au travers de la discontinuité est assurée et la cinématique de discontinuités est bien reflétée. En revanche, comme $\tilde{\mathbf{G}}$ n'est pas la transposée de \mathbf{B}_u , la formulation linéarisée est en général non symétrique. Quoi qu'il en soit cette méthode fournit les résultats les plus satisfaisants.

D'un point de vue pratique, il n'est pas nécessaire de recourir à l'enrichissement complet (1.6) : seuls le champ de déformations et le champ de déformations virtuelles peuvent être enrichis et la présence de contraintes dans les champs peut être éliminée en choisissant le champ de contraintes orthogonal au champ de déformations amélioré; cette technique s'appelle la méthode des Modes Incompatibles [Ibrahimbegovic and Wilson, 1991]. Nous allons voir qu'elle permet de retrouver la formulation de type SKON.

1.3.2 Méthode des Modes Incompatibles

Nous repartons de la formulation variationnelle à trois champs de Hu-Washizu (1.5) pour laquelle il faut définir les champs réels et les champ virtuels.

Les champs réels seront notés $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ correspondant respectivement aux champs de déplacements, de déformations et de contraintes. Notons que ces trois champs sont indépendants.

Les champs virtuels seront notés $(\mathbf{w}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau})$ correspondant respectivement aux champs de déplacements, de déformations et de contraintes. Ces trois champs sont aussi indépendants.

Avec ces notations, le principe variationnel de Hu-Washizu (1.5) se réécrit :

Trouver $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}) \in (\mathbb{V}, \mathbb{E}, \mathbb{T})$ tel que $\forall(\mathbf{w}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) \in (\mathbb{V}_0, \mathbb{E}, \mathbb{T})$,

$$\begin{aligned} HW_u(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}; \mathbf{w}) &= \int_{\Omega} \partial \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{S_t} \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dS = \mathbf{0} \\ HW_{\sigma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{\tau}) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : (\partial \mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon}) \, d\Omega = \mathbf{0} \\ HW_{\epsilon}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{\gamma}) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma} : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}) - \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.15)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= \{\mathbf{u} \text{ tel que } \mathbf{u} \in H^1(\Omega), \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ sur } S_u\} \\ \mathbb{V}_0 &= \{\mathbf{w} \text{ tel que } \mathbf{w} \in H^1(\Omega), \mathbf{w} = 0 \text{ sur } S_u\} \\ \mathbb{E} &= \{\boldsymbol{\epsilon} \text{ tel que } \boldsymbol{\epsilon} \in L_2(\Omega)\} \\ \mathbb{T} &= \{\boldsymbol{\sigma} \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma} \in L_2(\Omega)\} \end{aligned}$$

$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ est un champ de contraintes vérifiant la loi de comportement.

Le premier point clef de la Méthode des Modes Incompatibles est d'enrichir les champs de déformations aussi bien réelles que virtuelles par un champ de déformations améliorées appelé $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ pour le champ de déformations réelles et $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ pour le champ de déformations virtuelles :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \partial \mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \boldsymbol{\gamma} &= \partial \mathbf{w} + \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Avec cette hypothèse, le système (1.15) devient :

$$\int_{\Omega} \partial \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{S_t} \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dS = \mathbf{0} \quad (1.17a)$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (1.17b)$$

$$\int_{\Omega} \partial \mathbf{w} : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}) - \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\gamma}} : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}) - \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (1.17c)$$

Notons ensuite que les déformations améliorées doivent être indépendantes des déformations déjà représentées par l'élément sur lequel les déformations améliorées sont rajoutées. De ce fait, le couple $(\mathbf{w}, \tilde{\boldsymbol{\gamma}})$ est un couple de variables indépendantes. En prenant cette condition en compte, le système (1.17) se réécrit :

$$\int_{\Omega} \partial \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{S_t} \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dS = \mathbf{0} \quad (1.18a)$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (1.18b)$$

$$\int_{\Omega} \partial \mathbf{w} : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}) - \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (1.18c)$$

$$\int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\gamma}} : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}) - \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (1.18d)$$

En combinant (1.18a) et (1.18c), cela donne :

$$\int_{\Omega} \partial \mathbf{w} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{S_t} \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dS = \mathbf{0} \quad (1.19a)$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (1.19b)$$

$$\int_{\Omega} \partial \mathbf{w} : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}) - \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (1.19c)$$

$$\int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\gamma}} : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}) - \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (1.19d)$$

Le deuxième point clef de la Méthode des Modes Incompatibles est de construire l'espace des champs de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\tau}$ et des champs de déformations améliorées $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ et $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ comme orthogonaux. Cela permet d'éviter la présence de contraintes parmi les champs dans la formulation discrétisée. Il est ainsi possible d'utiliser cette méthode pour des lois de comportement plus compliquées que l'élasticité linéaire, en gardant la même facilité de calcul des contraintes à partir des déformations :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \, d\Omega = \mathbf{0} \text{ et } \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\gamma}} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (1.20)$$

En intégrant cette hypothèse dans (1.19), il vient :

$$\int_{\Omega} \partial \mathbf{w} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{S_t} \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dS = \mathbf{0} \quad (1.21a)$$

$$\int_{\Omega} \partial \mathbf{w} : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}) - \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (1.21b)$$

$$\int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\gamma}} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}) \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (1.21c)$$

Le dernier point consiste à supposer que le champ de contraintes vérifie la relation de comportement de façon forte :

$$\int_{\Omega} \partial \mathbf{w} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{S_t} \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dS = \mathbf{0} \quad (1.22a)$$

$$\int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\gamma}} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}) \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (1.22b)$$

Afin d'assurer la convergence de cette méthode, l'élément enrichi doit passer le patch-test, c'est-à-dire qu'il doit être capable de représenter un champ de contraintes constant, et le choix le plus simple est un champ constant $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_c$. (1.22b) devient :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_c \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \, d\Omega = \mathbf{0} \Rightarrow \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \, d\Omega = \mathbf{0}, \quad (1.23)$$

ce qui signifie que la déformation améliorée doit satisfaire la condition de moyenne nulle.

Les champs de déformations réelles et virtuelles peuvent être ensuite discrétisés sous la forme E-FEM :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d} + \mathbf{G} \mathbf{a} \text{ et } \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B} \mathbf{d} + \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{a} \quad (1.24)$$

où \mathbf{B} est la matrice standard d'interpolation des déformations ($= \partial \mathbf{N}$), \mathbf{G} est la matrice contenant les termes d'enrichissement pour les déformations réelles et $\tilde{\mathbf{G}}$ pour les déformations virtuelles. \mathbf{a} est le vecteur contenant les degrés de liberté de la déformation améliorée. \mathbf{G} et $\tilde{\mathbf{G}}$ sont appelées les modes incompatibles.

Dans (1.24), l'hypothèse que $\partial \mathbf{u}$ et $\partial \mathbf{w}$ sont discrétisés de manière identique a été faite. De plus, pour garantir l'indépendance des déformations améliorées à l'égard des déformations déjà présentes au sein de l'élément, nous avons fait le choix que $\mathbf{B} \cap \mathbf{G} = \emptyset$ et que $\mathbf{B} \cap \tilde{\mathbf{G}} = \emptyset$. Enfin, $\tilde{\mathbf{G}}$ vérifie la condition de moyenne nulle (1.23), $\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{G}} \, d\Omega = \mathbf{0}$.

En injectant (1.24) dans (1.22), il vient :

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B} \mathbf{d} + \mathbf{G} \mathbf{a}) \, d\Omega = \mathbf{f}_{ext} \quad (1.25a)$$

$$\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B} \mathbf{d} + \mathbf{G} \mathbf{a}) \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (1.25b)$$

Ce système est identique à celui obtenu dans le cas de la formulation de type SKON. Cette méthode est appelée Méthode des Modes Incompatibles car, pour un élément donné, la compatibilité cinématique avec ses éléments voisins n'est plus assurée le long des frontières (sauf aux nœuds) et l'élément fini est de type non conforme. Mais comme il satisfait au patch-test, il est convergent [Frey and Jirousek, 2001].

En considérant le problème (1.25) écrit pour l'ensemble des éléments finis du problème, nous obtenons :

	$\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] = \mathbf{0} \quad (1.26a)$
	$\int_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B} \mathbf{d} + \mathbf{G} \mathbf{a}) \, d\Omega = \mathbf{0} \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \quad (1.26b)$
où	$\mathbf{f}_{int}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B} \mathbf{d} + \mathbf{G} \mathbf{a}) \, d\Omega$

L'équation (3.9a) est l'équation d'équilibre global classique d'un problème élément fini. L'équation (3.9b) est une équation ajoutée par la présence du champ de déformations amélioré; elle permet, comme nous le verrons un peu plus tard, de calculer l'inconnue \mathbf{a} de façon locale. Il est rappelé que \mathbf{a} est un vecteur contenant les degrés de liberté de la déformation améliorée.

Le cadre mathématique et numérique permettant d'enrichir par la méthode E-FEM la cinématique de n'importe quel élément fini ayant été expliqué, il reste désormais à présenter le type d'éléments finis retenu pour la modélisation numérique et son incorporation dans un outil de travail trois dimensions.

1.4 Représentation par un treillis spatial

Comme évoqué en introduction de ce chapitre, le choix retenu pour la modélisation numérique repose sur un treillis trois dimensions formé d'éléments finis de type "barre".

Cette approche a connu un intérêt croissant avec l'augmentation de la puissance de calcul. Ce type de modélisation remonte aux travaux de [Hrennikoff, 1941]. Plus récemment des modèles treillis en deux dimensions ont été développés par [Schlangen and van Mier, 1992], [Schlangen, 1993], [Schlangen, 1995], [Schlangen and Garboczi, 1997] et [van Mier et al., 1994]. Dans ces travaux, la géométrie du treillis est imposée par des coupes de béton réelles. Une version trois dimensions de ce modèle à été développé dans [Lilliu and van Mier, 2003]. [Bolander and Saito, 1998] et [Bolander et al., 2000] utilisent des treillis trois dimensions dont la géométrie est obtenue à partir du pavage de Voronoï du domaine considéré; leurs travaux sont intéressants quant a la simulation de la fissuration sur des structures entières. Dans [Lachihab and Sab, 2005], les auteurs utilisent un pavage de Voronoï en trois dimensions plus raffiné appelé " weighted Voronoï tessellation " [Fan et al., 2004] dans le but de prédire les propriétés effectives d'un matériau type bitume.

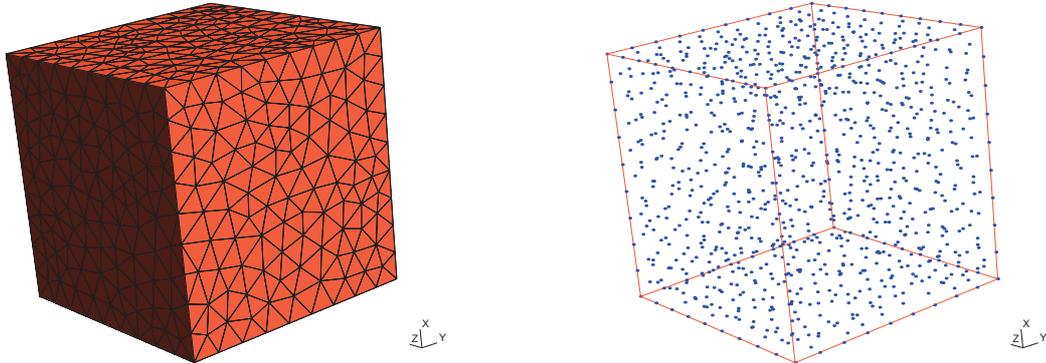
Ces modèles ont en général l'avantage de dépendre de peu de paramètres et de présenter un comportement mécanique simple. Par ailleurs, leur caractère discret en fait des outils pratiques pour représenter la fissuration [Jirásek and Bažant, 1995b], [Man and van Mier, 2007]. Le choix retenu pour la discrétisation éléments finis repose aussi sur un modèle treillis en trois dimensions.

La génération d'un maillage reposant sur un treillis trois dimensions doit être envisagée avec beaucoup de soin. En effet il a été montré dans la littérature [Bolander and Saito, 1998], [Jirásek and Bažant, 1995a], [Yip et al., 2005] que l'utilisation de modèles treillis réguliers ou irréguliers ayant des barres de section constante ne permet pas de représenter un état de déformation uniforme sous chargement uniforme et introduisent un biais dans la fissuration. Les auteurs [Bolander and Saito, 1998] préconisent alors l'utilisation de treillis irréguliers dont la géométrie est obtenue au moyen d'une discrétisation de Voronoï du domaine considéré. Nous retrouvons une approche en partie similaire dans [Cusatis et al., 2006]. La discrétisation de Voronoï d'un domaine matériel considéré S repose sur un ensemble fini de points placés dans S . En trois dimensions, le diagramme de Voronoï est un ensemble de polyèdres fermés convexes. Par définition, un polyèdre de Voronoï associé à un point P_i est le lieu des points plus proches géométriquement de P_i que de tout autre point du domaine [Okabe et al., 1992].

D'un point de vue pratique, nous travaillerons avec le dual du diagramme de Voronoï associé à S , c'est-à-dire la triangulation de Delaunay. En effet, chaque sommet d'une arête de la triangulation sera situé au centre d'un polyèdre de Voronoï et chaque arête de la triangulation jouera le rôle d'un élément barre du treillis. Néanmoins, cette approche directe ne permet pas d'obtenir la section des barres; un processus de maillage différent expliqué ci-dessous est alors retenu. La discrétisation commence, tout d'abord, avec la spécification des coordonnées limites du domaine S et d'une densité de points souhaitée dans ce domaine. Ensuite le processus de discrétisation est le suivant :

Étape 1 : Génération d'un maillage volumique trois dimensions du domaine S considéré (Fig. 1.5(a)) au moyen de *Gmsh* [Geuzaine and Remacle, 2009]. Extraction des coordonnées nodales de ce maillage (Fig. 1.5(b)).

Étape 2 : Génération du diagramme de Voronoï au moyen de la fonction *qvoronoi* de l'algorithme *qhull* [Barber and Huhdanpaa, 2009]. Cette procédure génère deux listes : l'une contenant les coordonnées des sommets des cellules de Voronoï et l'autre, pour un couple de nœuds donnés (i, j) reliant le centre de deux cellules

(a) Maillage 3D volumique non structuré du domaine S

(b) Ensemble des points extraits

FIG. 1.5 – Obtention de l'ensemble des points utilisés pour la discrétisation de Voronoï

de Voronoï en contact (c'est-à-dire une arête de la triangulation de Delaunay), la liste des sommets communs (a, b, c, d, e) aux deux cellules de Voronoï en contact (ou encore la liste des sommets communs aux deux cellules de Voronoï en contact traversées par l'arête de la triangulation de Delaunay) (Fig. 1.6(a)).



(a) Élément barre avec ses sommets communs aux deux cellules de Voronoï en contact

(b) Volume calculé avec l'algorithme *qhull*

FIG. 1.6 – Détermination de la section de chaque élément barre

Étape 3 : Création de la liste des éléments barre du problème connaissant l'ensemble de tous les couples de nœuds (i, j) et détermination de leur section au moyen de l'algorithme *qhull* [Barber et al., 1996]. D'un point de vue schématique, l'algorithme attend en entrée la donnée de points formant un volume convexe fermé. La méthode retenue est alors la suivante : partant de la surface fermée A par les points (a, b, c, d, e) , une translation de vecteur \mathbf{n} de norme unitaire de A est réalisée donnant alors la surface fermée par les points (a', b', c', d', e') (Fig. 1.6(b)). En sortie, l'algorithme donne alors le volume $V = abcdea'b'c'd'e'$. Par définition $V = A \cdot \|\mathbf{n}\|$ et comme $\|\mathbf{n}\| = 1$ alors $V = A$ et A est alors connue. Cette méthode permet de retrouver la surface du domaine S considéré.

Cette stratégie de maillage présente l'inconvénient de ne pas prendre en compte les

barres situées sur les arêtes du domaine. En effet, du fait qu’au niveau des arêtes du domaine, les sommets des cellules de Voronoï peuvent se situer en dehors du domaine, *qhull* ne les prend pas en compte ; les barres situées sur les arêtes ne sont alors pas incluses dans le maillage (Fig. 1.7(a)). L’idée est alors de les rajouter “manuellement” (Fig. 1.7(b)) en

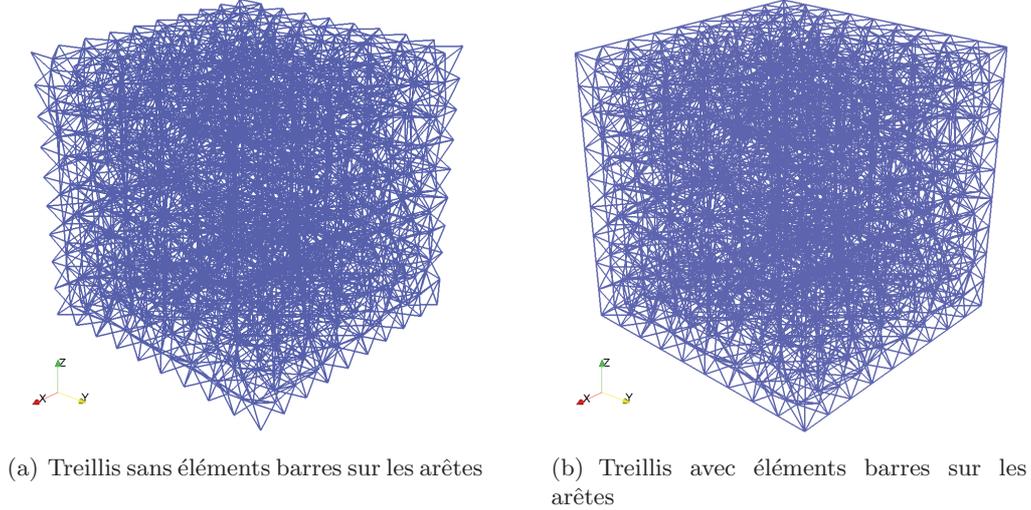


FIG. 1.7 – Résultat de la procédure de maillage

allant chercher leur connectivité directement dans le fichier *Gmsh* et ensuite de calculer leur section.

L’ensemble de ces étapes a été implanté dans un script Perl appelé *Voromesh.pl*. À la fin du processus, un fichier Input au format requis par coFEAP est généré.

La stratégie de maillage désormais présentée, nous allons, dans la prochaine sous-section, montrer une première étape de validation de cette stratégie de maillage.

1.4.1 Convergence globale en élasticité homogène

Afin de valider ce processus de maillage en élasticité homogène, nous nous sommes intéressés à l’effet de la densité de maillage sur la valeur du module de compressibilité macroscopique K_{calcul} calculée par simulation éléments finis [Kanit et al., 2006]. Le domaine d’étude est un cube (comme celui de la figure 1.7(b)) de $100\text{ mm} \times 100\text{ mm} \times 100\text{ mm}$ de côté. Le nombre de degrés de liberté varie de 714 à 1458000. Le nombre d’éléments finis barre varie de 1325 à 3257000 ce qui signifie que la densité de maillage est passée de 757 à $0,30\text{ mm}^3/\text{élément}$. La figure 1.8 montre que le module de compressibilité macroscopique K_{calcul} a un comportement asymptotique et tend à se stabiliser lorsque le maillage est raffiné.

Par ailleurs, connaissant la valeur exacte du module de compressibilité K_{exact} ($= 5556\text{ MPa}$) retenue pour chaque élément barre, nous pouvons évaluer pour chaque degré de liberté considéré l’écart relatif e entre la solution exacte et la solution calculée :

$$e = \left(\frac{K_{exact} - K_{calcul}}{K_{exact}} \right) \times 100 \quad (1.27)$$

Cela est illustré sur la figure 1.9; notons que lorsque le maillage est raffiné, cet écart diminue pour atteindre 0,284 % pour 1458000 degrés de liberté. Un écart relatif e inférieur à 1 % comme critère de convergence peut être fixé; celui-ci est atteint autour des 300000 degrés de liberté.

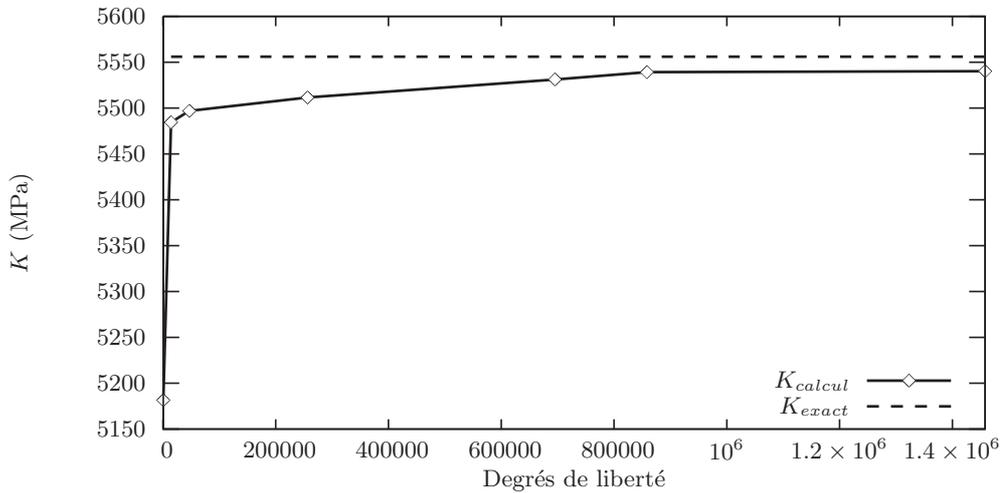


FIG. 1.8 – Effet de la densité de maillage sur la convergence globale du module de compressibilité macroscopique en élasticité homogène

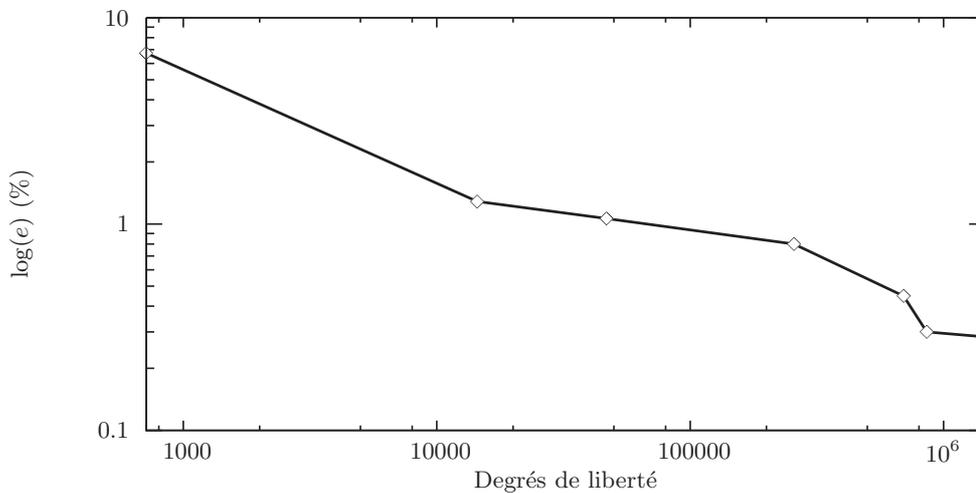


FIG. 1.9 – Effet de la densité de maillage sur l'erreur globale entre le module de compressibilité macroscopique exact et celui calculé en élasticité homogène

La valeur numérique de convergence du maillage que nous avons obtenue (autour des 300000 degrés de liberté) correspond au cas d'un essai de traction hydrostatique pour des conditions aux limites de types déformations homogènes appliquées sur la surface du cube; cette valeur de degrés de liberté n'est donc pas significative de tous les essais et de toutes les conditions aux limites. Elle permet cependant de valider la méthode de génération du

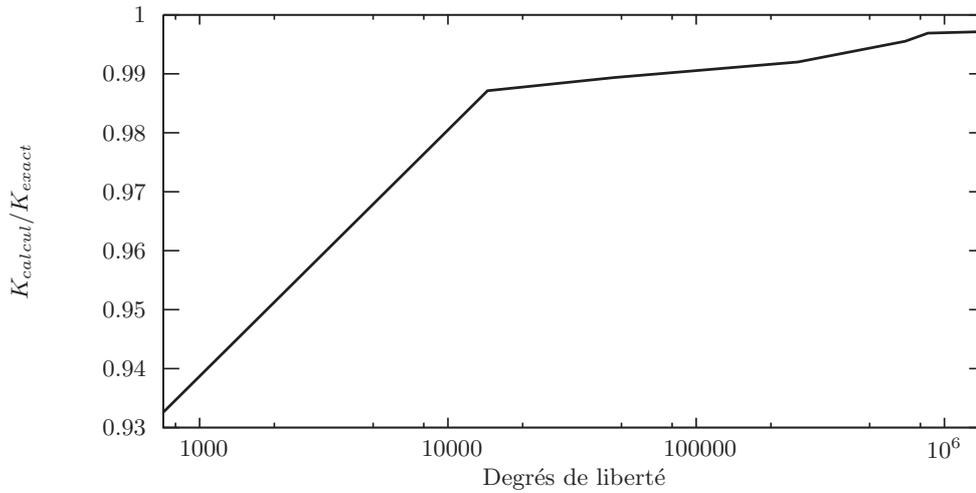
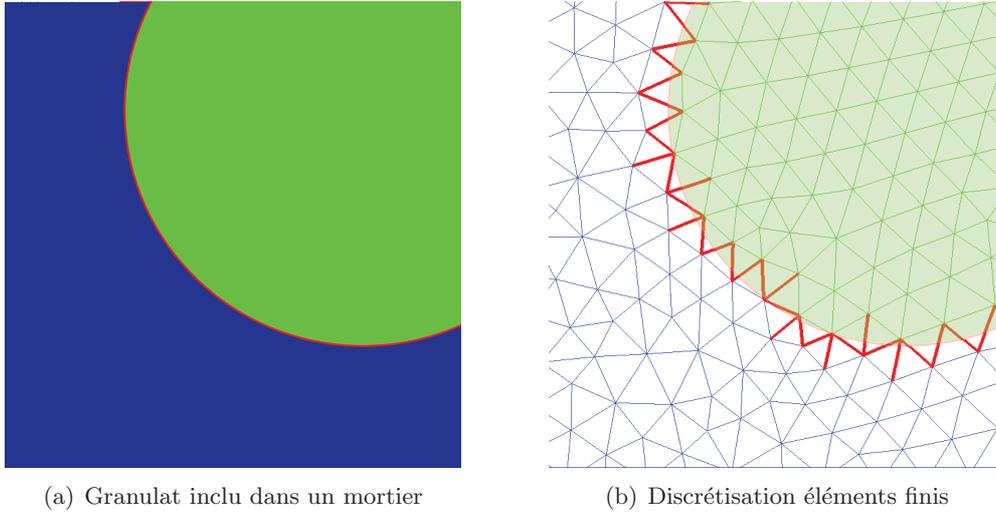


FIG. 1.10 – Effet de la densité de maillage sur le rapport global entre le module de compressibilité macroscopique calculé et celui exact en élasticité homogène

maillage dans un cas particulier.

Cette quatrième partie a présenté la procédure d'obtention de notre outil numérique de travail, à savoir un maillage treillis trois dimensions. Comme nous souhaitons modéliser des matériaux hétérogènes à l'aide d'un maillage non adapté (voir partie une), certains éléments finis barres du treillis vont être coupés en deux au niveau de l'interface ; il y a donc nécessité d'enrichir la cinématique de l'élément coupé au moyen d'une discontinuité faible (voir partie une). Nous allons alors appliquer l'enrichissement de type E-FEM avec la méthode des Modes Incompatibles (voir partie trois) au cas d'un élément barre. Pour fixer les idées, considérons l'exemple deux dimensions (Fig. 1.11(a)) d'un granulat (en vert) inclu dans un mortier (en bleu) ; l'interface mortier/granulat est en rouge. En discrétisant cet exemple avec un maillage treillis non adapté à l'interface, le résultat présenté en figure 1.11(b) est obtenu : nous retrouvons en bleu les éléments appartenant au mortier, en vert ceux appartenant au granulat et en rouge épaissis ceux appartenant à l'interface. Ces derniers sont coupés au niveau de l'intersection avec le rayon du granulat en deux parties ayant des propriétés mécaniques différentes ; la première partie a les propriétés mécaniques du mortier et la seconde du granulat. La figure 1.12 permet de visualiser plus précisément les éléments rouges avec la partie appartenant au mortier à gauche et celle appartenant au granulat à droite ; le trait gras noir représente l'endroit où le rayon du cercle intersecte l'élément barre. À cet endroit, le champ de déformations est discontinu et l'enrichissement cinématique au moyen d'une discontinuité faible est alors introduit.



(a) Granulat inclus dans un mortier

(b) Discrétisation éléments finis

FIG. 1.11 – Discrétisation 2D avec un maillage non adapté



FIG. 1.12 – Élément barre coupé en deux

1.5 Application de la méthode des Modes Incompatibles à un élément fini bi-phasique

Nous rappelons, tout d'abord, le problème éléments finis à résoudre obtenu par la méthode des Modes Incompatibles dans la partie trois :

$$\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] = \mathbf{0} \quad (1.28a)$$

$$\int_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{a}) d\Omega = \mathbf{0} \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \quad (1.28b)$$

où

$$\mathbf{f}_{int}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{a}) d\Omega$$

Appliquons-le alors au problème d'un élément fini barre bi-phasique.

Au regard de 1.28, se pose en premier lieu, le problème du choix du mode incompatible \mathbf{G} . Dans le cas d'un élément barre, \mathbf{G} n'est plus une matrice mais une fonction scalaire ; ce mode incompatible sera notée $G_1^{\hat{1}/2}$. Celui-ci doit vérifier la condition de moyenne nulle (1.23) et représenter un saut fini dans le champ de déformations (discontinuité faible) : le choix adopté est celui décrit à la figure 1.13 où le mode incompatible est pris constant par morceaux sur l'élément. Notons aussi que pour un élément barre, \mathbf{a} n'est plus un vecteur mais un scalaire, il sera noté $[[\epsilon]]$.

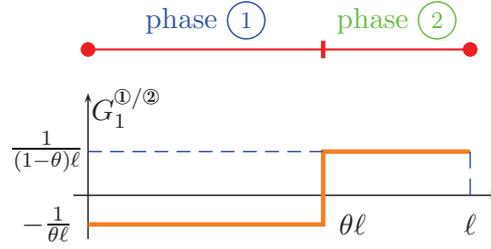


FIG. 1.13 – Mode incompatible pour un élément barre bi-phasique

La fonction $G_1^{①/②}$ s'écrit

$$G_1^{①/②} = \begin{cases} G_1^{①} = -\frac{1}{\theta\ell}, & x \in [0, \theta\ell] \\ G_1^{②} = \frac{1}{(1-\theta)\ell}, & x \in [\theta\ell, \ell] \end{cases}, \quad (1.29)$$

dans le cadre d'un élément barre elle est égale à $\tilde{G}_1^{①/②}$. La figure 1.13 permet de visualiser les deux phases avec par exemple en bleu le mortier et en vert le granulat, la limite entre les deux phases étant paramétrée par un scalaire adimensionnel θ . ℓ est la longueur de la barre.

Le vecteur \mathbf{B} contient les dérivées des fonctions de forme d'un élément barre à deux nœuds N_1 (Fig. 1.14(a)) et N_2 (Fig. 1.14(b)) :

$$\mathbf{B} = [-1/\ell; 1/\ell] \quad (1.30)$$

et le vecteur \mathbf{d} les inconnues nodales :

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Le champ de déformation est donc discrétisé pour un élément e sous la forme :

$$\epsilon = \sum_{a=1}^2 B_a^e d_a^e = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (1.32)$$

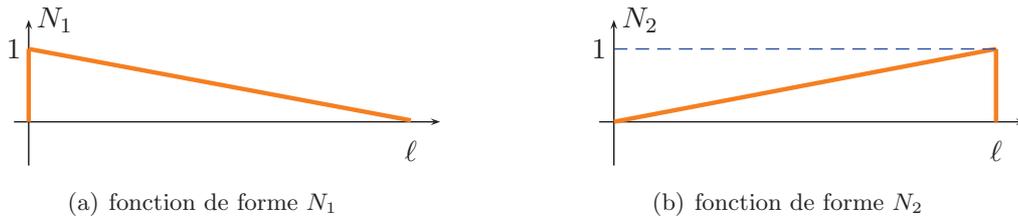


FIG. 1.14 – Fonctions de forme d'un élément barre à deux nœuds

En prenant en compte la fonction $G_1^{①/②}$, le champ de déformations pour la phase ① et ② s'écrit :

$$\epsilon^{①} = \mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{①}[|\epsilon|], \quad \epsilon^{②} = \mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{②}[|\epsilon|] \quad (1.33)$$

Par ailleurs, considérant que le comportement de chaque phase est élastique, celles-ci sont caractérisées par leurs modules d'Young respectifs E_1 et E_2 et donc les lois de comportement sur chaque phase s'écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}^{①}(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{①}[|\epsilon|]) = E_1 \epsilon^{①} = E_1 (\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{①}[|\epsilon|]) \\ \tilde{\sigma}^{②}(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{②}[|\epsilon|]) = E_2 \epsilon^{②} = E_2 (\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{②}[|\epsilon|]) \end{cases} \quad (1.34)$$

Pour plus de clarté, nous écrivons

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}^{①}(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{①}[|\epsilon|]) = \tilde{\sigma}^{①}(\mathbf{d}, [|\epsilon|]) \\ \tilde{\sigma}^{②}(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{②}[|\epsilon|]) = \tilde{\sigma}^{②}(\mathbf{d}, [|\epsilon|]) \end{cases} \quad (1.35)$$

En partitionnant le domaine Ω sous la forme $\Omega_1 \cup \Omega_2$ où Ω_1 correspond à la phase ① et Ω_2 à la phase ②, en injectant $\tilde{G}_1^{①/②}$, $G_1^{①/②}$ et les lois de comportement dans (1.28b), il vient :

$$\int_{\Omega_{1,e}} \tilde{G}_1^{①} E_1 (\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{①}[|\epsilon|]) d\Omega_1 + \int_{\Omega_{2,e}} \tilde{G}_1^{②} E_2 (\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{②}[|\epsilon|]) d\Omega_2 = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \quad (1.36)$$

Après explicitation de $\tilde{G}_1^{①}$ et de $\tilde{G}_1^{②}$, nous avons :

$$\int_{\Omega_{1,e}} -\frac{1}{\theta\ell} E_1 (\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{①}[|\epsilon|]) d\Omega_1 + \int_{\Omega_{2,e}} \frac{1}{(1-\theta)\ell} E_2 (\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{②}[|\epsilon|]) d\Omega_2 = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}], \quad (1.37)$$

ce qui donne après intégration sur les domaines $[0, \theta\ell]$ et $[\theta\ell, \ell]$ avec A section de la barre

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\theta\ell} E_1 (\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{①}[|\epsilon|]) A \theta\ell + \frac{1}{(1-\theta)\ell} E_2 (\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{②}[|\epsilon|]) A (1-\theta)\ell &= 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \\ \Leftrightarrow -E_1 (\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{①}[|\epsilon|]) A + E_2 (\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{②}[|\epsilon|]) A &= 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \end{aligned} \quad (1.38)$$

ou encore en termes de contraintes dans chaque phase

$$-\tilde{\sigma}^{①}(\mathbf{d}, [|\epsilon|]) + \tilde{\sigma}^{②}(\mathbf{d}, [|\epsilon|]) = 0 \quad (1.39)$$

Finalement, le système (1.28) s'écrit dans le cadre d'une barre bi-phasique

$\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e(\mathbf{d}, [\epsilon]) - \mathbf{f}_{ext}^e] = \mathbf{0} \quad (1.40a)$
$h_{[\epsilon]} = -\tilde{\sigma}^{①}(\mathbf{d}, [\epsilon]) + \tilde{\sigma}^{②}(\mathbf{d}, [\epsilon]) = 0 \quad (1.40b)$
<p>où</p> $\mathbf{f}_{int}^e = \int_{\Omega_{1,e}} \mathbf{B}^T E_1 (\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{①}[\epsilon]) d\Omega_1 + \int_{\Omega_{2,e}} \mathbf{B}^T E_2 (\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{②}[\epsilon]) d\Omega_2$

Il est important de remarquer que l'équation (1.40b) est linéaire.

Nous allons maintenant linéariser (1.40) par rapport à \mathbf{d} et $[\epsilon]$ afin d'obtenir le système matriciel à résoudre : à chaque pas de temps n , il est nécessaire d'itérer k fois pour arriver à la convergence du problème. Soit X une équation d'équilibre dépendant des variables Ξ_i , la linéarisation de X par rapport à Ξ_i s'écrit :

$$\mathcal{L}(X) = X \Big|_{n+1}^{(k)} + \sum_i \frac{\partial X}{\partial \Xi_i} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \Xi_i \Big|_{n+1}^{(k+1)} = 0 \quad (1.41)$$

1.5.1 Linéarisation du problème (1.40)

En utilisant (1.41), la linéarisation de (1.40a) donne :

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{e=1}^{nelm} \left[\int_{\Omega_{1,e}} \mathbf{B}^T E_1 \frac{\partial(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{1}}[[\epsilon]])}{\partial \mathbf{d}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_1 \right. \\ & + \int_{\Omega_{2,e}} \mathbf{B}^T E_2 \frac{\partial(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{2}}[[\epsilon]])}{\partial \mathbf{d}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_2 \\ & + \int_{\Omega_{1,e}} \mathbf{B}^T E_1 \frac{\partial(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{1}}[[\epsilon]])}{\partial [[\epsilon]]} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [[\epsilon]]_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_1 \\ & \left. + \int_{\Omega_{2,e}} \mathbf{B}^T E_2 \frac{\partial(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{2}}[[\epsilon]])}{\partial [[\epsilon]]} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [[\epsilon]]_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_2 \right] \\ & = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \Big|_{n+1}^{(k)} \end{aligned}$$

Après dérivation par rapport à $(\mathbf{d}, [[\epsilon]])$, il vient :

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{e=1}^{nelm} \left[\int_{\Omega_{1,e}} \mathbf{B}^T E_1 \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_1 + \int_{\Omega_{2,e}} \mathbf{B}^T E_2 \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_2 \right. \\ & \left. + \int_{\Omega_{1,e}} \mathbf{B}^T E_1 G_1^{\textcircled{1}} \Delta [[\epsilon]]_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_1 + \int_{\Omega_{2,e}} \mathbf{B}^T E_2 G_1^{\textcircled{2}} \Delta [[\epsilon]]_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_2 \right] \quad (1.42) \\ & = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \Big|_{n+1}^{(k)} \end{aligned}$$

En explicitant $G_1^{\textcircled{1}}$, $G_1^{\textcircled{2}}$ et en intégrant sur les domaines $[0, \theta\ell]$ et $[\theta\ell, \ell]$, (1.42) devient :

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{e=1}^{nelm} \left[\mathbf{B}^T E_1 \mathbf{B} A \theta \ell \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} + \mathbf{B}^T E_2 \mathbf{B} A (1 - \theta) \ell \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} \right. \\ & \left. - \mathbf{B}^T E_1 A \Delta [[\epsilon]]_{n+1}^{(k+1)} + \mathbf{B}^T E_2 A \Delta [[\epsilon]]_{n+1}^{(k+1)} \right] \quad (1.43) \\ & = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \Big|_{n+1}^{(k)} \end{aligned}$$

En utilisant (1.41), la linéarisation de (1.40b) donne :

$$\begin{aligned}
& -E_1 \frac{\partial(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{1}}[[\epsilon]])}{\partial \mathbf{d}} \Big|_{n+1}^{(k)} \mathbf{A} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} + E_2 \frac{\partial(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{2}}[[\epsilon]])}{\partial \mathbf{d}} \Big|_{n+1}^{(k)} \mathbf{A} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} \\
& -E_1 \frac{\partial(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{1}}[[\epsilon]])}{\partial [[\epsilon]]} \Big|_{n+1}^{(k)} \mathbf{A} \Delta [[\epsilon]]_{n+1}^{(k+1)} + E_2 \frac{\partial(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{2}}[[\epsilon]])}{\partial [[\epsilon]]} \Big|_{n+1}^{(k)} \mathbf{A} \Delta [[\epsilon]]_{n+1}^{(k+1)} \\
& = -\mathbf{A} h_{[[\epsilon]]} \Big|_{n+1}^{(k)}
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Après dérivation par rapport à $(\mathbf{d}, [[\epsilon]])$ et simplification par \mathbf{A} , il vient :

$$\begin{aligned}
& -E_1 \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} + E_2 \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} - E_1 G_1^{\textcircled{1}} \Delta [[\epsilon]]_{n+1}^{(k+1)} + E_2 G_1^{\textcircled{2}} \Delta [[\epsilon]]_{n+1}^{(k+1)} \\
& = -h_{[[\epsilon]]} \Big|_{n+1}^{(k)}
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Finalement en écrivant (1.43) et (1.45) sous forme matricielle, nous avons :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^T & b \end{pmatrix}_{n+1}^{(k)} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta [[\epsilon]] \end{pmatrix}_{n+1}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \\ -h_{[[\epsilon]]} \end{pmatrix}_{n+1}^{(k)} \tag{1.46}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{B}^T E_1 \mathbf{B} \mathbf{A} \theta \ell + \mathbf{B}^T E_2 \mathbf{B} \mathbf{A} (1 - \theta) \ell] \\
\mathbf{F} &= \mathbf{B}^T [-E_1 + E_2] \mathbf{A} \\
b &= -E_1 G_1^{\textcircled{1}} + E_2 G_1^{\textcircled{2}} = \frac{E_1}{\theta \ell} + \frac{E_2}{(1 - \theta) \ell}
\end{aligned} \tag{1.47}$$

1.5.2 Procédure de résolution du problème (1.46)

La procédure de résolution de (1.46) se fait à deux niveaux : le niveau global qui correspond à (1.40a) et le niveau local (1.40b). Dans l'esprit de la "operator split method", $\Delta [[\epsilon]]^{(k+1)}$ est tout d'abord calculé durant l'étape locale pour une valeur de d_{n+1} fixe. Cela revient à calculer localement $\Delta [[\epsilon]]^{(k+1)}$ par l'intermédiaire du système en rouge dans (1.46). Une fois cette étape terminée, une condensation statique [Wilson, 1974] est réalisée sur $\Delta [[\epsilon]]^{(k+1)}$ conduisant à une équation d'équilibre global avec une matrice de rigidité modifiée $\hat{\mathbf{K}}$. L'algorithme traitant de la résolution locale est détaillé dans Alg. 1. Il est rappelé que l'équation (1.40b) est linéaire, il n'y a donc pas besoin d'itérer pour calculer $\Delta [[\epsilon]]^{(k+1)}$, il est calculé directement (étape 2 de Alg. 1).

Algorithm 1 Procédure locale pour un élément barre bi-phasique

- 1: calcul du résidu : $h_{[[\epsilon]]}^{(j)} = -\tilde{\sigma}^{\textcircled{1},(j)} + \tilde{\sigma}^{\textcircled{2},(j)}$
 - 2: calcul de l'incrément : $\Delta [[\epsilon]]^{(j+1)} = -\frac{h_{[[\epsilon]]}^{(j)}}{\frac{E_1}{\theta \ell} + \frac{E_2}{(1-\theta)\ell}}$
 - 3: mise à jour de l'incrément : $[[\epsilon]]^{(j+1)} = [[\epsilon]]^{(j)} + \Delta [[\epsilon]]^{(j+1)}$
 - 4: mise à jour : $\tilde{\sigma}^{\textcircled{1},(j+1)}, \tilde{\sigma}^{\textcircled{2},(j+1)}$
-

Une fois l'étape locale terminée, le résidu $h_{[\epsilon]}$ est égal à zéro. Le système (1.46) se réécrit alors

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^T & b \end{pmatrix}_{n+1}^{(k)} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta[\epsilon] \end{pmatrix}_{n+1}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \\ 0 \end{pmatrix}_{n+1}^{(k)} \quad (1.48)$$

où $\Delta[\epsilon]^{(k+1)}$ est maintenant connu.

La seconde étape consiste alors à réaliser la condensation statique de $\Delta[\epsilon]^{(k+1)}$. La deuxième ligne du système matriciel (1.48) peut s'écrire :

$$\Delta[\epsilon]_{n+1}^{(k+1)} = -\frac{\mathbf{F}_{n+1}^{T,(k)}}{b} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)}, \quad (1.49)$$

ce qui donne en injectant dans la première ligne de (1.48) :

$$\left(\mathbf{K}_{n+1}^{(k)} - \frac{\mathbf{F}_{n+1}^{(k)} \mathbf{F}_{n+1}^{T,(k)}}{b} \right) \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} = -\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e]_{n+1}^{(k)} \quad (1.50)$$

ou encore

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} = -\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e]_{n+1}^{(k)} \quad (1.51)$$

avec

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{K}_{n+1}^{(k)} - \frac{\mathbf{F}_{n+1}^{(k)} \mathbf{F}_{n+1}^{T,(k)}}{b}$$

Notons alors que l'on retrouve un problème éléments finis classique à résoudre où l'incrément $\Delta \mathbf{d}^{(k+1)}$ est cherché. $\hat{\mathbf{K}}$ prend en compte les termes de la linéarisation de l'équilibre (1.40) et a la même taille que \mathbf{K} ; l'ajout d'une inconnue locale ne se répercute pas au niveau global, la taille du système global à résoudre est inchangée.

Les parties trois, quatre et cinq se sont attachées à présenter en détail le cadre théorique général d'enrichissement de la cinématique d'un élément fini; l'application à un élément fini barre bi-phasique et la technicité de résolution du problème linéarisé obtenu ont aussi été étudiées; la prochaine sous-section va être l'occasion de valider numériquement l'algorithme 1.

1.5.3 Erreur par rapport à une solution exacte

Cette application a pour but de valider le choix du mode incompatible $G_1^{\textcircled{1}/\textcircled{2}}$ permettant d'illustrer la précision de l'algorithme 1 quant à la valeur de $\Delta[\epsilon]$ calculée.

Considérons une barre de type bi-matériau ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$) de longueur 2 avec un module d'Young E_1 dans Ω_1 et E_2 dans Ω_2 où $\Omega_1 = (-1, \xi)$ et $\Omega_2 = (\xi, 1)$. L'interface Γ est située à $x = \xi$. Pour un problème avec des conditions aux limites de type Dirichlet avec $u = 0$ en $x = -1$, $u = 1$ en $x = 1$, et sans forces volumiques, le déplacement exact est de la forme [Sukumar et al., 2001] :

$$u(x) = \begin{cases} (1+x)\alpha, & -1 \leq x \leq \xi, \\ 1 + \frac{E_1}{E_2}(x-1)\alpha, & \xi \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (1.52)$$

avec

$$\alpha = \frac{E_2}{E_2(1 + \xi) - E_1(\xi - 1)}. \quad (1.53)$$

Dans cet exemple, $E_1 = 5$ MPa et $E_2 = 10$ MPa. Les résultats numériques sont obtenus pour une barre discrétisée par 20 éléments de taille 0.1 chacun pour différentes positions de l'interface : $\xi = 0,0025, 0,05$ et $0,075$. La figure 1.15 montre le maillage et la position de l'interface en rouge pour $\xi = 0,05$.



FIG. 1.15 – Barre de type bi-matériau : maillage et position de l'interface à $\xi = 0,05$

Les résultats en termes d'erreur relative en norme énergétique sont présentés dans le tableau 1.1. L'erreur relative en norme énergétique choisie est telle que :

$$\|u - u^h\| = \left(\int_{\Omega} (\epsilon - \epsilon^h) E (\epsilon - \epsilon^h) d\Omega \right)^{1/2} \quad (1.54)$$

où u et u^h sont respectivement la solution exacte et la solution approchée par calcul Éléments Finis. E est le module d'Young, il dépend de la position x . Les résultats numériques (Tab. 1.1, Fig. 1.16 et Fig. 1.17) illustrent la qualité de $G_1^{(1/2)}$ pour capturer le saut de propriétés mécaniques au niveau de l'interface ξ . Cette qualité est directement liée à la précision de l'algorithme 1 dans le calcul du saut $\Delta[|\epsilon|]$ dans le champ de déformations au passage de l'interface.

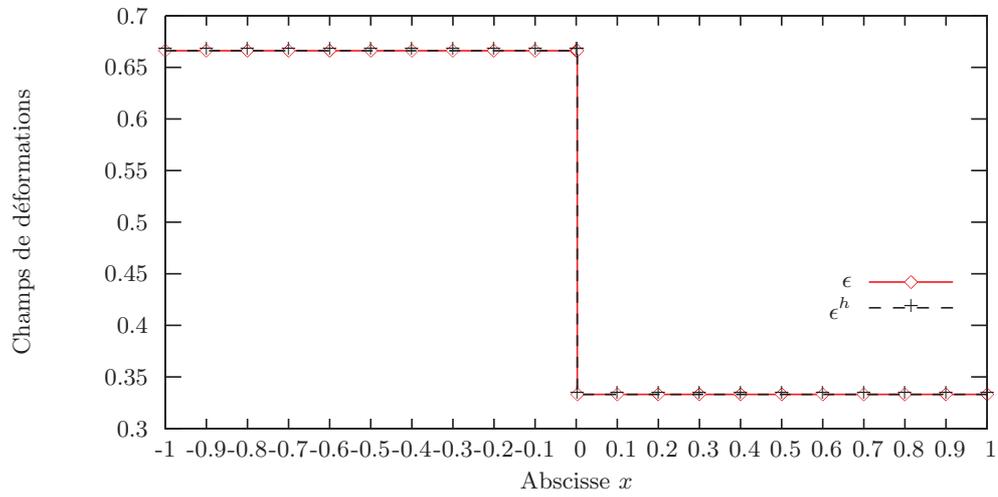
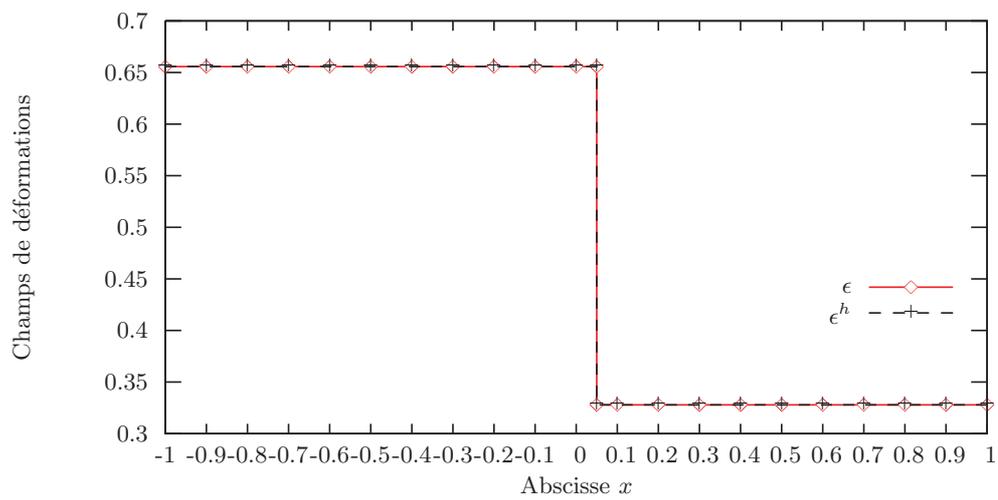
Position de l'interface ξ	Erreur relative pour la norme énergétique
0,0025	$1,77 \times 10^{-5}$
0,05	$1,33 \times 10^{-5}$
0,075	$1,78 \times 10^{-5}$

TAB. 1.1 – Erreur relative en norme énergétique pour la barre de type bi-matériau

Jusqu'à présent, nous avons présenté la stratégie de maillage du treillis trois dimensions (partie quatre) et la cinématique d'un élément barre bi-phasique (partie cinq), il reste désormais à coupler les deux, c'est-à-dire à incorporer des inclusions dans un maillage treillis trois dimensions composé de barres cinématiquement enrichies. Nous allons donc dans la prochaine partie détailler le processus de génération des inclusions et présenter des microstructures trois dimensions obtenues.

1.6 Génération et projection des inclusions

L'évaluation du comportement d'un matériau composite comme le béton à l'échelle mesoscopique requiert la génération d'une microstructure aléatoire. Cette dernière consiste en des agrégats distribués de façon aléatoire et en un mortier remplissant les espaces entre ces

FIG. 1.16 – Champs de déformations exact et calculé pour $\xi = 0,0025$ FIG. 1.17 – Champs de déformations exact et calculé pour $\xi = 0,05$

agrégats. Les différentes configurations d'agrégats générées doivent rendre compte des caractéristiques statistiques de base du matériau réel (distribution spatiale, forme et taille). Par ailleurs, la distribution spatiale des inclusions doit être macroscopiquement homogène dans l'espace et macroscopiquement isotrope [Bažant et al., 1990]. Ici, dans le but de produire la configuration géométrique qui satisfait ces conditions, un processus aléatoire de Poisson est utilisé permettant de générer un nombre aléatoire à partir d'une intensité donnée. Ce nombre représente alors le nombre d'inclusions à placer. Les inclusions sont ensuite placées, une par une dans le domaine, de la plus grande à la plus petite, de façon à ce qu'il n'y ait pas de chevauchement avec les particules déjà présentes. Cette méthode a déjà été utilisée par beaucoup de chercheurs tels que [Bažant et al., 1990], [Schlangen and van Mier, 1992], [Wang et al., 1999] et [Wittmann et al., 1984] avec différents degrés de sophistication et est communément appelée la "take-and-place method". Pour [Wriggers and Moftah, 2006] le processus aléatoire de tirage utilisé est celui de Monte-Carlo.

Les agrégats occupent généralement 60 à 80 % du volume du béton et influencent grandement ses propriétés. Ils sont divisés en deux catégories distinctes, les agrégats fins et les agrégats grossiers. Les agrégats fins consistent généralement en du sable naturel ou bien de la pierre broyée dont les particules passent généralement à travers un tamis dont les ouvertures font 4,75 mm. Les agrégats grossiers sont l'ensemble des particules de diamètre supérieur à 4,75 mm. Pour la plupart des bétons, les agrégats grossiers représentent 40 à 50 % du volume de béton. Les graviers constituent la grande majorité des agrégats grossiers utilisés pour le béton.

La forme des agrégats dépend du type utilisé. En général, les graviers ont une forme arrondie alors que la pierre broyée a une forme anguleuse. De nombreuses publications traitent de la géométrie des inclusions. [Wang et al., 1999] et [Wittmann et al., 1984] ont utilisé les lois morphologiques développées par [Beddow and Meloy, 1980] pour générer des inclusions de type gravier. Des agrégats de forme sphérique ont été retenus par [Bažant et al., 1990] et [Wriggers and Moftah, 2006]. D'autres détails concernant la forme des inclusions peuvent être trouvés dans [Häfner et al., 2003] et [Zohdi, 2001].

Dans ce travail de thèse, les agrégats auront une forme sphérique. Cependant dans les perspectives de cette thèse des exemples de microstructures avec des formes aléatoires seront présentés.

1.6.1 Processus de génération des rayons des inclusions

Le processus de génération des rayons des inclusions commence, tout d'abord, par le choix du rayon de la plus petite inclusion (r_{min}) et du rayon de la plus grosse inclusion (r_{max}) à placer dans le domaine. Ce choix est dicté par des considérations physiques (taille minimum et maximum des rayons pour un béton réel au sein d'une distribution de taille donnée...) mais aussi par des considérations éléments finis ; en effet, il est rappelé qu'un élément barre ne peut contenir qu'une seule discontinuité faible (un seul saut fini dans le champ de déformations), autrement dit un élément ne peut être coupé que par un seul rayon d'une inclusion. De ce fait, une longueur de rejet γ correspondant au minimum à la taille du plus petit élément barre du maillage est introduite. Cette longueur de rejet permet ainsi de déterminer le rayon minimum r_{min} des plus petites inclusions et d'empêcher les inclusions nouvellement placées de chevaucher celles déjà présentes. Finalement le processus

de génération des rayons des inclusions peut être résumé par les étapes suivantes :

Étape 1 : Génération d'un nombre aléatoire par un processus de Poisson [Matheron, 1975], [Kingman, 1993] : l'entier obtenu correspond au nombre d'inclusions à placer.

Étape 2 : Génération aléatoire du rayon r de chaque inclusion à placer : r est supposé suivre une distribution uniforme entre r_{min} et r_{max} :

$$r = \eta(r_{max} - r_{min}) + r_{min} \quad (1.55)$$

où η est un nombre aléatoire uniformément distribué entre 0 et 1.

Étape 3 : Tri des rayons générés par ordre décroissant.

En sortie de ce processus, un vecteur contenant les rayons classés par ordre décroissant est obtenu.

1.6.2 Processus de placement des inclusions

Le volume de béton que nous souhaitons générer peut avoir une forme cubique, parallélépipédique ou cylindrique. Deux exemples de domaines seront proposés, le premier cubique et le second cylindrique. Dans le chapitre quatre, des calculs seront réalisés sur une plaque de béton.

Un système de coordonnées cartésiennes en x , y et z est choisi. Quand une inclusion est placée dans le domaine désiré, sa position est définie par les coordonnées x_o , y_o et z_o de son centre O . En prenant une distribution de probabilité uniforme pour les coordonnées de O sur le volume de béton considéré, les coordonnées de O sont obtenues comme :

$$\begin{aligned} x_o &= \eta_1(x_{max} - x_{min}) + x_{min} \\ y_o &= \eta_2(y_{max} - y_{min}) + y_{min} \\ z_o &= \eta_3(z_{max} - z_{min}) + z_{min} \end{aligned} \quad (1.56)$$

où x_{min} , y_{min} et z_{min} et x_{max} , y_{max} et z_{max} sont les coordonnées minimum et maximum du volume de béton considéré et η_1 , η_2 et η_3 sont trois nombres aléatoires indépendants uniformément distribués entre 0 et 1.

Comme nous l'avons précisé précédemment, une longueur de rejet γ supérieure à la taille du plus petit élément barre du domaine considéré doit être respectée afin d'avoir une seule discontinuité faible au sein d'un élément barre ; cette longueur de rejet apparaît alors comme la distance minimale qu'il peut y avoir entre deux sphères. Il y a cependant dans la littérature des quantifications plus physiques de cette longueur de rejet entre deux particules. Ainsi [Schlangen and van Mier, 1992] propose une longueur de $0.1(d_a + d_b)/2$ où d_a et d_b sont les tailles des deux particules. [Wang et al., 1999] ont trouvé, après observations de coupes de béton durci, que l'épaisseur de mortier entourant une inclusion était proportionnelle à son diamètre. La valeur de γ est très importante dans le processus de placement. Au début de ce processus une valeur initiale de γ est choisie dépendante de la fraction volumique d'inclusions souhaitée. Si, à la fin du processus, la fraction volumique souhaitée n'est pas obtenue, la valeur de γ est changée et le processus répété.

1.6.3 Projection des inclusions

Une fois que les inclusions sont placées dans le domaine trois dimensions considéré discrétisé par un treillis dont la génération de la géométrie a été expliquée dans la partie quatre, il suffit, pour une barre donnée, d'identifier si elle coupée par le rayon d'une sphère, de calculer la position de cette coupure appelée θ et d'assigner à la barre son type de matériau (barre entièrement dans l'inclusion, barre entièrement dans le mortier ou barre coupée par le rayon d'une sphère). Notons encore une fois l'intérêt de cette approche fondée sur un maillage non adapté aux interfaces ; à chaque fois qu'une nouvelle microstructure est générée, seule la position des interfaces est à recalculer.

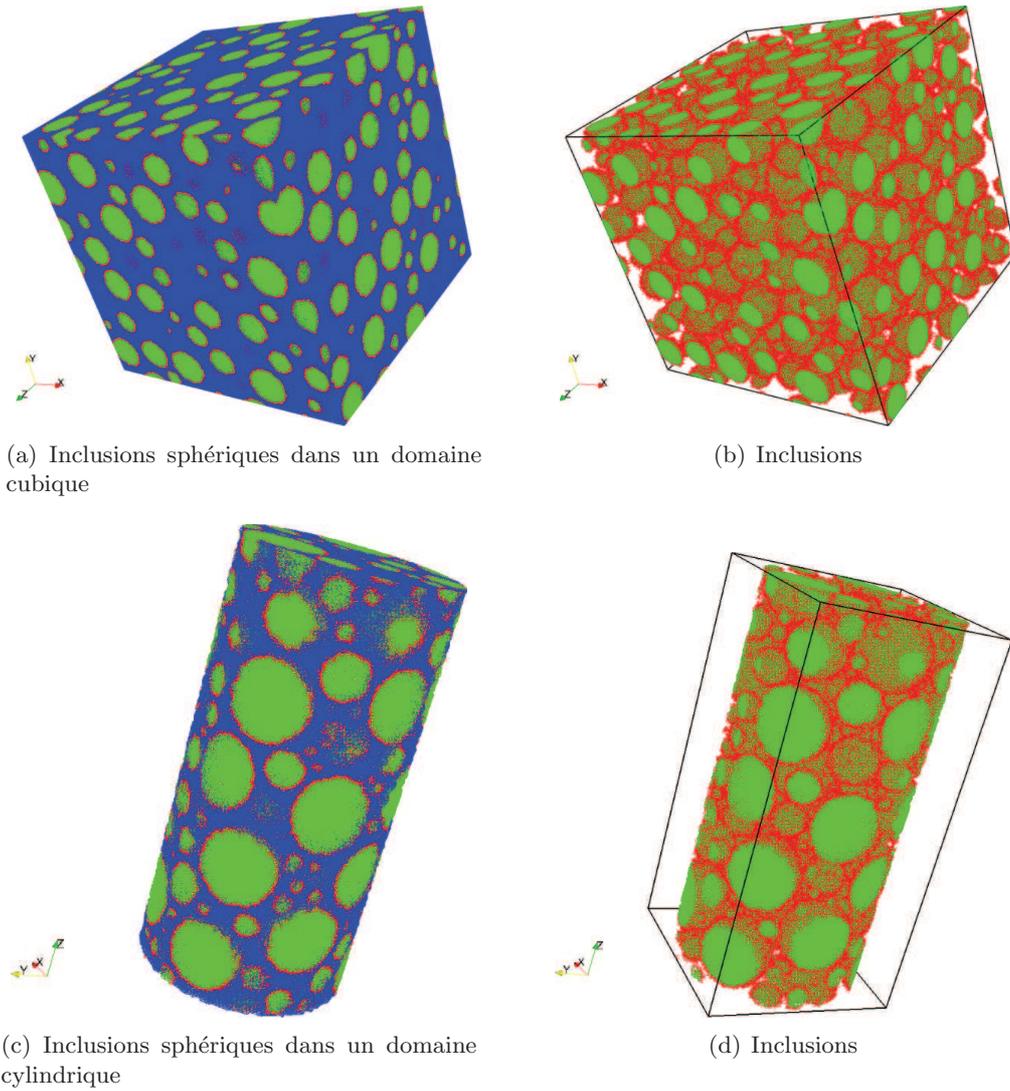
Les processus de génération et de placement des inclusions et la méthode de calcul des positions θ ont été implantés en C++ dans une classe appelée `EDmesh.cpp`. En sortie un fichier Input au format requis par coFeap est généré où, pour chaque barre, sont connus le type de matériau, la valeur de θ (prise par défaut égale à 0,5 si il n'y a pas d'intersection avec un rayon) et la section.

Nous présentons maintenant quelques types de microstructures aléatoires que nous pouvons obtenir. La figure 1.18 représente un cube de 100 mm \times 100 mm \times 100 mm de côté avec une fraction volumique d'inclusions de 45 % et un cylindre de 55 mm de rayon, de 220 mm de hauteur et de fraction volumique de 20 %. Le code couleur permet de différencier les trois types de barre : les barres appartenant au mortier sont en couleur bleue, les barres appartenant aux inclusions sont en couleur verte et les barres appartenant à la fois au mortier et aux inclusions sont en rouge : ce sont celles qui sont coupées en deux ; en d'autres termes ce sont celles pour lesquelles la discontinuité faible est activée et donc pour lesquelles l'enrichissement cinématique avec le mode incompatible $G_1^{①/②}$ est activé.

1.6.4 Perspectives autour des modèles géométriques

Les résultats présentés dans cette section proviennent du stage de Master 2 de Emmanuel Roubin.

En général (et c'est ce que nous avons fait dans la section précédente), les matériaux cimentaires à l'échelle mesoscopique sont modélisés de façon simple par un milieu biphasique composé de sphères non recouvrantes ([Torquato, 2001]) noyées dans un mortier. Les diamètres peuvent être choisis en suivant une granulométrie donnée ([Wriggers and Moftah, 2006]) ou bien une distribution théorique. Cette modélisation, bien que simple, est coûteuse, premièrement en termes de temps de calcul, notamment lorsque les fractions volumiques visées sont importantes et secondement, en termes de données ; ainsi, pour n inclusions sphériques générées, n rayons et n centres sont nécessaires soient $4n$ données (x , y et z et r). Enfin, si nous souhaitons générer des formes autres que des formes régulières (sphères, ellipsoïdes...), nous sommes assez vite limités par ce type d'approches. Ces raisons nous ont amenés à nous tourner vers les idées brièvement développées dans cette section (pour plus de détails voir [Roubin, 2010]) : nous souhaitons décrire un milieu hétérogène (par exemple inclusions dans un mortier) non pas par le biais des caractéristiques géométriques des inclusions mais plutôt par les caractéristiques d'un champ Gaussien corrélé (champ Gaussien dont les différentes valeurs d'une réalisation ne sont pas indépendantes) seuillé ; le seuillage permettant d'obtenir des formes complexes.

FIG. 1.18 – Génération de sphères par `EDmesh.cpp`

Le processus de seuillage d'un champ aléatoire consiste à ne garder que les valeurs du champ supérieures à un certain seuil. Appelons A_u l'excursion de la fonction aléatoire f avec le seuil u sur un espace M à N dimensions, il vient :

$$A_u \equiv A_u(f, M) \triangleq \{x \in M : f(x) \geq u\} \quad (1.57)$$

La figure 1.19 présente ce principe pour un champ uni-dimensionnel.

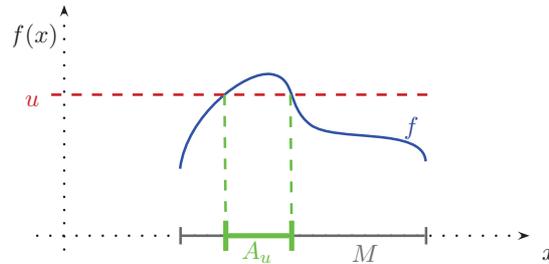


FIG. 1.19 – Représentation uni-dimensionnelle du principe de seuillage d'une réalisation

Ce principe s'étend aux cas où M est un espace à deux dimensions ou trois dimensions. La figure 1.20 présente le champ aléatoire corrélé (1.20(a)) et l'excursion obtenue (1.20(b)) en deux dimensions. Les figures 1.21(a) et 1.21(b) présentent des excursions en trois dimensions pour la même réalisation mais avec des seuils différents. Nous voyons ainsi qu'avec un seuil "bas", l'excursion occupe une place importante dans le volume trois dimensions (ici un cube) : de nombreuses anses et quelques trous sont présents, cela évoque plutôt la morphologie d'un matériau poreux alors qu'avec un seuil "haut", l'excursion occupe une place moins importante : plusieurs éléments de formes variées et déconnectées sont présents, cela évoque plutôt la morphologie d'un matériau cimentaire à l'échelle mesoscopique.

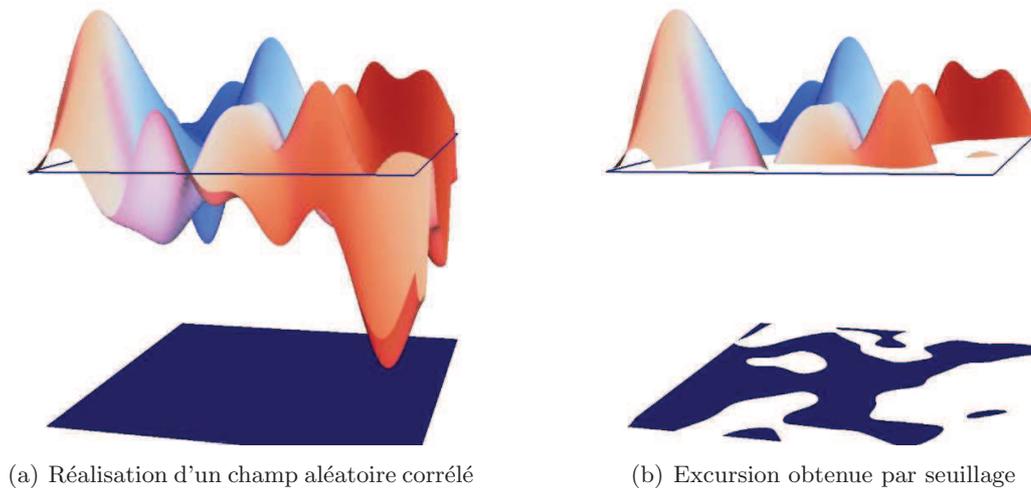


FIG. 1.20 – Exemple d'excursion bi-dimensionnelle

Nous voyons ainsi l'enjeu du problème : comment relier, d'un côté, les caractéristiques du champ aléatoire (espérance, fonction et longueur de corrélation, variance) et la valeur du

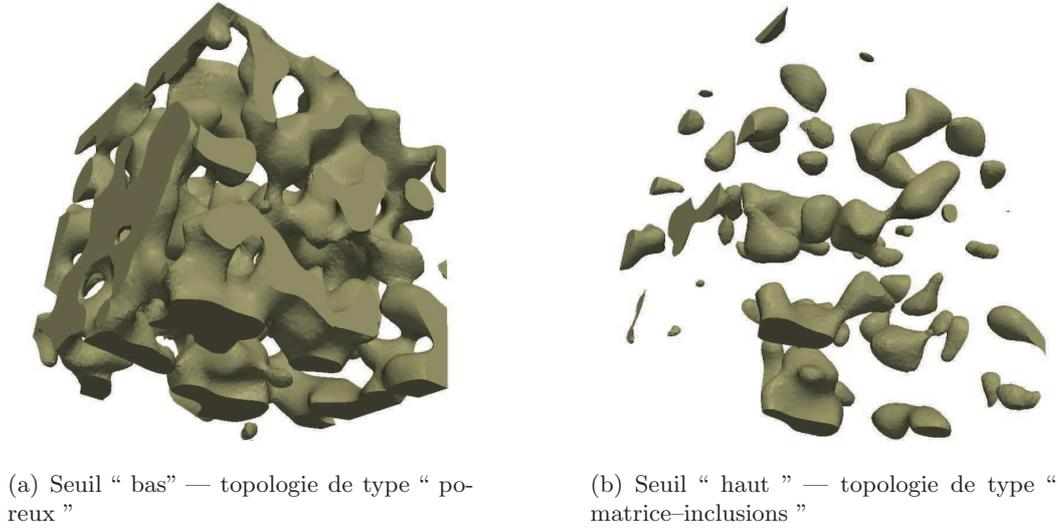


FIG. 1.21 – Influence du seuil sur la topologie d’une excursion tri-dimensionnelle

seuil utilisé avec, de l’autre côté, les caractéristiques géométriques des excursions (volume, surface, caractéristique d’Euler) ?

Il existe, pour répondre à cette question, de nombreuses voies connues sous des noms différents : fonctionnelles de Minkowski, de Steiners, courbures intégrales et courbures de Lipschitz-Killing. Les différences viennent de l’échelle utilisée. Dans notre cas, nous travaillerons avec les courbures de Lipschitz-Killing, notées LKC.

Pour un ensemble A à N dimensions, les LKC définissent $N + 1$ grandeurs notées $\mathcal{L}_j(A)$ qui peuvent être vues comme la “ mesure ” des tailles de A dans sa $j^{\text{ème}}$ dimension ($0 \leq j \leq N$). Dans un espace de dimension trois, il y aura ainsi quatre LKC : la caractéristique d’Euler ($\mathcal{L}_0(A)$), le diamètre ($\mathcal{L}_1(A)$), la surface ($\mathcal{L}_2(A)$) et le volume ($\mathcal{L}_3(A)$). Les expressions des LKC d’un cube peuvent être trouvées dans [Roubin, 2010]. Il est notable que l’ensemble des quatre LKC fournit à la fois des grandeurs géométriques (diamètre, surface et volume) et topologiques (caractéristique d’Euler) de l’ensemble.

Par ailleurs, [Adler, 2008] et [Adler and Taylor, 2007] ont récemment permis d’avoir une formule explicite de la valeur de l’espérance des différents LKC pour les excursions d’un champ aléatoire. Cela a été exploité dans le cadre de champs aléatoires corrélés et permet ainsi d’écrire les espérances des quatre LKC introduits précédemment en fonction de la longueur de corrélation du champ L_c , de sa variance σ et du seuil u (voir [Roubin, 2010] pour le détail des calculs).

Finalement, nous pouvons conclure que l’espérance des caractéristiques géométriques (diamètre, surface et volume) et topologiques (caractéristique d’Euler) est aussi reliée aux caractéristiques du champ aléatoire seuillé (longueur de corrélation L_c , variance σ et seuil u).

Jusqu’à présent, nous n’avons pas encore expliqué comment le champ aléatoire est obtenu : c’est la décomposition de Karhunen-Loève [Loève, 1977] qui est utilisée (voir [Roubin, 2010] pour les détails). Cette décomposition nécessite la résolution du problème aux valeurs propre associé (problème de Fredholm). Ce problème étant continu, il est discrétisé par la méthode des Éléments Finis pour être résolu par un solveur itératif de

Lanczos [Cullum, 1985], il vient :

$$MCM \underline{\psi} = \lambda M \underline{\psi} \quad (1.58)$$

Dans cette équation, M est la matrice de Gram. C'est l'équivalent d'une matrice de masse standard à masse volumique unitaire. Elle contient uniquement les caractères géométriques du maillage. La matrice de covariance C quant à elle contient les informations du champ Gaussien corrélé. Elle représente la fonction de covariance. Une fois les m valeurs propres et les vecteurs propres de 1.58 déterminés, la décomposition de Karhunen-Loève est construite :

$$f_x = \sum_{n=1}^m \sqrt{\lambda_n} \xi_n \psi_n(x), \quad (1.59)$$

m étant le nombre de modes retenus choisis au préalable et $\xi_n \in \mathcal{N}(0, 1)$ sont des variables aléatoires indépendantes. La figure 1.22 donne un exemple de réalisation d'un champ Gaussien pour un cube.

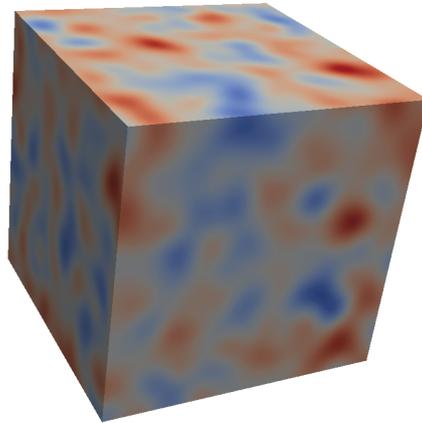


FIG. 1.22 – Réalisation d'un champ Gaussien dans un cube $100 \times 100 \times 100$

Finalement, puisque nous sommes désormais capables de générer une microstructure aléatoire à partir de champ gaussien seuillé et de remonter à l'espérance des caractéristiques géométriques des excursions obtenues ([Adler and Taylor, 2007]), nous pouvons appliquer la stratégie de maillage non adapté à la microstructure et discrétiser le domaine d'étude par un treillis spatial afin de réaliser des simulations numériques éléments finis. La figure 1.23 donne un exemple de microstructure ainsi obtenue.

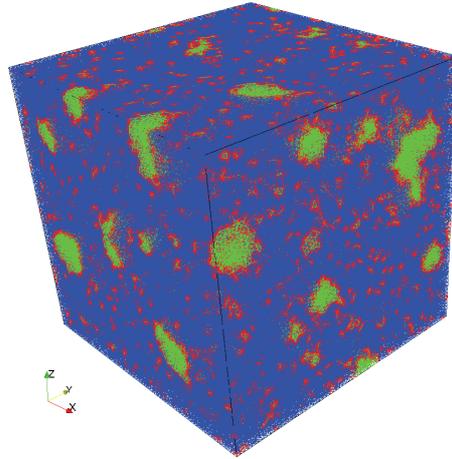


FIG. 1.23 – Microstructure aléatoire obtenue à partir d’un champ gaussien et discrétisée par un treillis spatial

Là encore, le code couleur permet de différencier les trois types de barre : les barres appartenant au mortier sont en couleur bleue, les barres appartenant aux inclusions sont en couleur verte et les barres appartenant à la fois au mortier et aux inclusions sont en rouge : ce sont celles qui sont coupées en deux ; en d’autres termes ce sont celles pour lesquelles la discontinuité faible est activée et donc pour lesquelles l’enrichissement cinématique avec le mode incompatible $G_1^{(1/2)}$ est activé.

La partie six de ce chapitre a présenté le processus de génération de microstructures trois dimensions : non seulement des inclusions de forme sphérique peuvent être générées mais aussi des inclusions de forme aléatoire. La partie suivante va être l’occasion de montrer les capacités de cet outil numérique dans le cadre de l’élasticité hétérogène selon deux approches : une première plutôt orientée éléments finis (convergence de maillage) et une seconde orientée homogénéisation numérique (calcul de propriétés effectives). Dans cette approche, la notion de volume élémentaire représentatif (VER) est un paramètre important. Ainsi la première sous-partie discutera brièvement de cette notion, la seconde des points-clés de l’homogénéisation et finalement, les validations seront présentées.

1.7 Meso-modèle en élasticité hétérogène

1.7.1 Notion de VER

Le VER est généralement vu comme un volume V d’un matériau hétérogène suffisamment grand pour être statistiquement représentatif du composite, c’est-à-dire incluant de façon effective un échantillon de toutes les hétérogénéités de la microstructure qui apparaissent dans le composite. Ce principe implique donc que le VER doit inclure un grand nombre d’hétérogénéités (inclusions, fibres, grains, ...). Plusieurs types de conditions aux limites peuvent être appliquées sur V pour imposer une déformation moyenne donnée ou une contrainte moyenne donnée à l’échantillon. En fait, la réponse du VER doit être in-

dépendante du type de conditions aux limites [Sab, 1992]. Cela plaide aussi en la faveur d'un volume suffisamment grand pour le VER.

Dans le cas de nombreuses simulations numériques, la taille du VER est beaucoup trop importante pour être " exploitée " numériquement ; des propriétés dites " apparentes " sur des volumes plus petits que celui du VER sont alors utilisées. Ce problème a été étudié par [Huet, 1990] et [Hazanov and Huet, 1994] : il en ressort des relations d'encadrement entre les propriétés effectives et les propriétés apparentes pour différentes conditions aux limites en contraintes, déformations ou mixtes.

Des éléments et des notations de la théorie de l'homogénéisation sont nécessaires pour présenter et expliquer les résultats numériques obtenus. Nous allons donc dans une première sous-section nous attarder sur les points-clés de la théorie de l'homogénéisation.

1.7.2 Homogénéisation en élasticité linéaire

1.7.2.1 Conditions aux limites

Un élément de volume Ω composé d'un matériau hétérogène est considéré. Afin de déterminer les propriétés de ce volume, des conditions aux limites sont appliquées sur sa frontière notée $\partial\Omega$. Trois types de conditions aux limites peuvent être appliquées sur Ω (conditions de déformations homogènes, de contraintes homogènes et de périodicité) vérifiant toutes la condition de Hill [Hill, 1967]. Elles permettent, dans tous les cas, de récupérer les composantes du tenseur d'élasticité. $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ et $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$ sont les tenseurs de contraintes et déformations locaux liés par une relation de comportement locale.

- Dans le cas des conditions de déformations homogènes au contour, un déplacement \mathbf{u} sur tous les points \mathbf{x} appartenant à $\partial\Omega$ est appliqué :

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathcal{E} \cdot \mathbf{x} \quad (1.60)$$

où \mathcal{E} est le tenseur de déformations macroscopiques correspondant à la moyenne des déformations locales sur le volume Ω : $\mathcal{E} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) d\Omega$.

Le tenseur des contraintes macroscopiques \mathcal{L} est alors obtenu par la moyenne des contraintes locales sur le volume Ω : $\mathcal{L} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) d\Omega$.

- Dans le cas des conditions de contraintes homogènes au contour, sur tous les points \mathbf{x} appartenant à $\partial\Omega$ de vecteur normal \mathbf{n} , un effort surfacique $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ est appliqué :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathcal{L} \cdot \mathbf{n} \quad (1.61)$$

où \mathcal{L} est le tenseur de contraintes macroscopiques correspondant à la moyenne des contraintes locales sur le volume Ω : $\mathcal{L} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) d\Omega$.

Le tenseur des déformations macroscopiques \mathcal{E} est alors obtenu par la moyenne des déformations locales sur le volume Ω : $\mathcal{E} = \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) d\Omega$.

- Dans le cas des conditions périodiques, le volume Ω est connu dans ses moindres détails géométriques et sa forme est telle que l'on peut paver l'espace en translatant

Ω ; le champ solution est de la forme :

$$\mathbf{u}|_{\Omega} = \mathcal{E} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (1.62)$$

où \mathcal{E} est le tenseur de déformations macroscopiques correspondant à la moyenne des déformations locales sur le volume Ω et \mathbf{v} est une fluctuation périodique, c'est-à-dire que \mathbf{v} prend des valeurs égales en des points homologues sur des faces opposées de Ω ; d'autre part, le vecteur contrainte $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ est tel qu'il prenne des valeurs opposées sur des faces opposées.

Dans le cas de l'élasticité linéaire, les problèmes de type déformations homogènes, contraintes homogènes et périodiques admettent une solution unique dépendant linéairement du chargement macroscopique imposé (à un mouvement de corps rigide près pour le problème de type contraintes homogènes et à une translation près pour le problème de type périodiques). Il existe donc des tenseurs uniques dit de concentration (notés respectivement $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ et $\mathcal{B}(\mathbf{x})$) permettant d'exprimer $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$ en fonction de \mathcal{E} et $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ en fonction \mathcal{L} tels que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) &= \mathcal{A}(\mathbf{x}) : \mathcal{E} \quad \forall x \in \Omega \text{ et } \forall \mathcal{E} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \mathcal{B}(\mathbf{x}) : \mathcal{L} \quad \forall x \in \Omega \text{ et } \forall \mathcal{L} \end{aligned} \quad (1.63)$$

1.7.2.2 Modules apparents et effectifs

Soient $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ les modules locaux d'élasticité et de souplesse tels que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \quad \forall x \in \Omega \\ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) &= \mathbf{s}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \quad \forall x \in \Omega \end{aligned} \quad (1.64)$$

Pour le problème en déformations homogènes, il vient :

$$\mathcal{L} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \mathbf{c} : \mathcal{A} : \mathcal{E} \rangle = \langle \mathbf{c} : \mathcal{A} \rangle : \mathcal{E} = \mathcal{C}_{\mathcal{E}}^{app} : \mathcal{E} \quad (1.65)$$

et pour le problème en contraintes homogènes :

$$\mathcal{E} = \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \langle \mathbf{s} : \mathcal{B} : \mathcal{L} \rangle = \langle \mathbf{s} : \mathcal{B} \rangle : \mathcal{L} = \mathcal{S}_{\mathcal{L}}^{app} : \mathcal{L} \quad (1.66)$$

$\mathcal{C}_{\mathcal{E}}^{app}$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^{app}$ sont respectivement les modules apparents d'élasticité et de souplesse pour un volume Ω donné. Ils ne sont pas une simple moyenne des modules locaux d'élasticité et de souplesse $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ mais une moyenne pondérée par les tenseurs de concentration $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ et $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ qui dépendent de la distribution des phases au sein du volume.

Pour des volumes Ω suffisamment grands, les modules apparents ne dépendent plus du type de conditions aux limites et coïncident alors avec les propriétés effectives recherchées [Sab, 1992] :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{E}}^{app} = \mathcal{S}_{\mathcal{L}}^{app-1} = \mathcal{C}^{eff} = \mathcal{S}^{eff-1} \quad (1.67)$$

Pour des volumes intermédiaires, seule la relation d'encadrement suivante est vérifiée [Huet, 1990] :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^{app-1} \leq \mathcal{C}^{eff} \leq \mathcal{C}_{\mathcal{E}}^{app} \quad (1.68)$$

1.7.2.3 Réponse effective isotrope

En faisant l'hypothèse que la la réponse effective est isotrope, les conditions aux limites appliquées à un volume Ω prennent une forme particulière. Dans le cas des conditions de type déformations homogènes au contour, nous avons :

$$\mathcal{E}_K = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

$$\mathcal{E}_G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.70)$$

Le module apparent de compressibilité K^{app} et le module apparent de cisaillement G^{app} sont déterminés par :

$$K^{app} = \frac{1}{3} \text{trace}\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad G^{app} = \langle \boldsymbol{\sigma}_{12} \rangle \quad (1.71)$$

Après avoir rappelé les points-clés de l'homogénéisation, nous allons dans les deux prochaines sous-sections présenter des validations en élasticité hétérogène.

1.7.3 Convergence globale en élasticité hétérogène

Afin de valider le processus de maillage dans le cadre de microstructures aléatoires, nous nous sommes intéressés à l'effet de la densité de maillage sur la valeur du module de compressibilité apparent K^{app} calculée par simulations éléments finis [Kanit et al., 2006] pour différentes fractions volumiques d'inclusions P_2 (23 %, 30 % et 37 %). Le domaine d'étude Ω est un cube (comme celui de la figure 1.7(b)) de 100 mm \times 100 mm \times 100 mm de côté. La géométrie de la microstructure reste inchangée [Kanit et al., 2003], mais différentes densités de maillage sont utilisées. Par exemple pour $P_2 = 30$ %, le nombre de degrés de liberté varie de 46791 à 1458000. Le nombre d'éléments finis barre varie de 97190 à 3257000 ce qui signifie que la densité de maillage est passée de 10,3 à 0,30 mm³/élément (voir Fig. 1.24(a) et Fig. 1.24(b)).

Le module de compressibilité du mortier K_1 vaut 5556 MPa et celui des inclusions K_2 vaut 38889 MPa. Des conditions de déformations homogènes sont appliquées sur les faces du cube telles que

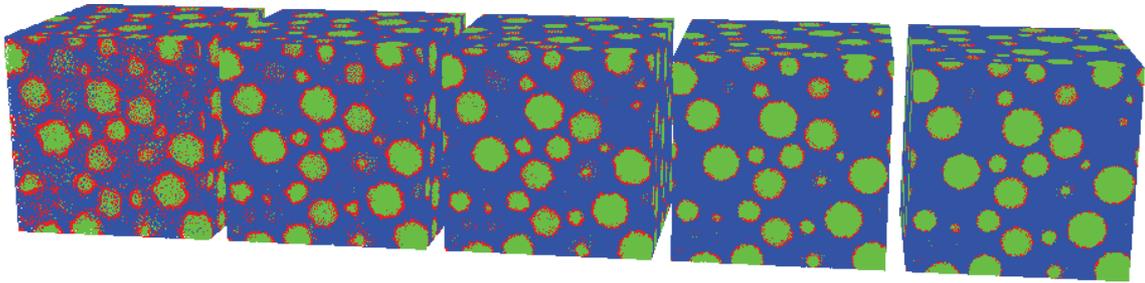
$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathcal{E}_K \cdot \mathbf{x} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_K = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (1.72)$$

Le module de compressibilité apparent K^{app} est déterminé par la relation

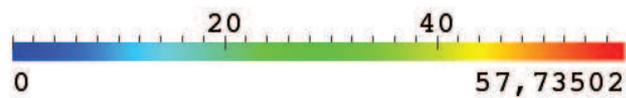
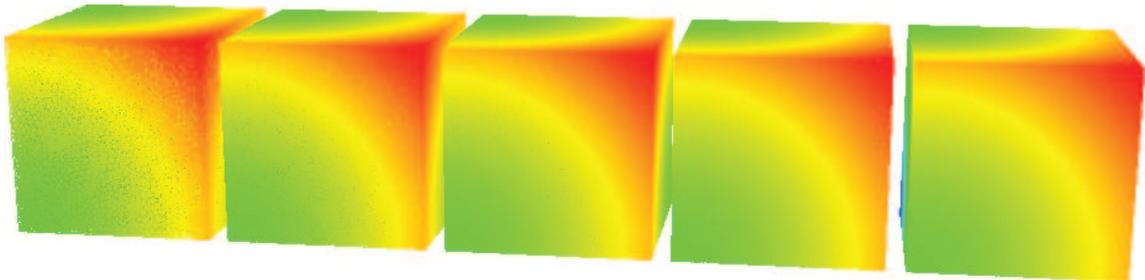
$$K^{app} = \frac{1}{3} \text{trace}\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad (1.73)$$

en faisant l'hypothèse que la réponse est isotrope.

La figure 1.25 montre la convergence du module de compressibilité apparent en fonction du nombre de degrés de liberté : quelles que soient les fractions volumiques étudiées, une valeur asymptotique est atteinte. Il faut à peu près, quelle que soit la fraction volumique, 300000 degrés de liberté pour avoir une variation de la réponse inférieure à 1 %. La figure 1.24(a) représente la microstructure générée pour $P_2 = 30\%$ et la figure 1.24(b) le champ de déplacements au dernier pas de temps obtenu en fonction de la finesse du maillage pour les conditions aux limites (1.72). Il est important de noter que la valeur de degrés de liberté obtenue (30000) correspond seulement au cas de conditions aux limites en déformations homogènes. Il serait intéressant de la comparer avec des résultats obtenus avec des conditions aux limites en contraintes homogènes ou périodiques.



(a) Microstructure ($P_2 = 30\%$) : de 97190 à 3257000 éléments



(b) Champ de déplacements ($P_2 = 30\%$) : de 97190 à 3257000 éléments (conditions aux limites (1.72))

FIG. 1.24 – Microstructure ($P_2 = 30\%$) et champ de déplacements (conditions aux limites (1.72))

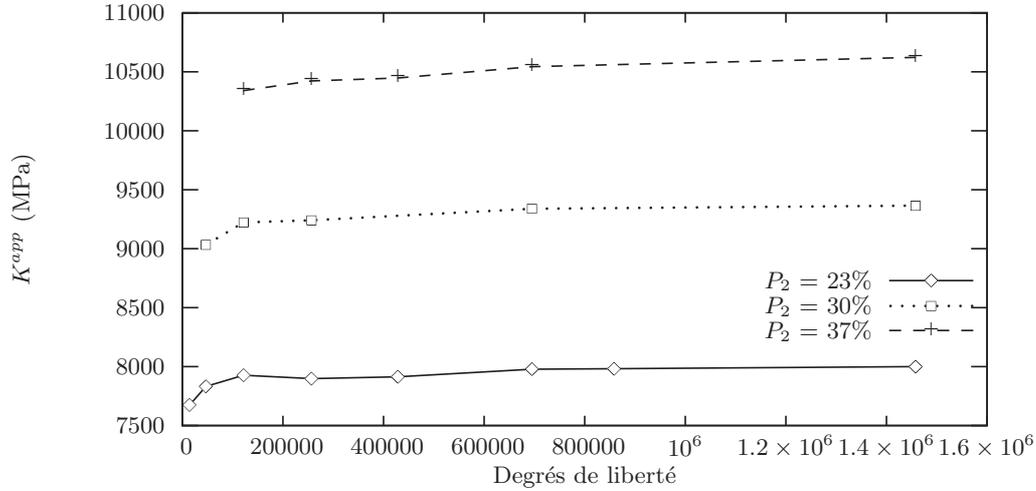


FIG. 1.25 – Effet de la densité de maillage et de la fraction volumique P_2 sur la convergence globale du module de compressibilité apparent

Dans les deux sous-sections suivantes, deux types de propriétés macroscopiques sont étudiés pour différentes tailles de volume V et un nombre de réalisations de microstructure important. La première est une propriété géométrique, à savoir la fraction volumique macroscopique d'inclusions. La seconde est une propriété physique, le module de compressibilité macroscopique.

1.7.4 VER morphologique

Dans cette sous-section, 22 volumes cubiques V sont étudiés ($V = 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 150, 200, 250, 350, 450, 500, 600, 650, 700, 750, 800, 900 \text{ mm}^3$) avec $n = 100$ réalisations de microstructures aléatoires pour chaque volume V . Le rayon minimum des inclusions est de 5 mm et le rayon maximum est de 10 mm. La fraction volumique moyenne et la dispersion obtenues pour un volume donné sont tracées sur la figure 1.26 pour une fraction volumique moyenne visée de 18 % et sur la figure 1.27 pour une fraction volumique moyenne visée de 35,5 %. Nous pouvons ainsi observer que la fraction volumique moyenne ne dépend pas de la taille du volume V . Pour chaque valeur moyenne, l'intervalle de confiance à 95 % pour $n = 1$ réalisation $[\bar{P} - 2\sigma_{\bar{P}}, \bar{P} + 2\sigma_{\bar{P}}]$ a aussi été représenté où P est la fraction volumique, \bar{P} la valeur moyenne et $\sigma_{\bar{P}}$ l'écart-type. Il est notable que l'écart type diminue quand la taille du volume augmente. Une approche semblable a été menée dans [Kanit et al., 2003] à la différence que le nombre de réalisations n'est pas le même pour chaque volume; il en conclut que la fraction volumique macroscopique d'une phase dans un matériau hétérogène peut être obtenue soit par un petit nombre de réalisations sur des volumes de taille importante soit par un très grand nombre de réalisations sur des volumes de petite taille.

La taille d'un VER par rapport à une propriété estimée Z peut être directement reliée à la précision de la valeur moyenne résultant de différentes réalisations pour chaque volume V . Ainsi, théoriquement, si le volume V est un VER pour la propriété Z , la dispersion doit

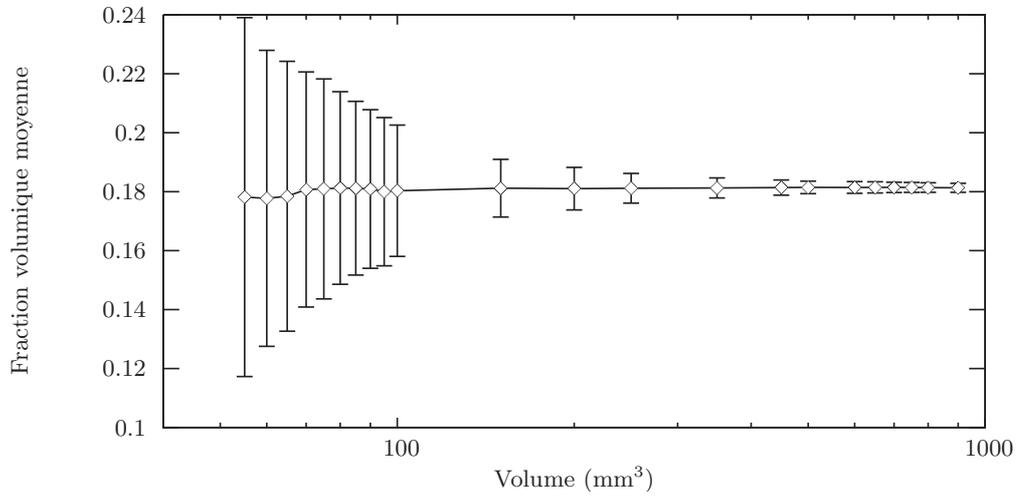


FIG. 1.26 – Valeur moyenne et intervalles de confiance à 95 % pour $n = 1$ réalisation, $P_2 = 18$ %

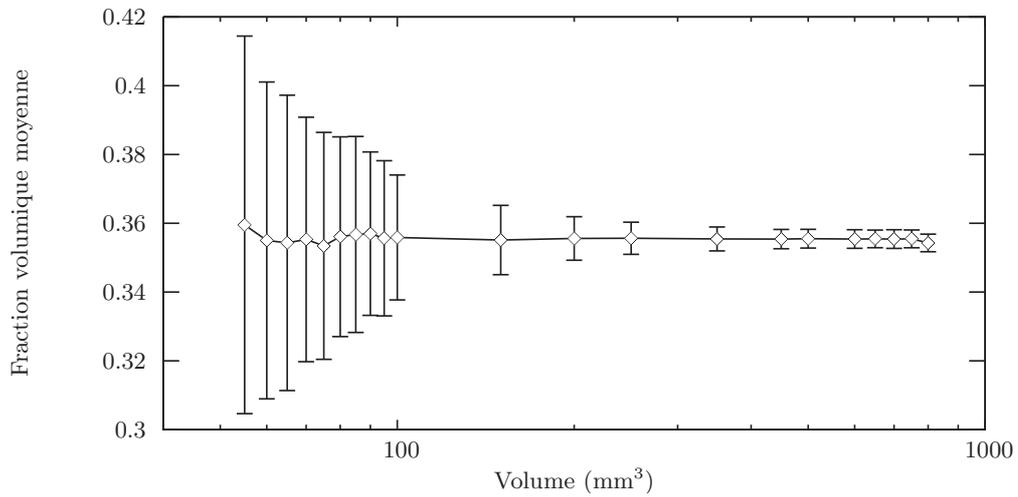


FIG. 1.27 – Valeur moyenne et intervalles de confiance à 95 % pour $n = 1$ réalisation, $P_2 = 35,5$ %

être nulle. En pratique, la taille d'un VER est déterminée pour une erreur donnée. Nous pouvons définir l'erreur relative ϵ_{rel} telle que

$$\epsilon_{rel} = 4\sigma_{\bar{Z}}(V)/\bar{Z}(V) \quad (1.74)$$

à partir de l'intervalle de confiance pour $n = 1$ réalisation permettant d'estimer la propriété moyenne Z avec une erreur relative par exemple inférieure à 2 % et à 5 %.

Cette méthode est appliquée à la fraction volumique : nous obtenons ainsi $V_{5\%}^{VER} = 350 \text{ mm}^3$ et $V_{2\%}^{VER} = 700 \text{ mm}^3$ pour une fraction volumique de 18 % correspondant à $\epsilon_{rel} \leq 5 \%$ et $\epsilon_{rel} \leq 2 \%$. Pour une fraction volumique de 35,5 %, $V_{5\%}^{VER} = 200 \text{ mm}^3$ et $V_{2\%}^{VER} = 350 \text{ mm}^3$ correspondant à $\epsilon_{rel} \leq 5 \%$ et $\epsilon_{rel} \leq 2 \%$. Notons que quelle que soit l'erreur relative étudiée, les volumes trouvés pour une fraction volumique de 18 % sont plus grands que ceux pour 35,5 %.

Les figures 1.28 et 1.29 représentent l'erreur relative ϵ_{rel} pour $n = 1$ réalisation en fonction du volume V pour respectivement une fraction volumique de 18 % et de 35,5 %. Nous observons que ϵ_{rel} diminue lorsque V augmente. Afin d'obtenir une loi d'évolution entre l'erreur relative ϵ_{rel} et le volume V , un "fittage" sur les points obtenus par simulation numérique a été réalisé par la fonction $f(V)$ telle que

$$f(V) = a \exp(-b(V - 55)) + c \quad (1.75)$$

Le tableau 1.2 donne les valeurs de a , b et c pour les deux fractions volumiques étudiées.

Fractions volumiques	a	b	c
$P_2=18 \%$	$62,102 \pm 1,125$	$0,024 \pm 0,00097$	$2,902 \pm 0,471$
$P_2=35,5 \%$	$27,907 \pm 0,492$	$0,025 \pm 0,00097$	$1,808 \pm 0,213$

TAB. 1.2 – Valeurs des coefficients de $f(V)$

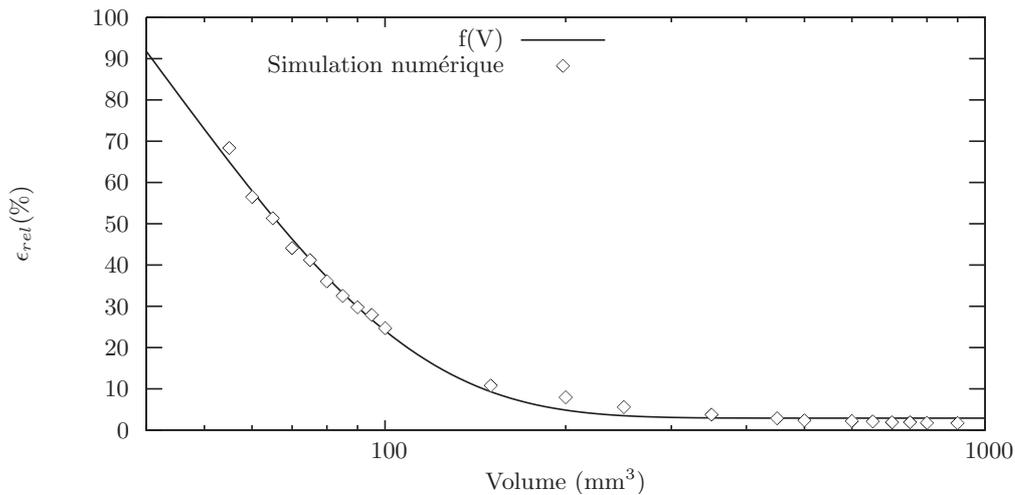


FIG. 1.28 – Erreur relative en fonction de V pour $n = 1$ réalisation, $P_2 = 18 \%$

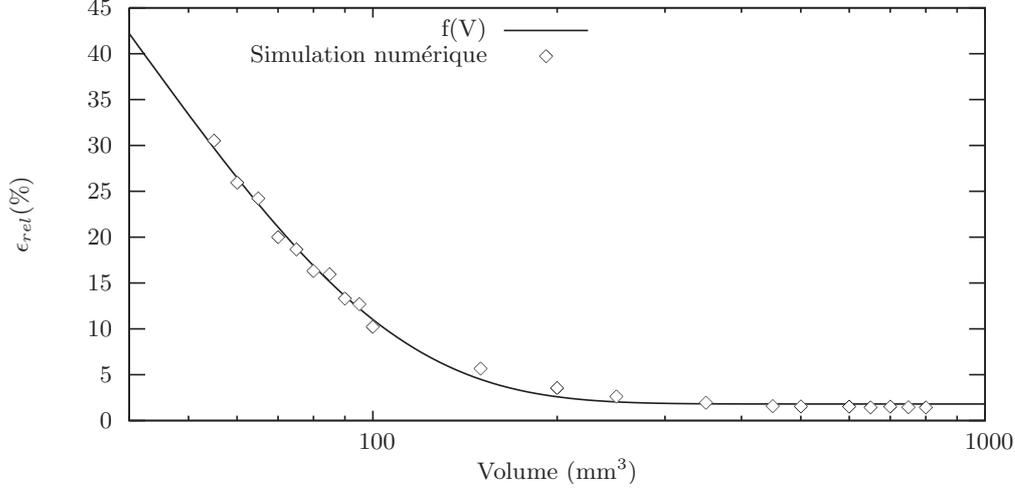


FIG. 1.29 – Erreur relative en fonction de V pour $n = 1$ réalisation, $P_2 = 35,5 \%$

Finalement, connaissant la loi d'évolution entre ϵ_{rel} et V , il est possible, à partir de la définition de l'erreur relative pour n réalisations indépendantes

$$\epsilon_{rel} = 4\sigma_{\bar{Z}}(V)/\bar{Z}(V)\sqrt{n} \quad (1.76)$$

de tracer le nombre de réalisations n à effectuer en fonction du volume V pour une erreur relative donnée, avec

$$n = (4\sigma_{\bar{Z}}(V))^2/\bar{Z}(V)^2\epsilon_{rel}^2 = f(V)^2/\epsilon_{rel}^2. \quad (1.77)$$

Les courbes 1.30 et 1.31 représentent l'évolution du nombre de réalisations n en fonction du volume V (le volume le plus petit est de 200 mm^3) pour respectivement 18% et $35,5 \%$ d'inclusions. Sur chacune de ces courbes, trois erreurs relatives ont été étudiées : $\epsilon_{rel} = 1,2$ et 3% . Le tableau 1.3 résume les valeurs obtenues pour n pour un volume de 200 mm^3 .

Fractions volumiques	$\epsilon_{rel} = 1 \%$	$\epsilon_{rel} = 2 \%$	$\epsilon_{rel} = 3 \%$
$P_2=18 \%$ ($V = 200 \text{ mm}^3$)	61	16	7
$P_2=35,5 \%$ ($V = 200 \text{ mm}^3$)	13	4	2

TAB. 1.3 – Nombre de réalisations pour un volume de 200 mm^3 et pour une erreur relative donnée

1.7.5 Module de compressibilité

Dans cette sous-section, un matériau élastique bi-phasique composé d'inclusions noyées dans un mortier est étudié. Le volume V considéré est un cube. Le module de compressibilité des inclusions est choisi égal à 38889 MPa et celui du mortier à 5556 MPa . L'objectif de cette partie est d'estimer le module de compressibilité apparent en fonction de la taille du volume V ($V = 30, 100, 250, 500$ et 800 mm^3). Les simulations numériques sont réalisées pour des conditions aux limites en déformations homogènes. La fraction volumique

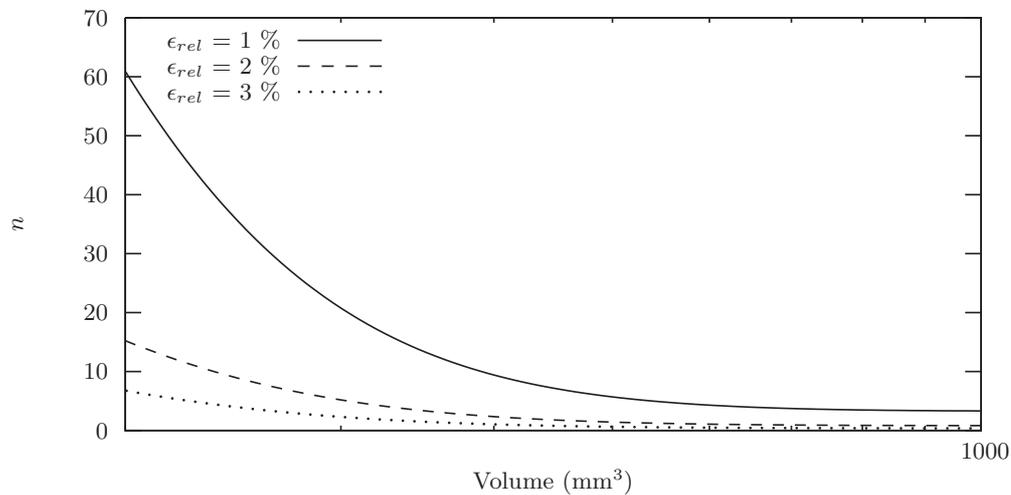


FIG. 1.30 – Nombre de réalisations n en fonction du volume V pour trois erreurs relatives données, $P_2 = 18\%$

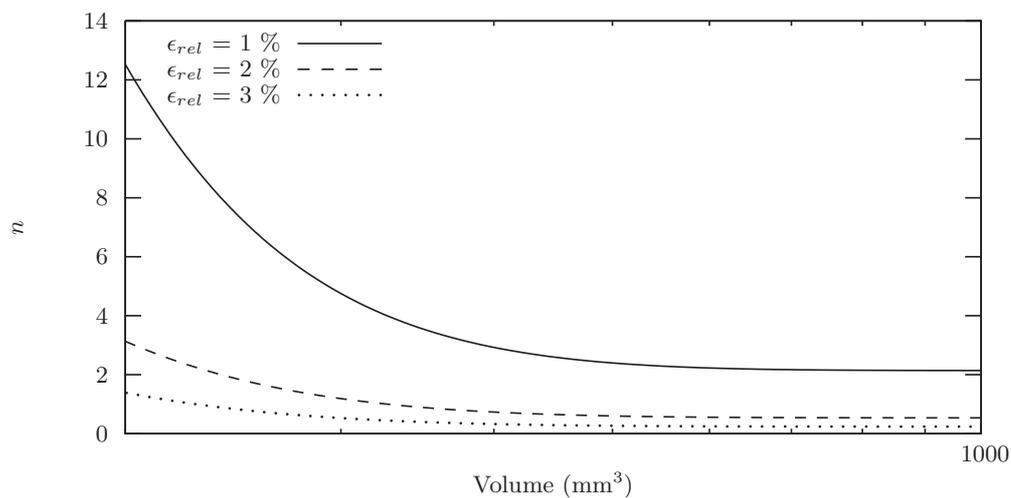


FIG. 1.31 – Nombre de réalisations n en fonction du volume V pour trois erreurs relatives données, $P_2 = 35,5\%$

d'inclusions est de 18 % ($r_{min} = 4,5$ mm et $r_{max} = 8$ mm). Le nombre de réalisations n de microstructures pour chaque volume est de cent.

Remarque : D'un point de vue coût de calcul, le volume le plus large qui ait pu être maillé est de 800 mm^3 (3720000 degrés de liberté), c'est pour cela que contrairement aux calculs menés pour le VER morphologique, où aucun maillage n'est utilisé, les tailles supérieures à 800 mm^3 ne sont pas présentes.

La figure 1.32 donne la valeur moyenne et la dispersion obtenues pour le module de compressibilité K^{app} en fonction de la taille du volume V . Nous observons ainsi que la dispersion des résultats décroît quand la taille du volume augmente. Contrairement au cas de la fraction volumique précédemment étudiée, la valeur moyenne obtenue dépend de la taille du volume. La méthode précédente est reprise pour estimer la taille du VER pour le module de compressibilité K . Il vient $V_{5\%}^{VER} = 250 \text{ mm}^3$ et $V_{2\%}^{VER} = 500 \text{ mm}^3$ correspondant à $\epsilon_{rel} \leq 5 \%$ et $\epsilon_{rel} \leq 2 \%$. Il est notable aussi sur la figure 1.32 que le module de compressibilité apparent K^{app} converge vers une valeur asymptotique lorsque la taille du volume V augmente ; cette valeur coïncide avec le module de compressibilité effectif K^{eff} recherché. La valeur de K^{eff} pour un volume de 800 mm^3 est reportée dans le tableau 1.4 et comparée avec les bornes de Voigt, Reuss et Hashin-Shtrikman [Hashin and Shtrikman, 1963].

Il est important de noter que cette étude de VER a été réalisée seulement pour des conditions aux limites en déformations homogènes ; il faudrait aussi la faire pour des conditions aux limites en contraintes homogènes et périodiques. En effet, comme illustré dans [Kanit et al., 2003], [Lachihab and Sab, 2005] et [Kanit et al., 2006], la valeur moyenne de la propriété étudiée (module de compressibilité) dépend du volume mais aussi des conditions aux limites ; les conditions aux limites périodiques sont moins sensibles à la taille du volume V que les autres. Il aurait aussi été intéressant de pouvoir observer la convergence du module de compressibilité apparent vers une valeur asymptotique coïncidant avec la valeur effective cherchée en fonction des conditions aux limites.

Finalement nous pouvons comparer la taille du VER pour la fraction volumique avec la taille du VER pour le module de compressibilité pour 18% d'inclusions : quelle que soit l'erreur relative considérée, la taille du VER pour K est supérieure à celle pour P .

Propriété	Simulation	Voigt	Reuss	HS+	HS-
K ($P_2=18 \%$)	6890	11556	6569	9271	6570

TAB. 1.4 – Valeurs numériques de la simulation et des bornes (MPa)

Dans les perspectives concernant le calcul de VER, il pourrait être envisagé de réaliser un calcul pour des propriétés non-linéaires telles que le pic avant rupture ou l'ouverture de fissures macroscopiques pour un matériau quasi-fragile.

Dans le premier chapitre de cette thèse, la stratégie de maillage de microstructures a, tout d'abord, été présentée : une approche fondée sur des maillages non adaptés à la géométrie de la microstructure a été retenue. La conséquence de cette approche sur les éléments finis a ensuite été discutée : certains d'entre eux se retrouvent coupés au niveau de l'interface en deux parties ayant des propriétés matérielles différentes. Un enrichissement

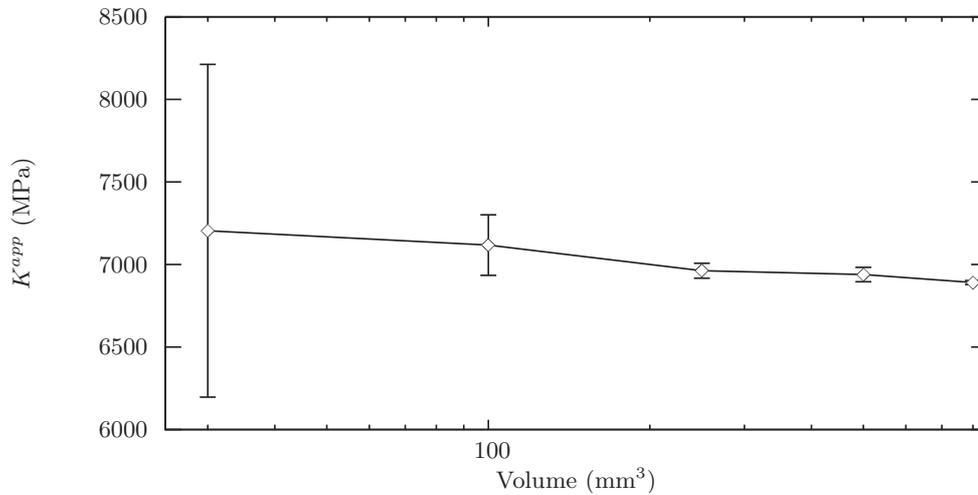


FIG. 1.32 – Valeur moyenne et intervalles de confiance à 95 % pour K^{app} avec 18 % d'inclusions

cinématique des éléments est donc apparu comme nécessaire. Les différentes méthodes d'enrichissement cinématique ont ainsi été brièvement expliquées ; le choix s'est porté sur la E-FEM qui permet de résoudre localement les inconnues additionnelles et donc de garder la taille du problème globale inchangée. Le cadre mathématique et numérique d'introduction de la E-FEM dans un problème Éléments Finis a ensuite été présenté et la méthode des Modes Incompatibles est apparue comme une méthode efficace pour tenir compte numériquement de l'enrichissement cinématique. Puis le processus de génération du maillage treillis trois dimensions et des inclusions a été expliqué avec deux exemples de microstructure obtenue. La méthode des Modes Incompatibles a été appliquée aux éléments barres composant le treillis trois dimensions permettant d'obtenir le système éléments finis à résoudre. Finalement, des validations numériques ont été proposées aussi bien à l'échelle d'une barre ([Sukumar et al., 2001]) qu'à l'échelle du domaine cubique (convergence du maillage et outil d'homogénéisation).

Dans le prochain chapitre, nous allons nous intéresser à la prise en compte de la fissuration. Nous verrons que par la E-FEM, il est aussi possible d'incorporer de la fissuration au sein des éléments finis barres bi-phasiques avec un deuxième mode incompatible fondé cette fois-ci sur une discontinuité forte.

Chapitre 2

Modélisation du caractère hétérogène et rupture quasi-fragile

Contents

2.1	Revue bibliographique des limiteurs de localisation	58
2.2	Modèles à discontinuité forte	59
2.3	Modèle discret sur la discontinuité	61
2.4	Élément fini bi-phasique quasi-fragile	64
2.4.1	Fonction seuil	67
2.4.2	Linéarisation du problème (2.29)	68
2.4.3	Procédure de résolution du problème (2.42)	71
2.5	Méthode de résolution du problème éléments finis (2.49)	73
2.6	Validations numériques	74
2.6.1	Performances de l'algorithme local 2	74
2.6.1.1	Barre homogène	74
2.6.1.2	Barre hétérogène	75
2.6.2	Objectivité à l'égard du maillage	78
2.6.2.1	Objectivité de la solution en une dimension	78
2.6.2.2	Objectivité de la solution en trois dimensions	78
2.7	Chargements macroscopiques simples	81
2.7.1	Traction uniaxiale	81
2.7.1.1	Réponse macroscopique	81
2.7.1.2	Convergence des calculs	81
2.7.1.3	Isotropie de la réponse	82
2.7.2	Compression uniaxiale	86
2.7.2.1	Réponse macroscopique	86
2.7.2.2	Convergence des calculs	87
2.7.3	Traction/Compression uniaxiale	87
2.7.4	Traction hydrostatique	91

Dans les années soixante-dix, des modèles reposant sur la mécanique non linéaire de la rupture et sur la mécanique continue de l'endommagement ont été développés pour simuler la propagation de fissures et la dégradation de la raideur matérielle dans le béton. Cependant, ces modèles négligent en général les hétérogénéités du béton et le considèrent comme un matériau homogénéisé. Ce type d'homogénéisation est incapable de caractériser le processus de rupture dans sa totalité, de l'initiation à la formation de fissures macroscopiques dans le béton en passant par la propagation et la coalescence des micro-fissures. De plus, ces modèles ne peuvent pas refléter l'aléa des propriétés du béton et sont donc insuffisants pour permettre une complète compréhension du processus de rupture dans le béton. C'est pourquoi différents modèles numériques pour la simulation de la rupture du béton à l'échelle mesoscopique ont été développés. Par exemple, [Cusatis et al., 2006] ont développé un modèle treillis trois dimensions pour simuler des modes de propagation mixtes dans le béton. Ce modèle très complet permet de prendre en compte la rupture en traction, compression et cisaillement, la rupture cohésive et des aspects de confinement. [Bažant et al., 1990] ont présenté un modèle de particules aléatoires pour la rupture des matériaux composites fragiles. Dans ce modèle, le matériau de type matrice est décrit par une loi adoucissante contraintes-déformations liée directement à une énergie de rupture microscopique entre les particules. Dans [Wriggers and Moftah, 2006], un meso-modèle pour le béton reposant sur la théorie de l'endommagement local [Mazars and Pijaudier-Cabot, 1987] permet aux auteurs de réaliser un essai de compression sur une meso-structure contenant 40 % d'inclusions.

D'un point de vue expérimental, la réponse des matériaux quasi-fragiles comme le béton se compose de trois phases :

- une première phase correspondant à la réponse élastique de l'éprouvette,
- une deuxième phase caractérisée par l'apparition de micro-fissures réparties de façon homogène dans l'éprouvette,
- si l'on poursuit le chargement, une phase de coalescence de certaines micro-fissures donnant naissance à une macro-fissure responsable de la rupture.

Il y a ainsi passage d'un état de déformations homogènes vers un état de déformations localisées : il y a localisation des déformations.

D'un point de vue numérique, la simulation éléments finis de la localisation des déformations pour les solides dans le cadre d'un milieu continu classique avec adoucissement donne des résultats fortement dépendants du maillage [Crisfield and Wills, 1988]. Cela est dû à l'introduction d'une longueur interne (la taille de l'élément) dans le calcul. L'énergie dissipée est restreinte à une région dont la taille est déterminée par cette longueur interne. Le raffinement du maillage entraîne alors une diminution de l'énergie dissipée ; cela se retrouve dans la courbe forces-déplacements qui exhibe alors une dépendance pathologique au maillage. Un traitement numérique est donc nécessaire pour s'affranchir de cette dépendance au maillage. Les limiteurs de localisation ont été largement étudiés et utilisés dans la littérature ; nous proposons dans la première partie de ce chapitre de passer en revue quelques uns d'entre eux pour finalement terminer par celui utilisé dans ce travail de thèse à savoir l'introduction d'une discontinuité forte dans le problème. Les points-clés des modèles à discontinuité forte seront présentés en partie deux avec la distinction entre approche continue et approche discrète. La partie trois sera l'occasion d'exposer

brièvement la construction thermodynamique de l'approche discrète sur la discontinuité. La partie quatre présentera le deuxième mode incompatible permettant d'incorporer la fissuration au sein d'un élément barre bi-phasique : la E-FEM et la méthode des Modes Incompatibles seront à nouveau les outils numériques utilisés. La partie cinq expliquera, de façon brève, la méthode de résolution du problème Éléments Finis global à résoudre : les notions de Quasi-Newton et BFGS seront évoquées. Enfin, la dernière partie présentera des validations numériques de l'algorithme local.

2.1 Revue bibliographique des limiteurs de localisation

La bibliographie concernant les méthodes palliant la dépendance au maillage est très vaste, mais il est possible de classer les différentes approches en trois groupes de méthodes :

- 1- les méthodes qui s'inscrivent dans le cadre standard de la théorie locale de la mécanique des milieux continus. Le principe de ces méthodes est de changer les paramètres des modèles numériques éléments finis de sorte à assurer une énergie dissipée indépendante du maillage choisi. Dans ce cas, une longueur caractéristique dans laquelle se concentrent les déformations inélastiques est introduite dans les éléments. Cette longueur permet de régulariser les équations du modèle continu. Parmi ces méthodes et pour les matériaux quasi-fragiles, notons celle de [Hillerborg et al., 1976] pour laquelle le module d'adoucissement du modèle est rendu dépendant de la taille des éléments. Nous remarquons également la méthode de régularisation viscoplastique introduite par [Needleman, 1988]. Cette méthode part du constat que l'ajout d'un paramètre de viscosité permet d'obtenir une longueur caractéristique qui régularise le problème. Parmi ces modèles de régularisation viscoplastique sont présents les modèles à effet retard [Allix and Deü, 1997] où le paramètre de viscosité est directement introduit dans la loi d'évolution (pour de l'endommagement).
- 2- les méthodes qui nécessitent l'abandon de la théorie locale de la mécanique des milieux continus en faveur de la théorie non-locale de la plasticité [Bažant and Lin, 1988] ou de l'endommagement [Bažant and Pijaudier-Cabot, 1988]. Le principe est de calculer la contrainte en un point en prenant en compte toutes les déformations dans un voisinage de ce point défini à partir d'une longueur caractéristique. Cette dernière permet de s'assurer que la dissipation calculée par un modèle éléments finis reste indépendante du maillage. En revanche, elle doit être choisie supérieure à la taille des éléments, ce qui impose de devoir faire communiquer les éléments entre eux dans le voisinage choisi. Un autre défaut inhérent à ces méthodes est lié au manque de justification physique du choix de la longueur caractéristique, et notamment à son incapacité à s'adapter à l'hétérogénéité d'un champ de contraintes et à distinguer une dissipation volumique d'une dissipation surfacique.

Deux autres méthodes, qualifiées de non-locales, existent également. Il s'agit, premièrement, des modèles à gradient comme la plasticité à gradient [Coleman and Hodgdon, 1985], [Muhlhaus and Aifantis, 1991] et [Meftah and Reynouard, 1998] ou l'endommagement à gradient [Peerlings et al., 2000]. La régularisation du problème est assurée par l'ajout, dans les équations du modèle, d'un gradient des variables internes. Deux catégories peuvent être distinguées parmi ces modèles : les modèles à gradient explicite et les modèles à gradient implicite. Pour la

première catégorie, il s'agit d'introduire directement le gradient de certaines variables internes (par exemple de la variable d'écroutissage), dépendant d'une longueur caractéristique, dans les équations constitutives du modèle et dans les lois d'évolution. Pour la seconde catégorie, il s'agit non plus d'introduire directement le gradient des variables internes dans les équations mais de définir, à partir des variables locales, des variables non-locales solutions d'une équation différentielle du second ordre dépendante d'une longueur caractéristique. La régularisation des équations est ainsi assurée par l'introduction de ces longueurs caractéristiques. La seconde méthode s'appuie sur le travail des frères Cosserat [Cosserat and Cosserat, 1909]. L'idée est d'introduire, en chaque point matériel, des degrés de liberté de rotation supposés indépendants des déplacements. La description du comportement de tels matériaux nécessite l'introduction d'un module de flexion par l'intermédiaire duquel une longueur caractéristique est naturellement introduite dans le milieu, longueur qui permet de régulariser le problème et qui correspond à la taille des grains. Le degré de liberté en rotation permet alors de décrire les mouvements de rotation des grains dans la bande de localisation. Ces modèles, du fait de leurs mécanismes sous-jacents (rotation des grains), ne sont pas adaptés aux matériaux quasi-fragiles mais seulement à ceux élasto-plastiques ou granulaires.

- 3- les méthodes dont le but est d'enrichir le cadre standard de la théorie locale de la mécanique des milieux continus en introduisant des discontinuités fortes [Simo et al., 1993]. Cette méthode a été retenue dans cette thèse, les points-clés seront ainsi présentés dans la première partie de ce chapitre.

2.2 Modèles à discontinuité forte

Le principe des modèles à discontinuité forte s'inscrit dans le cadre des idées développées pour les modèles à discontinuité faible. Par définition, une discontinuité forte correspond à une bande de mesure finie (discontinuité faible) remplacée par une ligne (en deux dimensions) ou une surface (en trois dimensions) au travers de laquelle le déplacement est discontinu. La régularisation des équations est assurée par l'introduction d'une longueur caractéristique indépendante de la taille des éléments puisque nulle : toute l'énergie dissipée dans la bande de localisation est en effet concentrée sur une ligne ou une surface de mesure nulle dans l'espace dans lequel nous travaillons. Le passage d'une discontinuité faible à une discontinuité forte peut se faire en faisant tendre graduellement la largeur de bande vers 0, cela est illustré dans [Oliver et al., 2002].

Les premiers travaux sur les discontinuités fortes sont dus à [Dvorkin et al., 1990], [Dvorkin and Assanelli, 1991]. Ces derniers utilisent le principe des travaux virtuels avec un terme supplémentaire représentant un travail dû à l'ouverture de fissure. Des travaux semblables pour des éléments finis de type Q4 sont présents dans [Klisinski et al., 1991] et de type CST dans [Olofsson et al., 1994]. Tous ces travaux ne sont pas fondés sur des principes variationnels mais plutôt sur des considérations physiques. Un exemple de principe variationnel prenant en compte une discontinuité forte peut être trouvé dans [Lofti and Shing, 1995]. Le principe variationnel retenu est celui de Hu-Washizu avec un terme ajouté représentant le travail dû à l'ouverture de fissure.

Considérons un domaine Ω coupé par une surface de discontinuité Γ (Fig. 2.1). Le

domaine peut être décomposé en deux sous-domaines Ω^- et Ω^+ situés de chaque côté de la discontinuité Γ .

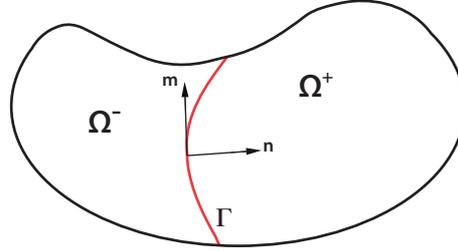


FIG. 2.1 – Domaine Ω coupé par une surface de discontinuité Γ

Le champ de déplacements s'écrit alors :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \mathcal{H}_\Gamma(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

où $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ est la partie régulière du champ de déplacements et $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ est une fonction continue sur Ω . La discontinuité de (2.1) est obtenue par l'intermédiaire du saut de la fonction Heaviside $\mathcal{H}_\Gamma(\mathbf{x})$ au travers de Γ . La fonction Heaviside $\mathcal{H}_\Gamma(\mathbf{x})$ est telle que :

$$\mathcal{H}_\Gamma(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega^- \end{cases}, \quad (2.2)$$

Le champ de déformations se décompose ainsi en une partie régulière $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x})$ et une partie non bornée (présence de la fonction Dirac δ_Γ) :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) + \delta_\Gamma(\mathbf{x})(\bar{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n})^s \quad (2.3)$$

Le point-clef du modèle, du fait de la condition de continuité du vecteur traction au niveau de la ligne ou de la surface de discontinuité Γ

$$\boldsymbol{\sigma}_\Gamma \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \mathbf{n} = -\boldsymbol{\sigma}^- \cdot \mathbf{n}, \quad (2.4)$$

est qu'à la fois le champ de contraintes et le taux de champ de contraintes au niveau de Γ doivent rester bornés même quand le régime de discontinuité forte est activé, c'est-à-dire quand le champ de déformations n'est plus borné (2.3). Il a été montré dans [Simo et al., 1993] et [Oliver, 1996] que pour vérifier cette condition, il suffit, dans un modèle continu classique (plasticité, endommagement,...), que la fonction Dirac soit régularisée et que le module d'adoucissement H soit réécrit en termes de distributions puis régularisé tel que $H = k\bar{H}$ où \bar{H} est considérée comme une propriété matérielle et k est le paramètre de régularisation (en pratique k peut être aussi petit que la précision de la machine). De plus, il a été montré dans [Oliver, 2000] et [Brancherie, 2003] que sous de telles conditions, un modèle continu classique équipé d'une discontinuité forte induit un modèle discret complet (définition d'une énergie libre, variables internes, lois d'évolution, charge/décharge et modules d'adoucissement ou d'écrouissage) sur la discontinuité. De ce fait, deux options peuvent être envisagées pour l'implantation numérique :

- a : *une implantation numérique continue* : en utilisant une régularisation de la fonction Dirac et les relations de comportement contraintes–déformations standard sur tout le domaine Ω : la compatibilité des modèles continus classiques avec un champ de déformations singulier est retenue ; c’est la procédure adoptée dans la Continuum Strong Discontinuity Approach (CSDA) [Oliver et al., 2002]
- b : *une implantation numérique discrète* : en utilisant une loi discrète “ vecteur traction–ouverture de fissure ” au niveau de Γ et les relations de comportement contraintes–déformations standard sur $\Omega \setminus \Gamma$: la compatibilité des modèles continus classiques avec un champ de déformations singulier n’est plus retenue et la surface de discontinuité est vue comme une interface cohésive sur laquelle une énergie est dissipée. Cette procédure s’appelle la Discrete Strong Discontinuity Approach (DSDA) [Armero and Garikipati, 1996], [Wells and Sluys, 2001], [Dias-da-Costa et al., 2009] ou encore [Benkemoun et al., 2010]. C’est dans le cadre de cette approche que nous avons choisi de travailler.

C’est essentiellement dans l’écriture de l’introduction de la discontinuité que les approches continues et discrètes diffèrent. Pour la première, l’introduction de la discontinuité découle directement des lois de comportement écrites pour le matériau hors discontinuité, avec comme critère d’introduction la singularité du tenseur accoustique [Oliver, 1996] ; pour la seconde, l’introduction de la discontinuité découle de considérations physiques (quels phénomènes souhaitons-nous modéliser ?), de résultats d’observations expérimentales (quels modes de rupture sont prédominants pour tels matériaux ?) avec comme critère d’introduction une fonction seuil [Wells and Sluys, 2001].

Quoi qu’il en soit, l’introduction d’une discontinuité forte dans les éléments finis n’est pas compatible avec la construction classique des éléments finis qui n’autorise pas de discontinuités. De ce fait, une approche numérique particulière doit être considérée. Il apparaît alors naturel de continuer à utiliser la E-FEM et la méthode des Modes Incompatibles du chapitre un qui se prêtent parfaitement à l’introduction de discontinuités au sein d’un élément fini. Ainsi après avoir présenté le modèle discret sur la discontinuité dans la partie deux, nous verrons quelle fonction d’enrichissement a été retenue pour la discontinuité forte et comment se réécrit le problème pour un élément barre bi-phasique avec fissuration (partie trois). La partie quatre s’attachera à présenter, de façon générale, la méthode de résolution du problème global éléments finis. Enfin, la partie cinq sera l’occasion de démontrer les capacités du modèle au travers de validations.

2.3 Modèle discret sur la discontinuité

Ce modèle discret est issu des travaux de [Oliver, 2000] et [Brancherie, 2003]. Les auteurs ont montré que le modèle discret sur la discontinuité pouvait être construit de la même façon qu’un modèle continu classique, à savoir par un cadre thermodynamique classique (énergie libre, variables internes, lois d’évolution, conditions de charge/décharge et modules d’adoucissement ou d’écrouissage), les deux modèles étant reliés par les conditions de compatibilité du modèle continu classique avec un champ de déformations singulier. Pour rester uniforme en notations, les quantités sur la discontinuité seront notées avec une double barre. Nous rappelons seulement les points-clés du cadre thermodynamique dans lequel le modèle discret sur la discontinuité est écrit. Les variables du modèle se décomposent

en variables d'état $(\bar{\alpha}, \bar{\xi})$ et en variables associées (t_Γ, \bar{q}) [Lemaitre and Chaboche, 2004]. $(\bar{\alpha}, \bar{\xi})$ sont les variables d'état pilotant respectivement l'ouverture de fissure et l'écroutissement. (t_Γ, \bar{q}) sont respectivement le vecteur traction sur la discontinuité et la fonction d'écroutissement.

Nous définissons :

- une énergie libre de Helmholtz associée à la discontinuité :

$$\bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi}) \quad (2.5)$$

- une fonction seuil :

$$\bar{\Phi}(t_\Gamma, \bar{q}) \leq 0 \quad (2.6)$$

- une dissipation sur la discontinuité :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= t_\Gamma \cdot \dot{\bar{\alpha}} - \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial t} \\ &= t_\Gamma \cdot \dot{\bar{\alpha}} - \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\alpha}} \cdot \dot{\bar{\alpha}} - \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}} \cdot \dot{\bar{\xi}} \\ &= \left(t_\Gamma - \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\alpha}} \right) \cdot \dot{\bar{\alpha}} - \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}} \cdot \dot{\bar{\xi}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Comme pour un modèle continu classique, deux cas sont à traiter :

- un processus élastique où la variable $\bar{\xi}$ n'évolue pas :

$$\dot{\bar{\xi}} = 0 \quad , \quad \bar{D} = 0 \quad , \quad \bar{\Phi}(t_\Gamma, \bar{q}) < 0 \quad (2.8)$$

et les équations d'état s'écrivent :

$$t_\Gamma = \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\alpha}} \quad , \quad \bar{q} = - \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}} \quad (2.9)$$

- un processus inélastique :

$$\dot{\bar{\xi}} \neq 0 \quad , \quad \bar{D} > 0 \quad , \quad \bar{\Phi}(t_\Gamma, \bar{q}) = 0 \quad (2.10)$$

En supposant que la première équation d'état de (2.9) reste valable pour un processus inélastique, (2.7) se réécrit sous la forme :

$$\bar{D} = \bar{q} \cdot \dot{\bar{\xi}} \quad (2.11)$$

Afin d'obtenir l'évolution de la variable $\bar{\xi}$, le principe du maximum de dissipation [Lubliner, 1990] va être exploité; un problème de minimisation sous contraintes est alors obtenu et il est résolu par l'introduction d'une fonctionnelle de Lagrange et d'un multiplicateur de Lagrange $\dot{\bar{\gamma}}$. Les conditions de Kuhn-Tucker donnent alors l'équation d'évolution de $\bar{\xi}$:

$$\dot{\bar{\xi}} = \dot{\bar{\gamma}} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{q}} \quad (2.12)$$

et les conditions de charge/décharge

$$\dot{\bar{\gamma}} \geq 0 \quad , \quad \bar{\Phi}(t_\Gamma, \bar{q}) \leq 0 \quad , \quad \dot{\bar{\gamma}} \bar{\Phi} = 0 \quad (2.13)$$

L'expression du multiplicateur de Lagrange est déterminée par la condition de consistance $\dot{\bar{\gamma}} \bar{\Phi} = 0$. En effet, puisque $\bar{\Phi}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Phi}} &= \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{q}} \dot{\bar{q}} \\ &= \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{q}} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi} \partial \bar{\alpha}} \dot{\bar{\alpha}} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}^2} \dot{\bar{\xi}} \right) \\ &= \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{q}} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi} \partial \bar{\alpha}} \dot{\bar{\alpha}} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}^2} \dot{\bar{\gamma}} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{q}} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

en injectant (2.14) dans la condition de consistance, il vient :

$$\dot{\bar{\gamma}} = - \frac{\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{q}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi} \partial \bar{\alpha}} \right) \dot{\bar{\alpha}}}{\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{q}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}^2} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{q}}} \quad (2.15)$$

Finalement, en dérivant la première équation d'état de (2.9) par rapport au temps, l'équation d'évolution du vecteur traction sur la discontinuité peut être obtenue, dans le cas inélastique, sous la forme :

$$\dot{t}_\Gamma = \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\alpha}^2} \dot{\bar{\alpha}} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\alpha} \partial \bar{\xi}} \dot{\bar{\xi}} \quad (2.16)$$

ou encore, en utilisant (2.12) et (2.15)

$$\dot{t}_\Gamma = \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\alpha}^2} \dot{\bar{\alpha}} - \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\alpha} \partial \bar{\xi}} \frac{\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{q}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi} \partial \bar{\alpha}} \right) \dot{\bar{\alpha}}}{\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{q}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}^2} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{q}}} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{q}} \quad (2.17)$$

Au final, les équations d'évolution de la traction s'écrivent sous la forme :

$$\dot{t}_\Gamma = \begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\alpha}^2} \dot{\bar{\alpha}} & \dot{\bar{\gamma}} = 0 \\ \left[\frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\alpha}^2} - \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\alpha} \partial \bar{\xi}} \frac{\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{q}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi} \partial \bar{\alpha}} \right)}{\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{q}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\bar{\alpha}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}^2} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{q}}} \right] \dot{\bar{\alpha}} & \dot{\bar{\gamma}} > 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Nous voyons donc finalement que le modèle sur la discontinuité se construit de la même façon qu'un modèle continu classique.

2.4 Application de la méthode des Modes Incompatibles à un élément fini bi-phasique quasi-fragile

Comme nous l'avons dit en introduction, il est possible de s'appuyer sur la E-FEM et la méthode des Modes Incompatibles présentées au chapitre un pour introduire une discontinuité forte dans un élément, et ce pour modéliser la fissuration au sein de ce dernier. Nous rappelons tout d'abord le problème éléments finis à résoudre, obtenu par la méthode des Modes Incompatibles dans la partie trois du chapitre un :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] &= \mathbf{0} & (2.19a) \\ \int_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{a}) d\Omega &= \mathbf{0} \quad \forall e \in [1, n_{elm}] & (2.19b) \end{aligned}$$

où

$$\mathbf{f}_{int}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{a}) d\Omega$$

Au chapitre un, cette méthode avait été employée pour introduire une discontinuité faible afin de prendre en compte deux phases au sein d'un élément. Le champ de déformations réelles avait été enrichi par $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_1 = G_1^{(1/2)}[[\boldsymbol{\epsilon}]]$ et se réécrivait alors $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\partial}\mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_1$ ou encore $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{(1/2)}[[\boldsymbol{\epsilon}]]$ où $G_1^{(1/2)}$ était le mode incompatible.

La flexibilité de la E-FEM peut être exploitée pour rajouter une deuxième déformation améliorée $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_2$ dans le champ de déformations réelles permettant de modéliser la fissuration. Le champ de déformations réelles se réécrit dans ce cas :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\partial}\mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_1 + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_2 \quad (2.20)$$

La forme de la déformation améliorée $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_2$ est connue, elle s'écrit sous la forme (2.3) en une partie régulière et une partie non bornée. Cela permet de définir le deuxième mode incompatible G_2 qui vérifie (2.3) et la condition de moyenne nulle ; le choix adopté est celui décrit sur la figure 2.2 où le mode incompatible se décompose en une partie régulière \bar{G}_2 et une partie non régulière $\bar{\bar{G}}_2$ [Ibrahimbegovic, 2006]. Par ailleurs, une nouvelle inconnue locale apparaît, elle est notée $[[u]]$ et correspond à l'ouverture de fissure. Le champ de déformation améliorée $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_2$ s'écrit finalement $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_2 = G_2[[u]]$.

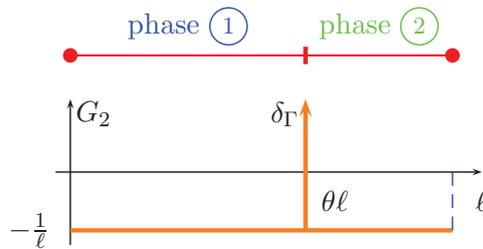


FIG. 2.2 – Mode incompatible pour un élément barre bi-phasique quasi-fragile

La fonction G_2 s'écrit

$$G_2 = \underbrace{-\frac{1}{l}}_{\bar{G}_2} + \underbrace{\delta_\Gamma}_{\tilde{G}_2} \quad (2.21)$$

Dans le cadre d'un élément barre, elle est égale à \tilde{G}_2 . La fonction G_2 permet de capturer la fissuration soit à l'interface entre la phase ① et ② si l'élément est coupé en deux, soit dans l'une des deux phases si l'élément n'est pas coupé en deux. Dans ce cas-là, θ est pris égal à 0,5. Il est rappelé que l est la longueur de la barre.

Il est finalement possible de donner une écriture plus adaptée au problème considéré : le vecteur \mathbf{G} contenant les deux modes incompatibles s'écrit :

$$\mathbf{G} = [G_1^{①/②}, G_2] \quad (2.22)$$

et le vecteur \mathbf{a} contenant les inconnues locales est de la forme :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} [[\epsilon]] \\ [[u]] \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Remarque : Nous rappelons que l'approche numérique retenue est fondée sur la Discrete Strong Discontinuity Approach ; de ce fait, les relations de comportement contraintes-déformations standard sont définies sur $\Omega \setminus \Gamma$ et seule la partie régulière de G_2 est considérée. Aucune k -régularisation est nécessaire, le champ de déformations s'écrit alors pour chaque phase :

$$\epsilon^{①} = \mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{①}[[\epsilon]] + \bar{G}_2[[u]], \quad \epsilon^{②} = \mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{②}[[\epsilon]] + \bar{G}_2[[u]] \quad (2.24)$$

Le comportement de chaque phase étant toujours élastique, les lois de comportement s'écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}^{①}(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{①}[[\epsilon]] + \bar{G}_2[[u]]) = E_1 \epsilon^{①} = E_1 (\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{①}[[\epsilon]] + \bar{G}_2[[u]]) \\ \tilde{\sigma}^{②}(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{②}[[\epsilon]] + \bar{G}_2[[u]]) = E_2 \epsilon^{②} = E_2 (\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{②}[[\epsilon]] + \bar{G}_2[[u]]) \end{cases} \quad (2.25)$$

Pour plus de clarté, nous écrirons

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}^{①}(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{①}[[\epsilon]] + \bar{G}_2[[u]]) = \tilde{\sigma}^{①}(\mathbf{d}, [[\epsilon]], [[u]]) \\ \tilde{\sigma}^{②}(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{②}[[\epsilon]] + \bar{G}_2[[u]]) = \tilde{\sigma}^{②}(\mathbf{d}, [[\epsilon]], [[u]]) \end{cases} \quad (2.26)$$

Le système (2.19) se réécrit alors, pour un élément fini barre bi-phasique quasi-fragile :

$$\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e(\mathbf{d}, [[\epsilon]], [[u]]) - \mathbf{f}_{ext}^e] = \mathbf{0} \quad (2.27a)$$

$$\int_{\Omega_e} \tilde{G}_1^{①/②} \tilde{\sigma}^{①/②}(\mathbf{d}, [[\epsilon]], [[u]]) d\Omega = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \quad (2.27b)$$

$$\int_{\Omega_e} \tilde{G}_2 \tilde{\sigma}^{①/②}(\mathbf{d}, [[\epsilon]], [[u]]) d\Omega = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \quad (2.27c)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e^{int} &= \int_{\Omega_{1,e}} \mathbf{B}^T E_1 (\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{①}[[\epsilon]] + \bar{G}_2[[u]]) d\Omega_1 \\ &+ \int_{\Omega_{2,e}} \mathbf{B}^T E_2 (\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{②}[[\epsilon]] + \bar{G}_2[[u]]) d\Omega_2 \end{aligned}$$

En injectant $\tilde{G}_1^{\textcircled{1}/\textcircled{2}}$, $G_1^{\textcircled{1}/\textcircled{2}}$, \tilde{G}_2 et G_2 dans (2.27), les différents équilibres peuvent être explicités.

L'équilibre (2.27b) s'écrit, en reprenant le développement mené au chapitre un dans la partie 1.1.4 :

$$h_{[[\epsilon]]} = -\tilde{\sigma}^{\textcircled{1}}(\mathbf{d}, [[\epsilon]], [[u]]) + \tilde{\sigma}^{\textcircled{2}}(\mathbf{d}, [[\epsilon]], [[u]]) = 0 \quad (2.28)$$

avec cette fois-ci une dépendance par rapport à $[[u]]$ de surcroît. Pour l'équilibre (2.27c), en séparant \tilde{G}_2 entre sa partie régulière et sa partie non bornée, il vient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \tilde{G}_2 \tilde{\sigma}^{\textcircled{1}/\textcircled{2}}(\mathbf{d}, [[\epsilon]], [[u]]) \, d\Omega + \int_{\Omega_e} \tilde{\tilde{G}}_2 \tilde{\sigma}^{\textcircled{1}/\textcircled{2}}(\mathbf{d}, [[\epsilon]], [[u]]) \, d\Omega = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \\ \Leftrightarrow & \int_{\Omega_e} -\frac{1}{\ell} \tilde{\sigma}^{\textcircled{1}/\textcircled{2}}(\mathbf{d}, [[\epsilon]], [[u]]) \, d\Omega + \int_{\Omega_e} \delta_\Gamma \tilde{\sigma}^{\textcircled{1}/\textcircled{2}}(\mathbf{d}, [[\epsilon]], [[u]]) \, d\Omega = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme la fonction Dirac satisfait

$$\int_{\Omega} \delta_\Gamma \phi_0 \, d\Omega = \int_{\Gamma} \phi_0 \, d\Gamma \quad \forall \phi_0 \in C_0^\infty(\Omega),$$

cela donne :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} -\frac{1}{\ell} \tilde{\sigma}^{\textcircled{1}/\textcircled{2}}(\mathbf{d}, [[\epsilon]], [[u]]) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \tilde{\sigma}^{\textcircled{1}/\textcircled{2}}(\mathbf{d}, [[\epsilon]], [[u]])|_{\Gamma} \, d\Gamma = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \\ \Leftrightarrow & \int_{\Omega_e} -\frac{1}{\ell} \tilde{\sigma}^{\textcircled{1}/\textcircled{2}}(\mathbf{d}, [[\epsilon]], [[u]]) \, d\Omega + \int_{\Gamma} t_\Gamma \, d\Gamma = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \end{aligned}$$

Ensuite, en se rappelant que le domaine Ω est décomposé sous la forme $\Omega_1 \cup \Omega_2$ où Ω_1 correspond à la phase $\textcircled{1}$ et Ω_2 à la phase $\textcircled{2}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{1,e}} -\frac{1}{\ell} \tilde{\sigma}^{\textcircled{1}}(\mathbf{d}, [[\epsilon]], [[u]]) \, d\Omega_1 + \int_{\Omega_{2,e}} -\frac{1}{\ell} \tilde{\sigma}^{\textcircled{2}}(\mathbf{d}, [[\epsilon]], [[u]]) \, d\Omega_2 \\ & + \int_{\Gamma} t_\Gamma \, d\Gamma = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \\ \Leftrightarrow & \int_{\Omega_{1,e}} -\frac{1}{\ell} E_1 (\mathbf{B} \mathbf{d} + G_1^{\textcircled{1}}[[\epsilon]] + \bar{G}_2[[u]]) \, d\Omega_1 + \int_{\Omega_{2,e}} -\frac{1}{\ell} E_2 (\mathbf{B} \mathbf{d} + G_1^{\textcircled{2}}[[\epsilon]] + \bar{G}_2[[u]]) \, d\Omega_2 \\ & + \int_{\Gamma} t_\Gamma \, d\Gamma = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \end{aligned}$$

Puis, en intégrant sur sur les domaines $[0, \theta\ell]$ et $[\theta\ell, \ell]$ avec A la section de la barre, il vient :

$$\begin{aligned} & -E_1 (\mathbf{B} \mathbf{d} + G_1^{\textcircled{1}}[[\epsilon]] + \bar{G}_2[[u]]) A \theta - E_2 (\mathbf{B} \mathbf{d} + G_1^{\textcircled{2}}[[\epsilon]] + \bar{G}_2[[u]]) A (1 - \theta) \\ & + \int_{\Gamma} t_\Gamma \, d\Gamma = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \end{aligned}$$

Finalement, en tenant compte du fait que la contrainte est constante dans un élément barre, nous avons :

$$\begin{aligned} & -E_1 (\mathbf{B} \mathbf{d} + G_1^{\textcircled{1}/\textcircled{2}}[[\epsilon]] + \bar{G}_2[[u]]) A \theta - E_2 (\mathbf{B} \mathbf{d} + G_1^{\textcircled{1}/\textcircled{2}}[[\epsilon]] + \bar{G}_2[[u]]) A (1 - \theta) \\ & + t_\Gamma A = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} & -E_1 (\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{1}/\textcircled{2}}[|\epsilon|] + \bar{G}_2[|u|])\theta - E_2 (\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{1}/\textcircled{2}}[|\epsilon|] + \bar{G}_2[|u|])(1 - \theta) \\ & + t_\Gamma = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \end{aligned}$$

Ce qui donne, en explicitant les contraintes dans chaque phase

$$-\theta\tilde{\sigma}^{\textcircled{1}}(\mathbf{d}, [|\epsilon|], [|u|]) - (1 - \theta)\tilde{\sigma}^{\textcircled{2}}(\mathbf{d}, [|\epsilon|], [|u|]) + t_\Gamma = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}]$$

Au final, le système (2.27) s'écrit

$\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e(\mathbf{d}, [\epsilon], [u]) - \mathbf{f}_{ext}^e] = \mathbf{0} \quad (2.29a)$ $h_{[\epsilon]} = -\tilde{\sigma}^{\textcircled{1}}(\mathbf{d}, [\epsilon], [u]) + \tilde{\sigma}^{\textcircled{2}}(\mathbf{d}, [\epsilon], [u]) = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \quad (2.29b)$ $h_{[u]} = -\theta\tilde{\sigma}^{\textcircled{1}}(\mathbf{d}, [\epsilon], [u]) - (1 - \theta)\tilde{\sigma}^{\textcircled{2}}(\mathbf{d}, [\epsilon], [u]) + t_\Gamma = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \quad (2.29c)$ <p>où</p> $\begin{aligned} \mathbf{f}_{int}^e &= \int_{\Omega_{1,e}} \mathbf{B}^T E_1 (\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{1}}[\epsilon] + \bar{G}_2[u]) d\Omega_1 \\ &+ \int_{\Omega_{2,e}} \mathbf{B}^T E_2 (\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{2}}[\epsilon] + \bar{G}_2[u]) d\Omega_2 \end{aligned}$
--

L'équilibre (2.29c) représente l'équation de continuité du vecteur traction au niveau de la discontinuité. Cette équation est active que lorsque la surface de discontinuité est introduite. Il faut donc une condition qui permette d'introduire cette surface de discontinuité. Notre choix s'est porté, comme nous l'avons précisé précédemment dans le cadre de l'approche discrète, sur un critère d'introduction de la surface de discontinuité en accord avec la physique du problème. Nous souhaitons ici reproduire le comportement des matériaux quasi-fragiles pour lesquels le mode de rupture privilégié est le mode I. Le critère d'introduction de la discontinuité est ainsi fondé sur la valeur de la contrainte principale maximale (évidemment, pour un élément barre, la contrainte est toujours principale et maximale dans la direction de la barre). Lorsque celle-ci atteint une valeur limite notée σ_u , la surface de discontinuité est introduite. L'introduction de la surface de discontinuité n'est ici pas dictée par la singularité d'un tenseur acoustique mais par une réalité physique correspondante, dans les matériaux quasi-fragiles, à l'apparition de macro-fissures issues de la coalescence de micro-fissures. Étant donné le choix d'introduction de la surface de discontinuité, il est naturel de construire une fonction seuil permettant de gérer le comportement en mode I.

2.4.1 Fonction seuil

La fonction seuil est définie telle que :

$$\bar{\Phi}(t_\Gamma, \bar{q}) = t_\Gamma - (\sigma_u - \bar{q}) \quad (2.30)$$

Cette fonction seuil devient active dès lors que la surface de discontinuité est introduite. En effet, à $t = t_{loc}$, instant de l'introduction de la discontinuité, $\bar{q} = 0$ et $t_\Gamma =$

$\theta \tilde{\sigma}^{\textcircled{1}}(\mathbf{d}, [|\epsilon|], [|u|]) + (1 - \theta) \tilde{\sigma}^{\textcircled{2}}(\mathbf{d}, [|\epsilon|], [|u|]) = \sigma_u$ ce qui donne $\bar{\Phi}(t_\Gamma, \bar{q}) = 0$. Pour la modélisation des matériaux quasi-fragiles comme le béton, à partir de résultats expérimentaux, un adoucissement exponentiel est choisi tel que :

$$\bar{q} = \sigma_u (1 - \exp(-\frac{\sigma_u}{G_f} \bar{\xi})) \quad (2.31)$$

Cela permet ainsi d'introduire la contrainte ultime avant rupture en traction σ_u et l'énergie de fissuration G_f définie comme l'aire sous la courbe "vecteur traction-ouverture de fissure". Par ailleurs, il est rappelé que le mode de rupture d'une barre est uniquement le mode I. Il est important de noter que l'interface sous-tendant la discontinuité est une interface rigide-plastique. Aucune déformation élastique n'a été introduite sur Γ . Cela implique alors que le saut qui se développe lors du régime de discontinuité forte est totalement irréversible sous décharge [Brancherie, 2003]. La figure 2.3 donne une représentation du comportement sur la discontinuité avec une charge/décharge.

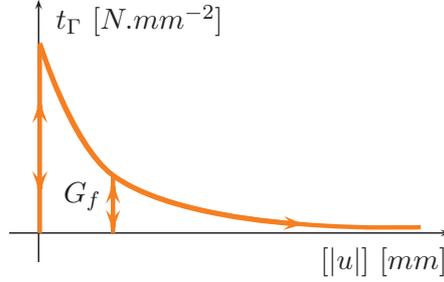


FIG. 2.3 – Comportement adoucissant rigide-plastique

Nous allons maintenant linéariser (2.29) par rapport à \mathbf{d} , $[|\epsilon|]$ et $[|u|]$ afin d'obtenir le système matriciel à résoudre .

2.4.2 Linéarisation du problème (2.29)

En suivant l'idée de [Ibrahimbegovic et al., 1998], $\bar{\Phi}(t_\Gamma, \bar{q})$ est incorporée dans (2.29), il vient alors :

$$\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e(\mathbf{d}, [|\epsilon|], [|u|]) - \mathbf{f}_{ext}^e] = \mathbf{0} \quad (2.32a)$$

$$-\tilde{\sigma}^{\textcircled{1}}(\mathbf{d}, [|\epsilon|], [|u|]) + \tilde{\sigma}^{\textcircled{2}}(\mathbf{d}, [|\epsilon|], [|u|]) = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \quad (2.32b)$$

$$-\theta \tilde{\sigma}^{\textcircled{1}}(\mathbf{d}, [|\epsilon|], [|u|]) - (1 - \theta) \tilde{\sigma}^{\textcircled{2}}(\mathbf{d}, [|\epsilon|], [|u|]) + t_\Gamma = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \quad (2.32c)$$

$$\bar{\Phi}(t_\Gamma, [|u|]) = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \quad (2.32d)$$

Nous obtenons ainsi un système de quatre équations à quatre inconnues \mathbf{d} , $[|\epsilon|]$, $[|u|]$ et t_Γ . Cependant, (2.32c) fournit directement et explicitement la valeur de t_Γ en fonction de \mathbf{d} , $[|\epsilon|]$ et $[|u|]$; cet équilibre étant toujours vérifié, il peut donc être retiré du système. Finalement, un système de trois équations à trois inconnues \mathbf{d} , $[|\epsilon|]$ et $[|u|]$ est obtenu :

$$\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e(\mathbf{d}, [|\epsilon|], [|u|]) - \mathbf{f}_{ext}^e] = \mathbf{0} \quad (2.33a)$$

$$-\tilde{\sigma}^{\textcircled{1}}(\mathbf{d}, [|\epsilon|], [|u|]) + \tilde{\sigma}^{\textcircled{2}}(\mathbf{d}, [|\epsilon|], [|u|]) = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \quad (2.33b)$$

$$\bar{\Phi}(t_\Gamma, [|u|]) = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \quad (2.33c)$$

À chaque pas de temps n , il est nécessaire d'itérer k fois pour arriver à la convergence du problème 2.33. Soit X une équation d'équilibre dépendant des variables Ξ_i , la linéarisation de X par rapport à Ξ_i s'écrit :

$$\mathcal{L}(X) = X \Big|_{n+1}^{(k)} + \sum_i \frac{\partial X}{\partial \Xi_i} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \Xi_i \Big|_{n+1}^{(k+1)} = 0 \quad (2.34)$$

En suivant (2.34), (2.33) peut alors être linéarisé par rapport à \mathbf{d} , $[\epsilon]$ et $[u]$. La linéarisation de (2.33a) donne :

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{e=1}^{nelm} \left[\int_{\Omega_{1,e}} \mathbf{B}^T E_1 \frac{\partial(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{1}}[\epsilon] + \bar{G}_2[u])}{\partial \mathbf{d}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_1 \right. \\ & + \int_{\Omega_{2,e}} \mathbf{B}^T E_2 \frac{\partial(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{2}}[\epsilon] + \bar{G}_2[u])}{\partial \mathbf{d}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_2 \\ & + \int_{\Omega_{1,e}} \mathbf{B}^T E_1 \frac{\partial(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{1}}[\epsilon] + \bar{G}_2[u])}{\partial [\epsilon]} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [\epsilon]_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_1 \\ & + \int_{\Omega_{2,e}} \mathbf{B}^T E_2 \frac{\partial(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{2}}[\epsilon] + \bar{G}_2[u])}{\partial [\epsilon]} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [\epsilon]_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_2 \\ & + \int_{\Omega_{1,e}} \mathbf{B}^T E_1 \frac{\partial(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{1}}[\epsilon] + \bar{G}_2[u])}{\partial [u]} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [u]_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_1 \\ & + \int_{\Omega_{2,e}} \mathbf{B}^T E_2 \frac{\partial(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{2}}[\epsilon] + \bar{G}_2[u])}{\partial [u]} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [u]_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_2 \Big] \\ & = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \Big|_{n+1}^{(k)}, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit, après dérivation par rapport à \mathbf{d} , $[\epsilon]$ et $[u]$,

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{e=1}^{nelm} \left[\int_{\Omega_{1,e}} \mathbf{B}^T E_1 \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_1 + \int_{\Omega_{2,e}} \mathbf{B}^T E_2 \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_2 \right. \\ & + \int_{\Omega_{1,e}} \mathbf{B}^T E_1 G_1^{\textcircled{1}} \Delta [\epsilon]_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_1 + \int_{\Omega_{2,e}} \mathbf{B}^T E_2 G_1^{\textcircled{2}} \Delta [\epsilon]_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_2 \\ & + \int_{\Omega_{1,e}} \mathbf{B}^T E_1 \bar{G}_2 \Delta [u]_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_1 + \int_{\Omega_{2,e}} \mathbf{B}^T E_2 \bar{G}_2 \Delta [u]_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_2 \Big] \\ & = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \Big|_{n+1}^{(k)} \end{aligned} \quad (2.35)$$

(2.35) se simplifie en explicitant $G_1^{\textcircled{1}}$, $G_1^{\textcircled{2}}$, \bar{G}_2 et en intégrant sur les domaines $[0, \theta\ell]$ et $[\theta\ell, \ell]$:

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{e=1}^{nelm} \left[\mathbf{B}^T E_1 \mathbf{B} A \theta \ell \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} + \mathbf{B}^T E_2 \mathbf{B} A (1 - \theta) \ell \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} \right. \\ & - \mathbf{B}^T E_1 A \Delta [\epsilon]_{n+1}^{(k+1)} + \mathbf{B}^T E_2 A \Delta [\epsilon]_{n+1}^{(k+1)} \\ & - \mathbf{B}^T E_1 A \theta \Delta [u]_{n+1}^{(k+1)} - \mathbf{B}^T E_2 A (1 - \theta) \Delta [u]_{n+1}^{(k+1)} \Big] \\ & = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \Big|_{n+1}^{(k)} \end{aligned} \quad (2.36)$$

La linéarisation de (2.33b) donne :

$$\begin{aligned}
 & - E_1 \frac{\partial(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{1}}[|\epsilon|] + \bar{G}_2[|u|])}{\partial \mathbf{d}} \Big|_{n+1}^{(k)} \mathbb{A} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} \\
 & + E_2 \frac{\partial(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{2}}[|\epsilon|] + \bar{G}_2[|u|])}{\partial \mathbf{d}} \Big|_{n+1}^{(k)} \mathbb{A} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} \\
 & - E_1 \frac{\partial(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{1}}[|\epsilon|] + \bar{G}_2[|u|])}{\partial [|\epsilon|]} \Big|_{n+1}^{(k)} \mathbb{A} \Delta [|\epsilon|]_{n+1}^{(k+1)} \\
 & + E_2 \frac{\partial(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{2}}[|\epsilon|] + \bar{G}_2[|u|])}{\partial [|\epsilon|]} \Big|_{n+1}^{(k)} \mathbb{A} \Delta [|\epsilon|]_{n+1}^{(k+1)} \\
 & - E_1 \frac{\partial(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{1}}[|\epsilon|] + \bar{G}_2[|u|])}{\partial [|u|]} \Big|_{n+1}^{(k)} \mathbb{A} \Delta [|u|]_{n+1}^{(k+1)} \\
 & + E_2 \frac{\partial(\mathbf{B}\mathbf{d} + G_1^{\textcircled{2}}[|\epsilon|] + \bar{G}_2[|u|])}{\partial [|u|]} \Big|_{n+1}^{(k)} \mathbb{A} \Delta [|u|]_{n+1}^{(k+1)} = -\mathbb{A} h_{[|\epsilon|]}^{(k)},
 \end{aligned}$$

ce qui donne après dérivation par rapport à \mathbf{d} , $[|\epsilon|]$ et $[|u|]$ et simplification par \mathbb{A} :

$$\begin{aligned}
 & - E_1 \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} + E_2 \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} - E_1 G_1^{\textcircled{1}} \Delta [|\epsilon|]_{n+1}^{(k+1)} + E_2 G_1^{\textcircled{2}} \Delta [|\epsilon|]_{n+1}^{(k+1)} - E_1 \bar{G}_2 \Delta [|u|]_{n+1}^{(k+1)} \\
 & + E_2 \bar{G}_2 \Delta [|u|]_{n+1}^{(k+1)} = -h_{[|\epsilon|]}^{(k)}
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

La linéarisation de (2.33c) donne :

$$\frac{\partial \bar{\bar{\Phi}}}{\partial t_\Gamma} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta t_{\Gamma n+1}^{(k+1)} + \frac{\partial \bar{\bar{\Phi}}}{\partial \bar{q}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \bar{q}_{n+1}^{(k+1)} = -\bar{\bar{\Phi}} \Big|_{n+1}^{(k)} \tag{2.38}$$

avec pour les dérivées partielles :

$$\frac{\partial \bar{\bar{\Phi}}}{\partial t_\Gamma} = 1, \quad \frac{\partial \bar{\bar{\Phi}}}{\partial \bar{q}} = 1 \tag{2.39}$$

L'incrément Δt_Γ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \Delta t_\Gamma & = \theta \Delta \tilde{\sigma}_1 + (1 - \theta) \Delta \tilde{\sigma}_2 \\
 & = (\theta E_1 \mathbf{B} + (1 - \theta) E_2 \mathbf{B}) \Delta \mathbf{d} + (\theta E_1 G_1^{\textcircled{1}} + (1 - \theta) E_2 G_1^{\textcircled{2}}) \Delta [|\epsilon|] \\
 & \quad + (\theta E_1 \bar{G}_2 + (1 - \theta) E_2 \bar{G}_2) \Delta [|u|]
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

et l'incrément $\Delta \bar{q}$ est obtenu à partir de \bar{q} :

$$\bar{q} = -k([|u|]) \rightarrow \Delta \bar{q} = -k'([|u|]) \Delta [|u|]$$

Finalement, la linéarisation de (2.33c) est :

$$\begin{aligned}
 & (\theta E_1 \mathbf{B} + (1 - \theta) E_2 \mathbf{B}) \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} + (\theta E_1 G_1^{\textcircled{1}} + (1 - \theta) E_2 G_1^{\textcircled{2}}) \Delta [|\epsilon|]_{n+1}^{(k+1)} \\
 & + (\theta E_1 \bar{G}_2 + (1 - \theta) E_2 \bar{G}_2 - k'([|u|])) \Delta [|u|]_{n+1}^{(k+1)} = -\bar{\bar{\Phi}} \Big|_{n+1}^{(k)}
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

L'écriture de (2.36), (2.37) et (2.41) sous forme matricielle donne :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{F}^T & b & c \\ -\mathbf{H}^T & -c & e \end{pmatrix}_{n+1}^{(k)} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta[\epsilon] \\ \Delta[u] \end{pmatrix}_{n+1}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \\ -h_{[\epsilon]} \\ -\bar{\Phi} \end{pmatrix}_{n+1}^{(k)} \quad (2.42)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{B}^T E_1 \mathbf{B} A \theta \ell + \mathbf{B}^T E_2 \mathbf{B} A (1 - \theta) \ell] \\ \mathbf{F} &= \mathbf{B}^T [-E_1 + E_2] \mathbf{A} \\ \mathbf{H} &= -\mathbf{B}^T (\theta E_1 + (1 - \theta) E_2) \mathbf{A} \\ b &= -E_1 G_1^{\textcircled{1}} + E_2 G_1^{\textcircled{2}} = \frac{E_1}{\theta \ell} + \frac{E_2}{(1 - \theta) \ell} \\ c &= -E_1 G_2 + E_2 G_2 = \frac{E_1}{\ell} - \frac{E_2}{\ell} \\ e &= (\theta E_1 \bar{G}_2 + (1 - \theta) E_2 \bar{G}_2 - k'([\mathbf{u}])) = \left(-\frac{\theta E_1}{\ell} - \frac{(1 - \theta) E_2}{\ell} - k'([\mathbf{u}]) \right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

2.4.3 Procédure de résolution du problème (2.42)

Comme au chapitre un, la procédure de résolution de (2.42) se fait à deux niveaux : le niveau global qui correspond à (2.33a) et le niveau local à (2.33b) avec en plus (2.33c). Dans l'esprit de la "operator split method", $\Delta[\epsilon]^{(k+1)}$ et $\Delta[\mathbf{u}]^{(k+1)}$ sont tout d'abord calculés durant l'étape locale pour une valeur de d_{n+1} fixe, ce qui revient à résoudre localement le système en rouge dans (2.42). Une fois cette étape terminée, une condensation statique [Wilson, 1974] est réalisée sur $\Delta[\epsilon]^{(k+1)}$ et $\Delta[\mathbf{u}]^{(k+1)}$ conduisant à une équation d'équilibre global avec une matrice de rigidité modifiée $\hat{\mathbf{K}}$. L'algorithme traitant de la résolution locale du système en rouge dans (2.42) est détaillé dans Alg.2. Il est important de noter que l'équation (2.33b) est linéaire, il n'y a donc pas besoin d'itérer pour calculer $\Delta[\epsilon]^{(k+1)}$, il est calculé directement (étape 2 de Alg.2). En revanche, l'équation (2.33c) étant non-linéaire, la convergence de l'incrément $\Delta[\mathbf{u}]^{(k+1)}$ est obtenue par un algorithme de Newton local, c'est l'ensemble de l'algorithme Alg.2. Une fois que les valeurs locales $\Delta[\epsilon]^{(k+1)}$ et $\Delta[\mathbf{u}]^{(k+1)}$ ont convergé, les résidus $h_{[\epsilon]}$ et $\bar{\Phi}$ sont nuls. Le système matriciel (2.42) se réécrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{F}^T & b & c \\ -\mathbf{H}^T & -c & e \end{pmatrix}_{n+1}^{(k)} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta[\epsilon] \\ \Delta[\mathbf{u}] \end{pmatrix}_{n+1}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{n+1}^{(k)} \quad (2.44)$$

Il est désormais possible de réaliser la condensation statique. Pour cela, les deux dernières lignes du système matriciel (2.44) sont réécrites de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} b & c \\ -c & e \end{pmatrix}_{n+1}^{(k)} \begin{pmatrix} \Delta[\epsilon] \\ \Delta[\mathbf{u}] \end{pmatrix}_{n+1}^{(k+1)} = -\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^T \\ -\mathbf{H}^T \end{pmatrix}_{n+1}^{(k)}, \quad (2.45)$$

ce qui donne, en inversant le membre de gauche dans (2.45) :

$$\begin{pmatrix} \Delta[\epsilon] \\ \Delta[\mathbf{u}] \end{pmatrix}_{n+1}^{(k+1)} = -\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} \begin{pmatrix} b & c \\ -c & e \end{pmatrix}_{n+1}^{-1(k)} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^T \\ -\mathbf{H}^T \end{pmatrix}_{n+1}^{(k)} \quad (2.46)$$

Algorithm 2 Procédure locale pour un élément barre bi-phasique et quasi-fragile

```

1: while  $[\text{abs}(\frac{\bar{\Phi}^{(j)} \cdot \Delta[[u]]^{(j+1)} + h_{[[\epsilon]]}^{(j)} \cdot \Delta[[\epsilon]]^{(j+1)}}{\bar{\Phi}^{(0)} \cdot \Delta[[u]]^{(1)} + h_{[[\epsilon]]}^{(0)} \cdot \Delta[[\epsilon]]^{(1)}}) > \text{tol and } j < j_{max}]$  do
2:   discontinuité faible linéaire
3:   calcul du résidu :  $h_{[[\epsilon]]}^{(j)} = -\tilde{\sigma}^{\textcircled{1},(j)} + \tilde{\sigma}^{\textcircled{2},(j)}$ 
4:   calcul de l'incrément :  $\Delta[[\epsilon]]^{(j+1)} = -\frac{h_{[[\epsilon]]}^{(j)} + (\frac{E_1-E_2}{\ell})\Delta[[u]]^{(j+1)}}{\frac{E_1}{\theta\ell} + \frac{E_2}{(1-\theta)\ell}}$ 
5:   mise à jour de l'incrément :  $[[\epsilon]]^{(j+1)} = [[\epsilon]]^{(j)} + \Delta[[\epsilon]]^{(j+1)}$ 
6:   mise à jour de valeurs intermédiaires :  $\sigma_{int}^{\textcircled{1},(j+1)}, \sigma_{int}^{\textcircled{2},(j+1)}, \bar{\Phi}_{int}^{(j+1)}$ 
7:   if  $(j == 0 \text{ and } \bar{\Phi}_{int}^{(j+1)} \geq 0)$  then (iloc == 1) else (iloc == 0)
8:   if (iloc == 0) then
9:     break while loop
10:     $\tilde{\sigma}^{\textcircled{1},(j+1)} = \sigma_{int}^{\textcircled{1},(j+1)}, \tilde{\sigma}^{\textcircled{2},(j+1)} = \sigma_{int}^{\textcircled{2},(j+1)}$ 
11:   end if
12:   if (iloc == 1) then
13:     discontinuité forte non-linéaire
14:     calcul de l'incrément :  $\Delta[[u]]^{(j+1)} = \frac{-\bar{\Phi}_{int}^{(j+1)} + (\frac{E_1-E_2}{\ell})\Delta[[\epsilon]]^{(j+1)}}{[-\frac{\theta E_1}{\ell^e} - \frac{(1-\theta)E_2}{\ell^e}] - k'([[u]]^{(j)})}$ 
15:     mise à jour de l'incrément :  $[[u]]^{(j+1)} = [[u]]^{(j)} + \Delta[[u]]^{(j+1)}$ 
16:     mise à jour des valeurs finales :  $\tilde{\sigma}^{\textcircled{1},(j+1)}, \tilde{\sigma}^{\textcircled{2},(j+1)}, \bar{\Phi}^{(j+1)}, h_{[[\epsilon]]}^{(j+1)}$ 
17:   end if
18:    $j++$ 
19: end while

```

Par ailleurs, la première ligne du système matriciel (2.44) peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{K}_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} + \begin{pmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{pmatrix}_{n+1}^{(k)} \begin{pmatrix} \Delta[[\epsilon]] \\ \Delta[[u]] \end{pmatrix}_{n+1}^{(k+1)} = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_e^{int} - \mathbf{f}_e^{ext}]_{n+1}^{(k)} \quad (2.47)$$

En injectant (2.46) dans (2.47), il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} - \begin{pmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{pmatrix}_{n+1}^{(k)} \begin{pmatrix} b & c \\ -c & e \end{pmatrix}_{n+1}^{-1(k)} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^T \\ -\mathbf{H}^T \end{pmatrix}_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} \\ = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e]_{n+1}^{(k)} \end{aligned} \quad (2.48)$$

ou encore

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e]_{n+1}^{(k)} \quad (2.49)$$

avec

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{K}_{n+1}^{(k)} - \begin{pmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{pmatrix}_{n+1}^{(k)} \begin{pmatrix} b & c \\ -c & e \end{pmatrix}_{n+1}^{-1(k)} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^T \\ -\mathbf{H}^T \end{pmatrix}_{n+1}^{(k)}$$

Nous retrouvons alors un problème éléments finis classique à résoudre où l'incrément $\Delta \mathbf{d}^{(k+1)}$ est recherché. Ce système est semblable à celui du chapitre un à la différence près que $\hat{\mathbf{K}}$ prend maintenant en compte les termes de la linéarisation de l'équilibre (2.33b) (comme au chapitre 1) en plus des termes de la linéarisation de l'équilibre (2.33c). Quoiqu'il en soit, $\hat{\mathbf{K}}$ a la même taille que \mathbf{K} ; l'ajout d'inconnues locales ne se répercute pas au niveau global, la taille du système global à résoudre n'est pas changée.

2.5 Méthode de résolution du problème éléments finis (2.49)

De façon générale, la méthode de Newton est la plus efficace pour résoudre un problème tel que (2.49) : l'existence d'un domaine d'attraction permet d'assurer la stabilité de la convergence au fil des itérations et la convergence quadratique est vérifiée. Cependant, l'évaluation de la matrice de raideur et du résidu à chaque itération nécessite $n^2 + n$ évaluations de fonctions scalaires et utilise $O(n^3)$ opérations arithmétiques à chaque itération. Compte tenu de la taille de nos problèmes et de la puissance de calcul dont nous disposons, ces coûts de calcul sont prohibitifs. Nous avons donc choisi d'utiliser une méthode s'inscrivant dans le cadre des méthodes dites "quasi-Newton", connue sous le nom de BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno). Cette méthode permet de réduire le nombre d'opérations arithmétiques à $O(n^2)$; cependant, la convergence quadratique n'est plus assurée, il y a plutôt une convergence quasi-linéaire (entre un et deux). L'explication détaillée de la méthode BFGS ainsi que les preuves concernant la convergence et le nombre d'opérations peuvent être trouvées dans [Broyden, 1969], [Broyden, 1970], [Fletcher, 1970], [Goldfarb, 1970], [Shanno, 1970] et [Dennis JR. et al., 1977], son implantation numérique dans [Matthies and Strang, 1979]. Dans ses grandes lignes, la méthode BFGS consiste à apporter à chaque itération une correction simple à la matrice $K^{(k)}$ afin de mettre à jour la matrice $K^{(k+1)}$ de la façon suivante :

$$K^{(k+1)} = K^{(k)} + \frac{\gamma\gamma^T}{\gamma^T\delta} - \frac{(K^{(k)}\delta)(K^{(k)}\delta)^T}{\delta^T K^{(k)}\delta} \quad (2.50)$$

Cette mise à jour permet de faire hériter naturellement à la matrice $K^{(k+1)}$ le caractère symétrique et défini positif de $K^{(k)}$. Les quantités δ et γ dépendent respectivement de l'incrément de déplacement à l'itération k et de la différence des résidus entre les itérations $k+1$ et k .

Afin de chercher plus rapidement et plus prudemment la solution du système (2.49), l'algorithme quasi-Newton BFGS peut être équipé d'une méthode dite "line search". L'idée principale d'une telle méthode est la suivante : nous partons de l'hypothèse que la nouvelle valeur itérative du vecteur déplacement $\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)}$, avec l'incrément de déplacement $\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)}$ fourni par la méthode quasi-Newton, n'est pas forcément la meilleure, et qu'elle peut encore être améliorée. Pour ce faire, nous nous donnons la liberté de changer la norme de l'incrément de déplacement calculé par la méthode quasi-Newton, tout en gardant la direction. En introduisant à chaque itération k un paramètre $s^{(k)}$, une telle solution améliorée s'écrit :

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + s^{(k+1)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)}; s \in [0, 1] \quad (2.51)$$

Le paramètre s peut être calculé par la méthode de Regula-Falsi [Dahlquist and Björck, 1974]. Il est important de noter que le “line search” est activé par un critère en énergie piloté par une tolérance ; il n’est donc pas mis en œuvre à chaque itération.

Finalement, l’implantation numérique d’un algorithme quasi-Newton BFGS équipé d’une méthode “line search” peut être trouvée dans [Matthies and Strang, 1979].

Les parties trois et quatre ont été l’occasion de montrer la flexibilité de la méthode des Modes Incompatibles quant à l’ajout de champs améliorés. Cela a permis de compléter l’élément barre par la prise en compte de la fissuration, la technique utilisée étant l’ajout d’une discontinuité forte au sein de l’élément. Le cadre thermodynamique a également été discuté. Finalement, tous les ingrédients physiques (cadre thermodynamique, fonction seuil et mode de rupture) et numériques (système éléments finis à résoudre) concernant la rupture ont été introduits. La prochaine partie va être l’occasion de démontrer les capacités de l’outil au travers de validations numériques.

2.6 Validations numériques : convergence et objectivité à l’égard du maillage

2.6.1 Performances de l’algorithme local 2

2.6.1.1 Barre homogène

Afin d’illustrer les performances de l’algorithme local 2, nous allons nous intéresser à la convergence locale du calcul au moyen de l’évolution de l’énergie locale $E_l^{(j+1)}$ définie comme

$$\left| \left(\frac{\Phi^{(j)} \cdot \Delta[[u]]^{(j+1)} + h_{[[\epsilon]]}^{(j)} \cdot \Delta[[\epsilon]]^{(j+1)}}{\Phi^{(0)} \cdot \Delta[[u]]^{(1)} + h_{[[\epsilon]]}^{(0)} \cdot \Delta[[\epsilon]]^{(1)}} \right) \right| \quad (2.52)$$

au fil des itérations j pour deux pas de temps donnés. L’exemple d’application est simple : une barre homogène de longueur un mètre et de section $A = 1 \text{ mm}^2$ encadrée à l’une de ses extrémités et soumise à un déplacement imposé au niveau de l’extrémité restée libre est considérée. Le comportement de l’élément barre est rappelé en figure 2.4.

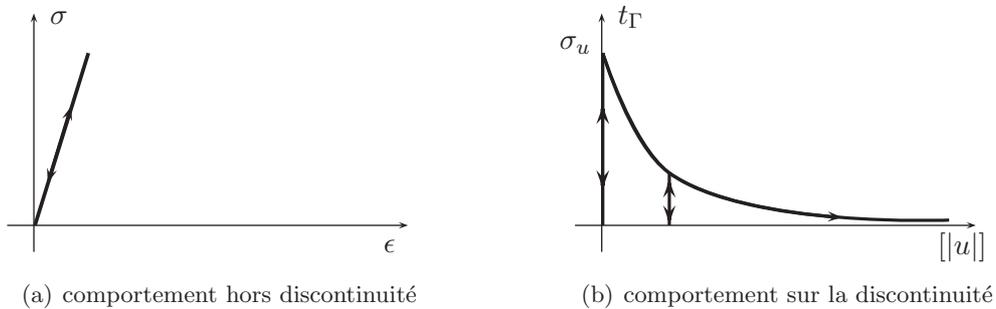


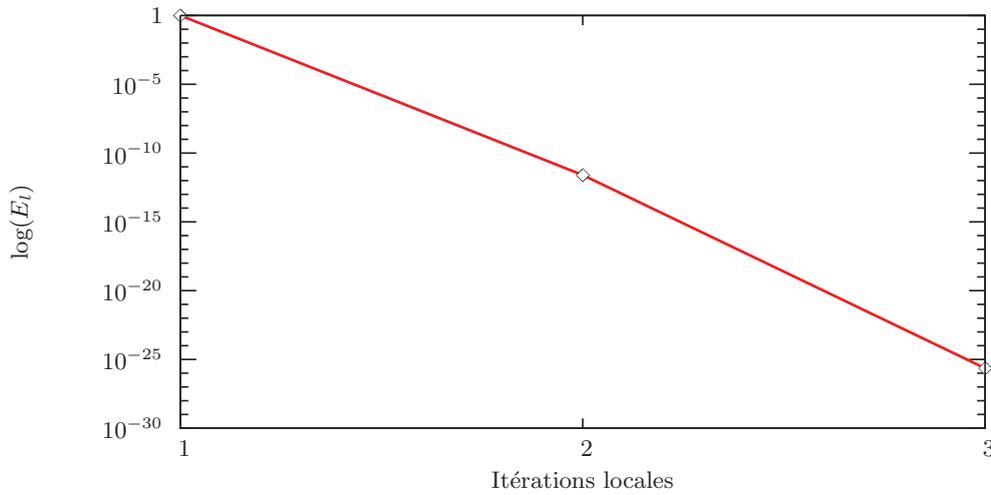
FIG. 2.4 – Comportement élastique-fragile

Le tableau 2.1 résume les propriétés matérielles retenues. Le premier pas de temps

E	20000 MPa
σ_u	2 MPa
G_f	0,007 N/mm

TAB. 2.1 – Paramètres matériau pour la barre homogène

t_5 , correspond au moment de l'adoucissement et le second, t_{10} , est situé dans la phase post-pic. La tolérance locale retenue est de 10^{-16} .

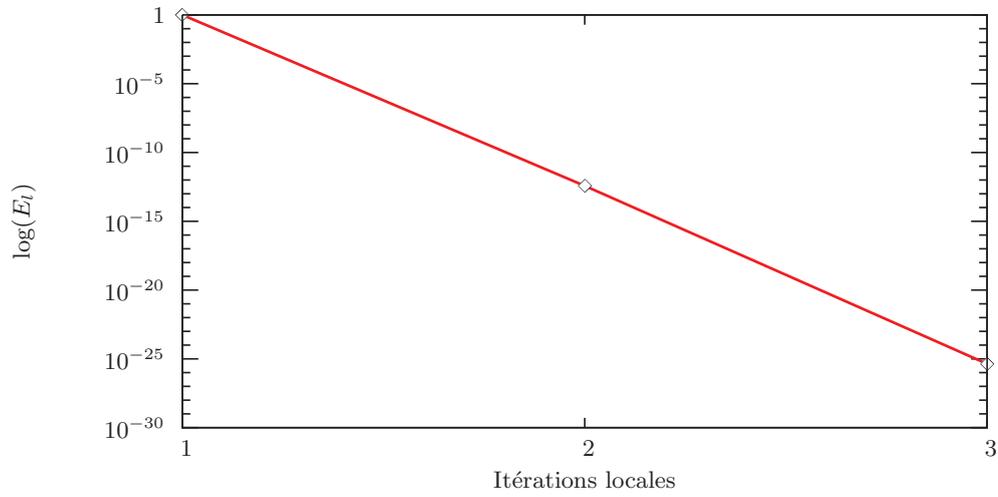
FIG. 2.5 – Convergence de l'algorithme local pour t_5

Les figures 2.5 et 2.6 représentent l'évolution de l'énergie locale $E_l^{(j+1)}$ au fil des itérations j pour les deux pas de temps considérés. Elles permettent de mettre en évidence la robustesse du schéma itératif local ; le taux de convergence quadratique typique d'un schéma de Newton est observé ; de ce fait peu, d'itérations (trois) sont nécessaires pour faire converger le problème local. Dans cet exemple, la barre étant homogène, le résidu $h_{[\epsilon]}$ est nul pour chaque pas de temps.

2.6.1.2 Barre hétérogène

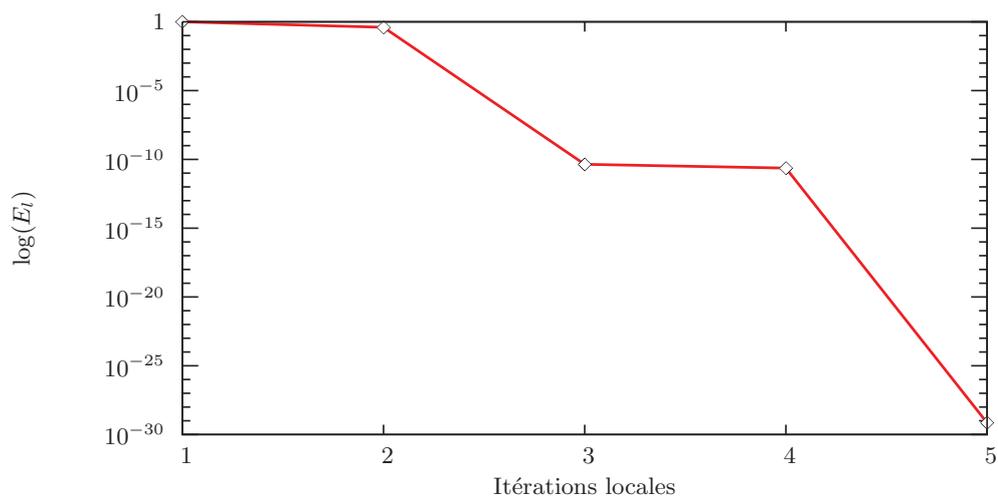
Pour cette application, la barre est maintenant hétérogène. Elle est composée de deux matériaux ayant deux modules d'Young différents E_1 et E_2 . Les conditions aux limites et la tolérance sont les mêmes que précédemment. Le pas de temps choisi t_{95} correspond à la phase post-pic. Les propriétés matérielles sont résumées dans le tableau 2.2.

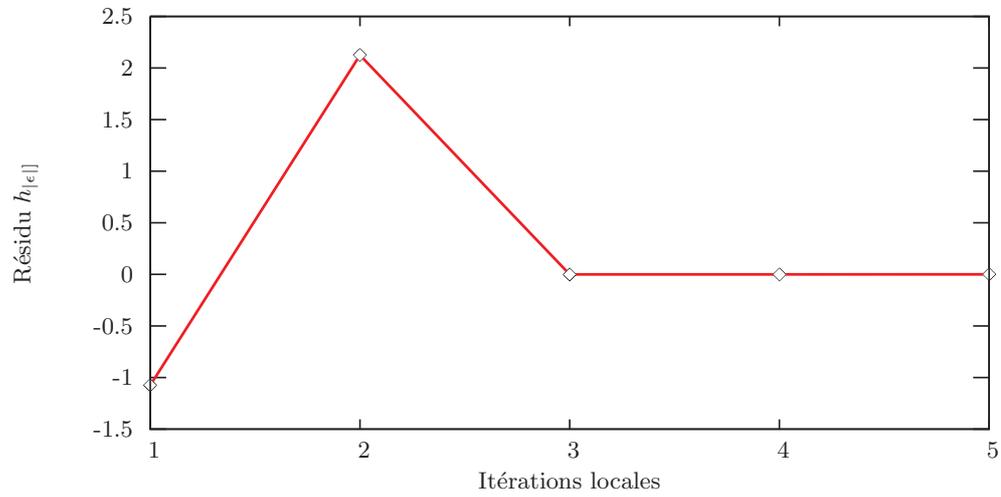
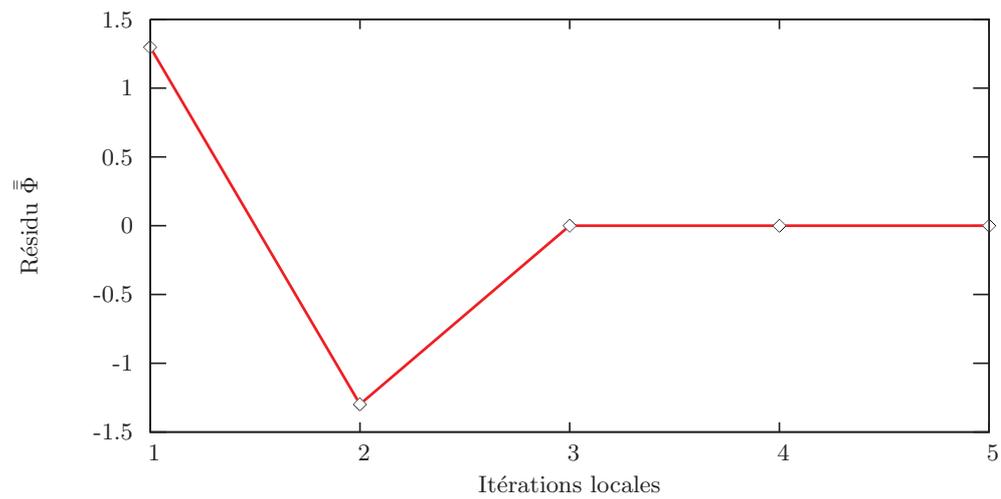
Les figures 2.7, 2.8 et 2.9 représentent respectivement l'évolution de l'énergie locale $E_l^{(j+1)}$, du résidu $h_{[\epsilon]}^{(j+1)}$ et du résidu $\bar{\Phi}^{(j+1)}$ au fil des itérations j pour le pas de temps considéré. Comme la barre est hétérogène, l'équilibre $h_{[\epsilon]}$ n'est pas nul. Il faut donc annuler à la fois le résidu $\bar{\Phi}$ et le résidu $h_{[\epsilon]}$. D'après les figures 2.8 et 2.9, cette conditions est réalisée en cinq itérations. La figure 2.7 donne la mesure de la convergence locale et permet de démontrer la robustesse du schéma itératif local lorsque les deux résidus $h_{[\epsilon]}$

FIG. 2.6 – Convergence de l’algorithme local pour t_{10}

E_1	20000 MPa
E_2	2000 MPa
σ_u	2 MPa
G_f	0,007 N/mm

TAB. 2.2 – Paramètres matériau pour la barre hétérogène

FIG. 2.7 – Convergence de l’algorithme local pour t_{95}

FIG. 2.8 – Évolution du résidu $h_{|\epsilon|}$ pour t_{95} FIG. 2.9 – Évolution du résidu $\bar{\Phi}$ pour t_{95}

et $\bar{\Phi}$ doivent être annulés ; peu d'itérations (cinq) sont nécessaires pour faire converger le problème local.

2.6.2 Objectivité à l'égard du maillage

2.6.2.1 Objectivité de la solution en une dimension

Afin de mettre en évidence l'objectivité de la solution à l'égard du maillage, la modélisation éléments finis d'une barre homogène est réalisée en considérant différentes finesses de maillage (3, 7, 15, 35 et 70 éléments). Le comportement de l'élément barre est élastique-fragile (Fig. 2.4). La barre est encastree à l'une de ses extrémités, l'autre extrémité qui reste libre étant soumise à un déplacement imposé. Dans le but de fixer la zone de localisation (comme la barre est homogène, la localisation des déformations peut avoir lieu dans n'importe quel point de la barre), un des éléments est affaibli [DeBorst et al., 1993] ; sa contrainte limite σ_u est réduite de un pour cent par rapport à celle des autres éléments.

La barre est de longueur un mètre et de section $A = 1 \text{ mm}^2$. Le tableau 2.1 résume les propriétés matérielles retenues.

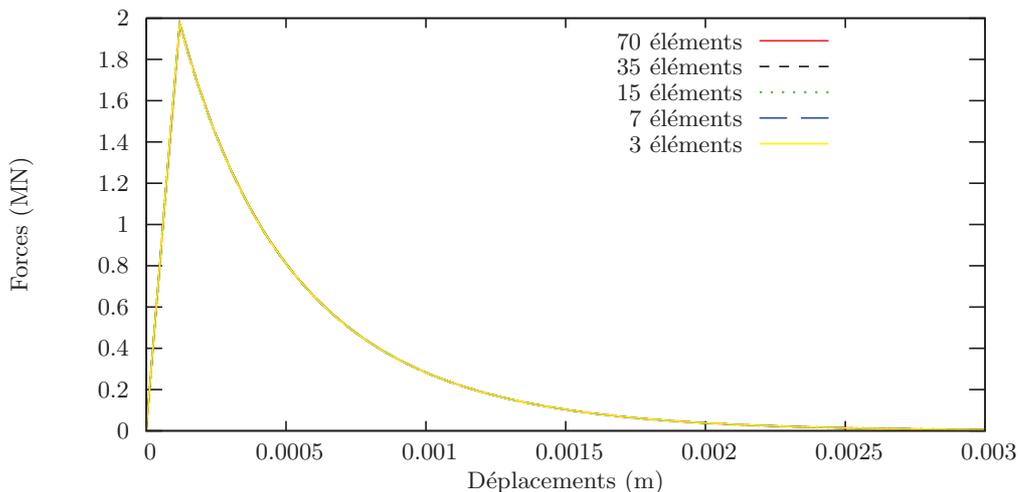


FIG. 2.10 – Efforts-déplacements imposés pour différentes discrétisations EF

Les résultats en termes d'efforts-déplacements imposés à l'extrémité libre de la barre sont donnés sur la figure 2.10. Il est notable que la réponse est indépendante de la discrétisation éléments finis choisie. En effet, l'énergie dissipée au cours du chargement est la même quel que soit le nombre (et donc la taille) d'éléments choisis pour discrétiser le problème. Il en est de même pour la charge limite avant rupture.

2.6.2.2 Objectivité de la solution en trois dimensions

Afin de mettre en évidence l'objectivité de la solution à l'égard du maillage, la modélisation éléments finis d'un cube homogène est réalisée. Il est rappelé que dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi de travailler avec un modèle treillis trois dimensions (Fig. 2.11) dont l'obtention est décrite au chapitre un. Le cube est donc composé d'éléments

barres dont le comportement est celui décrit par la figure 2.4 et les propriétés matérielles par le tableau 2.3.

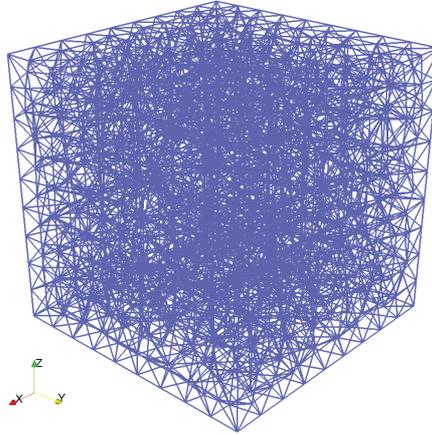


FIG. 2.11 – Cube homogène discrétisé

La discrétisation du cube est réalisée avec deux finesses de maillage : 690000 éléments et 260000 éléments. Le cube mesure 100 mm \times 100 mm \times 100 mm de côtés. Sur les faces $X = 0$ mm, $Y = 0$ mm et $Z = 0$ mm, le cube est respectivement bloqué dans les directions X , Y et Z . La face $X = 100$ mm est soumise à un déplacement imposé. Dans le but de fixer la zone de localisation (comme le cube est homogène, la localisation des déformations peut avoir lieu dans n'importe quel point de n'importe quelle barre du cube), les éléments contenus dans le plan du cube $X = 50$ mm sont affaiblis ; leur contrainte limite σ_u est réduite de un pour cent par rapport à celle des autres éléments.

E	20000 MPa
σ_u	1 MPa
G_f	0,005 N/mm

TAB. 2.3 – Paramètres matériau

Les résultats en termes d'efforts-déplacements imposés à l'extrémité libre du cube sont donnés sur la figure 2.12. Nous constatons que la réponse est indépendante de la discrétisation éléments finis choisie. En effet, l'énergie dissipée au cours du chargement est la même quel que soit le nombre (et donc la taille) d'éléments choisis pour discrétiser le cube. Il en est de même pour la charge limite avant rupture. La figure 2.13 permet de visualiser le champ de déplacements au dernier pas de temps de calcul pour la discrétisation du cube avec 690000 et 260000 éléments : deux blocs se dessinent de part et d'autre du plan affaibli ($X = 50$ mm). Ce plan peut être vu comme une fissure artificielle coupant le cube en deux. Les champs de déplacements sont, quant à eux identiques.

La fin de cette sous-section achève la phase de validations du modèle. Le chapitre un a été l'occasion de montrer des validations en élasticité homogène et hétérogène et le chapitre deux en non-linéaire hétérogène. Dans la prochaine section de ce chapitre trois,

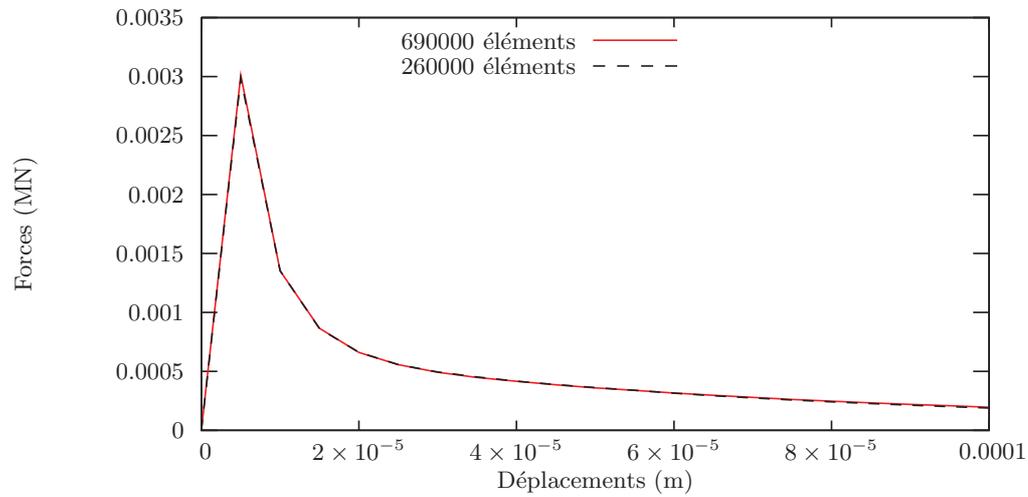


FIG. 2.12 – Efforts-déplacements imposés pour différentes discrétisations EF

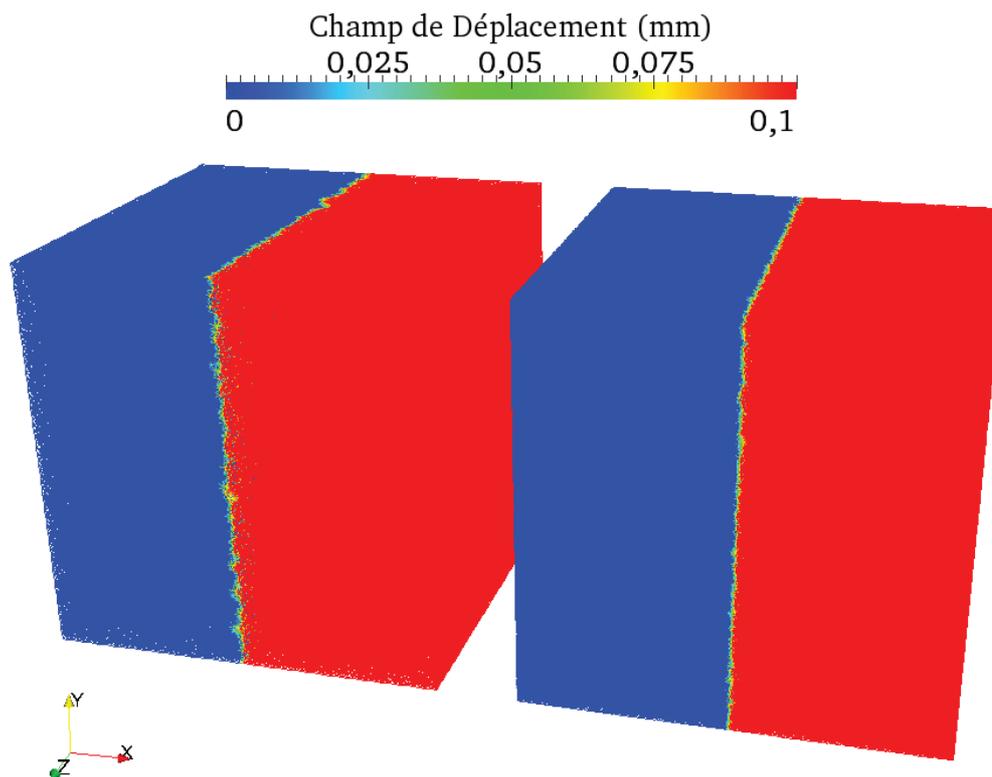


FIG. 2.13 – Champ de déplacements au dernier pas de temps : a) 260000 éléments b) 690000 éléments

des simulations numériques sous chargements simples vont être étudiées : traction simple, compression simple et traction hydrostatique seront traitées.

2.7 Chargements macroscopiques simples

2.7.1 Traction uniaxiale

2.7.1.1 Réponse macroscopique

Le premier calcul réalisé est un essai de traction uniaxial sur un cube de $100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$ de côté. Sur les faces $X = 0 \text{ mm}$, $Y = 0 \text{ mm}$ et $Z = 0 \text{ mm}$ le cube est respectivement bloqué dans les directions X, Y et Z. La face $X = 100 \text{ mm}$ est soumise à un déplacement imposé. Les propriétés matérielles et géométriques retenues sont référencées dans le tableau 2.4.

mortier	inclusions sphériques	interfaces
$E = 10 \text{ GPa}$	70 GPa	-
$\sigma_u = 3 \text{ MPa}$	-	3 MPa
$G_f = 11 \text{ J/m}^2$	-	11 J/m ²
volume	fraction vol. d'inclusions (%)	ddl
10^{-3} m^3	45	~ 700000

TAB. 2.4 – Propriétés matérielles et géométriques

La courbe efforts (somme de toutes les forces nodales dans la direction X)-déplacements imposés est représentée sur la figure 2.14. Le module d'Young macroscopique mesuré est de 25000 MPa et la contrainte ultime avant rupture est de 3 MPa. La fissuration est représentée, tout d'abord, dans le champ de déplacements (Fig. 2.15(a)) où deux blocs apparaissent (changement du code couleur) séparés par une fissure macroscopique ; cette dernière est plus clairement visible sur les figures 2.15(b) et 2.15(c) où sont représentés les éléments cassés. La figure 2.15(b) permet de voir qu'une seule macro-fissure est nécessaire pour conduire l'éprouvette jusqu'à rupture et la figure 2.15(c) permet de comprendre que la coalescence des micro-fissures (éléments cassés) est à l'origine de la création de la macro-fissure. Notons que cette fissure est tortueuse car elle passe autour des inclusions qui demeurent élastiques et qu'elle est grossièrement perpendiculaire à la direction du déplacement imposé (direction X). Par ailleurs, d'un point de vue numérique, les éléments cassés représentés sur la figure 2.15(c) sont ceux pour lesquels la discontinuité forte a été activée ; cela permet ainsi d'avoir accès aux ouvertures de fissure de chaque barre (paramètres $[[u]]$) comme représenté sur la figure 2.15(c).

2.7.1.2 Convergence des calculs

Dans cette sous-section, afin de valider la convergence du calcul, l'évolution de l'énergie globale $E_g^{(k+1)}$ au fil des itérations k pour deux pas de temps spécifiques est étudiée : le premier pas de temps est choisi élastique (pas de temps 1), il sera noté t_1 ; le second correspond au pas de temps avant adoucissement (pas de temps 81), il sera noté t_{81} . Il y

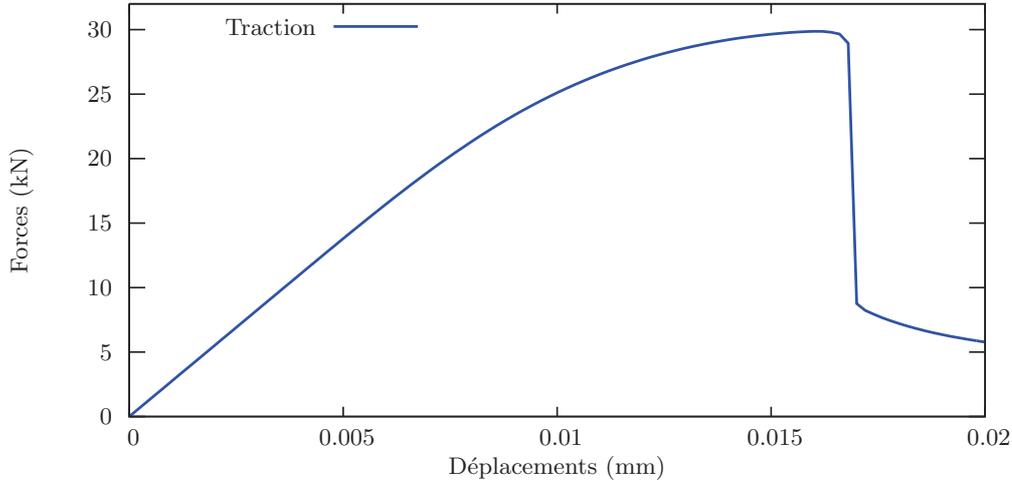


FIG. 2.14 – Efforts-déplacements imposés pour un essai de traction uniaxial

a au total 100 pas de temps. L'énergie est définie comme :

$$E_g^{(k+1)} = |\Delta \mathbf{d}^{(k+1)} \cdot \Delta \mathbf{r}^{(k+1)} \cdot \mathbf{s}^{(k+1)}| \quad (2.53)$$

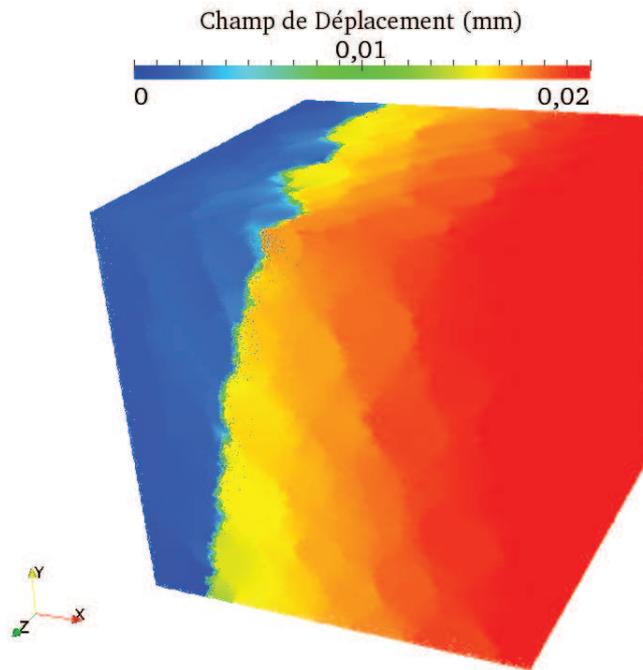
où $\Delta \mathbf{d}^{(k+1)}$ est l'incrément de déplacement évalué par la méthode quasi-Newton, $\Delta \mathbf{r}^{(k+1)}$ est le résidu et $\mathbf{s}^{(k+1)}$ est le paramètre introduit par la méthode "line-search". Quand le "line search" n'est pas activé, il vaut 1. La tolérance globale en énergie, notée tol , est choisie telle que $tol = 10^{-16} E_g^{(0)}$ où $E_g^{(0)}$ est l'énergie pour la première itération.

Les courbes 2.16 et 2.17 représentent l'évolution de l'énergie $E_g^{(k+1)}$ en fonction du nombre d'itérations BFGS pour les deux pas de temps évoqués. Pour le pas de temps t_1 , la convergence est atteinte en deux itérations; pour t_{81} , en 93 itérations. La figure 2.18 montre le nombre d'itérations "line search" utilisé pour chaque itération BFGS pour t_{81} . Remarquons que pour les premières itérations, le "line search" n'est pas activé; son nombre d'itérations est de 0. L'efficacité du "line search" peut ensuite être notée en remarquant la corrélation entre le nombre d'itérations "line search" (pic dans la figure 2.18) et la diminution de l'énergie (creux dans la figure 2.17) : à l'itération 93, l'énergie de sortie est de l'ordre de 10^{-20} et le nombre d'itérations "line search" de 10.

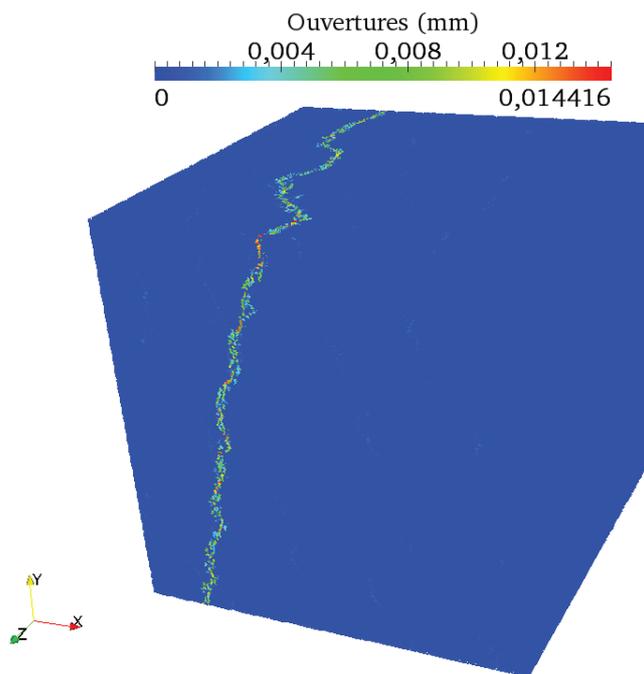
2.7.1.3 Isotropie de la réponse

Dans cette sous-section, trois essais de traction indépendants suivant les directions X, Y et Z sont réalisés sur la même éprouvette dont les propriétés sont données dans le tableau 2.5. D'un point de vue pratique, cet essai consiste à prendre l'éprouvette et à réaliser premièrement un essai de traction uniaxial dans la direction X, puis dans la direction Y et enfin dans la direction Z. À chaque fois qu'un nouvel essai de traction est réalisé, nous repartons de l'échantillon de départ et non de celui qui vient d'être fissuré.

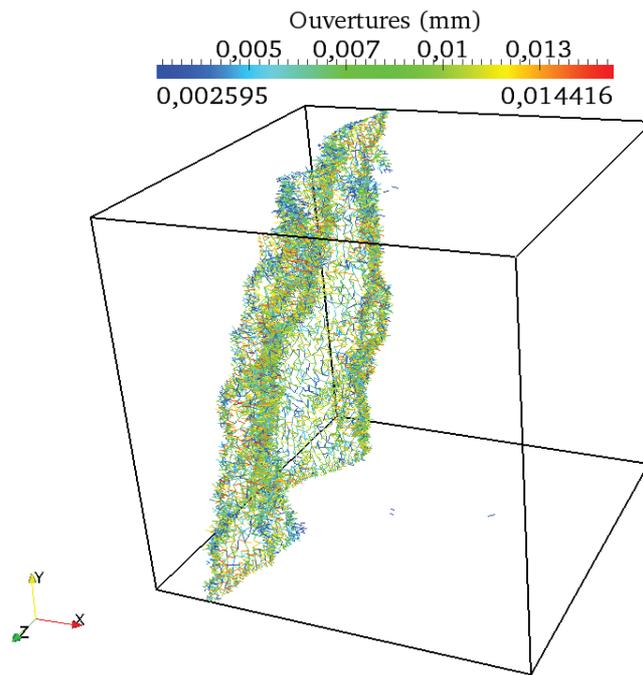
Les trois réponses obtenues figurent sur la figure 2.19. Ces courbes attestent de la capacité du processus de maillage à représenter une microstructure isotrope (sphères dans un cube) à la fois pour des grandeurs linéaires (pentes élastiques identiques) et non-linéaires



(a) Champ de déplacements au dernier pas de temps pour la traction uniaxiale



(b) Éléments cassés au dernier pas de temps pour la traction uniaxiale



(c) Éléments cassés seuillés au dernier pas de temps pour la traction uniaxiale

FIG. 2.15 – Visualisation de la fissuration pour un essai de traction uniaxiale

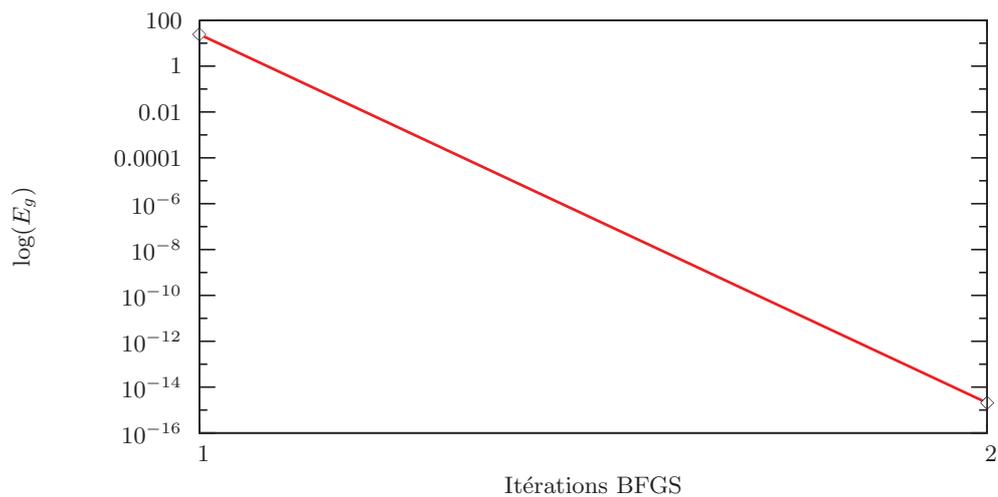
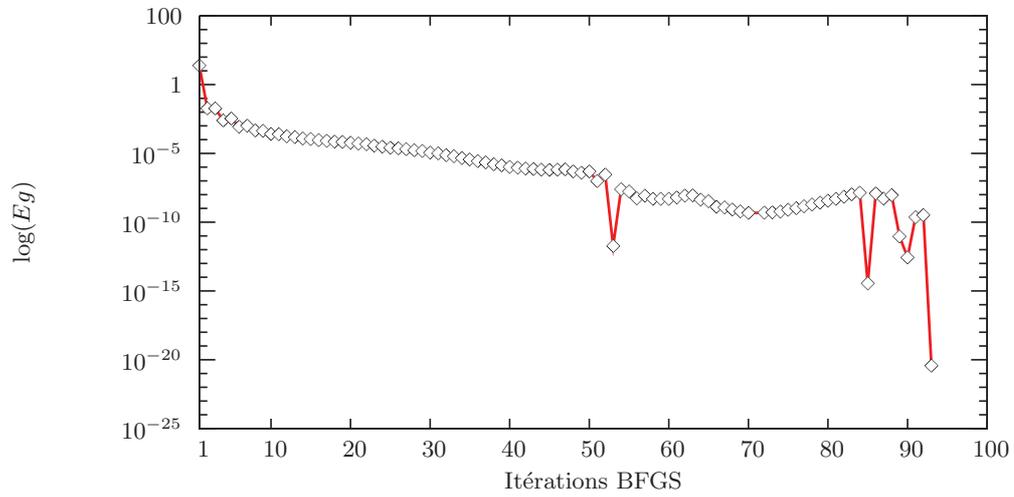
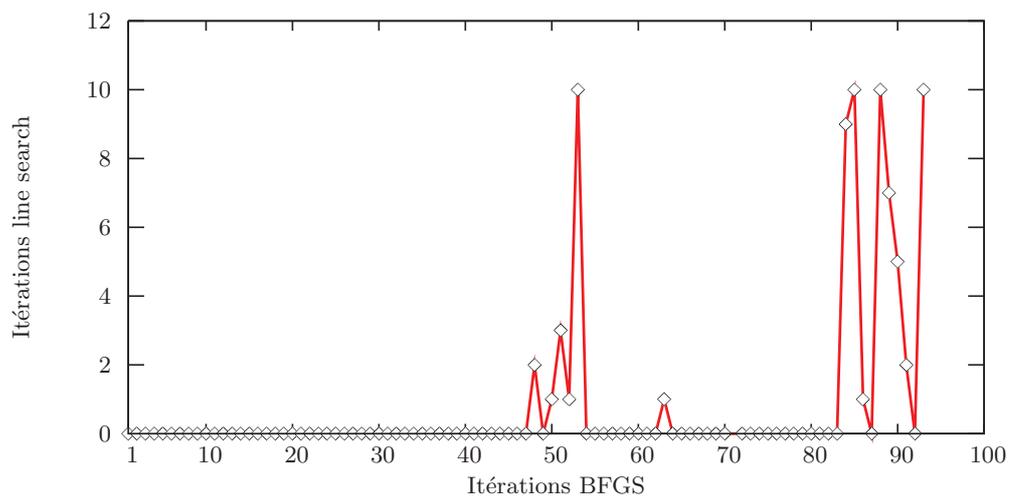


FIG. 2.16 – Convergence du calcul pour t_1 pour la traction uniaxiale

FIG. 2.17 – Convergence du calcul pour t_{81} pour la traction uniaxialeFIG. 2.18 – Activation du line search pour t_{81} pour la traction uniaxiale

(pics avant rupture). Cette approche peut aussi être vue comme une façon, certes grossière, de savoir si nous sommes sur un Volume Élémentaire Représentatif, défini par exemple pour une grandeur effective comme le pic avant rupture. Nous pouvons supposer que sur un Volume Élémentaire Statistique, les pics avant rupture seraient différents.

mortier	inclusions sphériques	interfaces
$E = 10 \text{ GPa}$	70 GPa	-
$\sigma_u = 3 \text{ MPa}$	-	3 MPa
$G_f = 13 \text{ J/m}^2$	-	13 J/m ²
volume	fraction vol. d'inclusions (%)	ddl
10^{-3} m^3	35	~ 700000

TAB. 2.5 – Propriétés matérielles et géométriques

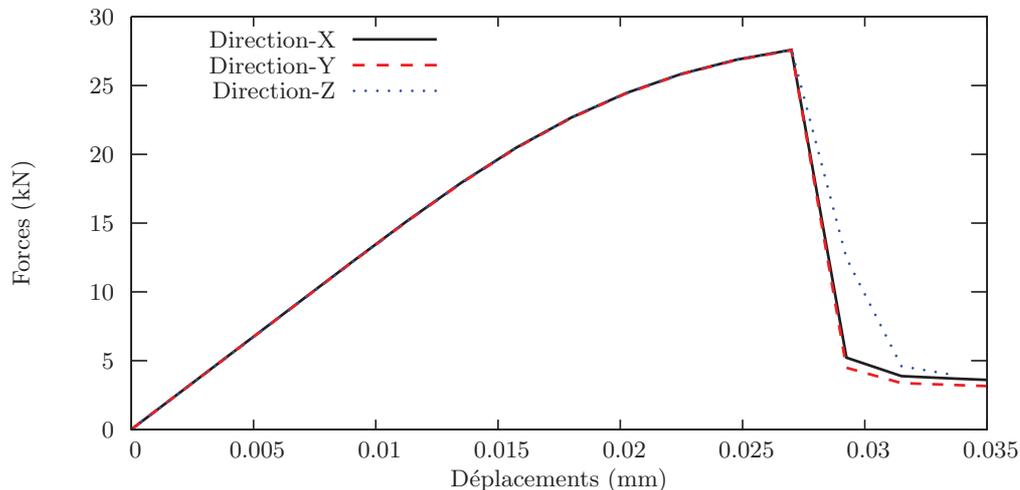


FIG. 2.19 – Essais de traction indépendants suivant les trois axes

2.7.2 Compression uniaxiale

2.7.2.1 Réponse macroscopique

Le second calcul est un essai de compression uniaxial. Les propriétés géométriques et matérielles sont les mêmes que pour l'essai de traction uniaxial. La courbe efforts (somme de toutes les forces nodales dans la direction X)-déplacements imposés est représentée sur la figure 2.20. Il est important de noter, que bien que le critère de rupture des éléments barres soit seulement en mode I (voir section 3.4.1), la réponse macroscopique obtenue est non linéaire avec une partie adoucissante. Une telle réponse est principalement due à la triangulation de Delaunay permettant, tout d'abord, d'avoir des éléments barres dans toutes les directions (sans direction privilégiée), et ensuite de donner un effet Poisson macroscopique au cube.

Les figures 2.21(a), 2.21(b) et 2.21(c) permettent d’observer la fissuration via le champ de déplacements et les éléments cassés. Le faciès de fissuration n’est pas le même qu’en traction. Contrairement à la traction, plusieurs blocs distincts séparés par des macro-fissures apparaissent (Fig. 2.21(a) et 2.21(b)). Ces dernières sont grossièrement parallèles à la direction de compression (direction X).

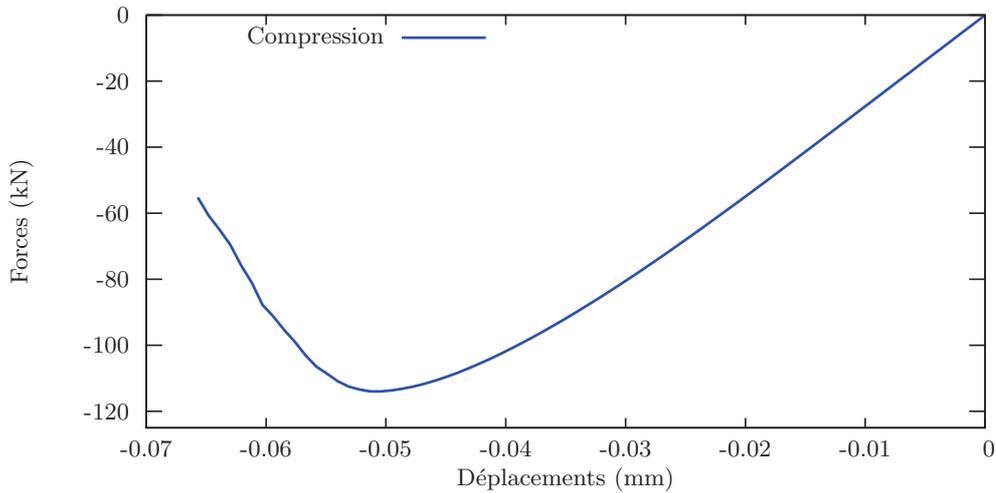


FIG. 2.20 – Efforts-déplacements imposés pour un essai de compression uniaxial

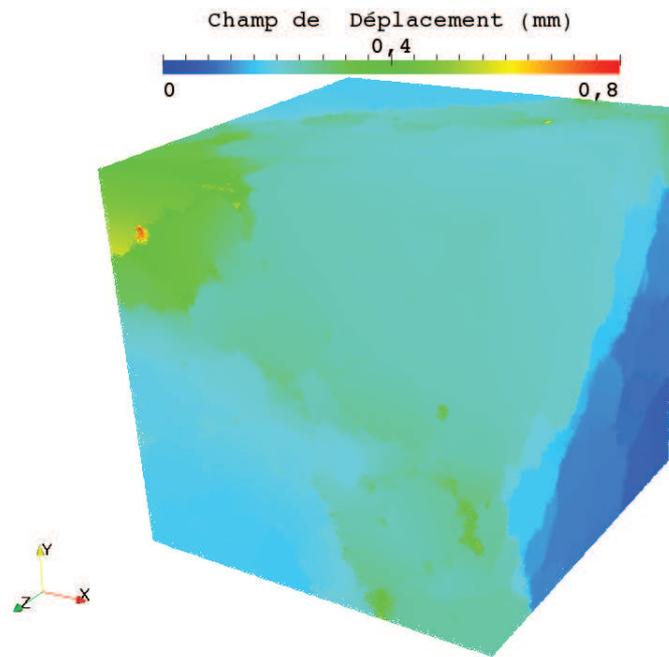
2.7.2.2 Convergence des calculs

Dans cette sous-section, il est encore question de la convergence globale du calcul, mais cette fois-ci pour l’essai de compression. L’évolution de l’énergie globale $E_g^{(k+1)}$ au fil des itérations k est de nouveau étudiée. L’énergie $E_g^{(k+1)}$ et la tolérance sont définies comme précédemment. Seul le pas de temps avant adoucissement est étudié, il correspond à t_{57} . La courbe 2.22 représente l’évolution de l’énergie $E_g^{(k+1)}$ en fonction du nombre d’itérations BFGS pour t_{57} . Comme pour l’essai de traction, l’efficacité du “line search” peut être observée (Fig. 2.23). À l’itération 224, l’énergie de sortie est de l’ordre de 10^{-16} et le nombre d’itérations “line search” de 10.

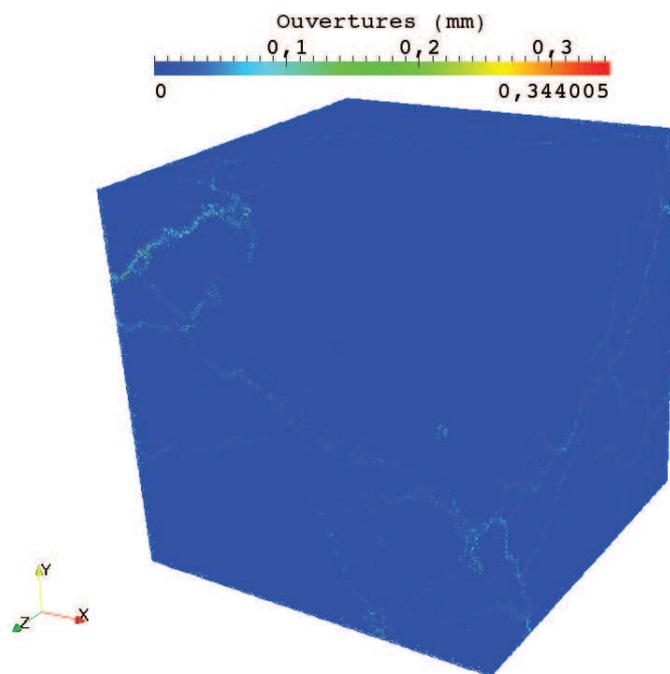
Finalement, les sous-sections 2.7.1.2 et 2.7.2.2 permettent de se rendre compte que la convergence globale est atteinte (même avec une énergie de départ très grande : 487 pour la compression) mais qu’elle nécessite un grand nombre d’itérations à la fois BFGS et “line search” ; il semblerait donc judicieux dans les perspectives de cette thèse d’améliorer le schéma de résolution globale.

2.7.3 Traction/Compression uniaxiale

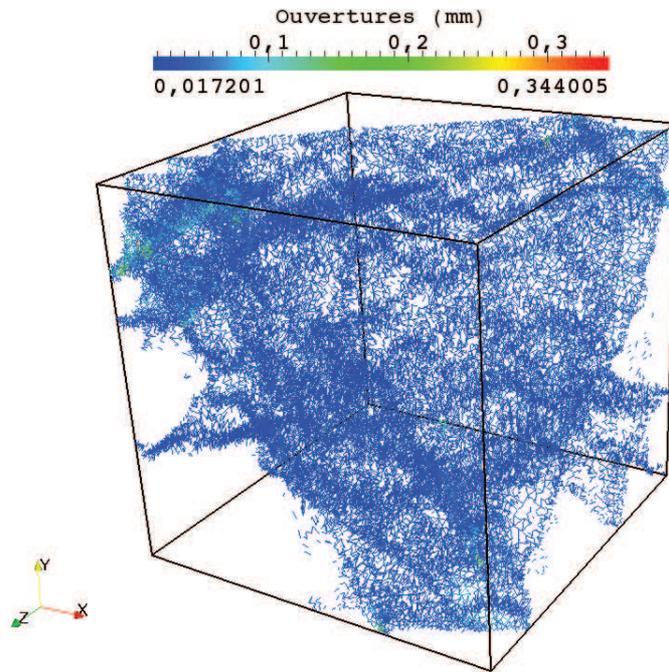
Nous pouvons finalement comparer la réponse en traction avec celle en compression en traçant sur la même figure (Fig. 2.24) les deux réponses. Des différences significatives peuvent être observées, tout d’abord, au niveau de la contrainte limite macroscopique avant rupture. En effet, pour la traction elle vaut 30 kN alors que pour la compression elle vaut 115 kN. Ensuite, il est possible de noter une différence au niveau de la quantité d’énergie



(a) Champ de déplacements au dernier pas de temps pour la compression uniaxiale

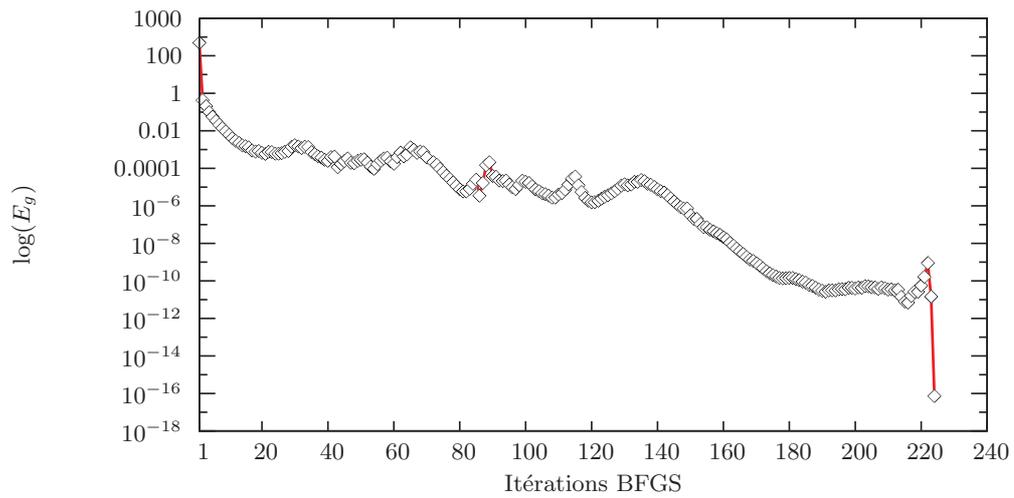


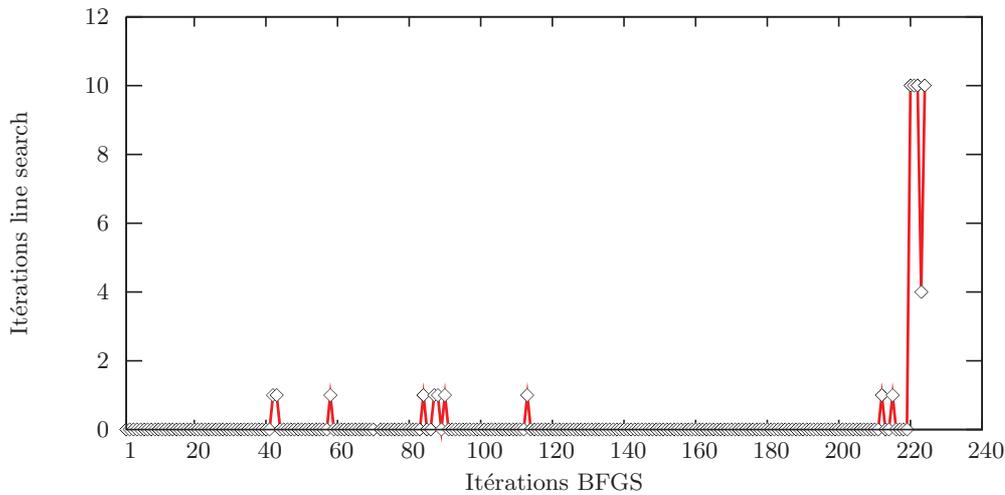
(b) Éléments cassés au dernier pas de temps pour la compression uniaxiale



(c) Éléments cassés seuillés au dernier pas de temps pour la compression uniaxiale

FIG. 2.21 – Visualisation de la fissuration pour un essai de compression uniaxial

FIG. 2.22 – Convergence du calcul pour t_{57} pour la compression uniaxiale

FIG. 2.23 – Activation du line search pour t_{57} pour la compression uniaxiale

dissipée (aire sous la courbe). Cette dissymétrie de comportement est caractéristique des matériaux quasi-fragiles comme le béton.

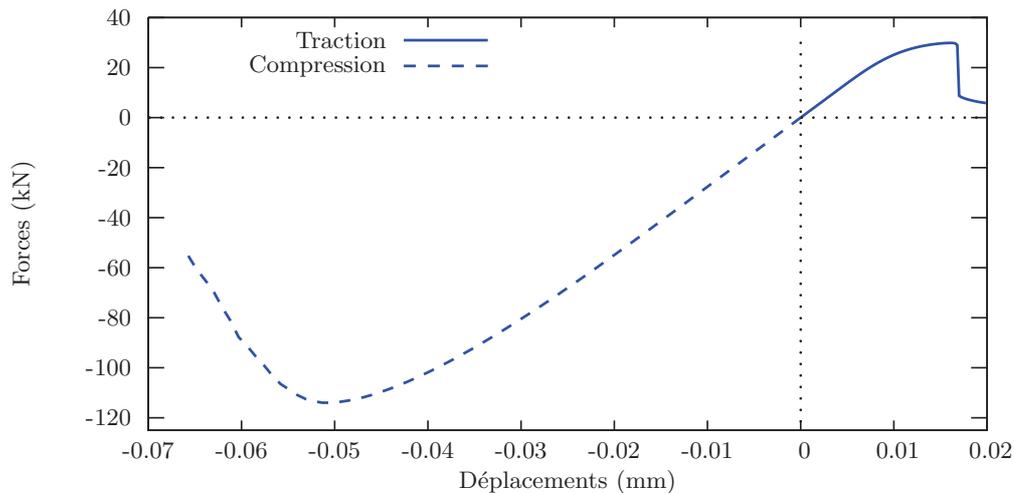


FIG. 2.24 – Efforts-déplacements imposés pour un essai de traction et compression uniaxial

D'un point de vue expérimental, la valeur du rapport entre la contrainte limite avant rupture en compression et celle pour la traction proposée dans la littérature pour un béton est de l'ordre de dix. Or, si nous regardons les résultats numériques obtenus, nous avons plutôt un rapport de quatre. Cela est du en partie au fait que, parce que nous avons choisi de travailler avec des éléments barres, nous ne pouvons pas piloter le coefficient de Poisson ; de ce fait toute la physique du cisaillement qui se produit lors de la compression n'est pas prise en compte (glissement des sphères sur le mortier). Ainsi, l'énergie libérée qui apparaîtrait par les contraintes de cisaillement est perdue. Cela justifie aussi, en partie, de développer le chapitre deux de cette thèse où nous avons essayé de travailler avec des poutres de Timoshenko, en ajoutant le caractère quasi-fragile.

2.7.4 Traction hydrostatique

Le troisième calcul réalisé est un essai de traction hydrostatique. Cette essai consiste à mener un essai de traction simultanément dans les directions X, Y et Z. Les propriétés géométriques et matérielles sont les mêmes que pour l'essai de traction uniaxial. Les courbes efforts (somme de toutes les forces nodales dans les directions X, Y et Z)-déplacements imposés sont représentées sur la figure 2.25. L'isotropie du comportement pré-pic est vérifiée ; quelle que soit la direction de chargement, les valeurs du module de compressibilité macroscopique et de la limite ultime avant rupture macroscopique sont inchangées. Cette propriété est directement liée à la triangulation de Delaunay utilisée pour mailler le domaine.

Nous pouvons ensuite comparer les réponses obtenues pour l'essai de traction uniaxial et pour l'essai de traction hydrostatique suivant la direction X. Cela est illustré sur la figure 2.27. Cette comparaison permet de calculer un coefficient de Poisson macroscopique ; en effet la pente de la réponse pour l'essai de traction uniaxial nous donne la valeur du module de Young (E) et celle pour l'essai de tri-traction trois fois la valeur du module de compressibilité ($3K$). Par la relation

$$\nu = \frac{3K - E}{6K}, \quad (2.54)$$

il vient $\nu = 0.25$.

Finalement, la fissuration est encore observée du point de vue du champ de déplacements (Fig. 2.26(a)) et des éléments cassés (Fig. 2.26(b) et 2.26(c)). Contrairement à la traction uniaxiale, plusieurs macro-fissures sont présentes et se rejoignent (Fig. 2.26(b)) découpant ainsi le cube en plusieurs blocs distincts. Là encore, la tortuosité observée (Fig. 2.26(c)) est due à la présence des inclusions élastiques.

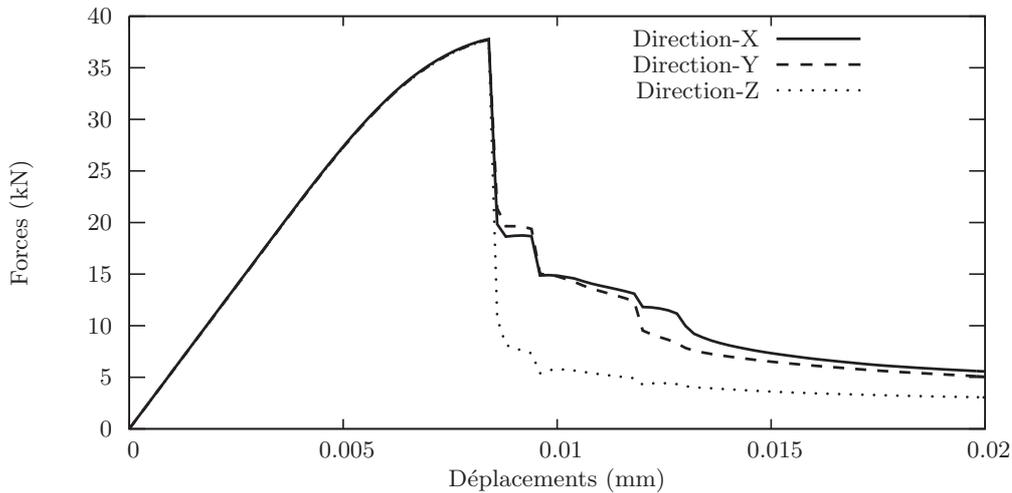
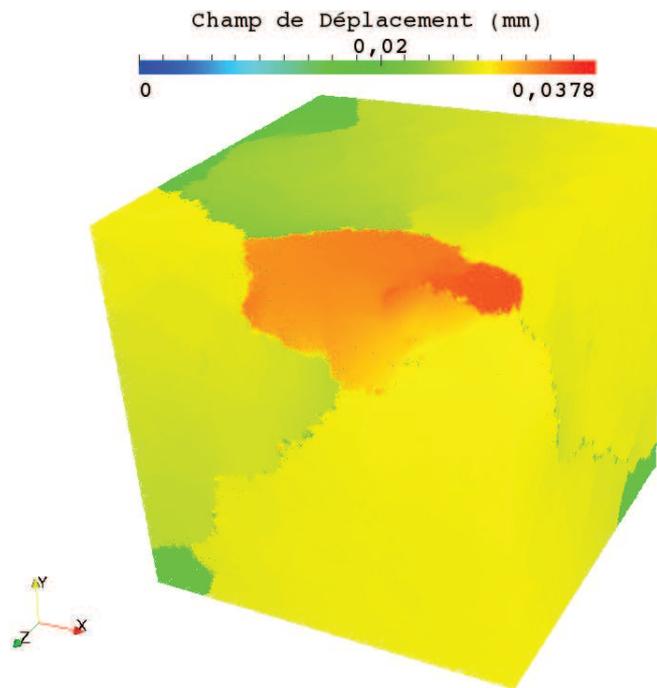
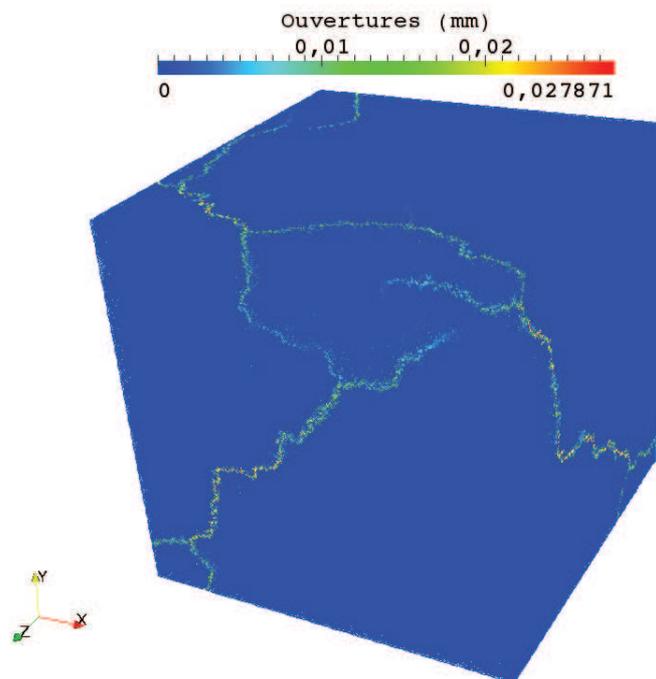


FIG. 2.25 – Efforts-déplacements imposés pour un essai de tri-traction

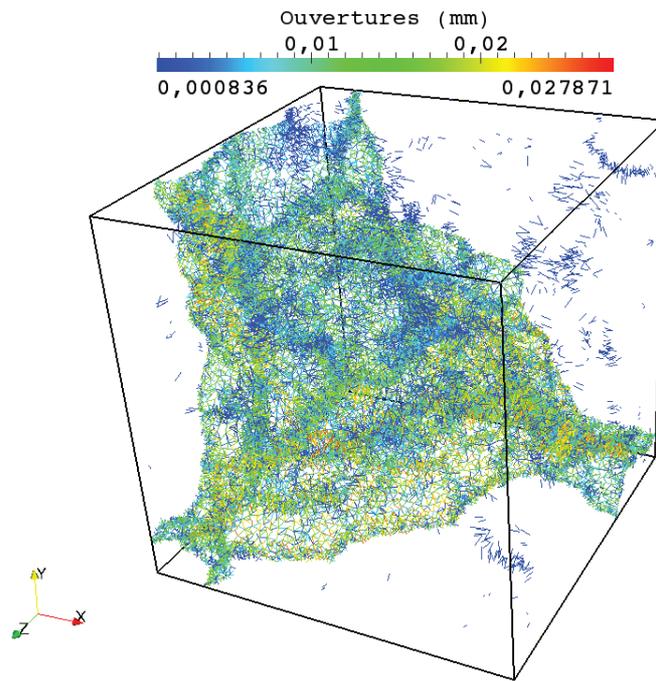
Dans le deuxième chapitre de cette thèse, les points-clés des modèles à discontinuité forte ont été présentés ; les deux approches d'implantation numérique de ces modèles ont aussi été discutées : la Discrete Strong Discontinuity Approach permettant d'introduire



(a) Champ de déplacement au dernier pas de temps pour la tri-traction



(b) Éléments cassés au dernier pas de temps pour la tri-traction



(c) Éléments cassés seillés au dernier pas de temps pour la tri-traction

FIG. 2.26 – Visualisation de la fissuration pour un essai de traction hydrostatique

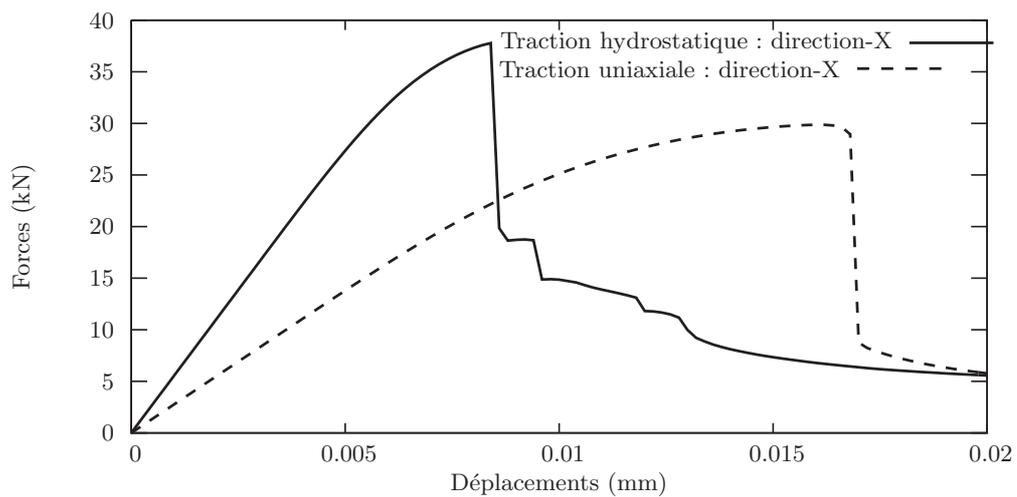


FIG. 2.27 – Efforts-déplacements imposés pour un essai de tri-traction et de traction uniaxiale pour la direction X

la surface de discontinuité par considération du mode de rupture a été retenue. Ensuite, par la flexibilité de la E-FEM et de la méthode des Modes Incompatibles, l'élément barre bi-phasique présenté au chapitre un a été enrichi par un deuxième mode incompatible G_2 permettant d'incorporer la fissuration. Puis, des validations de l'algorithme local permettant le calcul de $[[u]]$ et $[[\epsilon]]$ ont été exposées : la convergence (barres homogène et hétérogène) et l'objectivité de la solution à l'égard du maillage (une et trois dimensions) ont été étudiées. Finalement, des résultats numériques obtenus avec le modèle treillis spatial sous divers chargements ont été considérés : traction, compression et traction hydrostatique. Nous avons aussi vu que le modèle barre manque de physique pour représenter une réponse en compression : le coefficient de Poisson n'est en effet jamais piloté.

Dans le prochain chapitre, nous allons présenter une alternative aux éléments barres, à savoir les poutres de Timoshenko. Contrairement aux barres, elles présentent l'avantage de pouvoir introduire un coefficient de Poisson. Par ailleurs, la démarche menée au chapitre un dans la partie 1.5 sera appliquée au cas des poutres. De ce fait, elles pourront aussi présenter un caractère bi-phasique.

Chapitre 3

Perspectives pour la modélisation du caractère hétérogène : poutres de Timoshenko

Contents

3.1	Cinématique et discrétisation éléments finis	97
3.1.1	Cinématique d'une poutre de Timoshenko	97
3.1.2	Interpolation éléments finis	98
3.2	Méthode des Modes Incompatibles et poutre de Timoshenko	99
3.3	Linéarisation du problème (3.14)	102
3.3.1	Linéarisation de (3.14a)	102
3.3.1.1	Linéarisation par rapport à \mathbf{u} , \mathbf{v} et \mathbf{w}	102
3.3.1.2	Linéarisation par rapport à $[[\epsilon]]$, $[[\gamma]]_v$ et $[[\gamma]]_w$	103
3.3.2	Linéarisation de (3.14b)	104
3.3.3	Linéarisation de (3.14c)	104
3.3.4	Linéarisation de (3.14d)	104
3.3.5	Procédure de résolution du problème (3.35)	105
3.4	Convergence globale en élasticité homogène	107
3.5	Convergence globale en élasticité hétérogène	109

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous avons présenté le type de maillage éléments finis retenu : il repose sur un treillis spatial formé d'éléments barres. Toutes les validations qui ont été menées (convergence du maillage, calcul de VER) ont principalement concerné le module de compressibilité ; à aucun moment, les notions de " coefficient de Poisson " ou " module de cisaillement " n'ont été abordées, et ce parce qu'un élément barre ne prend pas compte la raideur en cisaillement ; de ce fait, il n'y a pas de possibilité d'introduire un coefficient de Poisson pour chaque barre. Cette lacune nous empêche ainsi de mener pour le module de cisaillement G une étude de VER similaire à celle que nous avons pu conduire pour le module de compressibilité, rendant ainsi impossible la définition d'une valeur effective G^{eff} . C'est pourquoi, dans ce chapitre, nous allons présenter une perspective différente pour la modélisation de matériaux hétérogènes, à savoir l'utilisation de poutres de Timoshenko. Ainsi, la première partie de ce chapitre va, tout d'abord, rappeler succinctement la cinématique et l'interpolation éléments finis d'une poutre de Timoshenko. Puis, dans la deuxième partie, la E-FEM et la méthode des Modes Incompatibles seront de nouveau appliquées afin d'intégrer le caractère bi-phasique aux poutres. Finalement, dans la dernière partie, une validation concernant la convergence du maillage sera présentée.

3.1 Cinématique d'une poutre de Timoshenko et discrétisation éléments finis

3.1.1 Cinématique d'une poutre de Timoshenko

Nous considérons une poutre de Timoshenko de longueur ℓ . L'axe de la poutre est porté par la direction x et les directions y et z sont telles que le repère (x, y, z) soit direct. Nous appelons u , v et w respectivement le déplacement axial (selon x) et les déplacements transversaux (selon y et z), θ_v la rotation de la section de la poutre autour de y et θ_w la rotation de la section de la poutre autour de z . À partir de ces grandeurs, nous pouvons définir la cinématique d'une poutre de Timoshenko :

$$\epsilon(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x}, \quad \gamma_v(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x} - \theta_v(x), \quad \gamma_w(x) = \frac{\partial w(x)}{\partial x} - \theta_w(x), \quad (3.1)$$

$$\kappa_v(x) = \frac{\partial \theta_v(x)}{\partial x}, \quad \kappa_w(x) = \frac{\partial \theta_w(x)}{\partial x} \quad (3.2)$$

où $\epsilon(x)$, $\gamma_p(x)$ et $\kappa_p(x)$ ($p = v, w$) représentent respectivement la déformation axiale, le glissement et la courbure.

Dans la théorie des poutres de Timoshenko, la section de la poutre reste plane après rotation mais, contrairement aux poutres d'Euler-Bernoulli, la section de la poutre n'est pas orthogonale à l'axe de la poutre dans la configuration déformée. En termes d'éléments finis, l'intérêt de cette théorie est que la rotation de la normale n'est plus liée à la pente par dérivation : cela implique qu'une simple continuité C^0 est nécessaire pour les grandeurs u , v , w et θ_p ($p = v, w$). De ce fait, ces dernières vont pouvoir être interpolées avec les fonctions de forme classiques d'un élément barre à deux nœuds.

3.1.2 Interpolation éléments finis

Nous considérons une interpolation à deux nœuds d'une poutre de Timoshenko : le nœud i a ainsi cinq degrés de liberté, un déplacement axial u_i , un déplacement transversal v_i , un déplacement transversal w_i , une rotation $\theta_{i,v}$ et une rotation $\theta_{i,w}$. Comme précisé précédemment, l'interpolation est réalisée avec les fonctions de forme d'un élément barre à deux nœuds N_1 (Fig. 3.1(a)) et N_2 (Fig. 3.1(b)).

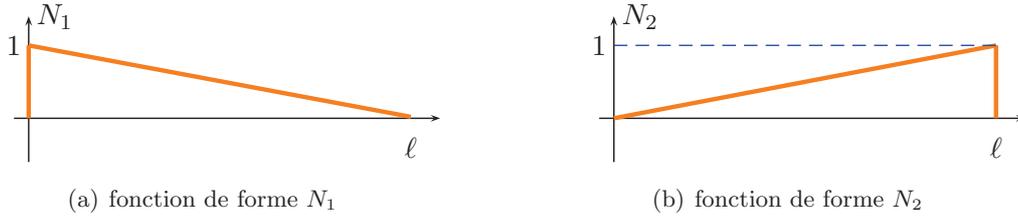


FIG. 3.1 – Fonctions de forme d'un élément barre à deux nœuds

La discrétisation de u , v , w et θ_p ($p = v, w$) pour un élément e est ainsi obtenue :

$$\begin{cases} u(x) = N_1 u_1 + N_2 u_2 = \mathbf{N} \mathbf{u} \\ v(x) = N_1 v_1 + N_2 v_2 = \mathbf{N} \mathbf{v} \\ w(x) = N_1 w_1 + N_2 w_2 = \mathbf{N} \mathbf{w} \\ \theta_v(x) = N_1 \theta_{1,v} + N_2 \theta_{2,v} = \mathbf{N} \boldsymbol{\theta}_v \\ \theta_w(x) = N_1 \theta_{1,w} + N_2 \theta_{2,w} = \mathbf{N} \boldsymbol{\theta}_w \end{cases} \quad (3.3)$$

avec

$$\mathbf{N} = [N_1; N_2] \quad (3.4)$$

et

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\theta}_v = \begin{bmatrix} \theta_{1,v} \\ \theta_{2,v} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\theta}_w = \begin{bmatrix} \theta_{1,w} \\ \theta_{2,w} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Nous pouvons, ensuite, discrétiser ϵ , γ_p et κ_p ($p = v, w$) tels que :

$$\begin{cases} \epsilon(x) = \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \gamma_v(x) = \mathbf{B} \mathbf{v} - \mathbf{N} \boldsymbol{\theta}_v \\ \gamma_w(x) = \mathbf{B} \mathbf{w} - \mathbf{N} \boldsymbol{\theta}_w \\ \kappa_v(x) = \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}_v \\ \kappa_w(x) = \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}_w \end{cases} \quad (3.6)$$

avec

$$\mathbf{B} = [-1/\ell; 1/\ell] \quad (3.7)$$

Comme nous l'avons dit en introduction, nous souhaitons travailler avec des poutres afin de rajouter une raideur en cisaillement et être ainsi en mesure, au niveau de chaque poutre du treillis, de contrôler le coefficient de Poisson ; et donc, comme pour le cas du module de compressibilité, de déterminer un module de cisaillement macroscopique. Par ailleurs, le coefficient de Poisson étant introduit directement par l'intermédiaire des contraintes de

3.2. MÉTHODE DES MODES INCOMPATIBLES ET POUTRE DE TIMOSHENKO99

cisaillement avec la relation $\tau_p = G\gamma_p$ ($p = v, w$), nous avons décidé d'utiliser des poutres de Timoshenko " dégénérées " pour lesquelles la rotation θ_p ($p = v, w$) est nulle ; cela permet, en plus, de restreindre le nombre de degrés de liberté par rapport à un élément barre et d'éliminer la présence des inerties qui, contrairement à la section de la barre, ne sont pas déterminées par le pavage de Voronoï et nécessitent donc une identification. Finalement, ϵ , γ_p et κ_p ($p = v, w$) s'écrivent :

$$\begin{cases} \epsilon(x) = \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \gamma_v(x) = \mathbf{B}\mathbf{v} \\ \gamma_w(x) = \mathbf{B}\mathbf{w} \\ \kappa_v(x) = 0 \\ \kappa_w(x) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Dans la prochaine partie, nous allons à nouveau utiliser la E-FEM avec la méthode des Modes Incompatibles. L'application va, cette fois-ci, concerner l'élément poutre évoqué ci-dessus ; comme pour la barre, il va être coupé en deux au niveau de l'interface agrégat/mortier avec désormais deux propriétés mécaniques : le module d'Young et le module de cisaillement.

3.2 Méthode des Modes Incompatibles : application à une poutre de Timoshenko

Rappelons tout d'abord le problème éléments finis à résoudre, obtenu par la méthode des Modes Incompatibles dans la partie trois du chapitre un :

	$\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] = \mathbf{0}$	(3.9a)
où	$\int_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\sigma}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{a}) d\Omega = \mathbf{0} \quad \forall e \in [1, n_{elm}]$	(3.9b)
	$\mathbf{f}_{int}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \tilde{\sigma}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{a}) d\Omega$	

Appliquons-le alors au problème d'un élément fini poutre bi-phasique.

Comme dans le cas de l'élément barre, se pose le problème du choix du mode incompatible \mathbf{G} . Celui-ci doit, de nouveau, vérifier la condition de moyenne nulle (1.23) et représenter un saut fini dans le champ de déformations (discontinuité faible) ; il sera le même que celui du chapitre un, soit $G_1^{①/②}$. Notons que pour un élément poutre, \mathbf{a} est un vecteur contenant trois inconnues : $[[\epsilon]]$, $[[\gamma]]_v$, $[[\gamma]]_w$.

Nous rappelons que la fonction $G_1^{①/②}$ s'écrit

$$G_1^{①/②} = \begin{cases} G_1^{①} = -\frac{1}{\theta\ell}, & x \in [0, \theta\ell] \\ G_1^{②} = \frac{1}{(1-\theta)\ell}, & x \in [\theta\ell, \ell] \end{cases}, \quad (3.10)$$

dans le cadre d'un élément poutre elle est égale à $\tilde{G}_1^{①/②}$. La figure 3.2 permet de visualiser les deux phases avec par exemple en bleu le mortier et en vert le granulat, la limite entre

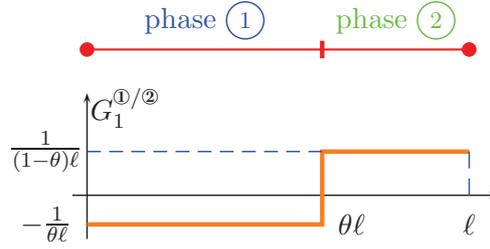


FIG. 3.2 – Mode incompatible pour un élément poutre bi-phasique

les deux phases étant paramétrée par un scalaire adimensionnel θ , ℓ étant la longueur de la barre. Contrairement à l'élément barre du premier chapitre, les deux phases sont caractérisées par leur module d'Young (E_1, E_2) et en plus par leur module de cisaillement (G_1, G_2) respectifs.

En prenant en compte la fonction $G_1^{\textcircled{1}/\textcircled{2}}$, les champs de déformations pour la phase ① et ② s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon^{\textcircled{1}} = \mathbf{B}\mathbf{u} + G_1^{\textcircled{1}}[|\epsilon|] \\ \epsilon^{\textcircled{2}} = \mathbf{B}\mathbf{u} + G_1^{\textcircled{2}}[|\epsilon|] \\ \gamma_v^{\textcircled{1}} = \mathbf{B}\mathbf{v} + G_1^{\textcircled{1}}[|\gamma|]_v \\ \gamma_v^{\textcircled{2}} = \mathbf{B}\mathbf{v} + G_1^{\textcircled{2}}[|\gamma|]_v \\ \gamma_w^{\textcircled{1}} = \mathbf{B}\mathbf{w} + G_1^{\textcircled{1}}[|\gamma|]_w \\ \gamma_w^{\textcircled{2}} = \mathbf{B}\mathbf{w} + G_1^{\textcircled{2}}[|\gamma|]_w \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Il est alors ensuite possible d'expliciter les lois de comportement dans chaque phase de la poutre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}^{\textcircled{1}}(\mathbf{B}\mathbf{u} + G_1^{\textcircled{1}}[|\epsilon|]) = E_1 \epsilon^{\textcircled{1}} = E_1 (\mathbf{B}\mathbf{u} + G_1^{\textcircled{1}}[|\epsilon|]) \\ \tilde{\sigma}^{\textcircled{2}}(\mathbf{B}\mathbf{u} + G_1^{\textcircled{2}}[|\epsilon|]) = E_2 \epsilon^{\textcircled{2}} = E_2 (\mathbf{B}\mathbf{u} + G_1^{\textcircled{2}}[|\epsilon|]) \\ \tilde{\tau}_v^{\textcircled{1}}(\mathbf{B}\mathbf{v} + G_1^{\textcircled{1}}[|\gamma|]_v) = G_1 \gamma_v^{\textcircled{1}} = G_1 (\mathbf{B}\mathbf{v} + G_1^{\textcircled{1}}[|\gamma|]_v) \\ \tilde{\tau}_v^{\textcircled{2}}(\mathbf{B}\mathbf{v} + G_1^{\textcircled{2}}[|\gamma|]_v) = G_2 \gamma_v^{\textcircled{2}} = G_2 (\mathbf{B}\mathbf{v} + G_1^{\textcircled{2}}[|\gamma|]_v) \\ \tilde{\tau}_w^{\textcircled{1}}(\mathbf{B}\mathbf{w} + G_1^{\textcircled{1}}[|\gamma|]_w) = G_1 \gamma_w^{\textcircled{1}} = G_1 (\mathbf{B}\mathbf{w} + G_1^{\textcircled{1}}[|\gamma|]_w) \\ \tilde{\tau}_w^{\textcircled{2}}(\mathbf{B}\mathbf{w} + G_1^{\textcircled{2}}[|\gamma|]_w) = G_2 \gamma_w^{\textcircled{2}} = G_2 (\mathbf{B}\mathbf{w} + G_1^{\textcircled{2}}[|\gamma|]_w) \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Là encore, pour plus de clarté, nous écrivons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}^{\textcircled{1}}(\mathbf{B}\mathbf{u} + G_1^{\textcircled{1}}[|\epsilon|]) = \tilde{\sigma}^{\textcircled{1}}(\mathbf{u}, [|\epsilon|]) \\ \tilde{\sigma}^{\textcircled{2}}(\mathbf{B}\mathbf{u} + G_1^{\textcircled{2}}[|\epsilon|]) = \tilde{\sigma}^{\textcircled{2}}(\mathbf{u}, [|\epsilon|]) \\ \tilde{\tau}_v^{\textcircled{1}}(\mathbf{B}\mathbf{v} + G_1^{\textcircled{1}}[|\gamma|]_v) = \tilde{\tau}_v^{\textcircled{1}}(\mathbf{v}, [|\gamma|]_v) \\ \tilde{\tau}_v^{\textcircled{2}}(\mathbf{B}\mathbf{v} + G_1^{\textcircled{2}}[|\gamma|]_v) = \tilde{\tau}_v^{\textcircled{2}}(\mathbf{v}, [|\gamma|]_v) \\ \tilde{\tau}_w^{\textcircled{1}}(\mathbf{B}\mathbf{w} + G_1^{\textcircled{1}}[|\gamma|]_w) = \tilde{\tau}_w^{\textcircled{1}}(\mathbf{w}, [|\gamma|]_w) \\ \tilde{\tau}_w^{\textcircled{2}}(\mathbf{B}\mathbf{w} + G_1^{\textcircled{2}}[|\gamma|]_w) = \tilde{\tau}_w^{\textcircled{2}}(\mathbf{w}, [|\gamma|]_w) \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Finalement, le système 3.9 s'écrit dans le cadre d'une poutre bi-phasique :

$$\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e(\mathbf{d}, [|\epsilon|], [|\gamma|]_v, [|\gamma|]_w) - \mathbf{f}_{ext}^e] = \mathbf{0} \quad (3.14a)$$

$$\int_{\Omega_e} \tilde{G}_1^{\textcircled{1}/\textcircled{2}} \tilde{\sigma}^{\textcircled{1}/\textcircled{2}} d\Omega = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \quad (3.14b)$$

$$\int_{\Omega_e} \tilde{G}_1^{\textcircled{1}/\textcircled{2}} \tilde{\tau}_v^{\textcircled{1}/\textcircled{2}} d\Omega = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \quad (3.14c)$$

$$\int_{\Omega_e} \tilde{G}_1^{\textcircled{1}/\textcircled{2}} \tilde{\tau}_w^{\textcircled{1}/\textcircled{2}} d\Omega = 0 \quad \forall e \in [1, n_{elm}] \quad (3.14d)$$

où

$$\mathbf{f}_{int}^e = \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_{1,e}} \mathbf{B}^T E_1 (\mathbf{B}\mathbf{u} + G_1^{\textcircled{1}}[|\epsilon|]) d\Omega_1 + \int_{\Omega_{2,e}} \mathbf{B}^T E_2 (\mathbf{B}\mathbf{u} + G_1^{\textcircled{2}}[|\epsilon|]) d\Omega_2 \\ \int_{\Omega_{1,e}} \mathbf{B}^T G_1 (\mathbf{B}\mathbf{v} + G_1^{\textcircled{1}}[|\gamma|]_v) d\Omega_1 + \int_{\Omega_{2,e}} \mathbf{B}^T G_2 (\mathbf{B}\mathbf{v} + G_1^{\textcircled{2}}[|\gamma|]_v) d\Omega_2 \\ \int_{\Omega_{1,e}} \mathbf{B}^T G_1 (\mathbf{B}\mathbf{w} + G_1^{\textcircled{1}}[|\gamma|]_w) d\Omega_1 + \int_{\Omega_{2,e}} \mathbf{B}^T G_2 (\mathbf{B}\mathbf{w} + G_1^{\textcircled{2}}[|\gamma|]_w) d\Omega_2 \end{array} \right\} \quad (3.15)$$

Les équations (3.14b), (3.14c) et (3.14d) proviennent de l'ajout des trois discontinuités faibles. En suivant le même raisonnement qu'au chapitre un, elles peuvent être explicitées sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{[|\epsilon|]} = -\tilde{\sigma}^{\textcircled{1}} + \tilde{\sigma}^{\textcircled{2}} = 0 \\ h_{[|\gamma|]_v} = -\tilde{\tau}_v^{\textcircled{1}} + \tilde{\tau}_v^{\textcircled{2}} = 0 \\ h_{[|\gamma|]_w} = -\tilde{\tau}_w^{\textcircled{1}} + \tilde{\tau}_w^{\textcircled{2}} = 0 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Il est maintenant possible de linéariser (3.14) par rapport à \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} , $[|\epsilon|]$, $[|\gamma|]_v$ et $[|\gamma|]_w$ afin d'obtenir le système matriciel à résoudre. À chaque pas de temps n , il est nécessaire d'itérer k fois pour arriver à la convergence du problème. Soit X une équation d'équilibre dépendante des variables Ξ_i , la linéarisation de X par rapport à Ξ_i s'écrit alors :

$$\mathcal{L}(X) = X \Big|_{n+1}^{(k)} + \sum_i \frac{\partial X}{\partial \Xi_i} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \Xi_i \Big|_{n+1}^{(k+1)} = 0 \quad (3.17)$$

3.3 Linéarisation du problème (3.14)

3.3.1 Linéarisation de (3.14a)

3.3.1.1 Linéarisation par rapport à \mathbf{u} , \mathbf{v} et \mathbf{w}

Ici $X = \mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, [|\epsilon|], [|\gamma|]_v, [|\gamma|]_w) - \mathbf{f}_{ext}^e]$ et les variables Ξ_i sont \mathbf{u} , \mathbf{v} et \mathbf{w} . La linéarisation de (3.14a) donne alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{e=1}^{nelm} \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{u} \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \tilde{\tau}_v}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{v} \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega \right. \\ \left. + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \tilde{\tau}_w}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{w} \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega \right] = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \Big|_{n+1}^{(k)}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

qui se décompose en

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{e=1}^{nelm} \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{u} \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \tilde{\tau}_v}{\partial \gamma_v} \frac{\partial \gamma_v}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{v} \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega \right. \\ \left. + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \tilde{\tau}_w}{\partial \gamma_w} \frac{\partial \gamma_w}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{w} \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega \right] = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \Big|_{n+1}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{e=1}^{nelm} \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \epsilon} \mathbf{B} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{u} \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \tilde{\tau}_v}{\partial \gamma_v} \mathbf{B} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{v} \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega \right. \\ \left. + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \tilde{\tau}_w}{\partial \gamma_w} \mathbf{B} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{w} \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega \right] = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \Big|_{n+1}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

En introduisant les relations de comportement et en prenant en compte les différents E (E_1, E_2) et G (G_1, G_2), il vient alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{e=1}^{nelm} \left[\int_{\Omega_{e,1}} \mathbf{B}^T E_1 \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_1 + \int_{\Omega_{e,2}} \mathbf{B}^T E_2 \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_2 \right. \\ \left. + \int_{\Omega_{e,1}} \mathbf{B}^T G_1 \mathbf{B} \Delta \mathbf{v} \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_1 + \int_{\Omega_{e,2}} \mathbf{B}^T G_2 \mathbf{B} \Delta \mathbf{v} \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_2 \right. \\ \left. + \int_{\Omega_{e,1}} \mathbf{B}^T G_1 \mathbf{B} \Delta \mathbf{w} \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_1 + \int_{\Omega_{e,2}} \mathbf{B}^T G_2 \mathbf{B} \Delta \mathbf{w} \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_2 \right] \\ = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \Big|_{n+1}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

En intégrant sur les domaines $\Omega_{e,1}$ et $\Omega_{e,2}$, avec A la section de la poutre, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{e=1}^{nelm} \left[\mathbf{B}^T E_1 \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \Big|_{n+1}^{(k+1)} \theta A \ell + \mathbf{B}^T E_2 \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \Big|_{n+1}^{(k+1)} (1 - \theta) A \ell \right. \\ \left. + \mathbf{B}^T G_1 \mathbf{B} \Delta \mathbf{v} \Big|_{n+1}^{(k+1)} \theta A \ell + \mathbf{B}^T G_2 \mathbf{B} \Delta \mathbf{v} \Big|_{n+1}^{(k+1)} (1 - \theta) A \ell \right. \\ \left. + \mathbf{B}^T G_1 \mathbf{B} \Delta \mathbf{w} \Big|_{n+1}^{(k+1)} \theta A \ell + \mathbf{B}^T G_2 \mathbf{B} \Delta \mathbf{w} \Big|_{n+1}^{(k+1)} (1 - \theta) A \ell \right] \\ = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \Big|_{n+1}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

ou encore

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{e=1}^{nelm} \left[\mathbf{B}^T (\theta E_1 + (1 - \theta) E_2) \text{Al} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \Big|_{n+1}^{(k+1)} + \mathbf{B}^T (\theta G_1 + (1 - \theta) G_2) \text{Al} \mathbf{B} \Delta \mathbf{v} \Big|_{n+1}^{(k+1)} \right. \\ & \left. + \mathbf{B}^T (G_1 + (1 - \theta) G_2) \text{Al} \mathbf{B} \Delta \mathbf{w} \Big|_{n+1}^{(k+1)} \right] = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \Big|_{n+1}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.3.1.2 Linéarisation par rapport à $[\epsilon]$, $[\gamma]_v$ et $[\gamma]_w$

Ici $X = \mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, [\epsilon], [\gamma]_v, [\gamma]_w) - \mathbf{f}_{ext}^e]$ et les variables Ξ_i sont $[\epsilon]$, $[\gamma]_v$ et $[\gamma]_w$. La linéarisation de (3.14a) donne alors :

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{e=1}^{nelm} \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial [\epsilon]} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [\epsilon] \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \tilde{\tau}_v}{\partial [\gamma]_v} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [\gamma]_v \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega \right. \\ & \left. + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \tilde{\tau}_w}{\partial [\gamma]_w} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [\gamma]_w \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega \right] = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \Big|_{n+1}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

qui se décompose en

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{e=1}^{nelm} \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial [\epsilon]} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [\epsilon] \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \tilde{\tau}_v}{\partial \gamma_v} \frac{\partial \gamma_v}{\partial [\gamma]_v} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [\gamma]_v \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega \right. \\ & \left. + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \tilde{\tau}_w}{\partial \gamma_w} \frac{\partial \gamma_w}{\partial [\gamma]_w} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [\gamma]_w \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega \right] = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \Big|_{n+1}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

ou encore

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{e=1}^{nelm} \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \epsilon} G_1^{\textcircled{1}/\textcircled{2}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [\epsilon] \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \tilde{\tau}_v}{\partial \gamma_v} G_1^{\textcircled{1}/\textcircled{2}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [\gamma]_v \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega \right. \\ & \left. + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \tilde{\tau}_w}{\partial \gamma_w} G_1^{\textcircled{1}/\textcircled{2}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [\gamma]_w \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega \right] = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \Big|_{n+1}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.26)$$

En introduisant les relations de comportement et en prenant en compte les différents E (E_1, E_2) et G (G_1, G_2), cela donne :

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{e=1}^{nelm} \left[\int_{\Omega_{e,1}} \mathbf{B}^T E_1 G_1^{\textcircled{1}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [\epsilon] \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_1 + \int_{\Omega_{e,2}} \mathbf{B}^T E_2 G_1^{\textcircled{2}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [\epsilon] \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_2 \right. \\ & \left. + \int_{\Omega_{e,1}} \mathbf{B}^T G_1 G_1^{\textcircled{1}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [\gamma]_v \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_1 + \int_{\Omega_{e,2}} \mathbf{B}^T G_2 G_1^{\textcircled{2}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [\gamma]_v \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_2 \right. \\ & \left. + \int_{\Omega_{e,1}} \mathbf{B}^T G_1 G_1^{\textcircled{1}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [\gamma]_w \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_1 + \int_{\Omega_{e,2}} \mathbf{B}^T G_2 G_1^{\textcircled{2}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [\gamma]_w \Big|_{n+1}^{(k+1)} d\Omega_2 \right] \\ & = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \Big|_{n+1}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

En remplaçant $G_1^{\textcircled{1}}$ et $G_1^{\textcircled{2}}$ par leur expression et en intégrant sur chaque domaine $\Omega_{e,1}$ et $\Omega_{e,2}$, avec A section de la poutre, il vient :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{A}_{e=1}^{nelm} \left[-\mathbf{B}^T E_1 \Delta[|\epsilon|] \Big|_{n+1}^{(k+1)} A + \mathbf{B}^T E_2 \Delta[|\epsilon|] \Big|_{n+1}^{(k+1)} A \right. \\
 & \quad - \mathbf{B}^T G_1 \Delta[|\gamma|]_v \Big|_{n+1}^{(k+1)} A + \mathbf{B}^T G_2 \Delta[|\gamma|]_v \Big|_{n+1}^{(k+1)} A \\
 & \quad \left. - \mathbf{B}^T G_1 \Delta[|\gamma|]_w \Big|_{n+1}^{(k+1)} A + \mathbf{B}^T G_2 \Delta[|\gamma|]_w \Big|_{n+1}^{(k+1)} A \right] \\
 & = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \Big|_{n+1}^{(k)}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{A}_{e=1}^{nelm} \left[\mathbf{B}^T (-E_1 + E_2) A \Delta[|\epsilon|] \Big|_{n+1}^{(k+1)} + \mathbf{B}^T (-G_1 + G_2) A \Delta[|\gamma|]_v \Big|_{n+1}^{(k+1)} \right. \\
 & \quad \left. + \mathbf{B}^T (-G_1 + G_2) A \Delta[|\gamma|]_w \Big|_{n+1}^{(k+1)} \right] = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \Big|_{n+1}^{(k)}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

3.3.2 Linéarisation de (3.14b)

(3.14b) s'écrit : $h_{|\epsilon|} = -\tilde{\sigma}^{\textcircled{1}} + \tilde{\sigma}^{\textcircled{2}} = 0$. En utilisant (3.17), la linéarisation de (3.14b) est :

$$\mathcal{L}(h_{|\epsilon|}) = h_{|\epsilon|} \Big|_{n+1}^{(k)} + \frac{\partial h_{|\epsilon|}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{u} \Big|_{n+1}^{(k+1)} + \frac{\partial h_{|\epsilon|}}{\partial [|\epsilon|]} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [|\epsilon|] \Big|_{n+1}^{(k+1)} = 0 \tag{3.30}$$

ou encore

$$\frac{\partial h_{|\epsilon|}}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{u} \Big|_{n+1}^{(k+1)} + \frac{\partial h_{|\epsilon|}}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial [|\epsilon|]} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta [|\epsilon|] \Big|_{n+1}^{(k+1)} = -h_{|\epsilon|} \Big|_{n+1}^{(k)} \tag{3.31}$$

En utilisant les lois de comportement, il vient alors :

$$\mathbf{B}^T (-E_1 + E_2) \Delta \mathbf{u} \Big|_{n+1}^{(k+1)} + \left(\frac{E_1}{\theta \ell} + \frac{E_2}{(1-\theta)\ell} \right) \Delta [|\epsilon|] \Big|_{n+1}^{(k+1)} = -h_{|\epsilon|} \Big|_{n+1}^{(k)} \tag{3.32}$$

3.3.3 Linéarisation de (3.14c)

(3.14c) s'écrit $h_{|\gamma|_v} = -\tilde{\tau}_v^{\textcircled{1}} + \tilde{\tau}_v^{\textcircled{2}} = 0$. Par analogie avec la linéarisation précédente, nous aurons :

$$\mathbf{B}^T (-G_1 + G_2) \Delta \mathbf{v} \Big|_{n+1}^{(k+1)} + \left(\frac{G_1}{\theta \ell} + \frac{G_2}{(1-\theta)\ell} \right) \Delta [|\gamma|]_v \Big|_{n+1}^{(k+1)} = -h_{|\gamma|_v} \Big|_{n+1}^{(k)} \tag{3.33}$$

3.3.4 Linéarisation de (3.14d)

(3.14d) s'écrit $h_{|\gamma|_w} = -\tilde{\tau}_w^{\textcircled{1}} + \tilde{\tau}_w^{\textcircled{2}} = 0$. Par analogie avec la linéarisation précédente, il vient :

$$\mathbf{B}^T (-G_1 + G_2) \Delta \mathbf{w} \Big|_{n+1}^{(k+1)} + \left(\frac{G_1}{\theta \ell} + \frac{G_2}{(1-\theta)\ell} \right) \Delta [|\gamma|]_w \Big|_{n+1}^{(k+1)} = -h_{|\gamma|_w} \Big|_{n+1}^{(k)} \tag{3.34}$$

Finalement, en écrivant les équations 3.23, 3.29, 3.32, 3.33 et 3.34 sous forme matricielle, nous avons :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{a}_{[\epsilon]} & \mathbf{a}_{[[\gamma]]_v} & \mathbf{a}_{[[\gamma]]_w} \\ \mathbf{a}_{[\epsilon]}^T & p & 0 & 0 \\ \mathbf{a}_{[[\gamma]]_v}^T & 0 & r & 0 \\ \mathbf{a}_{[[\gamma]]_w}^T & 0 & 0 & r \end{pmatrix}_{n+1}^{(k)} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta [[\epsilon]] \\ \Delta [[\gamma]]_v \\ \Delta [[\gamma]]_w \end{pmatrix}_{n+1}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \\ -h_{[\epsilon]} \\ h_{[[\gamma]]_v} \\ h_{[[\gamma]]_w} \end{pmatrix}_{n+1}^{(k)} \quad (3.35)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{B}^T(\theta E_1 + (1-\theta)E_2)A\ell\mathbf{B} + \mathbf{B}^T(\theta G_1 + (1-\theta)G_2)A\ell\mathbf{B} \\ &\quad + \mathbf{B}^T(G_1 + (1-\theta)G_2)A\ell\mathbf{B}] \\ \mathbf{a}_{[\epsilon]} &= \mathbf{B}^T(-E_1 + E_2)A \\ \mathbf{a}_{[[\gamma]]_v} &= \mathbf{a}_{[[\gamma]]_w} = \mathbf{B}^T(-G_1 + G_2)A \\ p &= \left(\frac{E_1}{\theta\ell} + \frac{E_2}{(1-\theta)\ell}\right) \\ r &= \left(\frac{G_1}{\theta\ell} + \frac{G_2}{(1-\theta)\ell}\right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.3.5 Procédure de résolution du problème (3.35)

La procédure de résolution de (3.35) se fait, là encore, à deux niveaux : le niveau global qui correspond à (3.14a) et le niveau local à (3.14b), (3.14c) et (3.14d). Dans l'esprit de la "operator split method", $\Delta [[\epsilon]]^{(k+1)}$, $\Delta [[\gamma]]_v^{(k+1)}$ et $\Delta [[\gamma]]_w^{(k+1)}$ sont tout d'abord calculés durant l'étape locale pour une valeur de d_{n+1} fixe. Cela revient à calculer localement $\Delta [[\epsilon]]^{(k+1)}$, $\Delta [[\gamma]]_v^{(k+1)}$ et $\Delta [[\gamma]]_w^{(k+1)}$ par l'intermédiaire du système en rouge dans (3.35). Une fois cette étape terminée, une condensation statique [Wilson, 1974] est réalisée sur $\Delta [[\epsilon]]^{(k+1)}$, $\Delta [[\gamma]]_v^{(k+1)}$ et $\Delta [[\gamma]]_w^{(k+1)}$ conduisant à une équation d'équilibre global avec une matrice de rigidité modifiée $\tilde{\mathbf{K}}$. L'algorithme traitant de la résolution locale est détaillé dans Alg. 3. Il est rappelé que les équations (3.14b), (3.14c) et (3.14d) sont linéaires, il n'y a donc pas besoin d'itérer pour calculer $\Delta [[\epsilon]]^{(k+1)}$, $\Delta [[\gamma]]_v^{(k+1)}$ et $\Delta [[\gamma]]_w^{(k+1)}$, ils sont calculés directement (étapes 4, 5, 6 de Alg. 3).

Une fois l'étape locale terminée, les résidus $h_{[\epsilon]}$, $h_{[[\gamma]]_v}$ et $h_{[[\gamma]]_w}$ sont égaux à zéro. Le système 3.35 se réécrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{a}_{[\epsilon]} & \mathbf{a}_{[[\gamma]]_v} & \mathbf{a}_{[[\gamma]]_w} \\ \mathbf{a}_{[\epsilon]}^T & p & 0 & 0 \\ \mathbf{a}_{[[\gamma]]_v}^T & 0 & r & 0 \\ \mathbf{a}_{[[\gamma]]_w}^T & 0 & 0 & r \end{pmatrix}_{n+1}^{(k)} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta [[\epsilon]] \\ \Delta [[\gamma]]_v \\ \Delta [[\gamma]]_w \end{pmatrix}_{n+1}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{n+1}^{(k)} \quad (3.37)$$

où $\Delta [[\epsilon]]^{(k+1)}$, $\Delta [[\gamma]]_v^{(k+1)}$ et $\Delta [[\gamma]]_w^{(k+1)}$ sont désormais connus.

Algorithm 3 Procédure locale pour un élément poutre bi-phasique

-
- 1: calcul du résidu : $h_{[[\epsilon]]}^{(j)} = -\tilde{\sigma}^{\textcircled{1},(j)} + \tilde{\sigma}^{\textcircled{2},(j)}$
 - 2: calcul du résidu : $h_{[[\gamma]]_v}^{(j)} = -\tilde{\tau}_v^{\textcircled{1},(j)} + \tilde{\tau}_v^{\textcircled{2},(j)}$
 - 3: calcul du résidu : $h_{[[\gamma]]_w}^{(j)} = -\tilde{\tau}_w^{\textcircled{1},(j)} + \tilde{\tau}_w^{\textcircled{2},(j)}$
 - 4: calcul de l'incrément : $\Delta[[\epsilon]]^{(j+1)} = -\frac{h_{[[\epsilon]]}^{(j)}}{\frac{E_1}{\theta\ell} + \frac{E_2}{(1-\theta)\ell}}$
 - 5: calcul de l'incrément : $\Delta[[\gamma]]_v^{(j+1)} = -\frac{h_{[[\gamma]]_v}^{(j)}}{\frac{G_1}{\theta\ell} + \frac{G_2}{(1-\theta)\ell}}$
 - 6: calcul de l'incrément : $\Delta[[\gamma]]_w^{(j+1)} = -\frac{h_{[[\gamma]]_w}^{(j)}}{\frac{G_1}{\theta\ell} + \frac{G_2}{(1-\theta)\ell}}$
 - 7: mise à jour de l'incrément : $[[\epsilon]]^{(j+1)} = [[\epsilon]]^{(j)} + \Delta[[\epsilon]]^{(j+1)}$
 - 8: mise à jour de l'incrément : $[[\gamma]]_v^{(j+1)} = [[\gamma]]_v^{(j)} + \Delta[[\gamma]]_v^{(j+1)}$
 - 9: mise à jour de l'incrément : $[[\gamma]]_w^{(j+1)} = [[\gamma]]_w^{(j)} + \Delta[[\gamma]]_w^{(j+1)}$
 - 10: mise à jour : $\tilde{\sigma}^{\textcircled{1},(j+1)}, \tilde{\sigma}^{\textcircled{2},(j+1)}$
 - 11: mise à jour : $\tilde{\tau}_v^{\textcircled{1},(j+1)}, \tilde{\tau}_v^{\textcircled{2},(j+1)}$
 - 12: mise à jour : $\tilde{\tau}_w^{\textcircled{1},(j+1)}, \tilde{\tau}_w^{\textcircled{2},(j+1)}$
-

La seconde étape consiste alors à réaliser la condensation statique de $\Delta[[\epsilon]]^{(k+1)}$, $\Delta[[\gamma]]_v^{(k+1)}$ et $\Delta[[\gamma]]_w^{(k+1)}$. Les trois dernières lignes du système 3.37 peuvent être écrites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta[[\epsilon]]_{n+1}^{(k+1)} = -\frac{\mathbf{a}_{[[\epsilon]]}^T}{p} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} \\ \Delta[[\gamma]]_v^{(k+1)} \Big|_{n+1} = -\frac{\mathbf{a}_{[[\gamma]]_v}^T}{r} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} \\ \Delta[[\gamma]]_w^{(k+1)} \Big|_{n+1} = -\frac{\mathbf{a}_{[[\gamma]]_w}^T}{r} \Big|_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)}, \end{array} \right. \quad (3.38)$$

ce qui donne en injectant dans la première ligne de (3.37) :

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{K}_{n+1}^{(k)} - \frac{\mathbf{a}_{[[\epsilon]]} \mathbf{a}_{[[\epsilon]]}^T}{p} \Big|_{n+1}^{(k)} - \frac{\mathbf{a}_{[[\gamma]]_v} \mathbf{a}_{[[\gamma]]_v}^T}{r} \Big|_{n+1}^{(k)} - \frac{\mathbf{a}_{[[\gamma]]_w} \mathbf{a}_{[[\gamma]]_w}^T}{r} \Big|_{n+1}^{(k)} \right) \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} \\ & = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \Big|_{n+1}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.39)$$

ou encore

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} = -\mathbf{A}_{e=1}^{nelm} [\mathbf{f}_{int}^e - \mathbf{f}_{ext}^e] \Big|_{n+1}^{(k)} \quad (3.40)$$

avec

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{K}_{n+1}^{(k)} - \frac{\mathbf{a}_{[[\epsilon]]} \mathbf{a}_{[[\epsilon]]}^T}{p} \Big|_{n+1}^{(k)} - \frac{\mathbf{a}_{[[\gamma]]_v} \mathbf{a}_{[[\gamma]]_v}^T}{r} \Big|_{n+1}^{(k)} - \frac{\mathbf{a}_{[[\gamma]]_w} \mathbf{a}_{[[\gamma]]_w}^T}{r} \Big|_{n+1}^{(k)}$$

Notons encore que l'on retrouve un problème éléments finis classique à résoudre où l'incrément $\Delta \mathbf{d}^{(k+1)}$ est cherché. $\hat{\mathbf{K}}$ prend en compte les termes de la linéarisation de 3.14 et a la même taille que \mathbf{K} ; l'ajout des trois inconnues locales ne se répercute pas au niveau global, la taille du système global à résoudre est inchangée.

Nous constatons finalement que la technicité de résolution du problème 3.14 est la même que celle utilisée au chapitre un. Dans la prochaine partie, nous parlerons à nouveau de convergence du maillage treillis ; cette fois-ci, le module de cisaillement sera aussi étudié.

3.4 Convergence globale en élasticité homogène

Afin de valider ce processus de maillage en élasticité homogène, nous avons repris la méthode utilisée au chapitre un en partie 1.4.1 : l'effet de la densité de maillage sur les valeurs, calculées par simulations éléments finis, du module de compressibilité macroscopique K_{calcul} d'une part et du module de cisaillement macroscopique G_{calcul} d'autre part, est étudié. Nous rappelons que le domaine d'étude est un cube de 100 mm de côté et que la densité de maillage varie de 757 à 0,30 mm³/élément. Les figures 3.3 et 3.5 montrent que le module de compressibilité K_{calcul} et le module de cisaillement G_{calcul} ont tous deux un comportement asymptotique et tendent à se stabiliser lorsque le maillage est raffiné.

Finalement, l'écart relatif e entre la valeur exacte des modules de compressibilité (= 5556 MPa) et de cisaillement (= 4667 MPa) et celle calculée par simulations numériques est étudié. Cela est illustré sur les figures 3.4 et 3.6 : pour 1458000 degrés de liberté, l'erreur relative pour le module de compressibilité est de 0,284 % et de 0,267 % pour le module de cisaillement. Un écart relatif e inférieur à 1 % comme critère de convergence peut de nouveau être fixé ; celui-ci est atteint autour des 300000 degrés de liberté pour K_{calcul} et G_{calcul} .

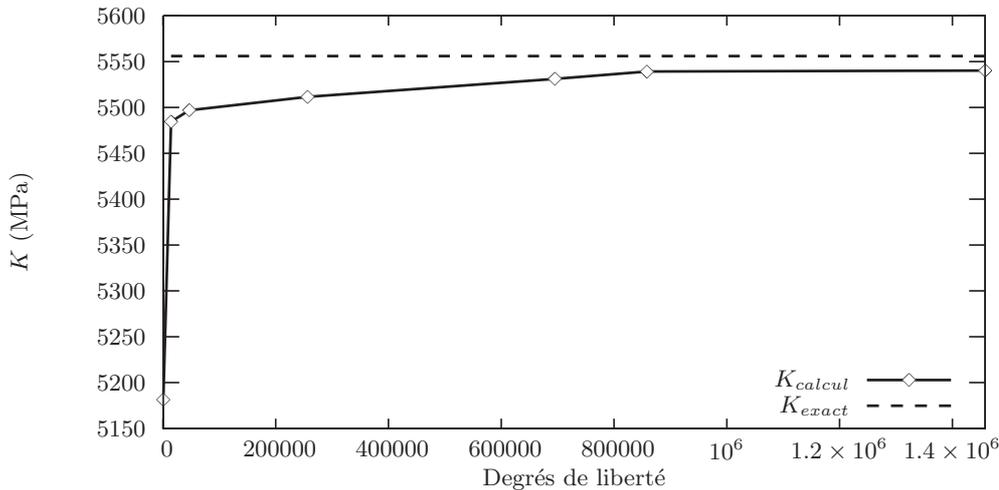


FIG. 3.3 – Effet de la densité de maillage sur la convergence globale du module de compressibilité macroscopique en élasticité homogène

La même remarque qu'au chapitre partie 1.4.1 peut être faite : la valeur numérique de convergence du maillage obtenue (autour des 300000 degrés de liberté) correspond au

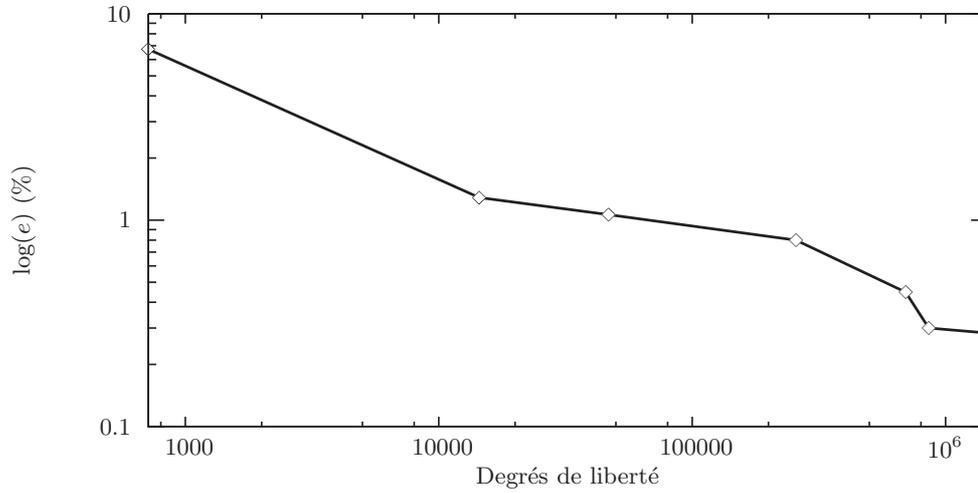


FIG. 3.4 – Effet de la densité de maillage sur l'erreur globale entre le module de compressibilité macroscopique exact et celui calculé en élasticité homogène

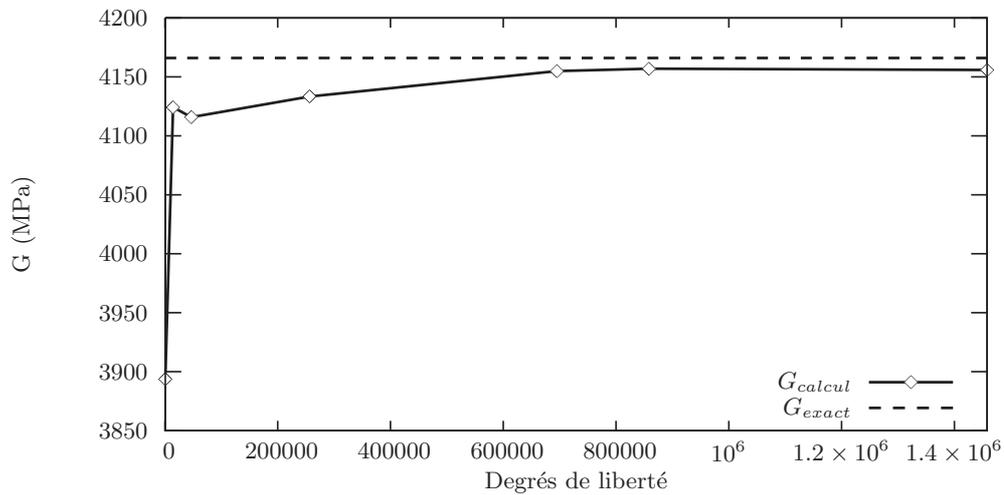


FIG. 3.5 – Effet de la densité de maillage sur la convergence globale du module de cisaillement macroscopique en élasticité homogène

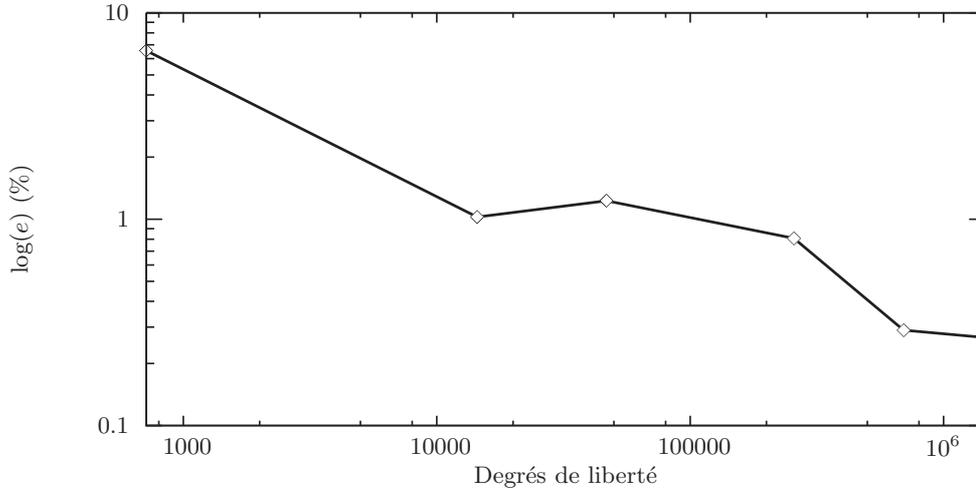


FIG. 3.6 – Effet de la densité de maillage sur l’erreur globale entre le module de cisaillement macroscopique exact et celui calculé en élasticité homogène

cas d’un essai de traction hydrostatique pour le module de compressibilité et d’un essai de cisaillement pure pour le module de cisaillement, avec des conditions aux limites de type déformations homogènes appliquées sur la surface du cube; cette valeur de degrés de liberté n’est donc pas représentative de tous les essais et de toutes les conditions aux limites. Elle permet cependant de valider la méthode de génération du maillage dans un cas particulier.

La prochaine sous-partie va traiter de nouveau de la convergence du maillage mais cette fois-ci, en élasticité hétérogène. Là encore, l’étude va porter sur le module de compressibilité (comme au chapitre un) et sur le module de cisaillement. Les trois mêmes fractions volumiques qu’au chapitre un sont considérées : 23, 30 et 37 %.

3.5 Convergence globale en élasticité hétérogène

Nous reprenons la même méthode que dans la partie 1.7.3 du chapitre un : l’effet de la densité de maillage sur les valeurs des modules de compressibilité apparent K^{app} et de cisaillement apparent G^{app} calculées par simulations éléments finis pour différentes fractions volumiques d’inclusions P_2 (23 %, 30 % et 37 %) est étudié. Le domaine d’étude Ω est encore un cube de 100 mm \times 100 mm \times 100 mm de côté. Là encore, la géométrie de la microstructure reste inchangée, mais différentes densités de maillage sont utilisées (voir Fig. 3.9(a) et Fig. 3.9(b)).

Le module de compressibilité (de cisaillement) du mortier K_1 (G_1) vaut 5556 MPa (4167 MPa) et celui des inclusions K_2 (G_2) vaut 38889 MPa (29166 MPa). Pour le calcul de K^{app} , des conditions de déformations homogènes sont appliquées sur les faces du cube telles que

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathcal{E}_K \cdot \mathbf{x} \text{ avec } \mathcal{E}_K = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Le module de compressibilité apparent K^{app} est déterminé par la relation

$$K^{app} = \frac{1}{3} \text{trace} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad (3.42)$$

en faisant l'hypothèse que la réponse est isotrope.

Pour le calcul de G^{app} , des conditions de déformations homogènes sont appliquées sur les faces du cube telles que

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathcal{E}_G \cdot \mathbf{x} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Le module de cisaillement apparent G^{app} est alors déterminé par la relation

$$G^{app} = \langle \boldsymbol{\sigma}_{12} \rangle \quad (3.44)$$

en faisant l'hypothèse que la réponse est isotrope.

Les figures 3.7 (la même qu'au chapitre un) et 3.8 montrent la convergence du module de compressibilité apparent et du module de cisaillement apparent en fonction du nombre de degrés de liberté : ici aussi, quelles que soient les fractions volumiques étudiées, une valeur asymptotique est atteinte. Comme vu au chapitre un, il faut à peu près, quelle que soit la fraction volumique, 300000 degrés de liberté pour avoir une variation de la réponse inférieure à 1 % pour le module de compressibilité. Pour le module de cisaillement, il faut à peu près 400000 degrés de liberté. La figure 3.9(a) représente la microstructure générée pour $P_2 = 30$ % et la figure 3.9(b), le champ de déplacements au dernier pas de temps obtenu en fonction de la finesse du maillage pour les conditions aux limites (3.43). Il est important de noter, comme pour le chapitre un, que la valeur de degrés de liberté obtenue pour le module de cisaillement (400000) correspond seulement au cas de conditions aux limites en déformations homogènes. Il serait intéressant de la comparer avec des résultats obtenus avec des conditions aux limites en contraintes homogènes ou périodiques.

Ce chapitre a été l'occasion de proposer une perspective différente à l'utilisation des éléments barres bi-phasiques, à savoir des poutres de Timoshenko bi-phasiques dont la cinématique de rotation a été éliminée et ce afin de conserver un nombre de degrés de liberté restreint et d'éliminer le problème d'identification des inerties. L'étude de la convergence du maillage en élasticité hétérogène nous a fourni des valeurs en termes de degrés de liberté à partir desquelles la variation relative de la réponse reste inférieure à 1 %. Cette étude n'a été menée que pour des conditions aux limites en déformations homogènes, il faudrait donc la poursuivre avec des conditions aux limites en contraintes homogènes et périodiques. De plus, une étude pour déterminer la taille du VER pour le module de cisaillement pourrait être envisagée et le volume obtenu pourrait alors être comparé avec celui obtenu pour le module de compressibilité. À ce stade de développement, seul le comportement linéaire bi-phasique de la poutre a été étudié ; il faudrait en plus du caractère bi-phasique être capable d'incorporer la fissuration au sein de chaque poutre afin de prendre en compte, dans les réponses macroscopiques, aussi l'énergie dissipée en mode II. Cette perspective sera rappelée en conclusion de cette thèse.

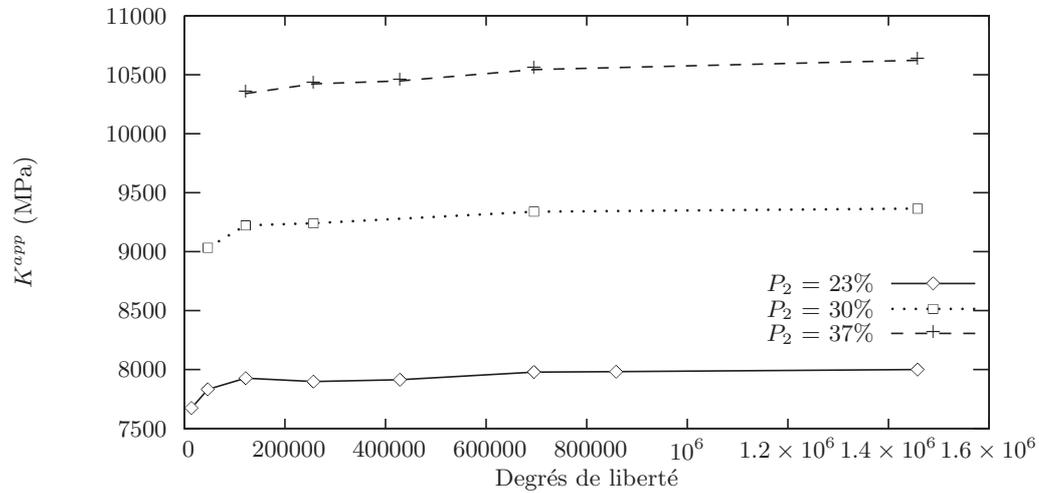


FIG. 3.7 – Effet de la densité de maillage et de la fraction volumique P_2 sur la convergence globale du module de compressibilité apparent

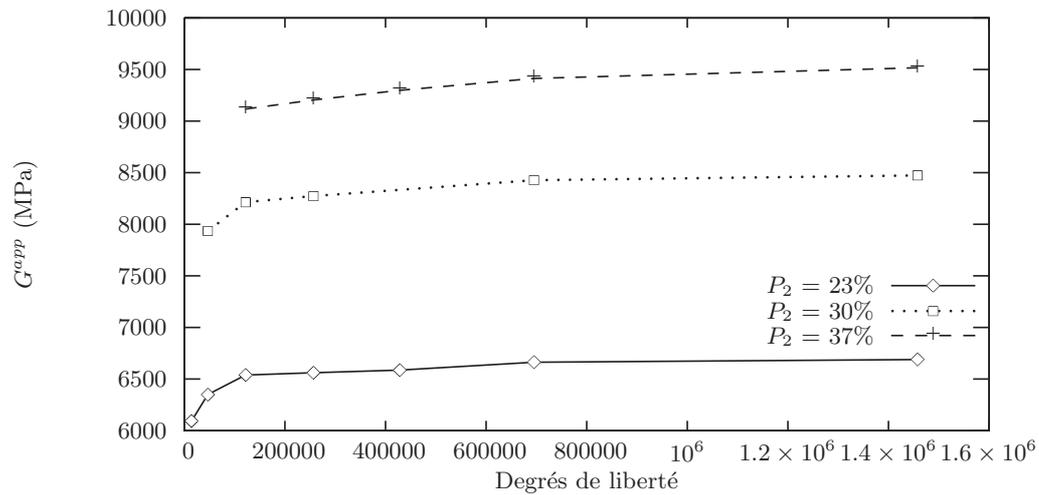
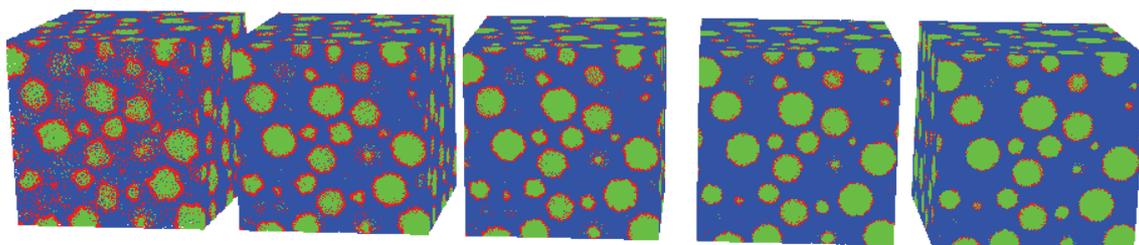
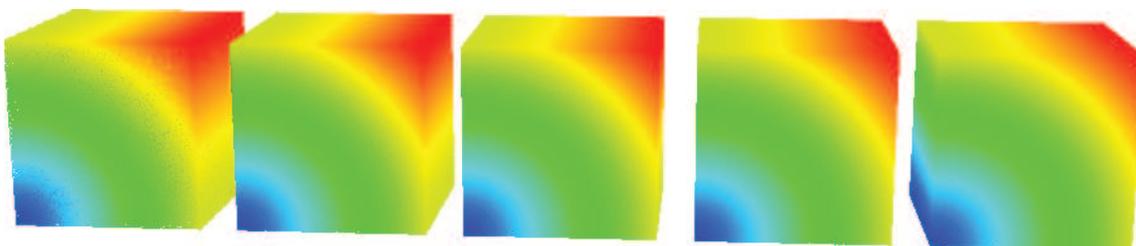


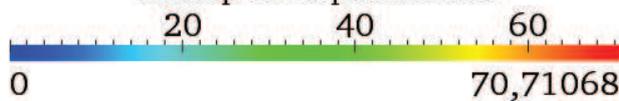
FIG. 3.8 – Effet de la densité de maillage et de la fraction volumique P_2 sur la convergence globale du module de cisaillement apparent



(a) Microstructure ($P_2 = 30\%$) : de 97190 à 3257000 éléments



Champ de déplacements



(b) Champ de déplacements ($P_2 = 30\%$) : de 97190 à 3257000 éléments (conditions aux limites (3.43))

FIG. 3.9 – Microstructure ($P_2 = 30\%$) et champ de déplacements (conditions aux limites (3.43))

Dans le dernier chapitre, nous allons revenir aux éléments barres pour s'intéresser à deux exemples permettant d'illustrer l'approche multi-échelle séquencée : la modélisation d'une surface de rupture macroscopique deux dimensions et le calcul d'un tenseur de perméabilité macroscopique seront ainsi étudiés.

Chapitre 4

Applications de l'approche multi-échelle séquencée : surface de rupture et tenseur de perméabilité

Contents

4.1	Chargements complexes : surface de rupture	117
4.1.1	Bibliographie : surfaces de rupture	118
4.1.2	Programme de chargement	119
4.1.3	Surface de rupture macroscopique	120
4.2	Transfert de masse dans les milieux fissurés	127
4.2.1	Loi de Poiseuille	127
4.2.2	Formulation éléments finis du problème de transfert de masse	128
4.2.2.1	Formulation faible de l'équation de conservation de la masse	128
4.2.2.2	Discrétisation éléments finis de la formulation faible	129
4.2.2.3	Résolution du problème éléments finis	130
4.2.2.4	Matrice de perméabilité élémentaire \mathbf{k}^e	131
4.2.2.5	Tenseur de perméabilité macroscopique	133
4.2.3	Validations du modèle	134
4.2.3.1	Fissure modèle et loi de Poiseuille	134
4.2.3.2	Évolution de la perméabilité macroscopique en fonction de la réponse mécanique	137

Les deux exemples numériques suivants vont être l'occasion d'illustrer l'approche multi-échelle séquencée. Nous rappelons que cette dernière s'inscrit dans le cadre des méthodes d'homogénéisation numérique et qu'elle consiste à réaliser une séquence de calculs (analytiques ou numériques (éléments finis)) menés à l'échelle fine permettant de fournir soit des réponses constitutives du matériau étudié à partir desquelles des modèles macroscopiques vont être identifiés *a posteriori* (modèles qui permettront ensuite de mener une analyse éléments finis à l'échelle structurelle [Colliat et al., 2007]), soit des informations de type morphologique (détermination de la taille d'un VER [Kanit et al., 2003]). Les deux exemples présentés illustrent la première possibilité d'utilisation.

Le premier exemple s'inscrit dans le cadre des problèmes de chargements complexes (non-proportionnels, bi-axiaux...) d'une éprouvette en béton. Cette problématique est présente dans le nucléaire en considérant l'exemple d'une enceinte de confinement soumise à une pression interne dont la modélisation numérique nécessite un chargement bi-axial. Il serait alors intéressant numériquement de posséder une machine d'essais virtuels permettant d'imposer sur une éprouvette des chargements bi-axiaux et de déterminer la contrainte limite avant rupture de l'éprouvette de béton pour chaque chargement. Une fois toutes les contraintes limites avant rupture obtenues, une surface de rupture deux dimensions macroscopique pourrait alors être construite et utilisée dans un modèle phénoménologique macroscopique ([Brancherie and Ibrahimbegovic, 2009]). Là encore, l'approche multi-échelle séquencée prend tout son sens ; elle permet en effet de coupler le comportement mécanique à l'échelle fine avec l'échelle macroscopique pour laquelle une contrainte limite avant rupture est obtenue.

Le second exemple s'inscrit dans le cadre des problèmes de transfert de masse dans les milieux fissurés. Cette problématique est encore présente dans le nucléaire ; ctions par exemple l'évaluation du niveau d'étanchéité d'une enceinte nucléaire ou la prévision du comportement à très long terme des tunnels de stockage en béton des déchets nucléaires. Cette problématique est ainsi directement liée à la perméabilité du béton. Numériquement, il serait alors intéressant de pouvoir relier les grandeurs caractéristiques de la fissuration d'une éprouvette de béton (ouverture et l'orientation) à sa perméabilité. Dans ce contexte, l'approche reposant sur les discontinuités fortes prend tout son sens ; elle permet en effet d'avoir accès à l'ouverture de fissures (inconnue du problème) et de déterminer son orientation. D'autre part, l'approche multi-échelle séquencée permet de coupler l'échelle fine (échelle de l'élément barre) à laquelle la loi de perméabilité est introduite avec l'échelle macroscopique à laquelle la perméabilité est obtenue par calcul du débit sur les faces de l'éprouvette. À l'échelle fine, chaque fissure est considérée comme le siège d'un écoulement de Poiseuille entre deux plans espacés par l'ouverture de fissure.

Les deux sections suivantes vont ainsi présenter les résultats obtenus et détailler pratiquement comment sont réalisés les calculs.

4.1 Chargements complexes : surface de rupture

L'objectif est de construire une surface de rupture macroscopique numérique deux dimensions. Ainsi, dans une première partie, nous allons rappeler les approches couramment utilisées pour construire la surface de rupture macroscopique d'un matériau type

béton. Dans une seconde partie, nous présenterons l'approche retenue ; enfin les résultats numériques seront détaillés et étudiés dans une dernière partie.

4.1.1 Bibliographie : surfaces de rupture

Dans la littérature, les approches employées pour construire les surfaces de rupture macroscopique d'un matériau type béton reposent en général sur des modèles phénoménologiques : il existe ainsi des critères en contraintes, avec par exemple, la combinaison d'un critère de Rankine (pour les régions de bi-traction, de traction-compression et de compression-traction) et d'un critère de Drucker-Prager (pour la région de bi-compression) ([Nechnech et al., 2002] : Fig. 4.1(a), [Pituba and Fernandes, 2010] : Fig. 4.1(b)) mais aussi des critères en déformations comme le critère de Mazars ([Mazars, 1984]). D'autres exemples peuvent être trouvés dans [Reynouard et al., 2009]. Ces modèles s'inscrivent dans un cadre thermodynamique précis et sont bien adaptés aux calculs de structure. Ils nécessitent cependant de choisir convenablement le critère à utiliser en fonction du matériau et de la sollicitation retenus. Ainsi, dans le cas d'une surface seuil, cela implique l'identification de nombreux paramètres. Par ailleurs, ces modèles, du fait de leur caractère macroscopique, ont des difficultés à prendre en compte explicitement les hétérogénéités (formes, distribution, tailles et comportement) présentes aux échelles fines et jouant un rôle fondamental [Yaman et al., 2002] dans la plupart des phénomènes physiques observés à l'échelle macroscopique ; ils nécessitent aussi l'identification de nombreux paramètres afin de décrire correctement les mécanismes physiques (mécanismes de rupture par exemple) aux échelles fines à l'origine des observations macroscopiques. De ce fait, leur capacité de prédiction est assez limitée.

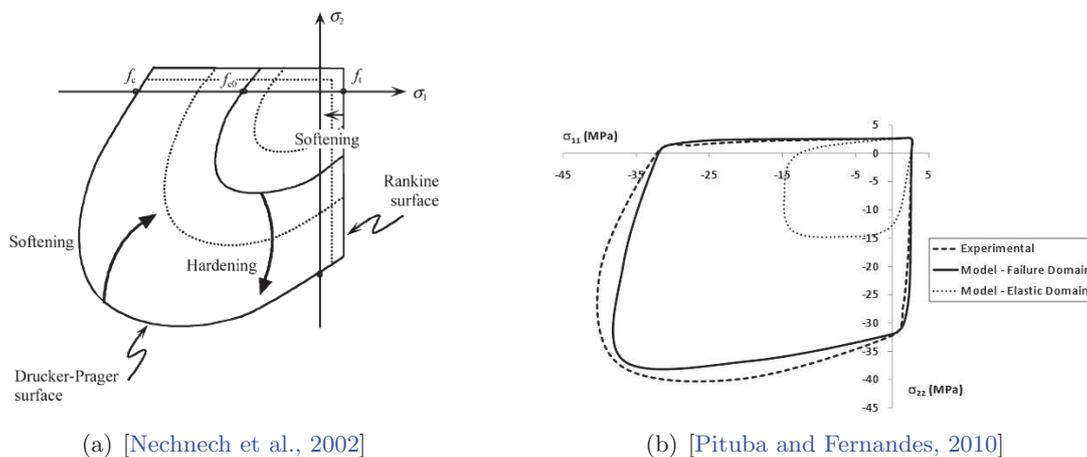


FIG. 4.1 – Surfaces de rupture deux dimensions en contraintes

L'approche multi-échelle séquentielle prend alors ici tout son sens : le couplage entre l'échelle fine (échelle de l'élément barre) à laquelle le comportement fragile est introduit, avec l'échelle macroscopique à laquelle la surface de rupture est obtenue par le calcul des contraintes ultimes avant rupture, se fait naturellement. Chaque point de la surface de rupture tient ainsi compte des mécanismes de rupture se déroulant aux échelles fines et de l'hétérogénéité du matériau.

4.1.2 Programme de chargement

L'essai consiste à réaliser sur une éprouvette de forme parallélépipédique des chargements bi-axiaux (traction-traction, traction-compression, compression-traction, compression-compression) jusqu'à rupture de l'éprouvette. Trois éprouvettes de béton de dimensions $100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ (Fig. 4.2) et de fractions volumiques d'inclusions différentes (Tab. 4.1) sont considérées. Elles sont soumises à des déplacements imposés bi-axiaux couvrant quatre régions (traction-traction, traction-compression, compression-traction, compression-compression). Leur résistance ultime en compression σ_{c_i} ($i = 1, 2, 3$) provient d'essais de compression uniaxiaux réalisés sur chacune des éprouvettes.

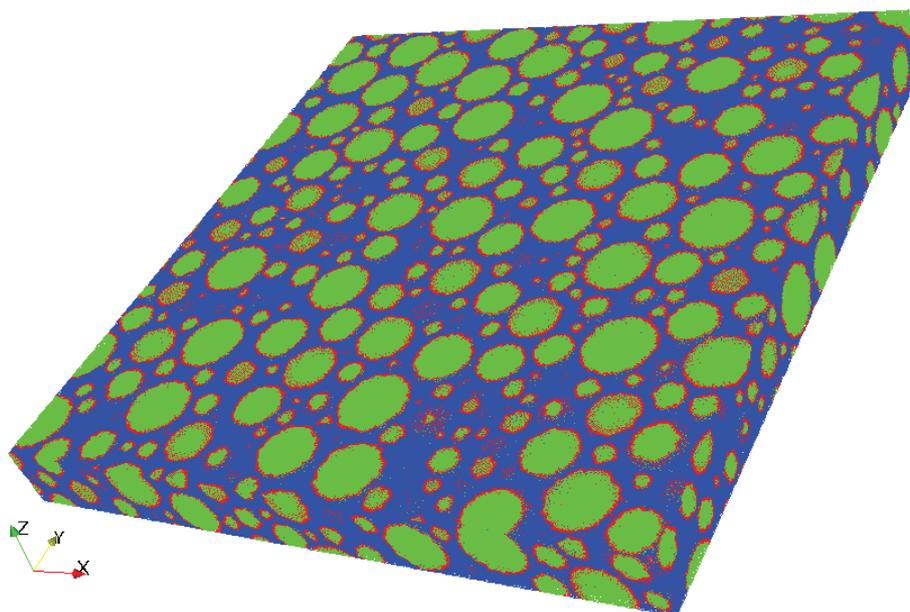


FIG. 4.2 – Domaine et microstructure avec 40 % d'inclusions

Éprouvette i	Fraction volumique f_i (%)	Résistance ultime en compression uniaxiale σ_{c_i} (MPa)	$r_{min}-r_{max}$ (mm)
1	15	8,7	2,4-19
2	35	9,5	2,4-19
3	40	11	2,4-19

TAB. 4.1 – Paramètres matériau

Dans le but de couvrir numériquement les quatre régions (traction-traction, traction-compression, compression-traction, compression-compression), un chargement circulaire reposant sur le cercle trigonométrique $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$ est réalisé. Des couples de déplacements de la forme $(u_1 = \cos(\alpha), u_2 = \sin(\alpha))$ paramétrisés par l'angle α sont ainsi obtenus. Les déplacements u_1 et u_2 sont respectivement appliqués sur les faces $X = 100 \text{ mm}$ et $Y = 100 \text{ mm}$. Les faces $X = 0 \text{ mm}$, $Y = 0 \text{ mm}$ et $Z = 0 \text{ mm}$ sont bloquées respectivement dans les directions X, Y et Z (Fig. 4.3). La traction est choisie positive.

La contrainte dans la direction principale 1 (direction X) est notée σ_1 , celle dans la direction principale 2 (direction Y) σ_2 . Par ailleurs, la contrainte ultime avant rupture dans la direction principale 1 est notée $\bar{\sigma}_1$ et celle dans la direction 2, $\bar{\sigma}_2$.

Les tableaux 4.2 et 4.3 donnent les valeurs des contraintes ultimes avant rupture $\bar{\sigma}_1$ et $\bar{\sigma}_2$ normalisées par rapport à σ_{c_2} pour les quatre régions et les différentes fractions volumiques d'inclusions.

La figure 4.4 est la représentation graphique de la relation entre $\bar{\sigma}_1/\sigma_{c_2}$ et $\bar{\sigma}_2/\sigma_{c_2}$ pour des fractions volumiques de 15 %, de 35 % et de 40 %. Dans le même esprit qu'une surface seuil, cette représentation est appelée surface de rupture en deux dimensions.

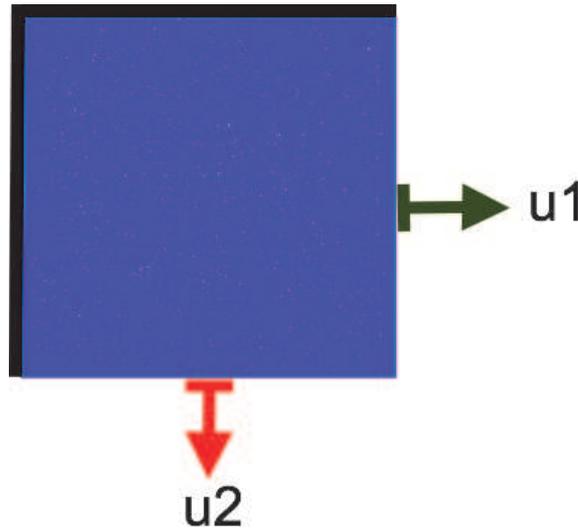


FIG. 4.3 – Conditions aux limites et chargement de la plaque

4.1.3 Surface de rupture macroscopique

La figure 4.4 permet de mettre en avant plusieurs caractéristiques du comportement du béton sous sollicitations bi-axiales.

Tout d'abord, notons que le comportement symétrique par rapport à la droite $\alpha = \pi/4$ observé expérimentalement ([Sang-Keun et al., 2004]) quel que soit le pourcentage d'inclusions est retrouvé.

Il apparaît, ensuite, que la valeur de la contrainte ultime avant rupture en bi-compression est supérieure à celle en compression uniaxiale ; cela est dû, physiquement, à l'effet de confinement qui se produit en bi-compression.

Puis, il est important de remarquer que pour la région de compression-compression, l'augmentation de la valeur de la contrainte ultime avant rupture par rapport à la valeur de la contrainte ultime avant rupture en compression simple σ_{c_i} ($i = 1, 2, 3$) pour chaque éprouvette est dépendante du couple de déplacements imposé, avec un maximum pour les couples $(u_1 = -0,015 \text{ mm}, u_2 = -0,058 \text{ mm})$ et $(u_1 = -0,058 \text{ mm}, u_2 = -0,015 \text{ mm})$ (avec une augmentation moyenne relative de 42 % pour $f = 15 \%$, de 34 % pour $f = 35 \%$ et de 16 % pour $f = 40 \%$) alors que pour la région de traction-traction, la valeur de la contrainte ultime avant rupture pour chaque éprouvette est quasiment indépendante

Régions du chargement	$(u_1(\text{mm}), u_2(\text{mm}))$	$\bar{\sigma}_1(f_1)/\sigma_{c_2}$	$\bar{\sigma}_2(f_1)/\sigma_{c_2}$	$\bar{\sigma}_1(f_2)/\sigma_{c_2}$	$\bar{\sigma}_2(f_2)/\sigma_{c_2}$
traction-traction	(0,01,0)	0,265	0,085	0,278	0,093
	(0,005,0,0087)	0,232	0,275	0,225	0,273
	(0,0087,0,005)	0,273	0,233	0,284	0,249
	(0,0,01)	0,086	0,266	0,081	0,265
	(0,0096,0,0026)	0,274	0,171	0,274	0,164
	(0,0026,0,0096)	0,171	0,275	0,163	0,274
	(0,0099,0,0013)	0,271	0,130	0,271	0,124
	(0,0038,0,0092)	0,206	0,276	0,198	0,275
	(0,01,0,01)	0,264	0,262	0,274	0,274
compression-compression	(-0,06,0)	-1,143	-0,312	-1,306	-0,366
	(-0,03,-0,05)	-0,803	-1,116	-0,937	-1,301
	(-0,05,-0,03)	-1,106	-0,811	-1,275	-0,939
	(0,-0,06)	-0,273	-1,034	-0,373	-1,336
	(-0,058,-0,015)	-1,443	-0,575	-1,323	-0,664
	(-0,06,-0,06)	-0,956	-0,965	-1,107	-1,118
	(-0,015,-0,058)	-0,509	-1,156	-0,668	-1,362
compression-traction	(-0,005,0,0087)	-0,146	0,229	-0,179	0,239
	(-0,0087,0,005)	-0,389	0,111	-0,454	0,118
	(-0,0071,0,0071)	-0,311	0,182	-0,323	0,192
	(-0,0061,0,0079)	-0,240	0,208	-0,252	0,218
traction-compression	(0,005,-0,0087)	0,112	-0,448	0,116	-0,456
	(0,0087,-0,005)	0,231	-0,151	0,236	-0,179
	(0,0071,-0,0071)	0,185	-0,316	0,190	-0,324
	(0,0061,-0,0079)	0,154	-0,383	0,157	-0,392

TAB. 4.2 – Contraintes ultimes avant rupture suivant les directions X et Y normalisées par rapport à σ_{c_2} pour 15 et 35 % d'inclusions

Régions du chargement	$(u_1(\text{mm}), u_2(\text{mm}))$	$\bar{\sigma}_1(f_3)/\sigma_{c_2}$	$\bar{\sigma}_2(f_3)/\sigma_{c_2}$
traction-traction	(0,01,0)	0,263	0,087
	(0,005,0,0087)	0,261	0,290
	(0,0087,0,005)	0,291	0,256
	(0,0,01)	0,100	0,291
	(0,0096,0,0026)	0,299	0,192
	(0,0026,0,0096)	0,196	0,289
	(0,0099,0,0013)	0,286	0,142
	(0,0038,0,0092)	0,235	0,290
	(0,01,0,01)	0,249	0,244
compression-compression	(-0,06,0)	-1,400	-0,277
	(-0,03,-0,05)	-0,999	-1,372
	(-0,05,-0,03)	-1,327	-0,857
	(0,-0,06)	-0,280	-1,383
	(-0,058,-0,015)	-1,376	-0,553
	(-0,06,-0,06)	-1,195	-1,137
	(-0,015,-0,058)	-0,636	-1,449
compression-traction	(-0,005,0,0087)	-0,266	0,249
	(-0,0087,0,005)	-0,537	0,123
	(-0,0071,0,0071)	-0,391	0,197
	(-0,0061,0,0079)	-0,415	0,224
traction-compression	(0,005,-0,0087)	0,128	-0,517
	(0,0087,-0,005)	0,247	-0,255
	(0,0071,-0,0071)	0,198	-0,376
	(0,0061,-0,0079)	0,167	-0,446

TAB. 4.3 – Contraintes ultimes avant rupture suivant les directions X et Y normalisées par rapport à σ_{c_2} pour 40 % d'inclusions

du couple de déplacements imposé et est très proche de celle pour la traction uniaxiale quel que soit le pourcentage d'inclusions. En bi-compression symétrique ($u_1 = -0,06$ mm, $u_2 = -0,06$ mm), l'augmentation moyenne de la valeur de la contrainte ultime avant rupture par rapport à la valeur de la contrainte ultime avant rupture en compression simple σ_{c_i} ($i = 1, 2, 3$) pour chaque éprouvette est de 5 % pour $f = 15$ %, de 10 % pour $f = 35$ % et de 4 % pour $f = 40$ %. Le rôle-clé du pourcentage d'inclusions dans le comportement bi-axial peut être souligné (Fig. 4.4; zone compression-compression) : dans la région de compression-compression, un pourcentage élevé d'inclusions tend à faire augmenter la valeur de la contrainte ultime avant rupture alors que pour les autres régions, cette dernière est quasiment indépendante de la variation de la fraction volumique.

Finalement, dans la zone de traction-compression, la valeur de la contrainte ultime avant rupture en compression diminue lorsque celle en traction augmente. En général, le plan de rupture est perpendiculaire à la direction de traction principale (Fig. 4.5). L'ensemble des tendances décrites dans ce paragraphe sont en accord avec les résultats expérimentaux de [Kupfer and Hilsdorf, 1969], [Carpinteri and Ingrassia, 1984] et de [Astudillo de la Vega, 2002].

La figure 4.6 représente l'évolution au cours du chargement du rapport σ_1/σ_{c_2} en fonction du rapport σ_2/σ_{c_2} jusqu'à rupture pour une fraction volumique d'inclusions de 40 %. En vert sont tracés les points correspondant aux points verts de la figure 4.4.

Pour les régions de traction-traction, compression-traction et traction-compression, deux phases peuvent être observées. La première correspond à une relation linéaire entre le rapport σ_1/σ_{c_2} et le rapport σ_2/σ_{c_2} : la fissuration est très peu présente (peu d'éléments barres sont cassés), ainsi une relation linéaire entre les deux rapports, pilotée par un coefficient de Poisson macroscopique est encore valable. La seconde phase correspond, quant à elle, à une relation non-linéaire entre les deux rapports : la fissuration est en effet importante et le comportement n'est plus uniquement régi par un coefficient de Poisson macroscopique.

Dans la zone de compression-compression, un comportement linéaire est observé entre le rapport σ_1/σ_{c_2} et σ_2/σ_{c_2} : les fissures sont empêchées dans leur volonté de s'ouvrir (le chargement selon Y a tendance à empêcher la fissure de s'ouvrir dans la direction X et le chargement selon X a tendance à empêcher la fissure de s'ouvrir dans la direction Y), leur influence est donc moindre que dans les autres cas de chargements.

En conclusion de cette première application, nous constatons que, bien que le modèle à l'échelle de la barre soit simple, nous sommes capables de modéliser une réponse macroscopique "riche" intégrant différents processus de fissuration et les hétérogénéités. Dans les perspectives de cette approche, nous proposons de réaliser le même programme de chargement mais en partant cette fois-ci d'une éprouvette pré-fissurée par un essai de traction simple; le but étant de voir l'évolution de la surface de rupture par rapport à celle obtenue pour une éprouvette saine. La prochaine application concerne un problème de transfert de masse dans un milieu fissuré.

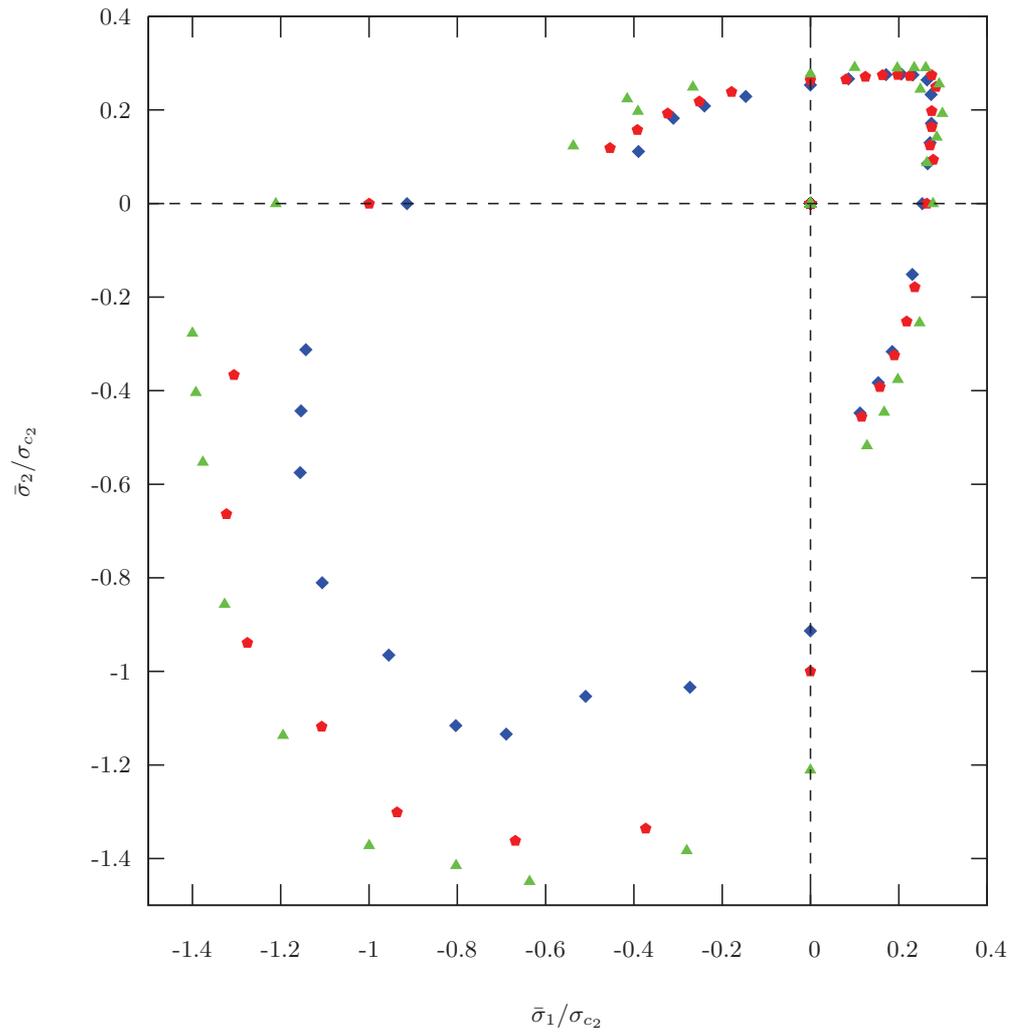


FIG. 4.4 – Surfaces de rupture pour 15 % (bleue), 35 % (rouge) et 40 % (vert) d'inclusions

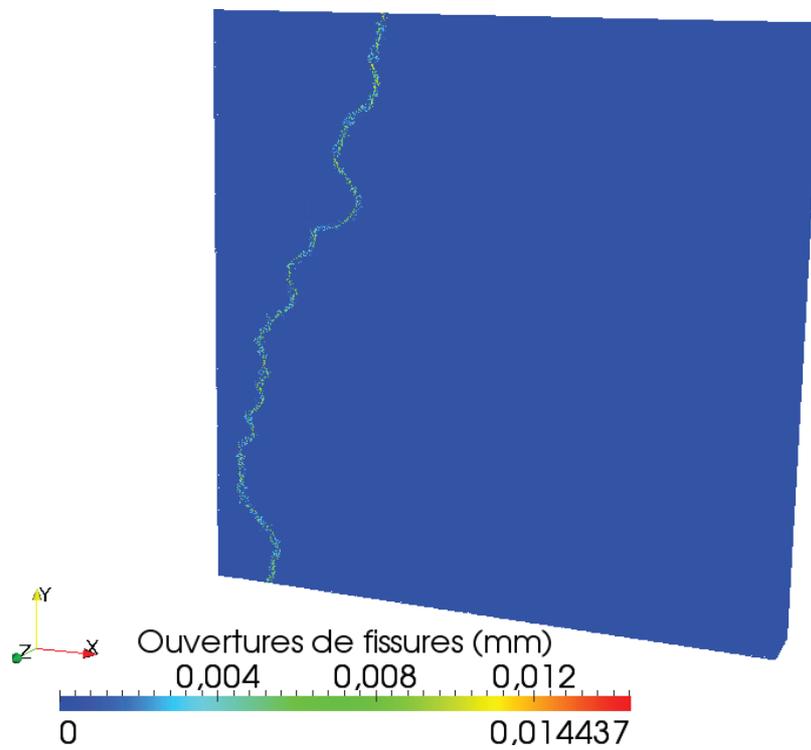


FIG. 4.5 – Chargement en traction dans la direction X ($u_1 = 0,0087$ mm) et en compression dans la direction Y ($u_2 = -0.005$ mm) pour $f = 40\%$

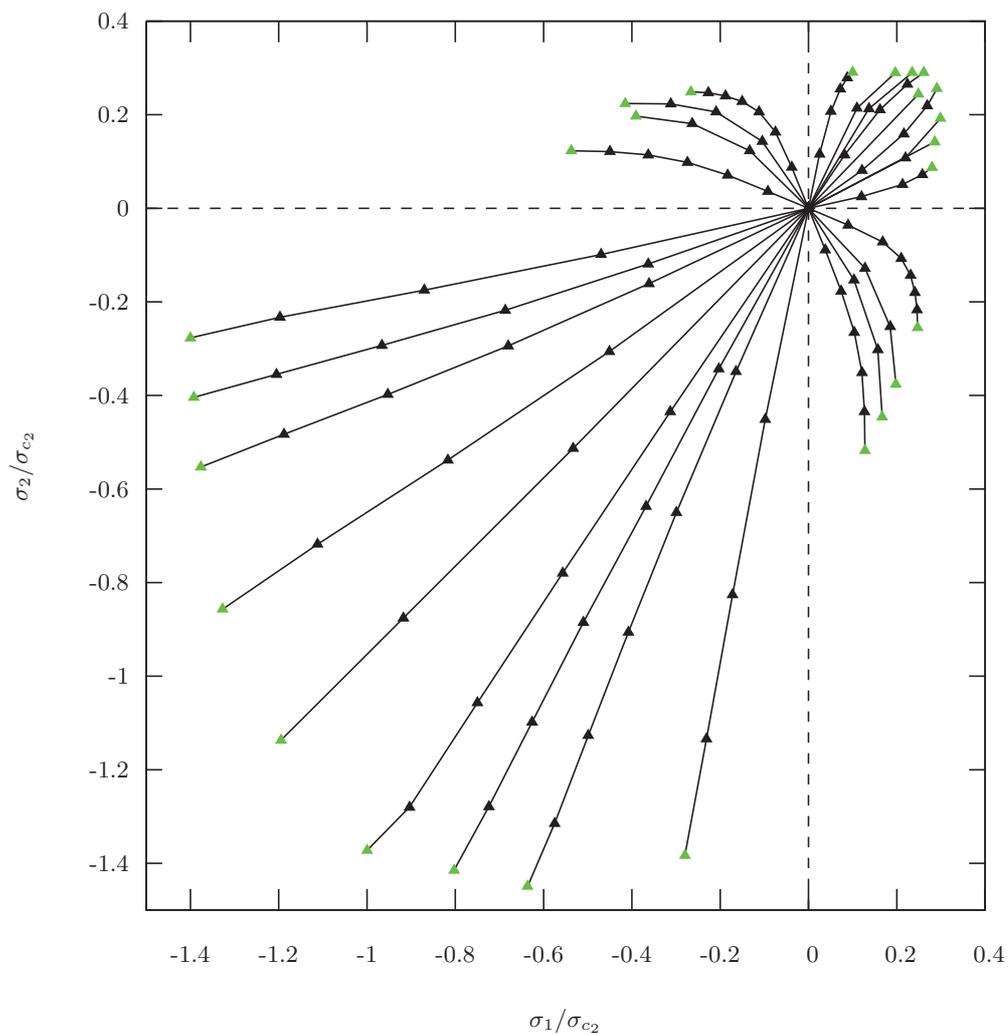


FIG. 4.6 – Évolution du rapport σ_1/σ_{c2} en fonction du rapport σ_2/σ_{c2} , au cours du chargement jusqu'à rupture (points verts), pour une fraction volumique d'inclusions de 40 %

4.2 Transfert de masse dans les milieux fissurés

Avant de débiter, je tiens à préciser que ces résultats ont été obtenus par Xavier Jourdain dans le cadre de sa première année de thèse au LMT.

L'essai consiste à injecter un gradient de pression à une éprouvette pré-fissurée, le but étant de calculer la perméabilité de cette éprouvette à partir des grandeurs caractéristiques de la fissuration et de la loi de perméabilité introduite à l'échelle fine. Ainsi, dans une première partie, nous allons présenter la loi de perméabilité à l'échelle fine, puis la discrétisation éléments finis du problème de perméabilité et enfin des exemples de validation seront étudiés.

4.2.1 Loi de Poiseuille

Comme il a été expliqué dans le chapitre trois de cette thèse, l'approche fondée sur une discontinuité forte permet d'avoir accès à l'ouverture de fissure de chaque élément barre cassé (paramètre $[[u]]$) ; il est alors possible de relier par une loi de Poiseuille cette ouverture de fissure avec la vitesse d'écoulement d'un fluide supposé incompressible au travers de la fissure. En considérant la fissure comme deux plans parfaits infinis parallèles (Fig. 4.7), la vitesse v du fluide incompressible passant au travers de la fissure s'écrit :

$$v = \frac{w^3}{12\mu L} \frac{\Delta p}{L} \text{ [m.s}^{-1}\text{]} \quad (4.1)$$

où μ est la viscosité du fluide étudié ($\mu_{eau} = 8,90 \cdot 10^{-4}$ Pa.s à 20 °C) et $w = [[u]]$.

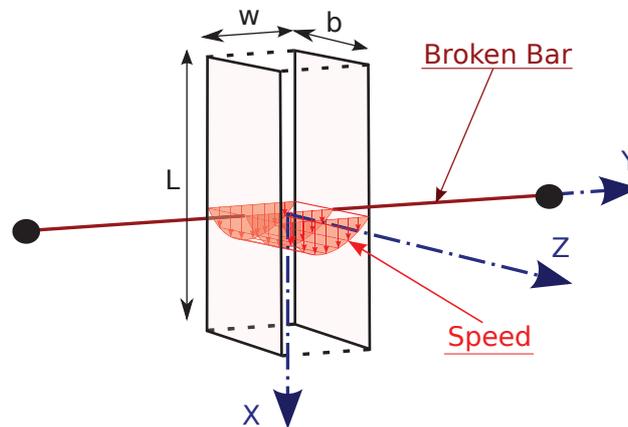


FIG. 4.7 – Vitesse entre deux plans parallèles pour la loi de Poiseuille

L'hypothèse de fluide incompressible signifie que sa masse volumique ρ est constante par rapport au temps, à la position dans l'espace, à la température et à la pression. Cette hypothèse est valide pour la plupart des liquides aux températures habituelles et sous de faibles variations de pression (par exemple la masse volumique de l'eau à 20 °C et sous une pression de $1 \cdot 10^5$ Pa puis de $25 \cdot 10^5$ Pa a une variation relative de 1 pour 1000).

La loi de perméabilité pour chaque élément barre est maintenant définie. La prochaine sous-section va présenter la formulation du problème global à résoudre, la façon d'obtenir la perméabilité macroscopique pour un maillage contenant des éléments cassés et non cassés et la façon de prendre en compte le fait que les éléments cassés n'ont pas la même ouverture et la même orientation.

4.2.2 Formulation éléments finis du problème de transfert de masse

Afin de résoudre le problème de perméabilité, qui n'est rien d'autre qu'un problème de transfert de masse, nous allons utiliser la méthode des Éléments Finis. Deux phénomènes sont à prendre en compte :

- le transfert dans les éléments non fissurés mais poreux,
- le transfert au travers de la fissure comme expliqué précédemment.

Une double porosité est donc prise en compte.

4.2.2.1 Formulation faible de l'équation de conservation de la masse

L'équation d'équilibre à résoudre vient de l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.2)$$

Comme nous avons supposé que le temps n'a pas d'influence sur la perméabilité, il vient $\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = 0$ et (4.2) s'écrit :

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.3)$$

Par ailleurs, comme le fluide est supposé incompressible, (4.3) devient :

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (4.4)$$

et la forme faible du problème s'écrit :

Trouver $p \in \mathcal{S}$ tel que $\forall \delta p \in \mathcal{S}_0$,

$$\int_{\Omega} \delta p \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, d\Omega = 0 \quad (4.5)$$

où

$$\mathcal{S} = \{p \text{ tel que } p \in H^1(\Omega), p = \bar{p} \text{ sur } S_p\}$$

$$\mathcal{S}_0 = \{\delta p \text{ tel que } \delta p \in H^1(\Omega), \delta p = 0 \text{ sur } S_p\}$$

p est la pression, δp la pression virtuelle et S_p la frontière sur laquelle est appliquée la pression. En considérant l'égalité $\delta p \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \operatorname{div}(\delta p \mathbf{v}) - \mathbf{grad}(\delta p) \cdot \mathbf{v}$, (4.5) donne alors :

$$\forall \delta p \in \mathcal{S}_0 \int_{\Omega} \operatorname{div}(\delta p \mathbf{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{grad}(\delta p) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = 0 \quad (4.6)$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, nous obtenons :

$$\forall \delta p \in \mathbb{S}_0 \quad \int_{\partial\Omega} \delta p \mathbf{v} \cdot \mathbf{dS} - \int_{\Omega} \mathbf{grad}(\delta p) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = 0 \quad (4.7)$$

$\partial\Omega$ est la frontière du volume Ω ; elle se décompose en une partie sur laquelle les pressions sont appliquées S_p et une partie sur laquelle les vitesses \mathbf{v}_0 sont appliquées S_v . (4.7) se réécrit alors :

$$\forall \delta p \in \mathbb{S}_0 \quad \int_{S_p} \delta p \mathbf{v} \cdot \mathbf{dS} + \int_{S_v} \delta p \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{dS} - \int_{\Omega} \mathbf{grad}(\delta p) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = 0 \quad (4.8)$$

Par ailleurs comme $\delta p \in \mathbb{S}_0$, il vient :

$$\int_{S_p} \delta p \mathbf{v} \cdot \mathbf{dS} = 0 \quad (4.9)$$

et l'équation (4.8) devient :

$$\forall \delta p \in \mathbb{S}_0 \quad \int_{S_v} \delta p \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{dS} - \int_{\Omega} \mathbf{grad}(\delta p) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = 0 \quad (4.10)$$

4.2.2.2 Discrétisation éléments finis de la formulation faible

D'un point de vue éléments finis, la pression p peut être discrétisée en un produit d'un vecteur contenant les fonctions de forme \mathbf{N} par un vecteur contenant les inconnues nodales de pression \mathbf{p} :

$$p^h = \sum_a N_a p_a = \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{p} \quad (4.11)$$

Pour chaque élément fini, ici chaque tétraèdre sous-jacent au treillis spatial, l'approximation de la pression s'écrit :

$$p^h \Big|_{\Omega_e} = \sum_{a=1}^4 N_a^e p_a^e = \mathbf{N}^{e,T} \cdot \mathbf{p}^e \quad (4.12)$$

et le gradient de la pression s'écrit :

$$\mathbf{grad}(p^h) \Big|_{\Omega_e} = \mathbf{B}^{e,T} \mathbf{p}^e \quad (4.13)$$

où \mathbf{B} est la matrice contenant les dérivées des fonctions de forme.

La discrétisation éléments finis de \mathbf{v} sera présentée en peu plus tard, pour l'instant nous écrivons pour chaque élément $\mathbf{v}^h \Big|_{\Omega_e}$. Avec les discrétisations précédentes, (4.10) devient :

$$\forall \delta \mathbf{p} \in \mathbb{S}_0 \quad \int_{S_v^e} \mathbf{N}^{e,T} \cdot \delta \mathbf{p}^e \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{dS} - \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^{e,T} \delta \mathbf{p}^e \cdot \mathbf{v}^h \Big|_{\Omega_e} \, d\Omega = 0 \quad (4.14)$$

L'équation (4.14) est valide quel que soit $\delta \mathbf{p}^e$, il vient alors :

$$\int_{S_v^e} \mathbf{N}^{e,T} \cdot \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{dS} - \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^{e,T} \mathbf{v}^h \Big|_{\Omega_e} \, d\Omega = 0 \quad (4.15)$$

Le vecteur des forces internes s'écrit :

$$\mathbf{f}_{int}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^{e,T} \mathbf{v}^h|_{\Omega_e} d\Omega \quad (4.16)$$

et celui des forces externes :

$$\mathbf{f}_{ext}^e = \int_{S_e^g} \mathbf{N}^{e,T} \cdot \mathbf{v}_0 \cdot d\mathbf{S} \quad (4.17)$$

Finalement, l'assemblage sur tous les éléments finis du problème est réalisé :

$$\mathbf{f}_{int} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{int}^e] \quad \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{f}_{ext}^e] \quad (4.18)$$

4.2.2.3 Résolution du problème éléments finis

Pour résoudre le problème, le but est de minimiser le résidu \mathbf{r}_n à chaque pas de temps n :

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{f}_{ext,n} - \mathbf{f}_{int,n}(\mathbf{p}_n) \quad (4.19)$$

À chaque pas de temps, il est nécessaire d'itérer k fois pour arriver à la convergence du problème. La linéarisation du résidu donne :

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_{n+1}^{(k+1)}) = \mathbf{r}_{n+1}^{(k)} + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{p}_{n+1}^{(k+1)} = 0 \quad (4.20)$$

À chaque itération k , le système à résoudre est donc :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{p}_{n+1}^{(k+1)} = -\mathbf{r}_{n+1}^{(k)} \quad (4.21)$$

où $\Delta \mathbf{p}_{n+1}^{(k+1)}$ est l'incrément de pression.

Nous allons maintenant expliciter le terme $\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{n+1}^{(k)}$ en dérivant l'équation (4.19) par rapport à la pression :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{n+1}^{(k)} = - \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{n+1}^{(k)} = \mathbf{K}_{n+1}^{(k)} = -\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^e \frac{\partial \mathbf{v}^h|_{\Omega_e}}{\partial \mathbf{p}^e} d\Omega \quad (4.22)$$

où

$$\frac{\partial \mathbf{v}^h|_{\Omega_e}}{\partial \mathbf{p}^e} = \frac{\partial \mathbf{v}^h|_{\Omega_e}}{\partial \mathbf{grad}(p^h)|_{\Omega_e}} \frac{\partial \mathbf{grad}(p^h)|_{\Omega_e}}{\partial \mathbf{p}^e} \quad (4.23)$$

Il faut désormais introduire l'équation de comportement du problème global reliant la vitesse \mathbf{v} et la pression p . L'équation retenue est la loi de Darcy :

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\mu} \mathbf{k} \mathbf{grad}(p) \quad (4.24)$$

L'équation (4.24) est ensuite discrétisée pour chaque élément fini du problème :

$$\mathbf{v}^h|_{\Omega_e} = -\frac{1}{\mu} \mathbf{k}^e \mathbf{grad}(p^h)|_{\Omega_e} \quad (4.25)$$

et, en introduisant (4.25) et (4.13) dans (4.23), il vient :

$$\frac{\partial \mathbf{v}^h|_{\Omega_e}}{\partial \mathbf{grad}(p^h)|_{\Omega_e}} = -\frac{\mathbf{k}^e}{\mu}, \quad \frac{\partial \mathbf{grad}(p^h)|_{\Omega_e}}{\partial \mathbf{p}^e} = \mathbf{B}^e \quad (4.26)$$

Ainsi l'équation (4.22) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{n+1}^{(k)} = \mathbf{K}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} \int_{\Omega_e} \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^{e,T} \mathbf{k}^e \mathbf{B}^e d\Omega \quad (4.27)$$

Pour chaque itération k , un nouvel incrément de pression $\Delta \mathbf{p}_{n+1}^{(k+1)}$ est calculé par l'intermédiaire de l'équation (4.21) et la mise à jour de la pression à l'itération $k+1$ est alors réalisée :

$$\mathbf{p}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{p}_{n+1}^{(k)} + \Delta \mathbf{p}_{n+1}^{(k+1)} \quad (4.28)$$

Cette nouvelle pression est introduite dans le calcul d'une énergie relative qui est comparée à une tolérance définie par l'utilisateur :

$$\frac{\mathbf{r}_{n+1}^{(k)T} \cdot \Delta \mathbf{p}_{n+1}^{(k+1)}}{\mathbf{r}_{n+1}^{(0)T} \cdot \Delta \mathbf{p}_{n+1}^{(1)}} < tol \quad (4.29)$$

Tant que l'énergie définie par (4.29) est au dessus de la tolérance tol , une nouvelle itération k est réalisée. Chaque itération commence par la définition d'une nouvelle matrice tangente $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{n+1}^{(k+1)}$ et du résidu $\mathbf{r}_{n+1}^{(k+1)}$. Ensuite, l'équation (4.21) est résolue pour la nouvelle itération $k+1$ et cette procédure est répétée jusqu'à convergence.

Maintenant que le système à résoudre est défini, nous allons nous intéresser à la matrice de perméabilité élémentaire \mathbf{k}^e .

4.2.2.4 Matrice de perméabilité élémentaire \mathbf{k}^e

Nous allons maintenant porter notre attention sur la matrice de perméabilité élémentaire \mathbf{k}^e , cette dernière étant définie pour chaque tétraèdre du maillage (Fig. 4.8) dont les arêtes sont les éléments barres du treillis. Comme précisé précédemment, nous cherchons à traiter à la fois le cas pour lequel le matériau est sain et le cas pour lequel le matériau est dégradé. Dans le cas du matériau sain, le transfert se fait dans la porosité intrinsèque du matériau ; d'un point de vue numérique, cela correspond au cas où les éléments barres (arêtes du tétraèdre) ne sont pas cassés. Le cas du matériau dégradé correspond au cas numérique où une ou plusieurs arêtes du tétraèdre sont cassées. Dans ce cas là, la matrice de perméabilité est anisotrope. Notons que dans le cas du matériau sain, la perméabilité est supposée isotrope et dépendante du matériau utilisé.

De ce fait, la matrice de perméabilité élémentaire \mathbf{k}^e sera décomposée sous la forme :

$$\mathbf{k}^e = \mathbf{k}_{ani}^e + \mathbf{k}_{iso}^e \quad (4.30)$$

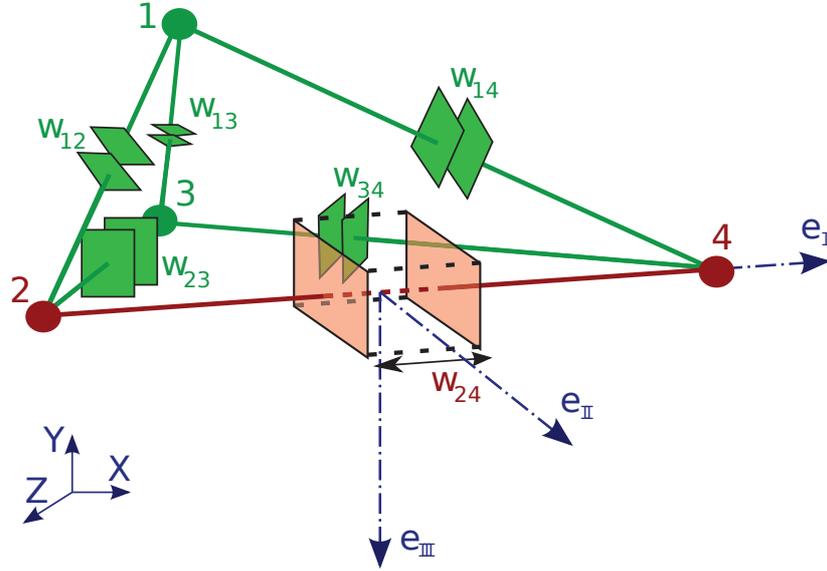


FIG. 4.8 – Tétraèdre sous-jacent au treillis spatial et schématisation de la fissuration potentielle sur chaque arête

Les notations seront les suivantes : les lettres n et m seront utilisées pour définir les nœuds et la lettre e pour définir un élément tétraédrique.

La matrice \mathbf{k}_{iso}^e , qui représente la porosité isotrope du matériau étudié, est la même pour chaque tétraèdre :

$$\mathbf{k}_{iso}^e = \frac{k_{intr}}{\mu} \mathbf{1} \quad (4.31)$$

où k_{intr} est la perméabilité du matériau (par exemple 10^{-17} m^2 pour un béton non fissuré) et μ est la viscosité du fluide considéré (par exemple $8,90 \cdot 10^{-4} \text{ Pa.s}$ pour de l'eau à température ambiante).

La matrice \mathbf{k}_{ani}^e , qui représente la perméabilité anisotrope par l'intermédiaire des arêtes cassées du tétraèdre, est facilement définissable compte tenu du modèle mécanique utilisé. L'obtention de ses coefficients est directement liée aux calculs mécaniques donnant la valeur de l'inconnue $[[u]]$ du saut de déplacement. Le paramètre $[[u]]$ est ici noté w . Un seul saut de déplacement par arête du tétraèdre est considéré (Fig. 4.8).

La valeur du saut de déplacement w_{nm} correspond à l'ouverture de fissure pour l'arête du tétraèdre e liant les nœuds n et m . Ces valeurs sont définies dans la base (e_I, e_{II}, e_{III}) du tétraèdre étudié mais la matrice \mathbf{k}_{ani}^e est définie dans la base globale (X, Y, Z) . Ces deux bases sont illustrées pour un tétraèdre e et une de ses arêtes sur la figure 4.8.

Dans la base locale (e_I, e_{II}, e_{III}) de l'arête du tétraèdre reliant les nœuds n et m , la matrice $\mathbf{k}_{loc}^{e,nm}$ s'écrit :

$$\mathbf{k}_{loc}^{e,nm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{II} & 0 \\ 0 & 0 & k_{III} \end{bmatrix}_{(e_I, e_{II}, e_{III})} \quad (4.32)$$

La figure 4.7 montre la vitesse du fluide au travers de l'ouverture. La vitesse normale à l'ouverture est nulle et donc $k_I = 0$. Les composantes de perméabilité perpendiculaires à l'arête sont choisies égales telles que : $k_{II} = k_{III} = k_{nm}$, où k_{nm} est la perméabilité pour l'arête du tétraèdre qui relie les nœuds n et m . La valeur de k_{nm} est obtenue à partir de 4.1 :

$$k_{nm} = \frac{w^3}{12\mu L} [m^2.Pa^{-1}.s^{-1} = m^3.s.kg^{-1}] \quad (4.33)$$

Afin d'écrire la matrice $\mathbf{k}_{loc}^{e,nm}$ dans la base globale (X, Y, Z) , les matrices de passage de la base locale (e_I, e_{II}, e_{III}) d'une arête du tétraèdre à la base globale (X, Y, Z) sont définies par \mathbf{P}_{G-L}^{nm} et \mathbf{P}_{L-G}^{nm} . Il vient alors :

$$\mathbf{k}_{glob}^{e,nm} = \mathbf{P}_{G-L}^{nm} \mathbf{k}_{loc}^{e,nm} \mathbf{P}_{L-G}^{nm} \quad (4.34)$$

où $\mathbf{k}_{glob}^{e,nm}$ est la matrice $\mathbf{k}_{loc}^{e,nm}$ exprimée dans la base globale (X, Y, Z) .

La matrice \mathbf{k}_{ani}^e est alors calculée en sommant les matrices $\mathbf{k}_{glob}^{e,nm}$ définies pour chaque arête $[nm]$ du tétraèdre e :

$$\mathbf{k}_{ani}^e = \mathbf{k}_{glob}^{e,12} + \mathbf{k}_{glob}^{e,13} + \mathbf{k}_{glob}^{e,14} + \mathbf{k}_{glob}^{e,23} + \mathbf{k}_{glob}^{e,24} + \mathbf{k}_{glob}^{e,34} \quad (4.35)$$

Finalement, la matrice de perméabilité élémentaire \mathbf{K}^e dans la base (X, Y, Z) s'écrit :

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^{e,T} \mathbf{k}^e \mathbf{B}^e d\Omega = \int_{\Omega^e} \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^{e,T} (\mathbf{k}_{ani}^e + \mathbf{k}_{iso}^e) \mathbf{B}^e d\Omega \quad (4.36)$$

Cette matrice permet de rendre compte de deux échelles de transferts (dans la porosité intrinsèque du matériau et dans la fissure) et d'intégrer l'orientation et la connectivité des fissures.

La problème éléments finis à résoudre étant maintenant défini, nous allons dans la prochaine partie nous focaliser sur la façon d'obtenir le tenseur de perméabilité macroscopique.

4.2.2.5 Tenseur de perméabilité macroscopique

Le tenseur de perméabilité macroscopique \mathcal{K} est défini comme ([Pouya and Courtois, 2002]) :

$$\mathbf{Q} = -\mathcal{K} \mathbf{G} \quad (4.37)$$

où \mathbf{Q} est le débit macroscopique et \mathbf{G} est le gradient de pression macroscopique avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{q}(\mathbf{x}) d\Omega \\ \mathbf{G} &= \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{grad}(p(\mathbf{x})) d\Omega \end{aligned} \quad (4.38)$$

En choisissant, pour un cube de côté L , des conditions aux limites homogènes au contour telles que

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x} + p_0, \quad (4.39)$$

le gradient de pression macroscopique \mathbf{G} est égal à \mathbf{A} où \mathbf{A} est un vecteur constant (voir A.1). Afin d'identifier les neuf composantes du tenseur \mathcal{K} , le vecteur \mathbf{A} est choisi unitaire

respectivement dans les trois directions X , Y et Z (Fig. 4.9). La résolution de chacun de ces trois problèmes permet alors de calculer un débit macroscopique \mathbf{Q} pour une direction donnée telle que :

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\Omega} \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} (\mathbf{q}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) \, d\Omega \quad ([\text{Pouya and Courtois, 2002}]) \quad (4.40)$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire perpendiculaire au contour et dirigée vers l'extérieur et les $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ sont les débits locaux, et d'identifier ensuite les trois colonnes de \mathcal{K} .

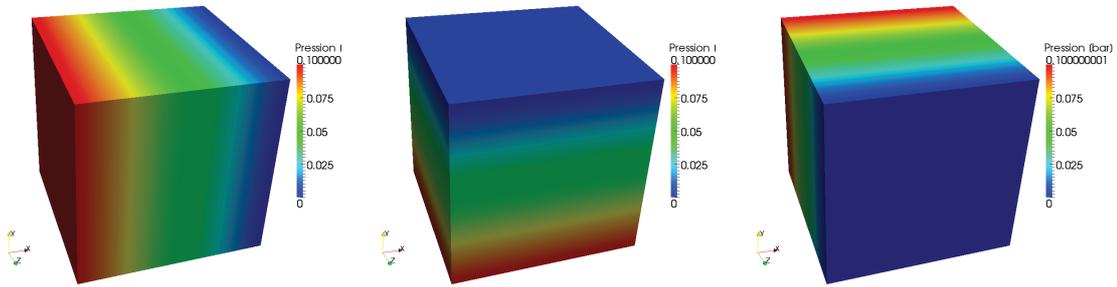


FIG. 4.9 – Identification du tenseur de perméabilité : conditions aux limites homogènes selon X , Y et Z

Le processus d'obtention du tenseur de perméabilité macroscopique ayant été expliqué, nous allons maintenant présenter deux exemples de validation du modèle complet.

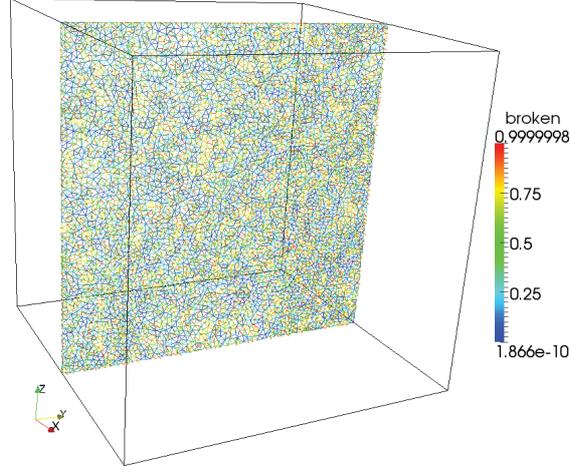
4.2.3 Validations du modèle

4.2.3.1 Fissure modèle et loi de Poiseuille

La première validation consiste à comparer l'évolution du tenseur de perméabilité macroscopique en fonction de l'ouverture de fissure, obtenue numériquement, avec celle obtenue par la loi de Poiseuille théorique. D'un point de vue pratique, dans un cube de côté L , une fissure macroscopique parfaite est, tout d'abord, créée dans le plan $x = L/2$ (Fig. 4.10). L'ouverture de fissure est, ensuite, contrôlée : les barres perpendiculaires au plan $x = L/2$ ont une ouverture de 1 mm, celles dans le plan $x = L/2$ une ouverture de 0 mm et entre les deux, l'ouverture varie en fonction de l'inclinaison de la barre.

Il est important de noter que les composantes \mathcal{K}_{ij} du tenseur de perméabilité représentent la valeur de la perméabilité parallèle à l'axe i quand le gradient de pression est appliqué dans la direction j . Sur la figure 4.11 et dans le prochain paragraphe, par abus de langage, nous appellerons " perméabilité macroscopique " la moyenne entre les composantes \mathcal{K}_{22} et \mathcal{K}_{33} du tenseur de perméabilité.

La figure 4.11 présente les résultats obtenus : en pointillés noirs est tracée l'évolution théorique, obtenue par la loi de Poiseuille, de la perméabilité macroscopique en fonction de l'ouverture de fissure ; en trait plein noir est représentée l'évolution théorique, obtenue par la loi de Poiseuille, de la perméabilité macroscopique en fonction de l'ouverture de fissure à laquelle est sommée la valeur de la perméabilité intrinsèque du matériau sain ;

FIG. 4.10 – Fissure macroscopique parfaite dans le plan $x = L/2$

en points rouges est représentée l'évolution obtenue numériquement, de la perméabilité macroscopique en fonction de l'ouverture de fissure à laquelle est ajoutée la valeur de la perméabilité intrinsèque du matériau sain. Nous pouvons observer que le calcul numérique coïncide avec la prédiction théorique aussi bien au niveau du comportement du matériau sain qu'au niveau du matériau dégradé : la partie constante de la courbe en points rouges représente la perméabilité intrinsèque du matériau ($k_{intr} = 10^{-17} \text{ m}^2$) et la seconde partie coïncide avec la loi de Poiseuille. Il est finalement notable que la prédominance de l'évolution de la perméabilité en fonction de l'ouverture de fissure commence, pour ce matériau, à $1 \mu\text{m}$.

Finalement, les tenseurs de perméabilité macroscopique 4.41, 4.42 et 4.43 sont explicités en fonction de l'ouverture de fissure :

$$\mathcal{K}^{(w=1e-6 \text{ mm})} = \begin{bmatrix} 1,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,00000 & 1,00000 & 0,00000 \\ 0,00000 & 0,00000 & 1,00000 \end{bmatrix} 10^{-17} \text{ m}^2 \quad (4.41)$$

$$\mathcal{K}^{(w=1e-3 \text{ mm})} = \begin{bmatrix} 1,02031 & 0,00003 & 0,00002 \\ 0,00003 & 1,11290 & 0,00009 \\ 0,00002 & 0,00009 & 1,07710 \end{bmatrix} 10^{-17} \text{ m}^2 \quad (4.42)$$

$$\mathcal{K}^{(w=1 \text{ mm})} = \begin{bmatrix} 3,5681 \cdot 10^6 & 3,1303 \cdot 10^4 & 2,7277 \cdot 10^4 \\ 3,1295 \cdot 10^4 & 1,1096 \cdot 10^8 & 1,1717 \cdot 10^4 \\ 2,7281 \cdot 10^4 & 1,1715 \cdot 10^4 & 7,5800 \cdot 10^7 \end{bmatrix} 10^{-17} \text{ m}^2 \quad (4.43)$$

Le dernier tenseur est celui obtenu pour une ouverture de 1 mm, correspondant à 1/100 ième de la taille du cube. Il apparaît comme étant symétrique et les termes diagonaux marquent la prédominance de l'écoulement dans le plan de fissure. Par ailleurs, les termes hors diagonaux permettent d'établir le couplage entre le gradient de pression imposé et l'écoulement dans les directions perpendiculaires à ce gradient. Bien que ces termes soient inférieurs à ceux de la diagonale, ils ne sont pas négligeables devant la perméabilité intrinsèque du matériau sain.

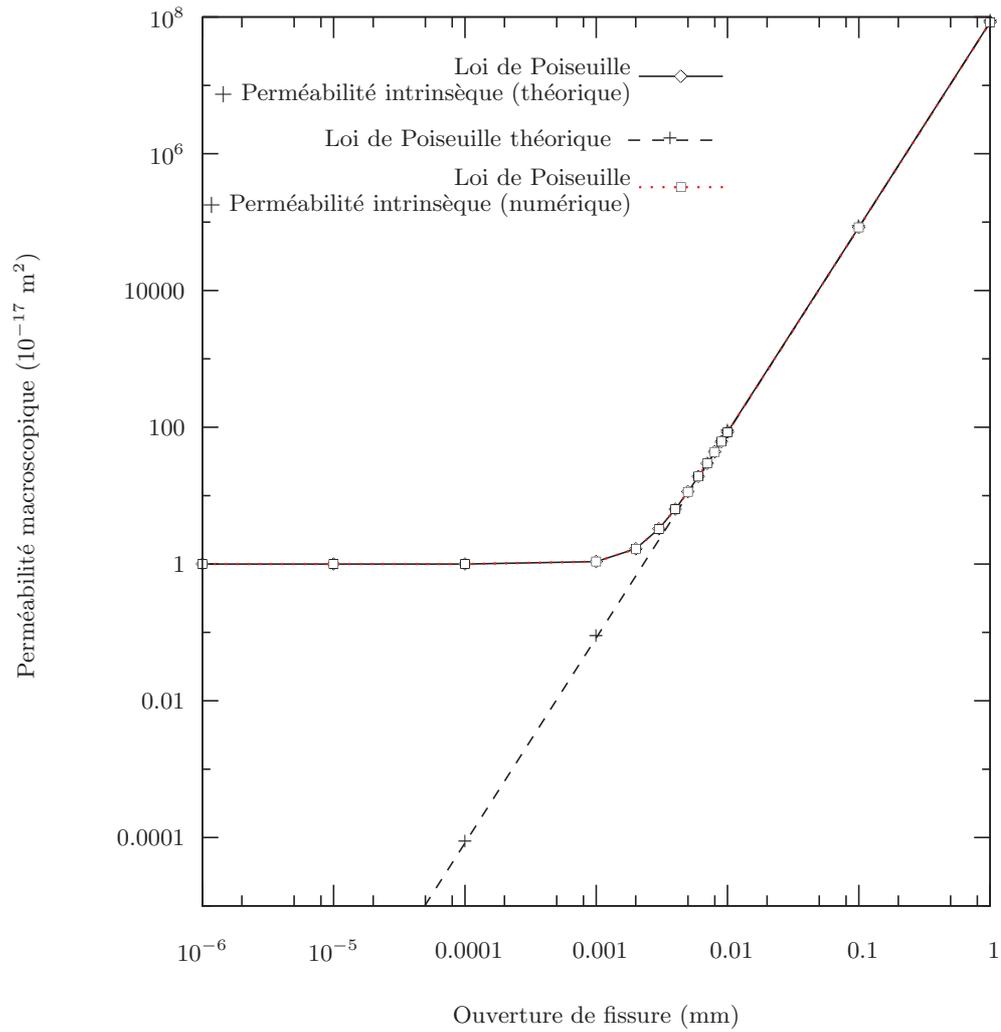


FIG. 4.11 – Évolution de la perméabilité macroscopique en fonction de l'ouverture de fissure

4.2.3.2 Évolution de la perméabilité macroscopique en fonction de la réponse mécanique

Cet exemple de validation est réalisé par l'intermédiaire d'un faciès de fissuration obtenu après un essai de traction uniaxiale sur un cube. Les éléments cassés seuillés sont représentés sur la figure 4.13 aux côtés de la microstructure du cube, avec en vert les agrégats et en bleu le mortier (Fig. 4.12).

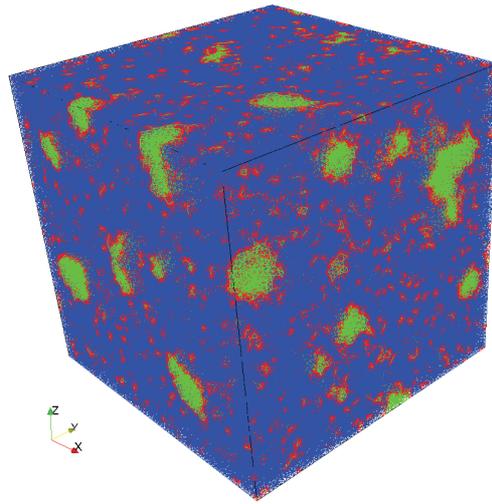


FIG. 4.12 – Microstructure de l'éprouvette

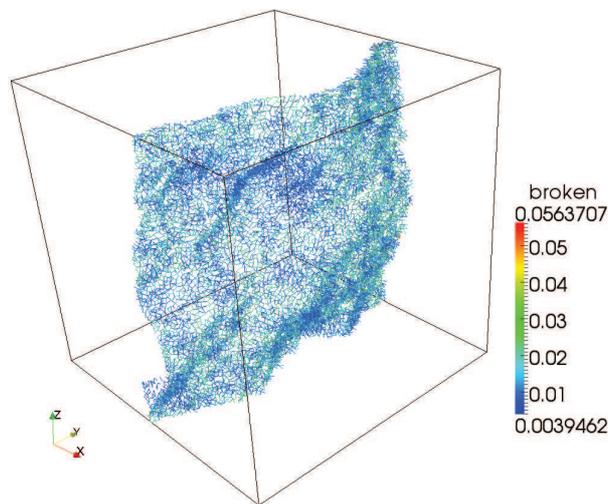


FIG. 4.13 – Éléments cassés seuillés

La figure 4.14 permet d'illustrer les trois principales phases d'évolution de la perméabilité macroscopique en fonction de la réponse mécanique :

- une phase constante (de 0 à 0,0125 mm) correspondant principalement à la diffusion du fluide dans la porosité intrinsèque ; d'un point de vue mécanique, bien que des

- éléments barres aient cassé, il sont encore très peu connectés entre eux et le réseau poreux créé ne peut pas encore percoler.
- l'apparition d'une macro-fissure correspondant à la coalescence des micro-fissures (0,0125 mm) ; une augmentation très importante de la perméabilité correspondant à la percolation du réseau est observée.
 - une dernière phase où la macro-fissure s'ouvre lentement et la perméabilité évolue ainsi plus lentement (de 0,015 à 0,03 mm).

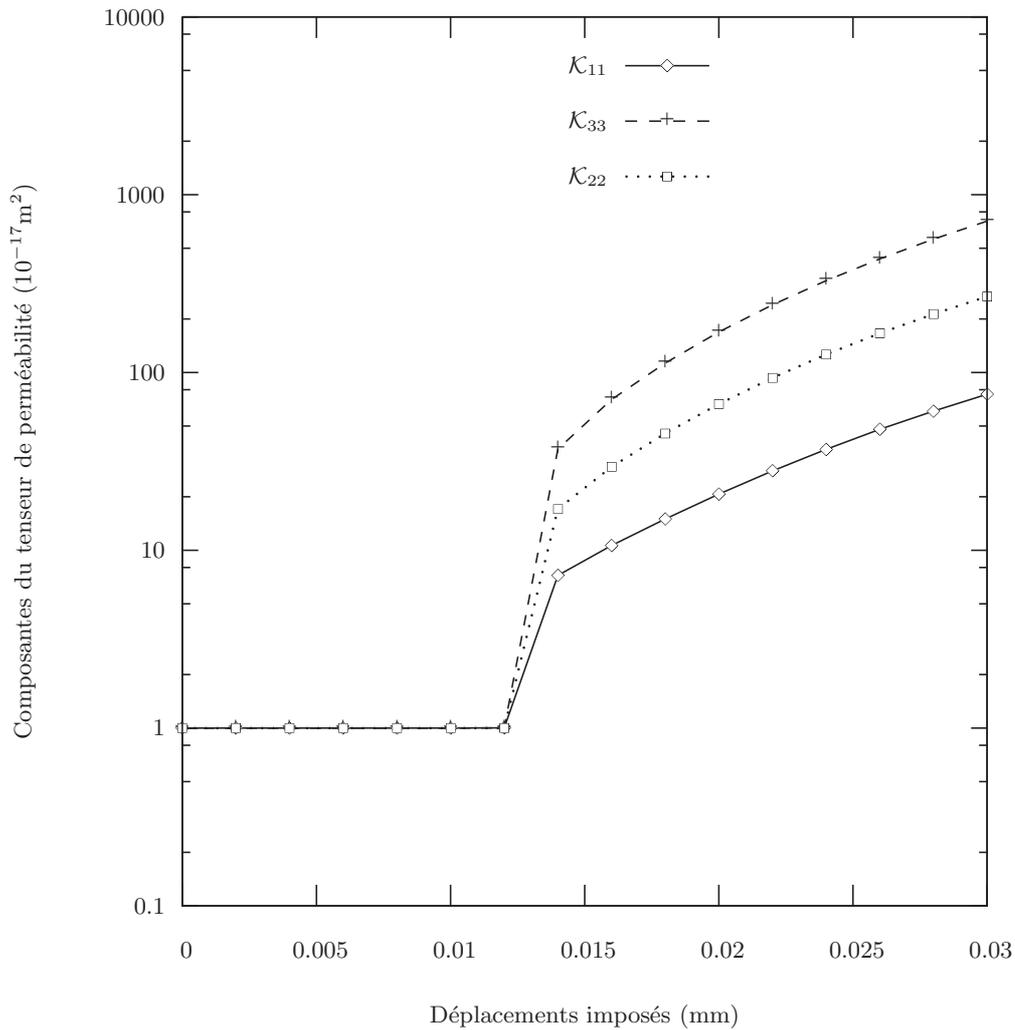


FIG. 4.14 – Évolution des composantes diagonales du tenseur de perméabilité macroscopique en fonction du déplacement imposé

Cette courbe est comparable à celle obtenue expérimentalement dans [Gerard, 1996].
 Finalement, les tenseurs de perméabilité 4.44, 4.45 et 4.46 sont explicités en fonction

de l'évolution du déplacement imposé :

$$\mathcal{K}^{(u=0.002\text{ mm})} = \begin{bmatrix} 1,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,00000 & 1,00000 & 0,00000 \\ 0,00000 & 0,00000 & 1,00000 \end{bmatrix} 10^{-17} m^2 \quad (4.44)$$

$$\mathcal{K}^{(u=0.012\text{ mm})} = \begin{bmatrix} 1,00239 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,00000 & 1,00245 & 0,00000 \\ 0,00000 & 0,00000 & 1,00029 \end{bmatrix} 10^{-17} m^2 \quad (4.45)$$

$$\mathcal{K}^{(u=0.014\text{ mm})} = \begin{bmatrix} 7,22658 & 0,00489 & 1,72678 \\ 0,00483 & 37,117 & 1,69414 \\ 1,62682 & 1,69414 & 17,0611 \end{bmatrix} 10^{-17} m^2 \quad (4.46)$$

L'effet de la fissuration diffuse est légèrement observable entre les matrices 4.44 et 4.45. La différence est faible car il n'y a pas de coalescence des éléments cassés. En revanche, au regard des matrices 4.45 et 4.46, l'apparition d'une macro-fissure résultant de la coalescence des éléments cassés est notable. Finalement, la fissure macroscopique étant à peu près dans un plan perpendiculaire à la direction principale X, les composantes diagonales prédominent. Là encore, les termes hors diagonaux permettent de rendre compte d'écoulements perpendiculaires à la direction du gradient de pression.

Ce chapitre a été l'occasion d'illustrer l'approche multi-échelle séquentielle : deux résultats ont ainsi été obtenus. Le premier concerne l'obtention d'une surface de rupture macroscopique en deux dimensions. Cette dernière peut rappeler le choix classique comprenant le critère de Drucker-Prager en compression et de Rankine en traction ; en revanche, cette surface est directement liée aux propriétés intrinsèques du matériau et au comportement à l'échelle fine. Chaque point de la surface est donc le résultat d'un processus de fissuration différent fonction du chargement appliqué. Plusieurs physiques de fissuration sont donc intégrées dans cette surface de rupture. Cette dernière pourrait être intéressante pour venir enrichir les données à rupture d'un modèle phénoménologique capable de représenter le comportement ultime d'une structure. Le second résultat s'inscrit dans le cadre des problèmes multi-physiques : il concerne l'obtention d'un tenseur de perméabilité macroscopique. Le couplage faible entre le problème mécanique et le problème de transfert de masse se fait naturellement grâce à la discontinuité forte. Là encore, le tenseur de perméabilité obtenu intègre les propriétés intrinsèques du matériau (perméabilité du matériau sain) et les grandeurs à l'échelle fine liées à la fissuration (ouverture et orientation des fissures).

Conclusions et perspectives

Cette thèse avait pour objectif premier de développer un modèle numérique capable de proposer une représentation fine des phénomènes de fissuration pour les matériaux quasi-fragiles à matrice cimentaire. L'échelle pertinente retenue pour ce travail a été l'échelle mesoscopique. Cette dernière a naturellement amené au second objectif de cette thèse, à savoir réaliser le transfert de la dite échelle vers l'échelle macroscopique via une approche multi-échelle séquencée.

Dans un premier temps, nous avons commencé le travail par le développement et la validation du modèle en élasticité homogène puis hétérogène. Tout d'abord, la stratégie de maillage retenue a été présentée : celle-ci s'articule autour de l'utilisation d'un maillage non adapté. L'implication de cette stratégie sur la cinématique des éléments finis a ensuite été expliquée et par conséquent les méthodes d'enrichissement de la cinématique d'un élément fini ont été exposées. Parmi ces méthodes, nous avons retenu la E-FEM qui présente l'avantage de pouvoir calculer les inconnues ajoutées localement sans augmenter la taille du problème global.

Puis, la méthode des Modes Incompatibles, permettant d'introduire un enrichissement cinématique au sein d'un problème éléments finis a été expliquée. Nous avons ensuite présenté le type de maillage retenue, à savoir un treillis spatial, pour mener les simulations éléments finis. De ce fait, la méthode des Modes Incompatibles a été appliquée aux éléments barres du treillis donnant ainsi un élément barre bi-phasique.

D'un point de vue de la génération et du placement des inclusions, nous avons présenté la méthode retenue. Cette dernière repose sur un schéma de boule dure. Afin d'obtenir des inclusions avec des formes plus complexes que des sphères, une méthode reposant sur l'utilisation de champs Gaussiens corrélés a été brièvement exposée. Une fois les formes générées, une discrétisation éléments finis avec le maillage treillis spatial a été réalisée. Finalement, des validations numériques ont été menées en termes de convergence de maillage et d'homogénéisation numérique. Cela a ainsi permis d'évaluer la taille d'un VER pour le module de compressibilité.

Toujours dans le cadre du développement et de la validation du modèle en élasticité, une alternative aux éléments barres du treillis a été présentée, à savoir l'utilisation d'un modèle de poutre de Timoshenko dont la cinématique de rotation a été éliminée. Contrairement aux éléments barres, ces poutres permettent de prendre en compte la cinématique de cisaillement et d'incorporer ainsi plus de physique dans le problème. Là encore, par la E-FEM et la méthode des Modes Incompatibles, la poutre a pu hériter du caractère bi-phasique. Finalement, des calculs de convergence du maillage en élasticité homogène et hétérogène ont pu être menés. Ces derniers ont été complétés par rapport au chapitre un

par une étude sur le module de cisaillement.

Dans un deuxième temps, nous avons complété le modèle par la prise en compte de la rupture quasi-fragile. La méthode des éléments finis à discontinuité forte est apparue efficace et naturelle. En effet, elle permet de modéliser la fissuration tout en jouant le rôle de limiteur de localisation et s'incorpore parfaitement à l'état d'esprit de la E-FEM et de la méthode des Modes Incompatibles. Nous sommes ensuite arrivés au problème global à résoudre tenant compte des deux enrichissements cinématiques permettant d'incorporer le caractère bi-phasique quasi-fragile au sein d'une barre.

Des validations numériques concernant la convergence et l'objectivité à l'égard du maillage ont de plus été menées. Des réponses macroscopiques sous des chargements simples (traction, compression et tri-traction) ont été obtenues. La comparaison de la réponse en traction avec celle en compression a montré la nécessité de développer les poutres de Timoshenko afin de pouvoir incorporer la rupture en cisaillement.

Finalement, avec ce modèle en mains, nous sommes passés aux applications concernant l'approche multi-échelle séquencée. Deux résultats ont ainsi pu être présentés. Le premier concerne l'obtention d'une surface limite de rupture en deux dimensions. Cette dernière peut être intéressante dans le cadre du calcul de structure à partir de modèles permettant de modéliser la contrainte à rupture. Elle permet en effet de venir alimenter et ceci de façon plus physique que les modèles phénoménologiques les grandeurs macroscopiques à rupture. Le second résultat concerne l'obtention d'un tenseur de perméabilité macroscopique dans le cas des problèmes de transfert de masse dans les milieux poreux. Le couplage faible entre le modèle mécanique et le modèle de transfert de masse est apparu efficace et naturel grâce notamment à la méthode des discontinuités fortes. Le tenseur de perméabilité obtenu intègre à la fois les propriétés intrinsèques du matériau (perméabilité du matériau sain) et les grandeurs à l'échelle fine liées à la fissuration (ouverture et orientation des fissures).

Nous pouvons au final résumer les bénéfices de ce travail en les nuancant évidemment par rapport aux manques du modèle et aux perspectives à venir.

En ce qui concerne le caractère élastique (homogène ou hétérogène), nous avons développé un modèle représentatif de la structure d'un matériau cimentaire à l'échelle mesoscopique en distinguant les inclusions, le mortier et l'interface. D'un point de vue éléments finis, l'utilisation d'un maillage non adapté est apparue efficace et pratique pour la prise en compte de formes aussi bien simples que complexes. La méthode des Modes Incompatibles et la E-FEM ont permis de représenter efficacement le champ de déformations d'un matériau hétérogène par l'introduction d'une discontinuité faible. Les validations menées (calculs de Volumes Élémentaires Représentatifs, isotropie de la réponse) ont confirmé la capacité du modèle à être utilisé comme un outil d'homogénéisation numérique. Cependant, nous pouvons noter que le modèle élément finis barre manque de physique : le coefficient de Poisson, grandeur basique autant que le module d'Young d'un modèle, n'est jamais introduit comme paramètre. Cette lacune empêche ainsi le calcul d'un module de cisaillement effectif et donc tout simplement de pouvoir caractériser le matériau étudié. Il semble alors intéressant d'avoir développé l'approche fondée sur les poutres de Timoshenko.

En ce qui concerne le caractère hétérogène quasi-fragile, l'utilisation des modèles à dis-

continuité forte est apparue efficace pour tenir compte de la fissuration tout en assurant une indépendance de la réponse à l'égard du maillage. Par ailleurs, cette approche nous a permis d'accéder directement à la valeur de l'ouverture de fissure ; cependant cette dernière est locale puisqu'elle n'est connue que pour une barre donnée. Il y a donc encore un travail à réaliser afin d'obtenir la valeur de l'ouverture de fissure à l'échelle macroscopique. D'un point de vu applications, bien que le modèle proposé soit simple (rupture en mode I ou en extension, ouverture de fissure), des réponses " riches " à l'échelle macroscopique ont été obtenues telles qu'une surface de rupture macroscopique ou bien des tenseurs de perméabilité dans le cadre d'un problème de couplage faible. Là encore, le manque de physique du modèle est clairement apparue. Tout d'abord, au niveau de la dissymétrie du pic à rupture en compression et en traction où seul un rapport de quatre est obtenue. Puis, dans la partie compression-compression de la surface seuil où la dissymétrie n'est pas assez " prononcée " par rapport à la zone de traction-traction. Finalement, il faudrait compléter l'étude menée sur les poutres de Timoshenko dans le cadre de la rupture.

Plusieurs perspectives pour le travail à venir peuvent être envisagées. Nous pouvons les classer en trois points :

1. la modélisation d'un ouvrage complexe en utilisant le couplage de modèles continus et de modèles discrets dans le cadre d'une approche multi-échelle intégrée,
2. la réalisation d'essais numériques (" virtual testing ") fournissant les paramètres (variables internes,...) nécessaires aux modèles macroscopiques,
3. le couplage avec d'autres physiques (thermique, hydrique,...).

Dans tous les cas, la simulation numérique a ici un rôle majeur à jouer et le travail en perspective s'appuiera sur un lien directe avec une meso-structure riche pour proposer une interprétation détaillée des phénomènes mis en jeu.

Bibliographie

- [Adler, 2008] Adler, R. J. (2008). Some new random field tools for spatial analysis. In *Springer*. 40
- [Adler and Taylor, 2007] Adler, R. J. and Taylor, J. (2007). Random field an geometry. In *Springer*. 40, 41
- [Allix and Deü, 1997] Allix, O. and Deü, J. F. (1997). Delay-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Engineering Transactions*, 45 :29–46. 58
- [Armero and Garikipati, 1996] Armero, F. and Garikipati, K. (1996). An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids. *International Journal of Solids and Structures*, 33 :2863–2885. 61
- [Astudillo de la Vega, 2002] Astudillo de la Vega, E. (2002). *Étude expérimentale du comportement mécanique d'un Béton Fibré à Ultra Hautes Performances (BFUHP) en traction biaxiale*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Cachan. 123
- [Babuška and Melenk, 1997] Babuška, I. and Melenk, J. M. (1997). The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 :727–758. 12
- [Barber et al., 1996] Barber, C. B., Dobkin, D. P., and Huhdanpaa, H. (1996). The quick-hull algorithm for convex hulls. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 22 :469–483. 23
- [Barber and Huhdanpaa, 2009] Barber, C. B. and Huhdanpaa, H. (2001–2009). qhull home page. <http://www.qhull.org>. 22
- [Bažant and Lin, 1988] Bažant, Z. P. and Lin, F. (1988). Non-local yield limit degradation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26 :1805–1823. 58
- [Bažant and Pijaudier-Cabot, 1988] Bažant, Z. P. and Pijaudier-Cabot, G. (1988). Non linear continuous damage, localization instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 55 :287–293. 58
- [Bažant et al., 1990] Bažant, Z. P., Tabbara, M. R., Kazemi, M. T., and Pijaudier-Cabot, G. (1990). Random particle model for fracture of aggregate or fiber composites. *Journal of Engineering Mechanics*, 116 :1686–1705. 9, 10, 35, 57
- [Beddow and Meloy, 1980] Beddow, J. K. and Meloy, T. (1980). *Testing and characterization of powders and fine particles*,. Heyden, London, 1980. 9, 35
- [Belytschko et al., 1988] Belytschko, T., Fish, J., and Engelmann, B. E. (1988). A finite element with embedded localization zones. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70 :59–89. 4, 11

- [Belytschko et al., 2003] Belytschko, T., Parimi, C., Moës, N., Sukumar, N., and Usui, S. (2003). Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56 :609–635. [4](#), [14](#)
- [Ben Dhia, 1998] Ben Dhia, H. (1998). Multiscale mechanical problems : the Arlequin method. *Comptes rendus de l'académie des sciences, série IIb*, 326 :899–904. [4](#)
- [Benkemoun et al., 2010] Benkemoun, N., Hautefeuille, M., Colliat, J.-B., and Ibrahimbegovic, A. (2010). Modeling heterogeneous materials failure : 3D meso-scale models with embedded discontinuities. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 82 :1671–1688. [14](#), [61](#)
- [Bolander et al., 2000] Bolander, J. E., Hong, G. S., and Yoshitake, K. (2000). Structural concrete analysis using rigid-body-spring networks. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 15 :120–133. [22](#)
- [Bolander and Saito, 1998] Bolander, J. E. and Saito, S. (1998). Fracture analyses using spring networks with random geometry. *Engineering Fracture Mechanics*, 120 :569–591. [22](#)
- [Borja and Andrade, 2006] Borja, R. I. and Andrade, J. E. (2006). Critical state plasticity, part VI : Meso-scale finite element simulation of strain localization in discrete granular materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :5115–5140. [4](#)
- [Brancherie, 2003] Brancherie, D. (2003). *Modèles continus et discrets pour les problèmes de localisation et de rupture fragile et/ou ductile*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Cachan. [60](#), [61](#), [68](#)
- [Brancherie and Ibrahimbegovic, 2009] Brancherie, D. and Ibrahimbegovic, A. (2009). Novel isotropic continuum-discrete damage model capable of representing localized failure of massive structures. *Engineering Computation*, 26 :under press. [5](#), [117](#)
- [Broyden, 1969] Broyden, C. G. (1969). A new double-rank minimization algorithm. *Notices American Mathematical Society*, 16 :670. [73](#)
- [Broyden, 1970] Broyden, C. G. (1970). The convergence of single-rank quasi-newton methods. *Mathematical Computation*, 24 :365–382. [73](#)
- [Carpinteri and Ingrassia, 1984] Carpinteri, A. and Ingrassia, A. R. (1984). *Fracture Mechanics of Concrete*. Martinus Nijhoff editor, The Netherlands. [123](#)
- [Coleman and Hodgdon, 1985] Coleman, B. and Hodgdon, H. (1985). On shear band in ductile materials. *Archives in Rational Mechanics and Analysis*, 90 :219–247. [58](#)
- [Colliat et al., 2007] Colliat, J.-B., Hautefeuille, M., Ibrahimbegovic, A., and Matthies, H. G. (2007). Stochastic approach to size effect in quasi-brittle materials. *Compte Rendu Mécanique*, 335 :430–435. [4](#), [117](#)
- [Cosserat and Cosserat, 1909] Cosserat, E. and Cosserat, F. (1909). *Théorie des corps déformables*. Herman et fils. [59](#)
- [Crisfield and Wills, 1988] Crisfield, M. A. and Wills, J. (1988). Solution strategies and strain softening. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66 :267–289. [57](#)

- [Cullum, 1985] Cullum, J. K. (1985). Lanczos algorithms for large symmetric eigenvalue computations. In *Boston*. 41
- [Cundall, 1979] Cundall, P. A. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29 :47–65. 9
- [Cusatis et al., 2006] Cusatis, G., Bažant, Z. P., and Cedolin, L. (2006). Confinement-shear CSL model for fracture propagation in concrete. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :7154–7171. 22, 57
- [Dahlquist and Björck, 1974] Dahlquist, G. and Björck, A. (1974). *Numerical Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 74
- [De Schutter and Taerwe, 1993] De Schutter, G. and Taerwe, L. (1993). Random particle model for concrete based on Delaunay triangulation. *Materials and Structures*, 26 :67–73. 9
- [DeBorst et al., 1993] DeBorst, R., Sluys, L. J., Mühlhaus, H.-B., and Pamin, J. (1993). Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. *Engineering Computations*, 10 :99–121. 78
- [Dennis JR. et al., 1977] Dennis JR., J. E., Jorge, J., and Moré, J. (1977). Quasi-Newton methods, motivation and theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19 :46–89. 73
- [Dias-da-Costa et al., 2009] Dias-da-Costa, D., Alfaiate, J., Sluys, L. J., and Júlio, E. (2009). A discrete strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, xx :xx–xx. 61
- [Dvorkin and Assanelli, 1991] Dvorkin, E. N. and Assanelli, A. P. (1991). 2D finite element with displacement interpolated embedded localization lines : The analysis of fracture in frictional materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 90 :829–844. 59
- [Dvorkin et al., 1990] Dvorkin, E. N., Cuitiño, A. M., and Gioia, G. (1990). Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30 :541–564. 59
- [Fan et al., 2004] Fan, Z., Wu, Y., Zhao, X., and Lu, Y. (2004). Simulation of polycrystalline structure with Voronoi diagram in Laguerre geometry based on random closed packing of spheres. *Computational Material Science*, 29 :301–308. 22
- [Feyel and Chaboche, 2000] Feyel, F. and Chaboche, J.-L. (2000). FE² multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fiber SiC/Ti composite materials. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 183 :309–330. 4
- [Feyel and Chaboche, 2001] Feyel, F. and Chaboche, J.-L. (2001). Multi-scale non-linear FE² analysis of composite structures : damage and fiber size effects. *Revue européenne des Éléments Finis : NUMDAM'00 issue*, 10 :449–472. 4
- [Fletcher, 1970] Fletcher, R. (1970). A new approach to variable metric algorithms. *Ibid.*, 13 :317–322. 73
- [Frey and Jirousek, 2001] Frey, F. and Jirousek, J. (2001). *Analyse des structures et milieux continus*, volume 6. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. 21

- [G. Pijaudier-Cabot and Torrenti, 2009] G. Pijaudier-Cabot, J.-M. R. and Torrenti, J.-M. (2009). Mechanical behavior of concrete. *Wiley*. 2
- [Garboczi, 1993] Garboczi, E. J. (1993). Computational materials science of cement-based materials. *Materials and Structures*, 26 :191–195. 9
- [Georges and Borouchaki, 1997] Georges, P. and Borouchaki, H. (1997). *Triangulation de Delaunay et maillage, applications aux éléments finis*. Hermes. 11
- [Gerard, 1996] Gerard, B. (1996). *Contribution of the mechanical, chemical, and transport couplings in the long-term behavior of radioactive waste repository structures*. PhD thesis, Univ. Laval and Ecole Normale Supérieure de Cachan. 138
- [Geuzaine and Remacle, 2009] Geuzaine, C. and Remacle, J.-F. (2001–2009). Gmsh home page. <http://www.geuz.org/gmsh>. 22
- [Goldfarb, 1970] Goldfarb, D. (1970). A family of variable-metric methods derived by variational means. *Mathematical Computation*, 24 :23–26. 73
- [Guidoum and Navi, 1993] Guidoum, A. and Navi, P. (1993). *Numerical simulation of thermomechanical behaviour of concrete through 3D granular cohesive model*. in : *Micromechanics of Concrete and Cementitious Composites*,. Presses polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, pp. 213–228. 9
- [Häfner et al., 2003] Häfner, S., Eckardt, S., and Könke, C. (2003). A geometrical inclusion-matrix model for the finite element analysis of concrete at multiple scales. In *Proceedings of the 16th IKM*, Weimar, 2003. 10, 35
- [Hashin and Shtrikman, 1963] Hashin, Z. and Shtrikman, S. (1963). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the mechanics and physics of solids*, 11 :127–140. 52
- [Hautefeuille, 2009] Hautefeuille, M. (2009). *Numerical Modeling Strategy for Heterogeneous Materials : A FE Multi-scale and Component-based Approach*. PhD thesis, Université Technologique de Compiègne – Technische Universität Braunschweig. 4
- [Hautefeuille et al., 2009] Hautefeuille, M., Melnyk, S., Colliat, J.-B., and Ibrahimbegovic, A. (2009). Failure model of heterogeneous structures using structured meshes and accounting for probability aspects. *Engineering Computation*, 26 :under press. 4, 14
- [Hazanov and Huet, 1994] Hazanov, S. and Huet, C. (1994). Order relationships for boundary conditions effect in heterogeneous bodies smaller than the representative volume. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42 :1995–2011. 43
- [Herrmann and Roux, 1990] Herrmann, H. J. and Roux, S. (1990). *Statistical models for the fracture of disordered media*. Elsevier/North Holland, Amsterdam, The Netherlands. 10
- [Hill, 1967] Hill, R. (1967). The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 15 :79–95. 43
- [Hillerborg et al., 1976] Hillerborg, A., Modeer, M., and Petersson, P. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6 :773–782. 58
- [Hrennikoff, 1941] Hrennikoff, A. (1941). Solution of problems of elasticity by the framework method. *Journal of Applied Mechanics*, 8 :169–175. 10, 22

- [Huet, 1990] Huet, C. (1990). Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 21 :813–841. [43](#), [44](#)
- [Huet, 1993] Huet, C. (1993). *An integrated approach of concrete micromechanics*. in : *Micromechanics of Concrete and Cementitious Composites*. Presses polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, pp. 117–146. [9](#)
- [Ibrahimbegovic, 2006] Ibrahimbegovic, A. (2006). Mécanique non linéaire des solides déformables : formulation théorique et résolution par éléments finis. *Lavoisier*. [5](#), [64](#)
- [Ibrahimbegovic et al., 1998] Ibrahimbegovic, A., Gharzeddine, F., and Chorfi, L. (1998). Classical plasticity and viscoplasticity models reformulated : theoretical basis and numerical implementation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42 :1499–1535. [68](#)
- [Ibrahimbegović and Markovič, 2003] Ibrahimbegović, A. and Markovič, D. (2003). Strong coupling methods in multi-phase and multi-scale modeling of inelastic behavior of heterogeneous structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3089–3108. [4](#)
- [Ibrahimbegovic and Wilson, 1991] Ibrahimbegovic, A. and Wilson, E. L. (1991). A modified method of incompatible modes. *Communication in applied numerical methods*, 7 :187–194. [5](#), [17](#), [18](#)
- [Jean, 2009] Jean, A. (2009). *Étude d'un élastomère chargé : de sa nano structure à son macro comportement*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris. [10](#), [11](#)
- [Jirásek, 2000] Jirásek, M. (2000). Comparative study of finite elements with embedded discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188 :307–330. [12](#), [16](#), [17](#), [18](#)
- [Jirásek and Bažant, 1995a] Jirásek, M. and Bažant, Z. P. (1995a). Macroscopic fracture characteristics of random particle systems. *International Journal of Fracture*, 69 :201–228. [22](#)
- [Jirásek and Bažant, 1995b] Jirásek, M. and Bažant, Z. P. (1995b). Particles model for quasi-brittle fracture and application to sea ice. *Journal of Engineering Mechanics*, 121 :1016–1025. [10](#), [22](#)
- [Kanit et al., 2003] Kanit, T., Forest, S., Galliet, I., Mounoury, V., and Jeulin, D. (2003). Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :3647–3679. [4](#), [45](#), [47](#), [52](#), [117](#)
- [Kanit et al., 2006] Kanit, T., N’Guyen, F., Forest, S., Jeulin, D., Reed, M., and Singleton, S. (2006). Apparent and effective physical properties of heterogeneous materials : Representativity of samples of two materials from food industry. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :3960–3982. [24](#), [45](#), [52](#)
- [Kassiotis and Hautefeuille, 2008] Kassiotis, C. and Hautefeuille, M. (2008). *coFeap’s Manual*. http://www.lmt.ens-cachan.fr/cofeap/files/cofeap_manual.pdf. [5](#)
- [Kingman, 1993] Kingman, J. F. C. (1993). *Poisson Processes*. Oxford Science Publications, Oxford Studies in Probability. [36](#)

- [Klisinski et al., 1991] Klisinski, M., Runesson, K., and Sture, S. (1991). Finite element with inner softening band. *Journal of Engineering Mechanics*, 117 :575–587. [59](#)
- [Kupfer and Hilsdorf, 1969] Kupfer, H. and Hilsdorf, H. (1969). Behavior of concrete under biaxial stress. *ACI J. Proc.* 66, 8 :656–666. [123](#)
- [Lachihab and Sab, 2005] Lachihab, A. and Sab, K. (2005). Aggregate composites : a contact based modeling. *Computational Material Science*, 33 :467–490. [10](#), [22](#), [52](#)
- [Leite et al., 2004] Leite, J. P. B., Slowik, V., and Mihashi, H. (2004). Computer simulation of fracture processes of concrete using mesolevel models of lattice structures. *Cement Concrete Research*, 34 :1025–1033. [9](#), [10](#)
- [Lemaitre and Chaboche, 2004] Lemaitre, J. and Chaboche, J.-L. (2004). *Mécanique des matériaux solides*,. Dunod, 2004. [2](#), [62](#)
- [Lilliu and van Mier, 2003] Lilliu, G. and van Mier, J. G. M. (2003). 3D lattice type fracture model for concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 70 :927–941. [10](#), [22](#)
- [Loève, 1977] Loève, M. (1977). *Probability Theory*. Springer-Verlag, Berlin. [40](#)
- [Lofti and Shing, 1995] Lofti, H. R. and Shing, P. B. (1995). Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38 :1307–1325. [59](#)
- [Löhnert, 2004] Löhnert, S. (2004). Computational homogenization of microheterogeneous materials at finite strains including damage. *PhD thesis*, Hannover. [11](#)
- [Lorensen and Cline, 1987] Lorensen, W. and Cline, H. (1987). *Marching Cubes : a high resolution 3D surface reconstruction algorithm*. SIGGRAPH. [11](#)
- [Lubliner, 1990] Lubliner, J. (1990). *Plasticity theory*,. Mac-Millan, 1990. [2](#), [62](#)
- [Man and van Mier, 2007] Man, H.-K. and van Mier, J. G. M. (2007). Influence of particle density on 3D size effects in the fracture of (numerical) concrete. *Materials and Structures*, 40 :470–486. [10](#), [22](#)
- [Markovič and Ibrahimbegović, 2004] Markovič, D. and Ibrahimbegović, A. (2004). On micro-macro interface conditions for micro-scale based fem for inelastic behavior of heterogeneous materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :5503–5524. [4](#)
- [Matheron, 1975] Matheron, G. (1975). *Random sets and integral geometry*. Wiley, New-York. [36](#)
- [Matthies and Strang, 1979] Matthies, H. G. and Strang, G. (1979). Solution of non-linear finite-element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14 :1613–1626. [73](#), [74](#)
- [Mazars, 1984] Mazars, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la ruine du béton de structure*. PhD thesis, Thèse d'état, Université Paris VI, Paris. [118](#)
- [Mazars and Pijaudier-Cabot, 1987] Mazars, J. and Pijaudier-Cabot, G. (1987). Continuum damage theory - application to concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 115 :345–365. [57](#)
- [Meftah and Reynouard, 1998] Meftah, F. and Reynouard, J.-M. (1998). A multilayered mixed beam element in gradient plasticity for the analysis of localized failure modes. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 3 :305–322. [58](#)

- [Moës et al., 2003] Moës, N., Cloirec, M., Cartraud, P., and Remacle, J.-F. (2003). A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3163–3177. [10](#), [14](#)
- [Moës et al., 1999] Moës, N., Dolbow, J., and Belytshko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 46 :131–150. [14](#)
- [Muhlhaus and Aifantis, 1991] Muhlhaus, H. and Aifantis, E. (1991). A variational principle for gradient plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28 :845–857. [58](#)
- [Nechnech et al., 2002] Nechnech, W., Meftah, F., and Reynouard, J.-M. (2002). An elasto-plastic damage model for plain concrete subjected to high temperatures. *Engineering and Structures*, 24 :597–611. [118](#)
- [Needleman, 1988] Needleman, A. (1988). Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63 :69–85. [58](#)
- [Okabe et al., 1992] Okabe, A., Boots, B., and Sugihara, K. (1992). *Spatial Tessellations- Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. John Wiley & Sons, Chichester, UK. [22](#)
- [Oliver, 1996] Oliver, J. (1996). Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39 :3575–3623. [5](#), [60](#), [61](#)
- [Oliver, 2000] Oliver, J. (2000). On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. *International Journal of Solids and Structures*, 37 :7207–7229. [60](#), [61](#)
- [Oliver et al., 2002] Oliver, J., Huespe, A. E., Pulido, M. D. G., and Chaves, E. (2002). From continuum mechanics to fracture mechanics : the strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 69 :113–136. [59](#), [61](#)
- [Oliver et al., 2006] Oliver, J., Huespe, A. E., and Sánchez, P. J. (2006). A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities : E-FEM vs X-FEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :4732–4752. [15](#)
- [Olofsson et al., 1994] Olofsson, T., Klisinski, M., and Nedar, P. (1994). *Inner softening bands : A new approach to localization in finite elements*,. in : H. Mang, N. Bićanić, R. de Borst (Eds.), Computational Modelling of Concrete Structures. Pineridge, Swansea, 1994, 373–383. [59](#)
- [Ortiz et al., 1987] Ortiz, M., Leroy, Y., and Needleman, A. (1987). A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61 :189–214. [4](#), [11](#), [12](#)
- [Peerlings et al., 2000] Peerlings, R. H. J., Brekelmans, W., DeBorst, R., , and Geers, M. G. D. (2000). Fundamental issues in finite element analysis of localisation of deformation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49 :1547–1589. [58](#)
- [Pituba and Fernandes, 2010] Pituba, J. J. C. and Fernandes, G. R. (2010). An anisotropic damage model for the concrete. *Journal of Engineering Mechanics*. [118](#)

- [Pouya and Courtois, 2002] Pouya, A. and Courtois, A. (2002). Définition de la perméabilité équivalente des massifs fracturés par des méthodes d'homogénéisation. *Surface Geosciences (Hydrology-Hydrogeology)*, 334 :975–979. **133, 134**
- [Reynouard et al., 2009] Reynouard, J.-M., Pijaudier-Cabot, G., and Torrenti, J.-M. (2009). *Mechanical behavior of concrete*. Wiley, New-York. **118**
- [Roubin, 2010] Roubin, E. (2010). Modélisation morphologique de matériaux hétérogènes par seuillage de champs aléatoires : application aux matériaux à matrice cimentaire. *Mémoire de stage de Master 2*, École Normale Supérieure de Cachan. **37, 40**
- [Sab, 1992] Sab, K. (1992). On the homogenization and the simulation of random materials. *European Journal of Mechanics and Solids*, 11 :585–607. **43, 44**
- [Sang-Keun et al., 2004] Sang-Keun, L., Young-Chul, S., and H., S.-H. (2004). Biaxial behavior of plain concrete of nuclear containment building. *Nuclear Engineering and Design*, 227 :143–153. **120**
- [Schlangen, 1993] Schlangen, E. (1993). *Experimental and numerical analysis of fracture processes in concrete*. PhD thesis, Delft University of Technology. **22**
- [Schlangen, 1995] Schlangen, E. (1995). *Computational aspects of fracture simulations with lattice models*. Aedificatio Publ., in : F.H. Wittmann (Ed.), Fracture Mechanics of Concrete Structures (Proc., FraMCoS-2 held in Zurich) Freiburg, Germany. **22**
- [Schlangen and Garboczi, 1997] Schlangen, E. and Garboczi, E. J. (1997). Fracture simulations of concrete using lattice models : computational aspects. *Engineering Fracture Mechanics*, 57 :319–332. **10, 22**
- [Schlangen and van Mier, 1992] Schlangen, E. and van Mier, J. G. M. (1992). Simple lattice model for numerical simulation of fracture of concrete materials and structures. *Materials and Structures*, 25 :534–542. **9, 10, 22, 35, 36**
- [Schorn and Rode, 1991] Schorn, H. and Rode, U. (1991). Numerical simulation of crack propagation from microcracking to fracture. *Cement and Concrete Composites*, 13 :87–94. **10**
- [Shanno, 1970] Shanno, D. F. (1970). Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization. *Mathematical Computation*, 24 :647–656. **73**
- [Simo and Oliver, 1994] Simo, J. C. and Oliver, J. (1994). *A new approach to the analysis and simulation of strain softening in solids*,. in : Z. P. Bažant et al. (Eds.), Fracture and Damage in Quasibrittle Structures. E. and F. N. Spon, London, 1994, 25–39. **18**
- [Simo et al., 1993] Simo, J. C., Oliver, J., and Armero, F. (1993). An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, 12 :277–296. **5, 59, 60**
- [Simo and Rifai, 1990] Simo, J. C. and Rifai, M. (1990). A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 29 :1595–1638. **5**
- [Strouboulis et al., 2000a] Strouboulis, T., Babuška, I., and Copps, K. (2000a). The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181 :43–69. **12, 13**

- [Strouboulis et al., 2000b] Strouboulis, T., Copps, K., and Babuška, I. (2000b). The generalized finite element method : An example of its implementation and illustration of its performance. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47 :1401–1417. **12**
- [Stutzmann,] Stutzmann, P. E. Scanning electron microscopy in concrete petrography. *National Institute of Standards and Technology*. **2**
- [Sukumar et al., 2001] Sukumar, N., Chopp, D. L., Moës, N., and Belytshcko, T. (2001). Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :6183–6200. **14, 32, 53**
- [Taylor, 2008] Taylor, R. L. (March 2008). *FEAP – A Finite Element Analysis Program Version 8.2 User Manual*. Departement of Civil and Environmental Engineering – University of California at Berkeley. <http://www.ce.berkeley.edu/~rlt/feap/manual.pdf>. **5**
- [Torquato, 2001] Torquato, S. (2001). *Random heterogeneous Material – Microstructure and Macroscopic Properties*. Springer, New York, Berlin, Heidelberg. **37**
- [van Mier and van Vliet, 2003] van Mier, J. G. M. and van Vliet, M. R. A. (2003). Influence of microstructure of concrete on size/scale effects in tensile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 70 :2281–2306. **9**
- [van Mier et al., 1994] van Mier, J. G. M., Vervuurt, A., and Schlangen, E. (1994). Boundary and size effects in uniaxial tensile tests : a numerical and experimental study. In Bažant, Z. P., Bittnar, Z., Jirásek, M., and Mazars, J., editors, *Fracture and Damage in Quasibrittle Structures (Proc., NSF Workshop, Prague)*, pages 289–302, London. E&FN Spon. **22**
- [Wang et al., 1999] Wang, Z. M., Kwan, A. K. H., and Chan, H. C. (1999). Mesoscopic study of concrete I : generation of random aggregate structure and finite element mesh. *Computers and Structures*, 70 :533–544. **9, 10, 35, 36**
- [Washizu, 1982] Washizu, K. (1982). *Variational methods in elasticity and plasticity*. Pergamon Press, New York, 3 edition. **5, 15**
- [Wells and Sluys, 2001] Wells, G. N. and Sluys, L. J. (2001). Three-dimensional embedded discontinuity model for brittle fracture. *International Journal of Solids and Structures*, 38 :897–913. **61**
- [Wilson, 1974] Wilson, E. L. (1974). The static condensation algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8 :198–203. **31, 71, 105**
- [Wittmann et al., 1984] Wittmann, F. H., Roelfstra, P. E., and Sadouki, H. (1984). Simulation and analysis of composite structures. *Materials Science and Engineering*, 68 :239–248. **9, 35**
- [Wriggers and Moftah, 2006] Wriggers, P. and Moftah, S. O. (2006). Mesoscale models for concrete : Homogenisation and damage behaviour. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42 :623–636. **4, 9, 10, 35, 37, 57**
- [Yaman et al., 2002] Yaman, I. Ö., Hearn, N., and Aktan, H. M. (2002). Active and non-active porosity in concrete. part I : experimental evidence. *Materials and Structures*, 35 :102–109. **2, 118**

- [Yip et al., 2005] Yip, M., Mohle, J., and Bolander, J. E. (2005). Automated modeling of three-dimensional structural components using irregular lattices. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 120 :393–407. [22](#)
- [Zienkiewicz and Taylor, 2001] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. (2001). *The Finite Element Method, Solid Mechanics*, volume 2. Butterworth Heinemann, Oxford, 5 edition. [4](#)
- [Zohdi, 2001] Zohdi, T. I. (2001). Computational optimization of the vortex manufacturing of advanced materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :6231–6256. [10](#), [35](#)

Annexe A

Annexe A

A.1 Calcul du gradient de pression macroscopique avec des conditions aux limites homogènes

En choisissant, pour un cube de côté L , des conditions aux limites homogènes au contour telles que

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + p_0, \quad (\text{A.1})$$

le gradient de pression macroscopique est calculé par

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{grad}(p(\mathbf{x})) \, d\Omega \\ &= \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{grad}(\mathbf{A}\mathbf{x} + p_0) \, d\Omega \\ &= \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{A} \, d\Omega \quad (\text{A.2}) \\ &= \frac{1}{\Omega} \mathbf{A} \Omega \\ &= \mathbf{A} \end{aligned}$$