



**HAL**  
open science

# Méthodes de quasi-réversibilité et de lignes de niveau appliquées aux problèmes inverses elliptiques.

Jérémi Dardé

► **To cite this version:**

Jérémi Dardé. Méthodes de quasi-réversibilité et de lignes de niveau appliquées aux problèmes inverses elliptiques.. Mathématiques [math]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2010. Français. NNT : . tel-00551853

**HAL Id: tel-00551853**

**<https://hal.science/tel-00551853v1>**

Submitted on 4 Jan 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT-PARIS 7  
École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre

# THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : mathématiques appliquées

Jérémie Dardé

---

## MÉTHODES DE QUASI-RÉVERSIBILITÉ ET DE LIGNES DE NIVEAU APPLIQUÉES AUX PROBLÈMES INVERSES ELLIPTIQUES

---

Thèse dirigée par **François Jouve**

Soutenue le 10 décembre 2010 devant le jury composé de :

Grégoire Allaire	Président
Stéphane Andrieux	Examineur
Faker Ben Belgacem	Examineur
Laurent Bourgeois	Co-Encadrant
Fioralba Cakoni	Rapporteur
Antoine Henrot	Rapporteur
François Jouve	Directeur





## Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance à Laurent Bourgeois et François Jouve pour m'avoir donné la chance de travailler sous leur direction et m'avoir fait confiance pendant ces trois années. Ce travail doit beaucoup à leur soutien et leurs nombreux conseils. Je voudrais particulièrement remercier Laurent pour son implication et son aide quotidienne, ainsi que pour sa relecture minutieuse du manuscrit.

Je souhaite remercier Fioralba Cakoni et Antoine Henrot pour avoir accepté de rapporter ma thèse, pour le temps qu'ils ont consacré à l'évaluation du manuscrit, et pour leurs remarques et conseils pertinents. Je remercie également Grégoire Allaire, Stéphane Andrieux et Faker Ben Belgacem de l'intérêt qu'ils manifestent au travail réalisé en me faisant l'honneur d'être membres de mon jury.

Durant ces trois années, j'ai été accueilli au sein du laboratoire Jacques-Louis Lions de l'université Paris Diderot et du laboratoire Propagation des Ondes : Étude Mathématique et Simulation de l'École Nationale Supérieure de Techniques Avancées. J'y ai trouvé des conditions de travail excellentes, tant au niveau humain que scientifique. Je tiens à remercier l'ensemble des membres de ces équipes pour leur disponibilité et leur bonne humeur communicative. Un grand merci à Éric et Patrick pour leurs apports "matlabesques", à Hasnaa pour son aide précieuse au sujet des équations HJB, à Christophe et Maurice pour leurs nombreux dépannages informatiques, et à Anne-Sophie, Christophe et Jean-François pour leurs conseils toujours avisés. Je souhaiterais également remercier les doctorants avec lesquels j'ai vécu cette expérience, en particulier Benjamin et Lauris avec qui j'ai partagé beaucoup de bons moments durant ces trois ans.

Enfin, je remercie mes proches qui m'ont accompagné et permis de mener ce travail dans les meilleures conditions, mes amis sarladais, rochelais, toulousains et parisiens, mes coéquipiers de maths et d'aïkido, Manu, Raphi, mes colocataires officiels, Anabel, Julien, Marion, et officieux, Antoine, Grum, Marie, Mishto, Pierre, ma famille, Adélie, Benjamin, Florence, François, et bien-sûr Manon. À vous tous un grand merci.





# Table des matières

Introduction générale	1
<b>I Problème de Cauchy elliptique et méthode de quasi-réversibilité</b>	<b>5</b>
<b>1 Problème de Cauchy elliptique mal posé</b>	<b>7</b>
1.1 Unicité	9
1.2 Non continuité, non surjectivité	13
1.3 Stabilité conditionnelle	14
<b>2 La méthode de quasi-réversibilité</b>	<b>17</b>
2.1 Différentes formulations	20
2.1.1 Formulation dans $H^1(\Omega, P)$	20
2.1.2 Formulation mixte	23
2.1.3 Formulations dans $H^2(\Omega)$	25
2.2 Résolution numérique dans un domaine polygonal de $\mathbb{R}^2$	29
2.2.1 Méthode [QR] dans un polygone de $\mathbb{R}^2$	29
2.2.2 Discrétisation du problème [QR]	31
2.2.3 Convergence de la méthode éléments finis	36
2.2.4 Calcul des matrices élémentaires	42
2.2.5 Applications numériques	42
<b>3 Prise en compte du bruit</b>	<b>51</b>
3.1 Modélisation : qu'est ce qu'un bruit ?	52
3.2 Comportement de la méthode [QR] en présence de bruit	52
3.3 Une formulation basée sur la dualité	57
3.3.1 Un problème d'optimisation	57
3.3.2 Lien avec la quasi-réversibilité	63
3.4 Discrétisation du problème	66
3.4.1 Espaces discrets, produits scalaires	66
3.4.2 Problèmes d'optimisation discrets	69
3.5 Applications numériques	75
<b>II Méthodes de lignes de niveau adaptées au problème inverse de l'obstacle</b>	<b>83</b>
<b>4 Problème inverse de l'obstacle avec condition de Dirichlet</b>	<b>85</b>
4.1 Formulation mathématique du problème	86
4.1.1 L'opérateur différentiel de notre problème	86
4.1.2 Problème inverse de l'obstacle	87

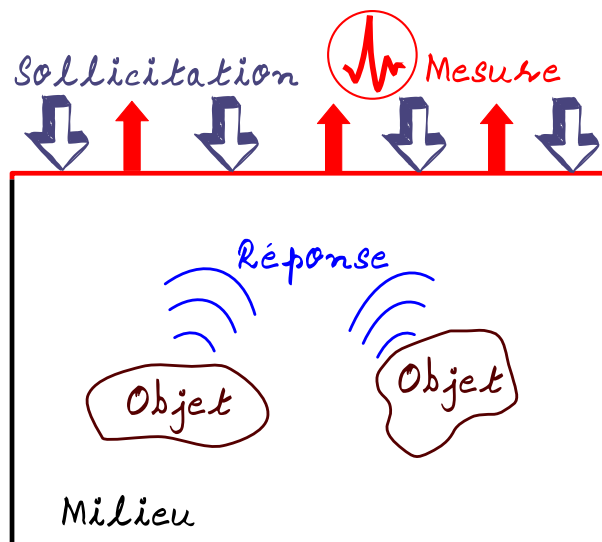
4.2	Exemples d'applications . . . . .	89
4.2.1	Identification du bord d'un plasma dans un tokamak . . . . .	89
4.2.2	Notre problème test : opérateur $\Delta$ . . . . .	90
4.3	Limitations d'une première méthode naïve . . . . .	92
4.4	Une nouvelle approche par l'extérieur . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Méthode de lignes de niveau fondée sur une équation de Hamilton-Jacobi</b>	<b>97</b>
5.1	Méthode de lignes de niveau . . . . .	98
5.1.1	Équation eikonale . . . . .	98
5.1.2	Cadre théorique . . . . .	98
5.1.3	Stratégie de résolution du problème $[\mathcal{O}_{bs}]$ . . . . .	99
5.2	Résolution du problème $[\mathcal{O}_{bs}]$ ... . . . .	100
5.2.1	Une première méthode simple . . . . .	100
5.2.2	Seconde méthode : méthode [HJ] . . . . .	103
5.2.3	Conclusion et remarques : vers une nouvelle méthode de résolution de $[\mathcal{O}_{bs}]$	107
<b>6</b>	<b>Méthode de lignes de niveau fondée sur une équation de Poisson</b>	<b>109</b>
6.1	Résultats préliminaires . . . . .	110
6.2	Une méthode de résolution basée sur un problème de Poisson . . . . .	111
6.3	Paramètres et hypothèse de la méthode [P] . . . . .	115
6.4	Utilisation de plusieurs jeux de données . . . . .	118
<b>7</b>	<b>Extension à l'identification de défauts dans un matériau élasto-plastique</b>	<b>121</b>
7.1	Loi élasto-plastique : cas antiplan . . . . .	122
7.2	Structure mathématique du problème inverse . . . . .	124
7.3	Modification de la méthode [P] pour résoudre le problème $[\mathcal{P}_{las}]$ . . . . .	126
 <b>III Couplage méthode de quasi-réversibilité/méthodes de lignes de niveau</b>		
<b>8</b>	<b>Résolution du problème inverse de l'obstacle avec condition de Dirichlet</b>	<b>131</b>
8.1	Aspects numériques de la résolution du problème $[\mathcal{O}_{bs}]$ . . . . .	132
8.1.1	Discrétisation des domaines . . . . .	132
8.1.2	Obtention d'une approximation de $u$ dans $\mathcal{D} \setminus \overline{\Theta}_n$ . . . . .	134
8.1.3	Mise à jour de l'ouvert : obtenir $\Theta_{n+1}$ . . . . .	135
8.1.4	Convergence des méthodes, condition d'arrêt des algorithmes . . . . .	143
8.2	Expériences numériques . . . . .	143
8.2.1	Comparaison des méthodes [QR-HJ] et [QR-P] . . . . .	145
8.2.2	Influence des paramètres . . . . .	149
8.2.3	Lignes de niveau zéro "parasites" et utilisation de plusieurs jeux de données	160
8.2.4	Donnée bruitée . . . . .	162
<b>9</b>	<b>Recherche de zones plastiques : aspects numériques</b>	<b>165</b>
9.1	Résolution du problème direct de l'élasto-plasticité antiplane . . . . .	166
9.2	Adaptation de la méthode [QR-P] pour la résolution de $[\mathcal{P}_{las}]$ . . . . .	167
9.2.1	Principe de l'approximation du gradient . . . . .	167
9.2.2	Assemblage des matrices $M$ , $D_x$ et $D_y$ dans le cas d'une approximation par éléments finis $P_1$ . . . . .	168
9.3	Applications numériques . . . . .	169
9.3.1	Recherche d'une fissure par la zone plastique générée . . . . .	169
9.3.2	Cas où la zone plastique n'entoure pas complètement le défaut . . . . .	172

Conclusion générale	174
<b>IV Annexes</b>	<b>179</b>
<b>A Équation de Hamilton-Jacobi</b>	<b>181</b>
A.1 Existence et unicité . . . . .	181
A.1.1 Équation posée dans $\mathbb{R}^d$ . . . . .	181
A.1.2 Équation en domaine borné . . . . .	182
A.2 Borne inférieure du gradient . . . . .	189
<b>B Géométrie</b>	<b>191</b>
B.1 Régularité des ouverts de $\mathbb{R}^d$ . . . . .	191
B.2 Distance signée et distance de Hausdorff . . . . .	194
<b>C Stabilité du problème de Cauchy dans un ouvert à bord lipschitzien</b>	<b>199</b>
C.1 Introduction . . . . .	199
C.2 Some preliminary results . . . . .	201
C.3 The two main theorems . . . . .	205
C.4 Application to the method of quasi-reversibility . . . . .	215
<b>Bibliographie</b>	<b>220</b>



# Introduction générale

Ce mémoire concerne l'application de la méthode de quasi-réversibilité à la résolution de problèmes inverses. Nous nous intéressons plus particulièrement au problème inverse de l'obstacle, formalisation mathématique du problème concret suivant : on cherche à identifier des "objets" (mines, fissures, avions...) contenus dans un "milieu" (sol, poutre, air...) gouverné par une équation aux dérivées partielles elliptique, et dont, le cas échéant, une partie du bord est inaccessible. À cette fin, on impose au milieu une sollicitation (électrique, mécanique, thermique...) sur la partie du bord accessible et on mesure la réponse correspondante sur la même partie du bord.



Le problème inverse de l'obstacle est un problème géométrique : on cherche à la fois la géométrie du milieu et la solution d'une équation aux dérivées partielles dans ce milieu. Dans le cas plus simple où la géométrie est connue, le problème inverse se ramène au problème de la recherche d'une solution de l'équation aux dérivées partielles elliptique par la connaissance de données dites "surabondantes" sur une partie du bord du milieu. On a alors à résoudre un problème dit "de Cauchy" elliptique. Il est bien connu qu'un tel problème est mal posé au sens d'Hadamard, et nécessite une régularisation.

La méthode de quasi-réversibilité, proposée par Jacques-Louis Lions et Robert Lattès en 1967<sup>1</sup>, est une telle méthode de régularisation du problème de Cauchy. Sa caractéristique principale est que, contrairement à la plupart des méthodes de régularisation, elle ne repose pas sur la résolution d'un problème d'optimisation et s'écrit d'emblée sous une forme variationnelle, directement exploitable numériquement par une méthode de Galerkin. Néanmoins, on constate que cette méthode n'a été que très peu utilisée durant les années suivant la publication de cet ouvrage. Nous voyons trois raisons principales à cela :

---

<sup>1</sup>[LL67]

1. La méthode des éléments finis n'en était qu'à ses débuts à l'époque, et les autres méthodes existantes ne permettaient pas à la méthode de quasi-réversibilité de donner sa pleine mesure, d'autant plus qu'elle repose sur la résolution d'un problème d'ordre 4.
2. On ne disposait pas de la puissance de calcul nécessaire pour mettre en place des méthodes réellement utilisables en pratique.
3. Les années 60 voient aussi le début des recherches sur la régularisation des problèmes mal posés, incluant en particulier le traitement de données issues de mesures, et donc bruitées. Cet aspect apparaît de manière cruciale dans la méthode de quasi-réversibilité.

Pendant les quarante dernières années sont apparues des méthodes éléments finis performantes, adaptées en particulier aux problèmes d'ordre 4 (éléments finis non conformes, formulation mixte...). De plus, la puissance de calcul des ordinateurs a fortement augmenté, permettant de s'attaquer à des problèmes avec un nombre de degrés de liberté très important. Enfin, nous bénéficions d'une littérature abondante dans le domaine de la régularisation des problèmes mal posés, dont le point de départ est l'école russe (Andrey Nikolayevich Tychonoff, Mikhaïl Alekseïevitch Lavrentiev, Nikolai Aleksandrovich Morozov). Pour ces raisons, nous estimons qu'il est pertinent de revisiter la méthode de quasi-réversibilité à la lumière de tous ces nouveaux outils. Par ailleurs, en ce qui concerne le problème inverse de l'obstacle, s'ajoute au caractère mal posé du problème de Cauchy la non-linéarité liée à l'inconnue géométrique. Gérer cette inconnue peut être numériquement très complexe. Les méthodes de lignes de niveau, introduites pour la première fois en 1988 dans un article de Stanley Osher et James Albert Sethian<sup>2</sup>, offrent une manière élégante de pallier les difficultés liées à cette inconnue.

L'objet principal de ce mémoire est de proposer une nouvelle méthode de résolution du problème inverse de l'obstacle basée sur le couplage de la méthode de quasi-réversibilité et une méthode de lignes de niveau. La principale caractéristique de cette méthode "par l'extérieur" est qu'elle ne repose pas sur l'optimisation d'une fonction coût, contrairement à la plupart des méthodes de lignes de niveau.

La présente étude se compose de trois parties :

- Première partie

Cette partie est consacrée à la résolution du problème de Cauchy elliptique par la méthode de quasi-réversibilité. On rappelle au chapitre 1 les principales caractéristiques de ce problème, injectivité, non-surjectivité, non-continuité et stabilité conditionnelle. Les résultats sont démontrés dans le cas simple de l'opérateur  $\Delta + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Le chapitre 2 est centré sur la méthode de quasi-réversibilité. Nous y introduisons plusieurs formulations de la méthode, en explorant les points forts et les faiblesses de chacune. Puis, nous nous intéressons à la résolution numérique effective du problème en dimension 2, à l'aide d'une formulation basée sur des éléments finis non conformes. Nous démontrons théoriquement la convergence de la méthode éléments finis vers la solution recherchée. Des résultats numériques viennent confirmer l'efficacité de la méthode.

Enfin, le chapitre 3 est consacré au problème spécifique de la gestion du bruit. Une nouvelle méthode basée sur le principe de Morozov et la dualité en optimisation est proposée. Elle permet de régulariser la donnée bruitée et de fixer le paramètre de régularisation de la méthode de quasi-réversibilité. L'étude théorique de cette approche est suivie d'une étude numérique démontrant sa pertinence et son efficacité.

---

<sup>2</sup>[OS88]

- Deuxième partie

Nous proposons dans cette deuxième partie deux nouvelles méthodes de lignes de niveau adaptées à la résolution du problème inverse de l'obstacle avec condition de Dirichlet. Au chapitre 4, on rappelle les principales caractéristiques de ce problème, et on explicite l'approche que l'on va utiliser pour le résoudre, à savoir "l'approche par l'extérieur". L'idée est de construire une suite d'ouverts, représentés comme ensembles de niveau zéro de fonctions, convergeant vers l'obstacle recherché.

Les chapitres 5 et 6 présentent deux nouvelles méthodes de lignes de niveau adaptées à cette approche. Contrairement aux méthodes classiques, pour lesquelles la vitesse dépend du gradient d'une fonction coût, les vitesses de ces deux méthodes dépendent explicitement de la solution du problème extérieur. La première méthode est basée sur la résolution d'une équation de Hamilton-Jacobi, la seconde sur la résolution d'une équation de Poisson. Nous démontrons théoriquement la convergence vers l'obstacle des suites d'ouverts construites par ces deux méthodes. Une étude théorique des paramètres des méthodes est aussi effectuée.

Enfin, le chapitre 7 est consacré à un problème proche du problème inverse de l'obstacle, à savoir le contrôle non-destructif de matériaux élasto-plastiques. Dans ce nouveau problème, l'obstacle recherché n'est plus caractérisé par une condition de Dirichlet, mais par une condition du type  $|\nabla u| = cte$ . Nous montrons que les méthodes proposées s'adaptent facilement à ce nouveau problème.

- Troisième partie

La troisième partie est consacrée aux aspects numériques du couplage entre la méthode de quasi-réversibilité et les méthodes de lignes de niveaux développées aux chapitres 5 et 6, ainsi qu'à la résolution de problèmes concrets. On s'intéresse plus particulièrement au chapitre 8 à la résolution numérique du problème inverse de l'obstacle avec condition de Dirichlet. Les principales étapes numériques de la résolution sont étudiées, puis de nombreux exemples numériques mettent en évidence les points forts et point faibles des deux méthodes de lignes de niveau (équation de Hamilton-Jacobi et équation de Poisson), ainsi que l'impact des différents paramètres sur la qualité de reconstruction de l'obstacle.

Enfin, le chapitre 9 est consacré aux aspects numériques propre à la problématique du contrôle non-destructif de matériaux élasto-plastiques. Une nouvelle fois, des simulations numériques démontrent l'efficacité de "l'approche par l'extérieur".

- Annexes

Trois annexes viennent compléter cette étude. La première est consacrée à des rappels théoriques sur les équations de Hamilton-Jacobi, qui interviennent dans la méthode développée au chapitre 5. On y présente les principaux résultats d'existence et d'unicité utiles à notre étude, ainsi qu'un résultat récent concernant la décroissance du gradient de la solution de l'équation en fonction du temps.

L'annexe B est consacrée aux aspects géométriques apparaissant dans notre étude, principalement à des rappels concernant la notion de régularité du bord d'un ouvert, et sur la notion de distance, en particulier la distance de Hausdorff, qui joue un rôle primordial dans les résultats de convergence de nos méthodes de lignes de niveau.

Enfin, l'annexe C est la reproduction d'un rapport de recherche consacré aux questions de stabilité des problèmes de Cauchy dans des domaines à bords lipschitziens. Ce travail a depuis fait l'objet d'un article paru dans la revue *Applicable Analysis* en 2010<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>[BD10b]



---

Cette étude a mené aux publications suivantes :

- *About stability and regularization of ill-posed elliptic Cauchy problems : the case of Lipschitz domains*, L. Bourgeois & J. Dardé, *Applicable Analysis*, iFirst, vol.24, 2010.
- *A quasi-reversibility approach to solve the inverse obstacle problem*, L.Bourgeois & J.Dardé, *Inverse Problems and Imaging*, p.351-377, vol.4, n°3, 2010.
- *A duality-based method of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem in the presence of noisy data*, L.Bourgeois & J.Dardé, *Inverse Problems*, vol. 26, 2010.

**Projet de publication :**

- *About identification of defect in an elasto-plastic medium from boundary measurement in the antiplane case*, L.Bourgeois & J.Dardé, en préparation.

## Première partie

# Problème de Cauchy elliptique et méthode de quasi-réversibilité

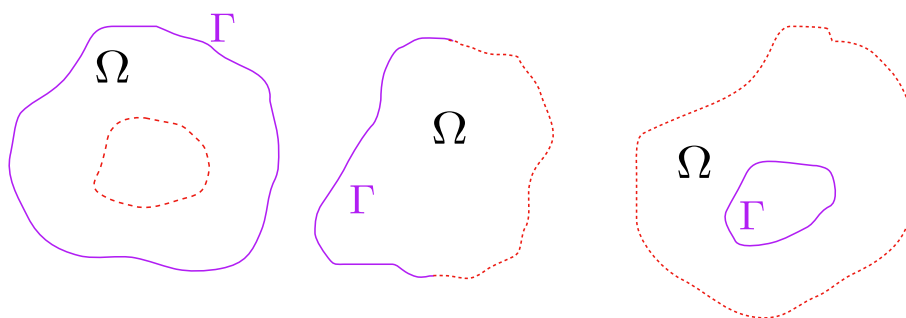


# Chapitre 1

## Problème de Cauchy elliptique mal posé

### Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux problèmes de Cauchy pour des équations aux dérivées partielles elliptiques. Un exemple typique de ces problèmes est le suivant : on se donne  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$ , et  $\Gamma$  une partie de sa frontière.



Exemples de configuration.

On suppose que le phénomène que l'on étudie est régi par une équation de Laplace :  $\Delta u = 0$  dans le milieu. On impose alors un "flux"  $g_1$  sur  $\Gamma$ , et on mesure la valeur  $g_0$  de la fonction  $u$  correspondante sur  $\Gamma$ .  $u$  vérifie donc

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g_0 & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_1 & \text{sur } \Gamma \text{ } (\nu \text{ normale extérieure à } \Omega). \end{cases}$$

Le problème de Cauchy consiste alors à trouver  $u$  connaissant  $(g_0, g_1)$ .

Cette problématique se trouve dans divers domaines scientifiques et d'ingénierie : prospection ou inspection thermique ou électrique, imagerie géophysique ou médicale... Nous allons dans ce chapitre nous intéresser aux caractéristiques mathématiques des problèmes de Cauchy elliptiques : unicité, non existence, non continuité par rapport aux données, stabilité conditionnelle.

### Sommaire

---

1.1	Unicité . . . . .	9
1.2	Non continuité, non surjectivité . . . . .	13
1.3	Stabilité conditionnelle . . . . .	14

---

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe et borné de  $\mathbb{R}^d$ . On introduit l'opérateur suivant :

$$Pu := \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu$$

avec  $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$  et  $c \in L^\infty(\Omega)$ . On voit facilement que si  $u \in H^1(\Omega)$ , on a  $Pu \in H^{-1}(\Omega)$ , et si  $u \in H^2(\Omega)$ ,  $Pu \in L^2(\Omega)$ . On définit

$$H^1(\Omega, P) := \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid Pv \in L^2(\Omega) \right\}.$$

On a directement  $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega, P) \subset H^1(\Omega)$ .

**Propriété 1.1**  $H^1(\Omega, P)$ , muni du produit scalaire  $(u, v)_{H^1(\Omega, P)} := (u, v)_{H^1(\Omega)} + (Pu, Pv)_{L^2(\Omega)}$ , est un espace de Hilbert.

**Preuve** : il est direct que  $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega, P)}$  est un produit scalaire sur  $H^1(\Omega, P)$ . Il reste à vérifier que  $H^1(\Omega, P)$  est complet pour ce produit scalaire.

Soit donc une suite  $u_n$  d'éléments de  $H^1(\Omega, P)$  de Cauchy pour la norme  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega, P)}$ . Alors  $u_n$  est une suite de Cauchy dans  $H^1$  et  $Pu_n$  est une suite de Cauchy dans  $L^2$ , puisque  $\|u_n - u_m\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u_n - u_m\|_{H^1(\Omega, \Delta)}$  et  $\|Pu_n - Pu_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_n - u_m\|_{H^1(\Omega, \Delta)}$ . Or  $H^1$  et  $L^2$  sont deux espace de Banach<sup>1</sup>. Il existe donc  $u \in H^1(\Omega)$  et  $v \in L^2(\Omega)$  tels que

$$u_n \xrightarrow[H^1]{n \rightarrow \infty} u, \quad Pu_n \xrightarrow[L^2]{n \rightarrow \infty} v.$$

Soit  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . On a

$$\langle Pu, \varphi \rangle = \int_{\Omega} - \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + cu \varphi dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} - \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + cu_n \varphi dx.$$

Or

$$- \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + cu_n \varphi dx = \int_{\Omega} Pu_n \varphi dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v \varphi dx.$$

On a donc  $Pu = v \in L^2(\Omega)$ , d'où  $u \in H^1(\Omega, P)$  et  $u_n \xrightarrow[H^1(\Omega, P)]{n \rightarrow \infty} u$ . ■

On a<sup>2</sup> le

**Lemme 1.1** soit  $\Omega$  ouvert connexe borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Gamma$  une partie lipschitzienne<sup>3</sup> de sa frontière,  $\nu$  le vecteur normal sortant à  $\Omega$ <sup>4</sup>. Alors  $\forall u \in H^1(\Omega, P)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \nu_P} := \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i \in H^{-1/2}(\Gamma)$ . De

plus, l'application  $u \in H^1(\Omega, P) \mapsto \frac{\partial u}{\partial \nu_P} \in H^{-1/2}(\Gamma)$  est continue et surjective.

On a la formule de Green suivante<sup>5</sup> :

**Lemme 1.2 - formule de Green** : soit  $\Omega$  ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$  à frontière lipschitzienne,  $\nu$  le vecteur normal sortant à  $\Omega$ . Alors  $\forall (u, v) \in H^1(\Omega, P) \times H^1(\Omega)$ ,

$$\sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v + a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right) = \left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu_P}, v \right\rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}.$$

<sup>1</sup>cf théorème IV.8 p.57 et proposition IX.1 p.150 de [Bre05]

<sup>2</sup>cf lemme 2.2 p.131 de [Kav]

<sup>3</sup>pour la définition de cette notion, se reporter à l'annexe B p.191

<sup>4</sup>qui est défini presque partout sur  $\Gamma$ , cf lemme 4.2 p.88 de [ND67]

<sup>5</sup>cf [LM68] ou [ND67]

Le problème de Cauchy pour cet opérateur se formule de la manière suivante :

Problème [Cauchy] : trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que

$$\begin{cases} Pu &= f \in L^2(\Omega) \\ u &= g_0 \in H^{1/2}(\Gamma) \\ \partial_{\nu_P} u &= g_1 \in H^{-1/2}(\Gamma) \end{cases}$$

Ce problème est mal posé (au sens d'Hadamard) : on sait qu'il peut ne pas avoir de solution. De plus, si une solution existe, elle ne dépend pas continûment de la donnée  $(f, g_0, g_1)$ . Néanmoins, si l'opérateur  $P$  vérifie une propriété de prolongement unique, alors cette solution est unique. Nous pouvons énoncer la propriété suivante<sup>6</sup> :

**Propriété 1.2 - propriété de prolongement unique** : *supposons qu'il existe  $\lambda > 0$  t.q.  $\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ , pour presque tout  $x \in \Omega$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$  (stricte ellipticité de l'opérateur  $P$ ). Alors si  $u \in H^1(\Omega)$  vérifie  $Pu = 0$  dans  $\Omega$ , et si il existe  $\omega \subset \Omega$  ouvert non vide tel que  $u \equiv 0$  sur  $\omega$ , on a  $u \equiv 0$  sur  $\Omega$ .*

Si l'opérateur  $P$  vérifie les hypothèses de la propriété précédente (qui ne sont que des conditions suffisantes pour avoir la propriété de prolongement unique), on aura automatiquement unicité de la solution du problème de Cauchy pour  $P$ .

Nous allons montrer ces propriétés (prolongement unique, unicité, non continuité, non existence) pour l'opérateur  $P := \Delta + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$  (on a ici  $a_{ij} := \delta_{ij}$  et  $c := k$ ). Nous verrons également les propriétés de stabilité conditionnelle pour cet opérateur. On prend ainsi en compte l'opérateur de Laplace et l'opérateur de Helmholtz.

## 1.1 Unicité

Pour  $k \in \mathbb{R}$ , on définit  $P := v \in H^1(\Omega, \Delta) \mapsto Pv = \Delta v + kv \in L^2(\Omega)$ . Le problème de Cauchy pour cet opérateur consiste, pour  $(g_0, g_1, f) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma) \times L^2(\Omega)$ , à trouver  $u \in H^1(\Omega)$  t.q.

$$\begin{cases} \Delta u + k u &= f \in L^2(\Omega) \\ u &= g_0 \in H^{1/2}(\Gamma) \\ \partial_{\nu} u &= g_1 \in H^{-1/2}(\Gamma) \end{cases}$$

Nous allons montrer que ce problème admet au plus une solution. Pour cela, comme annoncé précédemment, nous allons démontrer une propriété de prolongement unique pour l'opérateur  $\Delta + k$ . Nous allons avoir besoin de l'inégalité des trois sphères, dont une preuve peut être trouvée dans le rapport de recherche reporté en annexe<sup>7</sup> ou dans [BD10b].

**Propriété 1.3 - inégalité des trois sphères** : *soit  $x \in \Omega$  et  $0 < r_0 < r_1 < r_2$  vérifiant  $\mathcal{B}(x, r_2) \subset \Omega$ . Il existe  $C > 0$ ,  $s > 0$  t.q.  $\forall u \in H^1(\Omega, \Delta)$ ,*

$$\|u\|_{H^1(\mathcal{B}(x, r_1))} \leq C(\|Pu\|_{L^2(\mathcal{B}(x, r_2))} + \|u\|_{H^1(\mathcal{B}(x, r_0))})^{\frac{s}{s+1}} \|u\|_{H^1(\mathcal{B}(x, r_2))}^{\frac{1}{s+1}}$$

On a aussi besoin du résultat suivant, qui est démontré dans [Sch91] (théorème 2.9.10 p 256) :

<sup>6</sup>c'est une conséquence du théorème 4.2 de [LL09]

<sup>7</sup>annexe C

**Propriété 1.4 - théorème du passage des douanes :** *si  $E$  est un espace vectoriel topologique,  $A$  une partie de  $E$ , tout chemin joignant un point de l'intérieur de  $A$  à un point de l'extérieur de  $A$  rencontre nécessairement la frontière de  $A$ .*

### Prolongement unique

**Théorème 1.1 - prolongement unique :** *soit  $u \in H^1(\Omega)$  vérifiant  $Pu = 0$  dans  $\Omega$  et t.q. il existe un ouvert  $\omega \subset \Omega$ ,  $|\omega| \neq 0$ , t.q.  $u \equiv 0$  dans  $\omega$ . Alors  $u \equiv 0$  dans  $\Omega$ .*

On propose deux manières de démontrer ce théorème, la première ( $\spadesuit$ ) utilisant la connexité par arcs, la seconde ( $\clubsuit$ ) la connexité de  $\Omega^8$  :

**Preuve  $\spadesuit$  :** soit  $x \in \omega$ . Notons  $\rho_{\max} = d(x, \partial\Omega)$ . On a  $\mathcal{B}(x, \rho_{\max}) \subset \Omega$ . Pour tout  $\rho$ ,  $0 < \rho < \rho_{\max}$ , on a  $u \equiv 0$  dans  $\mathcal{B}(x, \rho)$ . En effet, puisque  $x \in \omega$  ouvert, il existe  $\rho_0$  t.q.  $\mathcal{B}(x, \rho_0)$  soit contenue dans  $\omega$ , et donc  $u \equiv 0$  dans  $\mathcal{B}(x, \rho_0)$ . On en déduit directement que  $\forall \rho$ ,  $0 < \rho \leq \rho_0$ ,  $u \equiv 0$  dans  $\mathcal{B}(x, \rho)$ .

Soit maintenant  $\rho$  t.q.  $\rho_0 < \rho < \rho_{\max}$ . On a  $Pu \equiv 0$  dans  $\mathcal{B}(x, \rho_{\max})$ . Il suffit alors d'appliquer la proposition 1.3 avec  $r_0 = \rho_0$ ,  $r_1 = \rho$  et  $r_2 = \rho_{\max}$ , et on obtient  $u \equiv 0$  dans  $\mathcal{B}(x, \rho)$ .

Soit  $y \in \Omega$ . Nous allons montrer que il existe  $d(y) > 0$  t.q.  $u \equiv 0$  sur  $\mathcal{B}_y = \mathcal{B}(y, d(y))$ . Comme  $\Omega$  est ouvert connexe, il est connexe par arcs<sup>9</sup>. Il existe donc une application continue  $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t) \in \Omega$  t.q.  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(1) = y$ .

Nous allons tout d'abord montrer qu'il existe  $d > 0$  t.q.  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $\mathcal{B}(\gamma(t), d) \subset \Omega$ . Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $(z_n, t_n) \in \partial\Omega \times [0, 1]$  t.q.  $d(z_n, \gamma(t_n)) \leq \frac{1}{n}$ . Comme  $\partial\Omega \times [0, 1]$  est un fermé borné de  $\mathbb{R}^{d+1}$ , on peut extraire une sous-suite  $(z_{n'}, t_{n'})$  qui converge vers  $(z, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$ . Par définition,  $\gamma(t) \in \Omega$ . Mais par continuité,  $d(z_{n'}, \gamma(t_{n'})) \xrightarrow{n' \rightarrow \infty} d(z, \gamma(t))$ , et par définition,  $d(z_{n'}, \gamma(t_{n'})) \xrightarrow{n' \rightarrow \infty} 0$ . On en déduit que  $z = \gamma(t)$ , d'où  $\gamma(t) \in \partial\Omega$ , et donc  $\gamma(t) \notin \Omega$ . Contradiction.

Soit maintenant  $0 < \rho < d$ . On définit la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} x_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \begin{cases} y \text{ si } y \in \mathcal{B}(x_n, \rho) \\ \gamma(t_{n+1}), \text{ où } t_{n+1} = \sup T_n, \\ T_n = \{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in \partial\mathcal{B}(x_n, \rho/2)\} \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie. En effet, pour  $n \in \mathbb{N}$ , si  $y \notin \mathcal{B}(x_n, \rho)$ , alors la propriété 1.4 montre que  $T_n$  est non vide.  $t_{n+1}$  est bien défini,  $t_{n+1} \in [0, 1]$ , et donc  $x_{n+1}$  est bien défini.

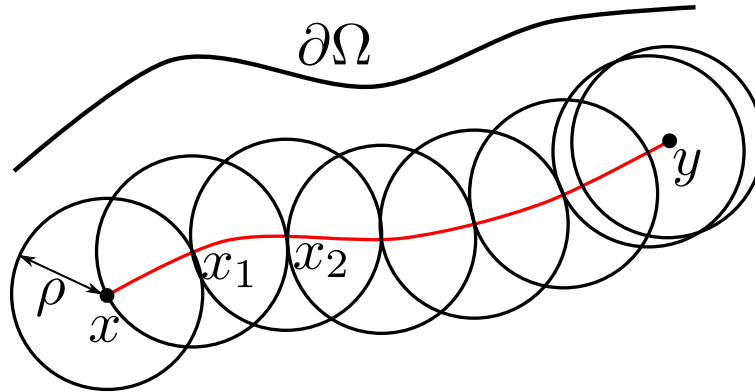
Montrons que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u \equiv 0$  sur  $\mathcal{B}(x_n, \rho)$ . Cette propriété est vraie pour  $n = 0$ , car  $\rho < d$ , et  $\mathcal{B}(x, d) \subset \Omega \Rightarrow d < \rho_{\max}$ . Supposons maintenant qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u \equiv 0$  sur  $\mathcal{B}(x_n, \rho)$ . Si  $y \in \mathcal{B}(x_n, \rho)$ , alors  $u \equiv 0$  sur  $\mathcal{B}(x_{n+1} = y, \rho - d(x_n, y))$ . En appliquant la propriété 1.3 avec  $r_0 = \rho - d(x_n, y)$ ,  $r_1 = \rho$  et  $r_2 = d$ , on obtient  $u \equiv 0$  sur  $\mathcal{B}(x_{n+1}, \rho)$ .

Supposons maintenant que  $y \notin \mathcal{B}(x_n, \rho)$ . Par définition de la borne supérieure, il existe  $s_p \in T_n$  t.q.  $s_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} t_{n+1}$ . Par continuité de  $\gamma$ ,  $\gamma(s_p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \gamma(t_{n+1}) = x_{n+1}$ , et comme  $\partial\mathcal{B}(x_n, \frac{\rho}{2})$  est fermé,  $x_{n+1} \in \partial\mathcal{B}(x_n, \frac{\rho}{2})$ . On a donc  $u \equiv 0$  sur  $\mathcal{B}(x_{n+1}, \rho/2)$ , et on conclut en appliquant la propriété 1.3 avec  $r_0 = \rho/2$ ,  $r_1 = \rho$  et  $r_2 = d$ .

Il ne reste plus qu'à montrer qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  t.q.  $x_n = y$ . Si ce n'était pas le cas, on construirait une suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$  croissante et bornée, donc convergente vers  $t_\infty \in [0, 1]$ , avec  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $t_n \leq t_\infty$ . Mais par continuité de  $\gamma$ ,  $\gamma(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma(t_\infty)$ , il existe donc  $n \in \mathbb{N}$  t.q.  $\gamma(t_\infty) \in \mathcal{B}(x_n, \rho/2)$ . D'après la propriété 1.4, il existe  $s \in ]t_\infty, 1]$  t.q.  $\gamma(s) \in \partial\mathcal{B}(x_n, \rho/2)$ . Donc  $t_{n+1} = \sup T_n \geq s > t_\infty$ . Contradiction.

<sup>8</sup>les notions de connexité et de connexité par arcs sont équivalentes pour les ouverts de  $\mathbb{R}^d$ , voir [Cha97] par exemple

<sup>9</sup>cf proposition 1.8.2 (iv) p.54 de [Cha97]



Construction de la suite de boules. En rouge, le chemin  $\gamma$  relie les points  $x$  et  $y$ .

Il ne reste plus qu'à montrer que  $u$  est nulle sur  $\Omega$ . Soit  $K$  un compact,  $K \subset \Omega$ . On a  $K \subset \bigcup_{y \in K} \mathcal{B}_y$ . Nous avons un recouvrement d'ouverts de  $K$ , nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini :  $K \subset \bigcup_{n \in \{1, \dots, N\}} \mathcal{B}_{y_n}$ . On en déduit :

$$\int_K |u|^2 dx \leq \sum_{n=1}^N \int_{\mathcal{B}_{y_n}} |u|^2 dx = 0 \Rightarrow u \equiv 0 \text{ sur } K$$

Comme  $u \in L^2(\Omega)$ , il existe<sup>10</sup>  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_c^\infty(\Omega)$  t.q.  $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\Omega)} u$ . Notons  $K_n$  le support de  $\varphi_n$  ( $K_n \subset \Omega$ ). On a vu que  $u \equiv 0$  sur  $K_n$ , donc  $\int_{K_n} \varphi_n u dx = 0$ . D'où :

$$0 = \int_{K_n} \varphi_n u dx = \int_{\Omega} \varphi_n u dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{\Omega} |u|^2 dx \Rightarrow \boxed{u \equiv 0 \text{ sur } \Omega}$$

■

**Preuve ♣ :** posons  $A := \text{supp}(u)^c \cap \Omega$ . Par définition,  $A$  est un ouvert non vide ( $\omega \subset A$ ). Nous allons montrer que  $A$  est fermé dans  $\Omega$ . Soit  $x \in \overline{A} \cap \Omega$ . Comme  $x \in \Omega$ , on a  $\delta = d(x, \partial\Omega) > 0$ . Comme  $x \in \overline{A}$ , il existe  $y \in A$  t.q.  $y \in \mathcal{B}(x, \frac{\delta}{2})$ . Comme  $y \in A$ , il existe  $\delta_0, 0 < \delta_0 < \frac{\delta}{2}$ , t.q.  $u \equiv 0$  sur  $\mathcal{B}(y, \delta_0)$ . On a de plus  $\mathcal{B}(y, \frac{\delta}{2}) \subset \mathcal{B}(x, \delta) \subset \Omega$ .

Soit maintenant  $\tilde{\delta}$  t.q.  $|x - y| < \tilde{\delta} < \frac{\delta}{2}$ , et  $\bar{\delta} = \tilde{\delta} - |x - y| > 0$ . De deux choses l'une : soit  $\tilde{\delta} \leq \delta_0$ , et dans ce cas, on a  $\mathcal{B}(y, \tilde{\delta}) \subset \mathcal{B}(y, \delta_0) \subset A$ , soit  $\tilde{\delta} > \delta_0$ , et en appliquant la propriété 1.3 avec pour centre  $y$ ,  $r_0 = \delta_0$ ,  $r_1 = \tilde{\delta}$  et  $r_2 = \frac{\delta}{2}$ , on obtient  $u \equiv 0$  sur  $\mathcal{B}(y, \tilde{\delta})$ . Comme  $\mathcal{B}(x, \bar{\delta}) \subset \mathcal{B}(y, \tilde{\delta})$ , on a dans les deux cas  $u \equiv 0$  sur  $\mathcal{B}(x, \bar{\delta}) \Rightarrow x \in A$ .

On a donc montré que  $A$  est ouvert et fermé dans  $\Omega$  connexe, et  $A$  est non vide. On a donc<sup>11</sup>  $A = \Omega$ , ce qui est équivalent à  $\boxed{u \equiv 0 \text{ sur } \Omega}$ .

■

### Unicité

Comme dit en introduction, la propriété de prolongement unique entraîne l'unicité de la solution du problème de Cauchy. On va avoir besoin de la formule de Green, qui s'écrit très simplement dans le cas du laplacien<sup>12</sup> :

**Lemme 1.3 - formule de Green :** soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  à frontière lipschitzienne. Soit  $(u, v) \in H^1(\Omega, \Delta) \times H^1(\Omega)$ . On a :

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \langle \partial_\nu u, v \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)}$$

<sup>10</sup>théorème 2.19 p.31 de [AF75]

<sup>11</sup>par définition de la connexité, voir définition 2.9.1 p.253 de [Sch91]

<sup>12</sup>pour une preuve de la formule de Green dans le cas du laplacien, voir par exemple théorème 2.4 p.27 + corollaire 2.6 p.28 de [GR86]

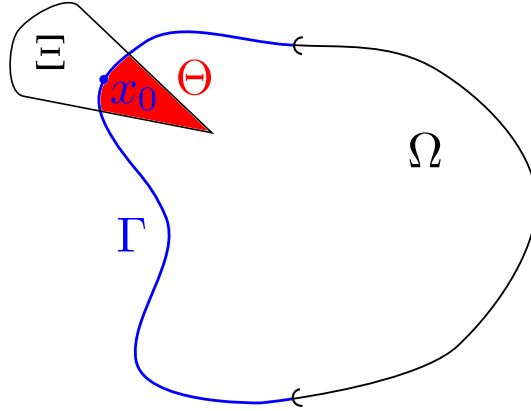


**Théorème 1.2** - unicité de la solution du problème de Cauchy : soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Gamma \subset \partial\Omega$  une partie ouverte, de mesure non nulle et lipschitzienne de la frontière de  $\Omega$ . Soit  $k \in \mathbb{R}$ . Soit  $u \in H^1(\Omega)$  vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta u + k u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Alors  $u \equiv 0$  dans  $\Omega$ .

**Preuve** : on a  $\Delta u = -k u \in L^2(\Omega) \Rightarrow u \in H^1(\Omega, \Delta)$ . Soit  $x_0 \in \Gamma$ , et  $\Xi$  un ouvert à frontière lipschitzienne,  $x_0 \in \Xi$  t.q.  $\Theta := \Omega \cap \Xi$  soit à frontière lipschitzienne et  $\Xi \cap \partial\Omega \subset \Gamma$  (cf propriété B.1 de l'annexe B, p.192). On pose  $\tilde{\Omega} = \Omega \cup \Xi$ .



On pose :  $\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega \\ 0 & \text{dans } \Xi \setminus \tilde{\Omega} \end{cases}$ . On a  $\tilde{u} \in L^2(\tilde{\Omega})$ .

Soit  $\varphi \in C_c^\infty(\Xi)$ , et  $i \in \{1, \dots, d\}$ . On a :

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle_{D'(\Xi), D(\Xi)} = - \left\langle \tilde{u}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle_{D'(\Xi), D(\Xi)} = - \int_{\Xi} \tilde{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Theta} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$

Comme  $u \in H^1(\Theta)$ , et  $\Theta$  est à frontière lipschitzienne, on obtient :

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle_{D'(\Xi), D(\Xi)} = \int_{\Theta} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx - \int_{\partial\Theta} u \varphi \nu_i d\sigma = \int_{\Theta} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx$$

car  $u = 0$  sur  $\Gamma$  et  $\varphi = 0$  sur  $\partial\Theta \setminus \bar{\Gamma}$ . On en déduit  $\tilde{u} \in H^1(\Xi)$ . De même :

$$\langle \Delta \tilde{u}, \varphi \rangle_{D'(\Xi), D(\Xi)} = \langle \tilde{u}, \Delta \varphi \rangle_{D'(\Xi), D(\Xi)} = \int_{\Xi} \tilde{u} \Delta \varphi dx = \int_{\Theta} u \Delta \varphi dx$$

Comme  $u \in H^1(\Theta, \Delta)$ , on peut utiliser la formule de green du lemme 1.3, et on obtient :

$$\int_{\Theta} u \Delta \varphi dx = - \int_{\Theta} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\partial\Theta} u \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma = \int_{\Theta} \Delta u \varphi dx - \left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, \varphi \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Theta), H^{1/2}(\partial\Theta)}$$

Or  $\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, \varphi \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Theta), H^{1/2}(\partial\Theta)} = \left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, \varphi \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} = 0$  car  $\varphi = 0$  sur  $\partial\Theta \setminus \bar{\Gamma}$ , et  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  sur  $\Gamma$ . On a donc :

$$\langle \Delta \tilde{u}, \varphi \rangle_{D'(\Xi), D(\Xi)} = \int_{\Theta} \Delta u \varphi dx = \int_{\Theta} (-k u) \varphi dx = \int_{\Xi} (-k \tilde{u}) \varphi dx$$

d'où finalement  $\Delta \tilde{u} = -k \tilde{u}$  dans  $\Xi$ , et  $\tilde{u} \in H^1(\Xi, \Delta)$ .

Finalement, on a  $\tilde{u} \in H^1(\Xi, \Delta)$ , vérifie  $P\tilde{u} = 0$  dans  $\Xi$ , et il existe  $\omega := \Xi \setminus \bar{\Omega} \subset \Xi$  tel que  $\tilde{u} \equiv 0$  sur  $\omega$ . En appliquant le théorème 1.1, on obtient  $\tilde{u} \equiv 0$  dans  $\Xi$ , et donc  $u \equiv 0$  dans  $\Theta$ . On a alors  $Pu = 0$  dans  $\Omega$  et  $u \equiv 0$  dans  $\Theta$ . On peut appliquer de nouveau le théorème 1.1 dans  $\Omega$  avec  $\omega := \Theta$ , et on obtient  $u \equiv 0$  dans  $\Omega$ . ■

## 1.2 Non continuité, non surjectivité

Nous savons maintenant que le problème de trouver  $u \in H^1(\Omega)$  vérifiant

$$\begin{cases} \Delta u + ku = f \in L^2(\Omega) \\ u = g_0 \in H^{1/2}(\Gamma) \\ \partial_\nu u = g_1 \in H^{-1/2}(\Gamma) \end{cases}$$

admet au plus une solution. Nous allons maintenant montrer que cette solution ne dépend pas continûment du triplet  $(f, g_0, g_1)$ . Nous en déduirons la non surjectivité de l'opérateur  $A : u \in H^1(\Omega, \Delta) \mapsto (u|_\Gamma, \partial_\nu u|_\Gamma, \Delta u + ku) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma) \times L^2(\Omega)$ .

### Non continuité

Hadamard a montré dès 1902 [Had02] que la fonction (si elle existe) vérifiant

$$\begin{cases} \Delta u = f \in L^2(\Omega) \\ u = g_0 \in H^{1/2}(\Gamma) \\ \partial_\nu u = g_1 \in H^{-1/2}(\Gamma) \end{cases}$$

ne dépend pas continûment de  $(f, g_0, g_1)$ . Pour cela, il mit en évidence un contre-exemple en dimension 2, que nous modifions (très légèrement) ici pour l'adapter au cas de l'opérateur  $\Delta + k$ .

On pose  $\Omega = ]0, \pi[ \times ]0, \pi[ \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\Gamma = \{0\} \times ]0, \pi[$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > \sqrt{|k|}$ , on pose :

$$u_n(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(ny) \sinh(\sqrt{n^2 - k} x)$$

Il est facile de vérifier que  $\Delta u_n + k u_n = 0$ ,  $u_n|_\Gamma = 0$  et  $\partial_\nu u_n|_\Gamma = -\frac{1}{n^2} \sqrt{n^2 - k} \sin(ny)$  pour tout  $n$ . On a donc :

$$\|\partial_\nu u_n|_\Gamma\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \|\partial_\nu u_n|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{n^2 - k}}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{H^1(\Omega, \Delta)} &\geq \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{e^{\pi \sqrt{n^2 - k}}}{n^2 \sqrt[4]{n^2 - k}} \sqrt{1 - e^{-4\pi \sqrt{n^2 - k}} - 4\pi \sqrt{n^2 - k} e^{-2\pi \sqrt{n^2 - k}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

Il ne peut donc pas exister de constante  $C > 0$  telle que

$$\|u\|_{H^1(\Omega, \Delta)} \leq C[\|\Delta u + k u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\partial_\nu u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}].$$

### Non surjectivité

**Propriété 1.5** *A n'est pas surjectif.*

**Preuve** : supposons que  $A$  soit surjectif. Alors  $A$  est bijectif et continu de  $H^1(\Omega, \Delta)$  dans  $Y := H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma) \times L^2(\Omega)$ , qui sont deux espaces de Banach. On en déduit (conséquence du théorème de l'application ouverte<sup>13</sup>) que  $A^{-1}$  est continue, ce qui entraîne l'existence de  $C > 0$  t.q.  $\|u\|_{H^1(\Omega, \Delta)} \leq C \|Au\|_Y$ . Or on vient de voir qu'une telle constante n'existe pas. Contradiction. ■

Le caractère mal posé du problème de Cauchy vient donc de la non-existence d'une solution pour certaines données. La non-continuité par rapport à la donnée implique en particulier des difficultés au niveau de la résolution numérique du problème, et oblige à le régulariser. Nous aborderons cette problématique au prochain chapitre.

<sup>13</sup>cf corollaire II.6 p.19 de [Bre05]

### 1.3 Stabilité conditionnelle

Nous venons de voir que les problèmes de Cauchy elliptiques sont mal-posés, et très instables : on ne peut pas contrôler la norme de l'éventuelle solution de [Cauchy] par la norme de la donnée du problème, et le contre-exemple d'Hadamard montre que la norme de la solution peut exploser quand bien même la norme des données tendrait vers zéro. Une question naturelle est de savoir si on peut quantifier cette instabilité. La réponse nous est donnée par les résultats de stabilité pour les problèmes de Cauchy elliptiques.

Pour un problème de Cauchy, l'unicité nous dit que si  $Pu = 0$  dans  $\Omega$  et  $u = \partial_{\nu_P} u = 0$  sur  $\Gamma$ , alors  $u = 0$  dans  $\Omega$ . La stabilité consiste à montrer que si  $\|Pu\|$ ,  $\|u|_{\Gamma}\|$  et  $\|\partial_{\nu_P} u|_{\Gamma}\|$  sont "petits", c'est-à-dire que leur somme est plus petite qu'un certain  $\delta > 0$  "petit", alors  $\|u\|$  est plus petite qu'une certaine fonction  $f(\delta)$  vérifiant  $f(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ , à la condition de se donner une borne sur  $u$  dans une norme plus fine que la norme naturelle.

On se donne  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  de frontière  $C^{1,1}$ ,  $\Gamma$  une partie de  $\partial\Omega$ . On pose  $P := \Delta + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

On a alors le résultat de stabilité suivant<sup>14</sup> :

**Théorème 1.3** *pour tout  $\kappa \in ]0, 1[$ , il existe  $C > 0$  tel que pour toute fonction  $u \in H^2(\Omega)$  qui vérifie*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq M, \quad \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Gamma)} + \|\partial_{\nu} u\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta,$$

on a

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{M}{(\ln(M/\delta))^{\kappa}}.$$

La borne supérieure  $\kappa = 1$  ne peut pas être améliorée dans cette estimation. Elle dépend de la régularité du bord : supposons donc que le bord de  $\Gamma$  n'est plus  $C^{1,1}$ , mais juste lipschitzien. On suppose que  $\Gamma$  reste une partie  $C^{1,1}$  de ce bord. On sait alors qu'il existe  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  tel que  $\Omega$  vérifie la propriété du  $\theta$ -cône<sup>15</sup>. On définit

$$\kappa_0(\theta) := \sup_{x>0} \frac{1 \sin(\theta) (1 - e^{-x})}{2 \sqrt{1+x} - \sin(\theta)}.$$

On suppose également que  $k$  n'est pas valeur propre de l'opérateur  $-\Delta$  dans  $\Omega$ . On a alors les deux théorèmes suivants, dont les preuves se trouvent dans [BD10b], article que nous avons reporté en annexe, et dans lequel on trouve des expériences numériques en accord avec les résultats ci-dessous.

**Théorème 1.4** *pour  $\alpha \in [0, 1]$ , pour tout  $\kappa \in ]0, (1 + \alpha)\kappa_0(\theta)/2[$ , il existe  $C, \delta_0$  tels que pour tout  $\delta \in ]0, \delta_0[$ , pour tout  $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$  vérifiant  $\Delta u \in L^2(\Omega)$  et*

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq M, \quad \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Gamma)} + \|\partial_{\nu} u\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta$$

avec  $M > 0$  constante, on a

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{M}{(\ln(M/\delta))^{\kappa}}.$$

Si nous ne supposons pas  $\Gamma$   $C^{1,1}$ , l'estimation reste vraie pour les fonctions  $u$  vérifiant  $u = \partial_{\nu} u = 0$  sur  $\Gamma$ , toutes choses égales par ailleurs.

<sup>14</sup>voir [Bou10]

<sup>15</sup>voir la définition B.2 et le théorème B.1 p.192

**Théorème 1.5** *en dimension 2 (resp. en dimension 3), pour tout  $\kappa \in ]0, \kappa_0(\theta)/2[$  (resp.  $\kappa \in ]0, \kappa_0(\theta)/4[$ ), il existe  $C$  et  $\delta_0$  tels que pour tout  $\delta \in ]0, \delta_0[$ , pour toute fonction  $u \in H^2(\Omega)$  qui vérifie*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq M, \quad \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Gamma)} + \|\partial_\nu u\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta$$

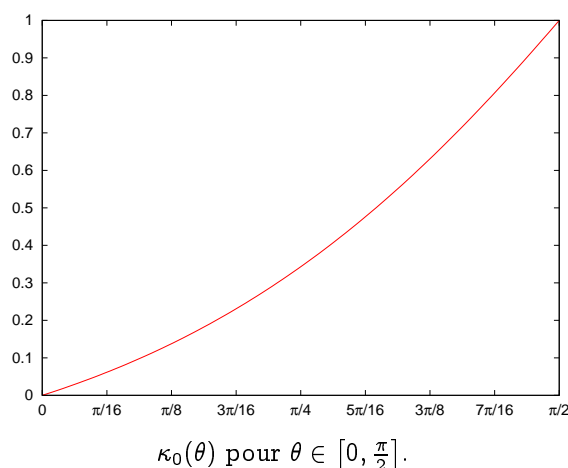
avec  $M > 0$  constante, on a

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{M}{(\ln(M/\delta))^\kappa}.$$

*Si nous ne supposons pas  $\Gamma$   $C^{1,1}$ , l'estimation reste vraie pour les fonctions  $u$  vérifiant  $u = \partial_\nu u = 0$  sur  $\Gamma$ , toutes choses égales par ailleurs.*

Remarque : ces résultats ont pour conséquence l'unicité de la solution du problème de Cauchy dans  $C^{1,\alpha}$  et  $H^2$ .

Remarquons que lorsque  $\theta$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire quand la frontière de  $\Omega$  se rapproche d'une régularité  $C^{1,1}$ , on a  $\kappa_0(\theta)$  qui tend vers 1. On retrouve ainsi l'estimation de stabilité du théorème 1.3 pour une fonction  $C^{1,1}(\overline{\Omega}) \subset H^2(\Omega)$ . À l'opposé, lorsque  $\theta$  tend vers 0, l'estimation se dégrade, ce qui est cohérent avec le cas limite où le domaine présente un cusp, pour lequel l'estimation n'est plus en  $1/\ln$ , mais en  $1/(\ln \circ \ln)$  (voir [ABRV00]).



On voit que la dépendance de  $u$  vis-à-vis de  $Pu$ , sa trace et sa trace normale est logarithmique, ce qui est caractéristique du caractère mal posé du problème. Remarquons que ces résultats sont des résultats de stabilité conditionnelle, on obtient une estimation de la norme  $H^1$  si l'on sait borner une norme plus fine. Ces résultats nous serviront à obtenir une vitesse de convergence de notre méthode de résolution du problème de Cauchy.

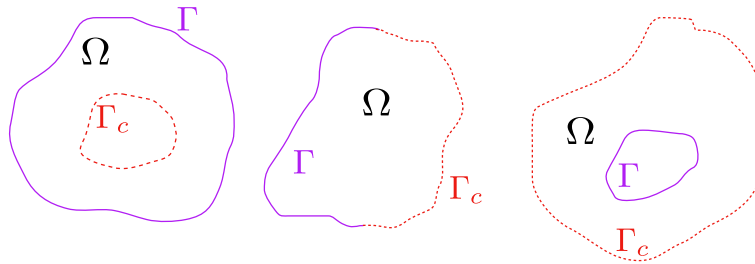


## Chapitre 2

# La méthode de quasi-réversibilité

### Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la résolution de problèmes de Cauchy elliptiques. L'exemple le plus simple de tels problèmes est celui concernant l'opérateur laplacien : on se donne  $\Omega$  ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$ , de frontière  $\partial\Omega$  que l'on supposera suffisamment régulière. On note  $\nu$  la normale sortante à  $\Omega$ . On pose  $\Gamma \subset \partial\Omega$  et  $\Gamma_c \subset \partial\Omega$  deux parties ouvertes non vides de  $\partial\Omega$  vérifiant  $\Gamma \cap \Gamma_c = \emptyset$ ,  $\bar{\Gamma} \cup \bar{\Gamma}_c = \partial\Omega$ .



Configurations géométriques possibles.

Problème [Cauchy] : pour  $(g_0, g_1) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ , trouver  $u \in H^1(\Omega)$  vérifiant

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g_0 & \text{sur } \Gamma \\ \partial_\nu u = g_1 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Nous avons vu au chapitre précédent que ce problème admet au plus une solution. On peut donc légitimement essayer de trouver cette éventuelle solution. Nous avons aussi vu que ce problème est mal posé, et très instable. Cette instabilité théorique entraîne une forte instabilité numérique. Il est dès lors nécessaire de régulariser le problème [Cauchy], si l'on veut construire des méthodes numériques de résolution robustes.

Il existe de nombreuses méthodes de régularisation adaptées au problème [Cauchy]. Une grande famille de méthodes repose sur une approche inspirée du contrôle optimal : la minimisation d'une fonctionnelle en prenant des fonctions de  $\Gamma_c$  comme paramètre de minimisation. Jacques-Louis Lions dans [Lio68] est à notre connaissance un des premiers à avoir étudié théoriquement une méthode de ce type<sup>1</sup>, et Jacques Blum l'a utilisée dans des problèmes d'identification de plasma<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>voir les parties 5.3 p.85 et 6.2 p.88 de [Lio68]

<sup>2</sup>[Blu89]

Illustrons ces méthodes avec l'exemple de la fonctionnelle de Kohn-Vogelius : introduite initialement dans [KV85] pour un problème d'identification de paramètre, et dans [LL83] dans le cadre de l'estimation a posteriori de maillage, elle peut également être utilisée pour résoudre le problème [Cauchy] ([BF05], [ABF06]). L'intérêt de cette fonctionnelle par rapport aux fonctionnelles coûts introduites antérieurement, notamment celle introduite dans [Lio68], est qu'elle permet de traiter symétriquement la donnée de Dirichlet  $g_0$  et la donnée de Neumann  $g_1$ .

Remarquons tout d'abord que l'on peut sans perte de généralité supposer  $g_0 = 0^3$ . On pose les deux problèmes suivants :

Problème [D] : pour  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_c) := \left\{ \mu \in H^{1/2}(\Gamma_c) \mid \exists v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma} = 0, v|_{\Gamma_c} = \mu \right\}$ , trouver  $u_D(\mu) \in H^1(\Omega)$  t.q. 
$$\begin{cases} \Delta u_D(\mu) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_D(\mu) = 0 & \text{sur } \Gamma \\ u_D(\mu) = \mu & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases}$$

Problème [N] : pour  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_c)$ , trouver  $u_N(\mu) \in H^1(\Omega)$  t.q. 
$$\begin{cases} \Delta u_N(\mu) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_\nu u_N(\mu) = g_1 & \text{sur } \Gamma \\ u_N(\mu) = \mu & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases}$$

Ces deux problèmes sont bien posés. Remarquons alors que si l'on trouve  $\mu \in H_{00}^{1/2}$  tel que

$$(u_D(\mu)|_{\Gamma}, \partial_\nu u_D(\mu)|_{\Gamma}) = (u_N(\mu)|_{\Gamma}, \partial_\nu u_N(\mu)|_{\Gamma})$$

on aura alors

$$(u_D(\mu)|_{\Gamma}, \partial_\nu u_D(\mu)|_{\Gamma}) = (0, g_1), \quad \Delta u_D(\mu) = 0 \text{ dans } \Omega$$

d'où  $u_D(\mu) = u = u_N(\mu)$  par unicité de la solution du problème [Cauchy]. L'idée est donc de minimiser l'écart entre  $u_D(\mu)$  et  $u_N(\mu)$ , c'est-à-dire la fonctionnelle de Kohn-Vogelius :

$$F_{KV} := \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_c) \mapsto \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_D(\mu) - \nabla u_N(\mu)|^2 dx.$$

S'il existe une solution  $u$  au problème [Cauchy], alors il existe un unique  $\lambda \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_c)$  tel que  $F_{KV}(\lambda) = 0$ , et donc  $u = u_D(\lambda)$ . Tout l'enjeu est alors de parvenir à minimiser la fonctionnelle de Kohn-Vogelius.

D'autres méthodes basées sur le contrôle optimal existent. Citons notamment l'article [CDJP01], où est présentée une méthode de résolution du problème [Cauchy] basée sur des résolutions successives de problèmes d'optimisation régularisés, le terme de régularisation tendant vers 0 au fur et à mesure des itérations. La suite ainsi construite converge vers la solution du problème.

Dans cette étude, nous avons utilisé une autre méthode de régularisation de problèmes elliptiques : la méthode de quasi-réversibilité, introduite pour la première fois par Lattès et Lions en 1967 [LL67]<sup>4</sup>. Elle repose sur la constatation suivante : si avoir sur une même partie du bord la donnée de Dirichlet et de Neumann pour un problème elliptique d'ordre 2 (typiquement avec l'opérateur laplacien) est une difficulté, un tel couple peut en revanche être vu comme une condition aux limites de Dirichlet pour un problème elliptique d'ordre 4 (typiquement un bi-laplacien). L'idée est alors de régulariser le problème de Cauchy par une famille de problèmes variationnels

<sup>3</sup>comme  $g_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ , il existe  $R(g_0) \in H^1(\Omega)$  t.q.  $R(g_0)|_{\Gamma} = g_0$ . On pose alors  $\hat{u}$  l'unique fonction de  $H^1(\Omega)$  vérifiant  $\Delta \hat{u} = 0$  dans  $\Omega$  et  $\hat{u} = R(g)$  sur  $\partial\Omega$ . On voit alors que  $\tilde{u} = u - \hat{u}$ , où  $u$  est l'éventuelle solution de [Cauchy], vérifie  $\Delta \tilde{u} = 0$  dans  $\Omega$ ,  $\tilde{u} = 0$  sur  $\Gamma$  et  $\partial_\nu \tilde{u} = g_1 - \partial_\nu \hat{u}$  sur  $\Gamma$ .

<sup>4</sup>l'application de la méthode de quasi-réversibilité à des problèmes de Cauchy elliptiques ne constitue qu'une petite partie de [LL67], où elle est utilisée pour résoudre de nombreux autres types de problèmes mal posés

elliptiques d'ordre 4 bien posés dépendant d'un paramètre de régularisation  $\varepsilon$ , dont les solutions  $u_\varepsilon$  tendront vers la solution du problème de Cauchy lorsque  $\varepsilon$  tendra vers 0. Cette méthodologie traite symétriquement les données de Cauchy  $g_0$  et  $g_1$ , et, une fois les problèmes d'ordre 4 discrétisés, fournit la solution approchée  $u_\varepsilon$  en une unique résolution de système linéaire (soit en une unique inversion de matrice).

Dans ce chapitre, nous étudions plusieurs formulations de la méthode de quasi-réversibilité, avant de nous intéresser à sa discrétisation par éléments finis.

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Différentes formulations</b>	<b>20</b>
2.1.1	Formulation dans $H^1(\Omega, P)$	20
2.1.2	Formulation mixte	23
2.1.3	Formulations dans $H^2(\Omega)$	25
<b>2.2</b>	<b>Résolution numérique dans un domaine polygonal de <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>29</b>
2.2.1	Méthode [QR] dans un polygone de $\mathbb{R}^2$	29
2.2.2	Discrétisation du problème [QR]	31
2.2.3	Convergence de la méthode éléments finis	36
2.2.4	Calcul des matrices élémentaires	42
2.2.5	Applications numériques	42

---

## Problème de Cauchy

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Gamma$  une partie lipschitzienne de sa frontière. On se donne  $(g_0, g_1) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ . On se donne  $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$  pour  $i, j \in \{1 \dots d\}$ , et  $c \in L^\infty(\Omega)$ . On définit alors l'opérateur

$$P : u \in H^1(\Omega) \mapsto \sum_{i,j=1}^d \left( \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c u \in H^{-1}(\Omega).$$

On note  $H^1(\Omega, P) := \{v \in H^1(\Omega) \mid Pv \in L^2(\Omega)\}$ . On rappelle que l'application

$$u \in H^1(\Omega, P) \mapsto \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

est continue et surjective. On suppose que  $P$  vérifie les hypothèses de la propriété 1.2 p.9.

Nous nous intéressons au problème de Cauchy suivant :

Problème [Cauchy] : pour  $(g_0, g_1) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ , trouver  $u \in H^1(\Omega, P)$  vérifiant :

$$\begin{cases} Pu = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = g_0 \text{ sur } \Gamma \\ \partial_{\nu_P} u = g_1 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

On sait (voir chapitre précédent) que ce problème admet au plus une solution  $u$ . Comme il est mal posé (la solution éventuelle ne dépend pas continûment des données), il faut le régulariser pour pouvoir le résoudre numériquement.



## 2.1 Différentes formulations

### 2.1.1 Formulation dans $H^1(\Omega, P)$

On définit les espaces fonctionnels

$$V := \left\{ v \in H^1(\Omega, P) \mid v|_{\Gamma} = g_0 \text{ et } \partial_{\nu_P} v|_{\Gamma} = g_1 \right\} \quad V_0 := \left\{ v \in H^1(\Omega, P) \mid v|_{\Gamma} = \partial_{\nu_P} v|_{\Gamma} = 0 \right\}.$$

Il est intéressant de noter que si  $V_0$  est non vide, puisque  $C_c^\infty(\Omega) \subset V_0$ , il est possible que  $V$  soit vide. En effet, on a la

**Propriété 2.1** *l'application  $u \in H^1(\Omega, P) \mapsto (u, \partial_{\nu_P} u) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$  n'est pas surjective.*

**Preuve** : on va d'abord s'intéresser à la fonction  $g_0 : x \in ]-1, 1[ \mapsto \sqrt{x}$  si  $x > 0$ , 0 sinon. On a trivialement  $g_0 \in L^2(]-1, 1[)$ , et  $g_0 \notin H^1(]-1, 1[)$ , ce qui implique  $g_0 \notin H^{3/2}(]-1, 1[)$ . Nous allons montrer que  $g_0 \in H^{1/2}(]-1, 1[)$ . Pour cela, nous allons utiliser la caractérisation de  $H^{1/2}(]-1, 1[)$  suivante<sup>5</sup> :

$$H^{1/2}(]-1, 1[) = \left\{ g \in L^2(]-1, 1[) \mid \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{|g(x) - g(y)|^2}{|x - y|^2} dy dx < \infty \right\}.$$

On est donc amené à calculer

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{|g_0(x) - g_0(y)|^2}{|x - y|^2} dy dx &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2}{|x - y|^2} dy dx + \int_{-1}^0 \int_0^1 \frac{y}{|x - y|^2} dy dx \\ &\quad + \int_0^1 \int_{-1}^0 \frac{x}{|x - y|^2} dy dx \end{aligned}$$

Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \int_0^1 \frac{y}{|x - y|^2} dy dx &= \int_{-1}^0 \int_0^1 \frac{y - x + x}{(y - x)^2} dy dx \\ &= \int_{-1}^0 \int_0^1 \frac{1}{(y - x)} + \frac{x}{(y - x)^2} dy dx \\ &= \int_{-1}^0 \left[ \ln(y - x) - \frac{x}{y - x} \right]_0^1 dx \\ &= \int_{-1}^0 \left( \ln(1 - x) - \ln(-x) - \frac{x}{1 - x} - 1 \right) dx = \ln(2). \end{aligned}$$

On a alors, par Fubini<sup>6</sup>,

$$\int_0^1 \int_{-1}^0 \frac{x}{|x - y|^2} dy dx = \ln(2).$$

Reste à estimer le dernier terme : remarquons que  $(x - y)^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$ . On a donc

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2}{|x - y|^2} dy dx = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dy}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} dx.$$

Utilisons ensuite le fait que  $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \geq x + y$ , ce qui nous donne

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dy}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} dx \leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{dy}{x + y} dx = \int_0^1 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx = 2 \ln(2).$$

<sup>5</sup> cf théorème 7.48 p.214 de [AF75], ou définition (3.48) p.81 de [ND67]

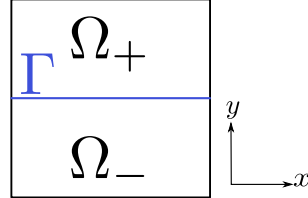
<sup>6</sup> théorème IV.5 de [Bre05]

On a donc<sup>7</sup>

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{|g_0(x) - g_0(y)|^2}{|x - y|^2} dy dx \leq 4 \ln(2)$$

ce qui implique  $g_0 \in H^{1/2}(]-1, 1[)$ . Il est clair que l'on a plus généralement  $g_0 \in H^{1/2}(]-a, a[)$  et  $g_0 \notin H^{3/2}(]-a, a[)$  pour tout  $a > 0$ , la singularité de  $g_0$  se situant en 0.

Nous allons maintenant construire notre contre-exemple. Posons  $\Omega^+ := ]-1, 1[ \times ]0, 1[$ ,  $\Omega^- := ]-1, 1[ \times ]-1, 0[$ ,  $\Gamma := ]-1, 1[ \times \{0\}$  et  $\Omega := \Omega^+ \cup \Omega^-$ .



Soit  $g_1 \in H^{-1/2}(]-1, 1[)$  quelconque. Supposons que l'on peut relever  $(g_0, g_1)$  par une fonction  $u^+ \in H^1(\Omega^+, \Delta)$  et par une fonction  $u^- \in H^1(\Omega^-, \Delta)$ . Alors si on définit

$$u := \begin{cases} u^+ & \text{sur } \Omega^+ \\ u^- & \text{sur } \Omega^- \end{cases}$$

on a  $u \in H^1(\Omega, \Delta)$  qui vérifie  $u|_{\Gamma} = g_0$ . Soit  $\varphi \in C_c^\infty(]-1, 1[)$  vérifiant  $\varphi \equiv 1$  sur  $]-0.5, 0.5[$ . On pose  $\psi(x, y) := \varphi(x)\varphi(y) \in C_c^\infty(\Omega)$ , et on a  $\psi u \in H^1(\Omega, \Delta)$ . De plus, le support de  $\psi u$  inclus dans  $\Omega$ . Si on pose

$$\hat{u} := \begin{cases} \psi u & \text{sur } \Omega \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$$

on a  $\hat{u} \in H^1(\mathbb{R}^2, \Delta)$ , et donc par régularité elliptique<sup>8</sup>, on a  $\hat{u} \in H^2(\mathbb{R}^2)$ . On en déduit que la trace de  $\hat{u}$  sur  $]-0.5, 0.5[ \times \{0\}$  est un élément de  $H^{3/2}(]-0.5, 0.5[)$ . Or cette trace vaut  $g_0$ , et on a vu que  $g_0 \notin H^{3/2}(]-0.5, 0.5[)$ . Contradiction. ■

Nous allons nous intéresser au problème suivant :

Problème [quasi-réversibilité  $H^1$ ] : pour  $\varepsilon > 0$ , trouver  $u \in V$  tel que pour tout  $v \in V_0$ , on ait

$$(Pu, Pv)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon(u, v)_{H^1(\Omega)} = 0.$$

Quelques considérations sur ce problème avant de continuer : la forme variationnelle

$$(Pu, Pv)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon(u, v)_{H^1(\Omega)}$$

ne provient en aucune façon d'intégrations par partie à partir des équations du problème [Cauchy]. Elle correspond à un problème d'ordre 4, et son traitement par éléments finis<sup>9</sup> devra s'adapter à cette contrainte.

**Propriété 2.2** *le problème [quasi-réversibilité  $H^1$ ] admet une unique solution  $u_\varepsilon$  si et seulement si  $V$  est non vide.*

<sup>7</sup> en fait, on a  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{|g_0(x) - g_0(y)|^2}{|x - y|^2} dy dx = 6 \ln(2) - 2$ , mais cette valeur est moins rapide à obtenir que la majoration par  $4 \ln(2)$

<sup>8</sup> voir théorème 3.1 p.137 de [LM68]

<sup>9</sup> ce qui n'est pas la seule possibilité, nous en reparlerons plus tard

Preuve : il est évident que si le problème [quasi-réversibilité  $H^1$ ] admet une solution, cette solution est dans  $V$ , et donc  $V$  est non vide. Il faut maintenant prouver l'autre implication : on suppose donc  $V$  non vide. Soit  $\hat{u} \in V$ . On va chercher  $\tilde{u} \in V_0$  vérifiant

$$(P\tilde{u}, Pv)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon(\tilde{u}, v)_{H^1(\Omega)} = -(P\hat{u}, Pv)_{L^2(\Omega)} - \varepsilon(\hat{u}, v)_{H^1(\Omega)}, \forall v \in V_0.$$

Remarquons tout d'abord que  $V_0$  est un sous-espace fermé de  $H^1(\Omega, P)$ , par continuité des applications  $u \mapsto u|_\Gamma$  et  $u \mapsto \partial_{\nu_P} u|_\Gamma$ . Muni du produit scalaire de  $H^1(\Omega, P)$ , c'est donc un espace de Hilbert. Ensuite, l'application bilinéaire

$$a_\varepsilon := (u, v) \in V_0 \times V_0 \mapsto (Pu, Pv)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon(u, v)_{H^1(\Omega)}$$

est continue et coercive sur  $V_0$ , puisque

$$a_\varepsilon(u, v) \leq (1 + \varepsilon)\|u\|_{H^1(\Omega, P)}\|v\|_{H^1(\Omega, P)}, \quad a_\varepsilon(u, u) \geq \min(1, \varepsilon)\|u\|_{H^1(\Omega, P)}^2.$$

D'autre part, l'application linéaire

$$l := v \in V_0 \mapsto -(P\hat{u}, Pv)_{L^2(\Omega)} - \varepsilon(\hat{u}, v)_{H^1(\Omega)}$$

est continue, puisque  $|l(v)| \leq (1 + \varepsilon)\|\hat{u}\|_{H^1(\Omega, P)}\|v\|_{H^1(\Omega, P)}$ . L'existence (et l'unicité) de  $\tilde{u}$  est donc assurée par application du théorème de Lax-Milgram<sup>10</sup>. On remarque alors que  $u_\varepsilon := \tilde{u} + \hat{u}$  est solution du problème [quasi-réversibilité  $H^1$ ].

Supposons alors que l'on ait deux solutions  $u_1$  et  $u_2$  au problème. On remarque que  $w := u_1 - u_2$  est un élément de  $V_0$  qui vérifie  $a_\varepsilon(w, v) = 0$ , pour tout  $v \in V_0$ . Par unicité de la solution de ce problème (Lax-Milgram), on a  $w = 0$ , soit  $u_1 = u_2$ . ■

**Théorème 2.1** *supposons qu'il existe une (unique) solution  $u$  au problème [Cauchy]. Alors  $u_\varepsilon$  solution du problème [quasi-réversibilité  $H^1$ ] existe, et on a*

$$u_\varepsilon \xrightarrow[H^1(\Omega, P)]{\varepsilon \rightarrow 0} u.$$

Nous allons utiliser le lemme suivant :

**Lemme 2.1** *Soit  $X$  un espace topologique, et  $(u_\delta)_{\delta > 0} \in X^{\mathbb{R}^+}$  vérifiant : il existe  $u \in X$  tel que pour toute suite  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$  vérifiant  $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , il existe une sous-suite  $\delta_{n'}$  telle que  $u_{\delta_{n'}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ . Alors  $u_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} u$ .*

Preuve : supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe un voisinage  $\mathcal{V}(u)$  de  $u$  et une suite  $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{\delta_n} \notin \mathcal{V}(u)$ . Par hypothèse, il existe une sous-suite  $\delta_{n'}$  de  $\delta_n$  telle que  $u_{\delta_{n'}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ . Donc pour  $n'$  suffisamment grand,  $u_{\delta_{n'}} \in \mathcal{V}(u)$ . Contradiction. ■

Preuve du théorème 2.1 : si  $u$  solution de [Cauchy] existe, alors  $u \in V$ , donc  $V \neq \emptyset$ , ce qui implique par la propriété précédente l'existence de  $u_\varepsilon$  solution de [quasi-réversibilité  $H^1$ ]. Par définition, on a, pour tout  $v \in V_0$ ,

$$(Pu_\varepsilon, Pv)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon(u_\varepsilon, v)_{H^1(\Omega)} = 0.$$

En prenant  $v := u_\varepsilon - u \in V_0$  dans cette expression, et en utilisant  $Pu = 0$ , on obtient

$$\|Pu_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon - u)_{H^1(\Omega)} = 0 \quad (\clubsuit)$$

d'où

$$(u_\varepsilon, u_\varepsilon - u)_{H^1(\Omega)} \leq 0 \Rightarrow \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

<sup>10</sup>théorème V.8 de [Bre05]

En soustrayant  $\varepsilon(u, u_\varepsilon - u)_{H^1(\Omega)}$  dans (♣), on obtient

$$\|Pu_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon\|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)}^2 = -\varepsilon(u, u_\varepsilon - u)_{H^1(\Omega)} \quad (\spadesuit)$$

d'où

$$\varepsilon\|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \varepsilon\|u\|_{H^1(\Omega)}\|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)} \Rightarrow \|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

On revient alors à (♠), qui donne

$$\|Pu_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \varepsilon|(u, u_\varepsilon - u)_{H^1(\Omega)}| \leq \varepsilon\|u\|_{H^1(\Omega)}\|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)} \leq \varepsilon\|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

et finalement

$$\boxed{\|Pu_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\varepsilon}\|u\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0}$$

Soit  $\varepsilon_n \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$  vérifiant  $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . On note  $u_n := u_{\varepsilon_n}$ . On a vu que  $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$ . De plus  $Pu_n$  tend vers 0 dans  $L^2(\Omega)$ . On en déduit l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que  $\|u_n\|_{H^1(\Omega, P)} \leq C$ , et donc<sup>11</sup> l'existence d'une sous-suite  $u_{n'}$  et d'un élément  $w \in H^1(\Omega, P)$  tels que  $u_{n'}$  tend faiblement vers  $w$  dans  $H^1(\Omega, P)$ .

Comme  $P$  est fortement continu de  $H^1(\Omega, P)$  dans  $L^2(\Omega)$ , il est faiblement continu<sup>12</sup>, d'où l'on a  $Pw = 0 = Pu$ . D'autre part,  $V$  est fermé (par continuité de la trace et de la trace normale de  $H^1(\Omega, P)$  dans  $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ ) et convexe, donc il est faiblement fermé<sup>13</sup>. On en déduit que  $w \in V$ , et donc  $w = g_0 = u$  et  $\partial_{\nu_P} w = g_1 = \partial_{\nu_P} u$  sur  $\Gamma$ . Par unicité de la solution de [Cauchy] dans  $H^1(\Omega, P)$ , on a donc  $w = u$ .

De (♠), on tire alors

$$\|u_{n'} - u\|_{H^1(\Omega)} \leq |(u, u_{n'} - u)_{H^1(\Omega)}| \xrightarrow{n' \rightarrow \infty} 0$$

et donc  $u_{n'}$  tend fortement vers  $u$  dans  $H^1(\Omega)$ , et finalement dans  $H^1(\Omega, P)$  (puisque  $Pu_{n'}$  tend vers  $Pu$ ).

Le lemme 2.1 nous donne finalement :

$$\boxed{u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u}_{H^1(\Omega, P)}$$

■

Le problème [quasi-réversibilité  $H^1$ ] apparaît comme une régularisation du problème de Cauchy *si l'ensemble  $V$  est non vide*. Cette condition est très problématique : en effet, si nous perturbons légèrement les données  $(g_0, g_1)$  du problème de Cauchy, ou, autrement dit, si nous n'avons à notre disposition que des données bruitées  $(g_0^\delta, g_1^\delta)$ , la propriété 2.1 nous dit que nous ne sommes pas sûr de l'existence d'un relèvement  $H^1(\Omega, P)$  de ces données, et donc de l'existence d'une solution au problème [quasi-réversibilité  $H^1$ ].

Pour remédier à cette difficulté, nous allons proposer trois nouvelles manières de formuler le problème de quasi-réversibilité : l'une faisant intervenir une formulation mixte du problème, les deux autres une formulation  $H^2$  du problème.

### 2.1.2 Formulation mixte

On suppose ici  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  à frontière lipschitzienne, avec  $\partial\Omega = \bar{\Gamma} \cup \bar{\Gamma}_c$ ,  $\Gamma \cap \Gamma_c = \emptyset$ ,  $|\Gamma| > 0$ ,  $|\Gamma_c| > 0$ ,  $\Gamma$  et  $\Gamma_c$  ouvert. On définit les espaces

$$H_0 := \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_\Gamma = 0\}, \quad H := \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_\Gamma = g_0\}, \quad H_c := \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_c} = 0\}.$$

On a  $C_c^\infty(\Omega) \subset H_0$  et  $C_c^\infty(\Omega) \subset H_c$ , donc ces deux ensembles sont non vides. Et par surjectivité de l'opérateur trace de  $H^1(\Omega)$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)$ <sup>14</sup>, on a également  $H$  non vide.

On s'intéresse au problème suivant :

<sup>11</sup>proposition V.1 p.78 et théorème III.27 p.50 de [Bre05]

<sup>12</sup>théorème III.9 p.39 de [Bre05]

<sup>13</sup>théorème III.7 p.38 de [Bre05]

<sup>14</sup>théorème 1.5.1.3 p.38 de [Gri85]

Problème [quasi-réversibilité mixte] : pour  $\alpha > 0$  et  $\eta > 0$ , chercher  $(u, p) \in H \times H_c$  t.q. pour tout  $(v, q) \in H_0 \times H_c$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} c p v dx + \alpha(u, v)_{H^1(\Omega)} = 0 \\ \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial q}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} c u q dx - \eta(p, q)_{H^1(\Omega)} - (p, q)_{L^2(\Omega)} = \langle g_1, q \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} \end{cases}$$

Cette formulation du problème de quasi-réversibilité a été introduite par L. Bourgeois dans [Bou05], pour le cas  $P := \Delta$  ( $a_{ij} = \delta_{ij}$ ,  $c = 0$ ). Les preuves s'adaptent sans problème pour l'opérateur  $P$  général. Pour simplifier les notations, on pose  $\tau := (\alpha, \eta)$ .

**Propriété 2.3**  $\forall (g_0, g_1) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ , le problème [quasi-réversibilité mixte] admet une unique solution  $(u_{\tau}, p_{\tau})$ .

L'intérêt de la formulation mixte de la quasi-réversibilité, par rapport à la formulation  $H^1$ , apparaît dans le cas où nous avons des données bruitées ( $g_0^{\delta}, g_1^{\delta}$ ). Pour peu que ces données soient régulières (i.e.  $(g_0^{\delta}, g_1^{\delta}) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ ), le problème [quasi-réversibilité mixte] aura toujours une solution. De plus, on voit que le problème est d'ordre 2, ce qui signifie que l'on va pouvoir discrétiser le problème avec des éléments finis classiques, par exemple les éléments finis de Lagrange  $P_1$ . L'étude de la discrétisation du problème [quasi-réversibilité mixte] par éléments finis se trouve dans [Bou05].

**Théorème 2.2** si le problème [Cauchy] admet une solution  $u \in H^1(\Omega)$ , et si  $\eta$  est choisi comme une fonction de  $\alpha$  vérifiant

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\eta(\alpha)} = 0$$

alors la solution  $(u_{\tau(\alpha)}, p_{\tau(\alpha)})$  du problème [quasi-réversibilité mixte] tend vers  $(u, 0)$  dans  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  lorsque  $\alpha$  tend vers 0.

La formulation mixte permet donc de régulariser le problème de Cauchy pour l'opérateur  $P$ . Il est intéressant de noter le lien entre la formulation mixte de la quasi-réversibilité, et la formulation  $H^1$  de la quasi-réversibilité :

**Propriété 2.4** si le problème [quasi-réversibilité  $H^1$ ] admet une (unique) solution  $u_{\varepsilon}$ , alors la solution  $(u_{\tau}, p_{\tau})$  du problème [quasi-réversibilité mixte] avec  $\tau := (\varepsilon, \eta)$  tend vers  $(u_{\varepsilon}, -Pu_{\varepsilon})$  dans  $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  lorsque  $\eta$  tend vers 0.

On peut donc voir le problème [quasi-réversibilité mixte] comme une régularisation du problème [quasi-réversibilité  $H^1$ ]. Nous pouvons résumer les avantages et inconvénients de la méthode de quasi-réversibilité basée sur la résolution du problème [quasi-réversibilité mixte] dans le tableau suivant :

**Problème [quasi-réversibilité mixte]**

Avantages	Inconvénients
Problème bien posé pour tout $(g_0, g_1) \in H^{1/2} \times H^{-1/2}$	Introduction d'une nouvelle inconnue $p$ → double la taille du problème
Forme variationnelle dans $H^1$ → éléments finis classiques	Introduction d'un second paramètre de régularisation $\eta$ → deux paramètres à fixer

### 2.1.3 Formulations dans $H^2(\Omega)$

On suppose maintenant  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Gamma \subset \partial\Omega$  une partie  $C^{1,1}$  de la frontière de  $\Omega$ . On sait alors<sup>15</sup> que l'application  $u \in H^2(\Omega) \mapsto (u|_\Gamma, \partial_{\nu_P} u|_\Gamma) \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$  est continue et surjective. On a donc, pour tout  $(g_0, g_1) \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ ,  $V := \{v \in H^2(\Omega) \mid v = g_0 \text{ et } \partial_{\nu_P} v = g_1 \text{ sur } \Gamma\}$  ensemble non vide.

On pose  $V_0 := \{v \in H^2(\Omega) \mid v = \partial_{\nu_P} v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$ , qui bien sûr est aussi non vide. On redéfinit le problème de Cauchy :

Problème [Cauchy] : pour  $(g_0, g_1) \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ , trouver  $u \in H^2(\Omega)$  t.q.

$$\begin{cases} Pu = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g_0 & \text{sur } \Gamma \\ \partial_{\nu_P} u = g_1 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

On recherche donc une solution plus régulière ( $H^1(\Omega, P) \rightarrow H^2(\Omega)$ ) à partir de données plus régulières ( $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ ) sur une partie du bord plus régulière ( $C^{0,1} \rightarrow C^{1,1}$ ).

#### Formulation avec relèvement

Soit  $\hat{u} \in V$  un relèvement de la donnée  $(g_0, g_1)$ . On pose le problème suivant :

Problème [quasi-réversibilité  $H^2$  avec relèvement] : pour  $\varepsilon > 0$ , trouver  $u \in V_0$  tel que pour tout  $v \in V_0$ ,

$$(Pu, Pv)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon(u, v)_{H^2(\Omega)} = -(P\hat{u}, Pv)_{L^2(\Omega)}$$

**Propriété 2.5** *le problème [quasi-réversibilité  $H^2$  avec relèvement] admet une unique solution  $u_\varepsilon$ .*

Preuve : application directe du théorème de Lax-Milgram. ■

**Théorème 2.3** *supposons que le problème [Cauchy] admette une solution  $u$ . Alors*

$$u_\varepsilon + \hat{u} \xrightarrow{H^2(\Omega)} u.$$

Preuve : si  $u$  est solution du problème [Cauchy], alors  $\tilde{u} := u - \hat{u}$  est l'unique<sup>16</sup> fonction vérifiant  $\tilde{u} \in V_0$  et  $P\tilde{u} = -P\hat{u}$  dans  $\Omega$ . Pour obtenir le résultat, il suffit de montrer que  $u_\varepsilon$  tend vers  $\tilde{u}$ . Or, pour tout  $v \in V_0$ , on a

$$(Pu_\varepsilon, Pv)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon(u_\varepsilon, v)_{H^2(\Omega)} = -(P\hat{u}, Pv)_{L^2(\Omega)} = (P\tilde{u}, Pv)_{L^2(\Omega)}$$

d'où

$$(P(u_\varepsilon - \tilde{u}), Pv)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon(u_\varepsilon, v)_{H^2(\Omega)} = 0$$

et

$$(P(u_\varepsilon - \tilde{u}), Pv)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon(u_\varepsilon - \tilde{u}, v)_{H^2(\Omega)} = -\varepsilon(\tilde{u}, v)_{H^2(\Omega)}.$$

<sup>15</sup>théorème 1.5.1.5 p.38 de [Gri85]

<sup>16</sup>par unicité de la solution du problème de Cauchy : trouver  $u \in V_0$  t.q.  $Pu = f \in L^2(\Omega)$

En prenant  $v := u_\varepsilon - \tilde{u} \in V_0$ , on obtient

$$\|P(u_\varepsilon - \tilde{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|u_\varepsilon - \tilde{u}\|_{H^2(\Omega)}^2 = -\varepsilon (\tilde{u}, u_\varepsilon - \tilde{u})_{H^2(\Omega)}$$

d'où l'on tire

$$\|u_\varepsilon - \tilde{u}\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq |(\tilde{u}, u_\varepsilon - \tilde{u})_{H^2(\Omega)}|, \quad \|u_\varepsilon - \tilde{u}\|_{H^2(\Omega)} \leq \|\tilde{u}\|_{H^2(\Omega)}, \quad \|P(u_\varepsilon - \tilde{u})\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\varepsilon} \|\tilde{u}\|_{H^2(\Omega)}.$$

Soit  $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Posons  $w_n := u_{\varepsilon_n} - \tilde{u} \in V_0$ . On voit que  $w_n$  est une suite bornée dans  $H^2$ , on peut donc extraire une sous-suite  $w_{n'}$  qui converge faiblement vers  $w \in H^2(\Omega)$ . Comme  $V_0$  est convexe et fermé, il est faiblement fermé, et on a  $w \in V_0$ . De plus, on a

$$\|Pw_{n'}\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\varepsilon_{n'}} \|\tilde{u}\|_{H^2(\Omega)} \xrightarrow{n' \rightarrow \infty} 0$$

et donc  $Pw = 0$ . Par unicité de la solution du problème de Cauchy dans  $V_0$ , on en déduit  $w = 0$ , soit  $w_{n'}$  tend faiblement vers 0.

On a alors

$$\|u_{\varepsilon_{n'}} - \tilde{u}\|_{H^2(\Omega)} \leq (\tilde{u}, w_{n'})_{H^2(\Omega)} \xrightarrow{n' \rightarrow \infty} 0$$

et donc  $u_{\varepsilon_{n'}}$  tend fortement dans  $H^2$  vers  $\tilde{u}$ . On déduit alors du lemme 2.1 :  $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{u}$ . ■

### Formulation sans relèvement

La formulation  $H^2$  sans relèvement de la quasi-réversibilité est très proche de la formulation  $H^1$ . On pose le problème suivant :

Problème [quasi-réversibilité  $H^2$  sans relèvement] : pour  $\varepsilon > 0$ , trouver  $u \in V$  t.q. pour tout  $v \in V_0$ ,

$$(Pu, Pv)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon (u, v)_{H^2(\Omega)} = 0.$$

**Propriété 2.6** *le problème [quasi-réversibilité  $H^2$  sans relèvement] admet une unique solution  $u_\varepsilon$ .*

Preuve : identique à celle de la proposition 2.2. ■

**Théorème 2.4** *si le problème [Cauchy] admet une (unique) solution  $u$ , alors*

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\|H^2(\Omega)\|]{\varepsilon \rightarrow 0} u$$

et on a  $\|P(u_\varepsilon - u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\varepsilon} \|u\|_{H^2(\Omega)}$ .

Preuve : identique à celle du théorème 2.1. ■

Remarquons que dans le cas de l'opérateur  $\Delta + k$ , les résultats de stabilité conditionnelle pour le problème de Cauchy que nous avons énoncés p.15 nous donnent une estimation de la vitesse de convergence de la méthode de quasi-réversibilité. En effet, nous avons la

**Propriété 2.7** on se place en dimension 2 ou 3, et on suppose que  $\Omega$  vérifie la propriété du  $\theta$ -cône, pour  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ <sup>17</sup>. On suppose  $P := \Delta + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$  n'étant pas une valeur propre du laplacien dans  $\Omega$ . On note

$$\kappa_0(\theta) := \sup_{x>0} \frac{1}{2} \frac{\sin(\theta)(1 - e^{-x})}{\sqrt{1+x} - \sin(\theta)}.$$

Alors pour tout  $\kappa \in ]0, \kappa_0(\theta)/s[$ , avec  $s = 2$  en dimension 2 et  $s = 4$  en dimension 3, il existe  $C > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  tels que pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ , on ait

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{1}{(\ln(1/\varepsilon))^\kappa}$$

Preuve : le théorème 1.5 p.15 nous dit que pour tout  $\kappa \in ]0, \kappa_0(\theta)/s[$ , avec  $s = 2$  en dimension 2 et  $s = 4$  en dimension 3, il existe  $C > 0$ ,  $\delta_0 > 0$  tels que pour tout  $\delta \in ]0, \delta_0[$ , pour toute fonction  $v \in H^2(\Omega)$  vérifiant

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq M, \quad \|Pv\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{H^1(\Gamma)} + \|\partial_\nu v\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta$$

on a

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{M}{(\ln(M/\delta))^\kappa}.$$

Il suffit alors de remarquer que le théorème 2.4 implique l'existence de  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, pour tout  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , on ait

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H^2(\Omega)} \leq 1, \quad \|P(u_\varepsilon - u)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Gamma)} + \|\partial_\nu(u_\varepsilon - u)\|_{L^2(\Gamma)} = \|P(u_\varepsilon - u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^2(\Omega)} \sqrt{\varepsilon} < \delta_0.$$

Le résultat suit. ■

Si la frontière de l'ouvert est plus régulière, la vitesse de convergence est améliorée :

**Propriété 2.8** supposons que la frontière de  $\Omega$  soit  $C^{1,1}$ . Alors pour tout  $\kappa \in ]0, 1[$ , il existe  $C > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  tels que pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ , on ait

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{1}{(\ln(1/\varepsilon))^\kappa}$$

Preuve : il suffit de remplacer le théorème 1.5 par le théorème 1.3 dans la preuve précédente. ■

### Quelques remarques sur les formulations $H^2$

Les deux formulations  $H^2$  de la quasi-réversibilité présentées passent par deux problèmes qui sont toujours bien posés si la donnée  $(g_0, g_1)$  est suffisamment régulière (c'est-à-dire  $H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ ) et permettent d'approcher la solution du problème de Cauchy. On a donc proposé deux régularisations du problème [Cauchy].

Remarque : les formulations  $H^2$  avec et sans relèvement correspondent à des solutions différentes. Plus précisément, si nous notons  $\hat{u}_\varepsilon$  la solution du problème de quasi-réversibilité  $H^2$  avec relèvement  $\hat{u}$ , et  $u_\varepsilon$  la solution du problème de quasi-réversibilité sans relèvement, on a  $\hat{u}_\varepsilon + \hat{u} \neq u_\varepsilon$ . En effet, si on note  $v_\varepsilon := \hat{u}_\varepsilon + \hat{u} - u_\varepsilon$ , on a  $v_\varepsilon \in V_0$  et  $v_\varepsilon$  vérifie

$$(Pv_\varepsilon, Pv)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon(v_\varepsilon, v)_{H^2(\Omega)} = \varepsilon(\hat{u}, v)_{H^2(\Omega)}, \quad \forall v \in V_0.$$

et donc  $v_\varepsilon \neq 0$ .

Ces deux méthodes reposent sur la résolution de formulations variationnelles posées dans  $H^2$ . Pour résoudre ces problèmes, nous allons devoir utiliser des éléments finis adaptés, c'est-à-dire :

<sup>17</sup>voir annexe B. Rappelons en particulier que cela implique que la frontière de  $\Omega$  est lipschitzienne



- soit des éléments finis conformes  $H^2$ , qui demandent de très nombreux degrés de liberté afin d'assurer la conformité
- soit des éléments finis non conformes, moins riches en degrés de liberté.

Pour quelques exemples d'éléments finis des deux catégories, se référer à [Cia78].

Afin de ne pas aboutir à des problèmes numériques de trop grande taille, nous avons choisi dans cette étude d'utiliser des éléments finis non conformes. Ceci a une incidence directe sur le choix de la formulation  $H^2$  du problème de quasi-réversibilité : en effet, il est difficile de construire un relèvement adéquat de la donnée, car la fonction valant "ce qu'il faut" sur les degrés de liberté du bord, et 0 partout ailleurs, relèvement habituellement construit pour ce genre de problème, n'est pas une fonction de  $H^2$ . Pour mettre en évidence la difficulté, intéressons nous à un problème abstrait.

La formulation  $H^2$  avec relèvement du problème de quasi-réversibilité peut être schématiquement représentée par un problème du type : trouver  $u \in V_0$  tel que

$$a(u, v) = -b(\hat{u}, v), \forall v \in V_0.$$

avec  $\hat{u}$  un relèvement d'une donnée,  $a(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire continue et coercive sur  $H^2$ ,  $b(\hat{u}, \cdot)$  une forme linéaire continue sur  $H^2$ , et  $V_0$  les fonctions de  $H^2$  valant 0 sur le bord. Supposons que nous voulions discrétiser ce problème par éléments finis conformes  $H^2$ , basés sur une triangulation du domaine de finesse  $h$ . Nous aurions un espace d'éléments finis  $V_h$  vérifiant  $V_h \subset H^2$ , et l'espace  $V_{h,0}$  des fonctions de  $V_h$  valant 0 sur le bord vérifierait  $V_{h,0} \subset V_0$ . On chercherait alors  $u_h \in V_{h,0}$  vérifiant

$$a(u_h, v_h) = -b(\hat{u}, v_h), \forall v_h \in V_{h,0}.$$

Or, comme pour tout  $h$ ,  $V_{h,0} \subset V_0$ , on a aussi

$$a(u, v_h) = -b(\hat{u}, v_h), \forall v_h \in V_{h,0}.$$

On voit que si l'on soustrait les deux égalités, le relèvement de la donnée disparaît. Il n'intervient donc pas dans l'étude de la convergence de la solution du problème discret vers la solution du problème continu. Autrement dit, on peut prendre n'importe quel relèvement de la donnée dans la formulation discrète du problème, y compris la fonction de  $V_h$  valant "ce qu'il faut" sur le bord et 0 partout ailleurs, cela n'a pas d'influence sur la convergence des éléments finis.

Si on décide d'utiliser un espace  $W_h$  d'éléments finis non-conformes, on a  $W_h \not\subset H^2$ , et  $H^2 \not\subset W_h$ . On ne peut donc plus utiliser les formes  $a(\cdot, \cdot)$  et  $b(\cdot, \cdot)$ . On utilise dans ce cas des formes approchées  $a_h(\cdot, \cdot)$  et  $b_h(\cdot, \cdot)$ , et le problème discret que l'on cherche à résoudre est de la forme : trouver  $u_h \in W_{h,0}$  tel que

$$a_h(u_h, v_h) = -b_h(\hat{u}_h, v_h), \forall v_h \in W_{h,0}$$

avec  $\hat{u}_h \in W_h$  un relèvement discret de la donnée, qui ne peut pas être utilisé dans la formulation continue du problème, puisque ce n'est pas un élément de  $H^2$ .

Pour assurer la convergence théorique des éléments finis, on utilise comme relèvement discret la projection sur  $W_h$  d'un relèvement  $H^2$  de la donnée indépendant de  $h$ . En pratique, on est alors confronté à des difficultés :

- on ne connaît pas forcément de relèvement continu de la donnée, même si l'on est sûr qu'il en existe
- la fonction de  $W_h$  qui vaut "ce qu'il faut" sur le bord, et 0 partout ailleurs, n'est pas la projection d'un relèvement  $H^2$  de la donnée indépendant de  $h$  (il est facile de voir qu'un tel relèvement  $H^2$  serait nul).

Nous avons donc décidé de nous intéresser à la discrétisation de la formulation  $H^2$  de la quasi-réversibilité sans relèvement.

Remarque : ce problème du relèvement n'apparaîtrait pas si nous utilisions des éléments finis conformes  $H^2$ . Les deux formulations  $H^2$  de la quasi-réversibilité présenteraient alors les mêmes types de difficultés, et aucune ne serait d'emblée préférable à l'autre.

Pour conclure, récapitulons les avantages et inconvénients des formulations  $H^2$  de la méthode de quasi-réversibilité.

Problème [quasi-réversibilité  $H^2$ ]

Avantages	Inconvénients
Problème bien posé pour tout $(g_0, g_1) \in H^{3/2} \times H^{1/2}$	Demande plus de régularité sur la solution du problème [Cauchy] et sur $\Gamma$
Un seul paramètre à fixer	Nécessite des éléments finis adaptés à l'espace $H^2$

## 2.2 Résolution numérique dans un domaine polygonal de $\mathbb{R}^2$

On se donne  $\Omega$  un polygone borné de  $\mathbb{R}^2$ . Sa frontière  $\partial\Omega$  est constituée des segments  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  (les  $\Gamma_j$  sont deux à deux distincts). On pose  $\Gamma := \bigcup_{i=1}^M \Gamma_i$ , avec  $1 \leq M < N$ . On s'intéresse au problème de Cauchy pour l'opérateur laplacien :

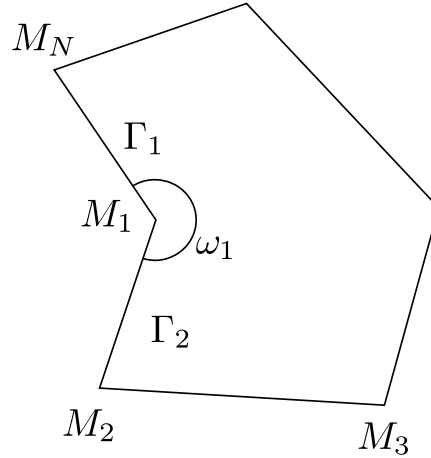
Problème [Cauchy] : pour un couple  $(g_0, g_1)$  donné, trouver  $u \in H^2(\Omega)$  t.q. 
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = g_0 \text{ sur } \Gamma \\ \partial_\nu u = g_1 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Remarquons que  $\Gamma$  n'est pas une partie  $C^{1,1}$  du bord de  $\Omega$ . On ne peut donc pas utiliser directement la formulation  $H^2$  sans relèvement de la quasi-réversibilité. Pour pouvoir le faire, il va nous falloir caractériser l'image de  $H^2(\Omega)$  par l'opérateur  $u \mapsto (u|_\Gamma, \partial_\nu u|_\Gamma)$ .

### 2.2.1 Méthode [QR] dans un polygone de $\mathbb{R}^2$

Tout d'abord, remarquons que pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , l'application  $u \mapsto (u|_{\Gamma_j}, \partial_\nu u|_{\Gamma_j})$  est continue et surjective de  $H^2(\Omega)$  dans  $H^{3/2}(\Gamma_j) \times H^{1/2}(\Gamma_j)$ . La difficulté lorsqu'on s'intéresse aux traces sur  $\Gamma$  est que l'on ne sait pas définir  $H^{3/2}(\Gamma)$ . Nous savons par contre que l'image de  $u \mapsto (u|_\Gamma, \partial_\nu u|_\Gamma)$  est un sous-espace de  $\prod_{j=1}^M H^{3/2}(\Gamma_j) \times H^{1/2}(\Gamma_j)$ . Nous allons donc chercher à caractériser ce sous-espace.

Introduisons d'abord quelques notations : on note  $M_j$  le sommet commun aux arêtes  $\Gamma_j$  et  $\Gamma_{j+1}$ , et  $\omega_j$  l'angle que forment  $\Gamma_j$  et  $\Gamma_{j+1}$  vers l'intérieur de  $\Omega$ . On note  $\nu_j$  la normale extérieure à  $\Omega$  le long de  $\Gamma_j$ , et  $\tau_j$  le vecteur unitaire tangent à  $\Gamma_j$  tel que le couple  $(\nu_j, \tau_j)$  forme un système direct.



**Propriété 2.9** la fonction  $f$  appartient à  $H^{1/2}(\Gamma_j \cup \Gamma_{j+1})$  si et seulement si  $f|_{\Gamma_j} := f_j \in H^{1/2}(\Gamma_j)$ ,  $f|_{\Gamma_{j+1}} := f_{j+1} \in H^{1/2}(\Gamma_{j+1})$ , et

$$\exists \varepsilon > 0 \int_0^\varepsilon |f_j(x_j(-\sigma)) - f_{j+1}(x_j(+\sigma))|^2 \frac{d\sigma}{\sigma} < \infty$$

où  $x_j(-\sigma)$  (resp.  $x_j(+\sigma)$ ) désigne le point de  $\Gamma_j$  (resp.  $\Gamma_{j+1}$ ) à distance  $\sigma$  du sommet  $M_j$ .

On caractérise ici le raccord des fonctions de  $H^{1/2}$  aux sommets du polygone. On notera cette relation :  $f_j \equiv f_{j+1}$  en  $M_j$ . Venons-en maintenant à la caractérisation de l'image de  $H^2$  par l'application trace-trace normale.

**Propriété 2.10** l'image de  $H^2(\Omega)$  par l'application  $u \mapsto \{d_j, n_j\}_{j=1}^M$ , où l'on a posé  $d_j := u|_{\Gamma_j}$  et  $n_j := \partial_\nu u|_{\Gamma_j}$ , est le sous-espace de  $\prod_{j=1}^M H^{3/2}(\Gamma_j) \times H^{1/2}(\Gamma_j)$ , noté  $\tilde{H}^{3/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$  et défini par les conditions de raccord suivantes<sup>18</sup> :

$$\begin{aligned} d_j(M_j) &= d_{j+1}(M_j), \quad \forall j \in \{1, \dots, M-1\} \\ d'_j &\equiv -\cos(\omega_j) d'_{j+1} - \sin(\omega_j) n_{j+1} \text{ en } M_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, M-1\} \\ n_j &\equiv -\cos(\omega_j) n_{j+1} + \sin(\omega_j) d'_{j+1} \text{ en } M_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, M-1\}. \end{aligned}$$

Les preuves de ces deux propriétés se trouvent dans [Gri92, BDM00]. On peut maintenant reformuler le problème de Cauchy qui va nous intéresser, et le problème de quasi-réversibilité correspondant :

Problème [Cauchy] : pour  $(g_0, g_1) \in \tilde{H}^{3/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ , trouver  $u \in H^2(\Omega)$  t.q.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = g_0 \text{ sur } \Gamma \\ \partial_\nu u = g_1 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Problème [QR] : pour  $\varepsilon > 0$ , trouver  $u \in H^2(\Omega)$  vérifiant  $u = g_0$  et  $\partial_\nu u = g_1$  sur  $\Gamma$ , et tel que pour tout  $v \in H^2(\Omega)$  tel que  $v = \partial_\nu v = 0$  sur  $\Gamma$ ,

$$(\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon(u, v)_{H^2(\Omega)} = 0.$$

<sup>18</sup>  $d'$  désigne ici la dérivée de  $d$  le long de l'arête dans la direction de  $\tau_j$

**Théorème 2.5** *le problème [QR] admet une unique solution  $u_\varepsilon$ . De plus, si le problème [Cauchy] admet une (unique) solution  $u$ , on a*

$$u_\varepsilon \xrightarrow[H^2(\Omega)]{\varepsilon \rightarrow 0} u.$$

Preuve : comme  $(g_0, g_1) \in \tilde{H}^{3/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ , on peut relever la donnée par une fonction de  $H^2(\Omega)$ . On procède ensuite comme dans les preuves précédentes. ■

### 2.2.2 Discrétisation du problème [QR]

Nous avons décidé pour cette étude de résoudre le problème [QR] par une méthode éléments finis non conformes. Ce n'est bien sûr par la seule manière de discrétiser [QR]. Ainsi, dans [LL67], les formulations de quasi-réversibilité sont discrétisées par différences finies, alors que dans [CK07], on procède par discrétisation sur un espace de splines. Néanmoins, ces deux méthodes sont difficilement applicables dans le cas de géométries compliquées, ce qui n'est pas le cas des méthodes de type éléments finis.

Nous allons ici utiliser les éléments finis Fraeijis de Veubeke 1 (FV1). Ils ont été initialement introduits pour l'étude des problèmes de plaques en flexion pure, c'est-à-dire de problèmes avec opérateur bi-laplacien posés dans  $H^2$ . Ce ne sont bien sûr pas les seuls éléments finis adaptés, nous renvoyons à [LL75] pour la présentation d'autres éléments finis non conformes pour le problème de plaque, qui pourraient être adaptés à notre problème<sup>19</sup>.

#### Fonctions de base des éléments finis F.V.1

Soit  $T$  un triangle de sommets  $A_i(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Les indices  $i, j, k$  appartiennent à l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$  modulo 3. On note  $M_i$  le milieu du côté  $[A_{i+1}, A_{i-1}]$ , et  $l_i$  sa longueur :

$$l_i = \sqrt{(x_{i-1} - x_{i+1})^2 + (y_{i-1} - y_{i+1})^2}$$

On notera  $|T|$  l'aire géométrique de  $T$ , et  $\lambda_i$  les coordonnées barycentriques liées à  $A_i$  :

$$\lambda_i(x, y) = \frac{(x_{i-1} - x_{i+1})(y - y_{i+1}) - (y_{i-1} - y_{i+1})(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_{i+1})(y_i - y_{i+1}) - (y_{i-1} - y_{i+1})(x_i - x_{i+1})}$$

On pose : 
$$\left\{ \begin{array}{l} C_{i,i+1} = \frac{1}{l_{i+1}^2} \overrightarrow{A_{i-1}A_i} \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_{i+1}} \\ C_{i,i-1} = \frac{1}{l_{i-1}^2} \overrightarrow{A_{i+1}A_i} \cdot \overrightarrow{A_{i+1}A_{i-1}} \end{array} \right.$$
 et on note  $\nu_i$  la normale extérieure au côté opposé à

$A_i$ , qui est liée à  $\lambda_i$  par la relation  $\nu_i = -\frac{\nabla \lambda_i}{\|\nabla \lambda_i\|}$ .

Les degrés de liberté de l'élément F.V.1 sont :

- les valeurs de la fonction aux sommets du triangle  $f(A_i)$

<sup>19</sup>notons la présence de deux erreurs concernant les éléments finis FV1 dans [LL75] : les fonctions de base ne sont pas bonnes, et l'espace  $P_K$  engendré par ces fonctions est défini comme le noyau d'une application linéaire sur  $P_3(K)$ . Or, on montre par un calcul assez fastidieux que cette application s'annule sur tout  $P_3(K)$ , ce qui invalide cette définition. Le lecteur désirant implémenter les éléments finis FV1 se référera donc avec profit aux définitions qui suivent !

- les valeurs de la fonction aux milieux des côtés  $f(M_i)$
- les moyennes des dérivées normales le long des cotés  $[f]_i = \frac{1}{l_i} \int_{A_{i+1}}^{A_{i-1}} \nabla f \cdot \nu_i d\sigma$ .

Les fonctions de base associées sont :

$$\begin{aligned} s_i &= \frac{1}{2}\lambda_i(2\lambda_i - 1)(\lambda_i - 1) + \frac{1}{2}\lambda_i(2\lambda_i - 1)(\lambda_i + 1) \\ &\quad + C_{i,i+1}\lambda_{i+1}(2\lambda_{i+1} - 1)(\lambda_{i+1} - 1) + C_{i,i-1}\lambda_{i-1}(2\lambda_{i-1} - 1)(\lambda_{i-1} - 1) \\ m_i &= 4\lambda_i(2\lambda_i - 1)(\lambda_i - 1) + 4\lambda_{i+1}\lambda_{i-1} - 12\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ d_i &= -2\frac{|T|}{l_i}\lambda_i(2\lambda_i - 1)(\lambda_i - 1). \end{aligned}$$

Elles vérifient :

- $s_i(A_j) = \delta_{ij}$ ,  $m_i(A_j) = 0$ ,  $d_i(A_j) = 0$
- $s_i(M_j) = 0$ ,  $m_i(M_j) = \delta_{ij}$ ,  $d_i(M_j) = 0$
- $[s_i]_j = 0$ ,  $[m_i]_j = 0$ ,  $[d_i]_j = \delta_{ij}$ .

Preuve : les 6 premières égalités sont faciles à vérifier. Nous ne nous intéresserons donc qu'aux trois dernières. Nous allons commencer par écrire les fonctions  $\lambda_i$  un peu différemment :

$$\begin{aligned} \lambda_i(x, y) &= \frac{(x_{i-1} - x_{i+1})(y - y_{i+1}) - (y_{i-1} - y_{i+1})(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_{i+1})(y_i - y_{i+1}) - (y_{i-1} - y_{i+1})(x_i - x_{i+1})} \\ &= \frac{(x_{i-1} - x_{i+1})(y - y_{i+1}) - (y_{i-1} - y_{i+1})(x - x_{i+1})}{\begin{vmatrix} x_{i-1} - x_{i+1} & y_{i-1} - y_{i+1} \\ x_i - x_{i+1} & y_i - y_{i+1} \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(x_{i-1} - x_{i+1})(y - y_{i+1}) - (y_{i-1} - y_{i+1})(x - x_{i+1})}{\begin{vmatrix} x_{i-1} & y_{i-1} & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(x_{i-1} - x_{i+1})(y - y_{i+1}) - (y_{i-1} - y_{i+1})(x - x_{i+1})}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(x_{i-1} - x_{i+1})(y - y_{i+1}) - (y_{i-1} - y_{i+1})(x - x_{i+1})}{\Delta_{123}}. \end{aligned}$$

où  $\Delta_{123} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$  (rq :  $|\Delta_{123}| = 2|T|$ ). On a alors  $\nabla\lambda_i = \frac{1}{\Delta_{123}} \begin{bmatrix} y_{i+1} - y_{i-1} \\ x_{i-1} - x_{i+1} \end{bmatrix}$  et  $\|\nabla\lambda_i\| = \frac{l_i}{2|T|}$ .

Nous allons également faire un usage répété de la formule<sup>20</sup> suivante, valable pour tout polynôme  $p$  de degrés 2 (ici, comme dans la suite de la démonstration,  $j \in \{1, 2, 3\}$ ) :

$$\frac{1}{l_j} \int_{[A_{j+1}, A_{j-1}]} p d\sigma = \frac{1}{6} [p(A_{j+1}) + 4p(M_j) + p(A_{j-1})].$$

• Intéressons-nous à  $s_i$ . On a :

$$\nabla s_i = [6\lambda_i^2 - 2\lambda_i]\nabla\lambda_i + C_{i,i+1}[6\lambda_{i+1}^2 - 6\lambda_{i+1} + 1]\nabla\lambda_{i+1} + C_{i,i-1}[6\lambda_{i-1}^2 - 6\lambda_{i-1} + 1]\nabla\lambda_{i-1}.$$

On est amené à calculer les intégrales suivantes :

$$\frac{1}{l_j} \int_{[A_{j+1}, A_{j-1}]} [6\lambda_i^2 - 2\lambda_i] d\sigma = [\lambda_i(A_{j+1})^2 + 4\lambda_i(M_j)^2 + \lambda_i(A_{j-1})^2] - \frac{1}{3} [\lambda_i(A_{j+1}) + 4\lambda_i(M_j) + \lambda_i(A_{j-1})]$$

<sup>20</sup>formule 25.4.5 de [AS72]

soit  $\frac{1}{l_j} \int_{[A_{j+1}, A_{j-1}]} [6\lambda_i^2 - 2\lambda_i] d\sigma = (1 - \delta_{ij})$ . On a de la même manière :

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_j} \int_{[A_{j+1}, A_{j-1}]} [6\lambda_{i+1}^2 - 6\lambda_{i+1} + 1] d\sigma &= [\lambda_{i+1}(A_{j+1})^2 + 4\lambda_{i+1}(M_j)^2 + \lambda_{i+1}(A_{j-1})^2] \\ &\quad - [\lambda_{i+1}(A_{j+1}) + 4\lambda_{i+1}(M_j) + \lambda_{i+1}(A_{j-1})] + 1 \end{aligned}$$

soit  $\frac{1}{l_j} \int_{[A_{j+1}, A_{j-1}]} [6\lambda_{i+1}^2 - 6\lambda_{i+1} + 1] d\sigma = \delta_{i+1j}$ . On obtient de même  $\frac{1}{l_j} \int_{[A_{j+1}, A_{j-1}]} [6\lambda_{i-1}^2 - 6\lambda_{i-1} + 1] d\sigma = \delta_{i-1j}$ , ce qui donne finalement :

$$[s_i]_j = (1 - \delta_{ij}) \nabla \lambda_i \cdot \nu_j + C_{i,i+1} \delta_{i+1j} \nabla \lambda_{i+1} \cdot \nu_j + C_{i,i-1} \delta_{i-1j} \nabla \lambda_{i-1} \cdot \nu_j.$$

On a directement  $[s_i]_i = 0$ . Intéressons nous à  $[s_i]_{i+1}$  :

$$\begin{aligned} [s_i]_{i+1} &= \nabla \lambda_i \cdot \nu_{i+1} + C_{i,i+1} \nabla \lambda_{i+1} \cdot \nu_j \\ &= -\frac{\nabla \lambda_i \cdot \nabla \lambda_{i+1}}{\|\nabla \lambda_{i+1}\|} - C_{i,i+1} \|\nabla \lambda_{i+1}\| \\ &= -\frac{2|T|}{l_{i+1}} \frac{1}{4|T|^2} [(y_{i+1} - y_{i-1})(y_{i-1} - y_i) + (x_{i-1} - x_{i+1})(x_i - x_{i-1})] \\ &\quad - \frac{1}{l_{i+1}^2} \overrightarrow{A_{i-1}A_i} \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_{i+1}} \frac{l_{i+1}}{2|T|} \\ &= -\frac{1}{2|T|l_{i+1}} \overrightarrow{A_iA_{i-1}} \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_{i+1}} - \frac{1}{2|T|l_{i+1}} \overrightarrow{A_{i-1}A_i} \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_{i+1}} = 0. \end{aligned}$$

On obtient de même  $[s_i]_{i-1} = 0$ .

• Passons maintenant à  $m_i$ . On a :

$$\nabla m_i = [24\lambda_i^2 - 24\lambda_i + 4 - 12\lambda_{i+1}\lambda_{i-1}] \nabla \lambda_i + [4\lambda_{i-1} - 12\lambda_{i-1}\lambda_i] \nabla \lambda_{i+1} + [4\lambda_{i+1} - 12\lambda_{i+1}\lambda_i] \nabla \lambda_{i-1}.$$

On a tout d'abord :

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_j} \int_{[A_{j+1}, A_{j-1}]} [24\lambda_i^2 - 24\lambda_i + 4 - 12\lambda_{i+1}\lambda_{i-1}] d\sigma &= 4[(\lambda_i^2 - \lambda_i)(A_{j+1}) + 4(\lambda_i^2 - \lambda_i)(M_j) + (\lambda_i^2 - \lambda_i)(A_{j-1})] \\ &\quad + 4[-2\lambda_{i+1}\lambda_{i-1}(A_{j+1}) + 4\lambda_{i+1}\lambda_{i-1}(M_j) + \lambda_{i+1}\lambda_{i-1}(A_{j-1})] \\ &= 4 - 4(1 - \delta_{ij}) - 2\delta_{ij} = 2\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Ensuite, on doit calculer :

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_j} \int_{[A_{j+1}, A_{j-1}]} [4\lambda_{i-1} - 12\lambda_{i-1}\lambda_i] d\sigma &= \frac{4}{6} [\lambda_{i-1}(A_{j+1}) + 4\lambda_{i-1}(M_j) + \lambda_{i-1}(A_{j-1})] \\ &\quad - 2[\lambda_{i-1}\lambda_i(A_{j+1}) + 4\lambda_{i-1}\lambda_i(M_j) + \lambda_{i-1}\lambda_i(A_{j-1})] \\ &= 2(1 - \delta_{ij+1}) - 2\delta_{ij-1} = 2(1 - \delta_{ij+1} - \delta_{ij-1}) = 2\delta_{ij}. \end{aligned}$$

On a de même  $\frac{1}{l_j} \int_{[A_{j+1}, A_{j-1}]} [4\lambda_{i+1} - 12\lambda_{i+1}\lambda_i] d\sigma = 2\delta_{ij}$ . On obtient finalement :

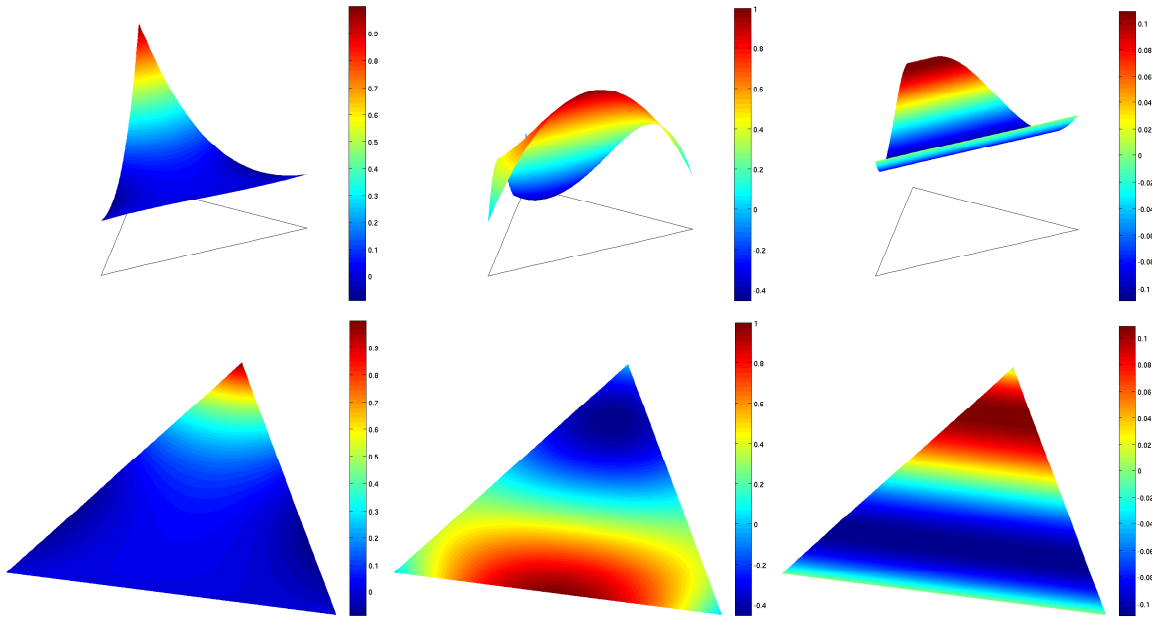
$$[m_i]_j = 2\delta_{ij} \nabla \lambda_i \cdot \nu_j + 2\delta_{ij} \nabla \lambda_{i+1} \cdot \nu_j + 2\delta_{ij} \nabla \lambda_{i-1} \cdot \nu_j = 2\delta_{ij} (\nabla \lambda_i + \nabla \lambda_{i+1} + \nabla \lambda_{i-1}) \cdot \nu_j = 0$$

• Il nous reste finalement à nous intéresser à  $d_i$  :

$$\nabla d_i = -2 \frac{|T|}{l_i} [6\lambda_i^2 - 6\lambda_i + 1] \nabla \lambda_i.$$

En réutilisant les calculs précédents, on obtient :  $[d_i]_j = -2 \frac{|T|}{l_i} \delta_{ij} \nabla \lambda_i \cdot \nu_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 2 \frac{|T|}{l_i} \|\nabla \lambda_i\| = 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$

■



Fonctions  $s_3$ ,  $m_3$  et  $d_3$  dans le triangle de sommets  $A_1(0, 0)$ ,  $A_2(1.4, -0.2)$ ,  $A_3(1, 1)$ .

Si on note  $P_K$  l'espace engendré par ces fonctions, on a :  $P_2 \subset P_K \subset P_3$ . Pour montrer que  $P_2 \subset P_K^{21}$ , il suffit tout d'abord de remarquer que

$$\text{Vect}_{i=1..3}(s_i, m_i, d_i) = \text{Vect}_{i,j=1..3, i \neq j}(\lambda_i(2\lambda_i - 1)(\lambda_i - 1), \lambda_i(2\lambda_i - 1)(\lambda_i + 1), \lambda_i\lambda_j).$$

En effet, on a la relation  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i(2\lambda_i - 1)(\lambda_i - 1) = 6\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ .

Ensuite, on utilise le fait que  $P_2 = \text{Vect}(2\lambda_i^2 - \lambda_i, \lambda_i\lambda_j)$ , et pour conclure, on voit que  $2\lambda_i^2 - \lambda_i = \frac{1}{2}(\lambda_i(2\lambda_i - 1)(\lambda_i + 1) - \lambda_i(2\lambda_i - 1)(\lambda_i - 1))$ .

On a la propriété suivante<sup>22</sup> :

**Propriété 2.11** *Pour tout triangle  $K$  de  $\mathbb{R}^2$ , pour toute fonction  $u \in H^3(K)$ , nous avons :*

$$\|u - \pi_h(u)\|_{H^2(K)} \leq Ch_K |u|_{H^3(K)} \quad (2.1)$$

avec  $h_K$  diamètre de  $K$  et  $C$  une constante indépendante de  $K$  et de  $u$ . Ici,  $\pi_h(u)$  est le polynôme suivant<sup>23</sup> :

$$\pi_h(u) = \sum_{i=1}^3 u(A_i)s_i + u(M_i)m_i + [u]_i d_i.$$

### Formulation du problème discret

On suppose que l'on a une triangulation régulière (au sens de [Cia78]) de  $\Omega$ , notée  $\mathcal{T}_h$ , de telle sorte que  $\bar{\Omega}$  soit l'union d'arêtes de  $\mathcal{T}_h$ . On note  $h$  la finesse de cette triangulation, on a donc, pour tout triangle  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ ,  $h_K \leq h$ .

On va noter  $W_h$  l'ensemble des fonctions  $w_h \in L^2(\Omega)$  telles que, pour tout triangle  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ ,  $w_h|_K \in P_K$ , et telles qu'elles soient continues aux sommets et aux milieux des triangles de  $\mathcal{T}_h$ , et

<sup>21</sup> on a trivialement  $P_K \subset P_3$ , les fonctions de base étant des polynômes de degrés 3

<sup>22</sup> lemme 3.4 de [LL75]

<sup>23</sup> polynôme qui a bien un sens, puisque  $H^3(K) \subset C^1(\bar{K})$  (voir théorème 5.4 de [AF75])

n'aient pas de saut de la moyenne de la dérivée normale à travers une arête de  $\mathcal{T}_h$ . Remarquons que ces fonctions ne sont pas nécessairement continues le long des arêtes des triangles.

Soit une arête  $e$  d'un triangle  $K \in \mathcal{T}_h$  contenue dans  $\bar{\Gamma}$ . On va noter, en suivant les notations de la partie précédente,  $A_1, A_2$  et  $A_3$  les sommets de  $K$  tels que  $e = [A_1, A_2]$ . On suivra cette notation pour toute arête  $e$  contenue dans  $\bar{\Gamma}$ . On définit alors les ensembles  $V_h$  et  $V_{h,0}$  :

$$V_h = \left\{ w_h \in W_h \mid \forall e \subset \bar{\Gamma}, \begin{array}{l} w_h(A_1) = g_0(A_1), \quad w_h(A_2) = g_0(A_2), \\ w_h(M_3) = g_0(M_3), \quad [w_h]_3 = \frac{1}{|e|} \int_e g_1 d\sigma \end{array} \right\}$$

$$V_{h,0} = \left\{ w_h \in W_h \mid \forall e \subset \bar{\Gamma}, w_h(A_1) = w_h(A_2) = w_h(M_3) = [w_h]_3 = 0 \right\}.$$

La définition de  $V_h$  a bien un sens, puisque  $g_0 \in \tilde{H}^{3/2}(\Gamma) \subset C^0(\bar{\Gamma})$ , et  $g_1 \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$ . De plus,  $V_h$  est non vide. En effet, la fonction  $w_h$  vérifiant :

- $w_h|_K \in P_K$  pour tout triangle  $K$  de  $\mathcal{T}_h$
- pour toute arête  $e$  de la triangulation,  $e = [A_1, A_2] \not\subset \bar{\Gamma}$ ,  $w_h(A_1) = w_h(A_2) = w_h(M_3) = [w_h]_3 = 0$
- pour toute arête  $e$  de la triangulation,  $e = [A_1, A_2] \subset \bar{\Gamma}$ ,  $w_h(A_1) = g_0(A_1)$ ,  $w_h(A_2) = g_0(A_2)$ ,  $w_h(M_3) = g_0(M_3)$  et  $[w_h]_3 = \frac{1}{|e|} \int_e g_1 d\sigma$

est un élément de  $V_h$ .

Pour un triangle  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ , on note

$$a_{K,\varepsilon}(v_h, w_h) = (\Delta v_h, \Delta w_h)_{L^2(K)} + \varepsilon(v_h, w_h)_{H^2(K)}, \quad \forall (v_h, w_h) \in W_h \times W_h.$$

On introduit maintenant le problème discrétisé associé à [QR] :

Problème [QR<sub>h</sub>] : pour  $\varepsilon > 0$ , trouver  $u_{h,\varepsilon} \in V_h$  tel que pour tout  $v_h \in V_{h,0}$ ,

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_{K,\varepsilon}(u_{h,\varepsilon}, v_h) = 0. \quad (2.2)$$

**Théorème 2.6** *le problème [QR<sub>h</sub>] admet une unique solution  $u_{h,\varepsilon}$ .*

Preuve : montrons qu'il existe au plus une solution. Supposons qu'il existe  $u_1$  et  $u_2$  solution du problème [QR<sub>h</sub>]. Alors  $u_1 - u_2 \in V_{h,0}$ , et on a :

$$\forall v_h \in V_{h,0}, \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_{K,\varepsilon}(u_1 - u_2, v_h) = 0$$

En prenant  $v_h = u_1 - u_2$ , on obtient que  $\|u_1 - u_2\|_{H^2(K)} = 0$  pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ , ce qui implique  $u_1 = u_2$  sur  $K$ , et finalement  $u_1 = u_2$  dans  $\Omega$ .

Mettons maintenant en évidence l'existence d'une solution. Soit  $\tilde{u}_h$  une fonction quelconque de  $V_h$ . Notons alors  $w_{h,\varepsilon} = u_{h,\varepsilon} - \tilde{u}_h$ . On a alors  $w_{h,\varepsilon} \in V_{h,0}$ , et  $w_{h,\varepsilon}$  solution du problème : trouver une fonction  $w_h \in V_{h,0}$  telle que pour toute fonction  $v_h \in V_{h,0}$ ,

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_{K,\varepsilon}(w_h, v_h) = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_{K,\varepsilon}(\tilde{u}_h, v_h)$$

C'est un problème carré en dimension finie, l'unicité de la solution implique l'existence de celle-ci. Or, l'unicité de la solution (second membre nul  $\Rightarrow$  solution nulle) a été montrée précédemment. Il existe donc bien une solution unique à notre problème. ■



### 2.2.3 Convergence de la méthode éléments finis

On veut maintenant s'assurer de la convergence de  $u_{\varepsilon,h}$  solution du problème  $[\text{QR}_h]$  vers  $u_\varepsilon$  solution du problème  $[\text{QR}]$  lorsque  $h$  tend vers 0, et obtenir une estimation de la vitesse de convergence. Il faut noter ici que l'on ne saurait avoir une convergence en norme  $H^2$ , norme naturelle du problème  $[\text{QR}]$ , puisque  $W_h \not\subset H^2(\Omega)$ . La convergence que nous allons obtenir sera une sorte de convergence  $H^2$  par triangle, ce qui est classique pour des éléments finis non conformes. Plus précisément, nous allons obtenir un résultat de convergence dans la norme

$$\|\cdot\|_h := \sqrt{\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\cdot\|_{H^2(T)}^2}.$$

On va avoir besoin du lemme suivant :

**Lemme 2.2** *Pour un domaine polygonal  $\omega$ , pour tout  $u \in H^4(\omega)$ , pour tout  $v \in H^2(\omega)$ , on a :*

$$\begin{aligned} (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\omega)} + \varepsilon(u, v)_{H^2(\omega)} &= \int_{\omega} \left( (1 + \varepsilon) \Delta^2 u - \varepsilon \Delta u + \varepsilon u \right) v dx \\ &- \int_{\partial\omega} \left( (1 + \varepsilon) \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + \varepsilon L_2(u) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) v d\sigma + \int_{\partial\omega} \left( (1 + \varepsilon) \Delta u + \varepsilon L_1(u) \right) \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma. \end{aligned}$$

avec, en notant  $x = (x_1, x_2)$ ,  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  le vecteur normal sortant et  $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$  le vecteur tangent à  $\partial\omega$ ,

$$\begin{aligned} L_1(u) &= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \nu_1 \nu_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \nu_2^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \nu_1^2 \\ L_2(u) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} (\nu_1^2 - \nu_2^2) + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) \nu_1 \nu_2 \right) \end{aligned}$$

Preuve : par définition, on a :

$$(u, v)_{H^2(\omega)} = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} dx + \int_{\omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx.$$

Un calcul rapide nous donne la relation suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} dx - (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\omega)} &= \int_{\partial\omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \left[ \frac{\partial v}{\partial x_2} \nu_1 + \frac{\partial v}{\partial x_1} \nu_2 \right] d\sigma \\ &- \int_{\partial\omega} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \nu_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial v}{\partial x_1} \nu_1 \right] d\sigma. \end{aligned} \quad (2.3)$$

On a  $\frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial x_1} \nu_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} \nu_2$  et  $\frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{\partial v}{\partial x_1} \nu_2 + \frac{\partial v}{\partial x_2} \nu_1$  d'où l'on déduit  $\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial \nu} \nu_1 - \frac{\partial v}{\partial \tau} \nu_2$  et  $\frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial \nu} \nu_2 + \frac{\partial v}{\partial \tau} \nu_1$ . En injectant ce résultat dans (2.3), on obtient :

$$\sum_{i,j=1}^2 \int_{\omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} dx - (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\omega)} = \int_{\partial\omega} \left( L_1(u) \frac{\partial v}{\partial \nu} - L_2(u) v \right) d\sigma.$$

Une fois ce résultat obtenu, la suite de la démonstration se fait sans difficulté. ■

*Remarque* : en supposant  $u_\varepsilon \in H^4(\Omega)$ , en utilisant ce lemme avec  $\omega = \Omega$  et  $u = u_\varepsilon$ , et en faisant varier  $v$  dans  $V_0$ , on obtient sans difficulté que  $u_\varepsilon$  vérifie le problème fort :

$$\star \begin{cases} (1 + \varepsilon)\Delta^2 u_\varepsilon - \varepsilon\Delta u_\varepsilon + \varepsilon u_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega \\ (1 + \varepsilon)\frac{\partial \Delta u_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon L_2(u_\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_c \\ (1 + \varepsilon)\Delta u_\varepsilon + \varepsilon L_1(u_\varepsilon) = 0 & \text{sur } \Gamma_c \\ u_\varepsilon = g_0 & \text{sur } \Gamma \\ \partial_\nu u_\varepsilon = g_1 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

On voit alors que si on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient formellement 
$$\begin{cases} \Delta^2 u_0 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \Delta u_0}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_c \\ \Delta u_0 = 0 & \text{sur } \Gamma_c \\ u_0 = g_0 & \text{sur } \Gamma \\ \partial_\nu u_0 = g_1 & \text{sur } \Gamma \end{cases}, \text{ système}$$

d'équations qui est bien vérifié par la solution du problème [Cauchy] : en effet, comme  $\Delta u = 0$  dans  $\Omega$ , on a bien  $\Delta^2 u = 0$  dans  $\Omega$ , et  $\Delta u = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} = 0$  sur  $\Gamma_c$ .

Soient deux triangles  $K_1$  et  $K_2$  de  $\mathcal{T}_h$  ayant une arête  $e$  en commun, et  $w_h \in W_h$ . Soit  $\nu_{K_1}$  (resp.  $\nu_{K_2}$ ) la normale sortante à  $K_1$  (resp.  $K_2$ ) à travers  $e$ . On définit la normale  $\nu$  à  $e$  en choisissant arbitrairement  $\nu_{K_1}$  ou  $\nu_{K_2}$ . On définit alors le saut de  $w_h$  à travers  $e$ , noté  $[w_h]_e$  comme suit :

$$[w_h]_e = w_h|_{K_1} \nu_{K_1} \cdot \nu + w_h|_{K_2} \nu_{K_2} \cdot \nu$$

et le saut de dérivée normale de  $w_h$  à travers  $e$ , noté  $\left[\frac{\partial w_h}{\partial \nu}\right]_e$

$$\left[\frac{\partial w_h}{\partial \nu}\right]_e = \frac{\partial w_h|_{K_1}}{\partial \nu_{K_1}} + \frac{\partial w_h|_{K_2}}{\partial \nu_{K_2}},$$

cette définition n'étant en fait qu'une conséquence de la définition du saut d'une fonction à travers l'arête  $e$ . On étend cette définition pour une arête  $e_\Gamma$  d'un triangle  $K$  située sur  $\Gamma$  en posant :

$$[w_h]_{e_\Gamma} = w_h|_K, \left[\frac{\partial w_h}{\partial \nu}\right]_{e_\Gamma} = \frac{\partial w_h|_K}{\partial \nu_K}.$$

**Propriété 2.12** Soit  $u_\varepsilon$  la solution du problème [QR], et  $u_{h,\varepsilon}$  celle du problème [QR $_h$ ]. On suppose que  $u_\varepsilon \in H^4(\Omega)$ , et  $\varepsilon \leq 1$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_{h,\varepsilon}\|_h &\leq \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{\varepsilon}} \inf_{v_h \in V_h} \|u_\varepsilon - v_h\|_h + \frac{1}{\varepsilon} \sup_{w_h \in V_{h,0}} \frac{|F_1(w_h)|}{\|w_h\|_h} + \sup_{w_h \in V_{h,0}} \frac{|G_1(w_h)|}{\|w_h\|_h} \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \sup_{w_h \in V_{h,0}} \frac{|F_2(w_h)|}{\|w_h\|_h} + \sup_{w_h \in V_{h,0}} \frac{|G_2(w_h)|}{\|w_h\|_h} \end{aligned} \quad (2.4)$$

avec pour  $w_h \in V_{h,0}$ ,

$$F_1(w_h) = - \sum_{e \in \mathcal{S}_h} \int_e \Delta u_\varepsilon \left[\frac{\partial w_h}{\partial \nu}\right]_e d\sigma \quad (2.5)$$

$$G_1(w_h) = - \sum_{e \in \mathcal{S}_h} \int_e (\Delta u_\varepsilon + L_1(u_\varepsilon)) \left[\frac{\partial w_h}{\partial \nu}\right]_e d\sigma \quad (2.6)$$

$$F_2(w_h) = \sum_{e \in \mathcal{S}_h} \int_e \frac{\partial \Delta u_\varepsilon}{\partial \nu} [w_h]_e d\sigma \quad (2.7)$$

$$G_2(w_h) = \sum_{e \in \mathcal{S}_h} \int_e \left( \frac{\partial \Delta u_\varepsilon}{\partial \nu} + L_2(u_\varepsilon) - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \right) [w_h]_e d\sigma \quad (2.8)$$

Ici,  $S_h$  denote l'ensemble des arêtes des triangles  $K \in \mathcal{T}_h$ , sauf celles qui appartiennent à  $\overline{\Gamma}_c$ , et  $\|\cdot\|_h^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\cdot\|_{H^2(K)}^2$

**Preuve** : tout d'abord, on utilise le lemme 2.2 avec  $\omega = K \in \mathcal{T}_h$ ,  $u = u_\varepsilon$  et  $v = w_h$ , et on obtient (en utilisant le système ★ p.37), pour tout  $w_h \in V_{h,0}$  :

$$a_{K,\varepsilon}(u_\varepsilon, w_h) = - \int_{\partial K} I_2^\varepsilon(u_\varepsilon) w_h d\sigma + \int_{\partial K} I_1^\varepsilon(u_\varepsilon) \frac{\partial w_h}{\partial \nu_K} d\sigma,$$

avec  $I_1^\varepsilon(u) = (1 + \varepsilon)\Delta u + \varepsilon L_1(u)$  et  $I_2^\varepsilon(u) = (1 + \varepsilon) \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu_K} + \varepsilon L_2(u) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \nu_K}$ , et  $\nu_K$  la normale sortante à  $K$ .

En sommant sur tous les triangles de  $\mathcal{T}_h$ , on obtient :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_{K,\varepsilon}(u_\varepsilon, w_h) = - \sum_{e \in \mathcal{S}_h} \int_e I_2^\varepsilon(u_\varepsilon) [w_h]_e d\sigma + \sum_{e \in \mathcal{S}_h} \int_e I_1^\varepsilon(u_\varepsilon) \left[ \frac{\partial w_h}{\partial \nu} \right]_e d\sigma.$$

Comme  $u_{h,\varepsilon}$  est solution du problème  $[\text{QR}_h]$ , on a, pour tout  $w_h \in V_{h,0}$  :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_{K,\varepsilon}(u_{h,\varepsilon}, w_h) = 0.$$

On en déduit que pour tout  $w_h \in V_{h,0}$ , on a :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_{K,\varepsilon}(u_{h,\varepsilon}, w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_{K,\varepsilon}(u_\varepsilon, w_h) + F_1(w_h) + \varepsilon G_1(w_h) + F_2(w_h) + \varepsilon G_2(w_h).$$

Pour  $v_h \in V_h$ , on soustrait  $\sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_{K,\varepsilon}(v_h, w_h)$  aux deux termes de cette égalité, pour finalement obtenir que pour tout  $v_h \in V_h$ , pour tout  $w_h \in V_{h,0}$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_{K,\varepsilon}(u_{h,\varepsilon} - v_h, w_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_{K,\varepsilon}(u_\varepsilon - v_h, w_h) + F_1(w_h) + \varepsilon G_1(w_h) \\ &+ F_2(w_h) + \varepsilon G_2(w_h) \end{aligned}$$

On remarque alors que pour tout  $v_h \in V_h$ ,  $u_{h,\varepsilon} - v_h \in V_{h,0}$ , ce qui permet d'écrire que pour tout  $v_h \in V_h$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_{K,\varepsilon}(u_{h,\varepsilon} - v_h, u_{h,\varepsilon} - v_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_{K,\varepsilon}(u_\varepsilon - v_h, u_{h,\varepsilon} - v_h) + F_1(u_{h,\varepsilon} - v_h) \\ &+ \varepsilon G_1(u_{h,\varepsilon} - v_h) + F_2(u_{h,\varepsilon} - v_h) + \varepsilon G_2(u_{h,\varepsilon} - v_h) \end{aligned}$$

Notons alors  $\|\cdot\|_{h,\varepsilon}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_{K,\varepsilon}(\cdot, \cdot)$ . En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient, pour tout  $v_h \in V_h$  :

$$\begin{aligned} \|u_{h,\varepsilon} - v_h\|_{h,\varepsilon}^2 &\leq \|u_{h,\varepsilon} - v_h\|_{h,\varepsilon} \|u_\varepsilon - v_h\|_{h,\varepsilon} + |F_1(u_{h,\varepsilon} - v_h)| \\ &+ \varepsilon |G_1(u_{h,\varepsilon} - v_h)| + |F_2(u_{h,\varepsilon} - v_h)| + \varepsilon |G_2(u_{h,\varepsilon} - v_h)| \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \|u_{h,\varepsilon} - v_h\|_{h,\varepsilon} &\leq \|u_\varepsilon - v_h\|_{h,\varepsilon} + \frac{|F_1(u_{h,\varepsilon} - v_h)|}{\|u_{h,\varepsilon} - v_h\|_{h,\varepsilon}} \\ &+ \varepsilon \frac{|G_1(u_{h,\varepsilon} - v_h)|}{\|u_{h,\varepsilon} - v_h\|_{h,\varepsilon}} + \frac{|F_2(u_{h,\varepsilon} - v_h)|}{\|u_{h,\varepsilon} - v_h\|_{h,\varepsilon}} + \varepsilon \frac{|G_2(u_{h,\varepsilon} - v_h)|}{\|u_{h,\varepsilon} - v_h\|_{h,\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Remarquons alors que l'on a les inégalités suivantes :

$$\|w\|_{h,\varepsilon}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \|\Delta w\|_{L^2(K)}^2 + \varepsilon \|w\|_{H^2(K)}^2 \right] \geq \varepsilon \|w\|_h^2$$

et

$$\|\Delta w\|_{L^2(K)}^2 \leq 2 \int_K \left[ \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right|^2 \right] dx \leq 2 \|w\|_{H^2(K)}^2 \Rightarrow \|w\|_{h,\varepsilon} \leq \sqrt{2 + \varepsilon} \|w\|_h^2$$

On en déduit que pour tout  $v_h \in V_h$ , on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon} \|u_{h,\varepsilon} - v_h\|_h &\leq \sqrt{2 + \varepsilon} \|u_\varepsilon - v_h\|_h + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{|F_1(u_{h,\varepsilon} - v_h)|}{\|u_{h,\varepsilon} - v_h\|_h} + \sqrt{\varepsilon} \frac{|G_1(u_{h,\varepsilon} - v_h)|}{\|u_{h,\varepsilon} - v_h\|_h} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{|F_2(u_{h,\varepsilon} - v_h)|}{\|u_{h,\varepsilon} - v_h\|_h} + \sqrt{\varepsilon} \frac{|G_2(u_{h,\varepsilon} - v_h)|}{\|u_{h,\varepsilon} - v_h\|_h} \\ &\leq \sqrt{3} \|u_\varepsilon - v_h\|_h + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sup_{w_h \in V_{h,0}} \frac{|F_1(w_h)|}{\|w_h\|_h} + \sqrt{\varepsilon} \sup_{w_h \in V_{h,0}} \frac{|G_1(w_h)|}{\|w_h\|_h} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sup_{w_h \in V_{h,0}} \frac{|F_2(w_h)|}{\|w_h\|_h} + \sqrt{\varepsilon} \sup_{w_h \in V_{h,0}} \frac{|G_2(w_h)|}{\|w_h\|_h} \end{aligned}$$

puisque  $u_{h,\varepsilon} - v_h \in V_{h,0}$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \|u_{h,\varepsilon} - v_h\|_h &\leq \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}} \inf_{v_h \in V_h} \|u_\varepsilon - v_h\|_h + \frac{1}{\varepsilon} \sup_{w_h \in V_{h,0}} \frac{|F_1(w_h)|}{\|w_h\|_h} + \sup_{w_h \in V_{h,0}} \frac{|G_1(w_h)|}{\|w_h\|_h} \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \sup_{w_h \in V_{h,0}} \frac{|F_2(w_h)|}{\|w_h\|_h} + \sup_{w_h \in V_{h,0}} \frac{|G_2(w_h)|}{\|w_h\|_h} \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant le fait que  $\|u_\varepsilon - u_{h,\varepsilon}\|_h \leq \|u_\varepsilon - v_h\|_h + \|u_{h,\varepsilon} - v_h\|_h$ , on obtient (2.4). ■

**Lemme 2.3** *Pour un domaine polygonal  $\omega$ , si  $k$  et  $l$  sont deux entiers et  $U$  un espace de Hilbert tel que  $P_l(\omega) \subset U \subset H^{l+1}(\omega)$  ( $U$  est équipé de la norme  $\|\cdot\|_{H^l(\omega)}$ ). On suppose que  $B : H^{k+1}(\omega) \times U \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme bilinéaire continue qui satisfait :*

$$B(u, v) = 0, \quad \forall u \in P_k(\omega), \quad \forall v \in U$$

$$B(u, v) = 0, \quad \forall u \in H^{k+1}(\omega), \quad \forall v \in P_l(\omega).$$

Alors il existe une constante  $c$  ne dépendant que de  $\omega$ , telle que

$$|B(u, v)| \leq c \|B\| \|u\|_{H^{k+1}(\omega)} \|v\|_{H^{l+1}(\omega)}$$

où  $\|\cdot\|_{H^m(\omega)}$  est la semi-norme dans  $H^m(\omega)$ .

Preuve : voir le théorème 4.2.5 p.218 de [Cia78]. ■

**Théorème 2.7** *Soit  $u_\varepsilon$  la solution du problème [QR], et  $u_{h,\varepsilon}$  celle du problème [QR<sub>h</sub>]. On suppose  $u_\varepsilon \in H^4(\Omega)$  et  $\varepsilon \leq 1$ . On a l'estimation d'erreur suivante :*

$$\boxed{\|u_\varepsilon - u_{h,\varepsilon}\|_h \leq h \left( \frac{c_1}{\sqrt{\varepsilon}} \|u_\varepsilon\|_{H^3(\Omega)} + \frac{c_2}{\varepsilon} \|\Delta u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} + c_3 \|u_\varepsilon\|_{H^4(\Omega)} \right)} \quad (2.9)$$

où  $c_1, c_2$  et  $c_3$  sont des constantes indépendantes de  $h$  et  $\varepsilon$ .

Preuve : on part de l'inégalité (2.4).

Intéressons-nous tout d'abord au terme  $\inf_{v_h \in V_h} \|u_\varepsilon - v_h\|_h$ . On définit alors la projetée de  $u_\varepsilon$  sur  $V_h$   $\pi_h(u_\varepsilon)$  tel que, pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ , on ait :

$$\pi_h(u_\varepsilon)|_K = \sum_{i=1}^3 u_\varepsilon(A_i) s_i + u_\varepsilon(M_i) m_i + \left( \frac{1}{|e_i|} \int_{e_i} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \right) (\nu \cdot \nu_K) d_i.$$

On voit directement que  $\pi_h(u_\varepsilon) \in V_h$ , et donc :

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u_\varepsilon - v_h\|_h \leq \|u_\varepsilon - \pi_h(u_\varepsilon)\|_h.$$

On déduit alors directement de (2.1) que :

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u_\varepsilon - v_h\|_h \leq ch|u_\varepsilon|_{H^3(\Omega)}.$$

Passons au terme  $\sup_{w_h \in V_{h,0}} \frac{|F_1(w_h)|}{\|w_h\|_h}$ . On a pour  $w_h \in V_{h,0}$

$$F_1(w_h) = - \sum_{e \in \mathcal{S}_h} \int_e \Delta u_\varepsilon \left[ \frac{\partial w_h}{\partial \nu} \right]_e$$

On va s'intéresser tout d'abord au cas  $e \notin \bar{\Gamma}_0$ . Pour une fonction de  $L^2(e)$ , on définit l'opérateur  $\pi_0$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \pi_0 : L^2(e) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \frac{1}{|e|} \int_e g \, d\sigma \end{aligned}$$

Par définition de nos éléments finis, on a  $\pi_0\left[\left[\frac{\partial w_h}{\partial \nu}\right]_e\right] = 0$ ,  $\forall w_h \in V_{h,0}$ , et on remarque facilement que  $\pi_0\left[\left[\frac{\partial w_h}{\partial \nu}\right]_e\right] = \left[\pi_0\left(\frac{\partial w_h}{\partial \nu}\right)\right]_e$ . On remarque également facilement que  $\int_e \left[\frac{\partial w_h}{\partial \nu} - \pi_0\left(\frac{\partial w_h}{\partial \nu}\right)\right]_e \, d\sigma = 0$ . De tout ceci on déduit que :

$$\forall w_h \in V_{h,0}, \forall e \in \mathcal{S}_h, \int_e \Delta u_\varepsilon \left[ \frac{\partial w_h}{\partial \nu} \right]_e \, d\sigma = \int_e (\Delta u_\varepsilon - \pi_0(\Delta u_\varepsilon)) \left[ \frac{\partial w_h}{\partial \nu} - \pi_0\left(\frac{\partial w_h}{\partial \nu}\right) \right]_e \, d\sigma$$

On est amené à s'intéresser à la forme bilinéaire définie sur  $H^1(\widehat{K}) \times P_2(\widehat{K})^{24}$ , par :

$$B(\widehat{u}, \widehat{p}) = \int_{\widehat{e}} (\widehat{e} - \widehat{\pi}_0(\widehat{u})) (\widehat{p} - \widehat{\pi}_0(\widehat{p})) \, d\widehat{\sigma}$$

$B$  satisfait les hypothèses du lemme (2.3) avec  $\omega = \widehat{K}$ ,  $U = P_2(\widehat{K})$ , et  $k = l = 0$ . On en déduit l'existence d'une constante  $\widehat{c}$  telle que

$$B(\widehat{u}, \widehat{v}) \leq \widehat{c} |\widehat{u}|_{H^1(\widehat{K})} |\widehat{v}|_{H^1(\widehat{K})}.$$

Soit  $K_1$  et  $K_2$  les deux triangles partageant l'arête  $e$ . En allant de ces deux triangles au triangle de base  $\widehat{K}$ , puis en revenant à ces triangles, on obtient :

$$\left| \int_e \Delta u_\varepsilon \left[ \frac{\partial w_h}{\partial \nu} \right]_e \, d\sigma \right| \leq \widehat{c} h (|\Delta u_\varepsilon|_{H^1(K_1)} |w_h|_{H^2(K_1)} + |\Delta u_\varepsilon|_{H^1(K_2)} |w_h|_{H^2(K_2)})$$

Si on considère maintenant une arête  $e \in \Gamma_0$ , et  $K$  le triangle qui la contient, on obtient de la même manière :

$$\left| \int_e \Delta u_\varepsilon \left[ \frac{\partial w_h}{\partial \nu} \right]_e \, d\sigma \right| \leq \widehat{c} h |\Delta u_\varepsilon|_{H^1(K)} |w_h|_{H^2(K)}$$

On obtient alors, pour tout  $w_h \in V_{h,0}$  :

$$\begin{aligned} |F_1(w_h)| &\leq \widehat{c} h \sum_{e \in \mathcal{S}_h, e \in \Gamma_0} |\Delta u_\varepsilon|_{H^1(K)} |w_h|_{H^2(K)} + \\ &\quad \widehat{c} h \sum_{e \in \mathcal{S}_h, e \notin \Gamma_0} (|\Delta u_\varepsilon|_{H^1(K_1)} |w_h|_{H^2(K_1)} + |\Delta u_\varepsilon|_{H^1(K_2)} |w_h|_{H^2(K_2)}) \\ &\leq 3\widehat{c} h \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\Delta u_\varepsilon|_{H^1(K)} |w_h|_{H^2(K)}. \end{aligned}$$

On utilise alors Cauchy-Schwarz pour obtenir :

$$|F_1(w_h)| \leq 3\widehat{c} h |\Delta u_\varepsilon|_{H^1(\Omega)} \|w_h\|_h$$

<sup>24</sup>  $\widehat{K}$  est le triangle de référence, dont les sommets ont pour coordonnées  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  et  $(1,0)$

ce qui implique

$$\sup_{w_h \in V_{h,0}} \frac{|F_1(w_h)|}{\|w_h\|_h} \leq Ch |\Delta u_\varepsilon|_{H^1(\Omega)}$$

avec une constante  $C$  ne dépendant ni de  $h$ , ni de  $\varepsilon$ . On prouve exactement de la même manière :

$$\sup_{w_h \in V_{h,0}} \frac{|G_1(w_h)|}{\|w_h\|_h} \leq C'h |u_\varepsilon|_{H^3(\Omega)}.$$

Posons maintenant  $f = \frac{\partial \Delta u_\varepsilon}{\partial \nu}$ . On a alors, pour tout  $w_h \in V_{h,0}$ ,

$$F_2(w_h) = \sum_{e \in S_h} \int_e f [w_h]_e d\sigma.$$

On définit alors, pour  $K \in \mathcal{T}_h$ , l'opérateur  $\pi_1$  comme suit :

$$\begin{aligned} \pi_1 : P_K &\longrightarrow P_1(K) \\ p &\longmapsto \sum_{i=1}^3 p(A_i) \lambda_i. \end{aligned}$$

Par définition, pour une arête  $e \in S_h$ ,  $[\pi_1(w_h)]_e = 0$ . On a donc :

$$\int_e f [w_h]_e d\sigma = \int_e f [w_h - \pi_1(w_h)]_e d\sigma.$$

Si on transporte cette intégrale dans le triangle de base  $\widehat{K}$ , on est amené à s'intéresser à la forme bilinéaire suivante :

$$\check{B}(\widehat{f}, \widehat{w}_h) = \int_{\widehat{e}} \widehat{f} (\widehat{w}_h - \widehat{\pi}_1(\widehat{w}_h)) d\widehat{\sigma}.$$

En utilisant une inégalité classique de trace, ainsi que l'estimation d'erreur classique de l'interpolation  $P_1$ , on obtient :

$$\check{B}(\widehat{f}, \widehat{w}_h) \leq C \|\widehat{f}\|_{H^1(\widehat{K})} \|\widehat{w}_h - \widehat{\pi}_1(\widehat{w}_h)\|_{H^1(K)} \leq \check{C} \|\widehat{f}\|_{H^1(K)} |\widehat{w}_h|_{H^2(K)}.$$

Si  $e = K_1 \cap K_2$ , avec  $K_i \in \mathcal{T}_h$ , on obtient finalement l'existence d'une constante  $c$  ne dépendant ni de  $h$ , ni de  $\varepsilon$ , telle que

$$\int_e f [w_h]_e d\sigma \leq ch (\|f\|_{H^1(K_1)} |w_h|_{H^2(K_1)} + \|f\|_{H^1(K_2)} |w_h|_{H^2(K_2)})$$

Si  $e \in \overline{\Gamma}_0$ , on obtient :

$$\int_e f [w_h]_e d\sigma \leq ch \|f\|_{H^1(K)} |w_h|_{H^2(K)}$$

On obtient finalement l'estimation suivante :

$$\sup_{w_h \in V_{h,0}} \frac{|F_2(w_h)|}{\|w_h\|_h} \leq ch \|\Delta u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)}$$

et exactement de la même manière :

$$\sup_{w_h \in V_{h,0}} \frac{|G_2(w_h)|}{\|w_h\|_h} \leq ch \|u_\varepsilon\|_{H^4(\Omega)}.$$

L'inégalité (2.9) est alors immédiate. ■

Les éléments finis FV1 nous assurent une convergence en  $h$  en norme  $\|\cdot\|_h$  de  $u_{h,\varepsilon}$  vers  $u_\varepsilon$ . Remarquons au passage la présence de  $\varepsilon$ , paramètre de régularisation de la méthode de quasi-réversibilité, au dénominateur dans l'estimation de convergence, ce qui est caractéristique du fait que la méthode [QR] régularise un problème mal posé. Ceci signifie qu'il nous faudra choisir  $h$  en fonction de  $\varepsilon$ , et plus précisément que plus on choisit un  $\varepsilon$  petit, plus il faut prendre un pas de maillage petit pour être sûr d'avoir une bonne approximation de  $u_\varepsilon$ .

### 2.2.4 Calcul des matrices élémentaires

Rappelons le problème que nous voulons résoudre :

Problème [QR<sub>h</sub>] : pour  $\varepsilon > 0$ , trouver  $u_{h,\varepsilon} \in V_h$  tel que pour tout  $v_h \in V_{h,0}$ ,

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_{K,\varepsilon}(u_{h,\varepsilon}, v_h) = 0.$$

avec

$$a_{K,\varepsilon}(u_h, v_h) = (\Delta u_h, \Delta v_h)_{L^2(K)} + \varepsilon(u_h, v_h)_{H^2(K)}, \quad \forall (u_h, v_h) \in W_h \times W_h.$$

Lorsque l'on décompose les fonctions  $u_h$  et  $v_h$  sur les fonctions de base de l'espace  $W_h$ , on obtient un système linéaire. Il suffit de savoir calculer la matrice de ce système pour résoudre le problème<sup>25</sup>. Pour cela, il suffit de calculer les contributions de chaque triangle du maillage à la matrice.

Soit  $K$  un triangle de la triangulation  $\mathcal{T}_h$ . Pour tout  $u_h \in W_h$ , on a  $u_h|_K \in P_K$ , avec  $P_K := \text{Vect}(s_1, s_2, s_3, m_1, m_2, m_3, d_1, d_2, d_3)$ . On a montré que  $P_2(K) \subset P_K \subset P_3(K)$ . On est donc amené à calculer des intégrales sur  $K$  de polynômes de degrés au plus 6. Pour cela, nous avons utilisé la formule de quadrature suivante<sup>26</sup> :

**Propriété 2.13** *soit  $K_0$  le triangle de sommet  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  et  $(1, 0)$ , et  $p \in P_6(K_0)$ . Alors*

$$\int_{K_0} p(x) dx = \sum_{i,j=1}^4 A_i B_j p(s_j, r_i(1-s_j))$$

avec

$r_1 = 0.0694318422$	$s_1 = 0.0571041961$	$A_1 = 0.1739274226$	$B_1 = 0.1355069134$
$r_2 = 0.3300094782$	$s_2 = 0.2768430136$	$A_2 = 0.3260725774$	$B_2 = 0.2034645680$
$r_3 = 0.6699905218$	$s_3 = 0.5835904324$	$A_3 = 0.3260725774$	$B_3 = 0.1298475476$
$r_4 = 0.9305681558$	$s_4 = 0.8602401357$	$A_4 = 0.1739274226$	$B_4 = 0.0311809709$

Il suffit alors de calculer les dérivées premières et secondes des fonctions de base pour obtenir la matrice du système linéaire. Remarquons que nous obtiendrons au passage la matrice  $M_{W_h}$  correspondant au produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_h$  sur  $W_h$ , c'est-à-dire la matrice telle que pour tout  $(u_h, v_h) \in W_h \times W_h$ , on a

$$(u_h, v_h)_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (u_h, v_h)_{H^2(\Omega)} = \vec{u}_h^T M_{W_h} \vec{v}_h$$

où  $\vec{u}_h$  est le vecteur des composantes de  $u_h$  sur la base de  $W_h$ .

### 2.2.5 Applications numériques

**Vérification des éléments finis : problème de plaque en flexion pure**

Les éléments finis non-conformes F.V.1. ayant été introduits pour résoudre des problèmes de plaques, nous pouvons vérifier notre implémentation numérique de ces éléments en résolvant un problème de plaque encastrée, soit

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \in L^2(\Omega) \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

<sup>25</sup>il faut également savoir l'inverser, mais ce n'est pas un problème, puisqu'elle est symétrique définie positive

<sup>26</sup>voir [Str71], p.314

avec  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ , que nous supposons polygonal. Une formulation faible de ce problème est :

( $\diamond$ ) trouver  $u \in H_0^2(\Omega)$  tel que pour tout  $v \in H_0^2(\Omega)$ , on ait

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Le problème ( $\diamond$ ) admet une unique solution  $u \in H_0^2(\Omega)$ .

La discrétisation de ce problème par éléments finis F.V.1 se fait de la manière suivante : on suppose que l'on a une triangulation régulière de  $\Omega$ , notée  $\mathcal{T}_h$ . On pose, pour  $(v_h, w_h) \in W_h \times W_h$ ,

$$b_h(v_h, w_h) := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \left[ \frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_h}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v_h}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_h}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_h}{\partial y^2} \right] dx.$$

On définit  $W_{h,0} = \{w_h \in W_h \mid \forall e \subset \partial\Omega, w_h(A_1) = w_h(A_2) = w_h(M_3) = [w_h]_3 = 0\}^{27}$ . On se pose alors le problème suivant : trouver  $u_h \in W_{h,0}$  t.q. pour tout  $v_h \in W_{h,0}$ , on ait

$$b_h(u_h, v_h) = (f, v_h)_{L^2(\Omega)}.$$

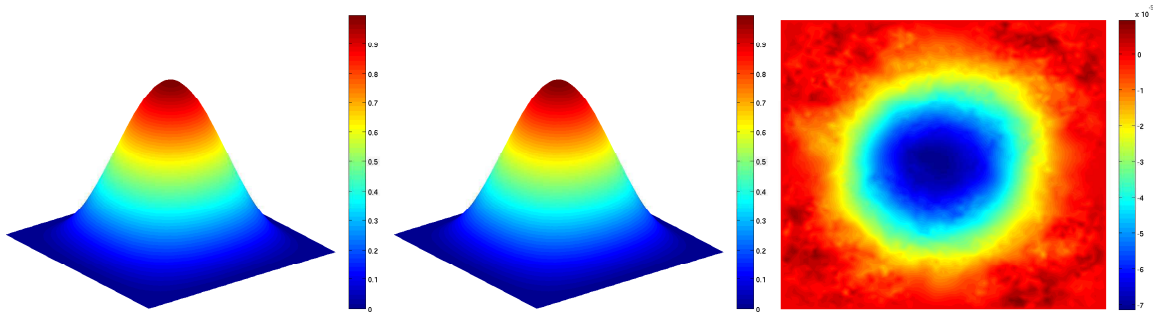
Ce problème admet une unique solution  $u_h$ , qui converge vers  $u$  solution de ( $\diamond$ ) avec les estimations suivantes<sup>28</sup> :

$$\|u_h - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^2, \quad \|u_h - u\|_h \leq C h.$$

Nous allons tester nos éléments finis dans le domaine carré  $\Omega := ]0, 1[ \times ]0, 1[$ , avec

$$f := 8 \pi^4 \left( 3 - 5 (\cos(\pi y))^2 - 5 (\cos(\pi x))^2 + 8 (\cos(\pi x))^2 (\cos(\pi y))^2 \right).$$

La solution de ( $\diamond$ ) est alors  $u := \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2$ .



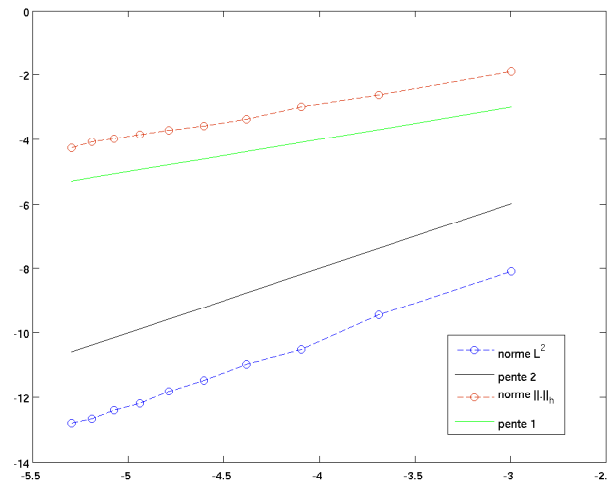
$u$ ,  $u_h$  et  $u - u_h$ , avec  $h = \frac{1}{60}$ . Erreur relative de l'ordre de  $10^{-5}$  en norme  $L^\infty$

Les ordres de convergence sont bien ceux attendus, comme le montre le graphique suivant :

<sup>27</sup> cf p.34 pour la définition de  $W_h$  et les notations

<sup>28</sup> les preuves de toutes ces affirmations se trouvent dans [LL75]



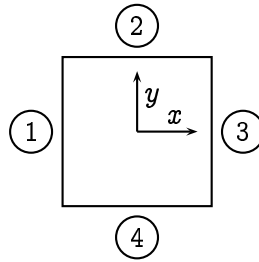


$\ln(\|u - u_h\|)$  fonction de  $\ln(h)$ , pour les normes  $\|\cdot\|_{L^2}$  et  $\|\cdot\|_h$ .

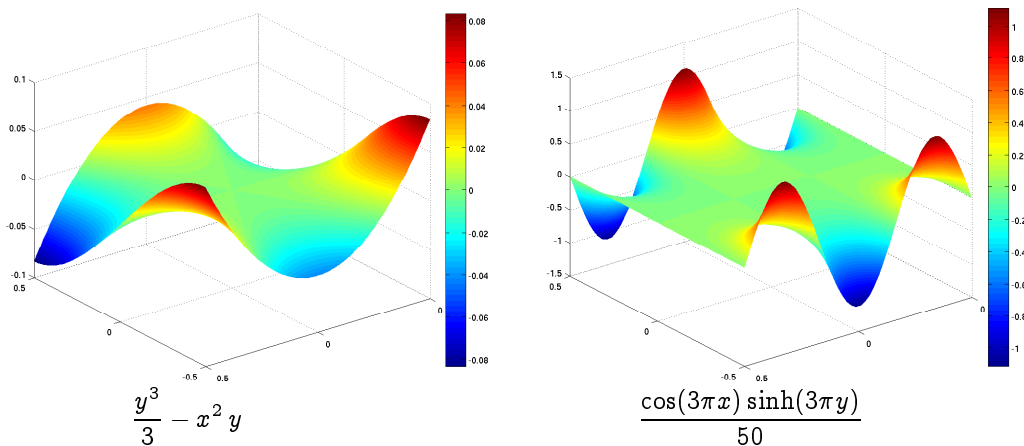
Nous validons ainsi l'implémentation numérique des éléments finis.

### Problème de quasi-réversibilité

On définit le carré  $\Omega := ]-0.5, 0.5[ \times ]-0.5, 0.5[ \subset \mathbb{R}^2$ , et on numérote les côtés de ce carré comme sur la figure :



Nos données proviendront de solutions exactes du problème de Laplace dans  $\mathbb{R}^2$ , plus précisément les fonctions  $u^1 : (x, y) \mapsto \frac{y^3}{3} - x^2 y$  et  $u^2 : (x, y) \mapsto \frac{\cos(3\pi x) \sinh(3\pi y)}{50}$ .



- Choix du paramètre  $\varepsilon$

Notre objectif est de résoudre [Cauchy] dans  $\Omega$ . Pour ce faire, nous résolvons le problème  $[\text{QR}_h]$ , formulation discrète du problème [QR]. La solution  $u_{h,\varepsilon}$  de  $[\text{QR}_h]$  est une approximation de  $u_\varepsilon$  solution de [QR], qui est elle-même une approximation de  $u$  solution de [Cauchy]. Ainsi, en utilisant l'estimation du théorème 2.7, l'inégalité triangulaire et la définition de la norme  $\|\cdot\|_h$ , et si

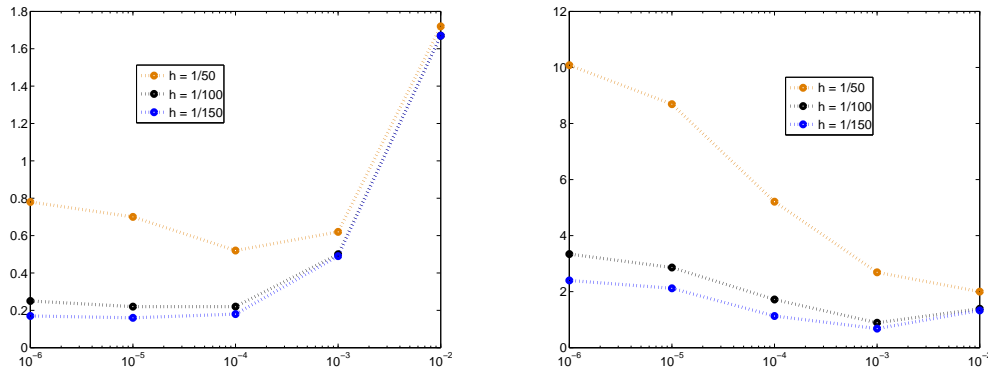
on suppose que  $u_\varepsilon$  est borné uniformément en  $\varepsilon$  dans  $H^4(\Omega)^{29}$ , on obtient facilement l'estimation suivante :

$$\|u_{h,\varepsilon} - u\|_h \leq \|u_\varepsilon - u\|_{H^2(\Omega)} + C \frac{h}{\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$$

où  $C$  est une constante positive indépendante de  $\varepsilon$  et  $h$ . Le théorème 2.5 nous donne

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H^2(\Omega)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Mais on voit que la seconde partie de l'estimation explose lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Autrement dit, si pour le problème continu [QR], il faut théoriquement prendre  $\varepsilon$  le plus petit possible, pour le problème discrétisé [QR<sub>h</sub>], le choix de  $\varepsilon$  doit tenir compte du pas du maillage  $h$ . En particulier, rien ne sert de prendre un  $\varepsilon$  très petit si  $h$  n'est pas lui-même petit. Nous pouvons illustrer cette idée en traçant  $\frac{\|u_{h,\varepsilon} - \pi_h(u)\|_h}{\|\pi_h(u)\|_h}$  fonction de  $\varepsilon$ , pour des pas de maillages  $h$  fixés.

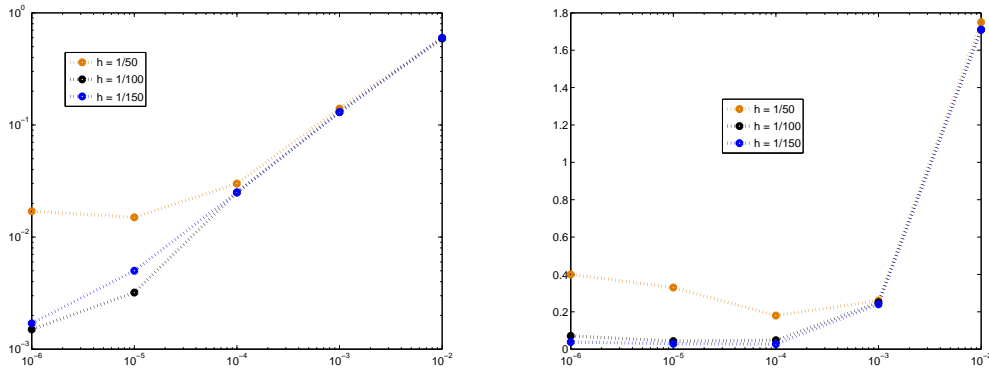


$\frac{\|u_{h,\varepsilon} - \pi_h(u)\|_h}{\|\pi_h(u)\|_h}$  (en pourcentage) fonction de  $\varepsilon$ , données sur les bords 2 et 4.  
 $u^1 = \frac{y^3}{3} - x^2y$  à gauche,  $u^2 = \frac{1}{50} \cos(3\pi x) \sinh(3\pi y)$  à droite.

Quelques commentaires sur ces deux figures : tout d'abord, la fonction polynomiale est mieux retrouvée que la fonction exponentielle. Ceci n'est en rien surprenant, puisque d'une part nos fonctions d'approximation sont polynomiales dans chaque triangle, et d'autre part l'exemple d'Hadamard qui met en évidence le caractère mal posé du problème de [Cauchy] utilise précisément des fonctions de la forme de  $u^2$ . Ensuite, on voit bien que le choix de  $\varepsilon$  ne peut être fait sans se soucier du pas du maillage  $h$ , au risque de détériorer la solution approchée  $u_{h,\varepsilon}$ .

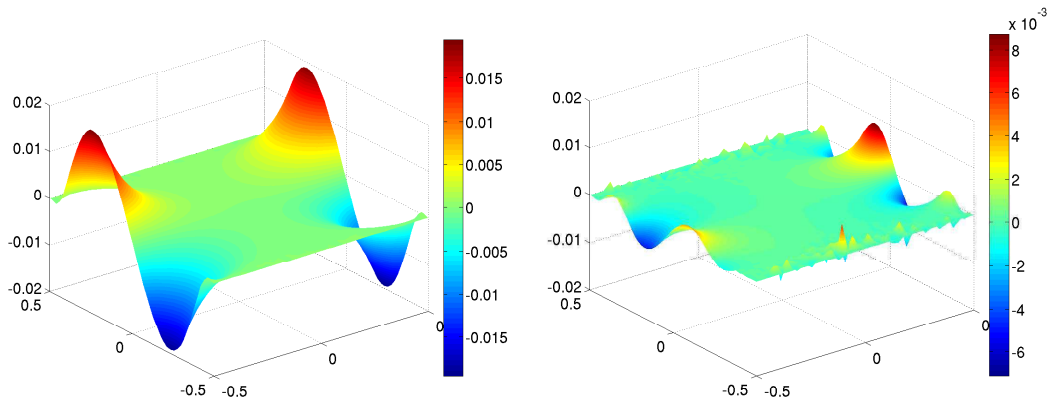
Remarquons que l'erreur relative en norme  $\|\cdot\|_h$  entre  $u_{h,\varepsilon}^2$  et  $u^2$  peut devenir importante (de l'ordre de 10%) si on fait un choix de  $\varepsilon$  trop faible. Ce n'est par contre pas le cas pour l'erreur relative en norme  $L^2$ , comme le montre les figures suivantes :

<sup>29</sup>ce qui est une hypothèse très forte : en effet, nous ne sommes déjà pas sûrs que  $u_\varepsilon$  soit dans  $H^4(\Omega)$ , et si c'est le cas, tout ce que nous savons est que  $u_\varepsilon$  tend vers  $u$  dans  $H^2(\Omega)$



$\frac{\|u_{h,\varepsilon} - \pi_h(u)\|_{L^2(\Omega)}}{\|\pi_h(u)\|_{L^2(\Omega)}}$  (en pourcentage) fonction de  $\varepsilon$ , données sur les bords 2 et 4.  
 $u^1 = \frac{y^3}{3} - x^2y$  à gauche,  $u^2 = \frac{1}{50} \cos(3\pi x) \sinh(3\pi y)$  à droite.

Ce comportement (explosion en norme  $\|\cdot\|_h$  mais pas en norme  $L^2$ ) se comprend mieux en observant  $u_{h,\varepsilon}^2 - u^2$  pour différentes valeurs de  $\varepsilon$  :



$u_{h,\varepsilon}^2 - u^2$  pour  $h = \frac{1}{50}$ ,  $\varepsilon = 10^{-2}$  à gauche,  $\varepsilon = 10^{-6}$  à droite

On constate sur ces figures que la différence entre  $u_{\varepsilon,h}$  et  $u$  est plus faible en norme  $L^\infty$  pour  $\varepsilon = 10^{-6}$  que pour  $\varepsilon = 10^{-2}$ , ce qui explique le comportement de la norme  $L^2$ , mais est aussi plus oscillante pour  $\varepsilon = 10^{-6}$  que pour  $\varepsilon = 10^{-2}$ , ce qui implique une plus grande norme  $\|\cdot\|_h$ , dans laquelle apparaissent les dérivées premières et secondes... Nous n'avons malheureusement pas d'explication théorique de ce phénomène, que nous observons toujours numériquement.

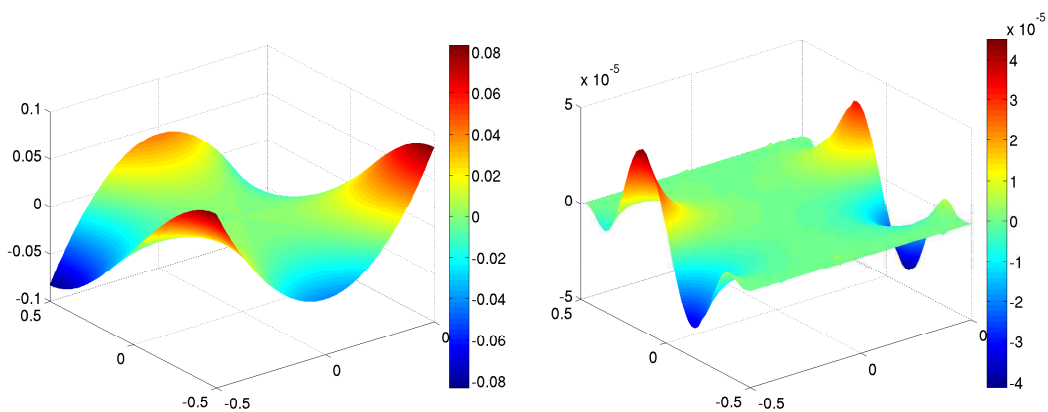
Toutes ces observations nous poussent finalement à choisir  $\varepsilon$  dans l'intervalle  $[10^{-4}, 10^{-3}]$ , compromis entre une bonne approximation en norme  $\|\cdot\|_h$  et une bonne approximation en norme  $L^2$ , pour un pas de maillage  $h$  de  $\frac{1}{50}$ , en nous autorisant à choisir  $\varepsilon$  plus petit si on choisit un pas de maillage plus petit<sup>30</sup>.

#### • Résultats numériques

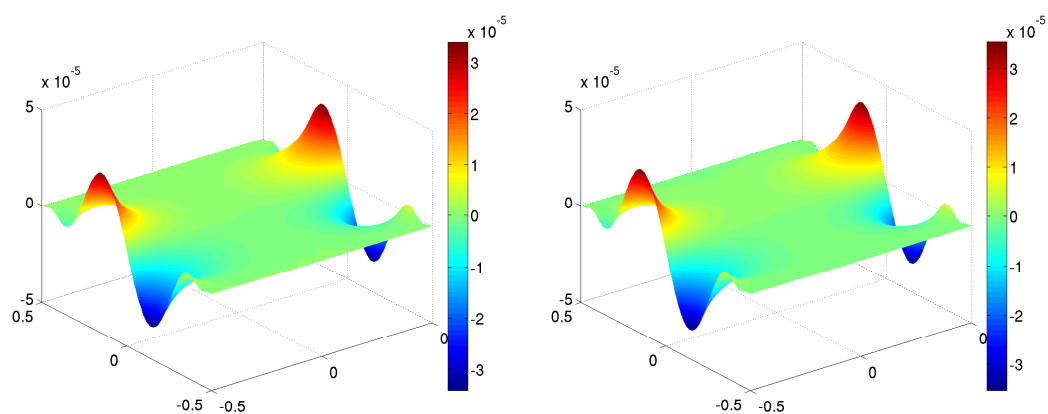
Pour finir ce chapitre, nous présentons quelques résultats de résolution de problème  $[QR_h]$ . Conformément à ce que nous venons de dire, nous avons choisi  $\varepsilon := 10^{-4}$  dans tous les résultats numériques que nous présentons.

Dans ces premières simulations, la donnée est la trace et la trace normale de  $u^1 := \frac{y^3}{3} - 3x^2y$  sur les bords 2 et 4 de  $\Omega$ . On montre l'influence du pas de maillage  $h$  sur la qualité de la solution approchée  $u_{h,\varepsilon}^1$ .

<sup>30</sup>nous sommes ici dans le cas où nous avons des données exactes. Le choix du paramètre  $\varepsilon$  en présence de données bruitées est l'objet du prochain chapitre

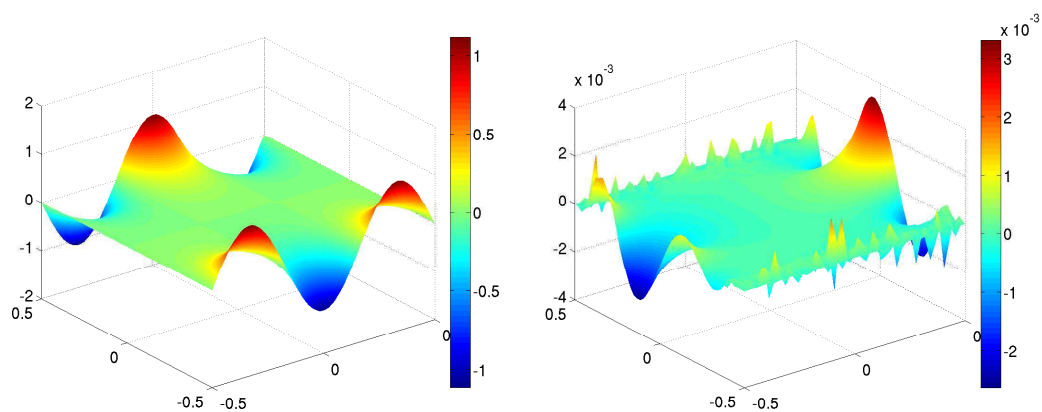


À gauche,  $u_{h,\epsilon}^1$  pour  $h = \frac{1}{100}$ . À droite,  $u_{h,\epsilon}^1 - u^1$  pour  $h = \frac{1}{50}$ .  $\epsilon = 10^{-4}$ . Données sur bord 2 et 4.

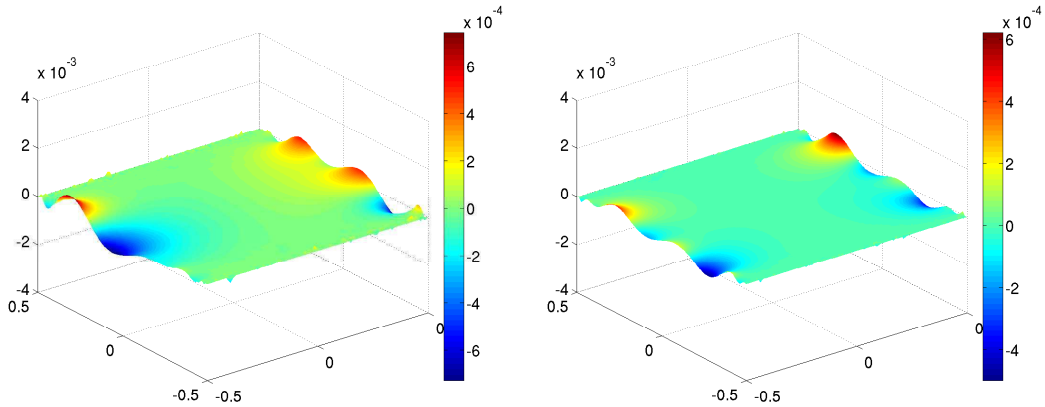


$u_{h,\epsilon}^1 - u^1$ , à gauche pour  $h = \frac{1}{100}$ , à droite pour  $h = \frac{1}{150}$ .  $\epsilon = 10^{-4}$ . Données sur bord 2 et 4.

La donnée du problème est maintenant la trace et la trace normale de  $u^2$  sur les bords 2 et 4.

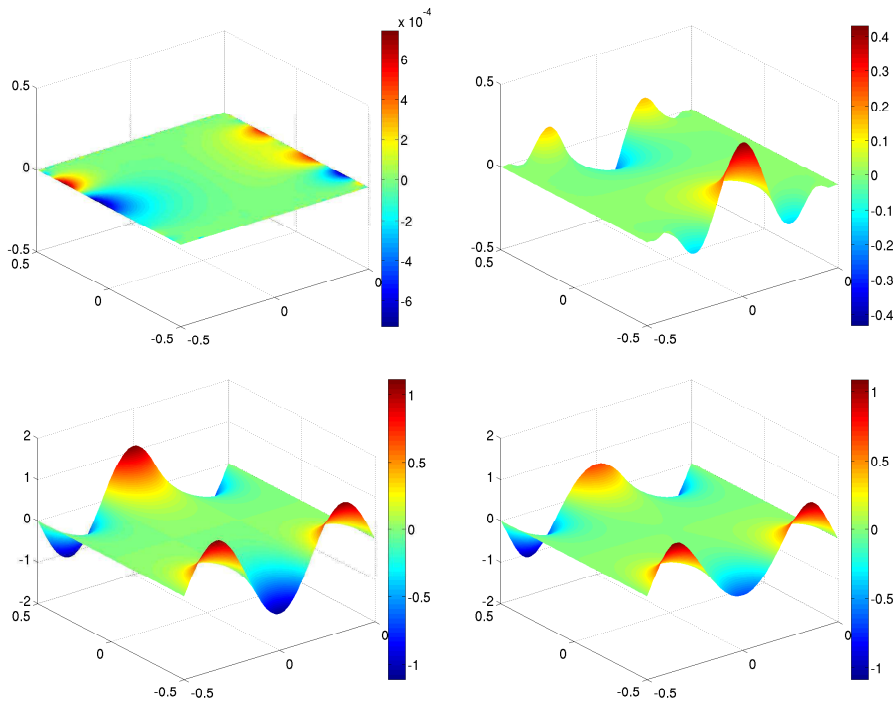


À gauche,  $u_{h,\epsilon}^2$  pour  $h = \frac{1}{100}$ . À droite,  $u_{h,\epsilon}^2 - u^2$  pour  $h = \frac{1}{50}$ .  $\epsilon = 10^{-4}$ . Données sur bord 2 et 4.



$u_{h,\epsilon}^2 - u^2$ , à gauche pour  $h = \frac{1}{100}$ , à droite pour  $h = \frac{1}{150}$ .  $\epsilon = 10^{-4}$ . Données sur bord 2 et 4.

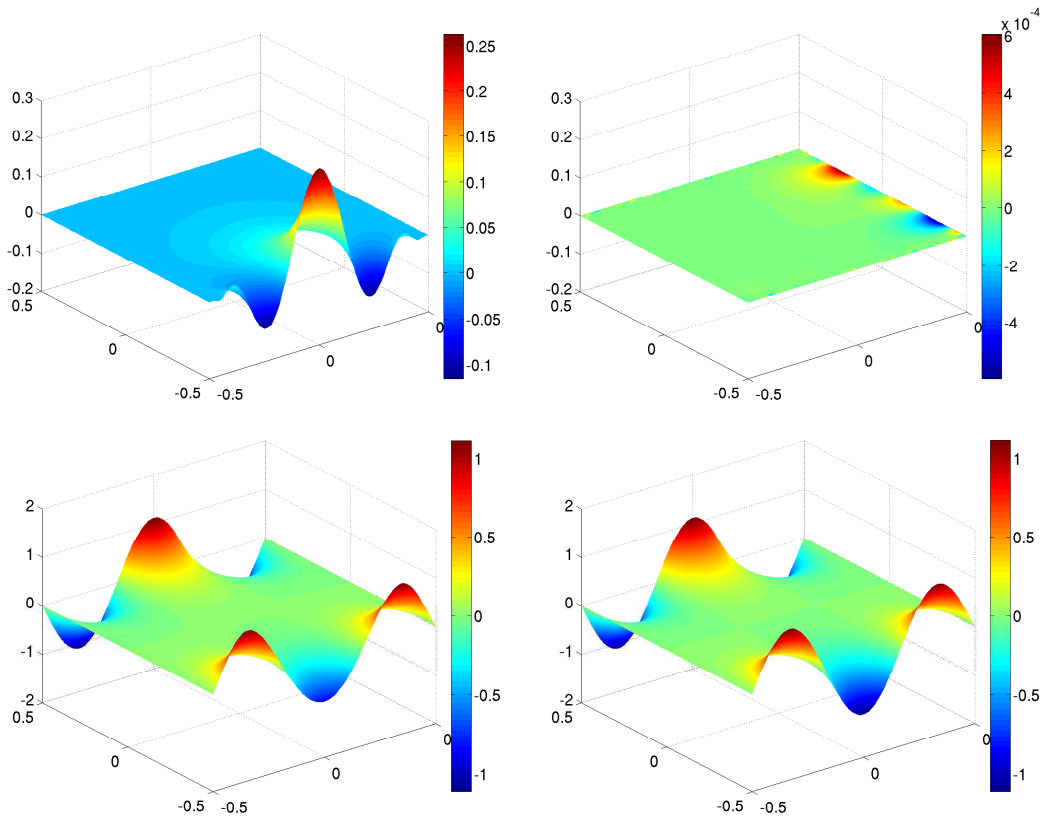
L'influence de la partie du bord où l'on a les données sur la qualité de la reconstruction de la solution de [Cauchy] est un problème complexe. Elle est cachée dans les constantes intervenant dans les estimations de convergence des théorèmes 2.5 et 2.7, et n'est donc pas facilement quantifiable. Elle joue néanmoins un grand rôle dans la qualité de la reconstruction, comme illustré ci-après : on cherche à retrouver  $u^2$ , en changeant la partie du bord où l'on a les données. On se donne tout d'abord la donnée sur deux côtés, puis sur trois côtés. On voit alors très clairement l'influence de  $\Gamma$  sur la qualité de la reconstruction de  $u^2$ . Ainsi, on constate que dans le cas qui nous intéresse ici, il vaut mieux avoir les données sur les bords 2 et 4, que sur les bords 1, 2 et 3, ce qui peut sembler paradoxal à première vue, mais s'explique de la manière suivante : l'information sur les oscillations (la "forme") de  $u^2$  est contenue essentiellement sur les bords 2 et 4, la donnée de Dirichlet  $g_0$  étant nulle sur les bords 1 et 3.



En haut,  $u_{h,\epsilon}^2 - u^2$  : données sur bords 2 et 4 à gauche, données sur bords 1 et 3 à droite.

En bas,  $u_{h,\epsilon}^2 - u^2$  : données sur bords 2 et 4 à gauche, données sur bords 1 et 3 à droite.

$$h = \frac{1}{100}, \epsilon = 10^{-4}.$$



En haut  $u_{h,\varepsilon}^2 - u^2$  : à gauche, données sur bords 1, 2 et 3, à droite, données sur bords 1, 2 et 4.

En bas,  $u_{h,\varepsilon}^2$  : à gauche, données sur bord 1, 2 et 3, à droite, données sur bords 1, 2 et 4.

$$h = \frac{1}{100}. \quad \varepsilon = 10^{-4}.$$



# Chapitre 3

## Prise en compte du bruit

### Introduction

Le caractère mal posé du problème de Cauchy fait de la prise en compte du bruit un problème crucial. En effet, si l'on veut construire une méthode de résolution de ce problème pouvant être utilisée dans des situations "réelles", il faut tenir compte du caractère imprécis des mesures provenant d'appareils de mesure "réels", et donc tenir compte de la problématique des données bruitées. Or des données bruitées, aussi faible que puisse être l'erreur faite, peuvent avoir un impact énorme sur la solution du problème.

Un exemple pour illustrer ce fait : soit  $\Omega := ]0, \pi[ \times ]0, \pi[$ ,  $\Gamma := \{0\} \times ]0, \pi[$  et  $u \in H^1(\Omega)$  tel que  $\Delta u = 0$  dans  $\Omega$ . On pose  $g_0 := u|_\Gamma$  et  $g_1 := \partial_\nu u|_\Gamma$ . Par unicité de la solution du problème de Cauchy,  $u$  est l'unique fonction vérifiant

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega \\ u &= g_0 \text{ sur } \Gamma \\ \partial_\nu u &= g_1 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Supposons alors que l'on perturbe la donnée de Neumann  $g_1$  en lui soustrayant  $\frac{1}{n} \sin(ny)$ . On voit que lorsque  $n$  tend vers l'infini, le niveau de bruit tend vers 0 en norme  $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma)}$  : la donnée est de moins en moins perturbée. On se retrouve alors avec le problème perturbé : trouver  $u_n \in H^1(\Omega)$

$$\begin{cases} \Delta u_n &= 0 \text{ dans } \Omega \\ u_n &= g_0 \text{ sur } \Gamma \\ \partial_\nu u_n &= g_1 - \frac{1}{n} \sin(ny) \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

La solution de ce problème est  $u_n := u + \frac{1}{n^2} \sin(ny) \sinh(nx)$ . On a  $\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  : l'écart entre la solution avec donnée exacte et la solution avec donnée bruitée tend vers l'infini, alors que l'écart entre la donnée exacte et la donnée bruitée tend vers 0.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication : *A duality-based method of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem in the presence of noisy data*, L.Bourgeois & J.Dardé, *Inverse Problems*, vol. 26, 2010.

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Modélisation : qu'est ce qu'un bruit ?</b>	<b>52</b>
<b>3.2</b>	<b>Comportement de la méthode [QR] en présence de bruit</b>	<b>52</b>
<b>3.3</b>	<b>Une formulation basée sur la dualité</b>	<b>57</b>
3.3.1	Un problème d'optimisation	57
3.3.2	Lien avec la quasi-réversibilité	63



<b>3.4</b>	<b>Discrétisation du problème . . . . .</b>	<b>66</b>
3.4.1	Espaces discrets, produits scalaires . . . . .	66
3.4.2	Problèmes d'optimisation discrets . . . . .	69
<b>3.5</b>	<b>Applications numériques . . . . .</b>	<b>75</b>

---

### 3.1 Modélisation : qu'est ce qu'un bruit ?

Il est nécessaire de définir mathématiquement ce que nous appellerons une donnée bruitée avant de nous attaquer à sa prise en compte. Pour cela, plaçons nous un instant d'un point de vue très applicatif : les données sont dans la "vraie vie" le résultat de mesures. Or, les instruments de mesure ne fournissent pas des fonctions, c'est-à-dire dans le cas qui nous intéresse le couple  $(g_0, g_1)$  sur  $\Gamma$ , mais les valeurs prises par ces fonctions aux points de mesures, avec une possible erreur sur la mesure. Ainsi, on n'exploite pas au final la connaissance d'une fonction, mais d'un ensemble de valeurs prises par cette fonction.

On peut alors, pour rentrer dans le cadre fonctionnel habituel pour les données de nos problèmes, interpoler ces valeurs. Si l'on peut créer très facilement de cette manière des fonctions de  $L^2$ , on peut aussi créer des fonctions plus régulières, par exemple des fonctions  $H^{3/2} \times H^{1/2}$ , ce qui est le cadre fonctionnel classique de nos problèmes de Cauchy. Créer à partir de valeurs bruitées des données régulières nous a néanmoins semblé abusif, puisqu'en quelque sorte nous créons de l'information que nous n'avons pas : en effet, on suppose alors implicitement que les valeurs bruitées que nous possédons sont les valeurs prises par la trace et la trace normale d'une fonction de  $H^2$ , ou autrement dit que notre donnée bruitée admet un relèvement  $H^2$ , ce que nous ne pouvons légitimement affirmer. C'est pourquoi nous avons choisi de ne pas supposer a priori de régularité sur nos données bruitées.

Ainsi, au final, une donnée bruitée sera pour nous un couple  $(g_0^\delta, g_1^\delta)$  de fonctions de  $L^2(\Gamma)$ . La seule information que nous supposons connue sur ce bruit sera le niveau de bruit  $\delta$ , tel que  $\|g_i^\delta - g_i\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta$ . Cela revient à supposer que notre appareil de mesure commet une erreur relative de  $\sigma_i\%$  sur  $g_i$ , avec  $\sigma_i := \frac{\delta}{\|g_i\|_{L^2(\Gamma)}}$ .

### 3.2 Comportement de la méthode [QR] en présence de bruit

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ , de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^{1,1}$ . On se donne  $\Gamma, \Gamma_c$  deux parties ouvertes non vides de  $\partial\Omega$  vérifiant  $\overline{\Gamma} \cup \overline{\Gamma}_c = \partial\Omega$ ,  $\Gamma \cap \Gamma_c = \emptyset$ . On note  $\nu$  le vecteur normal extérieur à  $\Omega$ .

On se donne  $(g_0, g_1) \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ , et on s'intéresse au problème de Cauchy pour l'opérateur laplacien :

Problème [Cauchy] : trouver  $u \in V_g := \{v \in H^2(\Omega) \mid v|_\Gamma = g_0, \partial_\nu v|_\Gamma = g_1\}$  t.q.  $\Delta u = 0$  dans  $\Omega$ .

Rappelons la formulation du problème [QR] correspondant :

Problème [QR] : trouver  $u_\varepsilon \in V_g$  t.q.  $\forall v \in V_0, (\Delta u_\varepsilon, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon(u_\varepsilon, v)_{H^2(\Omega)} = 0$ .

Ici,  $V_0 := \{v \in H^2(\Omega) \mid v|_\Gamma = \partial_\nu v|_\Gamma = 0\}$ .

Nous voyons déjà apparaître un problème concernant l'utilisation de la méthode de quasi-réversibilité en présence de bruit tel que défini ci-dessus : le manque de régularité des données

bruitées. En effet,  $g_0^\delta$  et  $g_1^\delta$  ne sont pas assez régulières (elles ne sont que  $L^2$ , et pas  $H^{3/2} \times H^{1/2}$ ) pour être des données acceptables dans une formulation [QR].

Supposons un instant que nos données bruitées sont régulières, c'est-à-dire que  $(g_0^\delta, g_1^\delta) \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ , et vérifient  $\|g_0^\delta - g_0\|_{H^{3/2}(\Gamma)} \leq \delta$ ,  $\|g_1^\delta - g_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \delta$ . Alors on peut légitimement poser le problème [QR $_\delta$ ] suivant :

Problème [QR $_\delta$ ] : trouver  $u_\varepsilon^\delta \in V_g^\delta := \{v \in H^2(\Omega) \mid v|_\Gamma = g_0^\delta, \partial_\nu v|_\Gamma = g_1^\delta\}$  t.q.  $\forall v \in V_0$ ,

$$(\Delta u_\varepsilon^\delta, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon(u_\varepsilon^\delta, v)_{H^2(\Omega)} = 0.$$

Il est clair que [QR $_\delta$ ] admet une unique solution  $u_\varepsilon^\delta$ .

**Propriété 3.1**  $u_\varepsilon^\delta$  tend vers  $u$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 si et seulement si  $(g_0^\delta, g_1^\delta) = (g_0, g_1)$ .

Preuve :

• si  $u_\varepsilon^\delta$  tend vers  $u$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, alors, comme  $V_g^\delta$  est fermé (par continuité de la trace et de la trace normale<sup>1</sup>), on a  $u \in V_g$ , d'où  $(g_0^\delta, g_1^\delta) = (u|_\Gamma, \partial_\nu u|_\Gamma) = (g_0, g_1)$ .

• si  $(g_0^\delta, g_1^\delta) = (g_0, g_1)$ ,  $V_g^\delta = V_g$ . Comme  $u$  est solution du problème [Cauchy], on a, d'après le théorème 2.4 p.26,  $u_\varepsilon^\delta \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u$ . ■

En présence de bruit, prendre  $\varepsilon$  le plus petit possible n'est donc potentiellement plus la bonne chose à faire. La proposition suivante montre que cela peut être une très mauvaise idée :

**Propriété 3.2** pour tout  $\varepsilon_0 > 0$ , pour tout  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , on a  $\|u_\varepsilon^\delta - u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} \leq C \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}$ , où  $C$  est une constante ne dépendant que de  $\Omega$  et de  $\varepsilon_0$ .

Preuve :

• remarquons tout d'abord que l'application  $(u, v) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \mapsto (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon(u, v)_{H^2(\Omega)}$  est un produit scalaire sur  $H^2(\Omega)$  dès que  $\varepsilon > 0$ . On a en particulier l'inégalité de Cauchy-Schwartz suivante<sup>2</sup> :

$$|(\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon(u, v)_{H^2(\Omega)}| \leq \sqrt{\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon\|u\|_{H^2(\Omega)}^2} \sqrt{\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon\|v\|_{H^2(\Omega)}^2}$$

• comme la frontière de  $\Omega$  a été supposée  $C^{1,1}$ ,  $\Gamma$  est  $C^{1,1}$ . Il existe donc un opérateur de relevement  $R$  linéaire continu de  $H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$  dans  $H^2(\Omega)$ , tel que pour tout  $(g_0, g_1) \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ ,  $R(g_0, g_1)|_\Gamma = g_0$ ,  $\partial_\nu R(g_0, g_1)|_\Gamma = g_1$  et  $\|R(g_0, g_1)\|_{H^2(\Omega)} \leq c(\|g_0\|_{H^{3/2}(\Gamma)} + \|g_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)})$ , avec  $c$  ne dépendant que de  $\Omega$ . Posons  $\tilde{u}_\varepsilon = u_\varepsilon - R(g_0, g_1)$ ,  $\tilde{u}_\varepsilon^\delta = u_\varepsilon^\delta - R(g_0^\delta, g_1^\delta)$ . On a  $(\tilde{u}_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon^\delta) \in V_0 \times V_0$  et, pour tout  $v$  dans  $V_0$  :

$$(\Delta \tilde{u}_\varepsilon, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon, v)_{H^2(\Omega)} = -(\Delta R(g_0, g_1), \Delta v)_{L^2(\Omega)} - \varepsilon(R(g_0, g_1), v)_{H^2(\Omega)}$$

$$(\Delta \tilde{u}_\varepsilon^\delta, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon^\delta, v)_{H^2(\Omega)} = -(\Delta R(g_0^\delta, g_1^\delta), \Delta v)_{L^2(\Omega)} - \varepsilon(R(g_0^\delta, g_1^\delta), v)_{H^2(\Omega)}$$

En posant  $v = \tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon^\delta$ , et en soustrayant ces deux égalités, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\Delta(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon^\delta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon\|\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 &= -(\Delta R(g_0 - g_0^\delta, g_1 - g_1^\delta), \Delta(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon^\delta))_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - \varepsilon(R(g_0 - g_0^\delta, g_1 - g_1^\delta), \tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon^\delta)_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> cf théorème 1.5.1.2 p.37 de [Gri85]

<sup>2</sup> cf p.78 de [Bre05], par exemple...

On utilise alors l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour trouver :

$$\begin{aligned} \|\Delta(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon^\delta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 &\leq \sqrt{\|\Delta(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon^\delta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2} \\ &\times \sqrt{\|\Delta R(g_0 - g_0^\delta, g_1 - g_1^\delta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|R(g_0 - g_0^\delta, g_1 - g_1^\delta)\|_{H^2(\Omega)}^2} \end{aligned}$$

d'où :

$$\sqrt{\|\Delta(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon^\delta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2} \leq \sqrt{\|\Delta R(g_0 - g_0^\delta, g_1 - g_1^\delta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|R(g_0 - g_0^\delta, g_1 - g_1^\delta)\|_{H^2(\Omega)}^2}$$

or on a :

$$\sqrt{\varepsilon} \|\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon^\delta\|_{H^2(\Omega)} \leq \sqrt{\|\Delta(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon^\delta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2}$$

et :

$$\begin{aligned} \sqrt{\|\Delta R(g_0 - g_0^\delta, g_1 - g_1^\delta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|R(g_0 - g_0^\delta, g_1 - g_1^\delta)\|_{H^2(\Omega)}^2} &\leq \sqrt{1 + \varepsilon_0} \|R(g_0 - g_0^\delta, g_1 - g_1^\delta)\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq 2 c \sqrt{1 + \varepsilon_0} \delta. \end{aligned}$$

On obtient donc finalement :  $\|\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon^\delta\|_{H^2(\Omega)} \leq 2 c \sqrt{1 + \varepsilon_0} \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}$ .

• Pour finir, on a :

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_\varepsilon^\delta\|_{H^2(\Omega)} &= \|\tilde{u}_\varepsilon + R(g_0, g_1) - \tilde{u}_\varepsilon^\delta - R(g_0^\delta, g_1^\delta)\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq \|\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon^\delta\|_{H^2(\Omega)} + \|R(g_0, g_1) - R(g_0^\delta, g_1^\delta)\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq 2 c \sqrt{1 + \varepsilon_0} \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} + 2 c \delta \leq 2 c (\sqrt{1 + \varepsilon_0} + \sqrt{\varepsilon_0}) \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} \end{aligned}$$

■

On a donc, en utilisant l'inégalité triangulaire, pour tout  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  :

$$\boxed{\|u_\varepsilon^\delta - u\|_{H^2(\Omega)} \leq \|u_\varepsilon - u\|_{H^2(\Omega)} + C \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}} \clubsuit$$

Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, on a  $\|u_\varepsilon - u\|_{H^2(\Omega)}$  qui tend vers 0, mais dans le même temps  $C \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}$  explose. Une très petite valeur de  $\varepsilon$  dans  $[\text{QR}_\delta]$  peut donc produire une très mauvaise solution. On voit apparaître la nécessité de fixer  $\varepsilon$  en fonction du niveau de bruit  $\delta$ .

Une méthode naturelle pour le faire serait de chercher  $\varepsilon$  qui réalise le minimum de  $\|u_\varepsilon - u\|_{H^2(\Omega)} + C \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}$  (dans l'intervalle  $]0, \varepsilon_0[$ ). Cette idée est toutefois irréalisable en pratique, puisque nous ne connaissons pas la constante  $C$ , ne connaissant pas la constante de continuité de l'opérateur de relèvement  $R$ , et nous ne connaissons pas la vitesse de convergence de  $u_\varepsilon$  vers  $u$ .

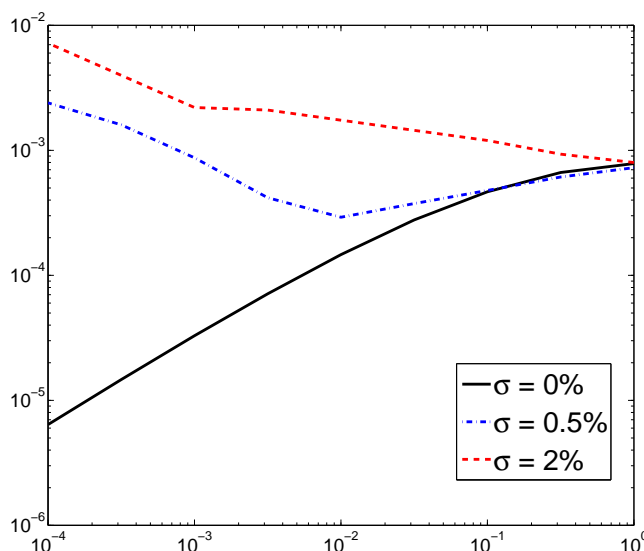
Remarque : bien sûr, rien n'oblige  $\|u_\varepsilon^\delta - u\|_{H^2(\Omega)}$  à se comporter en  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$  en 0. Par exemple, s'il existe  $w^\delta \in H^2(\Omega)$  t.q.  $\Delta w^\delta = 0$ ,  $w^\delta|_\Gamma = g_0^\delta$  et  $\partial_\nu w^\delta|_\Gamma = g_1^\delta$ , alors on sait<sup>3</sup> que  $u_\varepsilon^\delta \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} w^\delta$ . On a alors  $\|u_\varepsilon^\delta - u\|_{H^2(\Omega)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \|w^\delta - u\|_{H^2(\Omega)}$ , et  $\|u_\varepsilon^\delta - u\|_{H^2(\Omega)}$  n'explose pas lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Néanmoins, rien ne prouve que  $\varepsilon \mapsto \|u_\varepsilon^\delta - u\|_{H^2(\Omega)}$  soit minimum en 0, et il nous faut toujours trouver une méthode pour fixer  $\varepsilon$  en fonction de  $\delta$ .

Illustrons le comportement de la méthode de quasi-réversibilité en présence de données bruitées : on se place dans le domaine  $\Omega := ]-0.5, 0.5[ \times ]-0.5, 0.5[$ , on pose  $\Gamma := ]-0.5, 0.5[ \times \{-0.5\} \cup ]-0.5, 0.5[ \times \{0.5\}$ .  $g_0$  (resp.  $g_1$ ) est la trace (resp. la trace normale) sur  $\Gamma$  de la fonction harmonique  $u := \frac{y^3}{3} - x^2 y$ . On perturbe la donnée  $(g_0, g_1)$  pour obtenir une donnée bruitée  $(g_0^\sigma, g_1^\sigma)$  vérifiant

$$\frac{\|g_i^\sigma - g_i\|_{L^2(\Gamma)}}{\|g_i\|_{L^2(\Gamma)}} = \sigma, \quad \forall i \in \{1, 2\}.$$

<sup>3</sup>théorème 2.4 p.26

Autrement dit, la donnée est perturbée par un bruit d'amplitude relative  $\sigma$ . On s'intéresse alors à l'erreur entre la fonction  $u_\varepsilon^\sigma$  solution de [QR $_\sigma$ ] et  $u$  en fonction de  $\varepsilon$ .



$\|u_{h,\varepsilon}^\sigma - \pi_h(u)\|_h$  fonction de  $\varepsilon$ , pour différentes valeurs de  $\sigma$ .  $h := 1/70$ .

Lorsque la donnée n'est pas perturbée, on retrouve la convergence de  $u_{h,\varepsilon}$  vers  $u$  déjà montrée au 2.2.5. Pour un bruit relatif de 0.5%, on voit par contre que l'écart entre  $u_{h,\varepsilon}^\sigma$  et  $u$  décroît pour  $\varepsilon$  variant de 1 à  $10^{-2}$ , puis croît pour  $\varepsilon$  variant de  $10^{-2}$  à  $10^{-4}$ , ce qui est cohérent avec l'estimation ♣. Pour un niveau de bruit de 2%, l'écart entre  $u_{h,\varepsilon}^\sigma$  et  $u$  ne fait que croître : le premier terme au second membre de ♣ est complètement absorbé par le second.

Il nous faut donc une stratégie pour fixer  $\varepsilon$ . Une première idée naturelle est de se ramener dans le cadre théorique des régularisations de Tychonov : en effectuant le changement de variable  $\hat{u} = u - R(g_0, g_1)$  directement dans le problème [Cauchy], on obtient un problème de Cauchy homogène de la forme

$$\begin{cases} \Delta \hat{u} = f \\ \hat{u}|_\Gamma = 0 \\ \partial_\nu \hat{u}|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

où  $f := -\Delta R(g_0, g_1)$ . On peut régulariser ce problème à l'aide de la formulation de quasi-réversibilité homogène suivante :

Problème [QRH] : trouver  $\hat{u}_\varepsilon \in V_0$  t.q.  $\forall v \in V_0$ ,  $(\Delta \hat{u}_\varepsilon, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon(\hat{u}_\varepsilon, v)_{H^2(\Omega)} = (f, \Delta v)_{L^2(\Omega)}$ .

La donnée est maintenant  $f$ , la donnée bruitée  $f^\delta = -\Delta R(g_0^\delta, g_1^\delta)$ , et on a<sup>4</sup>  $\|f - f^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq 2c\delta$ . Le problème bruité s'écrit donc :

Problème [QRH $^\delta$ ] : trouver  $\hat{u}_\varepsilon^\delta \in V_0$  t.q.  $\forall v \in V_0$ ,  $(\Delta \hat{u}_\varepsilon^\delta, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon(\hat{u}_\varepsilon^\delta, v)_{H^2(\Omega)} = (f^\delta, \Delta v)_{L^2(\Omega)}$ .

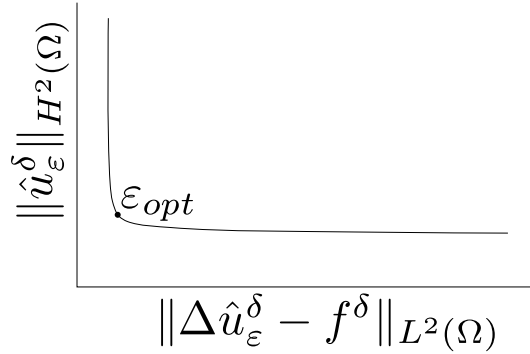
La formulation [QRH] est exactement la régularisation de Tychonov<sup>5</sup> de l'opérateur  $\Delta : V_0 \rightarrow L^2(\Omega)$ . Dans le cadre du problème de Cauchy homogène, des techniques pour fixer  $\varepsilon$  fonction du

<sup>4</sup> $\|f - f^\delta\|_{L^2(\Omega)} = \|\Delta R(g_0, g_1) - \Delta R(g_0^\delta, g_1^\delta)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|R(g_0, g_1) - R(g_0^\delta, g_1^\delta)\|_{H^2(\Omega)} \leq c(\|g_0 - g_0^\delta\|_{H^{3/2}(\Gamma)} + \|g_1 - g_1^\delta\|_{H^{1/2}(\Gamma)}) \leq 2c\delta$

<sup>5</sup>voir par exemple [EHN96] pour une étude très complète des problématiques liées aux régularisations de Tychonov

niveau de bruit ont déjà été développées. On peut par exemple appliquer le principe de Morozov : on cherche alors à fixer  $\varepsilon$  de tel sorte que  $\|\Delta \hat{u}_\varepsilon^\delta - f^\delta\|_{L^2(\Omega)}$  soit inférieur ou égal à  $\|f^\delta - f\|_{L^2(\Omega)}$ . Cette approche est étudiée dans [Bou06].

Une autre méthode pour fixer  $\varepsilon$  en fonction du niveau de bruit très utilisée dans le cadre des régularisations de Tychonov est la "L-curve method". Cette méthode consiste à tracer la courbe  $\|\hat{u}_\varepsilon^\delta\|_{H^2(\Omega)}$  en fonction de la norme de  $\|\Delta \hat{u}_\varepsilon^\delta - f^\delta\|_{L^2(\Omega)}$ , c'est-à-dire la norme de la solution régularisée en fonction de la norme du résidu. Cette courbe, paramétrée par  $\varepsilon$ , a le plus souvent une forme de L, comme illustré sur la figure suivante :



Forme typique d'une "L-curve"

Le paramètre  $\varepsilon$  choisi est alors celui qui correspond au "coin" du L,  $\varepsilon_{opt}$  sur la figure, ou plus mathématiquement celui qui correspond à la courbure maximum de la courbe. Dans [EG94], on étudie théoriquement cette méthode<sup>6</sup>. On peut la trouver mise en application dans [ABF06] et [FABB10] pour des problèmes de Cauchy elliptiques.

Ces méthodes ne peuvent néanmoins pas être appliquées dans notre cas : nous ne connaissons toujours pas la constante de continuité de l'opérateur de relèvement  $R$ , et donc nous ne pouvons pas répercuter correctement le niveau d'erreur sur la donnée au bord  $(g_0, g_1)$  sur le niveau d'erreur sur la donnée volumique  $f$ . Un exemple présenté dans [CKP09] illustre bien cette problématique : on considère le demi-plan  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ . Pour cette géométrie, il est facile de créer un relèvement  $R$  de la donnée  $(g_0, g_1)$ , couple de fonctions de la droite réelle : il suffit de prendre

$$R(g_0, g_1)(x, y) := g_0(x) - yg_1(x).$$

On obtient alors au second membre

$$f(x, y) = -g_0''(x) + yg_1''(x).$$

On voit que l'on devra faire une double différentiation numérique, processus très instable, notamment si la donnée n'est que  $L^2$ . Et même si on régularise cette différentiation, nous ne pourrions pas trouver de constante de continuité pour notre opérateur de relèvement numérique, sauf à faire des hypothèses très fortes de régularité sur la donnée.

Au vu de tout ceci, notre objectif est maintenant double :

- régulariser la donnée bruitée  $(g_0^\delta, g_1^\delta)$ , afin de pouvoir légitimement l'utiliser dans une formulation [QR]
- fixer  $\varepsilon$  en fonction du niveau de bruit  $\delta$ .

<sup>6</sup>dans cet article, on montre d'ailleurs que choisir le  $\varepsilon$  correspondant au maximum de courbure n'est pas exactement le bon choix, et on présente une méthode plus élaborée de choix à partir de la L-curve

### 3.3 Une formulation basée sur la dualité

Pour remplir notre double objectif, nous allons provisoirement oublier la quasi-réversibilité. Avant toute chose, il faut bien comprendre qu'il est illusoire d'espérer retrouver  $u$  solution du problème [Cauchy] à partir de la donnée bruitée  $(g_0^\delta, g_1^\delta)$ , à cause de l'instabilité du problème<sup>7</sup>. L'information à notre disposition se réduit à :  $u$  appartient à l'ensemble

$$\left\{ v \in H^2(\Omega) \mid \Delta v = 0, \|v|_\Gamma - g_0^\delta\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta, \|\partial_\nu v|_\Gamma - g_1^\delta\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta \right\}.$$

Notre objectif va dorénavant être de construire un élément  $u^\delta$  de cet ensemble. On suit ainsi le principe de Morozov suivant : il ne sert à rien de vouloir être plus précis que la précision de la donnée.  $u^\delta$  est en effet une fonction harmonique qui ne s'éloigne pas plus de la donnée bruitée que  $u$ , la solution de [Cauchy].

Pour construire  $u^\delta$ , nous allons résoudre un problème d'optimisation par dualité. Ceci nous fournira finalement une donnée régularisée et le paramètre  $\varepsilon$  pour la méthode de quasi-réversibilité.

#### 3.3.1 Un problème d'optimisation

On pose  $Y := L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma) \times L^2(\Omega)$ . Pour  $p = (p_0, p_1, p_2)$  et  $q = (q_0, q_1, q_2)$  deux éléments de  $Y$ , on pose  $(p, q)_Y := (p_0, q_0)_{L^2(\Gamma)} + (p_1, q_1)_{L^2(\Gamma)} + (p_2, q_2)_{L^2(\Omega)}$ .  $(\cdot, \cdot)_Y$  définit un produit scalaire sur  $Y$ , et  $(Y, (\cdot, \cdot)_Y)$  est un espace de Hilbert<sup>8</sup>.

On définit l'opérateur  $A : H^2(\Omega) \rightarrow Y$  tel que  $\forall u \in H^2(\Omega)$ ,  $Au = (u|_\Gamma, \partial_\nu u|_\Gamma, \Delta u)$ .

#### Étude de l'opérateur $A$

**Propriété 3.3**  $A$  est un opérateur continu injectif.

Preuve : on sait que  $\forall \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \leq |u_1| + |u_2| + |u_3|$ . On a donc, pour tout  $u \in H^2(\Omega)$  :

$$\|Au\|_Y \leq [\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|u|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} + \|\partial_\nu u|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)}].$$

La continuité de l'opérateur trace et trace normale pour les éléments de  $H^2(\Omega)$  nous donne alors l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que :

$$\|Au\|_Y \leq C\|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

L'injectivité de  $A$  est une conséquence directe de l'unicité de la solution du problème de Laplace avec données de Cauchy<sup>9</sup>. ■

**Propriété 3.4**  $\overline{Im(A)} = Y$ .

**Lemme 3.1**  $\forall u \in H^2(\Omega)$ ,  $\forall v \in L^2(\Omega, \Delta) := \{v \in L^2(\Omega) \mid \Delta v \in L^2(\Omega)\}$ ,

$$\int_\Omega \Delta u v - u \Delta v dx = \langle \partial_\nu u, v \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} - \langle u, \partial_\nu v \rangle_{H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)}. \quad (3.1)$$

Preuve : voir [LM68].

<sup>7</sup>ce que nous voulons dire ici, c'est que nous ne pouvons pas être sûr de retrouver  $u$  à partir de  $(g_0^\delta, g_1^\delta)$ . La méthode que nous allons mettre en place pourrait nous donner  $u$ , mais quand bien même ce serait le cas, nous n'aurions aucun moyen de savoir que nous avons retrouvé la solution exacte de [Cauchy].

<sup>8</sup>cf théorème 5.16 de [Gon98]

<sup>9</sup>théorème 1.2 p.12

■

Preuve de la proposition 3.4 : soit  $y = (f, g, h) \in Y$  tel que pour tout  $u \in H^2(\Omega)$ ,  $(Au, y)_Y = 0$ . On a donc, pour tout  $u \in H^2(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \Delta u f dx + \int_{\Gamma} u g d\sigma + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} h d\sigma = 0 \quad (3.2)$$

Posant  $u = \phi \in C_c^\infty(\Omega)$  dans (3.2), on obtient  $\int_{\Omega} \Delta \phi f dx = 0$ ,  $\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ . On a donc  $\Delta f = 0$ , ce qui implique en particulier  $f \in L^2(\Omega, \Delta)$ . En appliquant la formule (3.1), et en utilisant  $\Delta f = 0$ , on obtient, pour tout  $u \in H^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \Delta u f dx = \langle \partial_\nu u, f \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} - \langle u, \partial_\nu f \rangle_{H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)}. \quad (3.3)$$

(3.2) et (3.3) donne, pour tout  $u \in H^2(\Omega)$  :

$$\int_{\Gamma} u g d\sigma + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} h d\sigma = - \langle \partial_\nu u, f \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \langle u, \partial_\nu f \rangle_{H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)}. \quad (3.4)$$

Pour  $s \in \{1/2, 3/2\}$ , on définit  $H_{00}^s(\Gamma)$  (resp.  $H_{00}^s(\Gamma_c)$ ) comme l'ensemble des  $\varphi \in H^s(\Gamma)$  (resp.  $\in H^s(\Gamma_c)$ ) t.q. le prolongement par 0 de  $\varphi$  sur  $\partial\Omega \setminus \Gamma$  (resp.  $\partial\Omega \setminus \Gamma_c$ ), noté  $\tilde{\varphi}$ , vérifie  $\tilde{\varphi} \in H^s(\partial\Omega)$ . On définit  $H^{-s}(\Gamma)$  (resp.  $H^{-s}(\Gamma_c)$ ) l'ensemble des restrictions des éléments de  $H^{-s}(\partial\Omega)$  sur  $\Gamma$  (resp.  $\Gamma_c$ ). Enfin, on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_{00}^s(\Gamma), H^{-s}(\Gamma)}$  (resp.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_{00}^s(\Gamma_c), H^{-s}(\Gamma_c)}$ ) le crochet de dualité entre  $H_{00}^s(\Gamma)$  et  $H^{-s}(\Gamma)$  (resp.  $H_{00}^s(\Gamma_c)$  et  $H^{-s}(\Gamma_c)$ ).

Soit  $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ . Par définition,  $\tilde{\varphi}$  est un élément de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ . Il existe<sup>10</sup>  $u(\varphi) \in H^2(\Omega)$  tel que  $u(\varphi)|_{\partial\Omega} = \tilde{\varphi}$  et  $\partial_\nu u(\varphi)|_{\partial\Omega} = 0$ . En injectant cela dans (3.4), on obtient, pour tout  $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  :

$$\int_{\Gamma} \varphi g d\sigma = \langle \tilde{\varphi}, \partial_\nu f \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \langle \varphi, \partial_\nu f \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)}$$

d'où l'on déduit  $g = \partial_\nu f$  sur  $\Gamma$ . Par un raisonnement analogue, on obtient  $-h = f$  sur  $\Gamma$ .

Soit maintenant  $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_c)$ . Par un raisonnement équivalent au précédent, on obtient :

$$\langle \varphi, \partial_\nu f \rangle_{H_{00}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_c), H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_c)} = 0$$

soit  $\partial_\nu f = 0$  sur  $\Gamma_c$ . Par un raisonnement analogue, on obtient  $f = 0$  sur  $\Gamma_c$ . On peut alors utiliser l'unicité de la solution du problème de Laplace avec données de Cauchy dans  $L^2(\Omega, \Delta)$ <sup>11</sup>, qui nous donne  $f = 0$ , ce qui implique directement  $g = h = 0$ .

■

Les deux propriétés précédentes impliquent directement la

**Propriété 3.5**  $A^*$  est un opérateur linéaire continu et injectif de  $Y$  dans  $H^2(\Omega)$ <sup>12</sup>.

### Un problème d'optimisation sous contraintes

Soit  $\alpha \geq 0$ . On définit :

$$C_\alpha^\delta = \left\{ v \in H^2(\Omega) \mid Av \in \overline{\mathcal{B}(g_0^\delta, \delta)} \times \overline{\mathcal{B}(g_1^\delta, \delta)} \times \overline{\mathcal{B}(0, \alpha)} \right\}$$

où  $\mathcal{B}(x, r)$  désigne la boule de centre  $x$  et de rayon  $r$  pour la norme  $L^2$  appropriée. On pose également  $F := v \in H^2(\Omega) \mapsto \frac{1}{2} \|v\|_{H^2(\Omega)}^2$ .

On va s'intéresser au problème d'optimisation suivant :

Problème  $[P_\alpha^\delta]$  : trouver  $u_\alpha^\delta \in C_\alpha^\delta$  t.q.  $F(u_\alpha^\delta) = \inf_{v \in C_\alpha^\delta} F(v)$ .

<sup>10</sup>c'est une conséquence de la surjectivité de l'opérateur  $u \in H^2(\Omega) \mapsto (u_{\partial\Omega}, \partial_\nu u|_{\partial\Omega}) \in H^{3/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)$ , voir le théorème 1.5.1.2 p.37 de [Gri85]. On peut d'ailleurs prendre  $u(\varphi) = R(\tilde{\varphi}, 0)$ .

<sup>11</sup>voir proposition 1 dans [Bou06]

<sup>12</sup>on identifie ici  $H^2$  et  $Y$  à leurs duaux respectifs

**Propriété 3.6** *le problème  $[P_\alpha^\delta]$  admet une unique solution.*

Preuve :  $F$  est une fonction continue, coercive et strictement convexe de  $H^2(\Omega)$ .  $C_\alpha^\delta$  est un ensemble non vide, car  $u \in C_\alpha^\delta$ . Il est fermé, par continuité de l'application  $A$ . Enfin il est convexe, par linéarité des applications trace, trace normale et  $\Delta$ , et par convexité des boules  $\overline{\mathcal{B}(g_0^\delta, \delta)}$ ,  $\overline{\mathcal{B}(g_1^\delta, \delta)}$  et  $\overline{\mathcal{B}(0, \alpha)}$ . Il suffit alors d'appliquer la proposition 1.2 p.34 de [TE74] :

- soit  $V$  un espace de Banach réflexif, et  $C$  un ensemble convexe fermé non vide de  $V$ . Soit  $F : C \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe, s.c.i. et coercive. Alors il existe au moins un élément  $u$  de  $C$  t.q.  $F(u) = \inf_{v \in V} F(v)$ . Si de plus  $F$  est strictement convexe, alors  $u$  est unique.

■

La solution  $u^\delta := u_0^\delta$  du problème  $[P_0^\delta]$  est la fonction  $H^2(\Omega)$  harmonique de norme minimale vérifiant  $u|_\Gamma \in \mathcal{B}(g_0^\delta, \delta)$  et  $\partial_\nu u|_\Gamma \in \mathcal{B}(g_1^\delta, \delta)$ . Elle vérifie donc le principe de Morozov que nous désirons. C'est dorénavant la fonction que nous allons rechercher.

**Théorème 3.1**

$$\begin{array}{l} \lim_{\delta \rightarrow 0} \|u^\delta - u\|_{H^2(\Omega)} = 0 \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u_\alpha^\delta - u^\delta\|_{H^2(\Omega)} = 0 \end{array}$$

Preuve :

- soit  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels strictement positifs tendant vers 0. Pour tout  $n$ , on a  $u \in C_0^{\delta_n}$ , et comme  $u^{\delta_n}$  est solution de  $[P_0^{\delta_n}]$ , on a  $\|u^{\delta_n}\|_{H^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^2(\Omega)}$ . On en déduit l'existence de  $w \in H^2(\Omega)$  et d'une sous-suite  $\delta_{n'}$  tels que la suite  $u^{\delta_{n'}}$  tend faiblement vers  $w$  dans  $H^2(\Omega)$ .

Les applications  $v \mapsto \Delta v$ ,  $v \mapsto v|_\Gamma$  et  $v \mapsto \partial_\nu v|_\Gamma$  étant linéaires et fortement continues sur  $H^2(\Omega)$ , elles sont faiblement continues<sup>13</sup>. Comme pour tout  $n'$ ,  $u^{\delta_{n'}} \in C_0^{\delta_{n'}}$ , on a, par passage à la limite,  $\Delta w = 0$ ,  $w|_\Gamma = g_0$  et  $\partial_\nu w|_\Gamma = g_1$ . Par unicité de la solution du problème de Laplace avec données de Cauchy<sup>14</sup>, on obtient  $w = u$ . On a :

$$\begin{aligned} \|u^{\delta_{n'}} - u\|_{H^2(\Omega)}^2 &= \|u^{\delta_{n'}}\|_{H^2(\Omega)}^2 - 2(u^{\delta_{n'}}, u)_{H^2(\Omega)} + \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \\ &\leq 2\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 - 2(u^{\delta_{n'}}, u)_{H^2(\Omega)} \xrightarrow{n' \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

$u^{\delta_{n'}}$  tend donc fortement vers  $u$  dans  $H^2(\Omega)$ . En appliquant le lemme 2.1 p.22, on obtient finalement que  $u^\delta$  tend fortement vers  $u$  dans  $H^2(\Omega)$  lorsque  $\delta$  tend vers 0.

- on montre pratiquement exactement de la même manière que  $u_\alpha^\delta \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} u^\delta$ . Il suffit simplement d'utiliser l'unicité de la solution du problème  $[P_0^\delta]$  à la place de l'unicité de la solution du problème de Cauchy.

■

Pour obtenir  $u_\alpha^\delta$ , nous devons résoudre  $[P_\alpha^\delta]$ , qui est un problème d'optimisation sous contraintes, donc un problème difficile. Pour éliminer cette difficulté, nous allons utiliser la dualité en analyse convexe (cf la deuxième partie de [TE74]), qui va nous permettre de transformer ce problème sous contrainte en un problème sans contrainte. Le paramètre  $\alpha$  va ici jouer un rôle important.

### Étude du problème dual

Rappelons ici le théorème de Fenchel-Rockafellar<sup>15</sup> :

**Théorème 3.2** *soit  $V$  et  $Y$  deux espaces de Hilbert,  $V^*$  et  $Y^*$  les espaces duaux correspondants. Soit  $A : V \rightarrow Y$  un opérateur continu,  $A^* : Y^* \rightarrow V^*$  son adjoint. Soit  $J : V \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction convexe et  $J^* : V^* \times Y^*$  sa fonction polaire<sup>16</sup>.*

<sup>13</sup> cf théorème III.9 de [Bre05]

<sup>14</sup> théorème 1.2 p.12

<sup>15</sup> cf théorème 4.1 p.58 de [TE74]

<sup>16</sup> cf définition 4.1 p 16 de [TE74]



On considère le problème de minimisation primal [P]

$$\inf_{v \in V} J(v, A^*v)$$

et le problème de maximisation dual correspondant [P\*]

$$\sup_{y^* \in Y^*} -J^*(A^*p^*, p^*)$$

Si  $\inf [P]$  est fini, et s'il existe  $v_0 \in V$  t.q.  $J(v_0, Av_0) < \infty$  et  $y \mapsto J(v_0, y)$  est continue en  $Av_0$ , alors  $\inf [P] = \sup [P^*]$  et le problème [P\*] admet au moins une solution.

Pour se mettre dans le cadre d'application de ce théorème, nous allons écrire différemment le problème  $[P_\alpha^\delta]$ . On définit la fonction  $\chi_\alpha^\delta : L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma) \times L^2(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  par :

$$\forall p := (p_0, p_1, p_2) \in Y, \chi_\alpha^\delta(p) := \begin{cases} 0 & \text{si } p \in \overline{\mathcal{B}(g_0^\delta, \delta)} \times \overline{\mathcal{B}(g_1^\delta, \delta)} \times \overline{\mathcal{B}(0, \alpha)} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme  $\overline{\mathcal{B}(g_0^\delta, \delta)} \times \overline{\mathcal{B}(g_1^\delta, \delta)} \times \overline{\mathcal{B}(0, \alpha)}$  est un ensemble convexe,  $\chi_\alpha^\delta$  est convexe<sup>17</sup>. En posant  $J(v, p) = F(v) + \chi_\alpha^\delta(p)$ , on peut réécrire le problème  $[P_\alpha^\delta]$  :

Problème  $[P_\alpha^\delta]$  : trouver  $u_\alpha^\delta \in H^2(\Omega)$  t.q.  $J(u_\alpha^\delta, Au_\alpha^\delta) = \inf_{v \in H^2(\Omega)} J(v, Av)$ .

Intéressons nous maintenant au problème dual  $[P_\alpha^{\delta*}]$ . Puisque  $J(u, Au) := F(u) + \chi_\alpha^\delta(Au)$ , on a<sup>18</sup>  $J^*(A^*p, p) := F^*(A^*p) + \chi_\alpha^{\delta*}(-p)$ . On obtient :

Problème  $[P_\alpha^{\delta*}]$  : trouver  $p_\alpha^\delta \in Y$  tel que  $F^*(A^*p) + \chi_\alpha^{\delta*}(-p) = \inf_{q \in Y} F^*(A^*q) + \chi_\alpha^{\delta*}(-q)$ .

**Propriété 3.7**  $\forall p \in Y, p = (p_0, p_1, p_2)$ , on pose  $G_\alpha^\delta(p) = F^*(A^*p) + \chi_\alpha^{\delta*}(-p)$ . On a :

$$G_\alpha^\delta(p) = \frac{1}{2} \|A^*p\|_{H^2(\Omega)}^2 + \delta \|p_0\|_{L^2(\Gamma)} - (g_0^\delta, p_0)_{L^2(\Gamma)} + \delta \|p_1\|_{L^2(\Gamma)} - (g_1^\delta, p_1)_{L^2(\Gamma)} + \alpha \|p_2\|_{L^2(\Omega)}$$

Preuve : on a, pour tout  $u \in H^2(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} F^*(u) &= \sup_{v \in H^2(\Omega)} ((u, v)_{H^2(\Omega)} - F(v)) \\ &= \sup_{v \in H^2(\Omega)} \left( (u, v)_{H^2(\Omega)} - \frac{1}{2} \|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

car, pour tout  $v \in H^2(\Omega)$ ,  $(u, v)_{H^2(\Omega)} - \frac{1}{2} \|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} (\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{H^2(\Omega)}^2) - \frac{1}{2} \|v\|_{H^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \|u\|_{H^2(\Omega)}^2$ , cette valeur étant atteinte en  $v = u$ .

<sup>17</sup> cf p.8 de [TE74]

<sup>18</sup> cf remarque 4.2 p. 59 de [TE74]

On a, pour tout  $p \in Y$  (on pose  $Y_{ad} = \{q \in Y \mid q \in \overline{\mathcal{B}(g_0^\delta, \delta)} \times \overline{\mathcal{B}(g_1^\delta, \delta)} \times \overline{\mathcal{B}(0, \alpha)}\}$ ) :

$$\begin{aligned} \chi_\alpha^{\delta*}(p) &= \sup_{q \in Y} (p, q)_Y - \chi_\alpha^\delta(q) \\ &= \sup_{q \in Y_{ad}} (p, q)_Y \\ &= \sup_{q \in Y_{ad}} (p_0, q_0)_{L^2(\Gamma)} + (p_1, q_1)_{L^2(\Gamma)} + (p_2, q_2)_{L^2(\Omega)} \\ &= \sup_{q \in Y_{ad}} (p_0, g_0^\delta)_{L^2(\Gamma_0)} + \delta (p_0, \frac{q_0 - g_0^\delta}{\delta})_{L^2(\Gamma_0)} + (p_1, g_1^\delta)_{L^2(\Gamma_0)} + \delta (p_1, \frac{q_1 - g_1^\delta}{\delta})_{L^2(\Gamma_0)} + \alpha (p_2, \frac{q_2}{\alpha})_{L^2(\Omega)} \\ &= (p_0, g_0^\delta) + \delta \|p_0\|_{L^2(\Gamma_0)} + (p_1, g_1^\delta)_{L^2(\Gamma_0)} + \delta \|p_1\|_{L^2(\Gamma_0)} + \alpha \|p_2\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

■

On peut donc réécrire  $[P_\alpha^{\delta*}]$  :

Problème  $[P_\alpha^{\delta*}]$  : trouver  $p_\alpha^\delta \in Y$  tel que  $G_\alpha^\delta(p_\alpha^\delta) = \inf_{q \in Y} G_\alpha^\delta(q)$

**Propriété 3.8** Pour tout  $\alpha > 0$ , le problème  $[P_\alpha^{\delta*}]$  admet une unique solution  $p_\alpha^\delta$ .

Preuve :  $G_\alpha^\delta$  est une fonction continue et strictement convexe sur  $Y$  (il est direct que  $G_\alpha^\delta$  est continue et convexe, c'est une fonction strictement convexe car l'opérateur  $A^*$  est injectif et donc  $p \mapsto \|A^*p\|_{H^2(\Omega)}^2$  est strictement convexe). Supposons qu'elle ne soit pas coercive. Il existe alors  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Y^{\mathbb{N}}$  et  $C \in \mathbb{R}$  tels que  $\|p_n\|_Y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  et  $G_\alpha^\delta(p_n) < C$ . Posons  $\beta_n = \|p_n\|_Y$  et  $q_n = \frac{p_n}{\beta_n}$ . On a :

$$\frac{G_\alpha^\delta(p_n)}{\beta_n^2} = \frac{1}{2} \|A^*q_n\|_{H^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{\beta_n} \|q_{n,2}\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\beta_n} [\delta (\|q_{n,0}\|_{L^2(\Gamma)} + \|q_{n,1}\|_{L^2(\Gamma)}) - (g_0^\delta, q_{n,0})_{L^2(\Gamma)} + (g_1^\delta, q_{n,1})_{L^2(\Gamma)}]$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{1}{2} \|A^*q_n\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\beta_n^2} + \frac{1}{\beta_n} ((g_0^\delta, q_{n,0})_{L^2(\Gamma)} + (g_1^\delta, q_{n,1})_{L^2(\Gamma)}) \leq \frac{C}{\beta_n^2} + \frac{1}{\beta_n} (\|g_0^\delta\|_{L^2(\Gamma)} + \|g_1^\delta\|_{L^2(\Gamma)})$$

et donc  $A^*q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Comme  $\|q_n\|_Y = 1$ , on peut extraire de  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite (notée  $q_n$  également) qui converge faiblement dans  $Y$  vers  $q \in Y$ . Comme  $A^*$  est linéaire et continu, il est faiblement continu<sup>19</sup>, et  $A^*q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A^*q$ . On a donc  $A^*q = 0$ , d'où, comme  $A^*$  est injectif,  $q = 0$ , et  $q_n \rightarrow 0$ . Enfin, on a :

$$\begin{aligned} G_\alpha^\delta(p_n) &\geq \beta_n [\alpha \|q_{n,2}\|_{L^2(\Omega)} + \delta (\|q_{n,0}\|_{L^2(\Gamma)} + \|q_{n,1}\|_{L^2(\Gamma)}) - (g_0^\delta, q_{n,0})_{L^2(\Gamma)} - (g_1^\delta, q_{n,1})_{L^2(\Gamma)}] \\ &\geq \beta_n [\min(\alpha, \delta) (\|q_{n,2}\|_{L^2(\Omega)} + \|q_{n,0}\|_{L^2(\Gamma)} + \|q_{n,1}\|_{L^2(\Gamma)}) - (g_0^\delta, q_{n,0})_{L^2(\Gamma)} - (g_1^\delta, q_{n,1})_{L^2(\Gamma)}] \\ &\geq \beta_n [\min(\alpha, \delta) - (g_0^\delta, q_{n,0})_{L^2(\Gamma)} - (g_1^\delta, q_{n,1})_{L^2(\Gamma)}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

On a de nouveau utilisé ici l'inégalité  $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \leq |u_1| + |u_2| + |u_3|$ ,  $\forall [u_1 \ u_2 \ u_3] \in \mathbb{R}^3$ . On aboutit donc à une contradiction, et  $G_\alpha^\delta$  est coercive.

Finalement, comme  $G_\alpha^\delta$  est continue, strictement convexe et coercive sur  $Y$ , on obtient l'existence d'un unique  $p_\alpha^\delta \in Y$  tel que :

$$G_\alpha^\delta(p_\alpha^\delta) = \inf_{q \in Y} G_\alpha^\delta(q)$$

■

Remarque : cette démonstration ne s'applique pas au cas  $\alpha = 0$ , puisque dans ce cas  $\min(\alpha, \delta) = 0$ , et on perd la coercivité de  $G_\alpha$ .

<sup>19</sup> cf théorème III.9 p.39 de [Bre05]

**Propriété 3.9** Pour tout  $\alpha > 0$ ,  $G_\alpha^\delta(p_\alpha^\delta) = -\frac{1}{2}\|u_\alpha^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2$  et  $u_\alpha^\delta = A^*p_\alpha^\delta$ .

**Preuve** : on va avoir besoin du résultat suivant<sup>20</sup> :

- soit  $V$  un espace de Banach,  $F$  une fonction de  $V$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ,  $F^*$  sa polaire. Alors  $v^* \in \partial F(v)$  (sous-différentiel de  $F$  en  $v$ ) si et seulement si :

$$F(v) + F^*(v^*) = \langle v, v^* \rangle$$

On a, pour tout  $p \in Y$   $G_\alpha^\delta(p) = F^*(A^*p) + \chi_\alpha^{\delta*}(-p)$ . Pour tout  $p \in Y$ , on a  $F^*(A^*p) < \infty$  et  $\chi_\alpha^{\delta*}(-p) < \infty$ , avec  $F^*$  continue en  $A^*p$ , et  $F^*$  et  $\chi_\alpha^{\delta*}$  convexe. On a de plus  $\inf_{p \in Y} G_\alpha^\delta(p) > -\infty$ . On en déduit (cf théorème 3.2) que le problème  $[P_\alpha^{\delta*}]$  est stable, et donc :

$$\inf_{p \in Y} G_\alpha^\delta(p) = -\left(\inf_{v \in H^2(\Omega)} F(v) + \chi_\alpha^\delta(Av)\right) = -\frac{1}{2}\|u_\alpha^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2.$$

Ceci nous donne également :

$$F^*(A^*p_\alpha^\delta) + F(u_\alpha^\delta) + \chi_\alpha^\delta(Au_\alpha^\delta) + \chi_\alpha^{\delta*}(-p_\alpha^\delta) = 0$$

ce que l'on peut réécrire :

$$[F^*(A^*p_\alpha^\delta) + F(u_\alpha^\delta) - (A^*p_\alpha^\delta, u_\alpha^\delta)_{H^2(\Omega)}] + [\chi_\alpha^\delta(Au_\alpha^\delta) + \chi_\alpha^{\delta*}(-p_\alpha^\delta) - (-p_\alpha^\delta, Au_\alpha^\delta)_Y] = 0.$$

Par définition de la fonction polaire, chacune des expressions entre crochets est positive ou nulle. Comme leur somme est nulle, elles sont toutes les deux nulles, et on en déduit :

$$F^*(A^*p_\alpha^\delta) + F(u_\alpha^\delta) - (A^*p_\alpha^\delta, u_\alpha^\delta)_{H^2(\Omega)} = 0$$

ce qui est équivalent à  $A^*p_\alpha^\delta \in \partial F(u_\alpha^\delta)$ .

Rappelons que pour tout  $v \in H^2(\Omega)$ ,  $F(v) = \frac{1}{2}\|v\|_{H^2(\Omega)}^2$ .  $F$  est Frechet différentiable sur  $H^2(\Omega)$ , de différentielle  $F'(v) = v$ . Donc pour tout  $v \in H^2(\Omega)$ ,  $\partial F(v) = \{v\}$ . On en déduit  $A^*p_\alpha^\delta = u_\alpha^\delta$ . ■

Évidemment, si  $[P_0^{\delta*}]$  admettait une solution  $p_0^\delta$ , qui serait alors unique, on aurait de la même manière  $u^\delta = A^*p_0^\delta$ , la démonstration de la propriété 3.9 étant toujours valable. Mais il n'est pas sûr que ce soit le cas, car on ne peut plus démontrer que  $G_0^\delta$  est coercive sur  $Y$  (voir remarque p.61). On n'est donc pas assuré de pouvoir obtenir  $u^\delta$  par résolution du problème dual  $[P_0^{\delta*}]$ .

Nous pouvons néanmoins obtenir certains résultats sur  $[P_0^{\delta*}]$  :

**Propriété 3.10**  $\inf_{p \in Y} G_0^\delta(p) = -\frac{1}{2}\|u^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} G_0^\delta(p_\alpha^\delta)$ .

**Preuve** : on a, pour tout  $p \in Y$ ,  $G_\alpha^\delta(p) \geq G_\alpha^\delta(p_\alpha^\delta) = -\frac{1}{2}\|u_\alpha^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2$ . On en déduit  $G_0^\delta(p) + \alpha\|p_2\|_{L^2(\Omega)} \geq -\frac{1}{2}\|u_\alpha^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2$ . En passant à la limite lorsque  $\alpha$  tend vers 0, on obtient  $G_0^\delta(p) \geq -\frac{1}{2}\|u^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2$ , et donc  $\inf_{p \in Y} G_0^\delta(p) \geq -\frac{1}{2}\|u^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2$ .

On a de plus :  $\alpha\|p_{\alpha,2}^\delta\|_{L^2(\Omega)} = G_\alpha^\delta(p_\alpha^\delta) - G_0^\delta(p_\alpha^\delta) \leq -\frac{1}{2}\left[\|u_\alpha^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 - \|u^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2\right] \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} 0$ .

Finalement :  $G_0^\delta(p_\alpha^\delta) = G_\alpha^\delta(p_\alpha^\delta) - \alpha\|p_{\alpha,2}^\delta\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2}\|u^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2$ , ce qui implique  $\inf_{p \in Y} G_0^\delta(p) = -\frac{1}{2}\|u^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2$  ■

Nous avons donc maintenant une méthode à notre disposition pour approcher la fonction  $u^\delta$  : pour  $\alpha > 0$  petit, nous pouvons résoudre le problème  $[P_\alpha^{\delta*}]$ , sa solution  $p_\alpha^\delta$  nous donnant alors immédiatement  $u_\alpha^\delta$  par la relation de la propriété 3.9  $u_\alpha^\delta = A^*p_\alpha^\delta$ . Le théorème 3.1 assure que plus on prend un  $\alpha$  petit, plus  $u_\alpha^\delta$  est proche de  $u^\delta$ . De la sorte,  $u_\alpha^\delta$  solution du problème  $[P_\alpha^{\delta*}]$  joue vis-à-vis de  $u^\delta$  solution de  $[P_0^\delta]$  le même rôle que  $u_\varepsilon$  solution du problème  $[QR]$  vis-à-vis de  $u$  solution du problème  $[Cauchy]$ .

Il nous reste maintenant à faire le lien entre le problème  $[P_\alpha^{\delta*}]$  et la méthode de quasi-réversibilité, ce qui est l'objet de la prochaine partie.

<sup>20</sup>voir propriété 5.1 p.21 de [TE74]

### 3.3.2 Lien avec la quasi-réversibilité

Commençons par démontrer les deux lemmes suivants :

**Lemme 3.2**  $\|g_0^\delta\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta$  et  $\|g_1^\delta\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta \Leftrightarrow u^\delta = 0 \Leftrightarrow \forall \alpha > 0, u_\alpha^\delta = 0 \Leftrightarrow \forall \alpha > 0, p_\alpha^\delta = 0$ .

Preuve :

- pour  $\alpha > 0$ , on a directement  $u_\alpha^\delta = 0 \Leftrightarrow p_\alpha^\delta = 0$ , puisque  $u_\alpha^\delta = A^* p_\alpha^\delta$  et  $A^*$  injectif.
- $\|g_0^\delta\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta$  et  $\|g_1^\delta\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta \Rightarrow 0 \in \mathcal{C}_\alpha^\delta$ . Or  $\forall v \in \mathcal{C}_\alpha^\delta, \|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \geq 0$ . On a donc  $u_\alpha^\delta = 0$ , par unicité de la solution du problème  $[P_\alpha^\delta]$ . Réciproquement,  $u_\alpha^\delta = 0 \Rightarrow 0 \in \mathcal{C}_\alpha^\delta \Rightarrow \|g_0^\delta\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta$  et  $\|g_1^\delta\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta$ .
- on obtient de la même manière  $\|g_0^\delta\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta$  et  $\|g_1^\delta\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta \Leftrightarrow u^\delta = 0$ .

■

**Lemme 3.3** On a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- ▼  $u^\delta = 0$
- ▲  $\forall v \in V_0, (u^\delta, v)_{H^2(\Omega)} = 0$ .

Preuve : il est évident que ▼  $\Rightarrow$  ▲.

Supposons que ▲ soit vrai. Alors  $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), (u^\delta, \varphi)_{H^2(\Omega)} = 0$ . On obtient alors facilement :

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \langle \Delta \Delta u^\delta - \Delta u^\delta + u^\delta, \varphi \rangle = 0.$$

Mais par définition de  $u^\delta$ , on a  $\Delta u^\delta = 0$  et donc  $\Delta \Delta u^\delta = 0$ . On en déduit donc :  $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \langle u^\delta, \varphi \rangle = 0$ , ce qui implique  $u^\delta = 0$ .

■

Le lemme 3.2 nous montre que  $\|g_i^\delta\|_{L^2(\Gamma_0)} \leq \delta, \forall i \in \{0, 1\} \Rightarrow u_\alpha^\delta = 0$ . On formule alors l'hypothèse suivante :

**Hypothèse [H]** : il existe  $i \in \{0, 1\}$  t.q.  $\|g_i^\delta\|_{L^2(\Gamma_0)} > \delta$ .

Cette hypothèse signifie que le "signal"  $g_i^\delta$  est plus important que le bruit, ou encore que l'on distingue "l'information" du bruit.

**Propriété 3.11** Sous l'hypothèse [H], il existe  $\alpha_0 > 0$  tel que  $\forall \alpha, 0 < \alpha < \alpha_0, p_{\alpha,2}^\delta \neq 0$ .

Preuve : supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  t.q.  $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  et  $p_{\alpha_n,2}^\delta = 0$ . Soit  $v \in V_0$ . On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$(p_{\alpha_n}^\delta, Av)_Y = (p_{\alpha_n,2}^\delta, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + (p_{\alpha_n,0}^\delta, v|_\Gamma)_{L^2(\Gamma)} + (p_{\alpha_n,1}^\delta, \partial_\nu v|_\Gamma)_{L^2(\Gamma)} = 0$$

et  $(p_{\alpha_n}^\delta, Av)_Y = (A^* p_{\alpha_n}^\delta, v)_{H^2(\Omega)} = (u_{\alpha_n}^\delta, v)_{H^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (u^\delta, v)_{H^2(\Omega)}$ . On déduit alors du lemme 3.3 que  $u^\delta = 0$ , d'où d'après le lemme 3.2,  $\|g_0^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta$  et  $\|g_1^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta$ , ce qui est en contradiction avec [H].

■

Remarque : le lemme 3.2 nous montre que nous avons en fait ici une équivalence.

**Propriété 3.12** Sous l'hypothèse [H],  $\forall \alpha, 0 < \alpha < \alpha_0, \Delta u_\alpha^\delta = -\frac{\alpha p_{\alpha,2}^\delta}{\|p_{\alpha,2}^\delta\|_{L^2(\Gamma_0)}}$ .

Preuve : on sait (proposition 3.9) que  $G_\alpha(p_\alpha^\delta) = -\frac{1}{2}\|u_\alpha^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2$ , d'où l'on déduit :

$$\|u_\alpha^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 + \alpha\|p_{\alpha,2}^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \delta\|p_{\alpha,0}^\delta\|_{L^2(\Gamma)} - (g_0^\delta, p_{\alpha,0}^\delta)_{L^2(\Gamma)} + \delta\|p_{\alpha,1}^\delta\|_{L^2(\Gamma)} - (g_1^\delta, p_{\alpha,1}^\delta)_{L^2(\Gamma)} = 0$$

et l'on sait (toujours proposition 3.9) que  $A^*p_\alpha^\delta = u_\alpha^\delta$ , d'où l'on déduit :

$$\|u_\alpha^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 = (u_\alpha^\delta, A^*p_\alpha^\delta)_{H^2(\Omega)} = (Au_\alpha^\delta, p_\alpha^\delta)_Y = (\Delta u_\alpha^\delta, p_{\alpha,2}^\delta)_{L^2(\Omega)} + (u_{\alpha|\Gamma}^\delta, p_{\alpha,0}^\delta)_{L^2(\Gamma)} + (\partial_\nu u_{\alpha|\Gamma}^\delta, p_{\alpha,1}^\delta)_{L^2(\Gamma)}$$

En rassemblant ces deux expressions, on obtient :

$$\begin{aligned} & [(\Delta u_\alpha^\delta, p_{\alpha,2}^\delta)_{L^2(\Omega)} + \alpha\|p_{\alpha,2}^\delta\|_{L^2(\Omega)}] + [(u_{\alpha|\Gamma}^\delta - g_0^\delta, p_{\alpha,0}^\delta)_{L^2(\Gamma)} + \delta\|p_{\alpha,0}^\delta\|_{L^2(\Gamma)}] \\ & + [(\partial_\nu u_{\alpha|\Gamma}^\delta - g_1^\delta, p_{\alpha,1}^\delta)_{L^2(\Gamma)} + \delta\|p_{\alpha,1}^\delta\|_{L^2(\Gamma)}] = 0 \end{aligned}$$

Comme par définition de  $u_\alpha^\delta$ ,  $\|\Delta u_\alpha^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \alpha$ ,  $\|u_{\alpha|\Gamma}^\delta - g_0^\delta\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta$  et  $\|\partial_\nu u_{\alpha|\Gamma}^\delta - g_1^\delta\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta$ , les trois expressions entre crochets sont positives ou nulles. Puisque leur somme est nulle, elles sont toutes nulles. En particulier,  $(\Delta u_\alpha^\delta, p_{\alpha,2}^\delta)_{L^2(\Omega)} + \alpha\|p_{\alpha,2}^\delta\|_{L^2(\Omega)} = 0$ , ce qui implique, puisque  $p_{\alpha,2}^\delta \neq 0$  (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz),

$$\Delta u_\alpha^\delta = -\frac{\alpha p_{\alpha,2}^\delta}{\|p_{\alpha,2}^\delta\|_{L^2(\Omega)}} \quad \blacksquare$$

Remarque : on a donc  $\|\Delta u_\alpha^\delta\|_{L^2(\Omega)} = \alpha$ , la contrainte sur le laplacien est saturée.

On aurait pu montrer ce résultat autrement : soit  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < \alpha_0$ . On sait que  $p_{\alpha,2}^\delta \neq 0$ . De plus, par définition de  $p_\alpha^\delta$ , on a, pour tout  $q \in Y$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $G_\alpha^\delta(p_\alpha^\delta + tq) - G_\alpha^\delta(p_\alpha^\delta) \geq 0$ . Soit  $t \in \mathbb{R}$  et  $q_2 \in L^2(\Omega)$ . On pose  $q = (0, 0, q_2) \in Y$ . On obtient alors :

$$G_\alpha^\delta(p_\alpha^\delta + tq) - G_\alpha^\delta(p_\alpha^\delta) = t \left[ (A^*p_\alpha^\delta, A^*q)_{H^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{\|p_{\alpha,2}^\delta\|_{L^2(\Omega)}} (p_{\alpha,2}^\delta, q_2)_{L^2(\Omega)} \right] + o(t) \geq 0, \quad \forall t.$$

On en déduit :  $\forall q_2 \in L^2(\Omega)$ ,  $(A^*p_\alpha^\delta, A^*q)_{H^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{\|p_{\alpha,2}^\delta\|_{L^2(\Omega)}} (p_{\alpha,2}^\delta, q_2)_{L^2(\Omega)} = 0$ . Mais

$$(A^*p_\alpha^\delta, A^*q)_{H^2(\Omega)} = (u_\alpha^\delta, A^*q)_{H^2(\Omega)} = (Au_\alpha^\delta, q)_Y = (\Delta u_\alpha^\delta, q_2)_{L^2(\Omega)}.$$

Le résultat suit.

Remarquons que si  $p_{\alpha,0}^\delta \neq 0$  (resp.  $p_{\alpha,1}^\delta \neq 0$ ), nous avons montré dans la preuve de la propriété 3.12 que  $u_{\alpha|\Gamma}^\delta = g_0^\delta - \delta \frac{p_{\alpha,0}^\delta}{\|p_{\alpha,0}^\delta\|_{L^2(\Gamma)}}$  (resp.  $\partial_\nu u_{\alpha|\Gamma}^\delta = g_1^\delta - \delta \frac{p_{\alpha,1}^\delta}{\|p_{\alpha,1}^\delta\|_{L^2(\Gamma)}}$ ). On voit apparaître ici la régularisation des données bruitées : on enlève à une fonction de  $L^2(\Gamma)$  une autre fonction de  $L^2(\Gamma)$ , et on obtient finalement une fonction de la régularité désirée, soit  $H^{3/2}(\Gamma)$  et  $H^{1/2}(\Gamma)$ .

**Propriété 3.13** sous l'hypothèse [H], on a :  $\exists i \in \{0, 1\} \mid p_{\alpha,i}^\delta \neq 0$ .

Preuve : on a  $G_\alpha^\delta(p_\alpha^\delta) = -\frac{1}{2}\|u_\alpha^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2 < 0$ . Or si on avait  $p_{\alpha,0}^\delta = p_{\alpha,1}^\delta = 0$ , on aurait  $G_\alpha^\delta(p_\alpha^\delta) \geq 0$ . \blacksquare

On peut maintenant formuler le principal résultat de cette partie. On pose  $(h_{\alpha,0}^\delta, h_{\alpha,1}^\delta) = (u_{\alpha|\Gamma}^\delta, \partial_\nu u_{\alpha|\Gamma}^\delta) \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ .

**Théorème 3.3** Si  $\|g_0^\delta\|_{L^2(\Gamma)} > \delta$  ou  $\|g_1^\delta\|_{L^2(\Gamma)} > \delta$ , alors  $\exists \alpha_0 > 0$  tel que  $\forall \alpha$ ,  $0 < \alpha < \alpha_0$ ,  $p_{\alpha,2}^\delta \neq 0$  et  $u_\alpha^\delta$  est la solution du problème [QR] avec pour données  $(h_{\alpha,0}^\delta, h_{\alpha,1}^\delta)$  et

$$\varepsilon_\alpha^\delta = \frac{\alpha}{\|p_{\alpha,2}^\delta\|_{L^2(\Omega)}}$$

Si  $\|g_0^\delta\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta$  et  $\|g_1^\delta\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta$ , alors  $u_\alpha^\delta = 0$ .

**Preuve du théorème 3.3 :** le lemme 3.2 nous montre déjà que  $\|g_i^\delta\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta$  pour tout  $i \in \{0, 1\} \Rightarrow u_\alpha^\delta = 0$ . Supposons maintenant :  $\exists i \in \{0, 1\}$ ,  $\|g_i^\delta\|_{L^2(\Gamma)} > \delta$ . Soit  $\alpha$  vérifiant  $0 < \alpha < \alpha_0$ , et  $v \in V_0$ . On a, d'après la proposition 3.12 :

$$(\Delta u_\alpha^\delta, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + \left( \frac{\alpha p_{\alpha,2}^\delta}{\|p_{\alpha,2}^\delta\|_{L^2(\Omega)}}, \Delta v \right)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

On a de plus :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\alpha p_{\alpha,2}^\delta}{\|p_{\alpha,2}^\delta\|_{L^2(\Omega)}}, \Delta v \right)_{L^2(\Omega)} &= \frac{\alpha}{\|p_{\alpha,2}^\delta\|_{L^2(\Omega)}} (p_{\alpha,2}^\delta, \Delta v)_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{\alpha}{\|p_{\alpha,2}^\delta\|_{L^2(\Omega)}} (p_\alpha^\delta, Av)_Y \text{ (puisque } v \in V_0) \\ &= \frac{\alpha}{\|p_{\alpha,2}^\delta\|_{L^2(\Omega)}} (A^* p_\alpha^\delta, v)_{H^2(\Omega)} \\ &= \frac{\alpha}{\|p_{\alpha,2}^\delta\|_{L^2(\Omega)}} (u_\alpha^\delta, v)_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Le résultat annoncé vient alors de l'unicité de la solution du problème [QR].

■

Le théorème 3.3 a pour conséquence immédiate la proposition suivante :

**Propriété 3.14** *Sous l'hypothèse [H],  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\|p_{\alpha,2}^\delta\|_{L^2(\Omega)}} = 0$ , soit  $\varepsilon_\alpha^\delta \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$ .*

**Preuve :** on sait que sous l'hypothèse [H],  $(\Delta u_\alpha^\delta, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{\|p_{\alpha,2}^\delta\|_{L^2(\Omega)}} (u_\alpha^\delta, v)_{H^2(\Omega)} = 0$ ,  $\forall 0 < \alpha < \alpha_0$ .  $\forall v \in V_0$ . De plus, on sait que  $u_\alpha^\delta \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{H^2(\Omega)} u^\delta$  et comme  $\|\Delta u_\alpha^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \alpha$ ,  $\Delta u_\alpha^\delta \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{L^2(\Omega)} 0$ . Le lemme 3.3 nous donne également l'existence de  $v_0 \in V_0$  t.q.  $(u^\delta, v_0)_{H^2(\Omega)} \neq 0$ . Le résultat est alors immédiat.

■

**Conclusion :** en présence d'une donnée bruitée, nous avons tout d'abord défini  $u^\delta$ , unique solution du problème d'optimisation sous contrainte  $[P_0^\delta]$ , et fonction vérifiant le principe de Morozov que nous avons décidé de suivre. Nous avons aussi défini  $u_\alpha^\delta$ , unique solution du problème d'optimisation  $[P_\alpha^\delta]$ , avec  $\alpha$  constante positive relâchant la contrainte sur le laplacien. Nous avons montré que  $u_\alpha^\delta \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} u^\delta$  :  $u_\alpha^\delta$  apparaît comme une bonne approximation de  $u^\delta$  si on choisit  $\alpha$  petit. Nous avons alors montré que le problème dual  $[P_\alpha^{\delta*}]$  de  $[P_\alpha^\delta]$  était un problème d'optimisation sans contrainte, qui admet une unique solution  $p_\alpha^\delta$  pour  $\alpha > 0$ . De plus, nous avons vu que  $u_\alpha^\delta = A^* p_\alpha^\delta$ . Ainsi, la résolution de  $[P_\alpha^{\delta*}]$ , plus simple que celle de  $[P_\alpha^\delta]$ , nous permet facilement d'obtenir  $u_\alpha^\delta$ . Finalement, nous avons montré que la solution  $u_\alpha^\delta$  de  $[P_\alpha^{\delta*}]$  pour  $\alpha > 0$  est également solution d'un problème de quasi-réversibilité, avec une donnée régularisée et un paramètre  $\varepsilon$  que nous avons explicités : nous avons ainsi rempli notre double objectif initial.

Nous pourrions néanmoins nous demander si nous n'avons pas simplement déplacé le problème de fixer le paramètre  $\varepsilon$  à celui de fixer le paramètre  $\alpha$ . Il n'en est rien : en effet, s'il n'était pas légitime de faire tendre  $\varepsilon$  vers 0 en présence d'une donnée bruitée comme vu au 3.2, il est par contre tout à fait légitime de faire tendre  $\alpha$  vers 0 en présence de cette même donnée. Autrement dit, le choix du paramètre  $\alpha$  est indépendant du niveau de bruit, et nous le prendrons "petit" dans les applications numériques du 3.5.

**Remarque :** la donnée régularisée et le paramètre  $\varepsilon$  nous sont fournis a posteriori par la méthode : leur connaissance prend tout son intérêt lorsque l'on a à effectuer de nombreux calculs de solutions de problèmes de Cauchy à partir de la même donnée bruitée, dans un processus itératif par exemple. Nous n'aurons alors qu'à résoudre une unique fois le problème d'optimisation  $[P_\alpha^{\delta*}]$ , puis nous pourrions

ensuite utiliser la méthode [QR] avec le paramètre et la donnée régularisée obtenus. Nous mettrons cette idée en application dans la troisième partie de cette thèse.

Remarque : toute l'étude a été faite pour un même niveau de bruit  $\delta$  sur la donnée de Dirichlet et de Neumann. L'extension au cas où le niveau de bruit est différent ( $\|g_i^\delta - g_i\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta_i$ ) se fait sans aucune difficulté. De même, nous ferons nos applications numériques dans un domaine polygonal de  $\mathbb{R}^2$ , qui n'est donc pas à frontière  $C^{1,1}$ . De nouveau, les résultats obtenus s'étendent aux cas des polygones de  $\mathbb{R}^2$  sans difficulté, en utilisant notamment les résultats de [Gri85].

### 3.4 Discrétisation du problème

On suppose désormais que  $\Omega$  est un polygone de  $\mathbb{R}^2$ . On se donne une triangulation régulière  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$ , telle que  $\bar{\Gamma}$  soit l'union des côtés de certains triangles  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ . On notera  $N_K$  le nombre de triangles de la triangulation,  $N_s$  le nombre de sommets de la triangulation,  $N_{s\Gamma}$  et  $N_{a\Gamma}$  (resp.  $N_{s\Gamma_c}$  et  $N_{a\Gamma_c}$ ) le nombre de sommets et d'arêtes de  $\Gamma$  (resp.  $\Gamma_c$ ).

#### 3.4.1 Espaces discrets, produits scalaires

Les espaces fonctionnels apparaissant dans les problèmes  $[P_\alpha^\delta]$  et  $[P_\alpha^{\delta*}]$  sont  $H^2(\Omega)$ ,  $L^2(\Gamma)$  et  $L^2(\Omega)$ . Il va nous falloir définir leurs équivalents discrets. L'équivalent de  $H^2(\Omega)$  sera bien sûr  $W_h$ , espace des éléments finis F.V.1 décrit au 2.2.2. Il est muni du produit scalaire

$$(u_h, v_h)_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (u_h, v_h)_{H^2(K)}.$$

**Lemme 3.4**  $d_{W_h} := \dim(W_h) = N_s + 3N_K + N_{a\Gamma} + N_{a\Gamma_c}$ .

Preuve : tout d'abord, il y a une fonction de base par sommet, donc  $N_s$  fonctions de base. Puis il y a 2 fonctions de base par arêtes : si on considère que chaque arête est partagée par deux triangles, cela fait  $6N_K/2 = 3N_K$  fonctions de base. Mais on a alors oublié de prendre en compte les arêtes qui sont sur le bord de  $\Omega$  : elles ne sont pas partagées entre deux triangles, et on a donc oublié de compter une fonction de base pour chacune de ces arêtes. Il y a  $N_{a\Gamma} + N_{a\Gamma_c}$  arêtes sur le bord de  $\Omega$ . Le résultat suit. ■

Chaque élément  $w_h \in W_h$  peut donc être identifié avec le vecteur de ses coordonnées dans la base canonique de  $W_h$ , élément de  $R^{d_{W_h}}$  que nous noterons  $\vec{w}_h$ . La matrice  $M_{W_h}$  du produit scalaire correspondant a déjà été calculée<sup>21</sup>, elle vérifie :

$$\forall (u_h, v_h) \in W_h \times W_h, (u_h, v_h)_h = \vec{u}_h^T M_{W_h} \vec{v}_h.$$

On rappelle par ailleurs que  $V_{h,0}$  est l'ensemble des fonctions de  $W_h$  dont les degrés de liberté sur  $\Gamma$  sont nuls.

Nous allons maintenant définir trois autres espaces discrets qui nous serviront par la suite :

- $P_{0h}$  est l'ensemble des fonctions  $p_{0h} \in L^2(\Gamma)$  continues sur  $\Gamma$  telles que pour toute arête  $e$  de  $\mathcal{T}_h$  contenue dans  $\Gamma$ ,  $p_{0h}|_e \in \mathbb{P}_2(e)$
- $P_{1h}$  est l'ensemble des fonctions  $p_{1h} \in L^2(\Gamma)$  telles que pour toute arête  $e$  de  $\mathcal{T}_h$  contenue dans  $\Gamma$ ,  $p_{1h}|_e \in \mathbb{P}_0(e)$
- $P_{2h}$  est l'ensemble des fonctions  $p_{2h} \in L^2(\Omega)$  telles que pour tout triangle  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ ,  $p_{2h}|_K \in \mathbb{P}_1(K)$ .

---

<sup>21</sup>cf partie 2.2.4

**Lemme 3.5**  $d_{P_{0h}} := \dim(P_{0h}) = N_{s\Gamma} + N_{a\Gamma}$ ,  $d_{P_{1h}} := \dim(P_{1h}) = N_{a\Gamma}$ ,  $d_{P_{2h}} := \dim(P_{2h}) = 3N_K$ .

Preuve : direct. ■

Construisons maintenant les matrices des produits scalaires dans  $P_{0h}$ ,  $P_{1h}$  et  $P_{2h}$ .

•  $\mathbf{P}_{0h}$

On a  $\bar{\Gamma} = \bigcup_{i=1}^{N_{a\Gamma}} [A_i, A_{i+1}]$ , avec  $[A_i, A_{i+1}] \subset \partial K$  où  $K$  est un triangle de  $\mathcal{T}_h$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, N_{a\Gamma}\}$ , on note  $M_i$  le milieu de l'arête  $[A_i, A_{i+1}]$ . Alors tout élément  $p_{0h}$  de  $P_{0h}$  est uniquement représenté par le vecteur  $\vec{p}_{0h} \in \mathbb{R}^{d_{P_{0h}}}$  vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, N_{a\Gamma}\}, \quad \vec{p}_{0h\ 2i-1} = p_{0h}|_{[A_i, A_{i+1}]}(A_i), \quad \vec{p}_{0h\ 2i} = p_{0h}|_{[A_i, A_{i+1}]}(M_i), \\ \vec{p}_{0h\ 2i+1} = p_{0h}|_{[A_i, A_{i+1}]}(A_{i+1}).$$

On munit  $P_{0h}$  du produit scalaire  $L^2(\Gamma)$ . On a donc, pour tout  $(p_{0h}, q_{0h}) \in P_{0h} \times P_{0h}$ ,

$$(p_{0h}, q_{0h})_{P_{0h}} = (p_{0h}, q_{0h})_{L^2(\Gamma)} = \sum_{e \subset \Gamma} (p_{0h}, q_{0h})_{L^2(e)} = \vec{p}_{0h}^T \mathbf{M}_{P_{0h}} \vec{q}_{0h},$$

où  $\mathbf{M}_{P_{0h}}$  est la matrice du produit scalaire  $L^2$ . La matrice  $\mathbf{M}_{P_{0h}}$  est construite par assemblage des contributions de chaque arête  $e$  contenue dans  $\Gamma$  au produit scalaire. Soit donc  $p_{0h}$  et  $q_{0h}$  deux éléments de  $P_{0h}$  et  $e := ]A_i, A_{i+1}[$  une arête de  $\Gamma$ . On note  $\lambda_i$  l'unique fonction de  $P_1(e)$  telle que  $\lambda_i(A_j) = \delta_{ij}$ ,  $j \in \{i, i+1\}$ . On a alors

$$p_{0h}|_e = \vec{p}_{0h\ 2i-1} \lambda_i(2\lambda_i - 1) + \vec{p}_{0h\ 2i} 4\lambda_i \lambda_{i+1} + \vec{p}_{0h\ 2i+1} \lambda_{i+1}(2\lambda_{i+1} - 1) \\ q_{0h}|_e = \vec{q}_{0h\ 2i-1} \lambda_i(2\lambda_i - 1) + \vec{q}_{0h\ 2i} 4\lambda_i \lambda_{i+1} + \vec{q}_{0h\ 2i+1} \lambda_{i+1}(2\lambda_{i+1} - 1)$$

On est donc amené à calculer les intégrales  $\int_e \lambda_k(2\lambda_k - 1) \lambda_l(2\lambda_l - 1) d\sigma$  pour  $k, l \in \{i, i+1\}$ ,  $\int_e 4\lambda_i \lambda_{i+1} \lambda_k(2\lambda_k - 1) d\sigma$  pour  $k \in \{i, i+1\}$  et  $\int_e 16\lambda_i^2 \lambda_{i+1}^2 d\sigma$ . On va utiliser le lemme suivant<sup>22</sup> :

**Lemme 3.6** soit  $p \in \mathbb{P}_4(e)$ . On a :

$$\int_e p d\sigma = \frac{|e|}{90} \left[ 7p(A_1) + 32p\left(\frac{3A_1 + A_2}{4}\right) + 12p\left(\frac{A_1 + A_2}{2}\right) + 32p\left(\frac{A_1 + 3A_2}{4}\right) + 7p(A_2) \right].$$

On a donc :

$$\int_e \lambda_k(2\lambda_k - 1) \lambda_l(2\lambda_l - 1) d\sigma = \frac{|e|}{90} \left[ \left(7 + \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\right) \delta_{kl} + \left(-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)(1 - \delta_{kl}) \right] = \frac{|e|}{30} [5\delta_{kl} - 1] \\ \int_e 4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_k(2\lambda_k - 1) d\sigma = \frac{2|e|}{30} \\ \int_e 16\lambda_1^2 \lambda_2^2 d\sigma = \frac{16|e|}{30}.$$

On obtient donc :  $\int_e p_{0h} q_{0h} d\sigma = \frac{|e|}{30} \begin{bmatrix} \vec{p}_{0h\ 2i-1} & \vec{p}_{0h\ 2i} & \vec{p}_{0h\ 2i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_{0h\ 2i-1} \\ \vec{q}_{0h\ 2i} \\ \vec{q}_{0h\ 2i+1} \end{bmatrix}$ , il suffit

ensuite d'assembler les contributions pour obtenir  $\mathbf{M}_{P_{0h}}$ .

<sup>22</sup>cf formule 25.4.14 de [AS72]



•**P<sub>1h</sub>**

Soit  $p_{1h}, q_{1h}$  deux éléments de  $P_{1h}$ . On sait que  $P_{1h}$  est un espace vectoriel de dimension  $d_{P_{1h}} := N_{a\Gamma}$ . On munit  $P_{1h}$  du produit scalaire  $L^2$  :

$$(p_{1h}, q_{1h})_{P_{1h}} = \sum_{e \in \Gamma} \int_e p_{1h} q_{1h} d\sigma = \sum_{i=1}^{d_{P_{1h}}} p_{1h|e_i} q_{1h|e_i} |e_i|$$

puisque  $p_{1h}$  et  $q_{1h}$  sont constants sur chaque arête. On a donc :  $(p_{1h}, q_{1h})_{P_{1h}} = \vec{p}_{1h}^T \mathbf{M}_{P_{1h}} \vec{q}_{1h}$  où  $(\vec{p}_{1h}, \vec{q}_{1h}) \in \mathbb{R}^{d_{P_{1h}}} \times \mathbb{R}^{d_{P_{1h}}}$  vérifient  $p_{1h|i} = p_{1h|e_i}$ ,  $q_{1h|i} = q_{1h|e_i}$ , et  $\mathbf{M}_{P_{1h}}$  est une matrice diagonale telle que  $(\mathbf{M}_{P_{1h}})_{ii} = |e_i|$ .

•**P<sub>2h</sub>**

Reste maintenant à s'intéresser à  $P_{2h}$ . C'est un espace vectoriel de dimension  $d_{P_{2h}} := 3N_K$ . On munit  $P_{2h}$  du produit scalaire  $L^2$  :

$$\forall (p_{2h}, q_{2h}) \in P_{2h} \times P_{2h}, (p_{2h}, q_{2h})_{P_{2h}} := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p_{2h} q_{2h} dx.$$

On représente toute fonction  $p_{2h}$  de  $P_{2h}$  par un vecteur  $\vec{p}_{2h}$  de  $\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}$  de la manière suivante : on suppose les triangles numérotés de 1 à  $N_K$ . On sait que pour tout  $i \in \{1 \dots N_K\}$ ,  $p_{2h|K_i} \in \mathbb{P}_1(K_i)$ . On note  $A_{i1}, A_{i2}$  et  $A_{i3}$  les trois sommets de  $K_i$ , et  $\lambda_{ij}$  les fonctions de  $\mathbb{P}_1(K_i)$  telles que  $\lambda_{ij}(A_{ik}) = \delta_{jk}$ . Il existe  $p_{i1}, p_{i2}$  et  $p_{i3}$  trois réels tels que :  $p_{2h|K_i} := \sum_{j=1}^3 p_{ij} \lambda_{ij}$ . On pose alors, pour  $i \in \{1 \dots N_K\}$ , pour  $j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $(\vec{p}_{2h})_{3(i-1)+j} := p_{ij}$ . On a de plus :

$$(p_{2h}, q_{2h})_{P_{2h}} = \sum_{i=1}^{N_K} \int_{K_i} p_{2h} q_{2h} dx = \sum_{i=1}^{N_K} \int_{K_i} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 p_{ij} \lambda_{ij} q_{ik} \lambda_{ik} dx = \sum_{i=1}^{N_K} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int_{K_i} p_{ij} \lambda_{ij} q_{ik} \lambda_{ik} dx.$$

On est donc ramené à calculer  $\int_{K_i} \lambda_{ij} \lambda_{ik} dx$  pour  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Pour ce faire, on utilise le lemme suivant<sup>23</sup> :

**Lemme 3.7** pour tout triangle  $K$  de sommets  $A_1, A_2, A_3$ , pour tout  $p \in \mathbb{P}_2(K)$ , on a :

$$\int_K p dx = \frac{|K|}{3} \left[ p \left( \frac{A_1 + A_2}{2} \right) + p \left( \frac{A_2 + A_3}{2} \right) + p \left( \frac{A_1 + A_3}{2} \right) \right].$$

On a donc

$$\int_{K_i} \lambda_{ij} \lambda_{ik} dx = \frac{|K_i|}{12} \delta_{jk} + \frac{|K_i|}{6} (1 - \delta_{jk}) = \frac{|K_i|}{12} (2 - \delta_{jk})$$

d'où l'on déduit

$$(p_{2h}, q_{2h})_{P_{2h}} = \sum_{i=1}^{N_K} \frac{|K_i|}{12} \begin{bmatrix} p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{i1} \\ q_{i2} \\ q_{i3} \end{bmatrix} = \vec{p}_{2h}^T \mathbf{M}_{P_{2h}} \vec{q}_{2h}$$

$$\text{avec } \mathbf{M}_{P_{2h}} := \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{N_K} \end{bmatrix} \quad \text{et } \mathbf{M}_i := \frac{|K_i|}{12} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

<sup>23</sup>voir proposition 4.10 p.48 de [PL96]

### 3.4.2 Problèmes d'optimisation discrets

#### Opérateur $A_h$

Nous avons besoin d'une version discrétisée de l'opérateur  $A : v \in H^2(\Omega) \mapsto (v|_\Gamma, \partial_\nu v|_\Gamma, \Delta v) \in L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma) \times L^2(\Omega)$ . Suivant les idées déjà introduites dans l'étude des éléments finis F.V.1., nous allons introduire l'opérateur  $A_h : w_h \in W_h \mapsto (\gamma_h(w_h), \gamma_{\nu h}(w_h), \Delta_h w_h) \in P_{0h} \times P_{1h} \times P_{2h}$ , où les opérateurs  $\gamma_h$ ,  $\gamma_{\nu h}$  et  $\Delta_h$  vérifient, pour tout  $w_h \in W_h$  :

- $\gamma_h(w_h)$  est l'unique fonction de  $P_{0h}$  vérifiant, pour toute arête  $e$  de  $\mathcal{T}_h$  telle que  $e \subset \Gamma$ ,  $\gamma_h(w_h)|_e \in \mathbb{P}_2(e)$  et  $\gamma_h(w_h)$  prend les mêmes valeurs que  $w_h$  aux extrémités et au milieu de  $e$
- $\gamma_{\nu h}(w_h)$  est l'unique fonction de  $P_{1h}$  vérifiant, pour toute arête  $e$  de  $\mathcal{T}_h$  telle que  $e \subset \Gamma$ ,  $\gamma_{\nu h}(w_h)|_e := \frac{1}{|e|} \int_e \partial_\nu w_h d\sigma$
- $\Delta_h(w_h)$  est l'unique fonction de  $P_{2h}$  telle que pour tout triangle  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ ,  $\Delta_h(w_h)|_K = \Delta(w_h|_K)$ .

Avec ces définitions, pour tout  $w_h \in W_h$ , il est très simple de trouver  $\gamma_h(w_h)$  et  $\gamma_{\nu h}(w_h)$ . En effet, soit  $e$  une arête de  $\mathcal{T}_h$  telle que  $e \subset \Gamma$ . Soit  $K$  le triangle ayant  $e$  pour arête (il n'y en a qu'un, puisque  $e$  est sur le bord de  $\Omega$ ). On note  $A_i$  les sommets de  $K$ ,  $M_i$  le milieu du côté de  $K$  opposé à  $A_i$ , et  $s_i$ ,  $m_i$  et  $d_i$  les fonctions de base F.V.1 de  $P_K$ . On suppose que  $e := ]A_1, A_2[$ . Par définition de  $W_h$ , il existe  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  et  $\gamma_i$  tels que

$$w_h|_K = \sum_{i=1}^3 \alpha_i s_i + \beta_i m_i + \gamma_i d_i.$$

alors on a  $\gamma(w_h)|_e = \alpha_1 \lambda_1 (2\lambda_1 - 1) + 4\beta_3 \lambda_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_2 (2\lambda_2 - 1)$ ,  $\gamma_{\nu h}(w_h)|_e = \gamma_3$ .

L'opérateur  $\Delta_h$  est un peu plus compliqué. Il faut connaître le laplacien d'une fonction de  $P_K$ , pour  $K \in \mathcal{T}_h$ .

**Propriété 3.15** soit  $K \in \mathcal{T}_h$ ,  $s_i$ ,  $m_i$  et  $d_i$  les fonctions de base de  $P_K$ , et  $v \in P_K$  t.q.

$$v = \sum_{i=1}^3 \alpha_i s_i + \beta_i m_i + \gamma_i d_i.$$

Alors  $\Delta v = \sum_{i=1}^3 \omega_i \lambda_i$ , où  $\omega_i$  vérifie :

$$\begin{aligned} \omega_i = & \alpha_i \left( 10|\nabla \lambda_i|^2 - 6 C_{i,i+1} |\nabla \lambda_{i+1}|^2 - 6 C_{i,i-1} |\nabla \lambda_{i-1}|^2 \right) + \alpha_{i+1} \left( -2|\nabla \lambda_{i+1}|^2 - 6 C_{i+1,i-1} |\nabla \lambda_{i-1}|^2 \right. \\ & \left. + 6 C_{i+1,i} |\nabla \lambda_i|^2 \right) + \alpha_{i-1} \left( -2|\nabla \lambda_{i-1}|^2 + 6 C_{i-1,i} |\nabla \lambda_i|^2 - 6 C_{i-1,i+1} |\nabla \lambda_{i+1}|^2 \right) + \beta_i \left( 24|\nabla \lambda_i|^2 \right. \\ & \left. - 16 \nabla \lambda_{i+1} \cdot \nabla \lambda_{i-1} \right) + \beta_{i+1} \left( 16 \nabla \lambda_{i+1} \cdot \nabla \lambda_i - 8|\nabla \lambda_i|^2 \right) + \beta_{i-1} \left( 16 \nabla \lambda_{i-1} \cdot \nabla \lambda_i - 8|\nabla \lambda_i|^2 \right) \\ & + \gamma_i \left( -12 \frac{|K|}{l_i} |\nabla \lambda_i|^2 \right) + \gamma_{i+1} \left( 12 \frac{|K|}{l_{i+1}} |\nabla \lambda_{i+1}|^2 \right) + \gamma_{i-1} \left( 12 \frac{|K|}{l_{i-1}} |\nabla \lambda_{i-1}|^2 \right) \end{aligned}$$

**Preuve** : calculons les laplaciens des fonctions de base. Pour cela, il suffit de se rappeler que  $\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2\nabla f \cdot \nabla g + f(\Delta g)$ , et  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ .

$$\begin{aligned} \Delta s_i = & \Delta [\lambda_i^2 (2\lambda_i - 1)] + C_{i,i+1} \Delta [\lambda_{i+1} (2\lambda_{i+1} - 1) (\lambda_{i+1} - 1)] + C_{i,i-1} \Delta [\lambda_{i-1} (2\lambda_{i-1} - 2) (\lambda_{i-1} - 1)] \\ = & 2|\nabla \lambda_i|^2 (6\lambda_i - 1) + 6 C_{i,i+1} |\nabla \lambda_{i+1}|^2 (2\lambda_{i+1} - 1) + 6 C_{i,i-1} |\nabla \lambda_{i-1}|^2 (2\lambda_{i-1} - 1) \\ = & [10|\nabla \lambda_i|^2 - 6 C_{i,i+1} |\nabla \lambda_{i+1}|^2 - 6 C_{i,i-1} |\nabla \lambda_{i-1}|^2] \lambda_i \\ & + [-2|\nabla \lambda_i|^2 + 6 C_{i,i+1} |\nabla \lambda_{i+1}|^2 - 6 C_{i,i-1} |\nabla \lambda_{i-1}|^2] \lambda_{i+1} \\ & + [-2|\nabla \lambda_i|^2 - 6 C_{i,i+1} |\nabla \lambda_{i+1}|^2 + 6 C_{i,i-1} |\nabla \lambda_{i-1}|^2] \lambda_{i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta m_i &= 24|\nabla\lambda_i|^2(2\lambda_i - 1) + 8\nabla\lambda_{i+1}\cdot\nabla\lambda_{i-1} - 24\lambda_i\nabla\lambda_{i+1}\cdot\nabla\lambda_{i-1} - 24\lambda_{i-1}\nabla\lambda_i\cdot\nabla\lambda_{i+1} - 24\lambda_{i+1}\nabla\lambda_i\cdot\nabla\lambda_{i-1} \\
&= [24|\nabla\lambda_i|^2 - 16\nabla\lambda_{i+1}\cdot\nabla\lambda_{i-1}] \lambda_i + [-24|\nabla\lambda_i|^2 + 8\nabla\lambda_{i+1}\cdot\nabla\lambda_{i-1} - 24\nabla\lambda_i\cdot\nabla\lambda_{i-1}] \lambda_{i+1} \\
&\quad + [-24|\nabla\lambda_i|^2 + 8\nabla\lambda_{i+1}\cdot\nabla\lambda_{i-1} - 24\nabla\lambda_i\cdot\nabla\lambda_{i+1}] \lambda_{i-1} \\
&= [24|\nabla\lambda_i|^2 - 16\nabla\lambda_{i+1}\cdot\nabla\lambda_{i-1}] \lambda_i + \sum_{j\in\{i+1,i-1\}} [24\nabla\lambda_i\cdot\nabla\lambda_j + 8\nabla\lambda_{i-1}\cdot\nabla\lambda_{i+1}] \lambda_j \\
&= [24|\nabla\lambda_i|^2 - 16\nabla\lambda_{i+1}\cdot\nabla\lambda_{i-1}] \lambda_i + \sum_{j\in\{i+1,i-1\}} [16\nabla\lambda_i\cdot\nabla\lambda_j - 8|\nabla\lambda_j|^2] \lambda_j \\
\Delta d_i &= -12\frac{|K|}{l_i}(2\lambda_i - 1) = -12\frac{|K|}{l_i}\lambda_i + 12\frac{|K|}{l_i}\lambda_{i+1} + 12\frac{|K|}{l_i}\lambda_{i-1}.
\end{aligned}$$

On a ensuite  $\Delta v = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \Delta s_i + \beta_i \Delta m_i + \gamma_i \Delta d_i$ , et il suffit de rassembler les termes. ■

Nous savons que l'opérateur  $A$  est injectif, et d'image dense. Que peut-on dire de  $A_h$ ? Nous avons tout d'abord la propriété suivante :

**Propriété 3.16**  $A_h$  est surjectif de  $W_h$  dans  $P_{0h} \times P_{1h} \times P_{2h}$  si et seulement si  $\Delta_h$  est surjectif de  $V_{h,0}$  dans  $P_{2h}$ .

Preuve : si  $A_h$  est surjectif, alors pour tout  $p_{2h} \in P_{2h}$ , il existe un  $w_h \in W_h$  tel que  $A_h w_h = (0, 0, p_{2h})$ . On a donc  $\gamma_h(w_h) = 0$  et  $\gamma_{\nu h}(w_h) = 0$ , ce qui signifie que  $w_h$  est un élément de  $V_{h,0}$ . Pour tout  $p_{2h}$  de  $P_{2h}$ , il existe donc un élément  $w_h$  de  $V_{h,0}$  tel que  $\Delta_h w_h = p_{2h}$ .

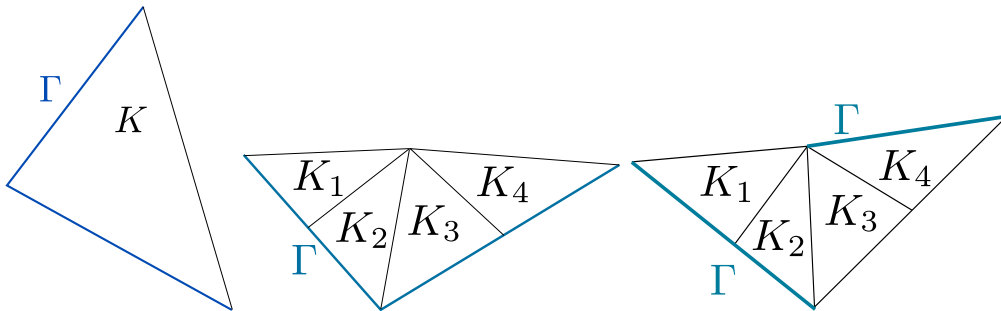
Supposons maintenant  $\Delta_h$  surjectif de  $V_{h,0}$  dans  $P_{2h}$ . Soit  $(p_{0h}, p_{1h}, p_{2h}) \in P_{0h} \times P_{1h} \times P_{2h}$ . On définit  $v_h \in W_h$  par :

- si  $e$  est une arête de la triangulation  $\mathcal{T}_h$  contenue dans  $\Gamma$ ,  $e := [A_1, A_2]$ ,  $M$  le milieu de  $e$ , alors  $v_h(A_i) = p_{0h}(A_i)$ ,  $\forall i \in \{1, 2\}$ ,  $v_h(M) = p_{0h}(M)$ , et  $\frac{1}{|e|} \int_e \partial_\nu v_h d\sigma = p_{1h}$ .
- si  $A$  est un sommet de la triangulation  $\mathcal{T}_h$  n'appartenant pas à  $\Gamma$ , alors  $v_h(A) = 0$ , et pour tout arête  $e$  de la triangulation ayant pour sommet  $A$ ,  $M$  le milieu d'une telle arête,  $v_h(M) = 0$  et  $\int_e \partial_\nu v_h d\sigma = 0$ .

On définit ainsi un unique élément de  $W_h$  par sa décomposition sur les fonctions de base de  $W_h$ . Il est clair que  $\gamma_h(v_h) = p_{0h}$  et  $\gamma_{\nu h}(v_h) = p_{1h}$ . On note alors  $u_h$  un élément de  $V_{h,0}$  tel que  $\Delta_h u_h = p_{2h} - \Delta_h v_h$  (il en existe un par hypothèse). On vérifie alors que  $A_h(u_h + v_h) = (p_{0h}, p_{1h}, p_{2h})$ , et donc  $A_h$  est surjectif de  $W_h$  dans  $P_{0h} \times P_{1h} \times P_{2h}$ . ■

Nous allons supposer tout d'abord que la triangulation  $\mathcal{T}_h$  présente l'une des deux situations suivantes :

- (1) il existe un triangle  $K$  ayant deux arêtes contenues dans  $\Gamma$
- (2) il existe quatre triangles  $K_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  tels que  $K_1$  et  $K_2$  aient une arête commune,  $K_2$  et  $K_3$  aussi, ainsi que  $K_3$  et  $K_4$ , et chacun de ces triangles a une arête contenue dans  $\Gamma$ .



À gauche, situation (1), au centre et à droite, situation (2)

On a alors la propriété suivante :

**Propriété 3.17** *si la triangulation  $\mathcal{T}_h$  présente la situation (1) ou la situation (2), alors  $A_h$  n'est pas surjectif.*

Preuve : dans la situation (1), dans le triangle  $K$  concerné, l'espace engendré par les laplaciens des fonctions de  $V_{h,0}$  est au mieux de dimension 2, car il n'y a que deux degrés de liberté non fixés. Or, on voudrait engendrer  $\mathbb{P}_1(K)$ , qui est un espace de dimension 3. Dès lors,  $\Delta_h$  ne peut être surjectif de  $V_{h,0}$  dans  $P_{2h}$ , et donc  $A_h$  n'est pas surjectif.

La situation (2) est similaire : on engendre au mieux un espace vectoriel de dimension 11, alors que l'espace que l'on voudrait engendrer est de dimension 12. ■

On ne sait malheureusement pas prouver que, excepté certains cas,  $A_h$  est surjectif. On a néanmoins la conjecture suivante, qui s'est vérifiée en pratique :

**Conjecture** : si la triangulation  $\mathcal{T}_h$  ne présente ni la situation (1), ni la situation (2), alors  $A_h$  est surjectif.

Remarquons que  $A_h$  ne dépend que de  $\mathcal{T}_h$ . On peut donc construire  $A_h$  dès que l'on a la triangulation du domaine, et vérifier que c'est bien un opérateur surjectif. Dorénavant, nous supposons que  $A_h$  est surjectif.

**Propriété 3.18** *si  $N_s + N_{a\Gamma_c} - N_{a\Gamma} - N_{s\Gamma} > 0$ , alors  $A_h$  n'est pas injectif.*

Preuve :  $P_{0h} \times P_{1h} \times P_{2h}$  est un espace vectoriel de dimension  $N_{s\Gamma} + 2N_{a\Gamma} + 3N_K$ . Pour que  $A_h$  ne soit pas injectif, il suffit donc d'avoir  $\dim(W_h) > N_{s\Gamma} + 2N_{a\Gamma} + 3N_K$ , soit  $N_s + 3N_K + N_{a\Gamma} + N_{a\Gamma_c} > N_{s\Gamma} + 2N_{a\Gamma} + 3N_K$ , ou encore  $N_s + N_{a\Gamma_c} - N_{a\Gamma} - N_{s\Gamma} > 0$ . ■

Cette propriété montre que  $A_h$  n'est pas injectif la plupart du temps. En effet, on a souvent  $N_s$  grand devant  $N_{a\Gamma}$  et  $N_{s\Gamma}$  puisque pour une triangulation classique, on a bien plus de sommets dans le domaine  $\Omega$  que de sommets et d'arêtes sur le bord du domaine  $\partial\Omega$ .

Remarque : il est facile de vérifier que  $N_{a\Gamma} \leq N_{s\Gamma} - 1$ . On en déduit que si  $N_s > 2N_{s\Gamma} - 1$ , on aura automatiquement  $A_h$  non injectif par 3.18. Or cette condition est pratiquement toujours vérifiée.

En conclusion, on peut dire que  $A_h$  a toutes les chances d'être surjectif et de ne pas être injectif.

Aux identifications décrites dans la partie précédente, à savoir

$$\begin{aligned} w_h \in W_h &\leftrightarrow \vec{w}_h \in \mathbb{R}^{d_{W_h}} \\ p_{0h} \in P_{0h} &\leftrightarrow \vec{p}_{0h} \in \mathbb{R}^{d_{P_{0h}}} \\ p_{1h} \in P_{1h} &\leftrightarrow \vec{p}_{1h} \in \mathbb{R}^{d_{P_{1h}}} \\ p_{2h} \in P_{2h} &\leftrightarrow \vec{p}_{2h} \in \mathbb{R}^{d_{P_{2h}}} \end{aligned}$$

correspondent des identifications sur les opérateurs, à savoir

$$\begin{aligned} \gamma_h : W_h &\mapsto P_{0h} \leftrightarrow \mathbf{G}_h \in \mathbb{R}^{d_{W_h} \times d_{P_{0h}}} \\ \gamma_{\nu h} : W_h &\mapsto P_{1h} \leftrightarrow \mathbf{G}_{\nu h} \in \mathbb{R}^{d_{W_h} \times d_{P_{1h}}} \\ \Delta_h : W_h &\mapsto P_{2h} \leftrightarrow \mathbf{\Delta}_h \in \mathbb{R}^{d_{W_h} \times d_{P_{2h}}}. \end{aligned}$$

On a alors directement

$$A_h : W_h \mapsto P_{0h} \times P_{1h} \times P_{2h} \leftrightarrow \mathbf{A}_h := \begin{bmatrix} \mathbf{G}_h \\ \mathbf{G}_{\nu h} \\ \mathbf{\Delta}_h \end{bmatrix}.$$

### Problèmes primal et dual discrets

Nous allons supposer que  $g_0^\delta$  et  $g_1^\delta$  appartiennent à  $P_{0h}$  et  $P_{1h}$ . On les notera dorénavant  $g_{0h}^\delta$  et  $g_{1h}^\delta$ . En pratique, cette supposition sera toujours vérifiée : en effet, nos données bruitées proviennent de mesures ponctuelles, nous devons donc les interpoler, ce que nous faisons préférentiellement dans les espaces qui nous intéressent.

On définit  $C_{\alpha h}^\delta := \{w_h \in W_h \mid A_h w_h \in \overline{\mathcal{B}(g_{0h}^\delta, \delta)} \times \overline{\mathcal{B}(g_{1h}^\delta, \delta)} \times \overline{\mathcal{B}(0, \alpha)}\}$ . Le problème primal discret que nous voulons résoudre est :

Problème  $[P_{\alpha h}^\delta]$  : trouver  $u_{\alpha h}^\delta \in C_{\alpha h}^\delta$  t.q.  $\frac{1}{2} \|u_{\alpha h}^\delta\|_h^2 = \inf_{v_h \in C_{\alpha h}^\delta} \frac{1}{2} \|w_h\|_h^2$ .

Il est clair que, de la même manière que  $[P_\alpha^\delta]$  admettait une unique solution,  $[P_{\alpha h}^\delta]$  admet également une unique solution, à condition que  $C_{\alpha h}^\delta$  soit non vide, ce qui est le cas si  $A_h$  est surjectif : en effet, n'importe quel antécédent de  $(g_{0h}^\delta, g_{1h}^\delta, 0)$  par  $A_h$  est un élément de  $C_{\alpha h}^\delta$ .

On définit  $Y_h := P_{0h} \times P_{1h} \times P_{2h}$  et  $\chi_{\alpha h}^\delta : p_h \in Y_h \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } p \in \overline{\mathcal{B}(g_{0h}^\delta, \delta)} \times \overline{\mathcal{B}(g_{1h}^\delta, \delta)} \times \overline{\mathcal{B}(0, \alpha)} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$ .

On réécrit le problème  $[P_{\alpha h}^\delta]$  :

Problème  $[P_{\alpha h}^\delta]$  : trouver  $u_{\alpha h}^\delta \in W_h$  t.q.  $\frac{1}{2} \|u_{\alpha h}^\delta\|_h^2 + \chi_{\alpha h}^\delta(A_h u_{\alpha h}^\delta) = \inf_{v_h \in W_h} \frac{1}{2} \|w_h\|_h^2 + \chi_{\alpha h}^\delta(A_h v_h)$ .

Comme dans le cas continu, on pose le problème dual  $[P_{\alpha h}^{\delta*}]$  :

Problème  $[P_{\alpha h}^{\delta*}]$  : trouver  $p_{\alpha h}^\delta \in Y_h$  t.q.  $G_{\alpha h}^\delta(p_{\alpha h}^\delta) = \inf_{q_h \in Y_h} G_{\alpha h}^\delta(q_h)$ .

avec  $G_{\alpha h}^\delta(p_h) = \frac{1}{2} \|A_h^* p_h\|_h^2 + \delta \|p_{0h}\|_{P_{0h}} - (p_{0h}, g_{0h}^\delta)_{P_{0h}} + \delta \|p_{1h}\|_{P_{1h}} - (p_{1h}, g_{1h}^\delta)_{P_{1h}} + \alpha \|p_{2h}\|_{P_{2h}}$ .

Ce problème admet bien entendu une unique solution  $p_{\alpha h}^\delta$  pour  $\alpha > 0$  si  $A_h$  est surjectif, puisque dans ce cas  $A_h^*$  est injectif. On a de nouveau :

$$\boxed{u_{\alpha h}^\delta = A_h^* p_{\alpha h}^\delta}$$

### Lien avec la quasi-réversibilité discrète

On ne peut plus montrer, comme dans le cas continu, que  $p_{\alpha h, 2}^\delta$  est non nul. En effet, il n'est pas clair que  $(u_h^\delta, v_h)_h = 0$ , pour tout  $v_h \in V_{h,0}$ , entraîne  $u_h^\delta = 0$ . Nous allons néanmoins supposer que c'est effectivement le cas, pour  $\alpha$  suffisamment petit, si on a  $\|g_{0h}^\delta\|_{P_{0h}} \geq \delta$  ou  $\|g_{1h}^\delta\|_{P_{1h}} \geq \delta$ .

On montre alors, comme précédemment, que  $\Delta_h u_{\alpha h}^\delta = -\alpha \frac{p_{\alpha h, 2}^\delta}{\|p_{\alpha h, 2}^\delta\|_{P_{2h}}}$ , et on a le théorème suivant :

**Théorème 3.4** *On note  $(\tilde{g}_{0h}, \tilde{g}_{1h}) := (\gamma_h(u_{\alpha h}^\delta), \gamma_{\nu h}(u_{\alpha h}^\delta))$ , et  $\varepsilon := \frac{\alpha}{\|p_{\alpha h, 2}^\delta\|_{P_{2h}}}$ . Alors  $u_{\alpha h}^\delta$  est l'unique solution du problème de quasi-réversibilité suivant : trouver  $u_h \in W_h$ ,  $(\gamma_h(u_h), \gamma_{\nu h}(u_h)) = (\tilde{g}_{0h}, \tilde{g}_{1h})$ , tel que pour tout  $v_h \in V_{0h}$ , on ait :*

$$(\Delta_h u_h, \Delta_h v_h)_{L^2(\Omega)} + \varepsilon (u_h, v_h)_h = 0.$$

Preuve : on fait exactement comme dans la preuve du théorème 3.3. ■

### Transformation des problèmes d'optimisation discrets

On se place dans cette partie en notation vectorielle, en faisant les identifications décrites p.71. On va utiliser la propriété suivante :

**Propriété 3.19** *soit  $A$  une matrice réelle symétrique définie positive. Alors il existe  $A^{1/2}$ , matrice réelle symétrique positive, telle que  $(A^{1/2})^2 = A$ .*

Preuve : comme  $A$  est symétrique définie positive, il existe  $P$  matrice orthogonale et  $\Lambda$  matrice diagonale, dont tous les coefficients sont positifs ou nuls, tels que  $A = P\Lambda P^T$ <sup>24</sup>. On définit alors  $A^{1/2}$  par  $A_{ij}^{1/2} := \sqrt{\Lambda_{ij}}$ , et on vérifie que  $A^{1/2} := P\Lambda^{1/2}P^T$  vérifie les propriétés voulues. ■

Il peut être intéressant de transformer les problèmes d'optimisation de la manière suivante<sup>25</sup> : toutes les matrices des produits scalaires  $M_X$  (avec  $X = W_h, P_{0h}, P_{1h}$  ou  $P_{2h}$ ) intervenant dans nos problèmes étant par définition des matrices symétriques définies positives, on peut utiliser la proposition précédente et définir les matrices  $M_X^{1/2}$ . Toutes les matrices  $M_X^{1/2}$  sont inversibles. Posons  $G_{0h}^\delta := M_{P_{0h}}^{1/2} g_{0h}^\delta$  et  $G_{1h}^\delta := M_{P_{1h}}^{1/2} g_{1h}^\delta$ ,  $\tilde{G}_h := M_{P_{0h}}^{1/2} G_h M_{W_h}^{-1/2}$ ,  $\tilde{G}_{\nu h} := M_{P_{1h}}^{1/2} G_{\nu h} M_{W_h}^{-1/2}$ ,  $\tilde{\Delta}_h := M_{P_{2h}}^{1/2} \Delta_h M_{W_h}^{-1/2}$  et

$$\tilde{C}_\alpha^\delta := \left\{ \vec{w}_h \in \mathbb{R}^{d_{W_h}} \mid \|\tilde{\Delta}_h \vec{w}_h\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}} \leq \alpha, \|\tilde{G}_h \vec{w}_h - G_{0h}^\delta\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{0h}}}} \leq \delta, \|\tilde{G}_{\nu h} \vec{w}_h - G_{1h}^\delta\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{1h}}}} \leq \delta \right\}.$$

On s'intéresse alors au problème suivant :

Problème  $[\tilde{P}_{\alpha h}^\delta]$  : trouver  $\vec{w}_h \in \tilde{C}_{\alpha h}^\delta$  t.q.  $\frac{1}{2} \|\vec{w}_h\|_{\mathbb{R}^{d_{W_h}}}^2 = \inf_{\vec{v}_h \in \tilde{C}_{\alpha h}^\delta} \frac{1}{2} \|\vec{v}_h\|_{\mathbb{R}^{d_{W_h}}}^2$ .

**Propriété 3.20** *il existe une unique solution  $\vec{U}_{\alpha h}^\delta$  au problème  $[\tilde{P}_{\alpha h}^\delta]$ , et on a  $\vec{u}_{\alpha h}^\delta = M_{W_h}^{-1/2} \vec{U}_{\alpha h}^\delta$ .*

Preuve : on va montrer tout d'abord que  $M_{W_h}^{1/2} C_{\alpha h}^\delta = \tilde{C}_{\alpha h}^\delta$ . On a, pour tout  $\vec{v}_h \in W_h$  :

$$\|\tilde{\Delta}_h M_{W_h}^{1/2} \vec{v}_h\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}} = \|M_{P_{2h}}^{1/2} \Delta_h \vec{v}_h\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}} = \sqrt{\vec{v}_h^T \Delta_h^T M_{P_{2h}}^{T/2} M_{P_{2h}}^{1/2} \Delta_h \vec{v}_h} = \sqrt{\vec{v}_h^T \Delta_h^T M_{P_{2h}} \Delta_h \vec{v}_h} = \|\Delta_h \vec{v}_h\|_{P_{2h}}$$

puis que  $M_{P_{2h}}^{1/2}$  est une matrice symétrique. On obtient de même :

$$\|\tilde{G}_h M_{W_h}^{-1/2} \vec{v}_h - G_{0h}^\delta\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{0h}}}} = \|G_h \vec{v}_h - g_{0h}^\delta\|_{P_{0h}}, \quad \|\tilde{G}_{\nu h} M_{W_h}^{-1/2} \vec{v}_h - G_{1h}^\delta\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{1h}}}} = \|G_{\nu h} \vec{v}_h - g_{1h}^\delta\|_{P_{1h}}.$$

Il est alors direct que  $M_{W_h}^{1/2} C_{\alpha h}^\delta = \tilde{C}_{\alpha h}^\delta$ , et en particulier  $\tilde{C}_{\alpha h}^\delta$  est non vide. Le problème  $[\tilde{P}_{\alpha h}^\delta]$  admet dès lors une unique solution  $\vec{U}_{\alpha h}^\delta$ , et il est facile de vérifier que  $M_{W_h}^{-1/2} \vec{U}_{\alpha h}^\delta = \vec{u}_{\alpha h}^\delta$ . ■

Posons alors  $\tilde{A}_h := \begin{bmatrix} \tilde{G}_h \\ \tilde{G}_{\nu h} \\ \tilde{\Delta}_h \end{bmatrix}$ ,  $D := N_{s\Gamma} + 2N_{a\Gamma} + 3N_K$ , et pour tout  $\vec{p}_h \in \mathbb{R}^D$ ,  $\vec{p}_h = (\vec{p}_{0h}, \vec{p}_{1h}, \vec{p}_{2h}) \in \mathbb{R}^{d_{P_{0h}}} \times \mathbb{R}^{d_{P_{1h}}} \times \mathbb{R}^{d_{P_{2h}}} :$

$$\tilde{G}_{\alpha h}^\delta(\vec{p}_h) := \frac{1}{2} \|\tilde{A}_h^T \vec{p}_h\|_{\mathbb{R}^D}^2 + \delta \|\vec{p}_{0h}\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{0h}}}} - (G_{0h}^\delta, \vec{p}_{0h})_{\mathbb{R}^{d_{P_{0h}}}} + \delta \|\vec{p}_{1h}\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{1h}}}} - (G_{1h}^\delta, \vec{p}_{1h})_{\mathbb{R}^{d_{P_{1h}}}} + \alpha \|\vec{p}_{2h}\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}}$$

<sup>24</sup>voir corollaire 4.7 + remarque 4.2.5 (ii) de [Gon98]

<sup>25</sup>il s'est avéré que transformer les problèmes de cette façon rendait les méthodes numériques de résolution plus efficaces. La raison de ce phénomène ne nous paraît pas très claire.

Le problème dual de  $[\check{P}_{\alpha h}^\delta]$  est :

Problème  $[\check{P}_{\alpha h}^{\delta*}]$  : trouver  $\vec{P}_h \in \mathbb{R}^D$  t.q.  $\check{G}_{\alpha h}^\delta(\vec{P}_h) = \inf_{\vec{p}_h \in \mathbb{R}^D} \check{G}_{\alpha h}^\delta(\vec{p}_h)$ .

On a directement :

**Propriété 3.21** pour  $\alpha > 0$ , il existe une unique solution  $\vec{P}_{\alpha h}^\delta$  au problème  $[\check{P}_{\alpha h}^{\delta*}]$ , et  $\vec{U}_{\alpha h}^\delta = \tilde{\mathbf{A}}_h^T \vec{P}_{\alpha h}^\delta$ .

Il est de nouveau clair que si  $\vec{P}_{\alpha h,2}^\delta \neq \vec{0}$ , on a  $\tilde{\Delta}_h \vec{U}_{\alpha h}^\delta = -\alpha \frac{\vec{P}_{\alpha h,2}^\delta}{\|\vec{P}_{\alpha h,2}^\delta\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}}}$ . On peut alors faire le lien avec la formulation discrète de la quasi-réversibilité :

**Théorème 3.5** On note  $(\check{g}_{0h}, \check{g}_{1h}) := (\gamma_h(u_{\alpha h}^\delta), \gamma_{\nu h}(u_{\alpha h}^\delta))$ , et  $\varepsilon_{\alpha h}^\delta := \frac{\alpha}{\|\vec{P}_{\alpha h,2}^\delta\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}}}$ . Alors  $u_{\alpha h}^\delta$  est l'unique solution du problème de quasi-réversibilité suivant : trouver  $u_h \in W_h$ ,  $(\gamma_h(u_h), \gamma_{\nu h}(u_h)) = (\check{g}_{0h}, \check{g}_{1h})$ , tel que pour tout  $v_h \in V_{0h}$ , on ait :

$$(\Delta_h u_h, \Delta_h v_h)_{P_{2h}} + \varepsilon_{\alpha h}^\delta (u_h, v_h)_h = 0.$$

Preuve : comme  $\tilde{\Delta}_h \vec{U}_{\alpha h}^\delta = -\alpha \frac{\vec{P}_{\alpha h,2}^\delta}{\|\vec{P}_{\alpha h,2}^\delta\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}}}$  et  $\vec{u}_{\alpha h}^\delta = \mathbf{M}_{W_h}^{-1/2} \vec{U}_{\alpha h}^\delta$ , on a :

$$\Delta_h \vec{u}_{\alpha h}^\delta = \Delta_h \mathbf{M}_{W_h}^{-1/2} \vec{U}_{\alpha h}^\delta = \mathbf{M}_{P_{2h}}^{-1/2} \mathbf{M}_{P_{2h}}^{1/2} \Delta_h \mathbf{M}_{W_h}^{-1/2} \vec{U}_{\alpha h}^\delta = \mathbf{M}_{P_{2h}}^{-1/2} \tilde{\Delta}_h \vec{U}_{\alpha h}^\delta = -\frac{\alpha}{\|\vec{P}_{\alpha h,2}^\delta\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}}} \mathbf{M}_{P_{2h}}^{-1/2} \vec{P}_{\alpha h,2}^\delta.$$

On en déduit, pour tout  $\vec{v}_h \in V_{h,0}$  :

$$\begin{aligned} (\Delta_h u_{\alpha h}^\delta, \Delta_h v_h)_{P_{2h}} &= (\Delta_h \vec{u}_{\alpha h}^\delta, \mathbf{M}_{P_{2h}} \Delta_h \vec{v}_h)_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}} \\ &= \frac{-\alpha}{\|\vec{P}_{\alpha h,2}^\delta\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}}} (\mathbf{M}_{P_{2h}}^{-1/2} \vec{P}_{\alpha h,2}^\delta, \mathbf{M}_{P_{2h}} \Delta_h \vec{v}_h)_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}} \\ &= \frac{-\alpha}{\|\vec{P}_{\alpha h,2}^\delta\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}}} \left[ (\mathbf{M}_{P_{0h}}^{-1/2} \vec{P}_{\alpha h,0}^\delta, \mathbf{M}_{P_{0h}} \mathbf{G}_h \vec{v}_h)_{\mathbb{R}^{d_{P_{0h}}}} + (\mathbf{M}_{P_{1h}}^{-1/2} \vec{P}_{\alpha h,1}^\delta, \mathbf{M}_{P_{1h}} \mathbf{G}_{\nu h} \vec{v}_h)_{\mathbb{R}^{d_{P_{1h}}}} \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{M}_{P_{2h}}^{-1/2} \vec{P}_{\alpha h,2}^\delta, \mathbf{M}_{P_{2h}} \Delta_h \vec{v}_h)_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}} \right] \text{ (on n'a ajouté que des quantités nulles, puisque } v_h \in V_{h,0}) \\ &= \frac{-\alpha}{\|\vec{P}_{\alpha h,2}^\delta\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}}} \left[ (\mathbf{M}_{P_{0h}}^{1/2} \vec{P}_{\alpha h,0}^\delta, \mathbf{G}_h \vec{v}_h)_{\mathbb{R}^{d_{P_{0h}}}} + (\mathbf{M}_{P_{1h}}^{1/2} \vec{P}_{\alpha h,1}^\delta, \mathbf{G}_{\nu h} \vec{v}_h)_{\mathbb{R}^{d_{P_{1h}}}} \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{M}_{P_{2h}}^{1/2} \vec{P}_{\alpha h,2}^\delta, \Delta_h \vec{v}_h)_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}} \right] \\ &= \frac{-\alpha}{\|\vec{P}_{\alpha h,2}^\delta\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}}} \left[ (\mathbf{G}_h^T \mathbf{M}_{P_{0h}}^{1/2} \vec{P}_{\alpha h,0}^\delta, \vec{v}_h)_{\mathbb{R}^{d_{W_h}}} + (\mathbf{G}_{\nu h}^T \mathbf{M}_{P_{1h}}^{1/2} \vec{P}_{\alpha h,1}^\delta, \vec{v}_h)_{\mathbb{R}^{d_{W_h}}} \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{\Delta}_h^T \mathbf{M}_{P_{2h}}^{1/2} \vec{P}_{\alpha h,2}^\delta, \vec{v}_h)_{\mathbb{R}^{d_{W_h}}} \right] \\ &= \frac{-\alpha}{\|\vec{P}_{\alpha h,2}^\delta\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}}} \left( \mathbf{M}_{W_h}^{1/2} (\tilde{\mathbf{G}}_h^T \vec{P}_{\alpha h,0}^\delta + \tilde{\mathbf{G}}_{\nu h}^T \vec{P}_{\alpha h,1}^\delta + \tilde{\Delta}_h^T \vec{P}_{\alpha h,2}^\delta), \vec{v}_h \right)_{\mathbb{R}^{d_{W_h}}} \\ &= \frac{-\alpha}{\|\vec{P}_{\alpha h,2}^\delta\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}}} \left( \mathbf{M}_{W_h}^{1/2} \tilde{\mathbf{A}}_h^T \vec{P}_{\alpha h}^\delta, \vec{v}_h \right)_{\mathbb{R}^{d_{W_h}}} = \frac{-\alpha}{\|\vec{P}_{\alpha h,2}^\delta\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}}} \left( \mathbf{M}_{W_h}^{1/2} \vec{U}_{\alpha h}^\delta, \vec{v}_h \right)_{\mathbb{R}^{d_{W_h}}} \\ &= \frac{-\alpha}{\|\vec{P}_{\alpha h,2}^\delta\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}}} (\mathbf{M}_{W_h} \vec{u}_{\alpha h}^\delta, \vec{v}_h)_{\mathbb{R}^{d_{W_h}}} = \frac{-\alpha}{\|\vec{P}_{\alpha h,2}^\delta\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}}} (u_{\alpha h}^\delta, v_h)_h. \end{aligned}$$

Le résultat suit. ■

L'avantage de cette reformulation des problèmes d'optimisation est que l'on se retrouve à manipuler les produits scalaires et normes classiques des espaces euclidiens. L'inconvénient est que l'on doit calculer les matrices  $M_X^{1/2}$ . En fait, on a juste besoin de calculer  $M_{P_{ih}}^{1/2}$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , qui sont facilement obtenues vu la forme de ces matrices... En effet,  $M_{W_h}^{1/2}$  n'apparaît en fait que multipliée par elle-même, on a donc seulement besoin de  $M_{W_h}$ .

### Résolution du problème $[\tilde{P}_{\alpha h}^{\delta*}]$

Nous devons résoudre le problème  $[\tilde{P}_{\alpha h}^{\delta*}]$ , problème d'optimisation discrète sans contrainte, posé dans  $\mathbb{R}^D$ . Après quelques essais de différentes méthodes de résolution, nous avons décidé d'utiliser la méthode L-BFGS<sup>26</sup>, méthode de type quasi-Newton, donc une méthode à direction de descente. Dans une méthode BFGS classique, on calcule à chaque étape une approximation du Hessien (donc une matrice de  $\mathbb{R}^{D \times D}$ ), ce qui est très coûteux en espace mémoire. Dans la version L-BFGS, l'approximation du hessien est obtenue par des opérations sur des vecteurs, ce qui est moins coûteux car on ne garde en mémoire que  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^D$ , avec  $n \ll D$ , et on ne forme jamais la matrice approximant le hessien. Cette méthode est par contre plus coûteuse en temps de calcul. Nous avons par ailleurs choisi de déterminer le pas de descente en utilisant la règle de Wolfe, et l'algorithme de Fletcher-Lemaréchal. Pour plus de précision sur ces idées, voir [NW99].

Il est nécessaire de connaître le gradient de  $\tilde{G}_{\alpha h}^{\delta}$ .

**Lemme 3.8**  $\forall P_h := \begin{bmatrix} P_{h,0} \\ P_{h,1} \\ P_{h,2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d_{P_{0h}}} \times \mathbb{R}^{d_{P_{1h}}} \times \mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}$ ,  $P_{h,0} \neq 0$ ,  $P_{h,1} \neq 0$ ,  $P_{h,2} \neq 0$ , on a

$$\nabla \tilde{G}_{\alpha,h}^{\delta}(P_h) = \tilde{A}_h \tilde{A}_h^T P_h + \begin{bmatrix} \delta \frac{P_{h,0}}{\|P_{h,0}\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{0h}}}}} \\ \delta \frac{P_{h,1}}{\|P_{h,1}\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{1h}}}}} \\ \alpha \frac{P_{h,2}}{\|P_{h,2}\|_{\mathbb{R}^{d_{P_{2h}}}}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_0^{\delta} \\ G_1^{\delta} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Preuve : simple calcul. ■

La restriction  $P_{h,0} \neq 0$ ,  $P_{h,1} \neq 0$ ,  $P_{h,2} \neq 0$ , n'est pas problématique numériquement. Nous n'avons en effet que très peu de chance de tomber sur un cas de figure où elle n'est pas vérifiée.

Remarque : de la même manière, on a, pour tout  $p = (p_1, p_2, p_3) \in Y$ ,  $p_1 \neq 0$ ,  $p_2 \neq 0$ ,  $p_3 \neq 0$ ,

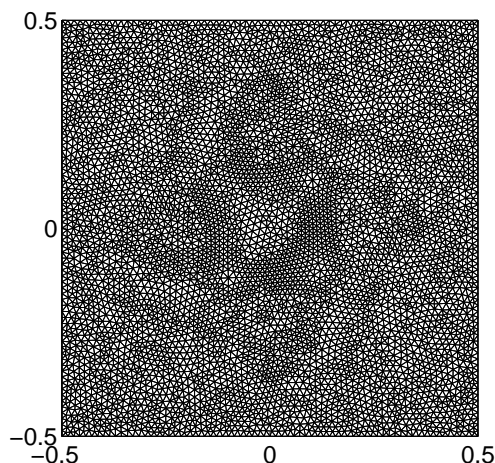
$$\nabla G_{\alpha}^{\delta}(p) = AA^* p + \left( \delta \frac{p_0}{\|p_0\|_{L^2(\Gamma)}}, \delta \frac{p_1}{\|p_1\|_{L^2(\Gamma)}}, \alpha \frac{p_2}{\|p_2\|_{L^2(\Omega)}} \right) - (g_0^{\delta}, g_1^{\delta}, 0).$$

## 3.5 Applications numériques

Dans les applications suivantes,  $\Omega$  est le carré  $] -0.5, 0.5[ \times ] -0.5, 0.5[$  de  $\mathbb{R}^2$ , et  $\Gamma := ] -0.5, 0.5[ \times \{\pm 0.5\}$ . On maille  $\Omega$  en divisant tout d'abord chaque côté en 70, puis en construisant un maillage non structuré s'adaptant à ces divisions, de sorte que  $h \equiv \frac{1}{70}$ .

<sup>26</sup>Light-BFGS



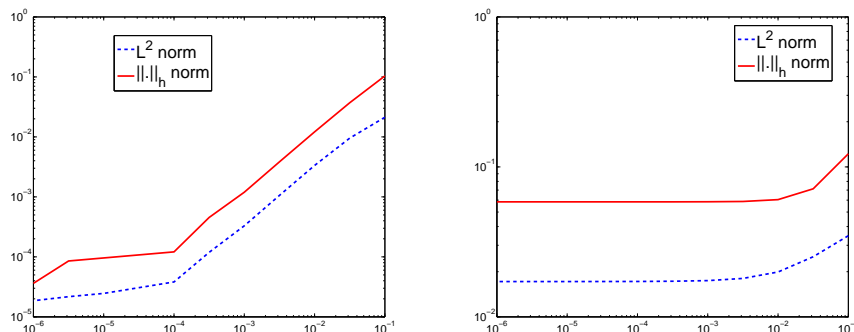


Le maillage utilisé

On se donne une fonction  $u \in H^2(\Omega)$  vérifiant  $\Delta u = 0$  dans  $\Omega$ , et  $(g_{0h}, g_{1h}) = (\gamma(\pi_h u), \gamma_\nu(\pi_h u))^{27}$ . On définit alors nos données bruitées  $g_{ih}^\delta = g_{ih} + \sigma \frac{\|g_{ih}\|_{P_{ih}}}{\|b_i\|_{P_{ih}}} b_i$ , pour  $i \in \{0, 1\}$ , où  $b_i \in \mathbb{R}^{d_{P_{ih}}}$  est un vecteur gaussien et  $\sigma$  est un facteur d'échelle. Avec cette définition, les données sont contaminées par un bruit relatif d'amplitude  $\sigma$  en norme  $L^2$ . Nous avons donc deux niveaux d'erreurs absolues  $\delta_0$  et  $\delta_1$  vérifiant  $\delta_i = \sigma \|g_{ih}\|_{P_{ih}}$ .

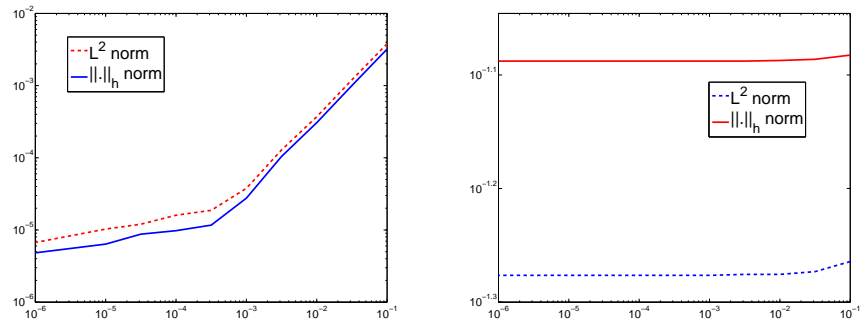
Nous testerons notre méthode sur les deux fonctions harmoniques sur lesquelles nous avons testé la méthode [QR] au chapitre précédent :  $(x, y) \mapsto \frac{1}{3}y^3 - x^2y$  et  $(x, y) \mapsto \frac{1}{50} \cos(3\pi x) \sinh(3\pi y)$ .

Tout d'abord, nous allons montrer la convergence de  $u_{\alpha h}^\delta$  vers  $u_h^\delta$  lorsque  $\alpha$  tend vers 0. Remarquons tout de suite qu'il est difficile de mettre en évidence cette convergence, puisque nous ne connaissons ni  $u^\delta$ , ni  $u_h^\delta$ . Nous avons donc fait tourner notre algorithme pour résoudre le problème  $[\tilde{P}_{0h}^\delta]$ , et nous avons stoppé l'algorithme lorsque le gradient de  $\tilde{G}_{0h}^\delta$  était très faible. La fonction alors obtenue,  $u_{0h}^\delta$ , sera considérée comme une bonne approximation de  $u^\delta$ , et nous la noterons dorénavant  $u_h^\delta$ . Nous nous intéresserons par la même occasion à l'écart entre  $u_{\alpha h}^\delta$  et  $u$  (en fait  $\pi_h(u)$ ) en fonction de  $\alpha$ . Les écarts seront mesurés en norme  $\|\cdot\|_h$  et en norme  $L^2$ .



À gauche  $\|u_{\alpha h}^\delta - u_h^\delta\|_h / \|\pi_h(u)\|_h$  et  $\|u_{\alpha h}^\delta - u_h^\delta\|_{L^2} / \|\pi_h(u)\|_{L^2}$  en fonction de  $\alpha$ . À droite,  $\|u_{\alpha h}^\delta - \pi_h(u)\|_h / \|\pi_h(u)\|_h$  et  $\|u_{\alpha h}^\delta - \pi_h(u)\|_{L^2} / \|\pi_h(u)\|_{L^2}$  en fonction de  $\alpha$ .  $\sigma = 2\%$ ,  $u = \frac{1}{3}y^3 - x^2y$ .

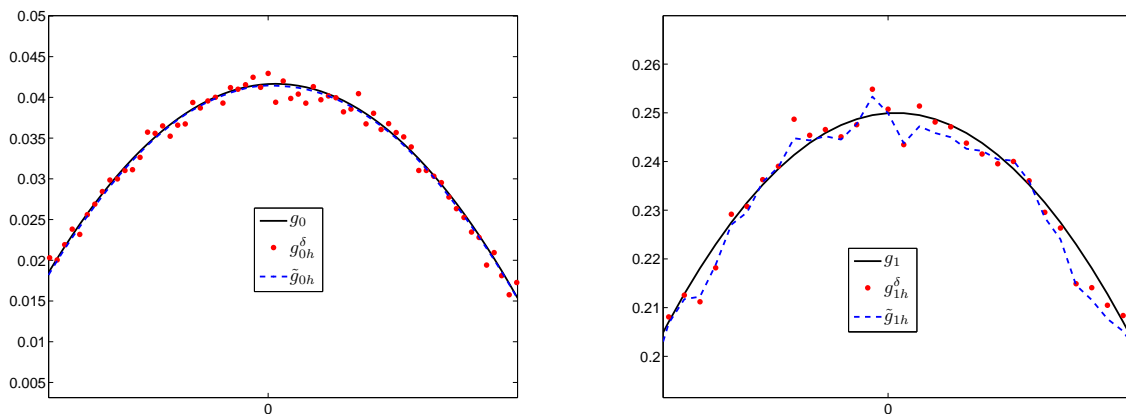
<sup>27</sup>  $\pi_h$  est défini dans la proposition 2.11 p.34



À gauche  $\|u_{\alpha h}^\delta - u_h^\delta\|_h / \|\pi_h(u)\|_h$  et  $\|u_{\alpha h}^\delta - u_h^\delta\|_{L^2} / \|\pi_h(u)\|_{L^2}$  en fonction de  $\alpha$ . À droite,  $\|u_{\alpha h}^\delta - \pi_h(u)\|_h / \|\pi_h(u)\|_h$  et  $\|u_{\alpha h}^\delta - \pi_h(u)\|_{L^2} / \|\pi_h(u)\|_{L^2}$  en fonction de  $\alpha$ .  $\sigma = 2\%$ ,  $u = \frac{1}{50} \cos(3\pi x) \sinh(3\pi y)$ .

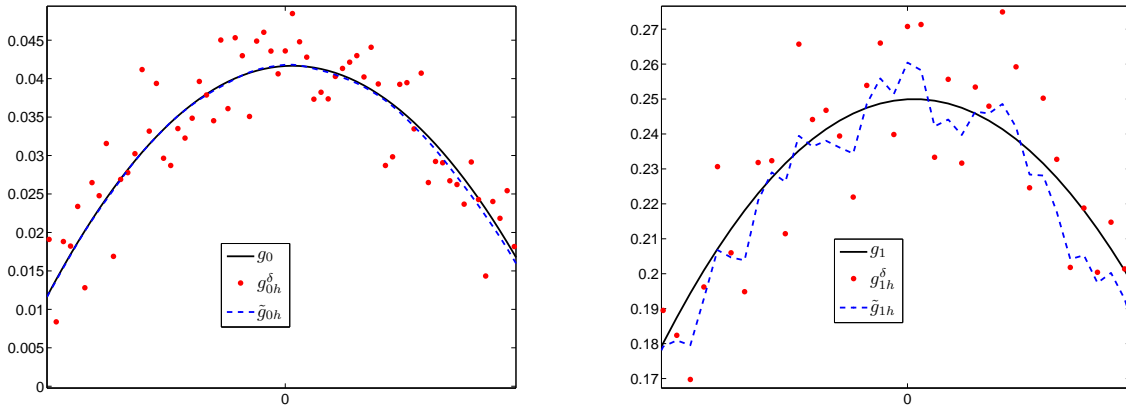
Comme attendu<sup>28</sup>, l'écart entre  $u_{\alpha h}^\delta$  et  $u_h^\delta$  tend vers 0 lorsque  $\alpha$  tend vers 0. Par contre, l'écart entre  $u_{\alpha h}^\delta$  et  $u$  ne varie plus de manière significative dès que  $\alpha$  devient plus petit que  $10^{-3}$ . On voit ici apparaître l'écart qu'il y a entre  $u_h^\delta$  et  $u$ , qui implique un écart incompressible entre  $u_{\alpha h}^\delta$  et  $u$ . Le même phénomène est apparu quelque soit la fonction  $u$  que nous avons considérée. Ceci nous conduit à choisir  $\alpha$  dans l'intervalle  $[10^{-4}, 10^{-3}]$  : nous avons ainsi une bonne approximation de  $u_h^\delta$ , sans prendre  $\alpha$  trop petit, ce qui rendrait le problème  $[\tilde{P}_{\alpha h}^\delta]$  difficile à résoudre et ne représenterait pas un gain significatif vis-à-vis de  $u$ .

Nous allons maintenant nous intéresser au lien entre le problème  $[P_{\alpha h}^\delta]$  et le problème  $[QR_h]$  décrit par le théorème 3.5. Nous avons tout d'abord montré que la résolution du problème  $[P_{\alpha h}^\delta]$  nous fournissait des données régularisées  $(\tilde{g}_{0h}, \tilde{g}_{1h}) = (\gamma_h(u_{\alpha h}^\delta), \gamma_{\nu h}(u_{\alpha h}^\delta))$ . On peut voir cet effet régularisant sur les figures suivantes :

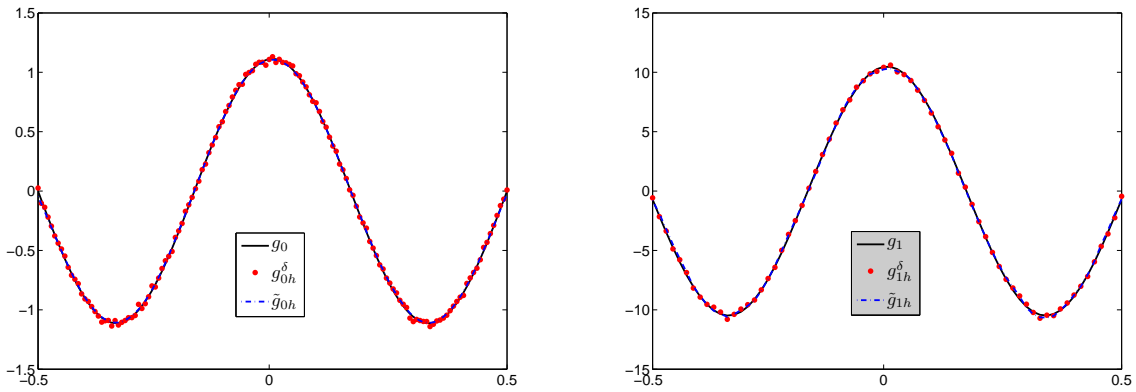


À gauche : comparaison entre  $g_0$ ,  $g_{0h}^\delta$  et  $\tilde{g}_{0h}$  sur l'axe  $y = 0.5$  autour de  $x = 0$ . À droite, comparaison entre  $g_1$ ,  $g_{1h}^\delta$  et  $\tilde{g}_{1h}$  sur l'axe  $y = 0.5$  autour de  $x = 0$ .  $\sigma = 2\%$ ,  $\alpha = 10^{-4}$ ,  $u = \frac{1}{3}y^3 - x^2y$ .

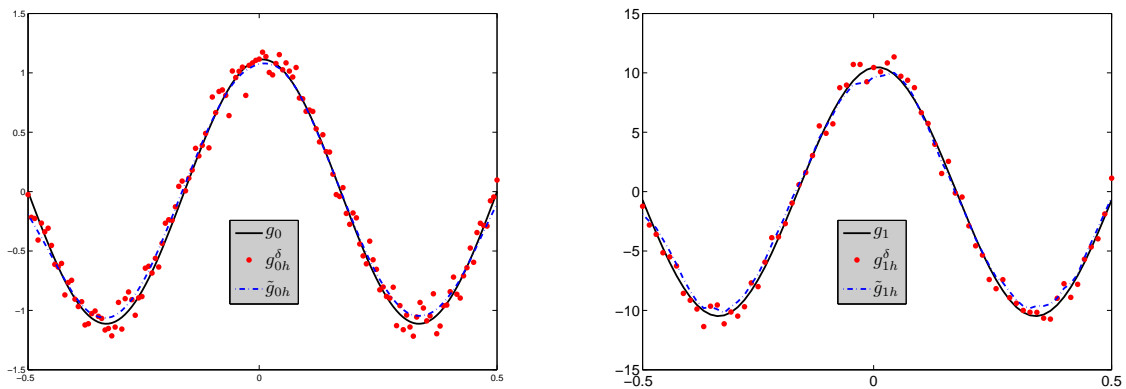
<sup>28</sup>voir théorème 3.1



À gauche : comparaison entre  $g_0$ ,  $g_{0h}^\delta$  et  $\tilde{g}_{0h}$  sur l'axe  $y = 0.5$  autour de  $x = 0$ . À droite, comparaison entre  $g_1$ ,  $g_{1h}^\delta$  et  $\tilde{g}_{1h}$  sur l'axe  $y = 0.5$  autour de  $x = 0$ .  $\sigma = 10\%$ ,  $\alpha = 10^{-4}$ ,  $u = \frac{1}{3}y^3 - x^2y$ .



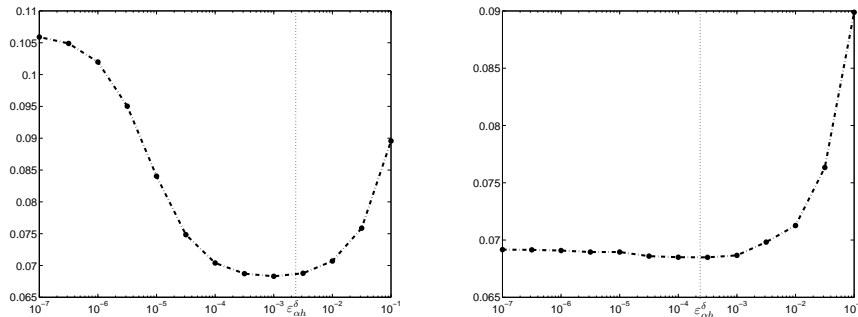
À gauche : comparaison entre  $g_0$ ,  $g_{0h}^\delta$  et  $\tilde{g}_{0h}$  sur l'axe  $y = 0.5$ . À droite, comparaison entre  $g_1$ ,  $g_{1h}^\delta$  et  $\tilde{g}_{1h}$  sur l'axe  $y = 0.5$ .  $\sigma = 2\%$ ,  $\alpha = 10^{-4}$ ,  $u = \frac{1}{50} \cos(3\pi x) \sinh(3\pi y)$ .



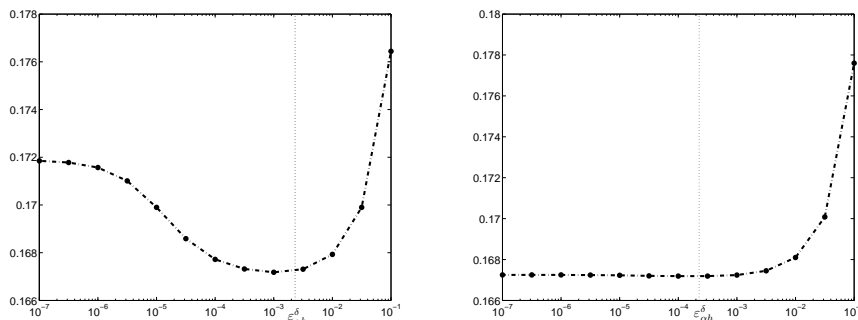
À gauche : comparaison entre  $g_0$ ,  $g_{0h}^\delta$  et  $\tilde{g}_{0h}$  sur l'axe  $y = 0.5$ . À droite, comparaison entre  $g_1$ ,  $g_{1h}^\delta$  et  $\tilde{g}_{1h}$  sur l'axe  $y = 0.5$ .  $\sigma = 10\%$ ,  $\alpha = 10^{-4}$ ,  $u = \frac{1}{50} \cos(3\pi x) \sinh(3\pi y)$ .

La résolution du problème  $[P_{\alpha h}^\delta]$  (plus précisément celle de  $[\tilde{P}_{\alpha h}^{\delta*}]$ ) nous fournit également le paramètre  $\varepsilon := \varepsilon_{\alpha h}^\delta$  tel que  $u_{\alpha h}^\delta$  soit solution du problème  $[QR_h]$  avec pour donnée  $(\tilde{g}_{0h}, \tilde{g}_{1h})$  et cette valeur de  $\varepsilon$  (voir théorème 3.5). Nous pouvons alors nous demander si cette valeur de  $\varepsilon$  est un bon choix. Pour le savoir, nous allons résoudre le problème  $[QR_h]$  avec la donnée régularisée

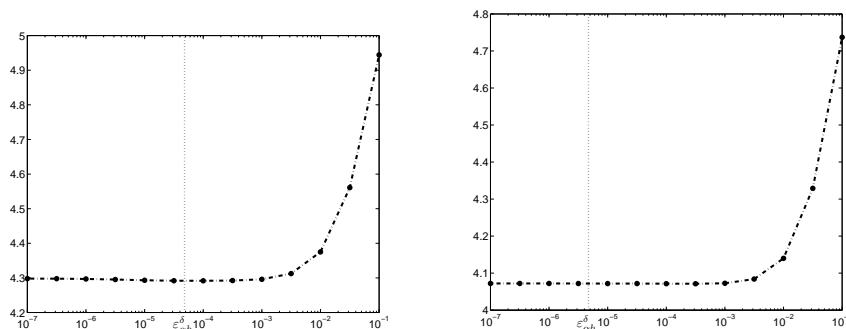
$(\check{g}_{0h}, \check{g}_{1h})$  pour différentes valeurs de  $\varepsilon$ . Nous noterons  $\check{u}_{\varepsilon h}$  la solution obtenue. Nous calculons alors  $\|\check{u}_{\varepsilon h} - \pi_h(u)\|_h$ . Nous obtenons les figures suivantes :



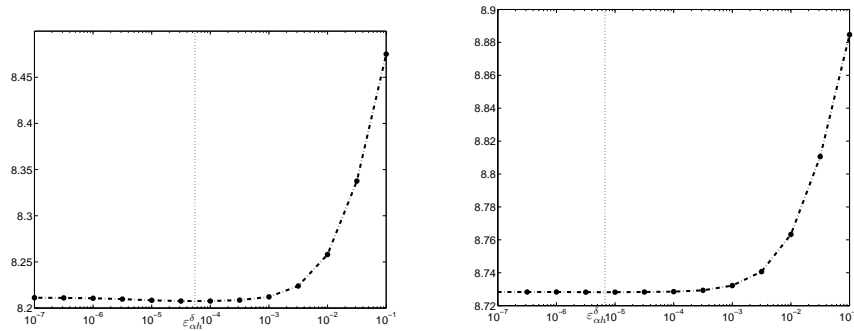
$\|\check{u}_{\varepsilon h} - \pi_h(u)\|_h$  en fonction de  $\varepsilon$ . À gauche,  $\alpha = 10^{-3}$ . À droite,  $\alpha = 10^{-4}$ .  $\sigma = 2\%$ ,  $u = \frac{1}{3}y^3 - x^2y$ .



$\|\check{u}_{\varepsilon h} - \pi_h(u)\|_h$  en fonction de  $\varepsilon$ . À gauche,  $\alpha = 10^{-3}$ . À droite,  $\alpha = 10^{-4}$ .  $\sigma = 10\%$ ,  $u = \frac{1}{3}y^3 - x^2y$ .



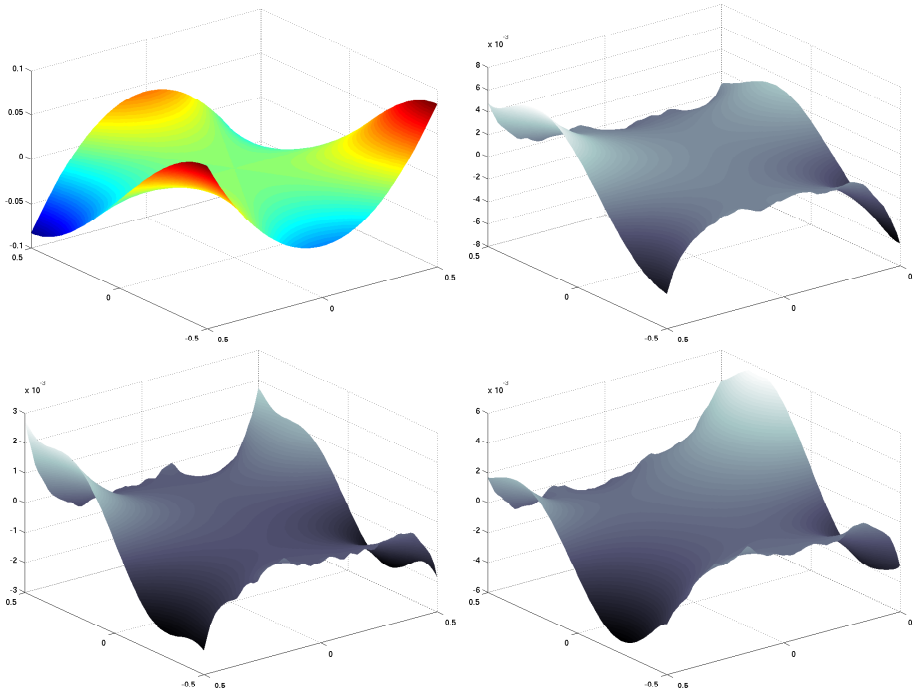
$\|\check{u}_{\varepsilon h} - \pi_h(u)\|_h$  en fonction de  $\varepsilon$ . À gauche,  $\alpha = 10^{-3}$ . À droite,  $\alpha = 10^{-4}$ .  $\sigma = 2\%$ ,  $u = \frac{1}{50} \cos(3\pi x) \sinh(3\pi y)$ .



$\|\tilde{u}_{\varepsilon h} - \pi_h(u)\|_h$  en fonction de  $\varepsilon$ . À gauche,  $\alpha = 10^{-3}$ . À droite,  $\alpha = 10^{-4}$ .  $\sigma = 10\%$ ,  
 $u = \frac{1}{50} \cos(3\pi x) \sinh(3\pi y)$ .

On voit que dans tous les cas de figure,  $\varepsilon_{\alpha h}^\delta$  est toujours un très bon choix. Autrement dit,  $\varepsilon_{\alpha h}^\delta$  est pratiquement le meilleur paramètre à utiliser avec la donnée régularisée dans la méthode  $[\text{QR}_h]$ .

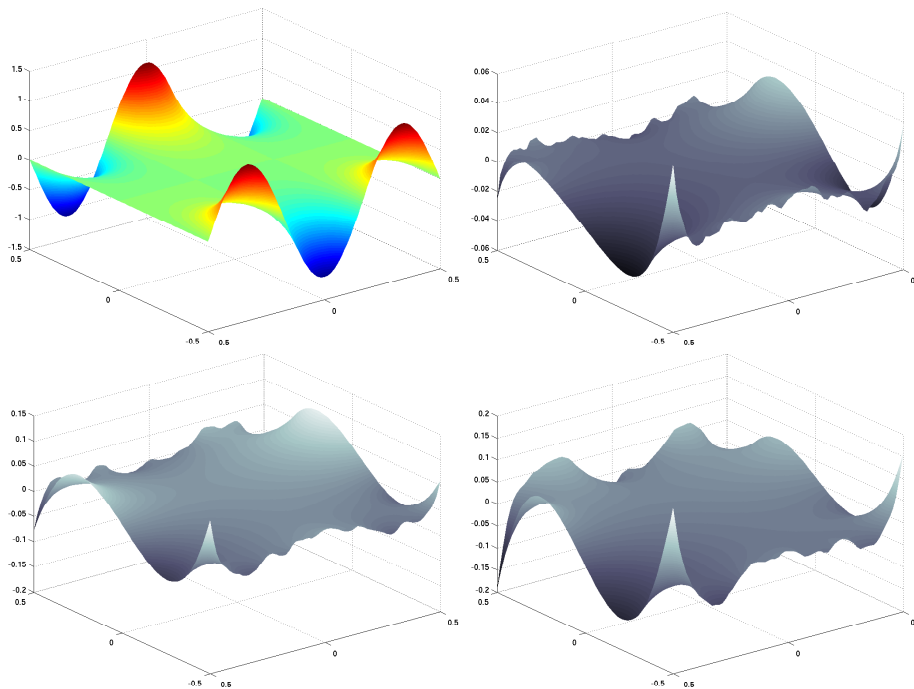
Enfin, et pour clore ce chapitre, nous présentons quelques résultats numériques sur l'écart entre la solution exacte du problème [Cauchy] et la solution du problème  $[\text{P}_{\alpha h}^\delta]$ .



Première figure :  $u = \frac{1}{3}y^3 - x^2y$ . Deuxième figure :  $u_{\alpha h}^\delta - \pi_h(u)$ ,  $\sigma = 2\%$ .  
 Troisième figure :  $u_{\alpha h}^\delta - \pi_h(u)$ ,  $\sigma = 5\%$ . Quatrième figure :  $u_{\alpha h}^\delta - \pi_h(u)$ ,  $\sigma = 10\%$ .  
 $\alpha = 10^{-4}$ .

Erreurs relatives	$\sigma = 2\%$	$\sigma = 5\%$	$\sigma = 10\%$
$\ u_{\alpha h}^\delta - \pi_h(u)\ _h / \ \pi_h(u)\ _h$	0.0585	0.0993	0.1427
$\ u_{\alpha h}^\delta - \pi_h(u)\ _{L^2} / \ \pi_h(u)\ _{L^2}$	0.0172	0.0336	0.0610

Erreurs relatives entre  $u = \frac{1}{3}y^3 - x^2y$  et  $u_{\alpha h}^\delta$ .  $\alpha = 10^{-4}$ .



Première figure :  $u = \frac{1}{50} \cos(3\pi x) \sinh(3\pi y)$ . Deuxième figure :  $u_{\alpha h}^\delta - \pi_h(u)$ ,  $\sigma = 2\%$ .  
Troisième figure :  $u_{\alpha h}^\delta - \pi_h(u)$ ,  $\sigma = 5\%$ . Quatrième figure :  $u_{\alpha h}^\delta - \pi_h(u)$ ,  $\sigma = 10\%$ .  
 $\alpha = 10^{-4}$ .

Erreurs relatives	$\sigma = 2\%$	$\sigma = 5\%$	$\sigma = 10\%$
$\ u_{\alpha h}^\delta - \pi_h(u)\ _h / \ \pi_h(u)\ _h$	0.0892	0.1431	0.1911
$\ u_{\alpha h}^\delta - \pi_h(u)\ _{L^2} / \ \pi_h(u)\ _{L^2}$	0.0376	0.0850	0.1093

Erreurs relatives entre  $u = \frac{1}{50} \cos(3\pi x) \sinh(3\pi y)$  et  $u_{\alpha h}^\delta$ .  $\alpha = 10^{-4}$ .



## Deuxième partie

# Méthodes de lignes de niveau adaptées au problème inverse de l'obstacle





## Chapitre 4

# Problème inverse de l'obstacle avec condition de Dirichlet

### Introduction

Le problème inverse de l'obstacle est un problème inverse géométrique. Il consiste en la recherche à l'intérieur d'un "milieu" de référence  $\mathcal{D}$ , gouverné par une équation aux dérivées partielles (Laplace, Helmholtz, Maxwell, élasticité, ...), d'un "objet" volumique  $\mathcal{O}$  à partir d'une ou plusieurs "mesures" sur tout ou partie du bord de  $\mathcal{D}$ . Les données sont obtenues par sollicitation du milieu et mesure de la réponse correspondante, ce qui d'un point de vue mathématique équivaut à la connaissance d'une donnée de Cauchy.

Ce problème intervient dans différents domaines d'application, notamment :

- l'imagerie médicale
- la détection radar (aérienne) et sonar (sous-marine)
- le contrôle de la forme d'un plasma dans un tokamak
- la recherche de mines enfouies dans le sol
- le contrôle non destructif de structures.

Dans ces problèmes, l'objet recherché peut-être pénétrable, ce qui correspond à la recherche d'un changement de propriété du milieu, ou impénétrable, il est alors caractérisé par une condition aux limites sur son bord (Dirichlet, Neumann, ...). On a donc une grande diversité de problèmes correspondant au "problème inverse de l'obstacle".

Plusieurs approches sont possibles pour aborder ce problème. On peut tout d'abord adopter une méthode d'échantillonnage, qui consiste à chercher si un point parcourant le domaine est ou non dans l'obstacle : un exemple typique est la "linear sampling method" adaptée aux problèmes de diffraction<sup>1</sup>. On peut également chercher  $\mathcal{O}$  à partir d'un obstacle initial, en résolvant un problème d'optimisation : on trouve dans cette catégorie des méthodes basées sur l'utilisation de la dérivée de forme<sup>2</sup>. Des méthodes pour trouver la position d'obstacles de formes déterminées basées sur la dérivée topologique peuvent également être utilisées<sup>3</sup>. En dimension deux, on peut utiliser des techniques basées sur la transformation conforme<sup>4</sup>.

Une autre manière d'aborder le problème est d'utiliser une approche "ligne de niveau" : on ne cherche alors plus une géométrie, mais la ligne de niveau zéro d'une fonction solution d'une équation aux dérivées partielles. Depuis l'introduction des méthodes de lignes de niveau dans [OS88], elles ont été très utilisées dans le contexte de la recherche d'obstacles<sup>5</sup>, en particulier parce qu'elles

---

<sup>1</sup>[CK96, CC06]

<sup>2</sup>[SZ92, ADJT05]

<sup>3</sup>[CGGM00, Bon08]

<sup>4</sup>[HK05]

<sup>5</sup>[San96, LLS98, Bur04, ABH04]

permettent de gérer très simplement les changements de topologie.

Nous allons nous intéresser dans les prochains chapitres à la résolution du problème inverse de l'obstacle avec condition de Dirichlet. Nous allons plus précisément dans ce chapitre nous intéresser aux principales caractéristiques mathématiques du problème et à quelques domaines d'application, avant de décrire la philosophie de la méthode de résolution "par l'extérieur" que nous allons mettre en place, à savoir une méthode de lignes de niveau couplée à la méthode de quasi-réversibilité étudiée au chapitre 2.

## Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Formulation mathématique du problème</b>	<b>86</b>
4.1.1	L'opérateur différentiel de notre problème	86
4.1.2	Problème inverse de l'obstacle	87
<b>4.2</b>	<b>Exemples d'applications</b>	<b>89</b>
4.2.1	Identification du bord d'un plasma dans un tokamak	89
4.2.2	Notre problème test : opérateur $\Delta$	90
<b>4.3</b>	<b>Limitations d'une première méthode naïve</b>	<b>92</b>
<b>4.4</b>	<b>Une nouvelle approche par l'extérieur</b>	<b>94</b>

## 4.1 Formulation mathématique du problème

### 4.1.1 L'opérateur différentiel de notre problème

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Gamma$  une partie lipschitzienne de sa frontière ( $\Gamma \subset \partial\Omega$ ). Soit  $P : H^1(\Omega) \mapsto H^{-1}(\Omega)$  un opérateur différentiel de la forme :

$$Pu := \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c u$$

avec  $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$  et  $c \in L^\infty(\Omega)$ . On note  $H^1(\Omega, P) := \{u \in H^1(\Omega) \mid Pu \in L^2(\Omega)\}$ . On rappelle<sup>6</sup>

que pour tout  $u \in H^1(\Omega, P)$ , on a  $\frac{\partial u}{\partial \nu_P} := \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ .

Nous allons supposer que  $P$  vérifie les deux propriétés suivantes :

**Propriété 4.1 - unicité du problème de Dirichlet :**

$$\begin{cases} Pu = 0 \text{ dans } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \Rightarrow u \equiv 0 \text{ dans } \Omega$$

**Propriété 4.2 - prolongement unique :**

soit  $\omega$  un ouvert quelconque,  $\omega \subset \Omega$  et  $|\omega| \neq 0$ . Si  $u \in H^1(\Omega)$  vérifie  $Pu = 0$  dans  $\Omega$  et  $u \equiv 0$  dans  $\omega$ , alors  $u \equiv 0$  dans  $\Omega$ .

La propriété de prolongement unique a pour conséquence l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'opérateur  $P$  :

**Corollaire 4.1 - unicité du problème de Cauchy :**

$$\begin{cases} Pu = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_P} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \Rightarrow u \equiv 0 \text{ dans } \Omega.$$

<sup>6</sup>cf lemme 1.1 p.11

On a déjà vu au chapitre 1 que l'opérateur  $\Delta$  vérifie les propriétés 4.1 et 4.2. De nombreux autres opérateurs les vérifient, comme le montre la proposition suivante :

**Propriété 4.3** si :

- il existe  $\lambda > 0$  t.q.  $\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ , pour presque tout  $x \in \Omega$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$  (stricte ellipticité de l'opérateur  $P$ )
- $c \leq 0$ .

alors les propositions 4.1 et 4.2 sont vérifiées<sup>7</sup>.

Remarque : l'important pour la suite n'est pas la forme de l'opérateur, mais bien le fait que l'opérateur vérifie les propositions 4.1 et 4.2. Les méthodes envisagées s'adaptent à tout opérateur les vérifiant.

### 4.1.2 Problème inverse de l'obstacle

Soit  $\mathcal{D}$  un ouvert connexe borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Gamma$  une partie lipschitzienne de sa frontière ( $\Gamma \subset \partial\mathcal{D}$ ). Pour tout  $\mathcal{O} \Subset \mathcal{D}$  ouvert, on pose  $\Omega(\mathcal{O}) := \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}}$ . On se donne  $(g_0, g_1) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ ,  $(g_0, g_1) \neq (0, 0)$ . Le problème inverse de l'obstacle avec condition de Dirichlet est :

Problème  $[\mathcal{O}_{bs}]$  : trouver  $\mathcal{O} \Subset \mathcal{D}$ , ouvert à frontière continue<sup>8</sup> tel que  $\Omega(\mathcal{O})$  est connexe, et  $u \in H^1(\Omega(\mathcal{O})) \cap C^0(\overline{\Omega(\mathcal{O})})$  vérifiant :

$$\begin{cases} Pu = 0 & \text{dans } \Omega(\mathcal{O}) \\ u = g_0 & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_P} = g_1 & \text{sur } \Gamma \\ u = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}. \end{cases}$$

**Propriété 4.4 - unicité de la solution du problème de l'obstacle** : le problème  $[\mathcal{O}_{bs}]$  a au plus une solution  $(\mathcal{O}, u)$ .

Preuve : supposons que le problème  $[\mathcal{O}_{bs}]$  admette deux solutions  $(\mathcal{O}_1, u_1)$  et  $(\mathcal{O}_2, u_2)$ . Posons  $\mathcal{NB}$  la composante connexe non bornée de  $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2}$ , et  $\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{NB} \cap \mathcal{D}$  ( $\Gamma \subset \partial\tilde{\mathcal{D}}$ ). On remarque que  $w := u_1 - u_2 \in H^1(\tilde{\mathcal{D}})$  vérifie :

$$\begin{cases} Pw = 0 & \text{dans } \tilde{\mathcal{D}} \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial w}{\partial \nu_P} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Le corollaire 4.1 nous donne alors  $w \equiv 0$  dans  $\tilde{\mathcal{D}}$ , soit  $u_1 = u_2$  dans  $\tilde{\mathcal{D}}$ . Comme  $u_i \in C^0(\overline{\Omega(\mathcal{O}_i)})$ , on en déduit :  $u_1 = u_2$  dans  $\overline{\tilde{\mathcal{D}}}$ .

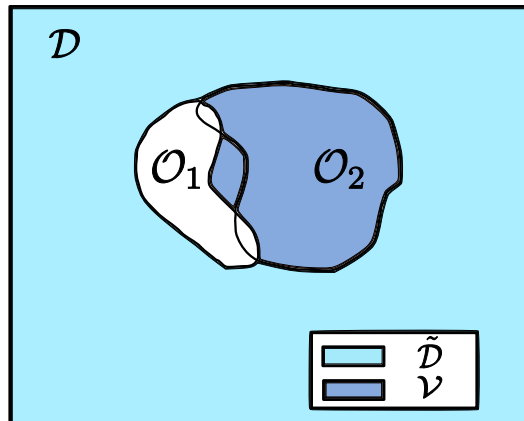
Posons alors  $\mathcal{V} = \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2}$ . Si  $\mathcal{O}_1 \not\subset \mathcal{O}_2$ , on a  $\mathcal{V} \neq \emptyset$ , et  $\mathcal{V} \subset (\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}_1})$ . On a alors  $\partial\mathcal{V} \subset \partial\mathcal{O}_1 \cup \partial\mathcal{O}_2$ . Sur la partie de  $\partial\mathcal{V}$  contenue dans  $\partial\mathcal{O}_1$ , on a par définition  $u_1 = 0$ . La partie de  $\partial\mathcal{V}$  contenue dans  $\partial\mathcal{O}_2$  est une partie de  $\partial\tilde{\mathcal{D}}$ , on a donc  $u_1 = u_2$  sur cette partie, or par définition  $u_2 = 0$  sur  $\partial\mathcal{O}_2$ , donc  $u_1 = 0$  sur cette partie. On a donc  $u_1 = 0$  sur  $\partial\mathcal{V}$ . Comme par hypothèse on a  $u_1 \in H^1(\mathcal{V}) \cap C^0(\overline{\mathcal{V}})$ , on a<sup>9</sup>  $u_1 \in H_0^1(\mathcal{V})$ . On a de plus  $\mathcal{V} \subset \Omega(\mathcal{O}_1)$ , et donc  $Pu_1 = 0$  dans  $\mathcal{V}$ . La propriété 4.1 nous donne alors  $u_1 = 0$  dans  $\mathcal{V}$ , puis la propriété 4.2 nous donne  $u_1 = 0$  dans  $\Omega(\mathcal{O}_1)$ , ce qui entre en contradiction avec  $(g_0, g_1) \neq (0, 0)$ .

On a donc  $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ . Un raisonnement symétrique nous donne  $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ , et donc  $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ . On déduit finalement de  $w = 0$  dans  $\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}_1}$  que  $u_1 = u_2$ .

<sup>7</sup> cf corollaire 8.2 p.170 de [GT01]

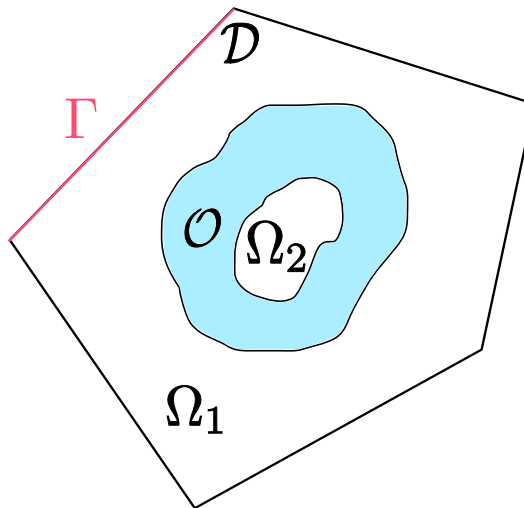
<sup>8</sup> pour la définition de la régularité du bord d'un ouvert, se référer à l'annexe B

<sup>9</sup> cf théorème IX.17 + remarque 20 de [Bre05]



Conclusion : dans la mesure où le problème  $[\mathcal{O}_{b_s}]$  admet au plus une solution, on peut légitimement essayer de mettre en place une méthode (un algorithme) permettant de retrouver l'obstacle  $\mathcal{O}$  à partir des données  $(g_0, g_1)$ .

Dans la démonstration de la propriété 4.4, il est crucial d'avoir  $\Omega(\mathcal{O})$  connexe. En effet, supposons que ce ne soit pas le cas, et que  $\Omega(\mathcal{O})$  ait deux composantes connexes  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .  $\mathcal{O} \in \mathcal{D}$  implique qu'une des deux composantes, disons  $\Omega_2$ , vérifie  $\partial\Omega_2 \subset \partial\mathcal{O}$ . On a alors  $Pu = 0$  dans  $\Omega_2$  et  $u = 0$  sur  $\partial\Omega_2$ , ce qui implique (voir propriété 4.1)  $u \equiv 0$  dans  $\Omega_2$ . Autrement dit,  $u$  ne contient aucune information concernant  $\Omega_2$ , ce qui est logique dans la mesure où  $\Omega_2$  ne "voit" pas  $\Gamma$ , et donc la donnée du problème.



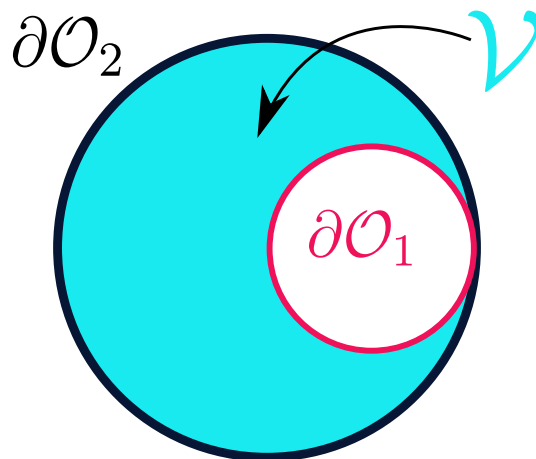
On ne peut obtenir d'informations que sur la forme extérieure de  $\mathcal{O}$  à partir des données  $(g_0, g_1)$ . On peut formaliser cette idée de la manière suivante :

**Notation** : pour  $\omega \in \mathcal{D}$  ouvert quelconque, on pose  $\mathcal{NB}(\omega)$  la partie connexe non bornée de  $\mathbb{R}^d \setminus \omega$ , et  $\hat{\omega} := \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{NB}(\omega)$ .

Si on prend le couple  $(\mathcal{O}, u)$  décrit précédemment, et que l'on définit  $\hat{u} := u|_{\Omega_1}$ , on voit que  $(\hat{\mathcal{O}}, \hat{u})$  est l'unique solution du problème  $[\mathcal{O}_{b_s}]$  avec pour donnée  $(g_0, g_1) = (u|_{\Gamma}, (\frac{\partial u}{\partial \nu_P})|_{\Gamma})$ . Autrement dit, si nous résolvons  $[\mathcal{O}_{b_s}]$ , c'est bien  $\hat{\mathcal{O}}$ , et non  $\mathcal{O}$ , que nous obtiendrons. Et  $\hat{\mathcal{O}}$ , c'est  $\mathcal{O} \cup \overline{\Omega_2}$ , soit de manière imagée l'ouvert plus ses cavités.

Un autre élément crucial dans la démonstration de la propriété 4.4 est l'hypothèse  $u \in C^0(\overline{\Omega(\mathcal{O})})$ . Elle nous permet de parler de la trace  $u$  sur  $\partial\mathcal{V}$  sans connaître le régularité du bord de  $\mathcal{V}$ . Or ce

bord peut ne pas être lipschitzien, même si les ouverts  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  sont très réguliers, et le caractère lipschitzien est nécessaire pour parler de la trace d'une fonction de  $H^1$ . Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'exemple suivant : en dimension 2,  $\mathcal{O}_1$  est le cercle de centre  $(\frac{1}{2}, 0)$  de rayon  $\frac{1}{2}$ ,  $\mathcal{O}_2$  est le cercle de centre  $(0, 0)$  de rayon 1.



Remarque : si  $c = 0$  et si la condition aux limites sur l'obstacle est  $u = k \in \mathbb{R}$ , on se ramène au problème  $[\mathcal{O}_{bs}]$  en faisant le changement de variable  $\tilde{u} := u - k$ . On peut aussi s'intéresser à d'autres types de conditions aux limites sur le bord de l'obstacle : au chapitre 7, nous nous intéresserons à une condition de la forme  $|\nabla u| = k \in \mathbb{R}^+$ .

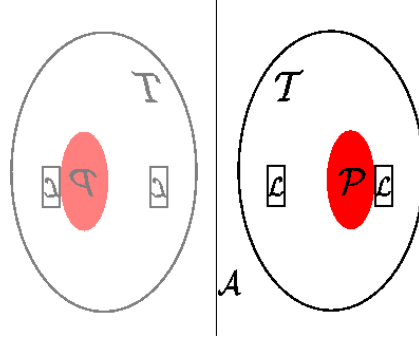
## 4.2 Exemples d'applications

### 4.2.1 Identification du bord d'un plasma dans un tokamak

Un tokamak est une chambre de confinement magnétique destinée à contrôler un plasma en vue de la production d'énergie par fusion nucléaire<sup>10</sup>. Pour qu'un tel processus fonctionne, il est nécessaire de contrôler le plasma afin de le maintenir dans la chambre de confinement. Il est donc important de connaître la forme du plasma.

Un tokamak est (littéralement) une chambre toroidale de confinement. C'est donc un tore, obtenu en faisant tourner un domaine borné connexe  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^2$  autour d'un axe  $\mathcal{A}$  (ne traversant pas  $\mathcal{T}$ ). On pose  $\mathcal{A} := (Oy)$ , et on a donc pour tout  $M \in \mathcal{T}$ ,  $M := (x, y)$  avec  $x_1 > x > x_0 > 0$ . Dans cette chambre se trouve des limiteurs  $\mathcal{L}$  dont le rôle est d'empêcher le plasma de venir toucher le bord de la chambre. Ils servent également de points de mesure des caractéristiques du plasma. D'un point de vue mathématique, on considère  $\mathcal{L}$  comme un fermé, et on note  $\mathcal{D} := \mathcal{T} \setminus \mathcal{L}$ .  $\mathcal{D}$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ .

<sup>10</sup>source : <http://fr.wikipedia.org/wiki/Tokamak>



Supposons l'existence d'un plasma  $\mathcal{P}$  dans notre tokamak. Soit  $\psi$  le flux poloïdal du champ magnétique  $\mathbf{B}$ .  $\psi$  vérifie<sup>11</sup> :

$$\begin{cases} P\psi = 0 & \text{dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}} \\ \psi = g_0 & \text{sur } \partial\mathcal{T} \\ \frac{1}{x} \frac{\partial\psi}{\partial\nu} = g_1 & \text{sur } \partial\mathcal{T} \\ \psi = \sup_{\mathcal{L}} \psi & \text{sur } \partial\mathcal{P} \end{cases}$$

avec  $P\psi = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_0 x} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_0 x} \frac{\partial\psi}{\partial y} \right)$ ,  $\mu_0 > 0$ , et  $(g_0, g_1, \sup_{\mathcal{L}} \psi)$  provenant de mesures sur les bords de  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{L}$ .

En faisant le changement de variable  $\phi := \psi - \sup_{\mathcal{L}} \psi$ , on voit que ce problème se ramène à notre problème  $[\mathcal{O}_{bs}]$ , avec  $(\mathcal{O}, u) := (\mathcal{P}, \phi)$  (on vérifie aisément, à l'aide de la propriété 4.3, que l'opérateur  $P$  vérifie les propriétés voulues).

Des méthodes de résolution du problème d'identification du bord d'un plasma ont déjà été proposées et étudiées : citons [Blu89], avec une méthode utilisant la quasi-réversibilité que nous décrirons brièvement au 4.3, et plus récemment [FABB10], avec une méthode basée sur la minimisation d'une fonctionnelle de type Kohn-Vogelius<sup>12</sup>.

#### 4.2.2 Notre problème test : opérateur $\Delta$

Le problème que nous allons essayer de résoudre numériquement est le problème  $[\mathcal{O}_{bs}]$ , avec  $P := \Delta$ . Comme il a été vu au chapitre 1, l'opérateur  $\Delta$  vérifie la propriété 4.2. Il est par ailleurs bien connu qu'il vérifie la propriété 4.1. La propriété 4.3 permet de s'en assurer<sup>13</sup>.

##### Obtenir des données

Pour obtenir des données  $(g_0, g_1)$  et tester nos méthodes, on procède de la manière suivante : on se donne un obstacle  $\mathcal{O}$  lipschitzien vérifiant  $\mathcal{O} \Subset \mathcal{D}$ , et  $g_1 \in L^2(\partial\mathcal{D})$ .

On note  $\mathcal{H} := \{v \in H^1(\Omega(\mathcal{O})) \mid v|_{\partial\mathcal{O}} = 0\}$ . C'est un sous-espace fermé de  $H^1(\Omega(\mathcal{O}))$ , par continuité de l'opérateur trace de  $H^1(\Omega(\mathcal{O}))$  sur  $H^{1/2}(\partial\mathcal{O})$ , et donc, muni de la norme  $H^1$ , un espace de Hilbert.

**Lemme 4.1** *soit  $\Omega$  un ouvert connexe borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Gamma$  une partie lipschitzienne de sa frontière de mesure non nulle. Il existe<sup>14</sup> une constante  $C$  telle que pour tout  $v \in H^1(\Omega)$ , on a :*

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \left( \int_{\Gamma} v d\sigma \right)^2 \right) \quad (\text{inégalité de Poincaré-Friedrichs}).$$

<sup>11</sup>pour des renseignements sur les tokamaks en général et sur ces équations en particulier, se référer au livre de Jacques Blum [Blu89], particulièrement au chapitre V

<sup>12</sup>voir introduction de chapitre 2

<sup>13</sup>on peut aussi se référer au chapitre IX.5, *Formulation variationnelle de quelques problèmes aux limites elliptiques*, de [Bre05]

<sup>14</sup>cf [CL09] p.36

On prenant  $\Gamma := \partial\mathcal{O}$ , on en déduit que pour tout  $v \in \mathcal{H}$ , on a :

$$\|v\|_{H^1(\Omega(\mathcal{O}))} \leq C|v|_{H^1(\Omega(\mathcal{O}))}$$

On pose alors le problème suivant :

Problème [Neumann] : trouver  $u \in \mathcal{H}$  t.q. pour tout  $v \in \mathcal{H}$ , on ait :

$$\int_{\Omega(\mathcal{O})} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\mathcal{D}} g_1 v \, d\sigma.$$

**Propriété 4.5** *le problème [Neumann] admet une unique solution  $u$  qui vérifie  $\Delta u = 0$  dans  $\Omega(\mathcal{O})$ ,  $u = 0$  sur  $\partial\mathcal{O}$  et  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g_1$  sur  $\partial\mathcal{D}$ .*

Preuve : il existe une unique solution au problème par application directe du théorème de Lax-Milgram (l'inégalité de Poincaré-Friedrichs nous donne la coercivité de la forme bilinéaire  $a(u, v) := \int_{\Omega(\mathcal{O})} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$  sur  $\mathcal{H}$ ).  
 $u \in \mathcal{H}$  implique  $u = 0$  sur  $\partial\mathcal{O}$ . Ensuite, soit  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega(\mathcal{O}))$ , on a  $\varphi \in \mathcal{H}$ , et donc :

$$\int_{\Omega(\mathcal{O})} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = 0 = -\langle \Delta u, \varphi \rangle$$

d'où  $\Delta u = 0$ . On a donc  $u \in H^1(\Omega, \Delta)$ . On a donc<sup>15</sup>, pour tout  $v \in \mathcal{H}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(\mathcal{O})} \Delta u v \, dx &= 0 = - \int_{\Omega(\mathcal{O})} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{D}), H^{1/2}(\partial\mathcal{D})} \\ &= - \int_{\partial\mathcal{D}} g_1 v \, d\sigma + \left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{D}), H^{1/2}(\partial\mathcal{D})}. \end{aligned}$$

La surjectivité de l'application  $v \in \mathcal{H} \mapsto v|_{\partial\mathcal{D}} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{D})$  donne finalement  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g_1$  sur  $\partial\mathcal{D}$ . ■

Si on se donne  $\Gamma \subset \partial\mathcal{D}$ , on obtient alors des données pour notre problème en prenant  $(u|_\Gamma, g_1|_\Gamma)$ .

Pour nos tests, on prend  $\mathcal{D} = ]-0.5, 0.5[ \times ]-0.5, 0.5[ \subset \mathbb{R}^2$ , on se donne un ouvert  $\mathcal{O} \Subset \mathcal{D}$  et une triangulation de  $\Omega(\mathcal{O})$ , et on résout le problème [Neumann] par la méthode des éléments finis  $P_1$ , très classiquement<sup>16</sup>. Il suffit alors de récupérer la trace sur  $\Gamma$  de la solution calculée pour obtenir nos données.

Remarque : on pourrait bien entendu résoudre le problème en imposant  $g_0$  comme condition de Dirichlet, et en récupérant la trace normale de la solution. S'il n'y a que peu de différences en théorie (il faut juste s'assurer d'avoir pris  $g_0$  assez régulier), en pratique la trace des fonctions de  $H^1$  est mieux approchée par éléments finis  $P_1$  que la trace normale. On obtient une donnée de meilleure qualité en passant par le problème [Neumann].

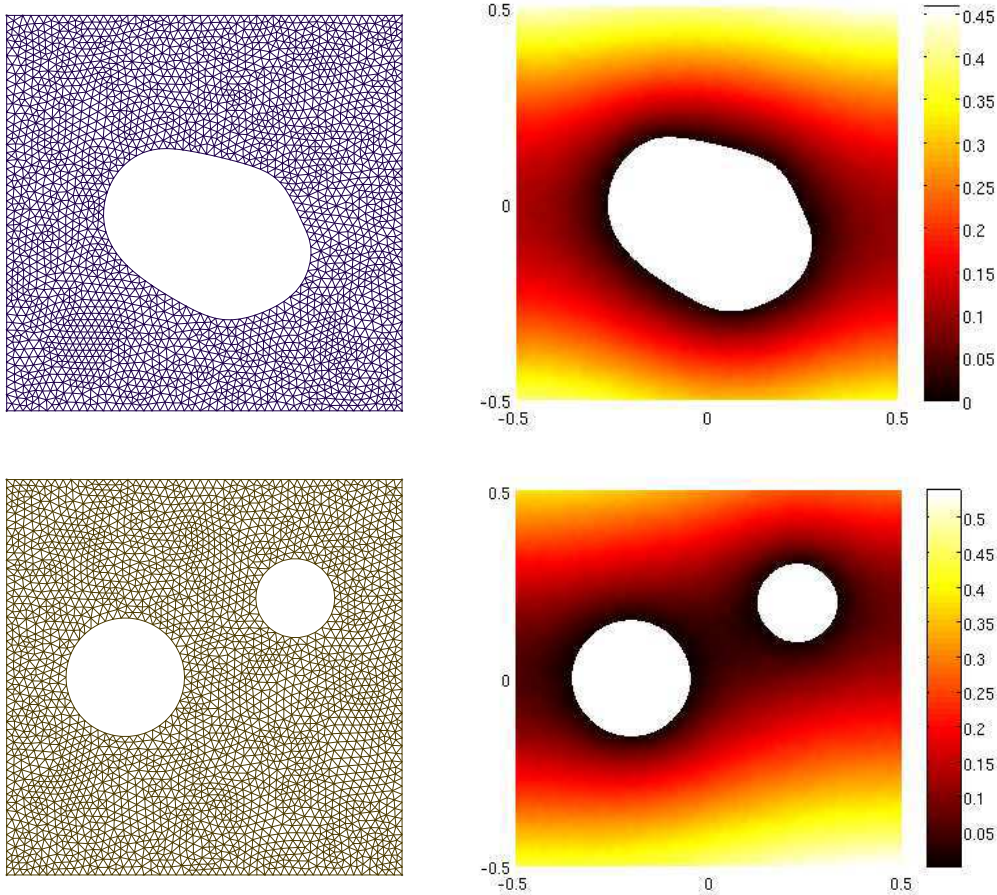
Il est intéressant de noter que nos données provenant d'un calcul éléments finis, elles ne sont pas exactes. Tout se passe comme si on introduisait directement du bruit sur les données. Avec un maillage assez fin, on peut espérer que ce bruit sera minime.

En guise de conclusion, deux applications numériques : on résout [Neumann] dans  $\Omega(\mathcal{O})$ , avec  $g_1 = \begin{cases} 1 & \text{sur } ]-0.5, 0.5[ \times \{\pm 0.5\} \\ 0 & \text{sur } \{\pm 0.5\} \times ]-0.5, 0.5[ \end{cases}$ . À gauche sont représentés les maillages servant à la résolution éléments finis (pas du maillage de l'ordre de 1/50), à droite les solutions.

<sup>15</sup>cf lemme 1.3 p.11

<sup>16</sup>cf [CL09], [PL96] ou encore [Cia78], par exemple





### 4.3 Limitations d'une première méthode naïve

Nous présentons ici une première idée qui vient naturellement lorsque l'on veut résoudre le problème  $[\mathcal{O}_{b_s}]$  en utilisant la méthode de quasi-réversibilité. Elle est adaptée de l'idée de J. Blum<sup>17</sup> pour le cas du plasma. On se place dans le cas où l'opérateur  $P$  est l'opérateur laplacien. Supposons que, bien que ne connaissant pas précisément la position de l'obstacle, nous connaissons un ouvert  $\mathcal{O}_0$  vérifiant  $\mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O}$ . Typiquement, dans le problème d'identification de la frontière du plasma, on sait a priori où se trouve le plasma, car il est confiné par les limiteurs, et on peut espérer trouver un tel  $\mathcal{O}_0$ . La deuxième supposition est de loin plus hasardeuse : supposons que  $u$  se prolonge en une fonction  $\tilde{u}$  dans  $\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}_0}$ , telle que  $\tilde{u}$  vérifie  $\Delta \tilde{u} = 0$  dans  $\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}_0}$ <sup>18</sup>.

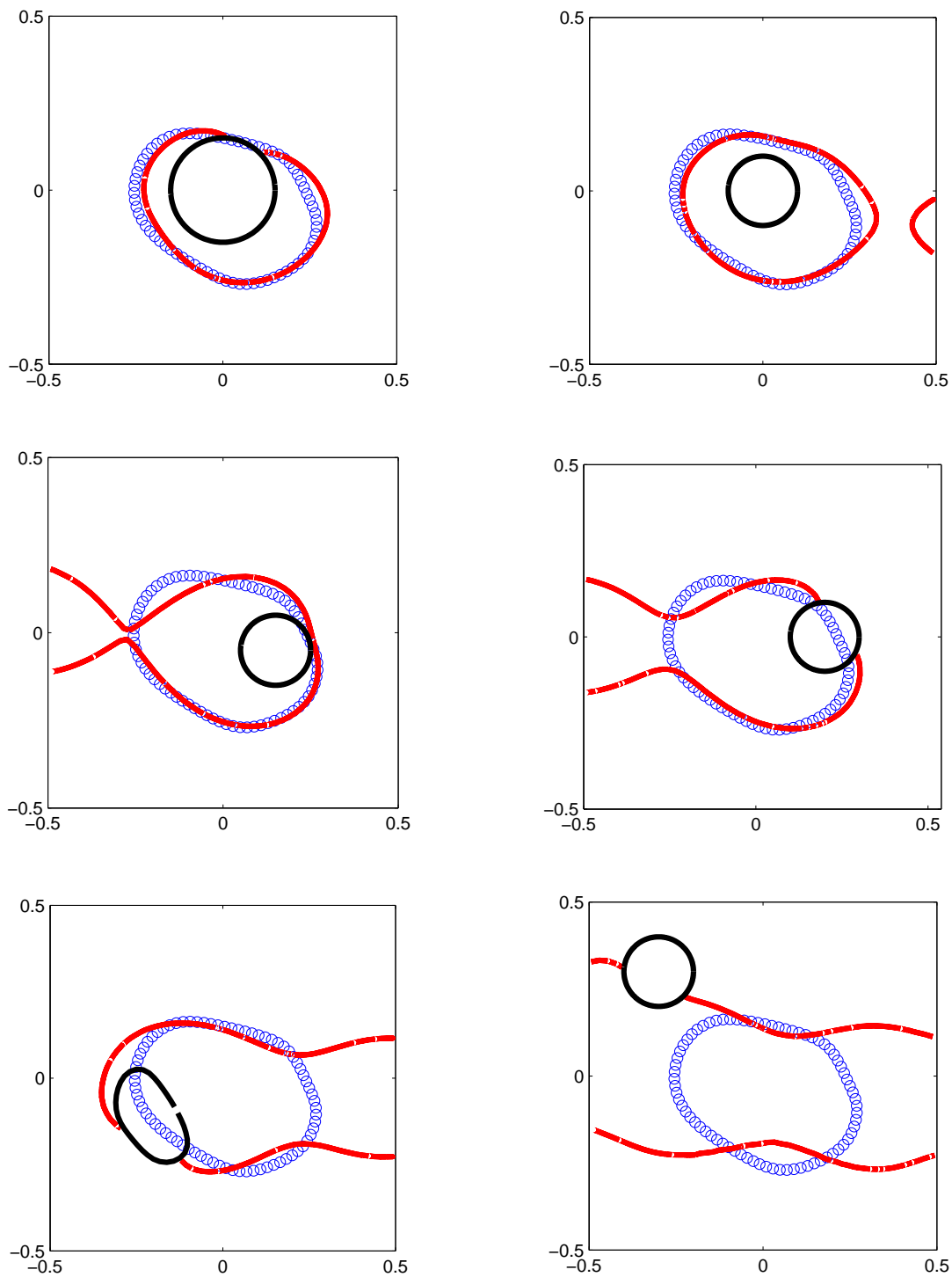
L'idée est alors d'utiliser la méthode de quasi-réversibilité<sup>19</sup> dans  $\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}_0}$ . On obtient ainsi une approximation  $\tilde{u}_\varepsilon$  de  $\tilde{u}$  à partir de la donnée  $(g_0, g_1)$  sur  $\Gamma$  partie du bord de  $\mathcal{D}$ . La ligne de niveau zéro de  $\tilde{u}_\varepsilon$  devrait alors nous donner une bonne approximation de  $\mathcal{O}$ .

Nous allons tester cette méthode dans  $\mathcal{D} := ]-0.5, 0.5[ \times ]-0.5, 0.5[ \subset \mathbb{R}^2$ , avec  $\Gamma := \partial \mathcal{D}$  (on obtient des données comme expliqué précédemment). L'obstacle que nous recherchons est représenté en bleu sur les figures. On se donne un ouvert  $\mathcal{O}_0$  pour les tests (en noir sur les figures), on résout le problème [QR] dans  $\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}_0}$ . On représente (en rouge) la ligne de niveau zéro de la solution de ce problème.

<sup>17</sup>cf [Blu89]

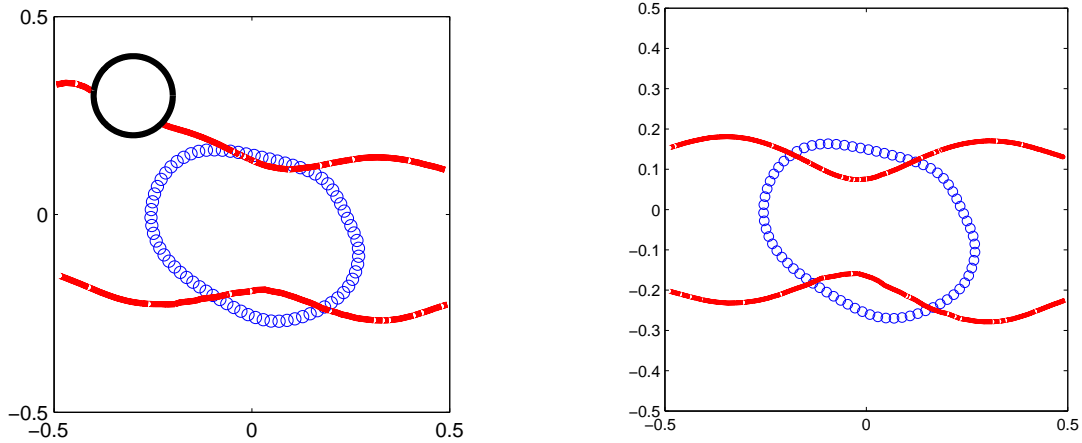
<sup>18</sup>par le théorème de Cauchy-Kowalewska ([CHT62]), on sait que l'on peut prolonger de cette façon  $u$  "un petit peu" à l'intérieur de l'obstacle si sa frontière est assez régulière, mais on ne sait pas si on peut le faire jusqu'à  $\mathcal{O}_0$

<sup>19</sup>voir le chapitre 2



En bleu,  $\mathcal{O}$ , en noir,  $\mathcal{O}_0$ , et en rouge, la ligne de niveau 0 de  $\tilde{u}_\varepsilon$

On constate tout d'abord que les résultats sont assez bons dans les cas où  $\mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O}$  (trois premières figures). Néanmoins, la reconstruction de  $\mathcal{O}$  n'est pas stable, elle dépend fortement de la position de  $\mathcal{O}_0$  par rapport à  $\mathcal{O}$ . Si  $\mathcal{O}_0 \not\subset \mathcal{O}$ , le résultat est très mauvais, et dans le dernier cas, où  $\mathcal{O}_0 \cap \mathcal{O} = \emptyset$ , n'est pas meilleur que celui obtenu en résolvant le problème [QR] dans tout  $\mathcal{D}$ , comme le montrent les deux figures suivantes :



En conclusion, cette méthode, qui est extrêmement rapide, nécessite en contrepartie une très bonne connaissance de la position de l'obstacle si l'on désire des résultats acceptables. Elle est donc inapplicable dans la plupart des cas, en particulier quand  $\mathcal{O}$  possède plusieurs composantes connexes, puisqu'elle nécessite la connaissance a priori du nombre et de la position de toutes les composantes<sup>20</sup>.

#### 4.4 Une nouvelle approche par l'extérieur

Pour que la méthode précédente fonctionne théoriquement, il est nécessaire de pouvoir prolonger la fonction  $u$  à l'intérieur de l'obstacle en une fonction  $\tilde{u}$  vérifiant  $P\tilde{u} = 0$ . Les exemples numériques précédents montrent clairement que ce n'est pas toujours le cas. Nous allons donc tenter de résoudre le problème  $[\mathcal{O}_{bs}]$  sans faire cette hypothèse. En conséquence, nous ne devons jamais essayer de calculer  $u$  à l'intérieur de l'obstacle (précisément là où nous ne sommes pas sûr de son existence). En particulier, nous ne pouvons calculer  $u$  sur  $\mathcal{D} \setminus \bar{\omega}$  que si  $\mathcal{O} \subset \omega$ . Ceci nous impose une approche par l'extérieur de l'obstacle.

Donnons nous un ouvert  $\omega_0$ , première approximation de  $\mathcal{O}$ , vérifiant  $\mathcal{O} \subset \omega_0 \Subset \mathcal{D}$ . La fonction  $u$  est l'unique fonction vérifiant dans  $\mathcal{D} \setminus \bar{\omega}_0$

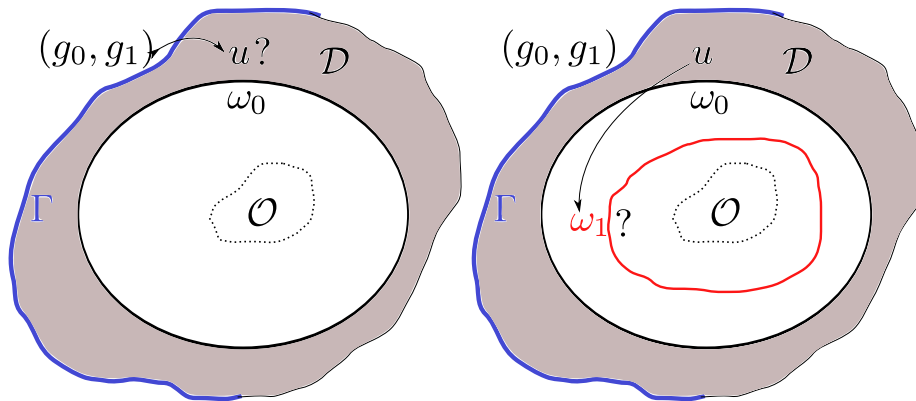
$$\begin{cases} Pu = 0 & \text{dans } \mathcal{D} \setminus \bar{\omega}_0 \\ u = g_0 & \text{sur } \Gamma \\ \partial_{\nu_P} u = g_1 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

c'est-à-dire l'unique solution du problème de Cauchy pour l'opérateur  $P$ , que nous savons résoudre (approximativement) par la méthode de quasi-réversibilité<sup>21</sup>.

La question que l'on va alors se poser est la suivante : connaissant  $u$  dans  $\mathcal{D} \setminus \bar{\omega}_0$ , sommes-nous capables d'obtenir une meilleure approximation extérieure de  $\mathcal{O}$ , plus précisément un ouvert  $\omega_1$  vérifiant  $\mathcal{O} \subset \omega_1 \subset \omega_0$  ?

<sup>20</sup> s'ils savaient où se trouve ce qu'ils cherchent, ils ne chercheraient pas (Johann Wolfgang von Goethe, Maximes et réflexions)

<sup>21</sup> voir chapitre 2



Les deux étapes de la méthode envisagée : premièrement, on obtient  $u$  dans  $\mathcal{D} \setminus \bar{\omega}_0$  à partir de  $(g_0, g_1)$ , deuxièmement, on obtient  $\omega_1$  à partir de  $u$ .

Plus généralement, peut-on construire une suite d'ouverts  $(\omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $\mathcal{O} \subset \omega_{m+1} \subset \omega_m$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ ? Nous verrons qu'une telle suite converge toujours. Il restera à déterminer si sa limite est bien l'obstacle recherché.

Si nous pouvons répondre par l'affirmative à ces deux interrogations, nous aurons construit une méthode qui approche par l'extérieur l'obstacle recherché, et nous aurons résolu le problème  $[\mathcal{O}_{b_s}]$ . Nous allons voir dans les deux prochains chapitres deux manières de mettre en place de telles approches par l'extérieur.



# Chapitre 5

## Méthode de lignes de niveau fondée sur une équation de Hamilton-Jacobi

### Introduction

Les méthodes de lignes de niveau ont été introduites pour la première fois dans un article de Osher et Sethian paru en 1988<sup>1</sup> pour l'étude de la propagation de fronts, c'est-à-dire le déplacement d'une surface de  $\mathbb{R}^d$  soumise à une vitesse. C'est un problème difficile, car ces surfaces, lors de leur mouvement, peuvent avoir des comportements tout à fait désagréables, en particulier des changements de topologie, qui rendent la simulation numérique de leur propagation difficile. La méthodologie des lignes de niveau est une manière efficace et simple d'aborder cette problématique.

Notons  $\Gamma$  la surface dont on veut étudier le mouvement.  $\Gamma$  est un domaine de  $\mathbb{R}^d$  de codimension 1. L'idée introduite par Osher et Sethian est de définir une fonction  $\varphi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  régulière (au moins lipschitzienne) telle que l'on ait :  $\forall t \in \mathbb{R}^+, \Gamma(t) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \varphi(x, t) = 0\}$ . Ainsi, pour tout temps  $t$ ,  $\Gamma$  est la ligne de niveau zéro de  $\varphi^2$ .

L'intérêt principal de ce changement d'inconnue ( $\Gamma \rightarrow \varphi$ ) est que l'on en vient à étudier la solution d'une EDP, dont le traitement à la fois théorique et numérique est beaucoup plus simple que celui de la surface. En particulier, les changements de topologie de  $\Gamma$  sont automatiquement traités au travers de  $\varphi$ . Cette méthodologie a démontré son efficacité dans de nombreux domaines d'application<sup>3</sup>, notamment en imagerie et dans les problèmes d'interactions fluides-structures. Nous allons voir qu'elle est également très efficace pour la résolution du problème inverse de l'obstacle.

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Méthode de lignes de niveau . . . . .</b>	<b>98</b>
5.1.1	Équation eikonale . . . . .	98
5.1.2	Cadre théorique . . . . .	98
5.1.3	Stratégie de résolution du problème $[\mathcal{O}_{b_s}]$ . . . . .	99
<b>5.2</b>	<b>Résolution du problème <math>[\mathcal{O}_{b_s}]</math>... . . . .</b>	<b>100</b>
5.2.1	Une première méthode simple . . . . .	100
5.2.2	Seconde méthode : méthode [HJ] . . . . .	103
5.2.3	Conclusion et remarques : vers une nouvelle méthode de résolution de $[\mathcal{O}_{b_s}]$ 107	

---

<sup>1</sup>[OS88]

<sup>2</sup>d'où le level-set. Étonnant, non ?

<sup>3</sup>pour plus de détails au sujet des méthodes level-set, voir [OF03] et [OP03]

## 5.1 Méthode de lignes de niveau

### 5.1.1 Équation eikonale

Dans le formalisme des méthodes de lignes de niveau, pour être capable de suivre l'évolution au cours du temps du front  $\Gamma$ , il suffit de savoir suivre l'évolution d'une ligne de niveau de  $\varphi$ . Pour  $c \in \mathbb{R}$ ,  $x(t)$  est un élément de la ligne de niveau  $c$  de  $\varphi$  si et seulement si

$$\varphi(x(t), t) = c.$$

En dérivant<sup>4</sup> cette équation par rapport au temps, on obtient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x(t), t) + \dot{x}(t) \cdot \nabla_x \varphi(x(t), t) = 0.$$

Supposons alors que le front soit soumis en un point  $x$  à une vitesse  $\vec{V}(x)$  connue, soit  $\dot{x}(t) = \vec{V}(x(t))$ . On a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x(t), t) + \vec{V}(x(t)) \cdot \nabla_x \varphi(x(t), t) = 0.$$

Posons alors

$$\vec{n}(x(t), t) := \frac{\nabla_x \varphi(x(t), t)}{|\nabla_x \varphi(x(t), t)|}$$

et écrivons  $\vec{V}(x) := V_n \vec{n} + \vec{V}_t$ , avec  $\vec{n} \cdot \vec{V}_t = 0$ . On obtient que la fonction  $\varphi$  est soumise à une équation eikonale :

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_n |\nabla_x \varphi| = 0}$$

La résolution de cette équation (avec des conditions aux limites) nous permet donc de connaître l'évolution de  $\varphi$ , et donc celle de la ligne de niveau zéro de  $\varphi$ , c'est-à-dire celle de  $\Gamma$ , soumis à un champ de vitesse normal.

### 5.1.2 Cadre théorique

Soit un ouvert borné  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^d$ . Nous sommes amenés à nous intéresser à l'existence et l'unicité d'une éventuelle solution à des problèmes de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + V(x) |\nabla \phi| = 0 & \text{dans } \mathcal{D} \times ]0, T[ \\ \phi(x, 0) = f_0(x) & \text{sur } \mathcal{D} \\ \phi(x, t) = g(x, t) & \text{sur } \partial \mathcal{D} \times ]0, T[. \end{cases} \quad (5.1)$$

Le bon cadre d'étude pour ce genre de problème est celui des solutions de viscosité pour les équations de Hamilton-Jacobi. Nous renvoyons à [Bar94] pour une étude très complète de ce type de problème.

On dira que  $\varphi \in C(\overline{\mathcal{D}} \times [0, T])$  est sous-solution de viscosité de (5.1) si et seulement si  $\phi(x, 0) \leq f_0(x)$  sur  $\mathcal{D}$ ,  $\phi(x, t) \leq g(x, t)$  sur  $\partial \mathcal{D} \times ]0, T[$ , et pour toute fonction  $\psi \in C^1(\mathcal{D} \times ]0, T[)$ , si  $(x_0, t_0)$  est un point de maximum local de  $\varphi - \psi$ , on a

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x_0, t_0) + V(x_0) |\nabla \psi(x_0, t_0)| \leq 0.$$

---

<sup>4</sup>formellement

On dira que  $\varphi \in C(\overline{\mathcal{D}} \times ]0, T[)$  est sur-solution de viscosité de (5.1) si et seulement si  $\phi(x, 0) \geq f_0(x)$  sur  $\mathcal{D}$ ,  $\phi(x, t) \geq g(x, t)$  sur  $\partial\mathcal{D} \times ]0, T[$ , et pour toute fonction  $\psi \in C^1(\mathcal{D} \times ]0, T[)$ , si  $(x_0, t_0)$  est un point de minimum local de  $\varphi - \psi$ , on a

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(x_0, t_0) + V(x_0)|\nabla\psi(x_0, t_0)| \geq 0.$$

Enfin, on dira que  $\varphi \in C(\overline{\mathcal{D}} \times [0, T])$  est solution de viscosité de (5.1) si et seulement si elle est sous-solution et sur-solution de viscosité de (5.1).

Nous présentons ici le résultat dont nous aurons principalement besoin dans notre étude. Il concerne un cas particulier de l'équation (5.1). Nous renvoyons à l'annexe A pour la preuve de ce théorème.

**Théorème 5.1** *Soit l'équation suivante :*

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial t} + V(x)|\nabla\phi| = 0 & \mathcal{D} \times ]0, T[ \\ \phi(x, 0) = f_0(x) & \mathcal{D} \\ \phi(x, t) = f_0(x) & \partial\mathcal{D} \times ]0, T[. \end{cases} \quad (5.2)$$

Si

- $f_0$  est une fonction lipschitzienne de  $\mathcal{D}$
- $V$  est lipschitzienne dans  $\mathcal{D}$
- $V$  est à support compact dans  $\mathcal{D}$

alors cette équation admet une unique solution de viscosité  $\phi$ , et on a  $\phi \in W^{1,\infty}(\mathcal{D} \times ]0, T[)$ .

Remarquons tout de suite le gain en régularité sur  $\phi$ . Il est très important, puisque nous pouvons dire que  $\phi$  est différentiable presque partout, et le point (ii) du corollaire 2.1 p.17 de [Bar94] nous dit alors que  $\phi$  vérifie l'équation eikonale presque partout. Ainsi, pour tout ouvert  $\omega \subset \mathcal{D}$ , pour tout intervalle de temps  $]s_1, s_2[ \subset ]0, T[$ , on aura

$$\int_{\omega} \int_{s_1}^{s_2} \left[ \frac{\partial\phi}{\partial t}(x, s) + V(x)|\nabla\phi(x, s)| \right] ds dx = 0,$$

relation que nous allons utiliser à de multiples reprises.

### 5.1.3 Stratégie de résolution du problème $[\mathcal{O}_{bs}]$

Nous présentons ici les principales idées qui mèneront aux méthodes décrites dans la seconde partie de ce chapitre. On se donne une condition initiale  $f_0 \in C(\overline{\mathcal{D}})$  vérifiant :

$$\mathcal{O} \subset \{x \in \mathcal{D} \text{ t.q. } f_0(x) < 0\}.$$

Ainsi, la ligne de niveau zéro de  $\varphi(x, 0)$  "entoure" l'obstacle recherché. Le but va être de faire évoluer cette ligne de niveau au cours du temps grâce à l'équation eikonale (5.2), en choisissant la vitesse  $V$  de telle sorte que la ligne de niveau zéro de  $\varphi(x, t)$  tende vers la frontière  $\partial\mathcal{O}$  de l'obstacle. Cette vitesse dépendra bien entendu de la fonction  $u$ . Intuitivement, un bon choix de vitesse est  $V := -|u|$ , car :

- en dehors de l'obstacle  $\mathcal{O}$ , on a  $|u|$  non nulle<sup>5</sup>. L'équation eikonale donne alors

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = |u||\nabla\varphi| > 0$$

<sup>5</sup>en effet, si  $|u|$  est nulle sur un ouvert de  $\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}}$ , alors en vertu de la propriété de prolongement unique 4.2 vérifiée par l'opérateur  $P$ , on aurait  $u \equiv 0$  dans  $\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}}$ , ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse  $(u, \partial_{\nu_P} u) = (g_0, g_1) \neq (0, 0)$



d'où  $\varphi(x, \cdot)$  est une fonction croissante du temps. La ligne de niveau de  $\varphi$  a donc tendance à se rapprocher de  $\partial\mathcal{O}$

◦ sur l'obstacle en revanche, on a  $u = 0$ . L'équation eikonale donne  $\frac{\partial\varphi}{\partial t}|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ , soit  $\varphi|_{\partial\mathcal{O}} = f_0|_{\partial\mathcal{O}} < 0$  pour tout temps  $t$ , et la ligne de niveau de  $\varphi$  ne traverse jamais la frontière de l'obstacle.

Bien entendu, ce raisonnement n'est que formel. Il nous reste donc à donner un cadre mathématique complet à ces idées.

## 5.2 Résolution du problème $[\mathcal{O}_{b_s}]$ par l'intermédiaire d'une équation eikonale

### 5.2.1 Une première méthode simple

Nous allons supposer que  $u$ , solution du problème de l'obstacle, est une fonction lipschitzienne sur  $\Omega(\mathcal{O})^6$ . On se donne  $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{D})$ ,  $0 \leq \chi \leq 1$  sur  $\mathcal{D}$ . On définit la vitesse suivante :

$$\begin{cases} V(x) = \chi(x)|u(x)| \text{ pour } x \in \Omega(\mathcal{O}) \\ V(x) \leq 0 \text{ dans } \mathcal{O} \end{cases}$$

avec comme condition supplémentaire  $V$  lipschitz sur  $\mathcal{D}$ . Il existe des fonctions vérifiant les propriétés, il suffit de prendre  $V \equiv 0$  dans  $\mathcal{O}$  pour s'en assurer. On se donne  $\phi_0$  fonction lipschitzienne sur  $\mathcal{D}$ . Alors d'après le théorème 5.1, le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial t} - V(x)|\nabla\phi| = 0, (x, t) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}_*^+ \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x), x \in \mathcal{D} \\ \phi(x, t) = \phi_0(x), (x, t) \in \partial\mathcal{D} \times \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

admet une unique solution de viscosité  $\phi$ , continue sur  $\overline{\mathcal{D}} \times \mathbb{R}^+$  (par définition), telle que  $\phi \in W^{1,\infty}(\mathcal{D} \times ]0, T[)$ ,  $\forall T > 0$ . On définit, pour tout  $t \geq 0$ , le domaine ouvert :

$$\omega_t = \{x \in \mathcal{D} \mid \phi(x, t) < 0\}.$$

**Propriété 5.1** *si  $\mathcal{O} \subset \omega_0$ , alors  $\mathcal{O} \subset \omega_t$  pour tout  $t \geq 0$ .*

Ce résultat serait direct si on avait  $\phi \in C^1(\mathcal{D} \times \mathbb{R}^+)$ . On aurait dans ce cas, pour  $x \in \mathcal{O}$ ,

$$\phi(x, t) = \phi_0(x) + \int_0^t \frac{\partial\phi}{\partial t}(x, s) ds.$$

En utilisant l'équation eikonale<sup>7</sup>, on obtient alors

$$\phi(x, t) = \phi_0(x) + \int_0^t V(x)|\nabla\phi(x, s)| ds$$

et donc  $\phi(x, t) \leq 0$ , puisque  $\phi_0(x) \leq 0$  car  $\mathcal{O} \subset \omega_0$ , et  $V(x) \leq 0$  par hypothèse. Malheureusement,  $\phi$  n'est en général pas  $C^1(\mathcal{D} \times \mathbb{R}^+)$ , et la démonstration en est rendue quelque peu plus difficile. On a en particulier besoin du lemme suivant :

<sup>6</sup>remarquons que  $Lip(\Omega(\mathcal{O}))$ , ensemble des fonctions lipschitziennes sur  $\Omega(\mathcal{O})$ , est un sous-ensemble de  $C^0(\overline{\Omega(\mathcal{O})}) \cap H^1(\Omega(\mathcal{O}))$ , espace fonctionnel dans lequel  $u$  se trouve par hypothèse

<sup>7</sup>si  $\phi \in C^1(\mathcal{D} \times \mathbb{R}^+)$ , alors l'équation eikonale, qui est vérifiée par  $\phi$  au sens de viscosité, est en fait vérifiée par  $\phi$  au sens fort, voir le point (ii) du corollaire 2.1 p.17 de [Bar94]

**Lemme 5.1** soit  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{V}_x$  un voisinage de  $x$  et  $f \in C(\mathcal{V}_x)$ . Alors :

$$\frac{1}{|\mathcal{B}(x, \varepsilon)|} \int_{\mathcal{B}(x, \varepsilon)} f(u) du \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(x).$$

Preuve : soit  $\varepsilon_0 > 0$  t.q.  $\mathcal{B}(x, \varepsilon_0) \subset \mathcal{V}_x$ . On fait le changement de variable  $v := \frac{1}{\varepsilon}(u - x)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathcal{B}(x, \varepsilon)|} \int_{\mathcal{B}(x, \varepsilon)} f(u) du - f(x) &= \frac{1}{|\mathcal{B}(x, \varepsilon)|} \int_{\mathcal{B}(x, \varepsilon)} [f(u) - f(x)] du \\ &= \frac{\varepsilon^d}{|\mathcal{B}(x, \varepsilon)|} \int_{\mathcal{B}(0, 1)} [f(\varepsilon v + x) - f(x)] dv \\ &= \frac{1}{|\mathcal{B}(0, 1)|} \int_{\mathcal{B}(0, 1)} [f(\varepsilon v + x) - f(x)] dv \end{aligned}$$

Si on note  $g_\varepsilon(v) : v \in \mathcal{B}(0, 1) \mapsto f(\varepsilon v + x) - f(x)$ , on a  $g_\varepsilon(v) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$  pour tout  $v \in \mathcal{B}(0, 1)$ , par continuité de  $f$  sur  $\mathcal{V}_x$ , et pour  $\varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $|g_\varepsilon(x)| \leq 2\|f\|_{L^\infty(\mathcal{B}(x, \varepsilon_0))} \in L^1(\mathcal{B}(0, 1))$ . On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue<sup>8</sup>, et on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{B}(0, 1)} [f(\varepsilon v + x) - f(x)] dv = 0.$$

Le résultat suit. ■

Preuve de la propriété 5.1 : soit  $x \in \mathcal{O}$ ,  $\varepsilon > 0$  t.q.  $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$  et  $s > 0$ . Comme  $\phi \in W^{1, \infty}(\mathcal{D} \times ]0, T[)$ , on a, pour tout  $s > 0$ ,  $\phi(y, \cdot) \in W^{1, \infty}(]0, s])$  pour tout  $y \in \mathcal{B}(x, \varepsilon)$ , et donc<sup>9</sup>

$$\phi(y, s) - \phi(y, 0) = \int_0^s \frac{\partial \phi}{\partial t}(y, t) dt.$$

On a alors

$$\int_{\mathcal{B}(x, \varepsilon)} \phi(y, s) - \phi(y, 0) dy = \int_{\mathcal{B}(x, \varepsilon)} \int_0^s \frac{\partial \phi}{\partial t}(y, t) dt dy$$

et comme  $\phi$  vérifie l'équation eikonale presque partout, on a

$$\int_{\mathcal{B}(x, \varepsilon)} \phi(y, s) - \phi(y, 0) dy = \int_{\mathcal{B}(x, \varepsilon)} \int_0^s V(y) |\nabla \phi(y, t)| dt dy.$$

Par hypothèse  $V \leq 0$  dans  $\mathcal{B}(x, \varepsilon)$ , et on a donc  $\int_{\mathcal{B}(x, \varepsilon)} \phi(y, s) - \phi(y, 0) dy \leq 0$ . En divisant par  $|\mathcal{B}(x, \varepsilon)|$ , en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 et en utilisant le lemme 5.1, on obtient  $\phi(x, s) \leq \phi(x, 0) = \phi_0(x) < 0$  puisque  $x \in \omega_0$ . On a donc finalement  $x \in \omega_s$  pour tout  $s \geq 0$ . ■

**Propriété 5.2** supposons  $\mathcal{O} \subset \omega_0$ . L'application  $t \mapsto \omega_t$  est décroissante (pour l'inclusion).

Une nouvelle fois, si on avait  $\phi \in C^1(\mathcal{D} \times \mathbb{R}^+)$ , le résultat serait très simplement prouvé. On aurait

$$\phi(x, t) - \phi(x, s) = \int_s^t \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, u) du = \int_s^t V(x) |\nabla \phi(x, u)| du, \quad \forall 0 \leq s < t.$$

Si  $x \in \omega_t$ , alors soit  $x \in \mathcal{O}$ , et dans ce cas  $x \in \omega_s$  d'après la propriété précédente, soit  $x \notin \mathcal{O}$ , et on a  $V(x) \geq 0$ , d'où  $\phi(x, t) \geq \phi(x, s)$ , ce qui implique de nouveau  $x \in \omega_s$ .

Preuve de la propriété 5.2 : soit  $0 \leq s \leq t$ , et  $x \in \omega_t$ . Nous voulons montrer que  $x \in \omega_s$ .

<sup>8</sup> cf théorème IV.2 p.54 de [Bre05]

<sup>9</sup> cf théorème VIII.2 et remarque 5 p.122 de [Bre05]

- soit  $x \in \mathcal{O}$ , et la propriété 5.1 nous donne  $x \in \omega_s$ .
- soit  $x \in \omega_t \setminus \overline{\mathcal{O}}$ . Soit  $\eta > 0$  t.q.  $\mathcal{B}(x, \eta) \subset \omega_t \setminus \overline{\mathcal{O}}$ . Par un raisonnement identique à celui de la preuve de la propriété 5.1, on obtient

$$\int_{\mathcal{B}(x, \eta)} \phi(y, t) - \phi(y, s) dy = \int_{\mathcal{B}(x, \eta)} \int_s^t V(y) |\nabla \phi(y, u)| du dy.$$

Comme  $\mathcal{B}(x, \eta) \subset \Omega(\mathcal{O})$ , on a par hypothèse  $V \geq 0$  dans  $\mathcal{B}(x, \eta)$ . On en déduit

$$\int_{\mathcal{B}(x, \eta)} \phi(y, t) - \phi(y, s) dy \geq 0$$

et, en divisant par  $|\mathcal{B}(x, \eta)|$  et en faisant tendre  $\eta$  vers 0,  $\phi(x, t) \geq \phi(x, s)$ . Comme  $x \in \omega_t$ , on a  $\phi(x, t) < 0$ . On en déduit  $\phi(x, s) < 0$ , soit  $x \in \omega_s$ . ■

Sous l'hypothèse  $\mathcal{O} \subset \omega_0$ , l'application  $t \mapsto \omega_t$  est décroissante, et les  $\omega_t$  appartiennent à un ouvert borné fixé (l'ouvert  $\mathcal{D}$ ). On peut donc utiliser la propriété B.4 p.196 : les  $\omega_t$  convergent au sens de Hausdorff vers

$$\omega = \overbrace{\bigcap_{t \geq 0} \omega_t}^{\circ}$$

Par stabilité de l'inclusion pour la convergence au sens de Hausdorff<sup>10</sup>, on a  $\mathcal{O} \subset \omega$ . On a la caractérisation suivante

$$\omega = \{x \in \mathcal{D} \mid \exists \eta_x > 0, \forall y \in \mathcal{B}(x, \eta_x), \forall t \in \mathbb{R}^+, \phi(y, t) < 0\}$$

Nous arrivons maintenant au résultat principal de cette partie :

**Théorème 5.2** *supposons  $\mathcal{O} \subset \omega_0$  et  $\chi \equiv 1$  dans  $\omega_0$ . Supposons également qu'il existe une fonction  $c(t)$  positive telle que*

$$\int_0^\infty c(t) dt = \infty$$

et

$$|\nabla \phi(x, t)| \geq c(t) \text{ pour presque tout } (x, t) \in \Omega(\mathcal{O}) \times \mathbb{R}^+.$$

Alors

$$\boxed{\omega = \mathcal{O}}$$

*Autrement dit, les  $\omega_t$  convergent (au sens de Hausdorff) vers  $\mathcal{O}$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.*

Preuve : on sait déjà que  $\mathcal{O} \subset \omega$ . Soit  $x \in \omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$ , et  $\eta$  suffisamment petit pour que  $\mathcal{B}(x, \eta) \subset \omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$ . On a  $\mathcal{B}(x, \eta) \subset \omega_0 \setminus \overline{\mathcal{O}}$ , d'où pour tout  $y \in \mathcal{B}(x, \eta)$ ,  $V(y) = |u(y)|$ . On a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}(x, \eta)} [\phi(y, t) - \phi_0(y)] dy &= \int_{\mathcal{B}(x, \eta)} \int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial t}(y, s) ds dy \\ &= \int_{\mathcal{B}(x, \eta)} \int_0^t V(y) |\nabla \phi(y, s)| ds dy \\ &\geq \left( \int_{\mathcal{B}(x, \eta)} |u(y)| dy \right) \left( \int_0^t c(s) ds \right). \end{aligned}$$

<sup>10</sup>propriété B.5 p.196 dans l'annexe B

On a  $\int_{\mathcal{B}(x,\eta)} |u(y)| > 0$ , puisque si ce n'était pas le cas, la propriété 4.2 nous donnerait  $u \equiv 0$  dans  $\Omega(\mathcal{O})$ , ce qui entrerait en contradiction avec  $(u|_{\Gamma}, \partial_{\nu_P} u|_{\Gamma}) = (g_0, g_1) \neq (0, 0)$ . On en déduit que pour  $t$  suffisamment grand

$$\int_{\mathcal{B}(x,\eta)} \phi(y, t) dy \geq 0.$$

Il existe donc  $y \in \mathcal{B}(x, \eta)$  et  $t \geq 0$  tels que  $\phi(y, t) \geq 0$ , et ce, pour tout  $\eta$  suffisamment petit (c'est-à-dire tel que  $\mathcal{B}(x, \eta) \subset \omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$ ). Ceci contredit exactement le fait que  $x \in \omega$ .

On en déduit  $\omega \setminus \overline{\mathcal{O}} = \emptyset$ , d'où  $\mathcal{O} \subset \omega \subset \overline{\mathcal{O}}$ . Comme  $\mathcal{O}$  est un ouvert à bord continu, on obtient finalement<sup>11</sup>  $\omega = \mathcal{O}$ . ■

Nous avons ici mis en place une méthode construisant une suite d'ouverts convergeant vers l'obstacle recherché. Cette approche nécessite la connaissance à tout instant de la fonction  $u$  jusqu'au bord de l'obstacle  $\mathcal{O}$  : elle n'est pas conforme au cadre méthodologique proposé au 4.4 p.94. Nous allons modifier cette méthode pour nous contenter de la connaissance de  $u$  à l'extérieur des ouverts, et allons être naturellement amenés à introduire des prolongements de  $|u|$  à l'intérieur de ces ouverts. Nous verrons quelles sont les caractéristiques que doivent vérifier ces prolongements afin d'assurer la convergence des ouverts vers l'obstacle.

D'autre part, l'hypothèse de croissance en temps de la norme du gradient ( $\int_{\mathbb{R}^+} |\nabla \phi(x, s)| ds = \infty$  pour tout  $x$ ), nécessaire pour assurer la convergence de la suite vers  $\mathcal{O}$ , est une hypothèse très forte : le théorème A.6 (p. 189 en annexe) suggère plutôt une croissance en temps de  $|\nabla \phi|$  en  $\exp(-t)$ , ce qui invaliderait directement cette hypothèse. Pour nous passer de cette hypothèse, nous allons introduire une étape de réinitialisation de  $\phi$  dans la méthode.

Ces deux modifications, utilisation de  $u$  seulement à l'extérieur des ouverts et réinitialisation de  $\phi$ , nous feront construire une seconde méthode, conforme au cadre méthodologique du 4.4 : la méthode [HJ]<sup>12</sup>.

### 5.2.2 Seconde méthode : méthode [HJ]

On suppose comme précédemment que  $u$  est lipschitzienne. Soit  $\omega_0$  ouvert,  $\mathcal{O} \subset \omega_0 \Subset \mathcal{D}$ . On se donne  $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{D})$ ,  $0 \leq \chi \leq 1$  et  $\chi \equiv 1$  sur  $\omega_0$ . On se donne  $T > 0$ . Soit  $V_0 \in C^0(\mathcal{D})$  vérifiant

$$\begin{cases} \forall x \notin \omega_0, V_0(x) = \chi(x)|u(x)| \\ \forall x \in \mathcal{O}, V_0(x) \leq 0 \\ \exists L_0 > 0 \mid \forall (x, y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}, |V_0(x) - V_0(y)| \leq L_0|x - y| \end{cases}$$

Il existe au moins une fonction vérifiant ces propriétés, à savoir  $V_0(x) = \chi(x)|u(x)|$  pour  $x \notin \mathcal{O}$  et  $V_0(x) = 0$  pour  $x \in \mathcal{O}$ .

Notons  $\phi_0$  l'unique solution de viscosité de

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} - V_0(x)\phi = 0, & \forall (x, t) \in \mathcal{D} \times ]0, T[ \\ \phi(x, 0) = \tilde{\delta}_{\omega_0}(x), & \forall x \in \mathcal{D} \\ \phi(x, t) = \tilde{\delta}_{\omega_0}(x), & \forall (x, t) \in \partial\mathcal{D} \times [0, T] \end{cases}$$

avec  $\tilde{\delta}_{\omega_0}$  distance signée à  $\omega_0$  (voir annexe B). On pose alors  $\omega_1 := \{x \in \mathcal{D} \mid \phi_0(x, T) < 0\}$ .

**Propriété 5.3**  $\mathcal{O} \subset \omega_1 \subset \omega_0 \Subset \mathcal{D}$ .

<sup>11</sup>voir proposition B.2, annexe B

<sup>12</sup>[HJ] pour Hamilton-Jacobi, car elle repose sur la résolution d'équations de Hamilton-Jacobi. La première méthode repose également sur la résolution d'une telle équation, mais comme nous ne l'utiliserons pas en pratique, nous n'avons pas jugé nécessaire de lui donner un nom particulier

Preuve :

• soit  $x \in \mathcal{O}$ . Par hypothèse, on a  $x \in \omega_0$ , d'où  $\bar{\delta}_{\omega_0}(x) < 0$ . Il existe  $\eta > 0$  t.q.  $\mathcal{B}(x, \eta) \subset \mathcal{O}$ . En procédant exactement comme dans la preuve de la propriété 5.1, on a

$$\int_{\mathcal{B}(x, \eta)} \phi_0(y, T) dy = \int_{\mathcal{B}(x, \eta)} \left( \bar{\delta}_{\omega_0}(y) + \int_0^T V_0(y) |\nabla \phi_0(y, s)| ds \right) dy.$$

Par hypothèse encore,  $V_0 \leq 0$  sur  $\mathcal{B}(x, \eta)$ , et on obtient finalement

$$\int_{\mathcal{B}(x, \eta)} \phi_0(y, T) dy \leq \int_{\mathcal{B}(x, \eta)} \bar{\delta}_{\omega_0}(y) dy.$$

En divisant par  $|\mathcal{B}(x, \eta)|$ , et en faisant tendre  $\eta$  vers 0, on obtient  $\phi_0(x, T) \leq \bar{\delta}_{\omega_0}(x) < 0$ , d'où  $x \in \omega_1$ .

• soit  $x \in \mathcal{D}$  t.q.  $x \notin \omega_0$ .

◊ soit  $x \in \mathcal{D} \setminus \bar{\omega}_0$ . Il existe  $\eta > 0$  t.q.  $\mathcal{B}(x, \eta) \subset \mathcal{D} \setminus \bar{\omega}_0$ . Par hypothèse, pour tout  $y \in \mathcal{B}(x, \eta)$ , on a  $V_0(y) = \chi(y)|u(y)| \geq 0$ . On obtient comme précédemment

$$\int_{\mathcal{B}(x, \eta)} \phi_0(y, T) dy = \int_{\mathcal{B}(x, \eta)} \left( \bar{\delta}_{\omega_0}(y) + \int_0^T V_0(y) |\nabla \phi_0(y, s)| ds \right) dy \geq \int_{\mathcal{B}(x, \eta)} \bar{\delta}_{\omega_0}(y) dy.$$

En divisant par  $|\mathcal{B}(x, \eta)|$ , et en faisant tendre  $\eta$  vers 0, on obtient  $\phi_0(x, T) \geq \bar{\delta}_{\omega_0}(x) > 0$  puisque  $x \in \mathcal{D} \setminus \bar{\omega}_0$ . On en déduit que  $x \notin \omega_1$  (et même  $x \notin \bar{\omega}_1$ ).

◊ soit  $x \in \partial\omega_0$ . Il existe  $x_n \in \mathcal{D} \setminus \bar{\omega}_0$  t.q.  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ . D'après ce qu'on vient de montrer, on a  $\phi_0(x_n, T) \geq \bar{\delta}_{\omega_0}(x_n) > 0$ . Par continuité de  $\phi_0(\cdot, T)$ , on obtient en faisant tendre  $n$  vers l'infini :  $\phi_0(x, T) \geq 0 \Rightarrow x \notin \omega_1$ . ■

On construit alors une suite d'ouverts  $\omega_m$  à partir de  $\omega_0$  : pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on pose

$$\omega_{m+1} := \{x \in \mathcal{D} \mid \phi_m(x, T) < 0\}$$

avec  $\phi_m$  l'unique solution de viscosité de

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} - V_m(x) |\nabla \phi| = 0 \text{ pour } (x, t) \in \mathcal{D} \times ]0, T[ \\ \phi(x, 0) = \bar{\delta}_{\omega_m}(x) \text{ pour } x \in \mathcal{D} \\ \phi(x, t) = \bar{\delta}_{\omega_m}(x) \text{ pour } x \in \partial\mathcal{D} \times [0, T] \end{cases}$$

$\bar{\delta}_{\omega_m}$  est la fonction distance signée à l'ouvert  $\omega_m$ <sup>13</sup> et  $V_m \in C^0(\mathcal{D})$  vérifie

$$\begin{cases} \forall x \notin \omega_m, & V_m(x) = \chi(x)|u(x)| \\ \forall x \in \mathcal{O}, & V_m(x) \leq 0 \\ \exists L_m > 0 \mid \forall (x, y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}, & |V_m(x) - V_m(y)| \leq L_m |x - y|. \end{cases}$$

Comme la suite d'ouverts est décroissante pour l'inclusion et bornée, et que tous les ouverts contiennent  $\mathcal{O}$ , on obtient directement la

**Propriété 5.4** les ouverts  $\omega_m$  convergent vers  $\omega := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \omega_m$ , et on a  $\mathcal{O} \subset \omega$ . On a les caractérisations suivantes :

$$\begin{aligned} \omega &= \{x \in \mathcal{D} \mid \exists \eta_x > 0, \forall y \in \mathcal{B}(x, \eta_x), \forall m \in \mathbb{N}, \phi_m(y, T) < 0\} \\ \omega &= \{x \in \mathcal{D} \mid \exists \eta_x > 0, \forall y \in \mathcal{B}(x, \eta_x), \forall m \in \mathbb{N}, \bar{\delta}_{\omega_m}(y) < 0\}. \end{aligned}$$

<sup>13</sup>pour plus de précisions sur la fonction distance signée, voir p.195

La question est bien évidemment : a-t-on  $\omega = \mathcal{O}$  ? Nous allons voir qu'à la condition que toutes les vitesses  $V_m$  soient lipschitziennes avec une même constante de Lipschitz  $L$ , c'est effectivement le cas. La démonstration de ce résultat étant un peu technique<sup>14</sup>, elle sera divisée en plusieurs lemmes.

Tout d'abord, un résultat valable sans condition :

**Lemme 5.2** *soit  $x \in \partial\omega$ . Alors  $\bar{\delta}_{\omega_m}(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ .*

Preuve : soit  $x \in \partial\omega$ . Comme la suite  $(\omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$  tend vers  $\omega$  au sens de Hausdorff, il existe<sup>15</sup> une suite  $x_m \in \partial\omega_m$  t.q.  $x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x$ . Comme la fonction distance signée est 1-lipschitzienne, on a alors :

$$|\bar{\delta}_{\omega_m}(x)| = |\bar{\delta}_{\omega_m}(x) - \bar{\delta}_{\omega_m}(x_m)| \leq |x - x_m| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

■

**Lemme 5.3** *supposons qu'il existe  $L > 0$  t.q.  $\forall m \in \mathbb{N}, L_m \leq L$ . Alors il existe  $C > 0$  t.q.  $\forall m \in \mathbb{N}, \sup_{y \in \mathcal{D}} |V_m(y)| \leq C$ .*

Preuve : soit  $m \in \mathbb{N}$ , et  $x_0 \in \mathcal{D} \setminus \bar{\omega}_0$ . La suite  $(\omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$  étant décroissante pour l'inclusion, on a  $x_0 \notin \omega_m$ , et donc  $V_m(x_0) = \chi(x_0)|u(x_0)|$ . Posons alors  $C := \chi(x_0)|u(x_0)| + \sup_{y \in \mathcal{D}} L|y - x_0| < \infty$ . Soit  $y \in \mathcal{D}$ , on a

$$|V_m(y)| - |V_m(x_0)| \leq |V_m(y) - V_m(x_0)| \leq L|y - x_0| \Rightarrow |V_m(y)| \leq V_m(x_0) + L|y - x_0| \leq C.$$

On en déduit directement

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \sup_{y \in \mathcal{D}} |V_m(y)| \leq C.$$

■

**Lemme 5.4** *supposons qu'il existe  $L > 0$  t.q.  $\forall m \in \mathbb{N}, L_m \leq L$ , et  $x \in \partial\omega$  t.q.  $u(x) \neq 0$ . Alors il existe  $M \in \mathbb{N}, \eta > 0$  et  $\alpha > 0$  t.q.  $\forall y \in \mathcal{B}(x, \eta), \forall m \geq M, V_m(y) \geq \alpha$ .*

Preuve : comme  $u(x) \neq 0$ , il existe  $\alpha > 0$  t.q.  $|u(x)| > 3\alpha$ . Par continuité de  $u$ , il existe  $\eta_1 > 0$  t.q. pour tout  $y \in \mathcal{B}(x, \eta_1), |u(y)| \geq 3\alpha$ . On sait de plus qu'il existe  $y_m \in \partial\omega_m$  t.q.  $y_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x$ . Par hypothèse  $V_m(y_m) = \chi(y_m)|u(y_m)| = |u(y_m)|$ . Il existe  $M \in \mathbb{N}$  t.q.  $\forall m \geq M, y_m \in \mathcal{B}(x, \eta_1) \Rightarrow V_m(y_m) = |u(y_m)| \geq 3\alpha$ .

Par hypothèse,  $\forall (x, y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}, |V_m(x) - V_m(y)| \leq L|x - y|$ . Posons alors  $\eta := \frac{\alpha}{L}$ . On a  $\forall y \in \mathcal{D}, \forall x \in \mathcal{B}(y, \eta) \cap \mathcal{D}, V_m(x) \geq V_m(y) - L|x - y| \geq V_m(y) - \alpha$ .

Posons maintenant  $\eta_2 := \min(\eta_1, \eta)$ . Pour  $m$  suffisamment grand, on a  $y_m \in \mathcal{B}(x, \eta_2) \subset \mathcal{B}(x, \eta_1)$ , d'où  $V_m(y_m) \geq 3\alpha$ . De plus,  $y_m \in \mathcal{B}(x, \eta_2) \Rightarrow x \in \mathcal{B}(y_m, \eta_2) \subset \mathcal{B}(y_m, \eta)$ , et donc  $V_m(x) \geq V_m(y_m) - \alpha \geq 2\alpha$ . On en déduit finalement :

$$\text{il existe } M \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m \geq M, \forall y \in \mathcal{B}(x, \eta), V_m(y) \geq \alpha.$$

■

**Lemme 5.5** *supposons qu'il existe  $L > 0$  t.q.  $\forall m \in \mathbb{N}, L_m \leq L$ , et  $x \in \partial\omega$  t.q.  $u(x) \neq 0$ . Alors il existe  $M \in \mathbb{N}, \gamma > 0, \varepsilon_0 > 0$  et  $T_0 \in ]0, T[$  t.q.  $\forall m \geq M, |\nabla\phi_m| \geq \exp(-\gamma t)$  presque partout sur  $\mathcal{B}(x, \varepsilon_0) \times ]0, T_0[$ .*

Preuve : d'après le lemme précédent, il existe  $m \in \mathbb{N}, \eta > 0$  et  $\alpha > 0$  t.q.  $V_m(y) \geq \alpha$  pour tout  $y \in \mathcal{B}(x, \eta)$ , pour tout  $m \geq M$ . Remarquons également que  $-\phi_m$  est solution<sup>16</sup> de

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial t} + H(x, t, \nabla\phi) = 0, & \forall (x, t) \in \mathcal{D} \times ]0, T[ \\ \phi(x, 0) = -\bar{\delta}_{\omega_m}(x), & \forall x \in \mathcal{D} \\ \phi(x, t) = -\bar{\delta}_{\omega_m}(x), & \forall (x, t) \in \partial\mathcal{D} \times [0, T] \end{cases}$$

avec  $H(x, t, p) = V_m(x)|p|$ . On remarque que, pour  $m \geq M$ , on a :

<sup>14</sup>c'est une euphémisme

<sup>15</sup>voir propriété B.6, annexe B

<sup>16</sup>on fait ce changement de signe pour obtenir un hamiltonien localement convexe en  $p$ , et ainsi se mettre exactement dans les hypothèses d'application du théorème A.6

- [1]  $|\frac{\partial H}{\partial x}(y, t, p)| \leq L|p|$  pour tout  $(y, t, p) \in \mathcal{B}(x, \eta) \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$   
 [2]  $|\frac{\partial H}{\partial p}(y, t, p)| = |V_m(y)| \leq C$  pour presque tout  $(y, t, p) \in \mathcal{B}(x, \eta) \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$  (lemme 5.3)  
 [3]  $H(y, t, p)$  est convexe en  $p$  sur  $\mathcal{B}(x, \eta) \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$ , car  $V_m(y) \geq 0$  sur  $\mathcal{B}(x, \eta)$ .

De plus  $|\nabla(-\phi_m(y, 0))| = |\nabla\bar{\delta}_{\omega_m}(y)| = 1$  au sens de viscosité<sup>17</sup> sur  $\mathcal{B}(x, \eta)$ . On peut donc appliquer le théorème A.6, et on obtient

$$|\nabla\phi_m| = |\nabla(-\phi_m)| \geq \exp\left(-\frac{5Lt}{2}\right) \text{ sur } \delta(x, \eta)$$

avec  $\delta(x, \eta) := \{(y, t) \in \mathcal{B}(x, \eta) \times ]0, T[ \text{ t.q. } e^{Ct}(1 + |y - x|) \leq \eta + 1\}$ . L'inégalité est vraie au sens de viscosité, mais comme  $\phi_m$  est presque partout différentiable, elle est également vraie au sens presque partout. Remarquons finalement que si on pose

$$T_0 := \frac{1}{C} \ln\left(\frac{2+2\eta}{2+\eta}\right) > 0$$

on a

$$\mathcal{B}(x, \frac{\eta}{2}) \times ]0, T_0[ \subset \delta(x, \eta).$$

On obtient donc le résultat voulu, avec  $\varepsilon_0 := \frac{\eta}{2}$ ,  $\gamma := \frac{5L}{2}$ ,  $T_0 := \frac{1}{C} \ln\left(\frac{2+2\eta}{2+\eta}\right)$ , et  $M$  comme au lemme précédent. ■

**Propriété 5.5** *supposons qu'il existe  $L > 0$  t.q.  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $L_m \leq L$ . Alors  $\forall x \in \partial\omega$ ,  $u(x) = 0$ .*

Preuve : soit  $x \in \partial\omega$ . Il existe  $x_n \in \omega$  t.q.  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ . Par définition de  $\omega$ , pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on a  $\phi_m(x_n, T) < 0$ . Par continuité de  $\phi_m(\cdot, T)$ , on en déduit en passant à la limite sur  $n$  :  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $\phi_m(x, T) \leq 0$ .

Supposons qu'il existe  $x \in \partial\omega$  t.q.  $u(x) \neq 0$ . En procédant comme habituellement, et en utilisant les résultats des lemmes 5.4 et 5.5, on obtient, pour tout  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  ( $\varepsilon_0 = \frac{\eta}{2}$ ), pour tout  $m \geq M$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}(x, \varepsilon)} [\phi_m(y, T) - \phi_m(y, 0)] dy &= \int_{\mathcal{B}(x, \varepsilon)} \int_0^T \frac{\partial \phi_m}{\partial t}(y, s) ds dy \\ &= \int_{\mathcal{B}(x, \varepsilon)} \int_0^T V_m(y) |\nabla \phi_m(y, s)| ds dy \\ &\geq \alpha \int_{\mathcal{B}(x, \varepsilon)} \int_0^T |\nabla \phi_m(y, s)| ds dy \\ &\geq \alpha \int_{\mathcal{B}(x, \varepsilon)} \int_0^{T_0} |\nabla \phi_m(y, s)| ds dy \\ &\geq \alpha \int_{\mathcal{B}(x, \varepsilon)} \int_0^{T_0} \exp(-\gamma s) ds dy \end{aligned}$$

d'où finalement :

$$\int_{\mathcal{B}(x, \varepsilon)} [\phi_m(y, T) - \phi_m(y, 0)] dy \geq \frac{\alpha}{\gamma} [1 - \exp(-\gamma T_0)] |\mathcal{B}(x, \varepsilon)|.$$

En divisant par  $|\mathcal{B}(x, \varepsilon)|$ , et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro, on obtient :

$$\frac{\alpha}{\gamma} [1 - \exp(-\gamma T_0)] \leq \phi_m(x, T) - \phi_m(x, 0) = \phi_m(x, T) - \bar{\delta}_{\omega_m}(x) \leq -\bar{\delta}_{\omega_m}(x)$$

puisque  $\phi_m(x, T) \leq 0$ . Finalement, en faisant tendre  $m$  vers l'infini et en utilisant le lemme 5.2, on obtient  $\frac{\alpha}{\gamma} [1 - \exp(-\gamma T_0)] \leq 0$ , ce qui est impossible. On en déduit que pour tout  $x \in \partial\omega$ ,  $u(x) = 0$ . ■

On peut maintenant obtenir le résultat principal de cette partie :

<sup>17</sup>voir propriété B.3 p.196, annexe B

**Théorème 5.3** *supposons qu'il existe  $L > 0$  t.q.  $L_m \leq L$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ . On a alors*

$$\boxed{\omega = \mathcal{O}}$$

*Autrement dit, les ouverts  $\omega_m$  tendent au sens de Hausdorff vers l'obstacle  $\mathcal{O}$ .*

**Preuve** : supposons  $\omega \neq \mathcal{O}$ . On rappelle que  $\mathcal{O} \subset \omega$ . Posons donc  $\mathcal{R} := \omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$ . On a  $\mathcal{R} \subset \Omega(\mathcal{O})$ , donc  $Pu = 0$  dans  $\mathcal{R}$ . De plus,  $\partial\mathcal{R} \subset \partial\mathcal{O} \cup \partial\omega$ . Comme par hypothèse  $u = 0$  sur  $\partial\mathcal{O}$ , et  $u = 0$  sur  $\partial\omega$  par la propriété précédente, on a  $u = 0$  sur  $\partial\mathcal{R}$ . Par hypothèse encore une fois, on a  $u \in H^1(\mathcal{R}) \cap C^0(\overline{\mathcal{R}})$ . On en déduit<sup>18</sup> :  $u \in H_0^1(\mathcal{R})$ .

On a donc  $u \in H_0^1(\mathcal{R})$  vérifiant  $Pu = 0$  dans  $\mathcal{R}$ . La propriété 4.1 implique  $u \equiv 0$  dans  $\mathcal{R}$ , puis la propriété 4.2 implique à son tour  $u \equiv 0$  dans  $\Omega(\mathcal{O})$ , ce qui est en contradiction avec les hypothèses du problème  $[\mathcal{O}_{bs}]$ .

Finalement, on a  $\mathcal{R} = \emptyset$ , d'où l'on déduit  $\mathcal{O} \subset \omega \subset \overline{\mathcal{O}}$ . L'obstacle  $\mathcal{O}$  étant à bord continu, on en conclut<sup>19</sup> que  $\omega = \mathcal{O}$ . ■

### 5.2.3 Conclusion et remarques : vers une nouvelle méthode de résolution de $[\mathcal{O}_{bs}]$

La méthode [HJ] décrite ci-dessus est conforme au cadre méthodologique que nous avons décrit au 4.4 p.94. En effet, à chaque itération, elle ne nécessite la connaissance de  $u$  qu'à l'extérieur de l'ouvert  $\omega_m$ , ce qui nous permettra un couplage efficace avec la méthode de quasi-réversibilité. De plus, elle ne nécessite plus d'hypothèse sur la décroissance du gradient des fonctions  $\phi_m$ .

En revanche, elle est basée sur la construction à chaque itération de prolongements lipschitziens de  $|u|$  à l'intérieur de  $\omega_m$  (avec une constante de lipschitz indépendante de l'itération), les vitesses  $V_m$ . Remarquons tout d'abord que de telles familles de fonctions existent : pour en avoir un représentant, il suffit de prendre  $V_m(x) := V(x) = \begin{cases} \chi(x)|u(x)| & \text{pour } x \notin \mathcal{O} \\ 0 & \text{pour } x \in \mathcal{O} \end{cases}$ , c'est-à-dire utiliser à toutes les itérations la vitesse  $V$  de la première méthode.

Savoir que des prolongements lipschitziens de  $|u|$  existent est une chose. Savoir si on peut les construire en est une autre. Une idée naturelle<sup>20</sup> pour construire ces prolongements est de résoudre le problème suivant posé dans  $\omega_m$  : trouver  $v \in H^1(\omega_m)$  t.q.  $\Delta v = \gamma \in \mathbb{R}$  dans  $\omega_m$  et  $v - |u| \in H_0^1(\omega_m)$ . Ce problème admet une unique solution  $v_m$ . On pose alors  $V_m = \chi|u|$  dans  $\mathcal{D} \setminus \omega_m$  et  $V_m = v_m$  dans  $\omega_m$ . La condition  $v_m - |u| \in H_0^1(\omega_m)$  impose la continuité<sup>21</sup> de  $V_m$  à la traversée de  $\partial\omega_m$ . Comme le laplacien de  $v_m$  est  $C^\infty(\omega_m)$ , on peut espérer (par régularité elliptique encore une fois) avoir  $v_m$  lipschitz, et finalement  $V_m$  lipschitz (rien n'oblige par contre la constante de lipschitz de  $V_m$ , si elle existe, à être indépendante de  $m$ ). En ce qui concerne la condition  $V_m \leq 0$  dans  $\mathcal{O}$ , il suffit d'avoir  $v_m \leq 0$  dans  $\mathcal{O}$  pour la satisfaire. En prenant  $\gamma$  assez grand, on sait que  $v_m$  devient négative assez vite lorsque l'on s'éloigne de la frontière de  $\omega_m$ , et donc on peut espérer vérifier cette condition.

Pour finir, intéressons nous un instant à  $V_0$ , et posons

$$\tilde{\omega}_1 := \{x \in \omega_0 \mid V_0(x) < 0\}.$$

Il est facile de constater, en reprenant la preuve de la propriété 5.3, que l'on a  $\mathcal{O} \subset \tilde{\omega}_1 \subset \omega_1$ . Autrement dit,  $\tilde{\omega}_1$  est une meilleure approximation extérieure de  $\mathcal{O}$  que  $\omega_1$ , et qui plus est une approximation que l'on obtient directement de  $V_0$ , sans passer par la résolution de l'équation

<sup>18</sup>cf théorème IX.17 p.171 et remarque 20 p.172 de [Bre05]

<sup>19</sup>voir propriété B.2, annexe B

<sup>20</sup>naturelle pour des EDPistes : la résolution numérique d'un problème de Poisson avec condition de Dirichlet est bien connue...

<sup>21</sup>ceci n'est pas tout à fait exact, cela dépend de la régularité de  $\partial\omega_m$ , mais l'idée est là



eikonale. Cette remarque nous inspire une nouvelle méthode de résolution de  $[\mathcal{O}_{bs}]$ , où nous ne passons plus par la résolution d'équations eikonales, mais par la résolution de problèmes de Poisson, ce qui implique un gain de temps important. Nous étudierons cette méthode au chapitre suivant.

## Chapitre 6

# Méthode de lignes de niveau fondée sur une équation de Poisson

### Introduction

Nous allons dans ce chapitre étudier une seconde méthode de résolution du problème  $[\mathcal{O}_{b_s}]$ , conforme au principe d'approche "par l'extérieur" explicité au 4.4. Comme pour la méthode [HJ], elle repose sur la construction d'une suite d'ouverts contenant l'obstacle  $\mathcal{O}$  recherché, et décroissante pour l'inclusion. Ici, la fabrication de cette suite ne repose plus sur la résolution d'une équation eikonale, mais sur celle d'une équation de Poisson.

L'idée de base de la méthode est très simple : supposons que nous connaissions  $\omega$  ouvert vérifiant  $\mathcal{O} \subset \omega$ , ainsi que  $u$  fonction solution du problème  $[\mathcal{O}_{b_s}]$ , à l'extérieur de  $\omega$ . On note alors  $v$  la fonction vérifiant

$$\begin{cases} \Delta v = f \text{ dans } \omega \\ v = |u| \text{ sur } \partial\omega \end{cases}$$

où  $f$  est un paramètre. Nous verrons que si nous choisissons  $f$  "suffisamment grand", alors l'ensemble

$$\tilde{\omega} = \omega \setminus \{x \in \omega \mid v(x) \leq 0\}$$

vérifie  $\mathcal{O} \subset \tilde{\omega} \subset \omega$ . L'ouvert  $\tilde{\omega}$  est donc une meilleure approximation extérieure de  $\mathcal{O}$  que  $\omega$ . On construira notre suite d'ouverts en répétant le processus dans  $\tilde{\omega}$ . Cette suite sera convergente<sup>1</sup>, et nous verrons que l'ouvert limite sera l'obstacle recherché, à condition de vérifier une hypothèse.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication : *A quasi-reversibility approach to solve the inverse obstacle problem*, L.Bourgeois & J.Dardé, *Inverse Problems and Imaging*, p.351-377, vol.4, n°3, 2010.

### Sommaire

---

6.1	Résultats préliminaires . . . . .	110
6.2	Une méthode de résolution basée sur un problème de Poisson . . . . .	111
6.3	Paramètres et hypothèse de la méthode [P] . . . . .	115
6.4	Utilisation de plusieurs jeux de données . . . . .	118

---

---

<sup>1</sup>en vertu de la propriété B.4

## 6.1 Résultats préliminaires

Nous allons adopter les notations suivantes : si  $\mathcal{H}$  est un ensemble de fonctions d'un ouvert  $\omega$  borné de  $\mathbb{R}^d$ , alors

$$\mathcal{H}^+ := \{v \in \mathcal{H} \mid v \geq 0 \text{ p.p. sur } \omega\}$$

et

$$\mathcal{H}^- := \{v \in \mathcal{H} \mid v \leq 0 \text{ p.p. sur } \omega\}.$$

On notera également, pour  $(u, v)$  deux fonctions de  $L^2(\omega)$ ,  $[u \leq v]$  (resp.  $[u \geq v]$ ) le plus grand ouvert de  $\omega$  sur lequel  $u \leq v$  presque partout (resp.  $u \geq v$  presque partout), et  $\chi_{[u \leq v]}$  (resp.  $\chi_{[u \geq v]}$ ) la fonction caractéristique de cet ouvert.

Un premier résultat concerne la composition de fonctions de  $H^1$  par des fonctions lipschitziennes. On peut en trouver une démonstration dans [HP05] (corollaire 3.1.12).

**Lemme 6.1** *soit  $u \in H^1(\omega)$  (resp.  $H_0^1(\omega)$ ). Alors  $|u| \in H^1(\omega)$  (resp.  $H_0^1(\omega)$ ). Soit de plus  $v \in H^1(\omega)$  (resp.  $H_0^1(\omega)$ ). Alors  $\sup(u, v)$ ,  $\inf(u, v) \in H^1(\omega)$  (resp.  $H_0^1(\omega)$ ), et*

$$\nabla \sup(u, v) = \chi_{[u \geq v]} \nabla u + \chi_{[u \leq v]} \nabla v.$$

Nous allons avoir besoin d'approcher des fonctions de  $H_0^1(\omega)^+$  par des fonctions régulières et positives, ce qui est possible grâce au résultat suivant, qui est en fait une conséquence du lemme précédent (corollaire 3.1.13 de [HP05]) :

**Corollaire 6.1** *l'espace  $C_c^\infty(\omega)^+$  est dense dans  $H_0^1(\omega)^+$ .*

De ces deux résultats, on déduit directement le principe du maximum faible pour l'opérateur laplacien :

**Théorème 6.1 - principe du maximum faible** : *soit  $u \in H^1(\omega)$  tel que*

- $\Delta u \geq 0$  au sens des distributions
- $\sup(u, 0) \in H_0^1(\omega)$ .

*Alors on a  $\sup(u, 0) = 0$  dans  $\omega$ , soit encore  $u \leq 0$  presque partout dans  $\omega$ .*

**Preuve** : rappelons tout d'abord que  $\Delta u \geq 0$  au sens des distributions si et seulement si  $\langle \Delta u, \varphi \rangle \geq 0$  pour tout  $\varphi \in C_c^\infty(\omega)^+$ .

Par définition,  $\sup(u, 0) \in H^1(\omega)^+$ , et par hypothèse,  $\sup(u, 0) \in H_0^1(\omega)$ . On a donc  $\sup(u, 0) \in H_0^1(\omega)^+$ . Le corollaire 6.1 nous donne alors l'existence d'une suite  $\varphi_n \in C_c^\infty(\omega)^+$  telle que  $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup(u, 0)$  dans  $H^1(\omega)$ . On a de plus  $\langle \Delta u, \varphi_n \rangle \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , d'où l'on déduit

$$0 \leq \langle \Delta u, \varphi_n \rangle = - \int_{\omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi_n \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} - \int_{\omega} \nabla u \cdot \nabla \sup(u, 0) \, dx.$$

Or, on a (lemme 6.1)

$$- \int_{\omega} \nabla u \cdot \nabla \sup(u, 0) \, dx = - \int_{\omega} |\nabla \sup(u, 0)|^2 \, dx \leq 0$$

d'où finalement  $\|\nabla \sup(u, 0)\|_{L^2(\omega)} = 0$ . L'inégalité de Poincaré<sup>2</sup> donne finalement  $\sup(u, 0) = 0$  dans  $\omega$ . ■

On déduit immédiatement de ce théorème et du lemme 6.1 le

**Corollaire 6.2** *si  $u \in H_0^1(\omega)$  vérifie  $\Delta u \geq 0$  dans  $\omega$ , alors  $u \leq 0$  dans  $\omega$ .*

<sup>2</sup>cf corollaire IX.19 p.174 de [Bre05]

Nous aurons finalement besoin des deux résultats suivants (le premier est le corollaire 3.1.14 p.70 de [HP05], le deuxième se trouve p.171 de [Bre05]) :

**Lemme 6.2** *soit  $v \in H^1(\omega)$  t.q. il existe  $w \in H_0^1(\omega)$  avec  $|v| \leq w$  presque partout. Alors  $v \in H_0^1(\omega)$ .*

**Lemme 6.3** *soit  $u \in H^1(\omega)$  t.q.  $\text{supp}(u) \Subset \omega$ . Alors  $u \in H_0^1(\omega)$ .*

## 6.2 Une méthode de résolution basée sur un problème de Poisson

### Rappel

On se donne  $\mathcal{D}$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Gamma \subset \partial\mathcal{D}$ ,  $|\Gamma| > 0$ ,  $(g_0, g_1) \neq (0, 0)$  un couple de données, et  $P$  un opérateur vérifiant les propriétés 4.1 et 4.2. Pour  $\mathcal{O}$  ouvert,  $\mathcal{O} \subset \mathcal{D}$ , on note  $\Omega(\mathcal{O}) := \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}}$ .

Problème  $[\mathcal{O}_{bs}]$  : trouver  $\mathcal{O} \Subset \mathcal{D}$ , ouvert à frontière continue tel que  $\Omega(\mathcal{O})$  est connexe, et  $u \in H^1(\Omega(\mathcal{O})) \cap C^0(\overline{\Omega(\mathcal{O})})$  vérifiant :

$$\begin{cases} Pu = 0 & \text{dans } \Omega(\mathcal{O}) \\ u = g_0 & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_P} = g_1 & \text{sur } \Gamma \\ u = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}. \end{cases}$$

Notre objectif est de mettre au point une méthode d'approche "par l'extérieur" de l'obstacle  $\mathcal{O}$ , c'est-à-dire de construire une suite d'ouverts  $(\omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$  ayant pour limite  $\mathcal{O}$  et vérifiant

$$\mathcal{O} \subset \omega_{m+1} \subset \omega_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Pour cela, à l'itération  $m$ , nous ne pouvons supposer  $u$  connu qu'à l'extérieur de  $\omega_m$ , conformément à notre cadre méthodologique décrit p.94<sup>3</sup>.

### Quelques définitions et propriétés

Soit  $V$  vérifiant

$$\begin{cases} V := |u| & \text{dans } \Omega(\mathcal{O}) \\ V \in H_0^1(\mathcal{O})^- & \end{cases} \quad (6.1)$$

Il est clair que  $V$  est un élément de  $L^2(\mathcal{D})$ .

**Propriété 6.1** *toute fonction  $V$  vérifiant (6.1) est un élément de  $H^1(\mathcal{D})$ .*

Preuve : comme  $u \in H^1(\Omega(\mathcal{O})) \cap C^0(\overline{\Omega(\mathcal{O})})$ , on sait (lemme 6.1) que  $|u| \in H^1(\Omega(\mathcal{O})) \cap C^0(\overline{\Omega(\mathcal{O})})$ . De plus,  $|u| = 0$  sur  $\partial\mathcal{O}$ . On a donc<sup>4</sup> :

$$\phi|u| \in H_0^1(\Omega(\mathcal{O})), \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\mathcal{D}).$$

On en déduit l'existence de  $\phi_n \in C_c^\infty(\Omega(\mathcal{O}))$  t.q.  $\phi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi|u|$  dans  $H^1(\Omega(\mathcal{O}))$ .

<sup>3</sup>rappelons que la méthode de quasi-réversibilité nous donnera une approximation de  $u$  dans  $\mathcal{D} \setminus \omega_m$  à partir de la donnée  $(g_0, g_1)$

<sup>4</sup>cf théorème IX.17 p.171 et remarque 20 p.172 de [Bre05]

Par définition,  $V \in H_0^1(\mathcal{O})$ , donc il existe  $\psi_n \in C_c^\infty(\mathcal{O})$  t.q.  $\psi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} V$  dans  $H^1(\mathcal{O})$ . On définit alors

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} \phi_n(x) & \text{pour } x \in \Omega(\mathcal{O}) \\ \psi_n(x) & \text{pour } x \in \mathcal{O} \end{cases}$$

On a  $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathcal{D})$ , et  $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi V$  dans  $L^2(\mathcal{D})$ . De plus, pour  $\eta \in C_c^\infty(\mathcal{D})$ , on a :

$$\left\langle \frac{\partial(\phi V)}{\partial x_i}, \eta \right\rangle = - \left\langle \phi V, \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_{\mathcal{D}} \phi V \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}} \varphi_n \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx$$

et

$$- \int_{\mathcal{D}} \varphi_n \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega(\mathcal{O})} \phi_n \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx - \int_{\mathcal{O}} \psi_n \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega(\mathcal{O})} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} \eta dx + \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial \psi_n}{\partial x_i} \eta dx$$

d'où finalement

$$\left\langle \frac{\partial(\phi V)}{\partial x_i}, \eta \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega(\mathcal{O})} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} \eta dx + \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial \psi_n}{\partial x_i} \eta dx = \int_{\Omega(\mathcal{O})} \frac{\partial(\phi|u|)}{\partial x_i} \eta dx + \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial V}{\partial x_i} \eta dx.$$

On a donc  $\phi V \in H^1(\mathcal{D})$  pour tout  $\phi \in C_c^\infty(\mathcal{D})$ .

Pour conclure, on prend  $\phi \in C_c^\infty(\mathcal{D})$  t.q.  $\phi \equiv 1$  sur  $\mathcal{O}$ . On a  $V = \phi V + (1 - \phi)V$ . On sait déjà que  $\phi V \in H^1(\mathcal{D})$ . De plus,  $\text{supp}((1 - \phi)V) \subset \Omega(\mathcal{O})$ , ce qui permet directement de dire que  $(1 - \phi)V \in H^1(\mathcal{D})$ . On en déduit finalement que  $V \in H^1(\mathcal{D})$ . ■

Comme  $V \in H^1(\mathcal{D})$ , on a  $\Delta V \in H^{-1}(\mathcal{D})$ . Soit alors  $f \in H^{-1}(\mathcal{D})$  t.q.  $f \geq \Delta V$  au sens des distributions. Pour  $\omega$  ouvert,  $\omega \subset \mathcal{D}$ , on pose le problème suivant :

**Problème [P]** : trouver  $v \in H^1(\omega)$  vérifiant  $\Delta v = f$  dans  $\omega$  et  $v - V \in H_0^1(\omega)$ .

Ce problème admet une unique solution  $v_\omega$ , et on a la

**Propriété 6.2**  $v_\omega \leq V$  presque partout sur  $\omega$ .

**Preuve** : par hypothèse, on a  $\Delta(v_\omega - V) = f - \Delta V \geq 0$  sur  $\omega$ , et  $v_\omega - V \in H_0^1(\omega)$ . Il suffit d'appliquer le corollaire 6.2 du principe du maximum faible pour conclure. ■

## Une méthode de lignes de niveau

On définit une suite d'ouverts par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} \omega_0 \mid \mathcal{O} \subset \omega_0 \Subset \mathcal{D} \\ \forall m \in \mathbb{N}, \omega_{m+1} := \omega_m \setminus \text{supp}(\text{sup}(v_m, 0)) \end{cases}$$

où on a posé  $v_m := v_{\omega_m}$ .

**Remarque** : si  $v_m \in C^0(\overline{\omega_m})$ , on a  $\omega_{m+1} := \{x \in \omega_m \mid v_m(x) < 0\}$ .  $\omega_{m+1}$  est le plus grand ouvert contenu dans  $\omega_m$  sur lequel  $v_m$  est strictement négative.

**Propriété 6.3**  $\forall m \in \mathbb{N}, \mathcal{O} \subset \omega_{m+1} \subset \omega_m \Subset \mathcal{D}$ .

**Preuve** : par définition, on a  $\omega_{m+1} \subset \omega_m$  pour tout entier  $m$ . Il faut juste prouver que pour tout  $m$  entier, on a  $\mathcal{O} \subset \omega_m$ . On procède par récurrence :

- par hypothèse, on a  $\mathcal{O} \subset \omega_0$ .
- supposons la propriété vraie pour un entier  $m$ . En utilisant la propriété 6.2, on a  $v_m \leq V$  dans  $\omega_m$ . Mais par définition de  $V$ , on a  $V \leq 0$  presque partout dans  $\mathcal{O}$ . On en déduit  $v_m \leq 0$  presque partout dans  $\mathcal{O}$ , d'où, par définition de  $\omega_{m+1}$ ,  $\mathcal{O} \subset \omega_{m+1}$ .

■

La suite d'ouverts  $\omega_m$  est donc décroissante pour l'inclusion, et tous les  $\omega_m$  sont contenus dans  $\mathcal{D}$  ouvert borné. De plus, ils contiennent tous  $\mathcal{O}$ . On en déduit<sup>5</sup> la

**Propriété 6.4** *les ouverts  $\omega_m$  convergent au sens de Hausdorff vers  $\omega := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \omega_m$ .*

La question est maintenant : a-t-on  $\omega = \mathcal{O}$  ? Nous allons voir que c'est le cas si on fait l'hypothèse suivante :

$$(H) \quad v_m \xrightarrow[L^2(\omega)]{m \rightarrow \infty} v_\omega.$$

**Théorème 6.2** *si l'hypothèse (H) est vérifiée, alors  $\boxed{\omega = \mathcal{O}}$ .*

Autrement dit, si l'hypothèse (H) est vérifiée, la suite d'ouverts  $(\omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$  converge, au sens de Hausdorff, vers l'obstacle  $\mathcal{O}$ .

Preuve :

• par définition, on a  $\omega \subset \omega_{m+1}$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ . Comme  $v_m$  est négative presque partout dans  $\omega_{m+1}$ , on a  $v_m \leq 0$  dans  $\omega$  pour tout entier  $m$ . En utilisant l'hypothèse (H), on en déduit :

$$v_\omega \leq 0 \text{ presque partout dans } \omega \Rightarrow V \leq V - v_\omega \text{ presque partout dans } \omega.$$

De plus, on a par définition  $V - v_\omega \in H_0^1(\omega)^+$ . Il existe (corollaire 6.1)  $\varphi_m \in C_c^\infty(\omega)^+$  t.q.

$$\varphi_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} V - v_\omega \text{ dans } H^1(\omega).$$

Soit  $\phi \in C_c^\infty(\mathcal{D})$  t.q.  $\phi \equiv 1$  sur  $\omega$ . Comme  $\mathcal{O} \subset \omega$ , on a  $\phi|u| \in H_0^1(\Omega(\mathcal{O}))^+$ , et donc il existe  $\phi_m \in C_c^\infty(\Omega(\mathcal{O}))^+$  t.q.

$$\phi_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \phi|u| \text{ dans } H^1(\Omega(\mathcal{O})).$$

• supposons maintenant  $\omega \neq \mathcal{O}$ . On peut alors poser  $\mathcal{R} := \omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$  qui est un ouvert non vide vérifiant  $\mathcal{R} = \omega \cap \Omega(\mathcal{O})$ . On a  $\varphi_m$  et  $\phi_m$  éléments de  $H^1(\mathcal{R})$  pour tout entier  $m$ , d'où  $\inf(\varphi_m, \phi_m) \in H^1(\mathcal{R})$  (cf lemme 6.1).

Par définition, il existe  $K_m$  (resp.  $\kappa_m$ ) compact contenu dans  $\omega$  (resp.  $\Omega(\mathcal{O})$ ) vérifiant  $\text{supp}(\varphi_m) \subset K_m$  (resp.  $\text{supp}(\phi_m) \subset \kappa_m$ ). On remarque que pour  $x \in \mathcal{R}$  t.q.  $x \notin K_m$ , on a  $\varphi_m(x) = 0$  et  $\phi_m(x) \geq 0$ , d'où  $\inf(\varphi_m, \phi_m)(x) = 0$ . Par un raisonnement symétrique, on obtient  $\inf(\varphi_m, \phi_m) = 0$  sur  $\mathcal{R} \setminus \kappa_m$ . On en déduit finalement

$$\text{supp}(\inf(\varphi_m, \phi_m)) \subset K_m \cap \kappa_m \subset \omega \cap \Omega(\mathcal{O}) = \mathcal{R}.$$

On a donc  $\inf(\varphi_m, \phi_m)$  élément de  $H^1(\mathcal{R})$  et à support compact dans  $\mathcal{R}$ , ce qui implique (lemme 6.3)

$$\inf(\varphi_m, \phi_m) \in H_0^1(\mathcal{R}).$$

• comme  $\mathcal{R} \subset \Omega(\mathcal{O})$ , on a  $V := |u|$  dans  $\mathcal{R}$ , et comme vu précédemment,  $|u| - v_\omega \geq |u|$  dans  $\mathcal{R}$ . On a donc :

$$\inf(\varphi_m, \phi_m) \xrightarrow{H^1(\mathcal{R})}{m \rightarrow \infty} \inf(V - v_\omega, \phi|u|) = \inf(|u| - v_\omega, |u|) = |u|.$$

$|u|$  est donc limite dans  $H^1(\mathcal{R})$  d'une suite de fonctions de  $H_0^1(\mathcal{R}) \Rightarrow |u| \in H_0^1(\mathcal{R})$ . On déduit alors du lemme 6.2 :  $u \in H_0^1(\mathcal{R})$ . Mais comme  $\mathcal{R} \subset \Omega(\mathcal{O})$ , on a  $Pu = 0$  dans  $\mathcal{R}$ . On déduit alors des propriétés 4.1 et 4.2 que  $u \equiv 0$  dans  $\Omega(\mathcal{O})$ , ce qui est en contradiction avec  $(g_0, g_1) \neq (0, 0)$ .

• on a donc obtenu  $\mathcal{R} = \emptyset$ , soit  $\mathcal{O} \subset \omega \subset \overline{\mathcal{O}}$ , et comme  $\mathcal{O}$  est à bord continu<sup>6</sup>,  $\omega = \mathcal{O}$ .

■

<sup>5</sup>voir la propriété B.4, annexe B

<sup>6</sup>voir proposition B.2, annexe B

Nous avons construit une approche par l'extérieur de l'obstacle  $\mathcal{O}$ . Elle est basée sur des résolutions successives des problèmes de poisson [P]

$$\begin{cases} \Delta w = f \text{ dans } \omega_m \\ w - V \in H_0^1(\omega_m) \end{cases}$$

avec  $f$  paramètre vérifiant  $\Delta V \leq f$ . Pour pouvoir l'utiliser, il nous est donc nécessaire de savoir fixer  $f$  et gérer la condition aux limites. Nous discuterons du choix de  $f$  p.116. En ce qui concerne la condition aux limites, remarquons que si  $\omega_m$  a un bord lipschitzien<sup>7</sup>, le problème se réécrit, compte tenu de la définition de  $V$  et du fait que  $\mathcal{O} \subset \omega_m$ ,

$$\begin{cases} \Delta w = f \text{ dans } \omega_m \\ w = |u| \text{ sur } \partial\omega_m \end{cases}$$

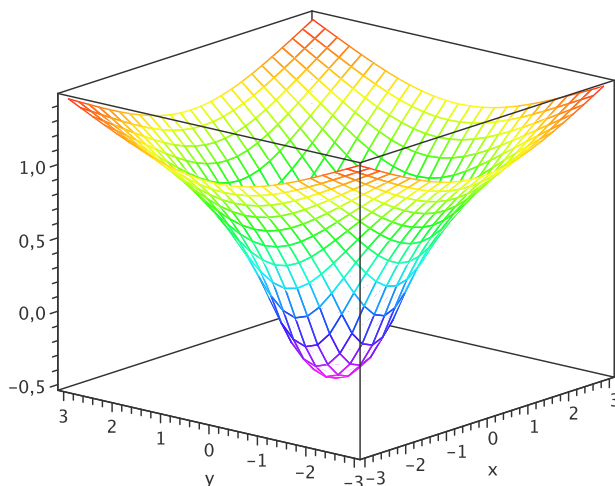
Supposons alors que pour tout  $m$ , on ait  $\mathcal{D} \setminus \overline{\omega}_m$  connexe (il suffit pour cela de choisir  $f \geq 0$ , voir encore p.116). Alors, par hypothèse, nous connaissons  $u$  sur  $\mathcal{D} \setminus \overline{\omega}_m$  et nous pouvons imposer la condition aux limites du problème [P]. Nous sommes donc bien dans le cadre méthodologique décrit p.94.

Nous désignerons désormais cette approche sous le nom de méthode [P]<sup>8</sup>.

### Un exemple simple en dimension 2 avec $P := \Delta$

Nous prenons ici  $\mathcal{D}$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{O} := \mathcal{B}(0, 1) \Subset \mathcal{D}$ . On se place en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  ( $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$ ). Il est facile de vérifier que  $u := \ln(r)$  est solution de l'équation de Laplace dans  $\Omega(\mathcal{B}(0, 1))$ , vérifie  $u = 0$  sur  $\partial\mathcal{B}(0, 1)$  et  $u \in H^1(\Omega(\mathcal{B}(0, 1))) \cap C^0(\overline{\Omega(\mathcal{B}(0, 1))})$ .

$$\text{Définissons } V \in L^2(\mathcal{D}) \text{ par } \begin{cases} V(r) = \ln(r) \text{ dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{B}(0, 1)} \\ V(r) = \frac{(r-1)^2}{2} + (r-1) \text{ dans } \mathcal{B}(0, 1). \end{cases}$$



La fonction  $V$  sur le carré  $]-3, 3[ \times ]-3, 3[$ .

<sup>7</sup> dans les applications numériques, les ouverts  $\omega_m$  seront l'union d'un certain nombre de triangles d'une triangulation de  $\mathcal{D}$ . Ils auront donc toujours un bord lipschitzien

<sup>8</sup> [P] car elle repose sur la résolution de problèmes de Poisson

On vérifie que  $V \in H^1(\Omega, \Delta)$ ,  $V|_{\mathcal{B}(0,1)} \in H_0^1(\mathcal{B}(0,1))^-$ , et  $\Delta V = \begin{cases} 0 & \text{dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{B}(0,1)} \\ 2 & \text{dans } \mathcal{B}(0,1) \end{cases}$  ( $\Delta V \in L^\infty(\mathcal{D})$ ).

On a directement  $\Delta V \leq 2$  au sens des distributions. Ainsi, si on choisit  $f := \text{cte} = \gamma \geq 2$  dans la méthode [P], on construit, à partir de n'importe quel ouvert de départ  $\omega_0$  une suite d'ouverts qui converge vers l'obstacle recherché.

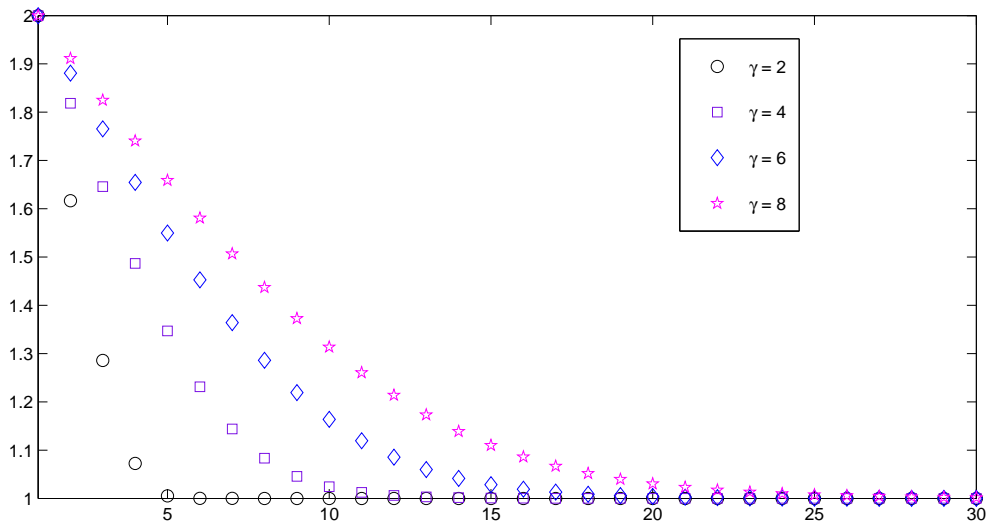
Illustrons cela par un choix particulier d'ouvert de départ,  $\omega_0 := \mathcal{B}(0, r_0)$ , avec  $r_0 > 1$  quelconque, pour lequel le problème [P] posé dans  $\omega_0$  consiste à trouver  $v \in H^1(\omega_0)$  t.q.

$$\begin{cases} \Delta v = \gamma \geq 2 & \text{dans } \omega_0 \\ v = |u| = \ln(r_0) & \text{sur } \partial\omega_0 \end{cases}$$

La solution de ce problème est  $v_{r_0}(r) := \frac{\gamma}{4}(r^2 - r_0^2) + \ln(r_0)$ . On remarque que  $\gamma \geq 2$  implique  $v_{r_0} < 0$  dans  $\mathcal{B}(0, 1)$ , pour tout  $r_0 > 1$ . En fait, pour  $\gamma \geq 2$ , on a  $v_{r_0} < 0$  sur  $\mathcal{B}(0, r_1)$ , avec

$$1 < r_1 = \left[ r_0^2 - \frac{4 \ln(r_0)}{\gamma} \right]^{1/2} < r_0.$$

En recommençant le processus depuis  $\omega_1 = \mathcal{B}(0, r_1)$ , on construit une suite de boules de rayons  $r_m$ , et on a  $r_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1$ , soit  $\omega_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathcal{O}$ . On remarque que  $\gamma$  n'a d'influence que sur la vitesse de convergence. Ainsi, on voit sur la figure suivante que l'on converge d'autant plus rapidement que l'on choisit un  $\gamma$  petit. Ce résultat intuitif sera démontré prochainement (propriété 6.7).



$r_m$  en fonction de  $m$ , avec  $r_0 = 2$ , pour différentes valeurs du paramètre  $\gamma$ .

### 6.3 Paramètres et hypothèse de la méthode [P]

La méthode [P] repose sur deux choix, choix de l'ouvert de départ  $\omega_0$  et choix du second membre  $f$  du problème [P], ainsi que sur une hypothèse, l'hypothèse (H).

#### Hypothèse (H)

Rappelons l'hypothèse (H), qui permet d'assurer la convergence de  $\omega_m$  vers  $\mathcal{O}$  :

$$(H) \quad v_m \xrightarrow{L^2(\omega)} v_\omega \quad \text{as } m \rightarrow \infty.$$



Nous nous intéressons ici à la continuité de la solution du problème [P] vis-à-vis du domaine. Elle est assurée sous certaines conditions : nous pouvons donner les deux résultats suivants, le premier valable en dimension 2 seulement, le second valable en toute dimension.

Pour  $\Omega$  ouvert contenu dans  $\mathcal{D}$  et  $g \in H^{-1}(\mathcal{D})$ , on note  $w_{\Omega,g}$  l'unique fonction de  $H_0^1(\Omega)$  t.q.  $\Delta w_{\Omega,g} = g$  dans  $\Omega$ . Remarquons qu'en prolongeant  $w_{\Omega,g}$  par 0 en dehors de  $\Omega$ , on obtient<sup>9</sup> une fonction de  $H_0^1(\mathcal{D})$ , que l'on notera toujours  $w_{\Omega,g}$ . On note également  $\#\Omega^c$  le nombre de composantes connexes du complémentaire de  $\Omega$ .

**Théorème 6.3 - théorème de Sverak :** *soit  $\mathcal{D}$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ , et  $\Omega_n \subset \mathcal{D}$  une suite d'ouverts convergeant au sens de Hausdorff vers  $\Omega$ , et telle qu'il existe  $l \in \mathbb{N}^*$  t.q.  $\#\Omega_n^c \leq l$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors pour tout  $g \in H^{-1}(\mathcal{D})$ ,  $w_{\Omega_n,g}$  converge vers  $w_{\Omega,g}$  dans  $H_0^1(\mathcal{D})$ .*

**Théorème 6.4** *soit  $\mathcal{D}$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ , et  $\Omega_n \subset \mathcal{D}$  une suite d'ouverts uniformément lipschitziens<sup>10</sup> et convergeant au sens de Hausdorff vers  $\Omega$ . Alors pour tout  $g \in H^{-1}(\mathcal{D})$ ,  $w_{\Omega_n,g}$  converge vers  $w_{\Omega,g}$  dans  $H_0^1(\mathcal{D})$  (et on a de plus  $\Omega$  lipschitzien).*

On trouve les démonstrations de ces théorèmes dans [HP05] (théorème 3.4.14 p.111 et théorème 3.2.13 p.82).

On vérifie alors très simplement que (H) est satisfaite si :

- en dimension 2,  $\#\omega_m^c$  est borné indépendamment de  $m$
- en dimension quelconque, les ouverts  $\omega_m$  sont uniformément lipschitziens.

Remarque : *supposons que le deuxième point soit vérifié. On peut appliquer le théorème 6.4, qui impose que l'ouvert limite  $\omega$  est lipschitzien. De plus, on a convergence de  $v_m$  vers  $v_\omega$  dans  $L^2(\omega)$ , ce qui implique  $\mathcal{O} = \omega$ , et en particulier  $\mathcal{O}$  est un ouvert lipschitzien. On en déduit que si l'ouvert  $\mathcal{O}$  est continu mais présente un point de rebroussement, alors les ouverts  $\omega_m$  que la méthode [P] construit ne peuvent pas être uniformément lipschitziens.*

### Choix de $\omega_0$

La seule restriction dans le choix de  $\omega_0$  est la condition  $\mathcal{O} \subset \omega_0$ . Sans connaître la position de  $\mathcal{O}$ , nous ne serons jamais sûr de vérifier cette condition. Néanmoins, comme le choix de  $\omega_0$  est totalement arbitraire, on peut prendre  $\omega_0$  aussi grand que l'on veut. En le prenant suffisamment grand, il est raisonnable d'espérer vérifier  $\mathcal{O} \subset \omega_0$ .

On peut bien sûr tirer parti d'informations que l'on aurait a priori sur l'obstacle pour choisir un bon ouvert initial, plus proche de l'obstacle recherché.

### Choix de $f$

Notons  $\mathcal{V} := \left\{ V \in L^2(\mathcal{D}) \mid V|_{\Omega(\mathcal{O})} = |u| \text{ et } V \in H_0^1(\mathcal{O})^- \right\}$ . On a montré (propriété 6.1) que tout élément de  $\mathcal{V}$  est un élément de  $H^1(\mathcal{D})$ .  $f \in H^{-1}(\mathcal{D})$  est un choix valable (au sens où il fait fonctionner la méthode [P]) s'il existe  $V \in \mathcal{V}$  tel que  $f \geq \Delta V$  au sens de  $D'(\mathcal{D})$ . On a donc de très nombreux  $f$  admissibles.

Le problème est que nous n'avons accès à aucun élément de  $\mathcal{V}$ , puisque nous ne connaissons pas  $u$  jusqu'au bord de  $\mathcal{O}$ . Nous ne pourrions donc jamais vérifier a priori qu'un élément  $f$  de  $H^{-1}(\mathcal{D})$  est un choix admissible, c'est-à-dire un choix de second membre pour le problème de

<sup>9</sup>cf proposition IX.18 p.172 et remarque 21 p.173 de [Bre05]

<sup>10</sup>pour la définition d'un ouvert lipschitzien, voir annexe B, définition B.1. Des ouverts  $\omega_m$  sont uniformément lipschitziens, s'ils sont lipschitziens avec une constante de lipschitz ne dépendant pas de  $m$

Poisson faisant fonctionner la méthode [P]. Nous allons être obligés de procéder à l'aveugle sur le choix de  $f$ , mais nous allons quand même tenter de discriminer les possibilités.

Lorsque l'on va vouloir résoudre numériquement le problème [P], on va vouloir prendre des seconds membres  $f$  simples, typiquement des fonctions, voire des constantes. La question que l'on se pose alors est : peut-on légitimement le faire ? La propriété suivante apporte un éclairage sur cette interrogation.

**Propriété 6.5** *S'il existe  $V \in \mathcal{V}$  t.q.  $\Delta V \in L^2(\mathcal{D})$ , alors il existe  $f \in L^2(\mathcal{D})^+$  t.q.  $f \geq \Delta V$  au sens des distributions.*

*S'il existe  $V \in \mathcal{V}$  t.q.  $\Delta V \in L^\infty(\mathcal{D})$ , alors il existe  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  t.q.  $\gamma \geq \Delta V$  au sens des distributions.*

Preuve : direct. ■

Remarquons que l'on obtient des distributions positives dans cette proposition. Ceci est très intéressant, car on a la

**Propriété 6.6** *soit  $\omega$  ouvert t.q.  $\mathcal{D} \setminus \bar{\omega}$  connexe. Soit  $w \in H^1(\omega) \cap C^0(\bar{\omega})$  t.q.  $\Delta w \geq 0$  au sens des distributions. On note  $\tilde{\omega} := \omega \setminus \text{supp}(\text{sup}(w, 0))$ . Alors  $\mathcal{D} \setminus \bar{\tilde{\omega}}$  est connexe.*

Preuve : notons  $\mathcal{NB}$  la partie non bornée de  $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\tilde{\omega}}$ , et  $B := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{NB}}$ . Nous allons montrer que  $\tilde{\omega} \subset B \subset \omega$ . Tout d'abord, nous avons  $\mathcal{NB} \subset \mathbb{R}^d \setminus \bar{\tilde{\omega}}$ , donc  $\tilde{\omega} \subset \mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{NB}} = B$ .

Pour obtenir la seconde inclusion, remarquons que  $\tilde{\omega} \subset \omega$ , d'où  $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\omega} \subset \mathbb{R}^d \setminus \bar{\tilde{\omega}}$ . Or  $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\omega}$  est par hypothèse connexe et non borné, d'où l'on déduit  $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\omega} \subset \mathcal{NB}$ , et finalement, par passage au complémentaire,  $B \subset \omega$ .

Par hypothèse, on a  $\Delta w \geq 0$  dans  $\omega$ , d'où  $\Delta w \geq 0$  dans  $B$ , et on a également  $\text{sup}(w, 0) \in C^0(\bar{\omega})$ . Par définition de  $\tilde{\omega}$ , on a  $\text{sup}(w, 0) = 0$  dans  $\tilde{\omega}$ , et par continuité,  $\text{sup}(w, 0) = 0$  sur  $\partial\tilde{\omega}$ . Or, par construction,  $\partial B \subset \partial\tilde{\omega}$ , d'où l'on déduit<sup>11</sup>  $\text{sup}(w, 0) \in H_0^1(B)$ .

On a donc  $\Delta w \geq 0$  dans  $B$  et  $\text{sup}(w, 0) \in H_0^1(B)$ . On déduit alors du principe du maximum faible 6.1 que  $w \leq 0$  dans  $B$ , d'où, par définition de  $\tilde{\omega}$ ,  $B \subset \tilde{\omega}$ . On a donc  $B = \tilde{\omega}$ , et donc  $\mathcal{D} \setminus \bar{\tilde{\omega}} = \mathcal{D} \cap \mathcal{NB}$ , qui est un ensemble connexe par définition. ■

Ainsi, dans le cas du problème de l'obstacle dans  $\mathbb{R}^2$ , si on choisit un second membre  $f$  pour le problème [P] tel que  $f \geq 0$  (et si ce choix est valide, c'est-à-dire s'il existe  $V \in \mathcal{V}$  t.q.  $f \geq \Delta V$ ), un ouvert initial  $\omega_0$  vérifiant  $\mathcal{D} \setminus \bar{\omega}_0$  connexe, et si pour tout  $m$ , on a  $v_m \in C^0(\bar{\omega}_m)$ , alors on aura  $\mathcal{D} \setminus \bar{\omega}_m$  connexe pour tout  $m$ . On pourra appliquer le théorème de Sverak, et l'hypothèse (H) sera vérifiée automatiquement.

En conclusion, dans les applications, nous choisirons pour second membre du problème [P] une constante positive assez grande.

Nous allons maintenant démontrer l'influence du choix de  $f$  sur la vitesse de convergence de la méthode [P], influence que nous avons pressentie avec l'exemple présenté p.114. Nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 6.4** *soient  $\mathcal{D}$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $(g_1, g_2) \in H^{-1}(\mathcal{D}) \times H^{-1}(\mathcal{D})$  vérifiant  $g_1 \geq g_2 \geq 0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathcal{D})$  et  $\omega_1, \omega_2$  deux ouverts vérifiant  $\omega_2 \subset \omega_1$ . Soit  $w_i$  l'unique fonction de  $H_0^1(\omega_i)$  vérifiant  $\Delta w_i = g_i$  dans  $\omega_i$ . On a  $w_1 \leq w_2$  presque partout sur  $\omega_2$ .*

Preuve : notons  $\tilde{w}_2$  l'unique fonction de  $H_0^1(\omega_1)$  t.q.  $\Delta \tilde{w}_2 = g_2$  dans  $\omega_1$ . On a  $w_1 - \tilde{w}_2 \in H_0^1(\omega_1)$  vérifie  $\Delta(w_1 - \tilde{w}_2) = g_1 - g_2 \geq 0$  dans  $\omega_1$ . Le corollaire 6.2 nous donne alors  $w_1 \leq \tilde{w}_2$  presque partout dans  $\omega_1$ , et comme  $\omega_2 \subset \omega_1$ ,  $w_1 \leq \tilde{w}_2$  presque partout dans  $\omega_2$ .

<sup>11</sup>théorème IX.17 p.171 et remarque 20 p.172 de [Bre05]

Comme  $\Delta\tilde{w}_2 = g_2 \geq 0$  dans  $\omega_1$ , le corollaire 6.2 nous donne également  $\tilde{w}_2 \leq 0$  presque partout dans  $\omega_1$ , et donc dans  $\omega_2$ . On a donc  $\tilde{w}_2 - w_2 \leq -w_2$ , et  $0 \leq \sup(\tilde{w}_2 - w_2, 0) \leq \sup(-w_2, 0)$ . Comme  $w_2 \in H_0^1(\omega_2)$ , on déduit du lemme 6.2 que  $\sup(\tilde{w}_2 - w_2, 0) \in H_0^1(\omega_2)$ .

Finalement, comme  $\Delta(\tilde{w}_2 - w_2) = 0$  dans  $\omega_2$ , le théorème 6.1 nous donne  $\tilde{w}_2 \leq w_2$  dans  $\omega_2$ . On a donc  $w_1 \leq \tilde{w}_2 \leq w_2$  dans  $\omega_2$ . ■

Soit  $V \in \mathcal{V}$ , et  $(f_1, f_2) \in H^{-1}(\mathcal{D}) \times H^{-1}(\mathcal{D})$  t.q.  $f_1 \geq f_2 \geq \Delta V$ . On se donne  $\omega_0^1 = \omega_0^2 \supset \mathcal{O}$ , et on note  $\omega_m^i$  la suite d'ouverts construite par la méthode [P] à partir de  $\omega_0^i$  avec  $f_i$  pour second membre de l'équation de Poisson. On a la propriété suivante :

**Propriété 6.7**  $\omega_m^2 \subset \omega_m^1$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .

Preuve : on démontre ce résultat par récurrence.

- $\omega_0^2 = \omega_0^1$  donc la propriété est vraie pour  $m = 0$ .
- supposons qu'il existe  $m$  entier tel que  $\omega_m^2 \subset \omega_m^1$ . On a par hypothèse  $f_1 - \Delta V \geq f_2 - \Delta V \geq 0$ . En appliquant le lemme 6.4 avec  $g_i := f_i - \Delta V$  et  $w_i := v_{\omega_m^i} - V$ , on obtient

$$v_{\omega_m^1} - V \leq v_{\omega_m^2} - V \text{ presque partout dans } \omega_m^2$$

soit encore

$$v_{\omega_m^1} \leq v_{\omega_m^2} \text{ presque partout dans } \omega_m^2.$$

On a alors, par définition de  $\omega_{m+1}^2$ ,  $v_{\omega_m^2} \leq 0$  presque partout dans  $\omega_{m+1}^2$ , d'où  $v_{\omega_m^1} \leq 0$  presque partout dans  $\omega_{m+1}^2$ , et finalement, par définition de  $\omega_{m+1}^1$ ,  $\omega_{m+1}^2 \subset \omega_{m+1}^1$ . ■

Cette propriété signifie que, partant du même ouvert  $\omega_0$ , plus on choisit un second membre de l'équation de Poisson petit (au sens des distributions), plus on converge vite vers l'obstacle  $\mathcal{O}$ , ce qui confirme théoriquement les observations de l'exemple de la partie précédente.

Nous faisons face ici à un dilemme : le second membre pour le problème [P] doit être choisi assez grand, afin de maximiser les chances d'avoir une fonction  $V$  dans  $\mathcal{V}$  vérifiant  $f \geq \Delta V$ . D'un autre côté, il ne doit pas être choisi trop grand pour accélérer la convergence de la méthode [P]. Il nous faudra ici faire un compromis. Nous verrons l'influence pratique du paramètre  $\gamma$  au 8.2.2.

## 6.4 Utilisation de plusieurs jeux de données

Nous n'avons pas abordé la gestion de plusieurs jeux de données de Cauchy dans le problème de l'obstacle  $[\mathcal{O}_{bs}]$ , par exemple le cas où nous avons  $(g_0^1, g_1^1)$  et  $(g_0^2, g_1^2)$  deux données non nulles correspondant à deux fonctions  $u^1$  et  $u^2$  vérifiant

$$\begin{cases} \Delta u^i &= 0 \text{ dans } \Omega(\mathcal{O}) \\ u^i &= g_0^i \text{ sur } \partial\mathcal{D} \\ \partial_\nu u^i &= g_1^i \text{ sur } \partial\mathcal{D} \\ u^i &= 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}. \end{cases}$$

La méthode de quasi-réversibilité utilisée deux fois nous permet sans problème d'obtenir deux bonnes approximations de  $u^1$  et  $u^2$  à partir de  $(g_0^1, g_1^1)$  et  $(g_0^2, g_1^2)$  à l'extérieur de n'importe quel ouvert  $\omega$  contenant l'obstacle. Il nous reste à voir comment utiliser les deux fonctions dans l'approche "par l'extérieur". Nous allons décrire comment le faire avec la méthode [P], la méthode s'adaptant très facilement à la méthode [HJ].

Il s'agit tout d'abord de redéfinir la "vitesse"  $V$  en utilisant les deux fonctions  $u^1$  et  $u^2$ . Rappelons pour cela que théoriquement  $u^1$  et  $u^2$  sont deux fonctions de  $H^1(\Omega(\mathcal{O})) \cap C^0(\overline{\Omega(\mathcal{O})})$ .

Le lemme 6.1 nous assure alors que  $\sup(|u^1|, |u^2|)$  est une fonction de  $H^1(\Omega(\mathcal{O})) \cap C^0(\overline{\Omega(\mathcal{O})})$ . De plus, il est facile de vérifier que  $\sup(|u^1|, |u^2|) = 0$  sur  $\partial\mathcal{O}$ . On définit alors  $V$  comme suit :

$$\begin{cases} V = \sup(|u^1|, |u^2|) \text{ dans } \Omega(\mathcal{O}) \\ V \in H_0^1(\mathcal{O})^- . \end{cases}$$

On vérifie que  $V \in H^1(\mathcal{O})$ . On choisit alors  $f \geq \Delta V$  et on définit la suite d'ouverts  $\omega_m$  comme précédemment, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \omega_0 \mid \mathcal{O} \subset \omega_0 \in \mathcal{D} \\ \forall m \in \mathbb{N}, \omega_{m+1} = \omega_m \setminus \text{supp}(\sup(v_m, 0)) \end{cases}$$

avec  $v_m$  unique fonction de  $H^1(\omega_m)$  vérifiant  $\Delta v_m = f$  dans  $\omega_m$  et  $v_m - V \in H_0^1(\omega_m)$ . On construit une suite d'ouverts décroissante pour l'inclusion, et on vérifie comme précédemment que  $\mathcal{O} \subset \omega_m$  pour tout  $m$ . Cette suite converge donc vers un ouvert  $\omega$  vérifiant  $\mathcal{O} \subset \omega$ . On a alors le théorème

**Théorème 6.5** *sous l'hypothèse (H), on a  $\omega = \mathcal{O}$ .*

Preuve : supposons que  $\omega \neq \mathcal{O}$ , et posons  $\mathcal{R} = \omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$ . On montre alors comme dans la preuve du théorème 6.2 que  $V \in H_0^1(\mathcal{R})$ , c'est-à-dire  $\sup(|u^1|, |u^2|) \in H_0^1(\mathcal{R})$ . Or, on a  $0 \leq |u^1|, |u^2| \leq \sup(|u^1|, |u^2|)$  dans  $\mathcal{R}$ . On en déduit que  $|u^1|$  et  $|u^2|$  sont dans  $H_0^1(\mathcal{R})$ . On termine alors comme dans la preuve du théorème 6.2. ■

Il est donc très facile de prendre en compte deux jeux de données dans la méthode [P]. L'extension à plus de deux jeux de données est directe. Nous verrons au 8.2.3 que cela peut être très utile en pratique.



## Chapitre 7

# Extension à l'identification de défauts dans un matériau élasto-plastique

### Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la recherche de défauts dans une structure à partir de la mesure du déplacement et des efforts sur une partie de son bord, problème inverse d'intérêt pour le contrôle non destructif par exemple. Cette problématique a déjà été considérée, principalement dans le cas d'un matériau élastique. Dans [BC05], de nombreuses méthodes visant à trouver des défauts dans un matériau élastique sont présentées. Citons en particulier des méthodes basées sur l'écart à la réciprocité, la dérivée topologique ou encore la "linear sampling method". Les méthodes que nous avons développées aux chapitres précédents s'adaptent aussi à cette problématique.

Nous nous proposons ici de traiter le cas d'un matériau non plus élastique, mais élasto-plastique. Le problème majeur qui apparaît dans ce cas est le caractère fortement non-linéaire de la loi de comportement. Les méthodes présentées dans [BC05] ne fonctionnent plus dans ce contexte. Cette problématique est pourtant importante en pratique : si par exemple on recherche des fissures dans une structure métallique, le modèle élastique n'est pas exacte au voisinage de ces défauts ; la physique nous dit que des déformations plastiques apparaissent au voisinage des extrémités de la fissure, qui ne sont pas prises en compte par le modèle élastique. Il est plus raisonnable de considérer un modèle élasto-plastique de la structure dans ce cas.

Les lois de comportement élasto-plastiques présentent de nombreuses difficultés mathématiques. Tout d'abord, le problème direct élasto-plastique est un problème d'évolution, et non un problème stationnaire comme le problème direct élastique. De plus, les déformations plastiques sont données sous forme d'une inclusion différentielle, ce qui rend le calcul de la solution du problème difficile. Ceci constitue un obstacle majeur pour les méthodes de type contrôle optimal, qui reposent sur la résolution d'un grand nombre de problèmes directs.

L'idée principale que nous allons utiliser est la recherche du défaut dans la structure élasto-plastique au travers de la zone plastique qu'il crée : nous n'allons pas chercher le défaut, mais la zone plastique. Pour cela, nous allons utiliser le critère de plasticité, critère physique qui caractérise la zone plastique, dans la définition de la vitesse  $V$  de la méthode [P], de telle sorte que cette vitesse s'annule au contact de la zone plastique. Cela va nous permettre, sous des hypothèses raisonnables, de mettre en place une approche "par l'extérieur" des zones plastiques, et donc de retrouver les défauts. Une telle approche "par l'extérieur" en élasto-plasticité avait été introduite dans [Bou98], la méthode [P] va nous permettre d'en améliorer l'efficacité.

Pour simplifier l'étude, nous allons nous restreindre à un problème élasto-plastique antiplan. La théorie que nous allons développer s'adapte au cas élasto-plastique tridimensionnel.

Les résultats présentés dans ce chapitre feront l'objet d'une publication prochaine : *About iden-*

tification of defect in an elasto-plastic medium from boundary measurement in the antiplane case, L.Bourgeois & J.Dardé, en préparation.

**Sommaire**

---

<b>7.1</b>	<b>Loi élasto-plastique : cas antiplan . . . . .</b>	<b>122</b>
<b>7.2</b>	<b>Structure mathématique du problème inverse . . . . .</b>	<b>124</b>
<b>7.3</b>	<b>Modification de la méthode [P] pour résoudre le problème <math>[\mathcal{P}_{Ias}]</math> . . .</b>	<b>126</b>

---

**7.1 Loi élasto-plastique : cas antiplan**

Le cas élasto-plastique antiplan, cas particulier de l'élasto-plasticité, est caractérisé par un champ de déplacements de la forme  $\mathbf{u} := u(x_1, x_2)e_3$  dans le système de coordonnées cartésien  $(x_1, x_2, x_3)$ . En conséquence, le champ de déformations  $\epsilon$ , défini par  $\epsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$ , est donné par la formule

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_1} (e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1) + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_2} (e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2).$$

On remarque que l'on peut voir  $\epsilon$  comme un vecteur de  $\mathbb{R}^2$  dont les composantes sont les deux seules composantes non nulles du tenseurs d'ordre 3, c'est-à-dire  $(\epsilon_{13}, \epsilon_{23})$ . L'équation précédente se réécrit alors simplement

$$\epsilon = \frac{1}{2} \nabla u.$$

Tous les champs dépendent non seulement de l'espace, mais aussi du temps : dans un souci de simplification des notations, cette dépendance ne sera explicitée que quand cela sera absolument nécessaire. Toujours dans ce souci de simplification, nous utiliserons la très usitée notation  $\dot{g}$  pour noter la dérivée d'une fonction  $g$  par rapport à la variable temporelle  $t$ . La loi de comportement élasto-plastique avec écrouissage cinématique, qui lie le champ de déformations  $\epsilon$  au champ de contraintes  $\sigma$ , est

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = 2\mu (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \\ \dot{\epsilon}^p \in \partial\chi_K(A), \text{ avec } A := \sigma - H\epsilon^p. \end{cases}$$

Ici,  $\epsilon^p$  est le champ de déformation plastique,  $K$  est la boule fermée  $\overline{\mathcal{B}(0, k)}$ , qui coïncide avec le convexe de plasticité de Von-Mises dans le cas antiplan,  $\chi_K$  est la fonction indicatrice de  $K$  et  $\partial\phi(A)$  dénote le sous-différentiel de la fonction  $\phi$  au point  $A$ . Les trois constantes strictement positives  $\mu$ ,  $k$  et  $H$ , supposées connues, sont respectivement le module de cisaillement, le seuil d'élasticité en cisaillement et le coefficient d'écrouissage. Dans les zones élastiques, où  $\epsilon^p = 0$ , on retrouve la loi de comportement élastique  $\dot{\sigma} = 2\mu\dot{\epsilon}$ .

Remarquons que, par définition du sous-différentiel, l'équation  $\dot{\epsilon}^p \in \partial\chi_K(A)$  est équivalente à

$$(\clubsuit) \begin{cases} |A| \leq k \\ \text{si } |A| < k \text{ alors } \dot{\epsilon}^p = 0 \\ \text{si } |A| = k \text{ alors } \dot{\epsilon}^p = \lambda A, \lambda \geq 0. \end{cases}$$

où l'on note  $|\cdot|$  la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^2$ .

Pour compléter le système d'équation, il faut rajouter aux deux précédentes équations l'équation d'équilibre, qui s'écrit en l'absence de force volumique

$$\text{div}(\sigma) = 0.$$

Nous pouvons maintenant décrire le système complet d'équations régissant l'évolution du matériau élasto-plastique pendant un intervalle de temps  $]t_0, t_f[$ .

On suppose que le milieu occupe le domaine  $\Omega$ . Le bord de  $\Omega$  est divisé en deux parties ouvertes :  $\Gamma_u$  où l'on impose les déplacements, et  $\Gamma_T$  où l'on impose les efforts surfaciques. Les équations sont

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = \frac{1}{2} \nabla \dot{u} \\ \operatorname{div}(\dot{\sigma}) = 0 \\ \dot{\sigma} = 2\mu(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^P) \\ \dot{\epsilon}^P \in \partial\chi_K(\sigma - H\dot{\epsilon}^P) \end{cases} \rightsquigarrow \text{équations volumiques}$$

$$\begin{cases} \dot{u}|_{\Gamma_u} = 0 \\ \dot{\sigma} \cdot \nu|_{\Gamma_T} = \dot{T} \end{cases} \rightsquigarrow \text{conditions aux limites}$$

$$\begin{cases} u(\cdot, t_0) = 0 \\ \epsilon(\cdot, t_0) = 0 \\ \epsilon^P(\cdot, t_0) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{conditions initiales.}$$

Ce système d'équations est bien connu. Le cas des matériaux parfaitement plastiques, caractérisés par un coefficient d'érouissage nul, est étudié dans [Suq81] et [Joh76]. On y démontre l'existence de  $\sigma$  et  $u$  solutions du système, et l'unicité de  $u$ . Il existe en revanche plusieurs champs  $\sigma$  admissibles. Dans le cas qui nous intéresse, avec un coefficient d'érouissage strictement positif, on montre dans [Joh78] et [Löb07] l'existence et l'unicité de  $\sigma$  et de  $u$ .

De ( $\clubsuit$ ), on obtient facilement que pour tout  $x \in \Omega$  tel que pour tout  $t \in [t_0, t_f]$ ,  $|\sigma(x, t)| < k$ , on a  $\epsilon^P(x, t) = 0$ , d'où en particulier  $\epsilon^P(x, t_f) = 0$  et  $|A(x, t_f)| < k$ . L'ensemble des points  $x$  de  $\Omega$  vérifiant cette propriété sera dénommé dans la suite la zone élastique, notée  $\mathcal{E}$ , car les lois régissant le comportement de cette zone durant l'intervalle  $[0, t_f]$  sont celles de l'élasticité. Les points  $x$  tels que  $\epsilon^P(x, t_f) \neq 0$  forment la zone plastique  $\mathcal{P}$ , puisqu'ils ont été soumis au régime élasto-plastique pendant un certain intervalle de temps. Nous allons maintenant formuler une hypothèse importante de la méthode, puisqu'elle nous permettra de caractériser la zone plastique.

**Hypothèse [H0] - hypothèse de chargement croissant :**

$$\forall x \in \bar{\Omega}, \epsilon^P(x, t_f) = 0 \Leftrightarrow |A(x, t_f)| < k.$$

Sous l'hypothèse [H0], ( $\clubsuit$ ) implique qu'en un point  $x$  tel que  $\epsilon^P(x, t_f) \neq 0$ , on a  $|A(x, t_f)| = k$ . Autrement dit, si le matériau commence à se déformer plastiquement en un point  $x$  à l'instant  $t_s$ , il continuera à se déformer plastiquement en ce point durant tout l'intervalle  $[t_s, t_f]$ . On observe généralement ce comportement pour des géométries raisonnables de  $\Omega$  en imposant des efforts surfaciques  $T$  croissants, de la forme  $T(x, t) = T_0(x)g(t)$ , avec  $\dot{g} > 0$ .

Remarque : on peut imposer des efforts surfaciques croissants, et néanmoins ne pas satisfaire l'hypothèse [H0].

Si nous intégrons sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$  le système d'équations précédent sous l'hypothèse [H0], nous obtenons que  $u(\cdot, t_f)$  vérifie

$$\Delta u(\cdot, t_f) = 2\operatorname{div}(\epsilon^P(\cdot, t_f))$$

ce qui implique en particulier  $\Delta u(\cdot, t_f) = 0$  dans la zone élastique  $\mathcal{E}$ . De plus,  $u(\cdot, t_f)$  vérifie les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(\cdot, t_f)|_{\Gamma_u} = 0 \\ \partial_\nu u(\cdot, t_f)|_{\Gamma_T} = \frac{T(\cdot, t_f)}{\mu} + 2\epsilon^P(\cdot, t_f) \cdot \nu \end{cases}$$



ainsi que la condition suivante, caractérisant les zones élastique et plastique :

$$(\spadesuit) \left\{ \begin{array}{l} |\nabla u(\cdot, t_f)| < \frac{k}{\mu} \text{ dans } \mathcal{E} \\ |\nabla u(\cdot, t_f) - \frac{H + 2\mu}{\mu} \varepsilon^p(\cdot, t_f)| = \frac{k}{\mu} \text{ dans } \mathcal{P}. \end{array} \right.$$

Nous allons faire une nouvelle hypothèse :

**Hypothèse [H1] - hypothèse de plasticité confinée**

$$\text{supp}(\varepsilon^p(\cdot, t_f)) \Subset \mathcal{D}.$$

Cette hypothèse signifie que la zone plastique n'affleure pas à la surface de la structure, ce qui est raisonnable puisqu'en pratique la zone plastique se développe au voisinage des défauts, que nous avons supposés internes à la structure. [H1] implique en particulier que  $\varepsilon^p = 0$  sur  $\Gamma_T$ . Les conditions aux limites deviennent donc

$$\left\{ \begin{array}{l} u(\cdot, t_f)|_{\Gamma_u} = 0 \\ \partial_\nu u(\cdot, t_f)|_{\Gamma_T} = \frac{T(\cdot, t_f)}{\mu}. \end{array} \right.$$

De plus, en supposant que la déformation plastique  $\varepsilon^p$  est continue dans le domaine, on obtient de ()

$$(\star) \boxed{|\nabla u(\cdot, t_f)| = \frac{k}{\mu} \text{ sur } \partial\mathcal{E} \cap \partial\mathcal{P}}$$

Cette égalité va nous permettre d'identifier le bord de la zone plastique par l'intermédiaire de  $u$  à l'instant final  $t_f$  du chargement. Nous allons maintenant pouvoir passer à la formalisation mathématique du problème inverse.

## 7.2 Structure mathématique du problème inverse

On se donne un ouvert  $\mathcal{D}$  borné et connexe de  $\mathbb{R}^2$  à bord lipschitzien. On considère  $\mathcal{O} \Subset \mathcal{D}$  un ouvert ou un arc de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\Omega(\mathcal{O}) := \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}}$  soit connexe. Le domaine  $\mathcal{O}$  représente les défauts,  $\Omega$  la structure du matériau et  $\mathcal{D}$  le milieu "contrôlé". Nous supposons également les constantes  $\mu$ ,  $k$  et  $H$  caractérisant le comportement élasto-plastique de la structure égales à 1 pour les deux premières, 0.5 pour la troisième.

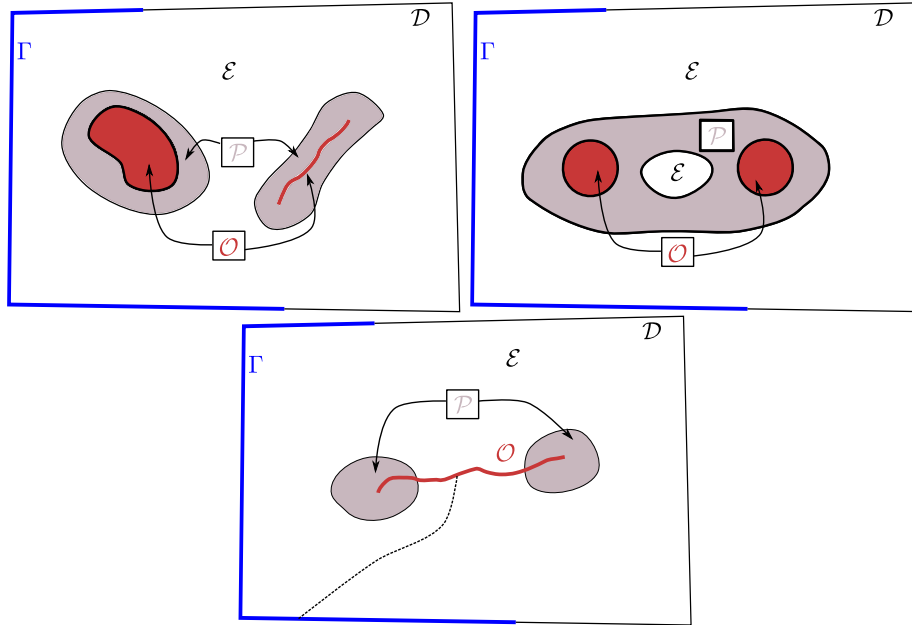
Dans le formalisme mis en place précédemment, on pose  $\Gamma_u = \mathcal{O}$  et  $\Gamma_T = \partial\mathcal{D}$  : ceci signifie que l'on fixe les déplacements à zéro sur le bord des défauts, et que l'on prescrit les forces surfaciques sur l'extérieur de la structure. Nous supposons que la structure subit un chargement vérifiant les hypothèses de chargement croissant [H0] et de plasticité confinée [H1]. À l'instant  $t_f$ , instant d'observation, on mesure le déplacement  $u_f$  sur une partie  $\Gamma$  du bord de  $\mathcal{D}$ . On connaît alors les conditions de Cauchy  $(u|_\Gamma, \partial_\nu u|_\Gamma) = (u_0, T(\cdot, t_f)|_\Gamma)$  vérifiées par le déplacement  $u := u(\cdot, t_f)$ .

Nous allons maintenant mettre en place le formalisme nécessaire pour avoir unicité de la solution du problème inverse que nous allons résoudre. Nous introduisons le domaine

$$\mathcal{P}_e := \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{NB}(\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}})}$$

où  $\mathcal{NB}(w)$  désigne la composante connexe de  $w$  en contact avec  $\Gamma$ . Nous allons également faire l'hypothèse suivante :

**Hypothèse [H2] - invisibilité de l'obstacle** : tout arc de  $\overline{\mathcal{D}}$  joignant un point quelconque de  $\mathcal{O}$  à un point quelconque de  $\Gamma$  croise  $\mathcal{P}$ .



Les deux premières configurations vérifient l'hypothèse [H2], la dernière ne la vérifie pas.

Sous l'hypothèse [H2],  $\partial\mathcal{P}_e$  est la frontière "extérieure" de la zone plastique, et  $\mathcal{P}_e$  contient la zone plastique  $\mathcal{P}$ , les défauts  $\mathcal{O}$  et éventuellement une partie de la structure restée élastique. Par construction, l'ensemble  $\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}_e}$  est connexe et contenue dans la zone élastique  $\mathcal{E}$ . La relation (★) implique directement

$$|\nabla u| = 1 \text{ sur } \partial\mathcal{P}_e$$

Le problème inverse que nous allons traiter consiste à rechercher  $\mathcal{P}_e$  à partir de la donnée de Cauchy  $(u_0, T(\cdot, t_f))_\Gamma$  sur  $\Gamma$ , sous les hypothèses [H0], [H1] et [H2]. On aboutit à la formulation suivante du problème :

**Problème  $[\mathcal{P}_{las}]$  :** trouver un ouvert  $\mathcal{P} \in \mathcal{D}$  à bord lipschitzien vérifiant  $\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}}$  connexe et une fonction  $u \in C^1(\overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{P})$  tels que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}} \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma \\ \partial_\nu u = T(\cdot, t_f) & \text{sur } \Gamma \\ |\nabla u| < 1 & \text{dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}} \\ |\nabla u| = 1 & \text{sur } \partial\mathcal{P}. \end{cases}$$

*Remarque :* la condition aux limites sur la norme du gradient qui caractérise la zone plastique dans le problème  $[\mathcal{P}_{las}]$  ne peut pas être utilisée simplement comme condition aux limites dans un problème variationnel. Ceci compromet fortement l'utilisation de méthodes basées sur le contrôle optimal pour résoudre ce problème.

**Propriété 7.1 - unicité de la solution du problème  $[\mathcal{P}_{las}]$**

Le problème  $[\mathcal{P}_{las}]$  admet au plus une solution  $(\mathcal{P}, u)$ .

**Preuve :** supposons que nous ayons deux solutions  $(\mathcal{P}_1, u_1)$  et  $(\mathcal{P}_2, u_2)$  au problème. On note  $\tilde{\mathcal{E}}$  la composante

connexe de  $\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}}_1 \cup \overline{\mathcal{P}}_2$  en contact avec  $\Gamma$ . On a :

$$\begin{cases} \Delta(u_1 - u_2) = 0 \text{ dans } \tilde{\mathcal{E}} \\ u_1 - u_2 = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \partial_\nu(u_1 - u_2) = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

ce qui implique, par unicité de la solution du problème de Cauchy<sup>1</sup>,  $u_1 = u_2$  dans  $\tilde{\mathcal{E}}$ , d'où  $\nabla u_1 = \nabla u_2$  dans  $\tilde{\mathcal{E}}$ , et finalement, par régularité des fonctions  $u_1$  et  $u_2$ ,  $\nabla u_1 = \nabla u_2$  sur  $\partial\tilde{\mathcal{E}}$ .

Supposons alors  $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$ . On a alors par exemple  $\mathcal{P}_1 \not\subset \mathcal{P}_2$ . Puisque  $\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}}_2$  est connexe, il existe alors un point  $x \in \partial\tilde{\mathcal{E}} \cap \partial\mathcal{P}_1$  tel que  $x \notin \overline{\mathcal{P}}_2$ . Comme  $x \in \partial\tilde{\mathcal{E}}$ , on a  $\nabla u_1(x) = \nabla u_2(x)$ . Comme  $x \in \partial\mathcal{P}_1$ , on a  $|\nabla u_1(x)| = 1$ . Enfin, comme  $x \notin \overline{\mathcal{P}}_2$ , on a  $|\nabla u_2(x)| < 1$ . Contradiction.

On a donc  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ , d'où  $u_1 = u_2$ . ■

Nous supposons à partir de maintenant que le problème  $[\mathcal{P}_{las}]$  admet une (unique) solution  $(\mathcal{P}, u)$ .

*Remarque* : remarquons que la condition aux limites sur les défauts n'intervient pas dans ce problème, en raison de l'hypothèse [H2] qui impose à la zone plastique "d'entourer" les défauts. Pour cette raison, on pourrait admettre n'importe quelle condition aux limites sur  $\mathcal{O}$  dans le problème direct, une condition de type Neumann par exemple.

### 7.3 Modification de la méthode [P] pour résoudre le problème $[\mathcal{P}_{las}]$

Nous allons maintenant mettre en place une méthode de résolution du problème  $[\mathcal{P}_{las}]$  basée sur le principe d'approche "par l'extérieur" décrit au chapitre 4. En effet, la fonction  $u$  solution du problème  $[\mathcal{P}_{las}]$  est solution d'un problème de Cauchy à l'extérieur de tout ouvert  $\omega$  contenant la zone plastique  $\mathcal{P}$ . Nous pouvons donc utiliser la méthode de quasi-réversibilité pour calculer rapidement une approximation de  $u$  à l'extérieur de cet ouvert, et obtenir son gradient. Il reste alors à utiliser cette connaissance pour faire évoluer l'ouvert vers la zone plastique.

Adapter la méthode [P] pour résoudre le problème  $[\mathcal{P}_{las}]$  n'est pas chose difficile. En effet, l'ingrédient clé de la méthode est la construction à partir de la fonction  $u$  d'une vitesse  $V$  positive à l'extérieur, nulle sur le bord et négative à l'intérieur de ce que l'on cherche, c'est-à-dire l'obstacle dans le problème  $[\mathcal{O}_{bs}]$  et la zone plastique ici. Construire une telle fonction pour le problème  $[\mathcal{P}_{las}]$  est très simple, il suffit de prendre une fonction valant  $1 - |\nabla u|^2$  à l'extérieur de la zone plastique<sup>3</sup>, et qui est négative dans la zone plastique, puisque par hypothèse on a  $|\nabla u| < 1$  hors de la zone plastique, et  $|\nabla u| = 1$  sur le bord de celle-ci.

On note donc  $V$  une fonction quelconque de  $H^1(\mathcal{D})$  vérifiant  $(\star) \begin{cases} V := 1 - |\nabla u|^2 \text{ dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}} \\ V|_{\mathcal{P}} \in H_0^1(\mathcal{P})^- \end{cases}$ .

La proposition suivante nous assure l'existence de telles fonctions si  $u$  est suffisamment régulière.

**Propriété 7.2** *si  $u \in H^2(\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}}) \cap C^1(\overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{P})$ , il existe  $V \in H^1(\mathcal{D})$  vérifiant  $(\star)$ .*

**Preuve** : définissons  $V$  par  $V = 1 - |\nabla u|^2$  dans  $\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}}$ , et  $V = 0$  dans  $\mathcal{P}$ . Il est clair que  $V|_{\mathcal{P}}$  est un élément de  $H_0^1(\mathcal{P})^-$ . On a par hypothèse  $u \in C^1(\overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{P})$ , ce qui implique  $V \in C^0(\overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{P})$ . De plus, on a  $|\nabla u| = 1$  sur  $\partial\mathcal{P}$ , ce qui implique  $V = 0$  sur  $\partial\mathcal{P}$ , et finalement  $V \in C^0(\overline{\mathcal{D}})$ . Pour montrer que  $V$  est un élément de  $H^1(\mathcal{D})$ , il suffit dès lors de montrer que  $V \in H^1(\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}})$ .

<sup>1</sup> voir théorème 1.2 p.12

<sup>2</sup> ou l'inverse, la démonstration étant identique, mutatis mutandis

<sup>3</sup> on prend ici la norme du gradient de  $u$  au carré pour avoir une fonction régulière

Puisque  $u$  est la fonction solution du problème  $[\mathcal{P}_{ias}]$ , on a  $|\nabla u(x)| \leq 1$  sur  $\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}}$ . On a donc  $0 \leq V \leq 1$  sur  $\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}}$ , et donc  $V \in L^2(\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}})$ . De plus, on a, pour tout  $i \in \{1, 2\}$ ,

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = -2 \sum_{j=1,2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}}} \left| \frac{\partial V}{\partial x_i} \right|^2 dx &\leq 4 \int_{\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}}} \left[ \sum_{j=1,2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right]^2 dx \\ &\leq 8 \int_{\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}}} \sum_{j=1,2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 dx \\ &\leq 8 \int_{\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}}} \sum_{j=1,2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 dx \quad (\text{car } \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| \leq 1) \\ &\leq 8 \|u\|_{H^2(\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}})}^2. \end{aligned}$$

On en déduit que  $\|\nabla V\|_{L^2(\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}})} \leq 4 \|u\|_{H^2(\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}})}$ , et finalement  $V \in H^1(\mathcal{D})$ . ■

Soit  $V \in H^1(\mathcal{D})$  vérifiant  $(\star)$ . On va mettre en place la méthode [P] exactement comme au 6.2. Soit donc  $f \in H^{-1}(\mathcal{D})$  vérifiant  $f \geq \Delta V$ . Pour tout ouvert  $\omega$  contenu dans  $\mathcal{D}$ , on note  $v_\omega$  l'unique fonction de  $H^1(\omega)$  vérifiant  $\Delta v_\omega = f$  dans  $\omega$  et  $v_\omega - V \in H_0^1(\omega)$ .

On définit alors notre suite d'ouverts  $(\omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$  par

$$\begin{cases} \mathcal{P} \subset \omega_0 \subset \mathcal{D} \\ \forall m \in \mathbb{N}, \omega_{m+1} := \omega_m \setminus \text{supp}(\text{sup}(v_m, 0)) \end{cases}$$

où l'on a noté  $v_m := v_{\omega_m}$ . On vérifie aisément, en utilisant le principe du maximum faible<sup>4</sup>, que  $\mathcal{P} \subset \omega_{m+1} \subset \omega_m$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , et on en déduit<sup>5</sup> :

**Propriété 7.3** la suite  $(\omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$  converge (au sens de Hausdorff) vers  $\omega := \overbrace{\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \omega_m}^{\omega}$ .

Nous allons maintenant faire l'hypothèse suivante :

**Hypothèse [H]** : les ouverts  $\omega_m$  sont uniformément lipschitziens.

L'hypothèse [H] nous autorise à appliquer le théorème 6.4, qui implique

- $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v_\omega$  dans  $L^2(\omega)$
- $\omega$  a un bord lipschitzien.

On obtient alors le

**Théorème 7.1** sous l'hypothèse [H], on a  $\boxed{\omega = \mathcal{P}}$ .

Nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 7.1** soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Gamma$  une partie ouverte lipschitzienne de sa frontière. Soit  $v \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ . Alors  $v \equiv 0$  sur  $\Gamma$ .

<sup>4</sup>théorème 6.1 p.110

<sup>5</sup>propriété B.4 p.196, annexe B

Preuve : soit  $x \in \Gamma$ . D'après la propriété B.1 p.192, il existe  $\Xi$  ouvert à frontière lipschitzienne tel que  $x \in \Xi$ ,  $\Theta := \Xi \cap \Omega$  soit un ouvert non vide de frontière lipschitzienne, et  $\Xi \cap \partial\Omega \subset \Gamma$ . On définit alors  $\chi \in C_c^\infty(\Xi)$  vérifiant  $\chi \equiv 1$  sur  $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \subset \Xi$ .

Comme  $v \in H_0^1(\Omega)$ , il existe  $\phi_n \in C_c^\infty(\Omega)$  vérifiant  $\phi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$  dans  $H^1(\Omega)$ . Il est facile de vérifier que l'on a

$$\chi\phi_n \xrightarrow{H^1(\Theta)} \chi v.$$

On remarque de plus que  $\chi\phi_n \in C_c^\infty(\Theta)$  pour tout  $n$ . On a donc  $\chi v \in H_0^1(\Theta)$ . Par hypothèse, on a  $\chi v \in C^0(\overline{\Theta})$ . On a donc<sup>6</sup>  $\chi v = 0$  sur  $\partial\Theta$ , et finalement  $v(x) = 0$ . Ce raisonnement étant valable pour tout  $x$  de  $\Gamma$ , le résultat suit. ■

Preuve du théorème 7.1 : supposons que l'on n'ait pas  $\omega = \mathcal{P}$ , et posons  $\mathcal{R} = \omega \setminus \overline{\mathcal{P}} \neq \emptyset$ . On montre alors exactement comme dans la preuve du théorème 6.2 que  $V \in H_0^1(\mathcal{R})$ . Comme  $\mathcal{R} \subset \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}}$ , cela signifie que  $1 - |\nabla u|^2 \in H_0^1(\mathcal{R}) \cap C^0(\overline{\mathcal{R}})$ .

Soit maintenant  $x \in \partial\mathcal{R}$  tel que  $x \notin \partial\mathcal{P}$ . Il existe  $\Gamma \subset \partial\omega$  tel que  $x \in \Gamma$  et  $\Gamma \cap \partial\mathcal{P} = \emptyset$ . Comme la frontière de  $\omega$  est lipschitzienne,  $\Gamma$  est lipschitzien. Le lemme précédent appliqué avec  $\Omega = \mathcal{R}$  et  $v = 1 - |\nabla u|^2$  nous donne alors  $1 - |\nabla u(x)|^2 = 0$ , soit  $|\nabla u(x)| = 1$ . Mais par définition, on a  $x \in \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}}$ , ce qui implique  $|\nabla u(x)| < 1$ . Contradiction.

On a donc  $\omega \setminus \overline{\mathcal{P}} = \emptyset$ , ce qui implique<sup>7</sup>, puisque les ouverts  $\mathcal{P}$  et  $\omega$  ont des frontières lipschitziennes,  $\omega = \mathcal{P}$ . ■

Remarque : on voit clairement ici que la méthode [P] pourra être utilisée pour rechercher n'importe quel objet, du moment que l'on sait construire une fonction  $g(u, \nabla u, \dots)$  qui est positive en dehors de l'objet et qui s'annule sur l'objet.

Remarque : on pourrait bien sûr adapter la méthode [HJ] à ce problème. En se plaçant dans le formalisme du chapitre 5, à l'étape  $n$  de la méthode, il suffit de définir la vitesse  $V_n$  par  $V_n := 1 - |\nabla u|^2$  à l'extérieur de  $\omega_n$ , et de la prolonger de manière lipschitzienne dans  $\omega_n$ . En supposant que  $1 - |\nabla u|^2$  est une fonction lipschitzienne, on démontre alors que la méthode converge vers la zone plastique.

<sup>6</sup>voir théorème IX.17 p.171 et remarque 20 p.172 de [Bre05]

<sup>7</sup>voir proposition B.2, annexe B

## Troisième partie

# Couplage méthode de quasi-réversibilité/méthodes de lignes de niveau



## Chapitre 8

# Résolution du problème inverse de l'obstacle avec condition de Dirichlet

### Introduction

Nous allons maintenant nous intéresser à la résolution numérique du problème de l'obstacle avec condition de Dirichlet, décrit au chapitre 4 dans un cadre général. Nous nous restreignons ici au cas particulier de la dimension 2 et de l'opérateur elliptique  $P := \Delta$ . Rappelons la formulation de ce problème : on se donne  $\mathcal{D}$  un ouvert connexe borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Gamma$  une partie ouverte de sa frontière lipschitzienne,  $|\Gamma| > 0$ . Pour tout  $\mathcal{O}$  ouvert vérifiant  $\mathcal{O} \Subset \mathcal{D}$ , on note  $\Omega(\mathcal{O}) := \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}}$ .

Problème  $[\mathcal{O}_{bs}]$  : pour  $(g_0, g_1) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ ,  $(g_0, g_1) \neq (0, 0)$ , trouver  $\mathcal{O}$  ouvert à frontière continue vérifiant  $\mathcal{O} \Subset \mathcal{D}$  et  $u \in H^1(\Omega(\mathcal{O})) \cap C^0(\overline{\Omega(\mathcal{O})})$  tels que

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega(\mathcal{O}) \\ u &= g_0 \text{ sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g_1 \text{ sur } \Gamma \\ u &= 0 \text{ sur } \partial \mathcal{O}. \end{cases}$$

Nous avons vu que ce problème admettait au plus une solution  $(\mathcal{O}, u)$ . Nous avons proposé au chapitre 4 un schéma de résolution de ce problème consistant en une approche "par l'extérieur", c'est-à-dire une méthode itérative que nous pouvons résumer ainsi :

- pour  $\omega_n$  ouvert vérifiant  $\mathcal{O} \subset \omega_n \Subset \mathcal{D}$ , calculer  $u$  dans  $\Omega(\omega_n) := \mathcal{D} \setminus \overline{\omega_n}$  à partir de la donnée  $(g_0, g_1)$ . Autrement dit, il s'agit à cette étape de résoudre le problème de Cauchy suivant, posé dans  $\Omega(\omega_n)$  : trouver  $u$  tel que

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega(\omega_n) \\ u &= g_0 \text{ sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g_1 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Puisqu'il s'agit d'un problème de Cauchy, nous utiliserons la méthode de quasi-réversibilité étudiée au chapitre 2, afin d'obtenir une approximation de  $u$  dans  $\Omega(\omega_n)$ . Si au lieu des données exactes, nous avons à notre disposition des données bruitées  $(g_0^\delta, g_1^\delta)$ , ce qui correspond à la situation la plus réaliste, nous pourrions utiliser la méthode décrite au chapitre 3.

- utiliser la connaissance de la fonction  $u$  à l'extérieur de  $\omega_n$  pour obtenir une meilleure approximation de  $\mathcal{O}$  "par l'extérieur", c'est-à-dire un ouvert  $\omega_{n+1}$  vérifiant  $\mathcal{O} \subset \omega_{n+1} \subset \omega_n$ . Pour cela, nous avons développé deux méthodes : la méthode [HJ], qui utilise une équation de type



Hamilton-Jacobi (une équation eikonale plus précisément), et que nous avons étudiée au chapitre 5, et la méthode [P], qui utilise une équation de Poisson, et que nous avons étudiée au chapitre 6. On recommence alors au premier point, jusqu'à convergence.

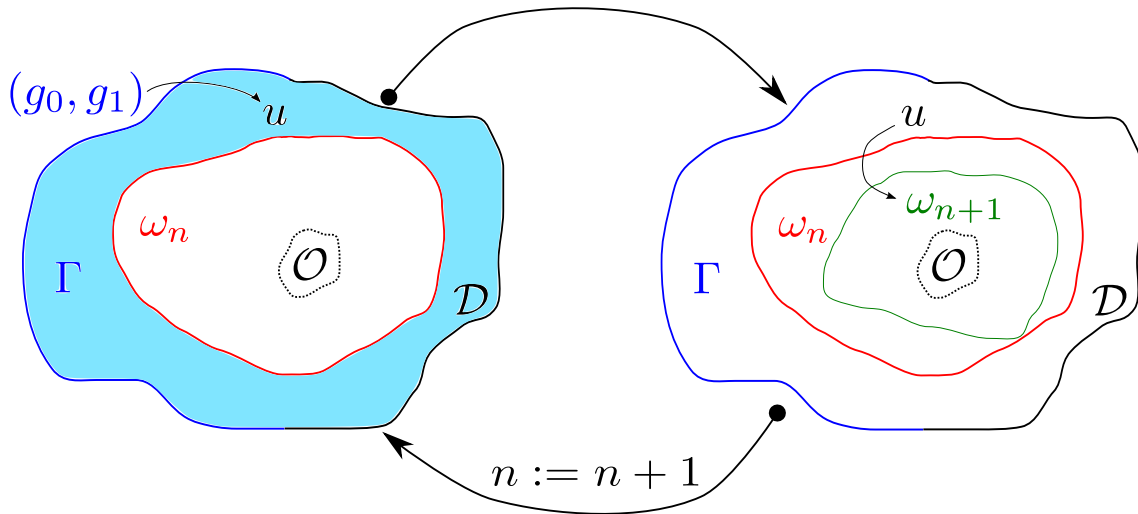


Schéma de la méthode "approche par l'extérieur".

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à la mise en place numérique de cette méthode.

**Sommaire**

---

<b>8.1</b>	<b>Aspects numériques de la résolution du problème <math>[\mathcal{O}_{bs}]</math></b>	<b>132</b>
8.1.1	Discrétisation des domaines	132
8.1.2	Obtention d'une approximation de $u$ dans $\mathcal{D} \setminus \overline{\Theta}_n$	134
8.1.3	Mise à jour de l'ouvert : obtenir $\Theta_{n+1}$	135
8.1.4	Convergence des méthodes, condition d'arrêt des algorithmes	143
<b>8.2</b>	<b>Expériences numériques</b>	<b>143</b>
8.2.1	Comparaison des méthodes [QR-HJ] et [QR-P]	145
8.2.2	Influence des paramètres	149
8.2.3	Lignes de niveau zéro "parasites" et utilisation de plusieurs jeux de données	160
8.2.4	Donnée bruitée	162

---

**8.1 Aspects numériques de la résolution du problème  $[\mathcal{O}_{bs}]$**

**8.1.1 Discrétisation des domaines**

Dans toute la suite,  $\mathcal{D}$  sera supposé être un ouvert polygonal de  $\mathbb{R}^2$ . On se donne  $\mathcal{T}_h$  une triangulation régulière de  $\mathcal{D}$  de finesse  $h^1$ . On suppose que  $\overline{\Gamma}$  est l'union d'un certain nombre d'arêtes de  $\mathcal{T}_h$ .

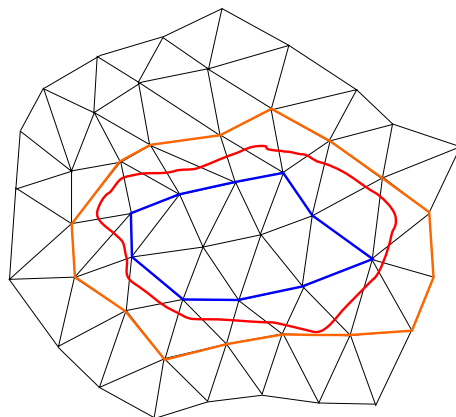
À chaque itération de notre méthode, nous allons être amenés à résoudre un problème de quasi-réversibilité dans  $\mathcal{D} \setminus \overline{\omega}_n$ , ce que nous allons naturellement faire par la méthode éléments finis que nous avons mise en place au chapitre 2. Se pose alors directement le problème suivant : rien n'oblige  $\omega_n$ , et donc  $\mathcal{D} \setminus \overline{\omega}_n$ , à être l'union d'un certain nombre de triangles de  $\mathcal{T}_h$ . Afin de ne pas compliquer outre-mesure la résolution numérique, nous avons décidé d'approximer  $\omega_n$  par un domaine constitué d'une union de triangles de  $\mathcal{T}_h$ . On pense alors naturellement aux domaines suivants :

---

<sup>1</sup>cf [Cia78]

- $\theta_n$ , constitué de tous les triangles de  $\mathcal{T}_h$  ayant tous leurs sommets contenus dans  $\omega_n$
- $\Theta_n$ , constitué de tous les triangles de  $\mathcal{T}_h$  ayant au moins un sommet contenu dans  $\omega_n$ .

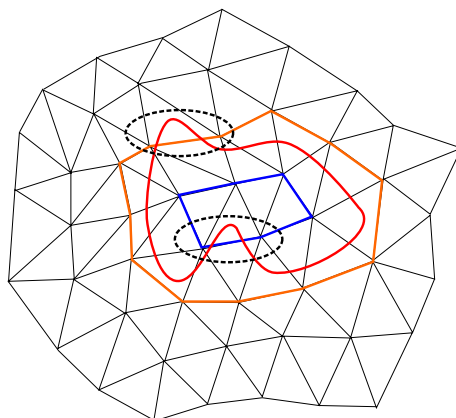
En effet, le domaine  $\omega_n$  est caractérisé dans la méthode [HJ] et dans la méthode [P] comme le plus grand ouvert sur lequel une fonction est négative (ensemble du type  $\{x|f(x) < 0\}$ ). Et lorsque nous discrétiserons nos problèmes, les valeurs d'une fonction aux sommets de la triangulation seront précisément les informations que nous aurons. Il sera alors très facile de déterminer  $\theta_n$  et  $\Theta_n$  en regardant simplement la valeur de la fonction aux sommets des triangles de  $\mathcal{T}_h$ .



Une configuration possible :  $\omega_n$ ,  $\theta_n$  et  $\Theta_n$ .

Il nous reste à choisir entre  $\theta_n$  et  $\Theta_n$ . Il nous faut alors nous rappeler que nous cherchons à construire une approche par l'extérieur. Autrement dit, nous souhaitons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on ait  $\mathcal{O} \subset \omega_n$ . Or, la plupart du temps, on a  $\theta_n \subset \omega_n \subset \Theta_n$ . Pour conserver le caractère extérieur de notre approche, nous sommes donc amenés à choisir  $\Theta_n$  comme approximation de  $\omega_n$  : on a automatiquement  $\mathcal{O} \subset \Theta_n$ , alors qu'il n'est pas certain que  $\mathcal{O} \subset \theta_n$ .

Remarque : il n'est pas vrai que l'on a forcément  $\theta_n \subset \omega_n \subset \Theta_n$  pour tout  $n$ , comme le montre la configuration suivante :



Cas où l'on n'a pas  $\theta_n \subset \omega_n \subset \Theta_n$  :  $\omega_n$ ,  $\theta_n$  et  $\Theta_n$ .

Il faut alors se rappeler que  $\omega_n$  est obtenu comme l'ensemble des points où une certaine fonction est négative. Or, d'un point de vue discret, nous n'aurons accès qu'aux valeurs de cette fonction aux sommets de la triangulation, ce qui rend impossible la détection d'un cas tel que celui présenté ci-dessus. Autrement dit, même si notre choix n'est pas optimal, nous ne pouvons guère faire mieux. En quelque sorte,  $\Theta_n$  est le moins mauvais des choix possibles pour approximer  $\omega_n$ .

Remarque : d'autres options s'offraient à nous. Par exemple, nous aurions pu à chaque itération re-mailler le domaine en adaptant le maillage à la position de  $\omega_n$ . Néanmoins, comme nous ne connais-

sons la position de  $\omega_n$  que de manière imprécise (voir remarque précédente), cela aurait rajouté une étape dans la méthode sans assurer un gain en précision par rapport à notre choix.

Nous allons maintenant supposer que nous connaissons  $\Theta_n$ , pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Nous allons décrire les différentes étapes de la méthode nous permettant d'obtenir  $\Theta_{n+1}$ .

### 8.1.2 Obtention d'une approximation de $u$ dans $\mathcal{D} \setminus \overline{\Theta_n}$

Pour obtenir une bonne approximation de  $u$  dans  $\mathcal{D} \setminus \overline{\Theta_n}$ , nous devons résoudre un problème de Cauchy. Nous allons donc utiliser les méthodes développées dans la première partie de cette thèse.

#### Cas d'une donnée exacte

Si nous avons une donnée exacte, nous allons utiliser la méthode de quasi-réversibilité décrite au chapitre 2. On note  $W_h$  l'espace des éléments finis F.V.1 lié à la triangulation  $\mathcal{T}_h$  (voir 2.2.2). Nous résoudrons dans  $\mathcal{D} \setminus \overline{\Theta_n}$  le problème  $[\text{QR}_h]$  suivant :

Problème  $[\text{QR}_h]$  : pour  $\varepsilon > 0$ , trouver  $u_{h_n, \varepsilon} \in V_h$  tel que pour tout  $v_h \in V_{h,0}$ , on ait

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h, T \text{ dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\Theta_n}} a_{T, \varepsilon}(u_{h_n, \varepsilon}, v_h) = 0.$$

Ici,  $V_h$  désigne l'ensemble des fonctions de  $W_h$  qui "valent ce qu'il faut" sur  $\Gamma$ ,  $V_{h,0}$  les fonctions de  $W_h$  dont les degrés de liberté sur  $\Gamma$  sont nuls (voir une nouvelle fois 2.2.2 pour les définitions exactes de  $V_h$  et  $V_{h,0}$ ), et  $a_{T, \varepsilon}(v_h, w_h) = (\Delta v_h, \Delta w_h)_{L^2(T)} + \varepsilon(v_h, w_h)_{H^2(T)}$ ,  $\forall (v_h, w_h) \in W_h \times W_h$ ,  $\forall T \in \mathcal{T}_h$ . Nous prendrons le paramètre  $\varepsilon$  égal à  $10^{-4}$  la plupart du temps, conformément à notre étude au 2.2.5.

La matrice correspondant au problème  $[\text{QR}_h]$  doit être construite à chaque itération, puisque le domaine de calcul  $\mathcal{D} \setminus \overline{\Theta_n}$  peut changer. Néanmoins, on peut accélérer le processus, en utilisant le fait que le maillage du domaine est fixé au départ : on peut en effet calculer une fois pour toutes les contributions de chaque triangle à la matrice, et les stocker en mémoire. Ainsi, à chaque itération, nous n'aurons qu'à repérer les triangles contenus dans  $\mathcal{D} \setminus \overline{\Theta_n}$ , et à assembler leurs contributions dans la matrice. Comme attendu, ce gain de temps se fait au détriment d'espace mémoire. Nous renvoyons au 2.2.4 pour les détails sur le calcul des contributions d'un triangle.

#### Cas d'une donnée bruitée

Supposons que nous ayons à notre disposition non pas une donnée exacte, mais une donnée bruitée, ce qui est finalement le cas le plus probable. Nous avons vu au 3.2 que nous ne pouvons pas directement utiliser cette donnée bruitée avec la méthode de quasi-réversibilité. Il nous faut tout d'abord

1. régulariser la donnée bruitée
2. fixer le paramètre  $\varepsilon$  de la méthode de quasi-réversibilité en fonction du niveau de bruit.

Nous avons développé au chapitre 3 une méthode basée sur le principe de Morozov et la dualité en optimisation permettant de remplir ce double objectif. Elle repose sur la résolution du problème  $[\tilde{\text{P}}_{\alpha_h}^{\delta*}]$  décrit au 3.4.2 page 74.

Dans notre optique de résolution du problème  $[\mathcal{O}_{b_s}]$ , l'idée est de résoudre le problème  $[\tilde{\text{P}}_{\alpha_h}^{\delta*}]$  à la première itération de notre approche par l'extérieur, c'est-à-dire dans  $\mathcal{D} \setminus \overline{\Theta_0}$ . On obtient ainsi

une donnée régularisée et une valeur pour le paramètre  $\varepsilon$ , que nous utiliserons comme donnée et valeur du paramètre du problème  $[\text{QR}_h]$  pour les itérations suivantes.

Remarque : la donnée régularisée et le paramètre  $\varepsilon$  obtenus en résolvant  $[\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha h}^{\delta*}]$  dépendent du domaine de calcul, c'est-à-dire de  $\Theta_0$ . On pourrait alors être tenté de résoudre à nouveau  $[\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha h}^{\delta*}]$  après quelques itérations, l'ouvert  $\Theta_n$  alors obtenu devant être une meilleure approximation de  $\mathcal{O}$ .

Nous avons testé numériquement cette idée, mais n'avons pas observé de gain significatif quant à la qualité de reconstruction de l'ouvert  $\mathcal{O}_{bs}$ . Comme cela demande de résoudre un problème d'optimisation de plus, ce qui est coûteux en temps, nous avons finalement abandonné cette idée.

En ce qui concerne le choix du paramètre  $\alpha$ , conformément à l'étude que nous avons faite au 3.5, nous choisirons  $\alpha$  égal à  $10^{-4}$ . Nous aurons alors à construire les matrices du problème  $[\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha h}^{\delta*}]$  et à le résoudre en utilisant les méthodes proposées au 3.4.2 p.69.

### 8.1.3 Mise à jour de l'ouvert : obtenir $\Theta_{n+1}$

Pour la mise à jour de l'ouvert, nous allons naturellement utiliser les méthodes que nous avons développées aux chapitres 5 et 6, la méthode [HJ] et la méthode [P]. Nous avons montré que dans le cadre continu, ces deux méthodes nous permettent de construire une suite d'ouverts qui converge vers l'obstacle, à la condition de connaître la solution exacte  $u$  à l'extérieur de ces ouverts. La méthode de quasi-réversibilité, couplée à la méthode basée sur la dualité en optimisation si nécessaire, nous fournit une approximation  $u_{h,\varepsilon}$  de  $u$  à l'extérieur de  $\Theta_n$ . C'est cette approximation que nous utiliserons dans les méthodes [HJ] et [P].

Les méthodes [HJ] et [P] reposent chacune sur la résolution de problèmes aux dérivées partielles :

- une équation de Hamilton-Jacobi pour la première
- une équation de Poisson pour la seconde.

Il nous reste donc à nous intéresser à la résolution numérique de ces équations. Nous allons commencer par le problème de Poisson : en effet, ce problème nous sera utile dans la méthode [HJ].

#### Méthode [P] : problème de Poisson

Dans la méthode [P], la mise à jour de l'ouvert  $\omega_n$  se fait par résolution du problème de Poisson suivant :

Problème [P] : trouver  $v_n \in H^1(\omega_n)$  tel que 
$$\begin{cases} \Delta v_n = f \text{ dans } \omega_n \\ v_n = |u| \text{ sur } \partial\omega_n. \end{cases}$$

Dans ce problème,  $f \in H^{-1}(\mathcal{D})$  est un paramètre de la méthode, que nous choisirons comme une constante positive  $\gamma$  "assez grande", conformément à notre étude p.116, et  $u$  est la solution du problème [Cauchy]. Le domaine  $\omega_{n+1}$  est alors défini par  $\omega_{n+1} = \omega_n \setminus \text{supp}(\text{sup}(v_n, 0))$ . Vu ce que nous venons de dire, nous allons résoudre le problème [P] non pas dans  $\omega_n$ , mais dans  $\Theta_n$ , toutes choses égales par ailleurs.

La résolution numérique du problème [P] par éléments finis de Lagrange  $P_1$  est bien connue. On va noter  $X_{hn}$  l'espace des éléments finis de Lagrange  $P_1$  dans  $\Theta_n$ , et  $X_{hn,0}$  le sous-espace des fonctions de  $X_{hn}$  s'annulant sur le bord de  $\Theta_n^2$ . L'équivalent discret du problème [P] est :

---

<sup>2</sup>ou aux sommets du maillage situés sur le bord de  $\Theta_n$ , ce qui est équivalent

Problème [P<sub>h</sub>] : trouver  $v_{hn} \in X_{hn}$  tel que

$$\begin{cases} \int_{\Theta_n} \nabla v_{hn} \cdot \nabla w_h \, dx = - \int_{\Theta_n} \gamma w_h \, dx, \quad \forall w_h \in X_{hn,0} \\ v_{hn} = |u_{hn,\varepsilon}| \text{ aux sommets du maillage situés sur le bord de } \Theta_n. \end{cases}$$

Ce problème admet une unique solution  $v_{hn}$ . On définit alors naturellement

$$\omega_{n+1} := \Theta_n \setminus \text{supp}(\text{sup}(v_{hn}, 0))$$

soit encore  $\omega_{n+1} := \{x \in \Theta_n \mid v_{hn}(x) < 0\}$ , puisque  $X_{hn} \subset C^0(\overline{\Theta_n})$ . Ce qui nous amène à la définition de  $\Theta_{n+1}$  :

$$\Theta_{n+1} := \{T \in \mathcal{T}_h \mid \exists A \text{ sommet de } T, v_{hn}(A) < 0\}$$

À chaque itération de la méthode, nous aurons à construire la matrice correspondant au problème [P<sub>h</sub>]. Nous pouvons une nouvelle fois tirer parti du fait que nous utilisons un unique maillage pour pré-calculer une fois pour toutes les contributions de chaque triangle à cette matrice. Nous n'aurons alors plus qu'à assembler ces contributions en fonction du domaine de calcul à chaque itération.

### Méthode [HJ] : problème de Hamilton-Jacobi

La méthode [HJ], étudiée au 5.2.2 p.103, peut se résumer de la manière suivante : à l'étape  $n$ , on commence par créer une "vitesse"  $V_n$  vérifiant :

$$\begin{cases} V_n(x) = \chi(x)|u(x)|, \quad \forall x \in \mathcal{D} \setminus \omega_n \\ V_n(x) < 0, \quad \forall x \in \mathcal{O} \\ |V_n(x) - V_n(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \end{cases}$$

avec  $u$  solution du problème [Cauchy],  $\chi$  une fonction troncature ( $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{D})^+$ ) vérifiant  $\chi \equiv 1$  dans  $\omega_0$ , et  $L$  une constante positive indépendante de  $n$ . On résout ensuite le problème suivant :

Problème [Eikonale] : trouver  $\phi \in C^0(\overline{\mathcal{D}} \times [0, T])$  vérifiant au sens de viscosité

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} - V_n |\nabla \phi| = 0 \text{ dans } \mathcal{D} \times ]0, T[ \\ \phi(x, 0) = \bar{\delta}_{\omega_n}(x) \text{ pour tout } x \in \mathcal{D} \\ \phi(x, t) = \bar{\delta}_{\omega_n}(x) \text{ pour tout } (x, t) \in \partial \mathcal{D} \times [0, T]. \end{cases}$$

Ici,  $\bar{\delta}_{\omega_n}$  est la fonction distance signée à  $\omega_n$ <sup>3</sup> et  $T > 0$  est quelconque. Le problème [Eikonale] admet une unique solution de viscosité  $\phi_n$ , et on définit  $\omega_{n+1}$  par  $\omega_{n+1} := \{x \in \omega_n \mid \phi_n(x, T) < 0\}$ . Les deux principales étapes que nous allons devoir mettre en place numériquement sont donc :

1. mise en place d'une vitesse  $V_n$  discrète, c'est-à-dire d'un prolongement adéquat de  $u_{hn,\varepsilon}$
2. résolution de l'équation eikonale.

<sup>3</sup>voir annexe B

Nous allons traiter la résolution de l'équation eikonale en premier, puis nous verrons comment nous construisons des prolongements adaptés à notre problématique.

• **Résolution numérique du problème [Eikonale]**

La résolution numérique des équations de Hamilton-Jacobi, dont l'équation eikonale qui nous intéresse, fait l'objet de recherches depuis longtemps : Crandall et Lions furent à notre connaissance les premiers à proposer des schémas numériques pour calculer la solution de viscosité d'équations de ce type<sup>4</sup>. Plaçons-nous dans un cadre plus général : on cherche à résoudre

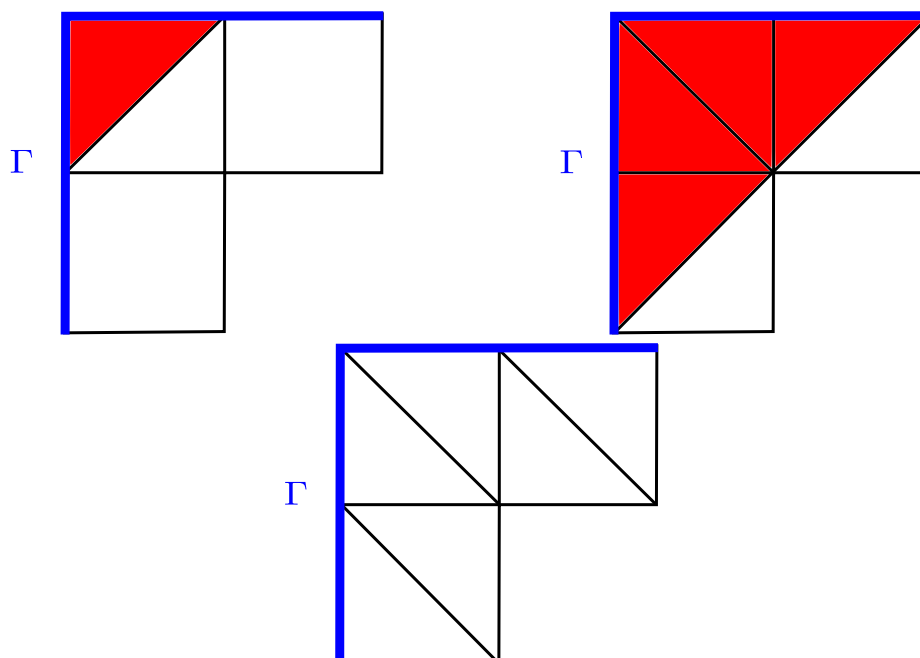
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + H(\nabla \phi) = 0.$$

Nous discrétiserons cette équation par un schéma aux différences finies en espace et en temps de la forme

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\delta t} + \hat{H}^n(\phi_x^-, \phi_x^+, \phi_y^-, \phi_y^+) = 0.$$

Ici,  $\phi^n := \phi(\cdot, n\delta t)$ , où  $\delta t$  est le pas de temps,  $\phi_x^+$  et  $\phi_x^-$  (resp.  $\phi_y^+$  et  $\phi_y^-$ ) des approximations par différences finies de  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  (resp.  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ ) que nous expliciterons ultérieurement, et  $\hat{H}$  est une approximation numérique de l'hamiltonien  $H$ , que nous expliciterons aussi ultérieurement.

Pour ces schémas, nous utilisons des maillages cartésiens, ce qui restreint quelque peu les géométries admissibles pour  $\mathcal{D}$  : il faut désormais que  $\mathcal{D}$  soit un polygône de  $\mathbb{R}^2$  dont les angles fassent 90 ou 270 degrés. Ceci n'a aucune incidence sur la méthode de quasi-réversibilité : une fois le maillage cartésien construit, on divise chaque rectangle en deux suivant la diagonale pour obtenir un maillage triangulaire. En revanche, il faut faire attention à ce qu'il se passe au niveau des angles si l'on a des données bruitées, et que l'on utilise la méthode décrite au chapitre 3. En effet, on a vu p.71 que certaines configurations de triangles dans les coins du domaine pouvaient se révéler problématiques. Or, il est très facile de les obtenir à partir d'un maillage cartésien du domaine. La figure ci-dessous montre comment il faut découper le maillage cartésien pour les éviter.



Les deux premières configurations ne sont pas bonnes : dans celle de gauche, le triangle en rouge a deux côtés contenus dans  $\Gamma$  ; dans celle de droite, les quatre triangles en rouge ont un côté sur  $\Gamma$ , et un côté en commun avec un autre triangle en rouge. La troisième configuration est bonne.

<sup>4</sup>[CL84]

Pour résoudre numériquement l'équation eikonale de notre problème, nous avons utilisé une boîte à outils mise à disposition sur internet<sup>5</sup> par Baris Sumengen, du Vision Research Lab de l'université de Californie-Santa Barbara. Elle utilise un schéma de Lax-Friedrich Local (LFL) avec des approximations des dérivées partielles de type ENO1, ENO2, ENO3 ou WENO5 (au choix). Nous allons maintenant décrire ces différentes approximations, ainsi que le schéma LFL.

Intéressons-nous tout d'abord aux approximations des dérivées partielles. Elles sont obtenues par différences finies spatiales. Notons  $\delta_x$  et  $\delta_y$  les pas du maillage cartésien selon  $x$  et  $y$ . Soit  $(x_i, y_j)$  un sommet quelconque du maillage. Pour  $(k, l) \in \mathbb{Z}$ , on note  $x_{i+k} = x_i + k\delta_x$ ,  $y_{j+l} = y_j + l\delta_y$  et  $\phi_{i+k, j+l}^n := \phi^n(x_{i+k}, y_{j+l})$ .

Les schémas ENO (pour Essentiellement Non Oscillants) cherchent à construire une interpolation polynomiale des données. On cherche alors à approximer la dérivée partielle par la dérivée partielle du polynôme obtenu, en sélectionnant la direction d'approximation ("up" ou "down") de manière à réaliser un ordre élevé de précision. On va se contenter ici de décrire comment on obtient les approximations de  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ . On procède de la même manière pour approximer  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ , mutatis mutandis. On utilisera dans la suite la variable muette  $K$  telle que :

$$\begin{cases} \text{pour obtenir } \phi_x^-, \text{ on prendra } K = i - 1 \\ \text{pour obtenir } \phi_x^+, \text{ on prendra } K = i. \end{cases}$$

-ENO1 : on définit le polynôme d'approximation

$$P_1(x) := \frac{\phi_{K+1, j} - \phi_{K, j}}{\delta x} (x - x_i)$$

et on prend pour approximation de la dérivée partielle

$$\frac{dP_1}{dx}(x_i) = \frac{\phi_{K+1, j} - \phi_{K, j}}{\delta x}.$$

-ENO2 : on définit le polynôme  $P_1$  comme précédemment. On définit également

$$a := \frac{\phi_{K+1, j} - 2\phi_{K, j} + \phi_{K-1, j}}{2(\delta x)^2}, \quad b := \frac{\phi_{K+2, j} - 2\phi_{K+1, j} + \phi_{K, j}}{2(\delta x)^2}$$

puis

$$c := \begin{cases} a \text{ si } |a| \leq |b| \\ b \text{ sinon.} \end{cases}$$

On définit alors notre polynome d'approximation :

$$P_2(x) := P_1(x) + c \left( x^2 - (x_K + x_{K+1})x + x_K x_{K+1} \right).$$

On prend  $\frac{dP_2}{dx}(x_i)$  comme approximation de la dérivée partielle.

-ENO3 : on définit  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $P_2$  comme précédemment. On définit

$$\kappa := \begin{cases} K - 1 \text{ si } |a| \leq |b| \\ K \text{ sinon} \end{cases}$$

et

$$A = \frac{\phi_{\kappa+2, j} - 3\phi_{\kappa+1, j} + 3\phi_{\kappa, j} - \phi_{\kappa-1, j}}{6(\delta x)^3}, \quad B = \frac{\phi_{\kappa+3, j} - 3\phi_{\kappa+2, j} + 3\phi_{\kappa+1, j} - \phi_{\kappa, j}}{6(\delta x)^3}$$

<sup>5</sup>[http://barissumengen.com/level\\_set\\_methods/index.html](http://barissumengen.com/level_set_methods/index.html)

ainsi que

$$C := \begin{cases} A & \text{si } |A| \leq |B| \\ B & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notre polynôme d'approximation sera alors

$$P_3(x) := P_2(x) + C(x - x_\kappa)(x - x_{\kappa+1})(x - x_{\kappa+2}).$$

On prend  $\frac{dP_3}{dx}(x_i)$  comme approximation de la dérivée partielle.

Les schémas de type ENO sont efficaces dans les zones où la fonction  $\phi$  est chahutée. Paradoxalement, c'est dans les zones où la fonction est la plus régulière que les problèmes se posent. En effet, les choix opérés par les schémas ENO sur le stencil, c'est-à-dire sur la "bonne" zone à prendre en compte pour bien approximer les dérivées, deviennent alors très fluctuants, puisqu'il n'y a pas dans ce cas de "bon" choix. Les schémas de type WENO (Weighted ENO) corrigent ce défaut en prenant des combinaisons convexes des différents choix possibles, n'en privilégiant aucun en particulier dans les zones régulières.

-WENO5 : on définit, pour  $k \in \{1, \dots, 5\}$

$$v_k^- = \frac{\phi_{i-3+k,j} - \phi_{i-4+k,j}}{\delta x}, \quad v_k^+ = \frac{\phi_{i+4-k,j} - \phi_{i+3-k,j}}{\delta x}.$$

On définit alors des coefficients qui vont caractériser la régularité spatiale de  $\phi$  :

$$\begin{aligned} S_1^\pm &= \frac{13}{12}(v_1^\pm - 2v_2^\pm + v_3^\pm)^2 + \frac{1}{4}(v_1^\pm - 4v_2^\pm + 3v_3^\pm)^2 \\ S_2^\pm &= \frac{13}{12}(v_2^\pm - 2v_3^\pm + v_4^\pm)^2 + \frac{1}{4}(v_2^\pm - v_4^\pm) \\ S_3^\pm &= \frac{13}{12}(v_3^\pm - 2v_4^\pm + v_5^\pm)^2 + \frac{1}{4}(3v_3^\pm - 4v_4^\pm + v_5^\pm)^2. \end{aligned}$$

On définit alors

$$a_1^\pm = \frac{1}{10} \frac{1}{\varepsilon + S_1^\pm}, \quad a_2^\pm = \frac{1}{10} \frac{1}{\varepsilon + S_2^\pm}, \quad a_3^\pm = \frac{1}{10} \frac{1}{\varepsilon + S_3^\pm}$$

où  $\varepsilon$  est un paramètre (généralement pris égal à  $10^{-6}$ ) dont la fonction est d'éviter que le dénominateur ne s'annule. On définit finalement les poids

$$\omega_i^\pm = \frac{a_i^\pm}{a_1^\pm + a_2^\pm + a_3^\pm}.$$

La formule donnant les approximations "up" et "down" de la dérivée partielle en  $x$  est finalement

$$\phi_x^\pm = \omega_1 \left( \frac{1}{3}v_1^\pm - \frac{7}{6}v_2^\pm + \frac{11}{6}v_3^\pm \right) + \omega_2 \left( -\frac{1}{6}v_2^\pm + \frac{5}{6}v_3^\pm + \frac{1}{3}v_4^\pm \right) + \omega_3 \left( \frac{1}{3}v_3^\pm + \frac{5}{6}v_4^\pm - \frac{1}{6}v_5^\pm \right).$$

Passons maintenant à la résolution effective de l'équation eikonale, que nous faisons par un schéma de Lax-Friedrichs. Dans ce schéma, l'hamiltonien numérique est

$$\hat{H}(\phi_x^-, \phi_x^+, \phi_y^-, \phi_y^+) := H\left(\frac{\phi_x^+ + \phi_x^-}{2}, \frac{\phi_y^+ + \phi_y^-}{2}\right) - \alpha \frac{\phi_x^+ - \phi_x^-}{2} - \beta \frac{\phi_y^+ - \phi_y^-}{2}.$$

$H$  est l'hamiltonien du problème, et  $\alpha_x$  et  $\alpha_y$  des coefficients de dissipation définis par  $\alpha \geq \max |H_x(\phi_x, \phi_y)|$ ,  $\beta \geq \max |H_y(\phi_x, \phi_y)|$  (avec la notation  $f_x$  (resp.  $f_y$ ) signifiant  $\frac{\partial f}{\partial x}$  (resp.  $\frac{\partial f}{\partial y}$ )).



Dans l'équation eikonale, on a  $H(\phi_x, \phi_y) := V_n \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}$ , avec  $V_n$  indépendant de  $\phi$ . On doit donc choisir  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\alpha \geq \max \frac{|V_n \phi_x|}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}}, \quad \beta \geq \max \frac{|V_n \phi_y|}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}}.$$

Comme on a  $\frac{|V_n \phi_x|}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \leq |V_n|$  et  $\frac{|V_n \phi_y|}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \leq |V_n|$ , on voit que l'on peut choisir  $\alpha = \beta = \max_{\mathcal{D}} |V_n|$ . Cette condition globale peut être raffinée : on peut en effet se contenter de contrôler localement les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ , on obtient alors le schéma de Lax-Friedrichs Local.

Pour fonctionner, ce schéma doit vérifier la condition CFL suivante :

$$\delta_t \max \left\{ \frac{|H_x|}{\delta_x} + \frac{|H_y|}{\delta_y} \right\} < 1.$$

Dans notre cas, il suffit en fait de vérifier  $\max |V_n| \delta_t \left( \frac{1}{\delta_x} + \frac{1}{\delta_t} \right) < 1$ . Remarquons que cette condition dépend de la valeur maximale de  $|V_n|$  sur  $\mathcal{D}$ . Ainsi, plus  $\max_{\mathcal{D}} |V_n|$  est grand, plus nous allons devoir utiliser des pas de maillage  $\delta_x$  et  $\delta_y$  petits si nous ne voulons pas avoir un pas de temps  $\delta_t$  trop petit. Ceci aura une incidence sur nos choix lorsque nous construirons la vitesse  $V_n$ .

Intéressons-nous maintenant à la condition initiale et à la condition aux limites du problème [Eikonale]. La condition initiale du problème discret<sup>6</sup> est  $\phi_n(\cdot, 0) = \bar{\partial}_{\Theta_n}$ . Il est donc nécessaire de savoir construire la distance signée à l'ouvert  $\Theta_n$ . La boîte à outils que nous utilisons sait le faire, en utilisant exactement les mêmes approximations et schémas que nous venons de présenter. En effet, la fonction distance signée  $\bar{\partial}_{\Theta_n}$  peut être vue comme la limite en temps long de l'équation de Hamilton-Jacobi suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + S_{\Theta_n}(|\nabla \phi| - 1) = 0, \quad S_{\Theta_n}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \Theta_n \\ 0 & \text{si } x \in \partial \Theta_n \\ 1 & \text{si } x \in \mathcal{D} \setminus \overline{\Theta_n}. \end{cases}$$

Quant à la condition aux limites  $\phi_n(x, t) = \bar{\partial}_{\Theta_n}(x)$ ,  $\forall x \in \partial \mathcal{D}$ , elle sera automatiquement vérifiée si elle est vérifiée au départ, puisque la vitesse  $V_n$  est rigoureusement nulle sur les bord de  $\mathcal{D}$ .

Pour avoir des précisions sur les méthodes numériques pour la résolution des équations de Hamilton-Jacobi, en particulier les approximations par différences finies en espace et en temps, les schémas numériques et la construction de la distance signée, on peut se référer à la partie II de [OF03].

#### • Prolongement de $u_{h,n,\varepsilon}$

Intéressons-nous maintenant à la construction de  $V_n$ , vitesse de notre équation. Rappelons que l'on demande à la vitesse de vérifier

$$\begin{cases} V_n(x) = \chi(x)|u(x)| & \text{pour tout } x \in \mathcal{D} \setminus \overline{\omega_n} & * \\ V_n(x) < 0 & \text{pour tout } x \in \mathcal{O} & * \\ |V_n(x) - V_n(y)| < L|x - y| & \text{pour tout } (x, y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} & * \end{cases}$$

Remarquons tout d'abord que la propriété  $*$ , à savoir le caractère lipschitzien de  $V_n$ , avec une constante indépendante de  $n$ , sera très difficile à assurer. Notre objectif sera plutôt de construire une fonction régulière, afin d'avoir toutes les chances de vérifier cette propriété.

D'un point de vue discret, il s'agit de construire un prolongement de  $u_{h,n,\varepsilon}$ . Une idée naturelle est de réutiliser la fonction  $v_{h,n}$  solution du problème  $[P_h]$  décrit au 8.1.3. En effet, cette fonction est la solution d'un problème de Poisson discret, avec un second membre  $C^\infty$  (rappelons que nous

<sup>6</sup>on remplace ici  $\omega_n$  par son approximation discrète  $\Theta_n$

avons choisi une constante  $\gamma$  comme second membre), elle a donc toutes les chances d'être très régulière. De plus, nous savons que si nous prenons la constante  $\gamma$  suffisamment grande, alors la vitesse sera négative dans l'obstacle<sup>7</sup>, et  $V_n$  vérifiera la propriété  $*$ . Enfin, la propriété  $*$  est facile à vérifier : il suffit de choisir une fonction  $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{D})^+$  vérifiant  $\chi \equiv 1$  sur  $\Theta_0$ , et de définir  $V_n$  par

$$V_n := \begin{cases} \chi |u_{h_n, \varepsilon}| & \text{dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\Theta_n} \\ v_{h_n} & \text{dans } \Theta_n. \end{cases}$$

Ce choix de vitesse semble théoriquement très adapté. Il a néanmoins un gros inconvénient en pratique, en raison de la CFL que doit vérifier notre schéma de résolution, à savoir

$$\delta_t \max_{x \in \mathcal{D}} |V_n(x)| \left( \frac{1}{\delta_x} + \frac{1}{\delta_y} \right) < 1.$$

Il faut ici se rappeler qu'au final, nous ne sommes intéressés que par l'évolution au cours du temps de  $\{x \in \mathcal{D} \mid \phi(x, t) < 0\}$ , et plus précisément par l'évolution de la frontière de cet ensemble, c'est-à-dire de la ligne de niveau 0 de  $\phi$ . Comme la CFL est globale, cette évolution peut être freinée par de fortes valeurs de la vitesse en des points éloignés de la ligne de niveau 0, qui n'influence donc pas son évolution. Pour remédier à ce problème, nous avons utilisé la technique dite de la "narrow band"<sup>8</sup> : l'idée est de mettre la vitesse à 0 en dehors d'une petite bande autour du front d'intérêt. Ainsi, la valeur de la vitesse en des points éloignés ne freine plus l'évolution du front, puisqu'elle n'intervient plus dans le calcul de la CFL.

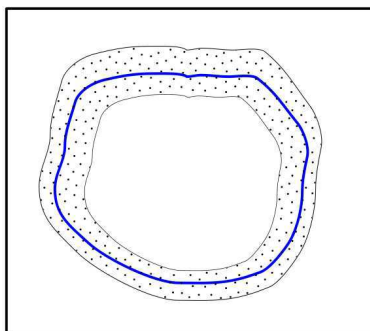


Illustration de l'idée de la "narrow band" : la vitesse est mise à zéro à l'extérieur de la bande étroite (en pointillé) autour de la ligne de niveau zéro de  $\phi$  (en bleu).

Plus mathématiquement, cela revient à multiplier la vitesse  $V_n$  que nous venons de construire par une fonction  $\eta \in C_c^\infty(\mathcal{D})$ , vérifiant  $0 \leq \eta \leq 1$  dans  $\mathcal{D}$ , telle que le support de  $\eta$  soit contenu dans la bande voulue, et vérifiant  $\eta \equiv 1$  dans un voisinage de la ligne de niveau 0 de  $\phi$ . Remarquons que la vitesse obtenue  $\tilde{V}_n := \eta V_n$  ne vérifie plus les propriétés voulues. Cela n'a pas une grande importance : en effet, si le bord de l'obstacle n'est pas dans la bande d'intérêt, la vitesse à cet endroit est nulle, donc  $\phi$  ne varie pas et reste négative comme voulue. Si au contraire il est situé dans la bande d'intérêt, la vitesse qui fait évoluer  $\phi$  est la bonne, et tout se passe comme lorsque l'on n'avait pas modifié la vitesse.

Au final, voici comment se déroule une itération de la méthode [HJ] :

1. construction de  $V_n$  : résolution du problème [P<sub>h</sub>] dans  $\Theta_n$  + mise en place de la "narrow band"

<sup>7</sup> ceci n'est pas tout à fait exact : dans le problème continu, si nous prolongeons  $u$  de cette manière, cela fonctionne. Mais nous sommes ici dans le cas discret, et c'est  $u_{h, \varepsilon}$  que l'on prolonge. On espère du moins, comme  $u_{h, \varepsilon}$  est une approximation a priori bonne de  $u$ , qu'il se passe sensiblement la même chose

<sup>8</sup> bande étroite

2. résolution de [Eikonale] par schéma de Lax-Friedrichs jusqu'au temps  $T$  final

Ensuite, on n'a plus qu'à déterminer  $\Theta_{n+1}$ , dont la définition est

$$\Theta_{n+1} := \{K \in \mathcal{T}_h \mid \exists A \text{ sommet de } K, \phi_n(A, T) < 0\}$$

et calculer  $\bar{\delta}_{\Theta_{n+1}}$  pour avoir la condition initiale de l'étape suivante.

### Comparaison des méthodes [HJ] et [P]

Si on devait faire un choix entre la méthode [HJ] et la méthode [P] pour la mise de jour de l'ouvert  $\Theta_n$ , on pencherait naturellement vers l'utilisation de la méthode [P]. En effet, la méthode [HJ] est plus difficile à mettre en place, et utilise elle-même la méthode [P]<sup>9</sup>. D'autres arguments font pencher la balance du côté de la méthode [P] : le premier d'entre eux concerne les maillages.

La méthode [HJ] nécessite des maillages cartésiens<sup>10</sup> et fins, avec un pas inférieur à  $\frac{1}{100}$ , en raison de la condition CFL. L'expérience numérique nous a aussi montré que l'utilisation de maillages trop grossiers empêche la méthode de "capter" le bord de l'obstacle : la ligne de niveau zéro de  $\phi$  passe au travers<sup>11</sup>. À l'opposé, la méthode [P] fonctionne très bien avec des maillages plus grossiers, avec des pas de  $\frac{1}{50}$  à  $\frac{1}{100}$ , et elle fonctionne avec des maillages sans structure particulière.

Une deuxième argument en défaveur de [HJ] : la résolution de [Eikonale] fait que l'on approche de manière continue de l'obstacle, ce qui prend plus de temps que l'approche par résolution de  $[P_h]$ , qui procède par sauts successifs.

Néanmoins, la méthode [HJ] pourrait se révéler fructueuse pour la résolution d'un autre problème, le problème inverse de l'obstacle avec condition de Neumann :

Problème  $[\mathcal{O}_{bs\_Neumann}]$  : pour  $(g_0, g_1) \neq (0, 0)$ , trouver  $(u, \mathcal{O})$  tels que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega(\mathcal{O}) \\ u = g_0 \text{ sur } \Gamma \\ \partial_\nu u = g_1 \text{ sur } \Gamma \\ \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}. \end{cases}$$

En effet, l'idée qui guide la méthode [HJ], à savoir la construction d'une vitesse positive en dehors de  $\omega_n$ , valant  $|u|$  sur  $\partial\omega_n$  et négative dans l'obstacle, se transpose aisément à ce problème, en remplaçant  $|u|$  par  $|\partial_\nu u|$ . On est donc amené à résoudre l'équation Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| |\nabla \phi| = 0$$

qui a, à première vue, une structure compliquée. Néanmoins, cette équation se simplifie si l'on se rappelle que le vecteur normal  $\nu$  est lié à  $\phi$  par l'équation  $\nu = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ , ce qui nous donne l'équation

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - |\nabla u \cdot \nabla \phi| = 0.$$

Nous avons testé cette idée, qui donne des résultats assez bons pour la recherche d'obstacles à géométrie simple, mais ne marche pas bien pour des obstacles compliqués (non convexes, non

<sup>9</sup> ceci n'est pas vraiment un argument en faveur de la méthode [P]. En effet, on pourrait imaginer d'autres méthodes pour prolonger  $|u_{h,n,\varepsilon}|$  dans  $\omega_n$  sans passer par un problème de Poisson.

<sup>10</sup> dans la manière dont nous l'implémentons. Il existe des schémas de résolution de l'équation eikonale adaptés à des maillages non structurés

<sup>11</sup> plus exactement, la ligne de niveau zéro ralentit à proximité du bord de l'obstacle, mais finit tout de même par passer au travers

connexes...). Ceci est peut-être dû à de plus nombreuses difficultés numériques liées au changement de problème.

Par contre, la manière de transposer la méthode [P] au problème [ $\mathcal{O}_{bs}$ -Neumann] n'est pas claire pour le moment. La méthode [HJ] nous semble donc la meilleure piste à l'heure actuelle pour résoudre ce problème en utilisant la méthode de quasi-réversibilité.

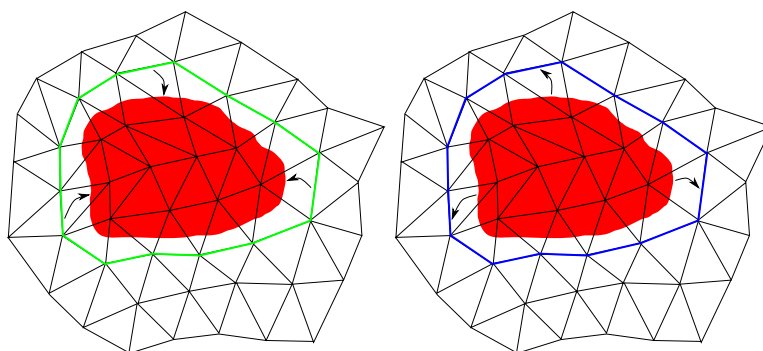
### 8.1.4 Convergence des méthodes, condition d'arrêt des algorithmes

Nous avons maintenant deux méthodes numériques de résolution du problème [ $\mathcal{O}_{bs}$ ] : la première est basée sur la résolution du problème [ $QR_h$ ] alternée avec la résolution du problème [Eikonale] : nous la noterons méthode [QR-HJ]. La seconde est basée sur la résolution du problème [ $QR_h$ ] alternée avec la résolution du problème [ $P_h$ ] : nous la noterons méthode [QR-P]. Ces deux méthodes construisent une suite d'ouverts  $(\Theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , qui vérifie

**Propriété 8.1** *la suite d'ouverts  $\Theta_n$  converge au sens de Hausdorff vers  $\Theta := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{\Theta}_n$ .*

Preuve : on a  $\Theta_{n+1} \subset \Theta_n \subset \mathcal{D}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Le résultat est donc une application directe du théorème B.4 p.196. ■

En fait, un raisonnement très simple nous indique que non seulement la méthode converge, mais de plus on a  $\Theta_{n+1} = \Theta_n$  à partir d'un certain  $n$ . Ceci est dû au "retour en arrière" que nous opérons lorsque nous définissons  $\Theta_n$  à partir de  $v_{hn}$  dans la méthode [QR-P], ou à partir de  $\phi_n$  dans la méthode [QR-HJ]. L'illustration ci-dessous met en évidence ce phénomène pour la méthode [QR-P], le mécanisme étant exactement le même pour [QR-H] :



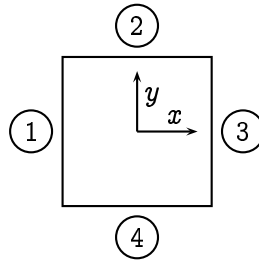
$\Theta_n$  est en vert sur la figure de gauche. Si  $\{x \in \Theta_n \mid v_{hn}(x) < 0\}$  est l'ensemble en rouge, alors on aura automatiquement par définition de  $\Theta_{n+1}$  ( $\Theta_{n+1} := \{T \in \mathcal{T}_h \mid \exists A \text{ sommet de } T, v_{hn}(A) < 0\}$ ),  $\Theta_{n+1} = \Theta_n$ .

On a donc un critère d'arrêt très efficace : on stoppe les itérations dès que  $d_H(\Theta_n, \Theta_{n+1}) = 0^{12}$ .

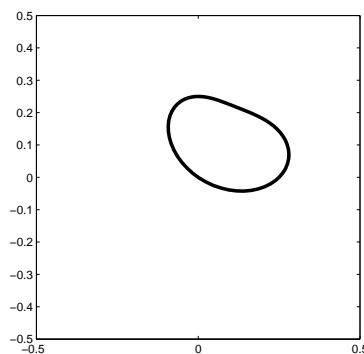
## 8.2 Expériences numériques

Nous allons maintenant tester les méthodes [QR-HJ] et [QR-P]. Dans ces tests, l'ouvert  $\mathcal{D}$  sera le carré  $]-0.5, 0.5[ \times ]-0.5, 0.5[ \subset \mathbb{R}^2$ , dont nous numérotions les côtés comme suit :

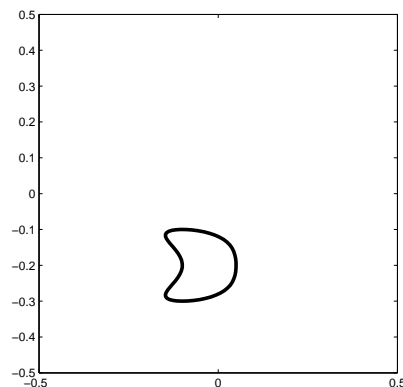
<sup>12</sup>on rappelle que  $d_H$  désigne la distance de Hausdorff entre deux ouverts, voir annexe B



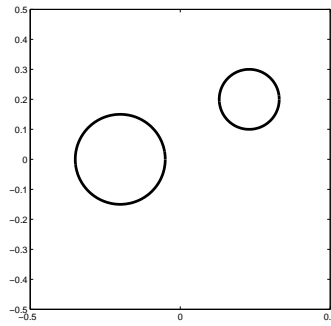
Nous allons résoudre le problème inverse de l'obstacle avec condition de Dirichlet pour trois obstacles différents : le premier, noté  $\mathcal{O}_1$  est un obstacle convexe, dont la frontière est donnée en coordonnées polaires par l'équation  $r(\theta) = 0.25((\cos(\theta))^3 + \sin(\theta))$  pour  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

 $\mathcal{O}_1$ 

Le deuxième obstacle  $\mathcal{O}_2$  n'est pas convexe. Sa frontière est donnée par l'équation paramétrique  $(x(t), y(t)) = (0.15 \cos(t)(1 + \cos(t))(1 - 0.5 \cos(t)) - 0.1, 0.1 \sin(t) - 0.2)$  pour  $t \in [0, 2\pi]$ .

 $\mathcal{O}_2$ 

Enfin, le troisième obstacle  $\mathcal{O}_3$  est constitué de deux disques disjoints de centres  $(-0.2, 0)$  et  $(0.23, 0.2)$ , et de rayons 0.15 et 0.1.

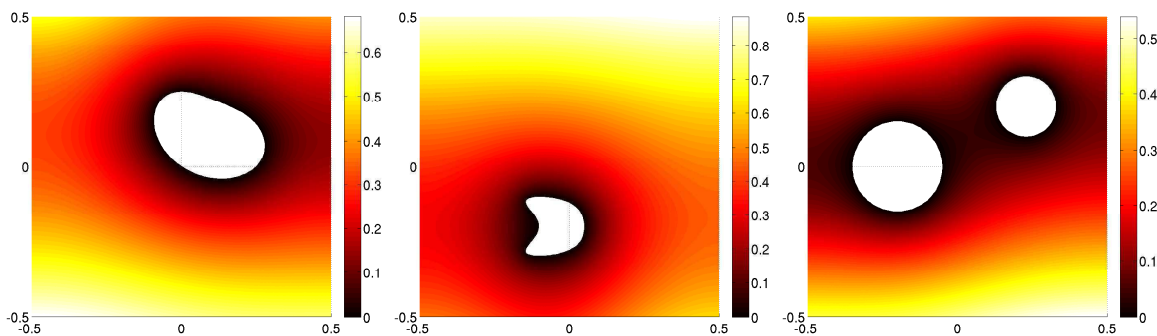
 $\mathcal{O}_3$ 

La donnée  $(g_0, g_1)$  du problème  $[\mathcal{O}_{b_s}]$  est obtenu par résolution d'un problème de Laplace dans  $\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}_i}$  en imposant la condition de Neumann  $g_1$  sur le bord de  $\mathcal{D}$ , et une condition de Dirichlet homogène sur le bord de l'obstacle. Ce problème est résolu par éléments finis, comme expliqué au 4.2.2 p.90. Sauf mention contraire,  $g_1$  sera défini dans les exemples suivants par

$$g_1 := \begin{cases} 1 & \text{sur les côtés 2 et 4} \\ 0 & \text{sur les côtés 1 et 3.} \end{cases}$$

La solution  $u_i$  du problème de Laplace vérifie donc

$$\begin{cases} \Delta u_i = 0 & \text{dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}_i} \\ \partial_\nu u_i = 1 & \text{sur } ]-0.5, 0.5[ \times \{-0.5, 0.5\} \\ \partial_\nu u_i = 0 & \text{sur } \{-0.5, 0.5\} \times ]-0.5, 0.5[ \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{O}_i. \end{cases}$$

Les fonctions  $u_1, u_2$  et  $u_3$ 

### 8.2.1 Comparaison des méthodes [QR-HJ] et [QR-P]

Nous allons comparer les deux méthodes proposées précédemment. Pour cela, nous allons les soumettre aux trois cas tests précédents en mettant tous les paramètres aux mêmes valeurs, c'est-à-dire :

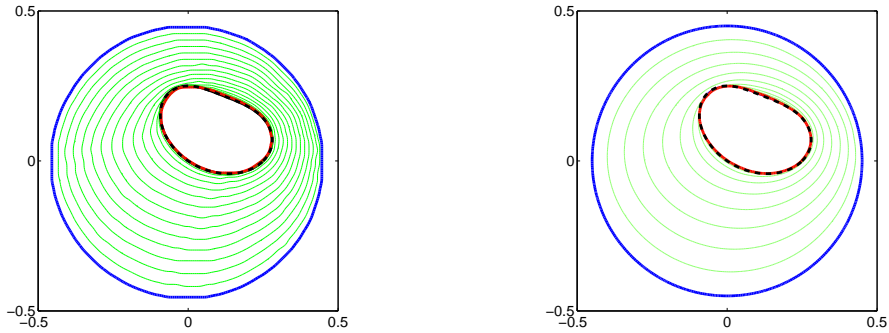
- même ouvert de départ  $\omega_0 := \mathcal{B}(0, 0.45)$
- même finesse de maillage :  $h = \frac{1}{140}$  dans toutes les simulations
- même valeur de second membre  $\gamma$  pour le problème de Poisson
- même valeur du paramètre  $\varepsilon = 10^{-4}$  de la méthode [QR]
- donnée sur tout le bord de  $\mathcal{D}$ .

On note  $\omega_\infty$  l'ouvert obtenu après convergence.

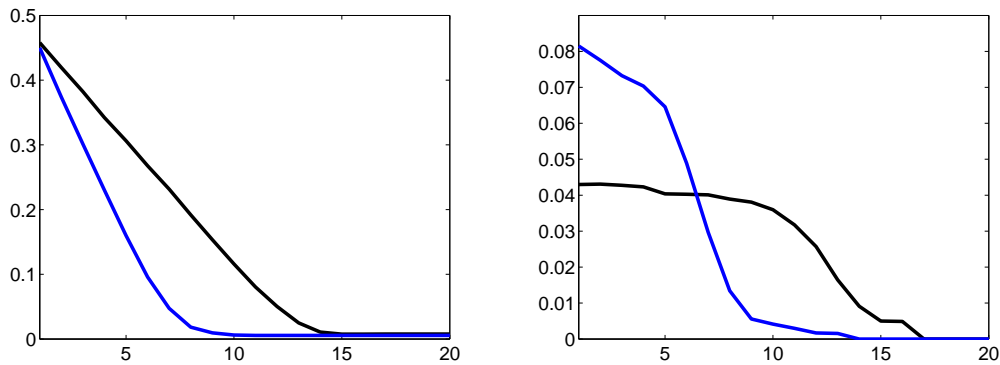
L'équation eikonale de la méthode [QR-HJ] est résolue comme expliqué à la page 136, avec une approximation WENO des dérivées spatiales, et un temps  $T$  final choisi égal à 1.

Obstacle  $\mathcal{O}_1$ 

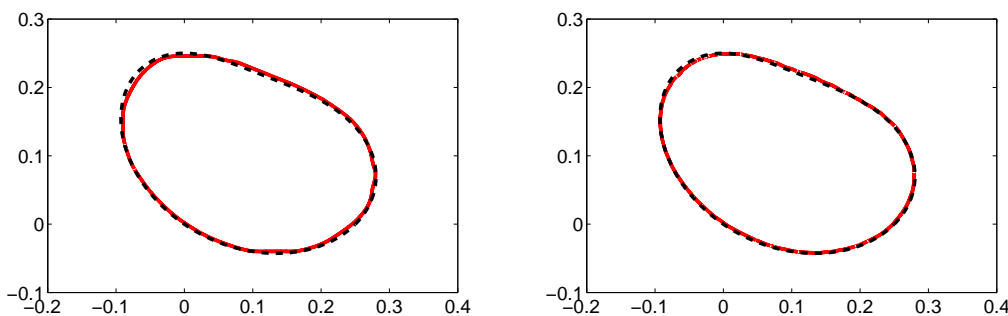
Dans ces simulations, nous avons pris  $\gamma := 10$ .



Itérations de la méthode [QR-HJ] à gauche et de la méthode [QR-P] à droite. En bleu,  $\omega_0$ , en rouge  $\omega_\infty$  et en noir  $\mathcal{O}_1$



À gauche  $d_H(\omega_n, \mathcal{O}_1)$ , à droite  $d_H(\omega_n, \omega_{n-1})$ , pour la méthode [QR-HJ] en noir et la méthode [QR-P] en bleu.



Comparaison entre  $\omega_\infty$  en rouge et  $\mathcal{O}_1$  en noir, pour la méthode [QR-HJ] à gauche et pour la méthode [QR-P] à droite.

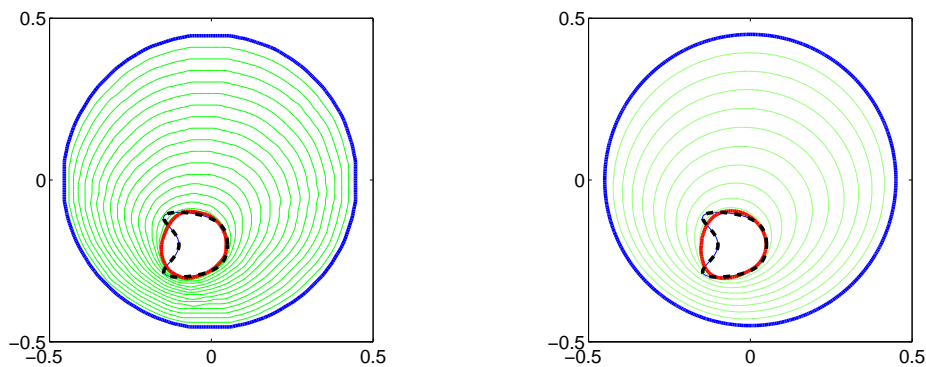
On constate sur ces premières simulations que la méthode [QR-P] converge plus rapidement vers l'obstacle que la méthode [QR-HJ], ce qui était attendu. Ainsi, si nous avons utilisé le critère d'arrêt  $d_H(\omega_n, \omega_{n-1}) = 0$ , la méthode [QR-P] se serait arrêtée à la quatorzième itération, alors que la méthode [QR-HJ] se serait arrêtée à la dix-septième. Remarquons néanmoins que l'avancée de la méthode [QR-HJ] dépend du choix du temps final  $T$  de l'équation eikonale. Ainsi, on peut diminuer le nombre d'itérations avant convergence de la méthode [QR-HJ] en prenant un temps

final  $T$  plus grand, ce qui implique en contrepartie un temps de résolution de l'équation eikonale plus long : en termes de temps de calcul global de la méthode, on aboutit donc à un *statu quo*, et la méthode [QR-P] reste plus efficace.

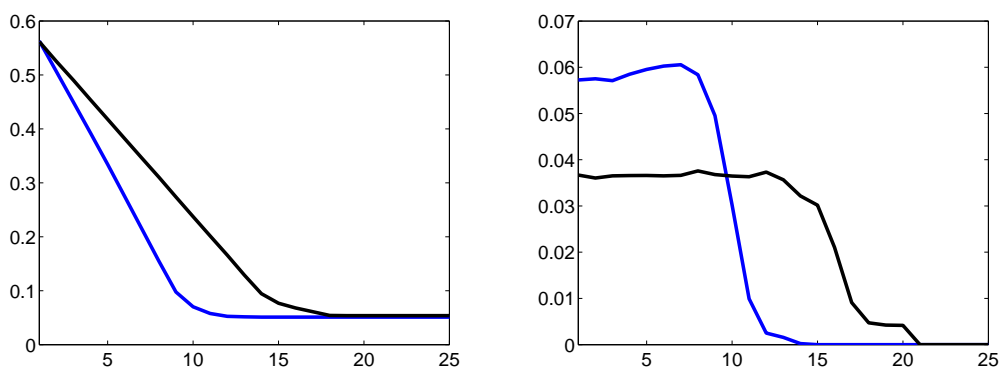
En ce qui concerne la qualité de reconstruction de l'obstacle, les deux méthodes aboutissent à des résultats pratiquement identiques. L'obstacle est très bien localisé, sa forme est très bien retrouvée.

### Obstacle $\mathcal{O}_2$

Dans ces simulations, nous avons pris  $\gamma = 20$ .

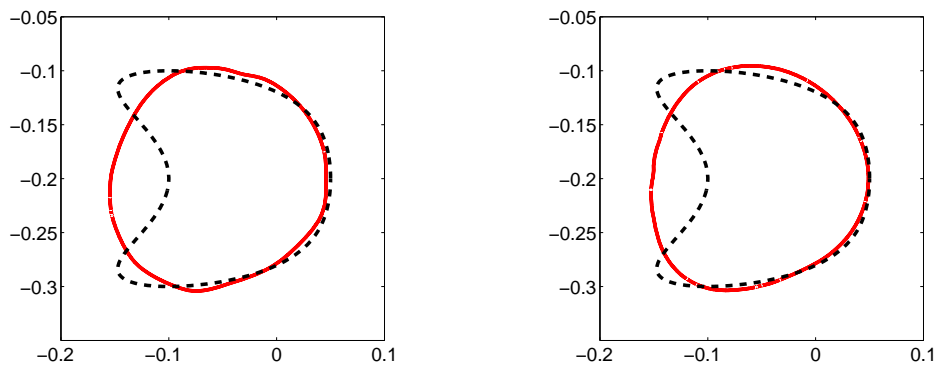


Itérations de la méthode [QR-HJ] à gauche et de la méthode [QR-P] à droite. En bleu,  $\omega_0$ , en rouge  $\omega_\infty$  et en noir  $\mathcal{O}_2$



À gauche  $d_H(\omega_n, \mathcal{O}_2)$ , à droite  $d_H(\omega_n, \omega_{n-1})$ , pour la méthode [QR-HJ] en noir et la méthode [QR-P] en bleu.



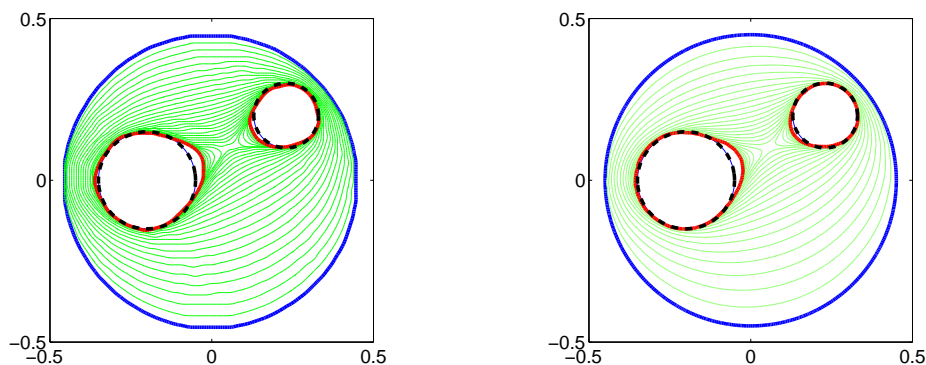


Comparaison entre  $\omega_\infty$  en rouge et  $\mathcal{O}_2$  en noir, pour la méthode [QR-HJ] à gauche et pour la méthode [QR-P] à droite.

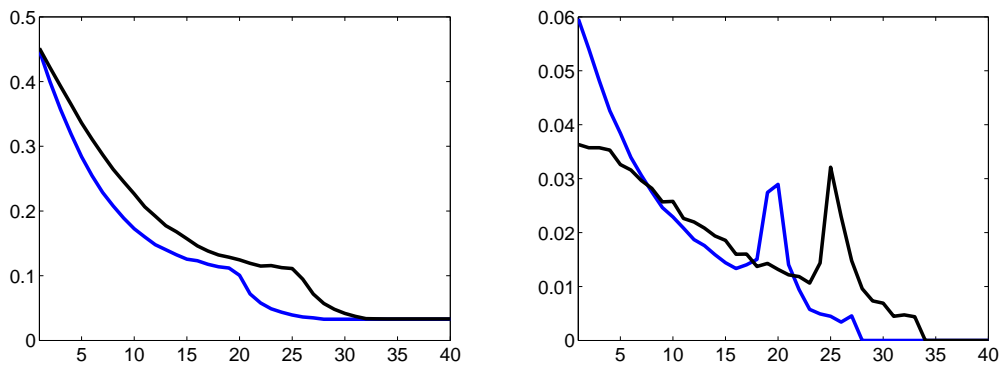
Les constatations concernant la vitesse d'approche des deux méthodes restent valables pour l'obstacle  $\mathcal{O}_2$  : la méthode [QR-P] est plus efficace que la méthode [QR-HJ]. La qualité de reconstruction de l'obstacle est une nouvelle fois la même pour les deux méthodes : si la localisation de  $\mathcal{O}_2$  est bonne, la reconstruction de sa forme ne l'est pas, tout du moins concernant la partie "non convexe" de sa frontière (partie gauche). Ceci est attendu, et nous verrons qu'un bon choix de paramètres permet d'améliorer le résultat.

### Obstacle $\mathcal{O}_3$

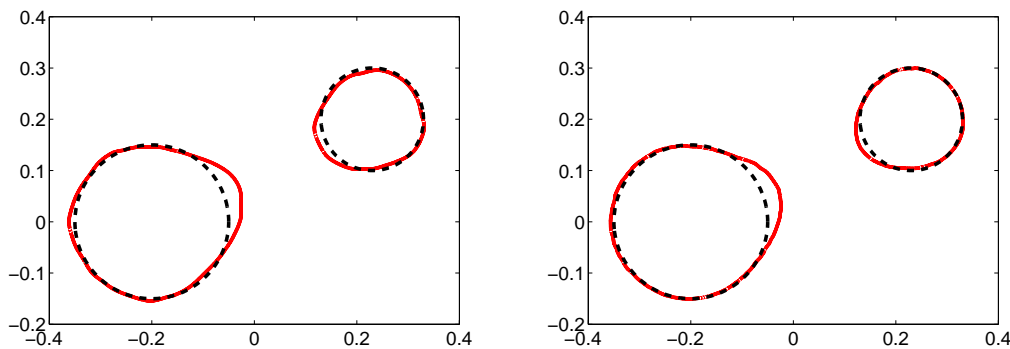
Pour ces simulations, nous avons pris  $\gamma = 10$ .



Itérations de la méthode [QR-HJ] à gauche et de la méthode [QR-P] à droite. En bleu,  $\omega_0$ , en rouge  $\omega_\infty$  et en noir  $\mathcal{O}_3$



À gauche  $d_H(\omega_n, \mathcal{O}_3)$ , à droite  $d_H(\omega_n, \omega_{n-1})$ , pour la méthode [QR-HJ] en noir et la méthode [QR-P] en bleu.



Comparaison entre  $\omega_\infty$  en rouge et  $\mathcal{O}_3$  en noir, pour la méthode [QR-HJ] à gauche et pour la méthode [QR-P] à droite.

On fait de nouveau les mêmes constatations concernant la vitesse d'approche de l'obstacle : la méthode [QR-P] est plus efficace que la méthode [QR-HJ]. La reconstruction de l'obstacle  $\mathcal{O}_3$  est très bonne, on a bien retrouvé deux composantes connexes, qui sont bien localisées et dont les formes respectives sont bien retrouvées.

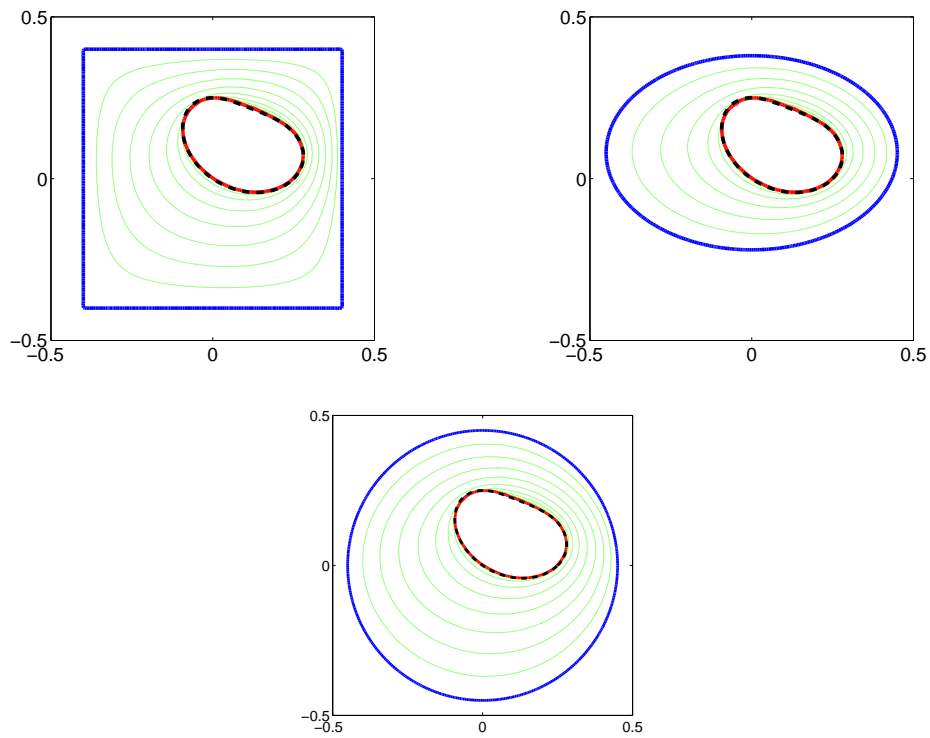
En conclusion, nous pouvons dire que les deux méthodes donnent les mêmes résultats. La méthode [QR-P] est néanmoins plus efficace en termes de temps de calcul que la méthode [QR-HJ]. Nous allons dorénavant nous focaliser sur la méthode [QR-P] ; sauf mention contraire, tout ce que nous allons mettre en évidence est valable pour la méthode [QR-HJ].

### 8.2.2 Influence des paramètres

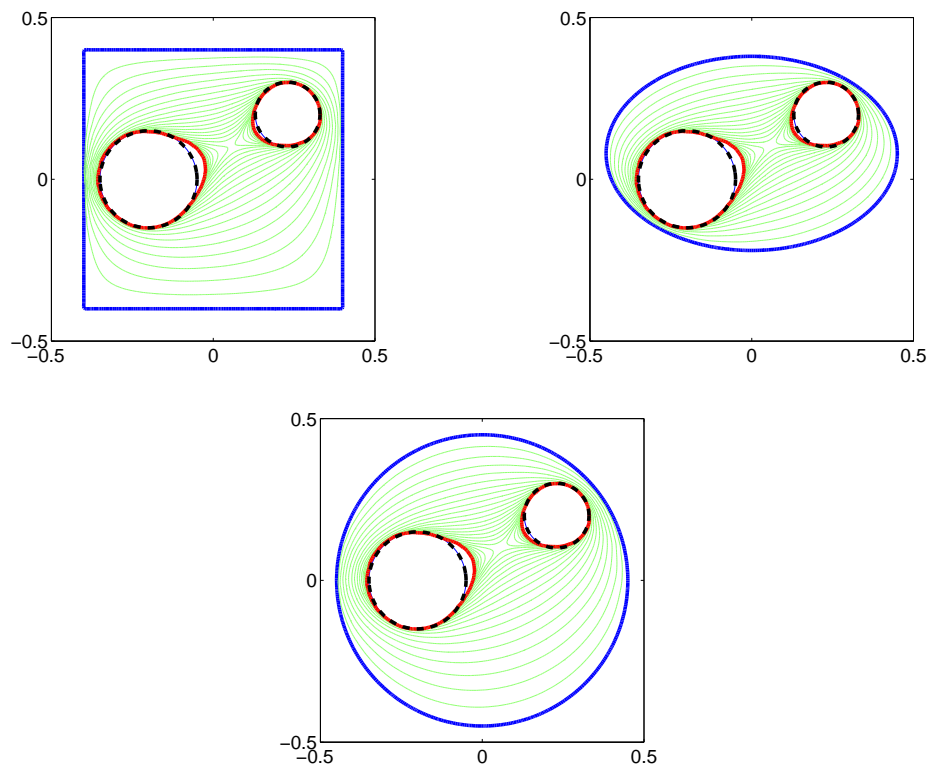
#### Influence de $\omega_0$ , ouvert de départ

Théoriquement, l'ouvert de départ  $\omega_0$  doit juste vérifier  $\mathcal{O} \subset \omega_0$  pour assurer la convergence de la suite d'ouverts vers l'obstacle. Pour voir si influence il y a en pratique, il suffit de tester la méthode [QR-P] avec différents ouverts de départ  $\omega_0$ . Nous le faisons sur les obstacles  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_3$ , en gardant tous les autres paramètres comme précédemment, c'est-à-dire :

- $\varepsilon = 10^{-4}$
- $h = \frac{1}{140}$
- $\gamma = 10$
- donnée sur tout le bord de  $\mathcal{D}$ .



Itérations de la méthode [QR-P] pour trois ouverts initiaux  $\omega_0$  différents : un carré, une ellipse et un disque. En bleu,  $\omega_0$ , en rouge,  $\omega_\infty$ , et en noir,  $\mathcal{O}_1$ .

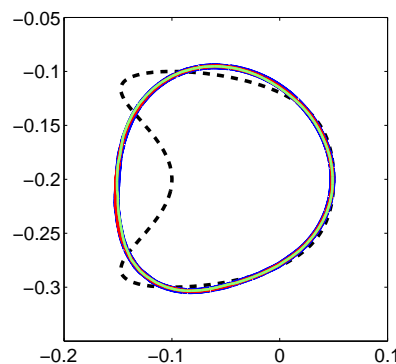


Itérations de la méthode [QR-P] pour trois ouverts initiaux  $\omega_0$  différents : un carré, une ellipse et un disque. En bleu,  $\omega_0$ , en rouge,  $\omega_\infty$ , et en noir,  $\mathcal{O}_3$ .

Comme prévu théoriquement, l'ouvert initial  $\omega_0$  n'a aucune influence sur le résultat de la méthode. Nous choisirons désormais le disque comme ouvert initial pour toutes nos simulations.

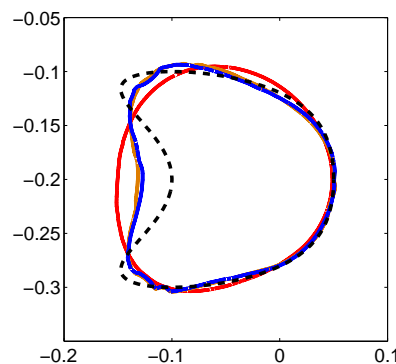
### Influence de la finesse du maillage et du paramètre $\varepsilon$

Nous allons maintenant nous intéresser à l'influence de la finesse du maillage sur la reconstruction de l'obstacle. Nous allons pour cela faire tourner la méthode [QR-P] sur trois maillages différents pour retrouver l'obstacle  $\mathcal{O}_2$ . En effet, cet obstacle étant le moins bien retrouvé des trois, c'est celui pour lequel l'influence du maillage peut être la plus visible. Les autres paramètres sont fixés comme suit :  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $\gamma = 20$ ,  $\omega_0 = \mathcal{B}(0, 0.45)$ , donnée sur tout le bord de  $\mathcal{D}$ .



$\omega_\infty$  pour  $h = \frac{1}{100}$  en bleu,  $h = \frac{1}{150}$  en rouge,  $h = \frac{1}{200}$  en vert,  $\mathcal{O}_2$  en noir.

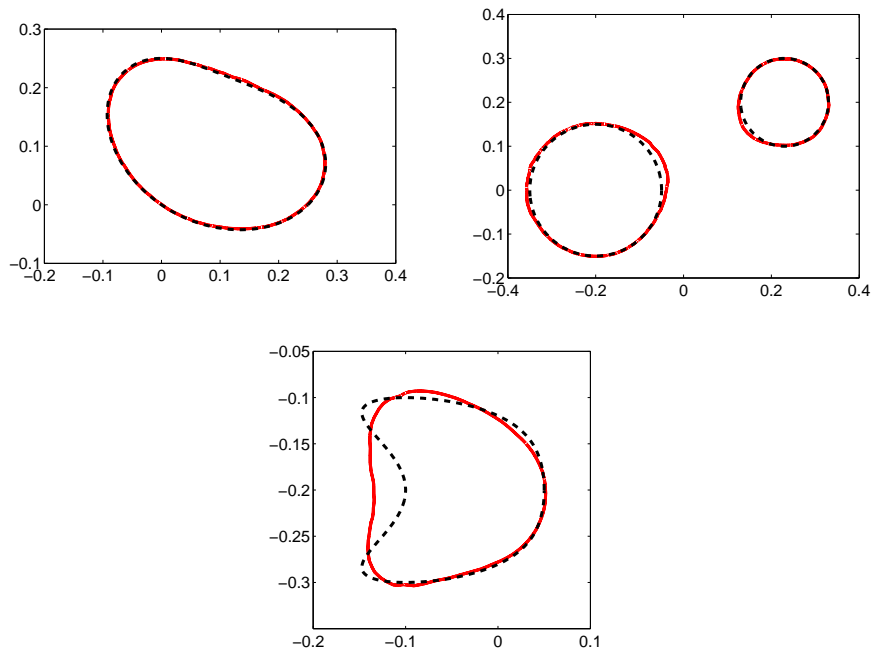
Les différences entre les trois obstacles reconstruits pour les trois finesesses de maillage testées sont pratiquement inexistantes, ce qui nous amènerait à penser que le maillage influence peu la qualité de la reconstruction. Néanmoins, ce serait oublier que plus le maillage que l'on utilise est fin, plus l'on peut prendre des valeurs du paramètre  $\varepsilon$  petites<sup>13</sup>.



$\omega_\infty$  pour  $\varepsilon = 10^{-4}$  en rouge,  $\varepsilon = 10^{-6}$  en orange et  $\varepsilon = 10^{-8}$  en bleu.  $\mathcal{O}_2$  en noir,  $h = \frac{1}{200}$ .

On constate que prendre un paramètre  $\varepsilon$  plus petit permet de mieux retrouver la forme de l'obstacle  $\mathcal{O}_3$ , en particulier sa partie non convexe. Or, il n'est justifié théoriquement de prendre un  $\varepsilon$  petit que si la finesse du maillage est également choisie petite : c'est une conséquence de l'estimation de convergence du théorème 2.7 p.39. Pour les maillages que nous prenons habituellement ici, avec des finesesses comprises entre  $\frac{1}{200}$  et  $\frac{1}{100}$ , prendre  $\varepsilon$  égal à  $10^{-6}$  semble le meilleur compromis entre stabilité de la méthode [QR] et qualité de la reconstruction des obstacles.

<sup>13</sup>voir la partie "choix du paramètre  $\varepsilon$ " du 2.2.5 p.44



Pour  $\varepsilon = 10^{-6}$ , tous les autres paramètres pris comme pour les premières simulations,  $\omega_\infty$  en rouge et  $\mathcal{O}$  en noir. On constate une amélioration de la reconstruction de la forme de  $\mathcal{O}$  dans les trois cas.

### Influence du paramètre $\gamma$

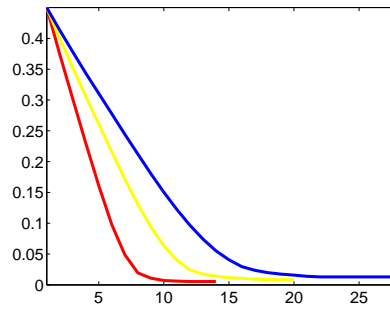
Nous allons maintenant étudier l'influence de  $\gamma$ , second membre du problème de Poisson. Une première analyse de son action sur la vitesse de convergence de la méthode et sur la qualité de reconstruction de l'obstacle nous pousse à choisir ce paramètre "petit". Néanmoins, la condition que doit vérifier  $\gamma$  nous oblige à ne pas le choisir "trop petit". Nous verrons finalement qu'un remaillage du domaine d'étude peut nous affranchir de la recherche du paramètre optimal.

#### • Influence sur la vitesse de convergence

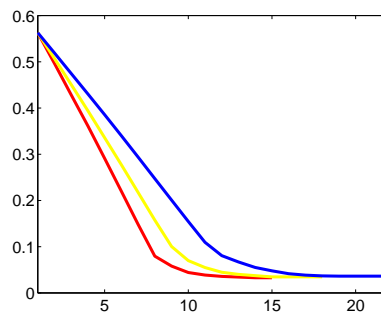
Nous avons vu au chapitre 6<sup>14</sup> que le second membre du problème de Poisson  $\gamma$  avait théoriquement une influence sur la vitesse de convergence de la méthode : toutes choses égales par ailleurs, plus on choisit  $\gamma$  petit, plus la méthode converge vite vers l'obstacle.

Pour mettre en évidence ce phénomène, nous faisons tourner la méthode [QR-P] sur un maillage de finesse  $h = \frac{1}{140}$ , avec  $\varepsilon = 10^{-6}$  et  $\omega_0 = \mathcal{B}(0, 0.45)$ , pour les trois obstacles  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{O}_3$  et différentes valeurs de  $\gamma$ . Nous stoppons la méthode quand le critère d'arrêt  $d_H(\omega_n, \omega_{n+1}) = 0$  est atteint.

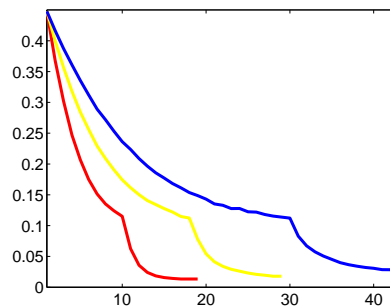
<sup>14</sup>voir la proposition 6.7 p.118



$d_H(\omega_n, \mathcal{O}_1)$  en fonction du nombre d'itérations  $n$ , pour  $\gamma = 10$  en rouge, 15 en jaune et 20 en bleu.



$d_H(\omega_n, \mathcal{O}_2)$  en fonction du nombre d'itérations  $n$ , pour  $\gamma = 17$  en rouge, 20 en jaune et 25 en bleu.



$d_H(\omega_n, \mathcal{O}_3)$  en fonction du nombre d'itérations  $n$ , pour  $\gamma = 6$  en rouge, 10 en jaune et 15 en bleu.

On voit que dans les trois cas la méthode "avance" vers l'obstacle d'autant plus vite que  $\gamma$  a été choisi petit, en conformité avec la théorie. Il est intéressant de comparer ces courbes avec la courbe théorique obtenue au 6.2 p.114 : on observe le même comportement sur la courbe théorique et sur les courbes pratiques.

- **Influence sur la reconstruction de l'obstacle**

Si le choix du paramètre  $\gamma$  influence la vitesse de convergence de la méthode, il n'influence théoriquement pas l'obstacle retrouvé. En pratique pourtant,  $\gamma$  influence ces deux aspects. Ceci est dû au principe de "retour en arrière" décrit au 8.1.1 p.132 que nous utilisons pour définir les ouverts  $\Theta_n$  dans lesquels nous résolvons les problèmes de Poisson.

Plaçons-nous à une itération  $n$  de la méthode : on a alors défini un ouvert  $\Theta_n$ . On est amené à trouver la solution  $u_{h_n, \varepsilon}$  du problème  $[\text{QR}_h]$  dans  $\mathcal{D} \setminus \overline{\Theta}_n$ , puis la solution  $v_{h_n}$  du problème  $[\text{P}_h]$  :

Problème  $[P_h]$  : trouver  $v_{hn} \in X_{hn}$  tel que

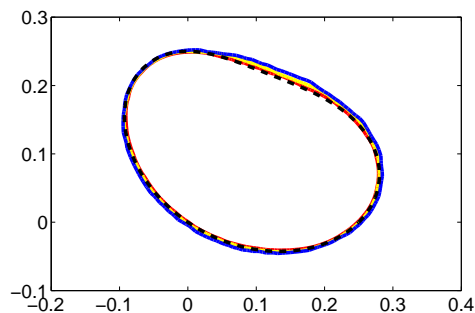
$$\begin{cases} \int_{\Theta_n} \nabla v_{hn} \cdot \nabla w_h \, dx = - \int_{\Theta_n} \gamma w_h \, dx, \quad \forall w_h \in X_{hn,0} \\ v_{hn} = |u_{hn,\varepsilon}| \text{ aux sommets du maillage situés sur le bord de } \Theta_n. \end{cases}$$

On a alors :  $\Theta_{n+1} := \{T \in \mathcal{T}_h \mid \exists A \text{ sommet de } T, v_{hn}(A) < 0\}$ .

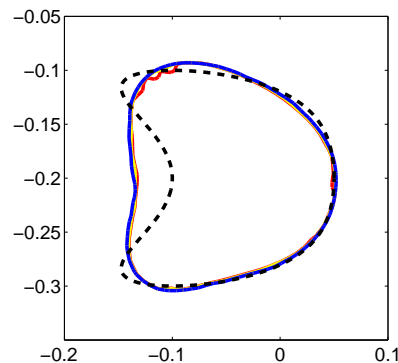
Nous avons vu que ce principe fait qu'au bout d'un certain nombre d'itérations, la méthode [QR-P] n'avance plus : pour  $n$  suffisamment grand,  $\Theta_{n+1} = \Theta_n$ . Cela a lieu lorsque la fonction  $v_{hn}$ , qui est positive au bord de  $\Theta_n$ , devient négative avant même d'avoir franchi une maille du domaine, comme l'illustre la figure p.143. Or, c'est le paramètre  $\gamma$  qui fait "plonger" la fonction  $v_{hn}$  : plus le paramètre  $\gamma$  est grand, plus la fonction  $v_{hn}$  va devenir négative rapidement<sup>15</sup>. Ainsi, si pour un choix  $\gamma_c$  on a  $\Theta_{n+1} = \Theta_n$ , alors pour n'importe quel  $\gamma$  plus grand que  $\gamma_c$ , on aura aussi  $\Theta_{n+1} = \Theta_n$ .

Ce n'est en revanche pas forcément le cas si on choisit un paramètre  $\gamma$  plus petit que  $\gamma_c$  : la fonction  $v_{hn}$  pourrait alors franchir un certain nombre de mailles avant de devenir négative, et la méthode continuera à avancer vers l'obstacle. On en déduit que plus le paramètre  $\gamma$  est choisi petit, meilleure sera la reconstruction de l'obstacle.

Pour vérifier ceci, nous faisons tourner la méthode [QR-P] pour les trois obstacles tests et différentes valeurs de  $\gamma$ , avec  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $h = \frac{1}{140}$  et  $\omega_0 = \mathcal{B}(0, 0.45)$ .

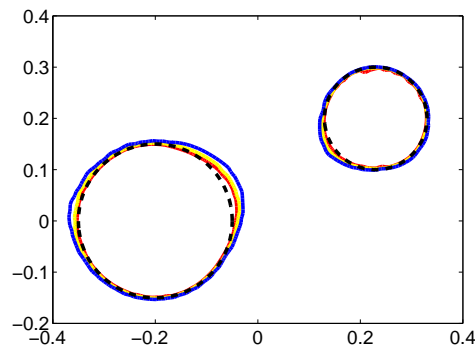


Obstacle retrouvé pour  $\gamma = 10$  en rouge, 15 en jaune et 20 en bleu.  $\mathcal{O}_1$  en noir.



Obstacle retrouvé pour  $\gamma = 17$  en rouge, 20 en jaune et 25 en bleu.  $\mathcal{O}_2$  en noir.

<sup>15</sup>voir le lemme 6.4 p.117



Obstacle retrouvé pour  $\gamma = 6$  en rouge, 10 en jaune et 15 en bleu.  $\mathcal{O}_1$  en noir.

Si l'influence de  $\gamma$  sur la reconstruction de l'obstacle  $\mathcal{O}_2$  est négligeable, elle est en revanche perceptible en ce qui concerne la reconstruction des obstacles  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_3$ . Elle le serait d'autant plus si nous avons choisi un maillage de finesse moindre.

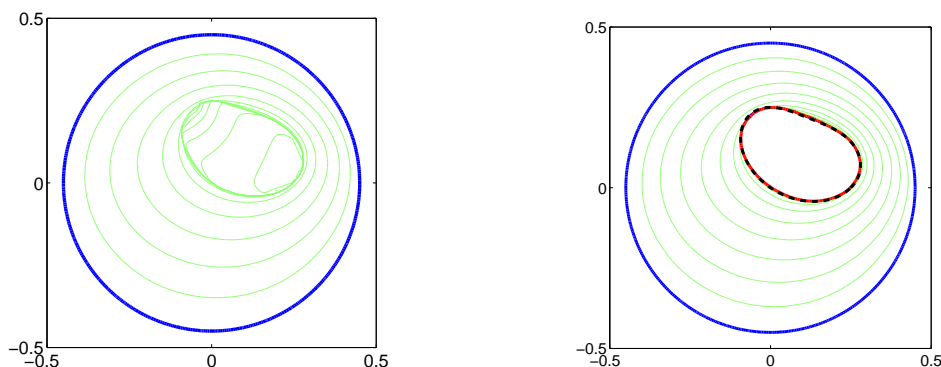
En conclusion, l'influence de  $\gamma$  sur la qualité de reconstruction de l'obstacle, ainsi que sur la vitesse de convergence de la méthode, nous incite à choisir  $\gamma$  le plus petit possible.

- Mauvais choix de paramètre  $\gamma$

Nous savons que pour fonctionner théoriquement, la méthode [P] doit vérifier une condition<sup>16</sup> sur le second membre  $f$  du problème de Laplace :  $\Delta \tilde{u} \leq f$ , où  $\tilde{u}$  est un élément quelconque de  $H^1(\mathcal{D})$  vérifiant les trois conditions

$$\begin{cases} \tilde{u} = |u| \text{ dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}} \\ \tilde{u} \in H_0^1(\mathcal{O}) \\ \tilde{u} \leq 0 \text{ dans } \mathcal{O}. \end{cases}$$

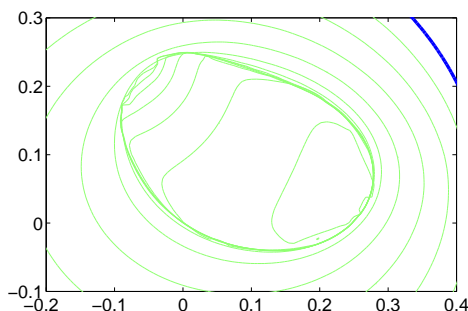
Pour se donner un maximum de chances de vérifier cette condition dans les simulations numériques, on est alors tenté de prendre une constante  $\gamma$  assez grande. Néanmoins, nous venons de voir que prendre  $\gamma$  trop grand ralentit la méthode et peut détériorer la qualité de reconstruction de l'obstacle. On est donc amené à chercher le  $\gamma$  optimal. La question que l'on se pose alors est : que se passe-t-il lorsque l'on prend le paramètre  $\gamma$  trop petit ?



Itérations de la méthode [QR-P] pour un (mauvais) choix  $\gamma = 8$  à gauche, un (bon) choix  $\gamma = 10$  à droite.

<sup>16</sup>voir chapitre 6





Zoom sur la zone où se trouve l'obstacle dans le cas du mauvais choix  $\gamma = 8$ .

On voit très clairement sur les figures que la méthode [QR-P] "sent" l'obstacle même si l'on prend un paramètre  $\gamma$  trop petit. Sa frontière apparaît très clairement. L'utilisateur peut donc à la fois se rendre compte qu'il y a un obstacle, deviner sa forme, et savoir qu'il lui faut refaire tourner l'algorithme en choisissant un  $\gamma$  plus important.

Il est intéressant de remarquer que nous pouvons estimer au cours de l'algorithme si le paramètre  $\gamma$  n'a pas été choisi trop petit, et le modifier s'il y a lieu. En effet, à chaque étape  $n$ , nous connaissons  $u_{h_n, \varepsilon}$  approximation de  $u$ , et donc  $\Delta_h(|u_{h_n, \varepsilon}|)$  approximation de  $\Delta(|u|)$ , à l'extérieur de  $\Theta_n$ . On peut alors vérifier que l'on a bien  $\gamma \geq \|\Delta_h(|u_{h_n, \varepsilon}|)\|_\infty$ , ce qui n'assure pas que l'on ait  $\gamma \geq \|\Delta(|u|)\|_\infty$ , mais est quand même une bonne indication de la validité de notre choix de paramètre  $\gamma$ <sup>17</sup>.

#### • Remaillage du domaine

Comme rappelé précédemment, la méthode [QR-P] stoppe lorsque la fonction  $v_{h_n}$  est négative sur tous les nœuds du maillage strictement contenus dans  $\Theta_n$ , c'est-à-dire quand  $v_{h_n}$  devient négative "trop rapidement" dans  $\Theta_n$  pour que le maillage perçoive la zone où elle est positive. Pour améliorer la précision de la reconstruction, une idée naturelle est alors de remailler le domaine à l'intérieur de  $\Theta_n$ , en divisant par exemple tous les triangles contenus par  $\Theta_n$  en quatre : ainsi, la méthode va pouvoir capter la zone positive de  $\Theta_n$  qu'elle ne voyait pas auparavant, et continuer à avancer vers l'obstacle. Cette idée de remaillage à deux intérêts fondamentaux, qui apparaissent dans les simulations numériques :

1. il n'est pas nécessaire d'utiliser tout de suite un maillage fin. On peut dans un premier temps utiliser un maillage grossier, puis une fois que la méthode a convergé, on ne remaille que la zone où se trouve l'obstacle, d'où un gain de temps et d'espace mémoire.
2. on n'est pas obligé de chercher le paramètre  $\gamma$  optimal : un maillage plus fin contrebalance les effets d'un choix de  $\gamma$  trop élevé.

Nous allons donc faire tourner la méthode [QR-P] sur un premier maillage grossier, et une fois que la méthode aura convergé<sup>18</sup>, on remaillera l'intérieur du  $\Theta_n$  obtenu, et on relancera la méthode. On peut bien entendu répéter l'opération plusieurs fois, néanmoins il faut éviter de trop déséquilibrer le maillage : remailler deux fois semble suffisant.

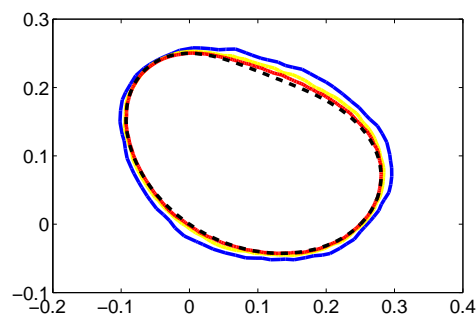
*Remarque : cette idée est inapplicable pour la méthode [QR-HJ] telle que nous l'avons implémentée, puisque notre implémentation à base de différences finies nécessite un maillage cartésien. On pourrait*

<sup>17</sup> rappelons que si  $\Delta \tilde{u} \in L^\infty$ , alors tout  $\gamma$  vérifiant  $\gamma \geq \|\Delta \tilde{u}\|_{L^\infty}$  est un choix admissible pour la méthode [P], voir la proposition 6.5 p.117

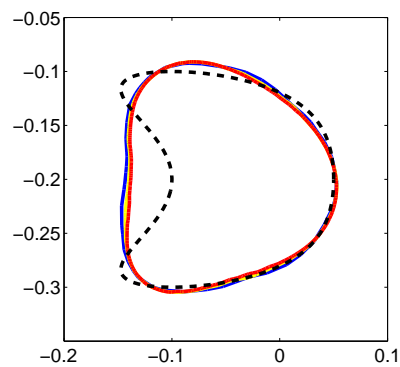
<sup>18</sup> c'est-à-dire dès que  $d_H(\omega_n, \omega_{n+1}) = 0$

la mettre en place si on utilisait un schéma de résolution de l'équation eikonale adapté à des maillages non structurés.

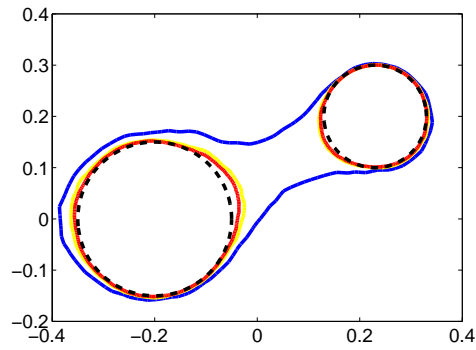
Nous allons utiliser cette idée sur les trois obstacles tests, avec un maillage de départ de finesse  $h = \frac{1}{70}$ . Nous choisirons toujours pour  $\gamma$  la valeur la plus élevée utilisée dans les tests précédents. On choisit par ailleurs  $\varepsilon = 10^{-6}$ , la donnée étant connue sur tout le bord de  $\mathcal{D}$ .



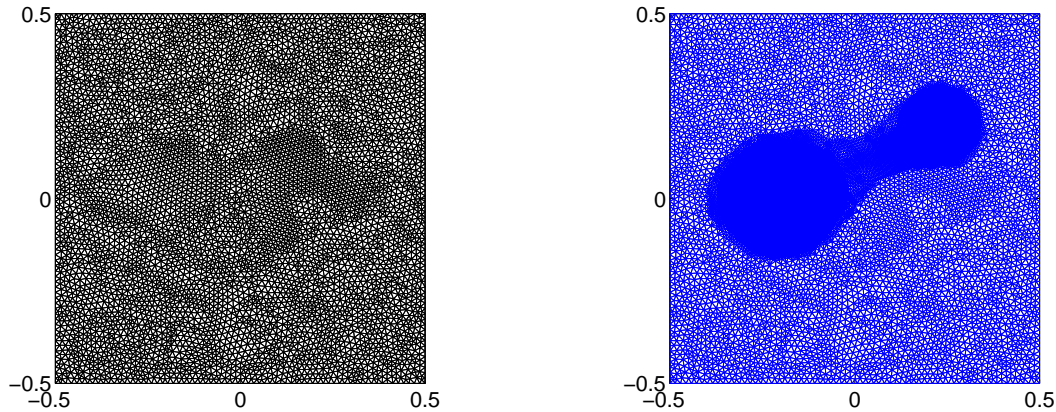
Obstacle retrouvé sans remaillage en bleu, avec un remaillage en jaune, avec deux remaillages en rouge.  
 $\mathcal{O}_1$  en noir.  $\gamma = 20$ .



Obstacle retrouvé sans remaillage en bleu, avec un remaillage en jaune, avec deux remaillages en rouge.  
 $\mathcal{O}_2$  en noir.  $\gamma = 25$ .



Obstacle retrouvé sans remaillage en bleu, avec un remaillage en jaune, avec deux remaillages en rouge.  
 $\mathcal{O}_3$  en noir.  $\gamma = 15$ .



En noir, le maillage initial, en bleu, le maillage après deux remaillages, lors de la recherche de l'obstacle  $\mathcal{O}_3$ .

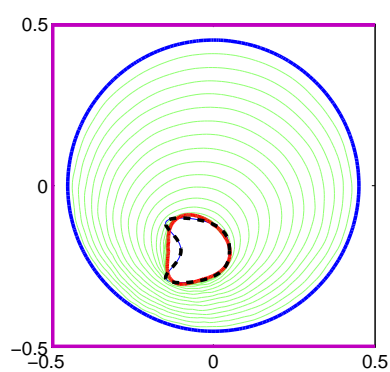
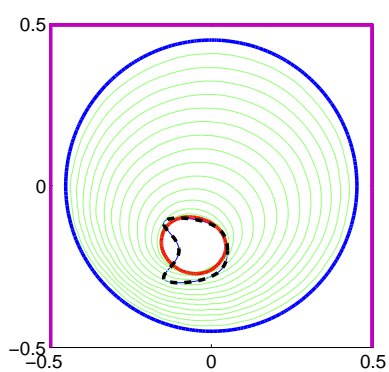
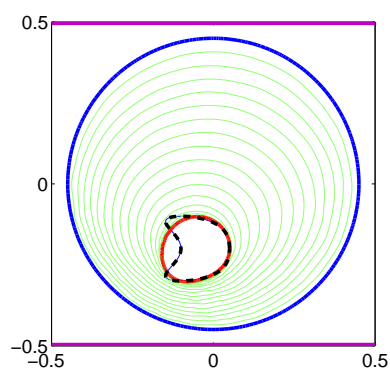
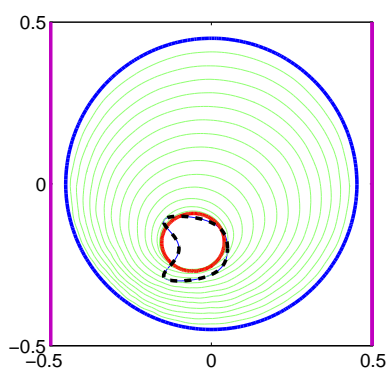
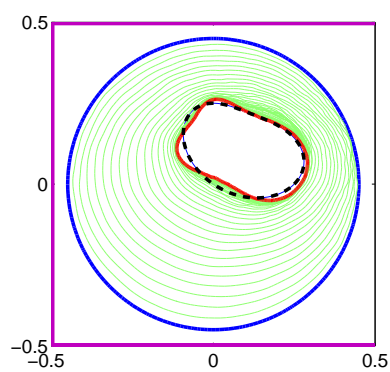
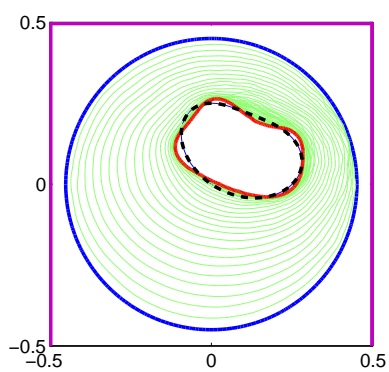
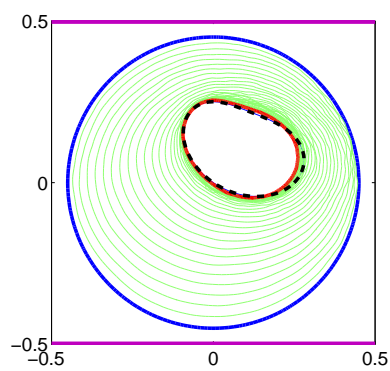
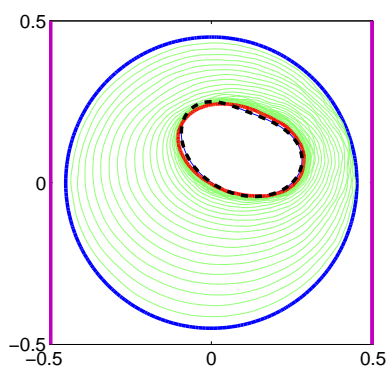
### Influence de $\Gamma$ , support de la donnée

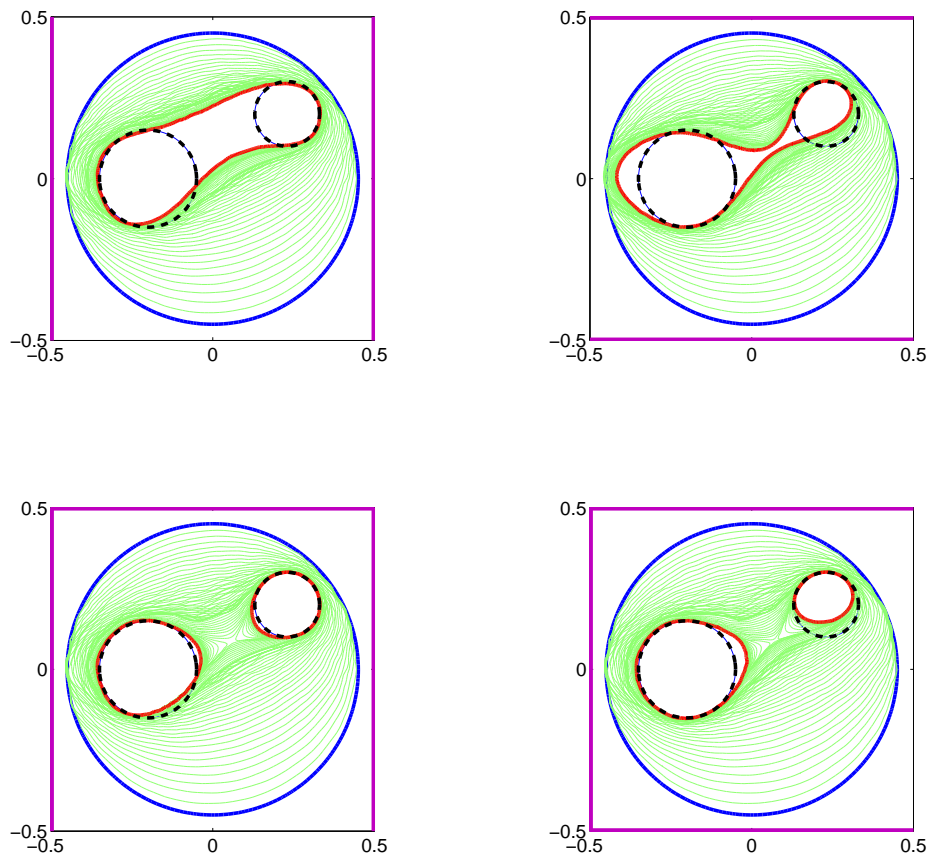
Nous avons vu au 2.2.5 du chapitre 2 que la partie du bord sur laquelle nous connaissons la donnée a une influence directe sur la qualité de la reconstruction de  $u$  solution du problème [Cauchy] par la méthode [QR]. Ce même paramètre aura donc une influence sur la qualité de la reconstruction de l'obstacle.

Nous allons mettre en évidence numériquement cette influence. Les paramètres utilisés dans ces simulations sont

- $\varepsilon = 10^{-6}$
- finesse de maillage  $h = \frac{1}{70}$ , avec deux étapes de remaillage
- $\gamma = 20$  pour  $\mathcal{O}_1$ , 25 pour  $\mathcal{O}_2$ , 15 pour  $\mathcal{O}_3$
- $\omega_0 = \mathcal{B}(0, 0.45)$ .

La partie de  $\Gamma$  où l'on se donne la donnée est mis en évidence en violet sur les figures suivantes.





### 8.2.3 Lignes de niveau zéro "parasites" et utilisation de plusieurs jeux de données

L'unicité de la solution du problème de l'obstacle<sup>19</sup> nous assure que les seules lignes de niveau zéro de  $u$ , fonction solution du problème, qui forment une courbe fermée dans  $\mathcal{D}$  sont les bords de l'obstacle. Il peut néanmoins exister des lignes de niveau zéro traversant le domaine  $\mathcal{D}$ . Normalement, la méthode [P] ne sent pas ces lignes "parasites", puisqu'elles n'ont pas de volume<sup>20</sup>.

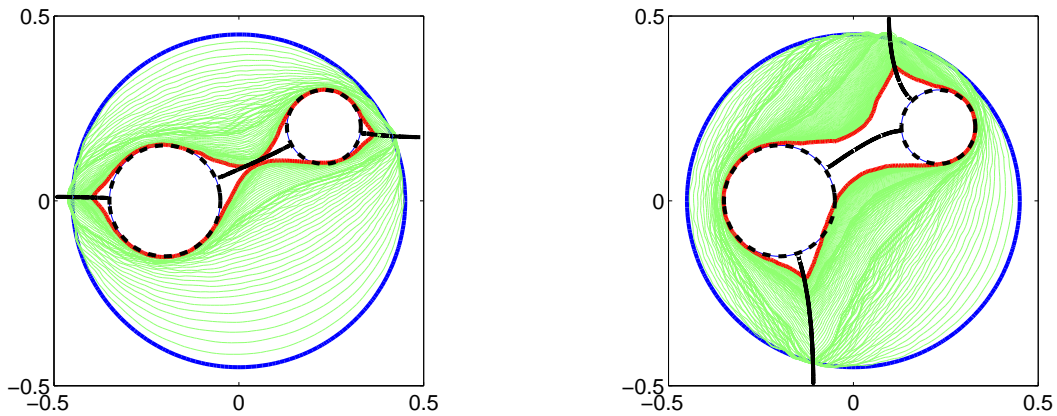
Les fonctions  $u_{13}$  et  $u_{24}$  vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta u_{ij} = 0 \text{ dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}_3} \\ \partial_\nu u_{ij} = 1 \text{ sur le bord } i \\ \partial_\nu u_{ij} = -1 \text{ sur le bord } j \\ \partial_\nu u_{ij} = 0 \text{ sur les bords restant} \end{cases}$$

présentent chacune une ligne de niveau "parasite". On peut faire tourner la méthode [QR-P] avec pour données  $(u_{ij}|_{\partial\mathcal{D}}, \partial_\nu u_{ij}|_{\partial\mathcal{D}})$ . Sur les figures ci-dessous, on voit que ces lignes freinent l'avancée de la méthode, et détériorent la reconstruction de l'obstacle  $\mathcal{O}_3$ .

<sup>19</sup>voir la propriété 4.4 p.87

<sup>20</sup>rappelons que l'obstacle recherché doit avoir une frontière continue, ce qui exclut les "lignes parasites"



Itérations de la méthode [QR-P]. En bleu,  $\omega_0$ , en rouge,  $\omega_\infty$ .

En noir, l'obstacle  $\mathcal{O}_3$  ainsi que la ligne de niveau zéro de la fonction  $u_{24}$  à gauche,  $u_{13}$  à droite.

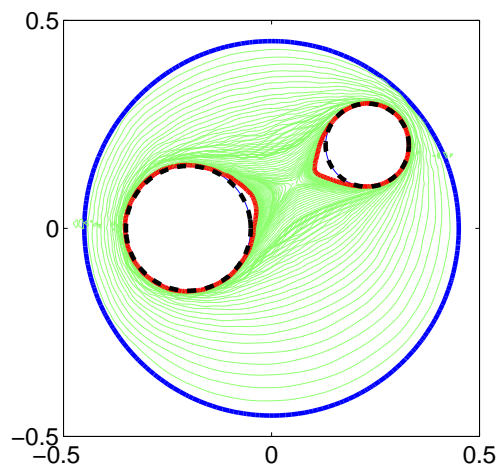
On voit clairement sur ces deux figures le ralentissement des ouverts  $\omega_n$  au contact des lignes de niveau zéro "parasites".

Une manière efficace de contrer l'effet néfaste de ces lignes de niveau est d'utiliser plusieurs jeux de données, par exemple dans notre cas précis, utiliser à la fois  $(u_{24}|_{\partial\mathcal{D}}, \partial_\nu u_{24}|_{\partial\mathcal{D}})$  et  $(u_{13}|_{\partial\mathcal{D}}, \partial_\nu u_{13}|_{\partial\mathcal{D}})$ , comme présenté au 6.4. Pour ce faire, à l'étape  $n$  de la méthode, on résout le problème [QR<sub>h</sub>] avec chaque jeu de données, ce qui nous donne  $u_{h_n, \varepsilon, 13}$  et  $u_{h_n, \varepsilon, 24}$  approximation de  $u_{13}$  et  $u_{24}$  dans  $\mathcal{D} \setminus \bar{\Theta}_n$ . Puis on résout le problème [P<sub>h</sub>] suivant :

Problème [P<sub>h</sub>] : trouver  $v_{h_n} \in X_{h_n}$  tel que

$$\begin{cases} \int_{\Theta_n} \nabla v_{h_n} \cdot \nabla w_h \, dx = - \int_{\Theta_n} \gamma w_h \, dx, \quad \forall w_h \in X_{h_n, 0} \\ v_{h_n} = \max(|u_{h_n, \varepsilon, 13}|, |u_{h_n, \varepsilon, 24}|) \text{ aux sommets du maillage situés sur le bord de } \Theta_n. \end{cases}$$

On détermine alors  $\Theta_{n+1}$  de la manière habituelle. On obtient alors le résultat suivant :



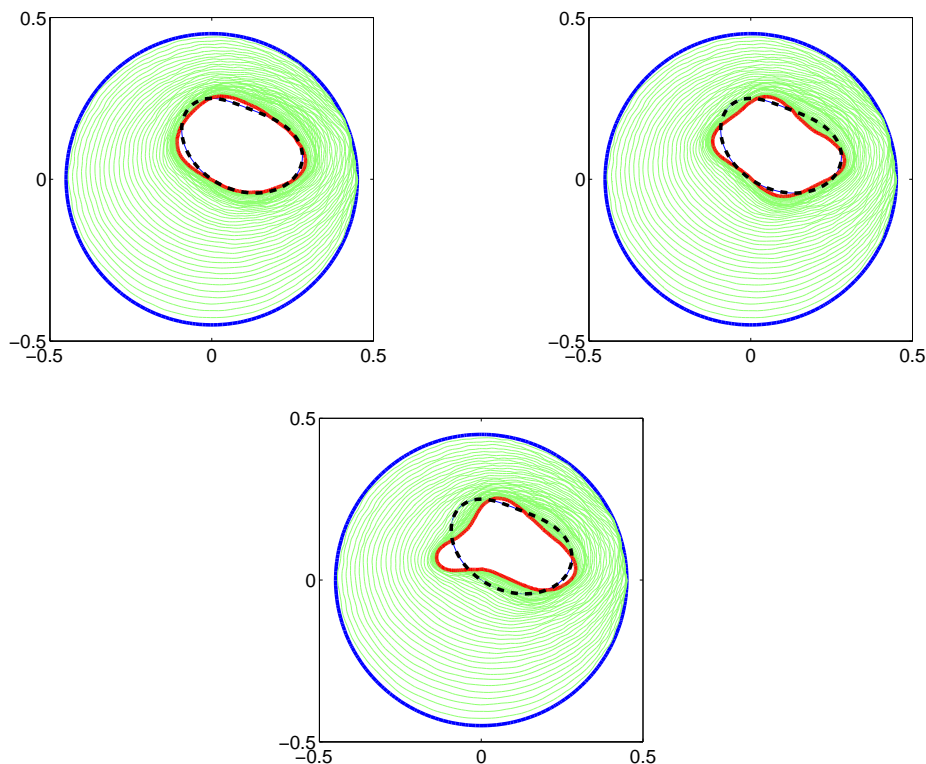
L'utilisation des deux jeux de données permet clairement de régler le problème des lignes de niveaux "parasites".

### 8.2.4 Donnée bruitée

Supposons que nous ayons maintenant seulement accès à une donnée bruitée, c'est-à-dire à un couple  $(g_0^\sigma, g_1^\sigma) \in L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$  vérifiant

$$\|g_i^\sigma - g_i\|_{L^2(\Gamma)} \leq \sigma \|g_i\|_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall i \in \{0, 1\}.$$

Comme dit au 8.1.2, nous allons naturellement dans ce cas utiliser la méthode développée au chapitre 3 pour régulariser cette donnée, et fixer le paramètre  $\varepsilon$  en fonction du niveau de bruit. Plus précisément, nous allons résoudre le problème  $[P_{\alpha h}^{\delta*}]$  (voir p.74) dans  $\mathcal{D} \setminus \overline{\Theta}_0$ , puis nous utiliserons les paramètres obtenus au cours de toutes les itérations suivantes de la méthode [QR-P]. Les figures ci-dessous montrent les résultats obtenus pour différents niveaux de bruit. Nous partons d'un maillage de finesse  $h = \frac{1}{70}$  avec deux étapes de remaillages, et on prend le paramètre  $\alpha$  du problème d'optimisation égal à  $10^{-4}$ .

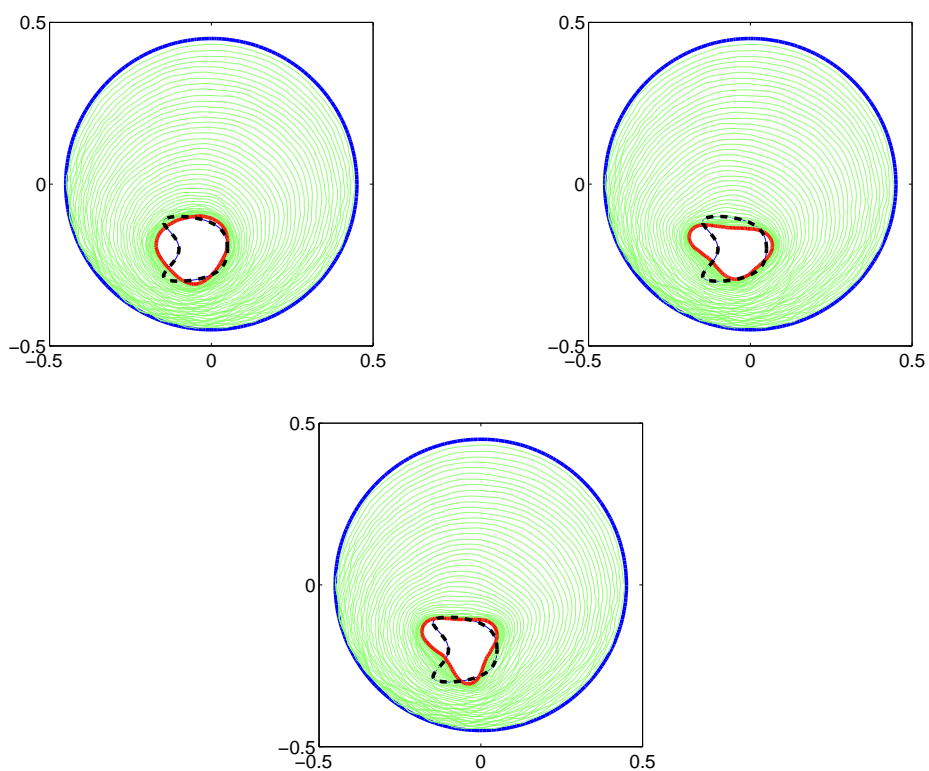
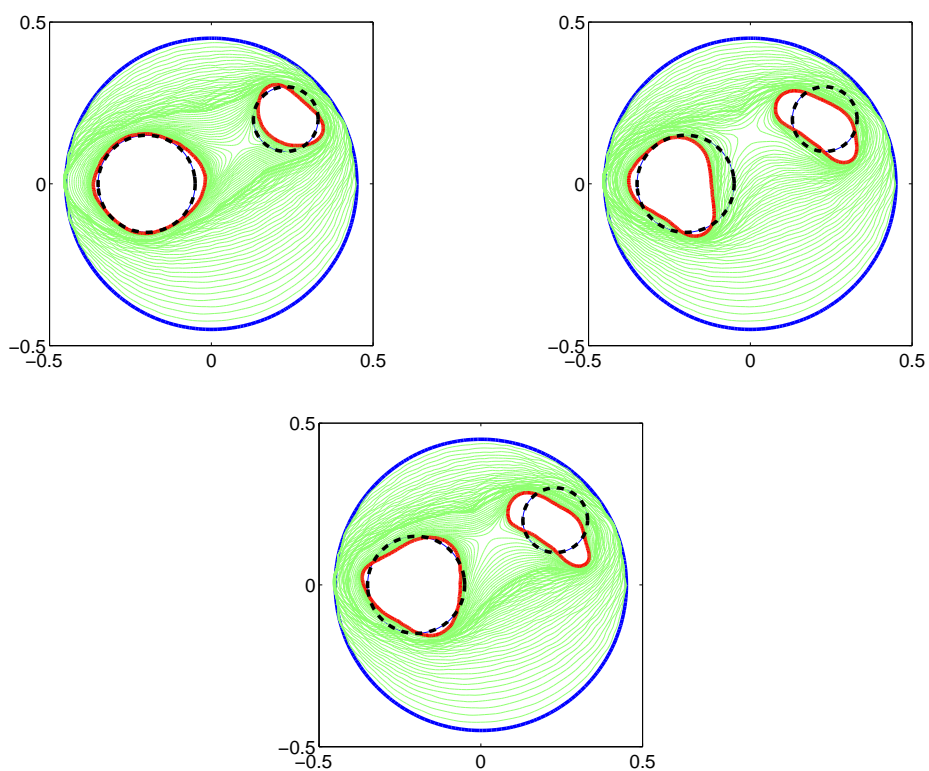


Résultats obtenus pour  $\sigma = 1\%$ ,  $5\%$  et  $10\%$ .  $\gamma = 30$ .

En présence d'une donnée bruitée, la méthode [QR-P] localise très bien les obstacles. La reconstruction de leurs formes géométriques est par contre dégradée, notamment pour de forts niveaux de bruit.

Remarque : un lecteur attentif aura remarqué que le paramètre  $\gamma$  est choisi beaucoup plus grand dans le cas d'une donnée bruitée que dans le cas d'une donnée exacte. La raison pour laquelle il est nécessaire d'augmenter  $\gamma$  n'est pas claire : néanmoins, on peut se rappeler que dans le cas d'une donnée bruitée, la solution du problème de quasi-réversibilité approxime non pas  $u$ , solution du problème [Cauchy] à laplacien nul, mais  $u_\alpha$ , solution du problème  $[P_\alpha^\delta]$  dont le laplacien vérifie  $\|\Delta u_\alpha\|_{L^2(\Omega)} = \alpha$ . Comme la condition sur  $\gamma$  revient formellement à choisir ce paramètre plus grand que le laplacien de la fonction considérée, ce changement pourrait expliquer en partie l'augmentation de  $\gamma$ .



Résultats obtenus pour  $\sigma = 1\%$ ,  $5\%$  et  $10\%$ .  $\gamma = 50$ .Résultats obtenus pour  $\sigma = 1\%$ ,  $5\%$  et  $10\%$ .  $\gamma = 20$ .





## Chapitre 9

# Recherche de zones plastiques : aspects numériques

### Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux aspects numériques propres à la résolution du problème  $[\mathcal{P}_{las}]$  par la méthode [QR-P].

---

Rappel

Soit  $\mathcal{D}$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Gamma$  une partie lipschitzienne de son bord,  $(u_0, T_0) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ .

Problème  $[\mathcal{P}_{las}]$  : trouver un ouvert  $\mathcal{P} \Subset \mathcal{D}$  à bord lipschitzien vérifiant  $\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}}$  connexe et une fonction  $u \in C^1(\overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{P})$  tels que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}} \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma \\ \partial_\nu u = T_0 & \text{sur } \Gamma \\ |\nabla u| < 1 & \text{dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{P}} \\ |\nabla u| = 1 & \text{sur } \partial\mathcal{P}. \end{cases}$$

---

Nous avons vu au chapitre 7 que le problème  $[\mathcal{P}_{las}]$  est la formalisation mathématique du problème de la recherche de zones plastiques dans un matériau élasto-plastique en géométrie anti-plane en fin de chargement, sous les hypothèses de chargement croissant, plasticité confinée et d'invisibilité de l'obstacle. Nous avons alors montré que l'on pouvait le résoudre en modifiant légèrement la méthode [P] : la suite d'ouverts  $\omega_m$  est construite en résolvant des problèmes de Poisson de la forme

$$\begin{cases} \Delta v = f & \text{dans } \omega_m \\ v = 1 - |\nabla u|^2 & \text{sur } \partial\omega_m \end{cases}$$

avec  $f$  paramètre choisi "suffisamment grand".

Nous allons dans un premier temps aborder brièvement la résolution numérique du problème direct d'élasto-plasticité antiplane. Ceci nous permettra d'obtenir des données correspondant à une "vraie" recherche de zones plastiques après chargement. Nous nous intéresserons ensuite au calcul de gradient discret nécessaire à la mise en place de la condition aux limites du problème de Poisson. Nous présenterons finalement quelques applications numériques, et montrerons comment adapter la méthode si l'hypothèse d'invisibilité de l'obstacle n'est pas vérifiée.

### Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Résolution du problème direct de l'élasto-plasticité antiplane . . . . .</b>	<b>166</b>
<b>9.2</b>	<b>Adaptation de la méthode [QR-P] pour la résolution de <math>[\mathcal{P}_{las}]</math> . . . . .</b>	<b>167</b>
9.2.1	Principe de l'approximation du gradient . . . . .	167
9.2.2	Assemblage des matrices $M$ , $D_x$ et $D_y$ dans le cas d'une approximation par éléments finis $P_1$ . . . . .	168
<b>9.3</b>	<b>Applications numériques . . . . .</b>	<b>169</b>
9.3.1	Recherche d'une fissure par la zone plastique générée . . . . .	169
9.3.2	Cas où la zone plastique n'entoure pas complètement le défaut . . . . .	172

## 9.1 Résolution du problème direct de l'élasto-plasticité antiplane

Soit  $\mathcal{D}$  un ouvert connexe borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{O}$  un ouvert vérifiant  $\mathcal{O} \Subset \mathcal{D}$ .  $\mathcal{D}$  est la structure élasto-plastique,  $\mathcal{O}$  l'ensemble des défauts de la structure. On suppose que l'on soumet pendant l'intervalle de temps  $[0, 1]$  la structure à un chargement de la forme

$$T(x, t) := \alpha(x)t, \quad \forall x \in \partial\mathcal{D}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

avec la condition  $u = 0$  sur le bord de  $\mathcal{O}$ . Comme vu au 7.1 p.122, la structure évolue alors dans  $\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}}$  selon les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = \frac{1}{2}\nabla\dot{u} \\ \operatorname{div}(\dot{\sigma}) = 0 \\ \dot{\sigma} = 2\mu(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \\ \dot{\epsilon}^p \in \partial\chi_{\overline{\mathcal{B}(0,k)}}(\sigma - H\epsilon^p) \end{cases} \rightsquigarrow \text{équations volumiques}$$

$$\begin{cases} \dot{u}|_{\partial\mathcal{O}} = 0 \\ \dot{\sigma} \cdot \nu|_{\partial\mathcal{D}} = \frac{\alpha}{\mu} \end{cases} \rightsquigarrow \text{conditions aux limites}$$

$$\begin{cases} u(\cdot, t_0) = 0 \\ \epsilon(\cdot, t_0) = 0 \\ \epsilon^p(\cdot, t_0) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{conditions initiales.}$$

Ici,  $u$  désigne le champ de déplacements,  $\epsilon$ ,  $\epsilon^p$  et  $\sigma$  les champs des déformations, déformations plastiques et des contraintes,  $\chi_{\overline{\mathcal{B}(0,k)}}$  la fonction indicatrice de  $\overline{\mathcal{B}(0,k)}$  et  $\dot{f}$  la dérivée temporelle d'une fonction  $f$ . On rappelle que dans le cas antiplan,  $u$  est une fonction scalaire et les champs  $\epsilon$ ,  $\epsilon^p$  et  $\sigma$  des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . Enfin,  $\mu$ ,  $H$  et  $k$  sont respectivement le module de cisaillement, le coefficient d'écrouissage et le seuil d'élasticité en cisaillement du matériau.

La résolution numérique de ce système d'équations se fait par un algorithme incrémental classique, basé sur une double boucle. Pour un incrément de chargement entre  $t$  et  $t + \delta t$ , de valeur  $\alpha \delta t$ , on procède de la manière suivante : on pose  $\delta\epsilon^p = 0$ , puis

1. l'incrément de déformation plastique  $\delta\epsilon^p$  étant fixé, on calcule  $\delta u$  solution du système

$$\begin{cases} \Delta(\delta u) = 2\operatorname{div}(\delta\epsilon^p) \text{ dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}} \\ \partial_\nu(\delta u) = \alpha\delta t \text{ sur } \partial\mathcal{D} \\ \delta u = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O} \end{cases}$$

2.  $\delta u$  étant fixé, on calcule  $\delta\epsilon^p$  de façon que  $\sigma + \delta\sigma - H(\epsilon^p + \delta\epsilon^p)$  soit exactement sur le bord du convexe de plasticité.

On répète les étapes 1 et 2 jusqu'à convergence, puis on passe à l'incrément suivant. Pour une étude générale de cet algorithme, se référer à [Son77, NB00].

## 9.2 Adaptation de la méthode [QR-P] pour la résolution de $[P_{Las}]$

Les modifications à apporter à la méthode [QR-P] pour l'adapter à la résolution du problème  $[P_{Las}]$  sont minimales : les étapes décrites au 8.1 pour la résolution du problème  $[O_{bs}]$  sont présentes et identiques dans la recherche de zones plastiques.

On suppose que l'on a une triangulation régulière  $\mathcal{T}_h$  de  $\mathcal{D}$  telle que  $\Gamma$  soit l'union d'un certain nombre d'arêtes de  $\mathcal{T}_h$ . À l'étape  $n$  de l'algorithme, on dispose de l'ouvert  $\omega_n$  vérifiant  $O \subset \omega_n$ . On va alors :

1. définir  $\Theta_n := \{T \in \mathcal{T}_h \mid \exists A \text{ sommet de } T, A \in \omega_n\}$ , approximation de  $\omega_n$  adaptée à la triangulation  $\mathcal{T}_h$ , conformément au 8.1.1
2. obtenir  $u_{h_n, \varepsilon}$  approximation de  $u$  dans  $\mathcal{D} \setminus \overline{\Theta_n}$  en résolvant le problème  $[QR_h]$  comme au 8.1.2
3. calculer  $v_{h_n}$  unique solution du problème  $[P_h]$  : trouver  $v_h \in X_{h_n}^1$  telle que

$$\begin{cases} \int_{\Theta_n} \nabla v_h \cdot \nabla w_h \, dx = - \int_{\Theta_n} \gamma w_h \, dx, \quad \forall w_h \in X_{h_n, 0} \\ v_h = 1 - |\nabla u_{h_n, \varepsilon}|^2 \text{ aux sommets du maillage situés sur le bord de } \Theta_n. \end{cases}$$

4. définir  $\omega_{n+1} := \{x \in \Theta_n, v_{h_n}(x) < 0\}$ .

La seule difficulté que nous n'avons pas traitée dans le cas de la résolution de  $[O_{bs}]$  concerne le calcul de  $|\nabla u_{h_n, \varepsilon}|$ . Nous avons en effet besoin de la valeur du gradient de  $u_{h_n, \varepsilon}$  aux sommets du maillage pour appliquer la condition aux limites du problème  $[P_h]$ . Or, cette valeur n'est pas définie : le gradient  $\nabla u_{h_n, \varepsilon}$  n'est défini qu'à l'intérieur des triangles de  $\mathcal{T}_h$ .

Nous sommes ici confrontés à un problème classique des approximations par éléments finis. Pour le résoudre, nous allons calculer une approximation par élément finis de Lagrange  $P_1$  du gradient de  $u_{h_n, \varepsilon}$ , qui aura bien une valeur aux sommets de la triangulation.

### 9.2.1 Principe de l'approximation du gradient

Notons  $\Sigma_n := \mathcal{D} \setminus \overline{\Theta_n}$ . On note  $(v_i)_{i=1 \dots N}$  une famille libre de  $C^0(\overline{\Sigma_n}) \cap H^1(\Sigma_n)$ , et  $V := \text{Vect}(v_i)$ . Soit  $u \in V$ . Par définition de  $V$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial u}{\partial y}$  sont deux fonctions de  $L^2(\Sigma_n)$ . On ne peut donc pas parler légitimement de leurs valeurs en un point de  $\overline{\Sigma_n}$ . Nous allons chercher à approximer ces fonctions par deux fonctions  $v_x$  et  $v_y$  de  $V$ , car ces approximations seront continues, et auront donc une valeur en tout point de  $\overline{\Sigma_n}$ .

Soit  $w \in L^2(\Sigma_n)$ . Que va-t-on appeler bonne approximation de  $w$  dans  $V$ ? Une fonction  $v$  de  $V$  "proche" de  $w$  au seul sens possible, à savoir au sens  $L^2$ . Autrement dit, nous allons chercher  $v_w$  comme le projeté de  $w$  sur  $V$  au sens  $L^2$ . Comme  $V$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $L^2$ , il est convexe et fermé, et ce projeté existe et est unique<sup>2</sup>. Il vérifie<sup>3</sup> :

$$\int_{\Sigma_n} v_w v \, dx = \int_{\Sigma_n} w v \, dx, \quad \forall v \in V.$$

Comme  $u \in V$ , il existe  $(\tau_i)_{i=1 \dots N}$  tel que  $u = \sum_{i=1}^N \tau_i v_i$ . Notons  $v_x$  le projeté de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  au sens  $L^2$  sur  $V$ . On a

$$\int_{\Sigma_n} v_x v \, dx = \int_{\Sigma_n} \frac{\partial u}{\partial x} v \, dx.$$

<sup>1</sup>  $X_{h_n}$  est l'espace des éléments finis de Lagrange  $P_1$  dans  $\Theta_n$ ,  $X_{h_n, 0}$  le sous-espace des fonctions de  $X_{h_n}$  s'annulant sur le bord de  $\Theta_n$

<sup>2</sup>théorème V.2 p.79 de [Bre05]

<sup>3</sup>corollaire V.4 p.80 de [Bre05]

Comme  $v_x$  est un élément de  $V$ , il existe  $(\mu_i)_{i=1\dots N}$  tels que  $v_x = \sum_{i=1}^N \mu_i v_i$ . On obtient donc finalement, pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \int_{\Sigma_n} v_i v_j dx = \sum_{i=1}^N \tau_i \int_{\Sigma_n} \frac{\partial v_i}{\partial x} v_j dx$$

ce qui, en notant  $\vec{\mu}$ ,  $\vec{\tau}$  les vecteurs de  $\mathbb{R}^N$  de  $i^{\text{ème}}$  composante  $\mu_i$  et  $\tau_i$ , et  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}_x$  les matrices de coefficients  $[\mathbf{M}]_{ij} = \int_{\Sigma_n} v_i v_j dx$  et  $[\mathbf{D}_x]_{ij} = \int_{\Sigma_n} \frac{\partial v_i}{\partial x} v_j dx$ , s'écrit

$$\boxed{\mathbf{M}^T \vec{\mu} = \mathbf{D}_x^T \vec{\tau}}$$

On obtient bien sûr le même résultat pour  $\frac{\partial u}{\partial y}$  : si on note  $v_y := \sum_{i=1}^N \nu_i v_i$  le projeté de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  sur  $V$ , on a, avec des notations évidentes,

$$\boxed{\mathbf{M}^T \vec{\mu} = \mathbf{D}_y^T \vec{\nu}}$$

Il suffit dès lors d'inverser<sup>4</sup>  $\mathbf{M}$  pour obtenir les coefficients des projetés des deux dérivées de  $u$ .

### 9.2.2 Assemblage des matrices $M$ , $D_x$ et $D_y$ dans le cas d'une approximation par éléments finis $P_1$

Les fonctions  $v_i$  sont maintenant les fonctions de base des éléments finis  $P_1$  associés à la triangulation  $\mathcal{T}_h$ . Soit un triangle  $T \in \mathcal{T}_h$  contenu dans  $\Sigma_n$ , de sommets  $A_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  de coordonnées respectives  $(x_i, y_i)$ . On note, pour  $j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\lambda_j$  l'unique élément de  $P_1(T)$  tel que  $\lambda_j(x_i, y_i) = \delta_{ij}$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Enfin, on pose  $\Delta$  l'aire du triangle  $T$ .

Nous allons nous intéresser aux contributions du triangle  $T$  aux matrices  $M$ ,  $D_x$  et  $D_y$ . Pour la matrice  $M$ , on a à calculer les intégrales  $\int_T \lambda_i \lambda_j dT$ , pour  $(i, j) \in \{1, 2, 3\}$ . On obtient :

$$\boxed{\int_T \lambda_i \lambda_j dT = \frac{\Delta}{12} (1 + \delta_{ij})}$$

Pour les matrices  $D_x$  et  $D_y$ , les contributions sont de la forme  $\int_T \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \lambda_j dT$  et  $\int_T \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} \lambda_j dT$ . Comme  $\lambda_i \in P_1(T)$ ,  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial y}$  sont des constantes sur  $T$ , et on obtient :

$$\int_T \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \lambda_j dT = \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \frac{\Delta}{3}, \quad \int_T \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} \lambda_j dT = \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} \frac{\Delta}{3}.$$

Restent à calculer  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial y}$ . Pour cela, comme  $\lambda_i \in P_1(T)$ , posons  $\lambda_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i$ . Les équations  $\lambda_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$  nous donnent les coefficients  $a_i$ ,  $b_i$  et  $c_i$  :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

<sup>4</sup>pour montrer que la matrice  $\mathbf{M}$  est bien inversible, il suffit, comme c'est une matrice carrée, de vérifier qu'elle est injective. Soit donc  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^N$  tel que  $\mathbf{M}\vec{\beta} = 0$ . On a donc pour tout  $i$ ,  $\sum_j \beta_j \int_{\Sigma_n} v_i v_j dx = 0 = \int_{\Sigma_n} (\sum_j \beta_j v_j) v_i dx$ . Notons  $v := \sum_j \beta_j v_j$ . On a, pour toute fonction  $v_i$ ,  $\int_{\Sigma_n} v v_i dx = 0$ , d'où

$$\sum_i \beta_i \int_{\Sigma_n} v v_i dx = 0 = \int_{\Sigma_n} |v|^2 dx.$$

On a donc  $v = 0 = \sum_i \beta_i v_i$ , ce qui implique, puisque les fonctions  $v_i$  forment une famille libre,  $\vec{\beta} = \vec{0}$ .

On obtient finalement :

$$\boxed{\int_T \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \lambda_j dT = a_i \frac{\Delta}{3}, \quad \int_T \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} \lambda_j dT = b_i \frac{\Delta}{3}}$$

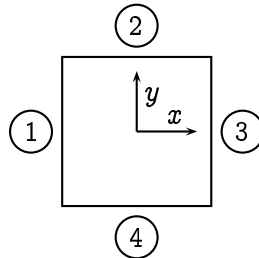
les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  résultant du calcul précédent. Il suffit ensuite d'assembler les différentes contributions pour obtenir les matrices.

En conclusion, pour construire l'approximation du gradient de  $u_{h_n, \varepsilon}$ , il suffira de construire les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}_x$  et  $\mathbf{D}_y$ , et de récupérer les valeurs de  $u_{h_n, \varepsilon}$  aux sommets des triangles de  $\Sigma_n$ . On obtient ainsi très simplement la condition aux limites du problème  $[P_h]$ .

Remarque : on n'utilise ici que les valeurs de  $u_{h_n, \varepsilon}$  aux sommets de la triangulation. On pourrait améliorer l'approximation du gradient en utilisant également les valeurs de  $u_{h_n, \varepsilon}$  aux milieux des arêtes, qui sont très faciles à obtenir vu la définition des éléments finis FV1. On pourrait ainsi construire une approximation  $P_2$  du gradient plus précise.

### 9.3 Applications numériques

Notre domaine d'étude sera  $\mathcal{D} := ]-0.5, 0.5[ \times \mathcal{D} := ]-0.5, 0.5[$ . Nous numérotons les côtés du domaine comme indiqué sur le schéma suivant :



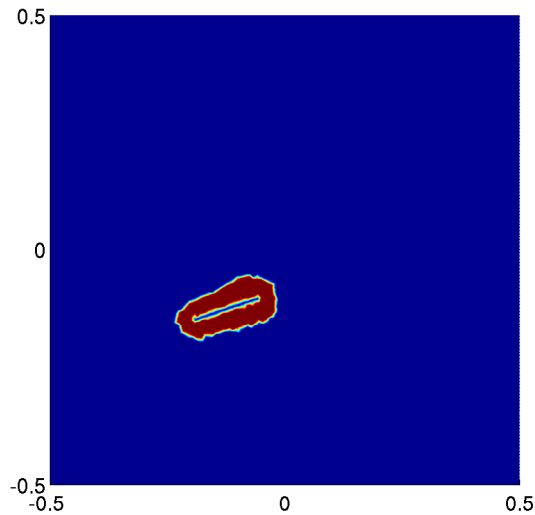
Pour obtenir des données, nous résolvons le problème direct de l'élasto-plasticité décrit au 9.1 avec pour conditions aux limites :

$$\begin{cases} \partial_\nu \dot{u} = \alpha_i \text{ sur le bord } n^\circ i \\ \dot{u} = 0 \text{ sur le bord du défaut } \mathcal{O} \end{cases}$$

où  $\alpha_i > 0$  pour tout  $i$ .

#### 9.3.1 Recherche d'une fissure par la zone plastique générée

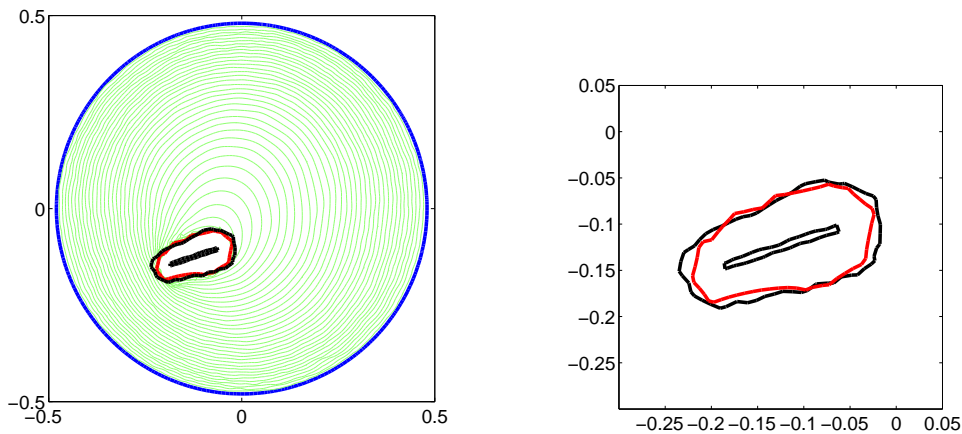
Nous allons tout d'abord tester la méthode sur un cas classique : la détection d'une fissure. Nous récupérons la donnée de Cauchy pour notre problème inverse en résolvant le problème direct de l'élasto-plasticité avec  $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ ,  $\alpha_2 = \alpha_4 = 0.25$ .



Zone plastique créée autour de la fissure en fin de chargement.

En rouge : zone plastique, en bleu : zone restée élastique.

- Donnée exacte sur tout le bord de  $\mathcal{D}$

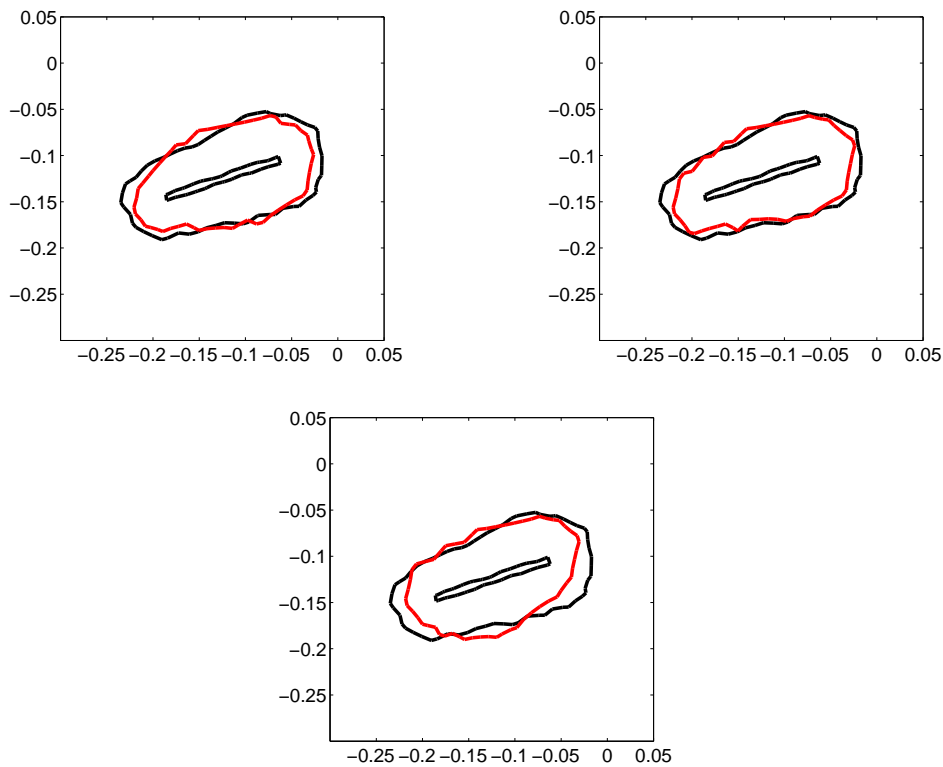


Recherche d'une fissure : à gauche, itérations de la méthode, à droite, reconstruction de la zone plastique.

En noir : zone plastique, en bleu : ouvert de départ, en rouge : zone plastique retrouvée.

On voit sur cette première simulation que la méthode [QR-P] est très efficace pour retrouver la zone plastique avec la donnée de Cauchy complète et exacte. Elle permet donc bien de détecter la présence de la fissure par l'intermédiaire de la zone plastique créée, et de parfaitement la localiser.

- Donnée exacte incomplète



Reconstructions avec donnée exacte mais incomplète.

En noir : zone plastique, en rouge : zone plastique retrouvée.

Première simulation : donnée sur les bords n°1, 2 et 4.

Deuxième simulation : donnée sur les bords n°1, 3 et 4.

Troisième simulation : donnée sur les bords n°1 et 3.

Comme pour le problème de l'obstacle, la méthode [QR-P] gère sans problème une donnée incomplète. Sur ces trois simulations avec donnée incomplète, on voit que la reconstruction de la zone plastique est moins précise. Ceci a une importance relative si notre objectif est la détection et la localisation de la fissure par l'intermédiaire de la zone plastique : cet objectif est clairement rempli dans les simulations présentées.

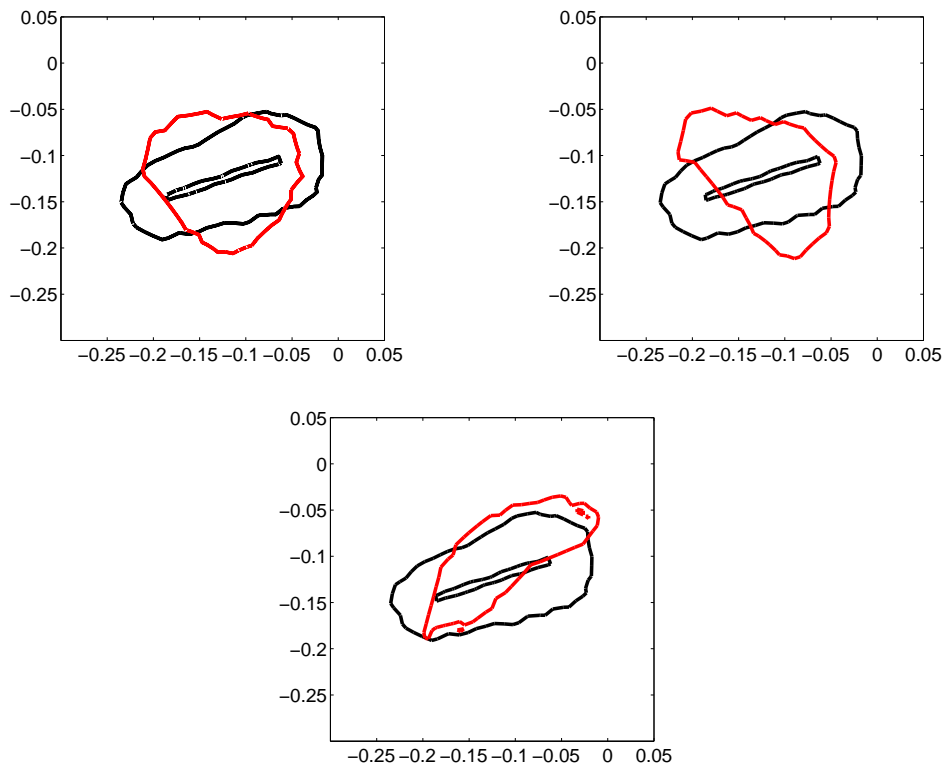
- Donnée bruitée

En présence d'une donnée de Cauchy  $(g_0^\delta, g_1^\delta)$  bruitée, avec un niveau de bruit relatif  $\delta^5$ , nous allons naturellement procéder comme expliqué au 8.1.2 du chapitre précédent, c'est-à-dire utiliser à la première itération la méthode développée au chapitre 3 pour régulariser la donnée de Cauchy et fixer le paramètre  $\varepsilon$  de la méthode de quasi-réversibilité, puis utiliser cette donnée régularisée et ce paramètre lors de toutes les itérations suivantes.

---

<sup>5</sup>on a alors  $\|g_i^\delta - g_i\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta \|g_i\|_{L^2(\Gamma)}$  pour  $i = 1, 2$





Reconstruction avec donnée bruitée sur tout le bord de  $\mathcal{D}$ .

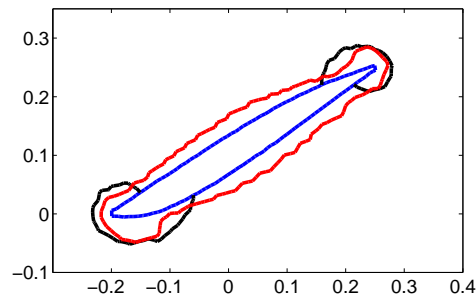
Niveau de bruit :  $\delta = 0.5\%$ ,  $1\%$  et  $5\%$ .

Si le bruit a un fort impact sur la qualité de la reconstruction de la zone plastique, la détection et la localisation de la fissure restent bonnes. La méthode [QR-P] reste efficace en présence d'une donnée bruitée.

### 9.3.2 Cas où la zone plastique n'entoure pas complètement le défaut

Nous avons démontré au chapitre 7 la convergence de la méthode [P] vers la zone plastique sous l'hypothèse "d'invisibilité de l'obstacle", ce qui revient à supposer que la zone plastique entoure complètement les défauts de la structure. Cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée dans les cas pratiques. Il convient de modifier la méthode [QR-P] pour tenir compte de ce fait.

Une nouvelle fois, nous allons nous rappeler que la méthode est basée sur la construction d'une fonction "vitesse"  $V$  positive dans le domaine d'étude et qui s'annule sur le contour que l'on cherche. Si la zone plastique n'entoure pas complètement le défaut, il nous faut alors trouver à la fois le bord de la zone plastique et le bord du défaut libre de zone plastique. Comme nous avons imposé la condition  $u = 0$  sur le bord de  $\mathcal{O}$ , il est facile de construire une fonction  $V$  positive dans le matériau et nulle sur ce que l'on cherche : il suffit de prendre  $V := \inf(|u|, 1 - |\nabla u|^2)$ . L'exemple numérique suivant montre qu'utiliser cette vitesse a bien l'effet escompté.

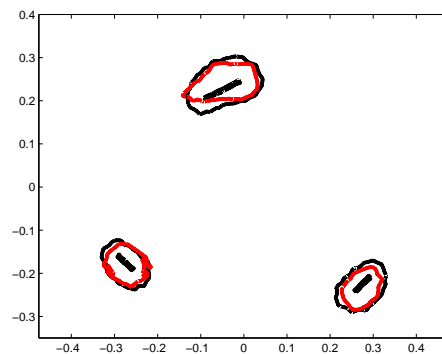


Cas où la zone plastique n'entoure pas le défaut : en bleu le défaut, en noir la zone plastique et en rouge le résultat de la méthode.

Remarque : remarquons que si cette fonction  $V$  assure bien en pratique la convergence de la méthode [QR-P] vers le bord de la zone plastique et le bord libre du défaut, on ne peut pas montrer théoriquement que c'est le cas. Si on reprend la preuve du théorème 7.1, on arrive à montrer facilement que  $V$  s'annule sur l'ouvert obtenu après convergence de la méthode. On a alors soit  $1 - |\nabla u|^2 = 0$ , et on est sur le bord de la zone plastique, soit  $|u| = 0$ , et on est sur le bord de  $\mathcal{O}$  ou sur une ligne de niveau 0 "parasite" : on n'est donc pas certain d'avoir trouvé la frontière libre de  $\mathcal{O}$ .

## Conclusion

La méthode [QR-P] s'adapte très facilement à la recherche de zones plastiques dans un matériau élasto-plastique. Elle est efficace, et gère facilement les difficultés de ce problème : donnée incomplète, bruitée, nature non linéaire du problème. Nous pensons qu'elle constitue une approche prometteuse pour le contrôle non destructif de matériaux élasto-plastiques.



Contrôle non destructif d'un matériau présentant trois fissures. En noir sont représentées les fissures et les zones plastiques exactes, en rouge les zones plastiques reconstruites.



# Conclusion générale

Nous espérons avoir, grâce à cette étude, suscité l'intérêt du lecteur pour la méthode de quasi-réversibilité, méthode de régularisation du problème de Cauchy elliptique. La première partie de ce travail lui est entièrement consacrée. Nous y avons vu différentes formulations de la méthode, dont nous avons étudié les qualités et les défauts. Nous avons aussi étudié la discrétisation de la méthode par éléments finis non conformes FV1, ce qui constitue à notre connaissance la seule implémentation effective de ces éléments. En ce qui concerne le traitement d'une donnée bruitée, aspect crucial des méthodes de régularisation de problèmes mal posés, nous avons proposé une méthode permettant de régulariser les données et fixer le paramètre de régularisation de la méthode de quasi-réversibilité en fonction du niveau de bruit. De nombreux exemples numériques ont mis en évidence l'efficacité des approches proposées.

La deuxième partie de cette étude est consacrée au problème inverse de l'obstacle avec condition de Dirichlet. Nous avons proposé une approche nouvelle de résolution "par l'extérieur" de ce problème, et mis en place deux méthodes de lignes de niveau adaptées à cette approche, la première basée sur la résolution d'une équation de Hamilton-Jacobi, la seconde basée sur la résolution d'une équation de Poisson. Nous avons démontré la convergence des deux méthodes vers l'obstacle recherché. Puis, nous avons montré l'adaptabilité de ces méthodes à d'autres types de problèmes, en nous intéressant au contrôle non destructif de matériaux élasto-plastiques.

Enfin, la troisième partie de ce travail est consacrée au couplage numérique de la méthode de quasi-réversibilité et des méthodes de lignes de niveau développées. Les nombreux exemples numériques nous ont permis d'étudier l'influence des différents paramètres, et ont montré l'efficacité de nos méthodes pour la résolution du problème inverse de l'obstacle ou la recherche de zones plastiques.

Nous voudrions résumer les principales caractéristiques de notre approche :

- l'utilisation de la méthode de quasi-réversibilité pour résoudre les problèmes de Cauchy elliptiques nous permet de construire des méthodes de résolution du problème inverse de l'obstacle [QR-HJ] et [QR-P] ne faisant intervenir aucun processus d'optimisation.
- la méthode de quasi-réversibilité gère simplement une donnée de Cauchy incomplète, c'est-à-dire dont le support est une partie stricte du bord extérieur.
- les méthodes de lignes de niveau proposées permettent de retrouver des obstacles caractérisés par une condition "non variationnelle". Par exemple, elles gèrent très facilement la condition aux limites caractérisant une zone plastique, à savoir  $|\nabla u| = cte$ , ce que ne sauraient faire les méthodes basées sur la résolution de problèmes directs, cette condition ne pouvant être interprétée comme condition aux limites d'un problème variationnel.
- les méthodes de résolution du problème inverse de l'obstacle proposées ne nécessitent pas la connaissance a priori du nombre d'obstacles, grâce à l'utilisation de méthodes de lignes de niveau.
- d'un point de vue plus numérique, le couplage de la méthode de quasi-réversibilité et des méthodes

de lignes de niveau se fait à partir d'un unique maillage. On peut calculer a priori les contributions des mailles aux différentes matrices, d'où un gain de temps précieux.

Nous voudrions enfin proposer quelques perspectives, en particulier les trois problématiques suivantes, qui nous semblent intéressantes.

- Résolution numérique du problème inverse de l'obstacle en dimension trois et/ou dans le cas de l'élasticité.

Théoriquement, les méthodes proposées pour la résolution du problème inverse de l'obstacle avec condition de Dirichlet fonctionnent en toute dimension et pour tout opérateur elliptique. Pour pouvoir les utiliser en pratique en dimension trois ou avec l'opérateur de l'élasticité, il faut savoir résoudre numériquement les problèmes sur lesquels elles reposent. La résolution d'une équation eikonale ou d'un problème de Poisson ne pose pas de difficulté en dimension trois. La résolution du problème de quasi-réversibilité, problème elliptique d'ordre 4, est en revanche délicate. Afin d'éviter d'obtenir des problèmes de trop grande taille, on pourra discrétiser le problème par éléments finis non-conformes, ou bien utiliser la formulation mixte de la quasi-réversibilité. Dans ce dernier cas, il faudra cependant adapter la méthode de traitement du bruit présentée au chapitre 3.

- Résolution du problème inverse de l'obstacle avec condition de Neumann.

Le problème inverse de l'obstacle avec condition de Neumann se formule ainsi : soit  $\mathcal{D}$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Gamma$  une partie ouverte de la frontière de  $\mathcal{D}$ , et  $(g_0, g_1) \neq (0, 0)$ . On cherche un couple  $(\mathcal{O}, u)$  tel que

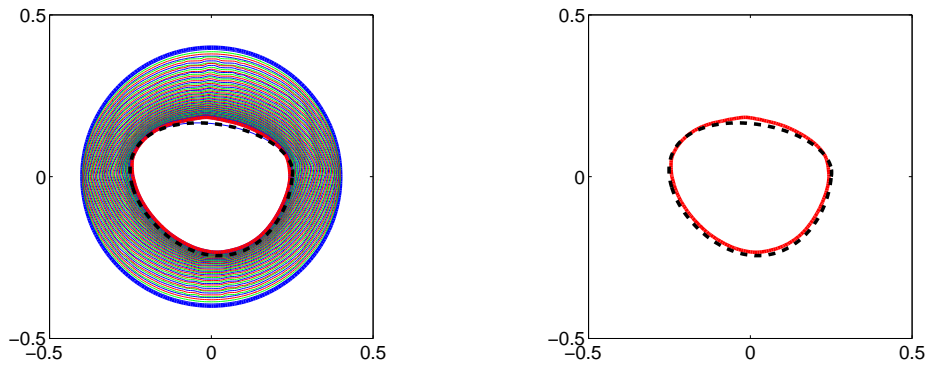
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}} \\ u = g_0 \text{ sur } \Gamma \\ \partial_\nu u = g_1 \text{ sur } \Gamma \\ \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}. \end{cases}$$

Comme évoqué au chapitre 8, une piste pour résoudre ce problème à l'aide d'une approche "par l'extérieur" consiste à coupler la méthode de quasi-réversibilité avec la résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - |\nabla \tilde{u} \cdot \nabla \phi| = 0$$

avec  $\tilde{u} = u$  à l'extérieur de l'ouvert actuel, et  $\tilde{u}$  est un prolongement régulier de  $u$  dans l'ouvert actuel. L'idée est que si la ligne de niveau zéro de  $\phi$  coïncide avec le bord de l'obstacle  $\mathcal{O}$ , alors sur cette ligne on a  $|\nabla \tilde{u} \cdot \nabla \phi| = |\partial_\nu u| |\nabla \phi| = 0$ , d'où  $\partial_t \phi = 0$  et cette ligne reste sur le bord de l'obstacle...

Pour le moment, nous n'avons pas de résultat théorique pour cette méthode. Mais nous avons effectué quelques tests numériques, et elle semble assez efficace pour des obstacles de géométrie simple.



Résolution du problème inverse de l'obstacle avec condition de Neumann.  
 À gauche : itérations de la méthode. À droite : résultat après convergence.  
 En noir : obstacle recherché. En rouge : obstacle retrouvé.

- Étude théorique de la stabilité de la reconstruction de l'obstacle par la méthode [QR-HJ] ou [QR-P]

Les méthodes de lignes de niveau développées aux chapitres 5 et 6 pour résoudre le problème inverse de l'obstacle avec condition de Dirichlet utilisent une "vitesse" construite à partir de la fonction  $u$  solution du problème de Cauchy extérieur. En pratique, nous ne disposons pas de cette fonction  $u$ , mais de la solution  $u_\varepsilon$  du problème de quasi-réversibilité qui est une approximation de  $u$ . Il serait intéressant de fournir une estimation de l'erreur commise sur la reconstruction de l'obstacle du fait de l'utilisation de  $u_\varepsilon$ .

Une piste possible consiste à chercher à quantifier l'écart entre la ligne de niveau zéro de  $u$  et la ligne de niveau zéro de  $u_\varepsilon$  en fonction de  $\varepsilon$ . En effet, l'obstacle est par définition la ligne de niveau zéro de  $u$ , et il est assez clair que les méthodes [QR-HJ] et [QR-P] convergent vers une ligne de niveau zéro de  $u_\varepsilon$ . Mesurer l'écart entre ces deux lignes revient à mesurer l'écart entre l'obstacle réel et l'obstacle reconstruit.



## Quatrième partie

### Annexes





# Annexe A

## Équation de Hamilton-Jacobi

### Introduction

Au chapitre 5, nous avons été amenés à nous intéresser à une équation eikonale, de la forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V(x)|\nabla \phi| = 0.$$

Cette équation est très connue, notamment parce qu'elle intervient dans la modélisation de la propagation d'un front sous l'influence d'une vitesse normale. La bonne notion pour étudier une telle équation est celle de solution de viscosité, introduite pour la première fois par M.G. Crandall et P.L. Lions en 1983<sup>1</sup>, notion clarifiée dans un article de M.G. Crandall, L.C. Evans et J.L. Lions en 1984<sup>2</sup>. On va rappeler les principaux résultats dont nous avons besoin concernant une équation plus générale que l'équation eikonale, à savoir l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + H(x, t, \nabla u) = 0$$

avec une condition initiale, et éventuellement des conditions aux limites, si le domaine d'étude n'est pas l'espace entier.

### A.1 Existence et unicité

#### A.1.1 Équation posée dans $\mathbb{R}^d$

On se place ici dans  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $T > 0$ . On se donne  $\phi_0 \in C(\mathbb{R}^d)$  et un hamiltonien  $H \in C(\mathbb{R}^d \times [0, T] \times \mathbb{R}^d)$ . Nous nous intéressons à l'équation :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + H(x, t, \nabla \phi) = 0, \quad \phi(x, 0) = \phi_0(x). \quad (\text{A.1})$$

Nous dirons que  $\phi \in C(\mathbb{R}^d \times [0, T])$  est sous-solution de viscosité de A.1 si et seulement si  $\phi(\cdot, 0) \leq \phi_0$  et si  $\forall \psi \in C^1(\mathbb{R}^d \times [0, T])$ , si  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^d \times ]0, T[$  est un maximum local de  $\phi - \psi$ , on a :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x_0, t_0) + H(x_0, t_0, \nabla \psi(x_0, t_0)) \leq 0.$$

Nous dirons que  $\phi \in C(\mathbb{R}^d \times [0, T])$  est sur-solution de viscosité de A.1 si et seulement si  $\phi(\cdot, 0) \geq \phi_0$  et si  $\forall \psi \in C^1(\mathbb{R}^d \times [0, T])$ , si  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^d \times ]0, T[$  est un minimum local de  $\phi - \psi$ , on a :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x_0, t_0) + H(x_0, t_0, \nabla \psi(x_0, t_0)) \geq 0.$$

---

<sup>1</sup>[CL83]

<sup>2</sup>[CEL84]

Enfin, nous dirons que  $\phi \in C(\mathbb{R}^d \times [0, T])$  est solution de viscosité de A.1 si et seulement si  $\phi$  est sous-solution et sur-solution de viscosité de A.1.

La notion de solution de viscosité apparaît donc comme une notion de dérivation en un sens faible pour les espace de fonctions continues. C'est la notion adaptée pour étudier les équations de Hamilton-Jacobi. Nous avons le théorème suivant<sup>3</sup> :

**Théorème A.1** *Supposons que  $H \in C(\mathbb{R}^d \times [0, T] \times \mathbb{R}^d)$  vérifie :*

- *il existe une constant  $C_1$  telle que  $|H(x, t, 0)| \leq C_1$  pour tout  $(x, t)$*
- *il existe deux constantes positives  $C_2, C_3$  telles que*

$$|H(x, t, p) - H(y, t, p)| \leq C_2|p||x - y| + C_3|x - y|$$

*pour tout  $(x, y, t, p)$*

- *il existe une constante  $C_4$  telle que  $|H(x, t, p) - H(x, t, q)| \leq C_4|p - q|$  pour tout  $(x, t, p, q)$ .*

*Supposons de plus que  $\phi_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ . Alors A.1 admet une unique solution (de viscosité)  $\phi$ , qui vérifie  $\phi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d \times [0, T])$ .*

### A.1.2 Équation en domaine borné

On se place désormais dans un ouvert borné  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^d$ . On se donne maintenant  $H \in C(\mathcal{D} \times [0, t] \times \mathbb{R}^d)$ , et  $\phi_0 \in C(\overline{\mathcal{D}})$ . On s'intéresse à l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + H(x, t, \nabla \phi) = 0 \quad \forall (x, t) \in \mathcal{D} \times ]0, T[ \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x) \quad \forall x \in \mathcal{D} \\ \phi(x, t) = \phi_0(x) \quad \forall (x, t) \in \partial \mathcal{D} \times [0, T] \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

On transpose aisément la notion de solution de viscosité de A.2 de celle de A.1.

### Existence d'une solution

**Théorème A.2** *supposons que  $H \in C(\mathcal{D} \times [0, T] \times \mathbb{R}^d)$  vérifie :*

- ( $\tilde{\text{H}}1$ ) *il existe deux constantes positives  $C_2, C_3$  telles que*

$$|H(x, t, p) - H(y, t, p)| \leq C_2|p||x - y| + C_3|x - y|$$

*pour tout  $(x, y, t, p) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$*

- ( $\tilde{\text{H}}2$ ) *il existe une constante  $C_4$  telle que  $|H(x, t, p) - H(x, t, q)| \leq C_4|p - q|$  pour tout  $(x, t, p, q) \in \mathcal{D} \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$*

- ( $\tilde{\text{H}}3$ ) *il existe un compact  $K \subset \mathcal{D}$  tel que  $\forall (x, t, p) \in \mathcal{D} \setminus K \times [0, T] \times \mathbb{R}^d, H(x, t, p) = 0$ .*

*Alors, si  $\phi_0$  est une fonction lipschitzienne sur  $\mathcal{D}$ , A.2 admet une solution de viscosité  $\phi$ , avec  $\phi \in W^{1,\infty}(\mathcal{D} \times ]0, T[)$  (en particulier, l'équation A.2 est vérifiée au sens presque partout).*

**Preuve** : tout d'abord, le théorème de Kirzbraun<sup>4</sup> nous donne l'existence d'une fonction  $\tilde{\phi}_0$  lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^d$  telle que  $\tilde{\phi}_0|_{\mathcal{D}} = \phi_0$ . Si on se donne  $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  vérifiant  $\Phi \equiv 1$  sur  $\mathcal{D}$ , il est facile de vérifier que  $\hat{\phi}_0 := \Phi \tilde{\phi}_0$  est encore une fonction lipschitzienne qui vérifie  $\hat{\phi}_0|_{\mathcal{D}} = \phi_0$ . De plus,  $\hat{\phi}_0$  est dérivable au sens presque partout de dérivée bornée<sup>5</sup>, et on a  $\hat{\phi}_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ .

On note  $\tilde{H}(x, t, p) := \begin{cases} H(x, t, p) & \text{si } x \in \mathcal{D} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Comme  $H \in C(\mathcal{D} \times [0, T] \times \mathbb{R}^d)$ , il existe  $C_1 > 0$  tel que  $\forall x \in K, \forall t \in [0, T], |H(x, t, 0)| \leq C_1$ . On en déduit que pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ , pour tout  $t \in [0, T]$ , on a  $\tilde{H}(x, t, 0) \leq C_1$ .

<sup>3</sup>cf proposition 3.3 de [AHBM06], qui est un peu plus générale que le théorème cité ici

<sup>4</sup>voir [Kir34]

<sup>5</sup>voir théorème de Rademacher dans [Hei05]

On s'intéresse alors à l'équation :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \tilde{H}(x, t, \nabla \phi) = 0, \quad \phi(x, 0) = \hat{\phi}_0(x).$$

Il est facile de vérifier que l'on peut appliquer le théorème A.1 qui nous donne l'existence d'une solution de viscosité de cette équation, que l'on note  $\tilde{\phi}$ , qui vérifie  $\tilde{\phi} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d \times [0, T])$ . L'équation est presque-partout vérifiée. En particulier, pour  $x \notin \overline{\mathcal{D}}$ , on a  $\partial_t \tilde{\phi} = 0$ , et donc  $\tilde{\phi}(x, t) = \hat{\phi}_0(x)$ . Par continuité de  $\tilde{\phi}$  et  $\hat{\phi}_0$ , l'égalité est aussi vérifiée pour  $x \in \partial \mathcal{D}$ . On vérifie alors aisément que  $\phi := \tilde{\phi}|_{\overline{\mathcal{D}}}$  est solution de A.2. ■

### Unicité de la solution

Nous présentons ici un résultat d'unicité pour l'équation (A.2), dans la classe des fonctions continues sur  $\overline{\mathcal{D}} \times [0, T]$ . Comme la solution de l'équation eikonale mise en évidence précédemment est dans cette classe, elle sera bien l'unique solution de cette équation. Les grandes étapes de la démonstration sont esquissées dans [Bar94], nous démontrons ici complètement le résultat.

On suppose que :

(H1)  $H$  est continu sur  $\overline{\mathcal{D}} \times [0, T] \times \mathbb{R}^n$

(H2) il existe une fonction  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , vérifiant  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ , telle que, pour tout  $x, y$  dans  $\mathcal{D}$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $p \in \mathbb{R}^n$ , on ait :

$$|H(x, t, p) - H(y, t, p)| \leq f(|x - y|(1 + |p|)) \quad (\text{A.3})$$

**Théorème A.3** *Sous les hypothèses (H1) et (H2), si  $\phi_1, \phi_2 \in C(\overline{\mathcal{D}} \times [0, T])$  sont respectivement sous et sur-solutions de (A.2), et si  $\phi_1 \leq \phi_2$  sur  $\partial \mathcal{D} \times [0, T] \cup \overline{\mathcal{D}} \times \{0\}$ , alors  $\phi_1 \leq \phi_2$  sur  $\overline{\mathcal{D}} \times [0, T]$ .*

Ce théorème énonce un principe du maximum pour les solutions de (A.2). Il implique en particulier le résultat d'unicité suivant :

**Théorème A.4** *Sous les hypothèses (H1) et (H2), il existe au plus une solution au problème suivant : trouver une fonction  $\phi \in C(\overline{\mathcal{D}} \times [0, T])$  vérifiant (A.2) et telle que :*

$$\begin{cases} \phi(x, 0) = \phi_0(x) & \forall x \in \overline{\mathcal{D}} \\ \phi(x, t) = g(x, t) & \forall x \in \partial \mathcal{D}, \forall t \in [0, T]. \end{cases}$$

Remarquons tout d'abord que dans les hypothèses du théorème A.3, nous ne satisfaisons pas  $\phi_1 \leq \phi_2$  sur tout le bord de  $\mathcal{D} \times (0, T)$ . Il manque en quelque sorte le bord final, à savoir  $\mathcal{D} \times \{T\}$ . Cela n'est en fait pas nécessaire grâce au lemme suivant :

**Lemme A.1** *si  $\phi \in C(\overline{\mathcal{D}} \times [0, T])$  est sous-solution (resp. sur-solution) de (A.2) dans  $\mathcal{D} \times (0, T)$ , alors  $\phi$  est sous-solution (resp. sur-solution) dans  $\mathcal{D} \times (0, T]$ , au sens suivant :*

$\forall \psi \in C^1(\mathcal{D} \times (0, T])$ , si  $(x_0, T)$  ( $x_0 \in \mathcal{D}$ ) est un point de maximum local de  $\phi - \psi$ , on a :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x_0, T) + H(x_0, T, D_x \psi(x_0, T)) \leq 0.$$

Pour démontrer ce lemme, nous allons avoir besoin du résultat suivant :

**Lemme A.2** *soit  $v \in C(\mathcal{D} \times (0, T])$ , tel que  $(x_0, T)$  ( $x_0 \in \mathcal{D}$ ) soit un maximum local strict de  $v$ .*

*On suppose que l'on a une famille  $v_\eta$  de fonctions de  $C(\mathcal{D} \times (0, T))$  qui vérifie :*

- $\forall (x, t) \in \mathcal{D} \times (0, T), \quad v_\eta(x, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} v(x, t).$
- \* *pour tout  $0 < \eta_1 < \eta_2$ , pour tout  $(x, t) \in \mathcal{D} \times (0, T)$ ,  $v_{\eta_1}(x, t) > v_{\eta_2}(x, t)$ .*

\* pour tout  $M \in \mathbb{R}$ , pour tout  $\eta > 0$ , pour tout  $K$  compact de  $\mathcal{D}$ , il existe  $t_{M,\eta,K}$ ,  $0 < t_{M,\eta,K} < T$ , tel que pour tout  $t \in (t_{M,\eta,K}, T)$ , pour tout  $x \in K$ ,  $v_\eta(x, t) < M$ .

alors il existe  $(x_\eta, t_\eta) \in \mathcal{D} \times (0, T)$  tel que  $(x_\eta, t_\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} (x_0, T)$ , et  $(x_\eta, t_\eta)$  est un maximum local de  $v_\eta$  pour  $\eta$  suffisamment petit.

Preuve :  $(x_0, T)$  est un maximum local strict de  $v$ . Il existe donc  $\rho > 0$  et  $T_0$ ,  $0 < T_0 < T$  tels que pour tout couple  $(x, t) \in \mathcal{B}(x_0, \rho) \times (T_0, T]$ , on ait :

$$(x, t) \neq (x_0, T) \Rightarrow v(x, t) < v(x_0, T).$$

Posons alors  $T_1 = \frac{T+T_0}{2}$ ,  $B = \mathcal{B}(x_0, \frac{\rho}{2})$ ,  $x_f$  un élément quelconque de  $B$ . Soit  $\eta > 0$ . On pose  $m = v_\eta(x_f, T_1)$ . D'après \*, il existe  $t_{\eta, \bar{B}}$  tel que pour tout  $x \in \bar{B}$ , pour tout  $t$ ,  $t_{\eta, \bar{B}} < t < T$ , on ait  $v_\eta(x, t) < m$ . On pose  $D_{t_{\eta, \bar{B}}} = \bar{B} \times [T_1, t_{\eta, \bar{B}}]$ .  $v_\eta$  est continue sur  $D_{t_{\eta, \bar{B}}}$  qui est compact, elle y atteint donc son maximum en un point  $(x_\eta, t_\eta)$  :

$$\forall \eta > 0, \exists (x_\eta, t_\eta) \in D_{t_{\eta, \bar{B}}} \mid \forall (x, t) \in D_{t_{\eta, \bar{B}}} \quad v_\eta(x, t) \leq v_\eta(x_\eta, t_\eta).$$

Or on a vu que pour tout  $x \in \bar{B}$ , pour tout  $t \in (t_{\eta, \bar{B}}, T)$ ,  $v_\eta(x, t) < v_\eta(x_f, T_1) \leq v_\eta(x_\eta, t_\eta)$ . On en déduit :

$$\forall \eta > 0, \exists (x_\eta, t_\eta) \in \bar{B} \times [T_1, T] \mid \forall (x, t) \in \bar{B} \times [T_1, T] \quad v_\eta(x, t) \leq v_\eta(x_\eta, t_\eta).$$

D'après \*, pour tout  $0 < \eta_1 < \eta_2$ , pour tout  $(x, t) \in \bar{B} \times [T_1, T]$ ,  $v_{\eta_1}(x, t) > v_{\eta_2}(x, t)$ . On fait tendre  $\eta_1$  vers 0 dans cette inégalité, et on utilise •, ce qui nous donne :

$$\forall \eta > 0, \forall (x, t) \in \bar{B} \times [T_1, T], v_\eta(x, t) \leq v(x, t). \quad (\text{A.4})$$

d'où, puisque  $(x_0, T)$  est le maximum strict de  $v$  dans  $\bar{B} \times [T_1, T]$ , on a :

$$\forall \eta > 0, v_\eta(x_\eta, t_\eta) < v(x_0, T). \quad (\text{A.5})$$

Toujours d'après \*, pour tout  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , pour tout  $(x, t) \in \bar{B} \times [T_1, T]$ , on a :

$$v_{\frac{1}{\lambda_1}}(x, t) < v_{\frac{1}{\lambda_2}}(x, t).$$

Ceci implique en particulier que  $v_{\frac{1}{\lambda_1}}(x_{\frac{1}{\lambda_1}}, t_{\frac{1}{\lambda_1}}) < v_{\frac{1}{\lambda_2}}(x_{\frac{1}{\lambda_2}}, t_{\frac{1}{\lambda_2}})$ , donc que la fonction  $\lambda \mapsto v_{\frac{1}{\lambda}}(x_{\frac{1}{\lambda}}, t_{\frac{1}{\lambda}})$  est une fonction croissante et, d'après (A.5), majorée. On en déduit qu'elle admet une limite en l'infini, et donc que la fonction  $\eta \mapsto v_\eta(x_\eta, t_\eta)$  en admet une en 0 que l'on notera  $\bar{v}$ , vérifiant :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} v_\eta(x_\eta, t_\eta) = \bar{v} \leq v(x_0, T). \quad (\text{A.6})$$

Pour  $\eta > 0$ , par définition de  $(x_\eta, t_\eta)$ , on a pour tout  $(x, t) \in \bar{B} \times [T_1, T]$  :

$$v_\eta(x, t) \leq v_\eta(x_\eta, y_\eta).$$

On fait tendre  $\eta$  vers 0 dans cette inégalité en utilisant (A.6) et •, ce qui nous donne :

$$\forall (x, t) \in \bar{B} \times [T_1, T], v(x, t) \leq \bar{v}.$$

En particulier, par continuité de  $v(x_0, \cdot)$  en  $T$ , on obtient :

$$v(x_0, T) \leq \bar{v}. \quad (\text{A.7})$$

Finalement, en couplant les résultats (A.6) et (A.7), on obtient :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} v_\eta(x_\eta, y_\eta) = v(x_0, T). \quad (\text{A.8})$$

Soit maintenant une suite quelconque  $\eta_n$  de réel positif tendant vers 0. Pour simplifier, on pose  $v_{\eta_n} = v_n$ ,  $x_{\eta_n} = x_n$  et  $t_{\eta_n} = t_n$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(x_n, t_n) \in \bar{B} \times [T_1, T]$ , donc on peut extraire une sous-suite de  $(x_n, t_n)$ , notée  $(x_{n'}, t_{n'})$ , convergeant vers un élément  $(\bar{x}, \bar{t})$  de  $\bar{B} \times [T_1, T]$ . D'après (A.4), on a  $v_{n'}(x_{n'}, t_{n'}) < v(x_{n'}, t_{n'})$ . En faisant

tendre  $n'$  vers l'infini dans cette inégalité, et en utilisant à la fois la continuité de  $v$  sur  $\overline{B} \times [T_1, T]$  et (A.8), on obtient :

$$v(x_0, T) \leq v(\overline{x}, \overline{t}) \Rightarrow (\overline{x}, \overline{t}) = (x_0, T). \quad (\text{A.9})$$

Le lemme 2.1 p.22 nous permet d'affirmer que c'est toute la famille  $(x_\eta, t_\eta)$  qui tend vers  $(x_0, T)$  quand  $\eta$  tend vers 0, et donc que pour  $\eta$  suffisamment petit,  $(x_\eta, t_\eta) \in B \times (T_1, T) \Rightarrow (x_\eta, t_\eta)$  est un maximum local de  $v_\eta$ , pour  $\eta$  suffisamment petit. ■

**Preuve du lemme A.1 :** soit  $\phi \in C(\overline{\mathcal{D}} \times [0, T])$  une sous-solution dans  $\mathcal{D} \times (0, T)$  de (A.2), et soit  $\psi \in C^1(\mathcal{D} \times (0, T])$  telle que  $(x_0, T)$  ( $x_0 \in \mathcal{D}$ ) soit un point de maximum local de  $v = \phi - \psi$ . Quitte à remplacer  $\psi$  par  $\psi + |x - x_0|^2 + |t - T|^2$ , ce qui ne change pas les dérivées premières de  $\psi$ , on peut supposer que  $(x_0, T)$  est un maximum local strict de  $v$ . On pose alors, pour  $(x, t) \in \mathcal{D} \times (0, T)$ , et  $\eta > 0$  :

$$v_\eta(x, t) = \phi(x, t) - \psi(x, t) - \frac{\eta}{T - t}.$$

La famille  $v_\eta$  vérifie toutes les hypothèses du lemme A.2, on a donc l'existence, pour  $\eta$  suffisamment petit, de  $(x_\eta, t_\eta)$  maximum local de  $v_\eta$  vérifiant :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} (x_\eta, t_\eta) = (x_0, T).$$

Comme  $\phi$  est sous-solution de (A.2), on a, au point  $(x_\eta, t_\eta)$  :

$$\frac{\eta}{(T - t_\eta)^2} + \frac{\partial \psi}{\partial t}(x_\eta, t_\eta) + H(x_\eta, t_\eta, D_x \psi(x_\eta, t_\eta)) \leq 0$$

ce qui donne directement :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x_\eta, t_\eta) + H(x_\eta, t_\eta, D_x \psi(x_\eta, t_\eta)) \leq 0.$$

On fait alors tendre  $\eta$  vers 0, et on utilise la continuité de  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ ,  $D_x \psi$  et  $H$  pour obtenir :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x_0, T) + H(x_0, T, D_x \psi(x_0, T)) \leq 0.$$

La démonstration dans le cas où  $\phi$  est sur-solution s'effectue de la même manière, mutatis mutandis. ■

Passons maintenant à la démonstration proprement dite du théorème A.3. On a d'abord le résultat suivant :

**Propriété A.1** si  $\phi_1 \in C(\mathcal{D} \times (0, T))$  est sous-solution de (A.2), alors la fonction  $\phi_\alpha$  définie sur  $\mathcal{D} \times (0, T)$  par  $\phi_\alpha(x, t) = \phi_1(x, t) - \alpha t$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ , est sous solution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + H(x, t, D_x \phi) = -\alpha. \quad (\text{A.10})$$

**Preuve :** soit  $\psi \in C^1(\mathcal{D} \times (0, T))$  tel que  $\phi_\alpha - \psi$  atteigne son maximum en  $(x_0, t_0) \in \mathcal{D} \times (0, T)$ . On a donc, si on pose  $\psi_\alpha(x, t) = \psi(x, t) + \alpha t$ ,  $\phi_1 - \psi_\alpha$  qui atteint son maximum en  $(x_0, t_0)$ . Comme  $\phi_1$  est sous-solution de (A.2), on a :

$$\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t}(x_0, t_0) + H(x_0, t_0, D_x \psi_\alpha(x_0, t_0)) \leq 0$$

ce qui conduit à

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x_0, t_0) + \alpha + H(x_0, t_0, D_x \psi(x_0, t_0)) \leq 0$$

et montre que  $\phi_\alpha$  est sous-solution de (A.10).

■

Pour la suite on va prendre  $\alpha > 0$ . On aura donc pour tout  $(x, t) \in \overline{\mathcal{D}} \times [0, T]$ ,  $\phi_\alpha(x, t) \leq \phi_1(x, t)$ . Rappelons nos hypothèses :  $\psi_1, \psi_2$  sont deux éléments de  $C(\overline{\mathcal{D}} \times [0, T])$  respectivement sous-solution et sur-solution de (A.2), et vérifiant  $\psi_1 \leq \psi_2$  sur  $\overline{\mathcal{D}} \times \{0\} \cup \partial\mathcal{D} \times [0, T]$ . On pose alors :

$$M = \max_{\overline{\mathcal{D}} \times [0, T]} \psi_1 - \psi_2; \quad M_\alpha = \max_{\overline{\mathcal{D}} \times [0, T]} \psi_\alpha - \psi_2.$$

On a :

$$M - M_\alpha \leq \max_{\overline{\mathcal{D}} \times [0, T]} \psi_1 - \psi_2 - \psi_\alpha + \psi_2 = \alpha T.$$

d'où  $M \leq M_\alpha + \alpha T$ . On a le résultat suivant :

### Propriété A.2

$$\forall \alpha > 0, \quad M_\alpha \leq 0.$$

Preuve : supposons qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $M_\alpha > 0$ . On va définir, pour  $\varepsilon, \eta > 0$  et  $(x, y, t, s) \in \overline{\mathcal{D}}^2 \times [0, T]^2$ , la fonction suivante :

$$\Psi(x, y, t, s) = \phi_\alpha(x, t) - \phi_2(y, s) - \frac{|x - y|^2}{\varepsilon^2} - \frac{(t - s)^2}{\eta^2}.$$

C'est une fonction continue sur un compact, elle atteint donc son maximum, que l'on notera  $M_{\varepsilon, \eta}$ . Soit  $(x_{\varepsilon\eta}, y_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta})$  un point où ce maximum est atteint.

Soit  $(x, t) \in \overline{\mathcal{D}} \times [0, T]$ , on a  $\Psi(x, x, t, t) \leq \Psi(x_{\varepsilon\eta}, y_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}) = M_{\varepsilon, \eta}$ . On en déduit que :

$$M_\alpha = \max_{(x, t) \in \overline{\mathcal{D}} \times [0, T]} \Psi(x, x, t, t) \leq M_{\varepsilon, \eta}$$

d'où en particulier  $M_{\varepsilon, \eta} > 0$ . On en déduit :

$$0 < \Psi(x_{\varepsilon\eta}, y_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}) \leq \phi_\alpha(x_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}) - \phi_2(y_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}) - \frac{(t_{\varepsilon\eta} - s_{\varepsilon\eta})^2}{\eta^2}$$

et encore

$$\frac{(t_{\varepsilon\eta} - s_{\varepsilon\eta})^2}{\eta^2} < \phi_\alpha(x_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}) - \phi_2(y_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}) \leq \phi_1(x_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}) - \phi_2(y_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta})$$

ce qui nous donne le résultat suivant :

$$|t_{\varepsilon\eta} - s_{\varepsilon\eta}| < \eta \sqrt{\|\phi_1\|_\infty + \|\phi_2\|_\infty}. \quad (\text{A.11})$$

Par un raisonnement analogue, on obtient :

$$|x_{\varepsilon\eta} - y_{\varepsilon\eta}| < \varepsilon \sqrt{\|\phi_1\|_\infty + \|\phi_2\|_\infty}. \quad (\text{A.12})$$

Pour la suite, on va introduire la fonction  $m_{\phi_2}$  définie comme suit :

$$\forall \xi \geq 0, \quad m_{\phi_2}(\xi) = \sup_{|(x, t) - (y, s)| \leq \xi} |\phi_2(x, t) - \phi_2(y, s)|.$$

Comme  $\phi_2$  est continue sur  $\overline{\mathcal{D}} \times [0, T]$ , elle y est uniformément continue, ce qui implique en particulier que  $m_{\phi_2}$  est continue et  $m_{\phi_2}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 0$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} M_\alpha &\leq M_{\varepsilon, \eta} = \Psi(x_{\varepsilon\eta}, y_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}) \\ &\leq \phi_\alpha(x_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}) - \phi_2(y_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}) \\ &\leq \phi_\alpha(x_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}) - \phi_2(x_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}) + \phi_2(x_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}) - \phi_2(y_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}) \\ &\leq M_\alpha + m_{\phi_2}(|(x_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}) - (y_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta})|). \end{aligned}$$

En utilisant (A.11) et (A.12), on obtient que  $|(x_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}) - (y_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta})| \leq \sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2} \sqrt{\|\phi_1\|_\infty + \|\phi_2\|_\infty}$ , ce qui nous donne :

$$M_\alpha \leq M_{\varepsilon, \eta} \leq \phi_\alpha(x_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}) - \phi_2(y_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}) \leq M_\alpha + m_{\phi_2}(\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2} \sqrt{\|\phi_1\|_\infty + \|\phi_2\|_\infty}).$$

On en déduit le résultat suivant :

$$\lim_{(\varepsilon, \eta) \rightarrow (0,0)} M_{\varepsilon\eta} = \lim_{(\varepsilon, \eta) \rightarrow (0,0)} \phi_{\alpha}(x_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}) - \phi_2(y_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}) = M_{\alpha}. \quad (\text{A.13})$$

Par un raisonnement analogue à celui que l'on vient de faire, on obtient :

$$M_{\alpha} + \frac{|x_{\varepsilon\eta} - y_{\varepsilon\eta}|^2}{\varepsilon^2} \leq M_{\alpha} + m_v(\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2} \sqrt{\|\phi_1\|_{\infty} + \|\phi_2\|_{\infty}})$$

ce qui nous donne :

$$\lim_{(\varepsilon, \eta) \rightarrow (0,0)} \frac{|x_{\varepsilon\eta} - y_{\varepsilon\eta}|^2}{\varepsilon^2} = 0. \quad (\text{A.14})$$

Montrons maintenant que pour  $\varepsilon, \eta$  suffisamment petits, on a  $(x_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}) \in \mathcal{D} \times (0, T]$ . Supposons que ce ne soit pas le cas, on aurait alors une suite  $(\varepsilon_n, \eta_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(x_{\varepsilon_n \eta_n}, t_{\varepsilon_n \eta_n}) \in \overline{\mathcal{D}} \times \{0\} \cup \partial\mathcal{D} \times [0, T]$ . On a déjà vu que :

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha}(x_{\varepsilon_n \eta_n}, t_{\varepsilon_n \eta_n}) - \phi_2(y_{\varepsilon_n \eta_n}, s_{\varepsilon_n \eta_n}) &\leq \phi_{\alpha}(x_{\varepsilon_n \eta_n}, t_{\varepsilon_n \eta_n}) - \phi_2(x_{\varepsilon_n \eta_n}, t_{\varepsilon_n \eta_n}) \\ &\quad + m_{\phi_2}(\sqrt{\varepsilon_n^2 + \eta_n^2} \sqrt{\|\phi_1\|_{\infty} + \|\phi_2\|_{\infty}}) \end{aligned}$$

Or on a

$$\phi_{\alpha}(x_{\varepsilon_n \eta_n}, t_{\varepsilon_n \eta_n}) - \phi_2(x_{\varepsilon_n \eta_n}, t_{\varepsilon_n \eta_n}) \leq \phi_1(x_{\varepsilon_n \eta_n}, t_{\varepsilon_n \eta_n}) - \phi_2(x_{\varepsilon_n \eta_n}, t_{\varepsilon_n \eta_n}) \leq 0$$

puisque par hypothèse  $\phi_1 \leq \phi_2$  sur  $\overline{\mathcal{D}} \times \{0\} \cup \partial\mathcal{D} \times [0, T]$ . On en déduit :

$$\phi_{\alpha}(x_{\varepsilon_n \eta_n}, t_{\varepsilon_n \eta_n}) - \phi_2(y_{\varepsilon_n \eta_n}, s_{\varepsilon_n \eta_n}) \leq m_{\phi_2}(\sqrt{\varepsilon_n^2 + \eta_n^2} \sqrt{\|\phi_1\|_{\infty} + \|\phi_2\|_{\infty}})$$

et, en faisant tendre  $n$  vers l'infini :  $M_{\alpha} \leq 0$  ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ. On montre de même que pour  $\varepsilon, \eta$  suffisamment petits,  $(y_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta})$  est un élément de  $\mathcal{D} \times (0, T]$ .

Intéressons-nous maintenant à la fonction  $(x, t) \mapsto \phi_{\alpha}(x, t) - \varphi_{\varepsilon\eta}(x, t)$ , avec

$$\varphi_{\varepsilon\eta}(x, t) = \phi_2(y_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}) + \frac{|x - y_{\varepsilon\eta}|^2}{\varepsilon^2} + \frac{(t - s_{\varepsilon\eta})^2}{\eta^2}.$$

On constate que  $\varphi_{\varepsilon\eta}$  est une fonction  $C^1(\mathcal{D} \times (0, T])$ , et que  $\phi_{\alpha} - \varphi_{\varepsilon\eta}$  atteint son maximum en  $(x_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}) \in \mathcal{D} \times (0, T]$  si  $\varepsilon, \eta$  sont suffisamment petits. Comme  $\phi_{\alpha}$  est sous-solution de (A.10) dans  $\mathcal{D} \times (0, T]$  et que l'on a le lemme A.2, on en déduit :

$$2 \frac{t_{\varepsilon\eta} - s_{\varepsilon\eta}}{\eta^2} + H(x_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}, p_{\varepsilon\eta}) \leq -\alpha \quad (\text{A.15})$$

où l'on a posé

$$p_{\varepsilon\eta} = 2 \frac{x_{\varepsilon\eta} - y_{\varepsilon\eta}}{\varepsilon^2}.$$

La fonction  $(y, s) \mapsto \phi_2(y, s) - \gamma_{\varepsilon\eta}(y, s)$ , avec

$$\gamma_{\varepsilon\eta}(y, s) = \phi_{\alpha}(x_{\varepsilon\eta}, y_{\varepsilon\eta}) - \frac{|x_{\varepsilon\eta} - y|^2}{\varepsilon^2} - \frac{(t_{\varepsilon\eta} - s)^2}{\eta^2}$$

atteint son minimum en  $(y_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}) \in \mathcal{D} \times (0, T]$ , avec  $\phi_2$  sur-solution de (A.2). On obtient

$$2 \frac{t_{\varepsilon\eta} - s_{\varepsilon\eta}}{\eta^2} + H(y_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}, p_{\varepsilon\eta}) \geq 0. \quad (\text{A.16})$$

En soustrayant (A.16) à (A.15), on obtient :

$$H(x_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}, p_{\varepsilon\eta}) - H(y_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}, p_{\varepsilon\eta}) \leq -\alpha$$

soit encore :

$$H(x_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}, p_{\varepsilon\eta}) - H(x_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}, p_{\varepsilon\eta}) + H(x_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}, p_{\varepsilon\eta}) - H(y_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}, p_{\varepsilon\eta}) \leq -\alpha$$



D'après l'hypothèse (H2), on a :

$$|H(x_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}, p_{\varepsilon\eta}) - H(y_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}, p_{\varepsilon\eta})| \leq f(|x_{\varepsilon\eta} - y_{\varepsilon\eta}|(1 + |p_{\varepsilon\eta}|)).$$

avec  $\lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi) = 0$ . Or, on a, d'après (A.14) :

$$\lim_{(\varepsilon, \eta) \rightarrow (0,0)} |x_{\varepsilon\eta} - y_{\varepsilon\eta}| |p_{\varepsilon\eta}| = \lim_{(\varepsilon, \eta) \rightarrow (0,0)} 2 \frac{|x_{\varepsilon\eta} - y_{\varepsilon\eta}|^2}{\varepsilon^2} = 0$$

et d'après (A.12),  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |x_{\varepsilon\eta} - y_{\varepsilon\eta}| = 0$ . On en déduit l'existence de  $\varepsilon_0 > 0$  et  $\eta_0 > 0$  tels que, pour tout  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , pour tout  $\eta$ ,  $0 < \eta \leq \eta_0$ , on ait :

$$|H(x_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}, p_{\varepsilon\eta}) - H(y_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}, p_{\varepsilon\eta})| \leq \frac{\alpha}{4}. \quad (\text{A.17})$$

D'après l'hypothèse (H1), on a  $H$  continue sur  $\overline{\mathcal{D}} \times [0, T] \times \mathbb{R}^n$ ,  $H$  est donc uniformément continue sur  $\overline{\mathcal{D}} \times [0, T] \times K$ , où  $K$  est un compact quelconque de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $C > 0$ . D'après toujours (A.14), il existe  $\varepsilon_1, \eta_1 > 0$  tels que pour tout  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ , pour tout  $\eta$ ,  $0 < \eta < \eta_1$ , on ait :

$$\frac{|x_{\varepsilon\eta} - y_{\varepsilon\eta}|}{\varepsilon} \leq \frac{C}{2} \Rightarrow |p_{\varepsilon\eta}| \leq \frac{C}{\varepsilon}.$$

Soit donc  $0 < \varepsilon < \min(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ , on a, pour tout  $\eta$ ,  $0 < \eta < \min(\eta_0, \eta_1)$ ,  $p_{\varepsilon\eta} \in \overline{\mathcal{B}(0, \frac{C}{\varepsilon})}$ . On sait également d'après (A.11) que  $\lim_{\eta \rightarrow 0} |t_{\varepsilon\eta} - s_{\varepsilon\eta}| = 0$ . On en déduit l'existence d'un  $\eta$  suffisamment petit tel que :

$$|H(x_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}, p_{\varepsilon\eta}) - H(x_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}, p_{\varepsilon\eta})| \leq \frac{\alpha}{4} \quad (\text{A.18})$$

En combinant (A.17) et (A.18), on obtient :

$$-\frac{\alpha}{2} \leq H(x_{\varepsilon\eta}, t_{\varepsilon\eta}, p_{\varepsilon\eta}) - H(x_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}, p_{\varepsilon\eta}) + H(x_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}, p_{\varepsilon\eta}) - H(y_{\varepsilon\eta}, s_{\varepsilon\eta}, p_{\varepsilon\eta}) \leq -\alpha$$

soit encore  $\frac{\alpha}{2} \leq 0$ , ce qui est en contradiction avec  $\alpha > 0$ . On en déduit que pour tout  $\alpha > 0$ , on a  $M_\alpha \leq 0$ . ■

La démonstration du théorème A.3 est alors directe. En effet, on a pour tout  $\alpha > 0$ ,  $M \leq M_\alpha + \alpha T \leq \alpha T$ . En faisant tendre  $\alpha$  vers 0, on obtient le résultat voulu :

$$M = \max_{\overline{\mathcal{D}} \times [0, T]} \phi_1 - \phi_2 \leq 0.$$

En conclusion, on peut énoncer le

**Théorème A.5** Soit  $\mathcal{D}$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $T \in \mathbb{R}_*^+$ . Soit  $H \in C(\overline{\mathcal{D}} \times [0, T] \times \mathbb{R}^d)$  vérifiant (H1) il existe deux constantes positives  $C_2, C_3$  telles que

$$|H(x, t, p) - H(y, t, p)| \leq C_2 |p| |x - y| + C_3 |x - y|$$

pour tout  $(x, y, t, p) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$

(H2) il existe une constante  $C_4$  telle que  $|H(x, t, p) - H(x, t, q)| \leq C_4 |p - q|$  pour tout  $(x, t, p, q) \in \mathcal{D} \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

(H3) il existe un compact  $K \subset \mathcal{D}$  tel que  $\forall (x, t, p) \in \mathcal{D} \setminus K \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$ ,  $H(x, t, p) = 0$ .

Alors le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + H(x, t, \nabla \phi) = 0 \quad \forall (x, t) \in \mathcal{D} \times ]0, T[ \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x) \quad \forall x \in \mathcal{D} \\ \phi(x, t) = \phi_0(x) \quad \forall (x, t) \in \partial \mathcal{D} \times [0, T] \end{cases}$$

avec  $\phi_0$  fonction lipschitzienne sur  $\mathcal{D}$ , admet une unique solution de viscosité  $\phi$ , qui vérifie  $\phi \in W^{1, \infty}(\mathcal{D} \times ]0, T[)$ .

## A.2 Borne inférieure du gradient

En plus des résultats d'existence et d'unicité, nous avons également besoin de contrôler la décroissance au cours du temps du gradient de la solution de A.2. Nous utiliserons pour cela un théorème démontré<sup>6</sup> par Olivier Ley :

**Théorème A.6** *soit  $x \in \mathcal{D}$  et  $\eta > 0$  t.q.  $\mathcal{B}(x, \eta) \subset \mathcal{D}$ . Supposons que*

- $|\frac{\partial H}{\partial x}(y, t, p)| \leq L|p|$  pour presque tout  $(y, t, p) \in \mathcal{B}(x, \eta) \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$
- $|\frac{\partial H}{\partial p}(y, t, p)| \leq C$  pour presque tout  $(y, t, p) \in \mathcal{B}(x, \eta) \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$
- $H(y, t, p)$  est convexe pour la variable  $p$ , pour presque tout  $(y, t) \in \mathcal{B}(x, \eta) \times [0, T]$ .

Alors, si  $|\nabla\phi_0| \geq \gamma > 0$  (au sens de viscosité) sur  $\mathcal{B}(x, \eta)$ , on a :

$$|\nabla\phi| \geq \gamma \exp\left(-\frac{5Lt}{2}\right) \text{ sur } \delta(x, \eta) \text{ (au sens de viscosité)}$$

avec  $\delta(x, \eta) = \{(y, t) \in \mathcal{B}(x, \eta) \times ]0, T[, e^{Ct}(1 + |y - x|) \leq \eta + 1\}$ .

---

<sup>6</sup>cf théorème 4.2 p.10 de [Ley01]. Dans cet article, le résultat est démontré pour un hamiltonien vérifiant globalement les propriétés requises. Néanmoins, la preuve du résultat n'utilise que localement les propriétés, et reste donc valable dans ce cas.



# Annexe B

## Géométrie

### Introduction

Nous nous intéressons dans cette annexe aux notions de géométrie qui interviennent à de multiples reprises dans cette étude. Plus particulièrement, nous rappelons tout d'abord quelques définitions et résultats concernant la régularité du bord d'un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  utilisés aux parties 1 et 2 de ce travail. Nous abordons ensuite les notions de distance signée à un ouvert et de distance de Hausdorff, qui occupent une place centrale dans les méthodes de lignes de niveau développées dans la partie 2. Les ouvrages Elliptic problems in nonsmooth domains<sup>1</sup> de P.Grisvard et Variation et optimisation de formes<sup>2</sup> de A. Henrot and M. Pierre ont été deux sources inépuisables sur ces sujets.

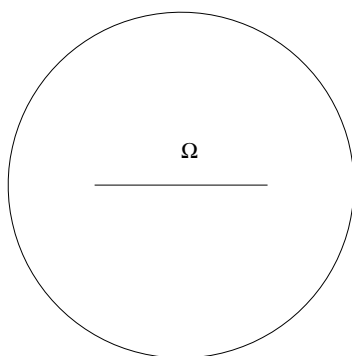
### B.1 Régularité des ouverts de $\mathbb{R}^d$

#### Définition B.1 - régularité du bord d'un ouvert

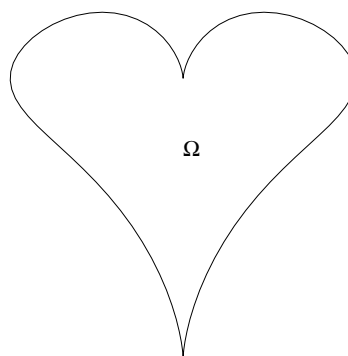
Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . On dit que sa frontière  $\partial\Omega$  est continue (lipschitzienne,  $C^{k,1}$ ,  $C^\infty$ ) (resp. une partie ouverte  $\Gamma$  de sa frontière,  $|\Gamma| > 0$  est continue (lipschitzienne,  $C^{k,1}$ ,  $C^\infty$ )) si, pour tout  $x_0 \in \partial\Omega$  (resp.  $x_0 \in \Gamma$ ), il existe dans un repère orthonormé local d'origine  $x_0 = 0$ , un cylindre  $K = K' \times ]-a, a[$  centré à l'origine, avec  $K'$  boule ouverte de  $\mathbb{R}^{d-1}$  de rayon  $r$ , et une fonction  $\varphi : K' \rightarrow ]-a, a[$  continue (lipschitzienne,  $C^{k,1}$ ,  $C^\infty$ ) avec  $\varphi(0) = 0$  et :

$$\partial\Omega \cap K = \{(x', \varphi(x')), x' \in K'\}, \quad \Omega \cap K = \{(x', x_N) \in K, x_N > \varphi(x')\}.$$

Quelques exemples :



Un ouvert à bord non continu

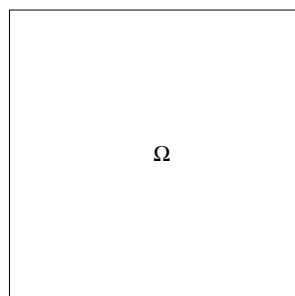


Un ouvert à bord continu, non lipschitzien

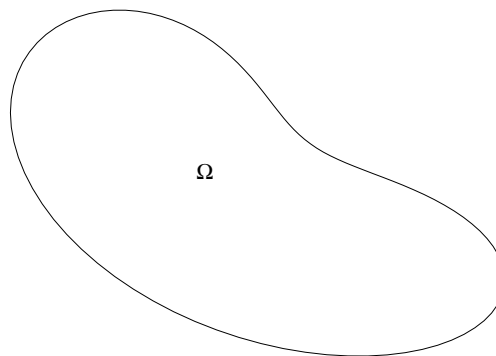
---

<sup>1</sup>[Gri85]

<sup>2</sup>[HP05]



Un ouvert à bord lipschitzien

Un ouvert à bord  $C^\infty$ 

La régularité du bord d'un ouvert intervient dans de nombreux théorèmes : ainsi, la formule de Green p.11 est valable dans un ouvert à bord lipschitzien. Les théorèmes de régularité elliptique demandent aussi une certaine régularité du bord.

**Notations** : on note  $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = 1\}$ . Pour  $y \in \mathbb{R}^d$ ,  $\xi \in S^{d-1}$ ,  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , on note  $C(y, \xi, \theta) = \{z \in \mathbb{R}^d \mid (z - y, \xi) > |z - y| \cos(\theta), |z - y| < \theta\}$ .

### Définition B.2 - propriété du $\varepsilon$ -cône

On dit qu'un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  a la propriété du  $\varepsilon$ -cône si il existe  $\varepsilon \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  t.q.  $\forall x \in \partial\Omega$ ,  $\exists \xi_x \in S^{d-1} \mid \forall y \in \overline{\Omega} \cap \mathcal{B}(x, \varepsilon)$ ,  $C(y, \xi_x, \varepsilon) \subset \Omega$ .

Le théorème suivant (cf théorème 2.4.7 p.53 de [HP05]) fait le lien entre la notion de bord lipschitzien et la propriété du  $\varepsilon$ -cône :

**Théorème B.1** *un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  de frontière bornée à la propriété du  $\varepsilon$ -cône si et seulement si il est à frontière lipschitzienne.*

On démontre en utilisant ce théorème que tout ouvert convexe borné est à bord lipschitzien<sup>3</sup>. Démontrons maintenant une propriété un peu technique qui sert au premier chapitre :

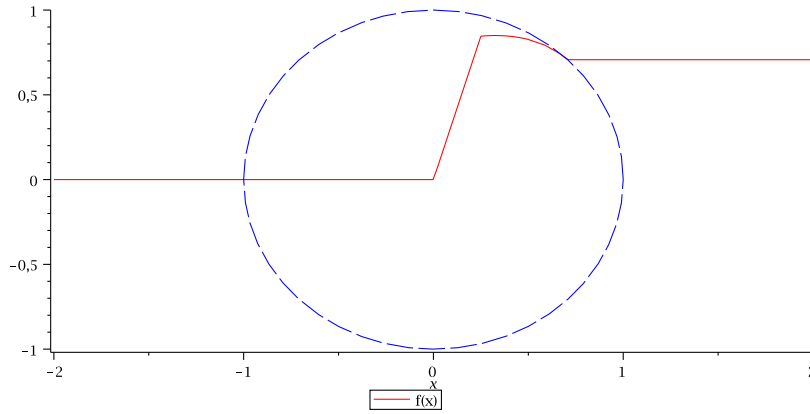
**Propriété B.1** *soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , et  $\Gamma \subset \partial\Omega$  une partie ouverte et lipschitzienne de sa frontière, de mesure non nulle. Soit  $x_0 \in \Gamma$ . Il existe un ouvert  $\Xi$  à frontière lipschitzienne vérifiant  $x_0 \in \Xi$ , tel que  $\Theta := \Xi \cap \Omega$  soit de frontière lipschitzienne et vérifiant  $\Xi \cap \partial\Omega \subset \Gamma$ .*

**Remarque** : il est assez clair que l'on va pouvoir construire un ouvert  $\Xi$  qui vérifie les propriétés voulues. Par contre, on ne peut pas prendre n'importe quel ouvert à bord lipschitzien contenant  $x_0$ . Un exemple en dimension 2 : soit  $f := \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  t.q.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \left(\frac{5}{13} + \frac{4}{13}\sqrt{95}\right)x & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{5}{13}x + \frac{2}{13}\sqrt{26 - 36x^2} & \text{si } \frac{1}{4} < x \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \text{si } \sqrt{\frac{1}{2}} < x \end{cases}$$

On pose  $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > f(x)\}$  et  $x_0 = (0, 0)$ .  $\Omega$  est un ouvert à frontière lipschitzienne. Or si on pose  $\Xi := \mathcal{B}(0, 1)$ ,  $\Xi$  est à frontière lipschitzienne, mais  $\Theta = \Omega \cap \Xi$  présente un cusp au point  $(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$ .

<sup>3</sup>proposition 2.4.4 p.52 de [HP05]



**Preuve de la propriété B.1 :** on sait qu'il existe  $\frac{\pi}{2} > \varepsilon_0 > 0$  et  $\xi_0 \in \mathcal{S}^{d-1}$  t.q.  $\forall x \in B(x_0, \varepsilon_0) \cap \overline{\Omega}$ ,  $C(x, \xi_0, \varepsilon_0) \subset \Omega$ . On pose  $z_0 := x_0 - \frac{\varepsilon_0}{2}\xi_0$ .  $z_0 \notin \overline{\Omega}$ , car sinon, comme  $x_0 \in C(z_0, \xi_0, \varepsilon_0)$ , on aurait  $x_0 \in \Omega$ , ce qui est en contradiction avec  $x_0 \in \partial\Omega$ .

• On pose  $0 < \theta_1 < \varepsilon_0$  et  $\mathcal{C}_1 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (x - x_0, \xi_0) > \cos(\theta_1)|x - x_0|\}$ . On va montrer :  $\mathcal{C}_1 \cap \overline{B(x_0, \varepsilon_0)} \subset \Omega$ . Soit  $x \in \mathcal{C}_1 \cap B(x_0, \varepsilon_0)$ , on a :  $(x - x_0, \xi_0) > \cos(\theta_1)|x - x_0| > \cos(\varepsilon_0)|x - x_0|$  et  $|x - x_0| < \varepsilon_0$ , ce qui implique  $x \in C(x_0, \xi_0, \varepsilon_0)$ , et donc  $x \in \Omega$ .

Soit maintenant  $x \in \partial B(x_0, \varepsilon_0) \cap \mathcal{C}_1$ . On pose  $\eta = \frac{x - x_0}{\varepsilon_0}$  et pour  $0 < \alpha < \varepsilon_0$ ,  $x(\alpha) = x - \alpha\eta$ .  $|x(\alpha) - x_0| = |x - \frac{\alpha}{\varepsilon_0}(x - x_0) - x_0| = \varepsilon_0 - \alpha < \varepsilon_0$ , donc  $x(\alpha) \in B(x_0, \varepsilon_0)$ . On a de plus :

$$(x(\alpha) - x_0, \xi_0) = (1 - \frac{\alpha}{\varepsilon_0})(x - x_0, \xi_0) > (1 - \frac{\alpha}{\varepsilon_0})\varepsilon_0 \cos(\theta_1) = |x(\alpha) - x| \cos(\theta_1).$$

On en déduit :  $x(\alpha) \in \mathcal{C}_1$ , et donc  $x(\alpha) \in \Omega$ . Mais  $(x - x(\alpha), \xi_0) = \frac{\alpha}{\varepsilon_0}(x - x_0, \xi_0) > \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \cos(\theta_1)|x - x_0| = \alpha \cos(\theta_1) = |x - x(\alpha)| \cos(\theta_1)$ , d'où  $x \in C(x(\alpha), \xi_0, \varepsilon_0) \Rightarrow x \in \Omega$ .

• Soit  $x \in \mathcal{C}_1$ ,  $r := |x - x_0| > 0$ , il existe  $\beta \in [0, \theta_1[$  et  $\eta \in \mathbb{R}^d$  tels que  $(\eta, \xi_0) = 0$  et  $x - x_0 = r \cos(\beta)\xi_0 + r \sin(\beta)\eta$ . On a alors  $x - z_0 = (r \cos(\beta) + \frac{\varepsilon_0}{2})\xi_0 + r \sin(\beta)\eta$ . Si on pose  $\beta'$  l'unique élément de  $[0, \pi]$  tel que  $|x - z_0| \cos(\beta') = (x - z_0, \xi_0)$ , et  $r' = |x - z_0|$ , on a également  $x - z_0 = r' \cos(\beta')\xi_0 + r' \sin(\beta')\eta$ . On en déduit :

$$\tan(\beta') = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta) + \frac{\varepsilon_0}{2r}} := F(\beta).$$

Remarquons tout de suite que  $\tan(\beta') < \tan(\beta) \Rightarrow \beta' < \beta$  et  $\beta' \in [0, \theta_1[$ . De plus, il est facile de voir que  $\beta'$  est une fonction croissante de  $\beta$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

• Soit  $\theta_2 \in ]0, \theta_1[$ . On définit  $\mathcal{C}_2 := \{x \in \mathbb{R}^d \mid (x - z_0, \xi_0) > \cos(\theta_2)|x - z_0|\}$ , où  $\theta_2' = \arctan(F(\theta_2))$ . Il est facile de voir que  $\mathcal{C}_2$  est convexe. Soit  $\theta \in ]0, \theta_2]$ ,  $y_0 \in \overline{\mathcal{C}_2}$  et  $x \in C(y_0, \xi_0, \theta)$ . On a :

$$(x - z_0, \xi_0) = (x - y_0, \xi_0) + (y_0 - z_0, \xi_0) > \cos(\theta)|x - y_0| + \cos(\theta_2)|y_0 - z_0| > \cos(\theta_2)|x - z_0|$$

et donc  $x \in \mathcal{C}_2$ . On en déduit que  $\forall \theta \in ]0, \theta_2]$ ,  $\forall y_0 \in \overline{\mathcal{C}_2}$ , on a  $C(y_0, \xi_0, \theta) \subset \mathcal{C}_2$ .

Soit  $x \in \partial B(x_0, \varepsilon_0) \cap \overline{\mathcal{C}_2}$ ,  $\beta$  et  $\beta'$  définis comme précédemment. Comme  $x \in \overline{\mathcal{C}_2}$ , on a  $\beta' \leq \theta_2'$ . On en déduit que  $\beta \leq \theta_2 < \theta_1$ , ce qui implique  $x \in \mathcal{C}_1 \cap \overline{B(x_0, \varepsilon_0)}$ , d'où  $x \in \Omega$ .

On pose  $\Xi := \mathcal{C}_2 \cap B(x_0, \varepsilon_0)$ . Il est facile de vérifier que  $x_0 \in \Xi$ , et comme  $\mathcal{C}_2$  et  $B(x_0, \varepsilon_0)$  sont convexes, on a  $\Xi$  convexe.  $\Xi$  est donc à frontière lipschitzienne, il vérifie la propriété du  $\varepsilon$ -cône, avec  $\varepsilon = \varepsilon_1$ .

• Soit finalement  $\Theta := \Xi \cap \Omega$ . On va montrer que  $\Theta$  a la propriété du  $\varepsilon$ -cône. Soit donc  $y_0 \in \partial\Theta$ . Par définition,  $y_0 \in \overline{\mathcal{C}_2} \cap B(x_0, \varepsilon_0) \cap \overline{\Omega} \subset \overline{\mathcal{C}_2} \cap \overline{B(x_0, \varepsilon_0)} \cap \overline{\Omega}$ . On a vu que si  $x \in \overline{\mathcal{C}_2} \cap \partial B(x_0, \varepsilon_0)$ ,  $x \in \Omega \Rightarrow x \notin \partial\Omega$ . On a donc  $d(\partial\Omega \cap \partial\Theta, \partial B(x_0, \varepsilon_0)) = d > 0$ . On est devant l'alternative suivante :

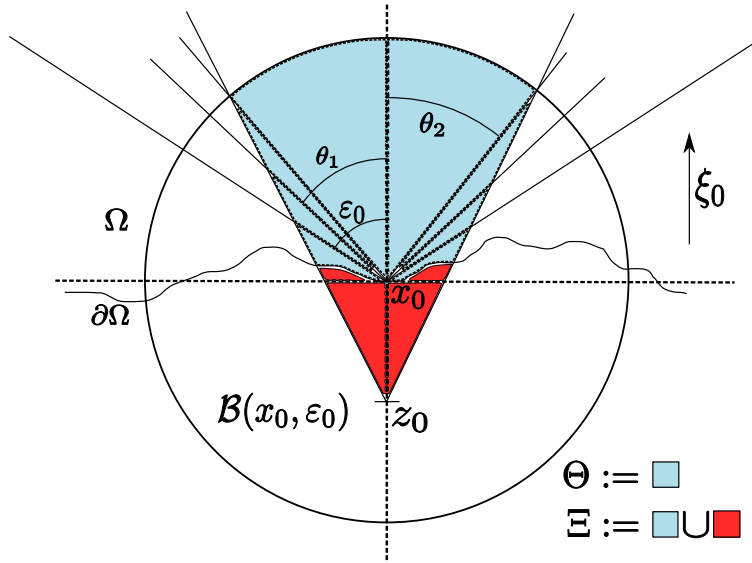
◦ soit  $d(y_0, \partial\Omega \cap \partial\Theta) < \frac{d}{2}$ . On a alors  $d(y_0, \partial B(x_0, \varepsilon_0)) \geq \frac{d}{2}$ , d'où, comme  $y_0 \in \overline{B(x_0, \varepsilon_0)}$ ,  $y_0 \in \overline{B(x_0, \varepsilon_0 - \frac{d}{2})}$ . On pose alors  $\mu_1 < \min(\theta_2, \frac{d}{8})$ . Soit  $y \in B(y_0, \mu_1) \cap \overline{\Theta}$ , et  $x \in C(y, \xi_0, \mu_1)$ . On a :  $|x - x_0| \leq |x - y| + |y - y_0| + |y_0 - x_0| < 2\mu_1 + \varepsilon_0 - \frac{d}{2} < \varepsilon_0 - \frac{d}{4} < \varepsilon_0$ , d'où  $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$ . Comme  $y \in \overline{\mathcal{C}_2}$  et  $\mu_1 < \theta_2$ , on a montré que  $x \in \mathcal{C}_2$ . Enfin,  $|y - x_0| < \mu_1 + \varepsilon_0 - \frac{d}{2} < \varepsilon_0$ , donc  $y \in B(x_0, \varepsilon_0) \cap \overline{\Omega}$ , d'où, comme  $\mu_1 < \varepsilon_0$ ,  $x \in C(y_0, \xi_0, \mu_1) \subset C(y_0, \xi_0, \varepsilon_0) \subset \Omega$ . On a donc montré :

$$\forall y_0 \in \partial\Theta \mid d(y_0, \partial\Omega \cap \partial\Theta) < \frac{d}{2}, \forall y \in B(y_0, \mu_1) \cap \overline{\Theta}, C(y, \xi_0, \mu_1) \subset \Theta.$$

◦ soit  $d(y_0, \partial\Omega \cap \partial\Theta) \geq \frac{d}{2}$ . On pose  $\mathcal{A} := \{x \in \partial\Theta \mid d(x, \partial\Omega \cap \partial\Theta) \geq \frac{d}{2}\}$ , et  $\tilde{d} := d(\mathcal{A}, \partial\Omega) > 0$ . Comme  $y_0 \in \overline{\Omega}$  et  $y_0 \notin \partial\Omega$ , on a  $y_0 \in \Omega$ , et donc  $\mathcal{B}(y_0, \tilde{d}) \in \Omega$ . On pose alors  $\mu_2 < \min(\varepsilon_1, \frac{\tilde{d}}{2})$ . Par définition,  $\forall y \in \mathcal{B}(y_0, \varepsilon_1) \cap \overline{\Xi}$ ,  $C(y, \xi_{y_0}, \varepsilon_1) \in \Xi$ . On en déduit :  $\forall y \in \mathcal{B}(y_0, \mu_2) \cap \overline{\Theta}$ ,  $C(y, \xi_{y_0}, \mu_2) \in \Xi$ . Enfin, pour  $y \in \mathcal{B}(y_0, \mu_2) \cap \overline{\Theta}$ , et  $x \in C(y, \xi_{y_0}, \mu_2)$ , on a  $|x - y_0| < |x - y| + |y - y_0| < \tilde{d}$ , et donc  $x \in \mathcal{B}(y_0, \tilde{d}) \subset \Omega$ . On a donc montré :

$$\forall y_0 \in \partial\Theta \mid d(y_0, \partial\Omega \cap \partial\Theta) \geq \frac{d}{2}, \exists \xi_{y_0} \in S^{d-1}, \forall y \in \mathcal{B}(y_0, \mu_2) \cap \overline{\Theta}, C(y, \xi_{y_0}, \mu_2) \subset \Theta.$$

$\Theta$  vérifie donc la propriété du  $\varepsilon$ -cône, avec  $\varepsilon = \min(\mu_1, \mu_2)$ . ■



**Propriété B.2** soit  $\mathcal{O}$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  à bord continu, et  $\omega$  un ouvert vérifiant

$$\mathcal{O} \subset \omega \subset \overline{\mathcal{O}}.$$

Alors  $\omega = \mathcal{O}$ .

**Preuve** : supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe alors  $x_0 \in \omega$  tel que  $x_0 \notin \mathcal{O}$ . Comme  $\omega$  est un ouvert, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\mathcal{B}(x_0, \varepsilon) \subset \omega$ , ce qui implique, puisque par hypothèse  $\omega \subset \overline{\mathcal{O}}$ ,  $\mathcal{B}(x_0, \varepsilon) \subset \overline{\mathcal{O}}$ .

Remarquons que  $x_0 \in \mathcal{O}$  et  $x_0 \in \mathcal{B}(x_0, \varepsilon) \subset \overline{\mathcal{O}}$ . On a donc  $x_0 \in \partial\mathcal{O}$ . En se plaçant dans le formalisme de la définition B.1, il existe un repère orthonormé local centré en  $x_0 = 0$ , un cylindre  $K := K' \times ]-a, a[$  avec  $a > 0$  et  $K'$  boule de  $\mathbb{R}^{d-1}$  de rayon  $r$ , et une fonction  $\varphi : K' \mapsto ]-a, a[$  continue telle que  $\varphi(0) = 0$  et

$$\partial\omega \cap K = \{(x', \varphi(x')), x' \in K'\}, \quad \omega \cap K = \{(x', x_d), x_d > \varphi(x')\}.$$

Soit donc  $\eta > 0$  vérifiant  $\eta < \min(r, a, \varepsilon)$ . On définit  $\bar{x} = (0, -\eta) \in K$ . Puisque  $\varphi(0) = 0$ , on a directement  $\bar{x} \notin \overline{\mathcal{O}}$ . Mais on a également  $\|x_0 - \bar{x}\|_{\mathbb{R}^d} = \eta < \varepsilon$ , d'où  $\bar{x} \in \mathcal{B}(x_0, \varepsilon)$ , ce qui implique  $\bar{x} \in \overline{\mathcal{O}}$ . Contradiction. ■

## B.2 Distance signée et distance de Hausdorff

Nous présentons deux distances qui nous servent dans cette étude : la distance signée, qui permet de caractériser un ouvert par l'intermédiaire d'une fonction, et que nous utilisons souvent au chapitre 5, et la distance de Hausdorff, qui caractérise la proximité géométrique de deux ouverts.

**Distance**

Soit  $\omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^d$ . On définit classiquement la distance à  $\omega$  par :

$$d_\omega(x) = \inf_{y \in \omega} |x - y|.$$

On a

(i)  $d_\omega(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{\omega}$

(ii)  $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad |d_\omega(x) - d_\omega(y)| \leq |x - y|$

(iii)  $d_\omega$  est différentiable presque partout sur  $\mathbb{R}^d, |\nabla d_\omega(x)| = \begin{cases} 0 & \text{pour presque tout } x \in \omega \\ 1 & \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\omega} \end{cases}$

**Distance signée**

On définit la distance signée à  $\omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^d$  par

$$\bar{d}_\omega(x) = d_\omega(x) - d_{\mathbb{R}^d \setminus \bar{\omega}}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Elle vérifie les propriétés suivantes :

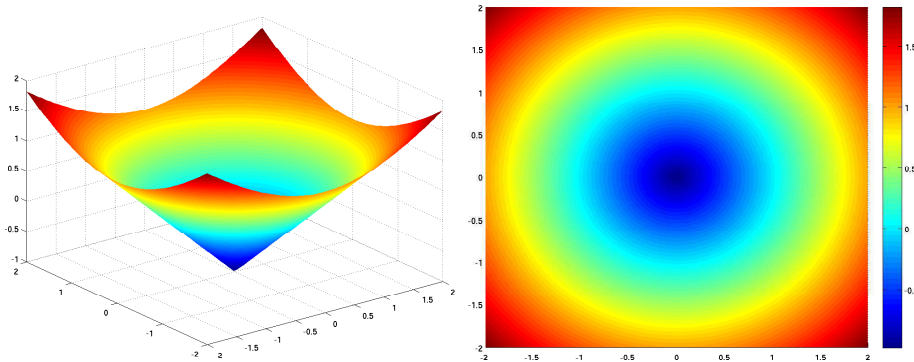
[1]  $\bar{d}_\omega(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \omega, \quad \bar{d}_\omega(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\omega}, \quad \bar{d}_\omega(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \partial\omega$

[2]  $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad |\bar{d}_\omega(x) - \bar{d}_\omega(y)| \leq |x - y|$

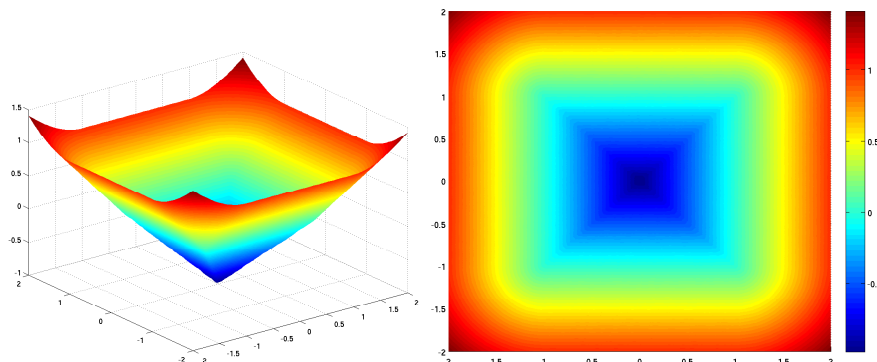
[3]  $|\nabla \bar{d}_\omega(x)| = 1$  presque partout sur  $\mathbb{R}^d$ .

La propriété [1] dit que l'on caractérise totalement  $\omega$  par l'intermédiaire de  $d_\omega$ . La propriété [2] dit que la fonction distance signée est lipschitzienne, et donc qu'elle admet un gradient presque partout, de norme 1 d'après la propriété [3].

La distance et la distance signée ont bien d'autres propriétés. L'article de Michel C. Delfour et Jean-Paul Zolésio [DZ94] rassemble un grand nombre d'entre elles. On y trouve les démonstrations des résultats présentés ici.



Fonction distance signée au disque de centre (0,0) de rayon 1.





Fonction distance signée au carré  $]-1, 1[ \times ]-1, 1[$ .

Nous utiliserons le résultat suivant sur la distance signée<sup>4</sup> :

**Propriété B.3** *soit  $\omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . La distance signée  $\delta_\omega$  vérifie  $|\nabla \delta_\omega| = 1$  au sens de viscosité.*

### Distance de Hausdorff

La distance de Hausdorff entre les ouverts apparaît à maintes reprises dans notre étude. Nous rappelons ici sa définition, ainsi que quelques propriétés que nous utilisons<sup>5</sup>.

**Définition B.3 - distance de Hausdorff entre deux compacts :** soient  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  deux compacts de  $\mathbb{R}^d$ . La distance de Hausdorff entre  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$ , notée  $d^H(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ , est donnée par

$$d^H(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) = \max\left(\sup_{x \in \mathcal{K}_1} d(x, \mathcal{K}_2), \sup_{x \in \mathcal{K}_2} d(x, \mathcal{K}_1)\right).$$

**Définition B.4 - distance de Hausdorff entre deux ouverts :** soient  $\omega_1$  et  $\omega_2$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^d$  contenus dans le même compact  $\mathcal{K}$ . La distance de Hausdorff entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , notée  $d_H(\omega_1, \omega_2)$ , est donnée par

$$d_H(\omega_1, \omega_2) = d^H(\mathcal{K} \setminus \omega_1, \mathcal{K} \setminus \omega_2).$$

**Définition B.5 - convergence au sens de Hausdorff pour les ouverts :** soient  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\omega$  des ouverts de  $\mathbb{R}^d$  contenus dans un même compact  $\mathcal{K}$ . On dira que la suite  $\omega_n$  converge vers  $\omega$  au sens de Hausdorff si

$$d_H(\omega_n, \omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Nous construisons aux chapitres 5 et 6 des suites d'ouverts contenues dans un même compact, et décroissantes pour l'inclusion. On peut donc directement utiliser la propriété suivante :

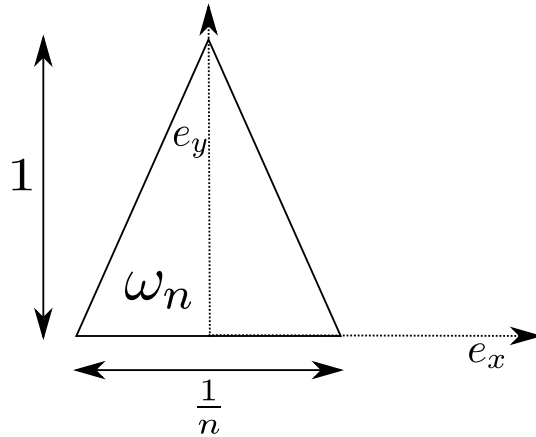
**Propriété B.4** *soit  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'ouverts contenus dans un même compact  $\mathcal{K}$ , et décroissante pour l'inclusion. Alors  $\omega_n$  converge au sens de Hausdorff vers  $\omega := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \omega_n$ .*

**Propriété B.5** *l'inclusion est stable pour la convergence au sens de Hausdorff.*

On peut se demander si  $d_H(\omega_n, \omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  implique  $d^H(\partial\omega_n, \partial\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . En fait, il n'en est rien. On peut facilement construire un contre-exemple dans  $\mathbb{R}^2$  : considérons la suite de triangles  $\omega_n$  définis sur la figure ci-dessous

<sup>4</sup>voir le chapitre 21.3 de [ACM10]

<sup>5</sup>pour plus de renseignements, et en particulier les démonstrations des propriétés, se reporter au 2.2.3 p.28 de [HP05]



En utilisant la propriété B.4, on voit que  $\omega_n$  converge au sens de Hausdorff vers l'ensemble vide. Mais on montre facilement que  $\partial\omega_n$  converge (au sens de la distance de Hausdorff pour les compacts) vers  $\{0\} \times [0, 1]$ . On a néanmoins la propriété suivante :

**Propriété B.6** soit  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\omega$  des ouverts contenus dans un même compact  $\mathcal{K}$ , t.q.  $\omega_n$  converge au sens de Hausdorff vers  $\omega$ . Soit  $x \in \partial\omega$ . Alors il existe  $x_n \in \partial\omega_n$  t.q.  $d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

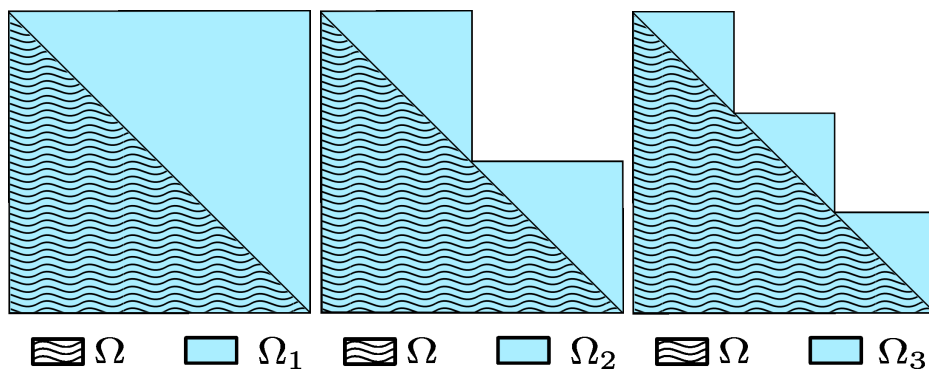
Il est amusant de noter que si une suite d'ouverts  $\omega_n$  converge au sens de Hausdorff vers un ouvert  $\omega$ , on n'a pas forcément convergence du périmètre de  $\omega_n$  vers celui de  $\omega$ , même si  $\partial\omega_n$  converge vers  $\partial\omega$ , comme le montre le contre-exemple suivant. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit la fonction

$$f_n : x \in ]0, 1[ \mapsto 1 - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}.$$

On définit alors les ensembles

$$\Omega_n := \{(x, y) \in ]0, 1[ \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f_n(x)\}, \quad \Omega := \{(x, y) \in ]0, 1[ \times \mathbb{R} \mid 0 < y < 1 - x\}.$$

On a  $d_H(\Omega_n, \Omega) = d^H(\partial\Omega_n, \partial\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2}n}$ . Néanmoins, le périmètre de  $\Omega_n$  est de 4 pour tout  $n$ , alors que le périmètre de  $\Omega$  est de  $2 + \sqrt{2}$ .





## Annexe C

# Stabilité du problème de Cauchy dans un ouvert à bord lipschitzien

### Introduction

Nous reproduisons ici un rapport de recherche consacré à l'obtention d'une estimation de stabilité pour le problème de Cauchy avec opérateur de Laplace dans un domaine à bord lipschitzien. Cette estimation est obtenue à l'aide d'une inégalité de Carleman intérieure et grâce à la construction d'une suite de boules approchant le bord du domaine. On obtient ainsi une estimation de stabilité logarithmique, son exposant étant explicitement exprimé comme une fonction de la singularité du bord du domaine. On en déduit une estimation de la vitesse de convergence de la méthode de quasi-réversibilité, ce qui permet de mettre en évidence numériquement l'optimalité de l'estimation.

Ce travail a fait l'objet d'un article : *About stability and regularization of ill-posed elliptic Cauchy problems : the case of Lipschitz domains*, L.Bourgeois & J.Dardé, *Applicable Analysis, iFirst*, 2010.

---

**Abstract:** this paper is devoted to a conditional stability estimate related to the ill-posed Cauchy problems for the Laplace's equation in domains with Lipschitz boundary. It completes the results obtained in [Bou08] for domains of class  $C^{1,1}$ . This estimate is established by using an interior Carleman estimate and a technique based on a sequence of balls which approach the boundary. This technique is inspired from [ABRV00]. We obtain a logarithmic stability estimate, the exponent of which is specified as a function of the boundary's singularity. Such stability estimate induces a convergence rate for the method of quasi-reversibility introduced in [LL67] to solve the Cauchy problems. The optimality of this convergence rate is tested numerically, precisely a discretized method of quasi-reversibility is performed by using a nonconforming finite element. The obtained results show very good agreement between theoretical and numerical convergence rates.

### C.1 Introduction

The problem of stability for ill-posed elliptic Cauchy problems plays an important role in the fields of inverse problems governed by elliptic PDEs. It can be considered as a first step to study the stability of many inverse problems of interest like the data completion problem (see remark C.3 hereafter), the inverse obstacle problem [ABRV00] or the corrosion detection problem [Cho09]. The present paper can be considered as the continuation of [Bou08], and consequently we refer to the introduction of such paper for a more precise description of this subject and some bibliography. In [Bou08], the following conditional stability result was obtained in the case of operator  $P = -\Delta - k$ ,

with  $k \in \mathbb{R}$ .

For a bounded and connected open domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  with  $C^{1,1}$  boundary, if  $\Gamma_0$  is an open part of  $\partial\Omega$ , then for all  $\kappa \in ]0, 1[$  there exists  $C$  such that for all functions  $u \in H^2(\Omega)$  which satisfy

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq M, \quad \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Gamma_0)} + \|\partial_n u\|_{L^2(\Gamma_0)} \leq \delta,$$

for some constant  $M$  and sufficiently small  $\delta$ ,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{M}{(\log(M/\delta))^\kappa}.$$

Furthermore, the upper bound  $\kappa = 1$  of the exponent cannot be improved.

The result obtained in [Bou08] is a generalization of the one obtained in [Phu03] for domains with  $C^\infty$  boundary. The proof mainly relies on a Carleman estimate near the boundary, in which the weight function is expressed in term of the distance to the boundary. Since we have to differentiate twice this weight function, we need the boundary  $\partial\Omega$  to be at least  $C^{1,1}$ . In the following paper, we now study how such a conditional stability result can be extended to Lipschitz domains, the boundary of which is not smooth enough to apply the same method.

We hence consider an open, bounded and connected domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  the boundary  $\partial\Omega$  of which is Lipschitz. In particular, this is equivalent to the fact that  $\Omega$  satisfies the cone property (see definition 2.4.1 and theorem 2.4.7 of [HP05]). The cone property implies in particular that there exist  $\theta \in ]0, \pi/2[$  and  $R_0 > 0$  such that for all  $x_0 \in \partial\Omega$ , there exists  $\xi \in \mathbb{R}^N$ ,  $|\xi| = 1$ , such that the finite cone

$$C = \{x \in \mathbb{R}^N, (x - x_0) \cdot \xi > |x - x_0| \cos \theta, |x - x_0| < R_0\}$$

is included in  $\Omega$ .

As above,  $\Gamma_0$  denotes an open part of  $\partial\Omega$  which is  $C^{1,1}$ . Lastly, we assume that  $k$  is not a Dirichlet eigenvalue of the operator  $-\Delta$  in  $\Omega$ . The main result we obtain is that for all  $\alpha \in [0, 1]$ , for all  $\kappa \in ]0, (1 + \alpha)\kappa_0(\theta)/2[$  there exists  $C$  such that for all functions  $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$  such that  $\Delta u \in L^2(\Omega)$  and

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq M, \quad \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Gamma_0)} + \|\partial_n u\|_{L^2(\Gamma_0)} \leq \delta,$$

for some constant  $M$  and sufficiently small  $\delta$ , then

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{M}{(\log(M/\delta))^\kappa}. \quad (\text{C.1})$$

Here,  $\kappa_0(\theta)$  is the solution of the following simple maximization problem

$$\kappa_0(\theta) = \frac{1}{2} \sup_{x>0} \frac{\sin \theta (1 - e^{-x})}{\sqrt{1+x} - \sin \theta}.$$

The continuous function  $\kappa_0$  is increasing on the segment  $[0, \pi/2]$  and ranges from  $\kappa_0(0) = 0$  to  $\kappa_0(\pi/2) = 1$ . Since a domain of class  $C^1$  has a Lipschitz boundary which satisfies the cone property with any  $\theta \in ]0, \pi/2[$ , we obtain that (C.1) is satisfied for all  $\kappa \in ]0, (1 + \alpha)/2[$  in that case. The analysis of the conditional stability in Lipschitz domains was already addressed in [ABRV00] and [Sin05], but in these works, the exponent of the logarithm was not specified. This is the main novelty of the following paper to specify the exponent as a function of the geometric singularity. It is obtained by using of sequence of three spheres inequalities, the sequence of centers of these spheres approaching the boundary, and the sequence of radii tending to 0. This technique is borrowed from [ABRV00], with two differences. First, the three spheres inequalities result from Carleman estimates instead of doubling properties. Secondly, we perform an optimization of this sequence of inequalities in order to obtain the best possible logarithmic exponent.

Another concern is to obtain a convergence rate for the method of quasi-reversibility to solve the

ill-posed Cauchy problems for the operator  $P$ . This requires a stability estimate for functions that are only in  $H^2(\Omega)$ . For  $N = 2$ , we obtain that for all  $\kappa \in ]0, \kappa_0(\theta)/2[$  there exists  $C$  such that for all functions  $u \in H^2(\Omega)$  which satisfy

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq M, \quad \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Gamma_0)} + \|\partial_n u\|_{L^2(\Gamma_0)} \leq \delta,$$

for some constant  $M$  and sufficiently small  $\delta$ , then

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{M}{(\log(M/\delta))^\kappa}.$$

For  $N = 3$ , we have the same result for all  $\kappa \in ]0, \kappa_0(\theta)/4[$ . As a consequence, we prove a logarithmic convergence rate for the method of quasi-reversibility, with the limit exponent  $\kappa_0(\theta)/2$  in 2D and  $\kappa_0(\theta)/4$  in 3D, possibly  $\kappa_0(\theta)$  provided we assume additional regularity for the solution of quasi-reversibility and the "true" solution.

From a numerical point of view, a connected question is to determine if the influence of the geometric singularity on the logarithmic exponent can be actually observed in numerical experiments. An easy way to test this is to capture the convergence rate of a discretized method of quasi-reversibility for a fixed refined mesh, when the regularization parameter tends to 0. In 2D, we analyze this convergence rate as a function of the smallest angle of a polygonal domain, and observe a pretty good agreement between numerical and theoretical convergence rates.

The paper is organized as follows. In section 2 we establish some preliminary useful results related to the three spheres inequality. The section 3 is devoted to the estimate up to the Lipschitz boundary, which leads to the main results of conditional stability in  $\Omega$ . Lastly, in section 4, we derive from this conditional stability some convergence rate for the method of quasi-reversibility in Lipschitz domains. It enables us to compare such convergence rate with the convergence rate obtained numerically by using a discretized method of quasi-reversibility, and hence to test the optimality of our stability estimate.

## C.2 Some preliminary results

This section consists of several lemmas that will be used in next section. They concern the three spheres inequality. We first recall the following interior Carleman estimate.

**Lemma C.1** *We consider the operator  $P = -\Delta - ak$ . with  $a, k \in \mathbb{R}$ ,  $a \in ]0, 1[$ . Let  $\omega, U$  denote two bounded and open domains with  $\bar{\omega} \subset U \subset \mathbb{R}^N$ . Let  $\phi$  be a smooth function defined in  $U$  such that  $\nabla\phi$  does not vanish in  $U$ . Let denote  $P_\phi = h^2 e^{\frac{\phi}{h}} \circ P \circ e^{-\frac{\phi}{h}}$ , and  $p_\phi(x, \xi)$  the principal part of operator  $P_\phi$ . We assume that*

$$\exists c_1 > 0, \quad p_\phi(x, \xi) = 0 \quad \text{and} \quad (x, \xi) \in U \times \mathbb{R}^N \quad \Rightarrow \quad \{\text{Re}p_\phi, \text{Im}p_\phi\}(x, \xi) \geq c_1. \quad (\text{C.2})$$

*Then there exist  $K, h_0 > 0$ , with  $K$  independent of  $ak$ , with  $h_0$  depending on  $ak$  only through  $|k|$ , such that  $\forall h \in ]0, h_0[$ , we have*

$$\int_\omega u^2 e^{2\frac{\phi}{h}} dx + h^2 \int_\omega |\nabla u|^2 e^{2\frac{\phi}{h}} dx \leq Kh^3 \int_\omega |Pu|^2 e^{2\frac{\phi}{h}} dx, \quad (\text{C.3})$$

*for all function  $u \in H_0^1(\omega, \Delta)$ , where  $H_0^1(\omega, \Delta)$  is the closure of  $C_0^\infty(\omega)$  in  $H^1(\omega, \Delta) = \{u \in H^1(\omega), \Delta u \in L^2(\omega)\}$ .*

Proof: the inequality (C.3) is obtained in [FL96] for  $k = 0$ , that is in the case of the Laplace operator  $-\Delta$ . There exist  $K, h_0 > 0$ , such that  $\forall h \in ]0, h_0[$ , we have for all functions  $u \in H_0^1(\omega, \Delta)$

$$\int_{\omega} u^2 e^{2\frac{\phi}{h}} dx + h^2 \int_{\omega} |\nabla u|^2 e^{2\frac{\phi}{h}} dx \leq Kh^3 \int_{\omega} |Pu + aku|^2 e^{2\frac{\phi}{h}} dx.$$

Since  $|Pu + aku|^2 \leq 2(|Pu|^2 + k^2 u^2)$ , if we assume that in addition  $h$  satisfies  $2Kk^2 h^3 < 1/2$ , we obtain (C.3) provided we replace  $K$  by  $4K$  in the right-hand side of the inequality. ■

A short calculation shows that

$$\text{Rep}_{\phi} = |\xi|^2 - |\nabla\phi|^2, \quad \text{Imp}_{\phi} = 2\xi \cdot \nabla\phi$$

and

$$\{\text{Rep}_{\phi}, \text{Imp}_{\phi}\} = 4 \sum_{j=1}^n \nabla \left( \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \right) \cdot \left( \xi_j \xi + \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \nabla\phi \right).$$

One considers now a smooth function  $\psi$  defined on  $\bar{U}$  such that  $\nabla\psi \neq 0$  on  $\bar{U}$ , and for  $\alpha > 0$ ,  $\phi(x) = e^{\alpha\psi(x)}$ . We obtain

$$\{\text{Rep}_{\phi}, \text{Imp}_{\phi}\} = 4\alpha\phi \left( \xi^t \cdot \nabla^2\psi \cdot \xi + \alpha^2 \phi^2 (\nabla^t\psi \cdot \nabla^2\psi \cdot \nabla\psi) + \alpha(\xi \cdot \nabla\psi)^2 + \alpha^3 \phi^2 |\nabla\psi|^4 \right),$$

whence by denoting  $\mu_0(x)$  the smallest eigenvalue of  $\nabla^2\psi(x)$ ,

$$\{\text{Rep}_{\phi}, \text{Imp}_{\phi}\} \geq 4\alpha\phi \left( \mu_0 (|\xi|^2 + \alpha^2 \phi^2 |\nabla\psi|^2) + \alpha(\xi \cdot \nabla\psi)^2 + \alpha^3 \phi^2 |\nabla\psi|^4 \right).$$

For  $p_{\phi}(x, \xi) = 0$ , we have

$$|\xi|^2 = \alpha^2 \phi^2 |\nabla\psi|^2, \quad \xi \cdot \nabla\psi = 0,$$

whence

$$\{\text{Rep}_{\phi}, \text{Imp}_{\phi}\} \geq 4\alpha^3 \phi^3 |\nabla\psi|^2 \left( 2\mu_0 + \alpha |\nabla\psi|^2 \right).$$

In we define

$$m_0 := \inf_{x \in \bar{U}} \mu_0(x), \quad c_0 := \inf_{x \in \bar{U}} |\nabla\psi|^2,$$

and if  $m_0 < 0$ , we have  $\{\text{Rep}_{\phi}, \text{Imp}_{\phi}\} \geq c_1 > 0$  on  $U \times \mathbb{R}^N$  when  $p_{\phi}(x, \xi) = 0$  for

$$\alpha > -2 \frac{m_0}{c_0}.$$

We consider now the particular domain  $\omega = B(R_1, R_2) := \{x \in \mathbb{R}^N, R_1 < |x - q| < R_2\}$  with  $q \in \mathbb{R}^N$ , and the function  $\psi(x) = -|x - q|^2$ . We can take  $U = B(q, R_1 - \varepsilon, R_2 + \varepsilon)$  for small  $\varepsilon > 0$ . We obtain  $m_0 = -2$  and  $c_0 = 4(R_1 - \varepsilon)^2$ , and finally assumption (C.2) holds as soon as  $\alpha > 1/R_1^2$ .

We now apply lemma C.1 and lemma 3 in [Bou08] to obtain a so-called three spheres inequality. The proof of such inequality is classical (see [LR95, Phu03]), but it is reproduced here in order to find how the constants involved in the inequality depend on some useful parameters.

**Lemma C.2** *We consider the operator  $P = -\Delta - ak$ . with  $a, k \in \mathbb{R}$  and  $a \in ]0, 1[$ . Let  $q \in \Omega$ , and let  $0 < r_0 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < r_5 < r_6$  such that  $B(q, r_6) \subset \Omega$ . If  $\alpha$  satisfies  $\alpha r_0^2 > 1$ , then there exists a constant  $C$ , which depends on  $ak$  only through  $|k|$ , such that we have for all  $u \in H^1(\Omega, \Delta)$ ,*

$$\|u\|_{H^1(B(q, r_3))} \leq C \left( \|Pu\|_{L^2(B(q, r_6))} + \|u\|_{H^1(B(q, r_2))} \right)^{\frac{s}{s+1}} \|u\|_{H^1(B(q, r_6))}^{\frac{1}{s+1}}, \quad (\text{C.4})$$

with

$$s = \frac{g(r_3) - g(r_4)}{g(r_1) - g(r_3)}, \quad g(r) = e^{-\alpha r^2}.$$

Proof: one applies lemma C.1 in the domain  $\omega = B(r_0, r_6)$  for  $\phi = e^{\alpha\psi}$  with  $\psi(x) = -|x - q|^2$ . We have seen that assumption (C.2) is satisfied as soon as  $\alpha r_0^2 > 1$ . Assuming that this inequality holds, we obtain there exists  $K, h_0 > 0$  such that for  $0 < h < h_0$  ( $K$  does not depend on  $ak$ ,  $h_0$  depends on  $ak$  only through  $|k|$ ),

$$\int_{\omega} (|v|^2 + |\nabla v|^2) e^{2\frac{\phi}{h}} dx \leq K \int_{\omega} |Pv|^2 e^{2\frac{\phi}{h}} dx, \quad (\text{C.5})$$

for all functions  $v \in H_0^1(\omega, \Delta)$ .

Now we take  $u \in H^1(\Omega, \Delta)$  and  $v = \chi u \in H_0^1(\omega, \Delta)$ , where  $\chi$  is a  $C^\infty$  cut-off function such that  $\chi \in [0, 1]$  and

$$\begin{cases} \chi = 0 & \text{in } \overline{B(r_0, r_1)} \cup \overline{B(r_5, r_6)} \\ \chi = 1 & \text{in } \overline{B(r_2, r_4)}. \end{cases}$$

In the following we denote  $g(r) = e^{-\alpha r^2}$ . Hence  $g$  is a non increasing function.

$$\int_{\omega} (|v|^2 + |\nabla v|^2) e^{2\frac{\phi}{h}} dx \geq e^{2\frac{g(r_3)}{h}} \int_{B(r_2, r_3)} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx,$$

and

$$\begin{aligned} \int_{\omega} |Pv|^2 e^{2\frac{\phi}{h}} dx &= \int_{B(r_2, r_4)} |Pu|^2 e^{2\frac{\phi}{h}} dx + \int_{B(r_1, r_2)} |P(\chi u)|^2 e^{2\frac{\phi}{h}} dx \\ &\quad + \int_{B(r_4, r_5)} |P(\chi u)|^2 e^{2\frac{\phi}{h}} dx. \end{aligned}$$

Since we have  $P(\chi u) = \chi(Pu) - 2\nabla\chi \cdot \nabla u - (\Delta\chi)u$ , we obtain the following estimates ( $K$  is a constant which depends only on  $\chi$ ):

$$\begin{aligned} \int_{B(r_2, r_4)} |Pu|^2 e^{2\frac{\phi}{h}} dx &\leq e^{2\frac{g(r_2)}{h}} \int_{B(r_2, r_4)} |Pu|^2 dx, \\ \int_{B(r_1, r_2)} |P(\chi u)|^2 e^{2\frac{\phi}{h}} dx &\leq e^{2\frac{g(r_1)}{h}} \int_{B(r_1, r_2)} |Pu|^2 dx + Ke^{2\frac{g(r_1)}{h}} \int_{B(r_1, r_2)} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx, \\ \int_{B(r_4, r_5)} |P(\chi u)|^2 e^{2\frac{\phi}{h}} dx &\leq e^{2\frac{g(r_4)}{h}} \int_{B(r_4, r_5)} |Pu|^2 dx + Ke^{2\frac{g(r_4)}{h}} \int_{B(r_4, r_5)} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx. \end{aligned}$$

Gathering the above inequalities, it follows that

$$\begin{aligned} \int_{\omega} |Pv|^2 e^{2\frac{\phi}{h}} dx &\leq K_1 e^{2\frac{g(r_1)}{h}} \left( \int_{B(q, r_6)} |Pu|^2 dx + \int_{B(q, r_2)} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx \right) \\ &\quad + K_2 e^{2\frac{g(r_4)}{h}} \int_{B(q, r_6)} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx, \end{aligned}$$

where  $K_1$  and  $K_2$  are two constants which are independent of  $ak$ .

Finally, the inequality (C.5) implies

$$\begin{aligned} e^{2\frac{g(r_3)}{h}} \|u\|_{H^1(B(r_2, r_3))}^2 &\leq K_1 e^{2\frac{g(r_1)}{h}} \left( \|Pu\|_{L^2(B(q, r_6))}^2 + \|u\|_{H^1(B(q, r_2))}^2 \right) \\ &\quad + K_2 e^{2\frac{g(r_4)}{h}} \|u\|_{H^1(B(q, r_6))}^2. \end{aligned}$$

Using

$$\|u\|_{H^1(B(q, r_3))}^2 = \|u\|_{H^1(B(q, r_2))}^2 + \|u\|_{H^1(B(r_2, r_3))}^2,$$

We obtain

$$\begin{aligned} e^{2\frac{g(r_3)}{h}} \|u\|_{H^1(B(q, r_3))}^2 &\leq K_1 e^{2\frac{g(r_1)}{h}} \left( \|Pu\|_{L^2(B(q, r_6))}^2 + \|u\|_{H^1(B(q, r_2))}^2 \right) \\ &\quad + K_2 e^{2\frac{g(r_4)}{h}} \|u\|_{H^1(B(q, r_6))}^2. \end{aligned}$$

Denoting  $k_1 = g(r_1) - g(r_3) > 0$  and  $k_2 = g(r_3) - g(r_4) > 0$ , we obtain

$$\|u\|_{H^1(B(q, r_3))} \leq K_1 e^{\frac{k_1}{h}} \left( \|Pu\|_{L^2(B(q, r_6))} + \|u\|_{H^1(B(q, r_2))} \right) + K_2 e^{-\frac{k_2}{h}} \|u\|_{H^1(B(q, r_6))}.$$



Let  $s > 0$  and  $c > 0$  such that

$$\frac{c}{\varepsilon} = K_1 e^{\frac{k_1}{k}}, \quad \varepsilon^s = K_2 e^{-\frac{k_2}{k}}.$$

A simple calculation proves that

$$s = \frac{k_2}{k_1} = \frac{g(r_3) - g(r_4)}{g(r_1) - g(r_3)}, \quad c = K_1 (K_2)^{(k_1/k_2)},$$

and we obtain for all  $u \in H^1(\Omega, \Delta)$ , for all  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  with

$$\varepsilon_0 = K_2^{(k_1/k_2)} e^{-\frac{k_1}{k_0}},$$

the inequality

$$\|u\|_{H^1(B(q, r_3))} \leq \frac{c}{\varepsilon} (\|P_k u\|_{L^2(B(q, r_6))} + \|u\|_{H^1(B(q, r_2))}) + \varepsilon^s \|u\|_{H^1(B(q, r_6))}.$$

The constant  $c$  does not depend on  $ak$ ,  $\varepsilon_0$  depends on  $ak$  only through  $|k|$ . It remains to apply lemma 3 in [Bou08], since  $\|u\|_{H^1(B(q, r_3))} \leq \|u\|_{H^1(B(q, r_6))}$ .

■

**Lemma C.3** *Let us denote  $P_k$  the operator  $-\Delta - k \cdot$ , with  $k \in \mathbb{R}$ . Let  $\tilde{q} \in \Omega$ , and let  $0 < \tilde{r}_0 < \tilde{r}_1 < \tilde{r}_2 < \tilde{r}_3 < \tilde{r}_4 < \tilde{r}_5 < \tilde{r}_6$  such that  $B(\tilde{q}, \tilde{r}_6) \subset \Omega$ . Consider now  $q \in \Omega$  and for  $\mu \in ]0, 1[$ ,  $r_i = \mu \tilde{r}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ), with  $B(q, r_6) \subset \Omega$ .*

*We assume that the three spheres inequality (C.4) associated to the operator  $P_{\mu^2 k}$  and the sequence of balls  $B(\tilde{q}, \tilde{r}_i)$  is satisfied with the constants  $\tilde{C}$  and  $s$ . Then the three spheres inequality (C.4) associated to the operator  $P_k$  and the sequence of balls  $B(q, r_i)$  is satisfied with the constants  $C = \tilde{C}/\mu$  and  $s$ .*

**Proof:** the proof relies on the change of variables  $x - q = \mu(\tilde{x} - \tilde{q})$ . We define the function  $\tilde{u}$  as  $\tilde{u}(\tilde{x}) = u(x) = \tilde{u}(\tilde{q} + (x - q)/\mu)$ .

We obtain

$$\int_{B(q, r_i)} |u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 dx = \mu^N \left( \int_{B(\tilde{q}, \tilde{r}_i)} |\tilde{u}(\tilde{x})|^2 + \frac{1}{\mu^2} |\nabla \tilde{u}(\tilde{x})|^2 d\tilde{x} \right),$$

whence

$$\mu^{\frac{N}{2}} \|\tilde{u}\|_{H^1(B(\tilde{q}, \tilde{r}_i))} \leq \|u\|_{H^1(B(q, r_i))} \leq \mu^{\frac{N}{2}-1} \|\tilde{u}\|_{H^1(B(\tilde{q}, \tilde{r}_i))}.$$

Similarly, we obtain

$$\|P_k u\|_{L^2(B(q, r_i))} = \mu^{\frac{N}{2}-2} \|P_{\mu^2 k} \tilde{u}\|_{L^2(B(\tilde{q}, \tilde{r}_i))}.$$

By using the three spheres inequality (C.4) associated to the balls  $B(\tilde{q}, \tilde{r}_i)$  for operator  $P_{\mu^2 k}$ , we obtain

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(B(q, r_3))} &\leq \mu^{\frac{N}{2}-1} \|\tilde{u}\|_{H^1(B(\tilde{q}, \tilde{r}_3))} \\ &\leq \tilde{C} \mu^{\frac{N}{2}-1} (\|P_{\mu^2 k} \tilde{u}\|_{L^2(B(\tilde{q}, \tilde{r}_6))} + \|\tilde{u}\|_{H^1(B(\tilde{q}, \tilde{r}_2))})^{\frac{s}{s+1}} \|\tilde{u}\|_{H^1(B(\tilde{q}, \tilde{r}_6))}^{\frac{1}{s+1}} \\ &\leq \tilde{C} \mu^{\frac{N}{2}-1} \left( \frac{1}{\mu^{\frac{N}{2}-2}} \|P_k u\|_{L^2(B(q, r_6))} + \frac{1}{\mu^{\frac{N}{2}}} \|u\|_{H^1(B(q, r_2))} \right)^{\frac{s}{s+1}} \left( \frac{1}{\mu^{\frac{N}{2}}} \|u\|_{H^1(B(q, r_6))} \right)^{\frac{1}{s+1}} \\ &\leq \frac{\tilde{C}}{\mu} (\|P_k u\|_{L^2(B(q, r_6))} + \|u\|_{H^1(B(q, r_2))})^{\frac{s}{s+1}} \|u\|_{H^1(B(q, r_6))}^{\frac{1}{s+1}}, \end{aligned}$$

which completes the proof.

■

### C.3 The two main theorems

Our main theorems are based on the following proposition, which is similar to proposition 4 in [Bou08]. It concerns the propagation of data from the interior of the domain up to the boundary of such domain. However, it should be noted that in proposition 4 of [Bou08], we estimated the  $H^1$  norm of the function in a neighborhood of a point  $x_0 \in \partial\Omega$  with the help of the  $H^1$  norm of the function in an open domain  $\omega_1 \Subset \Omega$ . Here, we estimate the value of the function and its first derivatives at  $x_0$  with the help of the  $H^1$  norm of the function in  $\omega_1$ . As a result, the regularity assumptions concerning the function  $u$  are not the same as in [Bou08].

**Proposition C.1** *There exists an open domain  $\omega_1 \Subset \Omega$  such that for all  $\alpha \in ]0, 1]$ , for all  $\kappa < \alpha\kappa_0(\theta)$  and  $\kappa' < \kappa_0(\theta)$ , with*

$$\kappa_0(\theta) = \frac{1}{2} \sup_{x>0} \frac{\sin \theta (1 - e^{-x})}{\sqrt{1+x} - \sin \theta}, \tag{C.6}$$

there exists  $c > 0$  such that for sufficiently small  $\varepsilon$ , for all  $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$  with  $\Delta u \in L^2(\Omega)$ ,

$$\|u\|_{C^1(\partial\Omega)} \leq e^{c/\varepsilon} (\|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\omega_1)}) + \varepsilon^\kappa \|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})},$$

$$\|u\|_{C^0(\partial\Omega)} \leq e^{c'/\varepsilon} (\|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\omega_1)}) + \varepsilon^{\kappa'} \|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

The second inequality holds also in the case  $\alpha = 0$ .

In order to obtain proposition C.1, we need the two following lemmas. The first one is a minor generalization of the lemma proved in [LR95] in the particular case  $\mu = 1$ , while the second one is the counterpart of lemma 3 in [Bou08].

**Lemma C.4** *Let  $\beta_n > 0$  satisfy for  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\beta_{n+1} \leq \frac{1}{\mu^n} (\beta_n + A)^\nu B^{1-\nu},$$

with  $A > 0$ ,  $B > 0$ ,  $\nu \in ]0, 1[$ ,  $\mu \in ]0, 1[$  and  $\beta_n \leq B$ . Then one has for  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\beta_n \leq \frac{2^{\frac{1}{1-\nu}}}{\mu^{\frac{n-1}{1-\nu}}} (\beta_0 + A)^{\nu^n} B^{1-\nu^n}.$$

Proof: if  $B < \beta_0 + A$ , the proof is complete. If  $\beta_0 + A \leq B$ , in particular  $A \leq B$ , we have

$$\frac{\beta_{n+1}}{B} \leq \frac{1}{\mu^n} \left( \frac{\beta_n + A}{B} \right)^\nu$$

and

$$\frac{A}{B} \leq \frac{1}{\mu^n} \left( \frac{A}{B} \right)^\nu \leq \frac{1}{\mu^n} \left( \frac{\beta_n + A}{B} \right)^\nu.$$

From the two above inequalities, it follows that

$$\frac{\beta_{n+1} + A}{2^{\frac{1}{1-\nu}} B} \leq \frac{1}{\mu^n} \left( \frac{\beta_n + A}{2^{\frac{1}{1-\nu}} B} \right)^\nu,$$

that is

$$x_{n+1} \leq \frac{x_n^\nu}{\mu^n}, \quad x_n := \frac{\beta_n + A}{2^{\frac{1}{1-\nu}} B}.$$

By iterating the above inequality, we obtain

$$\begin{aligned} x_n &\leq \left(\frac{1}{\mu}\right)^{n-1+(n-2)\nu+(n-3)\nu^2+\dots+\nu^{n-2}} x_0^{\nu^n} \\ &\leq \left(\frac{1}{\mu}\right)^{(n-1)(1+\nu+\nu^2+\dots+\nu^{n-2})} x_0^{\nu^n} \leq \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{n-1}{1-\nu}} x_0^{\nu^n}, \end{aligned}$$

whence

$$\beta_n \leq \frac{2^{\frac{1}{1-\nu}}}{\mu^{\frac{n-1}{1-\nu}}} (\beta_0 + A) \nu^n B^{1-\nu^n},$$

which completes the proof. ■

**Lemma C.5** *Let  $C, \beta, A$  and  $B$  denote four non negative reals and  $\nu \in ]0, 1[$  such that*

$$\beta \leq C A^\nu B^{1-\nu}.$$

*Then  $\forall \varepsilon > 0$ ,*

$$\beta \leq \frac{C}{\varepsilon} A + \varepsilon^s B,$$

*with*

$$s = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad c = \left(\frac{C}{s^{1/(s+1)} + s^{-s/(s+1)}}\right)^{\frac{s+1}{s}}.$$

**Proof:** For  $c, s > 0$  as defined in the statement of the lemma, the minimum of the function  $f$  defined for  $\varepsilon > 0$  by

$$f(\varepsilon) = \frac{C}{\varepsilon} A + \varepsilon^s B$$

is  $C A^\nu B^{1-\nu}$ , which completes the proof. ■

**Proof of proposition C.1:** the proof is divided into three parts. In the first step of the proof we follow the technique of [ABRV00], which consists in defining a sequence of balls the radii of which is decreasing and the center of which is approaching the boundary of the domain. Since  $\Omega$  satisfies the cone property (see our definition in the introduction), there exist  $R_0 > 0$ ,  $\theta \in ]0, \pi/2[$  with  $R_0$  and  $\theta$  independent of  $x_0 \in \partial\Omega$ , and  $\xi \in \mathbb{R}^N$  with  $|\xi| = 1$  such that the finite cone

$$C = \{x, |x - x_0| < R_0, (x - x_0) \cdot \xi > |x - x_0| \cos \theta\}$$

satisfies  $C \subset \Omega$ . We also denote

$$C' = \{x, |x - x_0| < R_0, (x - x_0) \cdot \xi > |x - x_0| \cos \theta'\},$$

with

$$\theta' = \arcsin(t \sin \theta), \tag{C.7}$$

where the coefficient  $t \in ]0, 1[$  will be specified further. It should be noted that definition (C.7) leads to  $\theta' \in ]0, \pi/2[$ . We now denote  $q_0 = x_0 + (R_0/2)\xi$ ,  $d_0 = |q_0 - x_0|$  and  $\rho_0 = d_0 \sin \theta'$ . We hence have  $B(q_0, \rho_0) \in C'$ . Let define the sequence of balls  $B(q_n, \rho_n) \subset C'$  with  $d_n = |q_n - x_0|$  and  $\rho_n = d_n \sin \theta'$  by following induction :

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n - \alpha_n \xi \\ \rho_{n+1} = \mu \rho_n \\ d_{n+1} = \mu d_n, \end{cases} \tag{C.8}$$

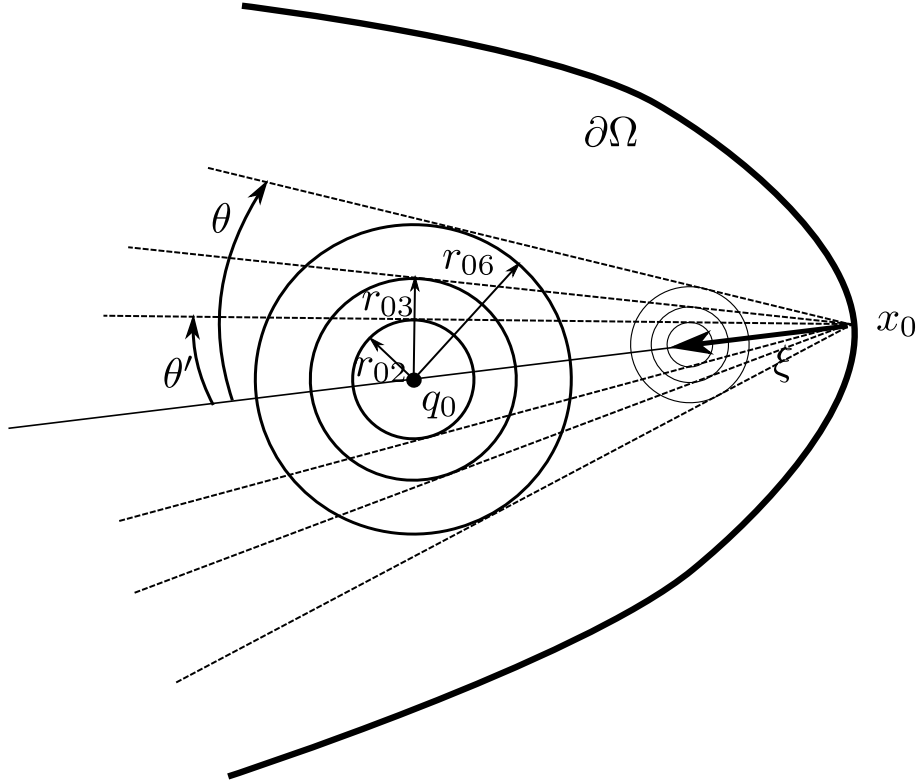


Figure C.1: The sequence of three spheres inequalities

where  $\alpha_n$  and  $\mu$  will be defined further. From the above equations, we deduce that

$$\alpha_n = (1 - \mu)d_n. \tag{C.9}$$

The objective is to use a three spheres inequality such as (C.4) for each  $n$ , the center of these three spheres being  $q = q_n$ . We hence define, for  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < r_{0n} < r_{1n} < r_{2n} = \rho_n < r_{3n} < r_{4n} < r_{5n} < r_{6n}$  and  $y_{in} = r_{in}/r_{0n} > 1$  for  $i = 1, \dots, 6$ . We assume that the  $y_{in}$  do not depend on  $n$ , that is  $y_{in} := y_i$ . We specify  $t = r_{2n}/r_{6n} = y_2/y_6$  in (C.7), so that we have  $B(q_n, r_{6n}) \in \mathcal{C} \subset \Omega$  for all  $n$  (see figure C.1).

On the other hand, if  $\alpha_n$  is chosen such that

$$\rho_{n+1} + \alpha_n = r_{3n}, \tag{C.10}$$

we have  $B(q_{n+1}, \rho_{n+1}) \subset B(q_n, r_{3n})$  since for  $|x - q_{n+1}| < \rho_{n+1}$ ,

$$|x - q_n| \leq |x - q_{n+1}| + |q_{n+1} - q_n| < \rho_{n+1} + \alpha_n = r_{3n}.$$

The equations (C.9) and (C.10) uniquely define  $\mu$  as

$$\mu = \frac{r_{6n} - r_{3n} \sin \theta}{r_{6n} - r_{2n} \sin \theta} = \frac{y_6 - y_3 \sin \theta}{y_6 - y_2 \sin \theta} \in ]0, 1[.$$

By using the notation  $P_k = -\Delta - k$ , we now apply lemma C.2 for operator  $P_{\mu^{2n}k}$  and for the spheres of center  $q_0$  and of radii  $r_{i0}$ , with  $\alpha$  such that  $\beta := \alpha r_{00}^2 > 1$ . We thus obtain for  $u \in H^1(\Omega, \Delta)$ ,

$$\|u\|_{H^1(B(q_0, r_{30}))} \leq C \left( \|P_{\mu^{2n}k} u\|_{L^2(B(q_0, r_{60}))} + \|u\|_{H^1(B(q_0, r_{20}))} \right)^{\frac{s}{s+1}} \|u\|_{H^1(B(q_0, r_{60}))}^{\frac{1}{s+1}},$$

with  $C$  independent of  $\mu$  and  $n$ . With the help of lemma C.3, and since  $r_{in} = \mu^n r_{i0}$  for  $i = 1, \dots, 6$ , the three spheres inequality for the spheres of center  $q_n$  and of radii  $r_{in}$  is

$$\|u\|_{H^1(B(q_n, r_{3n}))} \leq \frac{C}{\mu^n} \left( \|P_k u\|_{L^2(B(q_n, r_{6n}))} + \|u\|_{H^1(B(q_n, r_{2n}))} \right)^{\frac{s}{s+1}} \|u\|_{H^1(B(q_n, r_{6n}))}^{\frac{1}{s+1}},$$

which implies that for all  $u \in H^1(\Omega, \Delta)$ ,

$$\|u\|_{H^1(B(q_{n+1}, \rho_{n+1}))} \leq \frac{C}{\mu^n} \left( \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(B(q_n, \rho_n))} \right)^{\frac{s}{s+1}} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{s+1}}.$$

It should be noted that in the above inequality,  $C$  and  $s$  are independent of  $n$ , in particular

$$s = \frac{e^{-\beta y_3^2} - e^{-\beta y_4^2}}{e^{-\beta y_1^2} - e^{-\beta y_3^2}}.$$

Without loss of generality we assume that  $C \geq 1$ , so that by denoting  $C' = C^{s+1}$ ,  $\|u\|_{H^1(B(q_{n+1}, \rho_{n+1}))} \leq C' \|u\|_{H^1(\Omega)}$ , and we can apply lemma C.4 with  $\beta_n = \|u\|_{H^1(B(q_n, \rho_n))}$ ,  $A = \|Pu\|_{L^2(\Omega)}$ ,  $B = C' \|u\|_{H^1(\Omega)}$ ,  $\nu = s/(s+1)$ . We obtain

$$\|u\|_{H^1(B(q_n, \rho_n))} \leq \frac{2^{\frac{1}{1-\nu}}}{\mu^{\frac{n-1}{1-\nu}}} \left( \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(B(q_0, \rho_0))} \right)^{\nu^n} \left( C' \|u\|_{H^1(\Omega)} \right)^{1-\nu^n}.$$

We apply now lemma C.5 and obtain  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$\|u\|_{H^1(B(q_n, \rho_n))} \leq \frac{c_n}{\varepsilon} \left( \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(B(q_0, \rho_0))} \right) + \varepsilon^{s_n} C' \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

with

$$s_n = \frac{\nu^n}{1 - \nu^n}, \quad c_n = \left( \frac{2^{\frac{1}{1-\nu}}}{\mu^{\frac{n-1}{1-\nu}}} \frac{1}{E(s_n)} \right)^{\frac{s_n+1}{s_n}},$$

and

$$E(s) := s^{1/(s+1)} + s^{-s/(s+1)}.$$

We notice that for  $s > 0$ ,  $E(s) > 1$ , whence

$$\log \left( \frac{2^{\frac{1}{1-\nu}}}{\mu^{\frac{n-1}{1-\nu}}} \frac{1}{E(s_n)} \right) < \frac{1}{1-\nu} \log \left( \frac{2}{\mu^{n-1}} \right).$$

As a result,

$$0 < c_n < e^{\frac{1}{s_n} \frac{1}{(1-\nu)^2} \log \left( \frac{2}{\mu^{n-1}} \right)} = e^{\frac{c}{s_n} \log \left( \frac{2}{\mu^{n-1}} \right)},$$

for some constant  $c > 0$ . Here we have used the fact that  $s_n + 1 < 1/(1-\nu)$ . Since  $s_n > \nu^n$ , we finally obtain  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall \varepsilon > 0$  and  $\forall u \in H^1(\Omega, \Delta)$ ,

$$\|u\|_{H^1(B(q_n, \rho_n))} \leq \frac{e^{\frac{c}{\nu^n} \log \left( \frac{2}{\mu^{n-1}} \right)}}{\varepsilon} \left( \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(B(q_0, \rho_0))} \right) + C' \varepsilon^{\nu^n} \|u\|_{H^1(\Omega)}. \quad (\text{C.11})$$

The second step of the proof consists of estimating the  $C^1$  norm of  $u$  on  $\partial\Omega$  by using the estimate (C.11) for sufficiently large  $n$  and the regularity of  $u$ , which is  $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $\alpha \in ]0, 1]$ . We have  $B(q_n, \rho_n) \subset B(x_0, \varepsilon')$  if and only if  $d_n + \rho_n \leq \varepsilon'$ , that is  $\mu^n(d_0 + \rho_0) \leq \varepsilon'$ . Let  $n_0$  denote the smaller  $n$  which satisfies this inequality, that is

$$\frac{\log((d_0 + \rho_0)/\varepsilon')}{\log 1/\mu} \leq n_0 < \frac{\log((d_0 + \rho_0)/\varepsilon')}{\log 1/\mu} + 1.$$

For all  $x \in B(q_{n_0}, \rho_{n_0})$ , and for  $v = u$  or  $v = \partial u / \partial x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , we have

$$|v(x_0)|^2 \leq 2|v(x)|^2 + 2\|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})}^2 \varepsilon'^{2\alpha}. \quad (\text{C.12})$$

After integration over  $B(q_{n_0}, \rho_{n_0})$ , we obtain by denoting

$$S_{x_0}(u) = \max(|u(x_0)|, |\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0)|, \dots, |\frac{\partial u}{\partial x_N}(x_0)|),$$

$$V_N \rho_{n_0}^N S_{x_0}^2(u) \leq 2\|u\|_{H^1(B(q_{n_0}, \rho_{n_0}))}^2 + 2V_N \rho_{n_0}^N \varepsilon'^{2\alpha} \|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})}^2,$$

where  $V_N$  is the volume of the unit sphere in  $\mathbb{R}^N$ . Finally,

$$S_{x_0}(u) \leq \sqrt{\frac{2}{V_N \rho_{n_0}^N}} \|u\|_{H^1(B(q_{n_0}, \rho_{n_0}))} + \sqrt{2} \varepsilon'^{\alpha} \|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})}. \quad (\text{C.13})$$

From (C.11) with  $n = n_0$  and (C.13), we obtain there exists  $c, C > 0$  such that for all  $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ ,

$$S_{x_0}(u) \leq C \frac{1}{\rho_{n_0}^{N/2}} \frac{e^{\frac{c}{\nu^{n_0}} \log\left(\frac{2}{\mu^{n_0-1}}\right)}}{\varepsilon} \left( \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(B(q_0, \rho_0))} \right)$$

$$+ C \frac{1}{\rho_{n_0}^{N/2}} \varepsilon^{\nu^{n_0}} \|u\|_{H^1(\Omega)} + C \varepsilon'^{\alpha} \|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})}.$$

We have  $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})}$  for some  $c > 0$ . Furthermore,  $\mu^{n_0-1}(d_0 + \rho_0) > \varepsilon'$  and  $\rho_{n_0} = \mu^{n_0} \rho_0$  lead to

$$\rho_{n_0} > \mu \frac{\rho_0}{d_0 + \rho_0} \varepsilon'.$$

We obtain there exists  $c, C > 0$  such that for all  $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ ,

$$S_{x_0}(u) \leq C \frac{1}{\varepsilon^{N/2}} \frac{e^{\frac{c}{\nu^{n_0}} \log\left(\frac{2}{\mu^{n_0-1}}\right)}}{\varepsilon} \left( \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(B(q_0, \rho_0))} \right)$$

$$+ C \left( \frac{\varepsilon^{\nu^{n_0}}}{\varepsilon^{N/2}} + \varepsilon'^{\alpha} \right) \|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})}.$$

Now we introduce the relationship  $\varepsilon^{\nu^{n_0}} / \varepsilon'^{N/2} = \varepsilon'^{\alpha}$ , and since  $\nu^{n_0} < 1$  we obtain a new constant  $C > 0$  such that

$$S_{x_0}(u) \leq C \frac{e^{\frac{c}{\nu^{n_0}} \log\left(\frac{2}{\mu^{n_0-1}}\right)}}{\varepsilon'^{\frac{\alpha+N}{\nu^{n_0}}}} \left( \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(B(q_0, \rho_0))} \right) + C \varepsilon'^{\alpha} \|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})}. \quad (\text{C.14})$$

Since  $1/\nu^{n_0} = e^{n_0 \log(1/\nu)}$ , we have

$$\frac{1}{\nu^{n_0}} < e^{\log(1/\nu) \left( \frac{\log((d_0 + \rho_0)/\varepsilon')}{\log(1/\mu)} + 1 \right)} = \frac{1}{\nu} \left( \frac{d_0 + \rho_0}{\varepsilon'} \right)^{\gamma_0},$$

with  $\gamma_0 = \log(1/\nu) / \log(1/\mu)$ .

Furthermore, since  $1/\mu^{n_0-1} < (d_0 + \rho_0)/\varepsilon'$ , we have

$$\log\left(\frac{2}{\mu^{n_0-1}}\right) < \log\left(\frac{2(d_0 + \rho_0)}{\varepsilon'}\right).$$

Then,

$$\frac{e^{\frac{c}{\nu^{n_0}} \log\left(\frac{2}{\mu^{n_0}-1}\right)}}{\varepsilon^{l(\alpha+N)/\nu^{n_0}}} = e^{\frac{1}{\nu^{n_0}} \left( c \log\left(\frac{2}{\mu^{n_0}-1}\right) + (\alpha+N) \log\left(\frac{1}{\varepsilon'}\right) \right)} \leq e^{\frac{1}{\nu} \left( \frac{d_0+\rho_0}{\varepsilon'} \right)^{\gamma_0} \left( c \log\left(\frac{2(d_0+\rho_0)}{\varepsilon'}\right) + (\alpha+N) \log\left(\frac{1}{\varepsilon'}\right) \right)}.$$

As a result, for some new  $c' > 0$ , for sufficiently small  $\varepsilon'$  we have

$$\frac{e^{\frac{c}{\nu^{n_0}} \log\left(\frac{2}{\mu^{n_0}-1}\right)}}{\varepsilon^{l(\alpha+N)/\nu^{n_0}}} \leq e^{\frac{c'}{\varepsilon'^{\gamma_0}} \log\left(\frac{1}{\varepsilon'}\right)}.$$

For all  $\gamma > \gamma_0$ , for some new  $c' > 0$ , for sufficiently small  $\varepsilon'$  we have

$$\frac{e^{\frac{c}{\nu^{n_0}} \log\left(\frac{2}{\mu^{n_0}-1}\right)}}{\varepsilon^{l(\alpha+N)/\nu^{n_0}}} \leq e^{\frac{c'}{\varepsilon'^{\gamma}}}$$

Coming back to (C.14), we obtain

$$S_{x_0}(u) \leq e^{c'/\varepsilon'^{\gamma}} \left( \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(B(q_0, \rho_0))} \right) + C \varepsilon'^{\alpha} \|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

By denoting  $\varepsilon = \varepsilon'^{\gamma}$  for any  $\gamma > \gamma_0$ , for small  $\varepsilon > 0$ ,

$$S_{x_0}(u) \leq e^{c'/\varepsilon} \left( \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(B(q_0, \rho_0))} \right) + C' \varepsilon^{\alpha/\gamma} \|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Finally, by denoting  $\kappa_0 = 1/\gamma_0$ , for all  $\kappa < \alpha\kappa_0$  there exists  $c, \varepsilon_0 > 0$  such that for all  $\varepsilon < \varepsilon_0$ ,

$$S_{x_0}(u) \leq e^{c/\varepsilon} \left( \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(B(q_0, \rho_0))} \right) + \varepsilon^{\kappa} \|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

By following the history of the constants  $c$  and  $\varepsilon_0$  throughout the proof, it is readily seen that  $c$  and  $\varepsilon_0$  do not depend on  $x_0 \in \partial\Omega$ . Furthermore, if we define  $\omega_1 \Subset \Omega$  as the union of the balls  $B(q_0, \rho_0)$  when  $x_0$  describes  $\partial\Omega$ , we obtain that for all  $\kappa < \alpha\kappa_0$ , there exists  $c, \varepsilon_0 > 0$  such that for all  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , for all  $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$  with  $\Delta u \in L^2(\Omega)$ ,

$$\|u\|_{C^1(\partial\Omega)} \leq e^{c/\varepsilon} \left( \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\omega_1)} \right) + \varepsilon^{\kappa} \|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}, \quad (\text{C.15})$$

which is the first inequality of the proposition.

The second inequality is obtained by using the imbedding  $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \rightarrow C^1(\overline{\Omega})$ , for all  $\alpha \in [0, 1]$ . For  $x \in B(q_{n_0}, \rho_{n_0})$ , we replace (C.12) by

$$|u(x_0)|^2 \leq 2|u(x)|^2 + 2\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})}^2 \varepsilon'^2,$$

and we use the same technique as above.

The third step of the proof consists in maximizing

$$\kappa_0 = \frac{\log(1/\mu)}{\log(1/\nu)},$$

with

$$\frac{1}{\mu} = \frac{y_6 - y_2 \sin \theta}{y_6 - y_3 \sin \theta}, \quad \frac{1}{\nu} = \frac{e^{\beta(y_4^2 - y_1^2)} - 1}{e^{\beta(y_4^2 - y_3^2)} - 1}.$$

The inequality (C.15) holds for all  $\kappa < \tilde{\kappa}_0$ , with

$$\tilde{\kappa}_0 = \sup_{1 < \beta, 1 < y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_6} \log \left( \frac{y_6 - y_2 \sin \theta}{y_6 - y_3 \sin \theta} \right) / \log \left( \frac{e^{\beta(y_4^2 - y_1^2)} - 1}{e^{\beta(y_4^2 - y_3^2)} - 1} \right). \quad (\text{C.16})$$

Now, let specify  $\beta$  and the  $y_i$  as follows, for  $k \in ]0, 1[$  and  $\delta > 0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \sqrt{1 + k^2}, \\ y := (1 + k^2)^{1/4}, \\ y_1 = y, \\ y_2 = y(1 + k^2\delta), \\ y_3 = y(1 + k\delta + k^2\delta), \\ y_4 = y(1 + \delta + k^2\delta), \\ y_6 = y(1 + \delta + 2k^2\delta). \end{array} \right. \quad (\text{C.17})$$

A first order expansion in  $k$  around 0 for fixed  $\delta$  leads to

$$\begin{aligned} \log \left( \frac{y_6 - y_2 \sin \theta}{y_6 - y_3 \sin \theta} \right) &= \frac{\delta \sin \theta}{1 + \delta - \sin \theta} k + o_\delta(k), \\ \log \left( \frac{e^{\beta(y_4^2 - y_1^2)} - 1}{e^{\beta(y_4^2 - y_3^2)} - 1} \right) &= 2\delta \frac{e^{2\delta + \delta^2}}{e^{2\delta + \delta^2} - 1} k + o_\delta(k) \end{aligned}$$

By passing to the limit  $k \rightarrow 0$  and by taking the sup in  $\delta$ , we obtain the following particular value  $\kappa_0 \leq \tilde{\kappa}_0$  :

$$\kappa_0 = \sup_{\delta > 0} \frac{1}{2} \frac{\sin \theta}{1 + \delta - \sin \theta} (1 - e^{-(2\delta + \delta^2)}),$$

and the optimization problem (C.6) follows by setting  $x = 2\delta + \delta^2 > 0$ .  $\square$

Remark: we can verify that in fact the values  $\tilde{\kappa}_0$  and  $\kappa_0$ , defined by (C.16) and (C.6) respectively, actually satisfy  $\tilde{\kappa}_0 = \kappa_0$ . First, we eliminate  $\beta$  in (C.16) simply by using the change of variables  $z_i = \sqrt{\beta} y_i$  with  $i = 1, \dots, 6$ . We obtain

$$\tilde{\kappa}_0 = \sup_{1 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_6} \log \left( \frac{z_6 - z_2 \sin \theta}{z_6 - z_3 \sin \theta} \right) / \log \left( \frac{e^{z_4^2 - z_1^2} - 1}{e^{z_4^2 - z_3^2} - 1} \right). \quad (\text{C.18})$$

We remark that the function to maximize in (C.18) is an increasing function of  $z_1$  and a decreasing function of  $z_6$ , that is why we can consider only the asymptotic situation  $z_1 \rightarrow z_2$  and  $z_6 \rightarrow z_4$ . In order to simplify the analysis with the remaining variables  $z_2, z_3, z_4$ , we denote

$$z_3 - z_2 = \tilde{k} \tilde{\delta} z_2, \quad z_4 - z_2 = \tilde{\delta} z_2, \quad z_2 = \tilde{z},$$

with  $\tilde{\delta} > 0$  and  $\tilde{k} \in ]0, 1[$ . We obtain

$$\tilde{\kappa}_0 = \sup_{1 < \tilde{z}, 0 < \tilde{\delta}, 0 < \tilde{k} < 1} \log \left( \frac{1 + \tilde{\delta} - \sin \theta}{1 + \tilde{\delta} - \sin \theta - \tilde{k} \tilde{\delta} \sin \theta} \right) / \log \left( \frac{e^{(2\tilde{\delta} + \tilde{\delta}^2)\tilde{z}^2} - 1}{e^{2(1 - \tilde{k})\tilde{\delta} + (1 - \tilde{k}^2)\tilde{\delta}^2}\tilde{z}^2} - 1 \right).$$

Furthermore, it is easy to prove that since  $2\tilde{\delta} + \tilde{\delta}^2 > 2(1 - \tilde{k})\tilde{\delta} + (1 - \tilde{k}^2)\tilde{\delta}^2$ , for fixed  $(\tilde{k}, \tilde{\delta})$ , the function to maximize is a non increasing function of  $\tilde{z} > 1$ , so that the maximum of the function is obtained for  $\tilde{z} \rightarrow 1$ , and

$$\tilde{\kappa}_0 = \sup_{0 < \tilde{\delta}, 0 < \tilde{k} < 1} \log \left( \frac{1 + \tilde{\delta} - \sin \theta}{1 + \tilde{\delta} - \sin \theta - \tilde{k} \tilde{\delta} \sin \theta} \right) / \log \left( \frac{e^{2\tilde{\delta} + \tilde{\delta}^2} - 1}{e^{2(1 - \tilde{k})\tilde{\delta} + (1 - \tilde{k}^2)\tilde{\delta}^2} - 1} \right).$$

We notice that for fixed  $\tilde{\delta}$ , the maximum of the function of two variables is obtained for  $\tilde{k} \rightarrow 0$ , and a first order expansion in  $\tilde{k}$  leads us to the same expression as (C.6), that is  $\tilde{\kappa}_0 = \kappa_0$ . In order to

obtain our main theorem, we recall the two following results, the first one is obtained in [Phu03] while the second one is obtained in [Bou08].



**Proposition C.2** *Let  $\omega_0, \omega_1$  be two open domains such that  $\omega_0, \omega_1 \Subset \Omega$ . There exist  $s, c, \varepsilon_0 > 0$  such that  $\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[, \forall u \in H^1(\Omega, \Delta)$ ,*

$$\|u\|_{H^1(\omega_1)} \leq \frac{c}{\varepsilon} \left( \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\omega_0)} \right) + \varepsilon^s \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

**Proposition C.3** *Assume  $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$  is of class  $C^{1,1}$  and let  $x_0 \in \Gamma_0$  and  $\tau > 0$  such that  $\partial\Omega \cap B(x_0, \tau) \subset \Gamma_0$ . There exists a neighbourhood  $\omega_0$  of  $x_0$ , there exist  $s, c, \varepsilon_0 > 0$  such that  $\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[,$  for all  $u \in H^2(\Omega)$ ,*

$$\|u\|_{H^1(\Omega \cap \omega_0)} \leq \frac{c}{\varepsilon} \left( \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Gamma_0)} + \|\partial_n u\|_{L^2(\Gamma_0)} \right) + \varepsilon^s \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

*The inequality holds also for all  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  with  $\Delta u \in L^2(\Omega)$ .*

We are now in a position to state the main theorem, which is a consequence of propositions C.1, C.2 and C.3.

**Theorem C.1** *Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  be a bounded and connected open domain with Lipschitz boundary. If the cone property is satisfied with angle  $\theta \in ]0, \pi/2[,$  let denote  $\kappa_0(\theta)$  the solution of the following maximization problem*

$$\kappa_0(\theta) = \frac{1}{2} \sup_{x>0} \frac{\sin \theta (1 - e^{-x})}{\sqrt{1+x} - \sin \theta}.$$

*Let  $\Gamma_0$  be a non-empty  $C^{1,1}$  open part of  $\partial\Omega$  and let introduce the operator  $P = -\Delta - k$ , where  $k$  is not a Dirichlet eigenvalue of the operator  $-\Delta$  in  $\Omega$ .*

*For  $\alpha \in [0, 1]$ , for all  $\kappa \in ]0, (1 + \alpha)\kappa_0(\theta)/2[,$  there exist  $C, \delta_0$  such that for all  $\delta \in ]0, \delta_0[,$  for all functions  $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$  such that  $\Delta u \in L^2(\Omega)$  and which satisfy*

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq M, \quad \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Gamma_0)} + \|\partial_n u\|_{L^2(\Gamma_0)} \leq \delta, \quad (\text{C.19})$$

*where  $M > 0$  is a constant, then*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{M}{(\log(M/\delta))^\kappa}. \quad (\text{C.20})$$

*If we do not assume that  $\Gamma_0$  is of class  $C^{1,1}$ , the estimate (C.20) holds under assumption (C.19) and provided we restrict to the functions  $u$  which satisfy  $u|_{\Gamma_0} = 0$  and  $\partial_n u|_{\Gamma_0} = 0$ .*

**Proof:** assume first that  $\alpha \in ]0, 1]$ . By using proposition C.1, there exists a domain  $\omega_1 \Subset \Omega$  such that for any  $\kappa < \alpha\kappa_0(\theta)$  and any  $\kappa' < \kappa_0(\theta)$ , there exist  $c, \varepsilon_0 > 0$  such that for all  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , for all  $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$  with  $\Delta u \in L^2(\Omega)$ ,

$$\|u\|_{C^1(\partial\Omega)} \leq e^{c/\varepsilon} (\|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\omega_1)}) + \varepsilon^\kappa \|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})},$$

and

$$\|u\|_{C^0(\partial\Omega)} \leq e^{c/\varepsilon} (\|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\omega_1)}) + \varepsilon^{\kappa'} \|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

If  $u = 0$  and  $\partial_n u = 0$  on  $\Gamma_0$  (case 2), since  $\partial\Omega \cap B(x_0, \tau) \subset \Gamma_0$ , the extension  $\tilde{u}$  of  $u$  by 0 in  $B(x_0, \tau)$  belongs to  $H^1(\Omega \cup B(x_0, \tau), \Delta)$ . By applying proposition C.2 to function  $\tilde{u}$  in domain  $\Omega \cup B(x_0, \tau)$  and by choosing  $\omega_0 \Subset B(x_0, \tau) \cap \overline{\Omega}^c$ , we obtain that for sufficiently small  $\varepsilon$ , for all  $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$  such that  $\Delta u \in L^2(\Omega)$ ,

$$\|u\|_{C^1(\partial\Omega)} \leq e^{c/\varepsilon} \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^\kappa \|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})},$$

$$\|u\|_{C^0(\partial\Omega)} \leq e^{c/\varepsilon} \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^{\kappa'} \|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

We conclude that if moreover  $u$  satisfies assumption (C.19) then

$$\|u\|_{C^1(\partial\Omega)} \leq e^{c/\varepsilon} \delta + \varepsilon^\kappa M, \quad \|u\|_{C^0(\partial\Omega)} \leq e^{c/\varepsilon} \delta + \varepsilon^{\kappa'} M.$$

By using the same  $\varepsilon$  optimization procedure as in corollary 1 of [Bou08], we obtain that for all  $\kappa < \alpha\kappa_0(\theta)$  and  $\kappa' < \kappa_0(\theta)$ , there exists  $C > 0$  such that for sufficiently small  $\delta$ ,

$$\|u\|_{C^1(\partial\Omega)} \leq C \frac{M}{(\log(M/\delta))^\kappa}, \quad \|u\|_{C^0(\partial\Omega)} \leq C \frac{M}{(\log(M/\delta))^{\kappa'}}. \quad (\text{C.21})$$

Since  $k$  is not a Dirichlet eigenvalue of the operator  $-\Delta$  in  $\Omega$ , there exists a constant  $C' > 0$  such that for all  $u \in H^1(\Omega, \Delta)$ ,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C' (\|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}). \quad (\text{C.22})$$

With the help of an interpolation inequality, we obtain for some constant  $c > 0$ ,

$$\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^{1/2} \|u\|_{H^1(\partial\Omega)}^{1/2}, \quad (\text{C.23})$$

hence for some new constant  $c$ ,

$$\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{C^0(\partial\Omega)}^{1/2} \|u\|_{C^1(\partial\Omega)}^{1/2}, \quad (\text{C.24})$$

and it follows from (C.21) that

$$\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq cC \frac{M}{(\log(M/\delta))^{(\kappa+\kappa')/2}}.$$

The result follows from (C.22).

If we do not assume that  $u = 0$  and  $\partial_n u = 0$  on  $\Gamma_0$ , but if moreover  $\Gamma_0$  is of class  $C^{1,1}$  (case 1), then we can apply proposition C.3 in addition to propositions C.1 and C.2, hence for all  $\kappa < \alpha\kappa_0(\theta)$  and  $\kappa' < \kappa_0(\theta)$ , there exist  $c, \varepsilon_0 > 0$  such that for all  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , for all  $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$  such that  $\Delta u \in L^2(\Omega)$ ,

$$\|u\|_{C^1(\partial\Omega)} \leq e^{c/\varepsilon} (\|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Gamma_0)} + \|\partial_n u\|_{L^2(\Gamma_0)}) + \varepsilon^\kappa \|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})},$$

$$\|u\|_{C^0(\partial\Omega)} \leq e^{c/\varepsilon} (\|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Gamma_0)} + \|\partial_n u\|_{L^2(\Gamma_0)}) + \varepsilon^{\kappa'} \|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

We complete the proof as in the case 2.

As concerns the case  $\alpha = 0$ , the result follows from (C.24), from the second inequality of (C.21), which remains true, and from the fact that  $\|u\|_{C^1(\partial\Omega)} \leq M$ . ■

**Remark:** it is readily shown by analyzing the variations of the function  $k_\theta$  defined on  $[0, +\infty[$  by

$$k_\theta(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin \theta (1 - e^{-x})}{\sqrt{1+x} - \sin \theta}, \quad (\text{C.25})$$

that the maximization problem (C.6) is well-posed. In particular, the argument  $x$  that maximizes the function is unique. In figure C.2, the graph of function  $k_\theta$  is plotted for increasing values of  $\theta$ , and the values of function  $\kappa_0$  are plotted for all values of  $\theta \in [0, \pi/2]$ . The function  $\kappa_0$  is increasing on the segment  $[0, \pi/2]$ , with  $\kappa_0(0) = 0$  and  $\kappa_0(\pi/2) = 1$ . **Remark:** the fact that  $\kappa_0(0) = 0$  indicates that

when  $\theta \rightarrow 0$ , which means that the domain  $\Omega$  has a cusp, the logarithmic stability does not hold any more. This is consistent with the result obtained in [ABRV00] when the domain is not Lipschitz, then a logarithmic-logarithmic estimate was established. **Remark:** the fact that  $\kappa_0(\pi/2) = 1$  implies

that for domains of class  $C^1$ , theorem C.1 holds for all  $\kappa < (1+\alpha)/2$ . Hence, in the case of functions  $u$  in  $C^{1,1}(\overline{\Omega}) \subset H^2(\Omega)$  ( $\alpha = 1$ ), theorem C.1 extends the result of corollary 1 in [Bou08], which was satisfied for domains of class  $C^{1,1}$ , to domains of class  $C^1$ , provided either  $\Gamma_0$  is of class  $C^{1,1}$  or we restrict to the functions  $u$  which satisfy  $u = 0$  and  $\partial_n u = 0$  on  $\Gamma_0$ . It is also interesting to note that in  $2D$ , if  $\Omega$  has only reentrant corners, then the cone property is satisfied for any  $\theta \in ]0, \pi/2[$ , and theorem C.1 holds for all  $\kappa < 1$ . Hence, the corners of angle smaller than  $\pi$  deteriorate the exponent

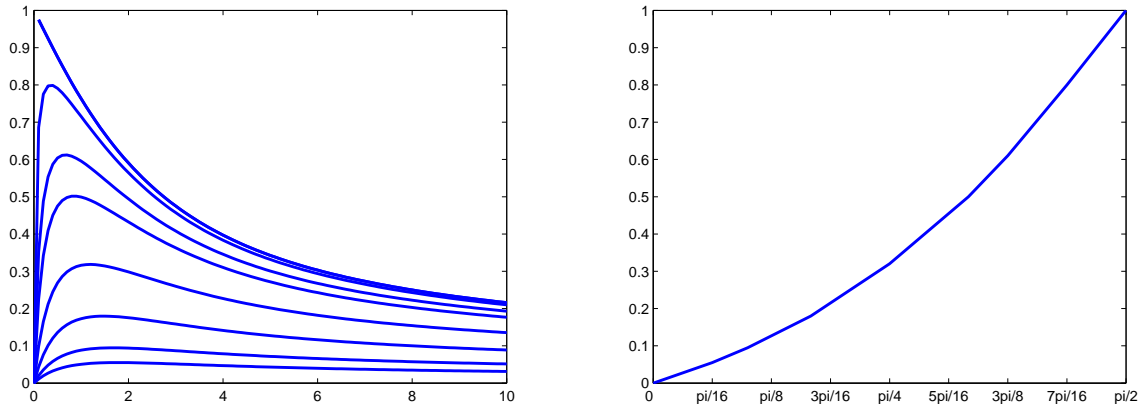


Figure C.2: Left : graph of function  $k_\theta$  for increasing values of  $\theta$  :  $\pi/16$ ,  $\pi/10$ ,  $\pi/6$ ,  $\pi/4$ ,  $\pi/3$ ,  $3\pi/8$ ,  $7\pi/16$ ,  $\pi/2$ . Right : function  $\kappa_0(\theta)$

of the logarithmic stability, while those of angle larger than  $\pi$  do not. A similar remark can be done in 3D.

Remark: the obtained function (C.25) is strongly dependent on the choice of the function  $\psi(x) =$

$-|x - q|^2$  which was used in the exponential weight  $\phi = e^{\alpha\psi}$  of our Carleman estimate (C.3). Besides, the values of  $\kappa_0(\theta)$  induced by this choice and given by (C.6) are not necessarily optimal, except for  $\theta = \pi/2$ , for which we have proved in [Bou08] that  $\kappa_0(\pi/2) = 1$  is optimal. By testing other types of function  $\psi$ , in particular  $\psi(x) = -|x - q|^\beta$  with other values of  $\beta > 0$  and  $\psi(x) = -\log|x - q|$ , we have found other functions  $\kappa_0$ , but taking lower values. Remark: from the proof of theorem C.1,

we obtain the following corollary concerning the data completion problem. This problem consists, for a function  $u$  that solves  $Pu = 0$  in  $\Omega$  in the sense of distributions, to compute with the help of the values of  $u$  and  $\partial_n u$  on  $\Gamma_0$ , the values of  $u$  and  $\partial_n u$  on the complementary part  $\Gamma_1$ . If  $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ ,  $\alpha \in ]0, 1]$ , solves  $Pu = 0$  in  $\Omega$  and satisfies  $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq M$  and  $\|u\|_{C^1(\overline{\Gamma_0})} \leq \delta$ , then for all  $\kappa < \alpha\kappa_0(\theta)$ , there exists  $C, \delta_0 > 0$  such that for  $\delta < \delta_0$ ,  $\|u\|_{C^1(\overline{\Gamma_1})} \leq C M / (\log(M/\delta))^\kappa$ . In a view to derive a

convergence rate of the method of quasi-reversibility, we now study the case of functions that are  $H^2(\Omega)$  for  $N = 2$  and  $N = 3$ . We obtain the following theorem.

**Theorem C.2** We define the sets  $\Omega$ ,  $\Gamma_0$  and the operator  $P$  exactly as in the statement of theorem C.1.

In the case  $N = 2$  (resp.  $N = 3$ ), for all  $\kappa \in ]0, \kappa_0(\theta)/2[$  (resp.  $\kappa \in ]0, \kappa_0(\theta)/4[$ ), there exist  $C, \delta_0$  such that for all  $\delta \in ]0, \delta_0[$ , for all functions  $u \in H^2(\Omega)$  which satisfy

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq M, \quad \|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Gamma_0)} + \|\partial_n u\|_{L^2(\Gamma_0)} \leq \delta, \quad (\text{C.26})$$

where  $M > 0$  is a constant, then

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{M}{(\log(M/\delta))^\kappa}. \quad (\text{C.27})$$

If we do not assume that  $\Gamma_0$  is of class  $C^{1,1}$ , the estimate (C.27) holds under assumption (C.26) and provided we restrict to the functions  $u$  which satisfy  $u|_{\Gamma_0} = 0$  and  $\partial_n u|_{\Gamma_0} = 0$ .

Proof: by classical imbeddings for Sobolev Spaces (see for example [AF75], p. 108), we have that for  $N = 2$ ,  $H^2(\Omega) \rightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ , for all  $\alpha \in [0, 1[$ , and for  $N = 3$ ,  $H^2(\Omega) \rightarrow C^{0,1/2}(\overline{\Omega})$ .

Then the proof is very similar to the proof of theorem C.1. For all  $\kappa < \kappa_0(\theta)$  in the case  $N = 2$  (resp. for all  $\kappa < \kappa_0(\theta)/2$  in the case  $N = 3$ ), there exists  $c > 0$  such that for sufficiently small  $\varepsilon$ , for all  $u \in H^2(\Omega)$ ,

$$\|u\|_{C^0(\partial\Omega)} \leq e^{c/\varepsilon} (\|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\omega_1)}) + \varepsilon^\kappa \|u\|_{H^2(\Omega)},$$

and then by using propositions C.2 and C.3,

$$\|u\|_{C^0(\partial\Omega)} \leq e^{c/\varepsilon} (\|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Gamma_0)} + \|\partial_n u\|_{L^2(\Gamma_0)}) + \varepsilon^\kappa \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

Then assumption (C.26) implies

$$\|u\|_{C^0(\partial\Omega)} \leq e^{c/\varepsilon} \delta + \varepsilon^\kappa M.$$

By using the same  $\varepsilon$  optimization procedure as in corollary 1 of [Bou08], we obtain that there exists  $C > 0$  such that for sufficiently small  $\delta$ ,

$$\|u\|_{C^0(\partial\Omega)} \leq C \frac{M}{(\log(M/\delta))^\kappa}.$$

Combining (C.22) and (C.23), we obtain

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C (\|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\partial\Omega)}^{1/2} \|u\|_{H^1(\partial\Omega)}^{1/2}).$$

By using a classical trace inequality, we obtain

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C (\|Pu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\partial\Omega)}^{1/2} \|u\|_{H^2(\Omega)}^{1/2}),$$

which completes the proof . ■

## C.4 Application to the method of quasi-reversibility

In this section, we use the stability estimates obtained in previous section to derive a convergence rate for the quasi-reversibility method, and therefore to complete the results already obtained in [Bou08, KT04]. The method of quasi-reversibility, first introduced in [LL67], enables one to regularize the ill-posed elliptic Cauchy problems.

Specifically, we consider a bounded and connected open domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  with Lipschitz boundary and an open part  $\Gamma_0$ . Now we assume that  $u \in H^2(\Omega)$  solves the ill-posed Cauchy problem with data  $(g_0, g_1) \in H^1(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0)$  :

$$\begin{cases} Pu = 0 & \text{in } \Omega \\ u|_{\Gamma_0} = g_0 \\ \partial_n u|_{\Gamma_0} = g_1. \end{cases} \quad (\text{C.28})$$

In order to solve the Cauchy problem with these uncorrupted data  $(g_0, g_1)$ , for  $\alpha > 0$  we consider the formulation of quasi-reversibility, written in the following weak form : find  $u_\alpha \in H^2(\Omega)$  such that  $\forall v \in H^2(\Omega)$ ,  $v|_{\Gamma_0} = \partial_n v|_{\Gamma_0} = 0$ ,

$$\begin{cases} (Pu_\alpha, Pv)_{L^2(\Omega)} + \alpha(u_\alpha, v)_{H^2(\Omega)} = 0 \\ u_\alpha|_{\Gamma_0} = g_0 \\ \partial_n u_\alpha|_{\Gamma_0} = g_1. \end{cases} \quad (\text{C.29})$$

Using Lax-Milgram theorem and introducing the solution  $u$  to the system (C.28), we easily prove that formulation (C.29) is well-posed. On the other hand, it follows from (C.28) and (C.29) that there exist constants  $C_1, C_2 > 0$  such that

$$\|u_\alpha - u\|_{H^2(\Omega)} \leq C_1, \quad \|P(u_\alpha - u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \sqrt{\alpha}. \quad (\text{C.30})$$

Using (C.30) and theorem C.2 in the case 2 for function  $u_\alpha - u \in H^2(\Omega)$ , we obtain the following convergence rate : there exists  $C > 0$  for all  $\kappa \in ]0, \kappa_0(\theta)/2[$  (resp.  $\kappa \in ]0, \kappa_0(\theta)/4[$ ) for  $N = 2$  (resp. for  $N = 3$ ), such that for sufficiently small  $\alpha > 0$ ,

$$\|u_\alpha - u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{1}{(\log(1/\alpha))^\kappa}. \quad (\text{C.31})$$

Note that if additionally we assume that  $u_\alpha - u \in H^3(\Omega)$  and

$$\|u_\alpha - u\|_{H^3(\Omega)} \leq C_1, \quad (\text{C.32})$$

with the help of the imbeddings  $H^3(\Omega) \rightarrow C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$  for all  $\lambda \in [0, 1[$  and  $H^3(\Omega) \rightarrow C^{1,1/2}(\overline{\Omega})$ , the estimate (C.31) holds for all  $\kappa \in ]0, \kappa_0(\theta)[$  (resp.  $\kappa \in ]0, 3\kappa_0(\theta)/4[$ ) for  $N = 2$  (resp. for  $N = 3$ ).

In order to test the optimality of (C.31), we introduce a discretized weak formulation of quasi-reversibility, which is associated to the continuous weak formulation (C.29). In this view, we consider the particular case  $N = 2$ ,  $P = -\Delta$ , and  $\Omega$  is a polygonal domain. We use the so-called Fraeijs de Veubeke's finite element (F.V.1), introduced in [Fra74] and analyzed in [LL75]. This nonconforming finite element, initially designed to solve plate bending problems, can be also used to solve the quasi-reversibility formulation (C.29). In the present paper, we briefly describe such element, but a comprehensive analysis of the discretized formulation is postponed in [BD10a].

We consider a regular triangulation  $\mathcal{T}_h$  of  $\overline{\Omega}$  (see [Cia78] for definition) such that the diameter of each triangle  $K \in \mathcal{T}_h$  is bounded by  $h$ . The set  $\overline{\Gamma}_0$  consists of the union of the edges of some triangles  $K \in \mathcal{T}_h$ , and the complementary part of the boundary  $\partial\Omega$  is denoted  $\Gamma_1$ . We denote  $W_h$ , the set of functions  $w_h \in L^2(\Omega)$  such that for all  $K \in \mathcal{T}_h$ ,  $w_h|_K$  belongs to the space of shape functions  $P_K$  in  $K$  (see [LL75] for definition of  $P_K$ ), and such that the degrees of freedom coincide, that is : the values of the function at the vertices, the values at the mid-points of the edges of the element, and the mean values of the normal derivative along each edge.

Then, we define  $V_{h,0}$  as the subset of functions of  $W_h$  for which the degrees of freedom on the edges contained in  $\overline{\Gamma}_0$  vanish, and  $V_h$  as the subset of functions of  $W_h$  for which the degrees of freedom on the edges contained in  $\overline{\Gamma}_0$  coincide with the corresponding values obtained with data  $g_0$  and  $g_1$ . For  $\alpha > 0$ , we consider the discretized formulation of quasi-reversibility, written in the following weak form : find  $u_{h,\alpha} \in V_h$ , such that for all  $w_h \in V_{h,0}$ ,

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ (\Delta u_{h,\alpha}, \Delta w_h)_{L^2(K)} + \alpha (u_{h,\alpha}, w_h)_{H^2(K)} \right\} = 0. \quad (\text{C.33})$$

To analyze convergence when  $h$  tends to 0, we introduce the norms  $\|\cdot\|_{2,h}$  and  $\|\cdot\|_{1,h}$ , which are defined, for  $w_h \in W_h$ , by

$$\|w_h\|_{2,h}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|w_h\|_{H^2(K)}^2, \quad \|w_h\|_{1,h}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|w_h\|_{H^1(K)}^2.$$

By adapting to our case the arguments used in [BMR04] with the Morley's finite element for the plate bending problem, we prove that provided  $u_\alpha$  is smooth enough, then for fixed  $\alpha$ ,  $\|u_{h,\alpha} - \pi_h u_\alpha\|_{2,h} \rightarrow 0$  like  $h$  when  $h \rightarrow 0$ , where  $\pi_h u_\alpha$  is the interpolate of  $u_\alpha$  in  $W_h$ . By using the estimate (C.31), we conclude that for small fixed  $h$ , we have the approximate convergence rate in  $\alpha$  :

$$\|u_{h,\alpha} - \pi_h u\|_{1,h} \lesssim C \frac{1}{(\log(1/\alpha))^\kappa}. \quad (\text{C.34})$$

This is the reason why we hope to capture the logarithmic exponent  $\kappa$  by using a refined mesh. In our numerical experiments, we solve the problem (C.33) with data  $g_0 = u|_{\Gamma_0}$  and  $g_1 = \partial_n u|_{\Gamma_0}$  for different harmonic functions  $u$  defined by  $u_m = \text{Re}(z^m)$ , with  $z = x + iy$  and  $m = 1, 2, \dots$

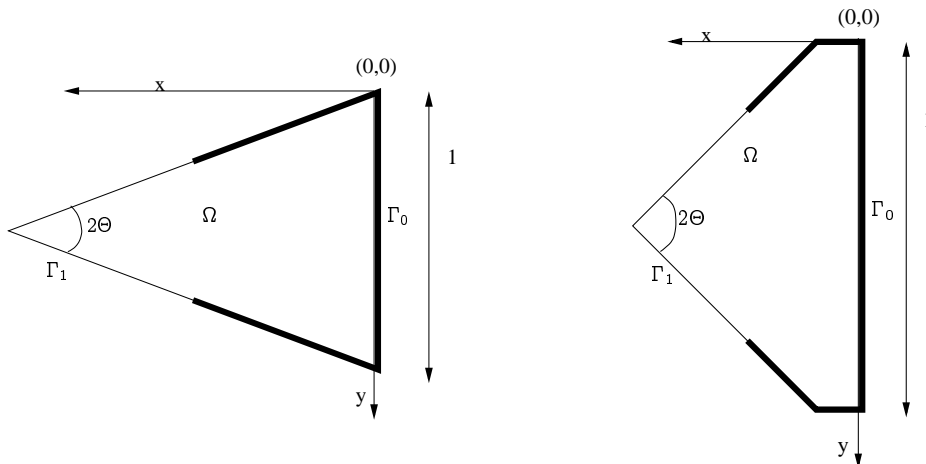


Figure C.3: Domains  $\Omega$  under consideration

For increasing values of  $m$ , the corresponding function  $u_m$  is more and more oscillating, which is likely to deteriorate the convergence rate in  $\alpha$  for fixed  $h$ . We stop increasing  $m$  as soon as  $\|u_{h,\alpha} - \pi_h u\|_{1,h}$  becomes bigger than  $0.1\|\pi_h u\|_{1,h}$ , that is when  $h$  is not sufficiently small to enable the regularization process in  $\alpha$ . In order to test different angles  $\theta$ ,  $\Omega$  is either a triangle of smaller angle  $2\theta = \pi/8$ ,  $2\theta = \pi/5$ ,  $2\theta = \pi/3$ , or a pentagon of smaller angle  $2\theta = \pi/2$  (see figure C.3). The set  $\overline{\Gamma_0}$  covers 60% of the total boundary  $\partial\Omega$  in all cases. The size of the mesh  $h$  is fixed to  $1/150$ , which has to be compared to the edge of length 1 such as indicated on figure C.3. The figure C.4 represents the function  $\pi_h u$  for  $u = \mathcal{R}e(z^3)$  in the case  $2\theta = \pi/3$ , as well as the function  $u_{h,\alpha} - \pi_h u$ , where  $u_{h,\alpha}$  is the solution of (C.33) for  $\alpha = 10^{-2}$ ,  $\alpha = 10^{-4}$  and  $\alpha = 10^{-6}$ . In order to capture the dependence of  $\|u_{h,\alpha} - \pi_h u\|_{1,h}$  on  $\alpha$  given by (C.34), we plot

$$\log(\|u_{h,\alpha} - \pi_h u\|_{1,h}) = F(\log(\log(1/\alpha)))$$

for functions  $u = u_m$  which correspond to increasing values of  $m$ . The first important result is that the graph of the function  $F$  we obtain is actually a line of negative slope, which is an experimental confirmation of the logarithmic stability we have established. Furthermore, we remark that this slope is decreasing with  $m$ , as predicted above. The figure C.5 clearly illustrates this fact, in the case  $2\theta = \pi/3$ , for  $m = 2, 3, 5$ . The second and main important result is the way the slope depends on the smaller angle  $2\theta$  of the polygon. As can be seen on figure C.6, the slope of  $F$  is increasing as a function of  $\theta$  for fixed  $m$ , as predicted by (C.6). More precisely, we observe that for increasing values of  $m$ , the slope tends asymptotically to some value which is approximately the value  $\kappa_0(\theta)$  given by (C.6), in particular for small values of  $\theta$ . Hence, it turns out that our estimate (C.31) for any  $\kappa < \kappa_0(\theta)$  (with the additional regularity assumption (C.32)), which is not proved to be optimal, seems not far away from optimality.

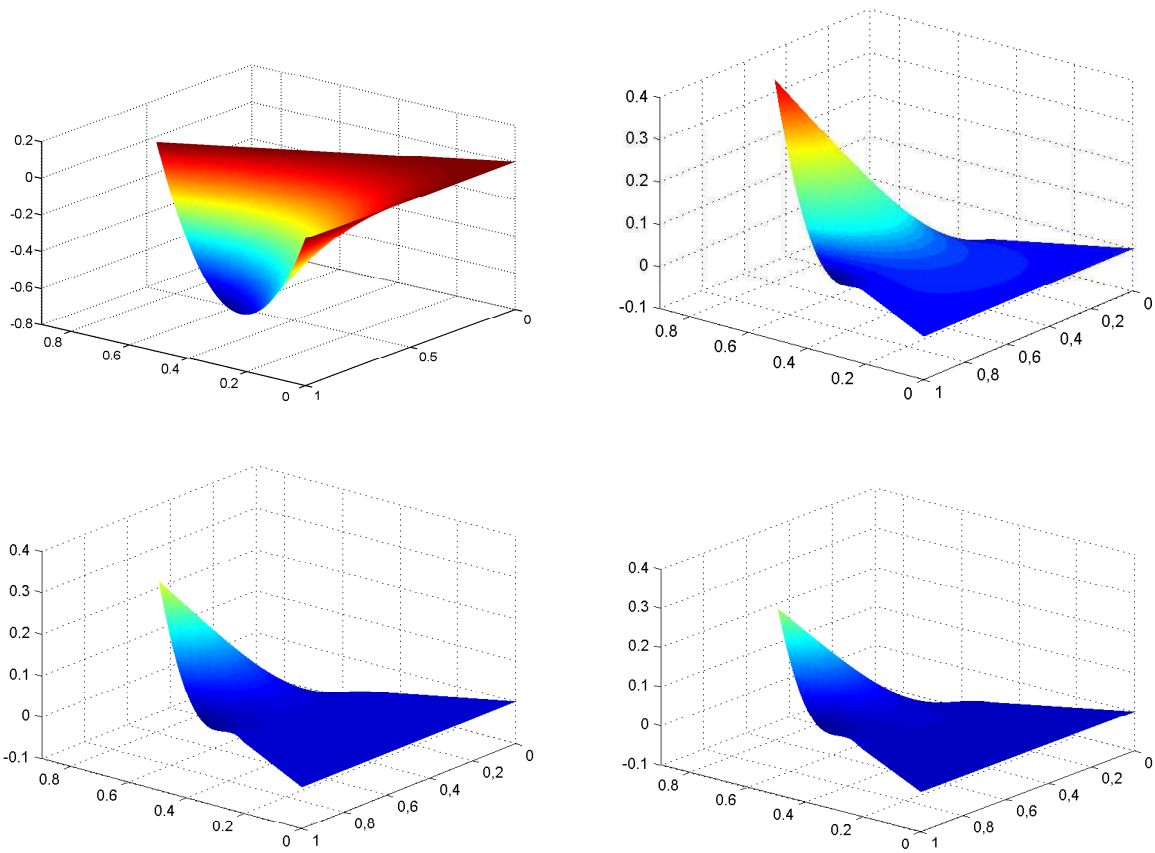


Figure C.4: Exact solution  $\mathcal{R}e(z^3)$  for angle  $2\theta = \pi/3$ , discrepancy between the retrieved and the exact solution for  $\alpha = 10^{-2}$ ,  $\alpha = 10^{-4}$  and  $\alpha = 10^{-6}$

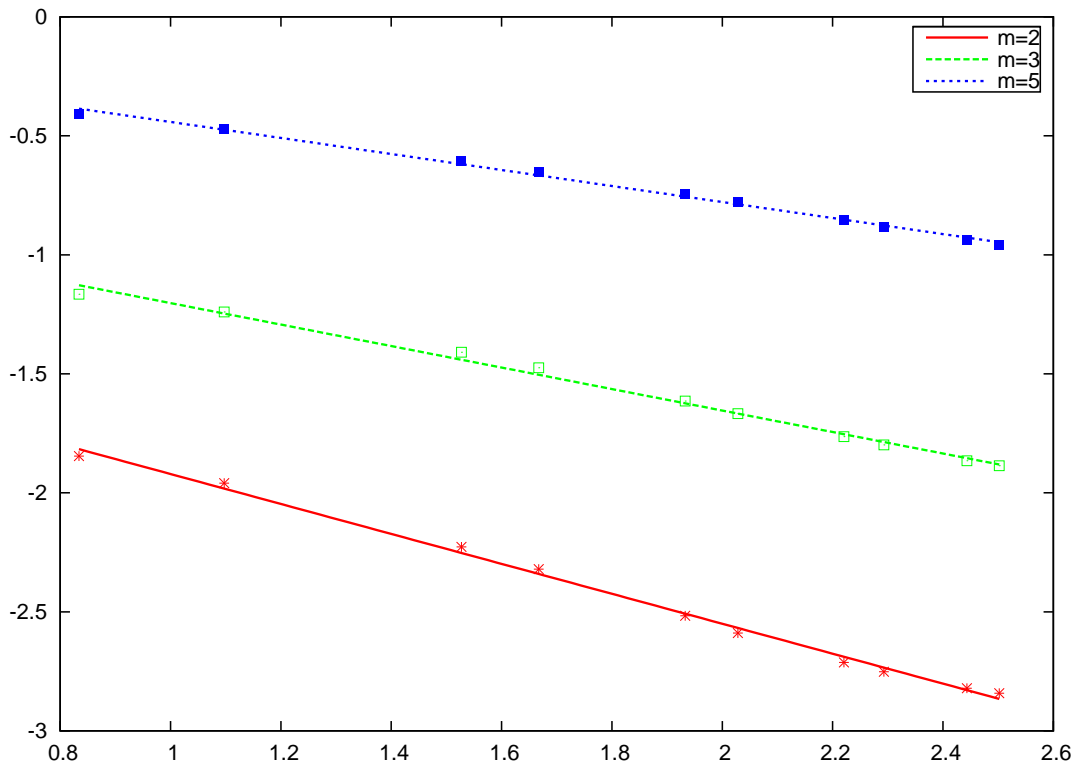


Figure C.5: Function  $F$  for  $2\theta = \pi/3$  and  $m = 2, 3, 5$

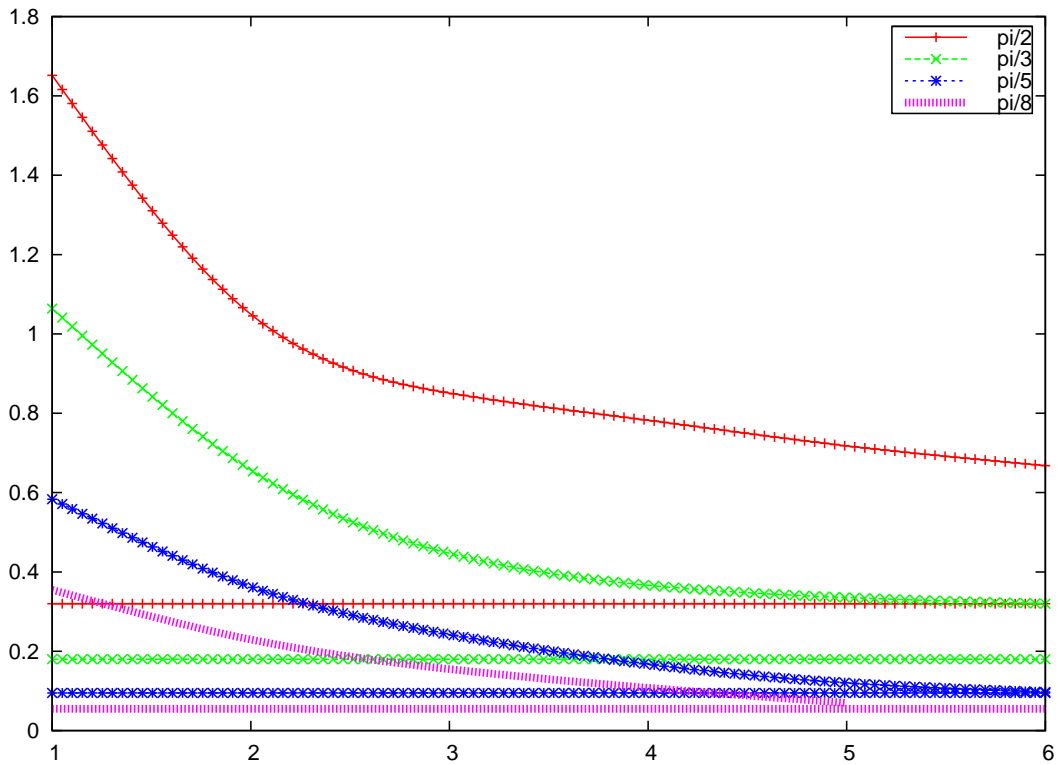


Figure C.6: Slope of the linear function  $F$  as a function of  $m$ , for  $2\theta = \pi/8, \pi/5, \pi/3, \pi/2$ , compared to the theoretical slope  $\kappa_0(\theta)$





# Bibliographie

- [ABF06] M. Azaiez, F. Ben Belgacem, and H. El Fekih. On Cauchy's problem : II. Completion, regularization and approximation. Inverse Problems, 22 :1307, 2006.
- [ABH04] H. Ben Ameer, M. Burger, and B. Hackl. Level set methods for geometric inverse problems in linear elasticity. Inverse Problems, 20 :673, 2004.
- [ABRV00] G. Alessandrini, E. Beretta, E. Rosset, and S. Vessella. Optimal stability for inverse elliptic boundary value problems with unknown boundaries. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 29(4) :755–806, 2000.
- [ACM10] L. Ambrosio, A. Carlotto, and A. Massaccesi. Lecture notes on partial differential equations, 2010.
- [ADJT05] G. Allaire, F. De Gournay, F. Jouve, and A. Toader. Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method. Control and cybernetics, 34(1) :59, 2005.
- [AF75] R.A. Adams and J.J.F. Fournier. Sobolev spaces. Academic press New York, 1975.
- [AHBM06] O. Alvarez, P. Hoch, Y. Le Bouar, and R. Monneau. Dislocation dynamics : short-time existence and uniqueness of the solution. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 181(3) :449–504, 2006.
- [AS72] M. Abramovitz and I.A. Stegun. Handbook of mathematical functions. Dover, New York, 1972.
- [Bar94] G. Barles. Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi. Springer Paris, 1994.
- [BC05] M. Bonnet and A. Constantinescu. Inverse problems in elasticity. Inverse problems, 21 :R1, 2005.
- [BD08] L. Bourgeois and J. Dardé. Conditional stability for ill-posed elliptic cauchy problems : the case of lipschitz domains (part *ii*). Rapport INRIA, 6588, 2008.
- [BD10a] L. Bourgeois and J. Dardé. A quasi-reversibility approach to solve the inverse obstacle problem. Inverse Problems and Imaging, 4(3) :351–377, 2010.
- [BD10b] L. Bourgeois and J. Dardé. About stability and regularization off ill-posed elliptic cauchy problems : the case of lipschitz domains. Applicable Analysis, ifirst, 2010.
- [BDM00] C. Bernardi, M. Dauge, and Y. Maday. Compatibilité de traces aux arêtes et coins d'un polyèdre. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences-Serie I-Mathematique, 331(9) :679–684, 2000.
- [BF05] F. Ben Belgacem and H. El Fekih. On Cauchy's problem : I. A variational Steklov-Poincaré theory. Inverse Problems, 21 :1915, 2005.
- [Blu89] J. Blum. Numerical simulation and optimal control in plasma physics : with applications to Tokamaks. Gauthier-Villars, 1989.
- [BMR04] C. Bernardi, Y. Maday, and F. Rapetti. Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques. Springer-Verlag Berlin, 2004.

- [Bon08] M. Bonnet. Inverse acoustic scattering by small-obstacle expansion of a misfit function. Inverse Problems, 24 :035022, 2008.
- [Bou98] L. Bourgeois. Contrôle optimal et problèmes inverses en plasticité. PhD thesis, École Polytechnique, March 1998.
- [Bou05] L. Bourgeois. A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the cauchy problem for laplace's equation. Inverse Problems, 21(3) :1087–1104, 2005.
- [Bou06] L. Bourgeois. Convergence rates for the quasi-reversibility method to solve the cauchy problem for laplace's equation. Inverse Problems, 22(2) :413–430, 2006.
- [Bou07] L. Bourgeois. A stability estimate for ill-posed elliptic cauchy problems in a domain with corners. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 345 :385–390, 2007.
- [Bou08] L. Bourgeois. Conditional stability for ill-posed elliptic cauchy problems : the case of  $c^{1,1}$  domains (part *i*). Rapport INRIA, 6585, 2008.
- [Bou10] L. Bourgeois. About stability and regularization of ill-posed elliptic cauchy problems : the case of  $c^{1,1}$  domains. M2AN, 44-4 :715–735, 2010.
- [Bre05] H. Brezis. Analyse fonctionnelle : théorie et applications (retirage 2005). Dunod, 2005.
- [Buk93] A. L. Bukhgeim. Extension of solutions of elliptic equations from discrete sets. J. Inv. Ill-Posed Problems, 1(1) :17–32, 1993.
- [Bur04] M. Burger. Levenberg–Marquardt level set methods for inverse obstacle problems. Inverse problems, 20 :259, 2004.
- [Car38] T. Carleman. Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. Arkiv for matematik, astronomi och fysik, 26, 1938.
- [CC06] F. Cakoni and D.L. Colton. Qualitative methods in inverse scattering theory : An introduction. Springer Verlag, 2006.
- [CDJP01] A. Cimetiere, F. Delvare, M. Jaoua, and F. Pons. Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization. Inverse Problems, 17 :553, 2001.
- [CEL84] M.G. Crandall, L.C. Evans, and P.L. Lions. Some properties of viscosity solutions of hamilton-jacobi equations. Transactions of the American Mathematical Society, 282(2) :487–502, 1984.
- [CGGM00] J. Céa, S. Garreau, P. Guillaume, and M. Masmoudi. The shape and topological optimizations connection. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 188(4) :713–726, 2000.
- [Cha97] S.J. Chatterji. Cours d'analyse Tome 1 : Analyse vectorielle. 1997.
- [Cho09] M. Choulli. Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques. Springer Verlag, 2009.
- [CHT62] R. Courant, D. Hilbert, and T. Teichmann. Methods of mathematical physics, volume 15. 1962.
- [Cia78] P.G. Ciarlet. The finite element method for elliptic problems. North-Holland, 1978.
- [CK96] D. Colton and A. Kirsch. A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region. Inverse problems, 12 :383, 1996.
- [CK98] D.L. Colton and R. Kress. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. Springer Verlag, 1998.
- [CK07] C. Clason and M. Klibanov. The quasi-reversibility method for thermoacoustic tomography in a heterogeneous medium. SIAM J. Sci. Comput, 30(1) :1–23, 2007.

- [CKP09] H. Cao, M.V. Klibanov, and S.V. Pereverzev. A carleman estimate and the balancing principle in the quasi-reversibility method for solving the cauchy problem for the laplace equation. Inverse Problems, 25, 2009.
- [CL83] M.G. Crandall and P.L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. Transactions of the American Mathematical Society, 277(1) :1–42, 1983.
- [CL84] M.G. Crandall and P.L. Lions. Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations. Mathematics of Computation, 43(167) :1–19, 1984.
- [CL09] P. Ciarlet and É. Lunéville. La méthode des éléments finis, de la théorie à la pratique. Les Presses de l'ENSTA, 2009.
- [DZ94] M.C. Delfour and J.P. Zolésio. Shape analysis via oriented distance functions. Journal of Functional Analysis, 123(1) :129–201, 1994.
- [DZ01] M. C. Delfour and J.P. Zolésio. Shapes and geometries. SIAM, 2001.
- [EG94] H.W. Engl and W. Grever. Using the L-curve for determining optimal regularization parameters. Numerische Mathematik, 69(1) :25–31, 1994.
- [EHN96] H.W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer. Regularization of inverse problems. Springer Netherlands, 1996.
- [FABB10] B. Faugeras, A. Ben Abda, J. Blum, and C. Boulbe. Minimization of a constitutive law error functional to solve a Cauchy problem arising in plasma physics : the reconstruction of the magnetic flux in the vacuum surrounding the plasma in a Tokamak. Arxiv preprint arXiv :1005.1588, 2010.
- [FI96] A. Fursikov and O. Imanuvilov. Controllability of Evolution Equations, Lecture Notes series 34, Research Institute of Mathematics. Seoul National University, 1996.
- [FL96] C. Fabre and G. Lebeau. Prolongement unique des solutions de l'équation de stokes. Communication in Partial Differential Equations, 21 :573–596, 1996.
- [Fra74] B. Fraeijs De Veubeke. Variational principles and the patch test. Internat. J. Numer. Methods Engrg., 8 :783–801, 1974.
- [Gon98] M. Gonnord. L'essentiel du cours de maths en prépa : de la MPSI à la MP MP\*. Ellipses, 1998.
- [GR86] V. Girault and P.A. Raviart. Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. 1986. 1986.
- [Gri85] P. Grisvard. Elliptic problems in nonsmooth domains, volume 24. 1985.
- [Gri92] P. Grisvard. Singularities in boundary value problems. Masson, 1992.
- [GT01] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. Elliptic partial differential equations of second order. Springer Verlag, 2001.
- [Had02] J. Hadamard. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. Princeton University Bulletin, 13(49-52) :4, 1902.
- [Hei05] J. Heinonen. Lectures on Lipschitz analysis. Citeseer, 2005.
- [HI04] T. Hrycak and V. Isakov. Increased stability in the continuation of solutions to the helmholtz equation. Inverse problems, 20 :697–712, 2004.
- [HK05] H. Haddar and R. Kress. Conformal mappings and inverse boundary value problems. Inverse Problems, 21 :935, 2005.
- [Hor76] L. Hormander. Linear Partial Differential Operators, Fourth Printing. Springer-Verlag, 1976.
- [HP05] A. Henrot and M. Pierre. Variation et optimisation de formes. Springer, 2005.

- [Isa98] V. Isakov. Inverse problems for partial differential equations. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [Joh60] F. John. Continuous dependence on data for solutions of pde with a prescribed bound. Communications on pure and applied mathematics, 13 :551–585, 1960.
- [Joh76] C. Johnson. Existence theorems for plasticity problems. J. Math. Pures Appl., IX. Sér., 55 :431–444, 1976.
- [Joh78] C. Johnson. On plasticity with hardening. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 62(2) :325–336, 1978.
- [Kav] O. Kavian. Lectures on parameter identification. Three Courses on Partial Differential Equations, page 125.
- [Kir34] M.D. Kirszbraun. Über die zusammenziehenden und Lipschitzschen Transformationen. Fund. Math, 22 :77–108, 1934.
- [Kli06] M.V. Klibanov. Estimates of initial conditions of parabolic equations and inequalities via lateral data. Inverse problems, 22 :495–514, 2006.
- [KT04] M.V. Klibanov and A.A. Timonov. Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications. VSP, 2004.
- [KV85] R.V. Kohn and M. Vogelius. Determining conductivity by boundary measurements II. Interior results. Communications on Pure and Applied Mathematics, 38(5) :643–667, 1985.
- [Ley01] O. Ley. Lower-bound gradient estimates for first-order hamilton-jacobi equations and applications to the regularity of propagating fronts. Advances in Differential Equations, 6(5) :547–576, 2001.
- [Lie85] G. Lieberman. Regularized distance and its applications. Pacific Journal of Mathematics, 117(2) :329–352, 1985.
- [Lio68] J.L. Lions. Contrôle optimal de systemes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod Paris, 1968.
- [LL67] J.L. Lions and R. Lattès. Méthode de Quasi-réversibilité et Applications. Dunod, 1967.
- [LL75] P. Lascaux and P. Lesaint. Some nonconforming finite elements for the plate bending problem. RAIRO Anal numer, 9(1) :9–53, 1975.
- [LL83] P. Ladeveze and D. Leguillon. Error estimate procedure in the finite element method and applications. SIAM Journal on Numerical Analysis, 20(3) :485–509, 1983.
- [LL09] J. Le Rousseau and G. Lebeau. Introduction aux inégalités de Carleman pour les opérateurs elliptiques et paraboliques. Applications au prolongement unique et au contrôle des équations paraboliques. 2009.
- [LLS98] A. Litman, D. Lesselier, and F. Santosa. Reconstruction of a two-dimensional binary obstacle by controlled evolution of a level-set. Inverse Problems, 14 :685, 1998.
- [LM68] J.L. Lions and E. Magenes. Problèmes aux limites non homogènes et applications, volume 1. Dunod, 1968.
- [Löb07] D. Löblich. On Regularity for plasticity with hardening. SFB 611, 2007.
- [Loh99] S. Lohrengel. Etude mathématique et résolution numérique des équations de maxwell dans un domaine non régulier. Technical report, ENSTA, 1999.
- [LR95] G. Lebeau and L. Robbiano. Contrôle exact de l'équation de la chaleur. Communication in Partial Differential Equations, 20 :335–356, 1995.

- [LRS86] M. Lavrentiev, V. Romanov, and S. Shishatski. Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. American Mathematical Society, New-York, 1986.
- [MGB<sup>+</sup>04] F. Mittelbach, M. Goossens, J. Braams, D. Carlisle, C. Rowley, C. Detig, J. Schrod, and M. Downes. The L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X companion. Addison-Wesley, 2004.
- [NB00] A. Niclas and L. Bourgeois. An inverse approach to determine the non-linear properties of induction heat-treated steels. European Journal of Mechanics-A/Solids, 19(1) :69–88, 2000.
- [ND67] J. Nečas and J. Dhombres. Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Academia, 1967.
- [NW99] J. Nocedal and S.J. Wright. Numerical optimization. Springer verlag, 1999.
- [OF03] S. Osher and R.P. Fedkiw. Level set methods and dynamic implicit surfaces. Springer Verlag, 2003.
- [OP03] S. Osher and N. Paragios. Geometric level set methods in imaging, vision, and graphics. Springer-Verlag New York Inc, 2003.
- [OS88] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. Journal of computational physics, 79(1) :12–49, 1988.
- [Pay70] L. E. Payne. On a priori bounds in the cauchy problem for elliptic equations. SIAM J. Math. Anal., 1 :82–89, 1970.
- [Phu03] K.-D. Phung. Remarques sur l’observabilité pour l’équation de laplace. ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, 9 :621–635, 2003.
- [PL96] O. Pironneau and B. Lucquin. Introduction au calcul scientifique. Editions Masson, 1996.
- [Rob91] L. Robbiano. Théorème d’unicité adapté au contrôle des solutions des problèmes hyperboliques. Communication in Partial Differential Equations, 16 :789–800, 1991.
- [San96] F. Santosa. A level-set approach for inverse problems involving obstacles. ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, 1 :17–33, 1996.
- [Sch91] L. Schwartz. Analyse I : Théorie des ensembles et topologie. Hermann Paris, 1991.
- [SI07] D. Aralumallige Subbarayappa and V. Isakov. On increased stability in the continuation of the helmholtz equation. Inverse problems, 23 :1689–1697, 2007.
- [Sin05] E. Sincich. Stability and reconstruction for the determination of boundary terms by a single measurement, Thesis. SISSA/ISAS, Trieste, Italy, 2005.
- [Son77] N.Q. Son. On the elastic plastic initial-boundary value problem and its numerical integration. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 11(5) :817–832, 1977.
- [Str71] A.H. Stroud. Approximate calculation of multiple integrals. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1971.
- [Suq81] P. Suquet. Sur les équations de la plasticité : existence et régularité des solutions. J. Mécanique, 20(1) :3–39, 1981.
- [SZ92] J. Sokolowski and J.P. Zolesio. Introduction to shape optimization. Springer-Verlag Berlin/New York, 1992.
- [TE74] R. Temam and I. Ekeland. Analyse convexe et problèmes variationnels. Dunod, 1974.
- [TY08] T. Takeuchi and M. Yamamoto. Tikhonov regularization by a reproducing kernel hilbert space for the cauchy problem for a elliptic equation. SIAM J. Sci. Comput., 31(1) :112–142, 2008.



## MÉTHODES DE QUASI-RÉVERSIBILITÉ ET DE LIGNES DE NIVEAU APPLIQUÉES AUX PROBLÈMES INVERSES ELLIPTIQUES

**RÉSUMÉ :** ce travail s'intéresse à l'utilisation de la méthode de quasi-réversibilité pour la résolution de problèmes inverses, un exemple typique étant le problème inverse de l'obstacle. Nous proposons pour ce dernier une nouvelle approche couplant la méthode de quasi-réversibilité et une méthode de lignes de niveau. Plus précisément, à partir d'un ouvert candidat  $\omega$ , nous résolvons un problème de Cauchy à l'extérieur de  $\omega$ , puis nous mettons à jour cet ouvert par la méthode de lignes de niveau.

La solution approchée du problème de Cauchy est obtenue en utilisant la méthode de quasi-réversibilité, introduite par J.L. Lions et R. Lattès dans les années soixante. Nous proposons différentes formulations de cette méthode, ainsi que sa discrétisation par éléments finis non conformes adaptés à l'espace de Sobolev  $H^2$ , et nous prouvons la convergence des éléments finis. En présence d'une donnée bruitée, nous introduisons une nouvelle méthode basée sur la dualité en optimisation et le principe de Morozov. Nous montrons que cette méthode fournit des données régularisées et un choix de paramètre de régularisation pertinent pour la quasi-réversibilité.

En ce qui concerne la mise à jour de l'ouvert  $\omega$ , nous proposons deux méthodes de lignes de niveau très différentes : la première est basée sur une équation eikonale, la seconde sur une équation de Poisson. Nous prouvons que ces deux approches assurent la convergence vers l'obstacle.

Finalement, nous présentons des résultats numériques pour cette approche couplant quasi-réversibilité/lignes de niveau dans différentes situations : problème inverse de l'obstacle avec condition de Dirichlet, détection de défauts dans une structure élasto-plastique...

**MOTS CLÉS :** problème de Cauchy elliptique, problème inverse de l'obstacle, méthode de quasi-réversibilité, méthode de lignes de niveau.

---

## QUASI-REVERSIBILITY AND LEVEL SET METHODS APPLIED TO ELLIPTIC INVERSE PROBLEMS

**ABSTRACT:** this work considers the quasi-reversibility method for solving some inverse problems, a typical example being the inverse obstacle problem. We propose for the latter a new approach that couples the quasi-reversibility method and a level set method. More precisely, from a candidate open domain  $\omega$ , we solve a Cauchy problem outside  $\omega$ , and then update  $\omega$  using the level set method.

The approximated solution of the Cauchy problem is obtained by using the quasi-reversibility method introduced by J.L. Lions and R. Lattès in the sixties. We propose different formulations of this method, as well as its discretization by nonconforming finite elements adapted to the framework of Sobolev space  $H^2$ , and we prove the convergence of the finite elements. In the presence of noisy data, we introduce a new method based on duality in optimization and the Morozov's discrepancy principle. We establish a relationship between this method and the quasi-reversibility; in particular, we show that it provides regularized data and a relevant regularization parameter that increase the efficiency of quasi-reversibility.

Regarding the update of the open domain  $\omega$ , we propose two very different level set approaches: one is based on an eikonal equation, the other on a Poisson equation. We prove that this two approaches guarantee convergence to the obstacle.

Finally, we present numerical results for this coupled quasi-reversibility/level set approach in different situations: inverse obstacle problem with Dirichlet condition, detection of some defects in an elastoplastic structure...

**KEYWORDS:** elliptic Cauchy problem, inverse obstacle problem, quasi-reversibility method, level set method.